

ประมวลสาระรายวิชา

103113

คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สายันต์ แก่นนาคำ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
(พิมพ์ครั้งที่ 7 จำนวน 1,000 เล่ม)

คำนำ

(พิมพ์และปรับปรุง ครั้งที่ ๕)

วิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันเป็นวิชาหนึ่งในหมวดวิชาศึกษาทั่วไปโดยวัตถุประสงค์ของวิชา เพื่อให้ให้นักศึกษามีความรอบรู้ความเข้าใจและมีความสามารถในการประยุกต์หลักการและแนวคิดทางคณิตศาสตร์สำหรับการทำความเข้าใจปัญหาพื้นฐานในชีวิตประจำวันและแก้ปัญหาได้และที่สำคัญที่สุดคือสามารถสร้างกระบวนการคิดด้วยเหตุและผลทางหลักการคณิตศาสตร์ได้

สำหรับการปรับปรุงเนื้อหาครั้งที่ 5 นี้ เอกสาร ยังคงรักษาลักษณะเดิมไว้ นั่นคือ การมีพื้นที่ให้ผู้เรียนได้ใช้สำหรับทบทวน คิดคำนวณ หรือจดบันทึกได้ภายในเล่ม เพื่อสะดวกต่อการพกพาและอ่านประกอบนอกห้องเรียน

ทางผู้เรียบเรียงขอขอบคุณคณาจารย์ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ได้แก่ ผศ.ดร.ธิดารัตน์อารีรักษ์ และ ผศ.ดร.เบญจวรรณโรจนดิษฐ์ สำหรับความช่วยเหลือในกระบวนการเรียบเรียงต้นฉบับในครั้งแรก ซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษาในการใช้เป็นแนวทางในการศึกษาและการค้นคว้าเพิ่มเติม

ขอขอบคุณคณะนักศึกษารุ่นพี่และคณะผู้ช่วยสอน ที่เอื้อเฟื้อด้านข้อมูล โจทย์ และจัดพิมพ์เพิ่มเติมทำให้เอกสารชุดล่าสุดนี้มีตัวอย่างและโจทย์ปัญหาที่มากขึ้นกว่าเดิม อันจะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษารุ่นน้องต่อไป

เอกสารประกอบการสอนนี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนางานวิชาการซึ่งเป็นประโยชน์โดยตรงต่อนักศึกษา จึงต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องมีการเพิ่มเติมตัวอย่างและโจทย์ปัญหาเพื่อให้ทันสมัยและได้งานวิชาการที่มีคุณค่าในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันสำหรับนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีทุกคน

อนึ่ง ผู้เรียบเรียงขอภัยในทุกข้อผิดพลาดที่อาจจะยังมีปรากฏภายในเล่ม มา ณ โอกาสนี้ด้วย

สายันต์ แก่นนาคำ

๓๐ มิถุนายน ๒๕๕๘



สารบัญ

บทที่ 1 ทบทวน (Reviews).....	10
1.1 ระบบจำนวนและจำนวนจริง(Real Numbers)	10
1.2 ห.ร.ม.(G.C.F) และ ค.ร.น.(L.C.M.)	13
1.3 เลขฐาน (Number Systems).....	18
1.4 เซต(Sets).....	22
1.5 ช่วง (Intervals)	27
1.6 อสมการ(Inequalities) และการหาช่วงของผลเฉลย(Solutions Finding)	29
1.7 สมการ(Equations) และการหาผลเฉลย(Solution Finding).....	32
1.8 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)	40
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมทำบท(Additional Exercise).....	44
แบบเฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers)	49
บทที่ 2 เมทริกซ์ (Matrices).....	54
2.1 เมทริกซ์และพีชคณิตเบื้องต้นบนเมทริกซ์(Algebra on Matrices)	54
2.2 ตัวกำหนด (Determinant)	64
2.3 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)	68
2.4 การใช้เมทริกซ์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น(Solving Linear Systems with Matrices)	78
2.5 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)	90
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมทำบท (Additional Exercises).....	101
เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers).....	108
บทที่ 3 เกี่ยวกับความสัมพันธ์(Relations) และฟังก์ชันเบื้องต้น (Functions)	115
3.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชันขั้นต้นแนะนำ(Introduction to Relations and Functions).....	115
3.2 พีชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน(Algebra on Functions).....	124
3.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง(Exponential Functions)	128
3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม(Logarithmic Functions).....	137
3.5 ฟังก์ชันพหุนาม(Polynomial Functions).....	144

3.6 สมการพหุนาม และการหาราก (Solving Polynomial Equations)	146
3.7 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)	154
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)	167
เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers).....	166
บทที่ 4 รูปทรง (Shapes) และภาคตัดกรวย (Conic Sections).....	175
4.1 ระบบพิกัดใน 3 มิติ(Co-ordinates in 3 Dimensions)	175
4.2 พื้นที่ (Areas)และปริมาตร(Volumes)	181
4.3 ภาคตัดกรวย(Conic Sections)	190
4.4บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)	212
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)	223
เฉลยแบบฝึกทักษะ(Additional Exercises).....	228
บทที่ 5 การจัดการทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น (Introduction to Money Management)	236
5.1 ดอกเบี้ยคงต้น(Simple Interest)	236
5.2 ดอกเบี้ยทบต้น(Compound Interest)	239
5.3 เงินปี (Annuities).....	242
5.4 การคิดภาษีเบื้องต้น(Introduction to Taxes).....	246
5.5 ต้นทุน (Costs)รายได้(Revenues)และผลตอบแทน(Profits)	250
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)	261
เฉลยแบบฝึกทักษะบทที่ 5 การจัดการทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น.....	266
เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท	268
บทที่ 6 กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)	270
6.1 กำหนดการเชิงเส้น(Linear Programing)	270
6.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยการเขียนกราฟ(Finding the Optimal Value by Graphing)	276
6.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์เบื้องต้น(Finding the Optimal Value by Complex Table)	287
6.4 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)	299
แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)	309
เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers).....	311

บทที่ 7 นานาสาระ ปกิณกะคณิตศาสตร์ (Some Interesting Stuff about Mathematics)	314
7.1 บิดาแห่งคณิตศาสตร์แขนงต่างๆ (Important Mathematicians)	314
7.2 คณิตศาสตร์ในธรรมชาติ (Mathematics in Nature)	318
7.3 รู้ไว้ใช่ว่า (Some More of Cool Facts)	321
7.4 สนุกกับปริศนาหาคิด (Have Fun with This)	324
บรรณานุกรม	326
ดัชนี (Index)	328

สารบัญแผนภาพ

แผนภาพที่ 1 จำนวนจริงและส่วนต่างๆ ของจำนวนที่จัดอยู่ในจำนวนจริง	10
แผนภาพที่ 2 แผนภาพแสดงการทดสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ด้วยการเขียนกราฟ โดยที่ ความสัมพันธ์ในกราฟ a) ไม่เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ในกราฟ b) เป็นฟังก์ชัน	120
แผนภาพที่ 3 กราฟแสดงตัวอย่างของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จำแนกตามช่วงของค่าของฐาน a ของฟังก์ชัน	129
แผนภาพที่ 4 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2x$ และ $y = 2 - x$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.1	129
แผนภาพที่ 5 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2x$, $y = 3x$ และ $y = 5x$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.2	130
แผนภาพที่ 6 กราฟในรูปทั่วไปของฟังก์ชันลอการิทึม	138
แผนภาพที่ 7 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ในเครื่องขาย กับช่วงเวลาใน 1 วัน สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.1	156
แผนภาพที่ 8 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาเฉลี่ย กับสินค้า สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.2	157
แผนภาพที่ 9 ระบบพิกัดแนวฉาก (Rectangular Coordinate System)	175
แผนภาพที่ 10 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System)	176
แผนภาพที่ 11 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate System)	178
แผนภาพที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดแนวฉาก ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม	179
แผนภาพที่ 13 การตัดทรงกรวยด้วยระนาบ จะทำให้เกิดรอยตัดที่เป็นวงกลม หรือวงรี หรือพาราโบลา หรือ ไฮเปอร์โบลา	190
แผนภาพที่ 14 ตัวอย่างของสิ่งของที่มีลักษณะเป็นวงกลม ที่เราสามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน	191
แผนภาพที่ 15 วงกลมใน 2 มิติที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ใดๆ	191
แผนภาพที่ 16 (ซ้าย) การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ล้อมรอบดวงอาทิตย์ และ (ขวา) การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนรอบนิวเคลียส	195

แผนภาพที่ 17 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ ภาพซ้าย จุดโฟกัส $(\pm c, 0)$ อยู่บนแกน x , ภาพขวา จุดโฟกัส $(0, \pm c)$ อยู่บนแกน y	197
แผนภาพที่ 18 จานดาวเทียม น้ำพุ และไฟฉาย ตัวอย่างของการมีอยู่ของพาราโบลา.....	200
แผนภาพที่ 19 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดขวา" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดซ้าย" (ภาพขวา).....	200
แผนภาพที่ 20 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาหงาย" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาคว่ำ" (ภาพขวา).....	201
แผนภาพที่ 21 การฉายของลำแสงจากไฟฉาย ที่เอียงมุมแตกต่างกันกับแผ่นฉากรับ.....	206
แผนภาพที่ 22 การเขียนกรอปลี่เหลี่ยมตรงกลางของไฮเปอร์โบลา ช่วยให้การเขียนกราฟไฮเปอร์โบลาทำได้สะดวกมากยิ่งขึ้น.....	207
แผนภาพที่ 23 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน x เรียกไฮเปอร์โบลาประเภทนี้ว่า "ไฮเปอร์โบลาเปิดซ้าย-ขวา".....	207
แผนภาพที่ 24 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน y เรียกไฮเปอร์โบลาประเภทนี้ว่า "ไฮเปอร์โบลาเปิดบน-ล่าง".....	208
แผนภาพที่ 25 ไฮเปอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$	209
แผนภาพที่ 26 วงกลมสามารถมองให้เป็นวงรีได้ ในมุมที่เหมาะสม.....	212
แผนภาพที่ 27 การตัดแนวขวางเอียงของทรงกระบอกใดๆ ด้วยระนาบ จะให้รอยตัดและภาพตัดแนวขวางเป็นรูปวงรีเสมอ.....	213
แผนภาพที่ 28 เมื่อเองแก้วน้ำ พื้นผิวของน้ำในแก้ว จะเป็นรูปวงรี.....	213
แผนภาพที่ 29 ดาวเคราะห์ทั้งหลาย โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี.....	213
แผนภาพที่ 30 ดาวหาง Halley ใช้เวลา 76 ปี ในการโคจรรอบดวงอาทิตย์.....	214
แผนภาพที่ 31 การโคจรของอิเล็กตรอนล้อมรอบนิวเคลียส.....	214
แผนภาพที่ 32 การสะท้อนของลำแสงที่พุ่งจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งกับผนังของวงรี แล้วไปตาที่จุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรีนั้น.....	214
แผนภาพที่ 33 การเคลื่อนที่ของลูกบอล ที่มีแนวการเคลื่อนที่เป็นแบบพาราโบลา.....	215
แผนภาพที่ 34 พาราโบลายังสามารถแทนการเคลื่อนที่ของลูกปืนใหญ่ ซึ่งค้นพบโดย Galileo ในศตวรรษที่ 17.....	215
แผนภาพที่ 35 แนวการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของน้ำจากก๊อก จะเคลื่อนเป็นแนวพาราโบลา.....	215
แผนภาพที่ 36 เมื่อแสงออกจากแหล่งกำเนิดไปตกบนกระจกโค้งรูปพาราโบลา ก็จะสะท้อนเป็นเส้นตรงที่ขนานซึ่งกันและกัน.....	215
แผนภาพที่ 37 การรับสัญญาณวิทยุของจานดาวเทียมที่มีรูปทรงเป็นแบบพาราโบลา.....	216
แผนภาพที่ 38 แนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางถ่วงของโลมา จะเป็นแนวพาราโบลา.....	216
แผนภาพที่ 39 การเคลื่อนที่ที่เป็นเกลียว จะทำให้เกิดรอยเป็นครึ่งไฮเปอร์โบลา และคอมไฟที่วางใกล้ผนังห้อง ลำแสงจะกระทบกับผนังเป็นรูปไฮเปอร์โบลา.....	216
แผนภาพที่ 40 รอยตัดของคลื่นโซนิคที่เกิดจากเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง กับระนาบพื้นที่ จะเป็นรูปไฮเปอร์โบลา(ครึ่งซีก).....	217
แผนภาพที่ 41 หอทำความเย็นที่ออกแบบเป็นรูป Hyperboloid.....	217

แผนภาพที่ 42	โมเมนต์รูปครึ่งวงรี และรถบรรทุก รูปประกอบสำหรับแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 1.....	217
แผนภาพที่ 43	โมเมนต์รูปครึ่งวงรี และรถบรรทุก รูปประกอบสำหรับแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 2.....	218
แผนภาพที่ 44	ตำแหน่งลักษณะของบ้านทั้ง 2 หลัง ภาพประกอบแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 5.....	220
แผนภาพที่ 45	โคมไฟที่ประกอบด้วยกระจกโค้งรูปพาราโบลา ภาพประกอบแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 6.....	221
แผนภาพที่ 46	สะพาน Golden Gate ที่เชื่อมระหว่างเมือง San Francisco และเมือง Marin County.....	222
แผนภาพที่ 47	ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างกำไร และจำนวนสินค้า.....	252
แผนภาพที่ 48	กฎของอุปสงค์ (Law of Demand):เมื่อราคาดลง ความต้องการสินค้าจะเพิ่มขึ้น.....	254
แผนภาพที่ 49	กฎของอุปทาน (Law of Supply) :เมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการที่จะผลิตสินค้าก็เพิ่มขึ้น.....	255
แผนภาพที่ 50	ดุลยภาพตลาด :ราคาดุลยภาพตลาด (PE) เท่ากับ ปริมาณดุลยภาพตลาด(QE).....	255
แผนภาพที่ 51	การหาราคาดุลยภาพ ประจำตัวอย่างที่ 5.5.4.....	257
แผนภาพที่ 52	ความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์ และอุปทาน ของสินค้าชนิดหนึ่ง สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 7.....	260
แผนภาพที่ 53	พื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยของตัวอย่างกรณีของนักศึกษาที่ต้องทำงาน 2 ประเภท.....	278
แผนภาพที่ 54	กราฟแสดงพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.1.....	281
แผนภาพที่ 55	กราฟแสดงพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.2.....	282
แผนภาพที่ 56	พายุหิมะและลมฝน มีผลอย่างมากในการคมนาคมขนส่งทางอากาศ และกำหนดการเชิงเส้นได้รับความนิยม เป็นอย่างมากในการจัดการกับสถานการณ์ในลักษณะแบบนี้.....	299
แผนภาพที่ 57	พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ สำหรับตัวอย่างที่ 6.4.1.....	303
แผนภาพที่ 58	ปีทาโกรัส (Pythagoras) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก.....	314
แผนภาพที่ 59	ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก.....	315
แผนภาพที่ 60	ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก.....	316
แผนภาพที่ 61	แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก.....	317
แผนภาพที่ 62	เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก.....	317
แผนภาพที่ 63	ลีโอนาร์โด ฟิโบนัชชี (Leonardo Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ ผู้คิดค้นลำดับฟีโบนัชชี.....	318
แผนภาพที่ 64	ตัวอย่างการปรากฏจริงของลำดับฟีโบนัชชีในธรรมชาติ.....	319
แผนภาพที่ 65	กราฟแสดงการลู่เข้าค่าตัวเลขทองคำ 1.61804 ซึ่งเกิดจากอัตราส่วนของค่า 2 ค่าที่ติดกันในลำดับฟีโบนัชชี.....	319
แผนภาพที่ 66	ซ้าย) วิหารพาทินอน วิหารเก่าแก่ของกรีกที่กรุงเอเธนส์ และขวา)ภาพคนชรา ของ ลีโอนาร์โด ดา วินชี ...	320
แผนภาพที่ 67	อิกวิโนกซ์ (Equinox): แนวเส้นศูนย์สูตรโลกบนทรงกลมท้องฟ้าตัดกับแนวเส้นสุริยวิถีสองจุด.....	321
แผนภาพที่ 68	เส้นเมริเดียนของคุณ (your meridian).....	321
แผนภาพที่ 69	การเขียนเลขอารบิก ที่เกิดจากการนับมุมของเลขตัวนั้นๆ.....	322
แผนภาพที่ 70	การเรียงตัวกันเป็นแบบแผนของผลคูณของจำนวนที่ประกอบด้วย 1, 2, 8 และ 9.....	323
แผนภาพที่ 71	การนำเอาจำนวน 12345679 ไปคูณกับบางจำนวน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่สวยงาม.....	323
แผนภาพที่ 72	การคูณกันของจำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1 ล้วนๆ ก็ให้ค่าที่น่าสนใจ.....	323

แผนภาพที่ 73 การคูณกันของบางจำนวน ก็ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจ 324



สารบัญตาราง

ตารางที่ 1	ตารางแสดงการดำเนินการทางพีชคณิตเบื้องต้นที่สำคัญของจำนวนจริง	11
ตารางที่ 2	ข้อเข้าใจผิดที่พบบ่อยครั้งในการดำเนินการทางพีชคณิตของจำนวนจริง	12
ตารางที่ 3	ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสิบ	18
ตารางที่ 4	ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสอง	19
ตารางที่ 5	ตัวอย่างของเซตที่ควรทราบ	23
ตารางที่ 6	ช่วงต่างๆ บนเส้นจำนวนจริง พร้อมสัญลักษณ์	28
ตารางที่ 7	คุณสมบัติสำคัญของเลขชี้กำลัง	131
ตารางที่ 8	ตารางแสดงตัวอย่างความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลัง กับฟังก์ชันลอการิทึม	137
ตารางที่ 9	ตารางแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม	139
ตารางที่ 10	ตารางสูตรและเอกลักษณ์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามที่มีระดับชั้นไม่เกิน 3	149
ตารางที่ 11	จำนวนการเพิ่มขึ้นของประชากรภบในสระ 3 แสน มทส. ในแต่ละปี สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.3	158
ตารางที่ 12	ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาเครื่องดื่ม และปริมาณ สำหรับแบบฝึกทักษะประจำบทที่ 3 หัวข้อ 3.7 ข้อ 2	162
ตารางที่ 13	สูตรการหาพื้นที่สำหรับบริเวณรูปมาตรฐานที่พบบ่อย	182
ตารางที่ 14	ตารางสรุปสูตรการหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปทรงใน 3 มิติ	186
ตารางที่ 15	ตารางอัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา	248
ตารางที่ 16	ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้า และราคา สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 6 (กำหนดราคาสินค้า หน่วย เป็นดอลลาร์)	259
ตารางที่ 17	ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด	279
ตารางที่ 18	ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุด	279
ตารางที่ 19	ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด	280
ตารางที่ 20	ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่ เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุดสำหรับตัวอย่างที่ 6.2.1	281
ตารางที่ 21	ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่ เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุดสำหรับตัวอย่างที่ 6.2.2	282
ตารางที่ 22	ตารางทดสอบจุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ กับสมการเป้าหมาย ประจำตัวอย่างที่ 6.4.1 .304	

บทที่ 1

บทที่ 1 ทบทวน (Reviews)

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนบทประยุกต์ของการใช้คณิตศาสตร์ในแขนงต่างๆ นั้น การมีพื้นฐานความเข้าใจในหลักการทางคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องถือเป็นสิ่งที่สำคัญเป็นอย่างมาก ในบทแรกนี้ จักได้มีการรวบรวมเอาความรู้และหลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มาแนะนำเสนอ เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการประยุกต์ใช้ในบทถัดๆ ไป และก่อให้เกิดทักษะการคิดแบบมีตรรกะ ใช้เหตุ และผล ได้อย่างถูกต้อง

1.1 ระบบจำนวนและจำนวนจริง(Real Numbers)

❖ จำนวนจริง คืออะไร ?

ในโลกของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในสาขาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น การวิเคราะห์ข้อมูล ระบบสมการกราฟ รวมถึงคณิตศาสตร์เชิงคำนวณต่างๆ ระบบตัวเลขที่เกี่ยวข้องส่วนใหญ่จะเป็นจำนวนที่รู้จักกันในนามของ "จำนวนจริง (Real Numbers)" ซึ่งสามารถให้คำจำกัดความโดยรวมได้ว่า เป็น จำนวนที่อยู่บนเส้นจำนวนจริง จำนวนจริงเหล่านี้มีคุณสมบัติเฉพาะตัวหลายประการ และสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มๆ ได้หลายประเภท เช่น จำนวนนับ (หรือจำนวนธรรมชาติ Natural Numbers), จำนวนเต็ม (Integers), ตรรกยะ (Rational Numbers) และอตรรกยะ (Irrational Numbers).

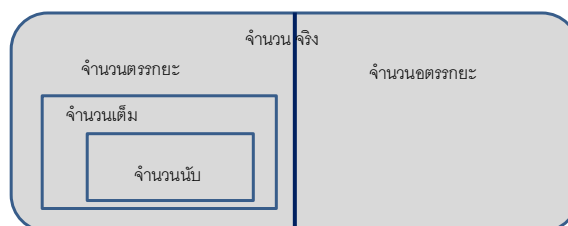
จำนวนนับ ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ...

จำนวนเต็ม ได้แก่ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... ซึ่งจะเห็นว่า ทุกจำนวนนับ เป็นจำนวนเต็ม

จำนวนตรรกยะ ได้แก่ จำนวนที่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $\frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{25}$... ซึ่งจะเห็นว่า ทุกๆ จำนวนเต็ม เป็นจำนวนตรรกยะ (เนื่องจากสามารถเขียนเป็นเศษส่วนที่มีส่วนเป็น 1 ได้เสมอ)

จำนวนอตรรกยะ ได้แก่ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

ซึ่งเมื่อเรานำประเภทของจำนวนจริงทั้งหลายตามที่ได้แจกแจงมานี้ มาเขียนเป็นแผนภาพ ก็จะได้ดังนี้



แผนภาพที่ 1 จำนวนจริงและส่วนต่างๆ ของจำนวนที่จัดอยู่ในจำนวนจริง

❖ คุณสมบัติเอกลักษณ์เบื้องต้นที่สำคัญของจำนวนจริง

กำหนดให้ x, y, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. คุณสมบัติการสลับที่ของการบวกและการคูณ ตามลำดับดังนี้ $a + b = b + a$ และ $ab = ba$

เช่น $2.5x + 3y = 3y + 2.5x$ และ $\frac{1}{8} \times \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \times \frac{1}{8}$

2. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกและการคูณ ตามลำดับดังนี้

$a + (b + c) = (a + b) + c$ และ $a(bc) = (ab)c$

เช่น $(a + 3b) + 2c = a + (3b + 2c)$ และ $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x}{3} \cdot y\right) = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x}{3}\right) \cdot y$

3. คุณสมบัติการกระจาย ดังนี้ $a(b + c) = ab + ac$ หรือ $(b + c)a = ba + ca$

เช่น $(x + 3y)2 = 2x + 6y$

4. เอกลักษณ์สำหรับการบวก คือ " 0 " และ เอกลักษณ์สำหรับการคูณ คือ " 1 " ตามลำดับดังนี้ $a + 0 = 0 + a = a$ และ $a(1) = 1(a) = a$

5. ตัวผกผันสำหรับการบวกของ a คือ $-a$ และตัวผกผันสำหรับการคูณของ a คือ $\frac{1}{a}$

6. คุณสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ เมื่อนิยามการหาค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วย $|a|$ และนิยามโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

7. คุณสมบัติทางพีชคณิตอื่นๆ ที่พบบ่อยของจำนวนจริง แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้ เมื่อกำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตารางที่ 1 ตารางแสดงการดำเนินการทางพีชคณิตเบื้องต้นที่สำคัญของจำนวนจริง

ลำดับที่	คุณสมบัติอื่นๆ และสูตรที่พบบ่อย	ลำดับที่	คุณสมบัติอื่นๆ และสูตรที่พบบ่อย
1	$a^n a^m = a^{n+m}$	14	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
2	$(a^n)^m = a^{nm}$	15	$\log_b b = 1, \log_b 1 = 0$
3	$(ab)^n = a^n b^n$	16	$\log_b b = x, b^{\log_b x} = x$
4	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	17	$\log_b (x^r) = r \log_b x$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	18	$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	19	$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
7	$a^0 = 1, a \neq 0$	20	$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$

8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	21	$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
9	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n, a \neq 0$	22	$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$
10	$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(a^n\right)^{\frac{1}{m}}$	23	$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
11	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	24	$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$
12	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt{nm}a$	25	$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
13	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	26	$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

❖ ข้อเข้าใจผิดที่พบบ่อยครั้ง

ในตารางข้างล่างนี้ จะเป็นการรวบรวมเอารูปแบบและข้อสังเกต(พร้อมด้วยคำอธิบาย)ที่สำคัญของการใช้พีชคณิตของจำนวนจริง

ตารางที่ 2 ข้อเข้าใจผิดที่พบบ่อยครั้งในการดำเนินการทางพีชคณิตของจำนวนจริง

ข้อสังเกต	คำอธิบายและรูปที่ถูกต้อง
$\frac{2}{0} \neq 0, \frac{2}{0} \neq 2$	การหารด้วยศูนย์นั้น ถือว่าไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์
$-3^2 \neq 9$	$-3^2 = -9, (-3)^2 = 9$
$(x^2)^3 \neq x^5$	$(x^2)^3 = x^2 x^2 x^2 = x^6$
$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$
$\frac{1}{x^2 + x^3} \neq x^{-2} + x^{-3}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกตข้างบนนี้
$\frac{a + bx}{a} \neq 1 + bx$	$\frac{a + bx}{a} = \frac{a}{a} + \frac{bx}{a} = 1 + \frac{bx}{a}$
$-a(x - 1) \neq -ax - a$	$-a(x - 1) = -ax + a$
$(x + a)^2 \neq x^2 + a^2$	$(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$
$\sqrt{x^2 + a^2} \neq x + a$	$5 = \sqrt{25} = \sqrt{3^2 + 4^2} \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{x + a} \neq \sqrt{x} + \sqrt{a}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกตข้างบนนี้
$(x + a)^n \neq x^n + a^n$ and $\sqrt[n]{x + a} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกต 3 ข้อข้างบนนี้
$2(x + 1)^2 \neq (2x + 2)^2$	$2(x + 1)^2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2x^2 + 4x + 2$ และ $(2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$

$$\sqrt{-x^2 + a^2} \neq -\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\sqrt{-x^2 + a^2} = (-x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.1.1 จงหาผลคูณของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

- | | |
|---|--|
| 1) $7(-4) = \dots\dots\dots$ | 4) $(-13)(-14) = \dots\dots\dots$ |
| 2) $(-1)(-5) = \dots\dots\dots$ | 5) $(-\frac{2}{7})(-\frac{14}{5}) = \dots\dots\dots$ |
| 3) $(-3) [\frac{5}{2}(-\frac{4}{3})] = \dots\dots\dots$ | 6) $7(-2.25) = \dots\dots\dots$ |

แบบฝึกทักษะที่ 1.1.2 จงหาผลหารของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{-120}{-20} = \dots\dots\dots$ | 4) $(-10) \div (\frac{-14}{5}) = \dots\dots\dots$ |
| 2) $(\frac{-1}{5}) \div (\frac{-2}{5}) = \dots\dots\dots$ | 5) $(-\frac{2}{7}) \div (-\frac{14}{5}) = \dots\dots\dots$ |
| 3) $[\frac{5}{2} \div (-\frac{4}{3})] = \dots\dots\dots$ | 6) $7 \div (1 \div (\frac{2}{7})) = \dots\dots\dots$ |

แบบฝึกทักษะที่ 1.1.3 จงหาผลของการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{9(-4)}{-6-(-2)} = \dots\dots\dots$ | 4) $\frac{-4[8-(-3+7)]}{-6[3-(-2)]-3(-3)} = \dots\dots\dots$ |
| 2) $\frac{-3-(-4+1)}{-7-(-6)} = \dots\dots\dots$ | 5) $\frac{2^2+4^2}{5^2-3^2} = \dots\dots\dots$ |
| 3) $\frac{(-1)-[-(3-4)]}{-2} = \dots\dots\dots$ | 6) $\frac{(-1)^3(-2)^3}{6-[-1+(2-5)]^2} = \dots\dots\dots$ |

1.2 ท.ร.ม.(G.C.F) และ ค.ร.น.(L.C.M.)

ตัวหารร่วมที่มากที่สุด (หรือ ท.ร.ม.) หรือ ตัวประกอบค่ามากที่สุด ของจำนวนใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป หมายถึง จำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่สามารถหารจำนวนทั้งหมดเหล่านั้นได้ลงตัว

ในการหาค่าตัวประกอบร่วมค่ามากที่สุด หรือ ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) นั้น สามารถทำได้หลายวิธี อย่างไรก็ตาม ในเอกสารประกอบการสอนนี้ จะได้นำเอาวิธีการหาค่า ห.ร.ม. เพียงวิธีเดียวมานำเสนอ ซึ่งในขั้นแรกนี้ มาทำความรู้จักกับส่วนประกอบแต่ละส่วนก่อน ซึ่งสามารถเรียงตามลำดับได้แก่ ตัวประกอบ(Factor) , ตัวประกอบร่วม(Common Factor) และตัวประกอบร่วมที่มากที่สุด(Greatest Common Factor)

❖ "ตัวประกอบ (Factor)" คือ อะไร ?

ตัวประกอบ(Factor) คือ จำนวนที่เมื่อนำมาคูณกันแล้วได้จำนวนใหม่ขึ้นมา เช่น $2 \times 3 = 6$ เราจะได้ว่า 2 และ 3 เป็นตัวประกอบของ 6 ซึ่งในบางครั้ง เราต้องการตัวประกอบทุกตัวของเลขจำนวนหนึ่ง เช่น ตัวประกอบของ 12 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12 เนื่องจากว่า $2 \times 6 = 12$, $4 \times 3 = 12$, $1 \times 12 = 12$ ทั้งสิ้น

❖ "ตัวประกอบร่วม(Common Factor)" คือ อะไร ?

เมื่อเราสามารถหาตัวประกอบของจำนวนตั้งแต่ 2 จำนวนได้แล้ว เช่น พิจารณาการหาตัวประกอบของ 12 และ 30 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.1

ตัวประกอบ ของ 12 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12

ตัวประกอบ ของ 30 ได้แก่ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 และ 30

แล้วเราจะได้ว่า ตัวประกอบร่วม (Common Factor) ของ 12 และ 30 คือ ตัวประกอบทั้งหลาย ที่ปรากฏเป็นตัวประกอบของทั้ง 12 และ 30 ซึ่งก็ได้แก่ 1, 2, 3 และ 6

ตัวอย่างที่ 1.2.2จงหาตัวประกอบร่วมของ 15, 30 และ 105

ตัวประกอบ ของ 15 ได้แก่ 1, 3, 5 และ 15

ตัวประกอบ ของ 30 ได้แก่ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 และ 30

ตัวประกอบ ของ 105 ได้แก่ 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 และ 105

จะเห็นว่า ตัวประกอบที่ปรากฏเป็นตัวประกอบของทั้ง 15, 30 และ 105 ได้แก่ 1, 3, 5 และ 15

นั่นคือ ตัวประกอบร่วมของ 15, 30 และ 105 คือ 1, 3, 5 และ 15 นั่นเอง

❖ "ตัวประกอบร่วมมากที่สุด(Greatest Common Factor)" คืออะไร ?

ตัวประกอบร่วมมากที่สุด (Greatest Common Factor) ของจำนวนตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป คือ ตัวประกอบร่วมของจำนวนเหล่านั้นที่มีค่ามากที่สุด เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2.2 ข้างต้น จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมมากที่สุดของ 15, 30 และ 105 คือ 15 เพราะ ในบรรดาตัวประกอบร่วมทั้งหลาย ซึ่งมี 1, 3, 5 และ 15 นั้น 15 มีค่ามากที่สุดและ ซึ่งก็เป็นค่า ห.ร.ม. ด้วย

แบบฝึกทักษะที่ 1.2.1จงแสดงวิธีการหาค่าตัวประกอบร่วมมากที่สุด หรือ ห.ร.ม. ของจำนวนต่างๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ห.ร.ม. ของ 9 และ 12 คือ

2) ห.ร.ม. ของ 6 และ 18 คือ

3) ห.ร.ม. ของ 24 และ 108 คือ

4) ห.ร.ม. ของ 56, 84 และ 140 คือ

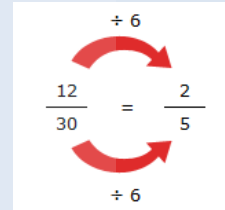
❖ "ตัวประกอบร่วมมากที่สุด (Greatest Common Factor)" มีประโยชน์อย่างไร ?

ตัวอย่างหนึ่งที่เป็นการใช้ประโยชน์ตัวประกอบร่วมมากที่สุด คือ การลดทอนเศษส่วน

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงลดทอนเศษส่วน $\frac{12}{30}$

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 1.2.1 เราสามารถหาได้ว่า ตัวประกอบค่ามากที่สุดของ 12 และ 30 คือ 6 ดังนั้น จึงได้ว่าจำนวนที่มากที่สุดที่สามารถไปหารทั้ง 12 และ 30 ได้ลงตัวคือ 6 จึงสามารถลดทอนเศษส่วนดังกล่าวได้เป็น $\frac{2}{5}$



ตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) (Least Common Multiple) ของจำนวนใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป หมายถึง จำนวนที่น้อยที่สุดที่จำนวนเหล่านั้นมาหารได้ลงตัว หรือจำนวนที่น้อยที่สุดที่มีจำนวนเหล่านั้นเป็นตัวประกอบ เช่นเดียวกันกับการหา ห.ร.ม. การหา ค.ร.น. นี้ มีวิธีการอยู่หลายวิธี แต่ในเอกสารประกอบการสอนนี้ จักได้นำเสนอแค่ 2 วิธีซึ่งได้แก่ โดยการใช้ ห.ร.ม. และ โดยการพิจารณาจำนวนประกอบเฉพาะ (Prime Factor) ของแต่ละจำนวนที่ให้นั้น

❖ การหา ตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) โดยการใช้ ห.ร.ม.

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทราบวิธีการหา ห.ร.ม. มาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะทำการหาค่า ค.ร.น. โดยใช้ค่า ห.ร.ม. โดย ค.ร.น. ของจำนวน a และจำนวน b หาได้จากการใช้ความสัมพันธ์นี้

$$\text{ค.ร.น.}(a, b) = \frac{(a \cdot b)}{\text{ห.ร.ม.}(a, b)} \quad (1.1)$$

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 30 โดยการใช้น.ร.ม.

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.2.3 เราสามารถหาได้แล้วว่า น.ร.ม. ของ 12 และ 30 คือ 6 ดังนั้น ใช้

ความสัมพันธ์ในสมการที่ (1.1) จึงได้ว่า

$$\text{ค.ร.น.}(12,30) = \frac{(12 \cdot 30)}{\text{น.ร.ม.}(12,30)} = \frac{360}{6} = 60$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 12 และ 30 คือ 60

❖ การหาตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) โดยการพิจารณาจำนวนประกอบเฉพาะ(Prime Factor)

จำนวนเฉพาะ(Prime Number) คือ จำนวนนับทั้งหลายที่มากกว่า 1 ที่มีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และตัวของมันเอง เช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 และอื่นๆ เป็นจำนวนมาก และในคณิตศาสตร์ ก็เป็นที่ทราบกันว่า ทุกๆ จำนวนเต็มบวกที่ไม่ใช่ 1 จะสามารถเขียนกระจายออกเป็นตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ(ต่อไปจะเรียกสั้นๆ ว่า "ตัวประกอบเฉพาะ")ได้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น เช่น เราสามารถกระจาย 90 ออกเป็นผลคูณของตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะได้ดังนี้ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ หมายความว่า 90 ได้จากการคูณกันของ 2 จำนวน 1 ตัว กับ 3 จำนวน 2 ตัว กับ 5 จำนวน 1 ตัว เราจะใช้แนวคิดนี้ในการหา ค.ร.น. โดยกระบวนการดังต่อไปนี้

- 1) แยกตัวประกอบเฉพาะของจำนวนทุกจำนวนที่ต้องการหา ค.ร.น.
- 2) เลือกตัวประกอบเฉพาะตัวที่ซ้ำกันมาเพียงตัวเดียว
- 3) เลือกตัวประกอบเฉพาะตัวที่ไม่ซ้ำกันมาทุกตัว
- 4) นำจำนวนที่เลือกมาจากข้อ 2 และ 3 มาคูณกันทั้งหมด เป็นค่าของ ค.ร.น.

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 30 โดยการใช้น.ร.ม.

วิธีทำ เราสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะของทั้ง 2 จำนวนได้โดย

$$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$$

$$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$$

ตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันได้แก่ 2 และ 3 (เพราะปรากฏอยู่ใน 12 และ 30) และตัวประกอบเฉพาะที่ไม่ซ้ำกันได้แก่ 2 และ 5 ดังนั้น เมื่อทำตามทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า ค.ร.น. (12, 30) คือ $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงหา ค.ร.น. ของ 10, 24 และ 30 โดยการใช้น.ร.ม.

วิธีทำ เราสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะของทั้ง 2 จำนวนได้โดย

$$10 = 5 \times 2$$

$$24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$30 = 5 \times 2 \times 3$$

ตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันได้แก่ 5, 2 และ 3 และตัวประกอบเฉพาะที่ไม่ซ้ำกันได้แก่ 2 ดังนั้น เมื่อทำตามทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า ค.ร.น. (10, 24, 30) คือ $5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 120$

แบบฝึกทักษะที่ 1.2.2จงใช้วิธีที่ถนัดในการหาค่า ค.ร.น. ของกลุ่มจำนวนแต่ละกลุ่มที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) ค.ร.น. ของ 3 และ 7 คือ

2) ค.ร.น. ของ 18 และ 28 คือ

.....

3) ค.ร.น. ของ 32 และ 22 คือ

4) ค.ร.น. ของ 6, 14 และ 21 คือ

.....

❖ **ประโยชน์ของค่า ค.ร.น.**

ที่ใช้กันบ่อยที่สุดได้แก่การหาผลบวก-ลบของเศษส่วน โดยการทำให้เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1.2.7จงหาค่าของ $\frac{3}{10} + \frac{7}{24} - \frac{1}{30}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.2.6 เราทราบแล้วว่า ค.ร.น. ของ 10, 24 และ 30 คือ 120 ซึ่งเราพบว่า $10 \times 12 = 24 \times 5 = 30 \times 4 = 120$ ดังนั้น จึงสามารถหาผลบวก-ลบของเศษส่วนดังกล่าวได้โดย

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{24} - \frac{1}{30} = \frac{3(12) + 7(5) - 1(4)}{120} = \frac{36 + 35 - 4}{120} = \frac{67}{120}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.2.3จงหาค่าของการบวก-ลบ เศษส่วนในข้อต่อไปนี้

1) $\frac{9}{17} + \frac{8}{6} =$

2) $\frac{16}{19} + \frac{26}{3} =$

3) $\frac{18}{16} + \frac{43}{14} =$

4) $\frac{43}{8} + \frac{48}{5} =$

5) $\frac{36}{24} + \frac{9}{11} =$

6) $\frac{1}{7} + \frac{13}{17} =$

7) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} =$

8) $\frac{11}{3} - \frac{15}{5} =$

9) $\frac{23}{25} - \frac{21}{50} =$

10) $\frac{4}{3} - \frac{1}{4} =$

11) $\frac{19}{6} + \frac{17}{3} - \frac{35}{4} =$

12) $\frac{9}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{34} =$

.....

.....

13) $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} =$

14) $\frac{(x+h)^2}{h} - \frac{x}{h} =$

15) $\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \dots\dots\dots$

16) $\frac{x+1}{x^2+5x+6} + \frac{x+2}{x^2+4x+3} = \dots\dots\dots$

1.3 เลขฐาน (Number Systems)

ในชีวิตประจำวันทุกวันนี้ เราได้มีส่วนเกี่ยวข้องกับหลายสิ่งที่จะต้องอาศัยหลักการของตัวเลขเริ่มต้นจากการนับสิ่งต่างๆ การพัฒนาการของมนุษย์และวิทยาศาสตร์ก่อให้เกิดระบบเลขฐานต่างๆ เริ่มตั้งแต่ที่เราคุ้นเคยและใช้กันมากคือเลขฐานสิบ และที่ใช้ในระบบการทำงานของคอมพิวเตอร์คือเลขฐานสอง นอกจากนี้ยังมีเลขฐานอื่นๆ เช่น ฐานแปด ฐานสิบหก เป็นต้น ในเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จะได้มีการนำเสนอเฉพาะสองฐานแรกเท่านั้นคือ เลขฐานสิบและเลขฐานสอง

❖ เลขฐานสิบ

ถือว่าเป็นเลขฐานที่เราใช้และพบกันมากที่สุดในชีวิตประจำวัน เลขฐานสิบนี้ประกอบไปด้วยตัวเลขสิบตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 ซึ่งเราจะใช้เลขทั้งสิบตัวนี้ประกอบกันขึ้นเป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง และจำแนกค่าต่างๆ ของแต่ละตัวเลขเหล่านั้นโดย “ค่าประจำตำแหน่ง” ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 3 ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสิบ

	หน้าจุดทศนิยม					หลังจุดทศนิยม				
หลักที่	n	$n - 1$...	2	1	1	2	...	m	...
ค่าประจำตำแหน่ง	10^{n-1}	10^{n-2}	...	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	...	10^{-m}	...

ซึ่งจากตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งดังกล่าว เราสามารถเขียนจำนวนทุกจำนวนในเลขฐานสิบให้อยู่ในรูปของผลบวกของตัวเลขประจำตำแหน่งคูณกับค่าประจำตำแหน่งได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.1 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเลขตำแหน่งคูณกับค่าประจำตำแหน่งของเลขนั้น

- 1) $365 = (3 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$
- 2) $4,021 = (4 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$
- 3) $254.87 = (2 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (4 \times 10^0) + (8 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$
- 4) $21.896 = (2 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (8 \times 10^{-1}) + (9 \times 10^{-2}) + (6 \times 10^{-3})$

❖ เลขฐานสอง

เลขฐานสองนี้ใช้กันมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านของระบบประมวลผลของคอมพิวเตอร์ เลขฐานสองประกอบด้วยตัวเลข 2 ตัวคือ 0 และ 1 ดังนั้นการเขียนตัวเลขใดๆ ในระบบเลขฐานสองนี้ จะประกอบไปด้วยตัวเลขเพียง 2 ตัวคือ 0 และ 1 ตัวอย่างเช่น

- 1011₂ อ่านว่า หนึ่ง ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง
 110011₂ อ่านว่า หนึ่ง หนึ่ง ศูนย์ ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง
 10.011₂ อ่านว่า หนึ่ง ศูนย์ จุด ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง

ซึ่งในการเขียนเลขฐานสองนั้น สามารถเขียนได้โดยอาศัยตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งดังแสดงข้างล่างนี้

ตารางที่ 4 ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสอง

หน้าจุดทศนิยม						หลังจุดทศนิยม				
หลักที่	n	$n - 1$...	2	1	1	2	...	m	...
ค่าประจำตำแหน่ง	2^{n-1}	2^{n-2}	...	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	...	2^{-m}	...

❖ การเปลี่ยนระบบเลขฐานสองเป็นระบบเลขฐานสิบ

ในการเปลี่ยนเลขจำนวนหนึ่งที่อยู่ในระบบเลขฐาน 2 ให้เป็นจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐาน 10 นั้น สามารถทำได้โดยง่าย โดยนำตัวเลขแต่ละตัวในจำนวนนั้น คูณเข้าด้วยค่าประจำตำแหน่ง(ดังแสดงใน ตารางที่ 4)แล้วนำมาบวกกัน ดังตัวอย่างที่ 1.3.2

ตัวอย่างที่ 1.3.2 จงเขียนจำนวนสองจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสิบ

- ก) 10101₂ ข) 101.101₂

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ก) } 10101_2 &= (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) \\ &= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ข) } 101.101_2 &= (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (1 \times 2^{-1}) + (0 \times 2^{-2}) + (1 \times 2^{-3}) \\ &= 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 \\ &= 5.625 \end{aligned}$$

❖ การเปลี่ยนระบบเลขฐานสิบให้เป็นระบบเลขฐานสอง

สำหรับการเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบ ให้เป็นจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองนั้น สามารถทำได้ 2 แบบซึ่งขึ้นอยู่กับรูปแบบของจำนวนในเลขฐานสิบ ดังนี้

แบบที่ 1 ในกรณีที่จำนวนในเลขฐานสิบ เป็นจำนวนเต็ม สามารถทำได้โดยขั้นตอนดังนี้

- ให้นำเอา 2 ไปหารจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบนั้น ซึ่งในแต่ละครั้งของการหารจะเหลือเศษ ให้เขียนเศษนั้นไว้ทางขวามือ ทำอย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์
- จำนวนในระบบเลขฐานสองที่ได้ คือการเขียนเศษทั้งหลายที่เขียนไว้ทางขวามือของการหารในขั้นตอนแรก โดยเขียนจากล่างขึ้นบน ดังแสดงในตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.3 จงเขียน 21 และ 135 ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

วิธีทำ

$\begin{array}{r} 2 \overline{) 21} \\ 2 \overline{) 10} \quad \text{เศษ 1} \\ 2 \overline{) 5} \quad \text{เศษ 0} \\ 2 \overline{) 2} \quad \text{เศษ 1} \\ 2 \overline{) 1} \quad \text{เศษ 0} \\ 0 \quad \text{เศษ 1} \end{array}$ <p>ดังนั้น 21 ในระบบเลขฐาน 2 คือ 10101_2</p>	↑	$\begin{array}{r} 2 \overline{) 135} \\ 2 \overline{) 67} \quad \text{เศษ 1} \\ 2 \overline{) 33} \quad \text{เศษ 1} \\ 2 \overline{) 16} \quad \text{เศษ 1} \\ 2 \overline{) 8} \quad \text{เศษ 0} \\ 2 \overline{) 4} \quad \text{เศษ 0} \\ 2 \overline{) 2} \quad \text{เศษ 0} \\ 2 \overline{) 1} \quad \text{เศษ 0} \\ 0 \quad \text{เศษ 1} \end{array}$ <p>ดังนั้น 135 ในระบบเลขฐาน 2 คือ 1000111_2</p>	↑
---	---	--	---

แบบที่ 2 กรณีที่จำนวนในเลขฐานสิบนั้น ประกอบด้วยเลขทศนิยม สามารถทำได้โดยขั้นตอนต่อไปนี้

- ให้แบ่งจำนวนนั้นออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่อยู่ทางขวาของจุดทศนิยม และส่วนที่อยู่ทางซ้ายของจุดทศนิยม
- สำหรับส่วนที่อยู่ทางซ้ายของเลขทศนิยม ให้ดำเนินการดัง **แบบที่ 1** ข้างต้น
- สำหรับส่วนที่อยู่ทางขวาของจุดทศนิยมนั้น ให้นำ 2 มาคูณกับเลขหลังทศนิยมนั้น โดยในแต่ละครั้ง ให้เอาเลขหลังทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้มาตั้งใหม่ และนำการคูณด้วย 2 อีกครั้ง และนำเลขหลังทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้มาตั้งแล้วคูณด้วย 2 อย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเลขหลังทศนิยมของผลคูณนั้นเป็นศูนย์ทุกตัว ซึ่ง จำนวนในระบบเลขฐานสองที่ได้ จะได้จาก ตัวเลขที่อยู่หน้าจุดทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแต่ละครั้งดังกล่าวข้างต้น ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1.3.4 จงเขียน 21.1875 ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

วิธีทำ

เราแยกจำนวนดังกล่าวออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่อยู่ทางซ้ายมือของจุดทศนิยมคือ 21 และส่วนที่อยู่ทางขวามือของจุดทศนิยมคือ 0.1875

จากตัวอย่างที่ 1.3.3 เราจะได้ว่า 21 สามารถเขียนในระบบเลขฐานสองได้คือ 10101_2

เราจะพยายามเขียน 0.1875 เป็นเลขในระบบเลขฐานสองได้โดย

$$\begin{array}{r}
 0.1875_x \\
 \underline{\quad 2} \\
 0.3750
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \nearrow \\
 0.3750_x \\
 \underline{\quad 2} \\
 0.7500
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \nearrow \\
 0.7500_x \\
 \underline{\quad 2} \\
 1.5000
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \nearrow \\
 0.5000_x \\
 \underline{\quad 2} \\
 1.0000
 \end{array}$$

ดังนั้น เราจะเขียนตัวเลขที่อยู่หน้าทศนิยมของผลลัพธ์ของการคูณแต่ละครั้งได้คือ 0011_2

นั่นคือ $0.1875 = .0011_2$ ดังนั้น เราจะเขียนรวมกันทั้งสองส่วนได้ดังนี้ $21.1875 = 10101.0011_2$

แบบฝึกทักษะที่ 1.3.1 จงเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสิบ

1) 110_2

.....

.....

2) 10101_2

.....

.....

3) 1101.01_2

.....

.....

4) 1010.111_2

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 1.3.2 จงเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

1) 15

.....

.....

.....

2) 105

.....

.....

.....

3) 154.125

4) 3651.625

1.4 เซต(Sets)

ในทางคณิตศาสตร์เราจะไม่นิยามคำว่า "เซต" แต่เราใช้คำว่าเซตในความหมายของคำว่า กลุ่ม หมู่ เหล่า กอง ฝูง หรือ ชุด เป็นต้น โดยเมื่อเรากล่าวถึงเซตของสิ่งใดๆ แล้ว เราจะสามารถบอกได้เสมอว่าในเซตนั้นมีอะไรบ้าง

❖ ข้อสังเกตและคุณสมบัติที่สำคัญของเซต

ได้แก่

- สิ่งที่บรรจุอยู่ในเซตหนึ่งๆ เราเรียกว่า "สมาชิก" ของเซตนั้น
- เราใช้สัญลักษณ์ " \in " แทนคำว่า "เป็นสมาชิกของ"
- เครื่องหมาย " $\{ \dots \}$ " แทน เซต
- การเขียนเซตเรามักจะใช้อักษรอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทน "เซต" และอักษรอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทน "สมาชิก" ของเซต ซึ่งการเขียน อาจเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิก หรือ แบบบอกเงื่อนไขก็ได้
- ลำดับการเรียงตัวของสมาชิก ถือว่าไม่สำคัญ
- เซตจำกัด(Finite sets)คือ เซตที่สามารถบอกได้แน่นอนว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด เช่น $\{1, 2, 3, 4\}$
- เซตอนันต์(Infinite sets) คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- เอกภพสัมพัทธ์(Relative universe) คือ เซตที่กำหนดขอบเขตของสิ่งที่ต้องการศึกษาเขียนแทนด้วย U
- ขนาดของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วย $|A|$ ให้หมายถึง จำนวนสมาชิกในเซต A
- สมาชิกที่ปรากฏขึ้นในเซตหนึ่งมากกว่า 1 ครั้ง ให้ถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดิมและนับจำนวนเป็น 1 เสมอ
- เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เรียกว่า "เซตว่าง" และใช้สัญลักษณ์ $\{ \}$ หรือ \emptyset

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.4.1 จงเขียนเซตตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

$A = \{a \text{ โดยที่ } a \text{ เป็นเดือน 3 เดือนแรกของปีหนึ่งๆ}\}$ จะได้ว่า $A = \{\text{มกราคม, กุมภาพันธ์, มีนาคม}\}$

$B = \{b \text{ โดยที่ } b \text{ เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า } 0\}$ จะได้ว่า $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$C = \{c \text{ โดยที่ } c \text{ เป็นตัวประกอบของ } 30\}$ จะได้ว่า $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$D = \{d \text{ โดยที่ } d \text{ เป็นเดือนที่มีจำนวนวันมากกว่า } 31 \text{ วัน}\}$ จะได้ว่า $D = \{\}$

ซึ่งเราจะได้ว่า มกราคม $\in A$, $2 \in B$ และ $5 \in C$ เป็นต้น

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.1 จงเขียนเซตต่อไปนี้ ในรูปแบบการแจกแจงสมาชิก

- 1) เซตของอาหารที่ฉันชอบ =
- 2) เซตของเพื่อนสนิทของฉัน =
- 3) เซตของจำนวนเต็มที่มีน้อยกว่า 6 =
- 4) เซตของจำนวนเต็มลบที่เป็นเลขหลักเดียว =
- 5) เซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ =

❖ **ตัวอย่างของเซตที่ควรทราบ**

ตารางที่ 5 ตัวอย่างของเซตที่ควรทราบ

สัญลักษณ์	ความหมาย	เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น
I^+	เซตของจำนวนเต็มบวก	$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
I^-	เซตของจำนวนเต็มลบ	$\{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$
I หรือ Z	เซตของจำนวนเต็ม	$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
N	เซตของจำนวนนับ	$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ นั่นคือ $N \in I$
P	เซตของจำนวนเฉพาะที่เป็นบวก	$\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
Q	เซตของจำนวนตรรกยะ	
Q^c	เซตของจำนวนอตรรกยะ	
R	เซตของจำนวนจริง	

ข้อสังเกต เซตบางประเภทไม่สามารถเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.2 จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าข้อใดถูก และข้อใดผิด พร้อมทั้งแสดงเหตุผลด้วย

ข้อ	รูปแบบ	ถูก หรือ ผิด	คำอธิบาย
1	$2 \neq \{2\}$
2	$\{3\} = \{x \in I \mid x^2 = 9\}$

3	$\{2\} = \{x \in I \mid x^3 \leq 8\}$
4	$\{x \in I \mid x^3 \leq 8\}$ เป็นเซตอนันต์
5	$\{x \in I \mid x^2 < 0\} = \emptyset$
6	$\{x \in I^- \mid -5 < x < 0\}$ เป็นเซตอนันต์
7	$\{2,2,2,1,1,2\} = \{1,2\}$
8	$\{2,5,1,4,3\} = \{1,2,3,4,5\}$

❖ ความสัมพันธ์ของเซต และการกระทำกันระหว่างเซต

สับเซต (Subset) : เซต A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวในเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$ (และ $A \not\subset B$ แทนเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B) เช่น จากตัวอย่างที่ 1.4.1 จะเห็นว่า $C \subset B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ C เป็นสมาชิกของ B ด้วย

การเท่ากันของเซต: $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

เพาเวอร์เซต (Power set) : เพาเวอร์เซตของ A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A และ ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้วเพาเวอร์เซตของ A จะมีจำนวนสมาชิกทั้งหมด 2^n ตัว เราเขียน $P(A)$ แทนเพาเวอร์เซตของ A เช่น ถ้ากำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ แล้ว $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \emptyset\}$

การยูเนียนกันของเซต (Union): เซต A ยูเนียนเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่มาจากเซต A หรือเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \cup B = \{x \text{ โดยที่ } x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

การอินเตอร์เซกชันของเซต (Intersection): เซต A อินเตอร์เซกเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่มาจากเซต A และเซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A \cap B = \{x \text{ โดยที่ } x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

ผลต่างระหว่างเซต (Difference): ผลต่างของเซต A และเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกทั้งหลายที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A - B = \{x \text{ โดยที่ } x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

คอมพลีเมนต์ (Complement): คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่ไม่ได้อยู่ใน A แต่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ U ใช้สัญลักษณ์คือ A^c และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$$A^c = \{x \text{ โดยที่ } x \in U \text{ และ } x \notin A\}$$

❖ การหาจำนวนสมาชิกของเซต

ในการหาจำนวนสมาชิกของเซตที่เกิดจากการกระทำกันระหว่าง 2 เซตขึ้นไปนั้น สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ ดังนี้

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (1.2)$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (1.3)$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \tag{1.4}$$

$$|A^c| = |U| - |A| \tag{1.5}$$

ข้อควรจำ ในตำราบางเล่ม จะใช้สัญลักษณ์ " $n(A)$ " แทนจำนวนสมาชิกของเซต A

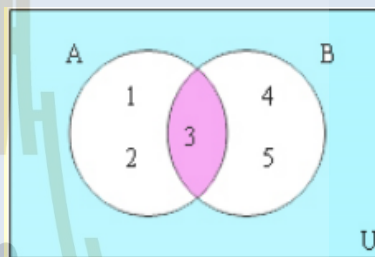
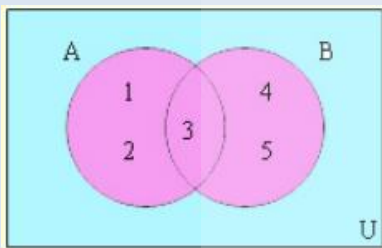
ตัวอย่างที่ 1.4.2 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ $B = \{3,4,5\}$ และเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1,2,3,4,5\}$

จงหา $A \cup B, A \cap B, A - B$, และ A^c

วิธีทำ เราสามารถใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์(Venn-Euler diagram) แสดงได้ดังนี้

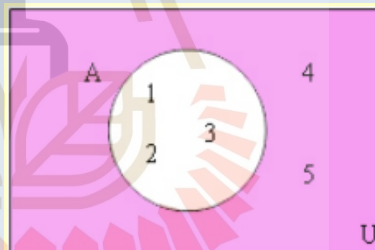
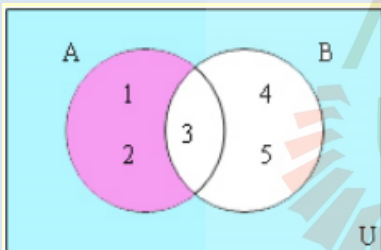
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A \cap B = \{3\}$$



$$A - B = \{1,2\}$$

$$A^c = \{4,5\}$$



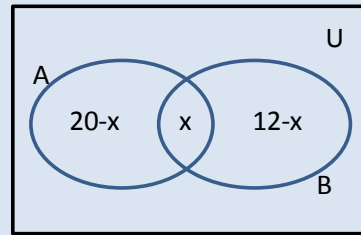
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 1.4.3 กำหนดให้ $|U| = 25$, $|A| = 20$, $|B| = 12$ และ $|(A \cup B)^c| = 4$

จงหา $|A \cap B|$

วิธีทำที่ 1

ให้ x เป็นจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ ดังแผนภาพทางขวามือนี้
เนื่องจากจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพสัมพัทธ์ เท่ากับ 25
จึงได้ว่า $(20 - x) + x + (12 - x) = 25$



ดังนั้น $x = 11 = |A \cap B|$

วิธีทำที่ 2

จากโจทย์ $|(A \cup B)^c| = 4$ และ $|U| = 25$ จึงได้ว่า $|A \cup B| = 21$

ใช้สูตร (1.2) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

แทนค่า จะได้ว่า $21 = 20 + 12 - |A \cap B|$

$$|A \cap B| = 11$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.4 กำหนดให้ $U = \{-5, -4, -3, -2, 1, \dots, 6, 7, 8\}$, $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า } 4\}$
และ $B = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$

1) จงเขียนแผนภาพของเวนน-ออยเลอร์ แสดงความสัมพันธ์ของเซตทั้ง 3 นี้

2) $|A \cup B| = \dots\dots\dots$ และ $|A \cap B| = \dots\dots\dots$

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.5 จากการศึกษาถามนักเรียนจำนวน 100 คน เกี่ยวกับการใช้เวลาว่าง พบว่า มี

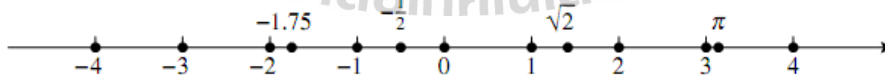
- 20 คน ที่ชอบทั้งเล่นกีฬาและเล่นดนตรีและดูภาพยนตร์
- 42 คน ที่ชอบเล่นดนตรีและชอบดูภาพยนตร์
- 38 คน ที่ชอบเล่นกีฬาและเล่นดนตรี
- 35 คน ที่ชอบเล่นกีฬาและดูภาพยนตร์
- 62 คน ที่ชอบดูภาพยนตร์
- 55 คน ที่ชอบเล่นดนตรี
- 48 คน ที่ชอบเล่นกีฬา

จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่ 1) ชอบกีฬาอย่างเดียว 2) ชอบดนตรีอย่างเดียว 3) ชอบดูภาพยนตร์อย่างเดียว

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.6นักเรียนห้องหนึ่งมี 48 คน ทำการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ และ ภาษาไทย
 ปรากฏผลดังนี้มีนักเรียน สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 20 คนสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ 15 คน สอบผ่านวิชา
 ภาษาไทย 25 คน สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว 10 คน สอบตกทั้ง 3 วิชา 3 คน จงหาว่า นักเรียนที่
 สอบได้ทั้งวิชาภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ มีกี่คน โดยวิธีการใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ และการ
 พิสูจน์โดยใช้สูตร (1.2)-(1.5)

1.5 ช่วง (Intervals)

ในเรื่องแคลคูลัสซึ่งเป็นแขนงหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากในด้านของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับปัญหา
 ทางวิศวกรรมศาสตร์ มักจะเกี่ยวข้องกับเซตต่างๆ ของจำนวนจริง ซึ่งถูกอ้างถึงในนามของ "ช่วง" ที่ปรากฏอยู่บนเส้นจำนวน
 ซึ่งตัวอย่างของเส้นจำนวน ดูจากแผนภาพข้างล่างนี้



ตัวอย่างเช่น ถ้า $a < b$ แล้ว;

- "ช่วงเปิด" จาก a ถึง b คือ ส่วนของเส้นจำนวนที่เริ่มจากจุด a ไปยังจุด b ซึ่งไม่รวมจุดเริ่มต้น (คือ a) และไม่รวมจุดสิ้นสุด(คือจุด b) ดังรูป



ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ และเซต ได้คือ $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

- "ช่วงปิด" จาก a ถึง b คือ ส่วนของเส้นจำนวนที่เริ่มจากจุด a ไปยังจุด b ซึ่งรวมทั้งจุดเริ่มต้น (คือ a) และรวมจุดสิ้นสุด(คือจุด b) ดังรูป



ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ และเซต ได้คือ $(a, b) = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

นอกจากนี้ ยังมีช่วงที่รวมจุดใดจุดหนึ่งเพียงจุดเดียว ซึ่งอาจเป็นจุดเริ่มต้น หรือ จุดสิ้นสุดก็ได้ ช่วงเหล่านี้ เรียกว่า "ช่วงครึ่งเปิด-ครึ่งปิด" ยิ่งไปกว่านั้น ช่วง ยังสามารถขยายไปยังถึงค่าอนันต์ในทิศทางใดทิศทางหนึ่งของเส้นจำนวน รูปแบบต่างๆ ของช่วงได้สรุปไว้ในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 6 ช่วงต่างๆ บนเส้นจำนวนจริง พร้อมสัญลักษณ์

ช่วง	เซต	บนเส้นจำนวน	ประเภท
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$		ช่วงเปิด
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$		ช่วงปิด
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$		ช่วงครึ่งปิด-ครึ่งเปิด
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$		ช่วงครึ่งเปิด-ครึ่งปิด
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$		ช่วงปิด
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$		ช่วงเปิด
$[a, +\infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$		ช่วงปิด
$(a, +\infty)$	$\{x \mid a < x\}$		ช่วงเปิด
$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}		ช่วงเปิดและปิด

ข้อสังเกต ช่วงต่างๆ ที่ปรากฏในตารางข้างบนนี้ ล้วนแล้วแต่เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงทั้งสิ้น

ตัวอย่างที่ 1.5.1 สำหรับการกระทำกับของช่วงตั้งแต่ 2 ช่วงขึ้นไป เพื่อการเห็นภาพที่ชัดเจน มักจะพิจารณาช่วง

ในรูปของเซต(และกำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง) แทน ดังนี้

$$1) (0,5) \cup (1,7) = \{x \mid 0 < x < 5\} \cup \{x \mid 1 < x < 7\} = \{x \mid 0 < x < 7\} = (0,7)$$

$$2) (-\infty, 1) \cap [0, +\infty) = \{x \mid x < 1\} \cap \{x \mid 0 \leq x\} = \{x \mid 0 \leq x < 1\} = [0,1)$$

$$3) (-\infty, 0) \cap (0, +\infty) = \{x \mid x < 0\} \cap \{x \mid 0 < x\} = \emptyset$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.5.1จงพิจารณาการกระทำกันของช่วงแต่ละกลุ่มในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยการเขียนแทนในรูปของเซตและวาดภาพเส้นจำนวนประกอบด้วย

$$1) [(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)] \cap (-3,3]$$

$$2)[(-10,0) \cap (-5,5)] \cap (0, +\infty)$$

$$3)[\mathbb{R} - (-\infty, -1)] \cap (100,102)$$

$$4)[(-\infty, -3) \cup (-2, -1)] \cap [(3, +\infty) \cup (1,2)]$$

1.6 อสมการ(Inequalities) และการหาช่วงของผลเฉลย(Solutions Finding)

❖ ความหมายของอสมการ

อสมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงการไม่เท่ากันของสิ่ง 2 สิ่ง โดยมีเครื่องหมาย "มากกว่า" $>$ "น้อยกว่า" $<$ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ" \leq "มากกว่าหรือเท่ากับ" \geq หรือ เครื่องหมาย "ไม่เท่ากับ" \neq เช่น $3x + 1 \geq 5$ และตัวที่ไม่ทราบค่า x เราเรียกว่า "ตัวแปร"

อสมการมีอยู่หลายประเภท ทั้งแบบที่เป็นเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น ตัวแปรเดียว หลายตัวแปร กำลังหนึ่ง หรือ มากกว่า อย่างไรก็ตาม ในเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จะได้มีการนำเสนอเพียงบางรูปแบบของอสมการเท่านั้น

❖ คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของระบบอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้วจะได้ว่า $a < c$

เช่น $-6 < -1$ และ $-1 < 0$ แล้วจะได้ว่า $-6 < 0$

2. ถ้า $a < b$ แล้วจะได้ว่า $a + c < b + c$ และ $a - c < b - c$

เช่น $-5 < 5$ แล้วจะได้ว่า $-5 + 1 < 5 + 1$ และ $-5 - 1 < 5 - 1$

3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้วจะได้ว่า $ac < bc$

เช่น $-5 < 3$ แล้วจะได้ว่า $-5(2) < 3(2)$ ซึ่งในที่นี้ $c = 2$

4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้วจะได้ว่า $ac > bc$

เช่น $-5 < 3$ แล้วจะได้ว่า $-5(-2) > 3(-2)$ ซึ่งในที่นี้ $c = -2$

5. ถ้า a, b เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือ เป็นจำนวนลบทั้งคู่ และ $a < b$ แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

เช่น $-5 < -3$ แล้วจะได้ว่า $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.6.1 จงพิจารณาหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการดำเนินการที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนด	การดำเนินการ	ผลลัพธ์ที่ได้
$-5 < 3$	บวกเข้าด้วย 8 ทั้งสองข้าง	
$-5 < 3$	ลบออกด้วย 4 ทั้งสองข้าง	
$-5 < 3$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย 2	
$-5 < 3$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย -2	
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย 5	
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย -5	
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย $-\frac{1}{2}$	
$-4 < -1$	นำแต่ละข้างไปหาร 1	

❖ **อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและการหาผลเฉลย**

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ อสมการที่มีตัวแปรเพียง 1 ตัว และมีกำลังสูงสุดเป็น 1 เท่านั้น เช่น $3x + 1 \geq -2x + 5$ หรือ $5x \neq -10x$ เป็นต้น

ในการหาผลเฉลยของอสมการนี้ คำตอบจะสามารถมีจำนวนอนันต์ ดังนั้น เวลาตอบ มักจะให้เป็นเซตหรือช่วงของผลเฉลย ลักษณะการแก้อสมการประเภทนี้ สามารถดูได้จากตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 1.6.1 จงหาเซตหรือช่วงของคำตอบ ของอสมการ $3 + 7x \leq 2x - 9$

วิธีทำ

การดำเนินการ	ผลที่ได้
โจทยกำหนด	$3 + 7x \leq 2x - 9$
บวกเข้าทั้งสองข้างด้วย -3	$7x \leq 2x - 12$
ลบออกทั้งสองข้างด้วย $2x$	$5x \leq -12$
คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย $\frac{1}{5}$	$x \leq -\frac{12}{5}$

ดังนั้นช่วงของคำตอบของอสมการนี้คือ $(-\infty, -\frac{12}{5}]$

ข้อสังเกต การดำเนินการทางพีชคณิตดังแสดงในตัวอย่างที่ 1.6.2 นี้ จะให้ผลเช่นเดียวกับหลักการ "ย้ายข้าง" ที่นักศึกษาส่วนใหญ่เข้าใจกัน

แบบฝึกทักษะที่ 1.6.2 จงพิจารณาหาช่วงหรือเซตของคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x - 2 \geq 13 - x$

.....

.....

.....

2) $\sqrt{2}x + 10 \leq -3\sqrt{2}x + 20$

.....

.....

.....

3) $2x + 6 < 1 - \frac{x}{2}$

.....

.....

.....

4) $\frac{x}{2} + \frac{2}{5} > \frac{-1}{10}$

.....

.....

.....

5) $\frac{x}{2} + \frac{2}{5} \geq \frac{-x}{10} - 2$

.....

.....

.....

6) $\frac{2x}{5} + 7 > \frac{13}{5}$

.....

.....

.....

1.7 สมการ(Equations) และการหาผลเฉลย(Solution Finding)

❖ ความหมายของสมการ

สมการ หมายถึง การเท่ากันสมการในวิชาคณิตศาสตร์หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย " $=$ " แสดงการเท่ากันของทั้งสองข้างของเครื่องหมาย "เท่ากับ" ดังกล่าว สมการอาจมีความ "เป็นจริง" หรือไม่มีก็ได้ เช่น

- สมการที่เป็นจริงเช่น $10 - 1 = 9$
- สมการที่ไม่เป็นจริงเช่น $19 / 8 = 4$

ประโยคสัญลักษณ์ไม่ใช่เครื่องหมาย " $=$ " ถือว่าไม่เป็นสมการ และถ้าในสมการมีตัวไม่ทราบค่ารวมอยู่ด้วย เราเรียกตัวไม่ทราบค่านี้ว่า "ตัวแปร" หรือ "ตัวไม่ทราบค่า (Unknowns)" เช่น $2x + 5 = 10$ เราเรียก x ว่าเป็นตัวแปร

❖ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวคือ สมการที่สามารถถูกจัดรูปได้ในรูปแบบ $Ax = B$ เมื่อ $A \neq 0$ และ B เป็นจำนวนจริงใดๆ และ x เป็นตัวแปรที่เราต้องการทราบค่า ตัวอย่างของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้แก่ ทุกข้อในแบบฝึกทักษะที่ 1.5.2

การหาผลเฉลยหรือการแก้สมการ หมายถึง การหาค่าของตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าที่ปรากฏอยู่ในสมการ และอาจมีจำนวนมากกว่า 1 ตัวก็ได้ ในกระบวนการแก้สมการนี้ ง่ายที่สุดคือการจัดรูปให้ตัวแปรมารวมกันอยู่ฝั่งเดียวของสมการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.1 จงหาค่าของ x ที่ทำให้แต่ละสมการต่อไปนี้ เป็นจริง

วิธีทำ

$$1) \quad 2x - 20 = 24$$

$$2x = 24 + 20$$

$$2x = 44$$

$$x = \frac{44}{2}$$

ดังนั้น $x = 22$

$$2) \quad \frac{x+3}{2} = 3x$$

$$x + 3 = 2(3x) = 6x$$

$$x + 3 - 6x = 0$$

$$(1 - 6)x + 3 = 0$$

$$-5x = -3$$

ดังนั้น $x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

$$3) \quad 3x - 5 = \frac{x}{2} - 1$$

$$3x - 5 = \frac{x - 2}{2}$$

$$2(3x - 5) = x - 2$$

$$6x - 10 = x - 2$$

$$6x - x = -2 + 10$$

$$(6 - 1)x = 8$$

$$(5)x = 8$$

ดังนั้น $x = \frac{8}{5}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.7.1 จงพิจารณาหาค่าของ x ที่ทำให้แต่ละสมการในข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

$$1) 3x - 2 = 13 - 2x$$

$$2) \sqrt{2}x + 12 = -3\sqrt{2}x + 20\sqrt{2}$$

$$3) \frac{2+3x}{5x} = 1$$

$$4) \frac{x}{2} + \frac{2}{5} = \frac{-6}{10}$$

$$5) \frac{x}{2} + \frac{3}{5} = \frac{x}{10} - 3$$

$$6) \sqrt{2x} + 7 = 10$$

$$7) \frac{1+x}{2x} + \frac{-3}{7} = 1$$

$$8) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{2x}{5} = -26$$

❖ สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร และการแก้

สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร หมายถึง สมการที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ เช่น $3x + 2y - z = 5$

ในการแก้สมการประเภทนี้ คือ มี 1 สมการ แต่มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว โดยทางคณิตศาสตร์เป็นที่ทราบกันดีว่า สมการรูปร่างดังกล่าวนี้ สามารถมีผลเฉลยได้จำนวนนับไม่ถ้วน ดูตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.2 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2x - 20y = 2$

วิธีทำ สมการ $5x - 20y = 2$ มีความเทียบเท่ากับ สมการ $5x = 20y + 2$ (โดยการบวกเข้าด้วย $20y$ ทั้งสองข้างนั่นเอง) และยังเทียบเท่ากับ $x = \frac{20y+2}{5}$ ดังนั้น เราจะเห็นว่า เมื่อเรากำหนดค่า y ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ เราก็จะได้ค่าของ x ทันที แสดงว่า ค่า y สามารถเป็นจำนวนจริงตัวไหนก็ได้ ก็จะได้ค่าของ x ที่เป็นคู่ของมัน ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง ตัวอย่าง คือ เมื่อ $y = 1$ จะได้ $x = \frac{22}{5}$ และเมื่อ $y = 2$ จะได้ $x = \frac{42}{5}$ อย่างนี้ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด จึงบอกได้ว่า จำนวนผลเฉลยของสมการนี้ มีจำนวนไม่จำกัดหรือเป็นจำนวนอนันต์ นั่นเอง

❖ ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร และการแก้

ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรหมายถึง กลุ่ม(ที่มีจำนวนจำกัด)ของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร ตัวอย่างเช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 4 สมการ และมีตัวแปรทั้งหมดเป็นจำนวน 6 ตัวแปร เขียนได้ ดังนี้

$$5x + 2y - 10z - w + 3u - 2v = 5 \tag{1.6}$$

$$x + y - 12z - w + u - 12v = 20 \tag{1.7}$$

$$-5x + 6y - z + 3u - 5v = -32 \tag{1.8}$$

$$2y - 10z - 3u - 22v = 25 \tag{1.9}$$

ซึ่งเราจะกล่าวว่า "ผลเฉลย" ของระบบสมการนั้น คือ กลุ่มของค่าของตัวแปร x, y, z, w, u, v ที่ทำให้แต่ละสมการข้างบนนี้เป็นจริงพร้อมกัน และจะเรียกผลเฉลยชุดดังกล่าวว่า "เซตของผลเฉลย" ของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อเรามีระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรอยู่ระบบหนึ่ง เราจะได้ตัวอย่างใดอย่างหนึ่งในข้อต่อไปนี้เสมอ

1. ระบบสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย หรือ
2. ระบบสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเพียง 1 ชุดผลเฉลย (หรือมีเพียง 1 เซตของผลเฉลย) หรือ
3. ระบบสมการดังกล่าวมีจำนวนผลเฉลยที่นับไม่ถ้วน หรือมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรนั้น สามารถทำได้หลายวิธี เช่น โดยวิธีกำจัดตัวแปร โดยการใชการวาดกราฟ โดยปกติแล้ว 2 วิธีไม่เป็นที่สะดวกนักเมื่อเรามีระบบสมการที่ใหญ่ที่ประกอบด้วยหลายตัวแปรและหลายสมการ ดังนั้น เมื่อเรามีระบบสมการเชิงเส้นที่ใหญ่ขึ้น จำเป็นที่จะต้องใช้ความรู้ทางเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ ซึ่ง

บรรจุอยู่ในหัวข้อ 2.4 ไปในเอกสารนี้ ดังนั้น ในเบื้องต้นนี้ จักขอยกตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปรก่อน ซึ่งสามารถแสดงการหาผลเฉลยได้โดยง่ายดังตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.3 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ระบบสมการสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรข้างล่างนี้ เป็นจริง

$$2x + y = 2 \quad (1)$$

$$3x - y = 8 \quad (2)$$

วิธีทำจากสมการ (1) เราจะได้ว่า $y = 2 - 2x$ (3)

นำค่า y ที่ได้ใน (3) ไปแทนใน (2) จะได้ $3x - (2 - 2x) = 8$ (4)

ทำการแก้สมการ (4) เพื่อหาค่า x $3x - 2 + 2x = 8$
 $(2 + 3)x = 8 + 2$

$$5x = 10$$

$$x = \frac{10}{5} = 2 \quad (5)$$

นำค่า x ที่ได้ใน (5) ไปแทนใน(3) เพื่อหาค่า y $y = 2 - 2x = 2 - 2(2) = -2$

ดังนั้น จึงได้ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวนี้คือ $(x, y) = (2, -2)$

เราสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.7.3 ได้ โดยใช้วิธีกำจัดตัวแปรทีละตัว ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างที่ 1.7.4

ตัวอย่างที่ 1.7.4 จงหาค่าของ x, y ที่ทำให้ระบบสมการสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรข้างล่างนี้ เป็นจริง

$$2x + y = 2 \quad (1)$$

$$3x - y = 8 \quad (2)$$

วิธีทำนำสมการที่ (1) รวมเข้ากับสมการที่ (2) เพื่อกำจัดตัวแปร y จึงได้ทันทีว่า $(2x + 3x) + (y - y) = (2 + 8)$ (3)

$$5x = 10$$

ดังนั้น $x = \frac{10}{5} = 2$ (4)

นำค่า x ที่ได้ใน (4) ไปแทนใน(2) เพื่อหา

ค่า y $3(2) - y = 8$
 $-y = 8 - 3(2) = 2$
 $y = -2$

ดังนั้น จึงได้ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวนี้คือ $(x, y) = (2, -2)$

แบบฝึกทักษะที่ 1.7.2 จงใช้วิธีการที่ถนัดในการหาค่าของ x , y ที่ทำให้แต่ละระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรในข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

1) $-x + 5y = 13$
 $2x + y = 7$

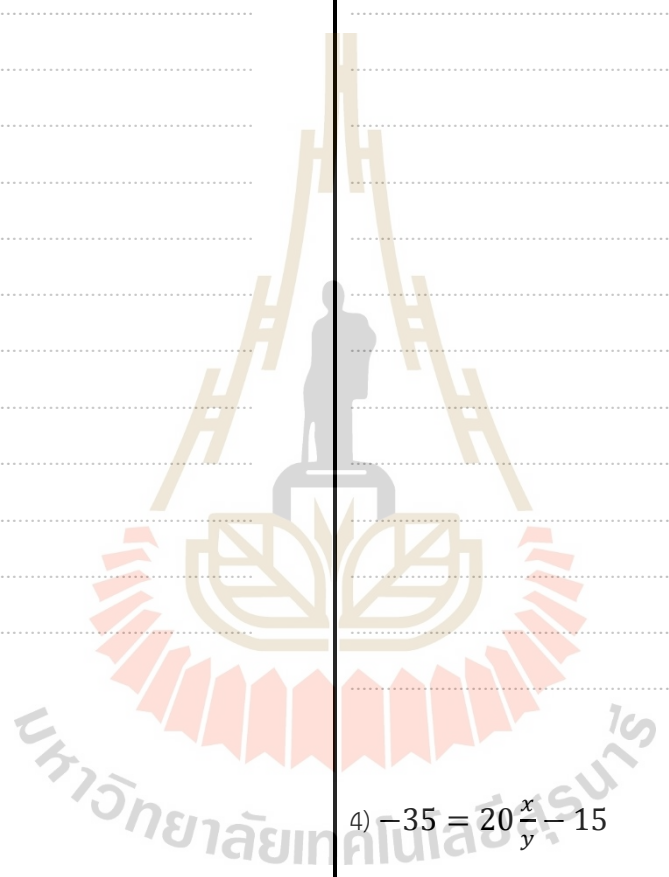
2) $2x + 10y = 16$
 $x - 2y = 1$

3) $\frac{2}{3}x + 5y = 43$

$\frac{2}{9}x + y = 25$

4) $-35 = 20\frac{x}{y} - 15$

$\frac{y}{x} + 11 = 10$



$$5) \frac{x}{2} + \frac{2}{5} = \frac{y}{10} - 2$$

$$\frac{x}{2} + 7\frac{y}{2} = 39$$

$$6) x - 1 = y$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{2y}{5} = -3$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

❖ ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรในเชิงกราฟ

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ใน 2 มิติ ในเชิงกราฟแล้ว คือ การหาจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้น ที่อธิบายโดยสมการแต่ละสมการในระบบนั้น ดังนั้น จึงเกิดกรณีที่เป็นไปได้อยู่ 3 กรณี นั่นคือ เส้นตรง 2 เส้นนั้น

1. ขนานกัน นั่นคือ ไม่ตัดกัน หมายถึง ไม่มีผลเฉลย

เช่น เส้นตรง $y = 2x + 1$ และเส้นตรง $y = 2x - 21$

2. ตัดกัน ซึ่งหมายถึง มีผลเฉลย 1 ชุดผลเฉลย

เช่น เส้นตรง $y = 2x + 1$ และเส้นตรง $y = 3x - 7$

3. เป็นเส้นเดียวกัน หมายถึง มีผลเฉลยเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน

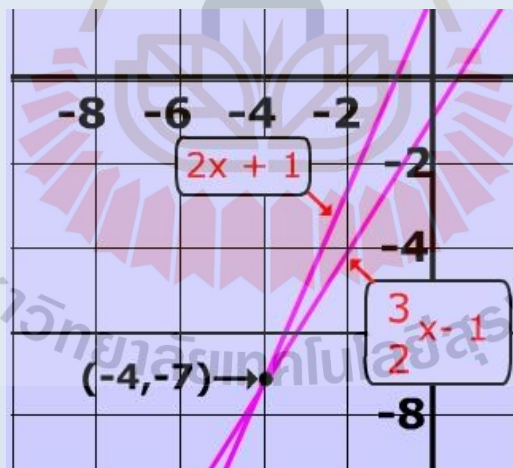
เช่น เส้นตรง $y = 2x + 3$ และเส้นตรง $3y = 3x + 9$

ตัวอย่างที่ 1.7.5 จงหาค่าพิกัด (x, y) ในระนาบ 2 มิติ ที่เป็นจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้นที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟแสดงจุดตัดนั้นด้วย

$$2x + 1 = y \quad (1)$$

$$2y = 3x - 2 \quad (2)$$

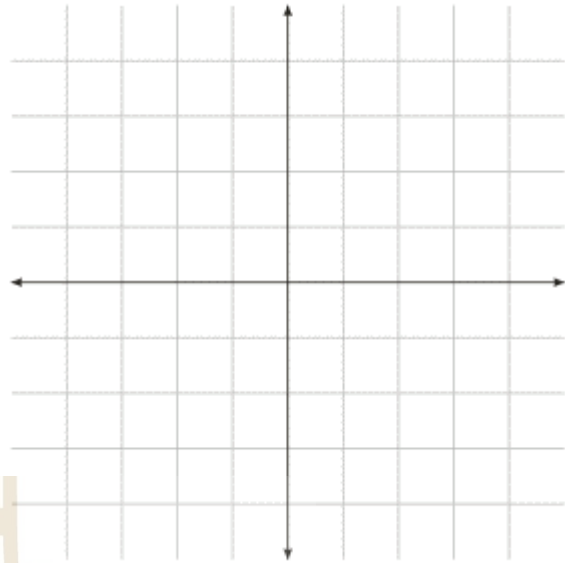
วิธีทำ โดยการใช่วิธีการหาผลเฉลยเหมือนในตัวอย่างที่ 1.7.3 หรือในตัวอย่างที่ 1.7.4 จะได้ผลเฉลยคือ $x = -4, y = -7$ ซึ่งเราสามารถเขียนกราฟของเส้นตรงทั้ง 2 เส้นนั้น พร้อมด้วยจุดตัดซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าวได้ดังนี้ (โดยกำหนดให้แกน x คือแกนในแนวนอน และแกน y คือแกนในแนวตั้งในรูป)



แบบฝึกทักษะที่ 1.7.3 โดยการแบ่งสเกลบนแกนที่เหมาะสม จงพิจารณาระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรแต่ละคู่ต่อไปนี้ว่ามีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามี ให้หาผลเฉลยนั้น และใช้การวาดกราฟ ในการยืนยันผลเฉลยนั้นด้วย

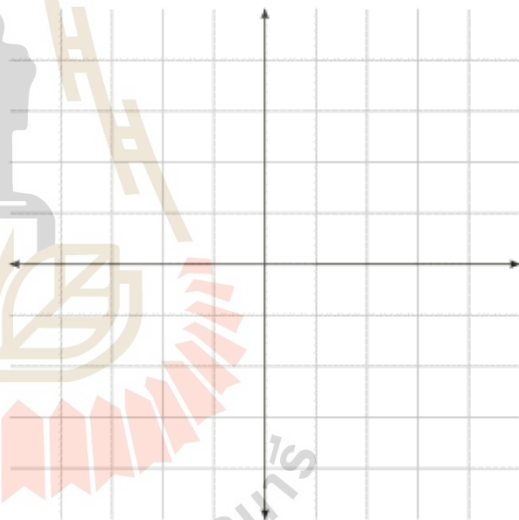
1) $2x - y - 1 = 0$

$4x - y - 3 = 0$



2) $x - 3y + 7 = 0$

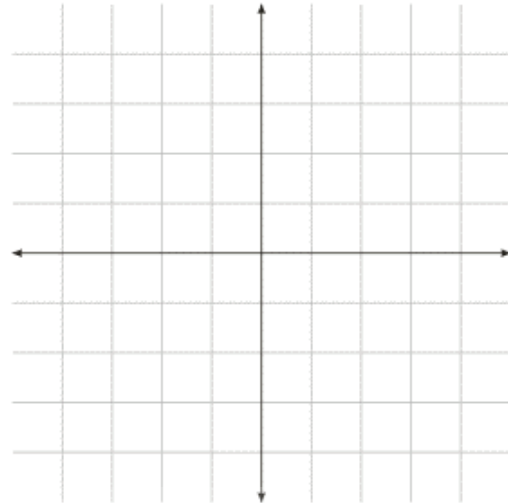
$4x - \frac{1}{2}y + 5 = 0$



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

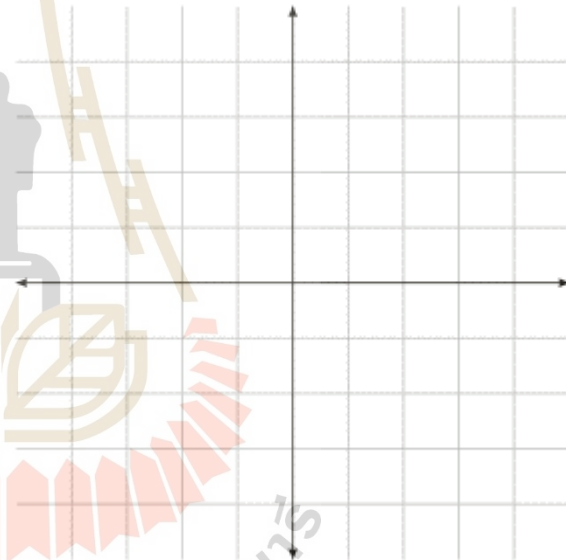
3) $5x - 10y = 20$

$x - y - 1 = 0$



4) $x - 10 = y - 11$

$6x + 1 = y - 10$



1.8 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปรมาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาในเรื่องของการนำกระบวนการแก้ระบบสมการดังกล่าวมาใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งการศึกษาเรื่องนี้ สิ่งที่คุณจะได้ศึกษาคือการเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือ การเปลี่ยนปัญหาจริงให้อยู่ในรูปของสมการ หรือระบบสมการทางคณิตศาสตร์ ต่อจากนั้นจะได้นำเอาวิธีการที่ศึกษาในหัวข้อที่แล้ว มาหาผลเฉลยของสมการหรือระบบสมการนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.6 จำนวน 2 จำนวน ซึ่งมีผลต่างเท่ากับ 6 และเมื่อรวมกันแล้วเท่ากับ 9 จงหาจำนวน 2 จำนวนนั้น

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนแรกคือ x และจำนวนที่สองคือ y และสมมติให้ x มากกว่า y จากโจทย์ สองจำนวนมีผลต่างเท่ากับ 6 หมายถึง

$$x - y = 6 \quad (1)$$

และสองจำนวนนี้รวมกันแล้วได้ 9 หมายถึง

$$x + y = 9 \quad (2)$$

จากสมการที่ (2) เราจะได้ว่า $x = 9 - y$ และนำไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$(9 - y) - y = 6$$

$$-2y = 6 - 9$$

$$-2y = -3$$

$$y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

นำค่า y ที่ได้ ไปแทนสมการที่ (1) เพื่อหาค่าของ x จะได้ว่า

$$x = 6 + y = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

ดังนั้น จำนวน 2 จำนวนนั้นคือ $\frac{3}{2}$ และ $\frac{15}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.7.7 ผลการแข่งขันกีฬาน้องใหม่ มทส. ปรากฏว่า วิชาติ ได้จำนวนเหรียญรวมมากกว่าดน้อยอยู่

4 เหรียญ และจำนวนเหรียญของทั้งคู่รวมกันได้ 28 เหรียญ จงหาว่า แต่ละคนได้เหรียญรวมคนละกี่เหรียญ

วิธีทำ กำหนดให้ x เป็นจำนวนเหรียญรวมที่วิชาติได้ และ y เป็นจำนวนเหรียญรวมที่ดน้อยได้ ในการแข่งกีฬาน้องใหม่ มทส. ครั้งนี้

จากโจทย์ เราจะได้ว่า

$$x - y = 4 \quad (1)$$

$$\text{และ } x + y = 28 \quad (2)$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยคือ $x = 16$ และ $y = 12$

นั่นคือ วิชาติได้เหรียญรวมทั้งหมด 16 เหรียญ และดน้อยได้เหรียญรวมทั้งหมด 12 เหรียญ

แบบฝึกทักษะที่ 1.7.4 จงเปลี่ยนปัญหาต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร พร้อมทั้งหาผลเฉลยโดยวิธีที่ถนัด

1. ถ้าเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งยาวเป็น 230 เมตร และด้านยาวยาวมากกว่า 2 เท่าของด้านกว้างอยู่ 10 เมตร จงหา ด้านกว้างและด้านยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้

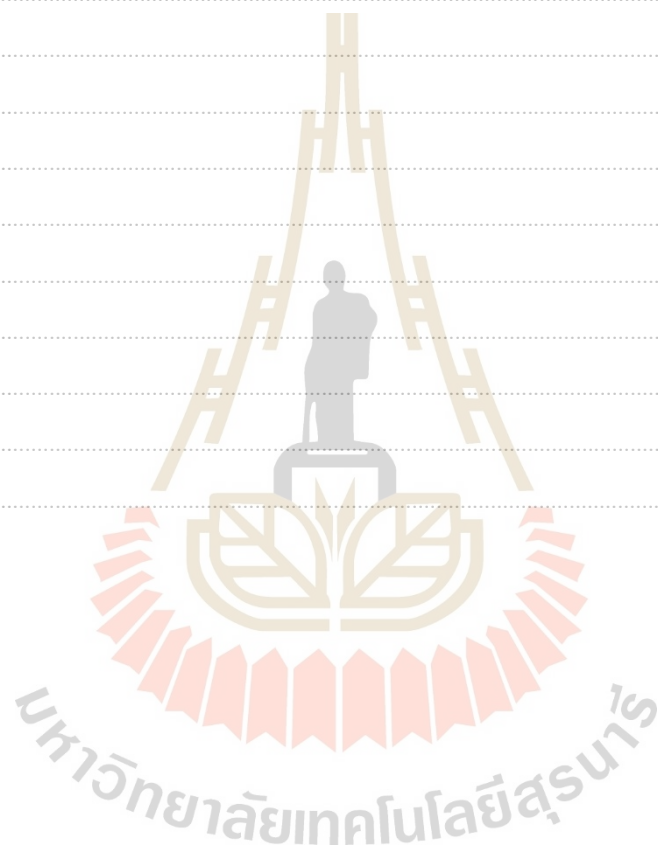
2. คืนวันหนึ่ง ผู้จัดการโรงแรมราชสีมาฮาเฮได้เปิดห้องพักประเภทเดียวให้ลูกค้าเช่าเป็นจำนวน 5 ห้อง และห้องคู่อีก 12 ห้อง ในราคารวม 10,900 บาท คืนต่อมา ผู้จัดการคนเดิมนี้อได้เปิดห้องเดียวให้ลูกค้าเช่าเป็นจำนวน 9 ห้อง และห้องคู่อีก 10 ห้อง ในราคารวม 11,500 จงหาว่าราคาเช่าห้อง ของห้องแต่ละประเภทคือเท่าใด

3. ถ้าราคาตัวเข้าชมพิพิธภัณฑ์ผีเสื้อ มทส. สำหรับผู้ใหญ่เป็น 30 บาท และเด็ก 20 บาทต่อคน และในการจัดแสดงผีเสื้อครั้งหนึ่ง รายได้จากการขายตั๋วได้รวมกันเป็นเงิน 8,400 บาท และจำนวนตัวผู้ใหญ่ที่ขายไปรวมแล้ว คิดเป็น 2 เท่าของจำนวนตั๋วที่จำหน่ายให้กับเด็ก แล้ว จงหาว่า จำนวนตัวทั้งหมดที่จำหน่ายไป มีจำนวนเท่าใด

4. นายอุทิศ ได้เข้าร่วมการแข่งขันกีฬาน้องใหม่ มทส. ในประเภทกีฬาบาสเกตบอล และในการแข่งขันครั้งล่าสุด นายอุทิศสามารถทำแต้มได้ทั้งสิ้น 35 แต้ม โดยในนี้ ไม่มีประเภทชู้ต 3 แต้มเลย และเขาได้ทำการชู้ตทั้งหมดเป็นจำนวน 20 ครั้ง ซึ่งเป็นการชู้ตอยู่ 2 ประเภทคือ ประเภทปกติ (ครั้งละ 2 แต้มต่อครั้ง) และชู้ตลูกโทษ (ครั้งละ 1 แต้มต่อครั้ง) จงหาค่า นายอุทิศ ชู้ตลูกโทษไปทั้งหมดกี่ครั้ง

5. ถ้าเครื่องบินเล็กสามารถบินได้ระยะทาง 4000 กิโลเมตร ใช้เวลาเท่ากับเวลาที่เครื่องบินลำใหญ่สามารถบินได้เป็นระยะทาง 5,000 กิโลเมตร และถ้า เครื่องบินลำใหญ่บินได้ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วของเครื่องบินลำเล็กอยู่ 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แล้ว จงหาความเร็วของเครื่องบินทั้งสองลำ (แนะ ระยะทาง เท่ากับ ความเร็วคูณด้วยเวลาที่ใช้)

6. นายคณิตขับรถด้วยความเร็วเฉลี่ยที่ 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมงจากหมู่บ้าน ก. ไปถึงหมู่บ้าน ข. และขับต่อจากหมู่บ้าน ข. ไปยังหมู่บ้าน ค. ด้วยความเร็วเฉลี่ยที่ 49 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าคณิตขับเป็นระยะทางรวมเท่ากับ 1800 กิโลเมตรในเวลา 20 ชั่วโมงแล้ว จงหาระยะทางจากหมู่บ้าน ข. ไปยังหมู่บ้าน ค.



แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท(Additional Exercise)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย อสมการ และสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. จงหาคำตอบของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. \frac{5}{8}(p - 4) = 2$$

$$2. p + \frac{1}{3}p = \frac{2}{3}$$

$$3. 0.07x + 9.95 = 12.47$$

$$4. -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5. \frac{x}{4} - \frac{3x}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$6. 2.4b + 5.6 = -11.2$$

$$7. 4x + 2 = -28.4$$

$$8. \frac{1}{3}(x - 9) = -1$$

$$9. \frac{2}{7}k - \frac{1}{14}k = -3$$

$$10. 0.4(a + 2) = 2$$

$$11. \frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{2}$$

$$12. 1.2c + 2.6c = 4.56$$

2. จงหาช่วงของคำตอบของอสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1) 3 < -5n + 2n$$

$$2) 6x + 2 + 6x < 14$$

$$3) -p - 4p > -10$$

$$4) 18 \geq 5k + 4k$$

$$5) 9 \geq -2m + 2 - 3$$

$$6) -3 - 6(4x + 6) > -111$$

$$7) 6 - 4(6n + 7) \geq 122$$

$$8) -138 \geq -6(6b - 7)$$

$$9) 167 < 6 + 7(2 - 7r)$$

$$10) 5(6 + 3r) + 7 \geq 127$$

$$11) -8x + 2x - 16 < -5x + 7x$$

$$12) -1 - 6x - 6 > -11 - 7x$$

$$13) a - 6 \leq 15 + 8a$$

$$14) 13 + 2v - 8 + 6 > -7 - v$$

2 Extra) จงหาช่วงของคำตอบของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $2x + \frac{x}{4} \geq 1 + 3x$

6. $\frac{x}{6} + 32 \geq 5x + 7$

2. $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 2x + 3$

7. $3x + \frac{2}{3} < -5x + \frac{7}{2}$

3. $-5x + 1 \geq \frac{x}{2} + \frac{3}{5}$

8. $-\frac{3}{4}x + 9 \geq -\frac{5}{2}x + 2$

4. $-2x + \frac{2}{3}x > \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

9. $\frac{5}{6}x + \frac{2}{3} > 9$

5. $15x + 3 \leq 2x + \frac{3}{2}$

10. $4x + \frac{5}{2} \leq \frac{7x}{2} + \frac{1}{2}$

3. จากโจทย์ต่อไปนี้ จงหาผลเฉลย

- 3.1. จำนวนจำนวนหนึ่งเมื่อคูณเข้าด้วย 2 และนำไปรวมกับ 7 แล้วจะได้ผลลัพธ์คือ 93 ถามว่า จำนวนที่ว่านั้นคืออะไร
- 3.2. 5 เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งลบออกด้วย 6 จะได้ค่าเท่ากับ 7 เท่าของตัวมันพอดี จำนวนที่ว่านั้นคืออะไร
- 3.3. พืชพันธ์เป็นพนักงานเสิร์ฟในร้านอาหารแห่งหนึ่งได้รับค่าจ้าง 5.75 ดอลลาร์ต่อชั่วโมง โดยมีทิปจากลูกค้าอีกด้วยซึ่งโดยเฉลี่ยแล้วเขาจะได้ทิปเป็นเงิน 8.8 ดอลลาร์ต่อโต๊ะ ในแต่ละวันจงหาว่าถ้าวันหนึ่งเขาทำงาน 8 ชั่วโมงและได้เงินรวมเป็นจำนวนทั้งสิ้น 169.2 ดอลลาร์ แล้วจงหาว่าที่ร้านอาหารนี้มีกี่โต๊ะ
- 3.4. รถไฟสองขบวนออกจากสถานีพร้อมกัน ขบวนแรกไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 50 กม.ต่อชั่วโมง ส่วนอีกขบวนไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 55 กม.ต่อชั่วโมง จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าไรรถไฟสองขบวนนี้จึงจะอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 315 กม.พอดี
- 3.5. ในฤดูอากาศอบอุ่นเราสามารถประมาณอุณหภูมิได้จากการนับจำนวนครั้งที่จิ้งหรีดร้องใน 1 นาที โดยที่อุณหภูมิจะลดลง 40 ฟาเรนไฮท์ จะเท่ากับ $\frac{1}{4}$ เท่าของจำนวนที่จิ้งหรีดร้องในหนึ่งนาที จงหาว่า
 - 3.5.1 จิ้งหรีดจะร้องประมาณกี่ครั้งต่อนาที ถ้าพบว่าอุณหภูมิอยู่ที่ 90 องศาฟาเรนไฮท์
 - 3.5.2 ถ้าจากการบันทึกพบว่าจิ้งหรีดร้อง 48 ครั้งในหนึ่งนาที แล้วอุณหภูมิควรเป็นกี่องศาฟาเรนไฮท์
- 3.6. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งเมื่อไปรวมกับจำนวนเต็มบวกที่อยู่ถัดไป (ตัวที่ 1) และตัวถัดไปอีก (ตัวที่ 2) แล้วจะมีค่าเท่ากับ 9 จำนวนเต็มบวกนี้คืออะไร
- 3.7. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านประกอบด้านแรกยาวเป็น $\frac{1}{3}$ ของเส้นรอบรูปและด้านประกอบด้านที่ 2 ยาวเป็น $\frac{1}{5}$ เท่าของเส้นรอบรูป และมีด้านประกอบด้านที่ 3 ยาว 7 เมตร จงหาว่าความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมนี้ยาวเท่าไร
- 3.8. เรือสำราญลำหนึ่งใช้เวลาในการแล่นทวนกระแสน้ำระยะทาง 360 กม.เป็น 1.5 เท่าของเวลาที่ใช้แล่นกลับตามกระแสน้ำ ถ้าเรือลำนี้แล่นที่ความเร็ว 15 กม.ต่อชั่วโมงในน้ำนิ่ง แล้วกระแสน้ำมีความเร็วเท่าใด

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

1.1) $y = -4x + 5$

$y = 3x - 9$

1.4) $y = x + 6$

$y = -2x$

1.7) $3x - 2y = 6$

$x - y = 2$

1.10) $7x+4y=-5$

$-2x+5y=26$

1.13) $7x - 2y=2$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = \frac{1}{7}$

1.16) $3x+2y=1$

$4x-3y=26$

1.2) $y = -3x + 7$

$y = 2x - 3$

1.5) $y = 4x - 3$

$y = -2x + 9$

1.8) $x + y = 4$

$2x + 2y = 10$

1.11) $2x+4y=-12$

$3x + 5y = -16$

1.14) $6x+5y=28$

$7x + 2y = 2$

1.17) $3x-2y=4$

$12x - 8y = 16$

1.3) $x + 3y = 6$

$x - 3y = 6$

1.6) $3x - 2y = 4$

$y = -2x + 5$

1.9) $3x+4y=10$

$-6x+3y=-9$

1.12) $x+2y=5$

$2x+4y=1$

1.15) $3x-2y=1$

$9x-6y=3$

1.18) $2x+4y=11$

$6x+2y=3$

1.Extra) จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

1) $2x + y = -2$

$x - 2y = 2$

2) $3x = -1 - 2y$

$5x + 4y = 6$

3) $3y = 5 - 2x$

$5x - 6y = 10$

4) $x + y = 5$

$x - y = 12$

5) $3x - 5y = 7$

$x = 10 - 6y$

6) $y = -2 - 5x$

$6y = 6 - 2x$

7) $7x = 2 + 5y$

$5y = 6 + 3x$

8) $5y = 10 + 6x$

$3x + 6y = 9$

9) $-2x = 9 + 3y$

$2x - 5y = 10$

10) $x - 5 = 3y$

$-5x - 2y = 10$

2.ร้านเสื้อผ้าแห่งหนึ่งขายกางเกงยีนส์และเสื้อเชิ้ตในราคาที่แตกต่างกัน อนิรุตเป็นเด็กบ้านนอกเมื่อเก็บเงินได้จำนวนหนึ่งจึงได้ไปซื้อกางเกงยีนส์สองตัวและเสื้อยืดอีกหกตัวในราคารวมที่ 60 บาท สุทิวส์เป็นเด็กในเมืองเมื่อเก็บเงินได้จำนวนหนึ่งจึงได้ไปซื้อกางเกงยีนส์สี่ตัวเสื้อเชิ้ตสามตัวในราคารวมที่ 75 บาท

2.1 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่อธิบายสถานการณ์นี้ (กำหนดให้ x แทนราคาของกางเกงยีนส์ และ y แทนราคาของเสื้อเชิ้ต)

2.2 ในระบบพิกัด xy จงวาดกราฟของเส้นทั้งสอง

- 2.3 จงหาพิกัดของจุดตัดของเส้นทั้งสอง
- 2.4 จงให้ความหมายของจุดตัดดังกล่าวในบริบทนี้
3. อนิรุตต์ซื้อข้าวเปลือก 2 ถุง และข้าวสารอีก 3 ถุง ในราคารวมที่ 513 บาท วันต่อมา อนิรุตต์ไปซื้อข้าวเปลือกอีก 1 ถุง และข้าวสารอีก 2 ถุง ในราคารวม 309 บาทจงหาราคาข้าวเปลือกและข้าวสารต่อถุง
4. เรือลำหนึ่งล่องไปตามน้ำในคลองเป็นระยะทาง 24 กิโลเมตร ใช้เวลา 2 ชั่วโมง ส่วนขากลับล่องทวนน้ำใช้เวลา 4 ชั่วโมง จงหาความเร็วของเรือถ้าวิ่งในน้ำนิ่งและความเร็วของกระแสน้ำในคลอง
5. สุทิวส์ต้องเดินทางเป็นระยะทาง 1,930 กิโลเมตร โดยรถยนต์และเครื่องบิน เขาเริ่มขับรถยนต์จากบ้านไปถึงสนามบินในอัตราเร็วเฉลี่ยที่ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากนั้นเดินทางโดยเครื่องบินในอัตราเร็ว 350 กิโลเมตรต่อชั่วโมงใช้เวลาทั้งหมดรวมกัน 8 ชั่วโมง จงหาว่าเขาใช้เวลาเท่าไรในการขับรถยนต์จากบ้านมาสนามบิน
6. ตัวเลขสองหลักตัวเลขหนึ่งมีผลบวกของทั้งสองหลักเท่ากับ 7 และถ้าสลับตำแหน่งจะเป็นจำนวนที่มีค่ามากกว่าจำนวนเดิมอยู่ 9 ถ้ามหาเลขสองหลักนี้คือเลขอะไร
7. โรงเรียนมัธยมศึกษาสองแห่งคือ โรงเรียน A และโรงเรียน B ได้เดินทางมาชมนิทรรศการที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี โดยโรงเรียน A ได้เช่ารถตู้ 1 คัน และรถบัสอีก 6 คัน สำหรับนักเรียน 372 คน ส่วนโรงเรียน B ได้เช่ารถตู้ 4 คัน และรถบัสอีก 12 คันสำหรับนักเรียน 780 คนจงหาว่ารถตู้หนึ่งคันจุได้กี่คนและรถบัสหนึ่งคันจุได้กี่คน
8. จากข้อที่แล้ว หลังจากกลับมาจากการไปชมนิทรรศการที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ก็ได้จัดการแสดงคอนเสิร์ตเพื่อระดมทุนสำหรับการไปนิทรรศการครั้งต่อไป ในการขายตั๋ววันแรกทางโรงเรียนได้ขายตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ไป 30 ใบ และตั๋วสำหรับเด็กอีก 90 ใบ ได้เงินรวมทั้งสิ้น 7,500 บาท และในวันที่สองขายตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ได้ 80 ใบ และตั๋วสำหรับเด็ก 50 ใบ ได้เงินรวมทั้งสิ้น 6,700 บาทจงหาราคาตั๋วต่อใบของตั๋วแต่ละประเภท
9. ถ้าครึ่งหนึ่งของจำนวน x หนึ่ง เป็นสามเท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่งและสี่เท่าของผลต่างของสองจำนวนนั้นเป็น 50 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น
10. ต้ามีเงิน x บาทและพลอยมีเงิน y บาทเงินของทั้งสองคนรวมกันเท่ากับ 1,000 บาทถ้าต้าได้เงินเพิ่มมาอีก 100 บาทจะมีเงินเท่ากับพลอยจงหาว่าต้าและพลอยมีเงินคนละเท่าใด
11. แม่ค้าซื้อส้มสองชนิดมาขายรวมกันในกิโลกรัมละ 12.50 บาทโดยราคาซื้อของส้มชนิดที่หนึ่งกิโลกรัมละ 13.50 บาทและส้มชนิดที่สองกิโลกรัมละ 12 บาทแม่ค้าต้องผสมส้มทั้งสองชนิดในอัตราส่วนเท่าไรที่จะขายส้มแล้วได้เงินเท่าทุน
12. ถ่านไม้สนและไม้โกงกางราคาถุงละ 18 บาทและ 27 บาทตามลำดับเอามาคละกันแล้วขายไปถุงละ 24 บาทได้กำไร 20% จงหาอัตราส่วนการผสม
13. เรือลำหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร็ว 29.5 กิโลเมตรต่อชั่วโมงถึงท่าช้ากว่าปกติ 5 นาทีแต่ถ้าแล่นด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมงถึงท่าช้ากว่าปกติ 2 นาทีจงหาระยะทางที่เรือแล่น
14. วินัยนับจำนวนไก่และวัวที่เลี้ยงไว้ทั้งหมดเป็น 46 ตัว แต่นับขาของไก่และวัวได้ 100 ขา วินัยเลี้ยงไก่และวัวอย่างละกี่ตัว

15. เมื่อ 10 ปีก่อน แดงมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุดำ แต่อีก 10 ปีข้างหน้า แดงจะมีอายุเป็น 2 เท่าของอายุดำ จงหาอายุของ แดงและดำในปัจจุบัน
16. สมศรีมีเงิน 400 บาท ซื้อผ้าตัดเสื้อได้ 5 เมตร และผ้าตัดกระโปรงได้ 1.5 เมตรพอดี แต่ถ้าซื้อผ้าตัดเสื้อ 4 เมตร และผ้าตัดกระโปรง 1 เมตร จะเหลือเงิน 100 บาท จงหาว่าผ้าตัดเสื้อและผ้าตัดกระโปรงราคาเมตรละเท่าไร
17. ผู้ใหญ่ 4 คน กับเด็ก 3 คน ทำงานหนึ่งเสร็จในเวลา 4 ชั่วโมง และผู้ใหญ่ 9 คน กับเด็ก 2 คน ทำงานนี้เสร็จในเวลา 2 ชั่วโมง จงหาว่าผู้ใหญ่ทำงานได้เป็นกี่เท่าของเด็ก



แบบเฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.1 ระบบจำนวน และจำนวนจริง

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.1

- 1) -28, 2) 5, 3) 10, 4) 182, 5) $\frac{4}{5}$ 6) -15.75

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.2

- 1) 6, 2) $\frac{1}{2}$, 3) $-\frac{15}{8}$, 4) $\frac{25}{7}$, 5) $\frac{5}{49}$ 6) 2

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.3

- 1) 9, 2) 0, 3) 1, 4) $\frac{16}{21}$, 5) $\frac{5}{4}$ 6) $-\frac{4}{5}$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.2 ท.ร.ม. และ ค.ร.น.

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.1

- 1) 3, 2) 6, 3) 12, 4) 28, 5) 7, 6) 9

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.2

- 1) 21, 2) 252, 3) 352, 4) 42, 5) 72, 6) 7161

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.3

- 1) $\frac{95}{51}$ 2) $\frac{542}{57}$ 3) $\frac{235}{56}$ 4) $\frac{599}{40}$ 5) $\frac{51}{22}$ 6) $\frac{108}{119}$
 7) $\frac{3}{10}$ 8) $\frac{2}{3}$ 9) $\frac{1}{2}$ 10) $\frac{13}{12}$ 11) $\frac{1}{12}$ 12) $\frac{647}{340}$
 13) $\frac{-h}{x^2+xh}$ 14) $\frac{x^2+(2h-1)x+h^2}{h}$ 15) $\frac{x^2+3x+1}{(x+1)\sqrt{x}}$ 16) $\frac{(x+1)^2+(x+2)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.4 เซต

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.1

- 3) $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$, 4) $\{ -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1 \}$,
 5) {อาทิตย, จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์}

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.2

ข้อ	ถูก หรือ ผิด	คำอธิบาย
-----	--------------	----------

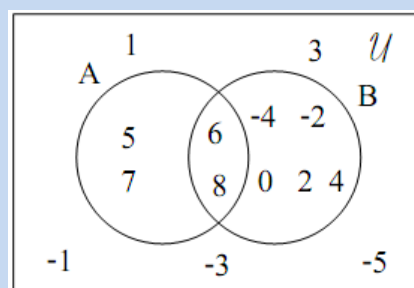
1	ถูก	2 เป็นจำนวน ส่วน {2} เป็นเซต จึงไม่เท่ากัน
2	ผิด	$\{x x^2 = 9\} = \{3, -3\} \neq \{3\}$
3	ผิด	$\{x \in I x^3 \leq 8\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
4	ถูก	ดูคำอธิบายข้อ 3
5	ถูก	สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $a^2 \geq 0$
6	ผิด	$\{x \in I^- -5 < x < 0\} = \{-4, -3, -2, -1\}$ เป็นเซตจำกัด มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 4
7	ถูก	สมาชิกที่ปรากฏมากกว่าหนึ่งครั้งในเซต ถือว่าเป็นตัวเดียวกัน
8	ถูก	การเรียงตัวก่อน-หลังของสมาชิกในเซตถือว่าไม่สำคัญ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.3

- 1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
- 2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 3) $A \cap B = \{2, 4\}$
- 4) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
- 5) $B - C = \{2, 8\}$
- 6) $C - A = \{5, 6\}$
- 7) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
- 8) $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6\}$
- 9) $P(A \cap B) = P(\{1, 4\}) = \{\{2\}, \{4\}, \{2, 4\}, \emptyset\}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.4

จากข้อมูลในโจทย์ จะได้ว่า $A = \{5, 6, 7, 8\}, B = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$ จึงสามารถเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



$|A \cup B| = \dots 9 \dots$ และ $|A \cap B| = \dots 2 \dots$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.5

จำนวนนักเรียนที่ชอบเล่นกีฬาวาดอย่างเดียวกเท่ากับ 10 คน

จำนวนนักเรียนที่ชอบเล่นดนตรีอย่างเดียวกเท่ากับ 10 คน

จำนวนนักเรียนที่ชอบดูภาพยนตร์อย่างเดียวกเท่ากับ 5 คน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.6

ตอบ 5

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.5

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.5.1

1) $(-3, -2) \cup (2, 3]$ 2) $\{ \}$ 3) $(100, 102)$ 4) \emptyset

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.7

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.1

1) $x = 3$ 2) $x = 5 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 3) $x = 14$ 4) $x = -2$

5) $x = -9$ 6) $x = \frac{9}{2}$ 7) $x = -6$ 8) $x = -60$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.2

1) $x = 2, y = 3$ 2) $x = 3, y = 1$ 3) $x = -1, y = 3$

4) $x = 2, y = -2$

5) $x = 8, y = 10$ 6) $x = 6, y = 5$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.3

1) $x = 1, y = 3$ 2) $x = 4/23, y = 78/23$

3) $x = -\frac{112}{5}, y = -57/5$ 4) $x = -2, y = -14$

5) $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{-22}{3}$ 6) $x = -21, y = -46$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.4

1) สีเหลืองผืนผ้ามีความยาว 35 เมตร และกว้างเป็น 80 เมตร

2) ราคาเช่าห้องประเภทห้องเดี่ยวเท่ากับ 500 และประเภทคู่เป็น 700 บาท

3) จำนวนตัวที่ขายให้ผู้ใหญ่เท่ากับ 210 ใบ และจำนวนตัวที่ขายให้เด็กเท่ากับ 105 ใบ

4) นายอุทิศต้องชดเชยโทษเป็นจำนวน 10 ครั้ง

5) เครื่องบินลำเล็กมีความเร็วเป็น 400 กม./ชม. และเครื่องบินลำใหญ่มีความเร็วเป็น 500 กม./ชม.

6) หมู่บ้าน ข. อยู่ห่างจากหมู่บ้าน ค. เป็นระยะทาง 1000 กม.

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย อสมการ และสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1)

1. $7\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$ 3. 36 4. $-\frac{1}{3}$ 5. $\frac{2}{5}$ 6. -7 7. -7.6

8. 12 9. -14 10. 3 11. 2 12. 12

1. Extra)

1) $-\frac{2}{5}, y = -\frac{6}{5}$

2) $x = -8, y = -\frac{23}{2}$

3) $x = \frac{20}{9}, y = \frac{5}{27}$

4) $x = \frac{17}{2}, y = -\frac{7}{2}$

5) $x = 4, y = 1$

6) $x = -\frac{9}{14}, y = \frac{17}{14}$

7) $x = 2, y = \frac{12}{5}$

8) $x = -\frac{5}{17}, y = \frac{28}{17}$

9) $x = -\frac{15}{16}, y = -\frac{19}{8}$

10) $x = -\frac{20}{17}, y = -\frac{35}{17}$

2)

1. $n < -1$ 2. $n < 1$ 3. $p < 2$ 4. $k \leq 2$ 5. $m \geq -5$

6. $x < 3$ 7. $n \leq -6$ 8. $b \geq 5$ 9. $r < -3$ 10. $r \geq 6$

11. $x > -2$ 12. $x > -4$ 13. $x \geq -3$ 14. $v > -6$

2 Extra) 1) $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ 2) $[-\frac{45}{22}, \infty)$ 3) $(-\infty, \frac{4}{55}]$ 4) $(-\infty, -\frac{3}{11}]$ 5) $(-\infty, -\frac{3}{26}]$

6) $(-\infty, \frac{150}{29}]$ 7) $(-\infty, \frac{17}{48})$ 8) $[-4, \infty)$ 9) $(10, \infty)$ 10) $[-\infty, -4)$

3) 3.1) 433.2) -33.3) 143.4) 33.5.1) 2003.5.2) 773.6) 23.7) 153.8) 3

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

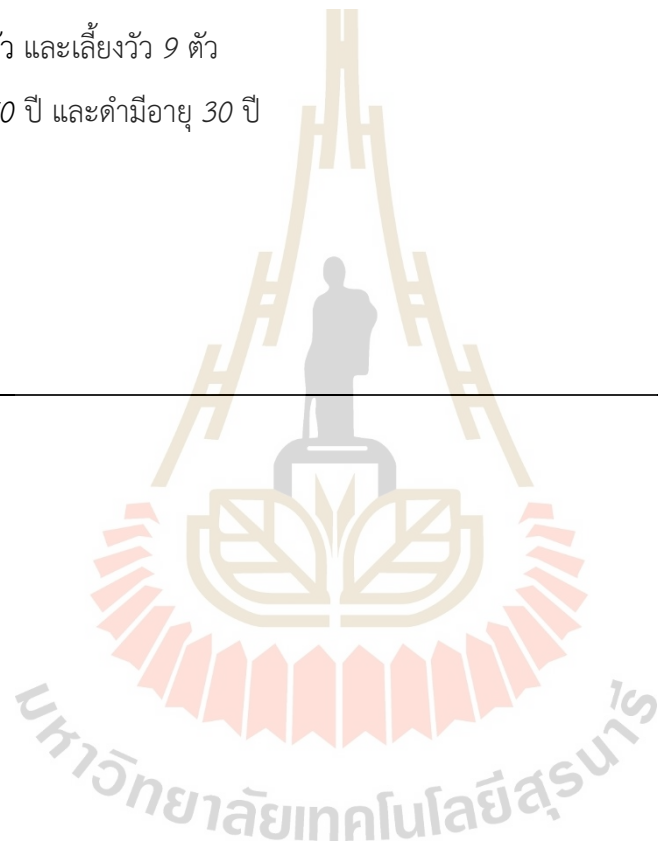
1.1) (2,-3) 1.2) (2,1) 1.3) (6,0)

1.4) (-2,4) 1.5) (2,5) 1.6) (2,1)

1.7) (2,0) 1.8) No Solution 1.9) (2,1)

1.10) (-3,4) 1.11) (-2,-2) 1.12) No Solution

- 1.13) มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ 1.14) (-2,8) 1.15) มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์
- 1.16) $(\frac{7}{17}, -\frac{2}{17})$ 1.17) No Solution 1.18) $(-\frac{1}{2}, 3)$
3. ราคาข้าวเปลือกต่อถุงคือ 99 บาท ราคาข้าวสารต่อถุงคือ 105 บาท
4. ความเร็วของเรือในน้ำนิ่งคือ 9 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และความเร็วของน้ำคือ 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
5. รถยนต์ใช้เวลา 3 ชั่วโมง
6. 34
7. รถตู้จุได้ 18 คน และรถบัสจุได้ 59 คน
8. ตัวผู้ใหญ่ 4 บาท ตัวเด็ก 7 บาท
14. วินัยเลี้ยงไก่ไว้ 37 ตัว และเลี้ยงวัว 9 ตัว
15. ปัจจุบันแดงมีอายุ 70 ปี และดำมีอายุ 30 ปี



บทที่ 2

เมทริกซ์ (Matrices)

เมทริกซ์เป็นอีกหัวข้อหนึ่งที่นักศึกษาได้ทำความรู้จักมาแล้วในระดับมัธยมศึกษา เนื่องจากเมทริกซ์มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการประยุกต์ใช้กับการแก้ระบบสมการหลายตัวแปร ซึ่งเป็นหนึ่งในหัวข้อในเอกสารฉบับนี้ จึงมีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการทบทวนในเนื้อหาของเมทริกซ์เช่นเดียวกัน

2.1 เมทริกซ์และพีชคณิตเบื้องต้นบนเมทริกซ์ (Algebra on Matrices)

❖ เมทริกซ์ (Matrices)

ถ้าเรานำจำนวนมาเขียนเรียงเป็นแถว (Row) และหลัก (Column) อย่างมีระเบียบ คร่อมไว้ด้วยวงเล็บ () หรือวงเล็บใหญ่ [] ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = [1]$$

เราเรียกสัญลักษณ์เหล่านี้ว่า เมทริกซ์

ข้อตกลง

1. จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์เราเรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์ เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ เราเรียก 1, 0, -1, 2 ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A

2. เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เราเรียกว่า เมทริกซ์มิติ $m \times n$ หรือ $m \times n$ เมทริกซ์ และเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

เช่น $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ แสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 3 หลัก ดังนั้นเราเรียก B ว่า เมทริกซ์มิติ 2×3

3.การบอกตำแหน่งของสมาชิก เราจะบอกทั้งแถวและหลักที่สมาชิกตัวนั้นอยู่ ดังตัวอย่างเช่น

$$\begin{matrix} & \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} \\ \begin{matrix} \text{แถวที่ 1} \\ \text{แถวที่ 2} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

เราจะได้ว่า 1 เป็นสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 1

7 เป็นสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 2 หลักที่ 3 เป็นต้น

การระบุตำแหน่งของสมาชิกในเมทริกซ์นี้ โดยปกติแล้วเราจะใช้สัญลักษณ์ i และ j แทนแถวที่ และหลักที่ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดสมาชิก a_{52} จะได้ว่า สมาชิกตัวนี้ เป็นสมาชิกที่ปรากฏอยู่ในแถวที่ $i = 5$ และหลักที่ $j = 2$ ของเมทริกซ์นั้น

ตัวอย่างที่ 2.1.1 กำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 7 \\ -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ จะได้ว่า

จะได้ว่า	เพราะ
1) A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 4×3	A มีจำนวนแถวเป็น 4 แถว และ 3 หลัก
2) สมาชิก a_{32} คือ 8	8 อยู่ที่ตำแหน่งแถวที่ 3 และหลักที่ 2
3) 10 มีค่า $j = 3$	10 อยู่ในหลักที่ 3 ซึ่งตำแหน่งหลักเราแทนด้วย j
4) -1 มีค่า $i = 3$	-1 อยู่ในแถวที่ 3 ซึ่งตำแหน่งของแถวเราแทนด้วย i

บทนิยาม 2.1

1) เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = [1], C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม เป็น 1 เท่านั้น ส่วนสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_1 = [1]$$

3) เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$\bar{0}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{0}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{0}_{1 \times 1} = (0)$$

❖ การเท่ากันของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.2 เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และ
2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีค่าเท่ากัน

ข้อสังเกต : ถ้ามีสมาชิกในตำแหน่งใดที่ตรงกันมีค่าไม่เท่ากัน แม้แต่ตำแหน่งเดียว สรุปได้เลยว่า เมทริกซ์ทั้งสองไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2.1.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

เราจะได้ว่า

- 1) ถ้า $A = B$ แล้ว $x = 1, y = 3$ และ $z = 6$
- 2) $A \neq C$ เพราะ สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 2 ของทั้งสองเมทริกซ์ มีค่าไม่เท่ากัน
- 3) $A \neq D$ เพราะ เมทริกซ์ทั้งสอง มีมิติไม่เท่ากัน

❖ การบวก และการลบของเมทริกซ์

เมทริกซ์ตั้งแต่ 2 เมทริกซ์ขึ้นไปจะนำมาบวกหรือลบกันได้ นั้นมีเงื่อนไขคือ เมทริกซ์เหล่านั้นจะต้องมีมิติที่เท่ากัน วิธีการบวกหรือลบก็ให้นำสมาชิกในตำแหน่งที่ตรงกัน บวกหรือลบต่อกันโดยตรง นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ A และ B ต่างมีมิติเท่ากับ $m \times n$ แล้ว เราจะได้ว่า เมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B สามารถบวกลบกันได้โดยที่ผลบวกและผลลบมีค่าดังนี้คือ

$$\text{ถ้า } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ และ } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ แล้ว}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

และ

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.1.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหา $A + B$, $A - B$ และ $A + D$

วิธีทำ

$$1) A + B = \begin{bmatrix} 1 + 10 & 3 + (-5) \\ 0 + (-2) & 6 + (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2) A - B = \begin{bmatrix} 1 - 10 & 3 - (-5) \\ 0 - (-2) & 6 - (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$$

3) เราไม่สามารถดำเนินการ $A + D$ ได้ เนื่องจาก ทั้งสองเมทริกซ์มีมิติที่ต่างกัน คือ A มีมิติเป็น 2×2 ในขณะที่ D มีมิติเป็น 3×2

❖ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

กำหนดให้ C เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็น 0 และ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{จะได้ว่า} \quad cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

สมบัติที่สำคัญบางประการของเมทริกซ์

กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาด $m \times n$ และ C เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $c(A + B) = cA + cB$
- 3) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- 4) $A + \bar{0}_{m \times n} = \bar{0}_{m \times n} + A = A$

$$\text{เมื่อ } \bar{0}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

- 5) $A + (-A) = \bar{0}_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 2.1.4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ แล้วจงหา $2A$, $(-1)B$ และ $2A - 1B$

วิธีทำ

$$1) 2A = \begin{bmatrix} 2(1) & 2(3) \\ 2(0) & 2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$2) (-1)B = \begin{bmatrix} (-1)10 & (-1)(-5) \\ (-1)(-2) & (-1)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3) 2A - 1B = 2A + (-1)B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.1.1 กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ จงหา

1) $2A - B$

.....

.....

.....

.....

.....

2) $-B + \frac{1}{2}A$

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\sqrt{2}A$

.....

.....

.....

.....

.....

4) จงหาเมทริกซ์ C โดยที่ $A+B-C=\bar{0}$ เมื่อ $\bar{0}$ คือ เมทริกซ์ศูนย์

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 2.1.2 จงหาค่าของ x , y และ z ที่เป็นไปตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

2) $\begin{bmatrix} -1 & 3x \\ -2 & y+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -21 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3x \\ 5 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 5z & z \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

4) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \\ 3x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & -2 \\ 1 & 2x \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

5) $(-1) \begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \\ 3x & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} z & -2 \\ 1 & 2x \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

❖ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใดๆ การนำเมทริกซ์ A มาคูณกับเมทริกซ์ B จะส่งผลเกิดขึ้นอย่างไร
อย่างหนึ่ง 2 อย่างต่อไปนี้

1. ไม่สามารถหาผลคูณได้
2. สามารถหาผลคูณได้

ปัญหาที่เราต้องทราบก็คือ ถ้าหาผลคูณได้ต้องมีเงื่อนไขอย่างไร และสมาชิกของเมทริกซ์ที่เป็นผลคูณจะหามาได้อย่างไร

บทนิยาม 2.3

$$\text{กำหนดให้ } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n}$$

แล้วผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย AB กำหนดโดย

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1p}b_{p2} & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \dots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2p}b_{p2} & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \dots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mp}b_{p1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mp}b_{p2} & \dots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \dots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

ข้อสังเกตที่สำคัญ

- 1) จากบทนิยามข้างบน เราจะเห็นว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times p$ และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $q \times n$ ผลคูณ AB จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $p = q$ และ AB จะมีมิติ $m \times n$
- 2) มิติของเมทริกซ์ตัวแรก (ด้านหน้า) จะเป็นอย่างไรก็ได้
- 3) มิติของเมทริกซ์ตัวที่นำมาคูณ จะต้องมีย่านวนแถวให้เท่ากันพอดีกับจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวแรก
- 4) การคูณเมทริกซ์นี้ สามารถท่องเป็นข้อความง่ายๆ ได้คือ **"แถวตัวหน้า คูณหลักตัวหลัง แล้วรวมกัน"**

สมบัติบางประการสำหรับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่บวก ลบ และคูณกันได้ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $AI = IA = A$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์
2. $k(AB) = A(k)B = (AB)k$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $A(B+C) = AB + AC$

5. $(A+B)C = AC + BC$

6. $(kA)^n = k^n \cdot A^n$ เมื่อ $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ term}}$

7. AB อาจจะเท่าหรือไม่เท่ากับ BA ก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.1.5 กำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์

ก.) AB ข.) $(AB)C$

วิธีทำ

ก.) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(0) + 2(1) & 1(\frac{1}{2}) + 2(3) \\ -1(0) + 3(1) & -1(\frac{1}{2}) + 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{13}{2} \\ 3 & \frac{17}{2} \end{bmatrix}$

ข.) $(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & \frac{13}{2} \\ 3 & \frac{17}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) + \frac{13}{2}(5) \\ 3(4) + \frac{17}{2}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{2} \\ \frac{109}{2} \end{bmatrix}$

แบบฝึกทักษะที่ 2.1.3 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$6. \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} [2 \quad -2]$$

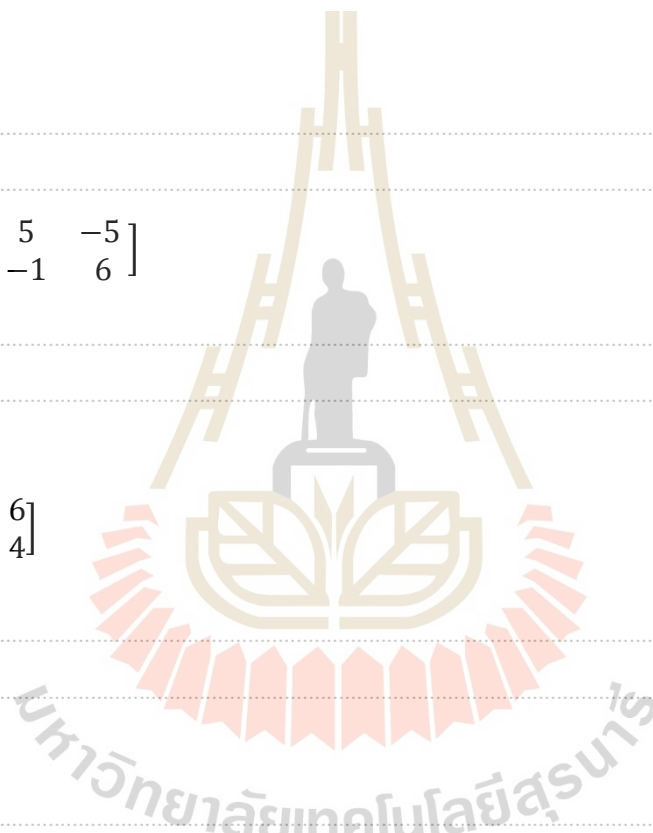
$$8. \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$11. [3 \quad -5v] \begin{bmatrix} -3u & -v \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} -4 & -y \\ -2x & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4x & 1 \\ 2y & -3 \end{bmatrix}$$



แบบฝึกทักษะที่ 2.1.4 จงแก้ปัญหาต่อไปนี้โดยใช้ผลคูณเมทริกซ์

1. จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน หนึ่งในเมทริกซ์ที่มีบทบาทสำคัญที่รู้จักกันในนามของเมทริกซ์การหมุน Pauli ซึ่งเขียนได้โดย

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$ จงแสดงว่า $S^2 = I_2$ เมื่อ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. จากการศึกษาการศึกษาการหมุนของแขนหุ่นยนต์(ในรูปข้างล่าง)จากตำแหน่ง $(x_0, y_0, 0)$ ไปในแนวราบเป็นมุม θ โดยเคลื่อนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และยึดต้นแขนเป็นตำแหน่งหมุน, $(0, 0, 0)$ พบว่า สามารถกำหนดได้โดยการคูณกัน

ระหว่างเมทริกซ์กำหนดขนาดมุม $\begin{bmatrix} \cos \theta^\circ & -\sin \theta^\circ & 0 \\ \sin \theta^\circ & \cos \theta^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์ตำแหน่งเริ่มต้น $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จงหาว่าถ้าแขนของหุ่นยนต์นี้ เริ่มหมุนจากตำแหน่งเริ่มต้นที่มีพิกัดเป็น $(2, 4, 0)$ และให้แขนของหุ่นยนต์หมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม 60° กับแนวเริ่มต้น จะไปตกที่ตำแหน่งที่พิกัดเป็นเท่าใด



.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 ตัวกำหนด (Determinant)

ตัวกำหนดของเมทริกซ์ หรือ ดีเทอร์มิแนนต์ เป็นค่าตัวเลข ซึ่งจัดว่าเป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของเมทริกซ์จัตุรัสก็ได้ สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ จะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้เสมอ

สัญลักษณ์ของดีเทอร์มิแนนต์ คือ $\det A$ หรือ $|A|$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ

ในที่นี้เราจะพิจารณาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 , 2×2 และ 3×3 ตามลำดับดังนี้

1. กำหนดให้ $A_1 = [a]$ จะได้ว่า $\det A_1 = a$ หรือจะกล่าวง่ายๆ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว จะมีค่าเท่ากับสมาชิกตัวนั้น

2. กำหนดให้ $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ จะได้ว่า $\det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3. กำหนดให้ $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ จะได้ว่า

$$\det A_3 = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

ซึ่งการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3×3 นี้ จะหาได้โดยง่าย โดยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ให้นำหลักที่ 1 และที่ 2 ในเมทริกซ์นั้น มาเขียนต่อท้ายทางขวาของเมทริกซ์

ขั้นที่ 2 ลากเส้นแทยงลงจากมุมซ้ายของเมทริกซ์ลงมาทางมุมขวาให้แต่ละเส้นที่ลากผ่านสมาชิก 3 ตัว จะ ได้ ทั้งหมด 3 เส้น

ขั้นที่ 3 ในแต่ละเส้นที่ลากในขั้นที่ 2 นั้น ให้นำสมาชิกที่อยู่บนเส้นเดียวกันมาคูณกัน ดังนั้นจะได้เป็นจำนวน 3 จำนวน(เพราะมี 3 เส้น) จากนั้น นำเอาจำนวนทั้งสามมารวมกัน สมมติว่าผลรวมดังกล่าวได้เป็น จำนวนจริง M

ขั้นที่ 4 ลากเส้นแทยงขึ้นจากมุมล่างซ้ายของเมทริกซ์ขึ้นไปทางมุมบนขวาให้เส้นแต่ละเส้นที่ลากผ่านสมาชิก 3 ตัว จะได้ทั้งหมด 3 เส้น

ขั้นที่ 5 ในแต่ละเส้นที่ลากในขั้นที่ 4 นั้น ให้นำสมาชิกที่อยู่บนเส้นเดียวกันมาคูณกัน ดังนั้น จะได้เป็น จำนวน 3 จำนวน(เพราะมี 3 เส้น) จากนั้น ให้นำเอาจำนวนทั้งสามดังกล่าว มารวมกัน สมมติว่า ผลรวมดังกล่าวได้เป็น จำนวนจริง N

จากทั้ง 5 ขั้นตอน เราจะได้ว่า ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ดังกล่าว มีค่าเท่ากับ $M - N$ หรือ เขียนเป็นข้อความได้คือ (ผลรวมคูณล่าง) - (ผลรวมคูณขึ้น) ดังในตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 2.2.1 จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เมื่อดำเนินการตามขั้นที่ 1 จะได้ว่า

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

และเมื่อดำเนินการตามขั้นที่ 2 ถึง 5 จะได้ดังแสดงข้างล่างนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -40 \quad 0 \quad 0 \\ 15 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

ดังนั้น ค่าดีเทอร์มิแนนท์ จึงเท่ากับ (ผลรวมคูณล่าง) - (ผลรวมคูณขึ้น)

$$\begin{aligned} &= (15 + 0 + 0) - (-14 + 0 + 0) \\ &= 15 - (-14) \\ &= 15 + 14 \\ &= 29 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.2.1 จงหาค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = ?$

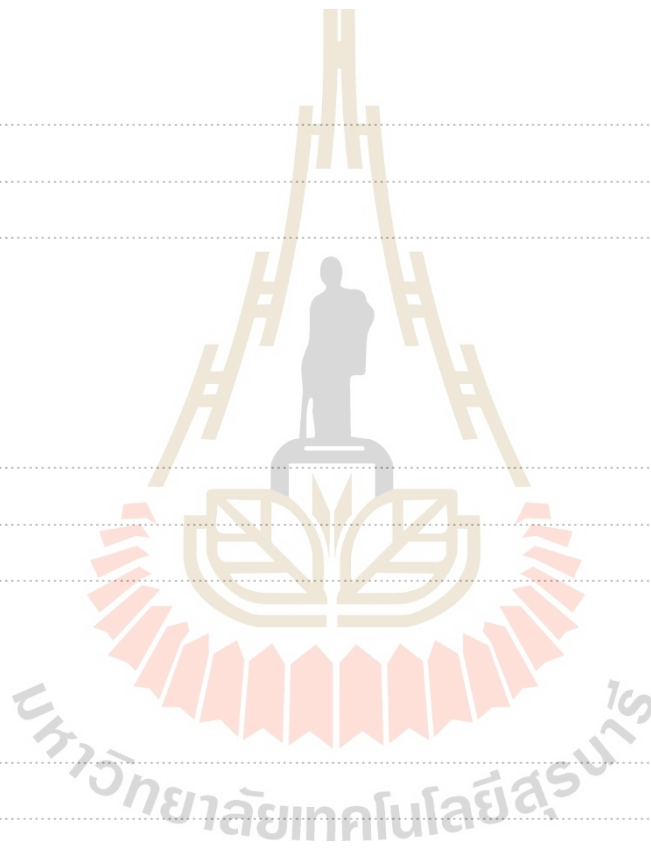
$$4) \begin{vmatrix} -6 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

$$5) \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -5 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

$$6) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -5 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ?$$

$$7) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

$$12) \text{จงพิจารณาค่า } x \text{ ที่ทำให้ เมทริกซ์ } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ มีค่า ดีเทอร์มิแนนต์เป็น } -4$$



2.3 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

การศึกษาเรื่องการหาตัวผกผัน หรืออินเวอร์สของเมทริกซ์หนึ่งๆ นี้ ในทางคณิตศาสตร์จะมีอยู่หลายประเภท เช่น ตัวผกผันสำหรับการบวก หรือ ตัวผกผันสำหรับการคูณ ในหัวข้อนี้ ผู้เรียบเรียงให้ข้อตกลงว่า เมื่อใช้คำว่า "ตัวผกผัน" หรือ "อินเวอร์ส" จะให้หมายถึง ตัวผกผันสำหรับการคูณเท่านั้น

การศึกษาเรื่องการหาเมทริกซ์ผกผันนี้ เป็นเรื่องที่มีประโยชน์เป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะเมื่อเรานำเอาความรู้ทางด้านเมทริกซ์ ไปแก้ไขและหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีประกอบไปด้วยตัวแปรหลายตัว และหลายสมการ อย่างไรก็ตาม ในเอกสารชุดนี้ ผู้เรียบเรียงจักขอนำเสนอเฉพาะเมทริกซ์ที่มีมิติไม่เกิน 3 ซึ่งในขั้นแรกของการศึกษาในบทนี้ นักศึกษามาทำความเข้าใจกับความหมายของเมทริกซ์ผกผันกันก่อน

❖ "เมทริกซ์ผกผัน" หรือ "อินเวอร์สของเมทริกซ์" คืออะไร

บทนิยาม 2.1 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีมิติเป็น n เราจะเรียกเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ เมื่อ I_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ n ว่า เมทริกซ์ผกผัน หรือ อินเวอร์สเมทริกซ์ของ A และในขณะเดียวกัน ก็จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์ผกผันของ B ด้วยเช่นกัน

ข้อสังเกตเพิ่มเติม

- 1) ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัสทุกตัว จะสามารถหาอินเวอร์สได้
- 2) เมทริกซ์จัตุรัสที่หาอินเวอร์สได้ เราเรียกว่า "เมทริกซ์ไม่เอกฐาน" (Non-singular Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีค่าตัวกำหนดไม่เท่ากับ 0 และเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สไม่ได้ เราเรียกว่า "เมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)"
- 3) โดยทั่วไป อินเวอร์สของเมทริกซ์ A ใดๆ ที่หาอินเวอร์สได้ จะเขียนแทนด้วย A^{-1}

ตัวอย่างที่ 2.3.1 สำหรับเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า อินเวอร์สของเมทริกซ์ A นี้คือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

เพราะ $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

และ $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

สมบัติของอินเวอร์สการคูณ

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. ถ้า $AB = I$ แล้ว $A = B^{-1}$ และ $B = A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $\det A \neq 0$
6. ถ้า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det A = 0$
7. ถ้า $AX = B$ แล้วจะได้ $X = A^{-1}B$

❖ การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2

สำหรับเมทริกซ์ไม่เอกฐานที่มีขนาด 2×2 จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยง่าย ดังนี้

สำหรับ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ทันทีว่า อินเวอร์ส หรือเมทริกซ์ผกผันของ A คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ตัวอย่างที่ 2.3.2 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} พร้อมตรวจสอบความถูกต้อง

วิธีทำ เราจะได้ว่า $\det A = 1(4) - 3(2) = -2$

ดังนั้น เมื่อใช้สมการที่ (2.1) จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้อง ได้ดังนี้

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

และ $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

แบบฝึกทักษะที่ 2.3.1 จงหาเมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) ของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

3) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

5) $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

6) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

❖ การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3

ในหัวข้อนี้ จะได้มีการนำเสนอวิธีการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3 อยู่ 2 วิธี คือ

- วิธีการหาโดยใช้การแปลงแถวเบื้องต้น
- วิธีการหาโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint Matrix)

ในการนำเรื่องของการหาเมทริกซ์ผกผันไปประยุกต์ใช้ ที่สุดแล้วก็จะขึ้นกับความถนัดของแต่ละบุคคลว่าจะใช้วิธีการใด

วิธีการหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การแปลงแถวเบื้องต้น

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐานที่มีมิติเป็น n การหาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยวิธีการใช้การแปลงแถวเบื้องต้น คือ การทำให้เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $[A | I_n]$ เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n โดยการดำเนินการเชิงแถว ให้อยู่ในรูป $[I_n | B]$ แล้วจะได้ว่า เมทริกซ์ B ที่ได้ จะเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A นั่นคือ $B = A^{-1}$ ซึ่งสามารถเขียนสรุปการดำเนินการทั้งหมดได้ดังภาพข้างล่างนี้

$$[A | I_n] \sim [I_n | B] \text{ แล้วจะได้ว่า } B = A^{-1}$$

และในการดำเนินการตามแถวนี้ สามารถทำได้หลายวิธี ได้แก่

1. การสลับแถวระหว่างสองแถวใดๆ
2. การนำเอาจำนวนจริงที่เหมาะสม c ไปคูณกับแถวที่ต้องการเปลี่ยนทั้งแถว
3. การนำเอาแถวที่ต้องการเปลี่ยนลบด้วย แถวอื่นแถวใดที่คูณกับค่าคงที่ เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยนแถวที่ 2 (เขียนแทนด้วย R_2) โดยใช้แถวที่ 3 (เขียนแทนด้วย R_3) มาช่วย จะทำได้โดย การวางแถวที่ 2 ใหม่ด้วยแถวที่เกิดจากการดำเนินการ $R_2 - aR_3$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่ที่เหมาะสม

เพื่อเป็นการช่วยนักศึกษาให้เห็นภาพมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างที่ 2.3.3 แสดงการใช้วิธีนี้ในการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 ก่อน แล้วตัวอย่างที่ 2.3.4 จะแสดงการหาค่ากับเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 ต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.3.3 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} โดยการใช้วิธีการแปลงแถวเบื้องต้น

วิธีทำ

จะเห็นว่าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 ดังนั้น เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด 2×2

$$\text{คือ } I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เราจะสามารถเริ่มกระบวนการแปลงแถวได้ โดยเริ่มเขียน

$$[A | I_n] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ขั้นแรก เราจะพยายามเปลี่ยนเลข 3 ให้กลายเป็นเลข 0 โดย (แถวที่ 2) $- 3 \times$ (แถวที่ 1) ซึ่งเขียนเป็น

สัญลักษณ์ได้คือ $R_2 - 3R_1$ แล้วนำผลที่ได้ มาวางเป็นแถวที่ 2 ใหม่ ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow{R_2 - 3R_1} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ \text{แล้วกำจัดเลข 2 ได้โดย} & \xrightarrow{R_1 - 2R_2} & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right] \\ & & = [I_n | B] \end{array}$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A คือ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 2.3.4 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} โดยการใช้วิธีการแปลงแถว

เบื้องต้น

วิธีทำ

$$[A | I_n] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \text{ สลับกับ } R_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เอา (-1) คูณ R_2
และ R_3 ด้วย

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [I_n | B]$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A คือ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีการหาเมทริกซ์ผกผันโดยการใช้เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint Matrix)

สำหรับเมทริกซ์ไม่เอกฐาน A ใดๆ จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยสมการ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A \tag{2.2}$$

เมื่อ $\text{adj } A$ เรียกว่า เมทริกซ์ผกผัน (Adjoint Matrix) ของ A ซึ่งกระบวนการหาเมทริกซ์ผกผัน นี้ ประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 หาเมทริกซ์ทรานสโพสของ A นั่นคือ การหาเมทริกซ์ A^T ตามบทนิยามที่ 2.5

บทนิยาม 2.5 เมทริกซ์ทรานสโพสของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ คือเมทริกซ์ $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ โดยที่ $a_{ij} = b_{ji}$

เช่น ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ แล้วจะได้ว่า $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(หรือ เมทริกซ์ทรานสโพสคือการสลับระหว่างแถวกับหลัก นั่นเอง)

ขั้นที่ 2 หาไมเนอร์ (Minor) ของสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ A^T ที่ได้ในขั้นที่ 1 โดย ถ้ากำหนดสมาชิก a_{ij} ใดๆ ของเมทริกซ์ A^T ค่าไมเนอร์ของสมาชิกตัวนี้ หาได้จาก การปิดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A^T แล้วหาค่าตัวกำหนด หรือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่เหลือ และเมื่อดำเนินการแบบนี้กับทุกสมาชิกใน A^T จะได้เมทริกซ์ใหม่ เรียกว่า **เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T** เขียนแทนด้วย $[m_{ij}]$

ขั้นที่ 3 นำเอาค่าสมาชิกที่ได้แต่ละตัวของ เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T ที่ได้จากขั้นที่ 2 นั้น มาคูณกับค่าประจำตำแหน่ง ซึ่งแสดงได้ในเมทริกซ์ข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ที่ได้จากกระบวนการนี้ จะเรียกว่า **เมทริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A^T** ซึ่งจะนิยามว่าเป็น "**เมทริกซ์ผกผัน $\text{adj } A$ ของ A** " ที่ใช้ในสมการที่ (2.2) ข้างต้น

ขั้นที่ 4 ทำการหาค่าตัวกำหนดด้วยวิธีการในหัวข้อ 2.2 แล้วนำค่าที่ได้จากขั้นที่ 3 ไปแทนในสมการที่ (2.2) เพื่อหาเมทริกซ์ผกผันต่อไป

การเรียงขั้นตอนในลักษณะแบบนี้ อาจจะดูเหมือนไม่เป็นไปตามหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไป แต่อย่างไรก็ตาม ผลที่ได้คือสิ่งเดียวกัน และนักศึกษาสามารถทำความเข้าใจกับขั้นตอนเหล่านี้ได้ดียิ่งขึ้นจากตัวอย่างที่ 2.3.5 ข้างล่างนี้

บันทึก

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



ตัวอย่างที่ 2.3.5 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ โดยการใช้หลักการหาเมทริกซ์ผกผัน

วิธีทำ

ขั้นที่ 1

เราจะได้ว่าเมทริกซ์ทรานสโพสของ A คือ

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 หาค่าไมเนอร์ของสมาชิกแต่ละตัวใน A^T ซึ่งดำเนินการได้ดังนี้

- ค่าไมเนอร์ของสมาชิกแถวที่ $i = 1$ และหลักที่ $j = 1$ คือการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่เหลือจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ออก นั่นก็คือเมทริกซ์ดังรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะเหลือเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนต์ เท่ากับ

$$1(3) - 5(2) = -7 \text{ ดังนั้นค่าของ } m_{11} \text{ คือ } -7$$

- ค่าไมเนอร์ของสมาชิกแถวที่ $i = 1$ และหลักที่ $j = 2$ คือการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ที่เหลือจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ออก นั่นก็คือเมทริกซ์ดังรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะเหลือเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนต์ เท่ากับ

$$-2(3) - 0(2) = -6 \text{ ดังนั้นค่าของ } m_{12} \text{ คือ } -6$$

ซึ่งเมื่อดำเนินการแบบนี้กับทุกๆ สมาชิกของ A^T แล้วจะได้ เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T คือ

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 นำเมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T มาคูณเข้ากับค่าตำแหน่งของแต่ละตำแหน่ง จะได้ผลลัพธ์เมทริกซ์

โคแฟกเตอร์ของ A^T ซึ่งก็คือ เมทริกซ์ผกผัน $\mathit{adj} A$ ดังแสดงข้างล่างนี้

$$\mathit{adj} A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 จากการใช้วิธีการหาค่าตัวกำหนดของ A ดังแสดงในหัวข้อที่ 2.2 เราจะได้ว่า $\det A = 21$

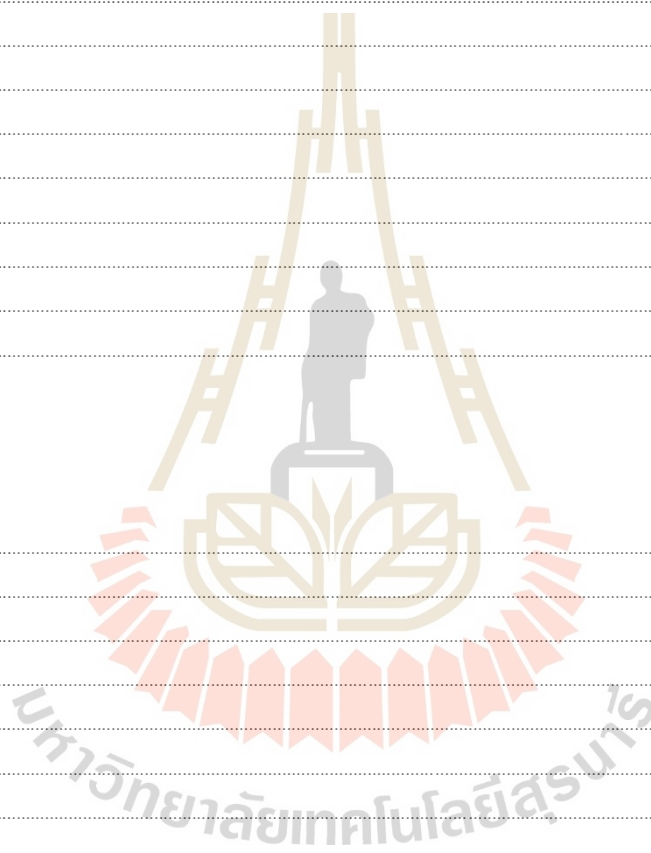
ดังนั้น จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathit{adj} A = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.3.2 จงหาเมทริกซ์ผกผัน(ถ้ามี)ของแต่ละเมทริกซ์ในข้อต่อไปนี้ โดยใช้ทั้ง 2 วิธี

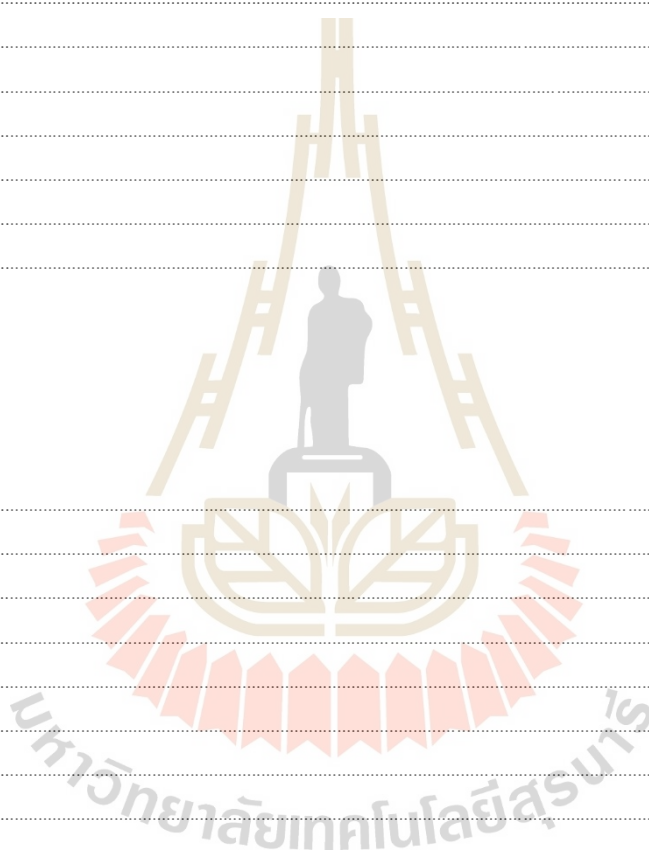
1)
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & -0.5 \\ 0.5 & 0.25 & -0.25 \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

2)
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$



3)
$$\begin{bmatrix} -6 & 8 & 13 \\ 11 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$



2.4 การใช้เมทริกซ์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น(Solving Linear Systems with Matrices)

ในหัวข้อที่ 1.7 นักศึกษาได้รู้จักกับสมการ และระบบสมการเชิงเส้น ทั้งชนิดตัวแปรเดียว และหลายตัวแปรมาแล้ว นอกจากนี้ ในหัวข้อนั้น เรายังได้ศึกษาวิธีการหาเซตของเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปร และ 2 สมการไปแล้ว

ในหัวข้อนี้ เราจะได้มีการนำเสนอวิธีการหาเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรและจำนวนสมการมากกว่า 2 โดยใช้เมทริกซ์ อย่างไรก็ตาม ในเอกสารนี้ จะนำเสนอแค่เพียงระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 3 ตัวแปร และ 3 สมการ ซึ่ง สำหรับระบบสมการที่มีขนาดใหญ่กว่านี้ ก็จะสามารถขยายแนวคิดและวิธีการหาผลเฉลยโดยการใช้เมทริกซ์แบบเดียวกันนี้ไปแก้ได้เช่นกัน

การใช้เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรนั้น ที่ได้รับความนิยมและรู้จักกันดีมีอยู่ 3 วิธีคือ

1. การใช้เมทริกซ์ผกผัน
2. การใช้วิธีของเกาส์ (Gauss's Method)
3. การใช้กฎของครอเมอร์ (Cramer's Rule)

ซึ่งก่อนที่เราจะศึกษาการใช้แต่ละวิธีนั้น เรากำหนดระบบสมการเชิงเส้น (2.3) ข้างล่างนี้ เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= a \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= b \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= c \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อ สัมประสิทธิ์ทั้งหมดและค่าทางขวามือของสมการทั้งสามนั้น เป็นจำนวนจริงทั้งสิ้นและ จากระบบสมการ (2.3) ดังกล่าว เราจะเขียนระบบสมการนั้น ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$AX = B \tag{2.4}$$

โดย

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่า

A เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากสัมประสิทธิ์ของทุกตัวแปรในระบบ

X เป็นเมทริกซ์ของตัวไม่ทราบค่าทั้ง 3 ตัว

B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ที่ปรากฏอยู่ทางขวามือของสมการทั้ง 3 สมการในระบบสมการ (2.3)

❖ การใช้เมทริกซ์ผกผัน

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น (2.3) โดยใช้เมทริกซ์ผกผันนั้น ทำได้โดยยึดหลักการง่ายๆ ก็คือ จากสมการ (2.4) เราจะได้ทันทีว่าเมทริกซ์ผลเฉลย คือ

$$X = A^{-1}B \quad (2.5)$$

นั่นก็แสดงว่า สิ่งที่เราดำเนินการ มีอยู่ 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A (ซึ่งเราได้ศึกษาการหาเมทริกซ์ผกผันมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา)

ขั้นที่ 2 คือการนำเมทริกซ์ผกผันดังกล่าว มาคูณกับเมทริกซ์ค่าคงที่ B ก็จะได้เมทริกซ์ผลเฉลยดังสมการ (2.5) ดังตัวอย่างข้างล่างนี้



ตัวอย่างที่ 2.4.1 จะใช้เมทริกซ์ผกผัน ในการแก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 1 \\3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\-x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2\end{aligned}$$

วิธีทำ

จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว เราจะได้ตามลำดับ ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะให้เมทริกซ์ผลเฉลยคือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 จากตัวอย่างที่ 2.3.5 เราได้มาแล้วว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 จึงสามารถหาเมทริกซ์ผลเฉลยได้ทันทีคือ

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -7(1) + 6(0) - 10(2) \\ -14(1) + 3(0) - 5(2) \\ 7(1) + 0(0) + 7(2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \begin{bmatrix} -27 \\ -24 \\ 21 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $x_1 = -\frac{27}{21}$, $x_2 = -\frac{24}{21}$, $x_3 = \frac{21}{21} = 1$, และสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดยง่าย โดยการแทนค่าที่ได้กลับไปในระบบสมการเริ่มต้น

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.1 จงใช้การหาเมทริกซ์ผกผัน(โดยเลือกใช้วิธีการหาเมทริกซ์ผกผันที่ถนัด) ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$1) 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

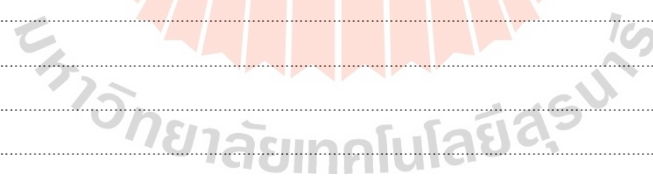
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

$$2) x + 2y - z = 1$$

$$2x + y + 4z = 2$$

$$3x + 3y + 4z = 1$$



❖ การใช้วิธีของเกาส์ (Gauss's Method)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น (2.3) โดยใช้วิธีของเกาส์นี้ ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนหลักๆ คือ

ขั้นที่ 1 แปลงระบบสมการ (2.3) ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix) ดังแสดงในสมการ (2.6)

$$[A|B]: \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{array} \right] \quad (2.6)$$

ขั้นที่ 2 เราจะใช้วิธีการแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ที่เราได้ศึกษากันไปแล้วในเรื่องของการหาเมทริกซ์ผกผัน ในการเปลี่ยนเมทริกซ์ในรูป (2.6) ดังกล่าว ให้อยู่ในรูปข้างล่างนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right] \quad (2.7)$$

โดยที่ * จะเป็นจำนวนจริง ที่อาจจะเหมือนหรือแตกต่างกันไปก็ได้ ซึ่งความมุ่งหมายหลักของขั้นตอนนี้ ก็คือ การทำให้สมาชิก 3 ตำแหน่งล่างซ้ายของเมทริกซ์นั้น เป็น 0

ขั้นที่ 3 แปลงสมการที่ได้ในขั้นที่ 2 ในรูปสมการ (2.7) กลับไปอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นเหมือนเดิม แล้วแก้หาค่าของตัวแปรทีละตัว โดยเริ่มจากตัวแปรล่างสุด ขึ้นไป

ตัวอย่างที่ 2.4.2 จะใช้วิธีของเกาส์ ในการแก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 4x + 9y &= 8 \\ 8x + 6z &= -1 \\ 6y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เราเขียนระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \end{array} \right]$$

ขั้นที่ 2 ใช้การแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & R_2 \text{ สลับกับ } R_3 & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 8 & 0 & 6 & -1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_3 - 2R_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & -18 & 6 & -17 \end{array} \right] \\ & \text{แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ใหม่} & \\ & \xrightarrow{R_3 + 3R_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array} \right] \\ & \text{แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ใหม่} & \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.4.2(ต่อ)

เราจะเห็นว่า เมทริกซ์ตัวสุดท้าย คือ

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 & | & 8 \\ 0 & 6 & 6 & | & -1 \\ 0 & 0 & 24 & | & -20 \end{bmatrix}$$

อยู่ในรูปดังแสดงใน (2.7) แล้ว

ขั้นที่ 3 แปลงกลับไปอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น แล้วแก้จากล่างขึ้นบน ได้ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 4 & 9 & 0 & | & 8 \\ 0 & 6 & 6 & | & -1 \\ 0 & 0 & 24 & | & -20 \end{bmatrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4x + 9y = 8 \quad \dots (1) \\ 6y + 6z = -1 \quad \dots (2) \\ 24z = -20 \dots (3) \end{array}$$

จากสมการที่ (3) เราได้ทันทีว่า

$$z = -\frac{20}{24} = -\frac{5}{6}$$

นำค่า z ที่ได้ แทนในสมการ (2) เพื่อหาค่า y จะได้เป็น $y = \frac{2}{3}$ แล้วนำค่า y ที่ได้ ไปแทน

ในสมการ (1) เพื่อหาค่า x จะได้ค่า คือ $x = \frac{1}{2}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{5}{6}$

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.2 จงใช้วิธีการของเกาส์ ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้ แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้กับแบบฝึกทักษะที่ 2.4.1

1) $2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2) \quad x + 2y - z = 1$$

$$2x + y + 4z = 2$$

$$3x + 3y + 4z = 1$$

ข้อสังเกต ในเรื่องนี้ การทำเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งกลางทางซ้ายเป็นศูนย์หมด (เมทริกซ์ (2.7)) ก่อน แล้วค่อยแปลงกลับมาเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น แล้วจึงหาผลเฉลยทีละตัว ดังแสดงในตัวอย่าง 2.4.2 นั้น นักศึกษาอาจจะสังเกตเห็นได้ว่า อีกทางหนึ่งที่สะดวก ก็คือ การแปลงเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูป

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & *_1 \\ 0 & 1 & 0 & *_2 \\ 0 & 0 & 1 & *_3 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

แล้วจะได้ทันทีว่า $*_1, *_2, *_3$ นั้น เป็นผลเฉลยที่ต้องการนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2.4.3 จาก ขั้นที่ 3 ของตัวอย่างที่ 2.4.2 เราได้มาแล้วคือเมทริกซ์ในรูป

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array} \right]$$

ในตัวอย่างนี้ เราจะแปลงเมทริกซ์นี้ต่อไปจนกระทั่งอยู่ในรูป (2.8)

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 - \frac{1}{4}R_3} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_2 \text{ ใหม่} \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 - \frac{9}{6}R_2} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_1 \text{ ใหม่} \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (1/4)R_1 \text{ แล้วเขียนเป็น } R_1 \text{ ใหม่} \\ (1/6)R_2 \text{ แล้วเขียนเป็น } R_2 \text{ ใหม่} \\ (1/24)R_3 \text{ แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ใหม่} \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 \end{array} \right]$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{5}{6}$ ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับการดำเนินการในแบบก่อนหน้าในตัวอย่าง 2.4.2

❖ การใช้กฎของครีเมอร์ (Cramer's rule)

ในหัวข้อที่ 2.2 เราได้รู้จักการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3×3 มาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะทำวิธีการนี้มาช่วยในการหาค่าผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร โดยใช้กฎของครีเมอร์

ระบบสมการเชิงเส้นที่เขียนในรูป (2.3) จะทำให้ได้ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมทริกซ์ค่าคงที่ ตามลำดับคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ถ้า กำหนดให้ A_i แทนเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการแทนหลักที่ i ในเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์คอลัมน์ B

แล้วเราจะได้ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร (2.3) คือ

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} \quad (2.9)$$

ดังนั้น เราจะสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 หาค่าตัวกำหนด หรือดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ A นั่นคือหา $\det A$

ขั้นที่ 2 สร้างเมทริกซ์ A_i การแทนหลักที่ i ในเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์คอลัมน์ B

นั่นคือ จะได้ว่า

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \\ c_1 & c & c_3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 หาค่า $\det A_1$, $\det A_2$ และ $\det A_3$

ขั้นที่ 4 นำค่าที่ได้จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 3 ไปแทนหาค่าตัวไม่ทราบค่า x_1 , x_2 และ x_3 ในสมการที่ (2.9)

ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงใช้กฎของครอเมอร์ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรนี้

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 - 3x_3 = 13$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว เราจะได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมทริกซ์ค่าคงที่ ตามลำดับคือ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 หาค่า $\det A$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$1 \cdot (-27) = -27$
 $6 \cdot (-6) = -36$
 -8

ตัวอย่างที่ 2.4.4(ต่อ)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \det A &= (\text{ผลรวมคูณลง}) - (\text{ผลรวมคูณขึ้น}) \\ &= (6 + (-6) + (-6)) - (1 + (-27) + (-8)) \\ &= 28 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 จะได้เมทริกซ์ A_1 , A_2 และ A_3 ดังนี้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 13 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต หลักที่ระบายสีนั้น เกิดจากการแทนหลักนั้นด้วยเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 ด้วยการใช้กระบวนการเดียวกันกับในขั้นตอนแรกในการหาค่าตัวกำหนดของ A_1 , A_2 และ A_3 เราจะได้ค่าตัวกำหนด คือ $\det A_1 = 28$, $\det A_2 = -56$

และ $\det A_3 = -84$

ขั้นที่ 4 นำค่าที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 และ 3 แทนในสมการ (2.8) จะได้ค่าของตัวไม่ทราบค่า ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{28}{28} = 1, \\ x_2 &= \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-56}{28} = -2, \\ x_3 &= \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-84}{28} = -3 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.3จงใช้กฎของครอมเมอร์ ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้ แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้กับแบบฝึกทักษะที่ 2.4.1 และ แบบฝึกทักษะที่ 2.4.2

1) $2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$

$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$2) \quad x + 2y - z = 1$$

$$2x + y + 4z = 2$$

$$3x + 3y + 4z = 1$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.4 จงใช้วิธีการที่ถนัดที่สุด ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$1) \quad 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 22$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 30$$



$$2) \quad x + 2y - 3z = -20$$

$$3x + y + 2z = -1$$

$$2x - 2y + 3z = 14$$

$$3) \quad 2x + 3y - z = -7$$

$$x - 2y + z = -3$$

$$3x + y + 2z = -7$$



2.5 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักศึกษาได้รู้จักกับกระบวนการวิธีต่างๆ ที่เราสามารถใช้แก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรมาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะได้มาศึกษาความเชื่อมโยงระหว่างเรื่องของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร กับปัญหาจริงที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันของเรา ซึ่งจะประกอบด้วย 2 ขั้นตอนหลักๆ ก็คือ

- การเปลี่ยนปัญหาในโลกจริง ให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร
- การนำเอาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ศึกษามาในหัวข้อที่แล้ว มาแก้หาผลเฉลยในขั้นตอนแรก

และเราจะเห็นได้ว่า ภาระหลักของเราในหัวข้อนี้ก็คือขั้นตอนแรก ซึ่งการสร้างทักษะความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาจริงให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่ได้เป็นเรื่องที่ยาก หากแต่ต้องอาศัยการสังเกตและฝึกฝนจากแบบฝึกหัด ถึงจะเกิดมโนภาพ และความเข้าใจ



ตัวอย่างที่ 2.5.1 (ปัญหาเจ้าของบ้านเช่า) อัครเดชเป็นเจ้าของบ้านเช่า 3 หลัง แยกเป็นประเภทคือ มีบ้านประเภทหุรูปานกลาง 1 หลัง บ้านประเภทหุรูปานมาก 1 หลัง และบ้านประเภทหุรูปานที่สุดอีก 1 หลัง เมื่อเดือนที่แล้ว อัครเดชได้มีการซ่อมแซมบำรุงบ้านทั้ง 3 หลัง โดยเสียค่าใช้จ่ายทั้งสิ้นเป็นเงิน 276,000 บาท ซึ่งแบ่งออกได้ดังนี้

1. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหุรูปานกลาง คิดเป็น 10 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น
 2. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหุรูปานมาก คิดเป็น 20 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น
 - และ 3. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหุรูปานที่สุด คิดเป็น 30 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น
- ถ้ากำหนดให้ ค่าเช่าบ้านประเภทหุรูปานที่สุดแพงเป็น 2 เท่าของค่าเช่าบ้านประเภทหุรูปานกลาง และ อัครเดชเก็บค่าเช่าบ้านในเดือนนั้นรวมกันทั้ง 3 หลังได้เป็นเงิน 1,240,000 บาท แล้วจงหาว่า ราคาเช่าบ้านของบ้านแต่ละหลัง เป็นเท่าไรต่อเดือน

วิธีทำ

กำหนดตัวแปร คือ ให้

x แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหุรูปานกลาง ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

y แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหุรูปานมาก ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

z แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหุรูปานที่สุด ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

เนื่องจาก ในเดือนที่มีการซ่อมบำรุงบ้านนั้น อัครเดชเก็บค่าเช่ารวมกันทั้ง 3 หลังได้ 1,240,000 จึงได้ว่า

$$x + y + z = 1,240,000 \quad (1)$$

ตัวอย่างที่ 2.5.1(ต่อ)

และจากข้อมูลเรื่องค่าใช้จ่ายซ่อมบำรุงของบ้านแต่ละหลังเมื่อเทียบกับค่าเช่าของบ้านหลังนั้น เราจึงได้ว่า

$$0.1x + 0.2y + 0.3z = 276,000 \quad (2)$$

เพราะว่าค่าซ่อมบำรุงของบ้านทั้ง 3 หลังรวมกันเป็น 276,000

ต่อมา จากข้อความที่ว่า "ค่าเช่าบ้านประเภทหริ่งที่สุดแพงเป็น 2 เท่าของค่าเช่าบ้านประเภทหริ่งปานกลาง" เราจึงได้ว่า

$$z = 2x \quad (3)$$

นั่นคือ ตอนนี้นำระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบไปด้วย 3 สมการ และ 3 ตัวแปร ซึ่งเราจะสามารถทำการแก้หาผลเฉลยได้โดยวิธีใดก็ได้ตามที่ได้อธิบายในหัวข้อที่แล้ว แต่ในตัวอย่างนี้ เราจะสังเกตเห็นว่ามีวิธีที่ง่ายกว่า นั่นก็คือ การแทนค่า $z = 2x$ จากสมการที่ (3) ลงในสมการ (2) และ (1) ก็จะทำให้ระบบสมการใหม่ที่ได้ ประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y เท่านั้น ซึ่งก็ง่ายต่อการหาผลเฉลย

ดังนั้น เราจะทำการแทนค่า $z = 2x$ จากสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2) และ (1) ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$0.1x + 0.2y + 0.3(2x) = 276,000 \quad (4)$$

$$x + y + (2x) = 1,240,000 \quad (5)$$

รวมพจน์ของตัวแปร x จะได้ว่า

$$0.7x + 0.2y = 276,000 \quad (6)$$

$$3x + y = 1,240,000 \quad (7)$$

จากสมการที่ (7) เราได้ $y = 1,240,000 - 3x$ และนำไปแทนใน (6) จึงได้ว่า

$$0.7x + 0.2(1,240,000 - 3x) = 276,000$$

$$0.7x + 248,000 - 0.6x = 276,000$$

$$0.1x = 276,000 - 248,000$$

$$x = 280,000$$

นำค่า x ที่ได้ กลับไปแทนหาค่า y และ z จากสมการที่ (7) และ (3) ตามลำดับ จะได้

$$y = 400,000 \text{ และ } z = 560,000$$

นั่นคือ ราคาเช่าของบ้านประเภทหริ่งปานกลาง คือ 280,000 บาท ต่อเดือน

ราคาเช่าของบ้านประเภทหริ่งมาก คือ 400,000 บาท ต่อเดือน

ราคาเช่าของบ้านประเภทหริ่งที่สุด คือ 560,000 บาท ต่อเดือน

ตัวอย่างที่ 2.5.2 (ปัญหากลงทุน) สืบเนื่องจากการทำธุรกิจบ้านเช่าได้กำไรดีเหลือเกิน ดังนั้น เมื่อต้นปีที่แล้ว อัครเดช จึงได้นำเงินที่เก็บสะสมมาเป็นจำนวน 25,000,000 บาท ให้กับพรประภา เพื่อนสนิทที่คบกันมาตั้งแต่สมัยเรียน ป.ตรี มทส. ให้ไปลงทุนกับบริษัทหลักทรัพย์แห่งหนึ่ง บริษัทนี้มีทางเลือกการลงทุนให้พรประภาอยู่ 3 ประเภท คือ การลงทุนกับโครงการร่ำรวย การลงทุนกับโครงการมั่งมี และการลงทุนกับโครงการเศรษฐีอายุน้อย ซึ่งแต่ละประเภทการลงทุนให้ค่าตอบแทนแตกต่างกันไป ดังนี้

1. การลงทุนกับโครงการร่ำรวย ให้ค่าตอบแทน 6 % บาท ต่อปี
2. การลงทุนกับโครงการมั่งมี ให้ค่าตอบแทน 7 % บาท ต่อปี
3. การลงทุนกับโครงการเศรษฐีอายุน้อย ให้ค่าตอบแทน 8 % บาท ต่อปี

ถ้ากำหนดให้ เมื่อสิ้นปีที่ผ่านมา พรประภาได้เงินตอบแทนทั้งหมดจากการลงทุนกับโครงการทั้งสามรวมกันเป็น 1,620,000 บาท และพรประภาใช้เงินลงทุนในโครงการมั่งมี มากกว่าเงินที่ใช้ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อยอยู่ 6,000,000 บาท แล้วจงหาว่า พรประภาได้ใช้เงินเป็นจำนวนเท่าใดในการลงทุนไปในแต่ละโครงการ

วิธีทำ

เนื่องจากโจทย์ถามหาจำนวนเงินที่ภัทรกลงทุนไปในแต่ละโครงการ ดังนั้น เราจะกำหนดให้เป็นตัวแปร คือ

- ให้ x แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการร่ำรวย
 y แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการมั่งมี
 z แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อย

ขั้นต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไขที่โจทย์ให้มา แล้วเปลี่ยนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ เนื่องจาก เงินที่ใช้ลงทุนไปทั้ง 3 โครงการ เมื่อรวมกันแล้วจะต้องเป็นเงินที่พรประภาได้มาจากอัครเดช เมื่อตอนต้นปี นั่นคือ

$$x + y + z = 25,000,000 \quad (1)$$

และจากเงื่อนไขการให้ค่าตอบแทนของแต่ละโครงการที่แสดงไว้ในข้อ 1 - 3 ข้างต้น เราจะได้ว่า

$$0.06x + 0.07y + 0.08z = 1,620,000 \quad (2)$$

และเนื่องจาก พรประภาใช้เงินลงทุนในโครงการมั่งมี มากกว่าเงินที่ใช้ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อยอยู่ 6,000,000 บาท จึงได้ว่า

$$y - z = 6,000,000 \quad (3)$$

ซึ่งมาถึงตอนนี้ เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 3 ตัวแปร และ 3 สมการ ขั้นตอนที่ต่อไปก็คือการเลือกวิธีที่เหมาะสม(และถนัด) ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนี้

และในตัวอย่างนี้ จะได้ใช้วิธีของเกาส์ (Gauss's Method) ซึ่งแสดงไว้ในหัวข้อที่ 2.4 ในการหาผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 2.5.2 (ต่อ)

จากสมการที่ (1), (2) และ (3) เราสามารถสร้างเมทริกซ์แต่งเต็มได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25,000,000 \\ 0.06 & 0.07 & 0.08 & 1,620,000 \\ 0 & 1 & -1 & 6,000,000 \end{array} \right]$$

เราจะเริ่มการดำเนินการแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ตามลำดับดังนี้

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 - 0.06R_1} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_2 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25,000,000 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 120,000 \\ 0 & 1 & -1 & 6,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{100R_2} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_2 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25,000,000 \\ 0 & 1 & 2 & 12,000,000 \\ 0 & 1 & -1 & 6,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 - R_2} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_1 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13,000,000 \\ 0 & 1 & 2 & 12,000,000 \\ 0 & 1 & -1 & 6,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_3 - R_2} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13,000,000 \\ 0 & 1 & 2 & 12,000,000 \\ 0 & 0 & -1 & -2,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{(-1)R_3} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13,000,000 \\ 0 & 1 & 2 & 12,000,000 \\ 0 & 0 & 1 & 2,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 + R_3} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_1 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15,000,000 \\ 0 & 1 & 2 & 12,000,000 \\ 0 & 0 & 1 & 2,000,000 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \\ \text{แล้วเขียนเป็น } R_2 \text{ ใหม่} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15,000,000 \\ 0 & 1 & 0 & 8,000,000 \\ 0 & 0 & 1 & 2,000,000 \end{array} \right]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= 15,000,000 \\ y &= 8,000,000 \\ z &= 2,000,000 \end{aligned}$$

นั่นคือ จะสรุปได้ว่า

พรประภา ลงทุนไปกับโครงการร่ำรวย เป็นจำนวนเงิน 15,000,000 บาท

ลงทุนไปกับโครงการมั่งมี เป็นจำนวนเงิน 8,000,000 บาท

และ ลงทุนกับโครงการเศรษฐกิจอ่อนแอ เป็นจำนวนเงิน 2,000,000 บาท

แบบฝึกทักษะที่ 2.5.1 จงใช้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร พร้อมด้วยเลือกวิธีการแก้ที่เหมาะสม(หรือถนัด) ในการแก้หาผลเฉลยของปัญหาในชีวิตจริงต่อไปนี้

1) **ปัญหากลงทุนมือใหม่** กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยการลงทุนของบริษัทสุขสันต์हरรรษาในแต่ละประเภทการลงทุน ซึ่งมีทั้งหมด 3 ประเภทคือ ประเภท 1 ปี, ประเภท 2 ปี และประเภท 3 ปี เป็นไปตามข้างล่างนี้

ประเภท (ปี)	1	2	3
อัตราดอกเบี้ย	3.4 %	5.0 %	6.0 %

อนุสรณ์เป็นนักธุรกิจมือใหม่ มีความประสงค์ที่จะลงทุนกับบริษัทนี้ และมีเงินที่จะใช้ลงทุนทั้งสิ้นเป็นจำนวน 15,000,000 บาท โดยอนุสรณ์ต้องการที่จะได้ผลตอบแทนในแต่ละปีจากการลงทุนทั้ง 3 ประเภท เป็นจำนวนเงินทั้งสิ้น 800,000 บาท ถ้า อนุสรณ์ต้องการที่ใช้เงินลงทุนในประเภท 2 ปี มากกว่าเงินที่จะลงทุนในประเภท 1 ปี อยู่ 1,000,000 บาท แล้วเงินที่เหลือ จะใช้ลงทุนกับการลงทุนในประเภท 3 ปี

จงหาว่า อนุสรณ์จะต้องลงทุนกับแต่ละประเภทการลงทุน เป็นจำนวนเงินเท่าใด

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

.....

