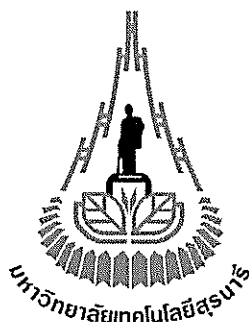


## เอกสารทบทวนคณิตศาสตร์พื้นฐาน

สำหรับ

นักศึกษาวิทยาศาสตร์การกีฬา เทคโนโลยีการเกษตร สาธารณสุขศาสตร์  
และพยาบาลศาสตร์

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัสวกุล  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



## เอกสารทบทวนคณิตศาสตร์พื้นฐาน

สำหรับ

นักศึกษาวิทยาศาสตร์การกีฬา เทคโนโลยีการเกษตร สาธารณสุขศาสตร์  
และพยาบาลศาสตร์

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัสวกุล  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

## คำนำ

เอกสารประกอบการอบรมคณิตศาสตร์นี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาใหม่ที่เข้าศึกษาในมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ใช้เป็นแนวทางในการเตรียมตัวสำหรับการศึกษาในมหาวิทยาลัย ใช้ทบทวน หรือใช้สร้างพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เนื้อหาส่วนใหญ่ที่นักศึกษาได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษา อย่างไรก็ตาม เอกสารนี้จะช่วยนักศึกษาทบทวนเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ และใช้ตรวจสอบพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของตนเองด้วย เนื้อหาในเอกสารนี้ประกอบด้วย รากฐานทางพีชคณิตในบทที่ 1-3 และในบทที่ 4 และ 5 เกี่ยวกับฟังก์ชันและการร่างกราฟ และฟังก์ชันเชิงเส้น

ด้วยการจัดเตรียมเอกสารนี้เป็นการดำเนินการเป็นครั้งแรกภายในระยะเวลาอันสั้น อาจจะไม่สมบูรณ์มาก หากนักศึกษามีข้อสงสัยประการใด สามารถมาติดต่อขอคำปรึกษาเพิ่มเติมที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ในภาคการศึกษาที่ 1/2553 ได้ ขอขอบคุณบุคลากรของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คุณอนุสรณ์ รุจิราภา เจ้าหน้าที่บริหารงานทั่วไป ที่ช่วยพิมพ์เอกสารได้อย่างเรียบร้อย และผู้ช่วยสอน คุณอมรรัตน์ สุริยวิจิตรเสรณี ที่ช่วยในการสร้างรูปและกราฟ ตลอดจนคุณทิพย์สุดา ไชยพฤษย์ จากส่วนส่งเสริมวิชาการในการประสานงานการผลิตเอกสาร

ประภาศรี อัสวกุล

25 เมษายน 2553

สารบัญ  
สารบัญ

	หน้า
คำนำ	i
สารบัญ	ii
<b>บทที่ 1 ระบบจำนวนจริง</b>	<b>1</b>
1.1 เซตของจำนวนจริง	1
1.2 เส้นจำนวนจริง	1
1.3 ช่วง	2
1.4 ค่าสัมบูรณ์	5
1.5 เลขชี้กำลัง	6
1.6 รากที่ $n$	8
<b>บทที่ 2 การดำเนินการทางพีชคณิต</b>	<b>11</b>
2.1 นิพจน์ทางพีชคณิต	11
2.2 เอกลักษณะทางพีชคณิต	11
2.3 พหุนาม	12
2.4 การแยกตัวประกอบพหุนาม	15
2.5 นิพจน์ตรรกยะ	16
<b>บทที่ 3 สมการ</b>	<b>25</b>
3.1 สมการ	25
3.2 สมการเชิงเส้น	26
3.3 สมการกำลังสอง	30
<b>บทที่ 4 ฟังก์ชัน</b>	<b>38</b>
4.1 บทนิยามของฟังก์ชัน	38
4.2 ระบบพิกัดเชิงฉาก	42
4.3 กราฟของฟังก์ชัน	43
<b>บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น</b>	<b>49</b>
5.1 ความชันของเส้นตรง	49
5.2 สมการของเชิงเส้น	53
5.3 ฟังก์ชันเชิงเส้น	65
<b>บรรณานุกรม</b>	<b>68</b>

1.3 ช่วง (Intervals) ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $a < b$

ช่วงเปิด (Open Intervals)  $(a, b)$  หมายถึง เซตของจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง  $a$  และ  $b$

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



$$a < x < b$$

ช่วงปิด (Closed Intervals)  $[a, b]$  หมายถึง เซตของจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง  $a$  และ  $b$  และรวมทั้งค่า  $a$  และ  $b$

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



$$a \leq x \leq b$$

ช่วงกึ่งเปิด (Half-Open Intervals)

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \dots\dots\dots\}$$








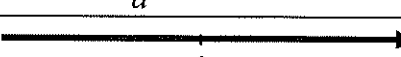
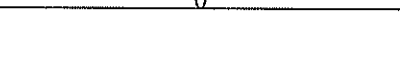
$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, \dots\dots\dots\}$$



ช่วงอนันต์ (Infinite Intervals) เป็นช่วงที่ไม่มีขอบเขต

$$(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a], (-\infty, \infty)$$

สรุปได้ว่า

	สัญกรณ์แบบช่วง	สัญกรณ์แบบอสมการ	การแทนบนเส้นจำนวน
ช่วงที่มีขอบเขต			
ช่วงเปิด	$(a, b)$	$a < x < b$	
ช่วงปิด	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
ช่วงกึ่งเปิด	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
ช่วงกึ่งเปิด	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
ช่วงที่ไม่มีขอบเขต			
	$(a, \infty)$	$a < x$	
	$[a, \infty)$	$a \leq x$	
	$(-\infty, a)$	$x < a$	
	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	
เส้นจำนวนจริง	$(-\infty, \infty)$	-	

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเซตซึ่งนิยามโดยอสมการต่อไปนี้แบบช่วง และเขียนแสดงบนเส้นจำนวนจริง

(1)  $2 < x \leq 4$

(2)  $-1.5 \leq x < 0$

(3)  $x \geq -1$

(4)  $x < 3.6$

(5)  $x \leq 1$

(6)  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

วิธีทำ

- (1)  $2 < x \leq 4$  หมายถึง จำนวนจริง  $x$  ใดๆ ที่มากกว่า 2 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4  
แทนได้ด้วย  $(2, 4]$



- (2)  $-1.5 \leq x < 0$  หมายถึง.....  
แทนได้ด้วย.....



- (3)  $x \geq -1$  หมายถึง.....  
แทนได้ด้วย.....

บทที่ 1 ระบบจำนวนจริง



- (4)  $x < 3.6$  หมายถึง.....  
แทนได้ด้วย.....



- (5)  $x \leq 1$  หมายถึง.....  
แทนได้ด้วย.....



- (6)  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  หมายถึง.....  
แทนได้ด้วย.....



□

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปอสมการ และเขียนแสดงบนเส้นจำนวน

- (1)  $(2, 8)$       (2)  $[-2, \infty)$       (3)  $(-\infty, 0.34)$

วิธีทำ

- (1)  $(2, 8)$  หมายถึง เซตของจำนวนจริง  $x$  ซึ่ง  $2 < x < 8$



- (2)  $[-2, \infty)$  หมายถึง.....



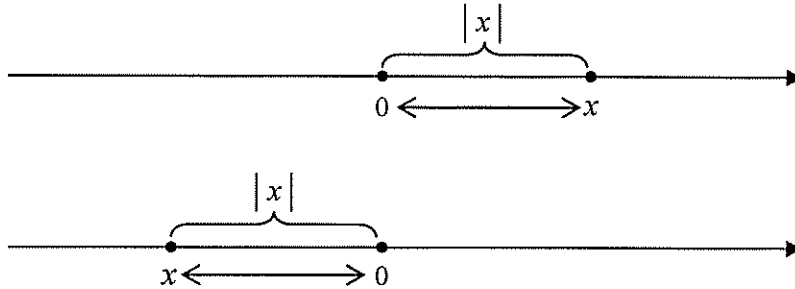
- (3)  $(-\infty, 0.34)$  หมายถึง.....



□

### 1.4 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)

ให้  $x$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ  $x$  เขียนแทนด้วย  $|x|$  คือ ขนาดของจำนวนจริง  $x$  กล่าวได้ว่า  $|x|$  เป็นจำนวนที่ไม่เป็นค่าลบที่บอกระยะห่างระหว่าง  $x$  บนเส้นจำนวนจริงและ 0



ดังนั้น

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

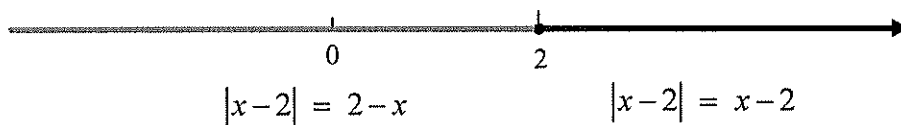
เช่น

- (1)  $|-5| = -(-5) = 5$
- (2)  $|2| = 2$
- (3)  $|-4.8| = -(-4.8) = 4.8$
- (4)  $|0| = 0$
- (5)  $\left|\frac{19}{5}\right| = \frac{19}{5}$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน  $|x-2|$  โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ

$$|x-2| = \begin{cases} \dots\dots\dots, & x-2 \geq 0 \\ \dots\dots\dots, & x-2 < 0 \end{cases}$$



□



สมบัติของค่าสัมบูรณ์ ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

- (1)  $|x| = |-x|$
- (2)  $|xy| = |x||y|$
- (3)  $|x-y| = |y-x|$
- (4)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$
- (5)  $|x+y| \leq |x|+|y|$

### 1.5 เลขชี้กำลัง (Exponents)

ให้  $x$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{คูณกัน } n \text{ ครั้ง}}$$

เรียก  $n$  ว่า เลขชี้กำลัง (exponent) และ  $x$  เป็นฐาน (base) ตัวอย่าง เช่น

- (1)  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
- (2)  $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$
- (3)  $\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$

กรณีเฉพาะ ถ้า  $x \neq 0$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

- (1)  $x^0 = 1$
- (2)  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

สมบัติของเลขชี้กำลัง ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มแล้ว

- (1)  $x^m x^n = x^{m+n}$
- (2)  $(x^m)^n = x^{mn}$
- (3)  $(xy)^n = x^n y^n$
- (4)  $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$
- (5)  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} \quad (x \neq 0)$

ตัวอย่างที่ 4 จงจัดรูปให้เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

(1)  $(2x^{-3}y^2)^{-4}$

(2)  $\left(\frac{x^{-4}}{y^3}\right)^{-5}$

(3)  $\frac{7x^{-2}(x+y)^3}{21x^5(x+y)^{-4}}$

วิธีทำ

(1)  $(2x^{-3}y^2)^{-4} = (2^{-4})(x^{-3})^{-4}(y^2)^{-4}$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

(2)  $\left(\frac{x^{-4}}{y^3}\right)^{-5} = \frac{(x^{-4})^{-5}}{(y^3)^{-5}}$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

(3)  $\frac{7x^{-2}(x+y)^3}{21x^5(x+y)^{-4}} = \frac{x^{-2-5}(x+y)^{3-(-4)}}{3}$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$

□

### 1.6 รากที่ $n$ ( $n^{\text{th}}$ root)

ให้  $x$  เป็นจำนวนจริง และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก

$x^{\frac{1}{n}}$  เป็นรากหลักที่  $n$  ของ  $x$  (principal  $n^{\text{th}}$  root)

นิยามโดย

$$x^{\frac{1}{n}} = y \quad \text{ถ้า} \quad y^n = x$$

และ

- (1)  $y \geq 0$  เมื่อ  $x \geq 0$  และ  $n$  เป็นเลขคู่
- (2)  $y < 0$  เมื่อ  $x < 0$  และ  $n$  เป็นเลขคี่

**สัญกรณ์** รากหลักที่  $n$  ของ  $x$  เขียนโดยใช้สัญกรณ์  $\sqrt[n]{x}$   
 $\sqrt[n]{x}$  แทน  $x^{\frac{1}{n}}$  (รากหลักที่  $n$  ของ  $x$ )

**หมายเหตุ**

- (1) สัญกรณ์  $\sqrt{\quad}$  เรียกว่า radical
- (2) สัญกรณ์  $\sqrt{\quad}$  หมายถึง รากที่ 2

#### ตัวอย่างที่ 5

- (1)  $\sqrt{4} = 2$  (ไม่ใช่  $-2$ )  
 เพราะว่า  $2^2 = 4$  (เป็นค่าบวกทั้งคู่)
- (2)  $\sqrt[3]{8} = 2$   
 เพราะว่า  $2^3 = 8$  (เป็นค่าบวกทั้งคู่)
- (3)  $\sqrt[3]{-8} = -2$   
 เพราะว่า  $(-2)^3 = -8$  (เป็นค่าลบทั้งคู่ 3 เป็นเลขคี่)
- (4)  $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$
- (5)  $\sqrt[3]{-8y^3} = -2y$   
 เพราะว่า  $(-2y)^3 = -8y^3$

ถ้า  $x$  เป็นจำนวนจริงค่าลบ และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว  
ค่าของ  $\sqrt[n]{x}$  ในระบบจำนวนจริงไม่นิยาม

