50

เอกสารประกอบการสอนวิชา

103211

Method of Differential Equations

ระเบียบวิธีของสมการเชิงอนุพันธ์

ผศ.ดร.เจษฎา ตัณฑนุช

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

บทที่ 1
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง (higher-order differential equations) และ การแก้สมการ เนื้อหาโดยหลักจะเป็นการขยายแนวความคิดจากทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ ??

1.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

จากบทนิยาม ?? (หน้า ??) เราเรียกสมการเชิงเส้น

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{1.1}$$

ที่มีค่า $b(x) \equiv 0$ ($b(x) = 0$ ทุก ๆ ค่า x) ว่า*สมการเอกพันธุ์* และถ้า $b(x) \neq 0$ สำหรับบางค่า x เราจะเรียกสมการ (1.1) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์*

สำหรับทฤษฎีที่จะกล่าวในบทนี้ ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงเชิงเส้น (1.1) จะถูกพิสูจน์บนเงื่อนไขที่ว่า **สัมประสิทธิ์ $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ ของสมการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ที่พิจารณา และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$**

เนื่องจาก $a_n(x) \neq 0$ ดังนั้นเราสามารถหารสมการ (1.1) ด้วย $a_n(x)$ ได้ และเราอาจจะเขียนสมการเชิงเส้น (1.1) ได้ในรูป

$$\frac{d^ny}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = g(x), \tag{1.2}$$

หรือ

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x) \tag{1.3}$$

เรามีทฤษฎีบทการมีจริงของผลเฉลย สำหรับปัญหาค่าตั้งต้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n ใด ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 (ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย). *ถ้าฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ และฟังก์ชัน $b(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ที่พิจารณาโดยที่ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ และมี $x_0 \in I$*

สำหรับแต่ละค่าตั้งต้น (ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ n จำนวน, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$) ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าตั้งต้น

$$y(x_0) = \gamma_0,\ y'(x_0) = \gamma_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}$$

จะมีผลเฉลยที่นิยามบนช่วง I ***และมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น***[1]

ตัวอย่าง 1.1. สำหรับปัญหาค่าตั้งต้น

$$\begin{aligned} (x-1)y''' - 3xy'' + 6x^2y' - \sin^{-1}(x)\, y &= \sqrt{x}, \\ y(x_0) = 1, \qquad y'(x_0) = 0, \qquad y''(x_0) &= 7, \end{aligned} \tag{1.4}$$

เราพบว่า

- $a_3(x) = x - 1, a_2(x) = -3x, a_1(x) = 6x^2$ นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$,
- $a_3(x) = x - 1$ มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = 1$
- $a_0(x) = -\sin^{-1} x$ นิยามบนช่วง $[-1, 1]$
- และ $b(x) = \sqrt{x}$ นิยามบนช่วง $[0, \infty)$

ดังนั้นฟังก์ชัน $a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ และ $b(x)$ **นิยามและต่อเนื่องพร้อมกัน** บนช่วง $[0, 1]$ และ $a_3(x) \neq 0$ เมื่อ $x \neq 1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย สำหรับ $x_0 \in [0, 1)$ ปัญหาค่าตั้งต้น (1.4) มีผลเฉลย $y(x)$ ซึ่งนิยามบน $[0, 1)$ และมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

[1] ดูการพิสูจน์ใน [18]

ตัวอย่าง 1.2. พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น

$$\begin{gathered} y^{(4)} + e^x y''' - xy'' + (x^3 - 2x)y' + \sin(x)\, y = 0, \\ y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

วิธีทำ เมื่อพิจารณา $a_4(x) = 1$, $a_3(x) = e^x$, $a_2(x) = -x$, $a_1(x) = x^3 - 2x$, $a_0(x) = \sin x$ และ $b(x) = 0$ พบว่าฟังก์ชันทั้งหมดนิยามและต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ และ $a_4(x) \neq 0$

และเราพบว่าฟังก์ชัน $y \equiv 0$ ซึ่งนิยามในช่วง $(-\infty, \infty)$ ทำให้สมการ

$$y^{(4)} + e^x y''' - xy'' + (x^3 - 2x)y' + \sin(x)\, y = 0$$

เป็นจริง อีกทั้งเป็นไปตามเงื่อนไข $y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย ปัญหาค่าตั้งต้น (1.5) มีผลเฉลยคือ $y \equiv 0$ (หรือ $y(x) = 0$ สำหรับทุกค่า x)

แนวความคิดจากตัวอย่าง 1.2 นำไปสู่กรณีพิเศษของทฤษฎีบท 1.1 เมื่อ $b(x) \equiv 0$ และ $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$ ดังนี้

บทแทรก 1.2. *ถ้าฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ที่พิจารณาโดยที่ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ และมี $x_0 \in I$*

ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่ n

$$\begin{gathered} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \\ y(x_0) = y'(x_0) = \cdots y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

มีผลเฉลยคือ

$$y(x) = 0, \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in I$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $y(x) \equiv 0$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นเสมอ และ $y(x) \equiv 0$ นิยามทุก ๆ ค่า x ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย $y(x) \equiv 0$ จึงเป็นเพียงผลเฉลยเดียวของปัญหาค่าตั้งต้น (1.6) □

1.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเอกพันธุ์

ในการศึกษา และหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง เราจะเริ่มต้นพิจารณาจากสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นก่อนซึ่งในส่วนนี้จะนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

บทนิยาม 1.1. ให้เป็น $f_1, f_2, \ldots, f_m$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่นิยามบนโดเมนและโดเมนร่วมเกี่ยวเดียวกัน

เราเรียก

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_mf_m,$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ว่า*ผลรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของ $f_1, f_2, \ldots, f_m$

บทนิยาม 1.2. เราเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ทั้ง m ฟังก์ชันนี้ว่า เป็น*อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) บนช่วง I ถ้า**ไม่ปรากฏว่ามีค่าคงตัว** $c_1, \ldots, c_m$ (โดยที่ $c_1, \ldots, c_m$ ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด) ซึ่งทำให้

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_mf_m(x) = 0$$

สำหรับทุก ๆ $x \in I$

และเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ที่ไม่มีคุณสมบัตินี้ว่า *ไม่อิสระเชิงเส้น* (linearly dependent)

หมายเหตุ ถ้าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ไม่อิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน นั่นทำให้เราสามารถเขียนฟังก์ชันใด ฟังก์ชันหนึ่ง ให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือได้

และโดยแนวทางเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ **??** (หน้า **??**) เราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 1.3. *ถ้า* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ *เป็นผลเฉลยที่นิยามบนช่วง* I *ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{1.7}$$

เมื่อฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *และฟังก์ชัน* $b(x)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง* I *ที่พิจารณาโดยที่* $a_n(x) \neq 0$ *สำหรับทุก ๆ* $x \in I$, *แล้ว*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_my_m(x),$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (1.7)

พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{1.8}$$

$$y(x_0) = \gamma_0,\ y'(x_0) = \gamma_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1} \tag{1.9}$$

ถ้า $y(x) = \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2(x) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1.8) และเป็นไปตามเงื่อนไขค่าตั้งต้น (1.9) ดังนั้นเราได้ว่า

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m(x_0) = \gamma_0 \\
y'(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2'(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m'(x_0) = \gamma_1 \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}
\end{aligned}$$

หรือเขียนได้ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(x_0) & \tilde{y}_2(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m(x_0) \\ \tilde{y}_1'(x_0) & \tilde{y}_2'(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

โดยทฤษฎีบทในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ระบบสมการ (1.10) จะต้องสมมูลกับระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

เมื่อ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ต่างเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x), \ldots, \tilde{y}_m(x)$

และทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น ทำให้ได้ว่าระบบสมการ (1.11) มีผลเฉลย และมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวและระบบสมการ (1.11) จะมีผลเฉลยเพียง

หนึ่งเดียวก็ต่อเมื่อเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

ต้องมีค่าลำดับชั้น[2] (rank) เท่ากับ n นั่นหมายถึงเวกเตอร์ต่อไปนี้มีความเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

และเมื่อลำดับชั้นของเมทริกซ์มีค่าเท่ากับจำนวนแถวและสดมภ์ จะได้ว่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของเมทริกซ์ (1.12) ต้องไม่มีค่าเป็นศูนย์

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.14}$$

รูปแบบของดีเทอร์มิแนนต์ของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีลักษณะใกล้เคียงกันกับดีเทอร์มิแนนต์ที่ปรากฏใน (1.14) มีชื่อเรียกเฉพาะดังนี้

บทนิยาม 1.3 (รอนสเกียน). ถ้าฟังก์ชัน $f_1, \ldots, f_n$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n-1$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน

$$W[f_1, \ldots, f_n](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

ว่า*รอนสเกียน* (Wronskian) ของ $f_1, \ldots, f_n$

[2] ดูนิยามของ "ค่าลำดับชั้น" หรือ "rank" ได้ใน [5]

อาเบล[3] สามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ถ้า $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

บนช่วง I แล้ว สำหรับ $x_0 \in I$

$$W[y_1, \ldots, y_n](x) = W[y_1, \ldots, y_n](x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt\right) \tag{1.16}$$

เราเรียกสมการ (1.16) นี้ว่า*สูตรของอาเบล*[4] (Abel's formula)

สูตรของอาเบลแสดงให้เห็นว่า

ถ้ามี $x_0 \in I$ *ซึ่ง* $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 0$ *แล้ว* $W[y_1, \ldots, y_n](x) = 0$ *ทุก ๆ* $x \in I$

และในทำนองกลับกัน

ถ้ามี $x_0 \in I$ *ซึ่ง* $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$ *แล้ว* $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ *ทุก ๆ* $x \in I$

จากสูตรของอาเบล และเงื่อนไข (1.14) ซึ่งก็คือ $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall x \in I \tag{1.17}$$

และทำให้ได้ว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

มีความเป็นอิสระเชิงเส้นทุก ๆ $x \in I$ และด้วยความเป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์ต่าง ๆ ใน (1.18) ส่งผลให้

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

[3]นีลส์ เฮนริก อาเบล (Abel, Nields Henrik) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ เมื่ออาเบลอายุเพียง 19 ปี เขาสามารถพิสูจน์ได้ว่าเราจะไม่สามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการพหุนามลำดับขั้นที่ห้า และสมการพหุนามลำดับขั้นสูงกว่านั้นได้ งานวิจัยของอาเบลหลายชิ้น เป็นรากฐานสำคัญในหลาย ๆ สาขาของคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์

[4]ดูการพิสูจน์*สูตรของอาเบล* ได้ใน [5]

มีความเป็นอิสระเชิงเส้น

จากข้อสังเกตที่กล่าวมา เราสามารถนำไปสรุปเป็นทฤษฎีบทได้คือ

ทฤษฎีบท 1.4. *ให้ $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง I โดยที่ $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{1.19}$$

ถ้ามีจุด x_0 ซึ่ง $x_0 \in I$ และ

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0, \tag{1.20}$$

แล้ว ทุก ๆ ผลเฉลยของสมการ (1.19) ซึ่งนิยามบนช่วง I สามารถถูกเขียนได้ในรูป

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \tag{1.21}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียกเซต $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข (1.20) สำหรับบางจุด $x_0 \in I$ ว่า**เซตของผลเฉลยมูลฐาน** (fundamental solution set) ของสมการ (1.19) บนช่วง I

และเรียกผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย $y_1, \ldots, y_n$,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ว่า*ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) ของสมการ 1.19

ตัวอย่าง 1.3. ถ้า $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ และ $y_3(x) = x^{-1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad x > 0 \tag{1.22}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.22)

วิธีทำ เนื่องจาก y_1, y_2 และ y_3 เป็นผลเฉลยของสมการ (1.22) (ผู้อ่านอาจจะลองตรวจสอบซ้ำด้วยการแทนค่าลงในสมการอีกครั้ง) โดยทฤษฎีบท 1.4 เราจะพิจารณาค่ารอนสเกียน

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

พบว่า $W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0$ ทุก ๆ $x > 0$ ดังนั้นเซต

$$\{x, x^2, x^{-1}\}$$

เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (1.22) และ

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1}, \qquad x > 0,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.22)

และจากการสังเกตทั้งหมด ทำให้เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีเพิ่มเติมได้อีกคือ

ทฤษฎีบท 1.5. *ถ้า $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลย n ผลเฉลยที่นิยามบนช่วง I ของสมการ*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{1.23}$$

แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. *$\{y_1, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของ (1.23)*

2. *$y_1, \ldots, y_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น*

3. *รอนสเกียน $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in I$*

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาสมการต่อไปนี้ แล้ว**หาช่วง** I ซึ่งทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย 1.1 ยืนยันว่าจะมีผลเฉลยอยู่จริง

   (a) $y^{(4)} + 4y''' + 4y = x$

   (b) $x(x-1)y^{(4)} + e^x y''' + 4x^2 y = 0$

   (c) $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$

   (d) $xy''' + (\sin x)y'' + 3y = \cos x$

   (e) $y''' + xy' + x^2y' + x^3y = \ln x$

   (f) $(x^2-4)y^{(4)} + x^2y''' + 9y = 0$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ **มีความเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่** ถ้าไม่เป็น จงหาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งทำให้ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันดังกล่าวเท่ากับศูนย์

   (a) $f_1(x) = x + x^2,\ f_2(x) = x - x^2$

   (b) $f_1(x) = x + x^2,\ f_2(x) = x - x^2,\ f_3(x) = x^2$

   (c) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x$

   (d) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - 1$

   (e) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = 2x^2 + 1,\ f_3(x) = 3x^2 + x$

   (f) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x,\ f_4(x) = x^2 + x + 1$

   (g) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^3 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x,\ f_4(x) = x^2 + x + 1$

3. จงหาตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่ให้ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และหารอนสเกียนของผลเฉลยเหล่านั้น

   (a) $y''' + y' = 0,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$

   (b) $y^{(4)} + y'' = 0,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x$

   (c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0,$ $\quad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = e^{-2x}$

   (d) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^{-x},\ y_4 = xe^{-x}$

   (e) $xy''' - y'' = 0,$ $\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^3$

   (f) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$ $\quad y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = 1/x$

1.3 สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในหัวข้อนี้ จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1.24}$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a_n \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (1.24) เราจะขยายแนวความคิดจากการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวในหัวข้อ ?? (หน้า ??) ดังนี้

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (1.24) อยู่ในรูป

$$y = ce^{\lambda x},$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เมื่อแทนค่า y และอนุพันธ์ $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ลงในสมการ (1.24) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & a_n\left(c\lambda^n e^{\lambda x}\right) + a_{n-1}\left(c\lambda^{n-1} e^{\lambda x}\right) + \cdots + a_1\left(c\lambda e^{\lambda x}\right) + a_0\left(ce^{\lambda x}\right) \\ = \ & \left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)\left(ce^{\lambda x}\right) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $y = ce^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (1.24) ก็ต่อเมื่อ

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{1.25}$$

เราเรียกสมการ (1.25) นี้ว่า*สมการแคแรกเทอริสติก* (characteristic equation) หรือ*สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ (1.24) โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต[5] สามารถเขียนสมการ (1.25) ได้ในรูป

$$a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

จำนวน n ตัวประกอบ, เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน(โดยอาจจะมีบางค่าซ้ำกันก็ได้) ซึ่งเป็นผลเฉลยสมการ (1.25)

[5] ดูทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิตหน้า ??

1.3.1 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน

ถ้ารากของสมการแคแรกเทอริสติก (1.25) ของสมการ (1.24) เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ สมการ (1.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \tag{1.26}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 1.4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0 \tag{1.27}$$

วิธีทำ สมการ (1.27) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 7\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$ และ $\lambda_4 = -3$ ดังนั้นสมการ (1.27) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x},$$

เมื่อ $c_1,\ c_2,\ c_3$ และ c_4 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 1.5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0, \tag{1.28}$$

$$y(0) = 6,\ y'(0) = 7,\ y''(0) = 17 \tag{1.29}$$

วิธีทำ สมการ (1.28) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ และ $\lambda_3 = 3$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

เมื่อ c_1, c_2 และ c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆและโดยเงื่อนไข (1.29) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} y(0) = 6 \quad &: c_1 + c_2 + c_3 = 6, \\ y'(0) = 7 \quad &: 2c_2 + 3c_3 = 7, \\ y''(0) = 17 \quad &: 4c_2 + 9c_3 = 17 \end{aligned} \tag{1.30}$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (1.29) คือ

$$c_1 = 3, \qquad c_2 = 2, \qquad c_3 = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$y(x) = 3 + 2e^{2x} + e^{3x}$$

1.3.2 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน

ในการหารากของสมการแคแรกเทอริสติก

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด จำนวนรากของสมการจะต้องเกิดเป็นจำนวนคู่[6] ซึ่งอยู่ในรูปของคู่สังยุค $r_j \pm is_j, j = 1, \ldots, n/2$, เมื่อ$r_j$ และ s_j เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$

สมการ (1.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{(r_1+is_1)x},\ e^{(r_1-is_1)x},\ \ldots,\ e^{(r_{n/2}+is_{n/2})x},\ e^{(r_{n/2}-is_{n/2})x}$$

เนื่องด้วยเอกลักษณ์ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เราจึงมักพิจารณาผลเฉลย n เฉลย ซึ่งเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงที่สมมูลกับผลเฉลยข้างต้น ได้แก่

$$e^{r_1x}\cos(s_1x),\ e^{r_1x}\sin(s_1x), \ldots, e^{r_{n/2}x}\cos(s_{n/2}x),\ e^{r_{n/2}x}\sin(s_{n/2}x)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ สมการ (1.24) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{r_1x}\left(c_1\cos(s_1x) + c_2\sin(s_1x)\right) + e^{r_2x}\left(c_3\cos(s_2x) + c_4\sin(s_2x)\right) \\ &\quad + \cdots + e^{r_{n/2}x}\left(c_{n-1}\cos(s_{n/2}x) + c_n\sin(s_{n/2}x)\right), \end{aligned}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

[6] สังเกตได้ว่า n ต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.6. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} + 14y^{(4)} + 49y'' + 36y = 0 \tag{1.31}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (1.31) คือ

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = (\lambda^2+9)(\lambda^2+4)(\lambda^2+1) = 0$$

สมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = \pm i,\ \pm 2i,\ \pm 3i$

ดังนั้นสมการ (1.31) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= e^0\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right) + e^0\left(c_3\cos 2x + c_4\sin 2x\right) + e^0\left(c_5\cos 3x + c_6\sin 3x\right) \\ &= c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x + c_5\cos 3x + c_6\sin 3x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.7. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \tag{1.32}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1 \tag{1.33}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (1.32) คือ

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 1 = (\lambda^2+\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$$

เราหา λ ซึ่งทำให้ $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ได้คือ

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน รากของสมการ $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ คือ $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ดังนั้นสมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ดังนั้นสมการ (1.32) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

และโดยเงื่อนไขตั้งต้น (1.33) ทำให้ได้

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\quad : c_1 + c_3 = 1 \\ y'(0) = 1 &\quad : \frac{c_1}{2} + c_2 - \frac{c_3}{2} + c_4 = 1 \\ y''(0) = 0 &\quad : -\frac{3}{4}c_1 + c_2 - \frac{3}{4}c_3 - c_4 = 0 \\ y'''(0) = 1 &\quad : -\frac{11}{8}c_1 - \frac{c_2}{4} + \frac{11}{8}c_3 - \frac{c_4}{4} = 1 \end{aligned} \tag{1.34}$$

เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ (1.34) ทำให้ได้

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{9}{8},\ c_3 = 1,\ c_4 = \frac{3}{8}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$y(x) = \frac{9}{8}e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{8}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

1.3.3 กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากซ้ำ

จากเนื้อหาในหัวข้อ **??** ซึ่งสมการแคแรกเทอริสติกของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.35}$$

มีรากซึ่งเป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน, $\lambda = -\frac{b}{2a}$, สมการ (1.35) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นได้แก่ $e^{\lambda x}$ และ $xe^{\lambda x}$

ด้วยการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์[7] เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

- ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีสมการแคแรกเทอริสติก ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

  $$a_n(\lambda - \lambda_*)^n = 0$$

  สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

  $$e^{\lambda_* x},\ xe^{\lambda_* x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda_* x}$$

  และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

  $$y(x) = c_1e^{\lambda_* x} + c_2xe^{\lambda_* x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\lambda_* x},$$

  เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

[7] ดูการพิสูจน์ได้ใน [14, 18]

- และถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีสมการแคแรกเทอริสติกซึ่งมีรากคือ

$$\lambda = r + is \qquad \text{และ}\lambda = r - is$$

จำนวนทั้งหมด n ราก (สมการแคแรกเทอริสอยู่ในรูป $a_n\left[\lambda^2 - 2r\lambda + (r^2+s^2)\right]^n = 0$) สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

$$e^{rx}\cos sx,\ e^{rx}\sin sx,\ xe^{rx}\cos sx,\ xe^{rx}\sin sx, \ldots, x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\cos sx,\ x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\sin sx,$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx}\left(c_1\cos sx + c_2\sin sx\right) + e^{rx}\left(c_3x\cos sx + c_4x\sin sx\right) \\ &\quad + \cdots + e^{rx}\left(c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\cos sx + c_nx^{\frac{n}{2}-1}\sin sx\right) \\ &= e^{rx}\left(\left[c_1 + c_3x + \ldots + c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\right]\cos sx + \left[c_2 + c_4x + \ldots + c_nx^{\frac{n}{2}-1}\right]\sin sx\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.8. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} + 8y^{(7)} + 28y^{(6)} + 56y^{(5)} + 70y^{(4)} + 56y''' + 28y'' + 8y' + y = 0 \tag{1.36}$$

วิธีทำ สมการ (1.36) มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^8 + 8\lambda^7 + 28\lambda^6 + 56\lambda^5 + 70\lambda^4 + 56\lambda^3 + 28\lambda^2 + 8\lambda + 1 = (\lambda+1)^8 = 0$$

สมการนี้มีราก คือ $\lambda = -1$ ซ้ำกัน 8 ราก ดังนั้นสมการ (1.36) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x} + c_5x^4e^{-x} + c_6x^5e^{-x} + c_7x^6e^{-x} + c_8x^7e^{-x},$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_8$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 1.9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 32y''' + 36y'' - 24y' + 8y = 0 \tag{1.37}$$

วิธีทำ สมการ (1.37) มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^6 - 6\lambda^5 + 18\lambda^4 - 32\lambda^3 + 36\lambda^2 - 24\lambda^6 + 8 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^3 = 0$$

สมการนี้มีราก คือ $1+i$ และ $1-i$ ซ้ำกันอย่างละ 3 ราก ดังนั้นสมการ (1.37) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น 6 ผลเฉลย ได้แก่

$$e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ xe^x \cos x,\ xe^x \sin x,\ x^2e^x \cos x,\ x^2e^x \sin x$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = e^x \left[(c_1 + c_2x + c_3x^2)\cos x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)\sin x\right]$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_6$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1.3.4 กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากประกอบด้วยเป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน และรากซ้ำ

กรณีนี้ เป็นกรณีทั่วไปของทั้งสามกรณีที่ได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งเราสามารถนำวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของกรณีทั้ง มาประยุกต์ใช้ได้คือ

ถ้าสมการแคแรกเทอริสติกมีรากได้แก่

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน
- $r_1 \pm s_1i, \ldots, r_{n_2} \pm s_{n_2}i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด
- γ_1 เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_1 ราก, γ_2 เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_2 ราก, $\ldots$, γ_{n_3} เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_{n_3} ราก
- และ $c_1 \pm d_1i, \ldots, c_{n_4} \pm d_{n_4}i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นรากซ้ำกันจำนวน $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_4}$ ตามลำดับ

สมการเชิงอนุพันธ์ จะมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

- $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{n_1} x}$,
- $e^{r_1}\cos s_1x,\ e^{r_1}\sin s_2x, e^{r_2}\cos s_2x,\ e^{r_2}\sin s_2x, \ldots, e^{r_{n_2}}\cos s_{n_2}x,\ e^{r_{n_2}}\sin s_{n_2}x$,
- $e^{\gamma_1 x},\ xe^{\gamma_1 x}, \ldots,\ x^{\delta_1 - 1}e^{\gamma_1 x},\ e^{\gamma_2 x},\ xe^{\gamma_2 x}, \ldots,\ e^{\gamma_{n_3} x},\ xe^{\gamma_{n_3} x}, \ldots,\ x^{\delta_{n_3}-1}e^{\gamma_{n_3} x}$,

- $e^{c_1x}\cos d_1x,\ xe^{c_1x}\cos d_1x,\ \ldots,\ x^{\Delta_1-1}e^{c_1x}\cos d_1x,\ e^{c_1x}\sin d_1x,\ xe^{c_1x}\sin d_1x,\ \ldots,$ $x^{\Delta_1-1}e^{c_1x}\sin d_1x,\ldots,e^{c_{n_4}x}\cos d_1x, xe^{c_{n_4}x}\cos d_1x,\ldots,x^{\Delta_1-1}e^{c_{n_4}x}\cos d_1x, e^{c_{n_4}x}\sin d_1x,$ $xe^{c_{n_4}x}\sin d_1x,\ldots,x^{\Delta_1-1}e^{c_{n_4}x}\sin d_1x,$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ *ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย*ดังกล่าว

ตัวอย่าง 1.10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0 \tag{1.38}$$

วิธีทำ สมการ (1.38) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2(\lambda^2+1) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = -1,\ 1$ (รากซ้ำ 2 ราก), $\pm i$

ดังนั้นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (1.38) คือ

$$e^{-x},\ e^{x},\ xe^{x},\ \cos x \text{ และ } \sin x$$

และได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3xe^{x} + c_4\cos x + c_5\sin x,$$

เมื่อ $c_1,\ldots,c_5$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 1.11. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} - 32y^{(4)} + 256y = 0 \tag{1.39}$$

วิธีทำ สมการ (1.39) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^8 - 32\lambda^4 + 256 = (\lambda^2-4)^2(\lambda^2+4)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)^2(\lambda^2+4)^2 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = -2,\ 2,\ -2i,\ 2i$ ปรากฏซ้ำกัน รากละ 2 ครั้ง

ดังนั้นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (1.39) คือ

$$e^{-2x},\ xe^{-2x},\ e^{2x},\ xe^{2x},\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x \text{ และ } x\sin 2x$$

และได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = (c_1+c_2x)e^{-2x} + (c_3+c_4x)e^{2x} + (c_5+c_6x)\cos x + (c_7+c_8x)\sin x,$$

เมื่อ $c_1,\ldots,c_8$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y''' - y'' - y' + y = 0$

(b) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$

(d) $y^{(4)} + y = 0$

(e) $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$

(f) $y^{(4)} - 8y' = 0$

(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(h) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

(i) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

(j) $y^{(4)} - y = 0$

(k) $y^{(4)} - y'' = 0$

(l) $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y''' + y' = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$

(b) $y^{(4)} + y = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0,\quad y(1) = -1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 0,\ y'''(1) = 0$

(d) $y''' - y'' + y' - y = 0,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -2$

(e) $4y''' + y' + 5y = 0,\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$

(f) $6y''' + 5y'' + y' = 0,\quad y(0) = -2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$

(g) $2y^{(4)} - y''' + 9y'' + 4y' + 4y = 0,$

$y(1) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = 0$

1.4 สมการไม่เอกพันธุ์

1.4.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{1.40}$$

ถ้า $y_p(x)$ และ $y_{p_2}(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (1.40) นั่นคือ

$$a_n(x)\frac{d^ny_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p = b(x)$$

และ

$$a_n(x)\frac{d^ny_{p_2}}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_{p_2}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_{p_2}}{dx} + a_0(x)y_{p_2} = b(x)$$

ให้

$$y(x) = y_{p_2}(x) - y_p(x)$$

พบว่า

$$\begin{aligned}
& a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}y + a_0(x)y \\
= \; & a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}(y_{p_2} - y_p) + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}(y_{p_2} - y_p) + a_0(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \; & \left(a_n(x)\frac{d^ny_{p_2}}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_{p_2}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_{p_2}}{dx} + a_0(x)y_{p_2}\right) \\
& - \left(a_n(x)\frac{d^ny_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p\right) \\
= \; & b(x) - b(x) = 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ $y = y_{p_2} - y_p$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{1.41}$$

โดยทฤษฎีบท 1.4 ทำให้ได้

$$y_{p_2}(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

เมื่อ $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของสมการเอกพันธุ์ (1.41) และ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ดังนั้นถ้าเราพบ*ผลเฉลยเฉพาะ* $y_p(x)$ *ผลเฉลยหนึ่ง* ของสมการไม่เอกพันธุ์ (1.40) ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (1.40) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

เมื่อ $y_h(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (1.41)

และเรียกสมการ (1.41) ว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (1.40)*

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์

3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

ตัวอย่าง 1.12. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x \tag{1.42}$$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการ (1.42) คือ

$$y^{(4)} + 4y = 0 \tag{1.43}$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

สมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = 1 \pm i, -1 \pm i$ ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ (1.43) มีผลเฉลยคือ

$$y_h(x) = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-x}(c_3\cos x + c_4\sin x)$$

และพบว่า $y_p = x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์ (1.42) ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y(x) = y_h + y_p = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x) + e^{-x}(c_3\cos x + c_4\sin x) + x$$

เรามีอีกทฤษฎีบทหนึ่งที่สามารถนำมาช่วยหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์ได้ นั่นคือ

ทฤษฎีบท 1.6 (หลักการซ้อนทับของผลเฉลย (superposition principle)). *ถ้า y_{p_1} เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b_1(x) \tag{1.44}$$

และ y_{p_2} เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b_2(x) \tag{1.45}$$

*แล้ว $c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}$ **เป็นผลเฉลยของสมการ***

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = c_1b_1(x) + c_2b_2(x), \tag{1.46}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ เนื่องจาก y_{p_1} และ y_{p_2} เป็นผลเฉลยของสมการ (1.44) และ (1.45) ตามลำดับดังนั้น

$$\begin{aligned}
& a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}\left[c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}\right] + \cdots + a_0(x)\left[c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}\right] \\
= \;& c_1a_n(x)\frac{d^n y_{p_1}}{dx^n} + c_2a_n(x)\frac{d^n y_{p_2}}{dx^n} + \cdots + c_1a_0(x)y_{p_1} + c_2a_0(x)y_{p_2} \\
= \;& c_1\left[a_n(x)\frac{d^n y_{p_1}}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y_{p_1}\right] + c_2\left[a_n(x)\frac{d^n y_{p_2}}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y_{p_2}\right] \\
= \;& c_1b_1(x) + c_2b_2(x)
\end{aligned}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า $c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = c_1b_1(x) + c_2b_2(x),$$

สำหรับแต่ละค่าคงตัว c_1 และ c_2 □

ตัวอย่าง 1.13. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x + 5\sin x \tag{1.47}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง (1.13) เราทราบแล้วว่า ผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x$$

คือ $y_{p_1} = x$ เมื่อพิจารณาสมการ

$$y^{(4)} + 4y = \sin x \tag{1.48}$$

พบว่า $y_{p_2} = \dfrac{\sin x}{5}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ (1.48) ดังนั้น โดย*หลักการซ้อนทับของผลเฉลย*ทำให้ได้ว่า

$$y_p = y_{p_1} + 5y_{p_2} = x + 5\frac{\sin x}{5} = x + \sin x$$

เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = x + 5\sin x$$

เนื่องจากทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการ (1.47) หรือ

$$y^{(4)} + 4y = 0$$

คือ $y_h(x) = e^{x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right) + e^{-x}\left(c_3\cos x + c_4\sin x\right)$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.47) คือ

$$y = e^{x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right) + e^{-x}\left(c_3\cos x + c_4\sin x\right) + x + \sin x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดผลเฉลยเฉพาะ y_p มาให้ และหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นตามเงื่อนไขตั้งต้นที่กำหนด

(a) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 2 + 6x - 5x^2$;

$y_p = x^2$; $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -3$

(b) $y^{(4)} + 4y = 5\cos x$;

$y_p = \cos x$; $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -2$

(c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$;

$y_p = \dfrac{e^{4x}}{30}$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(d) $y''' - y'' + y' - y = e^{-x}\sin x$;

$y_p = -\dfrac{e^{-x}\cos x}{5}$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

(e) $y''' + y' = \sec x$;

$y_p = \ln(\sec x + \tan x) - x\cos x + (\sin x)\ln(\cos x)$;

$y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$

(f) $xy''' - y'' = -2$;

$y_p = x^2$; $\quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1,\ y''(1) = -4$

เซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{1, x, x^3\}$

(g) $x^3y''' + xy' - y = 3 - \ln x$;

$y_p = \ln x$; $\quad y(1) = 3,\ y'(1) = 3,\ y''(1) = 0$

เซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x\ln x, x(\ln x)^2\}$

ทฤษฎีที่ได้กล่าวมา แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราสามารถหาผลเฉลยเฉพาะ**ผลเฉลยหนึ่ง** ของสมการไม่เอกพันธุ์ได้ เราก็จะสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ได้

สำหรับวิธีหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูงที่จะกล่าวต่อนี้ จะเป็นการขยายแนวความคิด ของวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับที่สอง นั่นก็คือ **ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์** และ **การแปรผันของตัวแปรเสริม**

1.4.2 ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \tag{1.49}$$

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงจะมีรูปแบบเดียวกันกับระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง(หัวข้อ **??** หน้า **??**) นั่นคือ

- ระเบียบวิธีนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีเป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์**ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**เท่านั้น ($a_n, \ldots, a_0$ เป็นค่าคงตัวทั้งหมด)
- $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 1.1 เท่านั้น

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง
โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 1.1 หรือไม่? ถ้าใช่ จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

   ถ้าไม่ใช่แต่ $r(x)$ อยู่ในรูป $r_1(x) + \cdots + r_m(x)$ โดยที่ $r_1(x), \ldots, r_m(x)$ อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 1.1 ให้แยกหาผลเฉลยเฉพาะ

$$\begin{aligned}
y_{p_1} &\quad \text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_1(x),\\
y_{p_2} &\quad \text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_2(x),\\
&\vdots\\
y_{p_m} &\quad \text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_m(x),
\end{aligned}$$

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$	$A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\,e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\,e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว, A, B เป็นค่าที่จะสมมติให้เป็นค่าคงตัวใด ๆ

และ $\mathbf{A_n}, \mathbf{B_n}, \mathcal{A}_n$ และ $\mathcal{B}_n$ เป็นพหุนามกำลัง n โดยที่

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_n} &= a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, \\
\mathbf{B_n} &= b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0, \\
\mathcal{A}_n &= A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0, \\
\mathcal{B}_n &= B_nx^n + \cdots + B_1x + B_0,
\end{aligned}$$

a_i, b_i, A_i และ B_i เป็นค่าคงตัวเมื่อ $i = 0, ..., n$

ตารางที่ 1.1. ตารางระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ทฤษฎีบทหลักการซ้อนทับของผลเฉลย 1.6 ยืนยันว่า $y_{p_1} + \cdots + y_{p_m}$ จะเป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_1(x) + \cdots + r_m(x)$$

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูปทางขวาของตาราง 1.1 แต่
   - ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย
   - ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา
   - ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

ตัวอย่าง 1.14. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = r(x) \tag{1.50}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $500\cos(3x)$ 2. $12e^x$ 3. $30x^2e^x$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องสมการ (1.50) คือ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 500\cos(3x)$
   เนื่องจาก $r(x)$ อยู่ในรูป $a\cos(\omega x)$ โดยมี $\omega = 3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

   แทนค่า y_p ลงในสมการทำให้ได้

   $$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (26A - 18B)\cos(3x) + (18A + 26B)\sin(3x) \\ &= 500\cos(3x) + 0\sin(3x) \end{aligned}$$

   ซึ่งได้สมการสำหรับสัมประสิทธิ์ A และ B คือ

   $$26A - 18B = 500 \qquad (1.51)$$

   $$18A + 26B = 0 \qquad (1.52)$$

   แก้สมการ (1.51) และ (1.52) ได้ $A = 13$ และ $B = -9$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

   $$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + 13\cos(3x) - 9\sin(3x)$$

2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$
   เนื่องจาก $r(x)$ อยู่ในรูป $ae^{\lambda x}$ โดยมี $\lambda = 1$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_p = Ae^x$$

   แต่เนื่องจากรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ ซ้ำกับผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ เราต้องคูณผลเฉลยเฉพาะ y_p ด้วย x ซึ่งได้$y_p = Axe^x$ ซึ่งก็ยังมีรูปแบบซ้ำอีก เมื่อคูณด้วย x อีกครั้งหนึ่งได้ $y_p = Ax^2e^x$ ยังคงมีรูปแบบซ้ำ และเมื่อคูณด้วย x อีกครั้ง

   $$y_p = Ax^3e^x$$

จะเป็นรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะที่จะนำมาแทนค่าลงในสมการ เพื่อหาสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (A - 3A + 3A - A)x^3e^x + (9A - 18A + 9A)x^2e^x \\ &\quad +(18A - 18A)xe^x + (6A)e^x \\ &= 6Ae^x = 12e^x \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = 2$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + 2x^3e^x$$

3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 30x^2e^x$

ในกรณีนี้ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = (A_0 + A_1x + A_2x^2)e^x$$

แต่เนื่องจาก y_p มี**บางพจน์**ซ้ำกับ**บางพจน์**ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ เราจำเป็นต้องคูณ x **3 ครั้ง** เพื่อให้ y_p ไม่มีพจน์ซ้ำกับผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์เลย เราได้ y_p และอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง สอง และ สาม ของ y_p คือ

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0x^3 + A_1x^4 + A_2x^5)e^x \\ y_p' &= \left[3A_0x^2 + (A_0 + 4A_1)x^3 + (A_1 + 5A_2)x^4 + A_2x^5\right] e^x \\ y_p'' &= [6A_0x + (6A_0 + 12A_1)x^2 + (A_0 + 8A_1 + 20A_2)x^3 \\ &\quad +(A1 + 10A_2)x^4 + A_2x^5]e^x \\ y_p''' &= [6A_0 + (18A_0 + 24A_1)x + (9A_0 + 36A_1 + 60A_2)x^2 \\ &\quad +(A_0 + 12A_1 + 60A_2)x^3 + (A_1 + 15A_2)x^4 + A_2x^5]e^x \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า ทำให้ได้

$$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (6A_0 + 24A_1x + 60A_2x^2)e^x \\ &= 30x^3e^x \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A_0 = 0,\ A_1 = 0$ และ $A_2 = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{x^5e^x}{2}$$

ตัวอย่าง 1.15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = r(x) \tag{1.53}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $e^x + 2x + 1$ 2. $2x + 1 + 3\sin x$ 3. $3\sin x - 5\cos x$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องสมการ (1.53) คือ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

เนื่องจากสมการแคแรกเทอริสติก มีรากคือ $\pm i$ **ซ้ำกันสองชุด** ดังนั้นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $y^{(4)} + 2y'' + y = e^x + 2x + 1$

   พิจารณา $r(x)$ เป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ เมื่อ $r_1(x) = e^x$ และ $r_2(x) = 2x + 1$

   (a) $r_1(x) = e^x$

   ในกรณีนี้ เราจะสมมติให้

$$y_{p_1} = Ae^x$$

   แทนค่าลงในสมการเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} y_{p_1}^{(4)} + 2y_{p_1}'' + y_{p_1} &= (A + 2A + A)e^x \\ &= 4Ae^x = e^x \end{aligned}$$

   เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = \dfrac{1}{4}$ ได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_1} = \frac{e^x}{4}$$

(b) $r_2(x) = 2x + 1$

สมมติให้

$$y_{p_2} = A_1 x + A_2$$

แทนค่าลงในสมการไม่เอกพันธุ์

$$\begin{aligned} y_{p_2}^{(4)} + 2y_{p_2}'' + y_{p_2} &= 0 + 0 + (A_1 x + A_2) \\ &= A_1 x + A_2 = 2x + 1 \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A_1 = 2$ และ $A_2 = 1$ ได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_2} = 2x + 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + \frac{e^x}{4} + 2x + 1$$

2. $y^{(4)} + 2y'' + y = 2x + 1 + 3\sin x$

ในกรณีนี้ เราก็จะพิจารณา $r(x)$ เป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ เมื่อ $r_1(x) = 2x + 1$ และ $r_2(x) = 3\sin x$

สำหรับกรณี

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 2x + 1$$

เราทราบจากตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วว่า สมการนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_1} = 2x + 1$$

สำหรับกรณี $r_2(x) = 3\sin x$ เราจะสมมติให้ y_{p_2} อยู่ในรูป $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ แต่เนื่องจาก มีพจน์ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น เราจะคูณ x ไปเรื่อย ๆ จนรูปแบบของ y_{p_2} ไม่มีพจน์ซ้ำกับพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ ทำให้ได้

$$y_{p_2} = Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x$$

หาอนุพันธ์ ได้

$$\begin{aligned} y_{p_2}'' &= (2A + 4Bx - Ax^2)\cos x + (2B - 4Ax - Bx^2)\sin x \\ y_{p_2}^{(4)} &= (-12A - 8Bx + Ax^2)\cos x + (-12B + 8Ax + Bx^2)\sin x \end{aligned}$$

เมื่อนำไปแทนในสมการไม่เอกพันธุ์ ทำให้ได้

$$-8A\cos x - 8B\sin x = 3\sin x$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = 0$ และ $B = -\frac{3}{8}$
ทำได้ $y_{p_2} = -\frac{3}{8}\sin x$ และได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x + 2x + 1 - \frac{3}{8}x^2\sin x$$

3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$
ในกรณีนี้ จะสมมติให้ y_p มีรูปแบบ

$$y_p = Ax^2\cos x + Bx^2\sin x$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้

$$-8A\cos x - 8B\sin x = 3\sin x - 5\cos x$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = \frac{5}{8}$ และ $B = -\frac{3}{8}$
ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3x\cos x + c_4x\sin x + \frac{5}{8}x^2\cos x - \frac{3}{8}x^2\sin x$$

ตัวอย่าง 1.16. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y''' - 4y' = x + 10\cos x + e^{-2x} \tag{1.54}$$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y''' - 4y' = 0$$

และมีสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

รากของสมการคือ $\lambda = 0, 2, -2$ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เมื่อ $r(x) = x + 10\cos x + e^{-2x}$ เราจะพิจารณาเป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x) + r_3(x)$ เมื่อ

$$\begin{aligned} r_1(x) &= x \\ r_2(x) &= 10\cos x \\ r_3(x) &= e^{-2x} \end{aligned}$$

1. $r_1(x) = x$

   ในกรณีนี้ จะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_{p_1} = A_1 x + A_0$$

   แต่ พจน์ A_0 ซึ่งเป็นค่าคงตัว มีรูปแบบซ้ำกันกับพจน์ c_1 ซึ่งเป็นค่าคงตัวของสมการเอกพันธุ์ ดังนั้น ต้องคูณ x เข้ากับผลเฉลยเฉพาะ เพื่อให้ได้รูปผลเฉลยเฉพาะใหม่เป็น

   $$y_{p_1} = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$

   แทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

   $$\begin{aligned} y_{p_1}''' - 4y_{p_1}' &= 0 - 4(2A_0 x + A_1) \\ &= -8A_0 x - 4A_1 = x \end{aligned}$$

   ได้ $A_0 = -\dfrac{1}{8}$ และ $A_1 = 0$ ดังนั้น

   $$y_{p_1} = -\frac{x^2}{8}$$

2. $r_2(x) = 10\cos x$

   เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$$

   แทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

   $$\begin{aligned} y_{p_2}''' - 4y_{p_2}' &= (-B\cos x + A\sin x) - 4(B\cos x - A\sin x) \\ &= -5B\cos x + 5A\sin x \\ &= 10\cos x \end{aligned}$$

ได้ $A = 0$ และ $B = -2$ ดังนั้น

$$y_{p_2} = -2\sin x$$

3. $r_3 = e^{-2x}$ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_{p_3} = Ce^{-2x}$ แต่เนื่องจากมีรูปแบบซ้ำกับบางพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ ดังนั้นเราจะสมมติใหม่ให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_{p_3} = Cxe^{-2x}$$

เมื่อแทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} y'''_{p_3} - 4y'_{p_3} &= (12ce^{-2x} - 8cxe^{-2x}) - 4(ce^{-2x} - 2cxe^{-2x}) \\ &= 8Ce^{-2x} = e^{-2x} \end{aligned}$$

ได้ $C = \frac{1}{8}$ และได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_3} = \frac{xe^{-2x}}{8}$$

เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{5}\sin x + \frac{xe^{-2x}}{8}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้

(a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$

(b) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$

(c) $y^{(4)} - 4y'' = x^2 + e^x$

(d) $y^{(4)} + y''' = x$

(e) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$

(f) $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$

(g) $y^{(4)} - y = 3x + \cos x$

(h) $y''' - y' = 2\sin x$

(i) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos(2x)$

(j) $y^{(4)} + y''' = \sin(2x)$

(k) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x - 1$

(l) $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$

(m) $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x}\sin(2x) + x$

(n) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y''' + 4y' = x;\qquad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 4x + 4;\qquad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

(c) $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x;\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{3}{2}$

(d) $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3x};\qquad y(0) = 4,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -5$

(e) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 34xe^{-2x} - 16e^{-2x} - 10x^2 + 6x + 34;$

$y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(f) $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18x^2 - 18x + 22;$

$y(0) = -2,\ y'(0) = -8,\ y''(0) = -12$

(g) $y^{(4)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12\sin x - e^{-x};$

$y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1, y'''(0) = 2$

1.4.3 การแปรผันของตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับที่ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{1.55}$$

เนื่องด้วย ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

คือ

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐาน โดยขั้นตอนวิธีของการแปรผันของตัวแปรเสริม จะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

เมื่อ $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งยังไม่ทราบค่า และไม่เป็นค่าคงตัว

พบว่าอนุพันธ์ของ y_p คือ

$$y_p' = (u_1y_1' + \cdots + u_ny_n') + (u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n) \tag{1.56}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันไม่ทราบค่า $u_1, \ldots, u_n$ ในการหาอนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลยเฉพาะ y_p เราจะสมมติให้

$$u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n = 0$$

และในทำนองเดียวกันเราสามารถคำนวณหาอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ของผลเฉลยเฉพาะ $y_p'', y_p''', \ldots, y_p^{(n-1)}$ โดยให้เงื่อนไข

$$\begin{aligned}
u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0,\\
u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0,\\
&\vdots\\
u_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ผลเฉลยเฉพาะ และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n \\
y_p' &= u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n' \\
&\vdots \\
y_p^{(n-1)} &= u_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)} \\
y_p^{(n)} &= \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}\right) + \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right)
\end{aligned} \tag{1.57}
$$

เนื่องด้วย $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นเมื่อแทนค่า $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ (1.55) ทำให้ได้

$$a_n(x)\left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right) = b(x)$$

ดังนั้นเราได้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย n สมการ

$$
\begin{aligned}
u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n &= 0, \\
u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' &= 0, \\
&\vdots \\
u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{b(x)}{a_n(x)}
\end{aligned} \tag{1.58}
$$

ซึ่งอาจจะพิจารณาในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$
\begin{bmatrix}
y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\
y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\
y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n'
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)}
\end{bmatrix}
$$

เราได้ผลเฉลยของระบบสมการ (1.58) คือ

$$u_k'(x) = \frac{r(x) W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.59}$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$, $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ คือ รอนสเกียน[8]ของผลเฉลย $y_1, \ldots, y_n$

[8] ดูนิยามของรอนสเกียนหน้า 6

และ $W_k(x)$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถูกแทนสดมภ์ (column) ที่ k ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ หรือนั่นคือ

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & 0 & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & 1 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{1.60}$$

ซึ่งทำให้ได้ผลเฉพาะ y_p คือ

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx,$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} W_k(x) &= (-1)^{n-k} W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n] \\ &= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n,$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u_1(x)y_1 + \cdots + u_n(x)y_n$$

3. หาค่า $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ และ $W_1(x), \ldots, W_n(x)$

4. หาค่า $u_k(x)$, เมื่อ

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

5. แทนค่า $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ ที่ได้ลงใน y_p

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (1.55) คือ

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n + u_1y_1 + \cdots + u_ny_n$$

ตัวอย่าง 1.17. จงใช้วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมหาผลเฉลยของสมการ

$$y''' - 4y' = e^{2x} \tag{1.61}$$

วิธีทำ

1. จากตัวอย่าง 1.16 พบว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y''' - 4y' = 0$$

คือ

$$y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x},$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ นั่นคือ

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x} \text{ และ } y_3 = e^{-2x}$$

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x) + u_2(x)e^{2x} + u_3(x)e^{-2x}$$

3. หาค่า $W[1, e^{2x}, e^{-2x}](x)$ และ $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$

$$W[1, e^{2x}, e^{-2x}](x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 4^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 16$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 1 & 4^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = (-1)^{(3-1)} \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & -2e^{-2x} \\ 0 & 1 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = (-1)^{(3-2)} \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 2e^{-2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 2e^{2x} & 0 \\ 0 & 4^{2x} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-3)} \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}$$

4. หาค่า u_1, u_2 และ u_3

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(-4)}{16} dx = -\frac{e^{2x}}{8} \\ u_2 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(2e^{-2x})}{16} dx = \frac{x}{8} \\ u_3 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(2e^{2x})}{16} dx = \frac{e^{4x}}{32} \end{aligned}$$

5. แทนค่า u_1, u_2 และ u_3 ได้

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{e^{2x}}{8} + \frac{x}{8}e^{2x} + \frac{e^{4x}}{32}e^{-2x} \\ &= -\frac{e^{2x}}{8} + \frac{xe^{2x}}{8} + \frac{e^{2x}}{32} \\ &= \frac{e^{2x}}{24} + \frac{xe^{2x}}{8} \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.61) คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{24} + \frac{xe^{2x}}{8} \\ &= c_1 + \tilde{c}_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{xe^{2x}}{8}, \end{aligned}$$

เมื่อ $\tilde{c}_2 = c_2 + \frac{1}{24}$

ตัวอย่าง 1.18. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x, \qquad x > 0 \tag{1.62}$$

เมื่อ $\{x, x^{-1}, x^2\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

วิธีทำ

1. เมื่อเราทราบเซตของผลเฉลยมูลฐานแล้ว ทำให้เราทราบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1} + u_3(x)x^2$$

3. หาค่า $W[x, x^{-1}, x^2](x)$ และ $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$

$$W[x, x^{-1}, x^2](x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{6}{x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} & x^2 \\ 0 & -x^{-2} & 2x \\ 1 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-1)} \begin{vmatrix} x^{-1} & x^2 \\ -x^{-2} & 2x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x\ 0 \\ 0 & 1 & 21 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-2)} \begin{vmatrix} x & x^2 & \\ & & 0 \\ 1 & 2x1 & \end{vmatrix} = -x^2$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & 0 \\ 1 & -x^{-2} & 0 \\ 0 & 2x^{-3} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-3)} \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$$

4. หาค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(3)}{-6x^{-1}} dx = \frac{x \cos x - \sin x}{2} \\ u_2 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(-x^2)}{-6x^{-1}} dx = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \cos x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x \\ u_3 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(-2x^{-1})}{-6x^{-1}} dx = -\frac{\cos x}{3} \end{aligned}$$

5. แทนค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3 ได้

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{x \cos x - \sin x}{2} x + \left(\left(x - \frac{x^3}{6}\right) \cos x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \sin x\right) x^{-1} - \frac{\cos x}{3} x^2 \\ &= \cos x - x^{-1} \sin x \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.62) คือ

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2 + \cos x - x^{-1} \sin x$$

แบบฝึกหัด

1. จงใช้วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y''' + y' = \tan x$, $\quad 0 < x < \pi/2$

(b) $y''' + y' = \sec x$, $\quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(c) $y''' - y' = \csc x$, $\quad 0 < x < \pi$

(d) $y''' + y' = \sec x \tan x$, $\quad 0 < x < \pi/2$

(e) $y''' - y'' + y' - y = \sec x$, $\quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(f) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^{-1}$, $\quad x > 0$
เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^2, x^3\}$

(g) $x^3y''' - 2x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2$, $\quad x > 0$
เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x\ln x, x^3\}$

(h) $x^3y''' - x^2y'' - 4xy' + 4y = x$, $\quad x > 0$
เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^4\}$

(i) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$, $\quad x > 0$
เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^2\}$

(j) $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^4 \cos x$, $\quad x > 0$
เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^3\}$

บทที่ 2
ลำดับและอนุกรม

เนื้อหาที่จะกล่าวในส่วนนี้จะเกี่ยวข้องกับลำดับ (sequence) และอนุกรม (series) ของตัวเลข ของพหุนาม และของฟังก์ชัน ซึ่งตรงนี้มีส่วนสำคัญในการใช้อนุกรมแทนค่าฟังก์ชันใด ๆ ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการประมาณค่า (estimation) การคำนวณเชิงตัวเลข (numerical calculation) หรือการวิเคราะห์คุณสมบัติของฟังก์ชันนั้น และในบางครั้ง ฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมเช่น ฟังก์ชันเบสเซิล (Bessel fuction) ฟังก์ชันเลอช็องดร์ (Legendre function) เป็นต้น สามารถนำมาใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์ทางด้านคณิตศาสตร์ ฟิสิกส์ หรือ เคมี ได้

2.1 ประวัติและแนวคิด

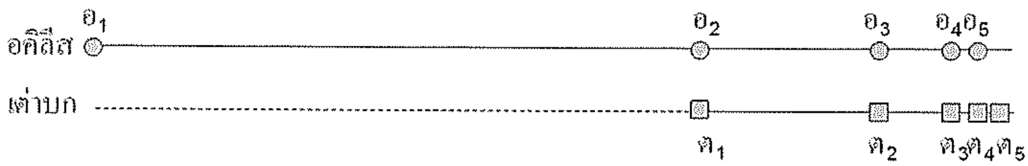
ประมาณ 500 ปีก่อนคริสตกาล นักปรัชญาและคณิตศาสตร์ชาวกรีกนามว่าซีโน (Zeno of Elea)[1] ได้ตั้งปริทัศน์ (paradox) ข้อหนึ่ง ซึ่งเกี่ยวข้องกับการวิ่งแข่งขันระหว่างอคิลีส (Achilles) และ เต่าบก โดยมีสมมติฐานว่าอคิลีสและเต่าบกวิ่งด้วยความเร็วคงที่ตลอด โดยอคิลีสวิ่งเร็วกว่าเต่าบก (เพื่อความสะดวกในการอธิบาย ในที่นี้จะกำหนดให้อคิลีสวิ่งเร็วกว่าเต่าบก 10 เท่า) แต่ในการแข่งขัน อคิลีสอนุญาตให้เต่าบกนำไปก่อนเป็นระยะทาง 100 เมตร อคิลีสถึงจะเริ่มวิ่ง คำถามก็คือ อคิลีสจะสามารถวิ่งนำหน้าเต่าบก ได้หรือไม่

เงื่อนไขที่กล่าวมาเป็นปริทัศน์เพราะว่า ดูเหมือนเป็นเรื่องไม่ยากที่อคิลีสจะแซงเต่าบก แต่ถ้าพิจารณาอีกมุมมองหนึ่ง เมื่ออคิลีสวิ่งได้ระยะทาง 100 เมตร เต่าบกก็จะอยู่หน้าอคิลีสเป็นระยะทาง 10 เมตร (เพราะเต่าบกวิ่งช้ากว่าอคิลีส 10 เท่า) เมื่ออคิลีสวิ่งได้ระยะทางเพิ่มอีก 10 เมตร เต่าบกก็จะอยู่หน้าอคิลีสเป็นระยะทาง 1 เมตร อคิลีสวิ่งได้ระยะทางเพิ่มอีก 1 เมตร เต่าบกก็จะอยู่หน้าอคิลีสเป็นระยะทาง 0.1 เมตร เมื่อพิจารณาเหตุการณ์ในทำนองนี้ไปเรื่อย ๆ จะพบว่าอคิลีสจะไม่สามารถ

---

[1]ซีโนแห่งเอลีอา (Zeno of Elea) มีชีวิตในช่วง 490-430 ปีก่อนคริสตกาล โดยเป็นนักปรัชญาและคณิตศาสตร์ที่อาศัยอยู่ในเมืองเอลีอา ทางใต้ของประเทศอิตาลีในปัจจุบัน ซีโนได้ชื่อว่าเป็นผู้วางรากฐานด้านวิภาษวิธี (dialectic) ซึ่งเป็นแนวความคิดในการค้นหาความจริงโดยการอ้างเหตุผล ผลงานที่โด่งดังของซีโนได้แก่ ปริทัศน์ของซีโน (Zeno's paradoxes) ทั้ง 4 [23] ซึ่งเป็นรากฐานของวิชาแคลคูลัสในปัจจุบัน

วิ่งนำหน้าเต่าบกได้เลย



รูปที่ 2.1. ภาพเปรียบเทียบการวิ่งแข่งขันระหว่างอคิลีสและเต่าบก ในปริทัศน์ของซีโน

ในทางคณิตศาสตร์เราสามารถแก้ปัญหานี้ได้โดยการพิจารณาว่าอคิลิสวิ่งไปอยู่ตำแหน่งเดียวกันเต่าบก เมื่อวิ่งได้ระยะทาง

$$10 + 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 11.111\ldots \text{ เมตร}$$

และเต่าบกเองก็วิ่งได้ระยะทาง $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots = 1.111\ldots$ เมตร[2]

เราสังเกตได้ว่าระยะทางที่ทั้งอคิลีสและเต่าบกวิ่งได้ สามารถถูกเขียนได้ในรูปของผลรวมของจำนวนจริงเป็นจำนวนอนันต์ จนเป็นจำนวนจริงค่าใหม่ โดยค่าที่นำความรวมเพิ่ม เป็นค่าที่มีรูปแบบที่คาดเดาได้

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาอีกหนึ่งปรากฏการณ์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับผลรวมของจำนวนจริงหลายจำนวน ซึ่งมีจำนวนของจำนวนจริงดังกล่าวเป็นอนันต์เช่นกัน สมมติให้มีขวดน้ำความจุ 1 ลิตรที่ว่างเปล่า เริ่มต้นเติมน้ำลงไปในขวดปริมาณ $\frac{1}{2}$ ลิตร จากนั้นเติมน้ำเพิ่มลงไปอีก $\frac{1}{4}$ ลิตร $\frac{1}{8}$ ลิตร ไปเรื่อย ๆ โดยแต่ละครั้ง จะเติมน้ำลงไปเพียงครึ่งหนึ่งของที่เติมครั้งก่อนหน้า ถ้าให้ s_n แทนปริมาณน้ำที่อยู่ขวดน้ำ เมื่อเติมน้ำไปครั้งที่ n (หน่วยเป็นลิตร) พบว่าปริมาณน้ำที่อยู่ในขวดมีค่าใกล้เคียงกับ 1 ลิตรมากขึ้น โดยที่ยังคงมีปริมาณน้ำน้อยกว่า 1 ลิตร

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} = 0.5 \\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75 \\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875 \\
s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0.9375 \\
&\vdots \\
s_{20} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1048576} = 0.99999904632568359\mathbf{4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[2] ในบางครั้งอาจจะใช้สัญลักษณ์ $1.\bar{1}$ หรือ $1.\dot{1}$ แทนทศนิยมไม่รู้จบ $1.111\ldots$ และอาจใช้ $123.45\overline{678}$ หรือ $123.45\dot{6}7\dot{8}$ แทน $123.45678678678\ldots$

ทั้งสองกรณีที่กล่าวมาข้างต้นเป็นตัวอย่างของการพิจารณา ชุดของตัวเลขหรือจำนวนจริง ที่มีรูปแบบที่ชัดเจน และผลรวมของเลขเหล่านั้น ซึ่งทำให้เกิดจำนวนจริงอีกจำนวน จากนั้นเราสามารถขยายแนวคิดไปสู่ชุดของพหุนามหรือฟังก์ชันที่มีรูปแบบที่ชัดเจนและผลรวมของพหุนามหรือฟังก์ชันดังกล่าว และทำให้ได้ฟังก์ชันใหม่ ซึ่งวิธีการดังกล่าวนี้ จะช่วยให้เราสามารถวิเคราะห์หรือประมาณค่าฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นได้เป็นอย่างดี

2.2 ลำดับ

พิจารณากลุ่มหรือชุดของตัวเลขในลักษณะของการเรียงจำนวนจริงต่อไปนี้:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

โดยเรียก a_1 ว่าพจน์ที่ 1 เรียก a_2 ว่าพจน์ที่ 2 และสำหรับกรณีทั่วไปเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n เราเรียกกลุ่มหรือชุดของตัวเลขดังกล่าวว่าลำดับ (sequence) โดยในเชิงคณิตศาสตร์ เราพิจารณาว่า ลำดับเป็นฟังก์ชันที่ส่งจากจำนวนเต็มบวก ไปยังจำนวนจริงใด ๆ ดังนี้

บทนิยาม 2.1 (ลำดับ). เราเรียก f ว่าเป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า f มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ (หรือจำนวนนับ) และ f ส่งจำนวนเต็มบวกไปยังจำนวนจริง โดยทั่วไปมักนิยมเขียนค่าของ $f(n)$ ในรูปของ a_n และใช้สัญกรต่อไปนี้ แทนลำดับ

$$\{a_n\} \qquad \text{หรือ} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ถึงแม้ว่าบทนิยามของลำดับจะต้องเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับ แต่บางครั้งเราอาจจะพิจารณาลำดับโดยที่พจน์แรกไม่ใช่พจน์ที่หนึ่งก็ได้โดยอาจจะเป็นพจน์ของจำนวนเต็มที่มากกว่าหนึ่ง หรืออาจจะเป็นพจน์ที่ 0 หรือ พจน์ของจำนวนเต็มลบ

ตัวอย่าง 2.1. ตัวอย่างการกล่าวถึงลำดับ โดยเขียนในลักษณะของสัญกรมาตรฐาน เขียนโดยการนิยามค่าของแต่ละพจน์ และเขียนในลักษณะของการแสดงรายการ

- $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = n^2$ $\qquad \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$
- $\left\{\sqrt{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-1}, n \geq 2$ $\qquad \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-1}, \dots\right\}$
- $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n-1}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n-1}}, n \geq 0$ $\qquad \left\{0, 1, -1, \dfrac{3}{4}, \dots, \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n-1}}, \dots\right\}$
- $\{n+1\}_{n=-2}^{\infty}$ $\qquad a_n = n+1, n \geq -2$ $\qquad \{-1, 0, 1, \dots, n+1, \dots\}$

ตัวอย่าง 2.2. พิจารณาลำดับซึ่งมีการนิยามค่าของแต่ละพจน์เป็น $a_n = a_1 + (n-1)d, n = 1, 2, 3, \ldots$ ลำดับดังกล่าวนี้มีชื่อเฉพาะว่า*ลำดับเลขคณิต* (arithmetic sequences) และเรียก d ว่า*ผลต่างร่วม* (common difference) เราพบว่า $a_{n+1} - a_n = d$ เสมอ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างลำดับเลขคณิตเช่น

- ลำดับค่าคงตัว $\{\pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = \pi, d = 0$
- ลำดับของจำนวนนับ $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 1, d = 1$
- ลำดับของจำนวนคี่บวก $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 1, d = 2$
- ลำดับของจำนวนคู่ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ -2 $\{-2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = -2, d = 2$
- ลำดับ $\{0.1, -9.9, -19.9, -29.9, -39.9, \ldots\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 0.1, d = -10$

ตัวอย่าง 2.3. พิจารณาลำดับซึ่งมีการนิยามค่าของแต่ละพจน์เป็น $a_n = r^{n-1}a_1, n = 1, 2, 3, \ldots$ ลำดับดังกล่าวนี้มีชื่อเฉพาะว่า*ลำดับเรขาคณิต* (geometric sequences) และเรียก r ว่า*อัตราส่วนร่วม* (common ratio) เราพบว่าถ้า $a_n \neq 0$ แล้ว $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ เสมอ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิตเช่น

- ลำดับค่าคงตัว $\{\pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \ldots\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = \pi, r = 1$
- ลำดับ $\{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = -1, r = -1$
- ลำดับ $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 1, r = 2$
- ลำดับ $\left\{\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, \ldots\right\}$ เป็นลำดับลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = \frac{1}{2}, r = -2$
- ลำดับ $\left\{-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3, -9, \ldots\right\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = -\frac{1}{9}, r = 3$
- ลำดับ $\left\{-9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots\right\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = -9, r = -\frac{1}{3}$
- ลำดับ $\{10, 1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 10, r = 0.1$
- ลำดับ $\{1, e, e^2, e^3, e^4, \ldots\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 1, r = e$

ตัวอย่าง 2.4. ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นถึงลำดับที่ถูกนิยามในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurence relation)

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3$$

เราสามารถเขียนลำดับดังกล่าวนี้ในลักษณะของการแสดงรายการได้เป็น

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$$

ลำดับนี้มีชื่อเรียกว่า*ลำดับฟีโบนักชี* (Fibonacci sequences) ลำดับนี้ได้ถูกกล่าวถึงครั้งแรกโดย*ลีโอนาโดแห่งปีสา*[3] โดยเขาได้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขของจำนวนกระต่ายในแต่ละเดือน โดยสมมติว่า เริ่มต้นมีกระต่าย 1 คู่ โดยกระต่ายจะถึงวัยผสมพันธุ์เมื่ออายุครบ 1 เดือน กระต่ายจะออกลูก 1 คู่ทุก ๆ เดือนหลังจากถึงวัยผสมพันธุ์ และกระต่ายไม่มีวันตาย จะสังเกตว่ากระต่ายจะออกลูกเมื่อจบสองเดือนจากที่เกิด ถ้าเรานับจำนวนคู่กระต่ายในต้นเดือนต่าง ๆ จะได้ว่า เริ่มต้นเดือนที่ 1 มีกระต่าย 1 คู่ ต้นเดือนที่ 2 มีกระต่าย 1 คู่ ต้นเดือนที่ 3 มีกระต่าย 2 คู่ ต้นเดือนที่ 4 มีกระต่าย 3 คู่ ... จำนวนกระต่ายในต้นเดือนนี้เรียกว่า ลำดับฟีโบนักชี จะสังเกตว่าจำนวนกระต่ายในต้นเดือนคือการนำจำนวนกระต่ายใน 2 เดือนก่อนหน้ามารวมกัน [11]

ลำดับฟีโบนักชี สามารถถูกเขียนได้ในรูปปิด (closed-form)[4] ได้เป็น

$$a_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

สำหรับค่าของ $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988\ldots$ มีชื่อเรียกว่า *อัตราส่วนทอง* (golden ratio) ซึ่งหาได้จากอัตราส่วนระหว่างผลรวมระหว่างปริมาณ 2 ปริมาณต่อปริมาณที่มีจำนวนมากกว่า มีค่าเท่ากันกับอัตราส่วนระหว่างประมาณที่มีค่ามากกว่าต่อปริมาณที่มีจำนวนน้อยกว่า

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, \qquad a > b > 0$$

---

[3] ลีโอนาโดแห่งปีสา (Leonardo of Pisa) (ค.ศ.1170-1250) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี หรือเป็นที่รู้จักกันในนาม ลีโอนาโด ฟีโบนักชี (Leonardo Fibonacci) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า*ฟีโบนักชี* (Fibonacci) คำว่า Fibonacci มาจากการเรียกสั้น ๆ ของคำว่า Filius Bonacci ซึ่งหมายถึงบุตรของ Bonacci โดย Bonacci เป็นชื่อเรียกบิดาของเขา โดยมีความหมายว่า บุตรแห่งความโชคดี ฟีโบนักชี นับว่าเป็นคนแรก ๆ ที่นำระบบเลขฮินดู-อารบิคเข้าไปยังยุโรป และยังเป็นผู้ประพันธ์หนังสือ *Liber Abaci* (หรือ The Book of Calculating) และ The book of Squares ซึ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์อันหนึ่งในหนังสือ *Liber Abaci* ที่ทำให้ชื่อเสียงเขาโด่งดังคือ ลำดับตัวเลข $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}$ ที่สัมพันธ์กับจำนวนกระต่าย

[4] ในทางคณิตศาสตร์ เราเรียกนิพจน์ว่าเป็นรูปปิด (closed-form) ก็ต่อเมื่อ เราสามารถแสดงนิพจน์นั้นให้อยู่ในลักษณะของฟังก์ชันพื้นฐานที่เข้าใจง่าย โดยมีจำนวนฟังก์ชันพื้นฐาน ปรากฏเป็นจำนวนจำกัดอยู่ในนพิจน์ดังกล่าว

พิจารณาลำดับ $a_n = \dfrac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$ เราพบว่า $a_1 = 1$ และ $a_{100} = 0.01$ สำหรับพจน์ที่ $10,000$ พบว่า $a_{10,000} = 0.0001$ ลำดับดังกล่าวเมื่อ n มีค่ามากขึ้นค่าของ a_n จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์

เราเรียกเหตุการณ์ที่ลำดับ $\{a_n\}$ มีค่าเข้าใกล้ค่า L มากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ n มีค่ามาก ว่า **ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่** L เราให้บทนิยามของการลู่เข้าของลำดับได้ดังนี้

บทนิยาม 2.2. เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ *ลู่เข้าสู่* L (Sequences $\{a_n\}$ *converges* to L.) หรือ ลำดับ $\{a_n\}$ *มีลิมิต* L (Sequences $\{a_n\}$ has a *limit* L.) ก็ต่อเมื่อ
สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ *จะมีจำนวนเต็มบวก* N *ซึ่ง* $|a_n - L| < \varepsilon$ *สำหรับทุก ๆ* $n \geq N$

เราอาจใช้สัญกรณ์ต่อไปนี้แทนลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{หรือ} \qquad a_n \to L \text{ เมื่อ } n \to \infty$$

สำหรับลำดับที่ไม่ลู่เข้าสู่จำนวนจริง L ใด เราจะเรียกลำดับนั้นว่า*ลู่ออก* (diverge)

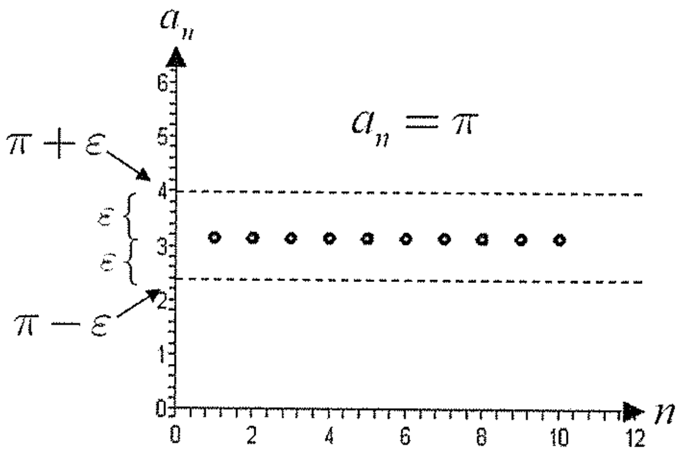
ตัวอย่าง 2.5.

- พิจารณาลำดับค่าคงตัว $\{\pi, \pi, \pi, \pi, \pi, \ldots\}$ หรือ $a_n = \pi$

  พบว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใดก็ตาม

$$|a_n - \pi| = 0 < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

  ดังนั้นลำดับนี้เป็นลำดับ**ลู่เข้า** โดย $\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$



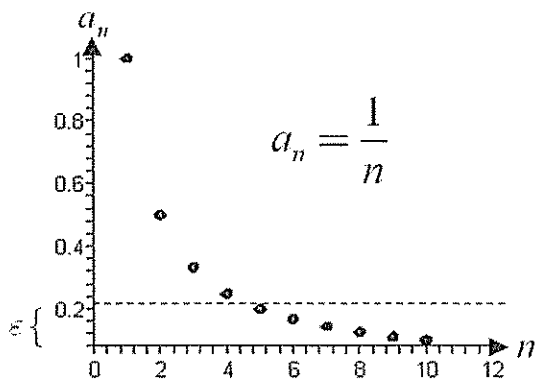
รูปที่ 2.2. กราฟของลำดับ $a_n = \pi$

- พิจารณาลำดับ $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ หรือ $a_n = \frac{1}{n}$

  โดย*สมบัติของอาร์คิมีเดส* (Archimedian property)[5] พบว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใดก็ตามจะมีจำนวนเต็มบวก $N > \frac{1}{\varepsilon}$ เสมอ นั่นทำให้ได้ว่า $\varepsilon > \frac{1}{N}$ และ $\varepsilon > \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ ดังนั้น

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \qquad n \geq N$$

  แสดงว่า $a_n \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$



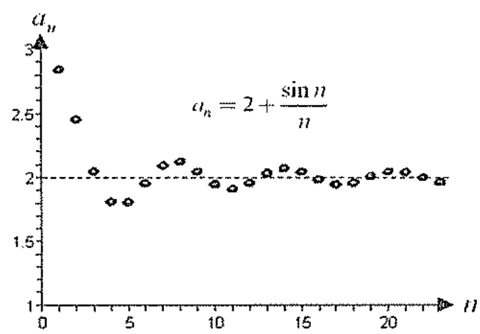
รูปที่ 2.3. กราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$

- พิจารณาลำดับ $a_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$

  เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ พบว่าจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|a_n - 2| = \left|2 + \frac{\sin n}{n} - 2\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon, \qquad n \geq N$$

  แสดงว่าลำดับ $a_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$ ลู่เข้าสู่ 2 หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$



รูปที่ 2.4. กราฟของลำดับ $a_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$

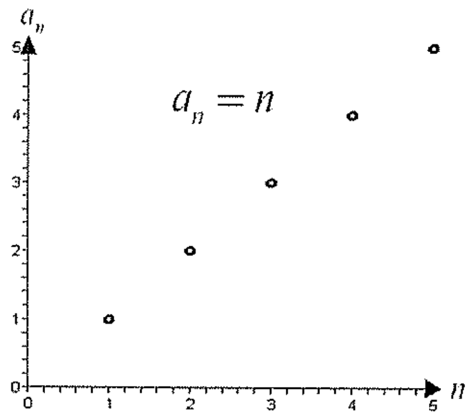
[5] ดูรายละเอียด*สมบัติของอาร์คิมีเดส*ได้ใน [16]

- พิจารณาลำดับ $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ หรือ $a_n = n$

พบว่าเมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\varepsilon = 1$ จะ**ไม่มี**จำนวนจริง L และจำนวนเต็มบวก N ใดเลยที่ทำให้

$$|n - L| < 1, \qquad n \geq N$$

แสดงว่าลำดับ $a_n = n$ **ลู่ออก**



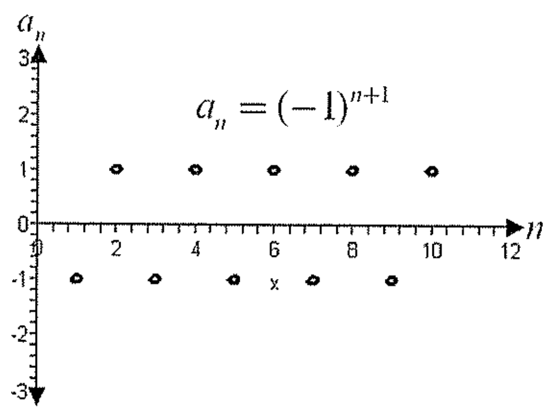
รูปที่ 2.5. กราฟของลำดับ $a_n = n$

- พิจารณาลำดับ $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ หรือ $a_n = (-1)^{n+1}$

พบว่าเมื่อกำหนดให้จำนวนจริง $\varepsilon = \frac{1}{2}$ จะ**ไม่มี**จำนวนจริง L และจำนวนเต็มบวก N ใดเลยที่ทำให้

$$\left|(-1)^{n+1} - L\right| < \frac{1}{2}, \qquad n \geq N$$

แสดงว่าลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ **ลู่ออก**



รูปที่ 2.6. กราฟของลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่าลำดับ $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออกในกรณีพิเศษ นั่นคือ เมื่อ n มีค่ามากขึ้น a_n ก็จะมีค่ามากด้วย ในกรณีนี้เราจะเรียกว่าลำดับลู่ออกสู่ค่าบวกอนันต์ และถ้า n มีค่ามากขึ้น a_n มีน้อยมาก ในกรณีนี้เราจะเรียกว่าลำดับลู่ออกสู่ค่าลบอนันต์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3.

- เรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่าเป็น**ลำดับลู่ออกสู่ค่าบวกอนันต์** (diverge to positive infinity) ถ้าทุก ๆ จำนวนเต็มบวก M จะมีจำนวนเต็ม N ซึ่ง

$$a_n > M \qquad \text{ทุก ๆ } n \geq N$$

เราอาจใช้สัญกรณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ หรือ $a_n \to \infty$ เมื่อ $n \to \infty$

- เรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่าเป็น**ลำดับลู่ออกสู่ค่าลบอนันต์** (diverge to negative infinity) ถ้าทุก ๆ จำนวนเต็มบวก M จะมีจำนวนเต็ม N ซึ่ง

$$a_n < -M \qquad \text{ทุก ๆ } n \geq N$$

เราอาจใช้สัญกรณ์ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ หรือ $a_n \to -\infty$ เมื่อ $n \to \infty$

ตัวอย่าง 2.6.

ตัวอย่างลำดับที่ลู่ออกสู่ค่าบวกอนันต์ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$	ตัวอย่างลำดับที่ลู่ออกสู่ค่าลบอนันต์ $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$
$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$	$\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$
$\{-30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, \ldots\}$	$\{30, 20, 10, 0, -10, -20, -30, \ldots\}$
$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$	$\{-2, -4, -6, -8, \ldots\}$
$\{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$	$\{-2, -4, -8, -16, -32, \ldots\}$
$\{n \sin n\}$	$\{-n \sin n\}$
$\{\ln n\}$	$\left\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$
$\{n^2 - 6n + 9\}$	$\{4 - n^2\}$
$\left\{\frac{n^2 - 1}{n}\right\}$	$\left\{\frac{n - n^3}{n^2 + 1}\right\}$

ทฤษฎีบท 2.1. *ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าและ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง*[6]

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$ *ถ้า* $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^p=\left[\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right]^p$ *ถ้า* $p>0$ *และ* $a_n>0$

ตัวอย่าง 2.7. ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-4$ ดังนั้น

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3+(-4)=-1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3-(-4)=7$
- $\lim\limits_{n\to\infty}2a_n=2\cdot 3=6$
- $\lim\limits_{n\to\infty}-b_n=-(-4)=4$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2a_n-3b_n}{2}=\dfrac{-2\cdot 3-3\cdot(-4)}{2}=3$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=3\cdot(-4)=-12$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$
- $\lim\limits_{n\to\infty}b_n^3=(-4)^3=-64$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2=(-1)^2=1$ และในทำนองเดียวกัน
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2\right)=3^2+2(3)(-4)+(-4)^2=1$

[6] ดูการพิสูจน์ได้ใน [15]

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นทฤษฎีบทที่ใช้สำหรับช่วยในการหาค่าลิมิตของลำดับ แต่เนื้อหาในส่วนนี้จะกล่าวถึงเพียงแค่ทฤษฎีบทและตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบท โดยไม่แสดงการพิสูจน์ ผู้อ่านสามารถดูการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวได้ในหนังสือแคลคูลัสพื้นฐานทั่วไป (เช่น [4, 22]) หรือดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้ใน [15]

ทฤษฎีบท 2.2 (Squeeze Theorem). *ถ้า* $a_n \le b_n \le c_n$ *สำหรับ* $n \ge n_0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ *แล้ว* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

ทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นมีชื่อเรียกว่า *ทฤษฎีบทการบีบ* (Squeeze Theorem)

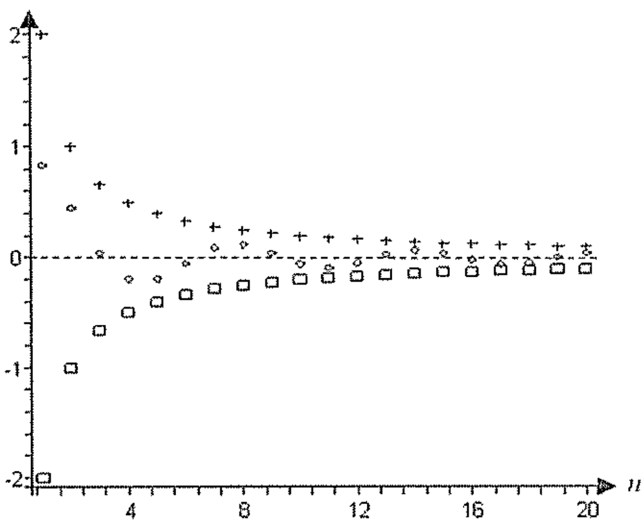
ตัวอย่าง 2.8. จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$

วิธีทำ พบว่า

$$-\frac{2}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{2}{n} \qquad \text{เมื่อ} \qquad n \ge 1$$

และ $\lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$



รูปที่ 2.7: รูปแสดงการลู่ของลำดับ $a_n = \frac{\sin n}{n}$ เมื่อเปรียบเทียบกับลำดับ $a_n = -\frac{2}{n}$ และ $a_n = -\frac{2}{n}$

ตัวอย่าง 2.9. จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\dfrac{6n}{n^2+2n+3}\right\}$

วิธีทำ พบว่า

$$0 \leq \frac{6n}{n^2+2n+3} \leq \frac{6n}{n^2+2n^2+3n^2} = \frac{6n}{6n^2} = \frac{1}{n}$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการบีบ ทำให้เราสรุปได้ว่าลิมิตของลำดับดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 2.3. *ถ้า* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ *แล้ว* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ตัวอย่าง 2.10. จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

วิธีทำ พบว่า $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n และ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3 ทำให้สรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

ทฤษฎีบท 2.4. *ถ้า* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *และฟังก์ชัน* f *มีความต่อเนื่องที่* a *แล้ว*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

ตัวอย่าง 2.11. จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(1/n)$

วิธีทำ พบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ และฟังก์ชัน cos ต่อเนื่องที่ 0 ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \cos(1/n) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} 1/n\right) = \cos 0 = 1$$

หมายเหตุ โดยทั่วไปมักมีการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 2.4 อย่างไม่ถูกต้อง เช่น ไม่ได้พิจารณาว่าฟังก์ชันที่จะหาค่าลิมิต ต่อเนื่องที่ค่าที่สนใจหรือไม่ ทำให้ไม่สามารถหาค่าลิมิตที่ถูกต้องได้ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

นิยามฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$ แต่ $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} 1/n\right) = f(0) = 1$ ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n) \neq f\left(\lim_{n\to\infty} 1/n\right)$$

บทนิยาม 2.4. เราเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า

- **ลำดับเพิ่ม** (increasing sequence) ถ้า $a_n \leq a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
- **ลำดับเพิ่มโดยแท้** (strictly increasing sequence) ถ้า $a_n < a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
- **ลำดับลด** (decreasing sequence) ถ้า $a_n \geq a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
- **ลำดับลดโดยแท้** (strictly decreasing sequence) ถ้า $a_n > a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$
- **ลำดับคงตัว** (constant sequence) ถ้า $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots$

และเรียกลำดับที่มีคุณสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่ง ที่กล่าวมาข้างต้นว่า**ลำดับทางเดียว** (monotonic sequence)

หมายเหตุ

1. สังเกตได้ว่าลำดับเพิ่มโดยแท้ จะเป็นลำดับเพิ่มด้วย แต่ไม่จริงในทางกลับกัน นั่นคือ ลำดับเพิ่มไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับเพิ่มโดยแท้และในทำนองเดียวกัน ลำดับลดโดยแท้จะเป็นลำดับลดด้วย แต่ลำดับลดไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลดโดยแท้
2. ลำดับคงตัวเป็นทั้งลำดับเพิ่มและลำดับลด

ตัวอย่าง 2.12. พิจารณาลำดับต่อไปนี้

- ลำดับ $\left\{\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$ เป็นลำดับคงตัว
- ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ เป็นลำดับลดโดยแท้ เพราะว่า $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n
- ลำดับ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ ซึ่งเห็นได้จาก $n^2 - 1 < n^2$ ดังนั้น $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ทำให้ได้ว่า $a_n < a_{n+1}$
- ลำดับ $\left\{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}, \frac{49}{4}, \ldots\right\}$ เป็นลำดับเพิ่ม แต่ไม่ได้เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้
- ลำดับ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ **ไม่เป็น**ทั้งลำดับเพิ่มและลำดับลด

- ลำดับ $\{a^n\}$ เป็น
  - ลำดับเพิ่มโดยแท้ ถ้า $a > 1$
  - ลำดับลดโดยแท้ ถ้า $0 < a < 1$
  - ลำดับคงตัวถ้า $a = 1$

บทนิยาม 2.5. เรากล่าวว่าลำดับ $\{a_n\}$ **มีขอบเขตบน** (bounded above) ถ้ามีจำนวน M ซึ่ง

$$a_n \leq M \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \geq 1$$

และ กล่าวว่าลำดับดังกล่าว**มีขอบเขตล่าง** (bounded below) ถ้ามีจำนวน m ซึ่ง

$$a_n \geq m \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } n \geq 1$$

ถ้าลำดับดังกล่าวมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง เราเรียกลำดับนั้นว่า**ลำดับมีขอบเขต** (bounded sequence)

ตัวอย่าง 2.13. พิจารณาลำดับต่อไปนี้

- ลำดับ $a_n = \dfrac{1}{n}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เพราะมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยที่ $0 < a_n \leq 1$ (ดูตัวอย่าง 2.5 หน้า 51 ประกอบ)
- ลำดับ $a_n = 2 + \dfrac{\sin n}{n}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เพราะมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยที่ $0 < a_n \leq 3$ (ดูตัวอย่าง 2.5 หน้า 51 ประกอบ)
- ลำดับ $a_n = n$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง เพราะว่า $a_n \geq 1$ ทุก ๆ n แต่เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตบน (ดูตัวอย่าง 2.5 หน้า 52 ประกอบ)
- ลำดับ $a_n = (-1)^{n+1}$ เป็นลำดับที่ขอบเขต เพราะมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง โดยที่ $-1 \leq a_n \leq 1$ แต่ลำดับนี้ลำดับที่ลู่ออก (ดูตัวอย่าง 2.5 หน้า 52 ประกอบ)

พบว่าถ้าลำดับใดเป็นลำดับลู่ออกสู่ค่าบวกอนันต์ จะไม่มีขอบเขตบน และ ลำดับใดลู่ออกสู่ค่าลบอนันต์ ก็จะไม่มีขอบเขตล่าง[7] ส่วนลำดับที่ลู่เข้า ก็จะเป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย แต่ในทางกลับกัน ลำดับที่มีขอบเขตอาจไม่เป็นลำดับที่ลู่เข้า ดังตัวอย่างที่ได้แสดงให้เห็นแล้ว ความสัมพันธ์ของลำดับที่มีขอบเขตและการลู่เข้าของลำดับ เป็นไปตามทฤษฎีบทที่กล่าวถึงต่อไป ซึ่งการพิสูจน์ของทฤษฎีบทดังกล่าวนี้อยู่ภายใต้เงื่อนไขของสัจพจน์สำคัญ นั่นคือ

[7] ดูนิยามลำดับลู่ออกสู่ค่าบวกอนันต์และลบอนันต์ได้ที่ บทนิยาม 2.3 หน้า 53

สัจพจน์ 1. สำหรับเซตย่อย S ใด ๆ ของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และมีขอบเขตบนแล้ว จะต้องมี**ขอบเขตบนน้อยสุด**[8] (least upper bound) เสมอ (จะต้องสามารถหา $\hat{U}$ ซึ่งเป็นขอบเขตบนของ S โดยที่ $\hat{U} \leq U$ ถ้า U เป็นขอบเขตบนใด ๆ ของเซต S)

เราเรียกสมบัติของจำนวนจริงนี้ว่า**สัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง**[9] (completeness axiom of real numbers)

จากสัจพจน์ที่กล่าวมาข้างต้อง ทำให้เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

ทฤษฎีบท 2.5 (ทฤษฎีบทลำดับทางเดียว). *ลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต จะลู่เข้าเสมอ*[10]

---

[8]บางครั้งเราใช้คำว่า**ซูพรีมัม** (supremum) แทนขอบเขตบนน้อยสุด

[9]สัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริงหรือบางครั้งอาจเรียกว่า**สัจพจน์ความบริบูรณ์ของเดเดคินด์** (Dedekind completeness axiom) เป็นสมบัติที่ทำให้เห็นว่าทั้งจำนวนจริงและจำนวนตรรกยะ ซึ่งมีสมบัติของฟีลด์อันดับ (order field)เหมือนกันนั้นจริงๆแล้วแตกต่างกัน สมบัติดังกล่าวเป็นการกำหนดว่าไม่มีจำนวนอื่นนอกเหนือจากจำนวนจริงอยู่ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน โดยแตกต่างจากกรณีที่เราสามารถหาจำนวนอื่นที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ แต่มีค่าระหว่างจำนวนตรรกยะสองตัวได้

[10]ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบทได้ใน [15, 22]

บทที่ 3
ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

ในเนื้อหาที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ทั้งเอกพันธุ์ และไม่เอกพันธุ์สังเกตได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยส่วนใหญ่ จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ การแปลงสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัว ให้อยู่ในรูปสมการใหม่ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ที่ค่าคงตัว (สมการโคชี-ออยเลอร์)

ในการศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สมการเชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้น สำหรับเนื้อหาในบทนี้ จะขยายแนวความคิดในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ โดยการพิจารณาผลเฉลยให้อยู่ในรูป"**อนุกรมกำลัง**" ซึ่งวิธีนี้สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ได้หลากหลายรูปแบบขึ้น โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้หาผลเฉลยได้ทั้งสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ สัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัว

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัวนั้น ผู้อ่านอาจจะประยุกต์ใช้ขั้นตอน**วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม**เข้ามาช่วยดังนี้

1. หาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง y_h โดยใช้วิธีพิจารณาผลเฉลยให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง
2. ใช้ขั้นตอนวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมหาผลเฉลยเฉพาะ y_p
3. ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรจะอยู่ในรูป

$$y = y_h + y_p$$

3.1 บทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 3.1. เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์[1]

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots , \tag{3.1}$$

ว่า*อนุกรมกำลังของ x รอบจุด* x_0 (power series of x around point x_0), เมื่อ $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ

- เรียก $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ ว่า*สัมประสิทธิ์ของอนุกรม*
- เรียก x_0 ว่า*จุดศูนย์กลาง*
- x คือ *ตัวแปร*

สำหรับกรณี $x_0 = 0$ เราเรียกอนุกรมอนันต์

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots , \tag{3.2}$$

ว่า*อนุกรมกำลังของ x*

หมายเหตุ

1. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_m(x-x_0)^m$
2. เพื่อความสะดวก เรากำหนดให้ $(x-x_0)^0$ ซึ่งเป็นพจน์แรกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ มีค่าเป็น 1 แม้ว่า $x = x_0$ ก็ตาม (และในทำนองเดียวกัน พจน์ x^0 ของอนุกรม $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ เราก็จะกำหนดให้มีค่าเป็น 1)
3. ในการศึกษาเรื่องอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรม อาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ก็ได้ สำหรับการศึกษาเรื่องอนุกรมกำลังในบทนี้ จะกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของอนุกรม เป็น**จำนวนจริง**เท่านั้น

[1] ดูเรื่อง "อนุกรมอนันต์" ใน [2, 13]

4. ในเอกสารบางฉบับ อาจจะกำหนดรูปแบบของอนุกรมกำลังให้ประกอบด้วยพจน์

$$\frac{1}{x-x_0}, \frac{1}{(x-x_0)^2}, \frac{1}{(x-x_0)^3}, \dots$$

เช่น

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \\ = & \cdots + a_{-2}(x-x_0)^{-2} + a_{-1}(x-x_0)^{-1} + a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ = & \cdots + \frac{a_{-2}}{(x-x_0)^2} + \frac{a_{-1}}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

แต่เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงอนุกรมกำลังที่มีเฉพาะพจน์ $1, x-x_0, (x-x_0)^2, (x-x_0)^3,$ $\dots$ เท่านั้น

5. เพื่อความสะดวก จะขอเรียก "อนุกรมกำลังของ x รอบจุด x_0" และ "อนุกรมกำลังของ x" ว่า *"อนุกรมกำลัง"*

ตัวอย่าง 3.1. ตัวอย่างของฟังก์ชัน ที่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมกำลัง

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots$ เมื่อ $|x| < 1$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1, \dots$
  อนุกรมกำลังนี้มีชื่อเรียกเฉพาะคือ *อนุกรมเรขาคณิต* (geometric series)
- $e^x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_0 = \dfrac{1}{0!} = 1,\ a_1 = \dfrac{1}{1!} = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2}, \dots$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - + \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$
- $\cos x = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 + \frac{1}{7!}(x - \frac{\pi}{2})^7 - + \cdots$

อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = \frac{\pi}{2}$

มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{(-1)^{(m+1)/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots$

  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$

  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{(-1)^{(m-1)/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

- $\sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^6 + - \cdots$

  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = \frac{\pi}{2}$

  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ 0 & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

- $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \cdots$

  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 1$

  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0 \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{m} & \text{เมื่อ } m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$

อนุกรมกำลังที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะกำหนดให้มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

คุณสมบัติที่สำคัญของอนุกรมกำลัง

1. อนุกรมกำลัง $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้าทุก ๆ จุด $x \in I$ เมื่อ I เป็นช่วงที่พิจารณาหรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ
$$\lim_{M\to\infty} \sum_{m=0}^{M} a_m(x-x_0)^m$$
หาค่าได้ทุก ๆ $x \in I$

2. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_1$ และ $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_2$ แล้ว ผลบวกและผลต่างของทั้งสองอนุกรมคือ
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \pm \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \pm b_m)(x-x_0)^m,$$
ซึ่งอนุกรมนี้จะลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_1 \cap I_2$

3. เราสามารถหาผลคูณของอนุกรมได้ดังนี้
$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m\right] = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-x_0)^m,$$
สำหรับทุก ๆ $x \in I_1 \cap I_2$ โดยที่
$$c_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0$$

4. การเปลี่ยนดัชนี ไม่ทำให้ค่าของอนุกรมเปลี่ยน
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$$

5. การเลื่อนค่าของดัชนี ไม่ทำให้ค่าของอนุกรมเปลี่ยน
$$\sum_{m=k}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(x-x_0)^{m+k}$$

6. ถ้า
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m,$$

ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$a_n = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และถ้า

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = 0,$$

ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0$$

7.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + m a_m (x - x_0)^{m-1} + \cdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \\
\frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= 2a_2 + 6(x - x_0) + \cdots + (m-1) m a_m (x - x_0)^{m-2} + \cdots \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (x - x_0)^{m-2} \\
&\vdots \\
\frac{d^k}{dx^k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1) a_m (x - x_0)^{m-k}
\end{aligned}$$

8. ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ หาอนุพันธ์รอบจุด x_0 ได้ทุก ๆ อันดับ และอนุพันธ์ที่หาได้ต่อเนื่อง เราเรียกอนุกรมกำลัง

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \tag{3.3}$$

ว่า*อนุกรมเทย์เลอร์*[2] (Taylor series) ของฟังก์ชัน f รอบจุด x_0

ถ้าอนุกรมนี้**ลู่เข้าในช่วง** $x \in I$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m, \qquad x \in I$$

[2] ดูเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์ในบทที่ ?? หน้า ??

3.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง

ในการศึกษาเรื่องการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง จะมีขั้นตอนในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

หรือ อาจจะสมมติให้ $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$ สำหรับกรณีที่การสมมติให้y เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 ไม่สามารถหาคำตอบได้ โดย x_0 อาจจะมีค่าเป็น 1 หรือ มีค่าอื่น โดยพิจารณาจากเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่กำหนดให้

2. แทนค่า y และอนุพันธ์ของ y ลงในสมการ

3. พยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการใหม่

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots = 0$$

(หรือ $b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \cdots = 0$)

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมอนันต์ จะได้ว่า $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = 0$ ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ &\vdots \\ b_n &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

5. แก้ระบบระบบสมการ (3.4) เพื่อหาค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots$

6. แทนค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ลงในผลเฉลย

ตัวอย่าง 3.2. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' - y = 0 \tag{3.5}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการ (3.5) โดย

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

2. พบว่าอนุพันธ์ของ y คือ

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots\right) - \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right) = 0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots = 0$$

4. เราพบว่า

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0, \\ 2a_2 - a_1 &= 0, \\ &\vdots \\ na_n - a_{n-1} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. เราสามารถแก้ระบบสมการได้คือ

$$a_1 = a_0,\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!},\ a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{3}\frac{a_0}{2!} = \frac{a_0}{3!}, \cdots,\ a_n = \frac{a_0}{n!}, \cdots$$

6. เราได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3.5) คือ

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots \\ &= a_0(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots) \\ &= a_0 e^x \end{aligned}$$

พบว่าผลเฉลยที่ได้ สอดคล้องกับผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่าง **??** หน้า **??**

ตัวอย่าง 3.3. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' = 2xy \tag{3.6}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการ (3.6) โดย

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

2. พบว่าอนุพันธ์ของ y คือ

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\right) &= 2x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) \\ &= \left(2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$a_1 + (2a_2 - 2a_0)x + (3a_3 - 2a_1)x^2 + \cdots + (n a_n - 2a_{n-2})x^{n-1} + \cdots = 0$$

4. เราพบว่า

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ 2a_2 - 2a_0 &= 0, \\ 3a_3 - 2a_1 &= 0, \\ &\vdots \\ na_n - 2a_{n-2} &= 0, \\ (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. เราสามารถแก้ระบบสมการได้คือ

$$a_1 = \tfrac{3}{2}a_3 = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{5}{3}a_5\right) = \cdots = \tfrac{2n-1}{2}a_{2n-1} = \cdots = 0$$
$$a_2 = a_0,\ a4 = \tfrac{2a_2}{4} = \tfrac{a_0}{2!},\ a_6 = \tfrac{2a_4}{6} = \tfrac{1}{3}a_4 = \tfrac{a_0}{3!}, \cdots, a_{2n} = \tfrac{a_0}{n!} = \cdots$$

6. เราได้ว่าผลเฉลยของสมการ (3.6) คือ

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0x^2 + \frac{a_0}{2!}x^4 + \frac{a_0}{3!}x^6 + \cdots \\ &= a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots) \\ &= a_0\left(1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= a_0e^{x^2} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ผู้อ่าน อาจจะตรวจสอบผลเฉลยที่ได้นี้ กับผลเฉลยที่ได้จากสมการ (3.6) ซึ่งได้จากการพิจารณาให้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งชนิด "สมการแยกกันได้"

ตัวอย่าง 3.4. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + y = 0 \tag{3.7}$$

วิธีทำ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (3.7) สามารถทำได้โดย

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$y'' = (1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3x + (3\cdot 4)a_4x^2 + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.7) ทำให้ได้

$$\big((1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3x + (3\cdot 4)a_4x^2 + \cdots\big) + \big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\big) = 0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$((1\cdot 2)a_2 + a_0) + ((2\cdot 3)a_3 + a_1)\,x + ((3\cdot 4)a_4 + a_2)\,x^2 + \cdots = 0$$

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned}
(1\cdot 2)a_2 + a_0 &= 0,\\
(2\cdot 3)a_3 + a_1 &= 0,\\
&\vdots\\
(n-1)na_n + a_{n-2} &= 0,\\
n(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} &= 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. เราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ในรูป a_0 ได้โดยที่

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{1\cdot 2} = -\frac{a_0}{2!},\\
a_4 &= -\frac{a_2}{3\cdot 4} = -\frac{-a_0}{(3\cdot 4)2!} = \frac{a_0}{4!},\\
&\vdots\\
a_{2n} &= (-1)^n\frac{a_0}{(2n)!}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

และเราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ $a_3, a_5, a_7, \ldots$ ในรูป a_1 ได้โดยที่

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!},\\
a_5 &= -\frac{a_3}{4\cdot 5} = -\frac{-a_1}{(4\cdot 5)3!} = \frac{a_1}{5!},\\
&\vdots\\
a_{2n+1} &= (-1)^n\frac{a_1}{(2n+1)!},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - - + + \cdots$$

ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
y &= \left(a_0 - \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{4!}x^4 - + \cdots\right) + \left(a_1x - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_1}{5!}x^5 - + \cdots\right)\\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots\right)\\
&= a_0\cos x + a_1\sin x
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหาผลเฉลยของสมการแอรี[3] (Airy's equation)

$$y'' - xy = 0 \tag{3.8}$$

วิธีทำ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (3.8) สามารถทำได้โดย

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$y'' = (1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3x + (3\cdot 4)a_4x^2 + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.8) ทำให้ได้

$$[(1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3x + \cdots] - x\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right] = 0$$

[3]เซอร์ จอร์จ แอรี (Sir George Airy, 1801-1892) เป็นนักคณิตศาสตร์ และดาราศาสตร์ชาวอังกฤษแอรีได้ศึกษาสมการแอรี เพราะว่าผลเฉลยของสมการมีลักษณะพิเศษคือ เมื่อพิจารณากรณีที่ x ที่น้อยกว่าศูนย์ ผลเฉลยมีค่าแกว่งกวัดในทางบวกและลบ (oscillate) เช่นเดียวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และสำหรับกรณีที่ x มีค่ามากกว่าศูนย์ ผลเฉลยจะเป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotone function) เช่นเดียวกับฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic function)

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$(1\cdot 2)a_2 + ((2\cdot 3)a_3 - a_0)\,x + ((3\cdot 4)a_4 - a_1)\,x^2 + ((4\cdot 5)a_5 - a_2)\,x^3 + \cdots = 0$$

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0,\\
(2\cdot 3)a_3 - a_0 &= 0,\\
(3\cdot 4)a_4 - a_1 &= 0,\\
(4\cdot 5)a_5 - a_2 &= 0,\\
&\vdots\\
n(n+1)a_{n+1} - a_{n-2} &= 0,\\
(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1} &= 0,\\
(n+2)(n+3)a_{n+3} - a_n &= 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. • เราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ a_5 สามารถเขียนได้ในรูปของสัมประสิทธิ์ a_2, a_8 สามารถเขียนได้ในรูปของสัมประสิทธิ์ $a_5, \ldots$
ซึ่งก็คือ $a_{3n+2} = \dfrac{a_{3n-1}}{(3n+1)(3n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ นั่นทำให้

$$a_2 = a_5 = \cdots = a_{3n+2} = \cdots = 0$$

• สำหรับ $a_1, a_4, a_7,\ a_{10}, \ldots$ มีค่า

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_0}{2\cdot 3},\\
a_6 &= \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)},\\
a_9 &= \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)(8\cdot 9)},\\
&\vdots\\
a_{3n} &= \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots(3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

• $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$ หาค่าได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{a_1}{3\cdot 4},\\
a_7 &= \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)},\\
a_{10} &= \frac{a_7}{9\cdot 10} = \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)(9\cdot 10)},\\
&\vdots\\
a_{3n+1} &= \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots(3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$
\begin{aligned}
y &= a_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}+\cdots\right)\\
&= +a_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}+\cdots\right)\\
y &= a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right)
\end{aligned}
$$

สังเกตได้ว่าผลเฉลยของสมการแอรี อยู่ในรูป

$$y = a_0y_1 + a_1y_2,$$

เมื่อ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)},\\
y_2 &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}
\end{aligned}
$$

โดย y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการแอรีซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 1.5 (หน้า 9) **แต่เราไม่สามารถเขียนผลเฉลย y_1 และ y_2 ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐานทั่วไปที่เรารู้จักได้** เหมือนกับผลเฉลยจากตัวอย่าง 3.2, 3.3 และ 3.4

ตัวอย่าง 3.6. จงหาผลเฉลยของสมการแอรีในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด 1

วิธีทำ

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x รอบจุด 1

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \end{aligned}$$

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$\begin{aligned} y'' &= (1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3(x-1) + (3\cdot 4)a_4(x-1)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n(x-1)^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการแอรี ทำให้ได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0$$

เนื่องจากพิจารณา x รอบจุด 1 ดังนั้นจะเขียน x ในสมการ $y'' - xy = 0$ ในรูป $x = 1 + (x-1)$ ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนสมการแอรีได้ในรูป

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \\ = &\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1} \\ = &\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(x-1)^n \\ = &\ 0 \end{aligned}$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$[(1\cdot 2)a_2 - a_0] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n+1)a_{n+1} - a_{n-1} - a_n\right](x-1)^n = 0$$

4. เนื่องด้วยสัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
2a_2 &= a_0, \\
(2\cdot 3)a_3 - a_1 - a_0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad (2\cdot 3)a_3 = a_1 + a_0, \\
(3\cdot 4)a_4 - a_2 - a_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad (3\cdot 4)a_4 = a_2 + a_1, \\
(4\cdot 5)a_5 - a_3 - a_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad (4\cdot 5)a_5 = a_3 + a_2, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

หรือก็คือ

$$
\begin{aligned}
2a_2 &= a_0, \\
(n+1)(n+2)a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

5. เมื่อแก้สมการทำให้ได้สัมประสิทธิ์

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_0}{2}, \\
a_3 &= \frac{a_1 + a_0}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6} \\
a_4 &= \frac{a_2 + a_1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}\left(\frac{a_0}{2} + a_1\right) = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12} \\
a_5 &= \frac{a_3 + a_2}{4\cdot 5} = \frac{1}{20}\left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6} + \frac{a_0}{2}\right) = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$
\begin{aligned}
y \;=\; & a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] \\
& + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.7. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้ โดยใช้อนุกรมกำลัง

$$
\begin{aligned}
(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+xy&=0\\
y(0)=4, \qquad y'(0)&=6
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

วิธีทำ

1. เนื่องจากปัญหาค่าตั้งต้น (3.9) มีเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่จุด $x = 0$ ดังนั้นจะสมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x รอบจุด 0

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

2. อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสอง คือ

$$
\begin{aligned}
y' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n
\end{aligned}
$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + 3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} \\
& -2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3a_1x + 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + a_0x + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+1} \\
= & \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n x^n \\
& -2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3a_1x + 3\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n + a_0x + \sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^n \\
= & -2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x \\
& + \sum_{n=2}^{\infty}\left[-(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1}\right]x^n = 0
\end{aligned}
$$

4. เนื่องด้วยสัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
-a_2 &= 0, \\
-(a_0 + 3a_1 - 6a_3) &= 0, \\
-(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} &= 0, \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)
\end{aligned}
$$

5. เมื่อแก้สมการทำให้ได้สัมประสิทธิ์

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 0, \\
a_3 &= \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}, \\
\text{และ} \qquad a_{n+2} &= \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3\cdot 4}a_1 = \frac{a_1}{12},\\
a_5 &= \frac{3}{4}a_3 + \frac{1}{4\cdot 5}a_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a_0}{6}+\frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_0}{8}+\frac{3a_1}{8},\\
a_6 &= \frac{4}{5}a_4 + \frac{1}{5\cdot 6}a_3 = \frac{a_1}{15} + \frac{1}{30}\left(\frac{a_0}{6}+\frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_0}{180}+\frac{a_1}{12},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$y = a_0\left[1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{8}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right] + a_1\left[x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{3x^5}{8}+\frac{x^6}{12}\cdots\right]$$

7. จากเงื่อนไขค่าตั้งต้น

- $y(0) = 4$

$$y(0) = a_0\left[1+0+0+\cdots\right] + a_1\left[0+0+0+\cdots\right] = a_0 = 4$$

  ซึ่งได้ $a_0 = 4$

- $y'(0) = 6$

  เนื่องจาก

$$\frac{dy}{dx} = 4\left[\frac{x^2}{3}+\frac{5x^4}{8}+\frac{x^5}{30}+\cdots\right] + a_1\left[1+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{15x^4}{8}+\frac{x^5}{2}\cdots\right]$$

  ดังนั้น

$$y'(0) = 4\left[0+0+0+\cdots\right] + a_1\left[1+0+0+\cdots\right] = a_1 = 6$$

  ซึ่งได้ $a_1 = 6$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$
\begin{aligned}
y &= 4\left[1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{8}+\frac{x^6}{180}+\cdots\right] + 6\left[x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{3x^5}{8}+\frac{x^6}{12}\cdots\right]\\
&= 4+6x+\frac{11x^3}{3}+\frac{x^4}{2}+\frac{11x^5}{4}+\cdots
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยพิจารณาผลเฉลยในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด x_0 ที่กำหนดให้

(a) $y'' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(b) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(c) $y'' - 4y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(d) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 1$

(e) $y'' + k^2x^2y = 0,$ $\quad x_0 = 0,$ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(f) $(1-x)y'' + y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(g) $(1-x)y'' + y = 0,$ $\quad x_0 = 1$

(h) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(i) $y'' + xy' + 2y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(j) $xy'' + y' + xy = 0,$ $\quad x_0 = 1$

(k) $(4-x^2)y'' + 2y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

(l) $(1-x)y'' + xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y'' + x^2y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

(c) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$ $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 3$

(d) $y'' + xy' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

(e) $(1-x)y'' + xy' - y = 0,$ $\quad y(0) = -3,\ y'(0) = 2$

(f) $(4-x^2)y'' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

บทที่ 4
อนุกรมฟูริเยร์

บทนิยาม 4.1 (ฟังก์ชันเป็นคาบ). เรากล่าวว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบ (period) P ถ้า

$$f(x+P) = f(x), \qquad \forall x,$$

เมื่อ $P > 0$, โดยเรียกฟังก์ชัน f ที่มีคุณสมบัตินี้ว่า*ฟังก์ชันเป็นคาบ* (periodic function)

และเรียกค่า P ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน f เป็นคาบว่า *คาบที่น้อยที่สุด* (the least period)

ทฤษฎีบท 4.2 (อนุกรมฟูริเยร์). *ถ้า f* ***เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ที่มีคาบน้อยที่สุด*** *2π แล้ว เราสามารถเขียน f ได้ในรูป*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots , \end{aligned} \tag{4.1}$$

หรือ

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), \tag{4.2}$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เราเรียกอนุกรมที่เขียนแทนฟังก์ชัน f ที่ปรากฏในสมการ (4.2) (หรือ (4.1)) ว่า ***อนุกรมฟูริเยร์*** *(Fourier series)*

เนื่องด้วยเราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx &= \pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= \pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= 0,
\end{aligned}$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m, n โดยที่ $m \neq n$, ดังนั้นทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \, dx \right) \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + 0 \\
&= a_0 x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 (2\pi)
\end{aligned}$$

เมื่อจัดรูปสมการ ทำให้ได้

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \tag{4.3}$$

และในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\cos mx\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx+b_n\sin nx\cos mx)\right]dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos mx\,dx + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos nx\cos mx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin nx\cos mx\,dx\right) \\
&= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right) \\
&= 0+a_m\int_{-\pi}^{\pi} cos^2mx\,dx+0+0\ldots = a_m\pi
\end{aligned}$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ a_m เมื่อ $m = 1,2,3,\ldots$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx, \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.4}$$

และสำหรับสัมประสิทธิ์ที่เหลือ

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\sin mx\,dx \\
&= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right) \\
&= 0+b_m\int_{-\pi}^{\pi} sin^2mx\,dx+0+0\ldots = b_m\pi
\end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ b_m เมื่อ $m = 1,2,3,\ldots$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx, \qquad m=1,2,3,\ldots \tag{4.5}$$

เราเรียกสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ ว่า*สัมประสิทธิ์ฟูริเยร์* (Fourier coefficients) และเรียกสูตรที่ปรากฏใน (4.3), (4.4) และ (4.5) ว่า*สูตรของออยเลอร์* (Euler formulas) สำหรับฟังก์ชันที่มีคาบ 2π

ขั้นตอนวิธีการหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันมีคาบ ที่มีคาบ 2π

1. หาสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ โดยใช้สูตรของออยเลอร์

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

2. แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ในอนุกรม

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชันที่มีคาบ $2P$, $f(x) = f(x+2P)$, เราก็สามารถใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปร เพื่อแทนฟังก์ชันนั้นด้วยอนุกรมฟูริเยร์สำหรับฟังก์ชันที่มีคาบ $2P$ ได้ดังนี้

ขั้นตอนวิธีการหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชันมีคาบ ที่มีคาบ $2P$

1. หาสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ โดยใช้สูตรของออยเลอร์

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\frac{n\pi x}{P}\,dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\sin\frac{n\pi x}{P}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

2. แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ในอนุกรม

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{P}x + b_n\sin\frac{n\pi x}{P}x\right)$$

ตัวอย่าง 4.1. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ -1, & 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi) \tag{4.6}$$

วิธีทำ เนื่องด้วยฟังก์ชัน (4.6) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบ 2π ดังนั้น

1. หาสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ โดยใช้สูตรของออยเลอร์

(a) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\, dx + \int_{0}^{\pi} 1\, dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-(0-(-\pi)) + (\pi - 0)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\pi + \pi\right] = 0 \end{aligned}$$

(b) $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} (1)\cos nx\, dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} \cos nx\, dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\sin 0 - \sin(-n\pi)}{n} + \frac{\sin n\pi - \sin 0}{n}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (1)\sin nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\bigg|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos 0 - \cos(-n\pi)}{n} - \frac{\cos n\pi - \cos 0}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}[2 - 2\cos(n\pi)] \\
&= \frac{2}{n\pi}[1 - \cos(n\pi)]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก

$$
\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{เมื่อ } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 1 & \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}
$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ b_n มีค่า

$$
b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{เมื่อ } n = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}
$$

2. แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ในอนุกรม

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)
$$

ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (0\cos nx + b_n \sin nx) \\
&= \frac{4}{\pi}\sin x + 0\sin 2x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + 0\sin 4x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \cdots \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.2. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} k, & -\pi < x < 0 \\ -k, & 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x+2\pi), \tag{4.7}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีทำ โดยวิธีคิดคล้ายคลึงกับการหาอนุกรมฟูริเยร์ในตัวอย่าง 4.1 ทำให้เราได้ว่าเราสามารถเขียนฟังก์ชัน (4.7) ได้ในรูป

$$f(x) = \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left((2n-1)x\right)$$

ตัวอย่าง 4.3. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{-\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x+2\pi), \tag{4.8}$$

วิธีทำ ฟังก์ชัน (4.7) เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบ 2π ดังนั้น

1. หาสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ โดยใช้สูตรของออยเลอร์

   (a) $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos nx\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } n = 2,4,6,\ldots \\ 1 & \text{เมื่อ } n = 1,5,9,\ldots \\ -1 & \text{เมื่อ } n = 3,7,11,\ldots \end{cases}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูริเยร์ a_n มีค่า

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } n = 2,4,6,\ldots \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{เมื่อ } n = 1,5,9,\ldots \\ -\dfrac{2}{n\pi} & \text{เมื่อ } n = 3,7,11,\ldots \end{cases}$$

(c) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx\, dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้ในอนุกรม

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

ทำให้ได้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + 0 \sin nx) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos x + 0 \sin x + 0 \cos 2x + 0 \sin 2x - \frac{2}{3\pi} \cos 3x + 0 \sin 3x \\
&\quad + 0 \cos 4x + 0 \sin 4x + \frac{2}{5\pi} \cos 5x + 0 \sin 5x + 0 \cos 6x + 0 \sin 6x \\
&\quad - \frac{2}{7\pi} \cos 7x + 0 \sin 7x + 0 \cos 8x + 0 \sin 8x + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + - \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)x)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.4. จงหาอนุกรมฟูริเยร์ของฟังก์ชัน

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < \frac{-\pi}{2} \\ \pi, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi), \tag{4.9}
$$

วิธีทำ โดยวิธีคิดคล้ายคลึงกับการหาอนุกรมฟูริเยร์ในตัวอย่าง 4.3 ทำให้เราได้ว่าเราสามารถเขียนฟังก์ชัน (4.9) ได้ในรูป

$$
f(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos((2n-1)x)
$$

บรรณานุกรม

[1] จันทนา ไอยราภาญจนกุล. (2536). **เอกสารคำสอนวิชา 322-331 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)** ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

[2] ชนะศักดิ์ ป่ายเที่ยง (2530). **อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)** (พิมพ์ครั้งที่สอง) กรุงเทพมหานคร, สำนักพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

[3] ช่อฟ้า นิลรัตน์. (2533). **พีชคณิตนามธรรม** ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

[4] Anton, H., Bivens, I., Davis, S. (2002). **Calculus.** (7th ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[5] Apostol, T. M. (1997). **Linear algebra : a first course, with applications to differential equations.** USA: John Wiley & Sons, Inc.

[6] Bak, J. and Newman, D. J. (1982). **Complex analysis.** New York: Springer-Verlag New York, Inc.

[7] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2000). **Elementary Differential Equations.** (7th ed.) John Wiley & Sons, Inc.

[8] Bronson, R. (1994). **Schaum's outline of theory and problems of differential equations.** USA: McGraw-Hill

[9] Hewson, S. F. (2003). **A mathematical bridge: an intuitive journal in higher mathematics.** Singapore: World Scientific Printers

[10] Ibragimov, N. H. (1996). **CRC handbook of Lie group analysis of differential equations.** Vol. 3. USA: CRC Press, Inc.

[11] Knott, R. (2009). **Who was Fibonacci?** [On-line]. Available: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html

[12] JOC/EFR (1997). **Biography of Guido Fubini** [On-line]. Available: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Fubini.html, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland

[13] Kreyszig, E. (1999). **Advanced engineering mathematics.** (8th ed.) Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

[14] Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A.D. (2000). **Fundamental of differential equations.** (5th ed.) USA: Addison Wesley Longman

[15] Pownall, M. W. (1994). **Real analysis: A first course with foundations.** Iowa: Wm. C. Brown Publishers

[16] Protter, M. H., Morrey, C. B. (1991). **A first course in real analysis.** (2nd ed.) New York: Springer-Verlag

[17] Rogers, L. C. G., Williams, D. (2000). **Diffusions, Markov Process and Martingales. Vol.1&2** (2nd ed.) UK: Cambridge University Press

[18] Ross, S. L. (1984). **Differential equations.** (3rd ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[19] Salas, Hille and Etgen (2003). **Calculus (Serveral variables).** (9th ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[20] Schulz, E. **Differential equations.** School of Mathematics, Suranaree University of Technology: บริษัท สมบูรณ์การพิมพ์ จำกัด

[21] Spiegel, M. R. (1990). **Schaum's outline of theory and problems of mathematical handbook of formulas and tables.** (international ed.) Singapore: McGraw-Hill

[22] Stewart, J. (2008). **Calculus Early Transcendentals.** (6th ed.) USA: Thomson Higher Education

[23] Wikipedia, **Zeno's paradoxes** [On-line]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Zeno

ดรรชนี