.....

.....

.....

.....



2) **ปัญหา น.ส. ดาว มหาลัย กับ สูตรปรุงอาหาร** ไก่ผัดใส่กรอกทรงเครื่อง เป็นอาหารเลิศรสประจำตระกูลของ น.ส.ดาว มหาลัย ที่มีส่วนประกอบหลักคือ ไก่, ใส่กรอก และข้าว มาวันหนึ่ง น.ส.ดาว จัดงานเลี้ยงฉลองการสำเร็จการศึกษาจาก มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งในกรุงเทพฯ และต้องการที่จะทำไก่ผัดใส่กรอกทรงเครื่องนี้เลี้ยงแขกในงานในปริมาณที่มาก แต่ปัญหา คือ น.ส.ดาว มีงบประมาณในการซื้อส่วนประกอบของอาหารไม่มาก (เพราะเพิ่งสำเร็จการศึกษา ยังไม่มีงานทำ) ซึ่งราคา วัตถุดิบจากตลาดประจำบ้านหนองใหญ่ พบว่า

เนื้อไก่ ราคา 600 บาท ต่อกิโลกรัม

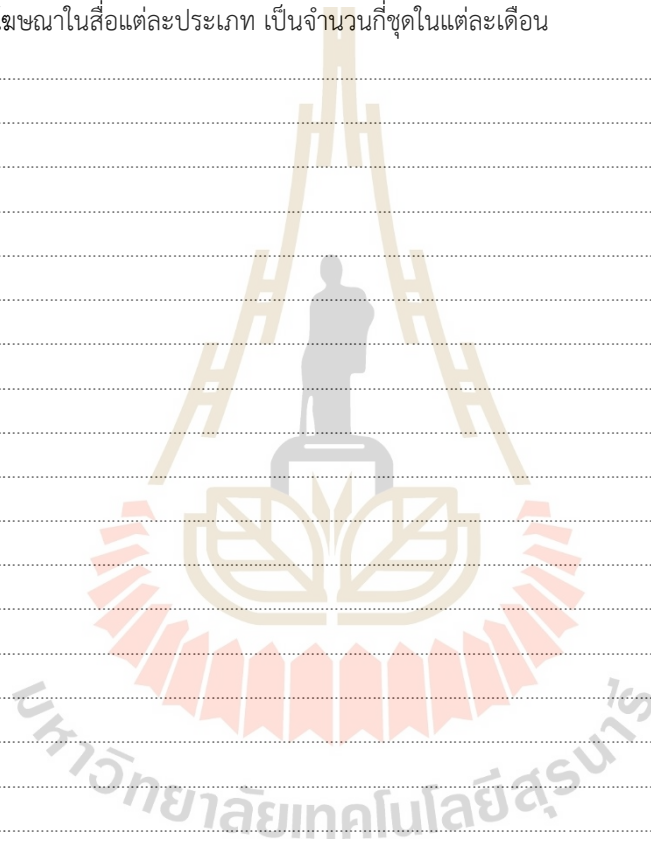
ใส่กรอกหมู ราคา 300 บาท ต่อกิโลกรัม

และ ข้าว ราคา 100 บาท ต่อกิโลกรัม

ถ้า น.ส.ดาว มหาลัย ได้จ่ายเงินทั้งหมดในการซื้อวัตถุดิบเป็นจำนวน 4,200 โดยน้ำหนักรวมของวัตถุดิบทั้ง 3 ชนิดนี้คือ 13.5 กิโลกรัม และพบอีกด้วยว่า น.ส. ดาว ข้าวที่ น.ส.ดาว ซื้อ หนักเป็น 2 เท่าของใส่กรอกที่ซื้อ จงหาว่า น.ส.ดาว ซื้อวัตถุดิบแต่ละประเภทเป็นกิโลกรัม

- 3) **ปัญหาการโฆษณา**บริษัทการตลาดแห่งหนึ่ง มีความประสงค์จะลงโฆษณากับสื่อ โดยมีงบประมาณทั้งหมด 30,000 บาท ต่อเดือนโดยที่ อัตราค่าโฆษณาทางทีวี คิดเป็นชุดละ 1,000 บาท อัตราค่าโฆษณาทางวิทยุ คิดเป็นชุดละ 200 บาท และทางหนังสือพิมพ์คิดเป็นชุดละ 500 บาท ต่อเดือน ถ้าบริษัทนี้ต้องการที่จะลงโฆษณาเป็นจำนวนทั้งสิ้น 60 ชุดใน 1 เดือน และต้องการที่ให้จำนวนชุดของการลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนชุดของการลงโฆษณาทางทีวีรวมกับทางหนังสือพิมพ์พอดี

จงหาว่า บริษัทนี้ จะต้องลงโฆษณาในสื่อแต่ละประเภท เป็นจำนวนกี่ชุดในแต่ละเดือน



- 4) **ปัญหาการโฆษณา (ต่อ)** จากข้อ 3 ปรากฏว่าในเดือนหน้านี้ บริษัทดังกล่าวได้ลดงบประมาณการโฆษณาจาก 30,000 บาท เป็น 25,000 บาท จงหาว่า จะต้องทำการโฆษณาในสื่อแต่ละประเภท เป็นจำนวนกี่ชุด (ถ้าเงื่อนไขที่เปลี่ยนนั้น เหมือนกับข้อที่ 3 ทุกประการ)



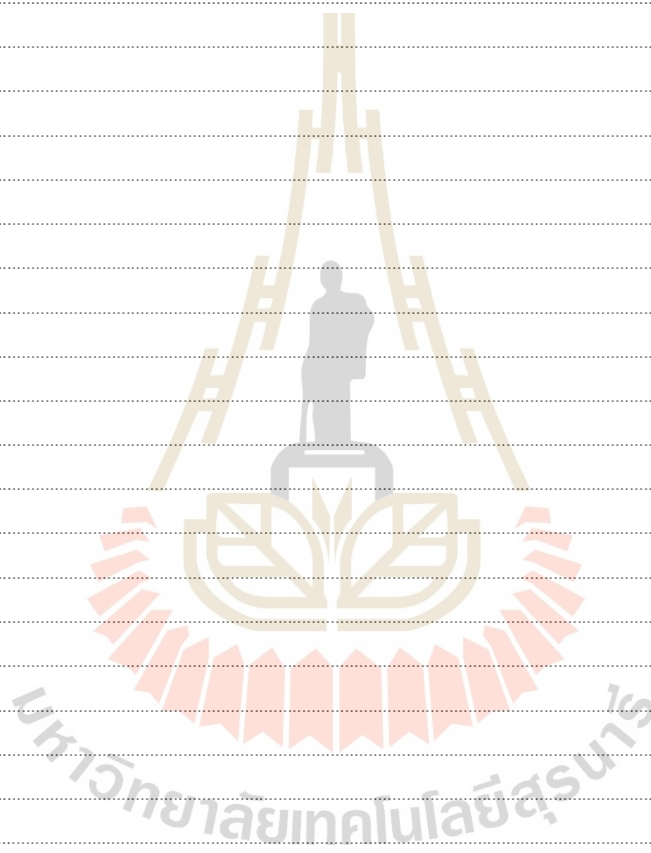
5) **ปัญหาการจำหน่ายตั๋วเข้าชมกีฬา** ในการแข่งกีฬาครั้งหนึ่งเมื่อไม่นานมานี้ สนามกีฬากลางมีที่นั่งทั้งหมด 49,000 ที่นั่ง โดยแบ่งเป็น 3 ระดับคือ ที่นั่งระดับล่าง ระดับกลาง และระดับบนสุด โดยแต่ละระดับจะมีราคาตั๋วที่แตกต่างกัน คือ

ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับล่าง คิดเป็น 35 บาท ต่อหนึ่งที่นั่ง

ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับกลาง คิดเป็น 30 บาท ต่อหนึ่งที่นั่ง

และ ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับบนสุด คิดเป็น 25 บาท ต่อหนึ่งที่นั่ง

โดยจำนวนที่นั่งในระดับในระดับล่าง และระดับกลาง เมื่อรวมกันแล้ว จะเท่ากับจำนวนที่นั่งในระดับบนสุด เมื่อมีการจำหน่ายตั๋วเข้าชมกีฬาครั้งหนึ่ง ผลปรากฏว่าตั๋วขายหมดพอดี และได้รายได้ทั้งหมดเป็นเงิน 1,419,500 บาท จงหาว่า จำนวนที่นั่งในแต่ละระดับนั้น มีจำนวนเท่าใด



แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$, $B = [-7 \ 5]$, และ $C = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 10 \\ 11 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

จงหา

- | | |
|------------|----------------|
| 1. $A + B$ | 7. $0.5C$ |
| 2. $A + C$ | 8. $2A + 3C$ |
| 3. $C - A$ | 9. $B + C$ |
| 4. $A - C$ | 10. $-C - A$ |
| 5. $3A$ | 11. $-2B + 5C$ |
| 6. $-2B$ | 12. $3A - 4C$ |

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

จงหา

- | | |
|-------------|-----------|
| 1. $A + B$ | 8. CB |
| 2. $B + C$ | 9. A^2 |
| 3. $3X + V$ | 10. B^2 |
| 4. $3B - C$ | 11. B^3 |
| 5. AB | 12. AV |
| 6. BA | 13. AX |
| 7. BC | 14. BX |
| | 15. VX |

3. จงใช้การหาเมตริกผกผันเพื่อหาผลเฉลยในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 4 \\ -26 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} -35 \\ -8 \end{bmatrix}$

$$5) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} 6 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$6. 3X = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 21 & -27 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 25 & 13 \\ 13 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$$

$$8. \begin{bmatrix} 20 & -3 \\ 15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} K$$

$$9. Y - \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -40 & -40 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 28 & 0 & -20 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -21 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} X$$

$$13. \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 13 \\ 21 & 0 & -36 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. จงหาผลคูณของเมทริกต่อไปนี้ (ถ้ามี)

$$1. \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & 5 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

5. จงใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (ด้วยการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น) สำหรับหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) \quad & -6r + 5s + 2t = -11 \\ & -2r + s + 4t = -9 \\ & 4r - 5s + t = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -6x - 2y + 2z = -8 \\ & 3x - 2y - 4z = 8 \\ & 6x - 2y - 6z = -18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 5x - 4y + 2z = 21 \\ & -x - 5y + 6z = -24 \\ & -x - 4y + 5z = -21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 6r - s + 3t = -9 \\ & 5r + 5s - 5t = 20 \\ & 3r - s + 4t = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & -3a - b - 3c = -8 \\ & -5a + 3b + 6c = -4 \\ & -6a - 4b + c = -20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & -5x + 3y + 6z = 4 \\ & -3x + y + 5z = -5 \\ & -4x + 2y + z = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & 3a - 3b + 4c = -23 \\ & a + 2b - 3c = 25 \\ & 4a - b + c = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & -6x - 2y - z = -17 \\ & 5x + y - 6z = 19 \\ & -4x - 6y - 6z = -20 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะชุด Extra

1. กำหนดเมทริกซ์ $A_{4 \times 5}$, $A_{3 \times 5}$, $N_{2 \times 3}$, $C_{4 \times 3}$, $D_{5 \times 2}$, $M_{3 \times 4}$ แล้วผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้ มีค่าเท่าใด

1.1) $C(AB)$

1.4) $B[(DN)B]$

1.2) $M[BA]$

1.5) $[(NM)A]D$

1.3) $[(CM)A]$

1.6) $[(CB)D]M$

2. กำหนด A ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา A^{-1}

2.1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

2.3) $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2.2) $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2.4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

2.Extra) จงหา A^{-1} (ถ้ามี) ของเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$8) \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$10) \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

3. ถ้ากำหนดให้ A ในแต่ละข้อจงหา

$$3.1 A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \det A = 1 \text{ แล้ว } (x + 3) = ?$$

$$3.2 A = \begin{bmatrix} -x + 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \det A = 0 \text{ แล้ว } (x - 4) = ?$$

$$3.3 A = \begin{bmatrix} (x - 1) & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \det A = 1 \text{ แล้ว } (x + 2)^2 = ?$$

$$3.4 A = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2x - 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \det A = 2 \text{ แล้ว } \frac{(x+1)}{2} = ?$$

4. จงหา $\det A$ เมื่อกำหนด

$$4.1 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4.3 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4.2 A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4.4 A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.Extra) จงหา $\det A$ เมื่อกำหนด

$$1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$6) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$7) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$9) A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$10) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. จงหาค่า $x + 2y - z$ ในแต่ละข้อ

$$5.1) \begin{bmatrix} 2+x & 1 \\ y-2 & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5.2) \begin{bmatrix} z+x & y \\ -x & x-y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$5.3) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z+x & 2 \\ x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5.4) \begin{bmatrix} x+z & z-2 \\ y-z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6) จงหาเมทริกซ์ A ที่ทำให้ $A + 3B = -C$ เมื่อ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) จงหาผลคูณของเมทริกซ์แต่ละคู่ต่อไปนี้ (ถ้าสามารถดำเนินการได้)

$$1) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ -2 & 8 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & 0 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$8) \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} -9 & 5 \\ 8 & -3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$10) \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

1. จงหาค่า $3x + y$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 5 & y \\ -x & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & x-3 \\ y-1 & 11 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่า $2x - (x + y)$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} x+4 & 2 \\ 8 & 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 2 \\ 8 & 6+5x \end{bmatrix}$$

3. จงหาค่า $3(x - y) - 5$ เมื่อ

$$2 \begin{bmatrix} y+x & 13 \\ 7 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$$

4. จงหาค่า $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 9 & 2y \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ 2y & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 3x \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

5. จงหาค่า $\frac{x-2}{y-4}$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 5 & 5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x & 11 \\ 7 & -5y \end{bmatrix}$$

6. จงหาค่า $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 0 & y \\ 2x & -11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5y & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

7. จงหาค่า $\frac{3x}{2} - 5y$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 7x & 21 \\ 3x & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6x & -16 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+3 & 5 \\ 2y & 9 \end{bmatrix}$$

8. จงหาค่า $12 + 7\left(\frac{x}{y}\right)$ เมื่อ

$$2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ 4y-3y & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -3 & \frac{y}{2} \\ x & -8 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ \frac{14}{5} & 10 \end{bmatrix}$$

9. จงหาค่า $2x + 3y$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 5x & 10 \\ -11 & 3y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x & -7 \\ 0 & 9y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 6+4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+y & 1 \\ -20 & 10y \end{bmatrix}$$

10. จงหาค่า $\frac{13}{6}x + 26y$ เมื่อ

$$4 \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & \frac{x}{4} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} y & -10 \\ 7 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & -8 \\ 26 & 40 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} \frac{x}{4} & 2 \\ 6 & 4y \end{bmatrix}$$

11. จงหาค่า $x + y + z$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 7 & 5x & 30 \\ -5 & 3y & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2y & z \\ 3 & -2x & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 3x \\ -2 & 4z & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & z & -4y \\ 6 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

12. จงหาค่า $(x + y) - 2z$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 2 & 3y & 7 \\ x & 0 & -10 \\ 3 & 12 & -2z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2x & 8 \\ z & 5 & 8 \\ 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z & 3 \\ 2y & 10 & 5 \\ 6 & 5 & 3x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 7 & -12 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & y \end{bmatrix}$$

13. จงหาค่า $2(x + y) + 3z$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} x & 7 \\ 6 & 3y \\ -4z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3 \\ -2 & 3x \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & -4z \\ 2x & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & 5 \\ -5 & 1 \\ y & -12 \end{bmatrix}$$

14. จงหาค่า $5(x + y)$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 9 & x \\ 3y & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & y \\ -2x & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 4x + 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 27 - 3x & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 20 \\ x - 6 & 0 \end{bmatrix}$$

15. จงหาค่า $4x + 3(y + z)$ เมื่อ

$$\begin{bmatrix} 3x & 6 \\ 5 & 4z \\ 21 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x & -7 \\ 2 & 2z \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3z & 5 \\ 1 & y \\ 2x & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 18 \\ 3 & -1 \\ 2y & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2y & 0 \\ -1 & 3x \\ 3z & 2 \end{bmatrix}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.1 เมทริกซ์และพีชคณิตเบื้องต้นบนเมทริกซ์

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.1

$$1) \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -17 & -4 & 7 \\ -10 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} -3/2 & -3 & 3/2 \\ -19/2 & -1 & 5/2 \\ -10 & -3/2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad 4) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.2

$$1) x = 1, y = 6 \quad 2) x = -7, y = -11 \quad 3) x = -5, y = 2, z = 1$$

$$4) x = -1, y = 4, z = 6 \quad 5) x = 5, y = 19, z = 5$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.3

$$1) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -17 & 12 \end{bmatrix} \quad 2) \begin{bmatrix} -18 & 12 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \quad 3) \begin{bmatrix} 1 & -16 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \quad 5) \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 10 & -12 \\ 18 & -20 \end{bmatrix} \quad 6) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 12 & -12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 8) \text{ไม่สามารถทำการคูณกันได้} \quad 9) \begin{bmatrix} 2 & 22 \\ 23 & -2 \\ -9 & -48 \end{bmatrix}$$

$$10) \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \end{bmatrix} \quad 11) [-9u \quad -33v] \quad 12) \begin{bmatrix} 16x - 2y^2 & -4 + 3y \\ -8x^2 - 8y & -2x + 12 \end{bmatrix}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.4

$$2) \text{จะตกที่พิกัด } (-0.1232, 0.1866, 0)$$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.2 ตัวกำหนดของเมทริกซ์

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.2.1

$$\begin{array}{llll} 1) -12 & 2) -24 & 3) 39 & 4) -103 \\ 5) -161 & 6) -51 & 7) 200 & 8) 139 \\ 9) 647 & 10) -800 & 11) 0 & 12) x = -2 \end{array}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.3 เมทริกซ์ผกผัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.3.1

$$1) \text{ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์}$$

2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ 3) $-\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

4) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์

5) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

7) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์

8) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.3.2

1) $\begin{bmatrix} -\frac{8}{57} & \frac{32}{19} & \frac{-20}{57} \\ \frac{22}{19} & \frac{-36}{19} & \frac{-2}{19} \\ \frac{50}{57} & \frac{-48}{19} & \frac{-46}{57} \end{bmatrix}$ 2) $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -9 & 11 & 19 \\ 12 & -14 & -22 \end{bmatrix}$ 3) $\frac{1}{828} \begin{bmatrix} 3 & 31 & 101 \\ -21 & 59 & -155 \\ 78 & -22 & 142 \end{bmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & -11 \\ -7 & -8 & 10 \\ -11 & -15 & 17 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{7}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{5}{22} & \frac{-13}{22} & \frac{7}{22} \end{pmatrix}$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.4 การใช้เมทริกซ์ในการหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.4.1 - 3

1) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ 2) $x = 7, y = -4, z = -2$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.4.4

1) $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$ 2) $x = -2, y = -3, z = 4$

3) $x = -3.5, y = 0.5, z = 1.5$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.5 เมทริกซ์และสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรในชีวิตประจำวัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.5.1

1) อนุสรณ์จะต้อง ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์ธรรมชาติประเภท 1 ปี เป็นจำนวนเงิน 2,500,000 บาท

ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์ธรรมชาติประเภท 2 ปี เป็นจำนวนเงิน 3,500,000 บาท

ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์हरราชอาณาจักร 3 ปี เป็นจำนวนเงิน 9,000,000 บาท

- 2) น.ส.ดาว ได้ซื้อไก่มาเป็นปริมาณ 4.5 กิโลกรัม
ได้ซื้อใส่กรอกมาเป็นปริมาณ 3 กิโลกรัม
ได้ซื้อข้าวมาเป็นปริมาณ 6 กิโลกรัม
- 3) บริษัทนี้จะต้องลงโฆษณาทางทีวี เป็นจำนวน 18 ชุด
ลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวน 30 ชุด
ลงโฆษณาทางหนังสือพิมพ์ เป็นจำนวน 12 ชุด
- 4) บริษัทนี้จะต้องลงโฆษณาทางทีวี เป็นจำนวน 8 ชุด
ลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวน 30 ชุด
ลงโฆษณาทางหนังสือพิมพ์ เป็นจำนวน 22 ชุด
- 5) มีจำนวนที่นั่งระดับล่างทั้งหมด 14,400 ที่นั่ง
มีจำนวนที่นั่งระดับกลางทั้งหมด 10,100 ที่นั่ง
มีจำนวนที่นั่งระดับบนสุดทั้งหมด 24,500 ที่นั่ง

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

ข้อ 1)

1. ไม่สามารถดำเนินการได้
2. $\begin{bmatrix} 32 & 15 & 19 \\ 9 & -9 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 13 & 3 & -4 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -13 & -3 & 4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 45 & 30 & 27 \\ -6 & -18 & 9 \end{bmatrix}$
6. $[14 \quad -10]$
7. $\begin{bmatrix} 8.5 & 2.5 & 5 \\ 5.5 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 81 & 35 & 48 \\ 29 & -21 & 3 \end{bmatrix}$
9. ไม่สามารถดำเนินการได้
10. $\begin{bmatrix} -32 & -15 & -19 \\ -9 & 9 & 2 \end{bmatrix}$
11. ไม่สามารถดำเนินการได้
12. $\begin{bmatrix} -23 & 10 & -13 \\ -50 & -6 & 13 \end{bmatrix}$

ข้อ 2)

1. ไม่สามารถดำเนินการได้
2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3x + 3 \\ 3y - 1 \\ 3z + 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$
5. ไม่สามารถดำเนินการได้
6. ไม่สามารถดำเนินการได้
7. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \\ 8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$
9. ไม่สามารถดำเนินการได้
10. ไม่สามารถดำเนินการได้
11. $\begin{bmatrix} -7 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 23 \\ 16 & 14 & -3 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 15 \\ 14 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 2x + 3y + 6z \\ 4x + z \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} x + 2x \\ 3x + y - z \\ -2x + 2y + 3z \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -1 & 15 & 19 \\ 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 8 & -1 & 2 \\ -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ 15. ไม่สามารถดำเนินการได้

ข้อ 3)

1. $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}$
 2. $\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$
 3. $\begin{bmatrix} -11 \\ -7 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$
 4. $\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$ 11. มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์
 5. $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$
 6. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} -3 & 9 & -9 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$
 7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ 14. $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

ข้อ 4)

1. $\begin{bmatrix} 39 \\ 23 \\ 12 \\ -42 \\ 32 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} -4 & -10 & -8 & -2 \\ -10 & -25 & -20 & -5 \\ 6 & 15 & 12 & 3 \\ 4 & 10 & 8 & 2 \end{bmatrix}$
 2. ไม่สามารถดำเนินการได้ 7. $\begin{bmatrix} 7 & -15 & 2 & 16 & 6 \\ -5 & -9 & -4 & -41 & 36 \\ -7 & 15 & -2 & -16 & -6 \\ 11 & 17 & 30 & -7 & 2 \end{bmatrix}$
 3. $\begin{bmatrix} 0 & 30 & -6 & 3 & 27 \\ 35 & 30 & -44 & 32 & 30 \\ -1 & 29 & 3 & 4 & 21 \\ 34 & -1 & -29 & 30 & -3 \end{bmatrix}$ 8. ไม่สามารถดำเนินการได้
 4. $\begin{bmatrix} 19 & -18 & 6 \\ -30 & 32 & -32 \end{bmatrix}$ 9. ไม่สามารถดำเนินการได้
 5. $\begin{bmatrix} -10 & -8 & -24 & -10 \\ -28 & 8 & -8 & -28 \\ 5 & -7 & 9 & 5 \\ -30 & 15 & -5 & -30 \end{bmatrix}$ 10. ไม่สามารถดำเนินการได้

ข้อ 5)

1. 4, 3, -1 5. 2, 2, 0
 2. มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ 6. -2, 4, -3
 3. 5, -1, -4 7. มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์
 4. -1, 6, 1 8. 2, 3, -1

เฉลยแบบฝึกทักษะชุด Extra

1.1.1) ไม่มี 1.2) ไม่มี 1.3) 4×2 1.4) 3×5 1.5) 2×2 1.6) ไม่มี

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ และ $\det A = ad - bc$

2.1) $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2.2) $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

2.3) $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

2.4) $A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

2.Extra)

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ 1/3 & -2/15 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1/3 & 5/12 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

5) ไม่มี

6) $\begin{bmatrix} -4/7 & 3/14 \\ 1/7 & 1/14 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/9 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 1/18 & -1/2 \end{bmatrix}$

9) ไม่มี

10) ไม่มี

3.3.1 $\det A = (2x)(16) - 3(1) = 1$

$$12x - 3 = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

3.2) $\det A = (-x + 2)(2) - (-1) = 0$

$$-2x + 4 + 1 = 0$$

$$-2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$\therefore x - 4 = \frac{5}{2} - 4 = -\frac{3}{2}$$

3.3) $\det A = (x - 1)(-1) - (2)(x) = 1$

$$-x + 1 - 2x = 1$$

$$-3x = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore (x + 2)^2 = (0 + 2)^2 = 4$$

$$3.4) \det A = (6x)(3) - 2(2x - 1) = 2$$

$$18x - 4x + 2 = 2$$

$$14x = 0$$

$$x = 0$$

$$\therefore \frac{x+1}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

4.

$$4.1) \det A = -5$$

$$4.2) \det A = 29$$

$$4.3) \det A = 10$$

$$4.4) \det A = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (6 + 6 + 0) - (-6 + 24 + 0) = 12 - 18 = -6$$

4.Extra)

- 1) 9 2) 29 3) 19 4) 6 5) -8 6) -24 7) 54 8) 42
9) -60 10) -50

5.

$$5.1) \begin{bmatrix} 2x + 2 & 3 \\ y - 2 + 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z = 1$$

$$y - 1 = -1$$

$$y = 0$$

$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$\therefore x + 2y - z = -1 + 2(0) - 1 = -2$$

$$5.2) \begin{bmatrix} z + x - 1 & y + 2 \\ -x & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$z + x - 1 = 0$$

$$y + 2 = 1 \rightarrow y = -1$$

$$-x = 2 \rightarrow x = -2$$

$$z - 2 - 1 = 0 \rightarrow z = 3$$

$$\therefore x + 2y - z = -2 + 2(-1) - 3 = -7$$

$$5.3) \begin{bmatrix} 1 - (z + x) & 0 \\ 3 - x & 4 - (y - x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$1 + (z + x) = 2$$

$$3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

$$4 - y + x = -2 \rightarrow -y + 3 = -6 \rightarrow y = 9$$

$$1 - (z + 3) = 2 \rightarrow -1 = z + 3 \rightarrow z = -4$$

$$\therefore x + 2y - z = 3 + 2(9) - (-4) = 3 + 18 + 4 = 25$$

$$5.4) \begin{bmatrix} x + z & z - 2 \\ y - z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + z = 1$$

$$z - 2 = 0 \rightarrow z = 2$$

$$y - z = 0 \rightarrow y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$$

$$x = 1 - z \rightarrow x = 1 - 2 = -1$$

$$\therefore x + 2y - z = -1 + 2(2) - 2 = 1$$

6. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{bmatrix}$

จาก $A + 3B = -C$

$$\begin{aligned} A &= -3B - C \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -15 & -9 & -12 \\ 6 & -3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -1 & 2 \\ -17 & -8 & -10 \\ 3 & -3 & -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7)

1) $\begin{bmatrix} 6 & -15 \\ -6 & 37 \\ -10 & -17 \end{bmatrix}$ 2) ไม่สามารถดำเนินการได้ 3) $\begin{bmatrix} 93 \\ -14 \\ 28 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 53 & -67 \\ 15 & -15 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 52 & -42 & -65 \\ -30 & 25 & 45 \\ 6 & 3 & 69 \end{bmatrix}$ 6) ไม่สามารถดำเนินการได้ 7) $\begin{bmatrix} 29 \\ 18 \\ 95 \end{bmatrix}$ 8) $\begin{bmatrix} 27 \\ 51 \\ 33 \end{bmatrix}$ 9) ไม่สามารถดำเนินการได้

10) ไม่สามารถดำเนินการได้

เฉลย Extra Exercises

1) 5 2) -4 3) -144) $\frac{-5}{6}$ 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{11}{24}$ 7) 22 8) 54 9) -9 10) 20
 11) $\frac{752}{61}$ 12) -7.5 13) 0 14) 70 15) $\frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

บทที่ 3

เกี่ยวกับความสัมพันธ์(Relations) และฟังก์ชันเบื้องต้น (Functions)

มนุษย์ได้มีการนำเอาการสร้างความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน มาใช้เพื่อที่จะอธิบายการเปลี่ยนแปลงของสิ่งๆหนึ่ง ที่ขึ้นกับปัจจัย หรือสิ่งอื่นๆในธรรมชาติ หรือปัญหาจริงทางด้านวิศวกรรม ดังนั้น การเข้าใจในหลักการของความสัมพันธ์ของสิ่งเหล่านั้นโดยรวม จึงมีความสำคัญในการแก้ไขปัญหาต่างๆ ที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน และถึงแม้ว่า นักศึกษาจะพอรู้จักความสัมพันธ์และฟังก์ชัน มาบ้างแล้วในระดับมัธยม ในบทนี้ จะได้นำเสนออีกครั้ง เพื่อความเข้าใจที่ถูกต้อง และสามารถนำไปใช้ได้จริงในบทประยุกต์

3.1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชันขั้นพื้นฐาน(Introduction to Relations and Functions)

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน ซึ่งมีความจำเป็นต้องใช้มาก โดยจะมีความรู้อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

❖ คู่อันดับ (Ordered Pairs)

คู่อันดับ คือ สมาชิกที่เขียนอยู่ในรูป (a, b) โดยที่ a, b เป็นสมาชิกของเซต อาจเป็นเซตเดียวกันหรือต่างกันได้ เช่น คู่อันดับ (a, b)

เรียก a ว่า เป็นสมาชิกตัวหน้า(First Element) หรือพิกัด x

b ว่า เป็นสมาชิกตัวหลัง (Second Element) หรือพิกัด y

คุณสมบัติของคู่อันดับ

$(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $(a = c)$ และ $(b = d)$

$(a, b) \neq (b, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$

❖ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และมีสมาชิกตัวหลังเป็นของ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ อ่านว่า A คูณ B หรือ A cross B

บทนิยาม 3.1 ถ้า A, B เป็นเซตใดๆ แล้ว $A \times B$ จะได้เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 กำหนดให้ $A = \{1,3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

จงหา $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$

วิธีทำ $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (c, 1), (c, 3)\}$

$A \times A = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$

$B \times B = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

ข้อสังเกต $A \times B \neq B \times A$ เสมอ ยกเว้น

1. $A = B$
2. A หรือ $B = \emptyset$

คุณสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

1. ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่

$$A \times B \neq B \times A$$

$$\text{แต่ } n(A \times B) = n(B \times A)$$

เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกของเซต ซึ่งในเรื่องของเซตในเอกสารฉบับนี้ เราใช้สัญลักษณ์ |

2. คุณสมบัติการกระจาย

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 กำหนดให้ $A = \{a, b\}, B = \{0\}$ และ $C = \{7,8\}$

จงหา 1. $A \times B \times C$

2. $C \times A \times B$

วิธีทำ 1. $A \times B \times C = \{(a, 0, 7), (a, 0, 8), (b, 0, 7), (b, 0, 8)\}$

2. $C \times A \times B = \{(7, a, 0), (7, b, 0), (8, a, 0), (8, b, 0)\}$

บันทึก

.....

.....

.....

.....

.....

❖ ความสัมพันธ์ (Relations)

ความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับ (a, b) ที่มีคู่อันดับตัวหน้ามาจากเซต A และคู่อันดับตัวหลังมาจากเซต B

บทนิยาม 3.2 r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซต $A \times B$ เขียนแทนด้วย $r \subset A \times B$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 กำหนดให้ $A = \{2, 3, 9\}$ และ $B = \{a, b\}$

จงเขียนความสัมพันธ์จาก A ไป B มา 5 ความสัมพันธ์

วิธีทำ จะได้ตัวอย่างความสัมพันธ์จาก A ไป B 5 ความสัมพันธ์ คือ

$$r_1 = \{(2, a)\}$$

$$r_2 = \{(2, b), (9, b)\}$$

$$r_3 = \{(2, a), (3, a), (3, b)\}$$

$$r_4 = \{(2, a), (2, b), (3, a), (9, a)\}$$

$$r_5 = \{(2, b), (3, a), (3, b), (9, a), (9, b)\}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

จงหาเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(a, b) / a \in A, b \in B, a < b\}$

2. $r_2 = \{(a, b) / a \in A, b \in B, a > b\}$

วิธีทำ จะได้ $A \times B =$

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

1. r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ $a < b$

ดังนั้น $r_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

2. r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ $a > b$

ดังนั้น $r_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

บทนิยาม 3.3 ความสัมพันธ์บน A (Relation on A) หมายถึง ลำดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in A$

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

r เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times B$

ตัวอย่างที่ 3.1.5 กำหนดให้ $A = \{5, 9, 13, 17\}$

จงหาความสัมพันธ์บน A ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(x, y) \in A \times A / x + y < 19\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in A \times A / x = y\}$

วิธีทำ จะได้

$A \times A$

$= \{(5, 5), (5, 9), (5, 13), (5, 17), (9, 5), (9, 9), (9, 13), (9, 17), (13, 5), (13, 9), (13, 13), (13, 17), (17, 5), (17, 9), (17, 13), (17, 17)\}$

1. r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A โดยที่ $x + y < 19$

เช่น คู่อันดับ $(5, 5)$ จะได้ $5 + 5 < 19$

ดังนั้น $r_1 = \{(5, 5), (5, 9), (5, 13), (9, 5), (9, 9), (13, 5)\}$

2. r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A โดยที่ $x = y$

ดังนั้น $r_2 = \{(5, 5), (9, 9), (13, 13), (17, 17)\}$

❖ **โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์**

ถ้ากำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.4 โดเมน ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าของคูลำดับใน r

เขียนแทนด้วย $D_r = \{x / (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวหลังของคูลำดับใน r

เขียนแทนด้วย $R_r = \{y / (x, y) \in r\}$

บันทึก

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.1.6 กำหนดให้ $r = \{(-1,1), (0,4), (3,3)\}$ จงหาโดเมน D_r และเรนจ์ R_r

ของความสัมพันธ์นี้

วิธีทำ จะได้ D_r คือเซตของสมาชิกตัวหน้า

$$\text{ดังนั้น } D_r = \{-1, 0, 3\}$$

R_r คือเซตของสมาชิกตัวหลัง

$$\text{ดังนั้น } R_r = \{1, 4, 3\}$$

❖ ฟังก์ชัน (Functions)

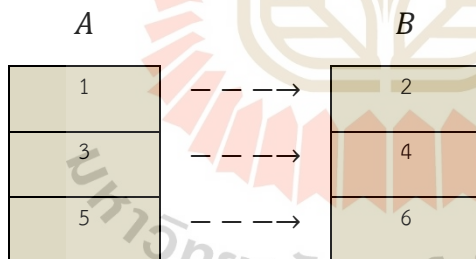
ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งของคู่ลำดับใดๆ ที่สมาชิกตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน กำหนดให้ r_1 และ r_2

เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

$$r_1 = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$$

$$r_2 = \{(1,2), (1,3), (4,5)\}$$

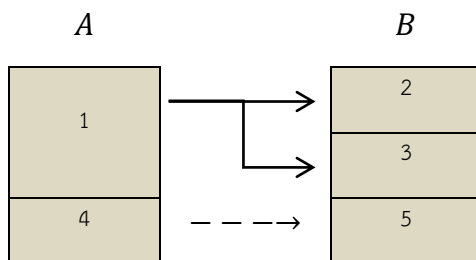
จากความสัมพันธ์ r_1 เขียนแผนภูมิจาก A ไปยัง B ได้



จะเห็นว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับจับคู่ไม่ซ้ำกัน

ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

จากความสัมพันธ์ r_2 เขียนแผนภูมิจาก A ไปยัง B ได้



จะเห็นว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับจับคู่ซ้ำกัน คือ $(1,2), (1,3)$

ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 3.5 ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ในสองคู่ลำดับใดๆ ที่สมาชิกตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน หรือถ้าสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน $(a, b) \in f$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชัน เมื่อ $b = c$

"ใช้สัญลักษณ์ f, g, h แทนความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน"

ตัวอย่างที่ 3.1.7 ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน เช่น

$$f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

$$f_2 = \{(x, y) / y = x^2 + 1\}$$

$$f_3 = \{(x, y) / y = |2x + 1|\}$$

$$f_4 = \{(x, y) / x = \sqrt{y}\}$$

❖ การตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ทำได้หลายกรณีเช่น

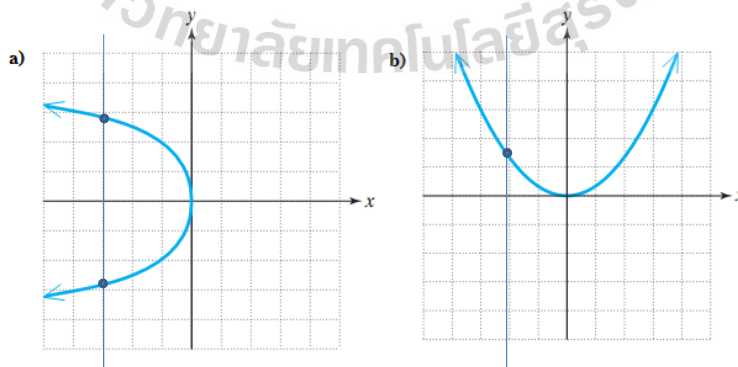
กรณีที่ 1 ใช้วิธีเขียนกราฟ

ถ้าเราสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ โดยกระทำดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของความสัมพันธ์

ขั้นที่ 2 ลากเส้นตรงขนานกับแกน y ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์นั้น ถ้าตัด 1 จุด จะได้ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเส้นใดเส้นหนึ่งตัดกราฟนั้นเกิน 1 จุด ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

กราฟของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน อาทิเช่น



แผนภาพที่ 2 แผนภาพแสดงการทดสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ด้วยการเขียนกราฟ โดยที่ ความสัมพันธ์ในกราฟ a) ไม่เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ในกราฟ b) เป็นฟังก์ชัน

กรณีที่ 2 ใช้วิธีสุม โดยการแทนค่า x, y

โดยที่ ถ้าสุมค่า x มา 1 ค่า ถ้าให้ค่า y เกิน 1 ค่า จะไม่เป็นฟังก์ชัน กรณีความสัมพันธ์เป็นแบบเงื่อนไข เช่น

$$f = \{(x, y) | y = x^2\}$$

ถ้า $(x, y) \in f$ ให้ $y = f(x)$ คือ y เป็นค่าของ f ที่ x

นั่นคือ $f = \{(x, y) | y = f(x) \text{ และ } (x, y) = (x, f(x))\}$

จะได้ $y = f(x) = x^2$ จะได้ค่าของ y ขึ้นอยู่กับค่าของ x

ถ้าเราสุมแทน $x = -1$ จะได้ $y = f(-1) = 1$

$$x = 0 \text{ จะได้ } y = f(0) = 0$$

$$x = 1 \text{ จะได้ } y = f(1) = 1$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.1.8 กำหนดให้ $y^2 + 7 = x$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ จาก $y^2 + 7 = x$

$$\text{หรือ } y^2 = x - 7$$

$$\text{สุมแทน } x = 8 \text{ จะได้ } y^2 = 8 - 7$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

จะเห็นว่าเมื่อแทน $x = 8$ แล้วได้ค่า y สองค่า คือ 1 และ -1

เขียนเป็นคู่ลำดับได้ คือ (8, 1), (8, -1)

ดังนั้น $y^2 + 7 = x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.1.9 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 1$

จงหาค่าของ $f(4), f(t), f(k+1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^2 - 1$

$$\text{จะได้ } f(4) = 2(4^2) - 1 = 31$$

$$f(t) = 2t^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2(k+1)^2 - 1 \\ &= 2(k^2 + 2k + 1) - 1 \\ &= 2k^2 + 4k + 2 - 1 \\ &= 2k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

บทนิยาม 3.6 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ต้องมีเงื่อนไข คือ

$$D_f = A \text{ และ } R_f \subset B$$

ใช้สัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.1 จงพิจารณาและหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ ต่อไปนี้

1) กำหนดให้เซต $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ และ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A ที่กำหนดโดย $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, \text{เมื่อ } x, y \in A\}$ จงเขียนเซตของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ R นี้

.....

.....

2) กำหนดให้ความสัมพันธ์ R โดย $R = \{(x, y) | y = x + 5, x, y \in N\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ R นี้ออกมาในรูปของเซตแบบแจกแจงสมาชิก พร้อมระบุโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้ด้วย

.....

.....

3) กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $B = \{4, 6, 9\}$ และนิยามความสัมพันธ์ R จาก A ไป B โดย $R = \{(x, y) | \text{ความต่างของค่า } x \text{ และค่า } y \text{ เป็นเลขคี่ เมื่อ } x \in A, y \in B\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ R ในแบบแจกแจงสมาชิก

.....

.....

4) ให้ $A = \{x, y, z\}$ และ $B = \{1, 2\}$ จงหาจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จาก A ไปยัง B

.....

.....

5) ให้ R เป็นความสัมพันธ์ที่นิยามบนเซตของจำนวนเต็ม Z โดยนิยามเป็น $R = \{(a, b) : a, b \in Z, a - b \text{ เป็นเลขจำนวนเต็ม}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ R นี้

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.2 จงพิจารณาและหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชัน ต่อไปนี้

1) จงพิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และอย่างไร (ยกเหตุผลประกอบ)

$$(i) \{(2,1), (5,1), (8,1), (11,1), (14,1), (17,1)\}$$

$$(ii) \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), (10,5), (12,6), (14,7)\}$$

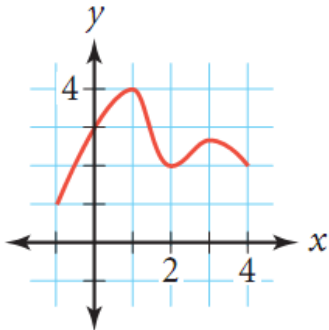
$$(iii) \{(1,3), (1,5), (2,5)\}$$

.....

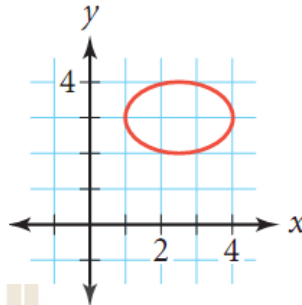
.....

2) กราฟในข้อใด เป็นฟังก์ชัน และเพราะอะไร

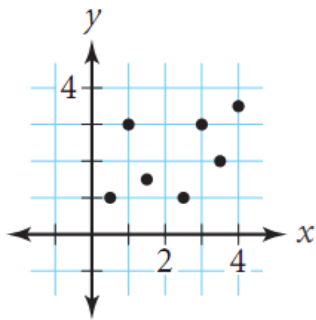
ก.



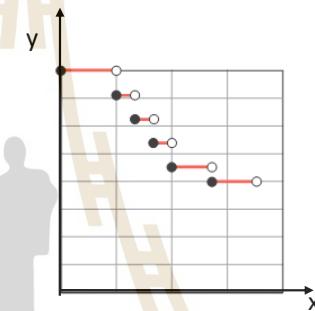
ข.



ค.



ง.



3) จงหาเรนจ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1) $f(x) = 2 - 3x, x \in R, x > 0$.

3.2) $f(x) = x^2 + 2, x$ เป็นจำนวนจริง

3.3) $f(x) = x, x$ เป็นจำนวนจริง

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.3 จงหาค่าของฟังก์ชัน ในแต่ละจุดบนโดเมนที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. ถ้า $h(t) = |t + 2| + 3$ แล้ว $h(6) =$

2. ถ้า $g(a) = 3^{3a-2}$ แล้ว $g(1) =$

3. ถ้า $w(t) = -2t + 1$ แล้ว $w(4) =$

4. ถ้า $g(x) = 3x - 3$ แล้ว $g(-6) =$

5. ถ้า $h(n) = -2n^2 + 4$; แล้ว $h(4) =$

6. ถ้า $h(t) = -2 \cdot 5^{-t-1}$; แล้ว $h(-2) =$
7. ถ้า $f(x) = (x^2 - 3)$; แล้ว $f(-8) =$
8. ถ้า $p(a) = -4^{3a}$; แล้ว $p(-1) =$
9. ถ้า $p(t) = 4t - 5$; แล้ว $p(t - 2) =$
10. ถ้า $g(a) = 4a$; แล้ว $g(2a) =$
11. ถ้า $w(n) = 4n + 2$; แล้ว $w(3n) =$
12. ถ้า $w(a) = a + 3$; แล้ว $w(a + 4) =$
13. ถ้า $h(x) = 4x - 2$; แล้ว $h(x + 2) =$
14. ถ้า $k(a) = -4^{3a+2}$; แล้ว $k(a - 2) =$
-
15. ถ้า $g(n) = n^3 - 5n^2$; แล้ว $g(-4n) =$
-
16. ถ้า $f(n) = n^2 - 2n$; แล้ว $f(n^2) =$
-
17. ถ้า $p(a) = a^3 - 5$; แล้ว $p(x - 4) =$
-
18. ถ้า $h(t) = 2 \cdot 3^{t+3}$; แล้ว $h(4 + t) =$
-

3.2 พีชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน (Algebra on Functions)

ในเรื่องของระบบจำนวน และจำนวนจริง เวลาเราเอ่ยถึงพีชคณิตของจำนวน เราจะหมายถึงการศึกษาการเอาจำนวนต่างๆ มาบวก หาผลต่าง คูณหาร กัน ในเรื่องของฟังก์ชันก็เช่นเดียวกัน ในหัวข้อนี้ เราจะมาศึกษาการกระทำกันทางพีชคณิตของฟังก์ชัน ตั้งแต่ 2 ฟังก์ชัน ขึ้นไป แล้วทำให้เกิดฟังก์ชันใหม่

บทนิยาม 3.7 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น D_f และ D_g ตามลำดับ ผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชัน f และ g เขียนแทนด้วย $f + g, f - g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับโดยกำหนดค่าฟังก์ชันได้ดังนี้

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

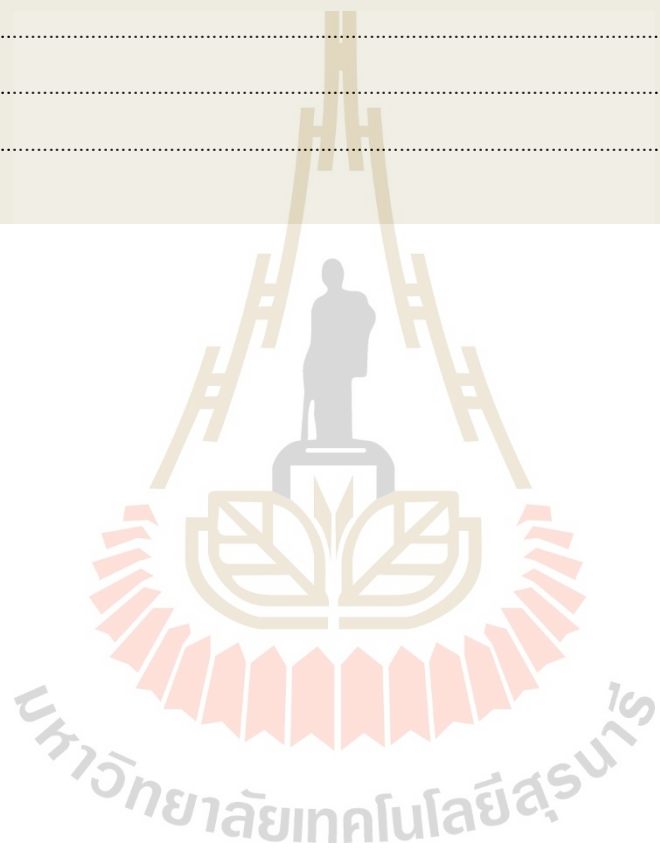
.....

.....

.....

.....

.....



ตัวอย่างที่ 3.2.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4x - 5$

และ $g(x) = x + 3$

- จงหาค่า 1. $(f + g)(x)$ 2. $(f - g)(x)$
 3. $(f \cdot g)(x)$ 4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ พร้อมทั้งหาโดเมน

วิธีทำ 1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $= (x^2 + 4x - 5) + (x + 3)$
 $= x^2 + 5x - 2$

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
 $= (x^2 + 4x - 5) - (x + 3)$
 $= x^2 + 3x - 8$

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 $= (x^2 + 4x - 5)(x + 3)$
 $= x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 $= \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 3}$ เมื่อ $x \neq -3$

จะได้โดเมนของ f และ g คือ $D_f = D_g = R$

ดังนั้น โดเมนของ $(f + g), (f - g), (f \cdot g)$ คือ $D_f \cap D_g = R$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ หาจาก $D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$

จาก $g(x) = x + 3$

นั่นคือ $x + 3 \neq 0, x \neq -3$

ดังนั้น โดเมนของ $f(x)$ คือ $R - \{-3\}$

บันทึก

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 3.2 จงหาค่าการดำเนินการทางพีชคณิตของฟังก์ชัน ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$

$$g(x) = x - 1$$

จงหาค่า 1.1) $(f + g)(x)$ 1.2) $(f - g)(x)$

1.3) $(f \cdot g)(x)$ 1.4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2) กำหนดให้ $f(x) = x - 1$

$$g(x) = 5x^2 + x$$

$$h(x) = \sqrt{5 - x}$$

จงหาค่าของการดำเนินการต่อไปนี้

2.1) $(f + g)(x)$

2.2) $(g - f)(x)$

2.3) $(f \cdot h)(x)$

3.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง(Exponential Functions)

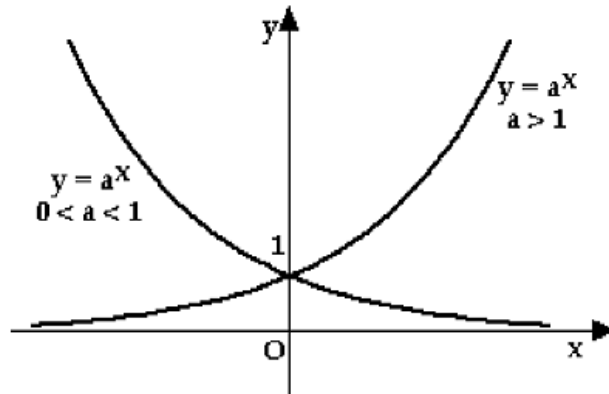
❖ กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

บทนิยาม 3.8 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ และไม่เท่ากับ 1 เรียกว่า "ฐาน" และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และเรียกว่า "เลขชี้กำลัง"

ข้อสังเกต

1. ถึงแม้ว่าเราจะสามารถคำนวณหาค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อเลขฐานเป็นจำนวนที่น้อยกว่าศูนย์ (อย่างเช่น $(-4)^3$) เราก็จะนิยามฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้ในกรณีที่ฐานเป็นเลขที่มากกว่าศูนย์เท่านั้น
2. จะเห็นได้ชัดว่า โดเมนของฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้ คือ เซตของจำนวนจริง เนื่องจาก ค่าของ x สามารถเป็นจำนวนจริงตัวใดก็ได้ และเรนจ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง คือ จำนวนจริงบวกทั้งหลาย เพราะว่า $a^x > 0$ เสมอสำหรับทุกจำนวนจริง x และ $a > 0$

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อจำแนกตามค่าของฐาน สามารถเขียนได้ในรูปทั่วไป ดังนี้



แผนภาพที่ 3 กราฟแสดงตัวอย่างของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จำแนกตามช่วงของค่าของฐาน a ของฟังก์ชัน

จะเห็นว่า

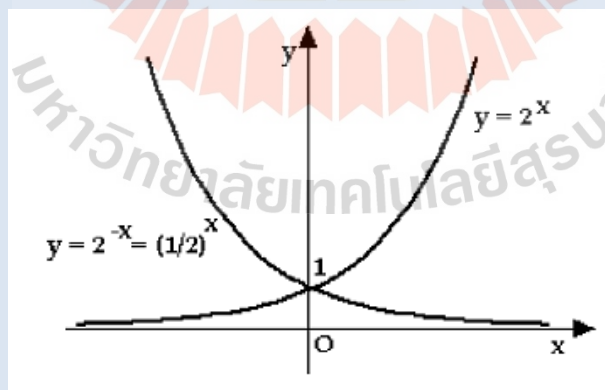
- เนื่องจาก $a^0 = 1$ จึงได้ว่า กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะผ่านจุดพิกัด $(0,1)$ บนแกน y
- ถ้า $a > 1$ แล้ว กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะมีค่าสูงขึ้น หรือ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะมีค่าลดลง หรือ เป็นฟังก์ชันลด

การเขียนกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สามารถทำได้โดยง่ายโดยการเขียนตารางค่าของโดเมน แล้วสังเกตแนวโน้มเทียบกับกราฟรูปทั่วไปของฟังก์ชันดังแสดงใน แผนภาพที่ 3

ตัวอย่างที่ 3.3.1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ ในกราฟเดียวกัน

วิธีทำ

จะได้กราฟคือ

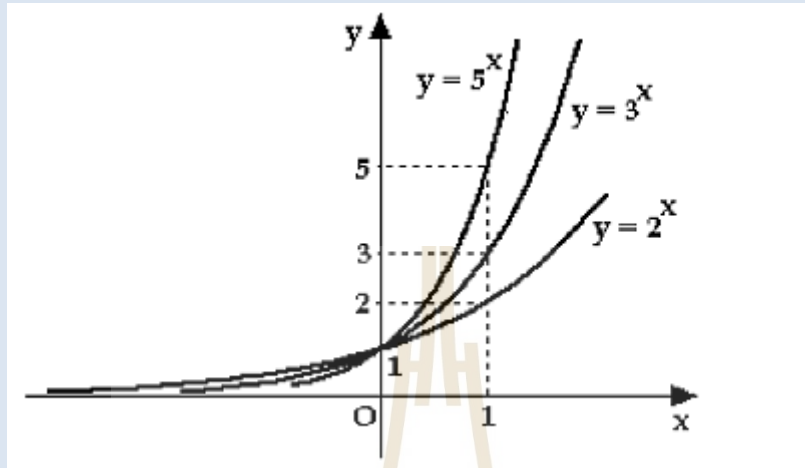


แผนภาพที่ 4 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.1

ตัวอย่างที่ 3.3.2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$, $y = 3^x$ และ $y = 5^x$ ในกราฟเดียวกัน

วิธีทำ

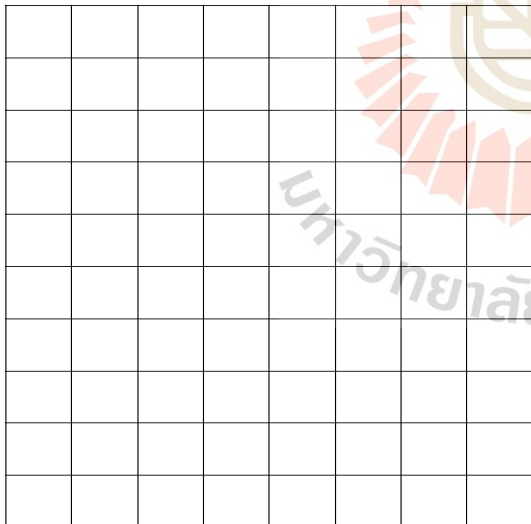
จะได้กราฟคือ



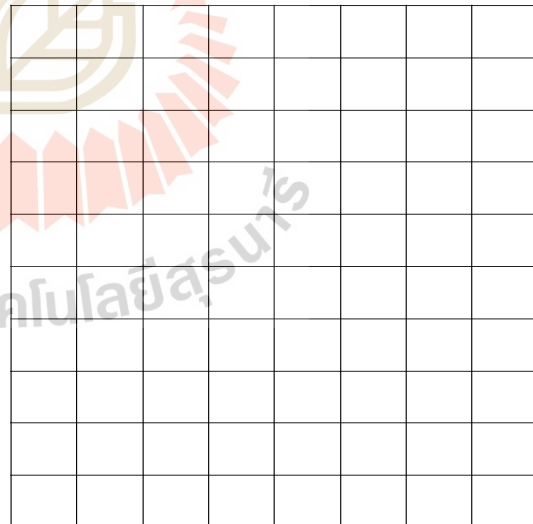
แผนภาพที่ 5 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$, $y = 3^x$ และ $y = 5^x$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.2

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.1 จงวาดกราฟของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) $y = 2^{x+4}$

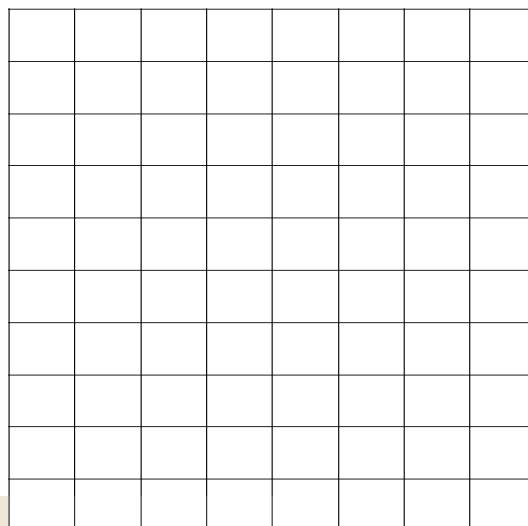
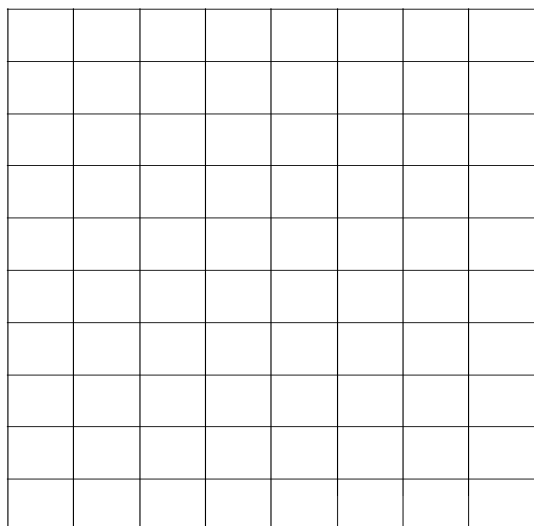


(b) $y = 2^{x-4}$

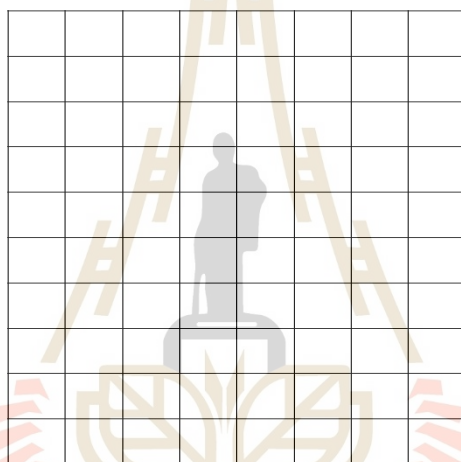


(c) $y = -2^x$

(d) $y = -2^{-x}$



แบบฝึกทักษะที่ 3.3.2 จงวาดกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$ และ $y = 4^{-x}$ ในกราฟเดียวกัน



❖ คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ใน ตารางที่ 1 เราได้นำเสนอคุณสมบัติของเลขชี้กำลังไปแล้ว และเพื่อความสะดวกในการศึกษาในหัวข้อนี้ เราจะได้นำมา กล่าวอีกรอบ ดังนี้

กำหนดให้ a, b, m และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตารางที่ 7 คุณสมบัติสำคัญของเลขชี้กำลัง

ลำดับที่	คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง	ลำดับที่	คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง
1	$a^n a^m = a^{n+m}$	8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
2	$(a^n)^m = a^{nm}$	9	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n, a \neq 0$
3	$(ab)^n = a^n b^n$	10	$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$
4	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	11	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	12	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	13	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a^n \sqrt{b}}$
7	$a^0 = 1, a \neq 0$	14	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

ตัวอย่างที่ 3.3.3 ใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง ในการทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(a) $4^{x+6} \cdot 8^{2-x}$ (b) $\frac{27^{2x-3}}{9^{x-4}}$ (c) $(2x)^3 \cdot (4^{2-x})^4$

วิธีทำ

(a) $4^{x+6} \cdot 8^{2-x} = (2^2)^{x+6} \cdot (2^3)^{2-x} = 2^{2(x+6)} \cdot 2^{3(2-x)}$
 $= 2^{2x+12} \cdot 2^{6-3x} = 2^{(2x+12)+(6-3x)} = 2^{-x+18}$

(b) $\frac{27^{2x-3}}{9^{x-4}} = \frac{(3^3)^{2x-3}}{(3^2)^{x-4}} = \frac{3^{6x-9}}{3^{2x-8}} = 3^{(6x-9)-(2x-8)} = 3^{4x-1}$

(c) $(2x)^3 \cdot (4^{2-x})^4 = 2^{3x} \cdot 4^{8-4x} = 2^{3x} \cdot (2^2)^{8-4x}$
 $= 2^{3x} \cdot 2^{16-8x} = 2^{-5x+16}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.3 จงจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย(คำตอบต้องไม่ประกอบด้วยกำลังที่เป็นลบ) และหาค่า ถ้าหาได้

1) $-2^4 + (-2)^4$

.....

2) $(-x^2)(-x^3)$

.....

3) $-(252x^2y^{-1}z^{-255})^0$

.....

4) $(a^3b^2)(-7a^2bc)(6c^2)$

.....

5) $-3(2^4 - 3^3)^2$

.....

6) $\frac{4^{-2}+2^{-4}}{64^{-1}}$

.....

7) $\frac{(-2)^4 - 2^2}{-2^2}$

8) $-1^2 + 1^2 - (-1)^3 - (-1^2)$

9) $6^a \cdot 6^b \cdot 6^c$

10) $\left(\frac{2^{-2}x^{-2}}{x^3}\right)^{-2} \left(\frac{xy}{2^{-2}}\right)^2$

❖ สมการเลขชี้กำลัง และการแก้โดยไม่ใช้ลอการิทึม

ในหัวข้อนี้ เราจะได้มาทำความรู้จักกับสมการที่ประกอบด้วยพจน์ที่มีเลขชี้กำลัง การแก้สมการลักษณะอย่างนี้นอกจากจะใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลังที่แสดงไว้ในหัวข้อที่แล้ว ในบางลักษณะของโจทย์ เรามีความจำเป็นที่จะต้องนำความรู้ทางด้านลอการิทึมเข้ามาช่วย ซึ่งจะเป็นในหัวข้อถัดไป ดังนั้น ในลำดับแรกของการแก้สมการที่มีพจน์เลขชี้กำลัง ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเฉพาะส่วนที่สามารถแก้ได้โดยการใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลังโดยลำพัง(โดยไม่ต้องใช้คุณสมบัติของลอการิทึม) ซึ่งกระบวนการหลักมี 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 พยายามทำให้ "ฐาน" ของทั้ง 2 ข้างของสมการเท่ากัน

ขั้นที่ 2 พิจารณาว่า ฐาน ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 นั้น สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.1 (ดูข้างล่าง) หรือไม่ ถ้าสอดคล้อง ก็สามารถจับเอาตัวเลขชี้กำลังมาเท่ากัน แล้วแก้สมการหาค่าตัวแปรได้เลย

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 และไม่เท่ากับ 1 และ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2^5 = 2^{2x-1}$

วิธีทำ

เราจะเห็นว่า ทั้ง 2 ข้างของสมการนี้ มีฐานเหมือนกัน คือ 2 และโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.1 เราจะได้ทันทีว่า เลขชี้กำลังของทั้ง 2 ข้างนั้น ต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$5 = 2x - 1$$

$$6 = 2x$$

$$3 = x$$

ดังนั้น ค่าของ x ที่ทำให้ $2^5 = 2^{2x-1}$ คือ $x = 3$

ตัวอย่างที่ 3.3.5 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2^{6x^2} = 4^{5x+2}$

วิธีทำ

เนื่องจาก ฐาน ของทั้งสองข้าง ยังไม่เท่ากัน เราจึงจำเป็นต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จะได้ว่า

$$2^{6x^2} = (2^2)^{5x+2} \text{ จากนั้น ทำการนำเอาตัวชี้กำลังมาเท่ากัน แล้วแก้สมการหาค่าของ } x \text{ ได้ดังนี้}$$

$$6x^2 = 10x + 4$$

$$6x^2 - 10x - 4 = 10$$

$$2(3x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$2(3x + 1)(x - 2) = 0$$

ดังนั้น จะได้ค่าที่ต้องการคือ $x = -\frac{1}{3}$ หรือ $x = 2$

บันทึก

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.3.6 จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $9^{n-1} = (1/3)^{4n-1}$

วิธีทำ

ขั้นแรก เราจะพยายามปรับ "ฐาน" ของทั้งสองข้างนั้นให้เท่ากัน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 9^{n-1} &= (1/3)^{4n-1} \\ (3^2)^{n-1} &= (3^{-1})^{4n-1} \\ 3^{2n-2} &= 3^{-4n+1} \end{aligned}$$

เมื่อ ฐาน เท่ากันแล้ว เราจะนำเอาตัวชี้กำลังมาจับให้เท่ากัน ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 2n - 2 &= -4n + 1 \\ 6n &= 3 \\ n &= 1/2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ค่าที่ต้องการคือ $n = 1/2$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.4 จงใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง มาแก้สมการต่อไปนี้

1) $4^{2x+2} = 1$

.....

.....

.....

2) $5^{3-4x} = 5^{-2x}$

.....

.....

.....

3) $3^{-2x} = 729$

.....

.....

.....

4) $3^{2a} = 3^{-a}$

.....

.....

.....

5) $4^{3x-2} = 4^4$

.....

.....

.....

6) $4^{2p} = 4^{-2p+8}$

.....

.....

.....

7) $6^{-2a} = 6^{2-3a}$

8) $2^{2x+2} = 2^{3x}$

9) $36^{-2x}(6^{-x}) = \frac{1}{216}$

10) $2^x \left(\frac{1}{32}\right) = 128$

11) $2^{-3p}(2^{2p}) = 2^{2p+1}$

12) $\frac{81^{3n+2}}{243^{-n}} = 3^6$

13) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3x+2} (216^{2x}) = \frac{1}{216}$

14) $243^{k+2}(27^{2k-1}) = 9$

3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม(Logarithmic Functions)

❖ นิยาม และความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

บทนิยาม 3.9 เราจะเรียกจำนวนจริง y ว่าเป็น ลอการิทึมของ x ฐาน a ก็ต่อเมื่อ $x = a^y$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และเขียนแทนด้วย $y = \log_a x$

ข้อตกลง

1. เมื่อไหร่ที่เขียนฟังก์ชันลอการิทึมที่ไม่ระบุฐาน ให้หมายถึง ฐานนั้นคือ 10 เช่น $\log x = \log_{10} x$
2. ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ หมายถึง ที่มีฐานเป็นค่า $e (= 2.71818 \dots)$ เขียนแทนด้วย

$$\ln x = \log_e x$$

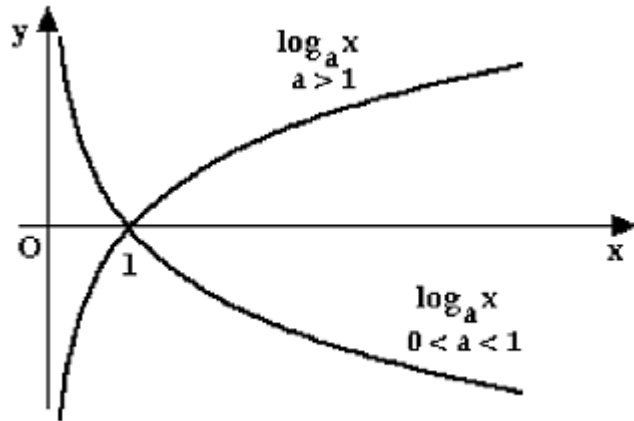
จากนิยามข้างต้น เราจะเห็นว่า แท้ที่จริงแล้ว ตัวฟังก์ชันลอการิทึมนี้ ก็คือตัวผกผันการคูณของฟังก์ชันเลขชี้กำลังของหัวข้อที่แล้วนั่นเอง

ดังนั้น เราจะสามารถให้ความหมายของฟังก์ชันลอการิทึมในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้เสมอ ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 8 ตารางแสดงตัวอย่างความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลัง กับฟังก์ชันลอการิทึม

สมการในรูปเลขยกกำลัง	สมการในรูปลอการิทึม
$x = a^y$	$y = \log_a x$
$125 = 5^3$	$3 = \log_5 125$
$81 = 3^4$	$4 = \log_3 81$
$64 = 2^5$	$5 = \log_2 64$

และเราสามารถวาดกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมได้ในรูปทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับค่าของ a ได้ดังนี้



แผนภาพที่ 6 กราฟในรูปทั่วไปของฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.1 จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสมการรูปเลขยกกำลัง และสมการลอการิทึม ในแต่ละข้อต่อไปนี้

ข้อ	รูปลอการิทึม	รูปเลขกำลัง
1)	$6^2 = 36$
2)	$\log_{289} 17 = \frac{1}{2}$
3)	$14^{-2} = \frac{1}{196}$
4)	$3^4 = 81$
5)	$\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$
6)	$\log_{12} 144 = 2$
7)	$9^{-2} = \frac{1}{81}$
8)	$\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$
9)	$\log_u \frac{15}{16} = v$
10)	$\log_v u = 4$

--	--	--

❖ คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม มีดังแสดงใน ตารางที่ 9 เมื่อกำหนด x, y, r, q, b เป็นจำนวนจริง และ $b \neq 1$

ตารางที่ 9 ตารางแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม

ลำดับที่	คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม
1	$\log_b b = 1$
2	$\log_b 1 = 0$
3	$\log_b (x^r) = r \log_b x$
4	$\log_{b^q} x = \frac{1}{q} \log_b x$
5	$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$
6	$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
7	$\ln b = \log_e b$
8	$b^{\log_b x} = x$
9	$\log_b x = \frac{\log x}{\log a}$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 ตัวอย่างของการใช้คุณสมบัติของลอการิทึม

1. $\log(6 \cdot 11) = \log 6 + \log 11$
2. $\log\left(\frac{6}{11}\right)^5 = 5 \log 6 - 5 \log 11$
3. $\log(3 \cdot 2^3) = \log 3 + 3 \log 2$
4. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
5. $\log \frac{x}{y^6} = \log x - 6 \log y$
6. $\log_4 64 = 3$
7. $\log_3 \frac{1}{243} = -5$
8. $\log_{343} 7 = \frac{1}{3}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.2 จงใช้คุณสมบัติของลอการิทึม ในการกระจายรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) $\log(6 \cdot 3) = \dots\dots\dots$
- 2) $\log \frac{2^4}{5^3} = \dots\dots\dots$
- 3) $\log\left(\frac{6}{5}\right)^6 = \dots\dots\dots$
- 4) $\log(a \cdot b)^2 = \dots\dots\dots$
- 5) $\log \frac{u^4}{v^{-2}} = \dots\dots\dots$
- 6) $\log \frac{x^{-3}}{y^5} = \dots\dots\dots$
- 7) $\log \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \dots\dots\dots$
- 8) $\log x \cdot y^{-3} \cdot z^2 = \dots\dots\dots$

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.3 จงใช้คุณสมบัติของลอการิทึม หาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) $\log_2 32 = \dots\dots\dots$
- 2) $\log_3 9 = \dots\dots\dots$
- 3) $\log_5 625 = \dots\dots\dots$
- 4) $\log_{64} 4 = \dots\dots\dots$
- 5) $\log_6 \frac{1}{216} = \dots\dots\dots$
- 6) $12^{\log_{12} 144} = \dots\dots\dots$
- 7) $5^{\log_5 17} = \dots\dots\dots$
- 8) $x^{\log_x 72} = \dots\dots\dots$
- 9) $\log_{\frac{1}{11}} \left(\frac{1}{121} \right) = \dots\dots\dots$
- 10) $\log_7 \left(\frac{1}{49} \right) = \dots\dots\dots$
- 11) $\log_{225} 15 = \dots\dots\dots$
- 12) $\log_2 (-8) = \dots\dots\dots$
- 13) $\log_9 (-81) = \dots\dots\dots$

❖ สมการฟังก์ชันลอการิทึม และการแก้

ในการแก้สมการที่อยู่ในรูปลอการิทึมนั้น โดยปกติเราสามารถทำได้โดยการเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังก่อน แล้วค่อยใช้เทคนิคและกระบวนการการแก้หาผลเฉลยที่เราศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา สังเกตจากตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงหาค่า x ที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

(a) $\log_2 x = 7$ (b) $\log_x 8 = 3$ (c) $\log_{16} 8 = x$

และ (d) $\log_2 (\log_5 x) = 2$

วิธีทำ

(a) เราสามารถเขียน $\log_2 x = 7$ ให้อยู่ในรูปยกกำลังได้คือ $2^7 = x$

ดังนั้น $x = 64$

(b) เราสามารถเขียน $\log_x 8 = 3$ ให้อยู่ในรูปยกกำลังได้คือ $x^3 = 8 = 2^3$

ดังนั้น $x = 2$

- (c) ดำเนินการเช่นเดียวกับ (a) หรือ (b), จะได้ว่า $16^x = 8$
 ดังนั้น $(2^4)^x = 2^3$ จึงได้ $2^{4x} = 2^3$ และทำให้ได้ว่า $4x = 3$
 ดังนั้น คำตอบคือ $x = 3/4$
- (d) จากที่เราทราบมาแล้วว่า $\log_a B = C$ นี้ เป็นสิ่งเดียวกันกับ $B = a^C$ และเมื่อ $a = 2, B = \log_5 x$ และ $C = 2$, จะได้ว่า $\log_5 x = 2^2 = 4$ จากนั้นดำเนินการแบบเดียวกันนี้อีกครั้งจะได้ว่า $x = 5^4 = 625$

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (a) จงหาค่า $e^{3 \ln 2} \cdot e^{2 \ln 3}$
 (b) จงเขียน $2 \ln 4 - \ln 8 - \ln 5$ ให้เป็นพจน์เดียว
 (c) จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $\ln(4x - 3) = 7$ For x

วิธีทำ

- (a) เราใช้คุณสมบัติ $e^{\ln x} = x$ จึงได้ว่า

$$e^{3 \ln 2} \cdot e^{2 \ln 3} = e^{\ln 2^3} \cdot e^{\ln 3^2} = e^{\ln 8} \cdot e^{\ln 9} = 8 \cdot 9 = 72$$
- (b) เราใช้คุณสมบัติ $n \ln x = \ln x^n$ and $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$ จึงได้ว่า

$$2 \ln 4 - \ln 8 - \ln 5 = \ln 4^2 - \ln 8 - \ln 5 = (\ln 16 - \ln 8) - \ln 5$$

$$= \ln(16/8) - \ln 5 = \ln 2 - \ln 5 = \ln(2/5)$$
- (c) เราจะทำการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ e^x ทั้ง 2 ข้างของสมการ จึงได้ว่า

$$\ln(4x - 3) = 7$$

$$e^{\ln(4x-3)} = e^7$$

$$4x - 3 = e^7$$
- ดังนั้น
$$x = \frac{e^7 + 3}{4}$$

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.4 จงหาเซตคำตอบของตัวไม่ทราบค่า ทำให้ สมการแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

1) $\log(n + 9) = \log 4n$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\log -5x = \log(10 - 3x)$

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\log(-3m - 1) = \log(-4m - 6)$

4) $\log a = \log(4a - 9)$

$$5) -4 \log_3(-9m) = -4$$

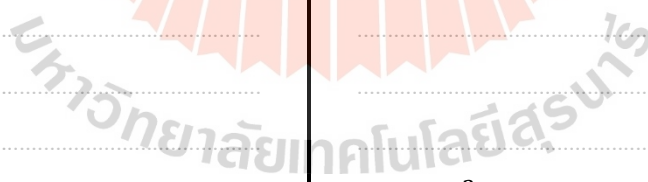
$$6) 7 \log_9(x + 8) = 7$$

$$7) -8 + \log_9(m + 1) = -8$$

$$8) -2 \log_8(a + 1) = -8$$

$$9) \log_2(a^2 - 6a) = \log_2(10 + 3a)$$

$$10) \log_{15}(x^2 + 13) = \log_{15}(-9x - 1)$$



11) $\log_{19}(x^2 + 17) = \log_{19}(8x + 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12) $\log_{12}(m^2 + 73) = \log_{12}(17m + 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13) $\log x - \log 6 = \log 15$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14) $\log 7 + \log x = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.5 ฟังก์ชันพหุนาม(Polynomial Functions)

ฟังก์ชันชนิดต่อไปที่เราจะทำการศึกษาคือ ฟังก์ชันพหุนามโดยฟังก์ชันพหุนามนั้น อาจอยู่ในรูปของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว หรือหลายตัวก็ได้ แต่ในเอกสารนี้ จะได้มีการนำเสนอเฉพาะพหุนามที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 3.10 ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้วจะได้

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ เมื่อ } n \in I^+ \cup \{0\} \text{ และ } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$$

และ ค่าของ n ที่มากที่สุดในพหุนามหนึ่งๆ นั้น จะเรียกว่า "ระดับชั้น (Degree)" ของพหุนามนั้น

ข้อสังเกต

- ถ้า $n = 0$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามคงตัว เช่น $P(x) = 5$

- ถ้า $n = 1$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามเชิงเส้น ที่มีระดับชั้นเป็น 1 เช่น $P(x) = 2x + 3$
- ถ้า $n = 2$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง ที่มีระดับชั้นเป็น 2 เช่น $P(x) = 3x^2 - x + 3$

ตัวอย่างที่ 3.5.1 ตัวอย่างของพหุนามได้แก่

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นคือ 2
2. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นคือ 3
3. $h(x) = 5x^6 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 10$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นคือ 6

ตัวอย่างที่ 3.5.2 ตัวอย่างของนิพจน์ที่ไม่เป็นพหุนาม ได้แก่

1. $f(x) = \frac{3x^5}{1+x^2} + 2x\sqrt{x+2} - 7$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะ มีกำลังที่ไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก หรือ ศูนย์
2. $g(x) = 2x^3 - 5x^{\frac{1}{5}} + 2x - 1$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะ มีกำลังที่ไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก หรือ ศูนย์
3. $h(x) = 5x^6 - 4x^5 + \frac{3x^4 - x^3}{1-x} + 2x^2 - x + 10$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีพจน์ที่เป็นเศษส่วน

แบบฝึกทักษะที่ 3.5.1 จงพิจารณาว่า แต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นพหุนาม ข้อใดไม่เป็น เพราะอะไร และถ้าเป็นให้ระบุระดับชั้นของพหุนามนั้นด้วย

- (a) $f(x) = 4x^2 + 2$
- (b) $f(x) = 3x^2 - 2x + \sqrt{x}$
- (c) $f(x) = 12 - 4x^5 + 3x^2$
- (d) $f(x) = \sin x + 1$
- (e) $f(x) = 3x^2 - 2/x$
- (f) $f(x) = 3x^{11} - 2x^{12}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.5.2 จงยกตัวอย่างพหุนามตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. พหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 1
2. พหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 2
3. พหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 3
4. พหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 4

3.6 สมการพหุนาม และการหาราก (Solving Polynomial Equations)

❖ สมการพหุนาม

บทนิยาม 3.11 ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สมการพหุนามก็คือ $P(x) = 0$

เช่น $3x + 3 = 0$

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

$$4x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 2ix^2 + 5x - 9i = 0$$

❖ การแก้สมการพหุนาม

ในการหาผลเฉลยหรือเซตของคำตอบของสมการพหุนามหนึ่งๆ นั้น มีเรื่องที่เกี่ยวข้องอยู่หลายเรื่อง เราจะทำการศึกษาทีละเรื่อง และจากนั้น ค่อยศึกษาการนำไปเกี่ยวข้องกับกระบวนการหาผลเฉลยของสมการพหุนาม

1. การหารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ เป็นวิธีการหาผลของการหารที่รวดเร็วและง่ายกว่าการหารยาว ซึ่งต้องนำมาใช้ในการแก้สมการพหุนาม การหารสังเคราะห์ต้องหารผลลัพธ์ของผลหารของ $P(x)$ ด้วย $x - c$ การตั้งหารสังเคราะห์ทำได้โดย

บรรทัดที่ 1 เขียนสัมประสิทธิ์ของ $P(x)$ ที่เรียงกำลังจากมากไปน้อย ถ้ากำลังกระโดด อย่าลืม สัมประสิทธิ์ของกำลังที่หายไปก็คือเลข 0

บรรทัดที่ 3 ได้จากบรรทัดที่ 1 + บรรทัดที่ 2 โดยเริ่มจากทางซ้ายมือสุดด้วยการดึงตัวเลขบรรทัดที่ 1 ลงมา (หรือบรรทัดที่ 2 จากซ้ายสุด เป็น 0 บวกกับบรรทัดที่ 1 นั้นเอง)

บรรทัดที่ 2 แต่ละตัวเกิดจากการคูณจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของบรรทัดที่ 3 ด้วยค่า c

ผลหาร ที่ได้ดูจากบรรทัดที่ 3 ซึ่งตัวเลขขวาสุดเป็นเศษของการหารและตัวเลขจากซ้ายไปขวาเป็นสัมประสิทธิ์ของผลหาร โดยกำลังลดลง 1 จากตัวตั้งหรือ $P(x)$

ตัวอย่างที่ 3.6.1 จงหาผลหาร $(x^4 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x + 1)$

วิธีทำ

ในที่นี้ เราจะได้ $c = -1$ และสามารถทำการหารสังเคราะห์ได้ ดังนี้

-1	1	0	3	-2	1
		↓	↓	↓	↓
		-1	1	-4	6
	1	-1	4	-6	7

ผลลัพธ์ คือ $1x^3 - 1x^2 + 4x - 6$ เศษ 7

2. ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

ทฤษฎีบท 3.2 : ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และ $c \in R$ ถ้า $P(x) \div (x - c)$ แล้วเศษจะเท่ากับ $P(c)$

ตัวอย่างที่ 3.6.2 จงหาเศษที่เกิดจาก $(x^4 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x + 1)$

วิธีทำ

เมื่อเทียบกับรูปที่ปรากฏในทฤษฎีบท 3.2 จะได้ $P(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$

$x - c = x + 1 = x - (-1)$ ดังนั้น $c = -1$

จะได้เศษ = $P(c) = P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^2 - 2(-1) + 1$
 $= 1 + 3 + 2 + 1 = 7$

ดังนั้น เศษที่ได้จากการหารพหุนามดังกล่าว จึงเท่ากับ 7

3. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

ทฤษฎีบท 3.3 : ถ้า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทนี้ดัดแปลงมาจาก ท.บ.เศษเหลือ นั่นคือ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แสดงว่า $x - c$ หาร $P(x)$ ลงตัว ซึ่งหารลงตัวก็จะได้เศษ = 0 ซึ่งเศษ = $P(c)$ จึงได้บทสรุปว่า $P(c) = 0$

ตัวอย่างที่ 3.6.3จงพิจารณาว่า $(2x + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6$ หรือไม่

วิธีทำเมื่อเทียบกับทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 11x - 6$

$$x - c = 2x + 1 = x - \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ ดังนั้น } c = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ทดสอบโดยการหา } P(c) \text{ ซึ่ง } P\left(c = -\frac{1}{2}\right) &= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 11\left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{11}{2} - 6 \\ &= \frac{-1 + 2 + 11 - 12}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

แสดงว่า $(2x + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $4x^3 + 4x^2 - 11x - 6$

หลังจากที่ได้ทำความเข้าใจกับส่วนต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการการหาผลเฉลยของพหุนามแล้ว ในการหาผลเฉลยของพหุนามหนึ่งๆ นั้น สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ ดังนี้

ขั้นที่ 1 จัดสมการให้อยู่ในรูป $P(x) = 0$ โดยที่

- 1.1 ขวามือเป็นศูนย์
- 1.2 ถ้ามีตัวแปร x ยกกำลังลบ ให้เปลี่ยนเป็นกำลังบวก ถ้ามีรากต้องถอดรากออกให้ถูกต้อง
- 1.3 ทุกพจน์ต้องมีส่วนเป็นหนึ่ง ถ้ามีบางพจน์ที่ส่วนยังไม่เป็นหนึ่งก็ใช้ ค.ร.น. ของส่วนคูณตลอด
- 1.4 เรียงพจน์ของตัวแปร x จากกำลังสูงสุดไปยังกำลังต่ำสุดและสัมประสิทธิ์ของพจน์ของตัวแปร x กำลังสูงสุด ต้องเป็นบวก

ขั้นที่ 2 นำเอา $P(x)$ มาจับคู่ ดึงตัวร่วมหรือแยกตัวประกอบ ด้วยทฤษฎีแยกตัวประกอบร่วมกับการหารสังเคราะห์จนได้ผลหารมีตัวแปร x ยกกำลังสอง $(ax^2 + bx + c, a, b, c \in R, a \neq 0)$ เราก็จะสามารถแยกตัวประกอบกำลังสองได้เองตามที่ได้เคยได้ศึกษามาแล้ว

ขั้นที่ 3 หาค่าตัวแปร x ได้จากการสรุปแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์ ในกรณีที่ตัวแปร x กำลังสอง $(ax^2 + bx + c)$ ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ก็สามารถหาค่า x ได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.1)$$

ในขั้นที่ 2 นั้น ถือว่าเป็นขั้นที่ยาก เพราะหลักการการแยกตัวประกอบโดยใช้ความรู้ทางการหารสังเคราะห์ หรือทฤษฎีบทเศษเหลือ หรือ การใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบของพหุนามระดับขั้นสูงๆ นั้นไม่ใช่เรื่องง่ายนัก อย่างไรก็ตาม ในเอกสารนี้ จะได้มีการนำเสนอพหุนามที่มีระดับขั้นมากที่สุดคือ 3 ซึ่งถ้าสมการพหุนามนั้นจะมีคำตอบ(ซึ่งรากอาจเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้) โดยส่วนใหญ่แล้ว เราจะสามารถแยกตัวประกอบได้โดยอาศัยคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ตารางที่ 10 ตารางสูตรและเอกลักษณ์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามที่มีระดับชั้นไม่เกิน 3

ลำดับที่	คุณสมบัติที่เป็นประโยชน์
1	$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$
2	$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
3	$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$
4	$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
5	$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$
6	$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
7	$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

อย่างไรก็ตาม ในโจทย์บางข้อ ก่อนที่จะสามารถใช้คุณสมบัติเหล่านี้ เรายังจะต้องอาศัยทักษะการจัดกลุ่ม สังเกตพจน์ และอื่นๆ ในการเปลี่ยนรูปของพหุนามก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3.6.5 จงหาผลเฉลยของสมการพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x^2 - 36 = 0$
2. $4x^2 + 25 = 0$
3. $x^2 + 3x - 10 = 0$
4. $x^2 - 4x + 1 = 0$

วิธีทำ

1. $x^2 - 36 = 0$

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

ดังนั้น $x = 6, -6$

2. $4x^2 + 25 = 0$

$$(2x)^2 - (5i)^2 = 0 \text{ (} i \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และมีคุณสมบัติว่า } i^2 = -1 \text{)}$$

ดังนั้น $x = \frac{5}{2}i, -\frac{5}{2}i$

3. $x^2 + 9x - 10 = 0$

$$(x - 1)(x + 10) = 0$$

ดังนั้น $x = 1, -10$

4. $x^2 - 4x + 1 = 0$

แยกตัวประกอบไม่ได้ ฉะนั้น หา x โดยใช้สูตร (3.1) เทียบกับ

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ได้ } a = 1, b = -4, c = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 2 \pm \sqrt{3}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.6.1 จงใช้วิธีที่ถนัด (แยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร (3.1)) ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามระดับชั้น 2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2x^2 + x - 3 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $x^2 - 7x + 6 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) $x^2 - x - 20 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6) $x^2 - x - 12 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

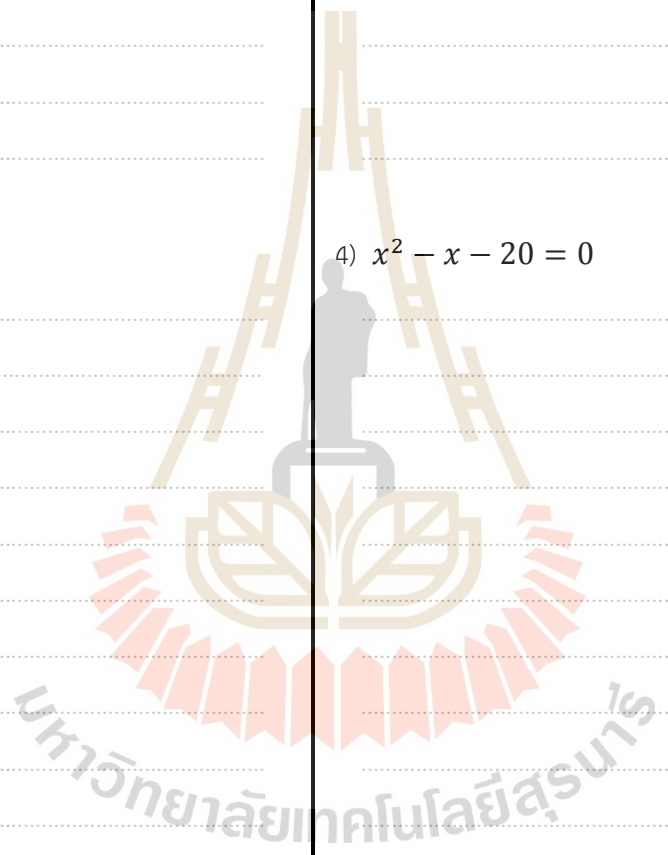
.....

.....

.....

.....

.....

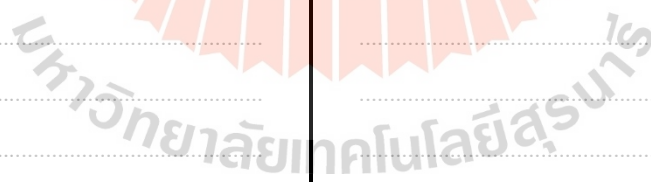


$$7) 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$8) 2x^2 - 36 = x$$

$$9) k^2 - 31 - 2k = -6 - 3k^2 - 2k$$

$$10) 8n^2 + 4n - 16 = -n^2$$



แบบฝึกทักษะที่ 3.6.2 จะใช้การหารสังเคราะห์ ในการหารากที่เหลือของสมการพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดรากรากหนึ่งของแต่ละข้อมาให้ ดังนี้

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $x^3 - 7x - 6 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -4$

.....

.....

.....

.....

.....

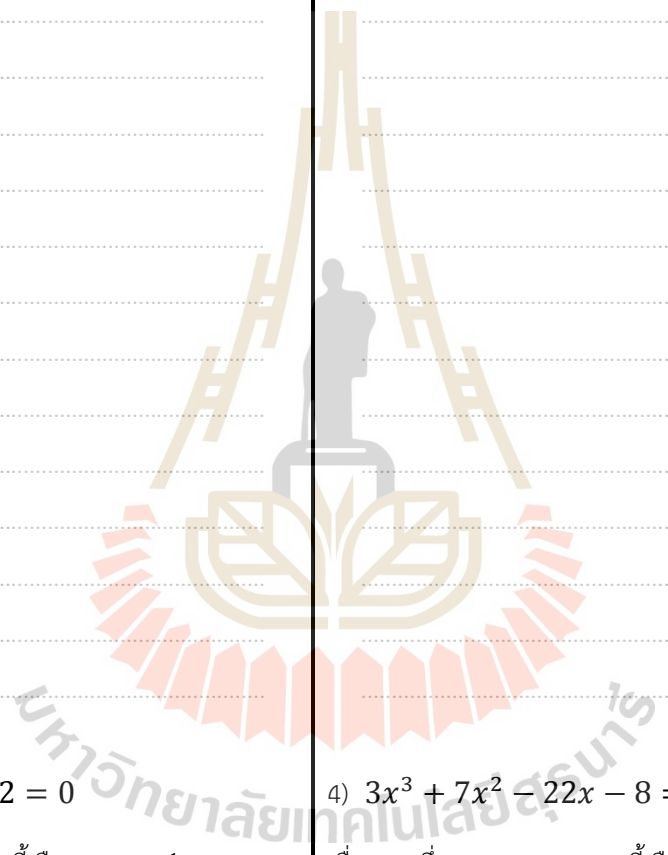
.....

.....

.....

.....

.....



5) $x^3 - 17x^2 + 54x - 8 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = 4$

6) $54x^3 - 39x^2 - 26x + 16 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = \frac{1}{2}$

3.7 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

ในหัวข้อสุดท้ายของบทที่ 3 นี้ เราจะได้ศึกษาและทำความเข้าใจกับปัญหาต่างๆ ที่อยู่รอบๆตัวเราในชีวิตประจำวัน ที่สามารถสร้าง อธิบาย และหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้ทางฟังก์ชัน ตลอดจนประเภทของฟังก์ชันที่เราได้รู้จักมาแล้ว ไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันพหุนาม และสมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันเหล่านี้

ขั้นตอนในการศึกษาปัญหาในบทนี้ ก็จะประกอบด้วย 2 ส่วน เช่นเคย คือ

1. ขั้นตอนการเขียนปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปที่อธิบายได้ด้วยฟังก์ชันแบบที่เหมาะสม
2. ทำการหาผลเฉลยของข้อ 1 ด้วยวิธีการที่ถนัด และเหมาะสม

เราจะศึกษาโดยการฝึกทำตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

บันทึก.....

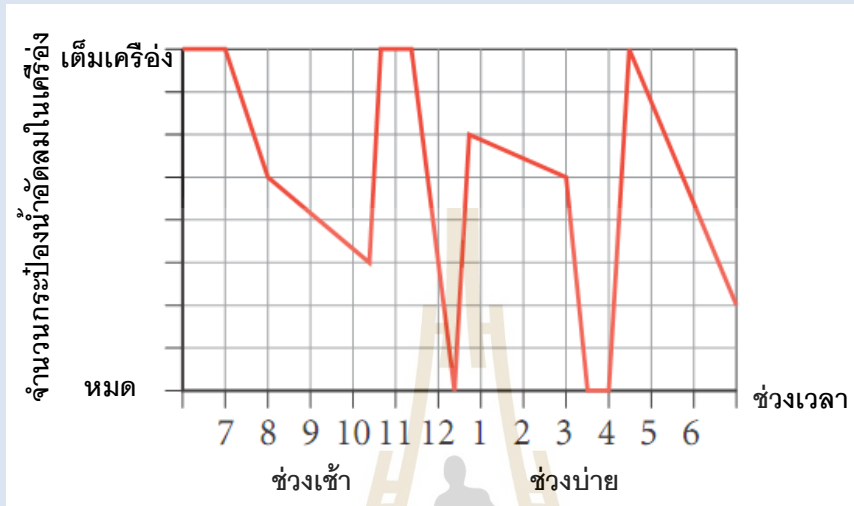
.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 3.7.1นักเรียน ณ โรงเรียนแห่งหนึ่งในอเมริกาได้ยื่นร้องเรียนต่อหน่วยสวัสดิการประจำมหาวิทยาลัยบ่อยๆ ว่าเครื่องขายน้ำผลไม้ที่ประจำอยู่ ณ อาคารเรียนรวนนั้น ขายหมดบ่อยครั้งในแต่ละวัน จนหน่วยสวัสดิการได้มาทำการตรวจสอบและเก็บข้อมูล ผลปรากฏว่า ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ที่มีเหลือในเครื่อง กับช่วงเวลาในแต่ละวัน สามารถแสดงได้ใน แผนภาพที่ 7 นี้



แผนภาพที่ 7 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ในเครื่องขาย กับช่วงเวลาใน 1 วัน สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.1

จากแผนภาพนี้ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงเวลาใดบ้าง ที่มีการซื้อน้ำผลไม้จากตู้มากที่สุด เพราะอะไร

ตอบ ช่วงเวลา 11.00-12.00น. และช่วงเวลา บ่าย 3 โมง ถึงบ่าย 4 โมง เพราะจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ลดลงอย่างรวดเร็วใน 2 ช่วงเวลานี้

2. ช่วงเวลาใด ที่ได้มีการบรรจุน้ำผลไม้กระป๋อง เข้าไปเพิ่มในเครื่อง

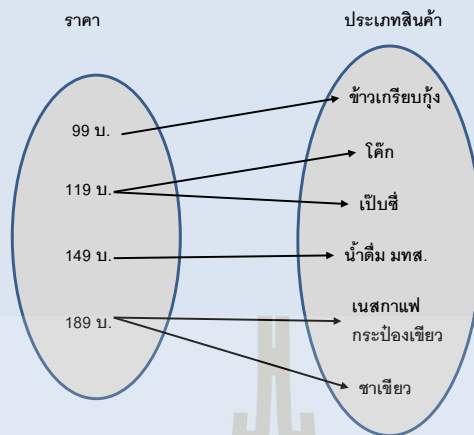
ตอบ มี 3 ช่วง คือ ช่วง 10.00-11.00น., 12.00-13.00น. และช่วง ประมาณบ่าย 4 โมงตรง

3. ช่วงเวลาใด ที่เครื่องไม่มีน้ำผลไม้บรรจุอยู่เลย

ตอบ ช่วงประมาณ 15.30-16.00 น.

4. นักศึกษาคิดว่า หน่วยสวัสดิการควรมีการเติมบรรจุน้ำผลไม้เข้าในเครื่องนี้ ในช่วงเวลาใดบ้าง ถึงจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ ?

ตัวอย่างที่ 3.7.2จากการสำรวจราคาสินค้าของร้านค้าต่างๆ ที่อยู่ภายใน มทส. พบว่า ราคาโดยเฉลี่ยของสินค้า แสดงได้ในแผนภาพที่ 8



แผนภาพที่ 8แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาเฉลี่ย กับสินค้า สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.2

จากข้อมูลดังแผนภาพนี้ ถ้ามว่า

1. โดเมนของความสัมพันธ์นี้ คือ

ตอบ โดเมน คือ {99 บ., 119บ., 149บ., 189บ. }

2. เรนจ์ของความสัมพันธ์นี้ คือ

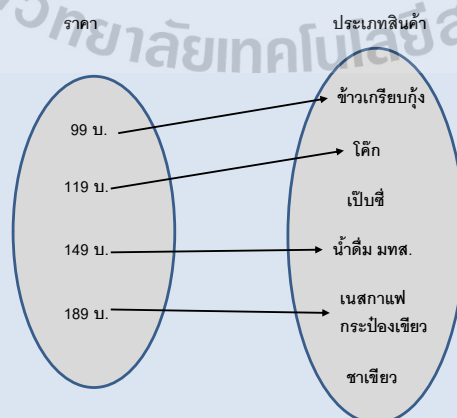
ตอบ เรนจ์ คือ {ข้าวเกรียบกุ้ง, โด๊ก, เป็บซี่, น้ำดื่ม มทส., เนสกาแฟกระจ่างเขียว, ชาเขียว}

3. ความสัมพันธ์นี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะอะไร

ตอบ ความสัมพันธ์นี้ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มีสมาชิกในเรนจ์มากกว่า 1 ตัว ที่สัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนตัวเดียวกัน เช่น โด๊ก และเป็บซี่ ใช้สมาชิกในโดเมนตัวเดียวกันคือ 119 บ.

4. จงเปลี่ยนแปลงข้อมูลในแผนภาพนี้ เพื่อที่จะทำให้ความสัมพันธ์ใหม่ที่ได้ เป็นฟังก์ชัน

ตอบวิธีที่สามารถทำได้วิธีหนึ่งคือ



ตัวอย่างที่ 3.7.3 จากการศึกษาการเพิ่มจำนวนประชากรของกบในอ่าง 3 แสน มทส. ผลปรากฏว่า มีอัตราเพิ่มสูงขึ้นคิดเป็น 12 % ต่อปี จงหาจำนวนประชากรของกบในอ่าง 3 แสนนี้ในอีก 5 ปีข้างหน้า ถ้า ณ วันนี้ มีจำนวนกบทั้งหมด 100 ตัว

วิธีทำ

อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรกบ ปีละ 12 % หมายถึง ในแต่ละปี จะมีจำนวนกบเป็นจำนวน 1.22 เท่าของจำนวนในปีก่อนหน้า เพื่อให้ดูง่ายขึ้น เราจะเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 11 จำนวนการเพิ่มขึ้นของประชากรกบในสระ 3 แสน มทส. ในแต่ละปี สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.3

สิ้นปีที่	จำนวนประชากรกบ
0(เริ่มนับ)	100
1	$100 + 100(0.22) = 100(1.22) = 100(1.22)^1$
2	$100(1.22) + 100(1.22)(0.22) = 100(1.22)(1.22) = 100(1.22)^2$
3	$100(1.22)^2 + 100(1.22)^2(0.22) = 100(1.22)^3$
4	$100(1.22)^3 + 100(1.22)^3(0.22) = 100(1.22)^4$
5	$100(1.22)^4 + 100(1.22)^4(0.22) = 100(1.22)^5 = 270$

นั่นคือ จะเห็นว่า ถ้าเราให้ x แทนจำนวนปี เราจะได้ว่า

จำนวนประชากรกบเมื่อสิ้นปีที่ x คือ $100(1.22)^x$

❖ **การเพิ่มของจำนวนประชากร**

จากตัวอย่างนี้ เราจะสามารถขยายแนวคิดไปถึงสูตรที่สามารถหาจำนวนสิ่งต่างๆ ที่มีอัตราการเพิ่มในหนึ่งช่วงเวลาเป็นอัตราคงที่ ซึ่งทำได้โดยใช้สูตรที่เขียนในรูปฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ได้ดังแสดงข้างล่างนี้

$$\text{จำนวนของสิ่งเมื่อสิ้นช่วงเวลาที } x = (\text{จำนวนเริ่มต้น}) \cdot (1 + \text{อัตราการเพิ่ม}(\%))^x \quad (3.2)$$

ตัวอย่างที่ 3.7.4 นายมีรัก รัตตินักศึกษาศาสาเทคโนโลยีชีวภาพ มทส. ได้ถูกส่งตัวไปร่วมฝึกประสบการณ์การทำงานร่วมกับบริษัทชั้นนำแห่งหนึ่งในกรุงเทพฯ นายมีรักได้รับมอบหมายให้ทำการเพาะเชื้อแบคทีเรียชนิดหนึ่ง และศึกษาการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียชนิดนี้ แล้วต้องรายงานต่อหัวหน้าจากการศึกษาวัดจำนวนแบคทีเรียมาระยะหนึ่ง นายมีรักพบว่า จำนวนประชากรของแบคทีเรียชนิดนี้มีอัตราการเพิ่มขึ้นคือ 80 % ในทุกๆ ชั่วโมง ถ้าเริ่มเพาะด้วยจำนวนแบคทีเรียทั้งหมด 10 ตัวในวันนี้ นายมีรักได้รับมอบหมายให้ทำนายจำนวนแบคทีเรียเมื่อสิ้นวันที่ 7 นับจากวันนี้

วิธีทำ

จากโจทย์ เราได้ว่า

1. จำนวนประชากรของแบคทีเรียเริ่มต้น คือ 10 ตัว
2. อัตราการเพิ่ม คือ 80 % ต่อ 1 ชั่วโมง

จากสูตรการคำนวณหาอัตราการเพิ่มของประชากร (3.2) จะได้ว่า

$$\text{จำนวนของแบคทีเรียเมื่อสิ้นช่วงเวลา } x = (\text{จำนวนเริ่มต้น}) \cdot (1 + \text{อัตราการเพิ่ม})^x$$

สมมติว่า เมื่อสิ้นชั่วโมงที่ 5 แทนค่าจะได้ว่า

$$\text{จำนวนของสิ่งเมื่อสิ้นช่วงเวลา } 5 = (10) \cdot (1.8)^5$$

ใน 7 วันมีทั้งหมด 168 ชั่วโมง ดังนั้น เมื่อสิ้นชั่วโมงที่ 168 แบคทีเรียจะมีจำนวนทั้งสิ้น

$$\text{จำนวนของแบคทีเรียเมื่อสิ้นช่วงเวลา } 168 = (10) \cdot (1.8)^{168} = 7.687 \times 10^{43}$$

ดังนั้น นายมีรักจึงรายงานต่อหัวหน้าว่า ในอีก 7 วันข้างหน้า จะแบคทีเรียจะมีจำนวนทั้งสิ้น 7.687×10^{43} ตัว

หมายเหตุ ซึ่งเมื่อครบ 7 วันแล้ว สิ่งที่นายมีรักทำนายไว้ ก็เป็นจริง และหัวหน้าแผนกก็พึงพอใจเป็นอย่างมากเลยตัดสินใจของนายมีรัก เพื่อเข้าทำงานในบริษัททันทีที่สำเร็จการศึกษา และนายมีรักก็ให้รู้สึกดีใจเป็นอย่างยิ่ง ที่ตั้งใจเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เมื่อครายุ่ชั้นปี 1 มทส. เพราะเราไม่รู้ว่า ไม่นาน สิ่งที่เราคิดว่าไม่ได้ใช้ วันหนึ่งกลับอาจเป็นสิ่งที่ตัดสินใจชะตาอนาคตของเรา ก็เป็นได้ 😊

❖ **จุดคุ้มทุน**

ในการทำการธุรกิจการค้า เราทราบเสมอว่าหมวดเงินที่เกี่ยวข้องมีอยู่ 3 ส่วน ได้แก่ เงินที่เราใช้จ่ายลงทุนทั้งหมด (ในที่นี้เขียนแทนด้วย "C"), รายได้ทั้งหมดที่ได้จากการจำหน่ายสินค้านั้นๆ (ในที่นี้เขียนแทนด้วย "R") และผลกำไร ซึ่งก็คือผลต่างของเงิน 2 หมวดแรก (ในที่นี้เขียนแทนด้วย " P ") และเนื่องจาก ทั้ง 3 หมวดนี้ จะขึ้นอยู่กับปริมาณหรือจำนวนของสินค้าทั้งสิ้น ดังนั้นถ้าเรากำหนดให้ x แทนจำนวนสินค้า เราจะสามารถเขียนได้เป็นสมการ

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{3.3}$$

เมื่อไหร่ก็ตามที่เราสามารถมีค่า R(x) เท่ากับค่า C(x) เราถือว่า ณ ตำแหน่งนี้ ไม่มีกำไร และไม่ขาดทุน เราเรียกสถานการณ์เช่นนี้ว่า "จุดคุ้มทุน" ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปัญหาจุดคุ้มทุนนี้ โดยการใช้ความรู้ทางสมการพหุนามและการแก้ ดังแสดงในตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3.7.5 ถ้าในการทำการค้าหนึ่ง พบว่าฟังก์ชันรายจ่ายสามารถเขียนได้คือ

$C(x) = 500 + 90x$ บาท และฟังก์ชันรายได้ $R(x) = 150x - x^2$ บาท เมื่อ x คือจำนวนสินค้า จงหาว่า จะต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เจ้าของการค้านี้ ถึงจะคืนทุนได้ หรือหาจุดคุ้มทุนนั่นเอง

วิธีทำ

เราทราบมาแล้วว่า จุดคุ้มทุน เกิดจาก $C(x) = R(x)$

ดังนั้น จึงได้ว่า $500 + 90x = 150x - x^2$

$$x^2 - 60x + 500 = 0$$

$$(x - 10)(x - 50) = 0$$

นั่นคือ $x = 50$, $x = 10$ และแทนค่ากลับจะได้ค่า $C(50) = 5000$, $C(10) = 1400$

ดังนั้น เจ้าของการค้าต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวน 50 หรือ 10 ชิ้น ถึงจะทำให้เงินลงทุน กับเงินรายได้ เท่ากันพอดีหรือตอบเป็นจุดได้เป็น $(50, 5000)$ และจุด $(10, 1400)$

❖ สมดุลการตลาด

การสมดุลของการตลาดทั่วไป เราจะได้ว่า "จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย(Supply)"เท่ากับ"จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ(Demand)" ซึ่ง แต่ละประเภทมักจะเขียนเป็นฟังก์ชันในรูปของราคา(p) และ จำนวนสินค้า(q) ดังนั้น การหาสมดุลการตลาด จะสามารถทำได้ดังแสดงในตัวอย่างนี้

ตัวอย่างที่ 3.7.6 ถ้ากำหนดฟังก์ชัน Demand เป็น $p^2 + 2q = 1600$

และฟังก์ชัน Supply เป็น $200 - p^2 + 2q = 0$ แล้วจงหาจุดสมดุลการตลาด

วิธีทำ จุดสมดุลการตลาดเกิดขึ้นเมื่อ

"จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย(Supply)"เท่ากับ"จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ(Demand)"

จากโจทย์เราได้ว่า จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย(Supply): $q = -\frac{1}{2}p^2 + 800$ (1)

จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ(Demand): $q = \frac{1}{2}p^2 - 100$ (2)

ให้สมการที่ (1) เท่ากับ สมการที่ (2)

$$\text{จึงได้ว่า } -\frac{1}{2}p^2 + 800 = \frac{1}{2}p^2 - 100 \Rightarrow p^2 - 900 = 0$$

$\Rightarrow p = 30, -30$ เลือก 30 เพราะ ราคา ต้องเป็นบวกเสมอ

แล้วแทนค่ากลับไปเพื่อหาค่า q จึงได้ค่า $q = 350$

ดังนั้นจะต้องผลิตสินค้าเพื่อขายเป็นจำนวน 350 ชิ้น และขายในราคาชิ้นละ 30 บาท การตลาดถึงจะสมดุล

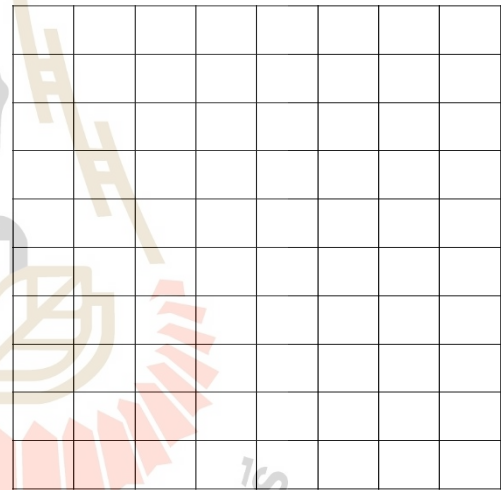
แบบฝึกทักษะที่ 3.7 ใจใช้ความรู้ในบทที่ 3 ในการหาคำตอบของปัญหาในชีวิตประจำวันต่อไปนี้

1. จากรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงจินตนาการว่า นักศึกษา กำลังรินน้ำใส่ภาชนะในข้อนั้นๆ ด้วยอัตราคงที่ แล้วเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง เวลา(Time) กับความสูง(Height) ของระดับน้ำในภาชนะนั้น

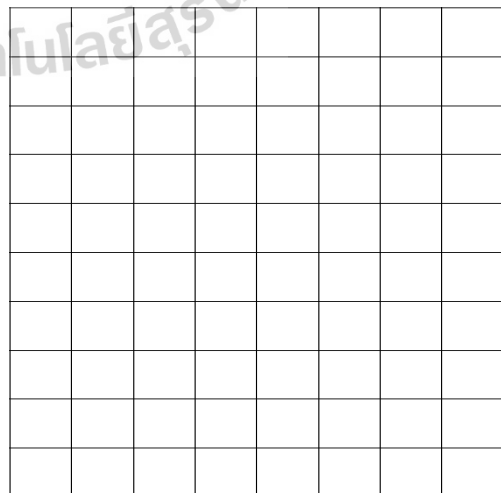
(a)



(b)



(c)

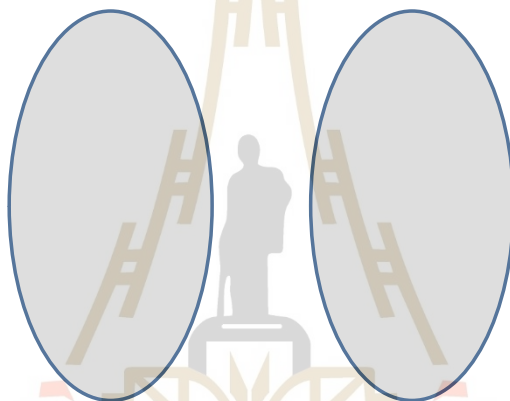


2. โรงภาพยนตร์แห่งหนึ่งในจังหวัดนครราชสีมา จำหน่ายเครื่องดื่มน้ำตามปริมาณ และความสัมพันธะระหว่างปริมาณเครื่องดื่มน้ำ(หน่วยเป็น มิลลิลิตร มล.) กับราคา แสดงใน ตารางที่ 12 จงใช้ข้อมูลนี้ ตอบคำถามในละเอียดต่อไปนี้

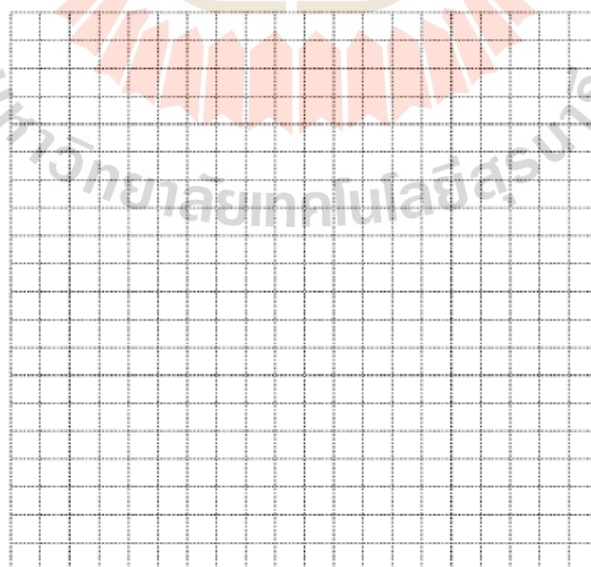
ตารางที่ 12 ตารางแสดงความสัมพันธะระหว่างราคาเครื่องดื่มน้ำ และปริมาณ สำหรับแบบฝึกทักษะประจำบทที่ 3 หัวข้อ 3.7 ข้อ 2

ปริมาณของเครื่องดื่มน้ำ(มล.)	ราคา (บาท)
120	99
160	119
240	149
480	189

2.1) จงเขียนแผนภาพในลักษณะของ แผนภาพที่ 8 เพื่อแสดงความสัมพันธ์นี้



2.1) จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์นี้



2.3) จงเขียนโดเมน และเรนจ์ ของความสัมพันธ์นี้

.....

.....

2.4) ความสัมพันธ์นี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะอะไร

.....

.....

2.5) เราสามารถใช้ข้อมูลนี้ ทำนายราคาของเครื่องดื่มที่มีขนาด 560 มล. ได้หรือไม่ อย่างไร

.....

.....

3. จงพยายามนึกภาพในแต่ละสถานการณ์ต่อไปนี้ แล้วทำการกำหนดตัวแปร ระบุหน้าที่ว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม แล้วเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์

3.1) ระยะทางที่รถวิ่งไปได้หลังเหยียบเบรค จนกระทั่งรถหยุดนิ่งสนิท เมื่อเทียบกับความเร็วของรถก่อนที่จะเหยียบเบรค

.....

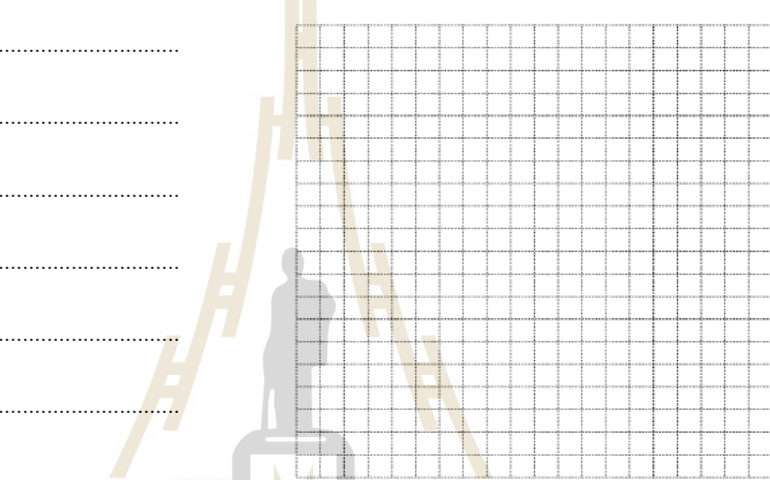
.....

.....

.....

.....

.....



3.2) อุณหภูมิเฉลี่ยของแก้วที่ใส่น้ำแข็งเต็มแก้ว แล้วปล่อยให้วางอยู่บนโต๊ะเป็นเวลานาน

.....

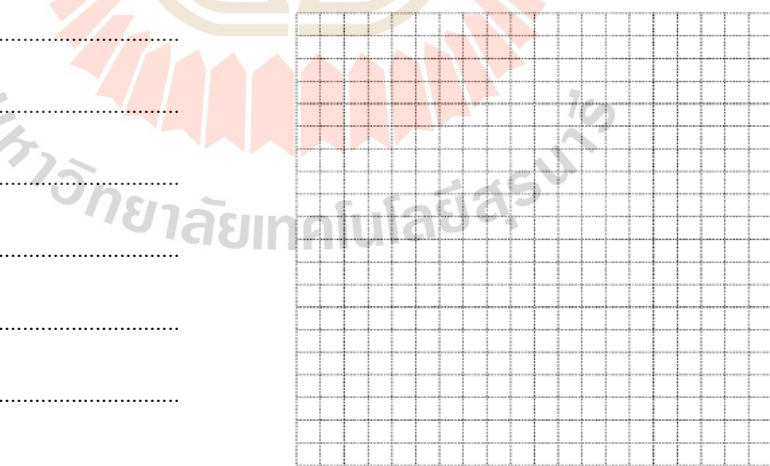
.....

.....

.....

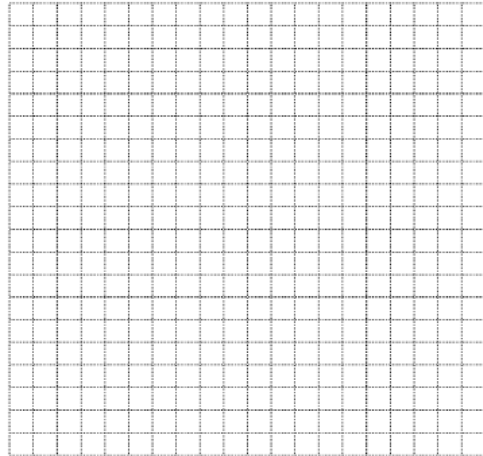
.....

.....



3.3) ระดับความสูงจากพื้นของนักศึกษา เมื่อนักศึกษานั่งบนชิงช้าสวรรค์เป็นเวลา 3 รอบ

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



4) นายสายันต์ ได้ริเริ่มทำธุรกิจปรับปรุงภาพเก่า แล้วนำมาตกแต่ง และทำสำเนาขายใหม่ โดยในการปรับปรุงภาพ 1 ภาพนั้น นายสายันต์ จะต้องใช้เงินจำนวน 155 บาท ในการทำการตกแต่งใหม่ และต้องใช้เงินอีก 15 บาท ในการจัดทำสำเนา 1 ชุด และเขาได้วางแผนไว้ว่า จะขายในราคาชุดละ 27 บาท

4.1) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเงินที่ต้องจ่ายในการจัดทำปรับปรุงภาพ 1 ภาพ กับ จำนวนชุดสำเนาเป็นจำนวน x ชุด

.....

4.2) วาดกราฟที่ได้ในข้อ 4.1) แล้ววาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเงินที่เขาจะได้ กับ จำนวนชุดของภาพที่ทำสำเนา

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....



4.3) สายันต์ต้องขายสำเนาภาพเป็นจำนวนกี่ชุดเป็นอย่างน้อย เขาถึงจะสามารถคืนทุน และเริ่มทำกำไร

.....
.....

4.4) ถ้าเขาทำสำเนาทั้งหมด 8 ชุด แล้วขายหมด จงหาว่า เขาขาดทุนหรือได้กำไรอยู่ที่บาท

.....
.....

5. สิ่งมีชีวิตที่หายากชนิดหนึ่ง อาศัยอยู่ก้นลึกของทะเล และมีชีวิตยืนยาวมาก จากการสำรวจพบว่า ณ วันนี้ จำนวนของสิ่งมีชีวิตชนิดนี้คือ 821 ตัว และเพิ่มประชากรขึ้นด้วยอัตราคิดเป็น 2 % ต่อเดือน จงหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตทะเลลึกชนิดนี้ เมื่อสิ้นปีที่ 10

.....

.....

6. ถ้าธาตุชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิตคือ 25 ปี และหลังจาก x ปี ธาตุนี้จะเหลือปริมาณเป็นจำนวนทั้งสิ้น $A(t)$ กรัม ที่นิยามเป็น

$$A(t) = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$$

จงหาว่าธาตุนี้มีปริมาณเริ่มต้นกี่กรัม และปริมาณที่เหลืออยู่ หลังจากปีที่ 80

.....

.....

7. ถ้าจำนวนประชากรในแมกซิโกในปี 2523 เป็น 67.38 ล้านคน จงหาว่า เมื่อสิ้นปี 2563 แมกซิโก จะมีประชากรเท่าใด เมื่อกำหนดให้ จำนวนประชากรในปีที่ t มีจำนวนเป็น $P(t) = 67.38e^{0.02567t}$

.....

.....

8. จากสมการแสดงการเพิ่มขึ้นของประชากรในแมกซิโกในข้อ 7. จงหาว่า ถัดจากปี 2553 ไปกี่ปี ประชากรแมกซิโกจะมีจำนวนเป็นเท่าตัว

.....

.....

9. จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 3.7.5 จงเขียนสมการกำไร และหาว่า ต้องผลิตและจำหน่ายสินค้านี้ เป็นจำนวนเท่าใด ถึงจะได้กำไรสูงสุด และได้กำไรสูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด

.....

.....

10. ถ้ากำหนดฟังก์ชัน Demand เป็น $p^2 + 4q = 1600$, $550 - p^2 + 2q = 0$

และฟังก์ชัน Supply เป็น $550 - p^2 + 2q = 0$ แล้วจงหาจุดสมดุลการตลาด

.....

.....

11. ถ้าในการทำการค้าหนึ่ง พบว่าฟังก์ชันรายจ่ายสามารถเขียนได้คือ

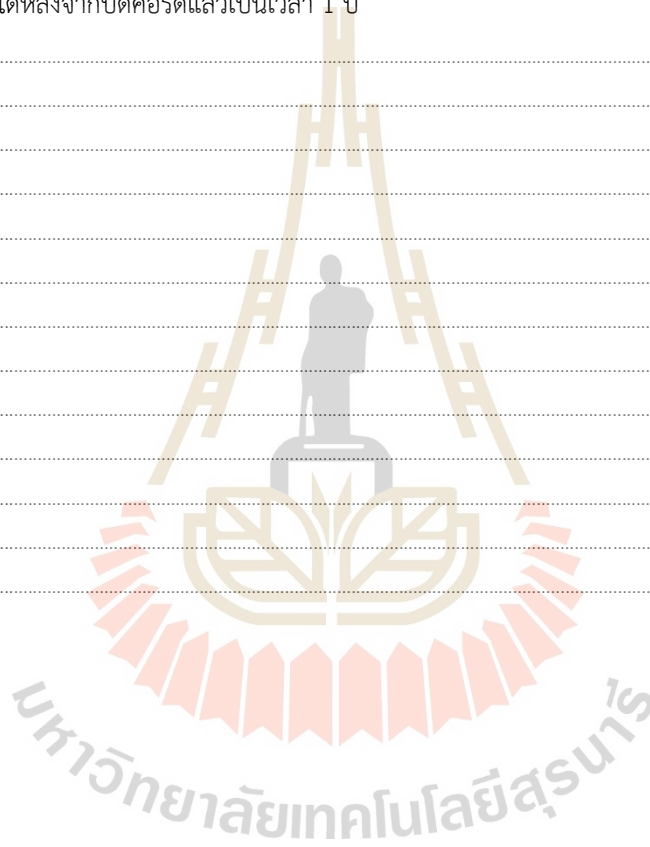
$C(x) = 1600 + 1500x$ บาท และฟังก์ชันรายได้ $R(x) = 1600x - x^2$ บาท เมื่อ x คือจำนวนสินค้า จงหาว่า จะต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เจ้าของการค้านี้ ถึงจะคืนทุนได้ หรือหาจุดคุ้มทุน นั้นเอง

12.วิธีหนึ่งที่สามารถใช้ในการวัดความสามารถในการจดจำและเข้าใจเนื้อหาของนักเรียนหลังจากได้เรียนวิชาหนึ่งๆ ไปแล้ว คือ การสอบวัดนักเรียนเหล่านั้นทุกๆ ช่วงเวลาใด ช่วงเวลาหนึ่ง หลังจากทีวิชานั้นจบลงแล้ว และผลของการสอบวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันของนักเรียนคนหนึ่งในเดือนหลังจากเรียนจบวิชานี้แล้ว สามารถประมาณค่าได้โดยสมการ

$$S(t) = 85 - 25 \log(t + 1)$$

เมื่อ $S(t)$ คือคะแนนที่นักเรียนได้ในเดือน t นั้นๆ จงหาว่า

- ก. นักเรียนคนนี้ได้คะแนนเท่าใดในเดือนแรก
- ข. นักเรียนคนนี้ได้คะแนนเท่าใดหลังจาก 2 เดือน
- ค. นักเรียนคนนี้ได้คะแนนเท่าใดหลังจากปิดคอร์สแล้วเป็นเวลา 1 ปี



แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย พหุนามพื้นฐานของฟังก์ชัน

- | | | |
|--|------|------------------------------|
| 1) $k(x) = -x + 1$ | จงหา | $k(-10)$ |
| 2) $p(x) = 3x$ | จงหา | $p(-6)$ |
| 3) $g(n) = n^3 + 3$ | จงหา | $g(8)$ |
| 4) $g(x) = x^3 + 5x$ | จงหา | $g(5)$ |
| 5) $h(n) = n^3 + 3n^2$ | จงหา | $h(-5)$ |
| 6) $w(a) = -a^2 + 5a$ | จงหา | $w(7)$ |
| 7) $p(a) = a^3 - 4a$ | จงหา | $p(-6)$ |
| 8) $h(n) = \frac{4}{3}n + \frac{8}{5}$ | จงหา | $h(-1)$ |
| 9) $f(x) = -1 + \frac{1}{4}x$ | จงหา | $f\left(\frac{4}{3}\right)$ |
| 10) $h(n) = n^3 + 6n$ | จงหา | $h(4)$ |
| 11) $h(x) = -x^2 - 3$ | จงหา | $h(-1)$ |
| 12) $h(x) = -x^2 - x$ | จงหา | $h(10)$ |
| 13) $h(t) = t^2 - 4.4$ | จงหา | $h(-7.8)$ |
| 14) $h(a) = -2 - \frac{1}{4}a$ | จงหา | $h\left(-\frac{4}{5}\right)$ |

Extra Exercises

ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(y) = 5y^3 - 2$$

$$h(z) = 2^z - 1$$

แล้วจงหาค่าของสิ่งต่อไปนี้

1) $f(1) + g(0) + h(-1)$

2) $f(-1) + g(2) + h(0)$

3) $f(2) + g(1) + h(2)$

4) $f(1) - g(0) - h(1)$

5) $\frac{f(2)}{g(0)} + \frac{h(1)}{2}$

6) $3f(1) + \frac{g(2)}{h(1)}$

7) $\frac{2}{7}f(2) + 2h(1) + \frac{2}{g(0)}$

8) $f(-3) - g(0) + 2h(1)$

$$9) f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{h(2)}{g(1)}$$

$$10) 5f(-1) + g(-1) + h(2)$$

$$11) \frac{f(1)}{g(0)} + 5h(0)$$

$$12) \frac{f(-3)}{g(-1)} - h(2)$$

$$13) 2f\left(\frac{5}{3}\right) + g(0) + h(1)$$

$$14) \frac{f(2)-3g(2)}{h(2)}$$

$$15) f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{g(1)}{2} - \frac{h(0)}{6}$$

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1. จงเขียนสิ่งต่อไปนี้ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

(a) $\log_3 x = 9$

(b) $\log_2 8 = x$

(c) $\log_3 27 = x$

(d) $\log_4 x = 3$

(e) $\log_2 y = 5$

(f) $\log_5 y = 2$

2. จงเขียนสิ่งต่อไปนี้ในรูปของฟังก์ชันลอการิทึม

(a) $y = 3^4$

(b) $27 = 3^x$

(c) $m = 4^2$

(d) $y = 3^4$

(e) $32 = x^5$

(f) $64 = 4^x$





3. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

(a) $\log_3 x = 4$

(d) $\log_2 \frac{x}{2} = 5$

(b) $\log_m 81 = 4$

(e) $\log_3 y = 5$

(c) $\log_x 1000 = 3$

(f) $\log_2 4x = 5$

4. จงทำ(กระจาย)ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(a) $\log_x xy - \log_2 x^2$

(b) $\log_2 \frac{8x^2}{y} + \log_2 2xy$

(c) $\log_3 9xy^2 - \log_2 2xy$

(d) $\log_4 (xy)^3 - \log_4 xy$

(e) $\log_3 9x^4 - \log_3 (3x)^2$

5. จงแก้สมการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) $2 \log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = \log_b x$

(b) $\log_b 30 - \log_b 5^2 = \log_b x$

(c) $\log_b 8 + \log_b x^2 = \log_b x$

(d) $\log_b (x + 2) - \log_b 4 = \log_b 3x$

(e) $\log_b (x - 1) + \log_b 3 = \log_b x$

6. จงแก้สมการต่อไปนี้ (ใช้เครื่องคำนวณถ้าจำเป็น)

1. $3^x = 14$

9. $3 - \log_2 (x - 1) = 0$

2. $5e^x = 22$

10. $\log(x^2 - 3x) = 1$

3. $7(10)^{3x-1} = 5$

11. $\log_3 (2x + 3) = 4$

4. $2e^{3x-5} = 7$

12. $\log_3 x + \log_3 (x + 6) = 3$

5. $\frac{15}{1+e^{2x+1}} = 4$

13. $1 + \log(3x - 1) = \log(2x + 1)$

6. $200(1.02)^{3t} = 1000$

14. $\log_2 (x^2 - x - 2) = 2$

7. $x^2 e^2 + 5x e^x - 6e^x = 0$

15. $\ln(\ln x) = 3$

8. $\ln(4x - 5) = 0$

16. $\log(3x - 10) = 2 + \log(x - 2)$

6. Extra) จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้

1) $\frac{1}{32} = 2^{2x+1}$

3) $9(81)^{x+1} = 3^{2-x}$

2) $(125)^{x-1} = 25^x$

4) $\frac{64}{2^{3x}} = 16$

$$\begin{array}{ll}
 5) \frac{216}{36^{x-1}} = 6^{x-1} & 11) (16)^{\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{128} \\
 6) \left(\frac{2}{64^x}\right)^2 = 32 \cdot 4^{2-x} & 12) \frac{81}{27^x} = 9^{4x-3} \\
 7) 49(7)^{3x} = \frac{1}{7^{x-3}} & 13) (32)^{x-1} = \frac{128}{4^{2x}} \\
 8) \frac{25^{1-x}}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^x & 14) \left(\frac{81}{9^x}\right)^{-2} = 27^{x+1} \\
 9) \frac{4^{2x+3}}{128} = 64 \cdot 4^x & 15) \left(\frac{625}{25}\right)^x = 125^{4x+5} \\
 10) 27 \cdot (81)^{2-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x &
 \end{array}$$

7. จงใช้คุณสมบัติทางฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เพื่อให้แต่ละข้อต่อไปนี้ อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{array}{ll}
 1.) (x^{-3})^2 & 2.) -2x^{-5} \\
 3.) \left(\frac{p^{-1}}{9q^3}\right)^2 & 4.) \frac{5^0 x^{-4}}{x^2} \\
 6.) \frac{18u^0 z^{-4}}{16u^{-2} z^2} & 7.) \frac{3^4 x^{-4}}{3x^2} \\
 9.) 3x^2(-2x^3) & 10.) (-2x^2 y)^3 (-3xy^3)^2 \\
 12.) 2y(-3x^2)(xy^3) & 13.) (-5xyz^2)^3 \\
 15.) (y^4)^{-2} & 16.) 6^0(3^{-4}) \\
 18.) (u^2 z^{-4})^{-3} & 19.) \left(\frac{x^2}{x^{-3}y^{-2}}\right)^{-1}
 \end{array}$$

7.Extra) จงใช้คุณสมบัติทางฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เพื่อให้แต่ละข้อต่อไปนี้ อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{array}{ll}
 1. \left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2x^{-1}}{y}\right) & 9. \left(\frac{3x^2 y^{-1}}{z^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} x^2 y^{-4} z\right) \\
 2. \left(\frac{x^{-2}y}{z}\right)^{-2} \cdot (2xy)^{-1} & 10. (x^{-2} y^{-3} z^2)^{-2} \cdot \left(\frac{z^4}{x^{-2} y^{-2}}\right) \\
 3. \left(\frac{xyz^{-1}}{x^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{yz}\right)^3 & 11. \left(\frac{x^2 y}{x^3 z^4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3x^{-2}}\right) \\
 4. \left(\frac{1}{x^2 y^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{z^3 xy}{2}\right) & 12. \left(\frac{3xy}{z^{-1}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2z}{5y^{-5}}\right) \\
 5. (20x^{-2} yz) \cdot \left(\frac{x^3 y}{z}\right)^{-1} & 13. \left(\frac{25y^{-1} z^2}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^2 y}{z}\right)^{-1} \\
 6. (xy^2 z^5)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2xy^2}\right) & 14. \left(\frac{1}{2xy^{-3}}\right) \cdot \left(\frac{yz^4}{x^{-1}}\right)^{-2} \\
 7. \left(\frac{x^2 y}{z^{-3}}\right) \cdot \left(\frac{32xy^2}{z}\right)^{-1} & 15. \left(\frac{x^2 y}{4z}\right)^3 \cdot \left(\frac{xyz^{-2}}{3x^{-1}}\right) \\
 8. \left(\frac{x^{-2} z}{y^2}\right)^{-2} \cdot (x^{-3} y) &
 \end{array}$$

8. จงแก้สมการด้านล่างนี้ โดยไม่ต้องใช้การเทคฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย

$$1.) \left(\frac{1}{6}\right)^{-3x} \cdot 36^{3x} = 36^{-2x-3}$$

$$2.) \frac{4}{2^{1-p}} = 1$$

$$3.) 64^{m+3} \cdot 4^{-m-2} = 8$$

$$4.) 243^{2n-1} = 27^{3n+2}$$

$$5.) \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2r-2}}{27} = \left(\frac{1}{81}\right)^{2r-2}$$

$$6.) 2^{-3x-1} \cdot 2^5 = 32$$

$$7.) 9 \cdot 3^{-2b-3} = 3^{-b}$$

$$8.) 3^{-2a} \cdot 3^{-2a} = 1$$

$$9.) \frac{4^{3v+2}}{4^{2v-1}} = 4^{v+1}$$

$$10.) 125 \cdot 25^{-2x} = 1$$

ส่วนที่ 3 ว่าด้วย พหุนาม

1. จงกระจายแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $2x(x^2)(-4x)(+3)$

2. $4x - 2(x - 3)$

3. $-2x^2(-3x^2)^3$

4. $(x^2 + 4x) - (x^3 - 3x^2) - (2x^2 + x)$

5. $xy(x^2 - 4x + 3)$

6. $2x - 3(x^2 - 5x + 6) + 5x^2$

7. $(x - 4)^2$

8. $(x - 5)(x^2 - 5x + 25)$

9. $(x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

10. $(3x + 7)(3x - 7)$

11. $(x + 8y)(3x + y)$

12. $(3x + y)(3x - y)$

13. $2x(x^2 + 3x) - x(2x^2 - 4) + 3x(x^2 - 5x + 2)$

2. จงหาสิ่งต่อไปนี้

2.1 สำหรับพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาพหุนามที่เหลือ เมื่อกำหนดตัวประกอบหนึ่งมาให้ดังตาราง

พหุนาม	รากหนึ่งของพหุนามนี้
1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$x - 1$
2. $x^3 - 7x - 6$	$x + 2$
3. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$	$x + 1$
4. $3x^3 + 7x^2 + 22x - 8$	$x + 4$

2.2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามในแต่ละข้อด้านล่างนี้

(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(c) $2x^3 + 5x^2 - 3x$

(b) $x^3 - 7x - 6$

(d) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

2.3 จงหาผลเฉลยของสมการพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$

2. $x^2 - x - 12 = 0$

3. $a^2 - 9a + 18 = 0$

4. $t^2 + 2t - 19 = 0$

5. $x^2 + 15x + 30 = -6$

6. $d^2 + 10d = -16$

7. $2x^2 + 6x + 4 = 0$

8. $3a^2 - 12a = 15$

9. $c^2 - 6c + 9 = 0$

10. $5x^2 - 14x + 8 = 0$

11. $h^2 - 7 = 9$

12. $7t^2 - 15t + 5 = 4$

13. $d^2 + 10d + 18 = -7$

14. $4x^2 - 46 = 13$

15. $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

16. $5x^3 + 23x^2 + 10x - 8 = 0$

17. $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$

18. $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$

19. $x^3 + 5x^2 - 4x + 20 = 0$

3 จรวดโมเดลอันหนึ่งถูกยิงขึ้นไปบนฟ้าจากพื้นดินและความสูงของจรวดโมเดลอันนี้วัดจากระดับยิงที่พื้น(มีหน่วยเป็นเมตร)

สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $h = -16t^2 + 160t$ เมื่อ t เป็นเวลาที่มีหน่วยเป็นวินาที จงหาว่า

3.1) จรวดระดับความสูงของจรวดเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที (256 เมตร)

3.2) จรวดต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะเดินทางไปถึงจุดที่สูงจากพื้นเป็นระยะทาง 384 เมตร (หลังจากผ่านไป 4 และ 6 วินาที)

3.3) จรวดจะตกลงถึงพื้นเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด(หลังจากผ่านไป 10 วินาที)

4. พื้นที่เกษตรแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีด้านยาวที่สั้นกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 กิโลเมตร และมีพื้นที่ทั้งหมดเป็น 104 ตารางกิโลเมตร จงหาว่า ที่ดินเกษตรแปลงนี้กว้างและยาวกี่กิโลเมตร (กว้าง 8 และยาว 13 กิโลเมตร)

5. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานที่ยาวเป็น 4 เท่าของความสูง และมีพื้นที่เป็น 48 ตารางเมตร สามเหลี่ยมรูปนี้มีฐานกว้างและมี ความสูงยาวเท่าใด (มีความยาวฐานเป็น 12 เมตร และสูงเป็น 8 เมตร)

เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.1 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.1

- 1) $D_R = \{1,2,3,4\}$, $R_R = \{3,6,9,12\}$ 2) $D_R = \{1,2,3\}$, $R_R = \{6,7,8\}$
 3) $R = \{(1,4), (1,6), (2,9), (3,4), (3,6), (5,4), (5,6)\}$
 4) 2^6

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.2

- 1) ความสัมพันธ์ (i) เป็นฟังก์ชัน, ความสัมพันธ์ (ii) เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ (iii) ไม่เป็นฟังก์ชัน
 2) กราฟในข้อ ข. เพียงข้อเดียวที่ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน y แล้ว เส้นนั้นจะตัดกราฟมากกว่า 1 จุด
 3.1) $R_f = (-\infty, 2)$, 3.2) $R_f = [2, \infty)$ 3.3) $R_f =$ จำนวนจริงทั้งหมด

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.3

- 1) 11 2) 3 3) -74 -21 5) -28 6) -2.57 88 8) -1/64 9) 4t-13
 10) 8a 11) 12n+2 12) a+7 13) 4x+4 14) -4^{3a-4} 15) $-64n^3 - 80n^2$
 16) $n^4 - 2n^2$ 17) $x^3 - 12x^2 + 48x - 96$ 18) $2 \cdot 3^{7+t}$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.2 พหุคูณของฟังก์ชัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.2

- 1.1) $x + \sqrt{x-2}$ 1.2) $2 - x + \sqrt{x-2}$
 1.3) $x - 1 + (\sqrt{x-2})(x-1)$ 1.4) $\frac{1+\sqrt{x-2}}{x-1}$ เมื่อ $x \neq 1$

ดังนั้น โดเมนของ $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ คือ

$$D_f \cap D_g = [2, \infty) \cap (-\infty, +\infty) = [2, \infty)$$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ หาจาก $D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$

จาก $g(x) = x - 1$ นั่นคือ $x - 1 \neq 0, x \neq 1$

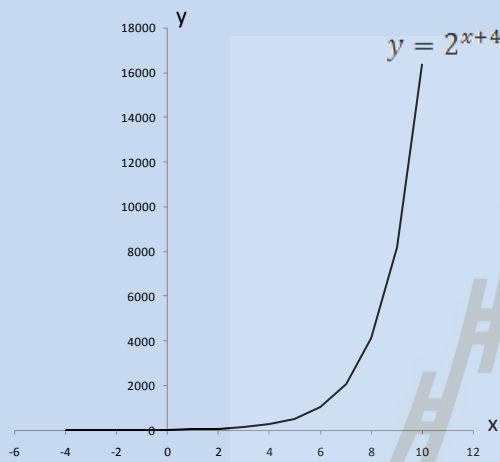
ดังนั้น โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $[2, \infty)$ และ $x = 1$ ไม่อยู่ในช่วงนี้

- 2.1) $5x^2 + 2x - 1$ 2.2) $5x^2 + 1$ 2.3) $(x-1)(\sqrt{5-x})$

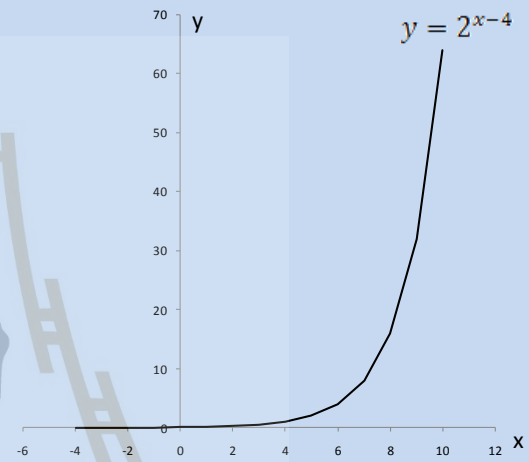
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.3

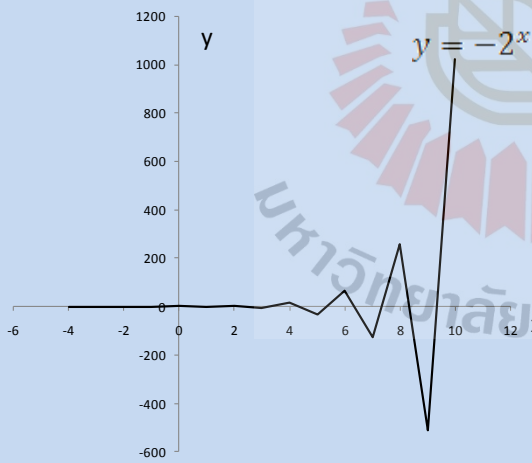
(a) $y = 2^{x+4}$



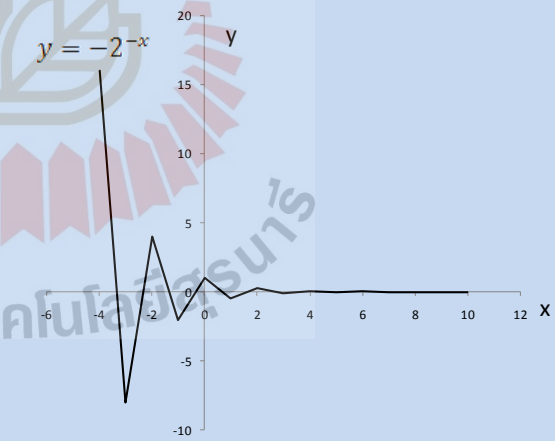
(b) $y = 2^{x-4}$



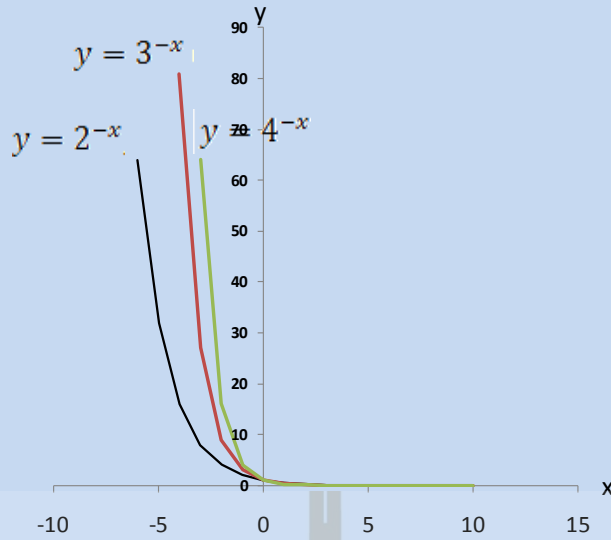
(c) $y = -2^x$



(d) $y = -2^{-x}$



แบบฝึกทักษะที่ 3.3.2



แบบฝึกทักษะที่ 3.3.3

- 1) 0 2) $(-x^5)$ 3) -1 4) $-42a^5b^3c^3$ 5) -363
 6) 8 7) -3 8) 2 9) 6^{a+b+c} 10) $2^8x^{12}y^2$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.4

- 1)- 12) $3/2$ 3)-34) $05)2$
 6)2 7)2 8)29) $3/510)12$
 11) $-1/312)$ $-2/17$ 13) $-1/3$ 14) $-5/11$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.1

ข้อ	รูปลอการิทึม	รูปเลขกำลัง
1)	$\log_6 36 = 2$	$6^2 = 36$
2)	$\log_{289} 17 = \frac{1}{2}$	$289^{\frac{1}{2}} = 17$
3)	$\log_{14} \frac{1}{196} = -2$	$14^{-2} = \frac{1}{196}$
4)	$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
5)	$\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	$64^{\frac{1}{2}} = 8$
6)	$\log_{12} 144 = 2$	$12^2 = 144$

7)	$\log_9 \frac{1}{81} = -2$	$9^{-2} = \frac{1}{81}$
8)	$\log_{\frac{1}{12}} \frac{1}{144} = 2$	$\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$
9)	$\log_u \frac{15}{16} = v$	$u^v = \frac{15}{16}$
10)	$\log_v u = 4$	$v^4 = u$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.2

- 1) $\log(6 \cdot 3) = \log 6 + \log 3$
- 2) $\log \frac{2^4}{5^3} = 4 \log 2 - \log 3$
- 3) $\log \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 6 \log 6 - 6 \log 5$
- 4) $\log(a \cdot b)^2 = 2 \log a + 2 \log b$
- 5) $\log \frac{u^4}{v^{-2}} = 4 \log u - 2 \log v$
- 6) $\log \frac{x^{-3}}{y^5} = -3 \log x - 5 \log y$
- 7) $\log \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \frac{\log x}{3} + \frac{\log y}{3} + \frac{\log z}{3}$
- 8) $\log x \cdot y^{-3} \cdot z^2 = \log x - 3 \log y + 2 \log z$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.3

- 1)5 2) 2 3)4 4)1/3
- 5)-36)1447)17 8)72
- 9) 2 10) -2 11) 1/2 12) ไม่นิยาม 13) ไม่นิยาม

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.4

- 1){3} 2) {-5} 3){-5}4){3}5){-1/3}6){1}7){0}
- 8){4095}9){-1, 10}10){-7, -2}11) {5, 3}12) {7, 10}13) {90}14) {100/7}

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.5 ฟังก์ชันพหุนาม

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.5.1

- (a) $f(x) = 4x^2 + 2$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 2
- (b) $f(x) = 3x^3 - 2x + \sqrt{x}$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ \sqrt{x}
- (c) $f(x) = 12 - 4x^5 + 3x^2$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 5
- (d) $f(x) = \sin x + 1$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ $\sin x$
- (e) $f(x) = 3x^{12} - 2/x$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ $2/x$
- (f) $f(x) = 3x^{11} - 2x^{12}$ เป็นพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 12

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.5.2

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 1 เช่น $f(x) = x, f(x) = 6x - 5$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 2 เช่น $f(x) = x^2, f(x) = x^2 - 5$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 3 เช่น $f(x) = x^3 - 2x + 1, f(x) = x^3 - 2$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับชั้นเป็น 4 เช่น $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x, f(x) = x^4 - x - 5.$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.6 สมการพหุนาม และการหาราก

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.6.1

- 1) $\{1, -1.5\}$ 2) $\left\{\frac{7 \pm \sqrt{29}}{10}\right\}$ 3) $\{1, 6\}$ 4) $\{5, -4\}$
- 5) $\left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$ 6) $\{-3, 4\}$ 7) $\{-3, 1\}$ 8) $\left\{\frac{9}{2}, -4\right\}$
- 9) $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$ 10) $\left\{\frac{-2 \pm 2\sqrt{37}}{9}\right\}$

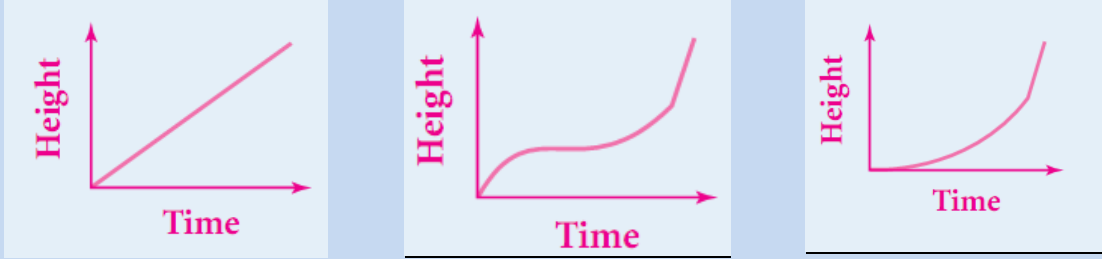
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.6.2

- 1) $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$ 2) $(x + 2)(x^2 - 2x - 3)$
- 3) $(x + 1)(2x^2 + 5x + 2)$ 4) $(x + 4)(3x^2 - 5x - 2)$
- 5) $(x - 4)(x^2 - 13x + 2)$ 6) เซตของคำตอบทั้งหมดคือ $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right\}$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.7 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม และสมการพหุนามในชีวิตประจำวัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.7

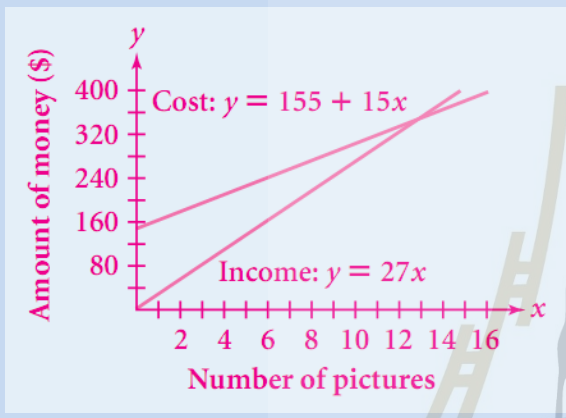
- 1)
 - (a)
 - (b)
 - (c)



ข้อ 2) และ 3) ติดตามในชั้นเรียน

4.1) $y = 155 + 15x$ เมื่อ y แทนจำนวนเงิน และ x แทนจำนวนสำเนา

4.2) - ติดตามในชั้นเรียน -



ศัพท์น่ารู้

Cost : ค่าใช้จ่าย

Number of pictures : จำนวนสำเนาภาพ

Income : รายได้

Amount of money : จำนวนเงิน

หมายเหตุ (\$) ในที่นี้จะหมายถึงหน่วยเงิน "บาท"

5) จะมีจำนวนประชากรเท่ากับ $1.716 \cdot 10^{13}$

6) ธาตุนี้จะเหลืออยู่ประมาณ 1.088 กรัม

7) 188.13 ล้านคน

8) เมื่อสิ้นปีที่ 27

9) ต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวน 30 ชิ้น ถึงจะได้กำไรสูงสุดคือ 2,200 บาท

10) $p = 30, q = 175$ 11) ได้จุดคุ้มทุน 2 จุดคือ (20,313600) และ (80,121600)

12) ก) 85 คะแนน ข) 73.1 คะแนน และ ค) 57.2 คะแนน

เฉลยแบบฝึกหัดเพิ่มเติมท้ายบท

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย พืชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน

- 1) 11 2) -18 3) 67 4) 150 5) -50 6) -14
 7) -192 8) 4/15 9) -13/16 10) 88 11) -4 12) -110
 13) 56.44 14) -9/5

เฉลย Extra Exercises

- 1) $\frac{3}{2}$ 2) 36 3) 13 4) 5 5) -3 6) 50 7) 3 8) 4
 9) $\frac{11}{3}$ 10) -14 11) -2 12) $-\frac{13}{7}$ 13) 11 14) $\frac{121}{3}$ 15) 4

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1. (a) $x = 3^9$ (b) $8 = 2^x$ (c) $27 = 3^x$ (d) $x = 4^3$

(e) $y = 2^5$ (f) $y = 5^2$

2. (a) $4 = \log_3 y$ (b) $x = \log_3 27$ (c) $2 = \log_4 m$ (d) $5 = \log_3 y$

(e) $5 = \log_x 32$ (f) $x = \log_4 64$

3. (a) 81 (b) 3 (c) 10 (d) 64 (e) 234 (f) 8

4. (a) $\log_2 \frac{y}{x}$, (b) $4 + 3 \log_2 x$, (c) $\log_3 y - 1$, (d) $2 \log_4(xy)$

5. (a) 8, (b) $\frac{6}{5}$, (c) $\frac{1}{8}$, (d) $\frac{2}{11}$, (e) $1\frac{1}{2}$

6) 6.1) ประมาณ 2.40217 6.2) ประมาณ 1.4816 6.3) ประมาณ 0.284626.4) ประมาณ 2.08425

6.5) ประมาณ -0.00586.6) ประมาณ 27.09136.7) -6, 16.8) 1.56.9) 9

6.10) 5, -26.11) 396.12) 36.13) 11/286.14) 3, -26.15) e^{e^3} 6.16) ไม่มีคำตอบ

6.Extra)

1) $\frac{1}{32} = 2^{2x+1}$ ($x = -3$)

2) $(125)^{x-1} = 25^x$ ($x = 3$)

3) $9(81)^{x+1} = 3^{2-x}$ ($x = -\frac{4}{5}$)

4) $\frac{64}{2^{3x}} = 16$ ($x = \frac{2}{3}$)

5) $\frac{216}{36^{x-1}} = 6^{x-1}$ ($x = 2$)

6) $\left(\frac{2}{64^x}\right)^2 = 32 \cdot 4^{2-x}$ ($x = -\frac{7}{4}$)

7) $49(7)^{3x} = \frac{1}{7^{x-3}}$ ($x = \frac{1}{4}$)

8) $\frac{25^{1-x}}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ ($x = -2$)

9) $\frac{4^{2x+3}}{128} = 64 \cdot 4^x$ ($x = \frac{7}{2}$)

10) $27 \cdot (81)^{2-x} = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ ($x = \frac{11}{2}$)

11) $(16)^{\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{128}$ ($x = \frac{-11}{2}$)

12) $\frac{81}{27^x} = 9^{4x-3}$ ($x = 1$)

13) $(32)^{x-1} = \frac{128}{4^{2x}}$ ($x = \frac{4}{3}$)

14) $\left(\frac{81}{9^x}\right)^{-2} = 27^{x+1}$ ($x = 11$)

15) $\frac{625^x}{25} = 125^{4x+5}$ ($x = \frac{-17}{8}$)

7)

- 1.) $\frac{1}{x^6}$ 2.) $\frac{-2}{x^5}$
 3.) $\frac{1}{64p^2q^6}$ 4.) $\frac{1}{x^6}$ 5.) $\frac{n^3}{m^6}$
 6.) $\frac{9u^2}{8z^6}$ 7.) $\frac{27}{x^6}$ 6.) $\frac{x^3}{8}$
 9.) $-6x^5$ 10.) $-72x^8y^9$ 11.) $-64x^3y^6$
 12.) $-6x^3y^4$ 13.) $-125x^3y^3z^6$ 14.) y^4
 15.) $\frac{1}{y^8}$ 16.) $\frac{1}{81}$ 17.) 3125
 18.) $\frac{z^{12}}{u^6}$ 19.) $\frac{1}{x^5y^2}$ 20.) 1

7.Extra)

- 1) $\frac{6}{x^2y^3}$ 2) $\frac{x^3z^2}{2y^3}$ 3) $\frac{x^2}{yz^5}$ 4) $\frac{z^3}{2xy}$ 5) $\frac{20z^2}{x^5}$ 6) $\frac{1}{2x^3y^{-6}z^{10}}$ 7) $\frac{xz^4}{32y}$ 8) $\frac{xy^5}{z^2}$ 9) $\frac{2x^6z^5}{y^6}$ 10)

8.

1. $-6/13$ 2. -1 3. $-11/4$ 4. 11 5. $9/10$
 6. $-1/3$ 7. (-1) 8. 0 9. ไม่มีคำตอบ 10. $-3/4$

ส่วนที่ 3 ว่าด้วย พหุนาม

1)

- 1) $-24x^4$ 2) $2x + 6$ 3) $54x^8$ 4) $-x^3 + 2x^2 + 3x$ 5) $x^3y - 4x^2y + 3xy$
 6) $2x^2 + 17x - 18$ 7) $x^2 - 8x + 16$ 8) $x^3 - 125$ 9) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
 10) $9x^2 - 49$ 11) $3x^2 + 25xy + 8y^2$ 12) $9x^2 - y^2$ 13) $3x^3 - 9x^2 + 10x$

2.1)

1. $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$, 2. $(x + 2)(x^2 - 2x -)$,
 3. $(x + 1)(2x^2 + 5x + 2)$ 4. $(x + 4)(3x^2 - 5x - 2)$

2.2)

- (a) $(3x - 2)(x + 1)(x - 3)$ (b) $(x - 2)(x^2 - 2x + 2)$
 (c) $x(2x - 1)(x + 3)$ (d) $(x - 1)(x^2 + x - 2)$
 (e) $(x + 2)^3$

2.3)

1. $x = -2, 3$ 10. $x = \frac{4}{5}, 2$
 2. $x = -3, 4$ 11. $h = -4, 4$
 3. $a = 3, 6$ 12. $t = \frac{1}{7}, 2$
 4. $t = -6, 4$ 13. $d = -5$

5. $x = -3, -12$

14. $x = -\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$

6. $d = -8, -2$

15. $2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

7. $x = -2, -1$

16. $\frac{2}{5}, -1, -4$

8. $a = 5, -1$

17. 3, 2

9. $c = 3$

18. 1

19. 2, -2, -5

3.1) 256 เมตร 3.2) หลังจากผ่านไป 4 และ 6 วินาที

3.3) หลังจากผ่านไป 10 วินาที 4. กว้าง 8 และยาว 13 กิโลเมตร

5. มีความยาวฐานเป็น 12 เมตร และสูงเป็น 8 เมตร



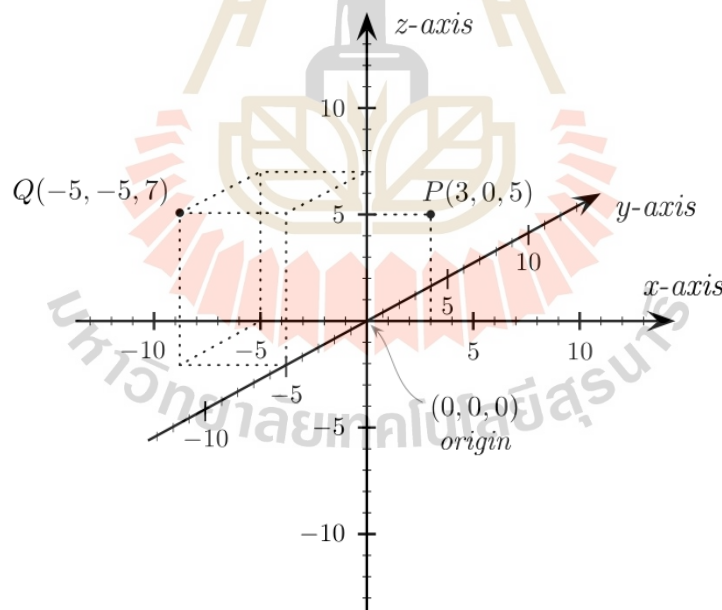
บทที่ 4

รูปทรง (Shapes) และภาคตัดกรวย (Conic Sections)

ระบบพิกัด และภาคตัดกรวย มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการจำลองสิ่งต่างๆ ด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้อยู่ในภาพที่สามารถระบุตำแหน่งต่างๆ ของสิ่งนั้น หรือส่วนประกอบของสิ่งนั้นได้ด้วยความหมายทางคณิตศาสตร์ การศึกษาในหัวข้อนี้ จึงจะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาในการประยุกต์ในหัวข้อต่อไปเป็นอย่างยิ่ง

4.1 ระบบพิกัดใน 3 มิติ (Co-ordinates in 3 Dimensions)

ในการเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษา เราได้คุ้นเคยกันอย่างดีกับระบบพิกัดแนวฉาก (Rectangular Coordinate System) คือประกอบด้วย แกน x แกน y และแกน z ดังแสดงใน แผนภาพที่ 9



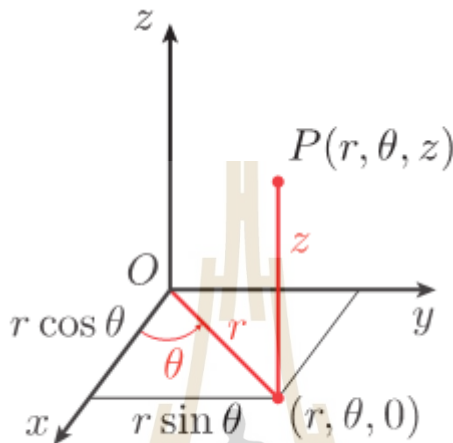
แผนภาพที่ 9 ระบบพิกัดแนวฉาก (Rectangular Coordinate System)

ในหัวข้อนี้ เราจะได้ทำความรู้จักกับระบบพิกัดแบบอื่นๆ ที่นอกเหนือจากนี้ ซึ่งระบบพิกัดอื่นๆ เหล่านี้มีประโยชน์เป็นอย่างยิ่งในการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับปัญหาทางธรรมชาติอื่นๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์ใกล้เคียง อาทิ ฟิสิกส์ และวิศวกรรมทุกแขนง อันเนื่องมาจากว่า กฎทางฟิสิกส์ต่างๆ จะเกี่ยวข้องกับสิ่งต่างๆ ที่มีรูปทรง

ต่างกันไป และรูปทรงเหล่านั้นก็ไม่เป็นการสะดวกเสมอไปที่จะอธิบายในระบบพิกัดแนวฉากอย่างที่พวกเราคุ้นเคยกันดี ดังนั้น ในบทนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดใหม่อีก 2 ระบบใน 3 มิติ ตลอดจนความสัมพันธ์ของทั้ง 3 ระบบนี้อีกด้วย

❖ ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System)

ในระบบพิกัดนี้ จุด P ใน 3 มิติ จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพิกัด (r, θ, z) เมื่อแต่ละตำแหน่งของพิกัดนี้ แสดงได้ในแผนภาพที่ 10



แผนภาพที่ 10 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System)

ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทรงกระบอก กับระบบพิกัดแนวฉาก สามารถแสดงได้ ดังนี้

1. การเปลี่ยนพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอก ไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดแนวฉาก ทำได้โดยใช้สูตร

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \tag{4.1}$$

2. และเราสามารถเปลี่ยนจุดพิกัดในระบบพิกัดแนวฉากไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอกได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan \theta &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\ z &= z \end{aligned} \tag{4.2}$$

บันทึก.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงหาพิกัดของจุด $(6, -\frac{\pi}{4}, 2)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ในระบบพิกัดแนวฉาก

วิธีทำ

รูปทั่วไปของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกคือ (r, θ, z) ดังนั้น เทียบกับจุดที่โจทย์กำหนดให้ เราจะได้ทันที
ว่า $r = 6, \theta = -\frac{\pi}{4}, z = 2$

จากสูตร (4.1) เราได้ทันทีว่า

$$x = r \cos \theta = 6 \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 6 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

และ $z = 2$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 2)$ ในระบบพิกัดแนวฉาก

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาพิกัดของจุด $(2\sqrt{3}, -2, 6)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดแนวฉาก ในระบบพิกัดทรงกระบอก

วิธีทำ

จากสูตร (4.2) เราได้ทันทีว่า

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4(3) + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = 6$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(4, -\frac{\pi}{6}, 6)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

❖ ระบบพิกัดทรงกลม(Spherical Coordinate System)

ในระบบพิกัดนี้ จุด P ใน 3 มิติ จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพิกัด (ρ, θ, ϕ) เมื่อแต่ละตำแหน่งของพิกัดนี้ แสดงได้ใน
แผนภาพที่ 11

บันทึก.....

.....

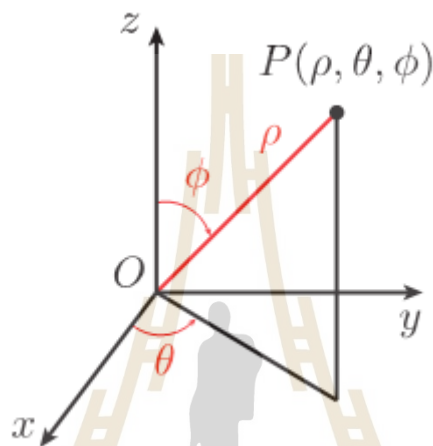
.....

.....

.....

.....

.....



แผนภาพที่ 11 ระบบพิกัดทรงกลม(Spherical Coordinate System)

ข้อสังเกต

- ρ คือ ระยะทางจากจุด O ถึงจุด P
- θ คือ มุมระหว่างแกน z ทางบวก กับส่วนของเส้นตรง OP
- $\rho \geq 0$ และ $0 \leq \phi \leq \pi$

และเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดในระบบพิกัดทรงกลมนี้ กับระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดแนวฉากได้ ดังนี้

1. สามารถเปลี่ยนพิกัดจากระบบพิกัดทรงกลม ไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอกได้ โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin \phi \\ \theta &= \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

2. สามารถเปลี่ยนพิกัดจากระบบพิกัดทรงกลม ไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดแนวฉากได้ โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cdot \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \cdot \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned} \tag{4.4}$$

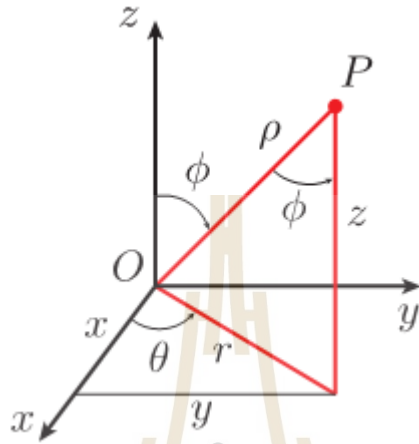
3. และจากระบบพิกัดทรงกระบอก/แนวฉาก ไปยังระบบพิกัดทรงกลม ได้ โดย

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \text{ และ } \tan \phi = \frac{r}{z}, \quad z \neq 0$$

หรือ $\cos \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ (4.5)

แผนภาพที่ 12 แสดงความสัมพันธ์ของทั้ง 3 ระบบพิกัด



แผนภาพที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดแนวฉาก ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จงหาพิกัดของจุด $(2, 2, 4\sqrt{2})$ ที่อยู่ในระบบพิกัดแนวฉาก ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

จากสูตร (4.5) เราได้ทันทีว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\tan \theta = \frac{2}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(2\sqrt{10}, \frac{\pi}{4}, \cos^{-1}(\frac{2\sqrt{5}}{5}))$ ในระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างที่ 4.1.4 จงหาพิกัดของจุด $(2, \frac{2\pi}{3}, -2)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

จากสูตร (4.5) เราได้ทันทีว่า

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{4}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{4}$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ ในระบบพิกัดทรงกลม

แบบฝึกทักษะที่ 4.1 จงหาพิกัดของจุดที่กำหนดให้ ในระบบพิกัดใหม่ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จุด $(12, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{9})$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัด
แนวฉาก

.....

.....

.....

.....

