

การศึกษาเชิงเปรียบเทียบวิธีกริดหลายระดับ
สำหรับการจำลองการไหลแบบสองมิติ

นายประทีป ทิพย์ประชา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-533-348-4

**COMPARATIVE STUDY OF MULTIGRID METHODS
FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW**

Mr. Prateep Tippracha

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Degree of Master in Mechanical Engineering

Suranaree University of Technology

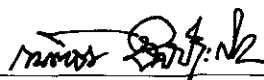
Academic Year 2004

ISBN 947-533-348-4

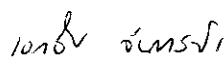
การศึกษาเชิงเปรียบเทียบระเบียบวิธีกริดหลายระดับ
สำหรับการจำลองการไหลแบบสองมิติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

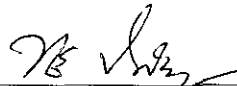
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์



(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
ประธานกรรมการ



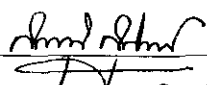
(ผศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)



(รศ. ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์)
กรรมการ



(รศ. ดร.ชัยศิลป์ ชินพรเจริญพงศ์)
กรรมการ



(รศ. น.ท. ดร.สราวุฒิ สุจิตจร)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ



(รศ. น.อ. ดร.วรพจน์ จำพิศ)
คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

ประทีป ทิพย์ประชา : การศึกษาเชิงเปรียบเทียบระเบียบวิธีกริดหลายระดับสำหรับการจำลองการไหลแบบสองมิติ (COMPARATIVE STUDY OF MULTIGRID METHODS FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เอกชัย จันทสาโร, 152 หน้า. ISBN 974-533-348-4

การทำวิจัยในนี้จะศึกษาระเบียบวิธีกริดหลายระดับ เพื่อหาผลเฉลยของสมการที่แสดงพฤติกรรมของการไหล เพื่อจำลองการไหลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว (Steady Two-Dimensional Laminar Incompressible Flow) โดยจะทำการเปรียบเทียบระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ ที่มีใช้กันอยู่โดยทั่วไป คือ วัฏจักรวี (V-Cycle) วัฏจักรดับเบิลยู (W-Cycle) วัฏจักรเอฟ (F-Cycle) วัฏจักรฟันเลื่อย (Sawtooth-Cycle) วิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ (Full Multigrid) และเคสคาดีกมัลติกริด (Cascadic Multigrid) การหาผลเฉลยจะใช้ระเบียบวิธีปริมาตรสับแบ่ง (Finite Volume Method) ระบบสมการที่ใช้แก้หาผลเฉลยคือสมการนาเวียร์-สโตกส์ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน โดยใช้ระบบกริดแบบจตุรร่วม (Collocated Grid System) เทอมการพาซึ่งเป็นเทอมไม่เชิงเส้นใช้วิธีผลต่างด้านกระแส (Upwind Differencing Scheme) ส่วนเทอมการแพร่ใช้วิธีผลต่างกลาง (Central Differencing Scheme) ใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) เพื่อหาค่าความดันของการไหล ระเบียบวิธีกริดหลายระดับถูกนำไปประยุกต์เข้ากับขั้นตอนวิธี SIMPLE ในขั้นตอนการทำซ้ำภายนอก พร้อมทั้งการเก็บค่าประมาณเต็ม (Full Approximation Storage: FAS) สำหรับวัฏจักรของระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ

ผลที่ได้รับจากการทำวิจัยนี้คือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซีเอฟดีที่มีความเร็วสูง ที่สามารถเปรียบเทียบวัฏจักรของระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ เพื่อช่วยให้ผู้ใช้เลือกใช้วัฏจักรของระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่เหมาะสมกับการจำลองการไหล

PRATEEP TIPPRACHA : COMPARATIVE STUDY OF MULTIGRID
METHODS FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW.
THESIS ADVISOR : ASST.PROF.EKACHAI JUNTASARO, Ph.D. 152 PP.
ISBN 974-533-348-4

MULTIGRID/SIMPLE/FAS/CFD/FINITE VOLUME

This research will study the multigrid methods for the solution of the flow governing equations to simulate steady two-dimensional laminar incompressible flow by making a comparison of various widely-used multigrid methods: V-Cycle, W-Cycle, F-Cycle, Sawtooth-Cycle, Full Multigrid and Cascadic Multigrid. The solution will be obtained by the finite volume method. A system of equations to be solved is the Navies-Stokes equations in Cartesian coordinates where a collocated grid system is used. The convective terms that are nonlinear are discretized by the upwind differencing scheme whereas the diffusive terms are approximated by the central differencing scheme. The SIMPLE algorithm is used to determine the pressure of the flow. Multigrid methods are applied in the outer-loop iteration of the SIMPLE algorithm together with FAS (Full Approximation Storage) for various types of multigrid cycles.

The result obtained from this research is the high-speed CFD computer which is able to compare various types of multigrid cycles to help users select the appropriate type of multigrid cycles for the flow simulation.

School of Mechanical Engineering

Academic Year 2004

Student's Signature _____

Advisor's Signature _____

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บุคคล และกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเหลือ อย่างดียิ่ง ทั้งในด้านวิชาการ และด้านการดำเนินการวิจัย อาทิเช่น

- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้โอกาสให้ความช่วยเหลือสนับสนุน ตลอดจนชี้แนะแนวทางในการศึกษาและทำวิจัย ทำให้ผู้วิจัยมีกำลังใจ กำลังความสามารถในการทำวิจัยจนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

- รองศาสตราจารย์ น.อ. ดร. วรพจน์ ขำพิศ, รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์, รองศาสตราจารย์ ร.อ. ดร.กนต์ธร ชานีประศาสน์ และคณาจารย์ในสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้

- คุณสอาด สุกฤษณ์, คุณเกียรติศักดิ์ เหมี่ยมสูงเนิน, คุณเอกรงค์ สุขจิต และคุณอักรพล มีสิทธิ์ สมาชิกห้อง CFD LAB ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำปรึกษามาโดยตลอด

- น้อง ๆ เพื่อนร่วมเรียน และเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจให้

- ขอขอบคุณ สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล ที่ให้ทุนสนับสนุนในการเรียนและทำวิจัย

ท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การเลี้ยงดูอบรมและส่งเสริมการศึกษาเป็นอย่างดีตลอดมา และที่ขาดเสียไม่ได้คือภรรยา ที่ยอมเสียสละเวลาและให้โอกาสในการศึกษาครั้งนี้ รวมถึงการดูแลเอาใจใส่และเป็นกำลังใจให้ตลอดเวลา

ประทีป ทิพย์ประชา

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย).....	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ).....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญรูป	ฉ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	ฐ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำการวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย.....	1
1.3 ขอบเขตงานวิจัย.....	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	3
2.1 การคำนวณเชิงตัวเลข	3
2.2 หลักการของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ.....	3
2.3 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับในอดีต.....	4
2.4 กรณีทดสอบ	6
3 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ	7
3.1 บทนำ.....	7
3.2 สมการควบคุมการไหล.....	9
3.3 ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ	13
3.3.1 วิธี CS.....	13
3.3.2 วิธี FAS.....	15

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.4	การส่งถ่ายผลเฉลย	16
3.5	วัฏจักรของกริดหลายระดับ	17
3.5.1	วัฏจักรวี	17
3.5.2	วัฏจักรดับเบิลยู	18
3.5.3	วัฏจักรเอฟ	19
3.5.4	วัฏจักรฟินเลเย	20
3.5.5	กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ	20
3.5.6	เคสคาดีกมัลติกริด	23
3.6	การประยุกต์ใช้วิธี FAS กับขั้นตอนวิธี SIMPLE	24
3.6.1	การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรวี	28
3.6.2	การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรดับเบิลยู	29
3.6.3	การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรเอฟ	29
3.6.4	การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรฟินเลเย	29
3.6.5	การประยุกต์ใช้กับกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ	29
3.6.6	การประยุกต์ใช้กับเคสคาดีกมัลติกริด	30
4	ผลการคำนวณและการวิเคราะห์	39
4.1	ผลการคำนวณ	44
4.1.1	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ V-Cycle	45
4.1.2	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ W-Cycle แบบที่ 1	49
4.1.3	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ W-Cycle แบบที่ 2	53
4.1.4	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ F-Cycle	57
4.1.5	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Sawtooth-Cycle	61
4.1.6	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Full Multigrid Cycle	65
4.1.7	ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Full Multigrid V-Cycle	69

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.1.8 ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Cascadic Multigrid	73
4.1.9 สรุปผลโดยรวมเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยแยกตาม เลขเรย์โนลด์.....	76
4.2 วิเคราะห์ผลการคำนวณ	79
5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	81
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	81
5.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป	82
เอกสารอ้างอิง	83
ภาคผนวก ก ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.....	86
ภาคผนวก ข โปรแกรมคอมพิวเตอร์	102
ประวัติผู้เขียน	152

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1	ปี ค.ศ. ที่มีงานวิจัยทางด้านระเบียบวิธีกริดหลายระดับ 4
4.1	ผลการคำนวณ V-Cycle 64x64 CV Re=400 45
4.2	ผลการคำนวณ V-Cycle 128x128 CV Re=400 45
4.3	ผลการคำนวณ V-Cycle 256x256 CV Re=400 45
4.4	ผลการคำนวณ V-Cycle 512x512 CV Re=400 46
4.5	ผลการคำนวณ V-Cycle 64x64 CV Re=1000 46
4.6	ผลการคำนวณ V-Cycle 128x128 CV Re=1000 46
4.7	ผลการคำนวณ V-Cycle 256x256 CV Re=1000 47
4.8	ผลการคำนวณ V-Cycle 512x512 CV Re=1000 47
4.9	ผลการคำนวณ V-Cycle 64x64 CV Re=5000 47
4.10	ผลการคำนวณ V-Cycle 128x128 CV Re=5000 48
4.11	ผลการคำนวณ V-Cycle 256x256 CV Re=5000 48
4.12	ผลการคำนวณ V-Cycle 512x512 CV Re=5000 48
4.13	ผลการคำนวณ W-Cycle1 64x64 CV Re=400..... 49
4.14	ผลการคำนวณ W-Cycle1 128x128 CV Re=400..... 49
4.15	ผลการคำนวณ W-Cycle1 256x256 CV Re=400..... 49
4.16	ผลการคำนวณ W-Cycle1 512x512 CV Re=400..... 50
4.17	ผลการคำนวณ W-Cycle1 64x64 CV Re=1000..... 50
4.18	ผลการคำนวณ W-Cycle1 128x128 CV Re=1000..... 50
4.19	ผลการคำนวณ W-Cycle1 256x256 CV Re=1000..... 51
4.20	ผลการคำนวณ W-Cycle1 512x512 CV Re=1000..... 51
4.21	ผลการคำนวณ W-Cycle1 64x64 CV Re=5000..... 51
4.22	ผลการคำนวณ W-Cycle1 128x128 CV Re=5000..... 52
4.23	ผลการคำนวณ W-Cycle1 256x256 CV Re=5000..... 52

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.24 ผลการคำนวณ W-Cycle1 512x512 CV Re=5000.....	52
4.25 ผลการคำนวณ W-Cycle2 64x64 CV Re=400.....	53
4.26 ผลการคำนวณ W-Cycle2 128x128 CV Re=400.....	53
4.27 ผลการคำนวณ W-Cycle2 256x256 CV Re=400.....	53
4.28 ผลการคำนวณ W-Cycle2 512x512 CV Re=400.....	54
4.29 ผลการคำนวณ W-Cycle2 64x64 CV Re=1000.....	54
4.30 ผลการคำนวณ W-Cycle2 128x128 CV Re=1000.....	54
4.31 ผลการคำนวณ W-Cycle2 256x256 CV Re=1000.....	55
4.32 ผลการคำนวณ W-Cycle2 512x512 CV Re=1000.....	55
4.33 ผลการคำนวณ W-Cycle2 64x64 CV Re=5000.....	55
4.34 ผลการคำนวณ W-Cycle2 128x128 CV Re=5000.....	56
4.35 ผลการคำนวณ W-Cycle2 256x256 CV Re=5000.....	56
4.36 ผลการคำนวณ W-Cycle2 512x512 CV Re=5000.....	56
4.37 ผลการคำนวณ F-Cycle 64x64 CV Re=400	57
4.38 ผลการคำนวณ F-Cycle 128x128 CV Re=400	57
4.39 ผลการคำนวณ F-Cycle 256x256 CV Re=400	57
4.40 ผลการคำนวณ F-Cycle 512x512 CV Re=400	58
4.41 ผลการคำนวณ F-Cycle 64x64 CV Re=1000	58
4.42 ผลการคำนวณ F-Cycle 128x128 CV Re=1000	58
4.43 ผลการคำนวณ F-Cycle 256x256 CV Re=1000	59
4.44 ผลการคำนวณ F-Cycle 512x512 CV Re=1000	59
4.45 ผลการคำนวณ F-Cycle 64x64 CV Re=5000	59
4.46 ผลการคำนวณ F-Cycle 128x128 CV Re=5000	60
4.47 ผลการคำนวณ F-Cycle 256x256 CV Re=5000	60
4.48 ผลการคำนวณ F-Cycle 512x512 CV Re=5000	60
4.49 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=400	61

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.50 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=400	61
4.51 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=400	61
4.52 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=400	62
4.53 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=1000	62
4.54 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=1000	62
4.55 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=1000	63
4.56 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=1000	63
4.57 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=5000	63
4.58 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=5000	64
4.59 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=5000	64
4.60 ผลการคำนวณ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=5000	64
4.61 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 64x64 CV Re=400.....	65
4.62 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 128x128 CV Re=400.....	65
4.63 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 256x256 CV Re=400.....	65
4.64 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 512x512 CV Re=400.....	66
4.65 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 64x64 CV Re=1000.....	66
4.66 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 128x128 CV Re=1000.....	66
4.67 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 256x256 CV Re=1000.....	67
4.68 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 512x512 CV Re=1000.....	67
4.69 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 64x64 CV Re=5000.....	67
4.70 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 128x128 CV Re=5000.....	68
4.71 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 256x256 CV Re=5000.....	68
4.72 ผลการคำนวณ FMG-Cycle 512x512 CV Re=5000.....	68
4.73 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=400.....	69
4.74 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=400.....	69
4.75 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=400.....	69

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.76 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=400.....	70
4.77 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=1000.....	70
4.78 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=1000.....	70
4.79 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=1000.....	71
4.80 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=1000.....	71
4.81 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=5000.....	71
4.82 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=5000.....	72
4.83 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=5000.....	72
4.84 ผลการคำนวณ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=5000.....	72
4.85 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=400	73
4.86 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=400	73
4.87 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=1000	73
4.88 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=1000	74
4.89 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=5000	74
4.90 ผลการคำนวณ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=5000	74
4.91 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 400.....	75
4.92 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 1000.....	76
4.93 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 5000.....	77
5.1 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณ โดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 400	81
5.2 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณ โดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 1000	82
5.3 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณ โดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 5000	82

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1	รูปทรงของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมที่ระนาบบนเคลื่อนที่ 6
3.1	การลดลงของค่าความคลาดเคลื่อน 7
3.2	แสดงกริดหลายระดับ 8
3.3	แสดงการวางตำแหน่งจุดบนกริด 2 ระดับ ในโดเมนเดียวกัน 16
3.4	วัฏจักรวี 18
3.5	วัฏจักรดับเบิลยูแบบที่ 1 19
3.6	วัฏจักรดับเบิลยูแบบที่ 2 19
3.7	วัฏจักรเอฟ 20
3.8	วัฏจักรฟันเลื่อย 20
3.9	กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ 21
3.10	FMG V-Cycle..... 23
3.11	Cascadic Multigrid 23
3.12	การพิจารณาค่าตัวแปรในกระบวนการ Restriction..... 26
3.13	แผนภูมิสายงาน V-Cycle..... 31
3.14	แผนภูมิสายงาน W-Cycle 1 32
3.15	แผนภูมิสายงาน W-Cycle 2 33
3.16	แผนภูมิสายงาน F-Cycle..... 34
3.17	แผนภูมิสายงาน Saw Tooth-Cycle 35
3.18	แผนภูมิสายงาน Full Multigrid..... 36
3.19	แผนภูมิสายงาน Full Multigrid V-Cycle 37
3.20	แผนภูมิสายงาน Cascadic Multigrid..... 38
4.1	ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 400..... 39
4.2	ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 1000..... 40
4.3	ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 5000..... 40

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.4	เส้น Contour ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 400 41
4.5	เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 400 41
4.6	เส้น Contour ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 1000 42
4.7	เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 1000 42
4.8	เส้น Contour ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 5000 43
4.9	เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 5000 43
ก1	ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 5 จุด 87
ก2	ค่าคุณสมบัติของการไหลเมื่อใช้การประมาณค่าแบบผลต่างต้นกระแส 93
ก3	แสดงการวางจุดที่บริเวณขอบโดเมน 98
ก4	ขั้นตอนวิธี SIMPLE 101

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

FMG	วิธีการหลายระดับเต็มรูปแบบ
FMG V-Cycle	วิธีการหลายระดับเต็มรูปแบบ ประยุกต์ใช้วัฏจักรวี
FAS	Full Approximation Storage
CS	Correction Scheme
CV	Control Volume
ϕ	ตัวแปรคุณสมบัติ
p	ความดัน
u, v	องค์ประกอบความเร็วในทิศทาง x และ y
x, y	ทิศพิกัด
ρ	ความหนาแน่น
μ	สัมประสิทธิ์ความหนืด
Γ	สัมประสิทธิ์การแพร่
α	แฟกเตอร์ของการทำซ้ำ
ε	แฟกเตอร์เกณฑ์การลู่เข้า
σ	แฟกเตอร์ตัวหยุด
I	ตัวดำเนินการส่งถ่ายผลเฉลย
L	ตัวดำเนินการผลต่าง

สัญลักษณ์ตัวย่อก

k	ระดับกริด
n	รอบการทำซ้ำ
u, v, p	ค่าสำหรับความเร็ว u, v และค่าความดันแก้ไข p'

สัญลักษณ์ตัวห้อย

k	ระดับกริด
P, W, E, N, S	จุดต่อ ตรงกลาง, ด้านซ้าย, ด้านขวา, ด้านบน และด้านล่าง ตามลำดับ
w, e, n, s	ขอบเขต ด้านซ้าย, ด้านขวา, ด้านบน และด้านล่าง ตามลำดับ
nb	ตำแหน่งข้างเคียง

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัจจุบันการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง เนื่องจากสามารถหาผลเฉลยได้อย่างรวดเร็ว แต่การที่จะให้ได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำนั้น ขึ้นอยู่กับหลายองค์ประกอบ เช่น วิธีการประมาณค่า จำนวนกริดที่ใช้ เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ววิธีการประมาณค่าที่ให้ความถูกต้องสูงมักจะมีข้อจำกัดบางประการที่ทำให้เกิดความยุ่งยากและอาจทำให้ขาดความมีประสิทธิภาพได้ ซึ่งหากใช้จำนวนกริดมากขึ้น ก็จะได้ค่าความถูกต้องสูงขึ้น แต่จะทำให้การคำนวณช้าลง และยังมีองค์ประกอบอื่น ๆ ที่จะส่งผลต่อการหาค่าผลเฉลย ความเร็วของการคำนวณขึ้นอยู่กับการเลือกใช้วิธีในการทำซ้ำ เช่น Jacobi, Gauss-Seidel, SOR เป็นต้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ดีควรมีศักยภาพในด้านความถูกต้องแม่นยำและความรวดเร็วควบคู่กันไป การคำนวณเชิงตัวเลขแบบทำซ้ำโดยใช้กริดชุดเดียวนั้น หากต้องการค่าความแม่นยำสูง ๆ ก็จะต้องใช้จำนวนกริดที่มากขึ้น แต่เป็นผลให้การคำนวณช้าลง จึงนับเป็นข้อด้อยของวิธีนี้ แนวทางที่จะทำให้การคำนวณรวดเร็วขึ้นคือการใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ (Multigrid Method) เข้ามาแก้ปัญหานี้ ซึ่งจะช่วยให้ลดเวลาในการคำนวณลงได้อย่างมากและยังคงความแม่นยำอยู่เหมือนเดิม

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ ได้รับการพัฒนาขึ้นมาเพื่อช่วยเพิ่มความเร็วในการคำนวณ โดยที่ความแม่นยำสูง ระเบียบวิธีกริดหลายระดับมีรูปแบบที่หลากหลายอยู่มากพอสมควร ดังนั้นงานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาว่ารูปแบบใดของระเบียบวิธีกริดหลายระดับจะเหมาะสำหรับการแก้ปัญหาคาร์ไลลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อหาระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่มีประสิทธิภาพสูงสำหรับการจำลองการไหลแบบสองมิติ

1.3 ขอบเขตงานวิจัย

ปัญหาการไหลที่เลือกขึ้นเพื่อการวิเคราะห์นี้เป็นการไหลแบบคงตัวและไม่อัดตัว 2 มิติ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งการหาผลเฉลยจะใช้ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method) ระบบสมการที่ใช้แก้หาผลเฉลยคือสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยใช้ระบบกริดแบบจตุรกร่วม (Collocated Grid System) เทอมการพาซึ่งเป็นเทอมไม่เชิงเส้นใช้วิธีผลต่างคั่นกระแส (Upwind Differencing Scheme) ซึ่งสามารถกำกับทิศทางของการไหลจึงทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพ ส่วนเทอมการแพร่ใช้วิธีผลต่างกลาง (Central Differencing Scheme) และใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) เพื่อหาค่าความดันของการไหล ซึ่งผลที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับความถูกต้องกับผลของ U. Ghia, K. N. Ghia, and C. T. Shin ซึ่งได้ทำการคำนวณไว้ในปี ค.ศ.1982

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับจะถูกนำไปประยุกต์เข้ากับขั้นตอนวิธี SIMPLE ในขั้นตอนการทำซ้ำภายนอก โดยใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม (Full Approximation Storage : FAS) ซึ่งใช้กับวัฏจักรของกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ เช่น วัฏจักรวี (V-Cycle) วัฏจักรดับเบิลยู (W-Cycle) วัฏจักรเอฟ (F-Cycle) วัฏจักรฟันเลื่อย (Sawtooth-Cycle) วิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ (Full Multigrid: FMG) และเคสคาดีกมัลติกริด (Cascadic Multigrid)

ปัญหาที่ใช้ในการทดสอบคือ การไหลหมุนวนภายในช่องสี่เหลี่ยมที่ขอบด้านบนเคลื่อนที่ (Shear-Driven Cavity Flow)

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซีเอฟดีที่มีความเร็วสูง เพื่อจำลองการไหลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบ และไม่อัดตัว ที่สามารถเปรียบเทียบระเบียบวิธีกริดหลายระดับชนิดต่าง ๆ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถตัดสินใจได้ว่าจะเลือกใช้นิโคใดให้เหมาะสมกับงานซีเอฟดีที่จะทำการจำลองการไหล

บทที่ 2

วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การคำนวณเชิงตัวเลข

การนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการ เป็นวิธีที่มีการใช้กันอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ซึ่งระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมและประสบความสำเร็จอย่างสูงในการแก้ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CFD) โดยหลักการพื้นฐานที่จะนำมาประยุกต์ใช้นั้น Patankar (1980) และ Versteeg and Malalasekera (1995) ได้อธิบายไว้อย่างละเอียด โดยหาค่าความดันได้จากขั้นตอนวิธี SIMPLE ซึ่งได้รับการเสนอโดย Patankar and Spalding (1972) การใช้ความดันเป็นตัวแปรปฐมฐานทำให้เกิดปัญหาความไม่เกี่ยวพันกันระหว่างความเร็วกับความดัน ซึ่งทำให้คำตอบที่ได้ผิดพลาดทางฟิสิกส์ จึงแก้ปัญหาโดยใช้ระบบกริดแบบจุดเอียง (Staggered Grid System) ซึ่ง Harlow and Welch ได้เสนอไว้ในปี ค.ศ. 1965 แต่การใช้ระบบกริดแบบนี้จะต้องใช้ร่วมกับ Contravariant Velocity ซึ่งอาจทำให้การคำนวณเสียเสถียรภาพได้ ดังนั้น Rhie and Chow (1983) จึงได้ใช้ระบบกริดแบบจุดร่วม ร่วมกับการประมาณค่าซึ่งเรียกว่าการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow (Rhie and Chow Interpolation) ซึ่งผลที่ได้เป็นที่ยอมรับและใช้กันเรื่อยมา

2.2 หลักการของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

การแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น มักจะดำเนินการโดยการแบ่งโดเมนออกเป็นส่วนย่อย ๆ โดยใช้เส้นกริด แล้วประมาณค่าลงไปบนส่วนย่อยนั้น ๆ จากนั้นจึงทำการคำนวณหาผลเฉลย ซึ่งคำตอบที่ได้จะยังไม่ถูกต้อง แต่พยายามลู่เข้าหาคำตอบ ซึ่งต้องทำแบบนี้ซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบที่ถูกต้องจึงเรียกระบบวิธีแบบนี้สั้น ๆ ว่า วิธีการทำซ้ำ (Relaxation or Iteration Method) การดำเนินการบนกริดแบบนี้ ยิ่งแบ่งกริดให้ละเอียดมากขึ้นเท่าใด คำตอบที่ได้ก็ย่อมมีความถูกต้องมากขึ้นตามไปด้วย แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณก็จะมากขึ้นเช่นกัน ซึ่งจำนวนกริดที่จะใช้ก็แล้วแต่ความเหมาะสม สำหรับการคำนวณบนกริดชุดเดียวนั้น อัตราการลู่เข้าจะรวดเร็วในรอบต้น ๆ ของการทำซ้ำเท่านั้น (Brandt, 1977) จากนั้นอัตราการลู่เข้าจะช้าลงเรื่อย ๆ

หากวิเคราะห์ค่าความคลาดเคลื่อนของการลู่เข้าด้วยอนุกรมฟูเรียร์ จะพบว่าค่าความคลาดเคลื่อนนั้นมีขนาดความยาวคลื่นที่แตกต่างกัน ซึ่งในระหว่างการทำซ้ำ ค่าความคลาดเคลื่อนที่

มีขนาดความยาวคลื่นสัมพันธ์กับขนาดของกริดจะสามารถลดลงได้อย่างรวดเร็ว ส่วนค่าความคลาดเคลื่อนที่มีความยาวคลื่นไม่สัมพันธ์กับขนาดของกริดจะลดลงได้อย่างช้า ๆ ดังนั้นเมื่อทำการเปลี่ยนขนาดของกริดให้มีขนาดสัมพันธ์กับขนาดความยาวคลื่นของค่าความคลาดเคลื่อนก็จะสามารถกำจัดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว จึงได้มีการนำเสนอเอากริดหลาย ๆ ชุดเข้ามาใช้ร่วมกันในการคำนวณ แนวคิดนี้เป็นพื้นฐานของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ ซึ่ง Brandt (1977) และ Wesseling (1992) ได้นำเสนอไว้อย่างละเอียด

2.3 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับในอดีต

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่มีอยู่เดิม เพื่อเร่งให้การหาผลเฉลยของระบบสมการได้รวดเร็วขึ้น เกิดขึ้นครั้งแรกในปี ค.ศ. 1964 โดย Fedorenko ซึ่งใช้แก้ปัญหามสมการปัวซอง (Poisson's Equation) บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งช่วงแรกยังไม่ได้รับการสนใจ จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1977 เริ่มมีการพัฒนาเกิดขึ้น เมื่อ Achi Brandt ได้นำเสนอผลงานเกี่ยวกับหลักการของระเบียบวิธีกริดหลายระดับในวารสารทางวิชาการขึ้นเป็นครั้งแรก จากนั้นงานวิจัยจึงเติบโตขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังจะเห็นได้จากตาราง 2.1 โดยมีการนำเอาระเบียบวิธีกริดหลายระดับไปประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขในรูปแบบต่าง ๆ และได้มีการนำเสนอระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบแก้ไข (Correction Scheme: CS) ซึ่งใช้ได้ดีกับปัญหาเชิงเส้น และระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม ซึ่งใช้ได้ดีกับปัญหาไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งยังมีการนำเสนอขั้นตอนการคำนวณบน กริดหลายระดับในรูปแบบวัฏจักร (Cycle) ในรูปแบบต่าง ๆ อีกด้วย

ตาราง 2.1 ปี ค.ศ. ที่มีงานวิจัยทางด้านระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

ปี	64	66	71	72	73	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
จำนวน	1	1	1	1	1	1	3	11	10	22	31	70	78	96	94	149

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นวิธีที่ใช้แก้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยอาศัยการทำซ้ำเป็นพื้นฐานสำคัญ ในปัจจุบันถือว่าเป็นวิธีที่ให้อัตราการลู่เข้ารวดเร็วที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีการทำซ้ำแบบอื่น ๆ ดังนั้นระเบียบวิธีนี้จึงเหมาะที่จะนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหามขนาดใหญ่ที่มีจำนวนจุดมาก ๆ ระเบียบวิธีกริดหลายระดับได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยของปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ อย่างกว้างขวางทั้งในอดีตและปัจจุบัน เช่น สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-

Stokes Equations) แบบไม่อัดตัว 2 มิติ (Ghia, Ghia and Shin, 1982; Vanka, 1985; Thompson and Ferziger, 1988)

Ghia et al. (1982) ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ ชนิดเก็บค่าประมาณเต็ม (Full Approximation Storage - Full Multigrid: FAS-FMG) ประยุกต์เข้ากับวิธีการทำซ้ำ CSI (Coupled Strong Implicit) แก่สมการนาเวียร์-สโตกส์ที่ถูกแปลงให้อยู่ในรูปสมการ Stream Function และ Vorticity โดยตัวดำเนินการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดเป็นแบบ 9 จุด และใช้วิธี Defect-Correction ปรับทอมอนูพันธ์อันดับ 1 ให้มีค่าความแม่นยำเทียบเท่าอันดับ 2

Vanka (1985) ใช้วิธี FAS-FMG ประยุกต์เข้ากับวิธีการทำซ้ำ SCGS (Symmetrical Coupled Gauss-Seidel) บนกริดแบบจุดเอียง (Staggered Grid) แก่สมการนาเวียร์-สโตกส์แบบไม่อัดตัว 2 มิติ โดยใช้วิธีผลต่างผสม (Hybrid Differencing Scheme) ประมาณค่าทอมอนูพันธ์ เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาการไหลแบบหมุนวน

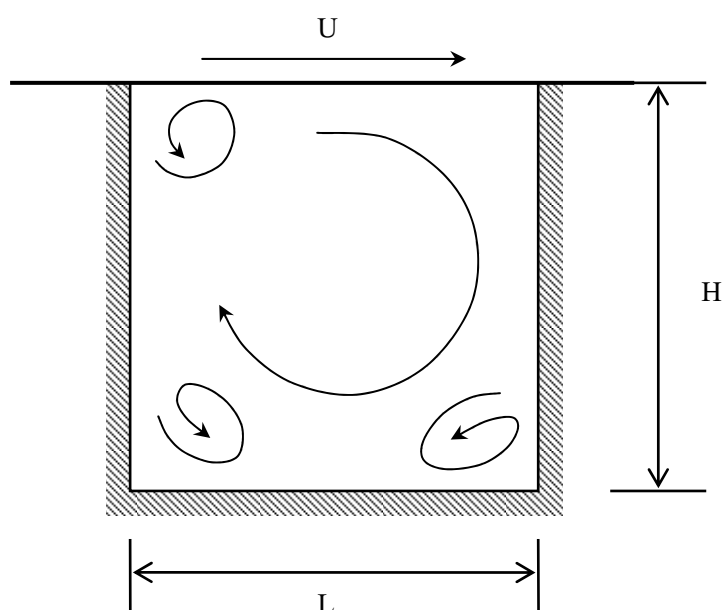
Thompson and Ferziger (1988) ใช้วิธี Adaptive Grid Approach ประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีกริดหลายระดับ โดยใช้วิธีการทำซ้ำ SCGS เช่นเดียวกับ Vanka แต่ปรับแต่งสมการนาเวียร์-สโตกส์ให้อยู่ในรูปสมการไร้มิติ และสร้างสมการบล็อก (Block Equation) โดยนำทอมค่าสัมประสิทธิ์ของความเร็วที่ด้านของเซลล์ทั้งหมดมารวมไว้ในเมทริกซ์ด้วย ส่งผลให้จำนวนทอมสัมประสิทธิ์มีมากขึ้น แต่จะส่งผลให้การลู่เข้าเร็วขึ้น

สอาด สุกัญณ์ (2544) ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ FAS-FMG และใช้วิธีการทำซ้ำแบบ SIP (Strong Implicit Procedure) แก่สมการนาเวียร์-สโตกส์ แบบคงตัวและไม่อัดตัว 2 มิติ ในระบบพิกัดฉาก โดยแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตแบบผลต่าง 5 จุด และใช้วิธี Defect-Correction เข้ามาปรับปรุงเพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลยให้สูงขึ้น

นอกจากนี้ยังมีบุคคลอื่นอีกหลายคน ที่ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ ได้สำเร็จ เช่น Anderson et al. (1988), Olshanskii and Reusken (2000) ประยุกต์ใช้แบบ V-cycle กับแบบ W-Cycle. Ham et al. (1999), Pernice (2000), Xu (2002), Zhang et al. (2002), Durga and Ramakrishna (2002) ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ V-Cycle. Demuren et al. (1991), Swanson et al. (1991) Spitaleri (2000) ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ FMG และยังมีระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่แตกต่างจากวัฏจักรทั่วไปคือ Cascadic Multigrid ซึ่งมีผู้ประยุกต์ใช้คือ Bornemann and Deflhard (1996), Walters (2003) จะเห็นได้ว่าการประยุกต์ใช้วิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ กันหลากหลาย แต่ยังไม่มีการได้สรุปให้เห็นว่าวิธีกริดหลายระดับแบบไหนจะเหมาะสมกับปัญหาที่ประยุกต์ใช้ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะเปรียบเทียบให้เห็นว่าระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบไหนเหมาะสมกับปัญหาการไหลที่งานวิจัยนี้สนใจ

2.4 กรณีทดสอบ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการไหลนั้น จะต้องได้รับการทดสอบว่ามีความถูกต้องหรือไม่ โดยการนำโปรแกรมที่สร้างขึ้นแล้วไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลที่มีผลเฉลยเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป ซึ่งงานวิจัยในครั้งนี้ได้ประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมที่ระนาบบนเคลื่อนที่ ตามรูปที่ 2.1 ซึ่งปัญหาการไหลแบบนี้เป็นการไหลที่มีรูปทรงเรียบง่าย แต่มีพฤติกรรมการไหลที่ซับซ้อน ไม่สามารถวิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นยำได้ แต่การไหลแบบนี้ได้มีผู้ทำการคำนวณหาผลเฉลยไว้แล้วหลายคน เช่น Ghia et al. (1982) ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับขนาด 129×129 ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500 และ 10000 ตามลำดับ Vanka (1985) ได้ทำการหาผลเฉลยบนกริดขนาด 41×41 จนถึงขนาด 321×321 Thompson and Ferziger (1988) ได้วิเคราะห์หาผลเฉลยบนโดเมนขนาด 8×8 ถึง 256×256 สอด (2544) ใช้กริดขนาด 8×8 ถึง 512×512 ซึ่งผลเฉลยที่ได้เป็นที่ยอมรับและสามารถใช้เป็นค่าอ้างอิงได้



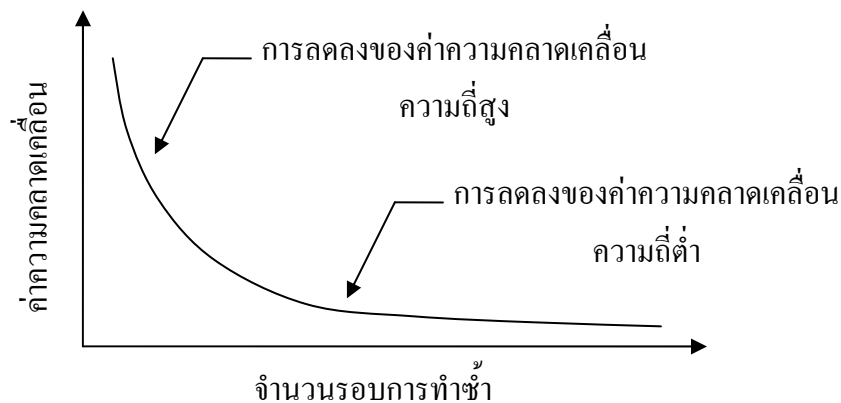
รูปที่ 2.1 รูปทรงของปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยมที่ระนาบบนเคลื่อนที่

บทที่ 3

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

3.1 บทนำ

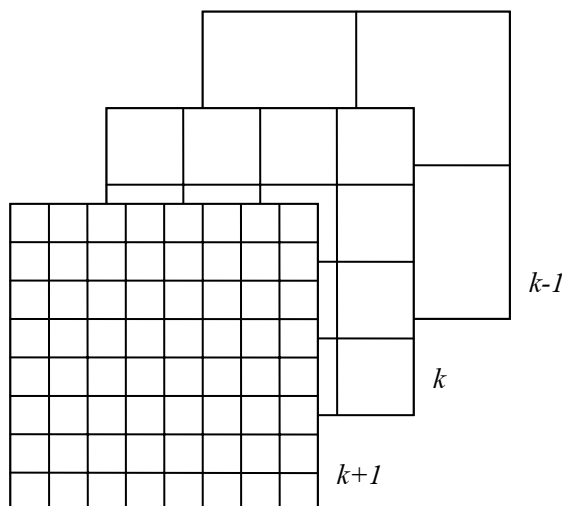
สำหรับการแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้วิธีการทำซ้ำนั้น ขนาดของกริดมีผลต่อความเร็วในการคำนวณ เนื่องจากขนาดของกริดมีผลคล้ายกับเป็นตัวกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ค่าความถี่แตกต่างกัน กล่าวคือกริดละเอียดจะสามารถกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่สูงได้ดี ส่วนกริดหยาบจะสามารถกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำได้ดี หากเราใช้กริดเพียงชุดเดียวในการคำนวณจะทำให้ลักษณะของการลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนเป็นดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนโดยใช้กริดชุดเดียว

จากรูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่าช่วงต้นของการทำซ้ำจะมีค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็ว แต่เมื่อจำนวนรอบการทำซ้ำมากขึ้นการลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงช้ามาก ซึ่งส่งผลให้การคำนวณใช้เวลามากขึ้นด้วย ด้วยเหตุนี้จึงต้องหาวิธีทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็วเหมือนในช่วงแรก เนื่องจากกริดละเอียดสามารถกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่สูงได้ดี และกริดหยาบสามารถกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำได้ดี ดังนั้นหากเปลี่ยนขนาดของกริดให้หยาบขึ้นในช่วงที่ค่าความคลาดเคลื่อนเริ่มลดช้าลง ก็จะสามารถทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำลดลงได้จนถึงระดับที่พอใจได้อย่างรวดเร็ว จึงเป็นที่มาของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นทำซ้ำประเภทหนึ่ง ซึ่งต้องใช้กริดในการคำนวณหลายชุด หรือหลายระดับ ตั้งแต่กริดละเอียดที่สุดไปจนถึงกริดหยาบที่สุด ซึ่งขนาดของกริดแต่ละระดับ นิยามมีความสัมพันธ์กันเป็น 1:2 กล่าวคือกริดหยาบจะมีขนาดเป็นสองเท่าของกริดละเอียดที่อยู่ติดกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 กริดหลายระดับ

เนื่องจากระเบียบวิธีกริดหลายระดับมีขั้นตอนที่สำคัญคือ การแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำ ซึ่งในระเบียบวิธีกริดหลายระดับนี้เรียกว่า Relaxation และการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดหยาบและกริดละเอียด

- การหาผลเฉลยด้วยวิธีการทำซ้ำ ในงานวิจัยนี้ใช้วิธี Gauss-Seidel มีรูปแบบดังนี้

$$\phi_P^n = \phi_W^n + \phi_N^{n-1} + \phi_E^{n-1} + \phi_S^n \quad (3.1)$$

เมื่อ ϕ เป็นตัวแปรที่ต้องการหาผลเฉลย ด้วย n เป็นค่าปัจจุบันในการทำซ้ำ ด้วย $n-1$ เป็นค่าที่ได้จากการทำซ้ำในรอบที่แล้ว และตัวห้อย P เป็นจุดกลางที่ต้องการหาค่า ส่วน E, W, N, S เป็นจุดที่อยู่รอบ ๆ จุดกลางคือจุดด้านขวา จุดด้านซ้าย จุดด้านบน และจุดด้านล่าง ตามลำดับ

- การส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปกริดหยาบ เรียกกระบวนการนี้ว่า Restriction :

$$I_k^{k-1}$$

- การส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปกริดละเอียด เรียกกระบวนการนี้ว่า Prolongation :

$$I_{k-1}^k$$

3.2 สมการควบคุมการไหล

สมการที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของการไหลนั้น โดยทั่วไปมักสร้างขึ้นบนหลักการที่สอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์ ได้แก่ กฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งสมการที่ได้จากกฎการอนุรักษ์จะเป็นสมการไม่เชิงเส้น ประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่าหลายตัวขึ้นอยู่กับมิติที่จะทำการวิเคราะห์ เช่น ความเร็ว ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ เป็นต้น ซึ่งสมการที่ใช้นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.2)$$

เมื่อ $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ และ ϕ เป็นตัวแปรคุณสมบัติของการไหล เราเรียกสมการ (3.2) นี้ว่า สมการการส่งถ่ายคุณสมบัติ (Transport Equation) ซึ่งแต่ละเทอมมีความหมายดังนี้ เทอมซ้ายมือของสมการเรียกว่าเทอมการพา (Convective Term) เทอมนี้จะแสดงถึงปริมาณสุทธิของ ϕ ที่ไหลเข้าหรือออกจากปริมาตรควบคุม ซึ่งจะมีบทบาทเมื่อมีการไหลเกิดขึ้น ส่วนเทอมแรกทางด้านขวามือของสมการเรียกว่าเทอมการแพร่ (Diffusive Term) เทอมนี้จะแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของ ϕ อันเนื่องมาจากการแพร่ผ่านขอบเขตเข้าหรือออกจากปริมาตรควบคุม โดย Γ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ และจะมีบทบาทเมื่อเกิดความแตกต่างกันของค่าคุณสมบัติของการไหลระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ที่ทำการพิจารณา และเทอมที่สองทางด้านขวาของสมการเรียกว่าเทอมซอส (Source Term) เป็นเทอมที่ทำให้เกิดการขับเคลื่อนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในระบบ สำหรับสมการความต่อเนื่องเทอมนี้จะป็นศูนย์ ส่วนสมการโมเมนตัม เทอมซอสคือเกรเดียนต์ความดันนั่นเอง เมื่อทำการแปลงสมการทั่วไป (3.2) เพื่อให้ได้สมการดิสครีไทส์ตามขั้นตอนของระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่องนั้น จะต้องทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุม เพื่อกระจายเทอมต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางพีชคณิต ซึ่งจะได้อารรูปแบบสมการเป็นดังนี้

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dV = \int_{\Delta V} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV + \int_{\Delta V} S_\phi dV \quad (3.3)$$

งานวิจัยนี้จะพิจารณาเฉพาะปัญหาการไหลแบบคงตัว 2 มิติ ราบเรียบ และไม่อัดตัว (Steady Two-Dimensional Laminar Incompressible Flow) ซึ่งสมการที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

Continuity Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.4)$$

x-Momentum Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.5)$$

y-Momentum Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.6)$$

สมการ 3.4-3.6 เป็นสมการหลักที่จะนำมาแก้หาผลเฉลย แต่ยังคงอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ยังไม่สามารถนำไปใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้โดยตรง จะต้องแปลงให้เป็นรูปแบบพีชคณิตเชิงเส้น หรือสมการดิสครีไทส์ (Discretized Equation) การแปลงเพื่อให้ได้สมการดิสครีไทส์นั้นมีขั้นตอนและวิธีการแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับวิธีการเลือกใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (Finite Volume Method) เป็นต้น ซึ่งแต่ละวิธีจะให้รูปแบบของสมการที่แตกต่างกันออกไป และใช้ได้เฉพาะกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้น ๆ เท่านั้น สำหรับงานวิจัยนี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (ดูรายละเอียดได้ในภาคผนวก ก) ซึ่งขั้นตอนในการเริ่มจากการอินทิเกรตสมการของระบบตลอดปริมาตรควบคุมที่จะทำการคำนวณ หลังจากนั้นจะประยุกต์ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบผลต่างกลางกับเทอมการแพร่ และแบบผลต่างคั่นกระแสกับเทอมการพา ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อย เพื่อกระจายเทอมดังกล่าวให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ทางพีชคณิตเชิงเส้น เนื่องจากแต่ละเทอมที่ปรากฏในสมการหลักนั้นมีรูปแบบและความหมายทางกายภาพแตกต่างกันออกไป ดังนั้นวิธีประมาณค่าที่ใช้ในแต่ละเทอมอาจจะแตกต่างกันออกไป เพื่อให้การคำนวณมีประสิทธิภาพและได้คำตอบที่ถูกต้อง

พิจารณาสมการ (3.5) และ (3.6) เมื่อแปลงเป็นสมการดิสครีไทส์แล้ว สมการที่ได้เป็นดังนี้

x-Momentum Equation

$$a_p^u u_p = a_w^u u_w + a_e^u u_e + a_s^u u_s + a_n^u u_n + S_u \quad (3.7)$$

หรือเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} + S_u \quad (3.8)$$

เมื่อ $\sum a_{nb}^u u_{nb} = a_w^u u_w + a_e^u u_e + a_s^u u_s + a_n^u u_n$ และ S_u เป็นเทอมซอสในทิศทาง x ซึ่งหาได้จากเกรเดียนต์ความดัน

y-Momentum Equation

$$a_p^v v_p = a_w^v v_w + a_e^v v_e + a_s^v v_s + a_n^v v_n + S_v \quad (3.9)$$

หรือเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$a_p^v v_p = \sum a_{nb}^v v_{nb} + S_v \quad (3.10)$$

เมื่อ $\sum a_{nb}^v v_{nb} = a_w^v v_w + a_e^v v_e + a_s^v v_s + a_n^v v_n$ และ S_v เป็นเทอมซอสในทิศทาง y ซึ่งหาได้จากเกรเดียนต์ความดันเช่นกัน ดังนั้นสมการ (3.8) และ (3.10) จึงเป็นสมการดิสครีไทส์ในรูปแบบทั่วไปที่จะใช้ในการแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรความเร็ว u และ v ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{1}{a_p^u} (\sum a_{nb}^u u_{nb} + S_u) \\ v_p &= \frac{1}{a_p^v} (\sum a_{nb}^v v_{nb} + S_v) \end{aligned} \quad (3.11)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (3.4-3.6) จะเห็นว่ามีความแปรไม่ทราบค่าอยู่จำนวน 3 ตัว คือ ตัวแปรความเร็ว u, v และตัวแปรความดัน p ซึ่งเท่ากับจำนวนสมการที่มีอยู่ ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการชุดนี้หาค่าตัวแปรทั้งสามนี้ได้ โดยที่ตัวแปรความเร็วนั้นสามารถใช้สมการดิสครีไทส์ หาค่าตัว

แปร u และ v ได้ ส่วนตัวแปร p เป็นตัวแปรที่ไม่มีสมการที่สามารถใช้หาได้โดยตรง และยังปรากฏอยู่เฉพาะในสมการโมเมนตัมเท่านั้น ดังนั้นการแก้สมการนี้ต้องใช้วิธีพิเศษจึงสามารถแก้สมการชุดนี้เพื่อหาค่าความเร็วและความดันควบคู่กันไป ซึ่งในที่นี้ใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE (ดูรายละเอียดในภาคผนวก ก) โดยเริ่มจากสมมติค่าความเร็วและความดันให้กับสนามการไหลในตอนเริ่มต้น จากนั้นแก้สมการโมเมนตัมเพื่อหาค่าความเร็ว แล้วสร้างสมการหาค่าความดันแก้ไขจากการประมาณค่าความเร็วในสมการความต่อเนื่องให้อยู่ในรูปของความดันแก้ไข ซึ่งความดันแก้ไขที่ได้จากสมการนั้นนำมาปรับแก้ค่าความดันในสมการโมเมนตัมอีกครั้งเพื่อหาค่าความเร็วในรอบการทำซ้ำถัดไป ซึ่งรูปแบบของสมการความดันแก้ไขเป็นดังนี้

$$a_p^p p_p' = \sum a_{nb}^p p_{nb}' + S_p \quad (3.12)$$

โดยปกติแล้วผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณในแต่ละรอบการทำซ้ำนั้นค่าที่ได้มักจะมีการแกว่งไปมา ซึ่งอาจทำให้เกิดการลู่เข้าช้า หรือหากการแกว่งเกิดขึ้นอย่างรุนแรง อาจทำให้การคำนวณขาดเสถียรภาพจนเป็นเหตุให้ผลเฉลยไม่ลู่เข้าหาคำตอบได้ ดังนั้นเพื่อเป็นการป้องกันการเกิดเหตุการณ์แบบนี้สามารถกระทำได้โดยคูณค่าแฟกเตอร์ของการทำซ้ำ (Under-relaxation Factor) ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 เข้าไปที่ตัวแปรก่อนที่จะนำไปแทนค่าในรอบการทำซ้ำถัดไป ซึ่งรูปแบบค่าแฟกเตอร์ของการทำซ้ำที่ใช้กับตัวแปรความดันเป็นดังนี้

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (3.13)$$

เมื่อ α_p เป็นค่าแฟกเตอร์ของการทำซ้ำของความดัน ส่วนค่าแฟกเตอร์ของการทำซ้ำที่ใช้กับตัวแปรความเร็วจะแตกต่างจากตัวแปรความดันโดยมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} u^{new} &= \alpha_u u^n + (1 - \alpha_u) u^{n-1} \\ v^{new} &= \alpha_v u^n + (1 - \alpha_v) v^{n-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

เมื่อ n เป็นรอบการทำซ้ำ α_u และ α_v เป็นค่าแฟกเตอร์ของการทำซ้ำของความเร็ว u และ v ตามลำดับ

การคูณค่าแฟกเตอร์เข้าไปที่ตัวแปรความดันจะทำให้ค่าความดัน p^* เป็นสัดส่วนกับค่าความดันแก้ไข p' ซึ่งจะมีผลต่อการคำนวณในรอบการทำซ้ำถัดไป หากค่าแฟกเตอร์นี้มากเกินไปก็อาจทำให้การคำนวณขาดเสถียรภาพ แต่ถ้าค่าน้อยเกินไปก็จะทำให้การลู่เข้าหาคำตอบล่าช้าและ

เสียเวลา แต่สำหรับตัวแปรความเร็วแล้ว จะเป็นการถ่วงดุลกันระหว่างค่าความเร็วที่ได้จากการคำนวณในรอบนี้กับค่าความเร็วที่ได้จากการคำนวณในรอบที่ผ่านมา ดังนั้นการเลือกค่าที่เหมาะสมจะทำให้การลู่เข้ารวดเร็วขึ้นและการคำนวณก็จะมีเสถียรภาพด้วย ซึ่งค่าแฟกเตอร์นี้อาจขึ้นอยู่กับปัญหาการไหลที่พิจารณา วิธีการที่ใช้ในการหาผลเฉลย จำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ และค่าคุณสมบัติอื่น ๆ อย่างเช่น Patankar (1980) ใช้ค่า $\alpha_p = 0.8$ และค่า $\alpha_{u,v} = 0.5$ Shaw (1992) ใช้ค่า α_p อยู่ในช่วง 0.1-0.3 และค่า $\alpha_{u,v}$ ในช่วง 0.5-0.9 ส่วน Vanka (1985) ซึ่งใช้วิธีการทำซ้ำแบบ SCGS (Symmetrical Coupled Gauss-Seidel) ใช้ค่า $\alpha_p = 1.0$ และค่า $\alpha_{u,v}$ ในช่วง 0.7-1.0

3.3 ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหามีอยู่ 2 วิธีคือ ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบแก้ไข หรือเรียกย่อ ๆ ว่า CS (Correction Scheme) และระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบเก็บค่าประมาณเต็ม หรือเรียกย่อ ๆ ว่าวิธี FAS (Full Approximation Storage) ซึ่งวิธี CS จะใช้ได้ดีกับปัญหาเชิงเส้น และวิธี FAS จะเหมาะกับปัญหาไม่เชิงเส้นตัวอย่างเช่น สมการนาเวียร์-สโตกส์ เป็นต้น

3.3.1 วิธี CS

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเมื่อแปลงให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตเชิงเส้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$L_k \phi_k = f_k \quad (3.15)$$

เมื่อตัวห้อย k แสดงถึงระดับกริด ϕ_k แทนผลเฉลยแม่นยำบนกริดระดับ k และ L_k เป็นตัวดำเนินการผลต่าง (Difference Operator) เนื่องจากการคำนวณเป็นการทำซ้ำ ดังนั้นผลเฉลยที่ได้จึงเป็นค่าโดยประมาณ ϕ^* เมื่อแทนค่า ϕ^* ลงในสมการ (3.15) ทำให้สมการเหลือเศษตกค้าง (Residual) ซึ่งแทนด้วย r_k ตามสมการต่อไปนี้

$$f_k - L_k \phi_k^* = r_k \quad (3.16)$$

เมื่อ * เป็นค่าที่ได้จากการประมาณ ดังนั้นหากจะทำให้ค่าที่ได้จากการประมาณมีค่าถูกต้อง ก็จะต้องเอาค่าแก้ไขมาปรับแก้ให้ได้ค่าที่ถูกต้อง ดังนี้

$$\phi_k = \phi_k^* + v_k \quad (3.17)$$

เมื่อ v_k เป็นค่าแก้ไขที่จะทำให้ค่าที่ได้จากการประมาณนั้นถูกต้อง เมื่อนำตัวดำเนินการผลต่างมาประยุกต์ใช้จะได้ว่า

$$L_k v_k = L_k (\phi_k - \phi_k^*) \quad (3.18)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (3.15) และ (3.16) สมการ (3.18) กลายเป็นสมการเสียดคล้องดังนี้

$$L_k v_k = r_k \quad (3.19)$$

ผลเฉลยของสมการ (3.19) ก็คือค่าแก้ไขเพื่อนำไปปรับแก้ค่า ϕ^* ก็จะได้ค่า ϕ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่แม่นยำขึ้น ขั้นตอนการคำนวณเป็นดังนี้

1. ทำการหาค่าโดยประมาณที่กิริดละเอียดด้วยการทำซ้ำสมการ (3.15) โดยจำนวนรอบเป็นไปตามเงื่อนไขที่ต้องการ
 2. คำนวณหาเสียดคล้องตามสมการ (3.16) แล้วส่งถ่ายเสียดคล้องที่ได้ไปยังกิริดหยาบ
 3. แก้สมการ (3.19) เพื่อหาค่าแก้ไขบนกิริดหยาบ
 4. ส่งถ่ายค่าแก้ไขไปยังกิริดละเอียดเพื่อนำไปปรับแก้ค่าที่ได้จากการประมาณให้เป็นค่าแม่นยำตรงตามสมการ (3.17)
 5. ทำซ้ำขั้นตอน 1-4 จนได้คำตอบที่แม่นยำ
- ซึ่งจำนวนกิริดที่ใช้ขึ้นอยู่กับจำนวนระดับของกิริดที่ต้องการ โดยกิริดหยาบจะทำการหาค่าแก้ไขให้กับกิริดละเอียด

3.3.2 วิธี FAS

วิธี CS ที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็นวิธีการที่ทำการแก้สมการเพื่อหาค่าแก้ไข โดยจะเก็บค่าแก้ไข v_k เพียงอย่างเดียวซึ่งเหมาะกับสมการเชิงเส้นเท่านั้น หากเป็นสมการไม่เชิงเส้นแล้วการเก็บเฉพาะค่าแก้ไข v_k จะไม่เป็นผล ดังนั้นการเก็บค่าตัวแปรจะต้องนำค่า ϕ_k^* มาทำการคำนวณในรอบการทำซ้ำที่กิริดหยาบด้วย เนื่องจากตัวดำเนินการ L_k เป็นแบบไม่เชิงเส้นซึ่งรูปแบบจะเปลี่ยนไปทุก ๆ รอบการทำซ้ำ ดังนั้นตัวแปรบนกิริดหยาบจะมีความสัมพันธ์กับตัวแปรบนกิริดละเอียดดังนี้

$$\phi_{k-1}^* = I_k^{k-1} \phi_k^* + v_{k-1}^* \quad (3.20)$$

จากสมการ (3.20) ผลเฉลยที่ได้จากกริดละเอียดจะถูกส่งไปยังกริดหยาบ ซึ่งเป็นผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้น และเนื่องจากตัวดำเนินการผลต่างเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นการคำนวณหาผลเฉลยจึงต้องมีความต่อเนื่องและสอดคล้องกัน ดังนั้นสมการบนกริดหยาบจึงมีรูปแบบดังนี้

$$L_{k-1}\phi_{k-1}^* - L_{k-1}I_k^{k-1}\phi_k^* = I_k^{k-1}r_k \quad (3.21)$$

หรือ

$$L_{k-1}\phi_{k-1}^* = f_{k-1} \quad (3.22)$$

โดยที่ $f_{k-1} = L_{k-1}I_k^{k-1}\phi_k^* + I_k^{k-1}r_k$ สำหรับการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบเพื่อนำไปแก้ไขผลเฉลยบนกริดละเอียดนั้น ต้องส่งถ่ายค่าที่ได้จาก $\phi_{k-1}^* - I_k^{k-1}\phi_k^*$ กลับไป เพื่อปรับแก้ค่าตามสมการ (3.17) รูปแบบของการแก้ค่าผลเฉลยจึงเป็นดังนี้

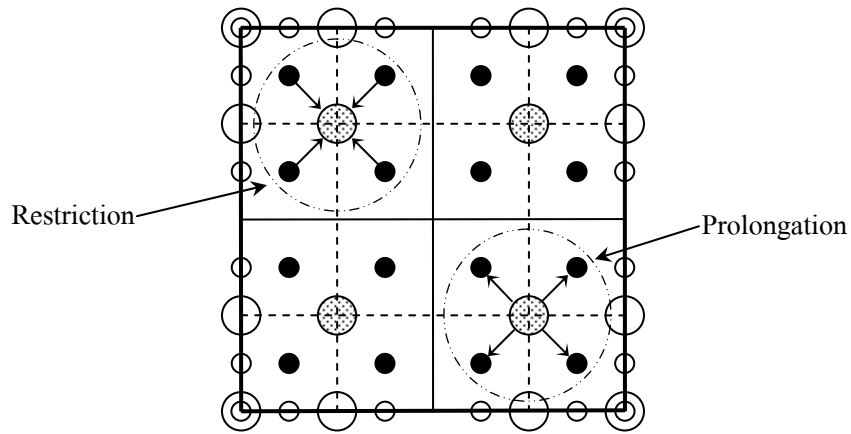
$$\phi_k^{*new} = \phi_k^{*old} + I_{k-1}^k \left(\phi_{k-1}^{*new} - I_k^{k-1} \phi_k^{*old} \right) \quad (3.23)$$

โดยที่ $I_{k-1}^k \left(\phi_{k-1}^{*new} - I_k^{k-1} \phi_k^{*old} \right)$ เป็นค่าผลเฉลยโดยประมาณ v_k^* บนกริดหยาบ ซึ่ง ϕ_{k-1}^{*new} เป็นค่าที่ผ่านขั้นตอน Relaxation แล้ว ส่วน $I_k^{k-1} \phi_k^{*old}$ เป็นค่าที่ได้จากขั้นตอน Restriction มาจากกริดละเอียด ซึ่งเป็นค่าที่ยังไม่ผ่านขั้นตอน Relaxation นั่นเอง

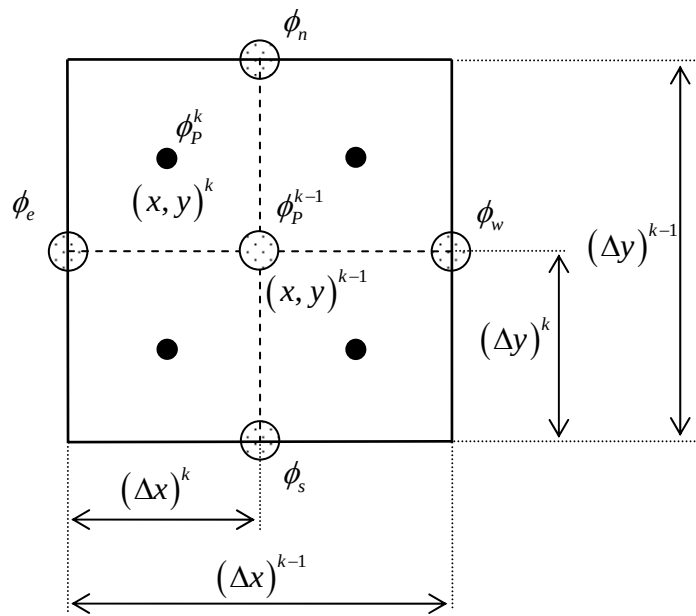
จากวิธีการทั้งสองวิธีที่กล่าวมานี้ จะเห็นว่ารูปแบบมีลักษณะที่คล้าย ๆ กัน จะต่างกันตรงการส่งถ่ายผลเฉลยและการเก็บค่าตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณเท่านั้น ซึ่งวิธี FAS นั้นสมการจะมีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นกว่าวิธี CS เพื่อให้สอดคล้องกับสมการที่ไม่เชิงเส้นนั่นเอง

3.4 การส่งถ่ายผลเฉลย

การส่งถ่ายผลเฉลยเป็นวิธีการที่มีความจำเป็นต้องใช้ในขั้นตอนของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ การเลือกใช้วิธีการส่งถ่ายผลเฉลยจะมีผลต่อการคำนวณ เนื่องจากต้องนำค่าจากกริดชุดหนึ่งไปใช้ในการคำนวณบนกริดอีกชุดหนึ่ง ดังนั้นหากค่าที่ทำการส่งถ่ายจากกริดชุดหนึ่งไปสู่กริดอีกชุดหนึ่งสามารถถ่ายทอดค่าที่สอดคล้องกับความเป็นจริงมาก ผลที่ได้จากการคำนวณก็จะให้ความถูกต้องมากขึ้นตามไปด้วย ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้จุดในปริมาตรควบคุมบนกริดละเอียดที่ก่อตัวเป็นปริมาตรควบคุมบนกริดหยาบ และในทางกลับกันด้วยดังรูปที่ 3.3 (a)



(a)



(b)

รูปที่ 3.3 การวางตำแหน่งจุดบนกริด 2 ระดับ ในโดเมนเดียวกัน

พิจารณารูปที่ 3.3 (a) เมื่อกรอบเส้นทึบเข้มเป็นขอบเขตของโดเมน เส้นทึบบางเป็นเส้นกริดหยาบ เส้นประเป็นเส้นกริดละเอียด วงกลมใหญ่โปร่งเป็นจุดบนกริดหยาบที่ขอบเขต วงกลมเล็กโปร่งเป็นจุดบนกริดละเอียดที่ขอบเขต วงกลมใหญ่แรเงาเป็นจุดบนกริดหยาบ และ วงกลมเล็กทึบเป็นจุดบนกริดละเอียด จะเห็นว่าจุดบนกริดหยาบอยู่ระหว่างกลางของสี่จุดบนกริด

ละเอียด ดังนั้นการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบ จะได้ว่าค่าตัวแปรบนกริดหยาบ เท่ากับค่าเฉลี่ยของตัวแปรบนกริดละเอียดสี่จุดรอบข้างดังสมการ 3.24 a

$$\phi_{i,j}^{k-1} = \frac{\phi_{i,j}^k + \phi_{i+1,j}^k + \phi_{i,j+1}^k + \phi_{i+1,j+1}^k}{4} \quad (3.24 a)$$

สำหรับการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดจะแตกต่างกัน เมื่อพิจารณา ปริมาตรควบคุมบนกริดหยาบซึ่งมีจุดบนกริดหยาบอยู่กึ่งกลางของปริมาตรควบคุมพบว่า ประกอบด้วยจุดบนกริดละเอียดจำนวน 4 จุด ดังนั้นการส่งถ่ายผลเฉลยจึงต้องมีการถ่วงน้ำหนักของ แต่ละจุดที่ตำแหน่งของจุดนั้น ๆ ดังสมการ 3.24 b

$$\phi_p^k = \phi_p^{k-1} + \left[\frac{\phi_e - \phi_w}{\Delta x} \right]_p^{k-1} (x^k - x^{k-1})_p + \left[\frac{\phi_n - \phi_s}{\Delta y} \right]_p^{k-1} (y^k - y^{k-1})_p \quad (3.24 b)$$

สมการ (3.24 b) ได้จากการประมาณค่าระหว่างช่วงแบบเชิงเส้น เมื่อ ϕ เป็นตัวแปรที่จะทำ การส่งถ่ายผลเฉลย x และ y เป็นตำแหน่งจุดในโดเมน ตัวห้อย P คือจุดที่กำลังพิจารณา ตัวห้อย e, w, n, s เป็นขอบเขตของปริมาตรควบคุม $\Delta x, \Delta y$ เป็นความกว้างของปริมาตรควบคุมในทิศทาง x และ y ตามลำดับ ส่วนตัวยก k เป็นกริดละเอียด ตัวยก $k-1$ เป็นกริดหยาบ ดังรูปที่ 3.3 (b)

3.5 วัฏจักรของกริดหลายระดับ

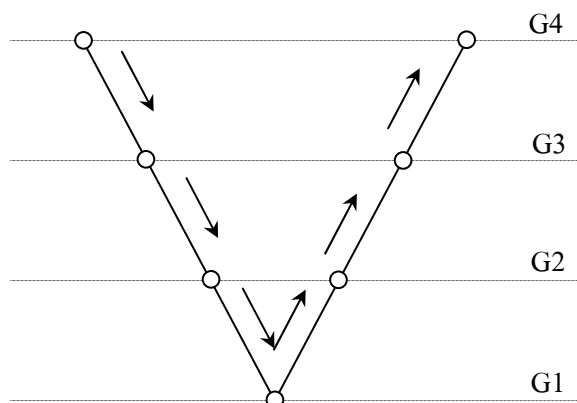
การแก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีกริดหลายระดับนั้น จะมี กระบวนการต่าง ๆ ในแต่ละระดับกริด ตั้งแต่กริดละเอียดที่สุดไปสู่กริดหยาบที่สุด แล้วกลับมาสู่ กริดละเอียดที่สุดอีกครั้งเรียกกระบวนการต่าง ๆ นี้ว่า วัฏจักรของกริดหลายระดับ ซึ่งในแต่ละวัฏจักร นั้นจะมีลำดับขั้นดังนี้

1. Relaxation เพื่อหาผลเฉลยบนกริดละเอียด
2. ส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้จากกริดละเอียดไปไว้บนกริดหยาบ
3. Relaxation เพื่อหาผลเฉลยบนกริดหยาบ
4. ส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้จากกริดหยาบกลับไปกริดละเอียด
5. ทำการปรับแก้ค่าให้ถูกต้องบนกริดละเอียด

กระบวนการที่จะกระทำนั้นขึ้นอยู่กับลำดับในการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดหยาบและ กริดละเอียด ซึ่งขั้นตอนการส่งถ่ายนี้เองที่ทำให้เกิดวัฏจักรต่าง ๆ ของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ

3.5.1 วัฏจักรวี

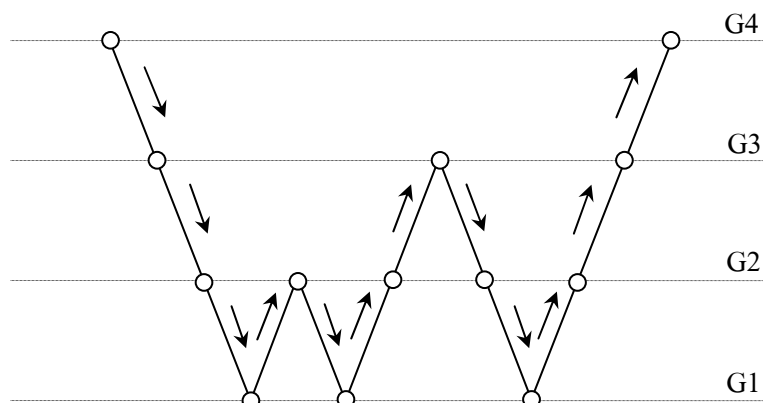
เริ่มจาก Relaxation ในกริดละเอียดที่สุด (G4) จำนวน n รอบ (จำนวน n นี้โดยทั่วไปจะใช้ค่าอยู่ระหว่าง 2-5 รอบ ซึ่งหากมากกว่านี้จะทำให้เสียเวลาไปโดยเปล่าประโยชน์ เนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนจะลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงรอบแรก ๆ ของการทำซ้ำเท่านั้น) เพื่อหาผลเฉลย จากนั้นทำการ Restriction ไปสู่กริดหยาบที่อยู่ติดกัน แล้วทำการ Relaxation เพื่อหาผลเฉลยอีก n รอบ จึงทำการ Restriction ไปสู่กริดหยาบที่อยู่ติดกันอีก ทำเช่นนี้ไปจนถึงกริดหยาบที่สุด (G1) จากนั้นจึงทำการส่งถ่ายผลเฉลยกลับมาสู่กริดละเอียดที่อยู่ติดกันโดยการ Prolongation แล้ว Relaxation เพื่อหาผลเฉลยอีก n รอบ ไปจนถึงกริดละเอียดที่สุด เป็นการจบหนึ่งรอบวัฏจักร ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.4 แล้วจึงทำซ้ำในรอบวัฏจักรต่อไปจนกว่าจะได้คำตอบ



รูปที่ 3.4 วัฏจักรวี

3.5.2 วัฏจักรดับเบิลยู

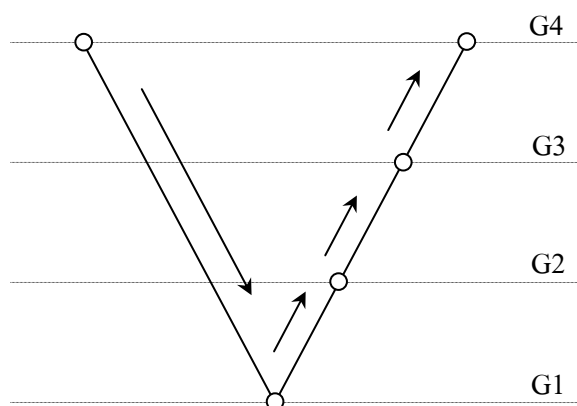
เป็นวัฏจักรที่คล้ายกับวัฏจักรวี แต่จะแตกต่างกันตรงที่วัฏจักรดับเบิลยูมีการส่งถ่ายผลเฉลยกลับไปมาระหว่าง Restriction และ Prolongation ซึ่งจะมีรูปแบบเป็นตัว W ทำให้สามารถลดการหาคำนวณบนกริดละเอียดที่สุดลง จึงมีการส่งถ่ายผลเฉลยกลับไปมาก่อนจะถึงกริดละเอียดที่สุดมี 2 แบบ ดังเช่นที่แสดงไว้ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.7 วัฏจักรเอฟ

3.5.4 วัฏจักรฟื้นเฉลี่ย

เป็นวัฏจักรที่เริ่มต้นจากกริดละเอียดคล้ายวัฏจักรวี แล้วส่งถ่ายผลเฉลี่ยลงไปที่กริดหยาบที่สุดโดยไม่มีการ Relaxation ในระหว่างกริดสองขั้นนี้ แล้วค่อยขยับขึ้นไปทีละขั้นพร้อมการ Relaxation จนถึงกริดละเอียดที่สุด เป็นอันครบรอบวัฏจักร ดังรูปที่ 3.8

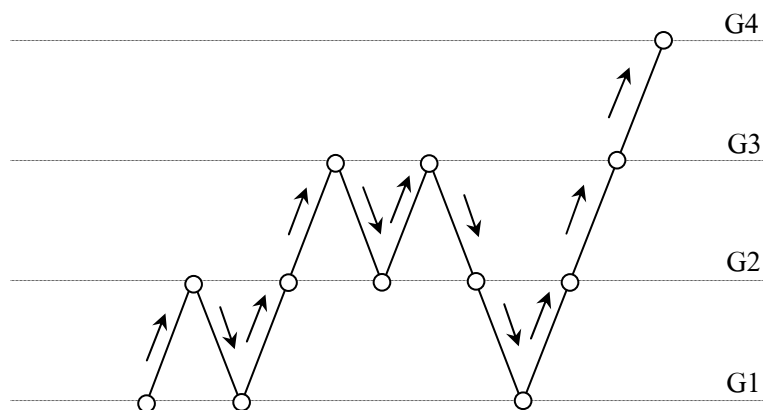


รูปที่ 3.8 วัฏจักรฟื้นเฉลี่ย

3.5.5 กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ มีขั้นตอนที่แตกต่างจากระเบียบวิธีกริดหลายระดับที่ใช้วัฏจักรแบบต่าง ๆ ที่ผ่านมา กล่าวคือ การดำเนินการในการส่งถ่ายผลเฉลี่ยจะไม่สามารถชี้ชัดลงไปได้ว่าจะดำเนินการ Restriction หรือ Prolongation ซึ่งจะมีการปรับเปลี่ยนไปมาตลอดโดย

ไม่มีรูปแบบที่ตายตัว จึงอาจเรียกว่าเป็นวัฏจักรปรับตัว (Adaptive Cycle) โดยจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขในการส่งถ่ายผลเฉลยที่กำหนดไว้ ดังแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 กริดหลายระดับเต็มรูปแบบ

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบมักเริ่มต้นกระบวนการจากกริดที่หยาบที่สุด เพื่อลดภาระการคำนวณบนกริดละเอียดในช่วงแรก ซึ่งภาระในการคำนวณนี้จะวัดเทียบกับหน่วยงาน (Work Unit: WU) ซึ่งให้นิยามเป็นเวลาที่ใช้ในการทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยบนกริดละเอียดที่สุดหนึ่งรอบ โดยเงื่อนไขการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดจะมีอยู่สองกรณีคือค่าแฟกเตอร์การลู่เข้า η และขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากการทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยบนแต่ละกริด โดยที่ผลเฉลยบนกริดหยาบจะส่งผ่านไปยังกริดที่ละเอียดกว่าเมื่อค่าความคลาดเคลื่อนบนกริดหยาบลดลงจนต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนดเอาไว้ ซึ่งค่าความคลาดเคลื่อนที่แต่ละระดับของกริดจะไม่เท่ากัน โดยขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับกำหนดเป็นบรรทัดฐานบนกริด G^k หาได้ดังนี้

$$\|\varepsilon_k\| = \sigma \|\varepsilon_{k+1}\| \quad (3.25)$$

เมื่อ	ε_k	แทนค่าความคลาดเคลื่อนบนกริด G^k
	ε_{k+1}	แทนค่าความคลาดเคลื่อนบนกริด G^{k+1}
	σ	เป็นแฟกเตอร์ตัวหยุด (Stopping Factor) (Brandt, 1977)

ส่วนผลเฉลยบนกริดที่ละเอียดจะถูกส่งไปยังกริดที่หยาบกว่าเมื่อการลู่เข้าบนกริดละเอียดเข้าสู่ช่วงราบเรียบ โดยพิจารณาได้จากค่าแฟกเตอร์การลู่เข้าตามความสัมพันธ์ดังนี้

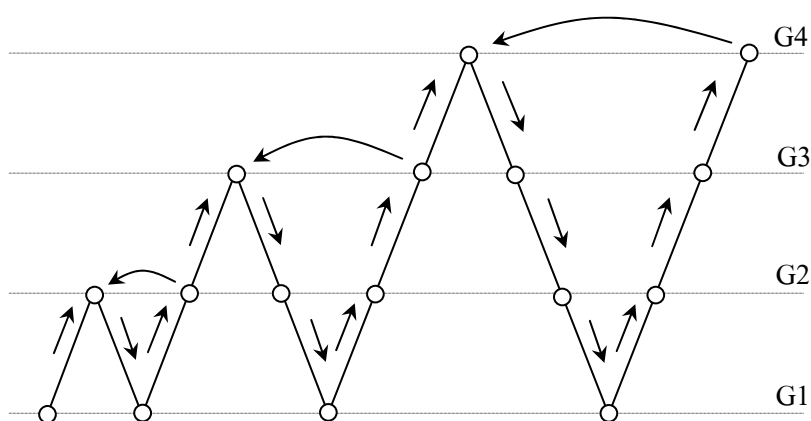
$$\frac{\|\varepsilon^n\|}{\|\varepsilon^{n-1}\|} \leq \eta \quad (3.26)$$

เมื่อ ε^n เป็นค่าความคลาดเคลื่อนของการทำซ้ำในรอบปัจจุบัน
 ε^{n-1} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในรอบที่แล้ว
 η เป็นแฟกเตอร์เกณฑ์การลู่เข้า

สำหรับค่าที่เหมาะสมของแฟกเตอร์ทั้งสองนี้ จะขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายอย่าง เช่น ความสลับซับซ้อนของปัญหาที่จะประยุกต์ใช้ ความมีประสิทธิภาพของวิธีที่ใช้ในการคำนวณ เป็นต้น ดังนั้นการเลือกค่า σ ที่ต่ำเกินไปจะส่งผลให้ระดับค่าความคลาดเคลื่อนบนกริดหยาบมีค่าตามไปด้วย ซึ่งทำให้ใช้เวลาในการทำซ้ำบนกริดนั้นมากขึ้น หากเลือกค่าที่สูงเกินไปก็จะส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยังเหลืออยู่นั้นมีขนาดใหญ่เกินไปได้ ส่วนการเลือกค่า η นั้นถ้าเลือกค่าที่สูงเกินไปจะส่งผลให้เกิดการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปสู่กริดหยาบเร็วขึ้นซึ่งจะส่งผลให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยังเหลืออยู่นั้นมีขนาดใหญ่ แต่หากเลือกค่าที่ต่ำก็จะทำให้ใช้เวลาในการทำซ้ำมากขึ้นแต่มีข้อดีคือทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่เหลืออยู่นั้นเล็กลง ดังนั้นกระบวนการของวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ จะดำเนินอยู่ภายใต้เงื่อนไขข้อกำหนดของค่าแฟกเตอร์ η และ σ และจะเป็นไปโดยอัตโนมัติ ดังนั้นจึงไม่สามารถบอกได้ว่ารูปร่างของวัฏจักรที่เกิดขึ้นนั้นเป็นอย่างไร การทำซ้ำและการส่งถ่ายผลเฉลยจะมีลักษณะเปลี่ยนไปมาอยู่ระหว่างกริดทุกระดับขึ้น จึงมักเรียกการหาผลเฉลยโดยการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบนี้ว่า Nested Iteration ซึ่งข้อดีของวิธีนี้คือสามารถปรับการคำนวณให้ยืดหยุ่นสอดคล้องกับพฤติกรรมการลู่เข้าและค่าความคลาดเคลื่อนได้เป็นอย่างดี จึงเหมาะที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลที่สลับซับซ้อนได้

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบนี้ เป็นการทำงานที่ไม่มีรูปแบบที่ตายตัว ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าแฟกเตอร์ส่งถ่ายผลเฉลย จะเห็นว่ามี ความยุ่งยากในเรื่องค่าแฟกเตอร์ที่จะใช้ในการส่งถ่ายผลเฉลยอยู่พอสมควร เนื่องจากค่าแฟกเตอร์ตัวหุคั้นจำเป็นต้องใช้ค่าความคลาดเคลื่อนจาก กริดสองระดับขึ้นที่ติดกัน จึงต้องมีการหาค่าความคลาดเคลื่อนบนกริดต่าง ๆ ก่อนที่จะมีการประยุกต์ใช้ตามปกติ แต่มีข้อดีคือสามารถลดภาระคำนวณบนกริดละเอียดในช่วงแรก จึงได้มีการประยุกต์ใช้วัฏจักรต่าง ๆ เข้ามาเพื่อลดค่าแฟกเตอร์นี้ลง เช่นประยุกต์เข้ากับวัฏจักรวี จะเรียกว่าระเบียบวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบวัฏจักรวี (FMG V-Cycle) เป็นต้น การทำแบบนี้จะทำงานเป็นรูปแบบที่ชัดเจนตามเงื่อนไขการส่งถ่ายผลเฉลย จึงไม่จำเป็นที่จะต้องใส่ค่าแฟกเตอร์ในการส่งถ่ายค่าระหว่างกริดระดับต่าง ๆ ซึ่งการประยุกต์ใช้วัฏจักรวีเข้าไปในนั้นจะมีรูปแบบเหมือนกับที่กล่าวมาแล้วในตอนต้น แต่จะแตกต่างกันที่การเริ่มต้นการคำนวณ โดยจะเริ่ม

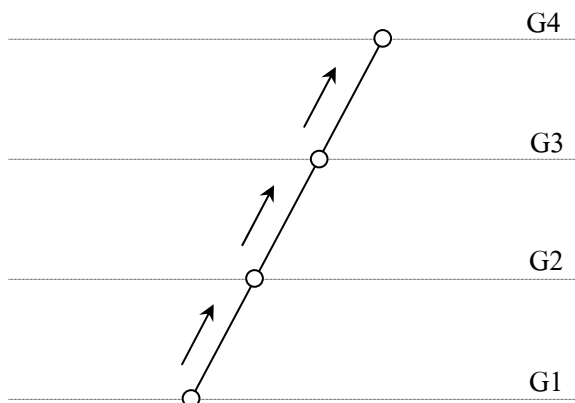
จากกริดที่หยาบที่สุดเมื่อได้ผลเฉลยในกริดนั้น ๆ แล้วก็จะส่งถ่ายไปยังกริดที่ละเอียดกว่า จากนั้นก็จะทำตามขั้นตอนของวัฏจักรวี ทำเช่นนี้ไปจนถึงกริดละเอียดที่สุดก็จะได้คำตอบที่ต้องการ ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 FMG V-Cycle

3.5.6 เคสคาดีกมัลติกริด

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบนี้จะแตกต่างจากระเบียบวิธีที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด เนื่องจากระเบียบวิธีนี้การส่งถ่ายผลเฉลยจะเป็นไปในลักษณะที่เป็นการส่งถ่ายทางเดียว โดยกระบวนการคำนวณจะเริ่มค้นหาคำตอบที่หยาบที่สุดแล้วจะส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้ไปสู่กริดที่ละเอียดกว่าเรื่อย ๆ ไปจนถึงกริดที่ละเอียดที่สุดแล้วการคำนวณก็จะสิ้นสุดลงที่กริดที่ละเอียดที่สุดนั้นเลย โดยจะไม่มี การส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดสู่กริดหยาบ ซึ่งมีลักษณะการคำนวณเป็นดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 Cascadic Multigrid

จากรูปที่ 3.11 จะเห็นว่าการส่งถ่ายผลเฉลยเป็นการส่งถ่ายจากกริดหยาบที่สุด ไปสู่กริดที่ละเอียดที่สุด และเป็นไปในทางเดียว ดังนั้นลักษณะการส่งถ่ายผลเฉลยจึงแตกต่างจากวิธีการที่กล่าวมาแล้วในข้างต้น ซึ่งรูปแบบการส่งถ่ายผลเฉลยจะเป็นดังนี้

1. Relaxation เพื่อหาผลเฉลยบนกริดหยาบที่สุดด้วยวิธีการทำซ้ำทั่วไปโดยสมมุติค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทุกตัวก่อน
2. ส่งถ่ายผลเฉลยที่ได้ในรอบสุดท้ายของการทำซ้ำบนกริดหยาบ ไปสู่ กริดละเอียด
3. นำค่าที่ได้จากการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบกว่า มาเป็นค่าเริ่มต้นในการทำซ้ำบนกริดละเอียด
4. ทำซ้ำขั้นตอนที่ 2 และ 3 จนกว่าจะถึงกริดละเอียดที่สุด แล้วทำซ้ำจนได้คำตอบ

จะเห็นว่าลักษณะของวิธีการนี้เป็นการหาค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมให้กับกระบวนการทำซ้ำบนกริดละเอียดที่สุด ซึ่งลักษณะของการทำซ้ำนั้นจะให้คำตอบที่ถูกต้องได้รวดเร็วหรือไม่ จะขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นที่ใช้ในการคำนวณนั่นเอง วิธีนี้จะเริ่มที่กริดหยาบที่สุดเพราะจะทำให้จำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณน้อยและได้คำตอบที่รวดเร็ว เพื่อที่จะนำไปเป็นค่าเริ่มต้นของกริดละเอียดที่อยู่ถัดไป จึงทำให้การคำนวณที่ได้ในกริดละเอียดนั้นเร็วขึ้น แต่การทำแบบนี้จะมีข้อจำกัดมากเมื่อใช้กับปัญหาที่สลับซับซ้อน (Xu et al., 2002) เช่น การไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูง ๆ เป็นต้น

3.6 การประยุกต์ใช้วิธี FAS กับขั้นตอนวิธี SIMPLE

พิจารณาสมการ (3.15) ซึ่งเป็นสมการดิสครีไทส์ในรูปแบบทั่วไปของสมการ (3.8), (3.10) และ (3.12) เมื่อ L เป็นตัวดำเนินการผลต่าง ϕ เป็นตัวแปรของสมการการไหลซึ่งในที่นี้จะมีค่าเป็น u, v, p' และ f เป็นเทอมซอสของสมการ เนื่องจากการหาผลเฉลยที่ได้จากการทำซ้ำนั้นได้มาจากการสมมุติค่าให้กับตัวแปรในสมการ ผลเฉลยที่ได้จึงเป็นผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้น ดังนั้นสมการที่ใช้จึงมีรูปแบบดังนี้

$$L_k \phi_k^* = f_k \quad (3.27)$$

เมื่อ ϕ_k^* เป็นผลเฉลยโดยประมาณ ดังนั้นเมื่อสมมุติค่าให้กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทุกตัวแล้วประยุกต์สมการโมเมนตัม (3.8) และ (3.10) เข้ากับสมการ (3.27) เพื่อหาผลเฉลย u, v ในขั้นตอนแรกของขั้นตอนวิธี SIMPLE จะมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} a_p^u u_p^* &= \sum a_{nb}^u u_{nb}^* + S_{u^*} \\ a_p^v v_p^* &= \sum a_{nb}^v v_{nb}^* + S_{v^*} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ในขั้นตอนนี้จะสามารถหาค่า u^*, v^* ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_p^* &= \frac{1}{a_p^u} \left[\sum a_{nb}^u u_{nb}^* + S_{u^*} \right] \\ v_p^* &= \frac{1}{a_p^v} \left[\sum a_{nb}^v v_{nb}^* + S_{v^*} \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

การแก้สมการ (3.29) นี้จะใช้วิธีการทำซ้ำด้วยวิธี Gauss-Seidel จำนวน 3-5 รอบ ตามความเหมาะสมในแต่ละระดับของกริด เมื่อได้ค่า u^*, v^* แล้วจึงเข้าสู่ขั้นตอนที่สองของขั้นตอนวิธี SIMPLE โดยแทนค่า u^*, v^* เข้าไปในเทอมขอของสมการ (3.12) ซึ่งสามารถหาค่าของความดันแก้ไข p' ในขั้นตอนนี้ได้ดังนี้

$$p_p' = \frac{1}{a_p^p} \left[\sum a_{nb}^p p_{nb}' + S_p \right] \quad (3.30)$$

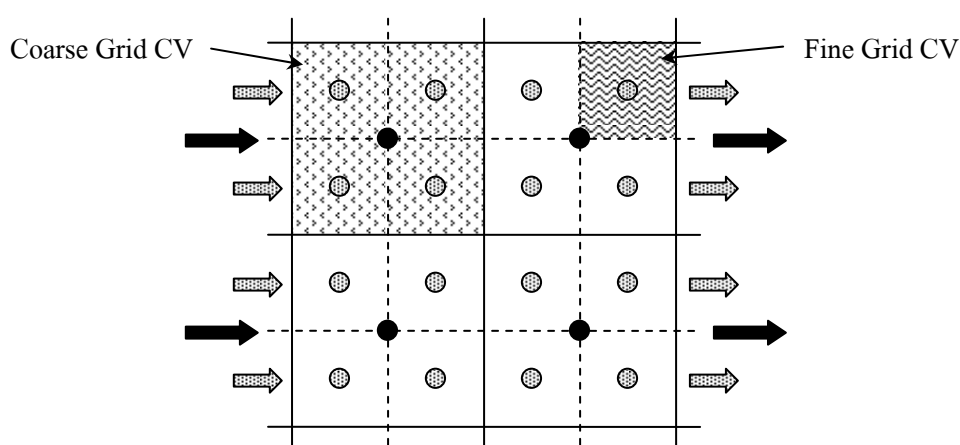
การแก้สมการ (3.30) นี้จะใช้วิธีการทำซ้ำด้วยวิธี Gauss-Seidel เช่นเดียวกับสมการ โมเมนตัม แต่จำนวนรอบในการทำซ้ำจะต้องมากกว่า 2-5 เท่า เนื่องจากค่าของ p' เริ่มต้นที่ศูนย์ ดังนั้นจึงควรทำซ้ำจนกว่าค่าที่ได้มีความเหมาะสมนั่นเอง ซึ่งจะได้ค่าความดันแก้ไข p' เมื่อถึงขั้นตอนนี้แล้วจะประยุกต์ขั้นตอนวิธีกริดหลายระดับเข้ากับขั้นตอนวิธี SIMPLE แต่ในขั้นตอนวิธีกริดหลายระดับนั้นจะต้องมีการหาค่าเศษตกค้าง เพื่อที่จะกำจัดค่าเศษตกค้างนั้นให้หมดไป ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$r_k = f_k - L_k \phi_k^* \quad (3.31)$$

ซึ่งตัวดำเนินการผลต่าง L ในสมการนี้เป็นค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ของตัวแปร ซึ่งเป็นเทอมไม่เชิงเส้น ดังนั้นการจะนำค่านี้ไปใช้งานในการคำนวณต่าง ๆ นั้นจะต้องทำการหาค่าใหม่ด้วยทุกครั้ง เมื่อทำการถ่ายโอนผลเฉลยที่ได้ไปสู่กริดที่หยาบกว่า ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$L_{k-1} \phi_{k-1}^* = f_{k-1} + I_k^{k-1} (L_k \phi_k^* - f_k) \quad (3.32)$$

เมื่อ I_k^{k-1} เป็นตัวดำเนินการ Restriction จากกริดละเอียดไปสู่กริดหยาบ เทอม f_{k-1} เป็นค่าที่ได้จากกระบวนการ Restriction ผลเฉลยจากกริดละเอียดซึ่งมีค่าเท่ากับ $L_{k-1}(I_k^{k-1}\phi_k^*)$ โดยตัวแปรที่จะต้อง Restriction มีตัวแปรความเร็ว u, v ตัวแปรเสียดทาน r^u, r^v และค่าฟลักซ์มวล F ที่มีการไหลเข้าออกผ่านปริมาตรควบคุม ส่วนตัวแปร p ไม่ต้อง Restriction เพราะว่าจะได้มาจากสมการความดันแก้ไขในกระบวนการคำนวณเอง ซึ่งในกระบวนการ Restriction นี้มีความแตกต่างกันอย่างมากในการกระทำของแต่ละตัวแปร เนื่องจากคุณสมบัติของแต่ละตัวแปรจะแตกต่างกันเมื่อปรับเปลี่ยนขนาดของกริด



รูปที่ 3.12 การพิจารณาค่าตัวแปรในกระบวนการ Restriction

เมื่อพิจารณาการไหลในแนวแกน x บนระนาบ 2 มิติ ดังรูปที่ 3.12 โดยให้เส้นทึบเป็นระบบกริดหยาบ และเส้นประกับเส้นทึบเป็นระบบกริดละเอียด จุดสีดำเป็นจุดในระบบกริดหยาบ และจุดแรเงาเป็นจุดในระบบกริดละเอียด ส่วนลูกศรสีดำจะเป็นฟลักซ์มวลที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมในระบบกริดหยาบ และเช่นเดียวกันลูกศรแรเงาเป็นฟลักซ์มวลในระบบกริดละเอียด

พิจารณาตัวแปรความเร็ว u, v ซึ่งจะถูกเก็บค่าไว้ที่จุดดังรูปที่ 3.12 ดังนั้นเมื่อ Restriction จากกริดละเอียดสู่กริดหยาบ ทำได้โดยการเฉลี่ยค่าจากสี่จุดรอบข้างจากกริดละเอียดสู่กริดหยาบได้โดยตรง คือค่าตัวแปรในระบบกริดละเอียดสี่จุดบวกกันแล้วหารด้วย 4 ก็จะเป็นค่าของตัวแปรที่ได้ในระบบกริดหยาบ เมื่อพิจารณาตัวแปรเสียดทาน จะเห็นว่าปริมาตรควบคุมของระบบกริดหยาบนั้นจะเป็นสี่เท่าของปริมาตรควบคุมของระบบกริดละเอียด ดังนั้นค่าเสียดทานที่เกิดขึ้นในระบบกริดหยาบก็จะมาจากค่าเสียดทานในระบบกริดละเอียดรวมกัน และทำนองเดียวกันกับค่า ฟลักซ์มวลในระบบกริดหยาบจะเป็นผลรวมของค่าฟลักซ์มวลในระบบกริดละเอียดที่อยู่ในขอบเขตเดียวกัน

เมื่อ Restriction ตัวแปรต่าง ๆ สู่กริดหยาบหมดแล้วก็จะเริ่มขั้นตอนในการคำนวณตามขั้นตอนวิธี SIMPLE อีกครั้งบนระบบกริดหยาบนี้ ทำซ้ำกระบวนการ Restriction จนกว่าจะถึงระดับกริดหยาบที่สุดที่ใช้คำนวณ จากนั้นก็จะทำการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบสู่กริดละเอียด ในขั้นตอนนี้จะทำการส่งถ่ายผลเฉลยเป็นไปตามสมการ (3.23) ซึ่งตัวแปรที่ทำการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบสู่กริดละเอียดนั้นจะมีตัวแปร u, v และ p เท่านั้น เพราะตัวแปรทั้งสามตัวนี้เป็นตัวแปรที่นำไปคำนวณหาค่าของสัมประสิทธิ์ และพลักซ์มวลของระบบเพื่อใช้ในการคำนวณในรอบต่อไป ส่วนค่าเศษตกค้างนั้นได้ทำการแก้ไขให้กับค่าตัวแปรทั้งสามแล้ว จึงไม่จำเป็นที่จะต้องส่งถ่ายกลับไปสู่กริดละเอียดอีก

พิจารณาตัวแปร u, v เมื่อประยุกต์เข้ากับสมการ (3.23) เทอม ϕ_k^{*new} เป็นค่าตัวแปร u, v ที่จะใช้ในการคำนวณบนกริดละเอียดรอบต่อไป เทอม ϕ_k^{*old} เป็นค่าตัวแปร u, v เดิมที่ได้จาก Relaxation ก่อน Restriction ไปสู่กริดหยาบ และเทอม $I_{k-1}^k (\phi_{k-1}^{*new} - I_k^{k-1} \phi_k^{*old})$ เป็นเทอมที่จะได้มาจากกระบวนการ Prolongation จากกริดหยาบ เมื่อ ϕ_{k-1}^{*new} เป็นค่า ϕ บนกริดหยาบที่ได้จาก Relaxation แล้ว ส่วน $I_k^{k-1} \phi_k^{*old}$ เป็นค่า ϕ บนกริดหยาบก่อน Relaxation หรือค่าที่ได้มาจาก Restriction เมื่อ ϕ_k^{*old} เป็นค่า ϕ บนกริดละเอียด สำหรับตัวแปร p เนื่องจากไม่มีสมการที่จะทำการแก้หาค่าโดยตรง ดังนั้นเมื่อประยุกต์เข้ากับสมการ (3.23) เทอม $I_{k-1}^k (\phi_{k-1}^{*new} - I_k^{k-1} \phi_k^{*old})$ ซึ่งค่า $I_k^{k-1} \phi_k^{*old} = 0$ เพราะตัวแปร p ไม่ได้ Restriction มาจากกริดละเอียด ดังนั้นสมการจึงเปลี่ยนเป็นรูปแบบดังนี้

$$p_k^{*new} = p_k^{*old} + I_{k-1}^k p_{k-1} \quad (3.33)$$

เมื่อ p_k^{*new} เป็นตัวแปรความดันที่จะใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์และค่าพลักซ์มวลของสมการบนกริดละเอียดในการคำนวณรอบนี้ p_k^{*old} เป็นตัวแปรความดันที่ใช้ในการคำนวณรอบก่อนหน้านี้ ส่วนพจน์ $I_{k-1}^k p_{k-1}$ เป็นค่าความดันที่ได้จาก Prolongation เมื่อ p_{k-1} เป็นค่าความดันบนกริดหยาบ เนื่องจากตัวแปรความดันนี้ไม่มีสมการที่จะแก้หาค่าได้โดยตรง ดังนั้นค่าที่ได้นั้นจะเป็นค่าที่อยู่ภายในโดเมนเท่านั้น แต่การคำนวณจะต้องใช้ค่าที่ขอบเขตของโดเมนด้วย ดังนั้นค่าที่ขอบเขตสามารถหามาได้จาก Extrapolation จากจุดภายในออกไป โดยใช้ค่าจากสองจุดที่อยู่ติดเข้ามาจากขอบเขตโดเมน ดังรูปแบบสมการต่อไปนี้

$$p_l = \frac{p_{l+1}(x_{l+2} - x_l) - p_{l+2}(x_{l+1} - x_l)}{(x_{l+2} - x_{l+1})} \quad (3.34)$$

เมื่อ p เป็นตัวแปรความดัน x เป็นตัวแปรตำแหน่ง ส่วนตัวห้อย l เป็นจุด ณ ขอบเขตโดเมน $l+1, l+2$ เป็นจุดที่อยู่ถัดเข้าไปในโดเมนตามลำดับ ขึ้นอยู่กับว่าจะประยุกต์ใช้กับขอบเขตของโดเมนทางด้านใด ซึ่งสมการนี้ต้องประยุกต์ใช้กับตัวแปรความดันแก้ไข p' ด้วยเช่นกัน

จะเห็นว่าในขั้นตอนนี้เป็นเตรียมค่าตัวแปรสำหรับการใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของระบบสมการ ดังนั้นหากกริดชุดที่ใช้เป็นกริดละเอียดที่สุด หลังจากการ Relaxation ก็จะได้คำตอบสุดท้ายที่จะบอกได้ว่าคำตอบนั้นลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องแล้วหรือไม่ แต่หากยังไม่ใช่กริดที่ละเอียดที่สุดก็ยังคงต้องทำการ Relaxation และ Prolongation ตามที่กล่าวมาแล้วไปจนถึงกริดละเอียดที่สุด หากคำตอบที่ได้ยังไม่ลู่เข้า หรือค่าความคลาดเคลื่อนยังมีขนาดใหญ่เกินกว่าค่าที่ยอมรับได้ ก็จะต้องย้อนกลับไปเริ่มที่ขั้นตอนแรกอีกครั้งเป็นการเริ่มต้นของวัฏจักรใหม่นั้นเอง

พิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้เพื่อที่จะหยุดการคำนวณในรอบการทำซ้ำ เนื่องจากการคำนวณจะทำการแก้สมการทั้งหมด 3 สมการ และได้ค่าตัวแปรจำนวน 3 ตัวแปร ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้ย่อมมีทั้งหมด 3 ค่า ซึ่งการลดลงของค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรทั้งสามนี้ ไม่ได้ลดลงเหมือนกันหมดทั้ง 3 ตัว ดังนั้นการพิจารณาที่จะให้หยุดการคำนวณจากค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งนั้น ย่อมเกิดความผิดพลาดขึ้นได้ เช่นหากพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรความเร็ว u ขณะที่ค่าความคลาดเคลื่อนลดลงจนเป็นที่พอใจแล้ว แต่ค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรความเร็ว v และตัวแปรความดัน p อาจจะยังมีขนาดใหญ่เกินกว่าจะยอมรับได้ ดังนั้นการพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนนี้จึงต้องพิจารณาพร้อม ๆ กันไปทั้งสามตัวแปร คือพิจารณาว่าตัวแปรใดที่มีขนาดของค่าความคลาดเคลื่อนที่ใหญ่ที่สุด และลดลงจนสามารถที่จะยอมรับได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้ค่าเท่ากับ 10^{-6} จึงจะให้หยุดการคำนวณได้ สำหรับการหาค่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรแต่ละตัวนั้นสามารถหาได้จาก L_2 -norm ของเวกเตอร์ ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยของเวกเตอร์ที่มีรูปสมการดังนี้

$$\|R\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{cv}} r_i^2} \quad (3.35)$$

เมื่อ $\|R\|$ เป็น L_2 -norm ของเวกเตอร์ N_{cv} เป็นจำนวนของปริมาตรควบคุม r_i เป็นค่าเฉลี่ยของค่าเฉลี่ยในแต่ละจุดในโดเมน

จากขั้นตอนทั้งหมดที่กล่าวมานี้จะเห็นว่า การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับกับขั้นตอนวิธี SIMPLE นั้น จะเป็นการประยุกต์เข้ากับขั้นตอนการทำซ้ำภายนอกเท่านั้น นั่นคือการส่ง

ถ่ายค่าคู่กริดระดับต่าง ๆ เท่านั้น ส่วนขั้นตอนวิธี SIMPLE จะอยู่ในขั้นตอนของกระบวนการ Relaxation ซึ่งมีการเรียกใช้อยู่ในทุกระดับของกริดที่ใช้ในการคำนวณ

3.6.1 การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรวี

การอธิบายในหัวข้อ 3.6 ที่ผ่านมานั้นเป็นลักษณะการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบวัฏจักรวีอยู่แล้ว เพราะวัฏจักรวีถือเป็นวัฏจักรพื้นฐานของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ เพื่อความเข้าใจที่ดีขึ้นจึงสรุปเป็นขั้นตอน และสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.13 เมื่อ k เป็นระดับของกริด G เป็นกริดละเอียดที่สุด โดยเริ่มจากกริดละเอียดที่สุดคือ $k = G$

3.6.2 การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรดับเบิลยู

ในการประยุกต์ใช้วัฏจักรวีก็คล้ายกับวัฏจักรวี แต่ลักษณะการถ่ายโอนผลเฉลยจะแตกต่างกัน มี 2 ลักษณะ ขั้นตอนการถ่ายโอนผลเฉลยจะเป็นไปตามรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.14 และรูปที่ 3.15 ตามลำดับ เมื่อ W เป็นระดับกริดที่ขยับขึ้นไปในช่วงกลาง w เป็นระดับกริดที่ขยับขึ้นไปในช่วงต่ำ N เป็นดัชนีชี้การเปลี่ยนระดับกริด

3.6.3 การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรเอฟ

ในการประยุกต์ใช้วัฏจักรวีก็คล้ายกับวัฏจักรดับเบิลยู แต่ลักษณะการถ่ายโอนผลเฉลยจะแตกต่างกัน ขั้นตอนการถ่ายโอนผลเฉลยจะเป็นไปตามรูปที่ 3.7 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.16 เมื่อ F เป็นดัชนีบอกระดับกริดที่ขยับขึ้นในแต่ละระดับของกริด

3.6.4 การประยุกต์ใช้กับวัฏจักรฟันเลื่อย

ในการประยุกต์ใช้วัฏจักรวีก็คล้ายกับวัฏจักรวี แต่ลักษณะการถ่ายโอนผลเฉลยจะแตกต่างกัน คือในขั้นตอนการถ่ายโอนผลเฉลยจากกริดละเอียดไปสู่กริดหยาบ (Restriction) จะไม่มีการ Relaxation ในแต่ละระดับของกริดจนกว่าจะถึงกริดหยาบที่สุดจึงจะทำการ Relaxation ขั้นตอนการถ่ายโอนผลเฉลยจะเป็นไปตามรูปที่ 3.8 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.17

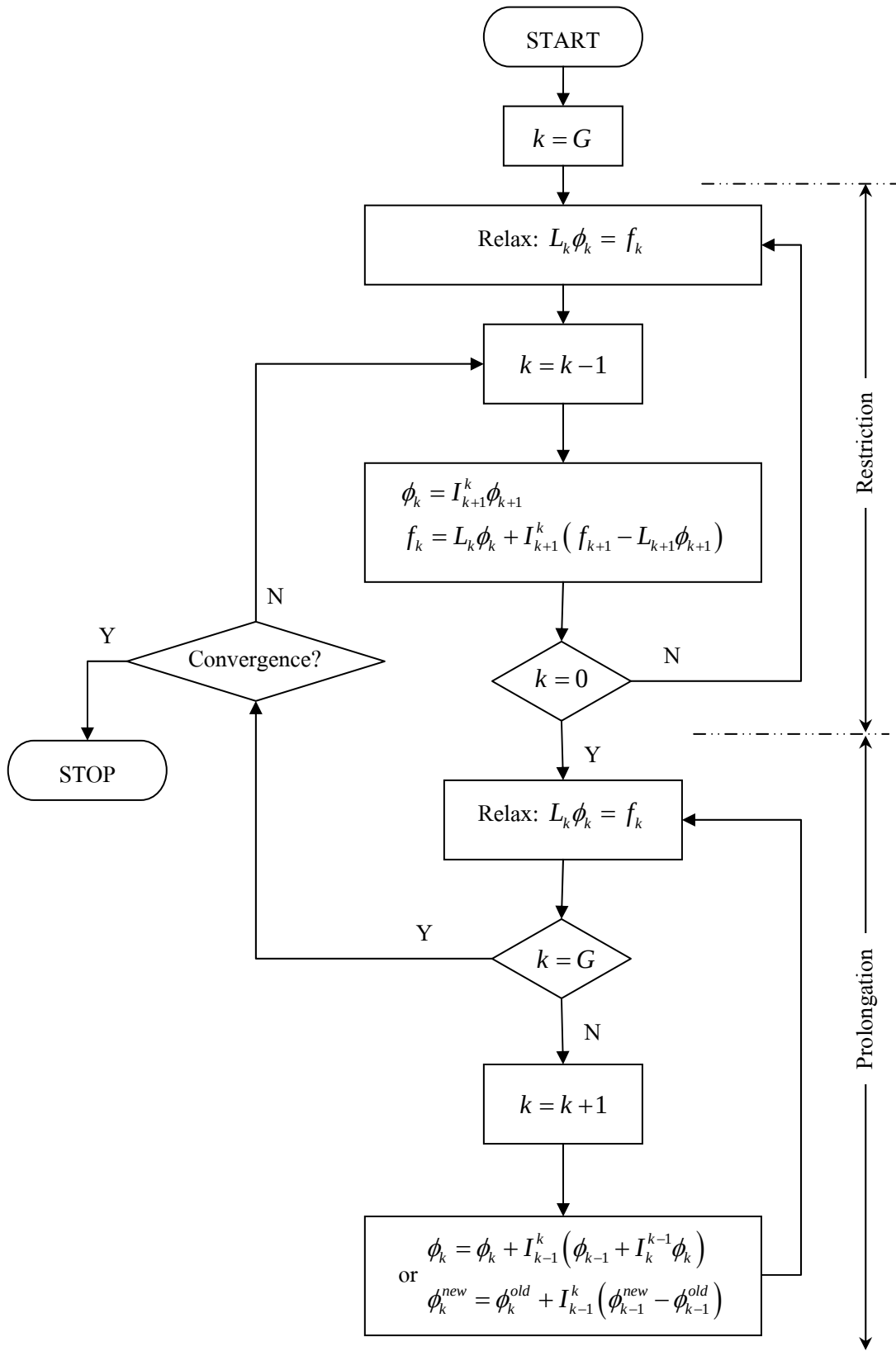
3.6.5 การประยุกต์ใช้กับกริดหลายระดับเต็มรูปแบบ

ในการประยุกต์ใช้วัฏจักรวีมีความแตกต่างจากวัฏจักรที่กล่าวมาแล้วทั้งหมด เนื่องจากการคำนวณจะเริ่มจากกริดหยาบที่สุด เนื่องจากวิธีนี้ต้องการค่าแฟกเตอร์ในการถ่ายโอนผลเฉลย ซึ่งจะต้องเตรียมหาค่ามาก่อนจะเริ่มทำการประยุกต์ใช้ได้ ขั้นตอนการถ่ายโอนผลเฉลยจะเป็นไปตามรูปที่ 3.9 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.18 เมื่อ $err[k]$ เป็นค่าความ

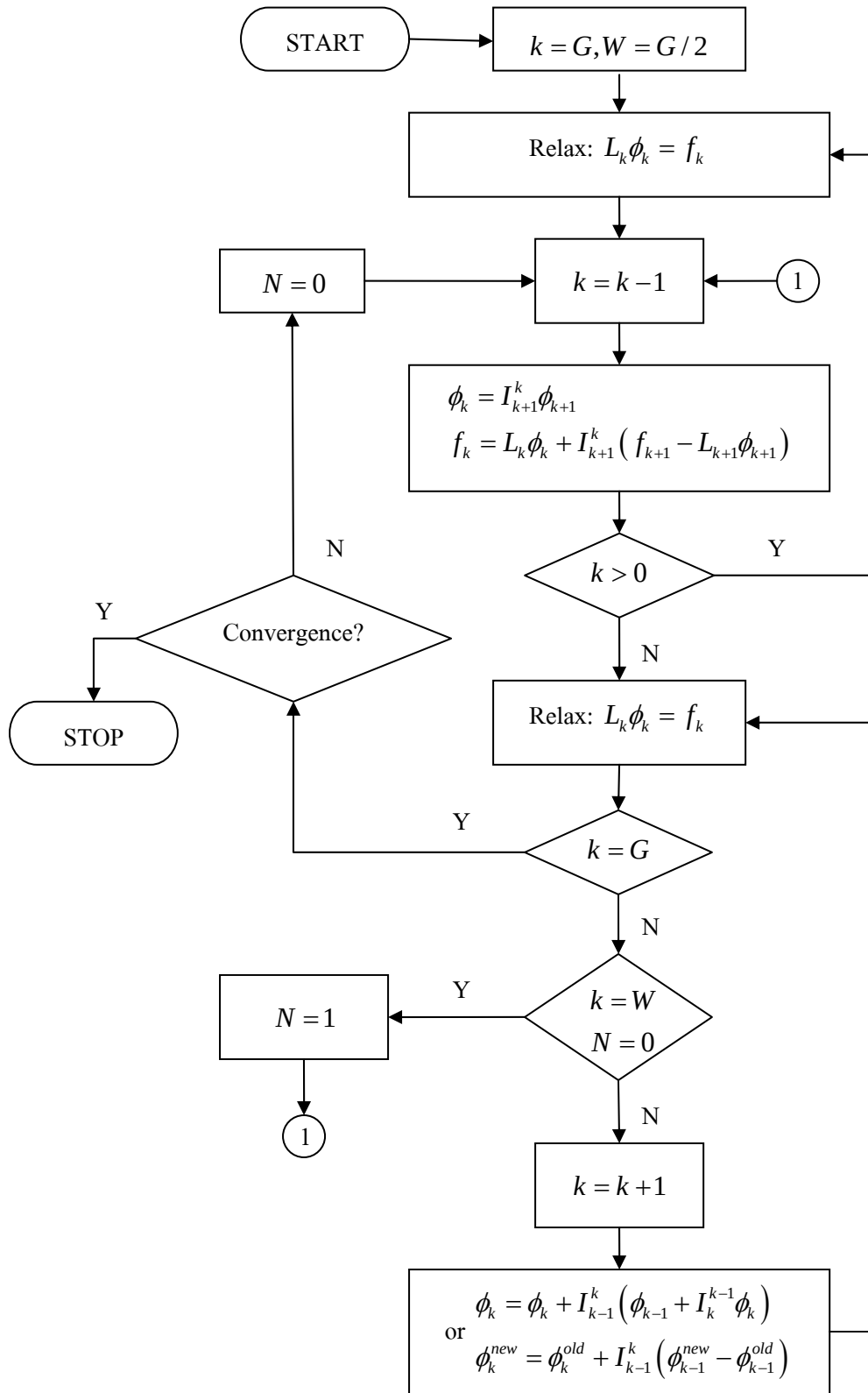
คลาดเคลื่อนบนกริดหยาบ $\text{err}[k]$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนบนกริดละเอียดที่ปรับค่าด้วยแฟกเตอร์ตัวหยุด $\text{err}[n]$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในรอบการทำซ้ำปัจจุบัน $\text{err}[n-1]$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนในรอบการทำซ้ำที่แล้ว นอกจากนี้หากประยุกต์วัฏจักรวิเข้ากับกริดหลายระดับเต็มรูปแบบเพื่อลดความยุ่งยากในการเตรียมค่าแฟกซ์เตอร์การถ่ายโอนผลเฉลย สามารถประยุกต์ใช้วัฏจักรวิเข้าไปได้กับวิธีกริดหลายระดับเต็มรูปแบบได้ โดยจะเริ่มค้นที่กริดหยาบที่สุดแล้วจะทำการส่งถ่ายผลเฉลยไปสู่กริดละเอียดโดยการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) เนื่องจากในกริดละเอียดนั้นยังไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณ จากนั้นจะประยุกต์วัฏจักรวิเข้าไ้คำนวณหาผลเฉลยเมื่อครบวัฏจักรวิตามจำนวนรอบที่ต้องการ ก็จะทำการประมาณค่าในช่วงไปสู่กริดละเอียดอีกครั้งแล้วประยุกต์ใช้วัฏจักรวิเข้าไ้คำนวณหาผลเฉลยอีก ทำไปจนถึงกริดละเอียดที่สุดก็จะได้ผลเฉลย ดังรูปที่ 3.10 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.19 เมื่อ v เป็นดัชนีบอกระดับกริดที่ประยุกต์ใช้วัฏจักรวิ C เป็นจำนวนรอบของวัฏจักรวิในแต่ละระดับกริด

3.6.6 การประยุกต์ใช้กับเคสคาติกมัลติกริด

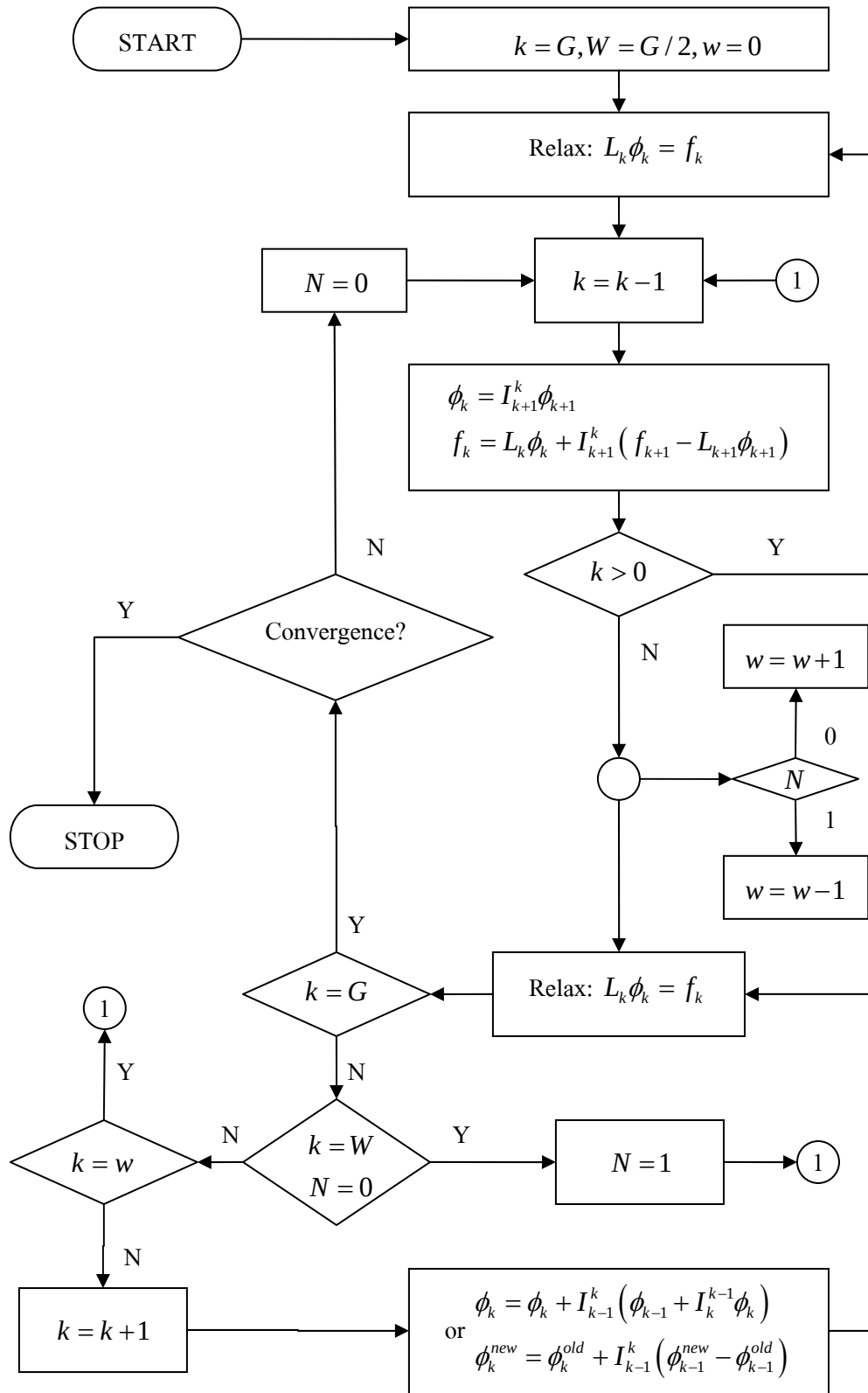
ลักษณะการทำงานของระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบนี้จะแตกต่างกับระเบียบวิธีอื่น ๆ ที่กล่าวมาแล้วโดยสิ้นเชิง เนื่องจากวิธีนี้ไม่มีการส่งถ่ายผลเฉลยจาก กริดละเอียดสู่กริดหยาบ นั่นคือจะไม่มีค่าเศษตกค้างมาปรับแก้ค่า แต่จะหาค่าตัวแปรที่เหมาะสมในการเริ่มต้นการคำนวณในกริดละเอียดเท่านั้น ดังนั้นการเริ่มต้นคำนวณจึงเริ่มจากกริดหยาบที่สุดโดยสมมุติค่าเริ่มต้นให้ในครั้งแรก จากนั้นคำนวณจนได้ผลเฉลยเป็นที่น่าสนใจ จึงส่งค่าผลเฉลยที่ได้ไปสู่กริดละเอียดกว่าโดย Interpolation เพื่อนำไปเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณต่อไป ระเบียบวิธีนี้จะไม่มีการเรียกใช้ Restriction และ Prolongation แต่จะใช้ Interpolation แทนการเรียก Prolongation เนื่องจากว่าลักษณะการทำงานของ Prolongation นั้นหลังจากที่ทำการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบสู่กริดละเอียดแล้วจะมีการปรับปรุงข้อมูลเดิมกับข้อมูลใหม่ให้มีความถูกต้องมากขึ้น แต่ในระเบียบวิธีนี้ไม่มีการปรับค่าใด ๆ จะมีลักษณะดังรูปที่ 3.11 ซึ่งสามารถเขียนเป็นแผนภูมิสายงานดังรูปที่ 3.20



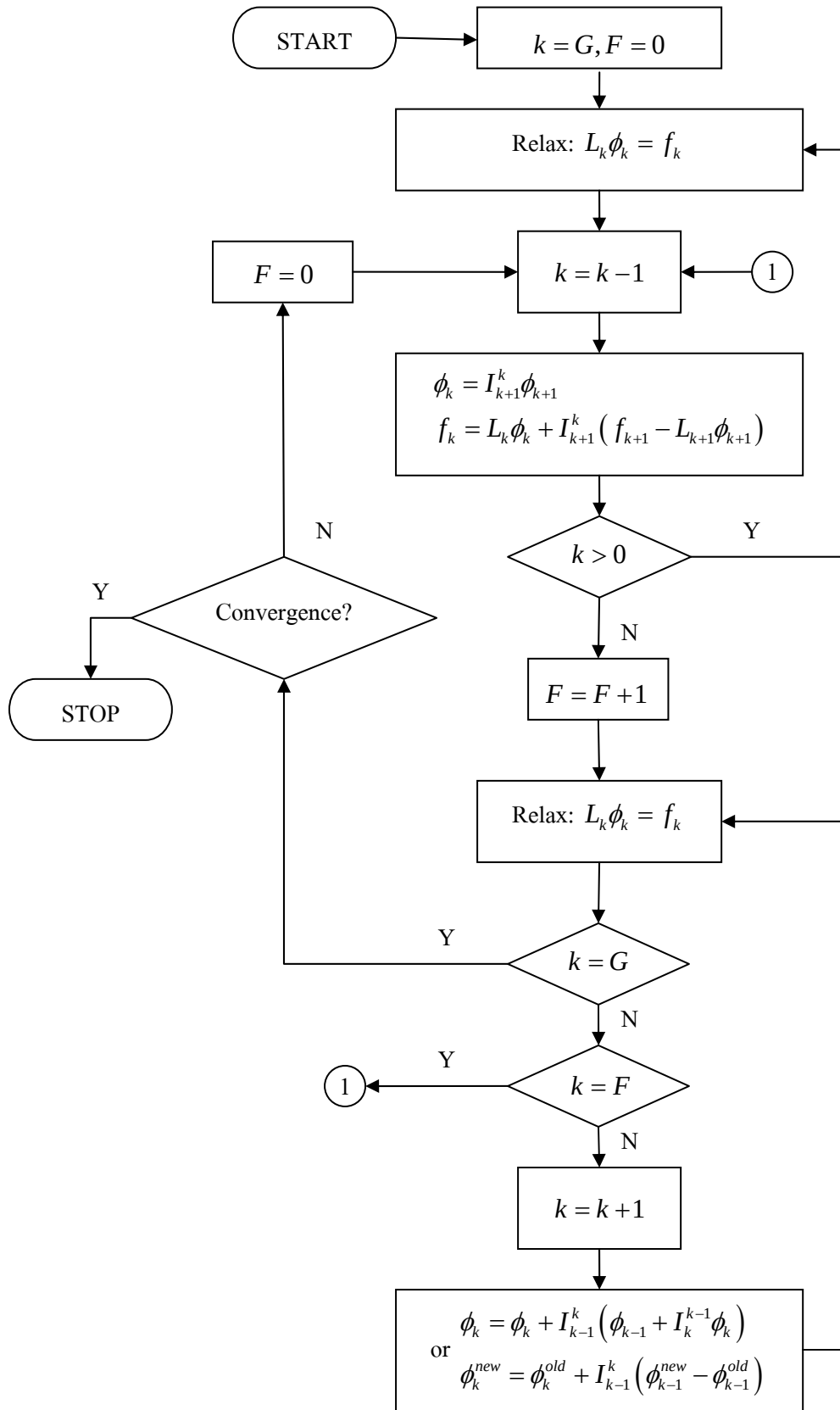
รูปที่ 3.13 แผนภูมิสายงาน V-Cycle



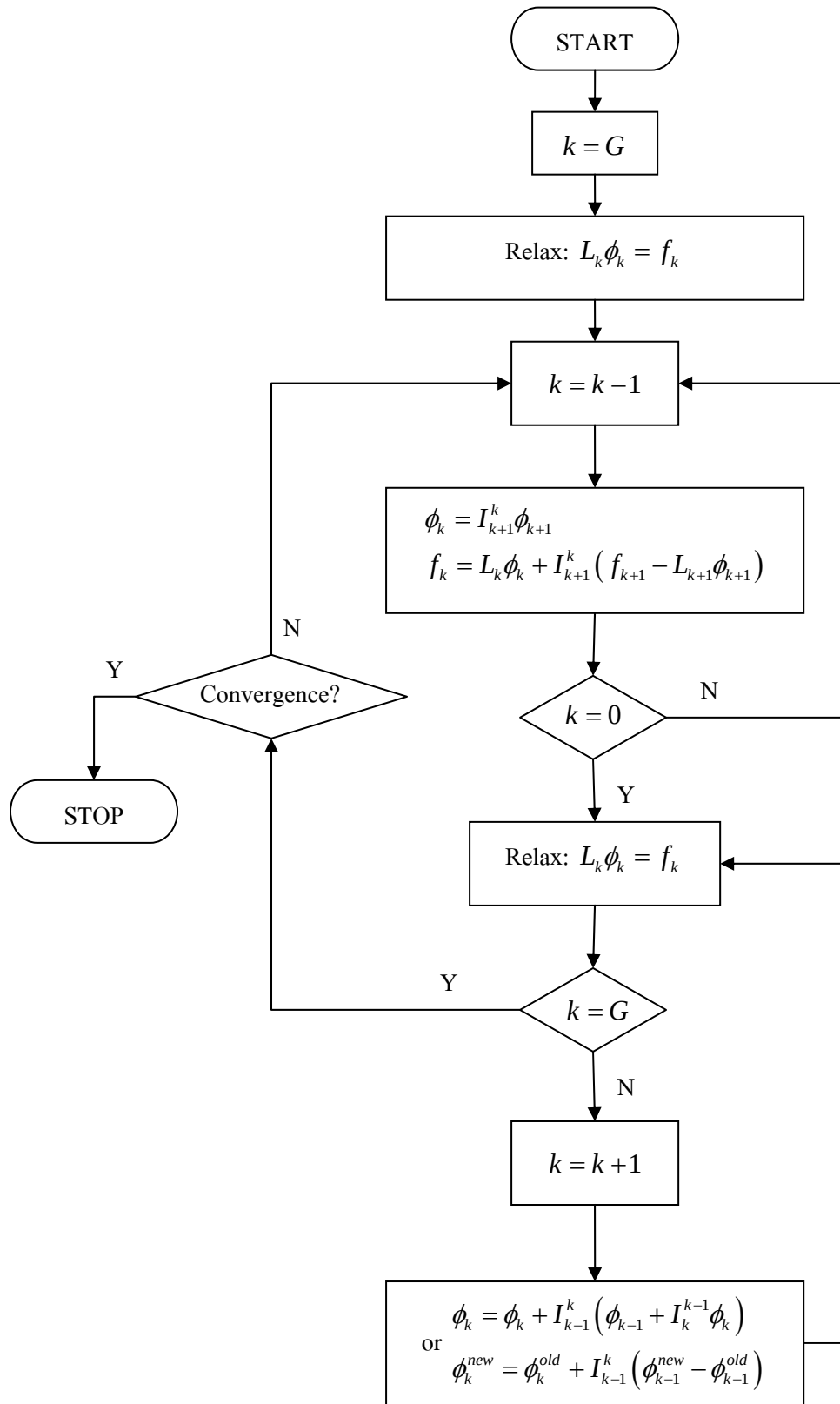
รูปที่ 3.14 แผนภูมิสายงาน W-Cycle 1



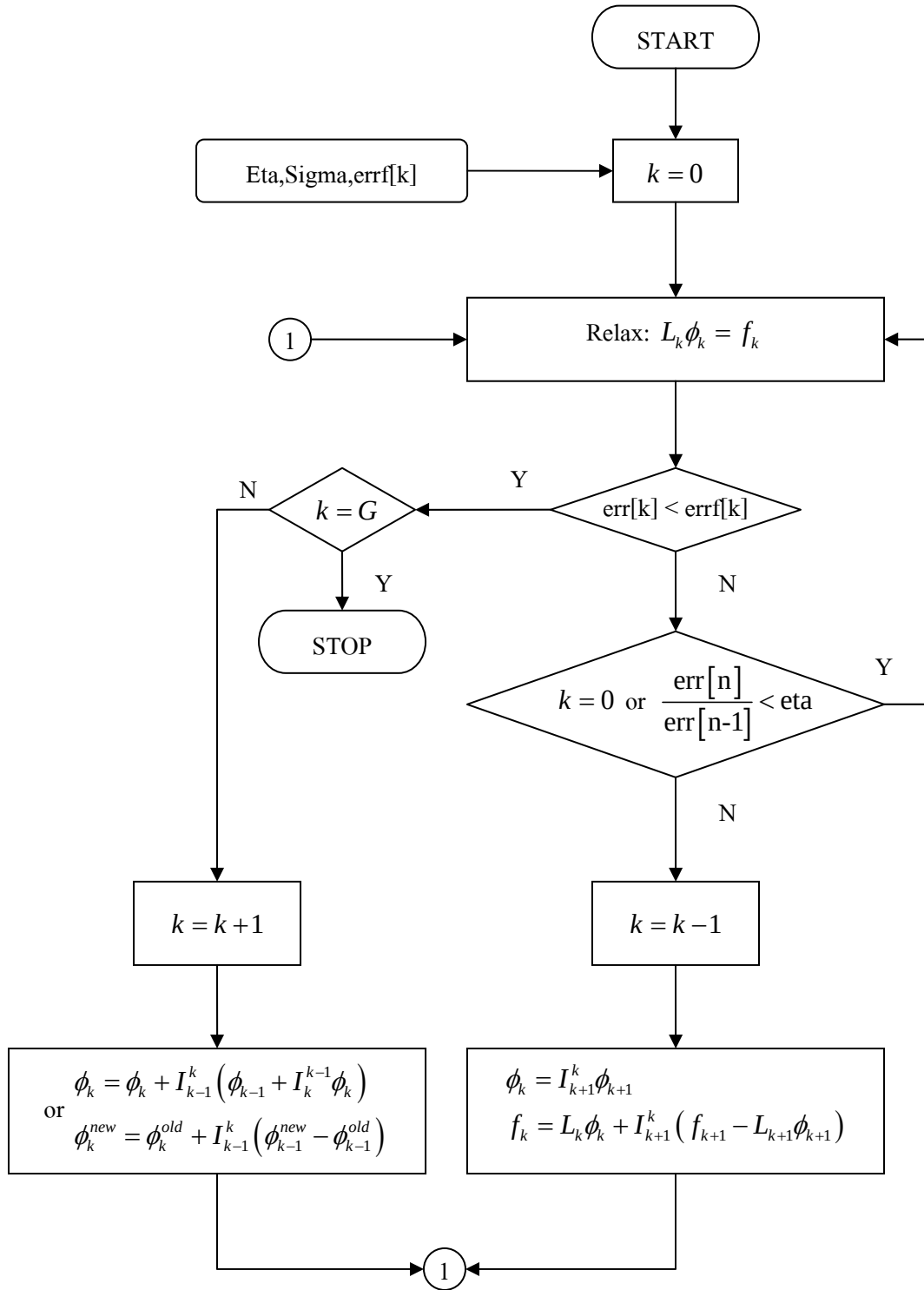
รูปที่ 3.15 แผนภูมิสายงาน W-Cycle 2



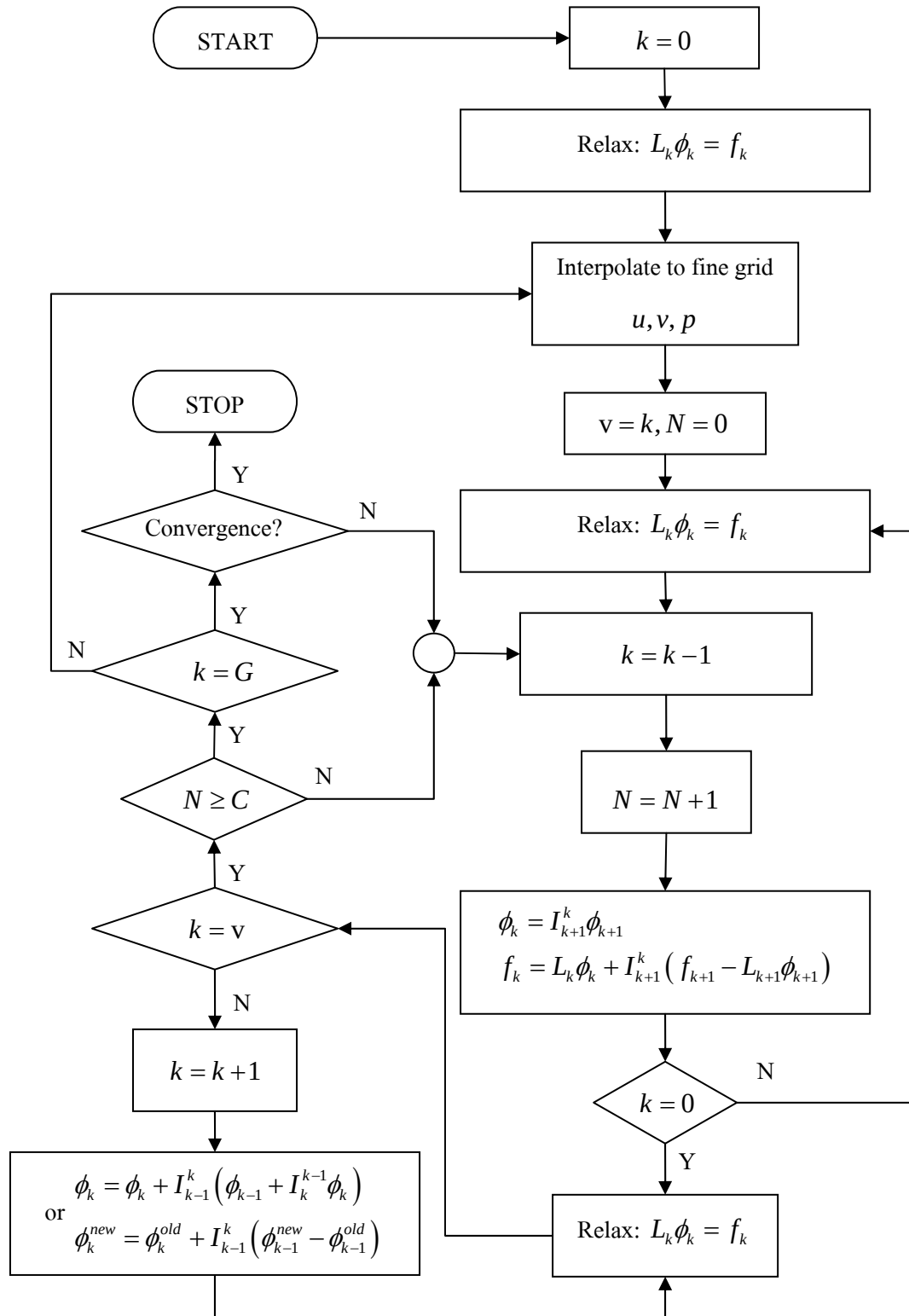
รูปที่ 3.16 แผนภูมิสายงาน F-Cycle



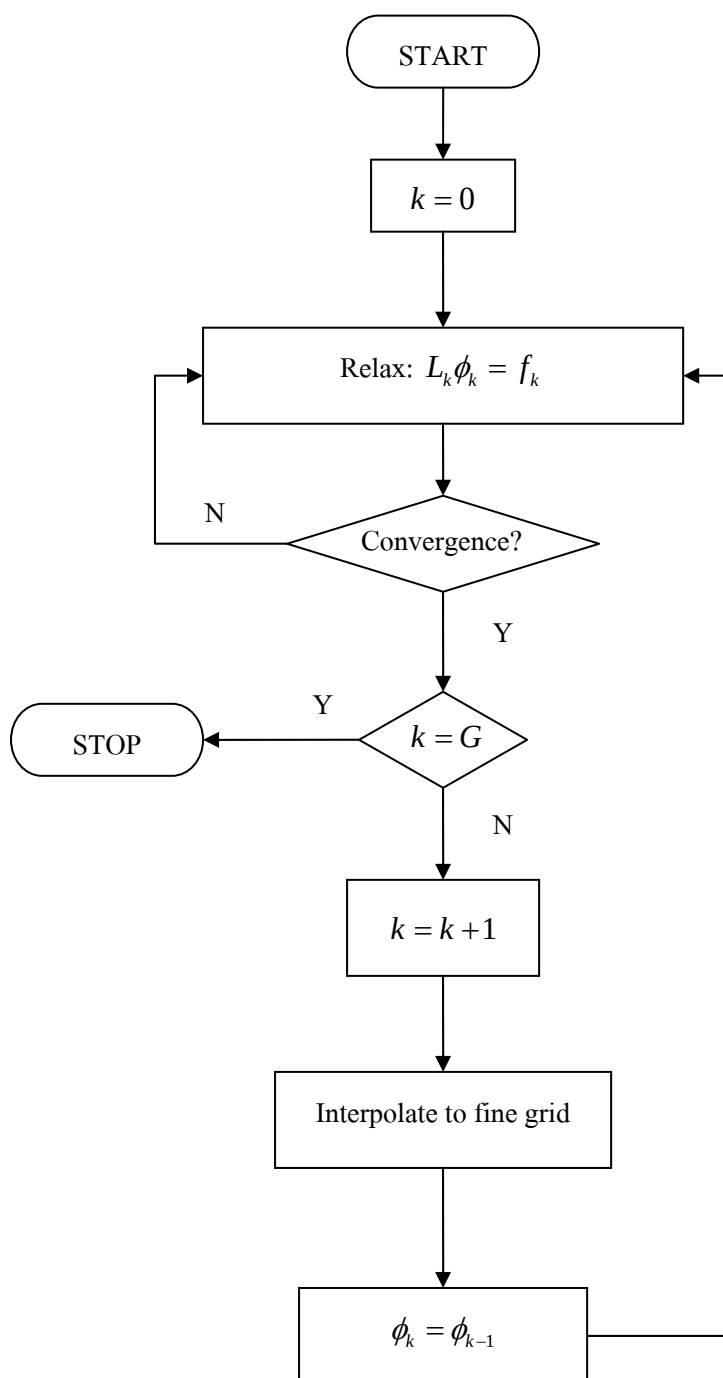
รูปที่ 3.17 แผนภูมิสายงาน Saw Tooth-Cycle



รูปที่ 3.18 แผนภูมิสายงาน Full Multigrid



รูปที่ 3.19 แผนภูมิสายงาน Full Multigrid V-Cycle

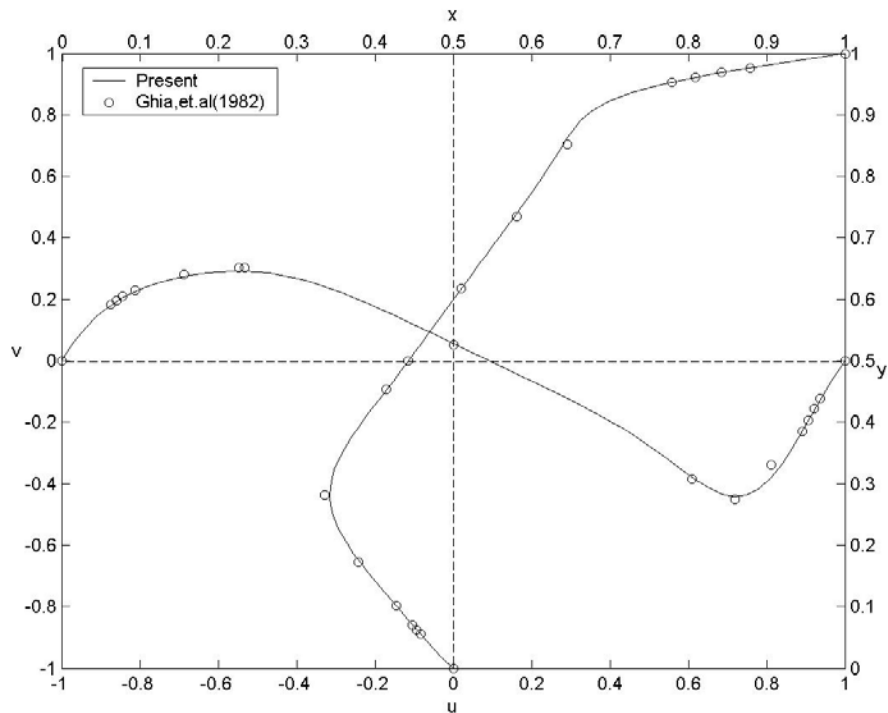


รูปที่ 3.20 แผนภูมิสายงาน Cascadic Multigrid

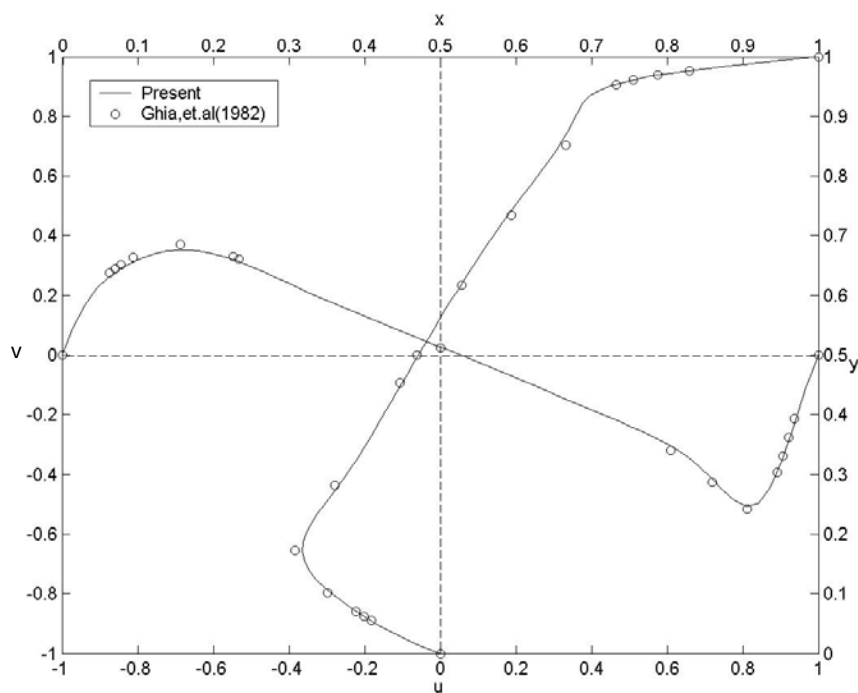
บทที่ 4

ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

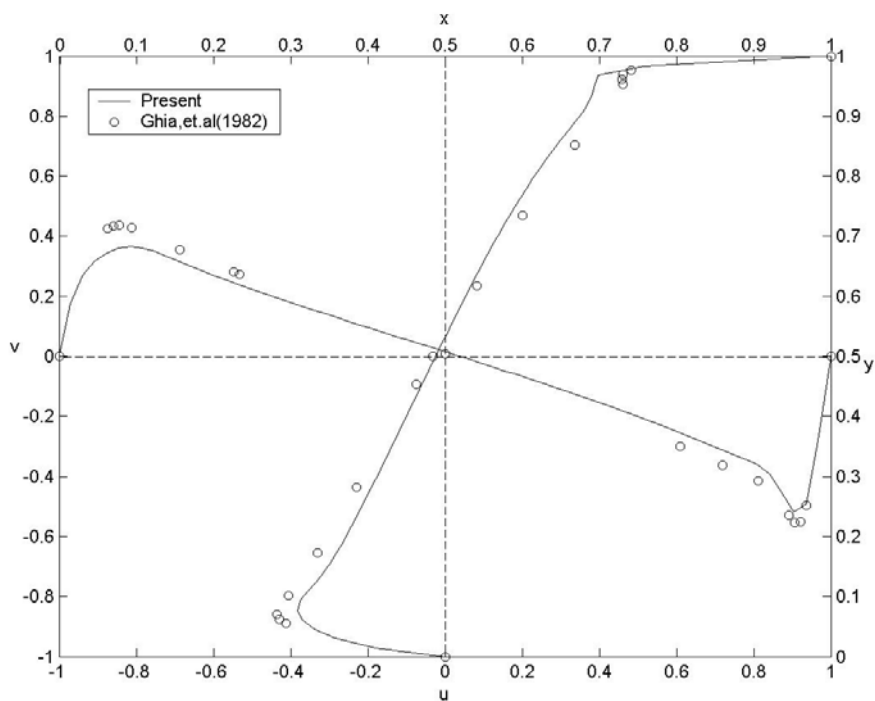
จากการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาเพื่อคำนวณหาผลเฉลย โดยใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับ ขนาดของกริดเท่ากับ 512×512 CV ที่เลขเรย์โนลด์ 400, 1000 และ 5000 ผลการคำนวณที่ได้เขียนเป็นกราฟเปรียบเทียบกับผลของ Ghia et al. (1982) ได้ดังรูปที่ 4.1 ถึงรูปที่ 4.3 เป็นการกระจายความเร็วบนเส้นสมมาตรที่ได้จากการคำนวณของโปรแกรมกับผลเฉลยอ้างอิง



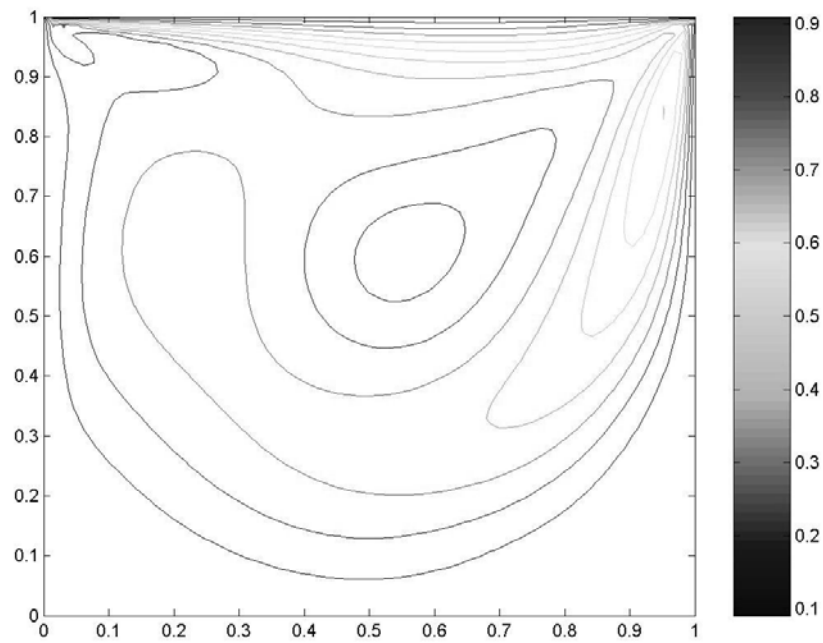
รูปที่ 4.1 ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 400



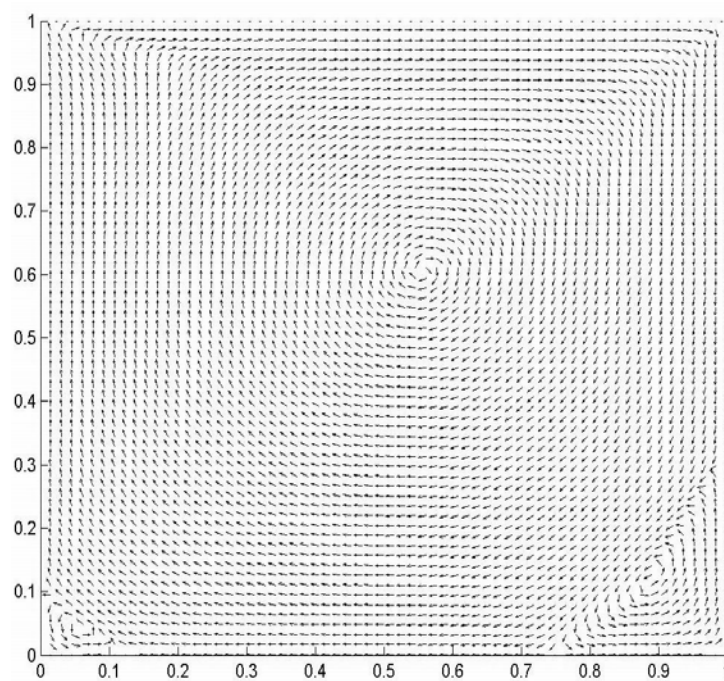
รูปที่ 4.2 ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 1000



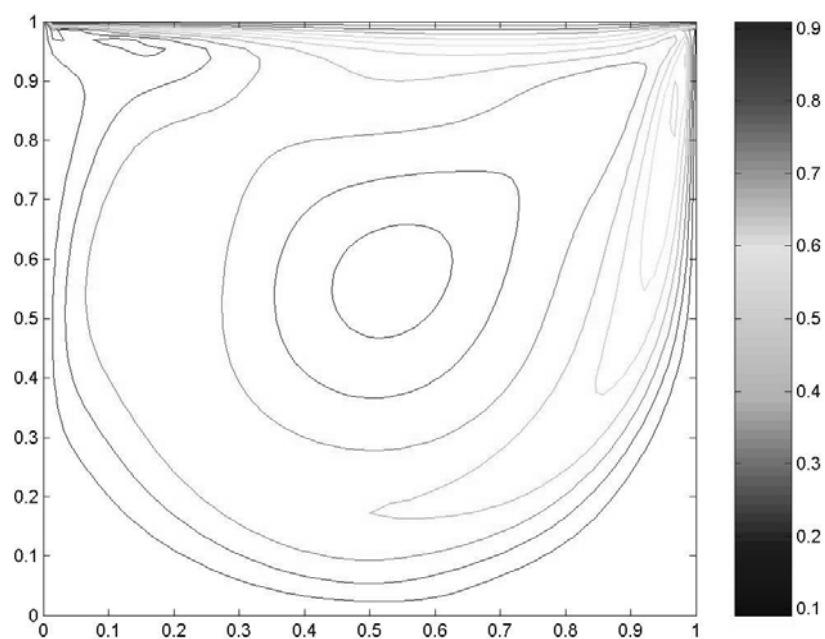
รูปที่ 4.3 ผลการคำนวณเทียบกับข้อมูลอ้างอิง ที่เลขเรย์โนลด์ 5000



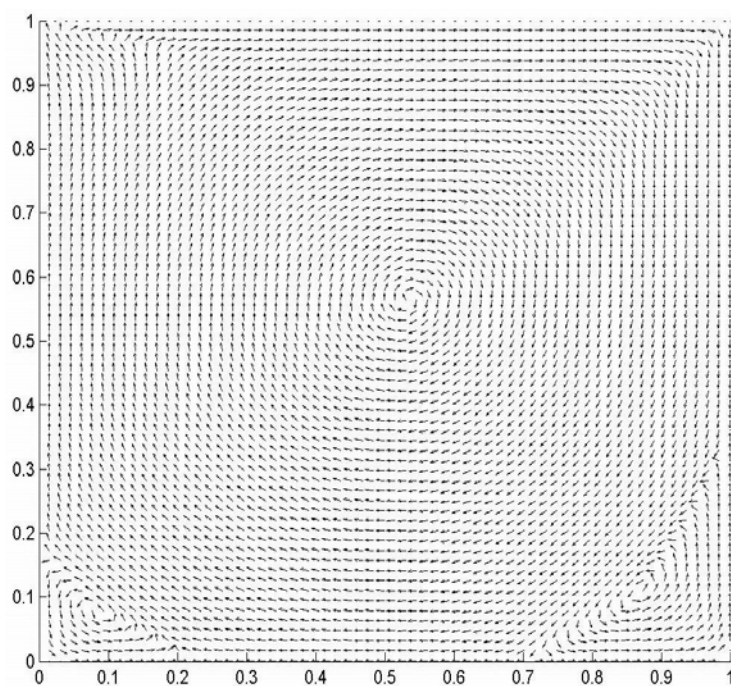
รูปที่ 4.4 เส้น Contour ของความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 400



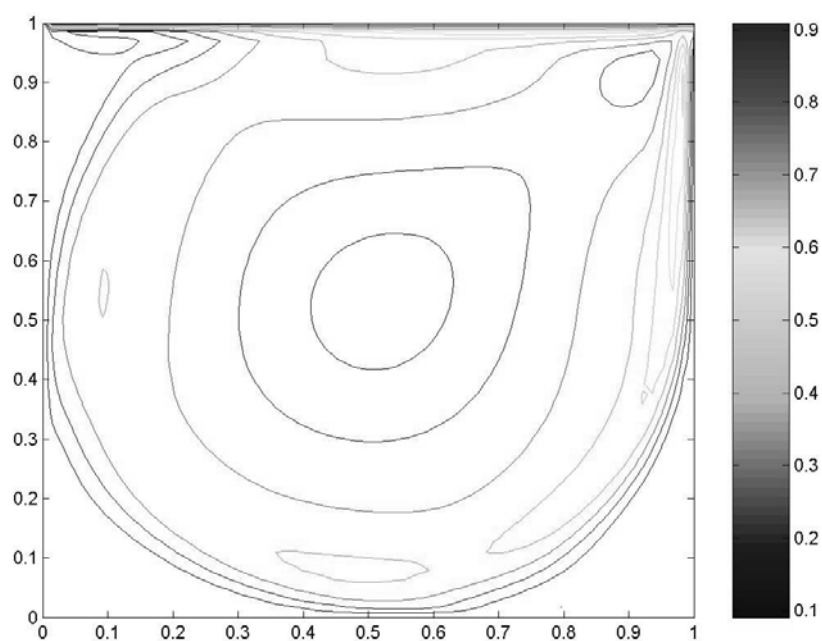
รูปที่ 4.5 เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 400



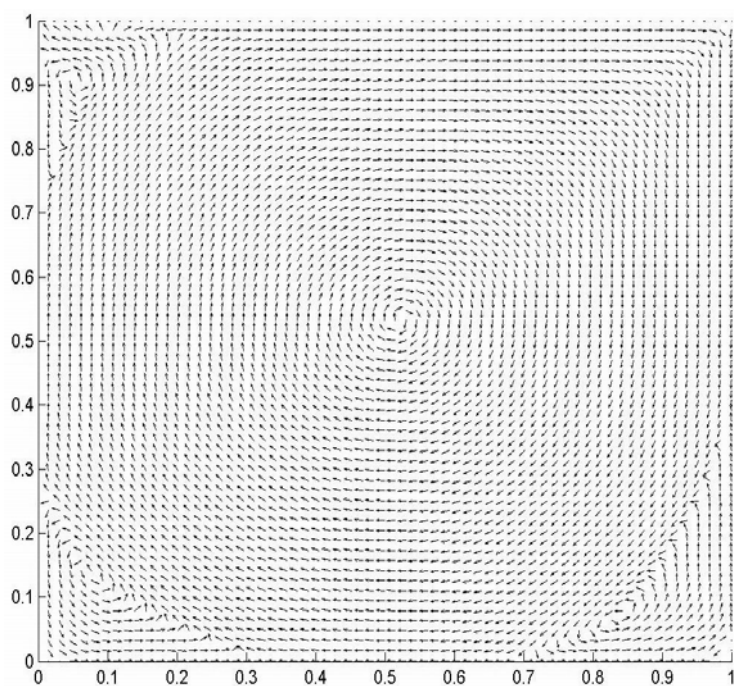
รูปที่ 4.6 เส้น Contour ของความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 1000



รูปที่ 4.7 เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 1000



รูปที่ 4.8 เส้น Contour ของความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 5000



รูปที่ 4.9 เวกเตอร์ความเร็ว ที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 5000

4.1 ผลการคำนวณ

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการคำนวณหาผลเฉลยที่เลขเรย์โนลด์ 3 ค่า คือ 400, 1000 และ 5000 ซึ่งทั้งหมดนี้ได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ โดยใช้ค่า Under-relaxation Factor ของความเร็วและความดันเท่ากับ 0.6 และ 0.2 ตามลำดับ ส่วนจำนวนรอบที่ใช้ในการทำซ้ำภายในของขั้นตอนวิธี SIMPLE มี 3 รอบ ใน Momentum Equation และมี 10 รอบ ใน Pressure Correction Equation ซึ่งค่าทั้งสองนี้ได้ประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ เหมือนกันทุกแบบ เพื่อที่จะสามารถทำการเปรียบเทียบกันได้นั่นเอง ส่วนแฟกเตอร์ด้วหุด (ภาษาอังกฤษ : σ) และแฟกเตอร์เกณฑ์การลู่เข้า (ภาษาอังกฤษ : η) ที่ใช้ใน Full Multigrid มีค่าเท่ากับ 0.4 และ 0.6 ตามลำดับ และจำนวนรอบที่ประยุกต์ใช้ V-Cycle ใน Full Multigrid V-Cycle เท่ากับ 6 รอบ เมื่อองค์ประกอบในการคำนวณเปลี่ยนไปค่าที่ดีที่สุดก็จะมีเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกเอาค่ากลางที่นิยมใช้กัน ซึ่งผลการคำนวณที่ได้เป็นการแสดงให้เห็นถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณเป็นวินาทีกับค่านอร์ม (L_2 norm) ของ Residual บนกริดละเอียดที่สุด ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มี CPU AMD XP 2400, RAM 512 MB ซึ่งความเร็วของ CPU และ ขนาดของหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์จะมีผลต่อความเร็วในการคำนวณ แต่การแสดงผลในรูปของเวลาที่ใช้ในการคำนวณ จะแสดงให้เห็นถึงความเร็วของได้อย่างชัดเจน ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

4.1.1 ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ V-Cycle

ตารางที่ 4.1 ผลการคำนวณของ V-Cycle 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.06	0.05	0.05	0.05
10^{-4}	0.10	0.10	0.10	0.12
10^{-5}	0.18	0.18	0.18	0.38
10^{-6}	0.31	0.30	0.31	0.68
10^{-7}	0.52	0.50	0.51	1.06

ตารางที่ 4.2 ผลการคำนวณของ V-Cycle 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.40	0.32	0.38	0.37	0.37
10^{-4}	0.71	0.56	0.66	1.22	1.50
10^{-5}	1.34	1.04	1.53	2.35	5.47
10^{-6}	2.26	1.77	2.39	4.32	11.71
10^{-7}	3.49	2.75	3.55	6.85	19.36

ตารางที่ 4.3 ผลการคำนวณของ V-Cycle 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.93	1.98	1.66	1.63	1.76	2.06
10^{-4}	3.44	3.53	2.97	8.01	4.52	5.23
10^{-5}	7.97	8.18	6.88	11.84	21.09	47.98
10^{-6}	12.51	12.84	10.79	19.52	44.60	143.05
10^{-7}	17.04	17.49	16.01	28.48	76.36	261.86

ตารางที่ 4.4 ผลการคำนวณของ V-Cycle 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	16.41	15.52	15.55	15.48	12.25	15.73	14.90
10^{-4}	41.51	39.22	39.11	132.79	30.96	39.62	26.13
10^{-5}	79.05	74.80	74.43	238.2	498.1	1,393	781.0
10^{-6}	104.0	98.52	109.7	390.7	669.0	1,705	3,134
10^{-7}	141.5	134.0	133.2	519.7	790.0	2,184	5,657

ตารางที่ 4.5 ผลการคำนวณของ V-Cycle 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.05	0.05	0.05
10^{-4}	0.08	0.08	0.08	0.12
10^{-5}	0.15	0.15	0.19	0.38
10^{-6}	0.29	0.29	0.37	0.75
10^{-7}	0.46	0.46	0.57	1.34

ตารางที่ 4.6 ผลการคำนวณของ V-Cycle 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.33	0.38	0.32	0.31	0.32
10^{-4}	0.58	0.67	0.56	0.77	1.30
10^{-5}	1.09	1.25	1.05	1.93	4.97
10^{-6}	1.84	2.73	2.53	3.79	10.32
10^{-7}	4.34	5.08	5.47	8.21	20.78

ตารางที่ 4.7 ผลการคำนวณของ V-Cycle 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.99	1.67	1.44	1.64	1.51	1.95
10^{-4}	3.55	2.98	2.58	4.21	3.87	4.94
10^{-5}	8.18	6.90	5.99	10.65	15.69	56.09
10^{-6}	14.30	10.82	11.61	18.34	38.17	142.2
10^{-7}	29.57	25.21	27.49	42.72	79.62	258.8

ตารางที่ 4.8 ผลการคำนวณของ V-Cycle 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	13.09	12.95	12.48	14.02	12.95	12.78	-
10^{-4}	23.18	22.91	22.00	24.62	22.78	22.53	14.78
10^{-5}	53.38	52.76	50.55	87.84	219.7	275.9	691.0
10^{-6}	83.47	82.54	79.14	161.5	298.6	946.0	3,443
10^{-7}	183.9	191.8	221.9	298.6	610.0	1,534	5,265

ตารางที่ 4.9 ผลการคำนวณของ V-Cycle 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.05	0.05	0.04
10^{-4}	0.08	0.08	0.08	0.13
10^{-5}	0.18	0.22	0.25	0.36
10^{-6}	0.46	0.46	0.49	0.93
10^{-7}	0.70	0.70	0.80	1.88

ตารางที่ 4.10 ผลการคำนวณของ V-Cycle 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.32	0.39	0.40	0.31	0.38
10^{-4}	0.57	0.69	3.44	0.99	1.81
10^{-5}	1.31	5.17	5.27	3.97	9.79
10^{-6}	5.23	6.36	6.79	5.79	18.92
10^{-7}	6.94	8.74	12.56	16.54	47.77

ตารางที่ 4.11 ผลการคำนวณของ V-Cycle 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.94	2.05	1.65	1.92	1.74	-
10^{-4}	3.47	3.65	2.94	4.92	5.83	1.92
10^{-5}	8.04	8.47	6.81	13.96	45.39	101.3
10^{-6}	17.20	18.11	50.72	59.05	75.39	197.7
10^{-7}	66.01	69.55	67.49	131.1	255.4	553.3

ตารางที่ 4.12 ผลการคำนวณของ V-Cycle 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	12.38	11.94	14.28	16.36	-	-	-
10^{-4}	21.88	21.18	25.24	28.77	12.03	14.20	11.70
10^{-5}	79.05	76.63	80.16	128.0	205.6	608.0	471.0
10^{-6}	126.7	122.9	157.2	264.3	436.5	1,354	3,064
10^{-7}	402.8	418.6	632.0	1,111	1,761	3,198	29,763

4.1.2 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ W-Cycle แบบที่ 1

ตารางที่ 4.13 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.06	0.07	0.06
10^{-4}	0.10	0.11	0.12	0.10
10^{-5}	0.18	0.19	0.23	0.23
10^{-6}	0.31	0.33	0.38	0.45
10^{-7}	0.53	0.55	0.65	0.67

ตารางที่ 4.14 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.38	0.38	0.32	0.39	0.41
10^{-4}	0.67	0.68	0.57	0.69	1.38
10^{-5}	1.25	1.26	1.08	1.31	3.95
10^{-6}	2.13	2.13	1.83	2.23	8.13
10^{-7}	3.29	3.30	2.84	3.45	12.95

ตารางที่ 4.15 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.65	1.99	1.69	1.95	1.98	2.17
10^{-4}	2.95	3.56	3.03	3.49	3.59	3.92
10^{-5}	6.84	8.24	7.04	8.09	11.62	45.85
10^{-6}	10.78	12.93	11.06	12.71	29.28	108.8
10^{-7}	14.62	17.61	15.07	17.32	48.61	169.9

ตารางที่ 4.16 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	15.91	13.27	14.91	16.55	15.35	14.72	13.67
10^{-4}	40.12	33.51	37.57	41.75	38.81	26.27	24.27
10^{-5}	76.45	63.83	71.60	66.93	109.2	188.0	447.8
10^{-6}	100.6	84.08	94.24	104.7	250.0	499.7	1,720
10^{-7}	136.9	114.1	128.2	142.4	414.5	818.0	3,019

ตารางที่ 4.17 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.06	0.06	0.05
10^{-4}	0.08	0.10	0.10	0.12
10^{-5}	0.15	0.18	0.18	0.23
10^{-6}	0.30	0.35	0.34	0.37
10^{-7}	0.48	0.56	0.55	0.65

ตารางที่ 4.18 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.33	0.34	0.33	0.39	0.35
10^{-4}	0.58	0.59	0.58	0.69	1.18
10^{-5}	1.08	1.10	1.09	1.60	3.37
10^{-6}	1.83	1.87	1.85	2.52	6.93
10^{-7}	3.09	2.63	2.61	4.03	13.78

ตารางที่ 4.19 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.68	1.69	1.46	2.00	2.00	1.85
10^{-4}	3.00	3.02	2.61	3.56	3.62	3.35
10^{-5}	6.91	6.99	4.91	9.84	15.02	33.44
10^{-6}	10.85	10.98	9.50	14.58	29.59	86.24
10^{-7}	14.79	14.94	12.95	20.87	53.82	151.0

ตารางที่ 4.20 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	15.75	15.18	12.59	13.69	15.43	-	-
10^{-4}	27.27	26.77	22.19	24.12	27.22	14.93	15.33
10^{-5}	63.79	61.58	50.97	45.03	97.93	155.2	832.0
10^{-6}	111.8	94.41	79.74	86.74	192.2	447.7	3,375
10^{-7}	147.8	142.8	118.2	118.0	619.0	979.0	4,992

ตารางที่ 4.21 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.06	0.06	0.07	0.05
10^{-4}	0.10	0.11	0.12	0.14
10^{-5}	0.24	0.25	0.27	0.31
10^{-6}	0.59	0.62	0.67	0.60
10^{-7}	0.85	0.90	1.02	1.32

ตารางที่ 4.22 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.40	0.38	0.39	0.39	0.43
10^{-4}	0.70	0.68	0.68	0.70	1.43
10^{-5}	1.92	1.26	1.27	5.92	6.79
10^{-6}	6.49	6.82	6.89	8.38	11.81
10^{-7}	8.31	8.29	8.07	11.44	32.24

ตารางที่ 4.23 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.93	1.98	1.70	1.94	2.10	2.16
10^{-4}	3.44	3.53	3.03	3.47	5.50	63.20
10^{-5}	7.98	26.76	7.03	9.57	112.9	80.67
10^{-6}	59.45	60.88	52.40	59.93	235.4	145.2
10^{-7}	63.99	65.53	63.08	73.66	346.1	391.2

ตารางที่ 4.24 ผลการคำนวณของ W-Cycle1 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	15.86	15.63	11.70	15.73	15.58	-	-
10^{-4}	27.93	27.58	20.70	27.72	27.48	17.49	14.70
10^{-5}	76.22	63.33	47.68	87.70	158.3	415.2	395.4
10^{-6}	136.5	111.0	83.63	171.6	313.0	1,021	2,410
10^{-7}	221.0	230.5	182.4	303.6	1,232	2,258	7,387

4.1.3 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ W-Cycle แบบที่ 2

ตารางที่ 4.25 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.04	0.05	0.06	0.05
10^{-4}	0.08	0.10	0.11	0.09
10^{-5}	0.16	0.19	0.22	0.20
10^{-6}	0.27	0.32	0.37	0.39
10^{-7}	0.45	0.54	0.63	0.58

ตารางที่ 4.26 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.41	0.39	0.39	0.41	0.42
10^{-4}	0.72	0.69	0.69	0.74	1.39
10^{-5}	1.35	1.29	1.30	1.39	3.98
10^{-6}	2.28	2.19	2.20	2.36	8.17
10^{-7}	3.53	3.38	3.40	3.66	13.03

ตารางที่ 4.27 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	2.03	1.68	1.71	1.67	2.08	2.26
10^{-4}	3.62	3.00	3.07	2.99	3.78	4.08
10^{-5}	8.41	6.94	7.13	6.95	10.58	47.90
10^{-6}	13.20	10.89	11.18	10.91	22.47	100.9
10^{-7}	17.99	14.83	15.24	14.87	32.67	177.5

ตารางที่ 4.28 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	15.58	15.72	15.24	13.45	13.40	15.02	16.04
10^{-4}	39.40	39.67	38.40	34.01	33.90	26.88	28.44
10^{-5}	75.13	75.64	73.15	54.59	54.38	121.9	363.2
10^{-6}	98.94	99.62	96.29	85.46	167.0	299.9	1,818
10^{-7}	134.7	135.5	131.0	116.4	269.6	537.4	3,521

ตารางที่ 4.29 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.04	0.05	0.07	0.05
10^{-4}	0.08	0.09	0.12	0.12
10^{-5}	0.15	0.16	0.22	0.22
10^{-6}	0.30	0.31	0.42	0.37
10^{-7}	0.49	0.51	0.68	0.65

ตารางที่ 4.30 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.32	0.39	0.33	0.34	0.41
10^{-4}	0.57	0.69	0.58	0.61	1.37
10^{-5}	1.07	1.30	1.09	1.15	3.92
10^{-6}	1.81	2.20	1.85	1.96	8.07
10^{-7}	2.81	3.11	2.62	3.32	16.08

ตารางที่ 4.31 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.68	1.68	1.50	1.67	1.77	1.85
10^{-4}	2.99	3.00	2.70	3.00	3.21	3.35
10^{-5}	5.61	5.65	5.06	5.65	10.49	33.22
10^{-6}	10.86	10.93	9.77	10.94	17.78	85.37
10^{-7}	14.78	14.89	13.29	14.91	26.50	149.5

ตารางที่ 4.32 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	15.51	15.78	15.00	13.63	15.23	-	-
10^{-4}	27.37	27.86	26.46	24.06	26.88	14.66	13.53
10^{-5}	62.86	64.17	60.85	44.83	96.97	107.8	370.0
10^{-6}	110.2	99.90	95.25	86.45	155.39	270.8	1,333
10^{-7}	145.7	147.5	141.1	107.26	225.53	609.0	2,219

ตารางที่ 4.33 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.09	0.10	0.06	0.05
10^{-4}	0.12	0.14	0.10	0.12
10^{-5}	0.20	0.23	0.23	0.27
10^{-6}	0.49	0.57	0.58	0.52
10^{-7}	0.71	0.82	0.84	1.15

ตารางที่ 4.34 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.39	0.38	0.38	0.35	0.41
10^{-4}	0.68	0.67	0.68	0.63	1.36
10^{-5}	1.86	1.83	1.28	1.20	6.40
10^{-6}	6.29	6.19	6.92	8.83	11.13
10^{-7}	8.07	7.93	8.41	11.08	30.41

ตารางที่ 4.35 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	1.95	1.98	1.71	1.66	1.76	2.15
10^{-4}	3.49	3.53	3.06	2.98	4.64	3.89
10^{-5}	8.10	8.20	5.75	6.92	14.71	80.09
10^{-6}	18.86	19.08	52.84	50.22	1,100	144.17
10^{-7}	64.93	65.70	64.94	62.04	1,496	38.31

ตารางที่ 4.36 ผลการคำนวณของ W-Cycle2 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	16.09	12.00	15.18	15.70	12.27	13.78	-
10^{-4}	28.37	21.28	26.69	27.70	21.76	24.81	15.89
10^{-5}	77.53	49.21	61.27	63.72	107.1	245.52	421.9
10^{-6}	151.2	95.71	118.83	111.7	183.1	644.7	2,570
10^{-7}	323.4	207.1	222.49	219.6	417.1	1,364	7,863

4.1.4 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ F-Cycle

ตารางที่ 4.37 ผลการคำนวณของ F-Cycle 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.01	0.01	0.02	0.01
10^{-4}	0.11	0.12	0.12	0.10
10^{-5}	0.22	0.22	0.22	0.22
10^{-6}	0.38	0.37	0.37	0.44
10^{-7}	0.64	0.62	0.62	0.65

ตารางที่ 4.38 ผลการคำนวณของ F-Cycle 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.09	0.07	0.08	0.09	0.09
10^{-4}	0.80	0.65	0.65	0.72	1.39
10^{-5}	1.52	1.22	1.22	1.35	4.01
10^{-6}	2.59	2.08	2.08	2.30	8.23
10^{-7}	4.02	3.23	3.23	3.56	13.11

ตารางที่ 4.39 ผลการคำนวณของ F-Cycle 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.43	0.42	0.38	0.41	0.33	0.36
10^{-4}	4.16	4.15	3.72	4.06	3.15	3.34
10^{-5}	7.90	7.85	7.07	7.72	11.65	39.18
10^{-6}	13.50	13.45	12.09	13.19	20.17	92.99
10^{-7}	19.09	19.01	17.10	18.67	32.94	145.3

ตารางที่ 4.40 ผลการคำนวณของ F-Cycle 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	3.91	3.11	3.59	3.74	3.62	3.85	3.65
10^{-4}	33.30	26.67	16.65	31.10	30.42	32.49	28.44
10^{-5}	62.72	50.27	55.87	58.47	57.23	176.0	524.3
10^{-6}	106.8	85.67	95.06	99.52	97.45	693.0	1,917
10^{-7}	150.9	121.0	134.3	140.6	177.9	1,089	3,521

ตารางที่ 4.41 ผลการคำนวณของ F-Cycle 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.01	0.01	0.01	0.01
10^{-4}	0.09	0.11	0.10	0.14
10^{-5}	0.18	0.21	0.18	0.26
10^{-6}	0.35	0.41	0.35	0.43
10^{-7}	0.56	0.65	0.57	0.77

ตารางที่ 4.42 ผลการคำนวณของ F-Cycle 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.08	0.09	0.08	0.08	0.08
10^{-4}	0.66	0.77	0.66	0.63	1.18
10^{-5}	0.96	1.11	1.25	1.18	3.39
10^{-6}	1.85	2.12	1.83	1.99	6.94
10^{-7}	3.05	3.48	3.00	3.07	13.78

ตารางที่ 4.43 ผลการคำนวณของ F-Cycle 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.42	0.37	0.31	0.35	0.33	0.36
10^{-4}	2.26	1.99	1.68	3.44	3.16	3.32
10^{-5}	5.96	5.20	4.41	4.98	10.23	33.39
10^{-6}	11.50	10.04	8.51	9.61	20.13	85.99
10^{-7}	17.05	14.87	12.61	18.87	31.45	150.6

ตารางที่ 4.44 ผลการคำนวณของ F-Cycle 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	3.69	3.78	3.72	3.14	3.21	3.78	2.92
10^{-4}	17.72	18.02	16.99	14.68	14.90	17.66	13.16
10^{-5}	59.88	60.75	56.59	49.31	50.01	143.0	360.5
10^{-6}	87.99	89.41	83.26	72.39	120.2	421.5	1,706
10^{-7}	130.2	132.4	123.3	130.1	178.7	932.0	2,671

ตารางที่ 4.45 ผลการคำนวณของ F-Cycle 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.01	0.01	0.02	0.01
10^{-4}	0.11	0.12	0.12	0.14
10^{-5}	0.26	0.27	0.26	0.31
10^{-6}	0.61	0.62	0.66	0.61
10^{-7}	0.96	0.97	0.96	1.34

ตารางที่ 4.46 ผลการคำนวณของ F-Cycle 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.08	0.09	0.09	0.07	0.09
10^{-4}	0.66	0.76	0.77	0.60	1.37
10^{-5}	5.28	6.13	6.57	5.34	6.48
10^{-6}	7.59	8.78	9.64	7.19	11.27
10^{-7}	10.77	12.47	12.71	10.35	30.79

ตารางที่ 4.47 ผลการคำนวณของ F-Cycle 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	2.28	1.94	1.95	2.24	2.13	2.18
10^{-4}	67.28	57.31	57.42	66.01	66.26	63.51
10^{-5}	76.60	65.22	65.34	127.9	168.6	81.04
10^{-6}	136.0	115.8	112.9	169.8	281.3	145.9
10^{-7}	195.5	166.4	131.9	235.3	437.4	392.8

ตารางที่ 4.48 ผลการคำนวณของ F-Cycle 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	17.78	17.84	15.51	15.28	17.08	16.11	-
10^{-4}	31.81	31.92	27.85	27.21	30.52	28.93	12.20
10^{-5}	45.87	46.00	40.19	51.09	124.6	337.1	329.4
10^{-6}	87.97	88.21	77.19	86.89	205.3	942.0	2,001
10^{-7}	144.0	144.5	114.2	134.6	1,082	1,805	6,126

4.1.5 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Sawtooth-Cycle

ตารางที่ 4.49 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.05	0.05	0.04
10^{-4}	0.18	0.15	0.18	0.38
10^{-5}	0.45	0.44	0.55	1.37
10^{-6}	0.72	0.76	1.06	2.73
10^{-7}	0.96	1.08	1.60	4.21

ตารางที่ 4.50 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.58	0.33	0.34	0.32	0.34
10^{-4}	1.82	1.54	1.83	2.17	3.97
10^{-5}	5.54	4.93	3.57	7.28	24.99
10^{-6}	8.03	7.82	6.30	15.87	52.04
10^{-7}	10.26	10.48	11.26	26.55	83.19

ตารางที่ 4.51 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	4.08	2.91	1.21	1.62	1.55	1.61
10^{-4}	15.02	10.36	8.39	10.05	5.00	3.98
10^{-5}	44.33	42.59	20.06	37.73	80.91	270.1
10^{-6}	60.21	61.20	42.52	70.23	197.1	727.0
10^{-7}	72.42	77.32	64.06	114.7	320.2	1,234

ตารางที่ 4.52 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	40.73	22.30	11.58	13.78	11.75	11.41
10^{-4}	124.6	134.6	87.43	33.82	20.30	19.73
10^{-5}	506.9	350.0	247.5	504.6	991.0	2,435
10^{-6}	714.0	721.0	491.8	1,490	3,990	13,733
10^{-7}	845.0	965.0	712.0	2,404	7,221	27,695

ตารางที่ 4.53 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.04	0.04	0.04
10^{-4}	0.21	0.18	0.25	0.35
10^{-5}	0.73	0.55	0.58	1.25
10^{-6}	1.17	1.09	1.09	2.59
10^{-7}	1.61	1.63	1.94	4.41

ตารางที่ 4.54 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.83	0.33	0.29	0.27	0.28
10^{-4}	2.32	2.02	1.54	1.85	3.35
10^{-5}	9.22	7.59	4.30	6.59	21.28
10^{-6}	14.37	13.41	10.28	13.71	40.20
10^{-7}	19.06	18.99	18.61	27.75	76.34

ตารางที่ 4.55 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	10.16	5.43	1.22	1.39	1.49	1.38
10^{-4}	77.09	16.67	10.29	9.64	4.81	2.40
10^{-5}	127.0	68.98	31.07	34.18	67.75	208.7
10^{-6}	165.9	113.8	82.60	63.94	173.7	688.0
10^{-7}	202.4	150.2	127.8	96.76	317.1	978.0

ตารางที่ 4.56 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	18.85	11.69	11.23	-	-
10^{-4}	289.3	122.6	27.63	11.25	10.07
10^{-5}	612.0	378.8	421.8	1,020	2,336
10^{-6}	911.0	890.0	1,398	4,153	8,698
10^{-7}	1,529	2,125	2,274	6,385	20,420

ตารางที่ 4.57 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.04	0.05	0.05	0.05
10^{-4}	0.10	0.19	0.25	0.45
10^{-5}	0.77	0.48	0.68	1.53
10^{-6}	2.13	1.41	1.61	4.08
10^{-7}	3.43	2.44	3.34	7.53

ตารางที่ 4.58 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.49	0.50	0.34	0.32	0.33
10^{-4}	1.53	0.70	2.54	2.82	4.47
10^{-5}	10.66	8.53	6.96	13.30	32.40
10^{-6}	24.79	21.31	14.80	26.75	65.91
10^{-7}	41.60	47.71	35.19	65.85	157.8

ตารางที่ 4.59 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	2.41	1.37	1.48	-
10^{-4}	28.16	23.64	3.68	1.60
10^{-5}	62.15	53.03	124.6	186.2
10^{-6}	124.9	112.8	251.1	643.0
10^{-7}	269.2	374.4	680.0	1,582

ตารางที่ 4.60 ผลการคำนวณของ Sawtooth-Cycle 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	25.88	14.45	10.56	-	-
10^{-4}	256.6	275.6	64.77	13.96	9.78
10^{-5}	813.0	884.0	1,080	900.0	1,301
10^{-6}	1,292	1,473	1,771	5,951	9,723
10^{-7}	3,151	2,061	5,013	35,446	21,593

4.1.6 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Full Multigrid Cycle

ตารางที่ 4.61 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.06	0.07	0.07	0.07
10^{-4}	0.14	0.15	0.16	0.15
10^{-5}	0.21	0.23	0.24	0.22
10^{-6}	0.35	0.38	0.40	0.39
10^{-7}	0.52	0.55	0.59	0.56

ตารางที่ 4.62 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.48	0.41	0.57	0.47	0.55
10^{-4}	1.08	0.91	1.10	1.05	1.27
10^{-5}	1.61	1.35	1.62	1.55	1.82
10^{-6}	2.75	2.30	2.76	2.23	3.11
10^{-7}	3.36	2.81	3.47	3.33	3.96

ตารางที่ 4.63 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	2.57	2.55	1.85	2.15	2.36	4.77
10^{-4}	5.36	5.31	3.91	4.48	4.92	9.01
10^{-5}	8.06	7.99	5.90	6.73	7.36	12.74
10^{-6}	13.56	13.44	10.02	11.78	12.58	18.48
10^{-7}	16.86	16.71	12.45	14.56	15.07	31.61

ตารางที่ 4.64 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	17.22	19.22	19.43	20.85	20.21	22.72	27.95
10^{-4}	35.48	39.63	40.01	42.80	41.68	45.67	59.83
10^{-5}	53.69	59.97	60.52	64.76	63.10	70.27	122.0
10^{-6}	91.16	101.8	102.5	109.8	107.6	116.6	259.6
10^{-7}	109.9	122.7	123.5	132.3	129.0	145.4	328.2

ตารางที่ 4.65 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.08	0.09	0.08	0.07
10^{-4}	0.15	0.16	0.15	0.13
10^{-5}	0.29	0.31	0.21	0.26
10^{-6}	0.44	0.47	0.34	0.38
10^{-7}	0.61	0.64	0.56	0.53

ตารางที่ 4.66 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.57	0.56	0.49	0.47	0.65
10^{-4}	1.09	1.07	0.94	0.91	1.23
10^{-5}	1.70	1.67	1.46	1.40	1.94
10^{-6}	2.83	2.77	2.44	2.33	3.28
10^{-7}	4.07	3.98	3.42	3.26	5.03

ตารางที่ 4.67 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	3.06	3.13	2.32	2.61	2.47	3.95
10^{-5}	8.51	8.70	6.45	7.22	6.83	12.54
10^{-6}	11.86	12.12	9.01	10.04	9.63	19.73
10^{-7}	17.99	18.37	13.63	15.34	16.01	37.37

ตารางที่ 4.68 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	19.68	19.25	22.22	19.59	19.19	21.84	40.73
10^{-5}	54.65	53.54	62.57	54.73	53.31	61.02	109.4
10^{-6}	72.70	71.16	83.34	72.78	71.18	85.27	158.9
10^{-7}	108.8	106.4	124.9	108.9	111.0	143.8	348.5

ตารางที่ 4.69 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.08	0.09	0.08	0.08
10^{-4}	0.15	0.16	0.16	0.15
10^{-5}	0.31	0.32	0.33	0.33
10^{-6}	0.69	0.72	0.73	0.71
10^{-7}	0.97	0.99	1.02	0.98

ตารางที่ 4.70 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.59	0.57	0.57	0.58	0.74
10^{-4}	1.11	1.07	1.09	1.09	1.26
10^{-5}	2.30	2.22	2.27	2.25	2.85
10^{-6}	4.17	4.03	4.24	3.52	4.84
10^{-7}	6.15	5.95	6.20	5.95	8.00

ตารางที่ 4.71 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	3.16	3.13	2.71	3.04	2.93	4.81
10^{-4}	6.04	6.00	5.20	5.91	5.55	8.41
10^{-5}	9.39	9.33	8.09	9.25	8.88	14.83
10^{-6}	16.12	16.00	13.86	15.99	15.72	34.42
10^{-7}	23.58	23.40	20.21	27.40	26.78	53.22

ตารางที่ 4.72 ผลการคำนวณของ FMG-Cycle 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	23.40	23.18	24.40	23.42	26.25	27.31	51.08
10^{-5}	69.04	68.30	66.62	69.23	71.35	91.97	223.5
10^{-6}	94.49	93.49	90.03	94.44	97.04	129.0	317.5
10^{-7}	149.5	147.8	138.0	148.4	152.8	245.5	748.0

4.1.7 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Full Multigrid V-Cycle

ตารางที่ 4.73 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.01	0.01	0.02	0.08
10^{-5}	0.16	0.16	0.15	0.30
10^{-6}	0.32	0.32	0.32	0.63
10^{-7}	0.52	0.52	0.52	1.00

ตารางที่ 4.74 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.01	0.01	0.01	0.08	0.52
10^{-5}	0.73	0.69	0.69	0.89	3.92
10^{-6}	1.90	1.84	1.84	2.76	9.27
10^{-7}	3.36	3.25	3.27	5.70	15.82

ตารางที่ 4.75 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.01	0.01	0.01	0.09	0.55	3.58
10^{-5}	0.70	0.69	0.53	3.93	4.98	51.89
10^{-6}	10.14	10.25	7.47	9.87	29.77	131.8
10^{-7}	17.73	17.94	13.05	24.72	67.00	246.5

ตารางที่ 4.76 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.01	0.01	0.01	0.09	0.52	3.72	22.94
10^{-5}	0.72	0.72	0.64	3.99	3.45	86.89	596.9
10^{-6}	80.17	79.26	76.30	73.85	90.18	1,094	2,945
10^{-7}	142.5	140.8	136.4	131.9	530.5	1,508	5,321

ตารางที่ 4.77 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.03	0.02	0.10	0.07
10^{-5}	0.17	0.20	0.17	0.29
10^{-6}	0.27	0.36	0.42	0.71
10^{-7}	0.48	0.60	0.70	1.25

ตารางที่ 4.78 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.02	0.03	0.09	0.08	0.52
10^{-5}	0.63	0.71	0.82	1.16	3.91
10^{-6}	1.62	1.87	2.31	4.91	9.72
10^{-7}	3.60	4.45	5.27	10.55	20.87

ตารางที่ 4.79 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.02	0.02	0.10	0.07	0.48	3.01
10^{-5}	0.58	0.71	3.04	3.44	5.47	43.03
10^{-6}	6.14	7.33	6.44	15.08	30.47	117.5
10^{-7}	16.55	21.46	22.18	47.45	85.32	216.3

ตารางที่ 4.80 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.03	0.02	0.09	0.07	0.48	3.21	1.86
10^{-5}	0.71	0.71	3.37	3.47	23.32	114.4	639.0
10^{-6}	51.71	52.28	41.78	42.42	119.9	587.9	3,719
10^{-7}	109.8	110.5	137.2	274.0	665.0	1,170	5,157

ตารางที่ 4.81 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.11	0.12	0.11	0.12
10^{-5}	0.24	0.25	0.28	0.39
10^{-6}	0.52	0.54	0.76	1.43
10^{-7}	1.00	1.11	1.41	2.51

ตารางที่ 4.82 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.72	0.11	0.09	0.54	0.61
10^{-5}	1.29	1.26	1.08	1.46	5.43
10^{-6}	5.65	5.52	4.99	9.02	21.91
10^{-7}	9.43	9.76	11.35	19.79	50.89

ตารางที่ 4.83 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 256x256 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)					
	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.10	0.09	0.11	0.65	0.54	3.69
10^{-5}	3.43	3.46	3.50	5.47	10.39	91.34
10^{-6}	11.13	11.26	19.06	53.50	74.75	210.5
10^{-7}	52.22	54.17	72.21	152.5	269.5	596.3

ตารางที่ 4.84 ผลการคำนวณของ FMG V-Cycle 512x512 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)						
	9 Levels	8 Levels	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.09	0.11	0.09	0.51	0.56	3.97	1.85
10^{-5}	3.73	4.62	3.29	24.01	27.78	140.08	422.5
10^{-6}	42.76	52.49	57.35	126.7	278.8	1,203	3,440
10^{-7}	337.8	437.9	485.2	1,055	2,193	3,821	49,290

4.1.8 ผลการคำนวณของด้วยระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Cascadic Multigrid

ตารางที่ 4.85 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.05	0.05	0.06	0.06
10^{-4}	0.08	0.08	0.09	0.09
10^{-5}	1.30	1.33	1.48	1.23
10^{-6}	4.83	4.90	5.45	4.96
10^{-7}	9.07	9.21	10.27	9.17

ตารางที่ 4.86 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=400

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-4}	0.19	0.19	0.19	0.18	0.22
10^{-5}	12.23	13.00	13.00	16.56	27.29
10^{-6}	80.52	85.92	93.25	76.44	112.1
10^{-7}	196.2	209.3	209.9	194.5	226.5

ตารางที่ 4.87 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.07	0.06	0.06	0.05
10^{-4}	0.17	0.18	0.17	0.16
10^{-5}	1.71	1.83	1.71	1.70
10^{-6}	5.38	5.78	5.39	5.42
10^{-7}	9.56	10.29	9.60	9.61

ตารางที่ 4.88 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=1000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.26	0.26	0.25	0.24	0.34
10^{-4}	0.33	0.33	0.33	0.32	0.53
10^{-5}	20.94	20.83	21.43	20.07	32.78
10^{-6}	82.85	94.74	84.90	90.51	114.6
10^{-7}	196.2	196.2	199.1	187.35	221.2

ตารางที่ 4.89 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 64x64 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)			
	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.10	0.10	0.11	0.10
10^{-4}	0.51	0.53	0.56	0.50
10^{-5}	3.32	3.41	3.59	3.30
10^{-6}	8.91	9.16	9.68	9.08
10^{-7}	16.27	16.71	17.65	16.33

ตารางที่ 4.90 ผลการคำนวณของ Cascadic Multigrid 128x128 CV Re=5000

การลดลงของ Residual	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (วินาที)				
	7 Levels	6 Levels	5 Levels	4 Levels	3 Levels
10^{-3}	0.58	0.56	0.59	0.60	0.67
10^{-4}	1.88	1.88	1.90	2.07	2.15
10^{-5}	28.61	28.66	28.25	32.39	35.19
10^{-6}	138.5	138.5	137.8	158.2	168.8
10^{-7}	328.5	327.6	326.4	372.5	395.6

4.1.9 สรุปผลโดยรวมเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยแยกตามเลขเรย์โนลด์

ตารางที่ 4.91 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 400

		เวลาที่ใช้เป็นวินาที								SG/MG**
จำนวนระดับกริดที่ใช้		9	8	7	6	5	4	3	SG	
V-Cycle	64x64	-	-	-	0.52	0.50	0.51	1.06	19.0	38
	128x128	-	-	3.49	2.75	3.55	6.85	19.36	835	303
	256x256	-	17.04	17.49	16.01	28.48	76.36	261.90	7,664	478
	512x512	141.5	134.1	133.3	519.8	790.0	2,184	5,657	181,202	1,359
W-Cycle1	64x64	-	-	-	0.53	0.55	0.65	0.67	19.0	35
	128x128	-	-	3.29	3.30	2.84	3.45	12.95	835	294
	256x256	-	14.62	17.51	15.07	17.32	48.61	169.96	7,664	524
	512x512	136.96	114.44	128.25	142.43	414.49	818.0	3,019	181,202	1,583
W-Cycle2	64x64	-	-	-	0.45	0.45	0.63	0.58	19.0	42
	128x128	-	-	3.53	3.38	3.40	3.66	13.03	835	247
	256x256	-	17.99	14.83	15.24	14.87	32.67	177.56	7,664	516
	512x512	134.68	135.56	131.03	116.37	269.62	537.42	3,521	181,202	1,557
F-Cycle	64x64	-	-	-	0.64	0.62	0.62	0.65	19.0	30
	128x128	-	-	4.02	3.23	3.23	3.56	13.11	835	258
	256x256	-	19.09	19.01	17.10	18.67	32.94	145.29	7,664	447
	512x512	150.94	121.02	134.27	140.58	177.90	1,089	3,521	181,202	1,497
Sawtooth	64x64	-	-	-	0.96	1.08	1.60	4.21	19.0	19
	128x128	-	-	10.26	10.48	11.26	26.55	83.19	835	81
	256x256	-	72.42	77.32	64.06	114.77	320.19	1,234	7,664	119
	512x512	*	845	965	712	2,404	7,221	27,695	181,202	254
FMG	64x64	-	-	-	0.52	0.55	0.59	0.56	19.0	36
	128x128	-	-	3.36	2.81	3.47	3.33	3.96	835	297
	256x256	-	16.86	16.71	12.45	14.56	15.07	31.61	7,664	615
	512x512	109.89	122.69	123.55	132.35	129.06	145.44	328.22	181,202	1,648
FMGV	64x64	-	-	-	0.52	0.52	0.52	1.00	19.0	36
	128x128	-	-	3.36	3.25	3.27	5.70	15.82	835	256
	256x256	-	17.73	17.94	13.05	24.72	67.00	246.52	7,664	587
	512x512	142.46	140.85	136.36	131.88	530.46	1,508	5,321	181,202	1,373
Cascadic	64x64	-	-	-	9.07	9.21	10.27	9.17	19.0	2
	128x128	-	-	196.25	209.33	209.93	194.50	226.49	835.0	4

* ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าหาคำตอบ

** SG/MG = เวลาที่ใช้โดย SG/เวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้โดย MG

ตารางที่ 4.92 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 1000

		เวลาที่ใช้เป็นวินาที								SG/MG**
จำนวนระดับกริดที่ใช้		9	8	7	6	5	4	3	SG	
V-Cycle	64x64	-	-	-	0.46	0.46	0.57	1.34	16.08	41
	128x128	-	-	4.34	5.08	5.47	8.21	20.78	295.93	68
	256x256	-	29.57	25.21	27.49	42.72	79.62	258.79	7,418	294
	512x512	183.90	191.80	222.96	298.57	610.0	1,534	5,265	88,719	482
W-Cycle1	64x64	-	-	-	0.48	0.56	0.55	0.65	16.08	33
	128x128	-	-	3.09	2.63	2.61	4.03	13.78	295.93	113
	256x256	-	14.79	14.94	12.95	20.87	53.82	151.0	7,418	572
	512x512	147.83	142.87	118.24	118.06	619	979	4,992	88,719	751
W-Cycle2	64x64	-	-	-	0.49	0.51	0.68	0.65	16.08	32
	128x128	-	-	2.81	3.11	2.62	3.32	16.08	295.93	112
	256x256	-	14.78	14.89	13.29	14.91	26.50	149.49	7,418	558
	512x512	145.77	147.50	141.11	107.26	225.53	609	2,219	88,719	828
F-Cycle	64x64	-	-	-	0.56	0.65	0.57	0.77	16.08	28
	128x128	-	-	3.05	3.48	3.00	3.07	13.78	295.93	98
	256x256	-	17.05	14.87	12.61	18.87	31.45	150.66	7,418	588
	512x512	130.21	132.42	123.29	130.11	178.75	932	2,671	88,719	719
Sawtooth	64x64	-	-	-	1.61	1.63	1.94	4.41	16.08	13
	128x128	-	-	19.06	18.99	18.61	27.75	76.34	295.93	15
	256x256	-	202.48	150.22	127.85	96.76	317.14	978	7,418	76
	512x512	*	*	1,529	2,125	2,274	6,385	20,420	88,719	58
FMG	64x64	-	-	-	0.61	0.64	0.56	0.53	16.08	30
	128x128	-	-	4.07	3.98	3.42	3.26	5.03	295.93	90
	256x256	-	17.99	18.37	13.63	15.34	16.00	37.37	7,418	544
	512x512	108.81	106.43	124.92	108.90	111.06	143.82	348.53	88,719	833
FMGV	64x64	-	-	-	0.48	0.60	0.70	1.25	16.08	33
	128x128	-	-	3.60	4.45	5.27	10.55	20.87	295.93	82
	256x256	-	16.55	21.46	22.18	47.45	85.32	216.32	7,418	448
	512x512	109.85	110.53	137.23	274.0	665.0	1,170	5,157	88,719	807
Cascadic	64x64	-	-	-	9.56	10.29	9.60	9.61	16.08	1.6
	128x128	-	-	196.2	196.2	199.1	187.4	221.3	295.93	1.5

* ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าหาคำตอบ

** SG/MG = เวลาที่ใช้โดย SG/เวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้โดย MG

ตารางที่ 4.93 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 5000

		เวลาที่ใช้เป็นวินาที								SG/MG**
จำนวนระดับกริดที่ใช้		9	8	7	6	5	4	3	SG	
V-Cycle	64x64	-	-	-	0.70	0.70	0.80	1.88	13.94	19
	128x128	-	-	6.97	8.74	12.56	16.54	47.77	268.74	38
	256x256	-	66.01	69.55	67.49	131.08	255.40	553.26	2,765	41
	512x512	402.85	418.58	632.00	1,111	1,761	3,198	29,763	71,655	177
W-Cycle1	64x64	-	-	-	0.85	0.90	1.02	1.32	13.94	16
	128x128	-	-	8.31	8.29	8.07	11.44	32.24	268.74	33
	256x256	-	63.99	65.53	63.08	73.66	346.12	391.19	2,765	43
	512x512	221.04	230.47	182.40	303.65	1,232	2,258	7,387	71,655	392
W-Cycle2	64x64	-	-	-	0.71	0.82	0.84	1.15	13.94	19
	128x128	-	-	7.93	7.04	8.41	11.08	30.41	268.74	38
	256x256	-	64.93	65.70	64.94	62.04	149.60	388.30	2,765	44
	512x512	323.50	207.20	222.50	219.70	487.10	1,364	7,863	71,655	345
F-Cycle	64x64	-	-	-	0.96	0.97	0.96	1.34	13.94	14
	128x128	-	-	10.77	12.47	12.71	10.35	30.79	268.74	25
	256x256	-	195.50	166.47	131.94	235.34	437.40	392.84	2,765	20
	512x512	144.06	144.52	114.21	134.64	1,082	1,805	6,126	71,655	627
Sawtooth	64x64	-	-	-	3.43	2.44	3.34	7.53	13.94	14
	128x128	-	-	41.60	47.71	35.19	65.85	157.83	268.74	7
	256x256	-	*	*	269.19	374.48	680.0	1,582	2,765	10
	512x512	*	*	3,151	2,061	5,013	35,466	21,593	71,655	22
FMG	64x64	-	-	-	0.97	0.99	1.02	0.98	13.94	14
	128x128	-	-	6.15	5.95	6.20	5.95	8.00	268.74	45
	256x256	-	23.58	23.40	20.21	27.40	26.78	53.22	2,765	136
	512x512	149.50	147.87	138.07	148.39	152.88	245.47	748.00	71,655	518
FMGV	64x64	-	-	-	1.00	1.11	1.41	2.51	13.94	13
	128x128	-	-	9.43	9.76	11.35	19.79	50.89	268.74	28
	256x256	-	52.22	54.17	72.21	152.54	269.46	596.28	2,765	52
	512x512	337.77	437.94	485.19	1,055	2,193	3,821	49,290	71,655	212
Cascadic	64x64	-	-	-	16.27	16.71	17.65	16.33	13.94	0.85
	128x128	-	-	328.46	327.65	326.42	372.57	395.57	268.74	0.82

* ผลการคำนวณไม่ลู่เข้าหาคำตอบ

** SG/MG = เวลาที่ใช้โดย SG/เวลาที่น้อยที่สุดที่ใช้โดย MG

ตารางที่ 4.94 เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นถึงอัตราความเร็วเป็น Work Unit จะไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วของ CPU และหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ แต่ไม่สามารถแสดงให้เห็นถึงความเร็วต่อหน่วยเวลาได้ จึงนำเสนอเพียงการคำนวณที่เลขเรย์โนลด์ 1000 เท่านั้น

ตารางที่ 4.94 ผลการคำนวณเมื่อใช้จำนวนระดับกริดที่แตกต่างกัน ที่เลขเรย์โนลด์ 1000 เปรียบเทียบเป็นจำนวน Work Unit

		Work Unit								SG/MG**
จำนวนระดับกริดที่ใช้		9	8	7	6	5	4	3	SG	
V-Cycle	64x64	-	-	-	49	48	59	125	1,436	30
	128x128	-	-	63	63	81	127	293	4,217	67
	256x256	-	71	71	89	122	243	589	12,729	180
	512x512	67	71	85	104	184	441	1,239	41,361	617
W-Cycle1	64x64	-	-	-	52	51	59	75	1,436	28
	128x128	-	-	46	40	40	59	207	4,217	106
	256x256	-	42	42	44	51	148	414	12,729	304
	512x512	45	46	46	44	102	300	867	41,361	945
W-Cycle2	64x64	-	-	-	49	48	59	63	1,436	30
	128x128	-	-	42	45	44	54	166	4,217	100
	256x256	-	42	42	45	44	92	401	12,729	301
	512x512	42	42	42	45	104	218	168	41,361	994
F-Cycle	64x64	-	-	-	64	64	61	75	1,436	23
	128x128	-	-	50	50	49	52	207	4,217	86
	256x256	-	45	45	45	59	103	414	12,729	284
	512x512	45	45	45	55	73	233	867	41,361	920
Sawtooth	64x64	-	-	-	76	81	124	341	1,436	19
	128x128	-	-	110	116	121	300	861	4,217	38
	256x256	-	158	166	190	253	731	2,586	12,729	80
	512x512	*	*	273	225	636	2,206	8,249	41,361	184
FMG	64x64	-	-	-	53	53	52	59	1,436	27
	128x128	-	-	44	44	47	48	88	4,217	95
	256x256	-	43	43	43	45	45	115	12,729	295
	512x512	41	41	41	41	43	61	221	41,361	1003
FMGV	64x64	-	-	-	53	56	72	136	1,436	27
	128x128	-	-	56	60	81	145	298	4,217	75
	256x256	-	50	53	74	136	260	580	12,729	255
	512x512	38	38	56	107	198	419	1,229	41,361	1089
Cascadic	64x64	-	-	-	986	987	988	989	1,436	1.5
	128x128	-	-	2,560	2,560	2,561	2,560	2,408	4,217	1.8

* ผลการคำนวณไม่อยู่เข้าหาคำตอบ

** SG/MG = จำนวน Work Unit ที่ใช้โดย SG/จำนวน Work Unit ที่น้อยที่สุดที่ใช้โดย MG

4.2 วิเคราะห์ผลการคำนวณ

4.2.1 V-Cycle

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ V-Cycle นี้จะได้ผลดีที่เลขเรย์โนลด์ต่ำ แต่เมื่อเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น อัตราความเร็วจะลดลง เช่นการคำนวณที่จำนวน CV เท่ากับ 512×512 อัตราความเร็วเมื่อเทียบกับการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียวที่เลขเรย์โนลด์ 400 ประมาณ 1350 เท่า แต่เมื่อเลขเรย์โนลด์เป็น 1000 และ 5000 อัตราความเร็วจะลดลงเหลือ 480 และ 180 เท่า ตามลำดับ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อเลขเรย์โนลด์สูงขึ้น การประยุกต์ใช้ V-Cycle จะให้ประสิทธิภาพลดลง

4.2.2 W-Cycle

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ W-Cycle ทั้ง 2 แบบ จะให้ผลการคำนวณที่ไม่แตกต่างกันมากนัก แต่จะดีกว่า V-Cycle เนื่องจากการทำงานของระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบนี้จะทำงานอยู่ที่ช่วงของกริดหยาบมากกว่าทำงานที่ช่วงของกริดละเอียด ดังนั้นจึงส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงเมื่อเทียบกับ V-cycle

4.2.3 F-Cycle

ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ F-Cycle นี้ จะเหมาะสมกับการไหลที่มีเลขเรย์โนลด์สูง และจำนวน CV มาก ๆ ซึ่งจะให้ผลการคำนวณที่เร็วกว่าแบบอื่น ๆ แต่เมื่อเลขเรย์โนลด์ต่ำ หรือจำนวน CV ที่คำนวณน้อย ความเร็วที่ได้ยังน้อยกว่าแบบอื่น

4.2.4 Sawtooth-Cycle

Sawtooth-Cycle นี้ เป็นแบบที่ถือว่าดีกว่าแบบอื่น ๆ เนื่องจากขณะที่ทำการส่งถ่ายผลการคำนวณไปสู่กริดที่หยาบกว่านั้นไม่มีการ Relaxation จึงส่งผลให้การคำนวณลู่ออกเมื่อมีการส่งถ่ายผลการคำนวณไปหลายระดับกริด ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับเลขเรย์โนลด์ด้วย คือที่เลขเรย์โนลด์สูง ๆ การคำนวณจะใช้ได้ที่จำนวนระดับกริดไม่เกิน 6 ระดับเท่านั้น หากมากกว่านี้จะต้องเปลี่ยนค่า Under-relaxation ให้มีค่าน้อย ๆ จึงจะสามารถคำนวณได้ ดังนั้นวิธีกริดหลายระดับแบบนี้จึงไม่เหมาะสมกับการไหลในงานวิจัยนี้

4.2.5 Full Multigrid Cycle

เนื่องจาก Full Multigrid Cycle นี้ จะอาศัยค่าแฟกเตอร์ตัวหยุดและค่าแฟกเตอร์เกณฑ์การลู่เข้าเป็นตัวปรับเปลี่ยนระดับกริด จึงสามารถคำนวณผลได้รวดเร็วกว่าแบบอื่น ๆ หากค่าแฟกเตอร์ทั้งสองตัวนี้เหมาะสม แต่งานวิจัยนี้ใช้ค่าคงที่ จึงอาจไม่เหมาะสมกับทุก ๆ แบบที่ทำการคำนวณผล ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการคำนวณจึงดีกว่าแบบอื่นในบางครั้ง แต่ภาพโดยรวมถือว่าระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบนี้เหมาะที่จะประยุกต์ใช้เป็นอย่างยิ่ง

4.2.6 Full Multigrid V-Cycle

วิธีนี้อาจถือได้ว่าเป็น V-Cycle แต่มีการเตรียมค่าในการเริ่มต้นที่ดีกว่า V-Cycle ปกติ ดังนั้นผลการคำนวณที่ได้จึงดีกว่า V-Cycle แต่การคำนวณค่าเริ่มต้นนั้นจะต้องเริ่มจากระดับกริดที่หยาบที่สุด ผลการคำนวณจึงจะเร็วที่สุด ดังแสดงให้เห็นในตารางที่ 4.91 ถึงตารางที่ 4.93 คือ จำนวนระดับกริดที่ใช้ยิ่งมาก ความเร็วในการคำนวณก็จะยิ่งเร็วขึ้น

4.2.7 Cascadic Multigrid

Cascadic Multigrid ไม่ถือว่าเป็นระเบียบวิธีกริดหลายระดับจริง ๆ เนื่องจากการส่งถ่ายข้อมูลนั้นเป็นการเตรียมค่าที่จะใช้ในการเริ่มต้นให้กับกริดที่ละเอียดกว่าเท่านั้น (Douglas, 1996) ส่วนตอนที่มีการคำนวณผลไม่มีการส่งถ่ายค่าผลเฉลยไปมาระหว่างกริด ดังนั้นผลการคำนวณที่ได้จึงดีกว่าการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียวประมาณ 2-4 เท่า แต่จะใช้ได้ผลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ต่ำ ๆ เท่านั้น (Walters, 2003; Xu et al., 2002) เมื่อเลขเรย์โนลด์สูง ๆ แล้วคำนวณผลได้ช้ากว่าการใช้กริดระดับเดียว เนื่องจากต้องเสียเวลาไปกับการเตรียมค่าเริ่มต้นให้กับกริดละเอียด

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทนี้เป็นการสรุปถึงผลการคำนวณของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้น เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาการไหลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว และข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไปในอนาคต

5.1 สรุปผลการวิจัย

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นนี้ สามารถที่จะคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาการไหลแบบคงตัว สองมิติ ราบเรียบและไม่อัดตัว ซึ่งสามารถกำหนดจำนวนของปริมาตรควบคุม จำนวนระดับของกริดที่จะใช้ในการคำนวณ เลขเรย์โนลด์ และแบบต่าง ๆ ของระเบียบวิธีกริดหลายระดับ รวมไปถึงการคำนวณที่ใช้กริดเพียงระดับเดียว ซึ่งผลที่ได้จากการคำนวณจะแสดงผลออกมาในรูปแบบของไฟล์ข้อมูล ผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมมีความแม่นยำสูงเป็นที่น่าพอใจและสอดคล้องกับผลเฉลยอ้างอิง ซึ่งอัตราความเร็วเมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียว พบว่าอัตราการลู่เข้าของระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ ดังนี้

ตารางที่ 5.1 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 400

ขนาดกริดที่ใช้ (CV)	64x64	128x128	256x256	512x512
V-Cycle	40	300	470	1,350
W-Cycle1	35	290	520	1,580
W-Cycle2	40	250	500	1,560
F-Cycle	30	260	450	1,500
Sawtooth-Cycle	20	80	120	250
FMG-Cycle	35	300	600	1,650
FMG V-Cycle	35	250	580	1,400
Cascadic	2	4	-	-

ตารางที่ 5.2 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 1000

ขนาดกริดที่ใช้ (CV)	64x64	128x128	256x256	512x512
V-Cycle	40	70	300	480
W-Cycle1	30	110	570	750
W-Cycle2	30	110	560	820
F-Cycle	30	100	590	720
Sawtooth-Cycle	10	15	75	60
FMG-Cycle	30	90	540	830
FMG V-Cycle	30	80	450	800
Cascadic	1.6	1.5	-	-

ตารางที่ 5.3 สรุปอัตราความเร็วของระเบียบวิธีกริดหลายระดับเป็นจำนวนเท่าของการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียว ที่เลขเรย์โนลด์ 5000

ขนาดกริดที่ใช้ (CV)	64x64	128x128	256x256	512x512
V-Cycle	19	40	40	180
W-Cycle1	16	30	40	390
W-Cycle2	19	40	40	340
F-Cycle	14	25	20	630
Sawtooth-Cycle	14	7	10	20
FMG-Cycle	14	45	130	520
FMG V-Cycle	13	30	50	210
Cascadic	0.85	0.82	-	-

จากการคำนวณของโปรแกรมนี้พบว่า การใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบต่าง ๆ ในการหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์-สโตกส์นั้น การใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแบบ Full Multigrid Cycle นั้นเหมาะสมเป็นอย่างยิ่งเมื่อดูโดยรวม แต่ถ้าที่จำนวนของปริมาตรควบคุมที่ใช้ในการคำนวณน้อยไม่เกิน 128x128 CV แล้ว ระเบียบวิธีกริดหลายระดับแต่ละแบบไม่ค่อยจะแตกต่างกันมากนัก ยกเว้น Sawtooth-Cycle กับ Cascadic ซึ่งทั้งสองแบบนี้ ไม่เหมาะกับระบบสมการที่ไม่เชิงเส้น

จะเห็นว่าเมื่อจำนวนของกริดมากขึ้น อัตราความเร็วจะสูงขึ้น ซึ่งการใช้จำนวนกริดมาก ๆ นั้นมีข้อดี คือให้ความถูกต้องในการคำนวณมากกว่าการใช้กริดน้อย ๆ แต่ข้อเสียก็คือการคำนวณจะต้องใช้เวลานาน ดังนั้นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีกริดหลายระดับจะสามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงได้อย่างมาก ซึ่งสามารถใช้ได้กับกริดที่จำนวนมาก ๆ ได้เป็นอย่างดี ส่วนจำนวนของระดับกริดที่ประยุกต์ใช้นั้น จากตารางที่ 4.91 ถึงตารางที่ 4.93 พบว่าจำนวนระดับกริดเท่ากับ 6 ระดับนั้นเหมาะสมที่นำไปประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีกริดหลายระดับได้ทุก Cycle

สำหรับ Sawtooth-Cycle นั้น การคำนวณจะมีเฉพาะช่วงที่มีการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปสู่กริดละเอียดเท่านั้น จึงส่งผลให้การลู่เข้าช้ากว่าระเบียบวิธีอื่น ๆ มากจึงไม่เหมาะกับการประยุกต์ใช้กับปัญหานี้

ส่วน Cascadic Multigrid จะเร็วกว่าการคำนวณโดยใช้กริดระดับเดียวประมาณ 4 เท่า ที่กริดขนาด 128×128 CV และเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 400 แต่เมื่อเลขเรย์โนลด์สูง ๆ คือ 5000 กลับพบว่าการคำนวณจะช้ากว่าการคำนวณโดยใช้ กริดระดับเดียว นั่นคือ 0.8 เท่า จึงไม่เหมาะที่จะนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหล

5.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

จะเห็นว่าในขั้นตอนการคำนวณของระเบียบวิธีกริดหลายระดับนั้น มีค่าของตัวเลขต่าง ๆ ที่จะต้องมีการปรับปรุงเพื่อให้การลู่เข้าเร็วที่สุด เช่นค่า Under Relaxation จำนวนรอบการทำซ้ำในแต่ละระดับของกริดที่ใช้คำนวณ เป็นต้น ซึ่งเมื่อค่าองค์ประกอบต่างกัน ค่าของตัวเลขแต่ละตัวก็ยังคงเปลี่ยนแปลงไปด้วยเพื่อให้เหมาะสมกับปัญหามากที่สุด ดังนั้นหากสามารถที่จะหาสูตรเพื่อปรับเปลี่ยนค่าต่าง ๆ นี้ให้เหมาะสม และประยุกต์ใช้ได้กับทุกกรณี จะสามารถทำให้ประสิทธิภาพของระเบียบวิธีกริดหลายระดับนี้ดียิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- บุญลือ สวัสดิ์มงคล. (2544). การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- สอาด สุกฤษณ์. (2543). การวิเคราะห์ปัญหาการไหลด้วยวิธีไฟไนต์วอลุ่ม. รายงานการศึกษาระดับปริญญาโท สาขาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยขอนแก่น; 2543.
- สอาด สุกฤษณ์. (2544). การประยุกต์ใช้วิธีการหลายระดับกับปัญหาการไหลแบบ 2 มิติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- เอกชัย จันทสาโร. (2543). เอกสารประกอบการสอนรายวิชา พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเบื้องต้น. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- Anderson, W. K., Thomas, J. L. and Whitfield, D. L. (1988). Multigrid Acceleration of the Flux-Split Euler Equations. **AIAA Journal** 26, 649-654.
- Amone, A., Liou, M. S. and Povinelli, L. A. (1991). Multigrid Calculation of Three-Dimensional Viscous Cascade Flows. . **NASA Technical Memorandum 105257 (ICOM-91-18)**.
- Bornemann, F.A. and Deufhard, P. (1996). The Cascadic Multigrid Method for Elliptic Problems. **Numerische Mathematik Electronic Edition** 75: 135-152.
- Brandt, A. (1977). Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. **Mathematics of Computation**. vol. 138: 333-390.
- Budugur, L. (1995). **Fluid Dynamics and Heat Transfer of Thermo Machinery**. McGraw-Hill, Singapore.
- Demuren, A. O. (1991). Multigrid Acceleration and Turbulence Models for Computations of 3D Turbulent Jets in Crossflow. **NASA Technical Memorandum 105306 (ICOM-91-20)**.
- Douglas, C. C. (1996). Multigrid Methods in Science and Engineering. **IEEE Computational Science & Engineering** 1070-9924, 55-68.
- Douglas, C. C. and Walters, K. M. (2000). **Variable Order Cascadic Multigrid Algorithms**. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.

- Durga, K. K. and Ramakrishna, M. (2002). A New Multigrid Algorithm for Non-Linear Equations in Conjunction with Time-Marching Procedures. **International Journal of Non-Linear Mechanics** 39, 233-245.
- Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T. (1982). High-Re Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. **Journal of Computational Physics** 48, 387-411.
- Ham, F.E., Lien, F.S. and Strong, A.B. (1999). **Efficient Direct Numerical Simulation Using Multigrid with Dynamic Semi-Coarsening**. Proceedings of the 7th Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics, Society of Canada Halifax, Nova Scotia.
- Kim, J. and Moin, P. (1985). Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics** 59, 308-323.
- Mavriplis, D. J. and Venkatakrishnan, V. (1995). A Unified Multigrid Solver for the Navier-Stokes Equations on Mixed Element Meshes. **ICASE** No. 95-53.
- Olsahanskii, M. A. and Reusken, A. (2000). On the Convergence of a Multigrid Method for Linear Reaction-Diffusion Problems. **Computing** 65, 193-202. Austria.
- Patankar, S. V. (1980). **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. McGraw-Hill.
- Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat and mass transfer in three-dimensional parabolic flows, **Int. J. Heat Mass Transfer**, 15, 1787-1806.
- Pernice, M. (2000). A hybrid multigrid method for the steady-state incompressible navier-stokes equations. **Electronic Transactions on Numerical Analysis**. 10, 74-91.
- Rhie, C. M. and Chow, W. L. (1983). Numerical Study of the Turbulent Flow past an Airfoil with Trailing Edge Separation. **AIAA Journal** 21 (11): 1525-1532.
- Shaw, C. T. (1992). **Using Computational Fluid Dynamics**. Prentice Hall, London.
- Spitaleri, R. M. (2000). Full-FAS multigrid grid generation algorithms. **Applied Numerical Mathematics** 32 (2000) 483-494.
- Sulak, S. and Juntasaro, E. (2003). **Multigrid Tutorial for Linear Elliptic Problems**. Workshop on Computational Fluid Dynamics 7th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering, Chulalongkorn University.
- Swanson, R. C., Turkel, E. and White, J. A. (1991). An Effective Multigrid Method for High-Speed Flows. **ICASE** No. 91-56.

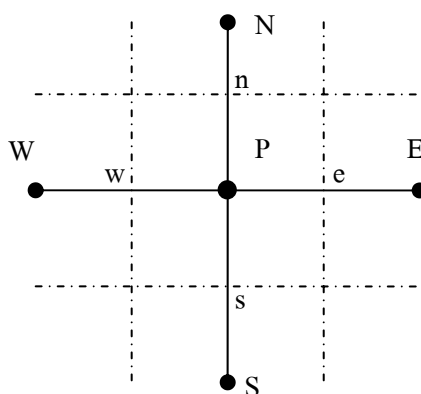
- Thompson, M. C. and Ferziger, J. H. (1988). An Adaptive Multigrid Technique for the Incompressible Navier-Stokes Equations. **Journal of Computational Physics**.
- Vanka, S.P. (1985). Block-Implicit Multigrid Calculation of Two-Dimensional Recirculating Flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. North-Holland.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995). **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**. Longman Group.
- Walters, K. M. (2003). **Variable Order Cascadic Multigrid**. Ph.D. Thesis, University of Kentucky, Kentucky.
- Wesseling, P. (1992). **Introduction to Multigrid Methods**. John Wiley & Sons, Chichester.
- Wesseling, P. (1995). Introduction to Multigrid Methods. **ICASE** No. 95-11.
- Xu, X. (2002). On V-Cycle Multigrid Implementation for Plate Elements. **Applied Mathematics and Computation** 125, 141-153.
- Xu, X., Janka, A. and Desideri, J.A. (2002). Cascadic Multigrid for the Advection-Diffusion Equation. **INRIA Sophia Antipolis**, France.
- Zhang, J. (2002) Multigrid Method and Fourth-Order Compact Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization. **Journal of Computational Physics** 179, 170-179.
- Zhang, J., Sun, H. and Zhao, J. J. (2002). High order compact scheme with multigrid local mesh refinement procedure for convection diffusion problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 191, 4661-4674.

ภาคผนวก ก

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การสร้างสมการดิครีไทสต์ (Discretization)

การแปลงสมการการส่งถ่ายคุณสมบัติ (Transport Equation) ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้กลายเป็นสมการที่มีรูปแบบเป็นความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของตัวแปรบนจุดต่าง ๆ ซึ่งรูปแบบของสมการดิครีไทสต์นั้นขึ้นอยู่กับวิธีการเลือกใช้จุดที่นำมาสร้างเป็นความสัมพันธ์กันทางสมการ ซึ่งสามารถสร้างได้หลายรูปแบบด้วยกัน เช่น ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 9 จุด (Nine-Point Stencil) ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 5 จุด (Five-Point Stencil) เป็นต้น ซึ่งในที่นี้จะประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 5 จุด ในการสร้างสมการดิครีไทสต์ ดังรูปที่ ก1 เมื่อ P คือจุดกลาง N คือจุดบน S คือจุดล่าง W คือจุดทางซ้าย และ E เป็นจุดทางขวา และเส้นประเป็นเส้นขอบเขตปริมาตรควบคุม



รูปที่ ก1 ความสัมพันธ์แบบผลต่าง 5 จุด

จากสมการการส่งถ่ายคุณสมบัติเมื่อประยุกต์เข้ากับกริดร่วม แล้วทำการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุมก็จะได้รูปแบบดังนี้

Continuty Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (ก1)$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx dy + \int_w^e \int_s^e \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy dx = 0 \quad (ก2)$$

$$(\rho Au)_e - (\rho Au)_w + (\rho Av)_n - (\rho Av)_s = 0 \quad (ก3)$$

$$\therefore F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (ก4)$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ผิวแต่ละด้านของปริมาตรควบคุม

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho Au)_e, F_w = (\rho Au)_w \\ F_n &= (\rho Av)_n, F_s = (\rho Av)_s \end{aligned} \quad (ก5)$$

x-Momentum Equation

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (ก6)$$

อินทิเกรตตลอด Control Volume จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) dy dx &= \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx dy + \\ \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy dx - \int_s^e \int_w^n \frac{\partial p}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad (ก7)$$

พิจารณาทีละเทอม

$$\begin{aligned} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) dx dy &= (\rho u)_e u_e \Delta y - (\rho u)_w u_w \Delta y \\ &= F_e u_e - F_w u_w \end{aligned} \quad (ก8)$$

$$\begin{aligned} \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) dy dx &= (\rho v)_n u_n \Delta x - (\rho v)_s u_s \Delta x \\ &= F_n u_n - F_s u_s \end{aligned} \quad (ก9)$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy &= \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \Delta y - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \Delta y \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e (\Delta u)_e \Delta y - \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w (\Delta u)_w \Delta y \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e (u_E - u_P) \Delta y - \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w (u_P - u_W) \Delta y \\
&= D_e (u_E - u_P) - D_w (u_P - u_W)
\end{aligned} \tag{n10}$$

□

$$\begin{aligned}
D_e &= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e \Delta y \\
D_w &= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w \Delta y
\end{aligned} \tag{n11}$$

$$\begin{aligned}
\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dx &= \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \Delta x - \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \Delta x \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n (\Delta u)_n \Delta x - \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s (\Delta u)_s \Delta x \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n (u_N - u_P) \Delta x - \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s (u_P - u_S) \Delta x \\
&= D_n (u_N - u_P) - D_s (u_P - u_S)
\end{aligned} \tag{n12}$$

□

$$\begin{aligned}
D_n &= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n \Delta x \\
D_s &= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s \Delta x
\end{aligned} \tag{n13}$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial p}{\partial x} dx dy = (p_w - p_e) \Delta y \tag{n14}$$

รวมทุกเทอมเข้าด้วยกัน

$$F_e u_e - F_w u_w + F_n u_n - F_s u_s = D_e (u_E - u_P) - D_w (u_P - u_W) + D_n (u_N - u_P) - D_s (u_P - u_S) - (p_w - p_e) \Delta y \quad (ก15)$$

y-Momentum Equation

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (ก16)$$

อินทิเกรตตลอด Control Volume จะได้ว่า

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} (\rho vv) dy dx = \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy dx - \int_w^n \int_s^e \frac{\partial p}{\partial y} dy dx \quad (ก17)$$

พิจารณาทีละเทอม

$$\begin{aligned} \int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) dx dy &= (\rho u)_e v_e \Delta y - (\rho u)_w v_w \Delta y \\ &= F_e v_e - F_w v_w \end{aligned} \quad (ก18)$$

$$\begin{aligned} \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} (\rho vv) dy dx &= (\rho v)_n v_n \Delta x - (\rho v)_s v_s \Delta x \\ &= F_n v_n - F_s v_s \end{aligned} \quad (ก19)$$

$$\begin{aligned}
\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy &= \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e \Delta y - \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \Delta y \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e (\Delta v)_e \Delta y - \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w (\Delta v)_w \Delta y \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e (v_E - v_P) \Delta y - \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w (v_P - v_W) \Delta y \\
&= D_e (v_E - v_P) - D_w (v_P - v_W)
\end{aligned} \tag{n20}$$

□

$$\begin{aligned}
D_e &= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_e \Delta y \\
D_w &= \left(\frac{\mu}{\Delta x} \right)_w \Delta y
\end{aligned} \tag{n21}$$

$$\begin{aligned}
\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy dx &= \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_n \Delta x - \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \Delta x \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n (\Delta v)_n \Delta x - \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s (\Delta v)_s \Delta x \\
&= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n (v_N - v_P) \Delta x - \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s (v_P - v_S) \Delta x \\
&= D_n (v_N - v_P) - D_s (v_P - v_S)
\end{aligned} \tag{n22}$$

□

$$\begin{aligned}
D_n &= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_n \Delta x \\
D_s &= \left(\frac{\mu}{\Delta y} \right)_s \Delta x
\end{aligned} \tag{n23}$$

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial p}{\partial y} dy dx = (p_s - p_n) \Delta x \tag{n24}$$

รวมทุกเทอมเข้าด้วยกัน

$$F_e v_e - F_w v_w + F_n v_n - F_s v_s = D_e (v_E - v_P) - D_w (v_P - v_W) + D_n (v_N - v_P) - D_s (v_P - v_S) - (p_s - p_n) \Delta x \quad (ก25)$$

สมการ (ก15) และ สมการ (ก25) เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปคุณสมบัติ ϕ จะได้ดังนี้

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S) + \bar{S}_\phi \Delta V \quad (ก26)$$

เมื่อ $\bar{S}_\phi$ เป็นค่าเฉลี่ยของ Source และ ΔV เป็นปริมาตรควบคุม

การประมาณค่าแบบผลต่างต้นกระแส

ก) เมื่อการไหลมีทิศทางไปทาง +x รูปที่ ก2 (ก) จะประมาณค่า ϕ ได้ว่า $\phi_w = \phi_W$ และ $\phi_e = \phi_P$ และในทำนองเดียวกันกับแกน y ซึ่งมีทิศทางการไหลไปทาง +y จะได้ว่า $\phi_s = \phi_S$ และ $\phi_n = \phi_P$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (ก26) โดยยังไม่คิดเทอมซอสได้เป็นดังนี้

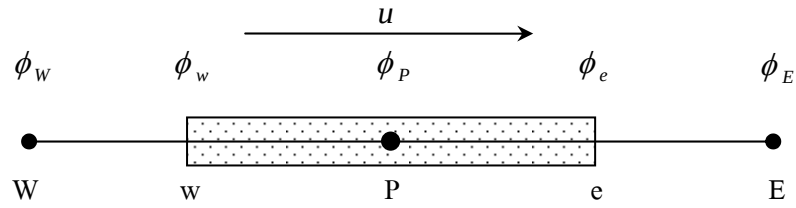
$$F_e \phi_P - F_w \phi_W + F_n \phi_P - F_s \phi_S = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) + D_s (\phi_P - \phi_S) \quad (ก27)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

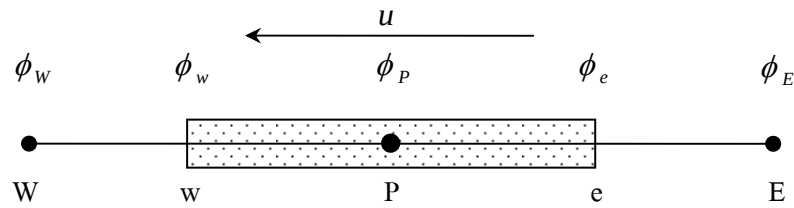
$$[D_e + D_w + D_n - D_s + F_e + F_n] \phi_P = D_e \phi_E + (D_w + F_w) \phi_W + D_n \phi_N + (D_s + F_s) \phi_S \quad (ก28)$$

จากสมการ (ก28) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S \quad (ก29)$$



(ก) การไหลในทิศทาง + x



(ข) การไหลในทิศทาง - x

รูปที่ ก2 ค่าคุณสมบัติของการไหลเมื่อใช้การประมาณค่าแบบผลต่างศูนย์กลาง

เมื่อสัมพันธ์แต่ละตัวเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
 a_E &= D_e \\
 a_W &= D_w + F_w \\
 a_N &= D_n \\
 a_S &= D_s + F_s \\
 a_P &= D_e + D_w + D_n + D_s + F_e + F_n
 \end{aligned}
 \tag{ก30}$$

เนื่องจาก $a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$

ดังนั้นจึงจัดรูปใหม่โดยการบวกเข้าลบออกซึ่งจะยังคงค่าเดิม

$$a_P = D_w + D_e + D_s + D_n + F_w + F_s + (F_e - F_w + F_n - F_s)$$

จะเห็นว่าค่าที่อยู่ในวงเล็บจะเท่ากับศูนย์เนื่องจากกฎการอนุรักษ์มวล

$$\therefore a_P = D_w + D_e + D_s + D_n + F_w + F_s = a_W + a_E + a_S + a_N$$

ข) เมื่อการไหลมีทิศทางไปทาง -x รูปที่ 3.4 (ข) จะประมาณค่า ϕ ได้ว่า $\phi_w = \phi_P$ และ $\phi_e = \phi_E$ และในทำนองเดียวกันกับแกน y ซึ่งมีทิศทางการไหลไปทาง -y จะได้ว่า $\phi_s = \phi_P$ และ $\phi_n = \phi_N$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ (ก26) โดยยังไม่คิดเทอมซอสได้เป็นดังนี้

$$F_e\phi_E - F_w\phi_P + F_n\phi_N - F_s\phi_P = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) + D_s(\phi_P - \phi_S) \quad (ก31)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$[D_e - D_w + D_n - D_s - F_w - F_s]\phi_P = (D_e - F_e)\phi_E + D_w\phi_W + (D_n - F_n)\phi_N + D_s\phi_S \quad (ก32)$$

จากสมการ (ก32) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S \quad (ก33)$$

เมื่อสัมประสิทธิ์แต่ละตัวเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} a_E &= D_e - F_e \\ a_W &= D_w \\ a_N &= D_n - F_n \\ a_S &= D_s \\ a_P &= D_e + D_w + D_n + D_s - F_w - F_s \end{aligned} \quad (ก34)$$

เนื่องจาก $a_P = a_W + a_E + a_S + a_N$

ดังนั้นจึงจัดรูปใหม่โดยการบวกเข้าลบออกซึ่งจะยังคงค่าเดิม

$$a_P = D_w + D_e + D_s + D_n - F_e - F_n + (F_e - F_w + F_n - F_s)$$

จะเห็นว่าค่าที่อยู่ในวงเล็บจะเท่ากับศูนย์เนื่องจากกฎการอนุรักษ์มวล

$$\therefore a_P = D_w + D_e + D_s + D_n - F_e - F_n = a_W + a_E + a_S + a_N$$

เทอมสัมประสิทธิ์ในสมการ (ก30) และ (ก34) สามารถสรุปการไหลทั้ง 2 แกน เป็น 4 กรณี จากวิธีการประมาณค่าแบบผลต่างศูนย์กลางได้ดังตารางที่ ก1

ตารางที่ ก1 สรุปเทอมสัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีการประมาณค่าแบบผลต่างต้นกระแส

ทิศทาง	a_w	a_e	a_s	a_n
+x	$D_w + F_w$	D_e	-	-
-x	D_w	$D_e - F_e$	-	-
+y	-	-	$D_s + F_s$	D_n
-y	-	-	D_s	$D_n - F_n$

ดังนั้นสมการที่ได้ทำการดิสครีไทส์เป็นรูปทั่วไป สามารถเขียนเทอมสัมประสิทธิ์ในรูปแบบทั่วไปให้สามารถครอบคลุมทั้ง 4 กรณี ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 a_w &= D_w + \max(F_w, 0) \\
 a_e &= D_e - \max(F_e, 0) \\
 a_s &= D_s + \max(F_s, 0) \\
 a_n &= D_n - \max(F_n, 0) \\
 a_p &= a_w + a_e + a_s + a_n
 \end{aligned}
 \tag{ก35}$$

ขั้นตอนวิธี SIMPLE

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 p &= p^* + p' \\
 u &= u^* + u' \\
 v &= v^* + v'
 \end{aligned}
 \tag{ก36}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 \phi &\equiv \text{ค่าที่ถูกต้อง} \\
 \phi^* &\equiv \text{ค่าที่ได้จากการเดา} \\
 \phi' &\equiv \text{ค่าแก้ไข}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการดิสครีไทส์โมเมนต์ในรูปแบบผลเฉลยโดยประมาณจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 a_p^u u_p^* &= \sum a_{nb}^u u_{nb}^* + S_u^* \\
 a_p^v v_p^* &= \sum a_{nb}^v v_{nb}^* + S_v^*
 \end{aligned}
 \tag{ก37}$$

จากการกำหนด $\phi = \phi^* + \phi'$ จะทำให้ได้สมการค่าแก้ไขเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} a_p^u u_p' &= \sum a_{nb}^u u_{nb}' + S_u' \\ a_p^v v_p' &= \sum a_{nb}^v v_{nb}' + S_v' \end{aligned} \quad (ก38)$$

จากสมการ (ก38) จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการที่ใช้แก้ไขค่าที่ได้จากการประมาณให้เป็นค่าที่ถูกต้อง ดังนั้นจึงกำหนดให้เทอมของค่ารอบข้างเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \sum a_{nb}^u u_{nb}' &= 0 \\ \sum a_{nb}^v v_{nb}' &= 0 \end{aligned} \quad (ก39)$$

ดังนั้น จึงสามารถหาค่าความเร็วแก้ไขได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} u_p' &= \frac{S_u'}{a_p^u} = \frac{\Delta y}{a_p^u} (p_w' - p_e') \\ v_p' &= \frac{S_v'}{a_p^v} = \frac{\Delta x}{a_p^v} (p_s' - p_n') \end{aligned} \quad (ก40)$$

เมื่อได้สมการหาค่าแก้ไขความเร็ว แล้วก็สามารถที่จะสร้างเป็นสมการหาความเร็วที่สามารถหาค่าผลเฉลยที่ถูกต้องได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_p &= u_p^* + d_p^u (p_w' - p_e') \\ v_p &= v_p^* + d_p^v (p_s' - p_n') \end{aligned} \quad (ก41)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} d_p^u &= \frac{\Delta y}{a_p^u} \\ d_p^v &= \frac{\Delta x}{a_p^v} \end{aligned} \quad (ก42)$$

ผลเฉลยที่ได้จากสมการ (ก41) เป็นค่าความเร็วที่ได้รับการแก้ไขแล้ว แต่เนื่องจากค่าแก้ไขอยู่ในรูปของความดันแก้ไข p' ซึ่งยังไม่รู้ค่า จึงไม่สามารถทำการแก้สมการเพื่อหาค่าความเร็วได้ จนกว่าจะ

ทราบค่าความดันแก้ไขก่อน การหาค่าความดันแก้ไขจึงจำเป็นต้องสร้างสมการอีกชุดหนึ่งขึ้นมา เพื่อหาค่าแก้ไขดังกล่าวนี้โดยเฉพาะ โดยการประยุกต์ความเร็วที่ได้จากสมการ (ก41) เข้ากับสมการความต่อเนื่อง (ก4) ซึ่งอาศัยหลักการที่ว่าเมื่อความเร็วที่ได้จากสมการ โมเมนตัมถูกต้องแล้ว ย่อมทำให้สมการความต่อเนื่องเป็นจริงไปด้วยดังนี้

$$(\rho A)_e u_e - (\rho A)_w u_w + (\rho A)_n v_n - (\rho A)_s v_s = 0 \quad (\text{ก43})$$

ซึ่งเปลี่ยนให้อยู่ในรูปสมการค่าแก้ไขเป็นดังนี้

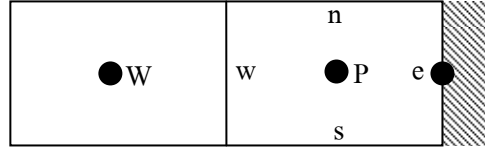
$$(\rho A)_e (u_e^* + u_e') - (\rho A)_w (u_w^* + u_w') + (\rho A)_n (v_n^* + v_n') - (\rho A)_s (v_s^* + v_s') = 0 \quad (\text{ก44})$$

แต่จากสมการความต่อเนื่องพบว่า ความเร็วที่ปรากฏอยู่ในแต่ละเทอมเป็นค่าความเร็วที่ตำแหน่งขอบเขตของปริมาตรควบคุม ซึ่งตำแหน่งที่ว่านี้จะไม่มีกรเก็บค่าใด ๆ ไว้ ดังนั้นการหาค่าความเร็วที่ตำแหน่งดังกล่าวจึงต้องใช้การประมาณค่าจากความเร็วที่จุดกลางกับความเร็วที่จุดข้างเคียง ซึ่งการประมาณค่านี้นหากเลือกใช้ไม่ได้อาจทำให้เกิดการแกว่งไปมา (Oscillation) ของผลเฉลยระหว่างรอบการคำนวณ และอาจไม่ลู่เข้าหาคำตอบได้ ดังนั้นในที่นี้จึงเลือกใช้การประมาณค่าตามวิธีของ Rhie and Chow กับพจน์ความเร็ว u^* และ v^* ซึ่งจะได้รูปแบบของแต่ละเทอมเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} u_e^* &= \frac{u_p^* + u_E^*}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{p,p}^u} + \frac{1}{a_{p,E}^u} \right) \left[\left(\frac{p_E - p_p}{x_E - x_p} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_E \right) \right] \Delta A_e \\ u_w^* &= \frac{u_p^* + u_W^*}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{p,p}^u} + \frac{1}{a_{p,W}^u} \right) \left[\left(\frac{p_p - p_W}{x_p - x_W} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_W \right) \right] \Delta A_w \\ v_n^* &= \frac{v_p^* + v_N^*}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{p,p}^v} + \frac{1}{a_{p,N}^v} \right) \left[\left(\frac{p_N - p_p}{y_N - y_p} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_p + \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_N \right) \right] \Delta A_n \\ v_s^* &= \frac{v_p^* + v_S^*}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{p,p}^v} + \frac{1}{a_{p,S}^v} \right) \left[\left(\frac{p_p - p_S}{y_p - y_S} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_p + \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_S \right) \right] \Delta A_s \end{aligned} \quad (\text{ก45})$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ $a_{p,p}^u$, $a_{p,p}^v$, $a_{p,E}^u$, $a_{p,W}^u$, $a_{p,N}^v$ และ $a_{p,S}^v$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ a_p เมื่อตัวห้อยที่ตามหลังเครื่องหมาย “,” P คือตำแหน่งที่ทำการพิจารณา ส่วน E, W, N และ S เป็นตำแหน่งด้านขวา ด้านซ้าย ด้านบน และด้านล่างตามลำดับ และพจน์เกรเดียนต์ความดันหาได้ดังนี้

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{p_e - p_w}{x_e - x_w} = \frac{1}{x_e - x_w} \left(\frac{(p_E + p_P)}{2} - \frac{(p_P + p_W)}{2} \right) = \frac{p_E - p_W}{2(x_e - x_w)} \quad (ก46)$$



รูปที่ ก3 แสดงการวางจุดที่บริเวณขอบโดเมน

แต่เมื่อเป็นจุดต่อที่อยู่ติดกับขอบเขตโดเมน ดังรูปที่ ก3 การหาค่าเกรเดียนต์ที่จุด P โดยสมการ (ก46) จำเป็นที่จะต้องทราบค่า p_E ซึ่งในที่นี้ $p_E = p_e$ เพราะเป็นจุดต่อที่ขอบเขต แต่เนื่องจากการหาค่าความดันโดยผ่านทางสมการแก้ไขความดัน จะได้ค่าที่จุดต่อภายในเท่านั้น ส่วนค่าที่ขอบเขตจะไม่มี ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการ Extrapolate เพื่อให้ได้ค่าที่จุดต่อของขอบเขต e โดยใช้ค่าจากจุด P และจุด W สำหรับนำไปใช้ในการหาค่าเกรเดียนต์ แต่เนื่องจาก $p_E = p_e$ อยู่แล้ว จึงไม่จำเป็นต้องประมาณค่าที่ด้าน e ของเซลล์อีก ดังนั้นรูปสมการ (ก46) สำหรับหาค่าเกรเดียนต์ที่เซลล์ซึ่งติดกับขอบโดเมนเป็นดังนี้

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{1}{x_e - x_w} \left[p_e - \left(\frac{p_P + p_W}{2} \right) \right] = \frac{2p_e - (p_P + p_W)}{2(x_e - x_w)} \quad (ก47)$$

ส่วนเทอมความเร็วแก้ไขให้ใช้วิธีการประมาณค่าผลต่างกลาง เนื่องจากเทอมนี้เป็นเทอมที่ใช้แก้ไขค่า ดังนั้นเมื่อการคำนวณลู่อเข้าหาคำตอบแล้วจะกลายเป็นศูนย์ จึงไม่จำเป็นต้องใช้การประมาณค่าตามวิธีของ Rhie and Chow สมการจึงเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
u'_e &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{P,P}^u} + \frac{1}{a_{P,E}^u} \right) \left(\frac{p'_E - p'_P}{x_E - x_P} \right) \Delta A_e \\
u'_w &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{P,P}^u} + \frac{1}{a_{P,W}^u} \right) \left(\frac{p'_P - p'_W}{x_P - x_W} \right) \Delta A_w \\
v'_n &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{P,P}^v} + \frac{1}{a_{P,N}^v} \right) \left(\frac{p'_N - p'_P}{y_N - y_P} \right) \Delta A_n \\
v'_s &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{P,P}^v} + \frac{1}{a_{P,S}^v} \right) \left(\frac{p'_P - p'_S}{y_P - y_S} \right) \Delta A_s
\end{aligned} \tag{ก48}$$

แทนค่าสมการ (ก45) และ (ก48) ลงในสมการ (ก44) แล้วจัดรูปสมการใหม่ให้สอดคล้องกับรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\rho A_e^2}{(a_P^u)_e} + \frac{\rho A_w^2}{(a_P^u)_w} + \frac{\rho A_n^2}{(a_P^v)_n} + \frac{\rho A_s^2}{(a_P^v)_s} \right] p'_P \\
&= \frac{\rho A_e^2}{(a_P^u)_e} p'_e + \frac{\rho A_w^2}{(a_P^u)_w} p'_w + \frac{\rho A_n^2}{(a_P^v)_n} p'_n + \frac{\rho A_s^2}{(a_P^v)_s} p'_s \\
&- \left[(\rho A_e u_E^* - \rho A_w u_W^*) + (\rho A_n v_N^* - \rho A_s v_S^*) \right]
\end{aligned} \tag{ก49}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการทั่วไปได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
a_P^p p'_P &= a_E^p p'_E + a_W^p p'_W + a_N^p p'_N + a_S^p p'_S + S_p \\
a_P^p p'_P &= \sum a_{nb}^p p'_{nb} + S_p
\end{aligned} \tag{ก50}$$

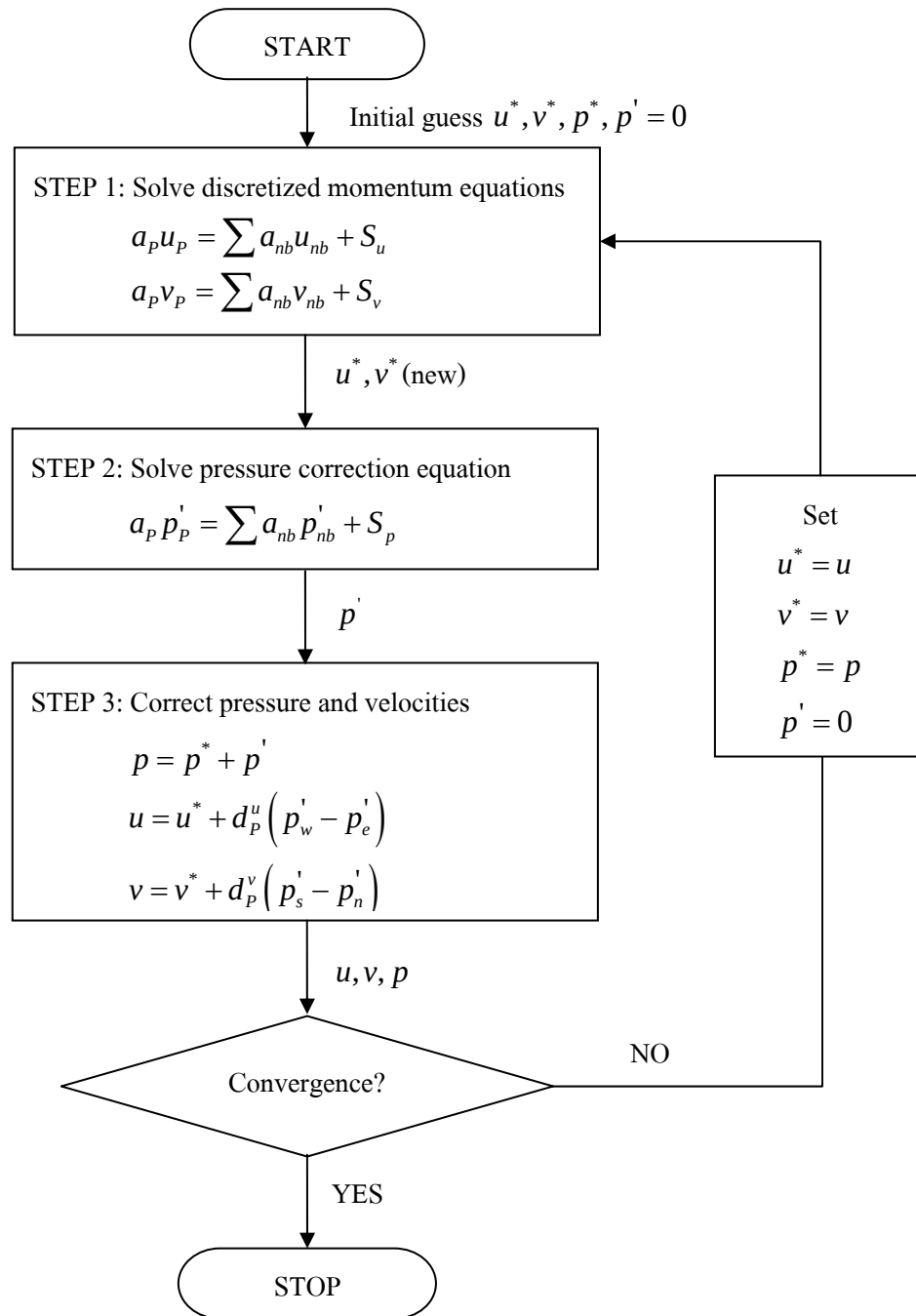
สมการ (ก50) ที่ได้นี้เรียกว่าสมการความดันแก้ไข เนื่องจากการสร้างขึ้นมาเพื่อทำการแก้ไขค่าความดันให้กับสมการโมเมนตัม เพื่อให้ความเร็วที่ได้จากการแก้สมการโมเมนตัมทั้งสองสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องนั่นเอง ซึ่งเมื่อค่าความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมให้ผลที่ถูกต้องแล้วค่าความดัน p' ก็จะกลายเป็นศูนย์ นั่นหมายความว่าสมการนี้สามารถใช้ตรวจสอบได้ในตัวว่าค่าความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมนั้นสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องอย่างแน่นอน โดยสัมประสิทธิ์ของสมการมีรูปแบบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
a_p^p &= a_E^p + a_W^p + a_N^p + a_S^p \\
a_E^p &= \frac{\rho A_e^2}{(a_p^u)_e} \\
a_W^p &= \frac{\rho A_w^2}{(a_p^u)_w} \\
a_N^p &= \frac{\rho A_n^2}{(a_p^v)_n} \\
a_S^p &= \frac{\rho A_s^2}{(a_p^v)_s} \\
S_p &= F_w - F_e + F_s - F_n
\end{aligned} \tag{ก51}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
F_w &= \rho A_w u_w^* \\
F_e &= \rho A_e u_e^* \\
F_s &= \rho A_s v_s^* \\
F_n &= \rho A_n v_n^*
\end{aligned} \tag{ก52}$$

สมการ (ก52) เป็นฟลักซ์มวลที่ด้านต่าง ๆ ของเซลล์ จะสังเกตได้ว่าพจน์สัมประสิทธิ์ของสมการแก้ไขความดันนั้นจะเป็นฟังก์ชันของพจน์สัมประสิทธิ์กลางของสมการโมเมนตัม ดังนั้นสมการ (ก50) จะเป็นตัวหาค่าความดันที่ใช้ในการปรับแก้ค่าความเร็วที่ใช้ในการแก้สมการโมเมนตัม เขียนเป็นแผนภูมิสายงานได้ดังรูปที่ ก4



รูปที่ ก4 ขั้นตอนวิธี SIMPLE

ภาคผนวก ข

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

1. ไฟล์ Main.cpp ใช้สำหรับกำหนดค่าต่าง ๆ ในโปรแกรม และเป็นตัวเรียกวัฏจักรต่าง ๆ ขึ้นมาทำงาน

```
#include "MG2D.h"
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

#define xst      0.0
#define yst      0.0
#define xen      1.0
#define yen      1.0
#define TOL      1.0e-06
#define large    1.0e+10

int ML,cv,ngrd,nicv,njcv;

float Re;

MG2D Sol;

FILE *ft;

clock_t start, finish;

time_t begin,end;

double emax,duration;

int Menu(int n);

void Single();

void V_Cycle();

void W_Cycle1();

void W_Cycle2();

void F_Cycle();

void Sawtooth();

void FMG();

void FMGV();

void Cascadic();
```



```

int main()
{
    int n,cycle,nl,level;
    FILE *pf;
    pf=fopen("info.txt","w");
    ft=fopen("time.txt","w");
    Sol.L=xen-xst;
    Sol.H=yen-yst;
    printf("Enter number of Control Volume ");
    scanf("%d",&cv);
    nl=(int)(log10(cv)/log10(2));
    printf("Enter number of level (\\"0\\" for Maximum) ");
    scanf("%d",&level);
    if(nl<=level||level==0) ML=nl;
    else ML=level;
    nicv=cv;
    for(n=1;n<ML;n++)
    {
        nicv=nicv/2;
    }
    njcv=nicv;
    ngrd=ML;
    printf("Enter Reynolds Number ");
    scanf("%f",&Re);
    Sol.Re=Re;
    // Select method
    do
    {
        printf("\n*****\n");
        printf("Compuatation Method\n\n");
        printf("\t1. Single Grid\n"

```

```

        "\t2. V Cycle\n"
        "\t3. W Cycle 1\n"
        "\t4. W Cycle 2\n"
        "\t5. F Cycle\n"
        "\t6. Sawtooth Cycle\n"
        "\t7. FMG\n"
        "\t8. FMG V-Cycle\n"
        "\t9. Cascadic\n");

printf("\nPlease select one(0 to quit): ");
scanf(" %d",&n);if(n==0) exit(0);
Sol.SetVariable(nicv,njcv,ngrd);
Sol.GridGeneration(xst,xen,yst,yen);
Sol.CalculationData();
Sol.SetInitialAndBoundary();
cycle=Menu(n);
if(n<=9) n=0;
}

while(n!=0);
duration=difftime(end,begin);
if(duration<600)
    duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
printf("Number of Control Volume = %d\n",cv);
printf("Number of level = %d\n",ML);
printf("Reynolds Number = %.0f\n",Re);
printf("Computation with Cycle %d time = %.2f Sec.\n",cycle,duration);
printf("Work = %.2f\n",Sol.Work);
fprintf(pf,"Number of Control Volume = %d\n",cv);
fprintf(pf,"Number of level = %d\n",ML);
fprintf(pf,"Reynolds Number = %.0f\n",Re);
fprintf(pf,"Computation with Cycle %d time = %.2f Sec.\n",cycle,duration);
fprintf(pf,"Work = %.2f\n",Sol.Work);

```

```

    fprintf(ft,"%%.3f\t%e\n",duration,Sol.emax);
    Sol.WriteFileMid();
    Sol.WriteFile();
    fclose(pf);
    fclose(ft);
    return(0);
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

int Menu(int n)
{
    switch(n)
    {
        case 0:
            break;

        case 1:
            start = clock();
            time(&begin);
            Single();
            finish = clock();
            time(&end);
            break;

        case 2:
            start = clock();
            time(&begin);
            V_Cycle();
            finish = clock();
            time(&end);
            break;

        case 3:
            start = clock();
            time(&begin);

```

```
W_Cycle1();  
finish = clock();  
time(&end);  
break;
```

case 4:

```
start = clock();  
time(&begin);  
W_Cycle2();  
finish = clock();  
time(&end);  
break;
```

case 5:

```
start = clock();  
time(&begin);  
F_Cycle();  
finish = clock();  
time(&end);  
break;
```

case 6:

```
start = clock();  
time(&begin);  
Sawtooth();  
finish = clock();  
time(&end);  
break;
```

case 7:

```
start = clock();  
time(&begin);  
FMG();  
finish = clock();  
time(&end);
```

```

        break;
    case 8:
        start = clock();
        time(&begin);
        FMGV();
        finish = clock();
        time(&end);
        break;
    case 9:
        start = clock();
        time(&begin);
        Cascadic();
        finish = clock();
        time(&end);
        break;
    default:printf("\nOnly number on screen that you can chose!\n\npress a key to continue");
        getchar();
    }
    return n;
}

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
void Single()
{
    int ITER=0;
    int G=ngrd-1;

    do
    {
        Sol.SolveMomentum(G);
        Sol.SolvePressureCorrection(G);
        Sol.CheckConvergence(G);
    }

```

```

        emax=Sol.emax;
        if(emax>large)
        {
            printf("ITERATION DIVERGING\n");
            return;
        }
        printf("Single Grid Iteration = %d Residual = %e\n",++ITER,emax);
        finish=clock();
        time(&end);
        duration=difftime(end,begin);
        if(duration<600)
            duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
        fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
    }
    while(emax>TOL);
}

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
void V_Cycle()
{
    int G,GMAX,ITER=0;

    GMAX=ngrd-1;
    G=GMAX;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    printf("V-Cycle LEVEL = %d Work = %0.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
VC1: Sol.Restriction(G,1);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;

```

```

    G=G-1;
    printf("V-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
    if(G>0) goto VC1;
VC2: Sol.Prolongation(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    G=G+1;
    printf("V-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
    if(G==GMAX && emax<TOL) return;
    if(emax>large)
    {
        printf("ITERATION DIVERGING\n");
        return;
    }
    if(G<GMAX) goto VC2;
    ITER++;
    finish=clock();
    time(&end);
    duration=difftime(end,begin);
    if(duration<600)
        duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
    fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
    goto VC1;
}

////////////////////////////////////

void W_Cycle1()
{
    int N,G,ITER=0;
    int GMAX=ngrd-1;
    int W=(int)(ngrd/2);

```

```

G=GMAX;
Sol.SolveMomentum(G);
Sol.SolvePressureCorrection(G);
Sol.CheckConvergence(G);
emax=Sol.emax;
printf("W-Cycle1 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
WC1: if(G==GMAX) N=0;
     Sol.Restriction(G,1);
     Sol.CheckConvergence(G);
     emax=Sol.emax;
     G=G-1;
     printf("W-Cycle1 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
     if(G>0) goto WC1;
WC2: Sol.Prolongation(G);
     Sol.CheckConvergence(G);
     emax=Sol.emax;
     G=G+1;
     printf("W-Cycle1 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
     if(G==GMAX && emax<TOL) return;
     if(emax>large)
     {
         printf("ITERATION DIVERGING\n");
         return;
     }
     if(G==W && N==0)
     {
         N=1;
         goto WC1;
     }
     if(G<GMAX) goto WC2;
finish=clock();

```



```

time(&end);
duration=difftime(end,begin);
if(duration<600)
    duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
goto WC1;
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void W_Cycle2()
{
    int WW=0,N,G,ITER=0;
    int GMAX=ngrd-1;
    int W=(int)(ngrd/2);

    G=GMAX;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    printf("W-Cycle2 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
WW1: if(G==GMAX) N=0;
    Sol.Restriction(G,1);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    G=G-1;
    printf("W-Cycle2 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
    if(G>0) goto WW1;
    if(G==0 && N==1) WW--;
WW2: if(G==0 && N==0) WW++;
    Sol.Prolongation(G);
    Sol.CheckConvergence(G);

```

```

    emax=Sol.emax;
    G=G+1;
    printf("W-Cycle2 LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
    if(G==GMAX && emax<TOL) return;
    if(emax>large)
    {
        printf("ITERATION DIVERGING\n");
        return;
    }
    if(G==W && N==0)
    {
        N=1;
        goto WW1;
    }
    if(G==WW) goto WW1;
    if(G<GMAX) goto WW2;
    finish=clock();
    time(&end);
    duration=difftime(end,begin);
    if(duration<600)
        duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
    fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
    goto WW1;
}

////////////////////////////////////

void F_Cycle()
{
    int N,F,G;
    int GMAX=ngrd-1;

    G=GMAX;

```

```

Sol.SolveMomentum(G);
Sol.SolvePressureCorrection(G);
Sol.CheckConvergence(G);
emax=Sol.emax;
printf("F-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
FC1:  if(G==GMAX)
    {
        finish=clock();
        time(&end);
        duration=difftime(end,begin);
        if(duration<600)
            duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
        fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
        F=0;
    }
Sol.Restriction(G,1);
Sol.CheckConvergence(G);
emax=Sol.emax;
G=G-1;
printf("F-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
if(G>0) goto FC1;
N=0;
FC2:  if (N==0) F++;
      N++;
      Sol.Prolongation(G);
      Sol.CheckConvergence(G);
      emax=Sol.emax;
      G=G+1;
      printf("F-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
      if(G==GMAX && emax<TOL) return;
      if(emax>large)

```

```

    {
        printf("ITERATION DIVERGING\n");
        return;
    }
    if(F==G) goto FC1;
    if(G<GMAX) goto FC2;
}

////////////////////////////////////

void Sawtooth()
{
    int G,GMAX;

    GMAX=ngrd-1;
    G=GMAX;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    printf("Sawtooth-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e\n",G,Sol.Work,emax);
SC1: Sol.Restriction(G,0);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    G=G-1;
    if(G>0) goto SC1;
    printf("Sawtooth-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e\n",G,Sol.Work,emax);
SC2: Sol.Prolongation(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    G=G+1;

```

```

printf("Sawtooth-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e
\n",G,Sol.Work,emax);
if(G==GMAX && emax<TOL) return;
if(emax>large)
{
    printf("ITERATION DIVERGING\n");
    return;
}
if(G<GMAX) goto SC2;
finish=clock();
time(&end);
duration=difftime(end,begin);
if(duration<600)
    duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
goto SC1;
}

////////////////////////////////////

void FMG()
{
    int G,Gmax;
    double eta=0.6,sigma=0.2;
    double er,err,*ers;
    Gmax=ngrd-1;
    ers=new double[ngrd];
    G=Gmax;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
PRE0: Sol.Restriction(G,1);
    Sol.CheckConvergence(G);
    G=G-1;

```

```

    ers[G]=Sol.emax*sigma;
    if(G>0) goto PRE0;
    er=large;
    ers[Gmax]=TOL;
FMG1: err=er;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    er=Sol.emax;
    printf("FMG Level %d Work = %.2f Residual = %e\n",G,Sol.Work,er);
    if(G==Gmax)
    {
        finish=clock();
        time(&end);
        duration=difftime(end,begin);
        if(duration<600)
            duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
        fprintf(ft,"%.3f\t%e\n",duration,er);
    }
    if(er<ers[G])goto FMG2;
    if(G==0 || er/err<eta) goto FMG1;
    Sol.Restriction(G,1);
    G--;
    ers[G]=er*sigma;
    er=large;
    goto FMG1;
FMG2: if(G==Gmax) return;
    Sol.Prolongation(G);
    G++;
    er=large;
    goto FMG1;

```

```

}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void FMGV()
{
    int l,G,V,GMAX,ITER=0,NV=6;

    GMAX=ngrd-1;
    G=0;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    printf("FMG V-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
FMGV1:
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.U,G);
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.V,G);
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.P,G);
    G++;
    V=G;
    ITER=1;
    l=0;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
FMGV2:
    Sol.Restriction(G,1);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    G=G-1;
    if(G>0) goto FMGV2;
FMGV3:
    Sol.Prolongation(G);

```

```

Sol.CheckConvergence(G);

emax=Sol.emax;

G=G+1;

if(G==V && ITER==1){

    printf("FMG V-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,
        Sol.Work,emax);

    finish=clock();

    time(&end);

    duration=difftime(end,begin);

    if(duration<600)

        duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;

    fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);

}

if(G==GMAX){

    printf("FMG V-Cycle LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,
        Sol.Work, emax);

    finish=clock();

    time(&end);

    duration=difftime(end,begin);

    if(duration<600)

        duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;

    fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);

}

if(G==GMAX && emax<TOL){

    return;

}

if(emax>large)

{

    printf("ITERATION DIVERGING\n");

    return;

}

```



```

    if(G<V) goto FMGV3;
    l++;
    if(G==V && ITER==NV){
        if(V==GMAX)goto FMGV2;
        goto FMGV1;
    }
    ITER++;
    goto FMGV2;
}

////////////////////////////////////

void Cascadic()
{
    int G,GMAX,ITER=0;
    double err=1.0e-03;
    GMAX=ngrd-1;
    G=0;
    if(G==GMAX) err=TOL;
CAS1: ITER++;
    Sol.SolveMomentum(G);
    Sol.SolvePressureCorrection(G);
    Sol.CheckConvergence(G);
    emax=Sol.emax;
    printf("Cascadic LEVEL = %d Work = %.2f Residual = %e \n",G,Sol.Work,emax);
    if(G==GMAX){
        finish=clock();
        time(&end);
        duration=difftime(end,begin);
        if(duration<600)
            duration = (double)(finish - start) / CLOCKS_PER_SEC;
        fprintf(ft,"%0.3f\t%e\n",duration,emax);
    }
}

```

```

    if(emax>err) goto CAS1;
    if(G==GMAX) return;
    ITER=0;
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.U,G);
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.V,G);
    Sol.InterpolateCoarseToFine(Sol.P,G);
    G++;
    if(G==GMAX) err=TOL;
    goto CAS1;
}

```

2. ไฟล์ MG2D.h เป็นส่วนหัวของโปรแกรม ไว้สำหรับประกาศตัวแปร และฟังก์ชันต่าง ๆ

```

// MG2D.h: interface for the MG2D class.
//
////////////////////////////////////
#ifdef AFX_MG2D_H__BCF766A1_C78F_11D7_A2AE_0020183B30F3__INCLUDED_
#define AFX_MG2D_H__BCF766A1_C78F_11D7_A2AE_0020183B30F3__INCLUDED_
#if _MSC_VER > 1000
#pragma once
#endif // _MSC_VER > 1000
#define min(a,b) ((a)<(b)?(a):(b))
#define max(a,b) ((a)>(b)?(a):(b))
class MG2D
{
public:
    void Monitor(double***,int);
    void WriteFile();
    void WriteFileMid();
    void InterC2F(double ***,int);
    MG2D();

```

```

virtual ~MG2D();
void CalculationData();
void SetInitialAndBoundary();
void SetIndex(int);
void MassFlux(int);
void Restriction(int,int);
void Prolongation(int);
void SolveMomentum(int);
void MomentumSource(int);
void CheckConvergence(int);
void PressureCoefficient(int);
void SetVariable(int,int,int);
void TransportCoefficient(int);
void SolvePressureCorrection(int);
void Allocate(double*** &var);
void Allocate(int,double** &var);
void Deallocate(int,double** &var);
void ExtrapolateToBoundary(double***,int);
void InterpolateCoarseToFine(double***,int);
void InterpolateFineToCoarse(double***,double***,int);
void GaussSiedelRelax(double***,double***,int,int);
void Gradient(double***,double**,double**,int);
double C2F(double,double,int,int,int,int);
void GridGeneration(double,double,double,double);
int ngr,kgr,nicv,njcv;
int idu,idv,idp,lsr,lsp;
int ni,nj,ist,jst,ien,jen,ifst,jfst,ilst,jlst;
int *nigr,*njgr,*nsw,*lsg;
double L,H,small,TOL,rho,mu,Re,emax,Work;
double ***X,***Y,***U,***V,***P,***PP,***AW,***AE,***AS,***AN,***AP,
***SU,***SV,***FMX,***FMY,***UG,***VG,***FMXG,***FMYG,

```

```

        ***RESU,***RESV;

        double  *res,*delx,*dely,*vol,urv,urp;

private:

        void WorkCount(int G);

        void WriteFile(double ***var,char *FileName);

};

#endif //

#ifndef(AFX_MG2D_H__BCF766A1_C78F_11D7_A2AE_0020183B30F3__INCLUDED_)

```

3. ไฟล์ MG2D.cpp เป็นตัวโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมด

```

// MG2D.cpp: implementation of the MG2D class.

//

////////////////////////////////////////////////////////////////

#include "MG2D.h"

#include "stdlib.h"

#include "stdio.h"

#include "math.h"

////////////////////////////////////////////////////////////////

// Construction/Destruction

////////////////////////////////////////////////////////////////

MG2D::MG2D()

{

}

MG2D::~~MG2D()

{

}

////////////////////////////////////////////////////////////////

void MG2D::Allocate(double*** &var)

{

        int i,j,G;

        var=new double**[ngr];

```

```

for(G=0;G<ngr;G++)
{
    SetIndex(G);
    var[G]=new double*[ni];
    for(i=ist;i<=ien;i++)
    {
        var[G][i]=new double[nj];
        for(j=jst;j<=jen;j++)
        {
            var[G][i][j]=0.0;
        }
    }
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void MG2D::Allocate(int G,double** &var)
{
    int i,j;
    SetIndex(G);
    var=new double*[ni];
    for(i=ist;i<=ien;i++)
    {
        var[i]=new double[nj];
        for(j=jst;j<=jen;j++)
        {
            var[i][j]=0.0;
        }
    }
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void MG2D::Deallocate(int G,double** &var)

```

```

{
    int i;
    SetIndex(G);
    for(i=ist;i<=ien;i++)
        delete[] var[i];
    delete[] var;
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void MG2D::SetVariable(int nx,int ny,int level)
{
    int G;
    //..PARAMETERS OF CALCULATION PROCEDURE
    small = 1.0e-30;
    TOL   = 1.0e-06;
    Work  = 0.0;
    nicv = nx;
    njcv = ny;
    ngr  = level;
    nigr=new int[ngr];
    njgr=new int[ngr];
    nigr[0]=nicv+2;
    njgr[0]=njcv+2;
    for(G=1;G<ngr;G++)
    {
        nigr[G]=(nigr[G-1]-1)*2;
        njgr[G]=(njgr[G-1]-1)*2;
    }

    //..VARIABLES ALLOCATION
    Allocate(U);   Allocate(V);   Allocate(P);   Allocate(PP);
    Allocate(AE);  Allocate(AW);  Allocate(AN);  Allocate(AS);
    Allocate(SU);  Allocate(SV);

```

```

Allocate(FMY); Allocate(FMX);

Allocate(UG); Allocate(VG); Allocate(AP);

Allocate(FMXG); Allocate(FMYG); Allocate(RESU);
Allocate(RESV);

nsw = new int[3];
res = new double[3];
delx = new double[ngr];
dely = new double[ngr];
vol = new double[ngr];

//..ITERATION SWEEP IN MULTIGRID STEP

lsr = 3;
lsp = 2;

//..GRID SPACING AND VOLUME
delx[0] = L/(double(nicv)+small);
dely[0] = H/(double(njcv)+small);
vol[0] = delx[0]*dely[0];
for(G=1;G<ngr;G++)
{
    delx[G] = delx[G-1]*0.5;
    dely[G] = dely[G-1]*0.5;
    vol[G] = delx[G]*dely[G];
}
}

////////////////////////////////////
void MG2D::CalculationData()
{
    //..INDEX NUMBER OF VARIABLES(U,V,P)
    idu=1;
    idv=2;
    idp=3;

    //..FLUID PROPERTIES

```

```

    rho=1.0;
    mu=1.0/Re;
    //..NUMBER OF RELAXATION
    nsw[idu]=3;
    nsw[idv]=3;
    nsw[idp]=10;
    //..UNDER RELAXATION FACTOR(U,V,P)
    urv=0.6;
    urp=0.2;
}

////////////////////////////////////

void MG2D::SetInitialAndBoundary()
{
    int i,j,G;
    for(G=0;G<ngr;G++)
    {
        SetIndex(G);
        for(j=jfst;j<=jlst;j++)
        {
            for(i=ifst;i<=ilst;i++)
            {
                U[G][i][j] = 0.0;
                V[G][i][j] = 0.0;
                P[G][i][j] = 0.0;
            }
        }
        for(i=ifst;i<=ilst;i++) {
            U[G][i][jen] = 1.0;
        }
    }
}

```



```

////////////////////////////////////
void MG2D::TransportCoefficient(int G)
{
    int i,j,im,ip,jm,jp;
    double DE,DW,DN,DS,dxyr,dyxr;
    SetIndex(G);
    dxyr=delx[G]/(dely[G]+small);
    dyxr=dely[G]/(delx[G]+small);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        jm=j-1;
        jp=j+1;
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            im=i-1;
            ip=i+1;
            DW=mu*dyxr;
            DE=mu*dxyr;
            DS=mu*dxyr;
            DN=mu*dxyr;
            if(i==ifst) DW=2.0*mu*dyxr;
            if(i==ilst) DE=2.0*mu*dxyr;
            if(j==jfst) DS=2.0*mu*dxyr;
            if(j==jlst) DN=2.0*mu*dxyr;
            AW[G][i][j]=DW+max(FMX[G][im][j],0.0);
            AE[G][i][j]=DE-min(FMX[G][i][j],0.0);
            AS[G][i][j]=DS+max(FMY[G][i][jm],0.0);
            AN[G][i][j]=DN-min(FMY[G][i][j],0.0);
            AP[G][i][j]=AW[G][i][j]+AE[G][i][j]+AS[G][i][j]+AN[G][i][j];
        }
    }
}

```

```

        MomentumSource(G);
    }

    //////////////////////////////////////

void MG2D::MomentumSource(int G)
{
    int i,j;
    double **dpx,**dpy;
    Allocate(G,dpx);Allocate(G,dpy);
    SetIndex(G);
    ExtrapolateToBoundary(P,G);
    Gradient(P,dpx,dpy,G);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            SU[G][i][j]=-dpx[i][j]*vol[G];
            SV[G][i][j]=-dpy[i][j]*vol[G];
        }
    }
    Deallocate(G,dpx);    Deallocate(G,dpy);
}

    //////////////////////////////////////

void MG2D::ExtrapolateToBoundary(double ***var,int G)
{
    int i,j;
    SetIndex(G);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        var[G][ist][j]=1.5*var[G][ist+1][j]-0.5*var[G][ist+2][j];
        var[G][ien][j]=1.5*var[G][ien-1][j]-0.5*var[G][ien-2][j];
    }
}

```

```

    for(i=ist;i<=ien;i++)
    {
        var[G][i][jst]=1.5*var[G][i][jst+1]-0.5*var[G][i][jst+2];
        var[G][i][jen]=1.5*var[G][i][jen-1]-0.5*var[G][i][jen-2];
    }
}

////////////////////////////////////

void MG2D::Gradient(double ***var,double **DFX,double **DFY,int G)
{
    int i,j,ip,im,jp,jm;
    double vare,varw,varn,vars,dxr,dyr;
    SetIndex(G);
    for(j=jst;j<=jen;j++)
    {
        for(i=ist;i<=ien;i++)
        {
            DFX[i][j]=0.0;
            DFY[i][j]=0.0;
        }
    }
    dxr=1.0/(delx[G]+small);
    dyr=1.0/(dely[G]+small);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        jp=j+1;
        jm=j-1;
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            ip=i+1;
            im=i-1;
            vare=(var[G][i][j]+var[G][ip][j])*0.5;

```

```

        varw=(var[G][i][j]+var[G][im][j])*0.5;
        varn=(var[G][i][j]+var[G][i][jp])*0.5;
        vars=(var[G][i][j]+var[G][i][jm])*0.5;
        if(i==ifst) varw=var[G][im][j];
        if(i==ilst) vare=var[G][ip][j];
        if(j==jfst) vars=var[G][i][jm];
        if(j==jlst) varn=var[G][i][jp];
        DFX[i][j]=(vare-varw)*dxr;
        DFY[i][j]=(varn-vars)*dyr;
    }
}

////////////////////////////////////
void MG2D::SolveMomentum(int G)
{
    int i,j;
    double su,sv,ur;
    WorkCount(G);
    SetIndex(G);
    ur=1.0/(urv+small);
    TransportCoefficient(G);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            AP[G][i][j]=AP[G][i][j]*ur;
            su=(1.0-urv)*AP[G][i][j]*U[G][i][j];
            sv=(1.0-urv)*AP[G][i][j]*V[G][i][j];
            SU[G][i][j]=SU[G][i][j]+RESU[G][i][j]+su;
            SV[G][i][j]=SV[G][i][j]+RESV[G][i][j]+sv;
        }
    }
}

```

[illegible]

```

{
    int    i,j;
    double D,dpd,dp,vab,vac,vb,ape,dxr,dyr;
    double **dpx,**dpy;
    Allocate(G,dpx);
    Allocate(G,dpy);
    SetIndex(G);
    dxr=1.0/(delx[G]+small);
    dyr=1.0/(dely[G]+small);
    Gradient(P,dpx,dpy,G);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst-1;i++)
        {
            D = rho*dely[G];
            dp = (P[G][i+1][j]- P[G][i][j])*dxr;
            vab = (U[G][i+1][j]-UG[G][i+1][j])*0.5;
            vac = (U[G][i][j]-UG[G][i][j])*0.5;
            ape = (AP[G][i+1][j]+AP[G][i][j])*0.5;
            dpd = (dpx[i+1][j]+dpx[i][j])*0.5;
            vb = (vab+vac)-(dp-dpd)*ape*vol[G];
            FMX[G][i][j] = D*vb+FMXG[G][i][j];
        }
    }
    for(j=jfst;j<=jlst-1;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            D = rho*delx[G];
            dp = (P[G][i][j+1]- P[G][i][j])*dyr;
            vab = (V[G][i][j+1]-VG[G][i][j+1])*0.5;

```

```

        vac = (V[G][i][j]-VG[G][i][j])*0.5;
        ape = (AP[G][i][j+1]+AP[G][i][j])*0.5;
        dpd = (dpx[i][j+1]+dpx[i][j])*0.5;
        vb = (vab+vac)-(dp-dpd)*ape*vol[G];
        FMY[G][i][j] = D*vb+FMYG[G][i][j];
    }
}

Deallocate(G,dpx);    Deallocate(G,dpy);
}

////////////////////////////////////

void MG2D::PressureCoefficient(int G)
{
    int    i,j;
    double ap,D,dxr,dyr;
    SetIndex(G);
    dxr=1.0/(delx[G]+small);
    dyr=1.0/(dely[G]+small);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst-1;i++)
        {
            D = rho*dely[G];
            ap = (AP[G][i+1][j]+AP[G][i][j])*0.5;
            AE[G][i][j] = D*ap*dely[G];
            AW[G][i+1][j] = AE[G][i][j];
        }
    }
    for(j=jfst;j<=jlst-1;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {

```

```

        D = rho*delx[G];
        ap = (AP[G][i][j+1]+AP[G][i][j])*0.5;
        AN[G][i][j] = D*ap*delx[G];
        AS[G][i][j+1] = AN[G][i][j];
    }
}

for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{
    AW[G][ifst][j]=0.0;
    AE[G][ilst][j]=0.0;
}

for(i=ifst;i<=ilst;i++)
{
    AS[G][i][jfst]=0.0;
    AN[G][i][jlst]=0.0;
}
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////

void MG2D::SolvePressureCorrection(int G)
{
    int    i,j;
    double **apr,**dpx,**dpy;
    Allocate(G,dpx);
    Allocate(G,dpy);
    Allocate(G,apr);
    SetIndex(G);
    for(j=jst;j<=jen;j++)
    {
        for(i=ist;i<=ien;i++)
        {
            AP[G][i][j] = 1.0/(AP[G][i][j]+small);

```



```

        PP[G][i][j] = 0.0;
        SU[G][i][j] = 0.0;
        apr[i][j] = AP[G][i][j];
    }
}
Gradient(P,dpx,dpy,G);
MassFlux(G);
PressureCoefficient(G);
for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{
    for(i=ifst;i<=ilst;i++)
    {
        SU[G][i][j]=FMX[G][i-1][j]-FMX[G][i][j]+FMY[G][i][j-1]-
            FMY[G][i][j];
        AP[G][i][j]=AE[G][i][j]+AW[G][i][j]+AN[G][i][j]+AS[G][i][j];
    }
}
GaussSiedelRelax(PP,SU,idp,G);
ExtrapolateToBoundary(PP,G);
Gradient(PP,dpx,dpy,G);
for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{
    for(i=ifst;i<=ilst;i++)
    {
        U[G][i][j]=U[G][i][j]-apr[i][j]*dpx[i][j]*vol[G];
        V[G][i][j]=V[G][i][j]-apr[i][j]*dpy[i][j]*vol[G];
        P[G][i][j]=P[G][i][j]+urp*PP[G][i][j];
    }
}
for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{

```

```

        for(i=ifst;i<=ilst-1;i++)
        {
            FMX[G][i][j]=FMX[G][i][j]+AE[G][i][j]*(PP[G][i][j]-PP[G][i+1][j]);
        }
    }
    for(j=jfst;j<=jlst-1;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            FMY[G][i][j]=FMY[G][i][j]+AN[G][i][j]*(PP[G][i][j]-PP[G][i][j+1]);
        }
    }
    Deallocate(G,apr);    Deallocate(G,dpx);    Deallocate(G,dpy);
}

////////////////////////////////////

void MG2D::Restriction(int GF,int R)
{
    int GC,i,j,I,J,rl;
    double su,sv;
    SetIndex(GF);
    GC=GF-1;
    TransportCoefficient(GF);
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            SU[GF][i][j]=AE[GF][i][j]*U[GF][i+1][j]+
                AW[GF][i][j]*U[GF][i-1][j]+
                AN[GF][i][j]*U[GF][i][j+1]+
                AS[GF][i][j]*U[GF][i][j-1]-
                AP[GF][i][j]*U[GF][i][j]+SU[GF][i][j];
        }
    }
}

```

```

SV[GF][i][j]=AE[GF][i][j]*V[GF][i+1][j]+
AW[GF][i][j]*V[GF][i-1][j]+
AN[GF][i][j]*V[GF][i][j+1]+
AS[GF][i][j]*V[GF][i][j-1]-
AP[GF][i][j]*V[GF][i][j]+SV[GF][i][j];

    }
}
if(GF != kgr) {
    for(j=jfst;j<=jlst;j++)
    {
        for(i=ifst;i<=ilst;i++)
        {
            SU[GF][i][j]=SU[GF][i][j]+RESU[GF][i][j];
            SV[GF][i][j]=SV[GF][i][j]+RESV[GF][i][j];
        }
    }
}
SetIndex(GC);
for(J=jfst;J<=jlst;J++)
{
    j=2*J;
    for(I=ifst;I<=ilst-1;I++)
    {
        i=2*I;
        FMX[GC][I][J] =FMX[GF][i][j]+FMX[GF][i][j-1];
        FMXG[GC][I][J]=FMX[GC][I][J];
    }
}
for(J=jfst;J<=jlst-1;J++)
{
    j=2*J;

```

```

    for(I=ifst;I<=ilst;I++)
    {
        i=2*I;
        FMY[GC][I][J] =FMY[GF][i][j]+FMY[GF][i-1][j];
        FMYG[GC][I][J]=FMY[GC][I][J];
    }
}
for(J=jfst;J<=jlst;J++)
{
    j=2*J-1;
    for(I=ifst;I<=ilst;I++)
    {
        i=2*I-1;
        RESU[GC][I][J]= SU[GF][i][j]+SU[GF][i+1][j]+SU[GF][i][j+1]+
                        SU[GF][i+1][j+1];
        RESV[GC][I][J]= SV[GF][i][j]+SV[GF][i+1][j]+SV[GF][i][j+1]+
                        SV[GF][i+1][j+1];
    }
}
InterpolateFineToCoarse(U,UG,GC);
InterpolateFineToCoarse(V,VG,GC);
for(J=jfst;J<=jlst;J++)
{
    for(I=ifst;I<=ilst;I++)
    {
        U[GC][I][J] = UG[GC][I][J];
        V[GC][I][J] = VG[GC][I][J];
        PP[GC][I][J] = 0.0;
        P[GC][I][J] = 0.0;
    }
}

```

```

TransportCoefficient(GC);
for(J=jfst;J<=jlst;J++)
{
    for(I=ifst;I<=ilst;I++)
    {
        su= AP[GC][I][J]*U[GC][I][J]-
            (AE[GC][I][J]*U[GC][I+1][J]+AW[GC][I][J]*U[GC][I-1][J]+
            AN[GC][I][J]*U[GC][I][J+1]+AS[GC][I][J]*U[GC][I][J-1]+
            SU[GC][I][J]);
        sv= AP[GC][I][J]*V[GC][I][J]-
            (AE[GC][I][J]*V[GC][I+1][J]+AW[GC][I][J]*V[GC][I-1][J]+
            AN[GC][I][J]*V[GC][I][J+1]+AS[GC][I][J]*V[GC][I][J-1]+
            SV[GC][I][J]);
        RESU[GC][I][J]=RESU[GC][I][J]+su;
        RESV[GC][I][J]=RESV[GC][I][J]+sv;
    }
}
if(R==1)
{
    for(rl=1;rl<=lsr;rl++)
    {
        SolveMomentum(GC);
        SolvePressureCorrection(GC);
    }
}

////////////////////////////////////
void MG2D::InterpolateFineToCoarse(double ***varf,double ***varc,int GC)
{
    int GF,I,J,i,j,ip,jp;
    GF=GC+1;

```

```

SetIndex(GC);
for(J=jfst;J<=jlst;J++)
{
    j=2*J-1;
    jp=j+1;
    for(I=ifst;I<=ilst;I++)
    {
        i=2*I-1;
        ip=i+1;
        varc[GC][I][J]=(varf[GF][i][j]+varf[GF][ip][j]+varf[GF][i][jp]+
                        varf[GF][ip][jp])*0.25;
    }
}

}

////////////////////////////////////

void MG2D::InterpolateCoarseToFine(double ***var,int GC)
{
    int GF,I,J,fw,fe,fs,fn;
    double **dfx,**dfy,dgx,dgy,varc;
    Allocate(GC,dfx);
    Allocate(GC,dfy);
    GF=GC+1;
    SetIndex(GC);
    Gradient(var,dfx,dfy,GC);
    for(J=jfst;J<=jlst;J++)
    {
        fs=2*J-1;
        fn=fs+1;
        for(I=ifst;I<=ilst;I++)
        {
            fw=2*I-1;

```

```

        fe=fw+1;
        varc=var[GC][I][J];
        dgx=dfx[I][J];
        dgy=dfy[I][J];
        var[GF][fw][fs]=varc+C2F(dgx,dgy,GC,I,J,fw,fs);
        var[GF][fw][fn]=varc+C2F(dgx,dgy,GC,I,J,fw,fn);
        var[GF][fe][fs]=varc+C2F(dgx,dgy,GC,I,J,fe,fs);
        var[GF][fe][fn]=varc+C2F(dgx,dgy,GC,I,J,fe,fn);
    }
}

Deallocate(GC,dfx);    Deallocate(GC,dfy);
}

////////////////////////////////////
double MG2D::C2F(double dgx,double dgy,int GC,int I,int J,int i,int j)
{
    return  dgx*(X[GC+1][i][j]-X[GC][I][J])+dgy*(Y[GC+1][i][j]-Y[GC][I][J]);
}

////////////////////////////////////

void MG2D::Prolongation(int GC)
{
    int GF,i,j,I,J,lp;
    GF=GC+1;
    SetIndex(GC);
    for(J=jfst;J<=jlst;J++)
    {
        for(I=ifst;I<=ilst;I++)
        {
            SU[GC][I][J]=U[GC][I][J]-UG[GC][I][J];
            SV[GC][I][J]=V[GC][I][J]-VG[GC][I][J];

```

```

    }
}
InterpolateCoarseToFine(SU,GC);
InterpolateCoarseToFine(SV,GC);
SetIndex(GF);
for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{
    for(i=ifst;i<=ilst;i++)
    {
        U[GF][i][j]=U[GF][i][j]+SU[GF][i][j];
        V[GF][i][j]=V[GF][i][j]+SV[GF][i][j];
    }
}
SetIndex(GC);
for(J=jst;J<=jen;J++)
{
    for(I=ist;I<=ien;I++)
    {
        PP[GC][I][J]=P[GC][I][J];
    }
}
ExtrapolateToBoundary(PP,GC);
InterpolateCoarseToFine(PP,GC);
SetIndex(GF);
for(j=jfst;j<=jlst;j++)
{
    for(i=ifst;i<=ilst;i++)
    {
        P[GF][i][j]=P[GF][i][j]+PP[GF][i][j];
    }
}

```



```

    ExtrapolateToBoundary(P,GF);
    for(lp=1;lp<=lsp;lp++)
    {
        SolveMomentum(GF);
        SolvePressureCorrection(GF);
    }
}

////////////////////////////////////

void MG2D::CheckConvergence(int G)
{
    emax=0.0;
    emax=max(emax,res[idu]);
    emax=max(emax,res[idv]);
    emax=max(emax,res[idp]);
}

////////////////////////////////////

void MG2D::SetIndex(int G)
{
    ni=nigr[G];
    nj=njgr[G];
    ist=0;
    jst=0;
    ien=ni-1;
    jen=nj-1;
    ifst=ist+1;
    jfst=jst+1;
    ilst=ien-1;
    jlst=jen-1;
}

```

```
////////////////////////////////////
```

```
void MG2D::GridGeneration(double xst,double xen,double yst,double yen)
```

```
{
    int G,i,j;
    double del;
    Allocate(X);    Allocate(Y);
    for(G=0;G<ngr;G++)
    {
        SetIndex(G);
        for(j=jst;j<=jen;j++)
        {
            del=delx[G]*0.5;
            X[G][ist][j]=xst;
            X[G][ien][j]=xen;
            for(i=ifst;i<=ilst;i++)
            {
                X[G][i][j]=X[G][i-1][j]+del;
                del=delx[G];
            }
        }
        for(i=ist;i<=ien;i++)
        {
            del=dely[G]*0.5;
            Y[G][i][jst]=yst;
            Y[G][i][jen]=yen;
            for(j=jfst;j<=jlst;j++)
            {
                Y[G][i][j]=Y[G][i][j-1]+del;
                del=delx[G];
            }
        }
    }
}
```

```

    }
}

////////////////////////////////////

void MG2D::WorkCount(int G)
{
    int i,w;
    w=ngr;
    for(i=0;i<=G;i++)
        w=w-1;
    Work=Work+1.0/(pow(4,w));
}

////////////////////////////////////

void MG2D::WriteFile()
{
    WriteFile(U,"u.txt");
    WriteFile(V,"v.txt");
    WriteFile(X,"x.txt");
    WriteFile(Y,"y.txt");
}

////////////////////////////////////

void MG2D::WriteFile(double ***var, char *FileName)
{
    FILE *fu;
    int n,k,i,j;

    fu=fopen(FileName,"w");
    SetIndex(ngr-1);
    n=(int)(log10(ien)/log10(2));
    if(n>=7)
    {
        k=n;

```

```

        n=2;
        for(i=8;i<=k;i++)
        {
            n=n*2;
        }
    }
    else
        n=1;
    for(j=jen;j>=jst;j-=n)
    {
        for(i=ist;i<=ien;i+=n)
        {
            fprintf(fu,"%8.4f",var[ng-1][i][j]);
        }
        if(n!=1)
        {
            i=ien;
            fprintf(fu,"%8.4f",var[ng-1][i][j]);
        }
        fprintf(fu,"\n");
    }
    if(n!=1)
    {
        j=jst;
        for(i=ist;i<=ien;i+=n)
        {
            fprintf(fu,"%8.4f",var[ng-1][i][j]);
        }
        i=ien;
        fprintf(fu,"%8.4f",var[ng-1][i][j]);
    }
}

```

```

        fprintf(fu, "\n");
    }

    //////////////////////////////////////

void MG2D::WriteFileMid()
{
    FILE *fu,*fv,*fx,*fy;

    int n,k,i,j;

    fu=fopen("um.txt","w");
    fv=fopen("vm.txt","w");
    fx=fopen("xm.txt","w");
    fy=fopen("ym.txt","w");

    SetIndex(ngr-1);

    n=(int)(log10(ien)/log10(2));

    if(n>=7)
    {
        k=n;

        n=2;

        for(i=8;i<=k;i++)
        {
            n=n*2;
        }
    }

    else

        n=1;

    for(j=jst;j<=jen;j+=n)
    {

        i=(int)ien/2;

        fprintf(fu, "%8.4f\n", U[ngr-1][i][j]);

    }

    if(n!=1)
    {

```

```

        j=jen;

        fprintf(fu,"%8.4f\n",U[ng-1][i][j]);
    }
    fprintf(fu,"\n");
    for(j=jst;j<=jen;j+=n)
    {

        i=(int)ien/2;

        fprintf(fx,"%8.4f\n",Y[ng-1][i][j]);
    }
    if(n!=1)
    {

        j=jen;

        fprintf(fx,"%8.4f\n",Y[ng-1][i][j]);
    }
    fprintf(fu,"\n");
    for(i=ist;i<=ien;i+=n)
    {

        j=(int)jen/2;

        fprintf(fv,"%8.4f\n",V[ng-1][i][j]);
    }
    if(n!=1)
    {

        i=ien;

        fprintf(fv,"%8.4f\n",V[ng-1][i][j]);
    }
    fprintf(fv,"\n");
    for(i=ist;i<=ien;i+=n)
    {

        j=(int)jen/2;

        fprintf(fy,"%8.4f\n",X[ng-1][i][j]);
    }

```

```
if(n!=1)
{
    i=ien;
    fprintf(fy,"%8.4f\n",X[ngr-1][i][j]);
}
fprintf(fy,"\n");
fclose(fu);    fclose(fv);
fclose(fx);    fclose(fy);
}
```

ประวัติผู้เขียน

นายประทีป ทิพย์ประชา เกิดเมื่อวันที่ 17 เมษายน พ.ศ. 2514 สำเร็จการศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สาขาวิชาเครื่องกลเรือ เมื่อปี พ.ศ. 2534 และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) เมื่อปี พ.ศ. 2537 จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคใต้ จังหวัดสงขลา บรรจุเข้าเป็นข้าราชการที่สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคใต้ ในปี พ.ศ. 2537 ก่อนเข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโทได้รับทุนศึกษาดูงานที่ประเทศญี่ปุ่นจาก JICA เรื่อง “Shipbuilding and Quality Management” ปัจจุบันดำรงตำแหน่ง อาจารย์ 1 ระดับ 5 สังกัดสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคใต้