รหัสโครงการ SUT1-104-41-12-04

รายงานการวิจัย

การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับลำเส้นแสงซินโครตรอน

An Analytical Study of Beam Lines of Synchrotron Radiation

ผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา ผาติเสนะ

สาขาวิชาฟิสิกส์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2541

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว

มิถุนายน 2544

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2541

บทคัดย่อ

การศึกษาเชิงวิเคราะห์เกี่ยวกับลำแสงซินโครตรอนนี้ได้เน้นไปที่สมบัติพื้นฐานของลำแสง คือ พลังงานและกำลังของการแผ่รังสี สเปกตรัมของรังสี โพลาไรเซชัน *time structure* ความเปล่งของลำอิเล็กตรอน ความสว่างของลำโฟตอน และความร่วมนัย สมบัติเหล่านี้เป็นตัวกำหนดในการออกแบบเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอน ได้ศึกษาสมบัติเหล่านี้ทั้งในวงแหวนสะสมและอุปกรณ์เสริม รวมทั้งการเบี่ยงเบนไปจากแลตทิซอุดมคติและการแก้ไข การศึกษาเชิงวิเคราะห์จะเริ่มจากทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมทั้งไม่เชิงสัมพัทธภาพและเชิงสัมพัทธภาพ ผลเชิงควอนตัมที่มีต่อสมบัติของรังสีซินโครตรอนมักไม่นำมาพิจารณาในเบื้องต้น แต่จะนำมาพิจารณาเมื่อพลังงานของโฟตอนที่แผ่ออกมามีค่าเปรียบเทียบได้กับพลังงานอิเล็กตรอน จากทฤษฎีพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมเราสามารถกำหนดพลังงานของรังสีที่แผ่ออกมาต่อรอบและพลังงานสูญจากการแผ่รังสีต่อรอบได้ เนื่องจากสมการการเคลื่อนที่ของลำอนุภาคมีลักษณะคล้ายกับสมการของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกอย่างง่ายจึงทำให้การหาผลเฉลยของสมการง่ายขึ้น และได้นำผลของการหน่วงของการแกว่งกวัดบีตาตรอนมาพิจารณาด้วย นอกจากนี้ เนื่องจากค่าคงตัว K(s) เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งแต่มีลักษณะเป็นคาบ ผลเฉลยของสมการจึงหาได้โดยวิธีเมทริกซ์ จากการวิเคราะห์พบว่าลักษณะของสเปกตรัมคล้ายกับการแผ่รังสีจากวัตถุดำ

Abstract

The analytical study of beam lines of synchrotron radiation is aimed to basic properties of the beam lines. These properties are energy and power of radiation, spectrum of radiation, polarization, time structure, emittance of electron beam, brightness of photon beam and coherence. These properties are used to determine prototype of synchrotron light source. The study of such properties will be done either in storage ring and insertion devices. Linear deviations from the ideal lattice and corrections are also included. The analytical study started from classical electrodynamics either non-relativistic and relativistic theories. Quantum effects on the properties of synchrotron radiation are negligible but will be considered when energy of photon radiation is comparable with electron energy. From classical electrodynamic theory we can determine the energy of radiation and energy loss per turn. Since equation of motion of particle beam is similar to equation of simple harmonic oscillators, it is easier to get general solutions. Damping of betatron oscillations is also be considered. Because of the spring constant K(s) is a function of position s but periodic, general solutions of the equation must be solved by matrix method. From the analysis we found that the characteristics of spectrum is similar to black body radiation.

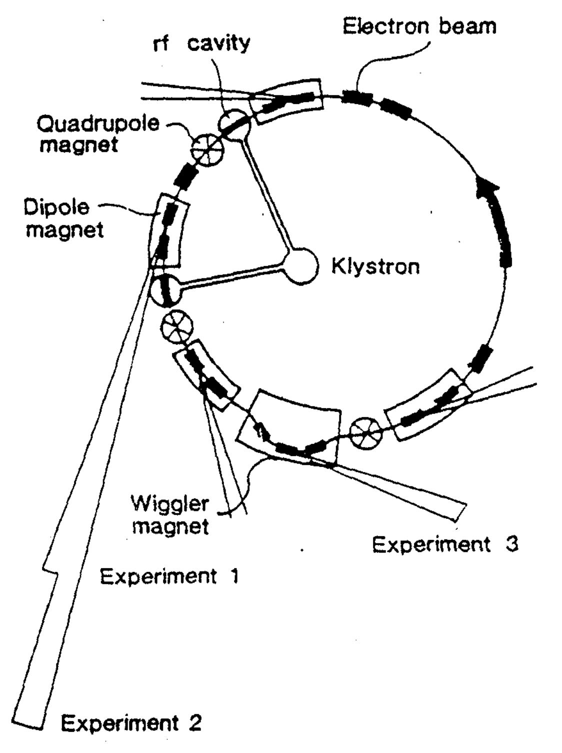
สารบัญ

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

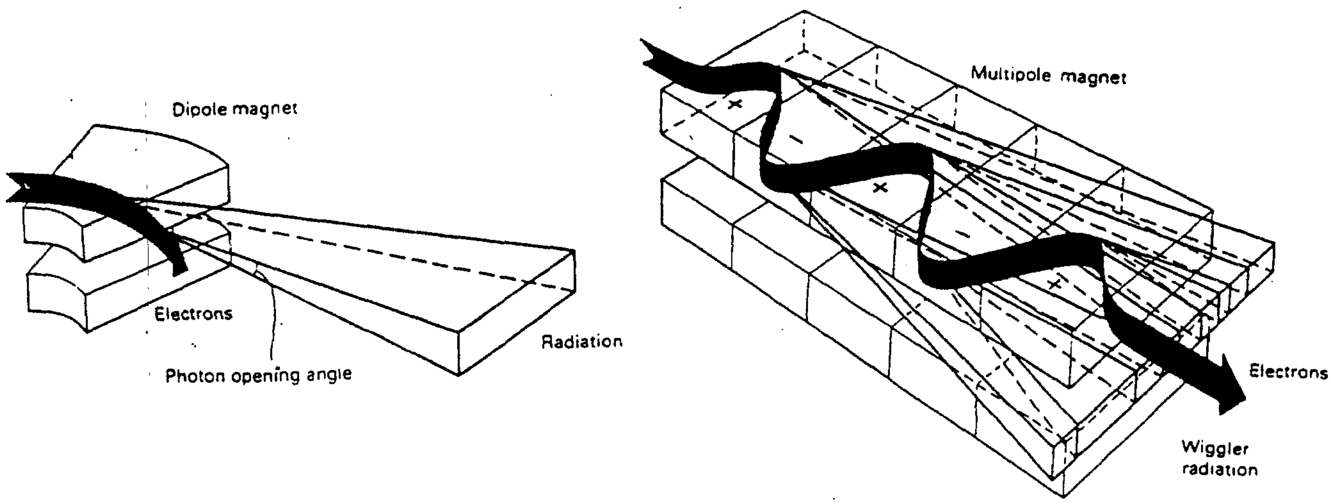
แหล่งกำเนิดรังสีซินโครตรอนเกือบทุกชนิดจะต้องใช้อุปกรณ์ที่เรียกว่า **storage ring.** หรือ วงแหวนสะสม หลักการทำงานของแหล่งกำเนิดดังกล่าวค่อนข้างง่าย กล่าวคือ อิเล็กตรอนจะถูกเร่งแล้วปล่อยให้เข้าไปในวงแหวนสะสม อิเล็กตรอนจะถูกบังคับให้มีพลังงานคงตัวภายในวงโคจรของเครื่องเร่งอนุภาคโดยใช้สนามแม่เหล็กที่คงตัว รังสีซินโครตรอนจะแผ่ออกมาสัมผัสกับวงโคจรของลำอิเล็กตรอนด้วยมุมที่เล็กมากๆ เรียกว่า **photon opening angle** พลังงานที่สูญเสียไปของลำอิเล็กตรอนจากการแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าจะถูกเติมเต็มโดยกำลังความถี่คลื่นวิทยุที่มาจากอุปกรณ์ที่เรียกว่า **klystron.** ดังนั้น วงแหวนสะสม อาจมองว่าเป็นอุปกรณ์ที่เปลี่ยนรังสีความถี่คลื่นวิทยุไปเป็นสเปกตรัมคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของรังสีซินโครตรอน นั่นคือ จากรังสีเอกซ์ไปจนถึงคลื่นไมโครเวฟและถูกโพลาไรซ์ (polarised) ในระนาบของวงแหวนสะสม โดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงพลังงานรังสีเอกซ์

คุณลักษณะที่สำคัญ 2 ประการของแหล่งกำเนิดคือ พลังงานของอิเล็กตรอนในลำอนุภาคและกระแสของลำอนุภาค พลังงานของอิเล็กตรอนในลำอนุภาคจะอยู่ในช่วง 0.5 ถึง 5 GeV ในขณะที่กระแสของลำอิเล็กตรอนอยู่ในช่วง 50 ถึง 500 mA. อิเล็กตรอนด้วยพลังงานขนาดนี้จะเคลื่อนที่เข้าใกล้ความเร็วแสง



รูปที่ 1.1 แผนภาพของวงแหวนสะสมและลำเส้นแสงซินโครตรอน

จากรูปที่ 1.1, ลำอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบๆ ท่อซึ่งทำงานที่สุญญากาศด้วยความดันที่น้อยกว่า 10^{-9} torr. วงแหวนมีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 30 m. ลำอิเล็กตรอนจะถูกเบี่ยงเบนทิศทางด้วยแม่เหล็กที่แยกจากกันในแนวตรง อุปกรณ์เสริมซึ่งเป็นแม่เหล็กเช่นกันเรียกว่า **wigglers** และ **undulators** จะถูกนำไปติดตั้งในช่องว่างระหว่าง **bending magnets** เพื่อปรับรัศมีความโค้งของลำอิเล็กตรอนให้สลับกันไป การปรับความโค้งของวงโคจรอิเล็กตรอนทำให้ยอดโด่งของรังสีซินโครตรอนเลื่อนเข้าหาความยาวคลื่นที่สั้นกว่าหรือยาวกว่าเดิม ความแตกต่างระหว่างรังสีที่แผ่ออกมาจากการเบี่ยงเบนโดยแม่เหล็กหรือ bending magnet และที่แผ่ออกมาโดยอุปกรณ์เสริมแสดงในรูปที่ 1.2 เมื่อใช้อุปกรณ์เสริม, ลำอิเล็กตรอนจะเบี่ยงเบนหลายครั้ง ความโค้งของลำอิเล็กตรอนใน wiggler magnet จะรุนแรงและความเข้มรวมจากหลายๆ แหล่งจะรวมกัน นั่นคือ เป็นสัดส่วนกับ N โดยที่ N เป็นจำนวนการแกว่งกวัดหรือคาบของแนววิถีอิเล็กตรอน undulator magnets จะเบี่ยงเบนลำอิเล็กตรอนด้วยมุมที่น้อยกว่า photon opening angle ทำให้เกิดผลการแทรกสอดระหว่างอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่และโฟตอนที่แผ่ออกมา ผลก็คือการแผ่รังสีซินโครตรอนจะแยกออกเป็นอนุกรมฮาร์มอนิก ดังนั้น รังสีจาก undulator จึงเป็นแสงเอกรงค์ (monochromatic) และความเข้มเข้าสู่ N^2 ที่ฮาร์มอนิกของอุปกรณ์



รูปที่ 1.2 เปรียบเทียบลำอิเล็กตรอนและรังสีที่แผ่ออกมาจาก bending magnet และ wiggler magnet

ลำอิเล็กตรอนถูกบังคับให้เข้าไปในวงแหวนเป็นกลุ่มๆ แบบอนุกรมเพื่อให้เข้ากับความถี่ klystron แต่ละกลุ่มยาวในระดับเซนติเมตร ดังนั้นรังสีซินโครตรอนมีความกว้างพัลส์ขนาด 100 ps. ผลของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและส่วนใหญ่จากการกระเจิงจากโมเลกุลแก๊สทำให้กระแสอิเล็กตรอนและความเข้มของรังสีซินโครตรอนลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียล จึงต้องเติมเต็มให้แก่วงแหวนสะสม ทุกๆ 12 – 24 ชั่วโมง

แหล่งกำเนิดรังสีซินโครตรอนมักเรียกกันว่า **tangent point** เพื่อที่จะได้เรขาคณิตที่เหมาะสมกับการทดลองตามสถานีทดลองต่างๆ จำเป็นต้องหักเหหรือสะท้อนลำแสงโดยใช้กระจก นอกจากนี้ เราอาจใช้กระจกโฟกัสแสงเพื่อเพิ่มความเข้มของสารตัวอย่าง สำหรับการทดลองที่ต้องใช้รังสีเอกซ์, จะมีความเป็นไปได้ที่จะทดลองในอากาศแต่ต้องล้อมรอบให้มิดชิดเพราะเป็นลำอิเล็กตรอนพลังงานระดับ GeV. แต่สำหรับรังสีเอกซ์อย่างอ่อน (soft X-ray) และ VUV (vacuum ultraviolet) ไม่จำเป็นต้องป้องกันอย่างมิดชิดมากนัก

ในการศึกษาลำเส้นแสงซินโครตรอนในเชิงทฤษฎีนั้น, เป็นที่ทราบกันดีว่าผลเชิงควอนตัม (quantum effect) ที่มีต่อสมบัติของรังสีซินโครตรอนจากเครื่องเร่งอนุภาคสามารถตัดทิ้งได้ ผลเชิงควอนตัมอาจนำมาพิจารณาในบางกรณีที่จำเป็นเท่านั้น ดังนั้น การศึกษาลำเส้นแสงซินโครตรอนในเชิงวิเคราะห์จึงยึดทฤษฎีแผนเดิม (classical theory) เป็นหลักเสมอ การศึกษาในครั้งนี้จะดำเนินการดังนี้ :

ในบทที่ 2 เป็นการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติทั่วไปของรังสีซินโครตรอนประกอบด้วยรูปแบบของการแผ่รังสีทั้งจาก bending magnet, wiggler และจาก undulator พลังงานและกำลังของการแผ่รังสี สเปกตัมของรังสี, โพลาไรเซชัน, time structure ความเปล่งของลำอิเล็กตรอน ความสว่างของลำโฟตอน และความร่วมนัย สมบัติเหล่านี้เป็นสมบัติหลักในการออกแบบสร้างเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอน

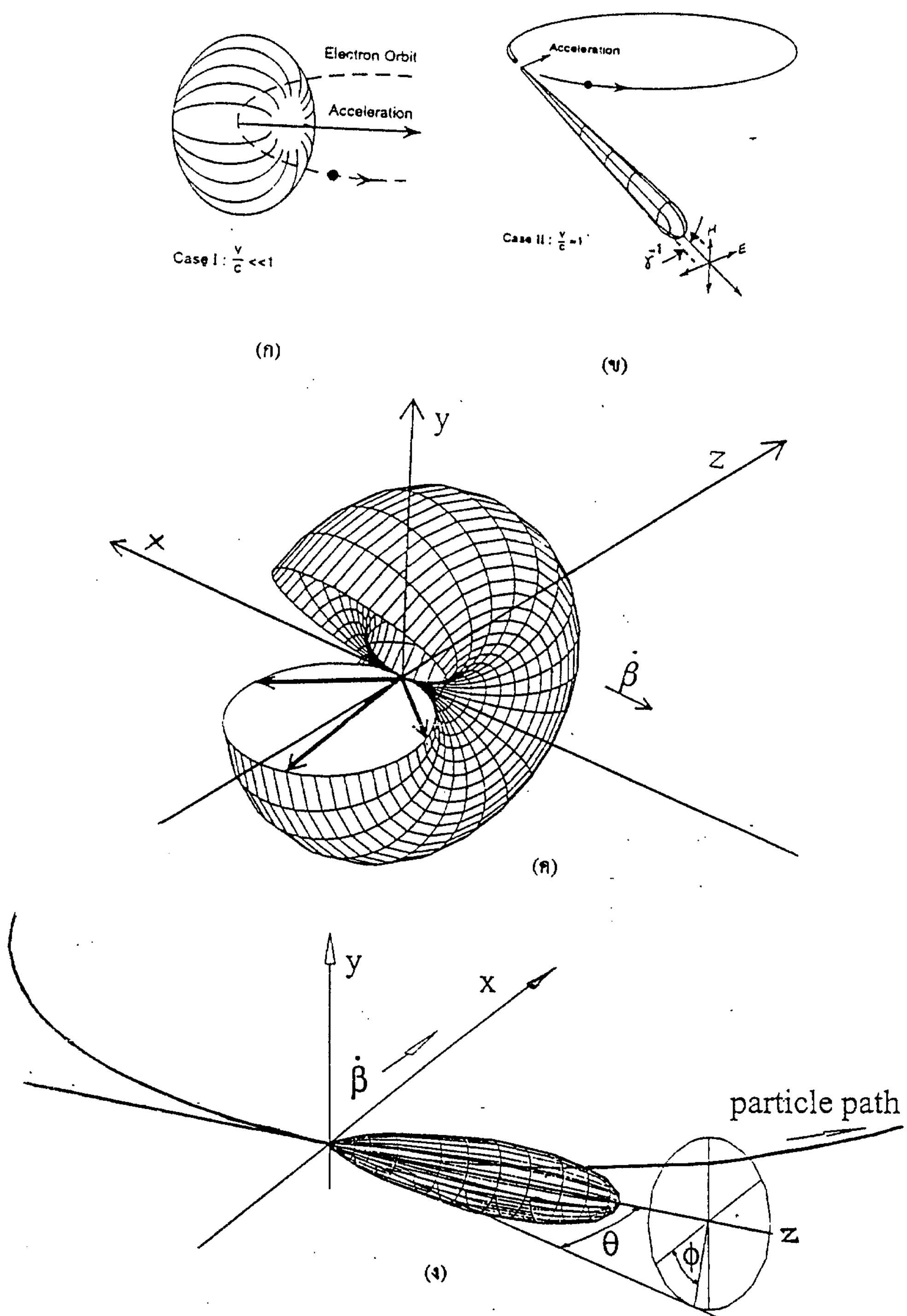
บทที่ 3 เป็นการศึกษาทฤษฎีแผนเดิมของรังสีซินโครตรอน โดยเริ่มจากวิชาพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิม (classical electrodynamics) ไม่เชิงสัมพัทธภาพและเชิงสัมพัทธภาพ แล้วนำไปสู่ค่าพลังงานและกำลังของรังสีที่แผ่ออกมา รวมทั้งข้อสรุปที่ว่าผลเชิงควอนตัมของรังสีซินโครตรอนจากเครื่องเร่งอนุภาคมีค่าน้อยมากและสามารถตัดออกไปได้ การนำทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิมเป็นจุดเริ่มต้นสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของรังสีซินโครตรอน

บทที่ 4 ได้ศึกษาพลศาสตร์ของอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม โดยเริ่มจากโครงสร้างและอุปกรณ์หลักที่ประกอบอยู่ในวงแหวนสะสมซึ่งสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของรังสีที่แผ่ออกมา การกำหนดสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) ของลำอนุภาค ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับสมการของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกอย่างง่าย (simple harmonic oscillation) ซึ่งทำให้การหาผลเฉลยของสมการง่ายขึ้น แล้วจึงกำหนดค่าความเปล่งและความนำเชิงซ้อน ต่อจากนั้นจึงนำผลการหน่วง (damping) ของการแกว่งกวัดบีตาตรอนมาพิจารณา ได้ศึกษาการกระจายโมเมนตัมรอบแนววิถีในอุดมคติว่าควรเป็นอย่างไร แล้วพิจารณาสิ่งที่เกิดขึ้นจริงหรือการเบี่ยงเบนไปจากอุดมคติและกำหนดสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนรวมทั้งผลเฉลย การพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนหรือ errors ต่างๆ รวมทั้งแนวทางการแก้ไข นอกจากนี้ได้ศึกษาการสั่นพ้องตามขวาง เพอร์เทอร์เบชันของสนาม**แม่เหล็กหกขั้ว** (sextupole) ที่ใช้ปรับแก้**สภาพคลาดรงค์** (chromaticity)

หลังจากที่ได้ศึกษารังสีที่เกิดจากอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสมแล้วก็ได้ศึกษารังสีที่มาจาก **อุปกรณ์เสริม** (insertion devices) ต่อไป อุปกรณ์เสริมที่จำเป็นและสำคัญคือ wigglers และ undulator ในบทที่ 5 ได้พิจารณาอุปกรณ์เสริมทั้งสองชนิดนี้ และได้ศึกษารังสีจาก undulator เป็นกรณีพิเศษ รวมทั้งได้พิจารณาอุปกรณ์เสริมที่เรียกย่อๆ ว่า MPU (micropole undulator) ซึ่งช่วยลดขนาดและพลังงานสูญจากการแผ่รังสีจาก undulator ได้มากทีเดียว และท้ายสุดได้ศึกษาเป็นเบื้องต้นเกี่ยวกับ FEL หรือ free electron laser ที่ให้รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากการกระตุ้นโดยตรงจากอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพ รายละเอียดต่างๆ เกี่ยวกับ FEL จะไม่นำมาพิจารณาในที่นี้

บทที่ 2
สมบัติของรังสีซินโครตรอน

อนุภาคที่มีประจุเมื่อเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจะแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าออกมา จากสายอากาศ (classical antenna) ซึ่งอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ในลวดตัวนำ, ความเร่งมีค่าน้อยมากรังสีที่แผ่ออกมาจึงอยู่ในพิสัยความถี่คลื่นวิทยุ (rf) ในกรณีนี้ความเร็วและความเร่งจะอยู่ในระนาบเดียวกัน (collinear) อิเล็กตรอนในหลอดสุญญากาศเช่น klystron, ความเร่งจะเพิ่มขึ้นและรังสีที่แผ่ออกมาจะอยู่ในพิสัยความถี่อัลตราไฮ (ultra high frequency, UHF) พลังงานของอิเล็กตรอนในหลอดสุญญากาศนี้ยังคงมีค่าน้อยและอยู่ในอันดับขนาดของ keV เมื่ออิเล็กตรอนถูกทำให้มีความเร่งในทิศทางที่ตั้งฉากกับความเร็ว นั่นคือ ความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) ดังเช่นกรณีอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านสนามแม่เหล็ก, ทิศทางการเคลื่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงและกลายเป็นเคลื่อนที่แบบวงกลม เมื่อพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีค่าต่ำเมื่อเทียบกับพลังงานมวลนิ่ง, mc^2, หรืออีกนัยหนึ่งเมื่อความเร็วอิเล็กตรอนมีค่าน้อยเทียบกับความเร็วแสงหรือไม่เชิงสัมพัทธภาพ (non-relativistic), รังสีที่แผ่ออกมาจึงมีรูปแบบที่เรียกว่า dipole pattern ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (ก)



รูปที่ 2.1 รูปแบบการแผ่รังสีจากอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เป็นวงกลม (ก) เมื่อความเร็วต่ำเทียบกับความเร็วแสง (ข) เมื่อความเร็วเข้าใกล้ความเร็วแสง รูป (ค) และ (ง) แสดงภาพขยายและรายละเอียดของรูป (ก) และ (ข) ตามลำดับ

ตามทฤษฎีแผนเดิม, อนุภาคมีประจุซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงโคจรรูปวงกลมผ่านสนามแม่เหล็ก B จะแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าในลักษณะไอโซทรอปิก ที่ความถี่หนึ่งคือ **Larmor frequency.** ในวงแหวนสะสม, อิเล็กตรอนหรือโพซิตรอนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเข้าใกล้ความเร็วแสง ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง, รังสีซินโครตรอนจะเป็นลำขนานในทิศไปข้างหน้า และแผ่ด้วยพลังงานที่สูงซึ่งอยู่ในย่านรังสีเอกซ์ มุมเปิดของโฟตอน (photon opening angle) ซึ่งนิยามการเป็นลำขนาน กำหนดโดย $mc^2 / E = 1/\gamma$ Larmor frequency, $eB / 2\pi mv$ มีลักษณะที่เรียกว่า 'blue shifted' เมื่อความเร็ว v ของอิเล็กตรอนเข้าใกล้ c. รังสีซินโครตรอนจะโพลาไรซ์ (polarized) อย่างมากในระนาบวงโคจร, แต่องค์ประกอบในแนวดิ่งทำให้รังสีมีระดับขั้นที่ต่างกันของโพลาไรเซชันเชิงวงกลม.

การแสดงความเข้มของรังสีซินโครตรอนสามารถหาได้โดยกำหนดในเทอมของกำลังรวม, P, ซึ่งจะเพิ่มค่ามากขึ้น เมื่อใช้อุปกรณ์เสริมซึ่งจะได้กล่าวต่อไป. ลำอนุภาคในวงแหวนสะสมในปัจจุบันมีภาคตัดขวางอยู่ระหว่าง 0.5 และ 10 mm^2 ซึ่งเป็นผลจากการแกว่งกวัดโดยธรรมชาติในแลตทิซแม่เหล็กของวงแหวนสะสมเรียกว่า **การแกว่งกวัดบีตาตรอน** (betatron oscillations). ภาคตัดขวางของลำอนุภาคนี้เองซึ่งเป็นตัวจำกัดความจ้า (brilliance) ของรังสี ความจ้าแสดงจำนวนโฟตอนต่อวินาทีใน band pass ซึ่งสามารถโฟกัสลงบนพื้นที่หนึ่งหน่วย. ถ้าภาพลดขนาดลง, ฟลักซ์โฟตอนจะเพิ่มขึ้นแต่ความจ้าจะยังคงเท่าเดิม นี่เป็นตัวอย่างหนึ่งของการใช้ทฤษฎีบทลีอูวิลล์ (Liouville's theorems) นั่นคือ ความจ้าของภาพไม่สามารถเกินความจ้าของแหล่งกำเนิดได้.

ความสัมพันธ์เช่นเดียวกันนี้ระหว่างการกระจายเชิงปริภูมิและเชิงมุม (spatial and angular distributions) สามารถพบในปริภูมิเฟสของลำอนุภาคด้วย สำหรับแต่ละมิติของปริภูมิ, σ, จะมี angular divergence, σ', สำหรับอนุภาคในลำอนุภาคนั้น ผลคูณ, $\sigma\sigma'$, จะเรียกว่า**ความเปล่ง** (machine emittance) ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญของวงแหวนสะสม ค่าของมันอยู่ระหว่าง 10^{-2} – 10^{-4} mm.mrad. เนื่องจากลำอนุภาคถูกโฟกัสอย่างต่อเนื่องและถูก defocussed รอบๆ เครื่องกล, แต่ละค่าจึงแปรเปลี่ยนแยกจากกันแต่ผลคูณจะยังคงเท่าเดิมเสมอ

ลำอนุภาคในวงแหวนสะสมมีมิติตามยาว (logitudinal dimension) เช่นกัน ทั้งนี้เพราะกำลังของคลื่นความถี่วิทยุ (rf power) ซึ่งควบคู่กับลำอนุภาคเพื่อเติมเต็มกำลัง P ที่สูญเสียไปจากการแผ่รังสีซินโครตรอนจะแยกลำอนุภาคออกเป็นกลุ่ม (bunches) อย่างต่อเนื่อง รังสีซินโครตรอนจึงเป็นพัลส์ (pulse) แทนที่จะต่อเนื่อง ขนาดตามยาวของกลุ่มแหล่งกำเนิดจึงเกี่ยวข้องกับความถี่ของตัวป้อน rf และเรขาคณิตของเครื่องและกระแสของลำอนุภาค ขนาดของมันอยู่ในอันดับของเซนติเมตรแต่ด้วยอนุภาคความเร็วสูงเชิงสัมพัทธภาพจึงมีผลต่อความยาวพัลส์สำหรับความเปล่งของรังสี เครื่องจักรสามารถทำงานได้หลายลักษณะเริ่มจากกลุ่มเดี่ยวๆ หมุนรอบด้วยกระแสเฉลี่ยขนาดหลายร้อยมิลลิแอมป์ จึงนำไปสู่พารามิเตอร์ตัวใหม่ที่เรียกว่า **time structure**. อุปกรณ์เสริมช่วยให้ความจ้าเพิ่มขึ้นไปอีก

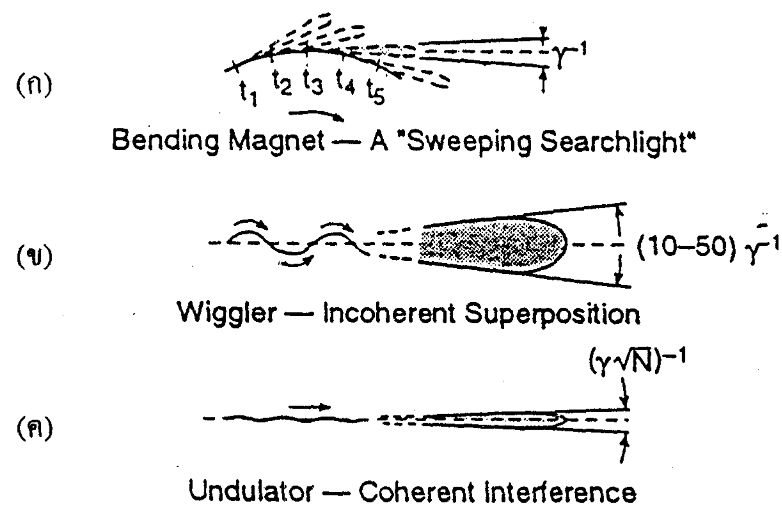
2.1 รูปแบบการแผ่ของรังสีซินโครตรอน

ในเครื่องเร่งอิเล็กตรอนพลังงานสูง, อิเล็กตรอนถูกเร่งจนมีพลังงานสูงถึงจิกะอิเล็กตรอนโวลต์ (GeV), สนามแม่เหล็กใน bending magnets จะเหนี่ยวนำให้เกิดความเร่งสู่ศูนย์กลางค่ามากจนทำให้อิเล็กตรอนมีพลังงาน $E >> mc^2$ และมีลักษณะเชิงสัมพัทธภาพ ความเร่งนี้จะเหนี่ยวนำให้เกิดรังสีที่เรียกว่ารังสีซินโครตรอน ปริมาณของพลังงานที่แผ่ออกมาเพิ่มขึ้นอย่างกระทันหันและผลเชิงสัมพัทธภาพทำให้รูปแบบของการแผ่รังสีมีลักษณะเป็นรูปกรวยด้วยมุมเปิดกำหนดโดย $mc^2/E = \gamma^{-1}$, ดังแสดงในรูป 2.1 (ข) เนื่องจากพลังงานมวลนิ่งของอิเล็กตรอน, mc^2, มีค่า 0.511 MeV ดังนั้น พลังงานขนาด 511 MeV จะให้มุมเปิดของกรวยเพียง 0.001 เรเดียน หรือ 1 มิลลิเรเดียน หรือ 0.057 องศา เท่านั้น ที่พลังงาน 5100 MeV หรือ 5.1 GeV มุมเปิดจะลดลง 10 เท่า

ความเร่งสู่ศูนย์กลางเป็นความเร่งที่มาจากโครงสร้างรูปวงกลมของเครื่องเร่งอนุภาค อย่างไรก็ตาม, เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างสนามความเร่งและสมบัติเชิงเรขาคณิตและสเปกตรัมของโฟตอนที่แผ่ออกมา เราอาจหารูปทรงเรขาคณิตอื่นๆ ของความเร่งที่น่าสนใจเป็นพิเศษ ความเร่งที่เป็นคาบซึ่งเกิดจากการเหนี่ยวนำของแม่เหล็กเป็นช่วงๆ หรือเป็นเกลียว (wiggler and undulator magnets) บนแนวตรงของเครื่องเร่งอิเล็กตรอนช่วยเพิ่มความเข้มและการแผ่รังสีเดี่ยวซึ่งความถี่แปรตาม E^2 หรืออีกนัยหนึ่งสามารถปรับค่าและเพิ่มความเข้มได้

ใน bending magnet กรวยที่คมชัดจะกวาดไปรอบๆ คล้ายไฟฉายโฟกัสทำให้เกิดรังสีที่ต่อเนื่องในระนาบของการเบี่ยงเบน มุมเปิดยังคงมีค่าน้อยและกำหนดโดย $mc^2/E = \gamma^{-1}$ เช่นเดิม ดังรูปที่ 2.2 (ก) wiggler magnet ซึ่งเป็นขั้วแม่เหล็กสลับขั้วอย่างต่อเนื่อง, แต่ละขั้วเบี่ยงเบนลำอิเล็กตรอนด้วยมุมที่มากกว่าเมื่อเทียบกับ mc^2/E แม่เหล็กจะถูกออกแบบให้การเบี่ยงเบนที่สลับกันหักล้างกันจนทำให้การเบี่ยงเบนรวมไม่เกิดขึ้นเลย ดังนั้น จึงสามารถวางแม่เหล็กในแนวที่ตรงของวงแหวนสะสม โดยมีผลกระทบต่อวงโคจรเพียงเล็กน้อย ฟลักซ์และความส่องสว่างของรังสีจึงถูกเสริมด้วยแฟกเตอร์ประมาณเท่ากับจำนวนขั้วแม่เหล็ก ถ้าสนามแม่เหล็กใน wiggler มีค่ามากกว่าสนามแม่เหล็กของ bending magnet, สเปกตรัมของ wiggler จะขยายไปสู่พลังงานโฟตอนที่สูงกว่า

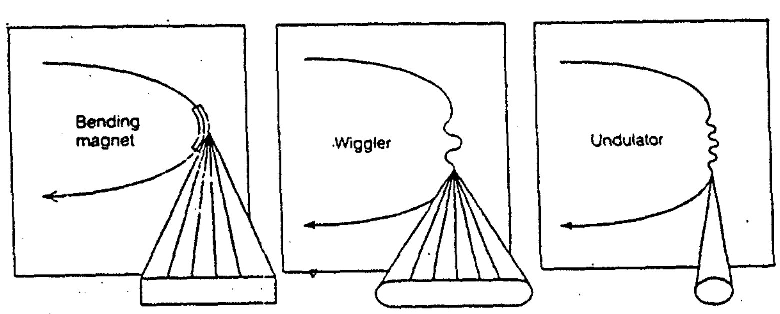
undulator magnet คล้ายกับ wiggler magnet ตรงที่เป็นขั้วแม่เหล็กสลับขั้วอย่างต่อเนื่อง แต่ในกรณีนี้มุมของการเบี่ยงเบนในแต่ละขั้วจะใกล้เคียงกับ mc^2/E ดังนั้น การถ่างออกเพียงเล็กน้อยอันเนื่องจากการแผ่รังสีซินโครตรอนจึงไม่เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ดังนั้น ความส่องสว่างของรังสีจึงยังคงเดิมทั้งในระนาบแนวดิ่งและแนวนอน นอกจากนี้ผลการแทรกสอดจากการแผ่รังสีทำให้สเปกตรัมมีลักษณะที่เพิ่มอย่างกระทันหันที่ความยาวคลื่นบางค่าจึงแตกต่างจากสเปกตรัมที่เรียบและต่อเนื่องที่เกิดจาก bending magnet และ wiggler magnet



รูปที่ 2.2 รูปแบบการแผ่รังสีจาก bending magnet, wiggler magnet, และ undulator magnet.

wiggler ทำให้อิเล็กตรอนเบี่ยงเบนไปมากเมื่อเทียบกับ มุมการแผ่รังสีโดยธรรมชาติของรังสีซินโครตรอน ทำให้การแผ่รังสีเป็นบริเวณกว้างและลำของโฟตอนมีลักษณะคล้ายพัด รังสีซินโครตอนที่แผ่ออกจาก wiggler จะคล้ายกับที่แผ่จาก bending magnet แต่มีความเข้มเป็น 2N เท่า อันเนื่องจากการเบี่ยงเบนซ้ำของอิเล็กตอรนตลอดความยาวของ 2N ขั้ว ความยาวของ wiggler เป็นหลายเมตรในขณะที่ของ bending magnet เพียงไม่กี่เซ็นติเมตรของวิถีโค้งอิเล็กตรอน

undulators ทำให้อิเล็กตรอนเบี่ยงเบนไปเพียงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับขนาดของมุมการแผ่รังสีโดยธรรมชาติของรังสีซินโครตรอน รังสีที่แผ่ออกจากแต่ละอิเล็กตรอนที่ขั้วต่างๆ เกิดการแทรกสอดกันแบบร่วมนัยทำให้การแผ่มีลักษณะเป็นลำของโฟตอนคล้ายปลายดินสอ จากการแทรกสอดแบบเสริมกัน, มุมเปิดของการแผ่รังสีที่ความยาวคลื่นหนึ่งๆ จะลดลง $\sqrt{N}$ ทำให้ความเข้มของรังสีต่อมุมตันแปรตาม N^2 รูปที่ 2.3 เปรียบเทียบเอนเวโลป (envelope) ของลำรังสีที่เกิดจาก bending magnet, wiggler และ undulator



รูปที่ 2.3 เปรียบเทียบเอนเวโลปของลำรังสีจาก bending magnet, wiggler และ undulator

2.2 พลังงานและกำลังของการแผ่รังสี

ทฤษฎีของรังสีซินโครตรอนตั้งอยู่บนพื้นฐานผลงานของ Ivanenko และ Pomeranchuk (1944) และ Schwinger (1946, 1949, 1954) ผลงานเหล่านี้มักถูกนำมาขยายความในหลายรูปแบบ เช่น โดย Sokolov และ Ternov (1968) และในรูปของตำราเรียนเช่นของ Sommerfeld (1949) และ Jackson (1975) ตาราง 2.1 ได้สรุปความสัมพันธ์ที่มีประโยชน์สำหรับการอ้างอิงค่าต่างๆ

ตาราง 2.1 ความสัมพันธ์พื้นฐานของรังสีซินโครตรอน

E(GeV) = พลังงานอิเล็กตรอน	I (แอมแปร์) = กระแสอิเล็กตรอน
R(เมตร) = รัศมีความโค้ง	B (เทสลา) = สนามแม่เหล็ก

กำลังรวมที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอน :

$$P = \int I(\lambda, \psi)\, d\lambda d\psi = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{\rho^2}\frac{E^4}{\left(m\ c^2\right)^4}$$

พลังงานสูญต่อรอบต่ออิเล็กตรอน :

$$\Delta E(\mathrm{keV}) = 88.5\frac{E^4(\mathrm{GeV})}{\rho(\mathrm{m})}$$

กำลังรวมที่แผ่ออกมา :

$$P_{tot}(\mathrm{kW}) = 26.6 E^3(\mathrm{GeV}).B(\mathrm{T}).I(\mathrm{A}).$$

ความยาวคลื่นวิกฤต :

$$\lambda_c(\mathring{A}) = 5.59\frac{\rho(\mathrm{m})}{E^3(\mathrm{GeV})} = \frac{18.64}{B(\mathrm{T}).E^2(\mathrm{GeV})}$$

พลังงานลักษณะเฉพาะ :

$$\varepsilon_c(\mathrm{eV}) = 2218\frac{E^3(\mathrm{GeV})}{\rho(\mathrm{m})} = 2.96 \times 10^{-7}\frac{\gamma^3}{\rho(\mathrm{m})}$$

มุมการแผ่ : $\approx \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{E}$ ด้วยค่า $\gamma = \frac{E}{m\ c^2} = 1957\, E(\mathrm{GeV})$

พลังงานของโฟตอน : $\varepsilon(\mathrm{eV}) = \frac{12.40}{\lambda(^{\circ}A)}$

จากตาราง 2.1 จะเห็นว่ากำลังรวมที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนพลังงานเดี่ยวเชิงสัมพัทธภาพบนวงโคจรเป็นวงกลมตามสมการของ Schwinger

$$P = \iint I(\lambda, \psi)\, d\lambda d\psi = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{\rho^2}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \quad (2.1)$$

โดยที่

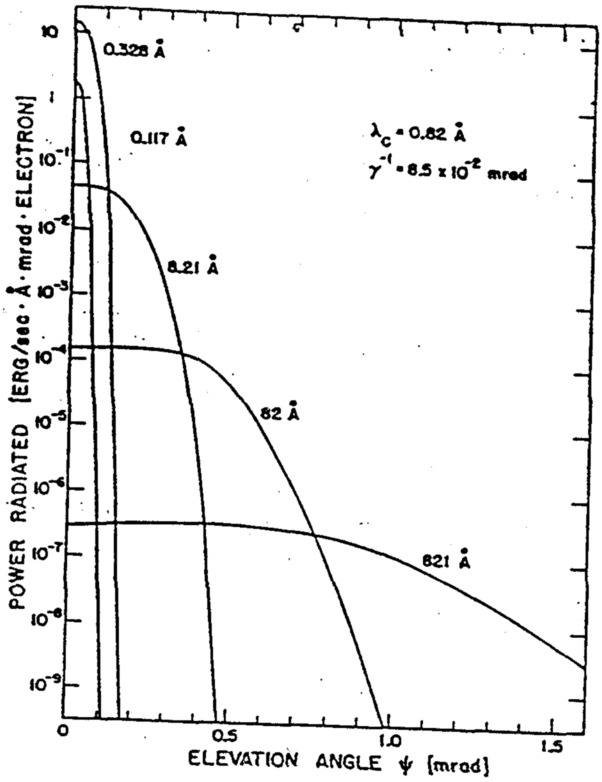
$$I(\lambda, \psi) = \frac{27}{32\pi^3}\frac{e^2 c}{\rho^3}\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^4 \gamma^8\left[1+(\gamma\psi)^2\right]^2\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{(\gamma\psi)^2}{1+(\gamma\psi)^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \quad (2.2)$$

λ_c เป็น "cut off" wavelength หรือความยาวคลื่นตัด, กำหนดโดย

$$\lambda_c = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma^{-3}, \quad \xi \equiv (\lambda_c / 2\lambda)\left[1+(\gamma\psi)^2\right]^{3/2} \quad (2.3)$$

$\gamma = E / m c^2$ โดยที่ $m c^2$ เป็นพลังงานมวลนิ่งของอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับ 0.511 MeV และ c เป็นอัตราเร็วแสง, λ เป็นความยาวคลื่นของรังสีแผ่, ρ เป็นรัศมีของวงโคจรอิเล็กตรอน, ψ เป็นมุมเชิงขั้ว และ $K_{1/2}(\xi)$, $K_{2/3}(\xi)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองที่ถูกดัดแปร (modified Bessel functions of the second kind)

กำลังรวม P ที่ขึ้นกับ E^4 ตามสมการ (2.1) อธิบายเหตุผลที่ว่าทำไมเราจำเป็นต้องเพิ่มรัศมีของ storage ring ถ้าต้องการให้ได้พลังงานสูงเพื่อรักษากำลังการแผ่ให้มีค่าตามต้องการ นอกจากนี้จากสมการ (2.1) จะเห็นได้ว่าทำไมเราจึงไม่ใช้เครื่องเร่งอนุภาคจากโปรตอนเพื่อผลิตรังสีซินโครตรอน สำหรับพลังงานระดับ GeV ทฤษฎีแผนเดิมแสดงให้เห็นว่าเนื่องจากมวลที่หนักของโปรตอนส่วนที่อาจตัดทิ้งได้ของกำลังแผ่จะอยู่ในพิสัยของสเปกตรัมแสงที่มองเห็นได้หรือที่ความยาวคลื่นสั้นกว่านี้



รูปที่ 2.4 กำลังของการแผ่รังสีจากอิเล็กตรอนพลังงาน 6 GeV รัศมี 31.7 เมตร ที่ความ ยาวคลื่นต่างๆ ที่เป็นฟังก์ชันของมุมยก ψ

พลังงานสูญ (energy lost) จากการแผ่รังสีซินโครตรอนใน bending magnet ต่อรอบต่ออิเล็กตรอน คือ

$$\Delta E(\mathrm{keV}) = 88.5\frac{E^4(\mathrm{GeV})}{\rho(\mathrm{m})} \qquad (2.4)$$

เนื่องจากพลังงานอนุภาคและรัศมีความโค้งสัมพันธ์กับสนามแม่เหล็กโดย

$$E(\mathrm{GeV}) = 0.3\,B(\mathrm{T})\ (\mathrm{m}) \qquad (2.5)$$

สมการ (2.4) จึงอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\Delta E(\mathrm{keV}) = 26.6E^3(\mathrm{GeV})B(\mathrm{T}) \qquad (2.6)$$

ดังนั้น อิเล็กตรอนพลังงาน 1 GeV ในวงแหวนสะสม และ bending magnet รัศมี 3.33 เมตร (ซึ่งสมนัยกับความเข้มสนามแม่เหล็ก 1 เทสลา) จะมีพลังงานสูญ 26.6 keV ต่อรอบ เมื่อคูณพลังงานสูญต่อรอบด้วยกระแสเป็นแอมแปร์จะให้กำลังรวมที่แผ่ใน bending magnet ในหน่วยกิโลวัตต์ และกำลังค่านี้เองที่เราเติมเต็มด้วยระบบ rf ดังนั้น จากตัวอย่างดังกล่าวนี้, กระแส 0.5 A จะให้กำลังรวมที่แผ่ออก 13.3 kW หรือประมาณ 2W ในแต่ละมิลลิเรเดียนของมุมความโค้งในแนวราบ เนื่องจากมุมเปิดในแนวดิ่งมีค่าประมาณ 0.5 มิลลิเรเดียน ความหนาแน่นกำลังจึงประมาณ 4W ต่อพื้นที่มุมเป็น (มิลลิเรเดียน)^2

พลังงานสูญใน wiggler หรือ undulator กำหนดโดย

$$\Delta E(\mathrm{keV}) = 0.633\, E^2(\mathrm{GeV})\langle B^2(\mathrm{T})\rangle L(\mathrm{m}) \qquad (2.7)$$

โดยที่ $\langle B^2(\mathrm{T})\rangle$ เป็นค่าเฉลี่ยของกำลังสองของสนามแม่เหล็กในหน่วยเทสลาทั่วความยาว L ของ wiggler หรือ undulalor ในหน่วยเมตร ดังนั้น อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านอุปกรณ์ยาว 1 เมตร ด้วยสนามแม่เหล็กขนาด 1 เทสลา ในวงแหวนขนาด 1 GeV จะมีพลังงานสูญ 0.633 keV ต่อรอบ สำหรับกระแส 0.5A กำลังที่แผ่ออกมาคือ 317 W รังสีเหล่านี้ทั้งหมดจะกระจายไปทุกสถานีในขณะที่ส่วนน้อยเท่านั้นของรังสีแผ่ใน bending magnet สามารถนำไปใช้ประโยชน์ที่สถานีเหล่านั้น

สมการ (2.4) อาจใช้กับโปรตอนถ้าคูณด้วยกำลังสี่ของอัตราส่วนของมวลอิเล็กตรอนต่อมวลของโปรตอน อัตราส่วนนี้คือ 1/1836 เมื่อยกกำลังสี่จะกลายเป็น 0.88×10^{-13} สำหรับ E = 20,000 GeV และ R = 10.1×10^3 m, สมการ (2.4) จะให้พลังงานสูญต่อรอบขนาด 123 keV ด้วยกระแสไหลวน 73 mA, กำลังรังสีซินโครตรอนที่แผ่ออกรวม 9.8 kW

2.3 การแจกแจงสเปกตรัม

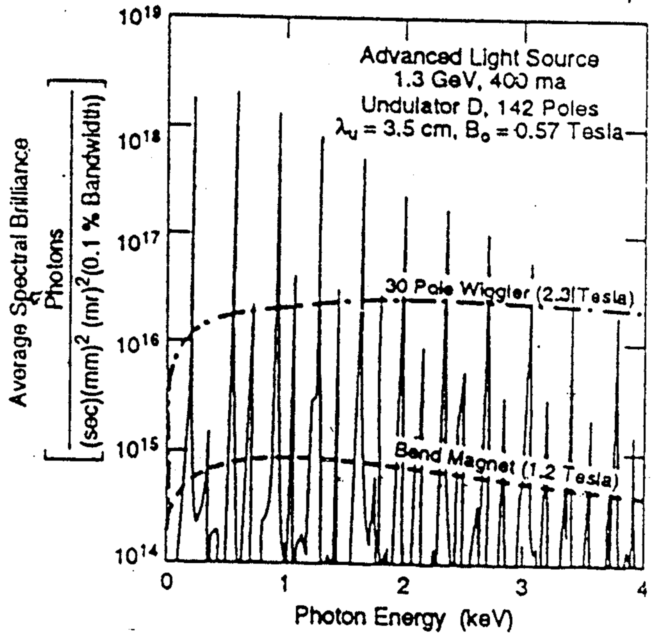
สำหรับ bending magnet และ wiggler, สเปกตรัมของรังสีซินโครตรอนมีลักษณะเรียบและต่อเนื่องดังแสดงในรูปที่ 2.5 มียอดโด่งใกล้พลังงานวิกฤตซึ่งเป็นพลังงานคัทออฟในย่านรังสีเอกซ์กำหนดโดย

$$\varepsilon_c(\mathrm{keV}) = 0.665\, B(T) E^2(\mathrm{GeV}) \tag{2.8}$$

หรือใกล้ความยาวคลื่นวิกฤต

$$\lambda_c(\mathring{A}) = \frac{18.64}{B(T)E^2(\mathrm{GeV})} = \frac{5.6\, R(m)}{E^3(\mathrm{GeV})} \tag{2.9}$$

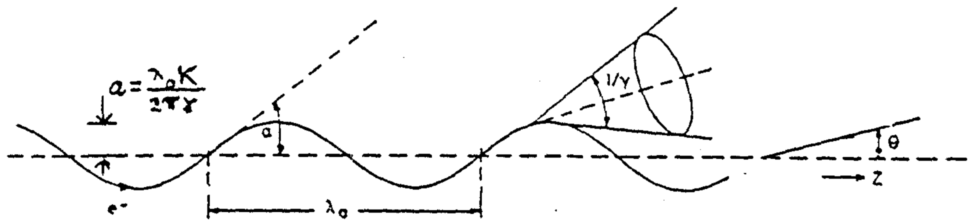
ครึ่งหนึ่งของกำลังจะแผ่เหนือพลังงานวิกฤตและประมาณครึ่งหนึ่งแผ่ใต้พลังงานวิกฤต ดังนั้น, สำหรับวงแหวน 1 GeV ด้วย bending magnet ขนาด 1 เทสลา, พลังงานวิกฤตจึงเป็น 0.665 keV.



