$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|x-x_0|^{n+1} \qquad (3.3.5)$$

ขอบเขตของ
ค่าคลาดเคลื่อน
ตัดปลาย

ตัวอย่างที่ 3.3.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้นใด ๆ สำหรับ $f(x)=\sin x$ รอบจุด $x_0=0$ และแสดงพจน์เศษเหลือ

วิธีทำ

หาค่าของอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ $\sin x$ ที่ 0

$$\begin{array}{rlrl}
f(x) = & \sin x, & f(0) = & 0, \\
f'(x) = & \cos x, & f'(0) = & 1, \\
f''(x) = & -\sin x, & f''(0) = & 0, \\
f'''(x) = & -\cos x, & f'''(0) = & -1, \\
f^{(4)}(x) = & \sin x, & f^{(4)}(0) = & 0, \\
\vdots & & \vdots &
\end{array}$$

ฉะนั้น $f^{(2k)}(0)=0$ และ $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$

เพราะว่าอนุพันธ์อันดับเลขคู่ของ $f(x)=\sin x$ ที่ $x_0=0$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เมื่อแทนค่า $x_0=0$ ในสมการ ได้พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\sin x$ รอบจุด $x_0=0$ ซึ่งมีเฉพาะพจน์กำลังเลขคี่ ดังนี้

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

และเพราะว่า $f^{(2n+1)}(\xi) = (-1)^n\cos\xi$ แทนในสมการ (3.3.3) ได้พจน์เศษเหลือในรูป

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.3.1) สามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ ในรูป

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{\text{พหุนามเทย์เลอร์}} + \underbrace{(-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}}_{\text{เศษเหลือ}}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.3.2 จงกระจาย e^x ในรูปพหุนามเทย์เลอร์ รอบจุด $x_0 = 0$ และพจน์เศษเหลือ

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.1 พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0 = 0$ สำหรับ $f(x) = e^x$ คือ

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

และเพราะว่า $f^{(n+1)}(x) = e^x$ จากสมการ (3.3.3) ได้พจน์เศษเหลือ คือ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.3.1) สามารถเขียนฟังก์ชัน e^x ในรูป

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{พหุนามเทย์เลอร์}} + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{\text{เศษเหลือ}}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.3.3 จงหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ ในการประมาณ $f(x)=e^x$ บนช่วงปิด $[-1,1]$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0=0$ และพิจารณาว่า อย่างน้อยที่สุดระดับขั้น n ควรเป็นเท่าใด เพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5×10^{-5}

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 3.3.2 พจน์เศษเหลือจากพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0=0$ สำหรับ $f(x)=e^x$ คือ

$P_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ | $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

เพราะว่า $|x|\le 1$ และ ξ อยู่ระหว่าง x และ 0 ดังนั้นสามารถหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายได้ดังนี้

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!}$$

และถ้าต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5×10^{-5} สามารถใช้ขอบเขตที่ได้ โดยให้

$$\frac{e}{(n+1)!} < 0.5\times10^{-5}$$

เพราะว่า $e/10! \cong 0.7\times10^{-6}$ ดังนั้น $n\ge 9$ นั่นคือ ต้องใช้พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้นอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 9 เพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายน้อยกว่าค่าที่กำหนดมาให้ □

ในการหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ อาจต้องใช้ทฤษฎีบทอนุกรมสลับต่อไปนี้ โดยจะไม่แสดงรายละเอียดการพิสูจน์ของทฤษฎีบท ซึ่งสามารถศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสทั่วๆ ไป

ทฤษฎีบทอนุกรมสลับ 3.3.3

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรมสลับ

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

ลู่เข้า นั่นคือ

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n < \infty$$

เมื่อ $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_n$ และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

$$\left| S - S_n \right| \leq a_{n+1} \tag{3.3.6}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 ถ้าประมาณค่าของ $\sin 1$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ โดยต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ น้อยกว่า 0.5×10^{-6} แล้วต้องใช้จำนวนพจน์อย่างน้อยที่สุดเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 3.3.1 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\sin x$ รอบจุด $x_0 = 0$ คือ