3) จุด $(1, \frac{3\pi}{2}, 2)$ จากระบบพิกัดทรงกระบอกไประบบ
พิกัดแนวฉาก

.....

.....

.....

.....

5) จุด $(3, 3, -2)$ จากระบบพิกัดแนวฉาก ไประบบพิกัด
ทรงกระบอก

.....

.....

.....

.....

2) จุด $(18, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัด
ทรงกระบอก

.....

.....

.....

.....

4) จุด $(4, -\frac{\pi}{3}, 5)$ จากระบบพิกัดทรงกระบอก ไประบบ
พิกัดแนวฉาก

.....

.....

.....

.....

6) จุด $(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัด
แนวฉาก

.....

.....

.....

.....

7) จุด $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัด
แนวฉาก

8) จุด $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ จากระบบพิกัดแนวฉาก ไประบบ
พิกัดทรงกลม

9) สมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ จากระบบพิกัด
ทรงกระบอก ไประบบพิกัดทรงกลม

10) สมการ $x^2 + 2y^2 = 2y$ จากระบบพิกัด
ทรงกระบอก ไประบบพิกัดทรงกลม

4.2 พื้นที่ (Areas) และปริมาตร (Volumes)

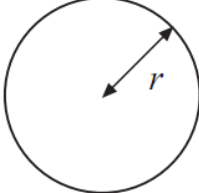
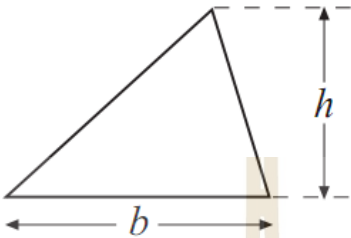
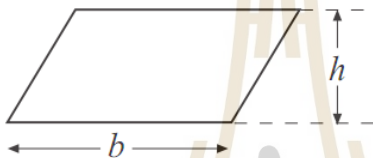
รูปทรงในปัญหาจริงที่พบเห็นนั้น บ่อยครั้งที่เราจะสามารถแบ่งส่วนย่อยๆ ของรูปทรงนั้น ให้อยู่ในลักษณะของ ส่วนประกอบของรูปทรงเล็กๆ ที่เป็นรูปทรงที่เราคุ้นเคยกันดี ไม่ว่าจะเป็น วงกลม ทรงกลม สามเหลี่ยม พีระมิด และอื่นๆ ดังนั้น จึงเป็นสิ่งสำคัญที่เราจะต้องทำความเข้าใจรูปทรงมาตรฐานเล็กๆ เหล่านี้ เพื่อการศึกษารูปทรงที่ใหญ่ขึ้น มีความซับซ้อน มากยิ่งขึ้นนั้น มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะเป็นการรวบรวมเอาสูตรคำนวณหาพื้นที่ และปริมาตร ของรูปทรงมาตรฐานต่างๆ ที่นักศึกษาได้ เคยศึกษามาแล้วตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาเลยทีเดียว

❖ พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นต่างๆ ใน 2 มิติ

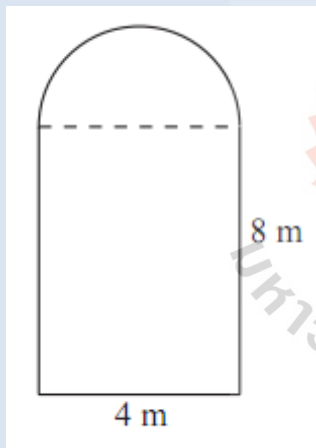
เราสามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่ของบริเวณใน 2 มิติ ได้ ดังแสดงใน ตารางที่ 13

ตารางที่ 13 สูตรการหาพื้นที่สำหรับบริเวณรูปมาตรฐานที่พบบ่อย

ชื่อ	รูปประกอบ	สูตรการหาพื้นที่
วงกลม		πr^2
สามเหลี่ยม		$\frac{1}{2}bh$
สี่เหลี่ยมด้านขนาน		bh

ข้อควรระวังความสูง h ที่ใช้ จะต้องตั้งฉากกับฐาน b เสมอ

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณดังแสดงในรูปข้างล่างนี้



วิธีทำ

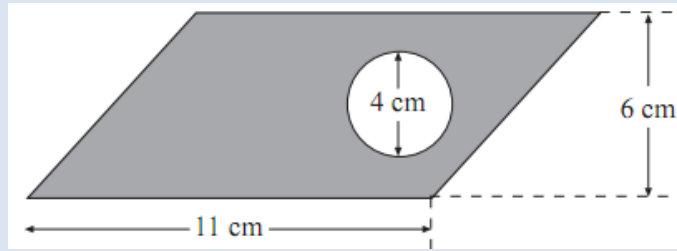
เราจะเห็นได้ว่า รูปทรงนี้ เกิดจากการประกอบกันของ 2 รูปทรงย่อย คือ รูปครึ่งวงกลม(ส่วนบน) และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(ส่วนล่าง) ดังนั้น พื้นที่ทั้งหมดของรูปทรงนี้ ก็จะเป็นผลรวมของรูปทรงย่อยทั้ง 2 นั้น

1. พื้นที่ของ ครึ่งวงกลม เท่ากับ $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 6.2831$

2. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เท่ากับ $4 \times 8 = 32$

ดังนั้น พ.ท. ของรูปนี้ เท่ากับ $32 + 6.2831 = 39.3$ ตร.ม.

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา ดังแสดงในรูปข้างล่างนี้



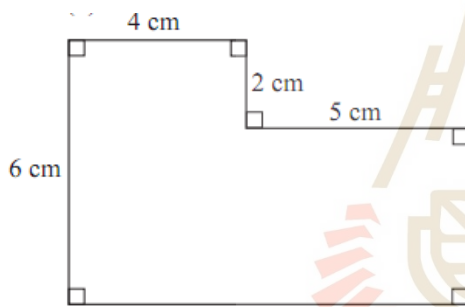
วิธีทำ

จะเห็นว่า พื้นที่ที่แรเงานั้น เกิดจากการเอาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด ลบด้วย พื้นที่ของวงกลมที่บรรจุอยู่ในสี่เหลี่ยมนั้น

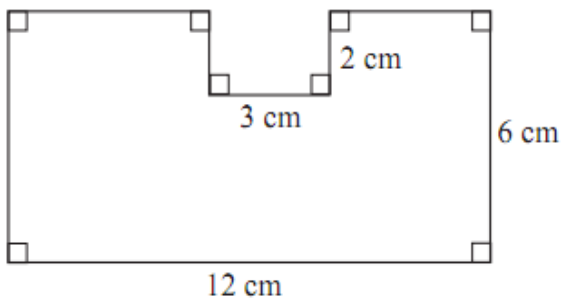
ดังนั้น จึงได้ว่า พท. ที่ต้องการเท่ากับ $(11 \times 6) - (\pi \times 2^2) = 66 - 12.5663 = 53.4$ ตร.ซม.

แบบฝึกทักษะที่ 4.2.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นต่างๆ พร้อมด้วยเงื่อนไข ดังแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

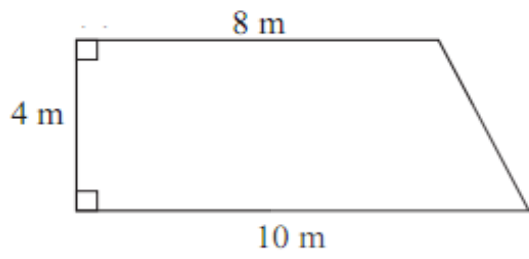
1)



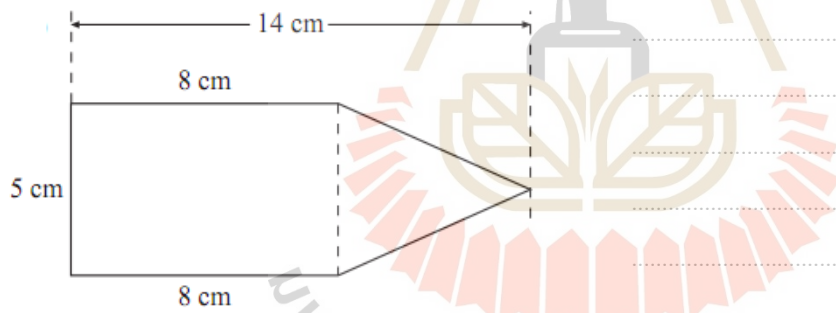
2)



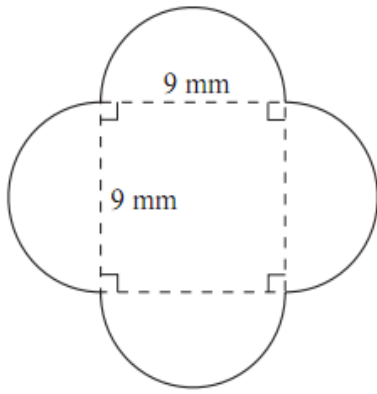
3)



4)



5)



.....

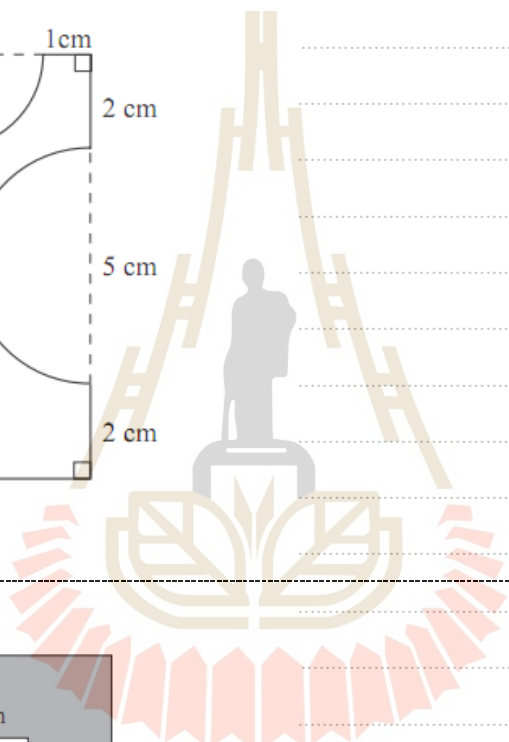
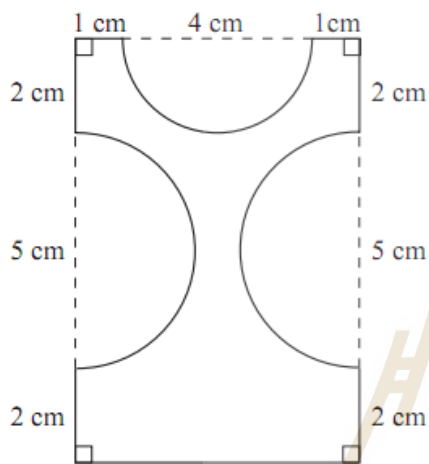
.....

.....

.....

.....

6)



.....

.....

.....

.....

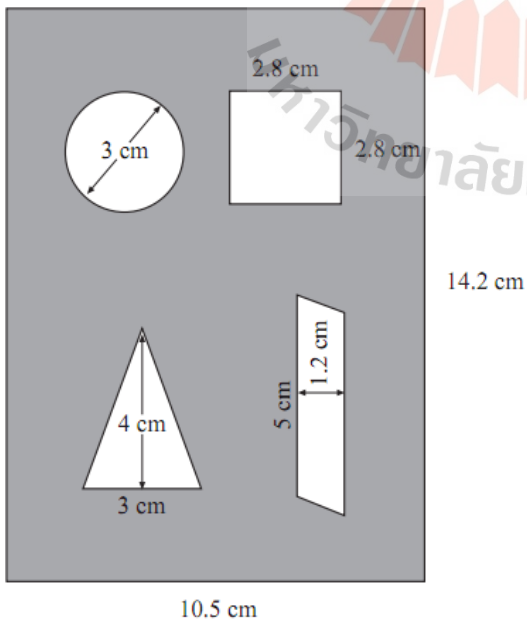
.....

.....

.....

.....

7)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

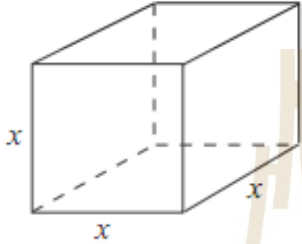
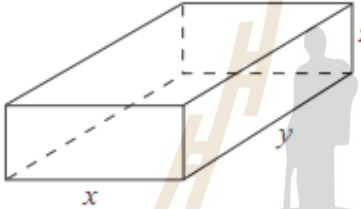

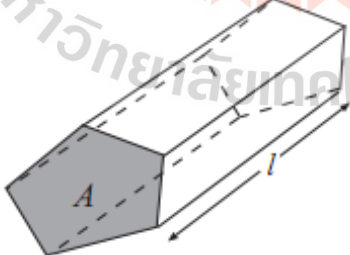
.....

.....

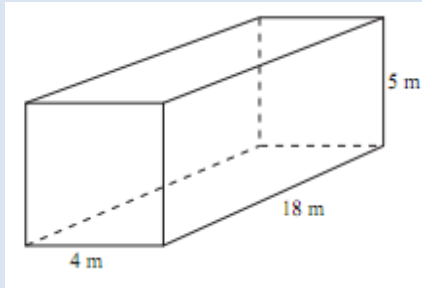
ปริมาตร และพื้นที่ผิวของรูปทรงใน 3 มิติ

เราสามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปทรงใน 3 มิติ ได้ ดังแสดงในตารางที่ 14

ตารางที่ 14 ตารางสรุปสูตรการหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปทรงใน 3 มิติ

ชื่อ	รูปประกอบ	สูตรการหา	
		พื้นที่ผิว	ปริมาตร
ลูกบาศก์		$6x^2$	x^3
กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า		$2xy + 2xz + 2yz$	xyz
ทรงกระบอก		พท.ผิวด้านข้าง คือ $2\pi rh$ พท.ฝาแต่ละข้าง คือ πr^2 ดังนั้น พท.ทั้งหมด คือ $2\pi rh + 2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
ปริซึมฐาน 5 เหลี่ยม		-	(พท. A) · l

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงในรูปข้างล่างนี้



วิธีทำ

1. พท. ผิว ประกอบด้วย พท. สี่เหลี่ยม 2 ด้าน(หน้า และ หลัง) และ พท. สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้านข้าง จำนวน 4 ด้าน

ดังนั้น พท. ผิว เท่ากับ

$$2(4 \times 5) + 4(18 \times 5) = 364 \text{ ตร.ม.}$$

2. ปริมาตร เท่ากับ (กว้าง)×(ยาว)×(สูง) = $(4) \times (18) \times (5) = 360$ ลบ.ม.

บันทึก.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงในรูปข้างล่างนี้

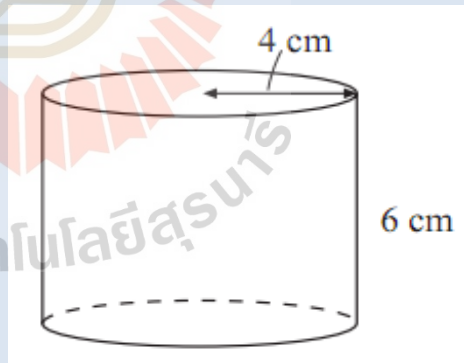
วิธีทำ

1. ปริมาตรของรูปทรงกระบอก เท่ากับ $\pi r^2 h$ แทนค่าจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตร} &= \pi \times 4^2 \times 6 \\ &= 301.5928 \text{ ลบ. ซม.} \end{aligned}$$

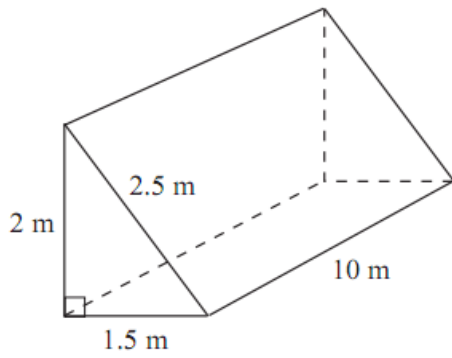
2. พื้นที่ผิวประกอบด้วย 2 ส่วนคือ พื้นที่ผิวรอบข้าง ซึ่งเท่ากับ $2\pi rh$ และพื้นที่ของฝาปิดทั้งด้านบนและด้านล่าง ด้านละ πr^2 ตร.ซม.

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปทรงกระบอกนี้} &= 2\pi rh + 2\pi r^2 \\ &= (2 \times \pi \times 4 \times 6) + (2 \times \pi \times 4^2) \\ &= 251.3274 \text{ ตร.ซม.} \end{aligned}$$



แบบฝึกทักษะที่ 4.2.2 จงปริมาตร และ/หรือ พื้นที่ผิวของรูปทรงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร



.....

.....

.....

.....

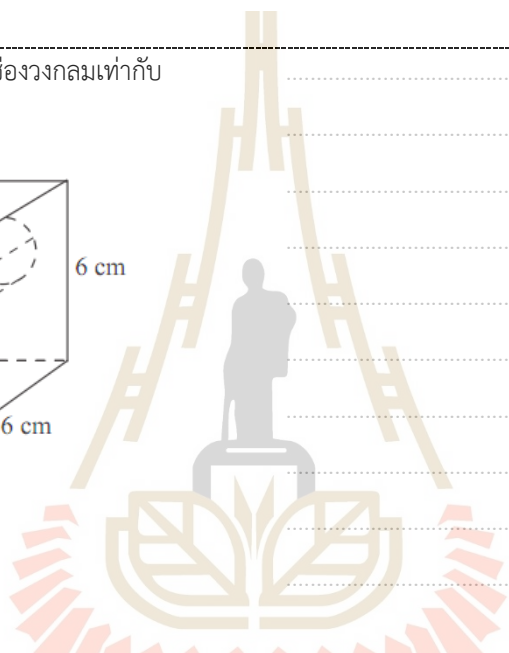
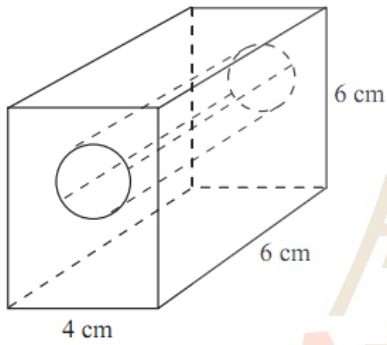
.....

.....

.....

2) หาปริมาตร เมื่อกำหนดรัศมีของช่องวงกลมเท่ากับ

2 ซม.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

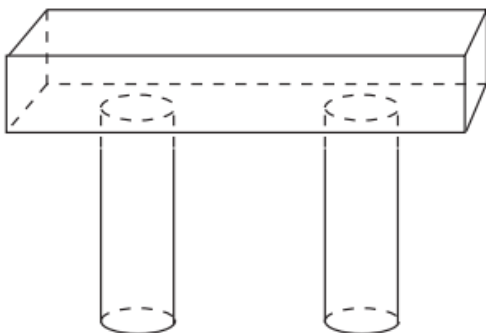
.....

3) หาปริมาตร เมื่อกำหนด รูปทรง 4 เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่

ด้านบน มีความกว้าง ยาว และสูงเป็น 0.5 ม., 3 ม.

และ 0.4 ม. ตามลำดับ และเสาทั้งสองข้าง มีรัศมี 0.4

ม. สูง 2 เมตร



.....

.....

.....

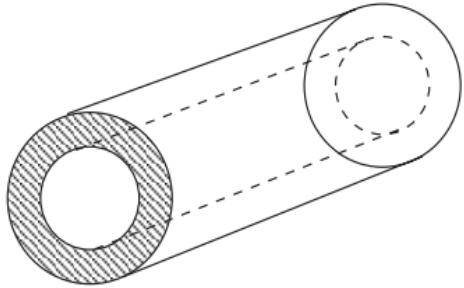
.....

.....

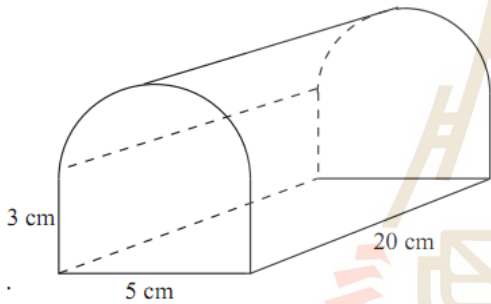
.....

.....

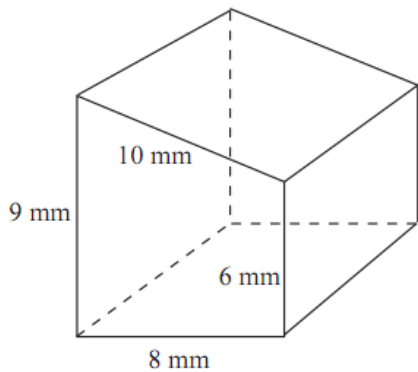
- 4) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร เมื่อกำหนดให้ความยาวของท่อนี้เท่ากับ 50 ซม. รัศมีของวงนอกสุดเท่ากับ 30 ซม. และรัศมีของวงในเท่ากับ 20 ซม.



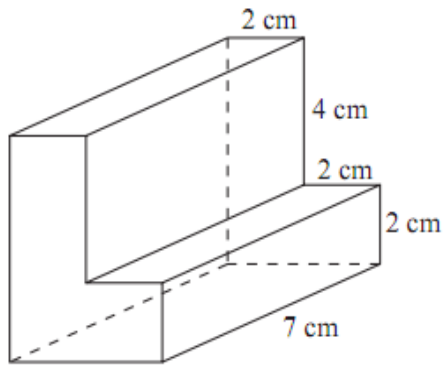
- 5) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร เมื่อกำหนดให้ส่วนบนของรูปทรงโค้งเป็นรูปครึ่งวงกลมพอดี



- 6) ถ้ากำหนดให้ปริมาตรของรูปทรง 3 มิตินี้ เท่ากับ 756 ลบ.มม. จงหาความยาวของรูปทรงนี้ พร้อมทั้งหาพื้นที่ผิวด้วย



7) หาปริมาตร และพื้นที่ผิว



.....

.....

.....

.....

.....

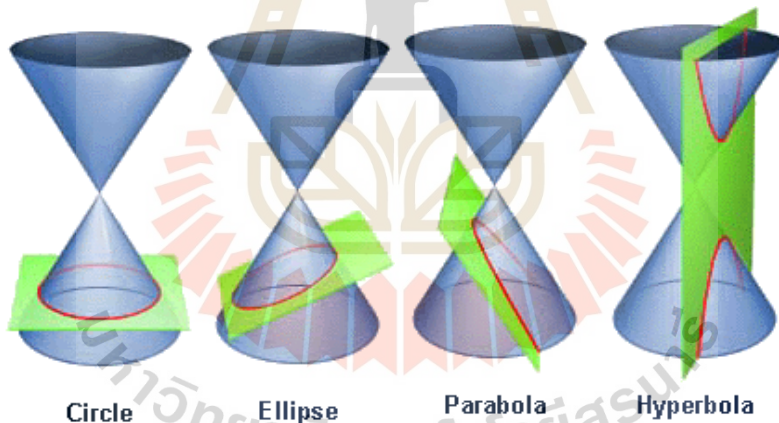
.....

.....

.....

4.3 ภาคตัดกรวย(Conic Sections)

ในระดับชั้นมัธยมศึกษา เราได้ทำความรู้จักมาบ้างแล้วในเรื่องของภาคตัดกรวย ในหัวข้อนี้ เราจะนำเสนอเนื้อหาอีกครั้ง เพื่อเป็นการทบทวน และฝึกฝนการเชื่อมโยงระหว่างหลักการ และบริบทของหัวข้อในชีวิตประจำวันที่เราพบเห็นได้ ในส่วนของภาคตัดกรวยนี้ จะมีทั้งหมด 4 หัวข้อย่อย ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ซึ่งหน้าตาของแต่ละรูปนี้ จะเกิดจากการตัดกรวยด้วยแผ่นระนาบในลักษณะต่างๆ ดังแสดงในแผนภาพที่ 13



แผนภาพที่ 13 การตัดทรงกรวยด้วยระนาบ จะทำให้เกิดรอยตัดที่เป็นวงกลม หรือวงรี หรือพาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา

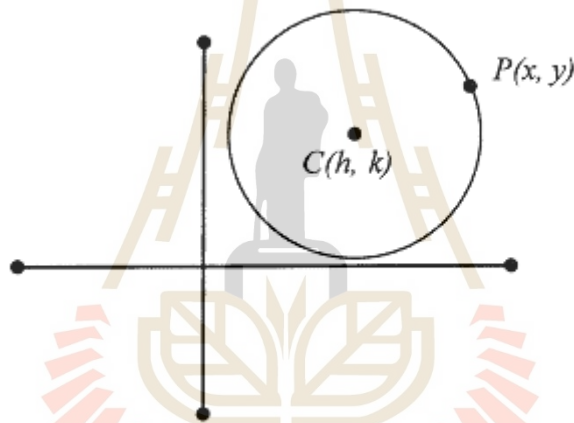
❖ วงกลม (Circles)

ในทางคณิตศาสตร์ถือว่าวงกลมเป็นเส้นโค้งที่สมบูรณ์เครื่องใช้ต่างๆ ของเรามากมีลักษณะเป็นวงกลม เช่น ชั้นตึกน้ำ หน้าปัดนาฬิกา จานข้าว ถาด กระโถนเงินเหรียญ แก้วน้ำดังตัวอย่างแสดงในแผนภาพที่ 14



แผนภาพที่ 14 ตัวอย่างของสิ่งของที่มีลักษณะเป็นวงกลม ที่เราสามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน

บทนิยาม 4.1 วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่เสมอเรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม ระยะทางคงที่เรียกว่า รัศมี (r) สมการทรงกลม



แผนภาพที่ 15 วงกลมใน 2 มิติที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ใดๆ

ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมีเท่ากับ r สมการทรงกลมคือ

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.6}$$

ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และรัศมีเท่ากับ r จะได้สมการของวงกลม คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{4.7}$$

สมการทรงกลมในรูปทั่วไปคือ คือ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{4.8}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงเขียนสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็น $(5, -2)$ และรัศมียาว 4

วิธีทำ จากสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และรัศมีเท่ากับ r คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

แทนค่า (h, k) ด้วย $(5, -2)$ และ $r = 4$ จึงได้ว่า

$$(x - 5)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2$$

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y = 26$$

วิธีทำ

ขั้นแรก เราจะจัดให้กลุ่มตัวแปรเดียวกัน มาอยู่ใกล้ๆ กันเสียก่อน จะได้ว่า

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 26$$

จากนั้น ในแต่ละกลุ่มตัวแปร เราจะบวกเข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ ด้วย $\left(\frac{\text{สพ.พจน์กำลังหนึ่ง}}{2}\right)^2$

$$x^2 + 6x + \underline{9} + y^2 - 2y + \underline{1} = 26 + \underline{9} + \underline{1}$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 36$$

จัดรูปใหม่ ได้

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 6^2$$

เมื่อเทียบกับรูปในสมการ (4.7) จะได้ทันทีว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้คือ $(-3, 1)$ และมีรัศมียาว 6 หน่วย

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.1 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี ของวงกลมที่มีสมการแสดงดังในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x^2 + y^2 = 49$

.....

.....

.....

.....

2) $(x + 10)^2 + (y - 3)^2 = 138$

.....

.....

.....

.....

3) $(x + 7)^2 + (y + 8)^2 = 64$

.....

.....

4) $(x + 5)^2 + (y - 10)^2 = 9$

.....

.....

.....

$$5) 364 + 28y + y^2 + x^2 = -26x$$

.....

.....

.....

.....

$$6) x^2 + y^2 + 24x + 10y + 160 = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$7) -6x = -x^2 + 32y - 264 - y^2$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$8) -6x + x^2 = 97 + 10y - y^2$$

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.2 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี พร้อมวาดรูปประกอบ ของวงกลมที่มีสมการแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1) (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

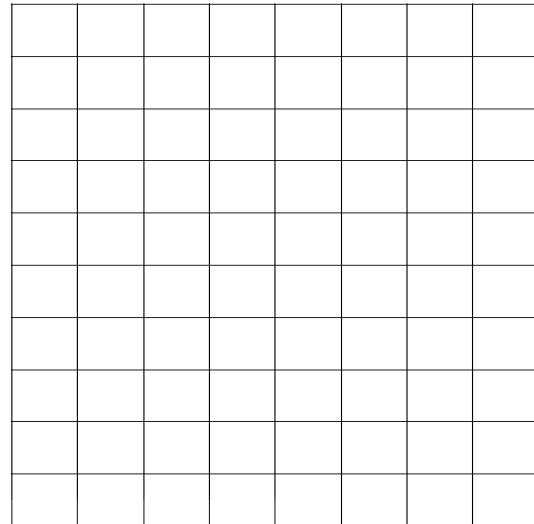
.....

.....

.....

.....

.....



$$2) (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

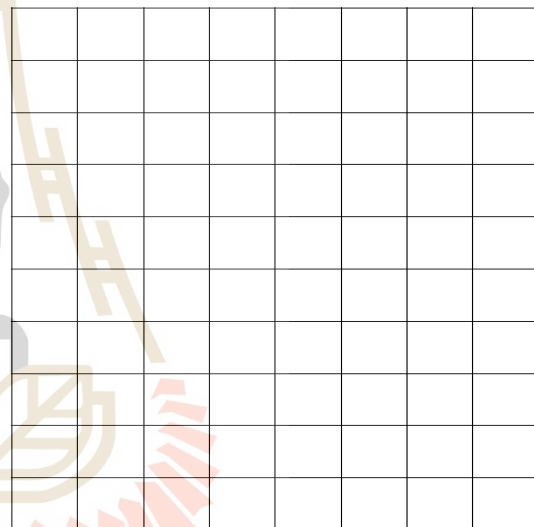
.....

.....

.....

.....

.....



$$3) x^2 + y^2 - 6y = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

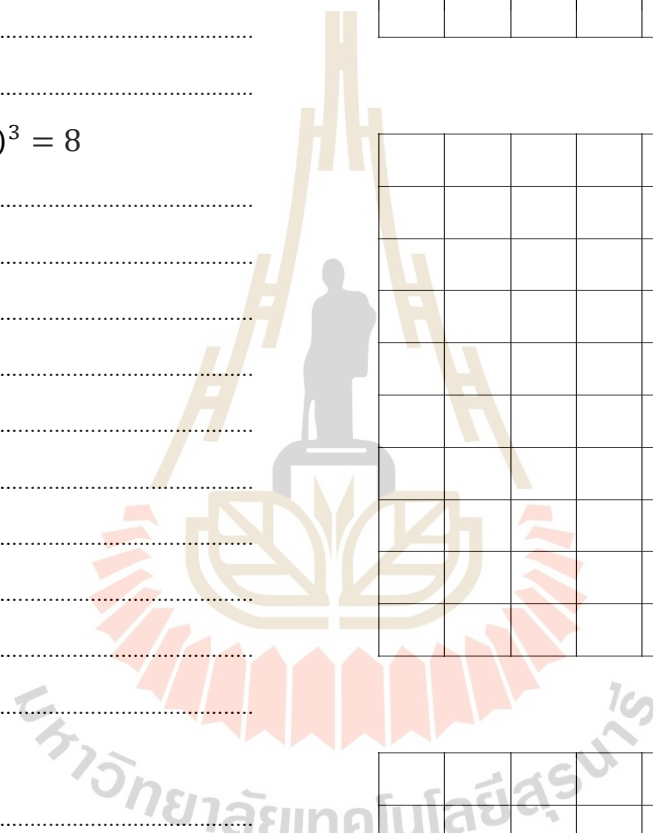
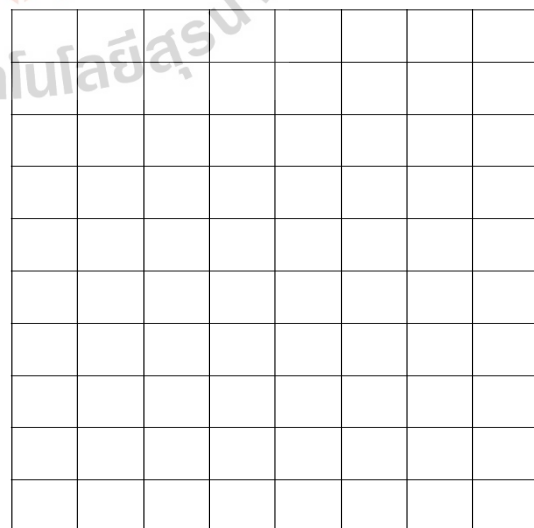
.....

.....

.....

.....

.....



บทนิยาม 4.2 วงรี คือเซตของจุดทั้งหลายบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ 2 จุดมีค่าคงตัวเสมอ

- จุดคงที่ 2 จุดนั้น เรียกว่า จุดโฟกัส
- จุดที่เส้นตรงซึ่งลากผ่านจุดโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี เรียกว่า จุดยอดของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า แกนเอก ของวงรี (ความยาวแกนเอก เราใช้สัญลักษณ์ คือ $2a$)
- จุดที่แบ่งครึ่งแกนเอกของวงรี เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายอยู่บนวงรีทั้งสองด้าน เรียกว่า แกนโท ของวงรี (ความยาวแกนโท เราใช้สัญลักษณ์ คือ $2b$)
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนวงรี เรียกว่า เลตัสเรกตัมของวงรี

ข้อควรจำ ผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าเท่ากับ $2a$ เสมอ และนั่นคือความยาวของแกนเอกของวงรี

- สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสทั้ง 2 อยู่บนแกน x นั่นคือจุดโฟกัสมีพิกัดเป็น $(\pm c, 0)$ และพิกัดจุดยอดเป็น $(\pm a, 0)$ คือ

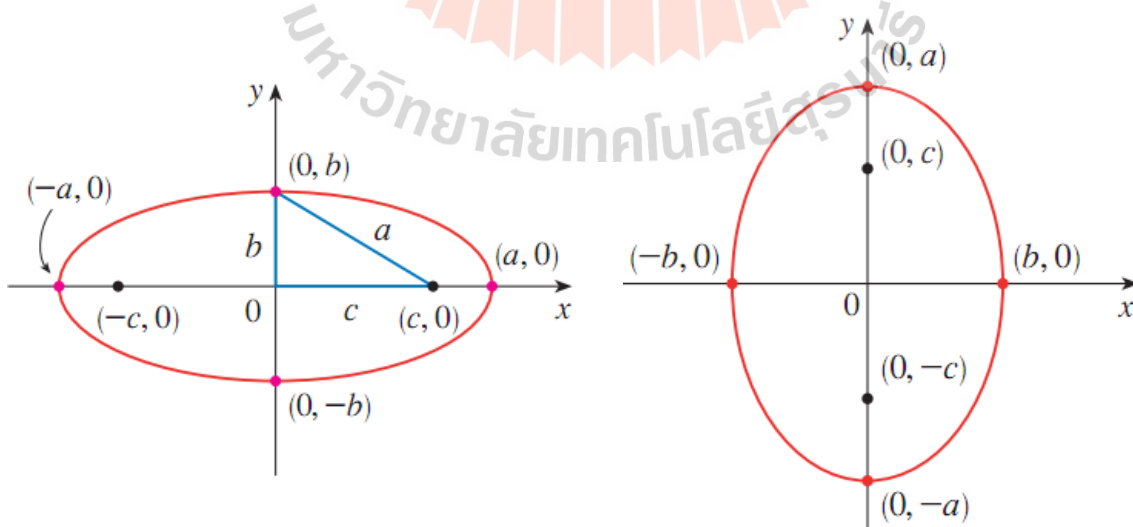
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.9)$$

ดูแผนภาพที่ 17 (ซ้าย) ประกอบ

- สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสทั้ง 2 อยู่บนแกน y นั่นคือจุดโฟกัสมีพิกัดเป็น $(0, \pm c)$ และพิกัดจุดยอดเป็น $(0, \pm a)$ คือ

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (4.10)$$

ดู แผนภาพที่ 17 (ขวา) ประกอบ



แผนภาพที่ 17 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0, 0)$ ภายซ้าย จุดโฟกัส $(\pm c, 0)$ อยู่บนแกน x , ภายขวา จุดโฟกัส $(0, \pm c)$ อยู่บนแกน y

สมการ วงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด

หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x - h$ และแทน y ด้วย $y - k$ จากนั้น ใช้ความสัมพันธ์

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (4.11)$$

ข้อสังเกต เราจะเห็นว่า วงกลม ที่เราศึกษาในหัวข้อที่แล้ว ก็คือกรณีพิเศษหนึ่งของวงรี เมื่อค่าของ a เท่ากับค่าของ b นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดตัดบนแกน x และแกน y ของวงรี ที่มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

วิธีทำ เราเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ คือ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

เห็นได้ชัดว่า จุดศูนย์กลางของวงรีนี้คือ $(0, 0)$

หาจุดตัดบนแกนต่างๆ ได้โดย

จาก $a = 4$, $b = 3$ เราจะได้ว่า จุดตัดบนแกน x คือ $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$ และจุดตัดบนแกน y คือ $(0, 3)$ และ $(0, -3)$ จากนั้น เราจะหาจุดโฟกัส โดยการค่า c ก่อน ด้วยความสัมพันธ์ $b^2 = a^2 - c^2$ จะได้ว่า $3^2 = 4^2 - c^2$

จึงได้ว่า $c^2 = 7$ ดังนั้น $c = \sqrt{7}$

จุดโฟกัส คือจุด $(\sqrt{7}, 0)$ และจุด $(-\sqrt{7}, 0)$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงหาสมการวงรี ที่มีจุดโฟกัสทั้งสองเป็น $(2, -2)$, $(4, -2)$ และมีพิกัดจุดยอดเป็น $(1, -2)$, $(5, -2)$

วิธีทำ

จากโจทย์ เราจะได้ความยาวของแกนเอก คือระยะทางระหว่างจุดยอด $(1, -2)$ และจุดยอด $(5, -2)$ ซึ่งจะได้เป็นระยะทางเท่ากับ 4 หน่วย นั่นคือ $2a = 4$ จึงทำให้ได้ค่า $a = 2$ และระยะทางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 ก็จะได้ว่า $2c = 2$ นั่นคือ $c = 1$

จากสูตร (4.11) จึงทำให้เราได้ว่า

$$b^2 = a^2 - c^2 = 3$$

และจากที่จุดศูนย์กลางของวงรี คือจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง ซึ่งเราสามารถหาได้คือ $(3, -2)$

ดังนั้น เราก็นำค่าต่างๆ ไปแทนในสมการมาตรฐานของวงรี คือสมการที่ (4.9) จึงได้ว่า

สมการที่ต้องการคือ
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.3 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส จุดศูนย์กลาง ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท ของวงรี ที่มีสมการดัง
แสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{169} = 1$

.....
.....
.....

2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

.....
.....
.....

3) $\frac{x^2}{95} + \frac{y^2}{30} = 1$

.....
.....
.....

4) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{64} = 1$

.....
.....
.....

5) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y-6)^2}{121} = 1$

.....
.....
.....

6) $\frac{(x+5)^2}{81} + \frac{(y-1)^2}{144} = 1$

.....
.....
.....

7) $\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y-9)^2}{4} = 1$

.....
.....
.....

8) $\frac{(x)^2}{64} + \frac{(y-8)^2}{9} = 1$

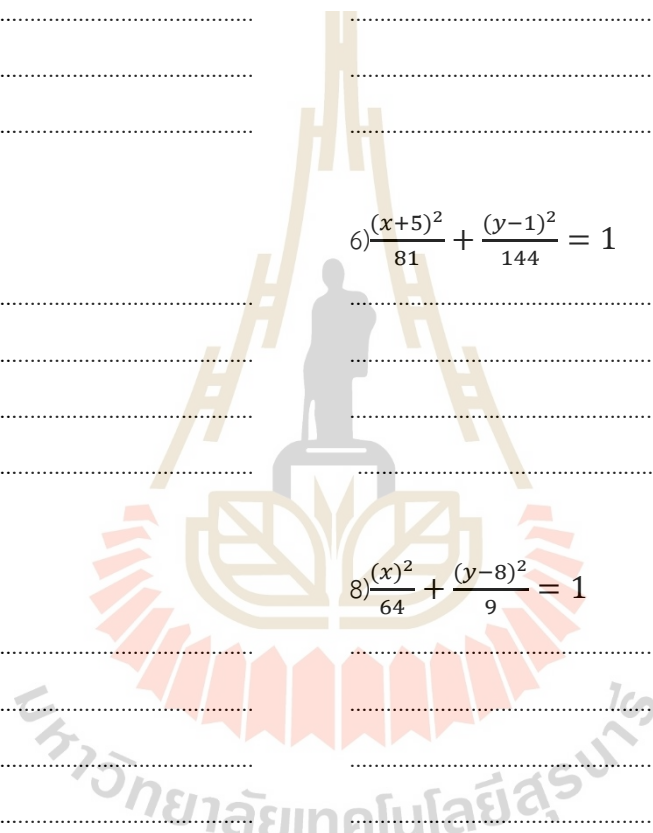
.....
.....
.....

9) $\frac{(x)^2}{4} + \frac{(y)^2}{9} = 1$

.....
.....
.....

10) $\frac{(x)^2}{49} + y^2 = 1$

.....
.....
.....



$$11) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$12) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$13) \frac{(x)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$14) \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y)^2}{49} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$15) \frac{(x)^2}{49} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

.....

.....

.....

.....

$$16) (x + 5)^2 + \frac{(y)^2}{49} = 1$$

.....

.....

.....

.....

❖ พาราโบลา(Parabolas)

เราจะสังเกตเห็นการมีอยู่จริงของพาราโบลาในชีวิตประจำวันได้จากหลายตัวอย่าง อาทิ เทคโนโลยีการสื่อสาร ดาวเทียมประกอบด้วยจานรับสัญญาณตัวจานรับสัญญาณมีผิวโค้งเพื่อรับสัญญาณที่ส่งตรงมาจากดาวเทียมและสะท้อนรวมกันที่จุดรับสัญญาณเพื่อให้มีสัญญาณที่แรงขึ้นนำพุ่มนุษย์ประดิษฐ์ขึ้น เป็นเส้นโค้งพาราโบลา หรือเมื่อเราใช้ไฟฉายส่องเดินทางสังเกตว่ามีกระจกสะท้อนแสงเพื่อรวมลำแสงให้พุ่งเป็นลำตรงโดยหลักการตามกฎการสะท้อนของแสง ดังแสดงในแผนภาพที่ 18



แผนภาพที่ 18 จานดาวเทียม น้ำพุ และไฟฉาย ตัวอย่างของการมีอยู่ของพาราโบลา

บทนิยาม 4.3 พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งในเซตดังกล่าวจะอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเท่ากับอยู่ห่างจากเส้นคงที่เส้นหนึ่งเสมอ

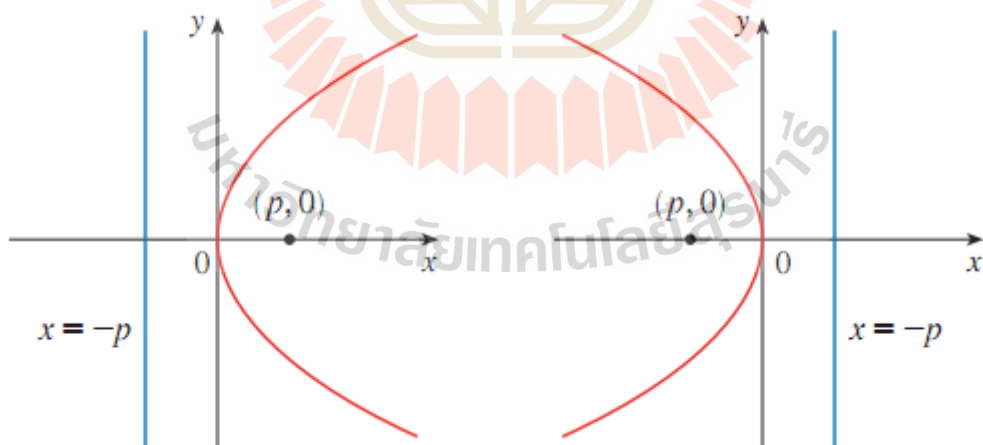
- จุดคงที่ เรียกว่า จุดโฟกัส
- เส้นคงที่ เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์
- เส้นที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกทริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา
- จุดที่เกิดจากพาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า จุดยอด

สมการรูปมาตรฐาน และลักษณะของกราฟพาราโบลาประเภทต่างๆ สามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเภทหลักๆ ดังนี้

- พาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน x และมีเส้นไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน y จะมีสมการเป็น

$$y^2 = 4px \quad (4.12)$$

โดยลักษณะของกราฟของพาราโบลาประเภทนี้ จะขึ้นกับค่าของ p ดังแสดงในแผนภาพที่ 19

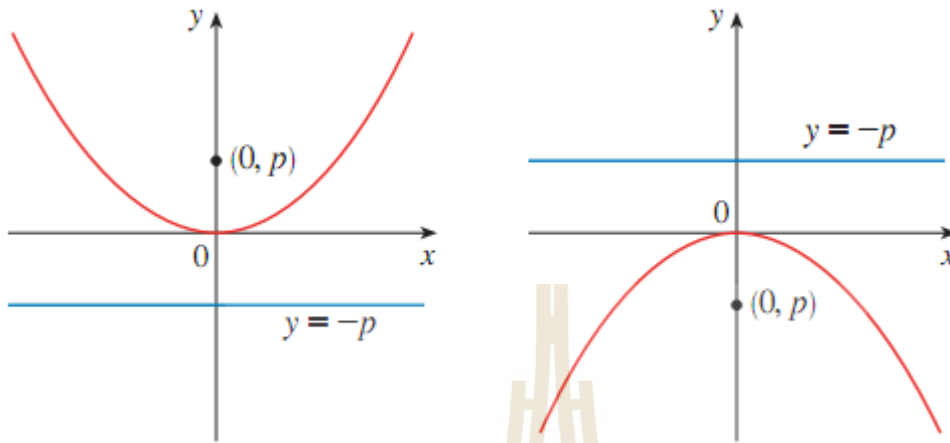


แผนภาพที่ 19 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดขวา" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดซ้าย" (ภาพขวา)

- พาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน y และมีเส้นไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน x จะมีสมการเป็น

$$x^2 = 4py \quad (4.13)$$

โดยลักษณะของกราฟของพาราโบลาประเภทนี้ จะขึ้นกับค่าของ p ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 20**



แผนภาพที่ 20 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาหงาย" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาคว่า" (ภาพขวา)

ข้อสังเกต สัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าของจุดโฟกัส ในตำราบางเล่มอาจใช้ c ให้ถือว่าเป็นสิ่งเดียวกันกับสัญลักษณ์ p ที่ใช้ในเอกสารนี้

- สมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x - h$ และแทน y ด้วย $y - k$

ตัวอย่างที่ 4.3.5 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไคเรตริกซ์ของพาราโบลาที่มีสมการเป็น $y - 5 = \frac{1}{12}(x - 2)^2$

วิธีทำ

เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการที่โจทย์ให้มา ให้อยู่ในรูปสมการพาราโบลาได้เป็น

$$(x - 2)^2 = 12(y - 5) = 4(3)(y - 5)$$

ซึ่งเมื่อเทียบสมการนี้ กับรูปมาตรฐาน (สมการ (4.13)) เห็นได้ชัดว่า จุดยอดของพาราโบลานี้ คือ $(2, 5)$ และ $p = 3$

ดังนั้น การหาจุดโฟกัสก็ไม่ใช่ว่าเรื่องยาก เราได้ค่า p มากกว่าศูนย์แล้ว ดังนั้น พาราโบลานี้ เป็นพาราโบลาหงาย ดังนั้น จุดโฟกัสต้องอยู่ถัดจากจุดยอดขึ้นไปทางบวกเป็นระยะทาง 3 หน่วยบนแกนของพาราโบลา จึงได้จุดโฟกัสคือ $(2, 8)$ และสมการเส้นไคเรตริกซ์ ก็ต้องอยู่ถัดจากจุดยอดลงมาตามแนวแกนของพาราโบลาเป็นระยะทาง 3 หน่วยเช่นกัน จึงได้สมการเส้นไคเรตริกซ์คือ $y = 2$.

ตัวอย่างที่ 4.3.6 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาที่มีสมการเป็น $y = 3 - 6x - x^2$

วิธีทำ

เราสังเกตเห็นได้ทันทีว่า สมการนี้เป็นสมการพาราโบลา เพราะกำลังของตัวแปรหนึ่งตัวใน 2 ตัวนั้น เป็น 2 และอีกตัวมีกำลังเป็น 1 ดังนั้น เพื่อเป็นการระบุค่าต่างๆ ที่โจทย์ถามถึง เรามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนรูปสมการที่โจทย์ให้มานั้น ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของพาราโบลา จากนั้นเราจะทราบค่า ณ ตำแหน่งต่างๆ ของสมการทันที

จาก $y = 3 - 6x - x^2$ เราจะบวกเข้าทั้ง 2 ข้างด้วย $\left(\frac{\text{สปส.พจน์กำลังหนึ่ง}}{2}\right)^2$ ในที่นี้คือ 9

จึงได้ $y - 3 - 9 = -1(x^2 + 6x + 9)$

ดังนั้น $y - 12 = -1(x + 3)^2$

และ $(x + 3)^2 = -1(y - 12)$

นั่นคือ $(x + 3)^2 = 4\left(\frac{-1}{4}\right)(y - 12)$

เราจึงสามารถเทียบกับรูปมาตรฐานได้แล้ว จะได้จุดยอดคือ $(-3, 12)$ และค่า $p = -1/4$ ซึ่งน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น ได้เป็นพาราโบลาแบบคว่ำ ซึ่งจะทำให้จุดโฟกัสอยู่บนแกนของพาราโบลาถัดลงมาจาก

จุดยอด เป็นระยะ $1/4$ หน่วย นั่นคือจะตกที่พิกัด $(-3, 12 - \frac{1}{4}) = (-3, \frac{47}{4})$ และสมการเส้นไดเรกทริกซ์ก็จะอยู่ถัดจากจุดยอดขึ้นไปเป็นระยะทาง $1/4$ หน่วยเช่นกัน ดังนั้นจะได้สมการเส้นนั้นคือ

$y = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.4 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการเส้นไดเรกทริกซ์และวาดกราฟของพาราโบลา ที่มีสมการดังแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x^2 = 4y$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

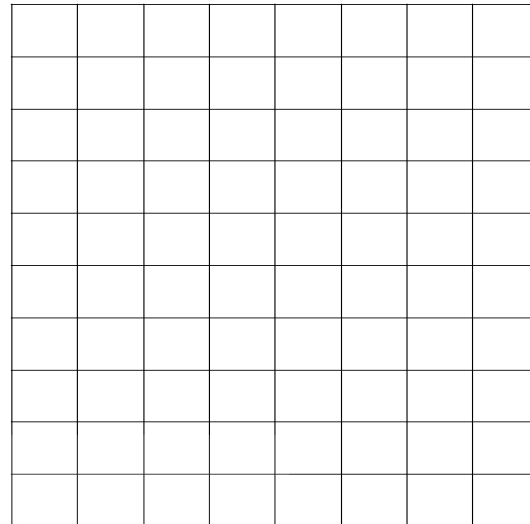
.....

.....

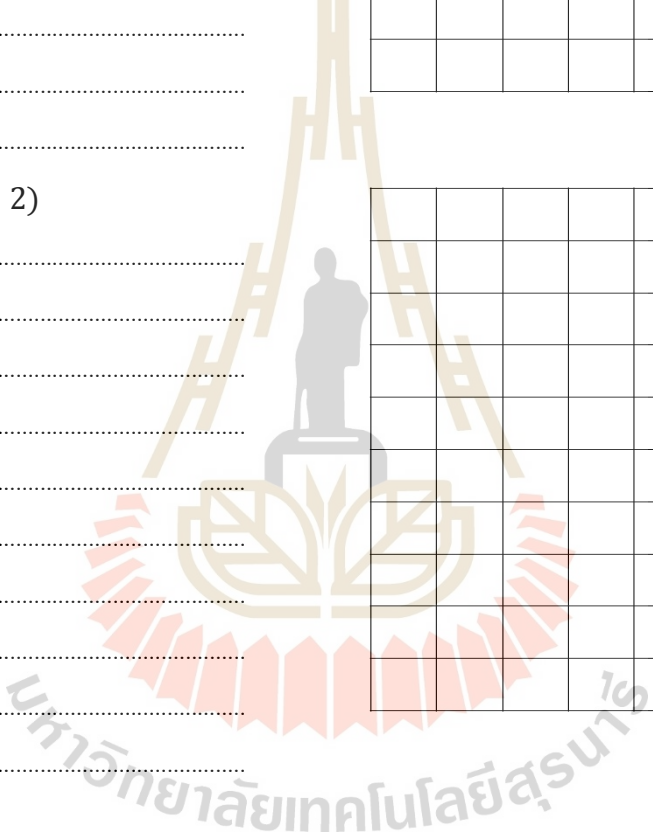
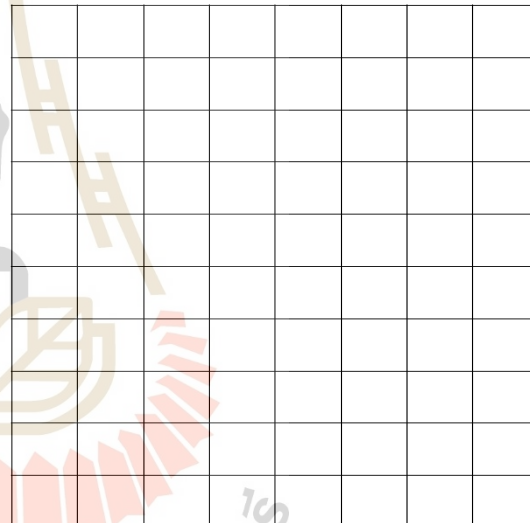
.....

.....

.....
 $2)y^2 + 12x = 0$



.....
 $3)(y - 1)^2 = 16(x - 2)$



$$4)(x + 2)^2 = -20(y - 1)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

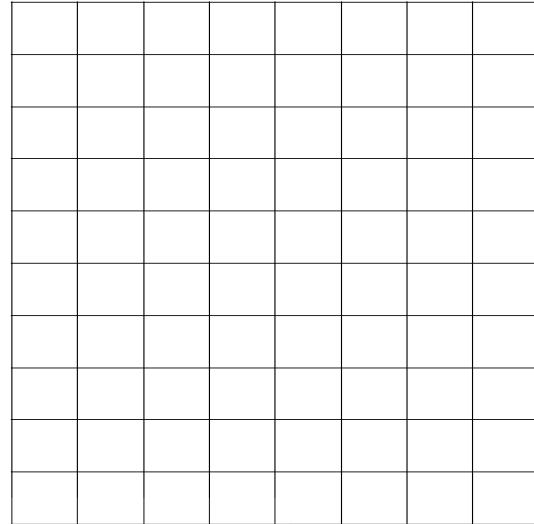
.....

.....

.....

.....

.....



$$5)x^2 + 6x - 20y + 49 = 0$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

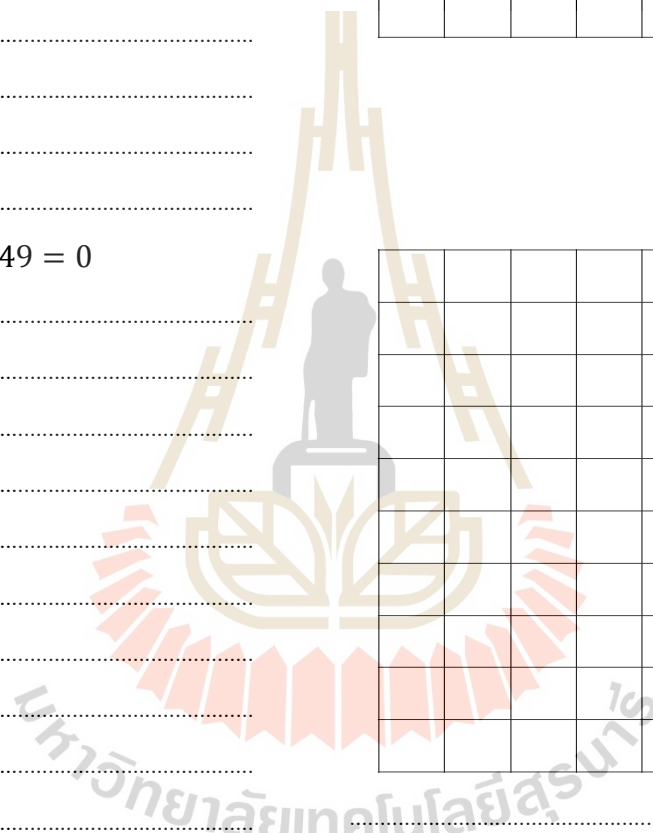
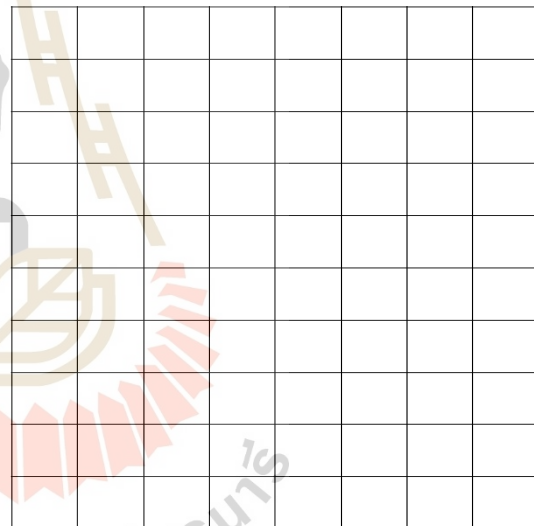
.....

.....

.....

.....

.....

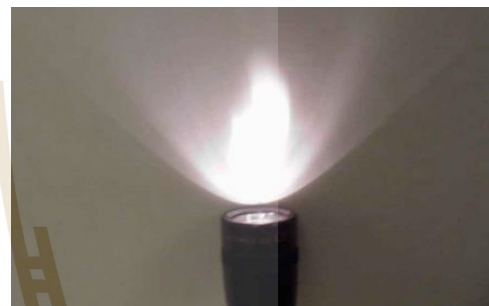


❖ ไฮเปอร์โบลา (Hyperbolas)

ภาคตัดกรวยนั้นได้มีความสำคัญต่อดาราศาสตร์ โดย วงโคจรของวัตถุสองชิ้นซึ่งมีแรงดึงดูดกระทำต่อกัน ตามกฎของนิวตัน นั้นจะมีรูปร่างเป็นภาคตัดกรวย หากจุดศูนย์กลางมวล (Center of mass) ร่วมของทั้งสองวัตถุนั้นอยู่นิ่ง หากทั้งสองนั้นถูกดึงดูดอยู่ด้วยกัน ทางเดินของทั้งสองนั้นจะเป็นรูปร่างรี หากวัตถุทั้งสองวิ่งออกจากกัน ทางเดินจะเป็นรูปพาราโบลา หรือ ไฮเปอร์โบลา นอกจากนี้ การฉายของแสงจากไฟฉายที่เอียงมุมต่างกัน ก็จะสามารถให้ภาพรอยฉายที่อาจเป็น พาราโบลา หรือไฮเปอร์โบลาได้ ดังแสดงในแผนภาพที่ 21



รอยฉายที่เป็นรูปไฮเปอร์โบลา



รอยฉายที่เป็นรูปพาราโบลา

แผนภาพที่ 21 การฉายของลำแสงจากไฟฉาย ที่เอียงมุมแตกต่างกันกับแผ่นฉากรับ

บทนิยาม 4.4ไฮเปอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหลายบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ

- จุดคงที่ 2 จุดนั้น เรียกว่า จุดโฟกัส
- เส้นที่ลากผ่านจุดโฟกัสทั้ง 2 เรียกว่า แกนตามขวางของไฮเปอร์โบลา
- จุดที่เกิดจากการตัดของไฮเปอร์โบลา กับแกนของไฮเปอร์โบลา เรียกว่า จุดยอด
- ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอด จะยาวเป็น $2a$ หน่วย
- แกนสังยุคคือส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางยาว $2b$ หน่วย

ข้อควรจำ ในการเขียนกราฟไฮเปอร์โบลานั้น เมื่อทราบค่าของ a และ b แล้ว การเขียนกรอบสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสองของไฮเปอร์โบลาเป็นจุดกึ่งกลางด้านหนึ่ง(ดังแสดงใน แผนภาพที่22) แล้วลากเส้นทะแยงมุมของกรอบสี่เหลี่ยมนี้ก่อนนั้น จะทำให้การวาดกราฟง่ายขึ้น

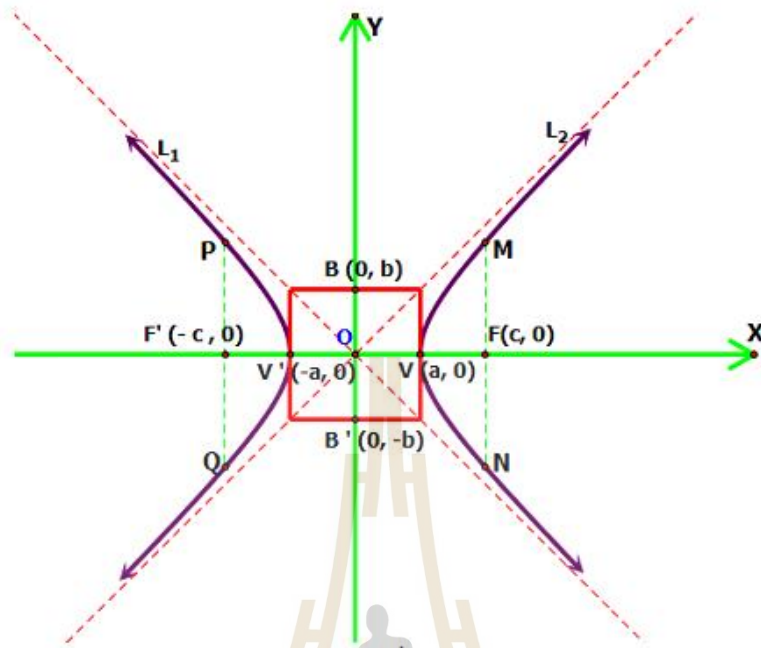
บันทึก.....

.....

.....

.....

.....

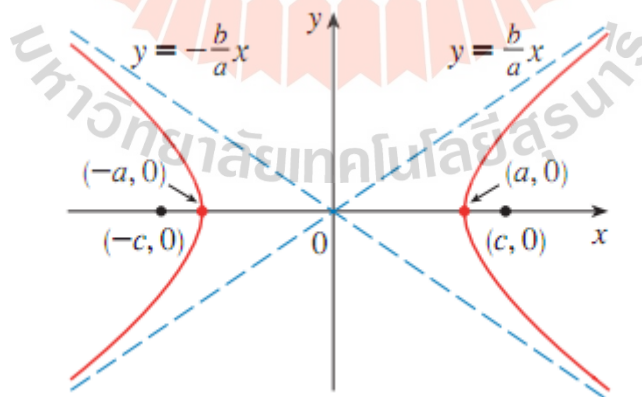


แผนภาพที่22การเขียนกรอบสี่เหลี่ยมตรงกลางของไฮเปอร์โบลา ช่วยให้การเขียนกราฟไฮเปอร์โบลาทำได้สะดวกมากยิ่งขึ้น

- ไฮเปอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(\pm c, 0)$ และจุดยอดคือ $(\pm a, 0)$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.14)$$

และลักษณะของกราฟคือดังแสดงใน แผนภาพที่23

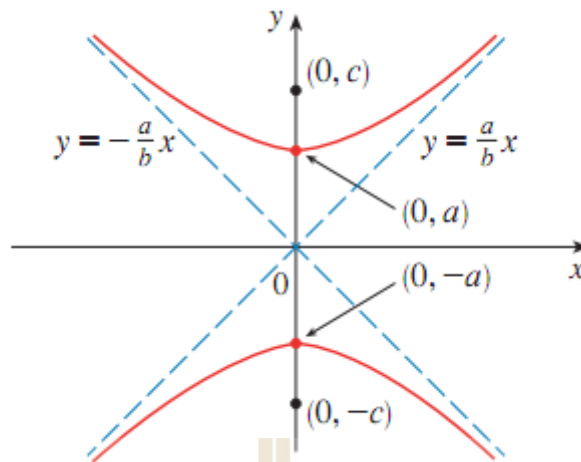


แผนภาพที่23ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน x เรียกไฮเปอร์โบลาประเภทนี้ว่า "ไฮเปอร์โบลาเปิดซ้าย-ขวา"

- ไฮเปอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(0, \pm c)$ และจุดยอดคือ $(0, \pm a)$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (4.15)$$

และลักษณะของกราฟคือดังแสดงในแผนภาพที่24



แผนภาพที่24ไฮเปอร์โบลามีแกนอยู่บนแกน y เรียกไฮเปอร์โบลานี้ว่า "ไฮเปอร์โบล่าเปิดบน-ล่าง"

- สมการไฮเปอร์โบล่า ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x - h$ และแทน y ด้วย $y - k$ และใช้ความสัมพันธ์

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (4.16)$$

ตัวอย่างที่ 4.3.7 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส ของไฮเปอร์โบล่าที่มีสมการเป็น

$$9y^2 - 16x^2 = 144$$

วิธีทำ

เหมือนกับทุกข้อที่ผ่านมา ก่อนที่เราจะสามารถระบุค่าต่างๆ ตามที่โจทย์ถามถึงได้ เราจะต้องจัดรูปสมการที่โจทย์ให้มานั้น ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของไฮเปอร์โบล่า (สมการ (4.14) หรือ (4.15) เสียก่อน)

$$\text{จาก } 9y^2 - 16x^2 = 144$$

เราจะพยายามทำให้ทางขวามือของสมการนี้เป็น 1 ดังนั้น เราจะหารทั้งสมการด้วย 144

$$\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144} \quad \text{จึงได้สมการใหม่คือ } \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \text{ หรือ } \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

ซึ่งเราก็จะสามารถระบุค่าของ a และ b ได้แล้ว คือ $a = 4$ และ $b = 3$ และเนื่องจากค่า สปส. ของพจน์ y^2 นั้นเป็นบวก จึงทำให้เรานึกภาพได้ว่า ไฮเปอร์โบล่านี้จะมีลักษณะในทำนองเดียวกันกับที่แสดงในแผนภาพที่24 ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และจุดยอดที่ $(0, \pm 4)$

และจุดโฟกัส เราจะหาได้จากการทราบของค่า c โดยการใช้สูตร (4.16) จะได้ว่า $c = 5$ จึงได้จุดโฟกัสคือ $(0, \pm 5)$

ตัวอย่างที่ 4.3.8 จงหาจุดยอด จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และวาดภาพไฮเปอร์โบล่าที่มีสมการเป็น

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

วิธีทำ

เราจะพยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐานของไฮเปอร์โบล่า ได้ดังนี้

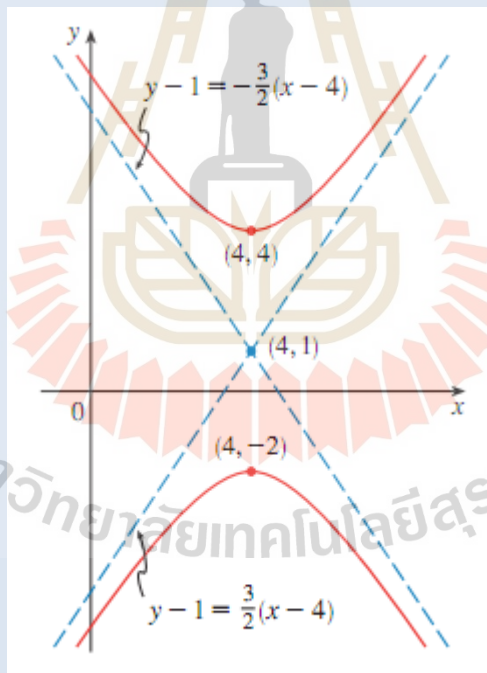
$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y - 1)^2 - 9(x - 4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบล่านี้คือ จุด $(4, 1)$ และ จะได้ว่า $a^2 = 9, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 13$ นั่นคือ $c = \pm\sqrt{13}$ จึงทำให้เราสามารถระบุจุดโฟกัสได้คือจุด $(4, 1 - \sqrt{13})$ และจุด $(4, 1 + \sqrt{13})$ และจุดยอดคือ $(4, 4)$ และ $(4, -2)$ และได้กราฟ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 25



แผนภาพที่ 25 ไฮเปอร์โบล่าที่มีสมการเป็น $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

สำหรับตัวอย่างที่ 4.3.8

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.5 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และระบุด้วยว่าเป็นไฮเปอร์โบล่าแบบ หงาย-คว่ำ หรือ เปิดบน-ล่าง

$$1) \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{4} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$2) \frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{81} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$3) \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$4) \frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$5) \frac{(x+2)^2}{169} - \frac{(y+8)^2}{4} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$6) \frac{(y+8)^2}{36} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$7) \frac{x^2}{20} - \frac{(y+1)^2}{10} = 1$$

.....
.....
.....
.....

$$8) \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

.....
.....
.....
.....

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.6 จงหาจุดยอดจุดโฟกัส และวาดกราฟของไฮเปอร์โบล่า ตามสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

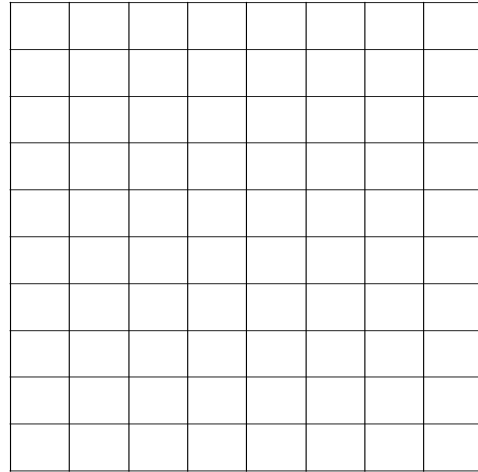
.....

.....

.....

.....

.....



2) $4y^2 - x^2 - 4 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

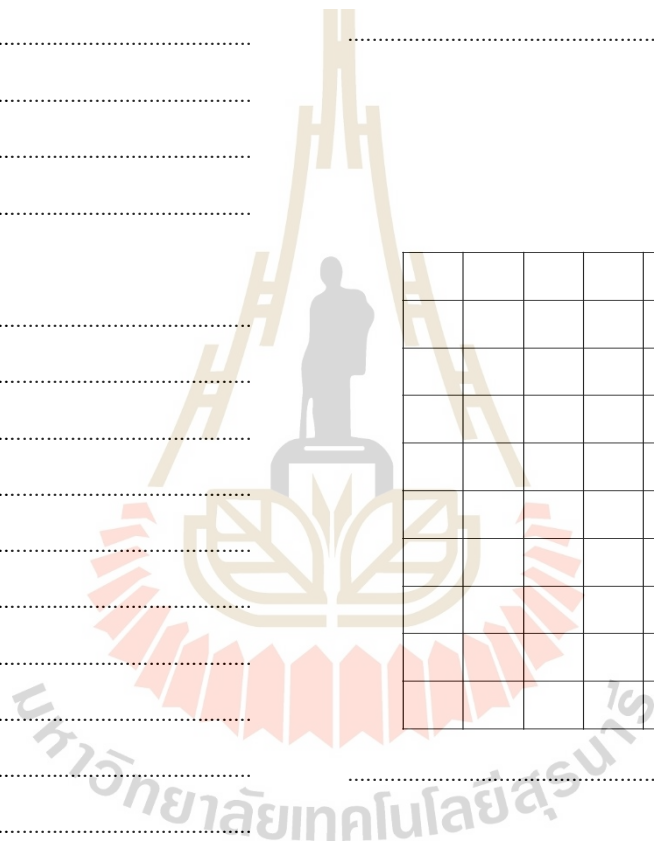
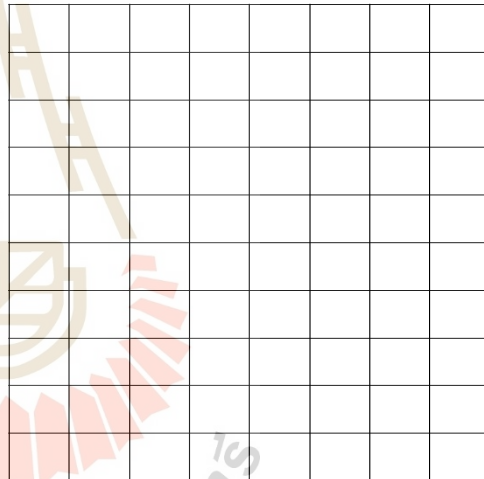
.....

.....

.....

.....

.....



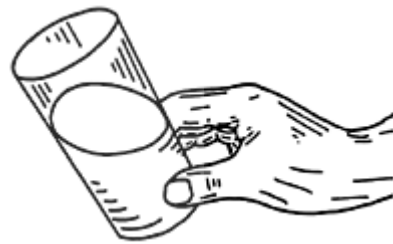
ที่เหมาะสม



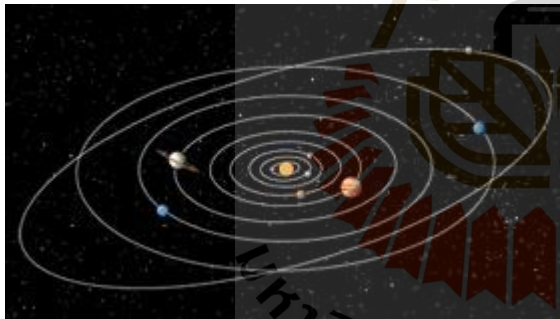
ภาพตัดขวางเอียงของทรงกระบอกใดๆ จะให้ภาพตัดเป็นรูปวงรีเสมอ ดังตัวอย่างในแผนภาพที่ 27 ซึ่งเป็นอาคารในย่าน Tycho Brahe Planetarium เมือง Copenhagen ประเทศสวีเดน

แผนภาพที่ 27 การตัดแนวขวางเอียงของทรงกระบอกใดๆ ด้วยระนาบ จะให้รอยตัดและภาพตัดแนวขวางเป็นรูปวงรีเสมอ

เมื่อเราเอียงแก้วน้ำดังแสดงในแผนภาพที่ 28 พื้นผิวที่ได้จะเป็นรูปวงรี และการตัดใส่กรอกในแนวเอียงในลักษณะแบบนี้ ก็มักจะทำกันเพื่อให้ได้พื้นที่ปริมาณที่มากขึ้น



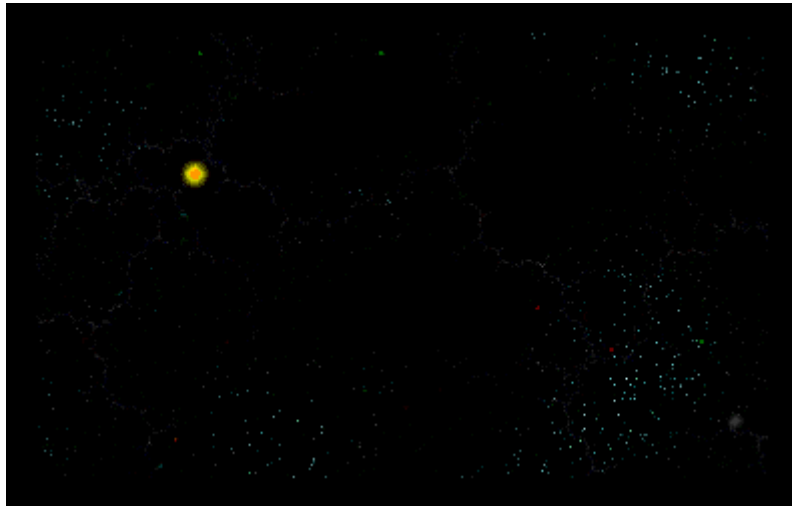
แผนภาพที่ 28 เมื่อเอียงแก้วน้ำ พื้นผิวของน้ำในแก้ว จะเป็นรูปวงรี



ในตำราดาราศาสตร์ของกรีกโบราณ ได้มีความเข้าใจว่าดาวเคราะห์ต่างๆ นั้น หมุนรอบโลกที่อยู่นิ่ง เป็นรูปวงกลมจนกระทั่งในศตวรรษที่ 14 Johannes Kepler ได้ทำการค้นพบว่า ดาวเคราะห์แต่ละดวงนั้น เคลื่อนที่โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี และดวงอาทิตย์ก็อยู่ ณ ตำแหน่งของจุดโฟกัสหนึ่ง ของแต่ละวงโคจรของดาว

แผนภาพที่ 29 ดาวเคราะห์ทั้งหลาย โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นเคราะห์แต่ละดวงนั้น ดังแสดงในแผนภาพที่ 29 รูปวงรี

การโคจรรอบโลกของดวงจันทร์ และรวมถึงดาวเทียมต่างๆ ก็เป็นวงรีด้วยเช่นกัน



แผนภาพที่ 30 ดาวหาง Halley ใช้เวลา 76 ปี ในการโคจรรอบดวงอาทิตย์

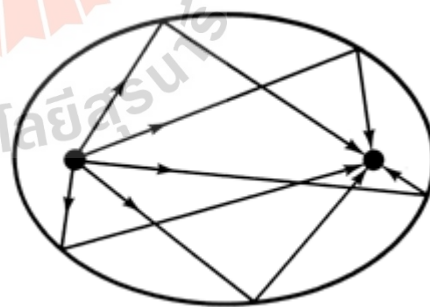
Edmund Halley ได้สังเกตเห็นดาวนี้ครั้งแรกในปี 1682 และได้ทำนายการโคจรมาตำแหน่งเดิมของดาวหางนี้ได้ถูกต้อง ซึ่งเขาทำนายไว้ว่าจะโคจรกลับมาในปี 1759 และถึงแม้ว่า ตัวเขาเองจะไม่มีอายุยืนถึงตอนที่ดาวหางนี้โคจรกลับมาอีกครั้ง ชาวโลกก็ได้ยกย่องในคำทำนาย และให้เกียรติเขาโดยการตั้งชื่อดาวหางนี้เป็นชื่อเดียวกับเขา นั่นคือ " Halley " ดังแสดงในแผนภาพที่ 30



ด้วยการสังเกตด้วยเครื่องมือที่เหมาะสม เราจะเห็นว่า อิเล็กตรอนนั้น โคจรเป็นรูปที่มีความใกล้เคียงกับวงรีมาก ล้อมรอบนิวเคลียส ดังแสดงในแผนภาพที่ 31

แผนภาพที่ 31 การโคจรของอิเล็กตรอนล้อมรอบนิวเคลียส

วงรีมีคุณสมบัติพิเศษอีกประการหนึ่งที่ใช้ในการสะท้อนของแสง และคลื่นเสียง นั่นคือ แสงหรือสัญญาณใดก็ตามที่พุ่งออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งภายในวงรี แล้วไปสะท้อนกับขอบของวงรี แล้วจะไปตกที่จุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรีเสมอ (ดังแสดงในแผนภาพที่ 32) และหลักการนี้ก็ถูกนำไปใช้ในการรักษานิวไนด์ที่เรียกว่าวิธี Lithotripsy โดยการนำคนไข้ไปนอนลงบนถ้ำน้ำรูปวงรี โดยให้ตำแหน่งของไตอยู่ตรงจุดโฟกัสจุดหนึ่งของถ้ำน้ำรูปวงรีนั้น จากนั้นทำการปล่อยคลื่นช็อกพลังงานสูงจากจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่ง จะทำให้คลื่นช็อกนั้นพุ่งไปยังนิวไตและสามารถบ่นิวไตดังกล่าวได้

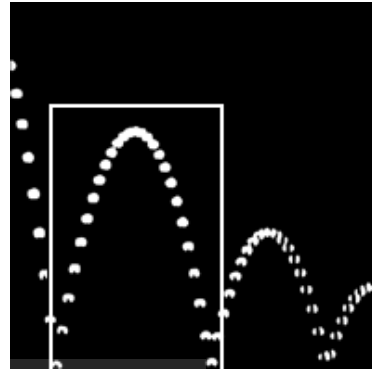


แผนภาพที่ 32 การสะท้อนของลำแสงที่พุ่งจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งกับผนังของวงรี แล้วไปตกที่จุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรีนั้น

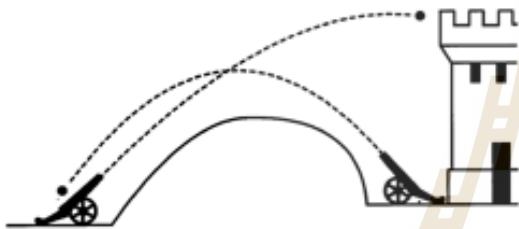
พาราโบลา

ตัวอย่างของพาราโบลาที่เป็นที่รู้จักมากที่สุดตัวอย่างหนึ่งคือ การเคลื่อนที่ของลูกบอลในลักษณะดังแสดงใน

แผนภาพที่ 33 ซึ่งแรงเสียดทานของอากาศและแรงโน้มถ่วง จะมีผลต่อแนวการเคลื่อนที่ของลูกบอลให้บิดเบือนไปจากรูป พาราโบลาอยู่บ้าง แต่โดยทั่วไปแล้ว ยังเป็นที่ยอมรับว่า แนว การเคลื่อนที่ของลูกบอลดังกล่าว ยังคงรักษาแนวความเป็น พาราโบลาได้อย่างดีทีเดียว



แผนภาพที่ 33 การเคลื่อนที่ของลูกบอล ที่มีแนวการเคลื่อนที่เป็นแบบพาราโบลา



แผนภาพที่ 34 พาราโบลายังสามารถแทนการเคลื่อนที่ของ ลูกปืนใหญ่ ซึ่งค้นพบโดย Galileo ในศตวรรษที่ 17

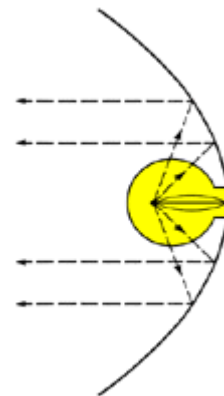
ในศตวรรษที่ 17 Galileo ได้ค้นพบการคำนวณแนวทางการเคลื่อนที่ของลูกปืนใหญ่ ที่ขึ้นกับมุมของการยิง เป็นที่สำเร็จ ดังแสดงในแผนภาพที่ 34



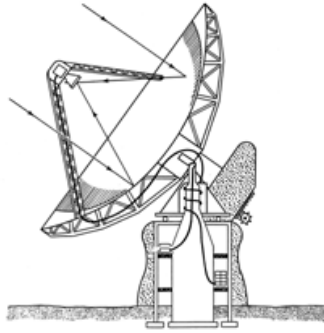
แผนภาพที่ 35 แนวการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของน้ำจาก ก๊อก จะเคลื่อนเป็นแนวพาราโบลา

ตัวอย่างหนึ่งที่เราเห็นกันค่อนข้างบ่อยก็คือ แนวทางการเคลื่อนที่ของน้ำจากก๊อกน้ำ(ดังแสดงในแผนภาพที่ 35) แต่ละโมเลกุลของน้ำ จะเคลื่อนที่เป็นแนวเดียวกันเป็นแนวพาราโบลา น้ำตกชื่อดังที่โรงแรม Bellagio ในเมือง Las Vegas ก็เป็นไปตามแนวพาราโบลาลักษณะนี้เช่นเดียวกัน

เส้นโค้งรูปพาราโบลามีลักษณะที่พิเศษและน่าสนใจอยู่หลายประการ เช่น เมื่อแสงถูกปล่อยออกจากแหล่งกำเนิดที่อยู่ตรงจุดโฟกัสของกระจกโค้งรูปพาราโบลา(ดู แผนภาพที่ 36 ประกอบ) แล้วลำแสงเหล่านั้น จะสะท้อนออกมาเป็นเส้นเป็นเส้นตรงที่ขนานซึ่งกันและกัน



แผนภาพที่ 36 เมื่อแสงออกจากแหล่งกำเนิดไปตกบน



แผนภาพที่ 37 การรับสัญญาณวิทยุของจานดาวเทียมที่มีรูปทรงเป็นแบบพาราโบลา

เมื่อลูกเบสบอลถูกตีขึ้นไปในอากาศ ลูกบอลนี้จะเคลื่อนที่ไปเป็นแนวโค้งพาราโบลา เช่นเดียวกับจุดศูนย์กลางถ่วงของโลกาเมื่อโลกากระโดดขึ้นไปในอากาศ แนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางถ่วงนี้ จะเป็นแนวพาราโบลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 38

กระจกโค้งรูปพาราโบลา ก็จะสะท้อนเป็นเส้นตรงที่ขนานซึ่งกันละกัน

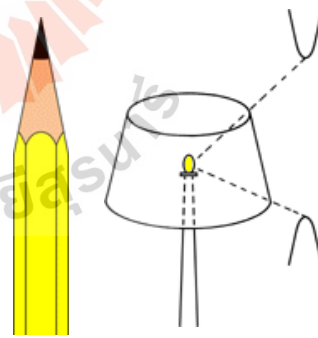
จากดาวเทียมโทรทัศน์ก็ใช้หลักการสะท้อนแสงและสัญญาณ และหลักการตรงกันข้าม คือการรับสัญญาณคลื่นวิทยุจากอวกาศอย่างที่ใช้ใน antennas โดยที่ เมื่อลำแสงวิ่งมาชนกับแผ่นดาวเทียม แล้วสะท้อนไปที่ตำแหน่งของจุดโฟกัสของดาวเทียมนั้น (ดังแสดงในแผนภาพที่ 37) และเครื่องมือในลักษณะแบบนี้ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดคือ Subaru Telescope ตั้งอยู่ที่ยอดเขา Mauna Kea บนเกาะ Hawaii ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 8.2 เมตร



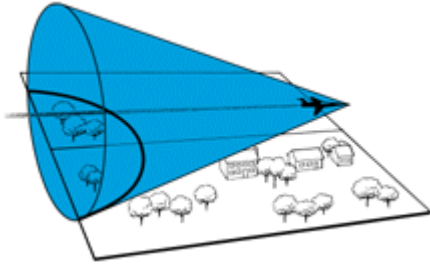
แผนภาพที่ 38 แนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางถ่วงของโลกาจะเป็นแนวพาราโบลา

ไฮเปอร์โบลา

ถ้าเรานำเอาดินสอที่มีภาคตัดขวางเป็นเหลี่ยมๆมาเหลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 39(ซ้าย) เราจะสังเกตเห็นส่วนของไฮเปอร์โบลาปรากฏอยู่ตรงรอยขอบการเหลา เช่นเดียวกับเวลาที่เรเอาโคมไฟที่มีลักษณะดังแสดงในแผนภาพที่ 39(ขวา) ไปตั้งไว้ใกล้ผนังห้อง แสงที่ออกจากโคมไฟไปกระทบกับผนังห้อง ก็จะมีลักษณะเป็นไฮเปอร์โบลาเช่นเดียวกัน



แผนภาพที่ 39 การเหลาดินสอที่เป็นเหลี่ยม จะทำให้เกิดรอยเป็นครึ่งไฮเปอร์โบลา และโคมไฟที่วางใกล้ผนังห้อง ลำแสงจะกระทบกับผนังเป็นรูปไฮเปอร์โบลา



แผนภาพที่ 40 รอยตัดของคลื่นโซนิกที่เกิดจากเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง กับระนาบพื้นที่ จะเป็นรูปไฮเพอร์โบลลา (ครึ่งซีก)

คลื่นโซนิกคัมที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของเครื่องบินเจตไปใ้อากาศด้วยความเร็วสูง จะอยู่ในรูปโคน และรอยตัดของโคนนี้กับพื้นดินราบ จะให้รอยตัดที่เป็นรูปส่วนหนึ่งของไฮเพอร์โบลลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 40 ซึ่งจะส่งผลคือ ผู้ที่อยู่ ณ ตำแหน่งต่างๆของเส้นรอยตัดนี้จะได้ยินเสียงเครื่องบินพร้อมกัน

เมื่อเราทำการหมุนเส้นโค้งรูปไฮเพอร์โบลลาของไฮเพอร์โบลลา นั้น ก็เกิดพื้นผิวที่เรียกว่า Hyperboloid และการออกแบบในลักษณะนี้ก็สามารถพบได้เช่น ที่หอทำความเย็นของโรงงาน Steam Power (ดังแสดงในแผนภาพที่ 41) และยังเป็นแบบเดียวกันกับ James S. McDonnell Planetarium ในศูนย์วิทยาศาสตร์ St. Louis อีกด้วย



แผนภาพที่ 41 หอทำความเย็นที่ออกแบบเป็นรูป Hyperboloid

แบบฝึกทักษะที่ 4.4 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับภาคตัดกรวย แก้ปัญหาที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) อุโมงค์ลอดภูเขาที่เป็นรูปครึ่งวงรีแห่งหนึ่ง มีความสูงเป็น 10 ฟุต ("ft") และกว้างเป็น 40 ฟุต (ดังแสดงในแผนภาพที่ 42) ถ้ามีรถบรรทุกคันหนึ่งที่มีขนาดกว้าง 10 ฟุต และสูง 9 ฟุต จะต้องใช้เส้นทางนี้ จงพิจารณาว่า รถบรรทุกคันนี้ จะสามารถวิ่งผ่านเข้าไปในอุโมงค์นี้ได้หรือไม่ เพราะอะไร

.....

.....

.....

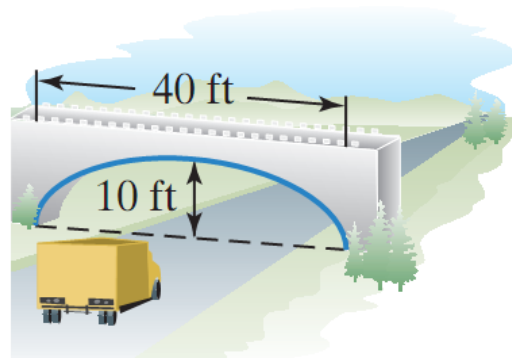
.....

.....

.....

.....

.....



แผนภาพที่ 42 อุโมงค์รูปครึ่งวงรี และรถบรรทุก รูป

3) เสียงที่เกิดจากการระเบิดแห่งหนึ่ง ได้รับการวัดจากไมโครโฟน 2 ตัว ที่วางห่างกันเป็นระยะ 4 ไมล์ ไมโครโฟน M_1 ได้รับเสียงนั้นเป็นเวลา 4 วินาที ก่อนไมโครโฟน M_2 ถ้ากำหนดความเร็วของเสียงในอากาศเป็น 1,100 ฟุต/วินาที จงหาตำแหน่งที่เป็นไปได้ของแหล่งระเบิดนี้ เมื่อเทียบกับตำแหน่งของไมโครโฟนทั้งสองนี้ (1 ไมล์ เท่ากับ 5,280 ฟุต)

4) จากข้อ 3) จงพิจารณาในกรณีที่ไมโครโฟนสองตัวนั้น อยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 3 ไมล์



แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. จงพิจารณาว่า สมการแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการของภาคตัดกรวยประเภทใด

$$4x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$$

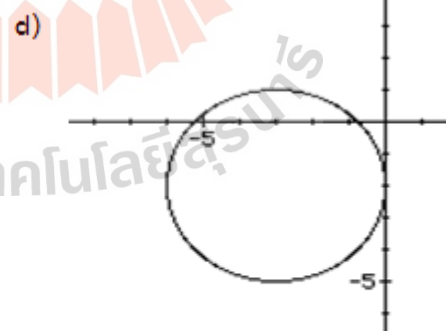
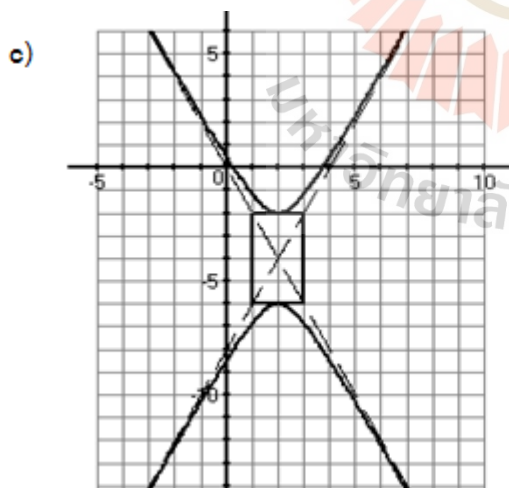
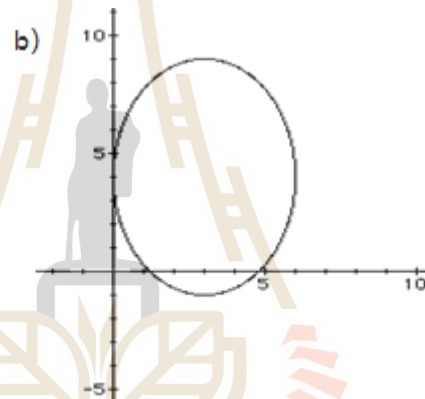
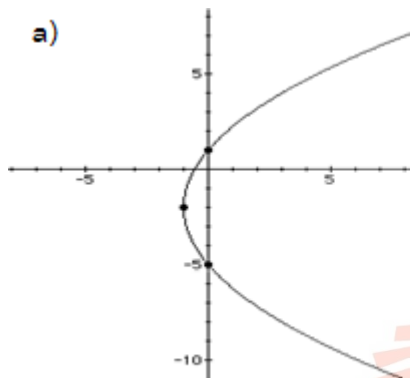
$$16x^2 - 12y^2 + 5y - 3 = 0$$

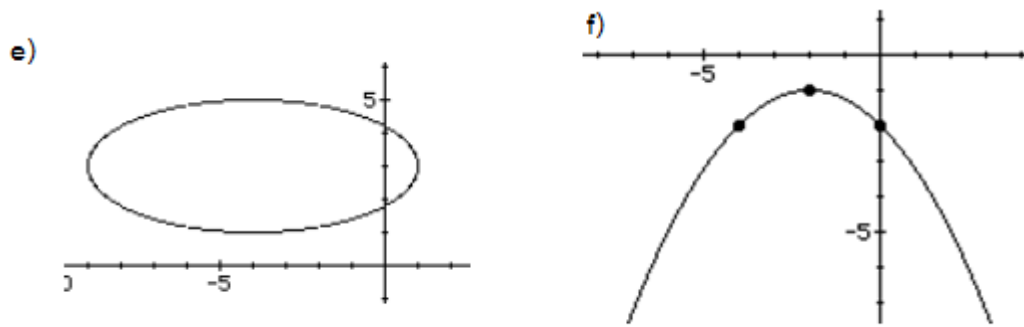
$$7y^2 - 5x - 11y = 0$$

$$6x^2 + 3x - 10y = 0$$

$$8x^2 + 8y^2 + 3x - 6y - 13 = 0$$

2. จากภาพภาคตัดกรวยในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงเขียนสมการของกราฟดังกล่าว





3. แต่ละสมการด้านล่างนี้ จงจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการของภาคตัดกรวยแต่ละประเภท

a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$

c) $x^2 - 4x - 2y - 6 = 0$

d) $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

e) $3x^2 + 24x + 2y + 54 = 0$

f) $16x^2 - 9y^2 - 32x + 36y + 124 = 0$

g) $4x^2 + 25y^2 - 24x + 200y + 336 = 0$

h) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

i) $64x^2 + 9y^2 - 384x - 36y + 468 = 0$

4. จงหาค่าของ A ที่ทำให้สมการ $Ax^2 + 3y^2 + Dx + Ey + F = 0$ เป็นสมการของ;

- a. วงกลม b. วงรี c. พาราโบลา d. ไฮเพอร์โบลา

5. จงหาค่าของ C ที่ทำให้สมการ $8x^2 = Cy^2 - 6x + Ey + F$ เป็นสมการของ;

- a. วงกลม b. วงรี c. พาราโบลา d. ไฮเพอร์โบลา

6. จงหาค่าของ A ที่ทำให้สมการ $Ax^2 + 23x + 5y - 19 = 0$ เป็นสมการของ;

- a. วงกลม b. วงรี c. พาราโบลา d. ไฮเพอร์โบลา

7. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงสร้างสมการของรูปพาราโบลาที่กำหนด

7.1 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอด (0,0) และจุดโฟกัส (0,2)

7.2 พาราโบลารูปหนึ่งจุดยอดอยู่ที่ (1,0) และไตเรกตริกซ์ $X = -5$

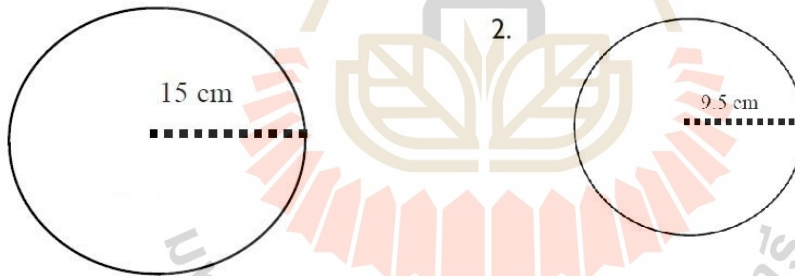
7.3 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัส (-4,0) และไตเรกตริกซ์ $X = 2$

7.4 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัส (3,6) และจุดยอด (3,2)

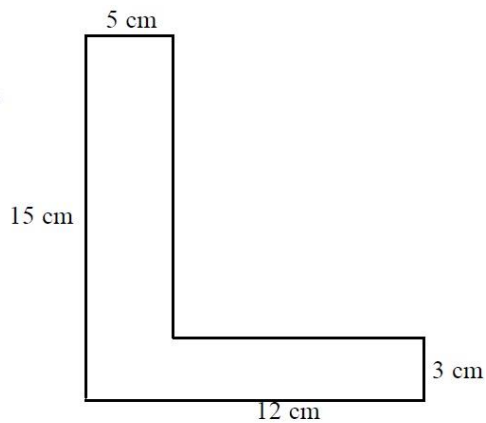
- 7.5 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอด (0,0) มีแกนเป็นแกน x ผ่านจุด (1,-4)
- 7.6 พาราโบลารูปหนึ่งมีแกนในแนวและตั้งผ่านจุด (-2,3), (0,3), and (1,9)
- 7.7 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 2, 0)$ และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$
- 7.8 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 5)$ และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ $(0, \pm 13)$
- 7.9 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (0,2), (0,6) และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ (0, 0), (0, 8)
- 7.10 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -1), (8, -1), และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ (0, 0), (0, 8)
- 7.11 สมการวงรี มีจุดกึ่งกลางอยู่ที่ (2, 2) มีจุดโฟกัส (0, 2) และจุดยอด (5, 2)
- 7.12 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 0, 2)$ และผ่านจุด (2, 1)
- 7.13 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 3)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 1)$
- 7.14 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 6, 0)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$
- 7.15 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (1, 3) และ (7, 3) มีจุดยอดอยู่ที่ (2, 3) และ (6, 3)

8. จงหาพื้นที่ในแต่ละข้อต่อไปนี้

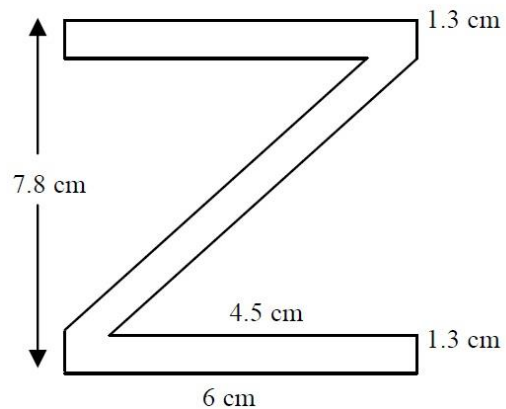
1.

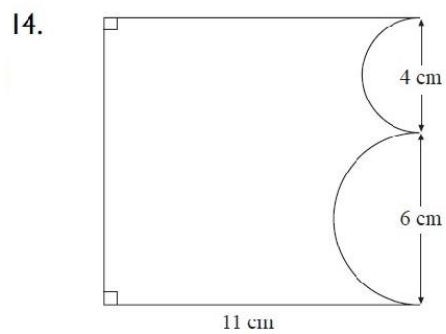
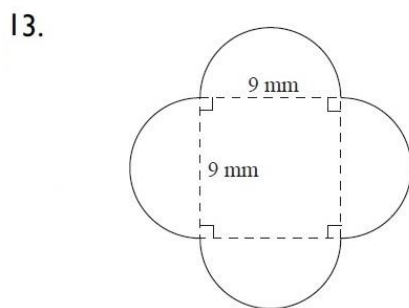
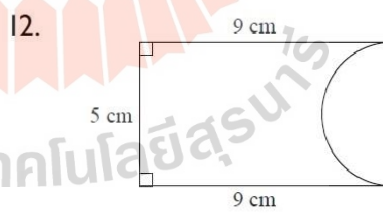
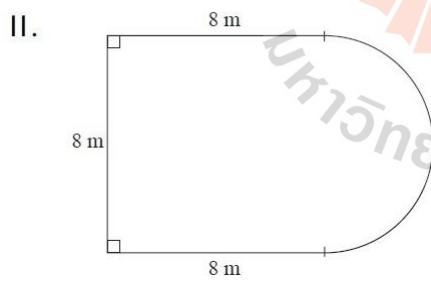
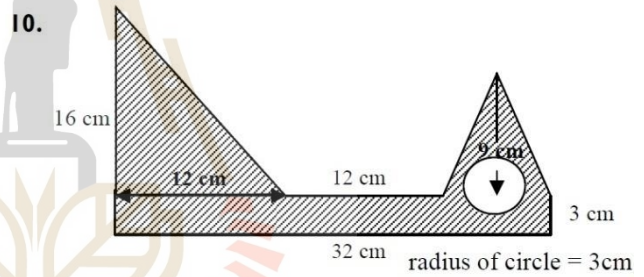
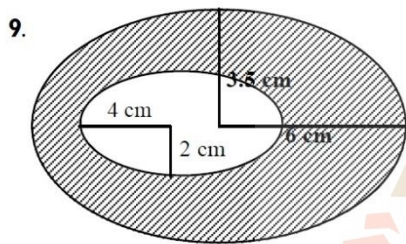
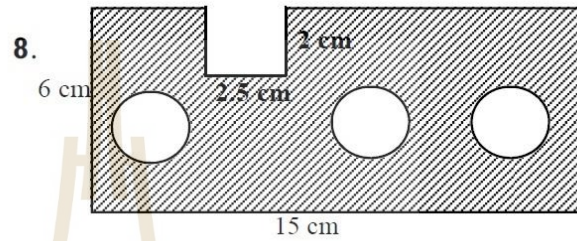
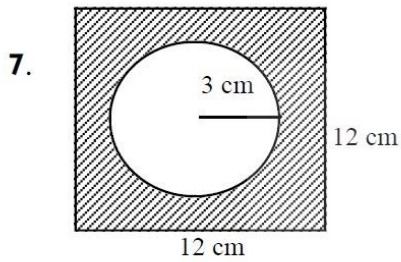
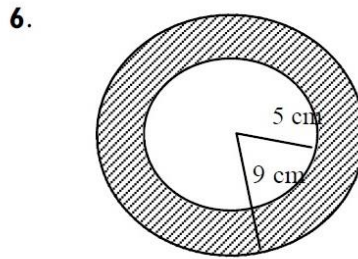
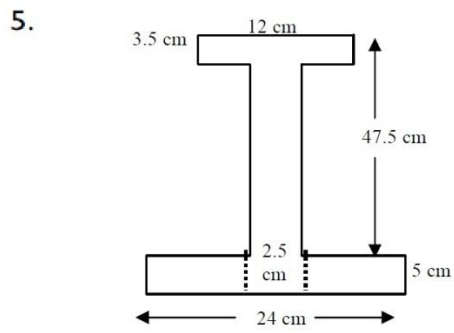


3.

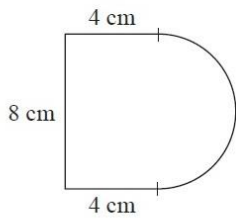


4.

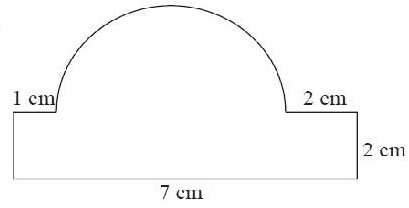




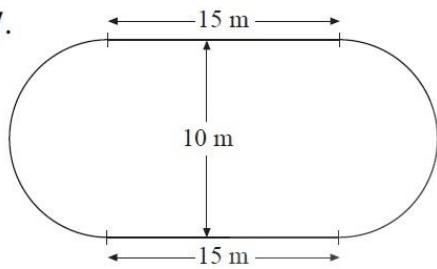
15.



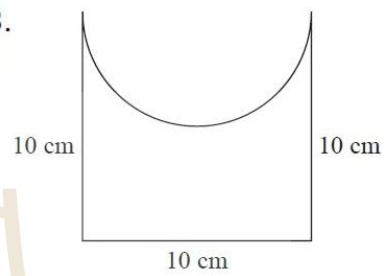
16.



17.

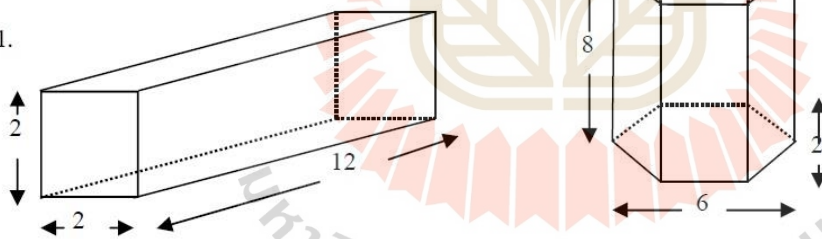


18.

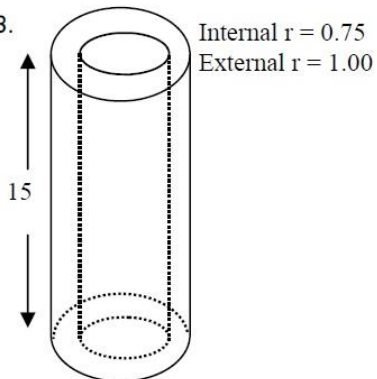


9. จงหาปริมาตรในแต่ละข้อต่อไปนี้

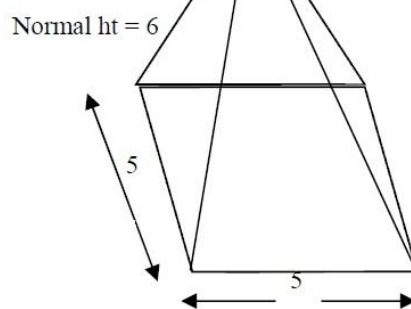
1.

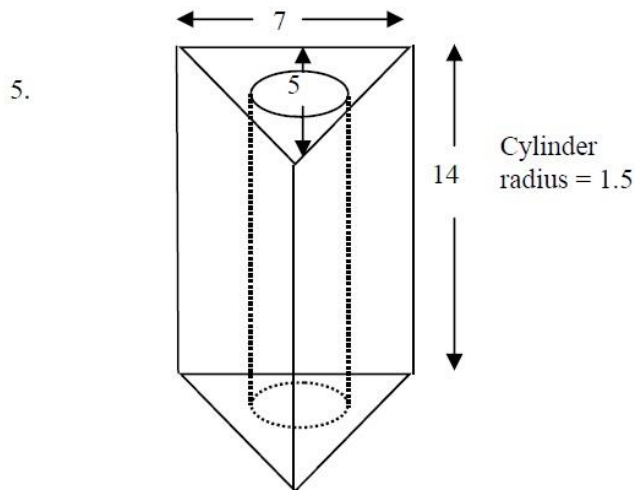


3.



4.





เฉลยแบบฝึกทักษะ(Additional Exercises)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.1 ระบบพิกัด และกราฟพื้นฐาน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.1

- 1) $(-2.902, 2.902, 11.276)$ 2) $(9\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 9)$ 3) $(0, -1, 2)$
 4) $(2, -2\sqrt{3}, 5)$ 5) $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, -2)$ 6) $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
 7) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ 8) $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$
 9) $r^2 + z^2 = 1, \rho = 1$ 10) $r = 2 \sin \theta, \rho \sin \phi = 2 \sin \theta$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.2 พื้นที่ และปริมาตร

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.2.1

- 1) 44 ตร.ซม. 2) 68.6 ตร.ซม. 3) 36 ตร.ม. 4) 55 ตร.ซม. 5) 208.17 ตร.มม.
 6) 25.8675 ตร. ซม. 7) 122.195 ตร.ซม.

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.2.2

- 1) 15 ลบ.ม. 2) 68.6 ลบ.ซม. 3) 2.61 ลบ.ม.
 4) พท.ผิวเท่ากับ 18,849.56 ตร.ซม. และปริมาตรเท่ากับ 78,539.82ลบ.ซม.
 5) พท.ผิว เท่ากับ 319.63ตร.ซม. และปริมาตร เท่ากับ 496.35 ลบ.ซม.
 6) รูปทรงนี้ยาว 12 มม. และมีพื้นที่ผิวเป็น 527.28 ตารางมิลลิเมตร
 7) พท.ผิว เท่ากับ 172 ตร.ซม. และ ปริมาตรเท่ากับ 112 ลบ.ซม.

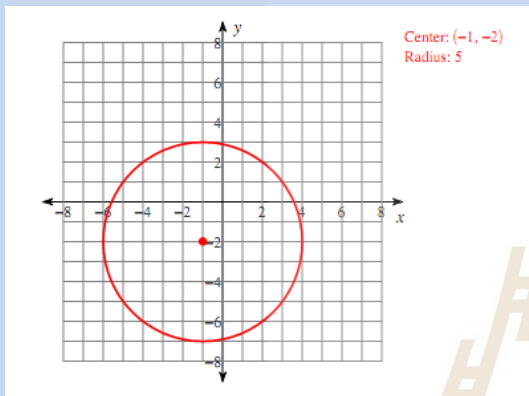
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.3 ภาคตัดกรวย

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.1

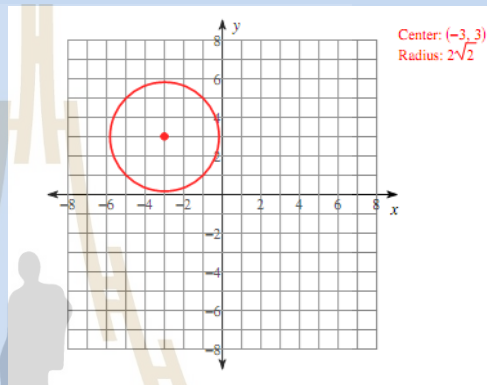
- 1) จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$ รัศมี เท่ากับ 7 2) จุดศูนย์กลาง คือ $(-10,3)$ รัศมี เท่ากับ $\sqrt{138}$
 3) จุดศูนย์กลาง คือ $(-7, -8)$ รัศมี เท่ากับ 8 4) จุดศูนย์กลาง คือ $(-5,10)$ รัศมี เท่ากับ 3
 5) จุดศูนย์กลาง คือ $(-13, -14)$ รัศมี เท่ากับ 16 6) จุดศูนย์กลาง คือ $(-12, -5)$ รัศมี เท่ากับ 3
 7) จุดศูนย์กลาง คือ $(3,16)$ รัศมี เท่ากับ 18 8) จุดศูนย์กลาง คือ $(3,5)$ รัศมี เท่ากับ $\sqrt{131}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.2

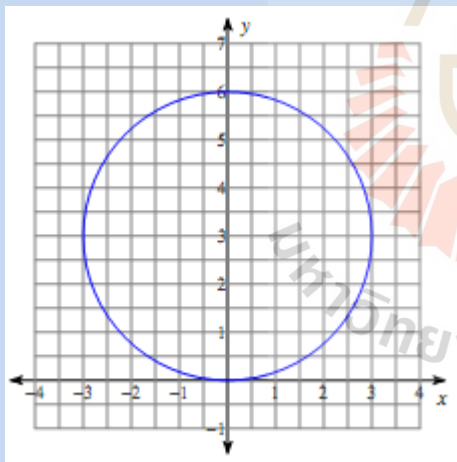
1)



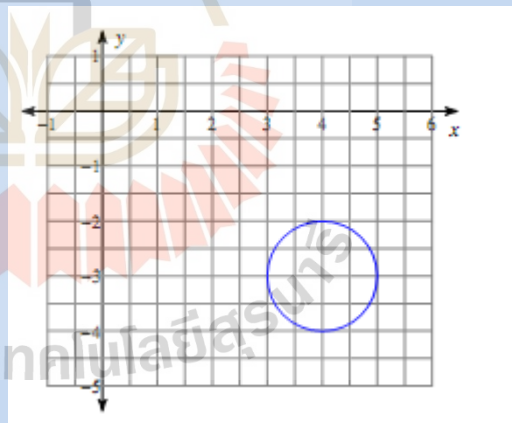
2)



3)



4)



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.3

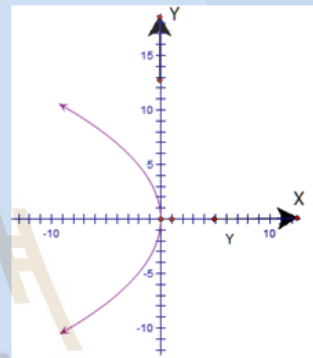
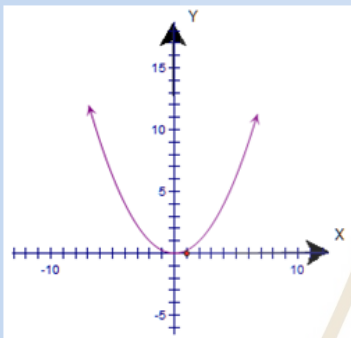
ข้อ	จุดศูนย์กลาง	จุดยอด	จุดโฟกัส	ความยาวแกนเอก	ความยาวแกนโท
1	$(0,0)$	$(0,13), (0, -13)$	$(0,2\sqrt{30}), (0, -2\sqrt{30})$	26 units	14units
2	$(0,0)$	$(6,0), (-6,0)$	$(2\sqrt{5}, 0), (-2\sqrt{5}, 0)$	12 units	8 units
3	$(0,0)$	$(\sqrt{95}, 0), (-\sqrt{95}, 0)$	$(\sqrt{65}, 0), (-\sqrt{65}, 0)$	$2\sqrt{95}$ units	$2\sqrt{30}$ units
4	$(0,0)$	$(13,0), (-13,0)$	$(\sqrt{105}, 0), (-\sqrt{105}, 0)$	26 units	16units

5	(0,6)	(0,17), (0, -5)	$(0, 6 + \sqrt{57}),$ $(0, 6 - \sqrt{57})$	22 units	16units
6	(-5,1)	(-5,13), (-5, -11)	$(-5, 1 + 3\sqrt{7}),$ $(-5, 1 - 3\sqrt{7})$	24 units	18units
7	(3,9)	(10,9), (-4,9)	$(3 + 3\sqrt{5}, 9),$ $(3 - 3\sqrt{5}, 9)$	14 units	4units
8	(0,8)	(8,8), (-8,8)	$(\sqrt{55}, 8), (-\sqrt{55}, 8)$	16 units	6units

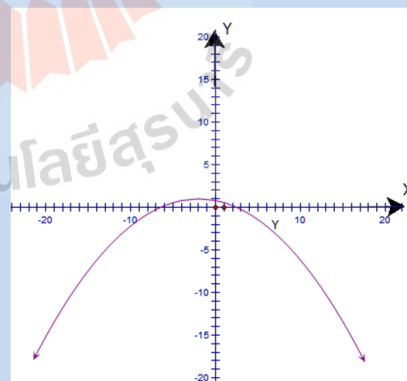
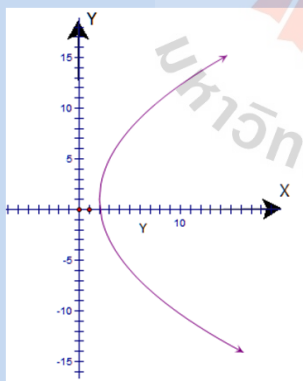
ศัพท์น่ารู้ unit : หน่วย

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.4

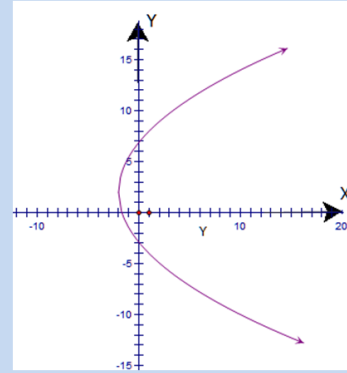
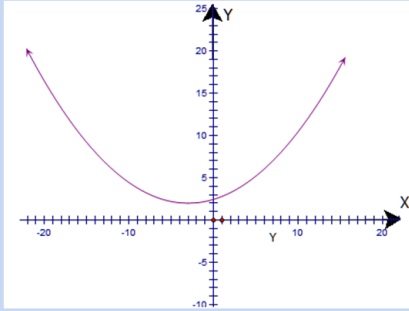
- 1) จุดยอดคือ (0, 0) จุดโฟกัสคือ (0, 1) สมการไตแรก 2) จุดยอดคือ (0, 0) จุดโฟกัสคือ (-3, 0) สมการไตแรก
 ตรีกร์คือ $y = -1$ $x = 3$



- 3) จุดยอดคือ (2, 1) จุดโฟกัสคือ (6, 1) สมการไตแรก 4) จุดยอดคือ (-2, 1) จุดโฟกัสคือ (-2, -4) สมการไตแรก
 ตรีกร์คือ $x = -2$ $y = 6$

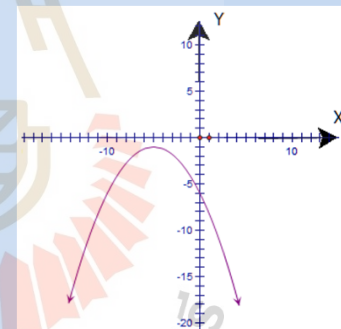
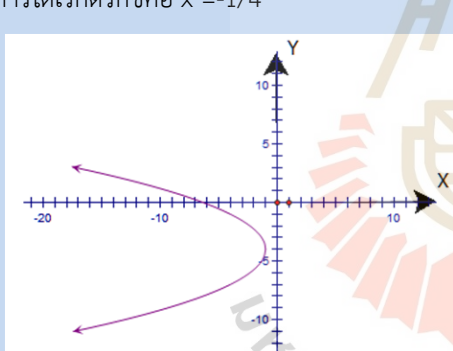


- 5) จุดยอดคือ (-3, 2) จุดโฟกัสคือ(-3, 7) สมการไตแรก 6) จุดยอดคือ(-2, 2) จุดโฟกัสคือ (1, 2) สมการ
 ตรีกร์คือ $y = -3$ $ไตแรกตรีกร์คือ x = -5$



7) จุดยอดคือ $(-1, -4)$ จุดโฟกัสคือ $(-1 - \frac{3}{4}, -4)$
สมการไตเรกตริกซ์คือ $x = -1/4$

8) จุดยอดคือ $(-5, -1)$ จุดโฟกัสคือ $(-5, -9/4)$ สมการไตเรกตริกซ์คือ $y = -1/4$



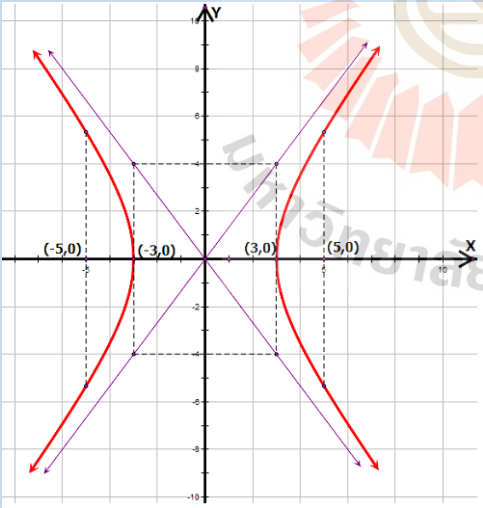
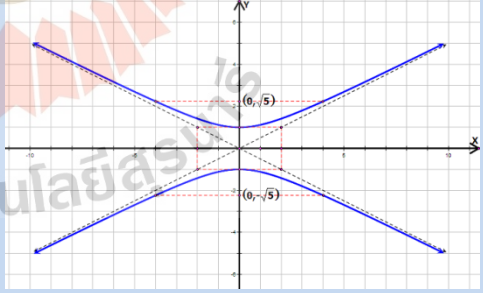
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.5

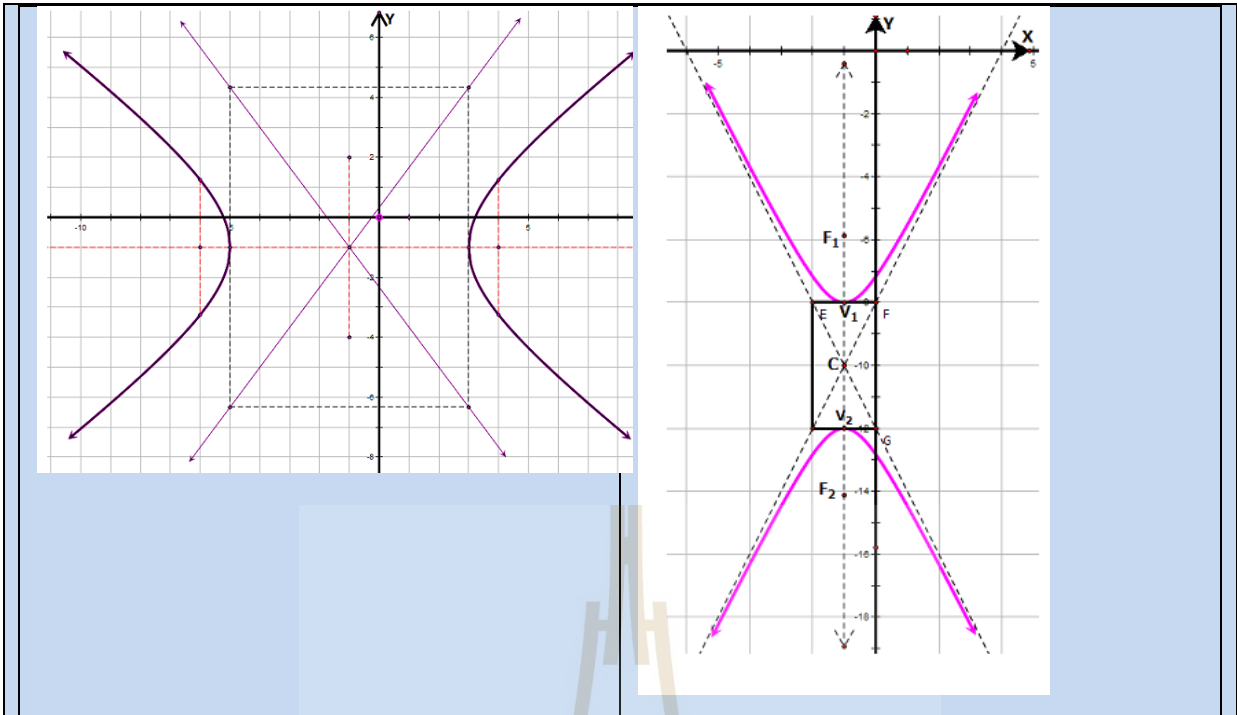
ข้อ	จุดยอด	จุดโฟกัส	ประเภท
1	$(9,0), (-9,0)$	$(\sqrt{85}, 0), (-\sqrt{85}, 0)$	Opens left/right
2	$(11,0), (-11,0)$	$(\sqrt{202}, 0), (-\sqrt{202}, 0)$	Opens left/right
3	$(0,5), (0,-5)$	$(0, \sqrt{41}), (0, -\sqrt{41})$	Opens up/down

			n
4	$(11,0), (-11,0)$	$(\sqrt{157}, 0), (-\sqrt{157}, 0)$	Opens left/right
5	$(11, -8), (-15, -8)$	$(-2 + \sqrt{173}, -8),$ $(-2 - \sqrt{173}, -8)$	Opens left/right
6	$(-2, -2), (-2, -14)$	$(-2, -8 + \sqrt{61}), (-2, -8 - \sqrt{61})$	Opens up/dow n
7	$(2\sqrt{5}, -1), (-2\sqrt{5}, -1)$	$(\sqrt{30}, -1), (-\sqrt{30}, -1)$	Opens left/right
8	$(5, -1), (1, -1)$	$(3 + \sqrt{13}, -1), (3 - \sqrt{13}, -1)$	Opens left/right

ศัพท์น่ารู้ Opens left/right: เปิดซ้าย-ขวา, Opens up/down : ทยาย-คว่ำ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.6

<p>1)</p> 	<p>2)</p> 
<p>3)</p>	<p>4)</p>



เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.4 กราฟ พื้นที่ ปริมาตร และภาคตัดกรวย ในชีวิตประจำวัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.4

- 1) รถบรรทุกคนนั้น จะสามารถวิ่งเข้าไปในอุโมงค์ได้
- 3) ตำแหน่งของแหล่งระเบิดที่เป็นไปได้ คือ ตำแหน่งใดๆบนไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{4,840,000} - \frac{y^2}{23,038,400} = 1$
- 6) สมการของพาราโบลาที่คือ $x^2 = 2y$ และหลอดไฟควรอยู่ ณ ตำแหน่ง $(0, \frac{1}{2})$ เมื่อเทียบกับจุดยอด

เฉลยแบบฝึกทักษะท้ายบท

- | | |
|----------------|-------------|
| 1. a) วงรี | b) วงกลม |
| c) ไฮเพอร์โบลา | d) พาราโบลา |
| e) พาราโบลา | f) วงรี |

2.

a) $x+1 = \frac{1}{9}(y+2)^2$ b) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25}$
 $y^2 - 9x + 4y - 5 = 0$ $25x^2 + 9y^2 - 150x - 72y + 144 = 0$

c) $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$ d) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 9$
 $4x^2 - y^2 - 16x - 8y + 4 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 4 = 0$

e) $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ f) $y+1 = \frac{-1}{4}(x+2)^2$
 $4x^2 + 25y^2 + 33x - 150y + 189 = 0$ $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$

3.

a) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

b) $x^2 + (y+5)^2 = 34$

c) $\frac{1}{2}(x-2)^2 = (y+5)$

d) $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

e) $\frac{-3}{2}(x+4)^2 = (y+3)$

f) $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

g) $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1$

h) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

i) $\frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

4. a. $A = 3$ b. $A > 0$ c. $A = 0$ d. $A < 0$

5. a. $C = -8$ b. $C < 0$ c. $C = 0$ d. $C > 0$

6. a. none b. none c. $A \neq 0$ d. none

7)

7.1 $x^2 = -8y$ 7.2 $y^2 = 24(x-1)$ 7.3 $y^2 = -12(x+1)$

7.4 $(x-3)^2 = 16(y-2)$ 7.5 $y^2 = 16x$

$$7.62x^2 + 4x - y + 3 = 07.7 \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

$$7.8 \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 17.9 \frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

$$7.10 \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 17.11 \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$

$$7.12 \frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 17.13y^2 - \frac{1}{16}x^2 = 1$$

$$7.14 \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{20}y^2 = 17.15 \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$

8)

1. 706.9 cm² 2. 283.5 cm²

3. 96 cm² 4. 23.4 cm²

5. 272 cm² 6. 175.9 cm²

7. 115 cm² 8. 63.8 cm²

9. 40.8 cm² 10. 181.7 cm²

9)

1. 48 cm³

2. 64 cm³

3. 20.63 cm³

4. 50 cm³

5. 146 cm³



บทที่ 5

การจัดการทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น

(Introduction to Money Management)

ในการดำเนินชีวิตของเราในแต่นั้น เป็นเรื่องที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ที่เราจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องเงินๆทองๆ ไม่ว่าจะเป็นในระดับเล็ก เช่น การซื้อ-ขายสินค้าตามท้องตลาด หรือขนาดใหญ่ เช่น การลงทุนประกอบธุรกิจ และไม่ว่าจะเป็นเงินที่ขึ้นกับช่วงเวลาระยะสั้น หรือเงินที่จะต้องมีการวางแผนล่วงหน้าเพราะขึ้นกับช่วงเวลาที่ยาวขึ้น ก็ล้วนแล้วแต่ต้องการการจัดการที่ประสิทธิภาพ เพื่อประโยชน์ หรือผลตอบแทนที่สูงสุด ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการบริหารจัดการทรัพยากรทางการเงินที่ควรทราบมาไว้ให้นักศึกษาได้ทำความรู้จัก การมีความรู้เบื้องต้นในการจัดการทรัพยากรการเงินนี้ จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการวางแผนอนาคตทางการเงินของนักศึกษาเอง

5.1 ดอกเบี้ยคงต้น(Simple Interest)

ดอกเบี้ยคงต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงินต้นที่คงที่(หมายถึงไม่มีการฝากเพิ่ม หรือถอนออกเลย)ตลอดระยะเวลาที่คิดดอกเบี้ยนั้นๆ

สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาดอกเบี้ยคงต้น

$$I_s = rtP \quad (5.1)$$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาเงินรวมสำหรับดอกเบี้ยคงต้น

$$S = P + I_s = P + rtP = P(1 + rt) \quad (5.2)$$

เมื่อ P หมายถึง เงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบัน

I_s หมายถึง ดอกเบี้ยคงต้น (หน่วยเป็นหน่วยสกุลเงิน)

t หมายถึงจำนวนงวด (หน่วยอาจเป็น วัน เดือน ปี)

r หมายถึง อัตราดอกเบี้ยคงต้นต่อ 1 งวด

S หมายถึงเงินรวม หรือเงินทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นหลังจากช่วงเวลา t งวด หรือมูลค่าอนาคต

ตัวอย่างที่ 5.1.1 ทอมมีให้วารุณียืมเงินไปจำนวน 70 บาท เป็นเวลา 1 เดือน และคิดดอกเบี้ยแบบคงต้นที่อัตรา 5 % ต่อเดือน จงหาว่า พอสิ้นเดือนเดือนนั้น วารุณีจะต้องคืนเงินทอมมีเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ เราทราบค่าเงินต้นคือ 70 บาท เวลาคือ 1 เดือน และอัตราดอกเบี้ยคงต้นต่อเดือนคือ $5\% = 0.05$

แทนค่าหาจำนวนเงินที่เป็นดอกเบี้ยคงต้นคือ $I_s = rtP = (0.05)(1)(70) = 3.50$ บาท

ดังนั้น วารุณีจะต้องคืนเงินทอมมีเป็นจำนวนเท่ากับ เงินต้นที่ยืมมา + เงินดอกเบี้ย = $70 + 3.50 = 73.50$ บาท

ตัวอย่างที่ 5.1.2 นายมีสุขกู้เงินเพื่อนมา 200 บาท เป็นเวลา 4 ปี มาแล้ว โดยที่เพื่อนคิดดอกเบี้ยแบบคงตัวในอัตรา 15 % ต่อปี อยากทราบว่า

- ก. นายมีสุขต้องจ่ายดอกเบี้ยให้เพื่อนเป็นเงินเท่าไร
- ข. นายมีสุขจะต้องใช้หนี้เพื่อนทั้งเงินต้นและดอกเบี้ยเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ ก. จากสูตรดอกเบี้ยแบบคงต้น

$$I_s = rtP$$

จากโจทย์จะได้ค่า $P = 200$ บาท, $t = 4$ ปี

และ $r = 15\% = \frac{15}{100}$

ดังนั้นแทนค่า จะได้ $I_s = rtP = \left(\frac{15}{100}\right) \times 4 \times 200 = 120$

ดังนั้นดอกเบี้ยที่นายมีสุขจะต้องจ่ายเท่ากับ 120 บาท

ข. เมื่อรวมต้นและดอกเบี้ยจะได้ $S = P + I_s$

= $200 + 120$

= 320 บาท

นายมีสุขจะต้องจ่ายเงินคืนให้เพื่อนทั้งหมดเท่ากับ 320 บาท

แบบฝึกทักษะที่ 5.1 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการคำนวณดอกเบี้ยคงต้น ในการแก้โจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) นายคณิตกู้เงินจากสหกรณ์แห่งหนึ่งเป็นจำนวน 360,000 บาท เป็นเวลา 5 เดือน พอครบกำหนดเวลา นายคณิตต้องจ่ายดอกเบี้ยเป็นจำนวน 7,200 บาท อยากทราบว่าสหกรณ์แห่งนั้นคิดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้เท่าไร

.....

.....

.....

.....

2) ลุงจอห์น ชาวไร่ กู้เงินจากธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงิน 500,000บาท โดยธนาคารคิดดอกเบี้ย 6.5 % ต่อปี เมื่อเวลาผ่านไประยะเวลาหนึ่ง ลุงจอห์นไปตรวจสอบดูที่ธนาคาร ปรากฏว่าธนาคารแจ้งว่าเป็นหนี้ธนาคารจำนวน 598,000บาท อยากรทราบว่าลุงจอห์นกู้เงินมาเป็นระยะเวลานานเท่าไร

3) จงคำนวณหาเงินต้นที่กู้มา เมื่อจำนวนดอกเบี้ยที่จ่ายคือ 20,000บาท โดยที่เจ้าหนี้คิดอัตราดอกเบี้ย 14 % ต่อปี และระยะเวลาในการกู้คือ 4เดือน

4) ธนาคารแห่งหนึ่งให้ดอกเบี้ยเงินฝาก 5% ต่อปี ถ้านำเงิน 35,000 บาท ไปฝากธนาคารแห่งนี้เป็นเวลา 9 เดือน จงหาดอกเบี้ยและเงินรวมที่จะได้รับ

5) ถ้ากู้เงิน 25,000 บาท เป็นเวลา 30เดือน ต้องเสียดอกเบี้ย 2,500 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยสำหรับการกู้เงินครั้งนี้

6) ถ้าต้องการใช้เงินจำนวน 18,000 บาท ในอีก 16 เดือนข้างหน้า จึงนำเงินไปปล่อยกู้คิดดอกเบี้ย 15% ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่จะต้องนำไปปล่อยกู้

7) ถ้าอัตราดอกเบี้ยเท่ากับ 0.5% ต่อปี จะต้องฝากเงิน 50,000 บาท เป็นระยะเวลาเท่าใดจึงจะได้ดอกเบี้ย 5,000 บาท

5.2 ดอกเบี้ยทบต้น(Compound Interest)

ดอกเบี้ยทบต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่มีการนำเอาดอกเบี้ยที่ได้รับในช่วงเวลาหนึ่งมารวมกับเงินต้น เพื่อเป็นเงินต้นของการคิดดอกเบี้ยในระยะเวลาถัดไป (ในกรณีนี้ เงินต้นก็ยังเป็นเงินต้นคงที่ ไม่ฝากเพิ่ม และไม่ถอนออก)

นั่นคือ ถ้าเราสมมติให้ว่า ถ้าจำนวนเงิน 5,000 บาท ถูกฝากให้กับธนาคารแห่งหนึ่ง ที่มีระบบการคำนวณดอกเบี้ยเป็นประเภททบต้นในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี เราจะสามารถคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดที่จะได้ เมื่อสิ้นปีแต่ละปีได้ ดังนี้

$$\text{ทบต้น ดอกเบี้ยที่ได้} = \text{จำนวนเงิน} \times \text{อัตราดอกเบี้ย}(\%)$$

เมื่อสิ้นปีที่ 1 เงินรวมทั้งหมดที่จะได้ทั้งหมด

$$\begin{aligned}
 &= \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ยที่ได้} \\
 &= 5,000 + 5,000(0.06) \\
 &= 5,000(1+0.06) \quad \dots \text{ดังตัวรวมคือ } 5,000 \\
 &= 5,000(1.06)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 1 เราจะเห็นว่า เงินรวมของเราจะมีค่าเป็น $5,000(1.06)$ บาท และเงินจำนวนนี้ จะถือว่าเป็นเงินต้นสำหรับการคำนวณดอกเบี้ยในปีต่อไป ดังนี้

เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมทั้งหมดที่จะได้ทั้งหมด

$$\begin{aligned}
 &= \text{เงินต้น} + \text{ดอกเบี้ยที่ได้} \\
 &= 5,000(1.06) + 5,000(1.06)(0.06) \\
 &= 5,000(1.06)(1+0.06) \quad \dots \text{ดังตัวรวมคือ } 5,000(1.06) \\
 &= 5,000(1.06)^2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เราจะเห็นว่า เงินรวมของเราจะมีค่าเป็น $5,000(1.06)^2$ บาท และเงินจำนวนนี้ จะถือว่าเป็นเงินต้นสำหรับการคำนวณดอกเบี้ยในปีต่อไป

และเมื่อเราดำเนินการการคำนวณในลักษณะนี้ไปเรื่อยๆ เราจะสามารถหาจำนวนเงินที่ได้ (S_n) หลังจากฝากเงินจำนวน P เป็นระยะเวลา n ปี (หรือเมื่อสิ้นปีที่ n) ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี คือ $S_n = P(1+i)^n$

และ เราสามารถขยายแนวคิดนี้ไปถึงกรณีทั่วไป หรือกรณีที่รอบของการคิดดอกเบี้ย ไม่ใช่ 1 ปี แต่ให้นับเป็น "งวด" แทน และอัตราดอกเบี้ยนั้น ไม่ใช่ต่อ 1 ปี แต่เป็นต่อ "งวด" ดังนั้น จะได้ว่า

$$S_n = P(1+i)^n \tag{5.3}$$

และ จะได้สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาดอกเบี้ยทบต้น คือ

$$I_c = P((1+i)^n - 1) \tag{5.4}$$

- เมื่อ
- P หมายถึง เงินต้นหรือมูลค่าปัจจุบัน
 - I_c หมายถึง ดอกเบี้ยทบต้น
 - i หมายถึง อัตราดอกเบี้ยต่องวด
 - n หมายถึง จำนวนงวด

S_n หมายถึงเงินรวมหรือมูลค่าอนาคต เมื่อสิ้นงวดที่ n

ตัวอย่างที่ 5.2.1 นายหมั่นเพียรฝากเงินไว้ที่ธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงิน 200,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 8 % ต่อปี โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก ๆ 4 เดือน ถ้าหากนายหมั่นเพียรฝากเงินไว้เป็นเวลา 10 ปี แล้วโดยที่ไม่ได้ถอนเงินเลย อยากทราบว่า

- ก. นายหมั่นเพียรจะมีเงินในบัญชีเท่าไร
- ข. นายหมั่นเพียรได้รับดอกเบี้ยจำนวนเท่าไร

วิธีทำ ก. จากสูตร $S = P(1 + i)^n$

โจทย์กำหนดให้ $P = 200,000$ บาท

$$\text{และอัตราดอกเบี้ยต่องวดคือ } i = 0.08 \times \left(\frac{4}{12}\right) = 0.027$$

$$\text{และจำนวนงวด } n = \left(\frac{4}{12}\right) \times 10 = 30$$

แทนค่า $S = 200,000 (1 + 0.027)^{30}$

$$\text{ดังนั้นเงินในบัญชี} = 444,778 \text{ บาท}$$

- ข. สูตร $I_c = P((1 + i)^n - 1) = S - P$
 $= 444,778 - 200,000 = 244,778$
 ได้รับดอกเบี้ยเท่ากับ 244,778 บาท

ตัวอย่างที่ 5.2.2 น.ส.พัชราพร นำเงินจำนวน 100,000 บาท ไปฝากกับธนาคารแห่งหนึ่ง ที่เสนอดอกเบี้ยแบบทบต้นที่ 10% และคิดดอกเบี้ยให้ทุกวันใน 1 ปี จงคำนวณหาเงินอนาคตที่พัชราพรจะได้ทั้งหมดหลังจากนี้เป็นเวลา 30 ปี

วิธีทำ จากโจทย์ ค่าที่เราได้คือ $P = 100,000$, อัตราดอกเบี้ยต่องวด $i = \frac{0.1}{365}$ (เพราะคิดดอกเบี้ยทุกวันในหนึ่งปี) และจำนวนงวด $n = 365 \times 30$ งวด

แทนค่าในสมการ (5.5) จะได้เงินรวมในอนาคตหลังจาก 30 ปีคือ

$$S_{30} = 100,000 \left(1 + \frac{0.1}{365}\right)^{365 \times 30} = 2,007,728.579 \text{ บาท}$$

แบบฝึกทักษะที่ 5.2 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น ในการแก้โจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

- 1) นางสาวเรียวร้อยฝากเงิน 10,000 บาท ไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งธนาคารแห่งนี้ได้ให้ดอกเบี้ยในอัตรา 12 % ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยปีละ 3 ครั้งแบบทบต้น ถ้านางสาวเรียวร้อยฝากเงินไว้ครบ 5 ปี จะได้รับเงินคืนจำนวนเท่าใด และจำนวนดอกเบี้ยที่จะได้รับเท่าใด

2) เอกษัตริ์เงินธนาคารเพื่อซื้อบ้านเป็นจำนวนเงิน 300,000บาทธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 15ต่อปี ถ้ากู้เป็นเวลา 2ปี ถ้าคิดดอกเบี้ยทบต้นจะเสียค่าดอกเบี้ยเท่าใด

3) ถ้าฝากเงินจำนวน 50,000 บาท เป็นเวลา 1ปี กับธนาคารที่ให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี จงหาดอกเบี้ยและเงินรวมที่ได้รับ ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 2 ครั้ง

4) จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 30,000 บาท ที่ฝากธนาคารเป็นเวลา 6 เดือน ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยที่ทบต้นทุก ๆ 3 เดือน

5) ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี ทบต้นปีละ 3 ครั้ง จะต้องฝากเงินเท่าใดจึงจะได้ดอกเบี้ย 3,550 บาท ในระยะเวลา 2 ปี

6) ถ้าต้องการกู้เงินจำนวน 15,000 บาท เป็นเวลา 2 ปี โดยที่ธนาคารแห่งที่หนึ่งคิดดอกเบี้ย14 % ต่อปี ทบต้นปีละ 2ครั้ง ส่วนธนาคารแห่งที่สองคิดดอกเบี้ย 13.75 % ต่อปี ทบต้นปีละ 12 ครั้ง ควรจะเลือกกู้เงินจากธนาคารใด และดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายให้ธนาคารทั้งสองต่างกันเท่าใด

7) ยายแหลมทอง ได้นำเงินจำนวน 1,320 ดอลลาร์ และได้ดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตราร้อยละ 6 และปรับให้ 4 ครั้งต่อปี จงหาว่า ยายแหลมจะได้เงินสะสมรวมจากการฝากในครั้งนี้เป็นจำนวนเท่าใด เมื่อครบ 8 ปี

8) ถ้านักศึกษาจะวางแผนการออมทรัพย์กับบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งให้ผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยคิดเป็น 10 % แบบทบต้น และคิดทบต้นให้ทุกวัน ถ้านักศึกษาหวังจากการลงทุนนี้ว่า ใน 30 ปีข้างหน้า นักศึกษาหวังที่จะได้รับดอกเบี้ย(ไม่รวมเงินต้น) เป็นจำนวนทั้งสิ้น 1,000,000 บาท จงหาว่า นักศึกษาจะต้องใช้เงินเป็นจำนวนเท่าไร ในการเปิดบัญชีครั้งแรก

5.3 เงินปี (Annuities)

ใน 2 หัวข้อที่ผ่านมา เราจะสังเกตเห็นว่า เป็นการวางแผนการจัดการทางการเงินที่มีการฝากด้วยเงินต้นที่เป็นจำนวนคงที่ หรือในระหว่างช่วงเวลาหนึ่งๆนั้น ไม่มีการฝากเพิ่ม หรือเบิกออกเลย ในหัวข้อนี้ เราจะมาทำความรู้จักกับกรณีที่เกิดมีการฝากเงินอย่างต่อเนื่อง ด้วยจำนวนที่เท่ากัน ในความห่างของระยะเวลาเท่ากัน เช่น กรณีที่เราชำระเงินผ่านที่เรากู้มาจากธนาคารทุกๆปลายเดือน ด้วยจำนวนเงินที่เท่ากัน การจัดการทางการเงินในลักษณะแบบนี้ รู้จักกันในรูปแบบของการจัดการเงินประเภท "เงินปี (Annuity) "

เงินปีหรือค่ารายงวด หมายถึง เงินจำนวนเท่า ๆ กัน ที่จ่ายเป็นงวดตามช่วงเวลาเท่ากัน เช่น เงินปันผล ดอกเบี้ย พันธบัตร การจ่ายเบี้ยประกันชีวิต เป็นต้น

เงินปีแบ่งออกเป็นสองประเภทใหญ่ๆคือ

1. Ordinary Annuity (เงินงวด) ซึ่งจะเป็จำนวนเงินที่ได้รับสิ้นปีเท่าๆกันในแต่ละปี ในระยะเวลาที่กำหนด
2. Annuity Due (เงินงวด) ซึ่งจะเป็จำนวนเงินที่ได้รับต้นปีเท่าๆกันในแต่ละปี ในระยะเวลาที่กำหนด

ซึ่งในที่นี้จะขอกล่าวถึงประเภทแรกนั่นคือ Ordinary Annuity

มูลค่าอนาคตสำหรับ Ordinary Annuity (S) ตัวอย่างเช่น การฝากเงินกับธนาคารในทุกๆเดือนๆละเท่าๆกันโดยหวังที่จะได้รับเงินก้อนใหญ่เมื่อครบกำหนดการฝากในอนาคต เงินก้อนที่จะเกิดขึ้นสำหรับการฝากนี้เรียกว่าเป็น “มูลค่าอนาคต” นั้นเอง และสามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์

$$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \quad (5.5)$$

มูลค่าปัจจุบันสำหรับ Ordinary Annuity (P) ตัวอย่างเช่น การกู้ยืมเงินก้อนจากธนาคารซึ่งเราจะต้องทำการส่งงวดคืนตามจำนวนงวดที่ตกลงกัน การชำระในแต่ละงวดนั้นจะเปลี่ยนไปตามมูลค่าของเงินในปัจจุบันจนสามารถสร้างเป็นอนุกรมได้คือ

$$P = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (5.6)$$

เมื่อ R หมายถึง เงินงวดหรือเงินที่มีการจ่ายในแต่ละงวด

P หมายถึง มูลค่าปัจจุบันของเงินปี

i หมายถึง อัตราดอกเบี้ยต่องวด

n หมายถึง จำนวนงวด

S หมายถึง มูลค่าอนาคตของเงินปี

เงื่อนไขและข้อตกลง : ในเอกสารนี้ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดจำนวนครั้งของการปรับดอกเบี้ยใน 1 ปี ให้ถือว่า มีค่าเท่ากับจำนวนงวดใน 1 ปี หรือให้เข้าใจว่า มีการปรับดอกเบี้ยให้ทุกงวด

ตัวอย่างที่ 5.3.1 อนันต์ ฝากเงินเดือนละ 500 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 18 หลังจากนั้น เขาก็จะมีเงินเท่าใด ถ้ากำหนดให้ดอกเบี้ยทบต้นคิดเป็น 5 เปอร์เซ็นต์ต่อปี และคิดปรับให้ทุกเดือน

วิธีทำ

จากโจทย์ เราได้ค่าต่างๆคือ $R = 500$ และ 1 ปีมี 12 งวด (คือฝากทุกเดือน) ดังนั้น 18 ปี ก็จะได้จำนวนงวดเท่ากับ $n = 18 \times 12 = 216$ งวดหาอัตราดอกเบี้ยต่องวด

โดย จากโจทย์ 12 เดือน ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 5 ดังนั้น ถ้า 1 เดือน (หรือ 1 งวด) ก็จะได้ดอกเบี้ยเป็นร้อยละ $\frac{5}{12}$

แทนค่า

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$= 500 \frac{\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{216} - 1}{0.05/12}$$

$$= 173,177.202$$

ดังนั้น อนันต์ จะได้เงินเป็นจำนวนทั้งสิ้น 173,177.202 บาท

ตัวอย่างที่ 5.3.2 มานด์ถ์มีเงินก้อนอยู่จำนวนหนึ่ง ต้องการที่จะลงทุนกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง เพื่อที่จะได้เงินคืนทั้งต้นและดอกในทุกๆ 6 เดือน ในจำนวนงวดละ 1,500 ดอลลาร์ ติดต่อกันเป็นเวลา 2 ปี ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยที่ร้อยละ 8 ต่อปี และคิดแบบทบต้นให้ในทุกๆ 6 เดือนแล้ว จงหาว่า มานด์ถ์ จะต้องนำเงินก้อนไปลงทุนเป็นจำนวนเงินเท่าใด

วิธีทำ

จากโจทย์ ได้ว่า 1 งวดนั้นคิดเป็น 6 เดือน

เงินงวด (R) = 1,500

อัตราดอกเบี้ยต่องวด (i) = $0.08/2$

จำนวนงวด(n) = 4

ดังนั้น จากสมการความสัมพันธ์ (5.6) จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} P &= R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] \\ &= 1,500 \left[\frac{1 - (1 + 0.04)^{-4}}{0.04} \right] \\ &= 5,444.84 \end{aligned}$$

ดังนั้น มานด์ถ์จะต้องนำเงินจำนวน 5,444.84 ดอลลาร์ไปลงทุนจึงจะได้เงินงวดคืนตามจำนวนดังกล่าว

แบบฝึกทักษะที่ 5.3 จงใช้ความรู้ทางการจัดการเงินปี ในการตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) นายสายันต์ ฝากเงินกับธนาคารเดือนละ 100 ดอลลาร์ห์ จงคำนวณหาว่า หลังจาก 10 ปี นายสายันต์ จะมีเงินซื้อรถเก๋งราคาประมาณ 16,900 ดอลลาร์ห์หรือไม่ ถ้ากำหนดว่า ธนาคารแห่งนี้ ให้ดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 6.5 ต่อปี และคิดปรับแบบทบต้นให้ทุกๆเดือน

.....

.....

.....

2) จงหาค่าปัจจุบันของเงินที่จ่ายเข้ากองทุนแห่งหนึ่ง ครั้งละ 2,000 บาท ทุกๆ 6 เดือน เป็นระยะเวลา 10 ปี ด้วยดอกเบี้ยรายปีคิดเป็น 6 % คิดแบบทบต้นให้ทุกๆ 6 เดือน

.....

.....

.....

3) สามี-ภรรยาคนหนึ่ง ได้ตัดสินใจฝากเงินเป็นจำนวน 400 บาททุกๆสิ้นเดือน เข้ากับบัญชีประเภทที่ให้ดอกเบี้ยประเภททบต้นที่อัตรา 5% และคิดดอกเบี้ยทุกๆเดือน จงหาว่า หลังจากกลั่นปีสาม เงินในบัญชีนี้จะเป็นเท่าใด

4) ผู้ปกครองของ น.ส. เรยา ต้องการที่จะสะสมเงิน(เพื่อการศึกษาของเรยาเอง)ให้ได้เป็นจำนวนทั้งสิ้น 100,000 บาท ในเวลา 15 ปี ถ้าประเภทที่จะฝากด้วยนี้ ให้ดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตรา 4.5 % และคิดให้ทุกๆ 6 เดือน จงหาว่า เพื่อให้ได้ยอดเงินสะสมในเวลาดังกล่าว ผู้ปกครองของ น.ส.เรยา ต้องฝากเดือนเงินเข้าบัญชีทุกๆ 6 เดือน ในจำนวนต่องวดเท่าใด

5) ถ้าฝากเงินทุก ๆ เดือน เดือนละ 15,000 บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ย 0.5% ต่อปี จงหาเงินรวมทั้งหมดที่จะได้รับหลังจากฝากเงินไปแล้ว 5 เดือน

6) พนักงานคนหนึ่งถูกหักเงินเดือน เดือนละ 2,000 บาท เพื่อเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพ โดยให้ดอกเบี้ย 1% ต่อปี เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี พนักงานคนนี้จะได้รับเงินคืนเท่าใด

7) โทรทัศน์เครื่องหนึ่งมีโปรโมชันผ่อน 6 เดือน เดือนละ 5,000 บาท คิดดอกเบี้ย 0.1% ต่อปี จงหาราคาเงินสดของโทรทัศน์เครื่องนี้

8) กู้เงินเพื่อซื้อบ้านราคา 2,500,000 บาท จะต้องผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 20 ปี ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ย 4% ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระในแต่ละเดือน

5.4 การคิดภาษีเบื้องต้น(Introduction to Taxes)

หน้าที่หนึ่งของคนไทยที่มีรายได้ทั้งหลาย คือการเสียภาษี ซึ่งแต่ละประเภทของภาษีก็ขึ้นกับสถานการณ์ของบุคคลนั้นๆ แต่ประเภทหนึ่งที่ประชากรส่วนใหญ่ของประเทศต้องเสียคือ ภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา ซึ่งตามประมวลรัษฎากรนั้น ถือเป็นภาษีทางตรงประเภทหนึ่งที่สำคัญมากเพราะเป็นแหล่งรายได้สำคัญของรัฐบาลและเป็นเครื่องมือสำคัญของรัฐบาลในการกระจายรายได้

ภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาก็คือ ภาษีเงินได้ที่เก็บจากบุคคลธรรมดาตนเอง บุคคลธรรมดา ผู้มีเงินได้ไม่ว่าประเภทใดชนิดใด ถ้าไม่มีกฎหมายยกเว้นให้แล้วมักอยู่ในข่ายต้องเสียภาษีนี้นี้ด้วย

ในการคำนวณภาษีประเภทบุคคลธรรมดานั้น มีรายละเอียดค่อนข้างเยอะ อาจจะมีการเปลี่ยนแปลงไปตามนโยบายของรัฐบาลชุดนั้นๆ ดังนั้น วัตถุประสงค์ของหัวข้อนี้ จึงไม่ได้เน้นให้นักศึกษาได้เข้าใจทุกแง่มุม ทุกกรณีของการจัดเก็บภาษีประเภทนี้ แต่จะเป็นการยกตัวอย่างกรณีที่พบบ่อย ประกอบกับหลักการหลักการคำนวณภาษีนี้นั้นๆ ดังนั้น หลังจากศึกษาในหัวข้อนี้แล้ว จะสามารถคำนวณภาษี และทราบหมวดหมู่คร่าวๆของส่วนต่างๆที่เกี่ยวข้อง

วิธีการคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาอย่างคร่าว ๆ

1. คำนวณเงินได้พึงประเมินตลอดปีภาษี
2. หักเงินได้ที่ได้รับยกเว้น
 - (1) เงินสะสมกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ (ส่วนที่เกิน 10,000บาท แต่ไม่เกิน 490,000 บาท และส่วนนี้ต้องไม่เกินร้อยละ 15 ของค่าจ้าง)
 - (2) เงินสะสมกองทุนบำเหน็จบำนาญข้าราชการ (กบข.) เฉพาะส่วนที่ไม่เกิน 500,000 บาท
 - (3) เงินสะสมกองทุนสงเคราะห์ครูโรงเรียนเอกชน เฉพาะส่วนที่ไม่เกิน 500,000 บาท
 - (4) อื่น ๆ
3. หักค่าใช้จ่ายร้อยละ 40 ของข้อ 2.แต่ไม่เกิน 60,000 บาท
4. หักลดหย่อน
 - (1) ผู้มีเงินได้ 30,000 บาท
 - (2) คู่สมรส 30,000 บาท กรณีคู่สมรสไม่มีเงินได้
 - (3) บุตรที่มีอายุไม่ถึง 20 ปี หรือมีอายุไม่เกิน 25 ปี แต่ยังศึกษาในระดับอุดมศึกษา
 - กรณีบุตรไม่ได้ศึกษาหรือศึกษาอยู่ในต่างประเทศหักลดหย่อนได้คนละ 15,000 บาท
 - กรณีบุตรศึกษาอยู่ในประเทศหักลดหย่อนได้คนละ 17,000 บาท
 - (4) บิดามารดาอายุตั้งแต่ 60 ปีขึ้นไป หักลดหย่อนได้คนละ 30,000 บาท

- (5) เบี้ยประกันชีวิตตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท
 - (6) เงินสะสมกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ (ส่วนที่ไม่เกิน 10,000 บาท)
 - (7) ดอกเบี้ยเงินกู้เพื่อซื้อที่อยู่อาศัยตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท
 - (8) อื่น ๆ
5. เงินได้พึงประเมินจากข้อ 1. เมื่อหักค่าต่าง ๆ จากข้อ 2 – 4 แล้ว จะเรียกว่า "เงินได้สุทธิ" ซึ่งจะนำมาคำนวณภาษีตามตารางต่อไปนี้



3) ถ้าอำนาจได้เงินเดือน เดือนละ 12,000 บาท เขาจ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 500 บาทจงหาว่ากิตติจะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

4) ถ้าอภิภักดิ์ได้เงินเดือน เดือนละ 55,000 บาท เขาจ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 5,500 บาท จ่ายเบี้ยประกันปีละ 15,000 บาท จ่ายดอกเบี้ยบ้านปีละ 20,000 บาท เขาแต่งงานแล้วโดยที่ภรรยาไม่มีเงินได้ และมีลูก 2 คน กำลังเรียนอยู่ในชั้นมัธยมต้นทั้งคู่ และเขายังได้อุปการะพ่อแม่ซึ่งอายุเกิน 60 ปี จงหาว่าอภิภักดิ์จะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

5.5 ต้นทุน (Costs) รายได้ (Revenues) และผลตอบแทน (Profits)

❖ ฟังก์ชันต้นทุน (Cost Functions) ฟังก์ชันรายได้ (Revenue Functions) และฟังก์ชันกำไร (Profit Functions)

ในการทำธุรกิจมากมายหลายประเภทนั้น ส่วนใหญ่แล้ว เราสามารถที่จะจำลองรายจ่ายทั้งหมด รายรับทั้งหมด ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับปัจจัยต่างๆ และโดยทั่วไป ที่พบมากที่สุด ดูเหมือนจะเป็นการสร้างแบบจำลองฟังก์ชันต้นทุน (C) ฟังก์ชันรายได้ (R) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่เป็นจำนวนของสินค้า (x) และสามารถที่จะนิยามฟังก์ชันกำไรได้อย่างง่าย ดังนี้

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad (5.7)$$

ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 5.5.1 ในการค้าขายสินค้าประเภทหนึ่งพบว่า สามารถรับซื้อสินค้ามาขายได้ในราคาชิ้นละ 6.50 บาท และสามารถขายได้ในราคาชิ้นละ 7.20 บาท จงหาฟังก์ชันกำไร

วิธีทำ

จากโจทย์ สินค้า 1 ชิ้น ต้องใช้เงินจำนวน 6.50 บาท ในการซื้อมา ดังนั้น สินค้า x ชิ้น ต้องใช้เงิน $(6.5)x$ บาท ซื้อมาและ

สินค้า 1 ชิ้น ขายได้เงิน 7.20 บาท ดังนั้น ขายสินค้า x ชิ้น จะต้องได้เงินทั้งสิ้น $(7.20)x$ บาท ดังนั้น กำไรทั้งหมดที่จะได้จากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น คือ

$$P(x) = (7.20)x - (6.5)x$$

และนี่คือ ฟังก์ชันกำไร ที่ขึ้นกับจำนวนสินค้า (x)

ข้อตกลงในเอกสารนี้ เราจะสมมติว่า จำนวนสินค้าที่ลงทุนซื้อ หรือผลิตทั้งหมด กับจำนวนสินค้าที่ขายได้ทั้งหมด มีจำนวนเท่ากัน หรือ ซื้อหรือผลิตมาเท่าไร ขายได้หมด

❖ จุดคุ้มทุน (Break Even Point)

จุดคุ้มกัน (Break Even Point) หมายถึง จุดหรือระดับของรายได้จากการขายสินค้าหรือบริการที่เท่ากับต้นทุนที่ธุรกิจได้จ่ายออกไป หรือจุดหรือระดับของรายได้ที่ธุรกิจ “เท่าทุน” โดยส่วนที่เลยจุดหรือระดับของรายได้ดังกล่าวคือผลกำไรที่ธุรกิจจะได้นั้นคือ จุดที่

$$R(x) = C(x) \tag{5.8}$$

ตัวอย่างที่ 5.5.2 นางสาวสมปอง เป็นบัณฑิตใหม่จาก มทส. ได้เข้าทำงานกับบริษัทผลิตวิทยุแห่งหนึ่ง ในช่วงทดลองงานนั้น เนื่องจากหัวหน้างานของนางสาวสมปอง ได้เห็นจากใบแสดงผลการเรียนของนางสาวสมปองว่า ได้ลงวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันไปแล้วเมื่อครั้งอยู่ปีหนึ่ง และได้ศึกษาเรื่องการหาฟังก์ชันกำไรมาแล้ว จึงได้มอบหมายให้นางสาวสมปอง หาจุดคุ้มทุนของการผลิตสินค้าของบริษัทเมื่อกำหนดเงื่อนไขต่างๆดังต่อไปนี้

- ค่าใช้จ่ายรวมในกระบวนการผลิตทั้งหมด คือ 200,000 บาท บวกด้วย ค่าตรวจสอบสินค้าซึ่งคิดเป็นตามจำนวนสินค้า ชิ้นละ 10 บาท
- สินค้าสามารถขายได้ในราคาชิ้นละ 50 บาท

เมื่อทำการคำนวณแล้ว นางสาวสมปอง รายงานต่อหัวหน้าอย่างมั่นใจว่า บริษัท จะได้ทุนคืนเมื่อจำหน่ายสินค้าได้เป็นจำนวน 5,000 ชิ้นพอดี จึงพิจารณาว่า นางสาวสมปองได้สร้างชื่อ "เสีย" หรือ ชื่อ"เสียง" ให้กับ มทส. ของเรา

วิธีทำ

จากโจทย์ เราจะได้ว่า ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า จำนวน x ชิ้น รวมทุกขั้นตอนแล้วเท่ากับ $C(x) = 200,000 + 10x$ บาท และรายได้จากการจำหน่ายสินค้าจำนวน x ชิ้น เท่ากับ $R(x) = 50x$ ดังนั้น จะสามารถหาจุดคุ้มทุนได้ คือ

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 50x &= 200,000 + 10x \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

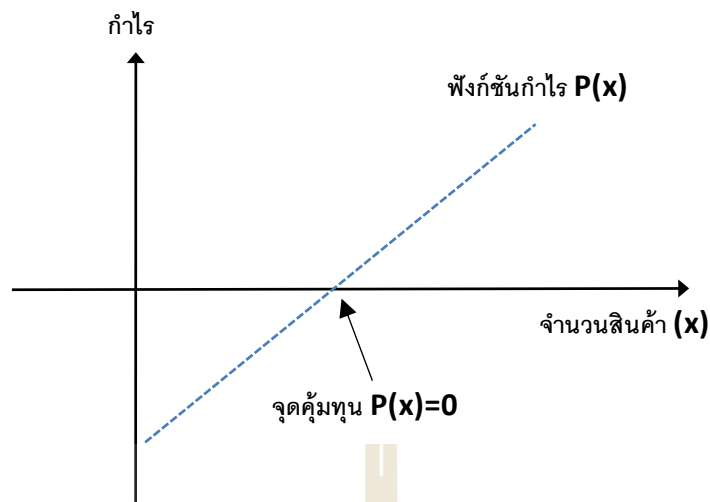
$$x = 5,000 \quad \text{ชิ้น}$$

ดังนั้น นางสาวสมปอง สามารถรักษาชื่อเสียงมหาวิทยาลัยของเราไว้ได้อย่างน่าภาคภูมิใจ 😊

❖ **ผลตอบแทนสูงสุด(Maximum Profits)**

มาถึงตอนนี้แล้ว เราจะสังเกตเห็นว่า ทั้งฟังก์ชันต้นทุน ฟังก์ชันรายได้ และฟังก์ชันกำไรนั้น ล้วนแล้วแต่ขึ้นกับจำนวนสินค้าที่ผลิต ถึงแม้ว่าที่ผ่านมา เราจะสังเกตเห็นว่าฟังก์ชันทั้งสามจะยังคงเป็นประเภทเชิงเส้น(คือกำลังสูงสุดเป็น 1) ซึ่งในกรณีแบบนี้ เราจะเห็นว่า กำไรของเรา จะแปรผันตรงกับจำนวนสินค้าที่ขายได้ หรือ ยิ่งขายมาก ยิ่งได้กำไรมาก ดังนั้น โดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันกำไรจึงสามารถเขียนได้เป็นกราฟ ดังแสดงในแผนภาพที่ 47

แต่ในความเป็นจริงแล้ว ฟังก์ชันทั้งสามประเภทนี้ มักอยู่ในรูปที่ไม่เป็นเชิงเส้น (คือ เส้นกราฟจะเป็นเส้นโค้งที่มีส่วนนูน และส่วนเว้า) ดังนั้น การหาว่า จะต้องจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะสร้างผลตอบแทนได้สูงสุด จึงเป็นสิ่งที่สำคัญ



แผนภาพที่ 47ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างกำไร และจำนวนสินค้า

โดยทั่วไปแล้ว ผลตอบแทนสูงสุด หรือกำไรสูงสุด ของการขายหนึ่งๆ สามารถหาได้จากการแก้สมการ

$$\frac{d P(x)}{d x} = 0 \quad (5.9)$$

เมื่อ x คือ จำนวนสินค้า และ

P คือ ฟังก์ชันกำไร ที่ขึ้นกับจำนวนสินค้า x

หมายเหตุเพิ่มเติมในทางคณิตศาสตร์ สมการ (5.9) สามารถให้ได้ทั้งค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุด ดังนั้น ตามหลักแล้ว จะต้องมีการทดสอบต่ออีกว่า ค่า x ที่ได้จากกระบวนการแก้สมการ(5.9) นั้น ให้ค่าอะไรกันแน่ โดยการใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง แต่ในหัวข้อนี้ ขอเสนอตัวอย่างเฉพาะกรณีที่ให้ค่าสูงสุดเท่านั้น



ตัวอย่างที่ 5.5.3 ถ้ากำหนดให้ ค่าใช้จ่ายในการผลิตรองเท้าจำนวน x คู่ คือ $-1,000 + 2x^2$ บาท และรายได้ทั้งหมดที่ได้จากการขายรองเท้าจำนวน x คู่ คือ $200x + 30$ บาท ถ้าสมมติว่า รองเท้าผลิตมาเท่าไร ก็ขายได้หมด จงหาว่า จะต้องผลิตรองเท้าเป็นจำนวนกี่คู่ จึงจะได้ผลตอบแทนหรือกำไรสูงสุด

วิธีทำ
เราจะได้ ฟังก์ชันกำไร คือ ผลต่างของฟังก์ชัน รายได้ และฟังก์ชันรายจ่าย นั่นคือ

$$P(x) = (200x + 30) - (-1,000 + 2x^2)$$

$$P(x) = -2x^2 + 1,200x + 30$$

หากำไรสูงสุดได้จาก การแก้สมการ $P'(x) = -4x + 1,200 = 0$

จึงได้ว่า $x = 300$ ดังนั้น จะต้องผลิตรองเท้าเป็นจำนวน 300 คู่ จึงจะได้กำไรสูงสุด

$$\begin{aligned} \text{และได้กำไรเป็นเงินทั้งสิ้น } P(x = 300) &= -2(300)^2 + 1,200(300) + 30 \\ &= 180,030 \text{ บาท} \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 5.5.1 ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า สินค้าจำนวน x หน่วย(หน่วยละ 100 บาท) มีค่าใช้จ่าย คิดเป็นฟังก์ชัน ได้คือ $(14 + 3x) \times 1000$ บาท และรายได้ที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าจำนวน x หน่วย(หน่วยละ 100 บาท) สามารถเขียนเป็นฟังก์ชัน ได้คือ $(19x + 3x^2) \times 1000$ จงหา

ก. เขียนฟังก์ชันกำไร

ข. หาจุดคุ้มทุน

ค. บริษัทจะต้องจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะได้กำไรสูงสุด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

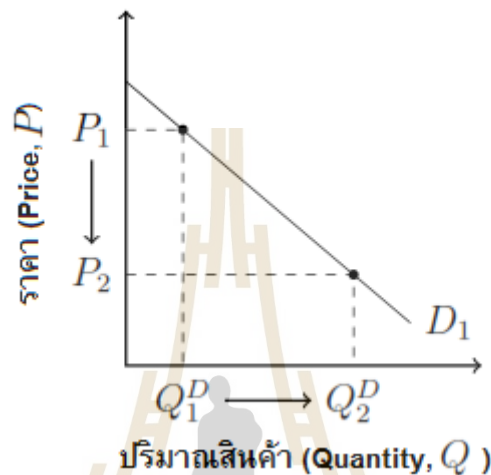
.....

.....

อุปสงค์ (Demand) และ อุปทาน (Supply)

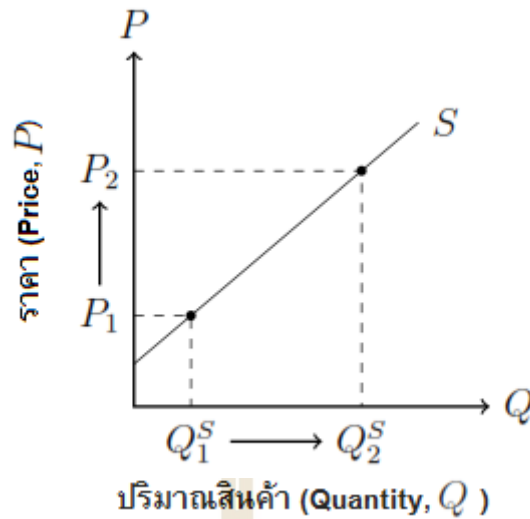
ที่ผ่านมา เราสมมติมาตลอดว่า สินค้าผลิตมาเท่าไร ก็สามารถขายได้หมด แต่ในความเป็นจริงแล้ว เหตุการณ์ไม่ได้เป็นจริงอย่างนั้นเสมอไป ในการกำหนดราคาสินค้าของบริษัทหนึ่งๆ จะต้องมีการศึกษาความต้องการของผู้บริโภคเสียก่อน แน่แน่นอนว่า ถ้ากำหนดราคาสินค้าสูงเกินไป จำนวนผู้ซื้อ ก็จะต้องน้อยลง และถ้าราคาสินค้าต่ำเกินไป จำนวนผู้ซื้อ ก็จะมากขึ้น จนไม่สามารถผลิตสินค้าได้ทัน ดังนั้น บริษัทนั้น จะต้องพิจารณาความต้องการที่จะซื้อของผู้บริโภคเสียก่อน ซึ่งในหัวข้อนี้ จะเกี่ยวข้องกับ อุปสงค์ และอุปทาน ดังนี้

อุปสงค์(Demand, D) หมายถึง ปริมาณสินค้าและบริการชนิดใดชนิดหนึ่งที่มีผู้ต้องการซื้อ ณ ระดับราคาต่างๆ ของสินค้าชนิดนั้นภายในระยะเวลาใดเวลาหนึ่ง โดยสมมติให้ปัจจัยอื่นๆ ที่กำหนดอุปสงค์คงที่ ความต้องการในที่นี้ต้องมีอำนาจซื้อ (purchasing power หรือ ability to pay) ด้วย ถ้าบุคคลใดบุคคลหนึ่งมีแต่ความต้องการในตัวสินค้าโดยไม่มีเงินที่จะจ่ายซื้อ เราเรียกความต้องการลักษณะนั้นว่า “ความต้องการ (want)” ไม่ใช่ “อุปสงค์ (demand)” และอุปสงค์นี้ก็มีกฎที่เป็นธรรมชาติของพฤติกรรมของมนุษย์ นั่นคือ “ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อในขณะใดขณะหนึ่งจะมีความสัมพันธ์ในทางตรงกันข้ามกับราคาสินค้าชนิดนั้น” เราเรียกกฎนี้ว่า “กฎของอุปสงค์ (Law of Demand)” ดังแสดงในแผนภาพที่ 48



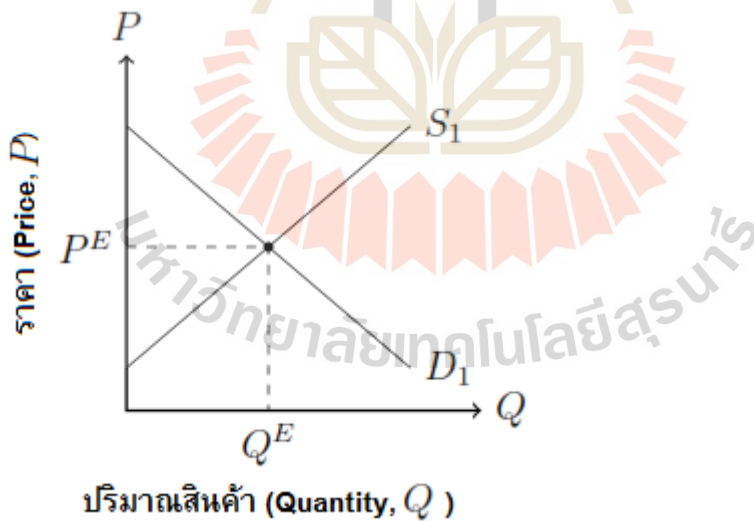
แผนภาพที่ 48 กฎของอุปสงค์ (Law of Demand): เมื่อราคาลดลง ความต้องการสินค้าจะเพิ่มขึ้น

อุปทาน(Supply, S) หมายถึง ปริมาณสินค้าและบริการชนิดใดชนิดหนึ่งที่ถูกผลิตเต็มใจนำออกเสนอขายในตลาดภายในระยะเวลาหนึ่ง ณ ระดับราคาต่างๆ กันของสินค้าและบริการนั้น โดยสมมติให้ปัจจัยอื่นๆ ที่กำหนดอุปทานคงที่ และมีกฎอยู่ว่า “ปริมาณสินค้าที่ถูกผลิตเต็มใจจะนำออกขายในระยะเวลาหนึ่งขึ้นอยู่กับราคาสินค้านั้นๆ ในทิศทางเดียวกัน” เรียกว่ากฎของอุปทาน (Law of Supply) กล่าวคือ เมื่อราคาสินค้าสูงขึ้นปริมาณอุปทานจะเพิ่มขึ้นเนื่องจากผู้ผลิตมีความต้องการที่จะเสนอขายมากขึ้นเพราะคาดการณ์ว่าจะได้กำไรสูงขึ้น ในทางกลับกันเมื่อราคาสินค้าลดลงปริมาณอุปทานจะน้อยลง เนื่องจากคาดการณ์ว่ากำไรที่ได้จะลดลง ดังแสดงในแผนภาพที่ 49



แผนภาพที่ 49 กฎของอุปทาน (Law of Supply) :เมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการที่จะผลิตสินค้าก็เพิ่มขึ้น

ดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium) โดยทั่วไปแล้ว ในการตลาด เมื่ออุปสงค์และอุปทานไม่เท่ากัน จะมีการปรับตัวจนกระทั่งเกิดสมดุลหรืออุปสงค์เท่ากับอุปทาน ดุลยภาพจะไม่เปลี่ยนแปลงตราบเท่าที่ปัจจัยที่กำหนดอุปสงค์และอุปทานไม่เปลี่ยนแปลง ราคาสินค้า ณ จุดที่อุปสงค์เท่ากับอุปทานเรียกว่า “ราคาดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium Price)” ปริมาณสินค้า ณ จุดนั้นเรียกว่า “ปริมาณดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium Quantity)” และเรียกจุดดังกล่าวว่า “ดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium)” ดังแสดงในแผนภาพที่ 50



แผนภาพที่ 50 ดุลยภาพตลาด :ราคาดุลยภาพตลาด (P^E) เท่ากับ ปริมาณดุลยภาพตลาด(Q^E)

สรุปโดยรวมสิ่งที่ควรทราบเกี่ยวกับอุปสงค์ อุปทาน และดุลยภาพการตลาด

1. อุปสงค์ (Demand) หมายถึง จำนวนสินค้าและบริการที่ผู้บริโภคต้องการซื้อในขณะใด ขณะหนึ่ง โดยผู้บริโภคเต็มใจจะซื้อและมีความสามารถซื้อได้ ณ ระดับราคาที่ต่างกัน
2. อุปสงค์ประกอบด้วย ความต้องการ เต็มใจซื้อ และความสามารถที่จะจ่ายซื้อ

3. อุปสงค์เปลี่ยนแปลงได้เพราะ 1. ราคาสินค้าและบริการชนิดนั้นๆ 2. ระดับรายได้ของผู้บริโภค 3. รสนิยมของผู้บริโภค 4. ราคาสินค้าอื่นๆ (สินค้าที่ลักษณะเดียวกันและทดแทน กันได้) 5. จำนวนผู้บริโภค 6. ฤดูกาล
7. ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ 8. การโฆษณา 9. การคาดคะเนเกี่ยวกับราคาสินค้า
4. อุปสงค์หรือความต้องการซื้อจะมีมากขึ้นเมื่อ ราคาของสินค้าหรือบริการลดลง
5. อุปสงค์หรือความต้องการซื้อจะลดน้อยลงเมื่อ สินค้าหรือบริการราคาสูงขึ้น
6. อุปสงค์แบ่ง 2 ประเภทคือ 1. อุปสงค์ส่วนบุคคล 2. อุปสงค์ตลาด
7. สินค้าที่ใช้ประกอบกันซึ่งมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ เช่น รถยนต์กับน้ำมัน กาแฟกับครีมเทียม อุปกรณ์ไฟฟ้ากับค่ากระแสไฟฟ้า ฯลฯ
8. อุปสงค์ส่วนบุคคล หมายถึง อุปสงค์ของผู้ซื้อคนเดียวคนหนึ่งโดยแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคา ของสินค้าชนิดหนึ่งกับปริมาณของสินค้าชนิดนั้น
9. อุปสงค์ตลาด หมายถึง ผลรวมของปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคแต่ละคนต้องการจะซื้อ ณ ราคานั้น
10. อุปทาน (Supply) หมายถึง ความต้องการเสนอขายสินค้าและบริการอย่างใดอย่างหนึ่ง ณ ระดับราคา ต่างๆกัน ในช่วงเวลาใดช่วงเวลาหนึ่ง
11. กฎของอุปทาน เมื่อราคาสินค้าและบริการสูงขึ้น ผู้ผลิตหรือผู้ขายจะผลิตหรือนำสินค้าและ บริการออกมาขายจำนวนมากขึ้น แต่เมื่อราคาสินค้าและบริการลดลง ผู้ผลิตหรือผู้ขายจะผลิตหรือนำสินค้าและบริการ ออกมาขายจำนวนน้อยลง (ปัจจัยอื่นคงที่)
12. ราคาดุลยภาพ หมายถึง ราคาที่ทำให้ปริมาณสินค้าและบริการที่ผู้บริโภคต้องการซื้อเท่ากับปริมาณสินค้าและบริการที่ผู้ผลิตหรือผู้ขายยินดีที่จะขาย
13. “ราคาดุลยภาพ “ ถูกกำหนดขึ้นโดย ระบบตลาด ซึ่งจะมีเพียงราคาเดียวเท่านั้น
14. ปริมาณที่มีการซื้อขาย ณ ระดับราคาดุลยภาพ คือ ปริมาณดุลยภาพ
15. ราคาสินค้าจะถูกกำหนดขึ้นโดย อุปสงค์และอุปทานของตลาดสินค้า

ตัวอย่างที่ 5.5.4 กำหนดให้ อุปสงค์ และอุปทาน เขียนในรูปของฟังก์ชันของราคา(หน่วยเป็นบาท) ดังต่อไปนี้

$$S = 2p + 3$$

$$D = -p + 12$$

จงหาราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพ

วิธีทำ

เนื่องจากสภาวะดุลยภาพ เกิดขึ้นเมื่อ อุปสงค์ เท่ากับ อุปทาน ดังนั้น จึงได้ว่า

$$S = D$$

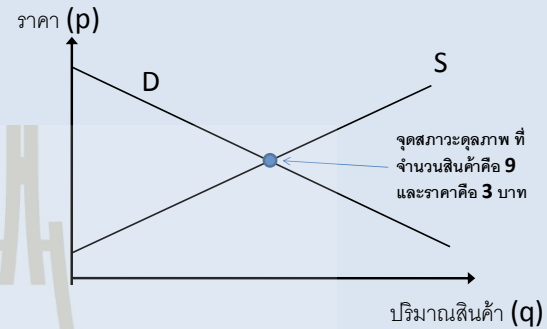
$$2p + 3 = -p + 12$$

นั่นคือ ราคา ที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพคือ $p = 3$ บาท

ราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพนี้ เรียกว่า **“ราคาดุลยภาพ”**

ซึ่งเมื่อนำค่าราคาดุลยภาพนี้ กลับไปแทนใน ฟังก์ชันทั้งสอง ก็จะทำให้ได้ว่า ปริมาณสินค้าที่ ผู้ผลิตประสงค์จะผลิตเพื่อจำหน่าย

จะเท่ากับปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคประสงค์จะซื้อคือ 9 หน่วย ดังแสดงในแผนภาพที่ 51



แผนภาพที่ 51 การหาราคาดุลยภาพ ประจำตัวอย่างที่ 5.5.4

แบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 จงใช้ความรู้ทางด้านต้นทุน รายได้ และผลตอบแทนสูงสุด ในการหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ถ้าในการผลิตสินค้าประเภทหนึ่ง ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกนั้น ต้องใช้ค่าใช้จ่ายแบบเหมาไม่ขึ้นกับจำนวนสินค้าที่จะผลิต) คือ 100 ดอลลาร์ และขั้นตอนที่สองนั้น จะต้องเสียค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า 1 ชิ้น เป็นเงิน 2.00 ดอลลาร์ และตอนจำหน่าย สินค้านี้ 1 ชิ้น จำหน่ายได้ในราคา 2.50 ดอลลาร์ จงหา

ก. ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

ข. ฟังก์ชันรายได้ในการสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

ค. ฟังก์ชันกำไรจากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

ง. จะต้องขายสินค้าเป็นจำนวนกี่ชิ้น ถึงจะถึงจุดคุ้มทุนพอดี

2) จากข้อมูลในข้อหนึ่ง ในเวลาต่อมา เนื่องจากการผลิตสินค้าประเภทนี้ มีในปริมาณที่มาก ดังนั้น ในขั้นตอนที่สองของการผลิตนั้น จึงได้กำหนดให้มีส่วนลดให้ ด้วยส่วนลดเฉลี่ยสำหรับการผลิตสินค้า x ชิ้น คิดเป็น $2 - 0.01x$ บาทต่อชิ้น (ลดเฉพาะในขั้นตอนที่สอง) และตอนจำหน่าย สินค้านี้ 1 ชิ้น จำหน่ายได้ในราคา 2.50 ดอลลาร์ จงหา

ก. ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

ข. ฟังก์ชันรายได้ในการสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

ค. ฟังก์ชันกำไรจากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น ง. จะต้องขายสินค้าเป็นจำนวนกี่ชิ้น ถึงจะถึงจุดคุ้มทุนพอดี

3) ถ้าการผลิตสินค้าประเภทหนึ่ง มีค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องอยู่ 2 ส่วน คือ

- ส่วนเหมา คิดเป็น 1000 ดอลลาร์ (ไม่ว่าจะผลิตสินค้านี้เป็นจำนวนเท่าใดก็ตาม)

- ส่วนเฉลี่ย คือ สำหรับการผลิตสินค้าจำนวน x ชิ้น จะเสียค่าใช้จ่ายส่วนนี้ คิดเป็น $500 - 0.4x$ ดอลลาร์ ต่อชิ้น

จะต้องมีการตั้งราคาสินค้าเป็นที่ต่อสลาห์ต่อชิ้น จึงจะทำให้จุดคุ้มทุนอยู่ที่ 800 ชิ้น

4) กำหนดให้ อุปสงค์ และอุปทาน เขียนในรูปของฟังก์ชันของราคา(หน่วยเป็นบาท) ดังต่อไปนี้

$$S = 0.04p + 8$$
$$D = -0.02p + 17$$

จงหาราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพ

5) กำหนดให้

- ผู้ผลิตจะผลิตสินค้าเป็นจำนวนทั้งสิ้น 1,000 ชิ้น ถ้าราคาขายอยู่ที่ 20 ดอลลาร์ต่อชิ้น และจะผลิตสินค้าเป็นจำนวน 1,500 ชิ้น ถ้าราคาขายอยู่ที่ 25 ดอลลาร์ต่อชิ้น

- ผู้บริโภคยินดีซื้อสินค้าจำนวน 1,500 ชิ้น ถ้าราคาอยู่ที่ 20 ดอลลาร์ต่อชิ้น แต่ปริมาณที่ต้องการซื้อจะลดลงร้อยละ 10 ถ้าราคาสินค้าเพิ่มขึ้นร้อยละ 5

- ทั้งฟังก์ชันอุปสงค์ และฟังก์ชันอุปทาน ดังกล่าว เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

จงพิจารณาหาฟังก์ชันอุปสงค์ ฟังก์ชันอุปทาน และจุดดุลยภาพ

6) จากข้อมูลแสดงในตารางที่ 16 ข้างล่างนี้ แต่ละชุดแสดงข้อมูลที่ต่างกัน ชุดหนึ่งคืออุปสงค์ และอีกชุดคืออุปทาน จงพิจารณาว่า

ตารางที่ 16 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้า และราคา สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 6 (กำหนดราคาสินค้า หน่วยเป็นดอลลาร์)

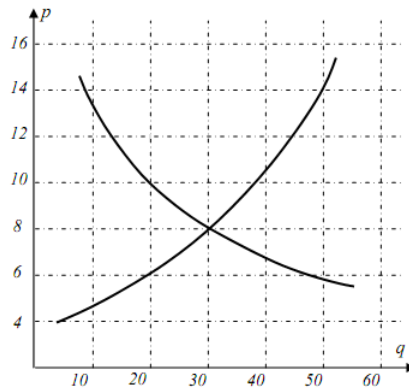
ปริมาณสินค้า (q)	22	15	35	45
ราคา A (p)	8	10	14	18
ราคา B (p)	16	14	10	6

ก. ข้อมูลชุดใด เป็นฟังก์ชันอุปสงค์ และข้อมูลชุดใดเป็นฟังก์ชันอุปทาน พร้อมแสดงเหตุผล

ข. เมื่อราคาเป็น 10 ดอลลาร์ ผู้บริโภค ต้องการที่จะซื้อสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด

ค. เมื่อราคาเป็น 10 ดอลลาร์ ผู้ผลิต ต้องการที่จะผลิตสินค้า เป็นจำนวนเท่าใด

7) แผนภาพที่ 52 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์ และอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่ง จงหา



แผนภาพที่ 52 ความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์ และอุปทาน ของสินค้าชนิดหนึ่ง สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 7

ก. จุดดุลยภาพ คือจุดใด

ข. ความต้องการซื้อ และความต้องการขาย เป็นลักษณะอย่างไร เมื่อสินค้าราคา 6 ดอลลาร์ และราคานี้ควรเพิ่มสูงขึ้นอีกหรือลดลง เพราะอะไร

.....

.....

ค. ในลักษณะเดียวกับข้อ ข. แต่ ณ. ราคาที่ 10 ดอลลาร์

.....

.....

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย ดอกเบี้ยและเงินปีเบื้องต้น

ดอกเบี้ยคงต้น

1. จากสถานการณ์ต่อไปนี้ จงกำหนด มูลค่าเริ่มต้น(P)อัตราดอกเบี้ย(r) และจำนวนงวด(t)
 - 1.1 วันเฉลิมได้ยืมเงินเป็นจำนวน 15,000 บาท เพื่อที่จะจ่ายค่าเทอม และยืมมาแล้วเป็นเวลา 3 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี
 - 1.2 ล่ายองไฝฝันว่าจะงานบวชให้วันเฉลิมหลังจากเรียนจบโดยใช้ทั้งหมดประมาณ 20,000 บาท จึงได้ไปกู้ธนาคารมาในอัตราดอกเบี้ยแบบคงต้นที่ 15% ต่อปี และกำหนดใช้คืนในอีก 5 ปีข้างหน้า
2. จงหา เงินดอกเบี้ย(I)และมูลค่าอนาคต(S)ของเงินกู้แต่ละประเภทต่อไปนี้
 - 2.1 เงินกู้ 2,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี เป็นเวลา 3 ปี
 - 2.2 เงินกู้ 18,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 12.5 ต่อปี เป็นเวลา 6 เดือน
 - 2.3 เงินกู้ 5,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อเดือน เป็นเวลา 3 ปี
 - 2.4 เงินกู้ 16,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี เป็นเวลา 36 เดือน
3. จงคำนวณหาอัตราดอกเบี้ยแบบคงต้น(I)และจำนวนเงินที่ต้องใช้คืน(S)ของเงินกู้แต่ละประเภทต่อไปนี้
 - 3.1 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 10% ต่อปี เป็นเวลา 3 ปี 6 เดือน
 - 3.2 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 8% ต่อปี เป็นเวลา 18 เดือน
 - 3.3 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 12% ต่อปี เป็นเวลา 2 ปี 9 เดือน
 - 3.4 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 8.5% ต่อปี เป็นเวลา 36 เดือน
4. ถ้าต้องเงินมูลค่า \$750 ด้วยดอกเบี้ยแบบคงต้นในอัตรา 4.5% ต่อปี เป็นเวลา 5 ปี จะต้องนำเงินไปฝากเป็นจำนวนเท่าใด
5. จะต้องใช้เวลานานเท่าไร สำหรับการฝากเงินจำนวน 8,300 บาท ถึงจะได้เงินรวมทั้งสิ้น 3,087.60 บาท เมื่อมีการคิดดอกเบี้ยแบบคงต้นในอัตรา 6.2% ต่อปี
6. สันติได้รับมรดกจำนวน 245,000 บาทเขาจะต้องลงทุนเงินจำนวนนี้ในอัตราดอกเบี้ยเท่าไรถึงจะได้กำไรเป็นจำนวนเงิน 27,500 บาทในทุก ๆ 18 เดือน
7. พีรสวัสดิ์ต้องการเงินจำนวน 15,000 บาทในอีก 10 ปีข้างหน้า จงหาว่า ที่อัตราดอกเบี้ยแบบคงต้น 5% ต่อปี พีรสวัสดิ์จะต้องนำเงินเท่าไรไปเริ่มฝาก ณ วันนี้
8. ญาติได้กู้เงินมาซื้อเครื่องสำอางชุดใหม่เป็นจำนวน 600 บาท ซึ่งเงินกู้นี้มีเวลา 2 ปี ในการใช้คืนและคิดดอกเบี้ยแบบคงต้นที่อัตรา 6% ต่อปี ถ้าญาติต้องใช้คืนเป็นรายเดือนในช่วง 2 ปีนี้ เขาจะต้องใช้คืนเดือนละเท่าไร
9. จงหามูลค่าเริ่มต้นของเงิน 3,348 บาทในเวลา 6 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 6.2% ต่อปี
10. จะต้องใช้เวลานานเท่าไรถึงจะทำให้เงิน 4,500 บาทมีมูลค่าเป็น 798.75 บาทถ้าคิดดอกเบี้ยในอัตรา 7.1% ต่อปี
11. ในอัตราดอกเบี้ยเท่าไรที่จะทำให้เงินลงทุน 875 บาทได้เงินดอกเป็นจำนวน 73.5 บาท ในเวลา 18 เดือน
12. จะต้องนำเงินไปฝากเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 1,800 บาทในเวลา 2 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี

13. จะต้องนำเงินไปฝากเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 8,000 บาท ในเวลา 7 เดือน ที่อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี
14. บ้านหลังหนึ่งราคา 120,000 บาทถูกซื้อด้วยเงินมัดจำจำนวน 30,000 บาทเงินส่วนต่างจะถูกจ่ายเป็นงวด ๆ โดยมีค่างวดในอัตรา 7% ต่อปี เป็นเวลา 5 ปี
 - 14.1 จงหาเงินดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น
 - 14.2 เงินที่ต้องจ่ายในแต่ละงวด
15. จงพิจารณาว่าถ้าต้องการยืมเงิน 15,000 บาทเป็นเวลา 6 เดือน ควรจะยืมจากธนาคารใด จากข้อมูลต่อไปนี้
 - ธนาคารไทยพาณิชย์คิดดอกเบี้ยที่ 5% ต่อปี โดยให้เวลา 3 ปี
 - ธนาคารกรุงศรีฯ คิดดอกเบี้ยที่ 4% ต่อปี โดยให้เวลา 4 ปี

ดอกเบี้ยทบต้น

1. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหามูลค่าอนาคตและดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจากการคิดแบบทบต้น
 - 1.1 เงินต้น 600 บาท เป็นเวลา 8 ปี อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน
 - 1.2 เงินต้น 1,000 บาท เป็นเวลา 5 ปี อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน
- 1.3 เงินต้น 750 บาท เป็นเวลา 12 เดือน อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี คิดทบต้นทุกสัปดาห์
- 1.4 เงินต้น 3,000 บาท เป็นเวลา 4 ปี อัตราดอกเบี้ย 9% ต่อปี คิดทบต้นสี่ครั้งต่อปี
2. ควรจะต้องนำเงินไปลงทุนเป็นจำนวนเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็น 10,000 รูเปย์ห์(สกุลเงินประเทศอินโดนีเซีย) ถ้าคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ที่อัตรา 8% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 6 เดือน เป็นเวลา 6 ปี
3. ต้องการที่จะลงทุนโดยมีเงินลงทุน 4,000 เปโซ(สกุลเงินประเทศฟิลิปปินส์)และมีทางเลือกการลงทุนอยู่สองประเภทคือทางเลือกที่หนึ่งให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี โดยคิดที่สิ้นปี ทางเลือกที่สองให้ดอกเบี้ย 9.75% ต่อปี โดยคิดทุก ๆ เดือน เป็นเวลา 1 ปี ถ้ามองว่าทางเลือกใดจะให้กำไรสูงกว่า
4. นางสาวพอลล่าได้ลงทุนเงินจำนวน 5,000 ริงกิต(สกุลเงินประเทศมาเลเซีย) ในอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้น ที่อัตราดอกเบี้ย 6.2% ต่อปี คิดให้ทุก ๆ สิ้นเดือน จงหาว่าหลังจาก 5 ปี นางสาวพอลล่าจะมีเงินรวมเท่าไร
5. จะต้องลงทุนด้วยเงินจำนวนเท่าไรจึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 13,000 ดอลลาร์สิงคโปร์ในเวลา 5 ปี ที่ดอกเบี้ยแบบทบต้น 12% ต่อปี โดยคิดทุก ๆ 3 เดือน
6. จะต้องคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตราเท่าไร เมื่อต้องคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 3 เดือน เป็นเวลา 5 ปี จึงจะทำให้เงิน 3,000 ดอลลาร์บรูไนเพิ่มเป็นเงิน 3,500 ดอลลาร์บรูไน
7. นักลงทุนผู้หนึ่งได้ลงทุน 10,000 เรียล(สกุลเงินประเทศกัมพูชา)กับกองทุนที่ให้ดอกเบี้ย 8.5% ต่อปี คิดให้ปีละ 4 ครั้ง หลังจาก 3 ปี เขาจะได้รับเงินคืนเป็นจำนวนเท่าไร
8. บิดาของอนิรุตต์ได้ฝากเงินจำนวน 500 กีบ(สกุลเงินประเทศสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว)ในวันที่อนิรุตต์เกิด ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นและในวันเกิดครบรอบ 21 ปีของอนิรุตต์ พบว่ามีเงินในบัญชีทั้งหมด 1,326.65 กีบจงหาอัตราดอกเบี้ยของการฝากดังกล่าว
9. ถ้าต้องการลงทุนเงินจำนวน 5,000 จ๊าด(สกุลเงินประเทศเมียนมาร์)ที่อัตราดอกเบี้ย 9% ต่อปี จงหาว่าต้องลงทุนนานเท่าไรจึงจะทำให้เงินเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า เมื่อคิดดอกเบี้ยให้ทุก ๆ 6 เดือน

10. จะต้องฝากเงินเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะได้เงินทั้งหมด 6,000 ด่ง(สกุลเงินประเทศเวียดนาม)ในเวลา 6 เดือน ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นที่ 5% ต่อปีคิดให้ทุกเดือน

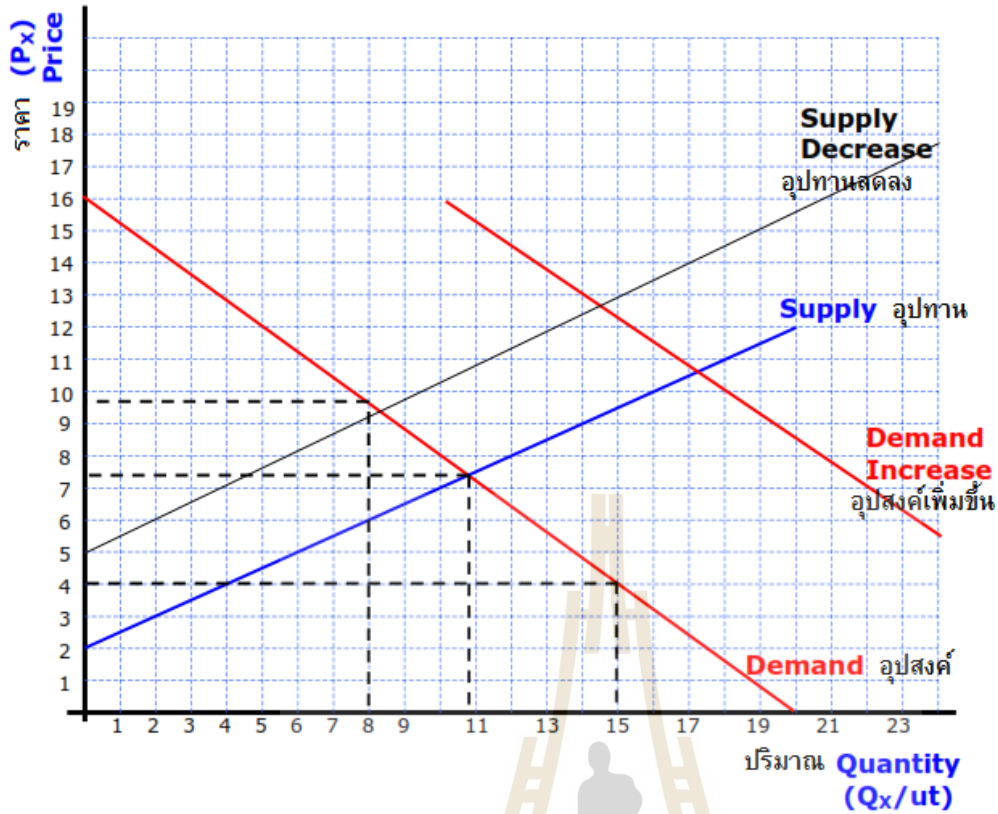
เงินปี

- สำหรับสถานการณ์แต่ละข้อต่อไปนี้ จงหามูลค่าปัจจุบัน
 - 1.1) ส่งเงินงวดเดือนละ 2000 บาท เป็นเวลา 5 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยปีละ 6% และคิดแบบทบต้นให้ทุกๆเดือน
 - 1.2) ส่งเงินงวด 5500 บาท ทุกๆ 4 เดือน เป็นเวลา 6 ปีครึ่ง ที่อัตราดอกเบี้ย 5.6% ต่อปี คิดแบบทบต้นให้ทุกๆงวด
 - 1.3) ส่งเงินงวด 150 บาท ทุกๆเดือน เป็นเวลา 3 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยปีละ 8% และคิดแบบทบต้นให้ทุกๆ 6 เดือน
 - 1.4) อภินิหารต้องการที่จะนำเงินก้อนมาลงทุนและต้องการที่จะได้เงินคืนเป็นงวดๆ งวดละเดือนละเดือนละ 100 บาท ต่อเนื่องไปเป็นเวลา 5 ปี ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยที่อัตรา 7.5% ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นเดือน แล้วจงหาว่า อภินิหารจะต้องนำเงินเท่าไรมาลงทุนในเริ่มต้น
- จากสถานการณ์ต่อไปนี้ จงหาว่า แต่ละงวด จะต้องนำเงินมาเกี่ยวข้องของ งวดละเท่าไร
 - 2.1) ยืมเงินก้อนมาจำนวน 25000 บาท มีกำหนดส่งเป็นงวดๆละเดือนเป็นเวลา 4 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 5.25% ต่อปี
 - 2.2) นายทหารคนหนึ่งได้รับเงินก้อนหลังเกษียณอายุราชการจำนวน 325,000 และมีบริษัทการเงินแห่งหนึ่งเสนอต่อเขาว่า ถ้านำเงินก้อนนี้มาลงทุนรวม บริษัทนี้จะจ่ายเงินคืนให้ทุกๆเดือน เป็นเวลาถึง 15 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นรายเดือนที่ 8% ต่อปี จงหาว่า บริษัทนี้จะต้องจ่ายเงินให้กับนายทหารคนนี้อย่างไร
 - 2.3) วีรพงษ์เป็นทนายประจำตระกูลใหญ่แห่งหนึ่งซึ่งเมื่อเจ้าบ้านถึงแก่กรรมแล้ว ได้มอบหมายให้วีรพงษ์นำเงินมารดกจำนวน 28,000 ดอลลาร์ จ่ายให้กับบุตรคนโตเพื่อใช้ในการศึกษาเล่าเรียนในทุกๆเดือน เป็นจำนวน 4 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 0.625% ต่อเดือน จงหาว่า วีรพงษ์จะต้องจ่ายให้กับบุตรคนดังกล่าว เดือนละเท่าไร
- สามีภรรยาคนหนึ่งต้องการที่จะสะสมเงินไว้ให้ลูกชายได้ใช้ศึกษาต่อในระดับมหาวิทยาลัยโดยเขาทั้งคู่ต้องการที่จะลงทุนกับกองทุนเงินปีกองทุนหนึ่งซึ่งเมื่อถึงเวลาแล้วกองทุนนี้จะสามารถจ่ายให้ลูกชายของเขาได้ในอัตรา 1000 บาทต่อเดือนเป็นเวลา 4 ปี จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินปีนี้ ถ้าคิดดอกเบี้ยที่ 8% ต่อปี
- จุดพัฒนาได้กู้เงินจำนวน 20000 บาท เพื่อซื้อรถยนต์และต้องการที่จะส่งงวดรายเดือนเป็นเวลา 4 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 10.5%/ปี เขาจะต้องจ่ายงวดละเท่าไร
- สุเทพได้วางแผนไว้ว่า เมื่อตนเกษียณในอีก 20 ปีข้างหน้าอยากได้เงินก้อนเป็นจำนวน 300,000 บาท จึงได้ตัดสินใจนำเงินไปฝากไว้กับกองทุนสำหรับผู้เกษียณ และกองทุนนี้ได้คิดดอกเบี้ยให้กับสุเทพในอัตรา 5% ต่อปีและคิดให้ทุกๆเดือน จงหาว่า ด้วยเงื่อนไขเหล่านี้ สุเทพจะต้องนำเงินไปฝากเข้ากองทุนนี้ในทุกๆสิ้นเดือน เป็นครั้งละเท่าไร
- จงหามูลค่าอนาคตของเงิน 1200 บาทที่ฝากเข้ากองทุนๆหนึ่งเป็นประจำทุกๆสิ้นปี เป็นเวลา 15 ปีอย่างต่อเนื่องไม่ขาด โดยกองทุนนี้ได้ให้ดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 7 ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นปี
- อนุสาเป็นผู้จัดการบริษัทแห่งหนึ่ง และตั้งกองทุนออมให้กับพนักงานในสำนักงาน โดยกองทุนนี้มีระยะเวลา 5 ปี หลังจากสอบถามพนักงานแล้วพบว่า พนักงานมีกำลังจ่ายในอัตราครั้งละ 3000 ดอลลาร์และปีละ 4 ครั้ง ในการติดดอกเบี้ยนั้น อนุสาเสนอการให้ดอกเบี้ยในอัตรา 8% ต่อปี และคิดให้ปีละ 4 ครั้ง จงหาว่า พนักงานหนึ่งคน จะได้รับเงินคืนเมื่อสิ้นปีที่ 5 เป็นจำนวนเท่าใด

8. วิเชียรเป็นพนักงานคนหนึ่งของบริษัทของอนุสา(จากข้อ 7.) หลังจากลงทุนในกองทุนกับอนุสาแล้ว พบว่า ตนเองยังต้องมีเงินเหลือเก็บอยู่บ้าง จึงได้นำเงินจำนวน 500 ดอลลาร์ที่ไปฝากไว้กับกองทุนอีกกองทุนหนึ่งในทุกๆเดือน เขาวางแผนไว้ว่าจะลงทุนกับกองทุนนี้เป็นเวลา 10 ปี ในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปี คิดแบบทบต้นให้ทุกๆสิ้นเดือน จงหาว่า เมื่อสิ้นปีที่ 10 แล้ว วิเชียรจะได้เงินก้อนกลับคืนมาเท่าไรในการลงทุนกับกองทุนนี้
9. อยู่มาวันหนึ่งอนุสาพบว่า ในอีก 5 ปีข้างหน้า บริษัทของตนต้องซื้อเครื่องพิมพ์เอกสารเครื่องใหม่ให้กับบริษัท จากการคาดคะเนพบว่า เครื่องพิมพ์เอกสารเครื่องหนึ่งในอีก 5 ปีข้างหน้าจะมีราคาประมาณ 33,000 บาท อนุสาจึงได้นำเงินจำนวนหนึ่งไปฝากกับธนาคารในประเภทฝากประจำ โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 8 ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นเดือน จงหาว่า ด้วยความจำเป็นเหล่านี้ อนุสาจะต้องนำเงินไปฝากคิดเป็นเดือนละเท่าไร จึงจะสามารถมีเงินก้อนเพื่อซื้อเครื่องพิมพ์เอกสารใหม่ได้ในอีก 5 ปีข้างหน้า
10. อิศรำนำเงินไปฝากไว้กับกองทุนเพื่อหวังจะได้เงินก้อนกลับคืนเมื่อถึงเวลาอันสมควร ค่าฝากกับกองทุนนี้เป็นจำนวน 150 โครเนอร์ ในทุกๆสิ้นเดือน ติดต่อกันเป็นเวลา 5 ปี ถ้ากองทุนนี้คิดดอกเบี้ยให้อัตราร้อยละ 7 ต่อปีและคิดทบต้นให้ทุกๆสิ้นเดือน แล้ว จงหาว่า เมื่อครบกำหนดเวลา อิศราจะได้เงินก้อนคืนเป็นจำนวนเท่าไร

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย กลไกทางการตลาดเบื้องต้น

1. จากสถานการณ์จำลองแต่ละข้อต่อไปนี้ จงอธิบายผลกระทบที่จะเกิดต่อ อุปสงค์ อุปทาน ราคาคุณภาพ และปริมาณดุลยภาพ
 - 1.1 สมมติมีข่าวออกมาว่า ชอคโกแลตเป็นสาเหตุของโรคมะเร็งร้ายแรง จะเกิดอะไรขึ้นกับบริษัทผู้ค้าชอคโกแลต
 - 1.2 สมมติบริษัท ก. และ ข. เป็นบริษัทที่ผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าเกิดมาวันหนึ่ง บริษัท ก. เกิดขึ้นราคาสินค้าของตนเอง แล้วอะไรจะเกิดขึ้นกับบริษัท ข.
 - 1.3 ในตลาดการค้าของชอคโกแลต สมมติว่าราคาน้ำตาลซึ่งเป็นผลผลิตหลัก เพิ่มสูงขึ้น แล้วจะเกิดอะไรขึ้นกับกลไกการตลาดของชอคโกแลต
 - 1.4 และในตลาดการค้าของชอคโกแลตอีกอีกเช่นกัน ถ้ามาวันหนึ่ง บริษัทผู้ผลิตได้นำเข้าเครื่องบรรจุสินค้าที่สามารถบรรจุสินค้าได้ดีกว่าและเร็วกว่าเครื่องเดิมเป็นอย่างยิ่ง แล้วอะไรจะเกิดขึ้น
2. จากกราฟด้านล่าง มีข้อสรุปโดยรวมได้ว่า เมื่อผู้ผลิตขึ้นราคาสินค้า $\$ 1$ จะทำให้ผู้บริโภคลดการซื้อสินค้าลงประมาณ 1.25 หน่วย จงตอบคำถามดังต่อไปนี้



- 2.1 จงหาฟังก์ชันของจำนวนสินค้า (Q) ที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ ให้อยู่ในรูปของราคา (P)
- 2.2 จากข้อ 2.1 จงเขียนสมการที่แสดงราคา ในรูปของปริมาณ
- 2.3 เมื่อสินค้าราคา $\$ 4$ จงหาว่าปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ นั้น มีจำนวนเท่าใด
- 2.4 ราคาสูงสุดที่ผู้ซื้อยินดีซื้อสินค้าในจำนวน 8 หน่วย คือเท่าใด
- 2.5 จงหาสมการของเส้นอุปทาน
- 2.6 ถ้าดูจากกราฟด้านบน จงคำนวณหาราคาดุลยภาพ
- 2.7 ถ้าดูจากกราฟด้านบน จงคำนวณหาปริมาณดุลยภาพ
- 2.8 ถ้าคำนวณจากสมการ ณ จุดสมดุลการตลาด จะได้ราคาดุลยภาพและปริมาณดุลยภาพเป็นเท่าใด
- 2.9 จากกราฟ จะเกิดอะไรขึ้นถ้ามีการเพิ่มขึ้นของอุปสงค์
- 2.10 จากกราฟ จะเกิดอะไรขึ้นถ้ามีการเพิ่มขึ้นของอุปทาน

เฉลยแบบฝึกทักษะบทที่ 5 การจัดสรรทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.1 ดอกเบี้ยคงต้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.1

- 1) สหกรณ์คีดอกเบี้ยร้อยละ 4.8 ต่อปี
- 2) ลุงจอห์นกู้เงินมาแล้วเป็นเวลาประมาณ 3 ปี
- 3) เงินที่กู้มามีจำนวนประมาณ 428,572 บาท
- 4) ดอกเบี้ยเท่ากับ 1,312.5 บาท และเงินรวมเท่ากับ 36,312.5 บาท
- 5) อัตราเงินกู้เท่ากับร้อยละ 4 ต่อปี จะต้องนำเงินจำนวน 15,000 บาท ไปปล่อยกู้
- 7) เป็นระยะเวลา 20 ปี

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.2 ดอกเบี้ยทบต้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.2

- 1) จำนวนเงินที่ได้รับคืนคือ 18,009 บาท และจำนวนดอกเบี้ยเท่ากับ 8,009 บาท
- 2) ใน 2 ปี เอกชาติจะต้องเสียดอกเบี้ยรวมทั้งสิ้น 96,750 บาท
- 3) จะได้เงินรวม เป็นจำนวนทั้งสิ้น 60,755.32 บาท
- 4) มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ 28,277.88 บาท
- 5) จะต้องฝากเงินเป็นจำนวน 28,138.33 บาท
- 6) ดอกเบี้ยรวมที่จะได้รับจากธนาคารแรกจะเท่ากับ 4661.94 บาท
และดอกเบี้ยรวมที่จะได้รับจากธนาคารแห่งที่สองจะเท่ากับ 4717.11 บาท
- 7) ยายแหลมจะได้เงินสะสมรวมทั้งหมดเท่ากับ 2,125.63 ดอลลาร์ โดยในนี้เป็นดอกเบี้ยทั้งหมด 805.63 ดอลลาร์
- 8) นักศึกษาจะต้องเปิดบัญชีด้วยเงินเป็นจำนวนทั้งสิ้น 52,418.36 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.3 เงินปี

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.3

- 1) - ติดตามในชั้นเรียน -
- 2) มูลค่าปัจจุบันของการสะสมนี้ใน 10 ปีข้างหน้าคือ 29,755 บาท
- 3) เมื่อสิ้น 3 ปี สามี-ภรรยาคุณจะมีเงินในบัญชีเป็นจำนวนทั้งสิ้น 15,501.33 บาท
- 4) ผู้ปกครองของ น.ส.เรยา ต้องฝากเข้าบัญชีเป็นจำนวน 2,369.93 บาท ทุกๆ 6 เดือน
- 5) เงินทั้งหมดที่จะได้ คือ 75,062.53 บาท
- 6) จะได้รับเงินคืน เป็นจำนวน 122,998.1 บาท
- 7) ราคาเงินสดของทีวีเครื่องนี้ คือ 30,006.25 บาท
- 8) จะต้องผ่อนเดือนละ 15,149.51 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.4 ภาษี

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.4

- 1) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 15,600 บาท
- 2) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 54,000 บาท
- 3) ไม่ต้องเสียภาษี
- 4) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 19,500 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.5 ต้นทุน รายได้ และผลตอบแทนสูงสุด

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.5.1

- ก. - ติดตามในชั้นเรียน -
- ข. - ติดตามในชั้นเรียน -
- ค. - ติดตามในชั้นเรียน -

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2

1) ก. $C(x) = 100 + 2x$ ข. $R(x) = 2.5x$ ค. $P(x) = -100 + 0.5x$

ง. จะต้องขายเป็นจำนวน $x = 200$ ชิ้น

2) ก. $C(x) = 100 + 2x - 0.01x^2$ ข. $R(x) = 2.5x$ ค. $P(x) = -100 + 0.5x + 0.01x^2$

ง. จะต้องขายเป็นจำนวน $x = 78$ ชิ้น

3) ควรตั้งราคาสินค้านี้ไว้ที่ ชิ้นละ 1.475 ดอลลาร์

4) ราคาตุลยภาพ คือ 250 บาท

5) ฟังก์ชันอุปสงค์คือ $D(q) = \frac{-1}{150}q + 30$ ฟังก์ชันอุปทานคือ $S(q) = 0.1q + 10$

และราคาตุลยภาพ คือ 28.75 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย ดอกเบี้ยและเงินปีเบื้องต้น

ดอกเบี้ยคงต้น

- 2.2.1 $I=480$, $S=2,480$ 2.2 $I=1,125$, $S=19,125$ 2.3 $I=2,700$, $S=7,700$ 2.4 $I=3,840$, $S=19,840$
3. 3.1 $I=1,050$, $S=4,050$ 3.2 $I=360$, $S=3,360$ 3.3 $I=990$, $S=3,990$ 3.4 $I=765$, $S=3,765$
4. $P=\$333.33$ 5. ต้องฝากเงินเป็นเวลา 6 ปี 6. จะต้องลงทุนในอัตราดอกเบี้ย 7.5% ต่อปี
7. 10,000 บาท 8. เดือนละ 28 บาท 9. ใช้เวลาทั้งสิ้น 2 ปี 6 เดือน
11. 6.5% ต่อปี 12. 7,729.47 บาทโดยประมาณ 14. 14.1 94,500 บาท 14.2 1,025 บาท
15. ธนาคารไทยพาณิชย์ดีกว่า

ดอกเบี้ยทบต้น

1. 1.1 $S=1,135.47$ บาท , $I=535.47$ บาท 1.2 $S=1,821.94$ บาท , $I=821.94$ บาท
- 1.3 $S=796.35$ บาท , $I=46.35$ บาท 1.4 $S=4,282.86$ บาท , $I=1,282.86$ บาท
2. $P=6,245.97$ รูเปย์ห์ 3. ทางเลือกที่สอง โดยได้เงินรวมทั้งสิ้น 4,407.91 เปโซ
4. 6,811.69 ริงกิต 5. ควรเริ่มต้นด้วยเงินจำนวน 7,197.78 ดอลลาร์สิงคโปร์
6. 3.096% ต่อปี 7. 12,870.19 เรียล
8. 4.8% ต่อปี 9. 7.9 ปี โดยประมาณ 10. $P=5,852.163$ ต่ง

เงินปี

1. 1.1) $R = 2,000$, $i = 0.06/12$, $n=60$ ดังนั้น $P = 103,451.12$
- 1.2) $R = 5,500$, $i = 0.056/4$, $n = 26$ ดังนั้น $P = 119,174.41$
- 1.3) $R = 150 \times 6$, $i = 0.08/2$, $n = 3 \times 2$ ดังนั้น $P = 4,717.92$
- 1.4) $R = 100$, $i = 0.075/12$, $n = 60$ ดังนั้น $P = 4,990.53$
2. 2.1) $P = 25000$, $i = 0.0525/12$, $n = 48$ ดังนั้น $R = 578.57$
- 2.2) $P = 325,000$, $i = 0.08/12$, $n = 180$ ดังนั้น $R = 3105.87$
- 2.3) $P = 28,000$, $i = 0.00625$, $n = 48$ ดังนั้น $R = 677.01$
3. $R = 1000$, $i = 0.08/12$, $n=48$ ดังนั้น $P = 40961.91$

4. $P = 20000, i = 0.105/12, n=48$ ดังนั้น $R = 512.07$
5. $S = 300,000, i = 0.005/12, n = 12 \times 20$ ดังนั้น $R = 729.87$
6. $R = 1,200, i = 0.07, n = 15$ ดังนั้น $S = 30,154.83$
7. $R = 3,000, i = 0.08/12, n = 5 \times 4$ ดังนั้น $S = 72,892.11$
8. $R = 500, i = 0.07/12, n = 10 \times 12$ ดังนั้น $S = 86,542.40$
9. $S = 33,000, i = 0.08/12, n = 12 \times 5$ ดังนั้น $R = 449.12$
10. เมื่อฝากครบ 5 ปีแล้ว อิศราจะได้เงินก้อนเป็นจำนวน 10,738.98 โครเนอร์

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย กลไกทางการตลาดเบื้องต้น

- 1) 1.1 ตอบ อุปสงค์จะลดลง (เส้นกราฟอุปสงค์จะเลื่อนไปทางซ้าย) ทำให้ ราคาดุลยภาพลดลง และปริมาณดุลยภาพลดลงด้วย
- 1.2 ตอบ อุปสงค์ของบริษัท ข. จะเพิ่มขึ้น (เส้นกราฟอุปสงค์ของบริษัท ข. จะเลื่อนไปทางขวา) ส่งผลให้ ราคาดุลยภาพเพิ่มขึ้น พร้อมกับปริมาณดุลยภาพด้วยเช่นกัน
- 1.3 ตอบ อุปทานจะลดลง (เส้นกราฟอุปทานจะเลื่อนไปทางซ้าย) ยังผลให้ ราคาดุลยภาพเพิ่มขึ้นแต่ปริมาณดุลยภาพลดลง
- 1.4 ตอบ อุปทานจะเพิ่มขึ้น (เส้นกราฟอุปทานจะเลื่อนไปทางขวา) ยังผลให้ ราคาดุลยภาพลดลงในขณะที่ปริมาณดุลยภาพเพิ่มขึ้น
- 2) 2.1) $Q = 20 - 1.25P$ 2.2) $P = 16 - 0.8Q$ 2.3) 15 หน่วย
- 2.4) § 9.60 2.5) $P = 2 + 0.5Q$ หรือ $Q = -4 + 2P$
- 2.6) ประมาณ § 7.40 2.7) ประมาณ 10.8 หน่วย
- 2.8) ประมาณ § 7.385 และ 10.769 หน่วย ตามลำดับ
- 2.9) การเพิ่มขึ้นของอุปสงค์ จะทำให้ทั้งปริมาณดุลยภาพและราคาดุลยภาพสูงขึ้น (ดูจากเส้นกราฟ "อุปสงค์เพิ่มขึ้น")
- 2.10) การเพิ่มขึ้นของอุปทาน จะทำให้ราคาดุลยภาพสูงขึ้น แต่ปริมาณดุลยภาพลดลง (ดูจากเส้นกราฟ "อุปทานลดลง")

บทที่ 6

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

ในธุรกิจรูปแบบต่างๆ เรามักจะให้ความสำคัญกับผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุนหลายๆ เสมอ โดย ยิ่งกำไรมาก ก็ยิ่งดี ทว่าแต่ถ้า การประกอบธุรกิจหนึ่งๆ นั้น จำเป็นที่จะต้องมีการลงทุนกับปัจจัยหลายอย่าง อาทิ วัตถุดิบ แรงงาน พื้นที่จัดเก็บ และเงื่อนไขประกอบอื่นๆ ที่สำคัญ จึงทำให้เป็นการยากที่จะพิจารณาว่า ต้องใช้ลงทุนกับปัจจัยและองค์ประกอบส่วนไหน ในอัตราส่วนเท่าไร จึงจะทำให้เกิดกำไรสูงสุด หรือต้องจัดการกับทรัพยากรเหล่านั้น แบบใด ถึงจะประหยัดสูงสุด ในส่วนของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาที่ประกอบด้วยเงื่อนไขหลายอย่างนั้น สามารถจัดการได้ โดยการใช้กำหนดการเชิงเส้นมาช่วย

ในบทนี้ เราจะได้ทำการศึกษาการนำเอากำหนดการเชิงเส้นมาอธิบายปัญหาระบบหนึ่ง แล้วขั้นต่อไปคือ การศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของระบบกำหนดการเชิงเส้นนั้น

6.1 กำหนดการเชิงเส้น(Linear Programing)

ตัวอย่างเหตุการณ์ที่เราสามารถใช้กำหนดการเชิงเส้นมาช่วยแก้ไขได้ อาทิ ถ้านักศึกษาคนหนึ่ง มีความจำเป็นที่จะต้องทำงานควบคู่กับการเรียนด้วย เนื่องจากทางบ้านมีฐานะยากจน และไม่มีทุนสำรองจะกู้ยืมกองทุน กยศ. นักศึกษาคนนี้จึงจำเป็นต้องทำงาน 2 ประเภท และงานทั้งสองประเภทนี้ให้ค่าตอบแทนที่แตกต่างกัน คือ งานส่งพิซซามีอัตราจ้างเท่ากับ 25 บาทต่อชั่วโมง และงานผู้ช่วยคุมห้องคอมพิวเตอร์จ่ายในอัตรา 38 บาทต่อชั่วโมง ถ้านักศึกษาคนนี้ สามารถทำงานได้แค่ 30 ชม. ต่อสัปดาห์ และต้องสร้างรายได้อย่างน้อย 1,250 บาทต่อสัปดาห์ จึงจะสามารถอยู่ได้ คำถามคือ นักศึกษาคนนี้จะต้องทำงานในงานแต่ละประเภทเป็นจำนวนกี่ชั่วโมงในหนึ่งสัปดาห์ จึงจะสามารถสร้างรายได้ได้ตามที่ต้องการ

ปัญหาลักษณะแบบนี้ มักพบบ่อยๆ ซึ่งก่อนที่เราจะสามารถนำความรู้ทางกำหนดการเชิงเส้นมาแก้ไขได้ เรามีความจำเป็นที่จะต้องทราบองค์ประกอบสำคัญพื้นฐานเสียก่อน นั่นคือ การมีความเข้าใจในหลักการเขียนกราฟแสดงสมการ และอสมการเชิงเส้น เช่น เราจะสามารถวาดกราฟของอสมการเชิงเส้น $ax + by \leq c$ หรือ $ax + by \geq c$ เพื่อหาพื้นที่ที่แสดงความเป็นไปได้ของผลเฉลยทั้งหมด ได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. วาดเส้นกราฟขอบเขตคือ $ax + by = c$ ซึ่งเส้นตรงนี้ จะแบ่งพื้นที่ระนาบ ออกเป็นสองฝ่าย ซ้าย และ ขวา หรือ บน และ ล่าง
2. สุ่มจุดพิกัดขึ้นมา 1 จุดจากฝั่งใดฝั่งหนึ่งของเส้นดังกล่าว แล้วลองนำไปแทนค่าในอสมการเริ่มต้น $ax + by \leq c$ หรือ $ax + by \geq c$

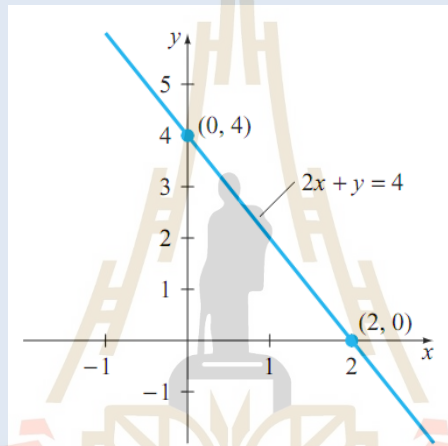
3. ถ้าจุดที่เลือกมานั้น ทำให้อสมการที่ทดสอบเป็นจริง จะได้ทันทีว่า จุดทุกจุดที่อยู่ฝั่งเดียวกับจุดดังกล่าวนั้น เป็น "ผลเฉลย" ของอสมการดังกล่าว และให้แรเงาพื้นที่ตรงไหนเพื่อบ่งบอกชัดเจน เรียกพื้นที่ดังกล่าวที่แรเงานั้นว่า "พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ (Possible Solution Area)"

ตัวอย่างที่ 6.1.1 จงวาดกราฟและระบายพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของอสมการ

$$2x + y \leq 4$$

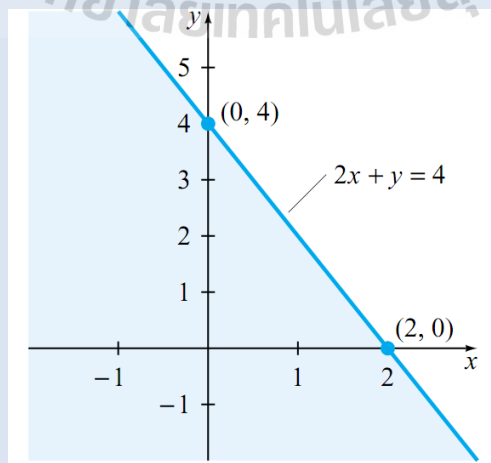
วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เราจะพยายามวาดกราฟเส้นตรง $2x + y = 4$ ก่อน ได้โดยง่าย ดังนี้



ขั้นที่ 2 เราจะสมมติจุดที่อยู่ทางซ้ายมือของเส้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุดที่ชัดที่สุดคือจุดกำเนิด $(0,0)$ แล้วแทนในอสมการเริ่มต้น จะได้ว่า $2(0) + 0 = 0$ ซึ่งให้ค่าน้อยกว่า 4 ดังนั้น จุด $(0,0)$ นี้ ทำให้อสมการนั้นเป็นจริง

ขั้นที่ 3 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า จุดต่างๆ ที่อยู่ฝั่งเดียวกับจุด $(0,0)$ นั้น ทำให้อสมการเป็นจริง เช่นเดียวกัน จึงทำให้สามารถระบายพื้นที่ "ที่ผลเฉลยเป็นไปได้อ" ดังรูปข้างล่างนี้



หลักการพิจารณาพื้นที่ของผลเฉลย

1. พื้นที่ผลเฉลยของอสมการ $y \geq mx + c$ จะเป็นพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = mx + c$ และรวมถึงจุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นตรง $y = mx + c$ นั้นด้วย
2. พื้นที่ผลเฉลยของอสมการ $y \leq mx + c$ จะเป็นพื้นที่ที่อยู่ข้างล่างเส้นตรง $y = mx + c$ และรวมถึงจุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นตรง $y = mx + c$ นั้นด้วย

ตัวอย่างที่ 6.1.2 จงวาดกราฟและระบายพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของระบบอสมการ

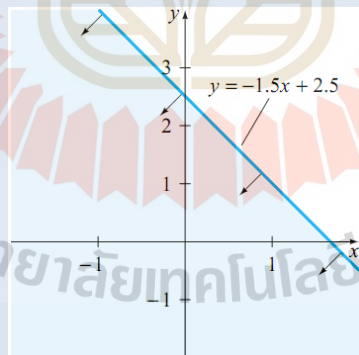
$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

เพื่อความสะดวก ขั้นแรก เราจะพยายามเขียนอสมการแรกนั้น ให้อยู่ในรูปที่มีแค่ตัวแปร y อยู่ทางซ้ายมือก่อน ซึ่งทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 5 \\ 2y &\leq -3x + 5 \\ y &\leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ y &\leq -1.5x + 2.5 \end{aligned}$$

ซึ่งเราสามารถหาพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของอสมการนี้ตั้งรูปภาพข้างล่างนี้

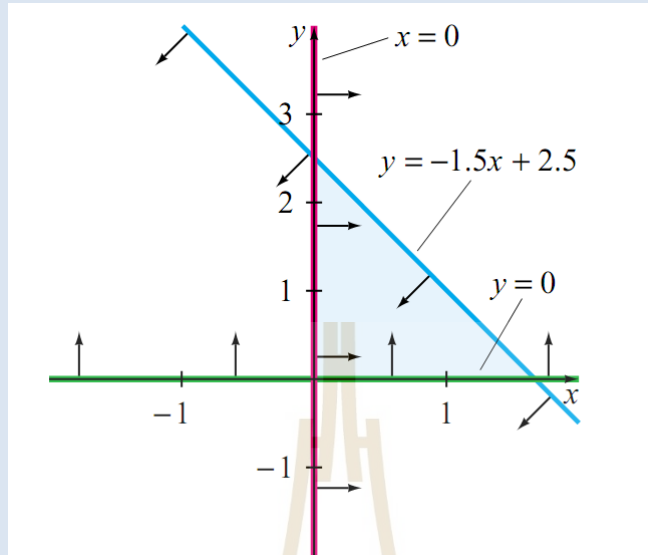


ขั้นต่อมา เราจำเป็นต้องพิจารณาพื้นที่ของผลเฉลยของอสมการอีก 2 อสมการที่เหลือ คือ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ ซึ่งเราจะได้พื้นที่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 เงื่อนไข จะต้องเป็นพื้นที่ที่

1. อยู่ข้างล่างของเส้นตรง $y = -1.5x + 2.5$
2. อยู่ทางขวามือของแกน y (หรือ เส้นตรง $x = 0$) เพื่อสอดคล้องกับเงื่อนไข $x \geq 0$
3. อยู่เหนือแกน x (หรือ เส้นตรง $y = 0$) เพื่อสอดคล้องกับเงื่อนไข $y \geq 0$

ตัวอย่างที่ 6.1.2(ต่อ)

จากทั้ง 3 ข้อนี้ จะทำให้เราสามารถระบุพื้นที่ดังกล่าว ได้ดังรูปภาพข้างล่างนี้



จะเห็นว่า ภาพที่แสดงพื้นที่ของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 6.1.2 นั้น เราสามารถลากเส้นที่ปิดล้อมพื้นที่ดังกล่าวได้ ซึ่ง ถ้าเราจะเรียกพื้นที่ที่สามารถทำแบบนี้ได้ว่า "พื้นที่ผลเฉลยที่มีขอบเขต" และสำหรับพื้นที่ของผลเฉลยที่เราไม่สามารถลากเส้นปิดล้อมได้จะเรียกว่า "พื้นที่ผลเฉลยไม่มีขอบเขต"

ตัวอย่างที่ 6.1.3จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของระบบอสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 4x + y &\geq 4 \\ -x + y &\geq 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ

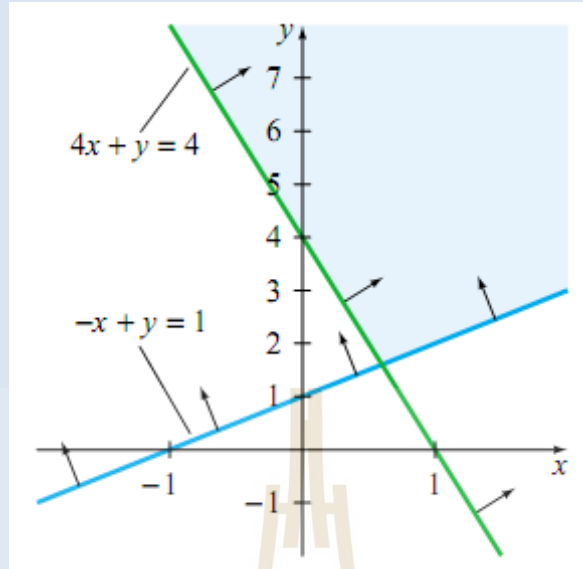
ก่อนอื่น เราจะลากเส้นตรง $4x + y = 4$ นี้ก่อน แล้วลองหีบจุด $(0, 0)$ ที่อยู่ทางด้านล่างของเส้นตรงนี้ (ดูรูปประกอบ) มาทดสอบเงื่อนไข ซึ่งได้ว่า $4(0) + (0)$ ซึ่งจะให้ผลคือน้อยกว่า 4 แต่ที่เราตามหาอยู่ตอนนี้คือพื้นที่ตรงกันข้ามที่ทำให้อสมการนั้น มากกว่า 4 จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง นั่นคือพื้นที่ของผลเฉลยของอสมการแรก

ต่อมาเราจะพิจารณหาพื้นที่ของผลเฉลยที่สอดคล้องกับอสมการ $-x + y \geq 1$

โดยการลากเส้นตรง $-x + y = 1$ ก่อน แล้วพิจารณาในทำนองเดียวกันกับขั้นตอนแรก ก็จะได้ว่าพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง $-x + y = 1$ เป็นพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้

จากนั้น เราจะสามารถระบุพื้นที่ที่สอดคล้องกับทั้ง 2 อสมการได้โดยง่าย ดังแสดงในภาพข้างล่าง

ตัวอย่างที่ 6.1.3(ต่อ)



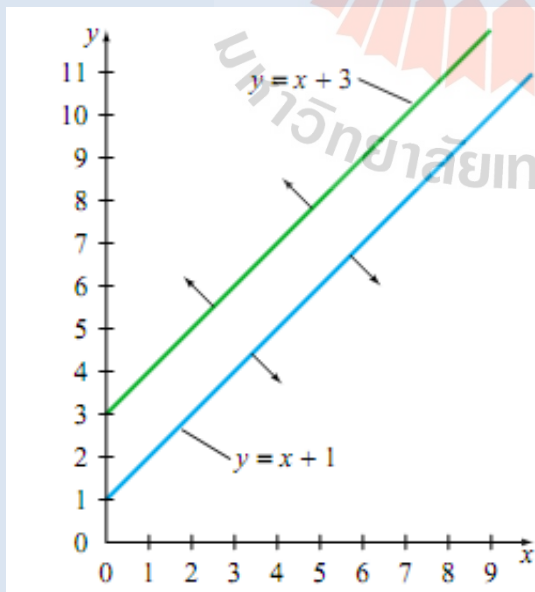
ข้อสังเกต 1. พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่ได้จากตัวอย่าง 6.1.3 นั้น **ไม่มีขอบเขต**

2. ระบบสมการ ไม่จำเป็นจะต้องมีผลเฉลยเสมอไป ดังแสดงในตัวอย่างที่ 6.1.4

ตัวอย่างที่ 6.1.4 จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ผลเฉลยของระบบสมการดังต่อไปนี้

$$-2x + 2y \geq 6 \text{ และ } -x + y \leq 1$$

วิธีทำ เมื่อเราใช้หลักการพิจารณา เหมือนในตัวอย่างที่ผ่านมา เราจะได้ดังภาพข้างล่างนี้ ซึ่ง



1. พื้นที่ที่สอดคล้องกับ $-2x + 2y \geq 6$ คือพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = x + 3$

ดังรูป แต่

2. พื้นที่ที่สอดคล้องกับ $-x + y \leq 1$ คือพื้นที่ที่อยู่ด้านล่างของเส้นตรง $y = x + 1$ และ

3. เนื่องจากทั้งเส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันเท่ากัน คือ 1 เราจึงมั่นใจได้ว่า ทั้งสองเส้นนี้จะขนานกันไปตลอด **ไม่ตัดกัน**

จึงสรุปได้ว่า

ระบบสมการนี้ **ไม่มีผลเฉลย**

แบบฝึกทักษะที่ 6.1.1 จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ของผลเฉลยของระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2x + y \leq 6$

$-x + y \leq 0$

$x \geq 2$

.....

.....

.....

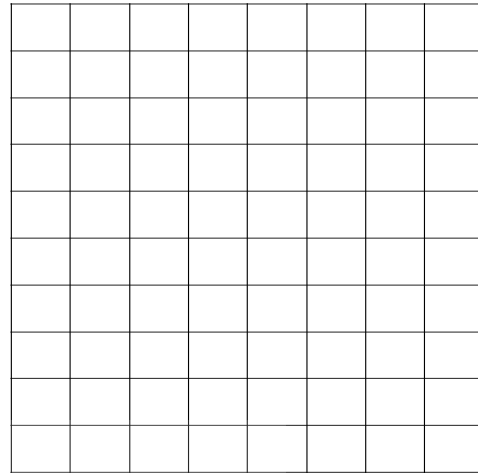
.....

.....

.....

.....

.....



2) $x + y \leq 5$

$-5x + 5y \leq 6$

$y \geq 2$

.....

.....

.....

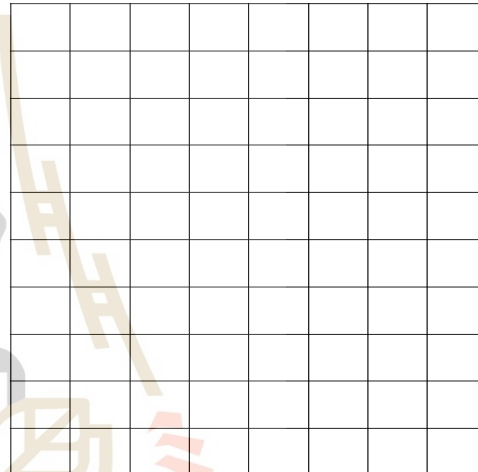
.....

.....

.....

.....

.....



3) $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

.....

.....

.....

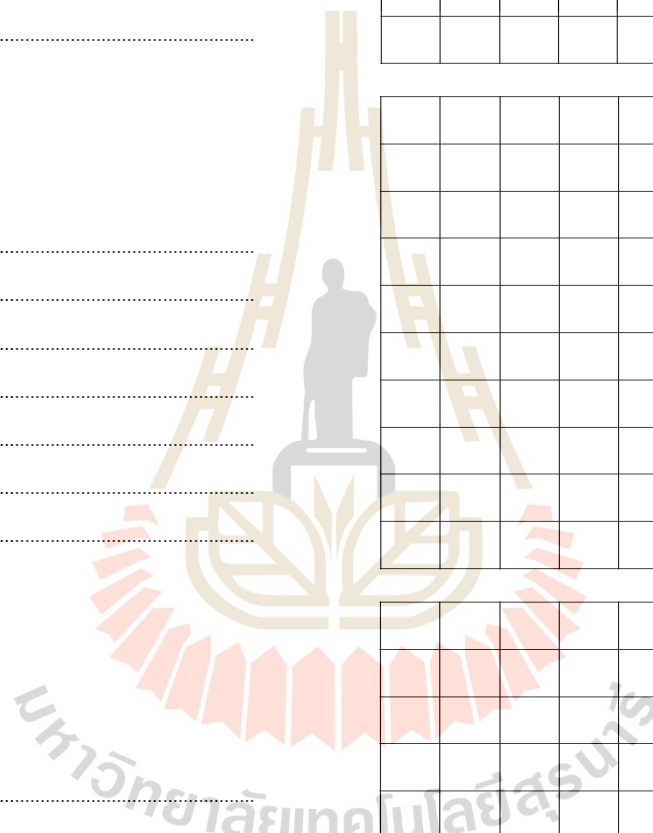
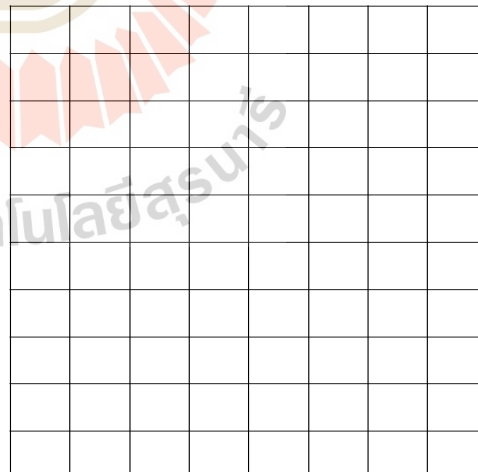
.....

.....

.....

.....

.....



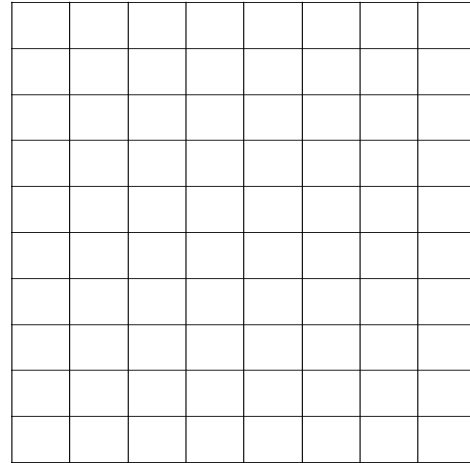
4) $4x_1 + 2x_2 \leq 10$

$2x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0, x_1 \leq 6$

.....



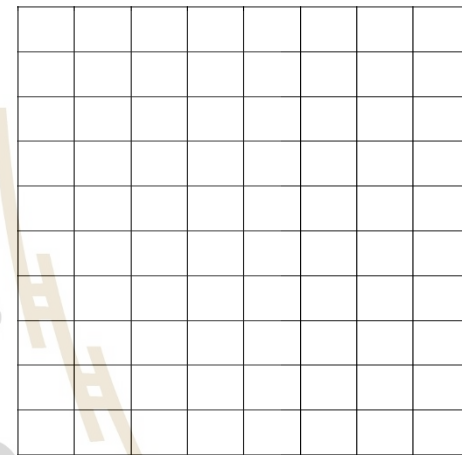
5) $2x - 3y \leq 5$

$x + 3y \leq 11$

$4x + y \leq 15$

$x \geq 0, y \geq 0$

.....



6.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยการเขียนกราฟ(Finding the Optimal Value by Graphing)

ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบที่ประกอบด้วยเงื่อนไข ที่อธิบายโดยอสมการหลายอสมการที่ประกอบขึ้นเป็นกำหนดการเชิงเส้นนั้น สามารถทำได้หลายวิธี ในเอกสารฉบับนี้ จะได้นำเอา 2 วิธีหลักๆ มานำเสนอ อันได้แก่ วิธีหาผลเฉลยด้วยการเขียนกราฟ และการใช้ตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex Table) สำหรับหัวข้อ 6.2 นี้ จะเป็นการสาธิตวิธีการหาผลเฉลยของระบบอสมการกำหนดการเชิงเส้น โดยการใช้การเขียนกราฟ

ปัญหาการกำหนดการเชิงเส้นหนึ่งๆ โดยทั่วไปจะประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย และส่วนเงื่อนไขการพิจารณากำหนดส่วน 2 ส่วนนี้ จะได้มาจากปัญหาจริงในขณะนั้น ที่เราพยายามใช้กำหนดการเชิงเส้นอธิบายอยู่ อาทิ ในหัวข้อที่แล้ว เราได้พูดถึงนักศึกษาคนหนึ่งที่มีความจำเป็นที่จะต้องทำงาน 2 ประเภท ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขใหม่ คือ นักศึกษาคอนันต์ได้ค่าจ้างค่าส่งพิซซาเป็น 105 บาท/ชม., ได้ค่าจ้างค่าคุมห้องคอมพิวเตอร์อีก 80 บาท/ชม. และนักศึกษาคอนันต์ มีสามารถทำงานได้แค่ 30 ชม. ต่อสัปดาห์ และต้องทำให้ได้อย่างน้อย 2,520 บาท ต่อหนึ่งสัปดาห์ จึงจะสามารถอยู่ได้

ถ้าเรากำหนดตัวแปร โดยให้ p แทนจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคอนันต์ทำงานส่งพิซซา ใน 1 สัปดาห์

c แทนจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคอนันต์ทำงานที่ห้องคอมพิวเตอร์ ใน 1 สัปดาห์

ด้วยเงื่อนไขต่างๆ เราจะได้ว่า

- นักศึกษาคอนันต์ทำงานได้แค่ไม่เกิน 30 ชม. ต่อสัปดาห์ หมายถึงถึง

$$p + c \leq 30. \quad \dots\dots\dots(1)$$

- ผลตอบแทนที่ได้จากการทำงานทั้ง 2 ประเภท ต้องมากกว่า 2,520 ต่อสัปดาห์ หมายถึง

$$80c + 105p \geq 2,520 \quad \dots\dots\dots (2)$$

- เนื่องจากทั้งสองตัวแปรที่กำหนดขึ้นนั้น แทนจำนวน ชม. จึงต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ หมายถึง

$$p \leq 0 \quad \text{และ} \quad c \leq 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

จากกรณีนี้ เราสามารถสร้างระบบกำหนดการเชิงเส้นเพื่อที่จะหาว่า ;

1. นักศึกษาคณะนี้ สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด ในหนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนเงินทั้งหมด} = 80c + 105p$$

และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น

2. นักศึกษาคณะนี้ จะต้องทำงานอย่างน้อย กี่ชั่วโมง ใน หนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = p + c$$

และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น เช่นกัน

- หรือ
3. นักศึกษาคณะนี้ จะสามารถทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ได้อย่างมาก กี่ชั่วโมง

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = c$$

และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น เช่นกัน

ซึ่งถึงแม้ว่า ทั้ง 3 ปัญหา นี้ จะมีระบบสมการเงื่อนไข (1), (2) และ (3) เหมือนกัน แต่สมการเป้าหมายจะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับเราจะตอบคำถามอะไร อย่างไรก็ตาม คำตอบของแต่ละสมการเป้าหมายนั้น จะอยู่ภายในขอบเขตบริเวณพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้(ที่เราศึกษาและรู้จักมาแล้วในหัวข้อที่ 6.1) ดังนั้น วิธีหนึ่งที่เราจะสามารถตรวจสอบได้ว่าจุดใดในบริเวณนี้ เป็นผลเฉลยที่เราต้องการ ก็คือ การนำจุดทั้งหมดที่อยู่ในบริเวณนั้น มาแทนค่าในสมการเป้าหมาย แล้วเปรียบเทียบผล ซึ่งเราจะเห็นว่า ในทางปฏิบัติแล้ว เราไม่สามารถนำจุดทั้งหมด ที่มีอยู่เป็นจำนวนมาก มาตรวจสอบได้หมด ดังนั้น เราจะใช้ทฤษฎีหลักๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ มาช่วย ดังนี้

ทฤษฎีบท 6.2.1

1. ถ้าผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นหนึ่งๆ หาได้ ผลเฉลยนั้น จะปรากฏที่จุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้
2. ถ้าผลเฉลยนั้นปรากฏอยู่เป็นจุดมุมที่เชื่อมด้วยเส้นตรง แล้วจะได้ว่า จุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดนั้น ก็จะเป็นผลเฉลยด้วยเช่นกัน
3. กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่มีขอบเขต จะสามารถหาผลเฉลยได้เสมอ
4. กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่ไม่มีขอบเขต อาจจะมีผลเฉลย หรือไม่มีก็ได้

จึงทำให้การหาผลเฉลยของระบบกำหนดการเชิงเส้นหนึ่งๆ โดยวิธีการพหุคูณ สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 วาดกราฟเพื่อหาพื้นที่ผลเฉลยที่เป็นไปได้

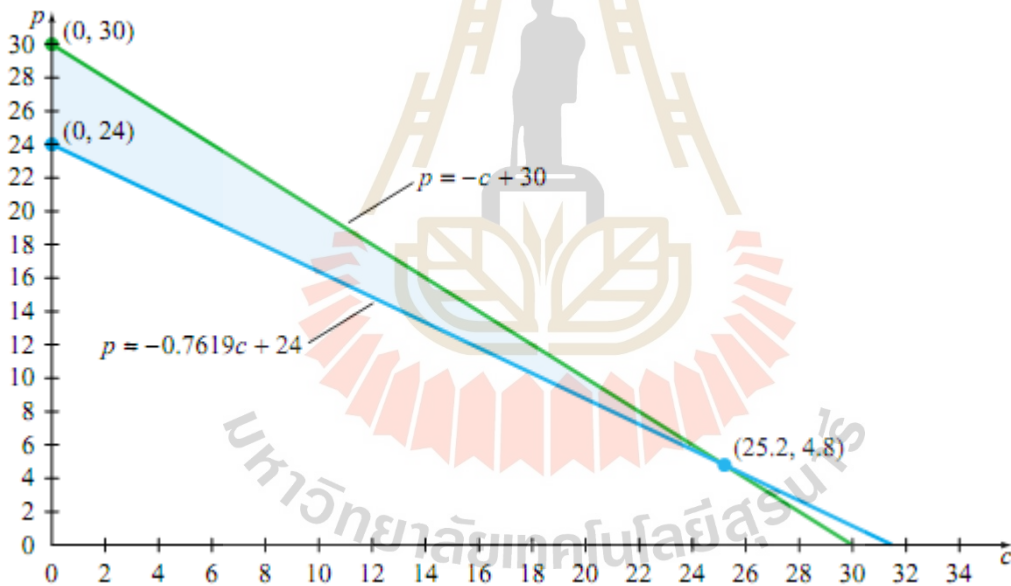
ขั้นที่ 2 หาจุดต่างๆ ที่อยู่เป็นจุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่ได้มาจากขั้นที่ 1

บททวน การหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง 2 เส้น หาได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ที่เราศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ 1.7 และ 1.8

ขั้นที่ 3 ถ้าพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยที่หาได้จากขั้นที่ 1 นั้น มีขอบเขต จะได้ว่า ค่าที่เหมาะสมที่สุด (ซึ่งอาจเป็นค่ามากที่สุด หรือค่าน้อยสุด แล้วแต่กรณีและเหตุการณ์ของปัญหาจริง) ที่กำลังหาอยู่นี้ จะเป็นจุดมุมหนึ่ง จุดมุมใด ที่หาได้จากขั้นที่ 2

ขั้นที่ 4 ถ้าพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยที่หาได้จากขั้นที่ 1 ไม่มีขอบเขต การหาค่าเหมาะสมที่สุด อาจจะต้องพิจารณาเป็นกรณีๆ ไป ซึ่งอาจจะให้เฉพาะค่าต่ำสุด แต่ไม่ให้ค่าสูงสุด หรือทางกลับกัน ก็อาจเป็นไปได้

และถ้าเรานำขั้นตอนเหล่านี้ มาหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นในกรณีของนักศึกษาคนที่เราพูดถึงมานี้ เราจะได้ดังนี้ เราสามารถหาพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังรูป



แผนภาพที่ 53 พื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยของตัวอย่างกรณีของนักศึกษาที่ต้องทำงาน 2 ประเภท

จาก แผนภาพที่ 53 เราจะได้ว่า บริเวณของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้นั้นมีจุดมุมทั้งหมด 3 จุด คือ (0,24), (0,30) และจุด (25.2, 4.8) และขั้นต่อไป เราจะนำจุดมุมเหล่านี้ มาทดสอบกับสมการเป้าหมายในแต่ละข้อ

1. นักศึกษาคณินี้ สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด ในหนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราจะสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนเงินทั้งหมด} = 80c + 105p$$

ตารางที่ 17 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมฯ(c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า(p)	ค่าจ้างที่ได้รับ (บาท) $= 80c + 105p$
0	24	2,520
0	30	3,150
25.2	4.8	2,520

จาก ตารางที่ 17 จะเห็นได้ชัดเจนว่า ณ ตำแหน่งจุด (0,30) ค่าจ้างที่ได้รับนั้น มีจำนวนสูงสุด เราจึงสามารถตอบคำถามข้อแรกข้อนี้ได้แล้วว่า นักศึกษาคนนี้สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวน 3,150 บาท ต่อสัปดาห์ โดยการทำงานส่งพิซซ่า 30 ชม. อย่างเดียว และไม่ทำงานในห้องคอมเลย

2. นักศึกษาคนนี้ จะต้องทำงานอย่างน้อย กี่ชั่วโมง ในหนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = p + c$$

ตารางที่ 18 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมฯ(c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า (p)	จำนวน ชม. รวมที่ทำงาน $= c + p$
0	24	240
0	30	300
25.2	4.8	300

จาก ตารางที่ 18 จะเห็นได้ชัดว่า ที่จุด (0,24) ให้ค่าจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคนนี้ต้องทำงานน้อยสุด ดังนั้น เราจึงสามารถตอบคำถามข้อที่สองนี้ได้แล้วว่า นักศึกษาคนนี้ ต้องทำงานอย่างน้อย 24 ชม. ต่อสัปดาห์ โดยทำงานส่งพิซซ่าประเภทเดียว ไม่ต้องทำในห้องคอมเลย ก็จะสามารถทำรายได้ ได้ตามเป้าหมายกำหนด

3. นักศึกษาคนนี้ จะสามารถทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ได้สูงสุด กี่ชั่วโมง

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = c$$

ตารางที่ 19 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ (c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า (p)	จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ = c
0	24	0
0	30	0
25.2	4.8	25.2

จาก ตารางที่ 19 จะเห็นได้ชัดว่า นักศึกษาคนนี้ ต้องทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ได้มากที่สุดคือ 25.2 ชม. ซึ่งนักศึกษาค้นนี้ จะยังคงต้องทำงานส่งพิซซ่าอีก 4.8 ชม. ถึงจะสามารถสร้างรายได้ตามที่กำหนดได้

ข้อตกลง สมการเป้าหมาย ต่อไป เราจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ P

บันทึก.....

.....

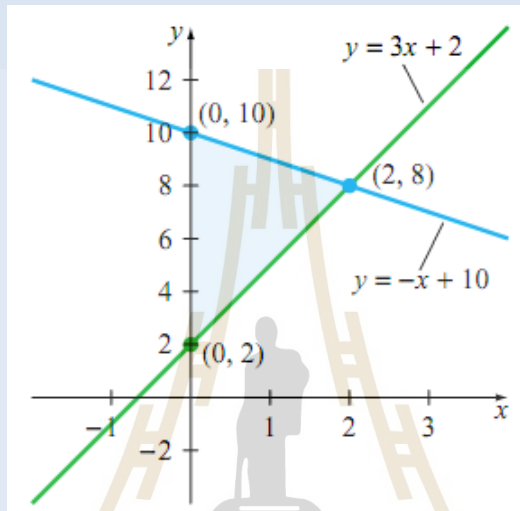
.....

ตัวอย่างที่ 6.2.1 จงหาค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ ของสมการเป้าหมายที่กำหนดโดย

$$P = 6x + 2y$$

$$\text{ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้} \quad \begin{cases} -3x + y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำด้วยการใช้เทคนิคที่ได้ศึกษาไปแล้วในหัวข้อที่ 6.1 เราจะสามารถวาดกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 54



แผนภาพที่ 54 กราฟแสดงพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.1

เราสามารถระบุตำแหน่งของจุดมุมได้ คือ จุด (0,2), (0,10) และจุด (2,8) ต่อไปเราจะพิจารณาแต่ละจุดมุม ว่าจะให้ค่าสมการเป้าหมาย เป็นค่าอะไรกันบ้าง

ตารางที่ 20 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุดสำหรับตัวอย่างที่ 6.2.1

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
x	y	$P = 6x + 2y$
0	2	4
0	10	20
2	8	28

จากตารางที่ 20 จะได้ว่าค่า P มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 28 ซึ่งเกิดจากค่า $x = 2$ และค่า $y = 8$

ตัวอย่างที่ 6.2.1 ได้แสดงการหาค่าเหมาะสมที่สุด สำหรับปัญหาที่กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้แบบมีขอบเขต ในตัวอย่างต่อไปนี้จะ เป็นลักษณะของปัญหาที่กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ แบบไม่มีขอบเขต

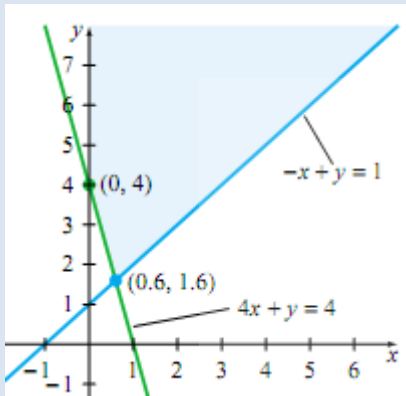
ตัวอย่างที่ 6.2.2 จงหาพิจารณาหาค่าต่ำสุดของกำหนดการเชิงเส้นที่มีสมการเป้าหมายคือ

$$P = 2x + 5y$$

ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ -x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำด้วยการใช้เทคนิคที่ได้ศึกษาไปแล้วในหัวข้อที่ 6.1 เราจะสามารถวาดกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 55



แผนภาพที่ 55 กราฟแสดงพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.2

เห็นได้อย่างชัดเจนว่า พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้นั้น ไม่มีขอบเขต อย่างไรก็ตามเราก็คงจะสามารถหาค่าต่ำสุดของปัญหานี้ได้ เนื่องจากเราจะสังเกตเห็นว่าจุดมุม 2 จุดคือ (0.6, 1.6) และ (0, 4) นั้น อยู่ทางด้านล่างของบริเวณพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ (ในขณะที่เราจะไม่สามารถหาค่าสูงสุดได้เพราะบริเวณดังกล่าวนี้มีเนื้อที่ขึ้นไปข้างบนอย่างไม่มีที่สิ้นสุด) ดังนั้น เราจะนำทั้ง 2 จุดนี้ มาทดสอบหาค่าของสมการเป้าหมาย ดังแสดงได้ใน ตารางที่ 21

ตารางที่ 21 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุดสำหรับตัวอย่างที่ 6.2.2

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
x	y	$P = 2x + 5y$
0.6	1.6	9.2
0	4	20

จากตารางที่ 21 จะได้ว่าค่า P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 9.2 ซึ่งเกิดจากค่า $x = 0.6$ และค่า $y = 1.6$



3) จากข้อมูลในข้อ 2 จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมายเท่ากับเท่าใด และ ณ ตำแหน่งใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + 4y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + 2y \geq 10 \\ 3x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = -5x + 3y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 6x + y \geq 6 \\ -2x + y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

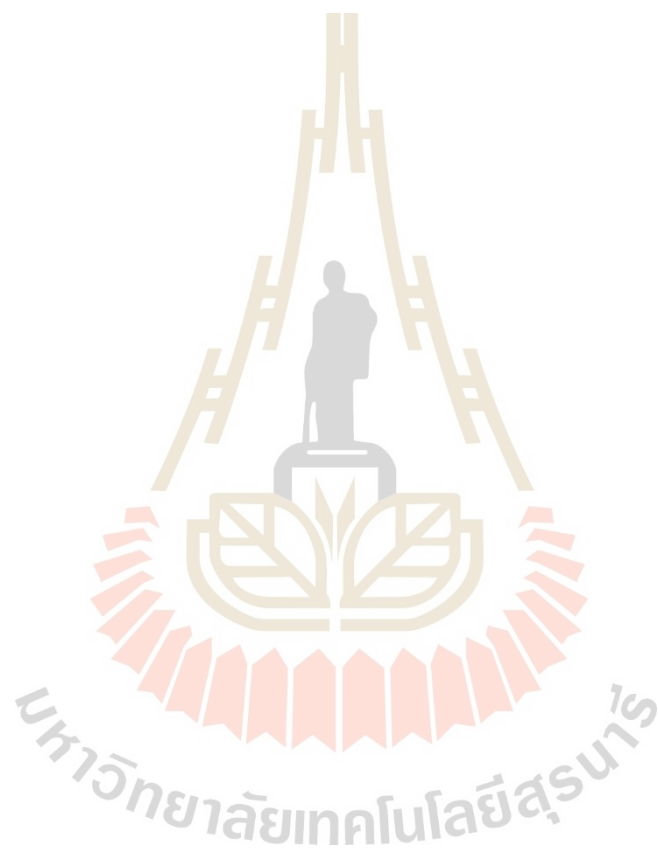
.....

.....

.....

.....

.....



6) ปัญหาค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + 1.25y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 130 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

6.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์เบื้องต้น(Finding the Optimal Value by Complex Table)

ในหัวข้อ 6.2 เราได้ศึกษามาแล้วในเรื่องของการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีเขียนเป็นกราฟ และทดสอบจุดมุม นักศึกษาจะสังเกตเห็นว่า เราจะสามารถเขียนกราฟของระบบในระนาบ 2 มิติได้นั้น ระบบนั้นจะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอิสระไม่เกิน 2 ตัว (โดยปกติคือ x และ y) อย่างไรก็ตาม ในโลกของความเป็นจริงนั้น ระบบกำหนดการเชิงเส้นหนึ่ง อาจจะประกอบด้วยจำนวนตัวแปรอิสระหลายสิบ หรือแม้กระทั่งเป็นร้อยตัว ดังนั้น วิธีหนึ่งทีนอกเหนือจากการเขียนกราฟที่ได้รับความนิยมในการแก้ไขปัญหาคำหนดการเชิงเส้นนั้น คือการใช้ตารางซิมเพล็กซ์

ในกระบวนการการใช้ตารางซิมเพล็กซ์นั้น มีอยู่หลายรูปแบบ ซึ่งการเลือกใช้รูปแบบจัดการแต่ละรูปแบบนั้น จะขึ้นอยู่กับลักษณะของกำหนดการเชิงเส้น ในบรรดารูปแบบต่างๆ ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเพียงแค่รูปแบบเดียว คือกำหนดการเชิงเส้นที่เรียกว่า "ปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน (Standard Maximize Problem)"ซึ่งสามารถให้คำจำกัดความได้ดังนี้

นิยาม 6.3.1 ปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน (Standard Maximize Problem) คือ ปัญหาที่ให้หาค่าสูงสุดของสมการเป้าหมาย และมีระบบสมการเงื่อนไขที่อยู่ในรูป "น้อยกว่า" หรือ "น้อยกว่า หรือเท่ากับ"

ซึ่งมีขั้นตอนการใช้ดังนี้

สมมติว่าเรามีกำหนดการเชิงเส้นคือ จงหาค่าสูงสุดของสมการเป้าหมาย

$$P = 70x + 50y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 240 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต เราจะเห็นว่ากำหนดการเชิงเส้นนี้เป็นปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน(เราไม่สนใจเงื่อนไข $x \geq 0$ และ $y \geq 0$)

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนอสมการเป็นสมการ โดยใช้ตัวแปรส่วนขาด(Slack variable) s_1, s_2 ซึ่งทำได้ดังนี้

$4x + 3y \leq 240$	เขียนเป็นสมการ ได้ว่า	หรือ	$4x + 3y + s_1 = 240$	
			$4x + 3y + s_1 + 0s_2 = 240$(1)
$2x + y \leq 100$	เขียนเป็นสมการ ได้ว่า	หรือ	$2x + y + s_2 = 100$	
			$2x + y + 0s_1 + s_2 = 100$ (2)

และเขียนสมการเป้าหมายใหม่ ให้ประกอบไปด้วยตัวแปรส่วนขาดทั้ง 2 ตัวแปร ได้ว่า

$$-70x - 50y + 0s_1 + 0s_2 + P = \dots\dots\dots(3)$$

ขั้นที่ 2 สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น โดยการนำสัมประสิทธิ์ของสมการ (1) (2) และ (3) ที่เขียนไปในขั้นที่ 1 นั้น มาเขียนในตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น ได้ดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 3 ระบุ **หลักสำคัญ** โดยเลือกจากบรรทัดสุดท้ายของตาราง โดยเลือกหลักที่มีจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้ เราจะเห็นว่า ในบรรทัดสุดท้ายนั้น ค่า -70 คือค่าที่น้อยที่สุด ดังนั้น เราจะได้หลักสำคัญ คือหลักที่ระบายสีข้างล่างนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240

s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 4 ระบุ แถวลำคัญ คือการพิจารณาจากอัตราส่วนของค่าในช่อง "ค่าทางขวามือ" ของตาราง ในแต่ละแถว กับค่าที่อยู่ในหลักสำคัญ ที่เลือกมาได้ในขั้นที่ 4 แล้วเลือกเอาแถวที่ให้ค่าอัตราส่วนดังกล่าวนี้ มีค่า น้อยที่สุด

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	4	3	1	0	0	240	$\frac{240}{4} = 60$
s_2	2	1	0	1	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
	-70	-50	0	0	1	0	

จากตารางข้างบน เราจะเห็นว่า ค่าอัตราส่วนที่น้อยที่สุดคือ 50 ดังนั้น เราจึงได้ตำแหน่งแถวลำคัญ คือ แถวที่ระบายสี ดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 5 ระบุ สมาชิกสำคัญ โดย สมาชิกสำคัญนี้ คือ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งหลักสำคัญ และแถวลำคัญ และจากตารางข้างบนนี้ เราจะได้สมาชิกสำคัญคือ 2

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	<u>2</u>	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 6 หารสมาชิกในแถวลำคัญทั้งหมดด้วยสมาชิกสำคัญ เพื่อจะให้ตำแหน่งของสมาชิกสำคัญที่มีอยู่มีค่าเป็น 1 จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 7 ใช้กระบวนการการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น ในการพยายามทำให้สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในแถวสำคัญนั้น เป็น 0 ยกเว้นค่า ณ ตำแหน่งสมาชิกสำคัญ ซึ่ง ณ เวลานั้น มีค่าเป็น 1 แล้ว

ซึ่ง ในที่นี้ เราจะดำเนินการโดย $R_1 - 4R_2$ แล้วเขียนเป็น R_1 ตัวใหม่ และ

$$R_3 + 70R_2 \quad \text{แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ ตัวใหม่ จึงได้ว่า}$$

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	0	-15	0	35	1	3500

ขั้นที่ 8 ย้อนกลับไปเริ่มทำขั้นที่ 3 ใหม่ จนกระทั่ง ในบรรทัดสุดท้ายของตารางท้ายสุดนั้น ไม่บรรจุค่าที่เป็นลบเลย ซึ่งตอนนี้ เรามีค่า -15 อยู่ เราจึงจะดำเนินการตามขั้นที่ 3 อีกรอบ จึงได้ว่า

หลักสำคัญคือ

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	0	-15	0	35	1	3500

แถวสำคัญคือ

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทาง	ทดสอบอัตราส่วน
--------	-----	-----	-------	-------	-----	--------	----------------

							ขวามือ
s_1	0	<u>1</u>	1	-2	0	40	$40 \div 1 = 40$
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50	$50 \div \left(\frac{1}{2}\right) = 100$
	0	-15	0	35	1	3500	

ดังนั้น สมาชิกสำคัญ คือ สมาชิกที่อยู่แถวและหลักสำคัญ นั่นคือ 1

ต่อไป เราจะดำเนินการโดย $R_2 - \frac{1}{2}R_1$ แล้วเขียนเป็น R_2 ตัวใหม่ และ

$R_3 + 15R_1$ แล้วเขียนเป็น R_3 ตัวใหม่ จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	0	-1/2	3/2	0	30
	0	0	15	5	1	4100

เราจะเห็นว่า ตารางที่ได้มาล่าสุดนี้ ในบรรทัดล่างสุด ไม่มีค่าที่เป็นลบอยู่เลย ดังนั้น เราจึงสามารถอยู่กระบวนการได้

และเราสามารถสรุปคำตอบได้คือ ค่า P ที่มากที่สุดคือ 4100 และเกิดเมื่อ $x = 30$ และ $y = 40$

บันทึก.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6.3.1 จงใช้ตารางซิมเพล็กซ์ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐานต่อไปนี้

กำหนด สมการเป้าหมาย

$$P = 4x + 3y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนสมการเป็นสมการ โดยใช้ตัวแปรส่วนขาด(Slack variable) s_1, s_2 ซึ่งทำได้ดังนี้

$$3x + 2y + s_1 + 0s_2 = 12$$

$$x + y + 0s_1 + 1s_2 = 5$$

$$P = 4x + 3y$$

ขั้นที่ 2 สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	3	2	1	0	0	12
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ขั้นที่ 3 ระบุหลักสำคัญ (คือหลักที่มีจำนวนที่น้อยที่สุดในบรรทัดสุดท้าย)

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	3	2	1	0	0	12
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ตัวอย่างที่ 6.3.1(ต่อ)

ขั้นที่ 4 ระบุแถวสำคัญ (คือแถวที่มีอัตราส่วนของค่าในช่องขวาสุดกับค่าในหลักสำคัญ น้อยสุด)

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	3	2	1	0	0	12	$12/3 = 4$
s_2	1	1	0	1	0	5	$5/1 = 5$
	-4	-3	0	0	1	0	

ขั้นที่ 5 ระบุสมาชิกสำคัญ คือ 3

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	<u>3</u>	2	1	0	0	12	$12/3 = 4$
s_2	1	1	0	1	0	5	$5/1 = 5$
	-4	-3	0	0	1	0	

ขั้นที่ 6 หารทั้งแถวสำคัญ ด้วยสมาชิกสำคัญ จะได้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	$2/3$	$1/3$	0	0	4
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ตัวอย่างที่ 6.3.1(ต่อ)

ขั้นที่ 7 ใช้กระบวนการการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น ในการพยายามทำให้สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในแถวสำคัญนั้น เป็น 0 ยกเว้นค่า ณ ตำแหน่งสมาชิกสำคัญ ซึ่ง ณ เวลานี้ มีค่าเป็น 1 แล้ว

จะดำเนินการโดย $R_2 - R_1$ แล้วเขียนเป็น R_2 ตัวใหม่ และ

$R_3 + 4R_1$ แล้วเขียนเป็น R_3 ตัวใหม่ จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	$2/3$	$1/3$	0	0	4
s_2	0	$1/3$	$-1/3$	1	0	1
	0	$-1/3$	$4/3$	0	1	16

ขั้นที่ 8 จากตารางล่าสุดนี้ จะเห็นว่า ในบรรทัดสุดท้าย มีค่าที่เป็นลบอยู่ จึงจะต้องดำเนินการตั้งแต่ขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นที่ 7 อีกรอบ จนกระทั่งได้ตารางรอบสอง ดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	0	1	-2	0	2
s_2	0	1	-1	3	0	3
	0	0	1	1	1	17

ซึ่งตารางใหม่ที่ได้อาจจากการทำรอบสองนี้ ในบรรทัดสุดท้าย ไม่มีค่าติดลบเลย จึงสามารถหยุดกระบวนการ และสรุปคำตอบได้คือ ค่า P ที่มากที่สุดคือ 17 และเกิดเมื่อ $x = 2$ และ $y = 3$

ข้อสังเกต 1. ในการหาค่าต่ำสุดของ P เราสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนเป็นการหาค่าสูงสุดของ $-P$ แทน เพื่อที่จะสามารถใช้กระบวนการที่เราทำมานี้ เช่น ถ้าโจทย์ให้หาค่าต่ำสุดของสมการเป้าหมาย $C = -x + 3y$ ก็จะสามารถทำได้โดยการหาค่าสูงสุดของสมการเป้าหมาย $P = -C = x - 3y$

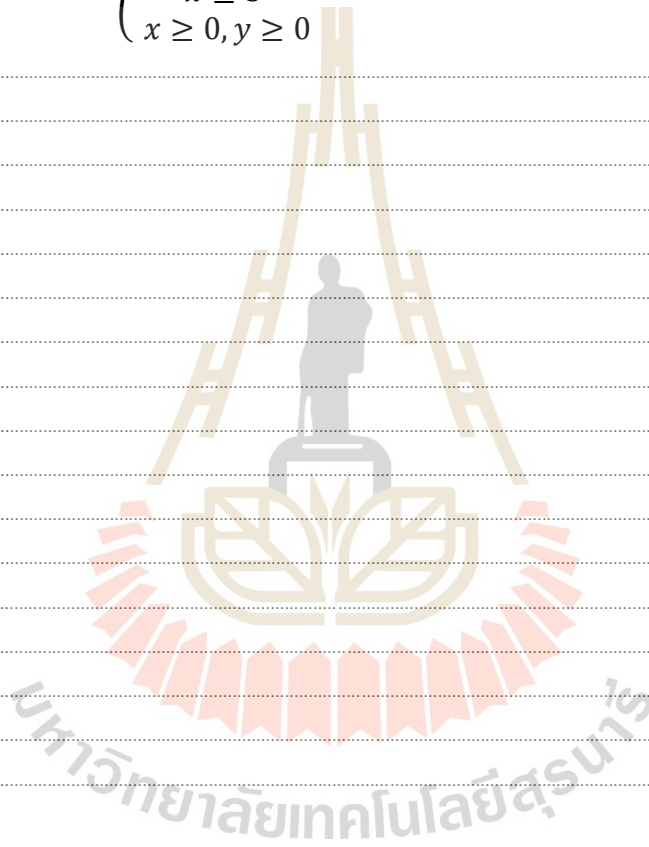
2. ถ้าเงื่อนไขที่นำมาบางข้อเป็นแบบ “มากกว่า หรือเท่ากับ” ให้หน้า (-1) คูณตลอด เพื่อเป็น “น้อยกว่า หรือเท่ากับ” ซึ่งก็จะกลายเป็นเงื่อนไขของปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน และสามารถแก้ได้ด้วยวิธีที่เราได้ศึกษากันไปแล้วเช่นกัน



3) ค่าสูงสุดเมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย $P = 2x + y$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



4) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ 3x + y \geq 15 \\ x \leq 8, y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6.4 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน(Applications in Daily Life)

เมื่อคราที่พายุโหมกระหน่ำจู่โจมสนามบิน Chicago's O'Hare นั้น ส่งผลให้มีการปิดสนามบินอย่างกะทันหัน และเนื่องจาก ทางสายการบินอเมริกันได้ใช้กำหนดการเชิงเส้นในการควบคุม และวางแผนการเข้า-ออกของเที่ยวบิน การจองโรงแรม การจัดสรรคิวของพนักงานประจำเครื่องบิน และรวมถึงการจัดสรรทรัพยากรเชื้อเพลิง ดังนั้น กำหนดการเชิงเส้นจึงมีบทบาทเป็นอย่างมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในสถานการณ์กะทันหันแบบนี้ ในการณ์นี้ ท่านประธานกลุ่มเทคโนโลยีการตัดสินใจของสายการบินอเมริกัน ได้ให้ความคิดเห็นต่อกำหนดการเชิงเส้นว่า "การหาค่าเฉลยให้กับกำหนดการเชิงเส้นในเวลาอย่างรวดเร็ว นั้น มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ถ้าเราประสบกับปัญหาในลักษณะแบบนี้ แล้วจะเห็นว่า เที่ยวบินหลายเที่ยวบินต้องถูกยกเลิก ซึ่งนั่นก็หมายถึงว่า เรามีผู้โดยสารและเครื่องบิน กระจัดกระจายตามที่ต่างๆ โดยไม่เป็นไปตามแผน ดังนั้น สิ่งที่เราจำเป็นต้องเร่งด่วนคือวิธีการที่จะสามารถควบคุมและนำระบบดำเนินการทั้งหลาย ให้กลับเข้าสู่สภาวะปกติให้เร็วที่สุด" และกำหนดการเชิงเส้น ก็เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและเชื่อถือ ในการจัดการกับสถานการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขรอบข้าง ได้อย่างมีประสิทธิภาพ



แผนภาพที่ 56 พายุหิมะและลมฝน มีผลอย่างมากในการคมนาคมขนส่งทางอากาศ และกำหนดการเชิงเส้นได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในการจัดการกับสถานการณ์ในลักษณะแบบนี้

หลังจากที่เราได้ศึกษาการแก้ปัญหาที่กำหนดการเชิงเส้นมาแล้ว ทั้งด้วยวิธีการเขียนกราฟ และวิธีการใช้ตารางซิมเพล็กซ์ ในบทนี้ เราจะได้มาศึกษาการนำกระบวนการที่กำหนดการเชิงเส้น ไปแก้ไขปัญหาที่เราสามารถพบได้ในหลายๆ บริษัท โดยภาระงานหลักของเราในหัวข้อนี้ ก็คือ การพยายามสร้างกำหนดการเชิงเส้นจากตัวปัญหาจริงที่มีการระบุสมการเป้าหมาย และเงื่อนไขประกอบ หลังจากนั้น เราจะเลือกใช้เทคนิคที่จะนำมาหาค่าเฉลย การศึกษาแต่ละตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการเพิ่มทักษะการมองและตีความโจทย์ปัญหาจริง ให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น

โดยกระบวนการโดยรวมแล้ว ประกอบด้วย

- ขั้นที่ 1** การกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้อง มีหลักการคือ เราจะกำหนดตัวแปรให้เป็นจำนวนหรือปริมาณของสิ่งที่โจทย์ถามถึง ซึ่งโดยปกติแล้วอาจมีมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ตัวแปร
- ขั้นที่ 2** เขียนสมการเป้าหมาย โดยพิจารณาจากโจทย์ว่า โจทย์ถามหาอะไรและเกี่ยวข้องกับจำนวนหรือปริมาณของสิ่งที่เรากำหนดให้เป็นตัวแปรแล้วในขั้นที่ 1 อย่างไร
- ขั้นที่ 3** เขียนเงื่อนไขทั้งหมดในรูปสมการ โดยพิจารณาจากข้อความในโจทย์และความเชื่อมโยงกับตัวแปรที่เรากำหนดขึ้นในขั้นที่ 1
- ขั้นที่ 4** มาถึงขั้นนี้แล้ว เราจะได้กำหนดการเชิงเส้นออกมา 1 ชุด ซึ่งประกอบด้วย สมการเป้าหมาย 1 สมการ และสมการเงื่อนไข ดังนั้น ต่อไปที่เหลืออยู่ คือการเลือกเอาวิธีที่เหมาะสม ที่เราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ 6.2 และ 6.3 มาแก้ปัญหาที่กำหนดการเชิงเส้นนี้

ตัวอย่างทั้งหลายต่อไปนี้จะทำให้นักศึกษาได้มีความเข้าใจในกระบวนการทั้ง 4 ได้ดียิ่งขึ้น

บันทึก.....





ตัวอย่างที่ 6.4.1 บริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซ มีความต้องการที่จะซื้อสินค้าเป็นจำนวนทั้งสิ้น 3,600 ชิ้น ซึ่งนั้นจำนวนนี้ จะต้องประกอบด้วยสินค้า 2 ประเภท คือ ประเภท ก. และประเภท ข. จากการสำรวจคุณสมบัติของสินค้าทั้งสองประเภทนี้พบว่า

- สินค้าประเภท ก. ต้องใช้พื้นที่ในคลังสินค้าเพื่อจัดเก็บเป็นจำนวน 3 ตารางฟุต และมีราคา 9 บาทต่อสินค้า 1 ชิ้น และเมื่อจำหน่ายต่อแล้ว จะได้กำไร 3 บาท ต่อ 1 ชิ้น
- สินค้าประเภท ข. ต้องใช้พื้นที่ในคลังสินค้าเพื่อจัดเก็บเป็นจำนวน 1 ตารางฟุต และมีราคา 13 บาทต่อสินค้า 1 ชิ้น และเมื่อจำหน่ายต่อแล้ว จะได้กำไร 4 บาท ต่อ 1 ชิ้น

ถ้าบริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซนี้ มีงบประมาณทั้งหมดคือ 39,000 บาท และมีปริมาณพื้นที่จัดเก็บสินค้าอยู่ทั้งสิ้น 6000 ตารางฟุต แล้ว จงหาว่าจะต้องซื้อสินค้าแต่ละประเภทเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ และส่งผลให้ได้กำไรสุทธิสูงสุด

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 กำหนดตัวแปร

เนื่องจากโจทย์ถามหาจำนวนสินค้าแต่ละประเภท ซึ่งมีอยู่ 2 ประเภท ดังนั้น เราจะกำหนดตัวแปรได้คือ ให้

x แทน จำนวนสินค้าประเภท ก.

และ y แทน จำนวนสินค้าประเภท ข.

ขั้นที่ 2 กำหนดสมการเป้าหมาย

เนื่องจากโจทย์ถามถึงกำไรสูงสุดที่เกิดจากการขายต่อสินค้าทั้ง 2 ประเภทนี้ และ จากเงื่อนไขที่ให้มา คือ สินค้า ก. ให้กำไร 3 บาท/ชิ้น และสินค้า ข. ให้กำไร 4 บาท/ชิ้น จึงได้ว่า

$$\text{กำไรสุทธิ} = 3(\text{จำนวนสินค้า ก.}) + 4(\text{จำนวนสินค้า ข.})$$

นั่นคือ ถ้าเรากำหนดให้ P แทนสมการเป้าหมาย จะได้ว่า

$$P = 3x + 4y$$

ขั้นที่ 3 กำหนดเงื่อนไข

จะสังเกตเห็นว่า เรามีเงื่อนไขข้อจำกัดอยู่ 3 อย่างคือ จำนวนชิ้นที่จะซื้อทั้งหมด (คือ 3,600 ชิ้น) ปริมาณพื้นที่ในการจัดเก็บ(คือ 6,000 ตารางฟุต) และงบประมาณทั้งหมดที่จะใช้ซื้อสินค้า(คือ 39,000 บาท) ดังนั้น เราเขียนเงื่อนไขในรูปของสมการได้ ดังนี้

- เงื่อนไขของพื้นที่จัดเก็บ ซึ่งมีพื้นที่จัดเก็บทั้งหมดคือ 6,000 ตารางฟุต จากโจทย์กำหนด พื้นที่ที่ต้องใช้ในการจัดเก็บสินค้าประเภท ก. 1 ชิ้น คือ 3 ตารางฟุต และพื้นที่ที่ต้องใช้ในการจัดเก็บสินค้าประเภท ข. 1 ชิ้น คือ 1 ตารางฟุต

จึงได้ว่า $3(\text{จำนวนสินค้า ก.}) + 1(\text{จำนวนสินค้า ข.}) \leq$ จำนวนพื้นที่ที่มีให้ทั้งหมด

นั่นคือ $3x + y \leq 6,000$

ตัวอย่างที่ 6.4.1 (ต่อ)

- เงื่อนไขของงบประมาณที่มีให้ นั่นคือ 39,000 บาท
จากโจทย์ สินค้าประเภท ก. 1 ชิ้นต้องซื้อเป็นราคา 9 บาท และสินค้าประเภท ข. 1 ชิ้น ต้องซื้อเป็นเงิน 13 บาท ดังนั้น จะได้ว่า

$$9(\text{จำนวนสินค้า ก.}) + 13(\text{จำนวนสินค้า ข.}) \leq \text{งบประมาณที่สามารถใช้ในการซื้อได้}$$

นั่นคือ $9x + 13y \leq 39,000$

- เงื่อนไขจำนวนชิ้นทั้งหมดที่ต้องการซื้อ
จากโจทย์บริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซต้องการซื้อสินค้าเป็นจำนวนรวมทั้งสิ้น 3,600 ชิ้น

ดังนั้น $(\text{จำนวนสินค้า ก.}) + (\text{จำนวนสินค้า ข.}) \leq 3,600$

นั่นคือ $x + y \leq 3,600$

นอกจากนี้ เนื่องจาก จำนวนสิ่งของต้องเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเราจะได้เพิ่มอีกว่า

$$x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

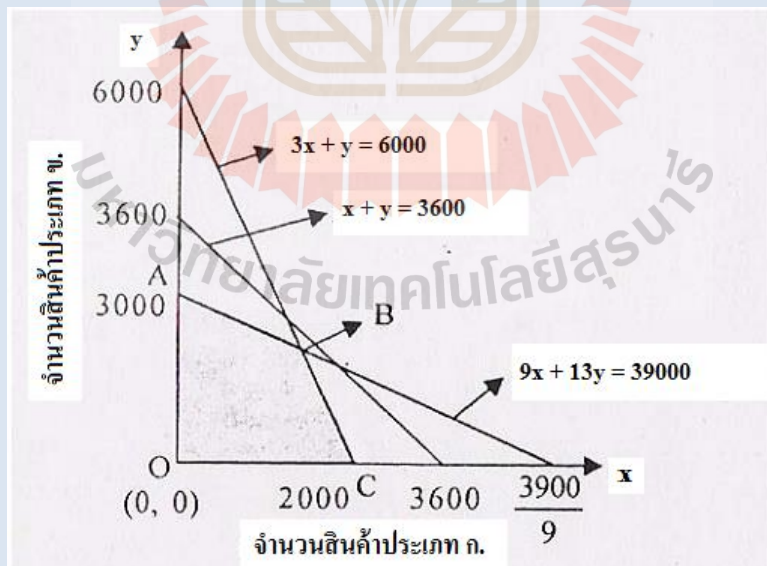
ขั้นที่ 4 เขียนกำหนดการเชิงเส้นที่ได้ และเลือกวิธีมาแก้

จากทั้ง 3 ชั้น เราจะเขียนเป็นกำหนดการเชิงเส้นคือ

สมการเป้าหมาย $P = 3x + 4y$

ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6,000 \\ 9x + 13y \leq 39,000 \\ x + y \leq 3,600 \\ y \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

ซึ่งเราสามารถเขียนกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ คือ



แผนภาพที่ 57 พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ สำหรับตัวอย่างที่ 6.4.1

2) นายปีเตอร์ ได้เข้ามาในเมืองไทยเพื่อทำธุรกิจขายข้าวและข้าวสาลี โดยแต่ละครั้ง เขามีเงินลงทุนทั้งหมด 1,500 บาท ราคาข้าว 1 กระสอบที่เขาต้องซื้อคือ 180 บาท และราคาข้าวสาลี 1 กระสอบคือ 120 บาท และในร้านของเขา มีพื้นที่ทั้งหมดในการจัดเก็บสินค้าทั้ง 2 ประเภทนี้ทั้งสิ้น 10 กระสอบเท่านั้น และถ้าเมื่อพิจารณาการขายต่อของสินค้าสองประเภทนี้แล้วปรากฏว่า

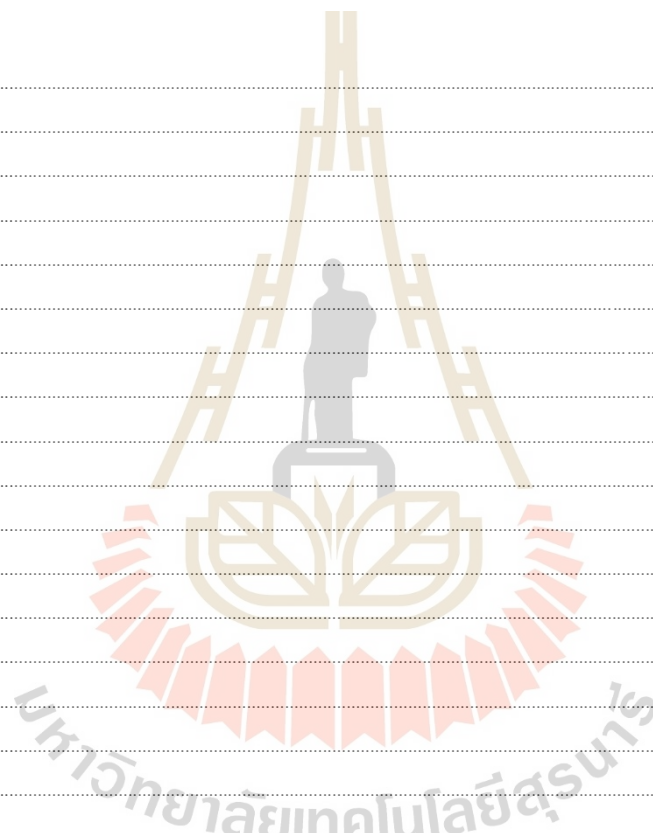
- เขาจะได้กำไรจากการขายข้าวเป็นเงิน 11 บาท ต่อ 1 กระสอบ
- เขาจะได้กำไรจากการขายข้าวสาลีเป็นเงิน 8 บาท ต่อ 1 กระสอบ

แล้ว นายปีเตอร์จะต้องลงทุนกับข้าวและข้าวสาลีเป็นจำนวนกี่กระสอบในการลงทุนแต่ละครั้ง ถึงจะได้กำไรสูงสุด

3) ศูนย์บรรณสาร มทส. จะต้องมีการผลิตตำราประกอบการเรียนการสอนใน 2 รายวิชาพื้นฐานที่นักศึกษาปี 1 มทส. ส่วนใหญ่ จะต้องเรียน คือ วิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน และวิชาแคลคูลัส โดยจะต้องใช้เครื่องผลิตเอกสารต่อกัน 2 เครื่อง คือ เครื่อง ก. และเครื่อง ข. และในการผลิตหนังสือใน 1 วัน พบว่า

- หนังสือวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันนั้น ต้องใช้เครื่อง ก. เป็นจำนวน 3 ชม. และเครื่อง ข. อีกจำนวน 3 ชั่วโมง
- หนังสือวิชาแคลคูลัส ต้องใช้เครื่อง ก. เป็นจำนวน 3 ชม. และเครื่อง ข. อีกจำนวน 3 ชั่วโมง

แต่ทว่าเครื่อง ก. สามารถใช้งานติดต่อกันได้เพียง 18 ชม. และเครื่อง ข. สามารถใช้งานติดต่อกันได้เพียง 14 ชม. เท่านั้น ถ้าหลังจากจำหน่ายหนังสือทั้ง 2 ประเภท(เพื่อที่จะนำรายได้ไปใช้จ่ายในกิจกรรมส่งเสริมการเรียนการสอนของนักศึกษา มทส.) แล้ว พบว่า กำไรที่ได้จากการจำหน่ายหนังสือคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันนั้นเท่ากับ 30 บาท/เล่ม และหนังสือแคลคูลัสให้กำไรเป็น 40 บาท/เล่ม แล้วจงหาว่า ศูนย์บรรณสาร ควรที่จะพิมพ์หนังสือแต่ละประเภทเป็นจำนวนเท่าใด ถึงจะได้กำไรสูงสุด

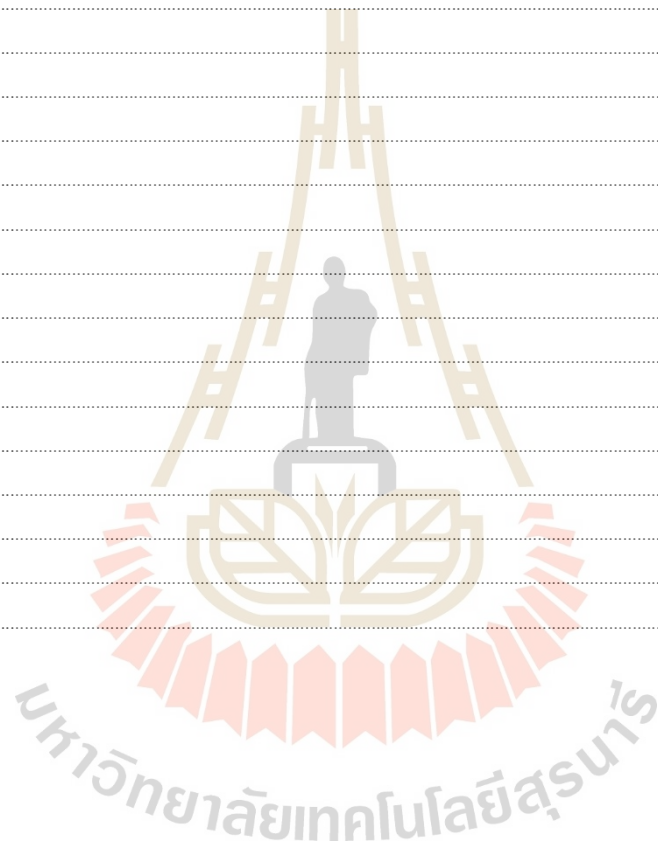


4) นายวิศวะ เก่งเลข เป็นนักศึกษาสำนักวิชาวิทยาศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ได้ออกไปเข้ารับการฝึกงานในโครงการสหกิจศึกษา ณ โรงงานผลิตสารเคมีที่มีชื่อเสียงแห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร ด้วยเนื่องจากที่นายวิศวะเป็นนักศึกษาจากมหาวิทยาลัยที่มีชื่อเสียงทางด้านคุณภาพการเรียนการสอนติดอันดับต้นๆ ของประเทศ นายวิศวะจึงได้รับหน้าที่ดูแลหน่วยผลิตสารเคมี ซึ่งจะทำการผลิตสารเคมีอยู่ 2 ประเภท คือประเภท ก. และประเภท ข. และในการผลิตสารเคมีแต่ละอย่างนั้น พบว่า

- สารประเภท ก. จะต้องใช้สารประกอบ α เป็นจำนวน 2 หน่วยตวง และสารประกอบ β เป็นจำนวน 1 หน่วยตวง
- สารประเภท ข. จะต้องใช้สารประกอบ α เป็นจำนวน 1 หน่วยตวง และสารประกอบ β เป็นจำนวน 2 หน่วยตวง

และจากการสำรวจวัตถุดิบที่มี พบว่า ในโรงงานมีสารประกอบ α อยู่ทั้งหมด 800 หน่วยตวง และมีสารประกอบ β ทั้งหมดอยู่ 1,000 หน่วยตวง

และเมื่อจำหน่ายสารเคมีแต่ละประเภทปรากฏว่า กำไรที่จะได้จากการจำหน่ายสารเคมี ก. คือ 30 บาท/หน่วยตวง และสารเคมี ข. ให้กำไรเป็น 20 บาท/หน่วยตวง ด้วยเงื่อนไขทั้งหมดนี้ นายวิศวะจะจัดการผลิตสารเคมีแต่ละประเภทนี้ด้วยจำนวนกี่หน่วยตวง จึงจะสามารถทำให้บริษัทนี้ ได้กำไรสูงสุด



แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ (โดยใช้วิธีเขียนกราฟเพื่อระบุพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลย)

1) สมการเป้าหมาย

$$P = 3000x + 2800y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$120x + 100y \leq 18000$$

$$x \geq 50$$

$$y \geq 60$$

2) สมการเป้าหมาย

$$P = 90,000x + 30,000y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$200x + 50y \leq 2200$$

$$x + y \leq 20$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

3) สมการเป้าหมาย

$$P = 55x + 85y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$x + y \leq 18$$

$$20x + 40y \leq 600$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

4) สมการเป้าหมาย

$$P = 50x + 80y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$x + 2y \leq 32$$

$$3x + 4y \leq 84$$

$$x \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 12$$

5) สมการเป้าหมาย

$$P = 10x + 15y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$1/2x + y \leq 20$$

$$2x + y \leq 60$$

$$x + 4y \leq 60$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

6) สมการเป้าหมาย

$$P = 3x + 4y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + y \leq 8$$

7) สมการเป้าหมาย

$$P = 5x + 6y$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + y \geq 5$$

$$3x + 4y \geq 18$$

8) สมการเป้าหมาย

$$P = 60a + 50b$$

อสมการเงื่อนไข คือ

$$10a + b \leq 4000$$

$$a + 3b \leq 1500$$

$$5a + 2b \leq 2300$$

$$a \geq 0$$

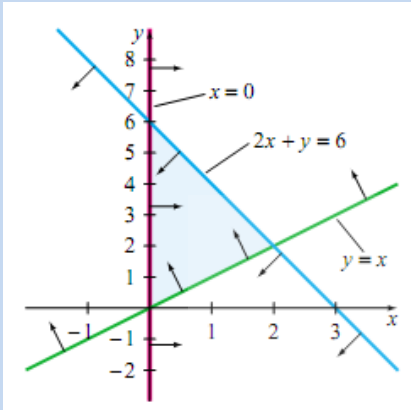
2. มีพื้นที่จอดรถ 600 ตารางเมตร รถยนต์ 1 คัน จงหาว่าควรจะรับจอดรถยนต์กี่คันและรถบัสกี่คันจึงจะได้ค่าจอดรถสูงสุด (รถยนต์ 50 คัน รถบัส 10 คัน)
3. บริษัทเครื่องหนังแห่งหนึ่งต้องการที่จะผลิตเพื่อจำหน่ายเข็มขัดและกระเป๋าตางค์ จากการสำรวจตลาดพบว่า เข็มขัด 1 เส้น จะได้กำไร 18 บาท ในขณะที่กระเป๋าตางค์ 1 ใบ จะได้กำไร 12 บาท สำหรับกระบวนการผลิตนั้นพบว่าสินค้าทั้งสองต้องผ่านสองกระบวนการคือ การตัด และการเย็บ ซึ่งพบว่าเข็มขัดจะใช้เวลา 2 ชั่วโมงในการตัด และใช้ 6 ชั่วโมงในการเย็บ ส่วนกระเป๋าตางค์จะใช้เวลา 3 ชั่วโมงในการตัด และใช้ 3 ชั่วโมงในการเย็บ โดยที่ในหนึ่งสัปดาห์เครื่องตัดจะทำงานได้เพียง 12 ชั่วโมง และเครื่องเย็บจะทำงานได้เพียง 18 ชั่วโมง จงหาอัตราส่วนของจำนวนสินค้าแต่ละประเภทที่ต้องผลิตจึงจะได้กำไรสูงสุด (กระเป๋าตางค์/เข็มขัด = 2)
4. บริษัทผลิตของเล่นแห่งหนึ่งต้องการที่จะผลิตของเล่นใน โรงงาน A และ โรงงาน B โดยที่โรงงาน A จะเป็นการผลิตรถบรรทุกและรถดับเพลิงรวมกันอย่างน้อย 1,000 คัน ส่วนโรงงาน B จะเป็นการผลิตรถบรรทุกและรถดับเพลิงรวมกันอย่างน้อย 800 คัน โรงงาน A สามารถผลิตรถบรรทุกได้ 10 คัน/ชั่วโมง และผลิตรถดับเพลิงได้ 5 คัน/ชั่วโมง และโรงงาน B สามารถผลิตรถบรรทุกได้ 5 คัน/ชั่วโมง และผลิตรถดับเพลิงได้ 15 คัน/ชั่วโมง ค่าใช้จ่ายในการผลิตรถบรรทุกต่อชั่วโมงคือ \$30 และค่าใช้จ่ายในการผลิตรถดับเพลิงต่อชั่วโมงคือ \$35 จงหาจำนวนชั่วโมงที่ควรใช้ในการผลิตของเล่นแต่ละประเภทเพื่อให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่สุด และหาค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด (รถบรรทุกใช้ 88 ชั่วโมง รถดับเพลิงใช้ 24 ชั่วโมง และค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด = \$3480)

เฉลยแบบฝึกทักษะ(Answers)

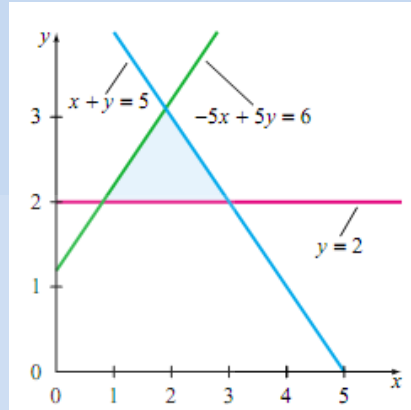
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.1 กำหนดการเชิงเส้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.1

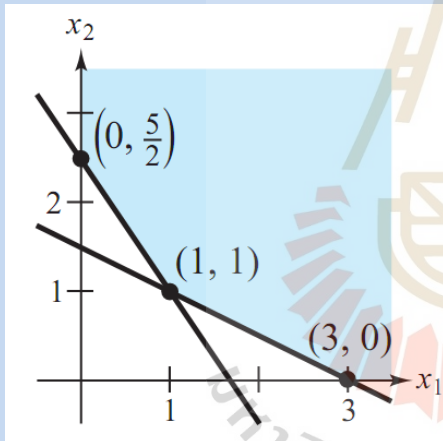
1)



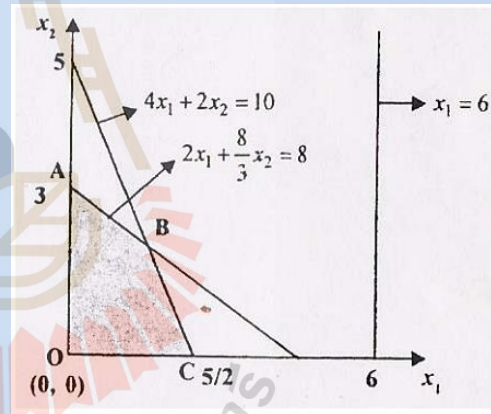
2)



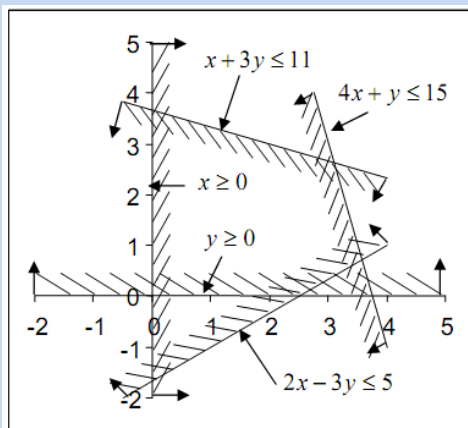
3)



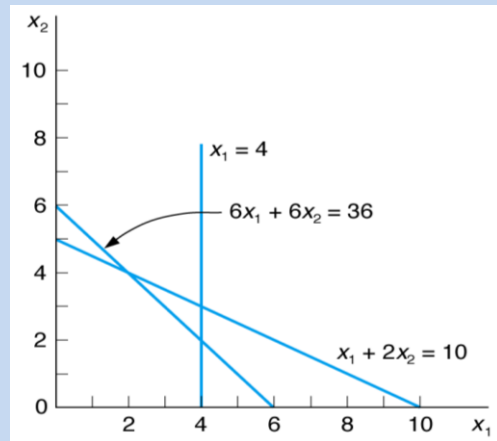
4)



5)



6)



เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีการเขียนกราฟ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

- 1) ค่าสูงสุด $P(18,4) = 190$ 2) ค่าต่ำสุด $P(1,0) = 2$ 3) ค่าสูงสุด $P(0.5,2.25) = 12.25$
- 4) ค่าต่ำสุดคือค่าที่ได้จากจุดทุกจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2,4) ไปยังจุด (10,0)
- 5) ค่าต่ำสุด $P(0.625,2.25) = 13.656$ ค่าสูงสุด $P(260,0) = 520$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์เบื้องต้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

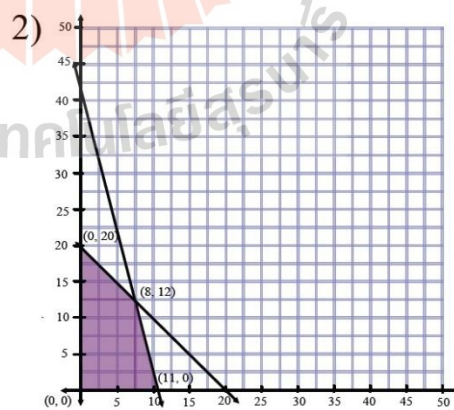
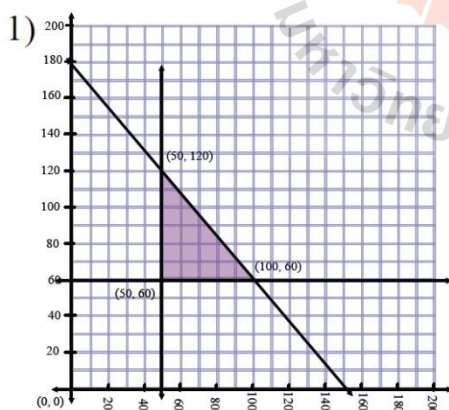
- 1) ค่าสูงสุด $P(0,4) = 162$ ค่าต่ำสุด $P(4,0) = -83$ ค่าสูงสุด $P(1,3) = 5$
- 4) ค่าต่ำสุด $P(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}) = 25/25$ ค่าสูงสุด $P(8,12) = 28$

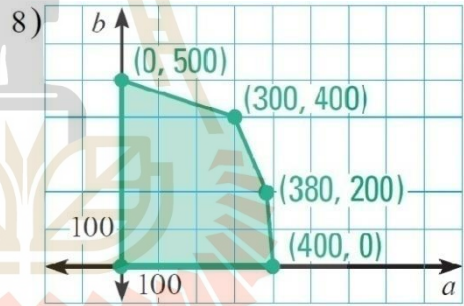
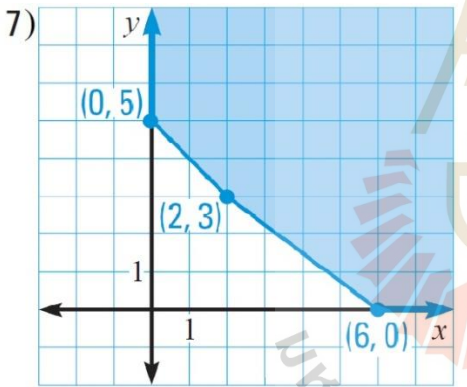
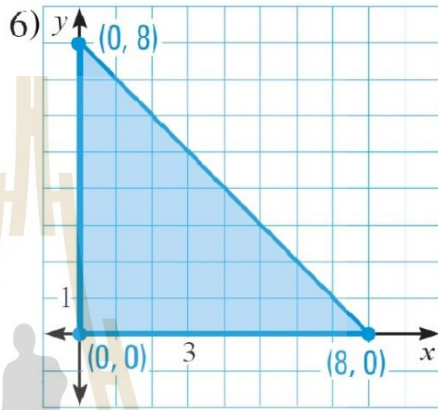
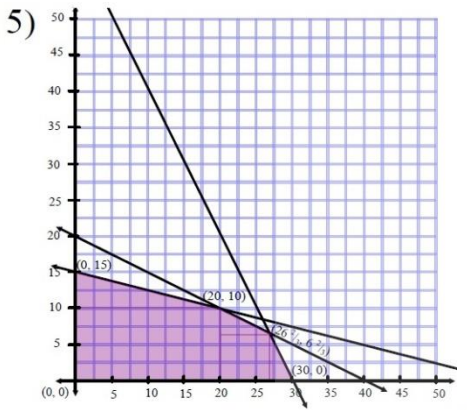
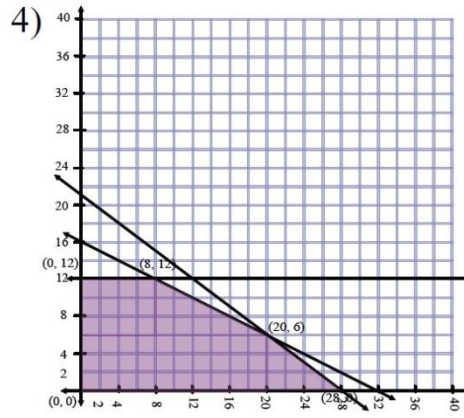
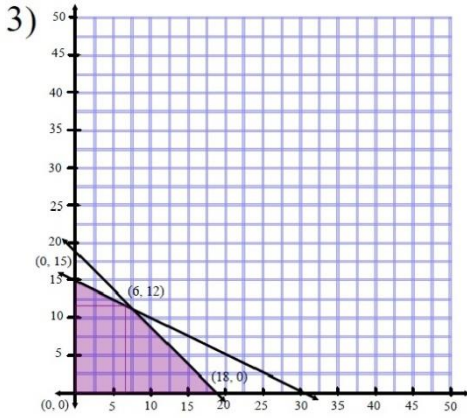
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.4 กำหนดการเชิงเส้น ในชีวิตประจำวัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

- 1) x เป็นจำนวนสินค้าชนิดแรกที่เกิดต่อสัปดาห์
 y เป็นจำนวนสินค้าชนิดที่สองที่เกิดต่อสัปดาห์
 P ที่มากที่สุดคือ เมื่อ $x = 12$ และ $y = 24$
- 2) นายปีเตอร์จะต้องลงทุนกับข้าวและข้าวสาลีเป็นจำนวนอย่างละ 5 ถุง ถึงจะได้กำไรสูงสุด
- 3) ควรพิมพ์หนังสือวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันเป็นจำนวน 4 เล่ม และหนังสือแคลคูลัสอีก 2 เล่ม
- 4) นายวิศวะจะจัดการผลิตสารเคมีแต่ละประเภท ก. เป็นจำนวน 200 หน่วยตวงและประเภท ข. เป็นจำนวน 400 หน่วยตวง

เฉลยแบบฝึกทักษะท้ายบท





2. รถยนต์ 50 คัน รถบัส 10 คัน
3. กระเป๋าตังค์/เข็มขัด = 2
4. รถบรรทุกใช้ 88 ชั่วโมง รถดับเพลิงใช้ 24 ชั่วโมง และค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด = \$3480

บทที่ 7

นานาสาระ ปกิณกะคณิตศาสตร์ (Some Interesting Stuff about Mathematics)

นักศึกษาบางคนอาจจะยังไม่คุ้นเคยกับคำว่า "ปกิณกะ" ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ปกิณกะ หมายถึง เบ็ดเตล็ด, กระจาย, ระคนกัน, คละกัน, มักใช้ประกอบหน้าศัพท์อื่น เช่น ปกิณกะคดี หมายถึง เรื่องต่างๆ และนี่ ก็คือวัตถุประสงค์หลักของบทสุดท้ายของเอกสารชุดนี้

ในบทนี้ จะได้มีการนำเอาสิ่งต่างๆ จากหลายมุมมองของธรรมชาติความเป็นคณิตศาสตร์มาแนะนำ เพื่อให้ผู้อ่านได้รู้จัก ชวนคิด ผึกฝน และทราบว่า จริงๆแล้ว คณิตศาสตร์มีความน่าฉงน น่าทึ่ง และน่าสนใจ อยู่อีกหลายต่อหลายส่วน

7.1 บิดาแห่งคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ (Important Mathematicians)

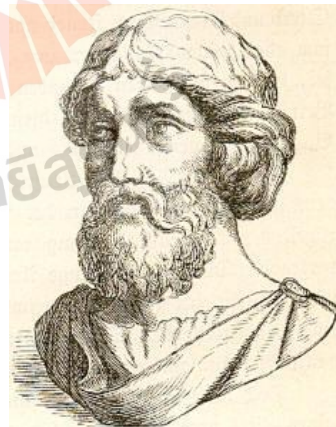
นักคณิตศาสตร์ที่สำคัญของโลก นับตั้งแต่สมัยโบราณมาจนถึงปัจจุบันนั้น มีมากมายหลายท่าน แต่ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอประวัติ และผลงาน(โดยย่อ)ของเฉพาะที่ผู้เรียบเรียงเชื่อว่านักศึกษาจะพอได้ยินช้อยู่เสมอเวลาศึกษาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

❖ ปีทาโกรัส (Pythagoras)

ประมาณ 572 - 500 ก่อนคริสต์ศักราช

ประวัติ

ปีทาโกรัสเป็นชาวกรีก เกิดที่เกาะซามอสใกล้กับเอเชียไมเนอร์ เนื่องจากทรราช Polychaetes ท่านจำต้องออกจากเกาะซามอสกล่าวกันว่าท่านเคยศึกษาที่อียิปต์และ เป็นศิษย์ของ ทาลิสปีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักปีทาโกเรียน ที่เมือง Crotona ซึ่งอยู่ทางตอนใต้ของ ประเทศอิตาลี ปีทาโกรัสคิดว่าปริมาณต่าง ๆ ในธรรมชาติสามารถเขียนในรูปเศษส่วนของ จำนวนนับ จนมีคำขวัญของสำนักว่า "ทุกสิ่งคือจำนวนนับ" เมื่อมีการค้นพบจำนวนอตรรกยะขึ้นทำให้ปีทาโกรัสและศิษย์ทั้งหลาย เสียขวัญและกำลังใจ



แผนภาพที่ 58 ปีทาโกรัส (Pythagoras) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

เมื่อทางราชการขับไล่เพราะกล่าวหาว่า สำนักปีทาโกเรียนเป็นสถาบันศักดิ์ดิสน่าสำนักปีทาโกเรียนก็สูญสลายไป

ผลงาน

เราไม่ทราบแน่ชัดว่าผลงานชิ้นใดเป็นของปีทาโกรัส ชิ้นใดเป็นของลูกศิษย์ จึงกล่าวรวม ๆ ว่าเป็นของสำนักปีทาโกเรียน ซึ่งมีดังนี้ :-

1. จำนวนคู่และจำนวนคี่
2. ค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างเศษส่วนกับทฤษฎีของดนตรี
3. จำนวนเชิงรูปเหลี่ยม เช่น จำนวนเชิงสามเหลี่ยม , จำนวนเชิงจตุรัส
4. จำนวนอตรรกยะ
5. พีชคณิตเชิงเรขาคณิต
6. พิสูจน์ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

❖ ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria)



ประมาณ 450 - 380 ก่อนคริสต์ศักราช

ประวัติ

ยุคลิดเป็นชาวกรีก ศึกษาที่สถาบันของ Plato ที่กรุงเอเธนส์ ท่านได้รับการแต่งตั้งเป็นศาสตราจารย์และหัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์คนแรกที่มหาวิทยาลัยอะเล็กซานเดรีย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยแห่งแรกในโลก ตั้งขึ้นประมาณ 300 ปีก่อนคริสต์ศักราช

แผนภาพที่ 59 ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

ผลงาน

ผลงานชิ้นสำคัญของยุคลิดคือการเขียนตำราทางคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ผลงานที่ยังคงอยู่ในปัจจุบัน

5 ชิ้น คือ Division of Figures , Data , Phaenomena , Optic และ Elements Elements ประกอบด้วยหนังสือ 13 เล่ม และทฤษฎีบท 465 ทฤษฎีบท เป็นต้นแบบของตำราคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีนิรนัย (Deduction) เนื้อหาส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับเรขาคณิต แบบยุคลิดแต่ก็มีเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีจำนวน

❖ ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat)

ประมาณ ค.ศ. 1601-1665

ประวัติ

แฟร์มาต์เกิดใกล้เมือง Toulouse ประเทศฝรั่งเศส ในปี 1601 และถึงแก่กรรมที่เมือง Castres ในปี 1665 บิดาเป็นพ่อค้าเครื่องหนังในวัยเด็กศึกษาอยู่กับบ้าน แฟร์มาต์มีอาชีพเป็นนักกฎหมาย เมื่ออายุ 30 ปีได้รับการแต่งตั้งให้เป็นที่ปรึกษากฎหมายขององค์การบริหารท้องถิ่นของเมือง Toulouse ท่านได้ใช้เวลาว่างศึกษาค้นคว้าคณิตศาสตร์ เป็นสื่อกลางในการติดต่อกับนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงในสมัยนั้น มีส่วนในการพัฒนาคณิตศาสตร์ในหลายสาขานับได้ว่าเป็น นักคณิตศาสตร์สมัครเล่นที่มีชื่อเสียงที่สุด



แผนภาพที่ 60 ปีแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat)
นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก

ผลงาน

1. ริเริ่มพัฒนาเรขาคณิตวิเคราะห์ ในระยะเวลาใกล้เคียงกับเดส์การ์ตส์
2. ริเริ่มวิธีหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน
3. ริเริ่มพัฒนาทฤษฎีความน่าจะเป็น ร่วมกับปาสกาล
4. พัฒนาทฤษฎีบทต่าง ในทฤษฎีจำนวน เช่น

Fermat's two square theorem : ทุกจำนวนเฉพาะในรูป $4n + 1$ สามารถเขียนในรูปผลบวกของจำนวนเต็มยกกำลังสองได้คู่หนึ่ง และคู่เดียวเท่านั้น

Fermat's theorem : ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำได้ว่า p หาร $n^p - n$ ลงตัว

❖ แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal)



ประมาณ ค.ศ. 1623-1662

ประวัติ

ปาสกาลเกิดที่เมือง Chermont มณฑล Auvergne ประเทศฝรั่งเศส เมื่อวันที่ 16 มิถุนายน ค.ศ. 1623 บิดาเป็นนักคณิตศาสตร์และผู้พิพากษา ปาสกาลมีความเป็นอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่เด็ก

อายุ 12 ปี ท่านได้พัฒนาเรขาคณิต เบื้องต้นด้วยตนเอง

อายุ 14 ปี ท่านได้เข้าร่วมประชุมกับนักคณิตศาสตร์ฝรั่งเศส

อายุ 16 ปี ท่านได้พัฒนาทฤษฎีบทที่สำคัญในวิชาเรขาคณิตโพรเจกตีฟ

แผนภาพที่ 61 แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก

และเมื่ออายุ 19 ปี ท่านได้พัฒนาเครื่องคิดเลขหลังจากที่ท่านประสบอุบัติเหตุที่ Neuilly ท่านหันความสนใจไปทางศาสนาและปรัชญา ไม่เช่นนั้นท่านคงเป็นนักคณิตศาสตร์ ที่รุ่งโรจน์ที่สุดคนหนึ่ง

ผลงาน

1. งานเขียน Essay pour les coniques (1640) ซึ่งสรุปทฤษฎีบท เกี่ยวกับเรขาคณิตโพรเจกตีฟ ที่ท่านได้พัฒนามาแล้วเมื่ออายุได้ 16 ปี
2. งานเขียน Traite du traingle arithmetique (1665) ซึ่งเกี่ยวกับ "Chinese triangle" หรือในอดีตนิยมเรียกว่า "Pascal triangle" เพราะคิดว่า Pascal เป็นผู้คิดเป็นคนแรก แต่ที่แท้จริงได้มีชาวจีนพัฒนามาก่อนแล้ว
3. ริเริ่มพัฒนาทฤษฎีความน่าจะเป็นในปี ค.ศ. 1654 ร่วมกับ Fermat โดยใช้วิธีที่แตกต่างกัน
4. ศึกษาเส้นโค้ง Cycloid

❖ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler)

ประมาณ ค.ศ.1707 - 1783

ประวัติ

เป็น นักคณิตศาสตร์ และ นักฟิสิกส์ ชาวสวิสเขาได้ชื่อว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งที่เท่าที่เคยมีเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ เป็นคนแรกที่ใช้คำว่า "ฟังก์ชัน" (ตามคำนิยามของไลบ์นิซใน ค.ศ. 1694) ในการบรรยายถึงความสัมพันธ์ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเช่น $y = F(x)$ เขายังได้ชื่อว่าเป็นคนแรกที่ประยุกต์ แคลคูลัส เข้าไปยังวิชา ฟิสิกส์ออยเลอร์เกิดและโต



แผนภาพที่ 62 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler)

ในเมือง บาเซลเขาเป็นเด็กที่มีความเป็นอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์

นักคณิตศาสตร์คนสำคัญของโลก

เขาเป็นศาสตราจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ เซนต์ปีเตอร์สเบิร์กและต่อมาก็สอนที่ เบอร์ลินและได้ย้อนกลับไปยังเซนต์ปีเตอร์สเบิร์กอีกครั้งเขาเป็นนักคณิตศาสตร์มีผลงานมากมายที่สุดคนหนึ่งผลงานทั้งหมดของเขารวบรวมได้ถึง 75 เล่มผลงานของเขามีอิทธิพลอย่างมากต่อผลงานทางคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 18 เขาต้องสูญเสียการมองเห็น และตาบอดสนิทตลอด 17 ปีสุดท้ายในชีวิตของเขาซึ่งในช่วงนี้เองที่เขาสามารถผลิตผลงานได้ถึงเกือบครึ่งหนึ่งของผลงานทั้งหมดของเขา และนอกจากนี้ ดาวเคราะห์น้อย 2002 ออยเลอร์ได้ถูกตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติแก่เขา

7.2 คณิตศาสตร์ในธรรมชาติ(Mathematics in Nature)

❖ พิโบนักซ์กับธรรมชาติ

ลีโอนาโด พิโบนักซ์ (Leonardo Fibonacci) เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงอีกท่านหนึ่ง ท่านมีชีวิตอยู่ในประเทศอิตาลี ในช่วงปี ค.ศ. 1170 -1240 และเป็นผู้คิดค้นลำดับที่มีเอกลักษณ์เฉพาะตัวลำดับหนึ่ง ที่รู้จักกันในนามของ



"ลำดับพิโบนักซ์" ลำดับนี้เริ่มต้น 3 เทอมแรกด้วย 1, 2 และ 3 จากนั้น จะได้ว่า เทอมที่ n จะเป็นผลบวกของสองเทอมก่อนหน้านั้น ดังนั้น จะได้ลำดับคือ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... และเป็นที่น่าอัศจรรย์ ที่เมื่อเราสังเกตดีๆแล้ว จะพบว่า ลำดับนี้ปรากฏอยู่ในธรรมชาติรอบๆตัวเราอย่างมากมาย

แผนภาพที่ 63 ลีโอนาโด พิโบนักซ์ (Leonardo Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ ผู้คิดค้นลำดับพิโบนักซ์

จากธรรมชาติที่สร้างตัวเองหรือขยายขนาดขยาย การเจริญเติบโตรวมถึงการแพร่พันธุ์ตามธรรมชาติด้วย ตัวเลขพิโบนักซ์การเจริญเติบโตของต้นไม้หรือของสิ่งต่าง ๆ หลายอย่างจึงเป็นไปตามธรรมชาตินอกจากต้นไม้แล้วยังมีดอกไม้ดังตัวอย่าง เช่น

การจัดวางเมล็ดของดอกทานตะวันหรือดอกเดซี่ซึ่งมีการจัดวางเมล็ดเป็นแบบวนก้นหอยนอกจากดอกทานตะวันแล้วยังมีโคนของสนและตาส์บะรด ดังแสดงในแผนภาพที่ 64

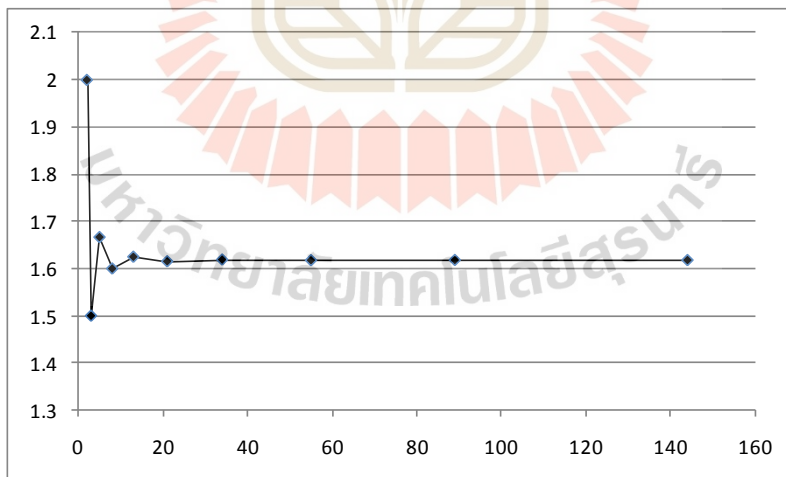


แผนภาพที่ 64 ตัวอย่างการปรากฏจริงของลำดับฟีโบนัชชีในธรรมชาติ

❖ ตัวเลขทองคำ (Golden Number)

ตัวเลขลำดับฟีโบนัชชี(สร้างโดยใช้รูปภาพสี่เหลี่ยมฟีโบนัชชี) เป็นที่รู้จักกันดีและเป็นตัวเลขที่ธรรมชาติสร้างขึ้นตั้งนั้น สัดส่วนตัวเลขระหว่างสองตัวเลขที่ติดกันจึงเป็นสัดส่วนทางธรรมชาติและเราจะเห็นว่าสัดส่วนตัวเลขนี้มีความน่าสนใจไม่น้อย

จากลำดับฟีโบนัชชี 1 1 2 3 5 8 13 21 ถ้าจัดตัวเลขสองตัวติดกันหารกันจะได้อัตราส่วน $1/1 = 1$ $2/1 = 2$
 $3/2 = 1.5$ $5/3 = 1.666.....$ $8/5 = 1.6$ $13/8 = 1.625$ $21/13 = 1.61538$ และถ้าเราเขียนกราฟอัตราส่วนนี้จะ
 ได้รูปภาพที่เข้าใกล้ 1.6 (ดังแสดงในแผนภาพที่ 65) ค่าตัวเลขที่ได้เมื่อให้จำนวนฟีโบนัชชีมีค่ามากขึ้นค่าจะได้ประมาณ
 1.61804 เราเรียกตัวเลขนี้ว่าตัวเลขทองคำ (Golden Number)



แผนภาพที่ 65 กราฟแสดงการลู่เข้าค่าตัวเลขทองคำ 1.61804 ซึ่งเกิดจากอัตราส่วนของค่า 2 ค่าที่ติดกันในลำดับฟีโบนัชชี

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตราส่วนระหว่างด้านยาวกับด้านกว้างมีค่าเป็น 1.618 นั้น จะเรียกว่า สี่เหลี่ยมทองคำ ซึ่งรูปสี่เหลี่ยมทองคำนี้ มักถูกนำมาใช้ในงานศิลปะ เริ่มตั้งแต่สมัยกรีก และโรมันในสมัยศตวรรษที่ 20 เลยทีเดียว ดังตัวอย่างที่เป็น

ที่รู้จัก ได้แก่ โครงสร้างของวิหารพาทินอน ภาพคนชรา และภาพโมนา ลิซ่า ของลีโอนาโด ดา วินชี (ดังแสดงในภาพแผนภาพที่ 66)



แผนภาพที่ 66 ซ้าย) วิหารพาทินอน วิหารเก่าแก่ของกรีกที่กรุงเอเธนส์ และขวา)ภาพคนชรา ของ ลีโอนาโด ดา วินชี

❖ จินตนาการแบบสามมิติ

ถึงแม้ว่าจะให้โลกเป็นจุดศูนย์กลางผู้สังเกตหรือเราอยู่บนพื้นโลกเฝ้ามองทรงกลมท้องฟ้าการหมุนของโลกและการเคลื่อนที่ของโลกรอบดวงอาทิตย์ทำให้เห็นสิ่งต่าง ๆ บนทรงกลมท้องฟ้าแตกต่างออกไปการคำนวณจึงต้องเริ่มจากจุดศูนย์กลางของโลกและจินตนาการแบบสามมิติ

จากที่ทราบกันดีว่าโลกหมุนรอบดวงอาทิตย์โดยแกนหมุนรอบตัวเองของโลกเอียง $23\frac{1}{2}$ องศา ดังนั้นเส้นทางที่ผู้สังเกตอยู่บนโลกมองดวงอาทิตย์จึงเห็นเสมือนดวงอาทิตย์เคลื่อนที่ผ่านทรงกลมท้องฟ้า แนวเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์เคลื่อนผ่านทรงกลมท้องฟ้าเรียกว่าสุริยวิถี (Ecliptic) ซึ่งเคลื่อนที่ผ่านกลุ่มดาว 12 กลุ่ม (จักรราศี) สิ่งที่น่าสังเกตคือ ทุกประเทศรู้จักกับจักรราศี (Zodiac) และมีการเรียกชื่อกลุ่มดาวจักรราศีที่คล้ายคลึงกันมาตั้งแต่โบราณ

เนื่องจากแกนหมุนของโลกเอียงทำมุม $23\frac{1}{2}$ องศากับแนวแกนการหมุนรอบดวงอาทิตย์ดังนั้นแนวเส้นศูนย์สูตรโลกบนทรงกลมท้องฟ้าจึงตัดกับแนวเส้นสุริยวิถีสองจุดจุดตัดนี้เรียกว่าอิกวิน็อก (Equinox) เป็นจุดตัดที่ทำให้กลางวันและกลางคืนเท่ากันจุดตัดอีกขี้นอกแรกเกิดขึ้นราววันที่ 21 มีนาคมซึ่งถือว่าเป็นวันที่กลางวันและกลางคืนยาวเท่ากัน โดยจะต้องคิดที่แนวศูนย์สูตรโลกจุดตัดอีกจุดหนึ่งคือราววันที่ 23 กันยายน



แผนภาพที่ 67 อิควิน็อกซ์ (Equinox): แนวเส้นศูนย์สูตรโลกบนทรงกลมท้องฟ้าตัดกับแนวเส้นสุริยวิถีสองจุด

สำหรับประเทศไทยหากคิดที่กรุงเทพซึ่งอยู่ที่เส้นรุ้งประมาณ 10 องศาแนวแกนของประเทศไทยตัดเส้นสุริยวิถีประมาณวันที่ 13 เมษายน ซึ่งเราถือว่าเป็นวันสงกรานต์หรือเป็นวันขึ้นปีใหม่ของไทย

สังเกตว่าโลกหมุนในแนวทิศตามภูมิอวกาศขณะเดียวกับดาวอาทิตย์เคลื่อนที่ตามทรงกลมท้องฟ้าในทิศทางเดียวกันด้วย

หลายคนที่มีโอกาสเดินทางไปต่างประเทศ เช่น อเมริกา อังกฤษหรือประเทศในแถบเอเชียอย่างญี่ปุ่นต่างก็ต้องปรับเวลาให้ตรงกับประเทศนั้นๆ นั้นเป็นเพราะทุกขณะเวลาบนพื้นโลกไม่เท่ากัน

❖ เวลาที่จุดสังเกตบนพื้นโลก

หากเรายืนอยู่ที่หนึ่งที่ใดบนพื้นโลกเช่นกรุงเทพมหานครที่เส้นละติจูดประมาณ 12 องศาเราจะเห็นดาวเหนือทางทิศเหนือสูงประมาณ 12 องศาแกนการหมุนของโลกหมุนตามแนวทิศดาวเหนือหากเรายืนตัวตรง จุดกลางศีรษะเราชี้ขึ้นกลางฟ้าตั้งฉากกับพื้นดินเราเรียกว่าจุดจ่อมฟ้า (Zenith) ถ้าเราอยู่ที่โล้งแจ่มมองไปรอบ ๆ ตัวจะเห็นเส้นขอบฟ้าที่เป็นจุดตัดระหว่างพื้นกับท้องฟ้ารอบตัวเรา และถ้าจินตนาการในรูปแบบสามมิติเราจะเห็นว่าแนวหมุนของโลกทำให้มีเส้นศูนย์สูตรโลก การสังเกตดาวบนท้องฟ้าจึงมีการเห็นที่แตกต่างกันเมื่ออยู่บนพื้นโลกที่ตำแหน่งต่างกัน

สิ่งที่น่าสนใจและเป็นสิ่งสำคัญคือ แนวที่ลากจากทิศเหนือไปทิศใต้ผ่านทรงกลมท้องฟ้าผ่านจุดจ่อมฟ้าเราจะเรียกว่าเส้นเมริเดียนของคุณ (your meridian)

แนวทิศเหนือใต้บนทรงกลมท้องฟ้าเป็นจุดอ้างอิงที่สำคัญเกี่ยวกับเวลาโดยเราถือว่าถ้าดวงอาทิตย์อยู่ในแนวเส้นนี้บนท้องฟ้าเราจะถือว่าเป็นเวลา 12:00 น. และการนับเวลาในระบบโซลาร์นี้ใช้ระบบอ้างอิงกับเส้นเมริเดียนของคุณ การแบ่งเส้นแนวตามแนวเหนือใต้ไปทางทิศตะวันออกและตะวันตกบนทรงกลมนี้เกิดทำให้มีมุมของเวลาเกิดขึ้น พระอาทิตย์อยู่ที่มุมของเวลาที่ใดก็เทียบกับจุดอ้างอิงของเมริเดียนได้



แผนภาพที่ 68 เส้นเมริเดียนของคุณ (your meridian)

7.3 รู้ไว้ใช่ว่า (Some More of Cool Facts)

❖ เกี่ยวกับเครื่องหมาย ∫

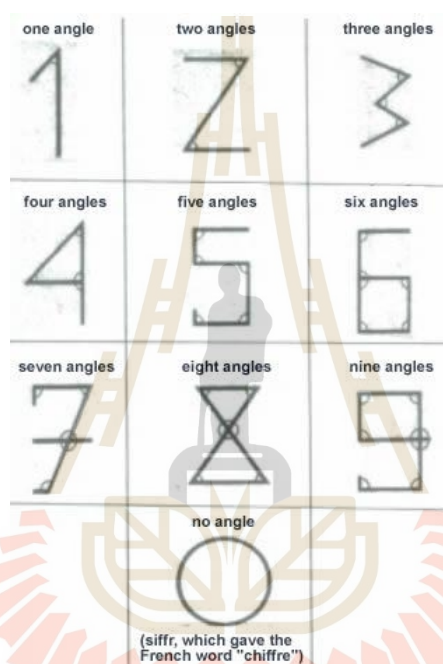
1. เครื่องหมายนี้ มีชื่อว่า "อินทริกรัล" ในทางคณิตศาสตร์
2. ผู้ที่ใช้เป็นคนแรกคือ Gottfried Wilhelm von Leibniz นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน เมื่อช่วงปลายศตวรรษที่

17

3. เครื่องหมายนี้ ถูกออกแบบให้คล้ายอักษรตัว ' S ' ซึ่งย่อมาจากคำว่า Sums ที่หมายถึง ผลรวม เพราะการอินทริกรัลคือลิมิตของผลรวม

❖ เกี่ยวกับเลขอารบิกที่เราใช้กันทุกวัน

นักศึกษาทราบหรือไม่ว่า ต้นกำเนิดของเลขอารบิกนี้ แต่ละตัวนั้น ถูกออกแบบ ให้เป็นจำนวนมุมที่เกิดจากการเขียนเลขตัวนั้นๆ ดังแสดงในแผนภาพที่ 69



แผนภาพที่ 69 การเขียนเลขอารบิก ที่เกิดจากการนับมุมของเลขตัวนั้นๆ

เกี่ยวกับ π

1. π เป็นจำนวนอตรรกยะ หมายถึง ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนจริง 2 จำนวนได้ แต่ เรามักจะเขียน $\pi = \frac{22}{7}$ ซึ่งจริงๆแล้ว ค่า $\frac{22}{7}$ เป็นแค่ค่าประมาณ ไม่ใช่ค่าแม่นยำตรง
2. ค่าประมาณอีกค่าหนึ่งที่มีความแม่นยำสูงมากคือ $\frac{104348}{33215}$ ซึ่งมีความแม่นยำสูงถึง 0.0000001056%
3. สำหรับ 100 หลักแรกของค่าของ π คือ 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 ...

❖ เกี่ยวกับจำนวนและการคูณของจำนวน

1. จำนวนต่อไปนี้ เป็นผลรวมของการนำเอาเลขเดียวแต่ละตัว ยกกำลัง 3

153, 370, 371, และ 407

2. เมื่อนำเอา 111,111,111 คูณด้วย 111,111,111 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 12,345,678,987,654,321

3. การคูณกันและเรียงตัวกันเป็นแบบแผนของจำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1, 2, 8, และ 9 ดังแสดงในแผนภาพที่ 70

$$\begin{aligned}
 9 \times 2 &= 18 \\
 99 \times 2 &= 198 \\
 999 \times 2 &= 1998 \\
 9999 \times 2 &= 19998 \\
 99999 \times 2 &= 199998 \\
 999999 \times 2 &= 1999998 \\
 9999999 \times 2 &= 19999998 \\
 99999999 \times 2 &= 199999998
 \end{aligned}$$

แผนภาพที่ 70 การเรียงตัวกันเป็นแบบแผนของผลคูณของจำนวนที่ประกอบด้วย 1, 2, 8 และ 9

4. การนำเอาจำนวน 12345679 ไปคูณกับบางจำนวน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่ที่สวยงาม ดังแสดงในแผนภาพที่

71

$$\begin{aligned}
 12345679 \times 09 &= 111111111 \\
 12345679 \times 18 &= 222222222 \\
 12345679 \times 27 &= 333333333 \\
 12345679 \times 36 &= 444444444 \\
 12345679 \times 45 &= 555555555 \\
 12345679 \times 54 &= 666666666 \\
 12345679 \times 63 &= 777777777 \\
 12345679 \times 72 &= 888888888 \\
 12345679 \times 81 &= 999999999
 \end{aligned}$$

แผนภาพที่ 71 การนำเอาจำนวน 12345679 ไปคูณกับบางจำนวน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่ที่สวยงาม

5. การนำเอาจำนวนที่ประกอบด้วยเลขเดียวที่เป็นเลข 1 ล้วนๆ มาคูณกัน ก็ให้ค่าผลลัพธ์ที่น่าทึ่งเช่นกัน ดังแสดงในแผนภาพที่ 72

$$\begin{aligned}
 1 \times 1 &= 1 \\
 11 \times 11 &= 121 \\
 111 \times 111 &= 12321 \\
 1111 \times 1111 &= 1234321 \\
 11111 \times 11111 &= 123454321 \\
 111111 \times 111111 &= 12345654321 \\
 1111111 \times 1111111 &= 1234567654321 \\
 11111111 \times 11111111 &= 123456787654321 \\
 111111111 \times 111111111 &= 12345678987654321
 \end{aligned}$$

แผนภาพที่ 72 การคูณกันของจำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1 ล้วนๆ ก็ให้ค่าที่น่าสนใจ

6. การคูณกันของเลขจำนวนอื่นๆ ในรูปแบบอีกบางรูปแบบ ก็ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจอีกด้วย อาทิ ดังแสดงในแผนภาพที่ 73

$1 \times 9 + 2 = 11$	$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 9 + 3 = 111$	$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 9 + 4 = 1111$	$123 \times 8 + 3 = 987$
$1234 \times 9 + 5 = 11111$	$1234 \times 8 + 4 = 9876$
$12345 \times 9 + 6 = 111111$	$12345 \times 8 + 5 = 98765$
$123456 \times 9 + 7 = 1111111$	$123456 \times 8 + 6 = 987654$
$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$	$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$
$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$	$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$
$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$	$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$

แผนภาพที่ 73 การคูณกันของบางจำนวน ก็ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจ

7.4 สนุกกับปริศนาหน้าคิด(Have Fun with This)

นักศึกษาคงพอจะได้ทราบ และทดลองทำโจทย์ปริศนาทางคณิตศาสตร์มาบ้างแล้วในระดับมัธยมศึกษา ในหัวข้อนี้ ผู้เรียบเรียงมีวัตถุประสงค์หลัก คือ เพื่อให้นักศึกษาได้ลองทดสอบความสามารถในการคิดวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ กับปริศนาต่างๆที่ได้นำมาเสนอนี้

ปริศนาที่ 1:จริงใจใหม่หน่อ

1. ให้เขียนตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่า 0 และน้อยกว่า 10 เป็นจำนวน 3 ตัวเรียงกัน โดยที่ ตัวเลขตัวแรกทางซ้ายมือ ให้มีค่ามากที่สุด และตัวที่สองน้อยกว่าตัวแรก และตัวที่สามทางขวาสุดให้มิต้าน้อยสุด
2. หลังจากนั้นจัดเรียงสลับกัน ให้ตัวเลขที่น้อยที่สุดที่เคยอยู่ทางขวามือ มาอยู่ทางซ้ายมือสุด
3. นำเอาจำนวนที่เขียนในข้อ 1 มาลบด้วยจำนวนที่เขียนในข้อ 2
4. นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 3 มาเขียนสลับเรียงกันใหม่ โดยทำเหมือนกระบวนการขั้นที่ 2
5. นำเอาผลลัพธ์ในข้อ 3 และจำนวนที่เรียงใหม่แล้วในข้อ 4 มารวมกัน แล้วจะได้คำตอบเป็น 1089 เสมอ จริงใจใหม่หน่อ

ทดสอบ

ทำตามขั้นที่ 1 ลองเขียนเลข 5 3 2

ทำตามขั้นที่ 2 เขียนสลับกันได้ 2 3 5

ทำตามขั้นที่ 3 นำทั้งสองจำนวนมาลบกัน ได้ $532 - 235 = 297$

ทำตามขั้นที่ 4 คือเอาผลลัพธ์ที่ได้มาเขียนเรียงใหม่ ได้ 792

ทำตามขั้นที่ 5 คือ เอาจำนวนในข้อ 4 และข้อ 5 มารวมกัน ได้ $297 + 792 = 1089$ 😊

😊คราวนี้ให้นักศึกษาลองสุ่มตัวเลขทำเองดูนะครับ😊

ปริศนาที่ 2: ถ้าเราจะแบ่งจำนวน 110 ออกเป็นผลบวกของสองจำนวน โดยที่จำนวนหนึ่งในนั้น มีค่าเป็น 150 % ของอีกจำนวน จงหาว่าจำนวนสองจำนวนนั้น คืออะไรบ้าง ?

ปริศนาที่ 3: พรทิพย์ทำข้อสอบ 20 ข้อ โดยการให้คะแนน สามารถแบ่งได้ คือ ถ้าพรทิพย์ทำถูก จะได้ข้อละ 10 คะแนน และถ้าทำผิด จะถูกหักข้อละ 5 คะแนน ถ้าผลการสอบของพรทิพย์ปรากฏว่า ได้คะแนนรวม 125 คะแนน จงหาว่า พรทิพย์ทำผิดกี่ข้อ?

ปริศนาที่ 4: เมื่อสมชาย ถูกถามว่าวันเกิดเขาคือวันไหน เขาตอบว่า "ผมอายุครบ 25 ปี เมื่อวานขึ้นนี้เอง และปีหน้าี้ ผมจะอายุครบ 27 ปีแล้วครับ" ถามว่า สมชายเกิดวันที่เท่าไร เดือนอะไร และเขาถูกถามวันที่เท่าไร เดือนอะไร?

ปริศนาที่ 5: ให้เลขศูนย์มา 5 ตัว จงใช้ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์อะไรก็ได้ ให้ได้คำตอบเป็น 120

ปริศนาที่ 6: กำหนดให้ลำดับเป็น 01, 1011, 111021, 31101211, จงหาว่าตัวถัดไป คืออะไร?

ปริศนาที่ 7: สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ตัวไหน ที่เวลาใส่เข้าไประหว่างตัวเลข 5 และ 9 แล้วได้ผลลัพธ์ที่มีค่ามากกว่า 5 และน้อยกว่า 9

ปริศนาที่ 8: จงเติมตัวเลข 0 ถึง 9 (ยกเว้น 4 และ 7) เพื่อให้สมการข้างล่างนี้ เป็นจริง (ตัวเลขเดียวถูกใช้ได้แค่ตำแหน่งเดียว) $7_ _ * 4_ _ = _ _ _ _ _ _$ (กำหนดให้ * แทนการดำเนินการการคูณของจำนวนจริง)

ปริศนาที่ 9: ถ้าเขียนตัวอักษรเป็นสมการ ดังนี้ $I F * A T = FIAT$ แล้วจงหาว่า อักษรแต่ละตัวควรแทนด้วยตัวเลขเดี่ยวตัวไหนใน 0 ถึง 9 จึงจะทำให้สมการข้างบนเป็นจริง (กำหนดให้ * แทนการดำเนินการการคูณของจำนวนจริง)

ปริศนาที่ 9: จำนวนถัดไปนี้ คือจำนวนอะไร 18, 46, 94, 63, 52, ... ?

ปริศนาที่ 11: ตัวอักษรตัวถัดไป คืออะไร O, T, T, F, F, S, S, E, ...?

ปริศนาที่ 12: จำนวนเฉพาะที่ติดกันสามจำนวนใด ที่ให้ผลรวมเป็น 220

***** ☺ ขอให้นักศึกษาทุกคน ประสบความสำเร็จในการเรียนวิชานี้ โดยถื่นหน้ากันนะครับ ☺ *****

บรรณานุกรม

- C. Paramasivan and T.Subramanian, *Financial Management*, 1985, New Age International (P) Limited, Faculty of Commerce, New Delhi.
- D. Burzynsky, *Wede Ellis, Elementary Algebra*, 1989, Saunders College Publishing.
- J. A. Murtha and E.R. Willard. *Linear Algebra and Geometry*, 1969.,Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York.
- N. J. Pullman. *Matrix Theory and its Applications*,1976. Marcel Dekker. Inc. New York.
- R.E. Larson and B.H. Edwards. *Elementary Linear Algebra*, 1988. D.C.Heath and Company, Lexington, Massachusetts Toronto.
- R. J. Elliott, and P. E Kopp,..*Mathematics of Financial Markets*, 1998, Springer-Verlag, New York.
- V. Horne J. C *Financial Management and Policy*,1989, Englewood Cliff, N.J Prentice Hall Inc;
- Z. Jia Dai, M. Warmer, T. Lam, *High School Mathematics Extensions*, 2008, Wikibooks Contributor.
- กมล เอกไทยเจริญ . **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 (สาระเพิ่มเติม)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, (ม.ป.ป.)
- คณิต มงคลพิทักษ์สุข *Math E-Book*, เผยแพร่ทางอินเทอร์เน็ต <http://math.reads.it> , 2548
- จักรินทร์ วรณโพธิ์กลาง. **คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่2**. กรุงเทพฯ: พ.ศ. พัฒนา, (ม.ป.ป.)
- นพพร แยมแสง, ทรงศักดิ์ ด้านพานิช. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.2 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : แม็ค, 2554.
- สุพจน์ ภิญโญภัสสรคณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) ชั้น ม.4 เล่ม 1 :สื่อเสริมสาระพื้นฐาน
- สุพจน์ ภิญโญภัสสรสิริ. คณิตศาสตร์ ม.2 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : หจก.สามลดา, 2554
- โชคชัย สิริหาญอุดม. แบบฝึก กัดคณิตศาสตร์ ม.2 เล่ม 1 สาระการเรียนรู้พื้นฐาน. กรุงเทพฯ : เดอะ บุคส์, 2553.
- สถาบัน ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, กระทรวงศึกษาธิการ . หนังสือเรียนสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว, 2553.
- สํานักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน ,

กระทรวงศึกษาธิการ . ตัวชี้วัดและสาระแกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.

กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย, 2551.



ดัชนี (Index)

เ		คอมพลีเมนต์ (Complement)	22
เงินต้นที่คงที่	231	ค่าสูงสุดมาตรฐาน (Standard Maximize Problem).....	275
เงินปี	236	คุณร่วมน้อย	14
เซตจำกัด	20	คู่อันดับ	119
เซตอนันต์	20	จ	
เพาเวอร์เซต (power set)	22	จานดาวเทียม	197
เมทริกซ์	49	จำนวนเต็ม	9
เมทริกซ์เอกลักษณ์	51	จำนวนจริง.....	See
เมทริกซ์แต่งเติม(Augmented Matrix)	72	จำนวนธรรมชาติ.....	9
เมทริกซ์ไมเนอร์.....	66	จุดคุ้มทุน (Break even point)	243
เมทริกซ์จัตุรัส.....	51	ช	
เมทริกซ์ผกผัน	62	ช่วงเปิด	25
เมทริกซ์ผกผัน	65	ช่วงปิด	25
เมทริกซ์ศูนย์.....	51	ค	
เลขฐานสอง	17	ดอกเบี๋ยคงต้น.....	231
เลขฐานสิบ	16	ดอกเบี๋ยทบต้น.....	233
เอกภาพสัมพัทธ์	20	ดาวหาง Halley	210
แ		ดีเทอร์มิแนนต์	59
แถว	49	ดุลยภาพตลาด.....	247
แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal).....	300	ด	
โ		ตรรกยะ	9
โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	122	ตัวเลขทองคำ (Golden Number)	302
๗		ตัวกำหนด	59
ไฮเปอร์โบลา (Hyperbolae).....	202	ตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.).....	14
ก		ตัวประกอบ	12
กฎของครเมอร์	76	ตัวประกอบร่วม	12
กฎของครเมอร์ (Cramer's rule).....	70	ตัวประกอบร่วมมากที่สุด.....	13
กองทุนสำรองเลี้ยงชีพ	240	ท	
การแปลงแถวเบื้องต้น	63	ทฤษฎีเศษเหลือ (remainder theorem)	148
การหารสังเคราะห์	148	ทฤษฎีตัวประกอบ (factor theorem).....	149
ก		น	
คลื่นโซนิค	214	น้อยกว่า	26
ความสัมพันธ์ (Relations).....	120		



น้อยกว่าหรือเท่ากับ.....	26	ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System).....	175
ป		ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate System)	176
ปัญหานักลงทุนมือใหม่.....	85	ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร	31
ปิแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat)	299	ล	
พีทาโกรัส (Pythagoras)	298	ลอการิทึม	139
ผ		ลอกาภิธึม.....	136
ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)	119	ลีโอนาโด ฟิโบนัซซี (Leonardo Fibonacci).....	301
ผลตอบแทนสูงสุด(Maximum Profits).....	244	ว	
พ		วงกลม (Circles)	188
พาราโบลา (Parabolas)	196	วงรี (Ellipses)	192
ฟ		วิธีของเกาส์ (Gauss's method).....	70
ฟังก์ชัน (Functions)	123	วิหการพาทินอน	303
ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง.....	131	วิธีของเกาส์.....	72
ฟังก์ชันกำไร(Profit Functions)	243	ส	
ฟังก์ชันต้นทุน(Cost Functions)	243	สมการ	29
ฟังก์ชันพหุนาม	146	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	29
ฟังก์ชันรายได้(Revenue Functions)	243	สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร	30
ภ		สับเซต (subset)	21
ภาคตัดกรวย.....	174	ห	
ภาชี.....	239	หลัก.....	49
ม		หักลดหย่อน.....	240
มากกว่า	26	อ	
มากกว่าหรือเท่ากับ	26	อตรรกยะ.....	9
ย		อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	27
ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria)	299	อินเตอร์เซคชัน.....	22
ยูเนียน.....	22	อูโมงค์	214
ร		อุปทาน	247
ระบบพิกัด	174	อุปทาน (Supply).....	246
ระบบพิกัดแนวฉาก(Rectangular Coordinate System)	174	อุปสงค์.....	246
		อุปสงค์ (Demand)	246