

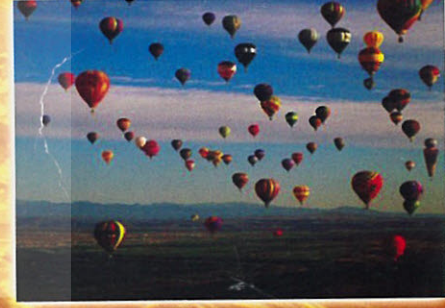
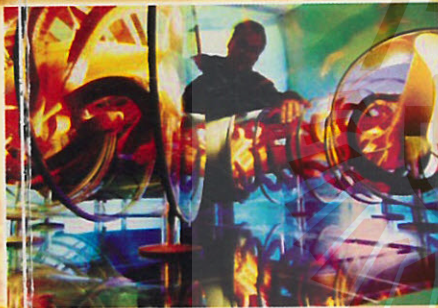
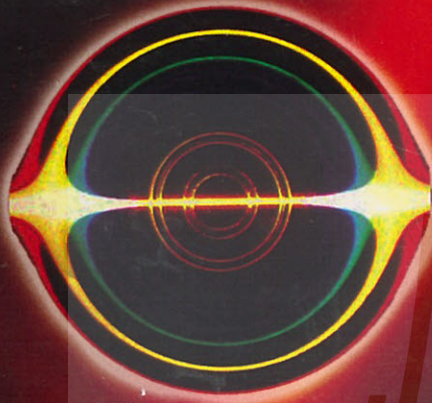


# ฟิสิกส์ 1

## PHYSICS 1

รหัสวิชา 105101

รศ.ดร.ประสาธ สืบคำ  
รศ.ดร.สำเนา ผาติเสนะ  
รศ.ดร.ประพันธ์ แม่นยำ  
ผศ.พ.อ.ดร.วรติษย์ อุษัย  
ผศ.ดร.ชินโรจน์ กอบเดช  
ผู้แต่ง



สาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



ชื่อ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พันเอก ดร.วรศิษย์ อู๋ชัย  
 คุณวุฒิ Ph.D. Nuclear Physics,1985 Emory University, Atlanta, Georgia, U.S.A.  
 ตำแหน่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
 หน้าที่เขียน หน่วยที่ 1 หน่วยที่ 2 และหน่วยที่ 3



ชื่อ รองศาสตราจารย์ ดร.ประพันธ์ แมนย่า  
 คุณวุฒิ D. Phil. Materials Science,1995 University of Oxford, U.K.  
 ตำแหน่ง รองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
 หน้าที่เขียน หน่วยที่ 4 และหน่วยที่ 5



ชื่อ รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา ผาดิเสนะ  
 คุณวุฒิ Ph.D. Physics,1985 University of Poona, India  
 ตำแหน่ง รองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
 หน้าที่เขียน หน่วยที่ 6 หน่วยที่ 7 และหน่วยที่ 8

### กลุ่มผลิตรายวิชาฟิสิกส์ 1

รองศาสตราจารย์ ดร.ประสาธ สืบคำ	ประธาน
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิโนรัตน์ กอบเดช	บรรณาธิการ
รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา ผาดิเสนะ	นักวิชาการด้านเนื้อหา
รองศาสตราจารย์ ดร.ประพันธ์ แมนย่า	นักวิชาการด้านเนื้อหา
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พันเอก ดร.วรศิษย์ อู๋ชัย	นักวิชาการด้านเนื้อหา
นายกิตติพงษ์ พุ่มพวง	นักเทคโนโลยีการศึกษา
นางศุภชานันท์ วนภู	นักวัดผลการศึกษา
นางสาวสุกัญญา จารุศิริวัฒนา	ผู้จัดการ



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

สาขาวิชาฟิสิกส์

ประมวลสาระวิชา

Course Comprehensive Text

105 101

ฟิสิกส์ 1

Physics 1

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

## สงวนลิขสิทธิ์

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

### จัดพิมพ์โดย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2546 จำนวน 1,500 เล่ม

พิมพ์ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2549 จำนวน 1,500 เล่ม

พิมพ์ครั้งที่ 3 พ.ศ. 2551 จำนวน 2,000 เล่ม

ราคา 145.- บาท

### ข้อมูลทางบรรณานุกรม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ สาขาวิชาฟิสิกส์

ประมวลสาระวิชาฟิสิกส์ 1 = Course Comprehensive Text Physics 1 / สาขาวิชาฟิสิกส์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. นครราชสีมา: มหาวิทยาลัย, 2551.

464 หน้า

ISBN 974-283-000-2

I. ฟิสิกส์. I. ชื่อเรื่อง.

QC 21.2

กองบรรณาธิการ โครงการการศึกษาไร้พรมแดน

ศิลปะและรูปเล่ม โครงการการศึกษาไร้พรมแดน

จัดพิมพ์ต้นฉบับ โครงการการศึกษาไร้พรมแดน

ออกแบบปก ศยามน อินสะอาด

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์โจเซฟ พลาสติก การ์ด (โคราช) แอนด์ ปริ้นท์ จำกัด

138/1 ถ.จักรี ต.ในเมือง อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000

โทร. 044-268441-2, 267039 โทรสาร. 044-267039

## คำนำ

การจัดพิมพ์เอกสารประกอบสาระวิชาฟิสิกส์ 1 ครั้งที่ 3 นี้ ทางกลุ่มผลิตได้แก้ไขคำผิด และปรับแก้คำและความในการพิมพ์ครั้งที่ 2 ให้ถูกต้องและเหมาะสม เพื่อให้เอกสารนี้มีความ สมบูรณ์ยิ่งขึ้น นอกจากนั้น ทางกลุ่มผลิตรายวิชาฟิสิกส์ 1 และโครงการการศึกษาไร้พรมแดนได้มี ความเห็นพ้องกันที่จะปรับรูปแบบปกและขนาดของเอกสารให้ได้มาตรฐานเหมือนตำราสากลทั่วไป เพื่อเป็นการง่ายและสะดวกต่อการใช้ เก็บรักษาและการจัดไว้บนชั้นหนังสือในห้องสมุด

เป็นที่ประจักษ์ชัดว่า ในปัจจุบันสื่อการเรียนรู้ที่เป็นสื่ออิเล็กทรอนิกส์มีอยู่มากมาย ซึ่งก็รวมถึง สื่ออิเล็กทรอนิกส์ประกอบประมวลสาระวิชาฟิสิกส์ 1 ด้วย แต่กลุ่มผลิตมีความเห็นตรงกันว่า สื่อ สิ่งพิมพ์ยังเป็นสื่อหลักที่มีความสำคัญต่อผู้ศึกษาอยู่มาก จึงมีความปรารถนาพร้อมกันว่า ถ้าเอกสารที่ อยู่ในมือท่านนี้ มีส่วนช่วยให้ท่านเกิดการเรียนรู้ฟิสิกส์พื้นฐานเต็มตามศักยภาพของท่านก็นับได้ว่า เป็นสัมฤทธิ์ผลสูงสุดของกลุ่มผลิตแล้ว

กลุ่มผลิตรายวิชาฟิสิกส์ 1

มีนาคม 2551

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

	หน้า
คำนำ	(3)
รายละเอียดวิชา	(13)
ประมวลสาระ	
<b>หน่วยที่ 1 การเคลื่อนที่</b>	<b>1</b>
<b>ตอนที่ 1.1 บทนำ</b>	<b>3</b>
เรื่องที่ 1 ฟิสิกส์	3
เรื่องที่ 2 ปริมาณทางฟิสิกส์และหน่วย	4
เรื่องที่ 3 เวกเตอร์และการรวมเวกเตอร์	6
เรื่องที่ 4 องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก	11
เรื่องที่ 5 การคูณเวกเตอร์	16
สรุป	19
<b>ตอนที่ 1.2 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง</b>	<b>21</b>
เรื่องที่ 1 จลนศาสตร์	21
เรื่องที่ 2 การกระจัด	21
เรื่องที่ 3 ความเร็ว	22
เรื่องที่ 4 ความเร่ง	27
เรื่องที่ 5 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว	29
เรื่องที่ 6 วัตถุตกอย่างอิสระ	31
สรุป	34
<b>ตอนที่ 1.3 การเคลื่อนที่ในสองมิติและสามมิติ</b>	<b>37</b>
เรื่องที่ 1 นิยามของตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง	37
เรื่องที่ 2 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ	41
เรื่องที่ 3 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์	42
เรื่องที่ 4 การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว	46
สรุป	50
<b>บรรณานุกรม</b>	<b>53</b>

หน่วยที่ 2 แรงและกฎของนิวตัน	55
ตอนที่ 2.1 แรง	57
เรื่องที่ 1 พลศาสตร์	57
เรื่องที่ 2 แนวความคิดเกี่ยวกับแรง	57
เรื่องที่ 3 มวลและความเฉื่อย	59
สรุป	60
ตอนที่ 2.2 กฎของนิวตัน	61
เรื่องที่ 1 กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน	61
เรื่องที่ 2 กฎข้อที่สองของนิวตัน	62
เรื่องที่ 3 กฎข้อที่สามของนิวตัน	63
เรื่องที่ 4 กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน	63
สรุป	66
ตอนที่ 2.3 การประยุกต์กฎของนิวตัน	69
เรื่องที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและมวล	69
เรื่องที่ 2 ความเสียดทาน	71
เรื่องที่ 3 การประยุกต์กฎของนิวตัน	73
สรุป	82
บรรณานุกรม	85
หน่วยที่ 3 งานและพลังงาน	87
ตอนที่ 3.1 งาน	89
เรื่องที่ 1 งานของแรงคงตัว	89
เรื่องที่ 2 งานของแรงไม่คงตัว	92
เรื่องที่ 3 งานและพลังงานจลน์	96
เรื่องที่ 4 กำลัง	98
สรุป	100
ตอนที่ 3.2 พลังงาน	103
เรื่องที่ 1 พลังงานศักย์	103
เรื่องที่ 2 แรงอนุรักษ์	107
เรื่องที่ 3 การอนุรักษ์พลังงาน	109
สรุป	114
บรรณานุกรม	117

<b>หน่วยที่ 4 ระบบอนุภาค โมเมนตัมและการชน</b>	<b>119</b>
<b>ตอนที่ 4.1 ระบบอนุภาค โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม</b>	<b>121</b>
<b>เรื่องที่ 1 จุดศูนย์กลาง จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์</b>	<b>121</b>
<b>เรื่องที่ 2 โมเมนตัมเชิงเส้นและการคล</b>	<b>131</b>
<b>เรื่องที่ 3 โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมของระบบอนุภาค</b>	<b>135</b>
<b>เรื่องที่ 4 พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค</b>	<b>141</b>
<b>สรุป</b>	<b>142</b>
<b>ตอนที่ 4.2 การชน</b>	<b>145</b>
<b>เรื่องที่ 1 การชนหนึ่งมิติ</b>	<b>145</b>
<b>เรื่องที่ 2 การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์และไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์</b>	<b>147</b>
<b>เรื่องที่ 3 การชนสองมิติ</b>	<b>153</b>
<b>สรุป</b>	<b>157</b>
<b>บรรณานุกรม</b>	<b>159</b>
<b>หน่วยที่ 5 การเคลื่อนที่แบบหมุน</b>	<b>161</b>
<b>ตอนที่ 5.1 วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตั้ง</b>	<b>163</b>
<b>เรื่องที่ 1 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตั้ง</b>	<b>163</b>
<b>เรื่องที่ 2 อัตราการเปลี่ยน โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตั้ง</b>	<b>166</b>
<b>เรื่องที่ 3 พลังงานจลน์ของการหมุน</b>	<b>166</b>
<b>สรุป</b>	<b>167</b>
<b>ตอนที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อย</b>	<b>169</b>
<b>เรื่องที่ 1 การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย</b>	<b>169</b>
<b>เรื่องที่ 2 ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก</b>	<b>171</b>
<b>เรื่องที่ 3 ทฤษฎีบทแกนขนาน</b>	<b>172</b>
<b>เรื่องที่ 4 รัศมีไจเรชัน</b>	<b>173</b>
<b>สรุป</b>	<b>178</b>
<b>ตอนที่ 5.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง</b>	<b>181</b>
<b>เรื่องที่ 1 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล</b>	<b>181</b>
<b>เรื่องที่ 2 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนสมมาตร</b>	<b>182</b>
<b>สรุป</b>	<b>185</b>
<b>บรรณานุกรม</b>	<b>187</b>

หน่วยที่ 6 การแกว่งกวัด	189
ตอนที่ 6.1 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว	191
เรื่องที่ 1 สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว	191
เรื่องที่ 2 แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว	196
เรื่องที่ 3 พลังงานของตัวแกว่งกวัด	197
สรุป	199
ตอนที่ 6.2 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว	201
เรื่องที่ 1 ลูกตุ้มเชิงเดียว	201
เรื่องที่ 2 ลูกตุ้มฟิสิกัล	202
เรื่องที่ 3 ลูกตุ้มชนิดบิก	204
สรุป	216
ตอนที่ 6.3 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุด	217
เรื่องที่ 1 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่มีความถี่เท่ากัน และอยู่ในแนวเดียวกัน	217
เรื่องที่ 2 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่มีความถี่เท่ากัน แต่มีแนวตั้งฉากกัน	218
เรื่องที่ 3 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับรูปลิสซาชูส์	221
สรุป	225
ตอนที่ 6.4 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ	227
เรื่องที่ 1 สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง	227
เรื่องที่ 2 พลังงานที่สูญเสียไป	230
เรื่องที่ 3 ผลของแรงภายนอก	238
สรุป	244
บรรณานุกรม	245
หน่วยที่ 7 สมบัติทั่วไปของคลื่นกล	247
ตอนที่ 7.1 คลื่นและชนิดของคลื่น	249
เรื่องที่ 1 คลื่นและชนิดของคลื่น	249
เรื่องที่ 2 สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น	251
เรื่องที่ 3 อัตราเร็วของคลื่นกล	256
เรื่องที่ 4 กำลังและความเข้มของคลื่น	258

เรื่องที่ 5 หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น	264
สรุป	266
ตอนที่ 7.2 คลื่นนิ่ง	267
เรื่องที่ 1 คลื่นนิ่ง	267
เรื่องที่ 2 การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่น ที่ตำแหน่งบีบและปฏิบัติ	273
เรื่องที่ 3 การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง	274
เรื่องที่ 4 คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ	275
สรุป	280
บรรณานุกรม	281
หน่วยที่ 8 เสียง	283
ตอนที่ 8.1 คลื่นเสียง	285
เรื่องที่ 1 ความเร็วและความเข้มของคลื่นเสียง	285
เรื่องที่ 2 การแทรกสอดของคลื่นเสียง	293
เรื่องที่ 3 บีตส์	294
สรุป	297
ตอนที่ 8.2 การได้ยิน	299
เรื่องที่ 1 ความสูงต่ำและความถี่ของเสียง	299
เรื่องที่ 2 ความเข้มและความดังของเสียง	300
เรื่องที่ 3 คุณภาพและรูปแบบของคลื่นเสียง	304
เรื่องที่ 4 ปრაกฏการณ์โดปเปลอร์	305
เรื่องที่ 5 ซอนิกบูม	311
สรุป	313
บรรณานุกรม	315
หน่วยที่ 9 สถิติศาสตร์ของของไหล	317
ตอนที่ 9.1 สถิติศาสตร์ของของไหล	319
เรื่องที่ 1 ความหนาแน่นและความดัน	319
เรื่องที่ 2 หลักของอาร์คิมิดีส	328
เรื่องที่ 3 หลักของพาสคัล	333
สรุป	336

ตอนที่ 9.2 แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด	337
เรื่องที่ 1 แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด	337
เรื่องที่ 2 ความตึงผิว	338
เรื่องที่ 3 มุมสัมผัส	343
เรื่องที่ 4 สภาพคะปิลลา	344
สรุป	347
บรรณานุกรม	349
หน่วยที่ 10 พลศาสตร์ของของไหล	351
ตอนที่ 10.1 สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี	353
เรื่องที่ 1 สมการแห่งการต่อเนื่อง	354
เรื่องที่ 2 สมการแบร์นูลลี	356
สรุป	359
ตอนที่ 10.2 การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี	361
เรื่องที่ 1 มาตรเวนทูรี	361
เรื่องที่ 2 หลอดไพทอต	364
เรื่องที่ 3 ทฤษฎีบทอว์รีเซลลี	365
เรื่องที่ 4 แรงยกปีกเครื่องบิน	368
เรื่องที่ 5 ปรากฏการณ์แมกนัส	370
สรุป	371
ตอนที่ 10.3 ความหนืด	373
เรื่องที่ 1 ความหนืด	373
เรื่องที่ 2 เลขของเรย์โนลด์	377
เรื่องที่ 3 กฎของสโตกส์	379
สรุป	381
บรรณานุกรม	383
หน่วยที่ 11 อุณหพลศาสตร์และทฤษฎีจลน์ของแก๊ส	385
ตอนที่ 11.1 บทนำ	387
เรื่องที่ 1 บทนิยาม เเทมต่างๆ ของอุณหพลศาสตร์	388
เรื่องที่ 2 อุณหภูมิ	389

เรื่องที่ 3 การขยายตัวเชิงความร้อน	390
สรุป	391
ตอนที่ 11.2 สมการสถานะ	393
เรื่องที่ 1 สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ	393
เรื่องที่ 2 สมการสถานะของแวน เดอร์ วาลส์	395
เรื่องที่ 3 งาน	398
สรุป	403
ตอนที่ 11.3 ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส	405
เรื่องที่ 1 ความนำ	405
เรื่องที่ 2 การกระจายความเร็วของโมเลกุล	410
เรื่องที่ 3 การแบ่งกันเท่ากันของพลังงาน	412
เรื่องที่ 4 วิถีเสรีเฉลี่ย	414
สรุป	418
บรรณานุกรม	419
หน่วยที่ 12 กฎทางอุณหพลศาสตร์	421
ตอนที่ 12.1 กฎข้อที่ศูนย์และกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์	423
เรื่องที่ 1 กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์	423
เรื่องที่ 2 พลังงานและกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์	423
เรื่องที่ 3 เอนทัลปีและความจุความร้อน	429
เรื่องที่ 4 ความจุความร้อนของแก๊สและของแข็ง	430
สรุป	434
ตอนที่ 12.2 กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์	437
เรื่องที่ 1 เอนโทรปีและกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์	437
เรื่องที่ 2 การหาค่าเอนโทรปี	438
เรื่องที่ 3 หลักการเพิ่มเอนโทรปีหรือลดพลังงาน	441
เรื่องที่ 4 เครื่องยนต์ความร้อน คู่เย็น และวัฏจักรคาร์โนท์	442
สรุป	447
บรรณานุกรม	449
ภาคผนวก	451
ดรชชนี้	457

# รายละเอียดวิชา

## คำอธิบายรายวิชา

รหัส 105 101 ชื่อวิชา ฟิสิกส์ 1 (Physics 1)

การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นและแบบหมุน การอนุรักษ์โมเมนตัม โมเมนตัมเชิงมุม พลังงานความยืดหยุ่น การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก การแกว่งกวัดแบบหน่วงและเรโซแนนซ์ การแผ่ของคลื่น คลื่นเสียง การไหลของของไหล ความร้อนและอุณหพลศาสตร์ ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส

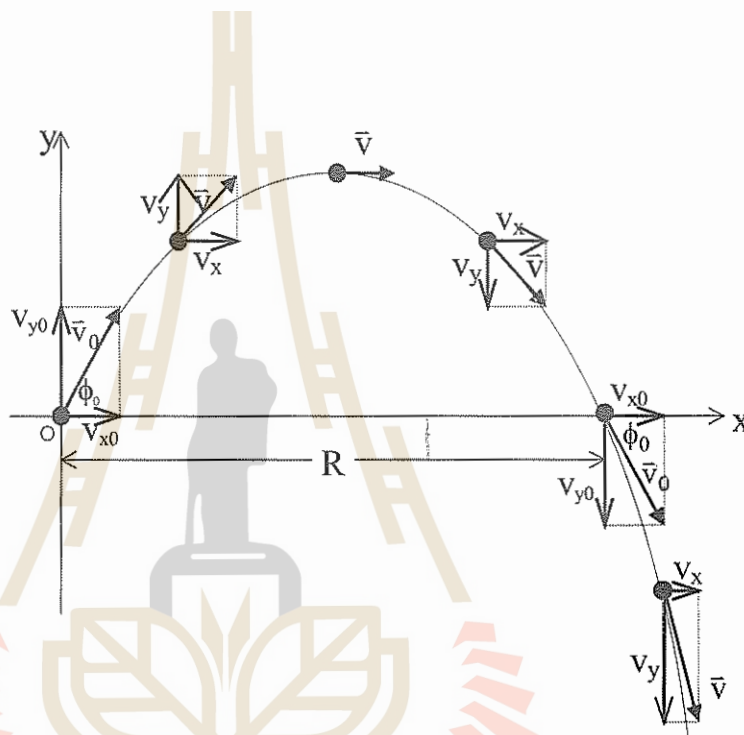
## วัตถุประสงค์รายวิชา

1. เพื่อให้ นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในกฎและทฤษฎีหลักทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งส่วนที่เกี่ยวข้องกับกลศาสตร์ คลื่นและอุณหพลศาสตร์
2. เพื่อให้ นักศึกษาสามารถพัฒนาทักษะการนำความรู้ความเข้าใจในกฎและทฤษฎีหลักทางฟิสิกส์ ไปใช้แก้ปัญหาโจทย์ทางฟิสิกส์หรือ โจทย์ที่ประยุกต์ในศาสตร์ด้านอื่นๆ ได้
3. เพื่อเป็นส่วนทฤษฎีของวิชาปฏิบัติการที่นักศึกษานำไปทดลองจริงในห้องปฏิบัติการเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของกฎและทฤษฎีทางฟิสิกส์
4. เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาศาสตร์สาขาวิชาต่างๆ วิศวกรรมศาสตร์ เทคโนโลยีการเกษตร วิทยาศาสตร์สุขภาพ รวมทั้งศาสตร์และเทคโนโลยีสาขาวิชาต่างๆ

## รายชื่อหน่วยการสอน

- หน่วยที่ 1 การเคลื่อนที่
- หน่วยที่ 2 แรงและกฎของนิวตัน
- หน่วยที่ 3 งานและพลังงาน
- หน่วยที่ 4 ระบบอนุภาค โมเมนตัมและการชน
- หน่วยที่ 5 การเคลื่อนที่แบบหมุน
- หน่วยที่ 6 การแกว่งกวัด
- หน่วยที่ 7 สมบัติทั่วไปของคลื่นกล
- หน่วยที่ 8 เสียง
- หน่วยที่ 9 สถิติศาสตร์ของของไหล
- หน่วยที่ 10 พลศาสตร์ของของไหล
- หน่วยที่ 11 อุณหพลศาสตร์และทฤษฎีจลน์ของแก๊ส
- หน่วยที่ 12 กฎทางอุณหพลศาสตร์

การเคลื่อนที่



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พันเอก ดร.วรศิษย์ อุทัย

# ตอนที่ 1.1

## บทนำ

เนื่องจากฟิสิกส์เป็นศาสตร์ที่อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติโดยอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์ชนิดต่างๆ ดังนั้นในบทนำนอกจากจะกล่าวถึงความหมายของฟิสิกส์แล้วก็จะกล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์และหน่วยของปริมาณเหล่านั้น

ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทางฟิสิกส์ชนิดต่างๆ นั้น จะสามารถกระทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ เมื่อใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์ ดังนั้นบทนำจึงต้องกล่าวถึงเรื่องของเวกเตอร์และการรวมเวกเตอร์ องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และการคูณเวกเตอร์

### 1. ฟิสิกส์

คำว่า ฟิสิกส์ เป็นคำที่มาจากภาษากรีก ซึ่งมีความหมายว่า ธรรมชาติ (nature) ดังนั้นจึงอาจนิยามวิชา ฟิสิกส์ ว่าเป็นศาสตร์ของธรรมชาติ ซึ่งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติได้อย่างถูกต้อง วิทยาศาสตร์สาขาอื่นๆ เช่น เคมี ชีววิทยา ธรณีวิทยา และดาราศาสตร์ ส่วนแล้วแต่อาศัยวิชาฟิสิกส์เป็นพื้นฐาน เนื่องจากทฤษฎีต่างๆ ในวิชาฟิสิกส์ซึ่งเป็นคำอธิบายของปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ โดยอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์นั้นได้มาจากการสังเกต การวัด และการทดลอง ดังนั้นเราจึงถือว่าฟิสิกส์เป็น ศาสตร์ที่ได้จากการทดลอง หรือ **Experimental Sciences** ปรากฏการณ์ทางกายภาพทั้งหลายล้วนมาจากแขนงต่างๆ ของวิชาฟิสิกส์ต่อไปนี้

1. กลศาสตร์ (Mechanics) : เป็นแขนงที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ
2. อุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) : เป็นแขนงที่เกี่ยวข้องกับความร้อน อุณหภูมิจ และพฤติกรรมของอนุภาคจำนวนมากๆ
3. แม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetics) : เป็นแขนงที่เกี่ยวข้องกับประจุไฟฟ้า กระแสไฟฟ้า และแม่เหล็กไฟฟ้า
4. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity) : เป็นแขนงที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีความเร็วสูง
5. กลศาสตร์ควอนตัม (Quantum Mechanics) : เป็นแขนงที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของอนุภาคขนาดเล็ก

## 2. ปริมาณทางฟิสิกส์และหน่วย

การอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาตินั้น เราอาศัยสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณทางฟิสิกส์ต่างๆ ตามกฎเกณฑ์ของธรรมชาติ ดังนั้นจึงต้องกำหนดปริมาณทางฟิสิกส์ที่ต้องการขึ้นมา และเนื่องจากวิชาฟิสิกส์เป็นศาสตร์ที่ได้จากการทดลอง ปริมาณทางฟิสิกส์ที่กำหนดขึ้นมานี้ต้องเป็นมาตรฐานเดียวกันที่ผู้ทำการทดลองสามารถสื่อสารกันได้อย่างถูกต้องหรือเข้าใจตรงกัน มาตรฐานดังกล่าวก็คือ หน่วย (unit) ของปริมาณทางฟิสิกส์นั่นเอง

### 2.1 ปริมาณทางฟิสิกส์

ปริมาณทางฟิสิกส์ (physical quantity) แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ

2.1.1 ปริมาณพื้นฐาน (basic quantity) : เป็นปริมาณที่ได้จากการวัดโดยตรง เช่น มวล ความยาว เวลา อุณหภูมิ และประจุไฟฟ้า เป็นต้น

2.1.2 ปริมาณอนุพันธ์ (derived quantity) : เป็นปริมาณที่ได้จากการนำปริมาณพื้นฐานมาผสมผสานกัน เช่น อัตราเร็ว อัตราเร่ง โมเมนตัม และพลังงาน เป็นต้น

### 2.2 หน่วย

หน่วย (unit) ของปริมาณทางฟิสิกส์ที่นิยมใช้มีหลายระบบ แต่หน่วยในระบบนานาชาติ หรือหน่วย SI ซึ่งย่อมาจากคำภาษาฝรั่งเศสว่า Le Systeme International d' Unites เป็นหน่วยที่ยอมรับร่วมกันในระหว่างนานาชาติ ตารางที่ 1.1 แสดงถึงหน่วยของปริมาณพื้นฐาน และตารางที่ 1.2 แสดงถึงหน่วยของปริมาณอนุพันธ์ในระบบ SI

ตารางที่ 1.1 หน่วยของปริมาณพื้นฐาน 7 ปริมาณ

ปริมาณ	ชื่อหน่วย	สัญลักษณ์
มวล	กิโลกรัม (kilogram)	kg
ความยาว	เมตร (meter)	m
เวลา	วินาที (second)	s
จำนวนสาร	โมล (mole)	mol
อุณหภูมิเชิงอุณหพลศาสตร์	เคลวิน (kelvin)	K
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์ (ampere)	A
ความเข้มของการส่องสว่าง	แคนเดลา (candela)	Cd

ฟิสิกส์ 1

ตารางที่ 1.2 หน่วยของปริมาณอนุพันธ์บางปริมาณ

ปริมาณ	ชื่อหน่วย	สัญลักษณ์	มาจากหน่วยพื้นฐาน
แรง	นิวตัน (newton)	N	$\text{kg m/s}^2$
งาน	จูล (joule)	J	$\text{kg m}^2/\text{s}^2$
กำลัง	วัตต์ (watt)	W	$\text{kg m}^2/\text{s}^3$ (J/s)
ความดัน	พาสคัล (pascal)	Pa	$\text{kg/m s}^2$ ( $\text{N/m}^2$ )
ความเหนี่ยวนำ	เฮนรี (henry)	H	$\text{kg m}^2/\text{A}^2 \text{s}^2$

ในบางกรณีอาจมีความต้องการใช้หน่วยที่มีขนาดใหญ่มากๆ หรือเล็กมากๆ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการใช้ จึงมีการกำหนดคำอุปสรรค (prefixes) นำหน้าหน่วยขึ้น ตารางที่ 1.3 แสดงคำอุปสรรคของหน่วยในระบบ SI พร้อมทั้งความหมายและสัญลักษณ์ของคำอุปสรรคเหล่านั้น

ตารางที่ 1.3 คำอุปสรรคในระบบ SI

คำอุปสรรค	ความหมาย	สัญลักษณ์
exa-	$10^{18}$	E
peta-	$10^{15}$	P
tera-	$10^{12}$	T
giga-	$10^9$	G
mega-	$10^6$	M
kilo-	$10^3$	K
hecto-	$10^2$	H
deka-	$10^1$	Da
deci-	$10^{-1}$	D
centi-	$10^{-2}$	C
milli-	$10^{-3}$	m
micro-	$10^{-6}$	$\mu$
nano-	$10^{-9}$	n
pico-	$10^{-12}$	p
femto-	$10^{-15}$	f
atto-	$10^{-18}$	a

### 3. เวกเตอร์และการรวมเวกเตอร์

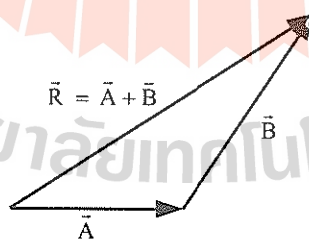
ปริมาณทางฟิสิกส์ ทั้งที่เป็นปริมาณพื้นฐานและปริมาณอนุพันธ์ อาจแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ

- 1) ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) เป็นปริมาณที่บอกขนาดอย่างเดียวก็มีความหมายสมบูรณ์ เช่น มวล ความยาว เวลา งาน และพลังงาน เป็นต้น
- 2) ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) เป็นปริมาณที่ต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะมีความหมายสมบูรณ์ เช่น แรง การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง และโมเมนตัม เป็นต้น

#### 3.1 การรวมเวกเตอร์

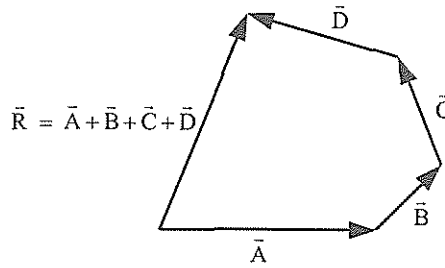
การรวมเวกเตอร์ หมายถึง การนำเวกเตอร์ตั้งแต่ 2 เวกเตอร์ขึ้นไปมารวมกัน ซึ่งอาจเป็นการบวกหรือลบเวกเตอร์ก็ได้ โดยมีเงื่อนไขว่าเวกเตอร์ที่จะสามารถรวมกันได้จะต้องมีหน่วยเดียวกัน เช่น การรวมเวกเตอร์ของการกระจัด หรือการรวมเวกเตอร์ของความเร่ง เป็นต้น เราสามารถรวมเวกเตอร์โดยอาศัยวิธีเรขาคณิต ซึ่งมีวิธีการดังจะกล่าวต่อไปนี้

3.1.1 การบวกเวกเตอร์ ถ้าเราต้องการบวกเวกเตอร์  $\vec{B}$  เข้ากับเวกเตอร์  $\vec{A}$  ให้เขียนเวกเตอร์  $\vec{A}$  โดยให้มีขนาดและทิศทางตรงตามขนาดและทิศทางของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ก่อน แล้วเขียนเวกเตอร์  $\vec{B}$  ให้มีขนาดและทิศทางตรงตามขนาดและทิศทางของเวกเตอร์  $\vec{B}$  ลงไป โดยให้ส่วนท้ายของเวกเตอร์  $\vec{B}$  อยู่ตรงส่วนหัวของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ดังรูปที่ 1.1 เวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{R}$  ซึ่งมีค่า  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$  จะเป็นเวกเตอร์ที่ลากจากท้ายของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ไปยังหัวของเวกเตอร์  $\vec{B}$



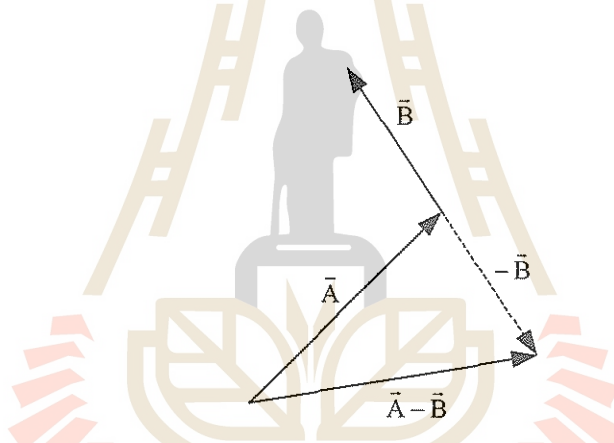
รูปที่ 1.1 การบวกเวกเตอร์  $\vec{A}$  กับ  $\vec{B}$  ซึ่งได้เวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{R}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ลากจากส่วนท้ายของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ไปยังส่วนหัวของเวกเตอร์  $\vec{B}$

ในกรณีของการบวกเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์ เราสามารถทำได้ในลักษณะเดียวกัน โดยการนำเวกเตอร์ทั้งหมดมาวาดต่อกันไป และเวกเตอร์ที่ลากจากท้ายของเวกเตอร์แรกไปยังหัวของเวกเตอร์สุดท้ายจะเป็นเวกเตอร์ลัพธ์ดังแสดงในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 การบวกเวกเตอร์  $\vec{A}$  กับ  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  และ  $\vec{D}$  ซึ่งได้เวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{R}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ลากจากส่วนท้ายของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ไปยังส่วนหัวของเวกเตอร์  $\vec{D}$

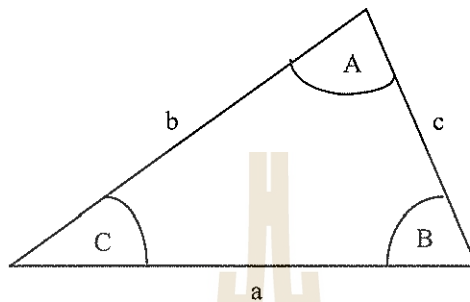
3.1.2 การลบเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์สามารถกระทำได้ในลักษณะเดียวกันกับการบวกเวกเตอร์ เพียงแต่ให้กลับทิศของเวกเตอร์ที่จะนำมาลบไปในทิศตรงกันข้ามก่อนดำเนินการวาดส่วนท้ายของเวกเตอร์นั้นลงตรงหัวของเวกเตอร์แรก เวกเตอร์ลัพธ์ก็คือเวกเตอร์ที่ลากจากส่วนท้ายของเวกเตอร์แรกไปยังส่วนหัวของเวกเตอร์สุดท้าย รูปที่ 1.3 แสดงการลบเวกเตอร์  $\vec{A}$  ด้วยเวกเตอร์  $\vec{B}$  ซึ่งจะได้เวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{R}$  มีค่า  $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$



รูปที่ 1.3 การลบเวกเตอร์  $\vec{A}$  ด้วย  $\vec{B}$  โดยเวกเตอร์  $-\vec{B}$  มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์  $\vec{B}$  แต่ทิศทางตรงกันข้าม

### 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม

ในการรวมเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เข้าด้วยกัน เวกเตอร์เหล่านั้นและเวกเตอร์ลัพธ์จะทำให้เกิดสามเหลี่ยมขึ้น ซึ่งถ้าหากรู้ความยาวและมุมของสามเหลี่ยมบางค่า เราอาจใช้กฎของไซน์ (sine's law) หรือกฎของโคไซน์ (cosine's law) เพื่อหาค่าความยาวและมุมของรูปสามเหลี่ยมที่ยังไม่ทราบค่าได้ ดังนี้



รูปที่ 1.4 สามเหลี่ยมซึ่งเกิดขึ้นจากการรวมเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

พิจารณาสามเหลี่ยมในรูปที่ 1.4 ซึ่งมีด้านยาว  $a$ ,  $b$  และ  $c$  และมีมุมเป็น  $A$ ,  $B$  และ  $C$  ตามลำดับ เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวและมุมของสามเหลี่ยมได้จากกฎของไซน์และกฎของโคไซน์ดังนี้

กฎของไซน์ (sine's law) :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (1.1)$$

กฎของโคไซน์ (cosine's law) :

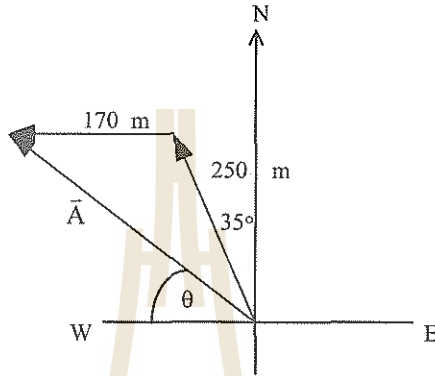
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned} \quad (1.2)$$

ตัวอย่างที่ 1.1 หญิงคนหนึ่งเดินได้ระยะ 250 เมตร ในทิศ  $35^\circ$  จากเหนือไปทางตะวันตก แล้วเดินต่อได้ระยะ 170 เมตร ไปทางตะวันตก

- (a) จงหาการกระจัดผลลัพธ์  $\vec{A}$  โดยวิธีเรขาคณิต
- (b) เปรียบเทียบขนาดของการกระจัดผลลัพธ์ และระยะทางที่เดิน

วิธีทำ

(a)



รูปที่ 1.5 กราฟของการกระจัดของการเดินทางของหญิง

cosine's law : 
$$A^2 = (170\text{m})^2 + (250\text{m})^2 - 2(170\text{m})(250\text{m})\cos 125^\circ$$

$$A = 374.4 \text{ m}$$

sine's law : 
$$\frac{250 \text{ m}}{\sin \theta} = \frac{374.4\text{m}}{\sin 125^\circ} = 457.06$$

$$\sin \theta = 0.547$$

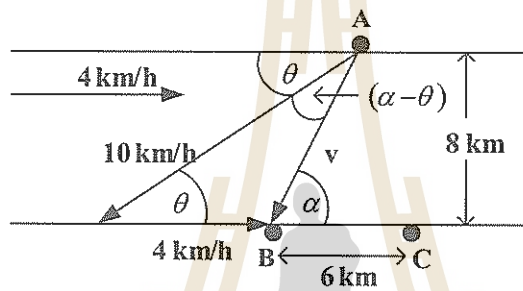
$$\theta = 33.1^\circ$$

(b) ระยะทางเดิน =  $250 \text{ m} + 170 \text{ m} = 420 \text{ m}$

ขนาดการกระจัดผลลัพธ์ =  $374.4 \text{ m}$

ตัวอย่างที่ 1.2 เมือง A และ B ตั้งอยู่ฝั่งตรงข้ามของแม่น้ำกว้าง 8 กิโลเมตร กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 4 กิโลเมตร/ชั่วโมง ชายคนหนึ่งอยู่ที่เมือง A จะเดินทางไปเมือง C ซึ่งอยู่ห่างจากเมือง B เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร อยู่ต้นน้ำและฝั่งเดียวกับเมือง B ถ้าเรือเคลื่อนที่ได้อัตราเร็วสูงสุด 10 กิโลเมตร/ชั่วโมง เขาต้องเลือกใช้เส้นทางใด จึงจะเดินทางถึงเมือง C เร็วที่สุด

วิธีทำ



รูปที่ 1.6 กราฟการเดินทางของชายจากเมือง A ถึงเมือง C

sine's law :

$$\frac{10}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{4}{\sin(\alpha - \theta)}$$

$$\frac{10}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta}$$

$$\frac{10}{\left(\frac{8}{10}\right)} = \frac{4}{\left(\frac{8}{10}\right)\cos \theta - \left(\frac{6}{10}\right)\sin \theta}$$

$$8 = 20\cos \theta - 15\sin \theta \quad (1)$$

และ

$$\frac{v}{\sin \theta} = \frac{10}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{100}{8}$$

$$\sin \theta = \frac{8}{100}v \quad (2)$$

แทน (2) ใน (1)

$$8 = 20\cos \theta - \frac{15 \times 8}{100}v$$

$$40 = 100\cos \theta - 6v \quad (3)$$

cosine's law :

$$v^2 = 10^2 + 4^2 - 80\cos \theta \quad (4)$$

สมการ (3)  $\times 8/10$

$$40 \times \frac{8}{10} = 100 \times \frac{8}{10} \cos \theta - 6 \times \frac{8}{10}v$$

$$32 = 80\cos\theta - \frac{24}{5}v$$

$$80\cos\theta = 32 + \frac{24}{5}v \quad (5)$$

แทน (5) ใน (4)

$$v^2 = 116 - \left(32 + \frac{24}{5}v\right)$$

$$= 84 - 4.8v$$

$$\therefore v^2 + 4.8v - 84 = 0$$

$$v = -11.87, 7.07 \text{ km/h}$$

แทนค่า  $v = 7.07 \text{ km/h}$  ใน (3)

$$40 = 100\cos\theta - 6(7.07)$$

$$= 100\cos\theta - 42.42$$

$$\cos\theta = \frac{82.42}{100} = 0.8242$$

$$\theta = 34.49^\circ \text{ หรือ } 34^\circ 29'$$

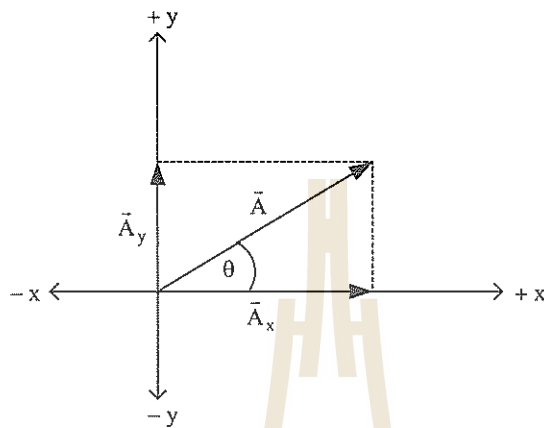
เขาต้องขับเรือในทิศทางทำมุม  $34^\circ 29'$  กับแนวขนานฝั่ง

#### 4. องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

##### 4.1 การแยกเวกเตอร์เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์

การรวมเวกเตอร์โดยวิธีเรขาคณิตนั้น ไม่เหมาะกับการรวมเวกเตอร์หลายๆ เวกเตอร์เข้าด้วยกัน เพราะจะได้ผลลัพธ์ที่ไม่แม่นยำ ดังนั้นถ้าต้องรวมเวกเตอร์จำนวนมากๆ เข้าด้วยกัน ควรใช้วิธีแยกเวกเตอร์ออกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ (vector components) ก่อนแล้วค่อยรวมกันทางพีชคณิต

พิจารณาเวกเตอร์  $\vec{A}$  ในระบบแกนพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) ในสองมิติ (ระนาบ xy) ในรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 การแยกเวกเตอร์  $\vec{A}$  เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เราสามารถแยกเวกเตอร์  $\vec{A}$  ออกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน  $x$  และ  $y$  เป็น  $\vec{A}_x$  และ  $\vec{A}_y$  ตามลำดับ และสามารถเขียนเวกเตอร์  $\vec{A}$  อยู่ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (1.3)$$

โดยขนาดขององค์ประกอบของเวกเตอร์  $\vec{A}_x$  และ  $\vec{A}_y$  มีความสัมพันธ์กับขนาดของเวกเตอร์  $\vec{A}$  และมุม  $\theta$  ดังนี้

$$\begin{aligned} A_x &= A \cos \theta \\ A_y &= A \sin \theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

จากรูปที่ 1.7 และความสัมพันธ์ของด้านและมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ขนาดของเวกเตอร์  $\vec{A}$  และมุม  $\theta$  ดังนี้

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan \theta &= A_y / A_x \end{aligned} \quad (1.5)$$

#### 4.2 การรวมเวกเตอร์โดยใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์

เราสามารถรวมเวกเตอร์ โดยใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์ดังกล่าวในหัวข้อ 4.1 ได้โดยง่ายและสะดวก โดยแยกเวกเตอร์ทั้งสองออกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ก่อนแล้วค่อยรวมองค์ประกอบของเวกเตอร์เหล่านั้นทางพีชคณิต เช่น การรวมเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  ซึ่งสามารถกระทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_x + \vec{A}_y \\ \vec{B} &= \vec{B}_x + \vec{B}_y \end{aligned} \quad (1.6)$$

ถ้า  $\vec{R}$  คือผลรวมของ  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  จะได้

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{B}_x) + (\vec{A}_y + \vec{B}_y) \tag{1.7}$$

เนื่องจาก  $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$  ดังนั้นจะได้

$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$

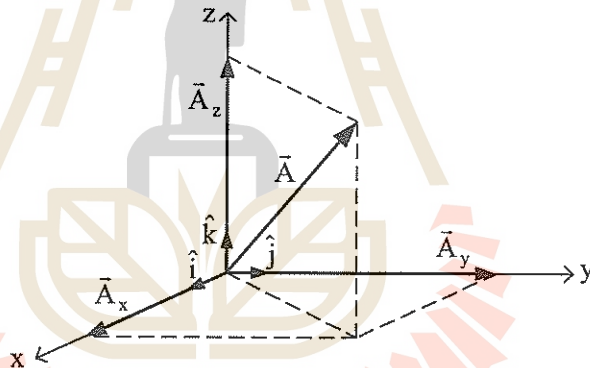
$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y \tag{1.8}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

### 4.3 การรวมเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หน่วย

การรวมเวกเตอร์ นอกจากจะใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์ดังกล่าวในหัวข้อ 4.2 แล้ว ยังสามารถใช้เวกเตอร์หน่วยได้สะดวกเช่นเดียวกัน ก่อนที่จะกล่าวถึงการรวมเวกเตอร์โดยวิธีนี้ เราจะกล่าวถึงการแยกเวกเตอร์ใดๆ ให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์และเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ก่อน

พิจารณาเวกเตอร์  $\vec{A}$  ในระบบพิกัดฉาก (xyz) ซึ่งมี  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  และ  $\hat{k}$  เป็นเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 และมีทิศชี้ไปในแกน +x, +y และ +z ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 การแยกเวกเตอร์  $\vec{A}$  เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน x, y และ z ที่มีเวกเตอร์หน่วยเป็น  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  และ  $\hat{k}$  ตามลำดับ

องค์ประกอบของเวกเตอร์  $\vec{A}$  ในแนวแกน x, y และ z สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x \hat{i} \\ \vec{A}_y &= A_y \hat{j} \\ \vec{A}_z &= A_z \hat{k} \end{aligned} \tag{1.9}$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนเวกเตอร์  $\vec{A}$  ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์และเวกเตอร์หน่วยได้ดังนี้

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (1.10)$$

โดยขนาดของเวกเตอร์  $\vec{A}$  มีค่า

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.11)$$

การรวมเวกเตอร์โดยอาศัยเวกเตอร์หน่วยจึงสามารถกระทำได้โดยรวมองค์ประกอบของเวกเตอร์ของเวกเตอร์ที่จะรวมกันในแกนเดียวกันเข้าด้วยกัน เช่น การรวมเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์  $\vec{R}$  และเราสามารถเขียนเวกเตอร์ผลลัพธ์  $\vec{R}$  ได้ดังนี้

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad (1.12)$$

เนื่องจาก  $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$  จะได้องค์ประกอบของเวกเตอร์ผลลัพธ์มีค่า

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \\ R_z &= A_z + B_z \end{aligned} \quad (1.13)$$

**ตัวอย่างที่ 1.3**  $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$  และ  $\vec{b} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$  จงหาขนาดและทิศทางเทียบกับแกน x ของเวกเตอร์ต่อไปนี้

- (a)  $\vec{a}$
- (b)  $\vec{b}$
- (c)  $\vec{a} + \vec{b}$
- (d)  $\vec{b} - \vec{a}$
- (e)  $\vec{a} - \vec{b}$

**วิธีทำ** จากโจทย์จะได้  $a_x = 4, a_y = -3, b_x = 6, b_y = 8$

$$(a) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-3}{4} = -0.75$$

$$\alpha = -36.9^\circ \text{ หรือ } 323.1^\circ$$

$$(b) \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\tan \alpha = \frac{b_y}{b_x} = \frac{8}{6} = 1.33$$

$$\alpha = 53.1^\circ$$

$$(c) \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} \\ = (4+6)\hat{i} + (-3+8)\hat{j} = 10\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 11.18$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\alpha = 26.6^\circ$$

$$(d) \quad \vec{b} - \vec{a} = (b_x - a_x)\hat{i} + (b_y - a_y)\hat{j} \\ = (6-4)\hat{i} + (8+3)\hat{j} = 2\hat{i} + 11\hat{j}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 11.18$$

$$\tan \alpha = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\alpha = 79.69^\circ$$

$$(e) \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} \\ = (4-6)\hat{i} + (-3-8)\hat{j} = -2\hat{i} - 11\hat{j}$$

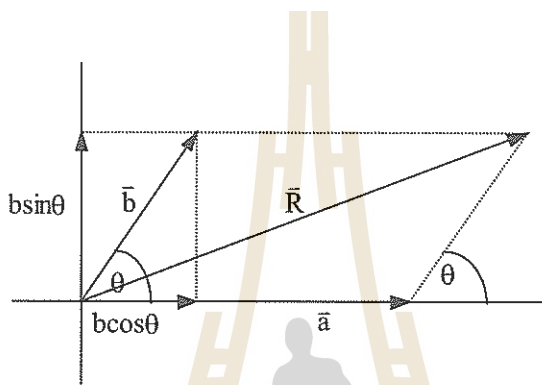
$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} = 11.18$$

$$\tan \alpha = \frac{-11}{-2} = 5.5$$

$$\alpha = 259.69^\circ$$

ตัวอย่างที่ 1.4 เวกเตอร์  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ทำมุม  $\theta$  ต่อกัน จงแสดงว่าขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์  $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$  มีค่าเท่ากับ  $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$  โดยใช้วิธีการแยกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์

วิธีทำ



รูปที่ 1.9 กราฟการรวมเวกเตอร์  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์  $\vec{R}$

แยกเวกเตอร์  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เข้าแกน x และ y จะได้

$$a_x = a ; b_x = b \cos \theta$$

$$a_y = 0 ; b_y = b \sin \theta$$

รวมเวกเตอร์ตามแกน x และ y จะได้

$$R_x = a_x + b_x = a + b \cos \theta$$

$$R_y = a_y + b_y = 0 + b \sin \theta$$

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = (a + b \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2$$

$$= a^2 + 2ba \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

## 5. การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์มี 2 ชนิด คือ การคูณแบบสเกลาร์ (scalar product or dot product) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลาร์ และการคูณแบบเวกเตอร์ (vector product or cross product) ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

### 5.1 การคูณแบบสเกลาร์

เมื่อเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  คูณกันแบบสเกลาร์ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \tag{1.14}$$

เมื่อ  $\theta$  คือมุมระหว่าง  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$

ในการคูณแบบสเกลาร์โดยใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์จะได้

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= [A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}] \cdot [B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}] \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \tag{1.15}$$

ผลลัพธ์ที่ได้ในสมการ (1.15) นั้น เราได้ใช้ผลลัพธ์ของการคูณแบบสเกลาร์ของเวกเตอร์หน่วย  $\hat{i}$   $\hat{j}$  และ  $\hat{k}$  ตามสมการข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \\ \hat{j} \cdot \hat{i} &= \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

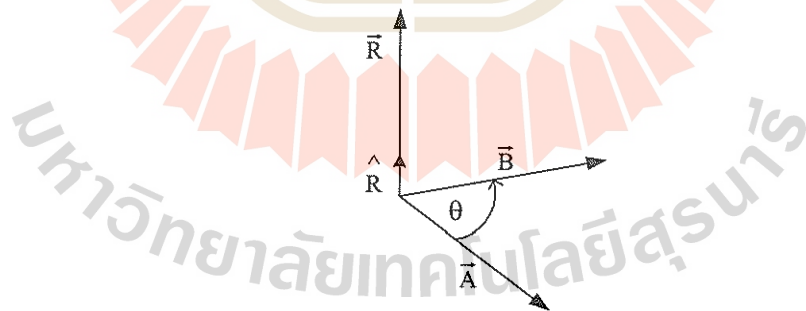
### 5.2 การคูณแบบเวกเตอร์

เมื่อเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  คูณกันแบบเวกเตอร์ จะได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์  $\vec{R}$  ดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{R} = \vec{R} \tag{1.17}$$

เมื่อ  $\theta$  คือมุมระหว่าง  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  และ

$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$  คือ เวกเตอร์หน่วยซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของ  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  ดังแสดงในรูปที่ 1.10



รูปที่ 1.10 แสดงทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์  $\vec{R}$  ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$

ทิศทางของ  $\vec{R}$  สามารถหาได้โดยใช้กฎมือขวาโดยตั้งระนาบของมือขวาขนานกับแนวของ  $\vec{A}$  แล้วรวมนิ้วหิ้วที่เข้าหาปลายของ  $\vec{B}$  นิ้วหัวแม่มือจะชี้ทิศทางของ  $\vec{R}$

ในการคูณแบบเวกเตอร์โดยองค์ประกอบของเวกเตอร์จะได้

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= [A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}] \times [B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}] \\ &= [A_yB_z - A_zB_y]\hat{i} + [A_zB_x - A_xB_z]\hat{j} + [A_xB_y - A_yB_x]\hat{k}\end{aligned}\quad (1.18)$$

ผลลัพธ์ที่ได้ในสมการ (1.18) นั้น เราได้ใช้ผลลัพธ์ของการคูณแบบเวกเตอร์ของเวกเตอร์หน่วย  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  ตามสมการข้างล่างนี้

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{i} &= \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \\ \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k} \quad ; \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i} \quad ; \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j} \quad ; \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}\end{aligned}\quad (1.19)$$

ผลลัพธ์ตามสมการ (1.18) นั้น อาจหาได้โดยใช้วิธีหาคีเตอร์มิแนนต์ (determinant) หรือ

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= [A_yB_z - A_zB_y]\hat{i} + [A_zB_x - A_xB_z]\hat{j} + [A_xB_y - A_yB_x]\hat{k}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 เวกเตอร์  $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ,  $\vec{b} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$  และ  $\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

จงหา (a)  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

(b)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(a) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z + a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z\end{aligned}\quad (1)$$

แทนค่าในสมการ (1) ด้วย  $\begin{matrix} a_x = 3 & b_x = -1 & c_x = 2 \\ a_y = 3 & b_y = -4 & c_y = 2 \\ a_z = -2 & b_z = 2 & c_z = 1 \end{matrix}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (-3 - 12 - 4) + (6 + 6 - 2) = -9$$

$$(b) \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_y c_z - a_z c_y) \hat{i} \\ &\quad + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_z c_x - a_x c_z) \hat{j} \\ &\quad + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} + (a_x c_y - a_y c_x) \hat{k} \\ &= (6-8) \hat{i} + (3+4) \hat{i} + (2-6) \hat{j} + (-4-3) \hat{j} + (-12+3) \hat{k} + (6-6) \hat{k} \\ &= 5 \hat{i} - 11 \hat{j} - 9 \hat{k} \end{aligned}$$

---

## สรุป

### 1. ฟิสิกส์

ฟิสิกส์ เป็นศาสตร์ของธรรมชาติซึ่งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ในธรรมชาติได้อย่างถูกต้อง และเป็นศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานของวิทยาศาสตร์สาขาอื่นๆ เช่น เคมี ชีววิทยา และธรณีวิทยา เป็นต้น

### 2. ปริมาณทางฟิสิกส์ และหน่วย

ปริมาณทางฟิสิกส์แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ ปริมาณพื้นฐาน และปริมาณอนุพันธ์ โดยปริมาณพื้นฐานเป็นปริมาณที่ได้โดยตรงจากการวัด แต่ปริมาณอนุพันธ์เป็นปริมาณที่ได้จากการผสมผสานของปริมาณพื้นฐาน

หน่วยเป็นสิ่งที่บอกถึงมาตรฐานของปริมาณทางฟิสิกส์ เพื่อให้ผู้ทำการทดลองสื่อสารกันได้อย่างถูกต้องหรือเข้าใจตรงกัน โดยหน่วยที่นิยมใช้คือหน่วยในระบบนานาชาติ (SI unit)

### 3. เวกเตอร์ และการรวมเวกเตอร์

ปริมาณทางฟิสิกส์ทั้งที่เป็นปริมาณพื้นฐาน และปริมาณอนุพันธ์ อาจแบ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ และปริมาณสเกลาร์ โดยปริมาณเวกเตอร์นั้นต้องบอกทั้งขนาดและทิศทางจึงจะสมบูรณ์ แต่ปริมาณสเกลาร์สามารถบอกเพียงขนาดก็สมบูรณ์ได้

การรวมเวกเตอร์นั้นอาจกระทำได้โดยวิธีเรขาคณิต โดยการวาดเวกเตอร์แรกให้มีขนาดและทิศทางตรงตามเวกเตอร์แรกก่อน แล้วค่อยนำเวกเตอร์ที่สองมาวาดต่อโดยให้ส่วนท้ายของเวกเตอร์ที่สองอยู่บนส่วนหัวของเวกเตอร์แรก และให้มีขนาดและทิศทางตรงตามเวกเตอร์ที่สอง เวกเตอร์ผลลัพธ์ก็คือเวกเตอร์ที่ลากจากส่วนท้ายของเวกเตอร์แรกไปยังส่วนหัวของเวกเตอร์ที่สอง

ในกรณีที่รวมเวกเตอร์มากกว่าสองเวกเตอร์ก็สามารถกระทำได้ในลักษณะเดียวกัน เนื่องจากการรวมเวกเตอร์โดยวิธีเรขาคณิต จะทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยมขึ้น ดังนั้นกฎของไซน์ (สมการ 1.1) และกฎของโคไซน์ (สมการ 1.2) อาจเป็นประโยชน์ต่อการหาเวกเตอร์ผลลัพธ์

#### 4. องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เวกเตอร์ใดๆ สามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากได้ ดังแสดงในสมการ (1.3) (1.4) และ (1.5) และการรวมเวกเตอร์โดยใช้องค์ประกอบของเวกเตอร์นั้นกระทำได้โดยแยกเวกเตอร์ที่จะรวมกันออกเป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์เสียก่อน แล้วค่อยรวมองค์ประกอบของเวกเตอร์เหล่านั้นเข้าด้วยกัน ดังแสดงในสมการ (1.6) (1.7) และ (1.8)

ทำนองเดียวกัน การรวมเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หน่วยก็กระทำได้โดยเขียนเวกเตอร์ที่จะรวมกันอยู่ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์ และเวกเตอร์หน่วย แล้วทำการรวมองค์ประกอบของเวกเตอร์ในแกนเดียวกันเข้าด้วยกัน ก่อนที่จะนำผลลัพธ์เหล่านั้นมาหาเวกเตอร์ผลลัพธ์ ดังแสดงในสมการ (1.9) (1.10) (1.11) และ (1.12)

#### 5. การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์แบบสเกลาร์ระหว่างเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ คือมุมระหว่าง } \vec{A} \text{ และ } \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

การคูณเวกเตอร์แบบเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin \theta \hat{R} \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ คือมุมระหว่าง } \vec{A} \text{ และ } \vec{B}$$

ทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์จะตั้งฉากกับระนาบของ  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$

การคูณเวกเตอร์แบบเวกเตอร์นั้นอาจใช้วิธีหา ดีเทอร์มิแนนท์ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกับสมการ (1.18)

# ตอนที่ 1.2

## การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

เพื่อความง่ายในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุ เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงก่อน โดยเริ่มต้นที่ความหมายของจลนศาสตร์ ต่อจากนั้นจึงค่อยอธิบายถึงนิยามของปริมาณการเคลื่อนที่ชนิดต่างๆ เช่น การกระจัด ความเร็วและความเร่ง ในตอนสุดท้ายจะอธิบายถึงลักษณะของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว และวัตถุตกอย่างอิสระ

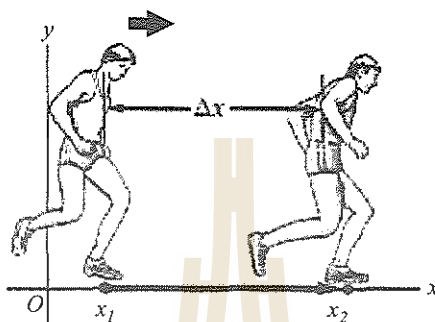
### 1. จลนศาสตร์

ปรากฏการณ์อย่างหนึ่งที่เรพบเห็นบ่อยๆ ในชีวิตประจำวันก็คือ การเคลื่อนที่ของวัตถุต่างๆ เช่น การเคลื่อนที่ของรถยนต์ และการเคลื่อนที่ของเครื่องบิน เป็นต้น ดังได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อ 1 ของตอนที่ 1.1 ว่า กลศาสตร์ (Mechanics) ซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของวิชาฟิสิกส์ เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุและกลศาสตร์ที่อธิบายถึงลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยไม่กล่าวถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่ก็คือ จลนศาสตร์ (Kinematics)

วิชาจลนศาสตร์จะกล่าวถึงความหมายหรือนิยามของปริมาณการเคลื่อนที่ชนิดต่างๆ เช่น การกระจัด ความเร็วและความเร่ง เป็นต้น นอกจากนี้จลนศาสตร์ยังจะอธิบายถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว และการเคลื่อนที่ของวัตถุตกอย่างอิสระ

### 2. การกระจัด

ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น เราจำเป็นต้องรู้ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลาใดๆ เทียบกับตำแหน่งอ้างอิงอันหนึ่ง เช่น ตำแหน่งของนักวิ่งคนหนึ่งบนแนวแกน  $x$  จากตำแหน่งเริ่มต้น  $x_1$  ไปยังตำแหน่งสุดท้าย  $x_2$  ดังแสดงในรูปที่ 1.11



รูปที่ 1.11 นักวิ่งกำลังเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$  ด้วยการกระจัด  $\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

การกระจัด  $\Delta x$  ก็คือผลต่างของตำแหน่งระหว่างตำแหน่งสุดท้ายและตำแหน่งเริ่มต้นซึ่งอาจเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (1.20)$$

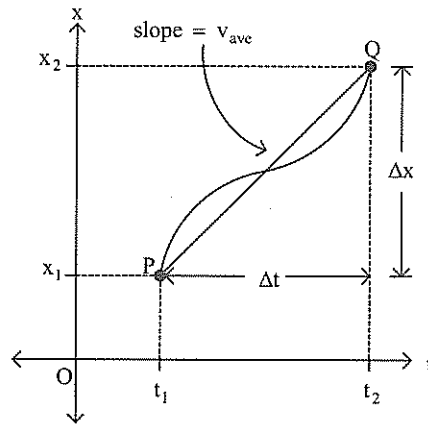
โดยปกติการกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งควรเขียนสัญลักษณ์เป็น “ $\Delta \vec{x}$ ” แต่เนื่องจากเป็นกรณีหนึ่งมิติเราจึงเขียนเป็น “ $\Delta x$ ” แทน และทิศทางของมันสามารถบอกได้โดยเครื่องหมายที่ได้จากสมการ (1.20)

### 3. ความเร็ว

ในชีวิตประจำวันเรามักจะใช้คำว่า ความเร็ว (velocity) และอัตราเร็ว (speed) อย่างสับสนปนเปกันไป ซึ่งดูเหมือนว่าเป็นสิ่งเดียวกัน แต่ในทางฟิสิกส์คำสองคำนี้มีความหมายที่แตกต่างกันไม่สามารถใช้ทดแทนกันได้ ดังนั้นจึงควรทำความเข้าใจว่ามีความแตกต่างกันอย่างไร ในที่นี้จะขอกล่าวเพียงว่า ความเร็วเป็นปริมาณเวกเตอร์ แต่อัตราเร็วเป็นปริมาณสเกลาร์

#### 3.1 ความเร็วเฉลี่ย

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุอันหนึ่งในแนวแกน  $x$  โดยเริ่มต้นจากจุด  $P$  ณ เวลา  $t_1$  ไปถึงจุด  $Q$  ณ เวลา  $t_2$  โดยมีตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลา  $t_1$  และ  $t_2$  เป็น  $x_1$  และ  $x_2$  ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 1.12



รูปที่ 1.12 แสดงตำแหน่งและเวลาของการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวแกน x ความเร็วเฉลี่ย  $v_{ave}$  ในช่วงเวลา  $\Delta t = t_2 - t_1$  คือความชันของเส้นตรง PQ

ความเร็วเฉลี่ย (average velocity,  $v_{ave}$ ) ของวัตถุในหนึ่งมิติก็คือ อัตราส่วนของการกระจัดต่อช่วงเวลาของการเคลื่อนที่หรือ

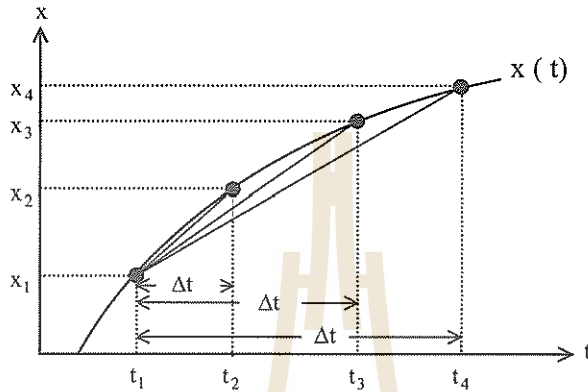
$$v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (1.21)$$

= ความชันของเส้นตรง PQ

ทำนองเดียวกันกับการกระจัด ความเร็วเฉลี่ยเป็นปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งจะมีทิศทางเครื่องหมายที่ได้ จากสมการ (1.21) จากรูปที่ 1.12 จะเห็นว่าความเร็วเฉลี่ยมีค่าเท่ากับความชัน (slope) ของเส้นตรง PQ ความเร็วเฉลี่ยนี้เป็นปริมาณที่บอกค่าเฉลี่ยของความเร็วตลอดการเคลื่อนที่ ซึ่งไม่สามารถบอกความเร็วขณะใดขณะหนึ่งได้ และถ้าการเคลื่อนที่นั้นเป็นการเคลื่อนที่ที่ครบรอบ (เช่น วิ่งรอบสนาม) จะได้ความเร็วเฉลี่ยเป็นศูนย์เพราะมีการกระจัดเท่ากับศูนย์

### 3.2 ความเร็วบัดดล

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุอันหนึ่งในแนวแกน x จากตำแหน่ง  $x_1$  ในช่วงเวลาสั้นๆ ดังแสดง ในรูปที่ 1.13



รูปที่ 1.13 กราฟการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวแกน x เมื่อพิจารณาในช่วงเวลาสั้นๆ

ความเร็ว INSTANTANEOUS (instantaneous velocity,  $v$ ) เป็นความเร็วขณะใดขณะหนึ่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งก็คือค่าความเร็วเมื่อพิจารณาในช่วงเวลาสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) หรือ

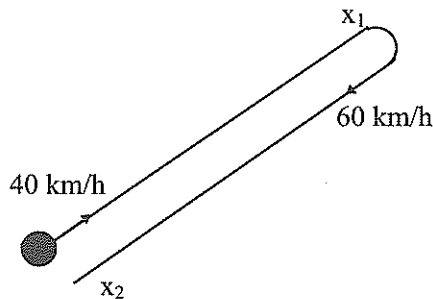
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (1.22)$$

= ความชันของเส้นสัมผัสทางเดินของการเคลื่อนที่

จะเห็นจากสมการ (1.22) ว่าความเร็ว INSTANTANEOUS มีค่าเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสทางเดินของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

ตัวอย่างที่ 1.6 รถยนต์เคลื่อนที่ขึ้นเขาด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และย้อนลงเขาด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงคำนวณความเร็วเฉลี่ย ตลอดการเคลื่อนที่

วิธีทำ



รูปที่ 1.14 การเคลื่อนที่ของรถยนต์ขึ้นเขาและย้อนกลับจุดเดิม

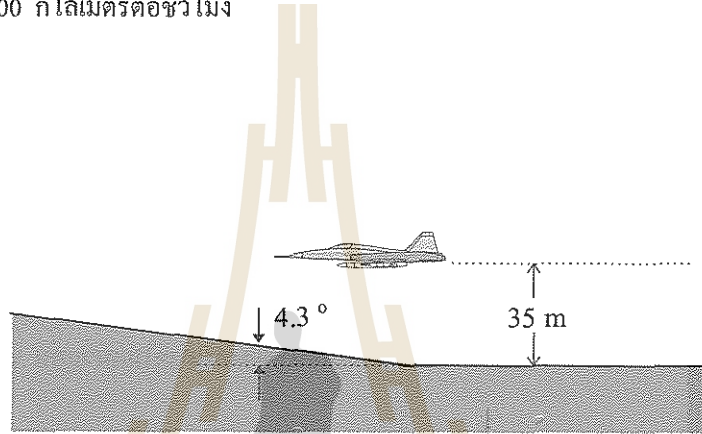
ในการเคลื่อนที่ขึ้นเขาแล้วกลับลงสู่จุดเดิมนั้นจะได้รับการกระจัดเป็นศูนย์ หรือ

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0$$

$$\therefore v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \text{ km/h}$$

**ตัวอย่างที่ 1.7** เครื่องบินรบความเร็วสูง ผีบินการหลบเลี่ยงการตรวจจับเรดาร์ในแนวระดับความสูง 35 เมตรเหนือพื้นดิน ขณะบินเครื่องบินผ่านบริเวณผิวดินที่มีความชัน  $4.3^\circ$  สูงกว่าพื้นราบ เป็นการเปลี่ยนระดับผิวพื้นที่ยากต่อการสังเกต นักบินมีเวลาทำไคในการแก้ไขเพื่อไม่ให้ชนพื้น อัตราเร็วเครื่องบิน 1300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

วิธีทำ



**รูปที่ 1.15** การบินเปลี่ยนระดับของเครื่องบินรบความเร็วสูง

ถ้าให้  $\Delta x$  เป็นระยะในแนวราบที่เครื่องบินเคลื่อนที่ก่อนชนผิวดิน จะได้

$$\tan 4.3^\circ = \frac{35}{\Delta x}$$

$$\therefore \Delta x = \frac{35}{\tan 4.3^\circ} = \frac{35}{0.075} = 465.48 \text{ m}$$

เวลาก่อนชนพื้น

$$= \frac{\Delta x}{v_{\text{ave}}} = \frac{465.48 \text{ m}}{1300 \times 10^3 \frac{\text{m}}{(3600 \text{ s})}} = 1.29 \text{ s}$$

ตัวอย่างที่ 1.8 ตำแหน่งของอนุภาคเคลื่อนที่ตามแกน  $x$  ในหน่วยเซนติเมตร มีความสัมพันธ์ตามสมการ  $x = 9.75 + 1.50 t^3$  โดย  $t$  เป็นวินาที ในช่วงเวลา  $t = 2$  ถึง  $t = 3$  จงคำนวณ

- (a) ความเร็วเฉลี่ย
- (b) ความเร็วบัคคูล  $t = 2$  วินาที
- (c) ความเร็วบัคคูล  $t = 3$  วินาที
- (d) ความเร็วบัคคูล  $t = 2.5$  วินาที
- (e) ความเร็วบัคคูล เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ตรงจุดกึ่งกลางของทางเดิน ระหว่างเวลา  $t = 2$  วินาที และ  $t = 3$  วินาที

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวแกน  $x$  จากรูปที่ 1.16



รูปที่ 1.16 แสดงตำแหน่งของการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวแกน  $x$

วิธีทำ

(a) ความเร็วเฉลี่ย : 
$$v_{\text{ave}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}$$
$$t = 2 \text{ s} ; x_2 = 9.75 + 1.5(2)^3 = 21.75 \text{ cm}$$
$$t = 3 \text{ s} ; x_3 = 9.75 + 1.5(3)^3 = 50.25 \text{ cm}$$
$$v = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{50.25 - 21.75}{1} = 28.5 \text{ cm/s}$$

(b) ความเร็วบัคคูล : 
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(9.75 + 1.5t^3)$$
$$= 0 + 1.5 \times 3t^2$$
$$= 4.5t^2$$

เมื่อ  $t = 2 \text{ s} ; v = 4.5 \times (2)^2 = 18.0 \text{ cm/s}$

(c) เมื่อ  $t = 3 \text{ s}$  ;  $v = 4.5 \times (3)^2 = 40.5 \text{ cm/s}$

(d) เมื่อ  $t = 2.5 \text{ s}$  ;  $v = 4.5 \times (2.5)^2 = 28.1 \text{ cm/s}$

(e) เมื่ออนุภาคอยู่ตรงกึ่งกลางทางเดินระหว่าง  $t = 2 \text{ s}$  และ  $t = 3 \text{ s}$  นั้น จะมีการกระจัด

$$x = x_2 + \frac{x_3 - x_2}{2} = 21.75 + \frac{50.25 - 21.75}{2} = 36.00 \text{ cm}$$

$$\therefore 9.75 + 1.50t^3 = 36.00$$

$$t^3 = \frac{36.00 - 9.75}{1.5}$$
$$= \frac{26.25}{1.5} = 17.5$$

$$\therefore t = 2.6 \text{ s}$$

$$v = 4.5 \times (2.6)^2$$
$$= 30.4 \text{ cm/s}$$

#### 4. ความเร่ง

ในการเคลื่อนที่ของวัตถุอาจมีความเร็วที่เปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับเวลา อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วนี้เรียกว่า “ความเร่ง” (acceleration)

##### 4.1 ความเร่งเฉลี่ย

ความเร่งเฉลี่ย (average acceleration,  $a_{\text{ave}}$ ) จะเป็นปริมาณที่บอกถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุตลอดช่วงเวลาของการเคลื่อนที่โดยไม่สามารถบอกถึงรายละเอียดของการเปลี่ยนแปลงความเร็วในขณะใดขณะหนึ่งได้ สมการของความเร่งเฉลี่ยอาจเขียนได้เป็น

$$a_{\text{ave}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{1.23}$$

##### 4.2 ความเร่งชั่วครู่

ในกรณีที่การเคลื่อนที่ของวัตถุมีความเร็วเปลี่ยนแปลงในแต่ละช่วงเวลามีค่าไม่เท่ากัน เราต้องใช้ “ความเร่งชั่วครู่” (instantaneous acceleration,  $a$ ) เพื่อบอกค่าความเร่งของวัตถุในขณะใดขณะหนึ่ง สมการของความเร่งชั่วครู่คือ

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.24)$$

ความเร่งบังคับอาจมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ขึ้นอยู่กับทิศทางการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ( $\Delta v$ ) ว่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง ถ้าหาก  $a$  มีค่าเป็นบวก เราเรียกว่าเป็น “ความเร่ง” แต่ถ้า  $a$  มีค่าเป็นลบเรามักเรียกว่า “ความหน่วง” (deceleration)

**ตัวอย่างที่ 1.9** อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีความเร็วเป็นฟังก์ชันเทียบกับเวลาตามสมการ

$$v(t) = 10 + 2t^2 \quad \text{เซนติเมตร/วินาที}$$

จงหา

(a) ความเร่งเฉลี่ย ในช่วง  $t_1 = 2$  วินาที และ  $t_2 = 5$  วินาที

(b) ความเร่งบังคับ ณ เวลา  $t = 2$  วินาที

วิธีทำ

(a)

$$v(t_1) = 10 + 2(2)^2 = 18 \text{ cm/s}$$

$$v(t_2) = 10 + 2(5)^2 = 60 \text{ cm/s}$$

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = 60 - 18 = 42 \text{ cm/s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_{\text{ave}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{42}{3} = 14 \text{ cm/s}$$

(b)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(10 + 2t^2)$$

$$= 4t$$

เมื่อ

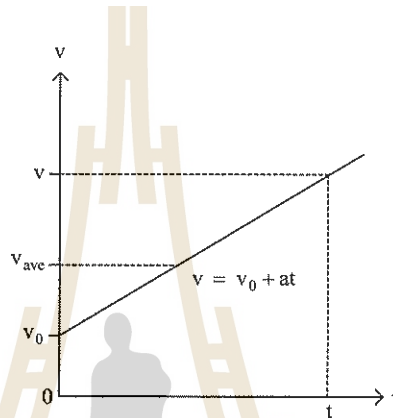
$$t = 2 \text{ s} , a = 4 \times 2 = 8 \text{ cm/s}^2$$

### 5. การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

การเคลื่อนที่ของวัตถุหลายๆ กรณีที่ถือได้ว่าเป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว เช่น การตกอย่างอิสระของวัตถุในแนวตั้ง และการห้ามล้อรถยนต์ เป็นต้น

ในบางกรณีถึงแม้ว่าการเคลื่อนที่นั้นมีความเร่งไม่คงตัว เราอาจหาคำตอบโดยประมาณได้โดยถือว่าการเคลื่อนที่นั้นมีความเร่งคงตัว โดยมีค่าความเร่งเท่ากับความเร็วเฉลี่ยตลอดช่วงของการเคลื่อนที่นั้น ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวถือได้ว่าความเร็วเฉลี่ยมีค่าเท่ากับความเร็วบัคคูลหรือ

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \tag{1.25}$$



รูปที่ 1.17 แสดงถึงความสัมพันธ์ของปริมาณการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนที่ของวัตถุด้วยความเร่งคงตัว

ในรูปที่ 1.17 วัตถุเริ่มต้นเคลื่อนที่เมื่อเวลา  $t = 0$  ด้วยความเร็วต้น  $v_0$  และเมื่อเวลาผ่านไป  $t$  วัตถุมีความเร็วเป็น  $v$  คำนึงจากสมการ (1.23) จะได้ขนาดของความเร่ง

$$a = a_{ave} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

$$\therefore v = v_0 + at \tag{1.26}$$

การหาตำแหน่งกระจัด  $x$  ของการเคลื่อนที่ที่สามารถกระทำได้โดยการอินทิเกรตสมการ (1.26) ซึ่งจะได้

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \tag{1.27}$$

การเคลื่อนที่

ในสมการ (1.27) เรากำหนดให้วัตถุมีการกระจัดเป็น  $x_0$  เมื่อเริ่มต้นเคลื่อนที่ ในกรณีทั่วไป มักกำหนดให้  $x_0 = 0$  เมื่อเริ่มต้น ดังนั้นสมการ (1.27) จะกลายเป็น

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.28)$$

เมื่อแทนค่า  $t = \frac{v - v_0}{a}$  ที่ได้จากสมการ (1.26) ในสมการ (1.28) จะได้

$$x = v_0 \left( \frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2$$
$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2ax \quad (1.29)$$

**ตัวอย่างที่ 1.10** เครื่องบินไอพ่นมีความเร็วเท่ากับ 360 กิโลเมตร/ชั่วโมง บนทางวิ่งเพื่อจะบินขึ้นได้ สมมติให้ความเร่งของเครื่องบินคงตัว และทางวิ่งยาว 1.8 กิโลเมตร จะต้องใช้ความเร่งเท่าใด จากเครื่องอยู่นิ่ง

**วิธีทำ**

$$v_0 = 0 ; x = 1.8 \text{ km} ; v = 360 \text{ km/h}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(360)^2 - 0}{2 \times 1.8} = 36,000 \text{ km/h}^2$$

หรือ

$$a = \frac{36,000 \times 10^3}{(3,600)^2} = \frac{36 \times 10^6}{36 \times 36 \times 10^4} = 2.8 \text{ m/s}^2$$

ในกรณีที่ความเร่งมีค่าไม่คงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของเวลา เราอาจหาค่าความเร็วและการกระจัดได้ด้วยการอินทิเกรต ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1.11

**ตัวอย่างที่ 1.11** รถยนต์มีความเร่งตามสมการ  $a(t) = 2.0 - 0.1 t \text{ m/s}^2$  ที่จุดเริ่มต้น  $v_0 = 10 \text{ m/s}$

- จงแสดง ฟังก์ชันความเร็วเทียบกับเวลา  $v(t)$  และการกระจัดเทียบกับเวลา  $x(t)$
- คำนวณหาเวลา  $t$  ที่ค่า  $v$  มีค่าสูงสุด
- $v$  สูงสุดมีค่าเท่าใด

**วิธีทำ**

$$(a) \quad v - v_0 = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t (2.0 - 0.1) dt$$

$$\therefore v(t) = 10 + 2.0t - 0.05t^2$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (10 + 2.0t - 0.5t^2) dt$$

$$\therefore x(t) = 10t + 1.0t^2 - 0.017t^3$$

(b) หาเวลา  $t$  ที่ค่า  $v$  สูงสุด

$$\text{จาก } a = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\therefore 2.0 - 0.1t = 0$$

$$\therefore t = 20 \text{ s}$$

(c)

$$\begin{aligned} v_{\max} &= v|_{t=20 \text{ s}} = (10 + 2.0t - 0.05t^2)|_{t=20 \text{ s}} \\ &= 40 - 20 + 10 \\ &= 30 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## 6. วัตถุตกอย่างอิสระ

ดังได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 5 ว่าวัตถุตกอย่างอิสระ (freely falling body) เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว โดยวัตถุจะเคลื่อนที่ลงสู่พื้นโลกด้วยความเร่ง 9.8 เมตร/วินาที<sup>2</sup> มีทิศเข้าหาจุดศูนย์กลางของโลก เราเรียกความเร่งนี้ว่า “ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก” (gravitational acceleration,  $g$ ) ตามปกติค่า  $g$  จะเปลี่ยนแปลงไปตามบริเวณต่างๆ บนผิวโลก ระดับความสูงจากผิวโลก และความหนาแน่นของพื้นดินในบริเวณนั้นๆ แต่ในระดับความสูงใกล้ผิวโลกนั้นถือได้ว่า  $g$  มีค่าคงตัว

ในดาวดวงอื่นๆ เช่น ดวงอาทิตย์หรือดวงจันทร์ เนื่องจากมีมวลที่แตกต่างไปจากมวลของโลก ดังนั้นจะมีค่า  $g$  แตกต่างไปจากค่า  $g$  ของโลก เช่น ค่า  $g$  ของดวงอาทิตย์เท่ากับ 274 เมตร/วินาที<sup>2</sup> และของดวงจันทร์เท่ากับ 1.67 เมตร/วินาที<sup>2</sup>

สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุตกอย่างอิสระจะมีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เพียงแต่แทนค่า  $a$  ด้วยค่า  $g$  เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1.12 ลูกกอล์ฟถูกปล่อยให้ตกอย่างอิสระจากยอดตึกสูง ถ้าหากไม่คิดแรงต้านของอากาศ จงหาความเร็วและตำแหน่งของลูกกอล์ฟดังกล่าวเมื่อเวลาผ่านไป 1, 2 และ 3 วินาที ตามลำดับ

วิธีทำ

สมมติให้จุดกำเนิดอยู่ที่ยอดตึกสูง โดยมีแกน  $+y$  ชี้ขึ้นในแนวตั้ง ความเร็วของลูกกอล์ฟ ณ เวลาต่างๆ หาได้จาก

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

เนื่องจากลูกกอล์ฟเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งจะได้  $v_0 = 0$  และ  $a = -g$  ดังนั้นสมการ (1) จะกลายเป็น

$$v = -gt \quad (2)$$

แทนค่า  $t = 1, 2$  และ  $3$  ใน (2) จะได้

$$v(t = 1) = -9.8 \times 1 = -9.8 \text{ m/s}$$

$$v(t = 2) = -9.8 \times 2 = -19.6 \text{ m/s}$$

$$v(t = 3) = -9.8 \times 3 = -29.4 \text{ m/s}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่าลูกกอล์ฟมีทิศตกลง

ตำแหน่งของลูกกอล์ฟ ณ เวลาต่างๆ หาได้จาก

$$y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

เนื่องจาก  $v_0 = 0$  และ  $a = -g$  สมการ (3) จะกลายเป็น

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

แทนค่า  $t = 1, 2$  และ  $3$  ใน (4) จะได้

$$y(t = 1) = -\frac{1}{2}(9.8)(1)^2 = -4.9 \text{ m}$$

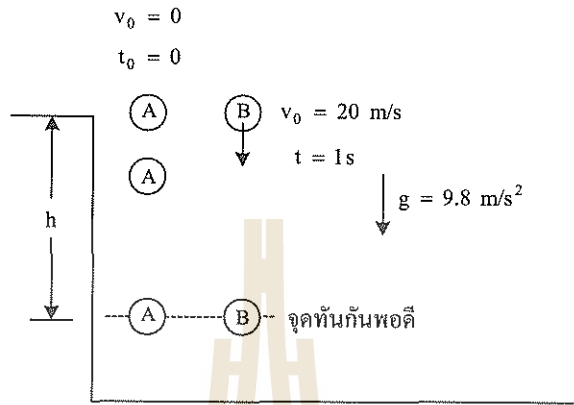
$$y(t = 2) = -\frac{1}{2}(9.8)(2)^2 = -19.6 \text{ m}$$

$$y(t = 3) = -\frac{1}{2}(9.8)(3)^2 = -44.1 \text{ m}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่าลูกกอล์ฟอยู่ต่ำกว่ายอดตึก

ตัวอย่างที่ 1.13 ลูกบอล A ถูกปล่อยให้ตกลงมาจากขอบหน้าผา เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ลูกบอล B ถูกขว้างลงมาด้วยความเร็วต้น 20 เมตร/วินาที ถ้ามวลลูกบอล B จะตามทันลูกบอล A ที่ระยะความลึกเท่าใด

วิธีทำ



รูปที่ 1.18 การเคลื่อนที่ของลูกบอล A และ B จากหน้าผาอย่างอิสระ

กำหนดให้ลูกบอล B ใช้เวลา  $t$  จากจุดเริ่มต้นถึงจุดทันกันพอดี และเคลื่อนที่ได้ระยะ  $= h$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

ถ้ากำหนดให้แกน  $+y$  อยู่ในทิศขึ้นในแนวตั้งจะได้

$$-h = -20t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$\therefore h = 20t + \frac{9.8}{2}t^2 \quad (1)$$

ลูกบอล A เคลื่อนที่ได้ระยะ  $h$  ใช้เวลาเป็น  $(t+1)$  s

$$\therefore -h = 0 - \frac{1}{2}(9.8)(t+1)^2$$

หรือ  $h = \frac{9.8}{2}(t+1)^2 \quad (2)$

$$(1) = (2) \quad \frac{9.8}{2}(t+1)^2 = \frac{9.8}{2}t^2 + 20t$$

$$t = \frac{9.8}{2 \times 10.2} = 0.48 \text{ s}$$

แทนค่า  $t$  ใน (2);  $h = \frac{1}{2}(9.8)(0.48+1)^2 = 10.7 \text{ m}$

## สรุป

### 1. จลนศาสตร์

จลนศาสตร์ เป็นแขนงหนึ่งของวิชากลศาสตร์ ซึ่งอธิบายถึงลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยไม่กล่าวถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่

### 2. การกระจัด

การกระจัด ( $\Delta x$ ) คือผลต่างของตำแหน่งของวัตถุระหว่างตำแหน่งสุดท้าย ( $x_2$ ) และตำแหน่งเริ่มต้น ( $x_1$ ) หรือ

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

### 3. ความเร็ว

#### 3.1 ความเร็วเฉลี่ย

ความเร็วเฉลี่ย ( $v_{ave}$ ) คืออัตราส่วนของการกระจัดต่อช่วงเวลาของการเคลื่อนที่หรือ

$$v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

#### 3.2 ความเร็วชั่วขณะ

ความเร็วชั่วขณะ ( $v$ ) คือความเร็ว ณ ขณะใดขณะหนึ่งของวัตถุหรือมีค่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) หรือ

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

### 4. ความเร่ง

#### 4.1 ความเร่งเฉลี่ย

ความเร่งเฉลี่ย ( $a_{ave}$ ) คือปริมาณที่บอกถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุตลอดช่วงเวลาของการเคลื่อนที่หรือ

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

#### 4.2 ความเร่งชั่วขณะ

ความเร่งชั่วขณะ ( $a$ ) คือความเร่งของวัตถุ ณ ขณะใดขณะหนึ่งหรือ

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

### 5. การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว จะทำให้วัตถุเปลี่ยนแปลงความเร็วอย่างสม่ำเสมอ โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณการเคลื่อนที่ชนิดต่างๆ ดังนี้

$$v = v_0 + at$$

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

### 6. วัตถุตกอย่างอิสระ

การเคลื่อนที่ของวัตถุตกอย่างอิสระ วัตถุจะเคลื่อนที่ในแนวตั้งด้วยความเร่งเท่ากับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ( $g$ ) โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เช่นเดียวกับสมการการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่งคงตัว



# ตอนที่ 1.3

## การเคลื่อนที่ในสองมิติและสามมิติ

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ปรากฏเห็นโดยทั่วไปจะไม่จำกัดอยู่เฉพาะในแนวเส้นตรงหรือหนึ่งมิติเท่านั้น แต่วัตถุจะสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างทั่วไประหว่างสองมิติและสามมิติ เช่น การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์และแบบวงกลม เป็นต้น การอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของการเคลื่อนที่ดังกล่าวต้องใช้ระบบแกนพิกัดที่เหมาะสมและใช้ความรู้ทางพีชคณิตและเวกเตอร์เข้าช่วย ดังนั้นในตอนนี้จะกล่าวถึงนิยามของปริมาณการเคลื่อนที่ต่างๆ เช่น การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง ในรูปของสมการของเวกเตอร์ในระบบพิกัดที่เหมาะสม ต่อจากนั้นจะอธิบายถึงลักษณะการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ และการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

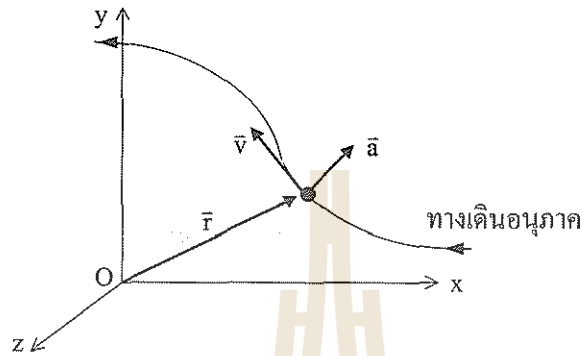
### 1. นิยามของตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง

#### 1.1 ตำแหน่ง

ในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ วัตถุจะเปลี่ยนแปลงตำแหน่งไปเรื่อยๆ การกำหนดตำแหน่งของวัตถุ เราใช้เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector)  $\vec{r}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัดฉากสามมิติ ดังแสดงในรูปที่ 1.19 เราสามารถเขียน  $\vec{r}$  อยู่ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ดังนี้

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1.30)$$

เมื่อ  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  และ  $\hat{k}$  คือเวกเตอร์หน่วยซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 และมีทิศอยู่ในแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ

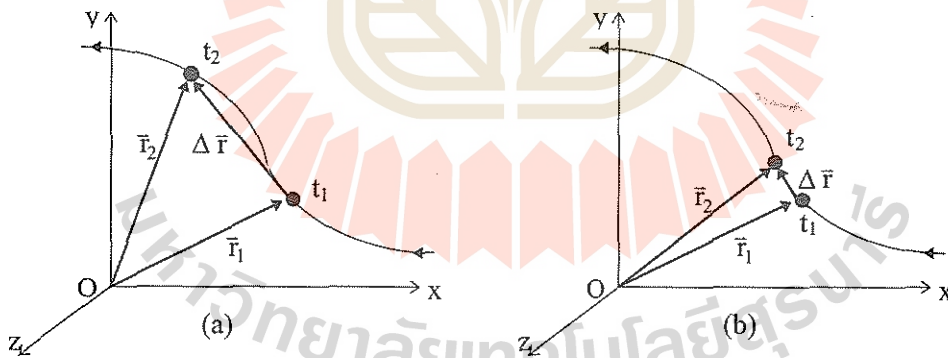


รูปที่ 1.19 ทางเดินของวัตถุในระบบพิกัดฉากสามมิติ กำหนดโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง  $\vec{r}$

### 1.2 การกระจัด

พิจารณารูปที่ 1.20a ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุจากตำแหน่ง  $\vec{r}_1$  ณ เวลา  $t_1$  ไปยังตำแหน่ง  $\vec{r}_2$  ณ เวลา  $t_2$  การกระจัดของการเคลื่อนที่  $\Delta\vec{r}$  จะมีค่า

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.31)$$



รูปที่ 1.20 (a) ช่วงเวลา  $\Delta t = t_2 - t_1$   
วัตถุได้การกระจัด  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

รูปที่ 1.20 (b) เมื่อช่วงเวลา  $\Delta t \rightarrow 0$   
การกระจัด  $\Delta\vec{r}$  วางตัวในแนวทาง  
เดินของวัตถุ

ในรูปที่ 1.20a ทิศทางของ  $\Delta\vec{r}$  จะไม่ขนานกับทางเดินของวัตถุ แต่ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) เช่นรูปที่ 1.20b ทิศทางของ  $\Delta\vec{r}$  จะขนานกับทางเดินของวัตถุ

### 1.3 ความเร็ว

ความเร็วเฉลี่ย ( $\bar{v}_{ave}$ ) ของการเคลื่อนที่ของวัตถุมีค่า

$$\bar{v}_{ave} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.32)$$

ซึ่งจะมีทิศทางเช่นเดียวกับทิศของการกระจัด  $\Delta \vec{r}$

ความเร็วบุคคล ( $\vec{v}$ ) ของการเคลื่อนที่ของวัตถุก็คือค่าความเร็วเฉลี่ยเมื่อพิจารณาในช่วงเวลาสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) ซึ่งจะมีค่า

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.33)$$

ทิศทางของ  $\vec{v}$  ก็คือทิศทางของ  $\Delta \vec{r}$  ซึ่งเมื่อพิจารณาในช่วงสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) จะมีทิศทางในแนวสัมผัสของทางเดินของวัตถุนั่นเอง

แทนค่า  $\vec{r}$  จากสมการ (1.30) ในสมการ (1.33) จะได้

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \end{aligned} \quad (1.34)$$

ถ้าให้องค์ประกอบของ  $\vec{v}$  ในแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  เป็น  $v_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt}$  และ  $v_z = \frac{dz}{dt}$  สมการ (1.34) จะกลายเป็น

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (1.35)$$

### 1.4 ความเร่ง

ในทำนองเดียวกันกับความเร็วจะหาค่าความเร่งเฉลี่ยและความเร่งบุคคลได้ดังนี้

ความเร่งเฉลี่ย : 
$$\bar{a}_{ave} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.36)$$

ความเร่งบุคคล : 
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.37)$$

แทนค่า  $\vec{v}$  จากสมการ (1.35) ในสมการ (1.37) จะได้

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \end{aligned} \quad (1.38)$$

การเคลื่อนที่

ถ้าให้องค์ประกอบของ  $\vec{a}$  ในแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  เป็น  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ ,  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$  และ  $a_z = \frac{dv_z}{dt}$  สมการ (1.38) จะกลายเป็น

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (1.39)$$

**ตัวอย่างที่ 1.14** อนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ  $xy$  โดยมีจุดพิกัดตามแกนมีความสัมพันธ์กับเวลา  $t$  ตามสมการ  $x(t) = t^3 - 32t$  และ  $y(t) = 5t^2 + 12$  โดย  $x$  และ  $y$  มีหน่วยเป็นเมตร เวลา  $t$  เป็นวินาที จงหาเวกเตอร์ บอกรหัสตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของอนุภาคเมื่อเวลา  $t = 3$  วินาที

**วิธีทำ** จาก  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$   
ดังนั้นจะได้  $\vec{r} = (t^3 - 32t)\hat{i} + (5t^2 + 12)\hat{j}$   
ที่  $t = 3$  ;  $\vec{r} = -69\hat{i} + 57\hat{j}$  ในหน่วยเมตร

ความเร็วตามแกน  $x$  และ  $y$  จะมีค่า

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t$$

$$\therefore \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (3t^2 - 32)\hat{i} + 10t\hat{j}$$

ที่เวลา  $t = 3$  ;  $\vec{v} = -5\hat{i} + 30\hat{j}$  ในหน่วยเมตร/วินาที

ความเร่งตามแกน  $x$  และ  $y$  จะมีค่า

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

ที่เวลา  $t = 3$  s ;  $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = 6t\hat{i} + 10\hat{j}$

$$= 18\hat{i} + 10\hat{j} \text{ m/s}$$

## 2. การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ

สมการของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิตินี้มีลักษณะเช่นเดียวกับสมการของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวในแนวเส้นตรงหรือหนึ่งมิติ แตกต่างกันเพียงต้องเขียนสมการอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ถ้าเริ่มต้น ณ เวลา  $t=0$  วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง  $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$  และมีความเร็วต้น  $\vec{v}_0 = v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j} + v_{z0}\hat{k}$  ถ้าวัตถุมีความเร่งคงตัว  $\vec{a}$  เมื่อเวลาผ่านไป  $t$  วัตถุจะมีความเร็ว

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (1.40)$$

เราสามารถเขียนสมการ (1.40) อยู่ในรูปของสมการขององค์ประกอบของความเร็วได้ดังนี้

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + a_x t \\ v_y &= v_{y0} + a_y t \\ v_z &= v_{z0} + a_z t \end{aligned} \quad (1.41)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณการเคลื่อนที่อื่นๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \frac{1}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v}) t \end{aligned} \quad (1.42)$$

โดยทั่วไปเราจะให้  $\vec{r}_0 = 0$  ดังนั้นสมการ (1.42) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + 2\vec{a} \cdot \vec{r} \\ \vec{r} &= \frac{1}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v}) t \end{aligned} \quad (1.43)$$

ตัวอย่างที่ 1.15 อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลาตามสมการ

$$\vec{r}(t) = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$$

จงเขียนสมการ (a) ความเร็ว (b) ความเร่ง

วิธีทำ

(a) ความเร็ว

จาก 
$$\vec{r}(t) = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 8t\hat{j} + \hat{k}$$

โดยมี  $v_y = 8t$

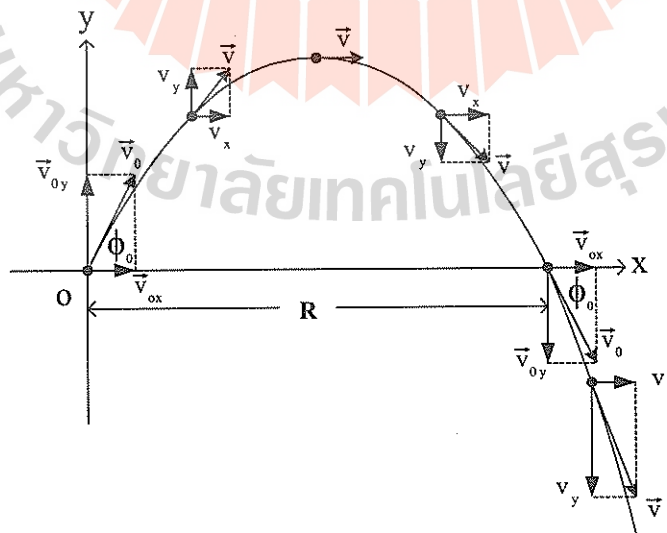
และ  $v_z = 1$

(b) ความเร่ง  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(8t\hat{j} + \hat{k}) = 8\hat{j}$

โดยมี  $a_y = 8$

### 3. การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ถือเป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวในสองมิติ ตัวอย่างของการเคลื่อนที่ชนิดนี้คือ การเคลื่อนที่ของลูกเบสบอล และการเคลื่อนที่ของลูกกระสุนปืนใหญ่ เป็นต้น ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ วัตถุที่มีความเร็วต้นค่าหนึ่งจะมีวิถีอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงของโลกเพียงอย่างเดียว และเราสามารถแยกการเคลื่อนที่ชนิดนี้ออกเป็นการเคลื่อนที่ในสองแนว ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน การเคลื่อนที่ในแนวราบจะมีความเร็วคงที่ (ไม่มีความเร่ง) แต่การเคลื่อนที่ในแนวตั้งจะมีความเร่งเท่ากับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก วิถีของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ จะเป็นรูปโค้งพาราโบลาคงแสดงในรูปที่ 1.21



รูปที่ 1.21 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ซึ่งมีวิถีเป็นรูปพาราโบลา

ให้วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากจุดกำเนิด 0 ด้วยความเร็วต้น  $v_0$  ทำมุม  $\phi_0$  กับแนวราบ (แกน x) ดังนั้นความเร็วต้นในแนวแกน x และ y มีค่า

$$\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cos \phi_0 \\ v_{y0} &= v_0 \sin \phi_0 \end{aligned} \tag{1.44}$$

ความเร็วของวัตถุในแนวแกน x จะเป็นค่าคงที่ซึ่งหาได้จาก

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0 \tag{1.45}$$

ในสมการ (1.45) เราใช้  $a_x = 0$  เนื่องจากความเร่งในแนวราบเป็นศูนย์ ความเร็วของวัตถุในแนวแกน y จะมีค่าเปลี่ยนแปลงเนื่องจากมีความเร่งตามแนวตั้งไม่เป็นศูนย์ ถ้าให้แกน +y มีทิศชี้ขึ้นในแนวตั้งจะได้  $a_y = -g$  ดังนั้นจะได้

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \sin \phi_0 - gt \tag{1.46}$$

ในลักษณะเดียวกันจะหาค่าการกระจัดในแนวแกน x และ y ได้ดังนี้

การกระจัดในแนวแกน x :  $x = (v_0 \cos \phi_0) t$  (1.47)

การกระจัดในแนวแกน y :  $y = (v_0 \sin \phi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$  (1.48)

แทนค่า t จากสมการ (1.47) ในสมการ (1.48) จะได้ความสัมพันธ์ของการกระจัดในแนวแกนทั้งสองดังนี้

$$y = (\tan \phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2 \tag{1.49}$$

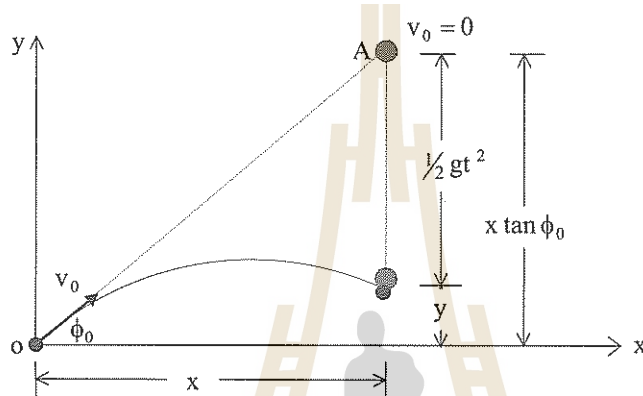
สมการ (1.49) อยู่ในรูป  $y = ax - bx^2$  ซึ่งเป็นสมการของรูปพาราโบลา

พิสัย (range, R) ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์คือระยะของการเคลื่อนที่บนแกน x จากจุดยิงถึงจุดตก ซึ่งจะได้จากการหาค่า x เมื่อ  $y = 0$  ในสมการ (1.49) ดังนั้นจะได้พิสัยมีค่า

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\phi_0}{g} \tag{1.50}$$

การเคลื่อนที่

ตัวอย่างที่ 1.16 การวิเคราะห์จุดชนของอนุภาคปล่อยตกอิสระตามแนวตั้งกับอนุภาคที่ถูกยิงแบบโพรเจกไทล์ ดังรูปที่ 1.22



รูปที่ 1.22 การชนกันของอนุภาคปล่อยตกอิสระกับอนุภาคที่ถูกยิงแบบโพรเจกไทล์

อนุภาค A ถูกปล่อยตกอย่างอิสระ ถ้าเริ่มปล่อยที่ความสูงเป็น  $x \tan \phi_0$  เมื่อเวลาผ่านไป  $t$  อนุภาค A จะเคลื่อนที่ได้  $\frac{1}{2}gt^2$  มายังจุดชน ดังนั้นอนุภาค A จะมีระดับความสูง

$$y = x \tan \phi_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

จากสมการการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์อนุภาค B ซึ่งถูกยิงขึ้นทำมุม  $\phi_0$  กับแนวราบจะเคลื่อนที่ได้ระยะ

$$\begin{aligned} y &= x \tan \phi_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2 \\ &= x \tan \phi_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} (v_0 \cos \phi_0 t)^2 \\ &= x \tan \phi_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (2)$$

เนื่องจากสมการ (1) = (2) แสดงว่า ถ้าอนุภาค A ถูกปล่อยที่ระยะความสูง  $x \tan \phi_0$  พร้อมกับอนุภาค B ที่ถูกยิงขึ้น อนุภาคทั้งสองจะชนกันได้ที่ระยะ  $y$  จากพื้น นอกจากเงื่อนไขแล้ว อนุภาคทั้งสองจะไม่ชนกัน

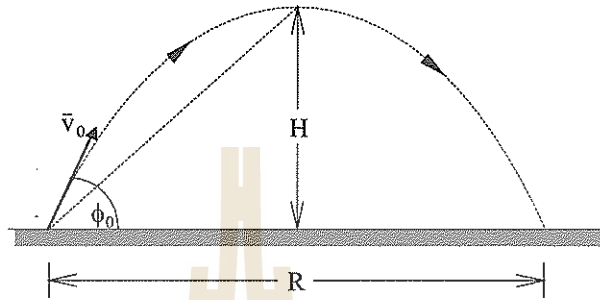
ตัวอย่างที่ 1.17

(a) จงพิสูจน์ว่าถ้าโปรเจกไทล์ถูกยิงขึ้นจากพื้นระดับเป็นมุม  $\phi_0$  อัตราส่วนความสูงที่สุด  $H$

ต่อพิสัย  $R$  มีค่า  $H/R = \frac{1}{4} \tan \phi_0$

(b) จงหามุมของการยิงที่ทำให้  $H = R$

วิธีทำ



รูปที่ 1.23 แสดงอัตราส่วนของ  $H/R$  ของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์

(a) แกน x :

$$v_{x0} = v_0 \cos \phi_0 = \frac{R}{t}$$

$$R = (v_0 \cos \phi_0) t \tag{1}$$

แกน y :

$$v_0 \sin \phi_0 = v_{y0}$$

$$y = v_{y0} t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$0 = v_0 \sin \phi_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore v_0 \sin \phi_0 = \frac{1}{2} g t \tag{2}$$

$$\therefore R = (v_0 \cos \phi_0) \frac{2 v_0 \sin \phi_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\phi_0}{g}$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2ay$$

$$0 = (v_0 \sin \phi_0)^2 - 2gH$$

$$\therefore H = \frac{v_0^2 \sin^2 \phi_0}{2g}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{v_0^2 \sin \phi_0 \sin \phi_0}{4g v_0^2 \sin \phi_0} = \frac{1}{4} \tan \phi_0$$

(b) จาก 
$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4} \tan \phi_0$$

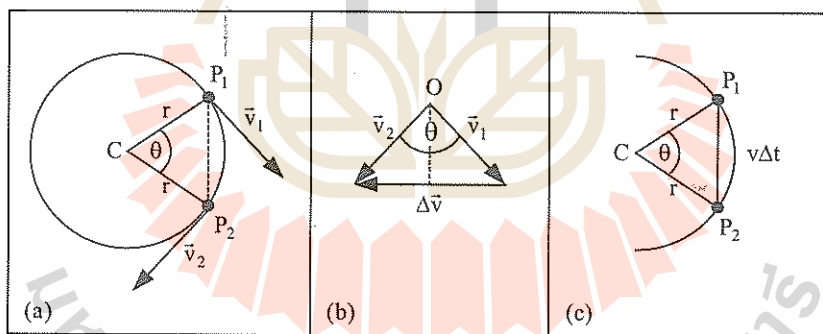
ถ้า 
$$H = R ; 1 = \frac{1}{4} \tan \phi_0$$

$$\tan \phi_0 = 4$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}(4) = 75.96 \text{ หรือ } 76^\circ$$

#### 4. การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์นั้นถือเป็นการเคลื่อนที่ที่มีความเร่งคงตัว ซึ่งความเร่งจะมีค่าคงตัวทั้งขนาดและทิศทาง แต่การเคลื่อนที่แบบวงกลมจะเป็นการเคลื่อนที่ที่ทิศทางของความเร็วและความเร่งเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา อย่างไรก็ตามการเคลื่อนที่แบบวงกลมจะมีขนาดของความเร็วและความเร่งคงตัวเสมอ ตัวอย่างของการเคลื่อนที่ชนิดนี้ก็คือ การโคจรของดาวเทียมรอบโลกนั่นเอง



รูปที่ 1.24 การเคลื่อนที่แบบวงกลม

(a) วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C เคลื่อนที่จาก  $P_1 \rightarrow P_2$  ด้วยอัตราเร็วคงตัว

(b) การเปลี่ยนแปลงความเร็ว  $\Delta \vec{v}$  ของการเคลื่อนที่ของวัตถุจาก  $P_1 \rightarrow P_2$

(c) วัตถุเคลื่อนที่ตามแนวทางโค้ง  $P_1 P_2$  ในช่วงเวลา  $\Delta t$

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบวงกลมในรูปที่ 1.24 ซึ่งวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C ด้วยอัตราเร็วคงตัว ในรูปที่ 1.24a วัตถุมีความเร็ว  $\vec{v}_1$  ที่จุด  $P_1$  และความเร็วเปลี่ยนเป็น  $\vec{v}_2$  ที่จุด  $P_2$  รูปที่ 1.24b แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุระหว่างจุด  $P_1$  และ  $P_2$  โดยความเร็วที่เปลี่ยนไปมีค่า  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  รูปที่ 1.24c เกิดจากการลากเวกเตอร์ของความเร็ว  $\vec{v}_1$  และ  $\vec{v}_2$  ออก

จากจุดเดียวกัน (จุด O) โดยมีขนาดและทิศทางเช่นเดียวกับรูปที่ 1.24a เราสามารถทำเช่นนี้ได้ถ้าทราบโคเวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดและทิศทางเช่นเดียวกับรูปที่ 1.24a รูปนี้จะแสดงให้เห็นชัดเจนว่าความเร็วที่เปลี่ยนไป  $\Delta \vec{v}$  ที่ลากจากจุด  $Q_1$  ถึง  $Q_2$  ก็คือความเร็วที่เปลี่ยนไปเมื่อวัตถุเคลื่อนที่จากจุด  $P_1$  ไปยัง  $P_2$  ซึ่งมีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลาง C ถ้าให้  $\Delta t$  เป็นเวลาในการเคลื่อนที่จากจุด  $P_1$  ไปยัง  $P_2$  ด้วยอัตราเร็วคงที่  $v$  จะได้ระยะบนทางโค้ง  $P_1 P_2$  มีค่าเท่ากับ  $v\Delta t$  ดังแสดงในรูปที่ 1.24c

เนื่องจากวงกลมของการเคลื่อนที่มีรัศมีเป็น  $r$  และระยะบนทางโค้ง  $P_1 P_2$  รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นมุม  $\theta$  ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$r\theta = v\Delta t \tag{1.51}$$

หรือ 
$$\Delta t = \frac{r\theta}{v} \tag{1.52}$$

ในสามเหลี่ยมของรูปที่ 1.24b จะได้

$$\frac{1}{2}\Delta v = v\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

หรือ 
$$\Delta v = 2v\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.53}$$

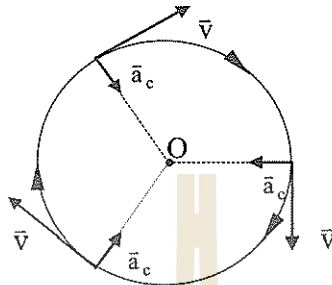
แทนค่า  $\Delta t$  จากสมการ (1.52) และ  $\Delta v$  จากสมการ (1.53) ในนิยามของความเร่งเฉลี่ย  $a_{ave}$  จะได้

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{r\theta/v} = \frac{v^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{r \frac{\theta}{2}} \tag{1.54}$$

ค่าความเร่งของการเคลื่อนที่ ณ เวลาใดๆ อาจหาได้จากสมการ (1.54) โดยพิจารณาด้วยเงื่อนไข  $\Delta t \rightarrow 0$  ซึ่งจะทำให้  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \frac{\theta}{2}$  ดังนั้นสมการ (1.54) จะกลายเป็น

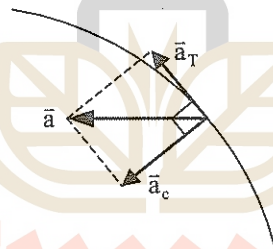
$$a_c = a_{ave} = \frac{v^2}{r} \tag{1.55}$$

เราใช้สัญลักษณ์ของความเร่ง ณ เวลาใดๆ ในสมการ (1.55) เป็น  $a_c$  เนื่องจากมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลาง ดังแสดงในรูปที่ 1.25 และเรียกความเร่งดังกล่าวว่า “ความเร่งสู่ศูนย์กลาง” (centripetal acceleration)



รูปที่ 1.25 การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร่ง  $\vec{a}_c$  มีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลางตั้งฉากกับความเร็ว  $\vec{v}$

เราได้เห็นแล้วว่าการเคลื่อนที่แบบวงกลมที่มีอัตราเร็วคงตัว แต่มีทิศทางเปลี่ยนแปลง จะเป็นการเคลื่อนที่ที่มีความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง แต่ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ที่มีความเร็วเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง จะเป็นการเคลื่อนที่ที่มีทั้งความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง ( $\vec{a}_c$ ) และความเร่งในแนวสัมผัสทางเดิน ( $\vec{a}_T$ ) ที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน การเคลื่อนที่ดังกล่าวจะเป็นการเคลื่อนที่ที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม ดังแสดงในรูปที่ 1.26



รูปที่ 1.26 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีความเร็วเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง จะมีความเร่ง  $\vec{a}$  ซึ่งเป็นผลบวกของ  $\vec{a}_c$  และ  $\vec{a}_T$  ตั้งฉากซึ่งกันและกัน

จากรูปที่ 1.26 จะได้ว่าขนาดของความเร่งลัพธ์ ( $a$ ) มีค่า

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \tag{1.56}$$

**ตัวอย่างที่ 1.18** ดวงจันทร์หมุนรอบโลกครบรอบใช้เวลา 27.3 วัน สมมติให้วงโคจรเป็นวงกลมมีรัศมีความโค้ง  $3.82 \times 10^8$  เมตร จงคำนวณหาขนาดของความเร่งของดวงจันทร์เข้าสู่โลก

วิธีทำ

เวลาครบรอบ	$T = 27.3$	วัน
	$= 2.36 \times 10^6$	วินาที

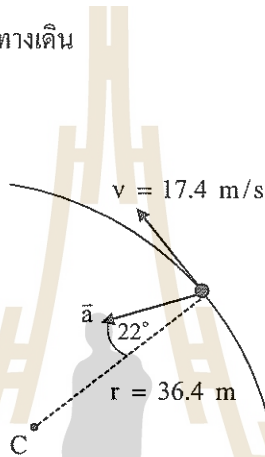
$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} = 1018 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018 \text{ m/s})^2}{3.82 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$= 0.00271 \text{ m/s}^2$$

ตัวอย่างที่ 1.19 อนุภาคกำลังเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมด้วยรัศมี 3.64 เมตร ณ จุดเวลา อนุภาค มีความเร็วเชิงเส้นสัมผัส 17.4 เมตร/วินาที และมีความเร่งในทิศทาง  $22.0^\circ$  จากแนวเข้าสู่ศูนย์กลาง จงหา

- (a) อัตราเร่งในแนวเส้นสัมผัสทางเดิน
- (b) ขนาดของความเร่ง



รูปที่ 1.27 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมรัศมี 36.4 m

วิธีทำ

- (a) อัตราเร่งในแนวเข้าสู่ศูนย์กลางมีค่า

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(17.4 \text{ m/s})^2}{3.64 \text{ m}} = 83.17 \text{ m/s}^2$$

จากรูป

$$a_c = a \cos 22^\circ = 83.17$$

$$\therefore a = \frac{83.17}{\cos 22^\circ} = 89.7 \text{ m/s}^2$$

ทำนองเดียวกัน

$$a_t = a \sin 22^\circ = 89.7 \sin 22^\circ = 33.6 \text{ m/s}^2$$

- (b) ขนาดของความเร่ง

$$a = 89.7 \text{ m/s}^2$$

## สรุป

### 1. นิยาม

1.1 ตำแหน่ง  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

1.2 การกระจัด  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

### 1.3 ความเร็ว

ความเร็วเฉลี่ย :  $\vec{v}_{ave} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

ความเร็ว बदคล :  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

### 1.4 ความเร่ง

ความเร่งเฉลี่ย :  $\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

ความเร่ง बदคล :  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

### 2. การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ

สมการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณการเคลื่อนที่ที่มีดังนี้

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + 2\vec{a} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v})t$$

### 3. การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

เป็นการเคลื่อนที่ในสองมิติโดยในแนวราบวัตถุจะมีความเร็วคงตัวและในแนวตั้งวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเท่ากับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ( $g$ )

ถ้า  $x$  และ  $y$  คือการกระจัดของการเคลื่อนที่ในแนวราบและแนวตั้งตามลำดับ จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณทั้งสองดังนี้

$$y = (\tan \phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2$$

พิสัย R ซึ่งเป็นระยะของการเคลื่อนที่บนแกน x จากจุดยิงถึงจุดตกมีค่า

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0$$

อัตราส่วนของระยะสูงสุด ในแกนตั้งต่อพิสัยมีค่า

$$\frac{H}{R} = \frac{1}{4} \tan \phi_0$$

#### 4. การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่มีขนาดคงตัวแต่มีทิศทางเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร่งสู่ศูนย์กลางมีค่า

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่มีทั้งขนาดและทิศทางเปลี่ยนแปลง วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมด้วยอัตราเร่งมีค่า

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2}$$

เมื่อ  $a_T$  คืออัตราเร่งในแนวเส้นสัมผัสทางเดิน

## บรรณานุกรม

---

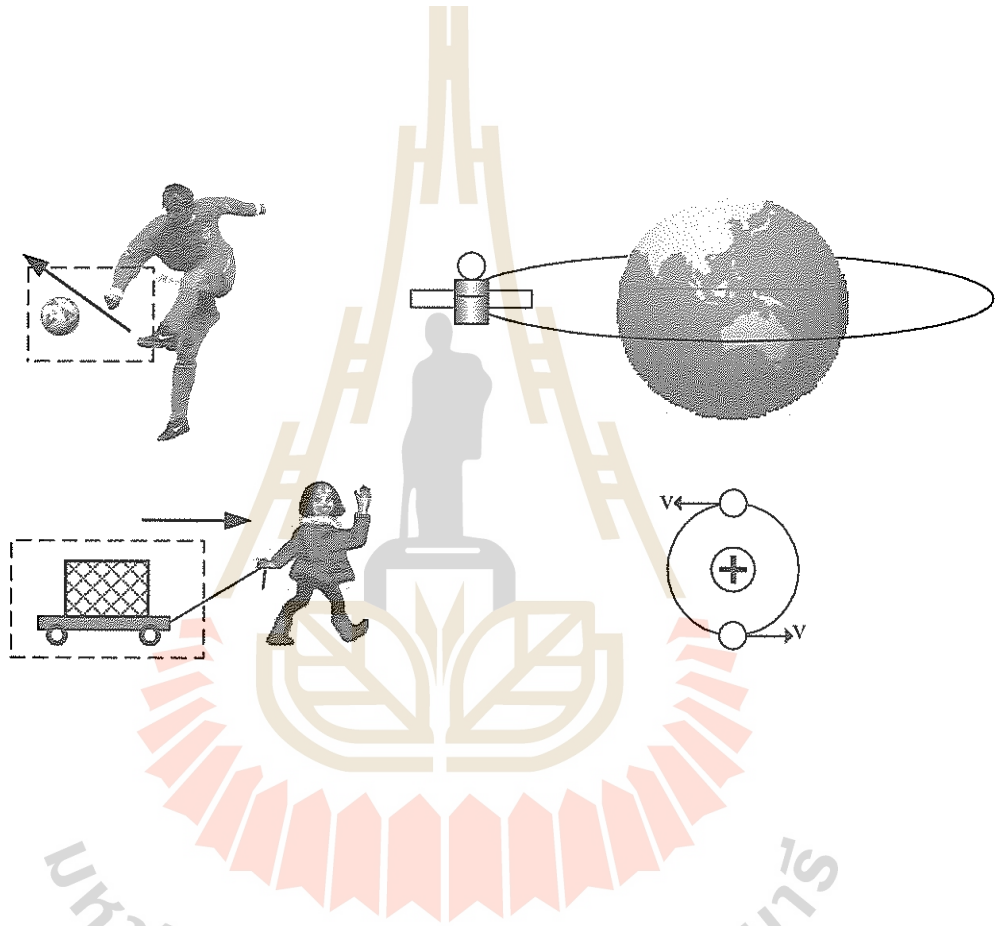
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. สำนักวิชาวิทยาศาสตร์. สาขาวิชาฟิสิกส์. 2540. ฟิสิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 3.  
นนทบุรี: เอส.อาร์.พรีนติ้ง แมส โปรดักส์.

Halliday, David., and Resnick, Robert. 1978. **Physics** (3<sup>rd</sup> ed.). New York: Wiley.

Serway, Raymond A., and Faughn, Jerry S. 1991. **College physics** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia:  
Sunder College Publishing.



แรงและกฎของนิวตัน



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พันเอก ดร.วรศิษย์ อุทัย

# ตอนที่ 2.1

## แรง

แรงมีความสำคัญต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุ เพราะแรงเป็นสาเหตุของการเคลื่อนที่ กฎของนิวตันซึ่งเป็นกฎที่อธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับปริมาณการเคลื่อนที่ต่างๆ เช่น ความเร็วและความเร่ง เป็นต้น วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว หรือมีความเร่งก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของแรงที่กระทำต่อวัตถุ ในตอนนี้จะเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึง พลศาสตร์ ซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของวิชา กลศาสตร์ และต่อจากนั้นจะกล่าวถึงเรื่องแนวความคิดเกี่ยวกับแรงและสุดท้ายเรื่องมวลและความเฉื่อย

### 1. พลศาสตร์

ในหน่วยที่ 1 ตอนที่ 1.2 หัวเรื่องที่ 1 เราได้กล่าวถึง จลนศาสตร์ซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของวิชา กลศาสตร์ที่อธิบายถึงความหมายของปริมาณการเคลื่อนที่ต่างๆ เช่น การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง เป็นต้น พลศาสตร์ (Dynamics) เป็นอีกแขนงหนึ่งของวิชา กลศาสตร์ซึ่งอธิบายถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่ของวัตถุ พลศาสตร์จะอธิบายว่า แรง ซึ่งเป็นสาเหตุของการเคลื่อนที่มีผลต่อ ลักษณะการเคลื่อนที่อย่างไร เช่น แรงจะทำให้วัตถุซึ่งมีมวลค่าหนึ่งเคลื่อนที่เร็วขึ้นหรือช้าลง หรือ มีความเร็วคงตัวด้วยเงื่อนไขอย่างไร รายละเอียดของลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุ และเงื่อนไขของแรงที่กระทำต่อวัตถุจะกล่าวไว้ในตอนที่ 2.2 เรื่องกฎของนิวตัน

### 2. แนวความคิดเกี่ยวกับแรง

#### 2.1 แรงและการเคลื่อนที่

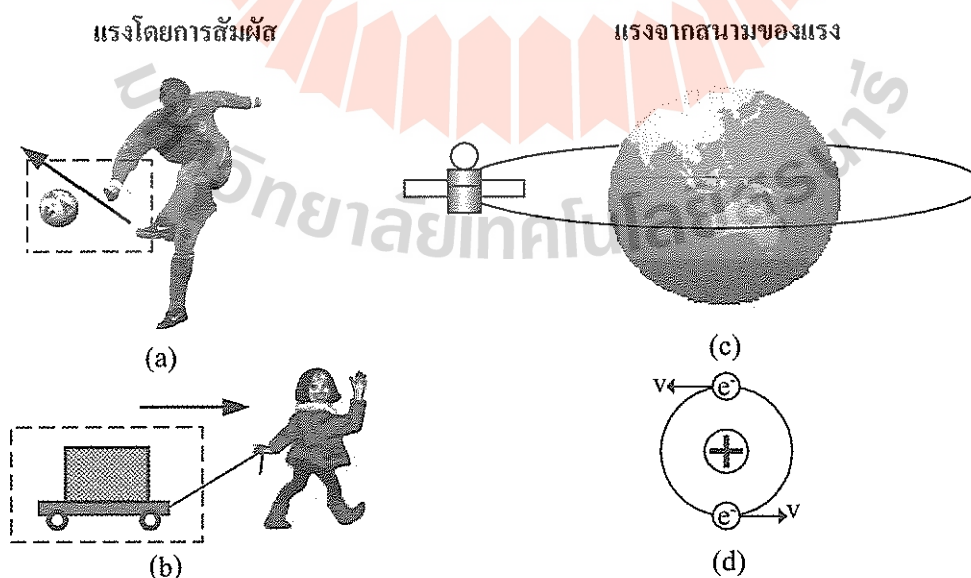
ในชีวิตประจำวันเรามักจะพบเห็นหรือเกี่ยวข้องกับเรื่องของแรงอยู่บ่อยๆ เช่น การเตะฟุตบอล และการเตะตะกร้อ เป็นต้น การเตะฟุตบอลและเตะตะกร้อนั้นต้องใช้แรงที่เกิดขึ้นจากการใช้กล้ามเนื้อขา และเมื่อแรงจากกล้ามเนื้อขากระทำกับลูกฟุตบอลหรือลูกตะกร้อจะทำให้ลูกฟุตบอลและลูกตะกร้อเกิดการเคลื่อนที่ ดังนั้นแสดงว่าแรงสามารถทำให้เกิดการเคลื่อนที่ มีคำถามว่า “แรงทำให้เกิดการเคลื่อนที่เสมอไปใช่หรือไม่” คำตอบคือ “ไม่ใช่” เพราะมีเหตุการณ์บางอย่างไม่มีการเคลื่อนที่

เกิดขึ้นแม้มีแรงกระทำ เช่น เมื่อเราออกแรงผลักหรือดันกำแพงหรือผนังห้องจะเห็นว่ากำแพงและผนังห้องไม่มีการเคลื่อนที่ ดังนั้นจึงไม่จำเป็นเสมอไปว่าแรงจะทำให้เกิดการเคลื่อนที่ แต่เราอาจกล่าวได้ว่า การเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุเกิดจากแรงหรือแรงจะทำให้ความเร็วของวัตถุเปลี่ยนแปลงหรือทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง ดังนั้น ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว (ไม่มีความเร่ง) แสดงว่าไม่มีแรงกระทำต่อวัตถุ แต่ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง แสดงว่ามีแรงกระทำต่อวัตถุ แรงดังกล่าวถือเป็นแรงภายนอกซึ่งอาจมีหลายแรงก็ได้ และเราเรียกรวมของแรงเหล่านี้ว่าแรงลัพธ์ของแรงภายนอก เงื่อนไขที่จะพิจารณาว่าวัตถุจะเกิดความเร่งหรือไม่เมื่อถูกแรงกระทำนั้น ต้องดูจากแรงลัพธ์ของแรงภายนอก ถ้าแรงลัพธ์ของแรงภายนอกเป็นศูนย์ วัตถุจะไม่มี ความเร่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว แต่ถ้าแรงลัพธ์ของแรงภายนอกไม่เป็นศูนย์ วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งหรือมีความเร็วที่เปลี่ยนแปลง

## 2.2 ลักษณะของการกระทำของแรงภายนอก

แรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุแล้วทำให้ความเร็วของวัตถุเปลี่ยนไปหรือมีความเร่งนั้น จะมีลักษณะของการกระทำเป็น 2 ลักษณะคือ

2.2.1 แรงโดยการสัมผัส (contact force) แรงโดยการสัมผัสเป็นแรงจากภายนอกที่กระทำต่อวัตถุโดยการสัมผัส เช่น แรงในการเตะลูกฟุตบอล และแรงลากกล่อง เป็นต้น แรงดังกล่าวมีการสัมผัสระหว่างแรงและวัตถุที่ถูกแรงกระทำจริง ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (a) และ (b) ในรูปดังกล่าว วัตถุซึ่งอยู่ในกรอบเส้นประถูกกระทำโดยแรงภายนอกจากแหล่งกำเนิดนอกรอบ



รูปที่ 2.1 ลักษณะของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุ รูป (a) และ (b) เป็นแรงโดยการสัมผัส รูป (c) และ (d) เป็นแรงจากสนามของแรง

2.2.2 แรงจากสนามของแรง (field force) แรงจากสนามของแรงเป็นแรงที่ไม่มีการสัมผัสระหว่างวัตถุกับแหล่งกำเนิดแรงจากภายนอก เช่น แรงดึงดูดระหว่างมวลของโลกกับดาวเทียม และแรงดึงดูดระหว่างประจุไฟฟ้าของนิวเคลียสและอิเล็กตรอน เป็นต้น แรงกระทำดังกล่าวเกิดขึ้นเมื่อวัตถุอยู่ภายในบริเวณสนามของแรงของแหล่งกำเนิด ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (c) และ (d)

### 2.3 แรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์

แรงภายนอกดังกล่าวในหัวข้อ 2.1 และ 2.2 นั่นก็คือแรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์นั่นเอง แรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์นี้มี 4 ชนิดคือ

2.3.1 แรงโน้มถ่วง (gravitational force) เป็นแรงดึงดูดระหว่างมวลซึ่งเป็นแรงที่มีพิสัยยาวขึ้นอยู่กับขนาดของมวลและระยะห่างระหว่างมวล แรงนี้จะมีขนาดค่ามากประมาณ  $10^{-38}$  เท่าของแรงนิวเคลียร์ แรงนี้เป็นแรงที่ทำให้ดาวเคราะห์ต่างๆ รวมกันอยู่ได้ในระบบสุริยะของเรา

2.3.2 แรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) เป็นแรงระหว่างประจุไฟฟ้าซึ่งเป็นแรงที่มีพิสัยยาวขึ้นอยู่กับขนาดของประจุ และระยะทางระหว่างประจุ แรงนี้จะมีขนาดประมาณ  $10^{-2}$  เท่าของแรงนิวเคลียร์ และเป็นแรงที่ทำให้อะตอมและโมเลกุลรวมตัวกันอยู่ได้ในสสาร

2.3.3 แรงนิวเคลียร์ (nuclear force) เป็นแรงที่ยึดนิวคลีออนในนิวเคลียสเอาไว้ทำให้นิวเคลียสคงสภาพอยู่ได้ แรงชนิดนี้มีขนาดสูงมาก แต่เป็นแรงพิสัยสั้นจะมีผลเมื่อนิวคลีออนอยู่ใกล้กันไม่เกินระยะ  $10^{-14}$  เมตร หรือเท่ากับขนาดของนิวเคลียสเท่านั้น

2.3.4 แรงอย่างอ่อน (weak force) เป็นแรงดึงดูดระหว่างอนุภาคมูลฐานและมีพิสัยสั้น ซึ่งเป็นเหตุทำให้นิวเคลียสไม่เสถียร จึงเกิดการสลายตัวของนิวเคลียส เช่น การสลายตัวของนิวเคลียสให้อนุภาคบีตา เป็นต้น แรงนี้มีขนาดเล็กหรือประมาณ  $10^{-9}$  เท่าของแรงนิวเคลียร์

## 3. มวลและความเฉื่อย

มวลเป็นคุณสมบัติของวัตถุที่จะพยายามต้านการเปลี่ยนแปลงสถานะภาพการเคลื่อนที่เดิมของวัตถุ ถ้าเดิมวัตถุอยู่นิ่ง มวลจะพยายามรักษาสถานะภาพการอยู่นิ่งต่อไป หรือถ้าเดิมวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว มวลก็จะพยายามรักษาสถานะภาพความเร็วคงตัวเอาไว้ เราเรียกคุณสมบัติดังกล่าวของมวลว่า ความเฉื่อย (inertia)

วัตถุที่มีมวลมากจะสามารถต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วได้ดีกว่าวัตถุที่มีมวลน้อย หรือมีความเฉื่อยมากกว่าวัตถุที่มีมวลน้อย ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราออกแรงตีลูกกอล์ฟและลูกโบว์ลิ่งด้วยแรงที่เท่ากัน จะเห็นว่าเกิดผลแตกต่างกัน คือ ลูกกอล์ฟจะเคลื่อนที่ได้ไกลกว่าลูกโบว์ลิ่ง แสดงว่าลูกโบว์ลิ่งมีความเฉื่อยมากกว่าลูกกอล์ฟ จึงอาจกล่าวได้ว่ามวลก็คือปริมาณที่ใช้วัดความเฉื่อยของวัตถุ ถ้าวัตถุใดมีมวลมากก็จะมีมวลเฉื่อยมากและเป็นผลทำให้มีความเร่งน้อยเมื่อมีแรงอันหนึ่งมากระทำ แต่ถ้าวัตถุ

นั้นมิมวลน้อยก็จะมีคความเฉื่อยน้อยและเป็นผลทำให้มีความเร่งมากเมื่อถูกกระทำด้วยแรงอันเดียวกัน หน่วยของมวลที่นิยมใช้คือ หน่วยในระบบ SI ซึ่งมีหน่วยเป็น กิโลกรัม (kilogram , kg)

---

## สรุป

### 1. พลศาสตร์

พลศาสตร์เป็นแขนงหนึ่งของวิชากลศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยกล่าวว่า แรงจะทำให้วัตถุเคลื่อนที่เร็วขึ้นหรือช้าลง หรือมีความเร็วคงตัว ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของแรงที่กระทำต่อวัตถุ

### 2. แนวความคิดเกี่ยวกับแรง

2.1 แรงและการเคลื่อนที่ แรงจะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งหรือมีความเร็วที่เปลี่ยนแปลง

2.2 ลักษณะของการกระทำของแรงภายนอก แรงที่ทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง จะมีลักษณะของการกระทำ 2 ลักษณะคือ แรงโดยการสัมผัสและแรงจากสนามของแรง

2.3 แรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์ แรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์ซึ่งนับเป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุมี 4 ชนิด คือ แรงโน้มถ่วง แรงแม่เหล็กไฟฟ้า แรงนิวเคลียร์ และแรงอ่อน

### 3. มวลและความเฉื่อย

มวลเป็นสมบัติของก้อนวัตถุที่จะพยายามต้านทานการเปลี่ยนแปลงสถานะภาพการเคลื่อนที่เดิมของวัตถุ วัตถุที่มีมวลมากจะต้านทานการเปลี่ยนแปลงได้ดีกว่าวัตถุที่มีมวลน้อย

## ตอนที่ 2.2

### กฎของนิวตัน

ในปี ค.ศ. 1686 เซอร์ไอแซก นิวตัน (Sir Isaac Newton) นักวิทยาศาสตร์ชาวอังกฤษเป็นผู้เสนอกฎการเคลื่อนที่ของวัตถุลงตีพิมพ์ในวารสาร “The Mathematical Principles of Natural Philosophy” ซึ่งกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร่งของวัตถุเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุ เราเรียกกฎการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ว่า กฎของนิวตัน กฎการเคลื่อนที่ดังกล่าวประสบความสำเร็จมาก สามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุได้อย่างแม่นยำ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุที่มีขนาดเล็กหรือขนาดใหญ่ เช่น การเคลื่อนที่ของก้อนหินที่ถูกขว้างไปจนกระทั่งถึงการเคลื่อนที่ของยานอวกาศที่เคลื่อนที่ไปยังดวงดาวต่างๆ เป็นต้น ในตอนนี้จะเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงรายละเอียดของกฎของนิวตัน 3 ข้อ แล้วค่อยกล่าวถึงกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

#### 1. กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน

ดังได้กล่าวไว้ในข้อ 3 ของตอนที่ 2.1 ว่าวัตถุจะพยายามรักษาสถานะภาพเดิมของการเคลื่อนที่ของมันหรือพยายามต่อต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุ กาลิเลโอ (Galileo) เป็นคนแรกที่เสนอแนวความคิดนี้ แล้วต่อมาภายหลังนิวตัน (Newton) ได้รวบรวมแนวความคิดดังกล่าวมาเสนอเป็นกฎของนิวตันข้อที่หนึ่ง ซึ่งกล่าวว่า วัตถุที่เดิมอยู่นิ่งจะยังคงอยู่นิ่งต่อไป หรือถ้าวัตถุกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วค่าหนึ่งก็จะยังคงเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วเท่าเดิม นอกเสียจากว่ามีแรงลัพธ์จากแรงภายนอกที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำกับวัตถุ

จะเห็นได้ว่ากฎข้อที่หนึ่งของนิวตันเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติเรื่องความเฉื่อยของวัตถุ บางครั้งจึงเรียกกฎนี้ว่า กฎของความเฉื่อย (law of inertia) และการใช้กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันนี้ต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขเกี่ยวกับกรอบอ้างอิงเฉื่อย (inertial frame of reference) หรือกฎนี้จะจริงเมื่อผู้สังเกตอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว เมื่อเทียบกับกรอบอ้างอิงเฉื่อยเท่านั้น ในที่นี้ กรอบอ้างอิงเฉื่อยหมายถึงกรอบอ้างอิงที่ไม่มีความเร่งอย่างแท้จริงในปริภูมิ (space) การที่กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันมีเงื่อนไขเช่นนั้นก็เพราะเหตุว่าถ้าหากผู้สังเกตเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง ผู้สังเกตจะเห็นวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งต่างๆ ที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับวัตถุเลย ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราขับรถด้วยความเร็วไม่

คงที่หรือมีความเร่ง เราจะสังเกตเห็นเสาไฟฟ้าหรือสิ่งของอื่นๆ ข้างทางเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็วไม่คงที่เช่นกัน ทั้งๆ ที่สิ่งเหล่านั้นอยู่นิ่ง สิ่งที่เกิดขึ้นจึงไม่เป็นจริง ดังนั้น จึงต้องมีเงื่อนไขดังกล่าว กฎข้ออื่นๆ ของนิวตันที่จะกล่าวต่อไปก็มีเงื่อนไขเช่นเดียวกับกฎข้อที่หนึ่ง

## 2. กฎข้อที่สองของนิวตัน

กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันอธิบายว่าอะไรจะเกิดขึ้น ถ้าแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเรารู้แล้วว่าถ้าวัตถุไม่อยู่นิ่งก็เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว แต่ในทางตรงกันข้าม กฎข้อที่สองของนิวตันจะอธิบายว่าจะเกิดอะไรขึ้นถ้าแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุไม่เป็นศูนย์

นิวตันได้ทำการทดลองแล้วพบว่าถ้าแรงลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุมีค่าไม่เป็นศูนย์ จะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง โดยความเร่งนี้จะแปรผันโดยตรงกับแรงลัพธ์ของแรงภายนอก และแปรผกผันกับมวลของวัตถุ ดังนั้น นิวตันจึงสรุปเป็นกฎข้อที่สอง ซึ่งกล่าวว่า วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง เมื่อมีแรงภายนอกที่ไม่เป็นศูนย์มากระทำต่อวัตถุ โดยความเร่งจะแปรผันโดยตรงกับแรงที่มากระทำและแปรผกผันกับมวลของวัตถุ ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ จะเขียนกฎข้อที่สองของนิวตันได้เป็น

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

เมื่อ  $\Sigma \vec{F}$  คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอก  $m$  คือมวลของวัตถุและ  $\vec{a}$  คือความเร่งของวัตถุ สมการ (2.1) เป็นสมการเวกเตอร์ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปขององค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบแกนพิกัดฉากได้ 3 สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \quad (2.2)$$

ในสมการ (2.1) ถ้า  $\Sigma \vec{F} = 0$  จะได้  $\vec{a} = 0$  ซึ่งเป็นกรณีที่วัตถุอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวหรือกรณีของกฎข้อที่หนึ่งของนิวตันข้อที่หนึ่งนั่นเอง ดังนั้นจึงถือได้ว่ากฎข้อที่หนึ่งของนิวตันเป็นกรณีพิเศษของกฎข้อที่สองของนิวตัน

หน่วยของแรงที่นิยมใช้คือ หน่วยในระบบ SI ซึ่งเรียกว่า “นิวตัน” (newton, N) และเป็นผลคูณของหน่วยของมวลและหน่วยของความเร่ง (เมตร/วินาที<sup>2</sup>, m/s<sup>2</sup>) หรือ

$$N = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

### 3. กฎข้อที่สามของนิวตัน

กฎข้อที่สามของนิวตันเป็นเรื่องเกี่ยวกับแรงกิริยาและแรงปฏิกิริยา แรงทั้งสองนี้จะเป็นสิ่งที่คู่กันเสมอไม่สามารถแยกกันได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าแรงกิริยาหรือแรงปฏิกิริยาไม่สามารถอยู่ได้อย่างโดดเดี่ยว ถ้ามีแรงกิริยาต้องมีแรงปฏิกิริยาได้ตอบเสมอ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราออกแรงดันผนังห้องด้วยแรงค่าหนึ่ง ผนังห้องก็จะออกแรงได้ตอบด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม หรือหนังสือที่วางอยู่บนโต๊ะจะมีแรงกดทับโต๊ะด้วยแรงค่าหนึ่ง ในขณะที่เดียวกัน โต๊ะก็จะออกแรงได้ตอบด้วยแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม เราเรียกแรงที่ดันผนังห้องและแรงที่หนังสือกดทับโต๊ะว่าแรงกิริยา และเรียกแรงที่ผนังห้องได้ตอบและแรงที่โต๊ะได้ตอบว่าแรงปฏิกิริยา หรือในทางตรงกันข้าม ถ้าพิจารณาว่าแรงเนื่องจากผนังห้องและแรงเนื่องจากโต๊ะเป็นแรงกิริยาและแรงที่เราดันผนังห้องและแรงที่หนังสือกดทับโต๊ะเป็นแรงปฏิกิริยาก็ย่อมได้เช่นกัน เพียงแต่ว่าแรงทั้งสองนี้จะอยู่คู่กันเสมอ

ด้วยข้อเท็จจริงดังกล่าว นิวตันจึงตั้งเป็นกฎข้อที่สามของนิวตันขึ้นมา ซึ่งกล่าวว่า ถ้าวัตถุสองก้อนมีอันตรกิริยาต่อกัน แรงที่วัตถุก้อนที่ 1 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 2 จะมีขนาดเท่ากับแรงที่วัตถุก้อนที่ 2 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 1 แต่ทิศทางตรงกันข้าม

ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ เราอาจเขียนกฎข้อที่สามของนิวตันได้ดังนี้

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.3)$$

เมื่อ  $\vec{F}_{12}$  คือแรงที่วัตถุก้อนที่ 1 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 2 และ  
 $\vec{F}_{21}$  คือแรงที่วัตถุก้อนที่ 2 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 1

### 4. กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

ก่อนปี ค.ศ.1686 นักวิทยาศาสตร์ได้ศึกษาและมีข้อมูลเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุบนฟากฟ้า (celestial bodies) เป็นจำนวนมาก แต่ก็ไม่สามารถอธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเหล่านั้นได้อย่างกระจ่างแจ้ง จนกระทั่ง นิวตันเสนอกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน (Newton's Law of Gravitation) ขึ้นมาในปีนั้นเอง จึงได้รู้ว่าทำไมดาวเคราะห์จึงโคจรรอบดวงอาทิตย์ ทำไมดวงจันทร์จึงโคจรรอบโลก และทำไมมะม่วงซึ่งหล่นจากต้นจึงตกลงสู่พื้นดิน

กฎความโน้มถ่วงของนิวตันกล่าวว่า วัตถุทุกชนิดในจักรวาลจะออกแรงดึงดูดซึ่งกันและกัน โดยขนาดของแรงจะเป็นปฏิกิริยาโดยตรงกับผลคูณของมวลของวัตถุและเป็นปฏิกิริยาผกผันกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างวัตถุ

ตามกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน ถ้าวัตถุทั้งสองมีมวลเป็น  $m_1$  และ  $m_2$  และอยู่ห่างกันเป็นระยะ  $r$  จะมีแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุทั้งสองมีค่าเป็น

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (2.4)$$

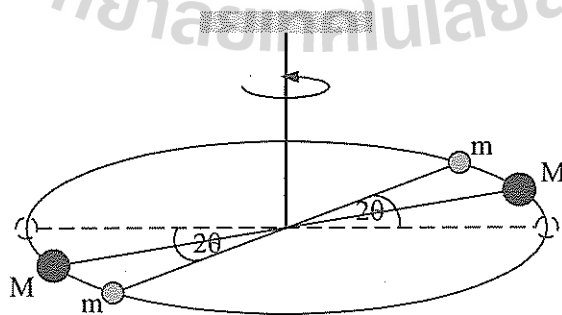
เมื่อ  $G$  คือค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภพ (universal gravitational constant) แรงดังกล่าวมีลักษณะเป็นแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยา ซึ่งจะเป็นแรงที่กระทำในแนวเส้นตรงที่เชื่อมต่อกันระหว่างจุดศูนย์กลางของวัตถุทั้งสอง

ในการทดลองเพื่อหาค่า  $G$  ของเซอร์ เฮนรี คาร์เวนดิช (Sir Henry Cavendish) ในปี ค.ศ.1798 เขาใช้ลูกตุ้มชนิดบิด (torsional balance) เป็นเครื่องมือและพบว่า  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  และในเวลาต่อมาผู้ทำการทดลองหาค่า  $G$  อีกหลายครั้งและได้ค่าที่มีความถูกต้องมากขึ้น จนกระทั่งได้ค่าที่เป็นมาตรฐานที่ยอมรับกันโดยทั่วไปซึ่งมีค่า

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

**ตัวอย่างที่ 2.1** ในการทดลองของคาร์เวนดิช (Cavendish) เพื่อหาค่า  $G$  เขาใช้ลูกตุ้มชนิดบิดเป็นเครื่องมือซึ่งมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 2.2 โดยมีมวล  $m$  สองก้อนยึดติดกับคานเบายาว  $L$  ซึ่งห้อยแขวนอยู่กับเชือกที่สามารถบิดไป-มาได้ มวล  $M$  สองก้อนจะออกแรงดึงดูดมวล  $m$  แต่ละก้อนทำให้เกิดแรงบิด (torque) บนมวล  $m$  ดังนั้นมวล  $m$  จะแกว่งไป-มา ในแนวราบเป็นมุม  $2\theta$  ระหว่างตำแหน่งสมดุล 2 ซ้ำ จึงหาค่า  $G$  โดยมีข้อมูลจากการทดลองมีดังนี้

$M = 12.7 \text{ kg}$  ,  $m = 9.85 \text{ g}$  ,  $L = 52.4 \text{ cm}$  ,  $2\theta = 0.516$  ระยะระหว่างมวล  $m$  และ  $M$  คือ  $R = 10.8 \text{ cm}$   
คาบของการแกว่ง ( $T$ ) = 769 s โมเมนต์ความเฉื่อยของการหมุน ( $I$ ) =  $1.25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$



รูปที่ 2.2 เครื่องมือการทดลองหาค่า  $G$  ของคาร์เวนดิช

วิธีทำ

จากคาบการแกว่งกวัดคงตัวลูกตุ้มชนิดบิวด

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

จะได้ค่าคงตัวการบิดของเส้นลวด

$$K = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{(4\pi^2)(1.25 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{(769 \text{ s})^2} = 8.34 \times 10^{-8} \text{ N}\cdot\text{m}$$

เมื่อลูกตุ้มบิดไปจากตำแหน่งสมดุลเป็นมุม  $\theta$  จะได้แรงบิด

$$\begin{aligned} \tau &= K\theta = (8.34 \times 10^{-8} \text{ N}\cdot\text{m})\left(\frac{0.516^\circ}{2} \times \frac{2\pi}{360^\circ} \text{ rad}\right) \\ \tau &= 3.75 \times 10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

แรงบิดเนื่องจากเส้นลวดมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงดึงดูดระหว่างมวลเล็กและมวลใหญ่ ในขณะที่อยู่ในสภาพสมดุล ถ้าให้  $F$  เป็นแรงดึงดูดระหว่างมวลเล็กและมวลใหญ่แต่ละคู่จะได้

$$\tau = (2F)\left(\frac{L}{2}\right) = FL = \frac{GMmL}{R^2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} G &= \frac{\tau R^2}{MmL} = \frac{(3.75 \times 10^{-10} \text{ N}\cdot\text{m})(0.108 \text{ m})^2}{(12.7 \text{ kg})(0.00985 \text{ kg})(0.524 \text{ m})} \\ &= 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงคำนวณหาแรงโน้มถ่วง

(a) ระหว่างลูกโบว์ลิ่งสองลูกมวล 7.3 กิโลกรัม อยู่ห่างกัน 0.65 เมตร

(b) ระหว่างโลกและดวงจันทร์ กำหนดให้โลกและดวงจันทร์มีมวล  $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$  และ  $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$  ตามลำดับ และระยะห่างระหว่างโลกและดวงจันทร์เป็น  $3.82 \times 10^8 \text{ m}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F &= \frac{G m_1 m_2}{r^2} \\ &= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.3 \text{ kg})(7.3 \text{ kg})}{(0.65 \text{ m})^2} \\ &= 8.4 \times 10^{-9} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \text{มวลของโลก} &= 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} \\ \text{มวลของดวงจันทร์} &= 7.36 \times 10^{22} \text{ kg} \\ \text{ระยะทางจากโลกถึงดวงจันทร์} &= 3.82 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(7.36 \times 10^{22})}{(3.82 \times 10^8 \text{ m})^2} \\ &= 2.01 \times 10^{20} \text{ N} \end{aligned}$$

## สรุป

### 1. กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน

เป็นกฎที่กล่าวถึงสภาวะการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งกล่าวว่า “ถ้าไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุหรือมีแรงลัพธ์เป็นศูนย์ วัตถุจะรักษาสภาวะเดิมของมันคืออยู่นิ่งหรือมีความเร็วคงตัว” กฎข้อนี้จะเป็นจริงเมื่อผู้สังเกตอยู่ในกรอบเฉื่อย ซึ่งเป็นกรอบที่ไม่มี ความเร่งอย่างแท้จริงในปริภูมิ

### 2. กฎข้อที่สองของนิวตัน

เป็นกฎที่กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ ซึ่งกล่าวว่า “ถ้าแรงลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุไม่เป็นศูนย์ จะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง” ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

### 3. กฎข้อที่สามของนิวตัน

กล่าวว่า “ถ้าวัตถุสองก้อนมีอันตรกิริยาต่อกัน แรงที่วัตถุก้อนที่ 1 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 2 จะมีขนาดเท่ากับแรงที่วัตถุก้อนที่ 2 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 1 แต่ทิศตรงกันข้าม” หรือเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

เมื่อ  $\vec{F}_{12}$  คือแรงที่วัตถุก้อนที่ 1 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 2 และ  
 $\vec{F}_{21}$  คือแรงที่วัตถุก้อนที่ 2 กระทำต่อวัตถุก้อนที่ 1

#### 4. กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

เป็นกฎที่กล่าวถึงแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุ 2 ก้อน ซึ่งมีลักษณะเป็นแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยากระทำในแนวเส้นตรงต่อจุดศูนย์กลางของมวลทั้งสอง ถ้า  $F$  เป็นแรงดึงดูดระหว่างมวล  $m_1$  และ  $m_2$  ซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะ  $r$  จะได้

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

เมื่อ  $G$  คือค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภพ (universal gravitational constant)



# ตอนที่ 2.3

## การประยุกต์กฎของนิวตัน

เนื่องจากการประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และกฎความโน้มถ่วงของนิวตันในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์มีรายละเอียดปลีกย่อยที่แตกต่างกันสำหรับปัญหาที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงมีความหลากหลายของวิธีการแก้ปัญหาเหล่านั้น อย่างไรก็ตามปัญหาส่วนใหญ่จะมีหลักเกณฑ์และขั้นตอนในการแก้ปัญหาคล้ายคลึงกัน ดังนั้นจึงต้องศึกษาถึงหลักเกณฑ์และขั้นตอนของการแก้ปัญหาหรือการประยุกต์กฎของนิวตัน ในตอนนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและมวล และความเสียดทานก่อนที่จะกล่าวถึงหลักการประยุกต์กฎของนิวตัน

### 1. ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักและมวล

ในชีวิตประจำวันเรามักจะใช้คำว่า น้ำหนัก แทนคำว่า มวล เช่น นาย ก มีน้ำหนัก 60 กิโลกรัม เป็นต้น ในวิชาฟิสิกส์นั้น ประโยคข้างต้นควรกล่าวว่า นาย ก มีมวล 60 กิโลกรัม จึงเห็นได้ว่าความหมายของคำว่า น้ำหนัก และ มวล ในชีวิตประจำวันและในวิชาฟิสิกส์นั้นแตกต่างกัน ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงความหมายของคำว่า น้ำหนัก ที่ใช้ในวิชาฟิสิกส์ และจะทำให้เราทราบถึงความสัมพันธ์ของคำว่า น้ำหนัก และคำว่า มวล

น้ำหนักของวัตถุบนผิวโลกก็คือแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อวัตถุ ซึ่งมีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลกและมีค่ากำหนดโดยสมการของแรงหรือสมการ (2.4) ถ้าวัตถุมีมวลเป็น  $m$  น้ำหนัก  $W$  ของวัตถุบนผิวโลกจะมีค่า

$$W = \frac{GmM_E}{R^2} \quad (2.5)$$

โดย  $M_E$  และ  $R$  คือมวลและรัศมีของโลกตามลำดับ

ถ้าให้  $g = \frac{GM_E}{R^2}$  สมการ (2.5) จะกลายเป็น

$$W = mg \quad (2.6)$$

เราเรียกค่า  $g$  ในสมการ (2.6) ว่า “ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกซึ่งจะเป็นค่าคงตัวสำหรับบริเวณที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลกเท่ากัน ในบริเวณใกล้ๆ ผิวโลกอาจถือได้ว่า  $g$  มีค่าคงตัวถึงแม้ว่าจะมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของโลกไม่เท่ากัน โดยมีค่าประมาณ 9.8 เมตร/วินาที<sup>2</sup> ในสมการ (2.6)  $m$  เป็นค่ามวลของวัตถุ ซึ่งเป็นปริมาณที่มีค่าคงตัวไม่ว่าวัตถุนั้นจะอยู่ที่ใด แต่น้ำหนัก  $W$  ของวัตถุนั้นนอกจากจะขึ้นอยู่กับค่ามวลแล้วยังขึ้นอยู่กับค่า  $g$  ด้วย เนื่องจากค่า  $g$  ลดลง เมื่ออยู่ห่างจากผิวโลกมากขึ้น ดังนั้นน้ำหนักของวัตถุจะลดลง เมื่ออยู่ไกลออกไปจากผิวโลกและอาจเกิดสภาพไร้น้ำหนัก เมื่อวัตถุอยู่ห่างจากผิวโลกมากๆ เช่น สภาพไร้น้ำหนักของนักบินอวกาศในยานอวกาศที่อยู่ห่างจากโลกมากๆ

**ตัวอย่างที่ 2.3** เครื่องบินไอพ่นเริ่มออกวิ่งบนทางวิ่งเพื่อบินขึ้นมีความเร่ง 2.3 เมตร/วินาที<sup>2</sup> เครื่องบินมีเครื่องยนต์ 2 เครื่อง แต่ละเครื่องมีแรงดันขึ้น  $1.40 \times 10^5$  นิวตัน ถ้ามาน้ำหนักของเครื่องบินมีค่าเท่าใด

**วิธีทำ** มวลของเครื่องบินหาได้จากกฎข้อที่สองของนิวตัน หรือ

$$F = ma \quad (1)$$

เนื่องจากเครื่องบินมี 2 เครื่องยนต์ และแต่ละเครื่องยนต์มีแรงดันขึ้น  $1.4 \times 10^5$  N ดังนั้น

$$F = 2 \times 1.40 \times 10^5 \text{ N}$$

$$a = 2.3 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า  $F$  และ  $a$  ในสมการ (1) จะได้

$$2 \times 1.40 \times 10^5 \text{ N} = m(2.3 \text{ m/s}^2)$$

$$m = 1.22 \times 10^5 \text{ kg}$$

ดังนั้นน้ำหนักของเครื่องบินมีค่า

$$\therefore W = mg = (1.22 \times 10^5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$$

$$= 1.19 \times 10^6 \text{ N}$$

## 2. ความเสียดทาน

ความเสียดทาน (friction) จะเกิดขึ้นเมื่อวัตถุที่มีผิวสัมผัสกันเคลื่อนที่สัมผัสต่อกัน ทั้งนี้เพราะเหตุว่าผิวของวัตถุทั้งสองนั้นขรุขระหรือไม่เรียบ ดังนั้นเมื่อเราพยายามเคลื่อนวัตถุที่สัมผัสกันจะมีแรงต้านเกิดขึ้น เราเรียกแรงต้านนี้ว่า แรงเสียดทาน ซึ่งอาจแบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

### 2.1 แรงเสียดทานสถิต

แรงเสียดทานสถิต (static friction) เป็นแรงความพยายามที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการทำให้วัตถุเคลื่อนตัวจากเดิมที่อยู่นิ่ง

ถ้า  $\mu_s$  คือค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิต แรงเสียดทานสถิตจะมีค่า

$$f_s \leq \mu_s N \quad (2.7)$$

เมื่อ  $N$  คือแรงปฏิกิริยาดังฉากระหว่างผิวสัมผัส

### 2.2 แรงเสียดทานจลน์

แรงเสียดทานจลน์ (kinetic friction) เป็นแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัส ในขณะที่วัตถุกำลังเคลื่อนที่ซึ่งจะมีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานสถิต

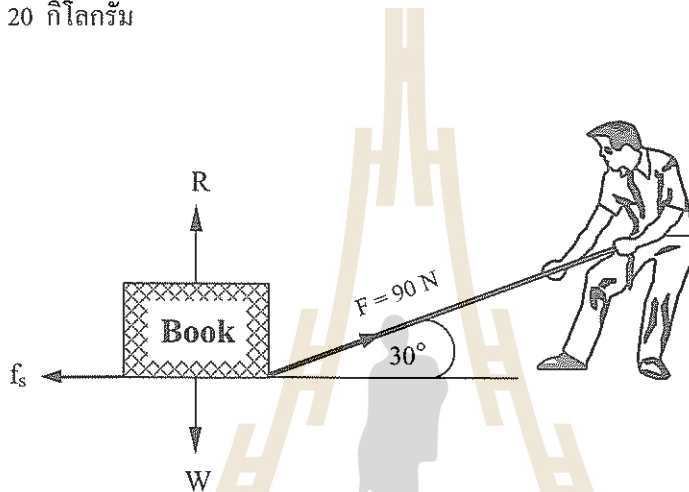
ถ้า  $\mu_k$  คือค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานจลน์ แรงเสียดทานจลน์จะมีค่า

$$f_k = \mu_k N \quad (2.8)$$

เมื่อ  $N$  คือ แรงปฏิกิริยาดังฉากระหว่างผิวสัมผัส

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 2.4 ในการขนย้ายกล่องหนังสือเข้าหอพักของนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี คนหนึ่ง โดยการใช้เชือกลากกล่องหนังสือไปบนพื้นดังรูปที่ 2.3 ถ้านักศึกษาค้นนั้นออกแรง 90 นิวตัน ดึงเชือกซึ่งทำมุม  $30^\circ$  กับแนวราบแล้วกล่องเคลื่อนที่พอดี จงหาสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิต ถ้ากล่องมีมวล 20 กิโลกรัม



รูปที่ 2.3 นักศึกษา มทส. กำลังลากกล่องหนังสือด้วยแรง 90 N ทำมุม  $30^\circ$  กับแนวราบ

วิธีทำ เนื่องจากกล่องไม่มีความเร่งในแนวตั้ง (แกน  $y$ ) จะได้

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R + (90 \text{ N})\sin 30^\circ - W = 0$$

$$R + (90 \text{ N})\left(\frac{1}{2}\right) - (20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 0$$

$$R = 196 - 45 \text{ N}$$

$$= 151 \text{ N}$$

เมื่อออกแรง 90 N แล้วกล่องเคลื่อนที่พอดีแสดงว่าแรงดึงในแนวราบเท่ากับแรงเสียดทานสถิต หรือ

$$f_s = 90 \text{ N} \cos 30^\circ$$

$$\mu_s R = 90 \text{ N} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \mu_s = \frac{90 \text{ N} \times \sqrt{3}}{151 \text{ N} \times 2}$$

$$= 0.52$$

### 3. การประยุกต์กฎของนิวตัน

ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์โดยใช้กฎของนิวตันนั้น ถึงแม้จะมีรายละเอียดของวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันในแต่ละปัญหา แต่ก็มีขั้นตอนที่คล้ายคลึงกัน ต่อไปนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนในการประยุกต์กฎของนิวตันเพื่อแก้ปัญหาต่างๆ ทางกลศาสตร์ หลังจากนั้นเราจะนำเสนอตัวอย่างของการแก้ปัญหาในลักษณะต่างๆ เพื่อให้นักศึกษาได้รู้แนวทางของการประยุกต์กฎของนิวตัน

ขั้นตอนของการประยุกต์กฎของนิวตันมีข้อแนะนำดังต่อไปนี้

- 1) แยกวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ออกจากสิ่งแวดล้อม โดยวัตถุดังกล่าวอาจเป็นวัตถุก้อนเดียว หรือหลายก้อนก็ได้
- 2) เมื่อแยกวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ได้แล้วก็พิจารณาว่าสิ่งแวดล้อมคืออะไรบ้าง โดยสิ่งแวดล้อมนี้อาจเป็นวัตถุก้อนอื่น ผิวพื้น สปริง เชือก โลกและอื่นๆ ซึ่งออกแรงกระทำต่อวัตถุ
- 3) เลือกรูปอ้างอิง (กรอบเฉื่อย) ที่เหมาะสม โดยควรเลือกรูปอ้างอิงที่มีจุดกำเนิดและทิศของแกนต่างๆ อยู่ในลักษณะที่จะอำนวยความสะดวกในการแก้ปัญหาขั้นต่อไป
- 4) เขียน free-body diagram ของวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ โดยแสดงว่ามีแรงอะไรบ้างกระทำต่อวัตถุ
- 5) ใช้กฎข้อที่สองของนิวตันกับแรงที่กระทำต่อวัตถุและความเร่งที่เกิดขึ้นในแนวแกนต่างๆ

$$\begin{aligned}F_x &= ma_x \\F_y &= ma_y \\F_z &= ma_z\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 2.5** เด็กหญิงมวล 40 กิโลกรัม และล้อเลื่อนมวล 8.4 กิโลกรัม ยืนอยู่บนผิวน้ำแข็งของทะเลสาบแห่งหนึ่งโดยห่างกัน 15 เมตร ถ้าเด็กหญิงใช้เชือกดึงล้อเลื่อนด้วยแรง 5.2 นิวตัน โดยดึงเข้าหาตัว จงคำนวณ

- (a) ความเร่งของล้อเลื่อน
- (b) ความเร่งของเด็กหญิง
- (c) ถ้านับจากตำแหน่งเด็กหญิงยืนอยู่เริ่มต้น เด็กหญิงกับล้อเลื่อนจะชนกันที่ใด ถ้าแรงดึงของเด็กหญิงมีค่าคงที่ และไม่คิดแรงเสียดทาน

**วิธีทำ**

จาก  $F = ma$  (1)

(a) แรงที่กระทำต่อล้อเลื่อน  $F = 5.2$  N และล้อเลื่อนมีมวล  $m = 8.4$  kg

แทนค่า  $F$  และ  $m$  ใน (1) จะได้ความเร่งของล้อเลื่อน

แรงและกฎของนิวตัน

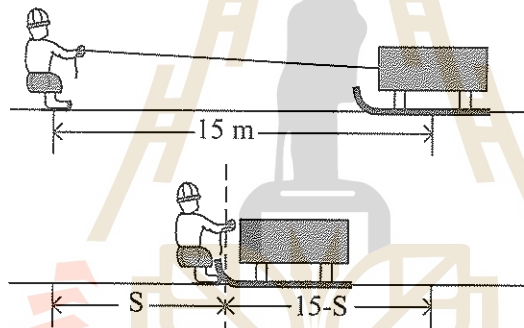
$$a = \frac{5.2 \text{ N}}{8.4 \text{ kg}} = 0.62 \text{ m/s}^2$$

(b) แรงที่กระทำต่อเด็กหญิง  $F = 5.2 \text{ N}$  และมวลของเด็กหญิง  $m = 40 \text{ kg}$

แทนค่า  $F$  และ  $m$  ใน (1) จะได้ความเร่งของเด็กหญิง

$$a = \frac{5.2 \text{ N}}{40 \text{ kg}} = 0.13 \text{ m/s}^2$$

(c) ให้เด็กหญิงกับล้อเลื่อนชนกันที่ตำแหน่งห่างจากเด็กหญิงในตอนเริ่มต้นเป็นระยะ  $s$  ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ตำแหน่งการชนกันระหว่างเด็กหญิงกับล้อเลื่อน

พิจารณาการเคลื่อนที่ของเด็กหญิง

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + \frac{1}{2} (0.13 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$S = \frac{1}{2} (0.13 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$2S = (0.13 \text{ m/s}^2) t^2 \quad (2)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของล้อเลื่อน

$$(15 \text{ m} - S) = \frac{1}{2} (0.62 \text{ m/s}^2) t^2$$

$$30 \text{ m} - 2S = (0.62 \text{ m/s}^2) t^2 \quad (3)$$

$$(2) \div (3) \quad \frac{2S}{30 \text{ m} - 2S} = \frac{(0.13 \text{ m/s}^2)}{(0.62 \text{ m/s}^2)} = 0.21$$

$$2S = 0.21 \times 30 \text{ m} - 0.21 \times 2S$$

$$2S + 0.42S = 6.3 \text{ m}$$

$$S = \frac{6.3 \text{ m}}{2.42}$$

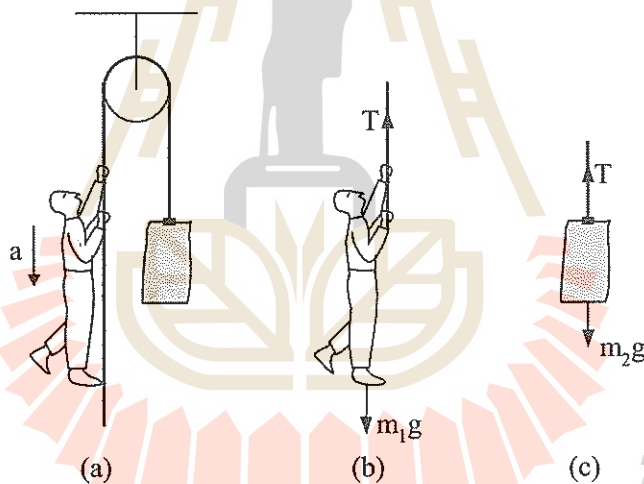
$$= 2.6 \text{ m}$$

ตัวอย่างที่ 2.6 คนมวล 110 กิโลกรัม หย่อนตัวเองลงมาถึงพื้นจากความสูง 12 เมตร โดยใช้เชือกคล้องผ่านรอกเกี้ยว ปลายข้างหนึ่งผูกติดกับตุ้มน้ำมวล 74 กิโลกรัม ถามว่า

- (a) อัตราเร็วของคนเมื่อกระทบพื้นมีค่าเท่าใด
- (b) เขาจะทำอย่างไรเพื่อจะลดอัตราเร็วกระทบพื้น

วิธีทำ

เขียนแผนภาพอิสระ (free-body diagram) ของแรงที่กระทำต่อระบบดังรูปที่ 2.5



- รูปที่ 2.5 (a) การหย่อนตัวของคนด้วยความเร่ง  $a$  โดยใช้เชือกคล้องผ่านรอกเกี้ยว แล้วผูกติดกับตุ้มน้ำ
- (b) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อคน
  - (c) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อตุ้มน้ำ

(a) จาก

$$\Sigma F = ma$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของชายจะได้

$$m_1g - T = m_1a$$

$$(110 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - T = (110 \text{ kg})a \quad (1)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของหญิงสาวจะได้

$$T - m_2g = m_2a$$

$$T - (74 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = (74 \text{ kg})a \quad (2)$$

$$(1) + (2); \quad (110 \text{ kg} - 74 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = (184 \text{ kg})a$$

$$a = \frac{36 \times 9.8}{184} = 1.92 \text{ m/s}^2$$

หาความเร็วของชายเมื่อกระทบพื้น

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

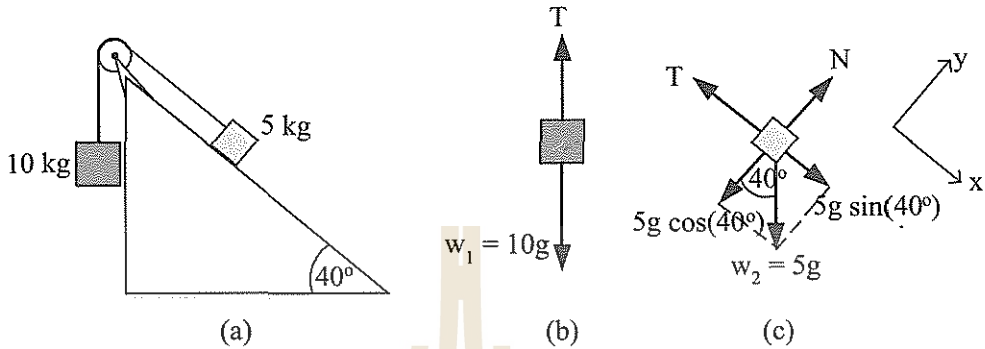
$$= 0^2 + 2(1.92 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})$$

$$= 46.08 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 6.79 \text{ m/s}$$

(b) เขาต้องไต่เชือกขึ้นให้ความเร็วสัมพัทธ์ลดลงเพื่อลดอัตราเร็วกระทบพื้น

ตัวอย่างที่ 2.7 วัตถุ 2 ก้อน ซึ่งมีมวล 10 กิโลกรัม และ 5 กิโลกรัมตามลำดับ ผูกติดกันโดยเชือกเบาซึ่งคล้องผ่านรอกค่องแล้วเคลื่อนที่ไปบนระนาบเอียงดังแสดงในรูปที่ 2.6 (a) ถ้าหาวัตถุซึ่งมีมวล 5 กิโลกรัม เคลื่อนที่บนระนาบเอียงซึ่งทำมุม  $40^\circ$  กับแนวราบ จงหาความเร่งของวัตถุทั้งสองและแรงตึงในเส้นเชือก



รูปที่ 2.6 (a) วัตถุ 2 ก้อนผูกติดกันโดยเชือกเบาคล้องผ่านรอกค่อง  
 (b) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล 10 กิโลกรัม  
 (c) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล 5 กิโลกรัม

วิธีทำ เขียนแผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุแต่ละก้อน

ดังแสดงในรูปที่ 2.6 (b) และ (c)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ 10 kg

จาก

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ T - mg &= ma \\ T - (10 \text{ kg})g &= (10 \text{ kg})a \end{aligned} \tag{1}$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ 5 kg โดยสมมติให้แกน x อยู่ในแนวเดียวกับระนาบเอียง ดังรูปที่ 2.6 (c)

จาก

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ mg \sin \theta - T &= ma \\ (5 \text{ kg})g \sin 40^\circ - T &= (5 \text{ kg})a \end{aligned} \tag{2}$$

จาก  $\Sigma F_y = ma_y$

$$N - mg \cos \theta = 0$$
$$N - (5 \text{ kg})g \cos 40^\circ = 0 \quad (3)$$

(1) + (2) จะได้

$$(5 \text{ kg})g \sin 40^\circ - 10g = (15 \text{ kg}) a$$
$$\therefore a = \frac{(5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.643) - (10 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{15 \text{ kg}}$$
$$= -4.43 \text{ m/s}^2$$

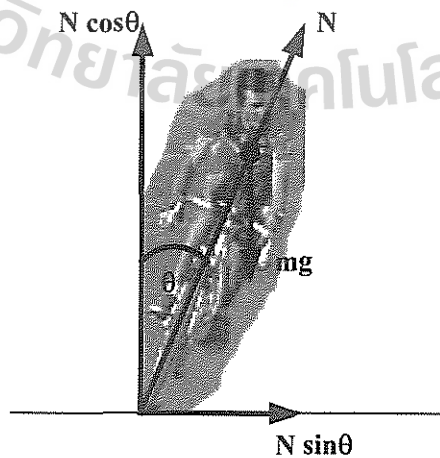
เครื่องหมายลบของ  $a$  แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ในทางตรงข้ามกับแกน  $+x$  หรือวัตถุ 10 กิโลกรัมเคลื่อนที่ลงในแนวดิ่ง

เมื่อแทนค่า  $a$  ในสมการ (1) จะได้

$$T = (10 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) + (10 \text{ kg})(-4.43 \text{ m/s}^2)$$
$$= 53.7 \text{ N}$$

**ตัวอย่างที่ 2.8** คนขี่จักรยานเป็นวงกลมรัศมี 25 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 8.7 เมตร/วินาที ดังรูปที่ 2.7 ถ้ามวลของจักรยานและคนขี่เท่ากับ 85 กิโลกรัม จงคำนวณขนาดและทิศทางของแรงปฏิกิริยาที่ถนนทำกับจักรยาน

**วิธีทำ** เขียนแผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อระบบดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 คนขี่จักรยานเป็นวงกลมรัศมี 25 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 8.7 เมตร/ชั่วโมง

ให้จักรยานเอียงทำมุม  $\theta$  กับแนวตั้ง (แนวแกน  $y$ ) และเคลื่อนที่เป็นวงกลมในแนวราบ และเมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวตั้งและแนวราบจะได้

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad N \cos \theta = mg \quad (1)$$

$$\Sigma F_r = ma_r ; \quad N \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

$$(2)+(1) ; \quad \tan \theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(8.7 \text{ m/h})^2}{(9.8 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})} = 0.31 \quad (3)$$

$$\theta = \arctan 0.31$$

$$= 17.2^\circ$$

แทนค่า  $\theta$  ใน (1)

$$N \cos (17.2^\circ) = (85 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 833 \text{ N}$$

$$N = \frac{833 \text{ N}}{\cos 17.2} = \frac{833 \text{ N}}{0.955} \\ = 871.9 \text{ N}$$

**ตัวอย่างที่ 2.9** ลูกตุ้มกวาขนาดมวล 0.25 กิโลกรัม กำลังตกลงมาตามแนวตั้งสู่ผิวโลก โดยผ่านชั้นบรรยากาศด้วยความเร็ว 9.2 เมตร/วินาที นอกจากแรงโน้มถ่วงแล้ว ยังมีแรงต้านตามแนวตั้งเนื่องจากชั้นบรรยากาศกระทำต่อลูกตุ้มกวา จงหาขนาดของแรงต้านนี้

**วิธีทำ**

ให้แกน  $y$  อยู่ในแนวตั้งและ  $R$  เป็นแรงต้านของบรรยากาศ

$$\text{จาก} \quad \Sigma F_y = ma_y$$

$$mg - R = ma$$

$$(0.25 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - R = (0.25 \text{ kg})(9.2 \text{ m/s}^2)$$

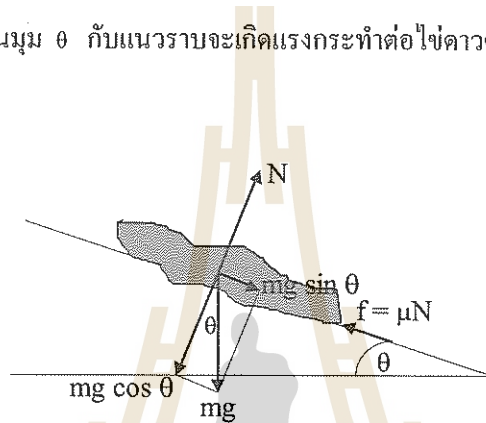
$$R = 0.25 (9.8 - 9.2) \text{ N} = 0.25 \times 0.6 \text{ N} = 0.15 \text{ N}$$

แรงและกฎของนิวตัน

ตัวอย่างที่ 2.10 สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างกระทะเทฟลอน (teflon) และไขดาวมีค่าประมาณ 0.04 เมื่อเราเอียงกระทะมุมเอียงน้อยที่สุดมีค่าเท่าไร จึงจะทำให้ไขพอดิเลื่อนออกจากกระทะ

วิธีทำ

ให้เอียงกระทะ เป็นมุม  $\theta$  กับแนวราบจะเกิดแรงกระทำต่อไขดาวดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ไขดาวอยู่ในกระทะเทฟลอน (teflon) ซึ่งเอียงเป็นมุม  $\theta$  กับแนวราบ

ถ้า  $N$  คือแรงปฏิกิริยาที่พื้นกระทะกระทำต่อไขดาวจะได้

$$\therefore N = mg \cos \theta$$

แรงที่ทำให้ไขดาวเลื่อนมีค่าเท่ากับ  $mg \sin \theta$  ซึ่งมีค่าเท่ากับแรงเสียดทาน  $f$  ระหว่างไขดาวกับกระทะ ซึ่งมีค่า

$$f = \mu N$$

$$\therefore mg \sin \theta = \mu mg \cos \theta$$

$$\tan \theta = \mu$$

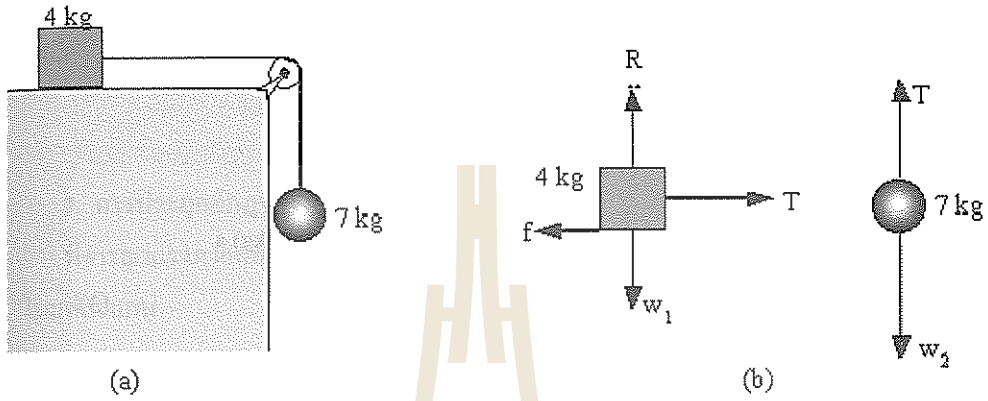
$$= 0.04$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.04$$

$$= 2.3^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2.11 วัตถุสองก้อนซึ่งมีมวล 4 กิโลกรัมและ 7 กิโลกรัมผูกติดกันโดยเชือกเบาแล้วคล้องผ่านรอกคล้องดังรูปที่ 2.9(a) ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างวัตถุมวล 4 กิโลกรัม กับพื้นที่มีค่า 0.30 จงหาความเร่งของวัตถุและแรงดึงในเชือก

วิธีทำ เขียนแผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล 4 และ 7 kg ดังรูปที่ 2.9(b) และ 2.9(c)



รูปที่ 2.9 (a) วัตถุ 2 ก้อนผูกติดกันด้วยเชือกเบาคล้องผ่านรอกคล้อง  
(b) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล 4 kg  
(c) แผนภาพอิสระของแรงที่กระทำต่อวัตถุมวล 7 kg

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ 4 kg ด้วยความเร่ง  $a$  ในแนวราบ

จาก 
$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ T - f &= (4 \text{ kg}) a \\ T - \mu_k R &= (4 \text{ kg}) a \end{aligned} \tag{1}$$

จาก 
$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= ma_y \\ R - W_1 &= 0 \\ R &= m_1 g \\ &= (4 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 39.2 \text{ N} \end{aligned}$$

แรงและกฎของนิวตัน

แทนค่า R ใน (1) จะได้

$$T - (0.3)(39.2 \text{ N}) = (4 \text{ kg})a$$

$$T = (4 \text{ kg})a + 11.8 \text{ N} \quad (2)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ 7 กิโลกรัมด้วยความเร่ง  $a$  ในแนวดิ่ง

จาก

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$W_2 - T = m_2a$$

$$(7 \text{ kg})g - T = (7 \text{ kg})a$$

$$T = (7 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) - (7 \text{ kg})a$$

$$T = 68.6 \text{ N} - (7 \text{ kg})a \quad (3)$$

จาก (2) = (3) จะได้

$$(4 \text{ kg})a + 11.8 \text{ N} = 68.6 \text{ N} - (7 \text{ kg})a$$

$$(11 \text{ kg})a = 56.8 \text{ N}$$

$$a = \frac{56.8 \text{ N}}{11 \text{ kg}} = 5.16 \text{ m/s}^2$$

แทนค่า  $a$  ใน (3) จะได้

$$T = 68.6 \text{ N} - (7 \text{ kg})(5.16 \text{ m/s}^2)$$

$$= 32.5 \text{ N}$$

---

## สรุป

### 1. น้ำหนักและมวล

น้ำหนักของก้อนมวลบนผิวโลกคือ แรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อมวล ซึ่งมีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก ถ้าวัตถุมีมวล  $m$  วัตถุจะมีน้ำหนัก  $W$  มีค่า

$$W = mg$$

เมื่อ  $g$  คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

## 2. ความเสียดทาน

แรงเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุ มี 2 ชนิดคือ

2.1 แรงเสียดทานสถิต ( $f_s$ ) เป็นแรงเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุในขณะที่อยู่นิ่ง ซึ่งมีค่า

$$f_s \leq \mu_s N$$

2.2 แรงเสียดทานจลน์ ( $f_k$ ) เป็นแรงเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสของวัตถุในขณะที่เคลื่อนที่  
ซึ่งมีค่า

$$f_k = \mu_k N$$

## 3. การประยุกต์กฎของนิวตัน

พิจารณาแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุในแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  แล้วใช้กฎของนิวตันข้อที่ 2  
ในแต่ละแกน

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

## บรรณานุกรม

---

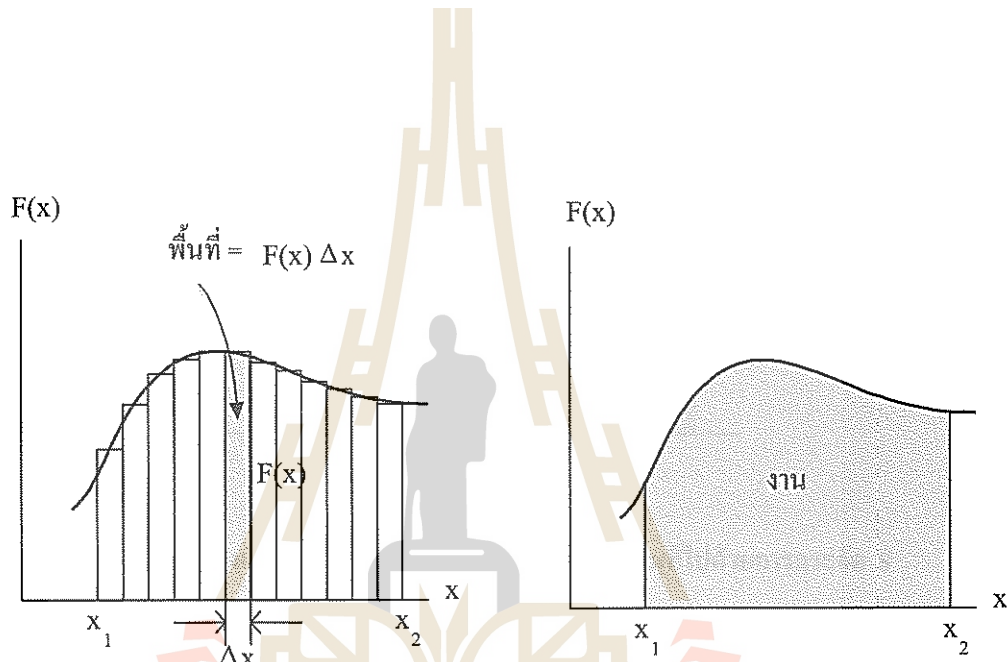
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. สำนักวิชาวิทยาศาสตร์. สาขาวิชาฟิสิกส์. 2540. ฟิสิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 3.  
นนทบุรี: เอส.อาร์.พรีนติ้ง แมสโปรดักส์.

Halliday, David., and Resnick, Robert. 1978. **Physics** (3<sup>rd</sup> ed.). New York: Wiley.

Serway, Raymond A., and Faughn, Jerry S. 1991. **College physics** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia:  
Sounder College Publishing.



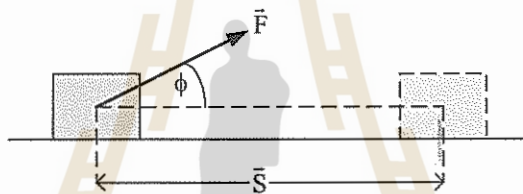
งานและพลังงาน



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พันเอก ดร.วรศิษย์ อุทัย

ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์บางอย่างอาจทำได้ง่ายกว่า ถ้าใช้หลักการของงานแทนกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน ทั้งนี้เพราะว่างานเป็นปริมาณสเกลาร์ซึ่งมีความง่ายในการคำนวณ ในตอนนี้จะกล่าวถึงเรื่องงานของแรงคงตัว งานของแรงไม่คงตัว งานและพลังงานจลน์ และกำลัง

### 1. งานของแรงคงตัว



รูปที่ 3.1 แรงคงตัว  $\vec{F}$  กระทำต่อวัตถุแล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยการกระจัด  $\vec{S}$

งาน  $W$  ที่เกิดจากแรงคงตัว  $\vec{F}$  กระทำต่อวัตถุแล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยการกระจัด  $\vec{S}$  ดังแสดงในรูปที่ 3.1 มีค่า

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \phi \quad (3.1)$$

เมื่อ  $\phi$  คือมุมระหว่างแรง  $\vec{F}$  และการกระจัด  $\vec{S}$

จากสมการ (3.1) จะเห็นว่างานเป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งอาจมีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงที่กระทำหรือมุม  $\phi$  ระหว่างแรงและการกระจัด งานที่มีค่าเป็นบวก (+) แสดงว่าระบบได้งานและงานที่มีค่าเป็นลบ (-) แสดงว่าระบบเสียงานหรือทำงาน หน่วยของงานที่นิยมใช้คือหน่วยในระบบ SI ซึ่งมีหน่วยเป็นนิวตัน-เมตร (N-m) หรือ จูล (joules, J) แต่ในสาขาวิชาฟิสิกส์

อะตอม (Atomic Physics) และฟิสิกส์นิวเคลียร์ (Nuclear Physics) นิยมใช้หน่วยของงานเป็นอิเล็กตรอนโวลต์ (electron-volt, eV)

งาน 1 eV คืองานที่ใช้ในการขับเคลื่อนอิเล็กตรอนผ่านความต่างศักย์หนึ่งโวลต์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$

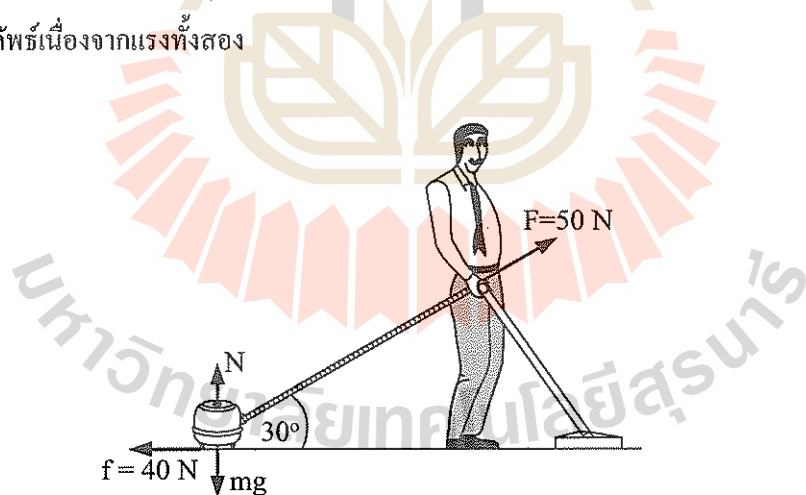
ในกรณีที่ให้มีแรงหลายแรงกระทำต่อวัตถุจะหางานลัพธ์  $\Sigma W$  ได้โดยรวมงานที่เกิดขึ้น เนื่องจากแรงแต่ละแรงหรือ

$$\Sigma W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad (3.2)$$

เมื่อ  $W_1$ ,  $W_2$  และ  $W_3$  คืองานเนื่องจากแรง  $F_1$ ,  $F_2$  และ  $F_3$  ตามลำดับ

**ตัวอย่างที่ 3.1** คนงานทำความสะอาดกำลังดูดฝุ่นโดยออกแรง 50 นิวตัน ลากเครื่องดูดฝุ่นในทิศทางทำมุม  $30^\circ$  กับระนาบของพื้นดังรูปที่ 3.2 ถ้าเขาลากเครื่องดูดฝุ่นไปเป็นระยะ 3 เมตร บนพื้นและมีแรงเสียดทานระหว่างเครื่องดูดฝุ่นกับพื้นเป็น 40 นิวตัน จงหา

- งานเนื่องจากแรง 50 นิวตัน
- งานเนื่องจากแรงเสียดทาน
- งานลัพธ์เนื่องจากแรงทั้งสอง



**รูปที่ 3.2** คนงานทำความสะอาดออกแรงลากเครื่องดูดฝุ่นด้วยแรง 50 นิวตัน ในทิศทำมุม  $30^\circ$  กับระนาบของพื้น

วิธีทำ

จาก

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \phi$$

(a)  $F = 50 \text{ N}$ ,  $S = 3 \text{ m}$ ,  $\phi = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \text{งานเนื่องจากแรง } 50 \text{ N} \text{ คือ } W_F &= (50 \text{ N})(3 \text{ m})(\cos 30^\circ) \\ &= 50 \times 3 \times 0.866 \text{ J} \\ &= 130 \text{ J} \end{aligned}$$

(b)  $f = 40 \text{ N}$ ,  $S = 3 \text{ m}$  และ  $\phi = 180^\circ$

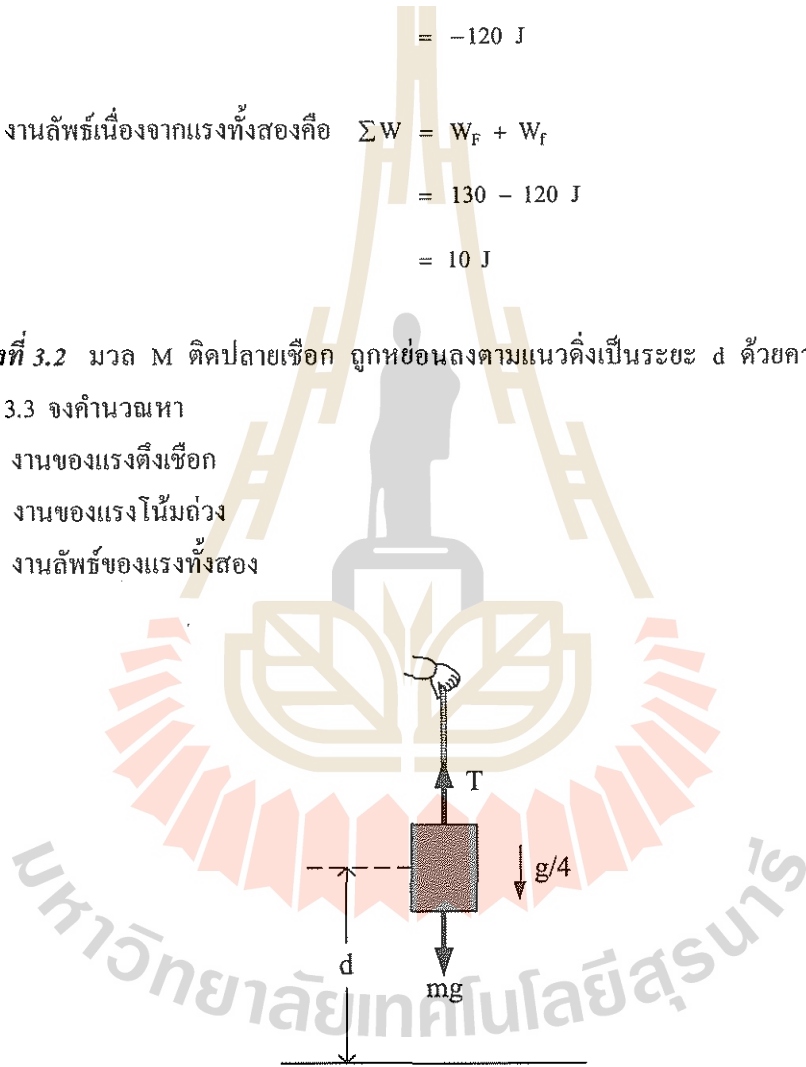
$$\begin{aligned} \therefore \text{งานเนื่องจากแรงเสียดทานคือ } W_f &= (40 \text{ N})(3 \text{ m})(\cos 180^\circ) \\ &= 40 \times 3 \times (-1) \text{ J} \\ &= -120 \text{ J} \end{aligned}$$

(c) งานลัพธ์เนื่องจากแรงทั้งสองคือ  $\Sigma W = W_F + W_f$

$$\begin{aligned} &= 130 - 120 \text{ J} \\ &= 10 \text{ J} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 มวล  $M$  ดึงปลายเชือก ถูกหย่อนลงตามแนวตั้งเป็นระยะ  $d$  ด้วยความเร่ง  $g/4$   
จากรูปที่ 3.3 จงคำนวณหา

- (a) งานของแรงดึงเชือก
- (b) งานของแรงโน้มถ่วง
- (c) งานลัพธ์ของแรงทั้งสอง



รูปที่ 3.3 วัตถุมวล  $M$  ถูกหย่อนลงในแนวตั้งเป็นระยะ  $d$  ด้วยความเร่ง  $g/4$

วิธีทำ จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\Sigma F = ma$$

จะได้

$$Mg - T = M(g/4)$$

$$T = Mg - Mg/4 = \frac{3}{4}Mg$$

(a) งานของแรงดึงเชือก

$$\begin{aligned} W_T &= \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \phi \\ &= Td \cos 180^\circ \\ &= \left(\frac{3}{4}Mg\right)(d)(-1) \\ &= -\frac{3}{4}Mgd \end{aligned}$$

(b) งานของแรงโน้มถ่วง

$$\begin{aligned} W_g &= (Mg)(d)(\cos 0^\circ) \\ &= (Mg)(d)(1) \\ &= Mgd \end{aligned}$$

(c) งานลัพธ์ของแรงทั้งสอง

$$\begin{aligned} W &= W_T + W_g \\ &= -\frac{3}{4}Mgd + Mgd = \frac{1}{4}Mgd \end{aligned}$$

## 2. งานของแรงไม่คงตัว

แรงไม่คงตัวอาจเป็นได้หลายกรณี เช่น กรณีที่ขนาดของแรงไม่คงตัวแต่ทิศทางการเคลื่อนที่และกรณีที่ทั้งขนาดของแรงและทิศทางการเคลื่อนที่ ไม่คงตัว เป็นต้น การหางานเนื่องจากแรงดังกล่าวจะแตกต่างกัน ดังจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

### 2.1 งานของแรงที่มีขนาดไม่คงตัวแต่ทิศทางการเคลื่อนที่

ให้วัตถุถูกกระทำโดยแรง  $F(x)$  ซึ่งมีขนาดไม่คงตัวแต่มีทิศทางการเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$  ดังรูปที่ 3.4 (a) เนื่องจากแรง  $F(x)$  มีขนาดไม่คงตัวจึงไม่สามารถใช้สมการ (3.1) คำนวณค่าของงานได้ แต่ถ้าเราพิจารณาในช่วงสั้นๆ  $\Delta x$  อาจถือได้ว่าแรง  $F(x)$  มีขนาดคงตัว ซึ่งสามารถคำนวณค่าของงาน  $\Delta W$  โดยสมการ (3.1) ได้เป็น

$$\Delta W = F(x) \Delta x \tag{3.3}$$

งานในสมการ (3.3) ก็คือ พื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่าง  $F(x)$  และ  $x$  นั้นเอง ถ้าหากเราแบ่งกราฟของแรงดังกล่าวออกเป็นช่วงสั้นๆ  $\Delta x$  หลายๆ ช่วง งานลัพธ์ของแรง  $F(x)$  ที่กระทำจากตำแหน่ง  $x_1$  ไปยัง  $x_2$  จะมีค่าเท่ากับผลรวมของงานในแต่ละช่วงหรือ

$$W = \Sigma F(x) \Delta x \tag{3.4}$$

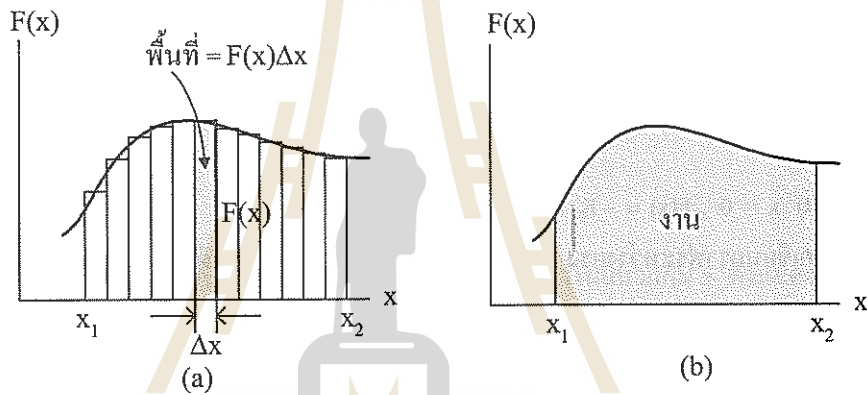
ในขอบเขต (limit) ของ  $\Delta x \rightarrow 0$  สมการ (3.4) จะกลายเป็น

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Sigma F(x) \Delta x$$

หรือ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \tag{3.5}$$

งานในสมการ (3.5) ก็คือพื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่าง  $F(x)$  และ  $x$  ดังแสดงในรูปที่ 3.4 (b)



รูปที่ 3.4 (a) วัตถุถูกกระทำด้วยแรงไม่คงตัว  $F(x)$  ในแนวแกน  $x$  จากตำแหน่ง  $x_1$  ไปยัง  $x_2$   
(b) งานของแรงไม่คงตัว  $F(x)$  ที่กระทำต่อวัตถุจากตำแหน่ง  $x_1$  ไปยัง  $x_2$  ก็คือพื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่าง  $F(x)$  และ  $x$

### 2.2 งานของแรงที่มีขนาดและทิศทางไม่คงตัว

ในกรณีที่แรงมีขนาดและทิศทางไม่คงตัวจะหางานในการเคลื่อนวัตถุจากตำแหน่งที่ 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 ได้ดังนี้

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{3.6}$$

เมื่อ  $\vec{F}$  คือแรงที่กระทำกับวัตถุ และ  $d\vec{s}$  คือการกระจัด

การอินทิเกรตในสมการ (3.6) เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น (line integral) ซึ่งต้องรู้ฟังก์ชันของแรง  $\vec{F}$  และการกระจัด  $d\vec{r}$  ก่อนที่จะสามารถอินทิเกรตเพื่อหาค่าของงานได้ ตัวอย่างเช่น ถ้า  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$  และ  $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$  งานในสมการ (3.6) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} W &= \int_1^2 (F_x\hat{i} + F_y\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \\ &= \int_1^2 (F_x dx + F_y dy) \end{aligned} \quad (3.7)$$

ในการอินทิเกรตสมการที่ (3.7) ต้องทราบฟังก์ชันของ  $F_x$  และ  $F_y$  ในรูปของพิกัด  $x$  และ  $y$

**ตัวอย่างที่ 3.3** แรงกระทำต่อวัตถุเป็นไปตามสมการ  $F = F_0(x/x_0 - 1)$  จงคำนวณงานในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 0$  ไปยัง  $x = 3x_0$

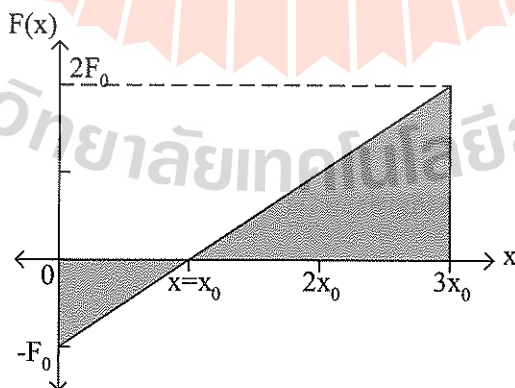
- โดยวิธีการเขียนกราฟ  $F(x)$  แล้วหาพื้นที่ใต้เส้นกราฟ
- โดยวิธีอินทิเกรต

**วิธีทำ**

(a) จาก 
$$F(x) = \left(\frac{F_0}{x_0}\right)x - F_0$$

เมื่อ  $x = 0$ ,  $F(x) = -F_0$  และเมื่อ  $x = 3x_0$ ,  $F(x) = 2F_0$

เมื่อเขียนกราฟระหว่างแรง  $F(x)$  กับการกระจัด  $x$  จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 กราฟของแรง  $F(x)$  ในฟังก์ชันของ  $x$

งาน  $W$  ในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 0$  ไปยัง  $x = 3x_0$  ก็คือพื้นที่ใต้กราฟ ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

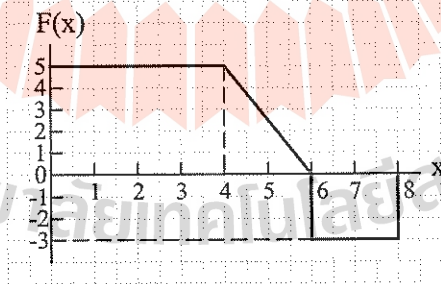
$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}F_0x_0 + \frac{1}{2}(2F_0)(2x_0) \\ &= -\frac{1}{2}F_0x_0 + 2F_0x_0 \\ &= \frac{3}{2}F_0x_0 \end{aligned}$$

จากสมการ (3.5) งานในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x_1$  ไปยัง  $x_2$  มีค่า

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \\ &= \int_0^{3x_0} \left( \frac{F_0}{x_0}x - F_0 \right) dx \\ &= \left[ \frac{F_0}{x_0} \frac{x^2}{2} - F_0x \right]_0^{3x_0} \\ &= \frac{F_0}{2x_0}(9x_0^2) - F_0(3x_0) \\ &= \frac{3}{2}F_0x_0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.4 วัตถุก้อนหนึ่งถูกแรง  $F(x)$  ในหน่วย N กระทำในแนวแกน  $x$  ดังแสดงในรูปที่ 3.6 จงหา

- a) งานในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 0$  ถึง  $x = 6$  m
- b) งานในการเคลื่อนวัตถุในช่วง 2m ถัดไป
- c) งานลัพธ์ในการเคลื่อนวัตถุตั้งแต่  $x = 0$  ถึง  $x = 8$  m



รูปที่ 3.6 แรง  $F(x)$  กระทำต่อวัตถุในแนวแกน  $x$  ตั้งแต่  $x=0$  ถึง  $x=8$  m

### วิธีทำ

เนื่องจากงานของแรงที่กระทำต่อวัตถุก็คือพื้นที่ใต้กราฟ

a) งานในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 0$  ถึง  $x = 6$  m คือ

$$\begin{aligned}W_1 &= (5 \text{ N})(4 \text{ m}) + \frac{1}{2} (5 \text{ N})(2 \text{ m}) \\ &= 25 \text{ J}\end{aligned}$$

b) งานในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 6$  ถึง  $x = 8$  m คือ

$$\begin{aligned}W_2 &= (-3 \text{ N})(2 \text{ m}) \\ &= -6 \text{ J}\end{aligned}$$

c) งานลัพธ์ในการเคลื่อนวัตถุจาก  $x = 0$  ถึง  $x = 8$  m

$$\begin{aligned}W &= W_1 + W_2 \\ &= 25 \text{ J} + (-6 \text{ J}) \\ &= 19 \text{ J}\end{aligned}$$

### 3. งานและพลังงานจลน์

งานและพลังงานมีความสัมพันธ์ต่อกันและสามารถใช้ทดแทนกันได้ เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุได้เช่นเดียวกับกฎข้อที่สองของนิวตันแต่จะง่ายกว่ามากในทางปฏิบัติ ทั้งนี้เพราะเหตุว่างานและพลังงานเป็นปริมาณสเกลาร์

สมมติให้วัตถุมวล  $m$  ถูกกระทำด้วยแรงลัพธ์  $\Sigma F$  ที่มีค่าคงตัว วัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งคงตัว  $a$  ซึ่งตามกฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\Sigma F = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

หรือ

$$\Sigma F = mv \frac{dv}{dx} \quad (3.8)$$

งานของแรงในสมการ (3.8) จะมีค่า

$$\Sigma W = \int \Sigma F dx = \int mv \frac{dv}{dx} dx = \int mv dv \quad (3.9)$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น  $v_1$  และความเร็วปลาย  $v_2$  จะได้

$$\begin{aligned} \Sigma W &= \int_{v_1}^{v_2} mv dv \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

เมื่อเทอม  $\frac{1}{2}mv^2$  คือพลังงานจลน์  $E_k$  ของวัตถุ ดังนั้นสมการ (3.10) จึงแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงานจลน์ของวัตถุ โดยงานที่กระทำต่อวัตถุจะทำให้พลังงานจลน์ของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปหรือ

$$\Sigma W = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} \quad (3.11)$$

เราเรียกสมการ (3.11) ว่า ทฤษฎีบทงาน-พลังงาน

**ตัวอย่างที่ 3.5** ถ้าอิเล็กตรอนนำไฟฟ้า (conduction electron) ในโลหะทองแดง มีพลังงานจลน์ 4.2 eV ที่อุณหภูมิเกือบศูนย์องศาสัมบูรณ์ (absolute temperature) อัตราเร็วของอิเล็กตรอนมีค่าเท่าใด

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ (4.2 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) &= \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})v^2 \\ \therefore v^2 &= \frac{4.2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2}{9.11 \times 10^{-31}} \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ &= 1.54 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ v &= 1.24 \times 10^6 \text{ m/s} = 1240 \text{ km/s} \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 3.6** ถ้าโลกหมุนรอบดวงอาทิตย์หนึ่งรอบใช้เวลา 1 ปี ต้องใช้งานเท่าใดในการจะหยุดโลกให้นิ่งเทียบกับดวงอาทิตย์ กำหนดให้มวลของโลกเท่ากับ  $5.98 \times 10^{24}$  kg รัศมีของวงโคจรเท่ากับ  $150 \times 10^6$  km และ 1 ปีมี 365 วัน

**วิธีทำ**

ความเร็ว  $v$  ของโลกที่หมุนรอบดวงอาทิตย์ก็คืออัตราส่วนของระยะของวงโคจรต่อคาบหรือเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบหรือ

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

แทนค่า  $r = 150 \times 10^6$  km และ  $T = 365$  days จะได้

$$v = \frac{2\pi \times (150 \times 10^6 \text{ km})}{(365 \text{ d})(24 \text{ h/d})(3600 \text{ s/h})}$$
$$= 29.9 \text{ km/s}$$

งานในการหยุดโลกให้หนึ่งเทียบกับดวงอาทิตย์ก็คือพลังงานจลน์ในการเคลื่อนที่ของ โลกหรือ

$$W = \frac{1}{2}M_E v^2 = \frac{1}{2}(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(29.9 \times 10^3 \text{ m/s})^2$$
$$= 2.67 \times 10^{33} \text{ J}$$

#### 4. กำลัง

กำลัง (power) เป็นปริมาณที่ใช้วัดขีดความสามารถหรือประสิทธิภาพของการทำงานของระบบ ระบบใดที่สามารถทำงานอันหนึ่งได้เร็วกว่าอีกระบบหนึ่งถือว่าระบบนั้นมีกำลังสูงกว่า ดังนั้น กำลังก็คืออัตราการทำงานหรือปริมาณงานที่ทำได้ในหนึ่งหน่วยเวลาหรือ

$$P_{\text{ave}} = \frac{W}{\Delta t} \quad (3.12)$$

เมื่อ  $P_{\text{ave}}$  คือ กำลังเฉลี่ย  $W$  คืองานที่ทำได้และ  $\Delta t$  คือช่วงเวลาของการทำงาน หน่วยของกำลังในระบบ SI คือ จูลต่อวินาที (J/s) หรือวัตต์ (watt, W) แต่ในบางครั้งก็นิยมใช้หน่วยของกำลังเป็นกำลังม้า (horsepower, hp) โดย  $1 \text{ hp} = 746$  วัตต์

ในกรณีที่ช่วงเวลาที่พิจารณาเป็นช่วงสั้นๆ ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) สมการ (3.12) จะกลายเป็นสมการของกำลังบิดคัล (instantaneous power,  $P$ ) ซึ่งมีค่าเป็น

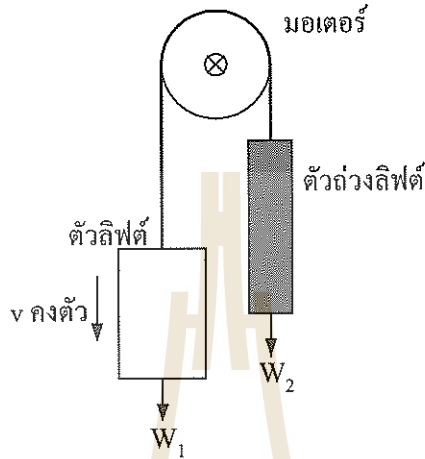
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.13)$$

เมื่อ  $\vec{F}$  และ  $\vec{v}$  คือ ของแรงและความเร็วตามลำดับ และถ้าแรง  $\vec{F}$  มีทิศทางเดียวกับความเร็ว  $\vec{v}$  จะได้

$$P = Fv \quad (3.14)$$

ตัวอย่างที่ 3.7 ลิฟต์อันหนึ่งสามารถเคลื่อนที่ลงด้วยอัตราเร็วคงตัวได้ระยะ 54.5 เมตร ในเวลา 43.0 วินาที ถ้าลิฟต์มีมวลรวม 1,220 กิโลกรัม และตัวถ่วงลิฟต์ (counter balance) มีมวล 1,380 กิโลกรัม ถ้ามอเตอร์ไฟฟ้าที่ใช้ขับเคลื่อนลิฟต์ต้องใช้กำลังเท่าใด

วิธีทำ การเคลื่อนที่ของลิฟต์เกิดจากการขับเคลื่อนของมอเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 ส่วนประกอบของลิฟต์คือตัวลิฟต์ มอเตอร์ และตัวถ่วงลิฟต์

มอเตอร์จะต้องทำงานเท่ากับผลต่างของงานเนื่องจากน้ำหนักของตัวลิฟต์  $W_1$  และงานเนื่องจากน้ำหนักของตัวถ่วงลิฟต์  $W_2$  ตามสมการ

$$W = mgs$$

เมื่อ  $s$  คือระยะที่ตัวลิฟต์และตัวถ่วงลิฟต์เคลื่อนที่

ดังนั้น

$$W_1 = (1220 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(54.5 \text{ m})$$

$$= 6.5 \times 10^5 \text{ J}$$

$$W_2 = (1380 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(54.5 \text{ m})$$

$$= 7.4 \times 10^5 \text{ J}$$

∴ งานของมอเตอร์

$$W = W_2 - W_1$$

$$= 7.4 \times 10^5 - 6.5 \times 10^5 \text{ J}$$

$$= 0.9 \times 10^5 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \text{กำลังเฉลี่ยของมอเตอร์จะมีค่า} \quad P_{\text{ave}} &= \frac{W}{t} = \frac{0.9 \times 10^5 \text{ J}}{43.0 \text{ s}} \\ &= 2093 \text{ W} \\ &= \frac{2093 \text{ W}}{(746 \text{ W/hp})} \\ &= 2.8 \text{ hp} \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 3.8** จงหากำลังของหัวรถจักรคันหนึ่งซึ่งสามารถลากขบวนรถไฟที่มีมวล 500,000 กิโลกรัม ให้เคลื่อนที่ไปบนรางด้วยอัตราเร็วคงตัว 40 เมตรต่อวินาที เมื่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างรางและล้อรถไฟเป็น 0.02

**วิธีทำ**

แรงเสียดทานระหว่างล้อรถไฟและรางมีค่า

$$f = \mu mg$$

$$\begin{aligned} \therefore f &= (0.02)(500,000 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 98,000 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{กำลังของหัวรถจักรคือ} \quad P &= fv = (98,000 \text{ N})(40 \text{ m/s}) \\ &= 3.92 \times 10^6 \text{ W} \\ &= 3.92 \text{ kW} \end{aligned}$$

## สรุป

### 1. งานของแรงคงตัว

ถ้าแรงคงตัว  $\vec{F}$  กระทำต่อวัตถุแล้วทำให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยการกระจัด  $\vec{S}$  จะได้งาน  $W$  มีค่า

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS \cos \phi$$

## 2. งานของแรงไม่คงตัว

### 2.1 แรงที่มีขนาดไม่คงตัวแต่ทิศทางการคงตัว

งานของแรงที่มีขนาดไม่คงตัวแต่ทิศทางการคงตัว มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่างแรงและการกระจัดหรือการอินทิเกรตตามสมการ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

### 2.2 แรงที่มีทั้งขนาดและทิศทางการไม่คงตัว

งานของแรงที่มีทั้งขนาดและทิศทางการไม่คงตัวคือ

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

กรณีที่แรง  $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$  และ  $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$  งานของแรง  $\vec{F}$  มีค่า

$$W = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy)$$

## 3. งานและพลังงานจลน์

พลังงานจลน์ของวัตถุมวล  $m$  ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v$  มีค่า

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

งานที่กระทำต่อวัตถุจะมีค่าเท่ากับพลังงานจลน์ของวัตถุที่เปลี่ยนไปหรือ

$$\Sigma W = \Delta E_k$$

เราเรียกความสัมพันธ์นี้ว่าทฤษฎีบทงาน - พลังงานจลน์

## 4. กำลัง

กำลังเฉลี่ยคืออัตราส่วนของงานที่ทำได้ทั้งหมดต่อช่วงเวลาที่ทำงานนั้นหรือ

$$P_{ave} = \frac{W}{\Delta t}$$

กำลังบิดดลคือกำลังในขณะใดขณะหนึ่งซึ่งมีค่า

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

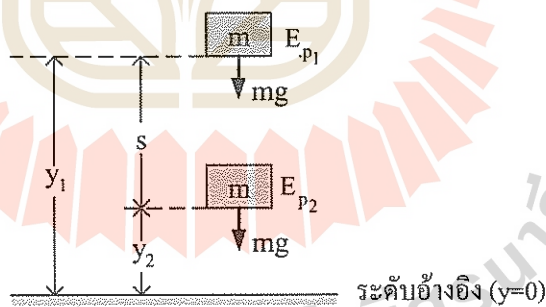
# ตอนที่ 3.2

## พลังงาน

เนื่องจากงานและพลังงานมีความสัมพันธ์กันและสามารถทดแทนกันได้ ดังนั้น งานที่ทำโดยระบบจึงสามารถเก็บกักไว้ในรูปของพลังงานได้ และในภายหลังพลังงานที่เก็บกักไว้นั้นจะสามารถทำงานได้ ในตอนนี้จะกล่าวถึงเรื่องของพลังงานศักย์ แรงแนูรักษ์ และการอนุรักษ์พลังงาน

### 1. พลังงานศักย์

ในตอนที 3.1 เราพบว่างานทำให้พลังงานจลน์ของวัตถุเปลี่ยนไปหรือในทางกลับกัน เราอาจกล่าวได้ว่าพลังงานจลน์สามารถทำงานได้ ทำนองเดียวกันพลังงานศักย์ (potential energy) ก็สามารถทำงานได้เช่นกัน การตอกเสาเข็มโดยใช้ปั้นจั่น เป็นตัวอย่างหนึ่งของการทำงานโดยอาศัยพลังงานศักย์ เพราะว่าค้ำน้ำหนักของปั้นจั่นซึ่งมีมวลค่าหนึ่งอยู่สูงจากหัวเสาเข็มเป็นระยะอันหนึ่ง ในตอนแรกจะมีพลังงานศักย์สะสมอยู่ แต่พอปล่อยค้ำน้ำหนักให้กระแทกหัวเสาเข็ม พลังงานศักย์ที่สะสมอยู่ จะทำงานทำให้เสาเข็มเคลื่อนที่จมลงไปในดิน แสดงว่าพลังงานศักย์ทำงานได้ พลังงานศักย์ดังกล่าวถือเป็นพลังงานศักย์โน้มถ่วง ซึ่งสามารถหาค่าได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุมวล  $m$  ที่อยู่สูงจากระดับอ้างอิงเป็นระยะ  $y_1$  และ  $y_2$

ถ้าวัตถุมวล  $m$  อยู่สูงจากระดับอ้างอิง เป็นระยะ  $y_1$  จะได้พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุ ณ ตำแหน่งนี้มีค่า

$$E_{p_1} = mgy_1 \quad (3.15)$$

เมื่อ  $g$  คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ทำนองเดียวกันถ้าลดตำแหน่งของวัตถุลงให้อยู่สูงจากระดับอ้างอิงเป็นระยะ  $y_2$  จะมีพลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็น

$$E_{p_2} = mgy_2 \quad (3.16)$$

ถ้าให้  $s$  เป็นการกระจัดในการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุ งานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วง ( $mg$ ) จะมีค่า

$$W = mgs = mgy_1 - mgy_2 \quad (3.17)$$

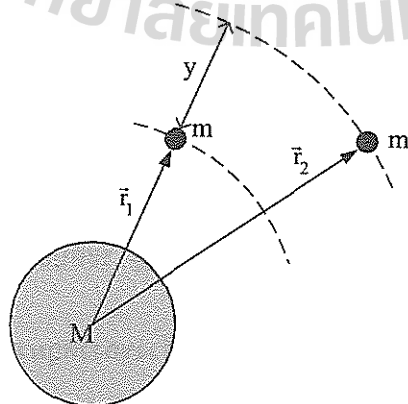
เมื่อ  $s$  คือขนาดของการกระจัด  $s$  และเมื่อแทนค่าสมการ (3.15) และ (3.16) ในสมการ (3.17) จะได้

$$W = E_{p_1} - E_{p_2} = \Delta E_p \quad (3.18)$$

สมการ (3.18) แสดงว่างานที่กระทำต่อวัตถุโดยแรงโน้มถ่วงมีค่าเท่ากับผลต่างของพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุ

**ตัวอย่างที่ 3.9** จงหาพลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุมวล  $m$  ซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลกเป็นระยะ  $r$  กำหนดให้โลกมีมวลเป็น  $M$

วิธีทำ พลังงานศักย์โน้มถ่วงในกรณีนี้คืองานในการเคลื่อนวัตถุมวล  $m$  จากระยะ  $r_2$  มาถึง  $r_1$  ตามรูปที่ 3.9 แต่ถ้าวัตถุอยู่ห่างไกลจากผิวโลก ค่า  $g$  จะไม่คงตัวทำให้งานดังกล่าวไม่เท่ากับพลังงานศักย์โน้มถ่วง หรือ  $E_p \neq mgy$  แต่จะมีค่าตามสมการ (3.6)



รูปที่ 3.9 การเคลื่อนวัตถุมวล  $m$  จากระยะ  $r_2$  มาถึง  $r_1$  ซึ่งอยู่บริเวณห่างไกลจากผิวโลก

ดังนั้นงานในการเคลื่อนวัตถุมวล  $m$  จากระยะ  $r_2$  มาถึง  $r_1$  จะมีค่า

$$W = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

แรง  $\vec{F}$  ในสมการ (1) จะมีทิศทางขนานกับแนวการเคลื่อนที่ซึ่งอยู่ในแนวรัศมี  $r$  ดังนั้นสมการ (1) จะกลายเป็น

$$W = - \int_1^2 F dr \quad (2)$$

ในที่นี้  $F$  เป็นแรงดึงดูดระหว่างมวลของวัตถุและโลก ซึ่งมีค่า

$$F = \frac{GmM}{r^2} \quad (3)$$

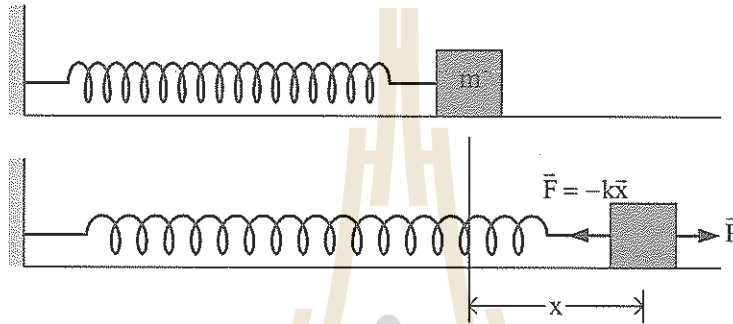
เมื่อ  $G$  คือค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภพ แทนค่า (3) ใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} W &= - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM}{r^2} dr \\ &= - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM}{r^2} dr \\ &= -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1} \end{aligned} \quad (4)$$

แต่ละเทอมทางขวามือของสมการ (4) ก็คือค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วง  $E_p$  ในแต่ละตำแหน่งนั่นเอง และถ้า  $r_2$  มีค่ามากๆ หรือ  $r_2 \rightarrow \infty$  ค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่ตำแหน่งนั้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นที่ตำแหน่ง  $r$  ใดๆ จากจุดศูนย์กลางของโลก พลังงานศักย์โน้มถ่วงของวัตถุมวล  $m$  จะมีค่า

$$E_p = \frac{GmM}{r_2} \Big|_{r_2 \rightarrow \infty} - \frac{GmM}{r_1} \Big|_{r_1 = r}$$
$$E_p = - \frac{GmM}{r}$$

ตัวอย่างที่ 3.10 จงหาค่าพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงเมื่อยืดสปริงออกจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ  $x$  ดังรูปที่ 3.10 กำหนดให้  $k$  คือค่าคงตัวของสปริง (spring constant)



รูปที่ 3.10 สปริงถูกยืดออกด้วยแรง  $\vec{P}$  จากตำแหน่งสมดุล เป็นระยะ  $x$  จะมีแรงดึงกลับ  $\vec{F} = -k\vec{x}$

วิธีทำ เมื่อยืดสปริงออกเป็นระยะ  $x$  จากตำแหน่งสมดุล จะเกิดแรงดึงกลับตามกฎของฮุค (Hooke's law) มีค่า

$$F = -kx \quad (1)$$

โดยเครื่องหมายลบแสดงทิศทางของแรงที่ตรงข้ามกับการกระจัด  $\vec{x}$

พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงก็คืองานของแรงดึงกลับ ซึ่งถ้ายืดสปริงจากตำแหน่ง  $x_1 \rightarrow x_2$  จะได้พลังงานศักย์ยืดหยุ่นมีค่า

$$\begin{aligned} E_p = W &= \int_{x_2}^{x_1} F(x)dx \\ &= \int_{x_2}^{x_1} (-kx)dx \\ &= k \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \\ &= \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \end{aligned} \quad (2)$$

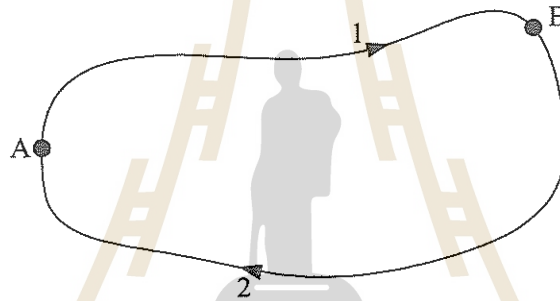
ถ้าให้ตำแหน่งสมดุลคือ  $x_1$  และมีการกระจัดเป็นศูนย์และ  $x_2$  เป็นตำแหน่งที่ยืดออก ซึ่งมีค่าการกระจัดเท่ากับ  $x$  จะได้พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงมีค่า

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

## 2. แรงอนุรักษ์

แรงอนุรักษ์ (conservative force) เป็นแรงที่ให้งานที่ไม่ขึ้นกับวิถี แต่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและสุดท้ายเท่านั้น งานของแรงอนุรักษ์จะมีคุณลักษณะพิเศษคือสามารถเก็บกักเอาไว้ในรูปของพลังงานและนำออกมาใช้ในภายหลังได้จึงมีสมบัติของการผันกลับได้ (reversible) ตัวอย่างของแรงอนุรักษ์คือแรงโน้มถ่วง แรงระหว่างประจุไฟฟ้า และแรงของสปริง เป็นต้น

เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ของแรงอนุรักษ์อาจหาได้จากการพิจารณางานในการเคลื่อนที่วัตถุครบวงปิดในรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 วัตถุเคลื่อนที่ครบวงปิดจาก  $A \rightarrow B$  และย้อนกลับ  $B \rightarrow A$  ภายใต้อิทธิพลของแรงอนุรักษ์

ในรูปที่ 3.11 วัตถุเคลื่อนที่จาก  $A \rightarrow B$  ตามเส้นทาง 1 และเคลื่อนที่กลับจาก  $B \rightarrow A$  ตามเส้นทาง 2 ซึ่งสามารถเขียนสมการของงานในการเคลื่อนที่วัตถุดังกล่าวได้ดังนี้

$$W = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.19)$$

งานของแรงอนุรักษ์ในสมการ (3.19) เป็นศูนย์เพราะว่า  $W_{A \rightarrow B}$  และ  $W_{B \rightarrow A}$  มีค่าเท่ากัน แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม เราอาจเขียนงาน  $W$  ในสมการ (3.19) อยู่ในรูปของอินทิกรัลเชิงเส้นรอบวงปิด  $c$  ได้ดังนี้

$$W = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.20)$$

จากทฤษฎีของสต็อกส์ ถ้า  $\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  จะได้เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ของแรงอนุรักษ์ดังนี้

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (3.21)$$

เมื่อ  $\vec{\nabla} \times$  คือตัวดำเนินการ (Operator) ทางคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเรียกว่า เคอร์ล (Curl) ซึ่งมีค่าดังแสดงในตัวอย่างที่ 3.11

ในกรณีของแรงไม่อนุรักษ์ เงื่อนไขตามสมการ (3.20) และ (3.21) จะไม่เป็นจริง หรือ

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0 \quad \text{หรือ} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0 \quad (3.22)$$

ตัวอย่างของแรงไม่อนุรักษ์คือแรงเสียดทานทั้งหลาย เช่น แรงเสียดทานเนื่องจากการเคลื่อนวัตถุไปบนพื้นผิวที่ไม่เรียบและแรงต้านของอากาศ เป็นต้น งานของแรงเสียดทานดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับวิถีของการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยจะมีค่าน้อยแตกต่างกันตามความยาวของวิถีและจะมีค่าน้อยที่สุดสำหรับวิถีที่เป็นเส้นตรง

**ตัวอย่างที่ 3.11** จงแสดงว่า  $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$  เป็นแรงอนุรักษ์เมื่อ  $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$

วิธีทำ

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} = -m\omega^2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & -m\omega^2 z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (-m\omega^2 z) - \frac{\partial}{\partial z} (-m\omega^2 y) \right] + \hat{j} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (-m\omega^2 x) - \frac{\partial}{\partial x} (-m\omega^2 z) \right] \\ &\quad + \hat{k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-m\omega^2 y) - \frac{\partial}{\partial y} (-m\omega^2 x) \right] = 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$  ดังนั้นแรง  $\vec{F}$  เป็นแรงอนุรักษ์

### 3. การอนุรักษ์พลังงาน

ในหัวข้อ 3 ของตอนที่ 3.1 เราได้พบว่างานที่กระทำต่อวัตถุจะทำให้พลังงานจลน์ของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปหรือ

$$\Sigma W = \Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1} \quad (3.23)$$

ทำนองเดียวกันในหัวข้อ 1 ของตอนที่ 3.2 ถ้าสมมติว่าแรงที่เกี่ยวข้องในการทำงานเป็นแรงอนุรักษ์ (เช่นแรงโน้มถ่วง) จะได้ว่างานมีค่าเท่ากับผลต่างของพลังงานศักย์หรือ

$$W = \Delta E_p = E_{p_1} - E_{p_2} \quad (3.24)$$

เนื่องจากงานในสมการ (3.23) และสมการ (3.24) คืองานอันเดียวกัน เราจึงเขียนได้ว่า

$$E_{k_2} - E_{k_1} = E_{p_1} - E_{p_2}$$

หรือ

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2} \quad (3.25)$$

$$E_1 = E_2$$

สมการ (3.25) แสดงว่าพลังงานกล (mechanical energy)  $E$  ของระบบซึ่งเป็นผลรวมของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์มีค่าคงตัวหรือเรียกว่าการอนุรักษ์พลังงานกล (conservation of mechanical energy) เนื่องจาก  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  และ  $E_p = mgy$  ดังนั้น เราอาจเขียนสมการ (3.25) ได้เป็น

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad (3.26)$$

การอนุรักษ์พลังงานดังกล่าวมีความหมายว่าระบบอาจมีพลังงานจลน์  $E_k$  และพลังงานศักย์  $E_p$  ในตอนเริ่มต้นเป็นค่าหนึ่ง และพลังงานทั้งสองอาจเปลี่ยนค่าได้ในภายหลัง แต่ผลรวมของพลังงานทั้งสองต้องมีค่าเท่าเดิมหรือคงตัว เช่น พลังจลน์  $E_k$  อาจลดลง แต่พลังงานศักย์  $E_p$  ต้องเพิ่มขึ้นในจำนวนเท่ากัน เป็นต้น

การอนุรักษ์พลังงานตามสมการ (3.25) และ (3.26) นั้นมีเงื่อนไขว่า แรงที่ทำงานต้องเป็นแรงอนุรักษ์เท่านั้น ในความเป็นจริง แรงบางชนิดที่เป็นแรงไม่อนุรักษ์ เช่น แรงเสียดทาน สมการ (3.25) และ (3.26) จะไม่เป็นจริง ในกรณีนี้ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างงานของแรงไม่อนุรักษ์กับพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ได้ดังนี้

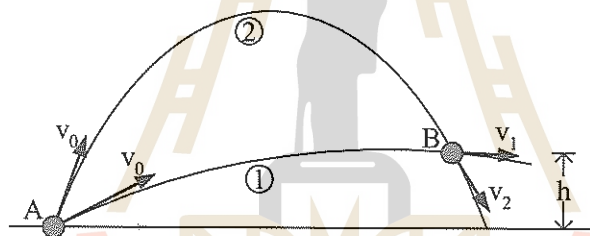
$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k + \Delta E_p \\ &= \left( \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right) + (mgy_2 - mgy_1) \\ &= E_2 - E_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

สมการ (3.26) แสดงให้เห็นว่างานของแรงไม่อนุรักษ์มีค่าเท่ากับผลรวมของการเปลี่ยนแปลงพลังงานและการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์

**ตัวอย่างที่ 3.12** จงแสดงว่าโพรเจกไทล์ที่มีความเร็วต้น  $v_0$  เท่ากัน ค่าขนาดความเร็ว  $v$  ของโพรเจกไทล์มีค่าเท่ากัน ที่ระดับความสูงเดียวกัน โดยไม่ขึ้นกับมุมของการยิง (ไม่คิดแรงต้านของอากาศ)

**วิธีทำ**

ให้การยิงโพรเจกไทล์ 2 ครั้งด้วยความเร็วต้น  $v_0$  เท่ากันไปตามวิถี ① และวิถี ② ดังแสดงในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 วิถีของโพรเจกไทล์ 2 วิถีที่มีความเร็วต้น  $v_0$  เท่ากัน

สมมติให้ความสูงที่ระดับ A และ B เป็น 0 และ  $h$  ตามลำดับ จากกฎการคงตัวของพลังงานกล  $E_A = E_B$  จะได้

$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B$$

$$\left[ \frac{1}{2}mv^2 + mg h \right]_A = \left[ \frac{1}{2}mv^2 + mg h \right]_B$$

ถ้า  $v_1$  และ  $v_2$  คือความเร็วของโพรเจกไทล์ทั้งสองที่ตำแหน่ง B จะได้

$$\left[ \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \right]_A = \left[ \frac{1}{2}mv_1^2 + mg h \right]_B \quad (1)$$

$$\left[ \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \right]_A = \left[ \frac{1}{2}mv_2^2 + mg h \right]_B \quad (2)$$

เนื่องจากทางซ้ายของสมการ (1) และ (2) มีค่าเท่ากัน ดังนั้นทางขวาของสมการ (1) และ (2) ย่อมเท่ากันหรือ

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg h = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg h$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_1 = v_2$$

ตัวอย่างที่ 3.13 ก้อนวัตถุตกจากจุดปล่อยอยู่สูงเป็นระยะ  $h$  จงหาค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของก้อนวัตถุในรูปฟังก์ชันของ

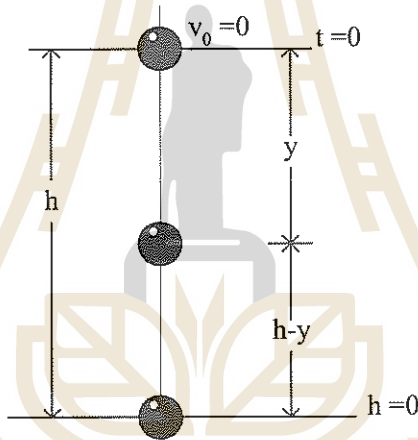
(a) เวลา

(b) ความสูง

จงแสดงความสัมพันธ์ในรูปกราฟ และแสดงให้เห็นว่าผลบวกของพลังงานทั้งสอง (พลังงานรวม) มีค่าคงตัวทั้งสองกรณี

วิธีทำ

(a) เมื่อวัตถุตกจากจุดปล่อยจะได้ความเร็วต้น  $v_0 = 0$  ดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 วัตถุตกจากจุดปล่อยด้วยความเร็วต้น  $v_0 = 0$

ถ้า  $v$  คือความเร็วของวัตถุ เมื่อวัตถุตกลงมาเป็นระยะ  $y$  จะได้  $v = -v_0 - gt$  และพลังงานจลน์มีค่า

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-v_0 - gt)^2$$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2}m(g^2t^2) \quad (1)$$

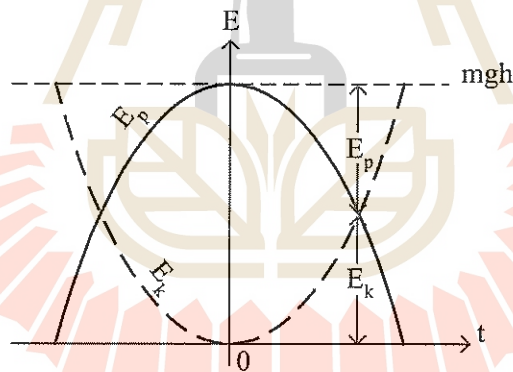
พลังงานศักย์ของวัตถุ เมื่อวัตถุตกลงมาเป็นระยะ  $y$  มีค่า

$$\begin{aligned} E_p &= mg(h - y) \\ &= mgh + mg\left(-v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right) \\ &= mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2 \end{aligned} \quad (2)$$

พลังงานรวมของวัตถุจะมีค่า

$$\begin{aligned} E(t) &= E_k + E_p \\ &= \frac{1}{2}mg^2t^2 + mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2 \\ &= mgh \end{aligned}$$

เมื่อเขียนกราฟของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ในฟังก์ชันของเวลาจะไดดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 กราฟของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ในฟังก์ชันของเวลา

(b) ในเทอมของระยะทาง  $y$  จากจุดปล่อย เราจะเขียนพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ได้ดังนี้

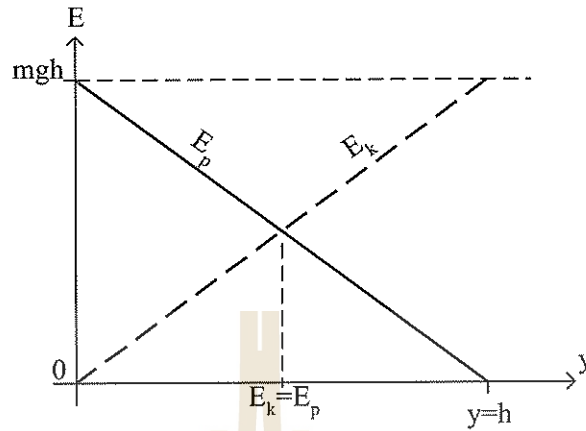
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0^2 + 2gy) = mgy \quad (3)$$

$$E_p = mg(h - y) = mgh - mgy \quad (4)$$

พลังงานรวมของวัตถุจะมีค่า

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ &= mgy + mgh - mgy \\ &= mgh \end{aligned}$$

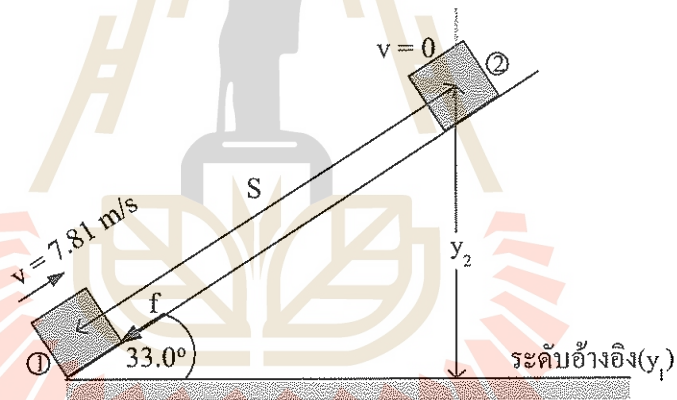
เมื่อเขียนกราฟของพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ในฟังก์ชันของระยะทาง  $y$  จะได้ดังแสดงในรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของวัตถุในฟังก์ชันของระยะทาง  $y$

ตัวอย่างที่ 3.14 กล้องมวล 4.26 กิโลกรัม เริ่มเคลื่อนที่ขึ้นพื้นเอียง  $33.0^\circ$  ด้วยอัตราเร็ว 7.81 เมตร/วินาที ตามว่าจะไกลขึ้นไปได้ไกลเท่าใด ถ้าต้องเสียพลังงานไป 34.6 จูล เนื่องจากแรงเสียดทาน

วิธีทำ



รูปที่ 3.16 การเคลื่อนที่ของกล้องบนพื้นเอียงที่ทำมุม  $33.0^\circ$  กับแนวระดับ

เนื่องจากกล้องเคลื่อนที่ภายใต้แรงเสียดทาน (แรงไม่อนุรักษ์) งานที่ใช้ในการเคลื่อนที่ จะมีค่า

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_p + \Delta E_k \\ &= (E_{p_2} - E_{p_1}) + (E_{k_2} - E_{k_1}) \end{aligned}$$

แทนค่า  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  และ  $E_p = mgy$  ณ ตำแหน่งที่ 1 และ 2 จะได้

$$\begin{aligned}W &= (mgy_2 - mgy_1) + \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) \\&= \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right) \\-34.6 \text{ J} &= \left[0 + (4.26 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(S) \sin 33^\circ\right] - \left[\frac{1}{2}(4.26 \text{ kg})(7.81 \text{ m/s})^2 + 0\right] \\-34.6 \text{ J} &= (4.26 \times 9.8 \times 0.545) S - 129.9 \text{ J} \\S &= \frac{95.3 \text{ J}}{22.4 \text{ N}} = 4.2 \text{ m}\end{aligned}$$

---

## สรุป

### 1. พลังงานศักย์

พลังงานศักย์ของแรงโน้มถ่วงของวัตถุมวล  $m$  ณ ตำแหน่งใกล้ๆ ผิวโลก อยู่สูงจากระดับอ้างอิงเป็นระยะ  $y$  มีค่า

$$E_p = mgy$$

### 2. แรงอนุรักษ์

แรงอนุรักษ์เป็นแรงที่ไม่ขึ้นกับวิถีแต่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ของแรงอนุรักษ์คือ

1.  $\nabla \times \vec{F} = 0$

2. งานของแรงอนุรักษ์รอบวงปิด  $C$  มีค่าเท่ากับศูนย์หรือ

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

### 3. การอนุรักษ์พลังงาน

ถ้าแรงที่กระทำในระบบมีเพียงแรงอนุรักษ์ ระบบจะมีการอนุรักษ์พลังงานกล หรือ

$$E_1 = E_2$$

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$$

ถ้าแรงอนุรักษ์ที่กระทำต่อระบบนั้นเป็นแรงโน้มถ่วง สมการของการอนุรักษ์พลังงานจะเป็น

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

ถ้าแรงที่กระทำในระบบเป็นแรงไม่อนุรักษ์ งานของแรงไม่อนุรักษ์จะมีค่า

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k + \Delta E_p \\ &= \left( \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \right) + (mgy_2 - mgy_1) \end{aligned}$$



## บรรณานุกรม

---

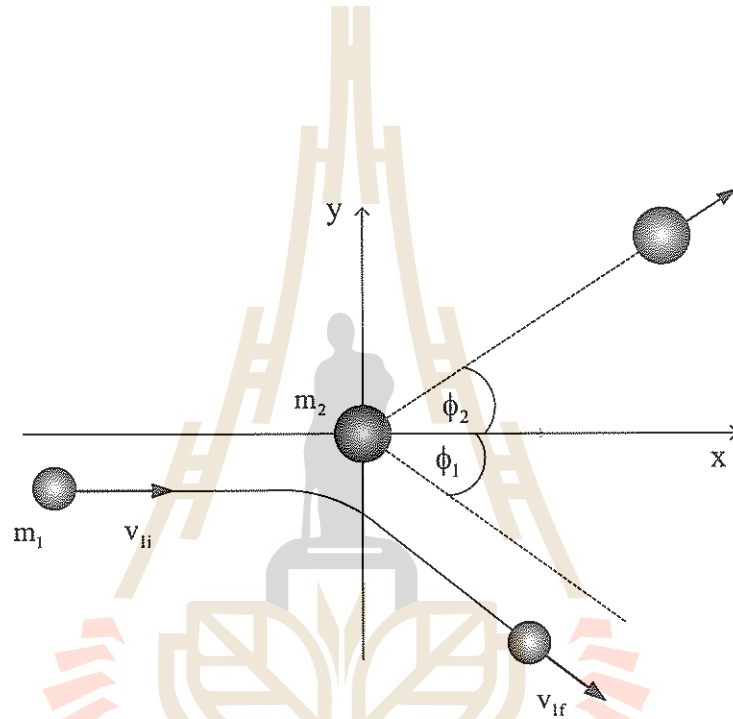
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. สำนักวิชาวิทยาศาสตร์. สาขาวิชาฟิสิกส์. 2540. ฟิสิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 3.  
นนทบุรี: เอส.อาร์.พรีนติ้ง แมสโปรดักส์.