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

แทนค่า $x = 1$ ได้

$$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} = S_n$$

เพราะว่าพจน์ของ S_n สอดคล้องตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทอนุกรมสลับ ดังนั้นจากอสมการ (3.3.6)

$$\left| R_{2n+1}(x) \right| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

โดยให้

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 0.5\times 10^{-6}$$

แล้วแก้อสมการหาค่า n

$$\log_{10}(2n+1)! > \log_{10} 2 + 6 \cong 6.3$$

เพราะว่า $\log_{10}(10!) \cong 6.6$ ดังนั้น $n \ge 5$ นั่นคือ ต้องใช้อย่างน้อยที่สุด 5 พจน์ ดังนี้

$$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} \qquad \square$$

3.4 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series)

จากทฤษฎีบทเทย์เลอร์ สามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I ในรูปผลบวกของพหุนามเทย์เลอร์รอบจุด $x_0 \in I$ และเศษเหลือ ดังนี้

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \;+\; R_n(x)$$

ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} R(x) \;=\; 0$$

สำหรับแต่ละ $x \in I$ แล้ว ผลที่ได้คือ อนุกรมกำลังสำหรับ $f(x)$ ในรูป

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (3.4.1)$$

นั่นคือ อนุกรมกำลังในสมการ (3.4.1) ลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in I$ โดยอนุกรมนี้มีชื่อเรียกว่า อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในกรณีที่ $x_0 = 0$

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}\, x^k \qquad (3.4.2)$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's series) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$

ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 3.3.1 และ 3.3.2 สามารถสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือของฟังก์ชันได้ โดยใช้ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ ในที่นี้ได้สรุปกรณีของฟังก์ชันหลัก ๆ ดังนี้

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \qquad (3.4.3)$$

sin x^3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi \quad (3.4.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi \quad (3.4.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \quad (3.4.6)$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + \binom{r}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-r}} \quad (3.4.7)$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ค่าของ ξ ในสมการ (3.4.3) - (3.4.7) อยู่ระหว่าง x และ 0

จากเอกลักษณ์พีชคณิต สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$$

จัดใหม่ในรูป

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (3.4.8)$$

ซึ่งก็คือ พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $1/(1-x)$ หรือเป็นกรณีเฉพาะของสมการ (3.4.7) โดยแทน r ด้วย -1 และแทน x ด้วย $-x$ สำหรับพจน์เศษเหลือที่ได้ในสมการ (3.4.8) มีรูปแบบที่ง่ายในการคำนวณกว่าพจน์เศษเหลือในสมการ (3.4.7) ผลที่ตามมา

อีกอย่างคือ ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการ (3.4.8) จะได้พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $1/(1+x)$ ดังนี้

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x} \qquad (3.4.9)$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน e^{-x} และ e^{-x^2}

วิธีทำ

สร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน e^{-x} และ e^{-x^2} โดยแทน x ด้วย $-x$ และแทน x ด้วย $-x^2$ ในสมการ (3.4.3) ตามลำดับ ผลที่ได้คือ

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง $-x$ และ 0

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง $-x^2$ และ 0 $\square$

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $\arctan x$

วิธีทำ

การสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\arctan x$ สามารถใช้สมการ (3.4.9) ได้ โดยเริ่มด้วยการแทน x ด้วย t^2 ในสมการ (3.4.9)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง x ได้

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}$$

ทำให้ได้พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $\arctan x$ ซึ่งง่ายกว่าการสร้างพหุนามเทย์เลอร์โดยตรง สำหรับการหาปริพันธ์ซึ่งทำให้ได้พจน์เศษเหลือนั้นใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (integral mean value theorem) □

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงสร้างอนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน e^x

วิธีทำ จากสมการ (3.4.3) พิจารณาพจน์เศษเหลือ

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

โดยตรึงค่า x และเพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ดังนั้น สำหรับแต่ละจำนวนจริง x

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} = 0$$

ทำให้ได้ว่า อนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน e^x คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

และอนุกรมลู่เข้าสู่ e^x สำหรับแต่ละจำนวนจริง x □

ตัวอย่างที่ 3.4.4 จงสร้างอนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน $\sin x$

วิธีทำ จากสมการ (3.4.4) พิจารณาพจน์เศษเหลือ

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi$$

โดยตรึงค่า x และเพราะว่า $|\cos\xi| \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \right| \le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = 0$$

ดังนั้น อนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน $\sin x$ คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

และ อนุกรมลู่เข้าสู่ $\sin x$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง x □

สำหรับกรณีที่เหลือในสมการ (3.4.5) - (3.4.9) พิจารณาพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ ในแต่ละกรณีโดยให้ $n \to \infty$ เพื่อวิเคราะห์การลู่เข้า จะทำให้รู้ว่า อนุกรมลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับค่าใดของ x สรุปอนุกรมแมคคลอรินของฟังก์ชันหลัก ๆ และช่วงที่อนุกรมลู่เข้าใน ตารางที่ 3.4.1

อนุกรมแมคคลอริน	ช่วงที่อนุกรมลู่เข้า
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$	$-1 < x \le 1$
$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$-1 < x < 1$
$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$-1 \le x \le 1$

ตารางที่ 3.4.1

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. กำหนดให้ $p_9(x) = 2 - x^2 + 4x^3 - 8x^4 + 2x^6 - 5x^7 + 5x^9$

   (1) จงหา flops สำหรับการคำนวณ $p_9(x)$ ในรูปกำลัง

   (2) จงเขียน $p_9(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน แล้วหา flops

2. กำหนดให้ $p_6(x) = 3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 5$

   (1) จงเขียน $p_6(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

   (2) จงคำนวณค่าของ $p_6(2)$ และ $p_6(-1)$ โดยจัดในรูปตารางฮอร์เนอร์ แล้วหาผลหาร $q(x)$ เมื่อหาร $p_6(x)$ ด้วย $x-2$ และ $x+1$ โดยเขียน $p_6(2)$ ในรูป $p_6(x) = q(x)(x-c) + p_6(c)$

3. กำหนดให้ $p_5(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x - 5$

   (1) จงเขียน $p_5(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

   (2) จงคำนวณค่าของ $p_5(3)$ และ $p_5(-2)$ ในรูปตารางฮอร์เนอร์ แล้วหาผลหาร $q(x)$ เมื่อหาร $p_5(x)$ ด้วย $x-3$ และ $x+2$. โดยเขียน $p_5(x)$ ในรูป $p_5(x) = q(x)(x-c) + p_5(c)$

4. จงแสดงโดยใช้ตารางฮอร์เนอร์ว่า

   (1) $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ

   (2) $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวกคู่ n ใด ๆ

   (3) $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $x^n + 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวกคี่ n ใด ๆ

5. จงเขียนพหุนาม $p_3(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 8$ รอบจุด 1 และ -2

6. จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 - x^2 - 5x + 1$ ระดับขั้น 5 รอบจุด $x_0 = -1$

7. จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = \ln(1-x)$ รอบจุด $x_0 = 0$ ระดับขั้น 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 แล้วประมาณค่าของ $\ln(0.1)$ และ $\ln(0.8)$

8. จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ รอบจุด $x_0 = 0$ ระดับขั้น n ใดๆ สำหรับฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(2) $f(x) = e^{-x^2}$

(3) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(4) $f(x) = x \cos x$

9. กำหนดให้ $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

(1) จงเขียนสามเทอมแรกของพหุนามเทย์เลอร์ของ e^{-t^2} รอบจุด $t = 0$

(2) จงประมาณค่าของ $F(x)$ โดยการแทน e^{-t^2} ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ในข้อ (1)

10. สำหรับค่า x ในช่วง $[-1, 1]$ ถ้าประมาณ e^x ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด $x_0 = 0$ และถ้าต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายน้อยกว่า $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$ แล้วอย่างน้อยที่สุดระดับขั้นของพหุนามเทย์เลอร์ต้องเป็นเท่าใด

11. กำหนดให้ $f(x) = \ln(1+x), \quad -0.5 < x \le 1$

(1) จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น 4 สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$

(2) จงใช้ทฤษฎีบทเทย์เลอร์หาเศษเหลือ $R_4(x)$ และหาขอบเขตของ $R_4(x)$

12. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(1) จงสร้างตารางของอนุพันธ์อันดับ 1-5 ของ $f(x)$ และแทนค่าที่ $x = 2$ และ $x = 0$

(2) จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น 0- 5 ของ $f(x)$ รอบจุด $x_0 = 2$ และ $x_0 = 0$

(3) จงประมาณค่าของ $f(2.2)$ และ $f(-0.1)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น $0-5$ ในข้อ (2) และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์ (โดยเปรียบเทียบกับค่าที่แท้จริง)

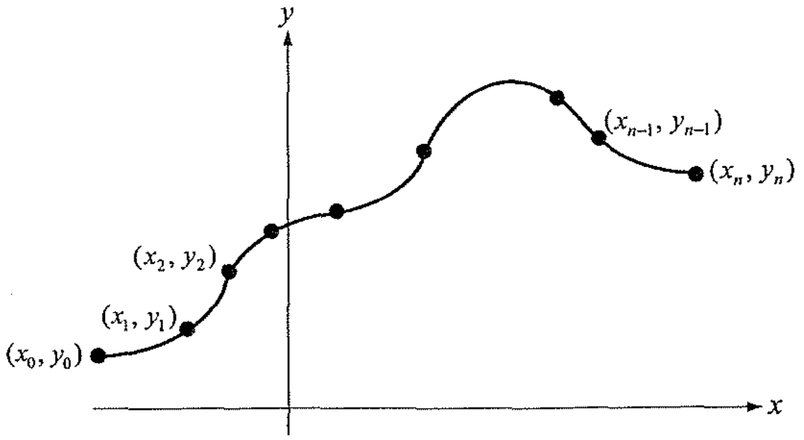
บทที่ 4
การอินเทอร์โพเลต (Interpolation)

4.1 พหุนามอินเทอร์โพเลต (Interpolating Polynomials)

ในปัญหาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่จำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันหรือหาสูตร เพื่อเชื่อมโยงระหว่างตัวแปร 2 ตัวจากเซตของจุดข้อมูลจำนวนหนึ่ง โดยมีสมมุติฐานว่า ตัวแปรทั้งสองเชื่อมโยงกันด้วยฟังก์ชัน ๆ หนึ่ง กระบวนการอันหนึ่งที่ใช้คือ การสร้างฟังก์ชันโดยให้กราฟของฟังก์ชันผ่านจุดข้อมูลจำนวนจำกัดจำนวนหนึ่ง หรือที่เรียกว่า การอินเทอร์โพเลต เช่น มีเซตของจุดข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots, (x_n, y_n)\}$$

โดยที่ค่าของ x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน การอินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ ในเชิงเรขาคณิต ก็คือ การลากเส้นเชื่อมโยงจุดเหล่านี้นั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1

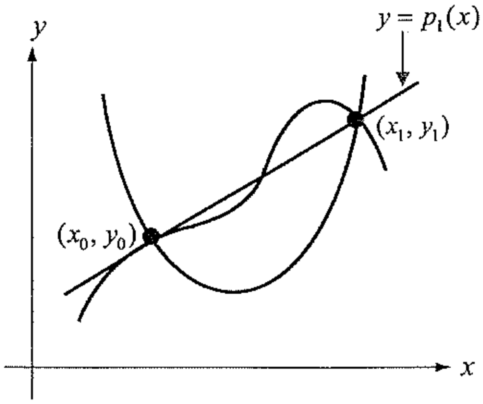


รูปที่ 4.1.1

ปัญหาคือ การลากเส้นเชื่อมโยงจุดข้อมูลเหล่านี้ทำได้หลายลักษณะ ด้วยเหตุนี้ การสร้างฟังก์ชันเพื่ออินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลจึงเลือกฟังก์ชันชนิดฟังก์ชันพหุนาม เพราะว่าฟังก์ชันพหุนามมีสมบัติที่เด่นชัดประการหนึ่งคือ สำหรับจุดข้อมูล $n+1$ จุดที่ไม่ซ้ำกัน ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นอย่างมากที่สุด n ซึ่งกราฟผ่านทั้ง $n+1$ จุดนี้ มีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น (uniqueness) ตัวอย่างเช่น สำหรับข้อมูล 2 จุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1) โดยที่ $x_0 \neq x_1$ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 1 หรือฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) เพียงหนึ่งเดียวที่กราฟผ่านทั้งสองจุดนี้คือ

$$p_1(x) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + y_0 \tag{4.1.1}$$

ความชันของเส้นตรงคือ $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ ฉะนั้น ถ้าไม่จำกัดว่าเลือกฟังก์ชันเชิงเส้น แล้วจะมีเส้นโค้งอีกหลายเส้นที่ผ่านจุดทั้งสองนี้ได้ ดังรูปที่ 4.1.2



รูปที่ 4.1.2

สำหรับข้อมูล 3 จุด (x_0, y_0), (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) โดยที่ x_0, x_1, x_2 ไม่ซ้ำกัน สามารถสร้าง $p_2(x)$ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นไม่เกิน 2

$$p_2(x) = a + bx + cx^2 \tag{4.1.2}$$

หรือฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) เพียงหนึ่งเดียวที่กราฟผ่านทั้งสามจุดนี้ได้ โดยใช้เงื่อนไขที่กราฟของ $p_2(x)$ ต้องผ่านทั้งสามจุดนี้

$$p_2(x_0) = y_0, \quad p_2(x_1) = y_1, \quad p_2(x_2) = y_2$$

ทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ ซึ่งมี a, b, c เป็นตัวไม่รู้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} a + bx_0 + cx_0^2 &= y_0 \\ a + bx_1 + cx_1^2 &= y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 &= y_2 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

หรือเขียนระบบสมการ (4.1.3) ในรูปสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

ดำเนินการแก้สมการหาค่าของ a, b, c ก็จะได้ $p_2(x)$ ในสมการ (4.1.2) ซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้งสามจุด

ในกรณีเซตของจุดข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots, (x_n, y_n)\}$$

โดยที่ค่าของ x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน ในทำนองเดียวกับกรณีข้างต้น ถ้าสร้างฟังก์ชันพหุนามฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นไม่เกิน n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{4.1.5}$$

โดยให้อินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ แล้ว $p_n(x)$ ต้องสอดคล้องตามเงื่อนไข

$$p_n(x_0) = y_0, \quad p_n(x_1) = y_1, \quad p_n(x_2) = y_2, \ \ldots, \ p_n(x_n) = y_n \tag{4.1.6}$$

ทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้น $n+1$ สมการ ซึ่งมี a_0, a_1, a_2, …, a_n เป็นตัวไม่รู้ค่า โดยเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.1.7}$$

เมทริกซ์ $X = \left[x_k^j\right],\ k, j = 0, 1, \ldots, n$ ในสมการ (4.1.7) มีชื่อเรียกว่า เมทริกซ์วองแดร์มงด์ (Vandermonde matrix) โดยสามารถแสดงได้ว่า

$$\det(X) = \prod_{0 \le k < j \le n} (x_k - x_j) \tag{4.1.8}$$

เพราะว่าค่าของ $x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน ฉะนั้น $\det(X) \neq 0$ จึงได้ว่าสมการ (4.1.7) มีผลเฉลย $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น สรุปได้ว่าฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในสมการ (4.1.5) ซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ มีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น และเรียกฟังก์ชันพหุนามที่อินเทอร์โพเลตข้อมูล $n+1$ จุดนี้ว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตระดับขั้น n

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงสร้างพหุนามเชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดบนกราฟของ $y = \cos x$ ที่ $x = 0$ และ $\dfrac{\pi}{3}$

วิธีทำ

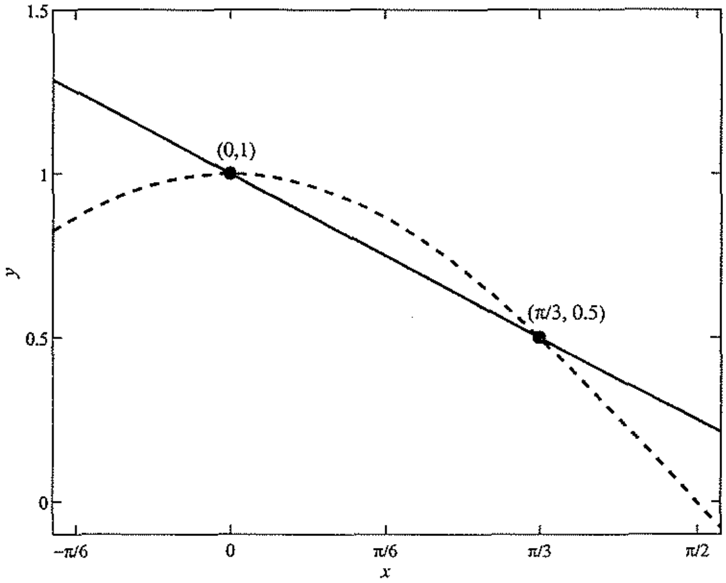
ให้ $x_0 = 0$ และ $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ คำนวณ

$$y_0 = \cos x_0 = \cos 0 = 1 \quad \text{และ} \quad y_1 = \cos x_1 = \cos\frac{\pi}{3} = 0.5$$

แทนค่า x_0, x_1, y_0, y_1 ในสมการ (4.1.1) ได้พหุนามเชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด $(0,1)$ และ $(\pi/3, 0.5)$ บนกราฟของ $y = \cos x$ ดังนี้

$$p_1(x) = -\frac{3}{2\pi}x + 1$$

รูปที่ 4.1.3 แสดงกราฟเส้นตรงของ $p_1(x)$ ตัดกราฟของ $\cos x$ ซึ่งแทนด้วยเส้นประที่จุด $(0,1)$ และ $(\pi/3,\ 0.5)$



รูปที่ 4.1.3

□

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงสร้างพหุนามกำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดบนกราฟของ $y = x^3$ ที่ $x = -1,\ 1$ และ 3

วิธีทำ

ให้ $x_0 = -1,\ x_1 = 1$ และ $x_2 = 3$ คำนวณ

$$y_0 = (-1)^3 = -1, \quad y_1 = (1)^3 = 1 \quad \text{และ} \quad y_2 = (3)^3 = 27$$

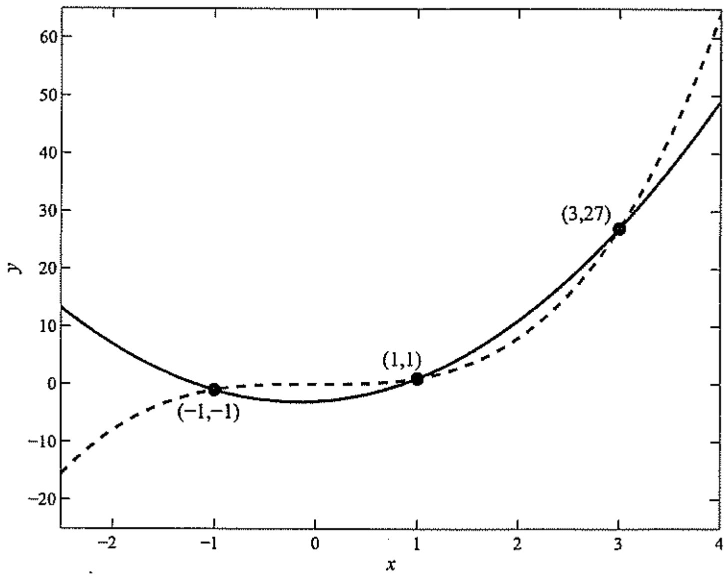
แทนค่า $x_0,\ x_1,\ x_2, y_0,\ y_1,\ y_2$ ในสมการ (4.1.3) ได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a \quad - b \quad + c &= -1 \\ a \quad + b \quad + c &= 1 \\ a \quad + 3b \quad + 9c &= 27 \end{aligned}$$

แก้สมการได้ $a=-3,\ b=1,\ c=3$ ดังนั้นพหุนามกำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด $(-1,-1),\ (1,1)$ และ $(3,27)$ บนกราฟของ $y=x^3$ คือ

$$p_2(x) \ = \ -3 + x + 3x^2$$

รูปที่ 4.1.4 แสดงกราฟพาราโบลาของ $p_2(x)$ ตัดกราฟของ x^3 ซึ่งแทนด้วยเส้นประที่จุด $(-1,-1),\ (1,1)$ และ $(3,27)$



รูปที่ 4.1.4

□