เช่น

$$\sqrt{-9}, \sqrt[4]{-16}, \sqrt[6]{-36} \quad (\text{ไม่นิยาม})$$

เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

ตัวอย่างที่ 6

$$(1) \quad 32^{2/5} = (32^{1/5})^2 = (\sqrt[5]{32})^2 = (\dots\dots)^2 = \dots\dots$$

$$(2) \quad (81x^4)^{-3/4} = (\dots\dots\dots)^{-3} = (\dots\dots\dots)^{-3}$$

$$= \frac{\dots 1 \dots}{(\dots\dots\dots)^3} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$$

□

ตัวอย่างที่ 7 สมบัติของเลขชี้กำลังเป็นจริง ในกรณีเลขชี้กำลังเป็นเลขเศษส่วน

$$(1) \quad x^{-1/2} x^{3/2} = x^{-1/2 + 3/2} = x^{2/2} = x$$

$$(2) \quad (x^{-5/7})^{-14} = x^{(-5/7)(-14)} = x^{10}$$

$$(3) \quad \left(\frac{x^{-9}}{y^{-6}}\right)^{-2/3} = \frac{(x^{-9})^{\dots\dots\dots}}{(y^{-6})^{\dots\dots\dots}} = \frac{x^{\dots\dots\dots}}{y^{\dots\dots\dots}} = \frac{x^{\dots\dots\dots}}{y^{\dots\dots\dots}}$$

สมบัติของรากที่  $n$

ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริง  $m$  และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ถ้ารากที่  $n$  และ  $m$  ต่อไปนี้นิยาม แล้ว

$$(1) \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$(2) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$(3) \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงใช้สมบัติของรากที่  $n$  จัดรูปในข้อต่อไปให้ง่ายขึ้น ( $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงบวก)

$$(1) \sqrt{63} \qquad (2) \sqrt{125x^2} \qquad (3) \sqrt[4]{\frac{32x^9}{81y^4}} \qquad (4) \sqrt[5]{\sqrt[3]{y^{30}}}$$

วิธีทำ

$$(1) \quad \sqrt{63} = \sqrt{(9)(7)} = \sqrt{9}\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$(2) \quad \sqrt{125x^2} = \sqrt{(25x^2)(5)} = \sqrt{25x^2}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}x$$

$$(3) \quad \sqrt[4]{\frac{32x^9}{81y^4}} = \frac{\sqrt[4]{32x^9}}{\sqrt[4]{81y^4}} = \frac{\sqrt[4]{16x^8 \cdot 2x}}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$(4) \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{y^{30}}} = \sqrt[5]{y^{10}} = y^{10/5} = y^2$$

□

## บทที่ 2

### การดำเนินการทางพีชคณิต

#### 2.1 นิพจน์ทางพีชคณิต (Algebraic Expression)

นักศึกษามักจะต้องจัดการหรือดำเนินการกับพจน์ในลักษณะต่อไปนี้

$$-2, \sqrt{2}, 5, 2x+3, x^2+3x-4, 2y^2+5y-3, y^3-1, 6x^3y^2-4, \\ 2xy-x^2+y^2-1, \sqrt{x^2+y^2}, x^3-y^3+2xy+2xyz, x^2y-yz^2+zx^2-1, \\ (x+y+z)^3, \frac{x+y}{x-y}, \frac{1}{x^2+y^2-1}, \frac{6x^3y^2+4}{y^3-x}, \dots$$

ซึ่งเกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง การหารากของจำนวนหรือตัวแปร (variable)  $x, y, z, \dots$  เรียกว่า นิพจน์ทางพีชคณิต

ตัวแปร เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริมาณที่วัดได้ เช่น เวลา น้ำหนัก อุณหภูมิ ความดัน ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร จำนวนนักศึกษา, ... เป็นต้น

ถ้าแทนค่าตัวแปรด้วยจำนวน เช่น  $x=1$  และ  $y=-1$  ใน

$$2xy-x^2+y^2-1 \quad \text{จะได้} \quad 2(1)(-1)-(1)^2+(-1)^2-1 = -3$$

ถ้าเลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันเท่ากัน แต่แตกต่างกันเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงตัว เรียกพจน์เหล่านี้ว่า พจน์ที่คล้ายกัน (like terms) เช่น  $3x^2y, -2x^2y$  และ  $x^2y$  เป็นพจน์ที่คล้ายกัน

#### 2.2 เอกลักษณ์ทางพีชคณิต (Algebraic Identities)

ให้  $a$  และ  $b$  แทนจำนวนจริง เอกลักษณ์ทางพีชคณิตที่สำคัญๆ คือ

$$(1) \quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(2) \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(3) \quad (a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$(4) \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(5) \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$(6) \quad (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(7) \quad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

### 2.3 พหุนาม (Polynomials)

นักศึกษาต้องรู้จักคำว่า พหุนาม (polynomials) ซึ่งหมายถึง นิพจน์ทางพีชคณิตซึ่งเกิดจากการบวก การลบ การคูณ เท่านั้น เช่น

$$5x+2, \quad 3x^2-2x+7, \quad 4xy^4-3xy+5x+6y^2-2$$

แต่  $\frac{6x^3+4}{x-1}$  ไม่เป็นพหุนาม เพราะว่ามีหาร

$5y^2+\sqrt{y}-1$  ไม่เป็นพหุนาม เพราะว่ามีหารากที่สอง

พหุนามในตัวแปรเดียว เช่น

$$5x+2, \quad y^2-y+1, \quad x^3+3x^2+3x-1, \quad x^2+x+\sqrt{2}, \quad -z^3+z-4, \dots$$

พหุนามในสองตัวแปร เช่น

$$5xy, \quad x^2+y^2, \quad x^3y-y^3-2xy+1$$

ระดับชั้นหรือดีกรี (degree) ของพหุนามในตัวแปรเดียว คือ เลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร เช่น

ระดับชั้นของพหุนาม  $3x^2-x+5$  คือ 2

ระดับชั้นของพหุนาม  $1-\frac{3}{4}y^5$  คือ 5

ระดับชั้นของพหุนาม  $1-z+z+z^3$  คือ 3

ระดับชั้นของพหุนาม  $1+2t$  คือ .....

ระดับชั้นของพหุนาม  $\sqrt{2}-x+\sqrt{3}x^3$  คือ .....

ระดับชั้นของพหุนาม  $-\sqrt{2}x+4$  คือ .....

ระดับชั้นของพหุนามในสองตัวแปร คือ ผลบวกของเลขชี้กำลังที่สูงสุดของตัวแปร เช่น

ระดับชั้นของพหุนาม  $3xy^2-xy+\frac{x}{2}+\sqrt{2}y$  คือ 3

ระดับชั้นของพหุนาม  $3zx+3xy-5yz$  คือ .....

ระดับชั้นของพหุนาม  $x^2+y^2-x+y$  คือ .....

นักศึกษาสามารถ บวก ลบ คูณ พหุนามได้ โดย  
พจน์ที่คล้ายกัน บวก ลบ กัน ได้  
ใช้สมบัติของเลขชี้กำลัง  
ใช้กฎการกระจาย

ตัวอย่างที่ 1 จงดำเนินการนิพจน์ต่อไปนี้

- (1)  $(4x^3 + 7x - 13) + (-2x^3 + 5x + 17)$
- (2)  $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 11) - (4x^3 - 5x^2 + 9)$
- (3)  $(-2x)(7x^3)(-x^4)$
- (4)  $(2x^2y)^2(-3x^3y^2)^3$
- (5)  $(3x - 5)(4x + 1)$
- (6)  $(2x^2y^2)(4xy^2 - 3x^2y^5 - 8)$
- (7)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x + 2)$
- (8)  $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$
- (9)  $(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$
- (10)  $(x + y)^3$

วิธีทำ

- (1)  $(4x^3 + 7x - 13) + (-2x^3 + 5x + 17)$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$
- (2)  $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 11) - (4x^3 - 5x^2 + 9)$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$
- (3)  $(-2x)(7x^3)(-x^4)$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$
- (4)  $(2x^2y)^2(-3x^3y^2)^3$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots$



บทที่ 2 การดำเนินการทางพีชคณิต

(5)  $(3x-5)(4x+1)$   
= .....

= .....

(6)  $(2x^2y^2)(4xy^2-3x^2y^5-8)$   
= .....

= .....

(7)  $(x^2-2x+1)(x^2+x+2)$   
= .....

= .....

(8)  $(x-1)(x-1)(x-1)$   
= .....

= .....

(9)  $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$   
= .....

= .....

(10)  $(x+y)^3$   
= .....

= .....

## 2.4 การแยกตัวประกอบพหุนาม

พหุนามที่มีตัวประกอบเป็นตัวมันเอง 1 และ  $-1$  เท่านั้น เรียกว่า prime polynomial เช่น

$$x+1, x^2+1, 1+y+y^2, 2x+3y, \dots$$

การแยกตัวประกอบพหุนาม คือ การแยกตัวประกอบพหุนามเป็นผลคูณของ prime polynomial

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

$$(1) 2x^2 - 5x \qquad (2) 3x^2y^5 - 5xy^3$$

วิธีทำ

$$(1) 2x^2 - 5x = x(2x - 5)$$

$$(2) 3x^2y^5 - 5xy^3 = xy^3(3xy^2) + xy^3(-5) \\ = xy^3(\dots\dots\dots)$$

□

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้เอกลักษณ์แยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

$$(1) 16x^2 - 49y^2 \qquad (2) 8x^3 + 27y^3 \qquad (3) x^4 - y^4$$

วิธีทำ

$$(1) 16x^2 - 49y^2 = (4x)^2 - (7y)^2 = (4x - 7y)(\dots\dots\dots)$$

$$(2) 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 \\ = (2x + 3y)[(2x)^2 - (\dots\dots)(\dots\dots) + (\dots\dots)^2] \\ = \dots\dots\dots$$

$$(3) x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(\dots\dots\dots) \\ = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

□

บทที่ 2 การดำเนินการทางพีชคณิต

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้ให้ได้ตัวประกอบ prime polynomial

(1)  $3x^2 + x - 2$       (2)  $12x^3 + x^2 - 20x$

วิธีทำ

(1)  $3x^2 + x - 2 = (3x - 2)(\dots\dots\dots)$

(2)  $12x^3 + x^2 - 20x = x(12x^2 + x - 20)$   
 $= x(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$

□

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบ

$$x^2 + x - y^2 - y$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2 + x - y^2 - y &= (x^2 - y^2) + (x - y) \\ &= (x - y)(\dots\dots\dots) + (x - y) \\ &= (x - y)[(\dots\dots\dots) + \dots\dots\dots] \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

□

2.5 นิพจน์ตรรกยะ (Rational Expression)

ผลหารของพหุนาม เรียกว่า นิพจน์ตรรกยะ เช่น

$$\frac{2}{3}, \frac{-1}{x}, \frac{1-x}{1+x}, \frac{3}{t^2-4}, \frac{4y^3+1}{y^4+5y^2-8}, \dots$$

ดังนั้น พหุนามในตัวส่วน ต้องไม่เป็นศูนย์

พิจารณา

$$\frac{5x}{x^3-x} = \frac{5x}{x(x^2-1)} = \frac{5x}{x(x-1)(x+1)}$$

ดังนั้น  $x \neq 0, x \neq 1, x \neq \dots\dots\dots$

ในการทำงานเกี่ยวกับเศษส่วนของจำนวน รูปแบบตรรกยะ หรือผลหารของพหุนามนี้ สามารถตัดทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้ โดยใช้หลักการ

$$\frac{PK}{QK} = \frac{P}{Q} \text{ สำหรับ } Q \neq 0 \text{ และ } K \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 6 จงจัดรูปตรรกยะต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น

(1)  $\frac{12x^2y}{9xy^2}$

(2)  $\frac{2x^2 + 5x - 3}{10x^2 + 9x - 7}$

วิธีทำ

(1)  $\frac{12x^2y}{9xy^2} = \frac{(3xy)(4x)}{(3xy)(3y)} = \dots\dots\dots$

(2)  $\frac{2x^2 + 5x - 3}{10x^2 + 9x - 7} = \frac{(2x-1)(\dots\dots\dots)}{(2x-1)(\dots\dots\dots)} = \dots\dots\dots$

□

ในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาต้องสามารถจัดรูปพจน์ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบได้ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 จงจัดรูปโดยไม่ให้เลขชี้กำลังเป็นลบ

$$-4y^4(2y-1)^{-5}(2) + 4y^3(2y-1)^{-4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} & -4y^4(2y-1)^{-5}(2) + 4y^3(2y-1)^{-4} \\ & = 4y^3(2y-1)^{-5}[-2y + (\dots\dots\dots)] \text{ (แยกตัวประกอบ } 4y^3(2y-1)^{-5} \text{ ออก)} \\ & = 4y^3(2y-1)^{-5}(\dots\dots\dots) \\ & = \dots 4y^3(2y-1)^{-5}(\dots\dots\dots) \\ & = \dots\dots\dots \\ & = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

□

การคูณ การหาร รูปแบบตรรกยะ ใช้หลักการ

$$(1) \quad \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}$$

$$(2) \quad \frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R} = \frac{PS}{QR} \quad \left( \frac{R}{S} \neq 0 \right)$$

ตัวอย่างที่ 8 จงดำเนินการคูณและหารในข้อต่อไปนี้

$$(1) \quad \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 2x - 4} \cdot \frac{2x - 2}{x^2 + 2x}$$

$$(2) \quad \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} \div \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 12x + 20}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 2x - 4} \cdot \frac{2x - 2}{x^2 + 2x} &= \frac{(x^2 + 4x + 4)(2x - 2)}{(2x^2 + 2x - 4)(x^2 + 2x)} \\ &= \frac{(x + 2)(x + 2)(2)(x - 1)}{(2)(x + 2)(\dots\dots\dots)(x)(\dots\dots\dots)} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} \div \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 12x + 20} &= \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 100} \cdot \frac{x^2 + 12x + 20}{x^2 - 7x + 10} \\ &= \frac{(x^2 - 10x + 25)(x^2 + 12x + 20)}{(x^2 - 100)(x^2 - 7x + 10)} \\ &= \frac{(x - 5)(x - 5)(x + 2)(\dots\dots\dots)}{(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)(x - 2)(\dots\dots\dots)} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

□

การบวก และ การลบ รูปแบบตรรกยะ ใช้หลักการ

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$$

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงดำเนินการ บวก และ ลบ และจัดให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด

$$(1) \frac{3}{2x+4} + \frac{5}{2x+4} \qquad (2) \frac{x}{4-x^2} - \frac{2}{4-x^2}$$

วิธีทำ

$$(1) \frac{3}{2x+4} + \frac{5}{2x+4} = \frac{\quad}{2x+4}$$

=

=

$$2) \frac{x}{4-x^2} - \frac{2}{4-x^2} = \frac{\quad}{4-x^2}$$

=

=

□

ถ้าตัวส่วนไม่เท่ากัน ให้ทำตัวส่วนให้เท่ากัน ก่อนบวกหรือลบรูปแบบตรรกยะ โดยใช้หลักการ

$$\frac{P}{Q} = \frac{PK}{QK} \quad (\text{เอา } K \text{ คูณทั้งเศษและส่วน})$$

ตัวอย่างที่ 10 จงจัดรูป  $\frac{x}{x^2+6x+5} - \frac{2}{x^2+2x+1}$

วิธีทำ แยกตัวประกอบตัวส่วน และหาตัวคูณร่วมน้อย (LCD)

$$\left. \begin{array}{l} x^2+6x+5 = (x+1)(x+5) \\ x^2+2x+1 = (x+1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow LCD = (x+1)^2(x+5)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+6x+5} - \frac{2}{x^2+2x+1} &= \frac{x}{(x+1)(x+5)} - \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x+1)^2(x+5)} - \frac{2(x+5)}{(x+1)^2(x+5)} \\ &= \frac{x(x+1) - 2(x+5)}{(x+1)^2(x+5)} \\ &= \frac{x^2+x-2x-10}{(x+1)^2(x+5)} \\ &= \frac{x^2-x-10}{(x+1)^2(x+5)} \end{aligned}$$

□





บทที่ 2 การดำเนินการทางพีชคณิต

$$(2) \quad \frac{x + \frac{3}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(3) \quad \frac{\frac{x-y}{y} - \frac{y-x}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(4) \quad \frac{\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5}}{\frac{3}{x^2-25}} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(5) \quad \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

**รูปแบบราก**

การบวกการลบรากที่  $n$  จัดรูปรากที่  $n$  และรวมพจน์ที่คล้ายกัน

**ตัวอย่างที่ 12** จงจัดรูป

$$5x \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{64x^4} + 7 \sqrt[3]{x^4}$$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} 5x \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{64x^4} + 7 \sqrt[3]{x^4} &= 5x \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{64x^3 \cdot x} + 7 \sqrt[3]{x^3 x} \\ &= 5x \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{64} \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x} + 7 \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x} \\ &= 5x \sqrt[3]{x} - 4x \sqrt[3]{x} + 7x \sqrt[3]{x} \\ &= 8x \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 13** จงดำเนินการหรือจัดรูปในข้อต่อไปนี้

- (1)  $2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{5})$                       (2)  $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-4\sqrt{5})$   
 (3)  $(3\sqrt{x}+5\sqrt{y})(3\sqrt{x}-5\sqrt{y})$

**วิธีทำ**

(1)  $2\sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{5}) = 2\sqrt{3}\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 2\sqrt{(3)(6)} - 2\sqrt{(3)(5)}$   
 $= 2\sqrt{(3)(3)(2)} - 2\sqrt{15}$   
 $= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{15}$

(2)  $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-4\sqrt{5}) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-4\sqrt{5}) + \sqrt{5}(\sqrt{3}-4\sqrt{5})$   
 $= 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$   
 $= 6 - 8\sqrt{15} + \sqrt{15} - 20$   
 $= \dots\dots\dots$

(3)  $(3\sqrt{x}+5\sqrt{y})(3\sqrt{x}-5\sqrt{y}) = (3\sqrt{x})^2 - (5\sqrt{y})^2$   
 $= \dots\dots\dots$

□

บทที่ 2 การดำเนินการทางพีชคณิต

ในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาต้องมีทักษะจัดรูปที่มีรากที่  $n$  โดยทำให้พจน์ที่เป็นรากที่  $n$  ไม่ติดค่า

ราก การทำให้ตัวส่วนไม่ติดค่าราก เช่น

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงทำให้ตัวส่วนไม่ติดค่ารากที่ 2

$$\frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} &= \frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} \cdot \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}} \\ &= \frac{4(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}{(2\sqrt{x})^2 - (3\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{8\sqrt{x}+12\sqrt{y}}{4x-9y} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 15 จงจัดรูป  $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3}$  โดยทำให้เศษไม่ติดรากที่ 2

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3} &= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

□

## บทที่ 3

## สมการ (Equations)

## 3.1 สมการ

สมการ คือ ประโยคซึ่งแสดงการเท่ากันของนิพจน์ทางคณิตศาสตร์

สมการแบบหนึ่งตัวแปร เช่น

$$3x - 5 = 0$$

$$1 - 2x + x^2 = 0$$

$$\sqrt{5y - 7} = 11$$

$$|3y - 5| = 2$$

สมการแบบสองตัวแปร เช่น

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{y}$$

การแก้สมการแบบหนึ่งตัวแปร คือ การหาค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง ค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง เรียกว่า ผลเฉลย คำตอบ หรือ ราก (roots) ของสมการ เช่น

$\frac{5}{3}$  เป็นรากของสมการ

$$3x - 5 = 0$$

เพราะว่า

$$3\left(\frac{5}{3}\right) - 5 = 5 - 5 = 0$$

การแก้สมการ ใช้หลักการง่ายๆ คือ

(1) สมบัติการบวก

$$\text{ถ้า } P = Q \text{ แล้ว } P + R = Q + R$$

$$\text{และ } P - R = Q - R$$

(2) สมบัติการคูณ

$$\text{ถ้า } P = Q \text{ และ } R \neq 0 \text{ แล้ว}$$

$$PR = QR \text{ และ } \frac{P}{R} = \frac{Q}{R}$$

**3.2 สมการเชิงเส้น (Linear equations)**

สมการเชิงเส้น หรือ สมการระดับชั้น 1 หรือ สมการเส้นตรง เป็นสมการพหุนามที่ตัวแปรในสมการมีเลขชี้กำลังเป็น 1 และไม่มีผลคูณของตัวแปร เช่น

$$4x - 7 = 1 \quad (\text{ตัวแปรเดียว})$$

$$2t + 5 = 1 - t \quad (\text{ตัวแปรเดียว})$$

$$2x + 5y = 4 - 3y \quad (\text{สองตัวแปร})$$

$$x + y + z = 3 \quad (\text{สามตัวแปร})$$

**ตัวอย่างที่ 1** จงแก้สมการ

$$4(x - 3) = 2(3x + 1) + 5x$$

**วิธีทำ** จัดรูปสมการและใช้สมบัติการบวกและการคูณ

$$4(x - 3) = 2(3x + 1) + 5x$$

$$4x - 12 = 6x + 2 + 5x$$

$$4x - 12 = 11x + 2$$

$$4x = 11x + 14 \quad (12 \text{ บวกทั้งสองข้าง})$$

$$-7x = 14 \quad (-11x \text{ บวกทั้งสองข้าง})$$

$$x = \frac{14}{-7} \quad \left(-\frac{1}{7} \text{ คูณทั้งสองข้าง}\right)$$

ดังนั้น  $x = -2$

□

**โจทย์** จงแก้สมการเชิงเส้นต่อไปนี้

(1)  $34 - 3x = 4(3 - 2x) + 23$

.....

.....

.....

.....

(2)  $8(5x - 1) + 36 = -3(x + 5)$

.....

.....

.....

.....

(3)  $3y - 2(y + 1) = 2(y - 1)$

.....  
.....  
.....  
.....

(4)  $8 = 3s - 8(7 - s) + 23$

.....  
.....  
.....  
.....

(5)  $11 - 7(1 - 2t) = 9(t + 1)$

.....  
.....  
.....  
.....

(6)  $7(\theta - 3) = 4(\theta + 5) - 47$

.....  
.....  
.....  
.....

(7)  $P = 2s + 2w$  (หา  $s$ )

.....  
.....  
.....  
.....

(8)  $5F = 9C + 100$  (หา  $C$ )

.....  
.....  
.....  
.....



การแก้สมการที่มีเศษส่วน ต้องคูณสมการด้วย LCD ของเศษส่วนในสมการ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ (ไม่ใช่สมการเชิงเส้น)

$$(1) \frac{5}{x-5} + 6 = \frac{x}{x-5} \qquad (2) \frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$$

วิธีทำ

(1) คูณสมการด้วย  $x-5$  ซึ่งเป็น LCD

$$\begin{aligned} (x-5)\left(\frac{5}{x-5} + 6\right) &= (x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right) \\ (x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) + (x-5)6 &= (x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right) \\ 5 + (x-5)6 &= x && \leftarrow \text{(สมการเชิงเส้น)} \\ 5 + 6x - 30 &= x \\ 6x - 25 &= x \\ 5x &= 25 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

ตรวจสอบว่า  $x = 5$  เป็นผลเฉลยหรือคำตอบของสมการที่กำหนดมาให้โดยการแทนค่า  $x = 5$  ในสมการได้

$$\frac{5}{5-5} + 6 = \frac{5}{5-5}$$

แต่การหารด้วยศูนย์ไม่สามารถทำได้ ดังนั้น สมการที่กำหนดมาไม่มีผลเฉลย  $x = 5$  เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง (ต้องระวังกรณีเช่นนี้)

(2) คูณสมการด้วย  $2x(x-1)$  ซึ่งเป็น LCD

$$\begin{aligned} 2x(x-1)\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{2x}\right) &= 2x(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ 2x(x-1)\left(\frac{3}{x}\right) - 2x(x-1)\left(\frac{1}{2x}\right) &= 2x(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ 6(x-1) - (x-1) &= 2x(2) \\ 6x - 6 - x + 1 &= 4x \\ 5x - 5 &= 4x \\ x &= 5 \end{aligned}$$

บทที่ 3 สมการ

ตรวจสอบว่า  $x = 5$  เป็นผลเฉลยของสมการหรือไม่ แทนค่า  $x = 5$  ในสมการ  
แทนค่าในด้านซ้ายได้

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6-1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

แทนค่าในด้านขวาได้

$$\frac{2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น  $x = 5$  เป็นผลเฉลยของสมการ

□

ตัวอย่างที่ 3 นักชีววิทยามีสารละลาย  $A$  ซึ่งมีกรดที่ความเข้มข้น 60% สารละลาย  $B$  ซึ่งมีกรดที่ความเข้มข้น 75% ถ้านักชีววิทยาต้องการสารละลายโดยผสม  $A$  และ  $B$  ให้ได้ 10 ลิตร โดยให้ความเข้มข้นของกรดเป็น 65% แล้ว ต้องใช้สารละลาย  $A$  และ  $B$  อย่างละกี่ลิตร

วิธีทำ กำหนดตัวแปร  $x$  แทน จำนวนลิตรจากสารละลาย  $A$

⇒ ใช้  $10 - x$  ลิตรจากสารละลาย  $B$

	จำนวนลิตร	ความเข้มข้นของกรด	จำนวนลิตรของกรด ในสารละลาย
สารละลาย $A$	$x$	0.60	$0.60x$
สารละลาย $B$	$10 - x$	0.75	.....
ส่วนผสม ( $A$ และ $B$ )	10	0.65	.....