Halliday, David., and Resnick, Robert. 1978. **Physics** (3<sup>rd</sup> ed.). New York: Wiley.

Serway, Raymond A., and Faughn, Jerry S. 1991. **College physics** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia:  
Sunder College Publishing.



## ระบบอนุภาค โมเมนตัมและการชน



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

โดย รองศาสตราจารย์ ดร.ประพันธ์ แม่นยำ

ตอนที่  
**4.1**

---

## ระบบอนุภาค โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม

การศึกษาระบบอนุภาคที่อนุภาคมีอิสระในการเคลื่อนที่นั้นเป็นปัญหาทางฟิสิกส์ที่ยุ่งยาก แต่ถ้ระบบอนุภาคเป็นวัตถุแข็งเกร็ง เราศึกษาระบบโดยอาศัยจุดที่เป็นตัวแทนของระบบนั้น เช่น จุดศูนย์กลางมวล เซนทรอยด์ จุดศูนย์กลาง ในตอนนี้จะศึกษาระบบอนุภาคที่ไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกกระทำกับระบบ ซึ่งจะนำไปสู่หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น และระบบที่ไม่มีทอร์กลัพธ์จากแรงภายนอกกระทำ ซึ่งจะนำไปสู่หลักการคงตัวของโมเมนตัมเชิงมุม

### 1. จุดศูนย์กลางมวล จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของก้อนวัตถุมีขนาด หรือระบบที่ประกอบด้วยหลายอนุภาคนั้น ถ้ามีจุดใดจุดหนึ่งที่ใช้แทนวัตถุทั้งก้อนหรืออนุภาคทั้งระบบได้ก็จะทำให้ปัญหาต่างๆ ง่ายขึ้น จุดที่สะดวกที่สุดก็คือ ตำแหน่งเฉลี่ยการกระจายของมวลทั้งหมดนั่นเอง เราเรียกจุดนี้ว่า จุดศูนย์กลางมวล (center of mass, cm) ความสะดวกจากการทราบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมีหลายประการ เป็นต้นว่าจะวางวัตถุให้สมดุลบนที่รองรับได้ถ้าเราให้ที่รองรับวัตถุอยู่ตรงใต้จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุพอดี หรือในการออกแบบเรือให้ล้มยากหรือไม่ล้มจะต้องให้จุดศูนย์กลางมวลอยู่ส่วนล่างของตัวเรือ เป็นต้น

#### 1.1 จุดศูนย์กลางมวลและจุดศูนย์กลางมวล

เพื่อให้มองเห็นได้ง่ายก่อนจะกล่าวถึงจุดศูนย์กลางมวล จะพิจารณาจุดศูนย์กลาง (center of gravity, cg) เสียก่อน ดังนี้

สมมติมีมวลสามมวล  $m_1, m_2, m_3$  ติดอยู่บนคานเบา ถ้านำคานนี้ไปวางบนคานมีดจะให้คานมีดอยู่ตรงไหนคานจึงจะสมดุล

การวางให้สมดุลจะต้องให้คานมีดรับน้ำหนักทั้งหมด จึงต้องทราบน้ำหนักรวมตกตรงจุดใดจุดที่น้ำหนักรวมตก เรียกว่า จุดศูนย์กลาง

การหาตำแหน่ง cg พิจารณาดังนี้

มวล  $m_1, m_2, m_3$  มีน้ำหนัก  $m_1g, m_2g, m_3g$  ตามลำดับ

ให้มวลรวมมีค่า  $M = m_1 + m_2 + m_3$

น้ำหนักรวมมีค่า  $Mg$

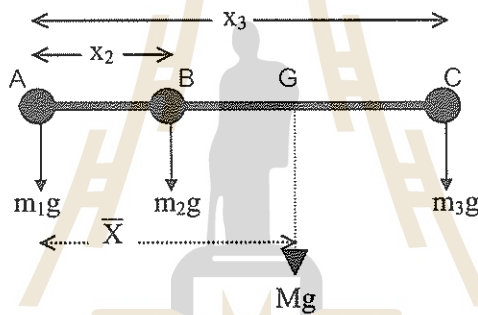
ทั้งหมดมีทิศลงในแนวตั้ง

การหาดำแหน่ง  $cg$  ทำได้โดยหาโมเมนต์ของแรงโดยใช้หลัก

ผลรวมของโมเมนต์ ของแรงย่อย รอบจุดหมุนใดๆ มีค่าเท่ากับ โมเมนต์ของแรงรวมรอบจุดหมุนเดียวกัน

การหาโมเมนต์ของแรงนั้นจะใช้จุดใดเป็นจุดหมุนก็ได้ ดังนี้

สมมติให้  $G$  เป็นจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วงของมวลทั้งสาม



รูปที่ 4.1 ศูนย์กกลางความถ่วงของสามอนุภาค เมื่อจุดหมุนอยู่ที่ปลาย A

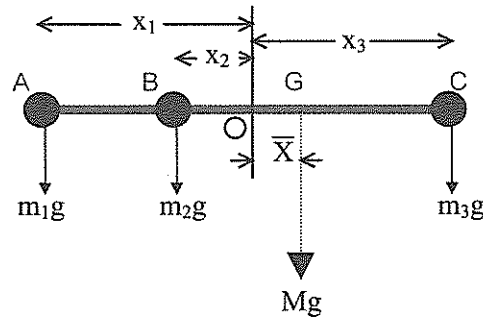
1.1.1 ให้จุดหมุนอยู่ที่ปลายทางด้านซ้าย ดังแกนที่ปลาย A ดังรูปที่ 4.1 จะได้โมเมนต์รวมของน้ำหนักย่อยรอบ A เท่ากับ โมเมนต์น้ำหนักรวมรอบ A

$$m_1g(0) + m_2g(x_2) + m_3g(x_3) = Mg\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{m_1x_1g + m_2x_2g + m_3x_3g}{Mg}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i g}{\sum_{i=1}^3 m_i g} \quad (4.1)$$

1.1.2 ให้จุดหมุนอยู่ที่จุดกึ่งกลางคาน ดังแกนที่จุด O ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ศูนย์กลางความถ่วงของสามอนุภาค เมื่อจุดหมุนอยู่กึ่งกลางคาน

โมเมนต์รวมของน้ำหนักย่อยรอบ O เท่ากับโมเมนต์น้ำหนักรวมรอบ O

$$(m_1g)(-x_1) + (m_2g)(-x_2) + (m_3g)(x_3) = Mg\bar{X}$$

เขียน  $\bar{X}$  ได้เช่นเดียวกับสมการ (4.1) แต่ค่า  $x_i$  แต่ละตัวไม่เท่ากัน และต้องดูด้วยว่าเป็นค่าบวกหรือลบ เมื่อวัดจากพิสัยที่ตั้งไว้

จะเห็นว่า ถ้าค่า  $g$  ที่ตำแหน่งของแต่ละมวลมีค่าเท่ากัน ก็จะตัด  $g$  ทิ้งไปได้ ในกรณีนี้ตัดค่า  $g$  ออกได้นี้ เรียกจุด G ว่า จุดศูนย์กลางมวลของระบบ ใช้ตัวย่อ cm

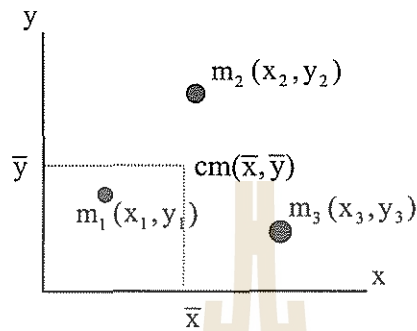
หรือในกรณีมวลอยู่ในอากาศโดยอิสระจากแรงดึงดูดจากดาวใดๆ มวลนั้นไร้น้ำหนักแต่การเคลื่อนที่จะเกี่ยวข้องกับแรงและมวล ดังนั้น ตำแหน่งเฉลี่ยของมวลรวม หรือจุดศูนย์กลางมวล จึงมีความจำเป็นต้องทราบ

การหาค่าตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลทำได้โดยหาโมเมนต์ของมวล แทนโมเมนต์ของแรง ดังตัวอย่างในสองมิติ ดังนี้

สมมติระบบหนึ่งมีสามมวล กระจายอยู่ในระนาบสองมิติ ให้มวล  $m_1$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_1, y_1)$  มวล  $m_2$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_2, y_2)$  มวล  $m_3$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_3, y_3)$

$$\text{มวลรวม } M = m_1 + m_2 + m_3 = \sum_{i=1}^3 m_i$$

ให้จุดศูนย์กลางมวล cm อยู่ที่ตำแหน่ง  $(\bar{x}, \bar{y})$  ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 cm เป็นจุดศูนย์กลางมวลของระบบที่มีมวลสามมวล

จะหาค่าแห่ง  $(\bar{x}, \bar{y})$  โดยหาโมเมนต์ของมวลรอบแกน  $y$  และ  $x$  ดังนี้

โมเมนต์รอบแกน  $y$   $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = M\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$$

โมเมนต์รอบแกน  $x$   $m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = M\bar{y}$

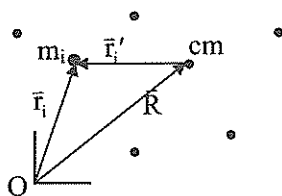
$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$$

ทำนองเดียวกันถ้าอนุภาคกระจายอยู่ในสามมิติ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลเป็น  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

จะได้  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$  ,  $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$  ,  $\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i z_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}$

ถ้าระบบประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล เป็นตำแหน่งเฉลี่ยของมวลทั้งหมด ซึ่งเขียนสูตรทั่วไปได้ ดังนี้

สมมติระบบหนึ่งประกอบด้วย  $n$  อนุภาค แต่ละอนุภาคมีมวล  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_n$  ตามลำดับ ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค

ให้ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลอยู่ที่  $\vec{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \bar{x}\hat{i} + \bar{y}\hat{j} + \bar{z}\hat{k}$   
 จะได้แต่ละองค์ประกอบของตำแหน่งศูนย์กลางมวลจะเป็น

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.2)$$

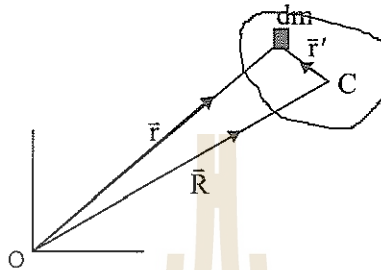
หรือเขียนตำแหน่งศูนย์กลางมวลในรูปเวกเตอร์เป็นสูตรเดียวสั้นๆ ได้ดังนี้

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad (4.3)$$

เมื่อ  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  เป็นมวลรวม

ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง คือ วัตถุที่มีมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อนนั้น คิดได้เช่นเดียวกับระบบอนุภาค เพราะวัตถุแข็งเกร็งก็คือระบบอนุภาคที่ระยะระหว่างแต่ละอนุภาคถูกตรึงให้คงที่นั่นเอง ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของก้อนวัตถุจึงกำหนดได้ด้วยวิธีเดียวกัน โดยแบ่งก้อนวัตถุออกเป็นส่วนเล็กๆ ให้แต่ละส่วนนั้นมีมวล  $dm$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $\vec{r}$  ใดๆ เป็นเสมือนอนุภาคหนึ่ง ให้จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุอยู่ที่  $\vec{R}$  และให้  $dm$  อยู่ห่างจุดศูนย์กลางมวล  $\vec{r}'$  ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง

ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็งจึงเหมือนกับตำแหน่งศูนย์กลางมวลระบบอนุภาคเพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมายผลบวกเป็นเครื่องหมายอินทิเกรต ดังนี้

องค์ประกอบของตำแหน่งศูนย์กลางมวล จะเป็น

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int y dm}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int z dm}{M}$$

ตำแหน่งศูนย์กลางมวลอยู่ที่

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{\int \bar{\mathbf{r}} dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{\mathbf{r}} dm}{M} \quad (4.4)$$

เมื่อ  $M = \int dm$  เป็นมวลรวมทั้งก้อน

### 1.2 เซนทรอยด์

มวลของวัตถุนั้นอาจเขียนในเทอมของความหนาแน่นคูณกับปริมาตร หรือพื้นที่ หรือความยาวก็ได้ ถ้าวัตถุมีขนาดจะหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลได้โดยแบ่งวัตถุออกเป็นปริมาตรเล็กๆ  $dV$  มีมวล  $dm = \rho dV$  เมื่อ  $\rho$  เป็นความหนาแน่น คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แล้วอินทิเกรตตลอดปริมาตรของวัตถุ จะได้ตำแหน่งศูนย์กลางมวล ดังนี้

$$\bar{\mathbf{R}} = \frac{\int \bar{\mathbf{r}} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \bar{\mathbf{r}} dV}{\int \rho dV}$$

เมื่อแยกองค์ประกอบจะเป็น

$$\bar{x} = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}$$

ในกรณีที่วัตถุมีลักษณะเป็นแผ่นบาง อาจแบ่งวัตถุเป็นพื้นที่ส่วนเล็กๆ  $ds$  มีมวล  $dm = \sigma ds$  เมื่อ  $\sigma$  เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่แล้วอินทิเกรตตลอดพื้นที่ของแผ่น จะได้

$$\bar{R} = \frac{\int \sigma \bar{r} ds}{\int \sigma ds}$$

แยกองค์ประกอบได้เป็น

$$\bar{x} = \frac{\int \sigma x ds}{\int \sigma ds}, \quad \bar{y} = \frac{\int \sigma y ds}{\int \sigma ds}, \quad \bar{z} = \frac{\int \sigma z ds}{\int \sigma ds}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าวัตถุมีลักษณะเป็นเส้น เราก็แบ่งวัตถุเป็นระยะสั้นๆ มีความยาว  $d\ell$  มีมวล  $dm = \lambda d\ell$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวแล้วอินทิเกรตตลอดความยาวของวัตถุได้

$$\bar{R} = \frac{\int \lambda \bar{r} d\ell}{\int \lambda d\ell}$$

แยกองค์ประกอบได้เป็น

$$\bar{x} = \frac{\int \lambda x d\ell}{\int \lambda d\ell}, \quad \bar{y} = \frac{\int \lambda y d\ell}{\int \lambda d\ell}, \quad \bar{z} = \frac{\int \lambda z d\ell}{\int \lambda d\ell}$$

ถ้าวัตถุมีความหนาแน่นสม่ำเสมอตลอดก้อน ค่า  $\rho, \sigma, \lambda$  ในสมการข้างต้นเป็นค่าคงตัว ตัดกันไปได้ ทำให้สามารถหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุได้โดยดูจากรูปลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียว ไม่ต้องคำนึงถึงความหนาแน่นหรือมวลอีกต่อไป

ตำแหน่งเฉลี่ยที่หาจากรูปลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียวนี้เรียกว่า เซนทรอยด์ (centroid) ซึ่งมีทั้งเซนทรอยด์ของปริมาตร เซนทรอยด์ของพื้นที่ และเซนทรอยด์ของเส้น

วัตถุที่มีความหนาแน่นคงตัวตลอดก้อน ตำแหน่งศูนย์กลางมวล และ เซนทรอยด์ อยู่ที่เดียวกัน ให้  $\bar{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  เป็นตำแหน่งเซนทรอยด์ จะหาได้จากสูตรดังนี้

### 1.2.1 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของปริมาตร

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dV}{\int dV} = \frac{\int \bar{r} dV}{V}$$
$$x_c = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dV}{V} \quad (4.5)$$

เมื่อ  $V = \int dV$  เป็นปริมาตรทั้งหมด

1.2.2 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของพื้นที่

$$\bar{x}_c = \frac{\int \bar{x} ds}{\int ds} = \frac{\int \bar{x} ds}{S}$$

$$x_c = \frac{\int x ds}{S}, \quad y_c = \frac{\int y ds}{S}, \quad z_c = \frac{\int z ds}{S} \quad (4.6)$$

เมื่อ  $S = \int ds$  เป็นพื้นที่ทั้งหมด

1.2.3 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของเส้น

$$\bar{x}_c = \frac{\int \bar{x} dl}{\int dl} = \frac{\int \bar{x} dl}{L}$$

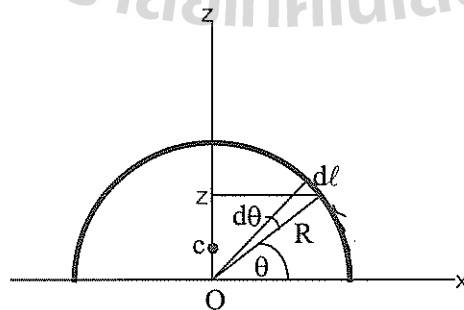
$$x_c = \frac{\int x dl}{L}, \quad y_c = \frac{\int y dl}{L}, \quad z_c = \frac{\int z dl}{L} \quad (4.7)$$

เมื่อ  $L = \int dl$  เป็นความยาวทั้งหมด

กรณีที่วัตถุมีความสมมาตร การหาจุดศูนย์กลางมวล จึงคิดได้ทันทีว่า จุดศูนย์กลางมวลจะต้องอยู่ในระนาบสมมาตรหรือบนเส้นสมมาตรนั้น

หากวัตถุประกอบด้วยหลายส่วน และทราบศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วน จะหาศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งก้อนได้โดยคิดเหมือนระบบอนุภาคที่มีมวลเป็นจุดอยู่ที่ศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วนนั้น

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาเซนทรอยด์ของลวดคงรูปครึ่งวงกลม



รูปที่ 4.6 ลวดคงรูปครึ่งวงกลม

ให้  $R$  เป็นรัศมีของครึ่งวงกลม ถ้าตั้งแกนดังรูปที่ 4.6 ก็จะเห็นว่าลวดนี้มีความสมมาตรรอบแกน  $z$  ดังนั้นเซนทรอยด์ของลวดจะอยู่บนแกน  $z$  นี้ สิ่งที่ต้องการหาจึงเหลือเพียงว่าตำแหน่งเซนทรอยด์นั้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางวงกลมไปเท่าใด

ให้เซนทรอยด์อยู่ที่  $c$  ห่างจุด  $O$  ไปเป็นระยะ  $z_c$  แบ่งลวดออกเป็นส่วนเล็กๆ ยาว  $d\ell$  รับมุม  $d\theta$

$$d\ell = R d\theta$$

ตำแหน่งของส่วนเล็กๆ  $d\ell$  นี้อยู่ที่  $z = R \sin \theta$

ความยาวของลวดทั้งเส้น  $L = \pi R$

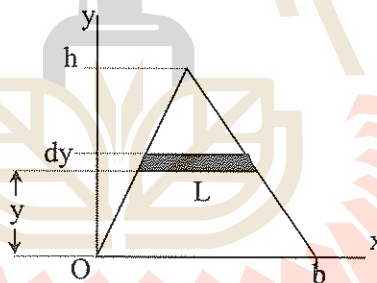
จาก  $z_c = \frac{\int z d\ell}{L}$

แทนค่า  $d\ell$ ,  $L$  และ  $z$  ลงไปจะได้

$$z_c = \frac{\int_0^\pi (R \sin \theta) R d\theta}{\pi R} = \frac{R}{\pi} \cos \theta \Big|_0^\pi = -\frac{R}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{R}{\pi} (-1 - 1)$$

$$z_c = \frac{2R}{\pi}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาเซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยม



รูปที่ 4.7 แผ่นสามเหลี่ยม

ให้สามเหลี่ยมมีฐานยาว  $b$  สูง  $h$  วางให้ฐานอยู่บนแกน  $x$  ดังรูปที่ 4.7 ที่ตำแหน่ง  $y$  ใดๆ แบ่งพื้นที่ออกเป็นแถบเล็กๆ ยาว  $L$  หน้า  $dy$

จากสามเหลี่ยมคล้าย  $\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h}$

$$L = \frac{b(h-y)}{h}$$

พื้นที่แถบเล็กๆ นั้น  $dA = L dy$

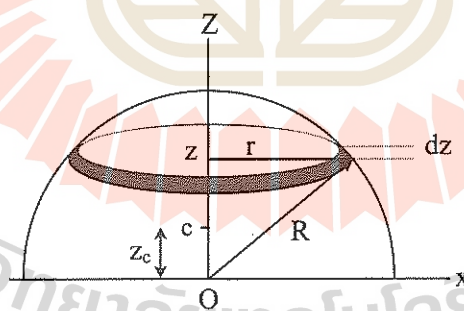
พื้นที่แผ่นสามเหลี่ยม  $A = \frac{bh}{2}$

ให้ตำแหน่งเซนทรอยด์อยู่ห่างฐานเป็นระยะ  $y_c$

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int_0^h 2y[b(h-y)]dy}{bh^2} \\ &= \int_0^h \left(\frac{2y}{h} - \frac{2y^2}{h^2}\right) dy \\ &= \left(\frac{y^2}{h} - \frac{2y^3}{3h^2}\right) \Big|_0^h = \frac{h}{3} \end{aligned}$$

เซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยมอยู่สูงจากฐานเป็นระยะเศษหนึ่งส่วนสามของความสูงเสมอไม่ว่าจะใช้ฐานและความสูงคู่ใดก็ตาม ดังนั้น เซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยมจึงอยู่ที่จุดที่เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมตัดกันนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 4.3 จงหาเซนทรอยด์ของปริมาตรครึ่งทรงกลมตัน



รูปที่ 4.8 ครึ่งทรงกลมตัน

สมมติรัศมีครึ่งทรงกลมเป็น  $R$  ให้เซนทรอยด์ อยู่ที่  $c$  ห่างศูนย์กลางเป็นระยะ  $z_c$  ที่ตำแหน่ง  $z$  ใดๆ แบ่งปริมาตรออกเป็นแผ่นวงกลมบางตั้งฉากกับแกน  $z$  หนา  $dz$  ดังรูปที่ 4.8

รัศมีของแผ่นวงกลมมีค่า  $r = \sqrt{R^2 - z^2}$

ปริมาตรของแผ่น  $dv = \pi r^2 dz$   
 $= \pi(R^2 - z^2) dz$

ปริมาตรของครึ่งทรงกลม  $V = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi R^3$

จาก  $z_c = \frac{\int z dv}{V}$

$$= \frac{3}{2R^3} \int_0^R z(R^2 - z^2) dz = \frac{3}{2R^3} \left( \frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$z_c = \frac{3R}{8}$$

## 2. โมเมนตัมเชิงเส้นและการคล

โมเมนตัมเป็นปริมาณที่ใช้บอกถึงความสามารถในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โมเมนตัมเชิงเส้น ( $\vec{p}$ ) ของอนุภาคมวล  $m$  นิยามจากผลคูณระหว่างมวลและความเร็วอนุภาค

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.8}$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4.9}$$

โดย  $\Sigma \vec{F}$  เป็นแรงภายนอกผลัดพัทธ์ที่กระทำต่ออนุภาค

$$(\Sigma \vec{F}) dt = d\vec{p} \tag{4.10}$$

เรียก  $\Sigma \vec{F}$  ว่า แรงคล (impulsive force)

อินทิเกรตสมการ (4.10)

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma \vec{F}) dt = \vec{J} \tag{4.11}$$

โดย  $\vec{J}$  เป็นการคล (impulse) มีค่าเท่ากับผลต่างของเวกเตอร์ของโมเมนตัมของอนุภาค โมเมนตัมของอนุภาคมีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร/วินาที การคลมีหน่วยเป็น นิวตัน-วินาที อาจกล่าวได้ว่าการคลเป็นผลคูณของแรงภายนอกกับค่าเวลาที่แรงภายนอกกระทำ

กรณีระบบอนุภาค โมเมนตัมรวม  $\vec{P}$  ของอนุภาคทั้งหมดเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมของแต่ละอนุภาค

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \tag{4.12}$$

หรือ

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i \quad (4.13)$$

จากสมการ (4.13) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (4.14)$$

เมื่อ  $\vec{V}$  คือ ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$M$  คือ มวลรวมของระบบ

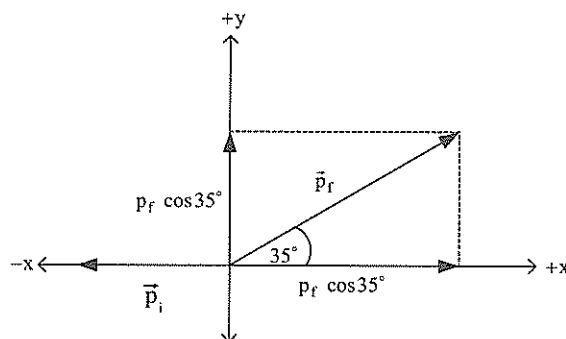
$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i \quad (4.15)$$

สมการ (4.14) ให้ความหมายทางฟิสิกส์ที่เด่นชัด นั่นคือ โมเมนตัมลัพธ์ของระบบอนุภาคเท่ากับ ผลคูณของมวลทั้งหมดของระบบและความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ระบบที่กำลังเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กัน วิเคราะห์ได้เหมือนกรณีมวลเดี่ยวยึดแน่นอนอยู่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

**ตัวอย่างที่ 4.4** ลูกเบสบอลมีมวล 0.14 กิโลกรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามแนวราบ 150 กิโลเมตร/ชั่วโมง เข้ากระทบไม้เบสบอล ลูกเบสบอลพุ่งออกจากไม้ตีในทิศทาง  $35^\circ$  กับแนวราบด้วยอัตราเร็ว 180 กิโลเมตร/ชั่วโมง

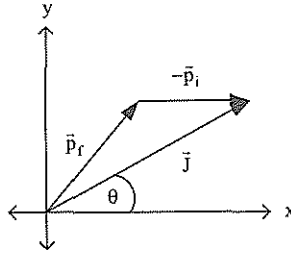
- (a) จงคำนวณหาการลดลงของแรงตีลูกเบสบอล
- (b) ถ้าการเข้ากระทบของไม้ตีลูกเบสบอลใช้เวลา 1.5 มิลลิวินาที จงหาแรงเฉลี่ย
- (c) จงหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของไม้ตี

วิธีทำ ดูรูปที่ 4.9 (a) และ 4.9 (b) ประกอบ



รูปที่ 4.9 (a) แผนภาพโมเมนตัมของอนุภาค

(a)



รูปที่ 4.9 (b) แผนภาพการคลหรือการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$v_f = 180 \text{ km/h} = \frac{180 \times 10^3}{3600} \text{ m/s} = 50 \text{ m/s}$$

$$v_i = 150 \text{ km/h} = \frac{150 \times 10^3}{3600} \text{ m/s} = 42 \text{ m/s}$$

$$p_{fx} = mv_f \cos 35^\circ = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\cos 35^\circ) = 5.7 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_{fy} = mv_f \sin 35^\circ = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\sin 35^\circ) = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_{ix} = mv_i = (0.14 \text{ kg})(-42 \text{ m/s}) = -5.9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = (5.7) - (-5.9) = 11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = (4.0) - 0 = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11.6)^2 + (4.0)^2} = 12.3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{4.0}{11.6}; \theta = 19^\circ$$

(b)

$$J = F\Delta t$$

$$\therefore F = J/\Delta t = \frac{12.3}{0.0015} = 8200 \text{ N}$$

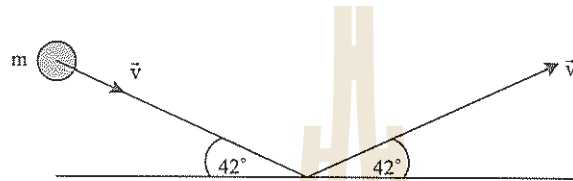
ในทิศทางของ  $\vec{J}$

(c) การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของไม้ตี  $\rightarrow$  ตรงข้ามกับของลูกบอล

$$J_x = \Delta p_x = -11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

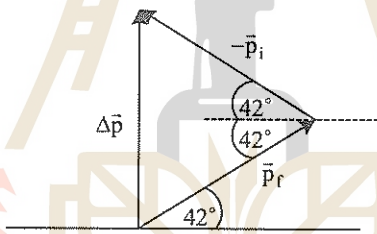
$$J_y = \Delta p_y = -4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 มวล 4.88 กิโลกรัม มีอัตราเร็ว 31.4 เมตร/วินาที เข้ากระทบแผ่นโลหะราบทำมุม  $42.0^\circ$  และสะท้อนออกด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม ดังรูปที่ 4.10 (a) ถามว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของมวลมีค่าเท่าใด



รูปที่ 4.10 (a) มวล  $m$  กระทบแผ่นโลหะ

วิธีทำ จากรูปที่ 4.10(b)  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$



รูปที่ 4.10 (b) แผนภาพการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของมวล

$$\begin{aligned} \Delta p^2 &= p_i^2 + p_f^2 - 2p_i p_f \cos 84^\circ \\ &= (4.88 \times 31.4)^2 \times 2 - 2 \times (4.88 \times 31.4)^2 \times (0.1045) \\ &= 46960.1 - 4908.7 = 42051.4 \end{aligned}$$

$$\Delta p = 205 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ทิศทางตั้งฉากกับแผ่นโลหะ}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2 \times p_i \sin 42^\circ \\ &= 2 \times 4.88 \times 31.4 \times 0.669 \\ &= 205 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

### 3. โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมของระบบอนุภาค

#### 3.1 โมเมนตัมเชิงเส้นและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

สมมติระบบประกอบด้วย  $n$  อนุภาค มีมวล  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$

แต่ละอนุภาคมีความเร็ว  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n$  ตามลำดับ

โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคที่  $i$  ใดๆ  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ ( $\vec{P}$ ) คือ ผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของแต่ละอนุภาค นั่นคือ

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad (4.16)$$

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (4.17)$$

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลรวมของระบบกับความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

การหาโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคนั้น นอกจากหาได้โดยการรวมโมเมนตัมเชิงเส้นของทุกอนุภาค ตามสมการ (4.16) แล้ว ก็อาจหาจากโมเมนตัมเชิงเส้นของมวลรวมและความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลดังสมการ (4.17) ได้ด้วย นั่นคือ

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{V}$$

ต่อไปจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ

จากกฎข้อสองของนิวตัน อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของอนุภาคแปรตามแรงภายนอกที่กระทำสำหรับระบบอนุภาค แรงกระทำกับระบบมีสองอย่างคือ นอกจากแรงภายนอกที่กระทำกับแต่ละอนุภาคแล้ว ยังมีแรงภายใน คือแรงโน้มถ่วงที่แต่ละอนุภาคกระทำต่อกันด้วย เราจะมาดูว่าแรงภายในนี้มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของระบบหรือไม่

สมมติมี มีแรงภายนอก  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  กระทำกับแต่ละอนุภาคตามลำดับ

แรงภายในคือแรงโน้มถ่วงที่แต่ละอนุภาคกระทำต่อกัน ถ้าคิดที่อนุภาคเดียวสมมติเป็นอนุภาคที่  $i$  แรงที่อนุภาคที่  $i$  ถูกกระทำโดยอนุภาคอื่นสมมติอนุภาคที่  $j$  ให้เป็น  $\vec{F}_{ij}$  เมื่อ  $j$  มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง  $n$  แต่  $j \neq i$

ดังนั้น แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคที่  $i$  รวมเป็น  $\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$

จากกฎข้อสองของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่  $i$  จะเป็น

$$\vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i \quad (4.18)$$

เมื่อ  $\vec{F}_i$  เป็นแรงภายนอกที่กระทำกับอนุภาคที่  $i$

และ  $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$  เป็นผลรวมของแรงภายในที่อนุภาคอื่น ทุกอนุภาคกระทำกับอนุภาคที่  $i$

ดังนั้น ถ้ารวมแรงที่กระทำกับทั้งระบบของ  $n$  อนุภาค จะได้

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \tag{4.19}$$

เทอมกลางของสมการ (4.19) มีเครื่องหมายผลรวมซ้อนกันสองอันหมายถึงการรวมทุกแรงคือ ทั้ง  $\vec{F}_{ij}$  และ  $\vec{F}_{ji}$  ซึ่งแรงทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน ทิศทางตรงข้าม

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

เมื่อรวมแรงภายในทั้งหมดแล้วจึงมีค่าเป็นศูนย์ สมการ (4.19) จึงเหลือเพียง

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= \sum \dot{\vec{p}} \\ \vec{F} &= \dot{\vec{P}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\vec{F} = M\vec{A}$$

เมื่อ  $\vec{F}$  คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำกับอนุภาคในระบบ

และ  $\vec{A}$  คือความเร่งของศูนย์กลางมวล นั่นคือ

ความเร่งของศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค คิดได้เหมือนกับอนุภาคเดี่ยวที่มีมวลเท่ากับมวลรวมของทั้งระบบ เมื่อถูกกระทำโดยแรงภายนอกรวม

กรณีพิเศษ เมื่อแรงภายนอกผลลัพธ์  $\vec{F}$  เป็นศูนย์ จะได้  $\vec{A} = 0$  และ  $\vec{V} =$  ค่าคงตัว โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ  $\vec{P}$  มีค่าคงตัว หรือ  $\dot{\vec{P}} = 0$

$$\text{เมื่อ } \vec{F} = 0, \quad M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{ค่าคงตัว} \tag{4.21}$$

นั่นคือ เมื่อแรงลัพธ์ภายนอกที่กระทำกับระบบรวมมีค่าเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบก็มีค่าคงตัว เป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

ฟิสิกส์ 1

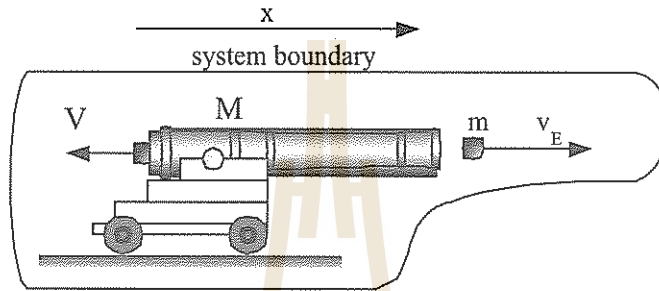
การประยุกต์หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

ตัวอย่างที่ 4.6 ปืนใหญ่มีมวล  $M = 1300$  กิโลกรัม ยิงลูกปืนมวล  $m = 72$  กิโลกรัม ในแนวราบด้วยอัตราเร็วปลายกระบอก  $v = 55$  เมตร/วินาที ปืนใหญ่ถูกติดตั้งให้ถอยกลับได้อย่างอิสระ ถามว่า

- (a) อัตราเร็ว  $V$  ของปืนใหญ่ในการถอยกลับเทียบกับผิวโลก
- (b) อัตราเร็วเริ่มต้น  $v_E$  ของลูกปืนเทียบกับโลก

วิธีทำ

(a)



รูปที่ 4.11 ปืนใหญ่และลูกปืนใหญ่

เราเลือกระบบที่ประกอบด้วยปืนใหญ่และลูกปืนใหญ่ ดังรูปที่ 4.11 ทำให้แรงดันปืนที่ขับลูกปืนออกเป็นแรงภายใน แรงภายนอกในแนวราบมีค่าเป็นศูนย์ แรงในแนวตั้งไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวราบ

โมเมนตัมคงตัว

$$P_i = P_f$$

โมเมนตัมรวม  $P_i = 0$  ทุกอย่างอยู่หนึ่งก่อนการยิง โมเมนตัมรวมหลังยิงมีค่าเท่ากับโมเมนตัมของปืนใหญ่รวมกับโมเมนตัมลูกปืน โดย  $v$  เป็นอัตราเร็วของลูกปืนเทียบกับกระบอกปืน

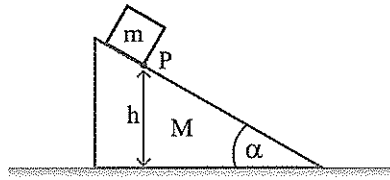
$$P_f = MV + m(v_E) = MV + m(v + V) = 0$$

$$\therefore V = -\frac{mv}{M+m} = \frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} = -2.9 \text{ m/s}$$

(b) อัตราเร็วของลูกปืนเทียบกับโลก

$$v_E = v + V = 55 \text{ m/s} + (-2.9 \text{ m/s}) = 52.1 \text{ m/s}$$

ตัวอย่างที่ 4.7 มวล  $m$  หยดนิ่งบนยอดพื้นเอียงมวล  $M$  ซึ่งหยดนิ่งบนพื้นโต๊ะ กำหนดให้พื้นทุกพื้น  
 ไม่มีความเสียดทาน ถ้าระบบเริ่มจากหยดนิ่ง จุด  $P$  ของก้อนมวล  $m$  อยู่สูงจากพื้นโต๊ะ  $h$  ดังแสดง  
 ในรูปที่ 4.12 (a) จงคำนวณหาอัตราเร็วของพื้นเอียง ณ จุดที่จุด  $P$  สัมผัสกับพื้นโต๊ะพอดี



รูปที่ 4.12 (a) มวล  $m$  บนพื้นเอียง

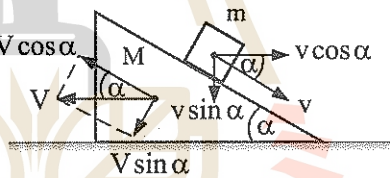
วิธีทำ โมเมนตัมคงตัวตามแนวแกน  $x$  (รูปที่ 4.12 (b))

$$0 = (m+M)V - mv \cos \alpha$$

$$(m+M)V = mv \cos \alpha \quad (1)$$

จากสมการกฎข้อ 2 ของนิวตัน  $\Sigma F = ma$  (ตามแนวพื้นเอียง)

$$mg \sin \alpha = m \frac{d}{dt} (v - V \cos \alpha)$$



รูปที่ 4.12 (b) การเคลื่อนที่ของมวล  $m$  และพื้นเอียง

$$\text{อินทิเกรต ;} \quad v - V \cos \alpha = (g \sin \alpha)t \quad (2)$$

แทนค่า (1) ใน (2) เพื่อหา  $v$  ;

$$\frac{(m+M)V}{m \cos \alpha} - V \cos \alpha = (g \sin \alpha)t$$

$$\frac{V}{\left(\frac{m}{m+M}\right) \cos \alpha} - V \cos \alpha = (g \sin \alpha)t$$

ให้

$$u = \frac{m}{m + M} ;$$

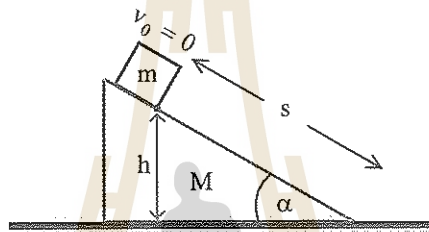
$$V \left\{ \frac{1}{u \cos \alpha} - \cos \alpha \right\} = (g \sin \alpha) t$$

$$V \left\{ \frac{1 - u \cos^2 \alpha}{u \cos \alpha} \right\} = (g \sin \alpha) t$$

$$V = \left( \frac{u \cos \alpha}{1 - u \cos^2 \alpha} \right) (g \sin \alpha) t \tag{3}$$

ในเทอมของ h (รูปที่ 4.12 (c));  $\sin \alpha = \frac{h}{s}$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$



รูปที่ 4.12 (c) มวล m บนพื้นเอียง

$$-s = -\frac{1}{2} (g \sin \alpha) t^2$$

$$\frac{2s}{g \sin \alpha} = t^2$$

$$\frac{2h}{g \sin^2 \alpha} = t^2$$

หรือ

$$\therefore t = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{4}$$

แทนค่า(4) ใน (3) จะได้

$$V = \left( \frac{u \cos \alpha}{1 - u \cos^2 \alpha} \right) g \sin \alpha \left( \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$$

$$= \left( \frac{u \cos \alpha}{1 - u \cos^2 \alpha} \right) \sqrt{2gh}$$

### 3.2 โมเมนตัมเชิงมุมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุมเป็นปริมาณที่ใช้บอกความสามารถในการเคลื่อนที่แบบหมุนของวัตถุ จากคำจำกัดความ โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุดหมุนใดๆ มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นรอบจุดหมุนนั้น

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{หรือ} \quad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่  $i$  รอบจุดกำเนิดของแกนพิกัดจึงมีค่า

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ คือผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (4.22)$$

จากรูปที่ 4.4 สำหรับระบบอนุภาค  $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$  (4.23)

หาอนุพันธ์  $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$  (4.24)

ในกรณีที่ทราบตำแหน่งและความเร็วของอนุภาคโดยวัดสัมพันธ์กับตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล จะหาค่า  $\vec{L}$  ได้ โดยการแทนค่า  $\vec{r}_i$  จากสมการ (4.23) และ  $\vec{v}_i$  จาก (4.24) ลงในสมการ (4.22) ดังนี้

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V} + \vec{v}'_i) \\ &= \sum m_i (\vec{R} \times \vec{V} + \vec{r}'_i \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) \\ &= \vec{R} \times \underbrace{\sum_M m_i}_{M} \vec{V} + \underbrace{\sum_0 m_i \vec{r}'_i}_0 \times \vec{V} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_0 m_i \vec{v}'_i}_0 + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i) \end{aligned}$$

เทอมกลางสองเทอมนั้น มีค่าผลบวกในวงเล็บเป็นศูนย์ ดังนั้น จะเหลือ

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \quad (4.25)$$

$$\vec{L} = \vec{L} \text{ ของศูนย์กลางมวล} + \vec{L} \text{ รอบศูนย์กลางมวล}$$

จากสมการ (4.25) จะเห็นว่า โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาครอบจุดใด มีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของจุดศูนย์กลางมวลรอบจุดนั้น กับ โมเมนตัมเชิงมุม รอบจุดศูนย์กลางมวล

ต่อไปจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะหาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ (4.22) เทียบกับเวลา ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{L}}{dt} &= \sum \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \\ &= \sum \bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i + \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i \\ &= 0 + \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i \\ &= \sum \bar{r}_i = \bar{\Gamma}\end{aligned}$$

เมื่อ  $\bar{\Gamma}_i = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i$  เป็นโมเมนต์ของแรง หรือ ทอร์ก ที่กระทำกับอนุภาคที่  $i$   
และ  $\bar{\Gamma} = \sum \bar{\Gamma}_i$  เป็นทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับทั้งระบบ

จึงเขียนได้ว่า 
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\Gamma} \tag{4.26}$$

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ มีค่าเท่ากับ ผลรวมของทอร์กของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ

กรณีพิเศษ เมื่อทอร์กลัพธ์  $\bar{\Gamma}$  เป็นศูนย์  $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$  จะได้  $\bar{L}$  เป็นค่าคงตัว หรือ  $\bar{L}_i = \bar{L}_f$

นั่นคือ เมื่อทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับระบบเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีค่าคงตัว เป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

#### 4. พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค

สมมติอนุภาคที่  $i$  มีมวล  $m_i$  มีความเร็ว  $v_i$  พลังงานจลน์ของอนุภาคที่  $i$  มีค่า

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค ( $E_k$ ) มีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์ของแต่ละอนุภาคในระบบ

พลังงานจลน์รวม 
$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) \tag{4.27}$$

$\bar{v}_i$  ในสมการ (4.27) เป็นความเร็วของมวลที่  $i$  วัดเทียบกับแกนอ้างอิง

แต่ในบางกรณี การวัดความเร็วของแต่ละอนุภาคสัมพันธ์กับจุดศูนย์กลางมวลของระบบจะทำให้สะดวกกว่าการวัดเทียบกับแกนอ้างอิงตามปกติ ดังนั้น เราอาจแสดงค่าพลังงานจลน์ในเทอมของความเร็ววัดสัมพันธ์กับจุดศูนย์กลางมวลก็ได้ ดังนี้

แทนค่า  $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}'_i$  จากสมการ (4.24) ลงในสมการ (4.27) จะได้

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{V} + \vec{v}'_i)$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V} \cdot \vec{V} + 2\vec{v}'_i \cdot \vec{V} + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i)$$

เนื่องจากเทอมกลางเป็นศูนย์ได้

$$E_k = \frac{1}{2} (\sum m_i) V^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) \quad (4.28)$$

นั่นคือ พลังงานจลน์ของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวลกับพลังงานจลน์ของแต่ละอนุภาคที่เคลื่อนที่สัมพันธ์กับจุดศูนย์กลางมวล

การแยกพลังงานจลน์ออกเป็นสองเทอมนี้ทำให้สะดวกในการคำนวณปัญหาบางอย่าง เช่น ในฟิสิกส์ระดับโมเลกุล โมเลกุลของสารมีพลังงานจลน์ประกอบด้วยส่วนที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของทั้งโมเลกุล และจากการสั่นภายในโมเลกุล เป็นต้น

---

## สรุป

### 1. จุดศูนย์กลางมวล เซนทรอยด์

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค จะพิจารณาการเคลื่อนที่โดยใช้จุดใดจุดหนึ่งแทนอนุภาคทั้งระบบ

#### 1.1 จุดศูนย์กลางมวล

##### 1.1.1 มวลไม่ต่อเนื่อง

ถ้าให้  $\vec{r}_{cm}$  เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล ซึ่งกำหนดว่า

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

##### 1.1.2 มวลต่อเนื่องเป็นก้อน

ถ้าระบบมีมวลต่อเนื่อง จุดศูนย์กลางมวลสามารถเขียนในรูปอินทิกรัล คือ

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

### 1.2 เซนทรอยด์

เซนทรอยด์ คือ ตำแหน่งเฉลี่ยที่หาจากลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียว ซึ่งมีทั้งเซนทรอยด์ของปริมาตร เซนทรอยด์ของพื้นที่ และเซนทรอยด์ของเส้น

วัตถุที่มีความหนาแน่นคงตัวตลอดก้อน ตำแหน่งศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์ จะอยู่ที่เดียวกัน เมื่อ  $\bar{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  เป็นตำแหน่งเซนทรอยด์ จะหาได้จากสูตรดังนี้

#### 1.2.1 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของปริมาตร

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dV}{\int dV} = \frac{\int \bar{r} dV}{V}$$

#### 1.2.2 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของพื้นที่

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} ds}{\int ds} = \frac{\int \bar{r} ds}{S}$$

#### 1.2.3 ตำแหน่งเซนทรอยด์ของเส้น

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dl}{\int dl} = \frac{\int \bar{r} dl}{L}$$

กรณีที่วัตถุมีความสมมาตร จุดศูนย์กลางมวล จะอยู่ในระนาบสมมาตร หรือเส้นสมมาตรนั้น หากวัตถุประกอบด้วยหลายส่วน และทราบจุดศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วน จะหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งก้อนได้โดยคิดเหมือนระบบอนุภาคที่มีมวลเป็นจุดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วนนั้น

## 2. โมเมนตัมเชิงเส้น และการดล

โมเมนตัมเป็นปริมาณที่ใช้อธิบายความสามารถในการเคลื่อนที่ของวัตถุ โมเมนตัมเชิงเส้น ( $\bar{p}$ ) ของอนุภาคมวล  $m$  นิยามจากผลคูณระหว่างมวลและความเร็วอนุภาค

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

โมเมนตัมของอนุภาคมีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร/วินาที

การดล ( $\bar{J}$ ) เป็นผลคูณของแรงภายนอก กับค่าเวลาที่แรงภายนอกกระทำ ซึ่งมีค่าเท่ากับผลต่างของเวกเตอร์ของโมเมนตัมของอนุภาค

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\Sigma \bar{F}) dt = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$$

การดลมีหน่วยเป็น นิวตัน-วินาที

### 3. โมเมนตัมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมของระบบอนุภาค

#### 3.1 โมเมนตัมเชิงเส้น และหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลรวมของระบบกับความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

เมื่อแรงลัพธ์ภายนอกที่กระทำกับระบบรวมมีค่าเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบจะมีค่าคงตัวเป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

เมื่อ  $\vec{F} = 0$ ,  $M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i =$  ค่าคงตัว

#### 3.2 โมเมนตัมเชิงมุมและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุดหมุนใดๆ มีค่าเท่ากับ โมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นรอบจุดหมุนนั้น

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ มีค่าเท่ากับ ผลรวมของทอร์กของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

เมื่อทอร์กลัพธ์ที่กระทำกับระบบเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีค่าคงตัว  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$  ทำให้  $\vec{L}$  มีค่าคงตัว เป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

# ตอนที่ 4.2

## การชน

การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคภายใต้อิทธิพลของแรงภายนอก สามารถวิเคราะห์ได้เหมือนกับอนุภาคเดี่ยวเคลื่อนที่ โดยใช้หลักการนิยามจุดศูนย์กลางมวล ถ้าระบบไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกกระทำ โมเมนตัมของระบบจะคงตัว กฎการคงตัวของโมเมนตัมถูกนำไปใช้ในการวิเคราะห์การชนระหว่างอนุภาคหรือก้อนวัตถุ ไม่ว่าก้อนวัตถุจะเป็นอนุภาคพื้นฐานหรือมีขนาดเท่าดาวเคราะห์ นอกจากนี้ยังใช้กฎการคงตัวของโมเมนตัมในการวิเคราะห์การชนแบบต่างๆ เช่น การชนในหนึ่งมิติที่สูญเสียพลังงาน หรือไม่สูญเสียพลังงาน การชนในสองมิติ และการแยกออกจากกันในลักษณะถอยกลับ (recoil) เป็นต้น

### 1. การชนหนึ่งมิติ

ในการชน (collision) จะมีแรงกระทำที่มีค่ามากกระทำต่ออนุภาคทั้งก้อนในช่วงเวลาสั้น การชนทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่อย่างฉับพลันก่อนการชนและหลังการชน แรงกระทำในช่วงระยะเวลาสั้นเราเรียกแรงคล เช่น การตีลูกเบสบอล เมื่อลูกบอลเข้ากระทบไม้ตี ไม้ตีออกแรงกระทำแก่ลูกบอล แรงนี้มีขนาดขึ้นอยู่กัเวลา เมื่อลูกบอลถอยออก แรงกระทำต่อลูกบอลมีค่าเป็นศูนย์ ช่วงเวลาตีลูกบอลเป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก แรงจึงอยู่ในลักษณะแรงคล

จากสมการ (4.11) การคล  $\vec{J}$  มีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคในช่วงเวลาที่ถูกรแรงคลกระทำ

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{4.29}$$

แรงคลเป็นแรงไม่คงตัว แต่โดยทั่วไปสามารถเฉลี่ยได้ในช่วงเวลา  $\Delta t$  ที่เกิดแรงกระทำ

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t \tag{4.30}$$

พิจารณาการชนของมวล  $m_1$  และ  $m_2$  ระหว่างการชนอนุภาคทั้งสองออกแรงกระทำที่มีค่ามากต่อกันในระยะเวลาสั้น แรงกระทำต่อกันนี้เป็นคู่แรงกิริยา-ปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้ามกัน การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค  $m_1$  คือ

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_{21} \Delta t \quad (4.31)$$

โดย  $\vec{F}_{21}$  เป็นแรงเฉลี่ยที่อนุภาค  $m_2$  กระทำต่ออนุภาค  $m_1$  ในช่วงเวลา  $\Delta t$  ในทำนองเดียวกัน การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค  $m_2$  คือ

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_{12} \Delta t \quad (4.32)$$

เนื่องจาก  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  ทำให้การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคทั้งสองมีค่าเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้าม

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (4.33)$$

ถ้าพิจารณาอนุภาค  $m_1$  และ  $m_2$  เป็นระบบอนุภาครวม

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (4.34)$$

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมลัพธ์  $\Delta \vec{P}$  มีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะ  $\Delta p_1 = -\Delta p_2$

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \quad (4.35)$$

สังเกตว่า ถ้าไม่มีแรงลัพธ์ภายนอกกระทำต่อระบบ “สองอนุภาค” โมเมนตัมรวมของระบบสองอนุภาคจะไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการชน

ในตอนนี้จะพิจารณาการชนระหว่างสองอนุภาค โดยปกติจะทราบความเร็วก่อนชนของอนุภาคทั้งสอง เราต้องการทราบว่าหลังการชนแล้ว อนุภาคทั้งสองมีการเคลื่อนที่อย่างไร ความจริงที่ว่า การชนโดยทั่วไปจะมีโมเมนตัมคงตัวก่อนและหลังการชน และในหลายกรณีพลังงานจะคงตัวด้วย กรณีพลังงานรวมคงตัว พลังงานรวมก่อนชนจะเท่ากับพลังงานรวมหลังชน พลังงานรวมดังกล่าวไม่เป็นเพียงเฉพาะพลังงานจลน์เท่านั้น ยังรวมถึงพลังงานภายใน พลังงานการหมุน และพลังงานความร้อน

การชนที่ไม่พิจารณาพลังงานรูปแบบอื่นนอกจากพลังงานกล ( $E_p + E_k$ ) และต้องเป็นการชนที่เวลาเข้ากระทบกันสั้นมากๆ ทำให้จุดก่อนชนและจุดหลังชนแยกออกจากกันอย่างชัดเจน ทำให้การชนไม่มีผลกับพลังงานภายในระบบ การชนประเภทนี้เราเรียกการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ (perfectly elastic collisions) พลังงานอยู่ในรูปพลังงานจลน์เท่านั้น ดังนั้นการคงตัวของพลังงานกล จะลดรูปเป็นการคงตัวของพลังงานจลน์ นั่นคือ พลังงานจลน์ก่อนชน  $E_{k,i}$  เท่ากับพลังงานจลน์หลังชน  $E_{k,f}$

การชนอีกประเภทหนึ่งเป็นชนิดการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision) พลังงานของการชนแปรรูปเป็นพลังงานรูปอื่นทำให้พลังงานจลน์รวมก่อนการชนและหลังชนไม่เท่ากัน บางกรณี  $E_{k,i} > E_{k,f}$  พลังงานส่วนหนึ่งเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานภายในของระบบ บางกรณี  $E_{k,i} < E_{k,f}$  พลังงานที่เก็บกักไว้ในระบบถูกปล่อยหลังการชน สังเกตว่าพลังงานกล  $E_p + E_k$  ของการชนชนิดนี้ไม่คงตัว แต่พลังงานรวมของระบบไม่สูญเสีย เพียงเปลี่ยนรูปส่งผ่านออกจากระบบเท่านั้น

การชนโดยทั่วไปในชีวิตประจำวันจัดได้เป็นแบบไม่ยืดหยุ่น มีการสูญเสียพลังงาน แต่ถ้าวัตถุเข้าชนมีความแข็งแรงแรงสูง เราสามารถประมาณได้เป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ได้ การชนบางประเภทหลังชนก้อนวัตถุติดกัน จัดเป็นการชนไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ (perfectly inelastic collisions) เช่น การจมฝังของลูกปืนบนเนื้อไม้หลังยิงปืน พลังงานจลน์ของระบบจะสูญเสียไปมากที่สุด เมื่อเทียบกับการชนชนิดอื่นๆ

## 2. การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์และไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

### 2.1 การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์

พิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ในหนึ่งมิติ ก้อนมวล  $m_1$  และ  $m_2$  มีอัตราเร็วเชิงเส้น  $v_{1i}$  และ  $v_{2i}$  เข้าชนกันโดยจุดชนผ่านจุดศูนย์กลางมวลทั้งสอง หลังชนมวลทั้งสองมีอัตราเร็ว  $v_{1f}$  และ  $v_{2f}$  ตามลำดับ แนวการเคลื่อนที่หลังชนและก่อนชนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

จากกฎการคงตัวของโมเมนตัม

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{4.36}$$

กรณีการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ พลังงานจลน์มีค่าคงตัว  $E_{k,i} = E_{k,f}$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \quad (4.37)$$

จากสมการ (4.36) และ (4.37) ถ้าทราบค่าตัวแปรมวลและความเร็วก่อนชน เราสามารถคำนวณตัวแปรไม่ทราบค่าหลังชนได้ สมการ (4.36) เขียนได้ในรูป

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (4.38)$$

และสมการ (4.37)

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (4.39)$$

แก้สมการ (4.38) และ (4.39) ได้เงื่อนไข

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

หรือ

$$v_{1f} - v_{2f} = -(v_{1i} - v_{2i}) \quad (4.40)$$

สังเกตว่าในการชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์ อัตราเร็วสัมพัทธ์ก่อนชนและหลังชนเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้ามและอัตราเร็วการเข้าหากันก่อนชน จะเท่ากับอัตราเร็วแยกออกจากกันหลังชน

ค่าอัตราเร็วหลังชนของอนุภาคทั้งสองหาได้ในเทอมของตัวแปรมวลและอัตราเร็วก่อนชน

$$v_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{1i} + \left[ \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{2i} \quad (4.41)$$

$$v_{2f} = \left[ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right] v_{1i} + \left[ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right] v_{2i} \quad (4.42)$$

การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์บางกรณีให้ข้อมูลที่ที่น่าสนใจ เช่น

1) กรณีมวลเข้าชนเท่ากับ  $m_1 = m_2$  ทำให้

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad (4.43)$$

อนุภาคแลกเปลี่ยนอัตราเร็วกัน หรือถ่ายทอดโมเมนตัมกันโดยตรง

2) มวลลูกชนอยู่นิ่งก่อนชน  $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{1i} \quad (4.44)$$

และ 
$$v_{2f} = \left[ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right] v_{1i}$$

ถ้ารวมกรณี 1 และ 2 เข้าด้วยกัน คือมวลเท่ากันและมวลลูกชนอยู่นิ่ง ในการชนมวลเข้าชนจะถ่ายทอดพลังงานทั้งหมดให้มวลลูกชน ตัวเองจะหยุดนิ่งทันทีหลังชน สังเกตได้จากการชนกันของลูกบิลเลียดที่ไม่มีการหมุน

3) มวลลูกชนมีมวลใหญ่  $m_2 \gg m_1$  ทำให้

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx v_{2i} \quad (4.45)$$

และถ้ามวลลูกชนที่มีขนาดใหญ่เคลื่อนที่อย่างช้าๆ หรืออยู่นิ่ง

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx 0 \quad (4.46)$$

มวลที่เบากว่าเข้าชนมวลที่ใหญ่กว่ามากที่อยู่นิ่ง มวลเล็กถูกกระแทกย้อนกลับมวลใหญ่แทบจะไม่เปลี่ยนแปลงความเร็ว ตัวอย่างเช่น เรากระแทกลูกบาสเกตบอลกระทบผิวโลก

4) มวลเข้าชนมีมวลใหญ่  $m_1 \gg m_2$

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \quad (4.47)$$

ถ้ามวลลูกชนเคลื่อนที่อย่างช้าๆ หรืออยู่นิ่ง หลังการชนมวลลูกชนจะมีความเร็วเป็นสองเท่าของอัตราเร็วมวลเข้าชน การเคลื่อนที่ของมวลเข้าชน  $m_1$  จะไม่เปลี่ยนแปลง ยังคงอัตราเร็วเข้าชนอยู่หลังจากชน เช่น ในการทดลองของรัทเธอร์ฟอร์ด (Rutherford) ศึกษาการกระเจิง (scattering) ของอนุภาคอัลฟาในอะตอมของทองเพื่อศึกษาโครงสร้างของอะตอม อนุภาคอัลฟามีมวลมากกว่าอิเล็กตรอนประมาณ 8000 เท่า อนุภาคอัลฟาจะผ่านบริเวณอิเล็กตรอน โคจรอยู่โดยทะลุเลยออกไปเลย เหมือนกับไม่มีการชน แต่ถ้าเข้าชนกับนิวเคลียสของอะตอม อนุภาคอัลฟาจะกระเจิงในลักษณะต่างๆ

#### ตัวอย่างที่ 4.8

(a) จงหาสัดส่วนของพลังงานจลน์ที่ลดลงของอนุภาคนิวตรอนมวล  $m_1$  เข้าชนผ่านจุดศูนย์กลางกับนิวเคลียสมวล  $m_2$  ที่หยุดนิ่งก่อนถูกชน

(b) จงหาสัดส่วนของพลังงานจลน์ที่ลดลงของอนุภาคนิวตรอนเมื่อเข้าชนลักษณะนี้กับนิวเคลียสของธาตุตะกั่ว คาร์บอนและไฮโดรเจน

อัตราส่วนมวลนิวเคลียสของธาตุต่ออนุภาคนิวตรอน ( $m_1/m_2$ ) มีค่า 206 (ตะกั่ว), 12 (คาร์บอน) และ 1 (ไฮโดรเจน)

วิธีทำ

(a) ถ้าให้  $E_{k,i}$  = พลังงานจลน์ของนิวตรอนก่อนเข้าชน

$E_{k,f}$  = พลังงานจลน์ของนิวตรอนหลังชน

$$\begin{aligned} \text{สัดส่วนพลังงานจลน์ที่ลดลง} &= \frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2} \\ &= 1 - \frac{v_f^2}{v_i^2} \end{aligned}$$

การชนเป็นแบบยืดหยุ่นและผ่านศูนย์กลางมวล

$$v_{if} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{ii}$$

$$\therefore \frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = 1 - \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right]^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(b) สำหรับตะกั่ว  $m_2 = 206 m_1$

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(206m_1)}{(m_1 + 206m_1)^2} = 0.02 \text{ หรือ } 2\%$$

สำหรับคาร์บอน  $m_2 = 12 m_1$

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 \text{ หรือ } 28\%$$

สำหรับไฮโดรเจน

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1.0 \text{ หรือ } 100\%$$

## 2.2 การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์นิยามจากการชนที่พลังงานจลน์ไม่คงตัว  $E_{k,i} \neq E_{k,f}$  แต่โมเมนตัมยังคงตัวอยู่ สังเกตว่าพลังงานรวมของระบบยังคงตัวอยู่ เพียงแต่เปลี่ยนรูปไปนอกเหนือจากรูปแบบ

พลังงานจลน์ กรณีการชนชนิดไม่ยืดหยุ่นโดยสมบูรณ์เป็นกรณีที่ที่น่าสนใจ โดยมวลทั้งสองจะติดกัน มีความเร็วเท่ากันหลังชนหมายความว่า  $v_{1f} = v_{2f} = v_f$  จากสมการการกวดวงตัวของโมเมนตัมสามารถคำนวณหาค่าความเร็วร่วม  $v_f$  ของมวลทั้งสองได้

$$v_f = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (4.48)$$

ถ้า  $m_2$  อยู่นิ่งก่อนถูกชน

$$v_f = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (4.49)$$

อัตราเร็วของ  $m_1$  ลดลงในอัตราส่วน  $\left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)$  ถ้า  $m_1$  มีมวลมาก อัตราเร็วหลังชนจะมาก ถ้า  $m_1$  มีมวลน้อย เช่น กระสุนปืน อัตราเร็วของกระสุนปืนฝังในเนื้อไม้ก้อนใหญ่จะมีค่าน้อย

กรณีมวลระเบิดออกหรือถูกแยกออกเป็นสองส่วน สมการ (4.49) จะใช้ได้ในทางกลับกัน นั่นคือ ถ้ามวลใหญ่  $M = m_1 + m_2$  มีอัตราเร็ว  $v_f$  เมื่อแยกออกจากกันเป็นมวล  $m_1$  และ  $m_2$  มีอัตราเร็วเป็น  $v_{1i}$  และ  $v_{2i}$  ตามลำดับ ถ้า  $v_f = 0$  มวลก้อนใหญ่อยู่นิ่งก่อนแยกออกเป็นสองส่วน อัตราเร็วหลังแยก  $v_{1i} / v_{2i} = -m_2 / m_1$  มวล  $m_1$  และ  $m_2$  จะแยกออกจากกันในทิศทางตรงกันข้าม โดยแบ่งโมเมนตัมไปตามอัตราส่วนมวล

ดังนั้นสำหรับการชนกันแบบนี้ถ้าเขียนในรูปอัตราเร็วสัมพัทธ์ก่อนชนและหลังชนกัน ตามสมการ (4.40) จะได้

$$v_{1f} - v_{2f} = 0 = -(v_{1i} - v_{2i}) \quad (4.50)$$

### 2.3 การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นและสัมประสิทธิ์ของการคืนตัว

จากการที่ได้พิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์และการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์แล้วจะเห็นว่า อัตราส่วนของความเร็วแยกออกจากกันหลังชน ต่อความเร็วของการเข้าหากัน (คิดเฉพาะขนาด) เท่ากับ 1 (จากสมการ 4.40) และ 0 (จากสมการ 4.50) ตามลำดับ ซึ่งเป็นเพียงกรณีพิเศษเท่านั้น เพราะยังมีการชนกันอีกมาก ที่อัตราส่วนที่กล่าวมามีค่ามากกว่า 0 และน้อยกว่า 1 ซึ่งเรียกการชนแบบนี้ว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่น หรือการชนแบบกึ่งยืดหยุ่น (semielastic collision) ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเขียนได้ดังนี้

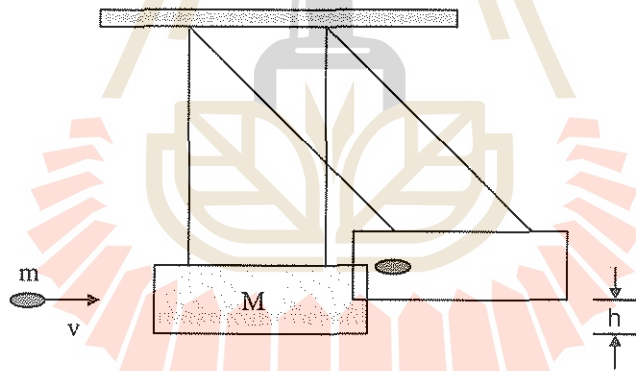
$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i}) \quad (4.51)$$

เรียก  $e$  ว่า สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว (coefficient of restitution) ซึ่งมีค่าดังนี้  
สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว  $e = 0$  ; การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์  
 $0 < e < 1$  ; การชนแบบไม่ยืดหยุ่น  
 $e = 1$  ; การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

**ตัวอย่างที่ 4.9** Ballistic Pendulum เป็นเครื่องมือตรวจวัดความเร็วต้นลูกปืน ประกอบด้วยแท่งไม้ขนาดใหญ่ มวล  $M$  แขวนด้วยเชือกคู่ ลูกปืนมวล  $m$  ถูกยิงเข้าแท่งไม้และฝังตัวอยู่ในแท่งไม้ แท่งไม้พร้อมลูกปืนจะแกว่งตัวขึ้นถึงตำแหน่งสูงสุด ให้ความสูงตามแนวตั้ง  $h$  ดังรูปที่ 4.14 ถ้า  $M = 5.4$  กิโลกรัม,  $m = 9.5$  กรัม จงคำนวณหา

- (a) ความเร็วต้นของลูกปืน ถ้า  $h = 6.3$  เซนติเมตร
- (b) พลังงานจลน์เริ่มต้นของลูกปืนและพลังงานจลน์ปริมาณเท่าใดที่ใช้ในการแกว่งตัวของแท่งไม้

วิธีทำ



รูปที่ 4.14 ลูกปืนยิงเข้าแท่งไม้

(a) โมเมนตัมคงตัว ;  $mv = (m + M)V$  (1)

พลังงานจลน์รวมหลังกระทบ เท่ากับพลังงานศักย์ในการยกตัว

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad (2)$$
$$\therefore \frac{1}{2} \left( \frac{mv}{m + M} \right)^2 = gh$$

$$v = \left( \frac{M + m}{m} \right) \sqrt{2gh}$$

แทนค่า

$$v = \left( \frac{5.4 + 0.0095 \text{ kg}}{0.0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.3 \times 10^{-2}} = 630 \text{ m/s}$$

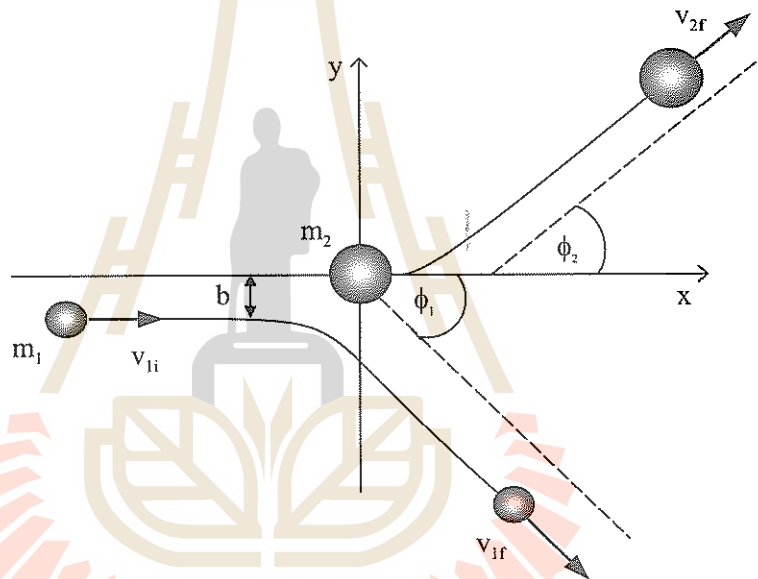
(b) พลังงานเริ่มต้นของลูกปืน  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.0095 \text{ kg})(630 \text{ m/s})^2 = 1900 \text{ J}$

พลังงานศักย์ของ  $(m + M)$   $E_p = (M + m)gh = (5.4 + 0.0095)9.8 \times 6.3 \times 10^{-2}$   
 $= 3.3 \text{ J}$

ดังนั้นพลังงานเพียงส่วนน้อย  $\frac{3.3}{1900} = 0.02$  หรือ 2% ของพลังงานเริ่มต้นเท่านั้นที่ส่งผ่านเป็นพลังงานศักย์แท้ๆ พลังงานที่เหลือเก็บกักในแท่งไม้ในรูปพลังงานภายใน หรือส่งผ่านให้กับสิ่งแวดล้อมในรูปของความร้อนหรือคลื่นเสียง

### 3. การชนสองมิติ

ถ้าอนุภาคเข้าชนกันในลักษณะที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล อนุภาคจะไม่เคลื่อนที่ในแนวเดิม รูปที่ 4.15 แสดงการชนในลักษณะสองมิติ



รูปที่ 4.15 อนุภาคสองตัวเข้าชนกันลักษณะสองมิติ

อนุภาคถูกชน  $m_2$  ถูกสมมุติให้อยู่นิ่งก่อนถูกชน มวล  $m_1$  เข้าชนด้วยอัตราเร็ว  $v_{1i}$  โดยมีแนวการเคลื่อนที่ห่างจากแนวแกน  $x$  เป็นระยะ  $b$  เราเรียกตัวแปรการเข้าชน (impact parameter) ถ้า  $b = 0$  เป็นชนิดชนผ่านศูนย์กลางมวล ถ้าค่า  $b$  มากขึ้นมุมเบี่ยงของการชนจะมากขึ้น ในกรณีตัวอย่างเราเลือกการเข้าชนอยู่ในแนวขนานแกน  $x$  ระนาบ  $xy$  เป็นระนาบการชน จากกฎการคงตัวของโมเมนตัมตามแกน  $x$

ระบบอนุภาค โมเมนตัมและการชน

$$P_{ix} = P_{fx}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \phi_1 + m_2 v_{2f} \cos \phi_2 \quad (4.52)$$

โมเมนตัมตามแกน y คงตัว

$$P_{iy} = P_{fy}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \phi_1 - m_2 v_{2f} \sin \phi_2 \quad (4.53)$$

ถ้าการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ พลังงานจลน์คงตัว

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (4.54)$$

ใช้สมการ (4.52) ถึง (4.53) แก้หาตัวแปรหลังชน ( $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ) จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $v_{1i}$ ) และเงื่อนไขอื่น เช่น กำหนดความสัมพันธ์ของ  $\phi_1$  และ  $\phi_2$  เป็นต้น

**ตัวอย่างที่ 4.10** โมเลกุลของแก๊สมีอัตราเร็ว 322 เมตร/วินาที ชนอย่างยืดหยุ่นสมบูรณ์กับอีกโมเลกุลหนึ่งที่มีมวลเท่ากันและอยู่นิ่งก่อนถูกชน หลังชน โมเลกุลแรกเคลื่อนที่ทำมุม  $30^\circ$  กับแนวเข้าชนเดิม จงคำนวณหาอัตราเร็วของแต่ละโมเลกุลหลังชนและมุมกระเจิงที่ทำกับแนวเดิม

**วิธีทำ** โมเมนตัมคงตัวตามแกน

$$\text{แกน } x ; \quad m v_{1i} = m v_{1f} \cos \phi_1 + m v_{2f} \cos \phi_2 \quad (1)$$

$$\text{แกน } y ; \quad 0 = m v_{1f} \sin \phi_1 - m v_{2f} \sin \phi_2 \quad (2)$$

และพลังงานจลน์คงตัว ;

$$\frac{1}{2} m v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m v_{2f}^2 \quad (3)$$

จากเงื่อนไข มวลเท่ากัน ชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์และมวลถูกชนอยู่นิ่งก่อนชน พิสูจน์ได้ว่า

$$\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$$

ถ้า  $\phi_1 = 30^\circ$ ;  $\phi_2 = 60^\circ$  แทนค่าในสมการ (1) และ (2)

$$v_{1i} = v_{1f} \cos 30^\circ + v_{2f} \cos 60^\circ$$

$$322 = v_{1f} \frac{\sqrt{3}}{2} + v_{2f} \frac{1}{2}$$

$$644 = \sqrt{3} v_{1f} + v_{2f} \quad (4)$$

และ

$$v_{1f}\sin 30^\circ = v_{2f}\sin 60^\circ$$

$$v_{1f} = \sqrt{3} v_{2f} \quad (5)$$

$$\therefore 644 = \sqrt{3}\sqrt{3} v_{2f} + v_{2f} = 4v_{2f}$$

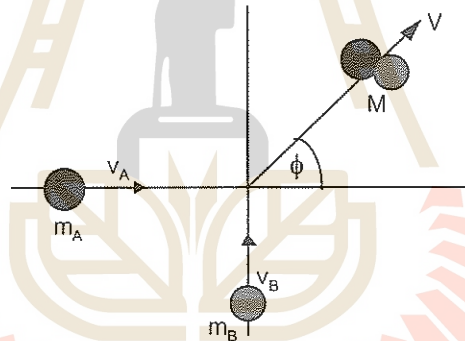
$$v_{2f} = \frac{644}{4} = 161 \text{ m/s}$$

$$v_{1f} = \sqrt{3} v_{2f} = \sqrt{3} \times 161 = 278.9 \text{ m/s}$$

ตัวอย่างที่ 4.11 นักสเก็ตน้ำแข็งเข้าชนกันและกอดกัน เป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ ถ้าคนแรกมีมวล  $m_A = 83$  กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปทางตะวันออกด้วยความเร็ว  $v_A = 6.4$  กิโลเมตร/ชั่วโมง คนที่สองมีมวล  $m_B = 55$  กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปเหนือด้วยความเร็ว  $v_B = 8.8$  กิโลเมตร/ชั่วโมง จงคำนวณ

- ความเร็วรวมของนักสเก็ตน้ำแข็งทั้งสองหลังการชน
- สัดส่วนของพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนแปลงหลังการชน

วิธีทำ



รูปที่ 4.16 นักสเก็ตน้ำแข็งเข้าชนกันและกอดกัน

- โมเมนตัมคงตัวตามแกน (รูปที่ 4.16)

$$\text{แกน x :} \quad m_A v_A = M V \cos \phi \quad (1)$$

$$\text{แกน y :} \quad m_B v_B = M V \sin \phi \quad (2)$$

โดย  $M = m_A + m_B$

$$(2) \div (1) \text{ ได้ } \tan\phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55 \text{ kg})(8.8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg})(6.4 \text{ km/h})} = 0.911$$

$$\phi = \tan^{-1}0.911 = 42.3^\circ$$

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin 42.3^\circ} = \frac{(55 \text{ kg})(8.8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg} + 55 \text{ kg}) \sin 42.3^\circ}$$
$$= 5.21 \text{ km/h}$$

(b) พลังงานจลน์รวมก่อนชน

$$= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$
$$= \frac{1}{2} (83)(6.4)^2 + \frac{1}{2} (55)(8.8)^2$$
$$= 3830 \text{ J}$$

พลังงานจลน์หลังชน

$$= \frac{1}{2} (m + M) V^2$$
$$= \frac{1}{2} (55 + 83)(5.21)^2$$
$$= 1870 \text{ J}$$

$$\text{สัดส่วนพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนแปลง} = \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} = \frac{(1870) - (3830)}{3830} = -0.51$$

หรือ 51% ของพลังงานจลน์เสียไปเนื่องจากการชนในรูปพลังงานความร้อน

ข้อสังเกต ถ้าอนุภาคมวลเท่ากัน ชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ โดยก่อนชน มวลที่ 2 อยู่นิ่ง ความเร็วหลังชนของอนุภาคทั้งสองจะทำมุมฉากกันและกันเสมอ

## สรุป

### 1. การชนในหนึ่งมิติ

อนุภาคเข้าชนกันโดยผ่านจุดศูนย์กลางมวลของอนุภาค และการเคลื่อนที่หลังการชนอยู่ในแนวเดิม ในการชนระหว่างสองอนุภาค โมเมนตัมเชิงเส้นจะคงตัวเสมอ

การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์ 1 มิติ ทั้งโมเมนตัมและพลังงานจลน์มีค่าคงตัว จากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานจะได้

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

และค่าอัตราเร็วหลังชน หาได้โดยใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงาน โดยที่

$$v_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{1i} + \left[ \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right] v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left[ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right] v_{1i} + \left[ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right] v_{2i}$$

การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ เป็นการชนที่พลังงานจลน์ไม่คงตัว แต่พลังงานของระบบยังคงตัว พลังงานจลน์ส่วนหนึ่งสูญเสียหรือเปลี่ยนรูปไป เช่น เป็นพลังงานความร้อน ลักษณะการชนนี้ มวลทั้งสองจะติดกันไปหลังการชน ทำให้ความเร็วของมวลทั้งสองมีค่าเท่ากันหลังชน โดยที่

$$v_f = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

### 2. การชนในสองมิติ

เป็นการชนกันในลักษณะที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล อนุภาคหลังการชน ไม่เคลื่อนที่ในแนวเดิม ถ้า  $m_1$  เคลื่อนที่ตามแนว (+x) ชนกับ  $m_2$  ซึ่งอยู่นิ่ง หลังชน  $m_1$  และ  $m_2$  เคลื่อนที่ในแนวทำมุม  $\theta$  และ  $\phi$  กับแกน x การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ ใช้หลักการคงตัวโมเมนตัม โดยที่

$$\text{แกน } x : m_1 v_{1i} + 0 = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi$$

$$\text{แกน } y : 0 + 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi$$

ถ้าการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ พลังงานจลน์มีค่าคงตัวตามสมการ

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

## บรรณานุกรม

---

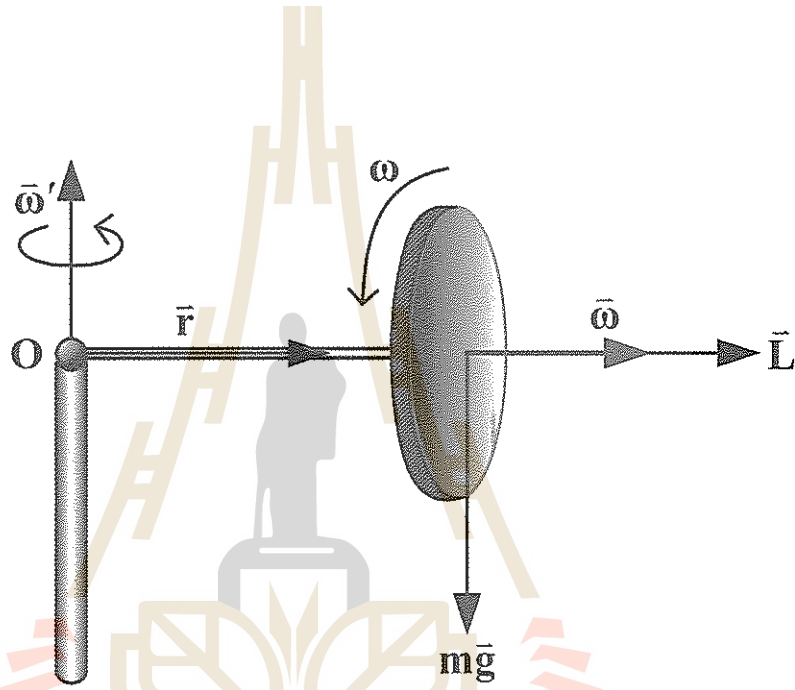
Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.).  
New York: Wiley.

Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia: Saunders  
College Publishing.

Spiegel, Murray R. 1967. **Schaum's outline of theory and problems of theoretical mechanics**.  
New York: McGraw-Hill.



การเคลื่อนที่แบบหมุน



# ตอนที่ 5.1

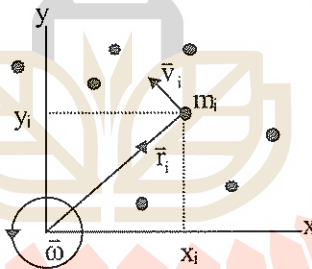
## วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

ในหน่วยที่ผ่านมาได้กล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคในแนวเส้นตรง และแม้ว่าจะได้ศึกษาการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งแล้วในเรื่อง โพรเจกไทล์ แต่ก็ศึกษาในรูปแบบของการเคลื่อนที่เชิงเส้นตรงขององค์ประกอบในแนวตั้งและแนวนอน ในหน่วยนี้จะกล่าวถึงปริมาณทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบหมุน

### 1. โมเมนต์เชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

สมมติวัตถุหมุนรอบแกน  $z$  (มีทิศออกจากหน้ากระดาษ) ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\omega$  เรเดียน/วินาที ซึ่งเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

#### 1.1 วัตถุเป็นระบบอนุภาคที่ตรึงติดกัน



รูปที่ 5.1 การหมุนของระบบอนุภาครอบแกน  $z$

สมมติระบบประกอบด้วยอนุภาคมวล  $m_1, m_2, \dots, m_n$

ให้อนุภาคที่  $i$  มีมวล  $m_i$  อยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_i, y_i, z_i)$

มวล  $m_i$  เคลื่อนที่รอบแกน  $z$  เป็นวงกลมรัศมี  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

ถ้าอนุภาคตรงติดกัน ทุกอนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกน  $z$  ด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$  เท่ากัน ไม่ว่า  $m_i$  จะอยู่ตรงส่วนใดของวัตถุ แต่ความเร็วเชิงเส้นในแนวเส้นรอบวง ( $\vec{v}_i$ ) จะมีค่าต่างกันไป ขึ้นกับรัศมี ตามสมการ

$$\vec{v}_i = \omega \times \vec{r}_i \quad (5.1)$$

จากรูป จะเห็นว่า  $\omega$  ตั้งฉากกับ  $\vec{r}_i$  ดังนั้น ขนาดความเร็วเชิงเส้นของอนุภาคที่  $i$  จึงมีค่า

$$v_i = \omega r_i$$

จากคำจำกัดความ ค่าโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่  $i$  คือ

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

ในกรณีนี้  $\vec{r}_i$  และ  $\vec{v}_i$  ตั้งฉากกัน ดังนั้นขนาดโมเมนตัมเชิงมุม  $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$  ทิศของโมเมนตัมเชิงมุม ไปทางแกน  $z$  เช่นเดียวกับความเร็วเชิงมุม จึงเขียนโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่  $i$  ในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \omega \hat{k}$$

โมเมนตัมเชิงมุมรอบแกน  $z$  รวมทั้งระบบ ( $\vec{L}_z$ ) คือ ผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค

$$\begin{aligned} \vec{L}_z &= \sum \vec{L}_i \\ &= \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k} \end{aligned}$$

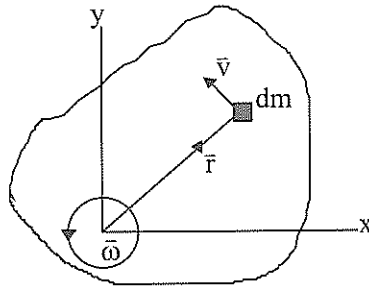
$$\vec{L}_z = I_z \omega \hat{k} \quad (5.2)$$

เมื่อ

$$I_z = \sum m_i r_i^2 \quad (5.3)$$

ปริมาณ  $I_z$  นี้ เรียกว่า โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของระบบรอบแกนหมุน  $z$  ซึ่งการคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยนี้ จะกล่าวถึงในตอนๆ 5.2

1.2 วัตถุที่มีมวลต่อเนื่องเป็นก้อน



รูปที่ 5.2 การหมุนของก้อนมวลรอบแกน z

ให้ก้อนวัตถุแข็งเกร็ง มวล M หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

แบ่งวัตถุเป็นส่วนเล็กๆ มวล dm อยู่ห่างแกนหมุน z เป็นระยะ r

มวล dm นี้ไม่ว่าจะอยู่ตรงส่วนใดของก้อนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$  เท่ากัน แต่ความเร็วตามเส้นรอบวง  $\vec{v}$  จะขึ้นกับรัศมี  $\vec{r}$  ดังสมการ

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = \omega r$$

ขนาดโมเมนตัมเชิงเส้นของมวล dm

$$dp = v dm = \omega r dm \quad \text{มีทิศไปตามเส้นรอบวง}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z,  $dL_z = \vec{r} \times d\vec{p}$

ขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z,  $dL_z = r dp = \omega r^2 dm$

มีทิศไปทางแกน z

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อน รอบแกน z,  $L_z = \omega \int r^2 dm$

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega} \tag{5.4}$$

$$I_z = \int r^2 dm \tag{5.5}$$

เมื่อ  $I_z$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

สมการ (5.4) , (5.5) เหมือนกับสมการ (5.2) , (5.3) การใส่ตัวห้อย  $z$  ไว้ เพื่อบอกว่าวัตถุหมุนรอบแกน  $z$

นักศึกษาคควรสังเกตว่า โมเมนต์ความเฉื่อย และ โมเมนต์เชิงมุมนั้นต้องบอกแกนหมุน เพราะถ้าต่างแกนหมุนก็จะมีค่าต่างกันไป สำหรับความสัมพันธ์ในสมการ (5.2) และ (5.4) นั้น ทั้ง  $L$  และ  $I$  จะต้องรอบแกนเดียวกัน

## 2. อัตราการเปลี่ยนโมเมนต์เชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตรึง

ถ้ามีทอร์กลัพธ์ภายนอก  $\vec{\Gamma}$  มากระทำกับวัตถุ โมเมนต์เชิงมุมของวัตถุจะเปลี่ยนไปตามสมการ

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{\Gamma} &= I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ \vec{\Gamma} &= I\vec{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

เมื่อ  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  เป็นความเร่งเชิงมุมของวัตถุ

หมายความว่า เมื่อมีทอร์กมากระทำ วัตถุจะหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม

สมการ (5.6) นี้มีลักษณะเดียวกับกฎข้อที่สองของนิวตันในการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

## 3. พลังงานจลน์ของการหมุน

### 3.1 ถ้าระบบเป็นอนุภาคที่ตรึงติดกัน หมุนรอบแกน $z$ ด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega$

อัตราเร็วเชิงเส้นของอนุภาค  $i$  :  $v_i = \omega r_i$

พลังงานจลน์ของอนุภาค  $i$  :  $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

พลังงานรวมของระบบ  $E_k = \sum E_{k,i} = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5.7a)$$

3.2 ถ้าระบบเป็นมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อน หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$

แบ่งวัตถุเป็นส่วนเล็กๆ มวล  $dm$  อยู่ห่างแกนหมุน  $r$

มวล  $dm$  มีอัตราเร็วตามเส้นรอบวง  $v = \omega r$

พลังงานจลน์ของมวล  $dm$  มีค่า  $dE_k = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$

พลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อน  $E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm$

$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$  (5.7b)

สมการ (5.7) นี้มีรูปแบบคล้ายพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

สรุป

1. โมเมนต์เชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

สมมติวัตถุหมุนรอบแกน z ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\omega$

กรณีที่ 1 วัตถุเป็นระบบอนุภาคที่ตรึงติดกัน

โมเมนต์เชิงมุมรวมทั้งระบบรอบแกน z คือผลรวมของโมเมนต์เชิงมุมของแต่ละอนุภาค

$$\begin{aligned} \vec{L}_z &= \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k} \\ &= I_z \omega \end{aligned}$$

เมื่อ  $I_z = \sum m_i r_i^2$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อย ของระบบรอบแกน z และ  $\omega = \omega \hat{k}$

กรณีที่ 2 วัตถุมวลต่อเนื่องเป็นก้อน

โมเมนต์เชิงมุมของวัตถุทั้งก้อน รอบแกน z คือ

$$L_z = \omega \int r^2 dm$$

$$L_z = I_z \omega$$

เมื่อ  $I_z = \int r^2 dm$  เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

## 2. พลังงานจลน์ของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตรึง

กรณีที่ 1 ระบบเป็นอนุภาคที่ตรึงติดกัน หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม  $\omega$   
พลังงานจลน์ของระบบ

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

โดย

$$I_z = \sum m_i r_i^2$$

กรณีที่ 2 ระบบเป็นมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อน  
พลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อน

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

โดย

$$I_z = \int r^2 dm$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

# ตอนที่ 5.2

## โมเมนต์ความเฉื่อย

ปริมาณทางฟิสิกส์ปริมาณหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบหมุน คือ โมเมนต์ความเฉื่อย ( $I$ ) ซึ่งสามารถเทียบได้กับมวล ( $m$ ) ของการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น

### 1. การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

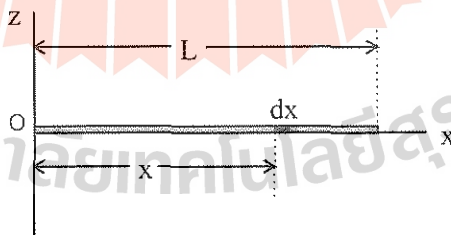
ในการคำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนั้น ทำได้โดยแบ่งมวลออกเป็นส่วนเล็กๆ  $dm$  ซึ่งอาจจะทำให้อยู่ในรูป ปริมาตร พื้นที่ หรือความยาว ได้ตามลักษณะของวัตถุ

ในกรณีที่วัตถุประกอบด้วยหลายส่วน และทราบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละส่วนรอบแกนแกนหนึ่งเป็น  $I_1, I_2 \dots$  จะหาโมเมนต์ความเฉื่อยรวมรอบแกนเดียวกัน ได้ดังนี้

$$I = I_1 + I_2 + \dots \quad (5.8)$$

ในระบบ SI โมเมนต์ความเฉื่อยมีหน่วย  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของเส้นลวดสม่ำเสมอมวล  $m$  ยาว  $L$  เมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและอยู่ที่ปลายแท่ง ดังรูปที่ 5.3 (a) และเมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและผ่านจุดศูนย์กลางแท่ง ดังรูปที่ 5.3 (b)



รูปที่ 5.3 (a) แกนหมุนอยู่ที่ปลายแท่ง

วิธีทำ

ให้ความหนาแน่นของแท่งมีค่า  $\lambda$  ต่อหน่วยความยาว  $\lambda = \frac{m}{L}$

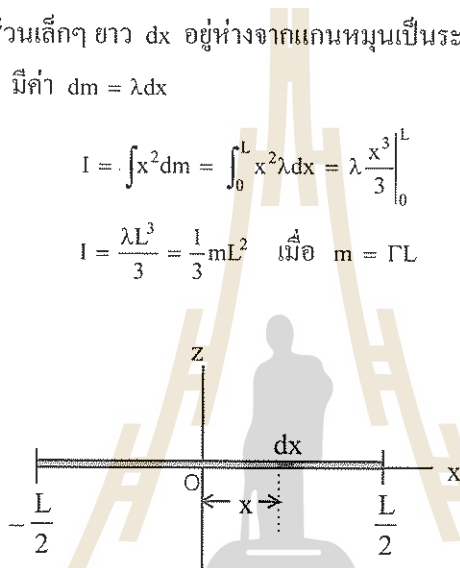
ให้แกน  $z$  เป็นแกนหมุน

แบ่งแท่งวัตถุออกเป็นส่วนเล็กๆ ยาว  $dx$  อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ  $x$

มวลของส่วนที่ยาว  $dx$  มีค่า  $dm = \lambda dx$

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_0^L$$

$$I = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2 \quad \text{เมื่อ } m = \Gamma L$$



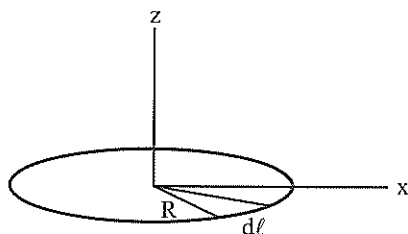
รูปที่ 5.3 (b) แกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางแท่ง

เมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและผ่านจุดศูนย์กลางแท่ง

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I = \frac{1}{12} \lambda L^3 = \frac{1}{12} mL^2$$

ตัวอย่างที่ 5.2 โมเมนต์ความเฉื่อยของห่วงวงกลม มวล  $M$  หมุนรอบแกนกลางตั้งฉากกับระนาบวงกลม



รูปที่ 5.4 ห่วงวงกลมหมุนรอบแกน  $z$

ห้วงวงกลม รัศมี R หมุนรอบแกน z

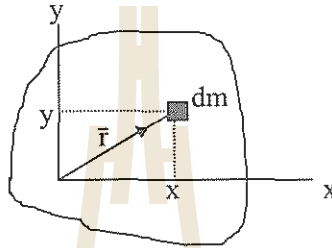
แบ่งวัตถุออกเป็นส่วนเล็กๆ ยาว  $dl$  มีมวล  $dm$

แต่ละส่วนอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ R เท่ากันหมดทุกส่วน ดังนั้น

$$I_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$$

## 2. ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก

พิจารณาวัตถุที่เป็นแผ่นแบนรูปร่างใดๆ ดังรูปที่ 5.5



รูปที่ 5.5 โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นแบนรอบแกนตั้งฉากกับแผ่น

ตั้งแกนให้แผ่นวัตถุอยู่ในระนาบ xy และให้วัตถุหมุนรอบแกน z จะหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ได้ดังนี้

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$\int x^2 dm$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน y

$\int y^2 dm$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน x

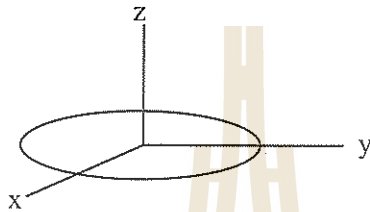
ดังนั้น

$$I_z = I_x + I_y \tag{5.9}$$

สมการ (5.9) เป็นทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก หมายความว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นแบนรอบแกนที่ตั้งฉากกับแผ่น มีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนสองแกนใดๆ ที่ตั้งฉากกัน โดยแกนทั้งสามมีจุดกำเนิดเดียวกัน และอยู่ในระนาบของแผ่น

ตัวอย่าง โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนกลางตั้งฉากกับแผ่นมีค่า  $I = \frac{mR^2}{2}$  ซึ่งหาได้จากทฤษฎีบทอินทิเกรตโดยไม่ยากนัก แต่ถ้าให้แผ่นหมุนรอบเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่น การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนนี้ โดยการอินทิเกรตโดยตรงจะยากมาก อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก ก็จะทำให้ได้โดยง่าย ดังนี้

ตั้งแกนพิสัยให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางแผ่น ให้แกนหมุน  $z$  ตั้งฉากกับแผ่นแกน  $x, y$  จะอยู่บนแผ่น และขนานกับเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่นด้วย



รูปที่ 5.6 แกนตั้งฉาก

จะเห็นว่าารหมุนรอบแกน  $x$  และหมุนรอบแกน  $y$  นั้น มีลักษณะเดียวกัน นั่นคือ

$$I_x = I_y$$

จากทฤษฎีแกนตั้งฉาก

$$I_z = I_x + I_y$$

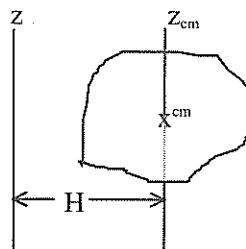
ดังนั้น

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมแบนรอบเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่า  $\frac{mR^2}{4}$

### 3. ทฤษฎีบทแกนขนาน

ถ้าทราบ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนหมุนใดๆ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น อาจพิสูจน์ได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนั้นรอบแกนอื่น ที่ขนานกับแกนเดิมมีค่าเท่ากับ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนเดิมที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลบวกกับผลคูณของมวลกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างแกนทั้งสอง



รูปที่ 5.7 แกนขนาน

ให้  $cm$  เป็นศูนย์กลางมวลของวัตถุก้อนหนึ่งซึ่งมีมวล  $m$

ให้  $z_{cm}$  เป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

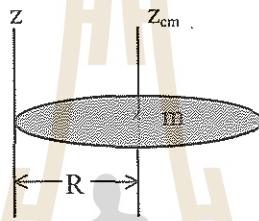
ให้  $I_{cm}$  เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน  $z_{cm}$

ถ้าเปลี่ยนแกนหมุนไปเป็นแกน  $z$  ซึ่งขนานกับแกน  $z_{cm}$  อยู่ห่างออกไปเป็นระยะ  $H$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนี้รอบแกน  $z$  มีค่า

$$I_z = I_{cm} + mH^2 \tag{5.10}$$

ตัวอย่างประโยชน์ของทฤษฎีแกนขนาน เช่น เมื่อทราบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนตั้งฉากกับแผ่น ที่ผ่านจุดศูนย์กลางแผ่น (แกน  $z_{cm}$ ) มีค่า  $I_{cm} = \frac{mR^2}{2}$  ถ้าต้องการให้แผ่นวงกลมหมุนรอบแกนตั้งฉากกับแผ่นผ่านขอบแผ่น คือหมุนรอบแกน  $z$  ดังรูปที่ 5.8 จะได้



รูปที่ 5.8 แกน  $z$  ขนานกับแกน  $z_{cm}$

$$I_z = I_{cm} + mH^2$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

#### 4. รัศมีไจเรชัน

เพื่อความสะดวกบางครั้งเราบอกค่าโมเมนต์ความเฉื่อยในเทอมของรัศมีไจเรชัน (radius of gyration,  $k$ ) โดยกำหนดค่า  $k$  ดังนี้

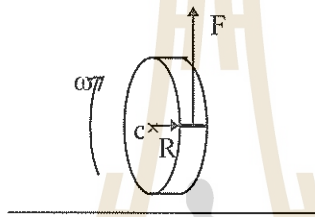
$$I = mk^2$$

หรือ

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

ตัวอย่างที่ 5.3 เครื่องเจียรไนพลอยเป็นจานหมุนใหญ่ รัศมี 0.4 เมตร มวล 100 กิโลกรัม หมุนรอบแกนด้วยความเร็ว 500 รอบ/นาที เมื่อกดพลอยที่ต้องการเจียรไนลงไปทีชอบ ทำให้เกิดแรงเสียดทานระหว่างจานกับพลอยในแนวเส้นสัมผัส 25 นิวตัน ภายในเวลาเท่าใดความเร็วของจานจึงจะลดเหลือครึ่งหนึ่ง ถ้าไม่มีแรงอื่นมาหมุนจานให้ความเร็วของจานคงที่และไม่มีแรงเสียดทานที่แกน

วิธีทำ



รูปที่ 5.9 จานหมุนเครื่องเจียรไนพลอย

$$I_c = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}100\text{kg}(0.4\text{m})^2 = 0.8\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\vec{\Gamma}_c = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\Gamma_c = -(0.4)(25\text{N}) = -10\text{N}\cdot\text{m}$$

ทอร์กเป็นลบเพราะมีทิศตรงข้ามกับการหมุน

ให้ความเร่งเชิงมุมของจานเป็น  $\alpha$

$$\Gamma_c = I_c \alpha$$

$$-10\text{N}\cdot\text{m} = (0.8\text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = -1.25\text{rad/s}^2$$

ความเร็วเชิงมุมเมื่อเริ่มต้น

$$\omega_0 = 500\text{ rev/min}$$

$$\omega_0 = \frac{500 \times 2\pi}{60} = 52.36\text{ rad/s}$$

ให้ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายเป็นครึ่งหนึ่งของความเร็วเชิงมุมเดิมภายในเวลา  $t$  วินาที จาก

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

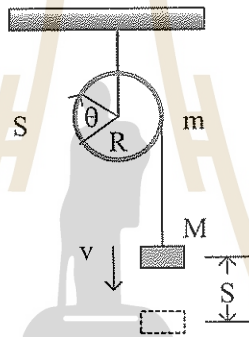
$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = -\frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{-52.36 \text{ rad/s}}{-2(1.25 \text{ rad/s}^2)}$$

$$t = 20.9 \text{ s}$$

ความเร็วลดลงเหลือครึ่งหนึ่งใน 20.9 วินาที

ตัวอย่างที่ 5.4 มวล  $M = 2$  กิโลกรัม ผูกกับเชือกเบาพันไว้กับรอกรัศมี 10 เซนติเมตร มวล  $m = 0.5$  กิโลกรัม รัศมีไอเรชั่น 8 เซนติเมตร รอบแกนหมุน ถ้าไม่คิดความเสียดที่แกนรอก จงหาความเร่งของมวล  $M$



รูปที่ 5.10 (a) รอกหมุนเนื่องจากมวล  $M$

วิธีทำ

ให้มวล  $M$  มีความเร็ว  $v$  ความเร่ง  $a$

รอกมีความเร็วเชิงมุม  $\omega$  ความเร่งเชิงมุม  $\alpha$

ความเร็วและความเร่งของมวลและรอกมีความสัมพันธ์กัน

จากรูปจะเห็นว่า ระยะทางที่มวล  $M$  เคลื่อนลงไป มีค่าเท่ากับระยะที่จุดบนขอบรอกเคลื่อนไปตามเส้นรอบวงของรอก

เมื่อมวล  $M$  เคลื่อนลงไปเป็นระยะ  $S$  ให้รอกหมุนไปเป็นมุม  $\theta$  จะได้ความสัมพันธ์ของการกระจัด

$$S = R\theta$$

หาอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = R\omega \quad (1)$$

หาอนุพันธ์ความเร็วเทียบกับเวลา

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

ให้ความตึงของเชือกเป็น T

คิดการเคลื่อนที่ของมวล M จาก

$$F = ma$$

$$Mg - T = Ma$$

$$T = Mg - Ma \quad (3)$$

คิดการหมุนของรอก จาก

$$\Gamma = I\alpha$$

$$TR = mk^2\alpha$$

$$T = \frac{mk^2a}{R^2} \quad (4)$$

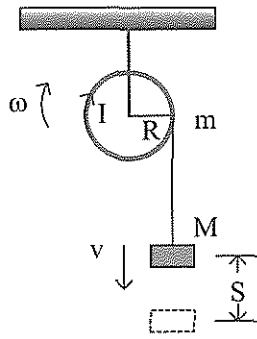
สมการ (3) และสมการ (4) เท่ากัน

$$Mg - Ma = \frac{mk^2a}{R^2}$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{mk^2}{MR^2}}$$

$$a = \frac{9.8 \text{ m/s}^2}{1 + \frac{0.5 \text{ kg}(8 \text{ cm})^2}{2 \text{ kg}(10 \text{ cm})^2}} = 8.45 \text{ m/s}^2$$

ปัญหาที่ไม่มีความฝืดเช่นนี้อาจจะคิดจากหลักการอนุรักษ์พลังงานก็ได้ ดังนี้



รูปที่ 5.10 (b) รอกหมุนเนื่องจากมวล M

เมื่อเริ่มต้น

ทั้งหมดมีความเร็วศูนย์ ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบเป็นศูนย์  
 ให้ระดับอ้างอิงอยู่ที่ตำแหน่งมวล M เดิม  
 ดังนั้น พลังงานศักย์ของระบบเป็นศูนย์

เมื่อมวล M เลื่อนลงไปเป็นระยะ S

พลังงานศักย์ของระบบ

$$E_p = -MgS$$

พลังงานจลน์ของระบบ คือพลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนของรอก ( $E_{k,0}$ ) และพลังงานจลน์ของมวล M ( $E_{k,M}$ ) คือ

$$E_{k,0} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_{k,M} = \frac{1}{2} Mv^2$$

พลังงานของระบบมีค่าคงตัว ดังนั้น

$$0 = -MgS + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

$$0 = -MgS + \frac{1}{2} (mk^2) \left( \frac{v^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2} Mv^2$$

$$MgS = \frac{1}{2} \left( \frac{mk^2}{R^2} + M \right) v^2$$

การเคลื่อนที่แบบหมุน

หาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับเวลา

$$Mg \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{mk^2}{R^2} + M \right) 2v \frac{dv}{dt}$$

$$gv = \left( \frac{mk^2}{MR^2} + 1 \right) va$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{mk^2}{MR^2}}$$

ได้คำตอบเท่ากัน

---

## สรุป

### 1. การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

ค่าโมเมนต์ความเฉื่อย รอบแกนที่ผ่านจุด O

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{หรือ} \quad I = \int r^2 dm$$

ในระบบ SI มีหน่วย  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

### 2. ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก

เป็นการคำนวณแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์ของความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน โดย

$$I_x = \sum m_i y_i^2$$

$$I_y = \sum m_i x_i^2$$

$$I_z = I_x + I_y$$

### 3. ทฤษฎีบทแกนขนาน

โมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนใดๆ จะเท่ากับโมเมนต์รอบแกนที่ขนานกับแกนนั้นผ่านจุดศูนย์กลางมวล บวกกับผลคูณของมวลทั้งหมดของวัตถุกับกำลังสองของระยะทางระหว่างสองแกนนั้น

$$I = I_{cm} + mH^2$$

### 4. รัศมีไจเรชัน

การบอกโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุในรูปของรัศมีไจเรชัน แทนด้วย  $k$

โดย  $k^2 = \frac{I}{m}$  เมื่อ  $m$  คือมวลทั้งหมดของวัตถุ



# ตอนที่ 5.3

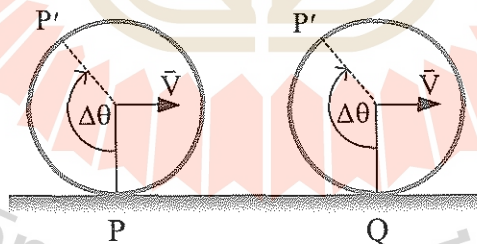
## การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งนั้นแยกพิจารณาได้เป็นสองลักษณะ คือการเคลื่อนที่เชิงเส้น (translation) หมายถึง การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นเทียบกับแกนพิกัดอ้างอิง และการหมุน (rotation) หมายถึง การหมุนของวัตถุรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น

การกลิ้ง (rolling) เป็นการเคลื่อนที่ผสมกันระหว่างการเคลื่อนที่และการหมุน ถ้าวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนสมมาตร หากแกนสมมาตรเป็นอิสระที่จะเคลื่อนที่รอบแกนอื่นได้ จะพบว่าแกนสมมาตรดังกล่าวหมุนควง (precession) ไปรอบแกนนั้น เช่น การเคลื่อนที่ของไจโรสโคป และลูกข่าง เป็นต้น

### 1. การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

ให้  $\vec{v}$  เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล และ  $\omega$  เป็นความเร็วเชิงมุมของวัตถุที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล ความเร็วสองชนิดนี้ไม่จำเป็นต้องมีความสัมพันธ์กันแต่สำหรับวัตถุทรงกลมหรือทรงกระบอกที่กลิ้งไปตามเส้นโดยไม่มีลื่นไถล ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเมื่อเทียบกับพื้นและความเร็วเชิงมุมของวัตถุ เทียบกับแกนกลิ้งนั้นจะเกี่ยวข้องกัน ซึ่งจะพิจารณาได้ดังนี้



รูปที่ 5.11 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

ให้ทรงกลมหรือทรงกระบอกรัศมี  $R$  กลิ้งในแนวแกน  $X$  โดยไม่ลื่นไถล

ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเป็น  $V$

ความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางเป็น  $\omega$

เมื่อเริ่มต้นให้ทรงกลมสัมผัสพื้นที่จุด  $P$

ภายในเวลา  $\Delta t$  ให้จุดสัมผัส  $P$  ที่ผิวทรงกลมหมุนไปอยู่ที่  $P'$

ส่วนโค้ง  $PP'$  รัศมี  $\Delta\theta$  ที่จุดศูนย์กลาง

ในช่วงเวลานั้น ทรงกลมเลื่อนจากตำแหน่ง  $P$  ตามเส้นทางเดินไปอยู่ที่  $Q$

ความยาวของเส้น โค้ง  $PP' = R\Delta\theta = R\omega\Delta t$

ความยาวตามเส้นตรง  $PQ = V\Delta t$

ระยะทั้งสองนี้เท่ากัน ดังนั้น

$$V = R\omega \quad (5.11)$$

แต่เราทราบมาก่อนแล้วว่า ความเร็วของจุดที่ขอบสัมผัสกับจุดศูนย์กลางก็มีค่า  $R\omega$  ดังนั้นสำหรับการกลิ้งโดยไม่ไถลนั้น ความเร็วของแกนกลางสัมผัสกับพื้น มีค่าเท่ากับความเร็วของจุดที่ขอบสัมผัสกับแกนกลาง

ถ้ามีการลื่นไถล

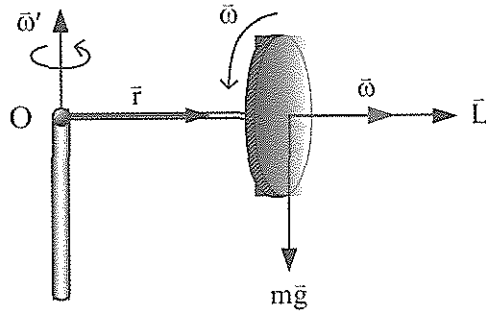
$$V \neq R\omega$$

ถ้าวัตถุกลิ้งด้วยความเร่ง ก็จะหาความสัมพันธ์ของความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลกับความเร่งของวัตถุรอบจุดศูนย์กลางมวลได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ 5.11 เทียบกับเวลาได้

$$A = R\alpha \quad (5.12)$$

## 2. การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนสมมาตร

ไจโรสโคป (gyroscope) คือวัตถุใดๆ ที่หมุนรอบแกนสมมาตร โดยที่แกนสมมาตรนั้นเป็นอิสระที่จะหมุนเบนไปรอบแกนอื่นได้ ตัวอย่างเช่น การหมุนของลูกข่างหรือของวงล้อรอบแกนที่วางอยู่บนจุดรองรับ ดังรูปที่ 5.12



รูปที่ 5.12 การหมุนควงของไอโรสโคป

ถ้าล้อไม่หมุน แกนของล้อจะวางอยู่บนจุด \$O\$ ไม่ได้ เพราะน้ำหนักของล้อจะทำให้ล้อตกลงมา แต่ถ้าล้อหมุนอย่างรวดเร็วมาก ทอร์กรอบจุด \$O\$ เนื่องจากน้ำหนักล้อจะทำให้แกนสมมาตรนี้หมุนรอบแกนตั้งที่จุดรองรับ \$O\$ เราเรียกการหมุนของแกนสมมาตรรอบแกนตั้งนี้ว่าการหมุนควง วัตถุก็ยังคงหมุนต่อไปได้โดยไม่ตกลงมา

ให้ความเร็วเชิงมุมของวงล้อรอบแกนสมมาตรเป็น \$\omega\$ และความเร็วเชิงมุมของแกนสมมาตรที่หมุนวนรอบแกนตั้งเป็น \$\omega'\$

จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ \$\omega \gg \omega'\$ จึงประมาณได้ว่า โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบอยู่ในทิศของแกนสมมาตรตามทิศการหมุนของล้อ นั่นคือ ประมาณว่า

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบแกนสมมาตร  $L = I\omega$  มีทิศไปทางเดียวกับ \$\omega\$

น้ำหนักของวัตถุ  $\vec{W} = m\vec{g}$  ทำให้เกิดทอร์กรอบจุด \$O\$ ที่รองรับแกนหมุน

$$\vec{\Gamma}_O = \vec{r} \times m\vec{g}$$

ทอร์กนี้มีทิศตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย \$\vec{r}\$ และ \$m\vec{g}\$ ดังนั้น ทอร์กจึงมีทิศตั้งฉากกับ \$\vec{L}\$

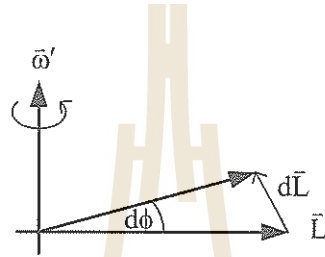
จาก 
$$\vec{\Gamma}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$d\vec{L}_O = \vec{\Gamma}_O dt$  มีทิศไปทางเดียวกับทอร์ก ดังนั้น  $d\vec{L}$  จึงตั้งฉากกับ \$\vec{L}\$

ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม  $L$  มีค่าคงตัว แต่ทิศของ  $\vec{L}$  เปลี่ยนไปในแนวตั้งฉากกับแนวเดิม นั่นคือ แกนของล้อจะต้องหมุนวนรอบแนวตั้งที่จุด \$O\$

สมมติในเวลา  $dt$  แกนล้อหมุนตามแนวราบกวาดมุม  $d\phi$

ความเร็วเชิงมุมของการหมุนควง  $\omega' = \frac{d\phi}{dt}$



รูปที่ 5.13 การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม

จากรูปที่ 5.13

$$dL = Ld\phi$$

$$\Gamma dt = I\omega d\phi$$

$$\Gamma = I\omega \frac{d\phi}{dt} = I\omega\omega'$$

$$mgr = I\omega\omega'$$

ความเร็วเชิงมุมของการหมุนควง  $\omega' = \frac{mgr}{I\omega}$

กรณีลูกข่างก็เช่นเดียวกัน ทอร์กเนื่องจากน้ำหนักลูกข่างมีทิศตั้งฉากกับ  $\vec{L}$  ทำให้แกนของลูกข่างหมุนวนเป็นรูปกรวย

ในการเคลื่อนที่จริงนั้นแกนสมมาตรของล้อ หรือลูกข่างจะไม่หมุนควงไปในแนวราบตลอดเวลา แต่จะขึ้นๆ ลงๆ ตลอดทาง การหมุนขึ้นลงนั้นเรียกว่าการหมุนส่าย (nutaton) สมการการเคลื่อนที่อย่างสมบูรณ์นั้นยุ่งยากเกิน ไปในระดับนี้ นักศึกษาจะได้ทราบในการเรียนระดับต่อไป

## สรุป

### 1. การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

พลังงานจลน์ของวัตถุที่กำลังกลิ้งประกอบด้วยพลังงานจลน์ของการหมุนรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวลกับพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล โดยที่

$$E_k = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{I_{cm}}{R^2} + M \right] v_{cm}^2$$

หากวัตถุกลม (ทรงกลม ทรงกระบอกกลม และวงแหวน) ถูกปล่อยให้กลิ้งลงตามระนาบเอียงจากระดับความสูง  $h$  โดยไม่ลื่นไถล ให้ใช้หลักการคงตัวของพลังงาน

$$E_{k, \text{bottom}} = E_{p, \text{top}}$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{I_{cm}}{R^2} + M \right] v_{cm}^2 = Mgh$$

### 2. การหมุนรอบแกนสมมาตร

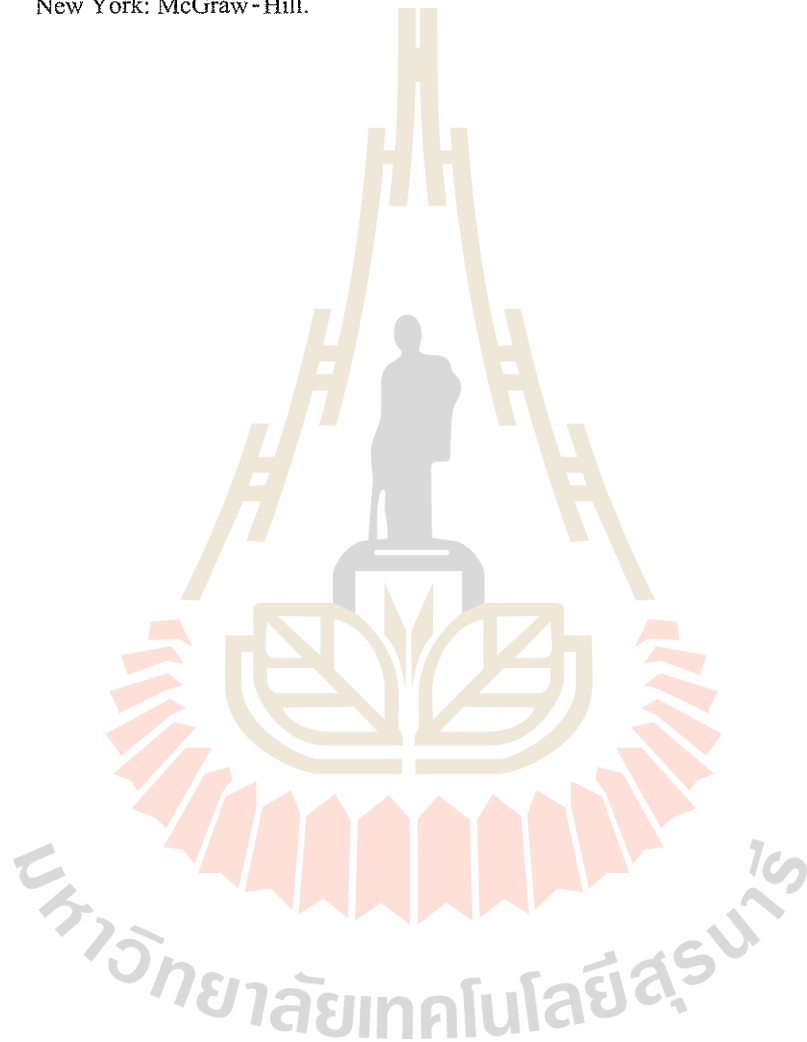
ใจโรตโคป คือ วัตถุใดๆ ที่หมุนรอบแกนสมมาตร โดยที่แกนสมมาตรนั้นเป็นอิสระที่จะหมุนเบนไปรอบแกนอื่นได้ ตัวอย่างเช่น การหมุนของลูกข่าง หรือวงล้อรอบแกนที่วางอยู่บนจุดรองรับ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

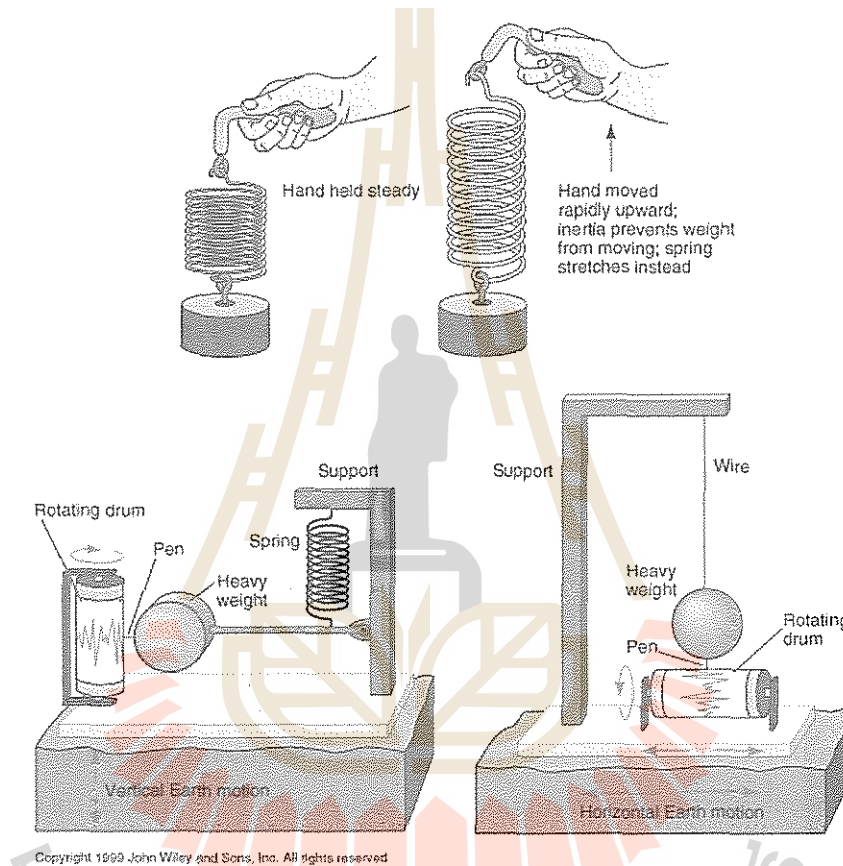
## บรรณานุกรม

---

- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: Wiley.
- Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Spiegel, Murray R. 1967. **Schaum's outline of theory and problems of theoretical mechanics**. New York: McGraw-Hill.



การแกว่งกวัด



โดย รองศาสตราจารย์ ดร. ตัณนา ผาติเสนะ

## การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เมื่อวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามเวลา ถือว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่ ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีลักษณะกลับไปกลับมาซ้ำรอยเดิมอยู่ตลอดเวลา เราเรียกรการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่เป็นคาบ (periodic motion) ตัวอย่างที่เราพบและมักอ้างอิงอยู่เสมอได้แก่ การแกว่งกวัดของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริง โดยไม่คิดแรงเสียดทาน การสั่นของเส้นลวด เป็นต้น

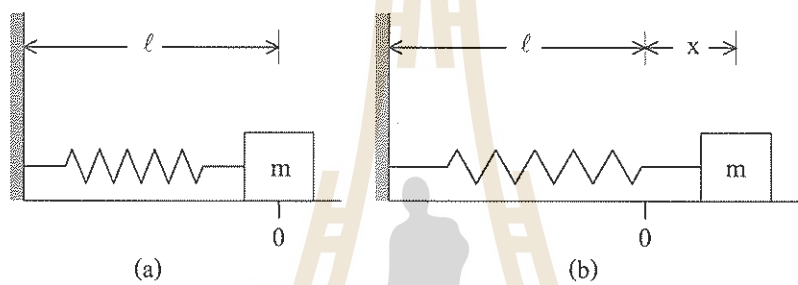
การเคลื่อนที่เป็นคาบอาจทำให้ปริมาณบางอย่างเปลี่ยนแปลงได้ตลอดเวลา จึงถือว่าเป็นการแกว่งกวัด (oscillation) เช่นกัน เช่น การแกว่งกวัดของกระแสหรือประจุในวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย ขดลวดเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ ความหนาแน่นของอากาศเมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่าน การแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแสง เราเรียกรการแกว่งกวัดที่มีลักษณะเป็นคาบโดยผ่านตำแหน่ง สมดุลเพียงตำแหน่งเดียวว่าการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก (harmonic oscillation) ในกรณีที่มีการแกว่งกวัดผ่านตำแหน่งสมดุลมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง เราเรียกว่าการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก (anharmonic oscillation)

### 1. สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

การแกว่งกวัดเกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามของแรง (force field) สนามของแรงที่ขึ้นกับตำแหน่งเพียงอย่างเดียวไม่ขึ้นกับเวลาเรียกว่า สนามสถิต (static field) เช่น สนามแรงโน้มถ่วงของโลก สนามของแรงจากลวดสปริง สนามของแรงอีกประเภทเป็นสนามของแรงที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น สนามกระแสสลับ เป็นต้น ในตอนนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการแกว่งกวัดในสนามสถิตเท่านั้น

เนื่องจากการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกตามตัวอย่างที่กล่าวในตอนต้น มีลักษณะที่คล้ายกันและสามารถอธิบายด้วยสมการการเคลื่อนที่แบบเดียวกัน เราจึงเริ่มต้นศึกษาจากตัวอย่างที่ง่ายที่สุด แต่เป็นรากฐานของการศึกษาการแกว่งกวัดที่ซับซ้อนอื่นๆ ตัวอย่างที่ง่ายที่สุด คือ การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริงเบา โดยไม่คิดความเสียดทานใดๆ ทั้งสิ้น การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (simple harmonic motion) ซึ่งมักเรียกสั้นๆ ว่า SHM และเรียกระบบมวลที่แกว่งกวัดในสนามสถิตว่า ตัวแกว่งกวัด (oscillator)

สมมติวัตถุมวล  $m$  วางอยู่บนโต๊ะที่พื้นไม่มีความเสียดทานเลย วัตถุก้อนนี้ยึดติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงเบา โดยปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุ ความยาวจากปลายข้างหนึ่งของสปริงที่ตรึงอยู่กับที่ไปจนถึงจุดกึ่งกลางมวลของวัตถุมีค่าเท่ากับ  $\ell$  ดังรูปที่ 6.1 (a) ถ้าดึงวัตถุให้เคลื่อนที่ไปในแนวราบเป็นระยะทาง  $x$  ดังรูปที่ 6.1 (b) แล้วปล่อย วัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมาเรื่อยๆ ตำแหน่งสมดุล 0



รูปที่ 6.1 แสดงตำแหน่งของมวลก่อนและหลังการดึง

จากกฎของฮุก (Hooke's law) จะมีแรงดึงให้วัตถุกลับมาที่ตำแหน่งสมดุลเสมอเรียกว่า แรงดึงกลับ และเป็นปฏิภาคกับระยะยืด  $x$  กล่าวคือ

$$F = -kx \quad (6.1)$$

$k$  เป็นค่าคงตัว เรียกได้หลายแบบคือ ค่าคงตัวสปริง (spring constant) ค่าคงตัวความยืดหยุ่น (elastic constant) หรือตัวประกอบความแข็งตึง (stiffness factor)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$ma = -kx$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.2)$$

โดยที่

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (6.3)$$

สมการ (6.2) เป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีตัวแปร  $x$  เป็นฟังก์ชันของเวลา ในที่นี้  $x$  เป็นการกระจัดของการแกว่งกวัด ซึ่งในบางครั้งอาจระบุเป็นมุมหรือตัวแปรอื่นก็ได้ การแก้สมการ (6.2) เราต้องหาฟังก์ชัน  $x(t)$  ซึ่งอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลามีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่งคูณกับค่าลบของฟังก์ชันเริ่มต้นนั้น ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์มีสมบัติดังกล่าว นอกจากนี้มุม  $\theta$  อาจเขียนในเทอม  $\omega t$  โดยที่  $\omega$  คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที และ  $t$  คือเวลา  $\omega$  ในที่นี้เป็นค่าคงตัว ซึ่งแตกต่างจากกรณีของการหมุนซึ่งเปลี่ยนแปลงค่าได้ตลอดเวลา

การแก้สมการ (6.2) อาจทำได้ง่ายดังนี้ เนื่องจาก

$$v = \frac{dx}{dt}$$

และ

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

สมการ (6.2) หลังจากการอินทิเกรตเทียบกับ  $x$  แล้วจะกลายเป็น

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{\omega^2}{2} x^2 + c \tag{6.4}$$

$c$  คือค่าคงตัวของอินทิเกรต

เมื่อ  $x$  มีค่าสูงสุด  $\frac{dx}{dt}$  จะเท่ากับศูนย์ ค่าสูงสุดของ  $x$  นับจากตำแหน่งสมดุลเรียกว่า แอมพลิจูด (amplitude) แทนด้วยสัญลักษณ์  $A$  ดังนั้น จากเงื่อนไข  $\frac{dx}{dt} = 0$  ที่  $x = A$  ค่าของ  $c$  ในสมการ (6.4)

คือ  $c = \frac{\omega^2}{2} A^2$  แทนค่า  $c$  นี้ลงในสมการ (6.4) จะได้

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

หรือ

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2} \tag{6.5}$$

ซึ่งเป็นอัตราเร็วของตัวแกว่งกวัดที่ตำแหน่ง  $x$  และมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่ง  $x = 0$  สมการ (6.5) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$$

หลังจากการอินทิเกรตทั้งสองข้างแล้วจึงได้

$$\sin^{-1} \left( \frac{x}{A} \right) = \omega t + \phi$$

หรือ

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \tag{6.6}$$

$\phi$  คือค่าคงตัวของอินทิเกรต ซึ่งหาได้จากการกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้น มุม  $(\omega t + \phi)$  เรียกว่า มุมเฟส (phase angle) หรือเรียกสั้นๆ ว่า เฟส  $\phi$  เรียกว่าเฟสเริ่มต้นหรือค่าคงตัวเฟส ซึ่งเป็นมุมเฟส ที่เวลา  $t = 0$  และ  $\omega$  คือความถี่เชิงมุม ใดๆก็ตามสมการ (6.6) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (6.2) อาจมีรูปแบบเป็นฟังก์ชัน โคไซน์ได้เช่นกัน ทั้งนี้ขึ้นกับเงื่อนไขเบื้องต้นเป็นสำคัญ

เฟสเริ่มต้น  $\phi$  มักกำหนดโดยค่าการกระจัดและความเร็วที่  $t = 0$  นั่นคือเราต้องทราบทั้ง  $x(0)$  และ  $v(0)$  ยกเว้นที่ตำแหน่ง  $x = \pm A$  เราไม่จำเป็นต้องกำหนดค่า  $v(0)$  การกำหนดค่าใดค่าหนึ่งแต่เพียงอย่างเดียว ไม่อาจบอกค่า  $\phi$  ได้แน่นอน เช่น ถ้ากำหนด  $x(0) = 0$  ค่าของ  $\phi$  มีได้ 2 ค่าคือ 0 หรือ  $\pi$  จึงต้องกำหนด  $v(0)$  ด้วยเพื่อทราบค่า  $\phi$  ว่าเป็น 0 หรือ  $\pi$  อย่างไรก็ตาม เราสามารถเลือกค่า  $\phi$  ได้ตามความพอใจ แต่ต้องกำหนดเวลาเริ่มต้นให้เหมาะสมกับสมการ เช่น ถ้าเรากำหนดสมการเป็น  $x = A \sin \omega t$  เราต้องให้เวลาเริ่มต้นหรือ  $t = 0$  ที่ตำแหน่งสมดุล แต่ถ้าเรากำหนดสมการเป็น  $x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \omega t$  เราต้องให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุดเป็น  $A$  เป็นต้น

คาบของการแกว่งกวัดซึ่งมักเรียกสั้นๆ ว่า คาบ (period) คือ เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบ 1 รอบ หรือเวลาสำหรับมุมเฟสเพิ่มขึ้น  $2\pi$  ดังนั้น  $\sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega(t + T)$  นั่นคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.7)$$

ความถี่  $f$  ซึ่งเป็นจำนวนรอบของการแกว่งกวัดใน 1 วินาที คือ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.8)$$

ในสมการ (6.6) ถ้าเราให้  $\phi = \frac{\pi}{2} + \phi'$  ดังนั้น

$$x = A \cos(\omega t + \phi') \quad (6.9)$$

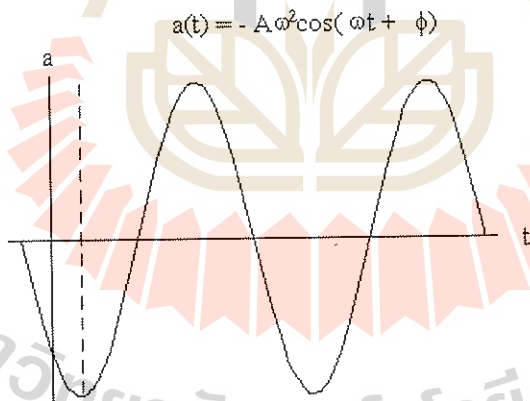
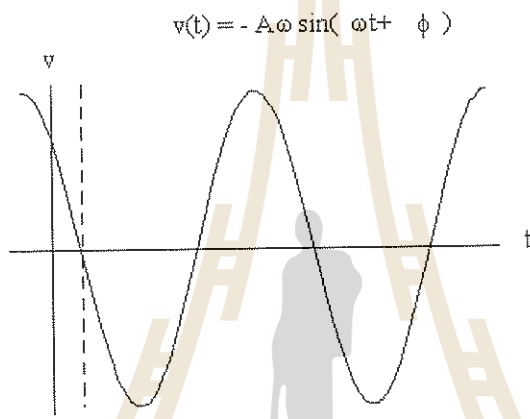
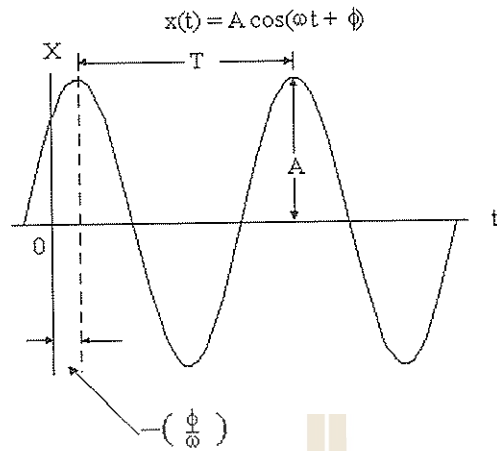
จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่แบบ SHM อาจแทนได้ด้วยฟังก์ชันโคไซน์เช่นกัน

จากสมการ (6.5) แสดงว่า ความเร็วของวัตถุที่ตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางได้สองทิศทาง ดังนั้นการระบุ  $x(0)$  เพียงอย่างเดียว จึงไม่เพียงพอสำหรับการกำหนดเฟสเริ่มต้น จำเป็นต้องระบุทิศของ  $v(0)$  ด้วยดังได้กล่าวในตอนต้นแล้ว

อัตราเร่งของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (6.10)$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น  $\omega^2 A$  และมีทิศตรงข้ามกับการกระจัด  $x$  เสมอ



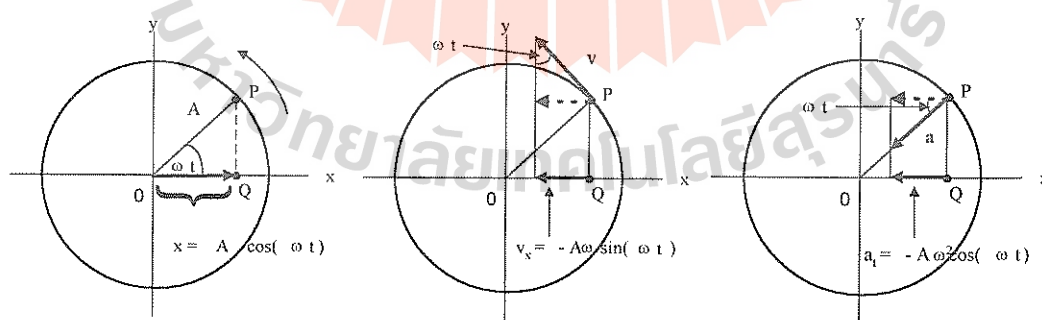
รูปที่ 6.2 แสดงการกระจัด อัตราเร็วและอัตราเร่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ถ้าเฟสเริ่มต้น  $\phi$  เท่ากับศูนย์ แกนในแนวตั้งจะเลื่อนมาที่ตำแหน่งที่เป็นเส้นประ

## 2. แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เราอาจเข้าใจการแกว่งกวัดแบบ SHM ได้ดียิ่งขึ้นหากเปรียบเทียบกับเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยใช้วงกลมอ้างอิง (reference circle) กล่าวคือ พิจารณาจุด P ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี A ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\omega$  สมมติจุด P เริ่มต้นอยู่ในแนวแกน x ที่ตำแหน่ง  $x = A$  และเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ  $t$  มุมที่รัศมี A ทำกับแกน x คือ  $\omega t$  ดังรูปที่ 6.3 (a) ฉายา (projection) ของจุด P บนแกน x คือจุด Q เมื่อจุด P เคลื่อนที่รอบวงกลม ฉายา Q จะแกว่งกวัดไปและกลับตามแนวแกน  $\pm x$  ในลักษณะ SHM การกระจัดของ Q นับจากจุดเริ่มต้น 0 กำหนดโดย  $x = A \cos \omega t$  ซึ่งเหมือนกับสมการ (6.9) โดยที่เฟสเริ่มต้น  $\phi' = 0$

อย่างไรก็ตาม เราอาจเลือกเฟสเริ่มต้นที่ตำแหน่งใดๆ บนวงกลมก็ได้ โดยให้เริ่มนับเวลาที่  $t = 0$  และ SHM จะเป็นฉายาของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยไม่จำเป็นต้องตามแนวแกน x เท่านั้น

รูปที่ 6.3 (b) แสดงเวกเตอร์ของความเร็ว  $v$  ของจุด P ซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $A\omega$  ฉายาของเวกเตอร์  $v$  บนแกน x คือ  $v_x = -A\omega \sin \omega t$  เครื่องหมาย - แสดงให้เห็นว่าเคลื่อนที่ในทิศทาง  $-x$  ทำนองเดียวกัน รูปที่ 6.3 (c) แสดงเวกเตอร์ของความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของจุด P ซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $A\omega^2$  และฉายาของความเร่งในแนวแกน x คือ  $a_x = -A\omega^2 \cos \omega t$  ดังนั้น วงกลมอ้างอิงจึงใช้เป็นเครื่องมือวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบ SHM ได้เป็นอย่างดี



(a) ตำแหน่ง  $x$  ของจุด Q

(b) ความเร็ว  $v_x$  ของจุด Q

(c) ความเร่ง  $a_x$  ของจุด Q

รูปที่ 6.3 แสดงวงกลมอ้างอิงสำหรับ SHM ของจุด Q ซึ่งเคลื่อนที่ไป-กลับในแนวแกน  $\pm x$

### 3. พลังงานของตัวแกว่งกวัด

สมมติเราให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้นการกระจัดที่เวลา  $t$  ใดๆ จึงกำหนดโดย

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (6.11)$$

พลังงานศักย์ของตัวแกว่งกวัดในขณะใดๆ คือ

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} kx^2 \\ &= \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (6.12)$$

จะเห็นได้ว่าพลังงานศักย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ  $\frac{1}{2} kA^2$  และมีค่าต่ำสุดเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสมดุล ความเร็วของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของตัวแกว่งกวัดที่ขณะใด คือ

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} mv^2 \\ &= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (6.13)$$

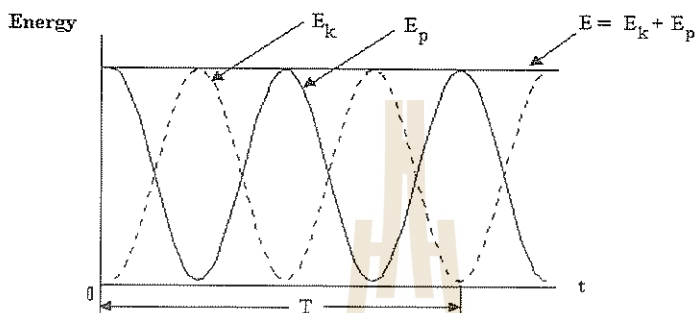
ซึ่งมีค่าสูงสุดเท่ากับ  $\frac{1}{2} kA^2$  ที่ตำแหน่งสมดุล

พลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์หรือ

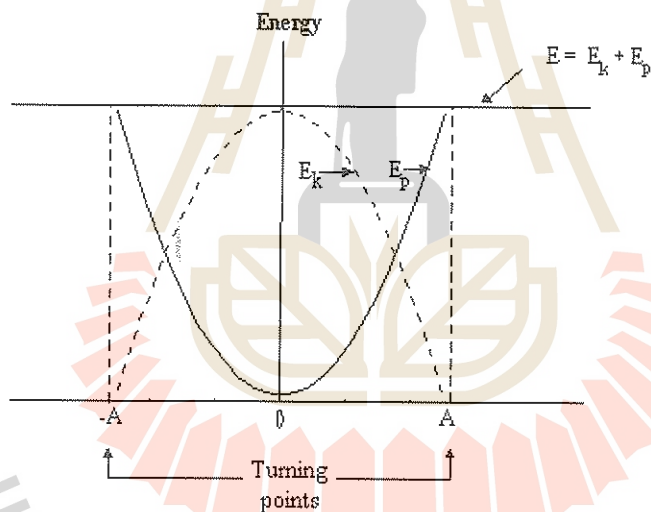
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} kA^2 \quad (6.14)$$

กราฟของพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมของระบบแสดงในรูปที่ 6.4

(a)



(b)



รูปที่ 6.4 แสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวม  
ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา รูป (a) และการกระจัด รูป (b)

จะเห็นได้จากสมการ (6.14) ว่าพลังงานรวมมีค่าคงตัวและเท่ากับ  $\frac{1}{2}kA^2$  ที่ตำแหน่งสมดุล พลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ แต่พลังงานจลน์มีค่าสูงสุดที่ตำแหน่งอื่นๆ ผลรวมของพลังงานทั้งสองจะคงตัวเสมอคือเท่ากับ  $\frac{1}{2}kA^2$  ที่ตำแหน่งซึ่งการกระจัดมีค่าสูงสุดพลังงานจลน์จะเท่ากับศูนย์ แต่พลังงานศักย์มีค่าสูงสุด นอกจากนี้จะเห็นได้จากรูปที่ 6.4 ว่าค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ในหนึ่งคาบจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของพลังงานศักย์พอดี และค่าเฉลี่ยของแต่ละพลังงานคือ  $\frac{1}{4}kA^2$

## สรุป

การกระจัดของการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว สามารถเขียนได้ในรูปของไซน์หรือโคไซน์ โดยขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเบื้องต้น ในบางครั้งเราอาจใช้วงกลมอ้างอิงเปรียบเทียบการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียวได้ง่ายขึ้น พลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดจะคงตัวเสมอ แต่อาจเปลี่ยนจากพลังงานหนึ่งไปสู่พลังงานหนึ่งได้ เช่น จากพลังงานจลน์เปลี่ยนไปเป็นพลังงานศักย์ แต่ค่าของพลังงานจะเท่าเดิมเสมอ



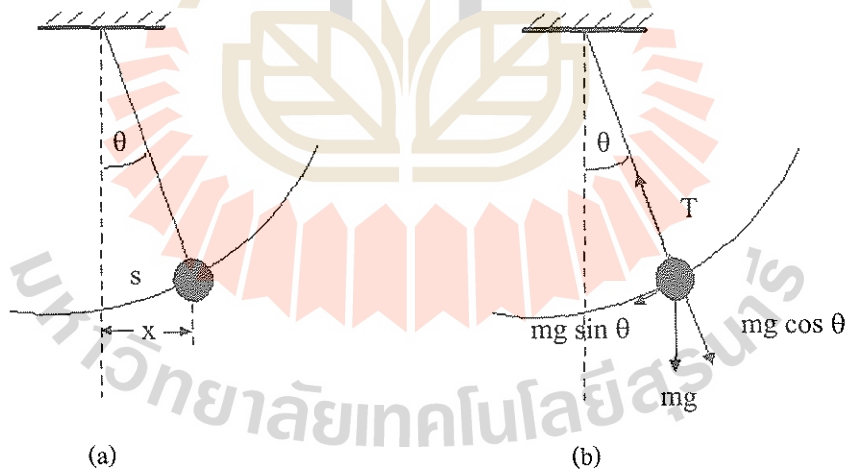
## ตอนที่ 6.2

### ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เมื่อออกแรงทำให้ระบบมีการเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งสมดุลจะมีแรงดึงกลับให้ระบบกลับสู่ตำแหน่งสมดุล และเมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบ SHM คือสมการ (6.2) ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างที่มีการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยกำหนด  $\omega$  ซึ่งเป็นความถี่เชิงมุม และคาบ  $T$  ในเทอมของตัวแปรค่าต่างๆ ซึ่งขึ้นกับระบบที่แตกต่างกันไป

#### 1. ลูกตุ้มเชิงเดียว

ลูกตุ้มเชิงเดียว (simple pendulum) ประกอบด้วยมวล  $m$  ผูกติดกับเชือกยาว โดยปลายอีกข้างหนึ่งของเชือกตรึงอยู่กับที่เมื่อตั้งให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่ไปเป็นมุม  $\theta$  จากตำแหน่งสมดุลซึ่งอยู่ในแนวตั้ง แรงดึงกลับเท่ากับ  $-mg \sin \theta$  สำหรับแรงตึงในเส้นเชือก  $T$  และแรง  $mg \cos \theta$  ไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่แต่อย่างใด เมื่อการกระจัดมีค่าน้อย ส่วนโค้ง  $s$  จะมีค่าประมาณเท่ากับพิสัย  $x$  หรือ  $s \approx x$  ดังแสดงในรูปที่ 6.5



รูปที่ 6.5 แสดงการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียว

$\sin \theta$  สามารถกระจายออกเป็นอนุกรมได้ดังนี้

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

ในกรณีที่  $\theta$  เป็นมุมเล็กๆ (วัดเป็นเรเดียน) เราพอจะประมาณได้ว่า

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{x}{\ell}$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของระบบหาได้จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน คือ

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -mg \sin \theta \\ &= -mg \frac{x}{\ell} \end{aligned}$$

หรือ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

โดยที่

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

แต่

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ดังนั้น

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (6.15)$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า คาบ  $T$  ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้ม แต่ขึ้นกับความยาวของเชือกและค่า  $g$  เท่านั้น

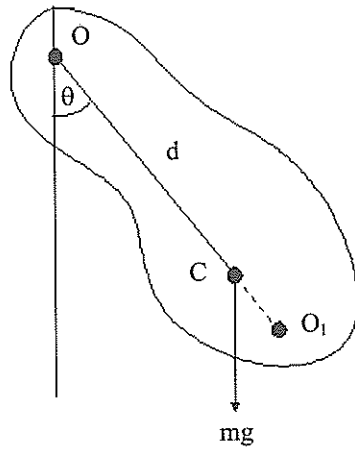
นอกจากนี้ สมการ (6.15) ใช้ได้กับกรณีที่  $\theta$  มีค่าไม่มากนัก ในกรณีที่  $\theta$  เป็นมุมค่อนข้างโต สมการ (6.15) จะประมาณได้เป็น

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \frac{1^2 \sin^2 \theta}{2^2 \times 2} + \frac{1^2 \times 3^2 \sin^2 \theta}{2^2 \times 4^2 \times 2} + \dots \right\} \quad (6.16)$$

ดังนั้น หากเราเพิ่มเทอมต่างๆ เข้าไปมากเพียงใด คาบที่ได้จะมีค่าแม่นยำมากขึ้นตามไปด้วย

## 2. ลูกตุ้มฟิสิกส์

วัตถุแข็งเกร็งที่แกว่งกวัดรอบจุดหนึ่งที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลเรียกว่าลูกตุ้มฟิสิกส์ (physical pendulum) ให้  $O$  เป็นจุดหมุนซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล  $C$  เป็นระยะ  $d$  ดังรูปที่ 6.6 เมื่อเส้น  $OC$  ทำมุม  $\theta$  กับแนวตั้ง ทอร์กดึงกลับในที่นี้มีค่าเท่ากับ  $-mgd \sin \theta$  และจาก  $\tau = I\alpha$  โดยที่  $I$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบ  $O$  ดังนั้น



รูปที่ 6.6 แสดงลูกตุ้มฟิสิกัล

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \sin \theta$$

เมื่อ  $\theta$  มีค่าไม่มากนักจะได้  $\sin \theta \approx \theta$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{mgd\theta}{I} \\ &= -\omega^2\theta \end{aligned}$$

โดยที่

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{6.17}$$

คาบของการแกว่งกวัด คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{6.18}$$

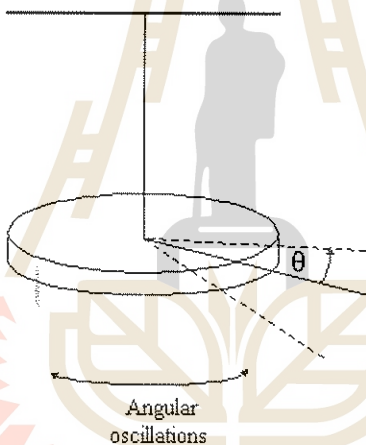
เนื่องจาก  $I$  เป็นฟังก์ชันของมวลของวัตถุ ดังนั้นคาบของการแกว่งกวัดในสมการ (6.18) จึงไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุแต่อย่างใด และเราอาจใช้หลักการของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้หาค่า  $I$  ของวัตถุที่มีรูปร่างต่างๆ ซึ่งไม่อาจคำนวณโดยคณิตศาสตร์ได้

ความยาวสมมูล (equivalent length) ของลูกตุ้มฟิสิกัล หรือ  $\ell_{eq}$  คือความยาวของลูกตุ้มเชิงเดี่ยวที่มีคาบเท่ากับคาบของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้กล่าวคือ  $\ell_{eq} = \frac{I}{md}$  และจากทฤษฎีแกนขนาน  $I = I_c + md^2$  ซึ่งมีค่ามากกว่า  $md^2$  เมื่อ  $I_c$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลจึงเห็นได้ว่า  $\ell_{eq}$  จะต้องมากกว่า  $d$  เสมอ

จุด  $O_1$  ซึ่งอยู่ในแนว  $OC$  และระยะ  $OO_1 = l_{eq}$  เราเรียกจุด  $O_1$  ว่าศูนย์กลางการแกว่งกวัด (center of oscillation) ของลูกตุ้มฟิสิกส์ ตำแหน่งของ  $O$  และ  $O_1$  สามารถแทนที่กันได้ กล่าวคือ ถ้าเราให้  $O_1$  เป็นจุดหมุน  $O$  จะกลายเป็นศูนย์กลางการแกว่งกวัด โดยที่คาบของการแกว่งกวัดจะยังคงเท่าเดิม

### 3. ลูกตุ้มชนิดบิด

ลูกตุ้มชนิดบิด (torsional pendulum) ประกอบด้วยแผ่นโลหะกลมแบนตรงจุดศูนย์กลางของแผ่นยึดติดกับลวดโลหะยาว ซึ่งปลายอีกข้างหนึ่งของลวดห้อยแขวนในแนวตั้ง ดังรูปที่ 6.7



รูปที่ 6.7 แสดงลูกตุ้มชนิดบิด

เมื่อเราออกแรงบิดแผ่นกลมเป็นมุม  $\theta$  แล้วปล่อยแผ่นกลมจะบิดกลับไปกลับมาลวดโลหะที่ถูkbิดไปด้วยทำให้เกิดแรงคืนกลับมีค่าเท่ากับ  $-C\theta$  โดยที่  $C$  คือค่าคงตัวการบิด (torsional constant) ของลวดโลหะ เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับการหมุนจะได้

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

หรือ 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \quad (6.19)$$

โดยที่ 
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

คาบของการแกว่งกวัดในกรณีนี้ คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad (6.20)$$

ถ้าลวดโลหะมีรัศมี  $r$  ยาว  $l$  และมีมอดูลัสของสภาพแข็งเกร็ง หรือมอดูลัสเฉือนของลวดโลหะเป็น  $s$  (รายละเอียดจะได้กล่าวในเรื่องคลื่นกลของบทต่อไป) คำนึงค่าคงตัวการบิด  $C$  จะเป็น

$$C = \frac{\pi sr^4}{2l}$$

ตัวอย่างที่ 6.1 มวล 0.2 กิโลกรัม ผูกติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงแล้วแกว่งกวัดแบบ SHM ด้วยแอมพลิจูดขนาด 0.04 เมตร ค่าคงตัวสปริงเท่ากับ 25 นิวตันต่อเมตร จงหา

- (a) ความถี่ของการแกว่งกวัด
- (b) เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบ ในขณะที่มวลนี้เคลื่อนที่ไปทางขวามือเป็นระยะ 0.02 เมตร จากตำแหน่งสมดุล
- (c) อัตราเร็ว
- (d) อัตราเร่งของมวลในขณะนั้น

วิธีทำ

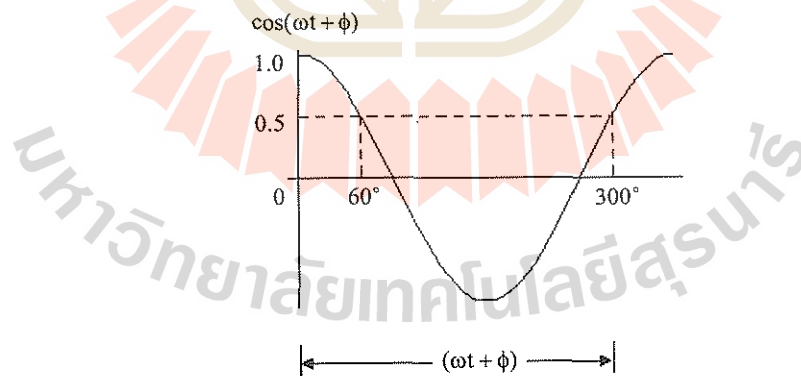
- (a) ความถี่ของการแกว่งกวัดหาได้จากสมการ (6.8)

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{25 \text{ N/m}}{0.20 \text{ kg}}} = 1.78 \text{ Hz}$$

- (b) คาบ  $T$  หาได้จากสมการ (6.8) เช่นกัน คือ

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.78 \text{ Hz}} = 0.562 \text{ s}$$

- (c) การกำหนดตำแหน่งเฉพาะที่ใดๆ ใน SHM ควรเขียนกราฟของ  $x$  ที่เป็นฟังก์ชันของ  $t$  เพื่อทราบเฟสของการเคลื่อนที่ดังแสดงในรูป



รูปที่ 6.8 กราฟของ  $x$  ที่เป็นฟังก์ชันของ  $t$  เพื่อการกำหนดเฟส

นั่นคือ เพื่อหาค่า  $(\omega t + \phi)$  ซึ่งปรากฏในสมการของ SHM เสมอ ในที่นี้คือ

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

หรือ

$$\begin{aligned}(\omega t + \phi) &= \cos^{-1}\left(\frac{0.02 \text{ m}}{0.04 \text{ m}}\right) \\ &= \cos^{-1}(0.5) \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

แต่ที่มุม  $60^\circ$  มวลเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ และที่มุม  $300^\circ$  มวลเคลื่อนที่ไปทางขวามือและให้ค่าโคไซน์เดียวกัน ดังนั้น  $\omega t + \phi = 300^\circ$  และอัตราเร็วในขณะนั้นคือ

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\ &= -(0.04 \text{ m})(2\pi)(1.78 \text{ Hz}) \sin 300^\circ \\ &= 0.387 \text{ m/s} \quad (\text{เคลื่อนที่ไปทางขวามือ})\end{aligned}$$

(d) อัตราเร่งกำหนดโดย

$$\begin{aligned}a &= -\omega^2 x = -(2\pi)(1.78 \text{ Hz})^2(0.02 \text{ m}) \\ &= -2.50 \text{ m/s}^2 \quad (\text{ไปทางซ้ายมือ})\end{aligned}$$

จะสังเกตเห็นว่าอัตราเร็วและอัตราเร่งมีทิศตรงกันข้าม

**ตัวอย่างที่ 6.2** จงพิสูจน์ว่าความถี่ของการแกว่งกวัดของวัตถุมวล  $M$  ซึ่งห้อยแขวนไว้กับสปริงที่มีค่าคงตัวสปริงเป็น  $k$  และมวลของสปริงเท่ากับ  $m$  คือ

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

**วิธีทำ**

สมมติสปริงยาว  $\ell$  ดังนั้นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของสปริงคือ  $m/\ell$  พิจารณาความยาวน้อยยิ่ง  $dx$  ที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากปลายบนของลวดเป็นระยะ  $x$  มวลของสปริงช่วงนี้จะเป็น  $\frac{m}{\ell} dx$

ความเร็วที่ปลายล่างของสปริงคือ  $v$  ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วของมวล  $M$  ถ้าสปริงมีเนื้อสารสม่ำเสมอ การกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งที่หยุดนิ่งจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากจุดตรึงนั้น ดังนั้น อัตราเร็วของเนื้อสารของสปริงที่ระยะ  $x$  จะกำหนดโดย  $vx/\ell$  และพลังงานจลน์คือ

$$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{\ell} dx \right) \left( \frac{vx}{\ell} \right)^2$$

พลังงานจลน์รวมของสปริงที่ตำแหน่งนั้นจะเป็น

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^\ell \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{mv^2}{\ell^3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{mv^2}{6} \end{aligned}$$

แต่พลังงานจลน์ของมวล  $M$  คือ  $\frac{1}{2} Mv^2$

ดังนั้นพลังงานจลน์รวมของระบบจะเป็น  $\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{mv^2}{6}$

หรือ  $E_k = \frac{1}{2} \left( M + \frac{m}{3} \right) v^2$

ถ้า  $y$  เป็นการกระจัดของมวล  $M$  จากตำแหน่งสมดุล ดังนั้น  $v = \frac{dy}{dt}$  และแรงดึงกลับคือ  $-ky$  พลังงานศักย์ของระบบจะเป็น

$$E_p = \int_0^y ky dy = \frac{1}{2} ky^2$$

พลังงานรวมของระบบคือ

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left( M + \frac{m}{3} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{ky^2}{2}$$

เนื่องจากพลังงานมีการอนุรักษ์ ดังนั้น  $\frac{dE}{dy} = 0$

หรือ  $\left( M + \frac{m}{3} \right) \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{ky}{\left( M + \frac{m}{3} \right)}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (6.2)

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{M + \frac{m}{3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}}$$

และ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

**ตัวอย่างที่ 6.3** ถ้าการกระจัดของการแกว่งกวัดใดๆ กำหนดโดย

$$x = -a\omega \cos \omega t + b \sin \omega t$$

จงพิสูจน์ว่าการเคลื่อนที่ดังกล่าวเป็น SHM และถ้าหาก  $a = 6$  เซนติเมตร  $b = 8$  เซนติเมตร และ  $\omega = 3$  เรเดียน/วินาที จงหาคาบ อัตราเร็วสูงสุด และอัตราเร่งสูงสุดของการแกว่งกวัดนี้

**วิธีทำ**

อัตราเร็วที่เวลา  $t$  ใดๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\omega^2 \cos \omega t + b\omega \cos \omega t$$

และอัตราเร่งคือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(a\omega \cos \omega t + b \sin \omega t) = -\omega^2 x$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM

คาบของการแกว่งกวัดคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ วินาที}$$

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดคือ

$$A = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2} = \sqrt{18^2 + 8^2} \approx 19.69$$

อัตราเร็วสูงสุด

$$= A\omega = 19.69 \times 3 \approx 59.093 \text{ cm/s}$$

อัตราเร่งสูงสุด

$$= \omega^2 A = 9 \times 19.69 \approx 177 \text{ cm/s}^2$$

ตัวอย่างที่ 6.4 อนุภาคมวล  $m$  แกว่งกวัดแบบ SHM ในแนวตรงด้วยแอมพลิจูด  $A$  และความถี่  $f$  ถ้า  $r_1$  และ  $r_2$  เป็นการกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งสมดุลและสอดคล้องกับอัตราเร็ว  $v_1$  และ  $v_2$  ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(a) ความถี่ 
$$f = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]^{1/2}$$

(b) แอมพลิจูด 
$$A = \left[ \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right]^{1/2}$$

(c) พลังงานจลน์สูงสุด 
$$= \frac{1}{2} m \left[ \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]$$

วิธีทำ

(a) สมมติสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM กำหนดโดย

$$r = A \sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่  $A, \omega$  และ  $\phi$  คือแอมพลิจูด, ความถี่เชิงมุม และเฟส ตามลำดับ

อัตราเร็วของอนุภาคที่เวลาใดๆ คือ

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi) = A\omega \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)} \\ &= \omega \sqrt{A^2 - r^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $v_1 = \omega \sqrt{A^2 - r_1^2}$  และ  $v_2 = \omega \sqrt{A^2 - r_2^2}$

หรือ  $v_1^2 - v_2^2 = \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)$

$$\omega = \left[ \frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]^{1/2}$$

ความถี่  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]^{1/2}$

$$(b) \quad v_1^2 = \omega^2(A^2 - r_1^2) = \left( \frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) (A^2 - r_1^2)$$

$$A^2 - r_1^2 = v_1^2 \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right]$$

$$A^2 = v_1^2 \left[ \frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right] + r_1^2 = \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$A = \left[ \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right]^{1/2}$$

(c) พลังงานจลน์สูงสุด

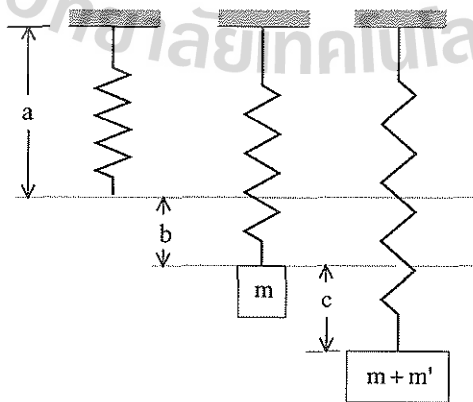
$$= \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left( \frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \left( \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[ \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right]$$

ตัวอย่างที่ 6.5 สปริงชนิดหนึ่งปลายข้างหนึ่งแขวนไว้กับผนังซึ่งตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีวัตถุห้อยปลายอีกข้างหนึ่งด้านล่าง ความยาวของสปริงจะเท่ากับ  $a$  เมื่อนำวัตถุมวล  $m$  มาแขวนที่ปลายล่างของสปริง สปริงจะยืดออกจากเดิมเท่ากับ  $b$  และเมื่อนำวัตถุมวล  $m'$  มาห้อยเพิ่มเข้าไปอีก สปริงจะยืดออกเพิ่มขึ้นอีกเป็นระยะเท่ากับ  $c$  จงพิสูจน์ว่าเมื่อมวล  $m'$  ตกลงสู่พื้น ทำให้มวล  $m$  แกว่งกวัดตำแหน่งของมวล  $m$  ที่เวลา  $t$  ใดๆ จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ  $a + b + c \cos \left( \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t \right)$



รูปที่ 6.9 ประกอบการคำนวณของตัวอย่างที่ 6.5

วิธีทำ

เมื่อมวล  $m'$  ยังห้อยแขวนอยู่ มวล  $m$  จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเท่ากับ  $a + b + c$   
เมื่อมวล  $m'$  ตกลงสู่พื้น มวล  $m$  จะแกว่งกวัดในแนวตั้ง สมการของการแกว่งกวัด คือ

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

แต่เราทราบว่า เมื่อมีมวล  $m$  แขนงไว้เพียงลำพัง สปริงจะยืดออกเท่ากับ  $b$

ดังนั้น  $mg = kb$

หรือ  $k = \frac{mg}{b}$

แทนค่า  $k$  นี้ลงไปในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{g}{b}\right)y = -\omega^2y$$

การกระจัด  $y$  ของมวล  $m$  ที่เวลา  $t$  ใดๆ คือ

$$y = A \sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่  $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$ ,  $A$  และ  $\phi$  เป็นค่าคงตัว

อัตราเร็วของมวล  $m$  กำหนดโดย

$$\frac{dy}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$

เมื่อ  $t = 0$ ,  $y = c$  และ  $\frac{dy}{dt} = 0$

ดังนั้น  $A = c$  และ  $\phi = \frac{\pi}{2}$

และ  $y = c \cos \omega t = c \cos \left( \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t \right)$

∴ เมื่อมวล  $m'$  ตกลงสู่พื้น ตำแหน่งของมวล  $m$  จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ

$$a + b + c \cos \left( \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t \right)$$

ตัวอย่างที่ 6.6 การเคลื่อนที่แบบ SHM แทนด้วยสมการ

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

โดยที่  $y$  มีหน่วยเป็นเมตร  $t$  มีหน่วยเป็นวินาที และเฟสมีหน่วยเป็นเรเดียน จงคำนวณหา

- (a) ความถี่
- (b) คาบ
- (c) การกระจัดสูงสุด
- (d) อัตราเร็วสูงสุด
- (e) อัตราเร่งสูงสุด
- (f) การกระจัดอัตราเร็ว และอัตราเร่ง ที่เวลา  $t = 0$  และ  $t = 1$  วินาที

วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM ที่กำหนดให้

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

เมื่อเทียบกับสมการทั่วไปของ SHM คือ

$$y = A \sin(\omega t + \alpha)$$

(a) จะเห็นได้ว่า

$$\omega = 10 = 2\pi f$$

∴ ความถี่

$$f = \frac{10}{2\pi} = 1.6 \text{ Hz}$$

(b) คาบ

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi \text{ วินาที}$$

(c) การกระจัดสูงสุด = แอมพลิจูด = 10 เมตร

(d) อัตราเร็ว

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

∴ อัตราเร็วสูงสุด

$$= A\omega = (10\text{m})(10\text{s}^{-1}) = 100 \text{ m/s}$$

(e) อัตราเร็วสูงสุด  $= -A\omega^2 = -1000 \text{ m/s}^2$   
เครื่องหมายลบ แสดงว่าอัตราเร็วมีทิศทางพุ่งเข้าหาตำแหน่งสมดุล

(f) เมื่อ  $t = 0$

การกระจัด,  $y = 10 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -5 \text{ เมตร}$

อัตราเร็ว,  $\frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = 10 \times 10 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$   
 $= 100 \times 0.866 \text{ m/s} = 866 \text{ m/s}$

อัตราเร่ง,  $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \alpha = -10 \times 100 \times (-0.5)$   
 $= 500 \text{ m/s}^2$

เมื่อ  $t = 1$

การกระจัด,  $y = 10 \sin\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$   
 $\approx 10 \sin(3\pi) = 0$

อัตราเร็ว,  $\frac{dy}{dt} = A\omega \cos\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$   
 $\approx 10 \times 10 \cos \pi = -100 \text{ m/s}$

อัตราเร่ง,  $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$   
 $\approx -A\omega^2 \sin \pi = 0$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 6.7 อนุภาคแกว่งกวัดแบบ SHM กำหนดโดย

$$y = 5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

คาบของการแกว่งกวัดเท่ากับ 20 วินาที และที่เวลา  $t=0$  การกระจัดของอนุภาคเท่ากับ +2 หน่วย จงหา

- (a) เฟสเริ่มต้น
- (b) มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วย
- (c) เฟสที่แตกต่างกันระหว่างตำแหน่ง 2 ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่างกัน 5 วินาที

วิธีทำ

- (a) เมื่อ  $t = 0$  สมการการแกว่งกวัดจะเป็น

$$2 = 5 \sin \phi$$

หรือ

$$\sin \phi = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น เฟสเริ่มต้นคือ

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

- (b) เมื่อ  $y = +3$  หน่วย

$$\therefore 3 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วย คือ

$$\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

- (c) ให้  $t_1$  และ  $t_2$  เป็นเวลาที่แตกต่างกัน 5 วินาที และ  $y_1$  และ  $y_2$  เป็นการกระจัดที่สอดคล้องกัน ดังนั้น

$$y_1 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right)$$

$$y_2 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right)$$

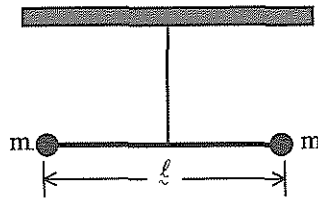
เฟสที่แตกต่างกันระหว่าง 2 ตำแหน่งนี้ คือ

$$\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right) - \left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right) = 2\pi\left(\frac{t_1 - t_2}{T}\right)$$

$$= 2\pi \times \frac{5}{20}$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

ตัวอย่างที่ 6.8 วัตถุชนิดเดียวกันสองก้อน แต่ละก้อนมีมวลเท่ากันคือ  $m = 0.002$  กิโลกรัม ยึดติดกันด้วยแท่งโลหะยาวความยาว  $\ell = 0.10$  เมตร ตรงกลางแท่งโลหะแขวนไว้กับเพดานด้วยลวดโลหะ แล้วปล่อยให้แกว่งกวัดเช่นเดียวกับลูกตุ้มชนิดบิกด้วยคาบ 10 นาที จงหาค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะนั้น



รูปที่ 6.10 ประกอบการคำนวณของตัวอย่างที่ 6.8

วิธีทำ

จากสมการการแกว่งกวัดของลูกตุ้มชนิดบิก คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อย  $I$  (รอบจุดที่แขวน) ของก้อนมวลทั้งสองที่ยึดด้วยแท่งโลหะเบา คือ

$$I = (2m)r^2 = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m\ell^2$$

ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{1}{2}m\ell^2\right) = \frac{2m\pi^2 \ell^2}{T^2}$$

แทนค่าต่างๆ รวมทั้งคาบ  $T = 10$  นาที = 600 วินาที

ค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะคือ

$$C = \frac{2(2.0 \times 10^{-3} \text{ kg})(\pi^2)(0.10 \text{ m})^2}{(600 \text{ s})^2} = 1.10 \times 10^{-9} \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

---

## สรุป

ตัวอย่างของระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียวมีหลายชนิด ในตอนนี้ได้ยกตัวอย่างเพียง 3 ชนิดเท่านั้น เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาตัวอย่างอื่นๆ ได้ทั้ง 3 ตัวอย่างนี้จะเริ่มจากการใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน เพื่อหาแรงดึงกลับ แล้วแก้สมการออกมาเพื่อให้ได้ความถี่เชิงมุมและคาบซึ่งกำหนดในเทอมของตัวแปรค่าต่างๆ ที่แตกต่างกันออกไป



ตอนที่  
**6.3**

**การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดี่ยวสองชุด**

ฮาร์มอนิกเชิงเดี่ยวสองชุดหรือมากกว่า 2 ชุด สามารถรวมกันได้เป็นชุดเดียว การรวมจะเป็นไปในหลายลักษณะ ในตอนนี้จะยกตัวอย่างการรวมที่ค่อนข้างง่ายและเห็นได้ชัด และสามารถทดลองในห้องปฏิบัติการได้ เช่น สามารถทดสอบรูปคลื่นไซน์ที่ได้ถูกตัดจากรีจิสเตอร์ออสซิลโลสโคป

**1. การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดี่ยวสองชุดที่มีความถี่เท่ากันและอยู่ในแนวเดียวกัน**

พิจารณา SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน คือ

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

ผลรวมของ SHM ทั้งสองชุด คือ

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$= A_1 [\sin \omega t \cos \phi_1 + \cos \omega t \sin \phi_1] + A_2 [\sin \omega t \cos \phi_2 + \cos \omega t \sin \phi_2]$$

$$= \sin \omega t [A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2] + \cos \omega t [A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2]$$

ให้  $R \cos \theta = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$

$$R \sin \theta = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2$$

ดังนั้น  $x = R \sin \omega t \cos \theta + R \cos \omega t \sin \theta$

หรือ  $x = R \sin(\omega t + \theta)$  (6.21)

โดยที่  $R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)$

หรือ 
$$R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (6.22)$$

และ 
$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad (6.23)$$

กรณีที่น่าสนใจคือ

1) เมื่อ 
$$\phi_1 = \phi_2 = \phi, R = A_1 + A_2$$

$$\therefore x = (A_1 + A_2) \sin(\omega t + \phi)$$

หมายความว่า การแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM โดยมีความถี่เท่าเดิมคือ  $\omega$  และแอมพลิจูดรวมเป็น  $A_1 + A_2$

2) เมื่อ  $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ , หรือ SHM ทั้งสองมีเฟสตรงกันข้าม เช่น  $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$

ดังนั้น 
$$R = A_1 - A_2$$

และ 
$$x = (A_1 - A_2) \sin \omega t$$

หมายความว่า การแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM มีความถี่เท่าเดิมคือ  $\omega$  แต่มีแอมพลิจูดรวมเป็น  $A_1 - A_2$

3) เมื่อ 
$$\phi_1 - \phi_2 = 2\pi, R = A_1 + A_2$$

4) เมื่อ 
$$\phi_1 - \phi_2 = n \frac{\pi}{2}, n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\therefore R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

## 2. การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่มีความถี่เท่ากันแต่มีแนวตั้งฉากกัน

SHM สองชุดที่มีแนวตั้งฉากกันทำให้เกิดรูปลิตซาชูส์ (Lissajous figures) รูปร่างต่างๆ กันขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด ความถี่ และเฟสที่แตกต่างกันของ SHM สองชุดนั้น

สมมติ SHM สองชุดแทนด้วย

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$y = B \sin \omega t$$

ดังนั้น 
$$\frac{y}{B} = \sin \omega t$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}$$

และ 
$$\frac{x}{A} = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$$

$$= \frac{y}{B} \cos \phi + \sin \phi \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}$$

หรือ 
$$\left( \frac{x}{A} - \frac{y}{B} \cos \phi \right)^2 = \sin^2 \phi \left( 1 - \frac{y^2}{B^2} \right)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos \phi = \sin^2 \phi \tag{6.24}$$

ซึ่งเป็นสมการทั่วไปของวงรี (ellipse) เอียงทำมุมต่างๆ กับแกนของพิกัด กรณีที่น่าสนใจมีดังนี้

1) เมื่อ  $\phi = 0$  หรือ SHM ทั้งสองไม่มีความต่างเฟสกัน ดังนั้น

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจุดภาคที่ 1 และ 3

2) เมื่อ  $\phi = \frac{\pi}{4}$  แทนค่าลงในสมการ (6.24) จะได้

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \sqrt{2} \cdot \frac{x}{A} \frac{y}{B} = \frac{1}{2}$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี

3) เมื่อ  $\phi = \frac{\pi}{2}$  ดังนั้น

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรีที่สมมาตร และถ้า  $A = B$ ,

$$x^2 + y^2 = A^2$$

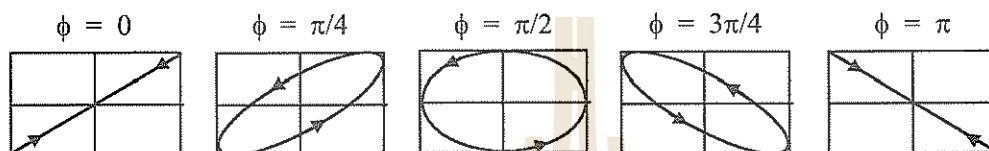
ซึ่งเป็นสมการวงกลมรัศมี A

4) เมื่อ  $\phi = \pi$ , ดังนั้น

$$\left( \frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจุดภาคที่ 2 และ 4

สำหรับค่า  $\phi$  ในช่วง  $\pi$  ถึง  $2\pi$  รูปลิสซาจูสจะมีลำดับที่ตรงข้ามกับกรณีค่า  $\phi$  ในช่วง  $0$  ถึง  $\pi$  ข้างต้น



รูปที่ 6.11 แสดงรูปลิสซาจูสที่ค่าเฟสต่างๆ สำหรับ SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน

ในกรณีที่ SHM สองชุดมีความถี่ไม่เท่ากัน รูปลิสซาจูสจะมีรูปร่างที่แตกต่างกันไป ซึ่งจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้ แต่จะยกตัวอย่างเพียงบางกรณีในหัวข้อต่อไป

ส้อมเสียง (tuning fork) สองอันที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน แต่ระนาบของการสั่นตั้งฉากกัน ทำให้เกิดรูปลิสซาจูสได้เช่นกัน ถ้าเราทราบความถี่ของส้อมเสียงอันที่หนึ่ง เราสามารถคำนวณหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองได้ กล่าวคือ เนื่องจากส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่ แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย เฟสที่แตกต่างกันจะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ทำให้รูปลิสซาจูสเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาเช่นกัน สมมติรูปลิสซาจูสหนึ่งๆ ใช้เวลา  $t$  วินาทีในการเปลี่ยนกลับมาเหมือนรูปเดิม ดังนั้น ส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่ต่างกันเท่ากับ  $1/t$  ถ้าส้อมเสียงอันแรกมีความถี่เท่ากับ  $f$  ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ  $f \pm (1/t)$  ซึ่งเป็นไปได้ทั้งสองค่า เพื่อให้แน่ใจว่าเป็นค่าใด เราใช้วิธีจำนวนเล็กน้อยยึดติดกับส้อมเสียงอันที่สอง ถ้า  $t_1$  เป็นเวลาที่ใช้สำหรับการเปลี่ยนกลับมาเป็นรูปเดิม เมื่อ  $t$  มากกว่า  $t_1$  ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ  $f - (1/t)$  เมื่อ  $t$  น้อยกว่าดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ  $f + (1/t)$  ที่เป็นเช่นนี้เพราะการใช้วิธียึดติดกับส้อมเสียงอันใด ทำให้ส้อมเสียงอันนั้นมีความถี่ลดลงจากเดิมนั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น สมมติส้อมเสียง A และ B ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส ซึ่งมีคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที และเมื่อใช้วิธียึดติดกับส้อมเสียง A ปรากฏว่าคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 10 วินาที ถ้าส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz ส้อมเสียง A จะมีความถี่ก่อนและหลังการยึดติดกับวิธีนี้เท่าใด

เนื่องจากส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz และคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที ดังนั้นส้อมเสียง A จะมีความถี่เท่ากับ  $200 \pm (1/15)$  Hz กล่าวคือ 200.066 Hz หรือ 199.934 Hz ค่าใดค่าหนึ่ง

เมื่อใช้ซี่พืดยึดติดกับส้อมเสียง A ทำให้ส้อมเสียง A มีความถี่ลดลง แต่คาบของการเปลี่ยนรูปร่างลดลงเหลือ 10 วินาที ซึ่งหมายความว่าส้อมเสียงทั้งสองจะต้องมีความถี่แตกต่างกันมากขึ้นกว่าเดิมเงื่อนไขเช่นนี้จะเป็นไปได้เมื่อส้อมเสียง A มีความถี่น้อยกว่าส้อมเสียง B เท่านั้น

ดังนั้น ก่อนยึดติดด้วยซี่พืด ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ 199.934 Hz และหลังการยึดติดด้วยซี่พืด ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ  $200 - (1/10)$  Hz หรือเท่ากับ 199.9 Hz

### 3. ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับรูปลิตซาชูส์

ตัวอย่างที่ 6.9 รูปลิตซาชูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:2

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A \sin(2\omega t + \phi)$$

$$y = B \sin \omega t$$

$$\therefore \sin \omega t = \frac{y}{B} \quad \text{และ} \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - y^2/B^2}$$

แทนค่าลงในสมการแรกจะได้

$$\frac{x}{A} = \sin 2\omega t \cos \phi + \cos 2\omega t \sin \phi$$

$$= 2 \sin \omega t \cos \omega t \cos \phi + (1 - 2 \sin^2 \omega t) \sin \phi$$

$$= 2 \left( \frac{y}{B} \right) \left( \sqrt{1 - y^2/B^2} \right) \cos \phi + \left\{ 1 - 2 \left( \frac{y^2}{B^2} \right) \right\} \sin \phi$$

$$\therefore \frac{x}{A} - \left\{ 1 - 2 \frac{y^2}{B^2} \right\} \sin \phi = 2 \frac{y}{B} \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} \cos \phi$$

$$\left( \frac{x}{A} - \sin \phi \right) + 2 \frac{y^2}{B^2} \sin \phi = 2 \frac{y}{B} \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}} \cos \phi$$

ยกกำลังสองทั้งสองด้าน

$$\left( \frac{x}{A} - \sin \phi \right)^2 + 4 \frac{y^4}{B^4} \sin^2 \phi + \left( \frac{x}{A} - \sin \phi \right) \cdot 4 \frac{y^2}{B^2} \sin \phi = 4 \frac{y^2}{B^2} \left( 1 - \frac{y^2}{B^2} \right) \cos^2 \phi$$

$$\left( \frac{x}{A} - \sin \phi \right)^2 + 4 \frac{x}{A} \frac{y^2}{B^2} \sin \phi + 4 \frac{y^4}{B^4} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - 4 \frac{y^2}{B^2} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = 0$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin \phi\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2} \left[\frac{y^2}{B^2} + \frac{x}{A} \sin \phi - 1\right] = 0 \quad (6.25)$$

สมการ (6.25) เป็นสมการทั่วไปของเส้นโค้งที่มี 2 วง (loops) สำหรับเฟสที่แตกต่างกัน  $\phi$  ใดๆ และแอมพลิจูด A และ B

กรณีพิเศษมีดังนี้

1) เมื่อ  $\phi = 0$  ดังนั้น สมการ (6.25) จะกลายเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} + 4\frac{y^2}{B^2} \left[\frac{y^2}{B^2} - 1\right] = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเลข 8 และมี 2 วง

2) เมื่อ  $\phi = \frac{\pi}{2}$  ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{A} - 1\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2} \left(\frac{y^2}{B^2} + \frac{x}{A} - 1\right) = 0$$

หรือ

$$\left[\left(\frac{x}{A} - 1\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\right]^2 = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาซ้อนกัน 2 วง แต่ละวงอาจแยกออกได้เป็น

$$\left(\frac{x}{A} - 1\right) + 2\frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$2y^2 = \frac{B^2}{A}(A - x)$$

$$y^2 = \frac{B^2}{2A}(x - A)$$

**ตัวอย่างที่ 6.10** รูปลิตซาทูสตันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:3

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A \sin(3\omega t + \phi)$$

$$y = B \sin \omega t$$

โดยวิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 6.9 จะได้

เมื่อ  $\phi = 0$ ;

$$\left(4\frac{y^2}{B^2} - \frac{3y}{B} + \frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

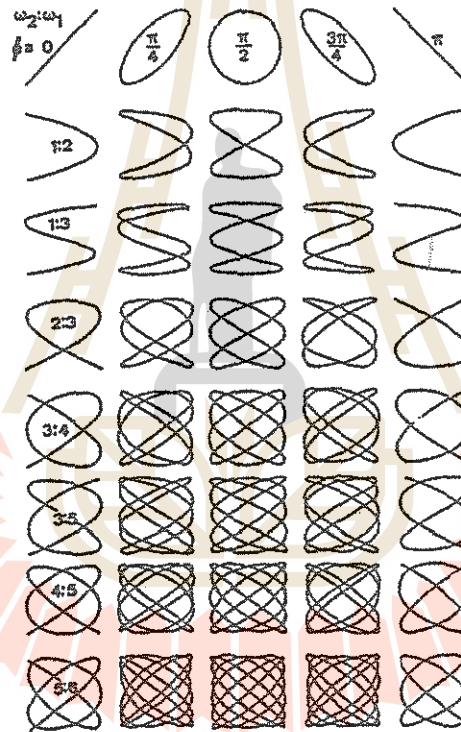
ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปลูกบาศก์ 2 รูปซ้อนกัน

เมื่อ  $\phi = \pi/2$  สมการจะเป็น

$$\left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right)\left(1 - 4\frac{y^2}{B^2}\right) - \frac{x^2}{A^2} = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเส้นโค้ง 3 รูปซ้อนกัน

รูปลิตซาจูล์ของตัวอย่างที่ 1 และ 2 และอัตราส่วนความถี่อื่น แสดงในรูปที่ 6.12



รูปที่ 6.12 แสดงรูปลิตซาจูล์อันเกิดจาก SHM สองชุดที่มีความถี่ และเฟสที่แตกต่างกันค่าต่างๆ

ตัวอย่างที่ 6.11 ส้อมเสียง 2 อัน ทำให้เกิดรูปลิตซาชูส์ โดยรูปจะเปลี่ยนจากพาราโบลาเป็นรูปเลข 8 และเปลี่ยนกลับไปเป็นรูปพาราโบลาอีก โดยใช้เวลารวม 6 วินาที ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกเป็น 100 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สอง

วิธีทำ

รูปลิตซาชูส์เปลี่ยนจากพาราโบลาเป็นรูปเลข 8 แล้วเปลี่ยนกลับไปเป็นพาราโบลา ดังนั้น อัตราส่วนของความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ 2:1

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกคือ 100 Hz ความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองอาจเป็น 50 Hz หรือ 200 Hz

เนื่องจากเวลาในการเปลี่ยนรูปครบ 1 รอบ เท่ากับ 6 วินาที ดังนั้น ส้อมเสียงทั้งสองจะมีความถี่แตกต่างกันเท่ากับ  $\frac{1}{6}$  วินาที

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ  $f_1$  และ  $f_2$  ดังนั้น ความเป็นไปได้ คือ

$$2f_1 - f_2 = \pm \frac{1}{6}$$

หรือ

$$2f_2 - f_1 = \pm \frac{1}{6}$$

แต่เราทราบว่า  $f_1 = 100$  Hz ดังนั้น ความเป็นไปได้ของ  $f_2$  คือ

$$2(100) - f_2 = \pm \frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(200 + \frac{1}{6}\right) \text{ หรือ } \left(200 - \frac{1}{6}\right) \text{ Hz}$$

หรือ

$$2f_2 - 100 = \pm \frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(50 + \frac{1}{12}\right) \text{ หรือ } \left(50 - \frac{1}{12}\right) \text{ Hz}$$

## สรุป

การรวมกันของฮาร์โมนิกเชิงเดี่ยวสองชุดที่สำคัญคือ การรวมของฮาร์โมนิกเชิงเดี่ยว 2 ชุดที่อยู่  
ในแนวเดียวกันและมีแนวตั้งฉากกัน รูปลิตซาชูส์ที่ปรากฏจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่แตกต่างออกไป



# ตอนที่ 6.4

## การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

ที่ผ่านมาเราไม่คิดค่าความเสียดทานโดยถือว่ามีค่าน้อยมาก ทำให้เกิดการแกว่งกวัดอย่างต่อเนื่อง โดยมีแอมพลิจูดคงตัว แต่ความเป็นจริงในธรรมชาติความเสียดทานย่อมมีเสมอ ทำให้แอมพลิจูดลดลง และหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เราเรียกการแกว่งกวัดเช่นนี้ว่า การแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation) แต่ถ้าเรายังต้องการให้มีการแกว่งกวัดตลอดไป จำเป็นต้องใช้แรงจากภายนอกมาช่วย การแกว่งกวัดเช่นนี้จะเรียกว่า การแกว่งกวัดแบบบังคับ

### 1. สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง

แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติในหลายๆ กรณีเกิดจากแรงเสียดทานของอากาศและแรงเสียดทานภายในลวดสปริง จึงมีลักษณะหนืด (viscous type) กล่าวคือ แรงเสียดทานจะไม่คงตัว แต่จะเป็นสัดส่วนกับความเร็ว และมีทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ สมมติแทนด้วย  $F = -bv$  โดยที่  $b$  เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ค่าคงตัวการหน่วง (damping constant) ดังนั้น แรงดึงกลับจึงประกอบด้วยสองส่วนคือ แรงดึงกลับอันเนื่องจากสปริง ( $-kx$ ) และแรงดึงกลับอันเนื่องจากความหน่วง ( $-bv$ ) และสมการการเคลื่อนที่ของระบบจะกลายเป็น

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

ถ้าให้  $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$

และ  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

ดังนั้น  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  (6.26)

โดยที่  $\tau$  เป็นค่าคงตัวเรียกว่า เวลาของการผ่อนคลาย (relaxation time) ซึ่งอาจให้นิยามว่าเป็นเวลาที่อัตราเร็วมีค่าเป็น  $1/e$  เท่าของอัตราเร็วเริ่มต้น เมื่อไม่มีการหน่วง หรือ  $b = 0$  ดังนั้น  $\tau = \infty$  ซึ่งหมายความว่าเกิดการแกว่งกวัดแบบต่อเนื่องด้วยความถี่เชิงมุม  $\sqrt{k/m}$

สมมติผลเฉลยของสมการ (6.26) คือ

$$x = Ae^{\alpha t}$$

โดยที่  $A$  และ  $\alpha$  เป็นค่าคงตัวใดๆ เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของค่า  $x$  นี้เทียบกับเวลา  $t$  แล้วนำไปแทนค่าลงในสมการ (6.26) จะได้

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{A\alpha}{\tau} e^{\alpha t} + \omega_0^2 A e^{\alpha t} = 0$$

หรือ 
$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_0^2 = 0$$

ดังนั้น 
$$\alpha = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

ให้ 
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

ค่าของ  $\alpha$  จึงมีได้ 2 ค่าคือ

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\tau} + \beta$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\tau} - \beta$$

ซึ่งทำให้การกระจัดมีได้ 2 ค่าด้วย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6.26) จึงเป็น

$$x = e^{-t/2\tau} [A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}] \quad (6.27)$$

ค่าของ  $A_1$  และ  $A_2$  กำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ ที่เวลา  $t=0$  การกระจัดมีค่าสูงสุดคือ  $A_1 + A_2$  และความเร็ว  $\frac{dx}{dt} = 0$  ถ้าให้

$$A = A_1 + A_2 \quad (6.28)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ  $x$  ในสมการ (6.27) เทียบกับเวลา แล้วให้  $\frac{dx}{dt} = 0$  ที่  $t=0$  จะได้

$$\begin{aligned} \beta(A_1 - A_2) &= \frac{1}{2\tau}(A_1 + A_2) \\ &= \frac{A}{2\tau} \end{aligned}$$

หรือ 
$$A_1 - A_2 = \frac{A}{2\beta\tau} \quad (6.29)$$

จากสมการ (6.28) และ (6.29) ดังนั้น

$$A_1 = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{1}{2\beta\tau}\right)$$

$$A_2 = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{1}{2\beta\tau}\right)$$

แทนค่า  $A_1$  และ  $A_2$  ลงในสมการ (6.27) ผลเฉลยทั่วไปจะกลายเป็น

$$x = \frac{A}{2} e^{-t/2\tau} \left[ \left(1 + \frac{1}{2\beta\tau}\right) e^{\beta t} + \left(1 - \frac{1}{2\beta\tau}\right) e^{-\beta t} \right] \quad (6.30)$$

เราสามารถแยกออกได้เป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อ  $\frac{1}{2\tau} > \omega_0$  หรือแรงต้านทานมากกว่าแรงคืนกลับ

การหน่วงในกรณีเช่นนี้จะมีค่ามาก แฟกเตอร์  $\sqrt{1/4\tau^2 - \omega_0^2}$  หรือ  $\beta$  จะเป็นจำนวนจริงและมีค่าบวก ดังนั้นเทอมทั้งสองของสมการ (6.30) จะประกอบด้วยเทอมเอกซ์โพเนนเชียลที่มีกำลังเป็นลบ ผลก็คือ การกระจัด  $x$  จะมีค่าลดลงโดยไม่มีการเปลี่ยนทิศทาง หรืออีกนัยหนึ่งไม่มีการแกว่งกวัดอีกเลย แต่จะคืนสู่ตำแหน่งสมดุล เรียกรการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า แบบหน่วงเกิน (overdamped)

กรณีที่ 2 เมื่อ  $\frac{1}{2\tau} = \omega_0$

ค่าของ  $\beta$  ในกรณีนี้จะกลายเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตาม เราอาจกระจายเทอมต่างๆ ในสมการ (6.30) โดยเฉพาอย่างยิ่งเทอม  $e^{\beta t}$  และ  $e^{-\beta t}$  แล้วให้  $\beta$  ใกล้ศูนย์ สมการ (6.30) จะกลายเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau} \left(1 + \frac{t}{2\tau}\right) \quad (6.31)$$

เทอม  $\frac{At}{2\tau} e^{-t/2\tau}$  จะลดลงช้ากว่าเทอม  $Ae^{-t/2\tau}$  ระบบจะคืนสู่ตำแหน่งสมดุลภายในระยะเวลาอันสั้นมาก เรียกรการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า แบบหน่วงวิกฤต (critically damped)

กรณีที่ 3 เมื่อ  $\frac{1}{2\tau} < \omega_0$  หรือแรงคืนกลับมากกว่าแรงต้านทาน

ค่าของ  $\beta$  ในกรณีนี้จะเป็ค่าจินตภาพ ถ้าให้  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$

สมการ (6.30) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau} \left[ \left( \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) + \frac{1}{2\omega\tau} \left( \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) \right]$$

หรือ 
$$x = Ae^{-t/2\tau} \left[ \cos \omega t + \frac{1}{2\omega\tau} \sin \omega t \right]$$

ถ้าให้ 
$$A = a \sin \phi$$

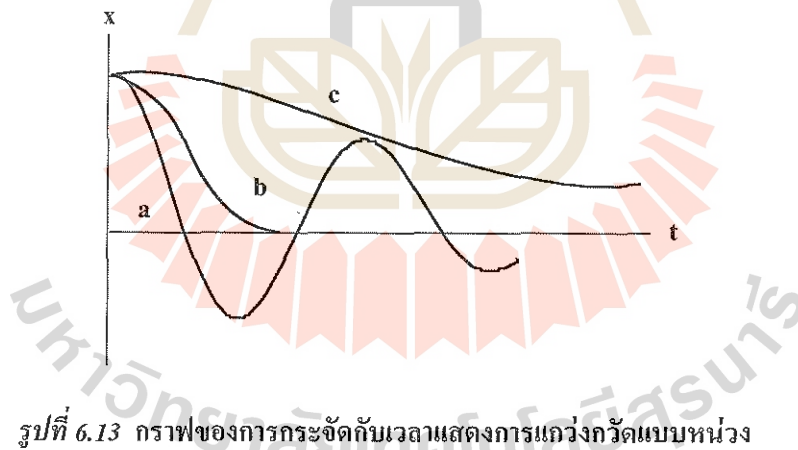
และ 
$$\frac{A}{2\omega\tau} = a \cos \phi$$

ดังนั้น 
$$a = \sqrt{A^2 + \frac{A^2}{4\omega^2\tau^2}} = \frac{A}{2\omega\tau} (4\omega^2\tau^2 + 1)^{1/2}$$

และ 
$$\phi = \tan^{-1} 2\omega\tau$$

$$\therefore x = ae^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi) \quad (6.32)$$

ซึ่งมีการแกว่งกวัดด้วยความถี่เชิงมุม  $\omega$  ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อยมากๆ หรือ  $b=0$  ความถี่  $\omega = \omega_0$  ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของระบบ กรณีเช่นนี้ แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดจะลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้น คือมีขนาด  $ae^{-t/2\tau}$  เราเรียกการแกว่งกวัดในกรณีที่ 3 ว่าเป็นแบบหน่วงขาด (underdamped) การแกว่งกวัดแบบหน่วงทั้ง 3 กรณี แสดงในรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 กราฟของการกระจัดกับเวลาแสดงการแกว่งกวัดแบบหน่วง 3 ประเภท คือ (a) หน่วงขาด (b) การหน่วงวิกฤต และ (c) การหน่วงเกิน

## 2. พลังงานที่สูญเสียไป

พลังงานของการแกว่งกวัดแบบหน่วงจะมีค่าลดลงเสมออันเนื่องจากระบบจำเป็นต้องใช้พลังงานส่วนหนึ่งเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน

อนุพันธ์ของสมการ (6.32) เทียบกับเวลา คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\omega e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \phi) - \frac{a}{2\tau} e^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi)$$

พลังงานจลน์ของระบบ

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{4\tau^2} \sin^2(\omega t + \phi) - \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi)\right]$$

และพลังงานศักย์ของระบบ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2 e^{-t/\tau} \sin^2(\omega t + \phi)$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา  $t$  ใดๆ กำหนดโดย

$$E = \text{พลังงานจลน์} + \text{พลังงานศักย์}$$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{4\tau^2}\right) \sin^2(\omega t + \phi) - \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi)\right]$$

ค่าเฉลี่ยพลังงานสำหรับคาบ  $T$  ใดๆ หาได้จากการหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอมทางขวามือของสมการสำหรับ  $E$  แต่เราทราบว่า

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2}$$

และ

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin 2(\omega t + \phi) dt = 0$$

ดังนั้น พลังงานรวมสำหรับการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบจึงมีค่า

$$E_{\text{ave}} = \frac{1}{4}ma^2e^{-t/\tau}\left(\omega^2 + \omega_0^2 + \frac{1}{4\tau^2}\right)$$

เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย ค่าของ  $\tau$  จะมีค่ามาก ดังนั้น เทอม  $\frac{1}{4\tau^2}$  อาจตัดทิ้งได้ นอกจากนี้  $\omega$  มีค่าใกล้เคียงกับ  $\omega_0$  มาก ดังนั้น

$$E_{\text{ave}} = \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2e^{-t/\tau} \quad (6.33)$$

การสูญเสียกำลัง โดยเฉลี่ยให้นิยามว่าเป็นค่าของอัตราเฉลี่ยการทำงานเพื่อต่อต้านแรงเสียดทาน หรือเป็นอัตราการลดค่าพลังงานเฉลี่ยของระบบซึ่งมีค่าดังนี้

การแกว่งกวัด

$$P_{ave} = -\frac{d}{dt} E_{ave}$$

$$= \frac{1}{2\tau} m a^2 \omega_0^2 e^{-t/\tau}$$

หรือ 
$$P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau} \quad (6.34)$$

ตัวประกอบคุณภาพ (quality factor, Q) เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วยและเป็นตัววัดความเป็นอิสระของระบบต่อความหน่วง อาจให้นิยามว่าเป็น  $2\pi$  คูณกับอัตราการใช้พลังงานเฉลี่ยต่อรอบ หรือ

$$Q = 2\pi \frac{\text{พลังงานเฉลี่ยของระบบที่เก็บสะสมไว้ต่อรอบ}}{\text{การสูญเสียกำลังโดยเฉลี่ยต่อรอบ}}$$

$$= 2\pi \frac{E_{ave}}{P_{ave} T} = \frac{\omega E_{ave}}{P_{ave}} \quad (6.35)$$

ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อย หรือ  $\omega \approx \omega_0$  และ  $P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau}$

$$\therefore Q = \omega_0 \tau \quad (6.36)$$

ตัวอย่างที่ 6.12 สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบหนึ่งกำหนดโดย

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

ถ้า  $\frac{\omega_0}{b} \gg 1$  จงหาเวลาที่ทำให้

- (a) แอมพลิจูดลดลงเป็น  $1/e$  เท่าของแอมพลิจูดเริ่มต้น
- (b) พลังงานของระบบลดลง  $1/e$  เท่าของพลังงานเริ่มต้น
- (c) พลังงานลดลง  $1/e^4$  เท่าของพลังงานเริ่มต้น

วิธีทำ

สมการที่กำหนดให้ข้างต้นจะคล้ายกับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

เมื่อเปรียบเทียบกันจะเห็นว่า  $b = \mu$  ดังนั้น จากเงื่อนไขที่กำหนดให้คือ  $\frac{\omega_0}{b} \gg 1$  จึงเปลี่ยนไปเป็น  $\frac{\omega_0}{\mu} \gg 1$  ซึ่งหมายความว่า  $\mu \ll \omega_0$  นั่นคือจะมีการแกว่งกวัด ดังได้กล่าวในกรณีที่ 3 แล้ว โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-\mu t} \sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ความถี่เชิงมุม  $\omega$  คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}$$

$\omega_0$  เป็นความถี่เชิงมุมที่ปราศจากการหน่วง  
แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$A = ae^{-\mu t} = ae^{-bt}$$

ซึ่งมีขนาดสูงสุดเท่ากับ  $a$

(a) เมื่อแอมพลิจูด  $A$  มีขนาดเท่ากับ  $\frac{a}{e}$  หรือ  $ae^{-1}$

ดังนั้น  $\mu t = 1$

หรือ  $t = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{b}$

(b) พลังงานศักย์ของระบบที่เวลา  $t$  กำหนดโดย

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 [ae^{-\mu t} \sin(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 e^{-2\mu t} \sin^2(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

พลังงานรวม  $E = (E_p)_{\max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 e^{-2\mu t}$

ดังนั้น  $E_{\max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2$

เมื่อพลังงาน  $E$  ลดลงเป็น  $E_{\max}/e$  หรือ  $E_{\max} e^{-1}$  นั่นคือ

$$2\mu t = 1 \quad \text{หรือ} \quad t = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2b}$$

(c) เมื่อพลังงานลดลงเป็น  $E_{\max}/e^4$  นั่นคือ

$$2\mu t = 4 \quad \text{ดังนั้น} \quad t = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{b}$$

ตัวอย่างที่ 6.13 ในการทดลองหยดน้ำมันมิลลิแกน (Millikan oil-drop experiment) หยดน้ำมันที่มีประจุ  $q$  และมวล  $m$  หยดลงมาภายใต้แรงของสนามไฟฟ้า  $E$  และความโน้มถ่วง  $g$  ในตัวกลางที่มีลักษณะหนืด สมมติอัตราเร็วของหยดน้ำมันมีรูปแบบเป็น  $v = A + Be^{-\alpha t}$  จงพิสูจน์ว่าความเร็วปลายคือ

$$v_{\text{term}} = \frac{q}{m} \tau E + g\tau$$

โดยที่  $\tau = \frac{m}{b}$  = เวลาของการผ่อนคลาย และ  $b$  คือ แฟกเตอร์การสูญเสียพลังงาน หรือค่าคงตัวการหน่วง

วิธีทำ

สมมติให้การเคลื่อนที่ลงตามแรงโน้มถ่วงมีค่าเป็นบวก และสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวเดียวกับแรงโน้มถ่วง ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของหยดน้ำมัน คือ

$$m \frac{dv}{dt} = mg + qE - bv$$

หรือ

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g + \frac{q}{m} E$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$v = A + Be^{-\alpha t}$$

$A$ ,  $B$  และ  $\alpha$  เป็นค่าคงตัวซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ เมื่อ  $t = 0$  หยดน้ำมันเริ่มต้นจากการหยุดนิ่ง หรือ  $v_0 = 0$  ดังนั้น  $A+B=0$  หรือ  $B = -A$

ผลเฉลยจะเปลี่ยนไปเป็น

$$v = A(1 - e^{-\alpha t})$$

และความเร่ง

$$\frac{dv}{dt} = A\alpha e^{-\alpha t}$$

สมการการเคลื่อนที่ข้างต้นจะกลายเป็น

$$A\alpha e^{-\alpha t} + \frac{A}{\tau}(1 - e^{-\alpha t}) = g + \frac{q}{m} E$$

เมื่อ  $t \rightarrow \infty$  เราได้

$$\frac{A}{\tau} = g + \frac{q}{m} E$$

หรือ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{A} \left( g + \frac{q}{m} E \right)$$

และเมื่อ  $t = 0$  เราได้

$$A\alpha = g + \frac{q}{m} E$$

หรือ

$$\alpha = \frac{1}{A} \left( g + \frac{q}{m} E \right)$$

ดังนั้น

$$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

แทนค่า  $\alpha$  และ  $A$  ลงในสมการสำหรับ  $v$  จะได้

$$v = \tau \left( g + \frac{q}{m} E \right) (1 - e^{-t/\tau})$$

ความเร็วของหยดน้ำมันในขณะที่แรงเสียดทาน  $bv$  มีค่าเท่ากับแรงขับ (ซึ่งในที่นี้คือ  $mg + qE$ ) เรียกว่าความเร็วปลาย ดังนั้น

$$v_{\text{term}} = v_{t = \infty} = \frac{q}{m} \tau E + g\tau$$

**ตัวอย่างที่ 6.14** จงหาคาบของการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดี่ยวเมื่อคิดแรงต้านทานจากอากาศด้วย และ ถ้าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดลดลงเหลือครึ่งหนึ่งในระยะเวลา 138 วินาที จงหาเวลาของการผ่อนคลาย

**วิธีทำ**

เมื่อคิดแรงต้านทานของอากาศด้วยสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเชิงเดี่ยวจะกลายเป็น

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -b \frac{d\theta}{dt} - mg\ell \sin\theta$$

ในกรณีที่  $\theta$  มีค่าน้อยๆ  $\sin\theta \sim \theta$

โมเมนต์ความเฉื่อยของลูกตุ้มเชิงเดี่ยวคือ  $I = m\ell^2$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนไปเป็น

$$m\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mg\ell\theta = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0$$

โดยที่

$$\frac{b}{m\ell^2} = \frac{1}{\tau} \quad \text{และ} \quad \frac{g}{\ell} = \omega_0^2$$

สำหรับการเคลื่อนที่ที่มีการแกว่งกวัด เงื่อนไขที่สำคัญ คือ  $\frac{1}{2\tau} < \omega_0$  ดังนั้น ผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\theta = ae^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ แอมพลิจูด  $A = ae^{-t/2\tau}$

และความถี่เชิงมุม คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4}}$$

ดังนั้น คาบ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left( \frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4} \right)^{-1/2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} \left( 1 - \frac{b^2 g}{4m^2 \ell^5} \right)^{-1/2}}$$

$$= T_0 \left( 1 + \frac{b^2 g}{8m^2 \ell^5} \right)$$

$T_0$  คือคาบในกรณีที่ไม่คิดแรงต้านทาน

แอมพลิจูดสูงสุดคือ  $A_{\max} = a$

และแอมพลิจูดเมื่อเวลา  $t = 138$  วินาที เท่ากับ  $ae^{-138/2\tau} = \frac{a}{2}$

ดังนั้น

$$\frac{69}{\tau} = \log_c \frac{1}{2}$$

และ

$$\tau = \frac{69}{0.69} = 100 \text{ วินาที}$$

ดังนั้น เวลาของการผ่อนคลายเท่ากับ 100 วินาที

**ตัวอย่างที่ 6.15** มวล 1 กิโลกรัม ถูกกระทำด้วยแรงซึ่งมีค่าคงตัวเท่ากับ 400 นิวตัน/เมตร และแรงเสียดทานขนาด 4 นิวตัน/เมตร/วินาที ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นคือ  $x = 0$  และ  $v = 2$  เมตร/วินาที ที่  $t = 0$  จงหา

- ความถี่เชิงมุมของการแกว่งกวัด
- พลังงานของระบบที่  $t = 0$
- อัตราการสูญเสียพลังงานต่อวินาที ที่  $t = 0$  และที่เวลาใดๆ
- อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบที่  $t = 0$  และที่เวลาใดๆ
- จำนวนรอบของการแกว่งกวัดก่อนที่แอมพลิจูดลดลง  $1/e$  ของค่าเริ่มต้น

วิธีทำ

(a) สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ในที่นี้  $m = 1$  กก.  $b = 4$  นิวตัน/เมตร/วินาที

และ  $k = 400$  นิวตัน/เมตร

$$\text{ดังนั้น } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ เรเดียน/วินาที}$$

$$\text{และ } \frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} = 4 \text{ หรือ } \tau = 1/4 \text{ วินาที}$$

จะเห็นว่า  $\frac{1}{2\tau} < \omega_0$  ดังนั้น ระบบจะมีการแกว่งกวัด โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น  $x = 0$  เมื่อ  $t = 0$  ดังนั้น  $\phi = 0$

$$\text{และ } x' = ae^{-t/2\tau} \sin \omega t$$

$\omega$  คือความถี่เชิงมุมของการหน่วง กำหนดโดย

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/4\tau^2} = \sqrt{400 - 4} = 19.9 \text{ เรเดียน/วินาที}$$

(b) อัตราเร็วที่เวลา  $t$  ใดๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-a}{2\tau} e^{-t/2\tau} \sin \omega t + a\omega e^{-t/2\tau} \cos \omega t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น  $t = 0, v = 2$  เมตร/วินาที

$$\text{ดังนั้น } a\omega = 2 \text{ หรือ } a = \frac{2}{19.9} \approx \frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{พลังงานจลน์ } E_k &= \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} ma^2 e^{-t/\tau} \left[ \omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{4\tau^2} \sin^2 \omega t - \frac{\omega}{2\tau} \sin 2\omega t \right] \end{aligned}$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา  $t$  ใดๆ = พลังงานจลน์สูงสุด

$$\text{หรือ } E = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 e^{-t/\tau}$$

$$\text{และพลังงานรวมที่ } t = 0 \text{ คือ } E = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 = 2 \text{ จูล}$$

$$(c) \text{ อัตราการสูญเสียพลังงาน} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\therefore \left( \frac{dE}{dt} \right)_{t=0} = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 = 8 \text{ จูล}$$

$$(d) \text{ อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบ} = \left( \frac{dE}{dt} \right) (T) \text{ เมื่อ } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \left( \frac{dE}{dt} \right) (T)_{t=0} = \frac{8 \times 6.28}{19.9} = 2.4 \text{ จูล/วินาที}$$

$$(e) \text{ แอมพลิจูด } A = ae^{-t/2\tau} \text{ โดยที่ } A_{\max} = a$$

$$\text{เมื่อแอมพลิจูดลดลงเป็น } A_{\max}/e = \frac{a}{e} = ae^{-1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{t}{2\tau} = 1 \text{ หรือ } t = 2\tau = \frac{1}{2} \text{ วินาที}$$

$$\text{และจำนวนรอบในช่วงเวลา } \frac{1}{2} \text{ วินาที}$$

$$= \frac{t}{T} = \frac{\omega}{4\pi} = 1.6 \text{ รอบ}$$

### 3. ผลของแรงภายนอก

เราทราบจากหัวข้อที่แล้วว่า แรงเสียดทานทำให้การแกว่งกวัดลดลง และหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เพื่อให้การแกว่งกวัดคงอยู่ไปนานๆ จำเป็นต้องมีแรงภายนอกมากระทำอย่างสม่ำเสมอ สมมติแรงภายนอกดังกล่าวคือ  $F_0 \sin \omega t$  กระทำต่อระบบซึ่งมีมวล  $m$  ค่าคงตัวสปริง  $k$  ค่าคงตัวการหน่วง  $b$  ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (6.37)$$

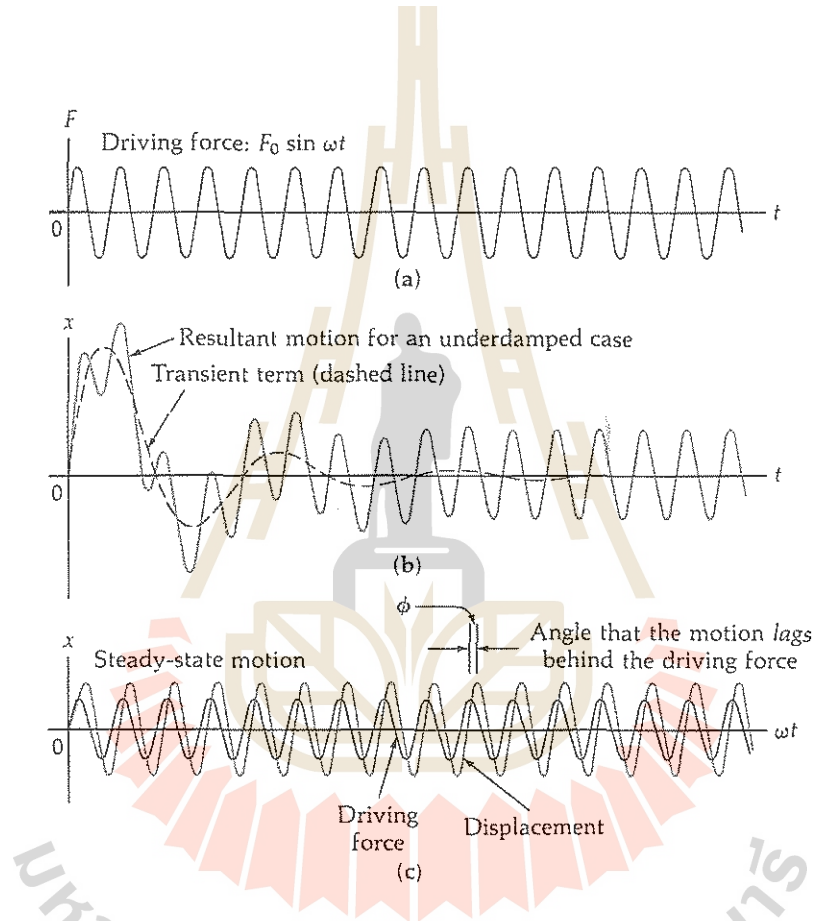
เพื่อให้ไม่สับสนกับสัญกรณ์ (notation) ของความถี่ที่ผ่านมา จึงกำหนดให้  $\omega$  เป็นความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำอย่างต่อเนื่อง (ซึ่งในที่นี้กำหนดเป็นคลื่นไซน์)  $\omega'$  เป็นความถี่ที่เกิดจากการหน่วง และ  $\omega_0$  เป็นความถี่ธรรมชาติ ซึ่งเป็นความถี่ที่ปราศจากแรงเสียดทานหรือแรงภายนอกอื่นใด

ผลเฉลยของสมการ (6.37) ประกอบด้วย 2 เทอม คือ เทอมของภาวะชั่วคราว (transient term) และ เทอมของสถานะคงตัว (steady state term) กล่าวคือ เมื่อเริ่มต้นมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ แรงภายนอกจะเพิ่มค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบจนกระทั่งอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่ให้แก่ระบบมีค่าเท่ากับอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่สูญเสียไปเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน ช่วงดังกล่าวนี้เป็นภาวะชั่วคราว การกระจัดจะมีค่ามากและลดลงอย่างรวดเร็วแบบเอกซ์โพเนนเชียล เทอมของภาวะชั่วคราวจึงเป็นผลเฉลยของสมการ

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา การเคลื่อนที่ในช่วงนี้ขึ้นกับการกระจัดเริ่มต้น และอัตราเร็วของมวล และยังขึ้นกับเฟสของแรงภายนอกที่มากระทำด้วย

หลังจากที่เทอมของภาวะชั่วคราวหายไป ระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดแบบคลื่นไซน์มีมวลของระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดด้วยความถี่  $\omega$  เท่ากับความถี่ของแรงขับภายนอก แต่มีเฟสต่างกันเท่ากับ  $\phi$  กล่าวคือคลื่นการแกว่งกวัดของระบบจะตามหลังคลื่นของแรงภายนอกด้วยมุม  $\phi$  ดังแสดงในรูปที่ 6.14 การแกว่งกวัดในช่วงหลังนี้จึงเป็นการแกว่งกวัดในสถานะคงตัว



รูปที่ 6.14 แสดงการแกว่งกวัดแบบบังคับ (a) แสดงคลื่นของแรงขับภายนอก (b) เทอมของภาวะชั่วคราว และ (c) การเคลื่อนที่ที่สถานะคงตัว

เทอมของสถานะคงตัวเป็นเทอมที่อธิบายการแกว่งกวัดของระบบหลังจากที่เทอมของภาวะชั่วคราวหายไป

ถ้าเรากำหนดให้  $\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}, \frac{k}{m} = \omega_0^2$  และ  $\frac{F_0}{m} = f_0$  สมการ (6.37) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (6.38)$$

สมมติว่าผลเฉลยของสมการ (6.38) มีรูปแบบเป็น

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (6.39)$$

โดยที่  $A$  คือแอมพลิจูด และ  $\phi$  คือเฟสที่แตกต่างกันระหว่างคลื่นการแกว่งกวัดของระบบและคลื่นของแรงภายนอก

หาอนุพันธ์ของสมการ (6.39) 2 ครั้งเทียบกับเวลา  $t$  แล้วแทนค่าเทอมต่างๆ ลงในสมการ (6.38) จะได้

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \frac{A\omega}{\tau} \cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \phi) \\ = f_0 \sin \omega t = f_0 \sin(\omega t + \phi - \phi) \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)A \sin(\omega t + \phi) + \frac{A\omega}{\tau} \cos(\omega t + \phi) \\ = f_0 \sin(\omega t + \phi) \cos \phi - f_0 \cos(\omega t + \phi) \sin \phi \end{aligned} \quad (6.40)$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม  $\sin(\omega t + \phi)$  และ  $\cos(\omega t + \phi)$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = f_0 \cos \phi$$

และ

$$\frac{A\omega}{\tau} = -f_0 \sin \phi$$

เมื่อนำมาหารกันจะได้

$$\tan \phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

หรือ

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.41)$$

และเมื่อยกกำลังสองของทั้งสองเทอมแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{A^2\omega^2}{\tau^2} = f_0^2$$

หรือ 
$$A = \frac{f_0}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right]^{1/2}} \quad (6.42)$$

พิจารณา 3 กรณีที่เกิดขึ้น :

**กรณีที่ 1** เมื่อ  $\omega \ll \omega_0$

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติมากๆ จึงอาจตัดเทอมของ  $\omega$  ในสมการ (6.42) ดังนั้น

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \quad (6.43)$$

ในกรณีเช่นนี้ การตอบสนองจึงเกิดจากค่าของตัว  $k$  เท่านั้นนอกจากนี้เมื่อ  $\omega \rightarrow 0$  ค่าของ  $\tan \phi \rightarrow 0$  หรือ  $\phi \rightarrow 0$  ซึ่งหมายถึงเฟสที่แตกต่างกันมีค่าน้อยมาก หรือมีการตอบสนองด้วยความถี่เดียวกับแรงภายนอก

**กรณีที่ 2** เมื่อ  $\omega = \omega_0$  (การสั่นพ้องแอมพลิจูด)

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกเท่ากับความถี่ธรรมชาติพอดี แอมพลิจูดจะมีค่าสูงสุด กล่าวคือ

$$A_r = \frac{f_0}{\omega/\tau} = \frac{f_0 \tau}{\omega_0} \quad (6.44)$$

และแทนค่า  $\omega = \omega_0$  ลงในสมการ (4.5) จะได้  $\phi = -\frac{\pi}{2}$  ซึ่งหมายความว่า เมื่อมีการสั่นพ้องแรงภายนอกนำหน้าการตอบสนองด้วยมุม  $\pi/2$  แอมพลิจูดของการสั่นพ้องขึ้นอยู่กับความหน่วง กล่าวคือ เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย  $\tau$  จะมีค่ามาก ดังนั้น  $A_r$  จะมีค่ามาก และถ้าไม่มีการหน่วงเลย หรือ  $b = 0, \tau = \infty$  แอมพลิจูดของการสั่นพ้อง  $A_r$  จะมีค่าอนันต์

เมื่อมีการหน่วง แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมิได้มีค่าสูงสุดที่  $\omega = \omega_0$  พอดี กล่าวคือ อนุพันธ์ของ  $A$  ในสมการ (6.42) เทียบกับ  $\omega$  โดยให้  $\omega_0$  เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{1}{2} f_0 \frac{(-2)2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega/\tau^2}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2 \right]^{3/2}} = 0$$

หรือ 
$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

$$\therefore \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_0^2 \tau^2}} \quad (6.45)$$

ซึ่งเป็นความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมีค่าสูงสุด จะเห็นได้ว่า  $\omega$  มีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ  $\omega_0$  เล็กน้อย และถ้าหากความหน่วงมีค่าน้อยมาก  $\tau$  จะมีค่ามากดังนั้นจึงอาจตัดเทอม  $1/2\omega_0^2\tau^2$  ออกไปได้ และ  $\omega$  จะเท่ากับ  $\omega_0$

**กรณีที่ 3** เมื่อ  $\omega \gg \omega_0$

ถ้าให้  $\omega_0 = 0$  ในสมการ (6.42) จะได้

$$A = \frac{f_0}{\left[\omega^4 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

และเมื่อการหน่วงมีค่าน้อยมาก  $\tau \rightarrow \infty$  จึงอาจตัดทิ้งเทอม  $\frac{\omega^2}{\tau^2}$  คำนึง

$$A = \frac{f_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2} \quad (6.46)$$

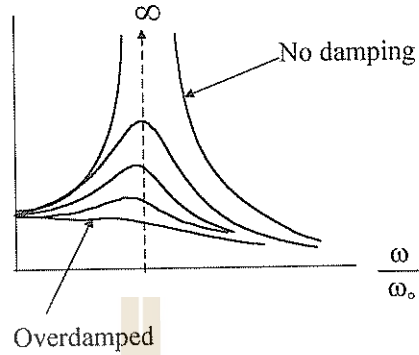
จะเห็นได้ว่า แอมพลิจูดลดลงเมื่อความถี่ของแรงภายนอกเพิ่มขึ้น และจากสมการ (6.41) เราได้ว่า

$$\tan \phi \rightarrow -0 \quad \text{หรือ} \quad \phi \rightarrow -\pi$$

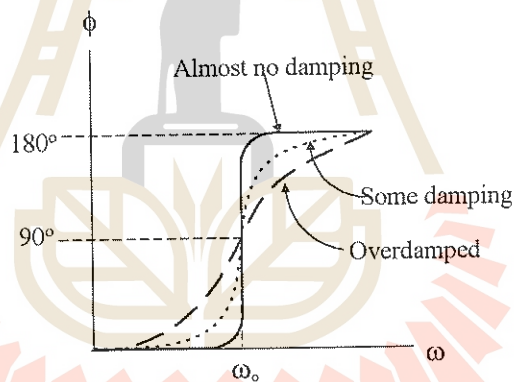
ในกรณีเช่นนี้ การกระจัดของการตอบสนองจะตามหลังแรงภายนอกด้วยเฟสเท่ากับ  $\pi$

เมื่อแรงภายนอกกระทำต่อระบบได้ระยะหนึ่ง ระบบจะเกิดการแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่ไม่ใช่ความถี่ธรรมชาติของระบบเอง แต่ระบบจะแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่เท่ากับความถี่ของแรงภายนอก แอมพลิจูดที่มีค่าน้อยแสดงว่าแรงเสียดทานมีค่ามาก และขึ้นกับความถี่ของแรงภายนอก รูปที่ 6.15 แสดงกราฟของแอมพลิจูดที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอก โดยมีความถี่ธรรมชาติที่ปราศจากการหน่วงอยู่ในแนวดิ่ง ความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดมีค่าสูงสุดเรียกว่า ความถี่ของการสั่นพ้อง (resonant frequency) เมื่อระบบปราศจากแรงเสียดทาน ความถี่ของการสั่นพ้องเท่ากับความถี่ธรรมชาติ แอมพลิจูดจะมีค่าอนันต์ เมื่อมีแรงเสียดทานแอมพลิจูดจะลดลง โดยมีความถี่ของการสั่นพ้องน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติเล็กน้อย

### Amplitude of forced harmonic motion



รูปที่ 6.15 แสดงแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอก และที่การหน่วงแตกต่างกัน



รูปที่ 6.16 แสดงมุมเฟส  $\phi$  ของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่ล้าหลังแรงภายนอก และเป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอกที่การหน่วงค่าต่างๆ

---

## สรุป

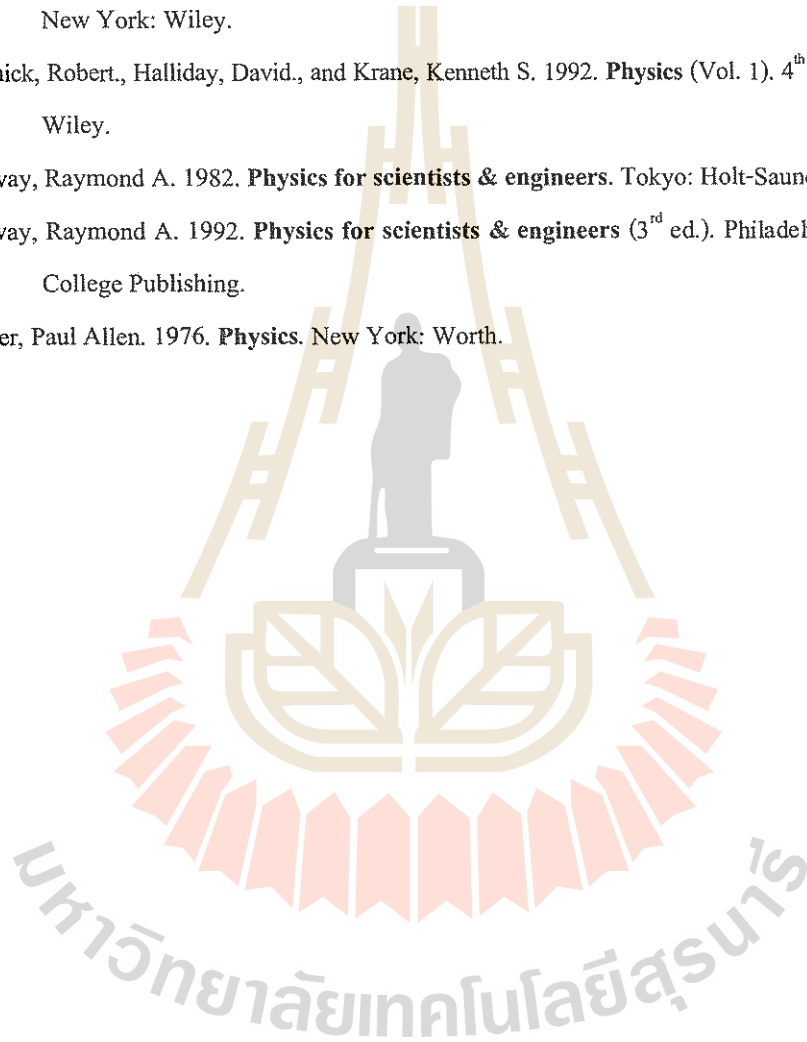
การแกว่งกวัดแบบหน่วงเกิดจากการที่มีแรงภายนอกมาต้านการเคลื่อนที่ เช่น อากาศ เป็นต้น ทำให้แอมพลิจูดลดลง และเป็นศูนย์ในที่สุด แต่ถ้าต้องการให้แอมพลิจูดเท่าเดิมตลอดไป จำเป็นจะต้องมีแรงภายนอกมาช่วยซึ่งจะเรียกว่า การแกว่งแบบบังคับ เช่น การไกวเปล เป็นต้น



## บรรณานุกรม

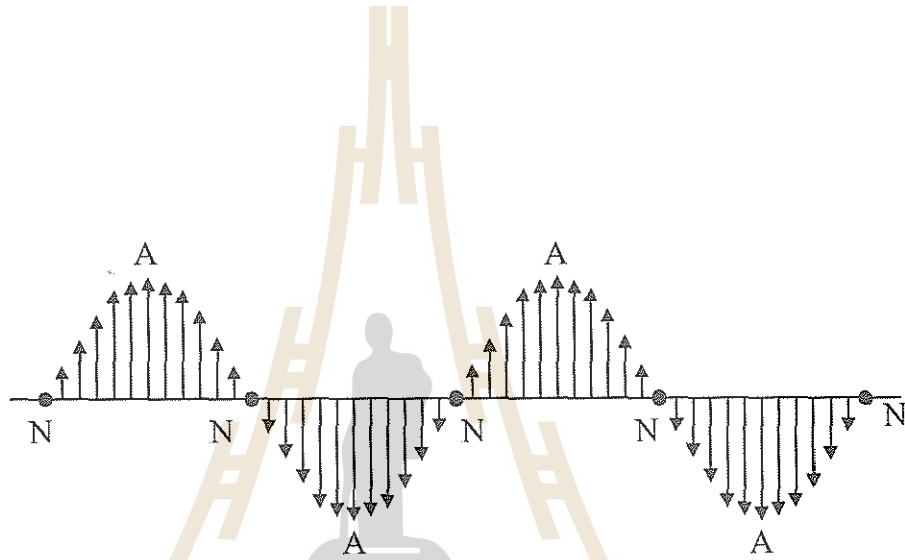
---

- Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2<sup>nd</sup> ed.). Tokyo: McGraw-Hill.
- Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: Wiley.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1), 4<sup>th</sup> ed. New York: Wiley.
- Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers**. Tokyo: Holt-Saunders Japan.
- Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics**. New York: Worth.



---

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล



# ตอนที่ 7.1

## คลื่นและชนิดของคลื่น

เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็น 2 ประเภทตามลักษณะของการแผ่ (propagation) ของคลื่น คือ คลื่นกล (mechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยอาศัยตัวกลางที่ยืดหยุ่น (elastic media) เช่น คลื่นเสียง คลื่นในลวดสปริง คลื่นน้ำ คลื่นในเส้นเชือกที่มีการแกว่ง เป็นต้น และคลื่นที่ไม่ใช่คลื่นกล (nonmechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยไม่ต้องอาศัยตัวกลาง หรือผ่านสุญญากาศไปได้ เช่น คลื่นแสง คลื่นวิทยุ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic wave) เป็นต้น ในตอนนี้เราจะศึกษาเฉพาะคลื่นกลเท่านั้น ส่วนคลื่นชนิดหลังจะได้กล่าวในตอนต่อไป

### 1. คลื่นและชนิดของคลื่น

คลื่นกลเกิดจากการที่อนุภาคของตัวกลางถูกทำให้เคลื่อนที่ไปจากจุดสมดุล และเกิดจากการแกว่งกวัด (oscillation) รอบจุดสมดุลนั้น เนื่องจากตัวกลางมีสมบัติของการยืดหยุ่น ฉะนั้นเมื่อตัวกลางเกิดการสั่น (vibration) จะมีการส่งต่อ (transmission) ไปยังอนุภาคต่อไป และอนุภาคต่อไปนั้นจะสั่นรอบจุดสมดุลเช่นเดียวกับอนุภาคที่เริ่มต้นสั่นด้วย ทำให้เกิดคลื่นหรือการรบกวน (disturbance) แผ่ออกไป โดยที่อนุภาคของตัวกลางไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย เช่น เมื่อโยนก้อนหินลงในสระที่มีน้ำนิ่ง เราจะสังเกตเห็นคลื่นแผ่ออกไปจากจุดที่ก้อนหินกระทบน้ำ และวัตถุเล็กๆ ที่ลอยอยู่บนผิวน้ำจะสั่นขึ้นลงแต่ยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม นั่นคืออนุภาคของตัวกลาง (ในที่นี้คือน้ำ) ไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย

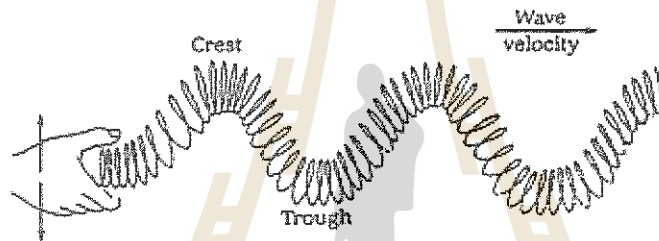
อัตราเร็วของคลื่นขึ้นอยู่กับความยืดหยุ่นและความเฉื่อยของตัวกลาง ความยืดหยุ่นทำให้เกิดแรงดึงกลับของอนุภาคของตัวกลางสู่ตำแหน่งสมดุล ส่วนความเฉื่อยจะสัมพันธ์กับแรงดึงกลับนี้ ดังนั้น ทั้งความยืดหยุ่นและความเฉื่อยจะเป็นตัวกำหนดอัตราเร็วของคลื่น

นอกจากนี้ การที่วัตถุสั่นขึ้นลงได้นั้น แสดงว่า จะต้องได้รับพลังงานจากคลื่น ดังนั้น การเคลื่อนที่ของคลื่นจะส่งผ่าน (transfer) หรือแผ่พลังงานและโมเมนตัมด้วย

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

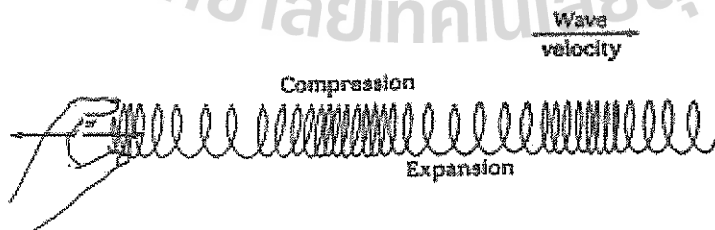
โดยทั่วไปคลื่นกลแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ตามลักษณะการสั่นของตัวกลาง และทิศทางของการแผ่ของคลื่น คือ

1) คลื่นตามขวาง (transverse waves) เป็นคลื่นที่ส่งผ่านตัวกลาง แล้วทำให้อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นในเส้นเชือกขึงตึง เป็นต้น ถ้าเรากระตุกปลายเชือกขึ้นและลงแต่ละครั้ง เราจะเห็นพัลส์ของคลื่น (wave pulse) เคลื่อนที่ไปในเชือกด้วยอัตราเร็วคงตัว หรือคลื่นที่เกิดในลวดสปริง ซึ่งเรากระตุกปลายเชือกขึ้นลงดังรูปที่ 7.1



รูปที่ 7.1 แสดงคลื่นตามขวางในลวดสปริง

2) คลื่นตามยาว (longitudinal waves) อนุภาคตัวกลางจะสั่นในแนวเดียวกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น ถ้าเราอัดลวดสปริงหนึ่งครั้ง เราจะเห็นส่วนอัด (compression) เคลื่อนที่ไปในสปริง อนุภาคของลวดสปริงสั่นตามแนวเดียวกับทิศที่ส่วนอัดหรือคลื่นเคลื่อนที่ไป ดังรูปที่ 7.2 และในขณะที่เกิดส่วนอัดก็จะเกิดส่วนขยาย (expansion or rarefaction) สลับกันไป



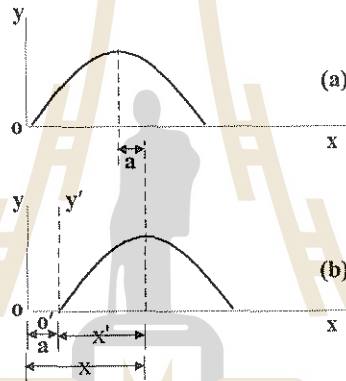
รูปที่ 7.2 แสดงคลื่นตามยาวในลวดสปริง

คลื่นที่เกิดจากการโยนก้อนหินลงในสระน้ำนิ่งถือเป็นคลื่นตามขวาง เพราะอนุภาคน้ำสั่นขึ้นลงเมื่อคลื่นมาถึง ซึ่งดูได้จากวัตถุเล็กๆ ลอยที่ผิวน้ำ ส่วนคลื่นในทะเลเป็นคลื่นตามขวาง และคลื่นตามยาว ทั้งนี้เพราะอนุภาคน้ำจะเคลื่อนที่ขึ้นลงและไปกลับ ซึ่งรวมแล้วจะเคลื่อนที่เป็นวงรี (ellipse) เมื่อคลื่นน้ำผ่านไป สำหรับคลื่นเสียงในอากาศเป็นคลื่นตามยาว

นอกจากนี้เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็นคลื่นหนึ่งมิติ เช่น คลื่นในเชือกขึงตึง คลื่นสองมิติ เช่น คลื่นน้ำ และคลื่นสามมิติ เช่น คลื่นเสียง เป็นต้น

## 2. สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น

ให้  $y = f(x)$  ที่เวลา  $t = 0$  เป็นฟังก์ชันมีรูปร่างดังรูปที่ 7.3 (a) เมื่อเวลาผ่านไป  $t = t$  ตำแหน่งต่างๆ ของฟังก์ชันเปลี่ยนไปเป็นระยะ  $a$  โดยที่รูปร่างของฟังก์ชันยังเหมือนเดิม ดังแสดงในรูปที่ 7.3 (b)



รูปที่ 7.3 แสดงการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง

สมมติให้ O' เคลื่อนไปอยู่ที่ O' หลังการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน เนื่องจากรูปร่างของฟังก์ชันไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป  $t = t$  ฟังก์ชันเขียนได้เป็น  $y = f(x')$  และจากรูปที่ 7.3 (b) จะเห็นว่า  $x' = x - a$  เราจึงสรุปได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป  $t = t$  ฟังก์ชัน  $y = f(x - a)$  จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ  $a$  ไปทางขวามือ และในทางตรงกันข้าม ฟังก์ชัน  $y = f(x + a)$  จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ  $a$  ไปทางซ้ายมือ

ถ้าให้  $a = vt$  โดยที่  $t$  คือเวลาที่ผ่านไป และ  $v$  คืออัตราเร็วของการเคลื่อนที่ เราจะได้ฟังก์ชัน  $y = f(x \pm vt)$  เรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่แสดงการเคลื่อนที่ของคลื่นซึ่งมีรูปแบบคงเดิมตลอดเวลา

ฟังก์ชัน  $y(x, t)$  ที่น่าสนใจ คือฟังก์ชันของคลื่นฮาร์มอนิก (harmonic wave) ที่เป็นรูปไซน์ (sinusoidal waves) ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$y(x, t) = A \sin k(x - vt) \quad (7.1)$$

โดยที่  $A$  คือค่ามากที่สุดของ  $y$  เรียกแอมพลิจูดของคลื่น  $v$  คืออัตราเร็วของคลื่น ส่วนค่า  $k$  มีความเกี่ยวข้องกับรูปแบบของคลื่นและการเคลื่อนที่ของคลื่นดังนี้ ถ้าให้  $x$  เปลี่ยนไปเป็นระยะทาง  $2\pi/k$  พบว่าคลื่นยังคงมีส่วนโค้งเหมือนที่ตำแหน่ง  $x$  นั่นคือ  $y(x, t)$  จะมีค่าเหมือนเดิมเมื่อเปลี่ยนเป็น  $y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right)$  หรือ

$$\begin{aligned} y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) &= A \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) \\ &= A \sin \{k(x - vt) + 2\pi\} \\ &= A \sin k(x - vt) \\ &= y(x, t) \end{aligned}$$

ถ้าให้  $\lambda = 2\pi/k$  จะได้ว่า  $\lambda$  เป็นช่วงของระยะทางที่ส่วนโค้งมีลักษณะซ้ำๆ กัน จึงเรียกระยะนี้ว่าความยาวคลื่น (wavelength) ส่วนค่า  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  คือจำนวนคลื่นในระยะทาง  $2\pi$  เรียกเลขคลื่น (wave number)

ดังนั้น  $y = A \sin k(x \pm vt) = A \sin 2\frac{\pi}{\lambda}(x \pm vt)$  เป็นสมการของคลื่นฮาร์มอนิก ซึ่งมีความยาวคลื่น  $\lambda$  เคลื่อนที่ไปในทิศ  $-x$  หรือ  $+x$  ด้วยอัตราเร็ว  $v$  คงตัวเรียก  $v$  ว่าความเร็วเฟส (phase velocity) ของคลื่น สมการ (7.1) อาจเขียนใหม่เป็น

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (7.2)$$

โดยที่  $\omega = kv = 2\pi\frac{v}{\lambda}$  เรียกความถี่เชิงมุม (angular frequency) ของคลื่น

ความหมายของ  $\omega$  อาจพิจารณาได้ดังนี้ ถ้าวัดแทน  $t$  ด้วย  $t + \frac{2\pi}{\omega}$  ลงใน (7.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin\left\{kx - \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right\} \\ &= A \sin\{(kx - \omega t) - 2\pi\} \\ &= A \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

นั่นคือ ฟังก์ชันจะซ้ำกันทุกๆ เวลาที่เพิ่มขึ้น  $\frac{2\pi}{\omega}$  เรียกเวลานี้ว่า คาบของการสั่น  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  และ  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  โดยที่  $f = \frac{1}{T}$  คือความถี่ของคลื่น หมายถึง จำนวนคลื่นที่ผ่านตำแหน่งใดๆ ในเวลา 1 วินาที

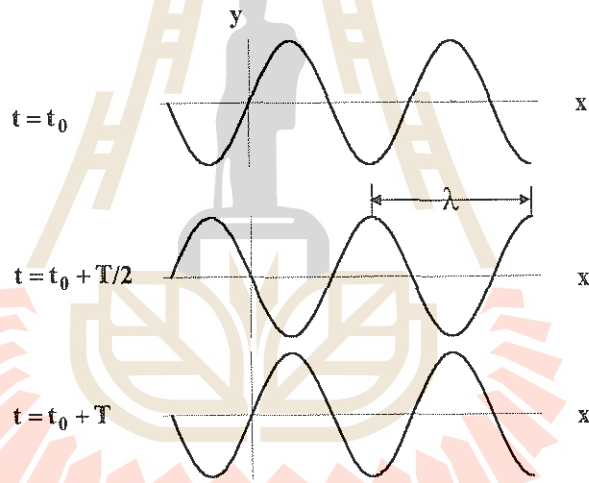
จาก  $\omega = kv = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi f$  โดยที่  $f = \frac{v}{\lambda}$  หรือ  $v = \lambda f$  ฉะนั้นเราอาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้ดังนี้

$$y = A \sin k(x \pm vt)$$

หรือ  $y = A \sin(kx \pm \omega t)$

หรือ  $y = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right)$

จะเห็นได้ว่า นอกจากความยาวคลื่นที่แสดงถึงช่วงระยะทางที่คลื่นมีรูปแบบซ้ำกันแล้วคาบของการสั่น ยังแสดงความซ้ำกันของคลื่นเมื่อเวลาผ่านไป 1 คาบอีกด้วยซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นกับคาบของการสั่นคือ  $\lambda = \frac{v}{f} = vT$



รูปที่ 7.4 แสดงการซ้ำกันของคลื่น ทั้งความยาวคลื่นและคาบของการสั่น  
ในทางคณิตศาสตร์ การเคลื่อนที่ของคลื่นอาจเขียนกลับกันได้ กล่าวคือ

$$y(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

โดยที่เครื่องหมาย  $\pm$  แสดงถึงการเคลื่อนที่ไปทางด้านที่  $x$  มีค่าเป็น  $-$  และ  $+$  ตามลำดับ  
ฉะนั้น สำหรับคลื่นฮาร์มอนิก อาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้เป็น

$$\begin{aligned}y(x, t) &= A \sin \omega \left( t \pm \frac{x}{v} \right) = A \sin(\omega t \pm kx) \\ &= A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= A \sin(\omega t \pm \phi)\end{aligned}\quad (7.3)$$

โดยที่  $\phi$  คือค่าคงตัวเฟส (phase constant) ของคลื่น ซึ่งขึ้นอยู่กับกรเลือกกำหนดเวลาเริ่มต้น  
เช่นในรูปที่ 7.4 ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของเวลาจะทำให้คลื่นที่ต่างเวลากันมีเฟสต่างกัน นั่นคือ  
เมื่อเวลาต่างกัน  $\frac{T}{2}$  จะมีเฟสต่างกัน  $180$  องศา

สมการ (7.3) อาจเขียนในรูปของเอกซ์โพเนนเชียล (exponential) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}y &= Ae^{i2\pi f \left( t \pm \frac{x}{v} \right)} \\ &= Ae^{i\omega \left( t \pm \frac{x}{v} \right)}\end{aligned}\quad (7.4)$$

ถ้า  $\mu$  คือดัชนีหักเห (refractive index) ของตัวกลาง และ

$$\mu = \frac{v_0}{v} \quad \text{หรือ} \quad v = \frac{v_0}{\mu}$$

โดยที่  $v_0$  และ  $v$  เป็นความเร็วของคลื่นในตัวกลางสองชนิดที่ต่างกัน ดังนั้น

$$y = Ae^{i\omega \left( t - \frac{\mu x}{v_0} \right)}\quad (7.5)$$

ความเร็ว  $v$  ซึ่งเรียกว่าความเร็วเฟสเป็นความเร็วของคลื่น ส่วนความเร็วของอนุภาคของตัวกลาง  
ที่คลื่นอาศัยเป็นตัวผ่านหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (7.3) เทียบกับเวลา  $t$  หรือ  $\frac{dy}{dt}$  นั่นเอง

ความเร็วของอนุภาคแต่ละตัวขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดและความถี่ของคลื่นแต่ความเร็วของคลื่น  
หรือความเร็วเฟสไม่ขึ้นกับแอมพลิจูด แต่ขึ้นกับสมบัติและสถานะของตัวกลาง สถานะของตัวกลาง  
อาจเป็นความดันของแก๊สหรือความตึงของเส้นลวด ส่วนสมบัติของตัวกลางคือความหนาแน่น  
ความยืดหยุ่น เป็นต้น

คลื่นที่เกิดขึ้นจริงตามธรรมชาติไม่ได้เป็นคลื่นฮาร์มอนิกอย่างสมบูรณ์ เพราะคลื่นฮาร์มอนิกจะขยายไปจนถึงอนันต์ในแต่ละทิศทางตามแนวแกน x และไม่มีเวลาเริ่มต้นหรือเวลาสิ้นสุด คลื่นที่เกิดขึ้นจริงๆ จะต้องเริ่มต้นและสิ้นสุด ณ ที่หนึ่งหรือที่ใดๆ ในปริภูมิ และเวลาหนึ่ง คลื่นที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติ เช่น คลื่นเสียงหรือคลื่นแสง อาจพอประมาณได้ว่าเป็นคลื่นฮาร์มอนิก เพราะมันขยายไปในปริภูมิที่มากกว่าความยาวคลื่นของมันเอง และช่วงเวลาที่มันผ่านจุดหนึ่งๆ จะมากกว่าคาบของมันมาก คลื่นดังกล่าวจะเรียกว่าขบวนคลื่น (wave train) คลื่นฮาร์มอนิกถือเป็นคลื่นในจินตนาการของขบวนคลื่น

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นสำหรับคลื่นฮาร์มอนิก เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์เรียกว่าสมการคลื่น (wave equation) ซึ่งหาได้ดังนี้

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลา t ของคลื่นฮาร์มอนิก

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

คือ 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

หรือ 
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2 k^2 y(x, t)$$

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ x ของคลื่นฮาร์มอนิกเดิมคือ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = -k^2 y(x, t)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการอนุพันธ์อันดับสองทั้งสองสมการ จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{7.6}$$

ซึ่งเป็นสมการคลื่น เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกสอดคล้องกับสมการคลื่น (7.6) ดังนั้น คลื่นฮาร์มอนิกจึงเป็นผลเฉลยของสมการคลื่น โดยทั่วไป  $y(x, t) = f(x \pm vt)$  ฟังก์ชันคลื่นเป็นผลเฉลยของสมการคลื่น (7.6)

ในกรณีของคลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาว ฟังก์ชันคลื่นแสดงการกระจัดของตัวกลางที่คลื่นผ่านสำหรับคลื่นแสงซึ่งเป็นคลื่นตามขวางและเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ฟังก์ชันคลื่นแสดงการแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า ดังนั้น โดยทั่วไปเราอาจเขียนสมการคลื่นได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{7.7}$$

โดยที่  $\Psi(x, t)$  แทนปริมาณทางฟิสิกส์ซึ่งแกว่งกวัดหรือบ่งบอกความเป็นคลื่น ในกรณีของคลื่นบนเส้นเชือก  $\Psi$  ให้ค่าการกระจัดในแนวตั้งของเชือก สำหรับคลื่นเสียงในของเหลว  $\Psi$  ให้ค่าการกระจัดในแนวขนานของของเหลว และในกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า  $\Psi$  ให้ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

### 3. อัตราเร็วของคลื่นกล

ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่า คลื่นกลเป็นคลื่นที่แผ่กระจายไปโดยอาศัยตัวกลางที่ยึดหยุ่น เช่น คลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่อาจเป็นของแข็ง ของเหลว และแก๊ส ช่วงคลื่นที่มนุษย์ปกติจะรับฟังได้จะอยู่ระหว่าง 20 – 20,000 Hz คลื่นตามยาวที่มีความถี่น้อยกว่านี้ เรียกว่า คลื่นใต้เสียง (infrasonic waves) และที่มีความถี่มากกว่าช่วงนี้เรียกว่า คลื่นเหนือเสียง (ultrasonic waves) โดยทั่วไปอัตราเร็วของคลื่นกลในตัวกลางมีรูปแบบเป็น

$$v = \sqrt{\frac{\text{มอดูลัสความยืดหยุ่น}}{\text{ความหนาแน่น}}}$$

ในกรณีของคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวหรือของแข็ง อัตราเร็วของคลื่นคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (7.8)$$

$B$  คือมอดูลัสเชิงปริมาตรของตัวกลาง และ  $\rho$  คือความหนาแน่น คลื่นปฐมภูมิ (primary waves) หรือที่มักเรียกย่อๆ ว่า P-waves ซึ่งเกิดจากแผ่นดินไหวเป็นคลื่นตามยาวที่มีลักษณะดังกล่าวแม้ว่าอัตราเร็วของคลื่น P-waves อาจแตกต่างจากสมการ (7.8) เล็กน้อย คลื่น P-waves เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่สูงกว่าคลื่นที่เกิดจากแผ่นดินไหวอีกชนิดหนึ่ง ดังนั้นสถานีตรวจแผ่นดินไหวจึงรับคลื่นนี้ได้ก่อนคลื่นชนิดอื่นที่ตามมาทีหลัง

อัตราเร็วของคลื่นตามขวางในตัวกลางที่เป็นของแข็ง คือ

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \quad (7.9)$$

$S$  คือมอดูลัสเฉือนของของแข็ง คลื่นทุติยภูมิ (secondary waves) หรือที่มักเรียกกันว่า S-waves เป็นคลื่นตามขวางที่เกิดจากแผ่นดินไหว และเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามสมการ (7.9) ซึ่งช้ากว่า P-waves

เนื่องจากของเหลวและแก๊สไม่มีความเค้นเฉือนซึ่งแตกต่างจากของแข็ง ดังนั้น คลื่นตามขวางจึงไม่อาจเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวและแก๊สได้ นอกจากนี้คลื่นตามขวางเคลื่อนที่ได้ลึกไม่เกิน 2,900 กิโลเมตรจากผิวพื้นดิน แสดงว่าแกนในของโลกเป็นของเหลวที่ความลึกมากกว่านี้ อย่างไรก็ตามคลื่นแผ่นดินไหวยังแสดงให้เห็นว่าแกนใจกลางของโลกที่ความลึกประมาณ 5,100 กิโลเมตรเป็นของแข็ง คลื่นแผ่นดินไหวชนิดที่ 3 เรียกว่า คลื่นยาว (long waves) หรือ L-waves ซึ่งเคลื่อนที่บนพื้นผิวด้วยอัตราเร็วที่น้อยกว่า S-waves เพียงเล็กน้อย คลื่นยาวมีลักษณะคล้ายคลื่นน้ำเป็นได้ทั้งคลื่นตามขวางและคลื่นตามยาว และเป็นคลื่นที่ทำอันตรายแก่ทรัพย์สิน บ้านเรือน และประชาชนเมื่อเกิดแผ่นดินไหว

อัตราเร็วของคลื่นเสียงในอากาศขึ้นอยู่กับหลายแฟกเตอร์ นิวตันได้พยายามหาสมการอธิบายอัตราเร็วที่คล้ายๆ กับ  $v = \sqrt{B/\rho}$  แต่ให้ค่าที่ผิดพลาดประมาณ 20% เขากล่าวว่าจากปรากฏการณ์ที่ไม่อาจทราบได้ ทำให้มอดุลัสเชิงปริมาตร B สำหรับแก๊สอาจมีได้ 2 ค่า ขึ้นอยู่กับว่าเป็นส่วนอัดหรือส่วนขยายซึ่งเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal) หรืออาจไม่มีการถ่ายเทความร้อน (adiabatic) ในศตวรรษต่อมา ลาปลาซ (Laplace) ได้แสดงให้เห็นว่า สำหรับคลื่นเสียง ความเร็วมีค่า

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabatic}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma B_{\text{isothermal}}}{\rho}} \tag{7.10}$$

โดยที่  $\gamma = C_p/C_v$  ซึ่งมีค่า 1.4 สำหรับอากาศ  $C_p$  และ  $C_v$  เป็นความจุความร้อนโมลาร์ (molar capacity heat) ของแก๊สที่ความดันและปริมาตรคงตัวตามลำดับ (ความจุความร้อนโมลาร์คือปริมาณความร้อนที่ทำให้อุณหภูมิของสาร 1 โมล เพิ่มขึ้น 1°C ) สมการ (7.10) จะเหมือนกับ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{7.11}$$

P คือความดันของแก๊ส ที่อุณหภูมิ 20°C อัตราเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 344 เมตร/วินาที ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (7.11) ได้ดี การวิเคราะห์ที่ค่อนข้างสมบูรณ์แสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วของคลื่นเสียงแปรเปลี่ยนกับรากที่สองของอุณหภูมิสัมบูรณ์ K ของแก๊ส

ในกรณีของคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือก เราสามารถใช้กฎข้อที่สองของนิวตันพิสูจน์ว่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก คือ

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{7.12}$$

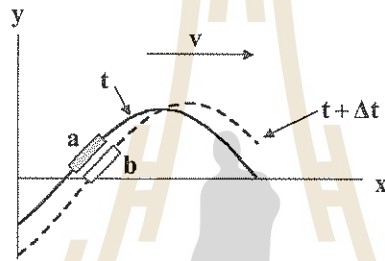
โดยที่ F คือแรงตึงในเส้นเชือก และ  $\mu$  คือมวลของเส้นเชือกต่อหนึ่งหน่วยความยาว ผลการทดลองพบว่าสมการ (7.12) ให้ค่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือกที่ถูกต้อง

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

#### 4. กำลังและความเข้มของคลื่น

ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นจะพาพลังงานไปในทิศทางที่มันเคลื่อนที่ไป การหาอัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่แผ่กระจายไป เราจำเป็นต้องหาความหนาแน่นพลังงานของคลื่นก่อน กำลังของคลื่นจะเป็นผลคูณของความหนาแน่นพลังงานและอัตราเร็วของคลื่น

พิจารณาคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือกที่เวลา  $t$  ดังแสดงในรูปที่ 7.5



รูปที่ 7.5 แสดงคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือกเคลื่อนที่ไปทาง  $+x$  ที่เวลา  $t$  และ  $t + \Delta t$

ชิ้นส่วน  $a$  ที่เวลา  $t$  จะเคลื่อนที่ไปอยู่ที่  $b$  เมื่อเวลาเป็น  $t + \Delta t$  พลังงานของชิ้นส่วน  $a$  ที่เวลา  $t$  จะเท่ากับพลังงานของชิ้นส่วน  $b$  ที่เวลา  $t + \Delta t$  ดังนั้นพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วยอัตราเร็ว  $v = \Delta x / \Delta t$  สมมติมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเชือกแทนด้วย  $\mu$  ดังนั้น พลังงานจลน์ของชิ้นส่วน  $a$  จะมีค่า

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} (\mu \Delta x) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

และพลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นพลังงานจลน์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (7.13)$$

พลังงานศักย์  $\Delta E_p$  ของชิ้นส่วนอันเนื่องมาจากคลื่นเป็นงานที่ทำโดยแรงตึง  $F$  ในชิ้นส่วนของเชือกนั้น หรือ

$$\Delta E_p = F \Delta \ell$$

สมมติชิ้นส่วนเดิมยาว  $\Delta x$  เมื่อเกิดแรงตึงในเส้นเชือก ความยาวเดิมจะยืดออกกลายเป็นความยาวใหม่  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$  ดังรูปที่ 7.6 ดังนั้นความยาวที่ยืดออกอันเนื่องมาจากแรงตึง  $F$  ในเส้นเชือกคือ

$$\Delta \ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - \Delta x$$

โดยการกระจายทวินาม (binomial expansion) และสมมติว่า  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \ll 1$  ดังนั้น

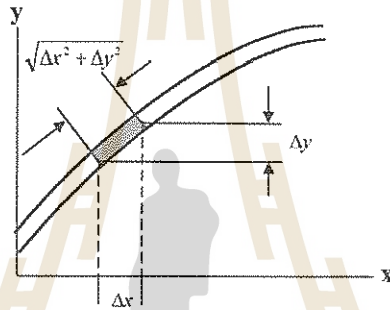
$$\Delta \ell = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

พลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยความยาว หรือความหนาแน่นพลังงานศักย์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (7.14)$$

ความหนาแน่นพลังงานของคลื่นเป็นผลรวมของความหนาแน่นพลังงานจลน์ และความหนาแน่นพลังงานศักย์ หรือ

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (7.15)$$



รูปที่ 7.6 แสดงความยาวที่ยืดออกเมื่อเกิดแรงดึงในเส้นเชือก

จากรูปที่ 7.5 อัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่ขึ้นส่วน a เลื่อนไปอยู่ที่ b คือ

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot v$$

หรือ

$$P = \left[ \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] v \quad (7.16)$$

ในกรณีของคลื่นฮาร์มอนิก,  $y = A \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

และ  $\frac{\partial y}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$

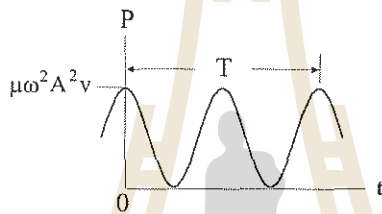
นอกจากนี้  $v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2}$

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

ดังนั้น กำลังของคลื่นฮาร์มอนิก คือ

$$P = \mu\omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t) \quad (7.17)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา  $t$  แสดงในรูปที่ 7.7 และสังเกตว่ากำลังของคลื่นมีค่าบวกตลอดเวลา แสดงว่ามีการถ่ายเทพลังงานอย่างต่อเนื่องในทิศทางที่คลื่นเคลื่อนที่



รูปที่ 7.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกและเวลาซึ่งอยู่ในรูปแบบ  $\cos^2(\omega t)$

เนื่องจากกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกแกว่งกวัดอยู่ระหว่างศูนย์และค่าสูงสุด และค่าเฉลี่ยของ  $\cos^2(\omega t)$  คือ  $\frac{1}{2}$  ดังนั้น กำลังเฉลี่ยของคลื่นฮาร์มอนิกคือ

$$P_{ave} = \frac{1}{2} \mu\omega^2 A^2 v \quad (7.18)$$

นั่นคือ  $P \propto A^2$  หรือกำลังเฉลี่ยหรือกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกเป็นปฏิภาคกับกำลังสองของแอมพลิจูด และเป็นลักษณะทั่วไปของคลื่นอื่นๆ ด้วย

นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่าค่ากำลังเฉลี่ย  $P_{ave}$  มีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าส่วนใดของเส้นเชือก จึงกล่าวได้ว่าไม่มีการสูญเสียพลังงานเลยในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นเชือก ถ้าพลังงานมีการสูญหายไปในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง เราเรียกว่าคลื่นมีการลด (attenuated) เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกของเรามีแอมพลิจูดคงตัว จึงเป็นคลื่นที่ไม่มีการลด (unattenuated wave) อย่างไรก็ตาม คลื่นกลที่เกิดขึ้นในธรรมชาติจะต้องมีการลดเสมอ แต่มักมีค่าน้อยมาก

การเคลื่อนที่ของคลื่นในธรรมชาติเป็นการเคลื่อนที่ 3 มิติ โดยคลื่นจะกระจายออกไปทุกทิศทางจากแหล่งกำเนิดคลื่น การกระจายเป็นรูปพื้นผิวของทรงกลมเรียกว่าหน้าคลื่น (wavefront) และที่ระยะไกลจากแหล่งกำเนิดคลื่นมากๆ อาจถือได้ว่าหน้าคลื่นเป็นระนาบ เส้นที่ตั้งฉากกับหน้าคลื่นเรียกว่า รังสี (rays) รังสีจึงแสดงทิศทางที่หน้าคลื่นเคลื่อนที่ไป หรือแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นนั่นเอง

ปริมาณที่แสดงการไหลของพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นคือความเข้ม (intensity) ของคลื่น ความเข้ม  $I$  ของคลื่นคือกำลัง  $P$  ที่แผ่กระจายไปต่อพื้นที่  $1$  หน่วยของหน้าคลื่น หรือ

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} \quad (7.19)$$

$\Delta S$  คือพื้นที่ผิวของหน้าคลื่นที่ตั้งฉากกับทิศการแผ่กระจายของคลื่น และ  $\Delta E$  เป็นพลังงานซึ่งผ่านพื้นที่ผิวนั้นในช่วงเวลา  $\Delta t$  หน่วยของความเข้มของคลื่น คือวัตต์ต่อตารางเมตร หรือ  $W/m^2$

ความเข้มของคลื่นจะลดลงตามระยะทางจากแหล่งกำเนิดคลื่นให้  $P_0$  เป็นกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายคลื่นออกไป และสมมติว่าตัวกลางไม่ทำให้คลื่นมีการลด และคลื่นกระจายอย่างสม่ำเสมอในทุกทิศทาง เนื่องจากความเข้ม  $I$  เป็นกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ อัตราที่พลังงานผ่านหน้าคลื่นที่เป็นพื้นผิวของทรงกลมรัศมี  $r$  จุดกำเนิดที่แหล่งกำเนิดคลื่นคือ  $I(4\pi r^2)$  จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน กำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปเท่ากับอัตราการกระจายพลังงานผ่านพื้นผิวทรงกลม นั่นคือ  $P_0 = 4\pi r^2 I$  หรือ

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} \quad (7.20)$$

จะเห็นว่า ความเข้มของคลื่นลดลงอย่างผกผันกับกำลังสองของระยะทาง  $r$  จากแหล่งกำเนิดคลื่น

**ตัวอย่างที่ 7.1** สมการของคลื่นตามขวางในเส้นเชือกเขียนได้เป็น

$$y = 5 \sin(4.0t - 0.02x)$$

$y$  และ  $x$  มีหน่วยเป็นเมตร และเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา

- แอมพลิจูด ความถี่ ความเร็ว และความยาวคลื่นของคลื่นตามขวางนี้
- ความเร็วและความเร่งสูงสุดของอนุภาคในเส้นเชือก
- กำลังของคลื่น ถ้าความหนาแน่นของเส้นเชือกเป็น  $1.25 \text{ kg/m}^3$

**วิธีทำ**

- (a) โดยการเปรียบเทียบกับสมการ

$$y = A \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

จะเห็นได้ว่า แอมพลิจูด  $A = 5 \text{ m}$

$$2\pi f = 4 \quad \text{หรือ} \quad f = \frac{4}{2\pi} = 0.637 \text{ Hz}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.02 \quad \text{หรือ} \quad \lambda = \frac{2\pi}{0.02} = 314 \text{ m}$$

$$\text{และ} \quad v = f\lambda = \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{0.02} = 200 \text{ m/s}$$

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

(b) ความเร็วของอนุภาคของเส้นเชือก คือ

$$u = \frac{dy}{dt} = 20 \cos(4.0t - 0.02x)$$

ดังนั้น ความเร็วสูงสุดของอนุภาค = 20 m/s

ความเร่งของอนุภาค คือ

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -80 \sin(4.0t - 0.02x)$$

ความเร่งสูงสุดของอนุภาค = 80 m/s<sup>2</sup>

(c) กำลังของคลื่น

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$
$$= \frac{1}{2} \times 1.25 \times 4^2 \times 5^2 \times 200 = 5.0 \times 10^4 \text{ W}$$

**ตัวอย่างที่ 7.2** คลื่นไซน์เคลื่อนที่ไปในทิศ +x ด้วยแอมพลิจูด 15 เซนติเมตร ความยาวคลื่น 40 เซนติเมตร และความถี่ 8 เฮิรตซ์ การกระจัดของคลื่นที่เวลา  $t = 0$  และ  $x = 0$  มีค่าเท่ากับ 15 เซนติเมตร จงหา

(a) เลขคลื่น คาบ ความถี่เชิงมุม และความเร็วเฟสของคลื่น

(b) เฟส  $\phi$  และฟังก์ชันคลื่น

**วิธีทำ**

เนื่องจาก  $\lambda = 40 \text{ cm}$ ,  $f = 8 \text{ Hz}$ ,  $A = 15 \text{ cm}$  ดังนั้น

(a) เลขคลื่น  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0.157 \text{ cm}^{-1}$

คาบ  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ s}$

ความถี่เชิงมุม  $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 8 = 50.3 \text{ rad/s}$

ความเร็วเฟส  $v = f\lambda = 8 \times 40 = 320 \text{ cm/s}$

(b) เนื่องจาก  $y = 15 \text{ cm}$  ที่  $x = 0$  และ  $t = 0$  ดังนั้น

$$y = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$\therefore 15 = 15 \sin(-\phi)$$

หรือ  $\sin(-\phi) = 1$

แต่  $\sin(-\phi) = -\sin\phi$

$$\therefore \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ radian หรือ } -90^\circ$$

และฟังก์ชันคลื่นจะมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} y &= A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= A \cos(kx - \omega t) \\ &= 15 \cos(0.157x - 50.3t) \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 7.3** เชือกเส้นหนึ่งมีมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวเป็น 47 กรัม/เมตร ถูกดึงให้ตึงด้วยแรง 75 นิวตัน คลื่นฮาร์โมนิกซึ่งมีแอมพลิจูด 13 มิลลิเมตร และความถี่ 32 เฮิรตซ์ แผ่กระจายในเส้นเชือก จงหากำลังเฉลี่ยของคลื่น

**วิธีทำ**

เนื่องจากอัตราเร็ว  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{75 \text{ N}}{47 \text{ g/m}}} = 40 \text{ m/s}$

ความถี่เชิงมุม  $\omega = 2\pi f = 2\pi(32 \text{ Hz}) = 200 \text{ rad/s}$

ดังนั้น กำลังเฉลี่ย

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

$$= \frac{1}{2} (47 \text{ g/m}) (200 \text{ rad/s})^2 (13 \text{ mm})^2 (40 \text{ m/s})$$

$$= 6.4 \text{ W}$$

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

## 5. หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น

ความแตกต่างประการหนึ่งระหว่างคลื่นและอนุภาคก็คือ คลื่นไม่อยู่ประจำที่ (localised) ในปริภูมิ และเวลา ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ตำแหน่งของอนุภาคสามารถระบุได้แน่นอน แต่ที่เวลาใดๆ เราระบุคลื่นในรูปของฟังก์ชันของตำแหน่ง ความแตกต่างอีกประการหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อคลื่น 2 คลื่นหรืออนุภาค 2 ชนิด มีอันตรกิริยา (interaction) ระหว่างกัน เมื่ออนุภาค 2 ชนิดเคลื่อนที่มาชนกัน อนุภาคทั้งสองจะแลกเปลี่ยนโมเมนตัม และพลังงานระหว่างกัน ทำให้ความเร็วเปลี่ยนไป ในทางตรงกันข้าม เมื่อคลื่น 2 ชนิดเคลื่อนที่มาพบกัน แอมพลิจูดรวมจะเป็นผลบวกของแต่ละแอมพลิจูดของคลื่นทั้งสอง และแต่ละคลื่นจะไม่เปลี่ยนแปลงหลังจากมีอันตรกิริยากัน การรวมกันของคลื่นจะใช้หลักที่เรียกว่า หลักการซ้อนทับ (superposition principle) ซึ่งกล่าวว่า

เมื่อคลื่นตั้งแต่สองคลื่นขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง ฟังก์ชันคลื่นของคลื่นรวมที่ตำแหน่งใดๆ เป็นผลบวกเชิงพีชคณิตของฟังก์ชันคลื่นของแต่ละคลื่น

คลื่นที่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นเชิงเส้น (linear waves) ซึ่งมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ ส่วนคลื่นที่ไม่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นไม่เชิงเส้น (nonlinear waves) และมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดมากๆ หลักการซ้อนทับใช้ได้กับคลื่นหลายชนิด เช่น คลื่นในเส้นเชือก คลื่นเสียง คลื่นบนผิวน้ำ และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

เมื่อเราโยนก้อนหินสองก้อนลงในสระน้ำ เราจะเห็นคลื่นบนผิวน้ำทั้งสองเคลื่อนที่ผ่านซึ่งกันและกันโดยไม่ทำลายกันหรือเปลี่ยนไปแต่อย่างใด เมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่มาพบกันที่ตำแหน่งใด ผลรวมของคลื่นจะเป็นไปตามหลักการซ้อนทับ และเมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งนั้น คลื่นทั้งสองจะมีรูปร่างเหมือนคลื่นเดิมเสมือนกับไม่ได้พบกันมาก่อนเลย เราเรียกรวมคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ ว่า การแทรกสอด (interference)

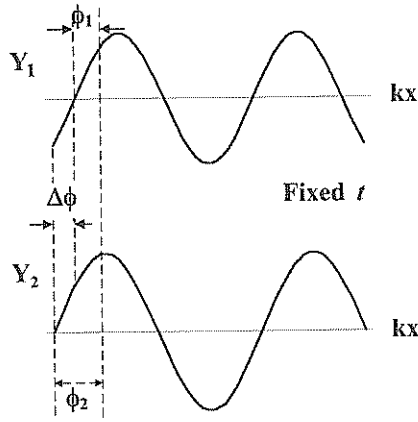
พิจารณาการแทรกสอดของคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น คือ

$$Y_1 = A \sin(kx - \omega t + \phi_1) \quad (7.21)$$

และ  $Y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi_2) \quad (7.22)$

แต่ละคลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกันและมีแอมพลิจูดเท่ากัน เกล็ดคลื่นและความถี่เดียวกัน แต่เฟสไม่เท่ากัน แตกต่างกันเท่ากับ

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (7.23)$$



รูปที่ 7.8 แสดงคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น  
มีแอมพลิจูด เลขคลื่น และความถี่เดียวกันแต่เฟสต่างกัน

การหาคคลื่นรวมอันเนื่องจากการแทรกสอดของ  $Y_1$  และ  $Y_2$  เราใช้หลักการซ้อนทับ คือ

$$Y = Y_1 + Y_2 = A[\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2)]$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$$

$$\text{ดังนั้น} \quad Y = \left[ 2A \cos \left( \frac{1}{2} \Delta \phi \right) \right] \sin(kx - \omega t + \phi_{\text{ave}}) \quad (7.24)$$

โดยที่  $\phi_{\text{ave}} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$

มีกรณีที่น่าสนใจอยู่สองประการคือ

1) คลื่นรวม  $Y$  เป็นคลื่นฮาร์มอนิก มีเลขคลื่น  $k$  และความถี่เชิงมุม  $\omega$  เหมือนเดิม และเคลื่อนที่ไปในทิศทาง  $+x$  เช่นเดิม

2) แอมพลิจูดของ  $Y$  คือ  $2A \cos(\frac{1}{2} \Delta \phi)$  ซึ่งขึ้นอยู่กับเฟสที่แตกต่างกัน  $\Delta \phi$  ดังนั้น เฟสที่แตกต่างกันมีบทบาทที่สำคัญต่อการแทรกสอดของคลื่น

ถ้า  $\Delta \phi = 0$  ดังนั้น  $\cos(\frac{1}{2} \Delta \phi) = 1$  แอมพลิจูดของคลื่นรวมจึงเท่ากับ  $2A$  เราเรียกการแทรกสอดที่เกิดขึ้นในกรณีนี้ว่า การแทรกสอดเสริมสมบูรณ์ (perfect constructive interference) ดังนั้นการแทรกสอดเสริมสมบูรณ์ทำให้แอมพลิจูดของคลื่นรวมเป็นสองเท่าของแต่ละแอมพลิจูดของ คลื่นแต่ละคลื่น

ถ้า  $\Delta\phi = \pi$  เรเดียน ดังนั้น  $\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi) = 0$  แอมพลิจูดของคลื่นรวมเท่ากับศูนย์ เราเรียกรวมการแทรกสอดที่เกิดขึ้นแบบนี้ว่า การแทรกสอดหักล้างสมบูรณ์ (perfect destructive interference)

สำหรับค่า  $\Delta\phi$  อื่นๆ คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดอยู่ระหว่าง  $2A$  และศูนย์ เช่น ถ้า  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$  เรเดียน แอมพลิจูดของคลื่นรวมจะเท่ากับ  $1.41A$  เป็นต้น

---

## สรุป

คลื่นกลจำเป็นต้องใช้ตัวกลางในการเคลื่อนที่ ความเร็วของคลื่นกลจึงขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลางนั้นๆ คลื่นกลเคลื่อนที่ได้เร็วในของแข็งมากกว่าในของเหลวและแก๊ส ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่จะมีกำลังและความเข้มตามไปด้วย คลื่นสามารถรวมกันได้โดยใช้หลักการซ้อนทับ ทำให้การแทรกสอดของคลื่นในลักษณะต่างๆ กัน

# ตอนที่ 7.2

## คลื่นนิ่ง

เมื่อคลื่นตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นเหล่านี้จะมีผลซึ่งกันและกัน ถ้าคลื่นสองชนิดเคลื่อนที่มาบรรจบกันที่ตำแหน่งใด การกระจัดรวมจะเป็นผลบวกของการกระจัดของคลื่นทั้งสองนั้น และเนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น การรวมกันของการกระจัดทั้งสองจึงเป็นการรวมกันแบบเวกเตอร์ ในที่นี้เราจะพิจารณาการรวมคลื่นสองคลื่นที่อยู่ในแนวเดียวกันแล้วให้คลื่นรวมที่มีลักษณะ 2 แบบ คือ คลื่นนิ่ง (stationary waves or standing waves) และบีตส์ (beats) โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคลื่นนิ่งเท่านั้น ส่วนบีตส์จะได้กล่าวในหน่วยต่อไป

### 1. คลื่นนิ่ง

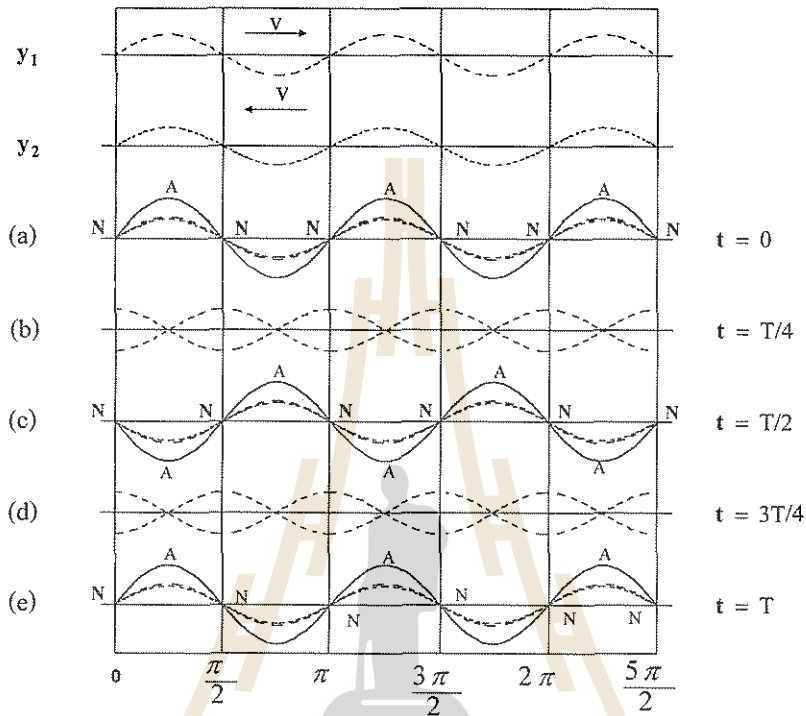
ถ้าคลื่นสองคลื่นมีแอมพลิจูดเท่ากันและความถี่เดียวกัน แต่เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม จะมีบางจุดในตัวกลางที่อนุภาคมีแอมพลิจูดสูงสุด และมีบางจุดซึ่งอนุภาคตัวกลางมีการกระจัดต่ำสุด คลื่นรวมที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่าคลื่นนิ่ง

สมมติคลื่นสองคลื่นมีการกระจัดเป็น  $y_1$  และ  $y_2$  คลื่นที่ในทิศทางตรงกันข้ามด้วยอัตราเร็ว  $v$  และคาบเท่ากับ  $T$  คลื่นรวมอาจเกิดขึ้นได้ 3 กรณี คือ

1) คลื่นทั้งสองซ้อนทับกันที่เวลา  $t = 0$  โดยมีเฟสเดียวกัน ดังนั้นคลื่นรวมจะมีการกระจัดเป็น  $y = y_1 + y_2$  ดังรูปที่ 7.9 (a)

2) ที่เวลา  $t = \frac{T}{4}$  และ  $\frac{3T}{4}$  คลื่นทั้งสองมีการกระจัดขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม การกระจัดรวมจึงเท่ากับศูนย์ดังรูปที่ 7.9 (b) และ (d)

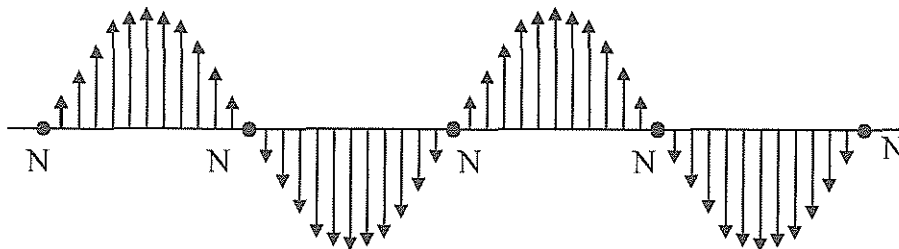
3) ที่เวลา  $t = \frac{T}{2}$  คลื่นทั้งสองซ้อนกันเช่นเดียวกับกรณีที่ (1) แต่มีเฟสเปลี่ยนไปเท่ากับ  $\pi$  ดังรูปที่ 7.9 (c) และเมื่อเวลา  $t = T$  ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ คลื่นรวมจะเหมือนกับกรณีที่ (1) อีกครั้งหนึ่ง



รูปที่ 7.9 แสดงการรวมคลื่นสองคลื่นที่เวลาต่างๆ

จากรูปที่ 7.9 จะเห็นได้ว่า มีหลายจุดที่แทนด้วยอักษร N ซึ่งไม่เคยเปลี่ยนตำแหน่งเลย จุดเหล่านี้เรียกว่า บัพ (nodes) และจะอยู่ห่างกันแต่ละจุดเป็นระยะ  $\lambda/2$  บัพเป็นจุดที่แสดงการกระจัดเท่ากับศูนย์ จุดต่างๆ ระหว่างบัพ จะสั่นด้วยการกระจัดที่แตกต่างกัน จุดที่มีการกระจัดสูงสุด คือแอมพลิจูด จะอยู่ตรงกลางระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ เรียกว่า ปฏิบัพ (antinode)

ระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ การสั่นจะหันไปในทิศเดียวกัน และเฟสของการสั่นจะเปลี่ยนไป 180 องศา สำหรับการสั่นระหว่างบัพคู่ถัดไป ดังแสดงในรูปที่ 7.10



รูปที่ 7.10 แสดงความเร็วของอนุภาคในคลื่นนิ่ง

เป็นที่น่าสังเกตว่า ภายในคลื่นหนึ่งไม่มีการถ่ายเทพลังงานผ่านตัวกลางแต่อย่างใด พลังงานของการสั่นจะอยู่ภายในบัพหนึ่งๆ เท่านั้น แต่ไม่มีการถ่ายเทสู่บัพอื่นๆ เราจึงเรียกว่า คลื่นนิ่ง

เพื่อให้เกิดความเข้าใจเชิงวิเคราะห์ยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาคลื่นตกกระทบซึ่งเคลื่อนที่จากซ้ายมือไปขวามือด้วยความเร็ว  $v$  และแทนด้วย

$$y_1 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \tag{7.25}$$

คลื่นสะท้อนกลับแทนด้วย

$$y_2 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \tag{7.26}$$

จากหลักการซ้อนทับ การกระจัดของคลื่นรวมคือ

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 \\ &= A \left[ \left\{ \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt - \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt + \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda} vt \right\} \right] \end{aligned}$$

หรือ 
$$Y = \left( 2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.27}$$

ซึ่งเป็นสมการของ SHM ที่มีแอมพลิจูด  $2A \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$  และมีคาบเดียวกันกับคลื่นเริ่มต้น ความลาดของเส้นโค้งของคลื่นรวมหรือความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ กำหนดโดย

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.28}$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลางคือ

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi A v}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.29}$$

สมการ (7.27) ใช้ได้เมื่อตำแหน่งอ้างอิง  $x = 0$  เป็นตำแหน่งของบัพ ในกรณีที่ตำแหน่งอ้างอิง  $x = 0$  เป็นตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดของคลื่นรวมจะแทนด้วย

$$Y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.30}$$

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

โดยที่มีค่าแอมพลิจูดเท่ากับ  $2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$  และมีคาบเท่ากับคลื่นเริ่มต้นและความถี่ที่ตำแหน่งใดๆ คือ

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (7.31)$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลาง

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (7.32)$$

ธรรมชาติของคลื่นรวมซึ่งเป็นคลื่นนิ่งขึ้นอยู่กับ ธรรมชาติของเงื่อนไขขอบและอาจแยกเป็น 2 กรณี คือ กรณีปลายตรึง และกรณีปลายอิสระ

### 1.1 กรณีปลายตรึง

1.1.1 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง ที่ปลายตรึงจะ ไม่มีการสั่น ดังนั้น สมการ (7.27) จึงแทนคลื่นนิ่งบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง ซึ่งแอมพลิจูดมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} &= 0 \\ \therefore \frac{2\pi x}{\lambda} &= n\pi \\ x_n &= n \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.33)$$

ระยะห่างระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \quad (7.34)$$

ทำนองเดียวกัน ปฏิบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งแอมพลิจูดมีค่าสูงสุด หรือ

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} &= 1 \\ \frac{2\pi x}{\lambda} &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \\ x_n &= (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.35)$$

และระยะห่างระหว่างปฏิบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \quad (7.36)$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระยะห่างระหว่างบัพและปฏิบัพที่อยู่ติดกันคือ  $\lambda/4$

1.1.2 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา บัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งอัตราเร็วของอนุภาคเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (7.29) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi A v}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\sin \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\therefore \frac{2\pi vt}{\lambda} = m\pi$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi \left( \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{T} \right)$$

$$\therefore t_m = m \frac{T}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{7.37}$$

ดังนั้น บัพเกิดขึ้นเมื่อเวลา  $t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, \dots$

ทำนองเดียวกันที่ตำแหน่งปฏิบัพ ถ้าความเครียด  $\frac{dY}{dx} = 0$  ดังนั้นจากสมการ (7.28) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\cos \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0, \quad \frac{2\pi t}{T} = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore t_m = (2m + 1) \frac{T}{4} \quad m = 0, 1, \dots \tag{7.38}$$

หรือปฏิบัพจะเกิดขึ้นที่เวลา  $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$

### 1.2 กรณีปลายอิสระ

1.2.1 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง ตัวอย่างของกรณีเช่นนี้คือท่อแก๊สปลายเปิด หรือ เชือกปลายอิสระ การกระจัดที่บริเวณตรงปลายจะมีค่าสูงสุด ดังนั้น ตำแหน่งอ้างอิง  $x = 0$  จะเป็น ตำแหน่งของปฏิบัพ กรณีดังกล่าวสมการ (7.30) จึงเป็นสมการของคลื่นนิ่ง โดยที่บัพจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

หรือ  $x_n = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, 2, \dots$  (7.39)

ซึ่งเป็นตำแหน่งของบัพ

ที่ตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, \dots$$
 (7.40)

ซึ่งเป็นตำแหน่งของปฏิบัพ

1.2.2 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา อัตราเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งบัพมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น จากสมการ (7.32) จะได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi A v}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}$$

หรือ

$$\cos \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi t}{T} = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore t_m = (2m+1) \frac{T}{4} \quad m = 0, 1, \dots$$
 (7.41)

ดังนั้นที่เวลา  $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \dots$  จะเกิดบัพ

ในขณะที่ปฏิบัพจะเกิดขึ้นเมื่อความเครียด  $\frac{dY}{dx}$  มีค่าสูงสุด ดังนั้น จากสมการ (7.31) เราจะได้

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ 
$$\sin \frac{2\pi vt}{\lambda} = 0 = \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi$$

$$\therefore t_m = m \frac{T}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{7.42}$$

ที่เวลา  $t = 0, \frac{T}{2}, T, \dots$  จะเกิดปฏิบัพ

## 2. การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งบัพและปฏิบัพ

เมื่อมีคลื่นเกิดขึ้นในของไหล ความดันมีค่า

$$P = -\text{elasticity} \left( \frac{dY}{dx} \right)$$

สภาพยืดหยุ่น (elasticity) เชิงปริมาตร  $E = v^2 \rho$  และ  $\frac{dY}{dx}$  คือความเครียดเชิงปริมาตร สำหรับคลื่นนิ่งในท่อปลายเปิด จากสมการ (7.31) จะได้

ดังนั้น 
$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda}$$

$$P = v^2 \rho \frac{4\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda}$$
ให้ 
$$v^2 \rho \frac{4\pi A}{\lambda} = P_{\max}$$
และ 
$$P_x = P_{\max} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{7.43}$$

$$\therefore P = P_x \sin \frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.44}$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงแอมพลิจูดของความดันที่เปลี่ยนแปลงที่ตำแหน่ง  $x$  จากจุดสัมผัส จะเห็นได้ว่าความดันเปลี่ยนแปลงแบบฮาร์มอนิกตามเวลาด้วยคาบ  $T = \frac{2\pi}{2\pi v/\lambda} = \frac{\lambda}{v}$  ซึ่งจะเท่ากับคาบของคลื่นองค์ประกอบ

เนื่องจากที่ตำแหน่งปฏิบัพ  $\frac{dY}{dx} = 0$  และ  $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$  ดังนั้น  $P_x = 0$  และ  $P = 0$  ด้วย ซึ่งแสดงว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งปฏิบัพ

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

ที่ตำแหน่งบีพ ความเครียด  $\frac{dY}{dx}$  มีค่าสูงสุด ดังนั้น  $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$  และ  $P_x = P_{\max}$  หรือ

$$P = \pm P_{\max} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda}$$

นั่นคือ ความดันและความหนาแน่นอาจมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งบีพ

### 3. การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง

คลื่นนิ่งสำหรับกรณีปลายอิสระ ตามสมการ (7.30)

$$Y = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \frac{2\pi vt}{\lambda}$$

และ

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}$$

มวลของชิ้นหนา  $\delta x$  และความหนาแน่น  $\rho$  คือ  $\rho \delta x$  พลังงานจลน์ของชิ้นดังกล่าวคือ

$$\begin{aligned} \delta E_k &= \frac{1}{2} \cdot \text{มวล} \cdot (\text{ความเร็ว})^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \delta x \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

พลังงานจลน์ของคลื่นทั้งหมดซึ่งยาว  $\ell$  คือ

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \rho \int_0^\ell \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 dx \\ &= \frac{\rho}{2} \left( \frac{4\pi Av}{\lambda} \right)^2 \int_0^\ell \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} dx \\ &= \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \int_0^\ell \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} dx \\ &= \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \int_0^\ell \left( 1 + \cos \frac{4\pi x}{\lambda} \right) dx \\ &= \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} (\ell + 0) \\ \therefore E_k &= \rho \ell \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \end{aligned} \tag{7.45}$$

ค่าเฉลี่ยของพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ คือ ค่าสูงสุดของ  $E_k$  หรือ  $(E_k)_{\max} = E$

$$\therefore E = \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \quad (7.46)$$

พลังงานศักย์ คือ

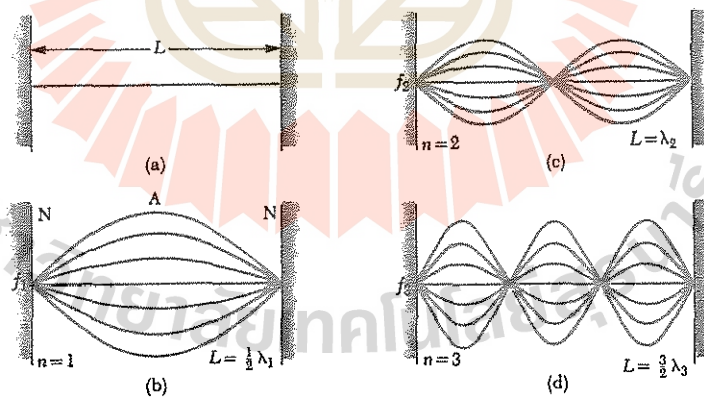
$$\begin{aligned} E_p &= E - E_k \\ &= \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 - \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \\ &= \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \left[ 1 - \cos^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

หรือ 
$$E_p = \rho \left( \frac{2\pi Av}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (7.47)$$

ดังนั้นการกระจายพลังงานในรูปของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา กล่าวคือ เมื่อใดที่  $\cos \frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$  พลังงานรวมจะเป็นพลังงานจลน์แต่เพียงอย่างเดียว และเมื่อใดที่  $\sin \frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$  พลังงานรวมจะเป็นพลังงานศักย์แต่เพียงอย่างเดียว

#### 4. คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ

พิจารณาคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกยาว  $L$  โดยมีปลายตรึงทั้งสองด้านที่จุดปลายของเส้นเชือกต้องเป็นตำแหน่งของบัพเสมอ เพราะเป็นปลายตรึงและสอดคล้องกับ  $n = 0$  ดังแสดงในรูปที่ 7.11 (a)



รูปที่ 7.11 แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกสำหรับค่า  $n$  ต่างๆ

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล

เมื่อ  $n=1$  ดังรูป (b) ปฏิบัพจะอยู่ตรงกลาง และความยาวของเชือกจะเป็น  $\lambda_1/2$  หรือ  $\lambda_1 = 2L$

เมื่อ  $n=2$  ดังรูป (c) ความยาวคลื่น  $\lambda_2 = L$  และเมื่อ  $n=3$  ดังรูป (d) ความยาวคลื่น  $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

ดังนั้น ความยาวคลื่นของ  $n$  ค่าต่างๆ หรือโหมด (mode) ที่  $n$  คือ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.48)$$

เนื่องจากความเร็ว  $v$  ของคลื่นมีค่าเท่ากันสำหรับทุกความถี่ ดังนั้นความถี่สำหรับโหมดที่  $n$  คือ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

อัตราเร็วของคลื่นในกรณีของคลื่นในเส้นเชือกหาได้จากสมการ (7.12)  $v = \sqrt{F/\mu}$  ดังนั้น ความถี่ของคลื่นในเส้นเชือกจึงตั้งคือ

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (7.49)$$

ความถี่ต่ำสุดสอดคล้องกับ  $n=1$  หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ความถี่ค่าอื่นๆ จะเป็นจำนวนเท่าของ  $f_1$  เสมอ เช่น  $f_2 = 2f_1$ ,  $f_3 = 3f_1$ ,  $f_4 = 4f_1$  เป็นต้น ความถี่  $f_1$  เรียกว่า ความถี่หลักมูล (fundamental frequency) หรือเรียกว่า ฮาร์โมนิกที่หนึ่ง และ  $f_2$  เรียกว่า ฮาร์โมนิกที่สอง  $f_n$  เรียกว่า ฮาร์โมนิกที่  $n$  และ  $f_n = nf_1$  และจากสมการ (7.49) จะเห็นได้ว่าความถี่ของเส้นเชือกขึ้นอยู่กับความตึง  $F$  และความยาว  $L$  ซึ่งหลักการนี้ใช้ได้สำหรับกรณีเส้นลวดโลหะอื่นๆ เช่น สายกีตาร์ เป็นต้น โดยผู้เล่นสามารถปรับค่าความถี่หรือเสียงได้โดยดึงเส้นลวดให้ตึงหรือหย่อนได้ตามต้องการ

ในกรณีคลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นในท่ออากาศอาจแยกออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีปลายเปิดด้านเดียว และกรณีปลายเปิดสองด้าน

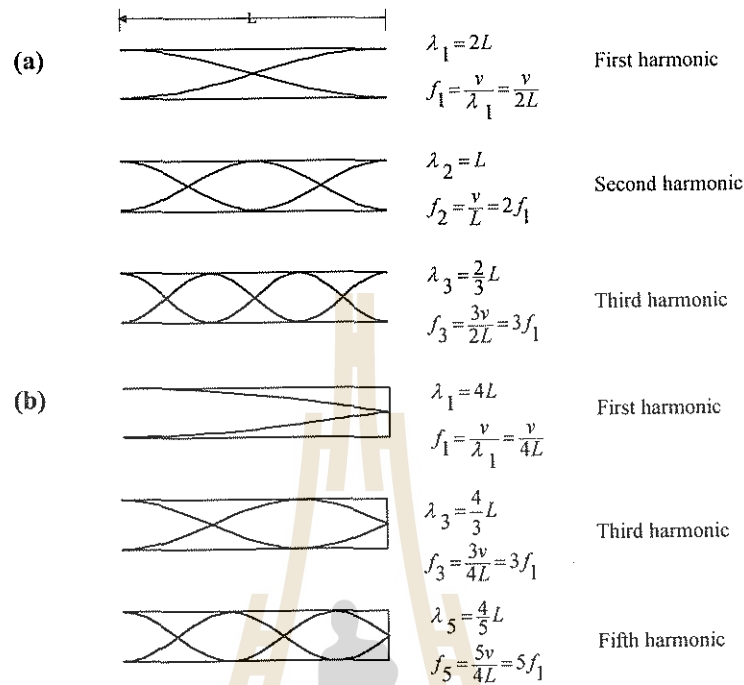
ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดทั้งสองด้าน คือ

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.50)$$

$v$  คืออัตราเร็วของเสียงในอากาศและ  $L$  คือความยาวของท่อ

ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดด้านเดียวคือ

$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (7.51)$$



รูปที่ 7.12 แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศ (a) ปลายเปิดทั้งสองด้าน (b) ปลายเปิดด้านเดียว

ที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่า คลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นจากเงื่อนไขที่เรากำหนดคือให้ตรึงที่  $x = 0$  และ  $x = L$  ฟังก์ชันคลื่น  $Y(x,t)$  ในสมการ (7.27) จะต้องเท่ากับศูนย์ที่จุดตรึงทั้งสองเสมอ นั่นคือเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) จะเป็น  $Y(0,t) = 0$  และ  $Y(L,t) = 0$  สำหรับทุกค่าของ  $t$

จากสมการ (7.27) และ  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega = kv$

$$Y = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

เงื่อนไขขอบแรกคือ  $Y(0,t) = 0$  เกิดจาก  $\sin kx = 0$  ที่  $x = 0$  ดังนั้นจึงสอดคล้องโดยอัตโนมัติ

สำหรับเงื่อนไขที่สองคือ  $Y(L,t) = 0$  ดังนั้น  $\sin kL = 0$  ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ  $k_n L = n\pi$  โดยที่  $n = 1, 2, 3, \dots$  หรือ  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  และสอดคล้องกับสมการ (7.48)

ตัวอย่างที่ 7.4 คลื่นสองคลื่นเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามทำให้เกิดคลื่นนิ่ง ถ้าแต่ละคลื่นกำหนดโดยฟังก์ชันคลื่น

$$y_1 = (4 \text{ cm}) \sin (3x - 2t)$$

$$y_2 = (4 \text{ cm}) \sin (3x + 2t)$$

$x$  และ  $y$  มีหน่วยเป็นเซนติเมตร จงหา

(a) การกระจัดสูงสุดที่ตำแหน่ง  $x = 2.3$  เซนติเมตร

(b) ตำแหน่งของบัพและปฏิบัพ

วิธีทำ

(a) คลื่นนิ่งที่เกิดจากการรวมกันของสองคลื่น กำหนดโดยสมการ (7.27) คือ

$$Y = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

เมื่อ  $A = 4 \text{ cm}$  และ  $k = 3 \text{ cm}^{-1}$

การกระจัดสูงสุดของคลื่นนิ่งที่ตำแหน่ง  $x = 2.3 \text{ cm}$  คือ

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= (2 \times 4 \text{ cm}) \sin 3x|_{x=2.3} \\ &= (8 \text{ cm}) \sin (6.9 \text{ rad}) \\ &= 4.63 \text{ cm} \end{aligned}$$

(b) เนื่องจาก  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3 \text{ cm}^{-1}$  ดังนั้น  $\lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$

และตำแหน่งของบัพตามสมการ (7.33) คือ

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} = n \left( \frac{\pi}{3} \right) \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ตำแหน่งของปฏิบัพ กำหนดโดยสมการ (7.35) คือ

$$\begin{aligned} x_n &= (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \\ &= (2n + 1) \frac{\pi}{6} \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7.5 สายไวโอลินยาว 33 เซนติเมตร และมีมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว  $5.46 \times 10^{-4}$  กิโลกรัม/เมตร จงหาแรงตึงที่ทำให้สายสั่นด้วยความถี่หลักมูล 660 เฮิรตซ์

วิธีทำ

ความถี่หลักมูลของคลื่นนิ่ง กำหนดโดยสมการ (7.49) หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = (2Lf_1)^2 \mu$$

$$= (2 \times \frac{33}{100} \text{ m} \times 660 \text{ Hz})^2 \times 5.46 \times 10^{-4} \text{ kg/m N}$$

$$= 104 \text{ N}$$

ตัวอย่างที่ 7.6 ถ้าแรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 72 นิวตัน เชือกยาว 3.8 เมตร มีมวล 0.84 กิโลกรัม จงหา

- (a) ความถี่หลักมูล
- (b) ความถี่ที่ทำให้เกิดปฏิบัพ 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ

- (a) ความถี่หลักมูลคือ

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F}{LM}}$$

ในที่นี้

$$F = 72 \text{ N}$$

$$M = 0.84 \text{ kg}$$

$$L = 3.8 \text{ m}$$

$$\therefore f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{72 \text{ N}}{(3.8 \text{ m})(0.84 \text{ kg})}} = 2.4 \text{ Hz}$$

- (b) คลื่นนิ่งที่มีเพียง 2 ปฏิบัพ คือ โหมดที่  $n = 2$

ดังนั้น ความถี่ที่ฮาร์โมนิกที่สองคือ

$$f_2 = 2f_1 = 2 \times 2.4 \text{ Hz} = 4.8 \text{ Hz}$$

## สรุป

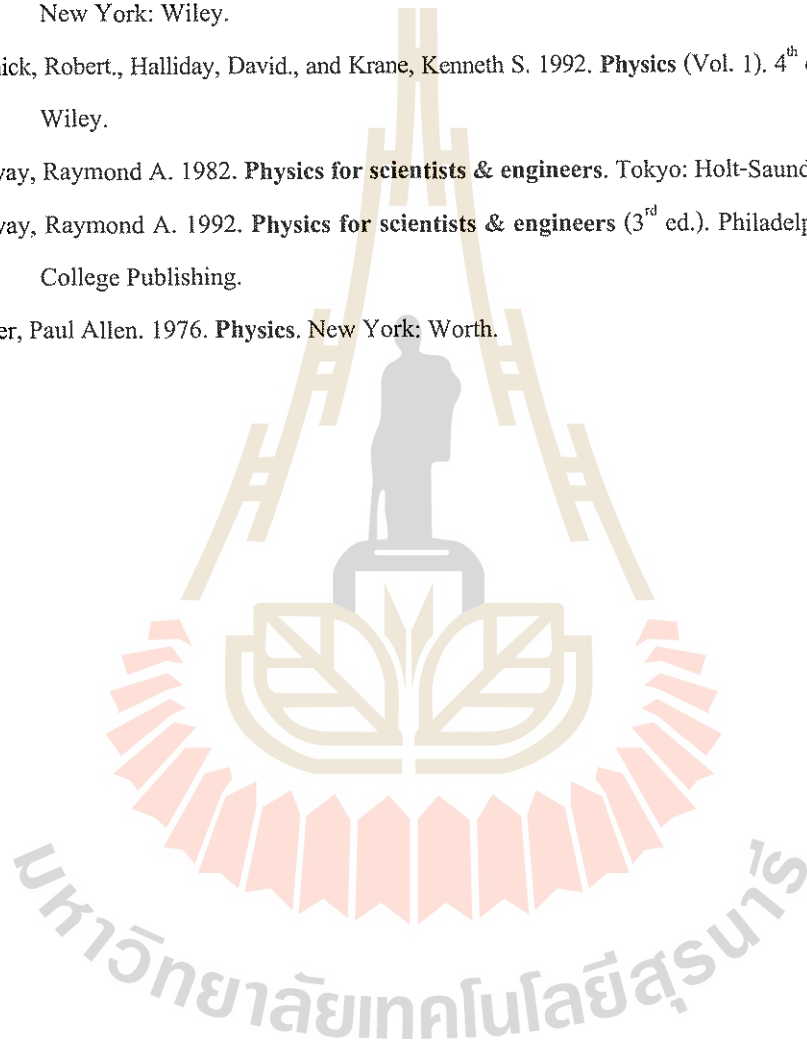
จุดที่แสดงการกระจัดเป็นศูนย์กลางของคลื่นนิ่งเรียกว่า บัพ และจุดที่มีการกระจัดสูงสุดเรียกว่า ปฏิบัพ คลื่นนิ่งที่เราัมักพบในชีวิตประจำวันคือคลื่นนิ่งที่เกิดจากเส้นเชือก ซึ่งอาจเป็นปลายตรึงหรือปลายอิสระก็ได้ และคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศซึ่งอาจเป็นปลายเปิดด้านเดียวหรือปลายเปิด 2 ด้าน ในหลายๆกรณีเหล่านี้ ความถี่ของคลื่นนิ่งจะแตกต่างกันไป

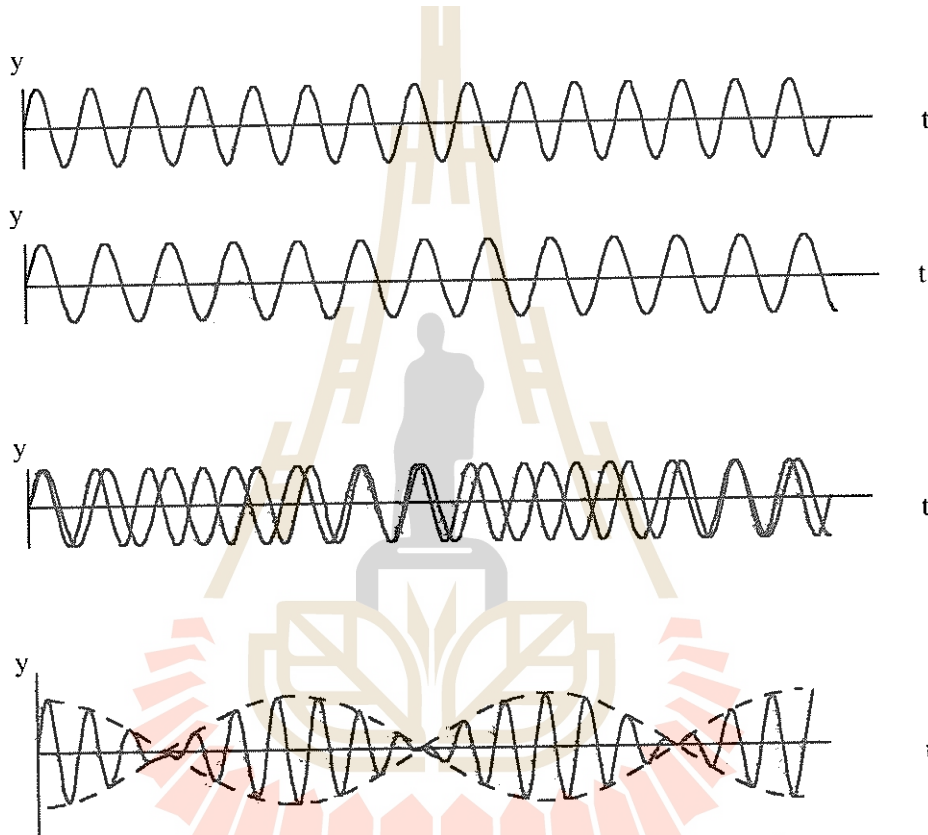


## บรรณานุกรม

---

- Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2<sup>nd</sup> ed.). Tokyo: McGraw-Hill.
- Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: Wiley.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4<sup>th</sup> ed. New York: Wiley.
- Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers**. Tokyo: Holt-Saunders Japan.
- Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics**. New York: Worth.





มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา พาดิเสนะ

## ตอนที่

# 8.1

## คลื่นเสียง

คลื่นเสียงเป็นคลื่นกลชนิดหนึ่งและเป็นคลื่นตามยาว เสียงที่เราได้ยินส่วนใหญ่เป็นคลื่นที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศ แต่คลื่นเสียงสามารถเคลื่อนที่ในของเหลวและของแข็งได้เช่นกัน เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางอนุภาคของตัวกลางจะแกว่งกวัด ทำให้ความหนาแน่นและความดันของตัวกลางเปลี่ยนแปลงตามทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง ซึ่งแตกต่างจากการแกว่งกวัดของตัวกลางที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นในคลื่นตามขวาง การกระจัดที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางจะเป็นการกระจัดของแต่ละโมเลกุลจากตำแหน่งสมดุล ทำให้ความดันเปลี่ยนแปลงไปด้วย บริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่ามากกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุลเรียกว่า ส่วนอัด และบริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่าน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุลเรียกว่า ส่วนขยาย (expansion) ทั้งส่วนอัดและส่วนขยายจะเคลื่อนที่ไปในแนวเดียวกับการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง โดยที่ระยะจากส่วนอัดหนึ่ง (หรือส่วนขยาย) ไปยังส่วนอัดที่ถัดมา (หรือส่วนขยายที่ถัดมา) คือความยาวคลื่น  $\lambda$

### 1. ความเร็วและความเข้มของคลื่นเสียง

#### 1.1 ความเร็วของคลื่นเสียง

สมมติคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในของไหล เมื่อไม่มีคลื่นเสียงตำแหน่งของอนุภาคจะอยู่ที่  $x$  เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$  การกระจัดของอนุภาคที่เวลา  $t$  คือ  $\psi(x, t)$  กำหนดโดย

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (8.1)$$

โดยที่แอมพลิจูด  $A$  หมายถึงค่าสูงสุดของการกระจัด  $k = 2\pi/\lambda$  คือเลขคลื่น และ  $\omega$  คือความถี่เชิงมุม ซึ่งมีค่า  $\omega = kv$  เมื่อ  $v$  คืออัตราเร็วของคลื่น

คลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านของไหล ทำให้ความดันของของไหลเปลี่ยนแปลงสมมติความดันของไหลที่ตำแหน่ง  $x$  และเวลา  $t$  คือ  $p(x, t)$  ถ้าความดันในขณะสมดุลและไม่มีคลื่นเสียงผ่านเลยมีค่าเป็น  $p_{eq}$  ดังนั้น ความดันที่เปลี่ยนไปอันเนื่องมาจากมีคลื่นเสียงผ่านคือ

$$\Delta p(x, t) = p(x, t) - p_{eq}$$

สำหรับคลื่นฮาร์มอนิกที่เคลื่อนที่ผ่านทำให้ความดันที่เปลี่ยนไปมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{\max} \sin(kx - \omega t) \quad (8.2)$$

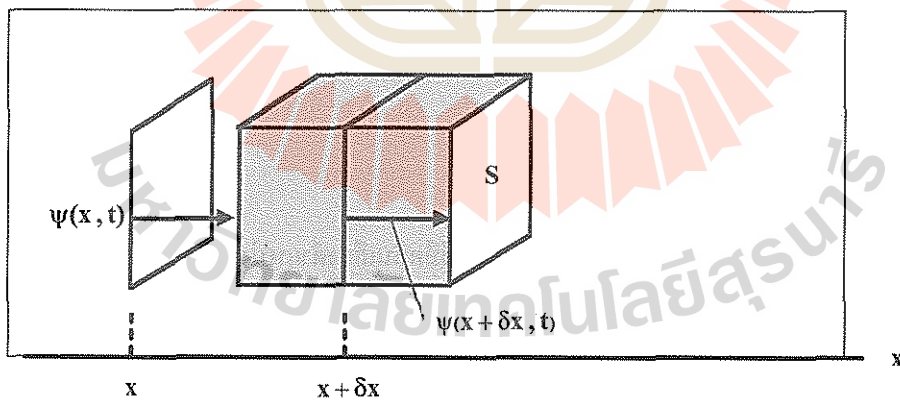
$\Delta p_{\max}$  คือค่าสูงสุดของความดันที่เปลี่ยนไปและเกิดขึ้นที่ตำแหน่งส่วนอัดสำหรับที่ตำแหน่งส่วนขยาย  $\Delta p = -\Delta p_{\max}$  ซึ่งหมายความว่า  $p(x, t)$  มีค่าน้อยกว่า  $p_{\text{eq}}$

ในกรณีของคลื่นเสียง ความดันที่เปลี่ยนไปเกิดอย่างรวดเร็วจนถึงได้ว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างอนุภาคของตัวกลางเลย ซึ่งเป็นกระบวนการที่เรียกว่ากระบวนการแอดิยาเบติก (adiabatic process) มอดูลัสเชิงปริมาตรของของไหลในกระบวนการนี้คือ

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad (8.3)$$

$\Delta V$  คือปริมาตรน้อยๆ ที่เปลี่ยนไปอันเนื่องมาจากความดันน้อย  $\Delta p$  เปลี่ยนไป

ต่อไปพิจารณาของไหลที่บรรจุในภาชนะที่มีรูปทรงเป็นแท่งด้วยพื้นที่หน้าตัด  $S$  ซึ่งผิวหน้าทั้งสองในขณะสมดุลอยู่ที่ตำแหน่ง  $x$  และ  $x + \delta x$  เมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน ผิวหน้าทั้งสองจะเลื่อนไปเป็นระยะ  $\psi(x, t)$  และ  $\psi(x + \delta x, t)$  ดังแสดงในรูปที่ 8.1



รูปที่ 8.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งและปริมาตรของของไหลเมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน

ปริมาตรของของไหลจะเปลี่ยนจาก  $V = S \delta x$  ไปเป็น

$$V + \Delta V = S[\delta x + \psi(x + \delta x, t) - \psi(x, t)]$$

ดังนั้น ปริมาตรที่เปลี่ยนไปคือ

$$\Delta V = S[\psi(x + \delta x, t) - \psi(x, t)]$$

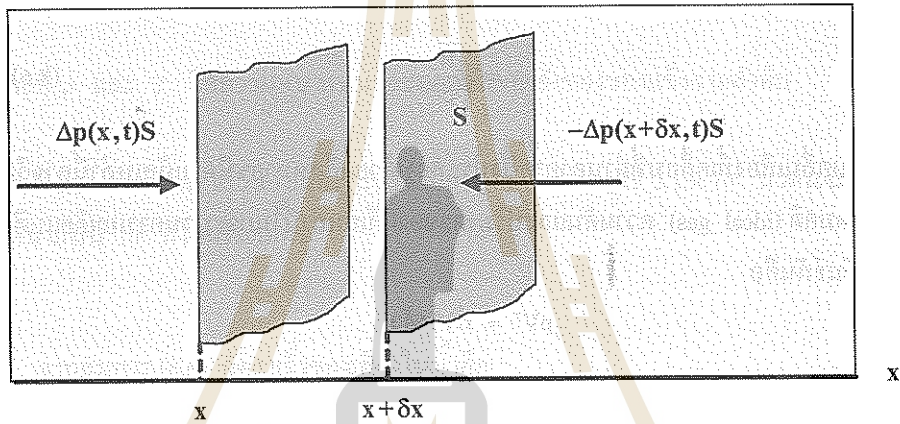
และ

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\psi(x + \delta x, t) - \psi(x, t)}{\delta x}$$

ในลิมิตที่  $\delta x \rightarrow 0$  อัตราส่วนนี้จะกลายเป็น  $\frac{\Delta V}{V} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}$  และความดันที่เปลี่ยนไปในสมการ (8.3) จะกลายเป็น

$$\Delta p(x, t) = -B \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.4}$$

แรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง  $x$  อันเนื่องมาจากความดันที่เปลี่ยนไปคือ  $\Delta p(x, t)S$  ทำนองเดียวกัน แรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง  $x + \delta x$  คือ  $-\Delta p(x + \delta x, t)S$  ดังแสดงในรูปที่ 8.2



รูปที่ 8.2 แสดงแรงที่กระทำต่อผิวหน้าทั้งสองของของไหลอันเนื่องมาจากความดันเปลี่ยนไป

แรงลัพธ์ของแรงทั้งสองคือ

$$\delta F = S[\Delta p(x, t) - \Delta p(x + \delta x, t)]$$

เมื่อใช้สมการ (8.4) แรงลัพธ์จะกลายเป็น

$$\delta F = BS \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x \right)$$

โดยที่อนุพันธ์คำนวณที่ตำแหน่ง  $x + \delta x$  และ  $x$

ความเร่งของอนุภาคคือ  $a = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  และมวลของอนุภาคคือ  $\delta m = \rho S \delta x$  โดยที่  $\rho$  คือความหนาแน่นของของไหล และ  $S \delta x$  คือปริมาตรเล็กๆ ของอนุภาคที่กำลังพิจารณาเมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = BS \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_x \right)$$

พื้นที่  $S$  ซึ่งปรากฏทั้งสองด้านของสมการจึงตัดทิ้งไป ต่อไปจึงหารทั้งสองด้านของสมการด้วย  $\delta x$  ความแตกต่างของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เมื่อหารด้วย  $\delta x$  จะกลายเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองเมื่อ  $\delta x \rightarrow 0$  ดังนั้น

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (8.5)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของคลื่นคือ (7.6) จะเห็นได้ว่าคลื่นเสียงในของไหลเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (8.6)$$

สำหรับคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศซึ่งประกอบด้วยแก๊สหลายชนิด แก๊สเหล่านี้อาจถือได้ว่าเป็นแก๊สอุดมคติ (ideal gas) ความดันและปริมาตรของแก๊สเหล่านี้ในกระบวนการแอดิแบติก จะมีความสัมพันธ์กันคือ

$$pV^\gamma = \text{ค่าคงตัว}$$

โดยที่  $\gamma = C_p/C_v$  เป็นอัตราส่วนของความจุความร้อน โมลาร์ที่ความดันคงตัว ( $C_p$ ) และปริมาตรคงตัว ( $C_v$ ) ของแก๊ส เนื่องจากอนุพันธ์ของค่าคงตัวเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{d}{dV} pV^\gamma = \gamma pV^{\gamma-1} + V^\gamma \frac{dp}{dV} = 0$$

หรือ 
$$-V \frac{dp}{dV} = \gamma p = B$$

ความหนาแน่นของแก๊สอุดมคติ อาจเขียนได้เป็น

$$\rho = m/V = nM/V$$

$V$  คือปริมาตรที่บรรจุแก๊ส  $n$  โมล และ  $M$  คือมวลของแก๊ส 1 โมล หรือที่เรียกว่าน้ำหนักโมเลกุล (molecular weight) ดังนั้น

$$\frac{B}{\rho} = \frac{\gamma p}{nM/V} = \frac{\gamma pV}{nM}$$

เนื่องจาก  $pV = nRT$  เมื่อ  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  เป็นค่าคงตัวเรียกว่า universal gas constant

$$\therefore \frac{B}{\rho} = \frac{\gamma RT}{M}$$

และอัตราเร็วของเสียงในแก๊สอุดมคติคือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (8.7)$$

ซึ่งขึ้นกับอุณหภูมิสัมบูรณ์  $T$  และน้ำหนักโมเลกุล  $M$  เท่านั้น

สำหรับเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของแข็ง จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (8.8)$$

โดยที่  $\rho$  และ  $Y$  คือความหนาแน่นและมอดูลัสของยังของของแข็งตามลำดับ

**ตัวอย่างที่ 8.1** จงหาอัตราเร็วของเสียงในน้ำซึ่งมีมอดูลัสเชิงปริมาตร  $2.1 \times 10^9$  นิวตัน/เมตร<sup>2</sup> และความหนาแน่น  $10^3$  กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup>

**วิธีทำ**

จากสมการ (8.6) อัตราเร็วของเสียงในน้ำคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{10^3 \text{ kg/m}^3}} = 1,500 \text{ m/s}$$

**ตัวอย่างที่ 8.2** จงหาอัตราเร็วของเสียงใน He ซึ่งมีมวลโมเลกุล 0.0040 กิโลกรัม/โมล และ  $\gamma = C_p/C_v = 1.63$  ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน

**วิธีทำ**

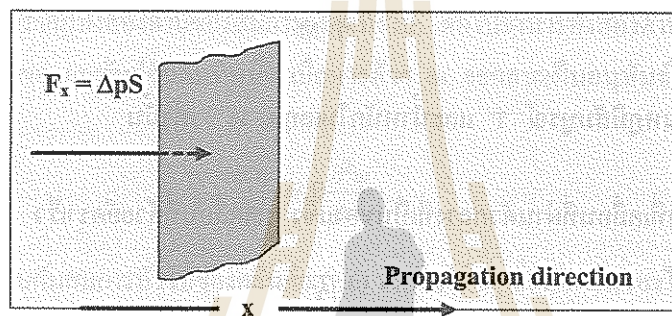
จากสมการ (8.7) อัตราเร็วของเสียงใน He คือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.63(8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})(310 \text{ K})}{0.0040 \text{ kg/mol}}}$$

$$= 1.0 \text{ km/s}$$

### 1.2 ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลาง

คลื่นเสียงมีลักษณะเช่นเดียวกับคลื่นชนิดอื่นๆ คือการพาพลังงานไปด้วย ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง พลังงานที่คลื่นเสียงพาไปเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูดของคลื่น ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลางหาได้จากอัตราของงานที่ทำต่อตัวกลาง สมมติคลื่นเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x ระยะเวลาของพื้นที่ S ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ดังรูปที่ 8.3



รูปที่ 8.3 แสดงการหาความเข้มของคลื่น

ความดันที่เปลี่ยนแปลงไปอันเนื่องมาจากคลื่นที่ตกกระทบตั้งฉากกับพื้นที่คือ  $\Delta p(x, t)$  ดังนั้นแรงที่กระทำต่อพื้นที่ S มีขนาด  $F = \Delta pS$  อัตราการทำงานคือกำลัง P ซึ่งเป็นอัตราที่พลังงานเคลื่อนที่ผ่านเนื่องจาก  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  เป็นความเร็วของอนุภาคของตัวกลางที่พื้นที่ผืนนี้ กำลังจึงมีค่า  $P = F \frac{\partial \psi}{\partial t}$  หรือ

$$P = \Delta pS \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ความเข้ม I คือกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$\therefore I = \frac{P}{S} = \Delta p \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

แทนค่า  $\Delta p$  โดยใช้สมการ (8.4) จะได้

$$I = -B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (8.9)$$

แล้วใช้  $\psi$  ในสมการ (8.1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore I = B \omega k A^2 \sin^2(kx - \omega t) \quad (8.10)$$

โดยทั่วไปเราจะสนใจค่าเฉลี่ยความเข้มของคลื่นครบ 1 รอบ คือ

$$I_{ave} = \frac{1}{2} B \omega k A^2 \tag{8.11}$$

จากสมการ (8.4) และ (8.1) เราได้ว่า

$$\Delta p = -B \frac{\partial \psi}{\partial x} = BkA \sin(kx - \omega t)$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น

$$\Delta p_{max} = BkA$$

$$\therefore I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2 \omega}{2Bk}$$

จากความสัมพันธ์  $\omega/k = v$  และ  $B = \rho v^2$  ดังนั้น

$$I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2}{2v\rho} \tag{8.12}$$

ที่กล่าวมาเป็นเพียงความเข้มของคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ในหนึ่งมิติเท่านั้น คลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจริงๆ ในธรรมชาติสามารถกระจายไปทุกทิศทางซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นทรงกลมและมีหน้าคลื่นเป็นวงกลม ถ้า  $P_{ave}$  คือค่าเฉลี่ยของกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปทุกทิศทาง ดังนั้น กำลังที่ระยะ  $r$  นับจากแหล่งกำเนิดคลื่นจะต้องกระจายไปทั่วพื้นที่ผิวขนาด  $4\pi r^2$  และความเข้มเฉลี่ยที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากกำเนิดคลื่นเป็นระยะ  $r$  คือ

$$I_{ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r^2} \tag{8.13}$$

$P_{ave}$  จะมีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าจะอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดคลื่นเท่าใดก็ตามจึงเป็นอิสระต่อระยะห่าง  $r$  ดังนั้น ความเข้มที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากจุดกำเนิดคลื่นเป็นระยะ  $r_1$  และ  $r_2$

$$\text{คือ } I_{1ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r_1^2} \text{ และ } I_{2ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r_2^2} \text{ ตามลำดับ และ } I_{1ave}/I_{2ave} = r_2^2/r_1^2$$

**ตัวอย่างที่ 8.3** ถ้าหูของมนุษย์ได้ยินเสียงความถี่ 1 กิโลเฮิร์ตซ์ ด้วยความเข้มต่ำสุด  $10^{-12}$  วัตต์/เมตร<sup>2</sup> จงหาแอมพลิจูดความดันของเสียงนี้ กำหนดอัตราเร็วของเสียงในอากาศเป็น 343 เมตร/วินาที และความหนาแน่นของอากาศเท่ากับ 1.20 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup>

**วิธีทำ**

จากสมการ (8.12) แอมพลิจูดความดันคือ

$$\begin{aligned}\Delta p_{\max} &= \sqrt{2vpI} \\ &= [2(343 \text{ m/s})(1.20 \text{ kg/m}^3)(10^{-12} \text{ W/m}^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 8.4** ถ้าความดันของ He ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน เท่ากับ  $1.2 \times 10^5$  ปาสคัล จงหาความเข้มเฉลี่ยของคลื่นเสียงใน He ซึ่งมีแอมพลิจูดความดันเท่ากับ 0.75 ปาสคัล

**วิธีทำ**

จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 8.2 เราสามารถหาความหนาแน่นของแก๊สได้จากสมการของแก๊สอุดมคติ คือ

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT} \\ &= \frac{(1.2 \times 10^5 \text{ Pa})(0.0040 \text{ kg/mol})}{(8.31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})(310 \text{ K})} \\ &= 0.19 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

ความเข้มเฉลี่ยของเสียงในแก๊ส He หาได้จากสมการ (8.12) คือ

$$\begin{aligned}I_{\text{ave}} &= \frac{(\Delta p_{\max})^2}{2vp} \\ &= \frac{(0.75 \text{ Pa})^2}{2(1.0 \times 10^3 \text{ m/s})(0.19 \text{ kg/m}^3)} \\ &= 1.5 \times 10^{-3} \text{ W/m}^2\end{aligned}$$

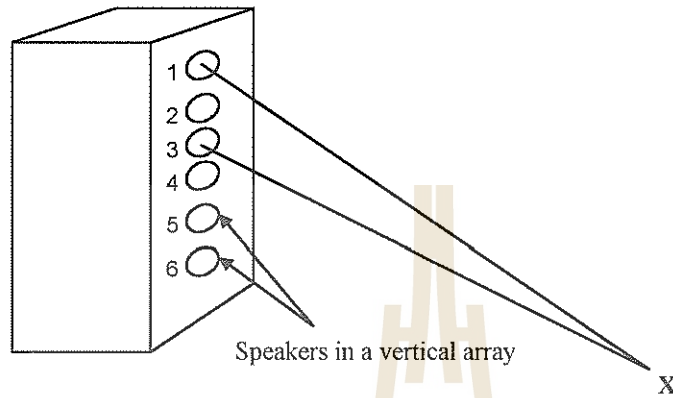
## 2. การแทรกสอดของคลื่นเสียง

เมื่อคลื่นเสียงจากแหล่งกำเนิดคลื่น 2 แหล่งพบกันที่ตำแหน่งหนึ่ง การกระจัดของคลื่นเสียงทั้งสองจะรวมกันตามหลักการซ้อนทับที่ได้กล่าวมาแล้ว ถ้าคลื่นเสียงทั้งสองเป็นคลื่นฮาร์มอนิกที่มีความถี่เดียวกัน คลื่นรวมที่ตำแหน่งใดจะขึ้นกับความแตกต่างระหว่างเฟสของคลื่นทั้งสอง การแทรกสอดแบบเสริมกันเกิดขึ้นเมื่อคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกันและแอมพลิจูดรวมมีค่าสูงสุด เนื่องจากความเข้มเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูด ดังนั้น ความเข้มของคลื่นรวมจึงมีค่าสูงสุดด้วย หากคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกัน ถ้าคลื่นทั้งสองต่างเฟสกันขนาดเท่ากับ  $\pi$  เรเดียน คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดและความเข้มต่ำสุด

ผลของการแทรกสอดมีความสำคัญมากในการออกแบบสร้างโรงมหรสพ ห้องบันทึกเสียง หรือส่วนอื่นๆ ที่เกี่ยวกับการใช้ลำโพงและเครื่องเสียง เมื่อลำโพงเคลื่อนที่ เสียงจากลำโพงไม่เพียงแต่จะออกจากด้านหน้าของลำโพงเท่านั้น แต่จะออกจากด้านหลังด้วย และเมื่อไปกระทบกับผนังที่อยู่ด้านหลังของลำโพงจะสะท้อนกลับ ทำให้เกิดการแทรกสอดระหว่างคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ออกจากด้านหน้าของลำโพง และคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหลังและสะท้อนกลับนี้ เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาคลื่นเสียงที่เป็นคลื่นฮาร์มอนิก เมื่อผู้ฟังยืนอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งทางเดินของคลื่นที่สะท้อนกลับมากกว่าทางเดินของคลื่นที่เคลื่อนที่ไปข้างหน้าเป็นระยะครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเสียง คลื่นทั้งสองจะต่างเฟสกันเท่ากับ  $\pi$  เรเดียน ซึ่งเป็นการแทรกสอดแบบหักล้างสมบูรณ์ ทำให้ผู้ฟังไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่งนี้

เพื่อหลีกเลี่ยงผลของการเกิดการแทรกสอดดังกล่าว จึงมักวางลำโพงในกล่องปิดมิดชิด เพื่อหลีกเลี่ยงการแทรกสอดแบบหักล้างอันเนื่องมาจากคลื่นเสียงที่สะท้อนกลับและคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหน้า การบรรจุให้อยู่ในกล่องปิดมิดชิดจึงมิใช่เพื่อการประดับตกแต่งแต่อย่างใด

นอกจากนี้ การออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายอันต้องคำนึงถึงผลของการแทรกสอดด้วย เช่นที่ออกแบบดังรูปที่ 8.4 พิจารณาที่จุด  $x$  ซึ่งอยู่ด้านหน้าของลำโพงแต่เป็นตำแหน่งเฉียงถ้าทางเดินของเสียงที่ออกจากลำโพงที่ 1 และที่ 5 แตกต่างกันเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นพอดี เสียงจากลำโพงทั้งสองจะแทรกสอดแบบหักล้างเพราะเฟสต่างกันเท่ากับ  $\pi$  เรเดียน ถ้าผู้ฟังยืนอยู่ไกลมากๆ เทียบกับระยะห่างของแต่ละลำโพง คลื่นเสียงจากลำโพงที่ 2 และ 6 หรือที่ 3 และ 7 หรือที่ 4 และ 8 จะแทรกสอดแบบหักล้าง จึงไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่ง  $x$  นี้ ผลที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้จึงมีประโยชน์มากในการออกแบบสร้างหอประชุมที่มีขนาดใหญ่



รูปที่ 8.4 แสดงการออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายตัว แล้วทำให้เกิดการแทรกสอดแบบหักล้างที่ตำแหน่งซึ่งอยู่หน้าลำโพง

### 3. บีตส์

ถ้ามีคลื่นหลายขบวน แต่ละคลื่นมีความถี่  $\omega$  และเลขคลื่น  $k$  เท่ากัน เราสามารถใช้สมการ (7.2) อธิบายคลื่นเหล่านั้นได้ แต่ถ้าคลื่นเหล่านั้นมีความถี่และเลขคลื่นต่างกัน เราไม่สามารถใช้สมการ (7.2) อธิบายคลื่นรวมได้ ทั้งนี้เพราะคลื่นรวมมีแอมพลิจูดแตกต่างจากแต่ละคลื่นนั่นเอง

พิจารณาคคลื่นสองคลื่นซึ่งมีแอมพลิจูดเท่ากันแต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย เคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกัน ผลรวมของคลื่นคู่นี้จะมีแอมพลิจูดที่สูงต่ำสลับกันไป เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า บีตส์ (beats) ซึ่งเราอาจทดลองได้จากการเคาะสีอมเสียง 2 อันที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

สมมติให้คลื่นสองขบวนแทนด้วยสมการ ดังนี้

$$y_1 = A \sin 2\pi f_1 t$$

และ

$$y_2 = A \sin 2\pi f_2 t$$

โดยที่  $A$  คือแอมพลิจูด และ  $f_1$  และ  $f_2$  คือความถี่ของคลื่นที่ต่างกันไม่มากนัก

$$\therefore y = y_1 + y_2$$

$$= A \sin 2\pi f_1 t + A \sin 2\pi f_2 t$$

$$= A \left[ 2 \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \cdot \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right]$$

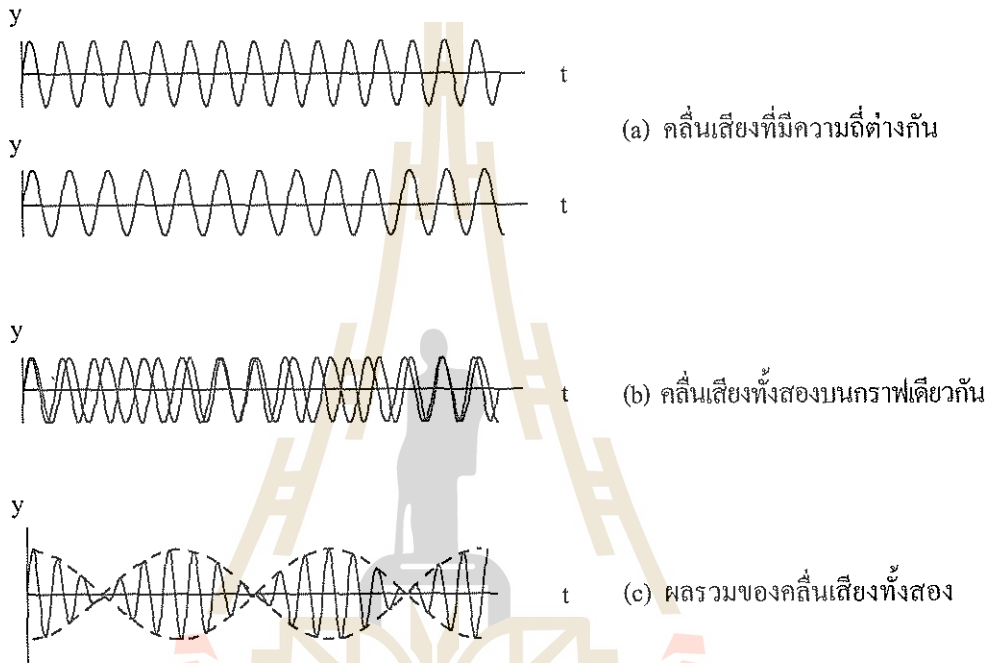
$$= \left[ 2A \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cdot \left[ \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \right]$$

หรือ 
$$y = B \sin 2\pi \left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \quad (8.14)$$

ดังนั้นคลื่นรวมจะมีความถี่เฉลี่ยเป็น  $\left( \frac{f_1 + f_2}{2} \right)$  และมีแอมพลิจูดรวมเป็น

$$B = 2A \cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \quad (8.15)$$

และค่าแอมพลิจูด B นี้ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาและขึ้นอยู่กับค่า  $(f_1 - f_2)/2$  ถ้า  $f_1$  มีค่าใกล้เคียงกับ  $f_2$  มาก เทอม  $(f_1 - f_2)/2$  จะมีค่าน้อย ทำให้แอมพลิจูดรวมเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้าๆ



รูปที่ 8.5 แสดงการรวมคลื่นที่มีแอมพลิจูดเท่ากัน แต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

ค่าของแอมพลิจูด B จะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \pm 1 = \cos n\pi \quad (8.16)$$

โดยที่  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

หรือ  $2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = n\pi$

$$t = \frac{n}{f_1 - f_2} \quad (8.17)$$

ดังนั้นเวลาในช่วงค่าสูงสุดสองค่า คือ

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

หรือจำนวนค่าสูงสุดในเวลา 1 วินาที คือ

$$\frac{1}{\Delta t} = f_1 - f_2 \quad (8.18)$$

ทำนองเดียวกัน ค่าต่ำสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\cos 2\pi \left( \frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \cos(2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0 \quad (8.19)$$

โดยที่

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

หรือ

$$t = \frac{2n + 1}{2(f_1 - f_2)} \quad (8.20)$$

ความถี่ของจำนวนค่าต่ำสุดคือ

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{1}{f_1 - f_2} \quad (8.21)$$

การเปลี่ยนค่าของแอมพลิจูดระหว่างค่าสูงสุดค่าหนึ่งกับค่าต่ำสุดที่อยู่ถัดไปเรียกว่าบีตส์ และจำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ

$$N = |f_2 - f_1| = f_b \quad (8.22)$$

ถ้าความถี่ทั้งสองใกล้เคียงกันมาก ความถี่ของบีตส์  $f_b$  จะน้อยมาก และช่วงเวลา  $\Delta t$  ระหว่างบีตส์จะมีค่ามาก และถ้าความถี่ทั้งสองเท่ากันพอดีความถี่ของบีตส์จะเท่ากับศูนย์ และไม่มีบีตส์เกิดขึ้นเลย

เราสามารถใช้นบีตส์ในการปรับเสียงดนตรี เช่น เปียโน กีตาร์ เป็นต้น กล่าวคือ ถ้าความถี่ของเสียงดนตรีที่จะปรับแตกต่างจากความถี่ของเสียงที่ได้มาตรฐาน เมื่อเราเล่นพร้อมกันจะได้ยินเสียงบีตส์เกิดขึ้น เราจึงต้องปรับเสียงโดยการปรับความตึงของสายดนตรี จนกระทั่งไม่ได้ยินเสียงบีตส์ แสดงว่ามีความถี่เดียวกัน อย่างไรก็ตาม คนทั่วไปไม่อาจแยกบีตส์ที่ความถี่ไม่เกิน 10 Hz ได้ และนักดนตรีจะแยกเสียงบีตส์ได้ดีกว่าคนทั่วไป

ตัวอย่างที่ 8.5 เมื่อเคาะสี่มเสียงสองอันพร้อมกัน ปรากฏว่าได้ยินเสียงบีตส์ 3 ครั้งในหนึ่งวินาที ถ้าสี่มเสียงอันหนึ่งทราบความถี่ที่แน่นอนว่าเท่ากับ 440 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของสี่มเสียงอีกอันหนึ่ง

วิธีทำ

จากสมการ (8.22) จำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ  $N=3$  ดังนั้น

$$3 = 440 - f_2$$

หรือ  $3 = f_1 - 440$

โดยที่เราไม่ทราบว่าสี่มเสียงอันใดเป็น  $f_1$  หรือ  $f_2$  ดังนั้นความถี่ที่ไม่ทราบค่าอาจเป็น 437 Hz หรือ 443 Hz

---

## สรุป

คลื่นเสียงเป็นคลื่นตามยาว ความเร็วของคลื่นเสียงขึ้นกับชนิดของตัวกลาง ความเร็วของคลื่นเสียงในของแข็งจะมากกว่าในของเหลวและแก๊ส การแทรกสอดของคลื่นเสียงจะสังเกตได้ง่ายคือเสียงดังหรือเบาสลับกันไป ซึ่งเราเรียกว่า บีตส์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

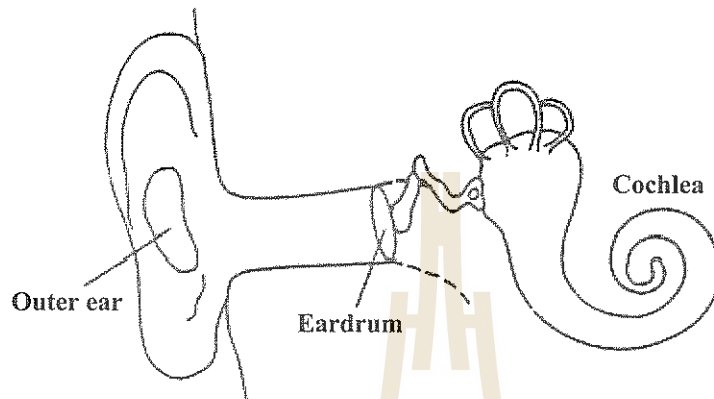
เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่มาถึงหูของมนุษย์ หูจะเปลี่ยนคลื่นเสียงเป็นคลื่นที่ประสาทหูรับรู้ได้ แล้วปรับเปลี่ยนต่อไปเพื่อให้สมองตีความต่อไป แม้ว่ากระบวนการนี้จะสลับซับซ้อน แต่เราสามารถศึกษาลักษณะที่สำคัญบางประการได้

นักดนตรีอธิบายเสียงที่เขาได้ยินในเทอมของความสูงต่ำของเสียง (pitch) ความดัง (loudness) และคุณภาพเสียง (quality) ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทั้งสามนี้ค่อนข้างจะสลับซับซ้อน ความสูงต่ำของเสียงเกี่ยวข้องกับความถี่ของเสียง ความดังเกี่ยวข้องกับความเข้มของคลื่นเสียง ส่วนคุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปร่างหรือรูปแบบ (waveform) ของคลื่นเสียง

ถ้าแหล่งกำเนิดเสียงมีการเคลื่อนที่ ผู้สังเกตจะได้ยินความถี่ที่แตกต่างไปจากความถี่ที่แท้จริง เรียกว่าปรากฏการณ์โดปเปลอร์ แต่ถ้าหากแหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าคลื่นเสียง เราเรียกว่า ซอนิกบูม

### 1. ความสูงต่ำและความถี่ของเสียง

รูปที่ 8.6 แสดงรูปร่างของหูมนุษย์ ส่วนนอกของหูรับคลื่นเสียงแล้วส่งผ่านไปยังส่วนกลางคือ eardrum กระจุกในหูส่วนกลางจะควบคุมแอมพลิจูดของคลื่นเสียงแล้วส่งต่อไปยังหูชั้นใน ประสาทในคอเคลีย (cochlea) ของหูส่วนในจะสนองตอบต่อคลื่นเสียง ความถี่ขนาด 20 kHz จะสนองตอบใกล้ๆฐาน และความถี่ต่ำๆ จะสนองตอบต่อไปตามเยื่อบาซิลาร์ (basilar membrane) สำหรับทุกๆ 3.5 mm ตามแนวเยื่อบาซิลาร์ ความถี่ซึ่งระบบประสาทสนองตอบจะลดลงครึ่งหนึ่ง เนื่องจากเยื่อดังกล่าวยาว 35 mm คนทั่วไปจึงได้ยินความถี่ที่มีความแตกต่างด้วยแฟกเตอร์ขนาด  $2^{10}$  หรือประมาณ 1,000 นั่นคือ จาก 20 Hz ถึง 20 kHz



รูปที่ 8.6 แสดงส่วนประกอบภายในของหูมนุษย์  
เยื่อบาซิลาร์ (ซึ่งไม่ได้แสดงไว้ ณ ที่นี้) จะขยายไปตามขดของคอเคลีย

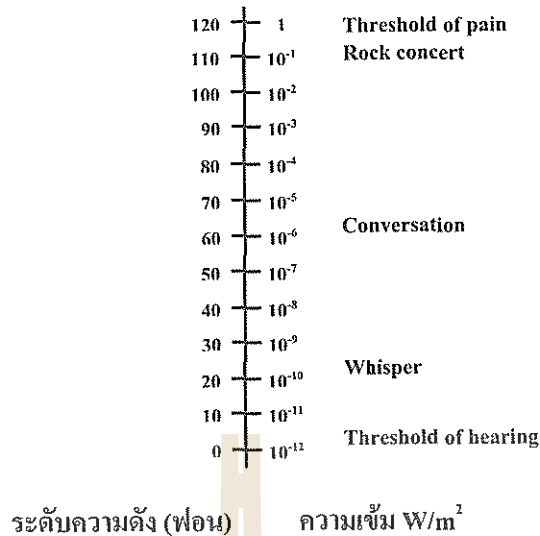
สำหรับคลื่นเสียงฮาร์โมนิก เสียงสูงจะสูงตามค่าความถี่ เยื่อบาซิลาร์สามารถแยกความถี่ขนาดต่างๆ ของคลื่นเสียงได้ เพราะเยื่อจะสั่นแตกต่างกันเมื่อระยะต่างกัน คลื่นเสียงความถี่ต่ำทำให้เยื่อบาซิลาร์ที่ระยะไกลสั่นแรง การแยกความถี่อย่างหยาบๆ จึงเกิดตามเยื่อบาซิลาร์ ส่วนการแยกอย่างละเอียด เกิดจากระบบประสาทที่กระจายอยู่ตามเยื่อบาซิลาร์

## 2. ความเข้มและความดังของคลื่นเสียง

หูของมนุษย์ทั่วไปจะได้ยินเสียงความถี่ 1 kHz ที่ความเข้ม  $I_0 = 1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$  จนถึงที่ความเข้มประมาณ  $1.00 \text{ W/m}^2$  เราเรียกความเข้มต่ำสุดของเสียงที่หูคนปกติจะได้ยินว่า threshold of hearing และเรียกความเข้มสูงสุดของเสียงที่หูคนปกติจะทนฟังได้ว่า threshold of pain or threshold of feeling

เมื่อความเข้มของคลื่นเสียงเพิ่มขึ้น ความดังของเสียงจะเพิ่มขึ้นด้วย แต่ความสัมพันธ์ของปริมาณทั้งสองมิได้เป็นแบบเชิงเส้น กล่าวคือ เมื่อความดังของเสียงเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าพบว่าความเข้มของเสียงจะเพิ่มขึ้น 10 เท่าและเมื่อความดังเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า ความเข้มจะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า

ระดับความดังของคลื่นเสียงมีหน่วยวัดเป็น ฟอน (phons) คลื่นเสียงขนาด 1 kHz ที่ threshold of hearing หรือที่ความเข้มประมาณ  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  มีระดับความดังเท่ากับ 0 ฟอน และที่ threshold of pain จะมีระดับความดังเท่ากับ 120 ฟอน สำหรับความดังที่ระดับความเข้มค่าต่างๆ แสดงในรูปที่ 8.7



รูปที่ 8.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มและความดังของคลื่นเสียง

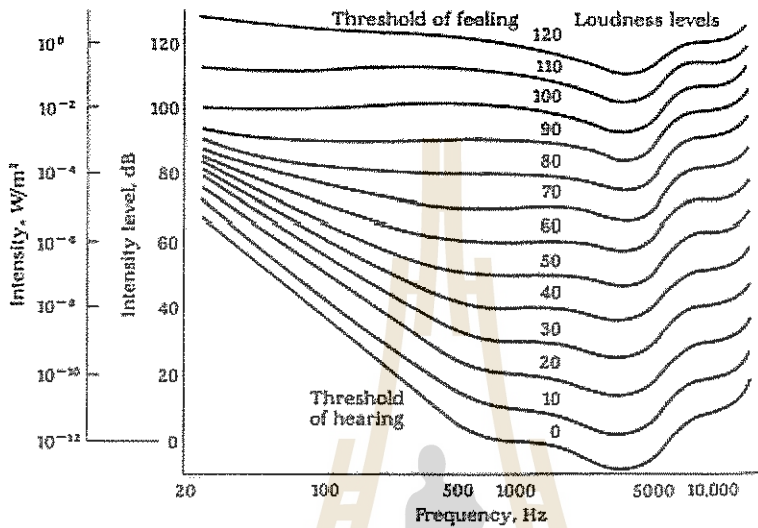
การได้ยินของมนุษย์จะมีพิสัยของความเข้มเสียงที่กว้างมาก เราจึงกำหนดให้คลื่นเสียงที่มีอัตราส่วนความเข้มเท่ากันมีระดับของความดังเท่ากันด้วย โดยใช้ลอการิทึม (logarithms) ดังนั้น เราจึงกำหนดความเข้มของเสียงเป็นระดับความเข้มเสียง (sound-intensity level) แทนด้วย  $\beta$  กำหนดโดย

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (8.23)$$

โดยที่  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  เป็นความเข้มของเสียงที่มีระดับความเข้มเสียง  $\beta$  เป็นศูนย์ แม้ว่า  $\beta$  จะไม่มีหน่วยแต่ก็กำหนดให้มีหน่วยเป็นเดซิเบล (decibel) แทนด้วย dB เพื่อเป็นเกียรติแก่ Alexander Graham Bell

ระดับความเข้มเสียง  $\beta$  กำหนดโดยสมการ (8.23) เพื่อว่าความเข้มเสียง  $I$  ที่เปลี่ยนไปด้วยแฟกเตอร์  $10^n$  สอดคล้องกับการเปลี่ยน  $\beta$  เท่ากับ  $10 \cdot n$  เช่น ถ้า  $\frac{I}{I_0} = 10^7$  ดังนั้น  $\beta = 10 \log_{10}(10^7) = 10 \cdot 7 = 70 \text{ dB}$  แม้ว่า  $n = 7$  ในที่นี้จะเป็นเลขจำนวนเต็ม แต่เลขจำนวนอื่นๆ ก็ยังใช้ได้เช่นกัน

อย่างไรก็ตามหูของมนุษย์จะรับรู้คลื่นเสียงไม่ทุกความถี่ รูปที่ 8.8 แสดงระดับความดังและความเข้มของเสียงที่ความถี่ต่างๆ แต่ละเส้นแทนเสียงที่ความถี่ต่างๆ ซึ่งมีระดับความดังเป็นฟอนเท่ากัน ระดับความดังเป็นฟอนที่ความถี่ 1 kHz เป็นตัวกำหนด ระดับความเข้มเสียงเป็น dB



รูปที่ 8.8 แสดงระดับความดังและความเข้มเสียงที่ความถี่ค่าต่างๆ

โดยทั่วไปหูของมนุษย์จะไวต่อเสียงความถี่ประมาณ 4 kHz แต่เรายังใช้ส่วนราบสูง (plateau) ของเส้นโค้งที่ความถี่ 1 kHz เป็นมาตรฐานในการกำหนดระดับความเข้มเสียงที่ความถี่ 40 Hz หูจะรับรู้เสียงซึ่งมีระดับความเข้มเสียง 58 dB ในขณะที่หูรับรู้เสียงความถี่ 1 kHz หรือ 6 kHz ด้วยระดับความเข้มเสียง 0 dB

**ตัวอย่างที่ 8.6** คนขับรถโดยสารประจำทางในเมืองกำลังสนทนากับผู้โดยสารที่อยู่ในรถซึ่งมีหน้าต่างเปิดทุกบาน ถ้าระดับความเข้มเสียงของการสนทนาเท่ากับ 65 เดซิเบล และระดับความเข้มเสียงของการจราจรภายนอกรถเท่ากับ 70 เดซิเบล จงหา

- (a) ความเข้มของเสียง
- (b) ระดับความเข้มเสียงภายในรถโดยสารนั้น

**วิธีทำ**

(a) จากสมการ (8.23) ความเข้มของเสียงจากการสนทนา คือ

$$65 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0}$$
$$\frac{I_1}{10^{-12}} = 10^{6.5}$$
$$I_1 = 10^{-5.5} = 3.16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

และความเข้มของเสียงจากการจราจรนอกถด คือ

$$70 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0}$$
$$I_2 = 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

ดังนั้นความเข้มของเสียงภายในรถ คือ

$$I = I_1 + I_2 = 1.32 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

(b) ระดับความเข้มเสียงภายในรถ คือ

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{1.32 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 71.2 \text{ dB}$$

**ตัวอย่างที่ 8.7** จงหาแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดของอากาศ ซึ่งมีคลื่นเสียงความถี่ 3 กิโลเฮิรตซ์ และระดับความเข้มเสียง 60 เดซิเบล เคลื่อนที่ผ่านอากาศ เสียงมีอัตราเร็ว 343 เมตร/วินาที และอากาศมีความหนาแน่น 1.21 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup>

วิธีทำ

ความเข้มของเสียง หาได้จากสมการ (8.23) คือ

$$60 = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$
$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^6$$
$$I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

เนื่องจากความเข้มเสียงทำให้อากาศซึ่งเป็นตัวกลางแกว่งกวัด ดังนั้น จากสมการ (7.18) คือ

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v \quad \omega = 2\pi f$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2I}{\rho \omega^2 v}}$$

$$= \left[ \frac{2(10^{-6} \text{ W/m}^2)}{(1.21 \text{ kg/m}^3) \{2\pi(3000 \text{ Hz})\}^2 (343 \text{ m/s})} \right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 3.68 \times 10^{-9} \text{ m}$$

เสียง

### 3. คุณภาพและรูปแบบของคลื่นเสียง

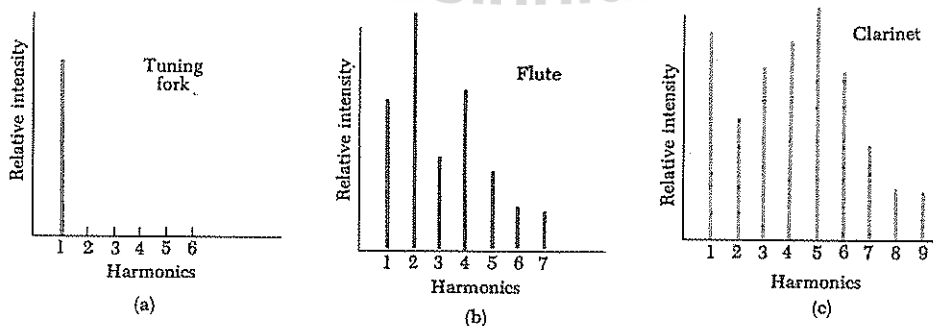
คุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปแบบของคลื่นเสียง มีใจขึ้นกับความถี่หรือแอมพลิจูด คลื่นเสียงโดยทั่วไปมักมีลักษณะเป็นคาบแต่ไม่ใช่เป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ มีลักษณะเป็นแอนฮาร์โมนิก และแม้ว่าจะมีความสูงต่ำของเสียงเดียวกัน แต่มีคุณภาพเสียงที่แตกต่างกัน

ฟูรีเยร์ (Jean Baptiste Joseph Fourier) ได้แสดงให้เห็นว่าคลื่นที่มีรูปแบบซับซ้อนและเป็นคาบเกิดจากผลบวกของคลื่นฮาร์โมนิก ถ้าให้  $y(t)$  เป็นการกระจัดของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ  $y(t)$  และอนุพันธ์ของ  $y(t)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น

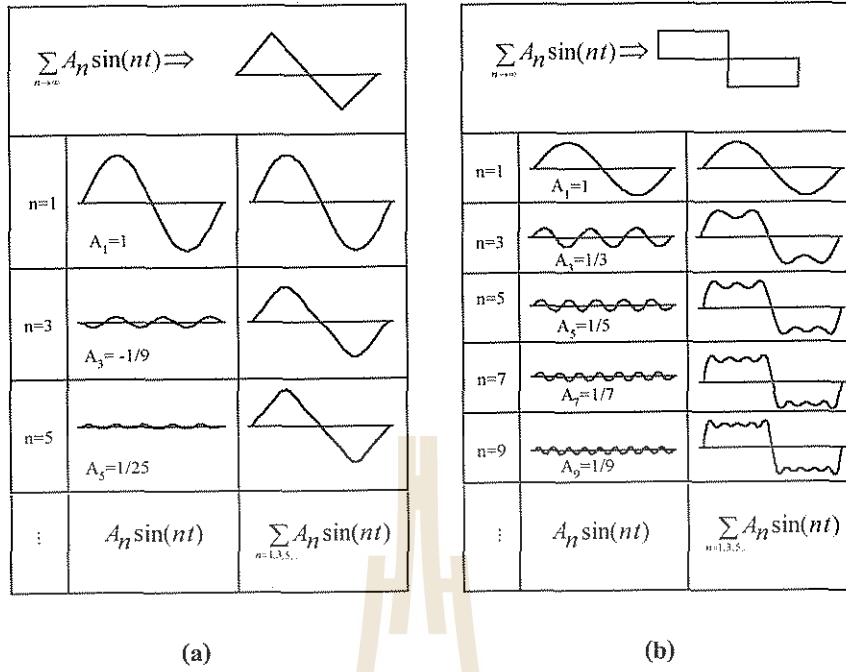
$$y(t) \approx \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (8.24)$$

โดยที่  $\omega = 2\pi/T$  และ  $T$  คือคาบของคลื่นนี้ ค่าของ  $N$  จะมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับแบบของคลื่น ส่วนการหาค่าสัมประสิทธิ์  $A_n$  และเฟส  $\phi_n$  ของแต่ละคลื่น จะใช้วิธีวิเคราะห์ที่เรียกว่า Fourier analysis เราเรียกความถี่ต่ำสุดของการวิเคราะห์นี้ว่า ความถี่หลักมูล และเรียกความถี่ที่เป็นพหุคูณของความถี่หลักมูลว่า ฮาร์โมนิกที่สูงกว่าหรือโอเวอร์โทน (overtones) ดังนั้นคุณภาพเสียงของเสียงจากปี่ทูม และขลุ่ยฝรั่งเกิดจากความแตกต่างของโอเวอร์โทนนั่นเอง

แม้ว่ารูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบสามารถเขียนในเทอมอนุกรมฟูรีเยร์ แล้วได้ความถี่หลักมูลและโอเวอร์โทนค่าต่างๆ เราอาจสร้างรูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบได้อีกหลายรูปแบบ โดยการเพิ่มโอเวอร์โทนต่างๆ เข้าไปในความถี่หลักมูล ซึ่งเรียกว่า Fourier synthesis ซึ่งเป็นวิธีทางอิเล็กทรอนิกส์ เครื่องดนตรีสมัยใหม่จึงใช้ตัวสังเคราะห์ (synthesizer) มากกว่าที่จะใช้เครื่องดนตรีที่ทำให้เกิดเสียงที่เป็นคลื่นกลธรรมดา



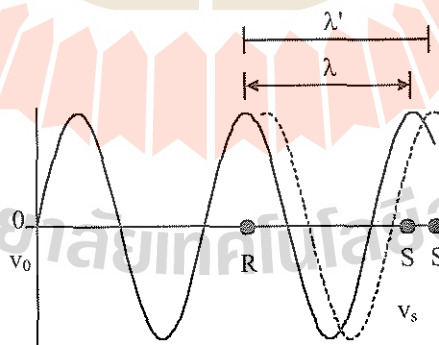
รูปที่ 8.9 แสดงฮาร์โมนิกของเสียงจากแหล่งกำเนิดที่แตกต่างกัน



รูปที่ 8.10 แสดงการรวมคลื่น รูปแบบคลื่นครบ 1 รอบ แสดงไว้ด้านบนสุด แต่ละคลื่นไซน์ที่นำมาบวกแสดงทางซ้ายมือ และผลรวมแสดงทางขวามือ

#### 4. ปრაกฏการณ์โดปเปลอร์

จากที่แล้วมาเราศึกษาถึงคลื่นซึ่งมีแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่นิ่งและผู้สังเกตก็อยู่นิ่งด้วย ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตเคลื่อนที่สัมพันธ์กัน นั่นคือ แหล่งกำเนิดคลื่นหรือผู้สังเกตอย่างใดอย่างหนึ่งมีการเคลื่อนที่หรือทั้งสองมีการเคลื่อนที่ ทำให้ผู้สังเกตได้รับคลื่นที่มีความถี่ต่างไปจากคลื่นที่ได้รับเมื่อแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตอยู่นิ่ง เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์โดปเปลอร์ (Doppler effect)



รูปที่ 8.11 แสดงการเกิดปรากฏการณ์โดปเปลอร์

สมมติให้แหล่งกำเนิดคลื่น (s) อยู่นิ่ง ส่งคลื่นออกมาด้วยความถี่  $f$  ความยาวคลื่น  $\lambda$  และความเร็ว  $v$  ฉะนั้น ถ้าผู้สังเกตอยู่นิ่งใน 1 หน่วยเวลา จะรับคลื่นได้จำนวน  $f$  คลื่น แต่ถ้าผู้สังเกตเคลื่อนที่เข้าหา s ด้วยอัตราเร็ว  $v_0$  จำนวนคลื่นซึ่ง O ด้รับในหนึ่งหน่วยเวลาจะเพิ่มขึ้น ค่าที่เพิ่มขึ้นนี้จะเป็นจำนวนคลื่นหาได้จากระยะทางที่ O เดินทางได้ในหนึ่งหน่วยเวลานั้นคือ  $\frac{v_0}{\lambda}$  ดังนั้น ถ้า  $f'$  เป็นความถี่ปรากฏซึ่ง O ด้รับได้ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f' &= f + \frac{v_0}{\lambda} \\ &= f + \frac{v_0 f}{v} \quad (v = \lambda f) \end{aligned}$$

หรือ 
$$f' = f \left( \frac{v + v_0}{v} \right) \quad (8.25)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า O เคลื่อนที่ออกจาก s ด้วยความเร็ว  $v_0$  ความถี่ปรากฏที่ O ด้รับได้ จะเป็น

$$f' = f \left( \frac{v - v_0}{v} \right) \quad (8.26)$$

สมการ (8.25) และ (8.26) อาจรวมได้ใหม่เป็น

$$f' = f \left( \frac{v \pm v_0}{v} \right) \quad (8.27)$$

โดยที่ เครื่องหมาย + แสดงถึง O เคลื่อนที่เข้าหาแหล่งกำเนิดคลื่น s  
เครื่องหมาย - แสดงถึง O เคลื่อนที่ออกจากแหล่งกำเนิดคลื่น s

ต่อไปถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ออกจากผู้สังเกต โดยผู้สังเกตอยู่นิ่ง นั่นคือ s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v_s$  ดังนั้นความยาวคลื่นที่ผู้สังเกตด้รับได้จะเพิ่มจาก  $\lambda$  เป็น  $\lambda'$  ค่าความยาวคลื่นที่เพิ่มขึ้นนี้มีค่าเท่ากับระยะทางที่แหล่งกำเนิดเดินทางได้ในหนึ่งรอบคือ ระยะ  $ss'$  เนื่องจากเวลาที่ใช้สำหรับหนึ่งรอบคือ  $\frac{1}{f}$  และความเร็วของ s คือ  $v_s$  ระยะ  $ss'$  จึงเป็น  $\frac{v_s}{f}$

$$\lambda' = \lambda + \frac{v_s}{f} \quad (8.28)$$

เนื่องจากตัวกลางอยู่นิ่งไม่ได้เคลื่อนที่ไปด้วย ความเร็วของคลื่นจึงไม่เปลี่ยนไป ยังคงมีค่าเท่ากับ  $v$  ความถี่ของเสียงที่ผู้สังเกตด้รับคือ  $f' = \frac{v}{\lambda'}$  ดังนั้น สมการ (8.28) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{v}{f'} = \frac{v}{f} + \frac{v_s}{f}$$

หรือ 
$$f' = \frac{vf}{v + v_s} \quad (8.29)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า  $s$  เคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกตด้วยความเร็ว  $v_s$  ความถี่ปรากฏที่ผู้สังเกตได้รับได้จะเป็น

$$f' = \frac{vf}{v - v_s} \tag{8.30}$$

สมการ (8.29) และ (8.30) รวมกันได้เป็น

$$f' = \frac{vf}{v \pm v_s} \tag{8.31}$$

โดยที่ เครื่องหมาย - แสดงถึง  $s$  เคลื่อนที่เข้าหา  $O$   
เครื่องหมาย + แสดงถึง  $s$  เคลื่อนที่ออกห่าง  $O$

ถ้าทั้งแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตเคลื่อนที่ เราจะได้สูตรรวมว่า

$$f' = \left( \frac{v \pm v_0}{v \mp v_s} \right) f \tag{8.32}$$

โดยที่ เครื่องหมายตอนบน (+ เศษ, - ส่วน) หมายถึง  $s$  และ  $O$  เคลื่อนที่เข้าหากัน  
เครื่องหมายตอนล่าง (- เศษ, + ส่วน) หมายถึง ทั้ง  $s$  และ  $O$  เคลื่อนที่ออกจากกัน

**ตัวอย่างที่ 8.8** จงพิสูจน์ว่าสมการ (8.27) และ (8.31) เป็นอันเดียวกัน ถ้าอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดเคลื่อนและผู้สังเกตมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วของเสียงในตัวกลาง

**วิธีทำ**

ให้  $v_0 = v_s = u$  และ  $u$  แทนอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดและผู้สังเกต

สมการ (8.27) จะเป็น 
$$f' = f \left( 1 \pm \frac{u}{v} \right)$$

สมการ (8.31) เขียนใหม่ได้เป็น 
$$f' = f \left( \frac{1}{1 \mp \frac{u}{v}} \right)$$

โดยการกระจายแบบไบนอมิยัล (binomial)

$$\frac{1}{\left( 1 \mp \frac{u}{v} \right)} = \left( 1 \mp \frac{u}{v} \right)^{-1} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left( \frac{u}{v} \right)^2 \pm \dots$$

เนื่องจาก  $u \ll v$  หรือ  $\frac{u}{v} \ll 1$  เราจึงตัดเทอม  $\left( \frac{u}{v} \right)^2$  และเทอมต่อๆ ไปได้

$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)} \approx 1 \pm \frac{u}{v}$$

สมการ (8.31) คือ  $f' = f \left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (8.27) นั่นเอง

**ตัวอย่างที่ 8.9** ผู้สังเกตซึ่งยืนอยู่ที่ชานชาลาสถานีรถไฟแห่งหนึ่งสังเกตว่า รถไฟซึ่งกำลังวิ่งเข้าสู่สถานีด้วยความเร็ว 90 กิโลเมตร/ชั่วโมง หูจากรถไฟที่กำลังวิ่งเข้าสู่สถานีและที่เคลื่อนที่ผ่านสถานีมีความถี่ต่างกันหรือลดลง 400 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของหูจากรถไฟ กำหนดความเร็วของเสียงในอากาศเป็น 350 เมตรต่อวินาที

**วิธีทำ**

ความถี่ปรากฏขณะรถไฟวิ่งเข้าสู่สถานีคือ

$$f'_1 = f \left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

ความถี่ปรากฏ เมื่อรถไฟวิ่งเลยสถานีคือ

$$f'_2 = f \left(\frac{v}{v + v_s}\right)$$

ดังนั้น

$$f'_1 - f'_2 = 400 \text{ Hz}$$

$$f'_1 - f'_2 = f \left(\frac{v}{v - v_s} - \frac{v}{v + v_s}\right)$$

แต่

$$= f \left(\frac{2vv_s}{v^2 - v_s^2}\right)$$

หรือ

$$f = (f'_1 - f'_2) \left(\frac{v^2 - v_s^2}{2vv_s}\right)$$

เนื่องจาก  $v = 350 \text{ m/s}$  และ  $v_s = 90 \text{ km/hr} = 25 \text{ m/s}$

$$\therefore f = 400 \cdot \frac{(350)^2 - (25)^2}{2 \times 350 \times 25} = 2785.7 \text{ Hz}$$

**ตัวอย่างที่ 8.10** ส้อมเสียงความถี่ 440 เฮิรตซ์ เคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพงด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที จงหาจำนวนบีตส์ที่ปรากฏแก่ผู้สังเกตระหว่างคลื่นเสียงที่วิ่งเข้าหาและสะท้อนกลับผนังกำแพงนั้น ถ้าความเร็วของเสียงเป็น 332 เมตรต่อวินาที

**วิธีทำ**

เราทราบว่าเมื่อส้อมเสียงเคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพง ในขณะที่ตัวมันจะเคลื่อนที่ออกห่างผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ที่ผู้สังเกตได้ยินจะลดลง เมื่อเสียงกระทบผนังมันจะสะท้อนกลับและเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ปรากฏจะเพิ่มขึ้น จากตัวอย่างที่ 8.9 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_1' - f_2' &= \frac{2v v_s}{(v + v_s)(v - v_s)} f \\ &= \frac{2 \times 332 \times 4}{(332 + 4)(332 - 4)} \times 440 \\ &= 10.6 \approx 11 \text{ ต่อวินาที} \end{aligned}$$

$$f_1' - f_2' = 11 \text{ ต่อวินาทีก็คือจำนวนบีตส์ต่อวินาที นั่นเอง}$$

ปรากฏการณ์โดปเปลอร์นอกจากจะเกิดกับเสียงแล้วยังเกิดกับแสงด้วย โดยเฉพาะทางดาราศาสตร์ ทั้งนี้เพราะอัตราเร็วของแสงมีค่ามากเมื่อเทียบกับอัตราเร็วของต้นกำเนิดของมัน เช่น เมื่อดาวดวงหนึ่งกำลังเคลื่อนที่เข้าหาโลก ดังนั้นความถี่ที่เราตรวจจากสเปกโทรกราฟ (spectrograph) จะเพิ่มขึ้น ซึ่งหมายถึงความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมจะลดลง ดังนั้นเส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีม่วง ซึ่งเรียกว่า "violet shift" ในทำนองเดียวกัน ถ้าดวงดาวนั้นเคลื่อนที่ออกจากโลก ความถี่จะลดลง หรือความยาวคลื่นจะเพิ่มขึ้น เส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีแดง เรียกว่า "red shift"

จากตัวอย่างข้างบน เราอาจเขียนผลต่างของความถี่ปรากฏและความถี่จริงได้เป็น

$$f' - f = \pm \frac{f v_s}{c - v_s}$$

โดยที่  $c$  เป็นความเร็วของแสง และเนื่องจาก  $c = f\lambda$  และ  $f' = \frac{c}{\lambda'}$  ดังนั้น

$$c \left( \frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) = \pm \frac{c v_s / \lambda}{c - v_s}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} = \pm \frac{c - v_s}{v_s} = \pm \left( \frac{c}{v_s} - 1 \right)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_s}{c}$$

หรือ 
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_s}{c} \quad \lambda' - \lambda = \Delta\lambda \tag{8.33}$$

เครื่องหมาย - หมายถึง violet shift และเครื่องหมาย + หมายถึง red shift

**ตัวอย่างที่ 8.11** เส้นสเปกตรัมที่มีความยาวคลื่น  $5.0 \times 10^{-7}$  เมตร วัดได้ที่ห้องปฏิบัติการ จะปรากฏเป็น  $5.2 \times 10^{-7}$  เมตร สำหรับแสงที่มาจากดาราจักร (galaxy) จงหาความเร็วของดาราจักรที่เคลื่อนที่ห่างโลกออกไปนี้

**วิธีทำ**

เนื่องจาก 
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{+v_s}{c}$$

เราใช้เครื่องหมาย + เพราะมันกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

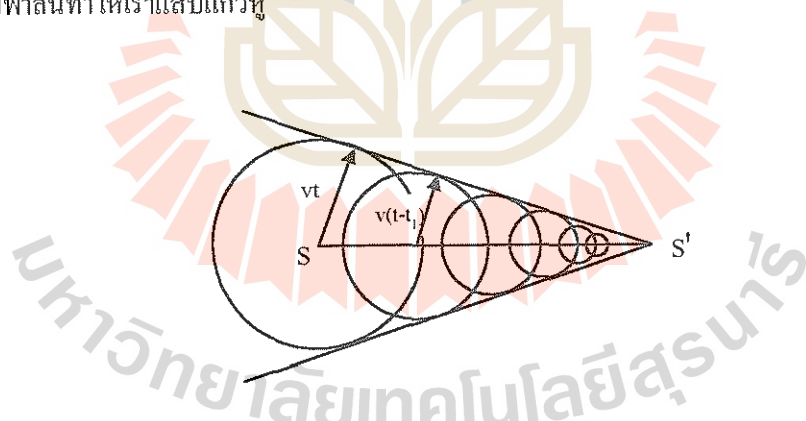
ดังนั้น 
$$v_s = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = (3 \times 10^8) \frac{(5.2 - 5.0) \times 10^{-7}}{5.0 \times 10^{-7}}$$
$$= 1.2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

ปรากฏการณ์โดปเปลอร์สามารถเกิดขึ้นได้กับคลื่นทุกชนิด เมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วคลื่น ในกรณีของคลื่นแสงความถี่ของคลื่นแสง ไม่ขึ้นกับความเร็วของตัวกลางตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ เนื่องจากความเร็วของแสงจะมีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุกกรอบอ้างอิง (frame of references) การเคลื่อนไปสู่อะไรสักอย่างของเส้นสเปกตรัมสำหรับการสังเกตดวงดาวต่างๆ หมายถึงดาวเหล่านั้นกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป และสอดคล้องกับแนวคิดเกี่ยวกับจักรวาลที่ขยายตัวออก (expanding universe) นั่นคือเมื่อประมาณ 10 ถึง 12 พันล้านปีมาแล้ว จักรวาลของเราได้ก่อตัวเป็นรูปร่างขึ้น อนุภาคเล็กๆ จำนวนมหาศาลเช่น อิเล็กตรอน โปรตรอน และนิวตรอน ได้รวมตัวกันขึ้นด้วยกระบวนการที่เรียกว่า "Big squeeze" และในขณะที่เดียวกันอุณหภูมิจะสูงมากๆ เป็นล้านล้านองศา ต่อจากนั้นจะเกิดการขยายตัวออกและระเบิดด้วยปฏิกิริยา thermonuclear เรียกว่า "Big Bang" ชิ้นส่วนต่างๆ จะหลุดกระจายไปทั่ว ชิ้นส่วนเหล่านี้จะกลายเป็นดาราจักรต่างๆ เช่น ทางช้างเผือกของเราและ Crab nebula (Andromeda) และเคลื่อนที่ขยายตัวออกไปเรื่อยๆ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีเกี่ยวกับการขยายตัวของจักรวาลจะมีแนวคิดตรงข้ามทฤษฎีที่เรียกว่า "steady-state theory" ซึ่งกล่าวว่าไฮโดรเจนที่มีอยู่ในอวกาศจะรวมตัวกันเป็นดาราจักรต่างๆ และรักษารูปแบบของจักรวาลไว้ชั่วกัลปาวสาน ถ้าดวงดาวซึ่งเป็นต้นกำเนิดของแสงเคลื่อนที่เข้าหาโลก เส้นสเปกตรัมจะต้องเลื่อนไปทางสีม่วง ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่เราสังเกตเห็นดาวคู่ซึ่งให้ทั้งสเปกตรัมที่เลื่อนไปทางสีแดงและสีม่วง นั่นคือ ดาวคู่นี้จะมีการเคลื่อนที่บางครั้งเคลื่อนที่เข้าหาโลกและบางครั้งเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

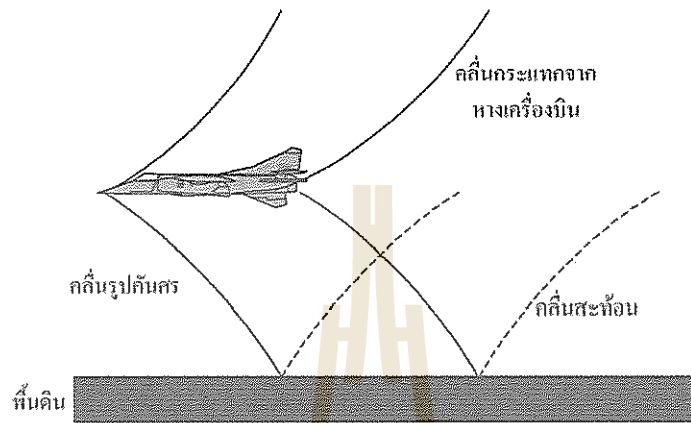
### 5. ซอนิกบูม

เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใกล้เคียงกับความเร็วของคลื่น หน้าคลื่นจะเปลี่ยนไปและแนวความคิดเกี่ยวกับปรากฏการณ์โดปเปลอร์จะใช้ไม่ได้ และเมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมากกว่าความเร็วของคลื่น จะไม่มีปรากฏการณ์โดปเปลอร์เกิดขึ้นเลย แต่จะเกิดคลื่นกระแทก (shock wave) ซึ่งแตกต่างจากคลื่นธรรมดา รูปที่ 8.12 แสดงการเกิดคลื่นกระแทก เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่จากตำแหน่ง  $s$  ไปยังตำแหน่ง  $s'$  โดยใช้เวลา  $t$  ที่ตำแหน่งต่างๆ บนแนว  $ss'$  เราสามารถเขียนวงกลมแสดงตำแหน่งต่างๆ ที่คลื่นกระจายออกไปเมื่อเวลาผ่านไป  $t$  วินาที ถ้า  $v$  เป็นความเร็วของคลื่น และ  $v_s$  เป็นความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่น วงกลมแรกคือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่  $s$  และมีรัศมี  $vt$  วงกลมนี้แสดงหน้าคลื่นที่กระจายออกไปที่ตำแหน่ง  $s$  เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ที่ตำแหน่ง  $s'$  วงกลมถัดไปจะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใช้เวลา  $t_1 = 0.1t, t_2 = 0.2t, t_3 = 0.3t, \dots$  รัศมีของวงกลมเหล่านี้คือ  $v(t-t_1), v(t-t_2), v(t-t_3) \dots$  วงกลมเหล่านี้จะค่อยๆ เล็กลงจนกระทั่งที่ตำแหน่ง  $s'$  จะเท่ากับศูนย์ เส้นที่ห่อหุ้มเส้นที่ห่อหุ้ม (envelope) วงกลม ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง และมีลักษณะคล้ายคลื่นรูปคันศร (bow wave) ซึ่งเกิดจากการที่เรือแล่นด้วยอัตราเร็วสูงกว่าอัตราเร็วของคลื่นบนผิวน้ำ เราเรียกว่าปรากฏการณ์ที่แหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เร็วกว่าความเร็วเฟสของคลื่นว่า ซอนิกบูม (sonic booms)

ปัจจุบันซอนิกบูมได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก และมีผลต่อปัญหาสุขภาพจิตของมนุษย์ ในตอนต้นเราทราบแล้วว่าเสียงเป็นคลื่นความดัน และคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูมก็เป็นการรวมกันของคลื่นเสียง จึงเป็นคลื่นความดันด้วย ดังนั้น คลื่นกระแทกจึงมีความดันที่เพิ่มขึ้นคล้ายเสียงฟ้าผ่าทำให้เราสะดุ้งกลัว



รูปที่ 8.12 แสดงคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูม



รูปที่ 8.13 แสดงลักษณะของคลื่นช็อกที่เกิดจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง

พลังงานจากคลื่นกระแทกอาจทำให้เกิดความเสียหายได้ เช่น พลังงานที่ได้จากคลื่นกระแทกรูปกรวยจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียงมากๆ อาจทำให้กระจกหน้าต่างแตกได้ เราเรียกอัตราส่วนระหว่างความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นต่อความเร็วของคลื่นว่า เลขมัค (mach number) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชื่อมัค แอนสต์ (Mach Ernst) ดังนั้น จรวดที่มีขนาดมัค 4 จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเป็นสี่เท่าของความเร็วเสียงในอากาศ นอกจากนี้เซเรนโกฟ พาเวล อเล็กเซวิช (Cerenkov Pavel Alexsejevich) นักฟิสิกส์ชาวรัสเซีย พบว่า อนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าวิ่งผ่านวัตถุด้วยอัตราเร็วเหนือแสง จะแผ่คลื่นแสงออกมาเป็นสีน้ำเงินเรียกว่า รังสีเซเรนโกฟ (Cerenkov radiation) ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง

## สรุป

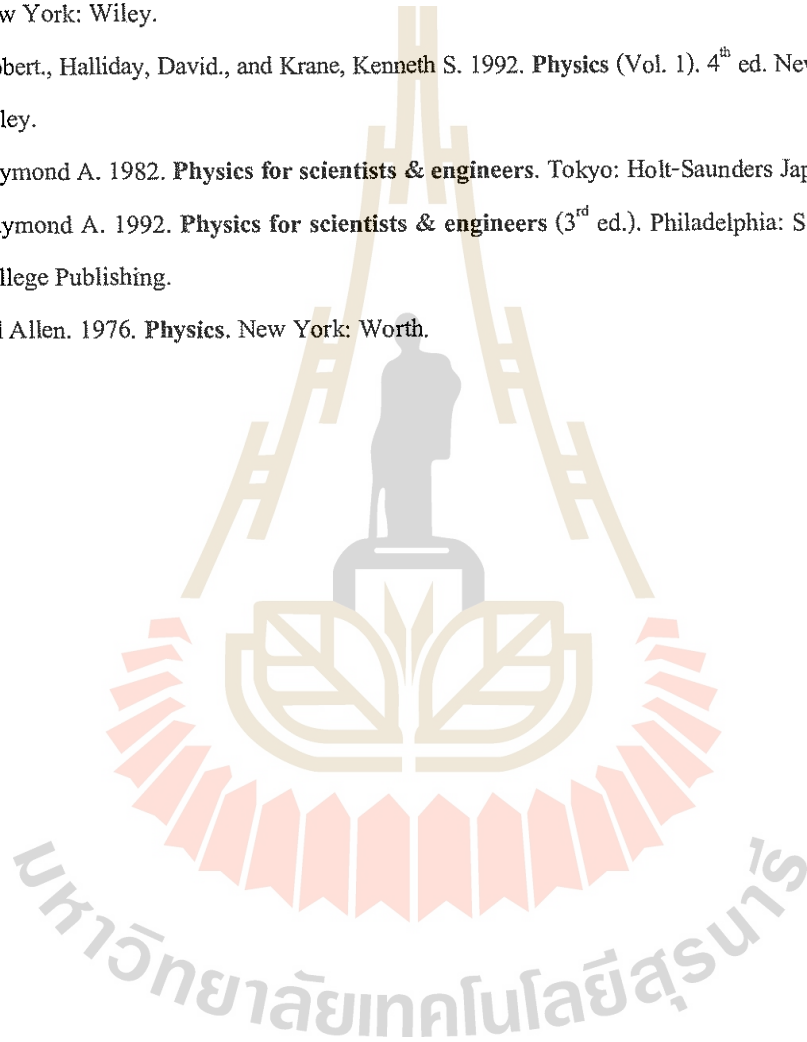
ความสูงต่ำของเสียงขึ้นกับความถี่ของเสียง ส่วนความดังของเสียงขึ้นกับความเข้ม คุณภาพของเสียงอาจทำให้ขึ้นกับรูปแบบของคลื่นเสียงได้ ถ้าแหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วน้อยกว่าคลื่นเสียงจะเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่าปรากฏการณ์โดปเปลอร์ แต่ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ได้เร็วกว่าเสียงจะเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่าซอนิกบูม เช่น ปรากฏการณ์ที่เกิดจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง เป็นต้น



## บรรณานุกรม

---

- Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2<sup>nd</sup> ed.). Tokyo: McGraw-Hill.
- Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: Wiley.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4<sup>th</sup> ed. New York: Wiley.
- Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers**. Tokyo: Holt-Saunders Japan.
- Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3<sup>rd</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics**. New York: Worth.



---

## สถิตศาสตร์ของของไหล



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

โดย รองศาสตราจารย์ ดร. ประสาท สืบคำ

# ตอนที่ 9.1

## สถิตศาสตร์ของของไหล

ของไหล หมายถึง สารที่ไม่แข็งเกร็งจึงไหลได้ มีรูปร่างไม่แน่นอน ขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ ดังนั้น ของไหลจึงหมายถึงสสารในสถานะของเหลวและแก๊ส

สถิตศาสตร์ของของไหล เป็นการศึกษาสมบัติของของเหลวและแก๊สที่อยู่นิ่ง ณ อุณหภูมิปกติ โดยจะศึกษาเกี่ยวกับความดัน หลักของอาร์คิมิดีส หลักของพาสคัล ความตึงผิว สภาพคะปิลลา เป็นต้น

### 1. ความหนาแน่นและความดัน

ความหนาแน่นของสารเอกพันธ์มีนิยามว่า คือ มวล ต่อ ปริมาตร นั่นคือ สารที่มีมวล  $m$  ปริมาตร  $V$  จะมีความหนาแน่น  $\rho$  (อ่านว่า rho) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (9.1)$$

ในระบบเอสไอ  $\rho$  มีหน่วยเป็นกิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup>

ตารางที่ 9.1 เป็นความหนาแน่นของสารบางชนิดที่เราคุ้นเคย ณ อุณหภูมิต่างๆ จากตารางจะพบว่า น้ำมีความหนาแน่น  $1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

#### 1.1 ความถ่วงจำเพาะของสาร

ความถ่วงจำเพาะ (specific gravity) ของสารใด คือ อัตราส่วนของความหนาแน่นของสารนั้น ต่อความหนาแน่นของน้ำ เพราะฉะนั้น ความถ่วงจำเพาะจึงไม่มีหน่วย ปัจจุบันนิยมเรียกความถ่วงจำเพาะว่า ความหนาแน่นสัมพัทธ์ (relative density)

#### 1.2 ความดัน

ความดัน (pressure) นิยามว่า แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ เมื่อแรง  $F$  คือ แรงที่กระทำในทิศตั้งฉากกับพื้นที่  $A$  ดังนั้น

$$P = \frac{F}{A} \quad (9.2)$$

ตารางที่ 9.1 ความหนาแน่นของของแข็ง ของเหลวและแก๊สบางชนิดที่ความดันบรรยากาศและอุณหภูมิมาตรฐาน

สสาร	$\rho(\text{kg/m}^3)$	สสาร	$\rho(\text{kg/m}^3)$
น้ำแข็ง	$0.917 \times 10^3$	น้ำ	$1.00 \times 10^3$
อลูมิเนียม	$2.70 \times 10^3$	กลีเซอริน	$1.26 \times 10^3$
เหล็ก	$7.86 \times 10^3$	เอทิล แอลกอฮอล์	$0.806 \times 10^3$
ทองแดง	$8.92 \times 10^3$	เบนซิน	$0.879 \times 10^3$
เงิน	$10.5 \times 10^3$	ปรอท	$13.6 \times 10^3$
ตะกั่ว	$11.3 \times 10^3$	อากาศ	1.29
ทองคำ	$19.3 \times 10^3$	ออกซิเจน	1.43
พลาสติก	$21.4 \times 10^3$	ไฮโดรเจน	$8.99 \times 10^{-2}$
		ฮีเลียม	$1.79 \times 10^{-1}$

หน่วยของความดันในระบบเอสไอ คือ นิวตัน / เมตร<sup>2</sup> หรือ ปาสคัล (pascal , Pa) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักวิทยาศาสตร์ที่ชื่อ แบลส์ ปาสกาล (Blaise Pascal)

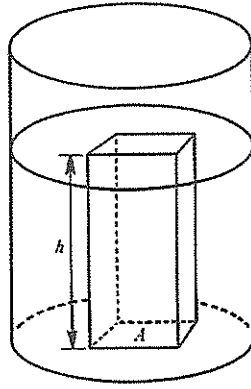
ความดัน  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$  ในระบบอังกฤษใช้ ปอนด์ต่อตารางนิ้ว ( $\text{lb/in}^2$  หรือ psi) ความดันเนื่องจากของไหลนั้น สามารถหาได้ดังนี้

พิจารณาภาชนะทรงกระบอกบรรจุของไหลความสูง  $h$  ดังรูปที่ 9.1 ความดันที่ตำแหน่งต่ำสุดหาได้โดยพิจารณาแท่งของเหลว (แท่งจินตภาพ) พื้นที่หน้าตัด  $A$  สูง  $h$  แรงที่กดลงบนพื้นที่  $A$  ที่ก้นถัง คือ น้ำหนักของแท่งของเหลว ซึ่ง

$$W = mg = V\rho g = Ah\rho g$$

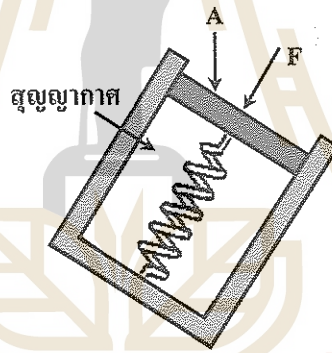
ความดันจึงมีค่า

$$P = \frac{W}{A} = \rho gh \quad (9.3)$$



รูปที่ 9.1 แท่งสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีฐาน  $A$  สูง  $h$  ประกอบ  
การพิจารณาหาความดันในของเหลว

นั่นคือ ความดันแปรผันกับความลึกหรือความสูง ( $h$ ) และขึ้นอยู่กับชนิดของของไหล ( $\rho$ ) การวัดความดัน ณ จุดใดจุดหนึ่งในของไหลนั้น ใช้เครื่องมืออย่างๆ ดังรูปที่ 9.2



รูปที่ 9.2 เครื่องวัดความดันของของไหลอย่างง่าย

ความหนาแน่นและความดันของของไหล อาจจะทำให้คำจำกัดความในรูปเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \tag{9.4}$$

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \tag{9.5}$$

ถ้าเราพิจารณาของไหลปริมาตรเล็กๆ  $dV$  มีพื้นที่  $A$  และความหนา  $dy$  มีระดับสูงวัดจากก้นถังเท่ากับ  $y$  น้ำหนัก  $dW = \rho g A dy$  ขึ้นปริมาตรเล็กๆ นี้อยู่ในภาวะสมดุล

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

ซึ่งพิจารณาแรงในแนวตั้งจากรูปที่ 9.3 (a) จะได้ว่า

$$\Sigma F_y = 0$$

$$PA - (P + dP)A - \rho g A dy = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (9.6)$$

จากสมการ 9.6 หมายความว่า ถ้าความสูงเพิ่มขึ้น ( $dy$  เป็นบวก) ความดันจะลดลง ( $dP$  เป็นลบ) ถ้า  $P_1$  และ  $P_2$  เป็นความดันที่ความสูง  $y_1$  และ  $y_2$  วัดจากตำแหน่งอ้างอิง (ดังรูปที่ 9.3b) ผลต่างของความดันหาได้จากการอินทิเกรตสมการ 9.6 ได้

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$
$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \quad (9.7)$$

ถ้าในภาชนะถึงทรงกระบอกเปิดรับความดันของบรรยากาศ  $P_2 = P_a$  และใช้  $h = y_2 - y_1$  ความดัน ณ ตำแหน่งความลึก  $h$  ใต้ผิวของไหล  $P = P_1$  จากสมการ 9.7 คือ

$$P = P_a + \rho gh \quad (9.8)$$

ความดัน 1 บรรยากาศ (atmosphere, atm) มีค่าดังนี้

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$
$$= 14.7 \text{ lb/in}^2 \quad (9.9)$$

หน่วยของความดันอื่นๆ ที่นิยมใช้ เช่น

$$1 \text{ bar} = 1.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (9.10)$$

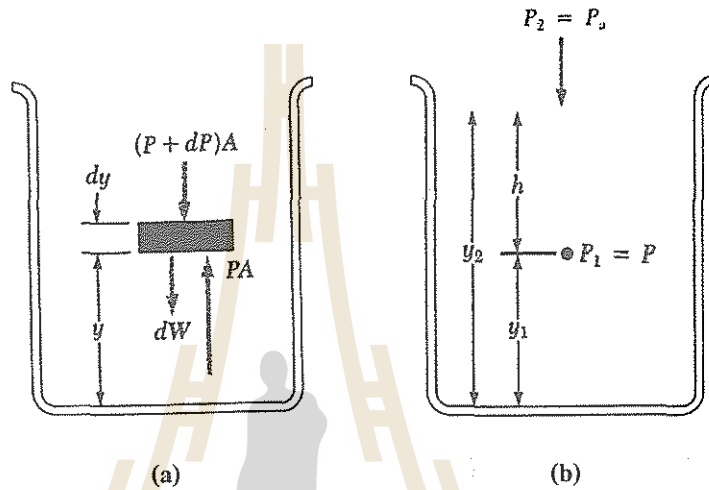
$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm of Hg} \quad (9.11)$$

$$1 \text{ torr} = \frac{1}{760} \text{ atm} = 1 \text{ mm of Hg}$$

ความดัน  $P$  ในสมการ 9.8 นั้น รวมเอาความดันเนื่องจากบรรยากาศไว้ด้วย เรียกว่า ความดันสัมบูรณ์ (absolute pressure) แต่ถ้าเราไม่นำความดันของบรรยากาศมาคิด หรือ ก็คือหักความดันบรรยากาศ  $P_a$  ออกจากความดันสัมบูรณ์  $P$  จะได้ความดันที่เรียกว่า ความดันเกจ  $P_G$  (gauge pressure)

$$P_G = P - P_a = \rho gh \tag{9.12}$$

การวัดความดันในยางรถยนต์นั้นเป็นการวัดความดันเกจ ดังนั้น เมื่อทำโจทย์ฟิสิกส์ ผู้อ่านต้องทำความเข้าใจให้ดีก่อนว่าโจทย์ต้องการ หมายถึง ความดันสัมบูรณ์ หรือความดันเกจ



รูปที่ 9.3 (a) แสดงความดันแปรผันกับความลึก

(b) ความดันที่ความลึก  $h$  เมื่อผิวของของเหลวอยู่ภายใต้ความดันบรรยากาศ คือ  $P = P_a + \rho gh$

### 1.3 เครื่องมือวัดความดัน

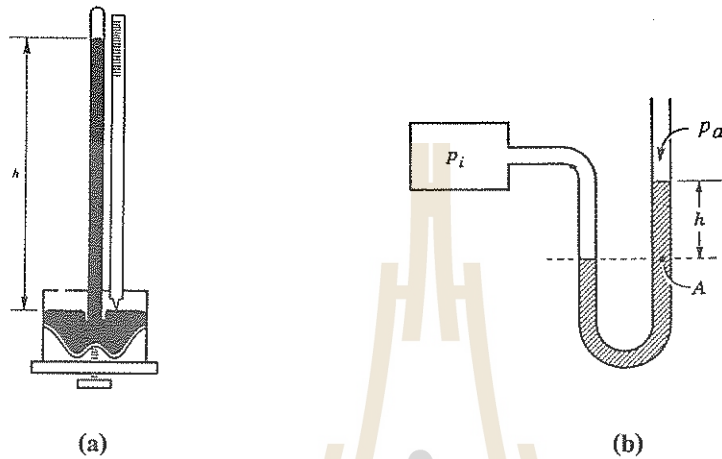
เครื่องมือวัดความดัน เรียกว่า บารอมิเตอร์ (barometer) บารอมิเตอร์แบบง่าย คือ บารอมิเตอร์ปรอท ซึ่งประกอบด้วยหลอดแก้วยาวมีรูเล็กบรรจุปรอทเต็ม แล้วคว่ำลงในอ่างดังรูปที่ 9.4 (a)

ความดันที่ช่องสุญญากาศเหนือปรอท มีค่าเป็นศูนย์หรือมีค่าน้อยมาก และความดันที่ผิวปรอทในอ่าง คือ ความดันของบรรยากาศ ซึ่งปรากฏว่า

$$h = 76 \text{ เซนติเมตร} = 760 \text{ มิลลิเมตร}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 P_a &= \rho gh \\
 &= (13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.760 \text{ m}) \\
 &= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}
 \end{aligned}$$

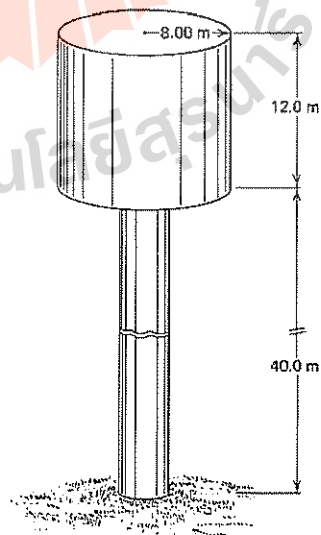


รูปที่ 9.4 (a) บารอมิเตอร์ปรอท (b) มาโนมิเตอร์

บารอมิเตอร์แบบปรอทนี้ ทอริริเชลลีประสบความสำเร็จในการวัดความดันของบรรยากาศ สำหรับการวัด ค่าความดันแก๊ส เราใช้เครื่องมือที่เรียกว่า มาโนมิเตอร์ (manometer) ซึ่งมีหลายแบบที่เห็นในรูปที่ 9.4 (b) ซึ่งเป็นมาโนมิเตอร์แบบปลายเปิด (open-tube manometer)  $P_i$  คือ ความดันที่ต้องการวัด ความดันที่วัดได้คือ ความดันแก๊ส โดยอ่านจากความสูง  $h$

ตัวอย่างที่ 9.1 ถังน้ำของหมู่บ้านจัดสรรแห่งหนึ่งเป็นรูปทรงกระบอกกลมรัศมี 8.0 เมตร ความสูง 12 เมตร ใส่น้ำเต็มถัง และตั้งสูงจากพื้นดิน 40 เมตร ดังรูปที่ 9.5

- (a) จงหาแรงทั้งหมดที่กั้นถัง
- (b) จงหาแรงทั้งหมดที่ด้านข้างถัง
- (c) จงหาความดันที่กั้นถัง
- (d) จงหาความดันที่ระดับพื้นดิน



รูปที่ 9.5 จากโจทย์ตัวอย่างที่ 9.1

วิธีทำ

(a) ข้อมูล :  $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3, h = 12.0 \text{ m}$   
 $r = 8.0 \text{ m}, A = \pi r^2 = \pi(8.0 \text{ m})^2$   
 $g = 9.80 \text{ m/s}^2, F = ?$

จากสมการ :  $F = mg = Ah\rho g$

แทนค่า :  $F = \pi(8.0 \text{ m})^2(12.0 \text{ m})(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)$   
 $= 2.36 \times 10^7 \text{ N}$  ตอบ (a)

(b) ข้อมูล :  $A = 2\pi rh$  (พื้นที่ด้านข้างของทรงกระบอก) b

จากสมการ :  $F = PA$

ในกรณีนี้ :  $F = [P_{\text{เฉลี่ย}}]A$  (ดูตัวอย่าง 9.2)

$$= \left[\frac{1}{2}\rho gh\right] \cdot 2\pi rh$$

$$F = \pi r\rho gh^2$$

แทนค่า  $= \pi(8.0 \text{ m})(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(12.0 \text{ m})^2$   
 $= 3.55 \times 10^7 \text{ N}$  ตอบ (b)

(c) ข้อมูล F (จากข้อ a)  $= 2.36 \times 10^7 \text{ N}$

$$A = \pi r^2, P = ?$$

จากสมการ :  $P = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$

แทนค่า :  $P = \frac{(2.36 \times 10^7 \text{ N})}{\pi(8.0 \text{ m})^2}$   
 $= 1.17 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

$$= 117 \text{ kPa}$$
 ตอบ (c)

(d) ข้อมูล :  $h = 12.0\text{m} + 40.0\text{m} = 52.0\text{m}$

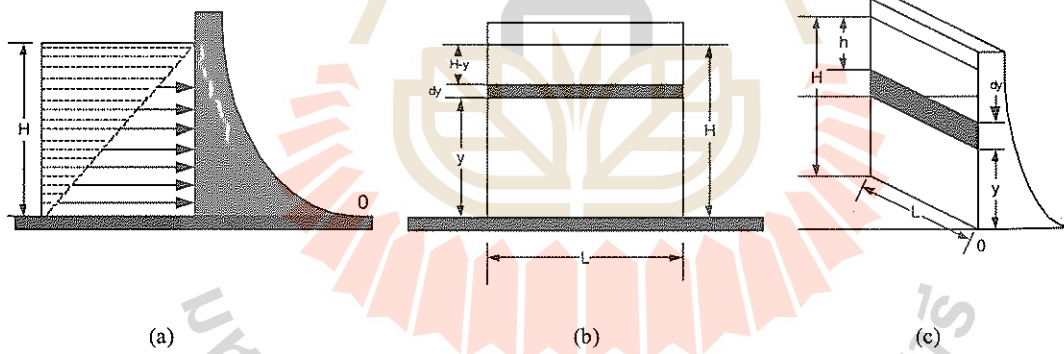
จากสมการ :  $P = \rho gh$

แทนค่า :  $P = (10^3\text{kg/m}^3)(9.8\text{m/s}^2)(52.0\text{m})$   
 $= 5.10 \times 10^5 \text{ N/m}$   
 $= 510 \text{ kPa}$

ตอบ (d)

ตัวอย่างที่ 9.2 เขื่อนกั้นน้ำยาว 100 เมตร กักน้ำที่มีระดับสูง  $H=30$  เมตร จากพื้นที่เขื่อนดังรูปที่ 9.6 จงหา

- (a) แรงลัพธ์ทั้งหมดที่น้ำกระทำที่เขื่อนเท่ากับเท่าไร
- (b) จงหาทอร์กทั้งหมด
- (c) แนวกระทำของแรงลัพธ์อยู่ที่ระดับของฐานเขื่อนเท่าไร



รูปที่ 9.6 ความดันของน้ำที่เขื่อน

วิธีทำ

ข้อมูล :  $H = 30 \text{ m}, L = 100 \text{ m}$

(a) จากสมการ :  $P = \frac{dF}{dA}$  ;  $P = \rho gh$  ;  $h = H - y$

นั่นคือ :  $dF = PdA$  ;  $dA = Ldy$

$$F = \int_0^H \rho g(H - y)Ldy$$

$$\begin{aligned}
&= \rho g L \left[ \int_0^H H dy - \int_0^H y dy \right] \\
&= \frac{1}{2} \rho g L H^2 \\
&= \left[ \rho g \frac{H}{2} \right] [LH]
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า แรงทั้งหมดที่ทำที่เขื่อนคือ ความดันเฉลี่ย  $P_{เฉลี่ย} = \rho g \frac{H}{2}$  คูณกับพื้นที่เขื่อน  $A = LH$  ที่รับน้ำ

แทนค่า  $F = \frac{1}{2}(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})(30 \text{ m})^2$   
 $= 4.4 \times 10^8 \text{ N}$  ตอบ (a)

(b) ข้อมูล :  $F = 4.4 \times 10^8 \text{ N}$

จากสมการ :  $d\tau = y dF$  (ให้แกนหมุนผ่านจุด 0)

และสมการ :  $dF$  (จากข้อ a)  $= \rho g(H-y)L dy$

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_0^H y \rho g(H-y)L dy \\
&= \rho g L \left[ \int_0^H H y dy - \int_0^H y^2 dy \right] \\
&= \rho g L \frac{H^3}{6} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \rho g H^2 \right] \frac{H}{3} = F \cdot \frac{H}{3}
\end{aligned}$$

แทนค่า  $\tau = (4.4 \times 10^8 \text{ N}) \left( \frac{30}{3} \text{ m} \right)$   
 $= 4.4 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}$

(c) จากสมการ :  $\tau = Fr$

เทียบฟอร์มกับสมการ

$$\tau = F \cdot \frac{H}{3}$$

จะเห็นว่า 
$$r = \frac{H}{3}$$

แทนค่า : 
$$r = \frac{30.0}{3} \text{ m} = 10.0 \text{ m}$$

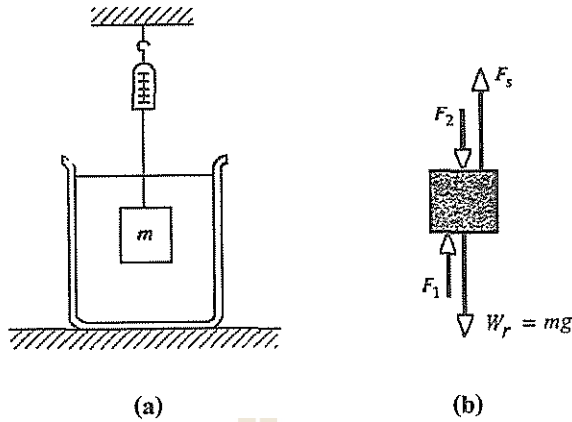
แสดงว่า แนวกระทำของแรงลัพธ์อยู่ที่เหนือระดับ 0 เท่ากับ  $\frac{1}{3}$  ของความลึกหรือ  $\frac{2}{3}$  ของความลึก  
วัดจากผิวน้ำ ตอบ (c)

## 2. หลักของอาร์คิมิดีส

พิจารณาวัตถุก้อนหนึ่งมีน้ำหนักในอากาศซึ่งจะเรียกว่า น้ำหนักจริง  $W_r$  ( $r = \text{real}$ ) เมื่อนำไปแขวนจากตาชั่งสปริงโดยให้วัตถุทั้งก้อนจมอยู่ในของไหลนั้น จะปรากฏว่าน้ำหนักของวัตถุที่อ่านจากตาชั่งมีค่าน้อยกว่า  $W_r$  จะเรียกน้ำหนักที่อ่านจากตาชั่งเมื่อวัตถุอยู่ในของไหลว่าน้ำหนักปรากฏ  $W_a$  ( $a = \text{apparent}$ ) การที่  $W_a$  น้อยกว่า  $W_r$  นั้น ก็เนื่องจากของไหลออกแรงลัพธ์ต่อวัตถุในทิศทางขึ้น เราจะเรียกแรงนี้ว่า แรงลอยตัว (buoyant force or buoyancy) แทนด้วย  $B$  ขนาดของแรงลอยตัวเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่ด้วยวัตถุซึ่งเรียกว่า หลักของอาร์คิมิดีส (Archimedes' principle) ซึ่งมีใจความว่า เมื่อวัตถุทั้งก้อนหรือเพียงบางส่วนจมในของไหล ของไหลจะออกแรงต่อวัตถุในทิศขึ้น ซึ่งแรงนี้จะมีขนาดเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่ แรงลอยตัวจะกระทำต่อวัตถุในทิศขึ้น

เพื่อทำความเข้าใจหลักของอาร์คิมิดีส พิจารณาแรงภายนอกทุกแรงที่กระทำกับวัตถุที่จมอยู่ในของไหลในรูปที่ 9.7(a) ซึ่งประกอบไปด้วย  $F_g$  แรงเนื่องจากสปริงตาชั่ง ซึ่งก็คือ น้ำหนักปรากฏ  $W_a$  นั่นเองกระทำในทิศขึ้น น้ำหนักจริง  $W_r$  กระทำในทิศทางลง  $F_b$  เป็นแรงของของไหลที่กระทำกับส่วนล่างของวัตถุมีทิศขึ้น และ  $F_2$  เป็นแรงที่ของไหลกระทำกับส่วนบนของวัตถุมีทิศลง ดังรูปที่ 9.7 (b) ในกรณีเช่นนี้สเกลของตาชั่งจะอ่านน้ำหนักน้อยกว่าน้ำหนักจริง (ถ้าไม่มีของไหลตาชั่งจะอ่านน้ำหนักจริง  $F_g = W_r$ ) นั่นคือ ขนาดของ  $F_b$  ที่ส่วนล่างต้องมากกว่า  $F_2$  ที่ส่วนบน ผลต่างของแรงคือแรงลอยตัวนั่นเอง

$$B = F_b - F_2 \tag{9.13}$$



รูปที่ 9.7 (a) ค่าซึ่งอ่านน้ำหนักของวัตถุเมื่ออยู่ในของไหลได้น้อยกว่าน้ำหนักจริง  
 (b) แผนภาพของแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุ

ถ้าเราจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง  $W_r$ ,  $W_a$  และ  $B$  จะเขียนได้ดังนี้

$$W_a = W_r - B \tag{9.14}$$

ค่าของแรงลอยตัว  $B$  อาจหาจากสมการ (9.13) โดยสมมติว่า วัตถุมีพื้นที่ด้านบนและด้านล่างเท่ากัน และเท่ากับ  $A$  วัตถุมีความหนา  $h$  ดังนั้น ปริมาตรของวัตถุคือ  $V$  และเท่ากับปริมาตรของของไหลที่ถูกแทนที่  $V_f [V = V_f]$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} B &= F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)A = \rho_f g h A \\ &= \rho_f V_f g = m_f g \end{aligned} \tag{9.15}$$

เมื่อ  $\rho_f$  และ  $m_f$  คือ ความหนาแน่นและมวลของของไหลที่ถูกแทนที่ตามลำดับ  $m_f g$  ก็คือน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่ ถ้าเราพิจารณาแรงลอยตัวของวัตถุในของไหล 2 กรณี คือ

2.1 วัตถุจมในของไหล ถ้าให้  $\rho_x$  และ  $V_x$  เป็นความหนาแน่นและปริมาตรของวัตถุตามลำดับ  $W_r = \rho_x V_x g$  ในกรณีนี้จะเห็นว่า  $V_x = V_f$  สมการ (9.14), (9.15) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} W_a &= (\rho_x - \rho_f) V_x g \\ B &= \rho_f V_x g \end{aligned} \tag{9.16}$$

(ในกรณีนี้  $\rho_x$  มีค่ามากกว่า  $\rho_f$ )

2.2 วัตถุลอยในของไหล ในกรณีนี้น้ำหนักปรากฏ  $W_r$  เท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 9.8 สมการ (9.14) จึงเขียนได้เป็น

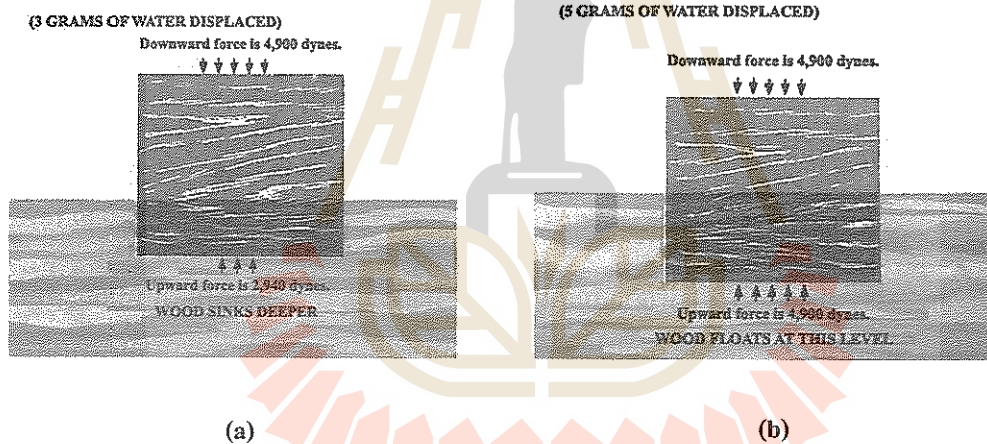
$$W_r = B \quad (9.17)$$

และในกรณีนี้ปริมาตรของวัตถุที่แทนที่ของไหลเป็นเพียงบางส่วนเท่านั้น คือเฉพาะ  $V_1$  ( $V_r = V_1$ ) ซึ่งปริมาตรของวัตถุทั้งหมด  $V_x = V_1 + V_2$  ดังนั้น สมการ (9.17) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\rho_x V_x g = \rho_f V_1 g$$

หรือ

$$\frac{\rho_x}{\rho_f} = \frac{V_1}{V_x}$$



รูปที่ 9.8 (a), (b) วัตถุลอยในของไหล

ตัวอย่างที่ 9.3 อะลูมิเนียมแผ่นหนึ่งมีมวล 1 กิโลกรัม ความหนาแน่น  $\rho_x = 2.7 \times 10^3$  กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร แขนงจากตาชั่งสปริง จงหาว่าตาชั่งสปริงจะอ่านค่าเท่าไร ถ้าหย่อนอะลูมิเนียมทั้งแผ่นลงในน้ำ

วิธีทำ

ข้อมูล :  $m_x = 1 \text{ kg}$  ,  $\rho_x = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$\rho_f = 10^3 \text{ kg/m}^3 , W_a = ?$$

จากสมการ :  $V_x = \frac{m_x}{\rho_x}$

$$W_a = W_r - B$$

นั่นคือ :

$$W_a = (\rho_x - \rho_f)V_x g$$

$$= (\rho_x - \rho_f) \frac{m_x}{\rho_x} g$$

$$W_a = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_x}\right) m_x g$$

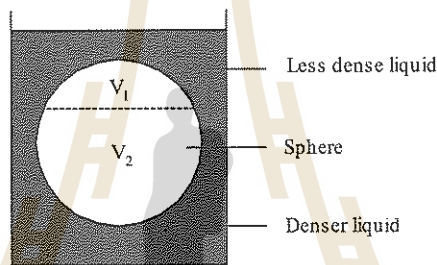
แทนค่า :

$$W_a = \left(1 - \frac{10^3 \text{ kg/m}^3}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}\right) 1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$= 6.2 \text{ N}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 9.4 ทรงกลมรัศมี 12 เซนติเมตร จมอยู่ในของเหลว 2 ชนิดคือ น้ำและน้ำมัน ดังรูปที่ 9.9 โดยจมอยู่ในน้ำ 80% ถ้าความหนาแน่นของน้ำมันเท่ากับ  $0.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  จงหาน้ำหนักของทรงกลม



รูปที่ 9.9 วัตถุทรงกลมจมน้ำในของเหลวสองชนิดที่มีความหนาแน่นต่างกัน

วิธีทำ ในกรณีเช่นนี้

$$B = W_r$$

ข้อมูล :

$$\rho_1 = 0.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_2 = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (0.12 \text{ m})^3$$

$$V_1 = 0.20 \text{ V}, V_2 = 0.80 \text{ V}$$

จากสมการ :  $W_r = B$

นั่นคือ :  $W_r = V_1\rho_1g + V_2\rho_2g$

$$= 0.20 V\rho_1g + 0.80 V\rho_2g$$

$$= [0.20\rho_1 + 0.80\rho_2]Vg$$

แทนค่า :  $W_r = [0.20 \times 0.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 + 0.80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3] \cdot \frac{4}{3} \pi (0.12 \text{ m})^3 (9.8 \text{ m/s}^2)$

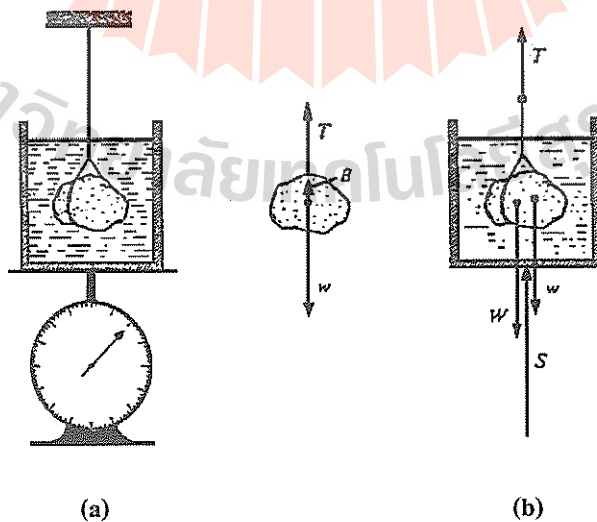
$$= 65.26 \text{ N} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 9.5 ถังหนัก 9.8 นิวตัน บรรจุน้ำมันหนัก 14.7 นิวตัน แรงดึงของเชือกในรูปที่ 9.10 (a) เท่ากับ 24.5 นิวตัน ตาชั่งอ่าน 73.5 นิวตัน ปริมาตรของวัตถุเท่ากับ  $2.7 \times 10^{-3}$  เมตร<sup>3</sup> จงหา

- (a) ความหนาแน่นของของไหลและแรงลอยตัว
- (b) น้ำหนักจริงในอากาศของวัตถุเท่ากับเท่าไร

ข้อมูล : กำหนดให้น้ำหนักของถังรวมกับน้ำหนักของของไหล =  $W = 9.8 \text{ N} + 14.7 \text{ N} = 24.5 \text{ N}$   
 แรงดึงในเส้นเชือก  $T = 24.5 \text{ N}$ , ตาชั่งอ่านน้ำหนัก  $S = 73.5 \text{ N}$ ,  $V_x = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ,  $w$  เป็นน้ำหนักจริงของวัตถุ ( $w = W_r = ?$ ),  $\rho_f = ?$

จากแผนภาพ รูปที่ 9.10 (b) พิจารณาแรงที่วัตถุ



รูปที่ 9.10 การหาน้ำหนักจริง น้ำหนักปรากฏ เมื่อวัตถุจมในของเหลว

$$T = w - B \tag{1}$$

พิจารณาทั้งระบบ

$$\sum F_{up} = \sum F_{down}$$

$$T + S = w + W \tag{2}$$

เอาสมการแรกมาลบออก จะได้

$$S = W + B \tag{3}$$

ความสัมพันธ์หาได้ดังนี้

จาก (3)

$$B = S - W$$

$$V_x \rho_f g = S - W = B ; V_f = V_x$$

$$\rho_f = \frac{B}{V_x g}$$

จากสมการ (1)

$$w = T + B$$

แทนค่า :

$$B = 73.5 \text{ N} - 24.5 \text{ N} = 49 \text{ N}$$

$$\rho_f = \frac{49 \text{ N}}{(2.7 \times 10^{-3} \text{ m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 1.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

ตอบ (a)

$$w = 24.5 \text{ N} + 49 \text{ N}$$

$$= 73.5 \text{ N}$$

ตอบ (b)

### 3. หลักของพาสคัล

จากความเป็นจริงที่เราได้กล่าวมาแล้วว่า ความดันในของไหลขึ้นอยู่กับความลึก ถ้าเพิ่มความดันที่ผิวของของไหล จะถูกส่งถ่ายผ่านเนื้อของของไหลไปยังทุกๆ จุด ในเนื้อของของไหลนั้น หลักนี้ค้นพบโดยนักวิทยาศาสตร์ชื่อ ปาสกาล เรียกว่า หลักของพาสคัล (Pascal's Principle) ซึ่งมีใจความว่า ถ้าให้ความดันแก่ส่วนหนึ่งส่วนใดของของไหลที่อยู่ในภาชนะปิดใดๆ ความดันจะถูกส่งผ่านไปยังทุกๆ ส่วนของของไหล และที่ผนังของภาชนะซึ่งบรรจุของไหลด้วยขนาดเท่ากันตลอด

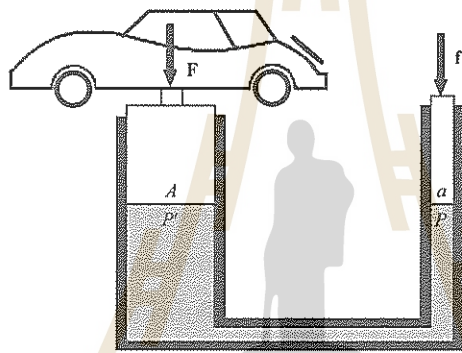
ตัวอย่างการประยุกต์หลักของพาสคัลคือ เครื่องอัดไฮดรอลิก ดังรูปที่ 9.11 เมื่อออกแรง  $f$  ที่ลูกสูบอันเล็กพื้นที่หน้าตัด  $a$  จะเกิดความดัน  $P = \frac{f}{a}$  ส่งผ่านไปตลอดทุกส่วนในของไหลซึ่งมีต่อไปยังลูกสูบใหญ่พื้นที่หน้าตัด  $A$  ที่ลูกสูบใหญ่ จึงมีความดันเท่ากับ  $P$  เช่นกัน และเกิดแรง  $F = PA$  ดังสมการ

สถิตศาสตร์ของของไหล

$$P = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

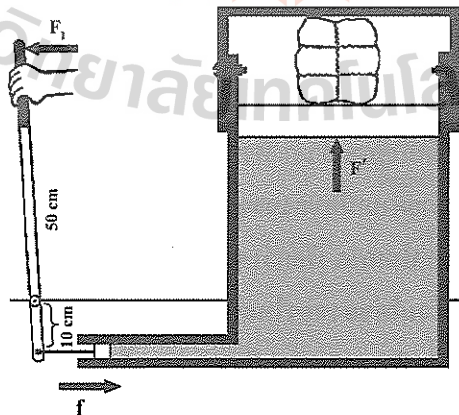
หรือ  $F = \frac{A}{a} \cdot f$  (9.18)

จะเห็นว่า เราทำให้  $F$  ใหญ่มากเท่าใดก็ได้ที่ปลอดภัยและสะดวก แต่ถ้าลูกสูบใหญ่มากๆ ต้องใช้ของไหลมากและเสียเวลามาก



รูปที่ 9.11 แผนภาพของไฮดรอลิก

ตัวอย่างที่ 9.6 เครื่องอัดดังรูปที่ 9.12 ลูกสูบเล็กรัศมี 1.25 เซนติเมตร ลูกสูบใหญ่รัศมี 20 เซนติเมตร คนงานออกแรงกดที่คานห่างจากจุดหมุน 50 เซนติเมตร ด้วยแรง 100 นิวตัน จงหาแรงอัดที่ฟ่อนกระดาษหนึ่งส้อมพิมพ์ (สมมติว่าประสิทธิภาพ 100%)



รูปที่ 9.12 เครื่องอัดไฮดรอลิก

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$F_1 = 100 \text{ N}$$

$$r_1 = 0.50 \text{ m}, \quad r = 1.25 \text{ cm}$$

$$r_2 = 0.10 \text{ m}, \quad R = 20 \text{ cm}$$

$$f = ?$$

$$a = \pi r^2 = \pi(1.25 \text{ cm})^2$$

$$A = \pi R^2 = \pi(20 \text{ cm})^2$$

$$F = ?$$

จากสมการและ โจทย์ที่กำหนดให้ : คานมีประสิทธิภาพ 100%

$$fr_2 = F_1 r_1$$

$$F = \frac{A}{a} f$$

ได้ความสัมพันธ์ดังนี้ :

$$f = F_1 r_1 / r_2$$

$$= \frac{(100 \text{ N})(0.50 \text{ m})}{(0.10 \text{ m})}$$

$$= 500 \text{ N}$$

$$F = \frac{\pi(20 \text{ cm})^2}{\pi(1.25 \text{ cm})^2} (500 \text{ N})$$

$$= 1.25 \times 10^5 \text{ N}$$

จะเห็นว่าคนงานออกแรง 100 N (ภาษาพูดคือ 10 กิโลกรัม) ทำให้เกิดแรงกดที่ฟ่อนกระดาษ หนังสือพิมพ์ประมาณ  $13 \times 10^4 \text{ N}$  (ภาษาพูดคือ 13 ตัน)

## สรุป

1. ความหนาแน่นของสารเอกพันธ์มีนิยามว่า คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร มีหน่วยในระบบเอสไอเป็นกิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ความดัน  $P$  ในของไหลคือ แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$P = \frac{F}{A}$$

ในระบบเอสไอความดันมีหน่วยเป็น นิวตัน / เมตร<sup>2</sup>

เมื่อ  $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ pascal (Pa)}$

ความดันในของไหลแปรผันตามความลึก  $h$  คือ

$$P = P_a + \rho gh$$

เมื่อ  $P_a$  คือ ความดันบรรยากาศ ( $\approx 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ) และ  $\rho$  เป็นความหนาแน่น

เมื่อวัตถุจมอยู่ในน้ำบางส่วนหรือจมน้ำทั้งหมดในของไหล ของไหลจะออกแรงดันวัตถุในทิศขึ้น ซึ่งเรียกว่า แรงลอยตัว ( $B$ ) ตามหลักของอาร์คิมิดีส

$$B = \rho gV$$

เมื่อ  $V$  คือ ปริมาตรของของไหลที่ถูกแทนที่

หลักของพาสคัลมีใจความว่า ถ้าให้ความดันแก่ส่วนหนึ่งส่วนใดของของไหลที่อยู่ในภาวะปิดใดๆ ความดันจะถูกส่งผ่านไปทั่วทุกๆ ส่วนของของไหล และที่ผนังของภาชนะซึ่งบรรจุของไหลนั้นด้วยขนาดเท่ากันตลอด

## ตอนที่ 9.2

### แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด

แรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล 2 ชนิด คือแรงเชื่อมแน่น และแรงยึดติด ทำให้เกิดปรากฏการณ์ธรรมชาติหลายอย่าง เช่น ปรากฏการณ์ที่เกี่ยวข้องกับแรงตึงผิว สภาพกะปิลลา เป็นต้น หลังจากศึกษาจบตอนนี้ นักศึกษาจะเข้าใจว่า ทำไมแร่ธาตุในดินจึงขึ้นตามท่อน้ำในพืชไปเลี้ยงดอกใบได้ เหตุใด หยกน้ำ หยดปรอทจึงมีลักษณะกลม เหตุใดหยดปรอท จึงกลิ้งบนฝ่ามือ หรือหยกน้ำจึงกลิ้งบนใบบัวได้

#### 1. แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด

สสารในสถานะของเหลวนั้น โมเลกุลอยู่ใกล้ชิดติดกัน แต่ยังมีอิสระที่จะสลับกันได้ โมเลกุลถูกยึดด้วยแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล ซึ่งสามารถแยกแรงออกเป็น 2 ชนิด คือ

##### 1.1 แรงเชื่อมแน่น

แรงเชื่อมแน่น (cohesion or cohesive force) คือ แรงดึงดูดของโมเลกุลของสารชนิดเดียวกัน เช่น โมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของน้ำ โมเลกุลของปรอทกับโมเลกุลของปรอท โมเลกุลของแก้วกับโมเลกุลของแก้ว เป็นต้น

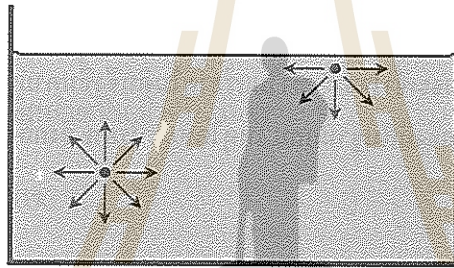
##### 1.2 แรงยึดติด

แรงยึดติด (adhesion or adhesive force) คือ แรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของสารต่างชนิดกัน เช่น โมเลกุลของแก้วกับโมเลกุลของไม้ โมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของแก้ว เป็นต้น

ถ้าน้ำหนักของแข็งไปสัมผัสกับของเหลว ของเหลวจะเกาะติดของแข็งหรือทำให้ของแข็งเปียก ถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น เช่น หยดน้ำเปียกหนังสือพิมพ์ หยดน้ำเปียกแก้ว น้ำสบู่เปียกเสื้อผ้า แต่ของเหลวจะไม่เกาะของแข็งหรือทำให้ของแข็งเปียก ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด เช่น หยดปรอทบนกระดาษหนังสือพิมพ์ไม่ทำให้หนังสือพิมพ์เปียก เป็นต้น

## 2. ความตึงผิว

ในตอนที 9.1 เราทราบว่า วัตถุที่มีความหนาแน่นมากกว่าของไหลจะจมในของไหล แต่เราอาจจะเคยเห็นเข็มเย็บผ้าเข็มให้แห้ง หรือใบมีดโกนเข็มให้แห้ง ค่อยๆ จับวางบนผิวน้ำอย่างบรรจง จะสามารถลอยนิ่งอยู่บนผิวน้ำได้ แม้ว่าเข็มหรือใบมีดโกนจะมีความหนาแน่นมากกว่าน้ำถึง 10 เท่า หรือแมลงบางชนิดสามารถเดินบนน้ำได้ ปรากฏการณ์เหล่านี้เป็นผลเนื่องมาจากความตึงผิว ซึ่งเป็นผลของแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของของเหลว ช่วยยึดให้โมเลกุลอยู่ใกล้กัน



รูปที่ 9.13 แรงที่กระทำกับโมเลกุลภายในและที่ผิวของของไหล

พิจารณา โมเลกุลของของเหลว (ดังรูปที่ 9.13) ล่างซ้าย ในภาชนะจะเห็นว่าโมเลกุลนี้ถูกล้อมรอบด้วยโมเลกุลชนิดเดียวกัน เกิดแรงเชื่อมแน่นกับ โมเลกุลรอบข้างทุกทิศทุกทางเท่ากันหมด แรงลัพธ์จึงเท่ากับศูนย์ ส่วนโมเลกุลที่อยู่ทางบนขวาอยู่ติดผิวของของเหลว ซึ่งอยู่ระหว่างตัวกลางสองชนิดคืออากาศกับของเหลว จึงมีแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลของของเหลวด้วยกัน และแรงยึดติดระหว่างโมเลกุลนี้กับ โมเลกุลของอากาศ ในกรณีนี้แรงยึดติดจะมีค่าน้อยกว่าแรงเชื่อมแน่น เนื่องจากโมเลกุลของอากาศมีจำนวนน้อยกว่าโมเลกุลของของเหลวที่อยู่ใกล้กัน ทำให้เกิดแรงลัพธ์ในทิศทางลงสู่ของเหลวทุกโมเลกุลที่อยู่ที่ผิวหรือใกล้ผิวของของเหลวก็อยู่ในสภาพนี้ ผลก็คือทำให้เกิดความเค้นบนผิวของของเหลว เรียกว่า ความตึงผิว (surface tension) ซึ่งแทนด้วย  $\gamma$  (อ่านว่า gamma)

ความตึงผิว หมายถึง อัตราส่วนของแรงที่กระทำไปตามผิวของของเหลวต่อความยาวของผิวที่ถูกแรงกระทำ ความยาวนี้ต้องตั้งฉากกับแรงด้วย เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\gamma = \frac{F}{L} \quad (9.19)$$

หน่วยของความตึงผิวคือ นิวตัน/เมตร

ค่าความตึงผิวของของเหลวบางชนิดที่อุณหภูมิต่างๆ แสดงไว้ในตารางที่ 9.2

สาเหตุที่หยดของของเหลวมีสัมฐานกลม เนื่องจากแรงที่กระทำกับอนุภาคที่ผิวของของไหล จะพยายามทำให้พื้นที่ผิวมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะน้อยได้ รูปร่างหรือสัมฐานของของไหลที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุดคือทรงกลม นั่นเป็นเหตุผลที่หยดปรอทบนผิวเรียบมัน จะมีความเป็นทรงกลมมากกว่าหยดน้ำ หรือหยดน้ำมัน (ดูตารางที่ 9.2 ประกอบ)

ตารางที่ 9.2 ค่าที่ได้จากการทดลองของความตึงผิว

ของเหลวเมื่อสัมผัสกับอากาศ	อุณหภูมิองศาเซลเซียส	ความตึงผิว $10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$
กลีเซอริน	20	63.1
คาร์บอนเตตระคลอไรด์	20	26.8
น้ำ	0	75.6
น้ำ	20	72.8
น้ำ	60	66.2
น้ำ	100	58.9
น้ำสบู่	20	25.0
เบนซิน	20	28.9
ปรอท	20	465.0
เอทิลแอลกอฮอล์	20	22.3



รูปที่ 9.14 ผลของความตึงผิวเมื่อหยดน้ำมันลงบนผิวของน้ำมัน

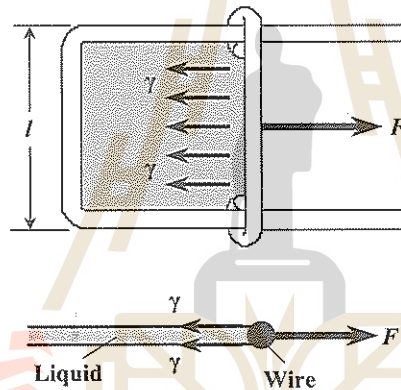
ตัวอย่างที่ 9.7 ถ้าต้องออกแรง  $F = 4.1 \times 10^{-3}$  นิวตัน ในการเคลื่อนลวดซึ่งยาว  $\ell = 6$  เซนติเมตร ตามรางรูปเกือกม้า ดังรูปที่ 9.15 จงหาความตึงผิวของของเหลว

วิธีทำ

ข้อมูล :  $F = 4.1 \times 10^{-3}$  N

พิจารณาผิวของของเหลวทั้งสองด้านที่กระทำกับลวด (รูปที่ 9.15) จะเห็นว่า

ความยาวทั้งหมด  $L = 2\ell = 2 \times 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$



รูปที่ 9.15 รางรูปเกือกม้า (รูปตัวยู) สำหรับวัดความตึงผิวของฟิล์มบาง

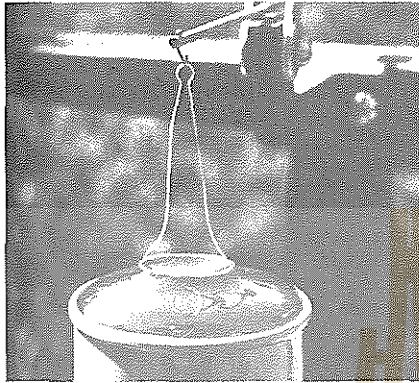
จากสมการ :

$$\gamma = \frac{F}{L}$$

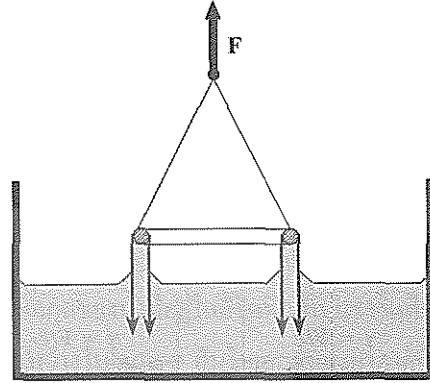
$$\gamma = \frac{4.1 \times 10^{-3} \text{ N}}{0.12 \text{ m}}$$

$$= 3.4 \times 10^{-2} \text{ N/m}$$

ตัวอย่างที่ 9.8 ในการหาค่าความตึงผิวของน้ำมันดิบ โดยใช้ก้ำไลวงแหวนบางผูกห้อยเป็นสามแหรงค รูปที่ 9.16 (a) วงแหวนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 75 มิลลิเมตร มีมวล  $1 \times 10^{-3}$  กิโลกรัม เมื่อดึงวงแหวน ขึ้นจากน้ำมัน ปรากฏว่าต้องใช้แรง  $18.43 \times 10^{-3}$  นิวตัน คึงให้ของวงแหวนหลุดจากน้ำมันได้พอดี จงหาความตึงผิว



(a)



(b)

รูปที่ 9.16 การหาค่าประสิทธิ์ของความตึงผิวโดยวิธีวัดแรงที่ดึงวงแหวนขึ้นจากน้ำมัน

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$F = 18.43 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$W = (1 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 9.8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F' = F - W = 8.63 \times 10^{-3} \text{ N}$$

พิจารณาจากรูปที่ 9.16 (b) จะเห็นว่า ผิวของน้ำมันกระทำกับขอบทั้งสองด้านของวงแหวน นั่นคือ ความยาวทั้งหมดจะเท่ากับสองเท่าของเส้นรอบวง (ค่าประมาณ เพราะวงแหวนบางมาก)

หรือ

$$L = 2(2\pi r)$$

เมื่อ  $2r$  คือ เส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 75 มิลลิเมตร

ดังนั้น

$$\begin{aligned} L &= 2\pi(0.075 \text{ m}) \\ &= 0.15\pi \text{ m} \end{aligned}$$

จากสมการ :

$$\gamma = \frac{F'}{L}$$

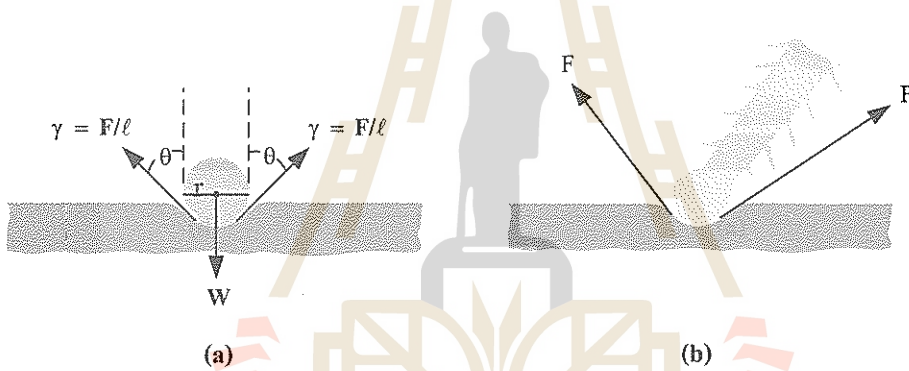
ในที่นี้ แรงคือ  $F'$  และ

$$\gamma = \frac{F'}{L}$$

แทนค่า :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{8.63 \times 10^{-3} \text{ N}}{0.15\pi \text{ m}} \\ &= 18.3 \times 10^{-3} \text{ N/m} \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 9.9** แมลงตัวหนึ่ง (แมลงมี 6 ขา) มีมวล  $3.0 \times 10^{-6}$  กิโลกรัม บินลงไปเหยียบบนผิวน้ำ สมมติว่าเท้าของแมลงมีลักษณะกลม รัศมี  $2.0 \times 10^{-5}$  เมตร และแต่ละขาจับน้ำหนักร่วมกัน จงหาค่ามุม  $\theta$  ที่เส้นสัมผัสกับผิวของทรงกลมทำกับเส้นสัมผัสกับผิวน้ำส่วนที่เว้าลงไปเป็นครึ่งทรงกลม และกำหนดให้อุณหภูมิของน้ำเท่ากับ  $20^\circ\text{C}$



รูปที่ 9.17 a) แรงตึงผิวที่กระทำต่อทรงกลม

b) แรงตึงผิวที่กระทำต่อขาของแมลง

วิธีทำ

ข้อมูล :  $m = 3.0 \times 10^{-6} \text{ kg}$ ,  $r = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\gamma = 72.8 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$

จากสมการ :  $\gamma = F/L$

จากรูปแมลงอยู่บนผิวน้ำได้  $\sum F_y = 0$

หรือ  $2F \cos \theta = \frac{1}{6}(mg)$

$$F = \gamma L = \gamma \pi r$$

ดังนั้น  $\cos \theta = \frac{mg}{6 \times 2\gamma \pi r}$

แทนค่าในหน่วย SI

$$\cos \theta = \frac{(3 \times 10^{-6})(9.8)}{6 \times 2 \times (72.8 \times 10^{-3})(3.14)(2.0 \times 10^{-5})}$$

= 0.54

$\theta = 57^\circ$

ถ้าค่าที่ได้จากการคำนวณปรากฏว่า

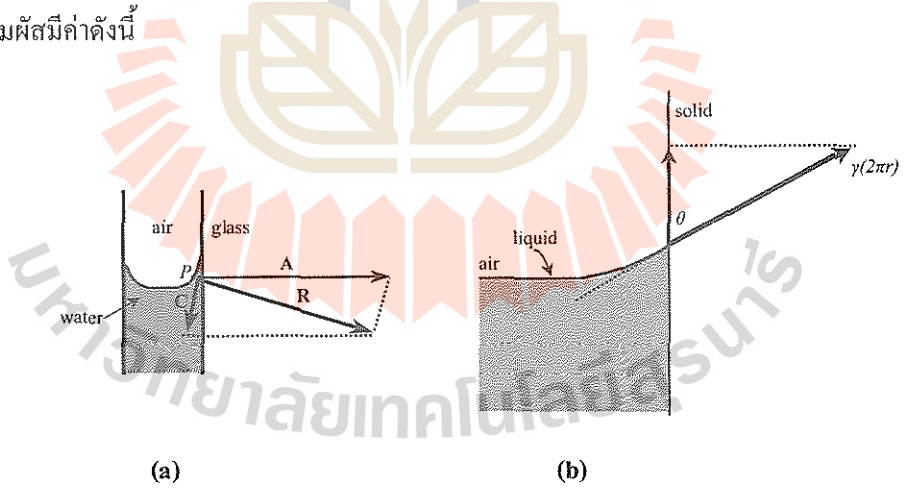
ค่า  $\cos\theta$  มีค่ามากกว่า 1 ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะว่า  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  นั่นแสดงว่าความตึงผิวของน้ำมีค่าไม่มากพอที่จะรับน้ำหนักของแมลงได้

### 3. มุมสัมผัส

ในหัวข้อ 2 รูปที่ 9.13 เราพิจารณาโมเลกุลภายในของของเหลวและโมเลกุลที่ผิว โดยทั่วไป ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาโมเลกุลที่ผิวติดกับของอากาศ (ของแข็ง) จากรูปที่ 9.18 (a) โมเลกุลของน้ำที่จุด P ถูกกระทำด้วยแรง คือ แรงเชื่อมแน่น C จาก โมเลกุลของน้ำที่อยู่ใกล้ติดกัน แรงยึดติด A ระหว่างโมเลกุล P กับโมเลกุลของแก้ว และแรงยึดติดระหว่าง โมเลกุล P กับ โมเลกุลของอากาศซึ่งมีค่าน้อยไป จึงไม่นำมาคิด แรงยึดติดระหว่างโมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของเหลวมีค่ามากกว่าแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของน้ำมากนั้นเป็นเหตุผลที่ว่า ทำไมแก้วเปียกน้ำ ดังนั้น R เป็นแรงลัพธ์ น้ำหรือของเหลวจะต้องจัดตัวจนกว่าผิวของมันจะตั้งได้ฉากกับแรงลัพธ์ เพราะว่าถ้ามีแรงขนานกับผิวของของเหลว ของเหลวนั้นก็ไหล (นั่นเป็นเหตุผลที่ว่า ทำไมผิวน้ำในทะเลสาบ ทะเล มหาสมุทร จึงอยู่ในแนวราบ ซึ่งตั้งได้ฉากกับแรงโน้มถ่วง) ดังนั้น น้ำที่ใกล้ขอบแก้วจะเพิ่มระดับจนกระทั่งผิวของมันตั้งได้ฉากกับแรง R ดังรูปที่ 9.18 (a) มุมที่เกิดจากเส้นสัมผัสกับผิวของของไหลที่ขอบติดกับของแข็ง ตัดกับเส้นสัมผัสกับขอบของของแข็ง เรียกว่า มุมสัมผัส (contact angle) แทนด้วย  $\theta$

จากรูปที่ 9.18 (b) จะเห็นว่า ของเหลวกับของแข็งคู่ใด ถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น มุมสัมผัสมีค่านี้อย่างนี้



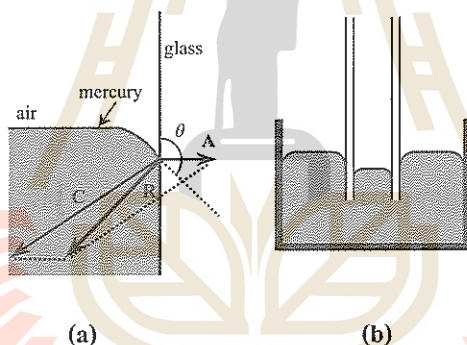
รูปที่ 9.18 (a) แสดงแรงลัพธ์  $R$  ในกรณีที่แรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น  
 (b) แสดงมุมสัมผัสมีค่าน้อยกว่า  $90^\circ$

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (9.20)$$

ในทำนองตรงกันข้าม พิจารณาปรอทกับแก้ว ดังรูปที่ 9.19 ซึ่งกรณีนี้แรงเชื่อมแน่น C มีค่ามากกว่าแรงยึดติด A มาก แรงลัพธ์ R มีทิศดังรูป ผิวของปรอทที่ขอบติดกับแก้วจะต้องโค้งลง เพื่อให้ตั้งได้ฉากกับแรงลัพธ์ R ในกรณีนี้จะเห็นว่ามุมสัมผัส  $\theta$  มากกว่า  $90^\circ$  นั่นคือของเหลวและของแข็งคูใด ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad (9.21)$$

ในกรณีที่  $\theta = 90$  องศา แสดงว่าแรงยึดติดประมาณเท่ากับแรงเชื่อมแน่น อย่างเช่น น้ำกับเงิน เป็นต้น

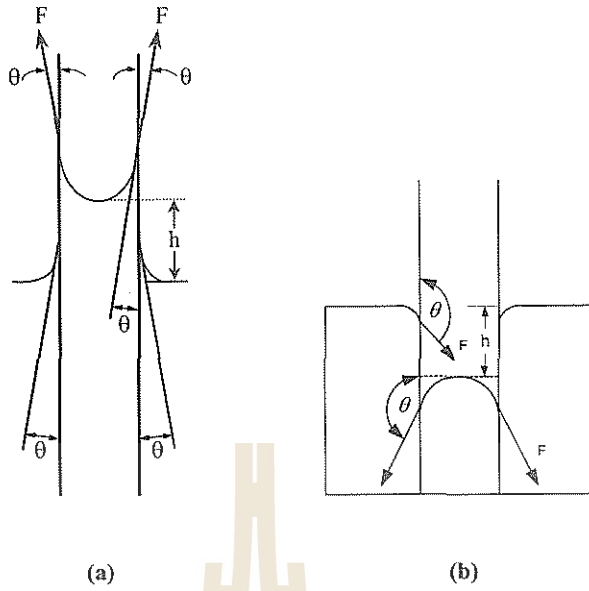


รูปที่ 9.19 (a) แสดงแรงลัพธ์กรณีที่แรงเชื่อมแน่นมากกว่าแรงยึดติด  
(b) แสดงระดับของของไหลจาก (a)

#### 4. สภาพกะปิลลา

ถ้าจุ่มหลอดแก้วรูเล็กมาก (cappillary tube) ลงในของเหลวในแนวตั้ง ผลเนื่องจากความตึงผิวของของเหลวจะเกิดปรากฏการณ์อย่างหนึ่งอย่างใดใน 2 อย่างนี้ คือ

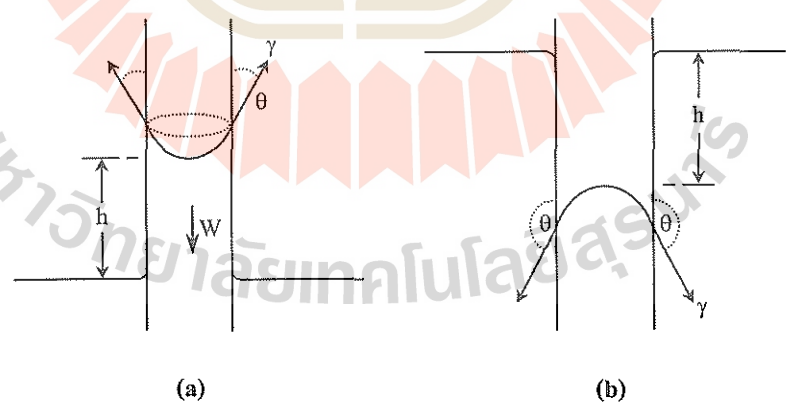
1. ระดับของของเหลวในหลอดแก้วรูเล็กจะสูงกว่าระดับของของเหลวในอ่าง เช่น น้ำ กับหลอดแก้ว รูปที่ 9.20 (a)
2. ระดับของของเหลวในหลอดแก้วรูเล็กจะต่ำกว่าระดับของของเหลวในอ่าง เช่น ปรอท กับหลอดแก้ว รูปที่ 9.20 (b) สภาพเช่นนี้เรียกว่า สภาพกะปิลลา (cappilarity)



รูปที่ 9.20 (a) สภาพเคเบิลเมื่อระดับของขงไหลในหลอดสูงกว่าระดับของขงไหลในอ่าง  
 (b) สภาพเคเบิลเมื่อระดับของขงไหลในหลอดต่ำกว่าระดับของขงไหลในอ่าง

จากหัวข้อ 1, 2 และ 3 เราอาจสรุปได้ว่า สำหรับของแข็งของเหลวใดๆ  
 ถ้าแรงยึดติดมีค่ามากกว่าแรงเชื่อมแน่น มุมสัมผัสมีค่า  $0 < \theta < 90^\circ$  ระดับของขงไหลใน  
 หลอดจะเปิดจะสูงกว่าระดับของขงไหลในอ่าง  
 ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด มุมสัมผัสมีค่า  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  ระดับของขงไหลใน  
 หลอดจะเปิดจะต่ำกว่าระดับของขงไหลในอ่าง

ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง h (หรือความลึก) ของขงไหลในหลอดเปิด และมุมสัมผัส  
 อาจหาได้ดังนี้



รูปที่ 9.21 ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง h และมุมสัมผัส  $\theta$

(a) เมื่อ  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$       (b) เมื่อ  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

จากรูปที่ 9.21 (a)

$$\gamma = \frac{F}{L} ; \gamma \text{ มีทิศดังรูป}$$

ดังนั้น

$$F = L\gamma = 2\pi r\gamma$$

แรงดึงขึ้น

$$F_{\text{up}} = F \cos \theta$$

$$= 2\pi r\gamma \cos \theta$$

แรงดึงลง คือน้ำหนัก  $W$  ของของเหลวในหลอด มีค่า

$$W = mg = V\rho g$$

$$= \pi r^2 h \rho g$$

ในภาวะสมดุล

$$F_{\text{up}} = F_{\text{down}}$$

$$2\pi r\gamma \cos \theta = \pi r^2 h \rho g$$

หรือ

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

(9.22)

จากสมการ (9.22) จะเห็นว่า

ถ้า  $0 < \theta < 90^\circ$  แล้ว  $\cos \theta > 0$ ,  $h$  มีค่าเป็นบวก ดังรูปที่ 9.21 (a)

ถ้า  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  แล้ว  $\cos \theta < 0$ ,  $h$  มีค่าเป็นลบ ดังรูปที่ 9.21 (b)

**ตัวอย่างที่ 9.10** ถ้าความหนาแน่นของน้ำมันพาราฟินมีค่าเท่ากับ 850 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup> และมุมสัมผัสกับแก้ว 26 องศา เมื่อน้ำมันพาราฟินขึ้นไปในหลอดแก้วระดับสูง  $11.4 \times 10^{-3}$  เมตร รัศมีภายในหลอด  $5 \times 10^{-4}$  เมตร ให้หาสัมประสิทธิ์ของความตึงผิวของน้ำมันพาราฟิน

**วิธีทำ**

ข้อมูล :  $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$      $\theta = 26^\circ$ ,  $h = 11.4 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $r = 5 \times 10^{-4} \text{ m}$

สมการพื้นฐาน :  $y = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$

สมการทำการ :  $\gamma = \frac{\rho g r y}{2 \cos \theta}$

แทนค่า :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{850 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-4} \times 11.4 \times 10^{-3}}{2 \cos 26^\circ} \\ &= \frac{850 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-4} \times 11.4 \times 10^{-3}}{2 \times 0.899} \\ &= 26.41 \times 10^3 \text{ N/m}\end{aligned}$$

## สรุป

แรงเชื่อมแน่น เป็นแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของสารชนิดเดียวกัน ส่วนแรงยึดติด เป็นแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของสารต่างชนิดกัน

เมื่อจุ่มหลอดแก้วรูเล็กเปิดปลายสองข้างลงในของไหล ระดับของไหลในหลอดแก้วจะสูงกว่าระดับของไหลในอ่าง มุมสัมผัสมีค่าน้อยกว่า 90 องศา ถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น และระดับของไหลในหลอดแก้วจะต่ำกว่าระดับของไหลในอ่าง มุมสัมผัสมีค่ามากกว่า 90 องศา ถ้าแรงยึดติดน้อยกว่าแรงเชื่อมแน่น เราเรียกสภาวะนี้ว่า **สภาพกะปิลลา**

ความตึงผิว หมายถึง อัตราส่วนของแรงกระทำไปตามผิวต่อความยาวของผิวที่ถูกแรงกระทำ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

## บรรณานุกรม

---

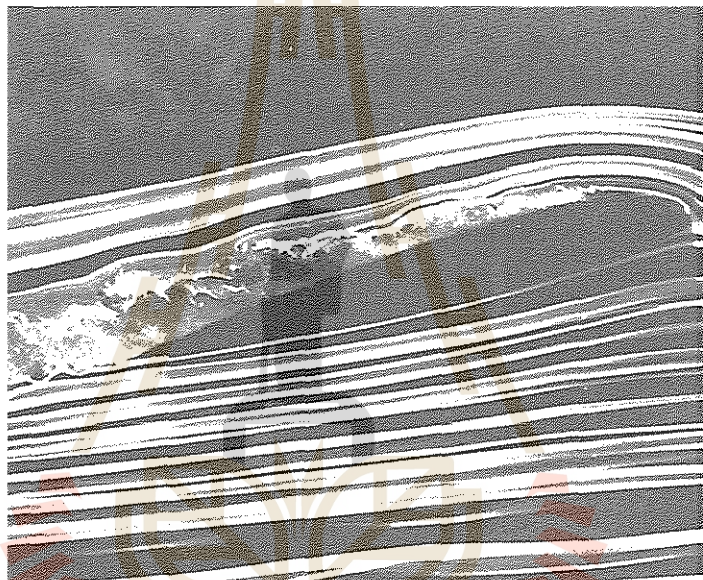
- ประสพ สืบคำ. 2535. ฟิสิกส์พื้นฐานชั้นมหาวิทยาลัย 1. กรุงเทพฯ: ประชาชน.
- Benson, Harris. 1991. **University physics**. New York: John Wiley & Sons.
- Blatt, F. J. 1983. **Principles of physics**. Boston: Allyn and Bacon.
- Bueche, Frederick J. 1986. **Introduction to physics for scientists and engineers** (4<sup>th</sup> ed.). Singapore: McGraw-Hill.
- Giancoli, Douglas C. 1999. **Physics: principles and applications** (5<sup>th</sup> ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 2000. **Fundamentals of physics** (6<sup>th</sup> ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Miller, Franklin Jr., and Schroer, Dietrich. 1987. **College physics** (6<sup>th</sup> ed.). New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Sears, Francis W., Zemansky, Mark W., and Young, Hugh D. 1987. **University physics** (7<sup>th</sup> ed.). Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing.
- Serway, R., and Beichner, R. 2000. **Physics for scientists and engineers** (5<sup>th</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Shortley, George., and Williams, Dudley. 1967. **Principles of college physics** (2<sup>nd</sup> ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Smith, Alpheus W., and Cooper, John N. 1979. **Elements of physics**. New York: McGraw-Hill.
- Tipler, Paul A. 1998. **Physics for scientists and engineers**. New York: Worth Publishers.
- Weidner, Richard T., and Sells, Robert L. 1973. **Elementary classical physics** (2<sup>nd</sup> ed.). Boston: Allyn and Bacon.

หน่วยที่

10

---

## พลศาสตร์ของของไหล



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

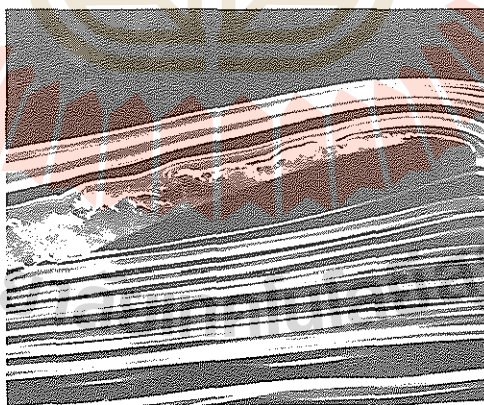
โดย รองศาสตราจารย์ ดร. ประสาท สืบคำ

## สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี

พลศาสตร์ของของไหลเป็นวิชาที่นับว่าเป็นวิชาหนึ่งในสาขากลศาสตร์ ซึ่งการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุผ่านของไหล หรือการเคลื่อนที่ของของไหลผ่านวัตถุ แรงที่เกี่ยวข้องจะขึ้นอยู่กับเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างวัตถุกับของไหล แรงบนปีกเครื่องบินที่อยู่นิ่งในอุโมงค์ลมจะเหมือนกับแรงบนปีกเครื่องบินลำเดียวกันที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศที่อยู่นิ่ง ถ้ากำหนดว่า ความเร็วสัมพัทธ์และส่วนประกอบของอากาศ ความดัน อุณหภูมิเท่ากันทั้งสองกรณี

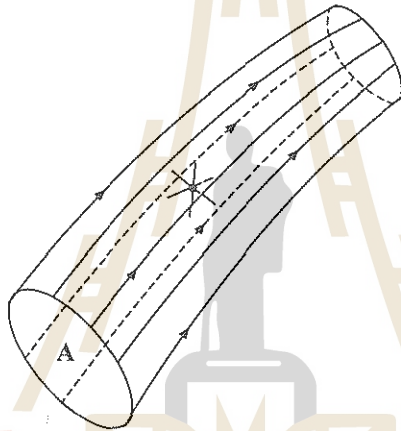
ในบทนี้จะศึกษากฎเกณฑ์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล โดยพิจารณาจากของไหลแบบที่เป็นของไหลอุดมคติ (ideal fluid) ซึ่งจะถือว่าของไหลอุดมคติมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ของไหลที่ไม่มีแรงเสียดทานภายในระหว่างชั้นของของไหล หรือไม่มีความหนืด (nonviscous) มอดูลัสเกือบเท่ากับศูนย์
2. ของไหลแบบที่อัดไม่ได้ (incompressible) หมายความว่า ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงตัว
3. การไหลของของไหลเป็นการไหลแบบคงตัว (steady flow) การไหลแบบคงตัวหมายถึง ความเร็ว ความหนาแน่น และความดันที่จุดหนึ่งจุดใดในของไหลไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา
4. การไหลต้องเป็นการไหลแบบไม่หมุน (irrotational flow) หมายความว่า ที่ตำแหน่งใดๆ จะต้องมีค่าความเร็วเชิงมุมของของไหล การไหลที่มีการหมุนจะเกิดสภาพปั่นป่วน (turbulence) ดังรูปที่ 10.1



รูปที่ 10.1 สายกระแสและการไหลแบบปั่นป่วนรอบปีกเครื่องบิน

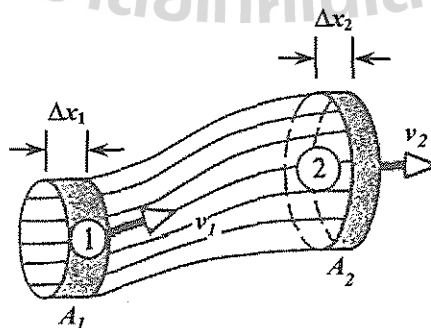
สายกระแส (stream line) คือ เส้นโค้งซึ่งเส้นสัมผัส ณ จุดใดๆ ของเส้นโค้งนี้จะอยู่ในทิศของความเร็วของของไหล ณ จุดนั้น ถ้าเป็นการไหลอย่างมีระเบียบ เส้นกระแสซ้อนกันกับเส้นทางการไหล ถ้าเราเขียนสายกระแสหลายๆ เส้นผ่านเส้นรอบรูปอันหนึ่ง ดังรูปที่ 10.2 ซึ่งเราเรียกว่า หลอดแห่งการไหล (tube of flow) ในรูปจะเห็นกึ่งหน้าเล็กๆ ซึ่งจะอยู่นิ่ง ถ้าการไหลเป็นแบบไม่หมุนตามข้อ 4 ตามนิยามของสายกระแสของไหลไม่อาจไหลขวางหลอดแห่งการไหลได้ ในกรณีการไหลอย่างมีระเบียบจะไม่มีการผสมกันระหว่างของไหลในหลอดแห่งการไหลที่อยู่คนละหลอด



รูปที่ 10.2 หลอดแห่งการไหล

### 1. สมการแห่งการต่อเนื่อง

พิจารณาหลอดแห่งการไหล ดังรูปที่ 10.3 ซึ่งเป็นการไหลแบบสถานะคงตัว (steady state flow) ทุกๆ อนุภาคในของไหลที่อยู่ตรงสายกระแสใด จะต้องไหลตามสายกระแสนั้น



รูปที่ 10.3 หลอดแห่งการไหลที่มีการไหลแบบสถานะคงตัว

สมมติว่า เมื่อเวลาผ่านไป  $\Delta t$  ของไหลที่ปลายล่างเคลื่อนที่ได้ระยะทาง  $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$  ให้  $A_1$  เป็นพื้นที่หน้าตัดของหลอดแห่งการไหลในย่านนี้ ดังนั้น มวลของของไหลที่ปลายล่างในส่วนที่เรงา คือ  $\Delta M_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$  ในทำนองเดียวกัน ของไหลที่เคลื่อนที่ปลายบนของหลอดแห่งการไหลเมื่อเวลาผ่านไป  $\Delta t$  คือ  $\Delta M_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$  อย่างไรก็ตาม มวลของของไหลมีค่าคงตัว และเพราะว่าการไหลเป็นแบบคงตัว นั่นคือมวลที่ผ่าน  $A_1$  ในเวลา  $\Delta t$  ต้องเท่ากับมวลที่ผ่าน  $A_2$  ในเวลา  $\Delta t$  เช่นกัน หรือ  $\Delta M_1 = \Delta M_2$  เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{10.1}$$

สมการนี้เรียกว่า สมการแห่งการต่อเนื่อง (equation of continuity) เนื่องจาก  $\rho$  มีค่าคงตัว สำหรับการไหลคงตัวและเป็นแบบอัดไม่ได้ ( $\rho_1 = \rho_2$ ) ดังนั้น

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{ค่าคงตัว} \tag{10.2}$$

เราเรียก  $Av$  ว่า อัตราการไหล สมการแห่งการต่อเนื่อง (10.2) แสดงให้เห็นว่า ความเร็วของของไหลในท่อแปรผกผันกับขนาดพื้นที่หน้าตัดของท่อคือขนาดความเร็วจะสูงเมื่อท่อเล็กหรือหลอดแคบ และขนาดความเร็วจะต่ำเมื่อท่อใหญ่หรือหลอดกว้าง

**ตัวอย่างที่ 10.1** ถ้าความเร็วของน้ำในท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 150 มิลลิเมตร เท่ากับ 1.5 เมตร/วินาที ท่อนี้ต่อกับท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 75 มิลลิเมตร สมมติว่าน้ำไหลเต็มท่อทั้งสอง จงหา

- (a) อัตราการไหล
- (b) อัตราเร็วของของเหลวในท่อที่ 2

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$A = \pi \left( \frac{150}{2} \text{ mm} \right)^2$$

$$v_1 = 1.5 \text{ m/s}$$

$$A_2 = \pi \left( \frac{75}{2} \text{ mm} \right)^2$$

$$Av = ?$$

$$v = ?$$

จากสมการ : อัตราการไหล =  $Av$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

นั่นคือ : อัตราการไหล

$$= A_1 v_1$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

(a) แทนค่า : อัตราการไหล

$$= \pi \left( \frac{150 \times 10^{-3} \text{ m}}{2} \right)^2 (1.5 \text{ m/s})$$

$$= 26.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

(b)

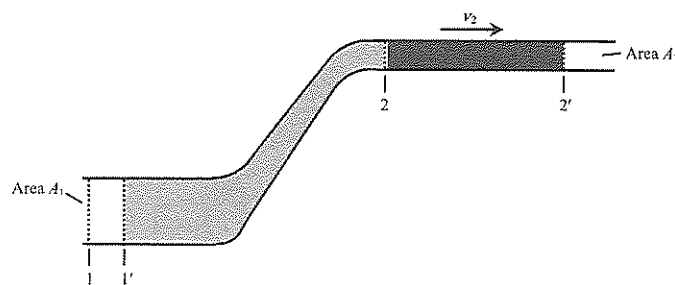
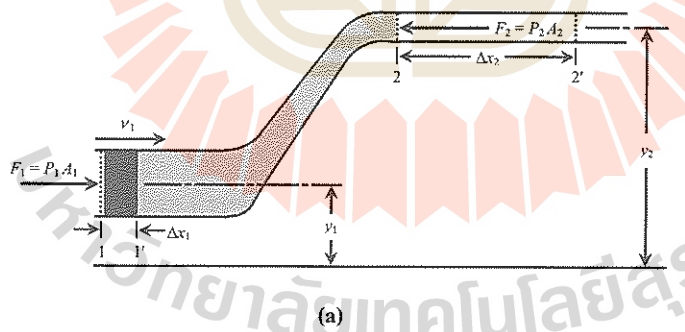
$$v_2 = \left( \frac{150 \text{ mm}}{75 \text{ mm}} \right)^2 (1.5 \text{ m/s})$$

$$= 6 \text{ m/s}$$

## 2. สมการแบร์นูลลี

หลักของอาร์คิมิดีส และหลักของพาสคัลเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง ส่วนผู้ให้หลักเกี่ยวกับของไหลที่เคลื่อนที่ คือ ดาเนียล แบร์นูลลี (Daniel Bernoulli) สมการแบร์นูลลีหาได้โดยง่ายจากทฤษฎีบทงาน-พลังงาน

พิจารณาการไหลของไหลผ่านท่อ ดังรูปที่ 10.4



(b)

รูปที่ 10.4 (a), (b) แสดงการไหลผ่านท่อที่มีขนาดและระดับต่างๆ กัน

เริ่มต้นจากรูปที่ 10.4 (a) ที่ปลายล่างของท่อ ความดันในของไหลเท่ากับ  $P_1$  ความเร็ว  $v_1$  พื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ  $A_1$  ที่ปลายบนความดันเท่ากับ  $P_2$  ความเร็ว  $v_2$  พื้นที่หน้าตัด  $A_2$  เมื่อเวลาผ่านไป  $\Delta t$  ของไหลที่ปลายล่าง (ปริมาตรที่แรงงาในรูปที่ 10.4 (a) เท่ากับ  $\Delta V_1$  มีมวล  $\Delta m_1$ ) เคลื่อนที่ไปได้  $\Delta x_1$  และของไหลที่ปลายบน (ปริมาตรที่แรงงาในรูปที่ 10.4 (b) เท่ากับ  $\Delta V_2$  มีมวล  $\Delta m_2$ ) เคลื่อนที่ได้  $\Delta x_2$

แรงที่ปลายล่าง  $F_1 = P_1 A_1$

ทำงาน  $W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V_1$

ในเวลาเดียวกัน แรง  $F_2 = P_2 A_2$  แรงนี้ทำงานเป็นลบ (แรงกระทำในทิศที่ต้านการเคลื่อนที่)

$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V_2$$

เนื่องจากการไหลเป็นแบบที่อัดไม่ได้

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$$

และงานสุทธิที่กระทำโดยแรง  $F_1$  และ  $F_2$  คือ

$$W = P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2) \Delta V \quad (10.3)$$

งานสุทธิเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์แห่งความโน้มถ่วงของของไหลที่เราพิจารณา ดังนี้

$$\Delta E_p = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 \quad (10.4)$$

และ  $\Delta E_k = \frac{1}{2} (\Delta m) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m) v_1^2 \quad (10.5)$

จากทฤษฎีบทงาน - พลังงาน จากสมการ (10.3), (10.4), (10.5) จะได้

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) \Delta V &= \Delta E_p + \Delta E_k \\ &= \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 + \frac{1}{2} (\Delta m) v_2^2 - \frac{1}{2} (\Delta m) v_1^2 \end{aligned} \quad (10.6)$$

ถ้าหารสมการ (10.6) ด้วย  $\Delta V$  และใช้ความสัมพันธ์  $\rho = \Delta m / \Delta V$  สมการ (10.6) จะกลายเป็น

$$P_1 - P_2 = \rho g y_2 - \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (10.7)$$

ถ้ารวบรวมพจน์ที่มี subscript 1 และ 2 ไว้คนละข้างของสมการ สมการ (10.7) เขียนได้ใหม่เป็น

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (10.8)$$

หรือถ้าพิจารณาหลายตำแหน่งในท่อเดียวกัน ความสัมพันธ์จะเป็น

$$P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ค่าคงตัว} \quad (10.9)$$

สมการ (10.9) เรียกว่า สมการแบร์นูลลี (Bernoulli Equation) ซึ่งหมายความว่า ผลรวมของความดันและความหนาแน่นพลังงาน (พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์) ของของไหลผ่านท่อ จะมีค่าคงตัวเสมอ

ในกรณีที่ของไหลอยู่นิ่ง

$$v_1 = v_2 = 0$$

และ  $P_1 = P_2$  ,  $y_2 - y_1 = h$

ให้  $P_2$  คือ ความดันของบรรยากาศ  $P_a$

จากสมการ (10.7) จะได้

$$P = P_a + \rho g h$$

ซึ่งเป็นสมการของความดันที่เราหามาแล้วในสถิตศาสตร์ของของไหล

## สรุป

ของไหลที่ง่ายที่สุดที่ช่วยในการศึกษาพลศาสตร์ของของไหลมีสมบัติดังนี้ ไม่มีความหนืดระหว่างชั้นของของไหล อัดไม่ได้ เป็นการไหลแบบคงตัว และเป็นการไหลแบบไม่หมุน การไหลผ่านท่อขนาดต่างๆ ของของไหล เป็นไปตามสมการดังต่อไปนี้

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

$$P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ค่าคงตัว}$$

สมการหลังเรียกว่า สมการแบร์นูลลี



ตอนที่  
**10.2**

**การประยุกต์สมการแห่งการต่อเนื่องและสมการแบร์นูลลี**

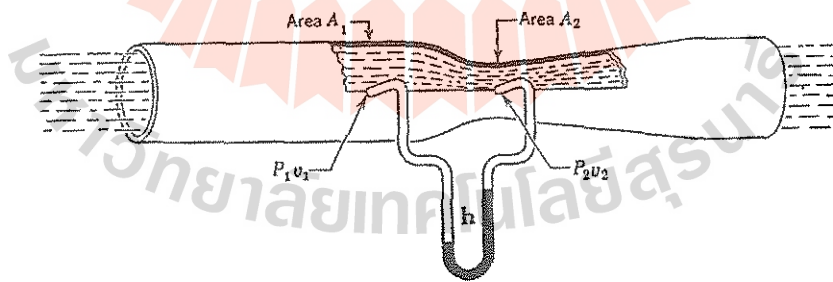
ในชีวิตประจำวันมีปรากฏการณ์หลายอย่าง อุปกรณ์เครื่องมือ เครื่องใช้หลายชนิดที่เกิดจากการประยุกต์สมการแบร์นูลลี เช่น การไหลของแม่น้ำผ่านร่องน้ำที่มีความกว้างแตกต่างกัน การทำกาลักน้ำของเกษตรกร โดยเฉพาะอย่างยิ่งยานพาหนะเกือบทุกประเภทไม่ว่าเครื่องบิน รถยนต์ เรือ ประดิษฐ์ขึ้นมาล้วนต้องคำนึงถึงกฎเกณฑ์ทางพลศาสตร์ของไหลทั้งนั้น ดังนั้น นักวิทยาศาสตร์ วิศวกร นักเทคโนโลยี จึงมีความจำเป็นต้องศึกษาและทำความเข้าใจสมการแบร์นูลลีและการประยุกต์

**1. มาตรเวนทูรี**

มาตรเวนทูรี (venturi meter) เป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหลของไหลในท่อ เครื่องมือมีส่วนประกอบ ดังรูปที่ 10.5

ให้  $\rho$  เป็นความหนาแน่นของของไหลในมาโนมิเตอร์ ซึ่งโดยทั่วไปใช้ปรอท จากสมการแห่งการต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} v_1 A_1 &= v_2 A_2 \\ v_2 &= \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \end{aligned} \tag{10.10}$$



รูปที่ 10.5 มาตรเวนทูรี

ของไหลที่ไหลผ่านมาตรเวนทูรีจะมีค่าความสูงจากระดับอ้างอิงเท่ากัน

$$y_1 = y_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

ดังนั้นสมการ (10.7) จะกลายเป็น

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad (10.11)$$

แทน (10.10) ใน (10.11) ได้

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 (A_1^2 - A_2^2) / A_2^2 \quad (10.12)$$

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}} \quad (10.13)$$

ในการแทนค่า  $P_1 - P_2$  ในสมการ (10.13) นั้น ต้องระมัดระวังเป็นพิเศษในกรณีที่ของไหลที่ต้องการวัดอัตราการไหลของมัน คือ อากาศ

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= h\rho_0 g - h\rho_{\text{air}} g \\ &\cong \rho_0 h g \end{aligned} \quad (10.14)$$

ทั้งนี้เพราะ

$$\rho_0 = \rho_{\text{ben}} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

แต่

$$\rho = \rho_{\text{air}} \cong 1 \text{ kg/m}^3$$

ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ  $\rho_0$  จึงตัดทิ้งได้ แต่ในกรณีที่ของไหลที่เราต้องการวัดอัตราการไหลคือ น้ำหรือน้ำมัน ต้องนำความหนาแน่น  $\rho$  มาคิดด้วย นั่นคือโดยทั่วไป

$$P_1 - P_2 = (\rho_0 - \rho) gh \quad (10.15)$$

เมื่อหาค่า  $v_1$  จากสมการ (10.13) ได้ค่า  $v_2$  หาได้จากความสัมพันธ์สมการ (10.2) และอัตราการไหลก็หาได้จากสมการ (10.2) โดยตรง

ตัวอย่างที่ 10.2 จากรูปที่ 10.5 ถ้า  $A_1 = 4$  ตารางเซนติเมตร  $A_2 = 1$  ตารางเซนติเมตร  $h = 10$  เซนติเมตร ของไหลคือน้ำ จงหา

- (a) อัตราเร็ว  $v_1$  และ  $v_2$
- (b) อัตราการไหล

วิธีทำ

ข้อมูล :  $\rho_0 = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$$\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$A_1 = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = 1 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$h = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$$

$v_1 = ?$  ,  $v_2 = ?$  , อัตราการไหล = ?

จากสมการ :  $v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$  ,  $v_1 A_1 = v_2 A_2$

นั่นคือ :  $v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(\rho_0 - \rho)gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

อัตราการไหล  $v_1 A_1 = v_2 A_2$

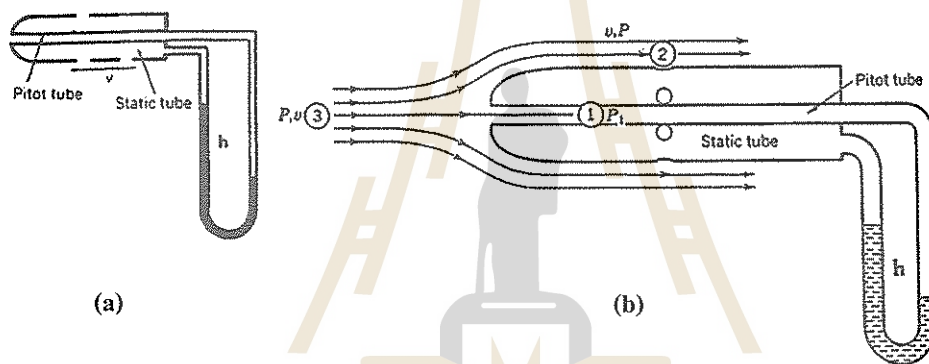
(a) แทนค่า :  $v_1 = (1 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \sqrt{\frac{2(13.6 - 1)(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.10 \text{ m})}{(10^3 \text{ kg/m}^3)[4 - 1](10^{-4} \text{ m}^2)}}$   
 $= 1.35 \text{ m/s}$

$$v_2 = \frac{4 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \times 1.35 \text{ m/s}$$
$$= 5.40 \text{ m/s}$$

(b) อัตราการไหล  $= v_1 A_1$   
 $= (1.35 \text{ m/s})(4 \times 10^{-4} \text{ m}^2)$   
 $= 5.4 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$   
 $= 0.00054 \text{ m}^3/\text{s}$

## 2. หลอดไพทอต

หลอดไพทอต (pitot tube) เป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหลของแก๊ส หรืออากาศ เช่น วัดความเร็วของเครื่องบิน มีรูปร่างดังรูปที่ 10.6 อากาศเข้าทางช่องหลอดไพทอตจะดันระดับปรอทให้ต่ำลง ส่วนหลอดสถิต (static tube) จะเจาะรูเพื่อให้ความดันเท่ากับสวามดันอากาศที่ล้อมรอบ ความแตกต่างระดับปรอทเท่ากับ  $h$  หลอดไพทอตเป็นเครื่องมือที่ประยุกต์สมการแบร์นูลลีมาใช้เหมือนกับมาตรเวนทูรีคือระดับ  $y_1 = y_2 =$  ค่าคงตัว ซึ่งสมการแบร์นูลลีเขียนได้ตามสมการ (10.11)



รูปที่ 10.6 (a) แผนภาพหลอดไพทอต  
(b) แสดงการไหลของอากาศผ่านหลอดไพทอต

ถ้าให้  $P_1$  ,  $v_1$  เป็นความดันและอัตราเร็วอากาศในหลอดไพทอต ซึ่ง  $v_1$  มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ผิวปรอท และเป็นความดันและอัตราเร็วลมที่รูหลอดสถิต

ดังนั้น  $v_2$  คืออัตราเร็วของอากาศที่ผ่านเครื่องวัดให้  $v_2 = v$  สมการ (10.11) เขียนได้ใหม่เป็น

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v^2 - 0)$$

$$= \frac{1}{2} \rho v^2$$

หรือ

$$v = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \quad (10.16)$$

เนื่องจากของไหลที่ต้องการวัดอัตราเร็วคือ อากาศ ดังนั้นเราอาจใช้  $P_1 - P_2$  จากสมการ (10.14) ได้ ซึ่งสมการ (10.16) จะกลายเป็น

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0 h g}{\rho}} \quad (10.17)$$

ตัวอย่างที่ 10.3 เครื่องบินลำหนึ่งที่บินระดับความสูงซึ่งความหนาแน่นของอากาศมีค่า 0.8 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup> ค่า  $h$  ของหลอดไพทอต อ่านได้ 30 มิลลิเมตร จงหาอัตราเร็วของเครื่องบิน (สมมติว่าไม่มีลมพัด)

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$\rho_0 = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho = 0.8 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 30 \text{ mm} = 0.03 \text{ m}$$

$$v = ?$$

จากสมการ :

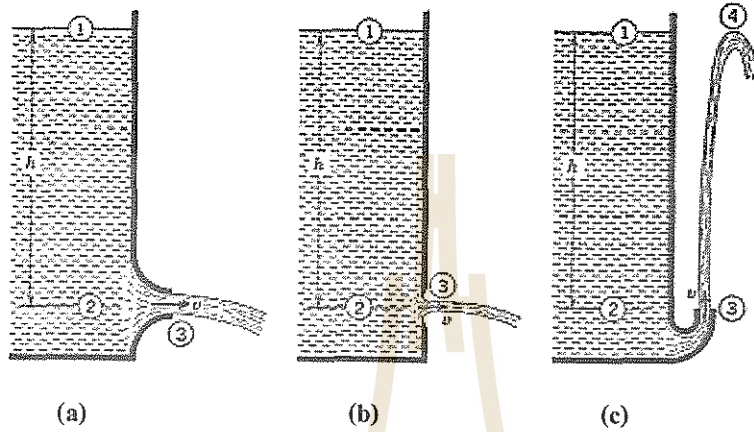
$$v = \sqrt{\frac{2\rho_0gh}{\rho}}$$

แทนค่าแล้วได้ :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.03 \text{ m})}{0.8 \text{ kg/m}^3}} \\ &= 100 \text{ m/s} \end{aligned}$$

### 3. ทฤษฎีบทตอร์ริเชลลี

โดยการประยุกต์สมการแบร์นูลลี ทำให้เราสามารถหาอัตราเร็วของของเหลวจากปากท่อที่ระดับต่างๆ ได้ รูปที่ 10.7 แสดงให้เห็นการไหลของของเหลวผ่านปากท่อ 3 ชนิดจากถังบรรจุน้ำขนาดใหญ่ที่ระดับ  $h$  วัดจากผิวของของเหลว เราสามารถประยุกต์สมการแบร์นูลลีกับจุดที่ (1), (2) และ (3) ได้ เพราะว่ามีสายกระแสเชื่อมระหว่างจุด (1) กับ (3) และ (2) กับ (3) เราจะเลือกระดับที่ผ่านจุด (2) และปากท่อจุด (3) เป็นระดับอ้างอิง  $y = 0$  ดังนั้น  $y = h$



รูปที่ 10.7 การไหลของไหลผ่านปากท่อ

- (a) ปากท่อที่มีลักษณะกลมไปตามแนวนอน
- (b) ปากท่อที่มีลักษณะคมตามแนวนอน
- (c) ปากท่อกลมมีแนวขึ้น

ที่จุด (1) เนื่องจากสมการแบร์นูลลี สมการ (10.8) มีความดัน ( $P_1$  และ  $P_2$ ) อยู่แต่ละข้างของสมการ และที่ผิวของของเหลวกับที่ปากท่อก็เปิดสู่บรรยากาศ (ความดันบรรยากาศที่ผิวของของเหลวและที่ปากท่อมักเท่ากัน) ดังนั้น จึงเป็นการสะดวกที่จะใช้ความดันเกจ แทนที่จะใช้ความดันสัมบูรณ์ ดังนั้น  $P$  ที่ใช้ในหัวข้อนี้จึงหมายถึง ความดันเกจ

ความดันเกจที่จุด (1) ที่ผิวบนของของเหลวมีค่าเท่ากับศูนย์ ความดันเกจที่จุด (3) ในกระแสน้ำที่ปากท่อออกมาเล็กน้อย ก็มีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน ความดันเกจที่จุด (2) ในถัง ที่ระดับปากท่อ มีค่าเท่ากับ  $P$  อัตราเร็วของของไหลที่จุด (1) และ (2) สามารถให้มีค่าเป็นศูนย์ได้ ถ้าถังที่บรรจุของเหลวเป็นถึงขนาดใหญ่ และอัตราเร็วที่ปากท่อจุด (3) ให้มีค่าเป็น  $v$  ใช้สมการแบร์นูลลี  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh =$  ค่าคงตัว กับจุด (1), (2) และ (3) ตามลำดับ จะได้ดังนี้

$$0 + 0 + \rho gh = P + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 \quad (10.18)$$

แก้สมการ 10.18 หาค่าของ  $v$  ได้ดังนี้

$$v = \sqrt{2gh} \quad (10.19)$$

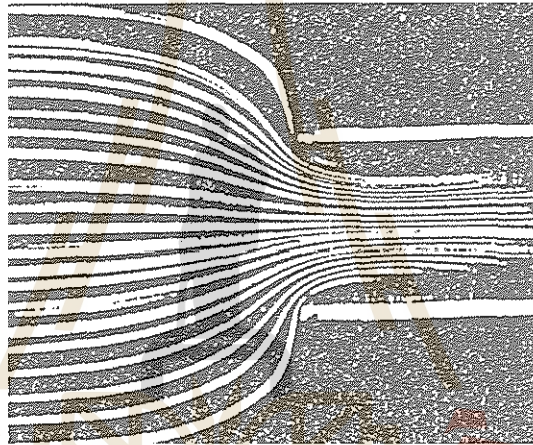
หรือ

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \quad (10.20)$$

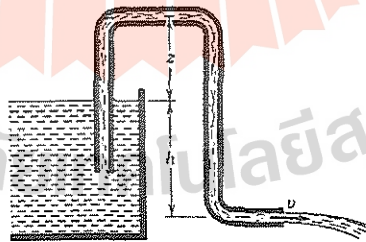
เมื่อ  $v$  คือ อัตราเร็วของการไหลที่ปากท่อ (speed of efflux) ของของไหล เมื่อความดันเกจในถังที่ระดับของปากท่อเท่ากับ  $P$  สมการ (10.19) หรือ (10.20) เรียกว่า ทฤษฎีบททอร์ริเชลลี (Torricelli's Theorem) เพื่อเป็นเกียรติแก่ เอวันเยลิสตา ตอร์ริเชลลี (Evangelista Torricelli)

ในกรณีรูปที่ 10.7 (c) นั้น ถ้าเราใช้สมการแบร์นูลลีกับจุดที่ (4) ซึ่ง  $v = 0$  ที่จุดนี้จะเห็นว่าน้ำควรจะพุ่งขึ้นสูงถึงระดับ  $h$  แต่ในทางปฏิบัติ น้ำจะพุ่งขึ้นได้ต่ำกว่าระดับ  $h$  เล็กน้อยอันเนื่องมาจากความเสียดทาน

อัตราการไหลหาได้จากพื้นที่หน้าตัดคูณด้วยอัตราเร็วของของไหล ถ้าปากท่อมียลักษณะกลมอย่างกรณี (a) และ (c) แต่ถ้าขอบของปากท่อมอย่างรูป (b) นั้น สายกระแสจะถูเข้า ทั้งนี้เพราะของไหลมีความเร่งต่อไปอีกเล็กน้อยหลังจากผ่านขอบคม ทำให้พื้นที่หน้าตัดของลำกระแสเมื่อผ่านขอบคมเล็กน้อยจะเล็กลงกว่าพื้นที่หน้าตัดของท่อ ลักษณะของลำกระแสนี้มีรูปร่างเช่นนี้เรียกว่า vena contracta ดังรูปที่ 10.8 สำหรับปากท่อมที่มีรูเล็กๆ พื้นที่ของ vena contracta มีค่าประมาณ 65 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่หน้าตัดปากท่อ



รูปที่ 10.8 vena contracta



รูปที่ 10.9 กาลังน้ำ (siphon)

ตัวอย่างที่ประยุกต์ทฤษฎีบทของตอร์ริเชลลี ก็คือ กาลักน้ำ (siphon) ดังรูปที่ 10.9 อัตราการไหลที่ปากท่อหาได้จากสมการ (10.19) หรือ (10.20)

**ตัวอย่างที่ 10.4** จงหาอัตราการไหลที่ปากท่อของกาลักน้ำ รูปที่ 10.9 ถ้าของเหลวในถังคือน้ำมันมีความหนาแน่น 790 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup> กำหนดให้  $h$  เท่ากับ 0.4 เมตร และพื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ 50 ตารางมิลลิเมตร และความเสียดทานของของไหลมีค่าน้อยมากจนไม่ต้องนำมาคิด

**วิธีทำ**

ข้อมูล :

$$h = 0.4 \text{ m}$$

$$A = 50 \text{ mm}^2 = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$v = ?, Av = ?$$

จากสมการ :

$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{และ}$$

อัตราการไหล

$$= Av$$

แทนค่า :

$$v = \sqrt{2(9.8 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m})}$$

$$= 2.8 \text{ m/s}$$

$$Av = (50 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(2.8 \text{ m/s})$$

$$= 14 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$= 8.4 \text{ liters/minute}$$

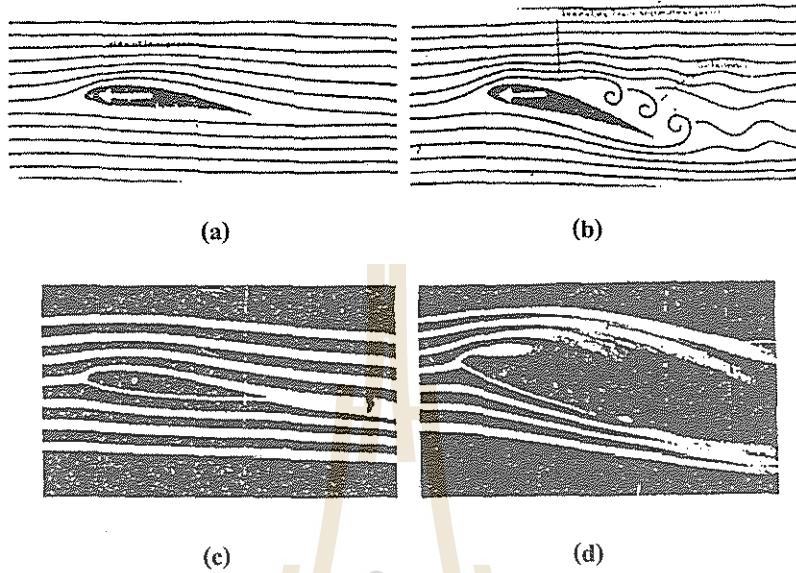
**4. แรงยกปีกเครื่องบิน**

ปีกเครื่องบินมีรูปร่างของภาคตัดขวางดังรูปที่ 10.10 เมื่อกระแสอากาศผ่านปีกเครื่องบินสายกระแสที่อยู่เหนือปีกจะอยู่ชิดกันมากกว่าสายกระแสที่อยู่ใต้ปีก ซึ่งหมายความว่า ความเร็วเหนือปีก  $v_2$  สูงกว่าความเร็วใต้ปีก  $v_1$  ถ้าให้  $P_2$  และ  $P_1$  เป็นความดันของอากาศเหนือและใต้ปีกเครื่องบินตามลำดับ และให้พื้นที่ใต้ปีกเครื่องบินเท่ากับ  $A$  จากสมการแบร์นูลลีกรณีนี้

$$y_1 = y_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\begin{aligned} \text{แรงยก (lift)} &= F_{\text{lift}} = A(P_1 - P_2) \\ &= \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) A \end{aligned} \quad (10.21)$$



รูปที่ 10.10 (a), (c) การไหลที่ไม่มีควมปั่นป่วน  
(b), (d) การไหลที่มีความปั่นป่วน

ตัวอย่างที่ 10.5 สายกระแสน้ำอากาศผ่านปีกเครื่องบินโดยอัตราความเร็วของอากาศเหนือปีกเท่ากับ 120 เมตร/วินาที อัตราเร็วใต้ปีกเท่ากับ 90 เมตร/วินาที ณ ความสูงที่เครื่องบินอยู่นี้อากาศมีความหนาแน่น 0.5 กิโลกรัม/เมตร<sup>3</sup> ถ้าปีกเครื่องบินมีความยาว 10 เมตร และมีความกว้างเฉลี่ยเท่ากับ 2 เมตร จงหา

(a) ความแตกต่างของความดันใต้ปีกและเหนือปีก

(b) จงหาแรงยกเครื่องบิน

วิธีทำ

ข้อมูล :  $v_1 = 90 \text{ m/s}$  ,  $v_2 = 120 \text{ m/s}$

$$\rho = 0.5 \text{ kg/m}^3 , A = 10 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$

จากสมการ :  $P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$

$$F_{\text{lift}} = A[P_1 - P_2]$$

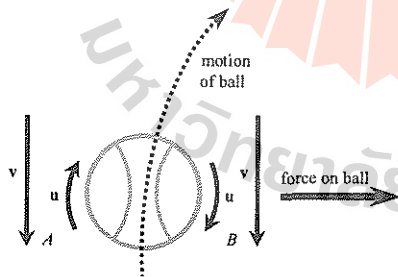
(a) แทนค่า : 
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}(0.5 \text{ kg/m}^3)[(120 \text{ m/s})^2 - (90 \text{ m/s})^2]$$
$$= 1,575 \text{ N/m}^2 = 1,575 \text{ Pa}$$

(b) 
$$F_{\text{lift}} = (20 \text{ m}^2)(1,575 \text{ N/m}^2)$$
$$= 31,500 \text{ N}$$

### 5. ปรากฏการณ์แมกนัส

พิจารณาลูกบอลที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศด้วยความเร็ว  $v$  ซึ่งมีค่ามาก ในขณะที่เดียวกันก็หมุนด้วยความเร็ว  $u$  ถ้าผิวของลูกบอลมีลักษณะหยาบ คือ มีแรงเสียดทานระหว่างผิวกับอากาศ การหมุนของลูกบอลจะลากพาโมเลกุลของอากาศรอบๆ ลูกบอลเคลื่อนที่วนตามไปกับการหมุนด้วย จากรูปที่ 10.11 อัตราเร็วของอากาศของด้าน B จะมีค่า  $v + u$  ขณะที่อัตราเร็วของอากาศด้าน A มีค่า  $v - u$

จากสมการแบร์นูลลี ความดันทางด้าน A จะมีค่ามากกว่าทางด้าน B จะทำให้ลูกบอลถูกดันให้เคลื่อนที่โค้งไปทางขวา เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์แมกนัส (Magnus effect) ตัวอย่างของปรากฏการณ์แมกนัส เช่น การเคลื่อนที่โค้งของลูกเบสบอล ลูกเทนนิส หรือ ฟุตบอล



(a)



(b)

รูปที่ 10.11 ปรากฏการณ์แมกนัส

(a) บนลูกบอลซึ่งหมุนพร้อมกับการเคลื่อนที่

(b) ทรงกระบอกหมุนและเคลื่อนที่

## สรุป

มาตรฐานที่ใช้วัดอัตราการไหลของของไหลในท่อ ที่เรียกว่า มาตรฐานทูลรี เครื่องมือที่ใช้วัดอัตราเร็วของเครื่องบิน คือ หลอดไพทอต แรงยกปีกเครื่องบิน ทฤษฎีบทของตอร์ริเชลลีและปรากฏการณ์แมกนัส เป็นการประยุกต์สมการแบร์นูลลี



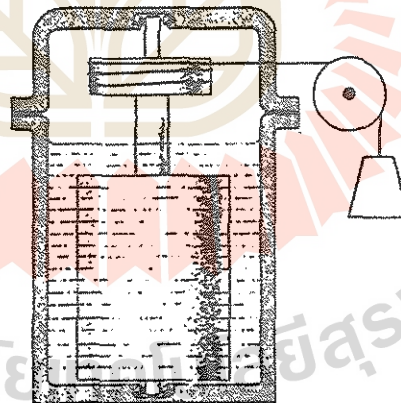
ตอนที่  
**10.3**

**ความหนืด**

ความหนืดของของไหลเกิดจากแรงเสียดทาน แรงเสียดทานระหว่างชั้นของของเหลวเกิดจากแรงเชื่อมแน่น แรงเสียดทานในแก๊สเกิดจากการชนกันระหว่างโมเลกุล ของเหลวและแก๊สต่างก็มีความหนืด

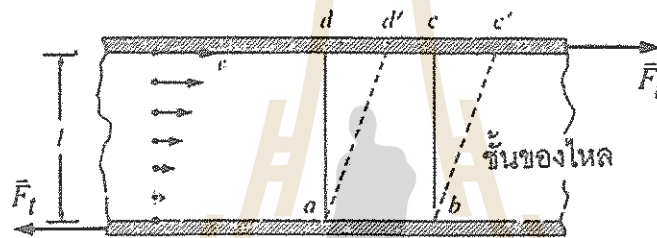
**1. ความหนืด**

ความหนืด (viscosity) อาจคิดได้ว่าเป็นความเสียดทานในของไหล ซึ่งจะต้องมีแรงมากกระทำต่อชั้นของของไหลถัดไป ของเหลวและแก๊สต่างก็มีความหนืด แรงเสียดทานระหว่างชั้นของของเหลวเกิดจากแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลที่เรากล่าวถึงในหัวข้อนี้ ส่วนแรงเสียดทานในแก๊สเกิดจากการชนกันระหว่างโมเลกุล ความหนืดของของไหลต่างชนิดกันสามารถบอกได้ด้วยสัมประสิทธิ์ของความหนืด (coefficient of viscosity) แทนด้วย  $\eta$  (อ่านว่า eta) ซึ่งหาได้โดยใช้เครื่องวัดความหนืด (viscometer) ดังรูปที่ 10.12



รูปที่ 10.12 เครื่องมือหาความหนืด

เครื่องมือหาความหนืดชนิดนี้ประกอบด้วยภาชนะรูปทรงกระบอกสองอันซ้อนกันอยู่ภายในมีของเหลวซึ่งต้องการหาความหนืด ทอร์คที่ใช้หมุนทรงกระบอกใบอาศัยแรงดึงของน้ำหนัก  $W$  ในรูปผ่านลูกรอกเมื่อปล่อยให้ตุ้มน้ำหนักเคลื่อนที่ลง ทรงกระบอกภายในก็จะหมุน ของเหลวที่ติดอยู่กับภาชนะจะต้านการหมุน อาศัยความรู้เกี่ยวกับทอร์กวัดขนาดของทรงกระบอกและความเร็วเชิงมุมของทรงกระบอกจะคำนวณหาความหนืดได้ เพื่อให้ง่ายพิจารณาทรงกระบอกขนาดเท่ากัน ส่วนโค้งที่ระยะสั้นอาจถือเป็นเส้นตรงได้ ซึ่งแทนด้วยรูปที่ 10.13



รูปที่ 10.13 อัตราเร็วของชั้นของของไหล

แผ่นบน คือผิวชั้นๆ ของทรงกระบอกอันใน ซึ่งเคลื่อนที่ ส่วนแผ่นล่างคือ ผิวของทรงกระบอกอันนอกซึ่งอยู่กับที่ ที่ผิวสัมผัสระหว่างของแข็งกับของเหลว นั้น จะมีแรงยึดติดทำให้ชั้นของของไหลที่ติดกับแผ่นบนมีอัตราเร็ว  $v$  และชั้นต่อๆ มาอัตราเร็วลดลงสม่ำเสมอ จนมีอัตราความเร็วเป็นศูนย์ ณ ชั้นที่ติดกับแผ่นล่าง การเคลื่อนที่แบบชั้นบางๆ ของของเหลวไปบนอีกชั้นถัดไปนี้เรียกว่า การไหลแบบละมินาร์ (laminar flow)

พิจารณาส่วนของของเหลว  $abcd$  ช่วงขณะหนึ่งจะกลายเป็นรูป  $abc'd'$  รูปร่างจะเบี้ยวไปเรื่อยๆ เมื่อเวลาผ่านไป ยิ่งถูกแรงดึงที่ผิวในมากก็จะโย้ไปมาก ถ้า  $F_t$  คือแรงที่จุด ผิวในไปทางขวา ก็จะเกิดแรง  $F_t$  จุดผิวนอกไปทางซ้ายด้วย เพื่อให้ของเหลวหยุดนิ่งไม่ไหล ถ้า  $A$  คือพื้นที่ผิวของของเหลวที่ถูกแรงกระทำ  $\frac{F_t}{A}$  ดังนั้น คือความเค้นเฉือนที่กระทำแก่ของเหลว

ในของแข็งความเค้นเฉือนค่าหนึ่งก่อให้เกิดความเครียดเฉือนได้เพียงค่าเดียว ส่วนในของเหลว ความเครียดเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อมีความเค้นเฉือนอยู่ จากการทดลองพบว่าความเค้นเฉือนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนความเครียดเฉือน

$$\text{ความเครียดเฉือน (ในรูปที่ 10.13)} = \frac{dd'}{ad} = \frac{dd'}{\ell} \text{ เพราะว่า } \ell \text{ มีค่าคงที่}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน  $= \frac{1}{2} \times$  อัตราการเปลี่ยนของ  $dd'$  แต่อัตราการเปลี่ยนของ  $dd'$  คือความเร็วของจุด  $d'$  คือความเร็วของผิวในซึ่งเคลื่อนที่ตามทรงกระบอกไปในนั้นเอง ดังนั้น

$$\text{อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน} = \frac{v}{\ell}$$

สัมประสิทธิ์ของความหนืดของของไหลเรียกสั้นๆ ว่า ความหนืด  $\eta$  มีนิยามว่า คือ อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนต่ออัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน นั่นคือ

$$\eta = \frac{F/A}{v/\ell}$$

หรือ 
$$F = \eta A \frac{v}{\ell} \tag{10.22}$$

ความหนืด  $\eta$  มีค่าน้อยสำหรับของเหลวที่ไหลได้ดี เช่น น้ำ และมีค่าเพิ่มขึ้นสำหรับของเหลวที่ไหลยาก เช่น กรีเซอร์ลิน นอกจากนี้ค่าของความหนืดยังขึ้นกับอุณหภูมิด้วย สำหรับแก๊ส ความหนืดมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่วนของเหลวมีค่าลดลง

สมการ (10.22) ใช้ได้สำหรับความเร็วของของเหลวที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจากผิวนอกถึงผิวใน กรณีที่อัตราการเปลี่ยนความเร็วตั้งฉากกับทิศทางการไหล เกรเดียนต์ของความเร็วในทิศทางนี้คือ  $\frac{v}{\ell}$  ถ้าอัตราการเพิ่มความเร็วไม่สม่ำเสมอ เกรเดียนต์ของความเร็ว ณ จุดใดๆ คือ  $\frac{dv}{dy}$  เมื่อ  $dv$  คือความเร็วที่เปลี่ยนไปน้อยๆ ระหว่างจุด 2 จุด ที่ห่างกัน  $dy$  โดยวัดตั้งฉากกับทิศของการไหล ดังนั้น

$$F = \eta A \frac{dv}{dy} \tag{10.23}$$

ในระบบเอสไอ  $\eta$  มีหน่วยเป็น  $\text{N}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$  เท่ากับ  $\text{Pa}\cdot\text{s}$  (พาสคัล·วินาที) ในระบบ ซี จี เอส มีหน่วยเป็น  $\text{dyne}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$  และเรียกหน่วยนี้ว่า ปอยส์ (poise, P) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักวิทยาศาสตร์ที่ชื่อของ ลุยส์ ปัวเซย์ (Jean Louis Poiseuille)

$$1 \text{ poise (หรือ } 1 \text{ P)} = 1 \text{ dyne}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$$

$$= 10^{-1} \text{ Nsm}^{-2}$$

$$1 \text{ cP (อ่านว่า เซนตริปอยส์)} = 10^{-2} \text{ P} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

สัมประสิทธิ์ของความหนืดของของไหลบางชนิดได้แสดงไว้ตามตารางที่ 10.3

ตารางที่ 10.1 สัมประสิทธิ์ของความหนืดของของไหลบางชนิด

ของไหล	อุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ )	สัมประสิทธิ์ของความหนืด, $\eta(\text{Pa}\cdot\text{s})^*$
อากาศ	0	$0.017 \times 10^{-3}$
	60	$0.020 \times 10^{-3}$
	100	$0.022 \times 10^{-3}$
น้ำ	0	$1.8 \times 10^{-3}$
	20	$1.0 \times 10^{-3}$
	100	$0.3 \times 10^{-3}$
เลือด	37	$\approx 4 \times 10^{-3}$
พลาสติกเลือด	37	$\approx 1.5 \times 10^{-3}$
เอทิล แอลกอฮอล์	20	$1.2 \times 10^{-3}$
น้ำมันเครื่อง (SAE 10)	30	$200 \times 10^{-3}$
กลีเซอริน	20	$1500 \times 10^{-3}$
อากาศ	20	$0.018 \times 10^{-3}$
ไฮโดรเจน	0	$0.009 \times 10^{-3}$
ไอน้ำ	100	$0.013 \times 10^{-3}$

\*  $1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ P} = 10^3 \text{ cP}$

จากตารางนี้จะเห็นว่า ความหนืดของแก๊สจะเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่ม และความหนืดของของเหลวจะลดลงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น

**ตัวอย่างที่ 10.6** เครื่องวัดความหนืดดังรูปที่ 10.12 เมื่อรัศมีเฉลี่ยของทรงกระบอกเท่ากับ 5 เซนติเมตร  $h$  เท่ากับ 12 เซนติเมตร ความหนาของของเหลวเท่ากับ 2 มิลลิเมตร ต้องใช้ทอร์กขนาด 0.054 นิวตัน-เมตร เพื่อหมุนทรงกระบอกในด้วยอัตรา 50 รอบ/นาที จงหาสัมประสิทธิ์ของความหนืดของของเหลวนี้

วิธีทำ

ข้อมูล :  $r = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$

$$\omega = \frac{50 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

$$v = \omega r = \left( \frac{50 \times 2\pi}{60} \text{ rad/s} \right) (0.05 \text{ m})$$

$$= 0.26 \text{ m/s}$$

$$h = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$$

$$A = 2\pi rh$$

$$= 2\pi(0.05 \text{ m})(0.12 \text{ m})$$

$$= 3.77 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\tau = 0.054 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$F = \frac{\tau}{r} = 1.08 \text{ N}$$

$$\ell = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$$

จากสมการ :

$$F = \eta A \frac{v}{\ell}$$

นั่นคือ :

$$\eta = \frac{F \cdot \ell}{A \cdot v}$$

แทนค่า :

$$\eta = \frac{(1.08 \text{ N})(0.002 \text{ m})}{(3.77 \times 10^{-2} \text{ m}^2)(0.26 \text{ m/s})}$$

$$= 0.22 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$$

$$= 2.2 \text{ P(poise)}$$

## 2. เลขของเรย์โนลด์

ถ้าอัตราการไหลของของเหลว  $v$  ผ่านท่อมีค่าสูงมาก การไหลจะไม่เป็นแบบลามินาร์แต่จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow)

สำหรับความแตกต่างของความดันที่เท่ากัน อัตราการไหลของการไหลเป็นแบบปั่นป่วนจะน้อยกว่าอัตราการไหลของการไหลแบบลามินาร์ ทั้งนี้เนื่องจากแรงเสียดทานในการไหลมีค่าสูงขึ้น ถ้ามีความปั่นป่วน ความปั่นป่วนกำหนดได้ด้วยตัวเลขของ เรย์โนลด์ (Reynolds' number) แทนด้วย  $Re$  เพื่อเป็นเกียรติแก่ ออสบอร์น เรย์โนลด์ (Osborne Reynolds) ในกรณีนี้ของไหลผ่านท่อ ตัวเลขเรย์โนลด์มีนิยามว่า

$$Re = \frac{2rp}{\eta} v_{ave}$$

เมื่อ  $v_{ave}$  คือ อัตราเร็วเฉลี่ยของไหล

$r$  คือ รัศมีของท่อ

$Re$  คือ เป็นตัวเลขไม่มีหน่วย

จากการทดลองพบว่า การไหลจะเป็นแบบลามินาร์ ถ้า  $Re$  มีค่าน้อยกว่า 2,000 และจะเป็นแบบปั่นป่วน ถ้า  $Re$  มีค่ามากกว่า 2,000

**ตัวอย่างที่ 10.7** อัตราเร็วเฉลี่ยของโลหิตในเอออร์ตา (aorta) ซึ่งมีรัศมี  $r = 1.0$  cm เท่ากับ 30 cm/s การไหลของโลหิตในเอออร์ตาเป็นแบบลามินาร์หรือแบบปั่นป่วน

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$r = 1.0 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$$

$$v = 30 \text{ cm/s} = 0.3 \text{ m/s}$$

$$\rho \text{ (จากตารางความหนาแน่น)} = 1.05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\eta \text{ (จากตาราง)} = 4 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} (\text{N} \cdot \text{s/m}^2)$$

จากสมการ :

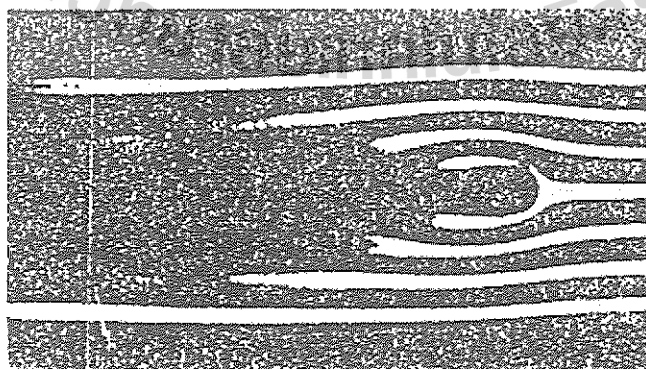
$$Re = \frac{2rp}{\eta} v_{ave}$$

แทนค่า :

$$Re = \frac{(2)(0.30 \text{ m/s})(0.01 \text{ m})(1.05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{(4.0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)} = 1,500$$

ดังนั้น การไหลเป็นแบบลามินาร์

รูปที่ 10.14 เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกที่  $Re = 5,000$



รูปที่ 10.14 การไหลผ่านทรงกระบอกซึ่งเลขเรย์โนลด์์ประมาณ 5,000

### 3. กฎของสโตกส์

ถ้าเราพิจารณาสถานการณ์ที่ตรงกันข้ามกับที่พิจารณามาแล้ว คือพิจารณากรณีที่วัตถุ (ของแข็ง) เคลื่อนที่ผ่านของไหลที่มีความหนืดซึ่งอยู่นิ่ง เช่น การเคลื่อนที่ของก้อนหินในน้ำ การเคลื่อนที่ของเครื่องบินผ่านอากาศ การเคลื่อนที่ของปลาในน้ำ เป็นต้น

การนิยามตัวเลขเรย์โนลด์์ในกรณีนี้ จะแตกต่างจากกรณีที่แล้วมาคือ ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านของไหลมีอยู่ว่า ตัวเลขเรย์โนลด์์นิยามว่า

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

เมื่อ  $L$  คือ ความยาวของวัตถุ

ถ้า  $Re$  มีค่าน้อยกว่า 1 สายกระแสรอบวัตถุจะเป็นการไหลแบบละมินาร์ จากการทดลองพบว่า ถ้า  $Re$  น้อย แรงต้านทานการเคลื่อนที่เนื่องจากความหนืด (viscous force) จะแปรผันกับความเร็วของวัตถุ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F = kv$$

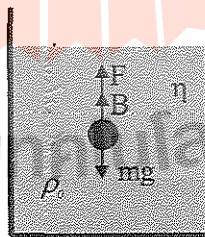
เมื่อ  $k$  คือค่าคงตัว ขึ้นอยู่กับขนาดและรูปร่างของวัตถุ สำหรับวัตถุทรงกลมรัศมี  $r$  ค่าคงตัวนี้มีค่า

$$k (\text{ทรงกลม}) = 6\pi r\eta$$

ดังนั้น แรงเนื่องจากความหนืดที่ต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุทรงกลมเล็ก รัศมี  $r$  ผ่านของไหลมีความหนืด  $\eta$  คือ

$$F = 6\pi r\eta v$$

ซึ่งสมการนี้เรียกว่า กฎของสโตกส์ (Stokes' Law) ซึ่งค้นพบโดย เซอร์ จอร์จ สโตกส์ (Sir George Stokes) เมื่อปี ค.ศ.1845



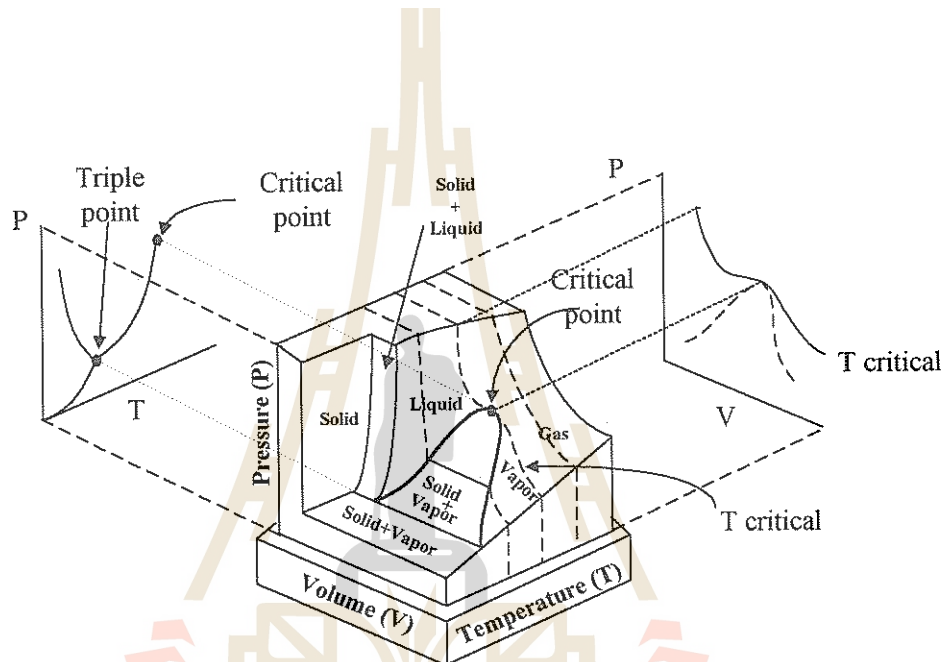
รูปที่ 10.15 ทรงกลมตันตกในของเหลว

## บรรณานุกรม

---

- ประสาท สีปศุ. 2535. **ฟิสิกส์พื้นฐานชั้นมหาวิทยาลัย 1**. กรุงเทพฯ: ประชาชน.
- Benson, Harris. 1991. **University physics**. New York: John Wiley & Sons.
- Blatt, F. J. 1983. **Principles of physics**. Boston: Allyn and Bacon.
- Bueche, Frederick J. 1986. **Introduction to physics for scientists and engineers** (4<sup>th</sup> ed.). Singapore: McGraw-Hill.
- Giancoli, Douglas C. 1999. **Physics: principles and applications** (5<sup>th</sup> ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 2000. **Fundamentals of physics** (6<sup>th</sup> ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Miller, Franklin Jr., and Schroer, Dietrich. 1987. **College physics** (6<sup>th</sup> ed.). New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Sears, Francis W., Zemansky, Mark W., and Young, Hugh D. 1987. **University physics** (7<sup>th</sup> ed.). Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing.
- Serway, R., and Beichner, R. 2000. **Physics for scientists and engineers** (5<sup>th</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.
- Shortley, George., and Williams, Dudley. 1967. **Principles of college physics** (2<sup>nd</sup> ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Smith, Alpheus W., and Cooper, John N. 1979. **Elements of physics**. New York: McGraw-Hill.
- Tipler, Paul A. 1998. **Physics for scientists and engineers**. New York: Worth Publishers.
- Weidner, Richard T., and Sells, Robert L. 1973. **Elementary classical physics** (2<sup>nd</sup> ed.). Boston: Allyn and Bacon.

## อุณหพลศาสตร์และทฤษฎีจลน์ของแก๊ส



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิโนรัตน์ กอบเดช

# ตอนที่ 11.1

## บทนำ

อุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความร้อน อุณหภูมิ งาน และพลังงานภายในของระบบ ซึ่งระบบที่จะกล่าวถึงนี้เป็นระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคเล็กๆ จำนวนมาก เช่น ระบบของแก๊สที่ประกอบด้วยโมเลกุลของแก๊สเป็นจำนวนมาก ทำให้การศึกษา ระบบดังกล่าวโดยใช้กฎของนิวตันเพื่อศึกษาโมเลกุลของแก๊สแต่ละตัวกระทำได้ยาก ดังนั้นการศึกษาระบบนี้วิธีหนึ่ง คือ ศึกษาสมบัติรวมของระบบที่สามารถวัดได้ เช่น ความดัน อุณหภูมิ ปริมาตร จำนวนสาร และพลังงานภายใน ซึ่งการศึกษาระบบรวมในลักษณะนี้เรียกว่า การศึกษาระบบมหัพภาค (macroscopic systems) และวิธีการที่ใช้ในการศึกษาก็คือวิธีการทางอุณหพลศาสตร์นั่นเอง

อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าการศึกษาการเคลื่อนที่ของทุกโมเลกุลของแก๊สในระบบกระทำได้ยาก เนื่องจากมีจำนวนโมเลกุลเป็นจำนวนมาก แต่ก็ไม่ได้หมายความว่าการศึกษาแบบที่ประกอบด้วยอนุภาคเล็กๆ จำนวนมาก จะต้องใช้วิธีการทางอุณหพลศาสตร์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น การศึกษาระบบนี้ยังสามารถกระทำได้อีกวิธีหนึ่งคือการสร้างแบบจำลองในระดับโมเลกุล เพื่อศึกษาการเคลื่อนที่ของแต่ละโมเลกุล แรงที่กระทำระหว่างกัน การชนกันระหว่างโมเลกุลและพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่ แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ย วิธีการศึกษาในลักษณะนี้เรียกว่า การศึกษาระบบจุลทรรศน์ (microscopic systems)

การศึกษาระบบในระดับจุลทรรศน์ที่ศึกษาเกี่ยวกับระบบของแก๊สแต่ละโมเลกุล แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างแก๊สทุกโมเลกุลกับปริมาณที่วัดได้ เช่น ความดัน อุณหภูมิ ปริมาตร จำนวนสาร และพลังงานภายใน เรียกว่า ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส (kinetic theory of gas) และส่วนการศึกษาระบบในระดับจุลทรรศน์ที่สมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) โดยใช้วิธีทางสถิติเข้ามาศึกษาการแจกแจงความเร็วและพลังงานของแต่ละโมเลกุลนั้นเรียกว่า กลศาสตร์เชิงสถิติ (statistical mechanics)

## 1. บทนิยาม เทอมต่างๆ ของอุณหพลศาสตร์

เพื่อที่จะให้มีความเข้าใจตรงกัน ในตอนนี้จะกล่าวถึงบทนิยามต่างๆ ที่เกี่ยวข้องและมักพบอยู่เสมอในการศึกษาเกี่ยวกับอุณหพลศาสตร์

ระบบ (system) หมายถึง สิ่งที่กำลังกล่าวถึง หรือสิ่งที่ต้องการศึกษา ส่วนอื่นๆ ที่ไม่อยู่ในระบบจะถือเป็นสิ่งแวดล้อม (surroundings) คำว่า ระบบเปิด (open system) หมายถึง ระบบที่มีการแลกเปลี่ยนสสารและพลังงาน กับสิ่งแวดล้อม ในขณะที่ระบบปิด (closed system) หมายถึง ระบบที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนสสารกับสิ่งแวดล้อม แต่สามารถแลกเปลี่ยนพลังงานกับสิ่งแวดล้อมได้ และระบบที่ไม่สามารถแลกเปลี่ยนสสารหรือพลังงานกับสิ่งแวดล้อมได้เลยไม่ว่าจะเป็นในรูปแบบใดก็ตาม จะเรียกว่าเป็นระบบเอกเทศ (isolated system)

สมบัติของระบบทางอุณหพลศาสตร์สามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ สมบัติไม่ขึ้นกับปริมาณ (intensive property) เช่น ความดัน อุณหภูมิ ความหนาแน่น และสมบัติขึ้นกับปริมาณหรือมวลของวัตถุในระบบ (extensive property) เช่น ปริมาตร ซึ่งเปลี่ยนแปลงภายใต้เงื่อนไขที่ขึ้นกับปริมาณของเนื้อสาร เป็นต้น

หากพิจารณาถึงชนิดของสารที่มีอยู่ในระบบที่ต้องการศึกษาระบบเอกพันธ์ (homogeneous system) จะหมายถึงระบบที่มีสารเป็นเนื้อเดียวกัน ไม่สามารถแบ่งแยกได้ หรือถ้าจะกล่าวในเชิงของคณิตศาสตร์ก็คือ ความหนาแน่นและความดันเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตำแหน่ง แต่ถ้าระบบมีสารปนกันอยู่ ไม่เป็นเนื้อเดียวกัน และสามารถแบ่งแยกออกจากกันได้ เช่น สารละลายของน้ำปนกับน้ำมัน ซึ่งสามารถมองเห็นรอยต่อระหว่างน้ำกับน้ำมันทั้งสองได้อย่างชัดเจน ระบบนี้เรียกว่า ระบบวิวิธพันธุ์ (heterogeneous system or inhomogeneous system) โดยในทางคณิตศาสตร์ตรงรอยต่อจะเรียกว่า เป็นบริเวณที่มีความไม่ต่อเนื่อง และสมบัติของระบบเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องของตำแหน่ง

ในระบบหนึ่งๆ ค่าต่างๆ ที่วัดได้เช่น ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ ปริมาตร เรียกว่า พิกัดอุณหพลวัต (thermodynamic coordinates) หรือ ตัวแปรสถานะ (state variables) และเมื่อใดก็ตามที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรสถานะของระบบเกิดขึ้น นั่นหมายถึง เกิดลักษณะที่เรียกว่า กระบวนการ (process) ขึ้นในระบบนั้นๆ โดยกระบวนการต่างๆ ที่เกิดขึ้นจะมีชื่อเรียกต่างๆ กัน ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวแปรสถานะที่เปลี่ยนแปลงดังนี้

1) กระบวนการอุณหภูมิกคงตัว (isothermal process) เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นโดยอุณหภูมิของระบบคงตัวตลอดเวลา

2) กระบวนการแอดิแอบติก (adiabatic process) เป็นกระบวนการเกิดขึ้นโดยที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมเลย หรืออาจกล่าวได้ว่ากระบวนการนี้ไม่มีความร้อนเข้าหรือออกจากระบบเลย

3) กระบวนการความดันคงตัว (isobaric process) เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในขณะที่ความดันมีค่าคงตัวตลอดเวลา

4) กระบวนการปริมาตรคงตัว (isochoric process หรือ isovolumic process) เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในขณะที่ปริมาตรคงตัวไม่เปลี่ยนแปลง

และถ้าจะเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่บอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสถานะต่างๆ เหล่านี้ สมการนี้เรียกว่า สมการสถานะ (equation of state) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในตอนต้นที่ 11.2

ที่สภาวะหนึ่งจะพบว่าตัวแปรสถานะต่างๆ เช่น ค่าความดัน ปริมาตร และอุณหภูมิ มีค่าคงตัว หรือมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก อาจกล่าวได้ว่าระบบนั้นเข้าสู่สภาวะสมดุลเชิงอุณหพลวัต (thermodynamic equilibrium) ซึ่งระบบที่อยู่ในสมดุลเชิงอุณหพลวัตจะอยู่ในสถานะสมดุลทั้งในสมดุลเชิงความร้อน สมดุลเชิงกล และสมดุลเคมี ในเวลาเดียวกัน โดย สมดุลเชิงกล (mechanical equilibrium) หมายถึง การเกิดความสมดุลระหว่างแรงในระบบกับสิ่งแวดล้อม สมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) หมายถึง ทุกส่วนภายในระบบมีอุณหภูมิสม่ำเสมอและมีค่าเท่ากับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม และ สมดุลเคมี (chemical equilibrium) หมายถึง ระบบนั้นว่าอยู่ในสถานะที่องค์ประกอบทางเคมีของระบบมีค่าเท่ากันหมด

## 2. อุณหภูมิ

อุณหภูมิเป็นปริมาณพื้นฐานในระบบ SI มีหน่วยเป็นเคลวิน (kelvin , K) ซึ่งมีความสำคัญในการศึกษาอุณหพลศาสตร์เป็นอย่างมาก เพื่อที่จะเข้าใจถึงคำจำกัดความของอุณหภูมิ ให้พิจารณา ระบบ 2 ระบบที่มีความร้อนไม่เท่ากัน โดยระบบทั้งสองนี้จะไม่มีการถ่ายเทความร้อนกับสิ่งแวดล้อม เมื่อนำระบบทั้งสองมาต่อกันพร้อมกับทำให้เกิดมีการถ่ายเทความร้อนระหว่างทั้งสองได้ เมื่อเวลาผ่านไปจนระบบทั้งสองเข้าสู่สมดุลเชิงความร้อน นั่นคือเราจะกล่าวว่าระบบทั้งสองจะมีอุณหภูมิเท่ากัน ถึงแม้ว่าระบบทั้งสองไม่ได้ต่อกัน แต่สามารถบอกได้ว่าระบบที่ 1 อยู่ในสมดุลเชิงความร้อนเดียวกับระบบที่ 2 ก็สามารถกล่าวได้ว่า ระบบทั้งสองจะมีอุณหภูมิเท่ากัน ซึ่งในกรณีนี้ เราสามารถใช้ระบบที่ 3 มาเป็นตัวกลางช่วยในการบอกถึงการเท่ากันของอุณหภูมิของทั้งสองระบบได้ ระบบที่ 3 ที่กล่าวถึงนี้ก็คือการใช้เทอร์โมมิเตอร์มาวัดอุณหภูมิของระบบนั่นเอง

คำจำกัดความของอุณหภูมินี้รู้จักกันในชื่อของกฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์ (the zero<sup>th</sup> law of thermodynamics) เนื่องจากจะเป็นพื้นฐานของการศึกษาอุณหพลศาสตร์ แต่คำจำกัดความนี้เกิดขึ้นภายหลังกฎข้อที่หนึ่ง และกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์

เมื่อมีการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมในรูปของความร้อน อุณหภูมิของระบบจะเปลี่ยนไป ซึ่งหากระบบที่ศึกษามีอุณหภูมิสูงขึ้น สสารที่เป็นองค์ประกอบของระบบจะเกิดการเปลี่ยนแปลง โดยจะมีการขยายตัวเชิงความร้อน (thermal expansion) และถ้าการเปลี่ยนแปลงของระบบอยู่ในช่วงจุดหลอมเหลว (freezing point) หรือจุดเดือด (boiling point) ของสสาร สสารนั้นก็จะมีการเปลี่ยนแปลงสถานะ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเฉพาะการขยายตัวเชิงความร้อนของระบบที่เป็นของแข็งและของเหลว ส่วนระบบของแก๊สจะกล่าวถึงโดยละเอียดในตอนๆที่ 11.2 และ 11.3 สำหรับการเปลี่ยนสถานะของระบบและความจุความร้อนของระบบจะกล่าวถึงต่อไปในหน่วยที่ 12

### 3. การขยายตัวเชิงความร้อน

การขยายตัวเชิงความร้อนของวัตถุเกิดขึ้นเนื่องจากระยะทางเฉลี่ยระหว่างอะตอมหรือโมเลกุลที่ประกอบเป็นวัตถุนั้นมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นผลมาจากพลังงานความร้อนที่วัตถุรับเข้าไปทำให้อะตอมหรือโมเลกุลมีการสั่นด้วยแอมพลิจูดที่มากขึ้นรอบจุดสมดุล การขยายตัวเชิงความร้อนนี้หากมีขนาดไม่มากนักเมื่อเทียบกับขนาดของวัตถุ จากผลการทดลองทำให้สรุปได้ว่า

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

หรือ

$$L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0)$$

เมื่อ  $L_0$  คือความยาวของวัตถุเริ่มต้นที่อุณหภูมิ  $T_0$  และ  $L$  คือความยาวของวัตถุที่อุณหภูมิสุดท้าย  $T$  โดย  $\alpha$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงเส้น (average coefficient of linear expansions) มีหน่วยเป็น (องศาเซลเซียส)<sup>-1</sup>

ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนแปลงขนาดของวัตถุทั้งความกว้าง ความยาว และความสูง จะได้ว่าพื้นที่และปริมาตรของวัตถุก็จะเปลี่ยนไปด้วย ดังนี้

สำหรับพื้นที่

$$\Delta A = 2\alpha A \Delta T$$

และสำหรับการเปลี่ยนปริมาตรของวัตถุ

$$\Delta V = \beta V \Delta T$$

โดย  $\beta = 3\alpha$  เรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงปริมาตร (average coefficient of volume expansions) ซึ่งวัสดุต่างชนิดกันก็จะมีค่าของ  $\alpha$  และ  $\beta$  ที่แตกต่างกัน

ส่วนของเหลวนั้น ค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงปริมาตร จะมีค่าสูงกว่าของแข็งประมาณ 10 เท่า โดยทั่วไปของเหลวจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น ยกเว้นกรณีของน้ำในช่วงอุณหภูมิ 0 - 4 °C ที่จะมีปริมาตรลดลง และเมื่อเลย 4 °C ไปแล้ว จึงจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นเหมือนของเหลวอื่นๆ

---

## สรุป

การศึกษาสถานะของระบบที่มีจำนวนอนุภาคมากๆ กระทำได้ 2 วิธี คือ การศึกษาในระดับมหัพภาค ซึ่งศึกษาสมบัติโดยรวมของทั้งระบบ กับการศึกษาในระดับระดับจุลทรรศน์ ซึ่งเป็นการศึกษาอนุภาคแต่ละตัวแล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยเพื่อนำไปสู่การหาสมบัติโดยรวมของทั้งระบบ

วิธีทางอุณหพลศาสตร์เป็นวิธีที่ไม่ขึ้นกับแบบจำลองใดๆ ของโครงสร้างอะตอมและโมเลกุลของสสาร จึงจัดเป็นการศึกษาในระดับมหัพภาค ส่วนทฤษฎีจลน์ของแก๊สและกลศาสตร์เชิงสถิติซึ่งต่างก็ตั้งอยู่บนแบบจำลองของโครงสร้างอะตอมและโมเลกุลของสสาร จัดเป็นการศึกษาในระดับจุลทรรศน์ แต่กลศาสตร์เชิงสถิติจะใช้ศึกษาระบบที่สถานะสมดุลเชิงความร้อนได้ดีกว่า

ระบบเปิด หมายถึง ระบบที่มีการแลกเปลี่ยนสสารและพลังงาน กับสิ่งแวดล้อม

ระบบปิด หมายถึง ระบบที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนสสารกับสิ่งแวดล้อม

ระบบเอกเทศ หมายถึง ระบบที่ไม่สามารถแลกเปลี่ยนสสารหรือพลังงานกับสิ่งแวดล้อมได้ด้วยตัวแปรสถานะ ได้แก่ ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ ซึ่งเหล่านี้เป็นสมบัติทางมหัพภาคของระบบ

กระบวนการที่สำคัญทางอุณหพลศาสตร์ ได้แก่

- 1) กระบวนการอุณหภูมิตงตัว เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นโดยอุณหภูมิของระบบคงตัว
- 2) กระบวนการเอนทัลปีคงตัว เป็นกระบวนการเกิดขึ้น โดยที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนความร้อน ระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม
- 3) กระบวนการความดันคงตัว เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้น โดย ความดันของระบบมีค่าคงตัว
- 4) กระบวนการปริมาตรคงตัว เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้น โดยปริมาตรของระบบคงตัว

ระบบที่อยู่ในสมดุลเชิงความร้อนเดียวกันจะมีอุณหภูมิเท่ากัน

การขยายตัวเชิงความร้อนของวัตถุเกิดขึ้นเนื่องจากระยะทางเฉลี่ยระหว่างอะตอมหรือ โมเลกุล  
ที่มาประกอบเป็นวัตถุนั้นมีค่าเพิ่มขึ้น

การขยายตัวเชิงความร้อนสำหรับการเปลี่ยนความยาวของวัตถุ  $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$

การขยายตัวเชิงความร้อนสำหรับการเปลี่ยนพื้นที่ของวัตถุ  $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$

การขยายตัวเชิงความร้อนสำหรับการเปลี่ยนปริมาตรของวัตถุ  $\Delta V = \beta V \Delta T$

ค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงปริมาตรของของเหลว จะมีค่าสูงกว่าของแข็งประมาณ  
10 เท่า



# ตอนที่ 11.2

## สมการสถานะ

ในตอนนี้จะศึกษาเกี่ยวกับระบบของแก๊สมวล  $m$  ที่บรรจุอยู่ในภาชนะมีปริมาตร  $V$  ความดัน  $P$  และอุณหภูมิ  $T$  โดยจะใช้สมการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า สมการสถานะ (equation of state) ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสถานะต่างๆ ข้างต้น

โดยปกติแล้วสมการสถานะมีความซับซ้อนมาก แต่เพื่อให้สะดวกกับการศึกษาในระดับนี้ จะทำการพิจารณาระบบของแก๊สที่มีความดันต่ำ หรือระบบของแก๊สที่มีความหนาแน่นต่ำ และอุณหภูมิไม่ต่ำจนเกินไปที่เรียกว่า แก๊สอุดมคติ (ideal gas) ทั้งนี้แก๊สส่วนใหญ่ที่อุณหภูมิห้องประมาณ 25 องศาเซลเซียส และความดัน 1 บรรยากาศก็สามารถกล่าวได้ว่ามีสมบัติใกล้เคียงกับแก๊สอุดมคติ

### 1. สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ

สมการสถานะของแก๊สอุดมคติเป็นการรวมผลการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของแก๊สที่ได้จากการทดลองของ รอเบิร์ต บอยล์ (Robert Boyle) จาก ชาร์ล (Jacques Charles) และ เกย์ ลูสแซก (Gay Lussac) เข้าด้วยกัน โดยผลการทดลองดังกล่าวสามารถสรุปเป็นกฎเกี่ยวกับพฤติกรรมของแก๊สดังนี้

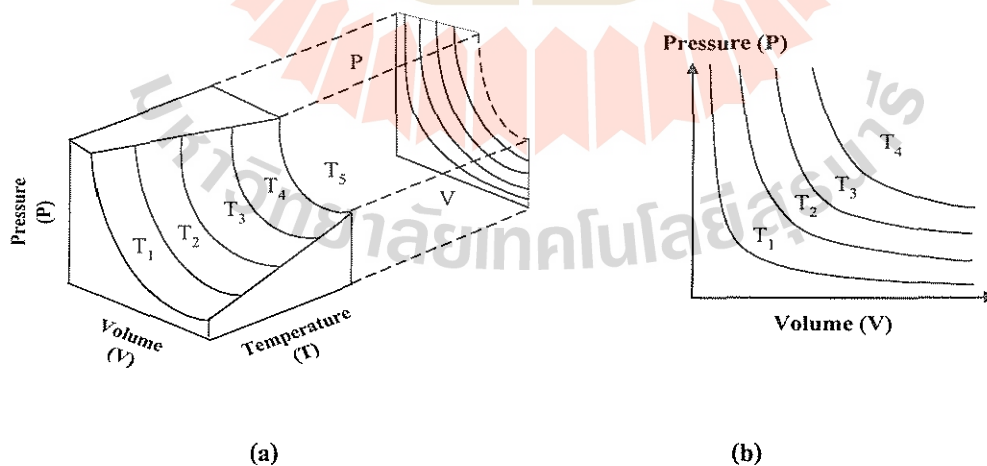
1. กฎของบอยล์ (Boyle's law) ซึ่งกล่าวว่า ที่อุณหภูมิคงตัว ความดันของแก๊สจะเป็นสัดส่วนผกผันกับปริมาตร หรือเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า  $PV = \text{ค่าคงตัว}$
2. กฎของชาร์ล (Charles' law) ที่กล่าวว่า ที่ความดันคงตัว ปริมาตรของแก๊สจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ หรือเขียนเป็นสมการ  $\frac{V}{T} = \text{ค่าคงตัว}$
3. กฎของเกย์ ลูสแซก (Gay Lussac's law) กล่าวว่า ที่ปริมาตรคงตัว ความดันของแก๊สจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ หรือ  $\frac{P}{T} = \text{ค่าคงตัว}$

เมื่อรวมผลของกฎทั้งสามเข้าด้วยกัน เพื่ออธิบายระบบของแก๊สอุดมคติแล้วจะได้สมการสถานะของแก๊สอุดมคติเป็น

$$PV = nRT \quad (11.1)$$

โดยจำนวนโมล  $n$  ซึ่งเป็นจำนวนกรัมโมเลกุล สามารถหาได้จากมวลเป็นกรัมทั้งหมดของแก๊ส ( $m$ ) หารด้วยมวลโมเลกุลของแก๊ส ( $M$ ) หรือ หาจากอัตราส่วนของจำนวนโมเลกุลของทั้งหมดของแก๊ส ( $N$ ) กับเลขอวอกาโดร (Avogadro's number,  $N_A$ ) ซึ่งมีค่า  $= 6.02 \times 10^{23}$  โมเลกุล/โมล และถ้าระบบที่พิจารณาอยู่ที่ความดัน 1 บรรยากาศ และอุณหภูมิ 273 K ก็สามารถหาจำนวนโมลได้จากอัตราส่วนระหว่างปริมาตรของแก๊ส  $V$  ที่พิจารณากับปริมาตรมาตรฐาน 22.4 ลิตร หรือ  $0.0224 \text{ m}^3$  ส่วน  $R$  นั้นเป็นค่าคงตัวที่มีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุกแก๊ส และเรียกว่า universal gas constant มีค่า  $R = 8.31451 \text{ J}/(\text{mol})(\text{K})$

หากนำสมการสถานะของแก๊สอุดมคติมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ จะได้แกนแต่ละแกนเป็นความดัน ( $P$ ) ปริมาตร ( $V$ ) และอุณหภูมิ ( $T$ ) ตามลำดับ ซึ่งจะได้เป็นกราฟสามมิติที่เรียกว่า แผนภาพ  $P$ - $V$ - $T$  ดังแสดงในรูปที่ 11.1 (a) ส่วนรูปที่ 11.1 (b) นั้น จะเป็นการแยกพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับปริมาตร โดยที่อุณหภูมิคงตัว ซึ่งถ้าย้อนกลับไปดูกฎเกี่ยวกับพฤติกรรมของแก๊ส กราฟนี้จะแสดงถึงความสัมพันธ์ตามกฎของบอยล์ โดยผลคูณระหว่าง  $PV = \text{ค่าคงตัว}$  จึงได้กราฟรูปไฮเพอร์โบลา (hyperbola) และเส้นกราฟไฮเพอร์โบลาแต่ละเส้นจะสอดคล้องค่าของอุณหภูมิที่คงตัวแต่ละค่าที่เรียกว่า ไอโซเทอร์มัล (isothermal) หรือไอโซเทอร์ม (isotherm) โดยที่อุณหภูมิมีค่ามากขึ้น เส้นกราฟก็จะห่างจากแกนมากขึ้น ซึ่งในรูปที่ 11.1 (b) นั้น เส้นไอโซเทอร์มัลแต่ละเส้นจะมีอุณหภูมิต่างกันโดยที่  $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$



รูปที่ 11.1 (a) แสดงแผนภาพ  $P$ - $V$ - $T$  ในสามมิติ และ  
(b) ฉายาของแผนภาพ  $P$ - $V$  ในสองมิติ ซึ่งแต่ละเส้นคือไอโซเทอร์ม

ตัวอย่างที่ 11.1 จงหาความดันของแก๊ส He จำนวน 0.85 โมล ซึ่งมีปริมาตร 0.012 m<sup>3</sup> ที่อุณหภูมิ 273 K และจงหาปริมาตรของแก๊สนี้ที่ความดันเดียวกัน เมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนไปเป็น 580 K

วิธีทำ

จากสมการสถานะของแก๊สอุดมคติ จะได้ว่า

$$P = \frac{nRT}{V}$$

จากโจทย์  $n = 0.85 \text{ mol}$  ,  $V = 0.012 \text{ m}^3$  และ  $T = 273 \text{ K}$

$$\therefore P = \frac{(0.85)(8.31)(273)}{0.012} = 160 \text{ kPa}$$

ที่ความดันเท่าเดิม  $P_1 = P_2$  และจำนวนโมลเท่าเดิม

$$P_1 V_1 = nRT_1 \tag{1}$$

$$P_2 V_2 = nRT_2 \tag{2}$$

นำ (2) ÷ (1)

จะได้

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = (0.012) \left( \frac{580}{273} \right) = 0.0255 \text{ m}^3$$

ตอบ

## 2. สมการสถานะของแวน เดอร์ วาลส์

สมการสถานะของแวน เดอร์ วาลส์ (Van der Waal's equation of state) เป็นสมการสถานะของแก๊สที่แท้จริง ที่พิจารณาถึงปริมาตร  $V$  ของระบบว่าควรจะเป็นปริมาตรว่างเปล่าที่แท้จริงที่ได้หักเอาปริมาตรที่ถูกแทนที่โดยโมเลกุลของแก๊สออกไปแล้ว เนื่องจากแก๊สแต่ละโมเลกุลล้วนมีปริมาตร ไม่ได้เป็นจุดที่ไม่มีมีความกว้าง ไม่มีมีความยาวและไม่มีมีความหนา นั่นคือ จะแทน  $V$  ด้วย  $V - nb$  เมื่อ  $b$  คือค่าคงตัวมีค่าเท่ากับจำนวนโมเลกุลของแก๊สคูณด้วยปริมาตรของแก๊ส 1 โมเลกุล

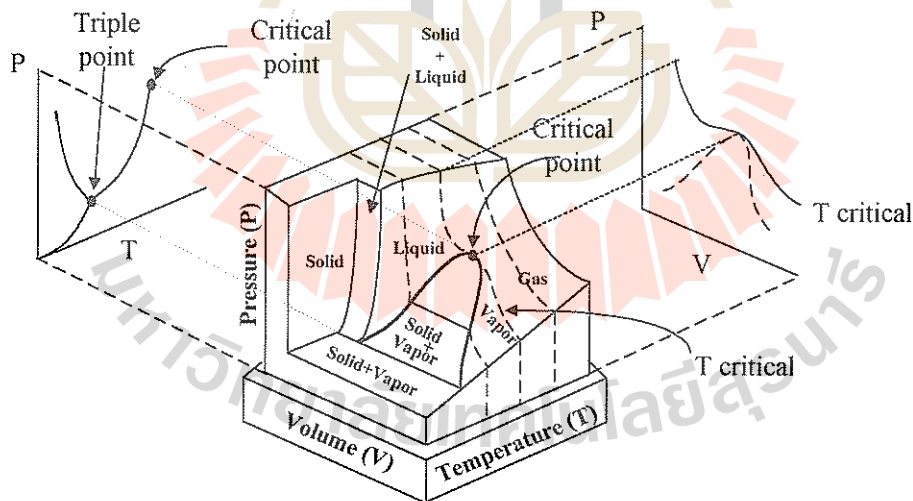
นอกจากนี้ยังพิจารณาอีกถึงผลของแรงกระทำระหว่างโมเลกุลว่า โดยกล่าวว่า เมื่อโมเลกุลแก๊สอยู่ใกล้กัน จะมีแรงดึงดูดกันระหว่างโมเลกุลที่เรียกว่า แรงแวน เดอร์ วาลส์ (Van der Waal's force) ซึ่งแรงกระทำระหว่างโมเลกุลนี้จะทำให้โอกาสที่แต่ละโมเลกุลชนกับผนังของภาชนะมีน้อยลง ส่งผลให้ความดันที่วัดได้มีค่าน้อยกว่าความเป็นจริง ดังนั้นจึงควรชดเชยค่าความดันที่ลดลงนี้ด้วยการแทนค่า  $P$  ด้วย  $P + \frac{na}{V^2}$

การปรับค่าของปริมาตรและความดันตามแนวคิดนี้ทำให้สามารถเขียนสมการสถานะได้ใหม่เป็น

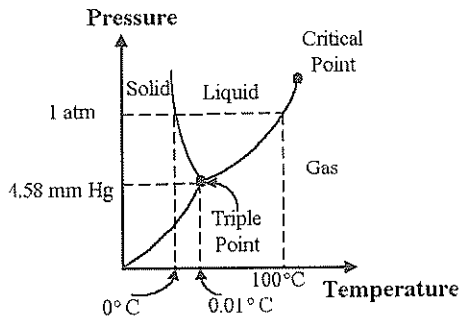
$$\left( P + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (11.2)$$

ซึ่งรู้จักกันในชื่อของสมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ สำหรับแก๊ส  $n$  โมล และสมการนี้สามารถใช้อธิบายผลการทดลองของแก๊สในธรรมชาติที่อุณหภูมิต่ำได้ดีกว่าสมการของแก๊สอุดมคติ

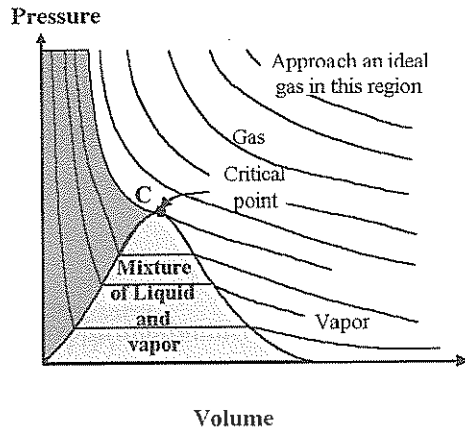
ถ้าพิจารณาแผนภาพ  $P-V-T$  ของแก๊สจริง จะเขียนแผนภาพได้ดังในรูปที่ 11.2 การศึกษาแผนภาพนี้สามารถช่วยให้เข้าใจว่าการเปลี่ยนแปลงค่าของความดัน ปริมาตร และอุณหภูมิว่ามีผลกับการเปลี่ยนสถานะของสสารอย่างไร แผนภาพ  $P-V-T$  ที่ได้จะมีลักษณะเป็นสามมิติ ซึ่งค่อนข้างซับซ้อน แต่หากแยกแผนภาพ  $P-V-T$  ออกเป็นแผนภาพระหว่าง  $P-T$  และ  $P-V$  ดังรูปที่ 11.3 (a) และ (b) แล้ว ก็ทำให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 11.2 แสดงแผนภาพสามมิติสำหรับสมการสถานะของสสาร



(a)



(b)

รูปที่ 11.3 แสดงฉายาของแผนภาพ P-T และ P-V จากแผนภาพสามมิติ P-V-T ในรูปที่ 11.2

ในกรณีของรูปที่ 11.3 (a) เป็นแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับอุณหภูมิ โดยในบริเวณที่เขียนว่า solid แสดงว่าที่ความดันและอุณหภูมิในบริเวณนั้นจะทำให้สสารมีสถานะเป็นของแข็ง ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่าที่ความดัน 1 atm และอุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส สสารนี้จะมีสมบัติเป็นของแข็ง ส่วนค่าความดันและอุณหภูมิที่อยู่ในบริเวณที่เขียนว่า liquid และ gas ก็จะทำให้สสารชนิดนี้มีสมบัติเป็นของเหลวและแก๊สตามลำดับ ที่บริเวณที่เส้นทั้งสามมาบรรจบกันเป็นจุดเรียกว่าจุดร่วมสาม (triple point) ซึ่งจากรูปที่ 11.3 (a) คือจุดที่ความดันมีค่าเท่ากับ 4.58 มิลลิเมตรปรอทและอุณหภูมิมี่ค่าเท่ากับ 0.01 องศาเซลเซียส ซึ่งเป็นจุดที่แสดงว่าสสารจะมีสถานะเป็นทั้งของแข็ง ของเหลว และแก๊สรวมกันในขณะเดียวกันได้ แผนภาพนี้อาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า แผนภาพเฟส (phase diagram) เนื่องจากการแสดงถึงสถานะของสสารที่ความดันและอุณหภูมิต่างๆ

รูปที่ 11.3 (b) เป็นแผนภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับปริมาตร โดยแต่ละเส้นเป็นเส้นไอโซเทอร์มัล ค่าความดันและปริมาตรในบริเวณที่แรงสืทีบจะเป็นบริเวณที่สสารผสมกันอยู่ทั้งสองสถานะคือทั้งของแข็งและของเหลว หากค่าความดันและปริมาตรที่พิจารณาอยู่ในบริเวณที่แรงสือ่อน สสารผสมกันอยู่ก็จะเป็นการผสมกันระหว่างของเหลวและแก๊ส ส่วนค่าความดันและปริมาตรที่อยู่ในบริเวณที่ไม่ได้แรงงั้นจะทำให้สสารเป็นได้เพียงสถานะเดียวคือแก๊สเท่านั้น

จากแผนภาพทั้งสองให้สังเกตจุดวิกฤต (critical point , C) ซึ่งเป็นจุดที่เส้นกราฟที่กั้นระหว่างสถานะของเหลวกับแก๊สสิ้นสุดลง ดังนั้นเมื่อผ่านจุดนี้ไปแล้วจะพบว่าแก๊สจะมีความหนาแน่นเท่ากับของเหลวแต่สถานะยังคงเป็นแก๊สอยู่ ถึงแม้ว่าจะเพิ่มความดันให้มากเพียงใดก็ตาม ก็ไม่สามารถเปลี่ยนสถานะจากแก๊ส ไปเป็นของเหลวได้เหนือจุดวิกฤต

### 3. งาน

งาน หมายถึง การแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างระบบและสิ่งแวดล้อม ถ้าแรง  $F$  ทำให้เกิดการกระจัดเพียงเล็กน้อย  $dy$  จะได้งานที่ทำโดยแรงนี้คือ

$$dW = F \cdot dy \quad (11.3)$$

ถ้ามีแรงกระทำโดยระบบต่อสิ่งแวดล้อมแล้วทำให้เกิดการกระจัด งานที่ทำโดยระบบหรือกระทำต่อระบบเรียกว่า งานภายนอก (external work) เช่น แก๊สที่บรรจุในกระบอกสูบที่ความดันสม่ำเสมอ เมื่อแก๊สขยายตัวจะผลักลูกสูบทำให้เกิดงานภายนอกต่อสิ่งแวดล้อม ในขณะที่งานที่ทำโดยบางส่วนของระบบต่อส่วนอื่นของระบบเดียวกันเรียกว่า งานภายใน (internal work) เช่น มีแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลด้วยกันภายในแก๊ส เมื่อแก๊สเกิดการขยายตัว งานที่ทำเพื่อต่อต้านการดึงดูดระหว่างกันของโมเลกุลเรียกว่า งานภายใน

การหางานที่เกิดขึ้นกับกระบวนการทางอุณหพลศาสตร์ ให้พิจารณาแก๊สที่บรรจุในกระบอกสูบ ซึ่งมีลูกสูบเคลื่อนที่เข้าออกได้ แก๊สเป็นระบบ โดยมีลูกสูบและกระบอกสูบเป็นสิ่งแวดล้อม ในตอนเริ่มต้น ระบบอยู่ในสถานะสมดุลกับสิ่งแวดล้อม โดยมีความดัน  $P_i$  และปริมาตร  $V_i$  ความร้อนอาจไหลเข้าสู่ระบบ แล้วทำให้เกิดงานที่ทำโดยระบบเนื่องจากการขยายตัวของแก๊ส หรือความร้อนอาจไหลออกจากกระบอก แล้วทำให้เกิดงานที่ทำต่อระบบโดยการอัดลูกสูบเข้ามา ซึ่งเปลี่ยนไปสู่สถานะสมดุลสุดท้ายด้วยความดัน  $P_f$  และปริมาตร  $V_f$

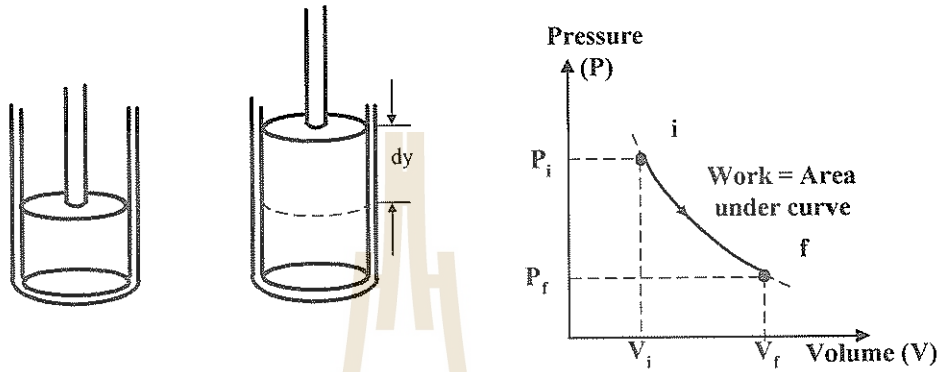
ในกรณีที่แก๊สขยายตัวแล้วเกิดแรงกระทำต่อลูกสูบ งานที่ทำโดยแก๊สเพื่อให้ลูกสูบเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยเป็นระยะ  $dy$  คือ  $dW = F dy$  ถ้า  $A$  เป็นพื้นที่หน้าตัดของลูกสูบและ  $P$  เป็นความดันที่เกิดขึ้นในช่วงที่ลูกสูบเคลื่อนที่เป็นระยะ  $dy$  ดังนั้น

$$dW = P A dy = P dV \quad (11.4)$$

เมื่อ  $dV = A dy$  เป็นปริมาตรที่เพิ่มขึ้นของแก๊ส และแรง  $F = P A$  ความดันในกรณีนี้ไม่คงตัว แต่จะเปลี่ยนไปเมื่อปริมาตรเปลี่ยน ดังนั้นการคำนวณหางานที่ทำทั้งหมด  $W$  โดยแก๊สต่อลูกสูบหาได้จากการอินทิเกรต

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (11.5)$$

งานที่ทำนี้จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นกราฟของแผนภาพ P - V ที่อุณหภูมิกงตัว ซึ่งระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้นไปสู่สถานะสุดท้าย โดยจะขึ้นกับทางเดินระหว่างสถานะทั้งสองนี้



รูปที่ 11.4 แสดงการทำงานของแก๊สในกระบอกสูบ และแผนภาพ P - V

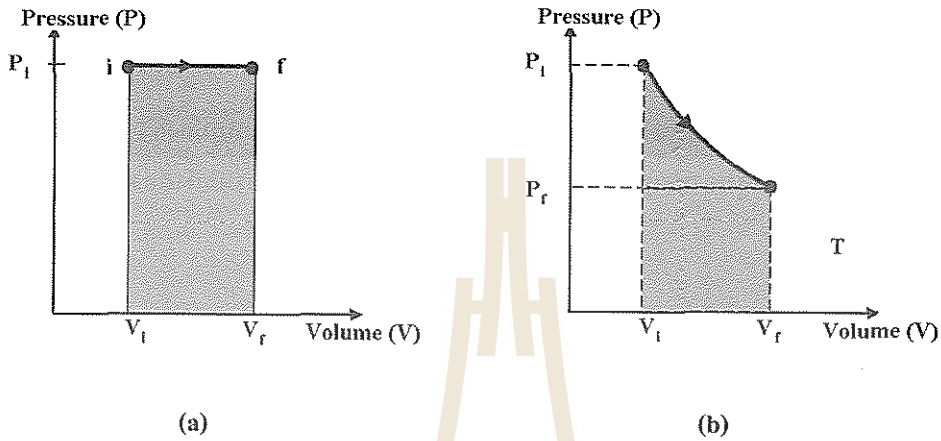
ในกระบวนการปริมาตรคงตัว ปริมาตรมีค่าคงตัว ดังนั้น  $dV = 0$  ทำให้ไม่มีงานเกิดขึ้น ไม่มี ส่วนใดของสิ่งแวดล้อมเกิดการเคลื่อนที่ และระบบไม่ได้ทำงาน หรือ  $W = 0$

ในกระบวนการความดันคงตัว ความดันมีค่าคงตัวคือเท่ากับ P ดังนั้น งานที่ทำโดยระบบจึงเท่ากับ

$$W = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) = P\Delta V \quad (11.6)$$

หากพิจารณาการเปลี่ยนปริมาตร  $\Delta V$  มีเครื่องหมายเป็นบวก หมายถึง การขยายตัวของระบบ นั่นคือ  $V_f$  มีค่ามากกว่า  $V_i$  งานที่ทำจึงมีเครื่องหมายบวกด้วย และถ้า  $\Delta V$  เป็นลบซึ่งหมายถึงการหดตัวของระบบหรือการอัด  $V_f$  มีค่าน้อยกว่า  $V_i$  งานที่ทำโดยระบบจะมีเครื่องหมายลบ

ในกระบวนการอุณหภูมิกงตัว อุณหภูมิไม่มีการเปลี่ยนแปลง การขยายตัวของแก๊สอุดมคติสามารถเขียนเป็นแผนภาพ P - V ได้ดังในรูปที่ 11.5 (b) โดยเส้นไอโซเทอร์มแสดงถึงปริมาตรที่เปลี่ยนไป โดยเพิ่มขึ้นจาก  $V_i$  ไปสู่  $V_f$  และความดันที่ลดลง  $P_i$  ไปสู่  $P_f$  ในขณะที่อุณหภูมิกงตัว



รูปที่ 11.5 (a) แสดงงานที่ทำโดยระบบจากกระบวนการความดันคงตัว มีค่าเท่ากับ  $P_i(V_f - V_i)$  ซึ่งเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยม (b) แสดงการขยายตัวของแก๊สอุดมคติในกระบวนการอุณหภูมิคงตัว

การคำนวณงานที่ทำโดยการขยายตัวของแก๊สในกระบวนการอุณหภูมิคงตัว ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งของแผนภาพ  $P - V$  นั้น ให้แทนค่า  $P$  จากสมการ (11.1) คือ  $PV = nRT$  หรือ  $P = nRT/V$  จะได้

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT(\ln V_f - \ln V_i)$$

หรือ 
$$W = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (11.7)$$

โดย  $W$  มีค่าเป็นบวกถ้า  $V_f > V_i$  และเป็นลบเมื่อ  $V_f < V_i$

นอกจากนี้ในกระบวนการแอดิแบติกซึ่งเป็นกระบวนการที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม ความดันและปริมาตรมีการเปลี่ยนแปลงสัมพันธ์กัน โดย  $PV^\gamma$  มีค่าคงตัว โดยที่  $\gamma = C_p/C_v$ , เมื่อ  $C_p$  และ  $C_v$  เป็นความจุความร้อนที่ความดันและปริมาตรคงตัวตามลำดับ (จะได้กล่าวถึงต่อไปในหัวข้อที่ 12.2.2) ดังนั้นหากแทนค่าลงไปจะได้

$$P = \frac{P_i V_i^\gamma}{V^\gamma}$$

$$\therefore W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \frac{P_i V_i}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_f}{V_i} \right)^{\gamma - 1} \right] \quad (11.8)$$

ตัวอย่างที่ 11.2 จงหางานที่ทำในการอัดแก๊สออกซิเจน 2 กรัม ที่อุณหภูมิ 273 K ให้มีปริมาตรลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของปริมาตรเดิม โดยกระบวนการต่อไปนี้

- (a) กระบวนการอุณหภูมิคงตัว
- (b) กระบวนการความดันคงตัว

โดยถือว่าออกซิเจนเป็นแก๊สอุดมคติ มีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 32

วิธีทำ

- (a) งานที่ทำโดยกระบวนการอุณหภูมิคงตัว หาได้จากสมการ (11.7) คือ

$$W = nRT \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

เนื่องจากออกซิเจนมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 32 ดังนั้น จำนวนโมลคือ  $n = \frac{2}{32} = 0.0625$  และ

$$\begin{aligned} W &= (0.0625)(8.31)(273) \ln \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= -98.3 \text{ J} \end{aligned}$$

เครื่องหมายลบ บอกให้ทราบว่า มีงานจากภายนอกกระทำต่อแก๊ส

- (b) จากสมการ (11.6) สำหรับกระบวนการความดันคงตัว

$$W = P(V_f - V_i) = P \left( \frac{V_i}{2} - V_i \right) = -\frac{PV_i}{2}$$

และเนื่องจาก

$$P_i V_i = nRT_i$$

หรือ

$$V_i = \frac{nRT_i}{P}$$

$$\therefore W = -\frac{1}{2} nRT_i$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} (0.0625)(8.31)(273) \\ &= -70.9 \text{ J} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 11.3 แก๊สฮีเลียมที่อุณหภูมิ 310 K มีความดันและปริมาตรเริ่มต้นที่ 202 kPa และ 48 L ตามลำดับ เมื่ออุณหภูมิคงตัวแก๊สขยายตัวเป็น 106 L หลังจากนั้นจึงถูกอัดด้วยความดันคงตัวเพื่อให้อุณหภูมิกลับสู่ปริมาตร 48 L เท่าเดิม จงหางานที่ทำในแต่ละกระบวนการ งานรวม และจงหาอุณหภูมิสุดท้ายของแก๊ส

วิธีทำ

ในตอนเริ่มต้น เป็นกระบวนการที่อุณหภูมิคงตัว จึงใช้สมการ (11.7) และเนื่องจาก

$$nRT = P_i V_i = (202 \text{ kPa})(48 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 9.7 \text{ kJ}$$

ดังนั้น

$$W = (9.7 \text{ kJ}) \ln\left(\frac{106}{48}\right) = 7.7 \text{ kJ}$$

และเนื่องจาก

$$P_f V_f = P_i V_i \quad \text{หรือ} \quad P_f = \frac{P_i V_i}{V_f} = (202 \text{ kPa}) \frac{48}{106} = 91 \text{ kPa}$$

ดังนั้น ความดันหลังจากกระบวนการอุณหภูมิคงตัวสิ้นสุดลงคือ 91 kPa ต่อมาเป็นกระบวนการที่ความดันคงตัว จึงใช้สมการ (11.6) คือ

$$W = P(V_f - V_i) = (91 \text{ kPa})[(48 - 106) \times 10^{-3} \text{ m}^3] = -5.3 \text{ kJ}$$

งานที่ทำทั้งหมดจึงเท่ากับ  $7.7 + (-5.3) = 2.4 \text{ kJ}$

เนื่องจากสุดท้ายแก๊สกลับมาสู่ปริมาตรเดิม คือ 48 L ดังนั้นอุณหภูมิสุดท้ายของแก๊สคือ

$$T_f = T_i \frac{P_f}{P_i} = 310 \times \frac{91}{202} = 140 \text{ K}$$

## สรุป

สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ คือ

$$PV = nRT$$

แต่สมการสถานะของแก๊สที่แท้จริง จะสอดคล้องกับสมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ สำหรับแก๊ส  $n$  โมล คือ

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

งานที่ทำทั้งหมด โดยแก๊สต่อลูกสูบหาได้จากการอินทิเกรตสมการ

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

ในกระบวนการความดันคงตัว งานที่ทำโดยระบบเท่ากับ

$$W = P \int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i) = P\Delta V$$

ในกระบวนการอุณหภูมิคงตัว งานที่ทำโดยระบบเท่ากับ

$$W = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

ในกระบวนการแอดิเอแบติก งานที่ทำโดยระบบเท่ากับ

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \frac{P_i V_i}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma - 1} \right]$$

## ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส

การชนกันของอนุภาคจะเกิดการถ่ายเทพลังงานบางส่วนระหว่างอนุภาคนั้นๆ ซึ่งในกรณีของแก๊สที่อยู่ภายในภาชนะปิด การชนกันระหว่างโมเลกุลแก๊สภายในภาชนะปิดจะมีการถ่ายเทพลังงานระหว่างโมเลกุล พลังงานที่กล่าวถึงนี้เป็นพลังงานเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของอนุภาค นั่นก็คือพลังงานจลน์นั่นเอง แต่ถ้าในระบบที่พิจารณาโมเลกุลอยู่เป็นจำนวนมาก การหาพลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุลกระทำได้ยาก ดังนั้นจึงใช้เป็นพลังงานจลน์เฉลี่ย ซึ่งการคำนวณจะขึ้นอยู่กับระดับขั้นความเสรีของแต่ละโมเลกุล

### 1. ความนำ

ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส (kinetic theory of gases) เป็นทฤษฎีที่เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างโมเลกุลของแก๊สแต่ละตัวกับสมบัติทั่วไปของแก๊ส เช่น อุณหภูมิ ความดัน พลังงาน หรืออื่นๆ โดยตั้งอยู่บนข้อสมมติพื้นฐาน ดังต่อไปนี้

1. แก๊สประกอบด้วยอนุภาคขนาดเล็กมากๆ เรียกว่า โมเลกุล มีลักษณะเป็นก้อนกลมและเหมือนกันทุกประการทั้งมวลและขนาด โดยที่แก๊สแต่ละชนิดจะมีสภาพแตกต่างกันไป โมเลกุลของแก๊สถือว่าแข็งเกร็ง และยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ (perfectly elastic)
2. แต่ละโมเลกุลที่บรรจุในภาชนะจะมีการเคลื่อนที่ในทิศทางต่างๆ กัน เป็นแบบสุ่ม ด้วยความเร็วที่เป็นไปได้ทุกค่า และสามารถอธิบายได้ตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
3. การชนกับโมเลกุลอื่นๆ รวมทั้งผนังของภาชนะ ทำให้อัตราเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของแก๊สเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา อย่างไรก็ตามการชนกันนี้มิได้มีผลต่อความหนาแน่นของแก๊ส เพราะโมเลกุลเหล่านี้เคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลาไม่ได้รวมกันที่จุดใดจุดหนึ่งเสมอ
4. การชนกันระหว่างโมเลกุลที่เคลื่อนที่กับผนังภาชนะที่บรรจุ ทำให้เกิดความดันซึ่งมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยน โมเมนตัมต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

5. การชนกันทุกครั้งระหว่างโมเลกุลของแก๊สกับผนังภาชนะที่บรรจุ หรือการชนกันระหว่างโมเลกุลของแก๊สด้วยกันเอง ถือว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ ไม่มีการสูญเสียพลังงาน และมีการอนุรักษ์โมเมนตัม

6. ไม่มีแรงกระทำอื่นใดกระทำกับ โมเลกุลของแก๊ส นอกจากแรงที่เกิดขึ้นระหว่างการชนกันของโมเลกุลเท่านั้น จึงถือว่าพลังงานของแก๊สมีเพียงพลังงานจลน์เท่านั้น

7. วิถีเสรี (free path) คือ ระยะที่โมเลกุลเดินทางเป็นเส้นตรงก่อนเกิดการชนขึ้น ซึ่งแต่ละโมเลกุลสามารถเกิดการชนได้หลายครั้ง ค่าเฉลี่ยระยะทางที่โมเลกุลเคลื่อนที่ระหว่างการชนที่ต่อเนื่องกัน เรียกว่า วิถีเสรีเฉลี่ย (mean free path)

8. ระยะเวลาที่ใช้ในการชนกันระหว่างโมเลกุลคู่หนึ่งๆ ถือว่าน้อยมาก และอาจตัดทิ้งได้เมื่อเทียบกับระยะเวลาของการเคลื่อนที่ในวิถีเสรี

9. เนื่องจากโมเลกุลมีขนาดเล็กมาก เมื่อเทียบกับปริมาตรทั้งหมดของแก๊ส จึงถือว่าโมเลกุลมีลักษณะเป็นจุด (point masses) ดังนั้นปริมาตรที่ครอบครองโดยโมเลกุลจึงน้อยมากและสามารถตัดทิ้งได้

10. ระยะห่างระหว่างโมเลกุลคู่หนึ่งๆ ในแก๊สจะมากกว่าในกรณีของของแข็งหรือของเหลว

การใช้ข้อสมมติพื้นฐานเหล่านี้เพื่อเชื่อมโยงระหว่างโมเลกุลของแก๊สแต่ละตัวกับสมบัติทั่วไปของแก๊ส เช่น ความดัน ให้พิจารณาระบบของแก๊สจำนวน  $N$  โมเลกุล บรรจุอยู่ในภาชนะรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ยาวด้านละ  $\ell$  ถ้าโมเลกุลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v$  และองค์ประกอบของความเร็วในแกน  $x$  เป็น  $v_x$  องค์ประกอบของความเร็วในแกน  $y$  เป็น  $v_y$  และองค์ประกอบของความเร็วในแกน  $z$  เป็น  $v_z$  ตามลำดับ เมื่อโมเลกุลชนกับผนังของภาชนะโดยการชนกันนี้เป็นการชนแบบยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ ขนาดของความเร็วไม่เปลี่ยนแปลง จะมีเพียงความเร็วในทิศทางที่ตั้งฉากกับผนังเท่านั้นที่มีการเปลี่ยนทิศทางคือจะมีทิศตรงกันข้าม หากพิจารณาผนังด้านข้างของภาชนะความเร็วในทิศทางที่ตั้งฉากกับผนังจะอยู่ในแนวแกน  $x$  เมื่อเกิดการชนขึ้น  $v_x$  จะมีการเปลี่ยนทิศทางไปในทิศที่ตรงข้าม แต่องค์ประกอบของความเร็ว  $v_y$  และ  $v_z$  ไม่มีการเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง ถ้าโมเมนตัมของโมเลกุลก่อนชนในแนวแกน  $x$  คือ  $mv_x$  จะได้โมเมนตัมหลังชนคือ  $-mv_x$  ดังนั้น โมเมนตัมของโมเลกุลเปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ

$$\Delta p_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

จากการที่ไม่มีแรงภายนอกอื่นใดมากระทำกับระบบ ระบบจึงมีการอนุรักษ์โมเมนตัม ทำให้สรุปได้ว่า ผลต่างของโมเมนตัมรวมหลังการชนกับโมเมนตัมรวมก่อนการชนมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ถ้าโมเมนตัมของโมเลกุลเปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับ  $-2mv_x$  โมเมนตัมของผนังของภาชนะที่รับไว้จะมีค่าเท่ากับ  $2mv_x$

ในการชนครั้งต่อไป หากเกิดขึ้นซ้ำที่ผนังด้านเดิม โมเลกุลจะต้องเดินทางเป็นไปอีกด้านหนึ่งของภาชนะเป็นระยะ  $\ell$  แล้วเดินทางกลับ  $\ell$  รวมเป็นระยะ  $2\ell$  ซึ่งจะใช้เวลา  $\Delta t = \frac{2\ell}{v_x}$  และแรงที่กระทำต่อผนังภาชนะในระยะเวลา  $\Delta t$  คือ  $F$  ดังนั้น

$$F\Delta t = \Delta p = 2mv_x$$
$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{\ell} \quad (11.9)$$

เนื่องจากมีแก๊สทั้งหมด  $N$  โมเลกุล แรงที่กระทำต่อผนังภาชนะจึงเป็นผลรวมของแรงของแต่ละโมเลกุล ความดันบนผนังภาชนะจึงมีค่าเท่ากับ

$$P = \frac{\Sigma F}{A} = \frac{m}{\ell^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2) \quad (11.10)$$

โดยที่  $v_{x1}, v_{x2}, \dots$  เป็นความเร็วในแนวแกน  $x$  ของโมเลกุลตัวที่ 1, 2, ... ส่วนค่าเฉลี่ยของ  $v_x^2$  คือ

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots}{N}$$

และ  $V = \ell^3$  ดังนั้นสามารถเขียนได้เป็น

$$P = \frac{Nm}{V} \overline{v_x^2} \quad (11.11)$$

เนื่องจาก  $v^2$  คือขนาดของความเร็วยกกำลังสองซึ่งเท่ากับผลรวมองค์ประกอบของความเร็วทั้งสามแกน  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  และโมเลกุลทุกตัวมีการเคลื่อนที่แบบสุ่ม ซึ่งระบุไม่ได้ว่าไปในทิศทางใด โดยเฉพาะค่าเฉลี่ยในแต่ละทิศทางจึงถือว่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

ความดันที่กระทำบนผนังภาชนะจึงเท่ากับ

$$P = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \overline{v^2} \quad (11.12)$$

เมื่อ  $Nm$  เป็นมวลรวมของโมเลกุล ซึ่งเท่ากับ  $nM$  โดยที่  $n$  คือจำนวนโมล และ  $M$  คือน้ำหนักโมเลกุลของแก๊ส ดังนั้น

$$P = \frac{1}{3} \frac{nM}{V} \overline{v^2} \quad (11.13)$$

ทำให้เขียนค่าความดันในเทอมของพลังงานจลน์ของโมเลกุลได้เป็น

$$P = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left( \frac{1}{2} \overline{mv^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \overline{E_k} \quad (11.14)$$

นั่นคือ ความดันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร และค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุล

ระบบข้างต้นเป็นการเชื่อมโยงระหว่างสมบัติทั่วไปของแก๊สคือความดันและปริมาตร ซึ่งเป็นปริมาณมหัพภาค เข้ากับปริมาณจุลภาคคือความเร็วเฉลี่ยของโมเลกุล โดยตั้งอยู่บนข้อสมมติพื้นฐาน ซึ่งไม่ได้รับการชกนกันระหว่างแต่ละโมเลกุลเลย เนื่องจากความดันจะเป็นผลที่เกิดขึ้นจากการชนระหว่างโมเลกุลของแก๊สกับผนังภาชนะเท่านั้น และจากสมมติฐานที่ว่าโมเลกุลเป็นอนุภาคที่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งถือได้ว่าเป็นจุดและพลังงานที่พิจารณาเพียงพลังงานจลน์เท่านั้น ดังนั้น พลังงานภายใน  $U$  ของระบบจึงเป็นผลรวมของพลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุล

$$U = \frac{1}{2} N \overline{mv^2}$$

เนื่องจากความดันของแก๊ส และพลังงานภายในต่างก็เป็นฟังก์ชันขึ้นกับ  $v^2$  ดังนั้นปริมาณทั้งสองจึงสัมพันธ์กันดังนี้

$$PV = \frac{1}{3} N \overline{mv^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} N \overline{mv^2} \right)$$

$$\therefore PV = \frac{2}{3} U \quad (11.15)$$

จากสมการสถานะของแก๊ส  $PV = nRT$  จะได้ว่า

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad (11.16)$$

นั่นคือ พลังงานภายในของแก๊สเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์

ในระบบที่ประกอบด้วย  $N$  โมเลกุล จำนวนโมล  $n$  ของแก๊สจะหาได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนโมเลกุลกับเลขอาโวกาโดร ซึ่งหมายถึงจำนวนโมเลกุลของแก๊สที่มีอยู่ในสาร 1 โมล เมื่อ

แทนค่า  $n = \frac{N}{N_A}$  จะได้

$$U = \frac{3N}{2N_A} RT$$

ค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ กำหนดโดยพลังงานภายในของแก๊สหารด้วยจำนวนโมเลกุล

$$\bar{E}_k = \frac{U}{N} = \frac{3R}{2N_A} T$$

หรือ 
$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT \quad (11.17)$$

โดยที่  $k = \frac{R}{N_A}$  เรียกว่าค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ (Boltzmann constant) มีค่าเท่ากับ  $1.38 \times 10^{-23}$  J/K ซึ่งเป็นค่าคงตัวต่อโมเลกุล

จากสมการ (11.17) จะเห็นได้ว่า พลังงานจลน์ของโมเลกุลเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นพลังงานจลน์โดยเฉลี่ยของโมเลกุลจะเพิ่มขึ้น หรือความเร็วของโมเลกุลจะเพิ่มขึ้นนั่นเอง ความเร็วที่กล่าวถึงนี้เป็นค่ารากกำลังสองเฉลี่ย (root-mean square) ของอัตราเร็ว เขียนแทนด้วย  $v_{rms}$

$$v_{rms} = \sqrt{v^2} \quad (11.18)$$

ซึ่งเป็นปริมาณแสดงการกระจายความเร็วของโมเลกุล  $v_{rms}$  ไม่ใช่อัตราเร็วเฉลี่ย แต่เป็นรากที่สองของค่าเฉลี่ยอัตราเร็วกกำลังสอง เนื่องจาก  $\bar{E}_k = \frac{1}{2} m v^2$  ดังนั้น จากสมการ (11.17) จะได้

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$v^2 = \frac{3kT}{m}$$

หรือ 
$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (11.19)$$

ดังนั้น  $v_{rms}$  จึงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับรากที่สองของอุณหภูมิสัมบูรณ์และเป็นสัดส่วนผกผันกับรากที่สองของมวลของโมเลกุล

อย่างไรก็ตาม สมการ (11.17) และ (11.19) มีข้อจำกัดคือ ไม่สามารถใช้ได้กับระบบที่อุณหภูมิมิมีค่าต่ำมาก หรือ  $T \rightarrow 0$  เนื่องจากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันไม่เพียงพอที่จะอธิบายการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของระบบที่อุณหภูมิมิมีค่าต่ำมาก การศึกษาจึงใช้วิชากลศาสตร์ควอนตัมเชิงสถิติ (quantum statistical mechanics) ตัวอย่างของระบบดังกล่าว ได้แก่ การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในของแข็ง และเฟสของของไหลยวดยิ่ง (superfluid) ในฮีเลียมเหลว เป็นต้น

## 2. การกระจายความเร็วของโมเลกุล

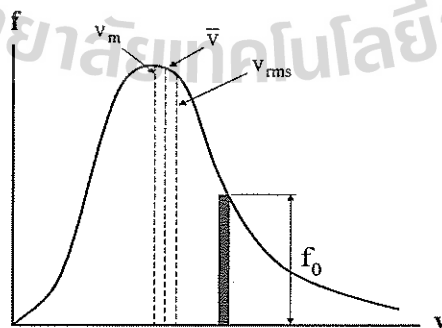
อัตราเร็วของโมเลกุลที่กล่าวมาในตอนต้นเป็นค่าเฉลี่ยอัตราเร็วกำลังสอง หรือ  $v_{rms}$  เท่านั้น ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น แต่ละโมเลกุลของแก๊สไม่ได้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่เท่ากัน อีกทั้งมีการชนกันทำให้อัตราเร็วและทิศทางของแต่ละโมเลกุลเปลี่ยนไป การกระจายความเร็วของโมเลกุลคือการศึกษาว่ามีโมเลกุลจำนวนเท่าใดที่มีอัตราเร็วในช่วงต่างๆ หรือมีโมเลกุลจำนวนเท่าใดที่มีอัตราเร็วมากกว่าหรือน้อยกว่า  $v_{rms}$

เจมส์ คลาร์ก แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) เป็นผู้ที่แสดงการแจกแจงอัตราเร็วได้ค่อนข้างชัดเจน คือในปี ค.ศ. 1860 โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด ที่ในขณะนั้นยังไม่มีเครื่องมือที่สามารถทดสอบยืนยันได้ แต่ผลสรุปที่ได้ก็ยังคงใช้ได้จนถึงปัจจุบัน

วิธีการศึกษาของแมกซ์เวลล์กระทำโดยกำหนด  $f_v$  เป็นฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function) แทนจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งช่วงของอัตราเร็ว ดังนั้น จำนวนโมเลกุลที่มีอัตราเร็วอยู่ในช่วง  $v$  ถึง  $v + \Delta v$  มีค่าเท่ากับ  $f_v \Delta v$  ซึ่งค่า  $f_v$  ที่อุณหภูมิต่างๆ คือ

$$f_v = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (11.20)$$

เมื่อ  $N$  คือจำนวนโมเลกุลทั้งหมดของแก๊ส  $m$  คือมวลของโมเลกุล  $k$  คือค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ และ  $T$  คืออุณหภูมิสัมบูรณ์ จากสมการ (11.20) จะสังเกตเห็นว่า  $f_v$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เมื่ออัตราเร็ว  $v$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์หรือเข้าใกล้อนันต์ ดังแสดงในรูปที่ 11.6



รูปที่ 11.6 แสดงการแจกแจงความเร็วของโมเลกุลที่อุณหภูมิต่างๆ จำนวนโมเลกุลในช่วงอัตราเร็ว  $\Delta v$  มีค่าเท่ากับ  $f_v \Delta v$  ซึ่งเป็นพื้นที่แรเงาเป็นรูปสี่เหลี่ยม

ถ้า  $N$  เป็นจำนวนโมเลกุลทั้งหมด  $N$  จะมีค่าเท่ากับพื้นที่เส้นโค้งของกราฟระหว่าง  $f_v$  และ  $v$  ในรูปที่ 11.6 หรือ

$$N = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \left( \sum_{v=0}^{\infty} f_v \Delta v \right) = \int_0^{\infty} f_v dv \quad (11.21)$$

ถ้าหาอัตราส่วน  $f_v \Delta v / N$  ซึ่งหมายถึงการหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนโมเลกุลที่มีอัตราเร็วอยู่ในช่วง  $v$  ถึง  $v + \Delta v$  กับจำนวนโมเลกุลทั้งหมด จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่โมเลกุลใดๆ จะมีอัตราเร็วในช่วง  $v$  และ  $v + \Delta v$

จากรูปที่ 11.6 ปริมาณที่จะศึกษามี 3 ปริมาณ คืออัตราเร็วเฉลี่ย  $\bar{v}$ , ค่าเฉลี่ยอัตราเร็วยกกำลังสอง  $v_{rms}$  และอัตราเร็วที่มีค่าเป็นไปได้มากที่สุด (most probable speed) แทนด้วย  $v_m$  ซึ่งค่านี้หมายถึงอัตราเร็วซึ่งให้ค่า  $f_v$  สูงสุดในกราฟ โดยที่ทั้ง 3 ปริมาณสามารถหาได้จากสมการ (11.20) นั่นคือ

$$v_{rms} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.73 \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (11.22)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1.60 \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (11.23)$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1.41 \sqrt{\frac{kT}{m}} \quad (11.24)$$

ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า  $v_m < \bar{v} < v_{rms}$

**ตัวอย่างที่ 11.4** อัตราเร็วของ 10 อนุภาค (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) คือ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 และ 7 จงหา (a) อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาค และ (b) อัตราเร็วรากของกำลังสองเฉลี่ย  $v_{rms}$

**วิธีทำ**

(a) อัตราเร็วเฉลี่ย คือ

$$\bar{v} = \frac{1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 7}{10} = 3.40 \text{ m/s}$$

(b)  $v_{rms} = \sqrt{v^2}$

$$= \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2}{10}}$$

$$= 3.77 \text{ m/s}$$

ตัวอย่างที่ 11.5 อากาศประกอบด้วยแก๊ส  $N_2$  และ  $O_2$  เป็นส่วนใหญ่ แต่ละชนิดมีฟังก์ชันการแจกแจงที่อุณหภูมิใดๆ กำหนดโดยสมการ (11.20) (a) จงหา  $v_m, \bar{v}$  และ  $v_{rms}$  ของ  $O_2$  ในอากาศที่อุณหภูมิ 300 K (b) หาค่าเหล่านี้สำหรับ  $H_2$

วิธีทำ

(a) มวลของ  $O_2$  คือ  $m = \frac{M}{N_A}$  โดยที่  $M = 32 \text{ g/mol}$  คือ น้ำหนักโมเลกุล

$$\therefore m = \frac{32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}{6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 5.3 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\frac{kT}{m} = \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{5.3 \times 10^{-26}} = 7.8 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\therefore v_m = \sqrt{2 \frac{kT}{m}} = 390 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 450 \text{ m/s}$$

$$v_{rms} = \sqrt{3 \frac{kT}{m}} = 480 \text{ m/s}$$

(b) เนื่องจาก  $H_2$  มีมวลเท่ากับ  $1/16$  เท่าของ  $O_2$  และเนื่องจากอัตราเร็วเป็นสัดส่วนผกผันกับรากที่สองของมวล ดังนั้นอัตราเร็วของ  $H_2$  จึงเป็น 4 เท่าของ  $O_2$

$$\therefore v_m = 4 \times 390 \text{ m/s} = 1.6 \text{ km/s}$$

$$\bar{v} = 4 \times 450 \text{ m/s} = 1.8 \text{ km/s}$$

$$v_{rms} = 4 \times 480 \text{ m/s} = 1.9 \text{ km/s}$$

### 3. การแบ่งกันเท่ากันของพลังงาน

การแบ่งกันเท่ากันของพลังงาน (equipartition of energy theorem) เป็นการศึกษาว่าชนิดและลักษณะของโมเลกุลที่ต่างกันมีผลต่อค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของโมเลกุลอย่างไร ซึ่งจากการศึกษาพบว่าค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของโมเลกุลจะขึ้นกับระดับขั้นความเสรี (degrees of freedom) ของโมเลกุล ยกตัวอย่างเช่น ในระบบของแก๊สอะตอมเดี่ยว (monoatomic gas) ที่อุณหภูมิ  $T$  โมเลกุลจะมีระดับขั้นความเสรีเป็น 3 โดยที่ตัวเลข 3 มาจากสมมติฐานที่ว่าแต่ละโมเลกุลสามารถเลื่อนตำแหน่งได้ทั้ง 3

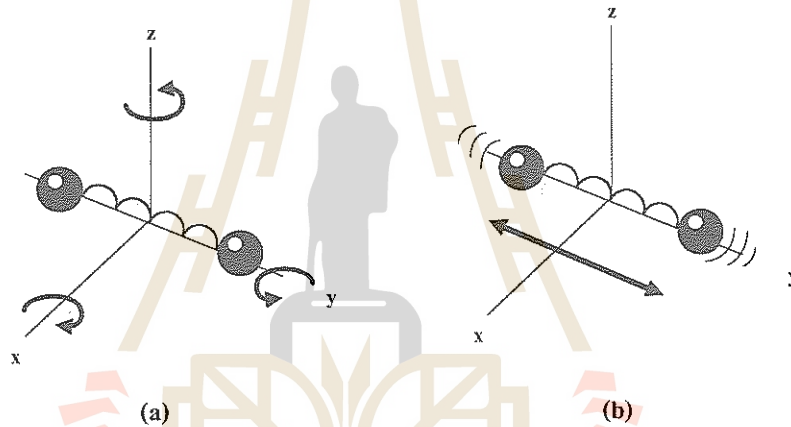
ทิศทางคือตามแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ซึ่งแต่ละแกนมีค่าเท่ากัน โดยแต่ละระดับชั้นความเสรีมีค่าเฉลี่ยพลังงานเท่ากับ  $\frac{1}{2}kT$  ดังนั้นแก๊สที่โมเลกุลมีอะตอมเพียงตัวเดียว (monatomic molecules) มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับ 3 และมีค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์เป็น

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$$

หรือสรุปว่าสำหรับระบบของโมเลกุลที่อุณหภูมิ  $T$  แต่ละโมเลกุลมีระดับชั้นความเสรีเป็น  $v$  ค่าเฉลี่ยพลังงานกลของโมเลกุล  $\bar{E}$  คือ

$$\bar{E} = v\left(\frac{1}{2}kT\right) \quad (11.25)$$

สำหรับแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม (diatomic molecules) หรือประกอบด้วยหลายอะตอม (polyatomic molecules) จะมีระดับชั้นความเสรีมากกว่า 3 เช่น แก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอมเรียงตัวอยู่ในแนวแกน  $y$  ดังรูปที่ 11.7 (a) จะเห็นได้ว่าโมเลกุลสามารถหมุนรอบแกนทั้งสาม



รูปที่ 11.7 แสดงการหมุนและการสั่นของอะตอมที่มีผลต่อระดับชั้นความเสรี

แต่การหมุนรอบแกน  $y$  เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน  $y$  เท่ากับศูนย์ พลังงานในแนวแกนนี้จึงไม่มีระดับชั้นความเสรี ระดับชั้นความเสรีจึงเพิ่มขึ้นเพียง 2 ระดับ ทำให้ระดับชั้นความเสรีรวมเท่ากับ 5 ซึ่งประกอบด้วยระดับชั้นความเสรีของการเคลื่อนที่ในแนวแกน  $x$ ,  $y$ ,  $z$  จำนวน 3 ระดับ และระดับชั้นความเสรีของการหมุนรอบแกน  $x$  และ  $z$  อีก 2 ระดับ แต่ละระดับมีค่าเฉลี่ยพลังงานเท่ากับ  $\frac{1}{2}kT$  ถ้าระบบมีจำนวน  $N$  โมเลกุลพลังงานรวมจึงเป็น

$$E = 3N\left(\frac{1}{2}kT\right) + 2N\left(\frac{1}{2}kT\right) = \frac{5}{2}NkT = \frac{5}{2}nRT$$

และหากคำนึงถึงการสั่นของอะตอมทั้งสอง โดยจะถือว่าอะตอมทั้งสองยึดติดกันด้วยสปริงดังแสดงในรูปที่ 11.7 (b) การสั่นทำให้ระดับชั้นความถี่เพิ่มขึ้นอีก 2 ระดับคือ ระดับชั้นความถี่อื่นเนื่องจากพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับระดับชั้นความถี่อื่นเนื่องจากพลังงานศักย์ของอันตรกิริยาระหว่างอะตอมทั้งสอง ทำให้ระดับชั้นความถี่ทั้งหมดรวมเป็น 7 ระดับ พลังงานรวมจึงเป็น  $\frac{7}{2}NkT$

**ตัวอย่างที่ 11.6** ถ้าแต่ละโมเลกุลที่ประกอบด้วยหลายอะตอมที่อุณหภูมิ 1,200 K มีระดับชั้นความถี่สำหรับการเลื่อนที่เป็น 3 การหมุนเป็น 3 และการสั่นเป็น 4 จงหา (a) ค่าเฉลี่ยพลังงานกลของแต่ละโมเลกุล และ (b) พลังงานภายในของแก๊สนี้จำนวน 1.0 โมล

**วิธีทำ**

(a) เนื่องจาก  $v = 3 + 3 + 4 = 10$  ดังนั้น ค่าเฉลี่ยพลังงานของแต่ละโมเลกุล คือ

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{10}{2}(1.38 \times 10^{-23})(1200) \\ &= 8.3 \times 10^{-20} \text{ J}\end{aligned}$$

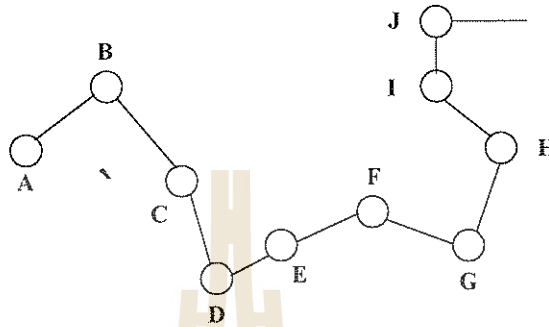
(b) พลังงานภายในเป็นพลังงานกลรวมของแก๊ส ดังนั้น

$$\begin{aligned}U &= N\bar{E} \\ &= nN_A\bar{E} \\ &= (1.0)(6.02 \times 10^{23})(8.3 \times 10^{-20}) \\ &= 50 \text{ kJ}\end{aligned}$$

#### 4. วิถีเสรีเฉลี่ย

ตามทฤษฎีจลน์ โมเลกุลของแก๊สเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง แม้กระทั่งที่อุณหภูมิปกติก็ตาม แต่จากการสังเกตดูกลุ่มควันที่ลอยเป็นก้อนพบว่ามิพดกิริยาที่ตรงกันข้าม ดังนั้นจะต้องมีแฟกเตอร์บางอย่างที่ทำให้โมเลกุลของแก๊สเคลื่อนที่ได้ช้าลง เคลลาซุส อธิบายว่าโมเลกุลมีขนาดจำกัด แม้ว่า จะเส็กมากก็ตาม แต่มีการชนกันระหว่างโมเลกุลด้วย ในขณะที่โมเลกุลไม่มีการชนกันจะไม่มีแรงกระทำระหว่างกันเลย ทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงด้วยความเร็วสม่ำเสมอ ระยะแนวเส้นตรงก่อนการชนกันที่ถัดไปแต่ละครั้งเรียกว่า วิถีเสรี จากรูปที่ 11.8 โมเลกุลเริ่มต้นจากตำแหน่ง A

เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงแล้วชนกับโมเลกุลอื่นที่ B ทำให้ขนาดและทิศทางเปลี่ยนไป จึงเคลื่อนที่ไปตามแนว BC แล้วชนกับโมเลกุลอื่นที่ C ทำให้ขนาดและทิศทางเปลี่ยนไปอีก อย่างนี้เรื่อยไประยะทาง AB, BC, CD, DE, . . . จึงเป็นวิถีเสรี ซึ่งมีค่าแตกต่างกันไป ค่าเฉลี่ยของระยะทางเหล่านี้เรียกว่าวิถีเสรีเฉลี่ย



รูปที่ 11.8 แสดงวิถีเสรีของโมเลกุล

ดังนั้น วิถีเสรีเฉลี่ยจึงเป็นระยะทางเฉลี่ยของโมเลกุลที่เคลื่อนที่ผ่านแก๊สโดยไม่มีการชนกับโมเลกุลอื่น และเนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงสถิติจึงขึ้นกับระเบียบวิธีที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ย ถ้า  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$  เป็นวิถีเสรีค่าต่างๆ ในเวลา  $t$  และ  $\bar{v}$  เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราเร็วของโมเลกุล ส่วน  $N$  คือจำนวนครั้งของการชนในเวลา  $t$  แล้ว จะได้ว่า

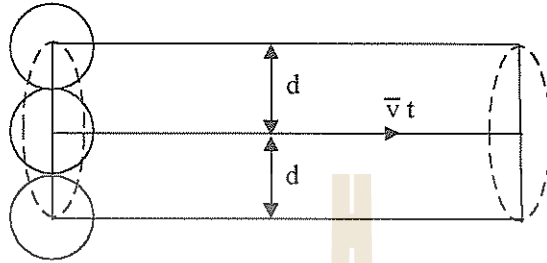
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N = \bar{v}t$$

และวิถีเสรีเฉลี่ยคือ

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N}{N} = \frac{\bar{v}t}{N} = \frac{S}{N} \tag{11.26}$$

โดยที่  $S$  คือระยะทางรวมในการชนกัน  $N$  ครั้ง

สมมติให้  $n_v$  คือจำนวนโมเลกุลในหนึ่งหน่วยปริมาตร และให้โมเลกุลเพียงตัวเดียวเท่านั้นเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว  $v$  โดยถือว่าโมเลกุลอื่นหยุดนิ่งอยู่กับที่ โมเลกุลที่เคลื่อนที่ชนกับโมเลกุลอื่นภายในระยะทาง  $d$  จากจุดศูนย์กลางของโมเลกุลที่เคลื่อนที่นั้น  $d$  คือเส้นผ่าศูนย์กลางของโมเลกุลดังแสดงในรูปที่ 11.9



รูปที่ 11.9 แสดงประกอบการคำนวณหาค่า  $\lambda$

ในเวลา  $t$  โมเลกุลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $v$  เป็นระยะทาง  $vt$  ดังนั้นปริภูมิ (space) ของการเคลื่อนที่ จึงเป็นรูปทรงกระบอกพื้นที่หน้าตัด  $\pi d^2$  สูง  $vt$  และปริมาตร  $\pi d^2 vt$  ภายในทรงกระบอกจึงมี โมเลกุลจำนวน  $\pi d^2 v n_v$  ดังนั้น จำนวนครั้งของการชนในเวลา  $t$  คือ

$$N = \pi d^2 v t n_v \quad (11.27)$$

และเนื่องจากพิจารณาโมเลกุลเดี่ยวเท่านั้นที่เคลื่อนที่ ดังนั้น  $\bar{v}$  ในสมการ (11.26) จึงเท่ากับ  $v$  สมการ (11.27) จึงกลายเป็น

$$\lambda = \frac{vt}{\pi d^2 v t n_v} = \frac{1}{\pi d^2 n_v} \quad (11.28)$$

ถ้าจำนวนครั้งของการชนในเวลา  $t$  คือ  $\pi d^2 v t n_v$  ดังนั้น จำนวนครั้งของการชนใน 1 วินาที ซึ่งคือ ความถี่  $f$  จึงมีค่า

$$f = \pi d^2 v n_v \quad (11.29)$$

และส่วนกลับของความถี่ คือ เวลาเฉลี่ยของการชนแต่ละครั้ง เรียกว่า เวลาเสรีเฉลี่ย (mean free time)

อย่างไรก็ตาม สมการ (11.28) นี้มีข้อผิดพลาดอันเนื่องจากการพิจารณาโมเลกุลเพียงตัวเดียวเท่านั้น ที่เคลื่อนที่ ในขณะที่โมเลกุลอื่นๆ ไม่มีการเคลื่อนที่ ตามความเป็นจริง โมเลกุลอื่นๆ มีการเคลื่อนที่ ด้วยโดยมีการแจกแจงความเร็วเป็นไปตามกฎของแมกซ์เวลล์ เนื่องจากโมเลกุลเดี่ยวที่สมมติมีการเคลื่อนที่ที่มีความเร็วเป็นไปได้หลายค่า จึงให้  $\bar{v}$  เป็นค่าเฉลี่ยความเร็วของโมเลกุลเดี่ยวนี้ และให้  $\bar{v}_r$  เป็นความเร็วเฉลี่ยสัมพัทธ์ของโมเลกุลอื่นๆ ซึ่งกันและกัน ดังนั้นจำนวนครั้งของการชนในเวลา  $t$  จึงเปลี่ยนไปเป็น  $\pi d^2 \bar{v}_r t n_v$  และวิธเสรีเฉลี่ยจะกลายเป็น

$$\lambda = \frac{\bar{v} t}{\pi d^2 \bar{v}_r t n_v} = \frac{\bar{v}}{\pi d^2 \bar{v}_r n_v}$$

จากการวิเคราะห์หาค่าของ  $\bar{v}$ , พบว่ามีค่าเท่ากับ  $\sqrt{2} \cdot \bar{v}$  ดังนั้น

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_v} \tag{11.30}$$

และความถี่ของการชนจะเปลี่ยนไปเป็น

$$f = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n_v = \frac{\bar{v}}{\lambda} \tag{11.31}$$

**ตัวอย่างที่ 11.7** ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางโมเลกุลของแก๊สเท่ากับ  $3 \times 10^{-10}$  เมตร จงหาค่าวิถีเสรีเฉลี่ยที่อุณหภูมิ  $27^\circ \text{C}$  และความดัน 1 บรรยากาศ

**วิธีทำ**

เนื่องจาก  $n_v$  คือจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร การหาค่า  $n_v$  จึงใช้สมการ  $PV = NkT$  หรือ

$$n_v = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$$

ความดัน 1 บรรยากาศ =  $1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

และอุณหภูมิ  $T = 27 + 273 = 300 \text{ K}$  ดังนั้น

$$n_v = \frac{1.01 \times 10^5}{(1.38 \times 10^{-23})(300)}$$

วิถีเสรีเฉลี่ยหาได้จากสมการ (11.30) คือ

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_v} \\ &= \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{\sqrt{2}\pi(3 \times 10^{-10})^2(1.01 \times 10^5)} \\ &= 1.02 \times 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

## สรุป

ค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของโมเลกุลแก๊สในภาชนะปิดได้ตามสมการ

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$$

ความสัมพันธ์ของอัตราเร็วของรากกำลังสองเฉลี่ยกับอัตราเร็วเฉลี่ย คือ

$$v_{rms} = \sqrt{v^2}$$

พลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุล จะขึ้นอยู่กับจำนวนระดับขึ้นความเสรี ซึ่งจะมีพลังงานเท่ากัน ในแต่ละระดับขึ้นความ และเป็นหลักการของทฤษฎีการแบ่งกันเท่ากันของพลังงาน

วิถีเสรีเฉลี่ย คือ ระยะทางเฉลี่ยของโมเลกุลที่เคลื่อนที่ผ่านแก๊ส โดยไม่มีการชนกับโมเลกุลอื่น เมื่อ  $N$  คือจำนวนครั้งของการชนในเวลา  $t$  ดังนั้น วิถีเสรีเฉลี่ย คือ

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_N}{N} = \frac{\bar{v}t}{N} = \frac{S}{N}$$

หรือ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_v}$$

ความถี่ของการชน คือ

$$f = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n_v = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

## บรรณานุกรม

---

Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.).

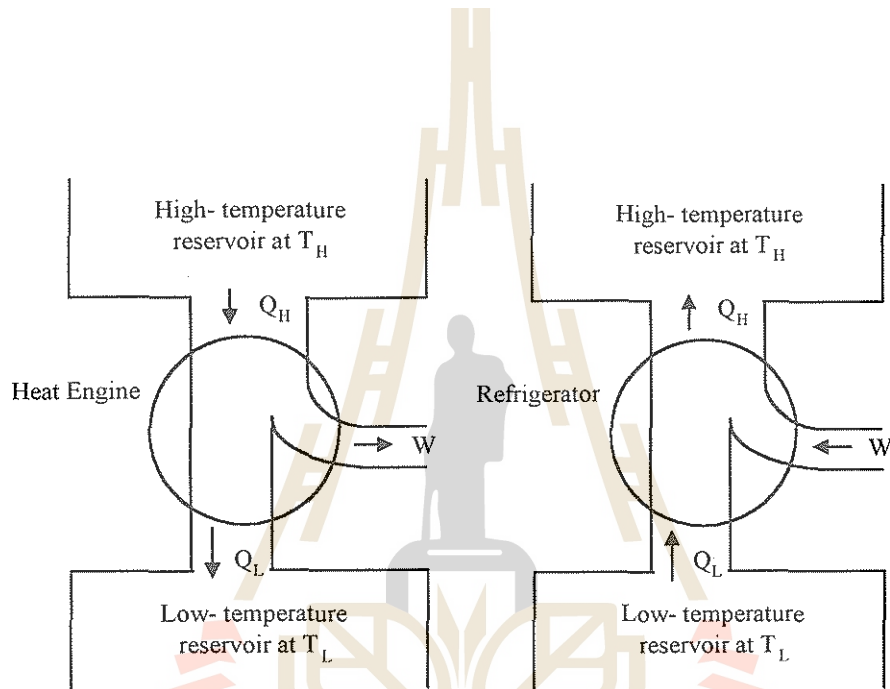
New York: Wiley.

Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4<sup>th</sup> ed. New York:

Wiley.



กฎทางอุณหพลศาสตร์



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิโนรัตน์ กอบเดช

## ตอนที่ 12.1

### กฎข้อที่ศูนย์และกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

กฎทางอุณหพลศาสตร์ที่จะทำการศึกษามีอยู่ 3 กฎ โดยกฎแรกเรียกว่า กฎข้อที่ศูนย์ทางอุณหพลศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึง นิยามหรือความหมายของอุณหภูมิ กฎข้อถัดมาเรียกว่า กฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์ ซึ่งกล่าวถึง ความร้อน พลังงานภายใน การส่งผ่านพลังงานความร้อนระหว่างระบบและผลของอุณหภูมิต่อการเปลี่ยนแปลงสถานะของสสาร ส่วนกฎข้อที่สองทางอุณหพลศาสตร์กล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนไปเป็นงาน และเอนโทรปี

กฎข้อที่หนึ่ง และกฎข้อที่สองนั้น ได้ตั้งขึ้นมาก่อนกฎข้อที่ศูนย์ แต่เนื่องจากมีความเข้าใจไม่ตรงกันเกี่ยวกับความหมายของคำว่าอุณหภูมิ จึงได้มีการนิยามความหมายของอุณหภูมิจำลองขึ้นมาภายหลัง เพื่อที่จะนำไปเป็นพื้นฐานของกฎข้อที่หนึ่ง และกฎข้อที่สอง จึงเรียกกฎนี้ว่า กฎข้อที่ศูนย์

#### 1. กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์

กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์ กล่าวว่า ถ้าระบบที่หนึ่งและระบบที่สองมีสมดุลเชิงความร้อนกับระบบที่สาม ดังนั้นระบบที่หนึ่งและระบบที่สองก็จะมีสมดุลเชิงความร้อนซึ่งกันและกัน

จากการที่ระบบอยู่ในสมดุลเชิงความร้อนเดียวกันแสดงว่าระบบทั้งสามจะต้องมีสมบัติอย่างหนึ่งที่เหมือนกัน สมบัตินี้เรียกว่า อุณหภูมิของระบบนั่นเอง หรือกล่าวได้ว่าระบบทั้งสามมีอุณหภูมิเท่ากัน

#### 2. พลังงานและกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ กล่าวถึงการส่งผ่านพลังงานความร้อนระหว่างระบบ โดยพลังงานที่ไหลผ่านขอบของระบบจะเท่ากับพลังงานของระบบที่เปลี่ยนไป ซึ่งเป็นหลักการของการอนุรักษ์พลังงาน โดยพลังงานที่กล่าวถึงในกฎข้อนี้สามารถจำแนกได้ดังนี้

1. ความร้อน (heat,  $Q$ ) เป็นพลังงานรูปหนึ่งที่สามารถถ่ายเทได้ระหว่างระบบสองระบบที่มีอุณหภูมิต่างกัน โดยความร้อนจะมีหน่วยเป็นหน่วยเดียวกับพลังงาน นั่นคือ จูล (joule,  $J$ ) ในระบบ SI ส่วนในระบบอื่นๆ หน่วยของความร้อนที่เป็นที่รู้จัก ได้แก่ แคลอรี (calorie,  $cal$ ) โดยที่  $1\text{ cal}$  มีค่าเท่ากับ  $4.186\text{ J}$  และ Btu (British thermal unit) ซึ่ง  $1\text{ Btu}$  มีค่าเท่ากับ  $1055\text{ J}$

2. พลังงานภายใน (internal energy , U) เป็นพลังงานของระบบที่ประกอบด้วย พลังงานนิวเคลียร์ พลังงานเคมี และพลังงานความร้อน (thermal energy)

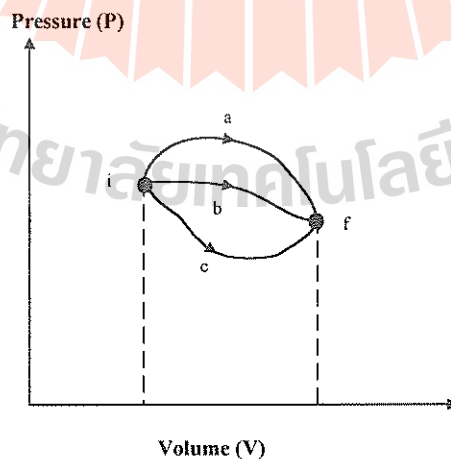
3. พลังงานความร้อน (thermal energy) เป็นส่วนหนึ่งของพลังงานภายใน ซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงเมื่ออุณหภูมิของระบบเปลี่ยนไป พลังงานความร้อนนี้ในระดับจุลทรรศน์จะขึ้นกับพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ของโมเลกุล หรืออะตอมในระบบ

สำหรับระบบใดๆ ที่รับปริมาณความร้อน  $Q$  เข้าไป ความร้อนที่รับเข้าไปนี้ จะทำให้อุณหภูมิของระบบเพิ่มขึ้น หรือระบบมีการเปลี่ยนสถานะไป ซึ่งถือเป็นการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของระบบ และความร้อนส่วนที่เหลือจะถูกนำไปใช้ในการทำงานของระบบ โดยมีการขยายตัวของระบบ หรือการเพิ่มปริมาตรของระบบนั่นเอง จึงสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$Q = U + W \quad (12.1)$$

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์จึงเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนและงาน โดยขึ้นอยู่กับสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายของระบบเท่านั้น ไม่ได้ขึ้นกับกระบวนการที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่งแต่อย่างใด แม้ว่าความร้อนและงานจะขึ้นกับกระบวนการที่ทำให้ระบบเปลี่ยนสถานะก็ตาม

เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น พิจารณาแผนภาพ  $P$ - $V$  ดังรูปที่ 12.1 ซึ่งแสดงการที่ระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้น  $i$  ไปสู่สถานะสุดท้าย  $f$  โดยระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้น  $i$  ไปสู่สถานะ



รูปที่ 12.1 แสดงแผนภาพ  $P$ - $V$  ของกระบวนการทั้ง 3 ที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้นไปสู่สถานะสุดท้าย

สุดท้าย  $f$  ได้ 3 แนวทาง คือตามเส้นทาง  $a, b$  และ  $c$  ดังภาพ งานที่กระทำเนื่องจากเส้นทาง  $a$  มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง  $a$  เขียนแทนด้วย  $W_a$  ส่วนงานอันเนื่องมาจากเส้นทาง  $b$  และ  $c$  จะเรียกว่า  $W_b$  และ  $W_c$  ตามลำดับ ซึ่งงานที่ทำโดยระบบในแต่ละเส้นทางมีค่าแตกต่างกัน กล่าวคือ  $W_a \neq W_b \neq W_c$  นอกจากนี้ยังพบว่าความร้อนที่ป้อนเข้าสู่ระบบในแต่ละกระบวนการมีค่าที่แตกต่างกันด้วย หรือ  $Q_a \neq Q_b \neq Q_c$  อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างของปริมาณทั้งสองคือ  $Q$  และ  $W$  ในแต่ละกระบวนการมีค่าคงตัวเสมอ ซึ่งเท่ากับพลังงานภายในของระบบที่เปลี่ยนไป หรือ

$$Q_a - W_a = Q_b - W_b = Q_c - W_c = U_f - U_i = \Delta U$$

โดยที่  $\Delta U$  จะขึ้นกับสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายเท่านั้น

ดังนั้นกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ อาจเขียนได้อีกรูปแบบ คือ

$$Q - W = \Delta U = U_f - U_i \tag{12.2}$$

ในกระบวนการปริมาตรคงตัว ซึ่งปริมาตรมีค่าคงตัว ดังนั้น  $\Delta V = 0$  และ  $W = 0$  จึงได้

$$Q = \Delta U$$

ในกระบวนการแอเดียแบติก ซึ่งไม่มี  $\Delta Q = 0$  ดังนั้น

$$\Delta U = -W$$

ในกระบวนการความดันคงตัว ซึ่งความดันมีค่าคงตัว ทั้ง  $Q$  และ  $W$  ต่างไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงต้องคำนวณหาปริมาณทั้งสองนี้ก่อน

ในกระบวนการอุณหภูมิกคงตัว ซึ่งอุณหภูมิมิค่าคงตัว พลังงานภายในของระบบเช่น แก๊สอุดมคติเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเท่านั้น ดังนั้น  $\Delta U = 0$

ในกระบวนการวัฏจักร (cyclic process) ซึ่งก็คือกระบวนการที่สถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายเป็นสถานะเดียวกัน หรือระบบกลับเข้าสู่สถานะเริ่มต้นได้อีกนั้น ในกรณีนี้  $U_f - U_i = \Delta U = 0$  ดังนั้น  $W = Q$

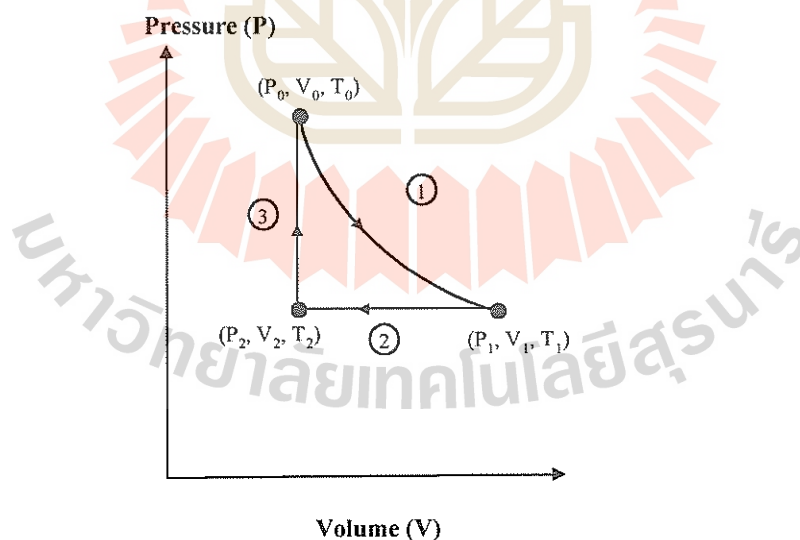
ให้สังเกตว่า  $\Delta U$  ในสมการ (12.2) กล่าวถึงการเปลี่ยนค่าพลังงานภายในของระบบเท่านั้น โดยมีได้ระบุว่าพลังงานภายในรวมของระบบ ณ ตำแหน่งต่างๆ เป็นอย่างไร และเพื่อสะดวกในการคำนวณ จึงมีการระบุทิศทางการไหลของพลังงาน โดยกำหนดให้  $Q$  มีค่าเป็นบวก เมื่อมีความร้อนไหลหรือป้อนเข้าสู่ระบบ และ  $\Delta U$  มีค่าเป็นบวก ถ้าพลังงานภายในเพิ่มขึ้น นั่นคือ  $U_f > U_i$

**ตัวอย่างที่ 12.1** แก๊สอุดมคติจำนวน 1 โมล ภายใต้กระบวนการวัฏจักร ซึ่งประกอบด้วย 3 กระบวนการคือ

1. กระบวนการอุณหภูมิกคงตัว โดยเริ่มจาก  $(P_0, V_0, T_0)$  เปลี่ยนไปเป็น  $(P_1, V_1, T_1)$  โดย  $V_1 = 2V_0$
2. กระบวนการความดันคงตัว โดยเปลี่ยนจาก  $(P_1, V_1, T_1)$  ไปเป็น  $(P_2, V_2, T_2)$
3. กลับไปสู่สถานะเริ่มต้น โดยมีปริมาตรเท่าเดิม

ดังแสดงในรูปที่ 12.2 จงคำนวณหา

- (a) พลังงานภายในที่เปลี่ยนไปทั้งหมด
- (b) งานที่ทำโดยแก๊สทั้งหมด
- (c) ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่ให้แก๊สนี้



รูปที่ 12.2 แสดงประกอบตัวอย่างที่ 12.1

วิธีทำ จากรูปที่ 12.2 โจทย์กำหนด  $P_1 = P_2 = P_0/2$ ,  $V_2 = V_0$ ,  $V_1 = 2V_0$  และ  $T_1 = T_0$  ดังนั้น

ขั้นตอนที่ 1 เป็นกระบวนการอุณหภูมิกงตัว ซึ่งในกระบวนการนี้อุณหภูมิตั้งแต่  $\Delta T = 0$  และจากการที่พลังงานภายในขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ ดังนั้น  $\Delta U_1 = 0$  ทำให้ได้ว่างาน  $W_1$  มีค่าเป็น

$$W_1 = nRT_0 \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = RT_0 \ln 2$$

และจากกฎข้อที่หนึ่ง จะได้

$$\begin{aligned} Q_1 &= W_1 + \Delta U_1 \\ &= RT_0 \ln 2 + 0 \\ &= RT_0 \ln 2 \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 2 เป็นกระบวนการความดันคงตัว งาน  $W_2$  ที่ทำโดยแก๊ส คือ

$$W_2 = \int P dV = \int_{2V_0}^{V_0} \frac{P_0}{2} dV = \frac{P_0}{2} (V_0 - 2V_0) = -\frac{P_0 V_0}{2} = -\frac{RT_0}{2}$$

และปริมาณความร้อน  $Q_2$  ที่ป้อนเข้าสู่ระบบ คือ

$$Q_2 = nC_p \Delta T = C_p (T_2 - T_0)$$

( $C_p$  จะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป) โดยค่าของ  $T_2$  หาได้จาก

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

เนื่องจาก  $n_0 = n_2$  ดังนั้น

$$T_2 = T_0 \left\{ \frac{\left(\frac{P_0}{2}\right) V_0}{P_0 V_0} \right\} = \frac{T_0}{2}$$

จึงได้

$$Q_2 = -\frac{C_p T_0}{2}$$

จากกฎข้อที่หนึ่ง

$$Q_2 = W_2 + \Delta U_2$$

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= Q_2 - W_2 = -\frac{C_p T_0}{2} + \frac{RT_0}{2} = \frac{T_0}{2}(R - C_p) \\ &= -\frac{T_0}{2}C_v\end{aligned}$$

(รายละเอียดของ  $C_p$  และ  $C_v$  จะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป)

ขั้นตอนที่ 3 เป็นกระบวนการปริมาตรคงตัว เนื่องจากปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง  $dV = 0$  และ  $W_3 = 0$  ปริมาณความร้อน  $Q_3$  ที่ให้แก่ระบบ หาได้จาก

$$Q_3 = nC_v \Delta T = C_v \Delta T = C_v \left( T_0 - \frac{T_0}{2} \right) = \frac{T_0}{2} C_v$$

จากกฎข้อที่หนึ่ง

$$Q_3 = W_3 + \Delta U_3$$

$$\Delta U_3 = Q_3 - W_3 = \frac{T_0}{2} C_v$$

(a) พลังงานภายในที่เปลี่ยนไปทั้งหมด คือ

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 \\ &= 0 + \frac{T_0}{2}(R - C_p) + \frac{T_0}{2}C_v = 0\end{aligned}$$

(b) งานที่ทำทั้งหมด คือ

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W = RT_0 \ln 2 + \left( -\frac{RT_0}{2} \right) + 0 = RT_0 \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = 0.193 RT_0$$

(c) ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่ให้แก่ระบบ คือ

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q = RT_0 \ln 2 - \frac{T_0}{2} C_p + \frac{T_0}{2} C_v = RT_0 \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = 0.193 RT_0$$

ให้สังเกตว่า  $Q = W$  เนื่องจาก  $\Delta U = 0$

### 3. เอนทัลปีและความจุความร้อน

เอนทัลปี (enthalpy) เป็นสมบัติของระบบเขียนแทนด้วย H มีค่าเท่ากับ

$$H = U + PV \tag{12.3}$$

เมื่อ U เป็นพลังงานภายในระบบ และ PV เป็นงาน หากพิจารณากระบวนการเกิดขึ้นที่ความดันคงตัว ซึ่ง  $\Delta P = 0$  ดังนั้น

$$H = U + P\Delta V$$

จากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

$$Q = U + W$$

$$Q = U + P\Delta V$$

จะเห็นได้ว่า  $H = Q$  ซึ่งเป็นปริมาณความร้อนที่ให้แก่ระบบจากแหล่งภายนอก จึงเรียกเอนทัลปี H อีกชื่อหนึ่งว่า ปริมาณความร้อน (heat content)

เมื่อระบบมีการรับพลังงานความร้อนเข้าไป อัตราส่วนของพลังงานความร้อนที่ระบบดึงดูจากสิ่งแวดล้อมต่ออุณหภูมิของระบบที่เพิ่มขึ้นเรียกว่า ความจุความร้อน (heat capacity) ของระบบแทนด้วย C

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \tag{12.4}$$

หากวัดค่าความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว ค่าที่ได้จะเรียกว่า ความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว เขียนแทนด้วย  $C_V$  โดยมีค่าเท่ากับ

$$C_V = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{U + P\Delta V}{\Delta T} \quad (12.5)$$

และที่ความดันคงตัว ค่าที่วัดได้จะเรียกว่า ความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว ซึ่งกำหนดโดย

$$C_P = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{U}{\Delta T} \quad (12.6)$$

ถ้าต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่าง  $C_P$  และ  $C_V$  ก็สามารทำได้ดังนี้

$$C_P - C_V = \frac{U + P\Delta V}{\Delta T} - \frac{U}{\Delta T} = \frac{P\Delta V}{\Delta T}$$

จากสมการสถานะ สำหรับแก๊สอุดมคติ  $P\Delta V = nRT$  จึงสรุปได้ว่า

$$\therefore C_P - C_V = nR \quad (12.7)$$

และหากต้องการหาความจุความร้อนต่อโมลของสารแล้ว ความจุความร้อนแบบนี้จะเรียกว่า ความจุความร้อนโมลาร์ (molar heat capacity) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $C/n$  เมื่อ  $n$  คือ จำนวนโมลของสาร ทำให้เขียนสมการที่ (12.7) ได้ใหม่ในเทอมของความจุความร้อนโมลาร์ เป็น

$$c_P - c_V = R \quad (12.8)$$

ส่วนความจุความร้อนจำเพาะ (specific heat) คือ ความจุความร้อนต่อหนึ่งหน่วยของมวล ( $m$ ) เขียนแทนด้วย  $c$  และมีสมการคือ

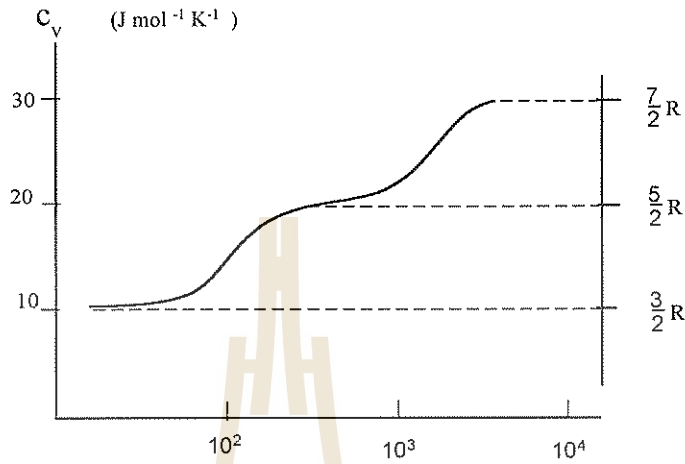
$$c = \frac{C}{m} \quad (12.9)$$

โดยมีหน่วยเป็น  $J.kg^{-1}.K^{-1}$

#### 4. ความจุความร้อนของแก๊สและของแข็ง

ในการหาความจุความร้อนของแก๊สสามารถนำทฤษฎีการแบ่งกันเท่ากันของพลังงานมาอธิบายได้เป็นอย่างดี ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีของแก๊สไฮโดรเจน เมื่อนำผลการทดลองมาเขียนกราฟระหว่าง  $c_v$  กับอุณหภูมิของระบบ จะได้กราฟดังแสดงในรูปที่ 12.3 โดยพบว่าที่อุณหภูมิต่ำๆ  $c_v$  มีค่าเท่ากับ

$\frac{3}{2}R$  ซึ่งเป็นผลมาจากการเลื่อนที่ เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้น  $e_v$  จะมีค่าเท่ากับ  $\frac{5}{2}R$  เนื่องจากระดับชั้นความเสรีของการหมุน และเมื่ออุณหภูมิเพิ่มมากขึ้นอีก  $e_v$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{7}{2}R$  ทั้งนี้เพราะระดับชั้นความเสรีอื่นเนื่องจากการสั่นเริ่มมีบทบาท



รูปที่ 12.3 แสดงความจุความร้อนโมลาร์  $e_v$  ของไฮโดรเจน ที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ โดยมาตราส่วนในแนวนอนเป็นแกน logarithmic

ในระบบที่มีปริมาตรคงตัว การให้ความร้อนแก่ระบบแล้วจะไม่ทำให้เกิดงาน แต่ความร้อนที่ให้แก่ระบบจะทำให้พลังงานภายในของระบบเพิ่มขึ้น จากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ จึงได้  $Q = U$  และความจุความร้อนโมลาร์ของระบบที่ปริมาตรคงตัว มีค่าเป็น

$$e_v = \frac{1}{n} \frac{U}{\Delta T} \tag{12.10}$$

เมื่อ  $n$  คือจำนวนโมลของระบบ

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลมีอะตอมเดียว พลังงานภายในระบบ  $U$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{3}{2}nRT$  ดังนั้น

$$e_v = \frac{3}{2}R$$

$$e_v = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

และเมื่อหาอัตราส่วนระหว่าง  $c_p$  กับ  $c_v$  ซึ่งเรียกว่า  $\gamma$  จะได้

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} = 1.67$$

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม พลังงานภายในของระบบคือ  $U = \frac{5}{2}nRT$  ดังนั้น

$$c_v = \frac{5}{2}R, \quad c_p = \frac{7}{2}R, \quad \text{และ} \quad \gamma = \frac{7}{5} = 1.40$$

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วยหลายอะตอม ระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 6 โดย 3 ขั้นแรกเกิดจากการเลื่อนที่ และ 3 ขั้นที่เหลือเกิดจากการหมุน ดังนั้นพลังงานภายในของระบบ จึงเท่ากับ  $U = \frac{6}{2}nRT$

$$c_v = 3R, \quad c_p = 4R, \quad \text{และ} \quad \gamma = \frac{4}{3} = 1.33$$

โดยที่ระดับขั้นความเสรีอันเนื่องจากการสั่นมีผลน้อยมากและตัดทิ้งได้ที่อุณหภูมิไม่สูงนัก

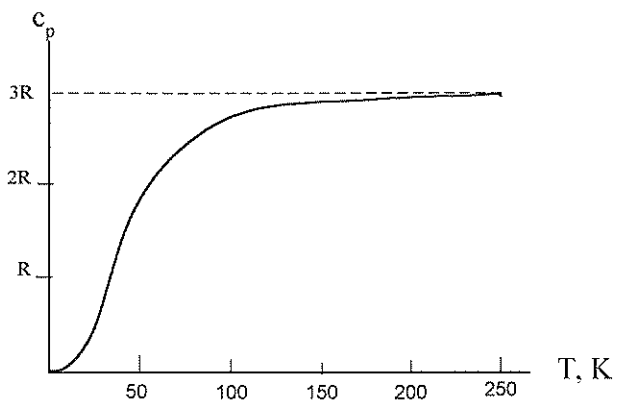
เป็นที่น่าสังเกตว่าถึงแม้อุณหภูมิจะเปลี่ยนไปอย่างไรก็ตาม ความสัมพันธ์  $c_p - c_v = R$  ของแก๊สก็ยังคงใช้ได้เช่นเดิม เนื่องจากความสัมพันธ์นี้ไม่ขึ้นกับระดับขั้นความเสรี แต่มีที่มาจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ ซึ่งกล่าวว่า อุณหภูมิมีผลต่อพลังงานภายในเท่านั้น

อย่างไรก็ตามการอธิบายผลการทดลองที่ดีที่สุดคือ การใช้วิชาทฤษฎีควอนตัมเชิงสถิติ ซึ่งอธิบายว่าพลังงานของระบบอนุภาคเล็กๆมาก มีค่าเป็นควอนตัม ทำให้การคำนวณมีความซับซ้อนและยุ่งยากมากขึ้นจึงไม่ขอกล่าวไว้ ณ ที่นี้

ในกรณีของของแข็ง ความจุความร้อนของของแข็งเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ กล่าวคือ ที่อุณหภูมิต่ำๆ และเข้าใกล้ศูนย์ ความจุความร้อนจะลดลงแบบไม่เชิงเส้นและเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์ และที่อุณหภูมิสูงๆ ประมาณ 500 K ค่าความจุความร้อนจะมีค่าค่อนข้างคงตัวคือประมาณ  $3R$  หรือ  $25 \text{ J/mole}\cdot\text{K}$  ซึ่งสามารถอธิบายได้ตามกฎของดูulongและเปอตีต (Dulong - Petit's law) และสามารถเขียนกราฟแสดงได้ดังในรูปที่ 12.4

ที่อุณหภูมิสูงๆ ทฤษฎีการแบ่งกันเท่ากันของพลังงานสามารถใช้อธิบายค่าความจุความร้อนของของแข็งได้ โดยพิจารณาแบบจำลองอะตอมให้อะตอมเหล่านี้ยึดติดกันด้วยสปริงดังแสดงในรูปที่ 12.5 การสั่นของอะตอมแต่ละตัวรอบๆ ตำแหน่งสมดุล ทำให้แต่ละอะตอมมีระดับขั้นความเสรีสำหรับการเลื่อนที่เท่ากับ 3 และระดับขั้นความเสรีสำหรับการสั่นเท่ากับ 3 รวมแล้วมีค่าเท่ากับ 6 ในระบบที่ประกอบด้วย  $N$  อะตอม พลังงานภายในของของแข็ง จึงเท่ากับ

$$U = NE = N \cdot 6 \left( \frac{1}{2} kT \right) = 3NkT = 3nRT$$

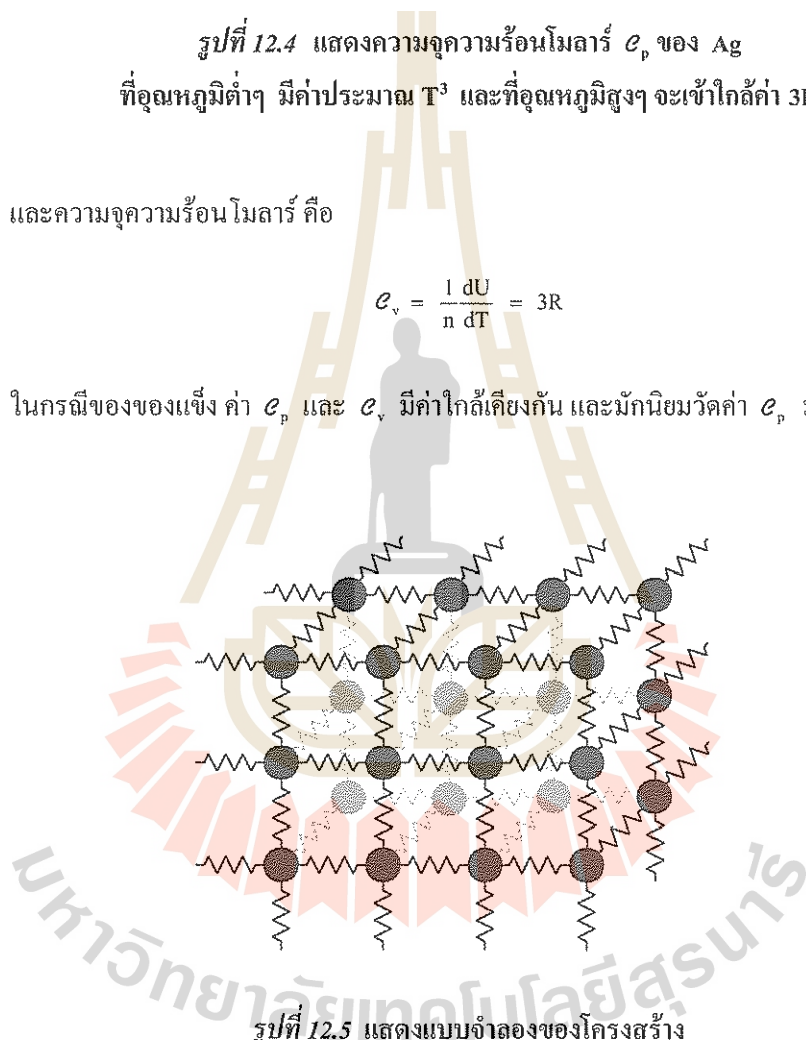


รูปที่ 12.4 แสดงความจุความร้อนโมลาร์  $c_p$  ของ Ag ที่อุณหภูมิต่างๆ มีค่าประมาณ  $T^3$  และที่อุณหภูมิสูงๆ จะเข้าใกล้ค่า  $3R$

และความจุความร้อน โมลาร์ คือ

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = 3R$$

ในกรณีของของแข็ง ค่า  $c_p$  และ  $c_v$  มีค่าใกล้เคียงกัน และมักนิยมวัดค่า  $c_p$  มากกว่า



รูปที่ 12.5 แสดงแบบจำลองของโครงสร้างอะตอมของของแข็ง โดยอะตอมยึดติดกันด้วยสปริง

ตัวอย่างที่ 12.2 จงประมาณค่าความจุความร้อนโมลาร์  $C_p$  ของ (a) แก๊ส Ne (b) แก๊ส  $N_2$  และ (c) โลหะตะกั่ว Pb ที่อุณหภูมิ 400 K

วิธีทำ

(a) Ne เป็นแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วยอะตอมเพียงตัวเดียว ระดับชั้นความเสรีจึงเท่ากับ 3 และ  $C_v = \frac{3}{2}R$  ดังนั้น

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R = 21 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

(b) โมเลกุลของแก๊ส  $N_2$  ประกอบด้วย 2 อะตอม ระดับชั้นความเสรีจึงเท่ากับ 5 และ  $C_v = \frac{5}{2}R$  ดังนั้น

$$C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R = 29 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

(c) โลหะตะกั่วที่อุณหภูมิ 400 K ซึ่งถือว่าเป็นอุณหภูมิสูง ดังนั้น

$$C_p = 3R = 25 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

## สรุป

กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์ กล่าวว่า ถ้าระบบสองระบบอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนกับระบบที่สาม ทั้งสองระบบนั้นจะอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนระหว่างกันด้วย ทั้งสามระบบจะต้องมีสมบัติอย่างหนึ่งที่บอกให้ทราบว่าจะอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนซึ่งกันและกัน สมบัตินี้เรียกว่า อุณหภูมิ

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ กล่าวถึงหลักการอนุรักษ์พลังงานนั่นคือ พลังงานที่ไหลผ่านขอบของระบบจะเท่ากับพลังงานของระบบที่เปลี่ยนไป

หรือ 
$$Q = U + W$$

เอนทัลปี แทนด้วย H เป็นสมบัติของระบบให้นิยามว่า

$$H = U + PV$$

ความจุความร้อนเป็นอัตราส่วนของพลังงานความร้อนที่ระบบดึงดูจากสิ่งแวดล้อมต่ออุณหภูมิของระบบที่เพิ่มขึ้น

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

ความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว คือ

$$C_v = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{U + P\Delta V}{\Delta T}$$

ความจุความร้อนที่ความดันคงตัว คือ

$$C_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{U}{\Delta T}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $C_p$  และ  $C_v$  คือ

$$C_p - C_v = nR$$

ความจุความร้อน โมลาร์ (molar heat capacity) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$e = \frac{C}{n}$$

ความร้อนจุความร้อนจำเพาะ (specific heat) มีสมการ คือ

$$c = \frac{C}{m}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

# ตอนที่ 12.2

## กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์

การที่ระบบต่างๆ ปรับเข้าสู่สถานะสมดุลนั้นสามารถเกิดขึ้นได้เอง แต่กระบวนการที่ทำให้ระบบออกจากสมดุลนั้น ไม่สามารถเกิดขึ้นได้เอง หากต้องการให้เกิดขึ้นต้องมีการใส่งานให้กับระบบ ซึ่งงานจะเปลี่ยนไปเป็นพลังงานความร้อนได้ ในทางกลับกันการนำพลังงานความร้อนมาทำให้เกิดงานนั้นก็สามารถกระทำได้ ในกระบวนการผันกลับได้จะใช้ปริมาณที่เรียกว่าเอนโทรปีเป็นการบอกว่าระบบจะเปลี่ยนแปลงไปสู่ทิศทางใด และการเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นงาน เรียกว่า เครื่องยนต์ความร้อน

### 1. เอนโทรปีและกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์

กระบวนการทางอุณหพลศาสตร์ที่สามารถย้อนกลับกลับสู่สถานะเริ่มได้ เรียกว่า กระบวนการผันกลับได้ (reversible process) โดยทั่วไประบบในธรรมชาติจะเป็นกระบวนการที่ผันกลับไม่ได้ (irreversible process) ในกระบวนการผันกลับได้จะใช้ปริมาณที่เรียกว่าเอนโทรปี เขียนแทนด้วย  $S$  เป็นการบอกว่าระบบจะเปลี่ยนแปลงไปสู่ทิศทางใด โดยเอนโทรปีเป็นสมบัติของระบบมีค่าเท่ากับพลังงานความร้อนของระบบที่เปลี่ยนไปหารด้วยอุณหภูมิ

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (12.11)$$

แนวคิดเกี่ยวกับเอนโทรปีพอจะสรุปได้ดังนี้

สำหรับทุกระบบ ถ้าปล่อยให้ระบบเปลี่ยนแปลงด้วยตัวเองด้วยอัตราที่ช้าหรือเร็วก็ตาม ในที่สุดระบบจะอยู่ในสถานะสมดุล ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของระบบที่เกิดขึ้นเอง คือ

1. การขยายตัวอย่างอิสระของแก๊สอุดมคติจากบริเวณที่มีความดันสูงสู่บริเวณที่มีความดันต่ำจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งความดันมีค่าสม่ำเสมอหรือเท่ากัน
2. การแพร่ของสารละลายจากบริเวณที่มีความเข้มข้นสูงกว่า สู่บริเวณที่มีความเข้มข้นต่ำจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งความเข้มข้นสม่ำเสมอ

3. การถ่ายเทความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงกว่าสู่บริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งอุณหภูมิต่ำเท่ากัน

4. การเกิดปฏิกิริยาทางเคมี เช่น การเผาไหม้คาร์บอนในออกซิเจนทำให้เกิดคาร์บอนไดออกไซด์ จะเกิดขึ้นจนกระทั่งมีเสถียรภาพทางอุณหพลศาสตร์

ตัวอย่างของระบบที่กล่าวมานี้เกิดขึ้นเองเพื่อเข้าสู่สมดุล ในแต่ละกระบวนการเมื่อพิจารณาจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ จะได้ว่าพลังงานรวมของระบบมีค่าคงตัว

ในระบบเอกเทศ เอนโทรปีจะไม่เปลี่ยนแปลงมีค่าคงเดิม แต่ถ้ากระบวนการที่เกิดขึ้นไม่อาจผันกลับได้ เอนโทรปีจะมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวในรูปทั่วไปได้ว่าในกระบวนการใดๆ ที่เกิดขึ้นในระบบเอกเทศ เอนโทรปีของระบบจะต้องเพิ่มขึ้นหรือคงตัวเท่านั้น

ถ้าให้  $S_A$  เป็นเอนโทรปีของระบบที่สถานะเริ่มต้น A และ  $S_B$  เป็นเอนโทรปีของระบบที่สถานะสิ้นสุด B แล้ว เอนโทรปีที่เปลี่ยนไป มีค่าเป็น

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (12.12)$$

ในกรณีกระบวนการผันกลับได้ชนิด กระบวนการแอดิแบติก เนื่องจากไม่มีปริมาณความร้อนไหลถ่ายเทระหว่างระบบและสิ่งแวดล้อม ดังนั้นเอนโทรปีที่เปลี่ยนไปจึงเท่ากับศูนย์ หรือ  $\Delta S = 0$  เรามักเรียกกระบวนการที่เกิดขึ้นโดยที่เอนโทรปีไม่มีการเปลี่ยนแปลงว่า กระบวนการเอนโทรปีคงตัว (isentropic process) เราถือว่าจักรวาลเป็นระบบเอกเทศ ไม่มีการรับหรือสูญเสียพลังงานความร้อนเลย ดังนั้นเอนโทรปีของจักรวาลจึงมีค่าคงตัวไม่เปลี่ยนแปลง

## 2. การหาค่าเอนโทรปี

### 2.1 เอนโทรปีของแก๊สอุดมคติ

พิจารณาแก๊สอุดมคติจำนวน  $n$  โมล มีปริมาตร  $V$  ที่ความดัน  $P$  และอุณหภูมิ  $T$  ถ้าให้ความร้อนปริมาณ  $dQ$  แก่แก๊สนี้ ดังนั้น จากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

$$dQ = dU + dW$$

ถ้า  $C_V$  เป็นความจุความร้อนแก๊สที่ปริมาตรคงตัว ให้  $dT$  เป็นอุณหภูมิที่สูงขึ้น และ  $dV$  เป็นปริมาตรที่เปลี่ยนไป ดังนั้น

$$dU = C_V dT \quad \text{และ} \quad dW = PdV$$

$$\therefore dQ = C_V dT + PdV$$

จากกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ เอนโทรปีเปลี่ยนแปลงไปกำหนดโดย

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \frac{PdV}{T} \quad (12.13)$$

ถ้าเราเลือกสถานะเริ่มต้นเป็น 1 ที่อุณหภูมิ  $T_0$  ความดัน  $P_0$  และปริมาตร  $V_0$  เอนโทรปีของแก๊สเป็น  $S_0$  ดังนั้น เอนโทรปีของแก๊สในสถานะที่ 2 ที่อุณหภูมิ  $T$  ความดัน  $P$  และปริมาตร  $V$  กำหนดโดย

$$S = S_0 + \int_1^2 \frac{C_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{PdV}{T} \quad (12.14)$$

ค่าของ  $S$  อาจแยกออกได้เป็น 3 กรณี คือ

1) ค่าของ  $S$  ในทอมของอุณหภูมิและปริมาตร

จากสมการสถานะของแก๊สอุดมคติ คือ  $PV = nRT$

$$\therefore P = \frac{nRT}{V}$$

แทนค่า  $P$  ลงในสมการ (12.14)

$$S = S_0 + \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + nR \int_1^2 \frac{dV}{V}$$
$$S_0 + C_V \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (12.15)$$

ในกรณีการขยายตัวที่อุณหภูมิตั้งตัว นั่นคือ  $T = T_0$

$$\therefore S = S_0 + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) \quad (12.16)$$

2) ค่าของ  $S$  ในทอมของอุณหภูมิและความดัน

เนื่องจาก

$$V = \frac{nRT}{P}$$

และ

$$PdV + VdP = nRdT$$

ดังนั้น

$$PdV = nRdT - VdP$$

$$= nRdT - nRT \frac{dP}{P}$$

เมื่อแทนค่าของ  $PdV$  ในสมการ (12.14) จะได้

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + nR \int_1^2 \left( \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) \\ &= S_0 + C_V \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + nR \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \right] \end{aligned}$$

สำหรับแก๊สอุดมคติ  $C_P - C_V = nR$

$$\therefore S = S_0 + C_V \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + (C_P - C_V) \left[ \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \right]$$

หรือ

$$S = S_0 + C_P \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) + (C_P - C_V) \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (12.17)$$

สำหรับการขยายตัวที่อุณหภูมิคงตัว หรือ  $T = T_0$

$$\begin{aligned} \therefore S &= S_0 + (C_P - C_V) \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \\ S &= S_0 + nR \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \end{aligned} \quad (12.18)$$

### 3) ค่าของ $S$ ในทอมของความดันและปริมาตร

จาก  $PV = nRT$

ดังนั้น  $T = \frac{PV}{nR}$

และ  $dT = \frac{PdV + VdP}{nR}$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (12.14)

$$\begin{aligned} S &= S_0 + \int_1^2 C_V \frac{PdV + VdP}{PV} + nR \int_1^2 \frac{PdV}{PV} \\ &= S_0 + \int_1^2 C_V \left( \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} \right) + (C_P - C_V) \int_1^2 \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

$$= S_0 + \int_1^2 \left( C_V \frac{dP}{P} + C_P \frac{dV}{V} \right)$$

$$\therefore S = S_0 + C_V \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) + C_P \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) \quad (12.19)$$

## 2.2 เอนโทรปีของไอน้ำ

พิจารณาน้ำแข็ง  $m$  กรัม ที่อุณหภูมิสัมบูรณ์  $T_1$  เราต้องการหาค่าเอนโทรปีที่เพิ่มขึ้นเมื่อน้ำแข็งกลายเป็นไอน้ำที่อุณหภูมิ  $T_2$

ถ้าความร้อนปริมาณ  $dQ$  ไหลเข้าสู่ระบบที่อุณหภูมิ  $T$  เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปคือ  $dS = \frac{dQ}{T}$

การเปลี่ยนน้ำแข็ง  $m$  กรัมที่อุณหภูมิ  $T_1$  เป็นน้ำที่อุณหภูมิเดียวกัน ต้องใช้ความร้อน  $mL_i$  โดยที่  $L_i$  เป็นความร้อนแฝง (latent heat) ของน้ำแข็ง ดังนั้น เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปในกระบวนการนี้เท่ากับ  $\frac{mL_i}{T_1}$

หลังจากนั้นน้ำ  $m$  กรัมที่อุณหภูมิ  $T_1$  เปลี่ยนเป็นอุณหภูมิ  $T_2$  เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปคือ

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc dT}{T} = mc \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$$

โดยที่  $c$  คือ ความร้อนจำเพาะของน้ำ

ต่อไปน้ำ  $m$  กรัมที่  $T_2$  กลายเป็นไอน้ำที่อุณหภูมิเดียวกันจะต้องใช้ความร้อน  $mL_s$  โดยที่  $L_s$  ความร้อนแฝงของไอน้ำ ดังนั้นเอนโทรปีที่เปลี่ยนไปในช่วงนี้คือ  $\frac{mL_s}{T_2}$

เอนโทรปีที่เพิ่มขึ้นทั้งหมดคือ

$$S = \frac{mL_i}{T_1} + mc \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{mL_s}{T_2} \quad (12.20)$$

## 3. หลักการเพิ่มเอนโทรปีหรือลดพลังงาน

ในกระบวนการผันกลับได้ เอนโทรปีของระบบมีค่าคงตัว แต่ในกระบวนการผันกลับไม่ได้ เอนโทรปีของระบบมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากกระบวนการที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติเป็นกระบวนการผันกลับไม่ได้ และกระบวนการผันกลับได้เป็นเพียงกรณีจำกัดในอุดมคติเท่านั้น ดังนั้นวัฏจักรของการดำเนินการจึงดำเนินไปโดยที่เอนโทรปีของระบบเพิ่มขึ้นและเข้าสู่ค่าสูงสุดนี้คือหลักการของการเพิ่มเอนโทรปี ซึ่งกล่าวได้ดังนี้ เอนโทรปีของระบบเอกเทศมีค่าเพิ่มขึ้นสำหรับกระบวนการผันกลับไม่ได้ และเอนโทรปีของระบบเอกเทศมีค่าคงตัวสำหรับกระบวนการผันกลับได้ตามลำดับ หรือ  $dS \geq 0$

เนื่องจากกระบวนการที่เกิดขึ้นจริงเป็นกระบวนการผันกลับไม่ได้ ดังนั้นพลังงานบางส่วนจึงไม่อาจใช้ทำงานได้ แต่จะเปลี่ยนไปเป็นความร้อนโดยอาจเกิดจากความเสียดทาน การนำหรือการแผ่รังสี ด้วยเหตุนี้พลังงานในรูปแบบต่างๆ จะเปลี่ยนไปเป็นพลังงานความร้อน โดยไม่อาจเปลี่ยนกลับไปเป็นงานกลได้อีก

จากการเพิ่มเอนโทรปี ความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลของสารจะเพิ่มขึ้น กล่าวคือ การเพิ่มเอนโทรปีหมายถึงการเปลี่ยนจากสถานะที่มีระเบียบไปสู่สถานะที่ไม่มีระเบียบ (disorder or chaos) เอนโทรปีของสารในสถานะที่เป็นแก๊สจึงมากกว่าสถานะที่เป็นของเหลว เนื่องจากโมเลกุลสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระมากกว่า จึงมีความไม่เป็นระเบียบมากกว่าด้วย และในทำนองเดียวกันเอนโทรปีของสารในสถานะของเหลวจะมากกว่าในสถานะของแข็ง ดังนั้นเมื่อน้ำแข็งละลายกลายเป็นน้ำและไอน้ำเอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลจะเพิ่มขึ้น ในทางตรงกันข้าม เมื่อไอน้ำควบแน่นเป็นน้ำและน้ำแข็ง เอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลจะลดลง เราจึงสรุปว่าเมื่ออุณหภูมิของระบบมีค่าลดลง เอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบภายในระบบจะลดลง เอนโทรปีของสารจึงเป็นตัววัดอันดับของความไม่เป็นระเบียบ เช่นเดียวกับอุณหภูมิที่เป็นตัววัดอันดับความร้อนของสารที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ การเคลื่อนที่อันเนื่องมาจากความร้อนจะหายไปโดยสิ้นเชิง ความไม่เป็นระเบียบและเอนโทรปีจะกลายเป็นศูนย์ โมเลกุลของสารจะวางเรียงตัวกันเป็นระเบียบ

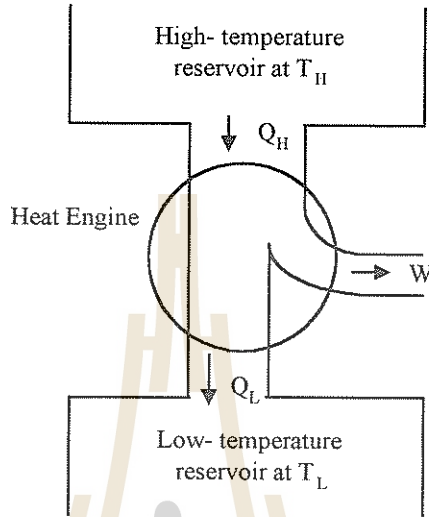
กล่าวโดยสรุป เอนโทรปีของระบบเอกเทศใดๆ มีค่าเพิ่มขึ้น และเข้าสู่สถานะเฉื่อยที่มีเอนโทรปีสูงสุด ธรรมชาติจะเปลี่ยนจากสถานะที่มีระเบียบไปสู่สถานะที่มีระเบียบน้อยลง หรือจากสถานะที่ไม่เป็นระเบียบน้อยกว่าไปสู่สถานะที่ไม่เป็นระเบียบมากยิ่งขึ้น ในที่สุดจักรวาลจะมีสภาพยุ่งเหยิงหรืออลวน (chaos) นั่นเอง

#### 4. เครื่องยนต์ความร้อน ตู้เย็น และวัฏจักรคาร์โนท์

เครื่องยนต์ความร้อนเป็นเครื่องยนต์ที่ดำเนินการเป็นวัฏจักรได้โดยการเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานกล การศึกษาเกี่ยวกับเครื่องยนต์ความร้อนจะตั้งอยู่บนพื้นฐานของคำกล่าวของเคลวิน - พลังค์ (Kelvin-Planck statement) และคำกล่าวของเคลาซิอุส (Clausius statement) ของกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ ซึ่งมีใจความดังนี้

- 1) เป็นไปไม่ได้ที่เราจะสร้างสิ่งประดิษฐ์ซึ่งดำเนินการเป็นวัฏจักร โดยดึงความร้อนจากตัวรักษา (reservoir) แล้วเปลี่ยนเป็นงานได้หมด
- 2) เป็นไปไม่ได้ที่ความร้อนจะไหลจากวัตถุที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า ไปสู่วัตถุที่มีอุณหภูมิสูงกว่า โดยปราศจากความช่วยเหลือจากแหล่งภายนอก

การทำงานของเครื่องยนต์ความร้อน คือการสร้างสิ่งประดิษฐ์ที่การเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานกล โดยเครื่องยนต์รับความร้อนปริมาณ  $Q_H$  จากตัวรักษาที่อุณหภูมิสูง ปริมาณความร้อนนี้ส่วนหนึ่งจะเปลี่ยนเป็นงาน  $W$  ปริมาณความร้อนที่เหลือ  $Q_L$  จะถูกขับถ่ายสู่ตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า ดังแสดงในรูปที่ 12.6



รูปที่ 12.6 แสดงการทำงานของเครื่องยนต์ความร้อน

ปริมาณความร้อนรวมที่เครื่องยนต์ดูดกลืนเข้ามาจึงเท่ากับ  $\Delta Q = Q_H - Q_L$  ปริมาณความร้อนส่วนนี้จะเท่ากับงานที่เครื่องยนต์ทำได้ในวัฏจักรหนึ่งๆ เนื่องจากเครื่องยนต์กลับสู่สถานะเริ่มต้นอีกครั้ง และพลังงานภายในรวมที่เปลี่ยนไปเท่ากับศูนย์ ดังนั้นในแต่ละวัฏจักรของเครื่องยนต์ความร้อน

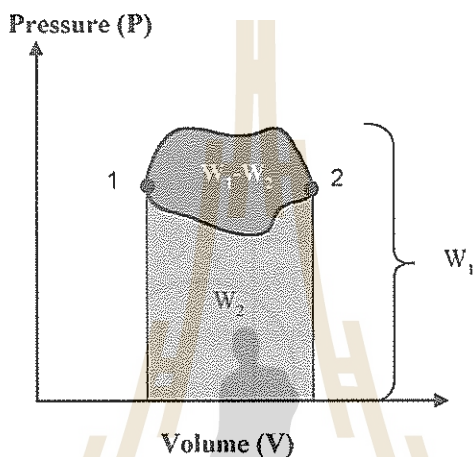
$$\Delta U = 0 = \Delta Q - W$$

หรือ 
$$W = \Delta Q = Q_H - Q_L$$

ประสิทธิภาพ (efficiency,  $\epsilon$ ) ของเครื่องยนต์ความร้อน นิยามว่าเป็น อัตราส่วนของงานที่เครื่องยนต์ทำได้ต่องานที่ป้อนเข้าเครื่องยนต์ ในกรณีของเครื่องยนต์ความร้อน งานที่เครื่องยนต์ทำได้คือ  $W$  และงานที่ป้อนเข้าสู่ระบบ คือ  $Q_H$  ดังนั้น

$$\epsilon = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \tag{12.21}$$

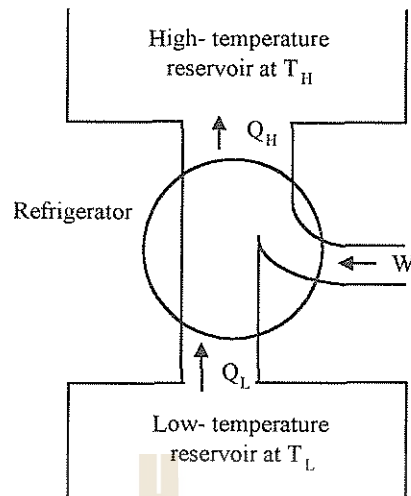
ค่าของ  $\varepsilon$  อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และในบางครั้งมีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์โดยการคูณด้วย 100 ในแผนภาพ P-V วัฏจักรของเครื่องยนต์ความร้อนจะเป็นเส้นโค้งปิดดังแสดงในรูปที่ 12.7



รูปที่ 12.7 แสดงแผนภาพ P-V ของเครื่องยนต์ความร้อน

สมมติระบบเริ่มที่ตำแหน่ง 1 และเคลื่อนตามเข็มนาฬิกาที่ตำแหน่ง 2 ปริมาตรของระบบเพิ่มขึ้น และงานที่ระบบทำต่อสิ่งแวดล้อมคือ  $w_1$  ซึ่งเป็นพื้นที่ใต้เส้นโค้งจาก 1 ไปยัง 2 ต่อไปเมื่อระบบเคลื่อนที่จาก 2 ไปยัง 1 ปริมาตรจะลดลงและงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำต่อระบบเป็น  $w_2$  เนื่องจาก  $w_1$  และ  $w_2$  มีทิศตรงกันข้าม ดังนั้น งานที่ระบบทำทั้งหมดใน 1 รอบจึงเท่ากับ  $w_1 - w_2$  ที่น่าสนใจว่า ทุกๆ จุดบนแผนภาพ P-V จะเป็นตำแหน่งสมดุล ดังนั้น กระบวนการผันกลับได้เท่านั้นที่สามารถนำมาวาดได้บนแผนภาพ P-V แต่ในกรณีของกระบวนการผันกลับไม่ได้ ตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้นที่นำมาลงจุดได้

ระบบที่มีวัฏจักรการทำงานที่ตรงกันข้ามกับเครื่องยนต์ความร้อน เรียกว่า ตู้เย็น (refrigerator) งาน  $w$  ที่ต้องใช้ทั้งหมดเป็นงานที่ต้องใช้ดึงความร้อนปริมาณ  $Q_L$  จากตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า แล้วคายสู่ตัวรักษาที่มีอุณหภูมิสูงกว่าด้วยปริมาณ  $Q_H$  ดังแสดงในรูปที่ 12.8

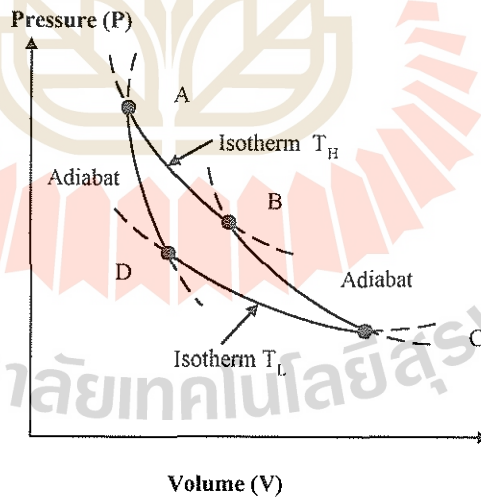


รูปที่ 12.8 แสดงการทำงานของตู้เย็น

ในกรณีของตู้เย็น สัมประสิทธิ์ของสมรรถนะ (coefficient of performance or COP) คือ อัตราส่วนของปริมาณความร้อนจากตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า หรือ  $Q_L$  ต่องานที่ป้อนเข้าสู่ระบบ หรือ  $W$  ดังนั้น

$$COP = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L} \quad (12.22)$$

ในปี พ.ศ.2367 วิศวกรชาวฝรั่งเศสชื่อ ซาดิ คาร์โนต์ (Sadi Carnot) ได้เสนอแบบเครื่องยนต์ความร้อนเชิงอุดมคติที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุด โดยใช้วัฏจักรของการผันกลับได้ และเรียกวัฏจักรนี้ว่า วัฏจักรคาร์โนต์ (Carnot's cycle) แสดงในรูปที่ 12.9



รูปที่ 12.9 แสดงวัฏจักรคาร์โนต์ซึ่งประกอบด้วย 2 ไอโซเทอร์ม และ 2 แอดิยาแบต

จากรูปที่ 12.9 จะเห็นได้ว่า พื้นที่หรืองานทั้งหมดในแต่ละรอบจะล้อมรอบด้วยเส้นไอโซเทอร์ม 2 เส้น และเส้นแอดิยาแบต (adiabat) 2 เส้น ความร้อนถูกระบบดึงดูที่ตัวรักษาอุณหภูมิสูง  $Q_H$  และถูกขับออกจากระบบที่อุณหภูมิต่ำกว่าคือ  $T_L$  วัฏจักรดำเนินไปในทิศทางเข็มนาฬิกา ระบบจะทำงานเมื่อปริมาตรขยายตัวตามแนวเส้นไอโซเทอร์มเส้นบนคือ AB และตามแนวเส้นแอดิยาแบตจาก B ไปยัง C ต่อจากนั้นต้องให้งานแก่เครื่องยนต์เพื่ออัดให้ปริมาตรลดลงตามแนวเส้นไอโซเทอร์ม CD และเส้นแอดิยาแบต จาก D ไปยัง A

ประสิทธิภาพของวัฏจักรคาร์โนท์สามารถเขียนในเทอมของอุณหภูมิสัมบูรณ์ได้โดยใช้กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์มาอธิบาย กล่าวคือ ในตอนแรกสังเกตว่าปริมาณความร้อนจะถูกดึงดูเข้าสู่ระบบในระหว่างที่อุณหภูมิตั้งตัว แนวเส้นไอโซเทอร์มเส้น AB โดยมีค่า  $Q_H$  ซึ่งมีค่าสูงกว่า และต่อมาปริมาณความร้อนถูกขับออกจากระบบที่อุณหภูมิตั้งตัว ตามแนวเส้นไอโซเทอร์ม CD โดยมีค่า  $Q_L$  ซึ่งมีค่าต่ำกว่า จากสมการที่ (12.21) ประสิทธิภาพของเครื่องยนต์ความร้อน  $\epsilon = \frac{W}{Q_H}$  และจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์  $W = Q_H - Q_L$  ดังนั้น

$$\epsilon = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H}$$

เนื่องจากการดูดหรือคายความร้อนเกิดขึ้นที่อุณหภูมิตั้งตัว ดังนั้น

$$Q_H = nRT_H \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

และ

$$Q_L = nRT_L \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

จึงได้ประสิทธิภาพของวัฏจักรคาร์โนท์

$$\therefore \epsilon = \frac{nRT_H \ln(V_B/V_A) - nRT_L \ln(V_C/V_D)}{nRT_H \ln(V_B/V_A)}$$

และในส่วนกระบวนการแอดิยาแบตซึ่ง  $PV^\gamma = \text{ค่าคงตัว}$  ทำให้ได้ว่า  $V_B/V_A = V_C/V_D$  ดังนั้นจึงเขียนประสิทธิภาพของวัฏจักรคาร์โนท์สามารถเขียนในเทอมของอุณหภูมิสัมบูรณ์ได้เป็น

$$\epsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (12.23)$$

ซึ่งขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของตัวรักษาเท่านั้น

เครื่องยนต์ที่ใช้อยู่ทั่วไปจะมีประสิทธิภาพต่ำกว่าเครื่องยนต์คาร์โนต์เสมอ เนื่องจากการสูญเสียปริมาณความร้อนไปกับความเสียดทานและการนำความร้อนในชิ้นส่วนของเครื่องยนต์

เครื่องยนต์ความร้อนที่ใช้กัน เช่น เครื่องยนต์ความร้อนสำหรับผลิตกระแสไฟฟ้า ตัวรักษาที่อุณหภูมิสูงกว่าจะใช้เชื้อเพลิงที่เป็นแก๊ส น้ำมัน ถ่านหิน หรือนิวเคลียร์ และตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่ามักเป็นสิ่งแวดล้อมโดยรอบ เช่น บรรยากาศ แม่น้ำ ทะเลสาป หรือสระน้ำ ซึ่งอาจต้องมีการควบคุมเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ดังนั้น เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดจึงต้องให้ตัวรักษาที่มีอุณหภูมิสูงกว่ามีอุณหภูมิสูง อย่างไรก็ตามเชื้อเพลิงที่ใช้แต่ละชนิดจะมีค่าจำกัดของการให้พลังงานในการเผาไหม้และให้อุณหภูมิสูงสุดที่แตกต่างกันไป

## สรุป

เอนโทรปี คือ สมบัติอย่างหนึ่งของระบบที่เป็นฟังก์ชันของสถานะของระบบซึ่งมีค่าแตกต่างกันที่จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของกระบวนการ

สามารถเขียนกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ในรูปคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

หรือ

$$dQ = TdS$$

หลักการของการเพิ่มเอนโทรปี เอนโทรปีของระบบเอกเทศมีค่าเพิ่มขึ้นสำหรับกระบวนการผันกลับไม่ได้ และเอนโทรปีของระบบเอกเทศมีค่าคงตัวสำหรับกระบวนการผันกลับได้ตามลำดับหรือ  $dS \geq 0$

เครื่องยนต์ความร้อนเป็นเครื่องยนต์ที่ดำเนินการเป็นวัฏจักร ได้โดยการเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานกล เครื่องยนต์รับความร้อนปริมาณ  $Q_H$  จากตัวรักษาที่อุณหภูมิสูง ปริมาณความร้อนนี้ส่วนหนึ่งจะเปลี่ยนเป็นงาน  $W$  ปริมาณความร้อนที่เหลือ  $Q_L$  จะถูกขับถ่ายสู่ตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่าตามสมการ

$$W = \Delta Q = Q_H - Q_L$$

ประสิทธิภาพ  $\varepsilon$  ของเครื่องยนต์ความร้อน

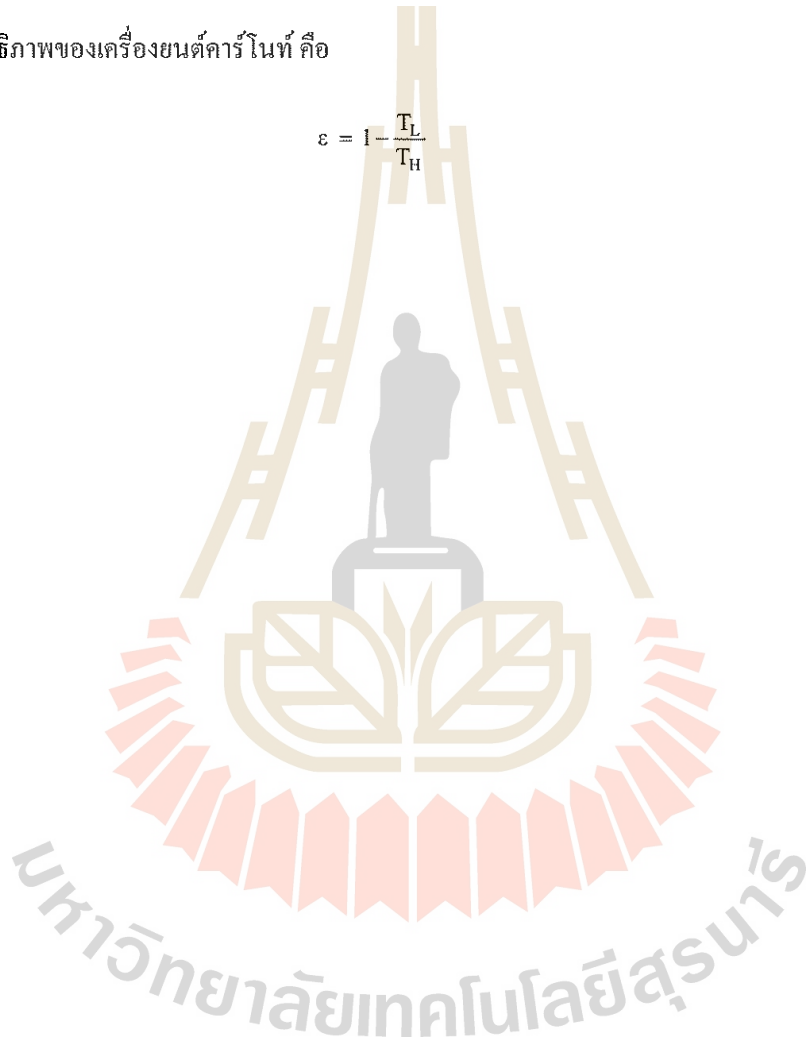
$$\varepsilon = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$$

สัมประสิทธิ์ของสมรรถนะของผู้เย็น คือ

$$\text{COP} = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L}$$

ประสิทธิภาพของเครื่องยนต์คาร์โนท์ คือ

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$



## บรรณานุกรม

---

- Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of physics** (4<sup>th</sup> ed.). New York: Wiley.
- Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4<sup>th</sup> ed. New York: Wiley.
- Serway, Raymond A. 1996. **Physics for scientists and engineers, with modern physics** (4<sup>th</sup> ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.



## ภาคผนวก ก

หน่วย SI ของปริมาณพื้นฐาน			
ปริมาณ	ชื่อหน่วย	สัญลักษณ์ แทนหน่วย	นิยาม
ความยาว	เมตร (meter)	m	ความยาว 1 เมตร เป็นความยาวที่แสงเดินทางในสุญญากาศในเวลา $1/299,792,458$ วินาที (1983)
มวล	กิโลกรัม (kilogram)	kg	มวล 1 กิโลกรัม คือ มวลที่เท่ากับแท่งต้นแบบรูปทรงกระบอกทำจากอัลลอยด์แพลทตินัมอิเรเดียม ซึ่งเก็บไว้ที่ International Bureau of Weights and Measures ในประเทศฝรั่งเศส (1889)
เวลา	วินาที (second)	s	เวลา 1 วินาที คือ ช่วงคาบแผ่รังสีทั้งหมด 9,192,631,770 รอบ ที่เกิดจากการเปลี่ยนสถานะ hyperfine 2 ระดับของระดับพื้นของอะตอมซีเซียม - 133 (1967)
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์ (ampere)	A	กระแสไฟ 1 แอมแปร์ คือ กระแสคงที่ที่วิ่งผ่านตัวนำตรง 2 ตัวที่ต่อขนานกัน มีความยาวเท่ากัน มีพื้นที่หน้าตัดวงกลมที่เล็กมาก วางอยู่ห่างกันเป็นระยะ 1 เมตร ในสุญญากาศ และทำให้เกิดแรงกระทำระหว่างตัวนำทั้งสองขนาดเท่ากับ $2 \times 10^{-7}$ นิวตันต่อเมตร (1946)
อุณหภูมิ	เคลวิน (kelvin)	K	1 เคลวินเท่ากับเศษส่วน $1/273.16$ ของอุณหภูมิที่น้ำ น้ำแข็ง และไอน้ำอยู่กันอย่างสมดุล (1967)
ปริมาณของสสาร	โมล (mole)	mol	1 โมล คือ ปริมาณของสสารที่มีจำนวนตัว โมเลกุล ไอออน ฯลฯ เท่ากับ จำนวนอะตอมของ คาร์บอน-12 0.012 กิโลกรัม (1971)
ความเข้มแสง	แคนเดลา (candela)	cd	1 แคนเดลา คือ ความเข้มแสงที่เปล่งออกในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว $1/600,000$ ตารางเมตรของวัตถุดำแพลทตินัม ณ จุดเยือกแข็งภายใต้ความดัน 101.325 นิวตันต่อตารางเมตร (1967)

## ภาคผนวก ข

### ค่าคงตัวทางฟิสิกส์บางค่า

Quantity	Symbol	Value
Speed of light	$c$	$2.998 \times 10^8$ m/s
Gravitational constant	$G$	$6.672 \times 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Avogadro's number	$N_A$	$6.022 \times 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
Universal gas constant	$R$	8.314 J / mol · K
Boltzmann's constant	$k$	$1.381 \times 10^{-23}$ J / K
Planck's constant	$h$	$6.626 \times 10^{-34}$ J · s
Elementary charge	$e$	$1.602 \times 10^{-19}$ C
Electron-volt	eV	$1.602 \times 10^{-19}$ J
Permittivity of free space	$\epsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12}$ C <sup>2</sup> / N · m <sup>2</sup>
Permeability of free space	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ N / A <sup>2</sup>
Electron rest mass	$m_e$	$9.109 \times 10^{-31}$ kg
Proton rest mass	$m_p$	$1.673 \times 10^{-27}$ kg
Neutron rest mass	$m_n$	$1.675 \times 10^{-27}$ kg

### ข้อมูลทางฟิสิกส์บางค่า

Acceleration due to gravity (g)	9.81	m/s <sup>2</sup>
Mass of earth	$5.98 \times 10^{24}$	kg
Mass of moon	$7.36 \times 10^{22}$	kg
Mass of sun	$1.99 \times 10^{30}$	kg
Mean radius of earth	$6.35 \times 10^6$	m
Mean radius of moon	$1.74 \times 10^6$	m
Mean radius of sun	$6.96 \times 10^8$	m
Average earth - sun distance	$1.496 \times 10^{11}$	m
Average earth - moon distance	$3.84 \times 10^8$	M

## ภาคผนวก ค

### อักษรกรีก

Capital	Lowercase	Name	ชื่อ
A	$\alpha$	Alpha	แอลฟา
B	$\beta$	Beta	บีตา
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	แกมมา
$\Delta$	$\delta$	Delta	เดลตา
E	$\epsilon$	Epsilon	เอปไซลอน
Z	$\zeta$	Zeta	ซีตา
H	$\eta$	Eta	อีตา
$\Theta$	$\theta$	Theta	ทีตา
I	$\iota$	Iota	ไอโอตา
K	$\kappa$	Kappa	แคปปา
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	แลมบ์ดา
M	$\mu$	Mu	มีว
N	$\nu$	Nu	นิว
$\Xi$	$\xi$	Xi	ไซ
O	$\omicron$	Omicron	โอไมครอน
$\Pi$	$\pi$	Pi	พาย
P	$\rho$	Rho	โร
$\Sigma$	$\sigma$	Sigma	ซิกมา
T	$\tau$	Tau	เทา
Y	$\upsilon$	Upsilon	อึปไซลอน
$\Phi$	$\phi$	Phi	ฟาย
X	$\chi$	Chi	ไค
$\Psi$	$\psi$	Psi	ไซ
$\Omega$	$\omega$	Omega	โอเมกา

## ภาคผนวก ง

สูตรทางคณิตศาสตร์บางส่วน

อนุพันธ์และอินทิกรัลที่สำคัญบางค่า

1. $\frac{dx}{dx} = 1$	1. $\int dx = x$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$	2. $\int au \, dx = a \int u \, dx$
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	3. $\int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$
4. $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$	4. $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$	5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x $
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	6. $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv + \int v \frac{du}{dx} \, dx$
7. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$	7. $\int e^x \, dx = e^x$
8. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$	8. $\int \sin x \, dx = -\cos x$
9. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$	9. $\int \cos x \, dx = \sin x$
10. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	10. $\int \tan x \, dx = \ln \sec x $
11. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$	11. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
12. $\frac{d}{dx} \sec x = \tan x \sec x$	12. $\int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\frac{d}{dx} \csc x = -\cot x \csc x$	13. $\int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	14. $\int x^2 e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	15. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$	16. $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

### เอกลักษณ์ตรีโกณ

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \quad \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \right]$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right]$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}$$

## ครุฑ

ก		กลศาสตร์ควอนตัม	3
กฎของเกย์ ลูสแซก	393	กลศาสตร์ควอนตัมเชิงสถิติ	409
กฎของความเฉื่อย ดู กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน		กลศาสตร์เชิงสถิติ	387
กฎของโคไซน์	7	การกระจัด	21, 38
กฎของชาร์ล	393	การกลิ้ง	181
กฎของไซน์	7	การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล	181, 185
กฎของดulongและเปอตีต	432	การแกว่งกวัด	191
กฎของบอยล์	393	การแกว่งกวัดแบบบังคับ	227
กฎของสโตกส์	379	การแกว่งกวัดแบบหน่วง	227
กฎของฮุก	192	การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์โมนิก	191
กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์	389, 423	การแกว่งกวัดแบบฮาร์โมนิก	191
กฎข้อที่สองของนิวตัน	62, 66	การขยายตัวเชิงความร้อน	390
กฎข้อที่สองทางอุณหพลศาสตร์	423	การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย	169, 178
กลศาสตร์		การคูณแบบเวกเตอร์	17
กฎข้อที่สามของนิวตัน	63, 66	การคูณแบบสเกลาร์	17
กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน	61, 66	การคูณเวกเตอร์	16
กฎข้อที่หนึ่งทางอุณหพลศาสตร์	423	การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง	181
กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน	63, 67	การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว	29
กรอบอ้างอิงเฉื่อย	61	การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ	41
กระบวนการความดันคงตัว	389, 399, 425	การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์	42
กระบวนการที่ผันกลับไม่ได้	437	การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว	46
กระบวนการปริมาตรคงตัว	389, 399, 425	การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกเชิงเดียว	191
กระบวนการผันกลับได้	437, 441	การเคลื่อนที่เป็นคาบ	191
กระบวนการวัฏจักร	425, 426	การชน	145
กระบวนการอุณหภูมิกงตัว	388, 399, 425	การชนชนิดไม่ยืดหยุ่น	151
กระบวนการเอนโทรปีคงตัว	438	การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์	147, 150
กระบวนการแอดิแบติก	286, 388, 400, 425	การชนชนิดยืดหยุ่นสมบูรณ์	147
กลศาสตร์	3, 21		

การชนในสองมิติ	157	การไหลแบบปั่นป่วน	377
การชนในหนึ่งมิติ	157	การไหลแบบไม่หมุน	353, 359
การชนแบบกึ่งยืดหยุ่น	151	การไหลแบบละมินาร์	374
การชนแบบไม่ยืดหยุ่น	147	การไหลแบบสถานะคงตัว	354
การชนสองมิติ	153	การอนุรักษ์พลังงาน	109, 114
การชนหนึ่งมิติ	145	การอนุรักษ์พลังงานกล	109
การคล	131, 144	กาลักน้ำ	368
การทดลองของคาร์เวินดิช	64	กำลัง	98, 101
การแทรกสอด	264	กำลังเฉลี่ย	98
การแทรกสอดเสริมสมบูรณ์	265	กำลังบิดดล	98
การแทรกสอดหักล้างสมบูรณ์	266	กำลังม้า	98
การบวกเวกเตอร์	6	แก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม	413
การแบ่งกันทำกันของพลังงาน	412	แก๊สอะตอมเดี่ยว	412
การประยุกต์กฎของนิวตัน	73, 83	แก๊สอุดมคติ	288
การประยุกต์หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม		ข	
เชิงเส้น	137	ขบวนการเคลื่อน	255
การแยกเวกเตอร์	11	ของไหล	319
การรวมเวกเตอร์	6	ของไหลชนิดแข็ง	409
การรวมเวกเตอร์โดยใช้เวกเตอร์หน่วย	13	ของไหลอุดมคติ	353
การรวมเวกเตอร์โดยใช้องค์ประกอบของ		ค	
เวกเตอร์	12	คลื่นกระแทก	311
การลบเวกเตอร์	7	คลื่นกล	249
การเคลื่อนที่เชิงเส้น	181	คลื่นเชิงเส้น	264
การศึกษาาระบบจุลทรรศน์	387	คลื่นตามขวาง	250
การศึกษาาระบบมหทรรศน์	387	คลื่นตามยาว	250
การหมุน	181	คลื่นได้เสียง	256
การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกน		คลื่นทุติยภูมิ	256
สมมาตร	182	คลื่นนิ่ง	267
การหมุนควง	183	คลื่นปฐมภูมิ	256
การหมุนล่าง	184	คลื่นไม่เชิงเส้น	264
การไหลแบบคงตัว	353, 359		

คลื่นเหนือเสียง	256	ความเร็วเฉลี่ย	22, 39
คลื่นฮาร์มอนิก	252		
ความเข้ม	261	ความเร็วบัคคูล	23, 39
ความจุความร้อน	429	ความเร็วเฟส	252
ความจุความร้อนจำเพาะ	430	ความเสียดทาน	71, 83
ความจุความร้อนต่อ โมลของสาร	430	ความหน่วง	28
ความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว	430	ความหนาแน่น	126, 319
ความจุความร้อน โมลาร์	257, 430, 431	ความหนาแน่นพลังงาน	358
ความจุความร้อนโมลาร์ที่ความดันคงตัว	288	ความหนาแน่นสัมพัทธ์	319
ความถี่		ความหนืด	373
ความถี่ย่อย	59	ค่าคงตัวการหน่วง	227
ความดัน	319	ค่าคงตัวความยืดหยุ่น	192
ความดัน 1 บรรยากาศ	322	ค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภพ	64
ความดันเกจ	323, 324	ค่าคงตัวโบลต์ซมันน์	409
ความดันของบรรยากาศ	322	ค่าคงตัวสปริง	192
ความดันบรรยากาศ	336	ค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์	409
ความดันสัมบูรณ์	323	ค่าเฉลี่ยอัตราเร็วยกกำลังสอง	411
ความตึงผิว	338, 339, 347	คาบ	194
ความถ่วงจำเพาะ	319	ค่าราคกำลังสองเฉลี่ยของอัตราเร็ว	409
ความถี่ของการชน	417	ค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงปริมาตร	391
ความถี่ของการสั่นพ้อง	242	ค่าสัมประสิทธิ์เฉลี่ยของการขยายตัวเชิงเส้น	390
ความถี่เชิงมุม	252	ค่ากล่าววของเคลวิน - พลังค์	442
ความถี่หลักมูล	276, 304	ค่ากล่าววของเคลวิน - พลังค์	442
ความยาวคลื่น	252	ค่าอุปสรรคในระบบ SI	5
ความยาวสมมูล	203	เครื่องยนต์ความร้อน	437, 442
ความร้อน	423	เครื่องวัดความหนืด	373
ความเร่ง	39	เครื่องอัดไฮดรอลิก	333
ความเร่งเฉลี่ย	39	เทอร์ต	108
ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก	31	แคลอรี	423
ความเร่งบัคคูล	39		
ความเร่งสู่ศูนย์กลาง	47		
ความเร็ว	22, 39		

งาน	398	เดซีเบล	301
		<b>ค</b>	
งานของแรงคงตัว	89, 100	ตัวแกว่งกวัด	191
งานของแรงที่มีขนาดไม่คงตัวแต่ทิศทางการคงตัว		ตัวดำเนินการ	108
	92	ตัวประกอบความแข็งตึง	192
งานของแรงที่มีขนาดและทิศทางการไม่คงตัว		ตัวประกอบคุณภาพ	232
	93	ตัวแปรการเข้าชน	153
งานของแรงไม่คงตัว	92, 101	ตัวแปรสถานะ	388
งานภายนอก	398	ตำแหน่ง	37
งานภายใน	398	ผู้เขียน	444
งานและพลังงานจลน์	96, 101	<b>ท</b>	
<b>จ</b>		ทฤษฎีการแบ่งกันเท่ากันของพลังงาน	430
จลนศาสตร์	21	ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส	387, 405
จำนวนโมล n	394	ทฤษฎีบทแทนขนาน	172, 179
จุดเดือด	390	ทฤษฎีบทแทนตั้งฉาก	171, 178
จุดร่วมสาม	397	ทฤษฎีบทงาน - พลังงาน	97, 356, 357
จุดวิกฤต	398	ทฤษฎีบททอริริเชลลี	365, 367
จุดศูนย์กลางมวล	121, 123, 142	ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	3
จุดศูนย์กลางวง	121	ทอร์ก	คู โมเมนตัมของแรง
จุดหลอมเหลว	390	เทอมของภาวะชั่วคราว	238
จุด	89	เทอมของสถานะคงตัว	238
ไวรัสโคโรนา	182, 185	<b>น</b>	
<b>ช</b>		น้ำหนัก	69, 82
ของ ลุยส์ ปีวเซย์	375	น้ำหนักจริง	328
<b>ซ</b>		น้ำหนักปรากฏ	328
ชอนิกบุม	311	<b>บ</b>	
ชาติ การ์โนต์	445	บัฟ	268
เซนทรอยด์	121, 126, 127, 143	บารอมิเตอร์	323
เซอร์ จอร์จ สโตกส์	379	บารอมิเตอร์ปรอท	323
<b>ด</b>		บีตส์	267, 294
ดาเนียล แบร์นูลลี	356		

แบบที่อัดไม่ได้	353, 357	พลังงานนิวเคลียร์	424
เบลล์ ปาสกาล	320	พลังงานภายใน	424
<b>ป</b>		พลังงานภายในของแก๊ส	408
ปฏิบัติ	268	พลังงานภายในของของแข็ง	432
ประสิทธิภาพ (efficiency, $e$ ) ของเครื่องยนต์		พลังงานรวมของระบบ	166
ความร้อน	443	พลังงานศักย์	103, 114
ประสิทธิภาพของวัฏจักรคาร์โนท์	446	พลังศักย์โน้มถ่วง	104
ปรากฏการณ์โคปป์เลอร์	299, 305	พัลส์ของคลื่น	250
ปรากฏการณ์แมกนัส	370	พาสคัล	320
ปริภูมิ	416	พิกัดอุณหภูมิ	388
ปริมาณความร้อน	429	พิสัย	43
ปริมาณทางฟิสิกส์	4	<b>พ</b>	
ปริมาณพื้นฐาน	4	พอน	300
ปริมาณแวกเตอร์	6	ฟังก์ชันการแจกแจง	410
ปริมาณสเกลาร์	6	ฟิสิกส์	3
ปริมาณอนุพันธ์	4	เฟส	193
ปอยส์	375	<b>ม</b>	
ปาสกาล	333	มวล	59, 69, 82
<b>ผ</b>		มาตรเวทุนิ	361, 364
แผนภาพ $P - V$	424	มาโนมิเตอร์	324
แผนภาพ $P - V - T$	394	มาโนมิเตอร์แบบปลายเปิด	324
แผนภาพเฟส	397	มุมเฟส	193
<b>พ</b>		มุมสัมผัส	343, 347
พลศาสตร์	57	แม่เหล็กไฟฟ้า	3
พลศาสตร์ของของไหล	353	โมเมนต์ของแรง	141
พลังงาน	141	โมเมนต์ความเฉื่อย	164, 169
พลังงานกล	109	โมเมนต์ัม	121
พลังงานความร้อน	424	โมเมนต์ัมของอนุภาค	131
พลังงานเคมี	424	โมเมนต์ัมเชิงมุม	140
พลังงานจลน์ของการหมุน	166	โมเมนต์ัมเชิงมุมของระบบ	140
พลังงานจลน์ของอนุภาค	166		

โมเมนต์เชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตั้ง	163	แรงแม่เหล็กไฟฟ้า	59
โมเมนต์เชิงมุมของอนุภาค	164	แรงยกปีกเครื่องบิน	368
โมเมนต์เชิงเส้น	131, 135, 143	แรงยึดติด	337, 343, 347
โมเมนต์เชิงเส้นของมวล	165	แรงลอยตัว	328
<b>ย</b>		แรงแวน เดอร์ วาลส์	395
ยึดหยุ่นอย่างสมบูรณ์	405	แรงเสียดทานจลน์	71, 83
<b>ร</b>		แรงเสียดทานสถิต	71, 83
ระดับขั้นความสำเร็จ	412	แรงอนุรักษ์	107, 114
ระดับขั้นความสำเร็จของการหมุน	431	แรงอย่างอ่อน	59
ระดับขั้นความสำเร็จอันเนื่องจากการสั่น	431	<b>ส</b>	
ระดับความเข้มเสียง	301	ลูกตุ้มชนิดบิด	64, 204
ระบบ	388	ลูกตุ้มเชิงเดียว	201
ระบบปิด	388	ลูกตุ้มฟิสิกส์	202
ระบบเปิด	388	เลขของเรย์โนลด์	377
ระบบวิวิธพันธุ์	388	เลขคลื่น	252
ระบบอนุภาค	121	เลขมิก	312
ระบบเอกเทศ	388, 438	<b>ว</b>	
ระบบเอกพันธุ์	388	วงกลมอ้างอิง	196
รังสี	260	วัฏจักรคาร์โนท์	445, 446
รังสีเซเรนโกฟ	312	วัตถุแข็งเกร็งหมุนรอบแกนตั้ง	163
รัศมีไจเรชัน	173, 179	วัตถุตกอย่างอิสระ	31
รูปλισชาจูลส์	218	วิถีเสรี	406, 414
แรงจากสนามของแรง	59	วิถีเสรีเฉลี่ย	406, 415, 416
แรงเชื่อมแน่น	337, 343, 347	เวกเตอร์บอกตำแหน่ง	37
แรงคูล	131	เวกเตอร์หน่วย	13
แรงโดยการสัมผัส	58	เวลาของการผ่อนคลาย	227
แรงนิวเคลียร์	59	เวลาเสรีเฉลี่ย	416
แรงโน้มถ่วง	59	<b>ส</b>	
แรงในธรรมชาติทางฟิสิกส์	59	สถานะที่ไม่มีระเบียบ	442
		สถิติศาสตร์ของของไหล	319, 358
		สนามสถิต	191

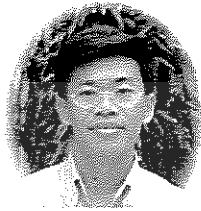
สภาพอะบิดลา	337, 344, 347	หลอดแก้วรูเล็กมาก	344
สมการคลื่น	255	หลอดไฟทอด	364
สมการแบร์นูลลี	358, 359, 361, 366	หลอดสถิต	364
สมการสถานะ	389	หลอดมแห่งการไหล	354
สมการสถานะของแวน เฮอร์ วาลส์	395	หลักการซ้อนทับ	264
สมการแห่งการต่อเนื่อง	354, 355	หลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค	141
สมดุลเคมี	389	หลักการอนุรักษ์โมเมนตัม	121
สมดุลเชิงกล	389	หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม	140, 141, 144
สมดุลเชิงความร้อน	387, 389	หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น	135, 136, 144
สมดุลเชิงอุณหพลวัต	389	หลักของพาสคัล	333, 336, 356
ส่วนขยาย	250	หลักของอาร์คิมิดีส	328, 336, 356
ส่วนอัด	250	อ	
สื่อเสียง	220	องค์ประกอบของเวกเตอร์	11
สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว	151, 152	ออสบอร์น เรย์โนลด์	377
สัมประสิทธิ์ของความหนืด	373, 375	อัตราการเปลี่ยน โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุ หมุนรอบแกนตั้ง	166
สัมประสิทธิ์ของความหนืดของของไหล บางชนิด	376	อัตราการไหล	355, 367
สัมประสิทธิ์ของสมรรถนะ	445	อัตราเร็วเฉลี่ย	411
สายกระแส	354	อัตราเร็วเชิงมุม	163
เส้นแอกเซียลเบต	446	อัตราเร็วที่มีค่าเป็นไป ได้มากที่สุด	411
ห		อัตราเร็วปลาย	380
หน่วยเกิน	229	อิเล็กทรอนิกส์	90
หน่วยขาด	230	อุณหพลศาสตร์	3, 387
หน่วยวิกฤต	229	อุณหภูมิต	389
หน่วย	4	อุณหภูมิตัมบูรณ์	410
หน่วยของความดัน	322	เอนทัลปี	429
หน่วยของความตึงผิว	338	เอนโทรปี	437, 439, 441, 442
หน่วยของงาน	89	เอวันเฮลิสตา คอร์ริเชลลี	367
หน่วยของปริมาตรพื้นฐาน	4	แอมพลิจูด	193
หน่วยของปริมาณอนุพันธ์	5	โอเวอร์โทน	304
หน้าคลื่น	260	ไอโซเทอร์ม	394, 446

ไอโซเทอร์มัล	394
ฮ	
ฮาร์โมนิกที่ ๓	276





ชื่อ รองศาสตราจารย์ ดร.ประสาธ สืบคำ  
คุณวุฒิ Ph.D. Physics, 1984 Arizona State University  
ตำแหน่ง รองศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชา  
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
หน่วยที่เขียน หน่วยที่ 9 และหน่วยที่ 10



ชื่อ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชินรัตน์ กอบเคหา  
คุณวุฒิ Ph.D. Theoretical Physics, 1995 University of London  
(OMW)  
ตำแหน่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชา  
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
หน่วยที่เขียน หน่วยที่ 11 และหน่วยที่ 12



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี