รหัสโครงการ SUT 1-103-43-12-04

รายงานวิจัย

ภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกของระบบไม่เชิงเส้นพร้อมความช้าหลายจุด

Asymptotic Stability of Nonlinear Systems with Multiple Delays

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

รหัสโครงการ SUT 1-103-43-12-04

รายงานการวิจัย

ภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกของระบบไม่เชิงเส้นพร้อมความช้าหลายจุด

Asymptotic Stability of Nonlinear Systems with Multiple Delays

คณะผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สัตยธรรม

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

ผู้ร่วมวิจัย

1. รศ.ดร. สราวุฒิ สุดจิตรจร

2. นางสาว รัตติกานต์ แซ่ลิ่ม

ได้รับเงินอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2543

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่ผู้เดียว

พฤษภาคม 2548

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ หัวหน้าสถานวิจัย สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ และผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ซึ่งได้ให้การสนับสนุนเงินทุนและสถานที่สำหรับการทำวิจัยแลในท้ายที่สุด ผู้วิจัยขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ของสถานบันวิจัยและพัฒนาทุกท่าน ผู้ซึ่งให้ความช่วยเหลือเป็นอย่างดีในด้านการใช้เครื่องมือเพื่อการวิจัย

บทคัดย่อภาษาไทย

ได้มีการศึกษาภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและแบบชี้กำลัง สำหรับชิ้นของระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน ได้มีการสร้างชั้นของตัวควบคุมป้อนกลับแบบต่อเนื่องและมีขอบเขตขึ้น อาศัยตัวควบคุมนี้ เราสามารถรับประกันภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและแบบชี้กำลังของระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนได้ ทั้งนี้ได้มีการยกตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นประโยชน์ของผลการวิจัยนี้ด้วย

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ

Asymptotic and exponential stability for a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties are investigated. A class of bounded continuous feedback controller is constructed. By such a class of controllers, We can guarantee asymptotic and exponential stability of uncertain nonlinear dynamical system. A numerical example is also given to demonstrate the use of the main result

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

<u>**ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย**</u>

ในการปฏิบัติงานจริง โดยทั่วไปแล้วการควบคุมที่เหมาะสมมักจะมีเงื่อนไขบังคับ (control constaints) นี้ จะเกิดขึ้นบ่อยในเรื่องราวทางเศรษฐศาสตร์, สิ่งแวดล้อม, และทางการแพทย์ เป็นต้น ดูตัวอย่างใน [1]-[3] ได้มีผู้สนใจศึกษาเรื่องการควบคุมแบบชี้กำลังของระบบซึ่งการควบคุมมีเงื่อนไปบังคับกันมาบ้างแล้ว แต่ส่วนใหญ่พิจารณาสมการควบคุมเป็นแบบเชิงเส้น ดังเช่นใน [4] และ [5]

ในลำดับต่อมาได้มีการศึกษาถึงการหาตัวควบคุมป้อนกลับ (feedback controller) แบบเชิงเส้นเพื่อที่จะทำให้ระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นมีภาวะเสถียรแบบชี้กำลัง (ดู [6]) และได้มีการขยายแนวคิดนี้ให้รวมไปถึงตัวควบคุมป้อนกลับแบบไม่เชิงเส้นด้วยดังรายละเอียดใน [7] แต่การค้นคว้าใน [7] ยังมีข้อสมมุติเกี่ยวกับ Lyapunov function ที่แรงเกินไปจึงทำให้ใช้ประโยชน์ได้น้อย ข้อสมมุติดังกล่าวคือ

$$\lambda_1 \|x\|^p \le V(t,x) \le \lambda_2 \|x\|^p$$

เมื่อ p เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

สำหรับในงานวิจัยฉบับนี้ได้เสนอการค้นคว้าเพื่อหาตัวควบคุมป้อนกลับไม่เชิงเส้นแบบมีเงื่อนไขบังคับเพื่อที่จะทำให้ระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นมีภาวะเสถียรแบบชี้กำลังเช่นกัน แต่ภายใต้ข้อสมมุติบน Lyapunov function ที่อ่อนลงกว่าเดิม กล่าวคือจะสมมุติว่า

$$\lambda_1 \|x\|^p \le V(t,x) \le \lambda_2 \|x\|^q$$

เมื่อ p,q เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ภายใต้ข้อสมมุติเช่นนี้จะทำให้สามารถนำผลลัพธ์ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ได้สะดวกมากกว่าที่ปรากฏใน [7]

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นที่ภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและชี้กำลัง
2. ทำการค้นคว้าหาตัวควบคุมป้อนกลับไม่เชิงเส้นแบบมีเงื่อนไขบังคับ เพื่อทำให้ระบบควบคุมไม่เชิงเส้นมีภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและชี้กำลัง
3. ยกตัวอย่างเพื่อแสดงการใช้ประโยชน์จากผลลัพธ์ในข้อ 2

ขอบเขตของการวิจัย

ในงานวิจัยชิ้นนี้กำหนดขอบเขตไว้ว่า จะศึกษาภาวะเสถียรของระบบควบคุมภายใต้เงื่อนไขที่ว่า Lyapunov function สอดคล้องกับอสมการ

$$\lambda_1 \|x\|^p \leq V(t,x) \leq \lambda_2 \|x\|^q$$

เมื่อ p,q เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ผลของการวิจัยทำให้มีทฤษฎีบทที่มีข้อสมมุติอ่อนลงกว่าเดิมตามที่ปรากฏใน [7] ซึ่งจะทำให้เราประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทได้ง่ายและกว้างขวางกว่าเดิม

บทที่ 2
เนื้อเรื่อง

วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีดำเนินการวิจัย เริ่มต้นจากการรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการหาภาวะเสถียรของสมการพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น ต่อจากนั้นก็ทำการวิเคราะห์ปัญหาวิจัยและนำเสนอตัวควบคุมที่เหมาะสม เมื่อได้ตัวควบคุมแล้วก็พิสูจน์ว่าระบบควบคุมที่สนใจมีภาวะเสถียรแบบชี้กำลังภายใต้ตัวควบคุมดังกล่าว

ผลของการวิจัย

1. ได้หาเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ระบบพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นที่ภาวะเสถียรแบบชี้กำลัง ผลลัพธ์มีปรากฏอยู่ในทฤษฎีบท 1 ของตอนที่ 2 ในภาคผนวก
2. ได้นำเสนอตัวควบคุมที่เหมาะสมคือ

$$u_i(t) = \frac{2c_i}{\pi}\tan^{-1}[y_i(t)], i = 1, 2, \ldots, m$$

   สำหรับแนวความคิดที่ได้มาซึ่งตัวควบคุมนั้น ได้ใช้วิธีการทดลองหาฟังก์ชันที่เหมาะสม (trial and error) โดยให้เครื่องคอมพิวเตอร์ลองเขียนกราฟดูว่าตัวควบคุมใดที่จะทำให้ระบบมีภาวะเสถียร ต่อจากนั้นจึงนิยามตัวควบคุมขึ้นมา ไม่ได้ใช้ขั้นตอนวิธี หรือ physical insight ใดๆ และด้วยตัวควบคุมนี้เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าระบบควบคุม

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x) + f(t,x)\phi(t,x,u), t \geq t_0 \geq 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

   มีภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและแบบชี้กำลัง ผลการวิจัยนี้มีปรากฏอยู่ในทฤษฎีบท 2 ของตอนที่ 2 ในภาคผนวก
2. ได้แสดงตัวอย่างการใช้ประโยชน์จากผลลัพธ์ในข้อ 2 ตัวอย่างดังกล่าวมีปรากฏอยู่ในตอนที่ 3 ของภาคผนวก

บทที่ 3
ข้อวิจารณ์

เงื่อนไขของการมีภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและแบบชี้กำลังของระบบควบคุมไม่เชิงเส้นตามที่มีปรากฏในทฤษฎีบท 2 ของภาคผนวกนั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้สะดวกขึ้นกว่าเดิม

เนื่องจากภาวะเสถียรแบบชี้กำลัง (Exponential stability) จะเป็นภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติก (Asymtotic stability) ด้วย ดังนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยชิ้นนี้จึงสามารถอธิบายภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกได้ด้วย

ในรายงานวิจัยฉบับนี้ไม่ได้รวมเรื่องความช้าหลายจุดเอาไว้ด้วย ก็เพราะว่าเมื่อได้ทำให้ข้อสมมุติให้อ่อนลงกว่าเดิมแล้ว ทำให้การพิสูจน์เกี่ยวกับความช้าหลายจุดทำได้อย่างลำบากมาก ถ้าจะทำให้ได้จริงก็จะต้องเพิ่มเติมเงื่อนไขลงไปอีก ซึ่งก็จะไม่สอดคล้องกับความต้องการของเราที่ต้องการทำให้สมมุติฐานอ่อนลง ผู้วิจัยเลยตัดเรื่องความช้าหลายจุดออกไปก่อนเพื่อให้งานวิจัยสำเร็จลงได้

อย่างไรก็ดีผู้วิจัยก็ไม่ได้กลับมาพิจารณาความช้าหลายจุดหลังจากนั้น เพราะไปสนใจ impulsive system ซึ่งกำลังเป็น hot topics อยู่ในขณะนี้แทน

บทที่ 4
สรุปและข้อเสนอแนะ

กล่าวโดยสรุปแล้ว งานวิจัยฉบับนี้ได้เสนอเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ระบบควบคุมไม่เชิงเส้นมีภาวะเสถียรแบบแอซซิมโทติกและชี้กำลัง ดังปรากฏในทฤษฎีบท 2 ของภาคผนวก ส่วนข้อเสนอแนะก็คือยังสามารถค้นคว้าต่อไปจากงานวิจัยชิ้นนี้ได้โดยการ สมมุติว่า Lyapunov function สอดคล้องกับอสมการ

$$\lambda_1 a(\|x\|) \le V(t,x) \le \lambda_2 b(\|x\|)$$

โดยที่ $a(\|x\|)$ และ $b(\|x\|)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใด ๆ แล้วพิสูจน์ทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกับทฤษฎีบท 1 และ 2 ส่วนการขยายความไปถึงความช้าหลายจุดนั้น ขณะนี้ผู้วิจัยไม่ได้ทำแล้ว เพราะได้ทำงานหนักไปทาง impulsive system

บรรณานุกรม

[1] Y.Cohen, Applications of Control theory in Ecology. New York : Springer-Verlog, 1986.

[2] R. Isaacs, Differential Games. New York : Wiley, 1965.

[3] G.W. Swan, Applications of Optimal Control theory in Biomedicine. New York : Marcel Dekker, 1984

[4] B.S. Chen and C.C. Wong, "Robust stabilization of multivariable systems via constrained control : Time-domain approach" In Proc 28 the Conf. Decision and Control, Los Angeles, CA. 1987, pp. 1292-1297.

[5] R.M. Dolphus and W.E. Schmitedorf. "Stability analysis for a class of linear controllers under control constrains," in Proc. 30 the Conf. Decision and Control, Brighton U.K., 1991. pp. 77-80.

[6] Y.J. Sun, J.G. Hsich and C.C Clum, "Global stabilization of a class of uncertain nonlinear dynamic systems via linear control," Control-Theory and Advanced Technol., vol. 10. pp. 1401-1412, 1995.

[7] Y.J. Sun, C.H., Lien, and J.G. Hsich "Global stabilization of a class of uncertain nonlinear dynamic systems via linear control," IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 43. No. 5. pp. 674-677, 1998.

ภาคผนวก

Stability and Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems

งานวิจัยชิ้นนี้ตีพิมพ์ในวารสาร Asean Journal on Science and Technology for Development,Vol.20, Issue 1, pp 61-70 (2003).

STABILITY AND STABILIZATION OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

P. Sattayatham*, R. Saelim

School of Mathematics, Suranaree University of Technology,
Nakhon Ratchasima, 30000. Thailand

S. Sujitjorn

School of Electrical Engineering, Suranaree University of Technology,
Nakhon Ratchasima, 30000 Thailand

Received 12 July 2002, Accepted 15 January 2003

ABSTRACT

Exponential and asymptotic stability for a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties is investigated. Based on the stability of the nominal system, a class of bounded continuous feedback controllers is constructed. By such a class of controllers, the results guarantee exponential and asymptotic stability of uncertain nonlinear dynamical system. A numerical example is also given to demonstrate the use of the main result.

Index Terms : *Control constraint, feedback control, stability, stabilization, uncertainty, uncertain systems*

Nomenclature

R^n	n-dimensional real space
$R^{n\times m}$	Set of all real n by m matrices
A^T	Transpose of matrix A
$\lVert A\rVert$	Induced Euclidean norm of matrix A
$\lVert x\rVert$	Euclidean norm of $x \in R^n$
$\nabla_x V(t,x)$	Gradient of smooth scalar function $V(t, x)$
$\lvert a\rvert$	Absolute value of a real number a
$B_\rho(0)$	Ball in R^n of radius $\rho > 0$ and center at the origin

---

Parly supported by Suranaree University of Technology, Thailand (2000).
*Corresponding author-e-mail: pairote@ccs.sut.ac.th

1. INTRODUCTION

In recent decades, the stability problem of nonlinear systems have been extensively studied ([1]-[3] and [4]). It is well known that the study of stability theory of nonlinear dynamical systems is carried out by one of two Lyapunov methods, one is the Lyapunov's linearization method, and the other is the Lyapunov's direct method which concerns with construction of the Lyapunov function. The stability problem has motivated the study of Lyapunov function in both finite ([3], [5] and [6]) and infinite dimensional ([1] and [2]) spaces. Here, the Lyapunov's direct method is used. It is the purpose of this paper to investigate the exponential and asymptotic stabilization for nonlinear dynamical systems with control constraint.

This paper is organized as follows. In section II, a theorem which is a criterion for the exponential and asymptotic stability is proposed. Furthermore, based on this theorem, a bounded and continuous state feedback control is proposed to guarantee the exponential and asymptotic stability. In section III, a numerical example is given to illustrate the use of our main result. Finally, the conclusion follows in section IV.

2. PROBLEM FORMULATION AND MAIN RESULT

Consider a class of uncertain nonlinear dynamical systems described by the following state equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t,x) + F(t,x)\cdot\phi(t,x,u), \quad t \geq t_0 \geq 0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

where $t \in R_+$ is time, $x(t) \in R^n$ is the state vector, $u(t) \in R^m$ is the control vector, and $\phi(t,x,u)$ represents the system uncertainties. The function, $\phi(\cdot,\cdot,\cdot):[0,\infty)\times R^n \times R^m \to R^m$, $F(\cdot,\cdot):[0,\infty)\times R^n \to R^{n\times m}$, and $f(\cdot,\cdot):[0,\infty)\times R^n \to R^n$, are assumed to be continuous. The corresponding system of (1) without uncertainties, called the nominal system, is described by

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t,x), \quad t \geq t_0 \geq 0 \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

We assume further that the equation (2) has a unique solution corresponding to each initial condition and the origin is the unique equilibrium point. The state feedback controller can be represented by a nonlinear function in the form

$$u(t) = -\gamma(t,x)K^T(t,x).$$

Now, the question is how to synthesize a state feedback controller $u(t)$ that can guarantee the asymptotic and exponential stability of nonlinear dynamical system (1) in the presence of uncertainties ϕ (t,x,u).

Before giving our synthesis approach, we give some definitions and prove sufficient conditions for the asymptotic and exponential stability of system (2).

Definition 1. The equilibrium zero of (2) is *stable* if, for each $\varepsilon > 0$ and each, $t_o \in R_+$, there exists a $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ such that $\|x_0\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$ implies $\|x(t, x_0)\| \le \varepsilon, \forall t \ge t_0 \ge 0$.

Definition 2. The equilibrium zero of (2) is *attractive* if, for each, $t_0 \in R_+$, there is an $\eta(t_0) > 0$ such that $\|x_0\| \le \eta(t_0)$ implies that the solution $x(t, x_0)$ approaches zero as t approaches infinity.

Definition 3. The equilibrium zero of (2) is *asymptotically stable* if it is stable and attractive.

Definition 4. The equilibrium zero of (2) is *exponentially stable* if there exist positive constants,, ρ, k and γ such that

$$\|x(t, x_0)\| \le k\|x_0\| e^{-\gamma(t-t_0)},\ \forall t \ge t_0 = 0,\ \forall x_0 \in B_\rho.$$

The following theorem provides sufficient conditions for the asymptotic and exponential stability of system (2).

Theorem 1. Assume there exist a sufficiently smooth function *V(t,x)*, positive constants $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, p$ and q such that, for all and for all $t \ge t_0 \ge 0$ and for all $x(t) \in R^n$

$$\lambda_1 \|x(t)\|^p \le V(t, x(t)) \le \lambda_2 \|x(t)\|^q \tag{3}$$

and the derivative of V along the solution of (2) satisfies

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} = \nabla_t V(t, x(t)) + \nabla_x^T V(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \le -\lambda_3 \|x(t)\|^q. \tag{4}$$

Then the equilibrium point of the system (2) is asymptotically stable. Moreover, it is exponentially stable if $p = q$.

Proof. Let

$$Q(t, x(t)) = V(t, x(t)) e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t}. \tag{5}$$

Then, from (5), (4) and (3), we have

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t, x(t)) &= \dot{V}(t, x(t)) e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} V(t, x(t)) e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t} \\ &\le -\lambda_3 \|x(t)\|^q e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \lambda_2 \|x(t)\|^q e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} t} \\ &\le 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Integrate both sides of (6), we have, for all $t \geq t_0 \geq 0$

$$Q(t,x(t)) \leq Q(t_0,x(t_0)) = V(t_0,x(t_0,x(t_0))e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}t_0} \leq \lambda_2 \|x(t_0)\|^q e^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}t_0} \tag{7}$$

Hence, it follows from (3), (5), and (7), we get

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{V(t,x(t))}{\lambda_1}\right)^{1/p} = \left(\frac{Q(t,x(t))}{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}t}\right)^{1/p} = \left(\frac{\lambda_2 \|x(t_0)\|^q}{\lambda_1} e^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}(t-t_0)}\right)^{1/p} \tag{8}$$
$$= k\|x(t_0)\|^{q/p} e^{-\gamma(t-t_0)}$$

where $k = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/p}$, $\gamma = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 p}$. Let $\varepsilon > 0$ be given and $\delta(\varepsilon,t_0) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{p/q}$ then whenever $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon,t_0)$ we have

$$\|x(t)\| \leq k\frac{\varepsilon}{k} e^{-\gamma(t-t_0)} < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Therefore, the equilibrium zero of (2) is stable. Moreover, one can easily see that the right-hand side of (8) approaches zero when t approaches infinity. Hence, the equilibrium zero of (2) is attractive and therefore asymptotically stable. In particular, when $p = q$ the inequality (8) becomes

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \ \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

that is the equilibrium zero of (2) is exponentially stable.

We shall use Theorem 1 to fine the condition on $u(t)$ that can guarantee the asymptotic and exponential stability of nonlinear dynamical system (1). Let us introduce for system (1) the following assumptions:

(B1) The components of the control vector are physically limited by

$$|u| < c_i, \ \forall i = 1,2,\dots,m \tag{9}$$

with $c_i > 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,m.$

(B2) There exist a sufficiently smooth function $W(t,x)$, positive constants λ_1, λ_2, p and q such that for all $x \in R^n$, for all $t \geq t_0 \geq 0$, we have

$$\lambda_1 \|x(t)\|^p \leq W(t,x) \leq \lambda_2 \|x(t)\|^q \tag{10}$$

and the derivative of W along the solution of the nominal system $\dot{x}(t) = f(t,x)$ satisfies

$$\frac{dW(t,x(t))}{dt} = \nabla_t W(t,x(t)) + \nabla_x^T W(t,x(t)) \cdot f(t,x(t)) \leq 0 \tag{11}$$

Remark : The nominal system $\dot{x}(t) = f(t,x)$ is stable with (B2) (See [3] pp. 53-54).

(B3) There exist positive continuous functions $\varepsilon(t,x)$, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$; $f_3(t,x)$ and positive constants λ_3 and α such that

$$\begin{aligned} y^T \cdot \phi_1(t,x,y) \geq & -f_1(t,x)\|y\| + f_2(t,x)\|y\|^2 - f_3(t,x)\|y\|^3 \\ & + \frac{\lambda_3 f_2(t,x)\|x(t)\|^q}{2f_3(t,x)[\|K\| + \varepsilon(t,x)]}, \\ & \forall y \in R^m,\ \forall x \in R^n,\ \forall t \geq t_o \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

where

$$f_2^2(t,x) \geq 4f_1(t,x)f_3(t,x),\ \forall x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{13}$$

$$f_1(t,x)\|K\| \leq \alpha\|x\|^q,\ \forall x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{14}$$

$$\phi_1(t,x,y) := \phi(t,x,\frac{2c_1}{\pi}\tan^{-1} y_1 \frac{2c_2}{\pi}\tan^{-1} y_2,\ldots,\frac{2c_m}{\pi}\tan^{-1} y_m), \tag{15}$$

$$y := [y_1, y_2, \ldots, y_m]^T \in R^m, \tag{16}$$

and

$$K(t,x) := F^T(t,x)\nabla_x W(t,x),\ \forall x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Lemma 1. Under the assumptions (B2) and (B3), we have

$$f_1\|K\| - f_2\gamma\|K\|^2 + f_3\gamma^2\|K\|^3 - \alpha\|x(t)\|^q \leq 0,\ \forall x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

where

$$\gamma(t,x) := \frac{f_2(t,x)}{2f_3(t,x)[\|K\| + \varepsilon(t,x)]},\ \forall x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0$$

and

$$K(t,x) := F^T(t,x)\nabla_x W(t,x),\ \ x \in R^n, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
& f_1\|K\| - f_2\gamma\|K\|^2 + f_3\gamma^2\|K\|^3 - \alpha\|x(t)\|^q \\
&= f_1\|K\| - \frac{f_2^2\|K\|^2}{2f_3(\|K\|+\varepsilon)} + \frac{f_2^2\|K\|^3}{4f_3(\|K\|+\varepsilon)^2} - \alpha\|x(t)\|^q \\
&= \frac{4f_1f_3\|K\|^3 + 4f_1f_3 2\|K\|^2\varepsilon + 4f_1f_3\|K\|\varepsilon^2 - 2f_2^2\|K\|^3 - 2f_2^2\|K\|^2\varepsilon}{4f_3(\|K\|+\varepsilon)^2} \\
&\qquad + \frac{f_2^2\|K\|^3}{4f_3(\|K\|+\varepsilon)^2} - \alpha\|x(t)\|^q \\
&= \frac{-\|K\|^3\left[f_2^2 - 4f_1f_3\right] - 2\varepsilon\|K\|^2\left[f_2^2 - 4f_1f_3\right]}{4f_3(\|K\|+\varepsilon)^2} + \frac{4f_1f_3\|K\|\varepsilon^2}{4f_3(\|K\|+\varepsilon)^2} - \alpha\|x(t)\|^q \\
&= \frac{f_1\|K\|\varepsilon^2 - \alpha\|x(t)\|^q(\|K\|+\varepsilon)^2}{(\|K\|+\varepsilon)^2} \\
&= \frac{f_1\|K\|\varepsilon^2 - \alpha\|x(t)\|^q\|K\|^2 - 2\alpha\|x(t)\|^q\|K\|\varepsilon - \alpha\|x(t)\|^q\varepsilon^2}{(\|K\|+\varepsilon)^2} \\
&= \frac{(f_1\|K\| - \alpha\|x(t)\|^q)\varepsilon^2 - \alpha\|x(t)\|^q\|K\|^2 - 2\alpha\|x(t)\|^q\|K\|\varepsilon}{(\|K\|+\varepsilon)^2} \\
&\le 0.
\end{aligned}
$$

Theorem 2. The system (1) satisfying the assumptions (B1)-(B3) is asymptotically stable and if $p = q$ it is exponentially stable under the control

$$u_i(t) = \frac{2c_i}{\pi}\tan^{-1}\left[y_i(t)\right], \quad \forall i = 1,2,\ldots,m. \tag{17}$$

Here

$$\left[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)\right] = -\gamma(t,x)K^T(t,x), \tag{18}$$

$$\gamma(t,x) := \frac{f_2(t,x)}{2f_3(t,x)(\|K\| + \varepsilon(t,x))}, \tag{19}$$

and

$$K(t,x) := F^T(t,x)\nabla_x W(t,x), \tag{20}$$

with $\alpha < \lambda_3$.

Proof. By (1) and (15)-(17), one has

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t,x) + F(t,x)\cdot(\phi(t,x,u_1,u_2,\ldots,u_m)\\ &= f(t,x) + F(t,x)\cdot\phi(t,x,\frac{2c_1}{\pi}\tan^{-1}y_1,\frac{2c_2}{\pi}\tan^{-1}y_2,\ldots,\frac{2c_m}{\pi}\tan^{-1}y_m)\\ &= f(t,x) + F(t,x)\cdot\phi(t,x,y),\ \forall x\in D\subset R^n,\ t\geq t_0\geq 0.\end{aligned}$$

Let W(*t,x*) be a Lyapunov function candidate of (1) with (17)-(20). The time derivative of W(*t,x*) along the trajectories of the closed-loop system, using (B2), is given by

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \nabla_t W + \nabla_x^T W[f + \cdot\phi_1]\\ &\leq \nabla_x^T WF\cdot\phi_1.\end{aligned} \tag{21}$$

From (12) and (18)-(19), we have

$$y^T\cdot\phi_1 \geq -f_1\gamma\|K\| + f_2\gamma^2\|K\|^2 - f_3\gamma^3\|K\|^3 + \lambda_3\gamma\|x(t)\|^q$$

Multiply both sides by $-\dfrac{1}{\gamma}$ and from (18), and (20), we have

$$K^T = \cdot\phi_1 = \nabla_x^T WF\cdot\phi_1 \leq f_1\|K\| - f_2\gamma\|K\|^2 + f_3\gamma^2\|K\|^3 - \lambda_3\|x(t)\|^q. \tag{22}$$

Substitute (22) into (21), we get

$$\begin{aligned}&\leq f_1\|K\| - f_2\gamma\|K\|^2 + f_3\gamma^2\|K\|^3 - \lambda_3\|x(t)\|^q + \alpha\|x(t)\|^q - \alpha\|x(t)\|^q\\ &= -(\lambda_3-\alpha)\|x(t)\|^q + f_1\|K\| - f_2\gamma\|K\|^2 + f_3\gamma^2\|K\|^3 - \alpha\|x(t)\|^q.\end{aligned} \tag{23}$$

Simplifying (23) by using (19)-(20), we get, by Lemma 1,

$$\dot{W} \leq -(\lambda_3-\alpha)\|x(t)\|^q. \tag{24}$$

By virtue of theorem 1, the proof is completed.

3. EXAMPLE

Consider the following uncertain nonlinear system:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^3 \\ -2x_1 - \frac{x_2^3}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\cdot\left\{a(t)u + b(t)u^2 + c(t)\tan u - 9\right\} \tag{25}$$

where $\in R$, $x := (x_1, x_2)^T \in R^2, -1 \le a(t) \le 1, -1 \le b(t) \le 1,$ and $4 \le c(t) \le 5$ for all $t \ge t_0 \ge 0$. The coefficients *a(t), b(t),* and *c(t)* are arbitrarily chosen to satisfy (12)-(14). The control u is limited by $-\dfrac{\pi}{2} < u(t) < \dfrac{\pi}{2}$, and

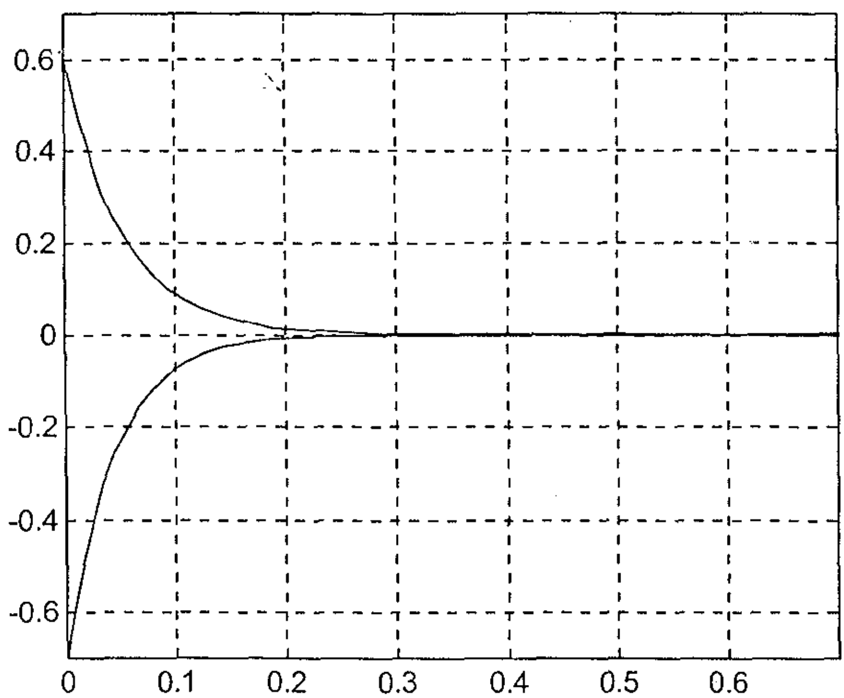


Figure 1 : The state trajectories of the feedback-controlled system for (25).

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1^3 \\ -2x_1 - \dfrac{x_2^3}{2} \end{pmatrix}, \quad F(t,x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\phi(t,x,u) = \left\{a(t)u + b(t)u^2 + c(t)\tan u - 9\right\}.$$

Choose a positive functional

$$W(t,x) = 2x_1^2 + x_2^2.$$

Then (10) and (11) are satisfied with λ_1=1, λ_2 = 2, p=2 and q=2. In fact,

$$\lambda_1 \|x\|^p = x_1^2 + x_2^2 \le W(t,x) = 2x_1^2 + x_2^2 \le 2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_1 \|x\|^q$$

and

$$\nabla_x^T W(t,x) f(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) W(t,x) \cdot f(t,x)$$
$$= (4x_1, 2x_2)\begin{pmatrix} x_2 - x_1^3 \\ -2x_1 - \dfrac{x_2^3}{2} \end{pmatrix}$$
$$= 4x_1,(x_2 - x_1^3) + 2x_2\left(-2x_1 - \frac{x_2^3}{2}\right)$$
$$= -4x_1^4 - x_2^4 \le 0.$$

From (15), we have

$$\phi_1(t,x,y) := \phi(t,x,\tan^{-1} y)$$
$$= a(t)\tan^{-1} y + b(t)(\tan^{-1} y)^2 + c(t)y - 9.$$

Hence, in (12), we have

$$y^T \cdot \phi_1(t,x,y) = \left[a(t)\tan^{-1} y + b(t)(\tan^{-1} y)^2\right]y + c(t)y^2 - 9y$$
$$\le -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)|y| + 5|y|^2 - 9y$$
$$\ge -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right)|y| + 5|y|^2 - |y|^3 - 9y.$$

This suggests that in (12) we choose

$$f_1(t,x) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right), \; f_2(t,x) = 5, \; and \; f_3(t,x) = 1.$$

It follows that (13) is satisfied. In fact,

$$f_2^2(t,x) = 25 \ge 4 f_1(t,x) f_3(t,x) = 4\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\right) \cdot 1$$
$$\approx 16.15.$$

By (20) and (19), with $\varepsilon(t,x) = 1$, we obtain

$$K(t,x) = 4x_1^2 + 2x_2^2,$$

and

$$\gamma(t,x) = \frac{5}{2(4x_1^2 + 2x_2^2 + 1)}.$$

Using (18), (12) becomes

$$
\begin{aligned}
y^T \cdot \phi_1(t,x,y) &\ge -\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\right)\|y\| + 5\|y\|^2 - \|y\|^3 + 9\gamma K \\
&= -\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\right)\|y\| + 5\|y\|^2 - \|y\|^3 + \frac{9\cdot 5(4x_1^2+2x_2^2)}{2(4x_1^2+2x_2^2+1)} \\
&\ge -\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\right)\|y\| + 5\|y\|^2 - \|y\|^3 + \frac{9\cdot 5\cdot 2(x_1^2+x_2^2)}{2(4x_1^2+2x_2^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Thus (12) holds with $\lambda_3 = 18$. Choosing $\alpha = 17 \le \lambda_3$, such that (14) holds, i.e.,

$$f_1\|K\| \approx 4.03(4x_1^2+2x_2^2) \le 17(x_1^2+x_2^2) = \alpha\|x\|^q.$$

Finally, owing to (17) and (18), it can be obtained that

$$u(t) = \tan^{-1}[y(t)]$$

By Theorem 2, we conclude that (25) with the bounded control (26) is exponentially stable. With $a(t) = b(t) = 1$, $c(t) = 5$, $x_1(0) = -0.70$, $x_2(0) = 0.60$, the state trajectories of the feedback-controlled system is depicted in Fig. 1. It can be seen from equation (26) that $u(t)$ is bounded by $-\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{\pi}{2}$.

4. CONCLUSION

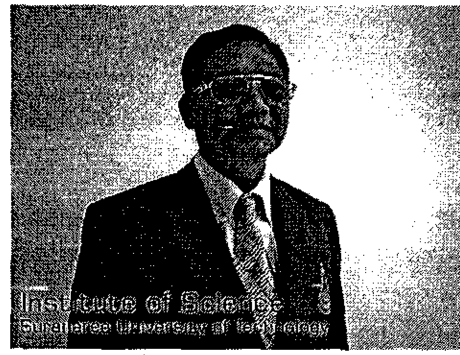
In this paper, the exponential and asymptotic stabilization of nonlinear dynamical systems with control constraint has been considered. A bounded and continuous state feedback control for the exponential and asymptotic stability for the closed-loop system is proposed. Finally, a numerical example has also been given to demonstrate the use of our main result.

REFERENCES

1. Curtain, R.F. (1977), Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, pp. 192-193, London: Academic Press.
2. Lakshminkantham, V. (1989), Stability Analysis of Nonlinear Systems, pp. 162-212, 249-275, New York: Marcel Dekker.
3. Parks, P.C. and Hahn, V. (1993), Stability Theory, pp. 41-90, UK: Prentice Hall.
4. Zabczyk J. (1992), Mathematical Control Theory, pp. 95-116, Boston: Birkhauser.
5. Robinson, C. (1999), Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. pp. 151-157, Florida: CRC Press.
6. Vidyasagar, M. (1993), Stability by Lyapunov's Second Method, pp. 157-269, New Jersey: Prentice Hall.

Pairote SATTAYATHAM

Associate Professor in Mathematics,
School of Mathematics,
Suranaree University of Technology
Nakhon-Ratchasima 30000, Thailand.
Email:pairote@ccs.sut.ac.th
Tel.044- 224315. Mobile 095849868.



Research interests:

Mathematical finance, Optimal Control of Distributed Parameter Systems.

Currently,I am interested in continuous time stochastic modeling of economics and in optimal portfolio theory.

Date of Birth: 12 April 1951
Place of Birth: Chachoengsao, Thailand
Nationallity: Thai

EMPLOYMENT

1976: Instructor in Mathematics, Srinakharinwirot University , Pitsanuloke, Thailand.
1984: Assistant Professor in Mathematics, Srinakharinwirot University, Pitsanuloke, Thailar
1989: Associate Professor in Mathematics, Thammasat University, Thailand.
1993 to present: Associate Prof. in Mathematics. Suranaree University of technology, Thailand.

EDUCATION

1974: B.A. (Mathematics), Thammasat University, Thailand.
1976: M.Sc.(Mathematics), Chulalongkorn University, Thailand.
1986: Ph.D (Mathematics), Chulalongkorn University, Thailand.

DISSERTATION SUPERVISED

1. Ms. Wei Wei, Periodic optimal control of systems governed by nonlinear evolution equations in Banach spaces, 2000.
2. Mr. Kiat Sangaroon, Existence of solutions for a class of semilinear integrodifferential equations of parabolic type with delay and optimal control, 2002.
3. Mr. Anusorn Chonweerayuth, A class of semilinear evolution equations and optimal control, 2002.
4. Ms. Rattikarn Saelim, On Some Fractional Stochastic Model in Finance, 2004.
5. Ms. Sujutra Hinpang , Optimal control theory (in progress).
6. Ms. Porntip, Optimal control theory (in progress).
7. Mr. Artit, Mathematical finance (in progress).
8. Ms. Noi, Mathematical finance (in progress).

MASTER THESIS SUPERVISED

1. Mr. Kiat Sangaroon, Super Harmonic Functions in Banach Lattices, 1988.
2. Ms. Pensri Saechan, Functions That Preserve Harmonicity in the Euclidean Space, 1988.
3. Mr. Mangorm Suksan, Boundary Behaviour of Green's functions, 1988.
4. Ms.Rattikarn Saelim, Expontial Stability and Stabilization of nonlinear Dynamic Systems, 2000.
5. Mr. Artit Intrasit, Option Pricing Models Driven by a Fractional Levy Process, 2005.

COURSES TAUGHT

1. Advanced Partial Differential Equation (PhD)
2. Topic in Optimal control Theory (PhD)
3. Nonlinear Functional Analysis (PhD)
4. Partial Differential Equation for Finance (PhD)
5. Stochastic Calculus (PhD)
6. Principle of Financial engineering (PhD)
7. Probability and random process (PhD)
8. Probability and statistics (B.Eng.)

BOOK WRITTEN (in Thai)

1. Introduction to Differential Topology, Srinakharinwirot University Press, 1984, 150 pages.
2. Functions of Complex Variables, Department of mathematics, Thammasat University, 1987, 290 pages.
3. Advanced Calculus, Prakay Pruk Press, Bangkok, 1989, 217 pages.
4. Introduction to Partial Differential Equations. Chulalongkorn University Press, 1998, 522 pages.
5. Probability and Statistics. (in progress).

Refereed Journal Papers (in mathematics)

1. **P. Sattayatham.** Some properties of solutions to semilinear heat equations. Proceeding of the Mathematical Research, Chiangmai Univ., Vol. 2, 26-28 (1992).
2. **P. Sattayatham.** The hyperplane mean of a non-negative subharmonic function. Science and Technology Journal, Thammasat University, Vol. 2, No.1, 1-7 (1993)
3. **P. Sattayatham.** On the functions that preserve harmonicity in the euclidean space. SEA Bull. Math., Vol. 17, No.1, 45-50 (1993)
4. **P. Sattayatham.** Semi-continuous functions in Banach Lattices. J. of Physical Science, USM, Malaysia, Vol.5, 103-116 (1994).
5. **P. Sattayatham.** Introduction to the Subject of Wavelets and PDEs, Proceedings of Annual Meeting in Mathematics, Khon Kaen University Press, Vol.1, 1-36 (1995).
6. B.I. Kvasov and **P. Sattayatham.** Generalized Tension B-splines. Proceedings of Chamonix 1996, Vanderbilt University Press USA, 1997, pp. 247-254.
7. E.B. Manoukian and **P. Sattayatham.** Particle correlation in quantum field theory II. Fortschr. Phys. (1998) 2, 189-200.
8. B.I. Kvasov and **P. Sattayatham.** GB-splines of Arbitrary Order. Journal of Computational and Applied Mathematics 104 (1999) 63-88.
9. **P. Sattayatham.** A convergence to infinity in Banach lattices. Thailand Journal of Mathematics, Vol 1, No. 1 (1999), pp. 15-23.
10. Y. Grigoriev, S.V. Meleshko, and **P. Sattayatham.** Classification of invariant solutions of the Boltmann equation. Journal of Physics A : Mathematical and General, Vol 32, No.28, 1999, pp. 337-342.

11. **P. Sattayatham.** and Wei Wei. Use of cubic splines and the second central finite differences in numerical solution of PDEs. Journal of Interdisciplinary Mathematics, ,Vol.2 (1999), pp. 193-204.

12. **P. Sattayatham** and Kuang Huawu. Relaxation and Optimal Controls for a class of Infinite Dimensional Nonlinear Evolution Systems, Journal of Guizhou University, P.R.China, Vol.16, No. 4 (1999), pp.242-250.

13. **P. Sattayatham.** Generalized Discrete Tension Splines, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol.3 (2000), No. 2-3, pp.163-172.

14. Wei Wei and **P. Sattayatham** Anti-periodic solutions for a class of strangly nonlinear evolution equations in Banach spaces, Guizhou Science Journal, Vol.20, No.1, 2002, pp. 19-35.

15. Wei Wei and **P. Sattayatham.** On Existence of Optimal Control Governed by a Class of Periodic Nonlinear Evolution Systems on Banach spaces, Acta Analysis Functionals Applicata, Vol.4, No.2, 2002, pp. 124-136.

16. **P. Sattayatham,** S. Tangmanee and Wei Wei. On periodic solutions of nonlinear evolution equations in Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.276, No.1, 2002, pp. 98-108.

17. X. Xiang, **P. Sattayatham,** and Wei Wei, Relaxed Optimal Controls of a Class of strongly nonlinear delay evolution equations, Journal of Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, Vol.52, No.3, 2003, pp.703-723.

18. **P. Sattayatham,** R. Saelim, and S. Sujitjorn, Stability and Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems. ASEAN Journal on Science and Technology for Development Vol. 20, Issue 1, pp 61-70, 2003.

19. **P. Sattayatham,** Strongly Nonlinear Impulsive Evolution Equations and Optimal Control. Journal of Nonlinear Analysis 57, pp 1005-1020, 2004.

20. **P. Sattayatham,** On Impulsive control of periodic evolution system. To appear.

21. P. Sattayatham. Relaxation of impulsive system. To appear.

Refereed Journal Papers (in mathematical finance)

1. P. Sattayatham , Fractional Levy process in Finance. (in progress).

Administrative Experiences

1. Associate to the Dean of Faculty of Science, Thammasat University, 1990-1991.
2. Chair of school of Mathematics, Suranaree University of Technology, 1993-1996.
3. President of the center for promotion of mathematics in Thailand, 1998-1999.