ดังนั้น สมการที่ได้คือ (แล้วแก้สมการหา  $x$ )

$$\begin{aligned} \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ได้  $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

ดังนั้น ต้องใช้สารละลาย  $A$  จำนวน  $6\frac{2}{3}$  ลิตร และ

สารละลาย  $B$  จำนวน  $10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$  ลิตร

เพื่อให้ได้ความเข้มข้นของกรดในสารละลายเป็น 65%

□



### 3.3 สมการกำลังสอง (Quadratic Equations)

สมการกำลังสองในตัวแปรเดียว คือ สมการในรูป

$$ax^2 + bx + c = 0$$

เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงตัว และ  $a \neq 0$  เช่น

(1)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(2)  $3x = x^2 - 4$

(3)  $x^2 = 1$

(4)  $9 - y^2 = 0$

#### 3.3.1 การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ

จัดรูปสมการกำลังสองเป็นแบบมาตรฐาน คือ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(ด้านขวาของสมการเป็นศูนย์ นักศึกษามักจะทำผิดตรงนี้) และใช้สมบัติของจำนวนจริงที่ว่า

(\*)  $ab = 0$  ก็ต่อเมื่อ  $a = 0$  หรือ  $b = 0$  หรือทั้ง  $a$  และ  $b$  เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ

(1)  $2x^2 - 5x = -2$                       (2)  $\frac{12}{y} - 7 = \frac{12}{1-y}$

วิธีทำ

(1) จัดเป็นแบบมาตรฐานก่อน แล้วแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2 &= 0 \\ (2x-1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

(ใช้สมบัติ (\*))

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} 2x-1 = 0 & x-2 = 0 \\ x = \frac{1}{2} & x = 2 \end{array}$$

ดังนั้น รากของสมการคือ  $\frac{1}{2}$  และ 2

(2) คูณสมการด้วย  $y(1-y)$  (เป็น LCD)

$$y(1-y)\left(\frac{12}{y}-7\right) = y(1-y)\left(\frac{12}{1-y}\right)$$

$$y(1-y)\left(\frac{12}{y}\right) - y(1-y)(7) = y(1-y)\left(\frac{12}{1-y}\right)$$

$$(1-y)(12) - 7y(1-y) = 12y$$

$$12 - 12y - 7y + 7y^2 = 12y$$

(รวมพจน์และจัดเป็นสมการมาตรฐาน)

$$7y^2 - 31y + 12 = 0$$

$$(7y-3)(\dots\dots\dots) = 0$$

(ใช้สมบัติ (\*))

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l} 7y-3 = 0 & \dots\dots\dots = 0 \\ y = \frac{3}{7} & y = \dots\dots\dots \end{array}$$

ตรวจสอบผลเฉลยที่ได้ โดยแทนค่าในสมการ

.....

.....

.....

.....

.....

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ คือ.....



โจทย์ จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยการแยกตัวประกอบ

(1)  $x^2 + 5x = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

(2)  $y^2 - 6y + 8 = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(3)  $-6t^2 + 5t - 1 = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(4)  $18t^3 + 15t^2 - 12t = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(5)  $6z^2 - z^4 = z^3$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....



### 3.3.2 การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จัดสมการกำลังสอง


$$ax^2 + bx + c = 0$$

ให้อยู่ในรูป

$$(x + d)^2 = r$$

ซึ่งเรียกว่า รูปกำลังสองสมบูรณ์ การทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (Completing the square) ทำได้โดยง่าย  
สังเกตจาก


$$x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2$$



ครึ่งหนึ่งของ  $m$


ตัวอย่างที่ 5

(1) 
$$x^2 + 2x + (1)^2 = (x+1)^2$$




$\frac{2}{2} = 1$

(2) 
$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$



$\frac{6}{2} = 3$

(3) 
$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2$$



$\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$

(4) 
$$x^2 - x + \dots = (\dots)^2$$

บทที่ 3 สมการ

(5)  $x^2 + \frac{4}{3}x + \dots = (\dots)^2$

(6)  $x^2 + \pi x + \dots = (\dots)^2$

(7)  $x^2 - 0.4x + \dots = (\dots)^2$

(8)  $x^2 - \sqrt{2}x + \dots = (\dots)^2$

(9)  $x^2 + \sqrt{3}x + \dots = (\dots)^2$

(10)  $y^2 - \frac{y}{\sqrt{5}} + \dots = (\dots)^2$

□

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ  $2x^2 - 2x - 1 = 0$  โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ จัดพจน์ที่มีตัวแปร  $x$  ไว้ข้างเดียวกัน โดยบวก 1 ทั้งสองข้างได้

$$2x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - x = \frac{1}{2}$$

(ทำ ส.ป.ส. ของ  $x^2$  เป็น 1)

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

(ทำด้านซ้ายเป็นกำลังสองสมบูรณ์)

โดยบวก  $\left(\frac{1}{2}(-1)\right)^2 = \frac{1}{4}$  ทั้งสองข้าง)

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

(เขียนด้านซ้ายเป็นกำลังสองสมบูรณ์)

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$$

(แยกแฟกเตอร์และใช้สมบัติ (\*))

$$x - \frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น รากของสมการคือ

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

□

### 3.3.3 การแก้สมการกำลังสองโดยสูตร

สมการกำลังสองในรูปมาตรฐาน

$$ax^2 + bx + c = 0$$

( $a \neq 0$ ) มีราก 2 ราก โดยคำนวณจากสูตรกำลังสอง (quadratic formula)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(นักศึกษาลองพิสูจน์สูตรนี้ โดยจัดสมการกำลังสองเป็นกำลังสองสมบูรณ์ เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 6)

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตรกำลังสอง

$$(1) \quad 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(2) \quad 5x^2 + 2x = -1$$

วิธีทำ

(1)  $a = 2$ ,  $b = -2$ ,  $c = -1$  แทนค่าในสูตรได้

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น รากของสมการ คือ

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

(คำตอบเดียวกันกับตัวอย่างที่ 6)

(2) เขียนสมการเป็นแบบมาตรฐานได้

$$5x^2 + 2x + 1 = 0$$

ดังนั้น  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$  แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{10} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{10} \end{aligned}$$

ค่าในรากที่สองเป็นค่าลบ ทำให้รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น สมการนี้ไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง



โจทย์ จงหารากที่เป็นค่าจริงของสมการกำลังสองโดยสูตรกำลังสอง

(1)  $2x^2 + x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2)  $3x^2 = 5x - 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3)  $2y^2 - 6y + 3 = 0$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(4)  $3u^2 = 4 - 4u$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

(5)  $LI^2 + RI + \frac{1}{C} = 0$  (C เป็นค่าบวก)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....





บทที่ 4

ฟังก์ชัน (Functions)

4.1 บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเกิดขึ้นมาได้อย่างไร ?

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 1

(1) พื้นที่ของวงกลมขึ้นอยู่กับรัศมี

ให้  $A$  แทนพื้นที่ของวงกลมรัศมี  $r$  ดังนั้น กฎเกณฑ์ที่เชื่อมโยง  $r$  และ  $A$  คือ

$$A = \pi r^2$$

(2) จำนวนประชากรโลก  $P$  ขึ้นอยู่กับเวลา  $t$  (ปี)

ตารางแสดงจำนวนประชากรโดยประมาณในปี ค.ศ. ต่างๆ

ปี	1950	1960	1970	1980	1990	2000
ประชากร (ล้าน)	2560	3040	3710	4450	5280	6080

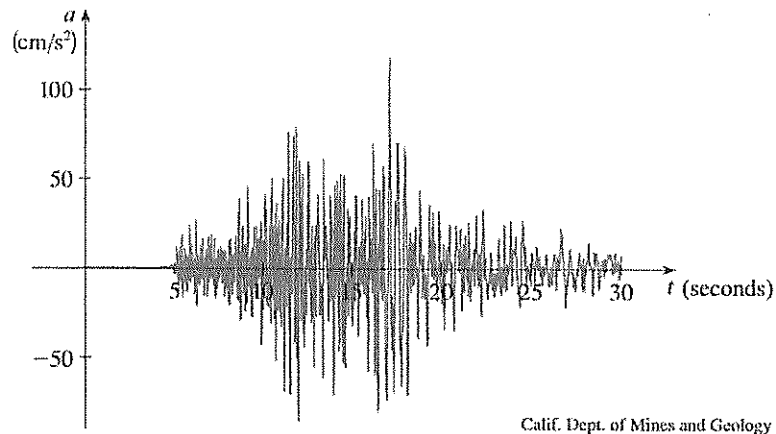
ดังนั้น

$$P(1960) \cong 3710 \text{ ล้านคน}$$

$P$  เป็น.....ของ.....

(3) ความเร่งในแนวตั้งของพื้นดินในช่วงเวลาที่เกิดแผ่นดินไหว วัดได้โดย seismograph แสดงด้วยกราฟ ดังเช่น กรณีที่เกิดแผ่นดินไหวใน Los Angeles ในปี ค.ศ. 1994 ความเร่งที่วัดได้ในช่วงเวลา 5 – 30 วินาที แสดงดังรูป

บทที่ 4 ฟังก์ชัน



(ที่มาของรูป: Stewart หน้า 11)

ให้  $a$  แทนความเร่ง ( $cm/s^2$ ) และ  $t$  แทนเวลา ( $s$ )  
 กราฟแสดงความเร่ง  $a$  ณ เวลา  $t$  ในช่วง 5–30 วินาที

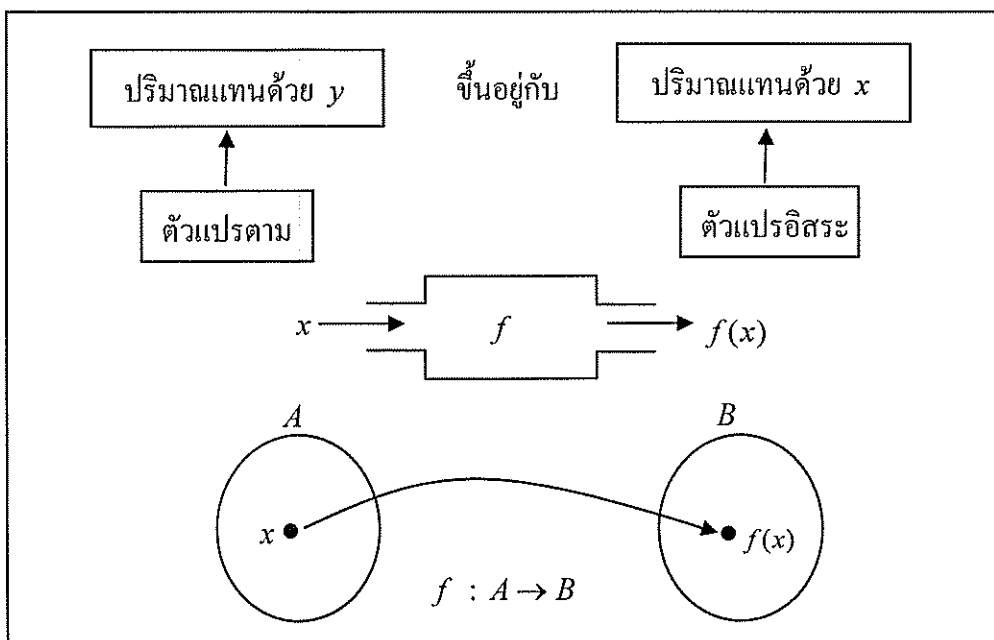
บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน  $f$  คือ กฎเกณฑ์เชื่อมโยงแต่ละสมาชิก  $x$  ในเซต  $A$  กับสมาชิก  $f(x)$  เพียงตัวเดียวเท่านั้นในเซต  $B$  (พิจารณากรณีเซต  $A$  และ  $B$  เป็นเซตของจำนวนจริง) ดังนั้น

$f(x)$  คือ ค่าของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x$

นิยมเขียนแทนค่า  $f(x)$  ด้วยตัวแปร  $y$  นั่นคือ

$$y = f(x)$$

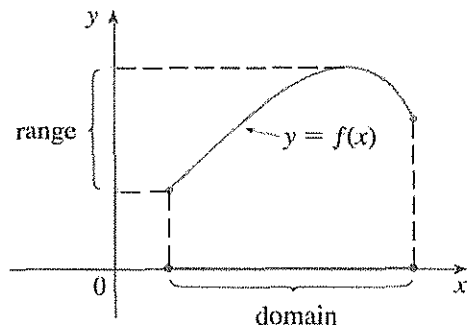
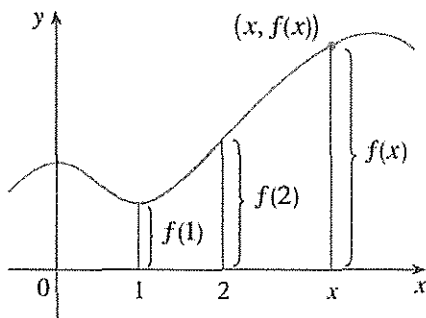


$$f : A \rightarrow B$$

สิ่งที่ควรรู้

- (1) โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน  $f$  คือ เซต  $A$
- (2) เรนจ์ (range) ของฟังก์ชัน  $f$  คือ  $\{ f(x) \mid x \in A \}$
- (3) กราฟของฟังก์ชัน  $f$  คือ เซตของคู่อันดับ

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$



(ที่มาของรูป : Stewart หน้า 12)

ตัวอย่างที่ 2

- (1)  $f(x) = \pi x^2$  หรือ  $y = \pi x^2$   
(ถ้า  $x$  เป็นรัศมีวงกลม แล้ว  $f(x)$  คือ.....)

- (2)  $f(x) = x^2$  หรือ  $y = x^2$   
(ถ้า  $x$  เป็นความยาวของด้านสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว  $f(x)$  คือ.....)

- (3)  $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$  หรือ  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$   
(ถ้า  $r$  เป็นรัศมีวงกลม แล้ว  $f(r)$  หรือ  $V$  คือ.....)

□

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1)  $f(x) = 2x - 1$       (2)  $g(x) = x^2$       (3)  $h(x) = \sqrt{x}$

วิธีทำ

(1)  $f(x) = 2x - 1$

เห็นได้ว่า สามารถแทนค่า  $x$  ในสูตรนี้ด้วยจำนวนจริงใดๆ และค่าของฟังก์ชันที่ได้ก็จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ที่เปลี่ยนไปตามค่า  $x$  เช่น

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 3, \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$$

ดังนั้น

โดเมนของ  $f$  คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

และ

เรนจ์ของ  $f$  คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

(2)  $g(x) = x^2$

โดเมนของ  $g$  คือ.....

เรนจ์ของ  $g$  คือ.....

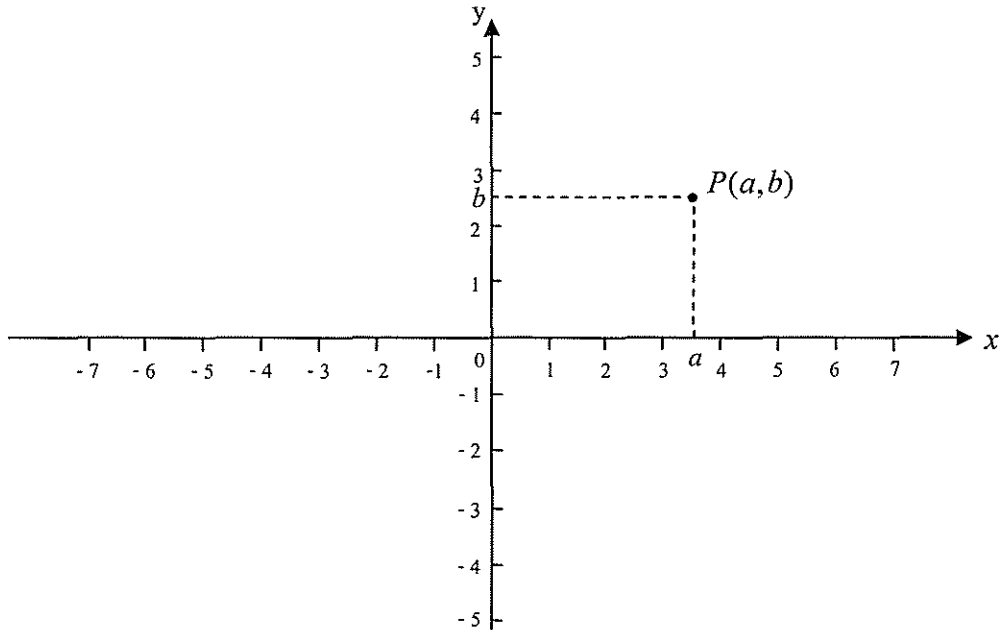
(3)  $h(x) = \sqrt{x}$

โดเมนของ  $h$  คือ.....

เรนจ์ของ  $h$  คือ.....

□

## 4.2 ระบบพิกัดเชิงฉาก (Cartesian or Rectangular Coordinate System)



### ระบบพิกัดเชิงฉาก

ประกอบด้วย

เส้นจำนวนในแนวนอน เรียกว่า แกน  $x$  ซึ่งตั้งฉากกับเส้นจำนวนในแนวตั้ง เรียกว่า แกน  $y$  ตัดกันที่จุด ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด (origin) กำหนดทิศทางการเพิ่มขึ้นบนแกน  $x$  จากซ้ายไปขวา และทิศทางการเพิ่มขึ้นบนแกน  $y$  จากล่างขึ้นไปบน จุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งตัดกันที่ 0 บนแกน  $x$  และ 0 บนแกน  $y$

### พิกัด (coordinates) ของจุดในระบบพิกัดเชิงฉาก

ให้  $P$  เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงฉาก ดังนั้น ตำแหน่งของจุด  $P$  ซึ่งอยู่บนระนาบในระบบพิกัดเชิงฉากนี้ เรียกว่า พิกัดของจุด  $P$  กำหนดโดยคู่อันดับ  $(a, b)$  โดย

$a$  คือ พิกัด  $x$  ( $x$  - coordinate) หรือ แอบซิสซา (abscissa) ของจุด  $P$  และ

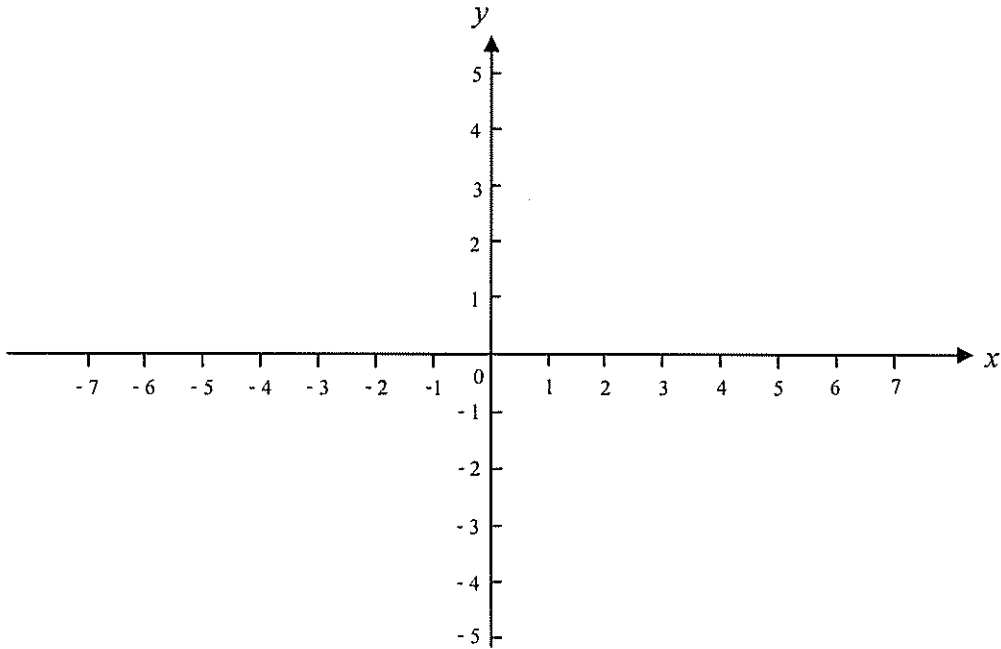
$b$  คือ พิกัด  $y$  ( $y$  - coordinate) หรือ ออร์ดิเนต (ordinate) ของจุด  $P$

ตั้งพิกัดของจุดกำเนิด ซึ่งแทนด้วยจุด  $O$  คือ  $(0, 0)$

บทที่ 4 ฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4 จงลงจุดซึ่งกำหนดโดยคู่อันดับต่อไปนี้ ลงในระบบพิกัดเชิงฉาก

- |              |                |                           |             |
|--------------|----------------|---------------------------|-------------|
| (1) (2,3)    | (2) (-1,0)     | (3) (0,4)                 | (4) (0,-5)  |
| (5) (-3.5,4) | (6) (5,-1)     | (7) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ | (8) (-2,-3) |
| (9) (0,2.1)  | (10) $(\pi,0)$ | (11) (-1.5,-2.8)          | (12) (3,3)  |

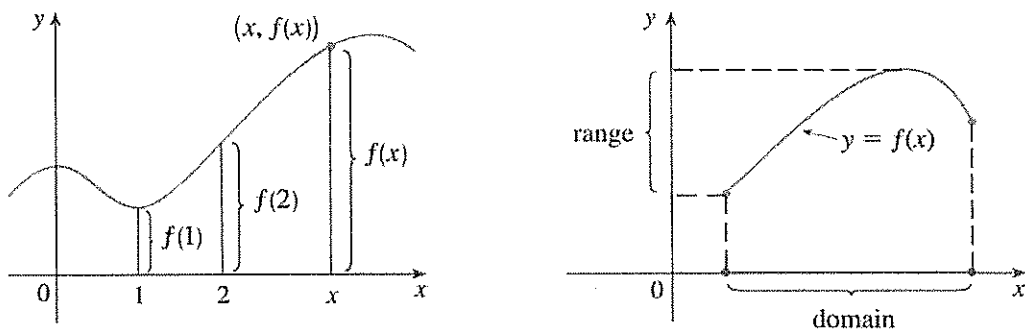


4.3 กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน  $f : A \rightarrow B$  คือ เซตของคู่อันดับ

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

การแสดงกราฟของฟังก์ชัน  $f$  สามารถลงจุด  $(x, f(x))$  ในระบบพิกัดเชิงฉากดังรูปได้



(ที่มาของรูป: Stewart หน้า 12)

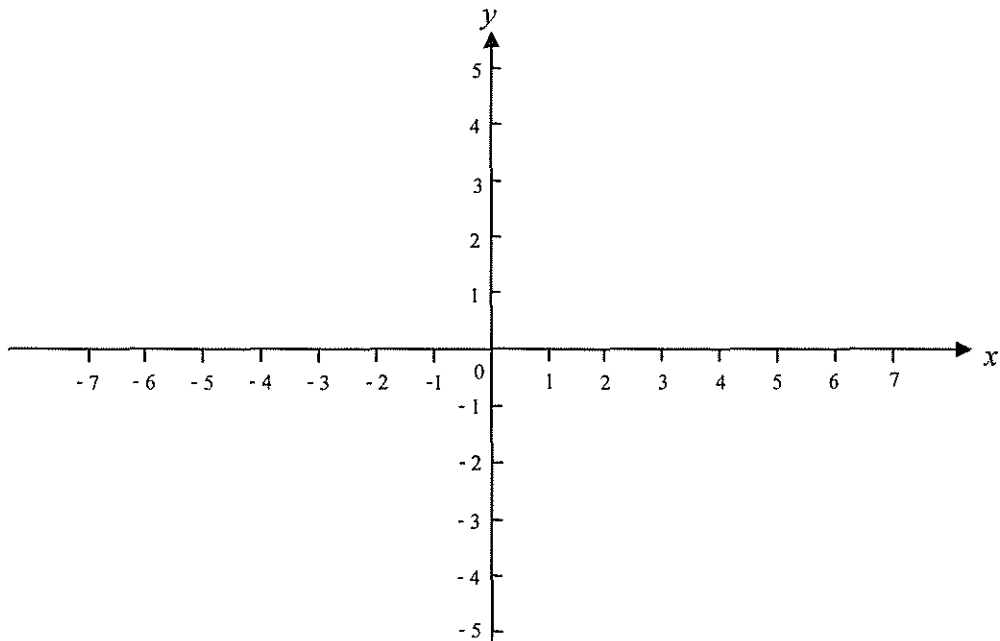
บทที่ 4 ฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 5 จงร่างกราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = 2x - 1$

วิธีทำ ลองคำนวณค่าของ  $f(x)$  โดยเลือกค่า  $x$  ง่ายๆ ดังตาราง

$x$	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$						

ลงจุด  $(x, f(x))$  ในระนาบ  $x-y$



□

ตัวอย่างที่ 6 จงร่างกราฟของฟังก์ชัน  $g(x) = x^2$

วิธีทำ โดเมนของ  $g$  คือ.....  
เรนจ์ของ  $g$  คือ.....

สังเกตได้ว่า ถ้าแทนค่า  $-x$  ในสูตร จะได้

$$g(-x) = (-x)^2 = x^2$$

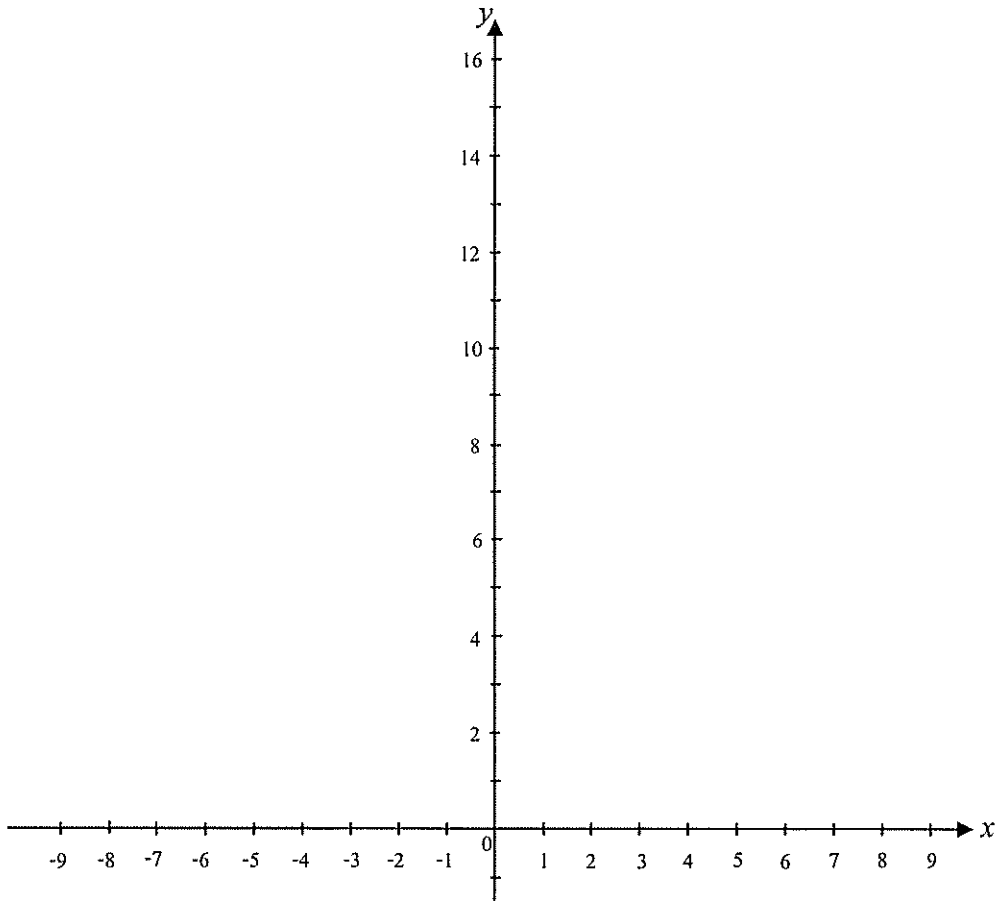
$$\Rightarrow g(-x) = g(x)$$

[ แสดงว่า จุด  $(-x, g(-x))$  และ จุด  $(x, g(x))$  อยู่ในระดับเดียวกันบนระนาบ  $x-y$   
ทำให้กราฟของฟังก์ชัน  $g$  มีสมมาตรเทียบกับแกน  $y$  ]

บทที่ 4 ฟังก์ชัน

ลองคำนวณค่าของ  $g(x)$  ดังตาราง

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$								





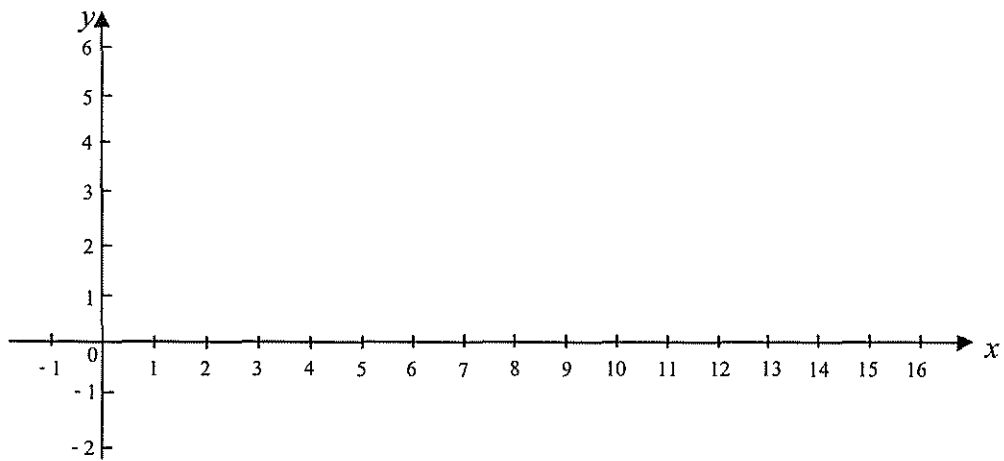
ตัวอย่างที่ 7 จงร่างกราฟของ  $h(x) = \sqrt{x}$

วิธีทำ โดเมนของ  $h$  คือ.....

เรนจ์ของ  $h$  คือ.....

คำนวณค่าของ  $h(x)$

$x$	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$					



โจทย์ จงพิจารณาข้อต่อไปนี้และเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ  $f(x) = 4 - 2x^2$  ที่  $x = 3$  เท่ากับเท่าใด

- (a) -14      (b) -12      (c) -10      (d) -8

2. ค่าของ  $f(-1)$  สำหรับ

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < 0 \\ x+3, & x \geq 0 \end{cases}$$

เท่ากับเท่าใด

- (a) -1      (b) 5      (c) 2      (d) 2, 5

3. ค่าของ  $f(u^2 + v)$  สำหรับ  $f(x) = 4x + 6$  เท่ากับเท่าใด

- (a)  $(u^2 + v)(4x + 6)$       (b)  $4u^2 + v + 6$   
 (c)  $4u^2x + 6$       (d)  $4u^2 + 4v + 6$

4. โดเมนของฟังก์ชัน  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  คือข้อใด

- (a)  $(-\infty, \infty)$       (b)  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$   
 (c)  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$       (d)  $[-1, 1]$

5. ค่าของ  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  สำหรับ  $f(x) = x^2 + 3$  เท่ากับเท่าใด

- (a)  $2a + h^2$       (b)  $2a + h^2 + 3$   
 (c)  $2a + h$       (d)  $2a + h + 3$

6. โดเมนของฟังก์ชัน  $f(x) = \sqrt{x-5}$  คือข้อใด

- (a)  $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$       (b)  $[5, \infty)$   
 (c)  $(-\infty, 5]$       (d)  $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

7. โดเมนของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$  คือข้อใด

- (a)  $(-\infty, 9) \cup (9, \infty)$       (b)  $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$   
 (c)  $[3, \infty)$       (d)  $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

บทที่ 4 ฟังก์ชัน

8. โดเมนของฟังก์ชัน  $\{(a, 6), (b, 6), (d, 9)\}$  คือข้อใด

- (a)  $\{a, b, d\}$                       (b)  $\{6, 9\}$   
 (c)  $\{a, b, d, 6, 9\}$               (d)  $\{a, b, d, 9\}$

9. โดเมนของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x-4}}$  คือข้อใด

- (a)  $[4, 5) \cup (5, \infty)$               (b)  $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$   
 (c)  $[4, \infty)$                           (d)  $(4, \infty)$

10. โดเมนของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}}{x-5}$  คือข้อใด

- (a)  $[4, 5) \cup (5, \infty)$               (b)  $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$   
 (c)  $[4, \infty)$                           (d)  $(4, \infty)$

คำตอบ

1. (a)              2. (b)              3. (d)              4. (a)              5. (c)  
 6. (b)              7. (d)              8. (a)              9. (d)              10. (a)

บทที่ 5

ฟังก์ชันเชิงเส้น

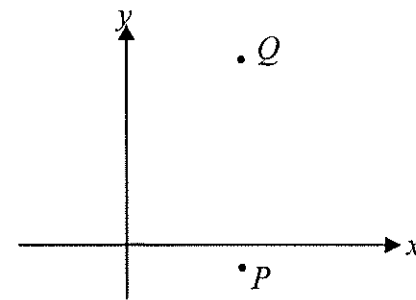
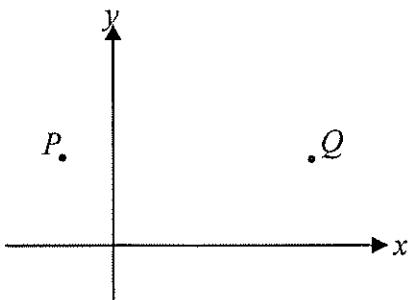
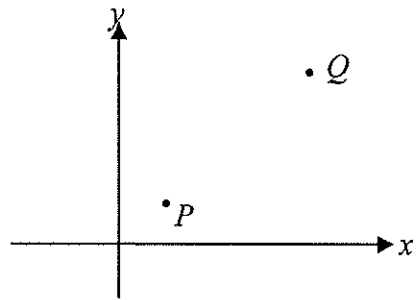
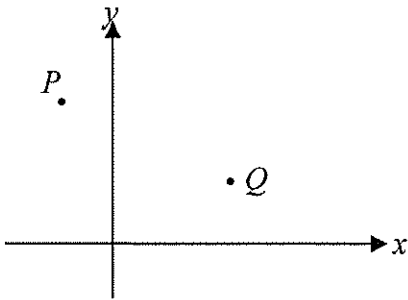
(Linear Functions)

5.1 ความชันของเส้นตรง

กำหนดจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนระนาบ จะมีเส้นตรงที่เส้นที่ผ่านจุดทั้งสองได้

.....

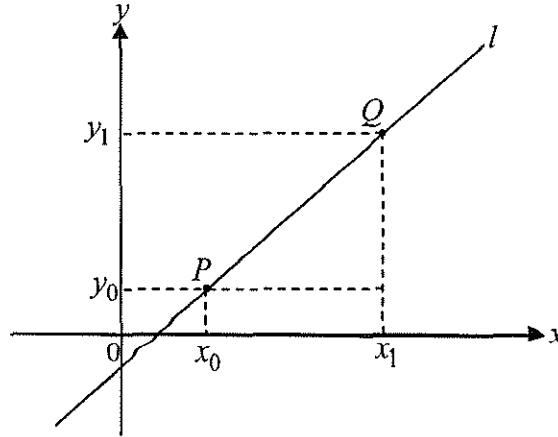
.....



**บทนิยามของความชันของเส้นตรง**

ให้  $P(x_0, y_0)$  และ  $Q(x_1, y_1)$  เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรง  $l$  ในระนาบ  $x-y$  ซึ่งไม่ใช่เส้นตั้ง ความชันของเส้นตรง  $l$  คือ

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



ความชันของเส้นตรง  $l$  มีค่าคงที่หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

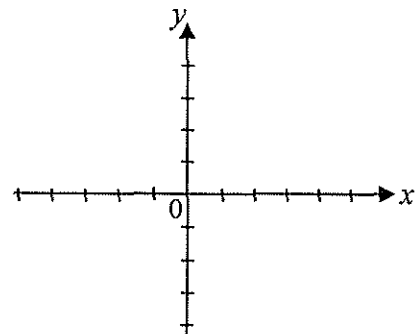
.....

**ตัวอย่างที่ 1** จงร่างเส้นตรงที่ผ่านจุด  $P$  และ  $Q$  และหาความชัน  $m$

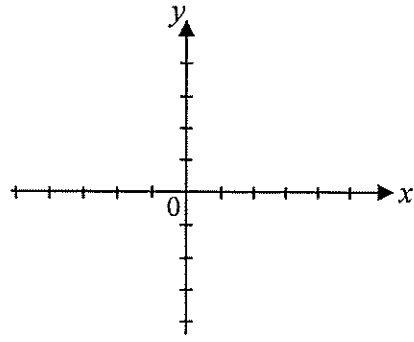
- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $P(-2, -1), Q(2, 3)$ | (2) $P(-1, 3), Q(4, -1)$ |
| (3) $P(-1, 2), Q(3, 2)$  | (4) $P(4, -1), Q(4, 2)$  |

**วิธีทำ**

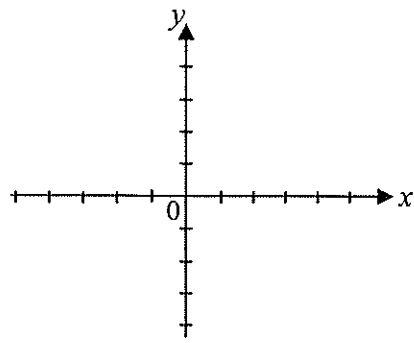
(1)  $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$



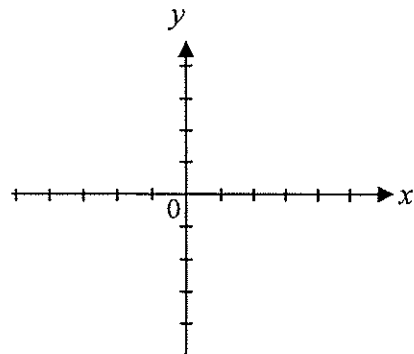
$$(2) \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - 3}{4 - (-1)} = -\frac{4}{5}$$



(3)

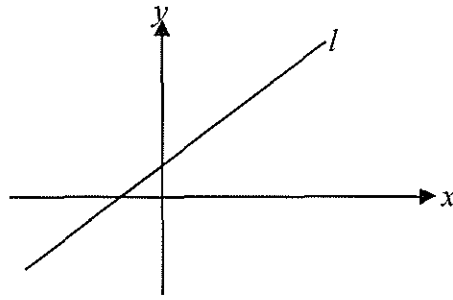


(4)

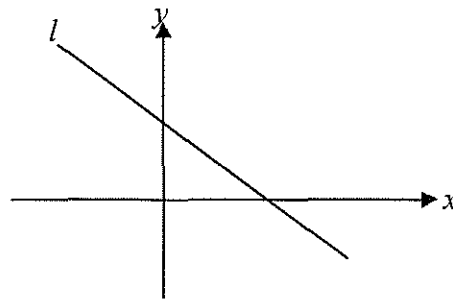


บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

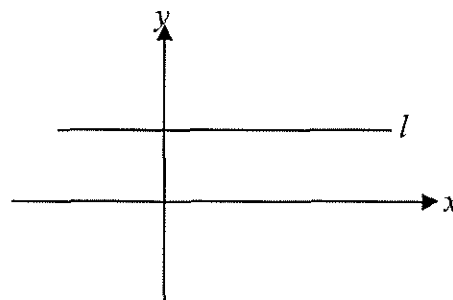
เส้นตรงที่มีความชันเป็นบวก



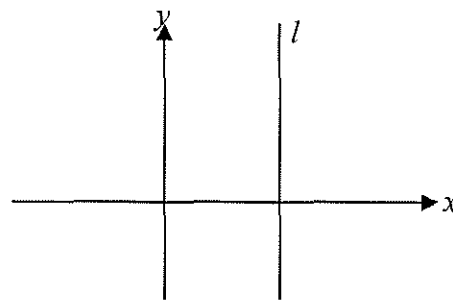
เส้นตรงที่มีความชันเป็นลบ



เส้นตรงที่มีความชันเป็นศูนย์



ความชันของเส้นตั้งไม่นิยาม



ตัวอย่างที่ 2 จงร่างเส้นตรง  $l$  ที่ผ่านจุด  $(2, 3)$  และมีความชัน

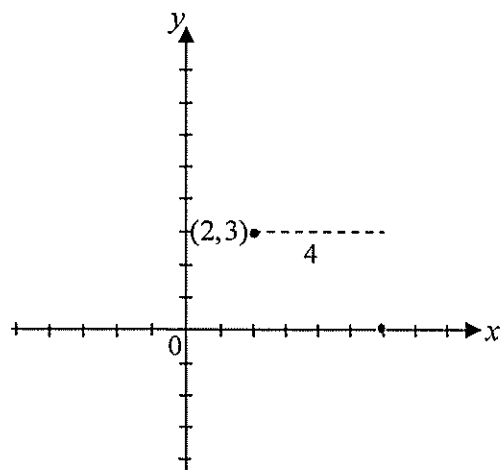
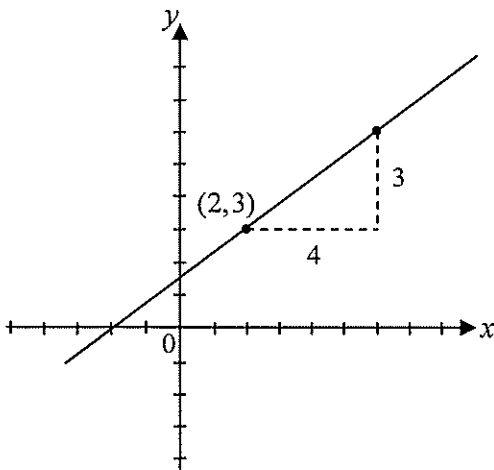
(1)  $m = \frac{3}{4}$

(2)  $m = -\frac{3}{4}$

วิธีทำ

(1) ความชัน  $m = \frac{3}{4}$  หมายความว่า การเคลื่อนที่จากจุดใดๆบนเส้นตรง  $l$  ไปในแนวนอนทางขวา 4 หน่วย แล้วต้องเคลื่อนที่ขึ้นไปทางแนวตั้ง 3 หน่วย จึงจะไปถึงอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง  $l$  ดังรูป

(2) ความชัน  $m = -\frac{3}{4}$  หมายความว่า การเคลื่อนที่จากจุดใดๆบนเส้นตรง  $l$  ไปในแนวนอนทางขวา 4 หน่วย แล้วต้องเคลื่อนที่...ไปทางแนวตั้ง 3 หน่วย จึงจะไปถึงอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง  $l$  ดังรูป



### 5.2 สมการของเส้นตรง

ให้  $l$  เป็นเส้นตรง (ไม่เป็นเส้นตั้ง) ซึ่งผ่านจุด  $(x_0, y_0)$  และมีความชัน  $m$  ให้  $(x, y)$  เป็นจุดใดๆบนเส้นตรง  $l$  พิจารณาความชันที่คำนวณจากจุด  $(x, y)$  และ  $(x_0, y_0)$  ย่อมได้

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

จัดรูปได้

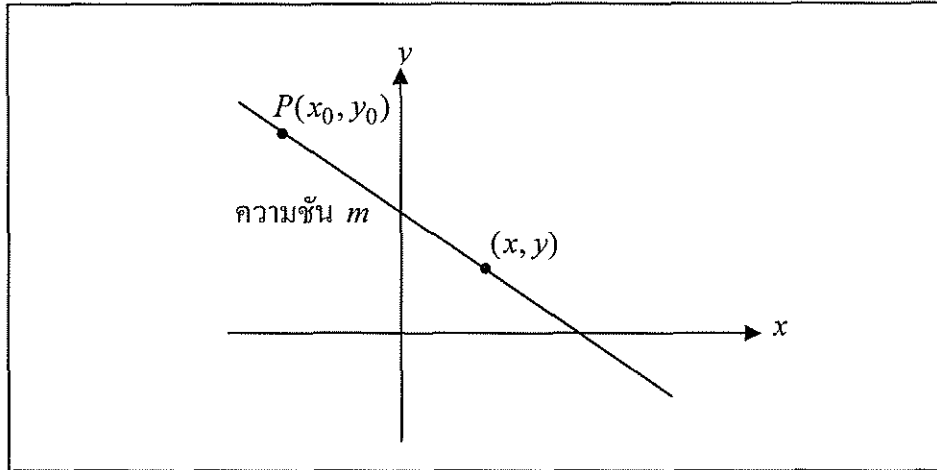
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



ดังนั้น สมการของเส้นตรง  $l$  ซึ่งผ่านจุด  $(x_0, y_0)$  และมีความชัน  $m$  คือ

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

เรียกสมการนี้ว่า รูปแบบจุด-ความชัน (point - slope form)



ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรง  $l$  ในรูปแบบจุด-ความชัน

- (1) เส้นตรง  $l$  ผ่านจุด  $(3, 2)$  และมีความชัน 2
- (2) เส้นตรง  $l$  ผ่านจุด  $(-4, 0)$  และมีความชัน  $-\frac{1}{2}$
- (3) เส้นตรง  $l$  ผ่านจุด  $(-4, 0)$  และ  $(0, 4)$
- (4) เส้นตรง  $l$  ผ่านจุด  $(5, -2)$  และ  $(-3, 4)$

วิธีทำ

- (1) แทนค่า  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 2$  และ  $m = 2$  ในสมการเส้นตรงรูปแบบ จุด-ความชัน ได้

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

- (2) แทนค่า  $x_0 = -4$ ,  $y_0 = 0$  และ  $m = -\frac{1}{2}$  ในสมการเส้นตรงรูปแบบ จุด-ความชัน ได้

.....

(3) คำนวณความชันของเส้นตรง  $l$  ได้

$$m = \frac{0-4}{-4-0} = \frac{-4}{-4} = 1$$

แทนค่า  $x_0 = -4$ ,  $y_0 = 0$  และ  $m = 1$  ได้สมการของเส้นตรงของ  $l$  เป็น

$$y - 0 = 1(x - (-4))$$

นั่นคือ

$$y = x + 4$$

(หรือเลือก  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 4$ )

(4) คำนวณความชันของเส้นตรง  $l$  ได้

$$m = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

แทนค่า  $x_0 = \dots\dots\dots$ ,  $y_0 = \dots\dots\dots$  และ  $m = \dots\dots\dots$

ได้สมการของเส้นตรงของ  $l$  เป็น

.....  
 .....



บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

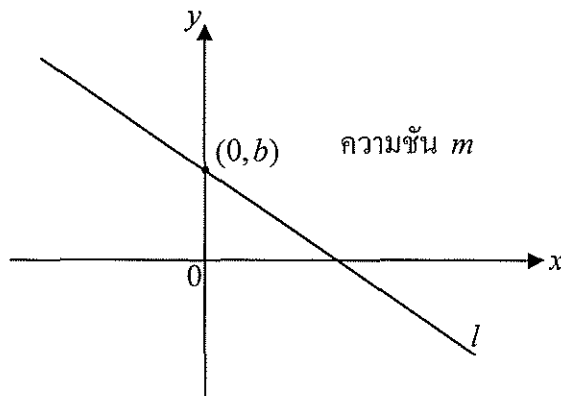
สำหรับเส้นตรง  $l$  ที่ไม่เป็นเส้นตั้ง และมีความชัน  $m$  ย่อมต้องตัดแกน  $y$  ให้จุดตัดแกน  $y$  เป็น  $(0, b)$  ดังรูป เรียกค่าออร์ดิเนต  $b$  ว่าระยะตัดแกน  $y$  ( $y$ -intercept) ของเส้นตรง  $l$  โดยใช้จุด  $(0, b)$  ซึ่งอยู่บนเส้นตรง  $l$  และความชัน  $m$  แทนค่าในสมการของเส้นตรงในรูปแบบ จุด-ความชันได้

$$y - b = m(x - 0)$$

หรือ

$$y = mx + b$$

ซึ่งเรียกว่า สมการเส้นตรงในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน (slope-intercept form) ของเส้นตรง  $l$



รูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน

สมการ

$$y = mx + b$$

คือสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชัน  $m$  และระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ  $b$

บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

โจทย์ จงอ่านค่าความชันและระยะตัดแกน  $y$  จากสมการของเส้นตรง  $l$  ที่กำหนดมาให้

(1)  $y = -2x + 3$

ความชันเท่ากับ  $-2$

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ  $3$

(2)  $y = \frac{x}{4} - 2$

ความชันเท่ากับ  $\frac{1}{4}$

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ  $-2$

(3)  $y = 0.5x$

ความชันเท่ากับ .....

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(4)  $y = -\frac{3}{5}x - 1$

ความชันเท่ากับ .....

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(5)  $y = -2$

ความชันเท่ากับ .....

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(6)  $y + 2 = x - 3$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = x - 5$$

ดังนั้น ความชันเท่ากับ .....

ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(7)  $2y - 3x = 4$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

.....

ดังนั้น ความชันเท่ากับ ..... ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(8)  $3x+4y+5 = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกน ได้

.....  
.....

ดังนั้น ความชันเท่ากับ ..... ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(9)  $x-y-1 = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกน ได้

.....  
.....

ดังนั้น ความชันเท่ากับ ..... ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....

(10)  $2-x-3y = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกน ได้

.....  
.....

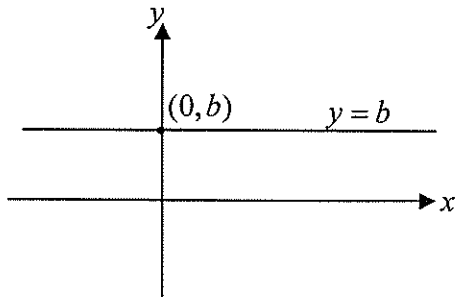
ดังนั้น ความชันเท่ากับ ..... ระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ .....



ถ้าแทน  $m$  ด้วย 0 ในสมการ  $y = mx + b$  ทำให้ได้สมการ

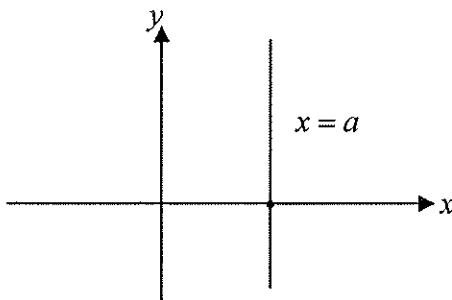
$$y = b$$

ซึ่งคือ สมการเส้นนอน (horizontal line)



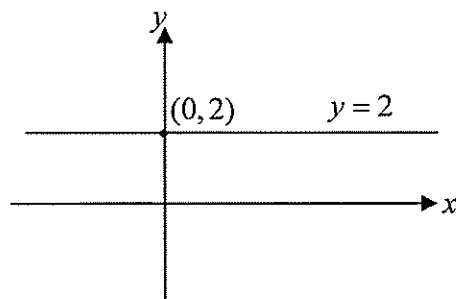
สำหรับสมการเส้นตั้ง (vertical line) ไม่สามารถแทนค่าความชัน  $m$  ใน  $y = mx + b$  ได้ เพราะค่าความชันของเส้นตั้งไม่นิยาม อย่างไรก็ตาม พิกัด  $x$  ของทุกๆ จุดบนเส้นตั้งเป็นค่าคงตัว ดังนั้น สมการของเส้นตั้ง คือ

$$x = a$$



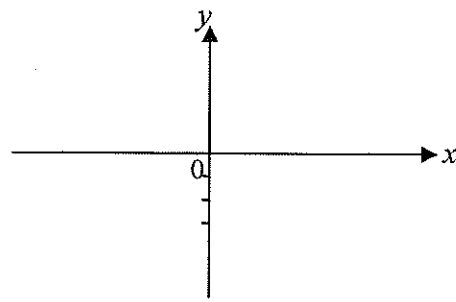
โจทย์ จงร่างกราฟของเส้นตรงซึ่งนิยามโดยสมการต่อไปนี้

(1)  $y = 2$

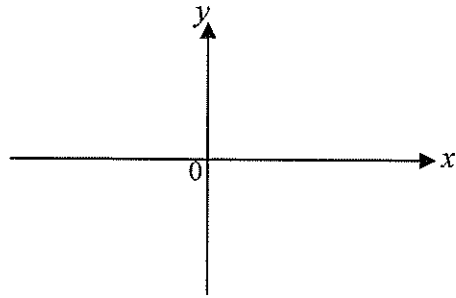


บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

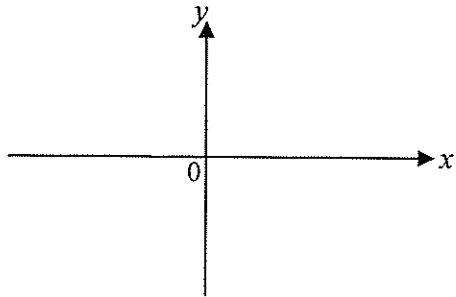
(2)  $y = -3$



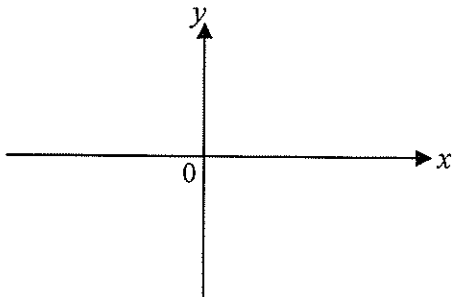
(3)  $x = 0$



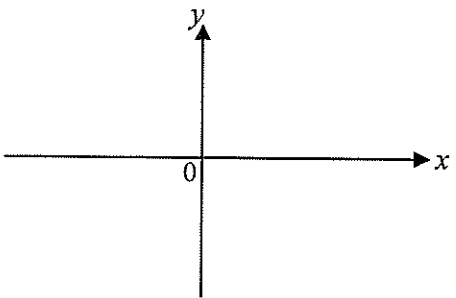
(4)  $y = 0$



(5)  $x = -4$



(6)  $x = \pi$



ถ้าแทนค่า  $y = 0$  ในสมการเส้นตรง

$$y = mx + b$$

สามารถหาระยะตัดแกน  $x$  ( $x$ -intercept) ซึ่งก็คือ แอบซิซซา ของจุดตัดแกน  $x$  ของเส้นตรงได้ เช่น

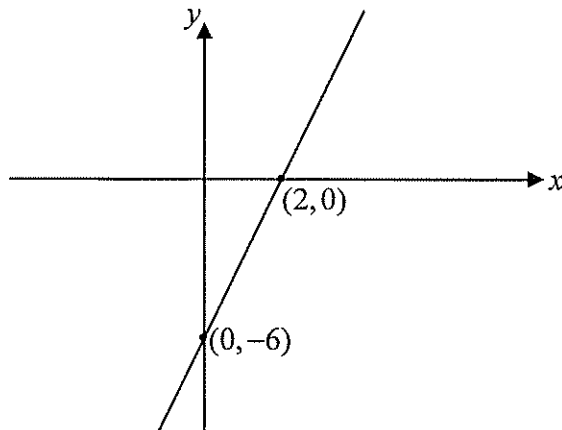
$$y = 3x - 6$$

แทนค่า  $y = 0$  ได้

$$3x - 6 = 0$$

$$x = 2$$

ดังนั้นระยะตัดแกน  $x$  คือ 2



#### สมบัติเชิงเรขาคณิต

ให้เส้นตรง  $l_1$  และเส้นตรง  $l_2$  (ไม่เป็นเส้นตั้ง) มีความชัน  $m_1$  และ  $m_2$  ตามลำดับ

- (1) เส้นตรง  $l_1$  ขนานกับเส้นตรง  $l_2$  ( $l_1 \parallel l_2$ ) ก็ต่อเมื่อ  $m_1 = m_2$
- (2) เส้นตรง  $l_1$  ตั้งฉากกับเส้นตรง  $l_2$  ( $l_1 \perp l_2$ ) ก็ต่อเมื่อ  $m_1 m_2 = -1$



บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณา เส้นตรง  $l_1$  และเส้นตรง  $l_2$  ที่กำหนดโดยสมการในแต่ละข้อว่า  
ขนานกันหรือตัดกัน

- (1)  $l_1 : 3x - 2y - 3 = 0, \quad l_2 : 3x - 2y + 5 = 0$   
 (2)  $l_1 : -3x + 2y - 3 = 0, \quad l_2 : 2x + 3y - 10 = 0$   
 (3)  $l_1 : y = 5, \quad l_2 : y = -10$   
 (4)  $l_1 : x = 2, \quad l_2 : x = -\frac{1}{2}$   
 (5)  $l_1 : y = 5, \quad l_2 : x = 3$

วิธีทำ

- (1) เขียนสมการในรูป  $y = mx + b$  ได้

เส้นตรง $l_1$	เส้นตรง $l_2$
$3x - 2y - 3 = 0$	$3x - 2y + 5 = 0$
$-2y = -3x + 3$	$-2y = -3x - 5$
$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

ดังนั้น เส้นตรง  $l_1$  ขนานกับ เส้นตรง  $l_2$  เพราะ ความชันของ  $l_1$  และ  $l_2$  ต่างก็เท่ากับ  $\frac{3}{2}$

- (2) เขียนสมการในรูป  $y = mx + b$  ได้

เส้นตรง $l_1$	เส้นตรง $l_2$

ดังนั้น เส้นตรง  $l_1$  ..... เส้นตรง  $l_2$  เพราะว่า .....

- (3) เส้นตรง  $l_1 : y = 5$  และ เส้นตรง  $l_2 : y = -10$   
 ต่างก็เป็นเส้นนอน ดังนั้น  $l_1$  ขนานกับ  $l_2$

(4) เส้นตรง  $l_1 : x = 2$  และ เส้นตรง  $l_2 : x = -\frac{1}{2}$   
 ต่างก็เป็น ..... ดังนั้น .....

(5) เส้นตรง  $l_1 : y = 5$  เป็นเส้น .....  
 เส้นตรง  $l_2 : x = 3$  เป็นเส้น .....  
 ดังนั้น เส้นตรง  $l_1$  ..... เส้นตรง  $l_2$

□

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้สมการของเส้นตรง  $l$  เป็น

$$2x - y + 6 = 0$$

จงสร้างสมการเส้นตรงในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน ซึ่งผ่านจุด  $(3, 2)$  และ

- (1) ตั้งฉากกับ  $l$                       (2) ขนานกับ  $l$

วิธีทำ เขียนสมการของเส้นตรง  $l$  ในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน ได้

$$y = 2x + 6$$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรง  $l$  เท่ากับ 2

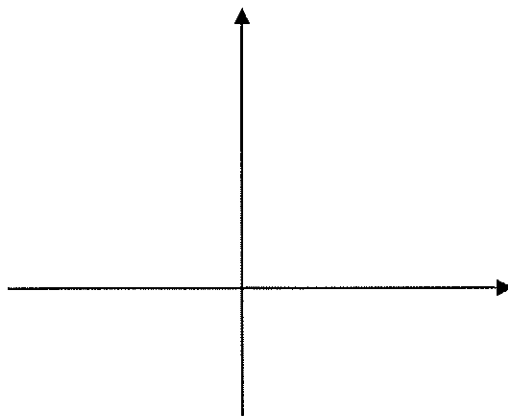
- (1) เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ  $l$  ต้องมีความชันเท่ากับ  $-\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(3, 2)$  และมีความชัน  $-\frac{1}{2}$  คือ

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้  $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

(เขียนรูปแสดง)



บทที่ 5 ฟังก์ชันเชิงเส้น

(2) เส้นตรงที่ขนานกับ  $l$  ต้องมีความชันเท่ากับ .....2.....

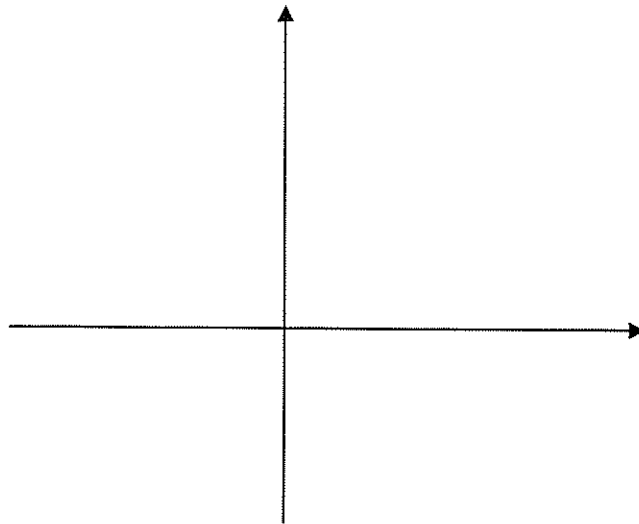
ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(3,2)$  และมีความชัน .....2..... คือ

$$y - 2 = \dots 2 \dots (x - 3)$$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = 2x - 4$$

(เขียนรูปแสดง)



□

## 5.3 ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันในรูป

$$f(x) = mx + b$$

เมื่อ  $m$  และ  $b$  เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ตัวแปร  $y$  แทนค่าของ  $f(x)$  จะได้สมการ

$$y = mx + b$$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = mx + b$  คือกราฟของสมการเส้นตรง  $y = mx + b$  ซึ่งคือสมการของเส้นตรงที่มีความชัน  $m$  และระยะตัดแกน  $y$  เท่ากับ  $b$

ตัวอย่างที่ 6 จงร่างกราฟของ  $f(x) = 2x - 3$

วิธีทำ  $f(x)$  เป็นฟังก์ชัน ..... ให้  $y = f(x)$  ดังนั้น กราฟของ  $f(x)$  คือกราฟของสมการเส้นตรง

$$y = 2x - 3$$

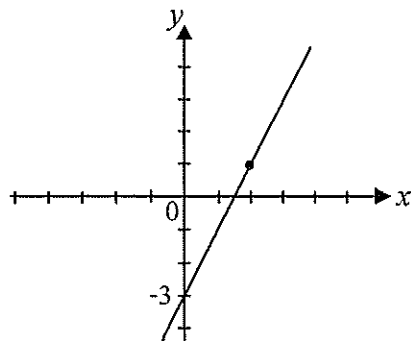
ร่างกราฟของเส้นตรง นักศึกษาหา 2 จุดใดๆบนเส้นตรงก็ลากเส้นตรงได้

จุดที่ 1 จากสมการ คือ จุดตัดแกน  $y$   $(0, -3)$

จุดที่ 2 เลือกแทนค่า  $x = 2$  ได้  $y = 2(2) - 3 = 1$

นั่นคือ จุด  $(2, 1)$  อยู่บนเส้นตรง

ร่างกราฟได้ดังนี้



□

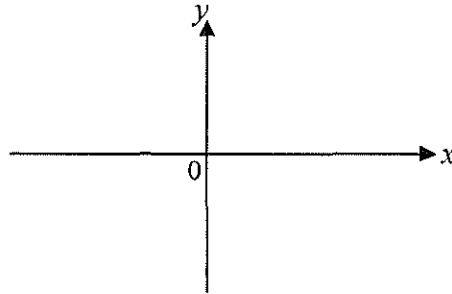
โจทย์

จงร่างกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์  $f(x) = |x|$

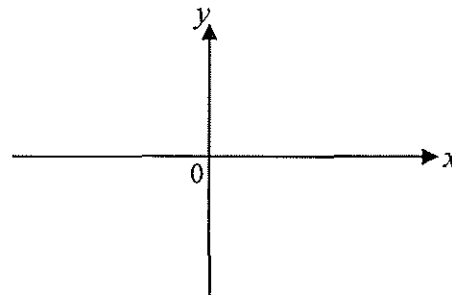
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

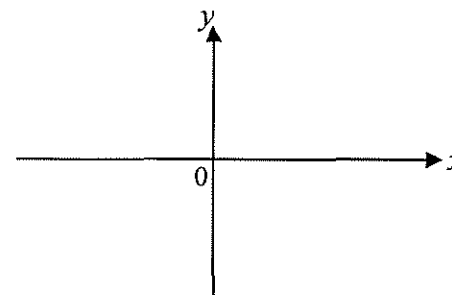
กราฟของ  $y = x$  คือ



กราฟของ  $y = -x$  คือ

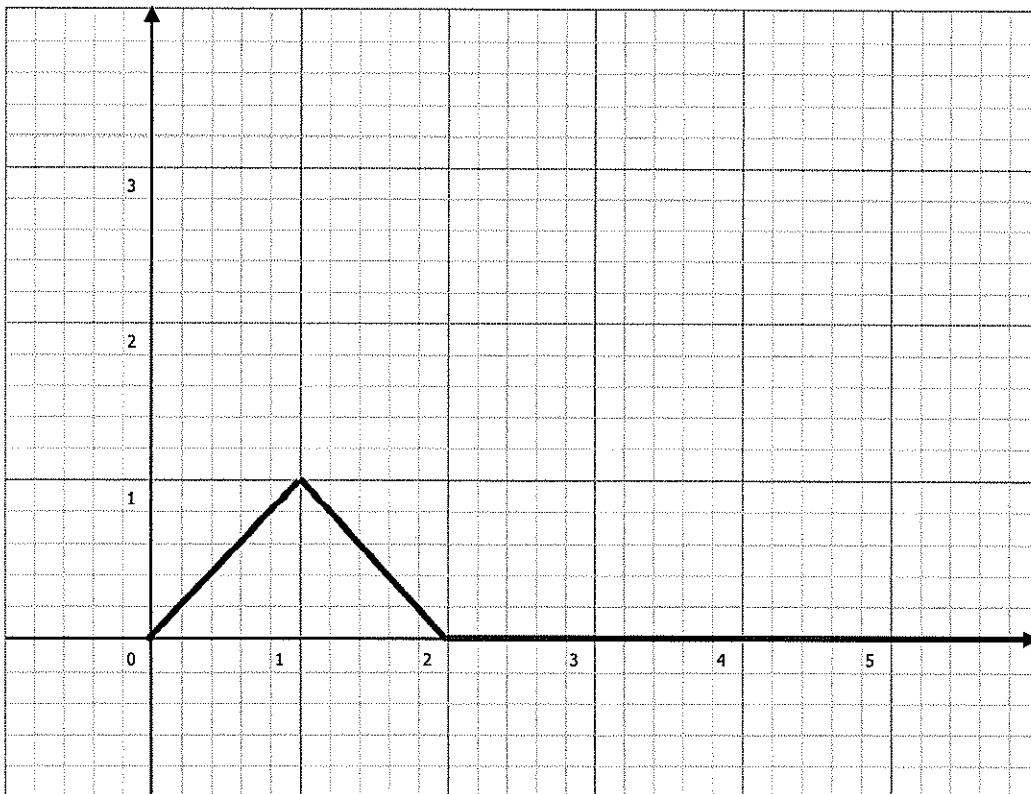


ดังนั้น กราฟของ  $y = |x|$  คือ



โจทย์

จงหาสูตรของฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งมีกราฟดังรูป



บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Huettnermueller, R., *Precalculus Demystified*, McGraw-Hill, New York, 2005.

Munem, M.A. and Yizze, J. P., *Precalculus Functions and Graphs*, 5<sup>th</sup> Edition, Worth,  
New York, 1990.

Stewart, J., *Calculus Single Variable*, 5<sup>th</sup> Edition, International Edition, Thomson  
Brooks/Cole, Belmont, 2003.