รูปที่ 2.5 สเปกตรัมของรังสีที่แผ่โดยอิเล็กตรอนใน bending magnet, wiggler และ undulator

ใน wiggler, รังสีจากคาบช่วงต่างๆ จะมีการแทรกสอดแบบไม่ร่วมนัย (incoherently) สเปกตรัมที่มองจากผู้สังเกตุบนแกนที่ความถี่ที่น่าสนใจ $\omega \sim O(\omega_c)$ จะมียอดโด่งที่อยู่ใกล้กันมากจนมองดูเกือบต่อเนื่อง เนื่องจาก wiggler เป็นโครงสร้างแม่เหล็กที่บังคับให้ลำอิเล็กตรอนมีแนววิถีโค้งรัศมีเล็กลงเมื่อเทียบกับกรณี bending magnet โดยใช้สนามแม่เหล็กเฉพาะที่ที่มากกว่า ดังนั้น ผลของ wiggler ที่มีต่อสเปกตรัมการแผ่คือการเพิ่มพลังงานวิกฤตและเลื่อนสเปกตรัมทั้งหมดให้มีพลังงานสูงขึ้น

สำหรับ undulator, สเปกตรัมประกอบด้วยยอดโด่งที่เกิดจากคาบต่างๆ ที่มีการแทรกสอดแบบร่วมนัย (coherently) ยอดโด่งที่คมชัดเกิดขึ้นที่ฮาร์มอนิกของความถี่การสั่นพ้องซึ่งขึ้นกับพลังงานอิเล็กตรอน, คาบการ undulation และความเข้มสนามรวมทั้งตำแหน่งที่สังเกต



รูปที่ 2.6 การแกว่งกวัดของอิเล็กตรอนใน undulator ด้วยคาบ λ_o

จากรูปที่ 2.6, สนามแม่เหล็กที่เป็นคาบในแนวราบด้วยคาบ λ_o บังคับให้อิเล็กตรอนแกว่งกวัดในระนาบแนวดิ่งด้วยคาบ λ_o เช่นกัน รังสีจะแผ่ออกมาภายในกรวย $1/\gamma$ ศูนย์กลางตรงจุดสัมผัสนั้น การแกว่งกวัดรอบแกน z ด้วยมุมสูงสุด α สำหรับอิเล็กตรอนหนึ่งตัว, ผลของการแทรกสอดสามารถหาได้โดยเปรียบเทียบความต่างของวิถีและเวลา (path and time differences) ระหว่างอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ระหว่าง 2 ขั้ว และโฟตอนที่แผ่ออกมา ในลักษณะเช่นนี้ undulator จึงคล้ายกับเกรตติง (optical grating) ถ้า θ เป็นมุมของการสังเกตุดังรูป, ความยาวคลื่นของการแผ่รังสีกำหนดโดย

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{2\gamma^2}\left[1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\theta^2\right] \qquad (2.10)$$

โดยที่

$$K = \frac{eB_o\lambda_o}{2\pi m_o c} = \alpha\gamma = 0.0934B_o(T)\lambda_o(mm) \qquad (2.11)$$

K เรียกว่า **deflection parameter** ซึ่งเป็นอิสระต่อพลังงานอิเล็กตรอน B_o เป็นสนามที่ยอดโค้งในหน่วยเทสลา และ λ_o เป็นคาบในหน่วย mm. เทอม $K^2/2$ สัมพันธ์กับความยาวของแนววิถี ซึ่งข้อผิดพลาดหรือคลาดเคลื่อนจะมีผลต่อการเลื่อนเฟสซึ่งจะลดแอมพลิจูดตรงกลางและขยายเส้นสเปกตรัม

กำลังรวมที่แผ่ออกมาโดยลำอิเล็กตรอนกำหนดโดย

$$P(W) = I(A)L(cm)E^2(GeV)B_o^2(T)/80 \qquad (2.12)$$

โดยที่ I เป็นกระแสเฉลี่ยในวงแหวนสะสม L เป็นความยาวของ undulator และ E เป็นพลังงานของลำอิเล็กตรอน

ส่วนกลับของความกว้างเส้นสเปกตรัมเชิงสัมพัทธ์กำหนดโดย

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N} \tag{2.13}$$

โดยที่ N เป็นจำนวนคาบแม่เหล็ก ความกว้างสเปกตรัมของการแผ่ที่ $\theta = 0$ เป็นผลจากการแทรกสอด อิเล็กตรอนหนึ่งตัวจะแผ่คลื่นซึ่งรวมกันแบบร่วมนัยและความเข้มของแสงโฟตอนจะแปรตาม N^2 แต่อิเล็กตรอนหลายตัวเคลื่อนที่แบบไม่ร่วมนัยระหว่างกัน และความเข้มเป็นสัดส่วนกับจำนวนของอิเล็กตรอน

การแกว่งกวัดไม่เชิงสัมพัทธภาพเกิดขึ้นเมื่อ K<<1 หรือสนามไม่แรงนัก ซึ่งสมนัยกับ $\alpha < 1/\gamma$ สำหรับการแกว่งกวัดเชิงสัมพัทธภาพหรือสนามที่แรง, K>>1 ซึ่งสมนัยกับ $\alpha >> 1/\gamma$ ฮาร์มอนิกจะปรากฏที่ค่ามุม θ ที่กำหนดโดยความเข้มจะมากขึ้นตามสนามแม่เหล็กที่แรงขึ้น เมื่อ $K \approx 1$, ความยาวคลื่นของการแผ่รังสีจาก undulator จะเกิดขึ้นประมาณ 20 Å ในย่านรังสีเอกซ์อย่างอ่อนหรือ soft X-ray. สำหรับเครื่องขนาด 6 GeV และ $K \approx 1$, ความยาวคลื่นจะประมาณ 3 Å ด้วยฮาร์มอนิกที่ความยาวคลื่นของรังสีเอกซ์อย่างแรงหรือ hard X-ray

2.4 โพลาไรเซชัน

รังสีซินโครตรอนที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนในระนาบของวงโคจรจะถูกโพลาไรซ์ 100% โดยเวกเตอร์สนามไฟฟ้าของรังสีอยู่ในทิศทางของความเร่งบัดดล ดังนั้น รังสีจาก bending magnet จึงมีโพลาไรเซชันเชิงเส้น (linear polarization) ในระนาบของวงโคจร เหนือและใต้ระนาบนี้จะเป็นโพลาไรเซชันเชิงวงรีหรือวงกลมขึ้นอยู่กับมุมที่สังเกตุ

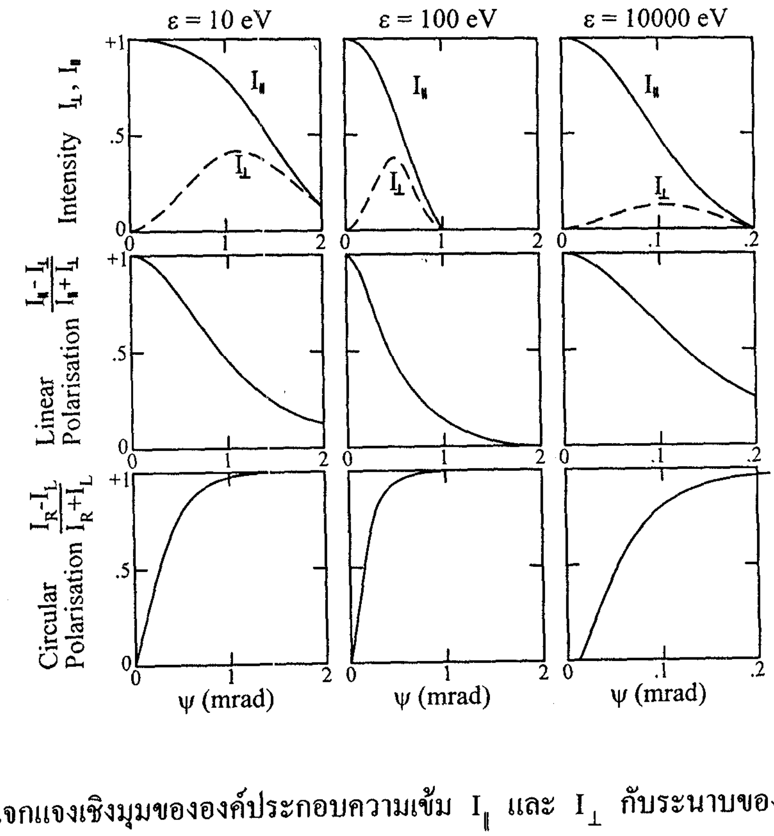
แฟกเตอร์ทั้งสองในสมการ (2.2) ในวงเล็บยกกำลังสองจะเกี่ยวข้องกับองค์ประกอบทั้งสองของโพลาไรเซชัน แฟกเตอร์แรกอธิบายองค์ประกอบด้วยเวกเตอร์สนามไฟฟ้าขนานกับระนาบวงโคจร แฟกเตอร์ที่สองอธิบายองค์ประกอบด้วยเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับระนาบวงโคจร เมื่อใช้นิยามของระดับขั้นของโพลาไรเซชัน (degree of polarization)

$$P = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}} \tag{2.14}$$

เราจะได้ค่า P ที่เป็นฟังก์ชันของ λ และ ψ เป็น

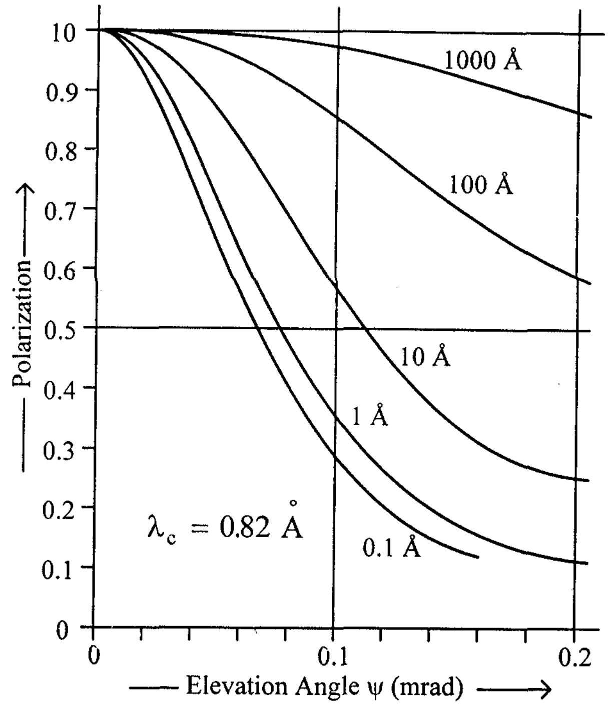
$$P(\lambda,\psi) = \frac{K_{2/3}^2(\xi) - \left[(\gamma\psi)^2 / \left(1 + (\gamma\psi)^2\right)\right] K_{1/3}^2(\xi)}{K_{2/3}^2(\xi) + \left[(\gamma\psi)^2 / \left(1 + (\gamma\psi)^2\right)\right] K_{1/3}^2(\xi)} \qquad (2.15)$$

ดังนั้น ในระนาบวงโคจรคือ $\psi = 0$, รังสีจึงมีโพลาไรเซชันเชิงเส้น 100% สำหรับรังสีที่เหนือหรือใต้ระนาบของวงโคจรจะไม่เกี่ยวข้องกับองค์ประกอบ $I_\parallel$ และ $I_\perp$ จึงมีโพลาไรเซชันแบบวงรีหรือวงกลม การแจกแจงเชิงมุม (angular distribution) ขององค์ประกอบด้วยเวกเตอร์สนามไฟฟ้าที่ขนาน $(I_\parallel)$ และตั้งฉาก $(I_\perp)$ กับระนาบของรังสีซินโครตรอนที่วัดได้จากวงแหวนสะสม DORIS แสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งแสดงให้เห็นโพลาไรเซชันเชิงเส้นและเชิงวงกลม รัศมีของวงแหวนสะสม คือ R = 12.12 m และพลังงาน E = 3.5 GeV สำหรับพลังงานโฟตอน $\hbar\omega$ ที่แตกต่างกัน 3 ค่า สำหรับลำอิเล็กตรอนในเครื่องมือจริงๆ, ขนาดของลำอิเล็กตรอนจะลดโพลาไรเซชันแม้ในระนาบของวงโคจร



รูปที่ 2.7 การแจกแจงเชิงมุมขององค์ประกอบความเข้ม $I_\parallel$ และ $I_\perp$ กับระนาบของรังสีซินโครตรอนที่วัดได้วงแหวนสะสม DORIS

สำหรับรังสีที่เกิดขึ้นใน wiggler และ undulator, ถ้าสนามแม่เหล็กในอุปกรณ์เสริมทั้งสองอยู่ในระนาบดิ่ง, ขั้วที่สลับกันอย่างต่อเนื่องจะหักล้างกับโพลาไรเซชันเชิงวงรีที่เหนือและใต้ระนาบวงโคจรทำให้รังสีถูกโพลาไรซ์แบบเชิงเส้นแต่เพียงอย่างเดียวไม่ว่าตำแหน่งใดก็ตาม สำหรับอุปกรณ์เสริมที่ให้สนามแม่เหล็กเป็นเกลียว, รังสีจะมีโพลาไรเซชันแบบวงรี

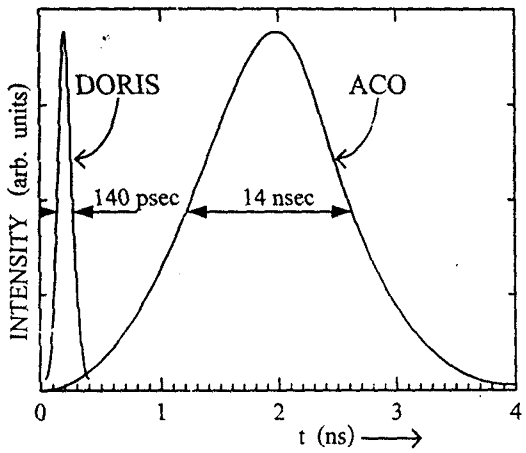


รูปที่ 2.8 โพลาไรเซชันของรังสีที่แผ่จากอิเล็กตรอนพลังงาน 6 GeV รัศมี 31.7 เมตร ที่เป็นฟังก์ชันของมุมยก ψ

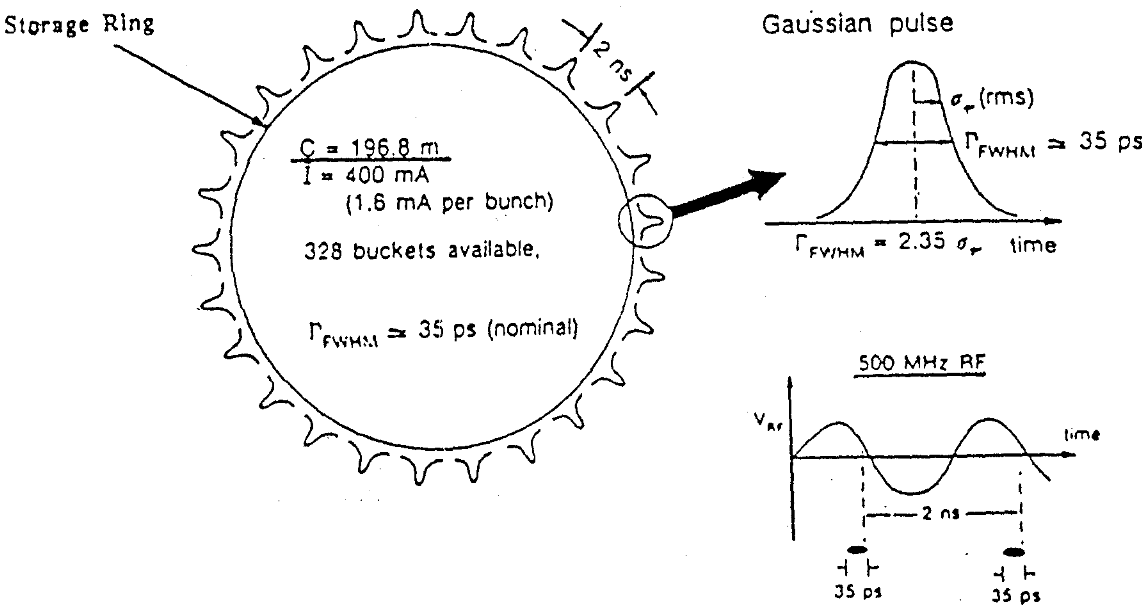
2.5 time structure

สำหรับอิเล็กตรอนวงแหวนสะสม พลังงานที่หายไปจากการปล่อยรังสีซินโครตรอนจะถูกชดเชยโดยสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในช่องว่างที่เรียกว่า accelerating gap เนื่องจากสนามนี้จะต้องอยู่ในทิศทางเดียวกับเมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่าน, สนามจึงสลับอยู่ตลอดเวลาซึ่งหมายความว่าอิเล็กตรอนจะแยกเป็นกลุ่ม (bunched) ส่วนที่เคลื่อนผ่านช่องว่างเมื่อสนามไม่มากพอหรืออยู่ในทิศทางตรงข้ามจะเคลื่อนที่ช้าลงและสูญหายไป อิเล็กตรอนเคลื่อนที่รอบวงแหวนสะสม ใช้เวลาประมาณ 10 nanosecs ถึง microsecs ขึ้นอยู่กับเส้นรอบวง ความถี่ของสนามสลับจะต้องสัมพันธ์กับความถี่ของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมและมักเป็นพหุคูณ ดังนั้นความถี่จึงอยู่ในช่วงความถี่วิทยุ (radio-frequency) หรือ r.f. นั่นคือ ในอันดับขนาดของ MHz

ความยาวของแต่ละกลุ่มอิเล็กตรอนประมาณ 0.5 ถึง 5 cm. และเนื่องจากแต่ละกลุ่มเคลื่อนที่ด้วยความเร็วแสง ดังนั้น แต่ละกลุ่มจะใช้เวลาเคลื่อนที่ผ่านจุดสังเกตุประมาณ 50 ps ถึง 1 ns กลุ่มที่สั้นกว่าจะใช้เวลาน้อยกว่า แลตทิซแม่เหล็กและระบบ rf เป็นตัวกำหนดความยาวของกลุ่ม รังสีจึงถูกแผ่ในช่วงเวลาสั้นๆ และเป็นช่วงๆ ด้วยความเข้มที่เสถียรจากช่วงหนึ่งสู่อีกช่วงหนึ่ง ดังรูปที่ 2.9 ผู้สังเกตุจะเห็นพัลส์ของแสงที่จุดสังเกต



รูปที่ 2.9 รูปร่างของพัลส์ของแสงที่วัดจากวงแหวนสะสม DORIS และ ACO

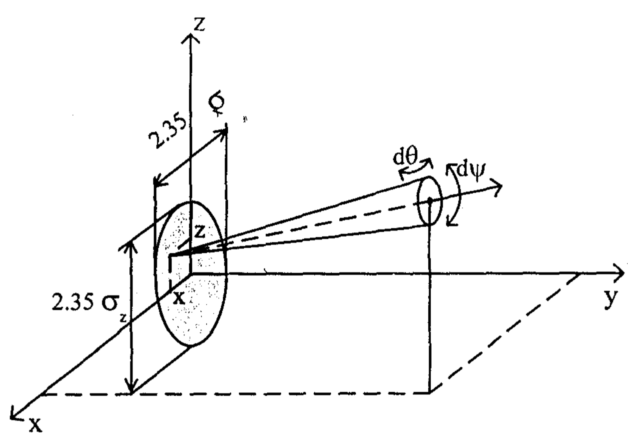


รูปที่ 2.10 time structure ของรังสีซินโครตรอน

2.6 ความเปล่งของลำอิเล็กตรอน, ความสว่างของลำโฟตอน, และความร่วมนัย

ในการเชื่อมโยงสิ่งที่เราต้องการทราบจากผลการทดลองกับพารามิเตอร์ของเครื่องเร่งอนุภาค จำเป็นต้องนิยามส่วนที่จำเป็นสักเล็กน้อยดังนี้ :

total photon flux, Φ_T, **หรือฟลักซ์โฟตอนรวม**นิยามว่าเป็นจำนวนโฟตอนที่แผ่ออกมาจากลำอิเล็กตรอนต่อหน่วยเวลา ดังนั้น Φ_T จึงเป็นลักษณะเฉพาะของแหล่งกำเนิดและเป็นสัดส่วนกับค่าเฉลี่ยของกระแสอิเล็กตรอน ค่าเฉลี่ยกระแสที่มากจึงเป็นสิ่งที่ต้องการของทุกแหล่งกำเนิดแสงซินโครตรอน ให้ x และ z เป็นพิกัดแนวราบและแนวดิ่ง และ θ, ψ เป็นมุมที่สมนัยเมื่อเทียบกับแกนทรรศน์ (optical axis) ดังนั้น (x, z, θ, ψ) จึงเป็นปริภูมิเฟส (phase space) ของแหล่งกำเนิดโฟตอน ซึ่งแสดงในรูปที่ (2.11)



รูปที่ 2.11 นิยามสำหรับการอธิบายลักษณะเฉพาะของแหล่งกำเนิดรังสี

ความจ้า (brilliance), $\mathcal{B}$, เป็นความหนาแน่นของฟลักซ์รวมที่วัดที่จุดกำเนิดปริภูมิหรือ

$$\mathcal{B}\left(x, z, \theta, \psi, \varepsilon, t\right) = \left.\frac{d^4\Phi_T}{dxdzd\theta d\psi}\right|_0 \qquad (2.16)$$

$\mathcal{B}$ จึงเป็นจำนวนโฟตอนด้วยพลังงาน ε ที่เปล่งออกมาที่เวลา t จากจุดกำเนิด (x, z) ไปตามทิศทาง (θ, ψ) ต่อช่วงเวลา, หนึ่งหน่วยพื้นที่ของแหล่งกำเนิด, หนึ่งหน่วยมุมตันและ 0.1% ของ bandwidth หน่วยของความจ้าจึงเป็น $\left(\text{phots}^{-1}\text{mm}^{-2}\text{mrad}^{-2}\text{per } 0.1\%\ \Delta\varepsilon/\varepsilon\right)$ ความจ้าเป็นสมบัติของแหล่งกำเนิดรังสีเช่นเดียวกับฟลักซ์รวม Φ_T

เมื่ออินทิเกรตสมการ (2.16) ทั่วทุกมุมจะให้ spatial flux density หรือ

$$\int \frac{d^4\Phi_T}{dxdzd\theta d\psi} d\theta d\psi = \text{spatial flux density} \qquad (2.17)$$

แต่ถ้าอินทิเกรตสมการ (2.16) ทั่วทุกตำแหน่งจะให้ angular flux density หรือที่มักเรียกกันทั่วไปว่า ความสว่าง (brightness) หรือ

$$\int \frac{d^4\Phi_T}{dxdzd\theta d\psi} d\theta dz = \text{brightness} \qquad (2.18)$$

อินทิเกรตความสว่างทั่วทุกมุมแนวดิ่ง ϕ จะให้ปริมาณที่มักเรียกกันสั้นๆว่า **ฟลักซ์** (flux) แทนด้วย Φ หรือ

$$\Phi = \int \frac{d^4\Phi_T}{dxdzd\theta d\phi} dxdzd\phi \qquad (2.19)$$

เมื่อปริมาณต่างๆ เหล่านี้วัดภายในความกว้างแถบ (bandwidth, $\Delta\lambda / \lambda$) รอบๆ ความยาวคลื่นที่น่าสนใจ ปริมาณดังกล่าวจะมีคำว่า spectral นำหน้าเสมอ และใช้สัญลักษณ์ที่ห้อยด้วยดรรชนี s ดังนั้น spectral brilliance หรือความจ้าของสเปกตรัม, แทนด้วย $\mathcal{B}_s$ เป็นตัวเลขคุณค่า (figure of merit) สำหรับการทดลองที่ต้องการการแยก (resolution) ที่สูงทั้งเชิงมุม, ปริภูมิ, และกำลัง ในขณะที่ Φ_s ซึ่งเป็น spectral flux หรือ ฟลักซ์ของสเปกตรัม เป็นปริมาณสำหรับการทดลองที่มีการแยกต่ำและมีหน่วยเป็น (phot s^{-1} per 0.1% $\Delta\varepsilon / \varepsilon$)

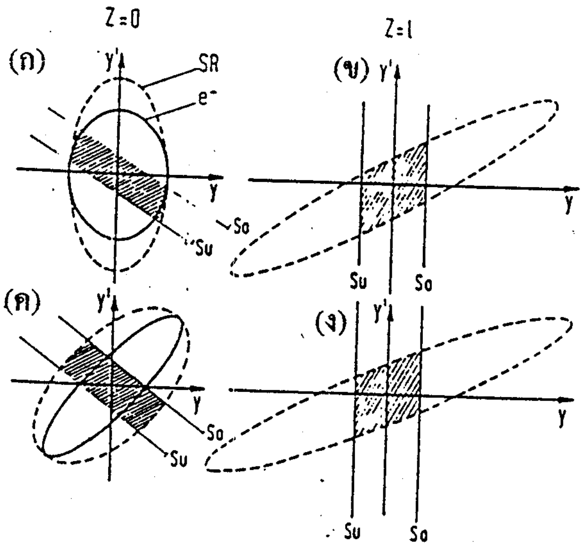
ฟลักซ์รวม Φ_T จึงหาได้จาก

$$\Phi_T(t) = \int \frac{1}{\varepsilon} \Phi_s d\varepsilon \qquad (\text{phot } s^{-1}) \qquad (2.20)$$

ที่กล่าวมานี้เป็นกรณีของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมในอุดมคติ แต่ใน storage ring ซึ่งมีแม่เหล็กชนิดขั้วคู่สำหรับเบนแนวการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน, ชนิด 4 ขั้ว (quadrupole) และชนิด 6 ขั้ว (hexapole) สำหรับรวมและถ่างลำอิเล็กตรอนจะมีผลต่อขนาดและการกระจายเชิงมุมของลำอิเล็กตรอน ดังนั้น ปริมาณเหล่านี้จะแปรเปลี่ยนไปที่จุดต่างๆ ของวงโคจร ให้ σ_x และ

σ_y เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ของมิติของลำอิเล็กตรอนในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับความกว้างเต็มที่ครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุดคือ 2.35 σ ดังนั้น พื้นที่ของแหล่งกำเนิดจึงกำหนดโดย $A = \sigma_x\sigma_y(2.35)^2\left(mm^2\right)$ ในทำนองเดียวกัน, ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของไดเวอร์เจนซ์หรือการลู่ออกเชิงมุมของลำอิเล็กตรอนในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับแทนด้วย σ'_x และ σ'_y(mrad) และ $\Omega = \sigma'_x\sigma'_y(2.35)^2$ ($mrad^2$) คือ มุมตันของการแผ่รังสี

ตำแหน่งของอิเล็กตรอนและมุมต่างก็วัดสัมพันธ์กับวงโคจรที่สมดุลจึงมีสหสัมพันธ์กัน สหสัมพันธ์ (correlation) สามารถแสดงได้ด้วยรูปในปริภูมิเฟสซึ่งมีลักษณะเป็นวงรีของความเปล่งของอิเล็กตรอน (electron emittance ellipse) ของมุมและตำแหน่งในระนาบแนวนอนของวงโคจรและระนาบแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 วงรีในปริภูมิเฟสสำหรับพิกัดแนวดิ่งของลำอิเล็กตรอนแต่เพียงอย่างเดียว (เส้นทึบ) และเมื่อรวมการกระจายรังสีซินโครตรอนเข้าไปด้วย (เส้นประ)

จากรูปที่ 2.12, แหล่งกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่ง Z = 0, ลำแสงจะกระจายในทิศ Z ทางบวกวงรีด้านบนสำหรับรังสีซินโครตรอนที่ Z = 0 (รูป ก.) จะถูกเฉือน (sheared) ในขณะที่ลำอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปที่ Z = 1 (รูป ข.) ตัวยืนยง (invariants) คือ ผลตัด (intersection) กับแกน y, ฉายาบนแกน y' และพื้นที่ ดังนั้น พื้นที่แรเงาในรูปจะยืนยงเสมอ

ความเปล่ง (emittance) ของอิเล็กตรอน, ε_x, ε_y, เป็นลักษณะเฉพาะที่สำคัญของลำอิเล็กตรอน ความเปล่งในแนวราบกำหนดโดย

$$\varepsilon_x = \sigma_x \sigma'_x \tag{2.21}$$

และความเปล่งในแนวดิ่ง คือ

$$\varepsilon_y = \sigma_y \sigma'_y \tag{2.22}$$

หน่วยของความเปล่งคือ (mm mrad)

พื้นที่ของวงรีจะยืนยงตามวิถีของอิเล็กตรอน นั่นคือ ε_x, ε_y จะมีการอนุรักษ์ซึ่งเรียกว่า Liouville's theorem หรือ **ทฤษฎีบทลีอูวิลล์** ในขณะที่รูปร่างและการวางทิศทางของวงรีในปริภูมิเฟสเหล่านี้เปลี่ยนแปลงไปตามจุดต่างๆ ของวงโคจร

คุณสมบัติของลำอิเล็กตรอนมีลักษณะเกาส์เซียน (gaussian) ในทั้ง 3 มิติ การแจกแจงส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในระนาบตามขวาง, σ_x, σ_z กำหนดจากสมดุลระหว่างการหน่วง (damping) และการกระตุ้น (excitation) รังสีของ**การแกว่งกวัดบีตาตรอน** (betatron oscillation) ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับ σ_x, σ_z คือ σ'_x, σ'_z ซึ่งเป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงมุม ปริมาณทั้ง 4 นี้ กำหนดจากจุดที่ twiss function $\alpha_{x,z}$ และ dispersions η_x, η_z เป็นศูนย์ ทำให้

$$\sigma_{x,z} = \sqrt{\varepsilon_{x,z}\beta_{x,z}}$$

$$\sigma'_{x,z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{x,z}}{\beta_{x,z}}} \tag{2.23}$$

$$\varepsilon_{x,z} = \sqrt{\sigma_{x,z}\sigma'_{x,z}}$$

โดยที่ $\beta_{x,z}$ คือ betatron functions และ ε_x, ε_z เป็นความเปล่งของลำอิเล็กตรอนเชิงรัศมีและเชิงดิ่งตามลำดับ ถ้า k เป็นสัมประสิทธิ์การคู่ควบ (coupling coefficient) ระหว่างการแกว่งกวัดบีตาตรอนเชิงรัศมีและเชิงดิ่ง $(0 \le k \le 1)$ ความเปล่งกำหนดจาก

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{x0}}{1+k^2}$$

(2.24)

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_{x0}k^2}{1+k^2}$$

โดยที่ ε_{x0} เป็นความเปล่งบีตาตรอนเชิงรัศมีที่ไม่มีการคู่ควบ ε_{x0} เป็นคุณสมบัติของแลตทิซและเป็นสัดส่วนกับพื้นที่ครอบครองโดยลำอิเล็กตรอนในปริภูมิเฟสเชิงรัศมี และเป็นฟังก์ชันของพลังงานเท่านั้น ที่พลังงานซึ่งตรึงค่า, ε_{0x} จึงเป็นค่ายืนยง (invariant) ของการเคลื่อนที่ และสำหรับแลตทิซที่กำหนดจะเป็นสัดส่วนกับ γ^2 โดยที่ γ เป็นแฟกเตอร์เชิงสัมพันธภาพของอิเล็กตรอน ε_{0x} และ k จึงเป็นสมบัติของแลตทิซที่กำหนดมิติของลำอิเล็กตรอน

สมการ (2.24) แสดงให้เห็นว่าภายใต้ภาวะค่า k น้อยๆ ซึ่งเป็นภาวะปรกติโดยที่ $0.1 \le k \le 0.01$, ความเปล่งของลำอิเล็กตรอนในแนวดิ่งจะมีค่าน้อยกว่าในแนวนอนมาก สมการ (2.23) ยังแสดงให้เห็นว่าโดยการกำหนดรูปร่างของฟังก์ชัน β ให้เหมาะสมที่จุดของแหล่งกำเนิด เราสามารถกำหนดรูปร่างของการแจกแจงปริภูมิเฟส, มิติของลำให้สู่ออกหรือในทางกลับกันได้

ขนาดยังผล, $\sum_x, \sum_z$, ของแหล่งกำเนิดโฟตอนซึ่งเป็นตัวกำหนดความจ้าของลำโฟตอนหาได้จากการประสานการแจกแจงเชิงปริภูมิของลำอิเล็กตรอนเข้ากับรูปแบบการแผ่รังสีที่เกิดจากอิเล็กตรอนเดี่ยว รูปแบบการแผ่รังสีขึ้นกับตัวแผ่รังสีและค่อนข้างจะซับซ้อน การประสานจึงต้องทำเป็นกรณีไปและโดยปรกติมักใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical) แบบจำลองที่ง่ายที่สุดจะสมมติว่าอิเล็กตรอนเดี่ยวแผ่รังสีเอกรงค์ (monochromatic) กระจายออกไปแบบเกาส์เซียนด้วยความยาวคลื่น λ_R และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงมุม (angular standard deviation) σ'_R ความเปล่งคือ $\varepsilon_R = \lambda_R/(4\pi)$ และความยาวเรย์ลี (Rayleigh length) Z_R ดังนั้น เมื่ออุปมากับสมการ (2.23) จะได้

$$\sigma_R = \sqrt{\varepsilon_R Z_R}$$

$$\sigma'_R = \sqrt{\frac{\varepsilon_R}{Z_R}} \qquad (2.25)$$

$$\varepsilon_R = \sigma_R \sigma'_R$$

มิติหรือขนาด $\sum, \sum'$ ของการแจกแจงที่เกิดจากการประสาน และความเปล่งของลำโฟตอน ε_{ph} จึงเป็น

$$\sum_{x,z} = \sqrt{\sigma_{x,z}^2 + \sigma_R^2}$$

$$\sum_{x,z}' = \sqrt{\sigma_{x,z}'^2 + \sigma_R^2} \tag{2.26}$$

$$\varepsilon_{ph\,x,z} = \sum_{x,z} \sum_{x,z}'$$

และความจ้าคือ

$$(2\pi)^2 \mathcal{B} = \frac{F}{\varepsilon_{phx}\,\varepsilon_{phz}} \tag{2.27}$$

เพื่อให้ความจ้าสูงสุดสำหรับกระแสอิเล็กตรอนที่กำหนดเราจึงต้องให้ค่า ε_{ph} ต่ำสุดค่าต่ำสุดสัมบูรณ์, ε_R , จะเกิดขึ้น, ตามสมการ (2.26), ถ้าเราทำให้ $\varepsilon_o << \varepsilon_R$

สำหรับค่า λ_R ในพิสัย hard x-ray หรือขนาด 1 $\mathring{A}$, ε_R จะมีขนาด 10^{-11} m ในขณะที่ความเปล่งน้อยที่สุดของอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม ในปัจจุบันที่ทำได้จะมีขนาด 10^{-9} - 10^{-10} m ดังนั้น ความจ้าของแหล่งกำเนิด hard x-ray จึงกำหนดด้วยความเปล่งของลำอิเล็กตรอน

สำหรับค่า ε_o ที่กำหนด, ε_{ph} จะมีช่วงต่ำสุดที่กว้างเมื่อวงรีของลำอิเล็กตรอนในปริภูมิเฟสและของรูปแบบการแผ่รังสีของอิเล็กตรอนเดี่ยวมีลักษณะคล้ายกันหรืออีกนัยหนึ่ง เมื่อ $\beta \approx Z_R$ นั่นเอง

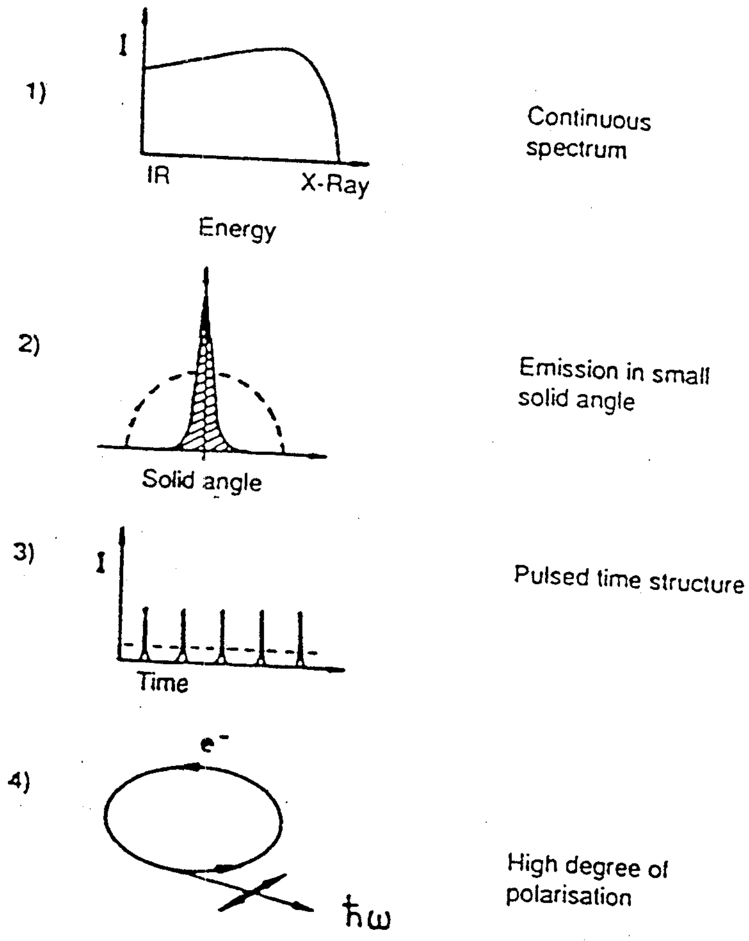
ในหลายๆ การทดลอง สิ่งที่สำคัญ คือ ฟลักซ์ที่สูง (photons/s/mrad/unit bandwidth) บนสารตัวอย่าง อย่างไรก็ตาม, การทดลองในบางครั้งจำเป็นต้องใช้ความสว่างที่สูง (photons/s/unit solid angle/unit source area/unit bandwidth) **หรือกำลังของความร่วมนัย** (coherence) ที่สูง ความร่วมนัยเป็นสัดส่วนกับความสว่าง ความสว่างของลำโฟตอนและความร่วมนัยส่วนใหญ่กำหนดจากขนาดในแนวขวางและการลู่ออกเชิงมุม (angular divergence) ของลำอิเล็กตรอน ผลคูณของขนาดในแนวขวางและการลู่ออกเชิงมุมในแต่ละทิศทางตามขวางกับทิศการเคลื่อนที่เรียกว่าความเปล่งหรือ emittance ความเปล่งอาจคิดได้ว่าเป็นตัววัดอุณหภูมิตามขวางของลำอิเล็กตรอน ความ

เปล่งในแนวราบกำหนดโดยแลตทิซแม่เหล็กและวัดเป็นเมตร-เรเดียน หรือ nm-rad ความเปล่งในแนวดิ่งส่วนใหญ่กำหนดจากการคู่ควบกับความเปล่งในแนวราบแต่มักต่ำกว่าความเปล่งในแนวราบ

แม้ว่าขนาดของลำและการถู่ออกเชิงมุมจะแปรเปลี่ยนไปรอบๆ วงแหวน แต่ผลคูณของปริมาณทั้งสองซึ่งเรียกว่าความเปล่งจะมีค่าคงตัว เครื่องเร่งในรุ่นที่หนึ่งและรุ่นที่สองมีค่าความเปล่งในแนวราบประมาณ 100-200 nm-rad undulator สามารถสร้างความสว่างของลำโฟตอนของทั้งสองรุ่นได้ประมาณ 10^{16} ถึง 10^{17} photons/s/mm^2/mrad^2/0.1% bandwidth วงแหวนในรุ่นที่สามมีความเปล่งในแนวราบอยู่ในพิสัย 5-25 nm-rad. และ undulator บนวงแหวนสามารถให้ความสว่างของลำโฟตอนได้จนถึง 10^{19} (หน่วยเดิม)

การเพิ่มความสว่างของลำโฟตอนในขณะที่ความเปล่งลดลงสุดท้ายจะถูกจำกัดโดยปรากฏการณ์การเลี้ยวเบน (diffraction) ความเปล่งที่ถูกจำกัดโดยการเลี้ยวเบนกำหนดจาก $\lambda / 4\pi$ โดยที่ λ เป็นความยาวคลื่นของโฟตอน ดังนั้น สำหรับความยาวคลื่นขนาด 1.2 nm (หรือเท่ากับ 1-keV ของพลังงานโฟตอน), ความเปล่งของลำอิเล็กตรอนที่ถูกจำกัดโดยการเลี้ยวเบนจะมีค่าประมาณ 0.1 nm-rad เครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนในปัจจุบันมีค่าความเปล่งมากกว่านี้มาก เช่น วงแหวนในรุ่นที่สามมีค่าความเปล่ง 5 nm-rad ให้แสงที่ความยาวคลื่นมากกว่าประมาณ 60 nm ซึ่งสมนัยกับพลังงานโฟตอนต่ำกว่าประมาณ 20 eV

ความเปล่งที่ลดลงจะช่วยเพิ่มความสว่างและความร่วมนัยจนเข้าสู่ลิมิตของการเลี้ยวเบนที่พลังงานโฟตรอนสูงขึ้น และเป็นกุญแจสำคัญในการพัฒนาเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอน



5) Properties can be calculated/predicted

รูปที่ 2.13 สรุปคุณลักษณะที่สำคัญของรังสีซินโครตรอน

บทที่ 3
ทฤษฎีแผนเดิมของรังสีซินโครตรอน

3.1 ความนำ

ปรากฏการณ์ที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นแนววิถีโค้งแล้วแผ่รังสีออกมาได้ถูกทำนายไว้เมื่อประมาณ 100 ปี มาแล้ว ทั้งในเชิงก่อนยุคกลศาสตร์ควอนตัมและสัมพัทธภาพ ในช่วงเวลานั้นเป็นที่ทราบกันดีจากพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิม (classical electrodynamics) ว่าอนุภาคมีประจุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่งจะแผ่รังสีออกมา Larmor (1897) ได้กำหนดสมการสำหรับกำลังรวมที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนที่ไม่เชิงสัมพัทธภาพคือ

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]^2 \tag{3.1}$$

โดย e เป็นประจุไฟฟ้า, c เป็นความเร็วของแสง, v และ p เป็นความเร็วและโมเมนตัมของอนุภาคมีประจุที่มีมวล m Lie'nard (1898) ได้ขยายผลของสมการ Larmor สำหรับอัตราการแผ่รังสีจากอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งสู่ศูนย์กลางในแนววิถีโค้งเป็นวงกลม ต่อมา Schott (1907, 1912) ได้ขยายเพิ่มเติมในรูปทฤษฎีแผนเดิมที่เชื่อมโยงแบบจำลองในยุคต้นๆ ของอะตอมและในเชิงความพยายามอธิบายธรรมชาติความไม่ต่อเนื่องกัน (discrete) ของสเปกตรัมอะตอม แต่เป็นที่ทราบกันดีว่าแบบจำลองของโบร์ (Bohr model) เกี่ยวกับอะตอมสามารถอธิบายสเปกตรัมอะตอมได้เป็นอย่างดีจึงทำให้ทฤษฎีของ Schott ถูกลืมเป็นเวลานาน

จนกระทั่งในปี 1940 วิชาเกี่ยวกับการแผ่รังสีจากอิเล็กตรอนที่มีความเร็วสูงเชิงสัมพัทธภาพได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก และได้มีการพัฒนาเครื่องเร่งอนุภาคสำหรับผลิตอนุภาคที่มีพลังงานสูงมากๆ ทั้งอิเล็กตรอนและอนุภาคอื่นๆ จนกระทั่งถึงปัจจุบัน เราทราบว่าอนุภาคมีประจุเมื่อถูกเร่งจะแผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าออกมาแต่ด้วยพลังงานที่น้อยมาก ในการอธิบายการแผ่รังสีจากอนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงเชิงสัมพัทธภาพมักอธิบายในเทอมของปริมาณ γ ซึ่งเป็นอัตราส่วนของพลังงานรวมของอนุภาคต่อมวลนิ่งของอนุภาคนั้น หรือ

$$\gamma \equiv \frac{E}{m_o c^2} \tag{3.2}$$

และโมเมนตัมคือ

$$\mathbf{p} = \gamma m_o \mathbf{v} \tag{3.3}$$

ความเร่งกำหนดจากสมการโลเร็นตซ์ (Lorentz equation)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}\right) \tag{3.4}$$

โดยที่ **E** และ **B** เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ ในทางปฏิบัติเราไม่นิยมใช้สนามไฟฟ้าอธิบายผลของอนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงสัมพัทธภาพดังกล่าว แต่เรามักใช้สนามแม่เหล็กซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคและสนามแม่เหล็กนี้ก่อให้เกิดความเร่งตามขวางของอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพที่สัมพันธ์กับการแผ่รังสี

เนื่องจากรังสีที่แผ่ออกมามีค่ายืนยง (Lorentz invariant) เราจึงคาดว่าสมการ (3.1) สำหรับกำลังที่แผ่ออกมาโดยอนุภาคความเร็วสูงเชิงสัมพัทธภาพจะมีรูปแบบของ Larmor ด้วย ซึ่งสามารถกระทำได้โดยการแปลง คือ

$$\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{p}, iE / c)$$

$$dt \rightarrow d\tau = \gamma^{-1} dt$$

โดยที่ τ เรียกว่า proper time ดังนั้น รูปแบบเชิงสัมพัทธภาพของสมการ Larmor ตามสมการ (3.1) จึงกลายเป็น

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 - \beta^2\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2\right] \tag{3.5}$$

โดยที่ $\beta = v/c$ รังสีที่สูญเสียไปไม่มีนัยสำคัญสำหรับกรณีเครื่องเร่งอนุภาคแนวตรง (linear accelerators) สมการ (3.5) ให้อัตราส่วนของกำลังที่แผ่ออกมาต่อกำลังที่ป้อนเข้าไปสำหรับเครื่องเร่งอนุภาคแนวตรงเป็น

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^4\beta}\frac{dE}{dx}$$

เครื่องเร่งยาว 2 ไมล์ พลังงาน 20 GeV ให้อัตราส่วนดังกล่าวเพียง 10^{-11} เท่านั้น แต่เหตุการณ์ดังกล่าวจะแตกต่างไปจากกรณีอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความเร่งสู่ศูนย์กลางทำให้โมเมนตัมเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในขณะที่พลังงานเปลี่ยนแปลงค่อนข้างช้า ดังนั้น สมการ (3.5) จึงพอจะประมาณได้เป็น

$$P \cong \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left[\gamma\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right]^2$$

$$\cong \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\gamma^2\omega^2|\mathbf{p}|^2 \qquad (3.6)$$

โดยที่ $\omega = c/\rho$ และ ρ เป็นรัศมีวงโคจรของอิเล็กตรอน สำหรับ $\beta \approx 1$, พลังงานของรังสีที่แผ่ออกมาต่อรอบของอิเล็กตรอน คือ

$$\Delta E = P\ \frac{2\pi\rho}{c} = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\rho}\gamma^4 \qquad (3.7)$$

มวลนิ่งของโปรตอนมีค่าประมาณ 2 พันเท่าของมวลนิ่งอิเล็กตรอน และเนื่องจากที่พลังงานสูงมากๆ, โมเมนตัมของอนุภาคจะเป็นอิสระต่อมวลนิ่ง ดังนั้น ทั้งอิเล็กตรอนและโปรตอนจึงมีค่า ρ ที่ใกล้เคียงกัน และที่พลังงานจลน์ค่าเดียวกันอิเล็กตรอนจะแผ่รังสีเป็น $(2000)^4 \sim 10^{13}$ เท่าของรังสีจากโปรตอนด้วยเหตุนี้อิเล็กตรอนจึงมักใช้เป็นแหล่งกำเนิดรังสีซินโครตรอน

สำหรับอิเล็กตรอน,

$$\gamma = 1957E(\text{GeV}) \qquad (3.8)$$

และ
$$\rho(\text{เมตร}) = \frac{33.35\,E(\text{GeV})}{B(\text{kG})} \qquad (3.9)$$

ดังนั้น สมการ (3.7) จึงกลายเป็น

$$\Delta E = \frac{88.5\,E^4}{\rho} = 2.65\,E^3 B \qquad (3.10)$$

โดยที่ ΔE มีหน่วยเป็น keV ต่อรอบของอิเล็กตรอน กำลังในหน่วยกิโลวัตต์ที่แผ่ออกมาใน วงแหวนสะสมที่พลังงาน E และกระแส I ในหน่วยแอมแปร์ คือ

$$P = 88.5\,I\,\frac{E^4}{\rho} = 2.65\,E^3 IB \qquad (3.11)$$

ในการอธิบายสเปกตรัมที่ราบเรียบและต่อเนื่องของรังสี เรามักกำหนดความยาวคลื่นและความถี่ลักษณะเฉพาะ (characteristic wavelength and frequency)

$$\lambda_c \equiv \frac{4\pi\rho}{3\gamma^3} = \frac{5.59\rho}{E^3} = \frac{186}{BE^2}\ (^\circ A) \qquad (3.12)$$

$$\omega_c \equiv \frac{2\pi c}{\lambda_c} = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} \qquad (3.13)$$

รูปร่างของสเปกตรัมรังสีจะกำหนดในหน่วยของปริมาณทั้งสองนี้

เนื่องจากรังสีซินโครตรอนที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนในเครื่องเร่งอนุภาควงกลมขนาดใหญ่จะเน้นไปที่ระดับพลังงานโฟตอนจึงถึงใกล้พลังงานมวลนิ่งอิเล็กตรอนคือ 0.511 MeV เราจึงคาดหวังว่าผลเชิงควอนตัมมีความสำคัญต่อรังสีซินโครตรอน จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานแสดงให้เห็นว่าความคาดหวังดังกล่าวไม่เป็นไปตามที่คิด พลังงานที่สูญเสียไปจากการแผ่รังสีของอิเล็กตรอน คือ

$$\delta E \sim \hbar\omega_c \ll E$$

เราจึงคิดว่าผลเชิงควอนตัมสำหรับกำลังที่แผ่ออกมาหาได้จากการแทนค่า E^4 ด้วย $(E - \delta E)^4$ ในสมการ (3.10) ดังนั้น

$$\Delta E_{Q.M} \cong \Delta E\left(1 - \frac{4\hbar\omega_c}{E}\right) \tag{3.14}$$

ผลเชิงควอนตัมที่มีต่อคุณสมบัติของรังสีซินโครตรอนจากเครื่องเร่งอนุภาคจึงอาจตัดทิ้งได้ อย่างไรก็ตาม, ผลเชิงควอนตัมจะต้องนำมาพิจารณาในกรณีการกระตุ้นและการหน่วง (damping) ของอเสถียรภาพ (instabilities) ในการเดินเครื่องเร่งอนุภาค นอกจากนี้อิเล็กตรอนในวงแหวนสะสมอาจมีโพลาไรเซชันผ่านธรรมชาติความเป็นควอนตัมของรังสีซินโครตรอนด้วย

3.2 ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม

ที่จุดสังเกตและเวลา t หนึ่ง, ศักย์สเกลาร์และศักย์เวกเตอร์อันเนื่องจากจุดประจุคือ Lienard-Wiechert potentials กำหนดโดย

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = e\left[\frac{1}{\kappa R}\right]_{ret} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = e\left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R}\right]_{ret} \tag{3.16}$$

โดยที่ดรรชนีล่าง "ret" ของวงเล็บหมายถึงปริมาณที่อยู่ในวงเล็บจะต้องหาค่าที่เวลาถ่วง (retarded time) $t' = t - [R(t')/c]$ อันเนื่องจากการวัดที่จุดสังเกตได้กระทำหลังจากเหตุการณ์ได้เกิดขึ้นก่อนหน้านี้เป็นระยะเวลาหนึ่งแล้ว $\boldsymbol{\beta}$ เป็นความเร็วบรรทัดฐาน (normalized velocity) ของอิเล็กตรอน โดยที่

$$\mathbf{v} \equiv c\boldsymbol{\beta} = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2} \tag{3.17}$$

γ เป็นอัตราส่วนของพลังงานรวมและพลังงานมวลนิ่ง

$$\gamma \equiv \frac{E}{m_o c^2} \tag{3.18}$$

และ

$$\frac{dt}{dt'} \equiv \kappa = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR}{dt'} = 1 - \mathbf{n}\cdot\beta \tag{3.19}$$

n เป็นเวกเตอร์หน่วยมีทิศพุ่งออกจากตำแหน่งของประจุไปยังจุดสังเกต และ R เป็นระยะจากประจุไปยังจุดสังเกตนั้น ถ้า **n** และ β ขนานกัน, ผู้สังเกตจะเห็นประจุพุ่งเข้าหาจุดสังเกต ดังนั้น $\kappa \sim \gamma^{-2}$ ถ้าเราแสนอองค์ประกอบทั้งสี่ คือ $\beta_\mu = (\beta, i)$ สมการ (3.16) สามารถเขียนได้เป็น

$$A_\mu(\mathbf{x}, t) = e\int \frac{\beta_\mu(t')}{R(t')}\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]dt' \tag{3.20}$$

โดยที่ $\mu = 4$ องค์ประกอบ คือ $i\Phi$ สนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **B** สัมพันธ์กับศักย์เหล่านี้โดย

$$\mathbf{B} = \nabla \mathrm{x} \mathbf{A} \tag{3.21}$$

,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.22}$$

เนื่องจากปริมาณที่ขึ้นกับพิกัดตำแหน่งเท่านั้นคือขนาดของ R, การดำเนินการโดยเกรเดียนต์ ∇ จะกลายเป็น $\mathbf{n}(\partial/\partial R)$ และ

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e\int\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right] + \frac{1}{cR}(\beta - \mathbf{n})\delta'\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]\right]dt' \tag{3.23}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = e\int(\mathbf{n}\times\beta)\left[-\frac{\delta\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]}{R^2} + \frac{1}{cR}\delta'\left[t' + \frac{R(t')}{c} - t\right]\right]dt' \tag{3.24}$$

เครื่องหมาย $'$ บน δ หมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับอาร์กิวเมนต์ เมื่อหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (integrate by part) บนอนุพันธ์ δ', สมการ (3.23) และ (3.24) จะกลายเป็น

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\ t) = e\left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})}{\kappa R}\right)\right]_{ret} \tag{3.25}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\ t) = e\left[\frac{\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n})}{\kappa R}\right)\right]_{ret} \tag{3.26}$$

เนื่องจาก

$$\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{n}}{dt'} = \frac{\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\beta})}{R} \tag{3.27}$$

$$\frac{d}{dt'}\boldsymbol{\beta} \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}(\kappa R) = \beta^2 - \boldsymbol{\beta}.\mathbf{n} - \frac{R}{c}\mathbf{n}.\dot{\boldsymbol{\beta}} \tag{3.29}$$

ดังนั้น เมื่อใช้สิ่งเหล่านี้กับสมการ (3.25) จะได้

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\ t) = e\left[\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right]_{ret} \tag{3.30}$$

พารามิเตอร์เชิงสัมพัทธภาพทั้งสามคือ β, κ และ γ สามารถเขียนในเทอมของ β เพียงตัวเดียวได้ ดังนั้น

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\ t) = e\left[\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{(1-\boldsymbol{\beta}.\mathbf{n})^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1-\boldsymbol{\beta}.\mathbf{n})^3 R}\right]_{ret} \tag{3.31}$$

ในทำนองเดียวกัน, เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.26) จะได้

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \tag{3.32}$$

เทอมแรกของสมการ (3.31) ซึ่งเป็นเทอมสถิต จะลดลงตาม $1/R^2$ และไม่ใช่เทอมที่เราต้องการ จึงเหลือเทอมที่สองซึ่งเป็นเทอมของความเร่ง ดังนั้น

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{c}\left[\frac{\mathbf{n}}{\left(1-\boldsymbol{\beta}.\mathbf{n}\right)^3 R} \times \left[\left(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right]_{ret} \tag{3.33}$$

ซึ่งเป็นเทอมที่เกี่ยวข้องกับการแผ่รังสี

ถ้ารังสีถูกวัดที่จุดในระนาบของวงโคจรประจุ ดังนั้น $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\beta}$ และ $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ จะอยู่ในระนาบดังกล่าวเช่นเดียวกับ $\mathbf{E}$ ด้วย หรืออาจกล่าวได้ว่าที่จุดดังกล่าวรังสีจะมีโพลาไรเซชันถึง 100% ในระนาบนั้น ฟลักซ์พลังงานหาได้จาก **Poynting's vector** คือ

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi}|\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} \tag{3.34}$$

องค์ประกอบเชิงรัศมีของ $\mathbf{S}$ จากสมการ (3.33) คือ

$$\left[\mathbf{S}.\mathbf{n}\right]_{ret} = \frac{e^2}{4\pi c}\left[\frac{1}{\left(1-\mathbf{n}.\boldsymbol{\beta}\right)}\left|\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\right)\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\right|^2\right]_{ret} \tag{3.35}$$

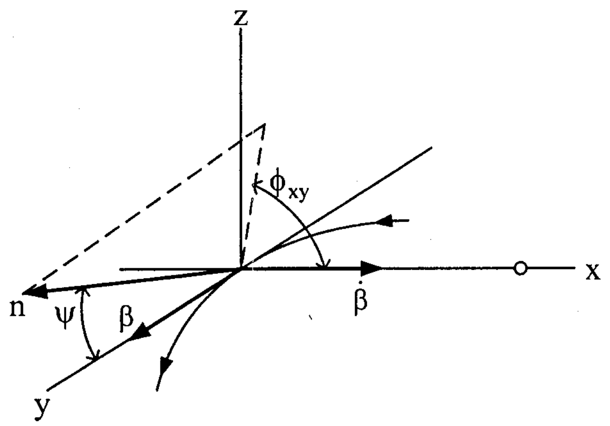
$\left[\mathbf{S}.\mathbf{n}\right]_{ret}$ เป็นกำลังต่อหน่วยพื้นที่ที่จุดสังเกตและวัดที่เวลา t อันเนื่องจากการแผ่รังสีที่เวลา $t' = t - R(t')/c$ ปริมาณที่มีประโยชน์และให้ความหมายได้ดีกว่าคือ $\left[\mathbf{S}.\mathbf{n}\right]_{ret}(dt/dt')$ ซึ่งเป็นกำลังที่แผ่ออกมาต่อหน่วยพื้นที่ในเทอมของกรอบอ้างอิงเวลาของประจุเองซึ่งเหมือนกับกำลังที่วัดได้ในห้องปฏิบัติการ ปริมาณส่วนนี้เมื่อคูณด้วย R^2 จะเป็นกำลังที่แผ่ออกมาต่อหน่วยมุมตัน (solid angle) หรือ

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2(\mathbf{S}.\mathbf{n})\left(\frac{dt}{dt'}\right) = \left(1-\mathbf{n}.\boldsymbol{\beta}\right)R^2\mathbf{S}.\mathbf{n} \tag{3.36}$$

เมื่อใช้สมการ (3.33) และ (3.34) จะได้

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\left|\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}\right]\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right|^2}{\left(1-\mathbf{n}.\boldsymbol{\beta}\right)^5} \qquad (3.37)$$

สำหรับการเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดย β อยู่ในแนวแกน y และ $\dot{\beta}$ อยู่ในแนวแกน x มุม ψ เป็นมุมระหว่าง **n** และ β , มุม ϕ_{xz} เป็นมุมระหว่าง $\dot{\beta}$ และฉายาของ **n** ในระนาบ xz ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 ประกอบการหาค่า dP / dΩ ซึ่งใช้แนวคิดของ Jackson (1975)

จากรูป, ให้ **n** เป็นทิศทางของโฟตอนเทียบกับทิศทางของความเร็วอิเล็กตรอน (แกน y) และความเร่งของอิเล็กตรอน (แกน x) ψ เป็นมุมระหว่าง **n** และเวกเตอร์ความเร็วของอิเล็กตรอน, β ϕ_{xz} เป็นมุมระหว่างฉายาของ **n** บนระนาบ xz และเวกเตอร์ความเร่งของอิเล็กตรอน, $\dot{\beta}$ ดังนั้น เราจึงได้

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{1}{\left(1-\beta\cos\psi\right)^3}\left[1-\frac{\sin^2\psi\cos^2\phi_{xz}}{\gamma^2\left(1-\beta\cos\psi\right)^2}\right] \qquad (3.38)$$

จากสมการ (3.38) เราจะได้รากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square) ของมุมการแผ่รังสีเป็น

$$\left\langle \psi^2 \right\rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma} \tag{3.39}$$

ซึ่งสอดคล้องกับมุมสำหรับการแผ่รังสีที่ความยาวคลื่นวิกฤต เมื่ออินทิเกรตสมการ (3.38) ทั่วทุกมุมจะได้กำลังรวม คือ

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{v}^2}{c^3}\gamma^4 = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{\rho^2}\beta^4\gamma^4 \tag{3.40}$$

โดยที่ ρ เป็นรัศมีวงโคจรและ $\dot{v} = (c\beta/\rho)v \equiv \omega v$ เมื่อ ω คือความถี่เชิงมุม กำลังของการแผ่โดยอิเล็กตรอน 1 ตัว ในหน่วยที่เราคุ้นเคย คือ

$$P(\mathrm{GeV/s}) = 4.22 \times 10^3 \frac{E^4}{\rho^2} = 3.79\,E^2B^2 \tag{3.41}$$

หรือ

$$P(\mathrm{GeV/s}) = 4.22 \times 10^3 \frac{E^4}{\rho^2} = 3.79\,E^2B^2 \tag{3.42}$$

โดยที่ E, ρ และ B มีหน่วยเป็น GeV, เมตร, และกิโลเกาส์, ตามลำดับ

, พลังงานสูญจากการแผ่รังสีต่อรอบจากสมการ (3.40) คือ

$$\Delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta}P = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\rho}\beta^3\gamma^4 \tag{3.43}$$

สำหรับอนุภาคที่มีความเร็วใกล้ความเร็วแสงหรือสัมพัทธภาพสูงมากๆ , $\beta \approx 1$ ดังนั้น สมการ (3.43) จะกลายเป็น

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2\gamma^4}{\rho} \tag{3.44}$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ (2.7)

3.3 ความถี่ลักษณะเฉพาะของสเปกตรัม

การแจกแจงความถี่หรือความยาวคลื่นของรังสีหาได้จากการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) และ Parseval's theorem สเปกตรัมความถี่นี้กำหนดในกรอบของผู้สังเกตุ เราจึงเริ่มจากรูปแบบทั่วไปสำหรับกำลังที่นิยามในเวลา t ของผู้สังเกตุ จากสมการ (3.34), กำลังต่อหน่วยมุมตันคือ

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \qquad (3.45)$$

ด้วยค่า

$$\mathbf{A}(t) \equiv \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{1/2}[\mathbf{RE}]_{ret} \qquad (3.46)$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่แผ่ออกมาทั่วทุกเวลาโดยประจุมีความเร่งในช่วงเวลาหนึ่ง คือ

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt \qquad (3.47)$$

และสเปกตรัมอาจหาได้โดยใช้การแปลง

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(t) e^{i\omega t} dt \qquad (3.48)$$

การอินทิเกรตเทียบกับเวลานี้มีผลต่อการแยกส่วนที่ขึ้นกับ ϕ_{xz} จากสเปกตรัมตามรูปที่ 3.1 ดังนั้น สมการ (3.47) จะกลายเป็น

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}^*(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \qquad (3.49)$$

เมื่อสลับอันดับของการอินทิเกรต, โดยอินทิเกรตเทียบกับเวลาก่อนซึ่งจะให้ฟังก์ชันเดลตา $\delta(\omega' - \omega)$ เราจึงได้

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 d\omega \qquad (3.50)$$

ถ้าให้
$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{o}^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} d\omega$$

เพื่อใช้นิยาม $dI(\omega)/d\Omega$ เป็นพลังงานที่แผ่ออกมาต่อหน่วยมุมตันต่อหนึ่งช่วงความถี่สำหรับความถี่ค่าบวกเราได้

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2$$

และเนื่องจาก $\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{A}^*(-\omega)$ ดังนั้น

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = 2|\mathbf{A}(\omega)|^2 \tag{3.51}$$

เมื่อใช้สมการ (3.33) สำหรับ **E** จาก (3.48) และ (3.46) จะได้

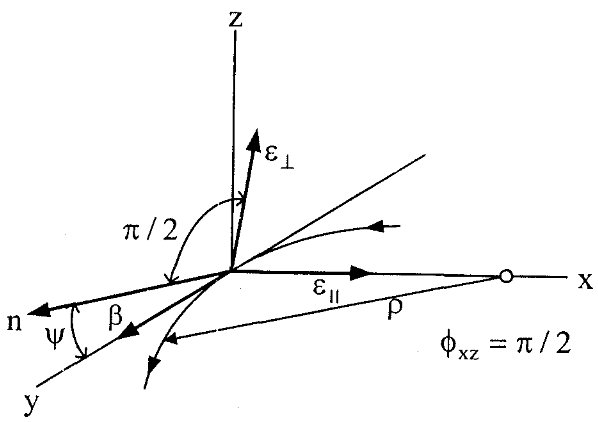
$$\mathbf{A}(\omega) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times \left[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\right]_{ret} dt$$

$$= \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\omega\left(t' + R(t')/c\right)\right] \frac{\mathbf{n} \times \left[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2} dt' \tag{3.52}$$

เมื่อจุดสังเกตอยู่ห่างจากบริเวณที่มีการแผ่รังสีมาก, **n** จึงถูกตรึงในช่วงเวลาของการแผ่รังสี และจากรูปในระบบพิกัดข้างล่างนี้, เทอมในเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งไม่นับแฟกเตอร์ที่เป็นเฟสคงตัว จะได้

$$\omega\left(t' + \frac{R(t')}{C}\right) = \omega\left(t' - \frac{\rho}{c}\sin\frac{vt'}{\rho}\cos\psi\right) \tag{3.53}$$

โดยที่ $t' = 0$ จะสมนัยกับ **n** อยู่ในระนาบ yz พอดี



รูปที่ 3.2 ประกอบการคำนวณหา $\mathbf{A}(\omega)$

เนื่องจาก

$$\frac{\mathbf{n} \times \left[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathbf{n} \times \left[(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})\right]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}\right] \tag{3.54}$$

เมื่อใช้กับการอินทิเกรตโดยแยกส่วนของสมการ (3.52) จะได้

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp\left[i\omega\left(t' + \frac{R(t')}{c}\right)dt'\right]\right|^2$$

$$= \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp\left[i\omega\left(t' - \frac{\rho}{c}\sin\frac{vt'}{\rho}\cos\psi\right)\right]dt'\right|^2 \tag{3.55}$$

สำหรับ $\mathbf{n}$ ที่อยู่ในระนาบ yz, ส่วนที่เป็นเวกเตอร์ของปริพัทธ์ (integrand) อาจเขียนได้เป็น

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) = \beta\left[-\varepsilon_\parallel \sin\left(\frac{vt'}{\rho}\right) + \varepsilon_\perp \cos\left(\frac{vt'}{\rho}\right)\sin\psi\right] \tag{3.56}$$

โดยที่ $\varepsilon_\parallel$ อยู่ในระนาบวงโคจร และ $\varepsilon_\perp$ ตั้งฉากกับ $\varepsilon_\parallel$ และ $\mathbf{n}$. ค่า ε เหล่านี้ แสดงทิศทางของโพลาไรเซชัน ถ้าให้

$$\xi = \frac{\omega\rho}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)^{3/2} \tag{3.57}$$

และเราสนใจจะหาสมการ (3.55) สำหรับมุมเล็กๆ และช่วงเวลาสั้นๆ รอบๆ $t' = 0$, การอินทิเกรตของสมการ (3.55) จะให้

$$\frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\psi^2}{\left(1/\gamma^2\right) + \psi^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{3.58}$$

เทอมแรกในวงเล็บใหญ่เกี่ยวข้องกับรังสีโพลาไรซ์ $\varepsilon_\parallel$, ส่วนเทอมที่สองเกี่ยวข้องกับ $\varepsilon_\perp$ และ $K_{2/3}$ และ $K_{1/3}$ คือ ฟังก์ชันเบสเซลที่ถูกดัดแปร สำหรับความยาวคลื่นมากๆ, ความกว้างของ $\Delta\psi$ พอจะประมาณได้เป็น

$$\Delta\psi \approx \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} \approx \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{1/3} \tag{3.59}$$

ω_c และ λ_c คือความถี่และความยาวคลื่นลักษณะเฉพาะกำหนดโดย

$$\omega_c \equiv \frac{2\pi c}{\lambda_c} = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}$$

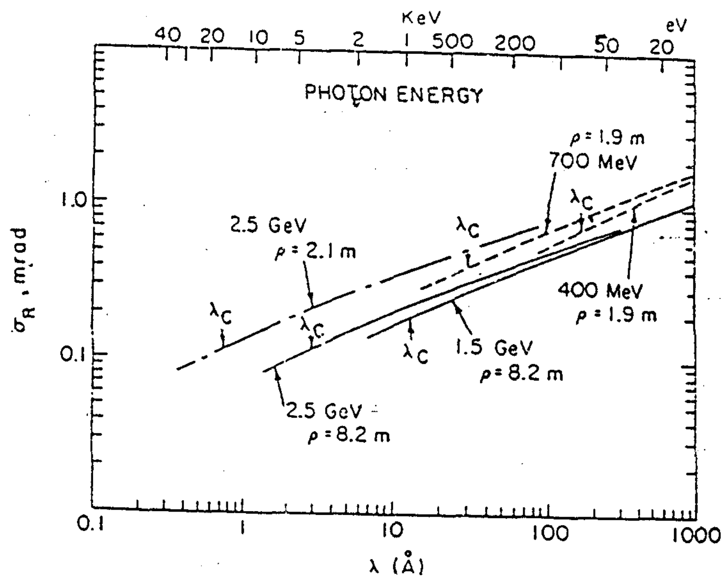
$$\lambda_c \equiv \frac{4\pi\rho}{3\gamma^3} = \frac{5.59\rho}{E^3} = \frac{186}{BE^2}\ \left(^\circ A\right) \tag{3.60}$$

สำหรับความยาวคลื่นสั้นๆ,

$$\Delta\psi \approx \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{1/2} \quad \left(\lambda << \lambda_c\right) \tag{3.61}$$

ถ้าฟังก์ชันสำหรับ $\varepsilon_\parallel$ ของสมการ (3.58) พอจะประมาณให้เป็นเกาส์เซียน (Gaussian) คือ $\exp\left(-\psi^2/2\sigma_R\right)$ ดังนั้น σ_R จึงเป็นตัววัดการกระจายเชิงมุม ค่าของ σ_R สำหรับพิสัยพลัง

งานของโฟตอนและจำนวนอิเล็กตรอนและรัศมีของเครื่องเร่งที่ใช้เป็นจุดกำเนิดซินโครตรอน แสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ปริมาณ σ_R ที่เป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่น λ ของโฟตอน, พลังงานของอิเล็กตรอน และรัศมีความโค้ง

สำหรับ $\lambda / \lambda_c = 0.2$ ถึง 100, เราพอจะประมาณความสัมพันธ์ได้เป็น

$$\gamma\sigma_R = 0.57(\lambda / \lambda_c)^{0.43} \qquad \text{(เรเดียน)}$$

อินทิเกรตสมการ (3.58) ทั่วทุกมุมจะได้

$$I(\omega) = \sqrt{3}\frac{e^2}{c}\gamma\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)dx \qquad (3.62)$$

$I(\omega)$ เป็นพลังงานต่อรอบสำหรับอิเล็กตรอน 1 ตัว และพิสัยความถี่ 1 หน่วย

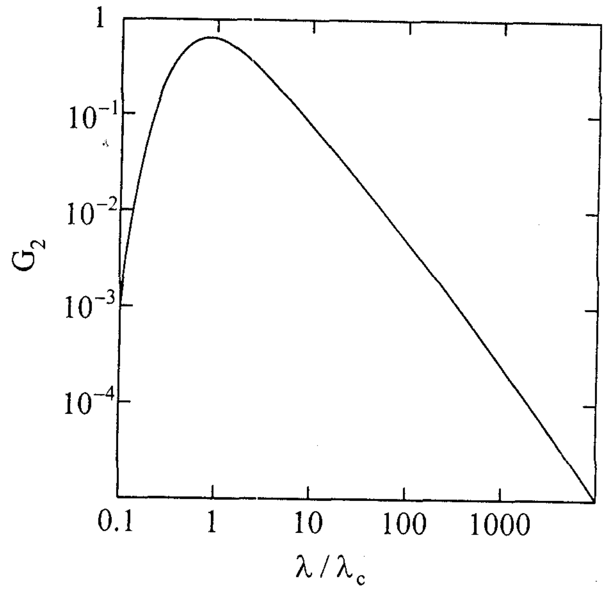
กำลังของการแผ่รังสีที่เป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่นสำหรับความกว้างของแถบ (bandwidth) 1% และมุมแอซิมัท ψ เป็นมิลลิเรเดียนของวงโคจรอิเล็กตรอนคือ

$$P = 5.95 \times 10^{-8} \frac{\gamma^4 I}{\rho} G_2 \qquad (\mathrm{erg/s}) \qquad (3.63)$$

โดยที่

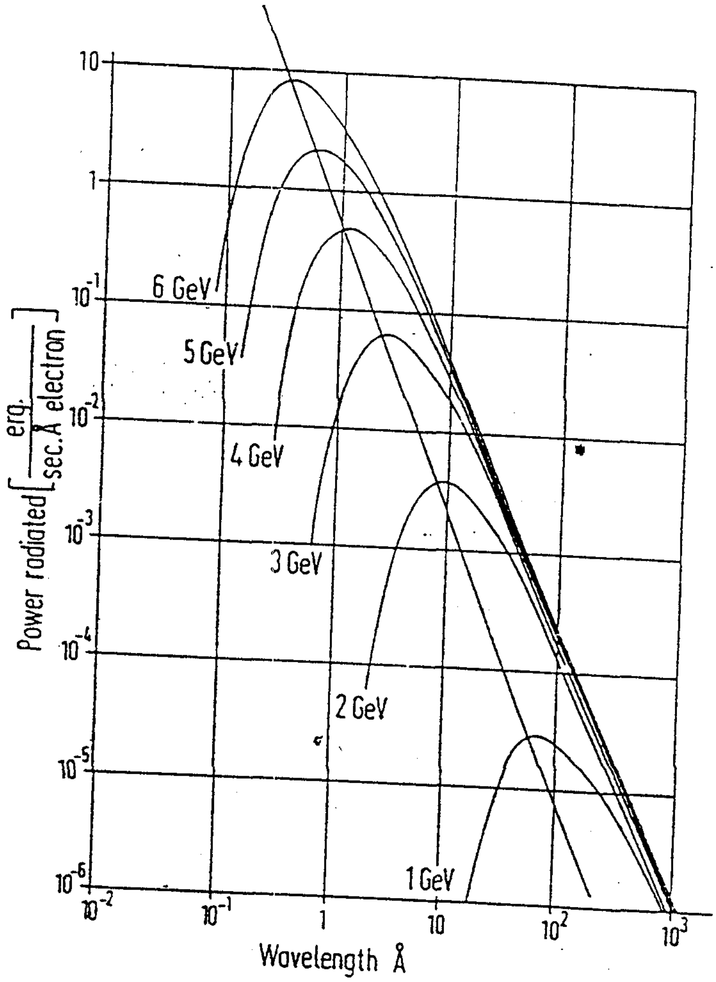
$$G_n \equiv \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^n \int_{\lambda_{c/\lambda}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\,d\eta \qquad (3.64)$$

รูปที่ 3.4 แสดงแฟกเตอร์ G_2 ที่เป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่น



• รูปที่ 3.4 ฟังก์ชัน $G_2(\lambda / \lambda_2)$ ของสมการ (3.63) สำหรับกำลังของการแผ่รังสี

จากรูปจะเห็นว่ายอดโค้งของสเปกตรัมกำลังอยู่ที่ค่า λ ประมาณ $\frac{2}{3}\lambda_c$, ครึ่งหนึ่งของกำลังทั้งหมดเกี่ยวข้องกับความยาวคลื่นที่มากกว่า λ_c , ส่วนอีกครึ่งหนึ่งของกำลังทั้งหมดเกี่ยวข้องกับความยาวคลื่นที่น้อยกว่า λ_c



รูปที่ 3.5 กำลังการแผ่รังสีจากอิเล็กตรอนที่พลังงานค่าต่างๆ และรัศมี 31.7 เมตร ที่เป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่น

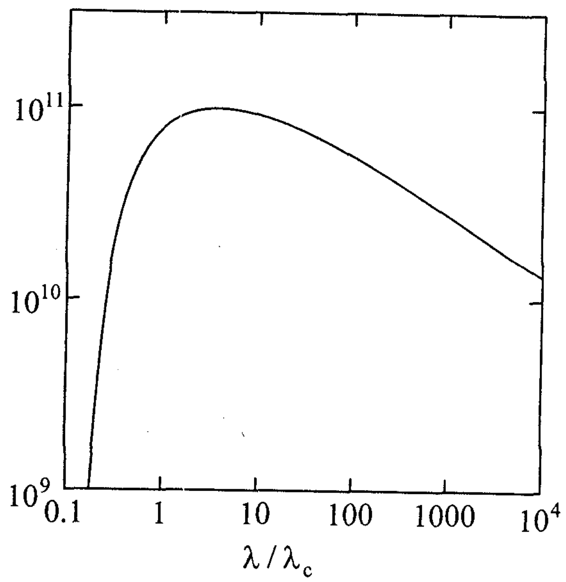
สมการ (3.62) สมมูลกับสมการ (3.63) และ (3.64) แม้ว่าจะมีนิยามหรือความหมายที่แตกต่างกัน $I(\omega)$ เป็นพลังงานต่อรอบสำหรับอิเล็กตรอนหนึ่งตัวและพิสัยความถี่หนึ่งหน่วย, ในขณะที่ P เป็นกำลังสำหรับกระแส I และความกว้างของแถบเพียง 1% ดังนั้น สมการ (3.64) จึงมีแฟกเตอร์เพิ่มเข้ามาคือ $1/\lambda$

ในขณะที่กำลังเป็นปริมาณที่สำคัญต่อการออกแบบอุปกรณ์ที่ใช้ผลิตรังสีซินโครตรอน แต่ปริมาณที่นักทดลองในห้องปฏิบัติการสนใจมากกว่าคือ ฟลักซ์โฟตอน (photon flux), N. ปริมาณนี้หาได้โดยการหารกำลังด้วยพลังงานโฟตอน hc/λ ดังนั้น

$$N = \frac{P_\lambda}{hc} = 1.256 \times 10^{11} \gamma I G_1$$

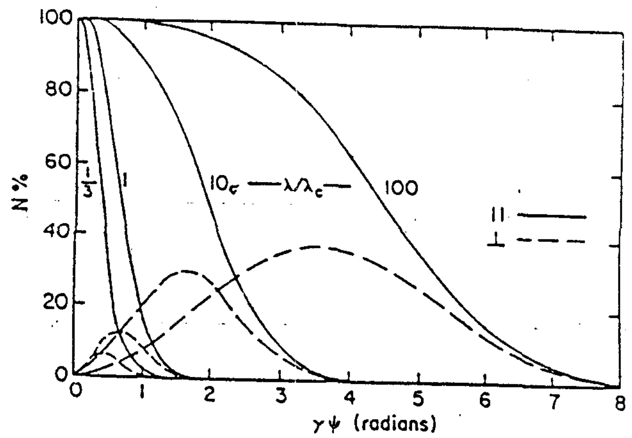
$$\equiv \gamma I \mathcal{F} \quad (\lambda / \lambda_c) \tag{3.65}$$

โดยที่ $\mathcal{F}$ ที่เป็นฟังก์ชันของ λ / λ_c แสดงในรูปที่ 3.6 และฟลักซ์ N ที่ได้สำหรับความกว้างของแถบ 1 % และ 1 mrad ของเส้นโค้งวงกลมเช่นเดิม ฟลักซ์โฟตอนลดลงด้วยอันดับขนาด 2 จาก λ_c ถึง $0.16\lambda_c$ แต่ลดลงด้วยแฟกเตอร์ 3 จาก λ_c ถึง $1000\lambda_c$



รูปที่ 3.6 ฟังก์ชัน $\mathcal{F}\left(\lambda / \lambda_c\right)$ ของสมการ (3.65) สำหรับฟลักซ์โฟตอนซึ่งอินทิเกรตทั่วทุกมุมจากแนวดิ่ง ψ

รังสีซินโครตรอนมีทิศทางที่ชัดเจนมาก จากจุดใดๆ ในวงโคจรอิเล็กตรอน, รังสีจะถูกจำกัดอยู่ในกรวยแคบๆ ด้วยมุมส่วนยอด (apex angle) ขนาดเพียงมิลลิเรเดียนและแกนสัมผัสกับวงโคจร เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมจะแผ่รังสีเป็นแผ่นที่มีมุมในแนวดิ่งขนาด ~ 1 mrad รังสีจึงมีโพลาไรเซชันสูงมาก สำหรับการแผ่ในระนาบวงกลม, เวกเตอร์สนามไฟฟ้าจะอยู่ในแนวระนาบและตั้งฉากกับทิศทางของการแผ่รังสี สำหรับการแผ่ด้วยมุม ψ ที่ทำกับระนาบวงโคจร, **E** จะมีองค์ประกอบที่ตั้งฉากกับองค์ประกอบขนานและตั้งฉากของสนามไฟฟ้า **E** ซึ่งแสดงในรูปที่ 3.7 สำหรับหลายๆ ค่าของ λ / λ_c พิกัดในแนวนอนจะเป็นมุม ψ คูณด้วยพลังงานอิเล็กตรอน γ ทำให้เส้นโค้งของกราฟเป็น universal



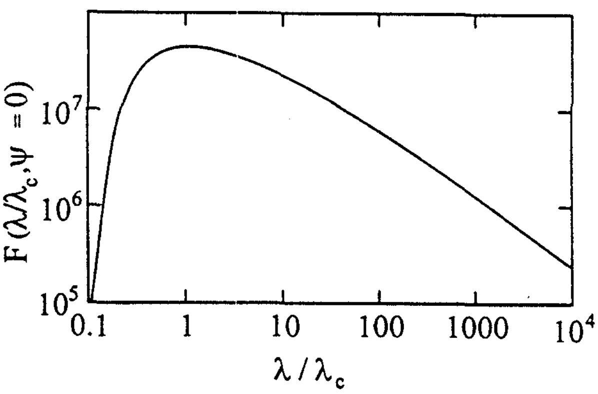
รูปที่ 3.7 ฟลักซ์โฟตอนที่ขึ้นกับมุมแนวดิ่ง ψ สำหรับค่าของ $\lambda/\lambda_c = \frac{1}{3}$, 1, 10 และ 100

ฟลักซ์ $(\partial N/\partial\psi)_{\psi=0}d\psi$ ในระนาบวงโคจรสำหรับความยาวคลื่นและกระแส $I(A)$ จากสมการ (3.65) คือ

$$\left[\frac{\partial N}{\partial\psi}\right]_{\psi=0} d\psi = 3.461 \times 10^7 I\gamma^2(\lambda_c/\lambda)^2 K_{2/3}^2(\lambda_c/2\lambda)$$

$$\equiv \gamma^2 IF(\lambda/\lambda_c,\ \psi=0) \qquad (3.66)$$

ฟังก์ชัน F ของสมการ (3.66) แสดงในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ฟังก์ชัน $F(\lambda/\lambda_c,\ \psi=0)$ ของสมการ (3.66) ซึ่งกำหนดฟลักซ์โฟตอนในระนาบของวงโคจร, $\psi=0$

มีข้อที่น่าสังเกตุว่าลักษณะของสเปกตรัมของรังสีซินโครตรอนคล้ายกับกรณีของการแผ่รังสีจากวัตถุดำ (blackbody radiation) ค่าสูงสุดของสเปกตรัมของวัตถุดำที่ความยาวคลื่น λ_{max} กำหนดโดย

$$\lambda_{max} = 1.265 \frac{\hbar c}{k_B T}$$

หรือ $$\lambda_{max} T = 2.896 \times 10^7 \left(\mathring{A}.K\right)$$

โดยที่ k_B คือค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ และ T คืออุณหภูมิของวัตถุดำ ถ้า λ_c เท่ากับ 0.82 $\mathring{A}$ จะคล้ายกับวัตถุดำที่อุณหภูมิเหนือ 10^7K เป็นต้น

พฤติกรรมเชิงเส้นกำกับ (asymptotic behavior) ของสมการ (3.63) สำหรับ $\lambda \geq \lambda_c$ พอจะประมาณได้เป็น

$$P\left[\frac{\text{erg}}{\text{s.A}^{\circ}\text{.electron}}\right] \approx 90\left[\rho(m)\right]^{-2/3} \cdot \left[\lambda\left(\mathring{A}\right)\right]^{-7/3} \qquad (3.67)$$

กำลังที่แผ่ออกมาที่ความยาวคลื่น λ มากๆ เมื่อเทียบกับความยาวคลื่นลักษณะเฉพาะหรือวิกฤต λ_c เกือบจะเป็นอิสระต่อพลังงานอิเล็กตรอน เครื่องเร่งอนุภาคพลังงานต่ำด้วยรัศมีน้อยๆ สามารถเป็นแหล่งกำเนิดรังสีที่มีประสิทธิภาพได้

ในทางตรงกันข้าม, กำลังที่แผ่ออกมาที่ความยาวคลื่นใกล้ค่าสูงสุดของสมการ (3.63) จะเพิ่มขึ้นด้วยกำลัง 7 ของพลังงานอิเล็กตรอน ใกล้ยอดโด่งของ $P(\lambda)$ นั่นคือ สำหรับ $\lambda \sim \lambda_c / 2$ จะได้

$$P\left[\frac{\text{erg}}{\text{s.}\mathring{A}\text{ .electron}}\right] \approx 9 \times 10^{-24} \gamma^7 \left[\rho(m)\right]^3. \qquad (3.68)$$

จำนวนโดยประมาณของโฟตอนที่แผ่ออกมาต่อวินาทีโดยอิเล็กตรอนพลังงานเดียว (monoenergetic electron) ภายใน 1 $\mathring{A}$ ของแถบที่ความยาวคลื่น $\lambda \geq \lambda_c$ คือ

$$N(\lambda) \approx 5 \times 10^3[\rho(m)]^{-2/3} \left[\lambda\left(\overset{\circ}{A}\right)\right]^{-4/3} \tag{3.69}$$

สมการ (3.67), (3.68), และ (3.69) ใช้ได้กับการประมาณแบบหยาบๆ เท่านั้น

3.4 ข้อจำกัดของการใช้ทฤษฎีแผนเดิม

เป็นที่ทราบกันดีว่าในกรณีเชิงสัมพัทธภาพอย่างสูง, อิเล็กตรอนจะถูกดำเนินการด้วยหลายแฟกเตอร์ซึ่งในทฤษฎีการแผ่รังสีแผนเดิมไม่ได้นำมาพิจารณาด้วย แฟกเตอร์เหล่านี้คือแรงของการหน่วงจากการแผ่รังสีรวมทั้งผลเชิงควอนตัมและสปิน เราทราบว่ารังสีซินโครตรอนค้นพบครั้งแรกโดย J.P. Blewett จากการลดลงของรัศมีของอิเล็กตรอนในบีตาตรอนขนาด 100 MeV. รายละเอียดของการศึกษาเกี่ยวกับปัญหาที่เชื่อมโยงกับแรงหน่วงของการแผ่รังสีจะไม่กล่าวในที่นี้ แต่เราจะพิจารณาบางปัญหาที่สัมพันธ์กับแรงหน่วงและข้อจำกัดของทฤษฎีการแผ่รังสีแผนเดิมเมื่อมีแรงหน่วงของการแผ่รังสีและผลเชิงควอนตัมเข้ามาปรากฏด้วย

ก่อนอื่นเราต้องสังเกตว่าเงื่อนไขของความน้อยนิดของแรงหน่วงรังสีในการประมาณไม่เชิงสัมพัทธภาพ (ในกรอบหยุดนิ่ง) และในกรณีเชิงสัมพัทธภาพอย่างสูงจะแตกต่างกันมาก ในกรอบที่หยุดนิ่ง, สมการการเคลื่อนที่ของประจุในสนามแม่เหล็ก **B** ที่คงตัวเมื่อรวมแรงหน่วงรังสีด้วยจะมีรูปแบบตามตำราของ Landau and Lifshitz (1980) คือ

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\left(\mathbf{E}_o + [\beta\mathbf{B}_o]\right) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}$$

$$= F_o^{Lor} + F_o^{rad} \tag{3.70}$$

โดยที่ $\mathbf{E}_o = \gamma[\beta\mathbf{B}_o]$, $\mathbf{B}_o = \gamma\mathbf{B}$

เป็นสนามในกรอบหยุดนิ่ง สมมติว่าแรงหน่วงรังสีมีค่าน้อยเราสามารถเขียน

$$F_o^{rad} = \frac{2}{3}\frac{e^3}{m^2c^4}(\mathbf{E}_o\mathbf{B}_o)$$

$$F_o^{rad} = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\gamma^2B^2\beta \tag{3.71}$$

แรงหน่วงรังสีมีทิศตรงข้ามกับความเร็ว จากสมการ (3.70) และ (3.71), เงื่อนไขของความน้อยนิดของแรงหน่วงรังสีในระบบหยุดนิ่งจะมีรูปแบบ

$$\frac{F_o^{rad}}{F_o^{Lor}} \approx \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\gamma B << 1$$

หรือ
$$\alpha\gamma\frac{B}{B*} << 1 \qquad (3.72)$$

โดยที่ $\alpha = e^2 / \hbar c$ คือ fine structure constant และ $B* = m^2c^4 / e\hbar$ คือ Schwinger's magnetic field. เป็นที่ทราบกันดีว่าเงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขของความสมเหตุสมผล (validity) ของทฤษฎีแผนเดิม

เงื่อนไขที่มาจากรูปแบบที่ชัดแจ้งของแรงเชิงสัมพัทธภาพอย่างสูงของความหน่วงรังสีในกรอบห้องปฏิบัติการ (laboratory frame) มีรูปแบบ

$$\frac{F_o^{rad}}{F_o^{Lor}} \approx \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^4}\gamma^2 B << 1$$

หรือ
$$\alpha\gamma^2\frac{B}{B*} << 1 \qquad (3.73)$$

จะเห็นได้ว่าถ้าสมการ (3.73) สมเหตุสมผล ดังนั้น สมการ (3.72) จะสมเหตุสมผลด้วยเช่นกัน อย่างไรก็ตาม, ในทางกลับกันอาจไม่เป็นจริงก็ได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $\gamma >> 1$ หมายความว่าแรงหน่วงรังสีในกรณีเชิงสัมพัทธภาพอย่างสูงจะเป็นแรงหลักที่กระทำต่อประจุ เพราะเหตุนี้ความสมเหตุสมผลของพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมไม่อาจตัดออกไปได้ เหตุการณ์ที่น่าสนใจนี้สามารถเข้าใจได้ง่ายถ้าเราคิดว่าเงื่อนไขของสมการ (3.73) และ (3.72) คือการแปรผันร่วมเกี่ยว (covariant) ไม่ใช่การยืนยง (invariant) ในทางตรงข้าม, กำลังรวมของรังสีซินโครตรอนเป็นค่าที่แปรปรวนร่วมเกี่ยว ดังนั้น ถ้าส่วนแก้ไขของรังสีซินโครตรอนมีค่าน้อยในกรอบหยุดนิ่ง, มันจะมีค่าน้อยในระบบพิกัดอื่นๆ ด้วย

เราสามารถพิสูจน์สิ่งนี้โดยวิธีอื่นได้เช่นกัน เราทราบว่าการแผ่รังสีเชิงสัมพัทธภาพอย่างสูงที่รับรู้โดยผู้สังเกตจะอยู่ภายในส่วนเล็กๆ ของส่วนโค้งของวงกลม $\Delta\ell_{rad} \approx \rho / \gamma$ ในช่วงเวลา

$$\Delta t_{rad} = \frac{\Delta \ell_{rad}}{c} = \frac{1}{\gamma\omega} = \frac{mc}{eB}$$

การสูญเสียพลังงานอันเนื่องจากการแผ่รังสีภายในช่วงเวลาดังกล่าวจะมีค่าน้อยถ้า

$$P\,\Delta t \ll mc^2\gamma$$

เนื่องจากกำลัง P ของรังสีซินโครตรอนที่เป็นฟังก์ชันของความเข้มสนามแม่เหล็กเขียนได้เป็น

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^4B^2}{m^2c^3}\cdot\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \tag{3.74}$$

เราก็จะได้เงื่อนไขเช่นเดียวกับสมการ (3.72) พลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมจึงสมเหตุสมผล ทั้งๆ ที่มีการสูญเสียจำนวนมากในขณะที่เงื่อนไขนี้สมเหตุสมผล

ผลเชิงควอนตัมในการแผ่รังสีจะเริ่มปรากฏในกรณีที่พลังงานของโฟตอนที่แผ่ออกมามีค่าเปรียบเทียบได้กับพลังงานอิเล็กตรอน หรือ

$$\hbar\omega \approx mc^2\gamma$$

แทนค่า ω_c ซึ่งสมนัยกับค่าสูงสุดของสเปกตรัมรังสีซินโครตรอนเราจะได้เงื่อนไขความน้อยนิดสำหรับการแก้ไขทฤษฎีการแผ่รังสีแผนเดิมคือ

$$\gamma\frac{B}{B^*} \ll 1 \tag{3.75}$$

ดังนั้น สิ่งที่ตามมาอันเนื่องจากผลเชิงควอนตัมคือทฤษฎีแผนเดิมของรังสีซินโครตรอนไม่สมเหตุสมผล ในสนามที่น้อยกว่าสนามซึ่งมาจากเงื่อนไขของสมการ (3.72)

พิสัยของสนามแม่เหล็กซึ่งทฤษฎีแผนเดิมสมเหตุสมผลแต่แรงหน่วงรังสีมีค่ามากกว่าแรงโลเร็นตซ์ F_o^{Lor} จะถูกกำหนดโดยอสมการ

$$\frac{1}{\alpha\gamma^2}B^* < B \ll \frac{1}{\gamma}B^* \tag{3.76}$$

สำหรับผลของสปินจะไม่นำมาพิจารณาในที่นี้

3.5 รังสีซินโครตรอนจากเครื่องเร่งอนุภาค

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงรังสีที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนพลังงานเดี่ยว (monoenergetic electron) ในวงโคจรที่เป็นวงกลม แต่อิเล็กตรอนในเครื่องเร่งอนุภาคและวงแหวนสะสม มิได้แผ่รังสีเหมือนกับที่ได้กล่าวมาแล้วทีเดียว เครื่องเร่งและวงแหวนสะสมแต่ละชนิดมีลักษณะเฉพาะของการสร้างและการเดินเครื่องที่แตกต่างกันไป จึงมีผลต่อคุณสมบัติของการแผ่รังสีซินโครตรอน ในหัวข้อนี้จะได้พิจารณาลักษณะเฉพาะของเครื่องเร่งจริงๆ ที่แตกต่างไปจากสิ่งที่เกิดขึ้นในอุดมคติ

เครื่องเร่งและวงแหวนสะสมถูกสร้างเพื่อให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคมีประจุประกอบด้วยแนวตรงและเป็นวงกลม อิเล็กตรอนจะแผ่รังสีเมื่อมีความเร่งสู่ศูนย์กลางเท่านั้น ดังนั้นรัศมีความโค้งของแม่เหล็กจึงมีความสำคัญมากต่อการแผ่รังสีซินโครตรอนมิใช่รัศมีเฉลี่ยของเครื่องเร่ง อัตราส่วนของรัศมีแม่เหล็กต่อรัศมีเครื่องกลมีค่าประมาณ 0.5 ดังนั้นความเข้มของรังสีที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เป็นวงโคจรจึงน้อยกว่าที่มาจากอิเล็กตรอนในวงโคจรที่เป็นวงกลมด้วยแฟกเตอร์นี้

รังสีที่มาจากอิเล็กตรอนในวงโคจรที่ถูกปล่อยออกมาจะไม่ร่วมนัยกัน ดังนั้นความเข้มของรังสีที่กล่าวมาแล้วจึงต้องคูณด้วยจำนวนอิเล็กตรอนในวงโคจรเพื่อให้ได้ความเข้มรวมที่แผ่ออกมาเมื่ออิเล็กตรอนจำนวนมากมายถูกเร่งไปด้วยกัน

การกำหนดทั้งจำนวนอิเล็กตรอนในวงโคจรและพลังงานของอิเล็กตรอนใน storage ring น่าจะกระทำได้ง่ายและด้วยความแม่นเพื่อหาค่าความเข้มของรังสีที่แผ่ออกมา แต่ในกรณีของรังสีซินโครตรอนจากอิเล็กตรอนอาจจะไม่ง่ายนัก อิเล็กตรอนไม่มีพลังงานเดี่ยว แต่จะถูกเร่งจากพลังงานต่ำเป็นศูนย์ไปจนถึงพลังงานสูงในช่วงเวลาอันสั้น ถ้าพลังงานที่เป็นฟังก์ชันของเวลาเราทราบแน่ชัด, ค่ากำลังเฉลี่ยของสเปกตรัมก็สามารถหาค่าได้ ในเครื่องกำเนิดรังสีซินโครตรอนช่วงต้นๆ พลังงานจะแปรตามเวลาแบบรูปไซน์ คือ

$$E(t) = E_m \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \tag{3.77}$$

โดยที่ E_m เป็นพลังงานสูงสุดที่เป็นไปได้ และ T เป็นคาบของความเร่ง ในเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนสมัยใหม่, พลังงานขึ้นกับเวลาในรูปของกำลังสองของไซน์ คือ

$$E(t) = E_m \sin^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right) \tag{3.78}$$

ถ้าเรานิยาม λ_m ซึ่งเป็นความยาวคลื่นวิกฤตที่พลังงานสูงสุด และอุปมากับสมการ (3.60) คือ

$$\lambda_m = \frac{4\lambda\rho}{3}\left(\frac{mc^2}{E_m}\right)^3 \qquad (3.79)$$

คุณสมบัติของรังสีจะไม่เปลี่ยนไปจากกรณีของอิเล็กตรอนพลังงานเดี่ยวมากนัก รังสีใกล้ๆ ความยาวคลื่นวิกฤตจะไม่มากมายนักและค่าสูงสุดของสเปกตรัมจะเลื่อนไปเล็กน้อยไปทางความยาวคลื่นที่มากกว่า ทั้งพลังงานที่มีรูปแบบไซน์และไซน์กำลังสองจะมียอดโด่งของสเปกตรัมอยู่ที่ $0.5\,\lambda_m$ ในขณะที่เป็น $0.42\,\lambda_c$ สำหรับอิเล็กตรอนพลังงานเดี่ยว ซินโครตรอนมีวัฏจักรของการทำงานประกอบด้วยคาบของความเร่งตามด้วยการหยุดด้วยช่วงยาวที่เท่ากัน

ค่าอย่างหยาบๆ ของความเข้มของรังสีที่แผ่ออกมาจากเครื่องเร่งอาจหาได้จากที่เคยกล่าวมาแล้ว ในกรณีของวงแหวนสะสมเราเพียงแต่คูณผลที่ได้จากอิเล็กตรอนเดี่ยวด้วยจำนวนอิเล็กตรอนในวงแหวนและแฟกเตอร์เพื่อแก้ในส่วนที่เป็นแนวตรงของวงแหวนที่ไม่ได้แผ่รังสี สำหรับรังสีซินโครตรอน, เราต้องคูณผลที่ได้จากอิเล็กตรอนเดี่ยวด้วยจำนวนเฉลี่ยของอิเล็กตรอนในเครื่องเร่งที่มีส่วนต่อพัลส์ของการเดินเครื่อง, และคูณด้วยแฟกเตอร์เพื่อแก้ส่วนที่เป็นแนวตรง, รวมทั้งคูณด้วยแฟกเตอร์ $(\sim 1/10)$ ที่เป็นผลจากการแปรผันพลังงานของอิเล็กตรอนในช่วงของความเร่ง จำนวนอิเล็กตรอนในซินโครตรอนอาจแปรเปลี่ยนจากพัลส์หนึ่งไปสู่อีกพัลส์หนึ่ง ดังนั้นกระแสเฉลี่ยจึงเปลี่ยนแปรอย่างมากและยากที่จะตรวจจับได้อย่างมีประสิทธิภาพ

สำหรับวงแหวนสะสมที่กำหนดและซินโครตรอนที่มีมิติและพลังงานที่เปรียบเทียบกันได้, วงแหวนสะสมจะให้รังสีที่มีกำลังมากกว่าเพราะมีกระแสมากกว่า, การเดินเครื่องที่ต่อเนื่องและพลังงานขนาดเดียวกัน

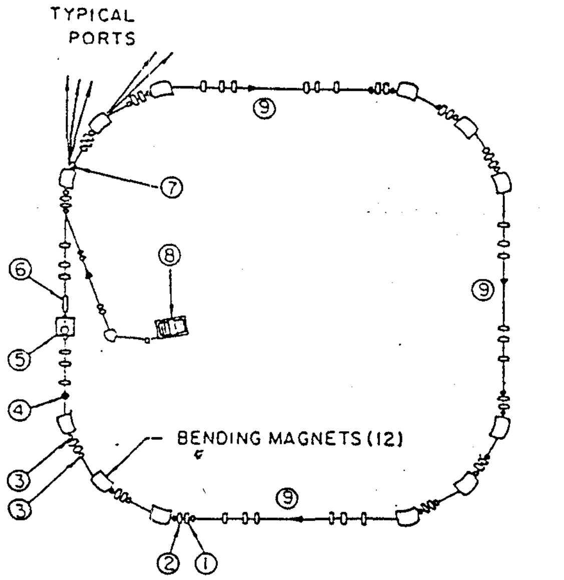
การแจกแจงเชิงมุมและคุณสมบัติโพลาไรเซชันที่คำนวณสำหรับอิเล็กตรอนพลังงานเดี่ยวเกือบจะแสดงโดยรังสีซินโครตรอนจากเครื่องจักรจริงๆ เหตุผลสำหรับการเบี่ยงเบนนี้คือขนาดอันตะของลำอิเล็กตรอน (finite beam size) ขนาดปรากฏของลำในเครื่องจักรจะมีอันดับขนาด 1 x 2 mm^2 ด้วยมิติที่ยาวกว่าในทิศทางเชิงรัศมี ขนาดปรากฏของลำเป็นขนาดจริงๆ ของลำควบคู่กับการแกว่งกวัด ที่เกิดจากบีตาตรอนและการแกว่งกวัดซินโครตรอนรอบๆ วงโคจรที่เสถียร และในบางกรณีโดยการเปลี่ยนรัศมีที่ทำให้เสถียรในช่วงครบรอบความเร่ง แต่ในหลายกรณี, ขนาดอันตะของลำจะน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งได้

บทที่ 4

พลศาสตร์ของอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม

4.1 ความนำ

วงแหวนสะสมเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนของอุปกรณ์จำนวนมาก ดังแสดงในรูปที่ 4.1

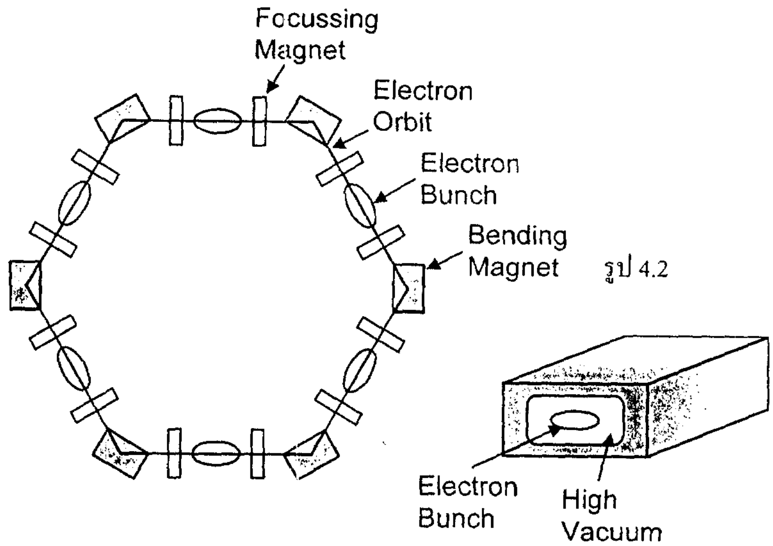


รูปที่ 4.1 ชิ้นส่วนของอุปกรณ์ที่สำคัญในโครงสร้างของวงแหวนสะสม

ห้องสุญญากาศ (ultra high vacuum chamber) เป็นส่วนที่ให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่รอบเป็นวงกลมและมีช่อง (port) ที่ตำแหน่งของ bending magnet เพื่อนำแสงซินโครตรอนไปใช้ประโยชน์ มีแม่เหล็กซึ่งให้สนามแม่เหล็กโดยเกรเดียนต์ของสนามแม่เหล็กทำหน้าที่เสมือนเลนส์ หน้าที่การโฟกัสและหักเหลำอิเล็กตรอนมักรวมเข้าด้วยกันในโครงสร้างแม่เหล็ก bending magnet ทำหน้าที่หักเหลำอิเล็กตรอน quadrupole ทำหน้าที่โฟกัสลำอิเล็กตรอนให้อยู่ใกล้กันในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ การนำอิเล็กตรอนให้เข้ามาอยู่ในวงแหวนจะต้องมีระบบนำส่ง (injection system) ซึ่งมักออกแบบให้ทำงานที่พลังงานต่ำกว่าค่าพลังงานสูงสุดสำหรับวงแหวนนั้น นอกจากนี้จะต้องมีโพรงความถี่วิทยุ (rfcavity)

สำหรับเร่งอิเล็กตรอนให้มีพลังงานเพิ่มขึ้นและชดเชยพลังงานที่หายไปจากการแผ่รังสีซินโครตรอน โดยทั่วไปจะมีอุปกรณ์สำหรับรวบรวมลำอิเล็กตรอนที่ปลายช่วงการทำงาน รวมทั้งรวบรวมอิเล็กตรอนที่อยู่ห่างจากวงโคจรที่เราต้องการให้อยู่ภายในวงโคจร นอกจากนี้ยังมีเครื่องสุญญากาศและเกจ (gauge), ขดลวดแม่เหล็กและอุปกรณ์ตรวจหาลำอิเล็กตรอนเพื่อการตรวจสอบและควบคุม

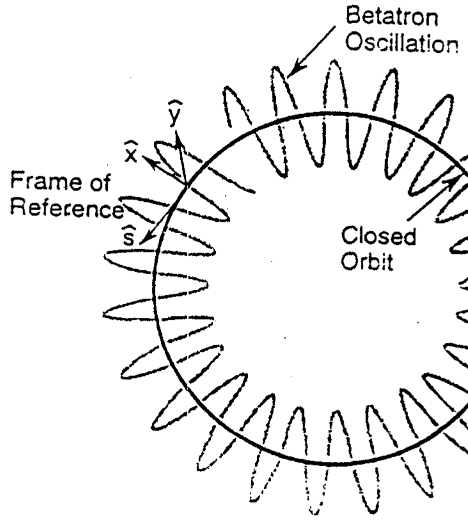
ระบบของเลนส์แม่เหล็กที่ใช้นำทางและโฟกัสลำอิเล็กตรอนเรียกว่า **แลตทิซ (lattice)** แลตทิซเป็นตัวกำหนดความเปล่ง (emittance) ของลำอิเล็กตรอน, ความสว่างของลำโฟตอน, ชั่วชีวิตของลำอิเล็กตรอน, คุณภาพของเงื่อนไขการทดลอง, จำนวนอุปกรณ์เสริมที่วางในแนวตรง, รวมทั้งเป็นตัวกำหนดขนาดและราคาของเครื่องเร่งอนุภาค



รูปที่ 4.2 ภาคตัดขวางและด้านบนของลำอิเล็กตรอนที่หมุนเวียนอยู่ภายในวงแหวนสะสม

จากรูปที่ 4.2, แลตทิซของวงแหวนสะสม ประกอบด้วยการเรียงลำดับของแม่เหล็ก 2 ขั้ว สำหรับเลี้ยวเบน และแม่เหล็ก 4 ขั้ว สำหรับโฟกัสและถ่างลำอิเล็กตรอนวางเรียงสลับกันไป แม่เหล็กทั้งสองแยกจากกันด้วยบริเวณที่ปราศจากสนามหรือที่เรียกว่า ระยะลอยเลื่อน (drift space) การเรียงลำดับเป็นวงปิดเช่นนี้ทำให้ลำอิเล็กตรอนไหลหมุนเวียนซ้ำรอยเดิมภายในวงแหวนสะสม

การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนอธิบายด้วยระบบอ้างอิงซึ่งมีแกนแอซิมัท (azimuthal axis) สัมผัสกับวงโคจร และพิกัดตามขวางในแนวราบ (x) และแนวดิ่ง (y) วางตัวในระนาบที่ตั้งฉากกับวงโคจร ดังแสดงในรูปที่ 4.3 พิกัดแอซิมัท (s) เป็นตัวแปรอิสระและเป็นระยะตามแนวโคจรจากจุดอ้างอิง s_0 เราสามารถอธิบายลำอิเล็กตรอนในเทอมของ x และ y รวมทั้งอนุพันธ์ $x' \equiv dx/ds$ และ $y' \equiv dy/ds$ ขนาดของแหล่งกำเนิดโฟตอนขึ้นอยู่กับการแจกแจง x และ y , มุมของการแผ่รังสีขึ้นกับ x' และ y' รวมทั้งสมบัติของลำกรวยที่ครอบคลุมรังสีที่แผ่ออกมา



รูปที่ 4.3 ภาพแสดงวงโคจรปิดและการแกว่งกวัดบีตาตรอนที่ไม่จำเป็นต้องเป็นวงปิด

วิถีของแต่ละอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม แสดงในรูปที่ 4.3 ประกอบด้วยการแกว่งกวัดรอบ ๆ วงโคจรซึ่งเป็นวงปิดหลังจากการเคลื่อนที่ครบรอบ การแกว่งกวัดเรียกว่า **การแกว่งกวัดบีตาตรอน** (betatron oscillations) ซึ่งเกิดขึ้นได้ทั้งในระนาบแนวราบ (x - s) และระนาบแนวดิ่ง (x - y) ในเครื่องเร่งอนุภาคซึ่งไม่มีการเบี่ยงเบนในแนวดิ่งและไม่มีค่าคลาดเคลื่อนเชิงแม่เหล็กหรือไม่มีการวางผิดตำแหน่งแล้ว , วงโคจรจะอยู่ในระนาบแนวราบเท่านั้น แต่ในความเป็นจริงแล้วสิ่งนี้ไม่อาจเกิดขึ้นได้ และจะต้องมีองค์ประกอบวงโคจรในแนวดิ่งด้วยเสมอ

อิเล็กตรอนจำนวนมากมายแกว่งกวัดรอบ ๆ วงโคจรปิดด้วยเฟสและแอมพลิจูดที่เป็นไปได้ทุกค่า แอมพลิจูดจะอยู่ภายในพิสัยที่กำหนดโดยขนาดตามขวางของท่อสุญญากาศหรือโดยค่าสูงสุดของแอมพลิจูดที่เสถียร อนุภาคบางตัวเท่านั้นที่อาจมีพลังงานเท่ากัน เนื่องจากการแผ่รังสีของอนุภาคจึงมีการแจกแจงพลังงาน แต่ละค่าของพลังงานจะมีบางส่วนที่สมนัยกับวงโคจรปิดและบางส่วนที่ไม่สมนัยจะมีการแกว่งกวัดบีตาตรอนรอบ ๆ วงโคจรปิด

คุณสมบัติเชิงแม่เหล็กของแลตทิซรวมทั้งพลังงานของอิเล็คตรอนเป็นตัวกำหนดขนาดตามขวางและการถู่ออก (divergence) ของลำแสงซินโครตรอน ซึ่งหลังจากประสานกับการถู่ออกของรังสีแล้วจะเป็นตัวกำหนดขนาดของลำโฟตอนของแสง

bending magnets จะให้สนามแม่เหล็กที่ตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่และสม่ำเสมอในบริเวณที่ครอบครองโดยลำอิเล็กตรอน และทำให้อนุภาคมีประจุเคลื่อนที่ไปตามแนวโค้งที่ออกแบบไว้ แต่ถ้าหาก

แลตทิซมีแม่เหล็กชนิดนี้แต่เพียงอย่างเดียว , อนุภาคที่อยู่ตามพิกัดต่าง ๆ จะแตกต่างไปจากแนววิถีโค้งอุดมคติดังกล่าว เนื่องจากลำอิเล็กตรอนประกอบด้วยการแจกแจงอนุภาคที่มีตำแหน่งและมุมที่ต่างกันไป รวมทั้งพลังงานด้วย ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีแม่เหล็กสี่ขั้วหรือ quadrupole ซึ่งให้สนามแม่เหล็กที่มีองค์ประกอบเป็นฟังค์ชันเชิงเส้นของพิกัด x และ y องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กของอุปกรณ์หลักของแลตทิซ ซึ่งเป็นแม่เหล็กสองขั้วและสี่ขั้ว คือ

$$\left.\begin{aligned} B_y &= B_o \\ B_x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{สำหรับแม่เหล็กสองขั้ว}$$

$$\left.\begin{aligned} B_y &= Gx \\ B_x &= Gy \end{aligned}\right\} \text{สำหรับแม่เหล็กสี่ขั้ว}$$

โดยที่ B_0 และ G เป็นค่าคงตัว ในแม่เหล็กสี่ขั้ว , สนามเป็นศูนย์ที่ $x = y = o$ และจุดนี้กำหนดแกนแม่เหล็กในทิศทางแอซิมัท อนุภาคที่อยู่ห่างแกนแม่เหล็กออกไปจะถูกดึงกลับมาหรือหนีห่างออกไป ซึ่งเรียกว่า focus และ defocus ตามลำดับ สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) แสดงให้เห็นว่า สนามแม่เหล็กจากแม่เหล็กสี่ขั้วจะ focus ในแนวราบ และ defocus ในแนวดิ่ง และจะเป็นไปในทางกลับกันด้วย แม่เหล็กสี่ขั้วสามารถโฟกัสลำอิเล็กตรอนในทั้งสองระนาบ ซึ่งแสดงใน**ทฤษฎีการโฟกัสอย่างแรง** (theory of strong focusing) และเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนทุกชนิดตั้งอยู่บนรากฐานของทฤษฎีนี้

พลังงานที่อิเล็กตรอนสูญเสียไปจากการปล่อยรังสีซินโครตรอนออกมาจะถูกชดเชยโดยผ่านโพรงความถี่วิทยุ อิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ตามแนววงโคจรอุดมคติจะมีอันตรกิริยาได้จังหวะกัน (interact synchronously) กับโพรงและเรียกพลังงานที่หายไปกลับคืนมา ในขณะที่อิเล็กตรอนอื่น ๆ อาจมีการแกว่งกวัดซินโครตรอนในแนวตามยาว (longitudinal synchrotron oscillation) และการแกว่งกวัดบีตาตรอนในแนวตามขวาง (transverse betatron oscillation) หรือแม้กระทั่งอาจมีบางส่วนที่หายไปจากลำ เนื่องจากการแผ่รังสีซินโครตรอนปล่อยโฟตอนแบบไม่ต่อเนื่องกัน อิเล็กตรอนจึงมี quantum fluctuation เนื่องจากการปล่อยโฟตอนสามารถอธิบายด้วย**กระบวนการเฟ้นสุ่ม**(stochastic process) จึงเห็นได้ว่าการปลดปล่อยเป็นตัวกำหนดการแจกแจงพลังงานที่สมดุล, ความยาวของกลุ่มอิเล็กตรอน , รวมทั้งมิติตามแนวราบและแนวดิ่งของลำอิเล็กตรอน กระบวนการเฟ้นสุ่มทำให้การแจกแจงปริภูมิเฟส (phase space ; x , x′, y , y′) ของอิเล็กตรอน**ที่รูปแบบเกาส์เซียน** (Gaussian form) การแจกแจงปริภูมิเฟสเมื่อประสาน

กับลักษณะเฉพาะเชิงเรขาคณิตของการแผ่รังสีซินโครตรอนจะเป็นตัวกำหนดคุณสมบัติของแหล่งกำเนิดแสง โดยทั่วไป, มุม x' และ y' จะน้อยกว่ามุมกรวยของการแผ่เสมอ

ความกว้างของการแจกแจงอิเล็กตรอนแทนด้วย σ_x และ σ_y ส่วนขนาดเชิงมุมแทนด้วย σ'_x และ σ'_y ความกว้างแปรผันรอบ ๆ วงแหวนตามสมการ

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s)}$$

$$\sigma_y(s) = \sqrt{\varepsilon_y \beta_y(s)}$$

โดยที่ β_x และ β_y เป็น amplitude function หรือ**ฟังค์ชันแอมพลิจูด** ซึ่งกำหนด โดยคุณสมบัติการโฟกัสของแลตทิซแม่เหล็ก ε_x และ ε_y คือ**ความเปล่ง** (emittance) ของลำอิเล็กตรอนที่ไม่ขึ้นกับพิกัดแอซิมัท s. ความเปล่งนิยามว่าเป็นพื้นที่ในระนาบ $x - x'$ และในระนาบ $y - y'$ ที่แยกเป็นอิสระต่อกัน แต่ละส่วนเกี่ยวข้องกับเศษส่วนเฉพาะของอิเล็กตรอน ซึ่งเรียกว่า**ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**(standard deviation) ที่ตำแหน่งหนึ่งในแอซิมัทของวงโคจรซึ่ง $\beta'_x = 0$, พื้นที่ในปริภูมิเฟส $x - x'$ จะเป็นวงรีตั้งตรง (upright ellipse) ด้วยแกนในแนว x' และ $\sigma_x \sigma'_x = \varepsilon_x$ ในการย้ายไปสู่ตำแหน่งอื่นรอบ ๆ แอซิมัท, วงรีดังกล่าวจะยังคงพื้นที่ไว้เช่นเดิม แต่จะเอียงและเปลี่ยนสัดส่วน ดังนั้นลำอิเล็กตรอนรอบ ๆ วงโคจรจะแปรผันลักษณะเฉพาะเชิงเรขาคณิตในลักษณะแหล่งกำเนิดแสง การเบี่ยงเบนจากแนวในอุดมคติของสนามแม่เหล็ก เช่นการวางตำแหน่งแม่เหล็กไม่ถูกต้องหรือข้อผิดพลาดในการผลิตแม่เหล็กจะมีผลต่อลักษณะเฉพาะดังกล่าว เช่นอาจมีการคู่ควบโมดการแกว่งกวัดในแนวราบและแนวดิ่งทำให้เกิดแฟกเตอร์ที่จำกัดการขยายขอบเขตในแนวดิ่ง เป็นต้น

ความถี่หรือ tune, ν_x และ ν_y เป็นจำนวนการแกว่งกวัดบีตาตรอนในแนวราบและแนวดิ่งที่เกิดจากอิเล็กตรอนเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ ค่า ν เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญในการลดผลจากความไม่สมบูรณ์ของสนามแม่เหล็กให้มีค่าต่ำสุด ปรากฏการณ์การสั่นพ้อง (resonance) เป็นตัวกำหนดสมรรถนะของวงแหวนสะสม และ tune, ν_x, ν_y ช่วยเลี่ยงการสั่นพ้องนี้ และเราพบว่าค่าของ tunes ที่จะต้องเลี่ยงคือค่าที่เป็นจำนวนเต็ม (integer) และกึ่งจำนวนเต็ม

ฟังก์ชันการกระจาย (dispersion function), $\eta(s)$ ใช้วัด**สภาพไว** (sensitivity) ของตำแหน่งของวงโคจรที่สมดุลโดยมีการเบี่ยงเบนเล็กน้อยของโมเมนตัม Δp จากค่าในอุดมคติ p_o ถ้าลำอิเล็กตรอนมีสัดส่วนโมเมนตัม $\Delta p / p_o$ ดังนั้น ขนาดของลำเชิงรัศมีจึงเป็น $\left[\varepsilon_x \beta_x(s) + \left\{\eta(s)\frac{\Delta p}{p_o}\right\}^2\right]^{1/2}$

โดยสรุป, ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายทัศนศาสตร์ของลำอิเล็กตรอนมี 4 ชนิด คือ (1) ฟังก์ชันแอมพลิจูด $\beta_x(s)$, $\beta_y(s)$; (2) ความเปล่ง ε_x, ε_y ; (3) tunes ν_x, ν_y และ (4) ฟังก์ชันการกระจาย $\eta(s)$

นอกจากนี้ในการศึกษาสมการการเคลื่อนที่ของลำอิเล็กตรอนเรามักใช้**เมทริกซ์ถ่ายโอน** (transfer matrices) เพื่ออธิบายการเลื่อนตำแหน่งของแนววิถีของอิเล็กตรอนไปตามแนววงโคจร อิเล็กตรอนในระยะลอยเลื่อนที่เป็นอิสระต่อสนามแม่เหล็ก ถ้าที่จุดหนึ่งมีพิกัดเป็น x(o) และ $x'(o)$ แล้วต่อมาที่ระยะห่าง ℓ มีพิกัดเป็น $x(\ell) = x(o) + \ell x'(o)$ และ $x'(\ell) = x'(o)$ สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

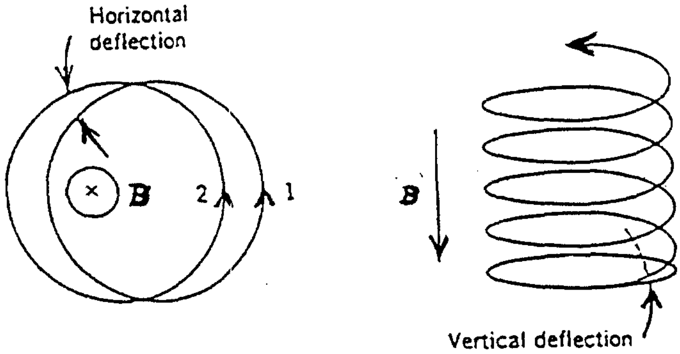
$$\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x(o) \\ x'(o) \end{pmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอน และสามารถใช้อธิบายทัศนศาสตร์ของโปรตอนอีกด้วย

4.2 เสถียรภาพของการแกว่งกวัดตามขวาง

. เราทราบว่า bending magnet ภายใน storage ring ทำให้ลำอิเล็กตรอนมีการหักเห และ quadrupole ทำหน้าที่โฟกัสลำอิเล็กตรอนให้อยู่ใกล้กันในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่หรือระนาบตามขวาง ถ้าแรงดึงกลับตามขวางมีลักษณะเชิงเส้นในพิกัดตามขวาง, ระดับขั้นความเสรีของแต่ละองค์ประกอบของระนาบตามขวางจะเป็นอิสระต่อกัน อย่างไรก็ตาม, ความถี่ในแต่ละองค์ประกอบที่ใกล้เคียงกันอาจคู่ควบกันได้

สมมติสนามแม่เหล็กเป็นสนามที่สม่ำเสมอ และอนุภาคเคลื่อนที่ไปตามวงโคจรในสนามนี้ สมมติต่อไปว่าอนุภาคได้รับแรงเบี่ยงเบนในระนาบที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก ดังแสดงในรูปที่ 4.4 (ก) วงโคจรจะเป็นวงกลมด้วยรัศมีเช่นเดิมแต่ด้วยจุดศูนย์กลางวงกลมที่แตกต่างกัน เราอาจกล่าวว่าวงโคจรที่มีการแกว่งกวัดที่เสถียรรอบๆ วงโคจรแรก แต่ถ้าหากแรงเบี่ยงเบนมีองค์ประกอบไปตามแนวสนามแม่เหล็ก, อนุภาคจะหมุนไปเป็นเกลียวโดยปราศจากลิมิต ดังรูป (ข) และจะไม่มีการโฟกัสในระดับขั้นความเสรีนี้



(ก) (ข)

รูปที่ 4.4 การเคลื่อนที่ของอนุภาคมีประจุในสนามแม่เหล็กเมื่อถูกรบกวนด้วยแรงเบี่ยงเบนที่ (ก) ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก, และ (ข) ขนานกับสนามแม่เหล็ก

ในเครื่องเร่งอนุภาคจะมีการออกแบบให้การโฟกัสของแม่เหล็กสี่ขั้วสลับกันไป ทำให้แรงดึงกลับบนอนุภาคที่เบี่ยงเบนไปจากแนววิถีที่ออกแบบไว้มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะทำได้ การโฟกัสเช่นนี้จึงเรียกว่า **strong focusing**

เมื่อไม่มีความหนาแน่นกระแส, เกรเดียนต์สนามที่ทำให้เกิดแรงดึงกลับทั้งสองแนวของระดับขั้นความเสรีตามขวางจึงไม่อาจเกิดขึ้น ดังนั้นเงื่อนไข $\nabla \times B = 0$ จึงทำให้

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \tag{4.1}$$

โดยที่ x และ y เป็นพิกัดตามขวาง สำหรับการกระจัด x, y ค่าน้อยๆ ที่ต่างไปจากแนววิถีที่เป็นวงกลม, สนามแม่เหล็กอาจเขียนได้เป็น

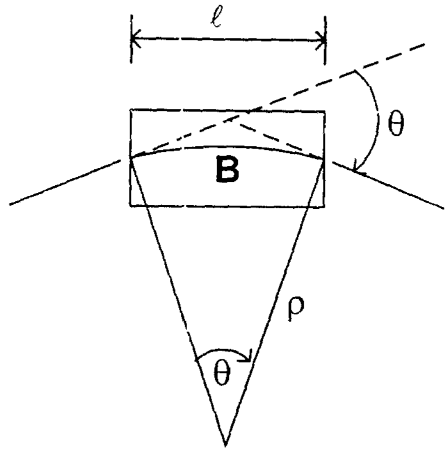
$$\mathbf{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y}$$

$$= \left[B_x(0,\ 0) + \frac{\partial B_x}{\partial y}y + \frac{\partial B_x}{\partial x}x\right]\hat{x} + \left[B_y(0,\ 0) + \frac{\partial B_y}{\partial x}x + \frac{\partial B_y}{\partial y}y\right]\hat{y} \tag{4.2}$$

โดยที่ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในแนว x และ y ตามลำดับ เทอมสุดท้ายในแต่ละองค์ประกอบ, $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ และ $\frac{\partial B_y}{\partial y}$, ทำให้เกิดแรงที่ตั้งฉากกับการกระจัดจึงไม่ทำให้เกิดแรงดึงกลับ สัมประสิทธิ์ $\frac{\partial B_x}{\partial y}$

จะเท่ากับ $\frac{\partial B_y}{\partial x}$ ตามสมการ (4.1) ดังนั้น แรงโลเร็นตซ์ จึงโฟกัสในพิกัดหนึ่งและถ่างแสง (defocus) ในอีกพิกัดหนึ่ง แม่เหล็กที่ทำหน้าที่โฟกัสเช่นนี้คือ quadrupole หรือแม่เหล็กสี่ขั้ว

ความยาวโฟกัสของแม่เหล็ก quadrupole **ซึ่งเปรียบเสมือนเลนส์บาง** (thin lens) **อาจหาได้ดังนี้** ถ้าอนุภาคมีประจุเคลื่อนที่เข้าหาแม่เหล็กด้วยระยะห่าง x จากแนวแกนแม่เหล็ก การประมาณเชิงเลนส์บางจะถือว่าความยาว ℓ ของแม่เหล็กสั้นพอที่จะทำให้การกระจัด x ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่ออนุภาคเคลื่อนเข้าหาแม่เหล็ก ดังนั้น สนามแม่เหล็กที่เกิดจากอนุภาค, $B_y = (\partial B_y / \partial x)x$, จึงมีค่าคงตัวตามแนววิถีของอนุภาค การประมาณเช่นนี้ทำให้มุมมีค่าเท่ากับความชันของวิถีอนุภาค, $x' \equiv dx/ds$



รูปที่ 4.5 การเบี่ยงเบนของอนุภาคโดยแท่งแม่เหล็กบาง

จากรูปที่ 4.5, ความชันของแนวอนุภาคจะเปลี่ยนไปด้วยปริมาณ

$$\Delta x' = -\frac{\ell}{\rho} = -\ell.\left(\frac{eB_y}{p}\right) = -\left(\frac{eB'\ell}{p}\right)x \qquad (4.3)$$

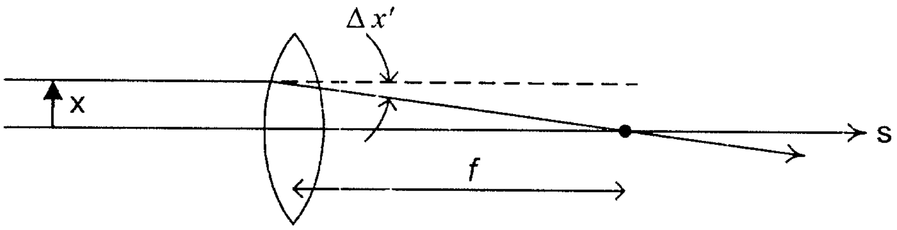
โดยที่ ρ เป็นรัศมีความโค้งของแนวอนุภาคที่ผ่านสนามแม่เหล็ก และ $B' \equiv \partial B_y / \partial x$ เป็นเกรเดียนต์ของแม่เหล็ก และ $1/\rho = eB_y / p$

เนื่องจากรังสีที่ขนานกับแกนเชิงแสงจะเบนเข้าหาจุดโฟกัสของเลนส์ดังแสดงในรูปที่ 4.6, การเปลี่ยนความชันจะเป็น $\Delta x' = -x/f$ โดยที่ f เป็นความยาวโฟกัสของเลนส์ กำหนดโดย

$$\frac{1}{f} = \frac{eB'\ell}{p} \qquad (4.4)$$

อัตราส่วนของโมเมนตัมต่อประจุ, p/e, ซึ่งมักเรียกว่า **สภาพแข็งเกร็งเชิงแม่เหล็ก** (magnetic rigidity) เขียนเป็น $(B\rho)$ และคำนวณได้จาก

$$(B\rho) = \frac{10}{2.9979} p_{(GeV/c)} \qquad \text{เทสลา-เมตร} \tag{4.5}$$



รูปที่ 4.6 รังสีขนานกับแกนของเลนส์นูนจะเบนเข้าหาจุดโฟกัสของเลนส์

ดังนั้น ความยาวโฟกัสจึงกำหนดจาก

$$\frac{1}{f} = \frac{B'\ell}{(B\rho)} \tag{4.6}$$

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าเลนส์จากแม่เหล็ก 4 ขั้ว จะโฟกัสในระนาบหนึ่งและถ่างแสงในอีกระนาบหนึ่ง เครื่องเร่งอนุภาคจึงไม่สามาถทำให้แม่เหล็กโฟกัสในระนาบหนึ่งเพียงเท่านั้น จากทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต (geometrical optics) เราทราบว่าการนำเลนส์นูนและเลนส์เว้าที่มีขนาดเท่ากันมาประกอบกันจะทำให้เกิดการโฟกัสรวมได้ สมการ (4.3) สำหรับเลนส์เว้าในรูปของเมทริกซ์ คือ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \tag{4.7}$$

สำหรับเลนส์นูน จะแตกต่างตรงที่ความยาวโฟกัสมีเครื่องหมายตรงกันข้าม และสำหรับที่ว่างระหว่างเลนส์ทั้งสอง ซึ่งยาว L คือ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \tag{4.8}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ที่สมนัยกับรังสีที่ผ่านเลนส์เว้าก่อน, ผ่านที่ว่างระหว่างเลนส์, แล้วจึงผ่านเลนส์นูน จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{L}{f} & L \\ -\frac{L}{f^2} & 1-\frac{L}{f} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

เมทริกซ์ที่ได้นี้เป็นของเลนส์บางโดยมีความยาวโฟกัสรวมคือ $f^2/L>0$ หากเราสลับที่เลนส์ทั้งสอง, ผลรวมจะยังคงโฟกัสเช่นเดิม ดังนั้น ระบบที่มีแม่เหล็ก 4 ขั้ว วางเรียงสลับกันโดยหลักการแล้วจะโฟกัสทั้งสองระดับขั้นความเสรีพร้อมกันได้

4.3 สมการการเคลื่อนที่

พิจารณาอนุภาคเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กด้วยเกรเดียนต์ $B' = \partial B_y/\partial x$ เป็นระยะ Δs จากสมการ (4.3) จะเห็นว่าความชันของแนววิถีอนุภาค, $x' = dx/ds$, เปลี่ยนไปด้วยปริมาณ $\Delta x' = -[B'\Delta s/(B\rho)]x$ ดังนั้น

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = -\frac{B'(s)}{(B\rho)}x \tag{4.10}$$

เมื่อ $\Delta s \to 0$, เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

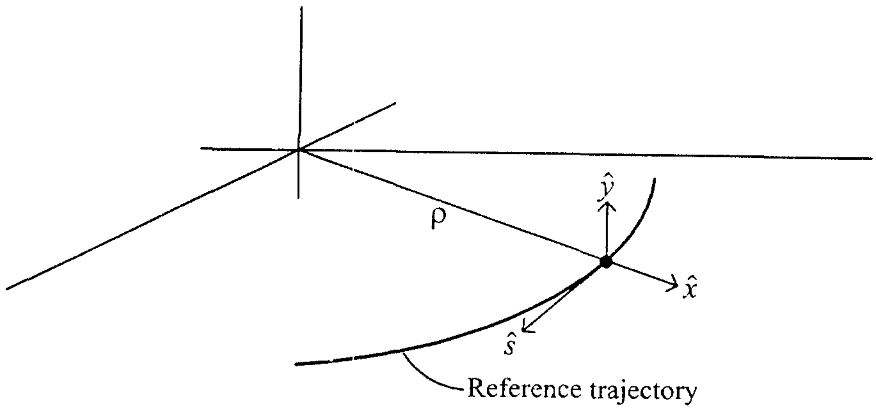
$$x'' + \frac{B'(s)}{(B\rho)}x = 0 \tag{4.11}$$

หากมีสนามแม่เหล็กบนแนววิถีดังเช่นใน bending magnet, สมการ (4.11) จะแสดงความแตกต่างระหว่างการเปลี่ยนความชันของอนุภาคในเครื่องเร่งและของอนุภาคในอุดมคติ

สมมติแนววิถีมีความโค้ง ρ ดังแสดงในรูปที่ 4.7 ความยาวตามแนวโค้งคือ s ซึ่งท้ายที่สุดจะเป็นตัวแปรอิสระ ที่จุดใดๆ ตามแนววิถี, เราสามารถกำหนดเวกเตอร์หน่วยเป็น $\hat{s}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$ ตำแหน่งของอนุภาคกำหนดด้วยเวกเตอร์ R เป็น

$$\mathbf{R} = r\hat{x} + y\hat{y} \tag{4.12}$$

โดยที่ $r \equiv \rho + x$ ในที่นี้เราสนใจเฉพาะการเบี่ยงเบน x และ y จากแนววิถี (reference orbit) ที่เราออกแบบไว้



รูปที่ 4.7 ระบบพิกัดสำหรับการหาสมการการเคลื่อนที่

สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาค เริ่มจาก

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{4.13}$$

และสมมติว่าองค์ประกอบของสนามแม่เหล็ก **B** มีแต่ในแนวรัศมี x และแนวดิ่ง y โดยไม่มีในแนว s เลย ดังนั้น

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{s} \\ v_x & v_y & v_s \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = -v_x B_y \hat{x} + v_s B_x \hat{y} + \left(v_x B_y - v_y B_x\right)\hat{s} \tag{4.14}$$

ถ้าเราไม่นับรังสีที่เกิดจากประจุที่มีความเร่ง ดังนั้น พลังงานและแฟกเตอร์ γ จึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงในสนามแม่เหล็กสถิต ซ้ายมือของสมการ (4.13) จึงกลายเป็น

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma m\dot{\mathbf{R}} = \gamma m\ddot{\mathbf{R}} \tag{4.15}$$

ดังนั้น

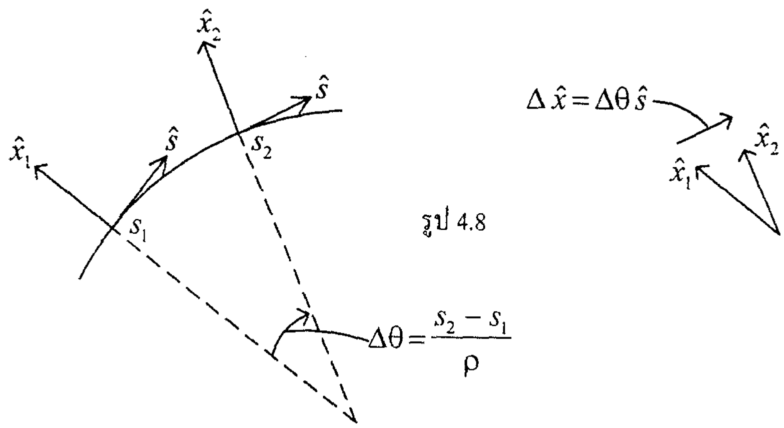
$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{e\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\gamma m} \tag{4.16}$$

เราจะต้องหา $\ddot{\mathbf{R}}$ ในพิกัดเหล่านี้ โดยเริ่มจาก

$$\mathbf{R} = r\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\hat{x}} + \dot{y}\hat{y}$$

เราต้องรวมเทอม $\dot{\hat{x}}$ เข้าไปด้วยเพราะถ้าหากมีการเคลื่อนที่ในทิศทาง s, เวกเตอร์หน่วย $\hat{x}$ จะมีอนุพันธ์



รูปที่ 4.8 อัตราการเปลี่ยนเวกเตอร์หน่วย $\hat{x}$

จากรูปที่ 4.8 จะเห็นว่า

$$\dot{\hat{x}} = \dot{\theta}\hat{s} \tag{4.17}$$

โดยที่ $\dot{\theta} \equiv v_s / r$ ดังนั้น

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{r}\hat{x} + r\dot{\theta}\hat{s} + \dot{y}\hat{y}$$

และ $$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{r}\hat{x} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{s} + r\dot{\theta}\dot{\hat{s}} + \ddot{y}\hat{y}$$

ปริมาณใหม่ที่เพิ่มเข้ามาคือ $\dot{\hat{s}}$ และด้วยวิธีการเช่นเดียวกับการหา $\dot{\hat{x}}$ เราจะได้

$$\dot{\hat{s}} = -\dot{\theta}\hat{x}$$

ดังนั้น

$$\ddot{\mathbf{R}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{x} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{s} + \ddot{y}\hat{y} \tag{4.18}$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ในทิศทาง $\hat{x}$ คือ

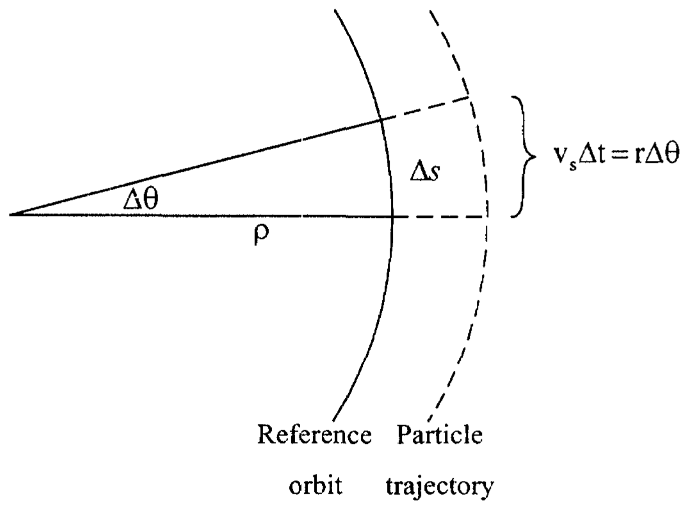
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{ev_sB_y}{\gamma m} = -\frac{ev_s^2B_y}{\gamma m v_s}$$

เนื่องจาก $v_x << v_s$ และ $v_y << v_s$ ดังนั้น โมเมนตัม $p \approx \gamma m v_s$ และ

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{ev_s^2B_y}{p}$$

เนื่องจาก s เป็นตัวแปรอิสระ, เราอาจใช้

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}$$



รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบความยาววงโคจร ds ของวงกลมอ้างอิงกับความยาววงโคจร $v_s dt$ ของอนุภาค

จากรูปที่ 4.9 จะเห็นว่า

$$ds = \rho d\theta = v_s dt \frac{\rho}{r}$$

สมมติว่า $d^2s/dt^2 = 0$, ดังนั้น

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} = \left(v_s \frac{\rho}{r}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2}$$

แทนค่า r ด้วย $\rho + x$, สมการการเคลื่อนที่จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = -\frac{B_y}{(B\rho)}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \tag{4.19}$$

โดยที่ $(B\rho) = p/e$ สมการการเคลื่อนที่ในแนวแกน y หาได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{B_x}{(B\rho)}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \tag{4.20}$$

โดยทั่วไปสมการเหล่านี้จะไม่เชิงเส้น (nonlinear) แต่ถ้าเราจำกัดว่าสนามเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x และ y และเก็บเทอมอันดับต่ำสุดเท่านั้นไว้ โดยถือให้เทอมอันดับสูงๆ เป็นเพอร์เทอร์เบชันของการเคลื่อนที่เชิงเส้น ดังนั้น

$$B_x = B_x(0, 0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} x \tag{4.21}$$

$$B_y = B_y(0, 0) + \frac{\partial B_y}{\partial y} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y \tag{4.22}$$

เนื่องจากเรากำลังพิจารณาความเร่งในแนวระนาบ, $B_x(0, 0) = 0$ และเราไม่ต้องการให้การเคลื่อนที่ควบคู่ไปกับการออกแบบ เราจึงสมมติให้ $\partial B_y / \partial y$ และ $\partial B_x / \partial x$ เป็นศูนย์ สมการการเคลื่อนที่จึงกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{(B\rho)}\frac{\partial B_y(s)}{\partial x}\right]x = 0 \tag{4.23}$$

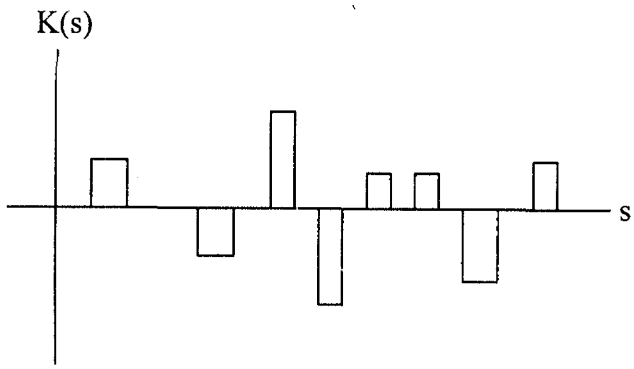
$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{(B\rho)}\frac{\partial B_y(s)}{\partial x} = 0 \tag{4.24}$$

โดยใช้เงื่อนไขตามสมการ (4.1) สำหรับการกำจัด B_x

สมการเหล่านี้มีรูปแบบคล้ายกับสมการ (4.11) โดยที่สมการสำหรับ x จะมีเทอม "สู่ศูนย์กลาง" เข้ามาด้วย สำหรับเครื่องเร่งอนุภาคขนาดใหญ่, เทอมสู่ศูนย์กลางจะมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับเทอมเกรเดียนต์ สมการการเคลื่อนที่จึงมีรูปแบบเป็น

$$x'' + K(s)x = 0 \tag{4.25}$$

ซึ่งแตกต่างจากสมการของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกอย่างง่ายตรงที่เทอม K เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง s เท่านั้น K(s) เป็นสัดส่วนกับสนามแม่เหล็กสี่ขั้ว เนื่องจากมีชุดของแม่เหล็กที่เรียกว่าแลตทิซวางอยู่ในวงแหวนสะสม, ค่าของ K(s) จึงแปรเปลี่ยนตามตำแหน่งและมักจะมีค่าคงตัวภายในแต่ละองค์ประกอบของเครื่องเร่งดังแสดงในรูปที่ 4.10



รูปที่ 4.10 การเปลี่ยนตามตำแหน่งของค่า K(s)

ค่าของ K(s) อาจพิจารณาได้ 3 กรณี คือ $K = 0$, $K < 0$, และ $K > 0$ เราอาจอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคได้ในลักษณะเดียวกับทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตของแสงผ่านเลนส์ตามที่ได้กล่าวแล้วในตอนต้นโดยใช้ 2 x 2 เมทริกซ์

สำหรับ K = 0, ซึ่งเป็นกรณีเดียวกับช่องว่าง L ระหว่างเลนส์ คือ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \tag{4.26}$$

ในระนาบดิ่ง y, สิ่งนี้จะสมนัยกับที่ว่างระหว่างแม่เหล็กหรือสมนัยกับการกระจายผ่านแม่เหล็กด้วยค่า B_y คงตัว ในระนาบแนวราบ x, จะสมนัยกับที่ว่างแม่เหล็กหรือสมนัยกับเทอมสู่ศูนย์กลาง $\left(1/\rho^2\right)$ ที่เกิดคู่กับเกรเดียนต์สนามพอดี ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่ธรรมดา แต่โดยทั่วไปรัศมีความโค้งของเครื่องเร่งมักมีค่ามากจนเทอมสู่ศูนย์กลางอาจตัดทิ้งได้

สำหรับ K > 0 ตลอดระยะทาง ℓ, สมการการเคลื่อนที่จะเป็นของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก และผลเฉลยในรูปแบบเมทริกซ์คือ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{K}\ell\right) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}\ell\right) \\ -\sqrt{K}\sin\left(\sqrt{K}\ell\right) & \cos\left(\sqrt{K}\ell\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \tag{4.27}$$

และสำหรับ K < 0, ผลเฉลยคือ

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{|K|}\ell\right) & \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\sqrt{|K|}\ell\right) \\ \sqrt{|K|}\sinh\left(\sqrt{|K|}\ell\right) & \cosh\left(\sqrt{|K|}\ell\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \tag{4.28}$$

สมการ (4.25) มีคุณสมบัติที่ว่าแม้ K จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ s, แต่เครื่องเร่งอนุภาคมักทำให้ K มีลักษณะเป็นคาบ หรือ

$$K(s + C) = K(s) \tag{4.29}$$

ระยะซ้ำ, C, มักเป็นเส้นรอบวงกลม นักคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 19 ชื่อ Hill ได้แสดงให้เห็นว่าผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ซึ่งมีรูปแบบที่เรียกว่า **Hill's equation** จะมีรูปแบบ

$$x = Aw(s)\cos\left[\psi(s) + \delta\right] \tag{4.30}$$

โดยที่ A และ δ เป็นค่าคงตัวของการอินทิเกรตที่ขึ้นกับเงื่อนไขเบื้องต้น w(s) สามารถกำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบด้วยคาบ C

สำหรับ K ที่คงตัวและเป็นบวกเสมอ, เราอาจเขียน

$$x = A\cos[\psi(s) + \delta] \tag{4.31}$$

ด้วยค่า $\psi = \sqrt{K}s$ เมื่อ K มีลักษณะเป็นคาบของตำแหน่ง, ผลเฉลยจะแตกต่างจากผลเฉลยของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกโดยแฟกเตอร์ที่แสดงการเปลี่ยนแอมพลิจูดตามปริภูมิและเฟสที่ไม่เชิงเส้นกับ s อีกต่อไป

สิ่งที่เราต้องหาต่อไปก็คือ w(s) และ $\psi(s)$ แทนค่าผลเฉลยทั่วไป (4.30) ลงในสมการ (4.25) จะได้

$$x'' + Kx = A(2w'\psi' + w\psi'')\sin(\psi + \delta)\, A\left(w'' - w\psi'^2 + Kw\right)\cos(\psi + \delta)$$

$$= 0 \tag{4.32}$$

เนื่องจากเราต้องการให้ฟังก์ชัน w และ ψ เป็นอิสระต่อ δ ที่ขึ้นกับลักษณะการเคลื่อนที่, เราจึงกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของไซน์และโคไซน์เป็นศูนย์แยกจากกัน เมื่อคูณเทอมของไซน์ด้วย w จะได้

$$2ww'\psi' + w^2\psi'' = \left(w^2\psi'\right)' = 0$$

หรือ

$$\psi' = \frac{k}{w(s)^2} \tag{4.33}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการอินทิเกรต เมื่อใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง ψ และ w นี้จะทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอมโคไซน์เขียนในรูปของสมการ

$$w^3(w'' + Kw) = k^2 \tag{4.34}$$

ความจริง w(s) ไม่จำเป็นต้องเป็นคาบแต่เป็นเพียงผลเฉลยของสมการ (4.34) เท่านั้น แต่เนื่องจากอนุภาคเคลื่อนที่เป็นคาบภายในเครื่องเร่งเราจึงเลือกให้มันเป็นคาบ

ถ้าเราเขียนสมการ (4.31) เสียใหม่เป็น

$$x = w(s)\left(A_1 \cos\psi + A_2 \sin\psi\right) \tag{4.35}$$

และ

$$x' = \left(A_1 w' + \frac{A_2 k}{w}\right)\cos\psi + \left(A_2 w' - \frac{A_1 k}{w}\right)\sin\psi \tag{4.36}$$

ดังนั้น สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น x_o, x'_o ที่ $s = s_o$, เราจะได้ค่าคงตัว A_1 และ A_2 เป็น

$$A_1 = \frac{x_o}{w}$$

$$A_2 = \frac{x'_o w - x_o w'}{k} \tag{4.37}$$

เนื่องจาก w เป็นคาบตลอดระยะทาง C, เราอาจเขียนเมทริกซ์สำหรับการกระจายจาก s_o ไป $s_o + C$ เป็น

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_o+C} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi_C - \dfrac{ww'}{k}\sin\Delta\psi_C & \dfrac{w^2}{k}\sin\Delta\psi_C \\ \dfrac{-1+(ww'/k)^2}{w^2/k}\sin\Delta\psi_C & \cos\Delta\psi_C + \dfrac{ww'}{k}\sin\Delta\psi_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_o} \tag{4.38}$$

เฟสของการแกว่งกวัดของอนุภาคจะซ้ำเดิมเป็นคาบด้วยปริมาณ

$$\psi(s_o \to s_o + C) \equiv \Delta\psi_C = \int_{s_o}^{s_o+C} \frac{k\,ds}{w^2(s)} \tag{4.39}$$

เนื่องจาก $w^2(s)$ และอนุพันธ์ของมันเป็นปริมาณหลักมูลที่มีมาตราส่วนของค่าคงตัวใดๆ k จึงมักกำหนดพารามิเตอร์ที่เรียกว่า **Courant-Snyder parameters** แทนด้วย α, β และ γ ดังนี้

$$\beta(s) \equiv \frac{w^2(s)}{k}$$

$$\alpha(s) \equiv -\frac{1}{2}\frac{d\beta(s)}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{w^2(s)}{k}\right)$$

$$\gamma \equiv \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

สมการ (4.38) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_o+C} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi_C + \alpha\sin\Delta\psi_C & \beta\sin\Delta\psi_C \\ -\gamma\sin\Delta\psi_C & \cos\Delta\psi_C - \alpha\sin\Delta\psi_C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_o} \tag{4.40}$$

และเฟสตามสมการ (4.39) เขียนได้เป็น

$$\Delta\psi_C = \int_{s_o}^{s_o+C} \frac{ds}{\beta(s)} \tag{4.41}$$

$\beta(s)$ อาจถือได้ว่าเป็นความยาวคลื่นของการแกว่งกวัดหารด้วย 2π และมักเรียกว่า **amplitude function** หรือ **ฟังก์ชันแอมพลิจูด**

ผลเฉลยทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่สามารถเขียนได้เป็น

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) + \delta] \tag{4.42}$$

โดยที่ค่าคงตัว k ปรากฏอยู่ในค่าคงตัว A แล้ว จากสมการ (4.34), ฟังก์ชันแอมพลิจูด $\beta(s)$ จะต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4\beta^2K = 4$$

ซึ่งเขียนในเทอมของ Courant-Snyder parameters เป็น

$$K\beta = \gamma + \alpha' \tag{4.43}$$

สมการ (4.40) มักเขียนในรูปแบบที่กระชับเป็น

$$M = I\cos\Delta\psi_C + J\sin\Delta\psi_C \tag{4.44}$$

โดยที่

$$J \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

และ $J^2 = -I$ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และในบางครั้งสมการ (4.44) อาจเขียนให้กระชับขึ้นไปอีกเป็น

$$M = e^{J\Delta\psi_C} \tag{4.46}$$

การหาค่า Courant-Snyder parameters อาจกระทำได้โดยเปรียบเทียบการกำหนดเมทริกซ์ทั้ง 2 วิธี ในแต่ละคาบ สมมติว่าคูณทุกแต่ละเมทริกซ์ของคาบที่ซ้ำเดิมได้

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

เมื่อเข้าสมการของ M ทั้งสองแบบคือ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi_C + \alpha\sin\Delta\psi_C & \beta\sin\Delta\psi_C \\ -\gamma\sin\Delta\psi_C & \cos\Delta\psi_C - \alpha\sin\Delta\psi_C \end{pmatrix}$$

ดังนั้น

$$\cos\Delta\psi_C = \frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}\mathrm{TrM} \tag{4.48}$$

เมื่อเราทราบค่า $\cos\Delta\psi_C$ เราจะทราบแต่ขนาดของ $\sin\Delta\psi_C$ แต่ไม่ทราบเครื่องหมายแต่เราทราบว่า β ต้องมีค่าเป็นบวก ดังนั้น เครื่องหมายของ $\sin\Delta\psi_C$ จึงเป็นเครื่องหมายของสมาชิกเมทริกซ์ b ดังนั้น

$$\beta = \frac{b}{\sin \Delta\psi_C} \tag{4.49}$$

และเมื่อลบด้วยสมาชิกทแยงมุม (diagonal elements)

$$\alpha = \frac{a - d}{2\sin \Delta\psi_C} \tag{4.50}$$

เราจึงได้ Courant-Snyder parameters ที่จุดหนึ่งของแลตทิซที่เป็นคาบแต่ขั้นตอนเดิมยังเกิดขึ้นระหว่างคู่ที่สมนัยกันในแลตทิซ เราจึงหา $\beta(s)$ ได้ทุกส่วนของ s การเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_2} = M(s_1 \rightarrow s_2)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_1} \tag{4.51}$$

เมทริกซ์ $M(s_1 \rightarrow s_2)$ เขียนในเทอมของฟังก์ชันแอมพลิจูดผ่านสมการ (4.35) และ (4.36) สมมติ x_1 และ x_1' เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นที่ $s = s_1$ ดังนั้น ค่าคงตัว A_1 และ A_2 จะเป็น

$$A_1 = \frac{x_1}{w_1} \tag{4.52}$$

$$A_2 = \frac{x_1' w_1 - x_1 w_1'}{k} \tag{4.53}$$

แทนค่า A_1 และ A_2 นี้ลงในสมการ (4.35) และ (4.36) แล้วเขียนใหม่ในเทอมของฟังก์ชันแอมพลิจูด, เมทริกซ์ $M(s_1 \rightarrow s_2)$ อาจเขียนได้เป็น

$$\begin{pmatrix} (\beta_2/\beta_1)^{1/2}(\cos\Delta\psi + \alpha_1 \sin\Delta\psi) & (\beta_1\beta_2)^{1/2}\sin\Delta\psi \\ -\dfrac{1 + \alpha_1\alpha_2}{(\beta_1\beta_2)^{1/2}}\sin\Delta\psi + \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{(\beta_1\beta_2)^{1/2}}\cos\Delta\psi & (\beta_1/\beta_2)^{1/2}(\cos\Delta\psi - \alpha_2 \sin\Delta\psi) \end{pmatrix} \tag{4.54}$$

$\Delta\psi$ ในที่นี้เป็นเฟสจาก s_1 ไปยัง s_2 เฟสระหว่างสองจุดใดๆ สามารถกำหนดได้อย่างเดียวจากสมการ

$$\Delta\psi(s_1 \to s_2) = \int_{s_2}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)} \tag{4.55}$$

สำหรับเครื่องเร่งแบบวงกลม, จำนวนการแกว่งกวัดต่อรอบคือ

$$\nu \equiv \frac{1}{2\pi}\oint \frac{ds}{\beta(s)} \tag{4.56}$$

เรียกว่า **"tune"** ของเครื่องเร่ง เนื่องจาก β ถือว่าเป็นความยาวคลื่นของการแกว่งกวัดหารด้วย 2π เราจึงหามาตราส่วนของ β ได้ และเนื่องจากการแกว่งกวัดจริงของอนุภาคอาจมีแอมพลิจูดน้อยระดับมิลลิเมตร ดังนั้น ฟังก์ชันแอมพลิจูด β จึงควรกำหนดเชิงตัวเลขของมาตราส่วนของคาบ รวมทั้งค่าของ A ซึ่งอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคด้วย A มีหน่วยวัดเป็น (ความยาว)$^{1/2}$ และ β มีหน่วยวัดเป็นความยาว

ผลเฉลยตามสมการ (4.42) ของสมการการเคลื่อนที่แสดงชัดเจนว่าเป็นการเคลื่อนที่แบบเสถียร ผลเฉลยต้องอธิบายการเคลื่อนที่ไม่เสถียรได้ด้วย ซึ่งจะศึกษาได้จากการเปลี่ยนแปลงของ β และ $\Delta\psi$ สำหรับแลตทิซที่ไม่เสถียร

tune มีบทบาทสำคัญต่อเสถียรภาพของการเคลื่อนที่ ค่าของมันอยู่ในอันดับขนาด 5-15 หน่วย ในแหล่งกำเนิดแสง UV และ soft x-ray สำหรับเครื่องเร่งที่ให้แสง hard x-ray เช่น ESRF, ค่าของ tune จะประมาณ 36.2 ในแนวราบและ 11.2 ในแนวดิ่ง

4.4 ความเปล่งและความนำเชิงซ้อน

ผลเฉลยทั่วไปสำหรับการแกว่งกวัดบีตาตรอนตามสมการ (4.42) คือ

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos[\psi(s) + \delta] \tag{4.57}$$

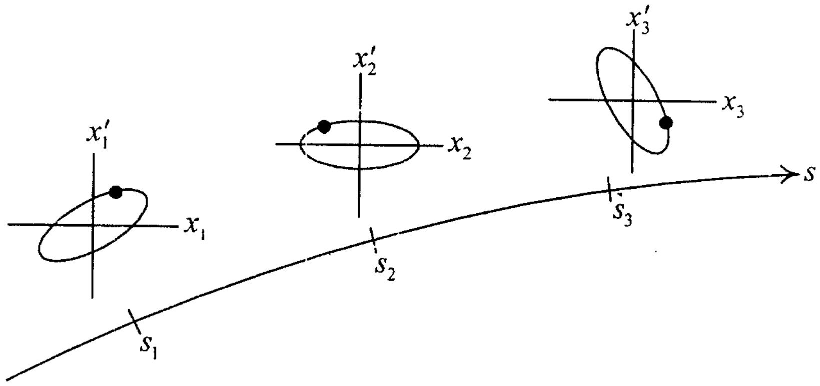
ค่าคงตัว A สามารถกำหนดในเทอมของ x และ x' โดยการกำจัดฟังก์ชันตรีโกณมิติจากการรวม

$$\alpha(s)x(s) + \beta(s)x'(s) = -A\sqrt{\beta(s)}\sin[\psi(s) + \delta] \tag{4.58}$$

แล้วยกกำลังสอง ต่อจากนั้นนำสมการ (4.57) และ (4.58) มารวมกันจะได้

$$A^2 = \gamma(s)x^2 + 2\alpha(s)xx' + \beta(s)x'^2 \tag{4.59}$$

ซึ่งเรียกว่า **"Courant-Snyder invariant"** และอุปมากับพลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกที่จุดใดๆ ในเครื่องเร่งอนุภาค, รูปแบบของการยืนยง (invariant) อธิบายด้วยวงรี (ellipse) ดังแสดงในรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 ปริภูมิเฟสของวงรีตามแนววิถีของอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม

สำหรับตำแหน่งที่ต่างกัน, วงรีจะมีรูปร่างและทิศทางที่แตกต่างกัน แต่มีค่า A ที่เหมือนกันซึ่งหมายถึงมีพื้นที่เท่ากัน เมื่อเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของวงรีคือ

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \tag{4.60}$$

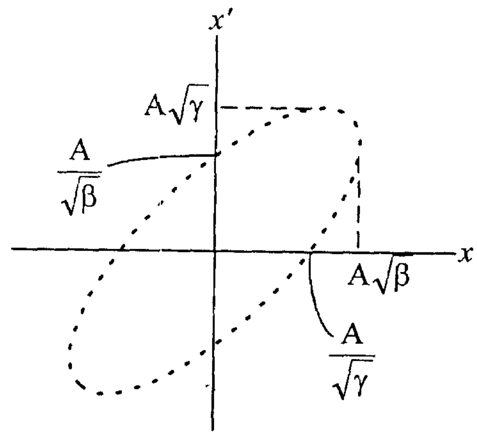
พื้นที่ของวงรีคือ $\pi d / \sqrt{ac - b^2}$ ดังนั้นพื้นที่ของสมการ (4.59) คือ

$$\frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 \tag{4.61}$$

พิกัด x, x′ นิยามปริภูมิเฟสสำหรับการเคลื่อนที่ที่เรากำลังพิจารณา และพื้นที่ในปริภูมิเฟสนี้จะคงตัว

ความนำเชิงซ้อน (admittance) เป็นพื้นที่ในปริภูมิเฟสที่เกี่ยวข้องกับวงรีที่ใหญ่ที่สุดที่เครื่องเร่งจะรับได้ เราอาจหาค่าความนำเชิงซ้อนได้ดังนี้: ที่จุดใดๆ ในเครื่องเร่ง, ค่าสูงสุดของ x คือ $A\sqrt{\beta}$ ถ้าครึ่งหนึ่งของช่อง (aperture) ที่เตรียมไว้สำหรับอิเล็กตรอนคือ a(s) ดังนั้นที่บริเวณใดๆ จะมีค่าต่ำสุดใน $a(s)/\sqrt{\beta(s)}$ ดังนั้นความนำเชิงซ้อนจะเป็น $\left(\pi a^2/\beta\right)_{min}$ ค่าต่ำสุดใน $a/\sqrt{\beta}$ จะเกิดขึ้นที่ค่าสูงสุดของฟังก์ชันแอมพลิจูด, β_{max} ดังนั้น

$$\text{admittance} = \frac{\pi a^2}{\beta_{max}} \tag{4.62}$$



รูปที่ 4.12 ประกอบการหาค่าความนำเชิงซ้อน

พื้นที่ในปริภูมิเฟสที่ครอบครองโดยลำอิเล็กตรอนเรียกว่า **ความเปล่ง** (emittance) และมักแทนด้วยสัญลักษณ์ ε ซึ่งไม่ขึ้นกับพิกัด s ความเปล่งเป็นพื้นที่ในระนาบ x – x′ ที่เป็นอิสระต่อระนาบ y – y′ ถ้าลำอิเล็กตรอนมีความเปล่ง ε, ดังนั้น พื้นที่ในปริภูมิเฟสจะถูกจำกัดขอบเขต (bounded) ด้วยเส้นโค้งของวงรี คือ

$$\frac{\varepsilon}{\pi} = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \tag{4.63}$$

ในการศึกษาความเปล่งของลำอิเล็กตรอนมักจะพิจารณาความเปล่งที่เกิดจากการแจกแจงอนุภาคในเทอมของรากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square) ของขนาดตามขวางของลำอิเล็กตรอน โดยทั่วไปการแจกแจงอนุภาคในซินโครตรอนจะเป็นไปตามการแจกแจงแบบเกาส์เซียน (Gaussian distribution) ซึ่งใช้ได้กับลำโปรตอนด้วย

สมมติการแจกแจงในพิกัดตามขวาง x ของอนุภาคเดี่ยวกำหนดด้วยฟังก์ชันความหนาแน่น n(x) โดย

$$n(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \tag{4.64}$$

โดยที่ σ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) สมมติว่าการแจกแจงที่ตำแหน่ง s หนึ่งมีลักษณะนิ่ง (stationary) นั่นคือ ลำอิเล็กตรอนมีสมดุลและไม่อาจแยกความแตกต่างได้จากรอบสู่รอบ เนื่องจากแนววิถีในปริภูมิเฟสของ $x - (\alpha x + \beta x')$ เป็นวงกลมซึ่งสังเกตุได้จากสมการ (4.57) และ (4.58) ดังนั้นการสมดุลเช่นนี้ทำให้การแจกแจงในพิกัด $\alpha x + \beta x'$ มีลักษณะ

เกาส์เซียนด้วยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ การกระจายบนวงกลมจึงหมุนไปด้วยมุมที่สมนัยกับเฟสที่เลื่อนไปจากรอบสู่รอบ ดังนั้น การแจกแจงที่สมดุลจึงเป็นอิสระต่อตำแหน่งตามแนววงกลมและขึ้นกับรัศมีของวงกลมเท่านั้น ปริภูมิเฟสสองมิติสำหรับการแจกแจงในพิกัดเหล่านี้จึงเป็น

$$n(x, \alpha x + \beta x')dxd(\alpha x + \beta x')$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left[x^2 - (\alpha x + \beta x')^2\right]/(2\sigma)^2} dxd(\alpha x + \beta x') \qquad (4.65)$$

ในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ซึ่งพิกัดรัศมีกำหนดโดย

$$r^2 = x^2 + (\alpha x + \beta x')^2 \qquad (4.66)$$

การแจกแจงในสมการ (4.65) จะกลายเป็น

$$n(r, \theta)rdrd\theta = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} rdrd\theta \qquad (4.67)$$

ถ้า a เป็นรัศมีซึ่งบรรจุเศษส่วน F ของอนุภาคเอาไว้ ดังนั้น

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} n(r, \theta)rdrd\theta = \int_0^{a} \frac{e^{-r^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} rdr \qquad (4.68)$$

เมื่อแก้สมการหา a จะได้

$$a^2 = -2\sigma^2 \ell n(1 - F) \qquad (4.69)$$

สมการ (4.63) เมื่อคูณด้วย β จะได้

$$\frac{\beta\varepsilon}{\pi} = x^2 + (\alpha x + \beta x')^2 \qquad (4.70)$$

ถ้าความเปล่งเป็นพื้นที่ในปริภูมิเฟส $x - x'$ ที่บรรจุเศษส่วน F ของอนุภาค ดังนั้น $\beta\varepsilon / \pi = a^2$ และ

$$\pi a^2 = \beta\varepsilon = -2\pi\sigma^2 \ell n(1-F)$$

หรือ
$$\varepsilon = -\frac{2\pi\sigma^2}{\beta}\ell n(1-F) \qquad (4.71)$$

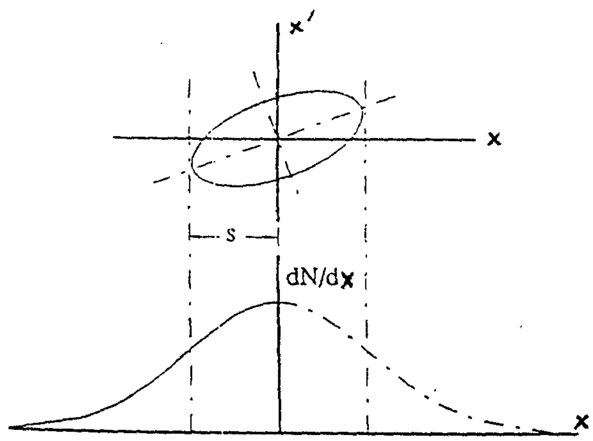
สมการ (4.71) ให้พื้นที่ในปริภูมิเฟส x-x' ซึ่งบรรจุเศษส่วน F ของลำเกาส์เซียนด้วยขนาดตามขวาง σ ที่จุดในแลตทิซที่มีฟังก์ชันแอมพลิจูด β บางกรณีอาจกำหนดเศษส่วน F ที่แตกต่างจากนี้ก็ได้ แต่ที่นิยมใช้กันคือการกำหนดสมการที่ให้ค่าการกระจัดสูงสุด และมุมทั่วทุกแห่งภายในวงแหวน คือ

$$x_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon\beta_{max}}{\pi}} \qquad (4.72)$$

และ
$$x'_{max} = \sqrt{\frac{\varepsilon\gamma_{max}}{\pi}} \qquad (4.73)$$

จำนวนอนุภาคทั้งหมดที่ถูกบรรจุภายในการกระจัดสูงสุดนี้ขึ้นอยู่กับการเลือกเศษส่วน F ดังกล่าวแล้ว

ทุกอนุภาคในลำอิเล็กตรอนซึ่งอาจมีจำนวน 10^{10} ถึง 10^{13} ตัว จะเคลื่อนที่บนวงรีที่คล้าย ๆ กันในปริภูมิเฟส ส่วนใหญ่จะมีค่า ε ต่ำและมักจะอยู่ใกล้วงโคจรอ้างอิงเสมอ และอนุภาคจำนวนน้อยลงตามลำดับสำหรับค่า ε ที่เพิ่มขึ้น ดังนั้นการแจกแจงจึงเป็นแบบเกาส์เซียน ดังแสดงในรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 ความเปล่งของลำอิเล็กตรอน

ผลเฉลยทั่วไปตามสมการ (4.57) จึงอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$x(s) = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s)} \cos\left[\psi_x(s) + \delta_x\right] \tag{4.74}$$

และในแนวดิ่งคือ

$$y(s) = \sqrt{\varepsilon_y \beta_y(s)} \cos\left[\psi_y(s) + \delta_y\right] \tag{4.75}$$

เฟส $\Psi_{x,y}$ เป็นฟังก์ชันของระยะ s ไปตามวงโคจรปิด และด้วยเฟสเริ่มต้น δ_x และ δ_y ค่าของเฟสกำหนดจาก

$$\psi_{x,y} = \int_0^s \frac{ds}{\beta_{x,y}(s)} \tag{4.76}$$

แอมพลิจูดสูงสุดของการแกว่งกวัดที่ตำแหน่ง s ใด ๆ คือ

$$\begin{aligned} x_{max}(s) &= \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s)} \\ y_{max}(s) &= \sqrt{\varepsilon_y \beta_y(s)} \end{aligned} \tag{4.77}$$

และในทำนองเดียวกัน, มุมสูงสุดของการแกว่งกวัดที่ตำแหน่ง s ใด ๆ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} x'_{max}(s) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x(s)}} \\ y'_{max}(s) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y(s)}} \end{aligned} \tag{4.78}$$

ฟังก์ชัน $\beta(s)$ เป็นคาบใน s และเป็นไปตามความเป็นคาบของแลตทิซ และเมื่อนำมารวมกับค่าคงตัว $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ก็จะเป็นตัวกำหนดแอมพลิจูดสูงสุดของการแกว่งกวัดบีตาตรอน หน่วยของ $\varepsilon_{x,y}$ คือ เมตร-เรเดียน, และหน่วยของฟังก์ชัน β คือ เมตร/เรเดียน

ดังได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นว่าพื้นที่รูปวงรีของความเปล่งจะมีรูปร่างและการวางทิศทางที่เปลี่ยนแปลงไปตาม s โดยทั่วไปถ้าอนุภาคเคลื่อนที่โดยไม่มีการเร่งแล้ว $\varepsilon_{x,y}$ จะคงตัวซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทลีอูวิลล์ (Liouville's theorem) แต่ตามความเป็นจริงแล้วค่าคงตัวดังกล่าวจะถูกรบกวนโดยการแผ่รังสีและความเร่งจึงจำเป็นต้องใช้แนวคิดเชิงสถิติเข้ามาพิจารณาด้วย

ในวงแหวนสะสม การแจกแจงแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดบีตาตรอนจะมีรูปแบบเกาส์เซียน จึงต้องนิยามความเปล่งของลำอิเล็กตรอนให้เป็นค่าของ $\varepsilon_{x,y}$ ที่คงตัวและสัมพันธ์กับส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงแอมพลิจูดและมุมไดเวอร์เจนซ์ ความสัมพันธ์ดังกล่าวกำหนดจากสมการ (4.77) และ (4.78) คือ

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\varepsilon_x\beta_x} \\ \sigma_y &= \sqrt{\varepsilon_y\beta_y} \end{aligned}\right\} \qquad (4.79)$$

และ

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_x &= \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x}} \\ \sigma'_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.80)$$

โดยที่ $\sigma_{x,y}$ และ $\sigma'_{x,y}$ เป็นการแจกแจงส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตำแหน่ง และมุมตามลำดับ

4.5 การหน่วงของการแกว่งกวัดบีตาตรอน

การหาค่าความเปล่งที่กล่าวมาแล้วอยู่ภายใต้การเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งมีโมเมนตัมรวมคงตัว แต่เราทราบว่าอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมในวงแหวนสะสม จะแผ่รังสีซินโครตรอนออกมาทำให้พลังงานลดลงซึ่งหมายถึงโมเมนตัมลดลงหรือเปลี่ยนไปด้วย ความเปล่งของลำอิเล็กตรอนจึงจำเป็นต้องแก้ไขปรับปรุงเล็กน้อย

เราจะเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่สำหรับอนุภาคมีประจุในสนามแม่เหล็กที่มีรูปแบบ $B_y = B'x$:

$$\frac{d}{dt}(px') = (e\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = -ev_s B_y = -evB'x$$

ดังนั้น
$$v\frac{d}{ds}(px') = v(px'' + p'x') = -evB'x$$

หรือ
$$x'' + \frac{p'}{p}x' + \frac{eB'}{p}x = 0 \tag{4.81}$$

ซึ่งเป็น Hill's equation ที่เพิ่มเทอมการหน่วง (damping term) เข้ามา

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (4.81) มีรูปแบบ $x = uv$ ดังนั้น เมื่อแทนค่าลงในสมการ (4.81) จะได้

$$vu'' + \left(2v' + \frac{p'}{p}v\right)u' + \left(v'' + \frac{p'}{p}v' + \frac{eB'}{p}v\right)u = 0 \tag{4.82}$$

ต่อไปเราเลือกฟังก์ชัน v เพื่อทำให้เทอมของ u' เป็นศูนย์ นั่นคือ $2v'/v = -p'/p$ ซึ่งหมายถึง v จะมีรูปแบบเป็น

$$v = v_o\left(\frac{p_o}{p}\right)^{1/2} \tag{4.83}$$

เนื่องจากโมเมนตัมเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ, เทอม v'' และ $p'v'$ อาจตัดทิ้งได้ เพื่อให้เห็นชัดยิ่งขึ้น, พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ u ในสมการ (4.82) ด้วยรูปแบบของ v ตามสมการ (4.83), สัมประสิทธิ์ของ u จึงเป็น

$$v_o\left(\frac{p_o}{p}\right)^{1/2}\left[\frac{eB'}{p} - \frac{1}{4}\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{p''}{p}\right]$$

เนื่องจาก p เปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ, p'' จึงอาจตัดทิ้งได้เมื่อเทียบกับเทอม p'^2 ส่วนเทอมที่สองคือ

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^2 = \left(\frac{\Delta p}{2\pi R}\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2 R^2}\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2$$

โดยที่ Δp เป็นโมเมนตัมที่เพิ่มขึ้นต่อการผ่านสถานีเครื่องเร่ง และมีค่าน้อยมากๆ เมื่อเทียบกับ p และเนื่องจากเทอมนี้มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมสู่ศูนย์กลาง $\sim 1/\rho^2$ ซึ่งเราเคยตัดทิ้งไปในตอนแรกแล้ว ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์จึงลดลงเหลือเพียง

$$\left(u'' + \frac{eB'}{p}u\right)v = 0$$

หรือ

$$u'' + \frac{eB'}{p}u = 0 \tag{4.84}$$

ซึ่งเป็น Hill's equation ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (4.81) จึงมีรูปแบบ

$$x = uv = A_o\left(\frac{p_o}{p}\right)^{1/2}\beta^{1/2}(s)\cos[\psi(s) + \delta] \tag{4.85}$$

การแกว่งกวัดบีตาตรอนจึงมีแอมพลิจูดที่มีการหน่วงเมื่อพลังงานของลำอิเล็กตรอนเพิ่มขึ้น เนื่องจากความเปล่งของลำอิเล็กตรอนนิยามว่าเป็นพื้นที่ในปริภูมิเฟสที่ถูกจำกัดขอบเขตด้วยเส้นโค้ง Courant-Snyder invariant และเนื่องจากพื้นที่นี้เป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูดของบีตาตรอน ดังนั้นความเปล่งจึงแปรเปลี่ยนแบบผกผันกับโมเมนตัมของลำอิเล็กตรอน การใช้**ความเปล่งบรรทัดฐาน** (normalized emittance)

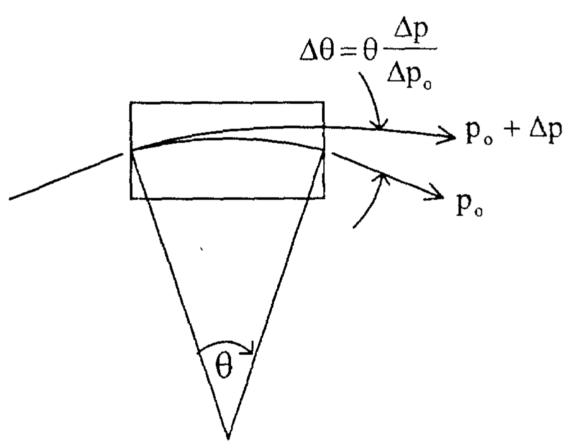
$$\varepsilon_N = \varepsilon x\left(\gamma\frac{v}{c}\right) \tag{4.86}$$

สามารถเปรียบเทียบกับพื้นที่ในปริภูมิเฟสที่เป็นอิสระต่อแฟกเตอร์การเคลื่อนที่ (kinematic factors) ค่าความเปล่งนี้จะคงตัวตลอดกระบวนการเร่งอนุภาค

4.6 การกระจายโมเมนตัมรอบแนววิถีในอุดมคติ

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีโมเมนตัมเหมือนกับอนุภาคในอุดมคติที่เคลื่อนที่เป็นวงโคจรวงกลมโดยมีตำแหน่งและทิศทางตามขวางแตกต่างกันไป เราเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่บีตาตรอน ต่อไปเราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีโมเมนตัมแตกต่างจากของอนุภาคในอุดมคติ แหล่งกำเนิดของความแตกต่างคือสนามแม่เหล็กของ bending magnet ที่ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงโคจร อนุภาคที่มีโมเมนตัมแตกต่างไปจากอนุภาคในอุดมคตินี้จะมีการแกว่งกวัดบีตาตรอนรอบๆวงโคจรปิดภายในเครื่องเร่ง การกระจัดของวงโคจรปิดจากอนุภาคในอุดมคติสามารถอธิบายได้ด้วย **ฟังก์ชันการกระจายโมเมนตัม,** $\eta(p, s)$

ฟังก์ชันการกระจายโมเมนตัม $\eta(p, s)$ มีกำเนิดมาจากความจริงที่ว่าอนุภาคที่มีโมเมนตัมมากกว่าจะเบนไปด้วยมุมที่น้อยกว่าใน bending magnet ดังแสดงในรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 แม่เหล็กเบนโมเมนตัมของอนุภาคที่สูงกว่าของอนุภาคในอุดมคติด้วยมุมที่น้อยกว่า ทำให้เกิดวงโคจรปิดต่างกันไปสำหรับอนุภาคที่มีโมเมนตัมแตกต่างกัน

bending magnet ที่เบนอนุภาคในอุดมคติเป็นมุม θ จะทำให้เกิดการเบี่ยงเบนหรือเพอร์เทอร์เบชันเชิงมุม (angular perturbation) ขนาด $\theta\Delta p / p_o$ หรือ $\Delta\theta$ ของอนุภาคที่ต่างไปจากแนววิถีของอนุภาคในอุดมคติ โดยที่ $\Delta p / p_o$ เป็นสัดส่วนโมเมนตัมที่แตกต่างไปจากโมเมนตัมในอุดมคติ p_o

นอกจากนี้อนุภาคที่มีโมเมนตัมสูงกว่าจะเบนไปน้อยกว่าในชิ้นส่วนของอุปกรณ์ที่ใช้โฟกัส หมายความว่าเกิดปรากฏการณ์ **ความคลาดรงค์** (chromatic aberration) ในวิชาทัศนศาสตร์ การขึ้นกับการโฟกัสของโมเมนตัมจะนำไปสู่การขึ้นกับ tune ของการแกว่งกวัดบีตาตรอนของ

โมเมนตัม และพารามิเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์เช่นนี้เรียกว่า **สภาพคลาดรงค์** (chromaticity) เราสามารถแก้สภาพคลาดรงค์ได้โดยใช้แม่เหล็ก 6 ขั้ว หรือ sextupole magnets.

ดังนั้นฟังก์ชันที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนจึงประกอบด้วย 4 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชัน คือฟังก์ชันการกระจาย η และอนุพันธ์ของฟังก์ชันการกระจายเทียบกับตัวแปรอิสระ s อีก 2 ฟังก์ชันคือ สภาพคลาดรงค์ ξ ทั้งในแนวราบและแนวดิ่ง

4.6.1 สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบน

เราจะเริ่มจากสมการการเคลื่อนที่ซึ่งเคยหาไว้แล้ว คือสมการ (4.19)

$$x'' - \frac{\rho + x}{\rho^2} = -\frac{B_y}{(B\rho)}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \tag{4.87}$$

สภาพแข็งเกร็งเชิงแม่เหล็กซึ่งเป็นโมเมนตัมของอนุภาคต่อประจุและแทนด้วย $(B\rho)$ ในกรณีของอนุภาคในอุดมคติซึ่งมีโมเมนตัม p_o เราต้องคูณด้วยแฟกเตอร์ p_o / p สำหรับกรณีอนุภาคที่เบี่ยงเบน ดังนั้นสมการการเคลื่อนข้างต้นจึงต้องปรับรูปแบบเป็น

$$x'' - \frac{\rho + x}{\rho^2} = -\frac{B_y}{(B\rho)}\frac{p_o}{p}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 \tag{4.88}$$

นอกจากนี้เรายังคงใช้สนามแม่เหล็กซึ่งแปรผันเชิงเส้นกับตำแหน่งตามขวาง คือ

$$B_y = B_o + B'x \tag{4.89}$$

เมื่อกระจายเทอมทางขวามือของสมการ(4.88) แล้วตัดเทอมกำลังสองของ x / ρ และเทอมที่สูงกว่าอื่นๆ ออกไป จะได้

$$x'' + \left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2p_o - p}{p}\right) + \frac{B'}{(B\rho)}\left(\frac{p_o}{p}\right)\right]x = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{p} \tag{4.90}$$

โดยที่ $\Delta p \equiv p - p_o$ สมมติเราเขียนวงโคจรปิดของอนุภาคเบี่ยงเบนเป็น

$$x = \eta(p, s)\frac{\Delta p}{p_o} \tag{4.91}$$

แล้วหาผลเฉลยของสมการ ซึ่งหมายความว่าผลเฉลยอยู่ภายใต้เงื่อนไข

$$\eta(p, s + L) = \eta(p, s) \tag{4.92}$$

โดยที่ L เป็นระยะซ้ำของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ฟังก์ชัน $\eta(p, s)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันการกระจาย** (dispersion function) เนื่องจากสมการ (4.91) เป็นผลเฉลยของสมการไม่เป็นเอกพันธุ์ Hill's equation, ผลเฉลยทั่วไปจึงแตกต่างจากผลเฉลยเฉพาะโดยเพิ่มผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เข้าไปเท่านั้น

สมการที่เราต้องแก้หา η จึงเป็น

$$\eta'' + \left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{2p_o - p}{p}\right) + \frac{B'}{(B\rho)}\left(\frac{p_o}{p}\right)\right]\eta = \frac{1}{\rho}\frac{p_o}{p} \tag{4.93}$$

ซึ่งเป็น Hill's equation ที่ไม่เป็นเอกพันธุ์ ขวามือของสมการแสดงว่าการเบี่ยงเบนเป็นจุดกำเนิดของการกระจายโมเมนตัม จุดศูนย์กลางการเบี่ยงเบนจะเพิ่มความชันของฟังก์ชันการกระจายด้วยมุมเบนที่โมเมนตัมที่เรากำลังพิจารณาดังแสดงในรูป เนื่องจากความยาวคลื่นของการแกว่งกวัดบีตาตรอนยาวกว่าเมื่อเทียบกับความยาวของ bending magnets, เราจึงอาจใช้การประมาณซึ่งกล่าวว่าแม่เหล็กดังกล่าวเปลี่ยนค่าความชันของฟังก์ชันการกระจายด้วยมุมของความโค้งแม่เหล็กที่จุดศูนย์กลางการเบี่ยงเบน คำกล่าวเช่นนี้ใช้ได้ดีสำหรับแม่เหล็กสองขั้วที่บริสุทธิ์

เทอมทางขวามือของสมการ (4.93) แสดงเพอร์เทอร์เบชันซึ่งเกิดจากพลังงานของอนุภาคไม่อาจเข้ากันได้กับความแรงของสนามเบี่ยงเบน ระนาบในแนวดิ่งไม่มีเพอร์เทอร์เบชั้นเช่นว่านี้ เว้นเสียแต่ว่ามีสนามเบี่ยงเบนในแนวดิ่งปรากฏในแลตทิซด้วย

อนุพันธ์ของสมการ (4.91) คือ

$$x' = \eta'\frac{\Delta p}{p_o} \tag{4.94}$$

ฟังก์ชันการกระจายกำหนดในหน่วยของเมตร ในขณะที่ η' ไม่มีหน่วย

ผลเฉลยของสมการ (4.90) โดยทั่วไปจะรวมการเบี่ยงเบนโมเมนตัมและการแกว่งกวัดบีตาตรอนเข้าด้วยกัน ดังนั้นการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในแนวราบจึงสามารถอธิบายด้วยผลบวกของเทอมซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบของ s และเทอมของการแกว่งกวัด นั่นคือ

$$x(s) = \eta(s)\frac{\Delta p}{p_o} + \sqrt{\varepsilon_x \beta_x(s)}\cos\left[\psi_x(s) + \delta_x\right] \qquad (4.95)$$

ความชัน dx/ds กำหนดโดย

$$x'(s) = \eta'(s)\frac{\Delta p}{p_o} - \alpha(s)\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x(s)}}\cos\left[\psi_x(s) + \delta_x\right] - \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x(s)}}\sin\left[\psi_x(s) + \delta_x\right] \qquad (4.96)$$

โดยที่

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\frac{d\beta}{ds}$$

การกระจายเกิดจากเทอมทางขวามือของสมการ (4.90) หรือ (4.93) เทอมทางขวามือของสมการทั้งสองมาจากความจริงที่ว่าพลังงานของอนุภาคไม่สอดคล้องหรือเป็นไปตามค่าที่ออกแบบไว้ เพอร์เทอร์เบชันนี้กระจายไปในลักษณะเดียวกับตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก ถ้าเราทำให้ฟังก์ชันการกระจายและค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีค่าน้อย จะทำให้ความเปล่งมีค่าต่ำตามที่เราหวังไว้ วิธีหนึ่งที่จะทำให้การกระจายมีค่าต่ำคือต้องใช้แม่เหล็ก bending magnets ที่สั้นหลายชุดและมีรัศมีความโค้งมาก ในเครื่องเร่งอนุภาครุ่นที่สามเลือกที่จะลดแอมพลิจูดของฟังก์ชันการกระจายโดยการเพิ่มการโฟกัสให้มากขึ้น ซึ่งกำหนดในเทอมภายในวงเล็บ [-----] ของสมการ (4.90) เทอมนี้ได้จากการเพิ่มความแรงสนามแม่เหล็กสี่ขั้วและให้แม่เหล็กอยู่ใกล้กันมากยิ่งขึ้น

จากสมการ (4.79) และ (4.80) ซึ่งแสดงการแจกแจงแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดบีตาตรอนเมื่อเรานำเพอร์เทอร์เบชันที่เกิดจากพลังงานของอนุภาคไม่อาจเข้ากับพลังงานของสนามแม่เหล็กที่เราออกแบบไว้ได้ เราจึงต้องนำผลของการแจกแจงพลังงานที่เบี่ยงเบนไปนี้มาพิจารณารวมเข้าไปด้วย การแจกแจงพลังงานดังกล่าวจะมีรูปแบบเกาส์เซียนเช่นเดียวกับกรณีการแกว่งกวัดบีตาตรอน ให้ $\langle \Delta p \rangle$ เป็นรากของกำลังสองเฉลี่ยของการเบี่ยงเบนโมเมนตัม และ $\varepsilon_{x,y}$ ยังคงเป็นค่ารากของกำลังสองเฉลี่ยของแอมพลิจูดบีตาตรอนเช่นเดิม และเนื่องจากปริมาณเหล่านี้ไม่ได้มีสหสัมพันธ์ต่อกัน และต่างก็มีผลต่อขนาดของลำอิเล็กตรอนเช่นกัน ดังนั้นเราจึงแยกออกเป็นส่วนย่อยคือ

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \sqrt{\varepsilon_x\beta_x + \eta^2\left(\frac{\langle\Delta p\rangle}{p_o}\right)^2} \\ \sigma_y &= \sqrt{\varepsilon_y\beta_y + \eta^2\left(\frac{\langle\Delta p\rangle}{p_o}\right)^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.97}$$

และ

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_x &= \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x} + \eta'^2\left(\frac{\langle\Delta p\rangle}{p_o}\right)^2} \\ \sigma'_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y} + \eta'^2\left(\frac{\langle\Delta p\rangle}{p_o}\right)^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.98}$$

โดยปรกติการกระจายพลังงานหรือโมเมนตัมจะอยู่ในอันดับขนาด 10^{-3} และการกระจายวัดเป็นเมตร การกระจาย 1 เมตร จะให้ขนาดของลำอิเล็กตรอนประมาณ 1 มิลลิเมตร ความเปล่งขนาด 5×10^{-9} เมตร-เรเดียน ที่ตำแหน่งซึ่งมี β_x เท่ากับ 10 เมตร จะให้ขนาดลำประมาณ 0.22 มิลลิเมตร และเป็นเหตุผลหนึ่งของการวางอุปกรณ์เสริมลงในบริเวณที่เรียกว่า "dispersion-free region" ซึ่งมี $\eta = \eta' = 0$ หรืออย่างน้อยที่สุดต้องมีค่าน้อยมากๆ เท่านั้น

4.6.2 ผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่

ในการแก้สมการ (4.93) เราจะใช้แนวทางเดียวกับกรณีสมการ (4.25) ที่กำหนดให้ K(s) มีค่าคงตัวภายในแต่ละองค์ประกอบของเครื่องเร่ง นั่นคือสมการ (4.93) เขียนเป็น

$$\eta'' + k(s)\eta = \frac{1}{\rho}\frac{p_o}{p} = \frac{eB_o(s)}{p} \tag{4.99}$$

โดยที่ K มีค่าคงตัวในแต่ละชิ้นส่วนของแลตทิซ รวมทั้ง B_o ก็มีค่าคงตัวด้วย

เราอาจใช้แนวคิดของเมทริกซ์ที่ได้กล่าวแล้วในการแกว่งกวัดบีตาตรอนมาใช้กับกรณีที่เรากำลังพิจารณา เนื่องจากผลเฉลยเฉพาะของสมการฟังก์ชันการกระจายมีค่าคงตัวในแต่ละส่วน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปจึงอาจเขียนได้เป็น

$$\begin{pmatrix}\eta \\ \eta'\end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta \\ \eta'\end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix}e \\ f\end{pmatrix} \tag{4.100}$$

โดยที่เมทริกซ์ 2 x 2 เหมือนกับที่เคยกล่าวแล้วในสมการเอกพันธุ์ สมการ (4.100) สามารถเขียนในเทอมของเมทริกซ์ 3 x 3 เป็น

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_{in} \tag{4.101}$$

ในกรณีของ $K < 0$, สมาชิกเมทริกซ์ M_{13} และ M_{23} ซึ่งในที่นี้คือ e และ f จะเป็น

$$M_{13} = \frac{e}{p|K|} B_o \left(\cosh\sqrt{|K|}\,\ell - 1\right)$$

$$M_{23} = \frac{e}{p\sqrt{|K|}} B_o \sinh\sqrt{|K|}\,\ell$$

ในกรณี $K = 0$, $M_{13} = \frac{1}{2}\frac{eB_o\ell}{p}\ell$ และ $M_{23} = \frac{eB_o\ell}{p}$

และในกรณี $K > 0$,

$$M_{13} = \frac{e}{pK} B_o \left(1 - \cos\sqrt{K}\,\ell\right)$$

และ

$$M_{23} = \frac{e}{p\sqrt{K}} B_o \sin\sqrt{K}\,\ell$$

เมื่อคูณเมทริกซ์สำหรับชิ้นส่วนของวงแหวน เราสามารถหาเมทริกซ์ M สำหรับการเคลื่อนที่ 1 รอบ หรือ 1 คาบ เงื่อนไขสำหรับการกระจัดจากวงโคจรสมดุลที่เป็นวงปิดคือ

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.102}$$

และผลเฉลยจะให้ฟังก์ชันการกระจายที่จุดเริ่มต้น นอกจากนี้เมทริกซ์ 3x3 เดียวกันนี้ยังแผ่กระจายทั้งฟังก์ชันการกระจายหรือแนววิถีของมันเองได้ด้วย นั่นคือ M สามารถดำเนินการบนเวกเตอร์

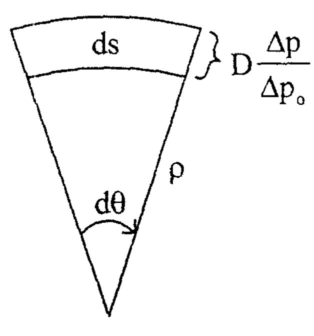
$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \text{ หรือเวกเตอร์ } \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p_o} \end{pmatrix}$$

ขั้นตอนเหล่านี้สามารถเริ่มต้นจากจุดใดๆ ก็ได้ในแลตทิซ ดังนั้นฟังก์ชันการกระจายสามารถคำนวณที่ใดๆ ได้ทุกแห่ง นอกจากนี้เมื่อทราบฟังก์ชันการกระจายและค่าอนุพันธ์ที่จุดเริ่มต้นแล้ว ผลเฉลยนี้สามารถแผ่ไปข้างหน้าโดยใช้ทั้งสมการเชิงอนุพันธ์หรือเมทริกซ์ที่อธิบายแต่ละชิ้นส่วน

ในกรณีฟังก์ชันการกระจายเป็นบวกในทุกแห่ง นั่นคือวงโคจรของโมเมนตัมที่มากกว่าวงโคจรที่ออกแบบไว้มีรัศมีที่ยาวกว่า ความแตกต่างในเส้นรอบรูป (perimeter) ระหว่างวงโคจรเบี่ยงเบนและวงโคจรที่ออกแบบจะกำหนดด้วยแฟกเตอร์ α ซึ่งเรียกว่า **compaction factor** และนิยามจากความสัมพันธ์

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p_o} \qquad (4.103)$$

โดยที่ C เป็นเส้นรอบวงของเครื่องเร่งอนุภาค รูปแบบของสมการนี้บอกให้ทราบว่าพารามิเตอร์ α มีค่าน้อยกว่า1 การหาความแตกต่างของวิถีระหว่างอนุภาคในอุดมคติและของอนุภาคเบี่ยงเบน แสดงประกอบด้วยรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.15 การเพิ่มความยาววิถีที่ต่างจากอนุภาคในอุดมคติของอนุภาคเบี่ยงเบน

จากรูปที่ 4.15 การเปลี่ยนแปลงเส้นรอบวงกำหนดจาก

$$\Delta C = \oint\left[\rho + \eta\frac{\Delta p}{p_o}\right]d\theta - \oint\rho d\theta \qquad (4.104)$$

สำหรับสัดส่วนเส้นรอบวงที่เปลี่ยนไปจะได้

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\oint\eta ds/\rho}{\oint ds}\left(\frac{\Delta p}{p_o}\right) = \left\langle\frac{\eta}{\rho}\right\rangle\frac{\Delta p}{p_o} \qquad (4.105)$$

หรือ

$$\alpha \equiv \frac{1}{\gamma_t^2} \equiv \left\langle\frac{\eta}{\rho}\right\rangle \qquad (4.106)$$

สำหรับแลตทิซธรรมดา, $\gamma_t \approx$ tune tune ของเกรเดียนต์แลตทิซที่สลับกันไปกำหนดมาตราส่วนด้วยจำนวนของเซลล์ ดังนั้น γ_t จึงเพิ่มจตามขนาดของเครื่องเร่งอนุภาค

แฟกเตอร์ α เป็นตัววัดว่าเวลาที่ใช้สำหรับอนุภาคในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบแปรผันตามพลังงานอย่างไร ในเครื่องเร่งอิเล็กตรอนพลังงานสูง, ความเร็วของอนุภาคค่อนข้างจะคงตัวตามพลังงาน และเวลาในการครบรอบกำหนดจากแนวคิดที่ว่าวิถีที่ยาวกว่า, อนุภาคจะต้องใช้พลังงานสูงกว่าในการครบรอบ และเป็นจริงในทางตรงกันข้าม อนุภาคที่มีพลังงานสูงกว่าจะต้องมีรัศมีความโค้งที่มากกว่า แฟกเตอร์ α จึงนิยามว่า

$$\alpha = \frac{\Delta T/T_o}{\Delta E/E_o} \qquad (4.107)$$

โดยที่ ΔE เป็นความแตกต่างพลังงานจากพลังงานที่กำหนดไว้คือ E_o และ T_o เป็นคาบของการเคลื่อนที่ครบรอบ แฟกเตอร์ α จึงกำหนดจากสมบัติของแลตทิซ ความจริง α เป็นค่าเฉลี่ยของการกระจายใน bending magnet หารด้วยรัศมีเฉลี่ยของวงแหวน การโฟกัสที่แรงขึ้นจะให้ค่า α ที่ต่ำลง ในบางครั้งอาจใช้การประมาณคือ $\alpha \approx 1/\nu_x^2$ ค่า α ที่น้อยเป็นส่วนสำคัญสำหรับการเคลื่อนที่ในแนวนอน

4.7 การเบี่ยงเบนไปจากแลตทิซอุดมคติ

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการเบี่ยงเบนไปจากแลตทิซอุดมคติซึ่งประกอบด้วย steering error, tune error และการปรับแต่ง

4.7.1 Steering error และการแก้ไข

สมมติว่า bending magnet ให้สนามแม่เหล็กที่แตกต่างไปจากค่าที่เราต้องการ ความไม่สมบูรณ์ของสนามแม่เหล็กทำให้วงโคจรปิดแตกต่างไปจากวงโคจรอุดมคติเล็กน้อย สมมติว่าค่าคลาดเคลื่อน steering มีขนาด $\theta = \Delta B\ell/(B\rho)$ และอยู่ที่ตำแหน่ง $s = 0$ โดยที่ ΔB เป็นสนามแม่เหล็กที่คลาดเคลื่อนตลอดระยะทาง ℓ เราต้องการจะหาวงโคจรปิด ซึ่ง x เป็นศูนย์ไม่เป็นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่อีกต่อไป ทุกๆ แห่ง,ยกเว้นตำแหน่งที่เกิดข้อผิดพลาด, สมการการเคลื่อนที่ยังคงเป็นของการแกว่งกวัดบีตาตรอน ส่วนที่ตำแหน่งที่เกิดข้อผิดพลาดเป็นสมการไม่เป็นเอกพันธุ์

สมมติวงโคจรเคลื่อนลงอย่างทันทีทันใดด้วยมุมเบน θ และระบุด้วย x_o, x'_o เพื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นนี้ดำเนินต่อไปรอบวงแหวน เราจึงคูณด้วยเมทริกซ์ M แล้วจึงบวกด้วยมุม θ เพื่อให้กลับมาสู่ x_o, x'_o อีกครั้ง ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น

$$M\begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

แก้สมการสำหรับ x_o และ x'_o จะได้

$$\begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} = (I - M)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

เมทริกซ์ $(I - M)^{-1}$ สามารถเขียนได้ใหม่โดยใช้สมการ (4.46) และ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ ดังนั้น

$$(I - M)^{-1} = \left(I - e^{J2\pi\nu}\right)^{-1}$$

$$= \left[e^{J\pi\nu}\left(e^{-J\pi\nu} - e^{J\pi\nu}\right)\right]^{-1}$$

$$= -(2J\sin\pi\nu)^{-1}\left(e^{J\pi\nu}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2\sin\pi\nu} Je^{-J\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{2\sin\pi\nu}(J\cos\pi\nu + I\sin\pi\nu) \qquad (4.110)$$

และวงโคจรปิดที่ $s = 0$ จะเป็น

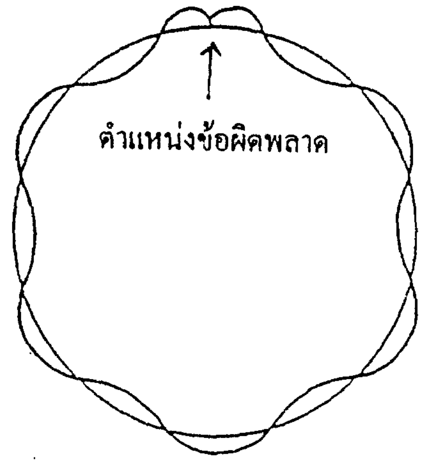
$$\begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} = (I - M)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\theta}{2\sin\pi\nu}\begin{pmatrix} \beta_o\cos\pi\nu \\ \sin\pi\nu - \alpha_o\cos\pi\nu \end{pmatrix} \qquad (4.111)$$

วงโคจรปิดอาจกำหนดให้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งหรือเฟสรอบๆ วงแหวนโดยใช้เมทริกซ์สำหรับการกระจายระหว่างจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่งตามสมการ(4.54) หลังจากปรับสมการอีกเล็กน้อยแล้วจะได้

$$x(s) = \frac{\theta\beta^{1/2}(s)\beta_o^{1/2}}{2\sin\pi\nu}\cos[\psi(s) - \pi\nu] \qquad (4.112)$$

สำหรับ $0 < \psi < 2\pi\nu$ ผลเฉลยสำหรับวงโคจรปิดนี้ แสดงในรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 วงโคจรปิดเมื่อมี single steering error

จากรูปจะเห็นได้ว่าวงโคจรปิดใหม่เมื่อมี single steering error จะเกิดการขมวดปมที่ตำแหน่งของการเกิดข้อผิดพลาดและแนววิถีจะขมวดเป็นปมด้วยมุม θ ค่าสูงสุดของการแกว่งกวัดเกิดขึ้นที่จุดในเครื่องเร่งซึ่ง $\psi = \pi\nu$ นั่นคือที่ครึ่งทางของเครื่องเร่งอนุภาคซึ่งเงื่อนไขเริ่มต้นไม่ได้ซ้อนทับกับวงโคจรปิดนี้จะยังคงได้รับอิทธิพลจาก steering error ในแต่ละรอบและมีการแกว่งกวัดบีตาตรอนรอบๆ วงโคจรปิดวงใหม่

ความจริงแล้ว steering error จำนวนมากอันเนื่องจากมีแม่เหล็กหลายชิ้นในเครื่องเร่ง พิจารณากรณีแลตทิซที่ง่ายที่สุดในเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนคือ FODO (Focusing-Drift-Defocusing-Drift) cell การเลี้ยวเบนเกิดจากแม่เหล็กสองขั้วซึ่งมีสนามแม่เหล็กคงตัวในพิกัดตามขวาง ในขณะที่การโฟกัสเกิดจากแม่เหล็กสี่ขั้ว เครื่องเร่งอนุภาคส่วนใหญ่ใช้แลตทิซที่แยกหน้าที่กันแบบนี้หรือสัมพันธ์กัน แม่เหล็กสองขั้วก่อให้เกิด steering error ในทั้งระดับขั้นความเสรีตามขวางอันเนื่องจากการก่อสร้าง, การติดตั้งและการจัดเรียงในวงแหวนสะสม การแปรผันในองค์ประกอบแนวดิ่งของสนามแม่เหล็กเมื่อมองไปตามแนววิถีอุดมคติจะทำให้เกิดการเบนในระนาบแนวราบเมื่ออนุภาคเคลื่อนผ่านแม่เหล็ก องค์ประกอบสนามแม่เหล็กในแนวราบ, ดังเช่นที่เกิดเมื่อแม่เหล็กสองขั้วหมุนไปเล็กน้อยรอบแกนตามยาว, จะทำให้เกิด steering error ในแนวดิ่ง การวางเรียงในแนวดิ่งของแม่เหล็กสี่ขั้วจะให้องค์ประกอบสนามตามขวางบนแนววิถีอุดมคติและเป็นส่วนที่ทำให้เกิด steering error เช่นกัน

การแก้ไขวงโคจรที่บิดเบี้ยวไปเหล่านี้สามารถทำได้โดยใช้เซตของแม่เหล็กที่เหมาะสมและเป็นอิสระต่อกัน

4.7.2 ข้อผิดพลาดจากการโฟกัสและการแก้ไข

ข้อผิดพลาดจากเกรเดียนต์สนามแม่เหล็กซึ่งทำหน้าที่โฟกัสคาดว่าน่าจะทำให้ tune ของเครื่องเร่งเปลี่ยนแปลงไป สมมติมีข้อผิดพลาดจากเกรเดียนต์เพียงจุดเดียวที่สมมูลกับเลนส์บางที่มีความยาวโฟกัส f. เมทริกซ์ M สำหรับหนึ่งรอบจึงเป็น

$$M = M_o\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.113)$$

โดยที่ M_o เป็นเมทริกซ์สำหรับวงแหวนในอุดมคติ จากรอย (trace) ของ M จะให้

$$\cos 2\pi\nu = \cos 2\pi\nu_o - \frac{1}{2}\frac{\beta_o}{f}\sin 2\pi\nu_o \qquad (4.114)$$

โดยที่ ν และ ν_o เป็น tune ค่าใหม่และเก่าตามลำดับ β_o เป็นฟังก์ชันแอมพลิจูดเริ่มต้นที่จุดของเพอร์เทอร์เบชัน สำหรับวงแหวนในอุดมคติ, ค่า ν_o ถูกออกแบบให้เป็นจำนวนจริง ค่า ν ขึ้นกับเครื่องหมายและขนาดของข้อผิดพลาดเกรเดียนต์จึงอาจเป็นเลขเชิงซ้อน นั่นคือ การเคลื่อนที่อาจกลายเป็นไม่เสถียร สำหรับขนาดน้อยๆ ของเทอมจากข้อผิดพลาดเกรเดียนต์, เนื่องจากความไม่เสถียรเกิดขึ้นสำหรับ ν ใกล้เคียงจำนวนเต็มหรือกึ่งจำนวนเต็ม ความไม่เสถียรเหล่านี้จึงเรียกว่า half-integer resonance และมีพิสัยค่าของ ν_o สำหรับการเคลื่อนที่ไม่เสถียร พิสัยนี้เรียกว่า stopband

ถ้า tune ไม่อยู่ใกล้กึ่งจำนวนเต็มและเพอร์เทอร์เบชันน้อยมากๆ เราอาจหาสมการสำหรับ tune shift หรือการเลื่อน tune อันเนื่องจากข้อผิดพลาดเกรเดียนต์โดยเขียน

$$\nu = \nu_o + \delta\nu \qquad (4.115)$$

แล้วกระจายเทอมโคไซน์ทางซ้ายมือของสมการ (4.114) จะได้

$$\delta\nu = \frac{1}{4\pi}\frac{\beta_o}{f} \qquad (4.116)$$

ถ้ามีการแจกแจงข้อผิดพลาดจากเกรเดียนต์ ผลสุดท้ายจะนำไปสู่

$$\delta\nu = \frac{1}{4\pi}\sum_i \frac{\beta_i}{f_i} \rightarrow \frac{1}{4\pi}\oint \frac{\beta(s)B'(s)}{(B\rho)} ds \qquad (4.117)$$

และเป็นการประมาณอันดับต่ำสุดในข้อผิดพลาดเกรเดียนต์สำหรับการเลื่อน tune.

4.7.3 สภาพคลาดรงค์

ดังได้กล่าวไว้แล้วเมื่อเราพิจารณาฟังก์ชันการกระจายว่า สมการการเคลื่อนที่สำหรับอนุภาคเบี่ยงเบนจะรวมเทอมค่าคงตัวสปริงซึ่งขึ้นกับโมเมนตัมของอนุภาค เราจึงคาดว่าความถี่ของการแกว่งกวัดบีตาตรอนของอนุภาคซึ่งเรียกว่า tune ควรขึ้นกับโมเมนตัมของอนุภาคด้วยเช่นกัน การเปลี่ยน tune อันเนื่องจากโมเมนตัมเรียกว่า **สภาพคลาดรงค์** (chromaticity) และนิยามโดย

$$\delta\nu = \xi(p)\,\frac{\Delta p}{p_o} \qquad (4.118)$$

โดยที่ $\Delta p / p_o$ เป็นการเบี่ยงเบนโมเมนตัมสัมพัทธ์กับโมเมนตัมอุดมคติ

สภาพคลาดรงค์สามารถคำนวณโดยสมการ (4.116) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเลื่อน tune กับข้อผิดพลาดจากเกรเดียนต์ นั่นคือ

$$\delta\nu = \frac{1}{4\pi}\sum_i \frac{\beta_i}{f_i} \qquad (4.119)$$

โดยที่ f_i ถือเป็นความยาวโฟกัสของข้อผิดพลาดจากแม่เหล็กสี่ขั้วที่แสดงความแตกต่างระหว่างสถานะโมเมนตัมที่เบี่ยงเบนและสถานะในอุดมคติ นั่นคือ สำหรับแม่เหล็กสี่ขั้วที่มีความยาวโฟกัส F,

$$\frac{1}{f} = \frac{p_o}{p}\frac{1}{F} - \frac{1}{F} = -\frac{1}{F}\frac{\Delta p}{p} \qquad (4.120)$$

ดังนั้น

$$\xi = -\frac{1}{4\pi}\sum \frac{\beta_i}{F_i} \qquad (4.121)$$

หรือ
$$\xi = -\frac{1}{4\pi}\oint K\beta ds \tag{4.122}$$

สำหรับแลตทิซแบบง่าย, สภาพคลาดรงค์มีขนาดประมาณกับค่า tune แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม ในแลตทิซที่ซับซ้อนของวงแหวนสะสม สภาพคลาดรงค์จะมีขนาดใหญ่ขึ้น ทั้งนี้เพราะแทนที่จะโฟกัสลำของอิเล็กตรอนให้เป็นจุดเล็ก, เราได้ลำที่เกือบขนานบนทั้งสองด้าน นั่นคือฟังก์ชันแอมพลิจูดจะใหญ่ขึ้นในแม่เหล็กสี่ขั้วและแรงขึ้นกว่าที่ใดๆ ในวงแหวน ปริพัทธ์ (integrand) ในสมการ (4.122) จึงขยายในบริเวณนี้

อีกวิธีหนึ่งในการดูต้นกำเนิดของการมีค่ามากกว่าสภาพคลาดรงค์ธรรมดาของวงแหวนสะสม คือการใช้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันแอมพลิจูด

$$K\beta = \alpha' + \gamma \tag{4.123}$$

เพื่อเขียนสมการสำหรับสภาพคลาดรงค์เสียใหม่เป็น

$$\xi = -\frac{1}{4\pi}\oint(\alpha' + \gamma)ds \tag{4.124}$$

เทอมแรกเมื่ออินทิเกรตรอบวงแหวนแล้วจะเป็นศูนย์ เทอมใน γ จะมีค่ามากเมื่อฟังก์ชันแอมพลิจูดมีค่าน้อย ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่จุดการชนกัน เนื่องจาก γ มีค่าคงตัวในระยะลอยเลื่อนหรือ drift space แนวตรงซึ่งการชนเกิดขึ้นจะมีส่วนต่อสภาพคลาดรงค์ด้วยปริมาณที่เท่ากับความยาวของแนวตรงหารด้วยฟังก์ชันแอมพลิจูดที่จุดซึ่ง β มีค่าต่ำสุด

แหล่งที่มาของสภาพคลาดรงค์ที่กล่าวมานี้ขึ้นกับความแรงของการโฟกัสบนโมเมนตัมสำหรับสนามอุดมคติ และเรียกสภาพคลาดรงค์เช่นนี้ว่า **สภาพคลาดรงค์โดยธรรมชาติ** หรือ natural chromaticity ยังมีแหล่งกำเนิดเพิ่มเติมอื่นๆ อีกด้วย

มีเหตุผลสองประการสำหรับการที่เราต้องสนใจสภาพคลาดรงค์ ถ้าลำอิเล็กตรอนมีการกระจายโมเมนตัมที่สูง, สภาพคลาดรงค์ที่สูงอาจทำให้บางส่วนของลำเกิดการสั่นพ้อง ประการที่สอง, ค่าของสภาพคลาดรงค์อาจกำหนดว่าบางการเคลื่อนที่ที่ขึ้นกับความเข้มมีความเสถียรหรือไม่เสถียรหรือไม่

ในการปรับแก้สภาพคลาดรงค์เราต้องการแม่เหล็กที่ให้เกรเดียนต์ที่เป็นฟังก์ชันของโมเมนตัม แม่เหล็กดังกล่าวคือแม่เหล็กหกขั้ว ในระนาบแนวราบ, สนามของแม่เหล็กหกขั้วจะมีรูปแบบ

$$B = kx^2 \tag{4.125}$$

ดังนั้นเกรเดียนต์สนามบนวงโคจรที่เบนไปจึงเป็น

$$B' = 2kx = 2k\eta\frac{\Delta p}{p_o} \tag{4.126}$$

วิธีมาตรฐานในการปรับสภาพรงค์ในทั้งสองระดับขั้นความเสรีของตามขวาง คือการวางแม่เหล็กหกขั้วที่แต่ละตำแหน่งของแม่เหล็กสี่ขั้ว แม่เหล็กหกขั้วจะโยงใยถึงกันใน 2 วงจร วงจรหนึ่งโยงใยแบบอนุกรมระหว่างส่วนที่โฟกัสในแนวราบของแม่เหล็กสี่ขั้ว และอีกวงจรโยงใยส่วนที่โฟกัสในแนวดิ่งของแม่เหล็กสี่ขั้ว สำหรับแลตทิซ FODO, การเปลี่ยนสภาพคลาดรงค์อันเนื่องจากแม่เหล็กหกขั้วกำหนดจาก

$$\Delta\xi_H = \frac{N}{2\pi}\left(\beta_{max}\eta_{max}S_F + \beta_{min}\eta_{min}S_D\right) \tag{4.127}$$

$$\Delta\xi_v = -\frac{N}{2\pi}\left(\beta_{min}\eta_{max}S_F + \beta_{max}\eta_{min}S_D\right) \tag{4.128}$$

ในที่นี้ N เป็นจำนวนเซลล์, และความแรงของแม่เหล็กหกขั้ว S_F และ S_D กำหนดโดย $\left(\partial^2 B_y / \partial x^2\right)$ · ความยาว/$(2B\rho)$ ซึ่งคำนวณที่ตำแหน่งแม่เหล็กสี่ขั้ว ซึ่งโฟกัสและกระจายตามลำดับ

สำหรับแม่เหล็กหกขั้วที่มีสนามแม่เหล็กเป็น

$$B_y = S\left(x^2 - y^2\right)$$

$$B_x = 2Sxy \tag{4.129}$$

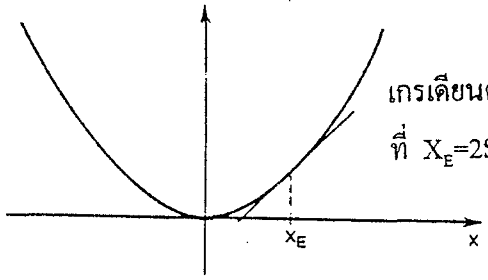
โดยที่ S เป็นความแรงแม่เหล็ก ถ้าอนุภาคมีการกระจายโมเมนตัม, การกระจัดในแนวราบ, x, ประกอบด้วย 2 เทอม คือ การแกว่งกวัดบีตาตรอน, x_β, และการอยู่ห่างวงโคจร, x_E, ซึ่งกำหนดจากสมการ (4.95) ในหัวข้อที่ 4.6.1 การกระจัดในแนวดิ่งเป็นการแกว่งกวัดบีตาตรอน, y_β, แต่เพียงอย่างเดียว สนามที่เห็นโดยอนุภาคสามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบได้เป็น

$$B_y = Sx_\beta^2 + 2Sx_E x_\beta + Sx_E^2 - Sy_\beta^2$$

$$(4.130)$$

$$B_x = 2Sx_\beta y_\beta + 2Sx_E y_\beta$$

เทอมที่เด่นในสมการมีรูปแบบของสนามแม่เหล็กสี่ขั้ว ซึ่งเป็นสนามที่เป็นเชิงเส้นในการกระจัด x_β และ y_β ความแรงของแม่เหล็กสี่ขั้วคือ $2Sx_E$ และเป็นสัดส่วนกับพลังงานอนุภาคผ่านวงโคจรปิดที่มีการกระจัด x_E สนามเบี่ยงเบนในแนวราบที่มีลักษณะกำลังสองแสดงในรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.17 สนามแม่เหล็กหกขั้วและเกรเดียนต์สนามสำหรับการกระจัด x_E จากวงโคจร

เนื่องจากการโฟกัสจะลดลงตามพลังงาน, สภาพคลาดรงค์ที่ไม่ถูกต้องจึงเป็นเลขค่าลบและเนื่องจากสภาพคลาดรงค์ในแนวราบและแนวดิ่งต่างมีค่าเป็นลบ, แต่แม่เหล็กสี่ขั้วที่สมมูลกันของสมการ (4.130) มีการโฟกัสที่ตรงกันข้ามในแนวแกนทั้งแนวดิ่งและแนวราบ เราจึงต้องการแม่เหล็กหกขั้ว 2 ชุด ซึ่งต่างก็วางในบริเวณการกระจาย แม่เหล็กหกขั้วที่ปรับแก้สภาพคลาดรงค์ในแนวราบจะวางอยู่ในบริเวณที่ฟังก์ชัน β ในแนวราบมีค่ามากและในแนวดิ่งมีค่าต่ำ และในทางกลับกันก็เป็นจริงสำหรับการปรับแก้สภาพคลาดรงค์ในแนวดิ่ง และเนื่องจาก $x_E = \eta(s)\Delta p/p_o$ ดังนั้นเพื่อลดความแรงของแม่เหล็กหกขั้ว เราจึงวางแม่เหล็กหกขั้วที่ตำแหน่งซึ่งการกระจายมีค่ามาก

สมการ (4.130) แสดงว่านอกเหนือจากเทอมที่ใช้แก้สภาพคลาดครงค์แล้ว, เทอมอื่นๆ ที่ไม่ต้องการและไม่เป็นเชิงเส้นจะรบกวนการเคลื่อนที่ บางวงแหวนสะสมจึงมีแม่เหล็กหกขั้วมากกว่าสองกลุ่มโดยกลุ่มที่เพิ่มเข้ามาใช้ทำหน้าที่ลบล้างการสั่นพ้องที่เกิดจากเทอมที่ไม่ต้องการของสมการ (4.130) ดังกล่าว

4.8 การสั่นพ้องตามขวาง

จากการศึกษาเชิงวิเคราะห์ของการเคลื่อนที่ลำอิเล็กตรอนใน storage ring พบว่าจะมีบางค่าของ tunes ที่อาจคุกคามต่อการเคลื่อนที่มีเสถียรภาพ ในระนาบตามขวางเงื่อนไขดังกล่าวคือ

$$m\nu_x \pm n\nu_y = p \tag{4.131}$$

โดยที่ m, n และ p เป็นเลขจำนวนเต็ม สมการ (4.131) บอกให้ทราบว่าหากมีเพอร์เทอร์เบชันเชิงแม่เหล็กเกิดขึ้นในเครื่องเร่งอนุภาค, ผลของเพอร์เทอร์เบชันในแต่ละรอบสามารถรวมกันจนแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามผลของเพอร์เทอร์เบชันจะลดลงเรื่อยๆ เช่นกัน เมื่อผลบวก $|m| + |n|$ มากขึ้นโดยทั่วไปในเครื่องเร่งอนุภาคอิเล็กตรอนพบว่าเมื่อ $|m| + |n| > 5$ การหน่วงที่เกิดจากการแผ่รังสีจะหักล้างการเพิ่มแอมพลิจูดดังกล่าวเมื่ออัตตราของทั้งสองปรากฏมีอันดับขนาดเดียวกัน

การสั่นพ้องซึ่ง $|m| + |n| \le 2$ เกิดจากความไม่สมบูรณ์เชิงเส้น (linear imperfections) ในแลตทิซ การสั่นพ้อง $\nu_{x,y}$ = จำนวนเต็มเป็นกรณีที่แยกออกมาต่างหากโดยเกิดจากความไม่สมบูรณ์เชิงแม่เหล็กของแม่เหล็กสองขั้ว, หรือเกิดจากความไม่สมบูรณ์เชิงตำแหน่งตามขวางของแม่เหล็กสี่ขั้วหรืออาจเกิดจากข้อผิดพลาดเชิงการหมุนในการวางแม่เหล็กสองขั้ว การสั่นพ้องเหล่านี้ทำให้เกิดวงโคจรปิดที่บิดเบี้ยวไปและมีผลต่อการเคลื่อนที่ของลำโฟตอน การบิดเบี้ยวไปของวงโคจรจะมีลักษณะ $1/\left(\nu_{x,y}^2 - p\right)$ โดยที่ p เป็นจำนวนเต็มใดๆ ด้วยเหตุนี้จึงใช้ dipole correctors เพื่อแก้การบิดเบี้ยวนี้ ความไม่สมบูรณ์เชิงแม่เหล็กของแม่เหล็กสี่ขั้วทำให้เกิดการสั่นพ้องอันดับที่สองโดยอาจรบกวนฟังก์ชัน β ควบคู่การเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวดิ่ง และหากแรงพออาจทำให้แลตทิซไม่เสถียรได้

การสั่นพ้องที่ไม่เชิงเส้น (nonlinear resonances) เกิดขึ้นเมื่อ $|m| + |n| > 2$ ซึ่งเกิดจากสนามที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาการเกิดการสั่นพ้องโดยทั่วไปซึ่งรวมการสั่นพ้องที่ไม่เชิงเส้นด้วย

จากผลเฉลยทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่ตามสมการ (4.42) คือ

$$x(s) = A\sqrt{\beta(s)}\cos\left[\psi(s) + \delta\right] \tag{4.132}$$

ถ้าเรานิยามเฟสลดทอน (reduced phase) ϕ โดย $\phi = \psi / \nu$ ดังนั้น ϕ จึงเป็นตัวแปรที่เพิ่มขึ้นทีละ 2π ในแต่ละรอบของการเคลื่อนที่ แม้ว่า ϕ ไม่ใช่มุมเชิงขั้วที่แท้จริงซึ่งวัดจากศูนย์กลางของวงกลม แต่ ϕ ก็มีลักษณะเช่นว่านี้ และถ้าหากเรานิยามตัวแปรตาม ξ ตัวใหม่เป็น

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\beta(s)}} \tag{4.133}$$

ดังนั้น สมการ (4.132) จะกลายเป็น

$$\xi(\phi) = A\cos(\nu\phi + \delta) \tag{4.134}$$

และการแกว่งกวัดบีตาตรอนจะลดรูปลงเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกธรรมดาด้วยค่า ν ของการแกว่งกวัดสำหรับทุกค่าของ ϕ ที่เพิ่มขึ้นรอบละ 2π สมการการเคลื่อนที่สำหรับ ξ คือ

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = 0 \tag{4.135}$$

เราเรียกการเปลี่ยนพิกัดจาก x และ s เป็น ξ และ ϕ ว่า Floquet transfor mation สมการ (4.135) สำหรับเครื่องเร่งที่ปราศจากข้อผิดพลาดเชิงสนามหากมีข้อผิดพลาดจากสนามแม่เหล็กในวงแหวนสะสมขวามือของสมการจะไม่เท่ากับศูนย์ แต่จะมีรูปแบบเป็น

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = -\nu^2\beta^{3/2}\frac{\Delta B(\xi, \phi)}{(B\rho)} \tag{4.136}$$

โดยที่ ΔB คือสนามที่เบี่ยงเบนไปจากสนามในอุดมคติ การใช้พิกัดตัวใหม่ ξ และ ϕ นี้ช่วยทำให้การศึกษาการสั่นพ้องที่เกี่ยวข้องกับ tune ν จึงมีลักษณะคล้ายกรณีตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกซึ่งจะง่ายต่อการศึกษา

สนามเบี่ยงเบน ΔB สามารถกระจายด้วยการกระจายที่เรียกว่า **multipole expansion** คือ

$$\Delta B = B_o(b_o + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots..) \tag{4.137}$$

โดยที่ B_o เป็นความเข้มสนามแม่เหล็กอ้างอิง และ b_n เป็นข้อผิดพลาดจากสนามแม่เหล็ก และเรียกว่า **multipole coefficients** b_o, b_1, b_2 เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากแม่เหล็กสองขั้ว, สี่ขั้ว, หกขั้ว, ตามลำดับ ส่วน b_n เป็นฟังก์ชันของ s

เมื่อกระจาย ΔB ตามสมการ (4.137), สมการ (4.136) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2\xi}{d\phi^2} + \nu^2\xi = -\frac{\nu^2 B_o}{(B\rho)}\left[\left(\beta^{3/2}b_o\right) + \left(\beta^{4/2}b_1\right)\xi + \left(\beta^{5/2}b_2\right)\xi^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] \quad (4.138)$$

เทอมทางขวามือของสมการที่มีความถี่เดียวกับความถี่ธรรมชาติ ν ของตัวแกว่งกวัดจะถูกนำมาพิจารณา ผลคูณของฟังก์ชันแอมพลิจูด β และสัมประสิทธิ์ b_n สามารถเขียนเป็นอนุกรมฟูเรียร์ของ ϕ คือ

$$\beta^{(n+3)/2} \bullet b_n = \sum_k c_k e^{\pm ik\phi} \quad (4.139)$$

และผลเฉลยของสมการ (4.138) สามารถเขียนได้เป็น

$$\xi(\phi) = \xi_o e^{\pm i\nu\phi} \quad (4.140)$$

พิจารณาเทอมแรก, b_o เป็นข้อผิดพลาดจากสนามแม่เหล็กสองขั้ว ถ้าผลคูณ $\beta^{3/2}b_o$ มีฮาร์มอนิกที่ไม่เป็นศูนย์ที่ $k = \nu$, เงื่อนไขการสั่นพ้องจะเกิดขึ้น และเราก็ทราบดีว่าค่าของ tune ที่เป็นจำนวนเต็มจะต้องหลีกเลี่ยง

เทอมที่สองเป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากเกรเดียนต์ และระบุด้วยสัมประสิทธิ์ b_1 ฮาร์มอนิกที่ k ของแฟกเตอร์ $\beta^2 b_1$ มีบีตส์ (beats) ด้วยความถี่ ν แทนด้วย ξ ทำให้เกิดความถี่ขับเคลื่อน (driving frequency) $k-\nu$ เงื่อนไขการสั่นพ้อง $k-\nu = \nu$ ทำให้ $k = 2\nu$ นั่นคือ tune ไม่อาจเป็นกึ่งจำนวนเต็มได้ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีเช่นกัน ความถี่บีตส์ $k+\nu = \nu$ เป็นกรณีพิเศษเพราะฮาร์มอนิกที่ศูนย์ของ $\beta^2 b_1$ เป็นการเลื่อน tune และถือเป็น renormalization ของซ้ายมือสมการการเคลื่อนที่และมิใช่การสั่นพ้องแต่อย่างใด

เทอมที่สามเป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากแม่เหล็กหกขั้ว แฟกเตอร์ ξ^2 แสดงความถี่ 2ν และเมื่อรวมกับฮาร์มอนิกที่ k ของ $\beta^{5/2}b_2$ ทำให้ได้เงื่อนไข $k-2\nu = \nu$ หรือ $k = 3\nu$ นั่นคือ tune ไม่อาจเป็ 1 ใน 3 ของจำนวนเต็มได้ ความถี่บีตส์ $k + 2\nu$ แสดงว่า tune ไม่อาจเป็นจำนวนเต็มได้

เราจึงกล่าวว่า tune $\nu = k/n$ สามารถเกิดการสั่นพ้องกับโมเมนต์แม่เหล็กหลายขั้วได้ ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็ม เรียกว่าอันดับ (order) ของการสั่นพ้อง เช่น แม่เหล็กหกขั้วสามารถทำให้เกิดการสั่นพ้องอันดับสามเป็นต้น ผู้มีประสบการณ์เกี่ยวกับเรื่องนี้พบว่าการสั่นพ้องอันดับต่ำๆ จะต้องหลีกเลี่ยงให้ได้

สำหรับการแกว่งกวัดตามขวางเราต้องพิจารณาทั้งสองระดับขั้นความเสรีคือ x และ y การสั่นพ้องในระนาบ ν_x, ν_y จะมีรูปแบบตามสมการ (4.131) หนึ่ง ในคู่ m, n อาจเป็นศูนย์ได้ ผล

บวก $|m| + |n|$ จะเป็นอันดับของการสั่นพ้องและอันดับจะสัมพันธ์กับเทอมต่างๆ ในการกระจายดังเช่นกรณีระดับขั้นความเสรีเดียว ถ้า m และ n มีเครื่องหมายตรงข้าม, ผลที่ได้จะควบกันแต่เป็นการเคลื่อนที่ที่เสถียร ในกรณีของแม่เหล็กหกขั้ว, การสั่นพ้องอาจเกิดจากเงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
3\nu_x &= p \\
2\nu_x + \nu_y &= p \\
\nu_x + 2\nu_y &= p \\
3\nu_y &= p
\end{aligned}
$$

เงื่อนไขที่ 1 และ 3 มาจากเทอมของแม่เหล็กหกขั้วในการกระจายสนามดังได้กล่าวมาแล้ว เงื่อนไขที่ 2 และ 4 มาจากสนามแม่เหล็กหกขั้วแต่หนึ่งในสองเงื่อนไขมีการหมุนไป 30° เมื่อเทียบกับเงื่อนไขแรกทำให้เกิด skew sextupole

จากสมการ (4.131) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าเครื่องหมายบวกทางซ้ายมือของสมการเท่านั้นที่นำไปสู่การเพิ่มขึ้นอย่างไร้ขีดจำกัดทั้งในแนวราบและแนวดิ่ง เครื่องหมายลบนำไปสู่การถ่ายโอนแอมพลิจูดการแกว่งกวัดจากแนวราบไปสู่แนวดิ่งและแนวดิ่งไปสู่แนวราบแต่การเคลื่อนที่ยังถูกจำกัด พฤติกรรมเช่นนี้จะคล้ายกับลูกตุ้มที่คู่ควบกัน (coupled pendulum) ด้วยแอมพลิจูดสูงสุดอยู่ระหว่างสองทิศทางของการเคลื่อนที่ตามขวาง

แรงดึงกลับของสนามความถี่วิทยุทำให้อนุภาคมีการแกว่งกวัดในพลังงานและเรียกว่า**การแกว่งกวัดซินโครตรอน** (synchrotron oscillations) จำนวนการแกว่งกวัดต่อรอบแทนด้วย ν_s และมีขนาดประมาณ 0.01 เงื่อนไขตามสมการ (4.131) สำหรับการสั่นพ้องคือ

$$
m\nu_x \pm n\nu_y \pm k\nu_s = p \tag{4.141}
$$

และเรียกว่า **การสั่นพ้องซินโครตรอน-บีตาตรอน**

4.9 เพอร์เทอร์เบชันของสนามแม่เหล็กหกขั้ว

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากเพอร์เทอร์เบชันเพียงเล็กน้อยของสนามแม่เหล็กจากแม่เหล็กหกขั้ว และผลของความไม่เป็นเชิงเส้นในแต่ละรอบเป็นอิสระต่อกันจึงรวมกันได้

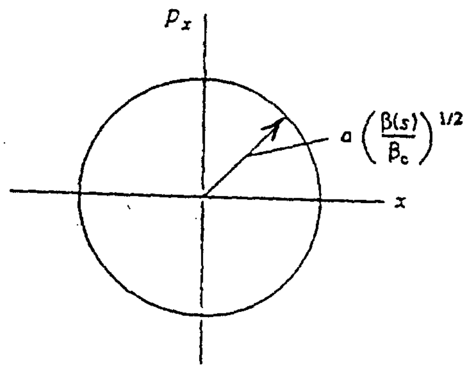
เราอาจเขียนสมการของการแกว่งกวัดเชิงเส้นเป็น

$$x = a\sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_o}} \cdot \cos\chi(s) \tag{4.142}$$

โดยที่ฟังก์ชันแอมพลิจูด β_o ที่จุดสังเกตุมีค่าชัดเจนแน่นอน ดังนั้น a จึงเป็นแอมพลิจูดที่แท้จริงที่จุดนั้น เราใช้เฟส χ เพื่อให้ ψ ใช้สำหรับเฟสที่จุดสังเกตุ อีกพิกัดหนึ่งในปริภูมิเฟสเขียนเป็น

$$\begin{aligned} p_x &\equiv \beta(s)x' + \alpha(s)x \\ &= -a\sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_o}} \cdot \sin\chi(s) \end{aligned} \tag{4.143}$$

ดังนั้น การเคลื่อนที่ซึ่งปราศจากเพอร์เทอร์เบชันที่จุดใดๆ ภายในวงแหวนจึงเป็นวงกลม สังเกตุว่า p_x ในที่นี้ไม่ใช่โมเมนตัมตามขวางแต่อย่างใด



รูปที่ 4.18 พิกัดในปริภูมิเฟส

สมมติสนามแม่เหล็ก $\Delta B(x, s)$ ซึ่งตั้งฉากกับ x และ s, เริ่มต้นที่ s แล้วขยายไปด้วยระยะ Δs เครื่องหมายของ ΔB เป็นบวกถ้าชี้ไปทางเดียวกับสนามหลัก สำหรับ Δs ที่น้อยพอ, x จะไม่เปลี่ยนเมื่ออนุภาคเคลื่อนไป Δs แต่ความชัน x' จะเปลี่ยนไปตามสมการ

$$\Delta x' = -\frac{\Delta B \Delta s}{(B\rho)} \tag{4.144}$$

ดังนั้น
$$\Delta p_x = -\beta(s)\frac{\Delta B \Delta s}{(B\rho)} \tag{4.145}$$

ผลของเพอร์เทอร์เบชันทำให้แอมพลิจูดและเฟสเปลี่ยนไป คือ

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\beta}{\beta_o}}\left(\Delta a\cos\chi - a\sin\chi.\Delta\chi\right) = 0 \qquad (4.146)$$

$$\Delta p_x = -\sqrt{\frac{\beta}{\beta_o}}\left(\Delta a\sin\chi + a\cos\chi.\Delta\chi\right) = -\beta\frac{\Delta B\Delta s}{(B\rho)} \qquad (4.147)$$

ดังนั้น

$$\Delta a = \frac{\beta_o}{(B\rho)}\left(\frac{\beta}{(\beta_o)}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta B\Delta s\sin\chi \qquad (4.148)$$

$$\Delta\chi = \frac{\beta_o}{(B\rho)}\left(\frac{\beta}{(\beta_o)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Delta B\Delta s}{a}\cos\chi \qquad (4.149)$$

เราจึงรวมเพอร์เทอร์เบชันเหล่านี้ในแต่ละรอบเข้าด้วยกัน สมมติว่าที่จุดสังเกตุมีเฟสของการแกว่งกวัดเป็น ψ ดังนั้น ในการเคลื่อนที่ครบรอบ, เฟส χ ที่ไม่ถูกรบกวนจะเลื่อนไปตามสมการ

$$\chi(s) = \psi + \nu\phi(s) \qquad (4.150)$$

โดยที่

$$\phi(s) \equiv \int\frac{ds}{\nu\beta(s)} \qquad (4.151)$$

ในการหาสมการการเคลื่อนที่อันดับหนึ่ง เราจะสมมติว่าการเปลี่ยนแอมพลิจูดและเฟสหาได้จากการรวมเพอร์เทอร์เบชันเหล่านี้ สำหรับแอมพลิจูด, เราหาได้จากสมการ (4.148)

$$\frac{da}{dn} = \frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\sqrt{\frac{\beta}{\beta_o}}\Delta B(x,s)\sin\left[\psi + \nu\phi(s)\right]ds \qquad (4.152)$$

การเปลี่ยนเฟสที่จุดสังเกตุหลังจากผ่านไปหนึ่งรอบ คือ $2\pi\nu$ บวกกับส่วนสะสมของการเปลี่ยนอันเนื่องจากผลรวมของทุกส่วนจากสมการ (4.149)

$$\Delta\psi = 2\pi\nu + \frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\sqrt{\frac{\beta}{\beta_o}}.\frac{\Delta B(x,s)}{a}\cos[\psi + \nu\phi(s)]ds \qquad (4.153)$$

เนื่องจาก $\Delta\psi$ และ $2\pi\nu$ แตกต่างกันค่อนข้างน้อย ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับเฟส คือ

$$\frac{d}{dn}(\psi - 2\pi\nu n) = \frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\sqrt{\frac{\beta}{\beta_o}}..\frac{\Delta B}{a}\cos[\psi + \nu\phi(s)]ds \qquad (4.154)$$

ในกรณีของแม่เหล็กหกขั้ว, ความไม่เป็นเชิงเส้นของ $\Delta B(x, s)$ จะมีรูปแบบเป็น

$$\Delta B(x, s) = \frac{B''(s)}{2}x^2 \qquad (4.155)$$

เมื่อแทนค่า $\Delta B(x, s)$ นี้ลงในสมการการเคลื่อนที่สำหรับแอมพลิจูดคือ (4.152) รวมทั้งใช้ค่า x จากสมการ (4.142) เมื่อจัดรูปแบบให้เรียบร้อยแล้วจะเป็น

$$\frac{da}{dn} = \frac{1}{4}a^2\frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\left(\frac{\beta}{\beta_o}\right)^{3/2}\left(\frac{B''}{2}\right)[\sin\psi\cos\nu\phi + \cos\psi\sin\nu\phi.$$
$$+ \sin 3\psi\cos 3\nu\phi + \cos 3\psi\sin 3\nu\phi]ds \qquad (4.156)$$

เทอมที่อาจรวบรวมจากแต่ละรอบคือเทอมที่แสดงการเคลื่อนที่ไม่เสถียร ถ้า tune ใกล้เคียงกับเลขจำนวนเต็ม, เทอมดังกล่าวควรเป็นสองเทอมแรก แต่ถ้า tune ไม่ใกล้เคียงกับเลขจำนวนเต็ม, $\sin\psi$ และ $\cos\psi$ จะเปลี่ยนอย่างรวดเร็วจากรอบสู่รอบทำให้แอมพลิจูดไม่ขยายขึ้นอย่างมั่นคง แต่ถ้า 3ν เป็นจำนวนเต็ม, ค่าของ $\sin 3\psi$ และ $\cos 3\psi$ จะคงตัวจากรอบสู่รอบทำให้แอมพลิจูดเพิ่มขึ้น ดังนั้น เราจึงตัดสองเทอมแรกออกไปให้เหลือเพียงคู่เทอมหลังเท่านั้น

เนื่องจากเราต้องการศึกษากรณี 3ν ไม่เป็นจำนวนเต็มเลยทีเดียวแต่มีค่าใกล้เคียงเท่านั้น ให้ $3\nu_o$ เป็นจำนวนเต็ม และ tune ที่แตกต่างออกไป $\delta \equiv \nu - \nu_o$ ซึ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ 1 สมการการเคลื่อนที่สำหรับแอมพลิจูดจึงเป็น

$$\frac{da}{dn} = \frac{1}{4}a^2(C\sin 3\psi + D\cos 3\psi) \qquad (4.157)$$

โดยที่

$$C \equiv \frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\left(\frac{\beta}{\beta_o}\right)^{3/2}\left(\frac{B''}{2}\right)\cos 3v_o\phi ds \qquad (4.158)$$

$$D \equiv \frac{\beta_o}{(B\rho)}\oint\left(\frac{\beta}{\beta_o}\right)^{3/2}\left(\frac{B''}{2}\right)\sin 3v_o\phi ds \qquad (4.159)$$

โดยเราใช้ค่า v_o สำหรับ v เพื่อว่า C และ D เป็นแอมพลิจูดฮาร์มอนิกที่แท้จริง

สมการการเคลื่อนที่สำหรับ ψ ก็หาได้ในลักษณะที่คล้ายกันนี้โดยมีการปรับบางส่วนเพียงเล็กน้อยเท่านั้น เนื่องจาก $\cos 3\psi$ และ $\sin 3\psi$ ไม่ไวต่อการแทนที่ ψ ด้วย $\psi - 2\pi v_o n$ เราจึงเสนอตัวแปรใหม่ $\overline{\psi} \equiv \psi - 2\pi v_o n$, ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของเฟสตัวใหม่จึงกลายเป็น

$$\frac{da}{dn} = \frac{1}{4}a^2\left(C\sin 3\overline{\psi} + D\cos 3\overline{\psi}\right) \qquad (4.160)$$

$$\frac{d\overline{\psi}}{dn} = \frac{1}{4}a\left(C\cos 3\overline{\psi} - D\sin 3\overline{\psi}\right) + 2\pi\delta \qquad (4.161)$$

$\overline{\psi}$ ไม่เพียงแต่เป็นตัวแปรที่ต่อเนื่องใน n เท่านั้น แต่สมการ (1.157) ยังมีรูปแบบที่เหมือนเดิมเมื่อเปลี่ยน ψ เป็น $\overline{\psi}$ เราจึงแปลงไปสู่พิกัดการหมุนได้

สมการ (4.160) และ (4.161) เป็นสมการการเคลื่อนที่ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของเฟสและแอมพลิจูดเพราะลักษณะของการสั่นพ้องที่ไม่เสถียรจะปรากฏในส่วนเหล่านี้ แต่ถ้าหากเราแปลงกลับไปสู่พิกัดคาร์ทีเซียน $\overline{x}, \overline{p}_x$ ซึ่งได้มาจาก

$$\frac{d\overline{x}}{dn} = \frac{\overline{x}}{a}\left(\frac{da}{dn}\right) + \overline{p}_x\left(\frac{d\overline{\psi}}{dn}\right) \qquad (4.162)$$

$$\frac{d\overline{p}_x}{dn} = \frac{\overline{p}_x}{a}\left(\frac{da}{dn}\right) - \overline{x}\left(\frac{d\overline{\psi}}{dn}\right) \qquad (4.163)$$

ดังนั้น

$$\frac{d\overline{x}}{dn} = \frac{1}{4}C\left(-2\overline{x}\overline{p}_x\right) + \frac{1}{4}D\left(\overline{x}^2 - \overline{p}_x^2\right) + 2\pi\delta.\overline{p}_x \quad (4.164)$$

$$\frac{d\overline{p}_x}{dn} = \frac{1}{4}C\left(\overline{p}_x^2 - \overline{x}^2\right) + \frac{1}{4}D\left(-2\overline{x}\overline{p}_x\right) - 2\pi\delta.\overline{x} \quad (4.165)$$

เช่นเมื่อ $D = 0$, อินทิกรัลแรกของระบบจะกลายเป็น

$$\left(\overline{x} - \frac{4\pi\delta}{C}\right)\left[\overline{p}_x^2 - \frac{1}{3}\left(\overline{x} + \frac{8\pi\delta}{C}\right)^2\right] = \text{ค่าคงตัว} \equiv k \qquad (4.166)$$

และแนววิถีในปริภูมิเฟสที่ต่างกันไปจะเกี่ยวข้องกับค่า k ที่แตกต่างกัน ความจริงสมการการเคลื่อนที่ใน $\overline{x}$ และ $\overline{p}_x$ อาจเขียนในรูปแบบของ**สมการแฮมิลตัน** (Hamilton's equation) คือ

$$\frac{d\overline{x}}{dn} = \frac{\partial H}{\partial \overline{p}_x} \quad \text{และ} \quad \frac{d\overline{p}_x}{dn} = -\frac{\partial H}{\partial \overline{x}}$$

แต่เราจะไม่พิจารณาในที่นี้

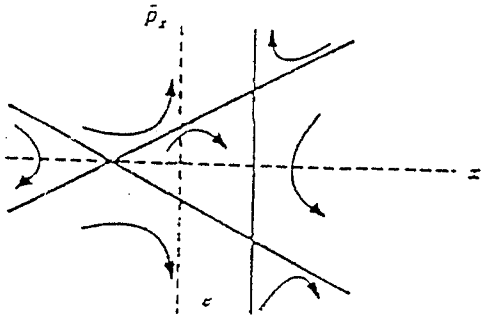
สังเกตุว่าจะมีจุดตรึงซึ่งสอดคล้องกับสมการ $d\overline{x}/dn = d\overline{p}_x/dn = 0$ และอยู่ที่จุด

$$\overline{x} = -\frac{8\pi\delta}{C} \quad , \quad \overline{p}_x = 0 \qquad (4.167)$$

และ

$$\overline{x} = -\frac{4\pi\delta}{C} \quad , \quad \overline{p}_x = \pm\sqrt{3}\frac{4\pi\delta}{C} \qquad (4.168)$$

สำหรับค่า $\overline{x}$, $\overline{p}_x$ เหล่านี้, ค่าคงตัว k จะเป็นศูนย์ กราฟของเส้นโค้งในปริภูมิเฟสสำหรับค่าเหล่านี้เรียกว่า **separatrix** และเป็นเส้นตรง 3 เส้น ซึ่งตัดกันที่จุดหนึ่ง การเคลื่อนที่ภายในสามเหลี่ยมจะมีขอบเขต, แต่การเคลื่อนที่นอกสามเหลี่ยมจะไม่มีขอบเขต ดังแสดงในรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 separatrix ใกล้จุดการสั่นพ้อง ลูกศรแสดงทิศทางการไหลของแนววิถีในปริภูมิเฟส

สำหรับ separatrix ในแนวดิ่ง, สมการการเคลื่อนที่จะกลายเป็น

$$\frac{d\bar{p}_x}{dn} = \frac{1}{4}C\bar{p}_x^2 - \frac{3}{4}C\left(\frac{4\pi\delta}{C}\right)^2 \qquad (4.169)$$

ซึ่งสามารถอินทิเกรตหาค่า $\bar{p}_x$ ที่เป็นฟังก์ชันของ n ได้ง่าย การเคลื่อนที่ไปตามหรือใกล้ separatrix มีความสำคัญมากในลำเส้นการสั่นพ้อง

มีความแตกต่างระหว่างการสั่นพ้องเชิงเส้น และการสั่นพ้องไม่เชิงเส้น สำหรับการสั่นพ้องเชิงเส้น, ลำเส้นทั้งหมดอาจเสถียรหรือไม่เสถียร แต่ในกรณีของการสั่นพ้องไม่เชิงเส้น, การเคลื่อนที่อาจเสถียรหรือไม่สถียรขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดการแกว่งกวัด การสั่นพ้องไม่เชิงเส้นไม่ก่อให้เกิด stopband

สมมติลำเส้นมีความเปล่ง $\varepsilon = \pi\sigma^2 / \beta_o$ ถ้า tune เริ่มต้นอยู่ห่างไกลจากการสั่นพ้องและการสั่นพ้องเข้าใกล้เข้ามาอย่างช้าๆ ดังนั้น เราอาจสมมติได้ว่าพื้นที่ในปริภูมิเฟสจะบิดเบี้ยวไปอย่างช้าๆ จากเริ่มต้นที่เป็นวงกลมไปเป็นรูปสามเหลี่ยมของการสั่นพ้อง ถ้าความแตกต่าง tune เกิดในลักษณะที่พื้นที่เสถียรเท่ากับลำเส้นของความเปล่ง เราอาจกล่าวได้ว่า 2δ เป็นความกว้างของการสั่นพ้องและในกรณีที่เรากำลังกล่าวถึง, ความกว้างกำหนดโดย

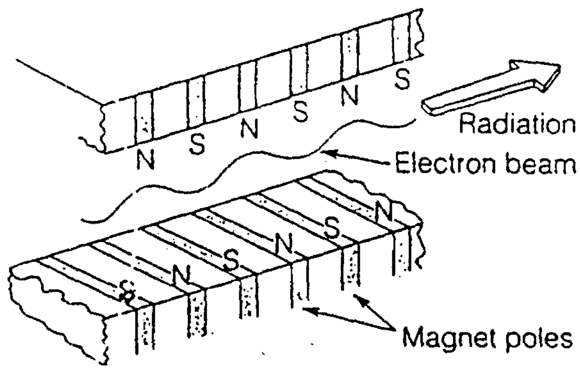
$$2\delta = \frac{C}{2\pi}\left(\frac{2\beta_o\varepsilon}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \qquad (4.170)$$

ในที่นี้ความเปล่ง ε ประกอบด้วย 39% ของอนุภาค

บทที่5
รังสีซินโครตรอนจากอุปกรณ์เสริม

5.1 wigglers และ undulators

ในการนำรังสีที่เกิดจากวงแหวนสะสมไปใช้ประโยชน์จำเป็นต้องมี**อุปกรณ์เสริม** (insertion devices, ID.) อุปกรณ์ดังกล่าวประกอบด้วยขั้วแม่เหล็กสลับขั้วอย่างต่อเนื่อง และวางอยู่ในองค์ประกอบแนวตรงของวงแหวนสะสม สนามแม่เหล็กที่เป็นคาบของ ID จะอยู่ในแนวดิ่งเชิงบวกหรือลบในระนาบกลางแนวนอน (horizontal midplane) ดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในอุปกรณ์เสริมและทิศทางการแผ่รังสี

แม่เหล็กจะถูกออกแบบให้การเบี่ยงเบนของลำอิเล็กตรอนสลับกันจนทำให้การเบี่ยงเบนรวมไม่เกิดขึ้นเลย แนววิถีของอิเล็กตรอนจะอยู่ในแนวตามยาว แรงโลเร็นต์บนอิเล็กตรอนจะตั้งฉากกับทั้งทิศทางการเคลื่อนที่อิเล็กตรอนและทิศทางของสนามแม่เหล็ก เป็นผลให้อิเล็กตรอนอยู่ในระนาบกลางแนวนอนนั้น

wiggler เป็นโครงสร้างแม่เหล็กซึ่งบังคับให้ลำอิเล็กตรอนมีแนววิถีที่มีรัศมีวงโคจรที่น้อยกว่าใน bending magnet โดยใช้สนามแม่เหล็กที่แรงกว่า ดังนั้น ผลของ wiggler ที่มีต่อสเปกตรัมรังสีที่แผ่ออกมาคือการเพิ่มพลังงานวิกฤต (critical energy) และการเลื่อนทุกสเปกตรัมไปสู่พลังงานที่สูงกว่า รังสีซินโครตรอนจาก wiggler จะคล้ายกับรังสีจาก bending magnet แต่ด้วยความเข้ม 2N เท่าอันเนื่องจากการเบี่ยงเบนอิเล็กตรอนแบบซ้ำตลอดระยะทางของ 2N ขั้ว เราอาจเรียก wiggler ว่าเป็น **wavelength shifter** ถ้ามีวัตถุประสงค์เพื่อเลื่อนสเปกตรัมรังสีไปสู่ความยาวคลื่นที่น้อยกว่า เช่น hard x-rays แทนที่จะเพิ่มความเข้ม

undulator มีโครงสร้างแม่เหล็กคล้ายกับ wiggler ซึ่งบังคับให้อิเล็กตรอนแกว่งกวัดตามขวางในระนาบที่กำหนดหรืออาจเป็นเกลียว (helix) ไปตามวิถีที่กำหนดวัตถุประสงค์ของ undulator เพื่อการให้รังสีซินโครตรอนที่เป็นเอกรงค์ (monochromatic) การเบี่ยงเบนเชิงมุมของลำอิเล็กตรอนจะถูกบังคับให้น้อยกว่าหรือเท่ากับมุมการแผ่รังสีซินโครตรอนหรือ $\langle\psi\rangle = 1/\gamma$ ผลการแทรกสอดของรังสีใน undulator จะก่อให้เกิดยอดโด่งที่ความยาวคลื่นหนึ่งๆ จากการแทรกสอดแบบเสริมกัน, มุมเปิดของรังสีที่ความยาวคลื่นหนึ่งจะลดลงด้วยแฟกเตอร์ $\sqrt{N}$ ดังนั้น ความเข้มของรังสีต่อมุมตันจึงเพิ่มขึ้น N^2 เท่า

สมการการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย $\langle v_z\rangle$ ที่ตั้งฉากสนามแม่เหล็กในแนวแกน y คือ $B_y = B_o \cos k_o z$ และคาบ $\lambda_o \equiv 2\pi / k_o$ คือ

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\gamma m\mathbf{v} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

หรือ
$$\frac{v_x}{c} = \frac{K}{\gamma}\sin k_o z$$

หรือ
$$x = \frac{K}{\gamma k_o}\cos k_o z \tag{5.1}$$

โดยที่ $\gamma = 1957E(\text{GeV})$ และ $K \equiv eB_o / k_o mc = 0.934 B_o(T)\lambda_o(\text{cm})$ การเบี่ยงเบนเชิงมุมคือ K/γ และแอมพลิจูดคือ $K/\gamma k_o = \lambda_o K / 2\pi\gamma$ (ดูรูปที่ 2.6 ประกอบ) ดังนั้น K จึงเป็นอัตราส่วนระหว่างมุมการแผ่รังสีและกรวยรังสีหรือ $1/\gamma$

การแจกแจงเชิงมุมของรังสีที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนที่มีแนววิถีเป็นวงกลมในระนาบแนวราบจะเป็นเช่นเดียวกับกรณี bending magnet คือ

$$\frac{d^2\Phi(\omega)}{d\theta d\psi} = \frac{3\alpha\gamma^2}{4\pi^2}\frac{I}{e}\frac{\Delta\omega}{\omega}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\left(1 + \gamma^2\psi^2\right)^2\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\gamma^2\psi^2}{1 + \gamma^2\psi^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{5.2}$$

โดยที่ ω เป็นความถี่ของโฟตอน, θ และ ψ เป็นมุมที่สังเกตุในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับ α คือ fine-structure constant, I คือกระแสของลำอิเล็กตรอนและ K คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองที่ถูกดัดแปร ด้วยอาร์กิวเมนต์ $\xi \equiv (\omega / 2\omega_c)\left(1 + \gamma^2\psi^2\right)^{3/2}$

เทอมสองเทอมในวงเล็บของสมการ (5.2) สมนัยกับรังสีโพลาไรส์ในแนวราบและแนวดิ่งในระนาบกลาง, เทอมที่สองหายไปและโพลาไรเซชันจะเป็นเชิงเส้นเท่านั้น ห่างระนาบกลางออกไปทั้งสองเทอมจะทำให้โพลาไรเซชันเป็นแบบวงรี สเปกตรัมพลังงานมีลักษณะเรียบและช่วง

กว้างโดยลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเหนือพลังงานวิกฤต $\varepsilon_c \equiv \hbar\omega_c = 3\hbar c\gamma^3 / 2\rho$ ครึ่งหนึ่งของกำลังจะแผ่เหนือพลังงานวิกฤตและอีกครึ่งใต้พลังงานวิกฤต พลังงานวิกฤตและความยาวคลื่นวิกฤตได้เคยกำหนดแล้วในสมการ (2.8) และ (2.9)

ใน wiggler, รังสีจากคาบต่างๆ แทรกสอดกันแบบไม่ร่วมนัย ยอดโด่งจากฮาร์มอนิกต่างๆ จะอยู่ใกล้กันมากจนดูคล้ายต่อเนื่องกัน แต่ใน undulator, รังสีจากคาบต่างๆ แทรกสอดกันแบบร่วมนัย จึงเห็นเป็นยอดโด่งที่ชัดเจนที่ฮาร์มอนิกต่างๆ ของความถี่การสั่นพ้องซึ่งขึ้นกับพลังงานอิเล็กตรอน, คาบของ undulation, ความเข้มสนามแม่เหล็กและจุดสังเกตุความยาวคลื่นเชิงแสงเป็นการแปลงโลเร็นต์ของคาบการ undulation ไปยังกรอบของลำอิเล็กตรอนตามด้วย Doppler shift เชิงสัมพัทธภาพกลับไปสู่กรอบห้องปฏิบัติการ ความเร็วที่ใช้ในการแปลงโลเร็นตซ์และ Doppler shift เป็นความเร็วตามยาวของอิเล็กตรอนซึ่งมีค่าน้อยกว่าความเร็วเต็มที่ของอิเล็กตรอนเพราะการ undulation เป็นวิถีโค้ง

ความยาวคลื่นหลักมูล (fundamental wavelength) ของยอดโด่งคือ

$$\lambda_1(\theta, \psi) = \frac{\lambda_o}{2\gamma^2}\left[1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\left(\theta^2 + \psi^2\right)\right] \tag{5.3}$$

และพลังงานและความยาวคลื่นหลักมูลในหน่วยที่ใช้กันกำหนดโดย

$$\varepsilon_1(\text{keV}) = \frac{0.950E^2(\text{GeV})}{\left(1 + K^2/2\right)\lambda_o(\text{cm})} \tag{5.4}$$

$$\lambda_1(^\circ\text{A}) = \frac{13.06\,\lambda_o(\text{cm})\left(1 + K^2/2\right)}{E^2(\text{GeV})} \tag{5.5}$$

การแจกแจงเชิงมุมของความเข้มรังสีของฮาร์มอนิกที่ n บนแกนคือ

$$\left.\frac{d^2\Phi_n}{d\theta d\psi}\right|_o = \frac{I}{e}\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{\alpha N^2\gamma^2K^2n^2}{\left(1 + K^2/2\right)^2}\left[J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nK^2}{4\left(1 + K^2/2\right)}\right) - J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{nK^2}{4\left(1 + K^2/2\right)}\right)\right]^2 \tag{5.6}$$

โดยที่ J เป็นฟังก์ชันเบสเซลและ n เป็นเลขคี่ เมื่ออินทิเกรตทั่วกรวยกลางของรังสี, ฟลักซ์ (photon/s/0.1% bandwidth) พอจะประมาณได้เป็น

$$\Phi_n = 1.451 \times 10^{14} \frac{NI(A)K^2 n}{1 + K^2/2}\left[J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nK^2}{4(1 + K^2/2)}\right) - J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{nK^2}{4(1 + K^2/2)}\right)\right]^2 \tag{5.7}$$

5.2 ความสว่างและความร่วมนัยของรังสีจาก undulators

ในการอธิบายความสว่าง (brightness) และความร่วมนัย (coherence) ของรังสีซินโครตรอนมักอธิบายในปริภูมิเฟส (phase space) ปริภูมิเฟสทำให้เราอธิบายอย่างมีระบบว่ารังสีแผ่กระจายผ่านตัวกลางได้อย่างไร และรังสีก่อให้รูปแบบการแทรกสอดและภาพได้อย่างไร นอกจากนี้ปริภูมิเฟสยังเป็นมูลฐานที่เหมาะสมสำหรับการอธิบายผลของความเปล่งลำอิเล็กตรอนที่มีต่อคุณลักษณะเฉพาะของรังสีความหนาแน่นฟลักซ์ (flux density) ในปริภูมิเฟสเรียกว่า ความสว่างซึ่งยืนยง (invariant) ภายใต้การแปลงเชิงทัศนศาสตร์ (optical transformation) ดังนั้น จึงเป็นลักษณะที่แท้จริงของแหล่งกำเนิด ฟลักซ์โฟตอนที่บรรจุในพื้นที่ปริภูมิเฟสกำหนดโดย $\lambda/2$, โดยที่ λ เป็นความยาวคลื่น, เป็นความร่วมนัยตามขวาง

ความสว่างสำหรับรังสีซินโครตรอนเมื่อนำผลของความเปล่งของลำอิเล็กตรอนเข้ามาพิจารณาด้วยสามารถหาได้จากสังวัตนาการ (convolution) หรือการผสมผสานของความสว่างของอิเล็กตรอนหนึ่งตัวและฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของอิเล็กตรอนในปริภูมิเฟส ผลที่ได้นี้เรียกว่า **brightness convolution theorem**

ในการอธิบายคุณสมบัติการแผ่ของรังสี, ความหนาแน่นของฟลักซ์โฟตอนในปริภูมิเฟสนับว่ามีบทบาทสำคัญและมักเรียกในวิชาทัศนศาสตร์ว่าความสว่าง ปริมาณนี้ในบางครั้งจะเรียกว่า **ความจ้า** (brilliance) ความสว่าง β เป็นความหนาแน่นของฟลักซ์โฟตอน Φ ในปริภูมิเฟสกำหนดโดย

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\phi}, z) = \frac{d^4\Phi}{d^2\mathbf{x}\, d^2\boldsymbol{\phi}} \tag{5.8}$$

ในที่นี้ $\mathbf{x} = (x, y)$, โดยที่ x และ y เป็นพิกัดในแนวราบและแนวดิ่งตามลำดับในระนาบตามขวางที่ตั้งฉากกับแกนทัศน์ z, และ $\boldsymbol{\phi} = (\theta, \psi)$ โดยที่ θ และ ψ เป็นมุมในแนวราบและแนวดิ่งเทียบกับแกนทัศน์ตามลำดับ เวกเตอร์สองมิติ $\mathbf{x}$ และ $\boldsymbol{\phi}$ อาจถือได้ว่าเป็นตำแหน่งและมุมของรังสีที่ผ่านระนาบตามขวาง การแผ่ไปในตัวกลางเชิงทัศนศาสตร์ประกอบด้วยปริภูมิเสรีและเลนส์อธิบายด้วยการแปลงพิกัดเชิงเส้นดังนี้

$$\mathcal{B}\left(\mathbf{x}, \phi, z_2\right) = \mathcal{B}\left(\mathbf{x}', \phi', z_1\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \phi' \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

ในที่นี้ M เป็นเมทริกซ์ 2 x 2 ที่กำหนดจากผลคูณของเมทริกซ์สำหรับเลนส์ความยาวโฟกัส f, M_f และเมทริกซ์สำหรับปริภูมิเสรีความยาว ℓ, M_ℓ, ซึ่งกำหนดโดย

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{สำหรับเลนส์}$$

$$M_\ell = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{สำหรับปริภูมิเสรี} \qquad (5.10)$$

การแปลงเหล่านี้มักรู้จักกันดีจากทัศนศาสตร์ของอนุภาคในฟิสิกส์เครื่องเร่งอนุภาค รูปแบบที่ง่ายของการแปลงตามสมการ (5.9) เป็นเหตุผลของคำถามว่าทำไมความสว่างจึงมีประโยชน์ต่อการศึกษารังสี นอกจากนี้, ความสว่างที่จุดกำเนิดปริภูมิเฟส, $\mathbf{x} = 0$ และ $\phi = 0$ จะมีค่ายืนยง นั่นคือเป็นอิสระต่อ z ดังนั้น ความสว่างซึ่งคำนวณที่จุดกำเนิดปริภูมิเฟสจึงเป็นลักษณะที่แท้จริงของความแรงของจุดกำเนิด

เมื่ออินทิเกรตความสว่างทั่วมุมหรือตำแหน่งเราจะได้ spatial flux density หรือ angular flux density คือ

$$A(\phi, z) \equiv \frac{d^2\Phi}{d^2\phi} = \int \mathcal{B}\left(\mathbf{x}, \phi, z\right) d^2\mathbf{x} \qquad (5.11)$$

$$S(\mathbf{x}, z) \equiv \frac{d^2\Phi}{d^2\mathbf{x}} = \int \mathcal{B}\left(\mathbf{x}, \phi, z\right) d^2\phi \qquad (5.12)$$

สำหรับรังสีซินโครตรอน, angular flux density ตามสมการ (5.11) เป็นปริมาณที่เราคุ้นเคยมากที่สุดและสามารถคำนวณหาได้จากสูตรมาตรฐานจากตำราทั่วไป และในบางครั้งจะเรียกกันผิดๆ ว่า ความสว่าง อย่างไรก็ตาม, ปริมาณนี้ไม่ยืนยง เราสามารถหาฟลักซ์ได้จากการอินทิเกรต คือ

$$\Phi = \int \frac{d^2\Phi}{d^2\phi} d^2\phi = \int \frac{d^2\Phi}{d^2\mathbf{x}} d^2\mathbf{x} \tag{5.13}$$

ฟลักซ์เป็นค่ายืนยงอีกค่าหนึ่งที่กำหนดลักษณะของความแรงจุดกำเนิด

โดยทั่วไปเรามักพิจารณาฟลักซ์เชิงอนุพันธ์ (differential flux) ต่างๆ ที่ได้กล่าวมานี้ภายใน bandwidth แคบๆ รอบพลังงานที่กำหนด ในกรณีเช่นนี้จึงมักมีคำว่า spectral นำหน้า ดังนั้น เราจึงกล่าวถึง spectral brightness, spectral flux, the angular density of spectral flux เป็นต้น

ในทัศนศาสตร์ของคลื่น, ความสว่างไม่อาจคำนวณเป็นความหนาแน่นของรังสีจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการอื่น เราจะเริ่มจากสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}(\mathbf{x}, z, t)$ และการแปลงฟูเรียร์ของมันคือ

$$E_\omega(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int E_\omega(\mathbf{x}, z, t) e^{i\omega t} dt \qquad 5.14)$$

$$\varepsilon_\omega(\phi, z) = \frac{1}{\lambda^2} \int E_\omega(\mathbf{x}, z) e^{-ik\phi.\mathbf{x}} d^2\mathbf{x} \tag{5.15}$$

โดยที่ $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ความสว่างของสเปกตรัมหรือ spectral brightness จึงกำหนดจาก **ฟังก์ชันการแจกแจงวิกเนอร์** (Wigner distribution function)

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \phi, z) = \frac{d\omega}{\hbar\omega} \frac{2\epsilon_o c}{T} \int d^2\theta < \varepsilon^*_\omega(\phi + \theta/2, z)\, \varepsilon_\omega(\phi - \theta/2, z) > e^{-ik\mathbf{x}.\theta}$$

$$= \frac{d\omega}{\hbar\omega} \frac{2\epsilon_o c}{T\lambda^2} \int d^2\xi < E^*_\omega(\mathbf{x} + \xi/2, z) E_\omega(\mathbf{x} - \xi/2, z) > e^{-ik\phi.\xi}$$

(5.16)

ในที่นี้เราใช้หน่วยในระบบ MKS, และ ϵ_o คือค่าคงตัวไดอิเล็กทริกในสุญญากาศ, c คือ ความเร็วของแสง, และ T เป็นช่วงเวลาของสนามไฟฟ้า สัมประสิทธิ์ในสมการ (5.16) มีลักษณะที่ $\mathcal{B}$ T เป็นจำนวนโฟตอนต่อหน่วยเวลาต่อหน่วยพื้นที่ปริภูมิเฟสในความกว้างแถบ $d\omega$ ของสเปกตรัม สัญลักษณ์ $\langle..\rangle$ หมายถึงค่าเฉลี่ยเชิงสถิติในกรณีที่สนามมีลักษณะสุ่มดังเช่นกรณีสำหรับรังสีใน undulator ที่เกิดจากลำอิเล็กตรอน

ความสว่างตามนิยามโดยสมการ (5.16) ไม่ใช่กำหนดแน่เชิงบวก (positive definite) ดังนั้นจึงไม่อาจกำหนดโดยตัวมันเองว่าเป็นความหนาแน่นฟลักซ์ในปริภูมิเฟสของฟิสิกส์ อย่างไรก็ตาม, เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าปริมาณ A และ S ซึ่งหาได้จากการอินทิเกรตผ่านสมการ (5.11) และ (5.12)

สามารถกำหนดแน่เชิงบวกและสมนัยกับความหนาแน่นฟลักซ์เชิงมุมและเชิงตำแหน่งตามลำดับอย่างแท้จริง นอกจากนี้คุณสมการแปลงปริภูมิเฟสตามสมการ (5.9) สามารถพิสูจน์ได้ว่าใช้กับกรณีนี้ได้ ดังนั้น เราจึงอ้างได้อย่างมีเหตุผลว่าปริมาณที่กำหนดจากสมการ (5.16) คือความสว่าง

คำกล่าวที่ว่าการแปลงตามสมการ (5.9) สำหรับความสว่างจะเหมือนกันทั้งทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตและเชิงคลื่นจำเป็นต้องขยายความเมื่อเราพิจารณากับช่องเล็กยาว (slit) *สำหรับทัศนศาสตร์*เชิงเรขาคณิต (geometric optics), ผลของช่องเล็กยาวคือการย้ายรังสีซึ่งสุดท้ายจะไปสิ้นสุดที่ส่วนทึบของช่องเล็กยาว ในทัศนศาสตร์เชิงคลื่น (wave optics), ความสว่างก่อนกระทบช่องเล็กยาว $\mathcal{B}_i$ และหลังจากผ่านช่องเล็กยาว $\mathcal{B}_f$ สัมพันธ์กันโดยสมการ

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \phi) = \int G(\mathbf{x}, \phi, \phi')\mathcal{B}_i(\mathbf{x}, \phi')d^2\phi' \qquad (5.17)$$

โดยที่

$$G(\mathbf{x}, \phi) = \frac{1}{\lambda^2}\int d^2\xi S^*(\mathbf{x} + \xi/2)S(\mathbf{x} - \xi/2)e^{ik\phi\cdot\xi} \qquad (5.18)$$

ฟังก์ชัน S(x) ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 เป็น**ความส่งผ่าน** (transmittance) ของช่องเล็กยาว สมการ (5.17) ให้รูปแบบการเลี้ยวเบนที่เรารู้จักกันดี

สำหรับรังสีซินโครตรอน, ความสว่างของอิเล็กตรอนเดี่ยวสามารถหาได้แน่ชัดโดยเริ่มจาก*สมการการแผ่รังสี*

$$\varepsilon_\omega\left(\phi, z = 0\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{\omega}{\lambda\sqrt{2\pi}}\int dt\, \mathbf{n} \times (\mathbf{n}\times\mathbf{B})e^{i\omega(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}/c)} \qquad (5.19)$$

โดยที่ q คือ ประจุอิเล็กตรอน, **B** c และ **r** เป็นความเร็วและตำแหน่งใน 3 มิติของแนววิถีอิเล็กตรอน, และ $\mathbf{n} = (\phi, 1 - \phi^2/2)$ เป็นเวกเตอร์บอกทิศทาง และเราใช้การประมาณ $\sqrt{1-\phi^2} \approx 1 - \phi^2/2$ ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบโพลาไรเซชันที่เด่นๆ เท่านั้น ซึ่งมักอยู่ในทิศทางแนวราบ ขวามือของสมการ (5.19) จึงคำนวณสำหรับองค์ประกอบแกน x

ความสว่างสำหรับกลุ่มอิเล็กตรอนหาได้จากผลบวกทั่วทุกส่วนการกระจาย สมมติว่าการเบี่ยงเบนวงโคจรของอิเล็กตรอนที่ต่างกันมีค่าน้อย และอิเล็กตรอนกระจายแบบสุ่ม, เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าความสว่าง **B** ของหลายอิเล็กตรอนสัมพันธ์กับความสว่าง $\mathcal{B}^\circ$ จากอิเล็กตรอนเดี่ยวบนวงโคจรคือ

$$\mathcal{B}(\mathbf{x},\phi,z) = N_e\int\mathcal{B}^\circ(\mathbf{x}-\mathbf{x}_e, \phi-\phi_e, z)f(\mathbf{x}_e, \phi_e, z)d^2\mathbf{x}_e\, d^2\phi_e \qquad (5.20)$$

โดยที่ฟังก์ชัน f เป็นความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density) ของอิเล็กตรอนในปริภูมิเฟส $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\phi}_e)$ ด้วยพิกัดตามขวาง $\mathbf{x}_e = (x_e, y_e)$ และมุม $\boldsymbol{\phi}_e = (\theta_e, \psi_e)$ กำหนดโดย

$$f(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\phi}_e, z) = \frac{1}{(2\pi)^2 \varepsilon_x \varepsilon_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_e - z\theta_e)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_e - z\psi_e)^2}{\sigma_y^2} + \frac{\psi_e^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{\psi_e^2}{\sigma_{y'}^2}\right)\right] \tag{5.21}$$

$\varepsilon_x = \sigma_x \sigma_{x'}$ และ $\varepsilon_y = \sigma_y \sigma_{y'}$ คือความเปล่ง (emittance) ของลำอิเล็กตรอน และ σ_x, σ_y เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความสว่างตามสมการ (5.20) ในทัศนศาสตร์เชิงคลื่นจะรวมความสว่างในทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตราวกับว่าตัวแรกเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นอย่างแท้จริง

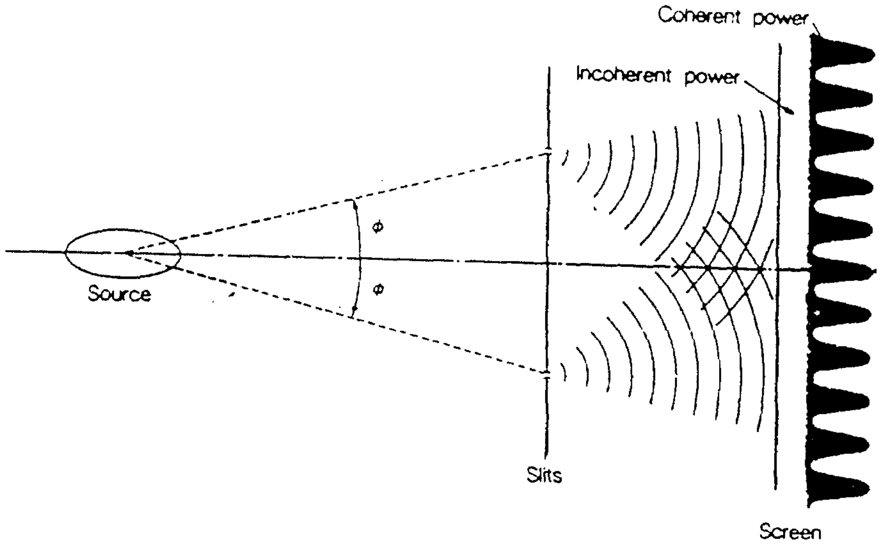
ความร่วมนัย

คุณลักษณะที่สำคัญของรังสีอีกประการหนึ่งซึ่งเป็นระดับขั้นที่รังสีจะแสดงรูปแบบการแทรกสอดได้คือความร่วมนัย เราอาจแยกความร่วมนัยออกเป็น 2 ชนิดคือ ความร่วมนัยตามขวาง (transverse coherence) และความร่วมนัยเชิงเวลา (temporal coherence) ความร่วมนัยตามขวางเป็นความร่วมนัยของการรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้าที่ 2 จุดบนระนาบตามขวางที่เวลาหนึ่ง แต่ความร่วมนัยเชิงเวลา-เป็นความร่วมนัยกรณี 2 จุดแยกจากกันตามเวลา

ความร่วมนัยเชิงเวลา-กำหนดจากความยาวความร่วมนัย ℓ_c ซึ่งคลื่นยังคงมีความสัมพันธ์เชิงเฟสอยู่ ℓ_c นี้ สัมพันธ์กับความกว้างของแถบโดย

$$\ell_c = \lambda\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{5.22}$$

ความร่วมนัยตามขวางกำหนดจากฟลักซ์ความร่วมนัยตามขวาง $\Phi_{c,T}$ ซึ่งหาได้จากการทดลองดังแสดงในรูปที่ 5.2 ว่าเป็นฟลักซ์ที่เข้าไปในพื้นที่ระหว่างค่าสูงสุดและต่ำสุดของการแทรกสอด, สำหรับทุกมุม ϕ ที่แตกต่างกัน



รูปที่ 5.2 ประกอบการกำหนดระดับขั้นของความร่วมนัยตามขวาง

เราสนใจความสว่างและสนามที่ระนาบของแหล่งกำเนิด $z = 0$ จึงไม่มีเทอม ปรากฏดังนั้น

$$\Phi_{c,T} = \alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{T} \int d^2\phi \left\langle \varepsilon^*_{\omega}(-\phi) \varepsilon_{\omega}(\phi) \right\rangle \qquad (5.23)$$

โดยทั่วไปเราอาจนิยามพื้นที่ยังผล (effective phase space area) ที่ถูกครอบครองโดยรังสีให้เป็น $\Omega = \Phi / \mathcal{B}(0, 0)$ เนื่องจาก $\Phi_{c,T}$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ Φ เสมอ, สมการ (5.23) จึงบอกให้ทราบว่าพื้นที่ยังผล Ω ไม่สามารถมีค่าน้อยกว่า $(\lambda / 2)^2$ ได้ ทั้งนี้ เพราะธรรมชาติคลื่นของรังสีซึ่งสามารถเปรียบเทียบกับกรณีของทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิตที่ไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับขนาดเล็กสุดของพื้นที่ปริภูม ในทางกลับกัน, เมื่อพื้นที่ของปริภูมิของรังสีใดๆ เป็น $(\lambda / 2)^2$, รังสีจะมีความร่วมนัยตามขวางได้เต็มสุด ดังนั้น ระเบียบวิธีของปริภูมิเฟสจึงเหมาะสมมากสำหรับความร่วมนัยตามขวาง

ถ้าแหล่งกำเนิดมีลักษณะสมมาตรคือ $\varepsilon_{\omega}(\phi) = \varepsilon_{\omega}(-\phi)$, สมการ (5.23) จะใช้เครื่องหมายเท่ากับ คือ

$$\Phi = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \mathcal{B}(0, 0) \qquad (5.24)$$

ลักษณะเฉพาะของรังสีจาก undulator

สเปกตรัมของรังสีจาก undulator จะเป็นยอดโด่งแหลมรอบๆ $\omega \approx n\omega_1$ ที่ฮาร์มอนิกเลขคี่รอบๆ ความถี่หลักมูล $\omega_1 = 2\pi c.2\gamma^2 / \lambda_o\left(1 + K^2/2\right)$ โดยที่ $\gamma = E/m_o c^2$ คือพลังงานอิเล็กตรอนหารด้วยมวลนิ่ง, λ_o คือคาบของแม่เหล็ก, $K = eB_o\lambda_o / 2\pi m_o c = \alpha\gamma$, B_o คือสนามแม่เหล็กที่ยอดโด่ง ใกล้ๆ ยอดโด่งของสเปกตรัม,

$$\frac{\omega}{\omega_1} = n + \Delta\nu, \quad \Delta\nu << 1 \tag{5.25}$$

สนามไฟฟ้าของ undulator ที่มีคาบ N พอจะประมาณได้เป็น

$$\varepsilon_\omega(\phi) = \frac{q}{4\pi \epsilon_o c}\frac{\lambda_o}{\lambda^2\sqrt{2\pi}}(-1)^{(N-1)n}\frac{K}{i\gamma}|JJ|_n \frac{\sin\pi N\left(\Delta\nu + n\gamma^2\phi^2/\left(1 + K^2/2\right)\right)}{\pi\left(\Delta\nu + n\gamma^2\phi^2/\left(1 + K^2/2\right)\right)} \tag{5.26}$$

ในที่นี้ n เป็นจำนวนเต็มเลขคี่ และ

$$|JJ|_n = J_{\frac{n+1}{2}}\left[\frac{K^2 n}{4\left(1 + K^2/2\right)}\right] - J_{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{K^2 n}{4\left(1 + K^2/2\right)}\right] \tag{5.27}$$

แทนค่าสมการ (5.26) ลงใน (5.16) จะได้สมการสำหรับความสว่างจากอิเล็กตรอนเดี่ยวเป็น

$$\mathcal{B}^{\circ}(\mathbf{x}, \phi) = \Phi^{\circ}\frac{1}{(\lambda/2)^2}\frac{1}{\pi C(\Delta\tilde{\nu})}\int_{-1}^{1} d\xi \int_{o}^{1-\xi}\frac{d\ell}{\ell}\sin\left[\frac{\left(\tilde{\mathbf{x}} - \xi\tilde{\phi}\right)^2}{\ell} - \ell\left(\tilde{\phi}^2 + 2\Delta\tilde{\nu}\right)\right] \tag{5.28}$$

โดยที่ครรชนีบน, 0, หมายถึง ปริมาณสำหรับอิเล็กตรอนเดี่ยว และเราใช้ตัวแปรสเกล

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{kL}{2}}\phi, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \sqrt{\frac{2k}{L}}\mathbf{x},$$

$$\Delta\tilde{\nu} = \pi N\Delta\nu = \pi N(\omega/\omega_1 - n) \tag{5.29}$$

ฟลักซ์จากอิเล็กตรอนเดี่ยวกำหนดจาก

$$\Phi^{o} = \frac{\alpha}{T}\frac{d\omega}{\omega}\gamma^{2}\frac{n^{2}K^{2}}{\left(1 + K^{2}/2\right)}\frac{N}{2}|JJ|^{2}C(\Delta\tilde{v}) \qquad (5.30)$$

ฟังก์ชัน C ในสมการ (5.28) และ (5.30) คือ

$$C(\Delta\tilde{v}) = \frac{2}{\pi}\int_{\Delta\tilde{v}}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2}dx, \qquad C(0) = 1 \qquad (5.31)$$

อินทิกรัลในสมการ (5.28) เป็นเอกฐาน (singular) ที่ $x = \phi = 0$, ดังนั้น เราจึงนิยามให้ $\mathcal{B}^{o}(0, 0)$ เป็นค่าลิมิตของ $\mathcal{B}^{o}(x, \phi)$ เมื่อ x และ ϕ เป็นศูนย์จากค่าที่ไม่เป็นศูนย์ จากการวิเคราะห์พบว่า

$$\mathcal{B}^{o}(0, 0) = \frac{\Phi^{o}}{(\lambda/2)^{2}} \qquad (5.32)$$

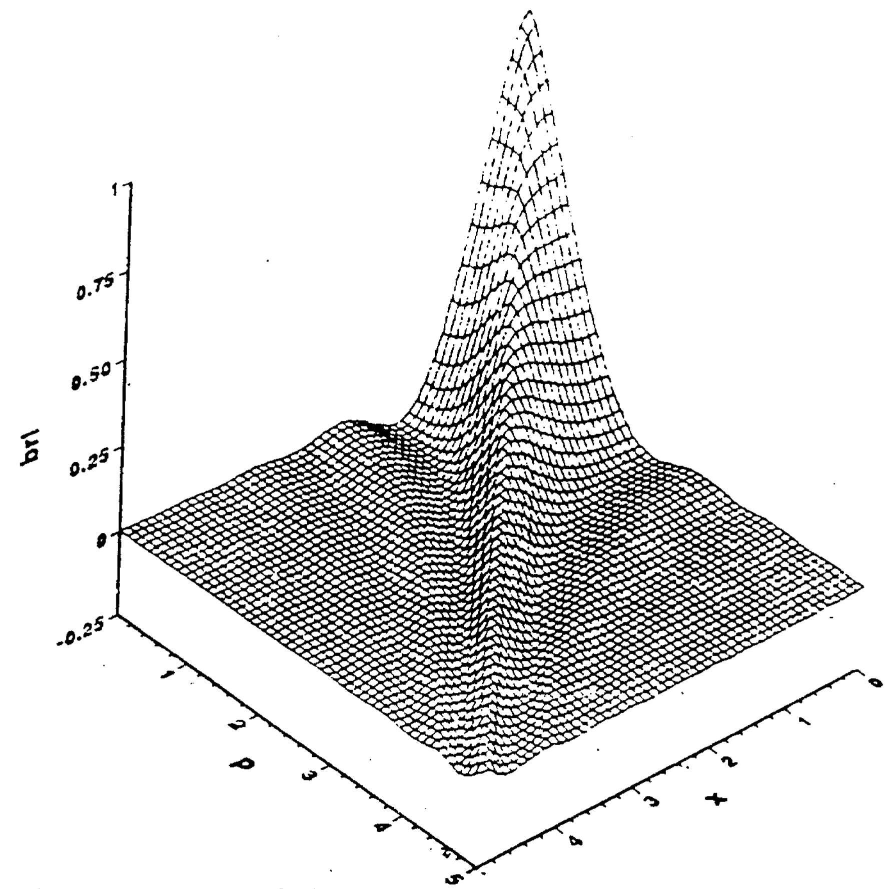
ซึ่งอาจคาดหวังไว้จากสมการ (5.27) เพราะฟลักซ์อิเล็กตรอนเดี่ยวมีความร่วมนัยและสนามไฟฟ้าจากสมการ (5.26) มีลักษณะสมมาตรใน ϕ ดังนั้น พื้นที่ยังผล Ω จึงเป็น $(\lambda/2)^{2}$ สำหรับทุก $\Delta\tilde{v}$

อินทิเกรตสมการ (5.28) จะได้

$$A^{o}(\phi) = \int\mathcal{B}^{o}(\mathbf{x}, \phi)d^{2}\mathbf{x} = \Phi^{o}\frac{L}{C(\Delta\tilde{v})\pi\lambda}\left[\frac{\sin\left(\Delta\tilde{v} + \tilde{\phi}^{2}/2\right)}{\left(\Delta\tilde{v} + \tilde{\phi}^{2}/2\right)}\right]^{2} \qquad (5.33)$$

$$\begin{aligned} S^{o}(\mathbf{x}) &= \int\mathcal{B}^{o}(\mathbf{x}, \phi)d^{2}\phi \\ &= \Phi^{o}\frac{\pi}{C(\Delta\tilde{v})\pi\lambda}\left[\frac{2}{\pi}\int_{\tilde{\mathbf{x}}^{2}}^{\infty}\frac{d\ell}{\ell}\sin\left(\frac{\ell}{2} - \frac{(\Delta\tilde{v}\tilde{\mathbf{x}}^{2})}{\ell}\right)\right]^{2} \end{aligned} \qquad (5.34)$$

ผลเหล่านี้อาจหาได้โดยตรงจากสมการ (5.26) เช่นกัน รูปร่างของฟังก์ชันความสว่าง, สมการ (5.28), ซึ่งคำนวณที่ $\Delta\tilde{v} = 0$ สำหรับกรณี ϕ และ $\mathbf{x}$ ขนานกันแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 ฟังก์ชันความสว่างเป็นหนึ่งที่จุดกำเนิด x และ p สมนัยกับตัวแปร $\tilde{x}$ และ $\tilde{\phi}$ ตามลำดับ

รูปทรงของรูปที่ 5.3 อาจเป็นไปได้ถ้าสมการ (5.28) อยู่ในรูปแบบ

$$\mathcal{B}^{\circ}(x, \phi) = \int_{-L/2}^{L/2} dz G(x - z\phi, \phi, z) \tag{5.35}$$

ปริมาณ $G(x, \phi, z)dz$ อาจถือได้ว่าเป็นความสว่างอันเนื่องจากแหล่งกำเนิดขนาด dz ที่เห็นจากระนาบขวางที่ z ความสว่างที่มองจากระนาบที่ $z = 0$ หาได้จากการแทนตัวแปร x ด้วย $x - z\phi$ (ดูจากสมการ (5.26)) สิ่งนี้เป็นความลึกของสนามในทัศนศาสตร์เชิงคลื่นและปรากฏในรูปที่ 5.3

เราอาจใช้การประมาณสำหรับ G เป็น

$$G(x, \phi, z) = \frac{\Phi^{\circ}}{\left(2\pi\sigma_r\sigma_{r'}\right)^2} g(z) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_{r'}^2} + \frac{\theta^2}{\sigma_{r'}^2}\right)\right] \tag{5.36}$$

ถ้าเราให้ $g(z) = \delta(z)$, ฟังก์ชันความสว่างจะมีรูปแบบของโมดเกาส์เซียนในตัวสั่นพ้องเลเซอร์ (laser resonator) ซึ่งที่ $z = 0$ จะมีรูปแบบ

$$\mathcal{B}\left(x, \phi, z\right) = \frac{\Phi}{\left(\lambda / 2\right)^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(x - z\phi\right)^2}{\sigma_r^2} + \frac{\phi^2}{\sigma_{r'}^2}\right)\right] \qquad (5.37)$$

โดยที่ $2\pi\sigma_r\sigma_{r'} = \lambda / 2$ แบบจำลองเช่นนี้มีประโยชน์ต่อการศึกษารูปร่างของลักษณะเฉพาะของรังสีจาก undulator อย่างไรก็ตาม แบบจำลองนี้อาจหยาบเกินไป เช่นยังไม่ได้รวมผลของความลึกของสนามเข้าไปด้วย สำหรับการประมาณที่ดีกว่า, เราจะกำหนดพารามิเตอร์ σ_r และ $\sigma_{r'}$ และฟังก์ชัน g(z) ด้วยเงื่อนไขว่าจะต้องสอดคล้องกับสมการ (5.32), สมการ (5.33) ที่ $\phi = 0$ และสมการ (5.34) ที่ $x = 0$ นอกจากนี้ฟลักซ์รวมหาได้จากการอินทิเกรตค่า Φ นี้ รวมทั้งให้ $\Delta\nu = 0$ สำหรับการประมาณนี้ ถ้าเราเลือก $\sigma_r = \sqrt{2\lambda L} / 4\pi$, $\sigma_{r'} = \sqrt{\lambda / 2L}$, และ $g(z) = \left(1 + \sigma_{r'}^2 z^2 / \sigma_r^2\right) / 4L$, ทุกความต้องการข้างต้นจะสอดคล้องเป็นอย่างดียกเว้นอันสุดท้ายซึ่งสอดคล้องด้วยค่าคลาดเคลื่อน 7%

ในการพิจารณาความเปล่งของลำอิเล็กตรอน, เราใช้ brightness convolution theorem คือสมการ (5.20) สมมติว่าการแจกแจงอิเล็กตรอนกำหนดจากสมการ (5.21), เราจะได้สำหรับความสว่างที่ยอดโค่งเป็น

$$\mathcal{B}\left(0, 0\right) = \Phi \int \frac{dz g(z)}{\Omega_x\left(z^2\right)\Omega_y\left(z^2\right)} \qquad (5.38)$$

โดยที่ $\Phi = N_e\Phi^o$ เป็นฟลักซ์ของอิเล็กตรอนจำนวน N_e, และ

$$\Omega_x\left(z^2\right) = 2\pi\sqrt{\left(\sigma_x^2 + \sigma_r^2\right)\left(\sigma_{x'}^2 + \sigma_{r'}^2\right) + z^2\sigma_{x'}^2\sigma_{r'}^2} \qquad (5.39)$$

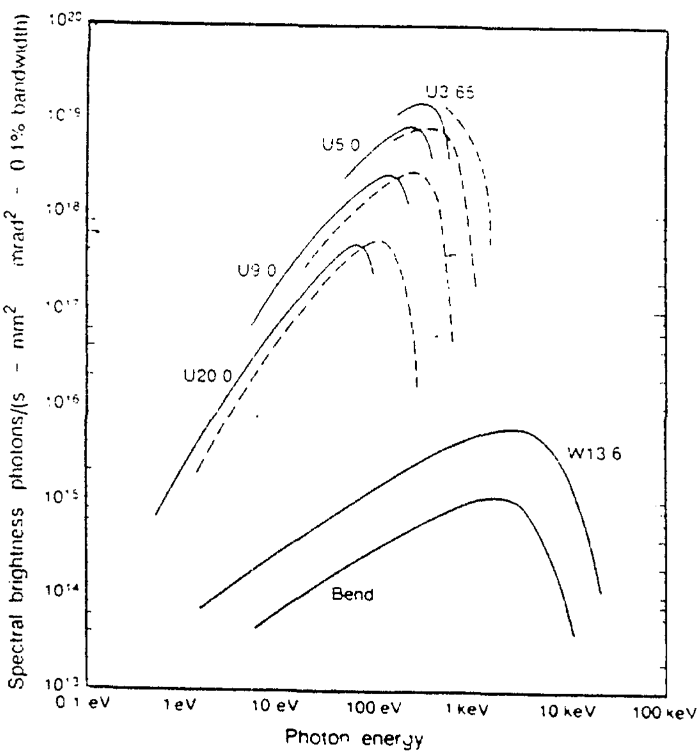
และเช่นเดียวกันสำหรับ $\Omega_y\left(z^2\right)$ ในที่นี้ $\sigma_x\left(\sigma_y\right)$ และ $\sigma_{x'}\left(\sigma_{y'}\right)$ เป็นรากของกำลังสองเฉลี่ย (rms) ของขนาดลำอิเล็กตรอนและไดเวอร์เจนซ์เชิงมุมในทิศทาง x(y) ตามลำดับ สมการ (5.38) สามารถเขียนเป็น $\mathcal{B}\left(0, 0\right) = \Phi / \overline{\Omega}_x\overline{\Omega}_y$, โดยที่พื้นที่ยังผล $\overline{\Omega}_x$ และ $\overline{\Omega}_y$ หาได้จากการแทน z^2 ในสมการด้วยค่าเฉลี่ย $\overline{z}^2$ ความหมายที่แน่ชัดของค่าเฉลี่ยจะถูกระบุโดยสมการ (5.38) พื้นที่ปริภูมิเฟสเพิ่มขึ้นจากพื้นที่ความร่วมนัย $\lambda / 2$ (ในแต่ละมิติ) โดยผลของลำอิเล็กตรอนและความลึกของสนาม

สำหรับค่าที่กำหนดของความเปล่ง $\varepsilon_x = \sigma_x\sigma_{x'}$ และ $\varepsilon_y = \sigma_y\sigma_{y'}$. พื้นที่ปริภูมิจะต่ำสุดเมื่อ

$$\beta_x = \beta_y = \sqrt{\bar{z}^2 - (L/2\pi)^2} \tag{5.40}$$

ถ้าให้ $\bar{z}^2$ มีค่าประมาณ $(L/2)^2/2$ จะทำให้ $\beta_x = \beta_y \sim 0.4L$ วงแหวนสะสมจะต้องถูกออกแบบให้เงื่อนไขเหมาะที่สุด (optimum condition) สำหรับความสว่างใน undulator อย่างไรก็ตาม, ค่าต่ำสุดเป็นเงื่อนไขที่กว้างและการลดความสว่างให้ห่างจากค่าเหมาะสม β_x และ β_y ไม่เข้มงวดมากนัก สำหรับ β_x และ β_y ที่อาจรับได้, รังสีจาก undulator จะมีความร่วมนัยตามขวางถ้า $\varepsilon_x, \varepsilon_y \le \lambda / 4\pi$

พื้นฐานของเครื่องเร่งอนุภาคในปัจจุบันตั้งอยู่บนการออกแบให้เครื่องมีความเปล่งต่ำกว่า 10^{-8} m-rad, กระแสสูงหลายๆ ร้อยมิลลิแอมแปร์ และการทำงานของ undulator เพื่อผลิตรังสีความสว่างสูง รูปที่ 5.4 แสดงความสว่างของสเปกตรัมสำหรับ undulators จำนวน 4 ขนาด ซึ่งเปรียบเทียบกับความสว่างที่ได้จาก wiggler และ bending magnet จากเครื่องเร่งอนุภาคที่ Berkeley ที่ผลิต 1 - 2 GeV. พารามิเตอร์ของเครื่องเร่งที่สำคัญ คือ พลังงานอิเล็กตรอน = 1.5 GeV, ลำกระแสเฉลี่ย = 400 mA, $\varepsilon_x = 4 \times 10^{-9}$ m − rad, และ $\varepsilon_y = 0.1\,\varepsilon_x$ ความยาวช่วงเป็น cm. และสำหรับ undulator ซึ่งระบุเป็นอักษร U, เส้นทึบแสดงรังสีหลักมูล ส่วนเส้นประแสดงฮาร์มอนิกที่สามของรังสี

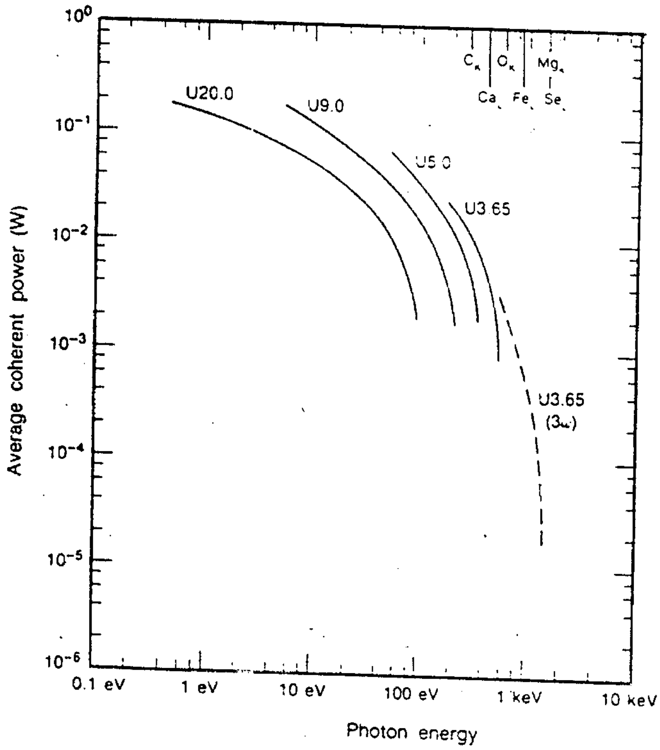


รูปที่ 5.4 ความสว่างสเปกตรัมของเครื่องเร่งอนุภาค 1-2 GeV ที่ Berkeley

ในการคำนวณจะใช้การประมาณที่ใช้รูปแบบเกาส์เซียน สำหรับความร่วมนัยจะแสดงด้วยค่ากำลังความร่วมนัย (coherent power), P_{coh}, ซึ่งนิยามว่าเป็นส่วนของกำลังรวมซึ่งร่วมนัยตามขวางและมีความยาวความร่วมนัย 1 ไมครอน ในทางปฏิบัติ จะกำหนดค่านี้เป็น

$$P_{coh}(\text{watts}) = \frac{7.63 \times 10^{-23} \mathcal{B}(0, 0)}{E^2(\text{keV})} \tag{5.41}$$

โดยที่ E เป็นพลังงานโฟตอนและ $\mathcal{B}$ ในหน่วยของโฟตอนต่อวินาทีต่อ $(mm)^2$ ต่อ $(mrad)^2$ ต่อ 0.1% bandwidth P_{coh} ที่สมนัยกับรูปที่ 5.4 แสดงในรูปที่ 5.5 โดยเส้นทึบและเส้นประหมายถึงรังสีมูลฐานและฮาร์มอนิกที่สามตามลำดับเช่นเดิม



รูปที่ 5.5 กำลังความร่วมนัยเฉลี่ยจาก undulator ที่สมนัยกับรูปที่ 5.4

5.3 Micropole undulator

Micropole undulator (MPU) เป็น undulator ที่มีคาบอยู่ในระดับ submillimeter undulator โดยทั่วไปมีคาบขนาดหลายเซนติเมตร สมมติว่า undulator โดยทั่วไปมีคาบ $\lambda_{st} = 1$ cm ดังนั้น MPU ที่มีคาบ $\lambda_u = 10^{-2}$ จะช่วยลดขนาดลง 10^2 เท่า เราจึงนิยามแฟกเตอร์ที่เรียกว่า reduction factor, f_u, ว่า

$$f_u = \frac{\lambda_{st}}{\lambda_u} \qquad (5.42)$$

โดยที่ λ_u เป็นความยาวคลื่นของ MPU, และ λ_{st} เป็นความยาวคลื่นมาตรฐานของ undulator เพื่อใช้สำหรับการเปรียบเทียบ

จากสมการ (2.10), ความยาวคลื่นของฮาร์มอนิกที่หนึ่งของรังสีจาก undulator ที่มีคาบ λ_u และทำมุม θ กับแกน z (ดูรูปที่ 2.6 ประกอบ) กำหนดโดย

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left[1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\theta^2 + \ldots\right] \qquad (5.43)$$

โดยที่ K เป็น deflection parameter, $\gamma = E/mc^2$ และ $\theta << 1$

สมมติเราลดคาบของ undulator ด้วยแฟกเตอร์ f_u ดังนั้น จากสมการ (5.43) เราสามารถสรุปข้อสังเกตุได้ดังนี้ :

(1) พลังงานของรังสีจากฮาร์มอนิกที่หนึ่งจะลดลงด้วยแฟกเตอร์ f_u เช่นกัน

(2) สำหรับ λ_1 ที่กำหนดหรือเราเลือก, เราสามารถลดพลังงานอิเล็กตรอน E ด้วยแฟกเตอร์ $f_u^{1/2}$ ดังนั้น

1. ถ้ารัศมีของวงโคจรอิเล็กตรอน, R, ถูกกำหนด, พลังงานสูญจากการแผ่รังสีจะลดลงด้วยแฟกเตอร์ $f_u^{1/2}$
2. ถ้าพลังงานสูญจากการแผ่รังสีถูกตรึงค่าไว้ ดังนั้น รัศมี R สามารถลดลงได้ด้วยแฟกเตอร์ f_u^2 ผลก็คือค่าก่อสร้างจะลดลงด้วยแฟกเตอร์ f_u^α โดยที่ $\alpha > 1$ ซึ่งค่าที่แน่นอนขึ้นกับโครงสร้างของเครื่องกล
3. สำหรับเครื่องกลที่ลดพลังงานอิเล็กตรอน E ในลักษณะที่คล้ายกันจะลดค่าก่อสร้างเช่นกัน

(3) ความบริสุทธิ์เชิงสเปกตรัม, $\lambda/\Delta\lambda$, ของรังสีจะเพิ่มขึ้นเป็น f_u เท่าเมื่อความยาว undulalor, ℓ_u, ถูกตรึงค่า เช่นถ้าไม่มีปัญหาอื่นด้านการก่อสร้าง, ถ้าเราเลือกให้ $\lambda_u = 2 \times 10^{-2}$ cm และ $\ell_u = 2$ m ดังนั้นความบริสุทธิ์เชิงสเปกตรัมจะเป็น $\lambda/\Delta\lambda = 10^4$ ทำให้ไม่จำเป็นต้องมีตัวนำแสงเอกรงค์ (monochromator) ซึ่งมีราคาแพงและต้องใช้พื้นที่มากๆ เคลื่อนย้ายลำบากและใช้เวลาก่อสร้างนาน

(4) ความยาวขั้วแม่เหล็กสามารถปรับค่าได้ทำให้หลายๆ ความถี่สามารถแผ่รังสีออกมาได้พร้อมกัน

(5) MPU ทำให้การสร้างแหล่งกำเนิดรังสีเอกซ์ที่มีราคาถูกและอุปกรณ์ขนาดเล็กกว่ามีความเป็นไปได้สูง ซึ่งสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้มากมาย

(6) เปิดโอกาสให้พิสัยของรังสีแกมมาบนวงแหวนสะสมที่มีพลังงานสูงซึ่งไม่เคยมีมาก่อนได้

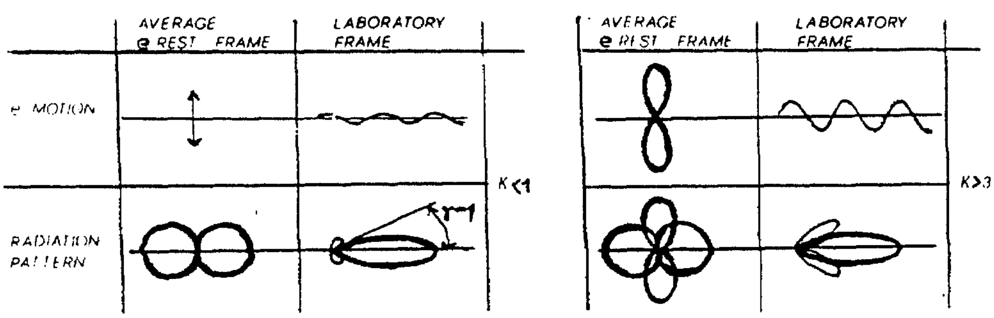
อย่างไรก็ตาม, การก่อสร้าง MPU จะมีปัญหาในรายละเอียดมากมายรวมทั้งเทคนิคในการพัฒนาให้มีคุณภาพสูงก็เป็นเรื่องที่ต้องพิจารณาด้วย

โดยทั่วไปการพิจารณา MPU จะต้องคำนึง 3 ประการหลัก คือ การออกแบบและการผลิตโครงสร้างสนาม, คุณสมบัติของรังสีที่แผ่ออกมา, และอันตรกิริยากับโครงสร้างเครื่องกล ในแต่ละองค์ประกอบนี้เป็นที่ทราบกันดีว่าคาบและช่องว่างของอุปกรณ์เสริมเป็นพารามิเตอร์หลักที่เกี่ยวข้องและเป็นตัวกำหนดคุณลักษณะที่สำคัญหลายประการ ตัวอย่างของสิ่งเหล่านี้รวมทั้งการเลือกวัสดุแลการดำเนินการ, การออกแบบ undulator และการผลิต, กลไกการทำลายล้างสนาม, ความทน (toterances), การควบคุมคุณภาพ, เทคนิคการวัดสนาม, การควบคุมความเปล่งของลำอิเล็กตรอนและชั่วชีวิต, ราคา, สมบัติการร่วมนัย, การใช้ประโยชน์ของรังสี, และอุปกรณ์สนับสนุน เราต้องสำรวจว่าสิ่งเหล่านี้มีผลทั้งโดยแยกส่วนหรือร่วมกันอย่างไรเมื่อคาบและช่องว่างของ MPU ลดลง

การมีคาบในระดับ submillimeter ทำให้ MPU เป็นอุปกรณ์ที่มีค่า K ต่ำ ในที่นี้กำหนดค่า K เป็น

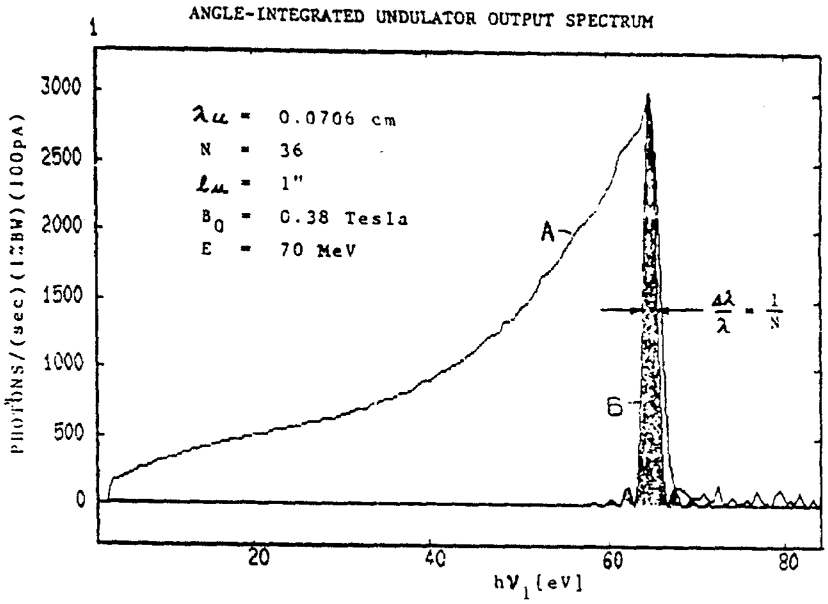
$$K = 0.934\,B_0(T)\lambda_u\ (\text{cm.}) \tag{5.44}$$

ค่าของ K มักน้อยกว่า 0.1 การมีค่า K ต่ำจะทำให้รูปแบบรังสีที่เกิดจาก MPU จะดูง่าย ซึ่งสามารถเปรียบเทียบได้จากรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.6 การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนและรูปแบบรังสีในกรอบอิเล็กตรอนที่หยุดนิ่งและในกรอบห้องปฏิบัติการ สำหรับ K < 1 และ K > 3

ภายใต้เงื่อนไขความเปล่งของลำอิเล็กตรอนเป็นศูนย์, บนแกนของ MPU จะมีความถี่หลักมูลด้วยฮาร์มอนิกที่หนึ่งที่มีความกว้างแถบ (bandwidth) หรือ $\Delta\lambda/\lambda$ เท่ากับ 1/N โดยที่ N เป็นจำนวนคาบของ undulator การแจกแจงสเปคตรัมสำหรับเซตของพารามิเตอร์ของ MPU แสดงในรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 การแจกแจงสเปกตรัมของฟลักซ์สำหรับ MPU ตามพารามิเตอร์ที่กำหนด

เส้นโค้ง A ของรูปที่ 5.7 แสดง angle-integrated spectrum และมักมีรูปร่างที่เหมือนกันสำหรับ MPU ที่มีค่า K ต่ำ ส่วนเส้นโค้ง B แสดงพิสัยสเปกตรัมซึ่งมีศูนย์กลางที่ยอดโค้งของเส้นโค้ง A และมีความกว้างแถบเป็น 1/N กำลังรวมที่แผ่ออกมาจาก MPU

$$P_{tot}(W) = 633\,E^2(GeV)B_0^2(T)\ell_u(m)I(A) \tag{5.45}$$

กำลังที่อยู่ภายในเส้นโค้ง B ซึ่งมีความกว้างแถบเป็น 1/N คือ

$$P_1 = \frac{3}{N}P_{tot} \tag{5.46}$$

ความยาวคลื่นของความถี่ฮาร์มอนิกที่หนึ่งบนแกนสำหรับ MPU ที่มีค่า K ต่ำคือ

$$\lambda_1\left(\mathring{A}\right) \simeq \frac{13.06\ \lambda_u(cm)}{E^2(GeV)} \tag{5.47}$$

ในที่นี้ E คือ พลังงานของวงแหวนสะสม, B_0 คือ สนามที่ยอดโค้ง, I คือกระแสในวงแหวนสะสม

พารามิเตอร์ 2 ตัวที่เป็นตัวกำหนดราคาของ MPU คือ ℓ_u และ E. สำหรับค่า K ต่ำๆ, พารามิเตอร์ 2 ตัว ที่เป็นตัวกำหนดประโยชน์ของ MPU คือ P_{tot} และความยาวของความร่วมนัย (coherence length), $\ell_c = N\lambda_1$. เมื่อใช้ค่า λ_1 จากสมการ (5.47) เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง ℓ_c, ℓ_u และ E เป็น

$$\ell_c\left(\overset{\circ}{\mathrm{A}}\right) = \frac{1306\ \ell_u(\mathrm{m})}{E^2(\mathrm{GeV})} \tag{5.48}$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการ (5.45) ด้วย ℓ_c เราจะได้ "coherence-power product" ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ℓ_c, ℓ_u และ P_{tot} เป็น

$$\ell_c\left(\overset{\circ}{\mathrm{A}}\right) = 829\, B_0^2\,(\mathrm{T})\,\ell_u(\mathrm{mA})\,\frac{P_{tot}(\mathrm{W})}{I(\mathrm{mA})} \tag{4.49}$$

จะสังเกตว่าพารามิเตอร์ B_0 เป็นพารามิเตอร์ที่ควบคุมขวามือของสมการ (5.49)

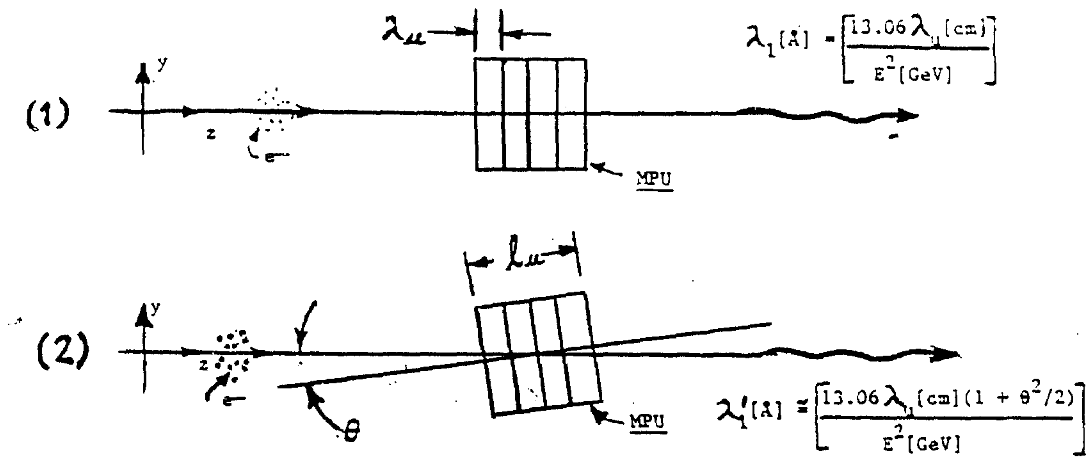
จึงเห็นได้ว่า MPU โดยทั่วไปจะเกี่ยวข้องกับ 1) รังสีที่ร่วมนัยอย่างสูงซึ่งเป็นการเพิ่มประโยชน์ของการใช้สอย 2) วงแหวนพลังงานต่ำซึ่งเป็นการลดค่าใช้จ่ายหรือต้นทุนลงได้ และ 3) ขจัดตัวทำแสงเอกรงค์ที่ค่อนข้างแพงออกไปได้ ซึ่งเป็นการลดต้นทุนลงได้อีกทางหนึ่ง การเพิ่มพารามิเตอร์บางตัวจึงนำไปสู่เงื่อนไขและข้อจำกัดเกี่ยวกับการใช้ประโยชน์ของ MPU

เราสามารถสรุปการนำ MPU ไปใช้ประโยชน์ได้ดังนี้ เริ่มจากพิสัยของรังสีเอกซ์อย่างอ่อนหรือ soft x-ray สามารถใช้ MPU สำหรับ

1) การผลิตรังสีเอกซ์ที่ร่วมนัยอย่างสูงโดยไม่จำเป็นต้องมีตัวทำแสงเอกรงค์หรือ monochromators
2) เราอาจใช้ MPU เป็น lithography source

สังเกตว่าถ้าเรายอมรับแสงทุกชนิดที่ผลิตโดย MPU ก็จะเป็นแหล่งที่กว้างมากดังแสดงในรูปที่ 5.7 และแหล่งกำเนิดนี้เหมาะสมสำหรับการทำ lithography ในย่านรังสีเอกซ์อย่างอ่อน ศักยภาพเต็มที่ของ MPU สำหรับเป็น lithography source สามารถนำไปพัฒนาสร้าง MPU สำหรับค่า K ที่สูงขึ้น $(K \geq 0.5)$.

สำหรับในพิสัยของ hard X-ray, เราอาจใช้ MPU สำหรับการศึกษาในเชิง angiography ดังแสดงในรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 แสดงระบบของ Angiography เมื่อใช้ MPU

ความจริงที่ว่า MPU สามารถมีสัญญาณออกที่ปรับได้โดยการหมุนระนาบของมันไปเล็กน้อยโดยที่ความถี่ของสัญญาณออกจะแปรตาม $\theta^2/2$ ในสถานะทั้งสองดังแสดงในรูปที่ 5.8, ความถี่บนแกนของ MPU จะถูกออกแบบให้อยู่เหนือและใต้ absorption edge. การสลับเปลี่ยนระหว่างมุมทั้งสองทำได้โดยสั่นหรือหมุน นอกจากนี้น้ำหนักที่เบาของ MPU, ความถี่ของการสลับเปลี่ยนสามารถมีค่าได้หลายร้อยรอบต่อวินาที (Hz) เราสามารถพัฒนา MPU สำหรับค่า K ที่สูงขึ้นได้เช่นกัน

ในพิสัยของรังสีแกมมา, MPU อาจใช้ประโยชน์ได้ดังนี้

1) นิวเคลียร์สเปกโทรสโกปี (nuclear spectroscopy) รังสีแกมมาที่ปรับค่าได้ด้วยความเข้มที่มากพอจะมีประโยชน์เป็นอย่างมากในการศึกษาระดับพลังงานและการเปลี่ยนระดับพลังงานในนิวเคลียสและปรากฏการณ์ Mössbauer effect การศึกษาอย่างละเอียดสามารถทำได้โดยใช้ MPU ที่มีค่า K สูงขึ้น

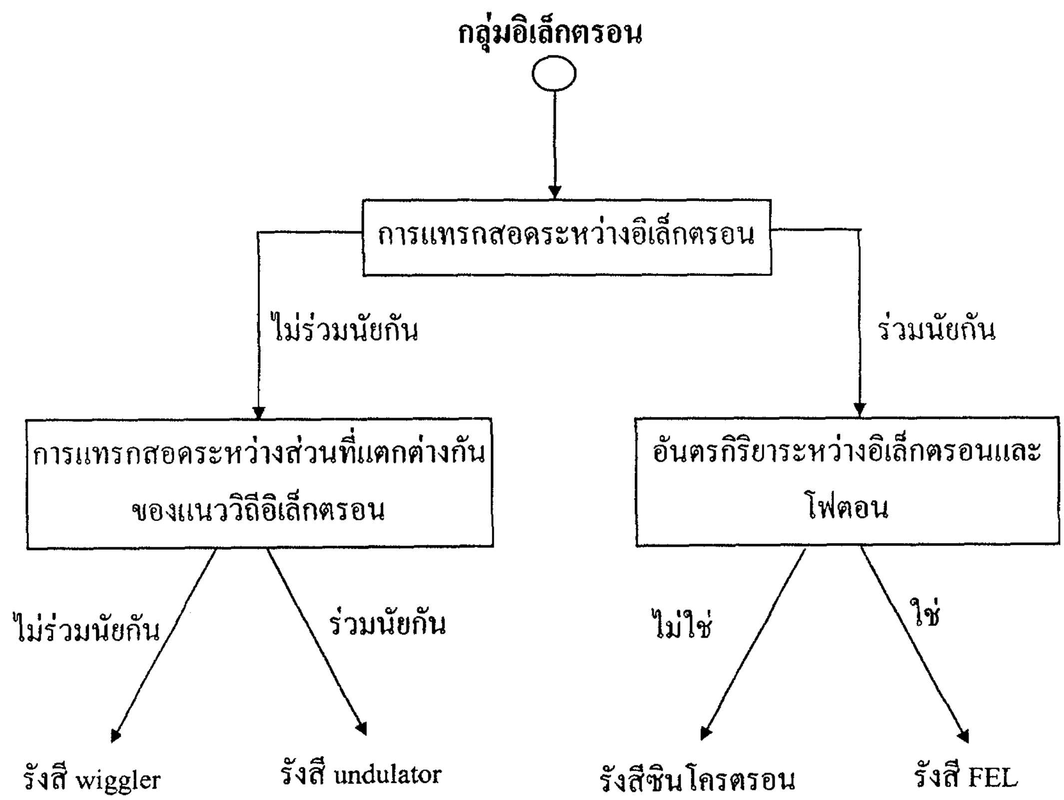
2) การศึกษาไอโซโทปและนิวเคลียส รังสีแกมมาที่มีความเข้มมากพอด้วยความถี่ที่ปรับค่าได้จะมีประโยชน์ต่อการศึกษาเกี่ยวกับไอโซโทปและนิวเคลียส โดยอาศัยการกระตุ้นด้วยกระบวนการของอันตรกิริยานิวเคลียร์ที่เป็นอิสระต่อกัน ทำให้เราเข้าใจกระบวนการได้ดีขึ้น และควบคุมได้เช่น การแบ่งแยกตัว หรือการแปรธาตุ (transmutation)

3) ฟิสิกส์ของอนุภาค MPU ด้วยค่า K ที่สูงขึ้นสามารถนำไปสู่อัตราส่วนของสัญญาณและสัญญาณรบกวนและการนำไปใช้ประโยชน์

5.4 Free Electron Laser

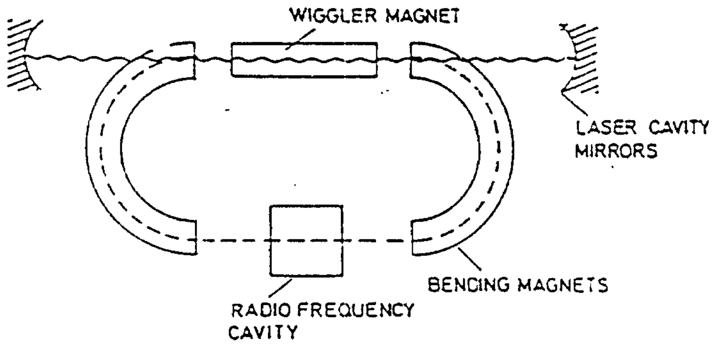
Free Electron Laser (FEL) เป็นอุปกรณ์ซึ่งลำอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพมีอันตรกิริยากับสนามผสมของแม่เหล็กที่เป็นคาบตามขวางและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าทำให้เกิดรังสีเอกรงค์ที่ร่วมนัยกัน (coherent monochromatic radiation) แนวคิดหลักเพื่อให้ได้รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากการกระตุ้น (stimulated electromagnetic radiation) โดยตรงจากอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพ

สำหรับ wiggler และ undulator ที่ได้กล่าวมาแล้ว, รังสีซินโครตรอนจากอิเล็กตรอนแต่ละตัวในลำอิเล็กตรอนจะรวมกันแบบไม่ร่วมนัยกัน และกำลังรวมของรังสีเป็นผลบวกของกำลังจากทุกอิเล็กตรอนในลำอิเล็กตรอนนั้น หรืออีกนัยหนึ่ง กำลังรวมเป็นปฏิภาคกับจำนวนอิเล็กตรอน n_e แต่ถ้าหากอิเล็กตรอนเหล่านั้นร่วมเฟส (in phase) กัน, แอมพลิจูดรังสี (ที่ไม่ใช่กำลัง) จากอิเล็กตรอนเหล่านั้นจะบวกกันทำให้กำลังของรังสีเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของจำนวนอิเล็กตรอน หรือ n_e^2 การร่วมนัยกันเช่นนี้โดยปราศจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนและโฟตอนจะเรียกว่า **coherent synchrotron radiation** แต่ใน FEL, อันตรกิริยาของโฟตอนและลำอิเล็กตรอนยังผลให้ความหนาแน่นมอดูเลชัน (density modulation) ของกลุ่มอิเล็กตรอนมีลักษณะคล้ายขนมเบื้องบางๆ แยกจากกันด้วยความยาวคลื่นหนึ่งของแสง รังสีจากทุกอิเล็กตรอนในขนมเบื้องมีเฟสเดียวกัน และแอมพลิจูดรังสีจากขนมเบื้องที่ต่างกันจะร่วมเฟสกัน การร่วมนัยกันของรังสีหรืออีกนัยหนึ่ง การซ้อนทับเชิงเส้น (linear superposition) ของแอมพลิจูดทำให้เกิดอัตราขยายกำลังรังสีที่ความถี่ FEL นั้น



รูปที่ 5.9 รังสีจากอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพในสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นคาบ

เราอาจพิจารณา FEL ว่าเป็นได้ทั้งตัวแกว่งกวัด (oscillator) หรือเครื่องขยาย (amplifiers) ในลักษณะของตัวแกว่งกวัด,สนามที่คดเคี้ยว (wiggle) จะอยู่ภายในโพรงเชิงทัศนศาสตร์ (optical cavity) ลำอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปใน wiggler, รังสีที่แผ่ออกมาจะจำกัดอยู่ภายในโพรงนั้น และสะท้อนกลับโดยกระจกจึงมีมอดูเลชันกับลำอิเล็กตรอน รังสีที่ร่วมนัยจะเกิดขึ้นและเคลื่อนผ่านกระจกที่ยอมให้โปร่งใสเป็นบางส่วนจึงกลายเป็นเลเซอร์ที่นำไปใช้ประโยชน์ได้ โครงสร้างอย่างง่ายของFEL ที่มีลักษณะเป็นตัวแกว่งกวัดของวงแหวนสะสมที่มีอุปกรณ์เสริม wiggler แสดงในรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10 โครงสร้างวงแหวนสะสมที่เสริมด้วยตัวแกว่งกวัด FEL

จากรูปที่ 5.10 สนามแม่เหล็กตามขวางที่เป็นคาบไปตามแกนจะบังคับอิเล็กตรอนให้มีวิถีที่คล้ายกับใน undulator อุปกรณ์จะคล้ายกับตัวแกว่งกวัดเมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตัดผ่านแม่เหล็กและสะท้อนอย่างต่อเนื่องโดยกระจก 2 บาน ทำให้เกิดการสั่นพ้อง โดยวิธีนี้จะให้อัตราขยายสำหรับความถี่หนึ่งที่ต้องการได้ และเรียกว่า stimulated Compton scattering.

ในลักษณะของเครื่องขยาย, ลำอิเล็กตรอนเคลื่อนผ่าน wiggler ร่วมแกนกับแสงเลเซอร์ที่ป้อนเข้าไปด้วยความยาวคลื่นที่ต้องการ อันตรกิริยาของสนามไฟฟ้าของแสงเลเซอร์และลำอิเล็กตรอนที่คดเคี้ยวทำให้อิเล็กตรอนรวมกลุ่มกันแบบขนมเบื้อง โฟตอนหรือรังสีที่แผ่ออกมาจะร่วมเฟสซึ่งกันและกัน, ร่วมเฟสกับรังสีที่แผ่ออกมาจากอิเล็กตรอนในกลุ่มอื่นๆ, รวมทั้งร่วมเฟสกับเลเซอร์ที่ป้อนเข้าไปด้วย ความร่วมนัยและความเข้มจะเพิ่มขึ้นเมื่อลำอิเล็กตรอนเคลื่อนผ่านเครื่องขยาย อีกทางเลือกหนึ่งของการผลิตรังสี คือ การผลิตจากสัญญาณรบกวน (noise) ในเครื่องขยาย

โดยปราศจากการป้อนแสงเลเซอร์เข้าไปทำให้เกิดการปล่อยรังสีที่เกิดขึ้นและขยายด้วยตัวเองหรือที่เรียกกันสั้นๆว่า SASE (self amplified spontaneous emission)

อัตราขยายและประสิทธภาพของ FEL กำหนดโดยอันตรกิริยาของลำแสงและลำอิเล็กตรอนใน wiggler สมรรถนะจะลดลงถ้าทั้งลำแสง, ลำอิเล็กตรอน, หรือ wiggler ไม่สมบูรณ์ตามที่ควรจะเป็น โดยปกติสิ่งที่ดีที่สุดซึ่งเราคาดหวังไว้เกี่ยวกับลำแสงคือการมีโมดเกาส์เซียน (Gaussian mode) อันดับต่ำสุดด้วยระยะเรย์ลี (Rayleigh distance) เหมาะที่สุด ถ้าอัตราขยายของ wiggler มีค่ามาก, โมดอาจเปลี่ยนไปและมีผลต่ออัตราขยายต่อไป ลำอิเล็กตรอนจะต้องแผ่ออกน้อยมากอย่างเพียงพอทั้งในความเร็วตามยาวและตามขวาง ถ้าความเร็วตามขวางมากเกินไป, ลำอิเล็กตรอนจะออกห่างจากลำที่เหมาะสม, ลดการซ้อนทับระหว่างกันจึงลดอัตราขยาย ถ้าความเร็วตามยาวแผ่ออกมากไป, อิเล็กตรอนบางส่วนจะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการสั่นพ้องของ wiggler

ปัญหาเกี่ยวกับ wiggler จะคล้ายกับกรณีของลำอิเล็กตรอน wiggler จะต้องตรง และแม่เหล็กจะต้องให้ลำอิเล็กตรอนเลี่ยงเบนไปอย่างถูกต้องหากแม่เหล็กเบี่ยงเบนลำอิเล็กตรอนไม่เหมาะสม, ลำอิเล็กตรอนอาจไม่ซ้อนทับกับลำแสง ลำอิเล็กตรอนอาจเบี่ยงเบนเป็นมุมกว้างพอที่จะทำให้ความเร็วตามยาวที่เหลือไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการสั่นพ้อง ถ้าแม่เหล็กภายใน wiggler แรงหรืออ่อนเกินไป, แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดของอิเล็กตรอนจะไม่เหมาะสม ทำให้ความเร็วตามยาวเปลี่ยนแปลงไม่เหมาะสมที่จะทำให้สอดคล้องกับเงื่อนไขการสั่นพ้อง ถ้า wiggler ไม่ตรงพอ, อิเล็กตรอนจะได้สนามที่ไม่เหมาะสมซึ่งอาจทำให้เกิดปัญหาดังได้กล่าวแล้ว ดังนั้นการติดตั้ง wiggler จะต้องหลีกเลี่ยงปัญหาที่ได้กล่าวมาแล้วนี้

สำหรับลำอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ผ่าน undulator, การเคลื่อนที่ตามขวางของลำอิเล็กตรอนอาจแลกเปลี่ยนพลังงานกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกัน อันตรกิริยาอาจเกิดการสั่นพ้องที่ความยาวคลื่นของฮาร์มอนิกหนึ่ง ซึ่งการถ่ายโอนพลังงานรวมมีค่าเป็นศูนย์ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอาจได้รับพลังงานหรือสูญเสียพลังงานให้กับลำอิเล็กตรอน การแผ่รังสีที่เกิดจากการถูกกระตุ้นจะเกิดขึ้นถ้าพลังงานถ่ายโอนจากลำอิเล็กตรอนไปสู่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า อันตรกิริยาของลำอิเล็กตรอนและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอาจมีผลต่อมอดูเลชันของกระแสอิเล็กตรอนที่ความถี่รังสีหนึ่งทำให้อิเล็กตรอนแผ่รังสีแบบร่วมนัยกัน

FEL ในลักษณะของตัวแกว่งกวัด หรือ **สัญญาณขนาดเล็ก** (small-signal) เกิดเมื่อทั้งอัตราขยายต่อครั้งและความเข้มคลื่นมีค่าน้อย FEL ในลักษณะของ SASE หรือ**อัตราขยายสูง** (high-gain) เกิดเมื่อมอดูเลชันของกระแสมีความแรงและอัตราขยายเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียลเริ่มจากสัญญาณรบกวน

อัตราขยายสำหรับสัญญาณขนาดเล็ก , g , หาได้จากการอินทิเกรตพลังงานถ่ายโอนไปยังคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตลอดความยาวของ undulator. Madey* พบว่าอัตราขยายดังกล่าวเป็นสัดส่วนกับอนุพันธ์ของการแจกแจงความถี่ของการแผ่ที่เกิดขึ้นเอง

อิเล็กตรอนใน undulator จะเริ่มต้นจากไม่สัมพันธ์กัน และยังคงเป็นเช่นนี้ตลอดการเคลื่อนที่ผ่าน undulator รังสีที่แผ่ออกมาในกรณีนี้เรียกว่า undulator radiation ซึ่งอุปมากับการแผ่ที่เกิดขึ้นเองในระบบอะตอม เมื่อจำนวน N ของคาบใน undulator เพิ่มขึ้น, ผลของอันตรกิริยาของรังสี-อิเล็กตรอนจะทำให้เกิดความหนาแน่นมอดูเลชันในลำอิเล็กตรอนและการขยายแบบเอกซ์โพเนนเชียลของรังสี ดังนี้รังสีจึงร่วมนัยกันตามขวางได้เต็มที่, ทำให้ได้ FEL ในลักษณะอัตราขยายสูงหรือ SASE และไม่จำเป็นต้องใช้กระจกสะท้อนแสงที่ทำให้เกิดโพรงเชิงทัศนศาสตร์ เราใช้โมดนี้ผลิตรังสีที่ความยาวคลื่นน้อยกว่า 1000 Å รวมทั้งที่ความยาวคลื่นไมโครเวฟได้

อัตราขยายของ FEL ในทั้งสองลักษณะขึ้นอยู่กับคุณภาพของลำอิเล็กตรอนนั่นคือ ความเปล่งที่ต่ำและการกระจายพลังงานที่ค่อนข้างต่ำเพื่อหลีกเลี่ยงการขยายความกว้างของเส้นสเปกตรัมรังสีที่เกิดขึ้นเอง, รวมทั้งกระแสยอดโด่งที่สูง จากการทดลองพบว่าเพื่อให้ได้อัตราขยายสูงสุดสำหรับสัญญาณขนาดเล็ก, ความเปล่ง $\varepsilon_{x,z}$ ของลำอิเล็กตรอนและการกระจายพลังงาน, σ_p, จะต้องสอดคล้องกับอสมการ

$$\varepsilon \le \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \qquad \text{และ} \qquad \sigma_p \le \frac{1}{2N}$$

และสำหรับ SASE, N จะถูกแทนที่ด้วย $1/\rho$ โดยที่ ρ เป็นพารามิเตอร์อยู่ในอันดับขนาด 10^{-3} และเป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วย

ความจริงวงแหวนสะสมอาจทำให้เกิดกระแสยอดโด่งที่สูงมากถึงหลายร้อยแอมแปร์ ซึ่งสามารถสอดคล้องกับอสมการข้างต้นได้ทั้งความเปล่งสำหรับความยาวคลื่นถึง 10 nm, และ σ_p สำหรับ $N \approx 100$ ได้ ดังนั้นจึงอาจเป็นแหล่งผลิต FEL สำหรับความยาวคลื่นสั้นได้ แต่ที่ผ่านมา FEL ที่เกิดในวงแหวนสะสมจะอยู่ในย่านสัญญาณขนาดเล็กด้วยความยาวคลื่นในช่วงแสงที่มองเห็นหรือใกล้ๆ อัลตราไวโอเลต วงแหวนสะสมปัจจุบันสามารถผลิต FEL สำหรับอัตราขยายสูงได้

บทที่ 6

สรุปและข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาเกี่ยวกับลำเส้นแสงซินโครตรอนจำเป็นต้องทราบสมบัติพื้นฐานของลำแสงนี้ก่อน สมบัติดังกล่าวคือ พลังงานและกำลังของการแผ่รังสี สเปกตรัมของรังสี โพลาไรเซชัน time structure ความเปล่งของลำอิเล็กตรอน ความสว่างของลำโฟตอนและความร่วมนัย สมบัติเหล่านี้เป็นตัวกำหนดในการออกแบบสร้างเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอน ในบทที่ 2 ได้สรุปและกำหนดค่าต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติเหล่านี้ในรูปของสมการเพื่อจะได้ใช้ในหัวข้อต่อๆ ไป

เนื่องจากผลเชิงควอนตัมที่มีต่อสมบัติของรังสีโครตรอนจากเครื่องเร่งอนุภาคสามารถตัดทิ้งได้ในเบื้องต้น ดังนั้น การศึกษาลำเส้นแสงซินโครตรอนในเชิงวิเคราะห์จึงเริ่มจากทฤษฎีแผนเดิมคือพลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมทั้งไม่เชิงสัมพัทธภาพและเชิงสัมพัทธภาพ พลศาสตร์ไฟฟ้าแผนเดิมอธิบายว่าอนุภาคมีประจุซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจะแผ่รังสีออกมา รังสีที่แผ่ออกมานี้มีค่ายืนยงสำหรับเครื่องเร่งอนุภาคแนวตรง, อัตราส่วนของกำลังที่แผ่ออกมาต่อกำลังที่ป้อนเข้าไปมีค่าน้อย แต่ถ้าให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลม, ความเร่งสู่ศูนย์กลางทำให้โมเมนตัมเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในขณะที่พลังงานเปลี่ยนแปลงค่อนข้างช้า ดังนั้น อัตราส่วนดังกล่าวจึงค่อนข้างมาก จากทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิมเราสามารถกำหนดพลังงานของรังสีที่แผ่ออกมาต่อรอบและพลังงานสูญจากการแผ่รังสีต่อรอบได้

รูปร่างของสเปกตรัมรังสีจะกำหนดในหน่วยของความถี่ลักษณะเฉพาะ กำลังของการแผ่รังสีเป็นฟังก์ชันของความยาวคลื่น แม้ว่ากำลังเป็นปริมาณที่สำคัญต่อการออกแบบอุปกรณ์ที่ใช้ผลิตรังสีซินโครตรอน แต่ในทางปฏิบัติมักใช้ปริมาณที่เรียกว่า ฟลักซ์โฟตอนซึ่งเป็นค่าของกำลังหารด้วยพลังงานโฟตอน จากการวิเคราะห์พบว่าลักษณะของสเปกตรัมรังสีซินโครตรอนจะมีลักษณะคล้ายกับการแผ่รังสีจากวัตถุดำ

ความสมเหตุสมผลของการใช้ทฤษฎีแผนเดิมสำหรับการแผ่รังสีซินโครตรอนมักกำหนดด้วยพิสัยของสนามแม่เหล็ก จากการวิเคราะห์พบว่าพิสัยของสนามแม่เหล็กซึ่งทฤษฎีแผนเดิมมีความสมเหตุสมผล (valid) แต่แรงหน่วงจากการแผ่รังสีมีค่ามากกว่าแรงโลเร็นตซ์จะถูกกำหนดด้วยอสมการ (3.76) โดยไม่คิดผลของสปิน

เกรเดียนต์ของสนามแม่เหล็กในวงแหวนสะสมทำหน้าที่เสมือนเลนส์ แม่เหล็กสี่ขั้วทำหน้าที่โฟกัสลำอิเล็กตรอนให้อยู่ใกล้กัน ระบบของเลนส์แม่เหล็กที่ใช้นำทางและโฟกัสลำอิเล็กตรอนเรียกว่า แลตทิซ และเป็นตัวกำหนดความเปล่งและสมบัติอื่นๆ ของลำแสงซินโครตรอน วิถีของลำอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสมจะเป็นการแกว่งกวัดบีตาตรอนด้วยเฟสและแอมพลิจูดที่เป็นไปได้ทุกค่า แม่เหล็กสี่ขั้วสามารถโฟกัสลำอิเล็กตรอนทั้งในแนวราบและแนวดิ่งซึ่งเป็นไปตาม

ทฤษฎีการโฟกัสอย่างแรง พลังงานของอิเล็กตรอนที่สูญเสียไปจากการปล่อยรังสีซินโครตรอนจะถูกชดเชยด้วยโพรงความถี่วิทยุ

ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายทัศนศาสตร์ของลำอิเล็กตรอนมี 4 ตัว คือ ฟังก์ชันแอมพลิจูด, ฟังก์ชันความเปล่ง, tune หรือความถี่, และฟังก์ชันการกระจาย

แม่เหล็กสี่ขั้วจะโฟกัสในระนาบหนึ่งและถ่างแสงในอีกระนาบหนึ่ง ดังนั้นเครื่องเร่งอนุภาคจึงไม่สามารถทำให้แม่เหล็กโฟกัสในระนาบเดียวเท่านั้น และเราสามารถอธิบายได้ในรูปของเมทริกซ์ตามทัศนศาสตร์เชิงเรขาคณิต

จากการศึกษาเชิงวิเคราะห์พบว่าสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคในลำแสงซินโครตรอนจะคล้ายกับสมการของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกอย่างง่าย โดยที่ค่าคงตัวสปริงในตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกจะถูกแทนที่ด้วยเทอม K ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง K(s) เป็นสัดส่วนกับสนามแม่เหล็กสี่ขั้วโดยแปรเปลี่ยนตามตำแหน่งของแลตทิซแต่จะมีค่าคงตัวภายในแต่ละองค์ประกอบของเครื่องเร่งอนุภาค แม้ว่า K เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ s, แต่เครื่องเร่งอนุภาคมักทำให้ K มีลักษณะเป็นคาบ ดังนั้นผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่จึงมีรูปแบบของ Hill's equation และกำหนดด้วย Courant-Snyder parameter ซึ่งหาได้โดยวิธีเมทริกซ์

ผลเฉลยทั่วไปของสมการการแกว่งกวัดบีตาตรอนจะนำไปสู่ค่าความนำเชิงซ้อนและความเปล่งภายใต้เงื่อนไขการคงตัวของโมเมนตัมรวม แต่อิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมในวงแหวนสะสมและแผ่รังสีซินโครตรอนออกมาทำให้พลังงานและโมเมนตัมลดลง จึงต้องพิจารณาสมการการเคลื่อนที่แบบหน่วงและการแก้สมการตามแบบมาตรฐานทั่วไป

สนามแม่เหล็กของ bending magnet ทำให้อนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงโคจรแบบวงกลมมีโมเมนตัมแตกต่างไปจากอนุภาคในอุดมคติโดยมีการแกว่งกวัดบีตาตรอนรอบๆ วงโคจรปิดภายในเครื่องเร่ง เนื่องจากแม่เหล็กเบนโมเมนตัมของอนุภาคที่สูงกว่าด้วยมุมที่น้อยกว่า ดังนั้น วงโคจรปิดแตกต่างกันไปสำหรับอนุภาคที่มีโมเมนตัมแตกต่างกันและอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันการกระจายโมเมนตัม, $\eta(p, s)$ ฟังก์ชันที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคเบี่ยงเบนจึงมี 4 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันการกระจาย, η, และอนุพันธ์ของ η เทียบกับตัวแปรอิสระ s และสภาพคลาดรงค์ ξ ทั้งในแนวราบและแนวดิ่ง เราสามารถแก้สมการการเคลื่อนที่โดยใช้แนวคิดของเมทริกซ์

การที่ bending magnet ให้สนามแม่เหล็กที่แตกต่างไปจากที่เราต้องการทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนที่เรียกว่า steering error ทำให้วงโคจรบิดเบี้ยวไปและแก้ไขได้โดยใช้เซตของแม่เหล็กที่เหมาะสมและอิสระต่อกัน ข้อผิดพลาดจากเกรเดียนต์สนามแม่เหล็กซึ่งทำหน้าที่โฟกัสจะทำให้ tune ของเครื่องเร่งเปลี่ยนไปและความไม่เสถียรเกิดขึ้นเมื่อ tune, v, มีค่าใกล้เคียงจำนวนเต็มหรือกึ่งจำนวนเต็ม

สภาพคลาดรงค์เกิดจากการเปลี่ยน tune อันเนื่องจากโมเมนตัม ซึ่งสามารถคำนวณโดยใช้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเลื่อน tune กับข้อผิดผลาดจากเกรเดียรต์ การปรับแก้สภาพคลาดรงค์จะใช้แม่เหล็กที่ให้เกรเดียนต์ที่เป็นฟังก์ชันของโมเมนตัม นั่นคือแม่เหล็กหกขั้ว

เนื่องจากบางค่าของ tune อาจคุกคามเสถียรภาพของการเคลื่อนที่ของลำอิเล็กตรอนในวงแหวนสะสม ทำให้เกิดเพอร์เทอร์เบชันเชิงแม่เหล็กจนแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดเปลี่ยนแปลงไป การหน่วงที่เกิดจากการแผ่รังสีจะหักล้างกับการเพิ่มแอมพลิจูดเมื่อมีอันดับขนาดเดียวกันหรือเกิดการสั่นพ้อง การสั่นพ้องทำให้เกิดวงโคจรปิดที่บิดเบี้ยวไปและมีผลต่อการเคลื่อนที่ของลำโฟตอนในกรณีของแม่เหล็กหกขั้ว, การสั่นพ้องอาจเกิดจากหลายเงื่อนไข

การสั่นพ้องเชิงเส้นจะแตกต่างจากการสั่นพ้องไม่เชิงเส้น ในกรณีของการสั่นพ้องเชิงเส้น, ลำเส้นทั้งหมดอาจเสถียรหรือไม่เสถียรก็ได้ แต่ในกรณีของการสั่นพ้องไม่เชิงเส้น, การเคลื่อนที่อาจเสถียรหรือไม่เสถียรขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดและไม่ก่อให้เกิดสิ่งที่เรียกว่า stopband

อุปกรณ์เสริมที่เรียกว่า wiggler ช่วยเพิ่มพลังงานวิกฤตและเลื่อนทุกสเปกตรัมไปสู่พลังงานที่สูงกว่าจึงเรียกว่าเป็น wavelenth shifter และความเข้มของรังสีซินโครตรอนจะเพิ่มขึ้นเป็น 2N เท่า ส่วนอุปกรณ์เสริมที่เรียกว่า undulator ช่วยทำให้รังสีซินโครตรอนเป็นแสงเอกรงค์ และความเข้มของรังสีเพิ่มขึ้น N^2 เท่า ยอดโด่งจากฮาร์มอนิกต่างๆ อันเนื่องจาก wiggler จะอยู่ใกล้กันมากจนดูคล้ายต่อเนื่องกัน แต่ยอดโด่งจาก undulator จะเห็นได้ชัดเจน

ความสว่างและความร่วมนัยของรังสีซินโครตรอนมักอธิบายในปริภูมิเฟสซึ่งบอกให้ทราบว่ารังสีแผ่กระจายผ่านตัวกลางได้อย่างไร และก่อให้เกิดรูปแบบการแทรกสอดและภาพได้อย่างไร และยังเป็นมูลฐานที่เหมาะสมสำหรับการอธิบายผลของความเปล่งของลำอิเล็กตรอน ความสว่างของรังสีซินโครตรอนหาได้จากการผสมผสานของความสว่างของอิเล็กตรอนหนึ่งตัวและฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของอิเล็กตรอนในปริภูมิเฟส

ความร่วมนัยแสดงระดับขั้นที่รังสีแสดงรูปแบบการแทรกสอด อาจแยกได้เป็น 2 ชนิด คือ ความร่วมนัยตามขวางของการรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้าที่สองจุดบนระนาบตามขวางที่เวลาหนึ่ง และความร่วมนัยเชิงเวลากำหนดจากความยาวความร่วมนัยซึ่งคลื่นยังคงมีความสัมพันธ์เชิงเฟสอยู่ ส่วนความร่วมนัยตามขวางกำหนดจากฟลักซ์ความร่วมนัยตามขวาง

micropole undulator หรือ MPU เป็น undulator ที่มีคาบในช่วงสั้นๆ ทำให้ช่วยลดขนาดลงได้มากโดยกำหนดจาก reduction factor, f_y. เมื่อเราใช้ MPU จะช่วยทำให้พลังงานอิเล็กตรอนลดลง พลังงานสูญจากการแผ่รังสีลดลง หรืออาจทำให้รัศมีวงโคจรอิเล็กตรอนลดลง, ค่าก่อสร้างจะลดลงด้วย

การใช้ MPU จะช่วยเพิ่มความบริสุทธิ์เชิงสเปกตรัมทำให้ไม่ต้องมีตัวทำแสงเอกรงค์ที่มีราคาแพง ทำให้การสร้างแหล่งกำเนิดรังสีเอกซ์มีราคาถูกลงและขยายพิสัยของรังสีแกมมาบนวงแหวนสะสม

การมีคาบในระดับที่น้อยกว่ามิลลิเมตรทำให้ MPU เป็นอุปกรณ์ที่มีค่า K ต่ำทำให้รูปแบบรังสีที่เกิดจาก MPU ดูง่ายขึ้น พารามิเตอร์ 2 ตัวที่เป็นตัวกำหนดประโยชน์ของ MPU คือ P_{tot} และความยาวของความร่วมนัย ℓ_c ซึ่งต้องเกี่ยวข้องกับความร่วมนัยอย่างสูงทำให้เพิ่มประโยชน์ในการใช้สอย โดยอาจเริ่มจากพิสัยของรังสีเอกซ์อย่างอ่อน การใช้ทำเป็น lithography source และในพิสัยของ hard x-ray สำหรับการศึกษาในเชิง angiography

รังสีซินโครตรอนจากอิเล็กตรอนใน wiggler และ undulator จะรวมกันแบบไม่ร่วมนัยกันทำให้กำลังรวมเป็นปฏิภาคกับจำนวนอิเล็กตรอน n_e แต่ถ้าหากอิเล็กตรอนเหล่านั้นร่วมเฟสกัน, กำลังรวมจะเป็นสัดส่วนกับ n_e^2 การร่วมนัยกันโดยปราศจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนและโฟตอนจะให้รังสีซินโครตรอน แต่ถ้าเป็นการร่วมนัยกันโดยมีอันตรกิริยาระหว่างลำอิเล็กตรอนและโฟตอนจะให้รังสีเอกรงค์หรือที่เรียกว่ารังสี FEL ซึ่งเป็นรังสีที่เกิดจากการกระตุ้นโดยตรงจากอิเล็กตรอนเชิงสัมพัทธภาพ FEL อาจเป็นได้ทั้งตัวแกว่งกวัดและเครื่องขยาย อย่างไรก็ตามการนำ FEL ไปติดตั้งกับเครื่องกำเนิดแสงซินโครตรอนเป็นงานที่ค่อนข้างใช้เทคนิคค่อนข้างสูง

บรรณานุกรม

Blewett, J.P., 1946, Phys.Rev. **69**, 87.

Bonifacio, B., N. Narducci and C. Pellegrini, 1984, Opt. Comm. **50**, 373.

Bonifacio, R., L. Fonda and C. Pellegrini, 1988, **Undulator Magnets for Synchrotron Radiation and Free Electron Lasers** (World Scientific, Singapore).

Bordovitsyn, V.A., 1999, **Synchrotron Radiation Theory and Its Development** (Word Scientific, Singapore).

Brown, G.S. and D.E. Moncton, 1991, **Handbook on Synchrotron Radiation** (North-Holland, Amsterdam).

Catlow, C.R.A. and G.N. Greaves, 1972, **Application of Synchrotron Radiation** (Chapman and Hall, New York).

Edward, D.A. and M.J. Syphers, 1965, **An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators** (Wiley, New York).

Ivanenko, D. and J. Pomeranchuk, 1944, Phys. Rev. **65**, 343.

Jackson, J.D., 1975, **Classical Electrodynamics** (Wiley, New York).

Kim, K.J., 1986, Nucl. Instr. Meth. **A246**, 71.

Koch, E.E., 1983, **Handbook on Synchrotron Radiation** (North Holland, Amsterdam).

Landau, L.D. and E.M. Lifshitz, 1980, **The Classical Theory of Fields** (Pergamon Press, Oxford).

Larmor, J., 1897, Phil. Mag. **44**, 503.

Lie'nard , A., 1898, L' Eclairage Electr. **16**, 5.

Madey, J.M.J., 1979, Nuovo Cimento. **64**, 221.

Schott, G.A., 1907, Ann. Phys. **24**, 635.

Schott, G.A., 1912, **Electromagnetic Radiation** (Cambridge University Press, Cambridge).

Schwinger, J., 1946, Phys. Rev. **70**, 798.

Schwinger, J., 1949, Phys. Rev. **75**, 1912.

Schwinger, J., 1954, Proc. Nat. Acad. Sci. US. **40**, 132.

Sokolov, A.A. and I.M. Ternov, 1968, **Synchrotron Radiation** (Akademie Verlag, Berlin).

Sommerfeld, A., 1949, **Eiktrodynamik** (Akademische Verlagsgesell schaft, Leipzig).

Tomboulian, D.H. and P.L. Hartmann, 1956, Phys. Rev. **102**, 1423.

Winick, H. and S. Doniach, 1980, **Synchrotron Radiation Research** (Plenum, New York).

ประวัตินักวิจัย

ชื่อ-สกุล : รศ.ดร.สำเนา ผาติเสนะ

ตำแหน่ง : รองศาสตราจารย์

วัน เดือน ปี เกิด : 9 กรกฎาคม 2492

สถานที่เกิด : จังหวัดปัตตานี

วุฒิการศึกษา :

ปริญญาบัตร	สถานศึกษา	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วท.บ. (ฟิสิกส์)	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2515
วท.ม. (ฟิสิกส์)	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	2520
Ph.D. (Physics)	University of Poona (India)	2528

ประสบการณ์ :

ระหว่างปี 2515 – 2516 อาจารย์ที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี

ระหว่างปี 2516 – 2535 อาจารย์ที่สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี

ระหว่างปี 2535 – ปัจจุบัน อาจารย์ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผลงานวิชาการ :

เขียนตำรา และเอกสารประกอบการสอน ไม่น้อยกว่า 15 เรื่อง

บทความทางวิชาการ ปีละไม่น้อยกว่า 1 เรื่อง

งานวิจัย ไม่น้อยกว่า 10 เรื่อง

สถานที่ติดต่อได้ :

สถาบันวิจัยและพัฒนา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี