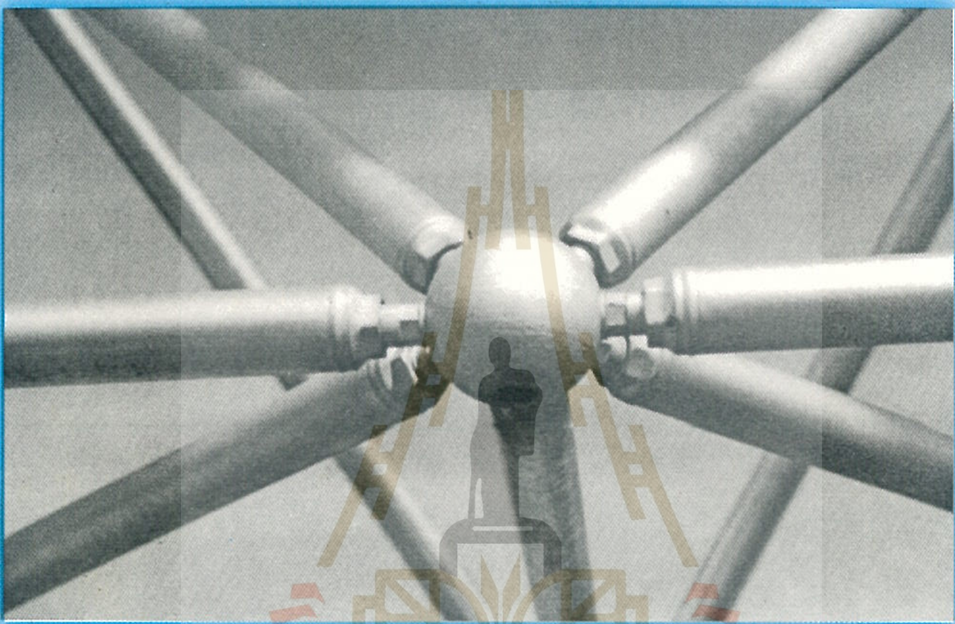
เอกสารคำสอนวิชา

410 201 Engineering Mechanics I



เรียบเรียงโดย

ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

120.-

คำนำ

เอกสารคำสอนวิชา Engineering Mechanics: Statics เล่มนี้ ได้ถูกแปลและเรียบเรียงขึ้นมาด้วยจุดประสงค์ที่จะช่วยให้นักศึกษาส่วนหนึ่งที่มีพื้นความรู้ภาษาอังกฤษที่ไม่ดีพอ ใช้เป็นเอกสารอ้างอิงอ่านประกอบการอ่าน textbook ต่างๆ ในรายวิชา 410 201 Engineering Mechanics I ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี นอกจากนั้นแล้ว จะได้ช่วยให้นักศึกษาอีกส่วนหนึ่งที่ไม่สามารถจดคำบรรยายได้ทัน เนื่องจากการบรรยายเนื้อหาวิชาที่เร็วเกินไปหรือจำนวนนักศึกษาในชั้นเรียนมีมาก ได้มีเอกสารที่จะใช้ทบทวนหลังจากการบรรยาย ซึ่งผู้แปลและเรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะช่วยให้นักศึกษาทุ่นเวลาในการอ่านและทำความเข้าใจในเนื้อหาของวิชาได้บ้างไม่มากก็น้อย สุดท้าย ถ้านักศึกษาพบว่าจะต้องเปลี่ยนแปลงแก้ไขและปรับปรุงในส่วนใด ช่วยกรุณาแจ้งให้ทราบด้วยจะขอบคุณมาก

ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์
สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา
สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

Rev. 4
เมษายน 2545

สารบัญ

บทที่ 1

General Principle

จุดประสงค์

1. เพื่อที่จะได้เข้าใจถึงปริมาณ (quantities) พื้นฐาน เช่น มวล (mass) ความยาว (length) และ เวลา (time) เป็นต้น และเข้าใจถึงพื้นฐานของการจำลองทางกลศาสตร์
2. เพื่อให้ทราบถึงคำนิยามของ Newton's Laws of Motions and Gravitation
3. เพื่อที่จะทบทวนหลักการใช้หน่วย SI (International System of Units)
4. เพื่อให้ทราบถึงขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical calculations)
5. เพื่อให้ทราบถึงแนวทางโดยทั่วไปในการแก้ปัญหาโจทย์

1.1 กลศาสตร์ (Mechanics)

วิชากลศาสตร์เป็นสาขาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ทางกายภาพ (physical sciences) ที่ศึกษาเกี่ยวกับสภาวะที่อยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ (motions) ของวัตถุต่างๆ (bodies) ซึ่งถูกกระทำโดยแรง (forces)

โดยทั่วไปแล้ว วิชากลศาสตร์จะถูกแยกออกได้เป็น 3 สาขาวิชาคือ

1. กลศาสตร์ของวัตถุแกร่ง (rigid-body mechanics)
2. กลศาสตร์ของวัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ (deformable-body mechanics)
3. กลศาสตร์ของไหล (fluid mechanic)

กลศาสตร์ของวัตถุแกร่ง (rigid-body mechanics) สามารถที่จะถูกแบ่งออกได้เป็นอีก 2 แขนงวิชาคือ

a. สถิตยศาสตร์ (statics) ซึ่งจะศึกษาเกี่ยวกับสมดุลของวัตถุ (equilibrium of bodies) ที่อยู่นิ่งกับที่หรือมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่คงที่

b. พลศาสตร์ (dynamics) ซึ่งจะศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างมีความเร่ง (acceleration)

1.2 Fundamental Concepts and Principles

ปริมาณพื้นฐาน (Basic Quantities)

ปริมาณเหล่านี้เป็นปริมาณพื้นฐานในทางวิศวกรรม

- ความยาว (length) ใช้ในการบอกตำแหน่งของจุดใน space และจะใช้ในการบอกขนาดของวัตถุ
- เวลา (time) เป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงลำดับของเหตุการณ์
- มวล (mass) เป็นคุณสมบัติของสสารที่เราใช้เปรียบเทียบการกระทำของวัตถุหนึ่งต่อวัตถุอีกอันหนึ่ง
- แรง (force) แรงอาจจะเกิดขึ้นจากการสัมผัสกันของวัตถุโดยตรงหรืออาจเกิดจากการดึงดูดกันเมื่อวัตถุไม่มีการสัมผัสกัน เราจะบ่งบอกแรงด้วยขนาดของแรง ทิศทางและตำแหน่งที่แรงกระทำ

การจำลอง (Idealizations)

การจำลอง (idealization) ระบบทางกลศาสตร์จะช่วยให้เราใช้ทฤษฎีต่างๆ ในการวิเคราะห์ระบบทางกลศาสตร์ได้ง่ายขึ้น โดยเราจะกำหนดให้

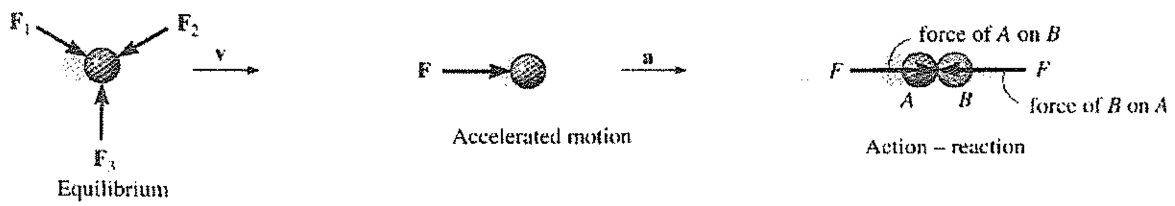
- อนุภาค (particle) เป็นสสารที่มีมวล แต่มีขนาดที่เล็กมากจนไม่นำมาพิจารณาในการจำลองอนุภาค เช่น โลกมีขนาดที่เล็กมาเมื่อเทียบกับวงโคจรของโลก ดังนั้น ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวงโคจรของโลก เราจะจำลองให้โลกเป็นอนุภาค เป็นต้น

- วัตถุแกร่ง (rigid body) ประกอบไปด้วยอนุภาคจำนวนมาก ซึ่งอนุภาคแต่ละอนุภาคจะอยู่ที่ตำแหน่งเดิมเมื่อเทียบกับอนุภาคอื่นๆ ทั้งก่อนและหลังจากที่ถูกกระทำโดยแรง ดังนั้น คุณสมบัติทางกล (mechanical properties) ของวัตถุแกร่งจะไม่ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาแรงที่กระทำอยู่บนวัตถุแกร่ง โดยทั่วไปแล้ว การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้น

จริงในโครงสร้างและเครื่องจักรกลมีค่าที่ค่อนข้างน้อยมาก ดังนั้น ข้อสมมุติฐานที่ให้โครงสร้างและเครื่องจักรกลนั้นเป็นวัตถุแกร่งจะมีความเหมาะสมที่จะใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างและเครื่องจักรกล

- concentrated force เป็นแรงที่ถูกสมมุติให้กระทำเป็นจุดบนวัตถุ เราสามารถที่จะใช้ข้อสมมุติฐานนี้ได้เมื่อ พื้นที่ๆ แรงกระทำมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับขนาดของวัตถุ ยกตัวอย่างเช่น แรงที่ล้อรถถ่ายลงสู่พื้นถนน เป็นต้น

กฎของนิวตันสามข้อที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ (Newton's Three Laws of Motion)



รูปที่ 1-1

จากรูปที่ 1-1 เราสามารถที่จะเขียน Newton's Three Laws of Motion ได้ว่า

กฎข้อแรก: *อนุภาคที่เริ่มต้นอยู่กับที่หรือมีการเคลื่อนที่อัตราความเร็ว (velocity) ที่คงที่ จะยังคงอยู่ในสภาวะเช่นนี้ ถ้าอนุภาคดังกล่าวไม่ถูกกระทำโดยแรงที่ไม่สมดุล (unbalanced force)*

กฎข้อที่สอง: *อนุภาคซึ่งมีมวล m เมื่อถูกกระทำโดยแรงที่ไม่สมดุล (unbalanced force) $\boldsymbol{F}$ แล้ว อนุภาคนั้นจะมีความเร่ง (acceleration) $\boldsymbol{a}$ เกิดขึ้นในทิศทางของแรงกระทำ* หรือ

$$F = m\,a \tag{1-1}$$

กฎข้อที่สาม: *แรงกริยา (action force) และแรงปฏิกริยา (reaction force) ที่เกิดจากการกระทำของอนุภาคสองอันจะมีขนาดเท่ากัน มีทิศทางตรงกันข้าม และอยู่ในแนวเดียวกัน*

กฎของนิวตันที่เกี่ยวกับการดึงดูด (Newton's Law of Gravitational Attraction)

กฎของนิวตันที่เกี่ยวกับการดึงดูดระหว่างอนุภาคสองอนุภาคสามารถเขียนในรูปของสมการได้ว่า

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1-2}$$

เมื่อ F = แรงที่เกิดจากการดึงดูดกันระหว่างอนุภาคสองอนุภาค

G = universal constant of gravitation = 66.73(10^{-12}) $\mathrm{m^3/(kg.s^2)}$

m_1 , m_2 = มวลของอนุภาคแต่ละอัน

r = ระยะทางระหว่างอนุภาคทั้งสองนั้น

น้ำหนัก (Weight)

จากสมการที่ 1-2 ถ้าเรากำหนดให้มวลของอนุภาคอันหนึ่งมีค่าเท่ากับ m และสมมุติให้โลกมีการหมุนที่ช้ามากจนไม่ต้องนำการหมุนของโลกมาพิจารณาและมีความหนาแน่น (density) ที่คงที่ ซึ่งทำให้โลกมีมวลเท่ากับ M_e นอกจากนั้น ให้ระยะระหว่างศูนย์กลางของโลกและอนุภาคมารค่าเท่ากับ r แล้ว น้ำหนักของอนุภาค W นั้นจะมีค่าโดยประมาณเท่ากับ

$$W = G\frac{mM_e}{r^2}$$

กำหนดให้ $g = GM_e / r^2$ ซึ่งเป็นค่าความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (gravitational acceleration) แล้ว

$$W = mg \tag{1-3}$$

1.3 หน่วยวัด (Units of Measurement)

ปริมาณพื้นฐานทั้งสี่ที่ได้กล่าวมาแล้วมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ถ้าเราทราบปริมาณพื้นฐานสามค่าแล้ว เราจะสามารถหาปริมาณพื้นฐานค่าที่สี่ได้ ดังนั้น หน่วยของปริมาณพื้นฐานทั้งสี่นี้จะต้องมีความสอดคล้องกัน ดังที่แสดงในตารางที่ 1-1

ตารางที่ 1-1

ระบบหน่วยวัด	ความยาว	เวลา	มวล	แรง
International System of Units (SI)	เมตร (meter) (m)	วินาที (second) (s)	กิโลกรัม (kilogram) (kg)	นิวตัน (Newton) (N) $\left(\dfrac{\mathrm{kg.m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
U.S. Customary Units	ฟุต (foot) (ft)	วินาที (second) (s)	slug $\left(\dfrac{\mathrm{lb.s}^2}{\mathrm{ft}}\right)$	ปอนด์ (Pound) (lb)

การแปลงหน่วย (Conversion of Units)

ตารางที่ 1-2 แสดงค่าที่ใช้ในการแปลงหน่วยของปริมาณความยาว มวล และแรงระหว่างระบบหน่วยวัดแบบ US Customary Units และ International System of Units (SI)

ตารางที่ 1-2

ปริมาณ	US Customary Units	International System of Units (SI)
ความยาว	1 ft	0.3048 m
มวล	1 slug	14.5938 kg
แรง	1 lb	4.4482 N

1.4 Prefixes ของระบบหน่วยวัด SI

ตารางที่ 1-3 แสดง prefixes ที่มักใช้ในระบบหน่วยวัด SI

ตารางที่ 1-3

	Prefix	SI Symbol
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

1.5 การคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Calculations)

การรายงานผลที่ได้จากการคำนวณในงานวิศวกรรมมีความสำคัญมาก คำตอบที่ได้ควรที่จะมีความถูกต้องที่เพียงพอและมีจำนวนของ significant figures ที่พอเหมาะ

ความสอดคล้องกันของหน่วยวัด (Dimension Homogeneity)

เทอมแต่ละเทอมในสมการต้องมีหน่วยที่สอดคล้องกัน ยกตัวอย่างเช่น ในสมการ

$$s = vt + \frac{1}{2}at^2$$

ถ้าเราใช้ระบบ SI units แล้ว

s = ระยะทาง	มีหน่วยเป็น เมตร (m)
t = เวลา	มีหน่วยเป็น วินาที (s)
v = ความเร็ว	มีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s}$
a = ความเร่ง	มีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s^2}$

เลขนัยสำคัญ (Significant Figures)

เลขนัยสำคัญ (significant figures) คือ ตัวเลขใดๆ ไม่รวมตัวเลขศูนย์ก่อนจุดทศนิยม เช่น ตัวเลข 5604, 0.3124 และ 34.52 มีเลขนัยสำคัญสี่ตัว เป็นต้น อย่างไรก็ตาม ในกรณีของตัวเลขอย่างเช่น 40 นั้น เราจะไม่สามารถบอกจำนวนของเลขนัยสำคัญได้ว่ามีเลขนัยสำคัญหนึ่งตัว (4) หรือมีเลขนัยสำคัญสองตัว (40) ในกรณีเช่นนี้ เราจะเขียนตัวเลขโดยใช้ระบบการเขียนตัวเลขทางวิศวกกรม (engineering orientation) ในลักษณะของ 10 ยกกำลังด้วยตัวเลขที่หารด้วยสามได้ เช่น .....,10^{-6}, 10^{-3}, 10^{3}, 10^{6},..... เป็นต้น ซึ่งสอดคล้องกับ prefixes ที่ใช้ในระบบ SI units

การปัดตัวเลข (Rounding-Off Numbers)

ถ้าเราต้องการที่จะ round off ตัวเลขใดๆ ให้มีจำนวนของเลขนัยสำคัญ (significant figures) ให้เท่ากับ n แล้ว เราจะใช้กฎต่อไปนี้

ในกรณีที่ตัวเลขตำแหน่งที่ $n+1$ มีค่าน้อยกว่า 5 แล้ว เราจะตัดตัวเลขหลังตำแหน่งที่ n ออก เช่น ถ้าเราต้องการที่จะ round off ตัวเลข 2.326 และ 0.451 ให้มีเลขนัยสำคัญ n =2 แล้ว เราจะได้ว่า

2.326	$\Rightarrow$	2.3
0.451	$\Rightarrow$	0.45

ในกรณีที่ตัวเลขตำแหน่งที่ $n+1$ มีค่าเท่ากับ 5 และมีเลขศูนย์ต่อจากตัวเลขนั้นทั้งหมดแล้ว เราจะให้ตัวเลขตำแหน่งที่ n เป็นเลขคู่ (ปัดขึ้น) เช่น ถ้าเราต้องการที่จะ round off ตัวเลข 1.24(10^3) และ 0.8655 ให้มีเลขนัยสำคัญ n =3 แล้ว เราจะได้ว่า

1.24(10^3)	$\Rightarrow$	1.24(10^3)
0.8655	$\Rightarrow$	0.866

ในกรณีที่ตัวเลขตำแหน่งที่ $n+1$ มีค่ามากกว่า 5 หรือเท่ากับ 5 และมีตัวเลขที่ต่อท้ายมากกว่าศูนย์แล้ว เราจะให้ตัวเลขตำแหน่งที่ n มีค่าเพิ่มขึ้น 1 ค่าและเราจะตัดตัวเลขหลังตำแหน่งที่ n ออก เช่น ถ้าเราต้องการที่จะ round off ตัวเลข 0.72387 และ 565.5003 ให้มีเลขนัยสำคัญ n =3 แล้ว เราจะได้ว่า

0.72387	$\Rightarrow$	0.724
565.5003	$\Rightarrow$	566

การคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลข

โดยทั่วไปแล้ว ในการคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลข เราจะให้ค่าต่างๆ ที่ใช้อยู่ในระหว่างการคำนวณมีความละเอียดมากกว่าข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาอย่างน้อยหนึ่งหลัก เช่น ถ้าโจทย์กำหนดให้ข้อมูลมีเลขนัยสำคัญ 3 หลักแล้ว เราควรให้ผลที่ได้ในระหว่างการคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลขมีเลขนัยสำคัญมากที่สุดเท่าที่เครื่องคิดเลขจะสามารถแสดงได้ หรืออย่างน้อยที่สุดมีเลขนัยสำคัญ 4 หลัก เป็นต้น และคำตอบสุดท้ายที่ได้ควรจะต้องถูกปัดตัวเลขให้มีเลขนัยสำคัญเท่ากับ 3 หลัก เนื่องจากข้อมูลของขนาดความยาว ข้อมูลของแรง และข้อมูลอื่นๆ ในทางด้านวิศวกรรมมักจะถูกรายงานโดย

ให้มีเลขนัยสำคัญเท่ากับสาม ดังนั้น *ในระหว่างการคำนวณ เราควรใช้จำนวนของเลขนัยสำคัญเท่ากับสี่ แต่จะตอบคำตอบสุดท้ายด้วยจำนวนเลขนัยสำคัญเท่ากับสาม*

1.6 **ขั้นตอนในการวิเคราะห์** (General Procedure for Analysis)

วิธีการที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการเรียนรู้วิชาพื้นฐานทางด้านกลศาสตร์วิศวกรรม (engineering mechanics) คือ *การฝึกแก้ปัญหาโจทย์* ซึ่งในการที่จะการแก้ปัญหาโจทย์ให้ประสบผลสำเร็จด้วยดีนั้น เราจะต้องทำการวิเคราะห์และคำนวณอย่างมีหลักการและเป็นลำดับขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. อ่านโจทย์อย่างระมัดระวัง และพยายามหาความสัมพันธ์ของสถานการณ์ทางกายภาพดังกล่าวกับทฤษฎี
2. เขียนแผนภาพ (diagrams) หรือรูปภาพต่างๆ ที่เห็นว่าจำเป็น
3. ใช้สมมุติฐาน ทฤษฎี และหลักการที่ถูกต้องเหมาะสมในการแก้ปัญหา
4. แก้สมการและตรวจสอบความสอดคล้องของหน่วย และตอบคำตอบโดยมีจำนวน significant figures ไม่มากไปกว่าจำนวน significant figures ของข้อมูลที่ให้มา
5. ศึกษาคำตอบว่ามีความเป็นไปได้หรือไม่ โดยใช้ engineering judgment และ common sense

ตัวอย่างที่ 1-1 (1-5)

จงเขียนค่าต่างๆ เหล่านี้ให้มีหน่วยเป็นหน่วย SI ที่มี prefix ที่เหมาะสม

a.) $8653\ \text{ms}$

b.) $8368\ \text{N}$

c.) $0.893\ \text{kg}$

วิธีทำ

a.) $8653\ \text{ms} = 8.653(10^{3})(10^{-3})\ \text{s} = 8.653\ \text{s}$ Ans.

b.) $8368\ \text{N} = 8.368\ \text{kN}$ Ans.

c.) $0.893\ \text{kg} = 893(10^{-3})(10^{3})\ \text{g} = 893\ \text{g}$ Ans.

ตัวอย่างที่ 1-2 (1-7)

จงทำการคำนวณหาค่า $(204\ \text{mm})(0.00457\ \text{kg})/(34.6\ \text{N})$ โดยกำหนดให้มีเลขนัยสำคัญ 3 หลักและมีหน่วยเป็นหน่วย SI ที่มี prefix ที่เหมาะสม

วิธีทำ

$$(204\ \text{mm})(0.00457\ \text{kg})/(34.6\ \text{N}) = \left(\frac{[204(10^{-3})\ \text{m}][4.57(10^{-3})]\text{kg}}{34.6\ \text{N}}\right)$$

$$= \left(\frac{26.9(10^{-6})\ \text{m.kg}}{1\ \text{N}}\right)$$

$$= 26.9\ \mu\text{m.kg/N}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 1-3 (1-18)

จงทำการคำนวณหาค่าต่างๆ ต่อไปนี้ โดยกำหนดให้มีเลขนัยสำคัญ 3 หลักและมีหน่วยเป็นหน่วย SI ที่มี prefix ที่เหมาะสม

a.) $(200\ \text{kN})^2$

b.) $(0.005\ \text{mm})^2$

c.) $(400\ \text{m})^3$

วิธีทำ

a.) $(200\ \text{kN})^2 = 40000(10^{6})\ \text{N}^2 = 0.04(10^{12})\ \text{N}^2 = 0.04\ \text{MN}^2$ Ans.

b.) $(0.005\ \text{mm})^2 = 25(10^{-12})\ \text{m}^2 = 25\ \mu\text{m}^2$ Ans.

c.) $(400\ \text{m})^3 = 0.064(10^{9})\ \text{m}^3 = 0.064\ \text{km}^3$ Ans.

บทที่ 2

Force Vectors

จุดประสงค์

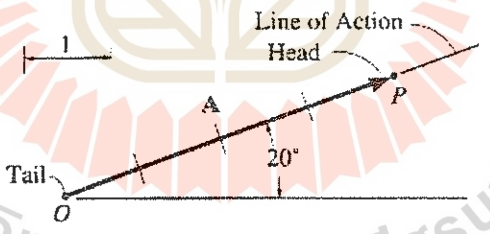
1. เพื่อที่จะได้ทราบถึงวิธีการรวมแรงและแตกแรงโดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law)
2. เพื่อที่จะได้ทราบถึงการเขียนแรงและตำแหน่งของแรงให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector และได้ทราบถึงวิธีการหาขนาดและทิศทางของ vector
3. เพื่อที่จะได้เรียนรู้ถึงการ dot product ของ vector เพื่อใช้ในการหามุมระหว่าง vectors สองอันหรือ projection ของ vector อันหนึ่งบน vector อีกอันหนึ่ง

2.1 Scalars และ Vectors

Scalars เป็นปริมาณที่มีแต่ขนาดเท่านั้น ซึ่งมีค่าเป็นตัวเลขบวกหรือลบ เช่น มวล (mass) ปริมาตร (volume) และความยาว (length) เป็นต้น และจะกำหนดให้มีสัญลักษณ์เป็นตัวอักษรแบบ italic เช่น m แทนมวล และ V แทนปริมาตร เป็นต้น

Vectors เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ตำแหน่ง (position) แรง (force) และ moment เป็นต้น และจะกำหนดให้มีสัญลักษณ์เป็นตัวอักษรแบบ italic ซึ่งมีลูกศรอยู่เหนือตัวอักษรนั้น เช่น $\vec{A}$ แทน vector " A " ที่มีขนาดเท่ากับ A เป็นต้น

ในการเขียนรูปของ vector นั้น เราจะเขียนให้อยู่ในรูปของลูกศร โดยที่ขนาดของ vector จะถูกแทนด้วยความยาวของลูกศร ทิศทางของ vector จะแทนด้วยมุมระหว่างแกนอ้างอิงกับแนวของการกระทำของ vector และนัย (sense) ของ vector จะแทนด้วยหัวของลูกศร ยกตัวอย่างเช่น vector $\vec{A}$ ในรูปที่ 2-1 มีขนาดเท่ากับ 4 หน่วย มีทิศทางทำมุมทวนเข็มนาฬิกา 20^o กับแกนอ้างอิงในแนวนอน และมีนัย (sense) ชี้ขึ้นไปทางขวามือ โดยเราจะเรียกจุด O ว่า หางของ vector และจุด P ว่าหัวของ vector



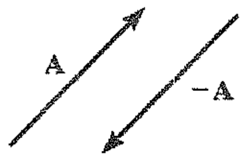
รูปที่ 2-1

2.2 Vector Operations

การคูณและการหาร vector ด้วย scalar (Multiplication and Division of a Vector by a Scalar)

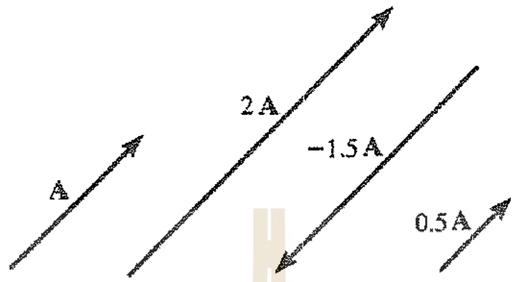
เราจะเขียนผลคูณของ vector $\vec{A}$ และปริมาณ scalar a ได้อยู่ในรูปของ $a\vec{A}$ ซึ่งเป็น vector ที่มีขนาดเท่ากับ aA และมีนัย (sense) ขึ้นอยู่กับว่า scalar a มีค่าเป็นบวกหรือลบ ถ้า scalar a มีค่าเป็นบวกแล้ว vector $a\vec{A}$ จะมีทิศทางเดียวกับ vector $\vec{A}$ แต่ถ้า scalar a มีค่าเป็นลบแล้ว vector $a\vec{A}$ จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับ vector $\vec{A}$ ยกตัวอย่างเช่น vector $\vec{A}$ ในรูปที่ 2-2 เมื่อ scalar a มีค่าเป็น -1 เราจะได้ $-\vec{A}$ มีลักษณะตามที่แสดงในรูป เป็นต้น

ในกรณีของการหาร vector $\vec{A}$ ด้วยปริมาณ scalar a (เมื่อ a มีค่าไม่เท่ากับศูนย์) เราจะเขียน vector นี้ได้เป็น $\vec{A}/a$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-3



Vector A and its negative counterpart

รูปที่ 2-2



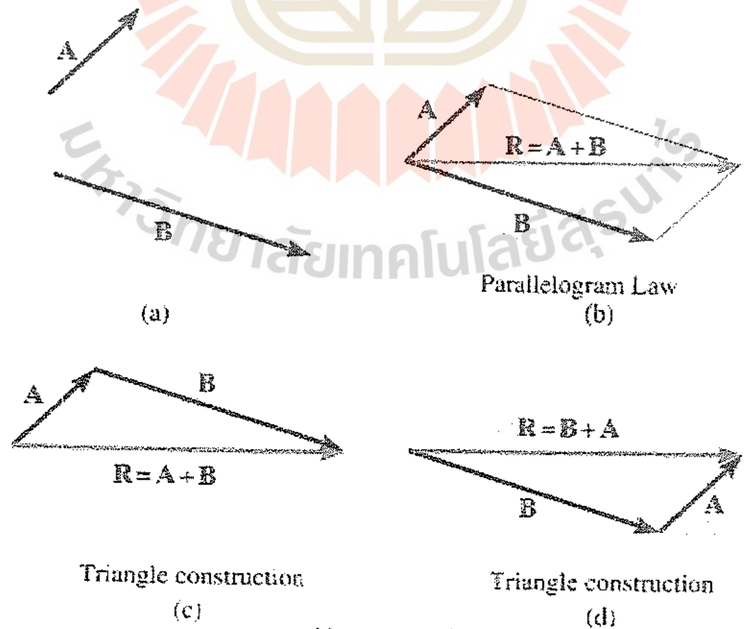
Scalar Multiplication and Division

รูปที่ 2-3

การบวก Vector (Vector Addition)

เราจะหา vector ลัพธ์ ($\vec{R}$) ของการรวมกันของ vector สอง vectors เช่น $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-4a ได้โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-4b และโดยใช้การสร้างรูปสามเหลี่ยม (triangular construction) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-4c และ 2-4d จากรูป เราจะได้ว่า vectors สามารถที่จะถูกรวมกันได้โดยไม่ขึ้นกับลำดับการรวมกันของ vectors (vector addition is cumulative) หรือ

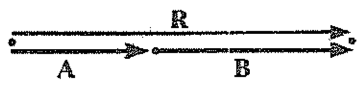
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



Vector Addition

รูปที่ 2-4

ถ้า vector $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีทิศทางขนานกันแล้ว จาก parallelogram law เราจะเห็นได้ว่า การรวมของ vectors ดังกล่าวจะมีลักษณะเป็นการรวมกันของขนาดของ vector ซึ่งเป็นปริมาณ scalar หรือ $R = A + B$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-5



$R = A+B$

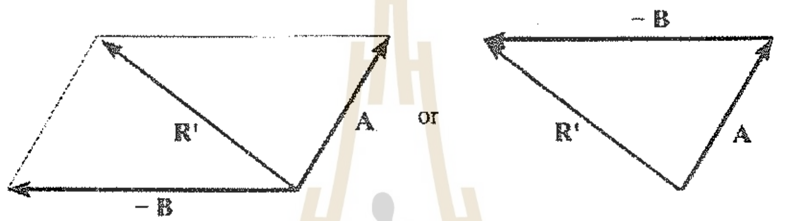
Addition of collinear vectors

รูปที่ 2-5

การลบ Vector (Vector Subtraction)

ในลักษณะเช่นเดียวกับการบวกกันของ vectors การลบกันของ vectors จะสามารถทำได้โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) และโดยใช้การสร้างรูปสามเหลี่ยม (triangular construction) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6 และเราสามารถที่จะเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{R}' = \bar{A} - \bar{B} = \bar{A} + (-\bar{B})$$



Parallelogram law

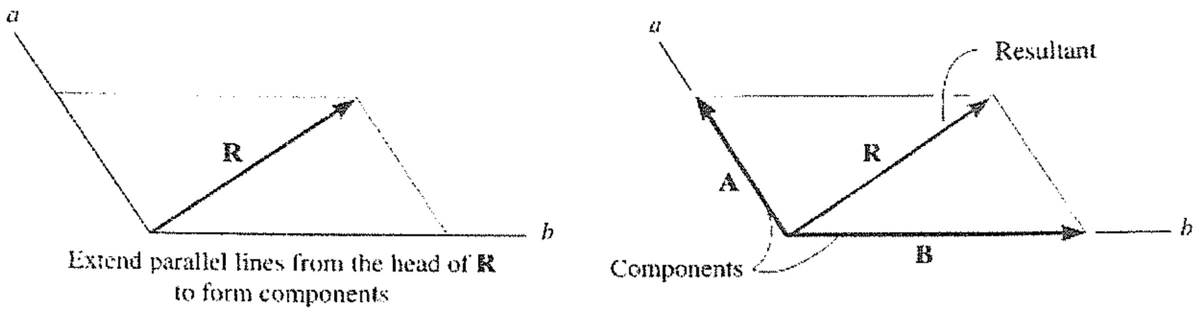
Triangle construction

Vector Subtraction

รูปที่ 2-6

การแยก Vector ออกเป็นองค์ประกอบ (Resolution of Vector)

เราสามารถที่จะแยก vector ออกเป็นองค์ประกอบสององค์ประกอบที่อยู่ในทิศใดๆ ได้โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) เช่น ถ้าเราต้องการแยก vector $\bar{R}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-7 ออกเป็นองค์ประกอบในแกน a และแกน b แล้ว เราจะหา vector $\bar{A}$ ได้โดยการลากเส้นจากหัวของ vector $\bar{R}$ ให้ขนานไปกับแกน b จนตัดกับแกน a และ vector ที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมจากปลายของ vector $\bar{R}$ ไปยังจุดตัดดังกล่าวจะเป็น vector $\bar{A}$ ในลักษณะเดียวกัน เราจะหา vector $\bar{B}$ ได้โดยการลากเส้นจากหัวของ vector $\bar{R}$ ให้ขนานไปกับแกน a จนตัดกับแกน b และ vector ที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมจากปลายของ vector $\bar{R}$ ไปยังจุดตัดดังกล่าวจะเป็น vector $\bar{B}$



(a) (b)

Resolution of a vector

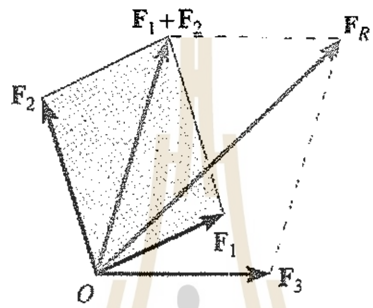
รูปที่ 2-7

2.3 การรวมกันแบบ vector ของแรง (Vector Addition of Forces)

ในวิชา statics นี้เรามักจะต้องการหาแรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการรวมกันของแรงต่างๆ หรือเราอาจจะต้องการที่จะแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงในทิศทางใดๆ และเนื่องจากแรงมีทั้งขนาด ทิศทางและนัย (sense) ดังนั้น แรงจึงเป็น vector ซึ่งจะทำให้เราสามารถทำการรวมแรงและแตกแรงได้โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) เช่นเดียวกับในกรณีของ vector

ในกรณีที่เราต้องการหาแรงลัพธ์ของแรงมากกว่า 2 แรงแล้ว เราจะต้องใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานหลายครั้ง ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการหาแรงลัพธ์ของแรง $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, และ $\bar{F}_3$ แล้ว เราอาจจะรวมแรง $\bar{F}_1$ และ $\bar{F}_2$ ก่อน จากนั้นเราจะเอาผลลัพธ์ของแรงที่ได้รวมกับแรง $\bar{F}_3$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-8 หรือเราจะเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ว่า

$$\bar{F}_R = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2) + \bar{F}_3$$



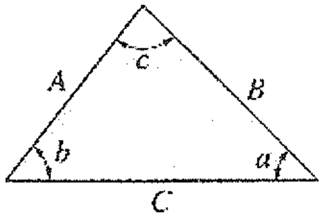
รูปที่ 2-8

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

1. ทำการวาดรูปของการรวม vectors โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) โดยให้มีทั้งขนาด ทิศทางและนัย (sense) ตามที่กำหนด
2. ในกรณีที่เราต้องการหาแรงลัพธ์ของแรงคู่ใดๆ นั้น แรงลัพธ์ที่ต้องการจะเป็นเส้นทแยงมุม (diagonal) ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้น
3. ในกรณีที่ต้องการหาองค์ประกอบของแรงในแนวแกนใดๆ 2 แกนที่มีจุดเริ่มต้นที่หางของ vector นั้น เราจะลากเส้นจากหัว vector ให้ขนานกับแกนทั้งสองนั้น ซึ่งจะทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานขึ้นมาและด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะเป็นองค์ประกอบของแรงที่เราต้องการหา ซึ่งจะมีขั้นตอนของการหาดังนี้
   - 3.1 ทำการเขียนสัญลักษณ์แทนขนาดของแรงและมุมที่ไม่ทราบค่าและทำการระบุขนาดของแรงและมุมที่ทราบค่าลงในรูป โดยที่ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจะมีจำนวนมากกว่า 2 ไม่ได้
   - 3.2 ใช้หลักการทาง trigonometry ในการหาค่าของตัวแปรที่เราไม่ทราบค่าทั้งสองโดย
     - 3.2.1 เขียนรูปของครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานขึ้นมาใหม่ เพื่อที่จะแสดงถึงรูปสามเหลี่ยมของการรวมกันของ vectors
     - 3.2.2 ขนาดของแรงลัพธ์และทิศทางของแรงลัพธ์จะหาได้จาก law of cosines และ law of sines ดังที่แสดงในรูปที่ 2-9 โดยที่

Law of cosines: $$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\ \cos c}$$

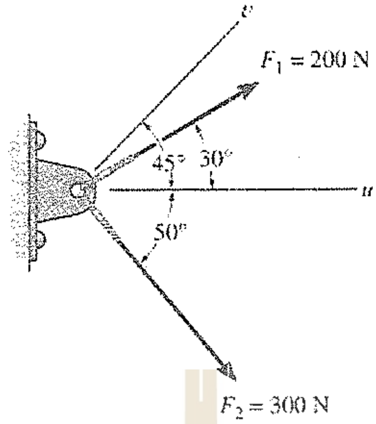
Law of sines: $$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$



รูปที่ 2-9

ตัวอย่างที่ 2-1 (2-4)

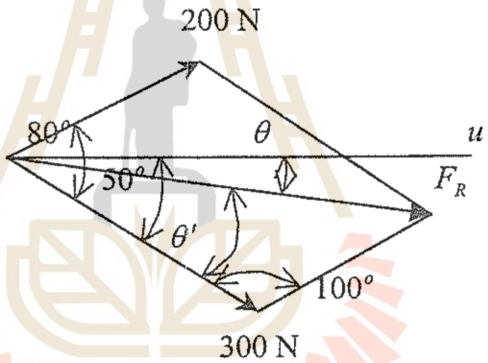
จากรูปที่ Ex 2-1 จงหาขนาดของแรงลัพธ์ $\bar{F}_R = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ และทิศทางซึ่งวัดตามเข็มนาฬิกา (clockwise) จากแกน $+u$



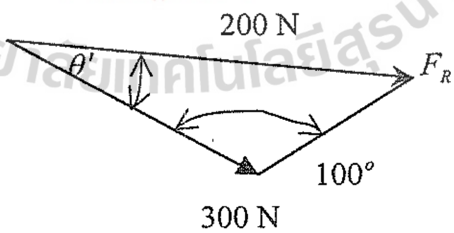
รูปที่ Ex 2-1

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-1 เราจะวาดรูปของการรวม vectors โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram law) ได้ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งมีขนาดของแรงลัพธ์และมุม θ เป็นค่าที่เราไม่ทราบ



ใช้หลักการทาง trigonometry เราจะเขียนรูปสามเหลี่ยมของการรวมกันของ vectors ได้ดังที่แสดงในรูป



โดยใช้ law of cosines ขนาดของแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับ

$$F_R = \sqrt{(200)^2 + (300)^2 - 2(200)(300)\cos 100^o} = 388.378 = 388 \text{ N} \qquad \text{Ans.}$$

โดยใช้ law of sines มุม θ' มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\sin\theta'}{200} = \frac{\sin 100^o}{388.378}$$

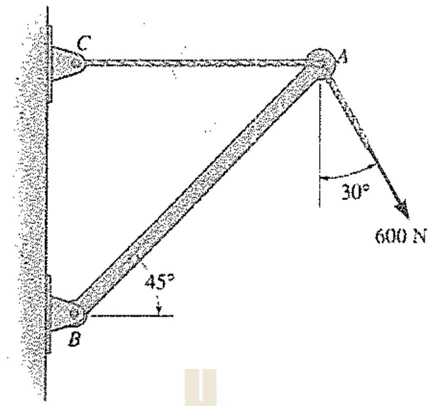
$$\theta' = 30.473^o$$

ดังนั้น ทิศทางซึ่งวัดตามเข็มนาฬิกา (clockwise) จากแกน $+u$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\theta = 50^o - 30.473^o = 19.5^o \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 2-2 (2-14)

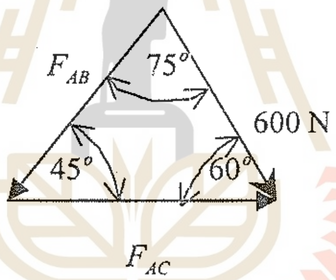
จงหาขนาดขององค์ประกอบของแรง $600\ \mathrm{N}$ ในแนวเส้นเชือก AC และในแนวแกนของชิ้นส่วน AB ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2



รูปที่ Ex 2-2

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-2 เราจะวาดรูปสามเหลี่ยมของการรวมกันของ vectors ได้ดังที่แสดง ซึ่งมีขนาดขององค์ประกอบของแรง $600\ \mathrm{N}$ ในแนวเส้นเชือก AC และในแนวแกนของชิ้นส่วน AB เป็นค่าที่เราไม่ทราบ



โดยใช้ law of sines เราจะได้ว่า

$$\frac{F_{AB}}{\sin 60^o} = \frac{600}{\sin 45^o}$$

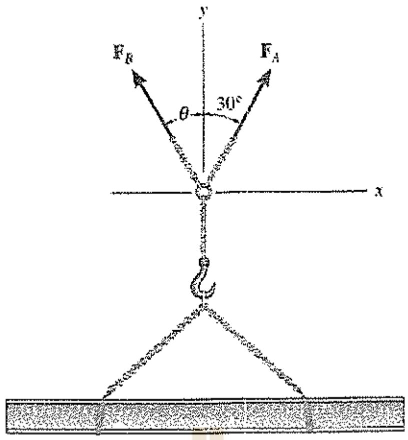
$$F_{AB} = 735\ \mathrm{N}$$ Ans.

$$\frac{F_{AC}}{\sin 75^o} = \frac{600}{\sin 45^o}$$

$$F_{AC} = 820\ \mathrm{N}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 2-3 (2-27 2-28)

คานถูกแขวนโดยโซ่สองเส้น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3

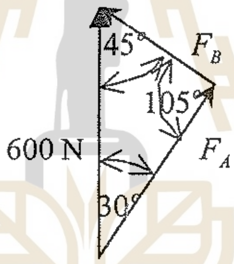


รูปที่ Ex 2-3

a.) จงหาขนาดของแรง F_A และ F_B เพื่อที่จะทำให้เกิดแรงลัพธ์ขนาด $600\ \mathrm{N}$ ในแนวแกน $+y$ เมื่อ $\theta = 45^o$

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-3 เราจะวาดรูปสามเหลี่ยมของการรวมกันของ vectors ได้ดังที่แสดง



โดยใช้ law of sines เราจะได้ว่า

$$\frac{F_A}{\sin 45^o} = \frac{600}{\sin 105^o}$$

$$F_A = 439\ \mathrm{N}$$ Ans.

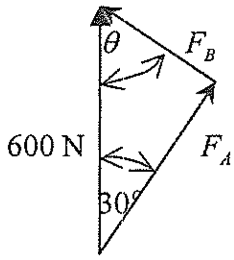
$$\frac{F_B}{\sin 30^o} = \frac{600}{\sin 105^o}$$

$$F_B = 311\ \mathrm{N}$$ Ans.

b.) ถ้ากำหนดให้แรงลัพธ์มีขนาด $600\ \mathrm{N}$ ในแนวแกน $+y$ จงหาขนาดของแรง F_A และ F_B และค่าของมุม θ ที่ทำให้แรง F_B มีค่าน้อยที่สุด

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-3 เราจะวาดรูปสามเหลี่ยมของการรวมกันของ vectors ได้ดังที่แสดง



แรง F_B มีค่าน้อยที่สุด เมื่อแรง F_A กระทำตั้งฉากกับแรง F_B ดังนั้น

$$\theta = 60^o$$ Ans.

และขนาดของแรง F_A และ F_B จะมีค่าเท่ากับ

$$F_A = 600\cos 30^o = 520 \text{ N}$$ Ans.

$$F_B = 600\sin 30^o = 300 \text{ N}$$ Ans.

2.4 การรวมกันของแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน (Addition of a System of Coplanar Forces)

ในกรณีที่เราต้องการหาค่าของแรงลัพธ์ของแรงต่างๆ ที่มีจำนวนมากกว่าสองแรงขึ้นไปนั้น เราควรที่จะหาแรงลัพธ์โดยการแตกแรงต่างๆ ให้องค์ประกอบของแรงแต่ละแรงบนแกนอ้างอิง จากนั้น ทำการรวมองค์ประกอบของแรงต่างๆ ดังกล่าวทางพีชคณิตบนแกนอ้างอิงแต่ละแกน และสุดท้าย ทำการหา vector ของแรงลัพธ์นั้น

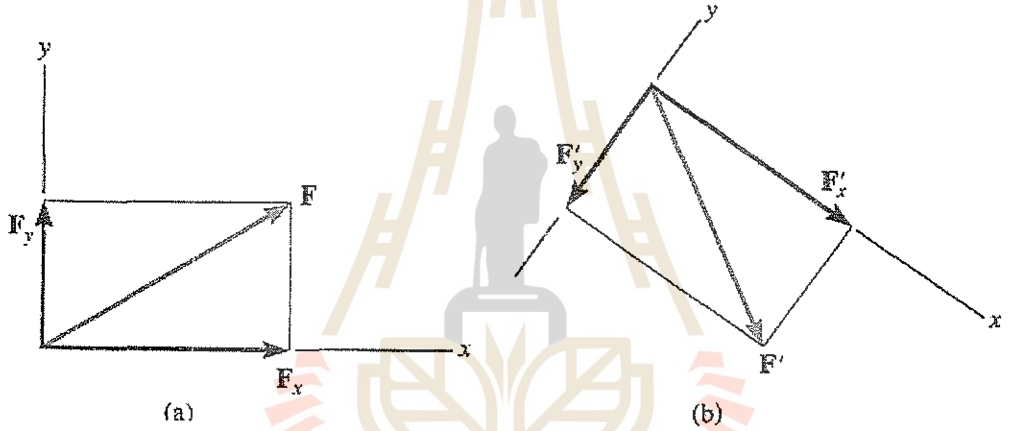
วิธีการรวมแรงในลักษณะนี้จะมีความสะดวกและง่ายกว่าวิธีการรวมแรงโดยใช้ parallelogram law หลายครั้งที่ได้กล่าวถึงไว้ใน section ที่ 2.3

ในการแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงนั้น เราจะแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงในระบบแกนตั้งฉากใดๆ เช่น แรง $\bar{F}_x$ และแรง $\bar{F}_y$ ในระบบแกนตั้งฉาก x และ y ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14a และแรง $\bar{F}'_x$ และแรง $\bar{F}'_y$ ในระบบแกนตั้งฉาก x และแกน y ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14b โดยใช้ parallelogram law เราจะได้ว่า

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y$$

และ

$$\bar{F}' = \bar{F}'_x + \bar{F}'_y$$



รูปที่ 2-10

เนื่องจากเราสามารถที่จะกำหนดทิศทางของแกน x และแกน y ให้มีค่าเป็นบวกในทิศทางหนึ่งและเป็นลบในอีกทิศทางหนึ่งได้ ดังนั้น เราสามารถที่จะระบุถึงทิศทางขององค์ประกอบของแรงได้ในสองรูปแบบคือ ในรูปแบบของ scalar และในรูปแบบของ Cartesian vector

ในรูปแบบของ scalar นั้น องค์ประกอบของแรง $\bar{F}$ ในรูปที่ 2-10a จะมีค่าเป็น $+F_x$ และ $+F_y$ เนื่องจากองค์ประกอบของแรงทั้งสองมีทิศไปทางบวกของแกน x และแกน y และองค์ประกอบของแรง $\bar{F}'$ ในรูปที่ 2-10b จะมีค่าเป็น $+F'_x$ และ $-F'_y$ เนื่องจากองค์ประกอบของแรงมีทิศไปทางบวกของแกน x และลบของแกน y

ในรูปแบบของ Cartesian vector นั้น องค์ประกอบของแรง $\bar{F}$ และแรง $\bar{F}'$ จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ Cartesian unit vector แบบสองมิติ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ ซึ่งใช้แทนทิศทางที่เป็นบวกของแกน x และแกน y ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-11 unit vector $\hat{i}$ และ unit vector $\hat{j}$ นี้เป็น vectors ที่มีขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วย ถ้า vector ทั้งสองนี้มีทิศพุ่งไปทางลบของแกนแกน x และแกน y ตามลำดับแล้ว เราจะเขียน vector นี้ได้ในรูป $-\hat{i}$ และ $-\hat{j}$ ดังนั้น เราจะสามารถเขียน vector ของแรง $\bar{F}$ ในรูปที่ 2-11a ได้เป็น

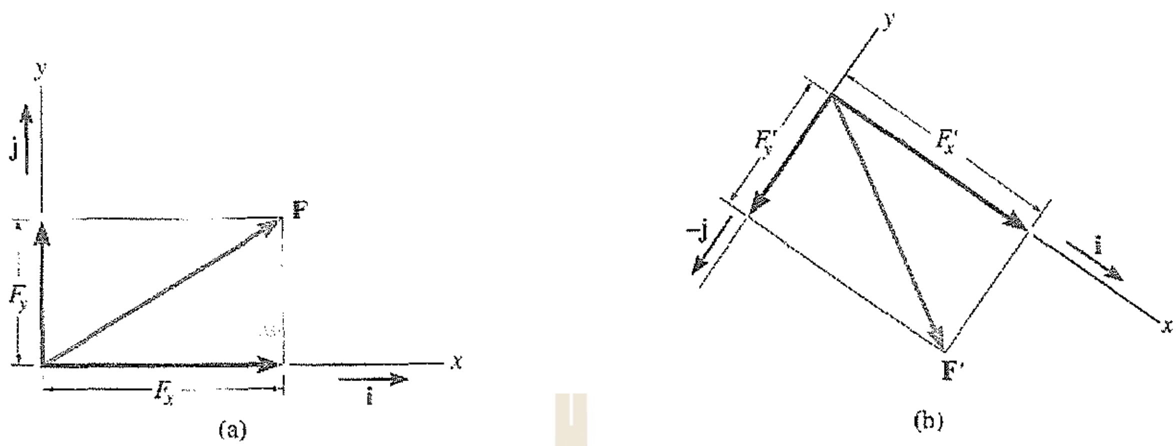
$$\bar{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$$

และนั้น เราจะสามารถเขียน vector ของแรง $\bar{F}'$ ในรูปที่ 2-11b ได้เป็น

$$\bar{F}' = F'_x\hat{i} + F'_y(-\hat{j})$$

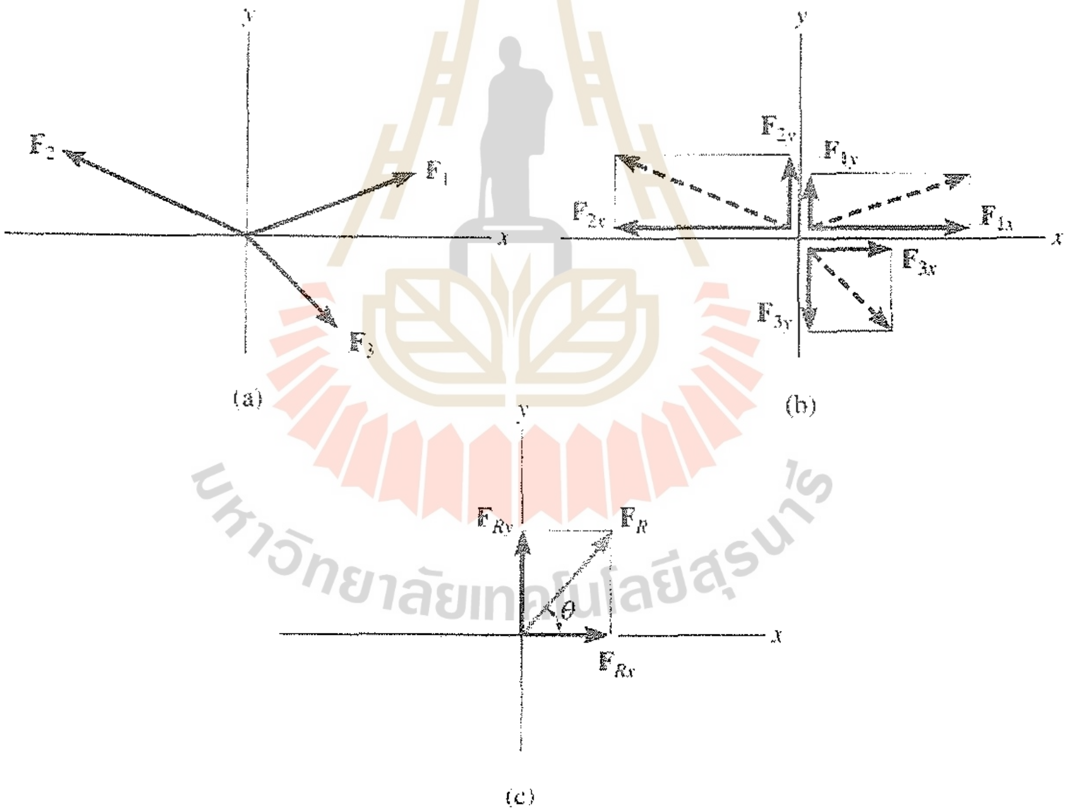
หรือ

$$\bar{F}' = F_x'\hat{i} - F_y'\hat{j}$$



รูปที่ 2-11

แรงลัพธ์ของแรงที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน (Coplanar Force Resultants)



รูปที่ 2-12

ถ้าเราต้องการหาแรงลัพธ์ของแรง $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, และ $\bar{F}_3$ ที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-12a โดยใช้ Cartesian vector notation นั้น เริ่มต้นเราจะต้องเขียนแรงทั้งสามนี้ให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector notation ซึ่งจากรูปที่ 2-12b เราจะได้ว่า

$$\bar{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}$$
$$\bar{F}_2 = -F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x}\hat{i} - F_{3y}\hat{j}$$

และแรงลัพธ์จะหาได้จาก

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})\hat{j} \\ &= (F_{Rx})\hat{i} + (F_{Ry})\hat{j}\end{aligned}$$

ถ้าเราใช้ scalar notation แล้ว จากรูปที่ 2-12b เราจะได้ว่า

$\overset{+}{\rightarrow}$ $$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$+\uparrow$ $$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ค่าขององค์ประกอบของแรงลัพธ์ F_{Rx} และ F_{Ry} ที่ได้จากการใช้ scalar notation จะมีค่าเท่ากับค่าที่ได้จากการใช้ Cartesian vector notation

โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนองค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน x และแกน y ได้เป็น

$$\begin{aligned}F_{Rx} &= \sum F_x \\ F_{Ry} &= \sum F_y\end{aligned} \tag{2-1}$$

เมื่อได้ค่าของ F_{Rx} และ F_{Ry} แล้ว เราจะเขียน vector ขององค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน x และแกน y ได้เป็น $\vec{F}_{Rx}$ และ $\vec{F}_{Ry}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-12c และขนาดของแรงลัพธ์จะหาได้จากสมการ

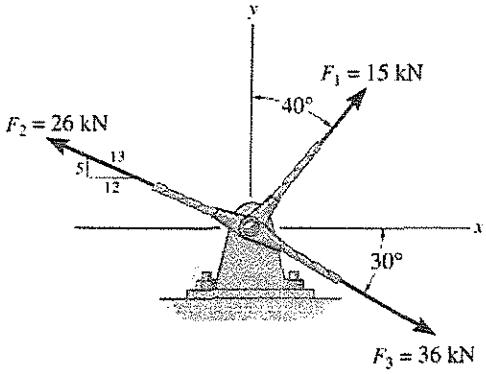
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

และมุมที่แรงลัพธ์กระทำกับแกน x จะหาได้จากสมการ

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|$$

ตัวอย่างที่ 2-4 (2-46 2-47)

จงเขียน Cartesian vector ของแรง F_1, F_2, และ F_3 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4 จากนั้น ทำการหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน $+x$



รูปที่ Ex 2-4

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-4 เราจะเขียน Cartesian vector ของแรง F_1, F_2, และ F_3 ได้ในรูป

$$\bar{F}_1 = 15\sin 40^o\ \hat{i} + 15\cos 40^o\ \hat{j}\ \text{kN}$$
$$= 9.64\,\hat{i} + 11.5\,\hat{j}\ \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

$$\bar{F}_2 = -\frac{12}{13}(26)\,\hat{i} + \frac{5}{13}(26)\,\hat{j}\ \text{kN}$$
$$= -24\,\hat{i} + 10\,\hat{j}\ \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

$$\bar{F}_3 = 36\cos 30^o\,\hat{i} - 36\sin 30^o\,\hat{j}\ \text{kN}$$
$$= 31.2\,\hat{i} - 18\,\hat{j}\ \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

Cartesian vector ของแรงลัพธ์ของแรง $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, และ $\bar{F}_3$ จะอยู่ในรูป

$$\bar{F}_R = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$
$$= \{9.64\,\hat{i} + 11.5\,\hat{j}\} + \{-24\hat{i} + 10\,\hat{j}\} + \{31.2\hat{i} - 18\,\hat{j}\}\text{kN}$$
$$= 16.8\hat{i} + 3.49\,\hat{j}\ \text{kN}$$

ขนาดของแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับ

$$F_R = \sqrt{(16.82)^2 + (3.491)^2} = 17.2\ \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

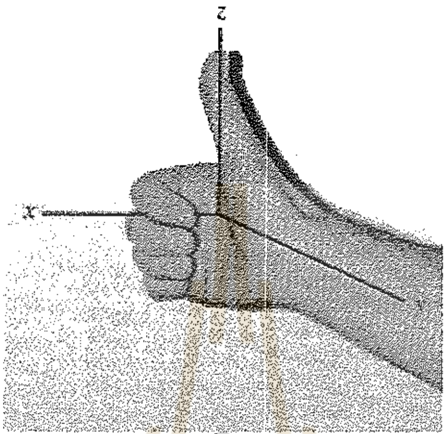
มุมของแรงลัพธ์ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน $+x$ มีค่าเท่ากับ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3.491}{16.82}\right) = 11.7^o \qquad \text{Ans.}$$

2.5 Cartesian Vector

Right-Handed Coordinate System

ระบบแกนตั้งฉาก (rectangular หรือ Cartesian coordinate system) จะเป็นไปตามกฎมือขวา เมื่อนิ้วโป้งของมือขวาชี้ไปในทิศทางของแกนบวก z และนิ้วที่เหลือของมือขวามีลักษณะงอรอบแกน z นี้ โดยที่นิ้วเหล่านี้จะงอหมุนจากแกนบวก x ไปยังแกนบวก y ดังที่แสดงในรูปที่ 2-13 ในกรณีที่เป็นระบบแกนตั้งฉากในสองมิติ $x-y$ ดังที่กล่าวถึงใน section ที่แล้ว แกนบวก z จะเป็นแกนที่พุ่งออกมาจากหน้ากระดาษ

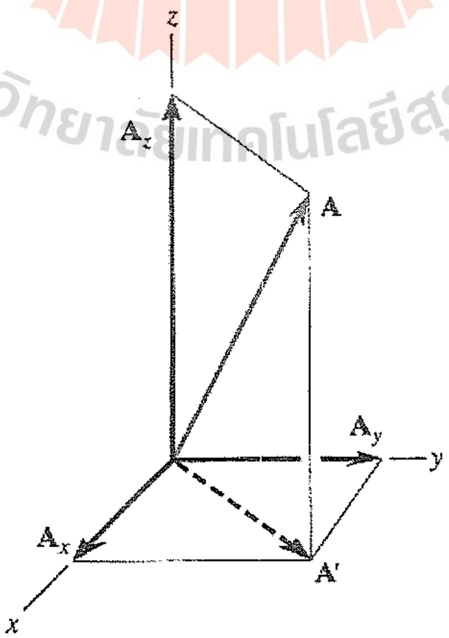


รูปที่ 2-13

องค์ประกอบของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก (Rectangular Components of a Vector)

จากรูปที่ 2-14 เราจะหา vector $\vec{A}$ ได้โดยการรวมองค์ประกอบของ vector $\vec{A}$ ซึ่งประกอบด้วย vector $\vec{A}_x$ vector $\vec{A}_y$ และ vector $\vec{A}_z$ เข้าด้วยกันโดยใช้ parallelogram law โดยเริ่มต้นทำการรวม $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ ซึ่งจะได้ $\vec{A}'$ และสุดท้ายทำการรวม $\vec{A}'$ กับ $\vec{A}_z$ ซึ่งลำดับการรวม vector ทั้งสามนี้ไม่มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้ ดังนั้น เราจะเขียนสมการของการรวมองค์ประกอบของ vector $\vec{A}$ ได้ในรูป

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \tag{2-2}$$



รูปที่ 2-14

Unit Vector

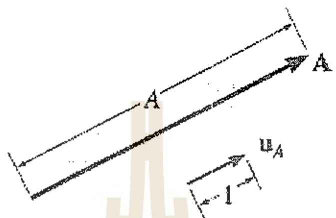
ถ้า $\vec{A}$ เป็น vector ที่มีขนาดเท่ากับ A ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15 แล้ว เราจะเขียน unit vector ของ $\vec{A}$ ได้ในรูป

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} \tag{2-3}$$

ดังนั้น

$$\vec{A} = A\vec{u}_A \tag{2-4}$$

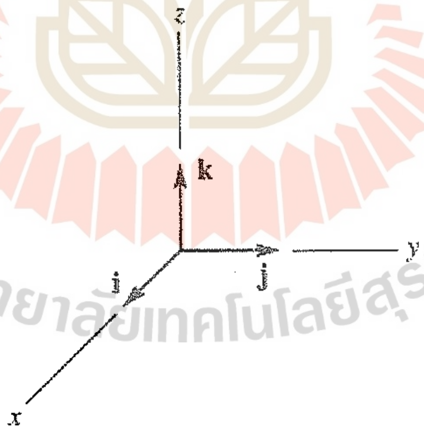
เนื่องจาก vector $\vec{A}$ และขนาดของ vector $\vec{A}$ (A) มีหน่วยวัดที่เหมือนกัน ดังนั้น $\vec{u}_A$ จะไม่มีหน่วยและจะแสดงถึงทิศทางและนัย (sense) ของ vector $\vec{A}$ เท่านั้น



รูปที่ 2-15

Cartesian Unit Vector

ในระบบแกนตั้งฉากสามมิติ เราจะใช้ Cartesian unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$, และ $\hat{k}$ ในการแสดงทิศทางของแกน x, แกน y, และแกน z และใช้เครื่องหมายบวกและลบแสดงนัย (sense) ของแกน x, แกน y, และแกน z ซึ่งจะขึ้นอยู่กับว่า Cartesian unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$, และ $\hat{k}$ มีทิศทางพุ่งไปในทิศทางบวกหรือลบของแกน x, แกน y, และแกน z รูปที่ 2-16 แสดง Cartesian unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$, และ $\hat{k}$ ที่มีค่าเป็นบวก



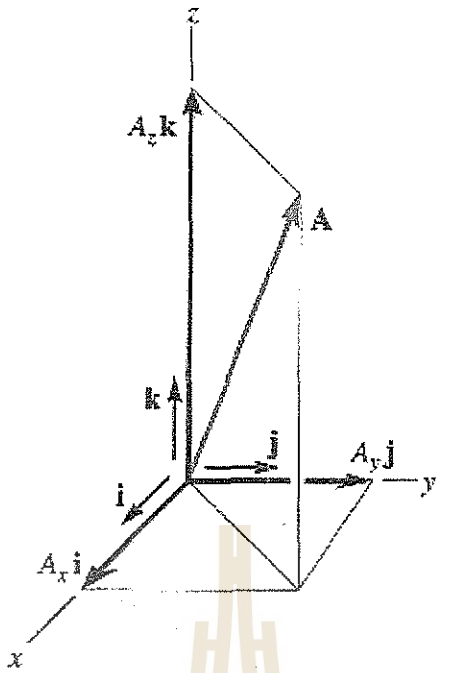
รูปที่ 2-16

สัญลักษณ์ของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (Cartesian Vector Representation)

เนื่องจากองค์ประกอบของ vector $\vec{A}$ ในสมการที่ 2-2 มีทิศทางไปทางบวกของแกน x, แกน y, และแกน z ดังนั้น เราจะเขียน vector $\vec{A}$ ในรูปของ Cartesian vector ดังที่แสดงในรูปที่ 2-17 ได้ในรูป

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \tag{2-5}$$

เช่นเดียวกับที่กล่าวไว้ใน section ที่ 2.4 การเขียน vector $\vec{A}$ ในรูปแบบนี้จะช่วยทำให้เราทำการบวกหรือลบ vectors ได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 2-17

ขนาดของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (Magnitude of a Cartesian Vector)

จากรูปที่ 2-18 ขนาดของ vector $\bar{A}'$ จะหาได้จากสมการ

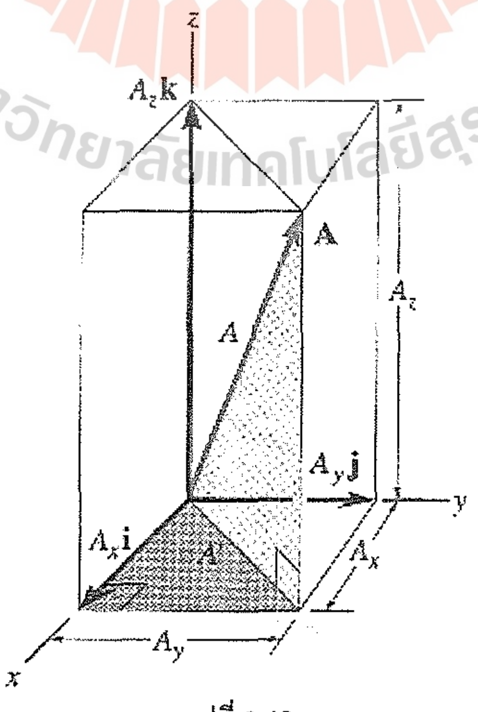
$$A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

และขนาดของ vector $\bar{A}$ จะหาได้จากสมการ

$$A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

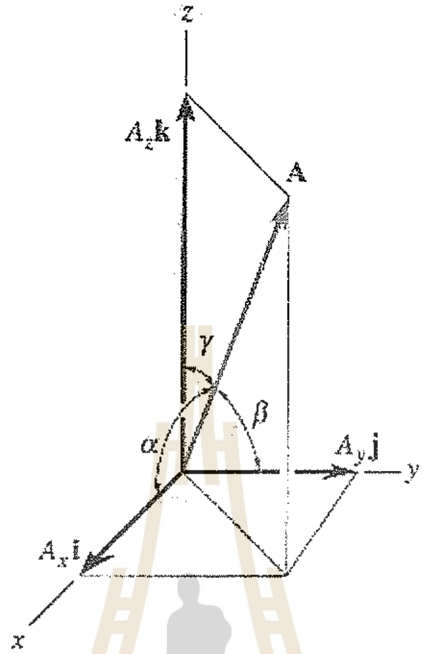
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (2\text{-}6)$$



รูปที่ 2-18

ทิศทางของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (Direction of a Cartesian Vector)

เราจะระบุทิศทางของ vector $\vec{A}$ ในระบบแกนตั้งฉากโดยใช้ *coordinate direction angle* α, β, และ γ ซึ่งวัดจาก vector $\vec{A}$ ไปยังแกนบวก x, y, และ z ที่มีจุดเริ่มต้นที่หางของ vector $\vec{A}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-19 โดยที่ $0^o \le \alpha, \beta, \gamma \le 180^o$

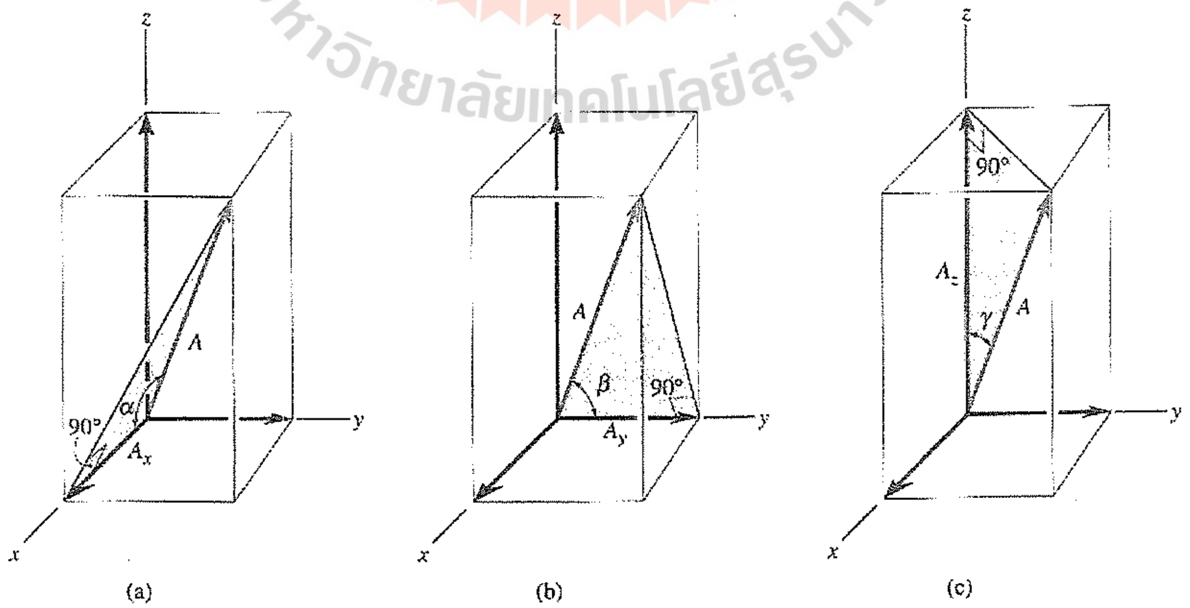


รูปที่ 2-19

มุม α, β, และ γ นี้จะหาได้จากการพิจารณา projection ของ vector $\vec{A}$ บนแกน x, แกน y, และแกน z จากรูปที่ 2-20 เราจะได้ว่า

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{2-7}$$

ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า *direction cosine* ของ $\vec{A}$ และค่าของมุม α, β, และ γ จะหาได้จาก inverse ของค่าของ cosine เหล่านี้



รูปที่ 2-20

วิธีการหาค่าของ direction cosine ของ $\vec{A}$ อีกวิธีการหนึ่งที่ง่ายและสะดวกคือ โดยการใช้ unit vector ของ $\vec{A}$ ตามสมการที่ 2-3 ดังนั้น ถ้าเราแทนสมการที่ 2-5 ลงในสมการที่ 2-3 เราจะได้ว่า

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k} \qquad (2\text{-}8)$$

เมื่อ A หาได้จากสมการที่ 2-6 โดยการเปรียบเทียบสมการที่ 2-7 และ 2-8 เราจะได้ว่า

$$\vec{u}_A = \cos\alpha\ \hat{i} + \cos\beta\ \hat{j} + \cos\gamma\ \hat{k} \qquad (2\text{-}9)$$

เนื่องจากขนาดของ $\vec{u}_A$ มีค่าเท่ากับหนึ่ง ดังนั้น

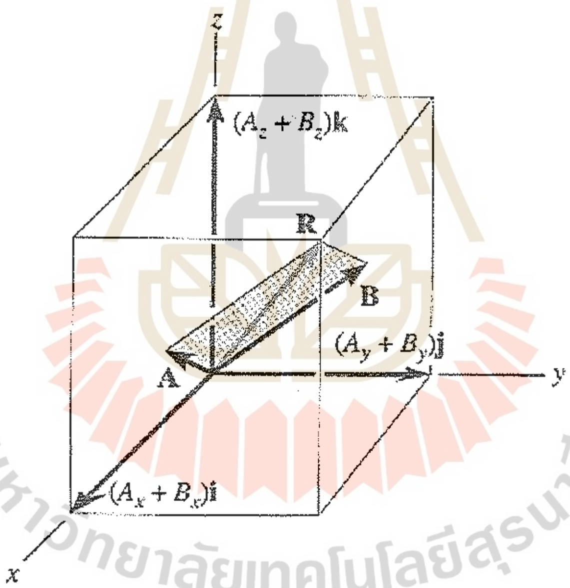
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2\text{-}10)$$

จากสมการที่ 2-10 นี้ ถ้าเราทราบมุมสองมุมของ coordinate direction angle แล้ว เราจะสามารถหามุมที่สามได้

สุดท้าย ถ้าเราทราบขนาดและมุม α, β, และ γ ของ vector $\vec{A}$ แล้ว เราจะเขียน vector $\vec{A}$ ได้ในรูป

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A\vec{u}_A \\ &= A\cos\alpha\,\hat{i} + A\cos\beta\,\hat{j} + A\cos\gamma\,\hat{k} \qquad (2\text{-}11) \\ &= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\end{aligned}$$

2.6 **การบวกและการลบ** vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (Addition and Subtraction of Cartesian Vectors)



รูปที่ 2-21

การบวกและการลบ vectors จะทำได้ง่าย ถ้าเราเขียน vectors ให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector ยกตัวอย่างเช่น เราจะเขียน vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ ในรูปที่ 2-21 ได้เป็น

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

และ

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

และผลรวมของ vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\ &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}\end{aligned}$$

และผลลบของ vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ จะอยู่ในรูป

$$\vec{R}' = \vec{A} - \vec{B}$$
$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

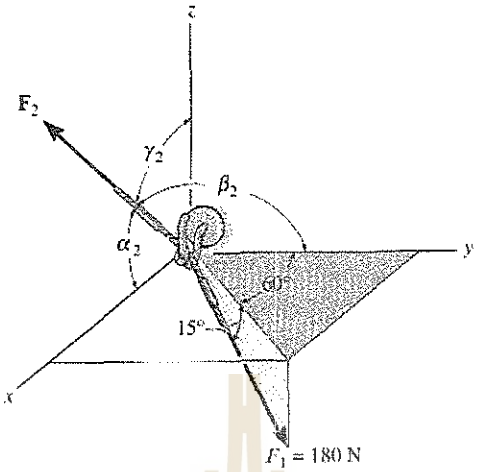
ระบบของแรงที่กระทำร่วมกัน (Concurrent Force Systems)

โดยใช้ concept ที่เพิ่งกล่าวถึง ถ้าเรามีแรงหลายๆ แรงกระทำร่วมกันที่จุดใดจุดหนึ่งแล้ว เราจะหาแรงลัพธ์ของระบบของแรงดังกล่าวได้จากสมการ

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}$$
$$= \sum F_x\hat{i} + \sum F_y\hat{j} + \sum F_z\hat{k} \qquad (2\text{-}12)$$

ตัวอย่างที่ 2-5 (2-75)

จากรูปที่ Ex 2-5 จงหาขนาดและ coordinate direction angle ของแรง F_2 เพื่อทำให้แรงลัพธ์ของแรงทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์



รูปที่ Ex 2-5

วิธีทำ

ทำการเขียน Cartesian vector ของแรง F_1 และ F_2

$$\vec{F}_1 = (180\cos 15^o)\sin 60^o \hat{i} + (180\cos 15^o)\cos 60^o \hat{j} - 180\sin 15^o \hat{k}$$

$$= 150.57\hat{i} + 86.93\hat{j} - 46.59\hat{k}$$

$$\vec{F}_2 = F_2\cos\alpha_2\hat{i} + F_2\cos\beta_2\hat{j} + F_2\cos\gamma_2\hat{k}$$

เนื่องจากแรงลัพธ์ของแรงทั้งสองมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\vec{F}_R = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า องค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน x , y , และ z จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

องค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน x

$$0 = 150.57 + F_2\cos\alpha_2$$

$$F_2\cos\alpha_2 = -150.57$$

องค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน y

$$0 = 86.93 + F_2\cos\beta_2$$

$$F_2\cos\beta_2 = 86.93$$

องค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน z

$$0 = -46.59 + F_2\cos\gamma_2$$

$$F_2\cos\gamma_2 = 46.59$$

นอกจากนั้นแล้ว เราจะหาขนาดของแรง F_2 ได้จากสมการ

$$F_2 = \sqrt{(-150.57)^2 + (-86.93)^2 + (46.59)^2} = 180\ \text{N} \qquad \text{Ans.}$$

ดังนั้น coordinate direction angle ของแรง F_2 จะมีค่าเท่ากับ

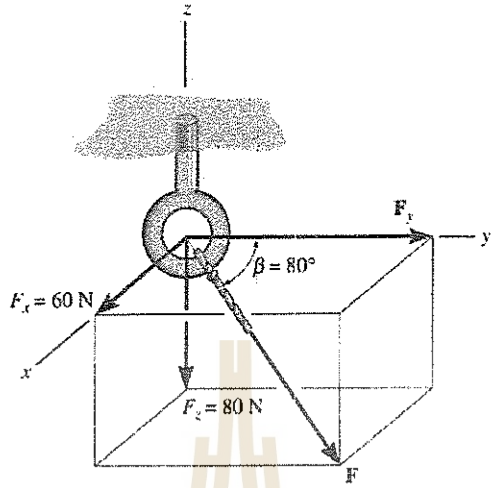
$$\alpha_2 = 147^o \qquad \text{Ans.}$$

$$\beta_2 = 119^o \qquad \text{Ans.}$$

$$\gamma_2 = 75.0^o \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 2-6 (2-76)

ห่วงเหล็กถูกกระทำโดยแรงดึงในเส้นเชือก F ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6 ซึ่งมีองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x $F_x = 60\ \mathrm{N}$ องค์ประกอบของแรงในแนวแกน z $F_z = -80\ \mathrm{N}$ และ coordinate direction angle $\beta = 80^o$ ดังที่แสดงในรูป จงหาขนาดของดึงในเส้นเชือก F



รูปที่ Ex 2-6

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 2-6 องค์ประกอบของแรง F ในแนวแกน y มีค่าเท่ากับ

$$F_y = F\cos 80^o = \sqrt{(60)^2 + F_y^2 + (-80)^2}\ (\cos 80^o)$$

$$F_y^2 = \left[(60)^2 + F_y^2 + (-80)^2\right]\cos^2 80^o$$

$$F_y = 17.63\ \mathrm{N}$$

ดังนั้น ขนาดของดึงในเส้นเชือก F มีค่าเท่ากับ

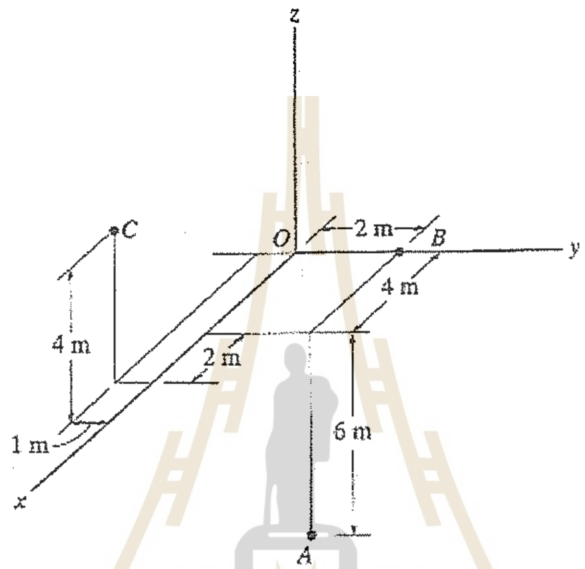
$$F = \sqrt{(60)^2 + (17.63)^2 + (-80)^2} = 102\ \mathrm{N} \qquad \text{Ans.}$$

2.7 Vector บอกตำแหน่ง (Position Vectors)

Vector บอกตำแหน่ง (Position vector) มีความสำคัญมากในการหา vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (Cartesian vector) ของแรงระหว่างจุดสองจุดใน space

พิกัด x, y, z (x, y, z Coordinates)

ถ้าเรากำหนดให้ระบบแกนตั้งฉากตามกฎมือขวามีแกนบวก z มีทิศพุ่งขึ้นและระนาบ $x-y$ อยู่ในแนวนอน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-22 แล้ว เราจะได้ว่า ตำแหน่งของจุดที่อยู่ใน space จะหาได้โดยการวัดตำแหน่งของจุดดังกล่าวเทียบกับจุดกำเนิด (origin) O ไปตามแนวแกน x, y, และ z ยกตัวอย่างเช่น จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 2-22 จะมีตำแหน่งเป็น (4, 2, -6) จุด B จะมีตำแหน่งเป็น (0, 2, 0) และจุด C จะมีตำแหน่งเป็น (6, -1, 4)



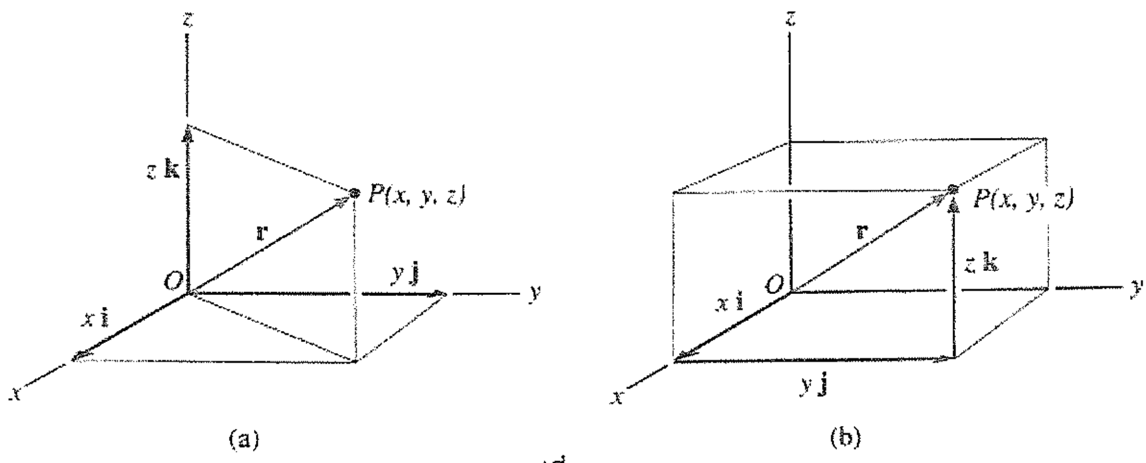
รูปที่ 2-22

Vector บอกตำแหน่ง (Position Vectors)

Vector บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ เป็น vector ที่ใช้ในการบอกตำแหน่งของจุดใน space เทียบกับจุดอีกจุดหนึ่ง (จุดอ้างอิง) เช่น ตามรูปที่ 2-23a เราจะเขียน vector $\bar{r}$ ที่ลากจากจุดกำเนิด O ของระบบแกนอ้างอิงไปยังจุด $P(x, y, z)$ ในรูปของ Cartesian vector ได้เป็น

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

รูปที่ 2-23b แสดงการรวมกันขององค์ประกอบของ vector $\bar{r}$



รูปที่ 2-23

โดยทั่วไปแล้ว vector บอกตำแหน่งจะเป็น vector ที่ลากจากจุด A ไปยังจุด B ซึ่งมีสัญลักษณ์เป็น $\bar{r}$ หรือ $\bar{r}_{AB}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-24 โดยที่ $\bar{r} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$ และจากรูป เราจะได้ว่า

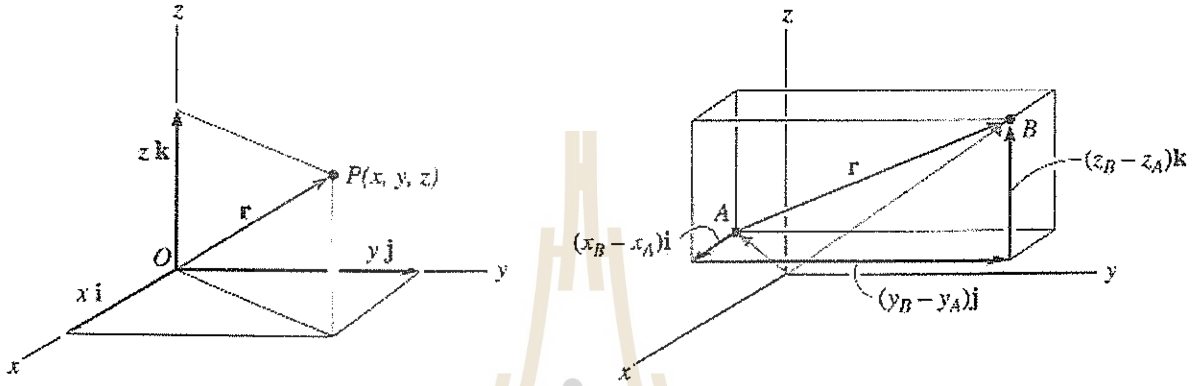
$$\bar{r}_A = x_A\hat{i} + y_A\hat{j} + z_A\hat{k}$$

และ

$$\bar{r}_B = x_B\hat{i} + y_B\hat{j} + z_B\hat{k}$$

ดังนั้น

$$\bar{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \tag{2-13}$$



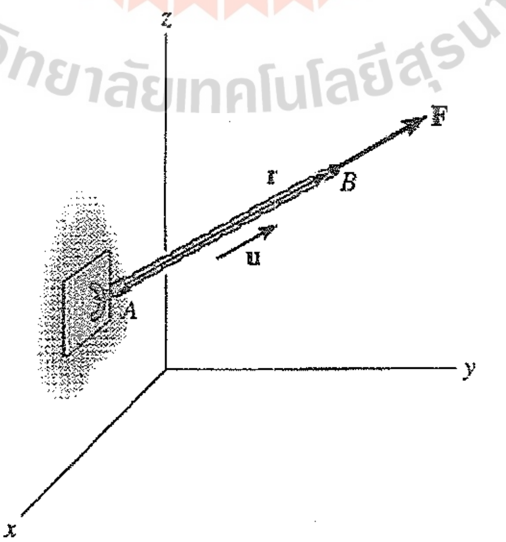
(a) (b)

รูปที่ 2-24

2.8 vector **ของแรงที่อยู่ในแนวเส้นตรง** (Force Vector Directed Along a Line)

ในบางกรณี ทิศทางของแรงจะถูกระบุโดยจุดสองจุดซึ่งแนวของแรงตัดผ่าน ยกตัวอย่างเช่น แรง $\bar{F}$ ซึ่งมีทิศทางในแนวของโซ่ AB ดังที่แสดงในรูปที่ 2-25 เป็นต้น แรง $\bar{F}$ นี้จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector โดยใช้แนวความคิดที่ว่าแรง $\bar{F}$ จะมีทิศทางและนัย (sense) เช่นเดียวกับ vector บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ ที่มีทิศพุ่งจากจุด A ไปยังจุด B บนโซ่ และเนื่องจากโซ่ AB ถูกระบุโดย unit vector $\bar{u} = \bar{r} / r$ ดังนั้น แรง $\bar{F}$ จะอยู่ในรูปของสมการ

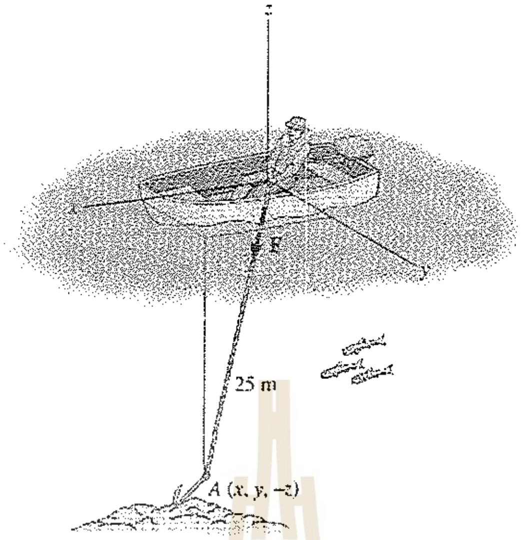
$$\bar{F} = F\,\bar{u} = F(\frac{\bar{r}}{r})$$



รูปที่ 2-25

ตัวอย่างที่ 2-7 (2-98)

กำหนดให้แรงที่กระทำต่อชายซึ่งนั่งอยู่บนเรือเนื่องจากการดึงสมอเรือ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-7 อยู่ในรูป $F = 40\hat{i} + 20\hat{j} - 50\hat{k}$ N จงหาพิกัดของสมอเรือ A เมื่อกำหนดให้เส้นเชือกมีความยาว 25 m



รูปที่ Ex 2-7

วิธีทำ

Cartesian vector ของแรงดึงอยู่ในรูป

$$\bar{F} = 40\hat{i} + 20\hat{j} - 50\hat{k} \text{ N}$$

แรงดึงมีขนาดเท่ากับ

$$F = \sqrt{(40)^2 + (20)^2 + (-50)^2} = 67.08 \text{ N}$$

position vector ของเชือกจะอยู่ในรูป

$$\bar{r} = 25\frac{\bar{F}}{F} = \frac{25}{67.08}(40\,\hat{i} + 20\hat{j} - 50\hat{k})$$

$$\bar{r} = 14.91\hat{i} + 7.45\hat{j} - 18.63\hat{k} \text{ m}$$

ดังนั้น พิกัดของสมอเรือ A จะอยู่ที่ตำแหน่ง

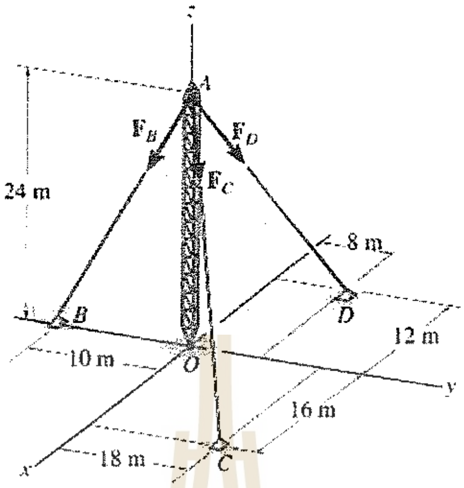
$$x = 14.9 \text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

$$y = 7.45 \text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

$$z = -18.63 \text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 2-8 (2-100)

กำหนดให้เสาอากาศถูกรองรับโดย cable 3 เส้น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8 ถ้าขนาดของแรงใน cable ทั้งสามมีค่าเท่ากับ $F_B = 520\,\mathrm{N}$ $F_C = 680\,\mathrm{N}$ และ $F_D = 560\,\mathrm{N}$ จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ของแรงทั้งสามที่กระทำอยู่ที่จุด A



รูปที่ Ex 2-8

วิธีทำ

ทำการเขียน Cartesian vector ของแรงที่เกิดขึ้นใน cable ทั้งสามเส้น

$$\vec{F}_B = 520\left(\frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}\right) = 520\left(-\frac{10}{26}\hat{j} - \frac{24}{26}\hat{k}\right) = -200\hat{j} - 480\hat{k}$$

$$\vec{F}_C = 680\left(\frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}}\right) = 680\left(\frac{16}{34}\hat{i} + \frac{18}{34}\hat{j} - \frac{24}{34}\hat{k}\right) = 320\hat{i} + 360\hat{j} - 480\hat{k}$$

$$\vec{F}_D = 560\left(\frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}}\right) = 560\left(-\frac{12}{28}\hat{i} + \frac{8}{28}\hat{j} - \frac{24}{28}\hat{k}\right) = -240\hat{i} + 160\hat{j} - 480\hat{k}$$

Cartesian vector ของแรงลัพธ์ของแรงทั้งสามจะอยู่ในรูป

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = 80\hat{i} + 320\hat{j} - 1440\hat{k}\ \ \mathrm{N}$$

ดังนั้น เราจะหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ของแรงทั้งสามที่กระทำอยู่ที่จุด A ได้ดังนี้

$$F_R = \sqrt{(80)^2 + (320)^2 + (-1440)^2}$$
$$= 1477.3 = 1.48\ \ \mathrm{kN}$$ Ans.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{80}{1477.3}\right) = 86.9^o$$ Ans.

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{320}{1477.3}\right) = 77.5^o$$ Ans.

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-1440}{1477.3}\right) = 167^o$$ Ans.

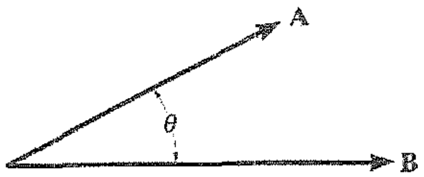
2.9 Dot Product หรือ Scalar product

Dot product มักใช้ในการหามุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นหรือใช้ในการหาองค์ประกอบของแรงที่ขนานหรือตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง

Dot product ของ vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-26 จะถูกเขียนได้ในรูป

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta \tag{2-14}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ โดยที่ $0^o \le \theta \le 180^o$



รูปที่ 2-26

Laws of Operation

1. Commulative law

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

2. Multiplication by a scalar

$$a(\vec{A}.\vec{B}) = (a\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(a\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{B})a$$

3. Distributive law

$$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{D})$$

Dot product ของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian

จากสมการที่ 2-14 เราจะหา dot product ของ Cartesian unit vector ได้เป็น

$$\hat{i}.\hat{i} = 1 \qquad \hat{j}.\hat{j} = 1 \qquad \hat{k}.\hat{k} = 1$$
$$\hat{i}.\hat{j} = 0 \qquad \hat{i}.\hat{k} = 0 \qquad \hat{k}.\hat{j} = 0$$

ในกรณีของ dot product ของ vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ ที่อยู่ในรูปของ Cartesian vector เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x(\hat{i}.\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}.\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}.\hat{k}) + \\ &\quad A_yB_x(\hat{j}.\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}.\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}.\hat{k}) + \\ &\quad A_zB_x(\hat{k}.\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}.\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}.\hat{k})\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2-15}$$

การใช้ dot product

เราสามารถใช้ dot product ในการหา

1. มุมระหว่าง vector สอง vectors หรือมุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง
   จากสมการที่ 2-14 เราจะหามุมระหว่าง vector $\vec{A}$ และ vector $\vec{B}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-26 ได้จากสมการ

$$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} \qquad 0^o \le \theta \le 180^o$$

2. องค์ประกอบของ vector ที่ขนานและตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นหนึ่ง

องค์ประกอบของ vector $\bar{A}$ จะขนานหรืออยู่ในแนวเดียวกันกับเส้นตรง aa' หรือ $\bar{A}_{\parallel}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-27 เมื่อ $A_{\parallel} = A\cos\theta$ ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า projection ของ $\bar{A}$ บนเส้นตรง aa'

ถ้าทิศทางของเส้นตรงนี้ถูกแสดงได้โดย unit vector $\bar{u}$ แล้ว เราจะหา $A_{\parallel}$ ได้จาก dot product โดยที่

$$A_{\parallel} = A\cos\theta = \bar{A}.\bar{u}$$

จากสมการ เราจะเห็นได้ว่า ถ้า $A_{\parallel}$ มีค่าเป็นบวกแล้ว vector $\bar{A}_{\parallel}$ จะมีทิศทางและนัย (sense) เช่นเดียวกับ unit vector $\bar{u}$ และถ้า $A_{\parallel}$ มีค่าเป็นลบแล้ว vector $\bar{A}_{\parallel}$ จะมีทิศทางและนัย (sense) ตรงกันข้ามกับ unit vector $\bar{u}$ และ vector $\bar{A}_{\parallel}$ นี้จะถูกเขียนอยู่ในรูปของ vector ได้เป็น

$$\bar{A}_{\parallel} = A\cos\theta\,\bar{u} = (\bar{A}.\bar{u})\bar{u}$$

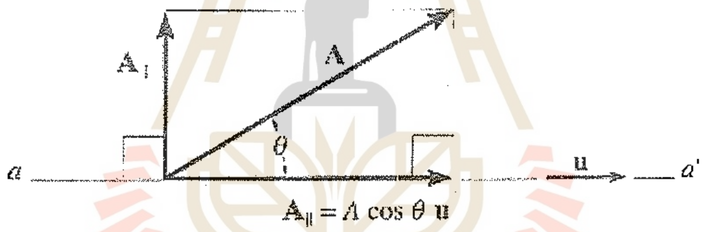
องค์ประกอบของ vector $\bar{A}$ ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง aa' หรือ vector $\bar{A}_{\perp}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-27 จะหาได้จากสมการ

$$\bar{A}_{\perp} = \bar{A} - \bar{A}_{\parallel}$$

และเราจะหาขนาดของ vector $\bar{A}$ หรือ $A_{\perp}$ ได้สองวิธีคือ

1. หามุม θ จากสมการ $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\bar{A}.\bar{u}}{A}$ แล้ว เราจะได้ว่า $A_{\perp} = A\sin\theta$
2. ถ้าเรารู้ขนาดของ vector $\bar{A}_{\parallel}$ หรือ $A_{\parallel}$ แล้ว เราจะได้ว่า

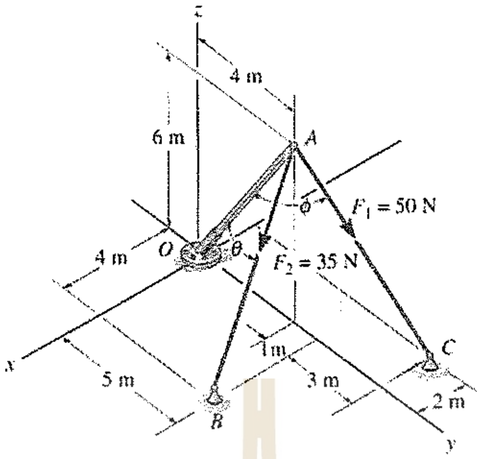
$$A_{\perp} = (A^2 - A^2_{\parallel})^{1/2}$$



รูปที่ 2-27

ตัวอย่างที่ 2-9 (2-126)

เคเบิล (cable) สองเส้นออกแรงกระทำต่อท่อเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-9 จงหาขนาดขององค์ประกอบของแรงแต่ละแรงที่ถ่ายไปตามแนวแกน OA ของท่อเหล็ก



รูปที่ Ex 2-9

วิธีทำ

ทำการเขียน Cartesian vector ของแรงที่เกิดขึ้นใน cable

$$\bar{F}_1 = 50\frac{(-2\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k})}{\sqrt{(-2)^2+(4)^2+(-6)^2}}$$

$$\bar{F}_1 = -13.36\hat{i}+26.73\hat{j}-40.08\hat{k}\ \text{N}$$

$$\bar{F}_2 = 35\frac{(4\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k})}{\sqrt{(4)^2+(1)^2+(-6)^2}}$$

$$\bar{F}_2 = 19.23\hat{i}+4.808\hat{j}-28.85\hat{k}\ \text{N}$$

องค์ประกอบของแรงแต่ละแรงที่ถ่ายไปตามแนวแกน OA ของท่อเหล็ก

$$\text{Proj } F_1 = \bar{F}_1.\bar{u}_{OA}$$

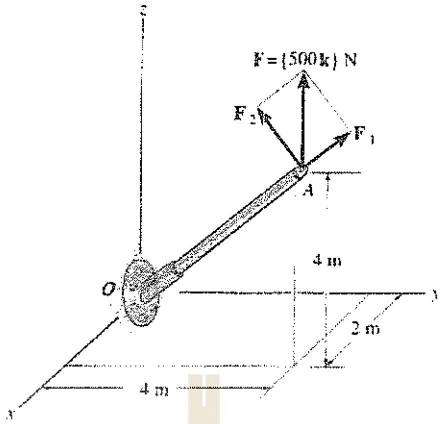
$$= \left|(-13.36\hat{i}+26.73\hat{j}-40.08\hat{k}).\frac{(4\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{4^2+6^2}}\right| = 18.5\ \text{N} \qquad \text{Ans.}$$

$$\text{Proj } \bar{F}_2 = \bar{F}_2.\bar{u}_{OA}$$

$$= \left|(19.23\hat{i}+4.808\hat{j}-28.85\hat{k}).\frac{(4\hat{j}+6\hat{k})}{\sqrt{4^2+6^2}}\right| = 21.3\ \text{N} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 2-10 (2-129)

กำหนดให้แรง $F = 500\hat{k}$ N กระทำที่จุด A ของท่อเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-10 จงหาขนาดขององค์ประกอบของแรง F_1 ที่กระทำไปตามแนวแกน OA ของท่อเหล็กและ F_2 ที่กระทำตั้งฉากกับแกน OA ของท่อเหล็ก



รูปที่ Ex 2-10

วิธีทำ

Position vector ของท่อเหล็ก OA

$$\vec{r}_{OA} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}\ \text{m}$$

Cartesian vector ของแรง F_1

$$\vec{F}_1 = \vec{F}.\frac{\vec{r}_{OA}}{r_{OA}}$$

$$= (500\hat{k}).\frac{(2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}}$$

ดังนั้น ขนาดขององค์ประกอบของแรง F_1 และแรง F_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$F_1 = 500\left(\frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}}\right) = 333\ \text{N}$$ Ans.

$$F_2 = \sqrt{(500)^2 - (333)^2} = 373\ \text{N}$$ Ans.

บทที่ 3

Equilibrium of a Particle

จุดประสงค์

1. เพื่อที่ได้เรียนรู้และเข้าใจถึง concept ของ free-body diagram ของอนุภาค
2. เพื่อที่จะสามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับสมดุลของอนุภาคโดยใช้สมการความสมดุล (equations of equilibrium) ได้

3.1 เงื่อนไขของความสมดุลของอนุภาค (Condition for the Equilibrium of a Particle)

อนุภาค (particle) จะอยู่ในสภาวะของความสมดุล (equilibrium) ได้ก็ต่อเมื่ออนุภาคดังกล่าวยังคงอยู่กับที่ ถ้าเมื่อตอนเริ่มต้นอนุภาคอยู่กับที่ หรือเมื่ออนุภาคดังกล่าวเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ถ้าเมื่อตอนเริ่มต้นอนุภาคดังกล่าวเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่

ในวิชานี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับความสมดุลในกรณีที่อนุภาคอยู่กับที่ (static equilibrium) เพื่อที่จะรักษาความสมดุลในกรณีนี้ แรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาคจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ (Newton's first law of motion) ซึ่งจะเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ว่า

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad (3\text{-}1)$$

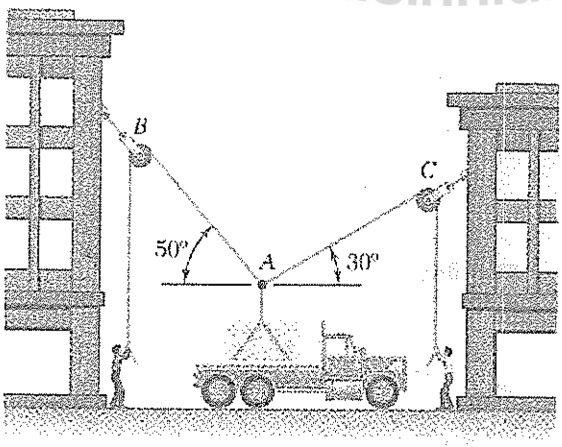
เมื่อ $\sum \vec{F}$ เป็นผลรวมของแรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาค

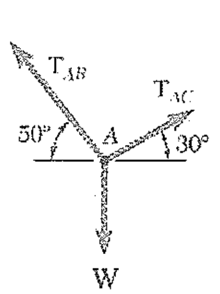
สมการที่ 3-1 นี้ ไม่ได้เป็นแต่เพียงเงื่อนไขที่จำเป็นเท่านั้น แต่สมการนี้ยังเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะก่อให้เกิดความสมดุลของอนุภาค จากสมการ Newton's second law of motion $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ และจากสมการที่ 3-1 เราจะได้ว่า $m\vec{a} = \vec{0}$ ดังนั้น ความเร่งของอนุภาค $\vec{a} = \vec{0}$ ซึ่งหมายความว่าเมื่อ $\sum \vec{F} = \vec{0}$ แล้ว อนุภาคจะมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่คงที่หรืออนุภาคยังคงอยู่กับที่

3.2 แผนภาพ Free-Body Diagram

Free-body diagram เป็นแผนภาพของอนุภาคที่เป็นอิสระจากสิ่งรอบข้างและถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า แรงนี้อาจจะเป็นแรงภายนอกที่กระทำต่ออนุภาคโดยตรง หรืออาจจะเป็นแรงที่เกิดจากสิ่งรอบข้างกระทำกับอนุภาคก็ได้

จากรูปที่ 3-1 ซึ่งแสดงวิธีการหนึ่งที่คนสองคนจะช่วยกันยกน้ำหนักบรรทุกออกจากรถบรรทุก ถ้ากำหนดให้ในสภาวะดังกล่าวระบบทางกลศาสตร์ดังกล่าวอยู่ในสมดุลแล้ว เราสามารถพิจารณาจุดเชื่อมต่อของเชือกที่จุด A เป็นอนุภาคได้และอนุภาคดังกล่าวจะถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก W และแรงตึงในแนวแกนของเส้นเชือก T_{AB} และ T_{AC}



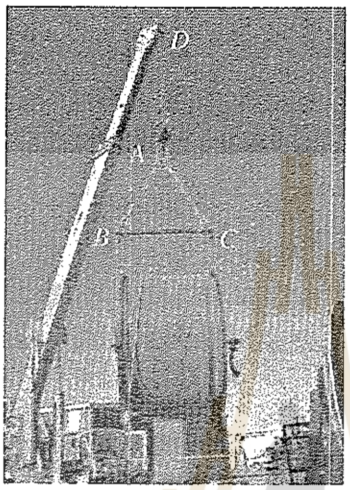


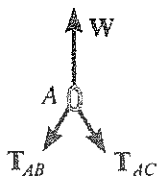
Free Body Diagram of Point A

รูปที่ 3-1

ขั้นตอนในการเขียน Free-Body Diagram

1. ใช้จินตนาการในการแยกอนุภาคออกจากสิ่งที่อยู่รอบข้างทั้งหมด แล้วเขียนอนุภาคนั้นอย่างคร่าวๆ ดังเช่นอนุภาคที่จุดเชื่อมต่อที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 3-2
2. เขียนแรงกระทำทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคดังกล่าว ในกรณีของระบบทางกลศาสตร์ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-2 แรงกระทำต่ออนุภาคจะประกอบด้วยแรงตึงในแนวแกนของเส้นเชือกทั้งสามเส้น
3. เขียนขนาดของแรงที่ทราบค่าด้วยค่าของแรงและทิศทางของแรงที่เหมาะสมซึ่งได้แก่น้ำหนักของวงล้อ W และใช้สัญลักษณ์แทนแรงที่ไม่ทราบค่าซึ่งได้แก่แรงตึงในแนวแกนของเส้นเชือก T_{AB} และ T_{AC}

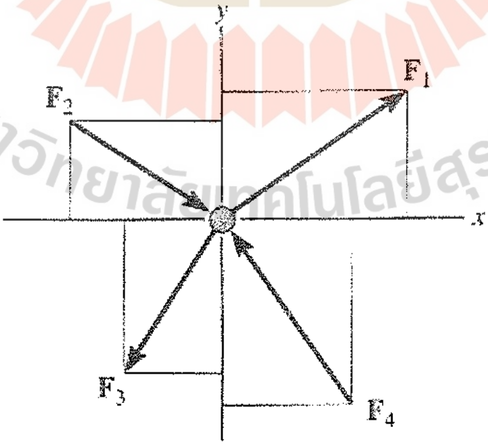




รูปที่ 3-2

3.3 ระบบของแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน (Coplanar Force Systems)

ถ้าอนุภาคถูกกระทำโดยระบบของแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน (system of coplanar forces) ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 3-3 แล้ว แรงแต่ละแรงจะสามารถถูกแตกออกเป็นองค์ประกอบของแรงในรูปแบบของ Cartesian force vector $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ ได้



รูปที่ 3-3

จากสมการที่ 3-1 เราจะได้ว่า

$$\sum \bar{F} = \bar{0}$$

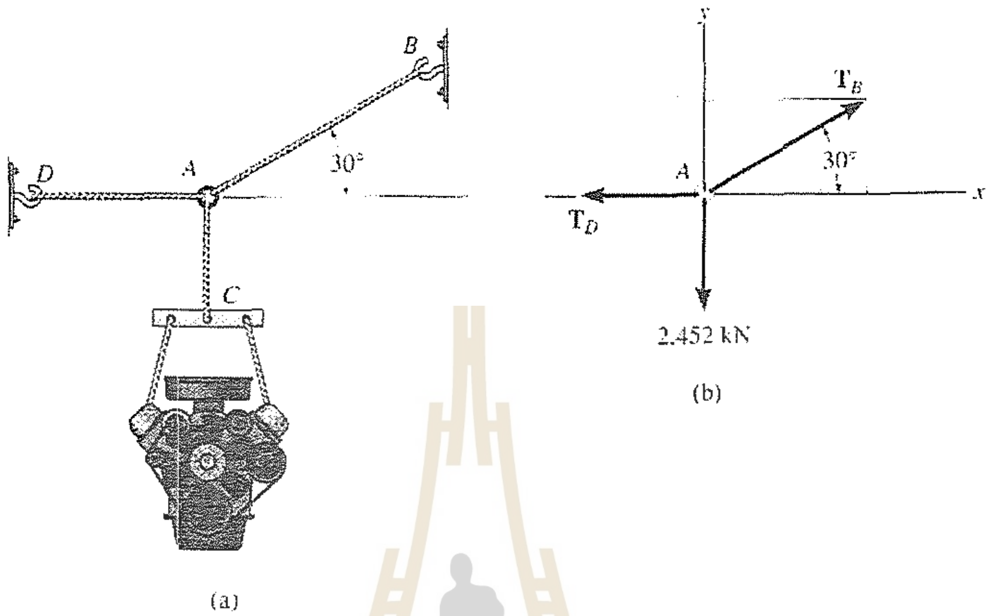
$$\sum F_x\hat{i} + \sum F_y\hat{j} = \bar{0} \qquad (3\text{-}2)$$

ในการที่สมการที่ 3-2 จะมีความสมบูรณ์ได้นั้น ผลรวมขององค์ประกอบของแรงในแนวแกน x และผลรวมขององค์ประกอบของแรงในแนวแกน y ของสมการกังกล่าวจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์หรือ

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0 \tag{3-3}$$

ซึ่งเราสามารถที่จะใช้สมการเงื่อนไขของความสมดุลทั้งสองนี้ในการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้สองตัวแปร ซึ่งโดยปกติ จะเป็นค่าของแรงและมุมที่แรงกระทำบนอนุภาค

สมการเงื่อนไขของความสมดุลในรูปของ scalar



รูปที่ 3-4

ในการใช้สมการที่ 3-3 เราจะแตก vector ของแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x และในแนวแกน y ซึ่งจะทำให้เราใช้ scalar แทนองค์ประกอบของแรงในสมการนี้ได้ โดยที่นัย (sense) ของทิศทางขององค์ประกอบของแรงจะเป็นบวก เมื่อองค์ประกอบของแรงมีทิศพุ่งไปทางแกนบวก และจะมีค่าลบเมื่อองค์ประกอบของแรงมีทิศพุ่งไปทางแกนลบ

ถ้าเราไม่ทราบค่าของแรงนั้น เราจะสมมุติให้แรงนั้นมีองค์ประกอบของแรงที่มี sense ของทิศทางของแรงพุ่งไปทางแกนบวก ซึ่งถ้าเราได้คำตอบออกมาเป็นค่าลบแล้ว sense ของทิศทางของแรงดังกล่าวก็จะพุ่งไปทางแกนลบ ยกตัวอย่างเช่น ในการหาแรงที่เกิดขึ้นใน cable AB และ AD เนื่องจากน้ำหนักของเครื่องยนต์ ซึ่งกำหนดให้มีค่าเท่ากับ $2.452\,\text{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-4a นั้น เริ่มต้นเราจะทำการการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของจุด A ซึ่งจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 3-4a จากนั้น ใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวแกน x และแกน y ในการหาแรงที่เกิดขึ้นใน cable AB และ AD ซึ่งเราจะได้ว่า

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$

$$+T_B\cos 30^o - T_D = 0$$

$+\uparrow\sum F_y = 0;$

$$+T_B\sin 30^o - 2.452 = 0$$

เมื่อทำการแก้สมการทั้งสอง เราจะได้ว่า

$$T_B = 4.90\,\text{kN} \text{ และ } T_D = 4.25\,\text{kN}$$

เนื่องจากค่าของแรงที่ได้มีค่าเป็นบวก ดังนั้น แรงที่เกิดขึ้นใน cable จะมีทิศทางตามที่เราได้สมมุติไว้

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free-Body Diagram

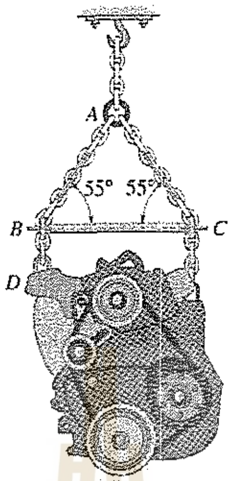
1. เขียนแกนอ้างอิง x และ y ให้อยู่ในทิศทางที่เหมาะสม
2. เขียนขนาดและทิศทางของแรงทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าลงในแผนภาพ
3. สมมุตินัย (sense) ของแรงที่ไม่ทราบค่าให้มีทิศทางของแรงพุ่งไปทางแกนบวก

Equations of Equilibrium

4. ใช้สมการความสมดุล $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ หาค่าของแรงที่ไม่ทราบค่า
5. องค์ประกอบของแรงจะมีค่าบวก เมื่อมีทิศทางพุ่งไปในแนวแกนบวก และจะมีค่าลบเมื่อมีทิศทางพุ่งไปในแนวแกนลบ ถ้าคำตอบที่ได้มีค่าเป็นลบ sense ของทิศทางของแรงจะมีทิศพุ่งตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้

ตัวอย่างที่ 3-1 (3-8)

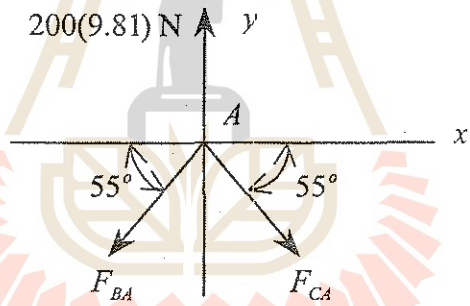
เครื่องยกหนัก $200\,\text{kg}$ ถูกแขวนโดยโซ่ที่อยู่ในแนวดิ่งที่จุด A และถูกมัดโดยโซ่อีกเส้นหนึ่ง ซึ่งมีแท่งเหล็ก BC เป็นตัวปรับระดับ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-1 จงหาค่าของแรงกดอัดที่เกิดขึ้นในแท่งเหล็ก BC และแรงดึงที่เกิดขึ้นในส่วน BA และ CA ของโซ่



รูปที่ Ex 3-1

วิธีทำ

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ A ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นได้ว่า เราจะสามารถหาแรงดึงในโซ่ AB และ AC ได้ โดยใช้สมการความสมดุลที่จุดเชื่อมต่อดังกล่าว

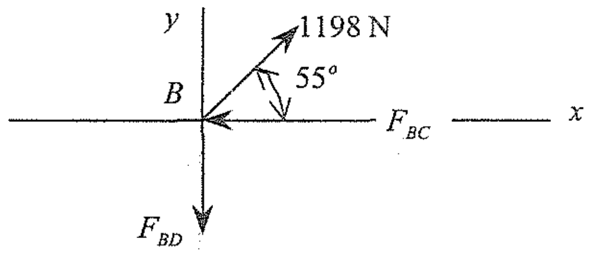


$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad F_{CA}\cos 55^\circ - F_{BA}\cos 55^\circ = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad 200(9.81) - F_{CA}\sin 55^\circ - F_{BA}\sin 55^\circ = 0$

$$F_{CA} = F_{BA} = 1198\ \text{N} = 1.20\ \text{kN}$$ Ans.

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ A ดังที่แสดงในรูป

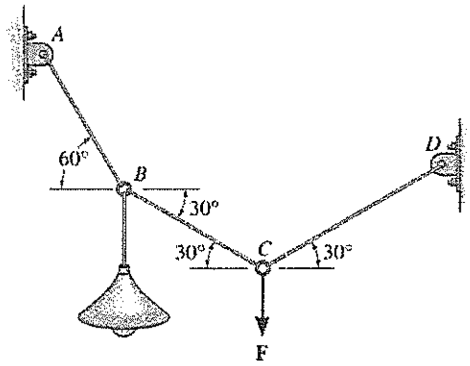


$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad 1198\cos 55^\circ - F_{BC} = 0$

$$F_{BC} = 687\ \text{N}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 3-2 (3-17)

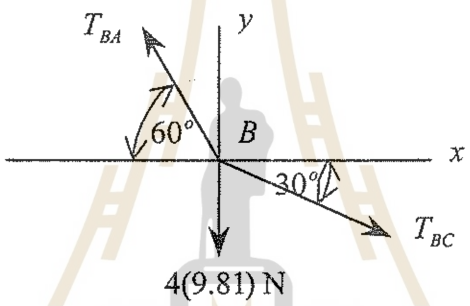
จงหาค่าของแรงที่เกิดขึ้นในส่วนต่างๆ ของ cable และค่าของแรง F ที่ใช้ในการดึง cable เพื่อให้ดวงไฟหนัก 4 kg อยู่ในตำแหน่งตามที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2



รูปที่ Ex 3-2

วิธีทำ

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ B ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นได้ว่า เราจะหาแรงดึงใน cable BA และ BC ได้ โดยใช้สมการความสมดุลที่จุดเชื่อมต่อดังกล่าว



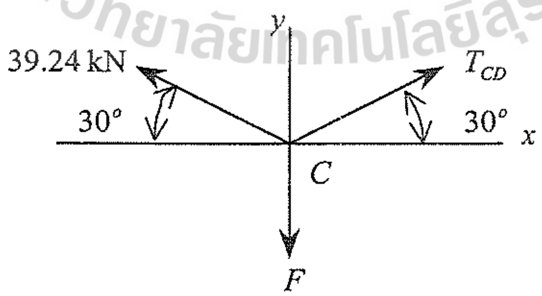
$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $\quad T_{BC}\cos 30^o - T_{BA}\cos 60^o = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad T_{BA}\sin 60° - T_{BC}\sin 30° - 4(9.81) = 0$

$$T_{BC} = 39.24 = 39.2 \text{ N}$$ Ans.

$$T_{BA} = 67.97 = 68.0 \text{ N}$$ Ans.

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ C ดังที่แสดงในรูป



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $\quad -39.24\cos 30^o + T_{CD}\cos 30^o = 0$

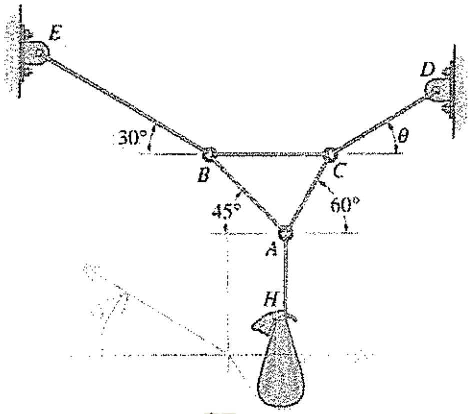
$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad 39.24\sin 30^o + T_{CD}\sin 30^o - F = 0$

$$T_{CD} = 39.2 \text{ N}$$ Ans.

$$F = 39.2 \text{ N}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 3-3 (3-21)

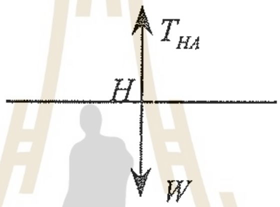
กำหนดให้เส้นเชือกแต่ละเส้น ดังที่แสดงในรูปที่ EX 3-3 มีความสามารถรับแรงดึงได้สูงสุดเท่ากับ 200 N จงหาน้ำหนักสูงสุดของถุงทรายที่เชือกสามารถรองรับได้ และจงหามุม θ ของเส้นเชือก CD



รูปที่ EX 3-3

วิธีทำ

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ H ดังที่แสดงในรูป

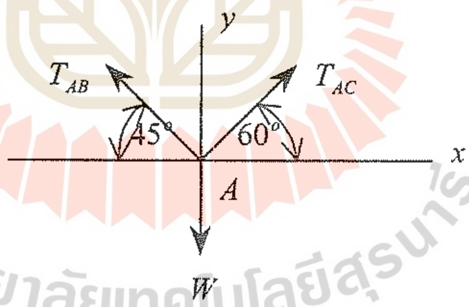


$+\uparrow \sum F_y = 0;$

$$T_{HA} - W = 0$$

$$T_{HA} = W$$

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ A ดังที่แสดงในรูป



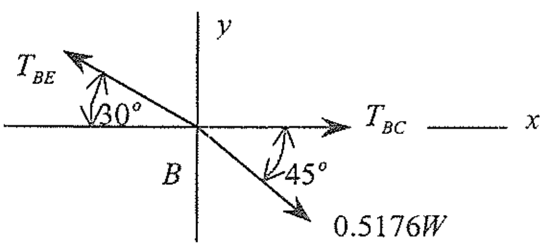
$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $$T_{AC}\cos 60^o - T_{AB}\cos 45^o = 0$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$T_{AC}\sin 60° + T_{AB}\sin 45° - W = 0$$

$$T_{AC} = 0.7321W$$

$$T_{AB} = 0.5176W$$

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ B ดังที่แสดงในรูป



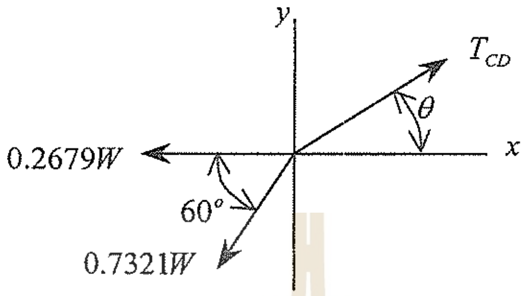
$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad T_{BE}\sin 30° - 0.5176W\sin 45° = 0$

$$T_{BE} = 0.7321W$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad -0.7321W\cos 30^o + 0.5176W\cos 45^o + T_{BC} = 0$

$$T_{BC} = 0.2679W$$

พิจารณา free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ C ดังที่แสดงในรูป



$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad T_{CD}\cos\theta - 0.2679W - 0.7321W\cos 60^o = 0$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad T_{CD}\sin\theta - 0.7321W\sin 60^o = 0$

$$T_{CD} = 0.8966W$$

$$\theta = 45^o$$

โดยการเปรียบเทียบค่าของแรงตึงใน cable ที่หามาได้ เราจะเห็นว่า cable HA รับแรงดึงสูงสุด ดังนั้น

$$W = 200 \quad \text{N}$$ Ans.

3.4 Three-Dimensional Force Systems

อนุภาคจะอยู่ในความสมดุลเมื่อ

$$\sum \bar{F} = \bar{0} \tag{3-4}$$

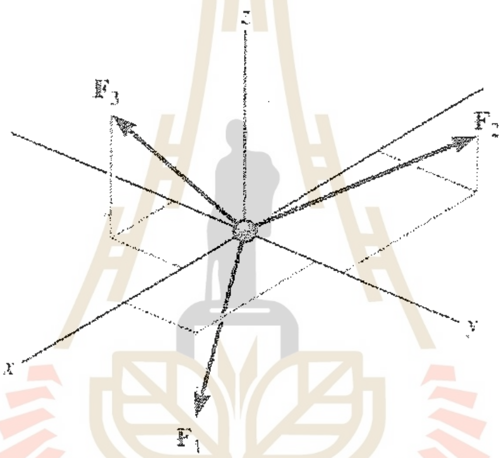
ถ้า vector ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคถูกแตกออกเป็นองค์ประกอบของแรงในรูปแบบของ Cartesian vector ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5 แล้ว เราจะได้ว่า

$$\sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k} = \bar{0}$$

และ

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \end{aligned} \tag{3-5}$$

สมการที่ 3-5 นี้แสดงผลรวมทางพีชคณิตของแรงที่กระทำอยู่บนอนุภาคในแนวแกน x, แกน y, และแกน z ซึ่งเราจะใช้ในการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าได้สามตัวแปร ซึ่งโดยปกติจะเป็นค่าของแรงและ/หรือมุมที่แรงกระทำบนอนุภาค



รูปที่ 3-5

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free-Body Diagram

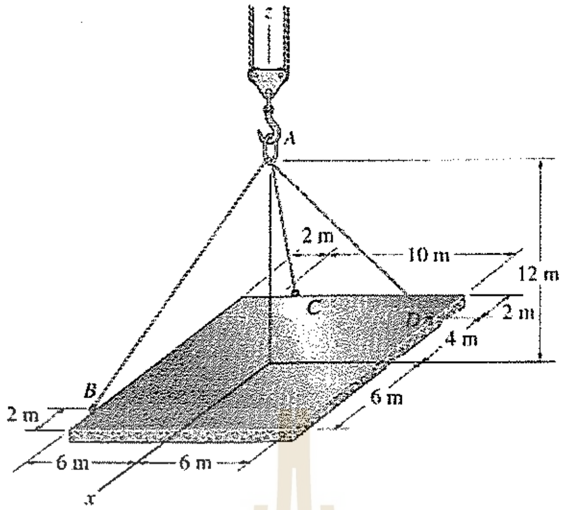
1. เขียนแกนอ้างอิง x, y, และ z ให้อยู่ในทิศทางที่เหมาะสม
2. เขียนขนาดและทิศทางของแรงทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่าลงในแผนภาพ
3. สมมุตินัย (sense) ของแรงที่ไม่ทราบค่าให้มีทิศทางของแรงพุ่งไปทางแกนบวก

Equations of Equilibrium

4. ในกรณีที่เราสามารถแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x, แกน y, และแกน z ได้ง่ายนั้น เราจะใช้สมการความสมดุลในรูปแบบของ scalar หรือ $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, และ $\sum F_z = 0$ ในการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าสามตัวแปร
5. ในกรณีที่การแตกแรงออกเป็นองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x, แกน y, และแกน z กระทำได้ยาก เราจะเขียนแรงแต่ละแรงให้อยู่ในรูป Cartesian vector แล้วแทนค่า vector ของแรงแต่ละแรงลงในสมการที่ 3-4 จากนั้น ให้องค์ประกอบของ Cartesian unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ มีค่าเป็นศูนย์แล้วแก้สมการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าสามตัวแปร
6. ถ้าคำตอบที่ได้มีค่าเป็นลบ sense ของทิศทางของแรงจะมีทิศพุ่งตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้

ตัวอย่างที่ 3-4 (3-51)

แผ่นพื้นคอนกรีตถูกยึดรั้งโดย cable 3 เส้นเพื่อทำการขนย้าย ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-4 ถ้า cable แต่ละเส้นสามารถรองรับแรงได้สูงสุด 15 kN จงหาว่าแผ่นพื้นคอนกรีตดังกล่าวจะมีน้ำหนักสูงสุดได้เท่าใด



รูปที่ Ex 3-4

วิธีทำ

ทำการเขียน Cartesian vector ของน้ำหนักของแผ่นพื้นคอนกรีตและแรงตึงใน cable ทั้งสามเส้น

$$\bar{W} = W\hat{k}$$

$$\bar{F}_B = F_B(\frac{4}{14}\hat{i} - \frac{6}{14}\hat{j} - \frac{12}{14}\hat{k})$$

$$\bar{F}_C = F_C(-\frac{6}{14}\hat{i} - \frac{4}{14}\hat{j} - \frac{12}{14}\hat{k})$$

$$\bar{F}_D = F_D(-\frac{4}{14}\hat{i} + \frac{6}{14}\hat{j} - \frac{12}{14}\hat{k})$$

เนื่องจากแผ่นพื้นคอนกรีตอยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้น จากสมการความสมดุลที่จุด A เราจะได้ว่า

$\sum F_x = 0;$ $$\frac{4}{14}F_B - \frac{6}{14}F_C - \frac{4}{14}F_D = 0$$

$\sum F_Y = 0;$ $$-\frac{6}{14}F_B - \frac{4}{14}F_C + \frac{6}{14}F_D = 0$$

$\sum F_z = 0;$ $$-\frac{12}{14}F_B - \frac{12}{14}F_C - \frac{12}{14}F_D + W = 0$$

เนื่องจากเรามีสมการ 3 สมการ แต่มีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 ตัว ดังนั้น สมมุติให้แรง $F_B = 15\,\text{kN}$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$F_C = 0 < 15\,\text{kN}$$ O.K.

$$F_D = 15\,\text{kN}$$ O.K.

ดังนั้น แผ่นพื้นคอนกรีตดังกล่าวจะมีน้ำหนักสูงสุดได้เท่ากับ

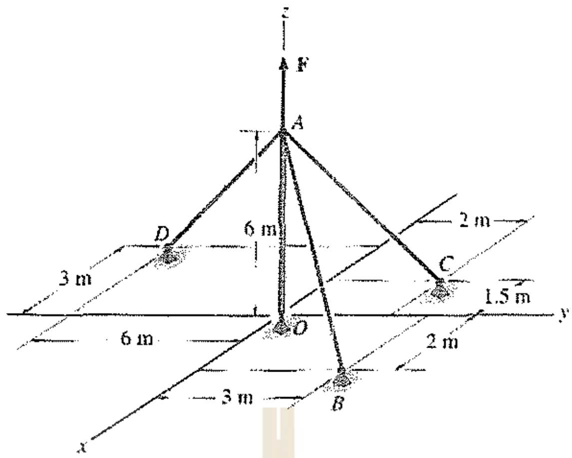
$$-\frac{12}{14}(15) - 0 - \frac{12}{14}(15) + W = 0$$

$$W = 25.714\,\text{kN}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{25.714}{9.81} = 2.62\,\text{Mg}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 3-5 (3-57)

เสาวิทยุ OA ออกแรงในแนวดิ่ง $F = 1200\ \mathrm{N}$ กระทำต่อ cable ที่จุดยึดรั้ง A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-5 จงหาแรงดึงที่เกิดขึ้นใน cable แต่ละเส้น



รูปที่ Ex 3-5

วิธีทำ

ทำการเขียน Cartesian vector ของแรงดึงใน cable ทั้งสามเส้นและแรงลัพธ์ F

$$\bar{F}_{AB} = F_{AB}\left(\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{6}{7}\hat{k}\right)$$

$$\bar{F}_{AC} = F_{AC}\left(-\frac{1.5}{6.5}\hat{i} + \frac{2}{6.5}\hat{j} - \frac{6}{6.5}\hat{k}\right)$$

$$\bar{F}_{AD} = F_{AD}\left(-\frac{3}{9}\hat{i} - \frac{6}{9}\hat{j} - \frac{6}{9}\hat{k}\right)$$

$$\bar{F} = 1200\,\hat{k}$$

เนื่องจากเสาวิทยุ OA อยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้น จากสมการความสมดุลที่จุด A เราจะได้ว่า

$\sum F_x = 0;$ $$\frac{2}{7}F_{AB} - \frac{1.5}{6.5}F_{AC} - \frac{3}{9}F_{AD} = 0$$

$\sum F_y = 0;$ $$\frac{3}{7}F_{AB} + \frac{2}{6.5}F_{AC} - \frac{6}{9}F_{AD} = 0$$

$\sum F_z = 0;$ $$-\frac{6}{7}F_{AB} - \frac{6}{6.5}F_{AC} - \frac{6}{9}F_{AD} + 1200 = 0$$

ทำการแก้สมการทั้งสาม เราจะได้

$F_{AB} = 792\ \mathrm{N}$ Ans.

$F_{AC} = 147\ \mathrm{N}$ Ans.

$F_{AD} = 577\ \mathrm{N}$ Ans.

บทที่ 4

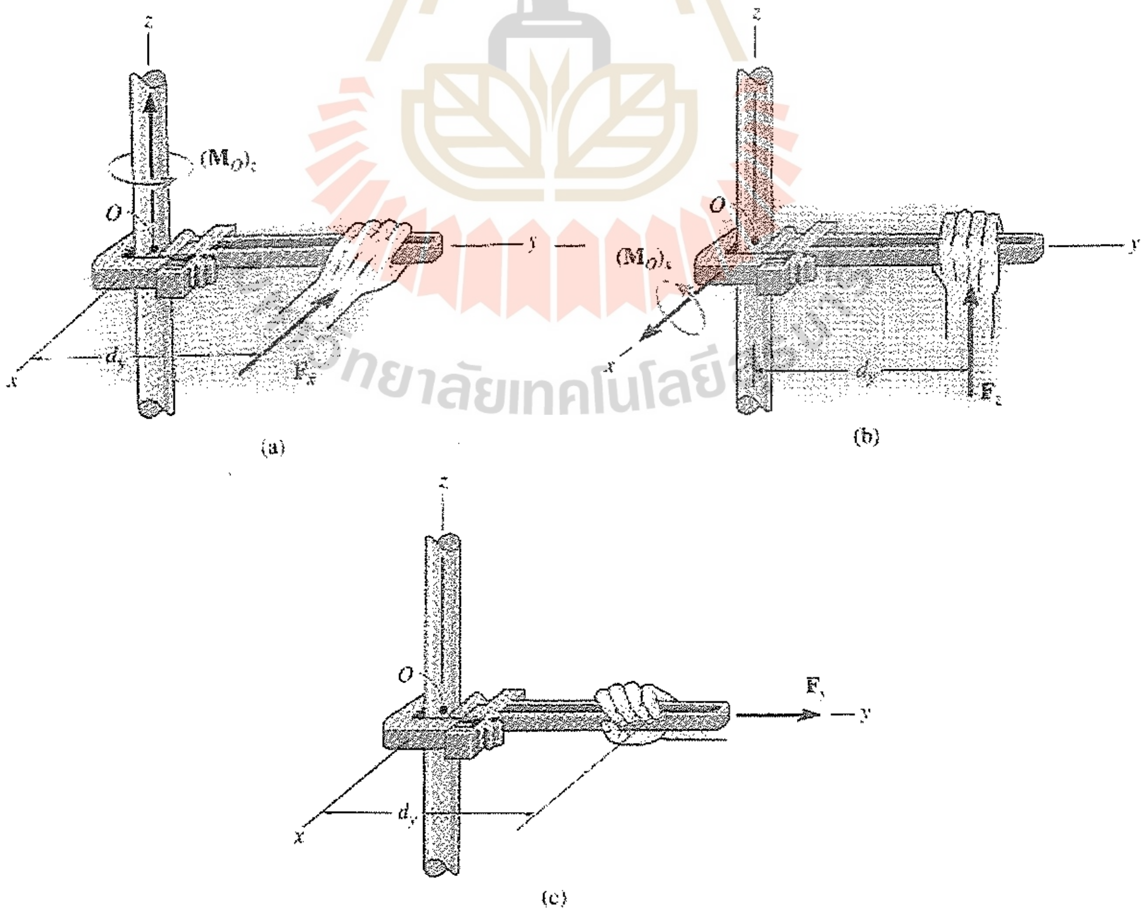
Force System Resultants

จุดประสงค์

1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึง concept ของ moment ที่เกิดจากแรงและสามารถที่จะหา moment ดังกล่าวในสองมิติและสามมิติได้
2. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาค่า moment ของแรงรอบแกนใดๆ
3. เพื่อที่ได้ทราบและเข้าใจถึงนิยามของ moment ของแรงคู่ควบ (couple)
4. เพื่อที่ได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาค่าของแรงลัพธ์และ moment ลัพธ์ที่เกิดจากระบบแรงที่ไม่กระทำร่วมกัน (nonconcurrent force system)
5. เพื่อที่ได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาค่าและตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกกระจายอย่างง่าย (simple distributed loading)

4.1 **โมเมนต์ที่เกิดจากแรง** (Moment of a Force) - Scalar Formulation

โมเมนต์ (moment) ที่เกิดจากแรงรอบจุดหรือแกนใดแกนหนึ่งจะแสดงถึงแนวโน้มของแรงที่จะทำให้วัตถุหมุนรอบจุดหรือแกนดังกล่าว ยกตัวอย่างเช่น ให้เราพิจารณาแรงในแนวนอน $\bar{F}_x$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1a ซึ่งกระทำตั้งฉากกับด้ามของปากกาสำหรับขันท่อน้ำ (wrench) ที่ระยะ d_y จากจุด O เราจะเห็นได้ว่า แรง $\bar{F}_x$ นี้จะพยายามที่จะทำให้ท่อน้ำ (pipe) เกิดการหมุนรอบแกน z ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า แรงบิด (torque) หรือ moment ของแรง หรือสั้นๆ moment $(M_O)_z$ Moment รอบแกน z นี้จะตัดผ่านจุด O และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของแรง $\bar{F}_x$ และระยะ d_y หรือระนาบ $x-y$

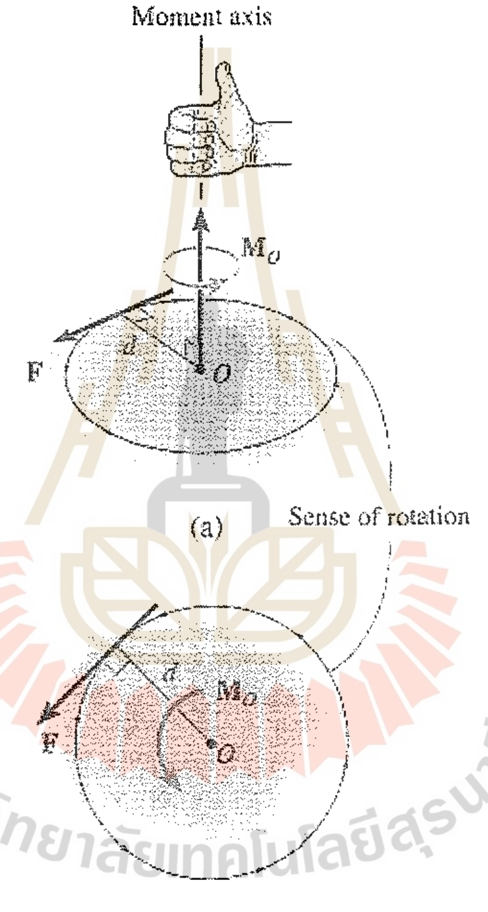


รูปที่ 4-1

อีกกรณีหนึ่ง ให้พิจารณาแรงในแนวแกน z หรือ $\bar{F}_z$ ซึ่งกระทำตั้งฉากกับด้ามของปากกาสำหรับขันท่อน้ำที่ระยะ d_y จากจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1b จากรูป เราจะเห็นได้ว่า แรง $\bar{F}_z$ นี้จะพยายามที่จะทำให้ท่อน้ำหมุนรอบแกน x ซึ่งจะก่อให้เกิด moment รอบแกน x หรือ $(M_O)_x$ Moment รอบแกน x นี้จะตัดผ่านจุด O และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของแรง $\bar{F}_z$ และระยะ d_y หรือระนาบ $y-z$

สุดท้าย ให้แรง $\bar{F}_y$ กระทำกับด้ามของปากกาสำหรับขันท่อน้ำ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1c แรงนี้จะไม่ทำให้เกิด moment รอบจุด O เนื่องจากแรงนี้กระทำผ่านจุด O โดยตรงและไม่ก่อให้เกิดหมุนรอบแกนใดๆ

พิจารณารูปที่ 4-2 ซึ่งแสดงแรง $\bar{F}$ ซึ่งกระทำตั้งฉากกับจุด O เป็นระยะทาง d แรง $\bar{F}$ นี้จะทำให้เกิด moment $\bar{M}_O$ รอบแกนที่ผ่านจุด O และตั้งฉากกับระนาบของแรง เนื่องจาก moment $\bar{M}_O$ มีทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้น moment $\bar{M}_O$ เป็นปริมาณ vector



(b)

รูปที่ 4-2

ขนาดของ moment $\bar{M}_O$ จะหาได้มาจาก

$$M_O = Fd \tag{4-1}$$

เมื่อ d เป็นระยะทางตั้งฉากจากแนวแรงถึงจุด O และมักจะถูกเรียกว่า moment arm

ทิศทางของ moment $\bar{M}_O$ จะถูกกำหนดโดยใช้กฎมือขวา (right-hand rule) โดยให้นิ้วทั้งสี่นิ้ว ยกเว้นนิ้วโป้งงอไปตาม sense การหมุนของแรงรอบจุด O ในระนาบเดียวกับแรง $\bar{F}$ และจุด O และทิศที่นิ้วโป้งชี้จะเป็นทิศของ moment $\bar{M}_O$ ที่มีค่าเป็นบวก

ในสามมิติ moment $\bar{M}_O$ จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของลูกศรที่ตั้งฉากกับระนาบของแรง $\bar{F}$ และจุด O และจะมีเส้นโค้งเขียนอยู่รอบแกนที่ผ่านจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2a โดยที่เส้นโค้งจะแทนทิศทางการหมุนของนิ้วทั้งสี่ และหัวลูกศรจะมีทิศทางไปทางที่นิ้วโป้งชี้

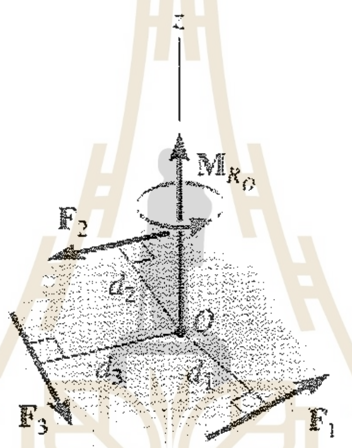
ในสองมิติ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2b moment $\bar{M}_O$ จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของลูกศรที่มีเส้นโค้งเขียนอยู่รอบจุด O เท่านั้น

โมเมนต์ลัพธ์ของระบบแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน (Resultant Moment of a System of Coplanar Forces)

กำหนดให้ระบบของแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกันระบบหนึ่งกระทำอยู่ในระนาบ $x-y$ รอบจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-3 แล้ว moment ที่เกิดจากแรงแต่ละแรงรอบจุด O จะมีทิศทางไปตามแนวแกน z ดังนั้น moment ลัพธ์ M_{R_O} ที่เกิดขึ้นจากระบบของแรงจะหาได้จากสมการ

$$\circlearrowleft + M_{R_O} = \sum Fd \tag{4-2}$$

เครื่องหมายบวกในสมการที่ 4-2 แสดงถึงว่า ถ้าแรงหมุนรอบจุด O ในทิศทางนี้ moment ที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็นบวก ถ้ามีทิศทางตรงกันข้ามแล้ว moment ที่ได้จะมีค่าเป็นลบ



รูปที่ 4-3

4.2 Cross Product

Cross product ของ vector $\bar{A}$ และ vector $\bar{B}$ ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น vector $\bar{C}$ จะเขียนได้อยู่ในรูป

$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$$

ขนาดของ vector $\bar{C}$ นี้จะมีค่าเท่ากับ

$$C = AB\sin\theta$$

โดยที่ θ เป็นมุมระหว่าง vector $\bar{A}$ และ vector $\bar{B}$ และ $0^o \le \theta \le 180^o$

Vector $\bar{C}$ จะมีทิศทางซึ่งตั้งฉากกับระนาบที่ผ่าน vector $\bar{A}$ และ vector $\bar{B}$ โดยจะถูกระบุโดยใช้กฎมือขวาเช่นเดียวกับในกรณีของ moment ดังที่แสดงในรูปที่ 4-4 ถ้าเรากำหนดให้ unit vector $\bar{u}_c$ เป็นตัวกำหนดทิศทางของ vector $\bar{C}$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} = (AB\sin\theta)\bar{u}_C \tag{4-3}$$

และเราจะสามารถที่จะแสดงความหมายของสมการที่ 4-3 นี้ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-5

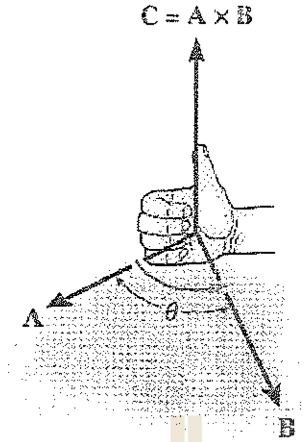
Laws of Cross Product Operation

Commutative law

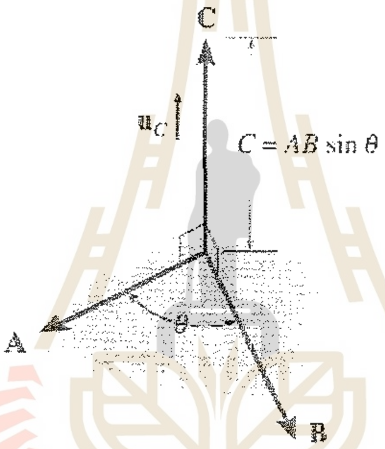
$$\bar{A} \times \bar{B} \neq \bar{B} \times \bar{A}$$

แต่ $$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

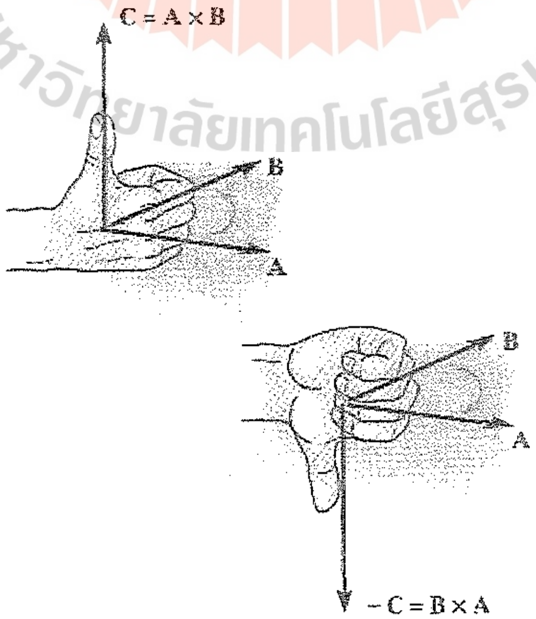
ซึ่งเราจะสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้กฎมือขวา ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6



รูปที่ 4-4



รูปที่ 4-5



รูปที่ 4-6

Multiplication by a scalar

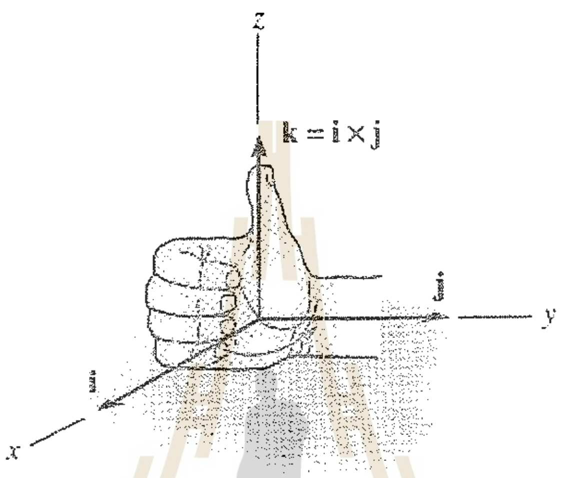
$$a(\bar{A}\times\bar{B}) = (a\bar{A})\times\bar{B} = \bar{A}\times(a\bar{B}) = (\bar{A}\times\bar{B})a$$

Distributive law

$$\bar{A}\times(\bar{B}+\bar{D}) = (\bar{A}\times\bar{B}) + (\bar{A}\times\bar{D})$$

vector ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian - Vector Formulation

เราสามารถที่จะใช้สมการที่ 4-3 ในการหา cross product ของ Cartesian unit vector สอง vectors ได้ ยกตัวอย่างเช่น $\hat{i}\times\hat{j}$ จะมีค่าเท่ากับ (1)(1) $\sin 90^\circ = 1$ และจะมีทิศทางตามกฎมือขวาในแนวแกนบวก z ดังนั้น vector ที่ได้จะเป็น Cartesian unit vector $\hat{k}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7 เป็นต้น

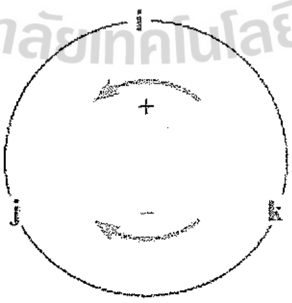


รูปที่ 4-7

ในลักษณะเดียวกัน เราจะได้ว่า

$$\begin{array}{lll} \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} & \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} & \hat{i}\times\hat{i}=0 \\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} & \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} & \hat{j}\times\hat{j}=0 \\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} & \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i} & \hat{k}\times\hat{k}=0 \end{array}$$

ซึ่ง cross product ทั้งหมดนี้ จะเขียนให้เป็นแผนภาพได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8



รูปที่ 4-8

จาก cross product ของ Cartesian unit vector ที่ได้ เราจะหา cross product ของ vector $\bar{A}$ และ vector $\bar{B}$ ใดๆ ได้จากสมการ

$$\begin{aligned}\bar{A}\times\bar{B} &= (A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}) \\ &= (A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k} \qquad (4\text{-}4)\end{aligned}$$

หรือในรูปแบบของ determinant ของ matrix

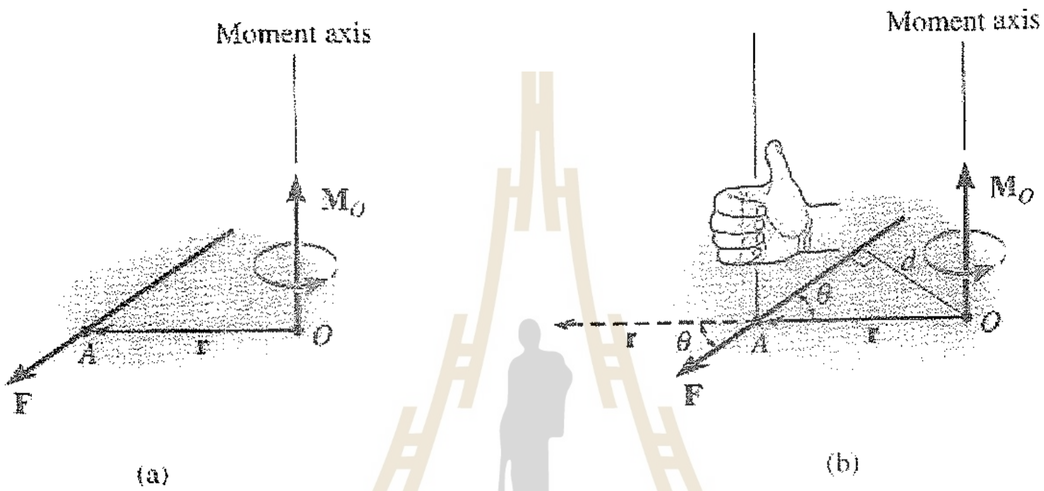
$$\bar{A}\times\bar{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{4-5}$$

4.3 โมเมนต์ที่เกิดจากแรง (Moment of a Force) - Vector Formulation

Moment ของแรง $\bar{F}$ รอบแกนที่ผ่านจุด O (หรือรอบจุด O) และตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด O และแรง $\bar{F}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9a จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ vector cross product ได้ในรูป

$$\bar{M}_O=\bar{r}\times\bar{F} \tag{4-6}$$

เมื่อ $\bar{r}$ เป็น vector บอกตำแหน่ง (position vector) ที่ลากจากจุด O ไปยังจุดใดๆ ที่อยู่บนแนวการกระทำของแรง $\bar{F}$



รูปที่ 4-9

จากสมการที่ 4-3 ขนาดของ cross product ของ moment $\bar{M}_O$ จะหาได้จากสมการ

$$M_O=rF\sin\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{r}$ และ $\bar{F}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9b

เนื่องจาก moment arm $d=r\sin\theta$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$M_O=F(r\sin\theta)=Fd$$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกันกับ สมการที่ 4-1

ทิศทางและนัย (sense) ของ moment $\bar{M}_O$ ในสมการที่ 4-6 จะหาได้จากกฎมือขวา

เช่นเดียวกับในกรณีของ vector cross product เนื่องจาก vector cross product ไม่มีคุณสมบัติ cumulative ดังนั้น ลำดับของ $\bar{r}$ และ $\bar{F}$ ในสมการที่ 4-6 จำเป็นที่จะต้องมีคงไว้เสมอ

Principle of Transmissibility

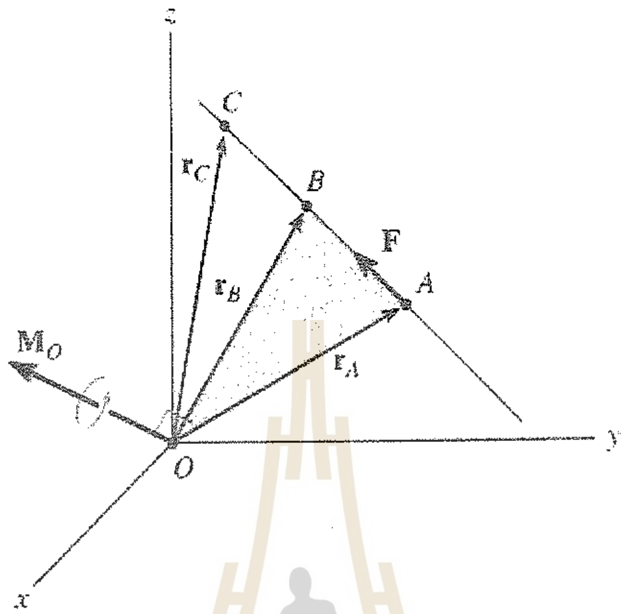
พิจารณาแรง $\bar{F}$ ที่กระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 4-10 เราจะได้ว่า แรง $\bar{F}$ นี้จะทำให้เกิด moment รอบจุด O ซึ่งหาได้จากสมการ

$$\bar{M}_O=\bar{r}_A\times\bar{F}$$

แต่เนื่องจากเราสามารถที่จะวัด vector บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ จากจุด O ไปยังจุดใดๆ บนแนวของแรง $\bar{F}$ ได้ ดังนั้น แรง $\bar{F}$ อาจจะกระทำที่จุด B หรือจุด C หรือจุดอื่นๆ ก็ได้ ซึ่งจะทำให้ได้ moment ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรง $\bar{F}$ มีค่าเท่ากับ $\bar{M}_O$ เท่ากัน ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_B \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_C \times \vec{F}$$

หลักการนี้มักจะถูกเรียกว่า *principle of transmissibility* ของ moment



รูปที่ 4-10

โมเมนต์ที่เกิดจากแรงในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian - Vector Formulation

เราสามารถที่จะเขียน vector $\vec{M}_O$ ให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector ได้โดยใช้สมการที่ 4-5 ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{4-7}$$

เมื่อ

F_x, F_y, F_z เป็นองค์ประกอบของแรง $\vec{F}$ ในแนวแกน x, y, และ z

r_x, r_y, r_z เป็นองค์ประกอบในแนวแกน x, y, และ z ของ vector บอกตำแหน่งที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O และลากไปสู่จุดใดๆ บนแนวการกระทำของแรง F_x, F_y, และ F_z

โดยการขยาย determinant ในสมการที่ 4-7 เราจะได้ว่า

$$\vec{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\hat{i} + (r_x F_z - r_z F_x)\hat{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\hat{k} \tag{4-8}$$

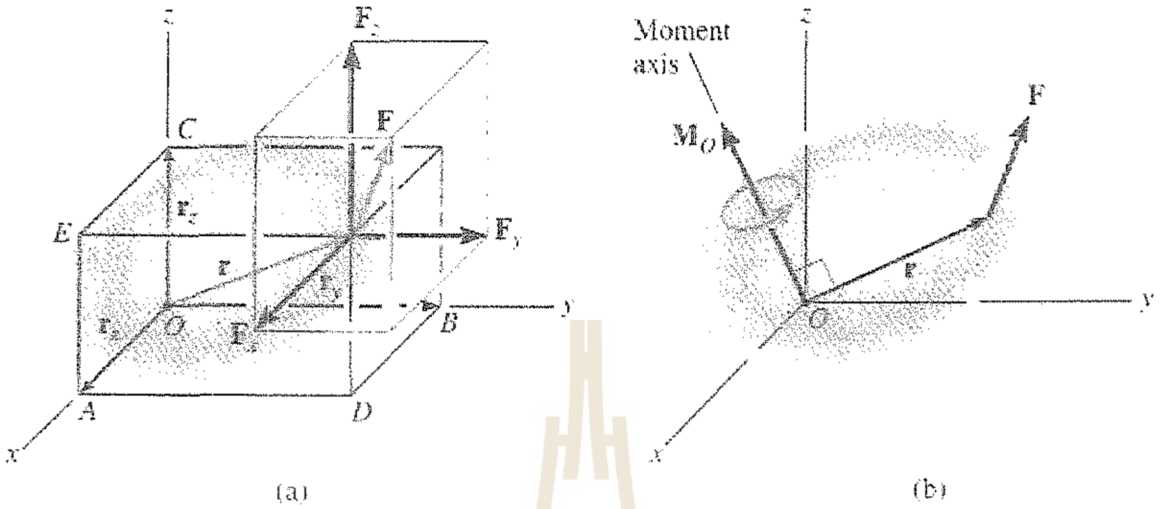
เราจะเห็นความหมายขององค์ประกอบของ moment ดังกล่าวได้ชัดเจนมากขึ้นโดยการพิจารณารูปที่ 4-11a ยกตัวอย่างเช่น องค์ประกอบ $\hat{i}$ ของ moment $\vec{M}_O$ จะหาได้จาก moment องค์ประกอบของแรง F_x, F_y, และ F_z รอบแกน x ซึ่ง

1. องค์ประกอบของแรง F_x จะไม่ก่อให้เกิด moment รอบแกน x เนื่องจากแรง F_x มีทิศทางขนานไปกับแกน x
2. องค์ประกอบของแรง F_y ซึ่งมีแนวแรงผ่านจุด E จะทำให้เกิด moment รอบจุด A บนแกน x เท่ากับ $r_z F_y$ โดยใช้กฎมือขวาแรง F_y จะก่อให้เกิดองค์ประกอบของ moment ในทิศทาง $-\hat{i}$

3. องค์ประกอบของแรง F_z ซึ่งมีแนวแรงผ่านจุด E จะทำให้เกิด moment รอบจุด A บนแกน x เท่ากับ $r_y F_z$ โดยใช้กฎมือขวาแรง F_z จะก่อให้เกิดองค์ประกอบของ moment ในทิศทาง $\hat{i}$

เมื่อเรารวมองค์ประกอบของ moment ทั้งสามนี้เข้าด้วยกันแล้ว เราจะได้ว่า

$$(M_O)_x = r_y F_z - r_z F_y$$



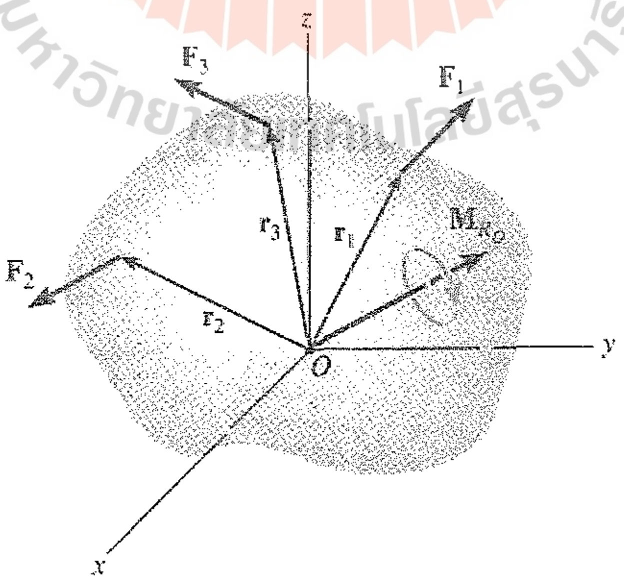
รูปที่ 4-11

ในลักษณะเดียวกัน เราจะเห็นความหมายขององค์ประกอบของ moment $(M_O)_y$ และ $(M_O)_z$ ได้จากการพิจารณาในลักษณะดังกล่าว

โมเมนต์ลัพธ์ของระบบแรง (Resultant Moment of a System of Forces)

ถ้าวัตถุถูกกระทำโดยระบบของแรง ซึ่งประกอบด้วยแรงหลายๆ ค่ารอบจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12 แล้ว moment ลัพธ์ของแรงต่างๆ ในระบบของแรงดังกล่าวรอบจุด O จะหาได้จากการรวมกันของ vector ของ moment ที่หาได้จากสมการที่ 4-6 ซึ่งจะเขียนในรูปของสมการได้เป็น

$$\vec{M}_{R_O} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) \tag{4-9}$$



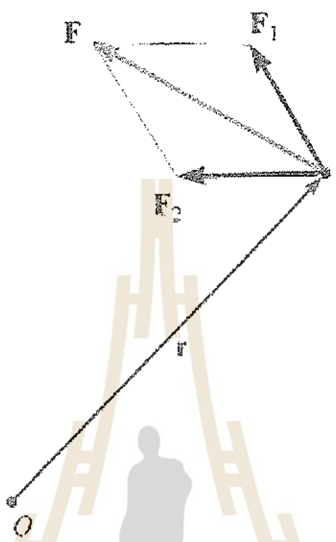
รูปที่ 4-12

4.4 หลักการของ moment (Principle of Moments)

หลักการของ moment กล่าวว่า moment ของแรงรอบจุดๆ หนึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมขององค์ประกอบของ moment รอบจุดนั้น

จากรูปที่ 4-13 เราสามารถที่จะใช้ principle of moment และเขียนสมการของ $\bar{M}_O$ ได้ว่า

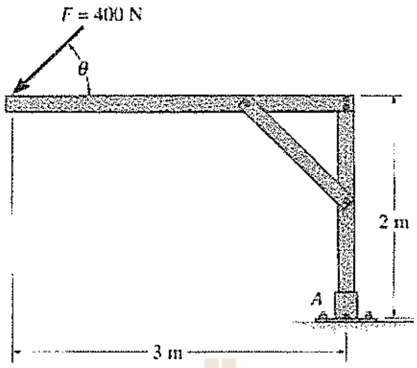
$$\begin{aligned}\bar{M}_O &= \bar{r}\times\bar{F}_1 + \bar{r}\times\bar{F}_2 \\ &= \bar{r}\times(\bar{F}_1+\bar{F}_2) \\ &= \bar{r}\times\bar{F}\end{aligned}$$



รูปที่ 4-13

ตัวอย่างที่ 4-1 (4-30)

จงหาค่าโมเมนต์สูงสุดและค่าโมเมนต์ต่ำสุดรอบจุดรองรับ A ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-1 เนื่องจากการกระทำของแรง $F = 400\,\text{N}$ นอกจากนั้นแล้ว จงหาค่าของมุม θ ของแรง F ในแต่ละกรณี โดยกำหนดให้ $0^o \le \theta \le 180^o$



รูปที่ Ex 4-1

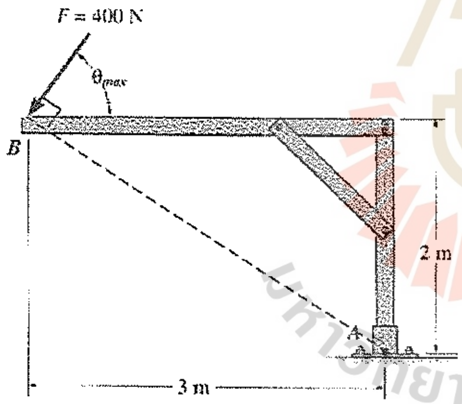
วิธีทำ

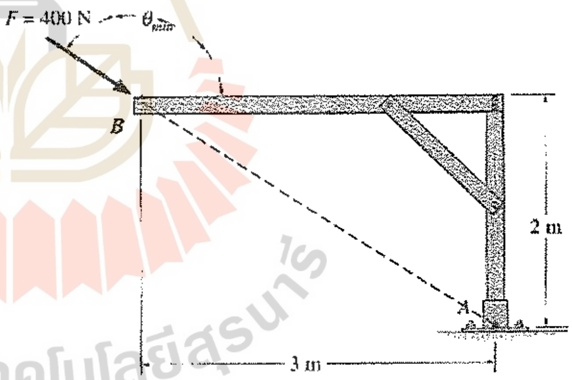
ค่าโมเมนต์สูงสุดรอบจุดรองรับ A ของโครงสร้างจะเกิดขึ้นเมื่อแรงกระทำมีทิศตั้งฉากกับเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปยังจุด B ดังที่แสดงในรูป ดังนั้น

$$M_{\max} = 400\sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 1.44\,\text{kN - m} \qquad \text{Ans.}$$

และค่าของมุม θ ในกรณีนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$\theta_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56.3° \qquad \text{Ans.}$$





ค่าโมเมนต์ต่ำสุดรอบจุดรองรับ A ของโครงสร้างจะเกิดขึ้นเมื่อแรงกระทำมีทิศขนานกับเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปยังจุด B ดังที่แสดงในรูป ดังนั้น

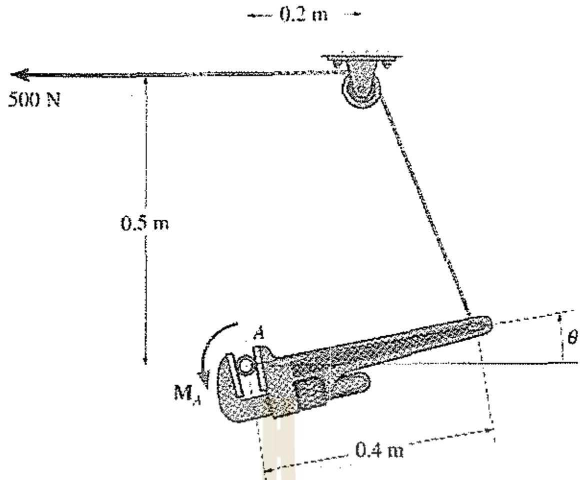
$$M_{\min} = 400(0) = 0 \qquad \text{Ans.}$$

และค่าของมุม θ ในกรณีนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$\theta_{\min} = 90° + 56.3° = 146° \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 4-2 (4-33)

จงหาค่าของโมเมนต์ M_A ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในแนวนอนขนาด $500\ \mathrm{N}$ เมื่อมุม $\theta = 20^o$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2

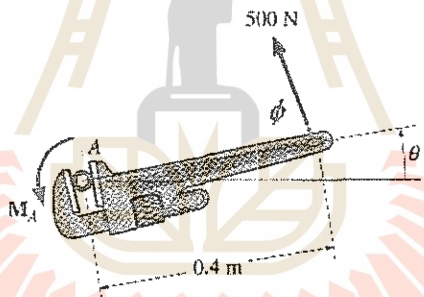


รูปที่ Ex 4-2

วิธีทำ

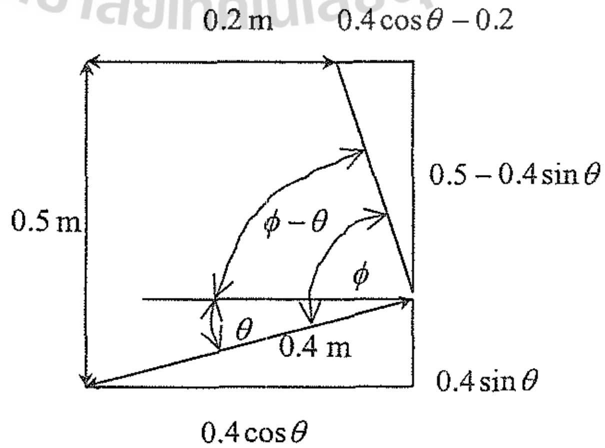
พิจารณาแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูป ค่าของโมเมนต์ M_A ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในแนวนอนขนาด $500\ \mathrm{N}$ มีค่าเท่ากับ

$$M_A = (0.4)500\sin\phi = 200\sin\phi$$



ทำการหาค่าของมุม ϕ โดยพิจารณาแผนภาพ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\tan(\phi - \theta) = \frac{0.5 - 0.4\sin\theta}{0.4\cos\theta - 0.2}$$

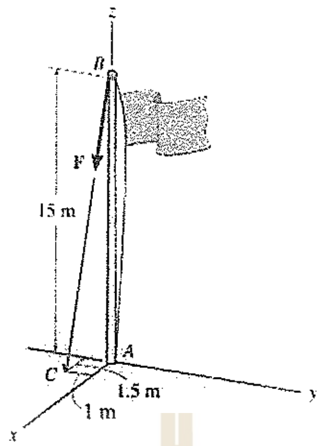


ดังนั้น เมื่อ $\theta = 20^o$ เราจะได้ว่า $\phi = 84.161^o$ และ

$$M_A = 200\sin 84.161^o = 199\ \mathrm{N.m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 4-3 (4-39)

Cable BC ให้แรง $F = 100\ \mathrm{N}$ กระทำต่อเสาธงที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3 จงหาค่าของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าวที่จุดยึดรั้ง A



รูปที่ Ex 4-3

วิธีทำ

จากค่าพิกัดของจุด B และจุด C เราจะได้ว่า position vector จากจุด B พุ่งไปยังจุด C จะอยู่ในรูป $1.5\hat{i} - 1\hat{j} - 15\hat{k}$ และ cable BC มีความยาว $15.108\ \mathrm{m}$ ดังนั้น Cartesian vector ของแรง F จะอยู่ในรูป

$$\bar{F} = 100\left(\frac{1.5\hat{i} - 1\hat{j} - 15\hat{k}}{15.108}\right)$$

$$\bar{F} = 9.929\hat{i} - 6.619\hat{j} - 99.286\hat{k}$$

จากค่าพิกัดของจุด A และจุด B เราจะได้ว่า position vector จากจุด B พุ่งไปยังจุด A จะอยู่ในรูป

$$r_{AB} = 15\hat{k}$$

ดังนั้น Cartesian vector ของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าวที่จุดยึดรั้ง A จะมีค่าเท่ากับ

$$\bar{M}_A = \bar{r}_{AB} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 15 \\ 9.929 & -6.619 & -99.286 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_A = 99.3\hat{i} + 149\hat{j}\ \mathrm{N.m}$$ Ans.

ขอให้สังเกตด้วยว่า Cartesian vector ของโมเมนต์ M_A อาจจะหามาได้โดยใช้ principle of transmissibility จากรูปที่ Ex 4-3 และค่าพิกัดของจุด A และจุด C เราจะได้ว่า position vector จากจุด A พุ่งไปยังจุด C จะอยู่ในรูป

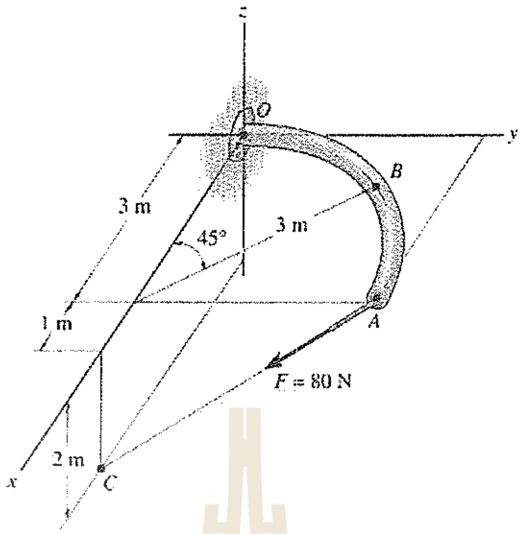
$$\bar{r}_{AC} = 1.5\hat{i} - 1\hat{j}$$

$$\bar{M}_A = \bar{r}_{AC} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1.5 & -1 & 0 \\ 9.929 & -6.619 & -99.286 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_A = 99.3\hat{i} + 149\hat{j}\ \mathrm{N.m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 4-4 (4-44)

แท่งเหล็กโค้งอยู่ในระนาบ $x-y$ มีรัศมี $3\ \mathrm{m}$ ถูกกระทำโดยแรง $F = 80\ \mathrm{N}$ ที่ปลาย A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4 จงหาค่าโมเมนต์ที่จุดรองรับ O



รูปที่ Ex 4-4

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 4-4 และค่าพิกัดของจุด A และจุด C เราจะได้ว่า position vector จากจุด A พุ่งไปยังจุด C จะอยู่ในรูป

$$\vec{r}_{AC} = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

ซึ่งมีขนาดความยาวเท่ากับ

$$r_{AC} = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = 3.742\ \mathrm{m}$$

ดังนั้น Cartesian vector ของแรง F จะอยู่ในรูป

$$\vec{F} = 80\left(\frac{\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}}{3.742}\right) = 21.38\hat{i} - 64.14\hat{j} - 42.76\hat{k}$$

จากรูปที่ Ex 4-4 และค่าพิกัดของจุด O และจุด C เราจะได้ว่า position vector จากจุด O พุ่งไปยังจุด C จะอยู่ในรูป

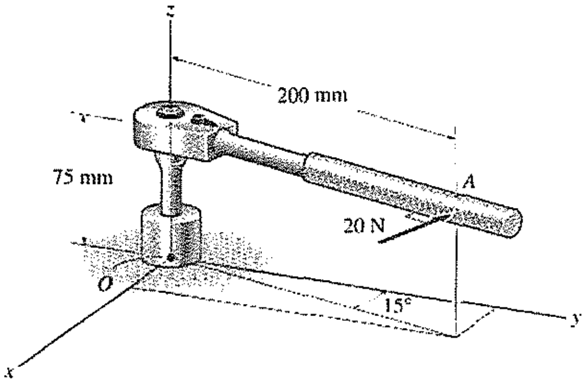
$$\vec{r}_{OC} = 4\hat{i} - 2\hat{k}$$

และ Cartesian vector ของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าวที่จุดรองรับ O จะมีค่าเท่ากับ

$$M_O = \vec{r}_{OC} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & -2 \\ 21.38 & -64.14 & -42.76 \end{vmatrix} = -128\hat{i} + 128\hat{j} - 257\hat{k}\ \mathrm{N\text{-}m} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 4-5 (4-47)

กำหนดให้แรง $20\,\mathrm{N}$ อยู่ในระนาบ $x-y$ กระทำตั้งฉากกับแกนของปะแจ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-5 จงหาขนาดและทิศทางของโมเมนต์เนื่องจากแรงดังกล่าวรอบจุด O



รูปที่ Ex 4-5

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 4-5 เราจะได้ว่า position vector จากจุด O พุ่งไปยังจุด A จะอยู่ในรูป

$$\bar{r}_A = 0.2\sin 15^o\,\hat{i} + 0.2\cos 15^o\,\hat{j} + 0.075\hat{k}$$
$$= 0.05176\hat{i} + 0.1932\hat{j} + 0.075\hat{k}$$

และ Cartesian vector ของแรง F จะอยู่ในรูป

$$\bar{F} = -20\cos 15^o\,\hat{i} + 20\sin 15^o\,\hat{j}$$
$$= -19.32\hat{i} + 5.176\hat{j}$$

ดังนั้น Cartesian vector ของโมเมนต์เนื่องจากแรงดังกล่าวรอบจุด O จะอยู่ในรูป

$$\bar{M}_O = \bar{r}_A \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.05176 & 0.1932 & 0.075 \\ -19.32 & 5.176 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_O = -0.3882\hat{i} - 1.449\hat{j} + 4.00\hat{k} \quad \mathrm{N\text{-}m}$$

ซึ่งจะมีขนาดและทิศทางเท่ากับ

$$M_O = 4.272 = 4.27 \quad \mathrm{N\text{-}m}$$ Ans.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-0.3882}{4.272}\right) = 95.2^o$$ Ans.

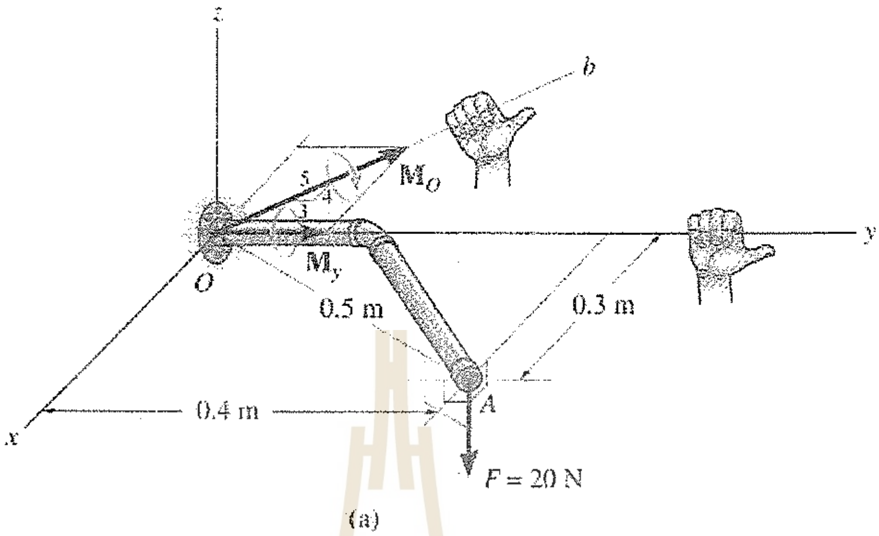
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1.449}{4.272}\right) = 110^o$$ Ans.

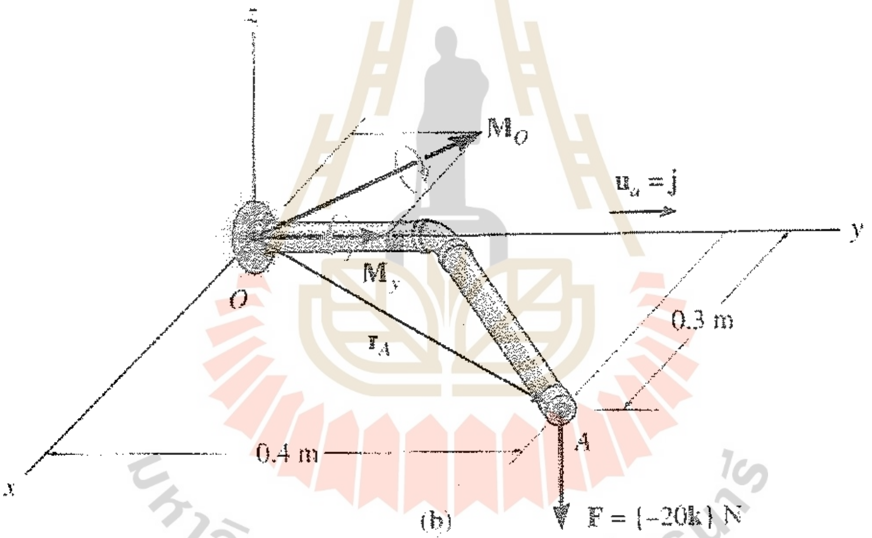
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{4.272}\right) = 20.6^o$$ Ans.

4.5 โมเมนต์ที่เกิดจากแรงรอบแกนที่กำหนด (Moment of a Force About a Specified Axis)

Scalar Analysis

พิจารณาท่อน้ำ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-14a ซึ่งวางอยู่ในระนาบ $x-y$ และถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน z ซึ่งมีค่าเท่ากับ $F = 20\text{N}$ ที่จุด A





รูปที่ 4-14

Moment ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าวรอบจุด O จะมีขนาดเท่ากับ

$$M_O = (20\text{N})(0.5\text{m}) = 10\text{N.m}$$

และมีทิศทางตามกฎมือขวาดังที่แสดง กำหนดให้ Moment ดังกล่าวพยายามที่จะหมุนท่อน้ำรอบแกน Ob

ถ้าเราต้องการหาองค์ประกอบของ $\vec{M}_O$ รอบแกน y หรือ $\vec{M}_y$ แล้ว จากรูปที่ 4-14a เราจะได้ว่า

$$M_y = \frac{3}{5}(10\text{N}) = 6\text{N.m}$$

วิธีการที่กล่าวถึงมานี้ค่อนข้างยุ่งยาก เราจะสามารถที่จะหาขนาดของ M_y ได้อีกวิธีการหนึ่งซึ่งง่ายและสะดวกกว่ามากโดยหาระยะตั้งฉากจากแนวแรง F ถึงแกน y ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.3m ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$M_y = (20\text{N})(0.3\text{m}) = 6\text{N.m}$$

และทิศทางของ $\vec{M}_y$ จะหาได้จากกฎมือขวา ดังที่แสดงในรูป

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าแนวของแรง $\bar{F}$ ตั้งฉากกับแกนใดแกนหนึ่งแล้ว ขนาดของ moment ของแรง $\bar{F}$ รอบแกนใดแกนหนึ่งจะหามาได้จากสมการ

$$M_a = Fd_a \tag{4-10}$$

เมื่อ d_a เป็นระยะที่ตั้งฉาก (ที่สั้นที่สุด) จากแนวแรงถึงแกนนั้น และทิศทางของ moment ของแรง $\bar{F}$ จะหาได้จากกฎมือขวา

Vector Analysis

จากรูปที่ 4-14b เราจะหา moment ของแรง $\bar{F}$ นี้รอบจุด O ได้จากสมการ

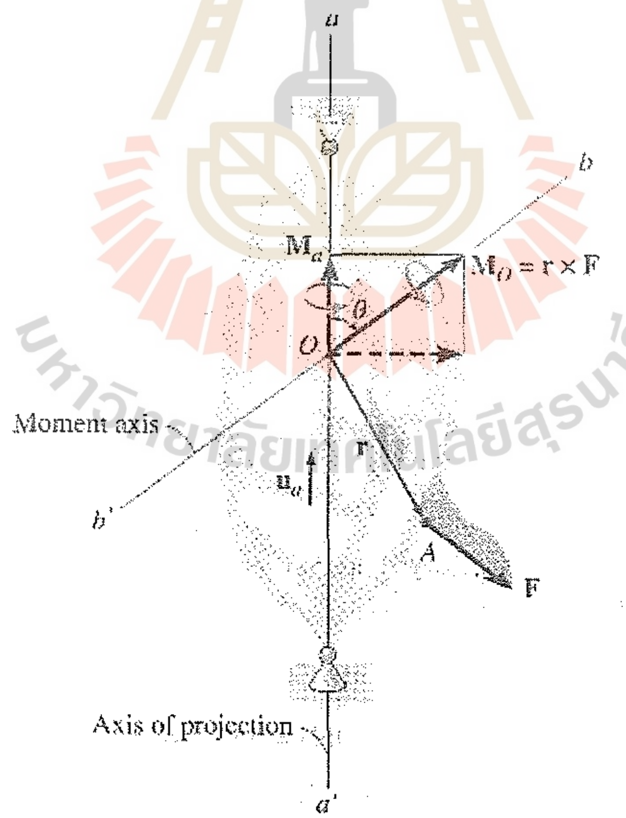
$$\begin{aligned}\bar{M}_O &= \bar{r}_A \times \bar{F} \\ &= (0.3\hat{i} + 0.4\hat{j}) \times (-20\hat{k}) \\ &= \{-8\hat{i} + 6\hat{j}\}\ \text{N.m}\end{aligned}$$

องค์ประกอบของ $\bar{M}_O$ รอบแกน y จะหาได้จาก dot product ของ moment vector $\bar{M}_O$ กับ unit vector ของแกน y ($\bar{u}_a = \hat{j}$) หรือ

$$M_y = \bar{M}_O.\bar{u}_a = (-8\hat{i} + 6\hat{j}).\hat{j} = 6\ \text{N.m}$$

การวิเคราะห์โดยใช้ vector ดังที่ได้กล่าวไปแล้วนั้นจะมีข้อได้เปรียบกว่าวิธีการอื่นๆ ในการหาค่าของ moment รอบแกนใดแกนหนึ่ง เมื่อค่าขององค์ประกอบของแรงหรือ moment arm หามาได้ยาก

พิจารณาวัตถุที่มีรูปร่างใดๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-15 ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $\bar{F}$ ที่จุด A เมื่อเราต้องการหา moment ของแรง $\bar{F}$ รอบแกน aa' หรือ $\bar{M}_a$ แล้ว เราจะมีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังนี้



รูปที่ 4-15

1. ทำการหา moment ของแรง $\bar{F}$ รอบจุด O ใดๆ จากสมการ

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$$

เมื่อ $\bar{r}$ เป็น vector จากจุด O ไปยังจุด A จากรูป กำหนดให้ moment $\bar{M}_O$ กระทำรอบแกน bb'

2. หา projection ของ moment $\bar{M}_O$ บนแกน aa' หรือ $\bar{M}_a$ และขนาดของ $\bar{M}_a$ จาก dot product โดยที่

$$M_a = M_O \cos\theta = \bar{M}_O . \bar{u}_a$$

เมื่อ $\bar{u}_a$ เป็น unit vector ซึ่งแสดงถึงทิศทางของแกน aa' จากนั้น แทนสมการของ $\bar{M}_O$ ลงในสมการนี้และจัดเทอมใหม่ เราจะได้ว่า

$$M_a = \bar{u}_a . (\bar{r} \times \bar{F})$$

ถ้าเราสามารถเขียน unit vector $\bar{u}_a$ ให้อยู่ในรูปของ Cartesian unit vector $\hat{i}$, $\hat{j}$, และ $\hat{k}$ หรือ

$$\bar{u}_a = (u_{a_x}\hat{i} + u_{a_y}\hat{j} + \bar{u}_{a_z}\hat{k})$$

แล้ว เราจะได้ว่า

$$M_a = (u_{a_x}\hat{i} + u_{a_y}\hat{j} + \bar{u}_{a_z}\hat{k}) . \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

หรือ

$$M_a = \bar{u}_a . (\bar{r} \times \bar{F}) = \begin{vmatrix} u_{a_x} & u_{a_y} & u_{a_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (4\text{-}11)$$

เมื่อ

u_{a_x} , u_{a_y} , u_{a_z} เป็นองค์ประกอบในแนวแกน x , y , และ z ของ unit vector $\bar{u}_a$ ที่แสดงถึงทิศทางของแกน aa'

r_x , r_y , r_z เป็นองค์ประกอบในแนวแกน x , y , และ z ของ position vector ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด O บนแกน aa' และลากไปสู่จุด A ใดๆ บนแนวการกระทำของแรง

F_x , F_y , F_z เป็นองค์ประกอบของแรง $\bar{F}$ ในแนวแกน x , y , และ z

ค่าของ $\bar{M}_a$ ที่หาได้จากสมการที่ 4-11 จะเป็นปริมาณ scalar ที่มีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบ ซึ่งแสดง sense ของ $\bar{M}_a$ บนแกน aa' ถ้าเป็นบวก ก็จะมีทิศทางไปทางเดียวกับ unit vector $\bar{u}_a$ ถ้าเป็นลบ ก็จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับ unit vector $\bar{u}_a$

หลังจากที่เราหาขนาดของ moment M_a ได้แล้ว เราจะหา vector $\bar{M}_a$ ได้โดยใช้สมการ

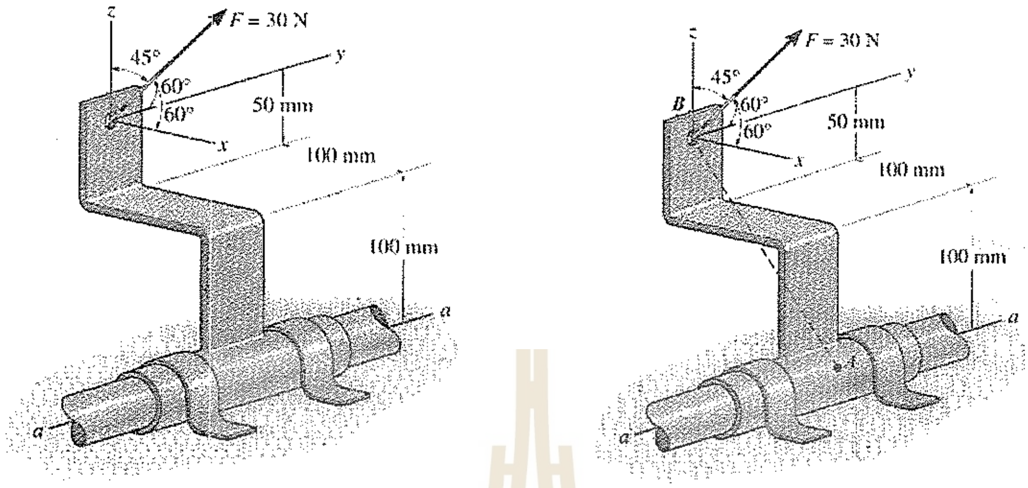
$$\begin{aligned} \bar{M}_a &= M_a \bar{u}_a \\ &= [\bar{u}_a . (\bar{r} \times \bar{F})]\bar{u}_a \end{aligned} \qquad (4\text{-}12)$$

3. ถ้าวัตถุถูกกระทำโดยระบบของแรงแล้ว เราจะหา M_a ที่เกิดจากแรงทั้งระบบได้จากสมการ

$$\begin{aligned} M_a &= \sum [\bar{u}_a . (\bar{r} \times \bar{F})] \\ &= \bar{u}_a . \sum (\bar{r} \times \bar{F}) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4-6 (4-56)

กำหนดให้แรง $F = 30\ \mathrm{N}$ กระทำต่อข้องอ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-6 จงหาค่าโมเมนต์เนื่องจากแรงดังกล่าวรอบแกน $a-a$ ของท่อ และจงหาค่า direction angle ของแรง F ที่ทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดรอบแกน $a-a$ และโมเมนต์สูงสุดดังกล่าวมีค่าเท่ากับเท่าใด



รูปที่ Ex 4-6

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 4-6 Cartesian vector ของแรง F จะเขียนได้ในรูป

$$\vec{F} = 30(\cos 60^o\,\hat{i} + \cos 60^o\,\hat{j} + \cos 45^o\,\hat{k})$$
$$= (15\hat{i} + 15\hat{j} + 21.21\hat{k})\ \mathrm{N}$$

และ position vector ที่พุ่งจากจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$\vec{r}_{AB} = -0.1\hat{i} + 0.15\hat{k}\quad \mathrm{m}$$

จากรูปที่ Ex 4-6 เนื่องจากแนวแกน $a-a$ ของท่อมีทิศทางขนานไปกับแกน y ดังนั้น unit vector ของแนวแกน $a-a$ จะอยู่ในรูป

$$\vec{u} = \hat{j}$$

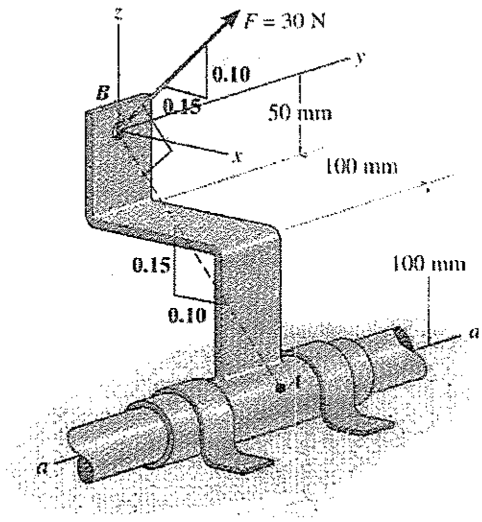
ดังนั้น เราจะได้ vector ของโมเมนต์เนื่องจากแรงดังกล่าวรอบแกน $a-a$ ของท่อมีค่าเท่ากับ

$$M_a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.15 \\ 15 & 15 & 21.21 \end{vmatrix} = 4.37\ \mathrm{N.m}$$ Ans.

โมเมนต์สูงสุดรอบแกน $a-a$ จะเกิดขึ้นเมื่อแรง F **มีทิศทางตั้งฉากกับ** position vector $\vec{r}_{AB}$ และ unit vector ของแนวแกน $a-a$

เนื่องจากแนวแกน $a-a$ ของท่อมีทิศทางขนานไปกับแกน y ดังนั้น vector ของแรง F จะอยู่ในระนาบ $x-z$ ดังที่แสดงในรูป นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากเส้นตรง AB มีความชันเป็นอัตราส่วน 0.15/0.10 ดังนั้น แนวของแรง F จะมีความชันเป็นอัตราส่วน 0.10/0.15 ดังที่แสดงในรูป และเราจะได้ unit vector ของแรง F อยู่ในรูป

$$\vec{u}_F = \frac{0.15}{0.1803}\hat{i} + \frac{0.1}{0.1803}\hat{k}$$
$$= 0.8321\hat{i} + 0.5547\hat{k}$$



ดังนั้น ค่า direction angle ของแรง F ที่ทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดรอบแกน $a-a$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\alpha = \cos^{-1} 0.8321 = 33.7^o$$ Ans.

$$\beta = \cos^{-1} 0 = 90^o$$ Ans.

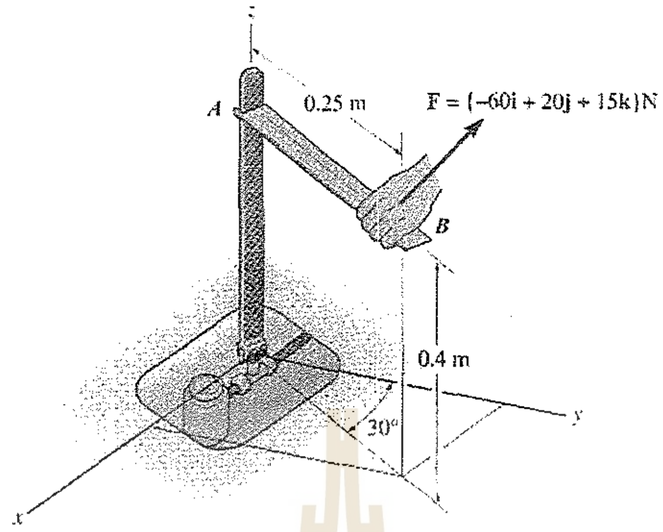
$$\gamma = \cos^{-1} 0.5547 = 56.3^o$$ Ans.

และโมเมนต์สูงสุดรอบแกน $a-a$ จะมีค่าเท่ากับ

$$M = 30(0.1803) = 5.41 \quad \text{N.m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 4-7 (4-57)

กำหนดให้เครื่องมือที่ใช้ในการปิดวาวล์ท่อก๊าซมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-7 จงหาองค์ประกอบของโมเมนต์เนื่องจากแรง F ในแนวแกน z



รูปที่ Ex 4-7

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 4-7 unit vector ในแนวแกน z

$$\vec{u} = \hat{k}$$

และ position vector ที่พุ่งจากจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าเท่ากับ

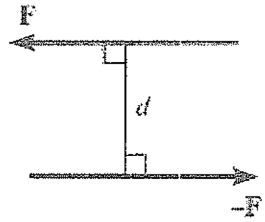
$$\vec{r}_{AB} = 0.25\sin 30^o\,\hat{i} + 0.25\cos 30^o\,\hat{j}$$
$$= 0.125\,i + 0.2165\,j$$

ดังนั้น องค์ประกอบของโมเมนต์เนื่องจากแรง F ในแนวแกน z จะมีค่าเท่ากับ

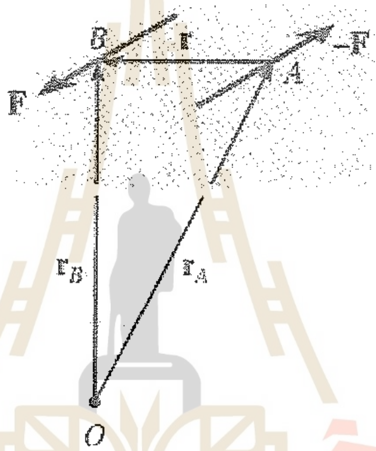
$$M_z = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.2165 & 0 \\ -60 & 20 & 15 \end{vmatrix} = 15.5 \quad \text{N.m}$$ Ans.

4.6 โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Moment of a Couple)

แรงคู่ควบ (Couple) คือแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางที่ตรงกันข้ามและมีระยะในแนวตั้งฉากระหว่างกันเท่ากับ d ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16 เนื่องจากผลรวมของแรงมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น แรงคู่ควบ (couple) จะทำให้เกิดเฉพาะการหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเท่านั้น



รูปที่ 4-16



รูปที่ 4-17

Moment ที่เกิดจากแรงคู่ควบ (couple) มักจะถูกเรียกว่า couple moment ซึ่งจะหาได้จากผลรวมของ moment ของแรงทั้งสองของแรงคู่ควบรอบจุดใดๆ ยกตัวอย่างเช่น couple moment ของแรงคู่ควบ $-F$ และ F ซึ่งมี position vector $\bar{r}_A$ และ $\bar{r}_B$ ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-17 รอบจุด O จะหาได้จากสมการ

$$\bar{M} = \bar{r}_A \times (-\bar{F}) + \bar{r}_B \times \bar{F}$$

นอกจากนั้นแล้ว เราจะหา couple moment ดังกล่าวได้อีกวิธีหนึ่งโดยการ take moment รอบแนวแรงของแรงใดแรงหนึ่งของแรงคู่ควบ ถ้าเราเลือกที่จะ take moment รอบจุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 4-17 เราจะได้ว่า

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F} \qquad (4\text{-}13)$$

เนื่องจาก $\bar{r} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\bar{M} = (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times \bar{F}$$

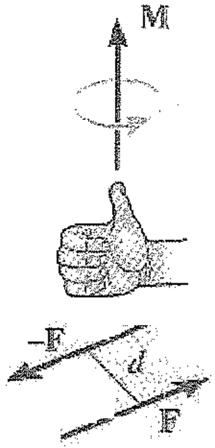
ซึ่งจะมีค่าเท่ากับค่าของ couple moment $\bar{M}$ ที่หาได้โดยใช้วิธีการแรก และเราจะสรุปได้ว่า couple moment $\bar{M}$ จะมีค่าเท่าเดิมเสมอไม่ว่าเราจะหาจากจุดอ้างอิงจุดใด ซึ่งต่างกับกรณีของ moment ของแรงที่มีค่าเปลี่ยนไปตามจุดต่างๆ ที่เราต้องการหา moment นั้น

แรงคู่ควบ - Scalar Formulation

Couple moment $\bar{M}$ ในรูปที่ 4-18 จะมีขนาดเท่ากับ

$$M = Fd \qquad (4\text{-}14)$$

เมื่อ F เป็นขนาดของแรงคู่ควบและ d เป็นระยะในแนวตั้งฉากระหว่างแรงคู่ควบ และทิศทางของ couple moment $\vec{M}$ ดังกล่าวจะหาได้จากกฎมือขวา ซึ่งจะมีทิศตั้งฉากกับระนาบของแรงเสมอ



รูปที่ 4-18

แรงคู่ควบ - Vector Formulation

Couple moment $\vec{M}$ จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ vector product ได้เป็น (สมการที่ 4-13)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (4\text{-}15)$$

ซึ่ง couple moment นี้จะหามาได้โดยการ take moment รอบแนวแรงของแรงใดแรงหนึ่งของแรงคู่ควบ

แรงคู่ควบที่สมมูลกัน (Equivalent Couples)

Couple สอง couples จะสมมูล (equivalent) กัน เมื่อ couple ทั้งสองมีค่า couple moment เท่ากัน โดยที่ระนาบของแรงของ couple ทั้งสองจะต้องอยู่บนระนาบเดียวกันหรือขนานกัน

Couple moment ลัพธ์ (Resultant Couple Moment)

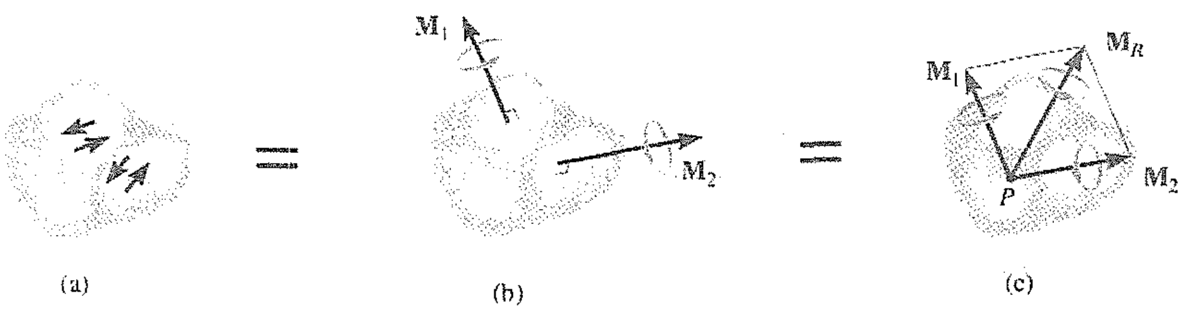
เราจะหา vector ของ couple moment ลัพธ์ได้จากการรวม couple moment vector แต่ละอันเข้าด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น เราจะรวม couple สองอันซึ่งอยู่ต่างระนาบกันบนวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-19a ได้ดังนี้

1. ทำการหา vector ของ couple moment $\vec{M}_1$ และ $\vec{M}_2$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-19b
2. ทำการย้าย couple moment ทั้งสองมาที่จุด P ใดๆ โดยใช้หลักการที่ว่า couple moment จะมีค่าเท่าเดิมเสมอไม่ว่าจะหาจากจุดอ้างอิงจุดใด
3. ทำการรวม couple moment ทั้งสองโดยใช้ vector addition ดังที่แสดงในรูปที่ 4-19c โดยที่

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนสมการของการรวม couple moment ได้เป็น

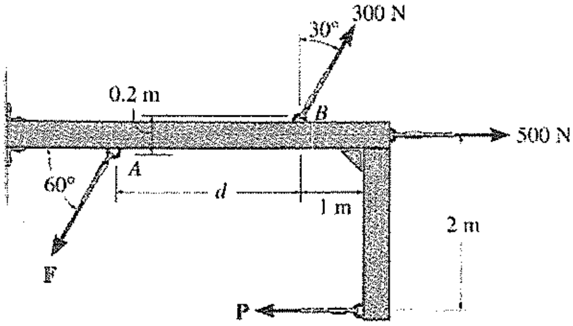
$$\vec{M}_R = \sum(\vec{r} \times \vec{F}) \qquad (4\text{-}16)$$



รูปที่ 4-19

ตัวอย่างที่ 4-8 (4-82)

กำหนดให้แรงคู่ควบสองแรงกระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-8 และถ้าโมเมนต์ลัพธ์เนื่องจากแรงคู่ควบดังกล่าวมีค่าเท่าศูนย์ จงหาขนาดของแรง P แรง F และระยะ d



รูปที่ Ex 4-8

วิธีทำ

จากนิยามของแรงคู่ควบ เราจะได้ว่า

$$F = 300 \quad \text{N}$$ Ans.

$$P = 500 \quad \text{N}$$ Ans.

จากเงื่อนไขที่ว่า โมเมนต์ลัพธ์เนื่องจากแรงคู่ควบดังกล่าวมีค่าเท่าศูนย์ เราจะได้ว่า

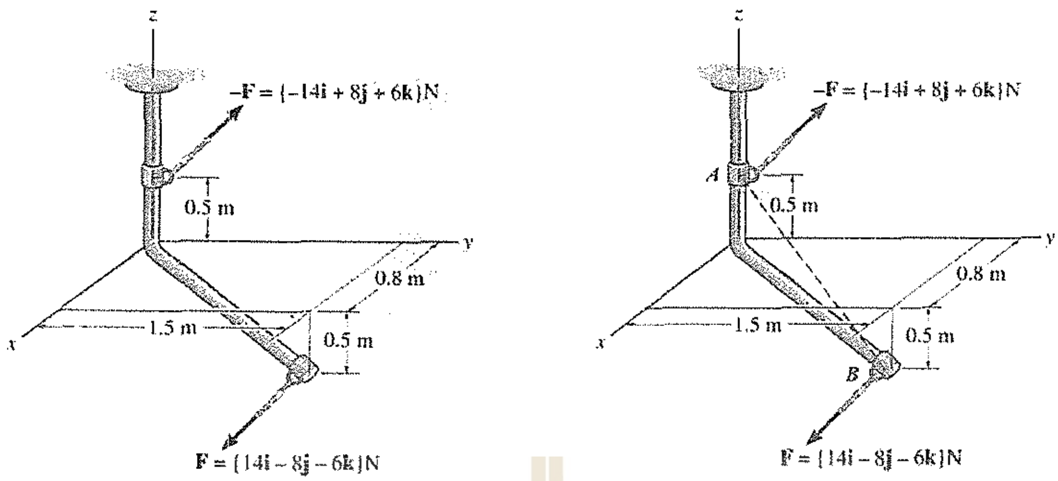
$$\circlearrowleft + \; M_R = 500(2) - 300\cos 30°(d) + 300\sin 30°(0.2) = 0$$

และระยะ d จะมีค่าเท่ากับ

$$d = 3.96 \quad \text{m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 4-9 (4-93)

จงหา vector และขนาดของแรงคู่ควบ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-9



รูปที่ Ex 4-9

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 4-9 position vector จากจุด A พุ่งไปยังจุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$\vec{r}_{AB} = 0.8\hat{i} + 1.5\hat{j} - \hat{k}$$

vector ของโมเมนต์เนื่องจากแรงคู่ควบ $\vec{F} = 14\hat{i} - 8\hat{j} - 6\hat{k}$ รอบจุด A มีค่าเท่ากับ

$$\bar{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.8 & 1.5 & -1 \\ 14 & -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -17.0\hat{i} - 9.20\hat{j} - 27.4\hat{k} \text{ N-m}$$

และขนาดของแรงคู่ควบมีค่าเท่ากับ

$$M_A = \sqrt{(-17.0)^2 + (-9.20)^2 + (-27.4)^2} = 33.5 \text{ N-m}$$ Ans.

4.7 Equivalent System (ระบบที่สมมูล)

แรงและ couple moment จะทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่และการหมุน และค่าของการเคลื่อนที่และการหมุนดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่แรงกระทำและลักษณะการกระทำของแรง

เมื่อวัตถุถูกกระทำโดยระบบของแรงและ couple moment แล้ว เราจะหาค่าของแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ที่จุด O ใดๆ บนวัตถุที่สมมูล (equivalent) ระบบของแรงและ couple moment ดังกล่าวได้ โดยที่แรงและ couple moment ลัพธ์ดังกล่าวจะทำให้เกิดการเคลื่อนที่และการหมุนที่เท่ากับการเคลื่อนที่และการหมุนที่เกิดจากระบบของแรงและ couple moment

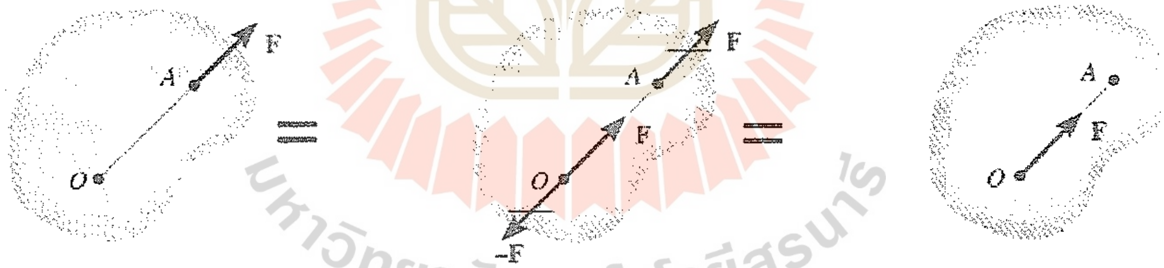
เมื่อจุด O อยู่บนแนวกระทำของแรง (Point O Is On the Line of Action of the Force)

พิจารณาวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-20a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $\bar{F}$ ที่จุด A ในการหาแรงที่จุด O ที่สมมูลกับแรง $\bar{F}$ นั้น เราจะทำได้ดังนี้

1. ใส่แรงที่มีค่าเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง $\bar{F}$ (แรง $\bar{F}$ และแรง $-\bar{F}$) ที่จุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-20b
2. ทำการตัดแรง $\bar{F}$ ที่จุด A และแรง $-\bar{F}$ ที่จุด O (ที่มีเครื่องหมาย slash เขียนกำกับไว้) ออก ซึ่งเราจะได้ผลลัพธ์ของแรงที่จุด O ที่สมมูลกับแรงที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 4-20c

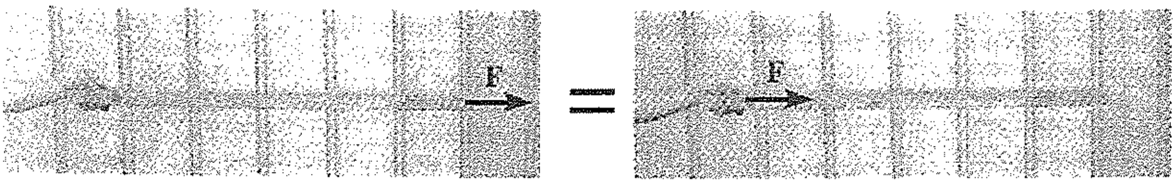
ในกรณีนี้ เราจะเห็นว่า แรง $\bar{F}$ ที่จุด A เพียงแต่ย้ายตำแหน่งไปตามแนวของแรง $\bar{F}$ ไปที่จุด O เท่านั้นหรือเราอาจจะกล่าวได้ว่า แรง $\bar{F}$ ในกรณีนี้ มีคุณสมบัติเป็น sliding vector ซึ่งเรามักจะเรียก concept นี้ว่า principle of transmissibility ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วใน section ที่ 4.3

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า การเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุ (ในกรณีที่วัตถุไม่ถูกยึดให้อยู่กับที่) หรือแรงที่ใช้ในการยึดรั้งวัตถุ (ในกรณีที่วัตถุถูกยึดให้อยู่กับที่) จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงหลังจากที่เราย้ายตำแหน่งของแรง $\bar{F}$ จากจุด A ไปยังจุด O แต่แรงภายในที่เกิดขึ้นที่จุด O จะมีค่าเพิ่มขึ้นมากกว่าเมื่อแรง $\bar{F}$ กระทำอยู่ที่จุด A



(a) (b) (c)

รูปที่ 4-20



เมื่อจุด O ไม่ได้อยู่บนแนวกระทำของแรง (Point O Is Not On the Line of Action of the Force)

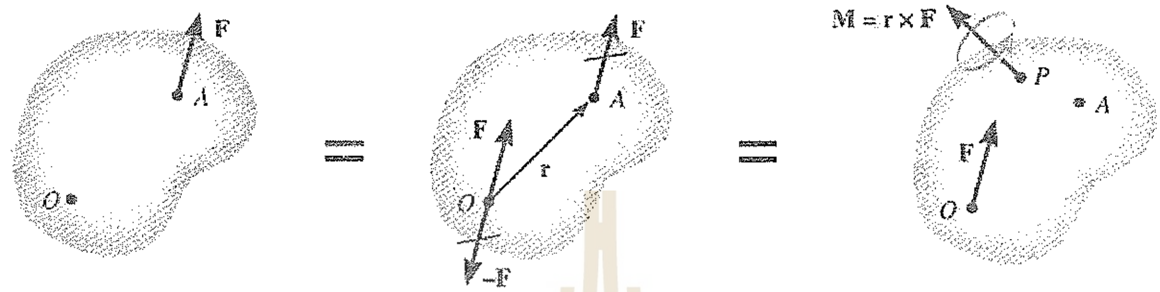
พิจารณาวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-21a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $\bar{F}$ ที่จุด A ในการหาแรงที่จุด O ที่สมมูลกับแรง $\bar{F}$ นั้น เราจะทำได้ดังนี้

1. ใส่แรงที่มีค่าเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง $\bar{F}$ (แรง $\bar{F}$ และแรง $-\bar{F}$) ที่จุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-21b

2. แรง $\bar{F}$ ที่จุด A และแรง $-\bar{F}$ ที่จุด O (ที่มีเครื่องหมาย slash เขียนกำกับไว้) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-21b เป็นแรงคู่ควบ (couple) และจะทำให้เกิด couple moment $\bar{M}$ ที่ตั้งฉากกับแรง $\bar{F}$ โดยที่

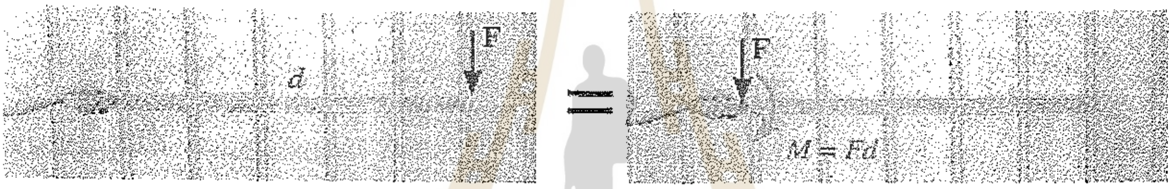
$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$$

3. เนื่องจากแรงคู่ควบเป็น free vector ซึ่งจะทำให้เกิดผลกระทบต่อวัตถุที่เท่ากันไม่ว่าแรงคู่ควบดังกล่าวจะกระทำที่จุด P ใดๆ บนวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-21c ดังนั้น เราจะสามารถย้าย couple moment ดังกล่าวไปกระทำที่จุด O ได้



(a) (b) (c)

รูปที่ 4-21



4.8 **แรงและ moment ลัพธ์ของระบบของแรงและแรงคู่ควบ** (Resultants of a Force and Couple System)

การหาแรงและ moment ลัพธ์ของระบบของแรงและ couple moment จะทำได้โดยใช้ concept ของระบบที่สมมูลที่ได้กล่าวถึงใน section ที่แล้ว

พิจารณารูปที่ 4-22a ซึ่งแสดงวัตถุซึ่งถูกกระทำโดย แรง $\bar{F}_1$ แรง $\bar{F}_2$ และและ couple moment $\bar{M}_C$ จากรูปเราจะเห็นว่า เนื่องจากจุด O ไม่ได้อยู่ในแนวกระทำของแรง $\bar{F}_1$ และแรง $\bar{F}_2$ ดังนั้น แรงลัพธ์และ moment ลัพธ์ที่จุด O จะประกอบด้วย

- แรง $\bar{F}_1$ และแรง $\bar{F}_2$
- couple moment $\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$ และ $\bar{M}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_2$
- couple moment $\bar{M}_C$ ซึ่งเป็น free vector

ดังที่แสดงในรูปที่ 4-22b

โดยใช้ vector addition เราจะได้

- แรงลัพธ์ที่จุด O อยู่ในรูป

$$\bar{F}_R = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

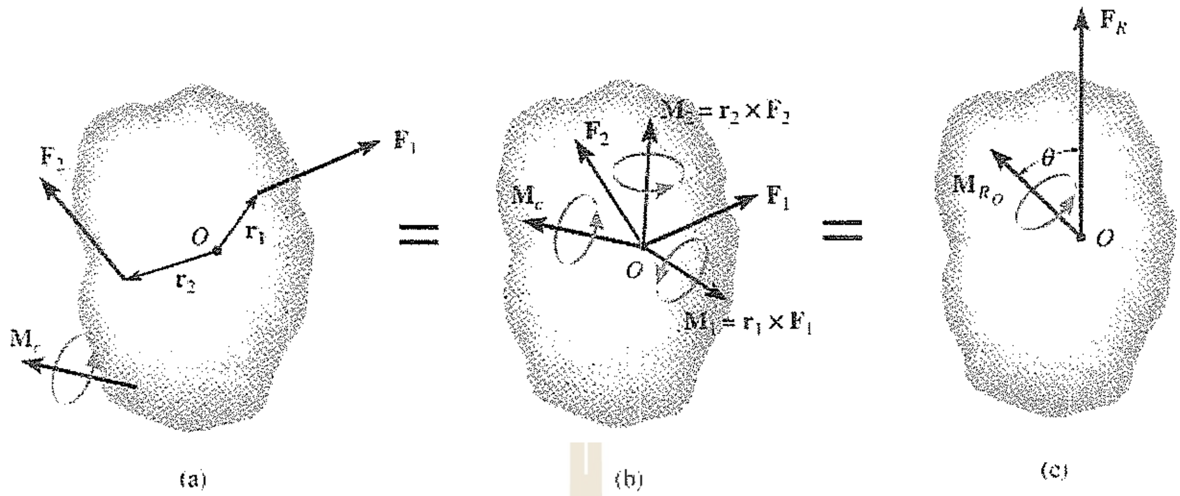
- couple moment ลัพธ์ที่จุด O อยู่ในรูป

$$\bar{M}_{R_O} = \bar{M}_C + \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า

1. ขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ จะไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด O
2. ขนาดและทิศทางของ moment ลัพธ์ $\bar{M}_{R_O}$ จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด O เนื่องจากว่า couple moment $\bar{M}_1$ และ $\bar{M}_2$ ขึ้นอยู่กับ position vector $\bar{r}_1$ และ $\bar{r}_2$

3. moment ลัพธ์ $\bar{M}_{R_O}$ เป็น free vector หลังจากที่เราได้ $\bar{M}_{R_O}$ แล้ว เราสามารถที่จะวาง $\bar{M}_{R_O}$ ไว้ที่ตำแหน่งใดๆ ได้



รูปที่ 4-22

โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนสมการของแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ที่จุด O ได้ในรูป

$$\bar{F}_R = \sum \bar{F}$$
$$\bar{M}_{R_O} = \sum \bar{M}_C + \sum \bar{M}_O \qquad (4\text{-}17)$$

โดยที่สมการแรกของสมการที่ 4-17 จะแสดงว่า แรงลัพธ์ของระบบของแรงและ couple moment จะสมมูลกับผลรวมของแรงทั้งหมด และสมการที่สองของสมการที่ 4-17 จะแสดงว่า couple moment ลัพธ์ของระบบของแรงและ couple moment จะสมมูลกับผลรวมของ couple moment $\sum \bar{M}_C$ และ moment รอบจุด O ที่เกิดจากแรงกระทำต่างๆ $\sum \bar{M}_O$

ในกรณีที่ระบบของแรงอยู่ในระนาบ $x-y$ และ couple moment ตั้งฉากกับระนาบนี้หรืออยู่ในทิศทางของแกน z แล้ว สมการที่ 4-17 จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ scalar equation ได้เป็น

$$F_{R_x} = \sum F_x$$
$$F_{R_y} = \sum F_y$$
$$M_{R_O} = \sum M_C + \sum M_O \qquad (4\text{-}18)$$

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

⇒ ตั้ง coordinate ให้มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ O และให้แนวของแกน x และของแกน y อยู่ในทิศทางที่ต้องการ

⇒ Force Summation

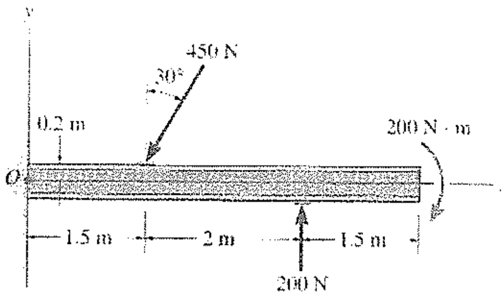
- ถ้าแรงต่างๆ อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว เราจะแตกแรงแต่ละแรงให้อยู่ในแนวแกน x และแกน y โดยที่ถ้าองค์ประกอบของแรงมีทิศไปทางแกนบวก x และแกนบวก y แล้ว องค์ประกอบของแรงนั้นจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้าองค์ประกอบของแรงมีทิศไปทางแกนลบ x และแกนลบ y แล้ว องค์ประกอบของแรงนั้นจะมีค่าเป็นลบ จากนั้น ทำการรวมแรงในแต่ละแกนเข้าด้วยกัน
- ถ้าแรงต่างๆ ที่อยู่ในระบบแกน 3 มิติแล้ว เราควรที่จะเขียนแรงต่างๆ ให้อยู่ในรูปของ Cartesian vector จากนั้น ทำการรวม vector ของแรงเหล่านั้นเข้าด้วยกัน

⟹ Moment Summation

- ถ้าแรงต่างๆ อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว เราจะหา moment รอบจุด O โดยใช้ principle of moment โดยการหา moment ของแต่ละองค์ประกอบของแรงแต่ละแรงรอบจุด O จากนั้น ทำการรวมองค์ประกอบของ moment ในแต่ละแกนเข้าด้วยกัน
- ถ้าแรงต่างๆ ที่อยู่ในใน 3 มิติแล้ว เราควรใช้ vector cross product ในการหา moment ที่เกิดจากแรงแต่ละแรงรอบจุด O โดยที่ position vector จะเป็น vector จากจุด O ถึงแนวกระทำของแรงนั้น จากนั้น ทำการรวม vector ของ moment เหล่านั้นเข้าด้วยกัน

ตัวอย่างที่ 4-10 (4-117)

จงทำการเปลี่ยนระบบแรงที่กระทำอยู่บนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-10 ด้วยแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์สมมูลที่กระทำที่จุด O



รูปที่ Ex 4-10

วิธีทำ

ทำการแตกแรง 450 N ในแนวแกน x และแกน y

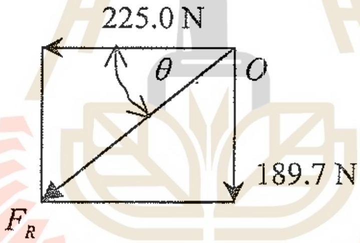
$$450\sin 30^o = 225.0\text{ N}$$

$$450\cos 30^o = 389.7\text{ N}$$

จากนั้น ทำการย้ายแรงดังกล่าวและแรง 200 N มากระทำที่จุด O ดังที่แสดงในแผนภาพของการรวมแรง และเราจะหาองค์ประกอบของแรงลัพธ์ในแนวแกน x และแกน y ได้โดยที่

$\overset{+}{\leftarrow} F_{Rx} = \sum F_x;$ $\qquad F_{Rx} = 225.0\text{ N}$

$+\downarrow F_{Ry} = \sum F_y;$ $\qquad F_{Ry} = 389.7 - 200 = 189.7\text{ N}$



และแรงลัพธ์จะมีค่าเท่ากับ

$$F_R = \sqrt{(225.0)^2 + (189.7)^2} = 294\text{ N} \qquad \text{Ans.}$$

มุมที่แรงลัพธ์กระทำกับแกน $-x$ มีค่าเท่ากับ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{189.7}{225}\right) = 40.1^o \qquad \text{Ans.}$$

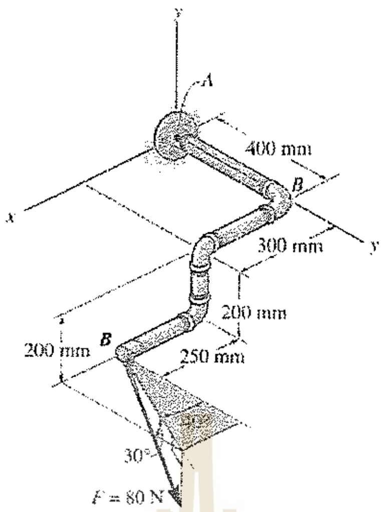
โมเมนต์ลัพธ์เนื่องจากระบบแรงที่กระทำที่จุด O มีค่าเท่ากับ

$\curvearrowleft + M_{RO} = \sum M_O;$

$$M_{RO} = 450\cos 30^o(1.5) - 450\sin 30^o(0.2) - 200(3.5) + 200 = 39.6\text{ N - m} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 4-11

จงทำการเปลี่ยนแรง $F = 80\,\mathrm{N}$ ที่กระทำอยู่ที่ปลายของท่อ B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-11 ด้วยแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์สมมูลที่กระทำที่จุด A



รูปที่ Ex 4-11

วิธีทำ

ทำการเขียน cartesian vector ของแรง $F = 80\,\mathrm{N}$ และเนื่องจากท่อเหล็กถูกกระทำโดยแรง $F = 80\,\mathrm{N}$ เท่านั้น ดังนั้น แรงที่ได้จะเป็นแรงลัพธ์ ซึ่งเราสามารถย้ายไปกระทำที่จุด A

$\bar{F}_R = \sum \bar{F};$

$$\bar{F}_R = 80\cos 30^o \sin 40^o \,\hat{i} + 80\cos 30^o \cos 40^o \,\hat{j} - 80\sin 30^o \,\hat{k}$$

$$= 44.53\hat{i} + 53.1\hat{j} - 40\hat{k}\ \mathrm{N}$$ Ans.

เนื่องจากการย้ายแรงลัพธ์ดังกล่าว เราจะหาโมเมนต์ลัพธ์เนื่องจากแรง $F = 80\,\mathrm{N}$ ได้เท่ากับ

$\bar{M}_{RA} = \sum \bar{M}_A;$

$$\bar{M}_{RA} = \bar{r}_{AB} \times \bar{F}_R = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.55 & 0.4 & -0.2 \\ 44.53 & 53.07 & -40 \end{vmatrix}$$

$$\bar{M}_{RA} = -5.39\hat{i} + 13.1\hat{j} + 11.4\hat{k}\ \mathrm{N\text{-}m}$$ Ans.

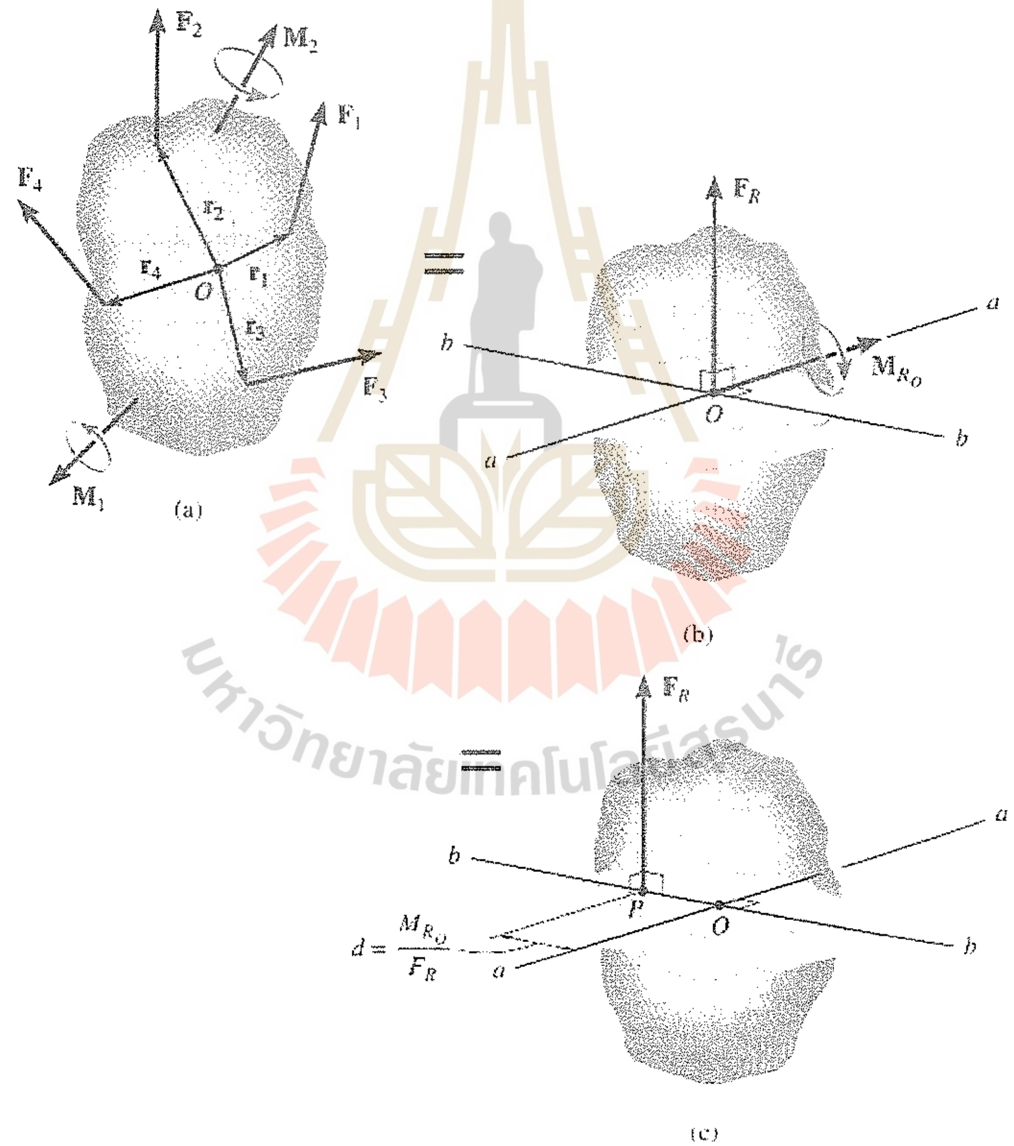
4.9 แรงและ moment ลัพธ์ของระบบของแรงและแรงคู่ควบ – เพิ่มเติม (Further Reduction of a Force and Couple System)

การลดรูปของระบบของแรงและแรงคู่ควบให้เป็นแรงลัพธ์เพียงแรงเดียว (Simplification to a Single Resultant Force)

พิจารณาระบบของแรงและ couple moment ที่กระทำอยู่บน rigid body ดังที่แสดงในรูปที่ 4-23a จากรูป เราจะหาแรงลัพธ์ และ couple moment ลัพธ์ของระบบของแรงและ couple moment ที่จุด O ซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกันได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-23b โดยที่

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}$$
$$\vec{M}_{R_O} = \sum \vec{M}_O$$

ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถที่จะทำการลดรูปของระบบของแรงและ couple moment ต่อไปได้อีกโดยการย้ายแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ ไปที่ตำแหน่ง P ที่ทำให้ couple moment ลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-23c



รูปที่ 4-23

ถ้าเราทราบค่าของ $\vec{F}_R$ และ $\vec{M}_{R_O}$ แล้ว เราจะหาตำแหน่งของจุด P ได้โดยใช้ สมการของ moment ดังนั้น จากรูปที่ 4-23c จุด P จะต้องอยู่บนแกน bb ซึ่งตั้งฉากกับแนวของแรง $\vec{F}_R$ และแกน aa

จากสมการของ moment เราจะได้ว่า

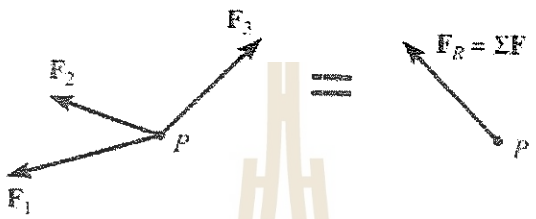
$$M_{R_O} = F_R d$$

$$d = \frac{M_{R_O}}{F_R}$$

นอกจากนั้นแล้ว วิธีการนี้ยังใช้ได้กับระบบของแรงที่กระทำร่วมกัน (concurrent) ระบบของแรงที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน (coplanar) และระบบของแรงที่กระทำขนานกัน (parallel) ได้อีกด้วย

ระบบของแรงที่กระทำร่วมกัน (Concurrent Force Systems)

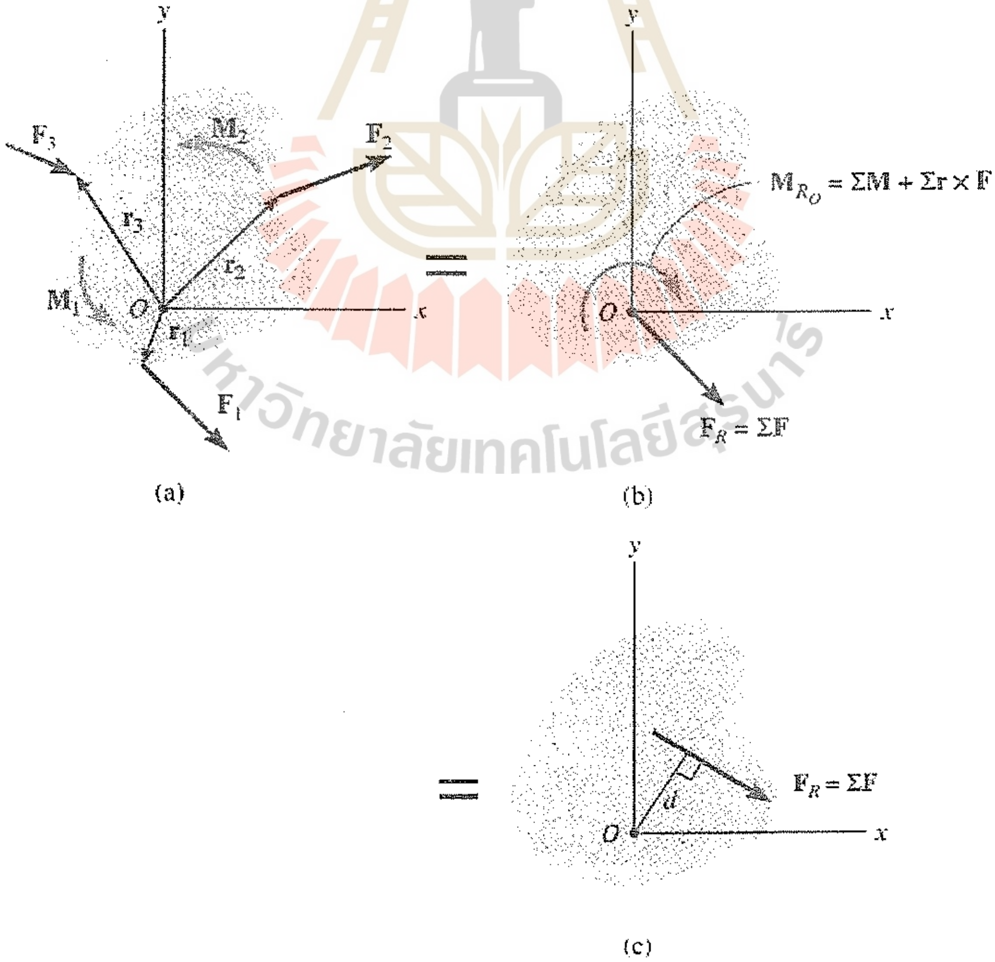
เมื่อแรงต่างๆ กระทำร่วมกันที่จุดใดจุดหนึ่งบนวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-24 แล้ว ระบบของแรงนี้จะไม่ก่อให้เกิด couple moment ลัพธ์และแรงลัพธ์จะหาได้จากสมการ $\vec{F}_R = \sum \vec{F}$



รูปที่ 4-24

ระบบของแรงที่กระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน (Coplanar Force Systems)

เมื่อระบบของแรงอยู่ในระนาบเดียวกันและอาจจะมี couple moment กระทำตั้งฉากกับระนาบนี้ด้วย ดังที่แสดงในรูปที่ 4-25a แล้ว เราจะหาแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ได้โดย



รูปที่ 4-25

1. ทำการย้ายแรงต่างๆ มากระทำที่จุด O ในระนาบ $x-y$ แล้วรวมแรงทั้งหมดเข้าด้วยกันโดยที่

$$\bar{F}_R = \sum \bar{F}$$

2. การย้ายแรงต่างๆ ดังกล่าวจะก่อให้เกิด couple moments ในทิศทางตามแนวแกน z ขึ้นมา ซึ่ง couple moment ลัพธ์จะหาได้จากสมการ

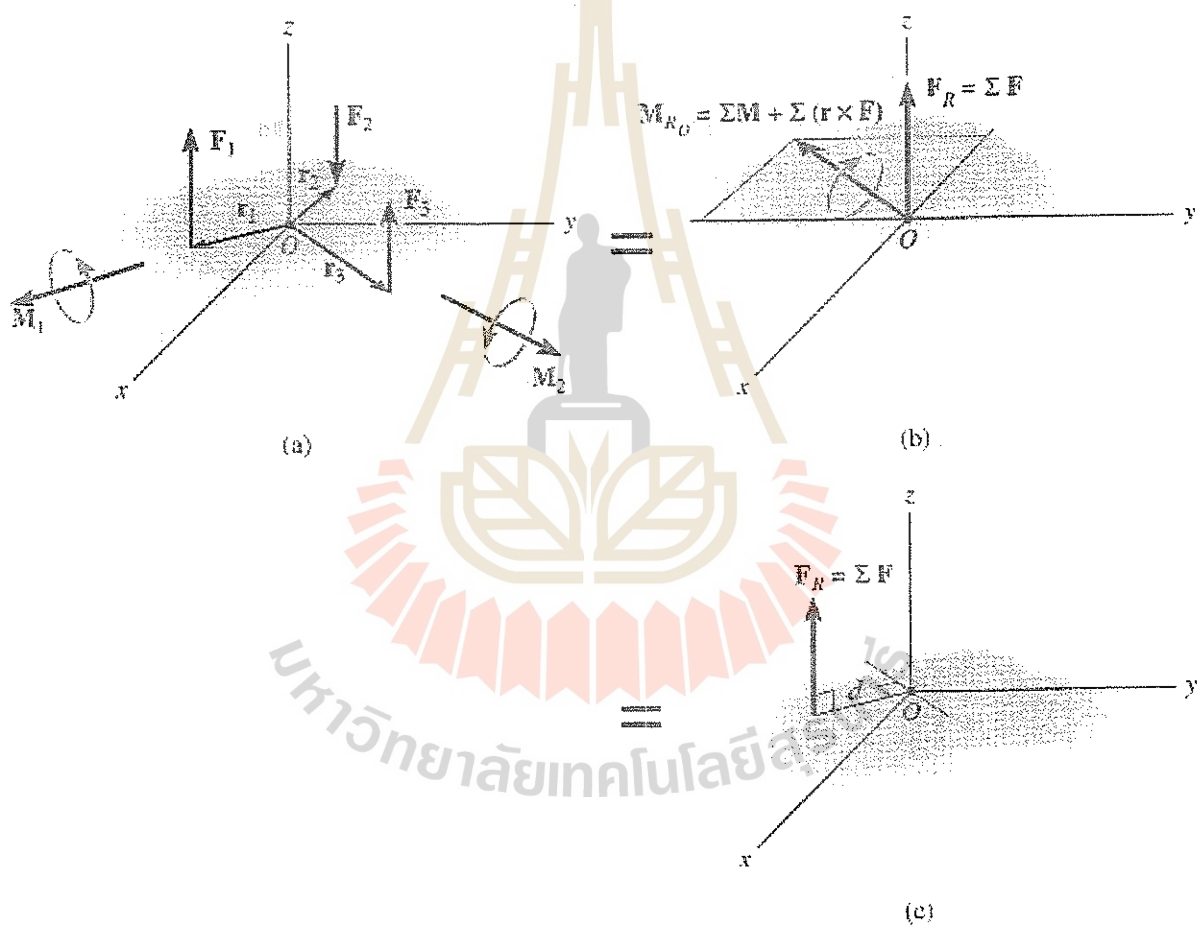
$$\bar{M}_{R_O} = \sum \bar{M} + (\sum \bar{r} \times \bar{F})$$

ดังที่แสดงในรูปที่ 4-25b

3. แรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ จะถูกวางที่ตำแหน่ง d จากจุด O ซึ่งจะทำให้เกิด moment $\bar{M}_{R_O}$ รอบจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-25c

ระบบของแรงที่กระทำขนานกัน (Parallel Force Systems)

เมื่อระบบของแรงกระทำขนานกันและอาจจะมี couple moment กระทำตั้งฉากกับระนาบนี้ด้วย ดังที่แสดงในรูปที่ 4-26a แล้ว เราจะหาแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ได้โดย



รูปที่ 4-26

1. ทำการย้ายแรงต่างๆ ให้กระทำที่จุด O ในระนาบ $x-y$ แล้วทำการรวมแรงทั้งหมดเข้าด้วยกันโดยที่

$$\bar{F}_R = \sum \bar{F}$$

2. การย้ายแรงต่างๆ นี้จะก่อให้เกิดองค์ประกอบของ couple moments ในทิศทางตามแนวแกน x และแนวแกน y ซึ่ง couple moment ลัพธ์จะหาได้จากสมการ

$$\bar{M}_{R_O} = \sum \bar{M}_C + (\sum \bar{r} \times \bar{F})$$

และจะตั้งฉากกับแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ ตามที่แสดงในรูปที่ 4-26b

3. แรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ จะถูกวางที่ตำแหน่ง d จากจุด O ซึ่งจะทำให้เกิด moment $\vec{M}_{R_O}$ รอบจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 4-26c

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

⟹ ตั้ง coordinate x, y, และ z โดยให้มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ O และกำหนดตำแหน่งของแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ ให้มีระยะ d จากจุด O

⟹ Force Summation

- ถ้าแรงต่างๆ อยู่ในระนาบเดียวกันแล้ว ให้แตกแรงแต่ละแรงให้อยู่ในแนวแกน x และแกน y โดยที่ถ้าองค์ประกอบของแรงมีทิศไปทางแกนบวก x และแกนบวก y แล้ว องค์ประกอบของแรงนั้นจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้ามีทิศไปทางแกนลบ x และแกนลบ y แล้ว องค์ประกอบของแรงนั้นจะมีค่าเป็นลบ
- แรงลัพธ์

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}$$

⟹ Moment Summation

- หา couple moment ลัพธ์รอบจุด O โดยการหาผลรวม moment ของแต่ละองค์ประกอบของแรงแต่ละแรงรอบจุด O และ couple moment ต่างๆ ที่กระทำอยู่บนวัตถุ
- ค่าของ couple moment ลัพธ์นี้จะใช้ในการหาระยะ d ของแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ จากจุด O

การลดรูปของระบบของแรงและแรงคู่ควบให้อยู่ในรูปของประแจปากตาย (Reduction to a Wrench)

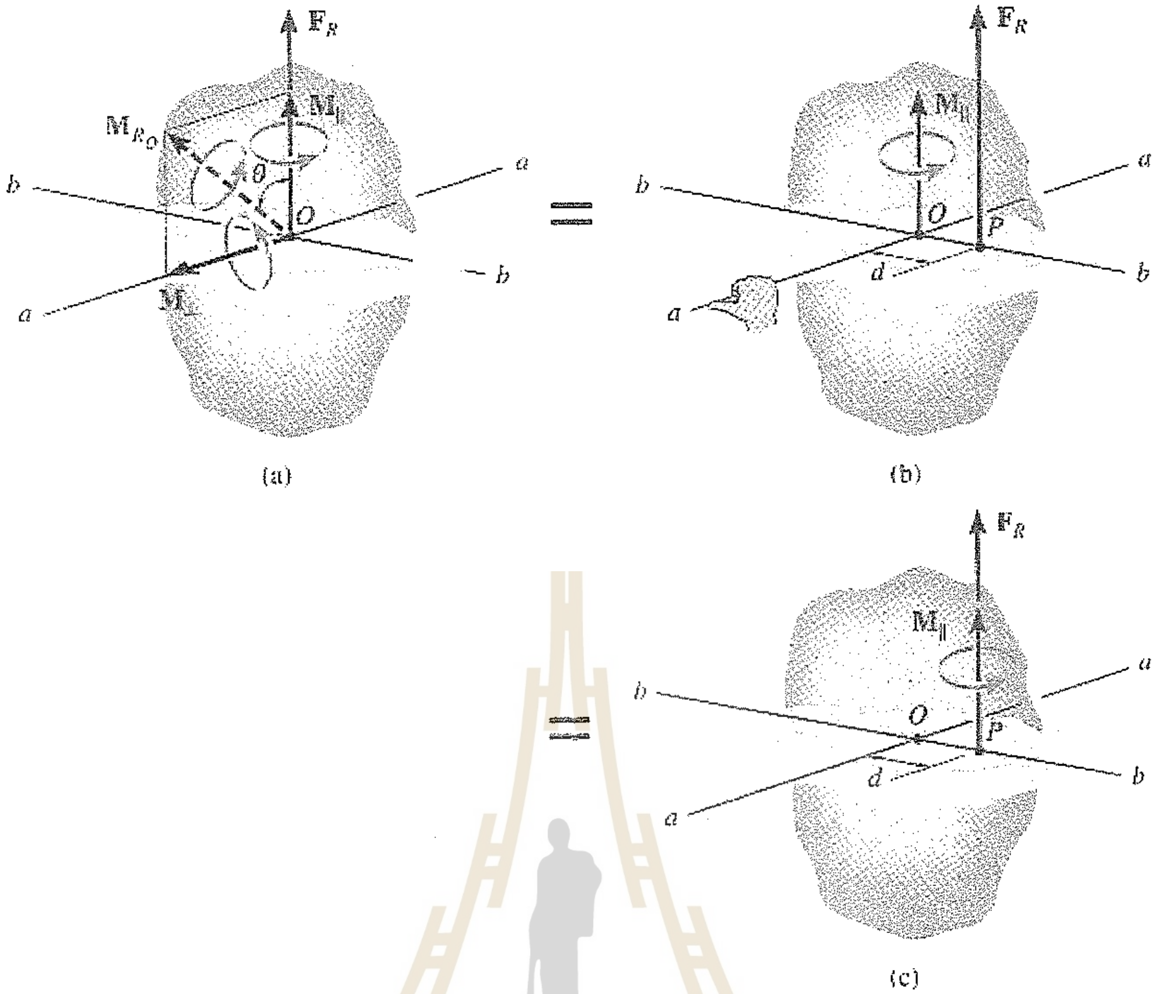
โดยทั่วไปแล้ว ระบบของแรงและ couple moment ที่กระทำอยู่บนวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-23a จะถูกเปลี่ยนให้เป็นแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ และ couple moment ลัพธ์ $\vec{M}_{R_O}$ ที่จุด O ซึ่งไม่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ได้ โดยที่แรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ และ couple moment ลัพธ์ $\vec{M}_{R_O}$ จะทำมุมซึ่งกันและกัน θ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-23c และจะมีขั้นตอนในการวิเคราะห์ดังนี้

1. ทำการแตก couple moment ลัพธ์ $\vec{M}_{R_O}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-27a ออกเป็นองค์ประกอบที่ตั้งฉาก $\vec{M}_{\perp}$ และองค์ประกอบที่ขนาน $\vec{M}_{||}$ กับแนวกระทำของแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$
2. ทำการกำจัด $\vec{M}_{\perp}$ โดยการย้ายแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ ไปที่จุด P ดังที่แสดงในรูปที่ 4-27b จุด P นี้จะอยู่บนแกน bb ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{F}_R$ และ $\vec{M}_{R_O}$ และระยะ d จากจุด O ถึงจุด P จะหาได้จากสมการ

$$d = \frac{M_{\perp}}{F_R}$$

3. เนื่องจาก $\vec{M}_{||}$ เป็น free vector เราอาจจะย้าย $\vec{M}_{||}$ นี้มาที่จุด P ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกับแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-27c

การรวมกันของแรงและ couple moment ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกันนี้มักจะถูกเรียกว่า *wrench* หรือ *screw* โดยที่แกนของ wrench จะมีทิศทางเดียวกันกับแนวกระทำของแรง เราจะเห็นได้ว่า wrench จะพยายามก่อให้เกิดทั้งการเคลื่อนที่ไปในแนวแกนของ wrench และการหมุนรอบแกนของ wrench ในเวลาเดียวกัน

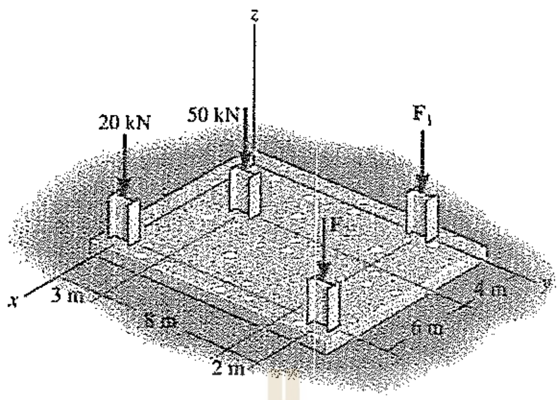


$\mathbf{F}_R$
$\mathbf{M}_{R_O}$
$\mathbf{M}_\parallel$
θ
O
P
d
$\mathbf{M}_\perp$
a
b
(a)
(b)
(c)

รูปที่ 4-27

ตัวอย่างที่ 4-12 (4-133)

กำหนดให้พื้นของอาคารถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ซึ่งถ่ายลงมาจากเสาของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-12 และกำหนดให้แรง $F_1 = 30\,\text{kN}$ และแรง $F_2 = 40\,\text{kN}$ จงหาแรงลัพธ์สมมูลที่กระทำต่อพื้นของอาคารและตำแหน่ง (x, y) ที่แรงดังกล่าวกระทำ



รูปที่ Ex 4-12

วิธีทำ

เนื่องจากแรงกระทำทั้งหมดอยู่ในแนวแกน z ดังนั้น แรงลัพธ์สมมูลที่กระทำต่อพื้นของอาคารจะมีค่าเท่ากับ

$+\uparrow F_R = \sum F_z;$

$$F_R = -30 - 50 - 30 - 40 = -140\,\text{kN} = 140\ \ \text{kN}\downarrow \qquad \text{Ans.}$$

เนื่องจากแรงลัพธ์สมมูลอยู่ในแนวแกน z ดังนั้น เราจะหาตำแหน่ง (x, y) ที่แรงดังกล่าวกระทำต่อพื้นของอาคารได้จากเงื่อนไขที่ว่า โมเมนต์ของแรงลัพธ์สมมูลรอบแกน x และแกน y จะต้องมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงกระทำทั้งหมดรอบแกน x และแกน y ตามลำดับ

$(M_R)_x = \sum M_x;$ $\qquad -140y = -50(3) - 30(11) - 40(13)$

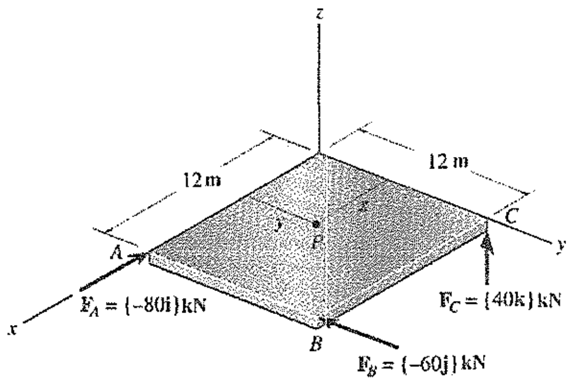
$$y = 7.14\text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

$(M_R)_y = \sum M_y;$ $\qquad 140x = 50(4) + 20(10) + 40(10)$

$$x = 5.71\text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 4-13 (4-137)

จงทำการลดรูปของระบบของแรงที่กระทำต่อแผ่นเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-13 ให้อยู่ในรูปของประแจปากตาย โดยทำการหาขนาดของแรงและ couple moment และตำแหน่งที่แรงและ couple moment กระทำ $P(x, y)$



รูปที่ Ex 4-13

วิธีทำ

ทำการหา vector ของแรงลัพธ์เนื่องจากแรงกระทำทั้งหมด

$\bar{F}_R = \sum \bar{F};$

$$\bar{F}_R = -80\hat{i} - 60\hat{j} + 40\hat{k} \text{ kN}$$

ขนาดของแรงลัพธ์ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

$$F_R = \sqrt{(-80)^2 + (-60)^2 + (40)^2} = 107.7 \text{ kN} = 108 \text{ kN}$$

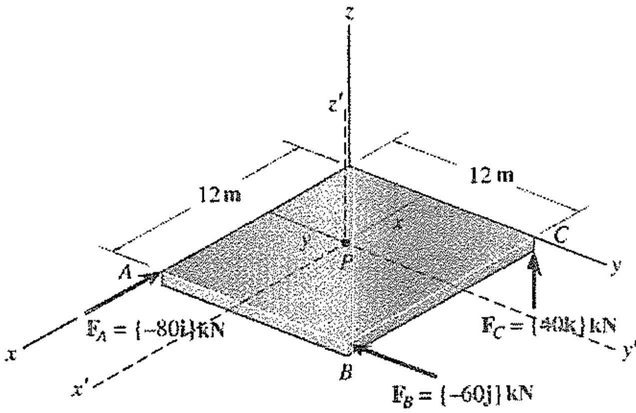
Unit vector ของแรงลัพธ์เนื่องจากแรงกระทำทั้งหมด

$$\bar{u}_{F_R} = \frac{\bar{F}_R}{F_R} = \frac{-80\hat{i} - 60\hat{j} + 40\hat{k}}{107.7} = -0.7428\hat{i} - 0.5571\hat{j} + 0.3714\hat{k}$$

ในการลดรูปของระบบของแรงให้อยู่ในรูปของประแจปากตายนั้น โมเมนต์ลัพธ์จะมีทิศทางขนานกับทิศทางของแรงลัพธ์ ถ้าสมมุติให้แรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์มีทิศพุ่งไปในทางเดียวกันแล้ว เราจะได้ว่า unit vector ของโมเมนต์ลัพธ์จะอยู่ในรูป

$$\bar{u}_{M_R} = -0.7428\hat{i} - 0.5571\hat{j} + 0.3714\hat{k}$$

และตำแหน่ง (x, y) ที่แรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์กระทำต่อแผ่นเหล็กจะหาได้โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า โมเมนต์ของแรงลัพธ์สมมูลรอบแกน x แกน y และแกน z จะต้องมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงกระทำทั้งหมดรอบแกน x แกน y และแกน z ตามลำดับ พิจารณารูปดังที่แสดง เราจะได้ว่า



$(M_R)_{x'} = \sum M_{x'};$ $\qquad -0.7428 M_R = 40(12 - y) \qquad (1)$

$(M_R)_{y'} = \sum M_{y'};$ $\qquad -05571M_R = 40x$ (2)

$(M_R)_{z'} = \sum M_{z'};$ $\qquad 0.3714M_R = -60(12-x) - 80y$ (3)

ทำการแก้สมการทั้งสาม เราจะได้ว่า

$$x = 8.69 \text{ m}$$ Ans.

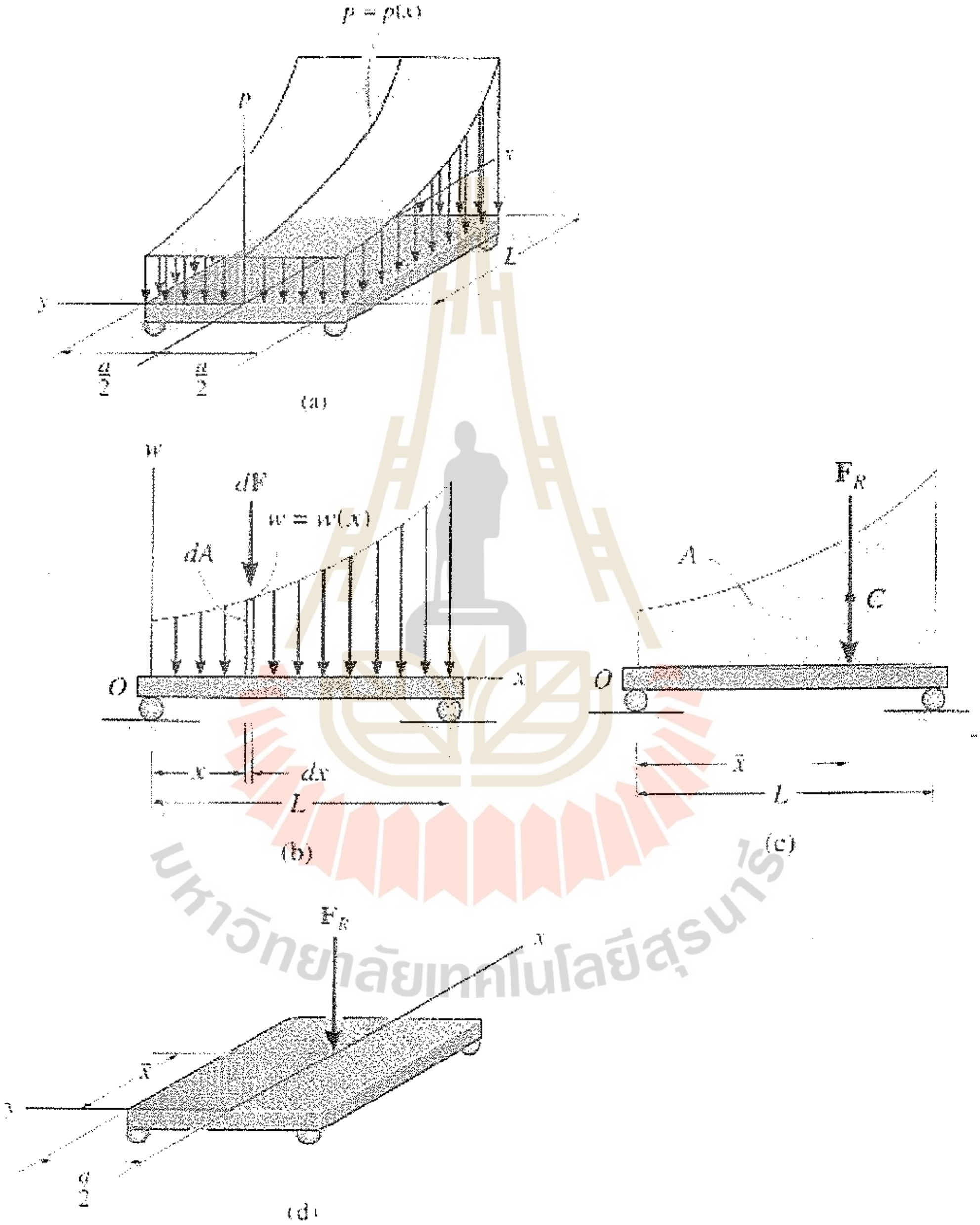
$$y = 0.414 \text{ m}$$ Ans.

$$M_R = -624 \text{ kN-m}$$ Ans.

4.10 การลดรูปของแรงกระจายอย่างง่าย (Reduction of a Simple Distributed Loading)

ในบางกรณี วัตถุที่มีพื้นผิวขนาดใหญ่จะถูกกระทำโดยแรงกระจาย (distributed loadings) ที่เกิดจากการกระทำของลม การกระทำของของเหลว หรือน้ำหนักของตัววัตถุเอง เป็นต้น ซึ่งจะมีหน่วยเป็นแรงต่อพื้นที่ เช่น $\mathrm{lb/ft^2}$ และ $\mathrm{N/m^2}$ เป็นต้น

ในกรณีที่แรงกระจายมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามตำแหน่ง x บนวัตถุและมีค่าคงที่ในแนวแกน y ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28a แล้ว เราจะเขียนสมการของแรงกระจายนี้ได้อยู่ในรูป $p = p(x)$ และขนาดและทิศทางของแรงจะถูกแทนโดยใช้ลูกศร ดังที่แสดงในรูป และเราจะเห็นได้ว่า แรงกระจายจะมีลักษณะที่เป็นระบบของแรงที่มีทิศทางขนานกัน



รูปที่ 4-28

เนื่องจากว่าแรงกระจายนี้มีค่าคงที่ในแนวแกน y ดังนั้น ถ้าเราคูณ $p = p(x)$ ด้วยความกว้างของวัตถุ a แล้ว เราจะได้ สมการแสดงการกระจายของของแรงในแนวแกน x อยู่ในรูป $w = w(x)$ ซึ่งมีหน่วยเป็นขนาดของแรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวของวัตถุ เช่น $\mathrm{lb/ft}$ และ $\mathrm{N/m}$ เป็นต้น และแรงกระจายดังกล่าวจะมีลักษณะเป็นระบบของแรงที่มีทิศทางขนานกันและอยู่ในระนาบเดียวกัน (parallel coplanar force) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28b

จากวิธีการใน section ที่ 4.9 เราจะสามารถหาแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ และตำแหน่งของแรงลัพธ์ $\bar{x}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28c ได้ดังนี้

ขนาดของแรงลัพธ์ (Magnitude of a Resultant Force)

จากสมการที่ 4-17 ($\bar{F}_R = \sum \bar{F}$) และจากรูปที่ 4-28b เราจะหาขนาดแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ หรือ F_R ได้จากการ integrate แรง $d\bar{F}$ ซึ่งเป็นแรง $w(x)$ กระทำอยู่บนความยาวของวัตถุ dx ที่มีค่าน้อยมาก ($dF = w(x)\ dx$) ตลอดความยาวทั้งหมดของวัตถุ L หรือ

$+\downarrow F_R = \sum F$;

$$F_R = \int_L w(x)\ dx = \int_A dA = A \tag{4-19}$$

จากสมการที่ 4-19 นี้ เราจะเห็นว่า ขนาดของแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดใต้แรงกระจาย $w = w(x)$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28c

ตำแหน่งที่แรงลัพธ์กระทำ (Location of Resultant Force)

ตำแหน่งของแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ หรือ $\bar{x}$ จากจุด O จะหาได้จากเงื่อนไขที่ว่า ค่าที่ได้จากการ integrate สมการของ moment ของแรงลัพธ์ $d\bar{F}$ ที่ตำแหน่ง x ใดๆ รอบจุด O จะต้องเท่ากับค่าของ moment ของแรงลัพธ์ F_R คูณกับระยะ $\bar{x}$ จากจุด O

$\curvearrowleft + M_{R_O} = \sum M_O$;

$$\bar{x}F_R = \int_L x\, w(x)\, dx$$

หรือ

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\ w(x)\ dx}{\int_L w(x)\ dx} = \frac{\int_A x\ dA}{\int_A dA} \tag{4-20}$$

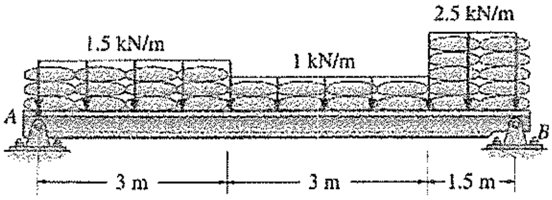
สมการที่ 4-20 แสดงให้เห็นว่า แรงลัพธ์จะมีแนวกระทำของแรงผ่านจุด centroid ของพื้นที่ใต้แรง $w = w(x)$ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28c

หลังจากที่เราได้ค่าของระยะ $\bar{x}$ แล้ว เราจะได้ว่า แรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ จะกระทำอยู่ที่ coordinate $(\bar{x}, 0)$ บนผิวของวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-28d ซึ่งเราจะสรุปได้ว่า

1. ขนาดของแรงลัพธ์จะมีค่าเท่ากับปริมาตรใต้ loading function $p = p(x)$
2. แนวกระทำของแรงลัพธ์จะผ่านจุด centroid ของปริมาตรใต้ loading function $p = p(x)$ นี้

ตัวอย่างที่ 4-14 (4-146)

กำหนดให้คานถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกเนื่องจากแรงกระจายแบบสม่ำเสมอเนื่องจากน้ำหนักของถุงทราย ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-14 จงหาค่าของแรงลัพธ์ที่กระทำบนคานและระยะที่แรงดังกล่าวกระทำวัดจากจุดรองรับ A



รูปที่ Ex 4-14

วิธีทำ

แรงลัพธ์ที่กระทำบนคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกเนื่องจากน้ำหนักของถุงทราย

$$F_R = 1.5(3) + 1(3) + 2.5(1.5)$$
$$= 4.5\text{ kN} + 3\text{ kN} + 3.75\text{ kN} = 11.25\text{ kN}$$ Ans.

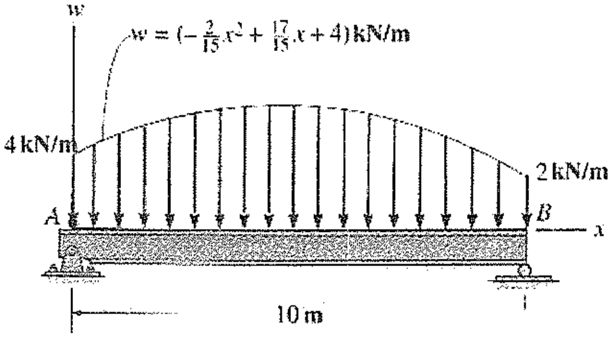
หาระยะที่แรงลัพธ์กระทำต่อคานวัดจากจุดรองรับ A ได้จากผลรวมของโมเมนต์รอบจุด A หารด้วยแรงลัพธ์

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 4.5(1.5) + 3(4.5) + 3.75(6.75) = 45.5625\text{ kN.m}$$

$$d = \frac{\sum M_A}{F_R} = \frac{45.5625}{11.25} = 4.05 \quad \text{m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 4-15 (4-162)

กำหนดให้คานถูกกระทำโดยแรงกระจาย ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-14 จงหาค่าของแรงลัพธ์ที่กระทำบนคานและระยะที่แรงดังกล่าวกระทำวัดจากจุดรองรับ A



รูปที่ Ex 4-14

วิธีทำ

แรงลัพธ์ที่กระทำบนคานเนื่องจากแรงกระจาย

$$F_R = \int w(x)dx = \int_0^{10}\left(-\frac{2}{15}x^2 + \frac{17}{15}x + 4\right)dx = 52.22 = 52.2 \text{ kN}$$ Ans.

ระยะที่แรงลัพธ์กระทำวัดจากจุดรองรับ A

$$\bar{x} = \frac{\int xw(x)dx}{\int w(x)dx} = \frac{\int_0^{10} x\left(-\frac{2}{15}x^2 + \frac{17}{15}x + 4\right)dx}{52.22} = \frac{244.44}{52.22}$$

$$\bar{x} = 4.68 \text{ m}$$ Ans.

บทที่ 5

Equilibrium of a Rigid Body

จุดประสงค์

1. เพื่อที่ได้รู้ถึงที่มาของสมการความสมดุลของวัตถุแกร่ง (equations of equilibrium for a rigid body)
2. เพื่อที่ได้เรียนรู้และเข้าใจถึง concept ของ free-body diagram ของวัตถุแกร่ง (rigid body)
3. เพื่อที่จะได้ทราบถึงวิธีการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับความสมดุลของวัตถุแกร่ง โดยใช้สมการความสมดุล (equations of equilibrium)

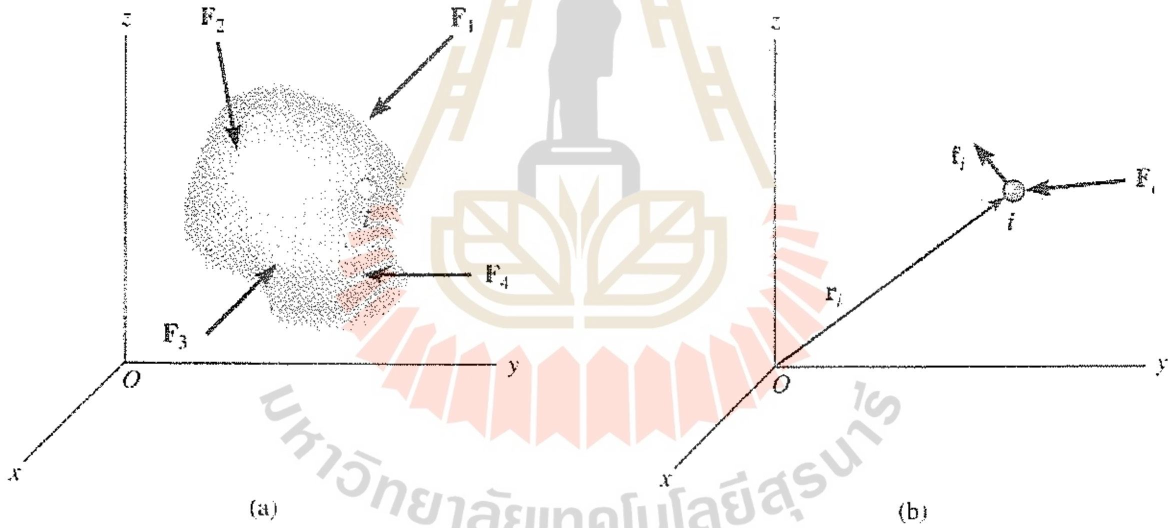
5.1 เงื่อนไขของความสมดุลของวัตถุแกร่ง (Condition for Rigid-Body Equilibrium)

พิจารณาวัตถุแกร่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-1a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงต่างๆ และอยู่ในสภาวะที่อยู่นิ่งหรืออยู่ในสภาวะที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ เมื่อเทียบกับระบบแกนอ้างอิงตั้งฉาก x , y , และ z

กำหนดให้แผนภาพ free-body diagram ของอนุภาคที่จุด i ของวัตถุมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-1b ซึ่งอนุภาคนี้จะถูกกระทำโดยแรงลัพธ์ภายใน (resultant internal force) $\bar{f}_i$ ที่เกิดจากการกระทำของอนุภาคที่อยู่รอบข้าง และแรงลัพธ์ภายนอก (resultant external force) $\bar{F}_i$ ที่เกิดจากการกระทำของวัตถุอื่นๆ โดยตรงหรือโดยอ้อม เช่น จากการกระทำของแรงดึงดูดของโลก เป็นต้น

ถ้าอนุภาคที่จุด i นี้อยู่ในสภาวะสมดุลแล้ว จาก Newton's first law เราจะได้ว่า

$$\bar{F}_i + \bar{f}_i = \bar{0}$$



รูปที่ 5-1

เมื่อพิจารณาความสมดุลของแรงบนอนุภาคทั้งหมดที่ประกอบขึ้นเป็นวัตถุและทำการรวม vector ของแรงเหล่านั้นแล้ว จากเงื่อนไขของความสมดุลต่อการเคลื่อนที่ เราจะได้ว่า

$$\sum \bar{F}_i + \sum \bar{f}_i = \bar{0}$$

จาก Newton's third law ผลรวมของแรงลัพธ์ภายใน $\sum \bar{f}_i$ จะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากแรงที่กระทำอยู่บนอนุภาคจะมีค่าที่เท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงปฏิกิริยาที่อนุภาคต้านทานต่อแรงกระทำ ถ้ากำหนดให้ผลรวมของแรงลัพธ์ภายนอก $\sum \bar{F}_i = \sum \bar{F}$ แล้ว เราจะเขียนสมการความสมดุลของวัตถุได้ใหม่ในรูป

$$\sum \bar{F} = \bar{0}$$

พิจารณา moment ของแรง $\bar{F}_i$ และแรง $\bar{f}_i$ ที่กระทำอยู่บนอนุภาค i รอบจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 5-1b จากเงื่อนไขของความสมดุลต่อการหมุน เราจะได้ว่า

$$\bar{r}_i \times (\bar{F}_i + \bar{f}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{r}_i \times \bar{f}_i = \bar{0}$$

และผลรวมของ moment ของแรงที่กระทำอยู่บนอนุภาคอื่นๆ รอบจุด O จะอยู่ในรูป

$$\sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i + \sum \bar{r}_i \times \bar{f}_i = \bar{0}$$

เนื่องจากแรงที่กระทำอยู่บนอนุภาคจะมีค่าที่เท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงปฏิกิริยาที่อนุภาคต้านทานต่อแรงกระทำ ดังนั้น ผลรวมของแรงลัพธ์ภายในแต่ละคู่รอบจุด O จะมีค่าเป็นศูนย์ ถ้าเรากำหนดให้ $\sum \bar{M}_O = \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_i$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\sum \bar{M}_O = \bar{0}$$

ดังนั้น โดยสรุปแล้ว สมการสมดุลของวัตถุแกร่งจะอยู่ในรูป

$$\sum \bar{F} = \bar{0}$$

$$\sum \bar{M}_O = \bar{0} \qquad (5\text{-}1)$$

5.2 Equilibrium in 2-D: **แผนภาพ** Free-Body Diagram

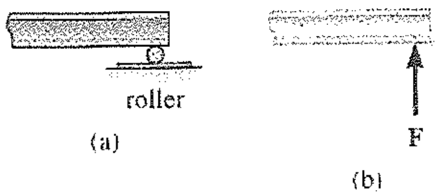
Free-body diagram ของวัตถุเป็นแผนภาพของวัตถุที่เป็นอิสระ (free) จากสิ่งรอบข้าง ซึ่งถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ทั้งที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า แรงนี้อาจจะเป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุโดยตรงหรืออาจจะเป็นแรงที่เกิดจากสิ่งรอบข้างกระทำกับวัตถุก็ได้ เมื่อเราเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุได้แล้ว เราจะสามารถใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงต่างๆ ที่ไม่ทราบค่าที่กระทำอยู่บนวัตถุได้

แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ (Support Reactions)

แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ (support) จะหามาได้โดยสังเกตว่าจุดรองรับที่พิจารณาอยู่นั้นป้องกันไม่ให้เกิดเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ขององค์อาคารอย่างไร

- ถ้าจุดรองรับป้องกันการเลื่อน (translation) ขององค์อาคารในทิศทางใดแล้ว จุดรองรับดังกล่าวจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยากระทำบนองค์อาคารในทิศทางนั้น
- ถ้าจุดรองรับป้องกันการหมุน (rotation) ขององค์อาคารในทิศทางใดแล้ว จุดรองรับดังกล่าวจะทำให้เกิด bending moment กระทำบนองค์อาคารในทิศทางนั้น

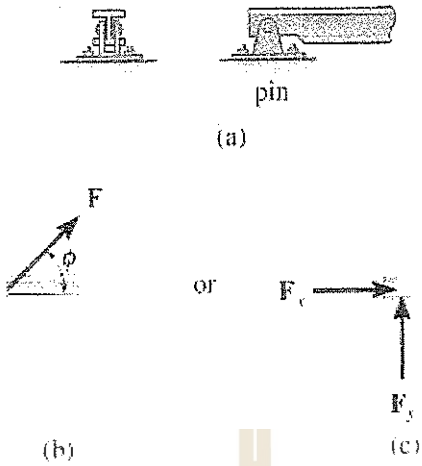
พิจารณา roller ที่รองรับคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2a Roller ดังกล่าวจะป้องกันไม่ให้ส่วนของคานที่จุดที่ roller รองรับมีการเลื่อนเกิดขึ้นในทิศทางซึ่งตั้งฉากกับพื้น (การเลื่อนในแนวขนานกับพื้นและการหมุนของคานสามารถที่จะเกิดได้อย่างอิสระ) ดังนั้น roller ที่รองรับคานจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก $\bar{F}$ กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2b



รูปที่ 5-2

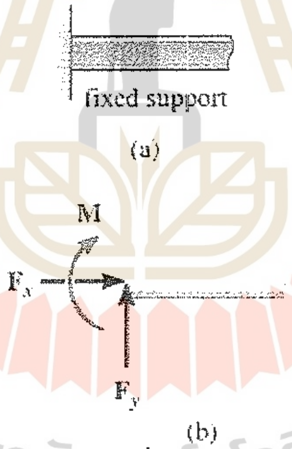
พิจารณาหมุด (pin) ที่รองรับคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3a หมุดดังกล่าวจะป้องกันไม่ให้ส่วนของคานตรงที่จุดที่ pin รองรับมีการเลื่อนเกิดขึ้นในทิศทางที่ทำมุม ϕ กับแนวนอน (การหมุนของคานสามารถที่จะเกิดได้อย่างอิสระ) ดังนั้น หมุดที่รองรับคานจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา $\bar{F}$ กระทำต่อคานในทิศทางดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3b โดยทั่วไปแล้ว

แรงปฏิกริยา $\bar{F}$ นี้จะถูกแตกออกเป็นองค์ประกอบของแรงในแนวนอน $\bar{F}_x$ และองค์ประกอบของแรงในแนวตั้ง $\bar{F}_y$ และเมื่อเราทราบค่าขององค์ประกอบของแรงทั้งสองแล้ว เราจะสามารถหาแรงปฏิกริยา $\bar{F}$ และมุม ϕ ได้โดยง่าย



รูปที่ 5-3

พิจารณาที่รองรับคานแบบยึดแน่น (fixed support) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4a ซึ่งป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนและหมุนของส่วนของคานที่จุดรองรับในทุกทิศทาง ดังนั้น จุดรองรับแบบยึดแน่นจะทำให้เกิดองค์ประกอบของแรงปฏิกริยา 2 แรงคือ $\bar{F}_x$ และ $\bar{F}_y$ และ moment ปฏิกริยา $\bar{M}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4b ดังนั้น จุดรองรับแบบยึดแน่นจะมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่า 3 ค่า



รูปที่ 5-4

ตารางที่ 5-1 แสดงสัญลักษณ์ต่างๆ และแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นในจุดเชื่อมต่อ (connections)) และจุดรองรับ (supports) ประเภทต่างๆ ที่มักจะใช้ในโครงสร้างที่อยู่ในระนาบเดียวกัน

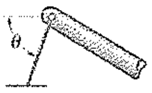
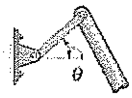
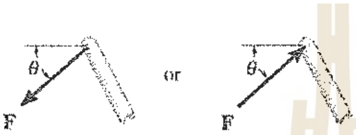
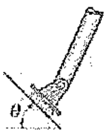
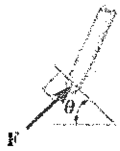
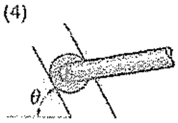
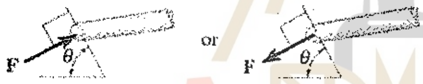
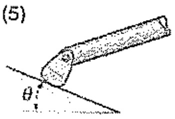
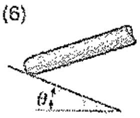
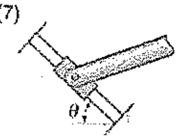
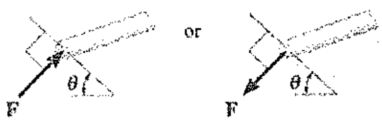
แรงภายนอกและแรงภายใน (External and Internal Forces)

เนื่องจากวัตถุแกร่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก ดังนั้น เมื่อวัตถุแกร่งถูกกระทำโดยแรงภายนอก (external loadings) แล้ว วัตถุแกร่งดังกล่าวจะมีแรงภายใน (internal loadings) เกิดขึ้น ถ้าเราเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุแกร่งนี้ แรงภายในจะไม่แสดงอยู่บนแผนภาพ เนื่องจากว่าแรงเหล่านี้มีทิศทางตรงกันข้ามแต่มีขนาดเท่ากัน ดังนั้น แรงเหล่านี้จึงหักล้างกันหมด (Newton's third law)

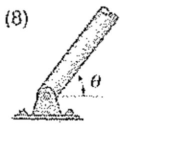
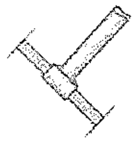
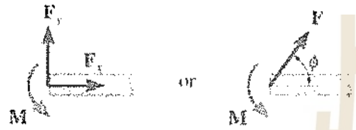
น้ำหนักและจุดศูนย์ถ่วง (Weight and Center of Gravity)

เมื่อวัตถุถูกกระทำโดยแรงโน้มถ่วงของโลกแล้ว อนุภาคแต่ละอนุภาคที่อยู่ในวัตถุก็จะถูกกระทำโดยแรงโน้มถ่วงของโลกด้วย และเราจะหาแรงลัพธ์ของแรงดังกล่าวให้อยู่ในรูปของแรงลัพธ์ที่กระทำที่จุดใดจุดหนึ่งบนวัตถุได้ โดยที่แรงลัพธ์นี้มักจะถูกเรียกว่า น้ำหนัก (weight) $\vec{W}$ ของวัตถุและตำแหน่งที่น้ำหนักกระทำจะถูกเรียกว่า จุดศูนย์ถ่วง (center of gravity)

ตารางที่ 5-1

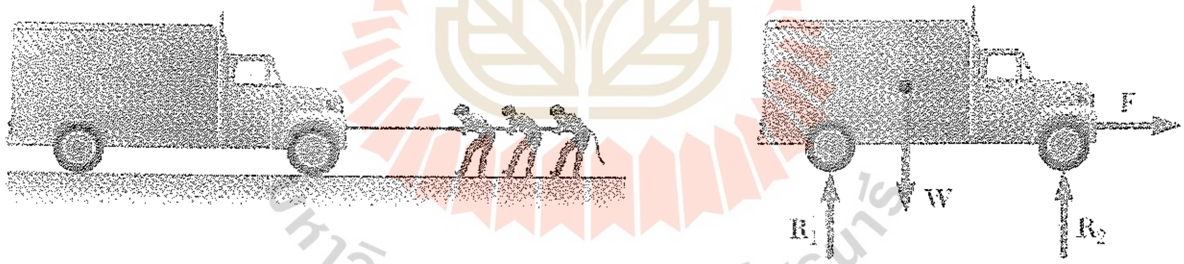
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(1)  cable		One unknown. The reaction is a tension force which acts away from the member in the direction of the cable.
(2)  weightless link		One unknown. The reaction is a force which acts along the axis of the link.
(3)  roller		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(4)  roller or pin in confined smooth slot		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the slot.
(5)  rocker		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(6)  smooth contacting surface		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(7)  member pin connected to collar on smooth rod		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the rod.

ตารางที่ 5-1(ต่อ)

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(8)  smooth pin or hinge		Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction ϕ of the resultant force. Note that ϕ and θ are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)].
(9)  member fixed connected to collar on smooth rod		Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod.
(10)  fixed support		Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction ϕ of the resultant force.

พิจารณารถบรรทุก ซึ่งกำลังถูกลากให้เคลื่อนที่โดยคน 3 คน ดังที่แสดงในรูปที่ 5-5 จากรูป กำหนดให้รถมีน้ำหนัก $\vec{W}$ กระทำอยู่ที่จุดศูนย์ถ่วงของรถบรรทุก

เนื่องจากรถบรรทุกมีความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง ดังนั้น ล้อรถจะต้องถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยาที่พื้นใช้ต้านทานต่อการกระทำของน้ำหนักรถบรรทุก $\vec{R}_1$ และ $\vec{R}_2$ นอกจากนั้นแล้ว เพื่อให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวนอน แรงดึง $\vec{F}$ จะต้องถูกต้านทานโดยแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวถนนกับล้อรถ

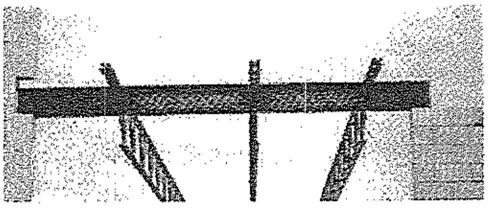


รูปที่ 5-5

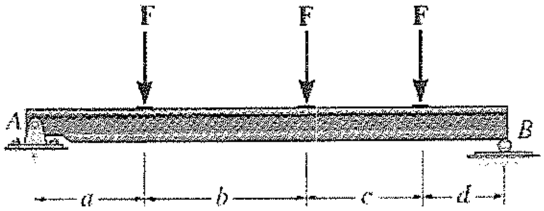
การจำลองวัตถุ (Idealized Models)

ในการวิเคราะห์หาแรงในวัตถุใดๆ อย่างถูกต้องนั้น เราจำเป็นที่จะต้องมีการจำลองวัตถุนั้นให้เหมาะสมกับวัตถุจริงให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยจะต้องเลือกชนิดของจุดรองรับ พฤติกรรมของวัสดุ และขนาดต่างๆ ของวัตถุอย่างระมัดระวังและเหมาะสม

พิจารณาคานเหล็กที่ใช้ในการรองรับตง (joist) ของหลังคาของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6a เนื่องจากการโก่งตัว (deflection) ของคานมีค่าน้อยมาก (ไม่สามารถมองเห็นด้วยตาเปล่า) ดังนั้น เราจะสมมุติให้คานเหล็กนี้ทำด้วยวัสดุที่มีความแกร่งสูงมาก เนื่องจากจุดรองรับ A ของคานถูกยึดเข้ากับผนังโดยใช้สลักเกลียว (bolt) ดังนั้น เราจะสมมุติให้ที่รองรับดังกล่าวเป็นหมุด (pin) และเนื่องจากจุดรองรับ B ของคานสามารถที่จะเลื่อนไปมาได้ในแนวแกนของคาน ดังนั้น เราจะสมมุติให้ที่รองรับดังกล่าวเป็น roller



(a)



(b)

รูปที่ 5-6

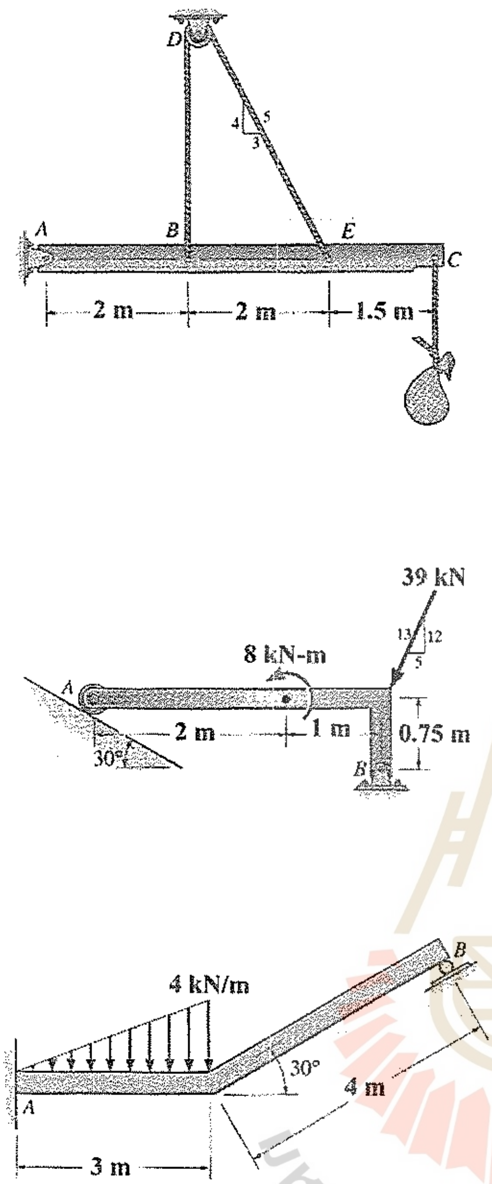
เนื่องจากพื้นที่ของตงที่วางบนคานเหล็กมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ทั้งหมดของคานเหล็ก ดังนั้น เราจะสมมุติให้แรงปฏิกริยาที่ตงถ่ายลงบนคานเหล็กเป็นแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) $\bar{F}$ และกระทำอยู่ที่กึ่งกลางของความกว้างของตง จากสมมุติฐานทั้งหมดที่กล่าวมา เราจะสามารถจำลองคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6b

ขั้นตอนในการเขียนแผนภาพ Free-Body Diagram

1. ใช้จินตนาการทำการแยกวัตถุที่กำลังพิจารณาอยู่ออกจากจุดยึดหรือจุดรองรับ จากนั้น ทำการวาดรูปร่างของวัตถุดังกล่าวอย่างคร่าวๆ
2. กำหนดแกน x และแกน y ให้เหมาะสม
3. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ทราบค่า
4. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ไม่ทราบค่า โดยใช้สัญลักษณ์หรือตัวอักษรที่เหมาะสม โดยจะกำหนดให้ แรงและ couple moment ที่ไม่ทราบค่าดังกล่าวมีนัย (sense) ไปตามแกนบวก x และแกนบวก y
5. หาระยะต่างๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการหาโมเมนต์
6. ถ้าคำตอบที่ได้จากการใช้สมการความสมดุลมีค่าเป็นลบแล้ว เราจะได้ว่า sense ของแรงหรือ couple moment จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้ในข้อที่ 3

ตัวอย่างที่ 5-1 (Ex 5-5)

จงวาดแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1



รูปที่ Ex 5-1

5.3 สมการความสมดุลในสองมิติ (Equations of Equilibrium in 2-D)

เมื่อวัตถุถูกกระทำโดยระบบของแรงที่อยู่ในระนาบ $x-y$ แล้ว แรงเหล่านั้นสามารถที่จะแตกออกเป็นแรงในแนวแกน x และแรงในแนวแกน y ได้ โดยใช้เงื่อนไขของความสมดุลในสองมิติ เราจะได้ว่า เมื่อวัตถุนั้นอยู่ในความสมดุลแล้ว

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_O = 0 \tag{5-2}$$

เมื่อ

$\sum F_x$ และ $\sum F_y$ เป็นผลรวมขององค์ประกอบของแรงในแนวแกน x และแนวแกน y ที่กระทำอยู่บนวัตถุ

$\sum M_O$ เป็นผลรวมของ couple moment ภายนอกต่างๆ และ moment ที่เกิดจากองค์ประกอบของแรงรอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ และผ่านจุด O ซึ่งอาจจะอยู่บนวัตถุหรือนอกตัววัตถุก็ได้

นอกจากสมการความสมดุลของวัตถุที่อยู่ในรูปของสมการที่ 5-2 แล้ว สมการความสมดุลของวัตถุยังจะถูกเขียนได้ในรูปอื่นๆ อีก เช่น

$$\sum F_a = 0$$
$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_B = 0 \tag{5-3}$$

อย่างไรก็ตาม ในการเขียนสมการความสมดุลในรูปแบบนี้ เส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B จะต้อง**ไม่ทำมุมตั้งฉาก**กับแกน $a-a$ ซึ่งจะสามารถพิสูจน์ได้โดยการพิจารณา free-body diagram ของวัตถุที่มีรูปร่างใดๆ ซึ่งถูกกระทำโดยระบบของแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7a

จากรูป แรงลัพธ์ของแรงต่างๆ ที่กระทำอยู่บน free-body diagram จะหาได้จากสมการ

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}$$

และ couple moment ลัพธ์ของแรงที่กระทำอยู่ที่จุด A ของ free-body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7b จะหาได้จากสมการ

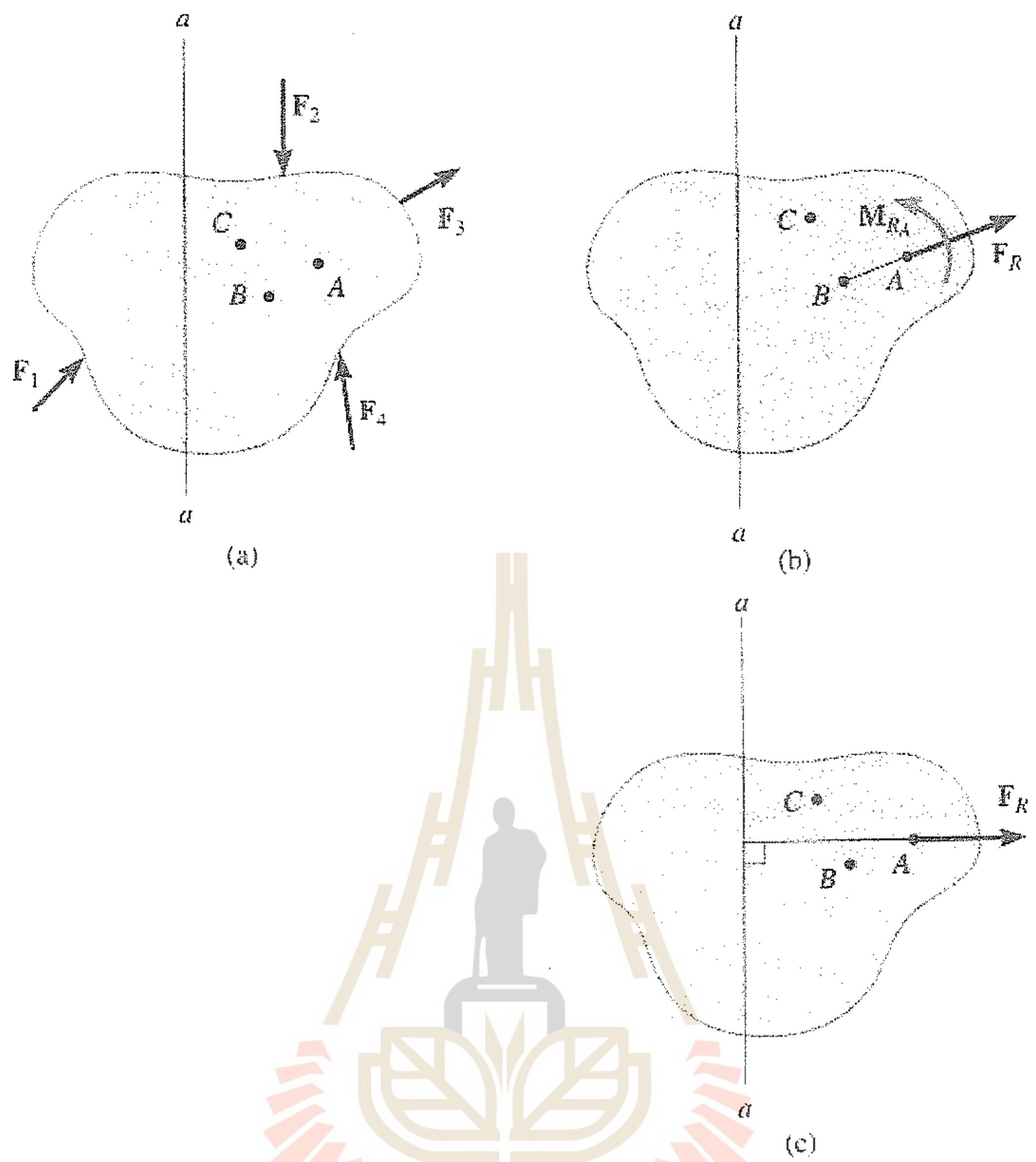
$$\vec{M}_{R_A} = \sum \vec{M}_A$$

จากรูปและจากสมการของแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ เราจะเห็นว่า

- ในการที่ $\sum M_A$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์นั้น vector ของ moment ดังกล่าวหรือ $\sum \vec{M}_A$ จะต้องมีค่าเท่ากับ $\vec{0}$
- ในการที่ $\sum \vec{F}_a$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์นั้น vector ของแรงลัพธ์ดังกล่าวหรือ $\vec{F}_R$ จะต้องไม่มีองค์ประกอบของแรงในแนวแกน $a-a$ ซึ่งหมายความว่าแนวของแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ จะต้องไม่ตั้งฉากกับแนวแกน $a-a$ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7c
- ในการที่ $\sum M_B$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อจุด B ไม่ได้อยู่ในแนวแรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ นั้น แรงลัพธ์ $\vec{F}_R$ จะต้องมีค่าเท่ากับ $\vec{0}$

ดังนั้น เราจะได้ว่า วัตถุในรูปที่ 5-7a จะอยู่ในความสมดุลเมื่อ

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \text{ และ } \sum \vec{M}_{R_A} = \vec{0}$$



รูปที่ 5-7

สมการความสมดุลของวัตถุอีกรูปแบบหนึ่งที่เราจะสามารถเขียนได้จะอยู่ในรูป

$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_B = 0$$
$$\sum M_C = 0 \qquad (5\text{-}4)$$

อย่างไรก็ตาม ในการเขียนสมการความสมดุลในรูปแบบนี้ จุด A, จุด B, และจุด C จะต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งจะสามารถพิสูจน์ได้โดยการพิจารณา free-body diagram ของวัตถุ ซึ่งถูกกระทำโดยระบบของแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7a

จากรูป แรงลัพธ์ของแรงต่างๆ ที่กระทำอยู่บน free-body diagram จะหาได้จากสมการ

$$\bar{F}_R = \sum \bar{F}$$

และ couple moment ลัพธ์ของแรงที่กระทำอยู่ที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7b จะหาได้จากสมการ

$$\bar{M}_{R_A} = \sum \bar{M}_A$$

จากรูปและจากสมการของแรงลัพธ์และ couple moment ลัพธ์ เราจะเห็นว่า

- ในการที่ $\sum M_A$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์นั้น vector ของ moment ดังกล่าวหรือ $\sum \bar{M}_{R_A}$ จะต้องมีค่าเท่ากับ $\bar{0}$
- ในการที่ $\sum M_B$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์นั้น แนวกระทำของแรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ จะต้องผ่านจุด B
- ในการที่ $\sum M_C$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อจุด C ไม่ได้อยู่ในแนวของเส้นตรง AB นั้น แรงลัพธ์ $\bar{F}_R$ จะต้องมีค่าเท่ากับ $\bar{0}$

ดังนั้น เราจะได้ว่า วัตถุในรูปที่ 5-7a จะอยู่ในความสมดุลเมื่อ

$$\sum \bar{F} = \bar{0} \text{ และ } \sum M_{R_A} = \bar{0}$$

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free body diagram

1. ตั้งระบบแกนตั้งฉาก $x-y$ ให้มีทิศทางที่เหมาะสม
2. เขียนรูปร่างของวัตถุอย่างคร่าวๆ
3. เขียนแรงและ couple moment ต่างๆ ที่กระทำอยู่บนวัตถุ
4. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ทราบค่า
5. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ไม่ทราบค่า โดยใช้สัญลักษณ์หรือตัวอักษรแทนแรงและ couple moment และให้มี sense ไปตามแกนบวก x และ y
6. หาระยะต่างๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการหาโมเมนต์

Equations of Equilibrium

7. ใช้สมการ $\sum M_O = 0$ รอบจุด O ซึ่งเป็นจุดที่เกิดจากการตัดกันของแรงที่ไม่ทราบค่าสองแรง แล้วเราจะได้ค่าของแรงหรือ couple moment ที่ไม่ทราบค่าอีกหนึ่งค่าที่เหลือ
8. ใช้สมการ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ในการหาแรงหรือ couple moment ที่ไม่ทราบค่าอีกสองค่าที่เหลือ
9. ถ้าคำตอบที่ได้จากการใช้สมการความสมดุลมีค่าเป็นลบแล้ว เราจะได้ว่า sense ของแรงหรือ couple moment มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้ในข้อที่ 4

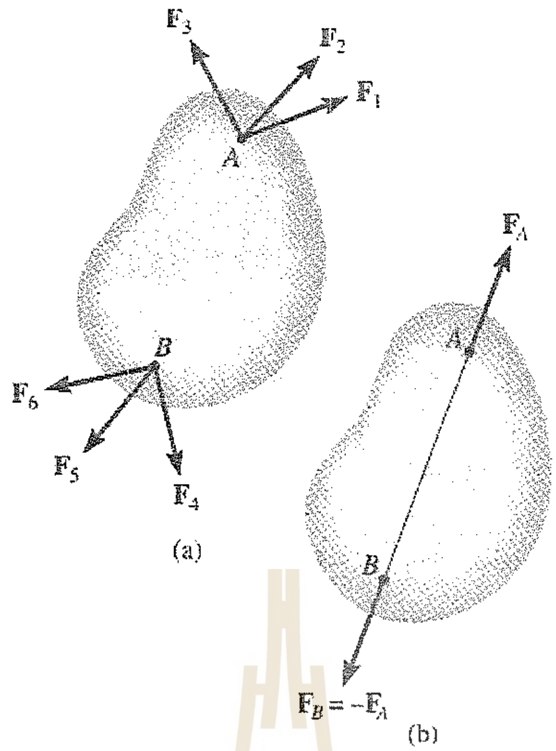
5.4 สมการความสมดุลในสองมิติของชิ้นส่วนของโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงสองแรงและสามแรง
(Equilibrium in 2-D: Two- and Three- Force Members)

ถ้าเราทราบว่าวัตถุที่เรากำลังพิจารณาอยู่เป็นชิ้นส่วนแบบใดแล้ว เราจะสามารถใช้สมการความสมดุลในการหาแรง และ/หรือ moment ที่ไม่ทราบค่าได้ง่ายขึ้น

ชิ้นส่วนของโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงสองแรง (Two- Force Members)

เมื่อชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงที่จุดใดๆ บนวัตถุสองจุด โดยที่ไม่มี couple moment กระทำอยู่เลยแล้ว เราจะเรียกชิ้นส่วนนี้ว่า ชิ้นส่วนของโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงสองแรง (two-force member)

จากรูปที่ 5-8a แรงต่างๆ ที่กระทำร่วมกันที่จุด A และจุด B จะมีแรงลัพธ์เป็น $\bar{F}_A$ และ $\bar{F}_B$ ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8b ถ้าแรงลัพธ์ $\bar{F}_A$ มีขนาดที่เท่ากับแรงลัพธ์ $\bar{F}_B$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงลัพธ์ $\bar{F}_B$ แล้ว ชิ้นส่วนดังกล่าวจะอยู่ในสมดุลของแรงหรือ $\sum \bar{F} = \bar{0}$ และเนื่องจากแรงลัพธ์ $\bar{F}_A$ อยู่ในแนวเดียว (collinear) กับแรงลัพธ์ $\bar{F}_B$ ดังนั้น ชิ้นส่วนดังกล่าวจะอยู่ในสมดุลของ moment $\sum \bar{M}_O = \bar{0}$ ด้วย



Two-force member

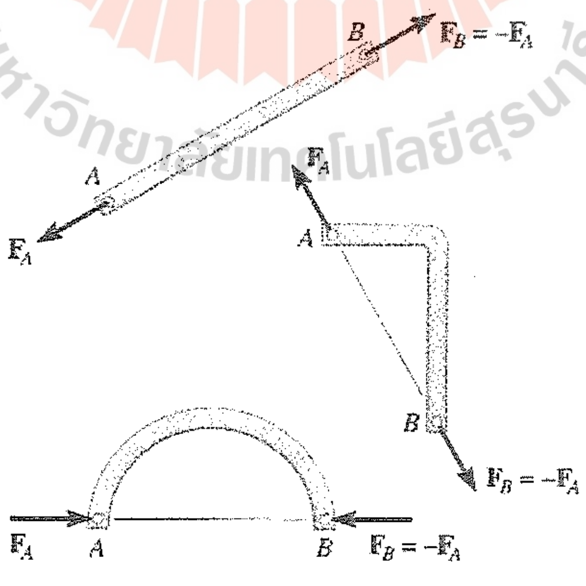
รูปที่ 5-8

รูปที่ 5-9 แสดงตัวอย่างของชิ้นส่วนของโครงสร้างและเครื่องมือกลที่มีลักษณะเป็น two-force member และอยู่ในความสมดุล ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า แรงที่กระทำต่อ two-force member จะต้องอยู่ในแนวเดียวกัน

ชิ้นส่วนของโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงสามแรง (Three-Force Members)

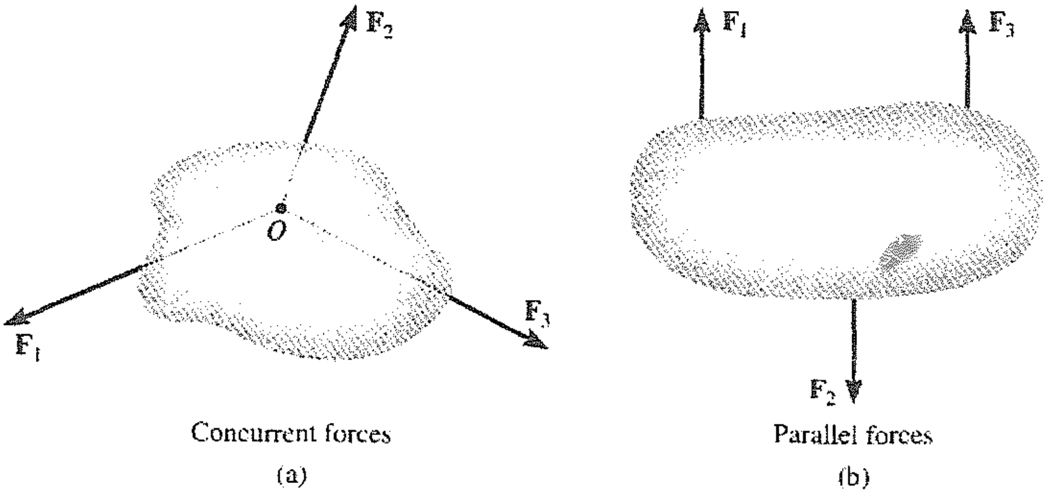
ถ้าชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงสามแรงแล้ว ชิ้นส่วนดังกล่าวจะอยู่ในความสมดุลเมื่อ

- แรงดังกล่าวกระทำร่วมกันที่จุดๆ หนึ่ง (concurrent) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-10a
- แรงดังกล่าวกระทำขนานกัน (parallel) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-10b



Two-force members

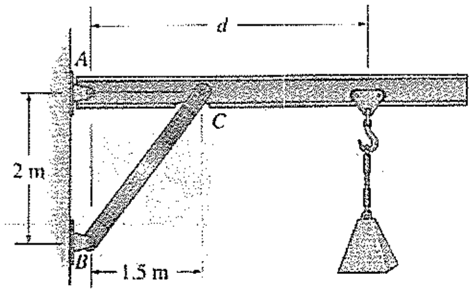
รูปที่ 5-9



Three-force members
รูปที่ 5-10

ตัวอย่างที่ 5-2 (5-31)

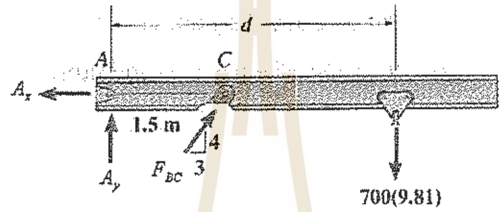
กำหนดให้ตุ้มน้ำหนักขนาด $700\,\mathrm{kg}$ สามารถเคลื่อนที่ไปตามความยาวของคานในช่วง $d = 1.7\,\mathrm{m}$ ถึง $3.5\,\mathrm{m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2 จงหาขนาดของแรงที่เกิดขึ้นในค้ำยัน BC และแรงที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A



รูปที่ Ex 5-2

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram ของคาน



จากแผนภาพ free body diagram ของคาน เราจะเห็นได้ว่า คานมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่า 3 ตัว คือ แรงปฏิกริยา A_x และ A_y และแรงที่เกิดขึ้นในค้ำยัน BC หรือ F_{BC} ซึ่งจะหาได้โดยใช้สมการความสมดุล

สมการความสมดุล

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;$

$$F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right)(1.5) - 700(9.81)(d) = 0$$

$$F_{BC} = 5722.5d \qquad \text{Ans.}$$

$\overset{+}{\rightarrow} F_x = 0;$

$$-A_x + (5722.5d)\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$A_x = 3433.5d$$

$+\uparrow F_y = 0;$

$$-A_y + (5722.5d)\left(\frac{4}{5}\right) - 700(9.81) = 0$$

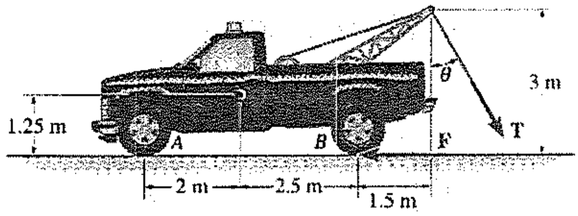
$$A_y = 4578d - 6867$$

แรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A มีค่าเท่ากับ

$$F_A = \sqrt{(3433.5d)^2 + (4578d - 6867)^2} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 5-3 (5-49)

จงหาค่าแรง T ต่ำสุด ที่จะเกิดขึ้นใน cable และมุม θ ที่จะทำให้รถบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-3 ซึ่งมีมวล $4000\,\text{kg}$ กระทำผ่านจุด center of gravity G เริ่มเกิดการกระดกขึ้น กำหนดให้รถบรรทุกถูกใส่เบรคมือและไม่มีการเลื่อนเกิดขึ้นที่ล้อ B

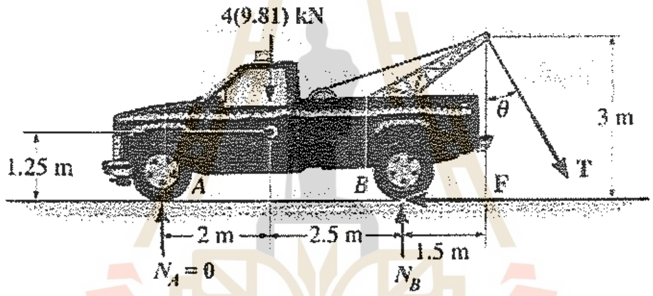


รูปที่ Ex 5-3

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

จากรูปที่ Ex 5-3 เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของรถบรรทุกได้ ดังที่แสดงในรูป เนื่องจากรถบรรทุกถูกใส่เบรคมือและไม่มีการเลื่อนเกิดขึ้นที่ล้อ B และล้อหน้าของรถบรรทุกเริ่มเกิดการกระดกขึ้น ภายใต้แรง T ต่ำสุด ดังนั้น แรง N_A ที่ล้อหน้าของรถบรรทุกจะมีค่าเท่ากับศูนย์ และเราจะเหลือค่าแรงที่ไม่ทราบค่าเพียง 3 ค่าเท่านั้น ซึ่งจะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุลของรถบรรทุก



สมการความสมดุล

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด B เราจะได้ แรง T ที่เกิดขึ้นใน cable จะอยู่ในรูปของสมการ

$\circlearrowright + \sum M_B = 0;$

$$4(9.81)(2.5) - T\sin\theta(3) - T\cos\theta(1.5) = 0$$

$$T = \frac{65.4}{\cos\theta + 2\sin\theta}$$

แรง T ดังกล่าวเป็นสมการของมุม θ ดังนั้น ในการหาค่าแรง T ต่ำสุด เราจะต้องทำการ differentiate สมการของแรง T เทียบกับมุม θ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{-65.4(-\sin\theta + 2\cos\theta)}{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2} = 0$$

$$-\sin\theta + 2\cos\theta = 0$$

ดังนั้น มุม θ ที่ทำให้แรง T มีค่าต่ำสุดและทำให้รถบรรทุกเริ่มเกิดการกระดกขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

$$\theta = \tan^{-1} 2 = 63.43^o = 63.4^o \qquad \text{Ans.}$$

และแรง T ต่ำสุดจะมีค่าเท่ากับ

$$T = \frac{65.4}{\cos 63.43^o + 2\sin 63.43^o} = 29.2\ \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

5.5 Equilibrium in 3-D: **แผนภาพ** Free-Body Diagram

เช่นเดียวกับการแก้ปัญหาของความสมดุลในสองมิติ การแก้ปัญหาสมดุลของความในสามมิติก็จะเริ่มจากการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุแล้วใช้สมการความสมดุลในการแก้ปัญหาต่อไป

แรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ (Support Reactions)

ตารางที่ 5-2 แสดงสัญลักษณ์ต่างๆ และแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นในจุดเชื่อมต่อ (connections) และจุดรองรับ (supports) ประเภทต่างๆ ที่มักจะใช้ในโครงสร้างที่อยู่ในสามมิติ

เช่นเดียวกับในกรณีของจุดรองรับในสองมิติ เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับหรือจุดเชื่อมต่อในสามมิติได้โดยสังเกตว่าจุดรองรับที่พิจารณาอยู่นั้นจะป้องกันไม่ให้เกิดเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ของวัตถุอย่างไร

- ถ้าจุดรองรับป้องกันการเลื่อน (translation) ของวัตถุในทิศทางใดแล้ว จุดรองรับดังกล่าวก็จะทำให้เกิดแรงปฏิกริยากระทำบนวัตถุในทิศทางนั้น
- ถ้าจุดรองรับป้องกันการหมุน (rotation) ของวัตถุในทิศทางใดแล้ว จุดรองรับดังกล่าวก็จะทำให้เกิด bending moment กระทำบนวัตถุในทิศทางนั้น

ยกตัวอย่างเช่น จุดรองรับแบบ ball-and-socket (4) จะป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนของชิ้นส่วนที่นำมาเชื่อมต่อในแนวแกน x, y, และ z (การหมุนของชิ้นส่วนสามารถที่จะเกิดได้อย่างอิสระ) ดังนั้น แรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นจะมีองค์ประกอบในแนวแกน x, y, และ z หรือ F_x, F_y, และ F_z และขนาดของแรงปฏิกริยาดังกล่าวจะหาได้จากสมการ

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

และมุมที่แรงปฏิกริยาดังกล่าวกระทำจะหาได้จาก coordinate direction angle α, β, และ γ ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 2

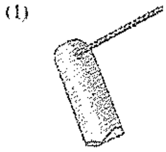
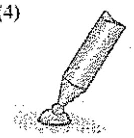
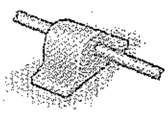
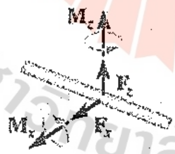
เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า จุดรองรับหรือจุดเชื่อมต่อ (5), (7), (8), และ (9) จะทำให้เกิดองค์ประกอบของแรงปฏิกริยาและ couple moment ร่วมกัน แต่ถ้าจุดรองรับเหล่านี้ถูกใช้ร่วมกับจุดรองรับแบบตลับลูกปืน (bearing) หมุด (pin) และบานพับ (hinge) โดยมีการจัดเรียงอย่างเหมาะสมแล้ว แรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับจะเพียงพอที่จะรองรับวัตถุ โดยที่ เราอาจจะไม่จำเป็นต้องหา couple moment ปฏิกริยาเลยในบางกรณี ดังที่จะเห็นได้จากตัวอย่างที่ 5.14

แผนภาพ Free-Body Diagrams

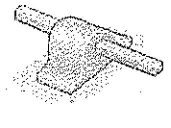
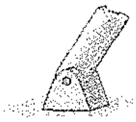
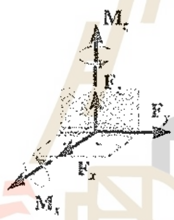
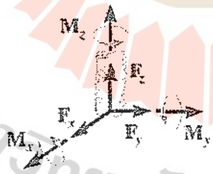
การเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุในสามมิติจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุในสองมิติ โดยจะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ใช้จินตนาการทำการแยกวัตถุที่กำลังพิจารณาอยู่ออกจากจุดยึดหรือจุดรองรับให้เป็นอิสระ (free) และทำการวาดรูปร่างของวัตถุดังกล่าวอย่างคร่าวๆ
2. กำหนดระบบแกนอ้างอิง x, y, และ z ให้เหมาะสม
3. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ทราบค่า
4. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ไม่ทราบค่า โดยใช้สัญลักษณ์หรือตัวอักษรแทนแรงและ couple moment ดังกล่าวและให้มี sense ไปตามแกนบวก x, y, และ z
5. หาระยะต่างๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการหาโมเมนต์
6. ถ้าคำตอบที่ได้จากการใช้สมการความสมดุลมีค่าเป็นลบแล้ว เราจะได้ว่า sense ของแรงหรือ couple moment มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้ในข้อที่ 3

ตารางที่ 5-2

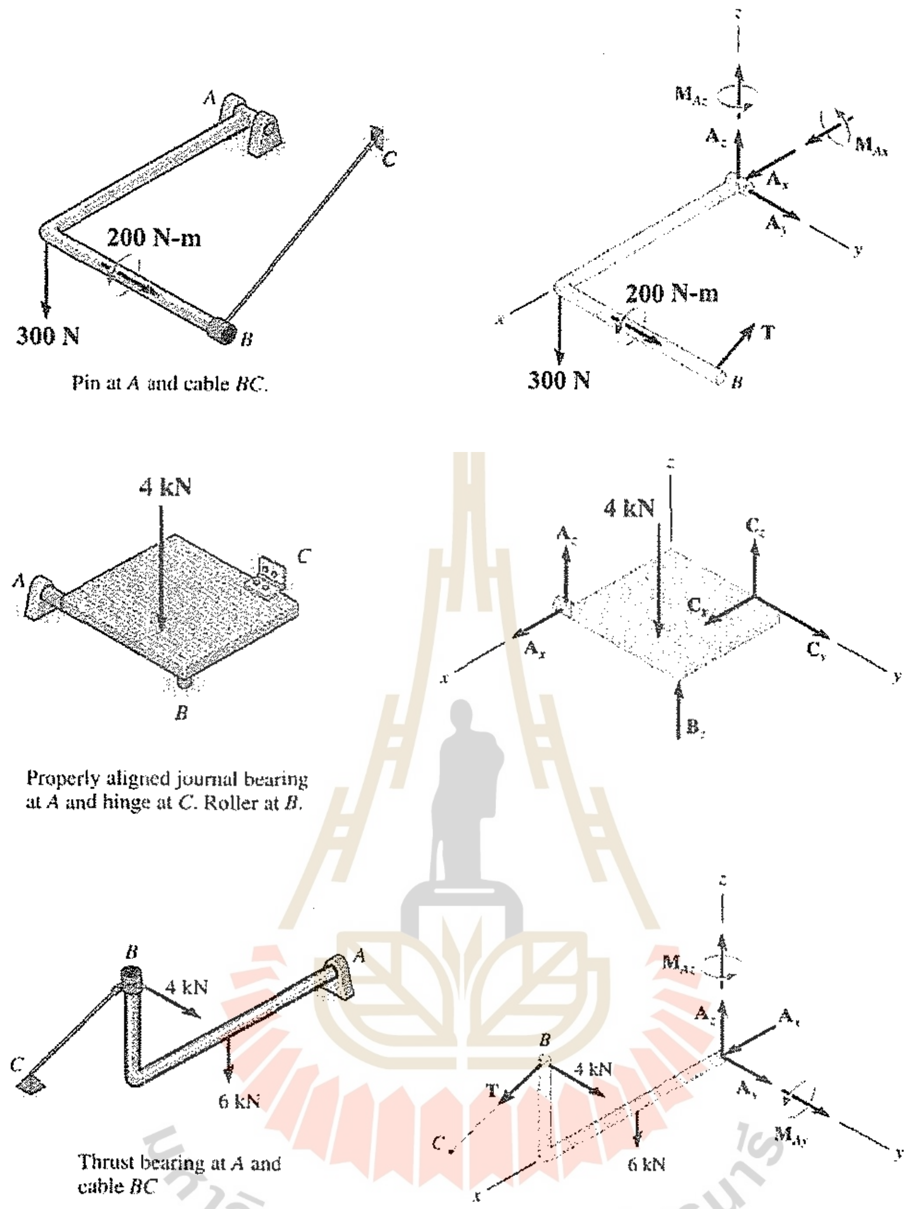
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(1)  cable		One unknown. The reaction is a force which acts away from the member in the known direction of the cable.
(2)  smooth surface support		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(3)  smooth roller		One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.
(4)  ball and socket		Three unknowns. The reactions are three rectangular force components.
(5)  single journal bearing		Four unknowns. The reactions are two force and two couple-moment components which act perpendicular to the shaft.

ตารางที่ 5-2 (ต่อ)

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(6)  single journal bearing with square shaft		Five unknowns. The reactions are two force and three couple-moment components.
(7)  single thrust bearing		Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components.
(8)  single smooth pin		Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components.
(9)  single hinge		Five unknowns. The reactions are three force and two couple-moment components.
(10)  fixed support		Six unknowns. The reactions are three force and three couple-moment components.

ตัวอย่างที่ 5-4 (Ex 5-14)

จงวาดแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-4



รูปที่ Ex 5-4

5.6 สมการของความสมดุลในสามมิติ (Equations of Equilibrium in 3-D)

สมการของความสมดุลในสามมิติในรูป vector (Vector Equations of Equilibrium)

สมการของเงื่อนไขของความสมดุลของวัตถุแกร่ง (rigid body) ในรูปของ vector จะถูกเขียนได้ในรูป

$$\sum \bar{F} = \bar{0} \tag{5-5}$$
$$\sum \bar{M}_O = \bar{0}$$

เมื่อ

$\sum \bar{F}$ เป็นผลรวมของ vector ของแรงภายนอกที่กระทำอยู่บนวัตถุ

$\sum \bar{M}_O$ เป็นผลรวมของ couple moment และ moment ของแรงต่างๆ ที่กระทำอยู่บนวัตถุรอบจุด O ที่อยู่บนตัววัตถุหรือนอกตัววัตถุก็ได้

สมการของความสมดุลในสามมิติในรูป scalar (Scalar Equations of Equilibrium)

เมื่อแรงและ couple moment ที่กระทำอยู่บนวัตถุสามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ vector ในระบบแกนตั้งฉาก (Cartesian coordinate system) ได้แล้ว จากสมการที่ 5-5 เราจะได้ว่า

$$\sum \bar{F} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k} = \bar{0}$$
$$\sum \bar{M}_O = \sum M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} = \bar{0}$$

โดยที่ $\hat{i}$, $\hat{j}$, และ $\hat{k}$ เป็น unit vector ในแนวแกน x , y , และ z ซึ่งจากสมการทั้งสองนี้ เราจะได้ว่า

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0 \tag{5-6a}$$

และ

$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_y = 0$$
$$\sum M_z = 0 \tag{5-6b}$$

สมการทั้งหกสมการนี้จะถูกใช้ในการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจำนวนหกค่าจากแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุในสามมิติ

5.7 การยึดรั้งของวัตถุแกร่ง (Constraints for a Rigid Body)

ในการที่วัตถุแกร่งจะอยู่ในความสมดุลได้นั้น นอกจากวัตถุแกร่งดังกล่าวจะต้องอยู่ในสภาวะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการความสมดุลแล้ว วัตถุแกร่งจะต้องถูกรองรับและถูกยึดรั้ง (constrained) เข้ากับจุดรองรับหรือจุดเชื่อมต่ออย่างเหมาะสมและเพียงพอ

การยึดรั้งที่เกินจำเป็น (Redundant Constraints)

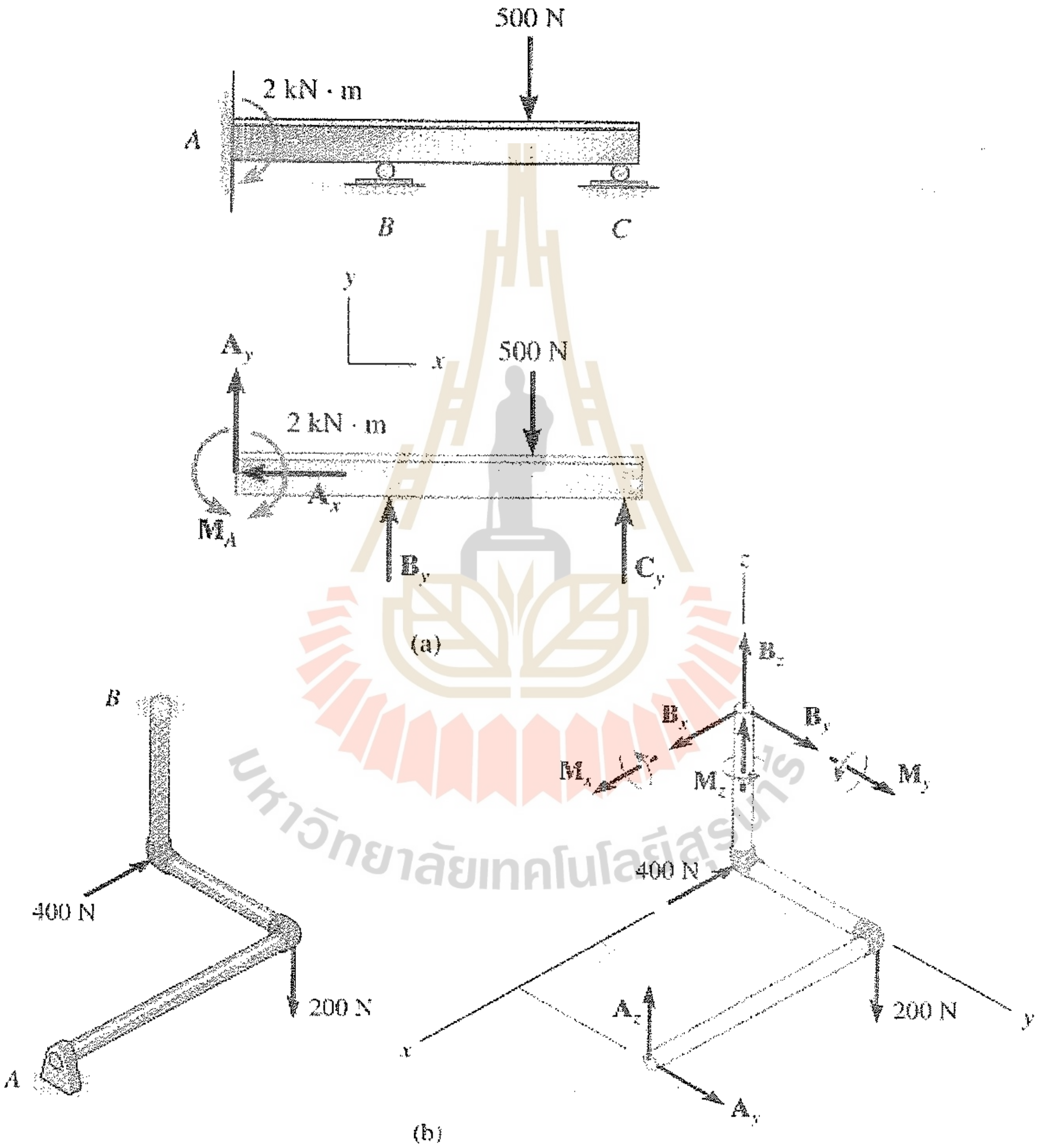
ถ้าค่าของแรงและ moment ภายในวัตถุ เนื่องจากการกระทำของแรงสามารถหามาได้โดยใช้สมการความสมดุลเพียงอย่างเดียวแล้ว วัตถุดังกล่าวจะอยู่ในสภาวะที่เรียกว่า statically determinate แต่ถ้าวัตถุมีแรงและ moment ที่ไม่ทราบค่า (unknown forces และ moments) มากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลแล้ว วัตถุดังกล่าวจะอยู่ในสภาวะที่เรียกว่า statically indeterminate

รูปที่ 5-11a และ 5-11b แสดงตัวอย่างของวัตถุที่อยู่ในสภาวะ statically indeterminate ในสองมิติและสามมิติตามลำดับ

จากรูปที่ 5-11a คานซึ่งถูกรองรับแบบยึดแน่นที่จุด A และถูกรองรับโดย roller ที่จุด B และจุด C จะมีแรงและ moment ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 5 ค่าคือ M_A , A_x , A_y , B_y , และ C_y แต่เนื่องจากเรามีสมการความสม

ดุลเพียงสามสมการคือ $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, และ $\sum M_O = 0$ ดังนั้น คานดังกล่าวจะเป็นโครงสร้างที่ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าสองตัว และเราจะต้องหาสมการเพิ่มขึ้นอีกสองสมการเพื่อที่จะใช้ในการวิเคราะห์หาค่าของแรงและ moment ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว สมการดังกล่าวจะหามาได้โดยใช้เงื่อนไขของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับและเราจะได้ศึกษาต่อไปในวิชาอื่นๆ ต่อไป

ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน จากการพิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุในรูปที่ 5-11b เราจะเห็นว่าวัตถุดังกล่าวมีจำนวนของแรงและ moment ปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 8 ค่า แต่เรามีสมการความสมดุลเพียงหกสมการ ดังนั้น วัตถุดังกล่าวจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าสองค่า



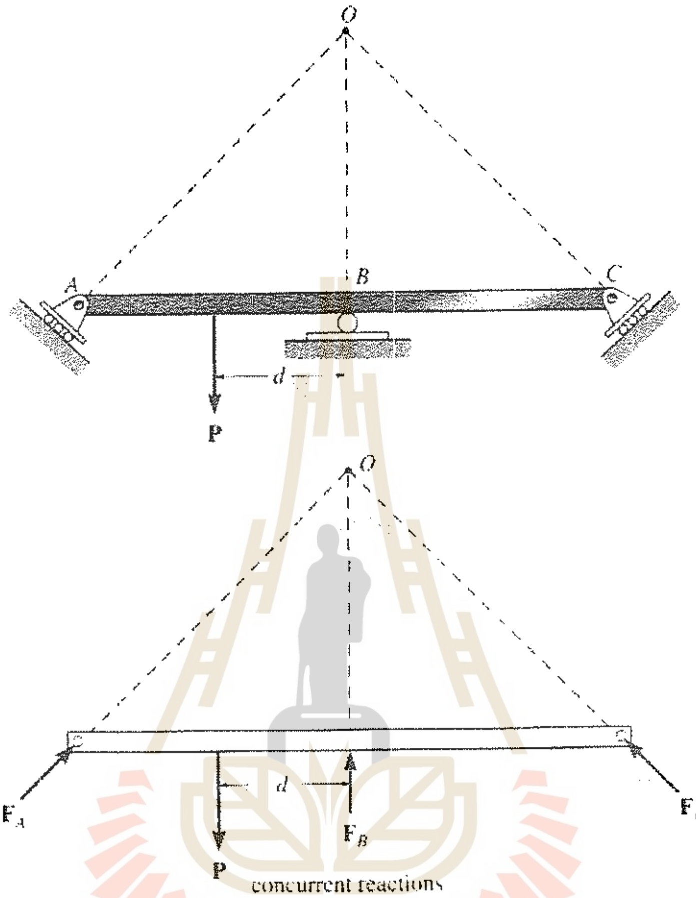
รูปที่ 5-11

การยึดรั้งอย่างไม่เหมาะสม (Improper Constraints)

ในบางกรณี เมื่อวัตถุมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุลแล้ว วัตถุดังกล่าวอาจจะไม่มีเสถียรภาพก็ได้ถ้าวัตถุนั้นมีการรองรับและการยึดรั้ง (constraints) ที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งเราสามารถที่จะแบ่งการรองรับและการยึดที่ไม่ถูกต้องนี้ออกได้เป็น 2 แบบคือ

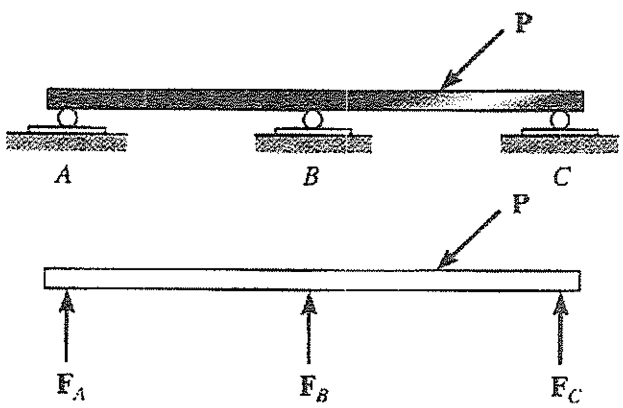
1. Improper Constraints

การยึดวัตถุอย่างไม่เหมาะสม (improper constraints) เป็นการที่วัตถุมีจำนวนของแรงและ moment ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุล แต่วัตถุขาดเสถียรภาพเนื่องจากว่าวัตถุนั้นถูกยึดเข้ากับโครงสร้างหรือวัตถุอื่นๆ อย่างไม่เหมาะสม ดังที่แสดงในรูปที่ 5-12 จากแผนภาพ free body diagram เราจะเห็นว่า คานในรูปที่ 5-12 ขาดเสถียรภาพเนื่องจาก $\sum M_o \neq 0$ ซึ่งทำให้เกิดการหมุนของคานรอบจุด O



รูปที่ 5-12

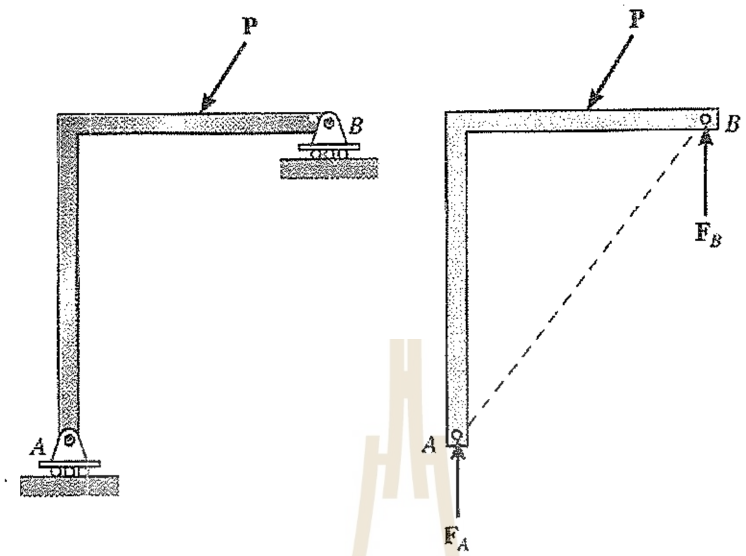
อีกกรณีหนึ่งของการยึดวัตถุอย่างไม่เหมาะสมคือ การที่วัตถุมีแรงปฏิกิริยาที่ขนานกัน (parallel reactive forces) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13 เมื่อคานถูกกระทำโดยแรง P แล้ว จากแผนภาพ free body diagram เราจะเห็นได้ว่า $\sum F_x \neq 0$ และวัตถุจะเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x



รูปที่ 5-13

2. Partial Constraints

การยึดวัตถุอย่างเพียงบางส่วน (partial constraints) เป็นการที่วัตถุมีแรงและ moment ปฏิกริยาที่*น้อยกว่า*สมการความสมดุล ดังเช่นโครงข้อแข็ง (frame) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-14 เมื่อพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อแข็งแล้ว เราจะเห็นว่า $\sum F_x \neq 0$ ดังนั้น วัตถุจึงไม่อยู่ในสมดุลในแนวแกน x



รูปที่ 5-14

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free body diagram

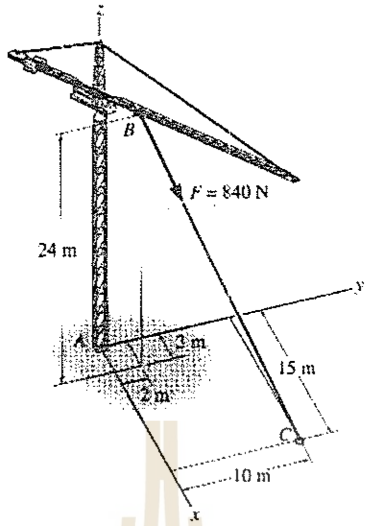
เขียนแผนภาพ free-body diagram ตามขั้นตอนที่ได้กล่าวถึงใน section ที่ 5.5

Equations of Equilibrium

1. ถ้าเราสามารถหาองค์ประกอบของแรงและ moment ในแนวแกน x, y, และ z ได้โดยง่ายแล้ว เราจะใช้สมการสมดุลที่อยู่ในรูปของ scalar (สมการที่ 5-6a และ 5-6b) ทั้งหกสมการในการหาค่าขององค์ประกอบของแรงและ moment ถ้าไม่เช่นนั้นแล้ว เราจะใช้สมการสมดุลที่อยู่ในรูปของ vector แทน
2. เขียนสมการสมดุลของแรง
3. เขียนสมการสมดุลของ moment โดยพยายามเลือกแกนที่แรงที่ไม่ทราบค่าตัดกันมากที่สุด เพื่อที่แรงเหล่านี้จะไม่ปรากฏอยู่ในสมการ
4. ถ้าคำตอบที่ได้จากการใช้สมการความสมดุลมีค่าเป็นลบแล้ว เราจะได้ว่า sense ของแรงหรือของ couple moment จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้ในแผนภาพ free-body diagram

ตัวอย่างที่ 5-5 (5-64)

กำหนดให้ cable BC ของ tower crane ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-5 มีแรงดึง $F = 840\ \mathrm{N}$ จงหาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ของ tower crane

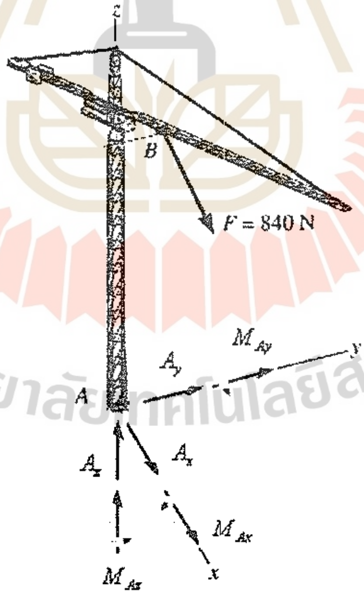


รูปที่ Ex 5-5

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของ tower crane ดังที่แสดงในรูป เนื่องจากจุดรองรับ A ของ tower crane เป็นแบบยึดแน่น (fixed support) ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A จึงมีทั้งหมด 6 ค่า ซ7j'จะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุลของ tower crane



สมการความสมดุล

หา Cartesian vector ของแรงดึง $F = 840\ \mathrm{N}$ จาก position vector ของแรง โดยที่

$$\bar{r}_{BC} = 12\hat{i} + 8\hat{j} - 24\hat{k}\quad \mathrm{m}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\bar{F} = 840\left[\frac{12\hat{i} + 8\hat{j} - 24\hat{k}}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-24)^2}}\right] = 360\hat{i} + 240\hat{j} - 720\hat{k}\ \mathrm{N}$$

เราสามารถเขียน vector ของแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ได้ในรูป

$$\vec{F}_A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

จากสมการความสมดุลของแรง

$\sum \vec{F} = 0;$ $$\vec{F} + \vec{F}_A = 0$$

องค์ประกอบของแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A มีค่าเท่ากับ

$$A_x = -360 \text{ N}$$ Ans.

$$A_y = -240 \text{ N}$$ Ans.

$$A_z = 720 \text{ N}$$ Ans.

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุดรองรับ A

$\sum \vec{M} = 0;$ $$\vec{M}_A + \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = 0$$

Position vector จากจุด A ไปยังจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\vec{r}_{BC} = 15\hat{i} + 10\hat{j} \text{ m}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\vec{M}_A + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 15 & 10 & 0 \\ 360 & 240 & -720 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{M}_A - 7200\hat{i} + 10800\hat{j} = 0$$

องค์ประกอบของโมเมนต์ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A มีค่าเท่ากับ

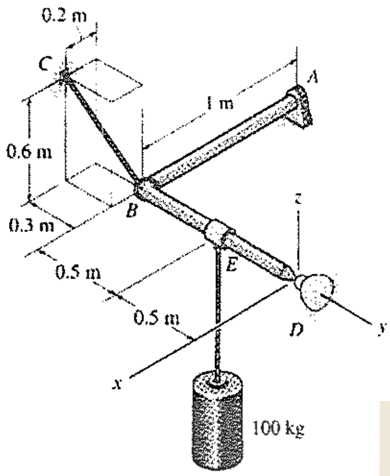
$$M_{Ax} = 7.20 \text{ kN-m}$$ Ans.

$$M_{Ay} = -10.8 \text{ kN-m}$$ Ans.

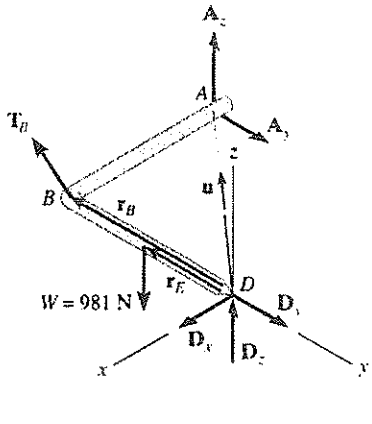
$$M_{Az} = 0$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 5-6 (Ex 5-19)

ข้องอ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6 ถูกรองรับโดย journal bearing ที่จุด A โดย ball-and-socket ที่จุด D และโดย cable BC ที่จุด B จงหาแรงที่เกิดขึ้นใน cable เนื่องจากตุ้มน้ำหนักขนาด $100\,\text{kg}$



(a)



(b)

รูปที่ Ex 5-6

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของข้องอ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6 ซึ่งเราจะพบว่า ข้องอมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งสิ้น 6 ค่าเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุล โดยที่เป็นแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับทั้งหมด 5 ค่า และแรงตึงใน cable 1 ค่า

สมการความสมดุล

ในที่นี้ เราสามารถหาแรงตึงใน cable ได้โดยตรง โดยใช้สมการสมดุลของโมเมนต์รอบเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และจุด D หรือ

$$\sum M_{DA} = \vec{u}.(\vec{r}_B \times \vec{T}_B + \vec{r}_E \times \vec{W}) = 0$$

Unit vector ของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และจุด D จะอยู่ในรูป

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{DA}}{r_{DA}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} = -0.707\hat{i} - 0.707\hat{j}$$

Position vector ของแรงตึงใน cable และน้ำหนักของตุ้มน้ำหนัก

$$\vec{r}_B = -\hat{j}$$

$$\vec{r}_E = -0.5\hat{j}$$

Cartesian vector ของแรงตึงใน cable T_B และน้ำหนักของตุ้มน้ำหนัก

$$\vec{r}_{BC} = 0.2\hat{i} - 0.3\hat{j} + 0.6\hat{k}$$

$$r_{BC} = 0.7\text{ m}$$

$$\vec{T}_B = T_B\frac{\vec{r}_{BC}}{r_{BC}} = \frac{2}{7}T_B\hat{i} - \frac{3}{7}T_B\hat{j} + \frac{6}{7}T_B\hat{k}$$

$$\vec{W} = -981\hat{k}$$

เมื่อทำการแทนค่าของ Unit vector, Position vector, และ vector ของแรงลงในสมการของโมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$T_B = 572\text{ N}$$ Ans.

บทที่ 6

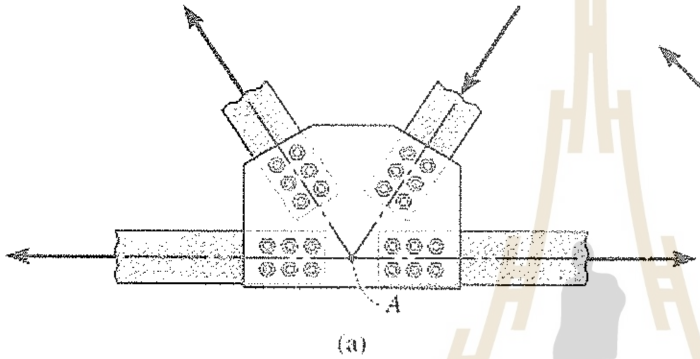
Structural Analysis

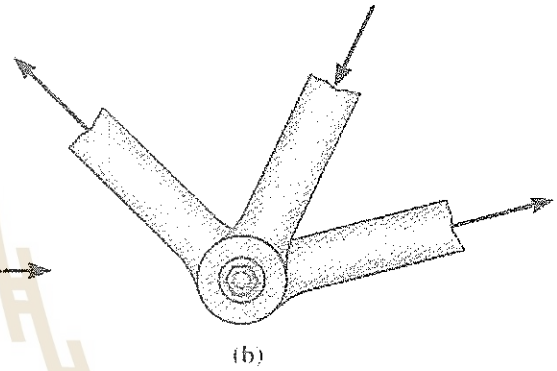
จุดประสงค์

1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาค่าแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน (truss) โดยวิธีการตัดจุดต่อ (method of joints) และวิธีการตัดหน้าตัด (method of sections)
2. เพื่อที่จะสามารถวิเคราะห์หาค่าแรงและ moment ที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของ frames และของเครื่องจักรกล (machines) ได้

6.1 โครงข้อหมุนอย่างง่าย (Simple Trusses)

โครงข้อหมุน (trusses) เป็นโครงสร้างที่ได้จากการนำชิ้นส่วนที่ยาวเรียวมาเชื่อมต่อกันที่ปลาย โดยการเชื่อมต่ออาจจะเป็นการเชื่อม (welding) ชิ้นส่วนเหล่านี้เข้าด้วยกันผ่านทางแผ่นประกับ (gusset plates) ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-1a หรืออาจจะเป็นการยึดติดโดยสลักเกลียวเข้าด้วยกันโดยตรง ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-1b





รูปที่ 6-1

โครงข้อหมุนที่อยู่ในระนาบ (Planar Trusses)

Planar truss เป็นโครงข้อหมุนที่มีชิ้นส่วนต่างๆ วางอยู่ในระนาบเดียวกันและมักจะใช้ในการรองรับหลังคา (roof) หรือสะพาน

โครงข้อหมุน $ABCDE$ ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-2 จะเป็นโครงข้อหมุนที่ใช้ในการรองรับหลังคา (roof truss) ของอาคารและโรงงานต่างๆ จากรูป แรงที่กระทำบนหลังคาจะถ่ายลงมาที่แป (purlins) เช่น แป DD' เป็นต้น จากนั้น แรงที่กระทำต่อแปก็จะถ่ายมาลงที่จุดเชื่อมต่อ (joints) ของโครงข้อหมุน เนื่องจากแรงที่กระทำต่อโครงข้อหมุนอยู่ในระนาบเดียวกันกับโครงข้อหมุน ดังนั้น การวิเคราะห์หาแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะเป็นการวิเคราะห์แบบสองมิติ

รูปที่ 6-3 แสดงโครงข้อหมุนที่ใช้ในโครงสร้างของสะพาน (bridge truss) ที่พบเห็นโดยทั่วไป จากรูป เราจะเห็นได้ว่า แรงที่กระทำอยู่บนพื้นของสะพาน (bridge deck) จะถ่ายมาลงที่คานซอย (stringers) เป็นลำดับแรก จากนั้น แรงที่กระทำอยู่บนคานซอยก็จะถ่ายต่อไปที่คานรองรับพื้น (floor beams) จากนั้น แรงที่กระทำต่อคานรองรับพื้นก็จะถ่ายลงที่จุดเชื่อมต่อ (joints) ของโครงข้อหมุน และสุดท้าย แรงกระทำทั้งหมดจะถูกถ่ายลงสู่จุดรองรับของโครงข้อหมุนดังกล่าว

สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน (Assumptions for Truss Analysis)

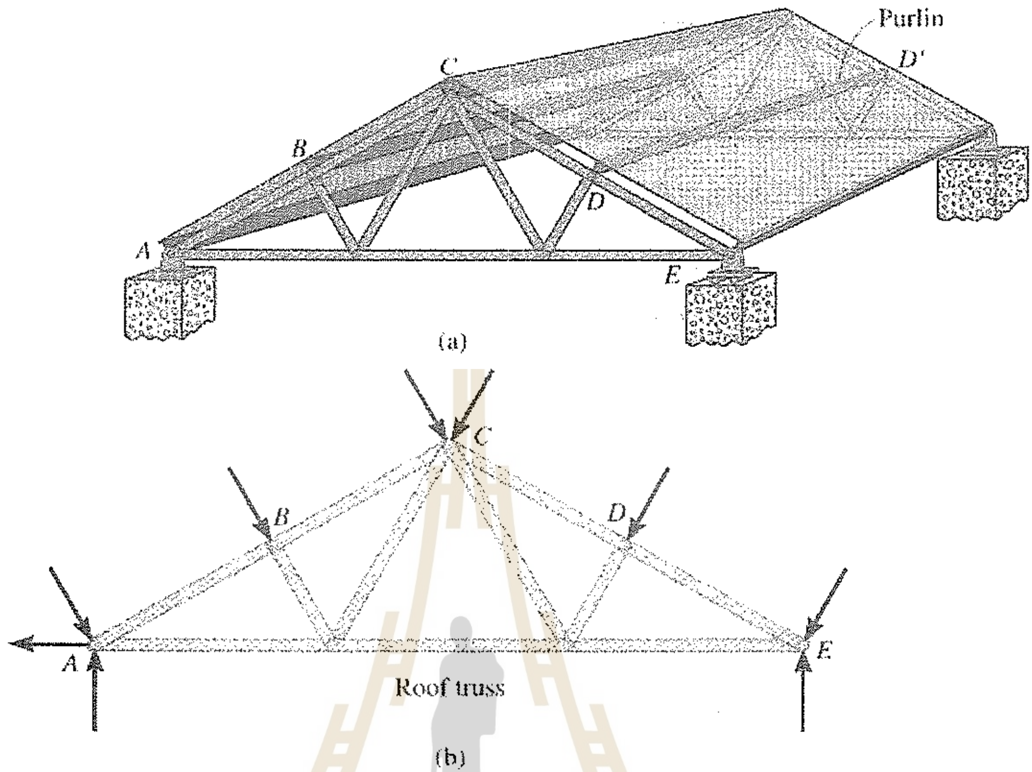
ก่อนที่เราจะทำการออกแบบโครงข้อหมุนได้นั้น เราจะต้องหาแรงภายในที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนก่อน โดยจะใช้สมมุติฐาน 2 ข้อในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนคือ

1. ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกเชื่อมต่อกันด้วยหมุนที่ไร้แรงเสียดทาน (frictionless pin)

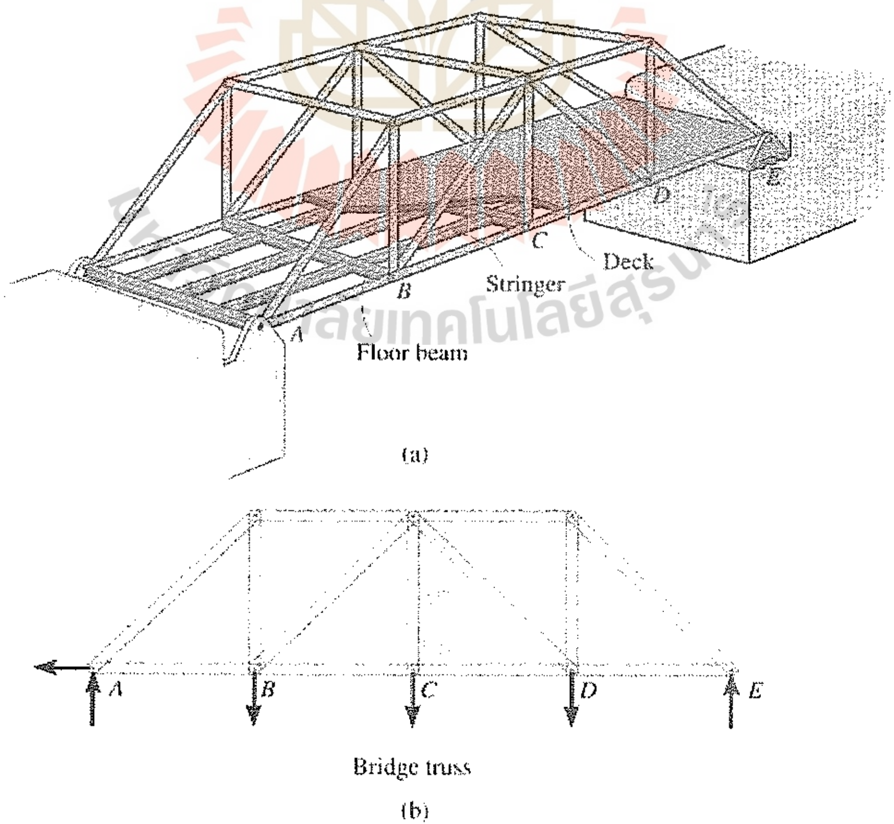
ข้อสมมุติฐานนี้จะถูกต้องเมื่อชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนมีการเชื่อมต่อโดยใช้สลักเกลียว (bolting) หรือโดยการเชื่อม (welding) และมีแนว center lines ของแต่ละชิ้นส่วนตัดกันที่จุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1

2. แรงกระทำภายนอกหรือน้ำหนักบรรทุกจะกระทำต่อโครงข้อหมุนที่จุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุนเท่านั้น

ข้อสมมุติฐานนี้จะถูกต้องเมื่อน้ำหนักของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงข้อหมุน ตัวอย่างของโครงข้อหมุนที่มีแรงภายนอกกระทำเช่นนี้จะเห็นได้จาก roof truss ในรูปที่ 6-2 และ bridge truss ในรูปที่ 6-3

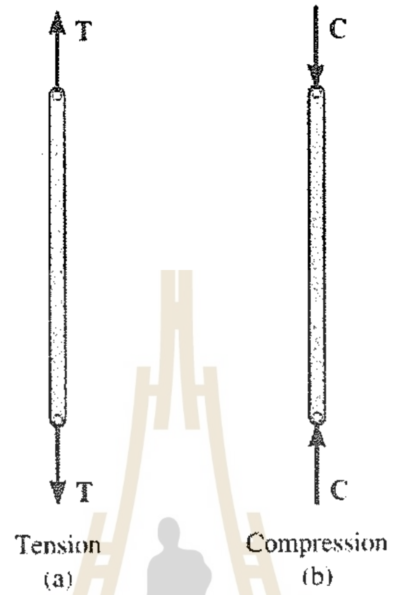


รูปที่ 6-2



รูปที่ 6-3

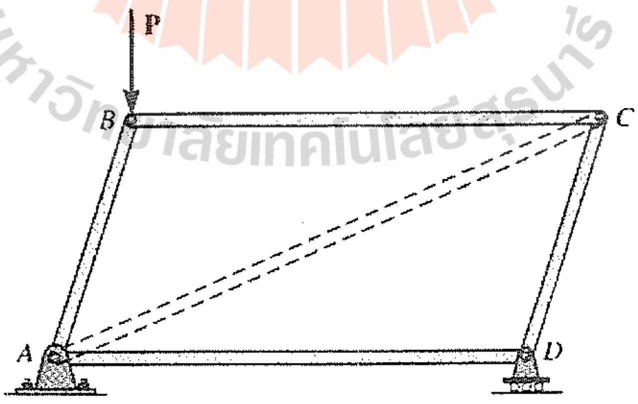
จากสมมุติฐานทั้งสองข้อ เราจะได้ว่า ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน (axial force) ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเท่านั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 6-4a ในกรณีของแรงดึง T (tensile force) และรูปที่ 6-4b ในกรณีของแรงกดอัด C (compressive force) เราควรที่จะทราบด้วยว่า ถ้าชิ้นส่วนดังกล่าวมีความยาวเท่ากันและรับแรงดึงและแรงกดอัดที่มีขนาดเท่ากันแล้ว ชิ้นส่วนที่รับแรงกดอัดมักจะมีหน้าตัดที่ใหญ่กว่าชิ้นส่วนที่รับแรงดึง เพราะว่าการโก่งเดาะ (buckling) มักจะเกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่รับแรงกดอัด ซึ่งจะทำให้ชิ้นส่วนดังกล่าวขาดเสถียรภาพในการรับแรงกดอัด



รูปที่ 6-4

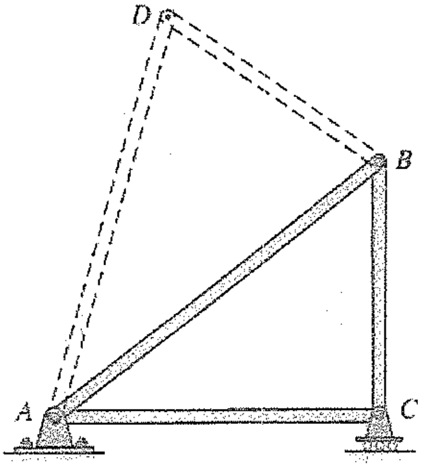
โครงข้อหมุนอย่างง่าย (Simple Trusses)

พิจารณารูปที่ 6-5 เราจะเห็นว่า ถ้าโครงสร้าง $ABCD$ ซึ่งประกอบด้วยแท่งเหล็ก 4 แท่งเชื่อมต่อกันด้วยหมุดไม่มีชิ้นส่วนในแนวทแยง AC (ดังที่แสดงโดยเส้นประ) แล้ว โครงสร้างดังกล่าวจะไม่มีความสามารถในการรับแรงกระทำ P และจะเกิดการวิบัติ (collapse) โดยการยุบตัว ดังนั้น รูปแบบของโครงข้อหมุนแบบพื้นฐานที่สุด ที่มีทั้งความแกร่ง (rigidity) และเสถียรภาพ (stability) จะต้องมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังที่แสดงในรูปที่ 6-6



รูปที่ 6-5

จากรูปที่ 6-6 เมื่อโครงข้อหมุนถูกสร้างขึ้นโดยเริ่มจากโครงข้อหมุนที่มีรูปร่างเป็นสามเหลี่ยม ABC แล้ว โครงข้อหมุนดังกล่าวจะถูกขยายออกได้โดยการเพิ่มชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนทีละ 2 ชิ้น เช่น ชิ้นส่วน AD และชิ้นส่วน BD เป็นต้น ซึ่งจะทำให้เกิดจุดเชื่อมต่อ (joint) เพิ่มขึ้นมา 1 จุดเชื่อมต่อ โครงข้อหมุนที่มีลักษณะดังกล่าวจะถูกเรียกว่า โครงข้อหมุนอย่างง่ายหรือ simple truss

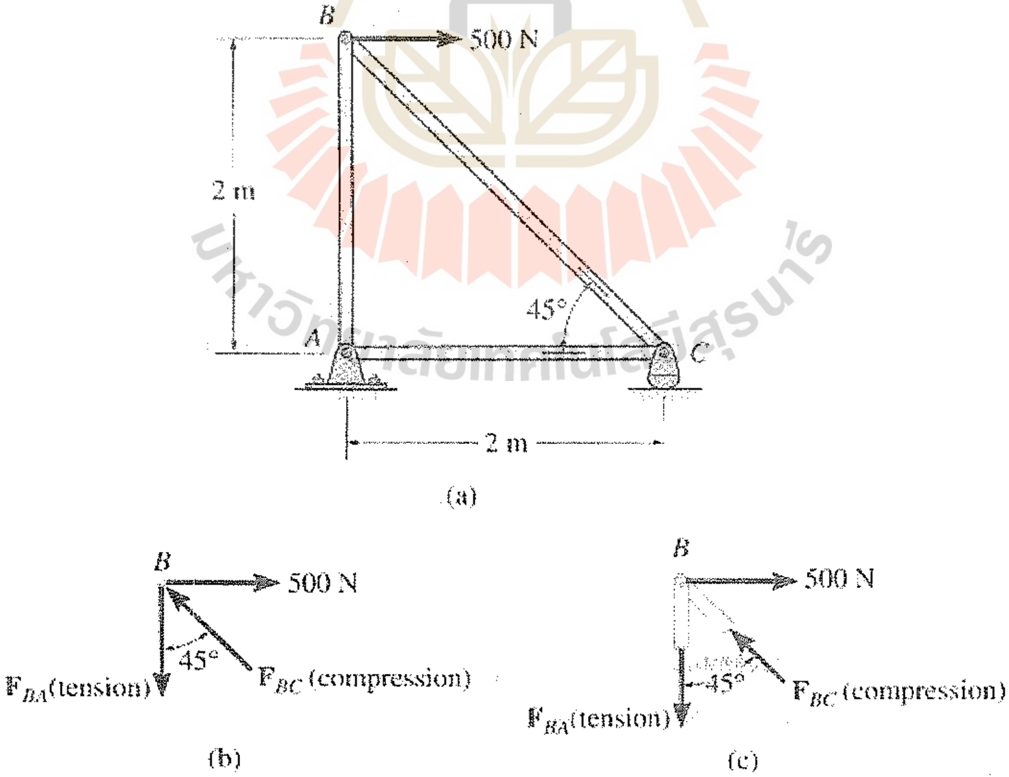


รูปที่ 6-6

6.2 วิธีการตัดจุดต่อ (The Method of Joints)

เมื่อโครงข้อหมุนอยู่ในความสมดุลแล้ว จุดเชื่อมต่อ (joints) ของโครงข้อหมุนก็จะอยู่ในความสมดุลด้วย การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีการตัดจุดต่อ (method of joints) จะเป็นการพิจารณาเงื่อนไขความสมดุลของแรง $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ที่จุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุน

ในวิธีการนี้ หลังจากที่เราคำนวณหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ (supports) ของโครงข้อหมุนได้แล้ว เราจะทำการวาดแผนภาพ free body diagram ของจุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-7 จากนั้น ใช้สมการความสมดุลของจุดเชื่อมต่อหาค่าของแรงที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อ โดยจะเริ่มจากจุดเชื่อมต่อที่มีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่า (unknown forces) เพียงค่าเดียวหรืออย่างมากที่สุด 2 ค่า



รูปที่ 6-7

โดยทั่วไปแล้ว ในการวิเคราะห์หาแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะทำได้โดยการสมมุติให้แรงภายในที่เราไม่ทราบค่ามีทิศทางเป็นแรงดึง ดังนั้น ถ้าค่าแรงที่คำนวณได้มีค่าเป็นบวกแล้ว แรงนั้นก็จะเป็นแรงดึงและถ้าค่าแรงที่คำนวณได้มีค่าเป็นลบแล้ว แรงนั้นก็จะเป็นแรงอัด จากนั้น เราจะใช้ทิศทางและขนาดของแรงที่เราหาได้ดังกล่าวกระทำต่อจุดเชื่อมต่ออันต่อๆ ไป แล้วทำการวิเคราะห์หาค่าแรงที่ไม่ทราบค่าที่จุดเชื่อมต่อเหล่านั้นจนครบทุกจุด

อีกวิธีการหนึ่งที่จะช่วยเราในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนได้ง่ายขึ้นก็คือ การสังเกตการรับแรงของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ซึ่งต้องอาศัยความเข้าใจเป็นหลัก เช่น พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ B ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-7b ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า แรง F_{BC} ควรที่จะเป็นแรงกดอัดที่กระทำต่อจุดเชื่อมต่อ B เนื่องจากว่าแรงในแนวแกนนอน $F_{BC}\sin 45^o$ จะต้องมีค่าเท่ากับ $500\ \mathrm{N}$ เพื่อที่จะทำให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวนอน และแรงในแนวแกนตั้ง F_{BA} จะต้องเป็นแรงดึงที่มีค่าเท่ากับแรงในแนวแกนตั้ง $F_{BC}\cos 45^o$ เพื่อที่จะทำให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวแกนตั้ง

ถ้าเป็นไปได้ เราควรที่จะใช้วิธีการหาทิศทางของแรงที่เกิดขึ้นในโครงข้อหมุนทั้งสองวิธีร่วมกันในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน

ขั้นตอนในวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีการตัดจุดต่อ

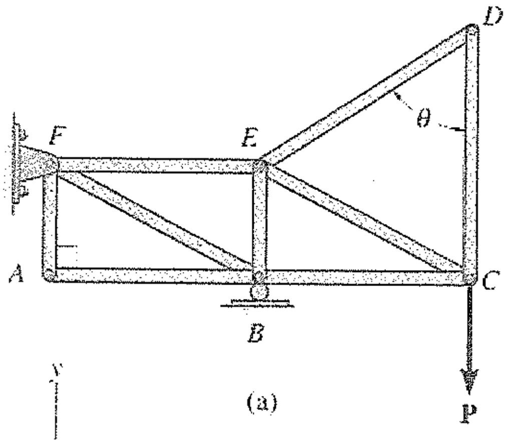
โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีการตัดจุดต่อ (method of joints) จะมีขั้นตอนดังนี้

1. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อหมุน และหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อหมุน
2. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของจุดเชื่อมต่อ (joint) ที่มีจำนวนของแรงที่ทราบค่าอย่างน้อยหนึ่งแรงและมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าไม่เกินสองแรง
3. ใช้วิธีการที่กล่าวถึงข้างต้นในการเขียนนัย (sense) ของแรงที่ไม่ทราบค่า
4. วางแกน x และแกน y ให้อยู่ในลักษณะที่เราสามารถที่จะแตกแรงให้อยู่ในแนวแกน x และแกน y ได้ง่าย จากนั้น ทำการเขียนสมการสมดุลของแรง $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ที่จุดเชื่อมต่อและทำการแก้สมการเพื่อหาค่าของแรงที่ไม่ทราบค่าและตรวจสอบความถูกต้องของ sense ของแรงที่ได้
5. ทำการวิเคราะห์หาแรงที่จุดเชื่อมต่ออื่นๆ ที่มีจำนวนของแรงที่ทราบค่าอย่างน้อยหนึ่งแรงและจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าไม่เกินสองแรง จนครบทุกจุดเชื่อมต่อแล้ว สุดท้าย ทำการตรวจสอบว่า ค่าของแรงที่จุดเชื่อมต่อสุดท้ายว่าสอดคล้องกับสมการสมดุลของแรง $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ หรือไม่ ถ้าถูกต้อง แสดงว่าผลที่ได้จากการวิเคราะห์ถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้อง เราจะต้องทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนใหม่จนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว

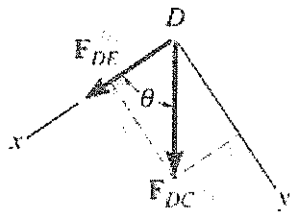
6.3 ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์ (Zero-Force Members)

การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีตัดจุดเชื่อมต่อ (method of joints) จะกระทำได้ง่ายขึ้นมาก ถ้าเราสามารถหาชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์ (zero-force members) ได้จากการสังเกตโดยใช้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ถ้าจุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุนเป็นจุดเชื่อมต่อที่มีชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเพียง 2 ชิ้นมาเชื่อมต่อกันและไม่ถูกกระทำโดยแรงภายนอกหรือแรงปฏิกิริยาที่จุดเชื่อมต่อดังกล่าวแล้ว ชิ้นส่วนทั้งสองของโครงข้อหมุนจะเป็นชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์ เช่น ชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันที่จุดเชื่อมต่อ A และจุดเชื่อมต่อ D ในรูปที่ 6-8a เป็นต้น จากการใช้วิธีตัดจุดเชื่อมต่อที่จุดเชื่อมต่อทั้งสอง ดังที่แสดงในรูปที่ 6-8b และ 6-8c เราจะเห็นได้ว่า แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่จุดเชื่อมต่อทั้งสองนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ในการที่จะรองรับแรง P โครงข้อหมุนนี้จะสามารถลดรูปได้เป็นโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-8d

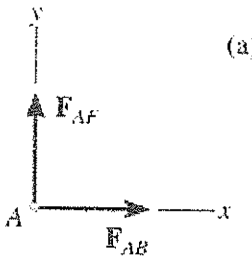


(a)



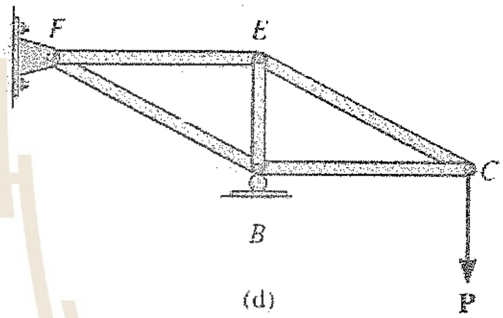
$+\searrow \Sigma F_y = 0$: $F_{DC} \sin\theta = 0$: $F_{DC} = 0$ since $\sin\theta \neq 0$
$+\swarrow \Sigma F_x = 0$: $F_{DE} + 0 = 0$: $F_{DE} = 0$

(c)



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\ F_{AB} = 0$
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ F_{AF} = 0$

(b)

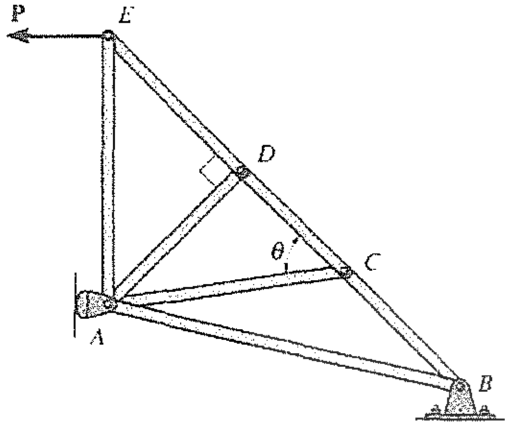


(d)

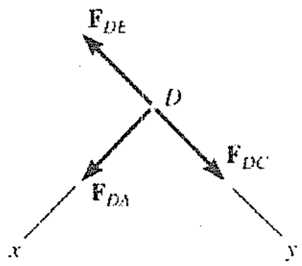
รูปที่ 6-8

2. ถ้าจุดเชื่อมต่อของโครงข้อหมุนเป็นจุดเชื่อมต่อที่มีชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน 3 ชิ้นส่วนมาเชื่อมต่อกัน โดยที่ 2 ใน 3 ของชิ้นส่วนเหล่านั้นวางอยู่ในแนวเดียวกันและไม่มีแรงภายนอกหรือแรงปฏิกริยากระทำที่จุดเชื่อมต่อดังกล่าวแล้ว ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่เหลือจะเป็นชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์ เช่น ชิ้นส่วน DA และชิ้นส่วน CA ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9a เป็นต้น จากการใช้วิธีตัดจุดเชื่อมต่อที่จุดเชื่อมต่อ C และจุดเชื่อมต่อ D ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9b และ 6-9c เราจะเห็นได้ว่า แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่จุดเชื่อมต่อดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ในการที่จะรองรับแรง P โครงข้อหมุนนี้จะสามารถลดรูปได้เป็นโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9d

เราควรที่จะทราบด้วยว่า ถึงแม้นว่าชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์จะไม่มีแรงเกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนดังกล่าวก็ตาม แต่เราจะไม่สามารถตัดชิ้นส่วนเหล่านั้นออกจากโครงข้อหมุนได้ เนื่องจากชิ้นส่วนเหล่านั้นจะช่วยในการรักษาเสถียรภาพของโครงข้อหมุนในกรณีที่แรงกระทำต่อโครงข้อหมุนนั้นอาจจะเปลี่ยนแปลงทิศทางและตำแหน่งที่กระทำ และอาจจะช่วยในการรักษาเสถียรภาพของโครงข้อหมุนในระหว่างการก่อสร้าง



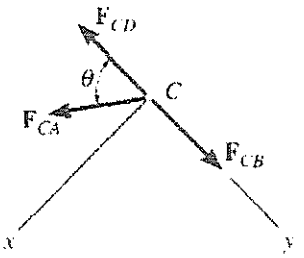
(a)



$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DA} = 0$

$+\searrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{DC} = F_{DE}$

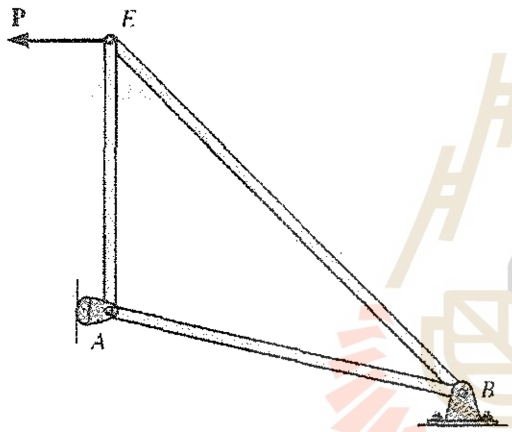
(b)



$+\swarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CA}\sin\theta = 0; \qquad F_{CA} = 0$ since $\sin\theta \neq 0;$

$+\searrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB} = F_{CD}$

(c)

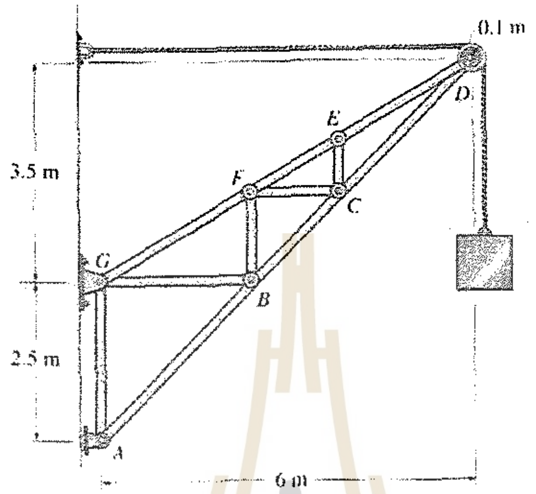


(d)

รูปที่ 6-9

ตัวอย่างที่ 6-1 (6-14)

จงหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-1 เมื่อตุ้มน้ำหนักมีมวล 40 kg และระบุด้วยว่าแรงดังกล่าวเป็นแรงกดอัดหรือแรงดึง



รูปที่ Ex 6-1

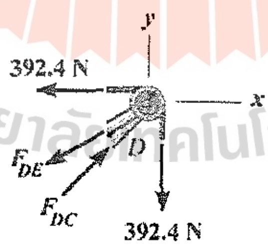
วิธีทำ

หาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ

โดยวิธีการตัดจุดต่อ (method of joints) เราจะหาแรงภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนได้โดยการพิจารณาความสมดุลของแรงที่จุดเชื่อมต่อ (joint) ต่างๆ ของโครงข้อหมุน ในที่นี้ เราไม่จำเป็นต้องหาแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ เนื่องจากเราสามารถทำการตัดจุดต่อหาแรงต่างๆ ได้โดยตรง

เขียนแผนภาพ free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ (joint) และใช้สมการความสมดุล

Joint D:



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $$F_{DC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 392.4 - F_{DE}\left(\frac{12}{\sqrt{193}}\right) = 0$$

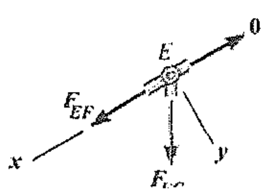
$+\uparrow\sum F_y = 0;$ $$F_{DC}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F_{DE}\left(\frac{7}{\sqrt{193}}\right) - 392.4 = 0$$

ทำการแก้สมการ

$$F_{DE} = 0 \qquad \text{Ans.}$$

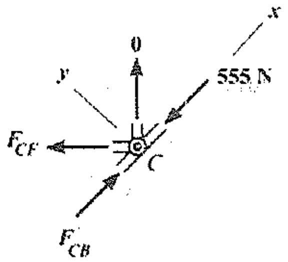
$$F_{DC} = 555 \quad \text{N (C)} \qquad \text{Ans.}$$

Joint E:



$+\swarrow \quad \sum F_x = 0; \qquad F_{EF} = 0$ Ans.

Joint C:

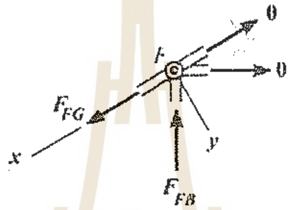


$+\searrow \quad \sum F_y = 0; \qquad F_{CF} = 0$ Ans.

$+\swarrow \quad \sum F_x = 0; \qquad -555 + F_{CB} = 0$

$F_{CB} = 555 \quad \text{N (C)}$ Ans.

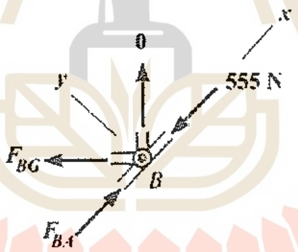
Joint F:



$+\searrow \quad \sum F_y = 0; \qquad F_{FB} = 0$ Ans.

$+\swarrow \quad \sum F_x = 0; \qquad F_{FG} = 0$ Ans.

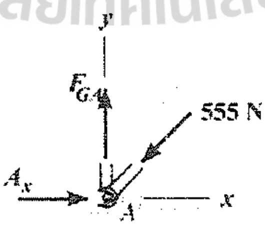
Joint B:



$+\nwarrow \quad \sum F_y = 0; \qquad F_{BG} = 0$ Ans.

$+\nearrow \quad \sum F_x = 0; \qquad F_{BA} = 555 \quad \text{N (C)}$ Ans.

Joint A:



$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad F_{GA} - 555\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$F_{GA} = 392 \quad \text{N (T)}$ Ans.

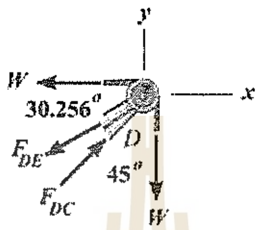
ตัวอย่างที่ 6-2 (6-15)

กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-1 สามารถรับแรงกดอัดได้สูงสุด 25 kN และรับแรงดึงได้สูงสุด 30 kN จงหามวลของตุ้มน้ำหนักที่มีค่าสูงสุดที่โครงข้อแข็งสามารถรองรับได้

วิธีทำ

โดยการตรวจสอบ Joints E, C, F, และ B เราจะพบว่า ชิ้นส่วน EC, CF, FB, และ BG เป็นชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่มีแรงกระทำเป็นศูนย์ (zero-force members) ดังนั้น เราจะเหลือชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่รองรับแรงกระทำอยู่เพียง 7 ชิ้นส่วน อย่างไรก็ตาม เนื่องจากชิ้นส่วน GF, FE, และ ED และชิ้นส่วน AB, BC, และ CD อยู่ในแนวเดียวกัน ดังนั้น $F_{GF} = F_{FE} = F_{ED}$ และ $F_{AB} = F_{BC} = F_{CD}$

Joint D:



$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $$F_{DC}\sin 45^o + F_{DE}\cos 30.25^o - W = 0$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$F_{DC}\cos 45^o + F_{DE}\sin 30.25^o - W = 0$$

$$F_{DC} = 1.414\,W\,(\mathrm{C})$$

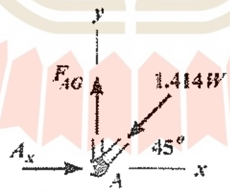
$$F_{DE} = 0$$

ชิ้นส่วน GF, FE, และ ED ไม่ได้รองรับแรงและชิ้นส่วน AB, BC, และ CD เป็นชิ้นส่วนที่รับแรงกดอัด สมมุติให้ชิ้นส่วนดังกล่าวรับแรงกดอัดสูงสุด 25 kN ดังนั้น น้ำหนักสูงสุดที่ชิ้นส่วนดังกล่าวรับได้มีค่าเท่ากับ

$$25\text{ kN} = 1.414\,W$$

$$W = 17.678\text{ kN}$$

Joint A:



$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$F_{AG} - 1.414\,W\sin 45^o = 0$$

$$F_{AG} = W\,(\mathrm{T})$$

ชิ้นส่วน AG เป็นชิ้นส่วนที่รับแรงดึง สมมุติให้ชิ้นส่วนดังกล่าวรับแรงแรงดึงสูงสุด 30 kN ดังนั้น น้ำหนักสูงสุดที่ชิ้นส่วนดังกล่าวรับได้มีค่าเท่ากับ

$$W = 30\text{ kN}$$

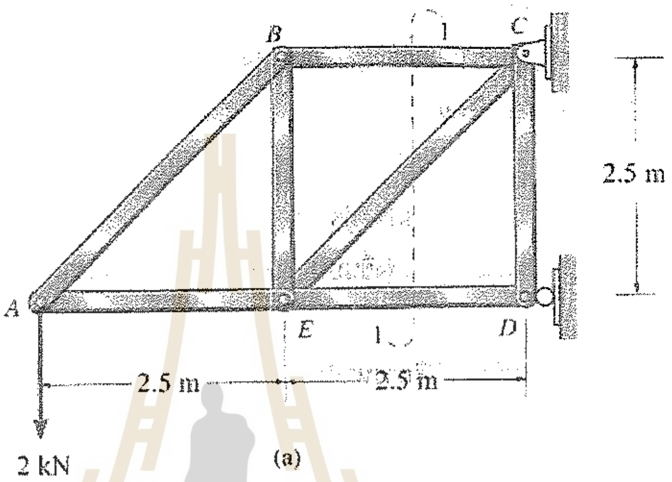
จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณ เราจะเห็นได้ว่า น้ำหนักสูงสุดที่โครงข้อหมุนสามารถรับได้ถูกควบคุมโดยความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนที่รับแรงกดอัด ดังนั้น

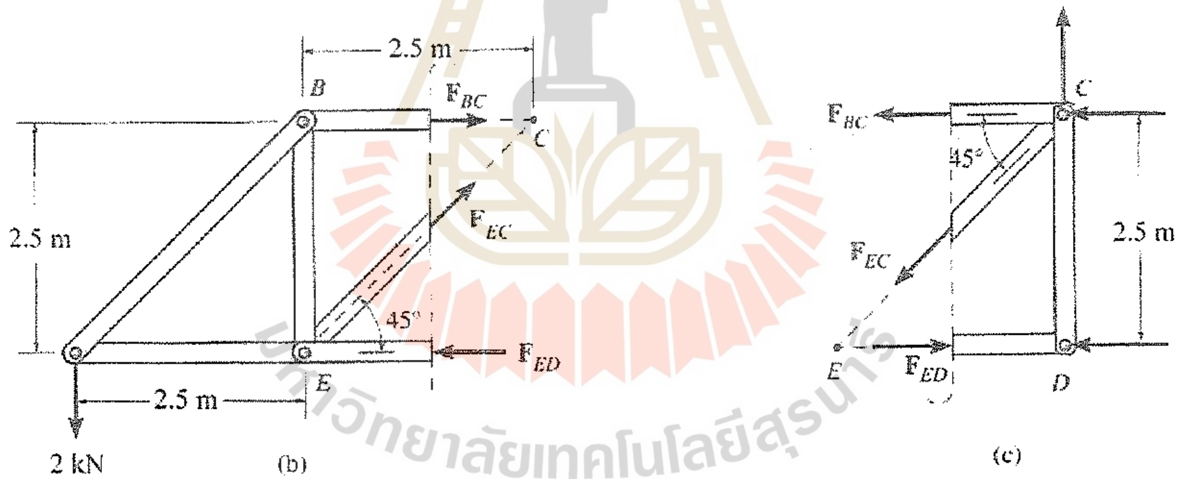
$$m = \frac{17.678(10^3)\text{ N}}{9.81(1000)} = 1800\text{ kg} \qquad \text{Ans.}$$

6.4 วิธีการตัดหน้าตัด (The Method of Sections)

การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีการตัดหน้าตัด (method of sections) เป็นวิธีการที่มีความง่ายและสะดวกในการหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเพียงบางชิ้นส่วนที่เราสนใจ

ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธีการนี้ เริ่มต้น เราจะทำการตัดโครงข้อหมุนผ่านชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่เราต้องการหาค่าแรงภายในให้ออกเป็น 2 ส่วน ถ้าโครงข้อหมุนอยู่ในสภาวะความสมดุลแล้ว ส่วนที่ถูกตัดแยกออกจากกันก็จะอยู่ในสภาวะความสมดุลด้วย จากนั้น เราจะใช้สมการสมดุลของแรงและ moment บนส่วนของโครงข้อหมุนที่ถูกตัดแยกออกจากกัน (อาจจะใช้แค่ส่วนใดส่วนหนึ่งหรือทั้งสองส่วนพร้อมกัน ขึ้นอยู่กับสถานการณ์ที่มีอยู่) เพื่อหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าว





รูปที่ 6-10

ในวิธีการนี้ ส่วนของโครงข้อหมุนที่จะถูกตัดผ่านจะต้องมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ค่าเท่านั้น เพราะในการตัดโครงข้อหมุนหนึ่งครั้งเราจะมีสมการความสมดุลอยู่แค่ 3 สมการเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการหาค่าแรงในชิ้นส่วน EC ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10 แล้ว เราควรจะทำการตัดโครงข้อหมุนในแนว $1-1$ ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนทั้งสองของโครงข้อหมุนได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10b และ 6-10c จากแผนภาพ free body diagram เราจะเห็นได้ว่า ส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวจะมีแรงที่ไม่ทราบค่า 3 แรงคือ F_{BC}, F_{EC}, และ F_{ED}

ในกรณีนี้แรงที่ไม่ทราบค่าทั้ง 3 แรงจะหามาได้โดยง่าย ถ้าเราใช้สมการความสมดุลบนส่วนของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10b ทั้งนี้เนื่องจากว่า ถ้าเราใช้สมการสมดุลบนส่วนของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10c แล้ว เราจะต้องหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อหมุนก่อน ซึ่งทำให้การวิเคราะห์มีความยาวมากขึ้น

ในการเขียนสมการความสมดุลนั้น เราควรที่จะเขียนแบบให้ได้คำตอบออกมาโดยการแทนค่าโดยตรง และไม่ควรที่จะเขียนให้อยู่ในรูปของสมการสมการเชิงซ้อน (simultaneous equations) ซึ่งจะก่อให้เกิดความผิดพลาดในการแก้สมการได้ง่าย

การหาทิศทางของแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ไม่ทราบค่าจะมีลักษณะคล้ายกันกับที่ได้กล่าวไปแล้วคือ เราจะสมมุติให้แรงที่ไม่ทราบค่าดังกล่าวเป็นแรงดึงเสมอ ซึ่งถ้าค่าแรงที่คำนวณได้มีค่าเป็นบวกแล้ว แรงนั้นก็จะเป็นแรงดึง และถ้าค่าแรงที่คำนวณได้มีค่าเป็นลบแล้ว แรงนั้นก็จะเป็นแรงกดอัด

อีกวิธีการหนึ่งที่จะช่วยเราในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนได้ง่ายขึ้นก็คือ การสังเกตการรับแรงของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ซึ่งต้องอาศัยความเข้าใจเป็นหลัก ยกอย่างเช่น แรง F_{BC} ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10b ควรที่จะเป็นแรงดึงที่กระทำต่อจุดเชื่อมต่อ B ทั้งนี้เนื่องจากว่าแรง F_{BC} ซึ่งมีทิศทางดังกล่าวจะทำให้เกิดความสมดุลของ moment รอบจุด E กับ moment ที่เกิดจากการกระทำของแรง $2\,\mathrm{kN}$ ที่จุดเชื่อมต่อ A และแรง F_{EC} ก็ควรที่จะเป็นแรงดึง เพราะว่าในทิศทางนี้องค์ประกอบของแรงในแนวดิ่งจะมีทิศทางพุ่งขึ้นบน ซึ่งจะก่อให้เกิดสมดุลในแนวดิ่งกับแรง $2\,\mathrm{kN}$ ที่กระทำในทิศทางพุ่งลง

ถ้าเป็นไปได้ เราควรที่จะใช้วิธีการหาทิศทางของแรงที่เกิดขึ้นในโครงข้อหมุนทั้งสองวิธีร่วมกันในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free-Body Diagram

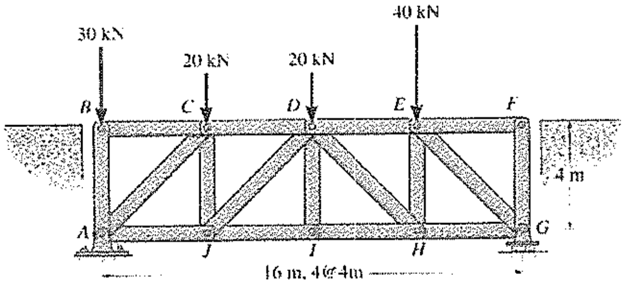
1. เลือกหน้าตัด (section) ของโครงข้อหมุนที่จะทำการตัดเพื่อที่จะหาแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน โดยหน้าตัดที่จะถูกตัดผ่านต้องมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ค่าเท่านั้น เพราะว่าเรามีสมการความสมดุลเพียงแค่ 3 สมการต่อการตัดหนึ่งครั้งเท่านั้น
2. เขียน free-body diagram ของส่วนของโครงข้อหมุนที่ถูกตัดแยกออกจากกัน
3. ใช้วิธีการที่กล่าวถึงข้างต้นในการเขียนนัย (sense) ของแรงที่ไม่ทราบค่า

Equations of Equilibrium

4. ทำการรวม moment จะกระทำที่จุดที่เกิดจากการตัดกันของแรงที่ไม่ทราบค่าสองแรง เพื่อที่เราจะหาค่าของแรงที่ไม่ทราบค่าแรงที่สามได้โดยตรง
5. ใช้สมการสมดุลของแรงในการหาค่าแรงที่ไม่ทราบค่าที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 6-3 (6-31)

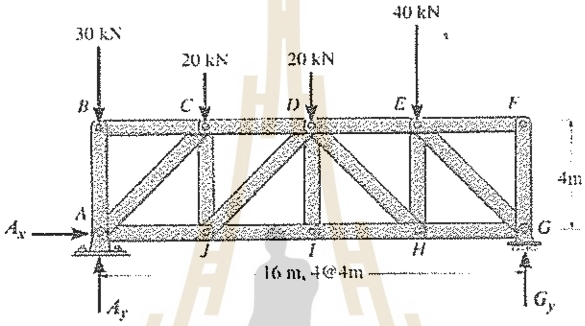
จงหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน DE EH และ HG ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-3 ระบุด้วยว่าแรงดังกล่าวเป็นแรงกดอัดหรือแรงดึง



รูปที่ Ex 6-3

วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ



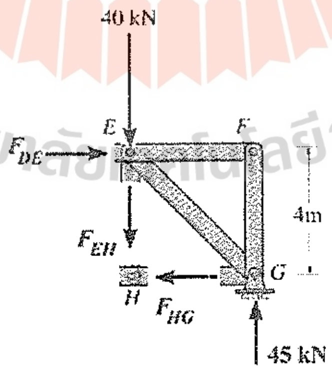
จากแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุน เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ G ได้จาก

$$\circlearrowright + \sum M_A = 0; \qquad -20(4)-20(8)-40(12)+G_y(16)=0$$

$$G_y = 45 \quad \text{kN}$$

เขียน แผนภาพ free body diagram

ทำการตัด section ของโครงข้อหมุนผ่านชิ้นส่วน DE EH และ HG ของโครงข้อหมุน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram



สมการความสมดุล

จากสมการความสมดุล เราจะหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน DE EH และ HG ของโครงข้อหมุนได้ดังนี้

$$\circlearrowright + \sum M_H = 0; \qquad -F_{DE}(4)+45(4)=0$$

$$F_{DE} = 45 \quad \text{kN(C)} \qquad \text{Ans.}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad 45-40-F_{EH}=0$$

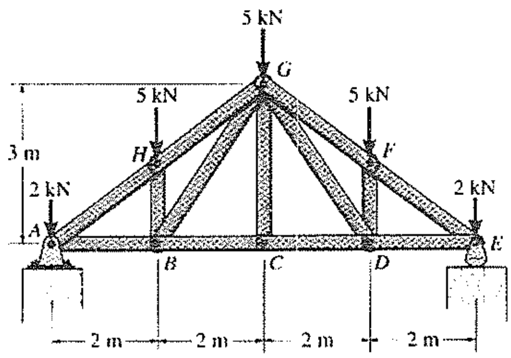
$$F_{EH} = 5 \quad \text{kN(T)} \qquad \text{Ans.}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad 45 - F_{HG} = 0$

$F_{HG} = 45 \quad \text{kN(T)}$ Ans.

ตัวอย่างที่ 6-4 (6-43)

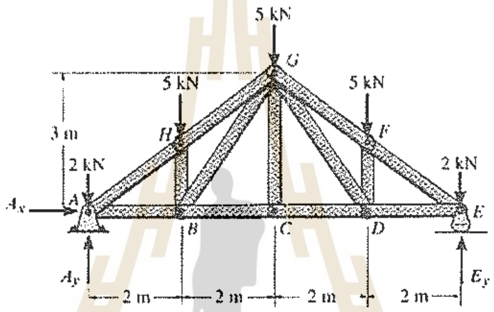
จงหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน GH BC และ BG ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4 ระบุด้วยว่าแรงดังกล่าวเป็นแรงกดอัดหรือแรงดึง



รูปที่ Ex 6-4

วิธีทำ

หาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ



จากแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุน เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ได้จาก

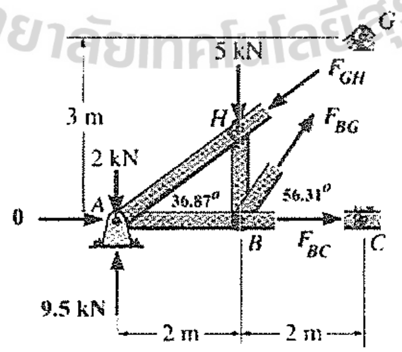
$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0; \qquad A_x = 0$$

$$\circlearrowleft + \sum M_E = 0; \qquad A_y(8) - 2(8) - 5(6) - 5(4) - 5(2) = 0$$

$$A_y = 9.5 \text{ kN}$$

เขียน แผนภาพ free body diagram

ทำการตัด section ของโครงข้อหมุนผ่านชิ้นส่วน GH BC และ BG ของโครงข้อหมุน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram



สมกรควมสมดล

$$\circlearrowleft + \sum M_B = 0; \qquad -7.5(2) + F_{GH}\sin 36.87°(2) = 0$$

$$F_{GH} = 12.5 \quad \text{kN(C)} \qquad \text{Ans.}$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A = 0; \qquad -5(2) + F_{BG}\sin 56.31°(2) = 0$$

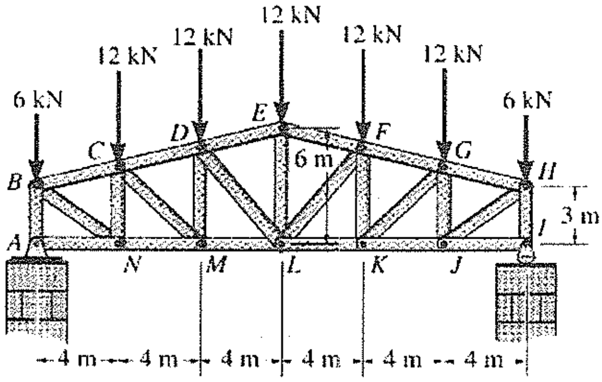
$$F_{BG} = 6.01 \quad \text{kN(T)} \qquad \text{Ans.}$$

$\curvearrowright + \sum M_H = 0; \qquad -7.5(4) + 5(2) + F_{BC}(3) = 0$

$F_{BC} = 6.67 \quad \text{kN(T)}$ Ans.

ตัวอย่างที่ 6-5 (6-51)

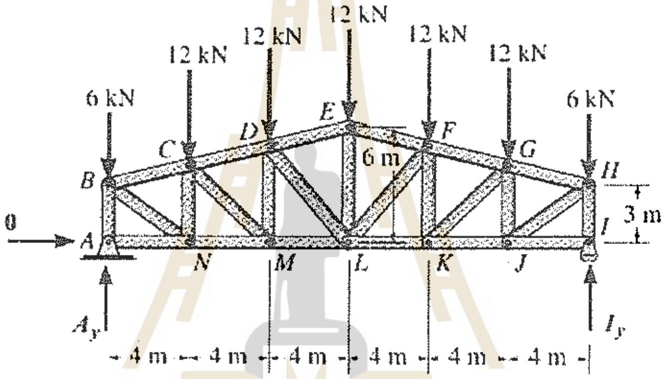
จงหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน EF และ EL ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-5 ระบุด้วยว่าแรงดังกล่าวเป็นแรงกดอัดหรือแรงดึง



รูปที่ Ex 6-5

วิธีทำ

หาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ

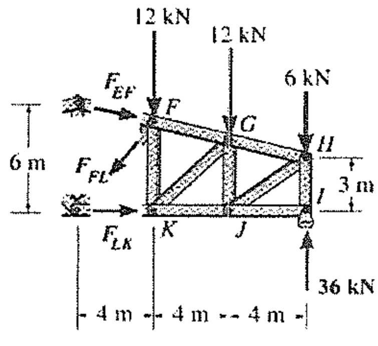


โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-5 เป็นโครงข้อหมุนที่มีความสมมาตรรอบแกนที่ผ่านจุด E และจุด L ดังนั้น จากแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุนและสมการความสมดุลในแนวดิ่ง เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ I ได้เท่ากับ

$$A_y = I_y = 36 \text{ kN}$$

เขียน แผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

ทำการตัด section ของโครงข้อหมุนผ่านชิ้นส่วน EF FL และ LK ของโครงข้อหมุน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram



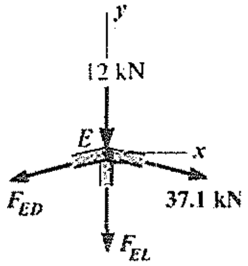
สมการความสมดุล

$$\circlearrowleft + \sum M_L = 0; \qquad -F_{EF}\left[\frac{4}{\sqrt{17}}\right](6) - 12(4) - 12\,(8) - 6(12) + 36\,(12) = 0$$

$$F_{EF} = 37.1 \quad \text{kN(C)}$$ Ans.

เขียน แผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของจุดเชื่อมต่อ E

แผนภาพ free body diagram ของจุดเชื่อมต่อ E มีลักษณะ ดังที่แสดง



สมการความสมดุล

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $$F_{ED} = 37.1\,\text{kN}\,(\text{C})$$ Ans.

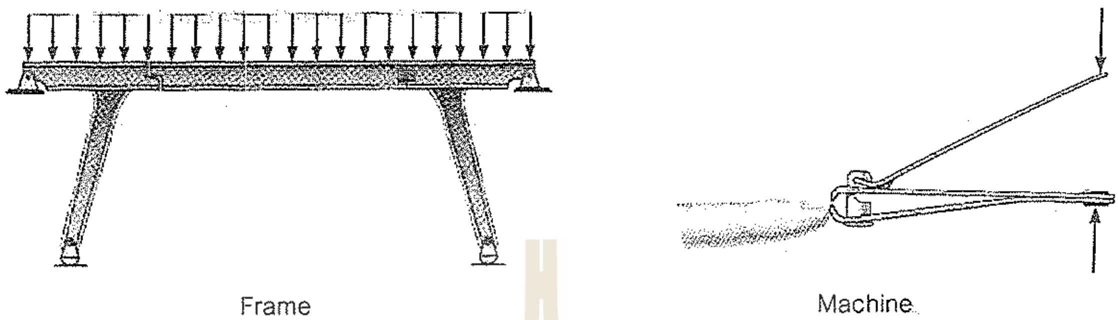
$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$-F_{EL} + 2(37.1)\left[\frac{1}{\sqrt{17}}\right] - 12 = 0$$

$$F_{EL} = 6\,\text{kN}\,(\text{T})$$ Ans.

6.5 Frames and Machines

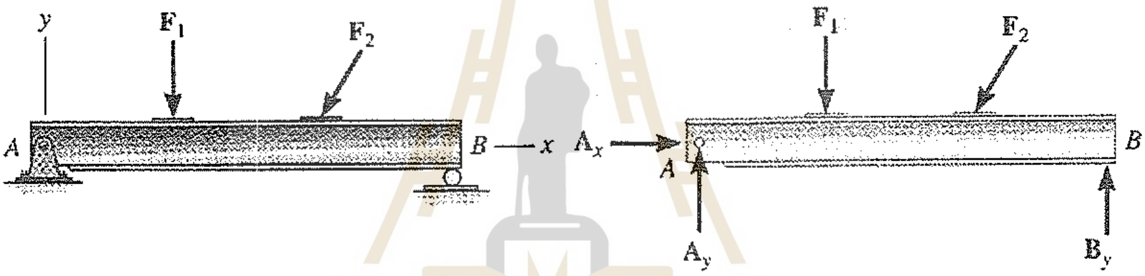
โครง (frames) และเครื่องมือกล (machines) มักจะประกอบด้วยชิ้นส่วนที่ถูกกระทำโดยแรงมากกว่าสองแรงและเชื่อมต่อกันด้วยใช้หมุด (pin)

frame มักจะไม่มีการเคลื่อนที่เมื่อถูกใช้ในการรองรับแรงกระทำ ขณะที่เครื่องมือกลจะประกอบด้วยชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่ได้เมื่อถูกใช้ในการรองรับแรงกระทำและจะถูกออกแบบให้ทำการถ่ายแรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งหรือเปลี่ยนผลที่เกิดจากแรงกระทำเพื่อช่วยในการผ่อนแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 6-11



รูปที่ 6-11

แผนภาพ Free-Body Diagrams



รูปที่ 6-12

ในการที่จะหาแรงที่กระทำที่จุดเชื่อมต่อ (joint) หรือจุดรองรับ (support) ของ frame และ machine นั้น เราจำเป็นจะต้องเขียนแผนภาพ free-body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 6-12 ซึ่งในการเขียนแผนภาพ free-body diagram เราจะยึดหลักการดังต่อไปนี้

1. ใช้จินตนาการในการแยกชิ้นส่วนของ frame และ machine ที่กำลังพิจารณาอยู่ออกจากจุดยึดหรือจุดรองรับให้เป็นอิสระ (free) จากกัน จากนั้น ทำการวาดรูปร่างของชิ้นส่วนนั้นอย่างคร่าวๆ
2. กำหนดแกนอ้างอิง x และ y ให้เหมาะสม
3. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ทราบค่า
4. เขียนขนาด ตำแหน่งและทิศทางของแรงและ couple moment ที่ไม่ทราบค่า โดยใช้สัญลักษณ์หรือตัวอักษรแทนแรงและ couple moment ดังกล่าวและให้มี sense ไปตามแกนบวก x และ y
5. หาระยะต่างๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการหาโมเมนต์

สิ่งที่ควรทราบในการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของ frame และ machine

1. ถ้า frame และ machine มีชิ้นส่วนที่เป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงสองแรง (two-force member) แล้ว แรงที่กระทำอยู่บน free-body diagram ที่ปลายของชิ้นส่วนเหล่านี้จะมีขนาดที่เท่ากันและอยู่ในแนวเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

2. จาก Newton's third law แรงที่เกิดขึ้นที่จุดที่ชิ้นส่วนของ frame และ machine มีการเชื่อมต่อกันจะมีขนาดที่เท่ากัน แต่จะมีทิศทางตรงกันข้าม ถ้าเราพิจารณา frame และ machine ให้เป็นระบบของโครงสร้างแล้ว แรงที่จุดที่เชื่อมต่อของ frame และ machine จะถูกพิจารณาเป็นแรงภายในและจะถูกหักล้างกันหมด ดังนั้น แรงภายในดังกล่าวจะไม่ปรากฏอยู่บนแผนภาพ free-body diagram ของ frame และ machine
3. ถ้าเราไม่ทราบทิศทางที่แน่นอนของแรงปฏิกิริยาที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้างแล้ว เราจะสมมุติ sense ของแรงปฏิกิริยานั้นขึ้นมา และถ้าค่าของแรงปฏิกิริยาที่คำนวณได้มีค่าเป็นบวกแล้ว แรงปฏิกิริยาดังกล่าวจะมีทิศทางตามที่สมมุติ แต่ถ้าค่าของแรงปฏิกิริยาที่คำนวณได้มีค่าเป็นลบแล้ว แรงปฏิกิริยาดังกล่าวจะมีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้
4. โมเมนต์ของแรงคู่ควบ (Couple moment) เป็น free vector ซึ่งจะกระทำที่จุดใดๆ บนแผนภาพ free-body diagram ก็ได้ และแรงเป็น sliding vector ซึ่งจะกระทำที่จุดใดๆ บนแนวกระทำของแรงก็ได้

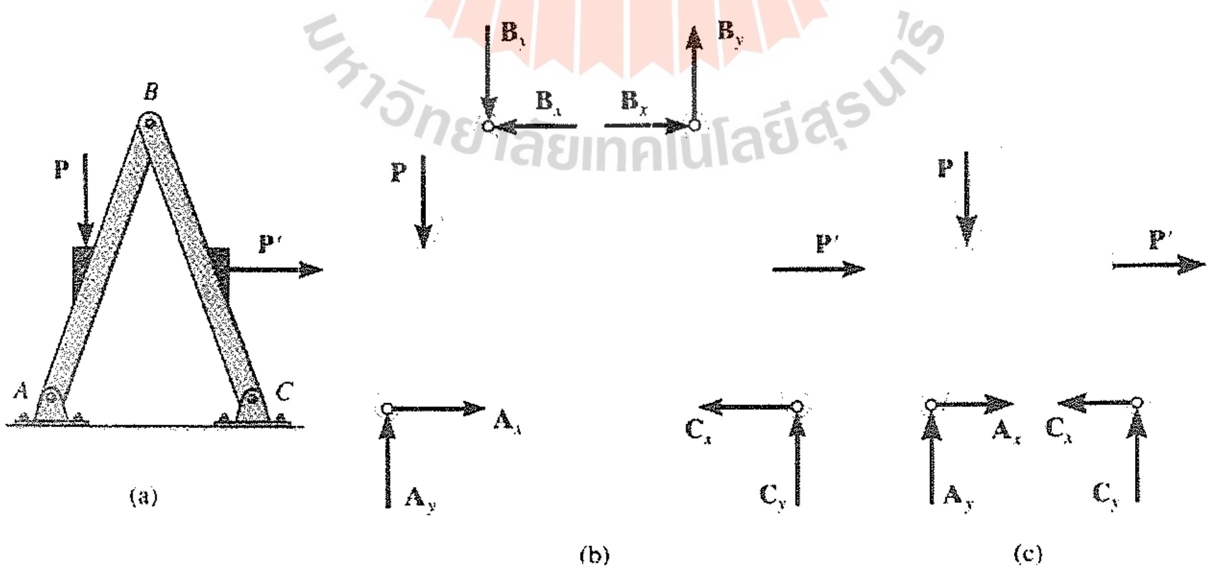
Equations of Equilibrium

ถ้า frame และ machine ที่กล่าวถึงเป็นโครงสร้างที่สามารถถูกวิเคราะห์ได้โดยใช้สมการความสมดุล (statically determinate) และมีเสถียรภาพ (stable) แล้ว เราจะสามารถหาแรงที่ไม่ทราบค่าที่จุดรองรับและจุดเชื่อมต่อของ frame และ machine ได้โดยใช้สมการความสมดุล

ในกรณีที่โครงสร้างอยู่ในระนาบ $x-y$ แผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนและโครงสร้างจะต้องสอดคล้องกับสมการความสมดุล 3 สมการคือ

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_O = 0$$

พิจารณา frame ดังที่แสดงในรูปที่ 6-13a ในการหาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่หมุด A, B, และ C เราจะเริ่มต้นจากการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 6-13b และแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่หมุด A, B, และ C จะมีจำนวนทั้งหมดหกค่า ซึ่งจะหาได้โดยใช้สมการความสมดุลบนชิ้นส่วนทั้งสองของโครงสร้าง ซึ่งมีจำนวนทั้งหมดหกสมการเช่นกัน



รูปที่ 6-13

อีกวิธีการหนึ่งที่เราจะใช้ในการวิเคราะห์หาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่หมุด A, B, และ C ของ frame ได้ก็คือการใช้ แผนภาพ free-body diagram ของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 6-13c ในการหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และที่จุด C ได้สามค่า จากนั้น ใช้แผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนชิ้นใดชิ้นหนึ่งของ frame ในการหาแรงปฏิกิริยาอีกสามค่าที่เหลือ คำตอบที่ได้ควรที่จะถูกตรวจสอบโดยใช้สมการความสมดุลบนชิ้นส่วนโครงสร้างที่เหลืออีกอันหนึ่งว่าสอดคล้องหรือไม่

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free-Body Diagram

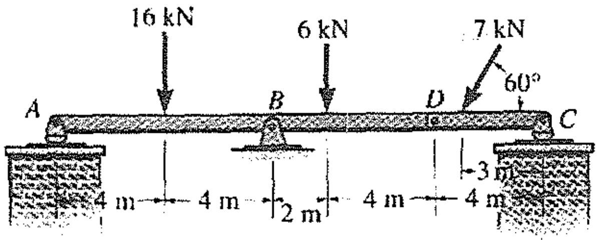
ใช้หลักการที่ได้กล่าวถึงไปแล้วในตอนต้น

Equilibrium Equation

1. ตรวจสอบความเป็น determinacy ของโครงสร้าง
2. ทำรวม moment ที่จุดที่มีแรงที่ไม่ทราบค่าสองแรงมาตัดกัน เพื่อที่เราจะหาค่าของแรงที่ไม่ทราบค่าแรงที่สามได้โดยง่าย
3. ถ้าค่าแรงปฏิกิริยาที่คำนวณได้มามีค่าเป็นลบแล้ว แรงปฏิกิริยาจะมีทิศตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติไว้

ตัวอย่างที่ 6-6 (6-75)

จงหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-6 เมื่อจุดรองรับ A และ C เป็น roller จุดรองรับ B เป็น pin และจุดเชื่อมต่อ D เป็น hinge

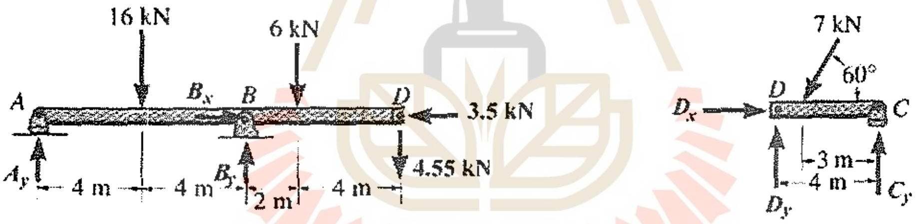


รูปที่ Ex 6-6

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-6 ถูกรองรับโดย roller ที่จุด A และจุด C และถูกรองรับโดย roller ที่จุด C ซึ่งทำให้คานมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 ค่า ซึ่งมากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลของคาน ซึ่งมีเพียงแต่ 3 สมการ ดังนั้น เราจะไม่สามารถหาแรงปฏิกริยาของคานได้โดยตรง แต่เนื่องจากจุด D ของคานถูกเชื่อมต่อโดยหมุด ดังนั้น เมื่อเราทำการแยกพิจารณา frame ออกเป็น 2 ชิ้นส่วน คือ ชิ้นส่วน ABD และชิ้นส่วน DC แล้ว ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นว่า ชิ้นส่วนทั้งสองมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 6 ค่า ซึ่งเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุลของชิ้นส่วนทั้งสอง ซึ่งจะทำให้เราสามารถหาแรงปฏิกริยาของคานได้



สมการความสมดุล

จากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน CD ของคาน

$\circlearrowleft + \sum M_D = 0;$ $\quad -7\sin 60^o(1) + C_y(4) = 0$

$$C_y = 1.52 \quad \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad D_y - 7\sin 60^o + 1.52 = 0$

$$D_y = 4.55 \quad \text{kN}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $\quad D_x - 7\cos 60^o = 0$

$$D_x = 3.5 \quad \text{kN}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน CD ของคาน

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;$ $\quad -16(4) - 6(10) + B_y(8) - 4.55(14) = 0$

$$B_y = 23.46 \text{ kN} = 23.5 \text{ kN} \qquad \text{Ans.}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad A_y - 16 + 23.46 - 6 - 4.55 = 0$

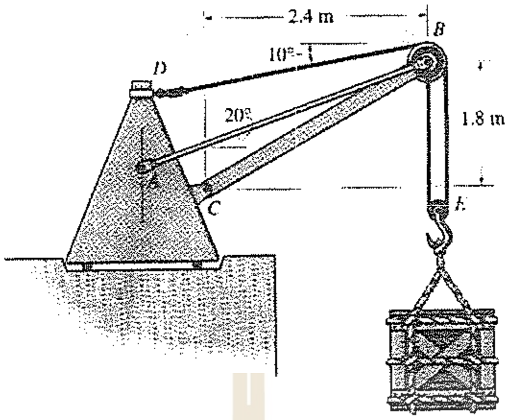
$$A_y = 3.09 \quad \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x + 0;$ $\quad B_x - 3.5 = 0$

$$B_x = 3.5 \quad \text{kN} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 6-7 (6-102)

จงหาแรงที่เกิดขึ้นในแท่งเหล็ก AB และแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ C เนื่องจากมวลขนาด $500\,\mathrm{kg}$ กระทำต่อ crane ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-7



รูปที่ Ex 6-7

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

จากรูปที่ Ex 6-7 เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของ pulley E ได้ ดังที่แสดง โดยแรงตึงที่เกิดขึ้นบนส่วนของ cable BE จะมีค่าเท่ากับ $500(9.81)/2 = 2452.5\ \mathrm{N}$ ซึ่งจากหลักการที่ว่า แรงตึงที่เกิดขึ้นใน cable เส้นเดียวกันมีค่าเท่ากันตลอดเส้น ดังนั้น เราจะได้ว่า แรงตึงในส่วนของ cable BD จะมีค่าเท่ากับ $2452.5\ \mathrm{N}$ ด้วย

เนื่องจาก pulley B มีขนาดที่เล็กมาก ดังนั้น เราจะสมมุติให้แรงเนื่องจากมวลขนาด $500\,\mathrm{kg}$ กระทำที่หมุดของ pulley โดยตรง ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ได้ ดังที่แสดงในรูป และเราจะสามารถหาแรงที่เกิดขึ้นในแท่งเหล็ก AB ได้โดยใช้สมการความสมดุลของแรง

สมการความสมดุล

จากแผนภาพ free body diagram ของ pulley E และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0; \qquad F_{CB}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AB}\cos 20^o - 250(9.81)\cos 10^o = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad F_{CB}\left(\frac{3}{5}\right) - F_{AB}\sin 20^o - 500(9.81) - 250(9.81)\sin 10^o = 0$$

$$F_{CB} = 14\,415\ N = 14.4\ \mathrm{kN}$$

$$F_{AB} = 9702\ N = 9.70\ \mathrm{kN} \qquad \text{Ans.}$$

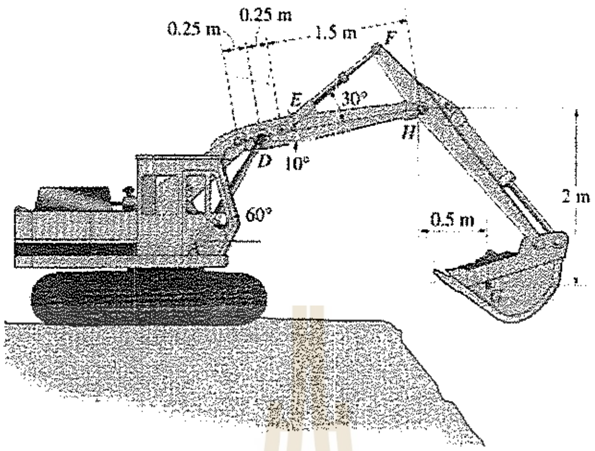
จากแผนภาพ free body diagram ของแท่งเหล็ก CB แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ C มีค่าเท่ากับ

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0; \qquad C_x = 14\,415\left(\frac{4}{5}\right) = 11.5\ \mathrm{kN} \qquad \text{Ans.}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$C_x = 14\,415\left(\frac{3}{5}\right) = 8.65 \text{ kN}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 6-8 (6-111)

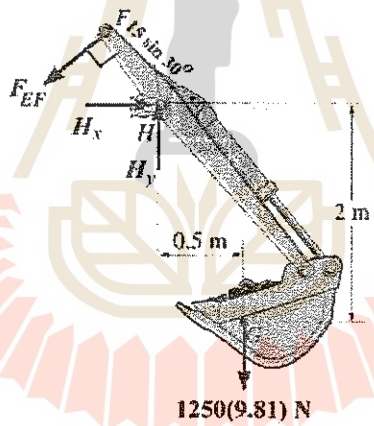
จงหาแรงที่เกิดขึ้นในท่อไฮดรอลิค EF และ AD ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-8 เมื่อขาตักของรถตักมีมวล 1250 kg และมีจุด center of gravity ที่ G กำหนดให้ชุดเชื่อมต่อทั้งหมดเป็นหมุด (pin)



รูปที่ Ex 6-8

วิธีทำ

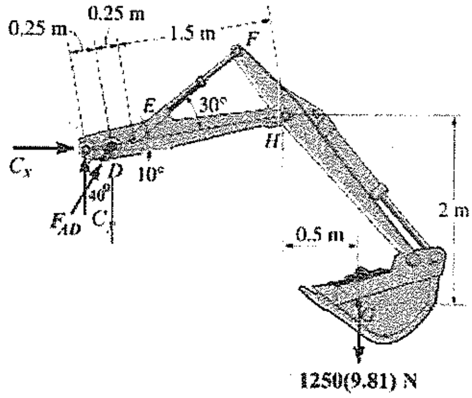
พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน FHG



$\circlearrowright + \sum M_H = 0;$ $$-1250\,(9.81)0.5 + F_{EF}\ 1.5\sin 30^\circ = 0$$

$$F_{EF} = 8175 \text{ N} = 8.18 \text{ kN(T)}$$ Ans.

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $CEFHG$



$\circlearrowright + \sum M_C = 0;$ $$F_{AD}\cos 40^\circ (0.25) - 1250\,(9.81)(2\cos 10^\circ + 0.5) = 0$$

$$F_{AD} = 158130 \text{ N} = 158 \text{ kN(C)}$$ Ans.

บทที่ 7

Internal Forces

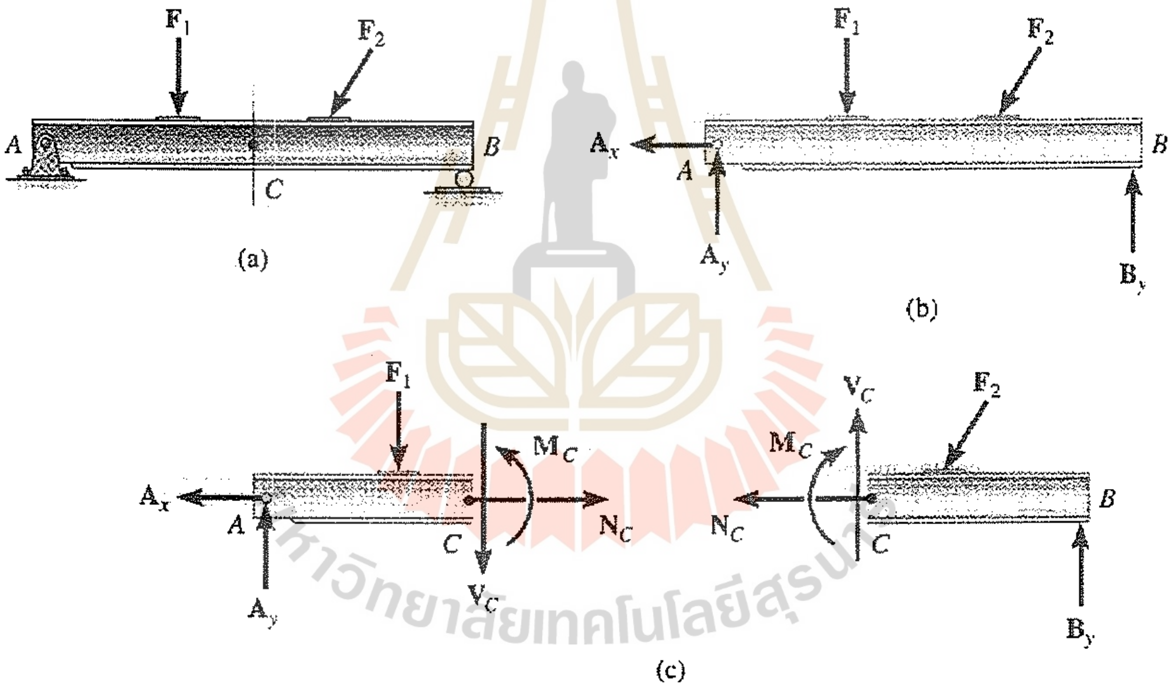
จุดประสงค์

1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีตัดหน้าตัด (method of sections) ในการหาค่าของแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง
2. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram โดยใช้วิธีตัดหน้าตัดและเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำแบบกระจาย (distributed load), แรงเฉือน (shear forces), และโมเมนต์ดัด (bending moments)

7.1 Internal Forces Developed in Structural Members

ในการออกแบบชิ้นส่วนของโครงสร้างเราจะต้องทราบค่าของแรงและ moment ที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ ในชิ้นส่วนของโครงสร้างเนื่องจากการกระทำของแรงภายนอก เพื่อที่เราจะได้ออกแบบให้วัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างมีกำลังที่เพียงพอในการรองรับแรงและ moment ดังกล่าว

แรงและ moment ที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้างเนื่องจากการกระทำของแรงภายนอกจะถูกหามาได้โดยใช้ตัดหน้าตัด (method of sections)



รูปที่ 7-1

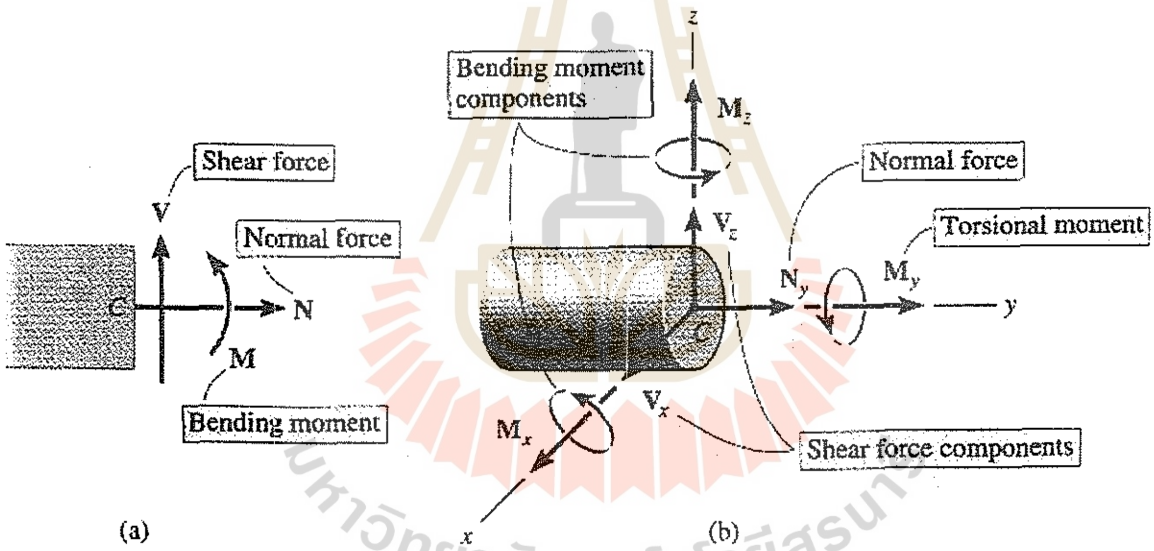
พิจารณาคานช่วงเดี่ยวที่ถูกรองรับแบบธรรมดา (simply-supported beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $\bar{F}_1$ และ $\bar{F}_2$ แรงกระทำดังกล่าวทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา $\bar{A}_x$, $\bar{A}_y$, และ $\bar{B}_y$ ที่จุดรองรับของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1b ถ้าเราต้องการหาค่าของแรงภายใน (internal loads) ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด C ของคานแล้ว เราจะมีขั้นตอนในการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

1. ใช้จินตนาการในการตัดคานผ่านจุด C และตั้งฉากกับแนวแกนของคาน ซึ่งจะทำให้คานแบ่งออกเป็นสองส่วน

2. ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของคานทั้งสองนั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1c เนื่องจากคานอยู่ในสมดุล ดังนั้น ชิ้นส่วนทั้งสองของคานก็จะอยู่ในความสมดุลด้วย ซึ่งจะทำให้มีแรงภายใน ซึ่งประกอบด้วย แรงตั้งฉาก $\bar{N}$ (normal force) แรงเฉือน $\bar{V}$ (shear force) และโมเมนต์ดัด $\bar{M}$ (bending moment)) เกิดขึ้นที่หน้าตัด C
3. ทำการหาค่าของแรงภายในดังกล่าวโดยใช้สมการความสมดุล 3 สมการบนส่วน AC หรือส่วน CB ของคาน

เราควรที่จะทราบด้วยว่า แรงภายในที่เกิดขึ้นบนส่วน AC จะมีขนาดเท่ากับแรงภายในที่เกิดขึ้นบนส่วน CB แต่จะมีทิศทางตรงกันข้าม (Newton's third law)

โดยทั่วไปแล้ว แรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้างที่อยู่ในระนาบเดียว (coplanar structural member) จะประกอบด้วย แรงตั้งฉาก $\bar{N}$ (normal force) แรงเฉือน $\bar{V}$ (shear force) และโมเมนต์ดัด $\bar{M}$ (bending moment) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2a และแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้างที่อยู่ในสามมิติของระบบแกนตั้งฉาก x, y, และ z ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2b จะประกอบด้วย แรงตั้งฉาก $\bar{N}_y$ แรงเฉือน $\bar{V}_x$ และ $\bar{V}_z$ โมเมนต์บิดหรือแรงบิด (torsional moment) $\bar{M}_y$ และโมเมนต์ดัด $\bar{M}_x$ และ $\bar{M}_z$ ซึ่งแรงภายในดังกล่าวจะกระทำที่จุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างและเป็นผลลัพธ์ (resultants) ที่เกิดจากการกระจายของหน่วยแรง (stress distribution) บนพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่จุดตัดนั้น



รูปที่ 7-2

แผนภาพ Free-Body Diagrams

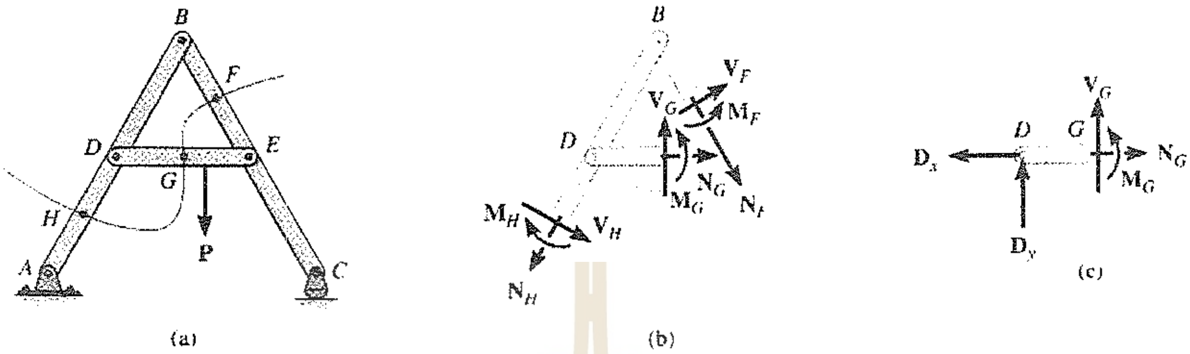
เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว ชิ้นส่วนโครงสร้างจะถูกกระทำโดยแรงภายใน (internal loads) ซึ่งเราจะสามารถหาได้จากการเขียนแผนภาพ free-body diagram และสมการสมดุล

พิจารณา frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3a ถ้าเราต้องการที่จะหาแรงภายในที่จุด H, G, และ F แล้ว เรามักจะตัด frame ผ่านจุดเหล่านี้ และทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3b ซึ่งจะมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดเก้าค่า แต่เนื่องจากเรามีสมการสมดุลของส่วนของ frame อยู่เพียงแค่สามสมการเท่านั้น ดังนั้น เราจะไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าของแรงภายในดังกล่าวได้

โดยทั่วไปแล้ว ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีลักษณะดังกล่าว เราจะขั้นตอนการวิเคราะห์ดังนี้

1. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของโครงสร้าง
2. หาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับและที่จุดที่เชื่อมต่อของโครงสร้างก่อน

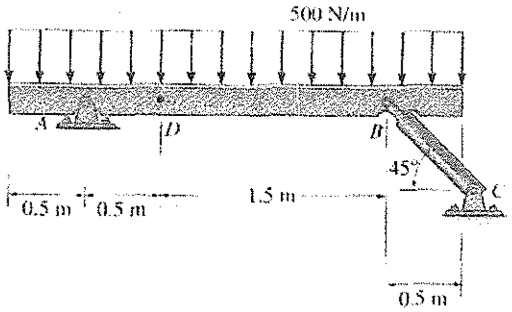
3. ทำการตัดชิ้นส่วนของโครงสร้างแต่ละชิ้นส่วนที่จุดที่เราสนใจและเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง
4. หาแรงภายในที่เกิดขึ้นโดยใช้สมการสมดุลสามสมการ ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราทราบค่าของแรงปฏิกริยาที่จุด D ($\bar{D}_x$ และ $\bar{D}_y$) ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 7-3c แล้ว เราก็จะสามารถหาแรงภายใน $\bar{N}_G$, $\bar{V}_G$, และ $\bar{M}_G$ ได้โดยใช้สมการสมดุล



รูปที่ 7-3

ตัวอย่างที่ 7-1 (7-14)

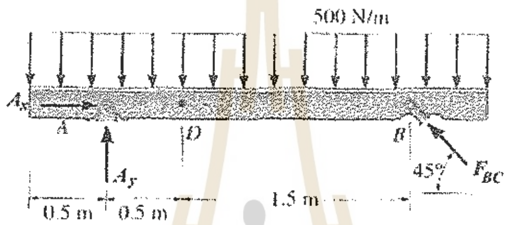
จงหาแรงในแนวแกน (axial force) แรงเฉือน (shear force) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ที่เกิดขึ้นที่จุด D ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1

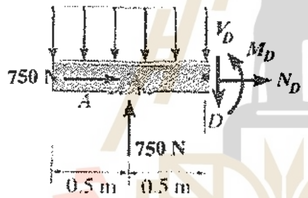


รูปที่ Ex 7-1

วิธีทำ

หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ





ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูป จากนั้น ใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ

$\curvearrowleft + \sum M_A = 0;$ $$F_{BC} \sin 45^o (2) - 500(3)(1) = 0$$
$$F_{BC} = 1060.7 \text{ N}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $$A_x - 1060.7 \cos 45^o = 0$$
$$A_x = 750 \text{ N}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$A_y + 1060.7 \sin 45^o - 500(3) = 0$$
$$A_y = 750 \text{ N}$$

เขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของคาน

ทำการตัดคานผ่านจุด D และทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน AD ดังที่แสดงในรูป

สมการความสมดุล

จากนั้น ใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงในแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่เกิดขึ้นที่จุด D

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $$N_D + 750 = 0$$
$$N_D = -750 \text{ N}$$ Ans.

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$-V_D - 500(1) + 750 = 0$$

$$V_D = 250 \text{ N}$$ Ans.

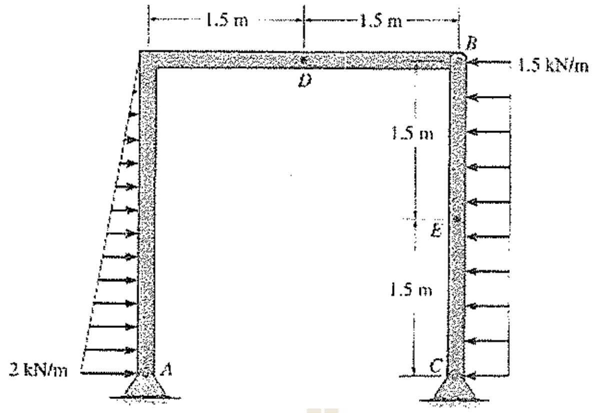
$\circlearrowright + \sum M_D = 0;$

$$M_D + 500(1)(0.5) - 750(0.5) = 0$$

$$M_D = 125 \text{ N.m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 7-2 (7-18)

จงหาแรงในแนวแกน (axial force) แรงเฉือน (shear force) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ที่เกิดขึ้นที่จุด E ของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2



รูปที่ Ex 7-2

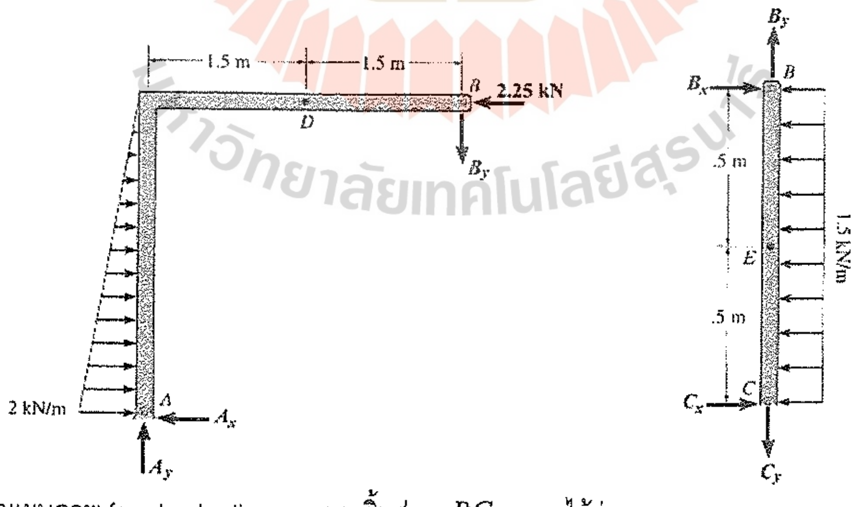
วิธีทำ

หาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ

frame ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2 5 ถูกรองรับโดยหมุด (pin) ที่จุด A และ C ซึ่งทำให้ frame มีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 ค่า ซึ่งมากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลของ frame ซึ่งมีเพียงแต่ 3 สมการ ดังนั้น เราจะไม่สามารถหาแรงปฏิกริยาของ frame ได้จากแผนภาพ free body diagram ของ frame โดยตรง

แต่เนื่องจากจุด B ของ frame เป็นหมุด ดังนั้น เมื่อเราทำการแยกพิจารณา frame ออกเป็น 2 ชิ้นส่วน คือ ชิ้นส่วน AB และชิ้นส่วน BC แล้ว ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นว่า ชิ้นส่วนทั้งสองมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 6 ค่า ซึ่งเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุลของชิ้นส่วนทั้งสอง ดังนั้น เราจะเริ่มวิเคราะห์ frame โดยใช้แผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนทั้งสอง

เนื่องจากเราต้องการหาแรงในแนวแกน (axial force) แรงเฉือน (shear force) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ที่เกิดขึ้นที่จุด E ของ frame เท่านั้น ดังนั้น เราจะสนใจเฉพาะแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุด B



พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน BC เราจะได้ว่า

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0;$ $$4.5(1.5) - B_x(3) = 0$$
$$B_x = 2.25 \text{ kN}$$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0;$ $$2.25 + C_x - 4.5 = 0$$
$$C_x = 2.25 \text{ kN}$$

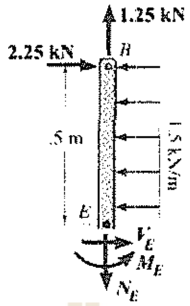
พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน AB เราจะได้ว่า

$\circlearrowright + \sum M_A = 0;$ $$2.25(3) - 3(1) - B_y(3) = 0$$

$$B_y = 1.25 \text{ kN}$$

เขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของ frame

จากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน BE ดังที่แสดงในรูป



สมการความสมดุล

จากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$1.25 - N_E = 0$$

$$N_E = 1.25 \text{ kN}$$ Ans.

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $$V_E + 2.25 = 0$$

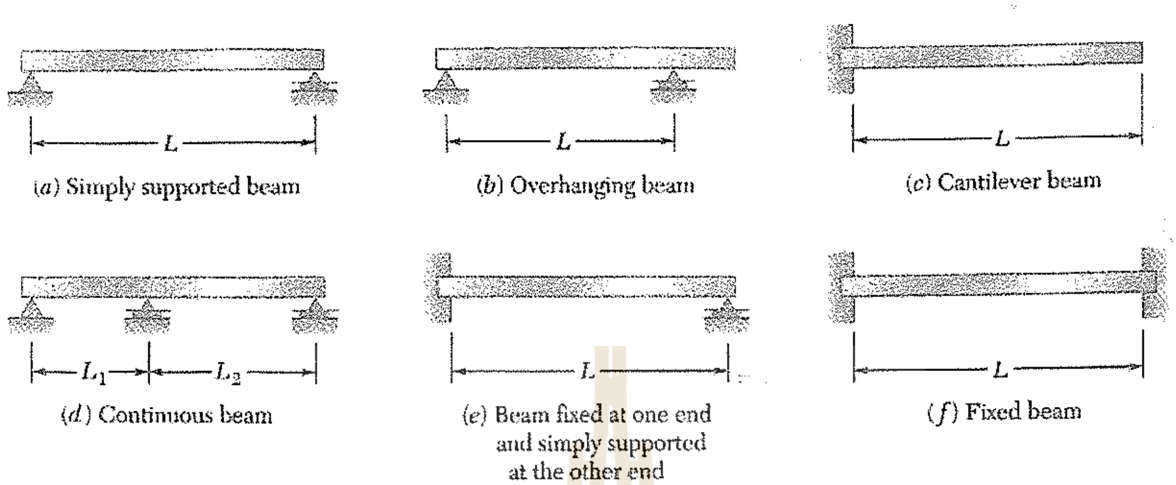
$$V_E = 0$$ Ans.

$\circlearrowright + \sum M_E = 0;$ $$M_E - 2.25(0.75) = 0$$

$$M_E = 1.6875 \text{ kN.m} = 1.69 \text{ kN.m}$$ Ans.

7.2 แผนภาพ Shear Diagram และแผนภาพ Moment Diagram

คาน (beam) เป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่มีลักษณะตรง วางอยู่ในแนวนอน และถูกกระทำโดยแรงหรือน้ำหนักบรรทุก (loads) ในแนวที่ตั้งฉากกับแนวแกนของคาน (แรงกระทำในแนวขวาง หรือ transverse loads) คานมักจะถูกเรียกตามลักษณะที่คานถูกรองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4



รูปที่ 7-4

เมื่อคานถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว คานจะต้านทานต่อแรงกระทำโดยใช้แรงเฉือนภายใน (internal shear force) V และ bending moment ภายใน M โดยที่แรงเฉือนและ bending moment ดังกล่าวมักจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามแนวแกนของคาน

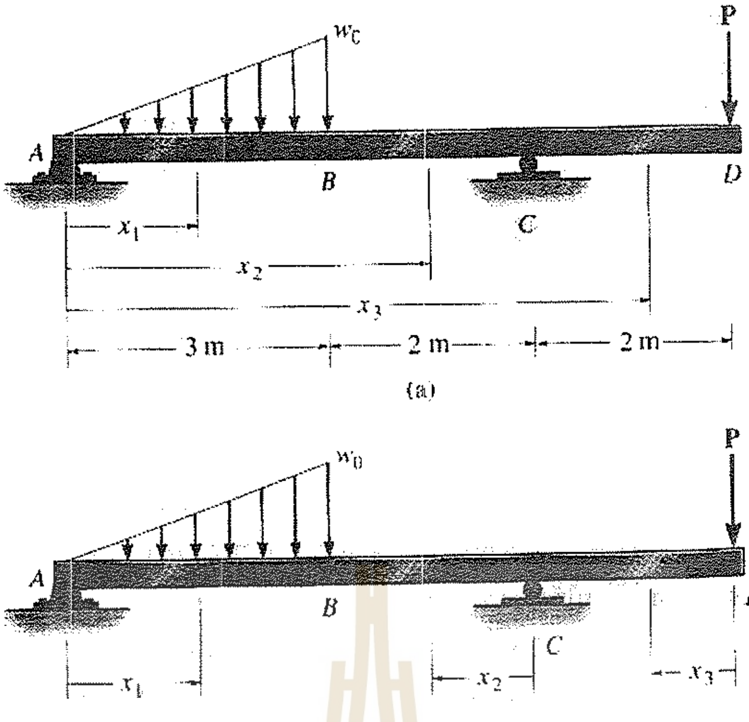
ขั้นตอนที่สำคัญที่สุดในการออกแบบคานคือ การหาค่าสูงสุดของแรงเฉือนและค่าสูงสุดของ bending moment และตำแหน่งที่เกิด ซึ่งจะทำได้โดยการเขียนแรงเฉือนและ bending moment ที่เกิดขึ้นให้เป็น function กับตำแหน่งใดๆ x ตามความยาวในแนวแกนของคาน จากนั้น นำสมการดังกล่าวมาเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram เพื่อหาค่าสูงสุด

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อคานถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด (concentrated loads) หรือเมื่อคานถูกกระทำโดยแรงกระทำแบบกระจาย (distributed loads) ที่มีค่าแรงเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดที่จุดใดจุดหนึ่งบนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5 แล้ว สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานจะเป็นสมการที่ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดดังกล่าว ในกรณีเช่นนี้ เราจะทำการแบ่งคานออกเป็นช่วงๆ ตามความไม่ต่อเนื่องของแรงกระทำดังกล่าว

จากรูปที่ 7-5a เราจะเห็นได้ว่า เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของแรงที่กระทำต่อคาน เราจะแบ่งคานออกได้เป็น 3 ช่วงคือ ช่วง AB ซึ่งถูกกำหนดโดยพิกัด (coordinate) x_1 ช่วง BC ซึ่งถูกกำหนดโดยพิกัด x_2 และช่วง CD ซึ่งถูกกำหนดโดยพิกัด x_3 โดยที่พิกัด x_1 x_2 และ x_3 อาจจะมีจุดเริ่มต้นที่ A เพียงจุดเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5a หรืออาจจะมีจุดเริ่มต้นที่จุดที่ต่างกันเช่น จุด A จุด B และจุด D ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5b ก็ได้

โดยปกติแล้ว แรงในแนวแกนของคานจะไม่ถูกนำมาพิจารณาในการออกแบบคานเพราะว่า

1. โดยส่วนใหญ่แล้ว คานจะรองรับแรงภายนอกที่กระทำในแนวตั้งฉากกับความยาวของคาน ซึ่งจะก่อให้เกิดเฉพาะแรงเฉือนภายในและ moment ภายในเท่านั้น
2. โดยวัตถุประสงค์ของการใช้งานของคานแล้ว คานมักจะถูกออกแบบเพื่อต้านโมเมนต์ดัด (bending moment) และแรงเฉือนเป็นหลัก ยกเว้นในกรณีที่คานถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน (axial compressive force) ซึ่งการออกแบบคานนี้ต้องคำนึงถึงการโก่งเดาะ (buckling) ของคานด้วย

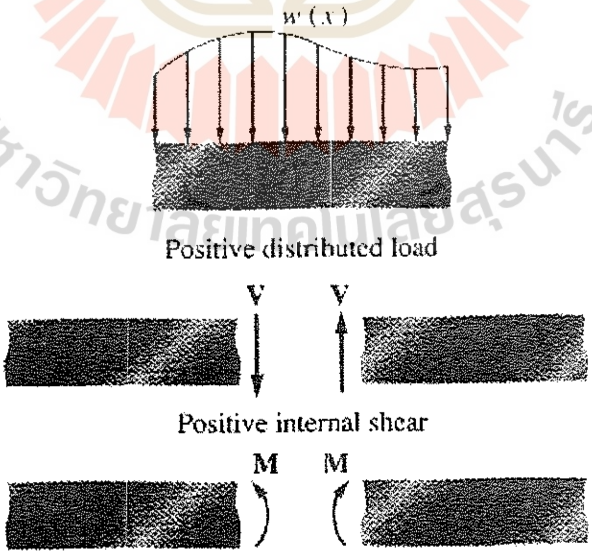


รูปที่ 7-5

Beam Sign Convention

Sign convention ที่มีค่าเป็นบวกของแรงกระทำภายนอก แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (bending moment) ที่เกิดขึ้นภายในคานจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-6 โดยที่

- แรงกระทำภายนอกจะมีค่าบวกเมื่อมีทิศทางชี้ลงข้างล่าง
- แรงเฉือนจะมีค่าบวกเมื่อแรงเฉือนกระทำกับชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
- bending moment จะมีค่าเป็นบวกเมื่อ bending moment นั้นจะทำให้ชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานแอ่นขึ้น



Beam sign convention

รูปที่ 7-6

ขั้นตอนในการวิเคราะห์ (Procedures for Analysis)

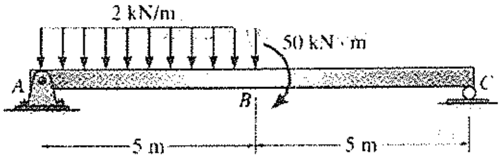
1. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของคานและหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ (support reactions) โดยให้องค์ประกอบของแรงปฏิกิริยาเหล่านั้นกระทำขนานและตั้งฉากกับแนวแกนของคาน
2. เลือกตำแหน่งของพิกัด (coordinate) x โดยให้พิกัดแต่ละพิกัดอยู่ในช่วงที่อยู่ระหว่างแรงกระทำเป็นจุด (concentrated forces), แรงคู่ควบ (couples), หรือแรงกระทำแบบกระจาย (distributed loads) จากนั้นทำการกำหนดจุดเริ่มต้นของพิกัด x
3. ตัดคานออกที่ตำแหน่ง x ใดๆ โดยให้หน้าตัดของคานตั้งฉากกับแนวแกนของคาน แล้วเขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคานดังกล่าวโดยใช้ sign convention ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วข้างต้น
4. ใช้สมการความสมดุล (equilibrium equations) หาสมการของแรงเฉือนและสมการของ moment ที่เกิดขึ้นภายในคานที่หน้าตัดของคานใดๆ โดยเริ่มต้นเราจะใช้สมการ $\sum F_y = 0$ เพื่อหาแรงเฉือน $V(x)$ จากนั้นใช้สมการ $\sum M = 0$ ที่หน้าตัดของคาน เพื่อหา moment $M(x)$ ความถูกต้องของสมการทั้งสองจะสามารถตรวจสอบได้โดยใช้สมการ

$$V(x) = dM / dx \text{ และ } w(x) = -dV / dx$$

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram โดยให้แกน x เป็นแกนนอนและสมการของแรงเฉือน $V(x)$ และและสมการของ moment $M(x)$ เป็นแกนตั้ง

ตัวอย่างที่ 7-3 (7-51)

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-3

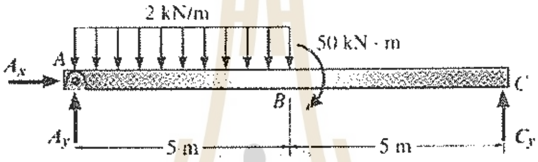


รูปที่ Ex 7-3

วิธีทำ

หาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับของคาน

ทำการหาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคาน จากแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นว่าคานมีแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่า 3 ค่า ซึ่งจะหาได้จากสมการความสมดุล 3 สมการ เนื่องจากเราจะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิงในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ดังนั้น เราไม่จำเป็นต้องหาค่าแรงปฏิกริยา C_y และเนื่องจากไม่มีแรงกระทำภายนอกซึ่งอยู่ในแนวนอนกระทำต่อคาน จากสมดุลของแรงในแนวแกน x เราจะได้ว่า แรงปฏิกริยา A_x มีค่าเท่ากับศูนย์



$\curvearrowright + \sum M_C = 0;$

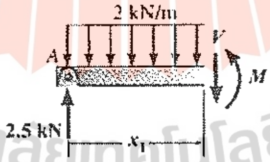
$$-A_y(10) + 2(5)\left(\frac{5}{2} + 5\right) - 50 = 0$$

$$A_y = 2.5 \text{ kN}$$

หาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์

เนื่องจากคานมีความไม่ต่อเนื่องเพียงจุดเดียวที่จุด B ดังนั้น เราแบ่งพิจารณาคานออกเป็น 2 ช่วง คือ จากจุด A ถึงจุด B และจากจุด B ถึงจุด C

กำหนดให้จุด A เป็นจุดอ้างอิงในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของคาน เมื่อ $0 \le x_1 < 5 \text{ m}$ ดังที่แสดงในรูป เราจะได้ว่า



$+\uparrow \sum F_y = 0;$

$$2.5 - 2x_1 - V = 0$$

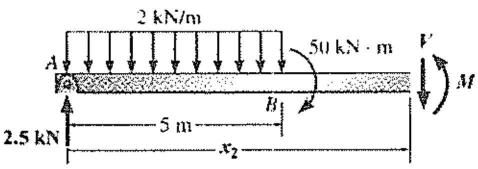
$$V = 2.5 - 2x_1$$

$\curvearrowright + \sum M = 0;$

$$M + 2x_1\left(\frac{1}{2}x_1\right) - 2.5x_1 = 0$$

$$M = 2.5x_1 - x_1^2$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของคาน เมื่อ $5 \text{ m} \le x_2 < 10 \text{ m}$ ดังที่แสดงในรูป เราจะได้ว่า



$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$2.5 - 2(5) - V = 0$$

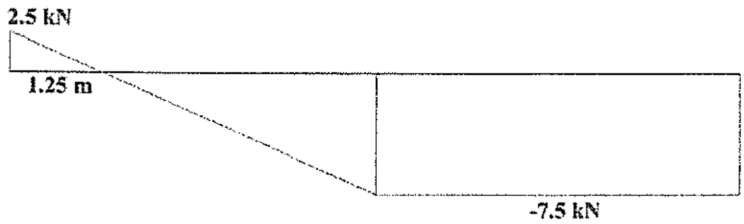
$$V = -7.5$$

$\circlearrowleft + \sum M = 0;$ $$M + 2(5)(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$$

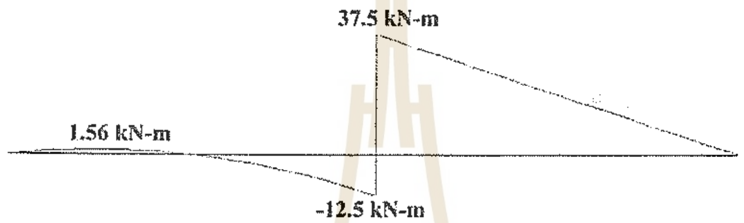
$$M = -7.5x - 75$$

เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

จากสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่ได้ เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังนี้



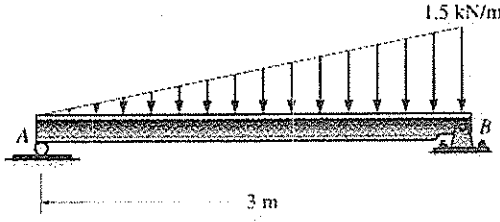
Shear diagram



Moment diagram

ตัวอย่างที่ 7-4 (7-58)

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-4

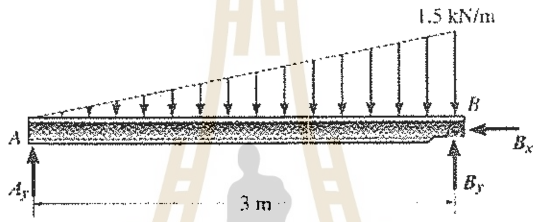


รูปที่ Ex 7-4

วิธีทำ

หาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ

จากแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูป เนื่องจากเราจะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิงในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ดังนั้น เราไม่จำเป็นต้องหาค่าแรงปฏิกริยา B_y และเนื่องจากไม่มีแรงกระทำภายนอกซึ่งอยู่ในแนวนอนกระทำต่อคาน จากสมดุลของแรงในแนวแกน x เราจะได้ว่า แรงปฏิกริยา B_x มีค่าเท่ากับศูนย์



$\circlearrowright + \sum M_B = 0;$

$$-A_y(3) + \frac{1}{2}(3)(1.5)\left(\frac{1}{3}(3)\right) = 0$$

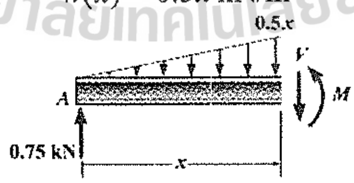
$$A_y = 0.75 \text{ kN}$$

หาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์

เนื่องจากคานมีความต่อเนื่องตลอดความยาวคาน ดังนั้น เราจะทำการตัดคานเพื่อเขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของคานเพียงครั้งเดียว ซึ่งเราจะได้แผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูป โดยที่ค่าของแรงกระจายที่จุดตัดจะหาได้โดยการใช้สามเหลี่ยมคล้าย โดยที่

$$\frac{w(x)}{x} = \frac{1.5}{3}$$

$$w(x) = 0.5x \text{ kN/m}$$



$+\uparrow \sum F_y = 0;$

$$0.75 - \frac{1}{2}x(0.5x) - V = 0$$

$$V = 0.75 - 0.25x^2$$

$\circlearrowright + \sum M = 0;$

$$M + \frac{1}{2}(0.5x)(x)\left(\frac{1}{3}x\right) - 0.75x = 0$$

$$M = 0.75x - 0.08333x^3$$

เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

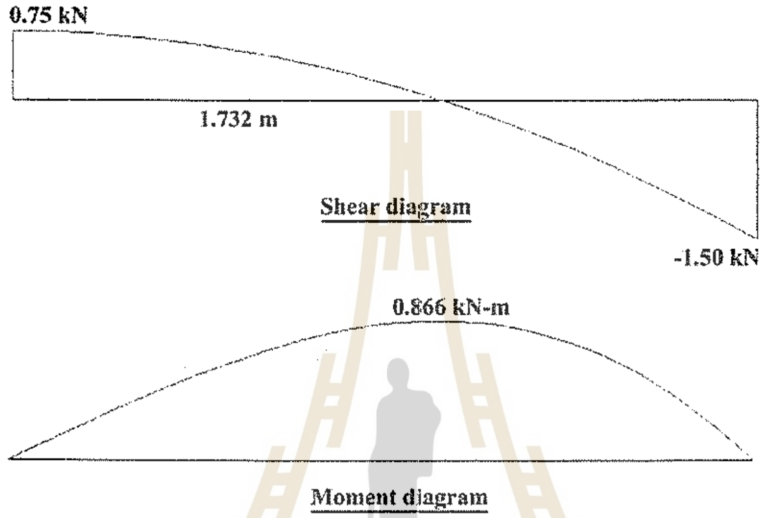
จากสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่ได้ เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ ดังที่แสดงในรูป และตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดและค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดจะหาได้ดังนี้

จุดที่แรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์เป็นจุดที่โมเมนต์มีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$V = 0 = 0.75 - 0.25x^2$$
$$x = 1.732 \quad \text{m}$$

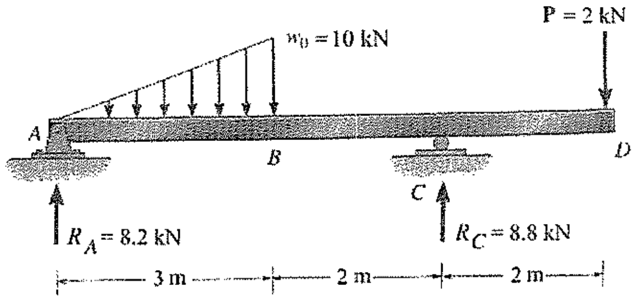
โมเมนต์สูงสุดมีค่าเท่ากับ

$$M_{max} = 0.75(1.732) - 0.08333(1.732)^3 = 0.866 \text{ kN - m}$$



ตัวอย่างที่ 7-5

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5 กำหนดให้ $w_0 = 10\,\text{kN/m}$ และ $P = 2\,\text{kN}$



รูปที่ Ex 7-5

หาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ

จากแผนภาพ free body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ A และ C ได้

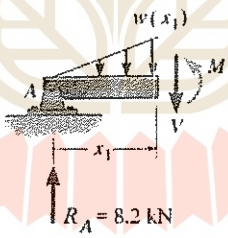
$\circlearrowleft + \sum M_C = 0;$ $$R_A(5) + 2(2) - 0.5(3)10(2+3/3) = 0$$
$$R_A = 8.2\ \text{kN}$$

$\uparrow + \sum F_y = 0;$ $$R_A + R_C - 0.5(3)10 - 2 = 0$$
$$R_C = 8.8\ \text{kN}$$

หาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์

เนื่องจากคานมีความไม่ต่อเนื่องสองจุดคือ ที่จุด B และจุด C ดังนั้น เราจะแบ่งพิจารณาคานออกเป็นสามช่วง

จากแผนภาพ free body diagram ของส่วนตัดของคาน เมื่อ $0 \le x_1 \le 3\,\text{m};$

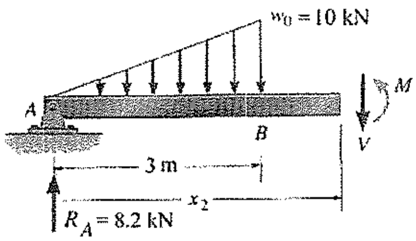


โดยการใช้สามเหลี่ยมคล้าย เราจะหาค่าแรงกระจาย $w(x_1)$ ได้ โดยที่ $w(x_1) = \dfrac{10}{3}x_1$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$V(x_1) = 8.2 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2\ \text{kN}$$

$$M(x_1) = 8.2x_1 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1\left(\frac{x_1}{3}\right) = 8.2x_1 - \frac{5}{9}x_1^3\ \text{kN-m}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของส่วนตัดของคาน เมื่อ $3\,\text{m} \le x_2 \le 5\,\text{m};$

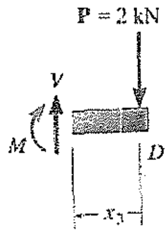


ระยะห่างระหว่างจุด B และรอยตัดมีค่าเท่ากับ $x_2 - 3\,\text{m}$

$$V(x_2) = 8.2 - 0.5(3)10 = -8.8\,\text{kN}$$

$$M(x_2) = 8.2x_2 - 0.5(3)10(\frac{3}{3} + (x_2 - 3)) = -6.8x_2 + 30\,\text{kN-m}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของส่วนตัดของคาน เมื่อ $0 \le x_3 \le 2\,\text{m}$;



$$V(x_3) = 2\,\text{kN}$$

$$M(x_3) = 2x_3\,\text{kN-m}$$

หาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์

จากสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่หาได้ เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูป และตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดและค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดจะหาได้ดังนี้

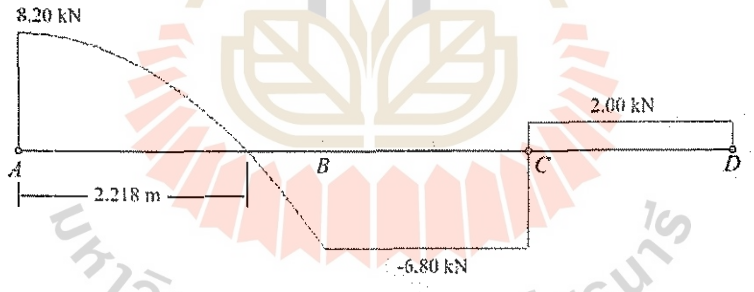
จุดที่แรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์เป็นจุดที่โมเมนต์มีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$0 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2$$

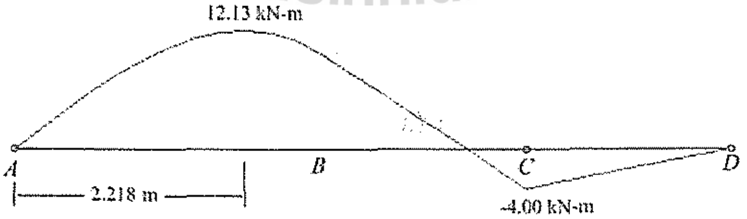
$$x_1 = 2.218\,\text{m}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคานจะมีค่าเท่ากับ

$$M(x_1 = 2.218\,\text{m}) = 8.2(2.218) - \frac{5}{9}(2.218)^3 = 12.126\,\text{kN-m}$$



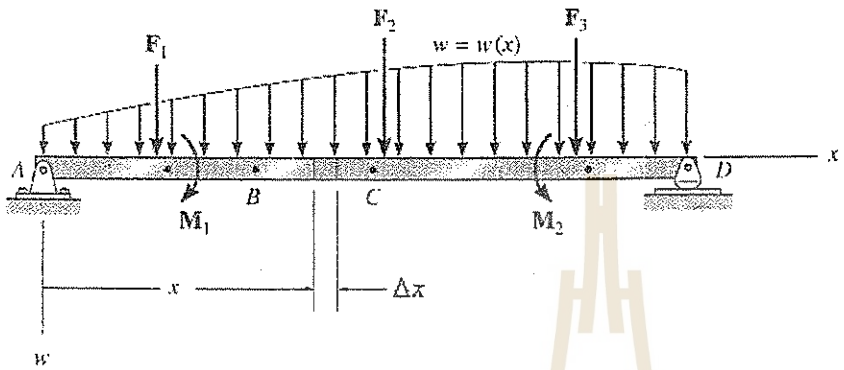
V- diagram

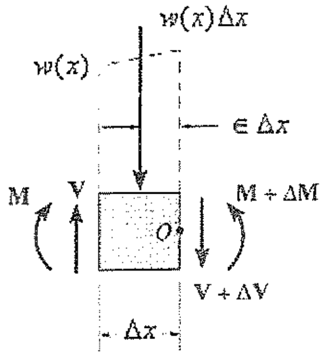


M- diagram

7.3 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระจาย แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด (Relations Between Distributed Load, Shear, and Moment)

เมื่อเรานำสมการของแรงเฉือน V และสมการของ moment M ซึ่งเป็น function ของ x มาเขียนแผนภาพแล้ว แผนภาพที่ได้จะถูกเรียกว่า แผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram ตามลำดับ ถ้าคานถูกกระทำโดยระบบของแรงที่ค่อนข้างซับซ้อน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7a แล้ว การเขียน shear diagram และ moment diagram ก็จะมีความยุ่งยากและใช้เวลานาน ซึ่งวิธีการที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะช่วยให้การเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram เหล่านั้นง่ายขึ้น





รูปที่ 7-7

Regions for Distributed Loads

พิจารณาคาน AD และแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคานที่มีขนาดความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาที่ระยะ x และ $x+\Delta x$ จากจุดรองรับ A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7a และ 7-7b กำหนดให้ทิศทางของแรงและโมเมนต์ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7b มีค่าเป็นบวก นอกจากนั้นแล้ว แรงลัพธ์ที่เกิดจากแรงกระทำแบบกระจาย (distributed load) $w(x)$ มีค่าเท่ากับ $w(x)\Delta x$ และกระทำที่ระยะ $\in \Delta x$ จากจุด O เมื่อ $0 \le \in \le 1$

โดยใช้สมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x$$

$\circlearrowleft + \sum M_o = 0;$ $$-V\Delta x - M + w(x)\Delta x\,[\in \Delta x]\Delta x + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x) \in \Delta x^2$$

เมื่อหารสมการทั้งสองด้วย Δx และใส่ limit โดยให้ $\Delta x \to 0$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \tag{7-1}$$

(slope ของ shear diagram ที่จุดใดๆ = ค่าลบของ distributed load ที่จุดนั้น)

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7-2}$$

(slope ของ moment diagram ที่จุดใดๆ = ค่าของแรงเฉือนที่จุดนั้น)

จากสมการที่ 7-2 เราจะเห็นว่าเมื่อ $V = 0$ แล้ว $dM/dx = 0$ ซึ่งหมายความว่า จุดที่มีแรงเฉือนเท่ากับศูนย์จะเป็นจุดที่ moment มีค่าสูงสุด เมื่อค่าของแรงเฉือนเปลี่ยนจากค่าบวกเป็นค่าลบที่จุดดังกล่าว และจะเป็นจุดที่ moment มีค่าต่ำสุด เมื่อค่าของแรงเฉือนเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวกที่จุดดังกล่าว

ถ้าเราเขียนสมการที่ 7-1 และ 7-2 ใหม่ให้อยู่ในรูป $dV = -w(x)dx$ และ $M = Vdx$ แล้ว สมการทั้งสองจะเป็นพื้นที่ที่มีขนาดเล็กๆ (differential area) ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายและ shear diagram ตามลำดับ เมื่อทำการ integrate สมการทั้งสองนี้ระหว่างจุดที่แรงกระทำเป็นจุดหรือแรงคู่ควบกระทำ อย่างเช่นจุด B และจุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7 แล้ว เราจะได้ว่า

$$\Delta V = -\int w(x)\,dx \qquad (7\text{-}3)$$

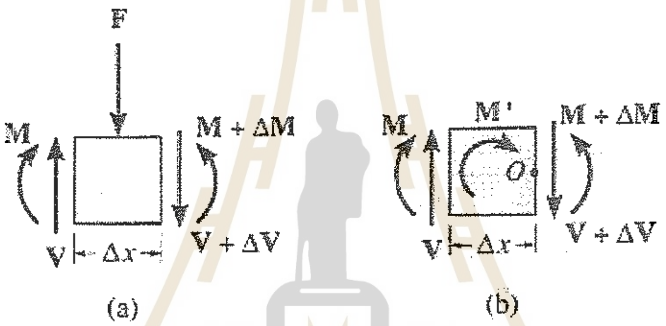
(การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน = ค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจาย)

$$\Delta M = \int V(x)\,dx \qquad (7\text{-}4)$$

(การเปลี่ยนแปลงของ moment = พื้นที่ภายใต้ shear diagram)

Regions of Concentrated Force and Moment

สมการของการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV และสมการของการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัด ΔM ที่หามาได้โดยใช้วิธีการที่ได้กล่าวไปแล้วนั้นจะไม่สามารถใช้ได้ตรงจุดที่แรงกระทำเป็นจุด (concentrated forces) และแรงคู่ควบ (couples) กระทำต่อคาน เนื่องจากว่าสมการดังกล่าวไม่ได้คิดถึงการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุดดังกล่าว



รูปที่ 7-8

พิจารณาแผนภาพ free body diagrams ของส่วนของคานที่มีความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาที่จุดที่แรงกระทำเป็นจุดและแรงคู่ควบกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8

โดยใช้สมการความสมดุลของแรงและแผนภาพ free body diagrams ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8a เราจะได้การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนอยู่ในรูป

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$V - F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -F \qquad (7\text{-}5)$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อแรงกระทำเป็นจุด F มีทิศทางพุ่งเข้าหาคานแล้ว ค่า ΔV จะมีค่าเป็นลบ (-) และ shear diagram จะมีค่าลดลงเท่ากับค่าแรง F

โดยใช้สมการความสมดุลของ moment รอบจุด O และแผนภาพ free body diagrams ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8b เราจะได้การเปลี่ยนแปลงของ moment ΔM จะอยู่ในรูป

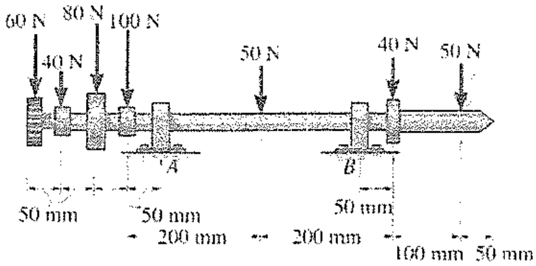
$\circlearrowright + \sum M_o = 0;$ $$M + \Delta M - M' - V\,\Delta x - M = 0$$

ถ้า $\Delta x \to 0$, $$\Delta M = M' \qquad (7\text{-}6)$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อแรงคู่ควบ M' มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว ค่า ΔM จะมีค่าเป็นบวกและ moment diagram จะมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับค่า M'

ตัวอย่างที่ 7-6 (7-74)

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6 เมื่อจุดรองรับที่ A เป็น journal bearing และจุดรองรับที่ B เป็น thrust bearing



รูปที่ Ex 7-6

วิธีทำ

หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของเพลา

ทำการหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของเพลาจากแผนภาพ free body diagram ของเพลา ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นว่า เพลามีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า 3 ค่า ซึ่งจะหาได้จากสมการความสมดุล 3 สมการ

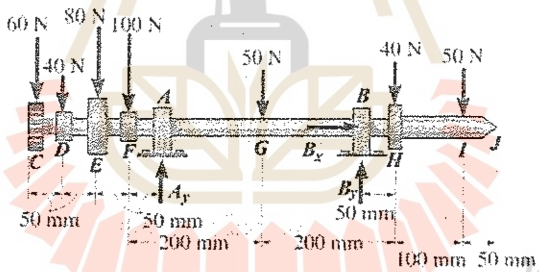
เนื่องจากไม่มีแรงกระทำภายนอกซึ่งอยู่ในแนวนอนกระทำต่อคาน จากสมดุลของแรงในแนวแกน x เราจะได้ว่าแรงปฏิกิริยา B_x มีค่าเท่ากับศูนย์

จากสมการความสมดุลรอบจุด B เราจะได้ว่า

$$A_y = 376.67 \text{ N}$$

จากสมการความสมดุลรอบจุด A หรือจากสมการความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง เราจะได้ว่า

$$B_y = 43.33 \text{ N}$$



จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและแรงเฉือน และระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ที่ได้ข้างต้น เราจะใช้ปลายด้านซ้ายสุดของเพลาเป็นจุดอ้างอิงในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูป

เขียนแผนภาพ shear diagram

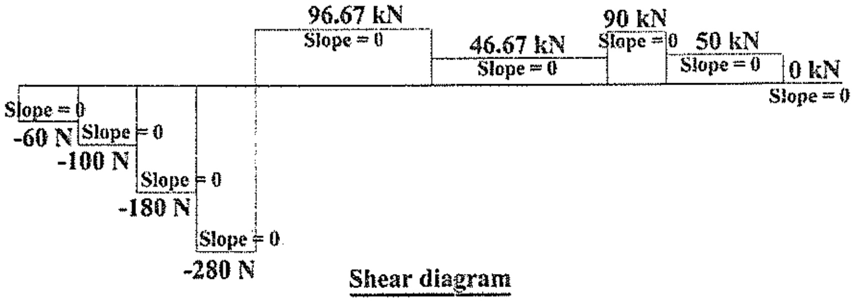
จากจุด C ถึงจุด D

จุด C ถูกกระทำโดยแรง 60 N ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด C มีค่ามีค่าเท่ากับ -60 N และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด C ถึงจุด D มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด C ถึงจุด D มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด D มีค่าเท่ากับ

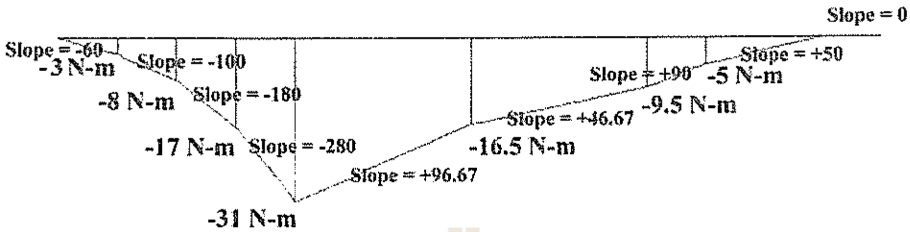
$$V_D - V_C = 0$$

$$V_D - (-60) = 0$$

$$V_D = -60 \text{ N}$$



Shear diagram



Moment diagram

จากจุด D ถึงจุด E

จุด D ถูกกระทำโดยแรง $40\ \mathrm{N}$ ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด D มีค่าเท่ากับ

$$V_D - (-60) = -40$$

$$V_D = -60 - 40 = -100\ \mathrm{N}$$

และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด D ถึงจุด E มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด D ถึงจุด E มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด E มีค่าเท่ากับ

$$V_E - V_D = 0$$

$$V_E - (-100) = 0$$

$$V_E = -100\ \mathrm{N}$$

จากจุด E ถึงจุด F

จุด E ถูกกระทำโดยแรง $80\ \mathrm{N}$ ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 เราจะได้ว่า แรงเฉือนที่จุด E มีค่า $-80 - 100 = -180\ \mathrm{N}$ และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด E ถึงจุด F มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด E ถึงจุด F มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด F มีค่า $-180\ \mathrm{N}$

จากจุด F ถึงจุด A

จุด F ถูกกระทำโดยแรง $100\ \mathrm{N}$ ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 เราจะได้ว่า แรงเฉือนที่จุด F มีค่า $-100 - 180 = -280\ \mathrm{N}$ และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด F ถึงจุด A มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด F ถึงจุด A มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด A มีค่า $-280\ \mathrm{N}$

จากจุด A ถึงจุด G

จุด A ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $376.67\ \mathrm{N}$ ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 เราจะได้ว่า แรงเฉือนที่จุด A มีค่า $-280 + 376.67 = +96.67\ \mathrm{N}$ และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด A ถึงจุด G มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด A ถึงจุด G มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด G มีค่า $+96.67\ \mathrm{N}$

โดยใช้หลักการดังตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น เราจะสามารถเขียนแผนภาพ shear diagram ที่เหลือได้โดยง่าย

เขียนแผนภาพ moment diagram

จากจุด C ถึงจุด D

จุด C เป็นปลายอิสระของเพลา ดังนั้น โมเมนต์ที่จุดดังกล่าวจึงมีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด C ถึงจุด D มีค่า -60 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด D มีค่าเท่ากับ

$$M_D - M_C = -60(0.050)$$
$$M_D - 0 = -3$$
$$M_D = -3\ \text{N - m}$$

จากจุด D ถึงจุด E

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด D ถึงจุด E มีค่า -100 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด E มีค่าเท่ากับ

$$M_E - M_D = -100(0.050)$$
$$M_E - (-3) = -5$$
$$M_E = -8\ \text{N - m}$$

จากจุด E ถึงจุด F

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด E ถึงจุด F มีค่า -180 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด F มีค่าเท่ากับ

$$M_F - M_E = -180(0.050)$$
$$M_F - (-8) = -9$$
$$M_F = -17\ \text{N - m}$$

จากจุด F ถึงจุด A

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด F ถึงจุด A มีค่า -280 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด A มีค่าเท่ากับ

$$M_A - M_F = -280(0.050)$$
$$M_A = -31\ \text{N - m}$$

จากจุด A ถึงจุด G

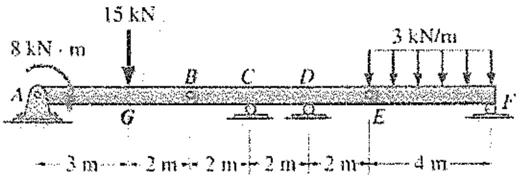
จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด A ถึงจุด G มีค่า $+96.67$ และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด A มีค่าเท่ากับ

$$M_G - M_A = +96.67(0.050)$$
$$M_G = -16.5\ \text{N - m}$$

โดยใช้หลักการดังตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น เราจะสามารถเขียนแผนภาพ moment diagram ที่เหลือได้โดยง่าย

ตัวอย่างที่ 7-7 (7-81)

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-7 เมื่อจุดเชื่อมต่อ B และ E เป็น pin



รูปที่ Ex 7-7

วิธีทำ

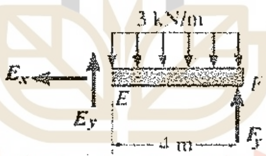
หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของคาน

คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-7 ถูกรองรับโดยหมุด (pin) ที่จุด A และ roller ที่จุด C จุด D และจุด F ซึ่งทำให้คานมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 5 ค่า ซึ่งมากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลของคาน ซึ่งมีเพียงแต่ 3 สมการ ดังนั้น เราจะไม่สามารถหาแรงปฏิกิริยาของคานได้โดยตรง

แต่เนื่องจากจุด B และจุด E ของคานเป็นหมุด ดังนั้น เมื่อเราทำการแยกพิจารณา frame ออกเป็น 3 ชิ้นส่วน คือ ชิ้นส่วน AB ชิ้นส่วน $BCDE$ และชิ้นส่วน EF แล้ว ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นว่า ชิ้นส่วนทั้งสามมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 9 ค่า ซึ่งเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุลของชิ้นส่วนทั้งสาม ซึ่งจะทำให้เราสามารถหาแรงปฏิกิริยาของคานได้

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน EF ของคาน ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นได้ว่า ชิ้นส่วนดังกล่าวมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า 3 ค่า และเนื่องจากชิ้นส่วนดังกล่าวไม่ถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวนอน ดังนั้น จากสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

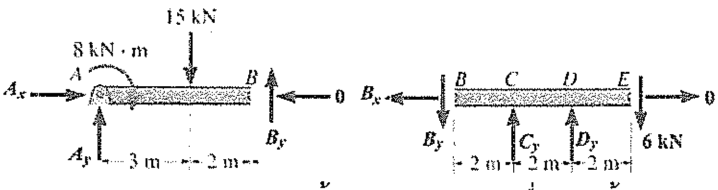
$$E_x = 0$$



เนื่องจากคานมีความสมมาตร เราจะได้ว่า $E_y = F_y$ ดังนั้น จากสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$E_y = F_y = 6\,\text{kN}$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $BCDE$ และชิ้นส่วน AB ของคาน ดังที่แสดงในรูป เราจะเห็นได้ว่า ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า 4 ค่า มากกว่าจำนวนของสมการความสมดุล แต่เมื่อพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนทั้งสองร่วมกัน เราจะเห็นได้ว่า ชิ้นส่วนทั้งสองมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า 6 ค่า ซึ่งเท่ากับจำนวนของสมการความสมดุล



พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $BCDE$ เนื่องจากชิ้นส่วนดังกล่าวไม่ถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวนอน ดังนั้น จากสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$B_x = 0$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน AB เนื่องจากชิ้นส่วนดังกล่าวไม่ถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวนอน ดังนั้น จากสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$A_x = 0$$

$\circlearrowleft + \sum M_A = 0;$ $$-B_y(5) + 15(3) + 8 = 0$$

$$B_y = 10.6\text{ kN}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$A_y + 10.6 - 15 = 0$$

$$A_y = 4.4\text{ kN}$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $BCDE$

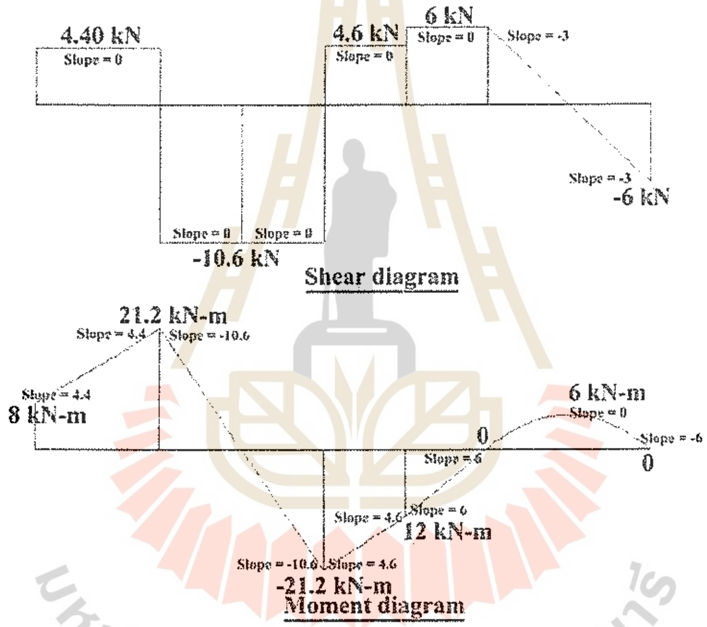
$\circlearrowleft + \sum M_C = 0;$ $$D_y(2) + 10.6(2) - 6(4) = 0$$

$$D_y = 1.4\text{ kN}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$C_y + 1.4 - 10.6 - 6 = 0$$

$$C_y = 15.2\text{ kN}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำและแรงเฉือน และระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ที่ได้ข้างต้น เราจะใช้ปลายด้านซ้ายสุดของเพลาเป็นจุดอ้างอิงในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูป



เขียนแผนภาพ shear diagram

จากจุด A ถึงจุด G

จุด A ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา 4.40 kN ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด A มีค่าเท่ากับ 4.40 kN และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด A ถึงจุด G มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด A ถึงจุด G มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด G มีค่าเท่ากับ

$$V_G - V_A = 0$$

$$V_G - (4.40) = 0$$

$$V_G = 4.40\text{ kN}$$

จากจุด G ถึงจุด B

จุด G ถูกกระทำโดยแรง 15 kN ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด G มีค่าเท่ากับ

$$V_G - (-15) = 4.40$$

$$V_G = 4.40 - 15 = -10.6\,\text{kN}$$

และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด G ถึงจุด B มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด G ถึงจุด B มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด B มีค่าเท่ากับ

$$V_B - V_G = 0$$
$$V_B - (-10.6) = 0$$
$$V_B = -10.6\ \text{kN}$$

จากจุด B ถึงจุด C

จากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน AB จุด B ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $10.6\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งขึ้น และจากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $BCDE$ จุด B ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $10.6\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งลง ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด B คงเดิมคือ $-10.6\,\text{kN}$

เนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด B ถึงจุด C มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด B ถึงจุด C มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด C มีค่าเท่ากับ

$$V_C - V_B = 0$$
$$V_C - (-10.6) = 0$$
$$V_C = -10.6\ \text{kN}$$

จากจุด C ถึงจุด D

จุด C ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $15.2\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด C มีค่าเท่ากับ

$$V_C - (-10.6) = 15.2$$
$$V_G = 15.2 - 10.6 = 4.6\,\text{kN}$$

และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด C ถึงจุด D มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด C ถึงจุด D มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด D มีค่าเท่ากับ

$$V_D - V_C = 0$$
$$V_D - (4.6) = 0$$
$$V_D = 4.6\ \text{kN}$$

จากจุด D ถึงจุด E

จุด D ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $1.4\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด D มีค่าเท่ากับ

$$V_D - (4.6) = 1.4$$
$$V_D = 1.4 + 4.6 = 6\,\text{kN}$$

และเนื่องจากแรงกระทำแบบกระจาย w จากจุด D ถึงจุด E มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด D ถึงจุด E มีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด E มีค่าเท่ากับ

$$V_E - V_D = 0$$

$$V_E - (6) = 0$$
$$V_E = 6 \text{ kN}$$

จากจุด E ถึงจุด F

จากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน $BCDE$ จุด E ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $6\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งลง และจากแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วน EF จุด E ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $6\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด B คงเดิมคือ $6\,\text{kN}$

เนื่องจากจุด E ถึงจุด F ถูกกระทำโดยแรงกระทำแบบกระจายขนาด $3\,\text{kN/m}$ ดังนั้น จากสมการที่ 7-1 เราจะได้ว่า slope ของ shear diagram จากจุด B ถึงจุด C มีค่าเท่ากับ -3 และจากสมการที่ 7-3 แรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด F มีค่าเท่ากับ

$$V_F - V_E = (-3)4$$
$$V_C - (6) = -12$$
$$V_C = -6 \text{ kN}$$

และเนื่องจากจุด F ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา $6\,\text{kN}$ ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 7-5 แรงเฉือนที่จุด F มีค่าเท่ากับ $0\,\text{kN}$

เขียนแผนภาพ moment diagram

จากจุด A ถึงจุด G

จุด A เป็นหมุด (pin) ซึ่งถูกกระทำโดยโมเมนต์ภายนอกขนาด $8\,\text{kN - m}$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น จากสมการที่ 7-6 โมเมนต์ที่จุดดังกล่าวจึงมีค่าเท่ากับ $+8\,\text{kN - m}$ และจากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด A ถึงจุด G มีค่า $+4.4$ และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด G มีค่าเท่ากับ

$$M_G - M_A = 4.4(3)$$
$$M_G - (8) = 13.2$$
$$M_G = 21.2\,\text{kN - m}$$

จากจุด G ถึงจุด B

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด G ถึงจุด B มีค่า -10.6 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด B มีค่าเท่ากับ

$$M_B - M_G = -10.6(2)$$
$$M_B - (21.2) = -21.2$$
$$M_B = 0\,\text{kN - m}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่า จุดเชื่อมต่อ B เป็นหมุด (pin) ซึ่งไม่มีความต้านทานต่อโมเมนต์

จากจุด B ถึงจุด C

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด B ถึงจุด C มีค่า -10.6 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด C มีค่าเท่ากับ

$$M_C - M_B = -10.6(2)$$
$$M_C - (0) = -21.2$$
$$M_C = -21.2\,\text{kN - m}$$

จากจุด C ถึงจุด D

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด C ถึงจุด D มีค่า 4.6 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด D มีค่าเท่ากับ

$$M_D - M_C = 4.6(2)$$
$$M_D - (-21.2) = 9.2$$
$$M_D = -12\,\text{kN - m}$$

จากจุด D ถึงจุด E

จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram จากจุด D ถึงจุด E มีค่า 6 และจากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ทางด้านซ้ายมือของจุด E มีค่าเท่ากับ

$$M_E - M_D = 6(2)$$
$$M_E - (-12) = 12$$
$$M_E = -0\,\text{kN - m}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่า จุดเชื่อมต่อ E เป็นหมุด (pin) ซึ่งไม่มีความต้านทานต่อโมเมนต์

จากจุด E ถึงจุด F

จากแผนภาพ shear diagram เราจะเห็นว่า ค่าของแรงเฉือนจากจุด E ถึงจุด F มีค่าลดลงจาก $6\,\text{kN}$ ที่จุด E เป็นศูนย์ที่กึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วน EF และเป็น $-6\,\text{kN}$ ที่จุด F ดังนั้น จากสมการที่ 7-2 เราจะได้ว่า slope ของ moment diagram ที่จุด E จะมีค่าเป็น $+6$ และลดลงเรื่อยๆ อย่างคงที่จนเป็นศูนย์ที่กึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วน EF จากนั้น ก็จะยังคงมีค่าลดลงเรื่อยๆ อย่างคงที่จนกระทั่งเป็น -6 ที่จุด F ดังที่แสดงในรูป

จากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ที่จุดกึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วน EF มีค่าเท่ากับ

$$M - M_E = \frac{1}{2}2(6)$$
$$M - (0) = 6$$
$$M = 6\,\text{kN - m}$$

จากสมการที่ 7-4 โมเมนต์ที่จุด F มีค่าเท่ากับ

$$M_F - M = \frac{1}{2}2(-6)$$
$$M_F - (6) = -6$$
$$M_F = 0\,\text{kN - m}$$

ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่า จุดรองรับ F เป็น roller ซึ่งไม่มีความต้านทานต่อโมเมนต์

บทที่ 8

Friction

จุดประสงค์

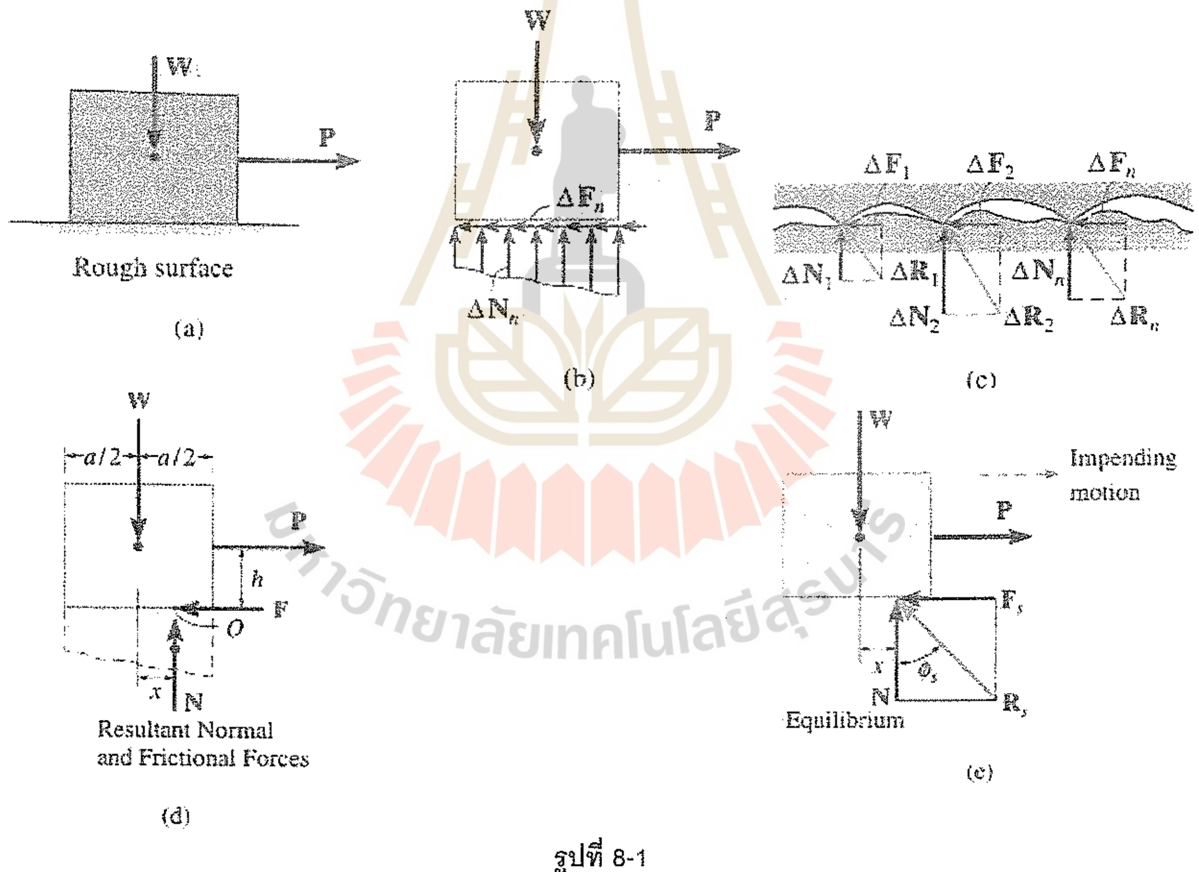
1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึง concept ของความเสียดทานระหว่างวัตถุผิวแห้ง (dry friction) และการวิเคราะห์ความสมดุลของวัตถุแกร่ง (rigid bodies) ที่ถูกกระทำโดยแรงชนิดนี้
2. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงการวิเคราะห์ที่เกี่ยวกับแรงเสียดทานในลิ่ม (wedges), เกลียว (screws), และสายพาน (belts)

8.1 ลักษณะพิเศษของความเสียดทานระหว่างวัตถุผิวแห้ง (Characteristic of Dry Friction)

ความเสียดทาน (friction) เป็นความต้านทานที่กระทำอยู่บนวัตถุ ซึ่งจะป้องกันไม่ให้วัตถุเกิดการเลื่อนหรือทำให้การเลื่อนของวัตถุดังกล่าวมีความเร็วช้าลงเรื่อยๆ แรงนี้จะมีทิศทางในแนวสัมผัส (tangent) กับพื้นผิวที่เรากำลังพิจารณา

โดยทั่วไปแล้ว ความเสียดทานจะแบ่งออกเป็นสองประเภทคือ fluid friction ซึ่งเกิดขึ้นที่พื้นผิวสัมผัสของวัตถุสองวัตถุซึ่งถูกแยกออกโดยของไหล (gas หรือ liquid) และ dry friction หรือ Coulomb friction ซึ่งเกิดขึ้นที่พื้นผิวสัมผัสของวัตถุสองวัตถุซึ่งไม่มีของไหลหล่อลื่นอยู่

ทฤษฎีความเสียดทานระหว่างวัตถุผิวแห้ง (Theory of dry Friction)



รูปที่ 8-1

พิจารณาแท่งวัตถุแกร่ง (rigid block) ซึ่งมีน้ำหนัก $\bar{W}$ และถูกกระทำโดยแรงในแนวนอน $\bar{P}$ วางอยู่บนพื้นที่อยู่ในแนวราบและมีผิวหยาบ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1a กำหนดให้ผิวสัมผัสระหว่างพื้นและแท่งวัตถุสามารถที่จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ (deformable) ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1b จากรูป

1. เพื่อให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวดิ่งเนื่องจากน้ำหนัก $\bar{W}$ ดังนั้น แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงตั้งฉากแบบแผ่กระจาย $\Delta\bar{N}_n$ (distributed normal force) ซึ่งเป็นแรงปฏิกิริยาที่พื้นกระทำต่อ block แรงตั้งฉากแผ่กระจายนี้จะมีการกระจายที่ไม่คงที่ โดยจะมีค่าสูงและลดลงเล็กน้อยจากขวามือไปยังซ้ายมือ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1b เนื่องจากผลของการกระทำของแรงในแนวนอน $\bar{P}$
2. เพื่อให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวนอนเนื่องจากแรง $\bar{P}$ ดังนั้น แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงเสียดทาน $\Delta\bar{F}_n$ ที่กระทำในแนวผิวสัมผัสกับผิวสัมผัสระหว่างพื้นและแท่งวัตถุไปทางซ้ายมือ

รูปที่ 8-1c แสดงภาพขยายของผิวสัมผัสระหว่างแท่งวัตถุและพื้น จากรูป เราจะเห็นได้ว่า ในการต้านทานต่อแรงกระทำ $\bar{P}$ และน้ำหนักของแท่งวัตถุ $\bar{W}$ ผิวสัมผัสดังกล่าวจะมีแรงปฏิกิริยา $\Delta\bar{R}_n$ เกิดขึ้นที่จุดสัมผัส และแรงนี้สามารถถูกแตกออกเป็นองค์ประกอบได้สององค์ประกอบคือ แรงในแนวตั้งฉาก $\Delta\bar{N}_n$ และแรงเสียดทาน $\Delta\bar{F}_n$

ในการพิจารณาลักษณะของความเสียดทานระหว่างวัตถุผิวแห้งโดยใช้ทฤษฎีความเสียดทานนั้น เราจะแบ่งการพิจารณาสภาวะของแท่งวัตถุออกเป็น 3 สภาวะคือ สภาวะที่อยู่ในสมดุล (Equilibrium) สภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่ (Impending Motion) และสภาวะที่มีการเคลื่อนที่ (Motion)

สภาวะที่อยู่ในสมดุล (Equilibrium)

กำหนดให้ แรงตั้งฉากแผ่กระจาย $\Delta\bar{N}_n$ และแรงเสียดทาน $\Delta\bar{F}_n$ มีแรงลัพธ์เป็นแรง $\bar{N}$ และแรง $\bar{F}$ ตามลำดับ ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของแท่งวัตถุแกร่งได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1d จากรูป กำหนดให้แรงลัพธ์ $\bar{N}$ กระทำอยู่ที่ตำแหน่ง x จากแนวกระทำของน้ำหนัก $\bar{W}$ และผ่านจุด centroid ของแรงตั้งฉากแบบแผ่กระจาย $\Delta\bar{N}_n$ โดยที่ตำแหน่ง x นี้จะหามาได้โดยใช้ความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O ซึ่งเราจะได้ว่า

$$Wx = Ph$$
$$x = \frac{Ph}{W}$$

ถ้า $x = a/2$ หรือ $\bar{N}$ กระทำอยู่ที่หัวมุมทางขวามือของแท่งวัตถุแกร่งแล้ว แท่งวัตถุแกร่งจะอยู่ในสภาวะที่กำลังจะล้มคว่ำไปข้างหน้า

สภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่ (Impending Motion)

ในกรณีที่ความสูงของแรง $\bar{P}$ จากพื้น h มีค่าน้อยหรือผิวสัมผัสของแท่งวัตถุและพื้นมีลักษณะค่อนข้างลื่นแล้ว แรงเสียดทาน $\bar{F}$ อาจจะมีค่าไม่มากพอที่จะสมดุลแรง $\bar{P}$ ได้ ดังนั้น แท่งวัตถุจะมีแนวโน้มที่จะเลื่อนก่อนที่แท่งวัตถุจะล้มคว่ำไปข้างหน้า ในกรณีเช่นนี้ ถ้าเราเพิ่มค่าของแรง $\bar{P}$ (P) มากขึ้นเรื่อยๆ อย่างช้าๆ จากศูนย์ จนถึงค่าแรง F ที่มากที่สุดค่าหนึ่ง ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า limiting static frictional force (F_s) แล้ว แท่งวัตถุจะอยู่ในสภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่ และเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1e

ถ้าเราเพิ่มแรง P มากขึ้นกว่าค่าแรง F_s เพียงเล็กน้อยแล้ว แรง P ดังกล่าวจะทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่และจะทำให้จุดที่ผิวของแท่งวัตถุและพื้นสัมผัสกันเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือเกิดการแตกขึ้น จากการทดสอบพบว่า ค่าของแรง F_s จะแปรผันโดยตรงกับค่าของแรงลัพธ์ N โดยที่

$$F_s = \mu_s N \tag{8-1}$$

เมื่อ μ_s เป็นค่าคงที่ของการแปรผันโดยตรงและมักจะถูกเรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตย์ (coefficient of static friction)

ดังนั้น เมื่อแท่งวัตถุนี้อยู่ในสภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่แล้ว แรงตั้งฉาก $\bar{N}$ และแรงเสียดทาน $\bar{F}_s$ จะทำให้เกิดผลรวมของแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับ $\bar{R}_s$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1e มุม ϕ_s ที่แรงลัพธ์ $\bar{R}_s$ กระทำกับแรงตั้งฉาก $\bar{N}$ ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า มุมของความเสียดทานสถิตย์ (angle of static friction) และจะมีค่าเท่ากับ

$$\phi_s = \tan^{-1}\frac{F_s}{N} = \tan^{-1}\frac{\mu_s N}{N} = \tan^{-1}\mu_s$$

ค่าของสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานแบบสถิตย์ μ_s

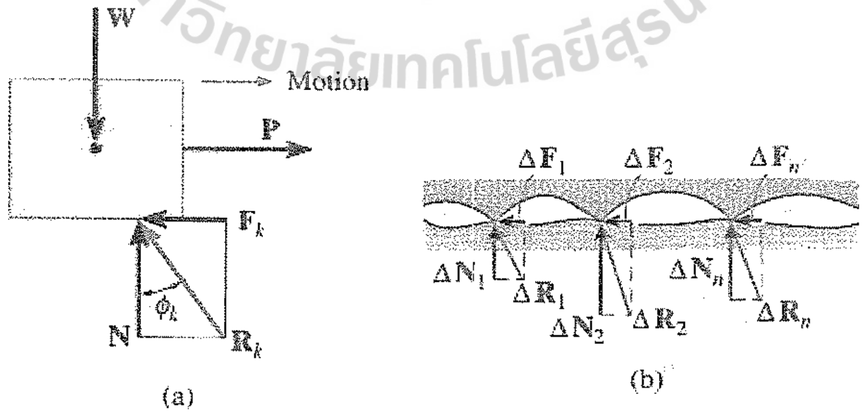
ตารางที่ 8-1 แสดงค่าโดยประมาณของสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานแบบสถิตย์ μ_s ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของผิวสัมผัสระหว่างวัสดุ โดยปกติแล้ว μ_s จะมีค่าน้อยกว่าหนึ่ง แต่ในบางกรณี μ_s จะมีค่ามากกว่าหนึ่งก็ได้ เช่น ค่า μ_s ระหว่าง aluminum และ aluminum เป็นต้น ซึ่งหมายความว่า แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสมีค่ามากกว่าแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นที่ผิวดังกล่าว

ตารางที่ 8-1

ผิวสัมผัสระหว่างวัสดุ	coefficient of static friction μ_s
Metal on metal	0.15-0.60
Metal on wood	0.20-0.60
Metal on stone	0.30-0.70
Metal on leather	0.30-0.60
Metal on ice	0.03-0.05
Wood on wood	0.25-0.50
Wood on leather	0.25-0.50
Stone on stone	0.40-0.70
Earth on earth	0.20-1.00
Rubber on concrete	0.60-0.90
Aluminum on aluminum	1.10-1.70

สภาวะที่มีการเคลื่อนที่ (Motion)

จากการทดสอบพบว่า เมื่อแรง $\vec{P}$ มีค่ามากกว่าแรง $\vec{F}_s$ แล้ว แรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสจะมีค่าลดลงเล็กน้อยจาก $\vec{F}_s$ ซึ่งแรงนี้มักจะถูกเรียกว่า แรงเสียดทานจลน์ (kinetic frictional force) $\vec{F}_k$ และจะทำให้แท่งวัตถุมีการเลื่อนแบบมีความเร่งเกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2a



รูปที่ 8-2

เราสามารถที่จะอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวได้จากการพิจารณารูปที่ 8-2b และ 8-3 จากรูป ในช่วงที่แท่งวัตถุยังไม่มีการเคลื่อนที่ ค่าของแรงกระทำ P จะมีค่าเท่ากับค่าของแรงเสียดทาน F ที่เกิดขึ้นที่จุดสัมผัสระหว่างแท่งวัตถุ

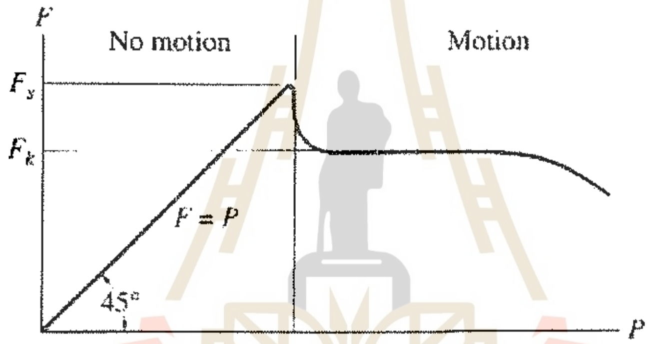
และพื้น และจะมีลักษณะเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนกระทั่งแรงกระทำ P มีค่าเท่ากับค่าของแรงเสียดทานสถิตย์สูงสุด F_s ($P = F_s$) ดังที่แสดงโดยกราฟเส้นตรงในรูปที่ 8-3

เมื่อแรงกระทำ P มีค่าค่อยๆ เพิ่มขึ้นจากศูนย์จนถึงค่าของแรงเสียดทานสถิตย์ F_s ($P > F_s$) แรง P ดังกล่าวจะพยายามเลื่อนผิวสัมผัสของแท่งวัตถุและพื้นให้สูงขึ้นจากตำแหน่งที่สมดุลเมื่อตอนเริ่มแรก จนกระทั่งมาอยู่ที่ปลายยอดของส่วนที่ยื่นออกมาของผิวสัมผัสของพื้น ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2b

ขณะที่แท่งวัตถุเริ่มจะมีการเลื่อนเกิดขึ้น ความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสจะทำให้ผิวสัมผัสมีอุณหภูมิสูงมากเกิดขึ้นที่จุดดังกล่าวและจะทำให้จุดดังกล่าวเกิดการหลอมละลายและยึดติดกันของผิวที่จุดสัมผัสดังกล่าว

เมื่อแรง P มีค่าที่สูงเพียงพอแล้ว แรง P จะเฉือนการยึดติดกันของผิวที่จุดสัมผัสออกจากกัน ซึ่งเป็นกลไกหลักที่ก่อให้เกิดความเสียดทาน และเมื่อการหลอมละลายที่จุดสัมผัสเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งจะทำหน้าที่หล่อลื่นให้กับผิวสัมผัสแล้ว ค่าของแรงกระทำ P ที่ใช้ในการเลื่อนแท่งวัตถุก็จะมีค่าลดลงเท่ากับแรงเสียดทานจลน์ (kinetic frictional force) $\bar{F}_k$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3

เมื่อแรงกระทำ P มีค่าสูงขึ้นอีกมากๆ แล้ว การหลอมละลายที่จุดสัมผัสก็จะเกิดขึ้นสูงตามไปด้วย ทำให้เส้นกราฟที่แสดงในรูปที่ 8-3 มีความชันที่ลดลง



รูปที่ 8-3

เมื่อผิวสัมผัสของแท่งวัตถุเลื่อนมาอยู่ที่ปลายยอดของส่วนที่ยื่นออกมาของผิวสัมผัสของพื้น แรงลัพธ์ $\Delta\bar{R}_n$ จะทำมุมกับแนวดิ่งน้อยลงกว่าที่ตำแหน่งเริ่มแรก (เปรียบเทียบรูปที่ 8-1c กับ 8-2b) ดังนั้น แรงเสียดทาน $\Delta\bar{F}_n$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบของแรงลัพธ์ $\Delta\bar{R}_n$ ในแนวนอนก็จะมีค่าลดลง จากการทดสอบพบว่า ค่าของแรงเสียดทานจลน์ F_k จะแปรผันโดยตรงกับค่าของแรงลัพธ์ N โดยที่

$$F_k = \mu_k N \tag{8-2}$$

เมื่อ μ_k เป็นค่าคงที่ของการแปรผันโดยตรงและ μ_k มักจะถูกเรียกว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานจลน์ (coefficient of kinetic friction) โดยทั่วไป ค่าของ μ_k นี้จะมีค่าน้อยกว่าค่าของ μ_s ดังที่แสดงในตารางที่ 8-1 ประมาณ 25 เปอร์เซ็นต์

จากรูปที่ 8-2a แรงลัพธ์ $\bar{R}_k$ จะมีแนวแรงกระทำกับ $\bar{N}$ เป็นมุม ϕ_k ซึ่งมุมนี้มักจะถูกเรียกว่า มุมของความเสียดทานจลน์ (angle of kinetic friction) และจะมีค่าเท่ากับ

$$\phi_k = \tan^{-1}\frac{F_k}{N} = \tan^{-1}\frac{\mu_k N}{N} = \tan^{-1}\mu_k$$

โดยการเปรียบเทียบ $\phi_s \geq \phi_k$

โดยสรุปแล้ว เราจะกล่าวได้ว่า

- แรงเสียดทานจะกระทำในแนวสัมผัส (tangent) กับผิวสัมผัสและมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางที่วัตถุจะเคลื่อนที่
- ค่าของแรงเสียดทานสถิตย์ $\vec{F}_s$ จะเป็นอิสระกับพื้นที่ผิวสัมผัส ถ้าแรงกระจายในแนวตั้งฉากไม่มีค่ามากจนทำให้ผิวสัมผัสเกิดการเสียรูปอย่างมากหรือเกิดการแตกหักเกิดขึ้น
- โดยทั่วไปแล้ว $F_s > F_k$ ยกเว้นในกรณีที่การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุทั้งสองที่เกิดขึ้นมีความเร็วที่น้อยมากๆ แล้ว $F_s \approx F_k$ ดังนั้น $\mu_s \approx \mu_k$
- เมื่อการเลื่อนที่ผิวสัมผัสกำลังจะเกิดขึ้น $F_s = \mu_s N$
- เมื่อการเลื่อนที่ผิวสัมผัสกำลังเกิดขึ้นอยู่ $F_k = \mu_k N$

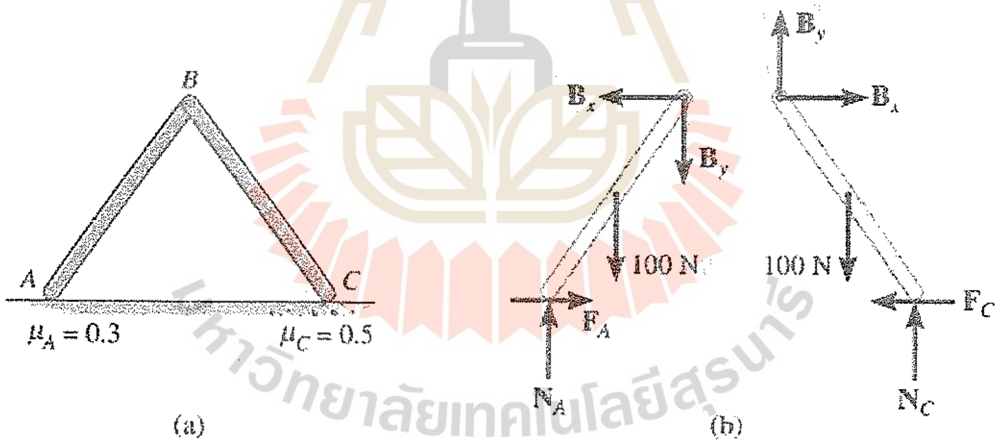
8.2 ปัญหาที่เกี่ยวกับความเสียดทานระหว่างวัตถุผิวแห้ง (Problems Involving Dry Friction)

ถ้าวัตถุแกร่งอยู่ในความสมดุลเมื่อถูกกระทำโดยระบบของแรงที่รวมถึงแรงเสียดทานแล้ว ระบบของแรงดังกล่าวนอกจากจะต้องสอดคล้องกับสมการความสมดุลแล้ว ระบบของแรงดังกล่าวยังจะต้องสอดคล้องกับกฎต่างๆ ที่เกี่ยวกับแรงเสียดทานด้วย

ประเภทของปัญหาที่เกี่ยวกับความเสียดทาน (Types of Friction Problems)

โดยทั่วไปแล้ว ปัญหาที่เกี่ยวกับความเสียดทานจะถูกแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท โดยการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของวัตถุ จากนั้น ทำการเปรียบเทียบจำนวนทั้งหมดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ากับจำนวนทั้งหมดของสมการสมดุล (equilibrium equations) ที่มีอยู่

สภาวะที่อยู่ในสมดุล (Equilibrium)



รูปที่ 8-4

กรณีนี้เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับแรงเสียดทานเมื่อวัตถุอยู่ในสมดุล ซึ่งมีเงื่อนไขคือ *จำนวนทั้งหมดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีจำนวนเท่ากับจำนวนทั้งหมดของสมการสมดุลที่มีอยู่* โดยที่ค่าของแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในวัตถุจะต้องสอดคล้องกับสมการแรงเสียดทาน $F \le \mu_s N$ ถ้าค่าของแรงเสียดทานที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการดังกล่าวแล้ว วัตถุก็จะไม่อยู่ในสมดุล

พิจารณาโครงสร้าง ซึ่งประกอบด้วยแท่งเหล็กสองแท่งยึดติดกันด้วยหมุดที่ไร้แรงเสียดทานที่จุด B และปลายของโครงสร้างจะวางอยู่บนพื้นที่จุด A และจุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4a กำหนดให้น้ำหนักของแท่งเหล็กแต่ละอันมีค่าเท่ากับ $100\ \mathrm{N}$

ในการพิจารณาปัญหาที่เกี่ยวกับแรงเสียดทาน เราจะทำการตรวจสอบดูว่า แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่ A และ C จะสามารถรักษาสมดุลของโครงสร้างได้หรือไม่? ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแท่งเหล็กแต่ละอัน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4b
2. ทำการหาค่าของแรงปฏิกริยาและแรงเสียดทานทั้ง 6 ค่า โดยการใช้สมการความสมดุล 6 สมการ (3 สมการต่อหนึ่งแท่งเหล็ก)
3. หลังจากที่เราได้ค่าของแรงแรงปฏิกริยาและแรงเสียดทาน F_A, N_A, F_C, และ N_C แล้ว เราจะได้ว่าโครงสร้างดังกล่าวจะอยู่ในความสมดุลก็ต่อเมื่อ

$$F_A \le 0.3N_A \text{ และ } F_C \le 0.5N_C$$

สภาวะที่ทุก ๆ จุดของวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ (Impending Motion at All Points)

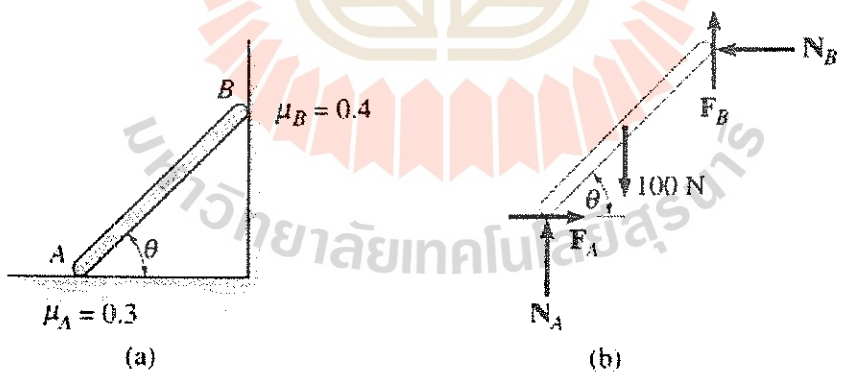
กรณีนี้จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับแรงเสียดทานเมื่อทุกๆ จุดของวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ ซึ่งมีเงื่อนไขคือ *จำนวนทั้งหมดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีจำนวนเท่ากับจำนวนทั้งหมดของสมการสมดุลและสมการของแรงเสียดทาน (frictional equations) หรือ $F = \mu N$ ที่มีอยู่* โดยที่

- ถ้าวัตถุกำลังจะมีการเคลื่อนที่แล้ว $F_s = \mu_s N$
- ถ้าวัตถุกำลังเคลื่อนที่อยู่แล้ว $F_k = \mu_k N$

พิจารณาแท่งเหล็ก ซึ่งวางอยู่บนพื้นที่ปลายด้านหนึ่งและพิงอยู่กับกำแพงที่ปลายอีกด้านหนึ่ง โดยผิวสัมผัสทั้งสองมีสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานสถิตย์ ดังแสดงในรูปที่ 8-5a ถ้าเราต้องการที่จะหาค่ามุม θ ที่น้อยที่สุดที่ไม่ทำให้แท่งเหล็กมีการเคลื่อนที่เกิดขึ้น โดยให้น้ำหนักของแท่งเหล็กมีค่าเท่ากับ 100 N แล้ว เราจะทำการวิเคราะห์ปัญหาดังนี้

1. ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของ แท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ 8-5b
2. ทำการวิเคราะห์หาแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 4 แรงคือ F_A, N_A, F_B, N_B, และมุม θ โดยใช้สมการสมดุล 3 สมการและสมการของแรงเสียดทานสถิตย์ (static frictional equations) 2 สมการคือ

$$F_A = 0.3N_A \text{ และ } F_B = 0.4N_B$$



รูปที่ 8-5

สภาวะที่บางจุดบนวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ (Impending Motion at Some Points)

กรณีนี้จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับแรงเสียดทานเมื่อบางจุดบนวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ ซึ่งมีเงื่อนไขคือ จำนวนทั้งหมดของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีจำนวนน้อยกว่าจำนวนทั้งหมดของสมการสมดุลและสมการของแรงเสียดทาน (frictional equations) หรือสมการเงื่อนไขของการล้ม (conditional equations for tipping) ที่มีอยู่ ดังนั้น ในกรณีนี้ เราจะมีสถานการณ์ที่เป็นไปได้ 2 สถานการณ์ (เคลื่อนที่หรือกำลังที่จะเคลื่อนที่) ซึ่งเราจำเป็นที่จะต้องหาว่าสถานการณ์ใดจะเกิดขึ้นก่อน

พิจารณาโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-6a ถ้าเราต้องการที่จะหาค่าของแรง P ที่จะทำให้โครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ โดยกำหนดให้น้ำหนักของแท่งเหล็กแต่ละอันมีค่าเท่ากับ $100\ \mathrm{N}$ แล้ว เราจะทำการวิเคราะห์ปัญหาดังนี้

1. ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ 8-6b
2. จากรูปที่ 8-6b เราจะเห็นได้ว่า โครงสร้างดังกล่าวมีแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 7 ค่าคือ F_A, N_A, F_C, N_C, B_x, B_y, และ P แต่เรามีสมการความสมดุล 6 สมการและสมการของแรงเสียดทานสถิตย์ (static frictional equations) 2 สมการ ซึ่งมีจำนวนมากกว่าแรงที่ไม่ทราบค่าหนึ่งสมการ ดังนั้น เพื่อที่จะได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้องและมีค่าเป็นหนึ่งเดียว เราจะต้องหาคำตอบที่สอดคล้องกับสมการสมดุลทั้ง 6 สมการ (3 สมการบนแต่ละ bar) และสอดคล้องกับสมการใดสมการหนึ่ง (เพียงสมการเดียว) ในสองสมการของสมการของแรงเสียดทานแบบสถิต ซึ่งหมายความว่า เมื่อ P มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ แรง P จะก่อให้เกิดการเลื่อนสองกรณีคือ

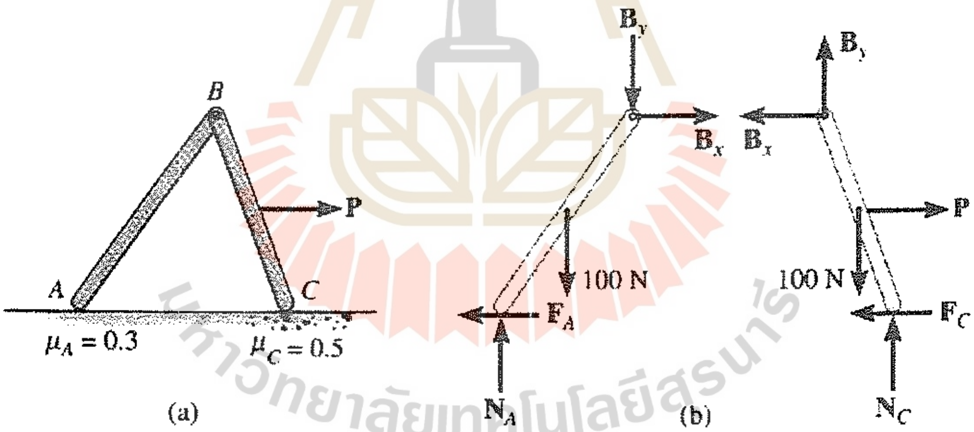
   2.1 แรง P จะก่อให้เกิดการเลื่อนที่จุดรองรับ A และไม่เกิดการเลื่อนที่จุดรองรับ C โดยที่

   $$F_A = 0.3N_A \text{ และ } F_C \le 0.5N_C$$

   2.2 แรง P จะก่อให้เกิดการเลื่อนที่จุดรองรับ C และไม่มีการเลื่อนที่จุดรองรับ A โดยที่

   $$F_A \le 0.3N_A \text{ และ } F_C = 0.5N_C$$

   ซึ่งจากทั้งสองกรณีนี้ เราจะหากรณีที่จะเกิดขึ้นจริงได้จากการหาค่าของแรง P ของแต่ละกรณีแล้ว เลือกใช้ค่า P ที่มีค่าน้อยกว่า แต่ถ้าค่าของแรง P ในทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากันแล้ว การเลื่อนที่ทั้งสองจุดจะเกิดขึ้นพร้อมกัน ซึ่งเป็นไปได้น้อยมาก ในกรณีนี้แรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 7 แรงจะสอดคล้องกับสมการทั้ง 8 สมการ



รูปที่ 8-6

สมการความสมดุลและสมการแรงเสียดทาน (Equilibrium Versus Frictional equations)

เราทราบมาแล้วว่า แรงเสียดทานจะมีทิศทางที่ต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ผิวสัมผัสของวัตถุเสมอ อย่างไรก็ตาม การกำหนดทิศทางของแรงเสียดทานที่ไม่ทราบค่าจะทำได้ 2 กรณีคือ

1. ในปัญหาที่ต้องการให้แรงเสียดทาน F ทำหน้าที่เป็น "แรงที่ก่อให้เกิดความสมดุล" และสอดคล้องกับสมการแรงเสียดทานสถิตย์ $F < \mu_s N$ นั้น เราสามารถที่จะสมมุติให้แรงเสียดทาน F มีทิศทางได้ตามที่เราต้องการและเราจะทราบทิศทางที่แท้จริงของแรงเสียดทาน F ได้เมื่อเราการแก้สมการความสมดุลหาค่าของแรง F ถ้าแรง F มีค่าเป็นลบแล้ว ทิศทางของแรง F ก็จะมีค่าตรงกันข้ามกับที่สมมุติไว้
2. ในปัญหาต้องการให้แรงเสียดทาน F สอดคล้องกับสมการแรงเสียดทาน $F = \mu N$ แล้ว เราจะไม่สามารถที่จะสมมุติทิศทางของแรงเสียดทาน F ได้ เนื่องจากสมการของแรงเสียดทานในกรณีนี้แสดงถึง

ความสัมพันธ์ของขนาดของแรงสองแรงที่ตั้งฉากกันเท่านั้น ดังนั้น เราจะต้องมองแนวโน้มการเคลื่อนที่ของวัตถุให้ออกเพื่อกำหนดทิศทางของแรงเสียดทาน F ได้อย่างถูกต้อง

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Free-Body Diagrams

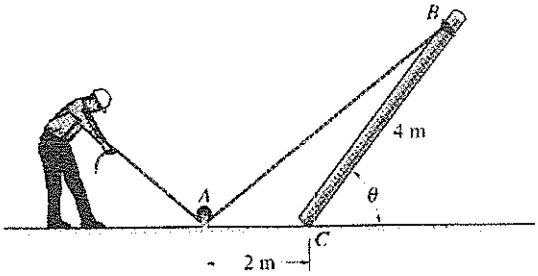
1. เขียนแผนภาพ free-body diagrams ถ้าโจทย์ไม่ได้เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับสภาวะที่วัตถุกำลังจะเคลื่อนที่หรือกำลังเคลื่อนที่อยู่ เราจะต้องให้แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยเราจะไม่สามารถสมมุติให้แรงเสียดทาน $F = \mu N$ ได้
2. หาจำนวนของตัวแบรที่ไม่ทราบค่าเทียบกับจำนวนของสมการความสมดุลที่มีอยู่
3. ถ้าเรามีจำนวนของตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลที่มีอยู่ เราจะต้องใช้สมการของแรงเสียดทานที่จุดสัมผัส (บางส่วนหรือทั้งหมด) เพื่อใช้ในการหาคำตอบ
4. ถ้าเราใช้สมการ $F = \mu N$ ในการแก้ปัญหาโจทย์ เราจำเป็นที่จะต้องเขียนทิศทางของ $\bar{F}$ บนแผนภาพ free-body diagrams ให้ถูกต้อง

Equations of Equilibrium and Friction

5. แก้สมการความสมดุลและสมการแรงเสียดทานที่จุดสัมผัส (บางส่วนหรือทั้งหมด) หรือในกรณีที่วัตถุกำลังจะล้ม ทำการแก้สมการความสมดุลและสมการเงื่อนไข (conditional equations) เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ
6. ถ้าโจทย์เป็นโจทย์ที่เกี่ยวกับปัญหาในสามมิติ เราควรที่จะเขียนสมการความสมดุลให้อยู่ในรูปของ Cartesian vectors

ตัวอย่างที่ 8-1 (8-27)

กำหนดให้เสาซึ่งมีน้ำหนัก W ถูกหย่อนอย่างช้าๆ จากตำแหน่งในแนวดิ่ง $\theta = 90^o$ เพื่อวางลงในแนวราบ โดยใช้ cable AB ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-1 ถ้า coefficient of static friction ที่จุด C มีค่า $\mu_s = 0.3$ จงหามุม θ ที่เสาดังกล่าวเริ่มจะเกิดการลื่น

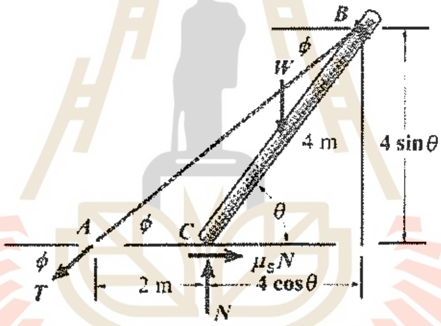


รูปที่ Ex 8-1

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram ของเสา

เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของเสาได้ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งสิ้น 4 ค่า คือ น้ำหนัก W แรงดึงใน cable T และแรงปฏิกริยาที่จุด C หรือ N ซึ่งจะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุล 3 สมการ



สมการความสมดุล

$\circlearrowleft + \sum M_C = 0;$

$$-W(2)\cos\theta + T\sin\phi(2) = 0$$

$$T = \frac{W\cos\theta}{\sin\phi} \qquad (1)$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$

$$\mu_s N - T\cos\phi = 0$$

$$\mu_s N = \frac{W\cos\theta}{\tan\phi} \qquad (2)$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$

$$N - W - T\sin\phi = 0$$

$$N = W(1+\cos\theta) \qquad (3)$$

แทนสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2) เราจะได้

$$\mu_s(1+\cos\theta)\tan\phi = \cos\theta \qquad (4)$$

จากรูป เราจะหาความสัมพันธ์ของมุม θ และมุม ϕ ได้ในรูป

$$\tan\phi = \frac{4\sin\theta}{2+4\cos\theta}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (4) เราจะได้

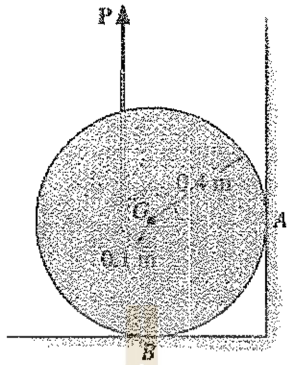
$$4\mu_s \sin\theta(1+\cos\theta) = \cos\theta(2+4\cos\theta) \quad (5)$$

เมื่อแทนค่า $\mu_s = 0.3$ ลงในสมการที่ (5) เราจะหามุม θ ที่เสาดังกล่าวเริ่มจะเกิดการลื่นได้เท่ากับ

$$\theta = 65.2^o \quad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 8-2 (8-34)

วงล้อไม้ ซึ่งมีมวล $200\,\text{kg}$ ถูกวางอยู่บนพื้นคอนกรีตและพิงอยู่กับผนังอิฐก่อ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-2 ถ้ากำหนดให้ coefficient of static friction ที่จุด A มีค่า $\mu_A = 0.4$ และที่จุด B มีค่า $\mu_B = 0.5$ จงหาค่าแรง P ต่ำสุดที่จะทำให้วงล้อไม้เกิดการหมุน

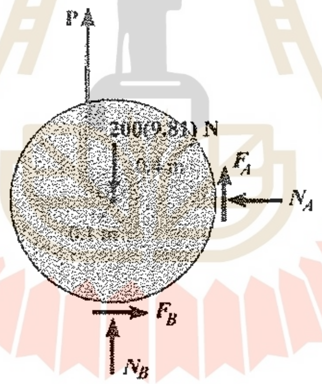


รูปที่ Ex 8-2

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram ของวงล้อไม้

เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของวงล้อไม้ได้ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งสิ้น 5 ค่าคือ แรง P แรง N_A และแรง F_A และแรง N_B และแรง F_B ซึ่งจะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุล 3 สมการ และสมการของแรงเสียดทานที่จุด A และจุด B อีก 2 สมการ



สมการความสมดุลและสมการของแรงเสียดทาน

จากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$ $$F_B - N_A = 0 \tag{1}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$N_B + F_A + P - 200(9.81) = 0 \tag{2}$$

$\circlearrowleft + \sum M_o = 0;$ $$F_A(0.4) + F_B(0.4) - P(0.1) = 0 \tag{3}$$

จากสมการของแรงเสียดทาน $F = \mu_S N$ เราจะได้ว่า

$$F_A = 0.4N_A \tag{4}$$

$$F_B = 0.5N_B \tag{5}$$

ทำการแก้สมการ เราจะได้

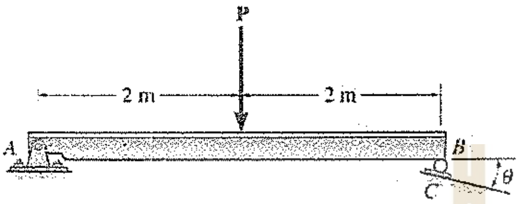
$$N_B = 490.5\ \text{N}$$

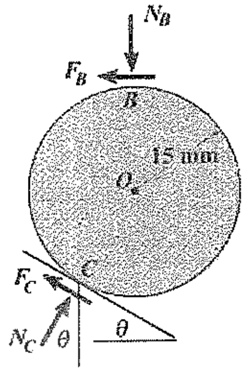
$$N_A = 245.3\ \text{N}$$

$$P = 1.37\ \text{kN}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 8-3 (8-41)

กำหนดให้คานถูกรองรับโดย pin ที่จุด A และ roller ซึ่งมีรัศมี $15\ \mathrm{mm}$ ที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3 ถ้า coefficient of static friction ที่จุด B และที่จุด C มีค่าเท่ากับ 0.3 จงหามุม θ สูงสุดที่จะไม่เกิดการเลื่อนเกิดขึ้นที่จุดรองรับ B เมื่อคานถูกกระทำโดยแรง P กำหนดให้ roller มีน้ำหนักที่น้อยมาก





รูปที่ Ex 8-3

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram **ของ** roller

เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของ roller ได้ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งสิ้น 4 ค่าคือ แรง N_B และแรง F_B และแรง N_C และแรง F_C ซึ่งจะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุล 3 สมการและสมการของแรงเสียดทานที่จุด B หรือที่จุด C อีก 1 สมการ

สมการความสมดุลและสมการของแรงเสียดทาน

$\curvearrowright + \sum M_o = 0;$ $$F_B(15) - F_C(15) = 0 \tag{1}$$

$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0;$ $$-F_B - F_C\cos\theta + N_C\sin\theta = 0 \tag{2}$$

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$N_C\cos\theta + F_C\sin\theta - N_B = 0 \tag{3}$$

สมมุติให้เกิดการเลื่อนที่จุด C ดังนั้น แรงเสียดทานที่จุดดังกล่าวจะอยู่ในรูป

$$F_C = 0.3\,N_C$$

จากสมการที่ (1) เราจะได้ว่า

$$F_B = F_C$$

ดังนั้น จากสมการที่ (2) เราจะได้ว่า

$$-0.3\,N_C - 0.3\,N_C\cos\theta + N_C\sin\theta = 0$$
$$(-0.3 - 0.3\cos\theta\sin\theta)N_C = 0 \tag{4}$$

จากสมการที่ (4) เราจะได้ว่า

$$\theta = 33.4^o$$ Ans.

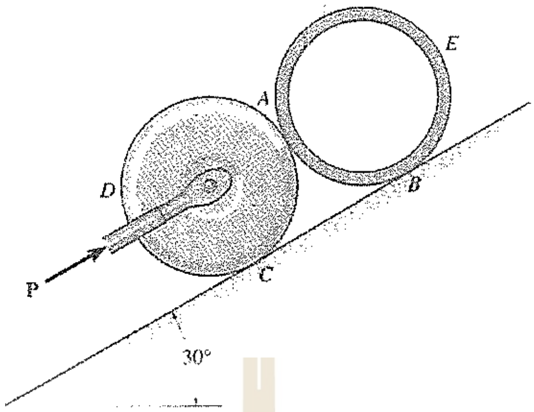
จากสมการที่ (3) เราจะได้ว่า

$$N_c(\cos 33.4° + 0.3 + \sin 33.4°) = N_B$$
$$N_C = N_B$$

เนื่องจากสมการที่ (4) ถูกต้องเสมอไม่ว่าแรง N_C มีค่าเท่าใด ดังนั้น คำตอบที่ได้จึงถูกต้องเสมอไม่ว่าแรง P จะมีค่าเท่าใดก็ตาม

ตัวอย่างที่ 8-4 (8-53)

จงหาค่าต่ำสุดของแรง P ที่จะใช้ในการผลักท่อ E ขึ้นพื้นเอียง เมื่อท่อมีมวล $75\,\mathrm{kg}$ และ roller D มีมวล $100\,\mathrm{kg}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-4 กำหนดให้ coefficient of static friction $\mu_A = 0.3$ $\mu_B = 0.25$ และ $\mu_C = 0.4$ และท่อ E และ roller D มีรัศมี $150\,\mathrm{mm}$

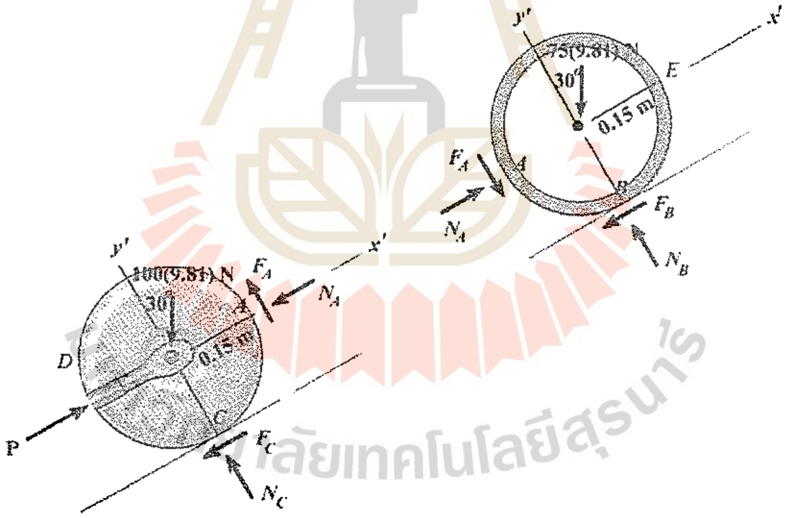


รูปที่ Ex 8-4

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของ roller D และท่อ E ได้ ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าทั้งสิ้น 7 ค่าคือ แรง N_A และแรง F_A แรง N_B และแรง F_B แรง N_C และแรง F_C และแรง P ซึ่งจะหามาได้โดยใช้สมการความสมดุล 6 สมการและสมการของแรงเสียดทานที่จุด A หรือที่จุด B หรือที่จุด C อีก 1 สมการ



สมการความสมดุลและสมการของแรงเสียดทาน

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของ roller D และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$+\nearrow \sum F_{x'} = 0;$ $$P - N_A - F_C - 100(9.81)\sin 30° = 0 \quad (1)$$

$+\nwarrow \sum F_{y'} = 0;$ $$N_C + F_A - 100(9.81)\cos 30° = 0 \quad (2)$$

$\circlearrowleft + \sum M_o = 0;$ $$F_A(0.15) - F_C(0.15) = 0 \quad (3)$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของท่อ E และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$+\nearrow \sum F_{x'} = 0;$ $$N_A - F_B - 75(9.81)\sin 30° = 0 \quad (4)$$

$+\nwarrow \sum F_{y'} = 0;$ $$N_B - F_A - 75(9.81)\cos 30° = 0 \quad (5)$$

$\circlearrowleft + \sum M_O = 0;$ $$F_A(0.15) - F_B(0.15) = 0 \quad (6)$$

สมมุติให้การเลื่อนเกิดขึ้นที่จุด A เท่านั้น ดังนั้น จากสมการของแรงเฉือน เราจะได้ว่า

$$F_A = 0.3N_A \tag{7}$$

ทำการแก้สมการที่ (1) ถึง (7) เราจะได้ว่า

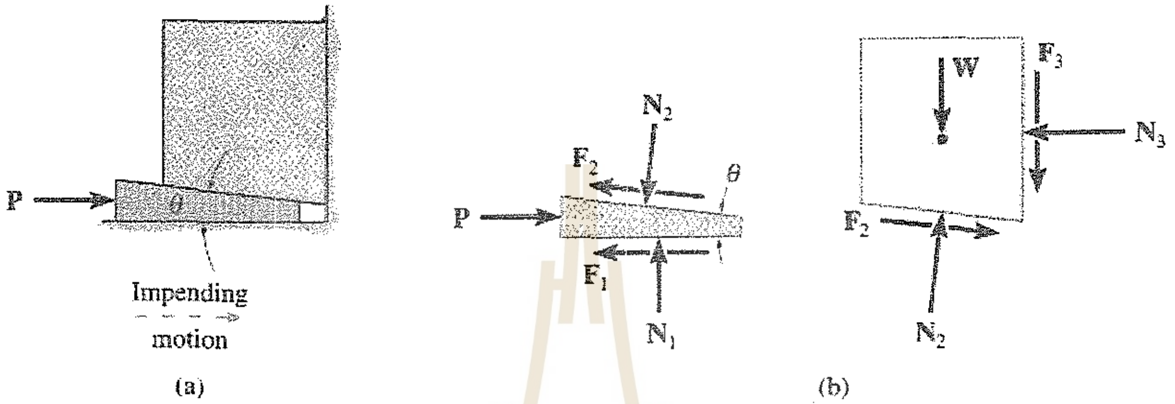
$$N_A = 525.54 \text{ N}$$
$$N_B = 794.84 \text{ N}$$
$$N_C = 691.91 \text{ N}$$
$$F_A = F_B = F_C = 157.66 \text{ N}$$
$$P = 1173.7 \text{ N} = 1.17 \text{ kN}$$

เนื่องจากแรงเสียดทาน $F_B = 157.66 \text{ N} < \mu_\text{B} N_B = 0.25(794.84) = 198.71 \text{ N}$ และแรงเสียดทาน $F_\text{C} = 157.66 \text{ N} < \mu_C N_C = 0.4(691.91) = 276.76 \text{ N}$ ดังนั้น สมมุติฐานที่ตั้งไว้จึงถูกต้อง และแรง P ต่ำสุดที่ใช้ในการผลักท่อ E ขึ้นพื้นเอียงมีค่าเท่ากับ 1.17 kN Ans.

8.3 Wedges

ลิ่ม (wedge) เป็นเครื่องทุ่นแรงชนิดหนึ่งที่ใช้ในการยกหรือปรับตำแหน่งของวัตถุที่มีน้ำหนักมากๆ ซึ่งลิ่มจะทำหน้าที่เปลี่ยนแรงกระทำให้เป็นแรงที่มีค่าสูงขึ้นและกระทำอยู่ในแนวตั้งฉากกับแรงกระทำ (โดยประมาณ)

พิจารณาลิ่ม ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7a ซึ่งใช้ในการยกแท่งหินที่มีน้ำหนัก $\bar{W}$ โดยแรงกระทำ $\bar{P}$ ถ้ากำหนดให้น้ำหนักของลิ่มมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับน้ำหนักของแท่งหินแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของลิ่มและแท่งหินดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7b จากรูป แรงเสียดทาน $\bar{F}_1$ และ $\bar{F}_2$ จะมีทิศต้านการเคลื่อนที่ของลิ่มและแรงเสียดทาน $\bar{F}_3$ จะมีทิศทางลงเพื่อต้านการเคลื่อนที่ขึ้นของแท่งหิน



รูปที่ 8-7

ตำแหน่งของแรงตั้งฉากลัพธ์ที่กระทำอยู่บนลิ่มและแท่งหินจะไม่มีความสำคัญในการวิเคราะห์ลิ่มเพราะทั้งลิ่มและแท่งหินจะไม่มีการล้มคว่ำเกิดขึ้นเหมือนที่ได้พิจารณาไปแล้วในรูปที่ 8-1 และ 8-2 ดังนั้น เราจะไม่พิจารณาสมการความสมดุลของ moment ในการวิเคราะห์ลิ่ม

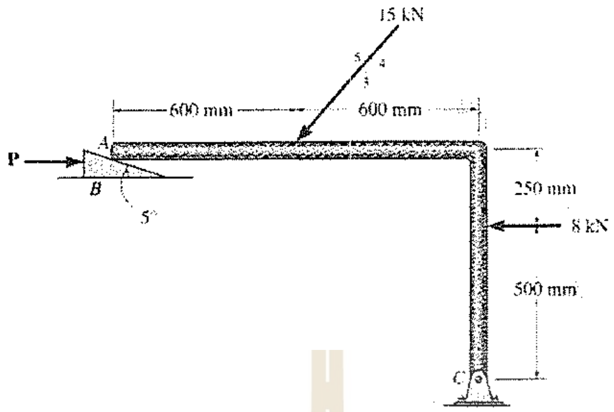
จากรูปที่ 8-7b ลิ่มและแท่งหินจะถูกกระทำโดยแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 7 แรงคือ $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$, และ $\bar{P}$ ซึ่งจะหาได้โดยใช้สมการ 7 สมการคือ สมการความสมดุลของแรง 4 สมการ (2 สมการสำหรับแท่งหินและ 2 สมการสำหรับลิ่ม) และสมการของแรงเสียดทาน $F = \mu N$ ที่แต่ละพื้นผิวสัมผัสรวม 3 สมการ (3 พื้นผิว)

ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานมีค่าน้อยมาก หรือมุม θ ของลิ่มมีค่ามากแล้ว แท่งหินอาจจะมีการเคลื่อนที่ต่ำลงมาเองได้ ในกรณีนี้แรงเสียดทานจะมีทิศทางตรงกันข้ามกับที่แสดงอยู่ในรูปที่ 8-7b ส่วนแรงกระทำ $\bar{P}$ จะมีทิศเหมือนเดิม

ถ้าแรง $\bar{P}$ มีค่าเท่ากับศูนย์และแรงเสียดทานสามารถที่จะต้านทานไม่ให้แท่งหินมีการเคลื่อนที่แล้ว ลิ่มในลักษณะนี้จะถูกเรียกว่า ลิ่มที่ล็อคตัวเองได้ (self-locking wedge)

ตัวอย่างที่ 8-5 (8-68)

ลิ่มถูกใช้ในการปรับระดับของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-5 จงหาขนาดของแรง P ที่จะต้องใช้ในการยกระดับของจุด A ขึ้น กำหนดให้ coefficient of static friction ระหว่างลิ่มและพื้นผิวที่ลิ่มสัมผัสมีค่า 0.25 กำหนดให้ลิ่มมีขนาดที่เล็กมากและมีน้ำหนักน้อยมาก

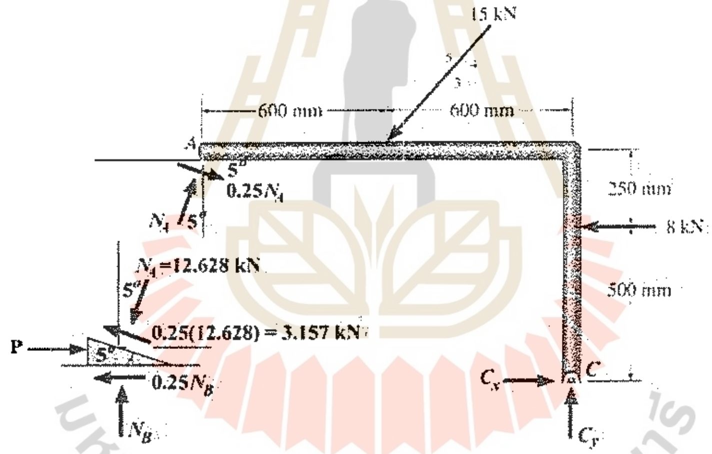


รูปที่ Ex 8-5

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้างและของลิ่ม ดังที่แสดงในรูป



จากแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้าง เราจะหาแรงปฏิกริยาตั้งฉาก N_A ได้ดังนี้

$$\circlearrowright + \sum M_C = 0; \qquad \frac{4}{5}(15)(0.6)+\frac{3}{5}(15)(0.75)+8(0.5)-N_A\cos 5°(1.2)$$

$$-N_A\sin 5°(0.75)-0.25N_A\cos 5°(0.75)+0.25N_A\sin 5°(1.2)=0$$

$$N_A = 12.628 \text{ kN}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของลิ่ม เราจะได้ว่า

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad N_B + 3.157\sin 5° - 12.628\cos 5° = 0$$

$$N_B = 12.305 \text{ kN}$$

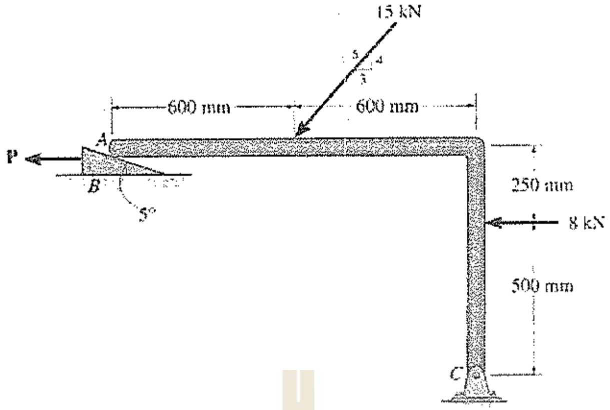
$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0; \qquad P - 0.25(12.305) - 3.157\cos 5° - 12.628\sin 5° = 0$$

$$P = 7.32 \text{ kN}$$

Ans.

ตัวอย่างที่ 8-6 (8-69)

ลิ่มถูกใช้ในการปรับระดับของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-6 จงหาขนาดของแรง P ที่จะต้องใช้ในการลดระดับของจุด A ลง กำหนดให้ coefficient of static friction ระหว่างลิ่มและพื้นผิวที่ลิ่มสัมผัสมีค่าเท่ากับ 0.15 กำหนดให้ลิ่มมีขนาดที่เล็กมากและมีน้ำหนักน้อยมาก

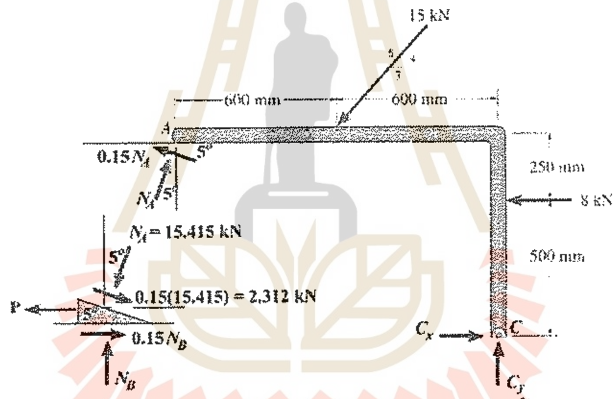


รูปที่ Ex 8-6

วิธีทำ

เขียนแผนภาพ free body diagram

ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้างและของลิ่ม ดังที่แสดงในรูป



จากแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้าง เราจะหาแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก N_A ได้ดังนี้

$$\circlearrowleft + \sum M_C = 0; \qquad \frac{4}{5}(15)(0.6) + \frac{3}{5}(15)(0.75) + 8(0.5) - N_A \cos 5°(1.2)$$

$$- N_A \sin 5°(0.75) + 0.15 N_A \cos 5°(0.75) - 0.15 N_A \sin 5°(1.2) = 0$$

$$N_A = 15.415 \text{ kN}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของลิ่ม เราจะได้ว่า

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad N_B - 2.312 \sin 5° - 15.415 \cos 5° = 0$$

$$N_B = 15.558 \text{ kN}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0; \qquad 0.15(15.558) + 2.312 \cos 5° - 15.415 \sin 5° - P = 0$$

$$P = 3.29 \text{ kN}$$

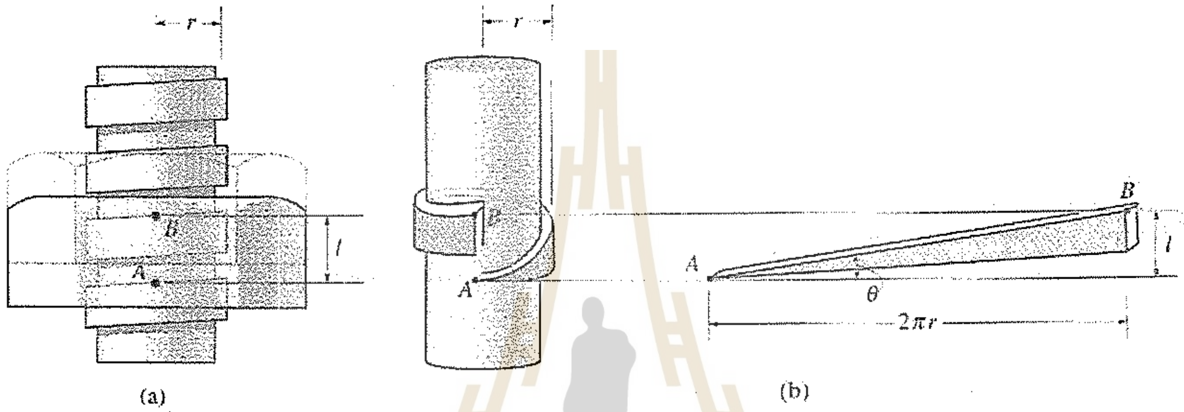
Ans.

8.4 แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนเกลียว (Frictional Forces on Screws)

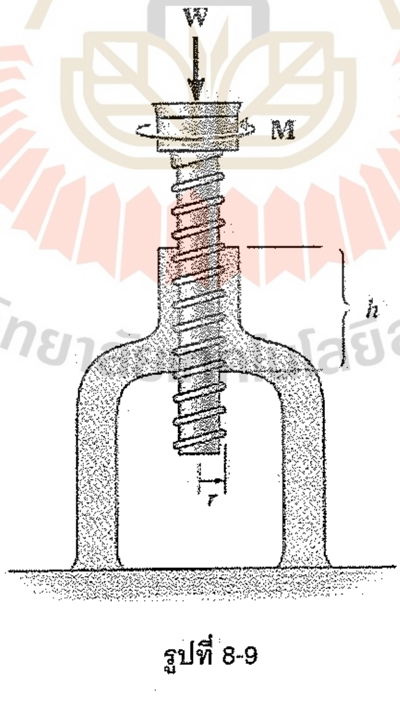
ในทางกลศาสตร์ เราจะให้นิยามของเกลียว (screw) ว่าเป็นระนาบที่มีความลาดเอียง (inclined plane) หรือเป็นลิ่มที่พันอยู่รอบแท่งทรงกระบอก

พิจารณาสลักเกลียว ดังที่แสดงในรูปที่ 8-8a แป้นเกลียว (nut) ที่เริ่มแรกอยู่ที่ตำแหน่ง A จะเคลื่อนที่ขึ้นมาอยู่ที่ตำแหน่ง B เป็นระยะในแนวแกนของแท่งทรงกระบอก l เมื่อแป้นเกลียวนั้นถูกหมุนเป็นมุม 360^o รอบสลักเกลียวนั้น ซึ่งระยะในระนาบที่มีความลาดเอียงที่แป้นเกลียวเคลื่อนที่ผ่านมีความยาวเท่ากับ $2\pi r$ โดยที่ r เป็นรัศมีเฉลี่ยของเส้นเกลียว (thread) ดังที่แสดงในรูปที่ 8-8b ระยะในแนวแกนของแท่งทรงกระบอก l นี้มักจะถูกเรียกว่า ระยะเกลียว (lead of the screw) และมุมของเกลียว (screw lead angle) นี้จะหาได้จากสมการ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{l}{2\pi r}$$



รูปที่8-8



รูปที่ 8-9

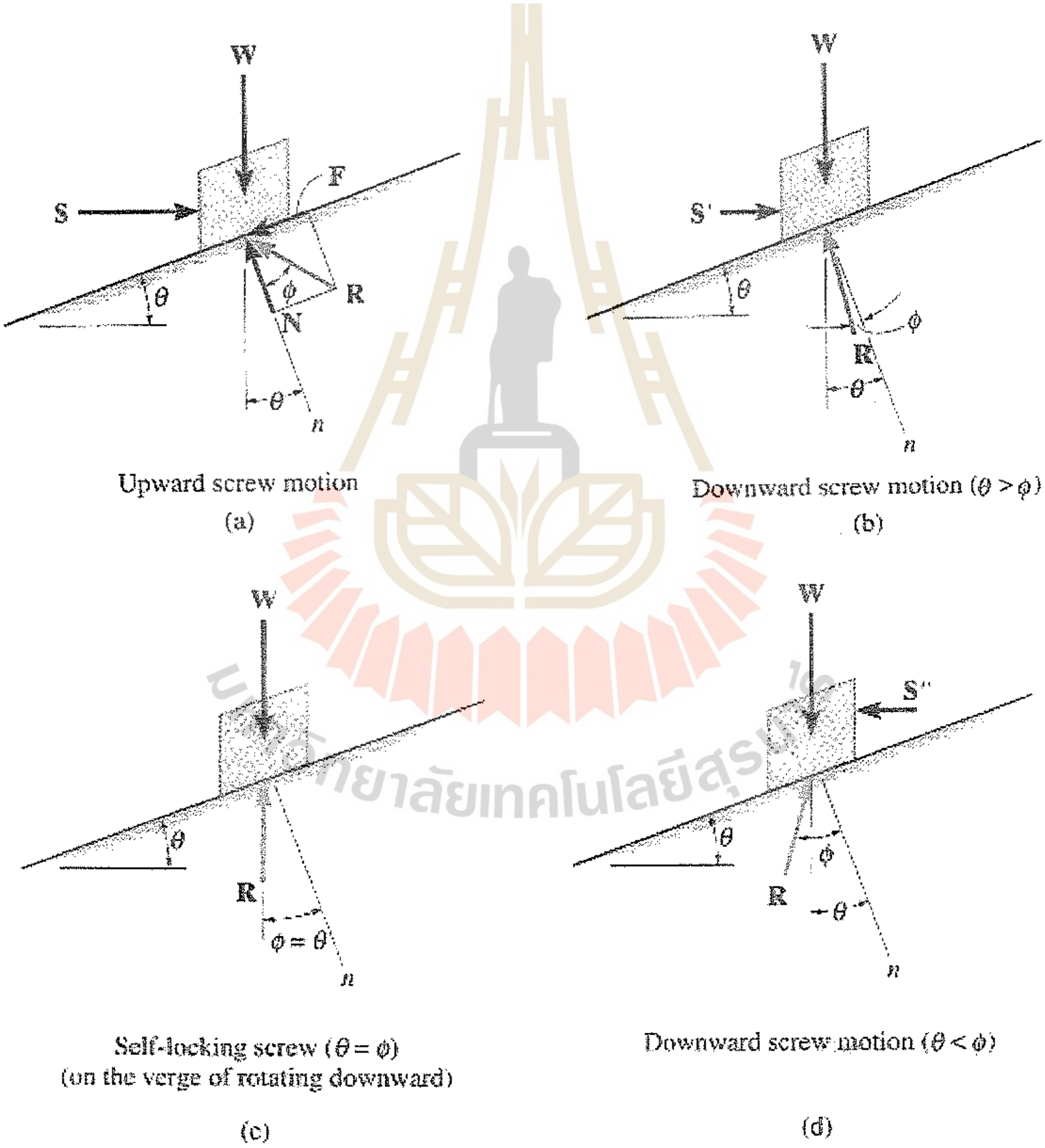
เมื่อสลักเกลียวถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนที่มีค่าสูงแล้ว แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่เกลียวจะมีความสำคัญในการหาค่าของ moment $\bar{M}$ ที่จะใช้ในการขันหรือหมุนสลักเกลียวนี้

พิจารณาสลักเกลียวของแม่แรง (jack) ที่มีเกลียวแบบสี่เหลี่ยมจตุรัส (square-threaded screw) ดังที่แสดงในรูปที่ 8-9 ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกดในแนวดิ่ง $\bar{W}$ แรงปฏิกิริยาที่แม่แรงใช้ในการต้านทานต่อแรงกด $\bar{W}$ จะกระจายอยู่บน

เส้นรอบวงของเกลียวที่อยู่บนสลักเกลียวที่สัมผัสอยู่กับเกลียวตัวเมีย (screw hole) ของแม่แรง เป็นระยะ h ดังที่แสดงในรูปที่ 8-9

เพื่อให้เกิดความเข้าใจได้ง่ายขึ้น เกลียวที่อยู่ในระยะ h นี้จะถูกคลายออกมาจากสลักเกลียวและจะมีรูปร่างเป็น block ที่วางอยู่บนระนาบที่มีความลาดเอียง (แทนเกลียวของเกลียวตัวเมียของแม่แรง) เท่ากับมุมของเกลียว θ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-10a โดยที่ block ดังกล่าวจะถูกกระทำโดยแรง 3 แรงคือ

1. แรง $\bar{W}$ ซึ่งเป็นแรงในแนวแนวดิ่งที่กระทำต่อสลักเกลียว
2. แรง $\bar{S}$ ซึ่งเป็นแรงที่เกิดขึ้นจาก moment $\bar{M}$ โดยที่ $M = Sr$ และ r เป็นค่ารัศมีเฉลี่ยของเกลียวของสลักเกลียว
3. แรงลัพธ์ $\bar{R}$ ที่กระทำต่อ block ที่พื้นผิวสัมผัส เพื่อทำให้เกิดความสมดุล โดยที่แรงลัพธ์ $\bar{R}$ นี้จะมีองค์ประกอบสององค์ประกอบคือ แรงในแนวตั้งฉาก $\bar{N}$ ซึ่งมีทิศตั้งฉากกับระนาบเอียง และแรงในแนวขนาน $\bar{F}$ ซึ่งมีทิศขนานกับระนาบเอียง



รูปที่ 8-10

ในการวิเคราะห์แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนเกลียว เราจะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณีคือ

เกลียวที่เคลื่อนที่ขึ้น (upward screw motion)

- เกลียวที่เคลื่อนที่ลง (downward screw motion) โดยที่ $\theta > \phi$
- เกลียวที่ล็อคตัวเองได้ (self-locking screw)
- เกลียวที่เคลื่อนที่ลง (downward screw motion) โดยที่ $\theta < \phi$

เกลียวที่เคลื่อนที่ขึ้น (Upward Screw Motion)

ถ้า moment M มีค่าที่สูงเพียงพอแล้ว สลักเกลียว (และ block) จะถูกทำให้อยู่ในสภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่ขึ้น ในกรณีนี้ แรงลัพธ์ $\bar{R}$ จะกระทำเป็นมุม $(\theta + \phi)$ กับแนวดิ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-10a โดยที่

$$\phi = \tan^{-1}\frac{F}{N} = \tan^{-1}\frac{\mu N}{N} = \tan^{-1}\mu$$

จากสมการสมดุลของแรงที่กระทำที่ block เราจะได้ว่า

$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0;$

$$S - R\sin(\theta + \phi) = 0$$

$+\uparrow\sum F_y = 0;$

$$R\cos(\theta + \phi) - W = 0$$

กำจัดเทอม R และแก้สมการหา S จากนั้นแทนค่า S ลงในสมการ $M = Sr$ เราจะได้ว่า

$$M = Wr\tan(\theta + \phi) \tag{8-3}$$

- ค่า M ในสมการที่ 8-3 นี้จะเป็นค่า moment ที่จะทำให้สลักเกลียว (และ block) อยู่ใน**สภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่ขึ้น** ถ้า $\phi = \phi_s = \tan^{-1}\mu_s$ (angle of static friction)
- ค่า M ในสมการที่ 8-3 นี้จะเป็นค่า moment ที่จะทำให้สลักเกลียว (และ block) อยู่ใน**สภาวะที่กำลังเคลื่อนที่ขึ้น** ถ้า $\phi = \phi_k = \tan^{-1}\mu_k$ (angle of kinetic friction)

เกลียวที่เคลื่อนที่ลง (Downward Screw Motion) ($\theta > \phi$)

ในกรณีที่พื้นผิวของสลักเกลียวมีความลื่นมากแล้ว สลักเกลียวอาจจะมีการหมุน (เคลื่อนที่) ลงได้เมื่อขนาดของ moment มีค่าลดลงเป็น M' โดยที่ $M' < M$

จากรูปที่ 8-10b เมื่อ moment มีค่าเท่ากับ M' แล้ว แรง S จะมีค่าลดลงเป็น S' และมุม ϕ (ϕ_s หรือ ϕ_k) จะเลื่อนมาอยู่ทางด้านซ้ายมือของแกน n โดยที่ $\theta > \phi$ ดังนั้น จากสมการความสมดุลของแรง เราจะได้ว่า

$$M' = Wr\tan(\theta - \phi) \tag{8-4}$$

เกลียวที่ล็อคตัวเองได้ (Self-Locking Screw)

ถ้าเราเอา moment $\bar{M}$ ออก (ซึ่งเป็นการเอาแรง $\bar{S}$ ออกจาก free-body diagram ของ block) และถ้าสลักเกลียวไม่มีการเคลื่อนที่แล้ว สภาวะของ block ในลักษณะนี้มักจะถูกเรียกว่า สภาวะของการล็อคตัวเอง (self-locking) ซึ่งจะเกิดขึ้นจากการที่ผิวสัมผัสมีแรงเสียดทานมีค่ามากพอที่จะต้านต่อการเคลื่อนที่ของ block เนื่องจากการกระทำของแรง $\bar{W}$ โดยที่ $\phi \geq \theta$

พิจารณารูปที่ 8-10c ซึ่งเป็นแผนภาพ free-body diagram ของ block ในกรณีที่มุม $\phi = \theta$ จากรูป เราจะเห็นว่า แรง $\bar{R}$ และแรง $\bar{W}$ จะอยู่ในแนวเดียวกันในแนวดิ่งและมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะทำให้ block เกิดสมดุลในแนวดิ่ง

เกลียวที่เคลื่อนที่ลง (Downward Screw Motion) ($\theta < \phi$)

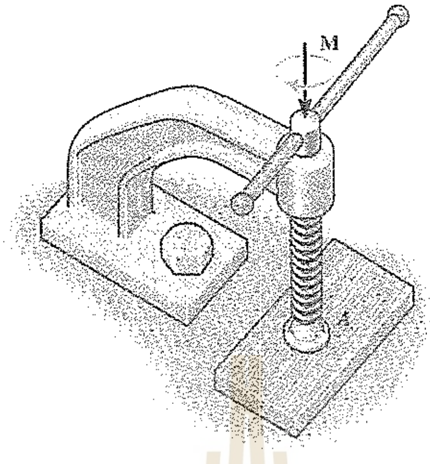
เมื่อพื้นผิวของเกลียวมีความหยาบมากๆ สลักเกลียวจะไม่สามารถหมุนลง (หรือเคลื่อนที่ลง) ได้ด้วยแรงกดในแนวดิ่ง $\bar{W}$ เพียงอย่างเดียว แต่จะต้องให้ moment ซึ่งมีทิศทางทิศตรงกันข้ามกับในกรณีที่กล่าวมาแล้ว M'' กระทำต่อสลักเกลียว ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของ block ในกรณีนี้ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-10d จากรูป แรง

S'' เกิดขึ้นจาก moment M'' (ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ M และ M') ดังนั้น จากสมการความสมดุลของแรง เราจะได้ว่า

$$M'' = Wr\tan(\phi - \theta) \tag{8-5}$$

ตัวอย่างที่ 8-7 (8-79)

จงหาแรงกดอัดที่กระทำต่อแผ่นไม้ที่จุด A เมื่อแรงบิด M กระทำต่อตัว cramp มีค่าเท่ากับ $0.2\ \mathrm{N\text{-}m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-7 กำหนดให้เกลียวของตัว cramp เป็นแบบ single square-threaded ซึ่งมีรัศมี $8\ \mathrm{mm}$ ระยะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งต่อ 1 รอบ $2\ \mathrm{mm}$ และ coefficient of static friction มีค่าเท่ากับ 0.38



รูปที่ Ex 8-7

วิธีทำ

มุมของความเสียดทานสถิตย์ (angle of static friction)

$$\phi = \tan^{-1}(0.38) = 20.807^{o}$$

มุมของเกลียว (screw lead angle)

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2\pi(8)}\right) = 2.2785^{o}$$

เนื่องจากเราต้องการกดอัดไม้ ดังนั้น แรงกดอัดที่กระทำต่อแผ่นไม้ที่จุด A เนื่องจากแรงบิด M $0.2\ \mathrm{N\text{-}m}$ จะหาได้จากสมการ

$$M = Wr\tan(\theta + \phi)$$

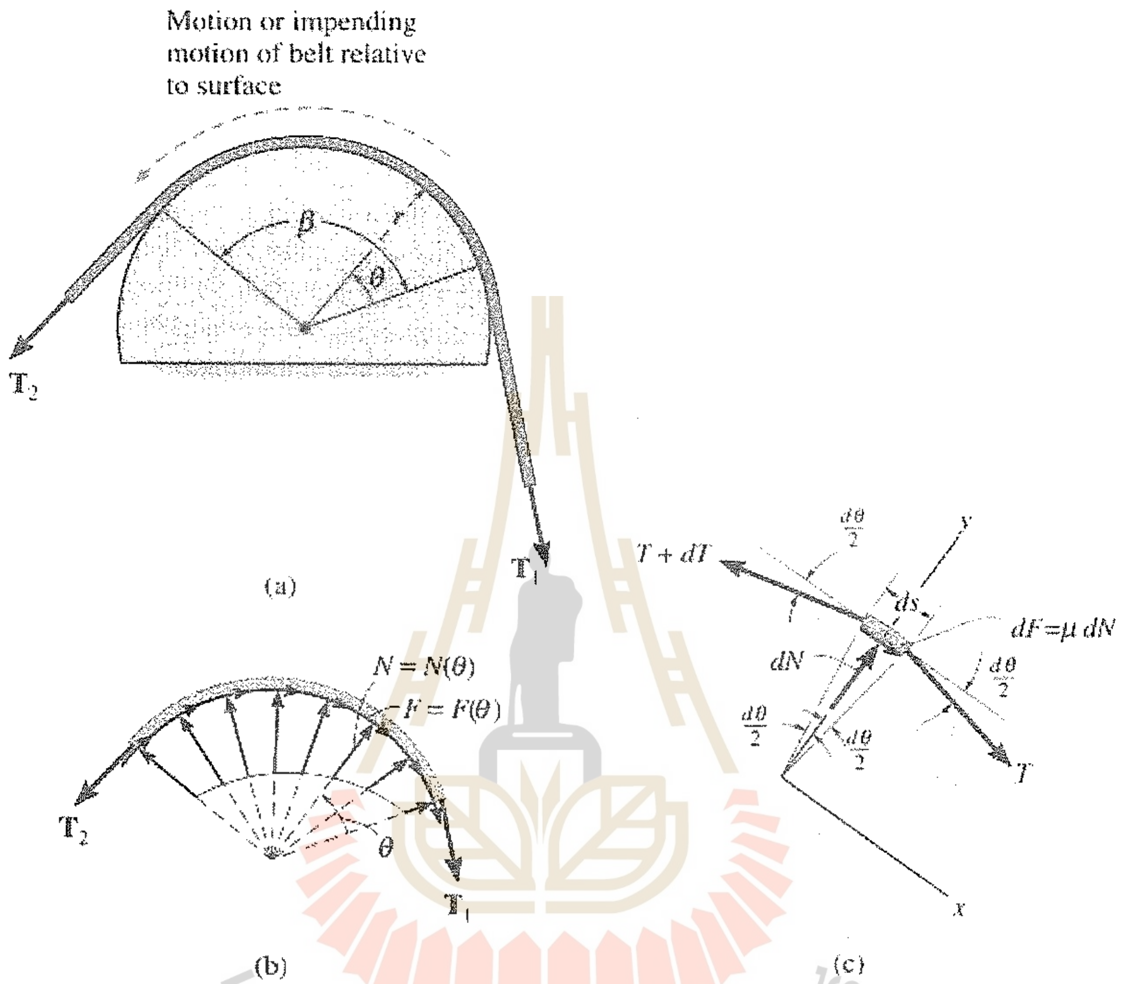
แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ เราจะได้ว่า

$$0.2 = F(0.008)\tan(2.2785^{o} + 20.807^{o})$$

$$F = 58.7\ \mathrm{N}$$ Ans.

8.5 แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนสายพานแบน (Frictional Force on Flat Belts)

พิจารณาสายพานแบน (flat belt) ดังที่แสดงในรูปที่ 8-11a ซึ่งคล้องอยู่บนพื้นผิวโค้งที่อยู่กับที่เป็นมุม β radian และกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของความเสียดทาน (coefficient of friction) ระหว่างสายพานแบนและพื้นผิวโค้งมีค่าเท่ากับ μ ในที่นี้ เราต้องการหาแรงดึง T_2 ในสายพานแบน ซึ่งจะต้องมีค่ามากกว่าผลรวมของแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่พื้นผิวสัมผัส และแรงดึง T_1 (ซึ่งเราทราบค่า)



รูปที่ 8-11

รูปที่ 8-11b แสดงแผนภาพ free-body diagram ของสายพานแบน ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า แรงตั้งฉาก N และแรงเสียดทาน F จะมีขนาดและทิศทางเปลี่ยนแปลงไปตามความโค้งของพื้นผิวสัมผัส ซึ่งเป็น function ของมุม θ

เนื่องจากเราไม่ทราบการกระจายของแรงทั้งสองนี้ เราจะทำการวิเคราะห์ปัญหานี้โดยการพิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนขนาดเล็ก (differential element) ของสายพานแบน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-11c ซึ่งมีความยาว ds

สมมุติให้สายพานแบนอยู่ในสภาวะที่กำลังที่จะเคลื่อนที่หรือกำลังเคลื่อนที่อยู่ ดังนั้น แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสของ differential element ของสายพานแบนและพื้นผิวโค้งจะมีค่าเท่ากับ $dF = \mu\, dN$ ซึ่งจะต้านการเคลื่อนที่ของสายพานแบนและจะทำให้แรงดึงที่กระทำอยู่บน differential element ของสายพานแบนมีค่าเพิ่มขึ้น dT

ถ้าเราใช้สมการความสมดุลของแรงบนแผนภาพ free-body diagram ดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\sum F_x = 0; \qquad T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu\, dN - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$\sum F_y = 0; \qquad dN - (T + dT)\sin(\frac{d\theta}{2}) - T\sin(\frac{d\theta}{2}) = 0$$

เนื่องจากมุม $d\theta$ มีค่าน้อยมากๆ ดังนั้น $\sin(d\theta/2) \cong d\theta/2$ และ $\cos(d\theta/2) \cong 1$ และเนื่องจากผลคูณของค่าแรง dT กับค่ามุม $d\theta/2$ มีค่าน้อยมากๆ ด้วย ดังนั้น เราจะตัดผลคูณดังกล่าวออกจากสมการสมดุลของแรงข้างต้นและสมการสมดุลของแรงจะอยู่ในรูป

$$\mu\, dN = dT \qquad \text{(a)}$$

และ

$$dN = T\, d\theta \qquad \text{(b)}$$

แทนค่า dN ลงในสมการ (a) เราจะได้ว่า

$$\frac{dT}{T} = \mu\, d\theta \qquad \text{(c)}$$

Integrate สมการ (c) ตลอดระยะที่สายพานแบนสัมผัสกับพื้นผิวโค้ง โดยที่เมื่อ $\theta = 0$, $T = T_1$ และเมื่อ $\theta = \beta$, $T = T_2$ ดังนั้น

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\beta} d\theta$$

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta$$

ดังนั้น เราจะหาแรงดึง T_2 ได้จาก

$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \qquad \text{(8-6)}$$

เมื่อ T_2, T_1 เป็นแรงดึงที่เกิดขึ้นในสายพานแบนและเนื่องจากแรงเสียดทาน $T_2 > T_1$

μ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานแบบสถิตย์หรือแบบจลน์ระหว่างสายพานแบนและพื้นผิวโค้ง

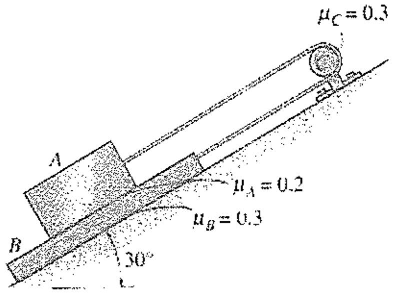
β เป็นมุมที่สายพานแบนสัมผัสกับพื้นผิวโค้ง มีหน่วยเป็น radians

$e = 2.718.....$ เป็นค่าฐานของ natural logarithm

จากสมการที่ 8-6 เราจะเห็นว่า แรงดึง T_2 เป็นอิสระกับรัศมีของพื้นผิวโค้ง r นอกจากนั้นแล้ว สมการนี้จะใช้ได้เฉพาะในกรณีที่ flat belt อยู่ในสภาวะที่กำลังจะเคลื่อนที่หรือกำลังเคลื่อนที่อยู่เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 8-8 (8-97)

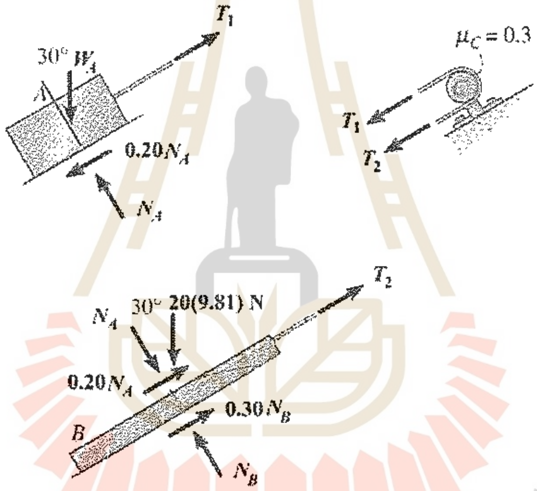
เส้นเชือกที่ยึดอยู่กับแผ่นเหล็ก B ซึ่งมีมวล $20\,\text{kg}$ ถูกนำมาร้อยผ่านหมุดที่ไม่สามารถหมุนได้ผ่านไปยังแท่งโลหะ A จงหามวลที่น้อยที่สุดของแท่งโลหะ A ที่จะป้องกันไม่ให้แผ่นเหล็ก B เกิดการเลื่อน กำหนดให้ coefficient of static friction ที่ผิวสัมผัสต่างๆ มีค่า ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-8



รูปที่ Ex 8-8

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 8-8 เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของแท่งโลหะ A แผ่นเหล็ก B และ peg C ได้ดังที่แสดงในรูป ซึ่งพบว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด 5 ค่าคือ น้ำหนักของแท่งโลหะ A หรือ W_A แรงตั้งฉาก N_A และ N_B และแรงตึงในเส้นเชือก T_1 และ T_2 ซึ่งเราจะหาได้โดยใช้สมการความสมดุลและสมการที่ (8-6) ดังนี้



จากแผนภาพ free body diagram ของแท่งโลหะ A และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$+\nearrow \sum F_x = 0 \qquad T_1 - 0.2\,N_A - W_A \sin 30^\circ = 0 \tag{1}$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0; \qquad N_A - W_A \cos 30^\circ = 0 \tag{2}$$

จากแผนภาพ free body diagram ของแผ่นเหล็ก B และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$+\nearrow \sum F_x = 0; \qquad T_2 - 20(9.81)\sin 30^\circ + 0.3\,N_B + 0.2\,N_A = 0 \tag{3}$$

$$+\nwarrow \sum F_y = 0; \qquad N_B - N_A - 20(9.81)\cos 30^\circ = 0 \tag{4}$$

จากสมการที่ (8-6) เราจะได้ว่า

$$T_2 = T_1 e^{0.3x} \tag{5}$$

ทำการแก้สมการที่ (1) ถึง (5) เราจะได้ว่า

$$T_1 = 14.68\text{ N}; \quad T_2 = 37.8\text{ N}; \quad N_A = 18.89\text{ N}; \quad N_B = 188.8\text{ N}; \quad W_A = 21.81\text{ N}$$

ดังนั้น มวลที่น้อยที่สุดของแท่งโลหะ A ที่จะป้องกันไม่ให้แผ่นเหล็ก B เกิดการเลื่อนมีค่าเท่ากับ

$$m_A = \frac{21.81}{9.81} = 2.22\ \text{kg} \qquad \text{Ans.}$$

บทที่ 9

Center of Gravity and Centroid

จุดประสงค์

1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึง concept ของจุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) จุดศูนย์กลางมวล (center of mass) และ centroid
2. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาตำแหน่งของจุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) และ centroid ของระบบของอนุภาค (particles) และวัตถุ (body) ที่มีรูปร่างใดๆ
3. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการใช้ทฤษฎีของ Pappus และทฤษฎีของ Guldinus ในการหาพื้นที่และปริมาตรของ surface of revolution

9.1 จุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวลของระบบของอนุภาค (Center of Gravity and Center of Mass for a System of Particles)

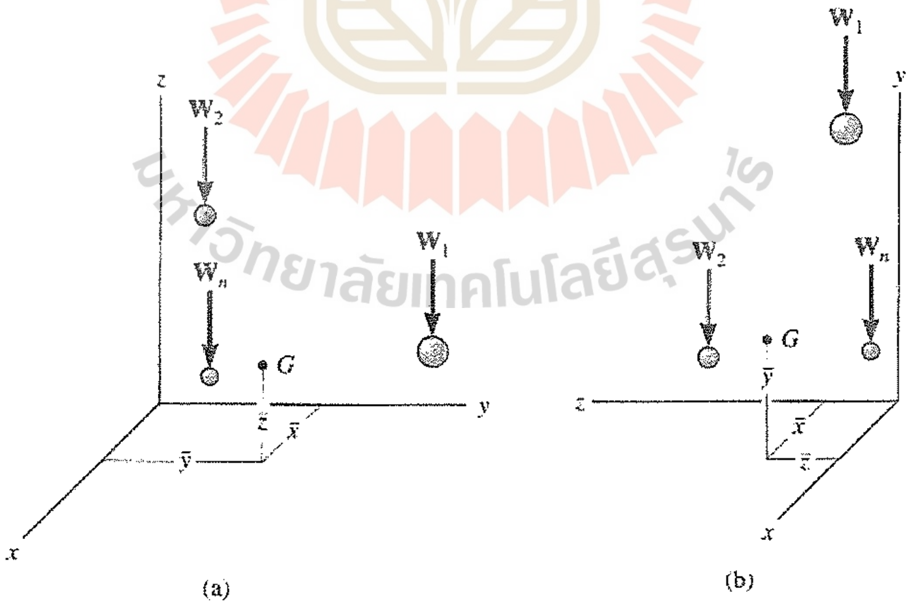
จุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity)

จุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) G เป็นจุดที่บอกตำแหน่งของน้ำหนักลัพธ์ (resultant weight) ของระบบของอนุภาค

พิจารณาระบบของอนุภาคที่มีจำนวนอนุภาค n อนุภาคซึ่งอยู่ภายในที่ว่าง (space) อันหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 9-1a น้ำหนักของอนุภาคแต่ละอนุภาคดังกล่าวจะมีทิศทางที่ขนานกัน (ในกรณีที่ space ดังกล่าวมีขนาดที่เล็กมากเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของโลก) และเราสามารถที่จะแทนน้ำหนักของอนุภาคจำนวน n อนุภาคดังกล่าวได้โดยใช้น้ำหนักลัพธ์ค่าหนึ่งที่กระทำที่จุดศูนย์ถ่วง G ของระบบของอนุภาค

กำหนดให้จุดศูนย์ถ่วง G มีพิกัด (coordinate) เป็น $\bar{x}$, $\bar{y}$, และ $\bar{z}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-1a จากหลักการที่ได้กล่าวถึงไปแล้วใน section ที่ 4.9 เราจะได้ว่า น้ำหนักลัพธ์จะต้องมีค่าเท่ากับน้ำหนักของอนุภาคทั้งหมดรวมกันหรือ

$$W_R = \sum W$$



รูปที่ 9-1

และผลรวมของ moment ที่เกิดจากน้ำหนักของอนุภาคแต่ละอนุภาครอบแกน x, แกน y, และแกน z จะต้องมีค่าเท่ากับ moment ของน้ำหนักลัพธ์รอบแกนดังกล่าว ดังนั้น เราจะหาพิกัด (coordinate) $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ของจุดศูนย์ถ่วง G ของระบบของอนุภาคได้จากสมการ

$$\bar{x}W_R = \tilde{x}_1W_1 + \tilde{x}_2W_2 + \ldots + \tilde{x}_nW_n$$
$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1W_1 + \tilde{y}_2W_2 + \ldots + \tilde{y}_nW_n$$

จากรูปที่ 9-1a น้ำหนักของของอนุภาคแต่ละอนุภาคจะไม่ทำให้เกิด moment รอบแกน z อย่างไรก็ตาม ถ้าแกน x, y, และ z มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 9-1b และอนุภาคยังคงอยู่ที่จุดเดิมแล้ว เราจะหาพิกัด $\bar{z}$ ของจุดศูนย์ถ่วง G ได้จากสมการ

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1W_1 + \tilde{z}_2W_2 + \ldots + \tilde{z}_nW_n$$

ในรูปแบบทั่วไป พิกัด $\bar{x}$, $\bar{y}$, และ $\bar{z}$ ของจุดศูนย์ถ่วง G ของระบบของอนุภาคจะอยู่ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W} \qquad (9\text{-}1)$$
$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\sum W}$$

เมื่อ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ เป็นพิกัด (coordinate) ของจุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) G ของระบบของอนุภาค

$\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ เป็นพิกัดของอนุภาคแต่ละอนุภาคในระบบของอนุภาคดังกล่าว

$\sum W$ เป็นน้ำหนักลัพธ์ของระบบของอนุภาคดังกล่าว

จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

จุดศูนย์กลางมวล (center of mass) มีความสำคัญมากในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุเนื่องจากการกระทำของแรงหรือ dynamics จุดศูนย์กลางมวลนี้จะหาได้โดยการแทนค่าน้ำหนัก $W = mg$ ลงในสมการที่ 9-1 ซึ่งเราจะได้พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลอยู่ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}m}{\sum m}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}m}{\sum m} \qquad (9\text{-}2)$$
$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}m}{\sum m}$$

ถ้าเราทำการเปรียบเทียบสมการที่ 9-1 และ 9-2 เราจะเห็นได้ว่า จุดศูนย์ถ่วงของระบบของอนุภาคจะเป็นจุดเดียวกับจุดศูนย์กลางมวลของระบบของอนุภาค

9.2 จุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางมวล และจุด centroid **ของวัตถุ** (Center of Gravity, Center of Mass, and Centroid for a Body)

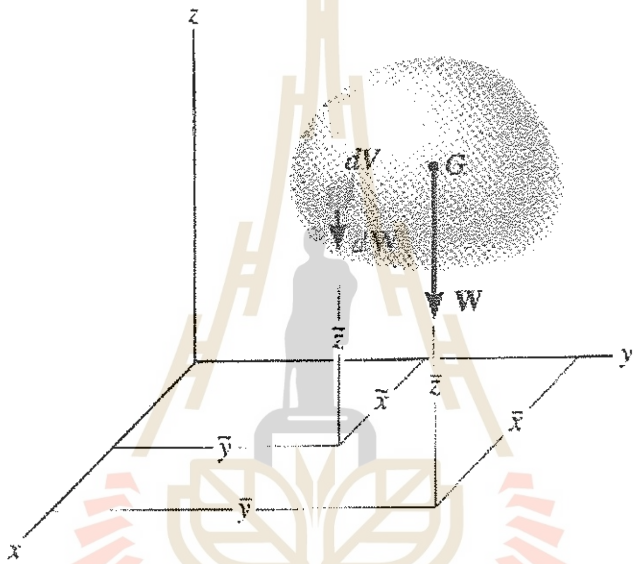
จุดศูนย์ถ่วง (Center of Gravity)

จากบทที่ 1 เราทราบมาแล้วว่า วัตถุแกร่ง (rigid body) ประกอบด้วยอนุภาคที่มีจำนวนอนันต์ ดังนั้น ในการใช้หลักการเช่นเดียวกับที่เราใช้ในการหาจุดศูนย์ถ่วงของระบบของอนุภาคที่มีจำนวนจำกัด n อนุภาค เราจะต้องทำการ

เปลี่ยนผลรวม (summation) ในสมการที่ 9-1 ให้อยู่ในรูปของการ integration เพราะการรวมกันในลักษณะดังกล่าวจะใช้ได้กับระบบของอนุภาคที่มีจำนวนอนุภาคที่นับได้เท่านั้น

พิจารณาอนุภาคใดๆ ที่อยู่ในวัตถุแกร่งที่มีพิกัด ($\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$) และมีน้ำหนักเท่ากับ dW ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2 ดังนั้น จากหลักการดังกล่าว เราจะได้พิกัด $\bar{x}$, $\bar{y}$, และ $\bar{z}$ ของจุดศูนย์ถ่วง G ของวัตถุแกร่งดังกล่าวอยู่ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dW}{\int dW}$$
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dW}{\int dW} \qquad (9\text{-}3)$$
$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dW}{\int dW}$$



รูปที่ 9-2

เราทราบมาแล้วว่า น้ำหนัก dW จะมีค่าเท่ากับความถ่วงจำเพาะของวัตถุ γ (มีหน่วยเป็นน้ำหนักต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร) คูณกับปริมาตร dV ของวัตถุที่มีน้ำหนัก dW หรือ $dW = \gamma\, dV$ ดังนั้น เราสามารถที่จะเขียนสมการที่ 9-3 ใหม่ได้ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, \gamma\, dV}{\int \gamma\, dV}$$
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, \gamma\, dV}{\int \gamma\, dV} \qquad (9\text{-}4)$$
$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, \gamma\, dV}{\int \gamma\, dV}$$

สมการที่ 9-4 นี้จะเป็นสมการซึ่งเปลี่ยนการ integration จากการ integration บนน้ำหนักทั้งหมดของวัตถุมาเป็นการ integration บนปริมาตรทั้งหมดของวัตถุ

จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass)

ความหนาแน่น (density) ของวัตถุ ρ มีหน่วยเป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ซึ่งมีสัมพันธ์กับความถ่วงจำเพาะของวัตถุ γ ในรูป $\gamma = \rho g$ โดยที่ g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก หลังจากที่เราแทนค่า $\gamma = \rho g$ ในสมการที่ 9-4 เราจะสามารถหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุได้

Centroid

จุด centroid C เป็นจุดที่ระบุถึงจุดศูนย์กลางทางเรขาคณิตของวัตถุ ตำแหน่งของจุดนี้จะหาได้โดยใช้สมการที่คล้ายคลึงกับสมการที่ใช้ในการหาจุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ ในกรณีที่วัตถุทำด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันตลอดทั้งวัตถุ (homogeneous material) แล้ว ค่าความหนาแน่นและค่าความถ่วงจำเพาะของวัสดุที่ใช้ทำวัตถุจะมีค่าคงที่ ดังนั้น จากสมการที่ 9-4 ค่า γ ของวัตถุในสมการจะตัดกันและสมการที่ได้จะเป็นสมการที่ใช้หาจุด centroid ของวัตถุ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\ dV}{\int dV}$$

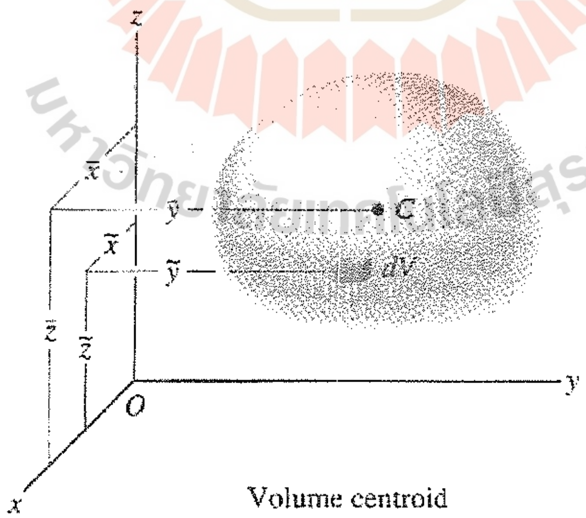
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\ dV}{\int dV}$$

$$\bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\ dV}{\int dV}$$

สมการนี้จะเป็นสมการที่ไม่ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของวัตถุ แต่จะขึ้นอยู่กับรูปทรงทางเรขาคณิตของวัตถุเท่านั้น

ปริมาตร (Volume)

ถ้าวัตถุถูกแบ่งออกเป็น element ที่มีปริมาตรเล็กๆ ขนาด dV (volume element dV) ดังที่แสดงในรูปที่ 9-3 แล้ว ตำแหน่งของจุด centroid $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ของปริมาตรของวัตถุจะหามาได้จากการคำนวณ moment ของ volume element เหล่านั้นรอบแกน x, y, และ z ซึ่งเราจะได้ว่า



Volume centroid

รูปที่ 9-3

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\ dV}{\int dV}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_V \tilde{y}\, dV}{\int_V dV} \tag{9-5}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_V \tilde{z}\, dV}{\int_V dV}$$

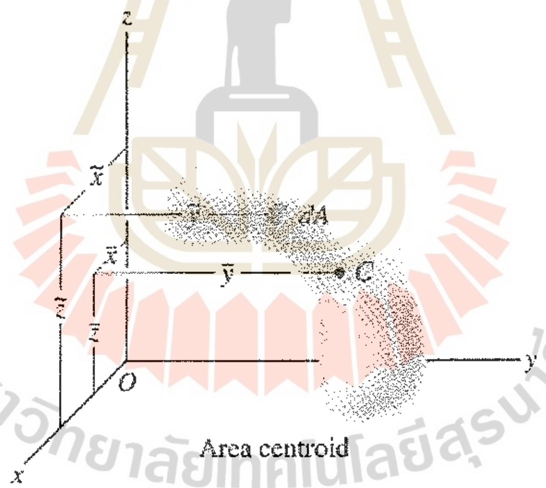
พื้นที่ (Area)

ในลักษณะที่คล้ายๆ กับการหาจุด centroid ของปริมาตร เราจะหาจุด centroid ของพื้นผิวของวัตถุ เช่น plate หรือ shell เป็นต้น ดังที่แสดงในรูปที่ 9-4 ได้โดยการแบ่งพื้นผิวของวัตถุออกเป็น element ที่มีพื้นที่ขนาดเล็กๆ dA (surface element dA) และคำนวณหา moment ของ surface element เหล่านั้นรอบแกน x, y, และ z ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}\, dA}{\int_A dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}\, dA}{\int_A dA} \tag{9-6}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_A \tilde{z}\, dA}{\int_A dA}$$



รูปที่ 9-4

เส้น (Line)

ในกรณีของ rod และเส้นลวด (wire) ที่มีหน้าตัดที่เล็กมากๆ เมื่อเทียบกับความยาว ดังที่แสดงในรูปที่ 9-5 เราจะหาจุด centroid ของวัตถุที่มีลักษณะเป็นเส้นนี้ได้จากการหาค่าของ moment ของ element ที่มีความยาวน้อยมากๆ dL (differential element dL) เหล่านั้นรอบแกน x, y, และ z ซึ่งเราจะได้ว่า

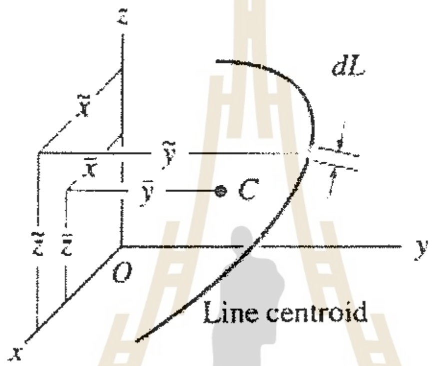
$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\, dL}{\int_L dL}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dL}{\int_L dL} \tag{9-6}$$

$$\bar{z} = \frac{\int_L \tilde{z}\, dL}{\int_L dL}$$

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า

1. การที่จะใช้สมการที่ 9-4 ถึง 9-7 นั้น เราควรที่จะเลือกใช้ระบบของแกนอ้างอิงที่เราจะสามารถอ้างอิงถึงตัววัตถุได้ง่าย เช่น ระบบแกน polar coordinate จะเหมาะสมกับพื้นที่ซึ่งเป็นทรงกลม เป็นต้น
2. เทอม $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ ซึ่งเป็นพิกัดของของจุดศูนย์ถ่วงหรือของจุด centroid ของ differential element และแสดงถึง moment arm ของ differential element
3. ถ้าเป็นไปได้ เราควรที่จะเลือก differential element ให้มีขนาดหรือความหนาที่อยู่ในทิศทางเดียวเท่านั้น ซึ่งจะทำให้การ integration ในสมการสมการที่ 9-4 ถึง 9-7 ลดลงเหลือเพียงเป็นการ integration เพียงครั้งเดียวซึ่งจะครอบคลุมทั้งตัววัตถุ

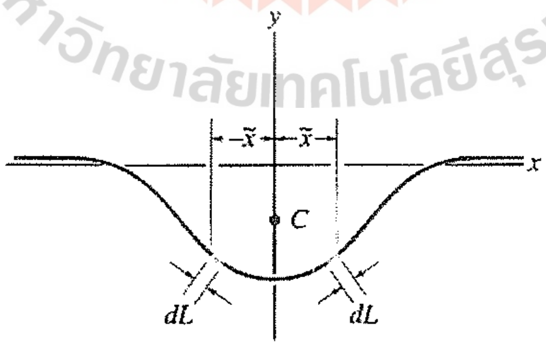


รูปที่ 9-5

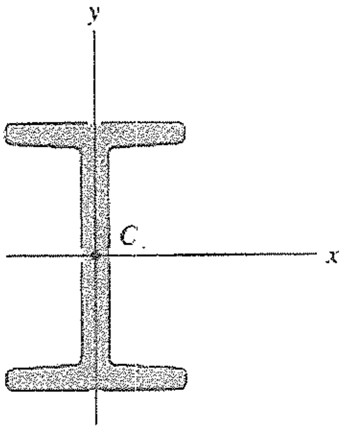
ความสมมาตร (Symmetry)

โดยการใช้เงื่อนไขของความสมมาตรของวัตถุรอบแกนใดแกนหนึ่งแล้ว เราจะหาจุด centroid ของวัตถุดังกล่าวได้ง่ายขึ้น

ในกรณีที่วัตถุมีความสมมาตรรอบแกนใดแล้ว จุด centroid ของวัตถุก็จะอยู่บนแกนนั้น ยกตัวอย่างเช่น จุด centroid ของเส้น ดังที่แสดงในรูปที่ 9-6 จะอยู่บนแกน y เป็นต้น

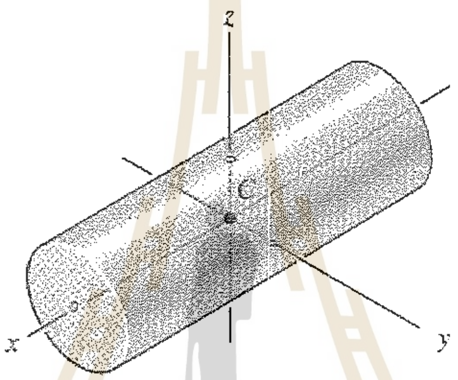


รูปที่ 9-6



รูปที่9-7

ในกรณีที่วัตถุมีสมมาตรรอบแกนสองแกนและรอบแกนสามแกนแล้ว จุดที่แกนเหล่านั้นตัดกันจะเป็นจุด centroid ของวัตถุนั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 9-7 และ 9-8



รูปที่9-8

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Differential Element

1. ตั้งแกนอ้างอิงที่จะใช้ให้เหมาะสม แล้วเลือก differential element ที่จะใช้ในการ integration ดังต่อไปนี้

* ในกรณีของเส้น (line) นั้น differential element dL จะอยู่ในรูปของ element ที่มีความยาวน้อยมากๆ dL

* ในกรณีของพื้นที่นั้น differential element dA จะอยู่ในรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวที่มีค่าที่แน่นอน แต่มีความกว้างอยู่ในรูปของตัวแปร

* ในกรณีของปริมาตรนั้น differential element dV จะอยู่ในรูปของจานทรงกลม (circular dish) ที่มีรัศมีที่มีค่าที่แน่นอน แต่มีความหนาอยู่ในรูปของตัวแปร หรืออยู่ในรูปของ shell ที่มีความยาวและรัศมีที่มีค่าที่แน่นอน แต่มีความหนาอยู่ในรูปของตัวแปร

2. กำหนดจุด (x, y, z) ที่บอกพิกัดของ differential element ที่อยู่บนเส้น (line), พื้นที่, หรือปริมาตรนั้น

Size and Moment Arms

3. เขียนความยาว dL, พื้นที่ dA, หรือปริมาตร dV ให้อยู่ในรูปของสมการของพิกัด (coordinate) ของเส้น (line), พื้นที่, หรือปริมาตรนั้น

4. หาสมการของพิกัด $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ ของจุด centroid หรือจุดศูนย์ถ่วงของ differential element ซึ่งพิกัดดังกล่าวจะแสดงถึง moment arm ของ differential element

Integration

5. แทนสมการของ $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ และสมการของ dL, dA, หรือ dV ลงในสมการที่ใช้หาค่าของจุด centroid หรือจุดศูนย์ถ่วง (สมการที่ 9-4 ถึง 9-7) แล้วทำการ integration โดยที่ limits ของ integral จะต้องครอบคลุมความยาวของเส้น, พื้นที่, หรือปริมาตรของทั้งหมดวัตถุ

$$L = \int dL = \int_0^1 \left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)dx = 1.4397 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dL}{\int dL} = \frac{0.7856}{1.4397} = 0.5457 \text{ m} = 0.546 \text{ m}$$ Ans.

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของแท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูป และจากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

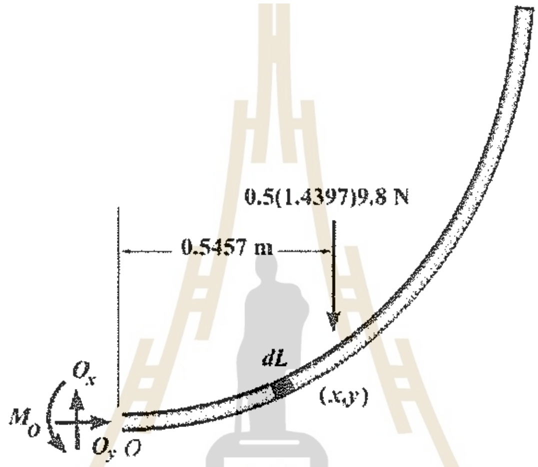
$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0;$ $O_x = 0$ Ans.

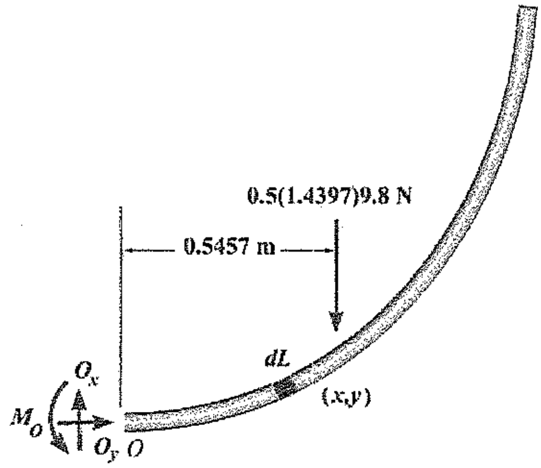
$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $O_y - 1.4397(0.5)(9.81) = 0$

$O_y = 7.06$ N Ans.

$\circlearrowleft + \sum M_O = 0;$ $M_O - 1.4397(0.5)(9.81)(0.5457) = 0$

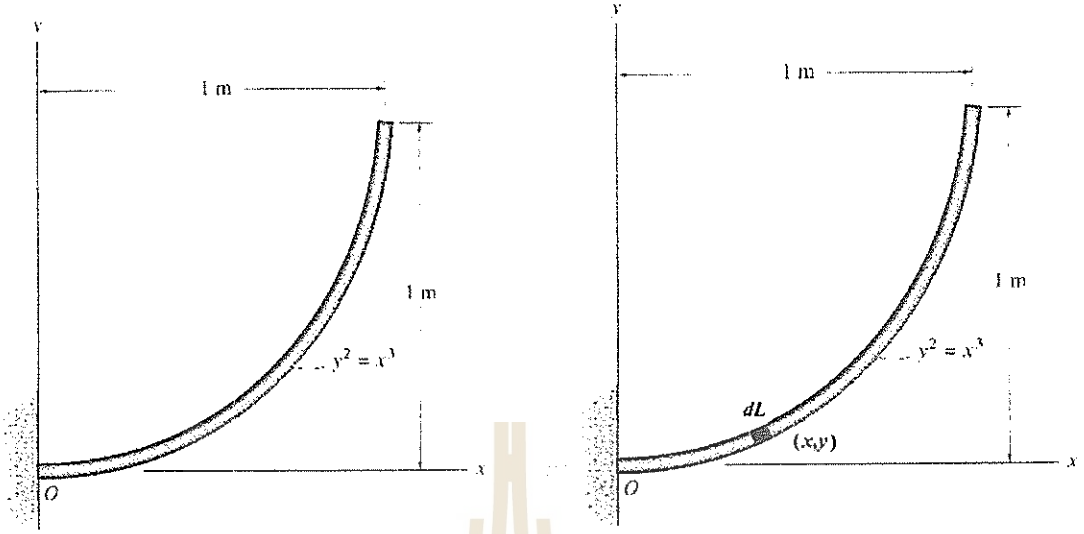
$M_O = 3.85$ N m Ans.




0.5(1.4397)9.8 N
0.5457 m
dL
(x,y)
O_x
M_O
O_y
O

ตัวอย่างที่ 9-1 (9-5)

จงหาระยะ $\bar{x}$ ของจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-1 เมื่อแท่งเหล็กมีมวล 0.5 kg/m จากนั้น จงหาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบยึดแน่น O



รูปที่ Ex 9-1

วิธีทำ

ทำการเลือก differential element dL ที่พิกัด (x, y) ดังที่แสดง โดยที่

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx$$

เนื่องจาก $y = x^{\frac{3}{2}}$ ซึ่งเราจะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้น

$$dL = \left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)dx$$

หาระยะ centroid $\bar{x}$ ของจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเหล็ก โดยกำหนดให้ระยะ centroid ของ differential element dL อยู่ที่พิกัด x หรือ $\tilde{x} = x$ ดังนั้น

$$\int_L \tilde{x}\,dL = \int_0^1 x\left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)dx = 0.7856 \text{ m}^2$$

$$L = \int_L dL = \int_0^1 \left(\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\right)dx = 1.4397 \text{ m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_L \tilde{x}\,dL}{\int_L dL} = \frac{0.7856}{1.4397} = 0.5457 \text{ m} = 0.546 \text{ m} \qquad \text{Ans.}$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของแท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูป และจากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0;$ $\quad O_x = 0$ Ans.

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad O_y - 1.4397(0.5)(9.81) = 0$

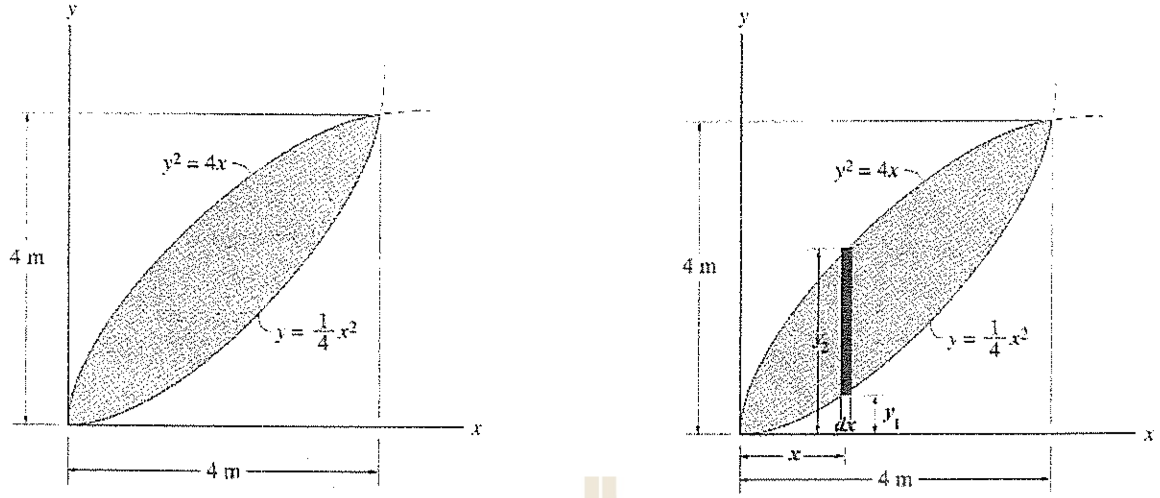
$O_y = 7.06 \text{ N}$ Ans.

$\circlearrowleft + \sum M_O = 0;$ $\quad M_O - 1.4397(0.5)(9.81)(0.5457) = 0$

$M_O = 3.85 \text{ N m}$ Ans.

ตัวอย่างที่ 9-3 (9-25 9-26)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-3



รูปที่ Ex 9-3

วิธีทำ

ทำการแบ่ง differential area dA ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะหาพื้นที่ของรูปดังกล่าวได้เท่ากับ

$$\int_A dA = \int_0^4 (y_2 - y_1)dx = \int_0^4 (2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^2)dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3}\ \mathrm{m}^2$$

ระยะ centroid $\tilde{x}$ ของ differential area dA อยู่ที่พิกัด x หรือ $\tilde{x} = x$ ดังนั้น

$$\int_A \tilde{x}dA = \int_0^4 x\left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^4\right]_0^4 = 9.60\,\mathrm{m}^3$$

และ

$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA} = \frac{9.60}{\frac{16}{3}} = 1.80\ \mathrm{m} \qquad \text{Ans.}$$

ระยะ centroid $\tilde{y}$ ของ differential area dA อยู่ที่กึ่งกลางความสูงของ differential area

$$\tilde{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}\left(2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right)$$

ดังนั้น

$$\int_A \tilde{y}dA = \frac{1}{2}\int_A (2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^2)(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (4x - \frac{1}{16}x^4)dx$$

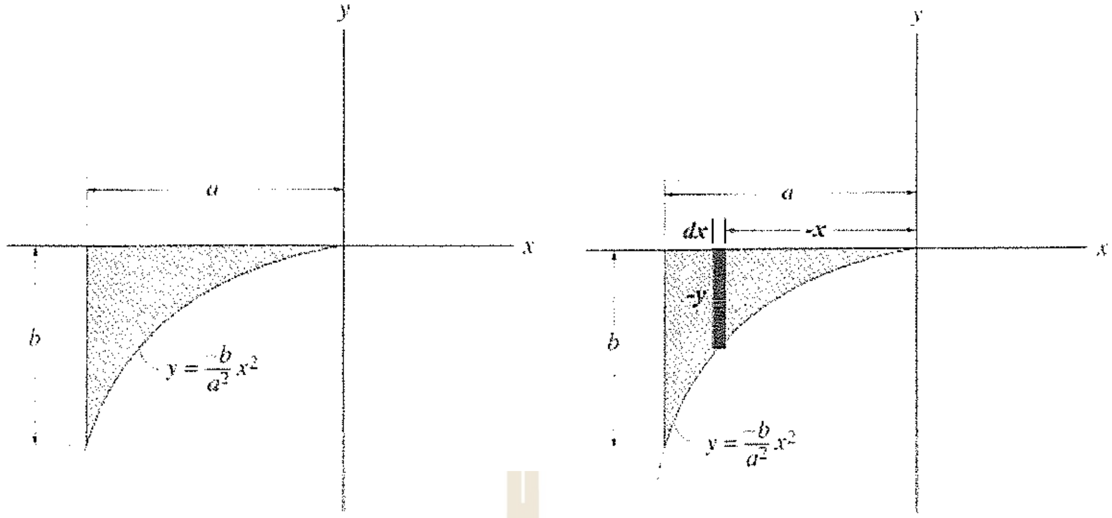
$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 - \frac{1}{80}x^5\right]_0^4 = 9.60\ \mathrm{m}^3$$

และ

$$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA} = \frac{9.60}{\frac{16}{3}} = 1.80\ \mathrm{m} \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 9-2 (9-14)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-2



รูปที่ Ex 9-2

วิธีทำ

ทำการแบ่ง differential area dA ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะหาพื้นที่ของรูปดังกล่าวได้เท่ากับ

$$\int_A dA = \int_0^a \frac{b}{a^2}\left(x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}\left(\frac{1}{3}a^3\right) = \frac{1}{3}ab$$

ระยะ centroid $\tilde{x}$ ของ differential area dA อยู่ที่พิกัด $-x$ หรือ $\tilde{x} = -x$ ดังนั้น

$$\int_A \tilde{x}dA = \int_0^a -\frac{b}{a^2}\left(x^3\right)dx = -\frac{b}{a^2}\left(\frac{1}{4}a^4\right) = -\frac{1}{4}ab^2$$

และ $$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x}dA}{\int_A dA} = \frac{-\frac{1}{4}ba^2}{\frac{1}{3}ab} = -\frac{3}{4}a$$ Ans.

ระยะ centroid $\tilde{y}$ ของ differential area dA อยู่ที่กึ่งกลางความสูงของ differential area

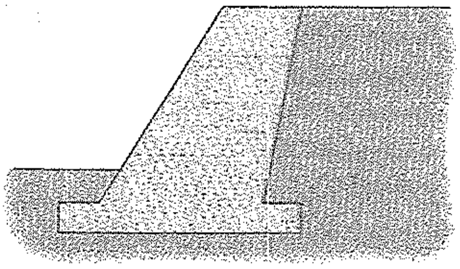
$$\tilde{y} = -\frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)$$

ดังนั้น

$$\int_A \tilde{y}dA = \int_0^a -\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^4}\right)\left(x^4\right)dx = -\frac{1}{10}\left(b^2a\right)$$

และ $$\bar{y} = \frac{\int_A \tilde{y}dA}{\int_A dA} = \frac{-\frac{1}{10}\left(b^2a\right)}{\frac{1}{3}ab} = -\frac{3}{10}b$$ Ans.

9.3 วัตถุประกอบ (Composite Bodies)



รูปที่ 9-9

วัตถุประกอบ (composite body) เป็นวัตถุที่ประกอบขึ้นจากวัตถุที่มีรูปร่างพื้นฐานเช่น สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม และครึ่งทรงกลม เป็นต้น ดังที่แสดงในรูปที่ 9-9 โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถที่จะแบ่งวัตถุชนิดนี้ออกเป็นชิ้นส่วนต่างๆ ได้ ถ้าเราทราบน้ำหนักและตำแหน่งของจุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) ของชิ้นส่วนเหล่านั้นแล้ว เราก็จะสามารถหาจุดศูนย์ถ่วงของวัตถุประกอบได้โดยใช้สมการที่ 9-1 ซึ่งนำมาเขียนใหม่ได้อยู่ในรูป

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W}$$
$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \qquad (9\text{-}8)$$
$$\bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

เมื่อ $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ เป็นพิกัด (coordinate) ของจุดศูนย์ถ่วง G ของวัตถุประกอบ (composite body)

$\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ เป็นพิกัดของชิ้นส่วนต่างๆ ของวัตถุประกอบ

$\sum W$ เป็นน้ำหนักของชิ้นส่วนของวัตถุประกอบ

ในกรณีที่วัตถุทำด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันตลอดทั้งวัตถุแล้ว ค่าความหนาแน่นและค่าความถ่วงจำเพาะของวัสดุที่ใช้ทำวัตถุจะมีค่าคงที่ จุด centroid ของเส้นประกอบ (composite lines), พื้นที่ประกอบ (composite areas), และปริมาตรประกอบ (composite volumes) จะหาได้จากสมการที่มีลักษณะคล้ายคลึงกับสมการที่ 9-8 โดยที่ W จะถูกแทนที่ด้วย L , A , และ V ตามลำดับ

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Composite Parts

1. แบ่งวัตถุออกเป็นชิ้นส่วนต่างๆ ถ้าชิ้นส่วนเหล่านั้นมีช่องว่างอยู่ในตัวมันเองแล้ว เราจะให้ช่องว่างเหล่านั้นมีน้ำหนักหรือขนาดที่เป็นลบ

Moment Arms

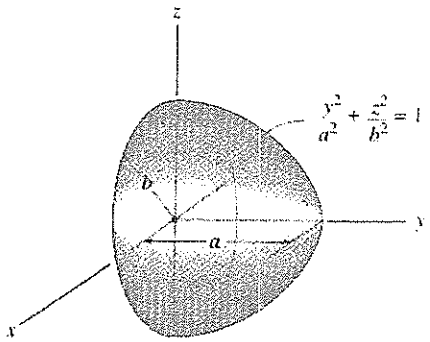
2. ตั้งแกนอ้างอิงแล้วหาค่าพิกัด ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$) ของจุด centroid หรือจุดศูนย์ถ่วงของชิ้นส่วนต่างๆ

Summation

3. หาค่าพิกัด ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$) โดยใช้สมการที่ 9-8 หรือใช้สมการของจุด centroid ถ้าวัตถุมีความสมมาตรรอบแกนใดแกนหนึ่งแล้ว จุด centroid ของวัตถุจะอยู่บนแกนดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 9-4 (9-38)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ ของปริมาตร ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-4



รูปที่ Ex 9-4

วิธีทำ

ทำการแบ่ง differential volume dV ให้อยู่ในระนาบ $x-z$ โดยห่างจุดกำเนิดของแกนอ้างอิงเท่ากับ y มีความหนาเท่ากับ dy และมีรัศมีเท่ากับ z ซึ่ง differential volume ดังกล่าวมีปริมาตรเท่ากับ

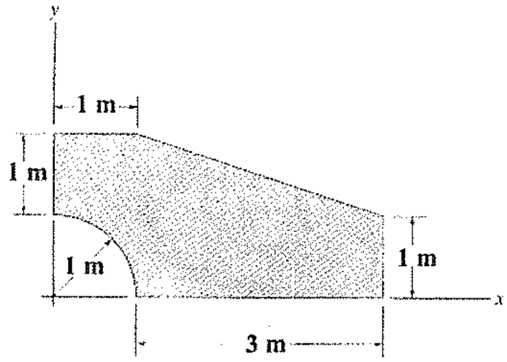
$$dV = \pi z^2 dy = \pi b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dy$$

ระยะ centroid $\widetilde{y}$ ของ differential area dA อยู่ที่ y หรือ $\widetilde{y} = y$ ดังนั้น

$$\bar{y} = \frac{\int_V \widetilde{y} dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^a y\left[\pi b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dy\right]}{\int_0^a \pi b^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dy} = \frac{3}{8} a$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 9-6 (9-55)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-6



รูปที่ Ex 9-6

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 9-6 เราจะเห็นได้ว่า พื้นที่ประกอบ (composite area) เกิดจากการนำพื้นที่ย่อย 3 พื้นที่มาประกอบเข้าด้วยกัน โดยพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าลบด้วยพื้นที่สามเหลี่ยมและพื้นที่ของส่วนของทรงกลม โดยมีพื้นที่ทั้งหมดเท่ากับ

$$\sum A = 1(2) - \left(\frac{\pi(1)^2}{4}\right) + 3(1) + \frac{1}{2}(3)(1) = 5.715 \ \text{m}^2$$

$$\sum \bar{x}A = 0.5(1)(2) - \left(\frac{4(1)}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi(1)^2}{4}\right) + 2.5(3)(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)(3)(1) = 11.1667 \ \text{m}^3$$

$$\sum \bar{y}A = 1(1)(2) - \left(\frac{4(1)}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi(1)^2}{4}\right) + 0.5(3)(1) + (1.333)\left(\frac{1}{2}\right)(3)(1) = 5.1667 \ \text{in}^3$$

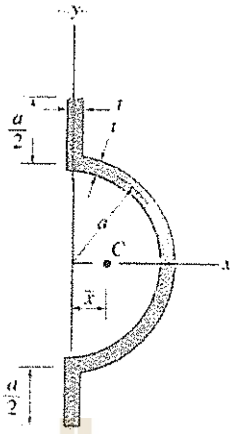
จุด centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ ของพื้นที่จะอยู่ที่

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{11.1667}{5.715} = 1.95 \ \text{m}$$ Ans.

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{5.1667}{5.715} = 0.904 \ \text{m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 9-5 (9-47)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $\bar{x}$ ของพื้นที่หน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-5 กำหนดให้ $t <<< a$



รูปที่ Ex 9-5

วิธีทำ

เนื่องจาก $t <<< a$ เราจะพิจารณาพื้นที่หน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้างเป็นเส้น ซึ่งจะมีความยาวเท่ากับ

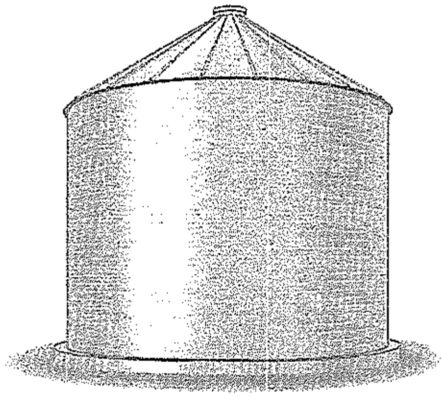
$$\sum L = \frac{a}{2} + \pi(a) + \frac{a}{2} = a(1+\pi)$$

$$\sum \bar{x}L = 0\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{2a}{\pi}(\pi a) + 0\left(\frac{a}{2}\right) = 2a^2$$

จุด centroid $\bar{x}$ ของพื้นที่หน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้างจะอยู่ที่

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}L}{\sum L} = \frac{2a^2}{a(1+\pi)} = \frac{2a}{1+\pi}$$ Ans.

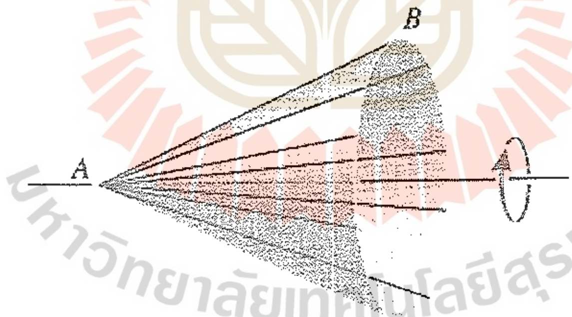
9.4 ทฤษฎีบทของ Pappus and Guldinus



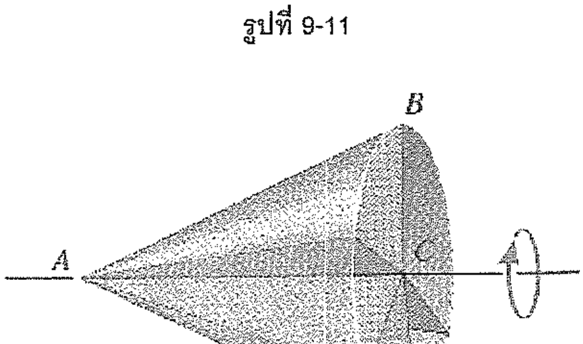
รูปที่ 9-10

ทฤษฎีบทของ Pappus และ Guldinus นี้สามารถที่จะใช้ในการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของวัตถุใดๆ ที่ได้จากการหมุนหน้าตัดรอบแกนใดแกนหนึ่งของหน้าตัด ซึ่งจะทำให้หน้าตัดของวัตถุที่ได้มีความสมมาตรรอบแกนดังกล่าว (object of revolution) ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10 ทฤษฎีบทนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Pappus of Alexandria ในช่วงคริสตศตวรรษที่ 3 และถูกนำมาเรียบเรียงใหม่โดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ชื่อ Paul Guldin หรือ Guldinus

Surface area of revolution จะได้จากการหมุนเส้น (line) ที่อยู่ในระนาบใดระนาบหนึ่ง รอบแกนใดแกนหนึ่งที่อยู่ในระนาบของเส้นดังกล่าว เช่น ถ้าเราหมุนเส้นตรง AB ดังที่แสดงในรูปที่ 9-11 รอบแกนใดแกนหนึ่งตามรูปแล้ว เราจะได้ พื้นที่ผิวของกรวย (cone) เป็นต้น และ volume of revolution จะเกิดจากการหมุนพื้นที่ที่อยู่ในระนาบใดระนาบหนึ่งรอบแกนใดแกนหนึ่งที่อยู่ในระนาบของพื้นที่นั้น เช่น ถ้าเราหมุนพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ดังที่แสดงในรูปที่ 9-12 รอบแกนใดแกนหนึ่งตามรูปแล้ว เราจะได้ปริมาตรของกรวย (cone) เป็นต้น



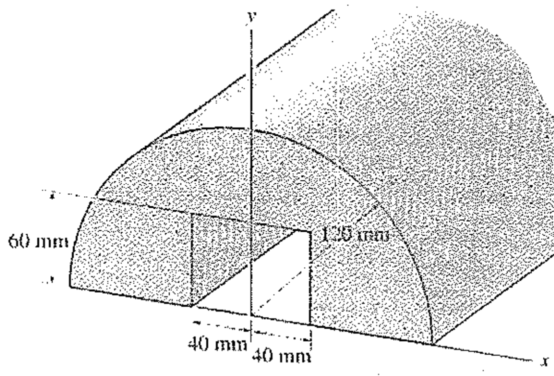
รูปที่ 9-11



รูปที่ 9-12

ตัวอย่างที่ 9-7 (9-63)

จงหาตำแหน่งของจุด centroid $\bar{y}$ ของพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-7



รูปที่ Ex 9-7

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 9-7 เราจะเห็นได้ว่า พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างเป็นพื้นที่ประกอบ (composite area) เกิดจากการนำพื้นที่ย่อย 2 พื้นที่มาประกอบเข้าด้วยกัน โดยพื้นที่ครึ่งวงกลมลบด้วยพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยมีพื้นที่ทั้งหมดเท่ากับ

$$\sum A = \frac{1}{2}\pi(120)^2 - (80)(60) = 17819 \quad \text{mm}^2$$

$$\sum \bar{y}A = \frac{4(120)}{3\pi}\left(\frac{1}{2}\pi\right)(120)^2 - 30(80)(60) = 1.008(10)^6 \quad \text{mm}^3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{1.008(10)^6}{17819} = 56.6 \text{ mm}$$ Ans.

<u>บทพิสูจน์</u>

เมื่อ differential area dA ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-14 ถูกหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเป็นระยะทาง $2\pi r$ แล้ว differential area นี้จะทำให้เกิดวงแหวนที่มีปริมาตร

$$dV = 2\pi r\, dA$$

ปริมาตรทั้งหมดที่ได้จากการหมุนพื้นที่ A รอบแกนดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

$$V = 2\pi \int_A r\, dA$$

จากสมการที่ 9-6 เราจะได้ว่า $\int_A r\, dA = \bar{r}A$ ดังนั้น

$$V = 2\pi \bar{r} A$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าพื้นที่ถูกหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเป็นมุม θ เราจะได้ว่า

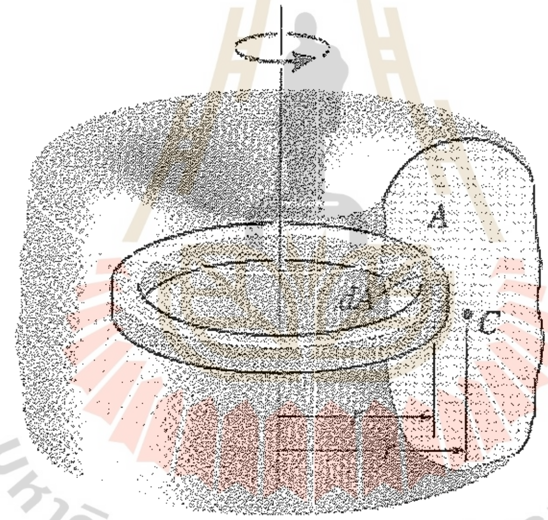
$$V = \theta \bar{r} A \qquad (9\text{-}10)$$

เมื่อ A เป็นปริมาตรของ volume of revolution

θ เป็นมุมที่เกิดการหมุน, $\theta \le 2\pi$

r เป็นระยะทางตั้งฉากจากแกนของการหมุนถึงจุด centroid ของพื้นที่ที่เป็นตัวกำเนิด volume of revolution

A คือพื้นที่ที่เป็นตัวกำเนิด volume of revolution



รูปที่ 9-14

รูปร่างประกอบ (Composite Shapes)

เราสามารถที่จะใช้ทฤษฎีบทของ Pappus และ Guldinus นี้กับเส้น (line) หรือพื้นที่ที่อาจจะประกอบขึ้นด้วยชิ้นส่วนต่างๆ ของเส้นหรือพื้นที่ได้ ซึ่งในกรณีนี้ พื้นที่ผิวหรือปริมาตรทั้งหมดที่เกิดขึ้นจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ผิวหรือปริมาตรที่เกิดขึ้นจากแต่ละชิ้นส่วนของเส้นหรือพื้นที่นั้น

เนื่องจากแต่ละเส้น (line) หรือพื้นที่จะมีมุมที่เกิดการหมุน (θ) และระยะทางตั้งฉากจากแกนของการหมุนถึงจุด centroid ของเส้นหรือพื้นที่ ($\tilde{r}$) ที่เท่ากัน ดังนั้น

$$A = \theta \sum (\tilde{r} L) \qquad (9\text{-}11)$$

และ

$$V = \theta \sum (\tilde{r} A) \qquad (9\text{-}12)$$

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า ในทฤษฎีบทนี้ เส้น (line) หรือพื้นที่ที่เราหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเพื่อที่จะทำให้เกิด surface area of revolution และ volume of revolution จะไม่ตัดกับแกนที่เส้น (line) หรือพื้นที่นั้นหมุนรอบ เพราะถ้าไม่เป็นเช่นนี้แล้ว เส้น (line) หรือพื้นที่ทั้งสองส่วนจะทำให้เกิดพื้นที่หรือปริมาตรที่มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกันและจะหักล้างซึ่งกันและกัน

พื้นที่ผิว (Surface Area)

พื้นที่ผิวของ surface area of revolution จะมีค่าเท่ากับผลคูณของความยาวของเส้นที่ทำให้เกิด surface of revolution นั้น กับระยะทางตั้งฉากจากแกนของการหมุนถึงจุด centroid ของเส้นดังกล่าว

<u>บทพิสูจน์</u>

เมื่อ differential element dL ของเส้นโค้ง (curve) ดังที่แสดงในรูปที่ 9-13 ถูกหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเป็นระยะทาง $2\pi r$ แล้ว differential element ดังกล่าวจะทำให้เกิดวงแหวนที่มีพื้นที่ผิว

$$dA = 2\pi r\, dL$$

พื้นที่ผิวทั้งหมดที่ได้จากการหมุนเส้นโค้งทั้งเส้น ซึ่งมีความยาว L รอบแกนดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

$$A = 2\pi \int_L r\, dL$$

จากสมการที่ 9-7 เราจะได้ว่า $\int_L r\, dL = \bar{r}L$ ดังนั้น

$$A = 2\pi \bar{r} L$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้า curve ถูกหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่งเป็นมุม θ เราจะได้ว่า

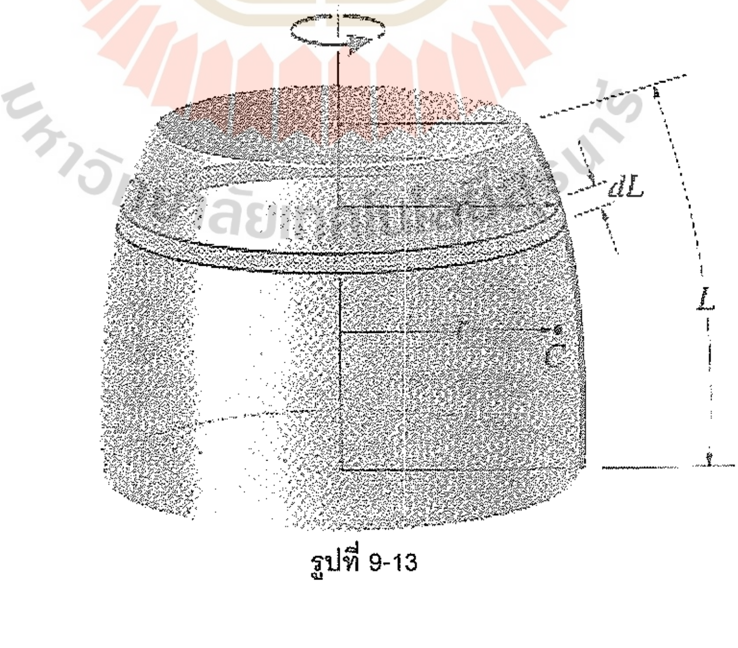
$$A = \theta \bar{r} L \qquad (9\text{-}9)$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ผิวของ surface of revolution

θ เป็นมุมที่เกิดการหมุน, $\theta \le 2\pi$

r เป็นระยะทางตั้งฉากจากแกนของการหมุนถึงจุด centroid ของเส้น (line) ที่ทำให้เกิด surface of revolution

L คือความยาวของเส้น (line) ที่เป็นตัวกำเนิด surface of revolution



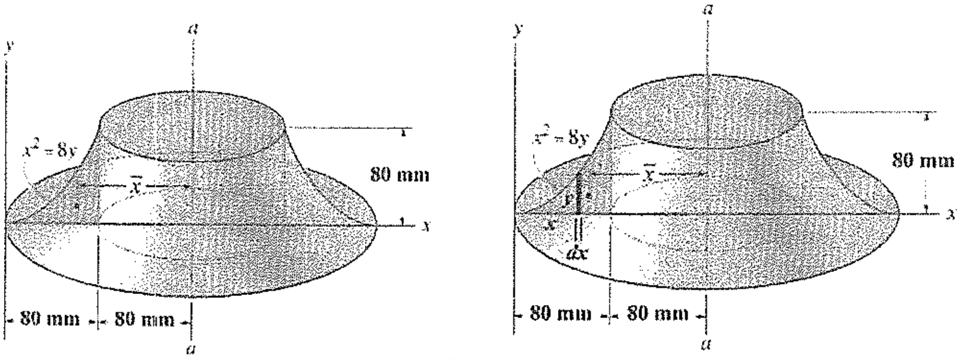
รูปที่ 9-13

ปริมาตร (Volume)

ปริมาตรของ volume of revolution จะมีค่าเท่ากับผลคูณของพื้นที่ที่ทำให้เกิด volume of revolution นั้น กับระยะทางตั้งฉากจากแกนของการหมุนถึงจุด centroid ของของพื้นที่ที่ทำให้เกิด volume e of revolution นั้น

ตัวอย่างที่ 9-9 (9-101)

จงหาพื้นที่และระยะ $\bar{x}$ ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-9 จากนั้น จงหาปริมาตรของแท่งวัตถุดังกล่าว



รูปที่ Ex 9-9

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 9-9 เราจะหาพื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุ ดังที่ระบายโดยสีทึบได้โดยการแบ่ง differential area dA ซึ่งมีความหนา dz สูง y และอยู่ห่างจากจุดกำเนิดของแกนอ้างอิงไปในแนวแกน x เท่ากับ x ดังที่แสดงในรูป และ differential area ดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับ

$$dA = ydx$$

และพื้นที่ทั้งหมดของพื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับ

$$A = \int_A dA = \int_0^{80} \frac{x^2}{8} dx = 21333 \ \ \text{mm}^2 \qquad \text{Ans.}$$

ระยะ centroid $\tilde{x}$ ของ differential area dA อยู่ที่พิกัด x หรือ $\tilde{x} = x$ ดังนั้น ระยะ centroid $\bar{x}$ ของพื้นที่ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ

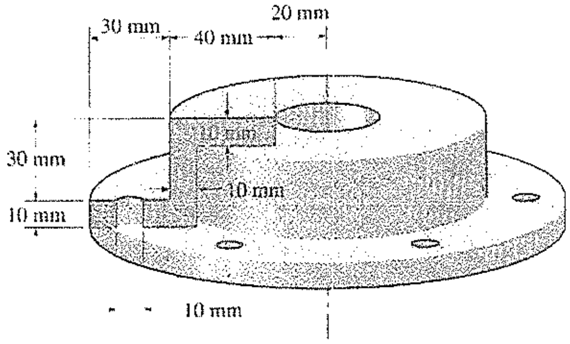
$$\bar{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^{80} \frac{x^3}{8} dx}{21333.3} = 60 \ \ \text{mm} \qquad \text{Ans.}$$

ปริมาตรของแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับ

$$V = 2\pi(60)(21333.3) + \pi(80^2)80 = 9.651(10^6)\ \text{mm}^3 \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 9-8 (9-93)

จงหามวลของแท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-8 เมื่อเหล็กมีความหนาแน่น $7850\ \mathrm{kg/m^3}$ และแท่งเหล็กมีรูเจาะขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $40\ \mathrm{mm}$ ที่กึ่งกลางหน้าตัด 1 รู และมีมีรูเจาะขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $10\ \mathrm{mm}$ อยู่ที่ขอบของแท่งเหล็กจำนวน 6 รู



รูปที่ Ex 9-8

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 9-8 เราจะเห็นได้ว่า

$$V = 2\pi\left[(40)(40)(10) + (55)(30)(10) + (75)(30)(10)\right] - 6\left[\pi(5)^2(10)\right] = 340.9(10^3) \quad \mathrm{mm^3}$$

ดังนั้น แท่งเหล็กจะมีมวลเท่ากับ

$$m = \rho V = \left(7850\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right)(340.9)(10^3)(10^{-9})\ \mathrm{m^3} = 2.68 \quad \mathrm{kg} \qquad \text{Ans.}$$

บทที่ 10

Moments of Inertia

จุดประสงค์

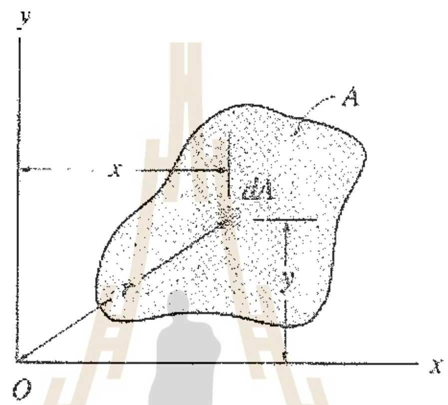
เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงวิธีการหาค่า moment of inertia ของพื้นที่และวัตถุประกอบ (composite bodies)

10.1 นิยามของ moment of inertia ของพื้นที่ (Definition of Moments of Inertia for Areas)

จากบทที่ 9 ตำแหน่งของ centroid ของพื้นที่จะหาได้โดยการพิจารณา first moment ของพื้นที่รอบแกนใดแกนหนึ่ง ซึ่งเป็นการหา integral ที่อยู่ในรูป $\int x\,dA$

ในบทนี้ เราจะนิยามค่าของ integral ของพื้นที่รอบแกนใดแกนหนึ่งซึ่งอยู่ในรูป $\int x^2\,dA$ จะถูกเรียกว่า moment of inertia ของพื้นที่

Moments of Inertia



รูปที่ 10-1

พิจารณาพื้นที่ A ดังที่แสดงในรูปที่ 10-1 ซึ่งอยู่ในระนาบ $x-y$ โดยใช้คำนิยามของ moments of inertia ของพื้นที่เล็กๆ dA รอบแกน x และแกน y เราจะได้ว่า

$$dI_x = y^2 dA$$
$$dI_y = x^2 dA$$

เมื่อพิจารณาพื้นที่ทั้งหมด A แล้ว ค่า moments of inertia จะหามาได้โดยการ integration สมการทั้งสองสมการบนพื้นที่ดังกล่าวหรือ

$$I_x = \int_A y^2 dA$$
$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad (10\text{-}1)$$

นอกจากนั้นแล้ว เราจะหา moment of inertia ของพื้นที่เล็กๆ dA รอบจุด O หรือแกน z ได้อีกด้วย ซึ่ง moment นี้มักถูกเรียกว่า polar moment of inertia จากรูปที่ 10-1 polar moment of inertia จะอยู่ในรูป

$$dJ_O = r^2 dA$$

เมื่อ r เป็นระยะทางตั้งฉากจากแกน z ถึงพื้นที่เล็กๆ dA

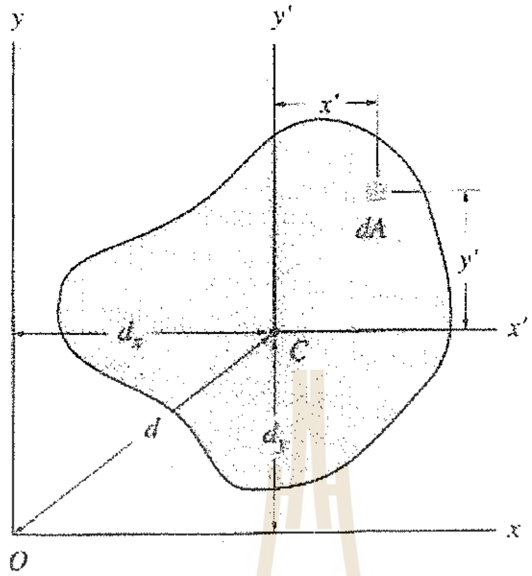
เมื่อพิจารณาพื้นที่ทั้งหมด A แล้ว ค่า polar moments of inertia จะหาได้โดยการ integration สมการดังกล่าวบนพื้นที่ A และจากความสัมพันธ์ $r^2 = x^2 + y^2$ เราจะได้ว่า

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \qquad (10\text{-}2)$$

จากสมการที่ 10-1 และ 10-2 เราจะเห็นได้ว่า moment of inertia I_x และ I_y และ polar moments of inertia J_O จะมีค่าเป็นบวกเสมอและมีหน่วยเป็นกำลังที่สี่ของหน่วยวัดระยะ เช่น m^4 หรือ in^4 เป็นต้น

10.2 Parallel Axis Theorem for an Area

ถ้าเราทราบค่าของ moments of inertia ของพื้นที่รอบแกนใดแกนหนึ่งซึ่งผ่านจุด centroid ของพื้นที่นั้นแล้ว เราจะหาค่าของ moments of inertia ของพื้นที่ดังกล่าวรอบแกนใดๆ ที่ขนานไปกับแกนนั้นได้โดยใช้ *parallel-axis theorem*



รูปที่ 10-2

พิจารณารูปที่ 10-2 เราต้องการหา moments of inertia ของพื้นที่ A ที่ระบายสีทึบรอบแกน x จากรูป เราจะเห็นว่า พื้นที่เล็กๆ dA อยู่ห่างจากแกน x' ที่ผ่านจุด centroid ของพื้นที่ดังกล่าวเป็นระยะ y' และระยะระหว่างแกน x และแกน x' มีค่าเท่ากับ d_y เนื่องจาก moments of inertia ของพื้นที่เล็กๆ dA รอบแกน x มีค่าเท่ากับ

$$dI_x = (y' + d_y)^2 dA$$

ดังนั้น moments of inertia ของพื้นที่ A รอบแกน x จะหาได้จาก

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 dA$$

$$= \int_A y'^2 dA + 2d_y \int_A y' dA + d_y^2 \int_A dA$$

จากสมการข้างต้น เราจะเห็นว่า

- integral เทอมแรกแสดงถึงค่าของ moments of inertia ของพื้นที่ A รอบแกน x' ที่ผ่านจุด centroid ของพื้นที่ดังกล่าวหรือ $\bar{I}_{x'}$
- integral เทอมที่สองมีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจากแกน x' ผ่านจุด centroid C ของพื้นที่หรือ $\int y' dA = \bar{y} \int dA = 0$ เพราะว่า $\bar{y} = 0$
- integral เทอมที่สามคือพื้นที่ A

ดังนั้น เราจะสามารถเขียนสมการดังกล่าวได้ใหม่ในรูป

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \tag{10-3}$$

ในลักษณะที่คล้ายกัน เราจะได้ moments of inertia ของพื้นที่ A ที่ระบายสีทึบรอบแกน y อยู่ในรูป

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \tag{10-4}$$

และสุดท้าย เราจะได้ polar moments of inertia ของพื้นที่ A รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ และผ่านจุด O (แกน z) ดังที่แสดงในรูปที่ 10-2 อยู่ในรูป

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \tag{10-5}$$

จากสมการที่ 10-3 ถึง 10-5 เราจะสรุปได้ว่า

ค่าของ moments of inertia ของพื้นที่ A รอบแกนใดแกนหนึ่งจะมีค่าเท่ากับ moments of inertia ของพื้นที่ A รอบแกนใดๆ ที่ขนานกับแกนนั้นและผ่านจุด centroid C ของพื้นที่ A บวกกับผลคูณของพื้นที่ A กับกำลังสองของระยะทางตั้งฉากระหว่างแกนทั้งสอง

10.3 Radius of Gyration of an Area

Radius of gyration ของพื้นที่มีหน่วยเป็นหน่วยของความยาว ซึ่งเป็นปริมาณที่มักจะถูกใช้ในการออกแบบเสา ถ้าเราทราบค่าของพื้นที่และค่าของ moments of inertia แล้ว ค่าของ radii of gyration ของพื้นที่นั้นจะหาได้จากสมการ

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$
$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (10\text{-}6)$$
$$k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

10.4 **กาหาค่า** moment of inertia **ของพื้นที่โดยการ** integration (Moments of Inertia for an Area by Integration)

เมื่อเส้นรอบพื้นที่ของพื้นที่หนึ่งถูกแสดงอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้แล้ว ค่าของ moments of inertia ของพื้นที่ดังกล่าวจะหามาได้จากการทำ integration สมการที่ 10-1

ถ้าพื้นที่ของ element ที่เราเลือกใช้ในการทำ integration มีขนาดความกว้างและความยาวต่างกันในสองทิศทาง ดังที่แสดงในรูปที่ 10-2 แล้ว เราจำเป็นที่จะต้องทำการ integration สองครั้งในการหาค่าของ moments of inertia ของพื้นที่ดังกล่าว ดังนั้น เพื่อความง่ายและสะดวกในการทำ integration เราจะต้องพยายามเลือกพื้นที่ของ element ให้มีความกว้างและความยาวต่างกันในทิศทางเดียวเพื่อที่เราจะสามารถลดจำนวนครั้งของการทำ integration ดังกล่าวให้เหลือเพียงครั้งเดียว

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

- ทำการระบุขนาดของพื้นที่เล็กๆ dA โดยพยายามเลือกพื้นที่ดังกล่าวให้มีความกว้างและความยาวต่างกันในทิศทางเดียว เพื่อลดจำนวนครั้งของการ integration
- โดยทั่วไปแล้ว พื้นที่ดังกล่าวจะมีรูปร่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยเราจะเขียนสมการของความยาวให้ในรูปของความกว้าง ซึ่งเป็นตัวแปร
- พื้นที่ดังกล่าวควรที่จะอยู่ในตำแหน่งที่ตัดกับขอบของพื้นที่ที่จุด (x, y) ใดๆ ซึ่งเราจะสามารถพิจารณาการวางตัวของพื้นที่ดังกล่าวรอบแกนที่เรากำลังจะหาค่าของ moments of inertia ได้สองกรณี ดังนี้

Case 1

เมื่อเราสามารถที่จะวางความยาวของพื้นที่ดังกล่าวให้*ขนาน*ไปกับแกนที่เรากำลังจะหาค่าของ moments of inertia ได้ อย่างเช่นในกรณีของพื้นที่เล็กๆ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังที่แสดงในรูปที่ 10-3 แล้ว เราจะหาค่าของ I_y ได้จากการใช้สมการที่ 10-1 โดยตรง เมื่อ $dA = y\,dx = f(x)dx$ ดังนั้น

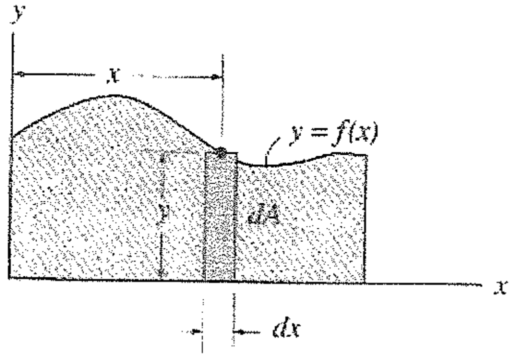
$$I_y = \int x_2 f(x)\,dx$$

Case 2

เมื่อเราวางความยาวของพื้นที่ดังกล่าวให้*ตั้งฉาก*ไปกับแกนที่เรากำลังจะหาค่าของ moments of inertia ได้เท่านั้น ในกรณีนี้ เราจะไม่สามารถใช้สมการที่ 10-1 ได้โดยตรง อย่างเช่นในกรณีที่เราต้องการหาค่าของ moments of inertia ของพื้นที่รอบแกน x หรือ I_x ดังที่แสดงในรูปที่ 10-3 นั้น เราจะทำได้ดังนี้

1. ทำการหาค่าของ moments of inertia ของพื้นที่เล็กๆ รอบแกนนอนที่ผ่า งจุด centroid ของพื้นที่เล็กๆ

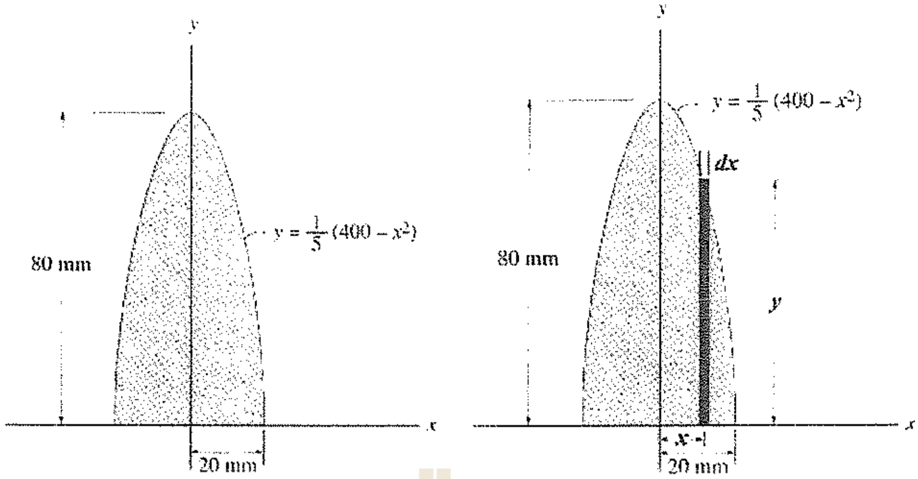
2. ทำการหาค่าของ moments of inertia ของพื้นที่เล็กๆ รอบแกน x โดยใช้ parallel-axis theorem
3. ทำการ integration สมการที่ได้เพื่อหาค่าของ I_x



รูปที่ 10-3

ตัวอย่างที่ 10-1 (10-6)

จงหาค่า radius of gyration รอบแกน y ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-1



รูปที่ Ex 10-1

วิธีทำ

กำหนดให้พื้นที่เล็กๆ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดและตำแหน่ง ดังที่แสดงโดยพื้นที่สีทึบในรูป โดยที่พื้นที่ดังกล่าวมีขนาดเท่ากับ

$$dA = ydx = \frac{1}{3}\left(400 - x^2\right)dx.$$

ดังนั้น พื้นที่ทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ

$$A = \int_A dA = \frac{1}{5}\int_{-20}^{20}\left(400 - x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}\left(400x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]\Big|_{-20}^{20}$$

$$= 2133.33 \quad \text{mm}^2$$

และ moment of inertia ของพื้นที่รอบแกน y จะมีค่าเท่ากับ

$$I_y = \int_A x^2 dA = \frac{1}{5}\int_{-20}^{20} x^2\left(400 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-20}^{20}\left(400x^2 - x^4\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}\left(\frac{400}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\right]_{-20}^{20}$$

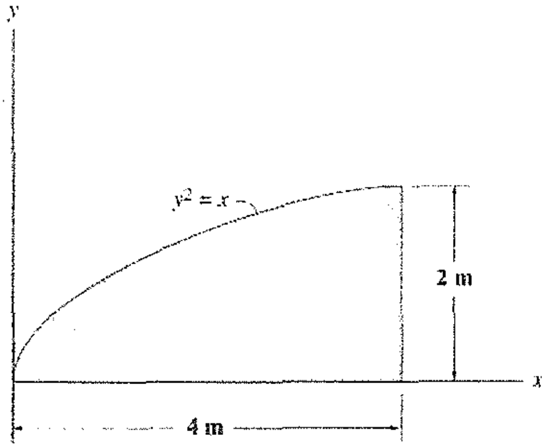
$$= 170.66(10)^3 \ \text{mm}^4$$

ดังนั้น ค่า radius of gyration รอบแกน y ของพื้นที่จะมีค่าเท่ากับ

$$ky = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{170.66(10)^3}{2133.33}} = 8.94 \quad \text{mm}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 10-2 (10-9 10-10)

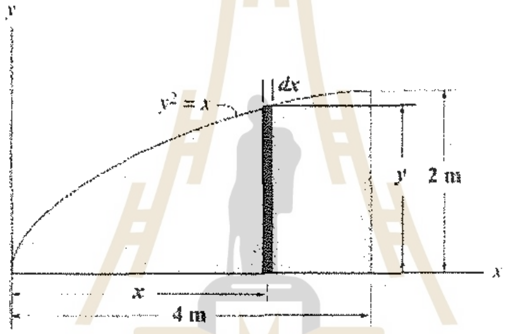
จงหาค่า moment of inertia ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-2 รอบแกน x และแกน y



รูปที่ Ex 10-2

วิธีทำ

กำหนดให้พื้นที่เล็กๆ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดและตำแหน่งขนานไปกับแกน y ดังที่แสดงโดยพื้นที่สีทึบในรูป



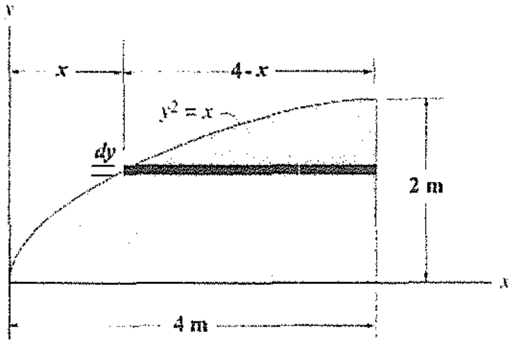
ดังนั้น moment of inertia ของพื้นที่รอบแกน x จะมีค่าเท่ากับ

$$I_x = \int_A \left[\frac{1}{12}(dx)(y)^3 + y(dx)\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int_A y^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4$$

$$= 4.267 \text{ m}^4 = 4.27 \text{ m}^4$$ Ans.



นอกจากนั้นแล้ว เราสามารถหาค่า moment of inertia ของพื้นที่รอบแกน x โดยการกำหนดให้พื้นที่เล็กๆ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดและตำแหน่งขนานไปกับแกน x ซึ่งในกรณีนี้ เราจะได้

$$I_x = \int_0^2 y^2\left(4-y^2\right)dy$$
$$=\left[\frac{4y^3}{3}-\frac{y^5}{5}\right]_0^2$$
$$=4.27 \quad \text{m}^4$$ Ans.

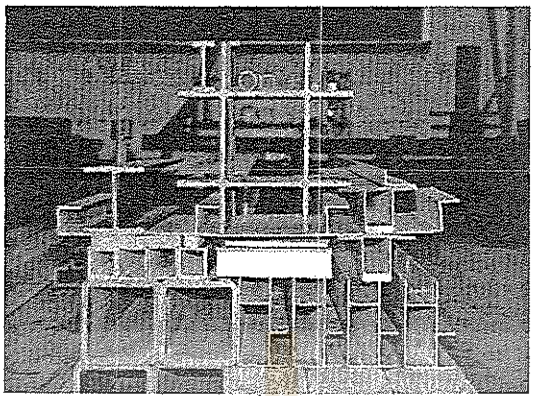
ซึ่งมีค่าเท่ากันกับในกรณีแรก

จากพื้นที่เล็กๆ รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดและตำแหน่งขนานไปกับแกน y ดังที่แสดงโดยพื้นที่สีทึบในรูป

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^4 x^2 y dx = \int_0^4 x^{\frac{5}{2}} dx = \left(\frac{2}{7}\right)x^{\frac{7}{2}}\Bigg|_0^4$$
$$=36.5714 \text{ m}^4 = 36.6 \text{ m}^4$$ Ans.

10.5 moment of inertia ของพื้นที่ประกอบ (Moments of Inertia for Composite Area)

รูปที่ 10-4 แสดงหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้างรูปแบบต่างๆ ซึ่งจะมีหน้าตัดอยู่ในรูปที่ได้จากการนำหน้าตัดอย่างง่าย เช่น สี่เหลี่ยมผืนผ้าและทรงกลม เป็นต้น มาประกอบกันเพื่อให้ได้มาซึ่งหน้าตัดของโครงสร้างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดและเหมาะแก่การนำไปใช้งาน



รูปที่ 10-4

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

Composite Parts

1. แบ่งพื้นที่ที่เราต้องการหาค่าของ moment of inertia ออกเป็นชิ้นส่วนต่างๆ แล้วระบุระยะทางตั้งฉากจากจุด centroid ของแต่ละชิ้นส่วนถึงแกนอ้างอิง

Parallel-Axis Theorem

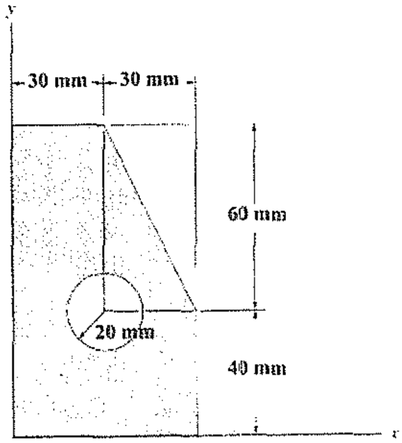
2. หาค่าของ moment of inertia ของชิ้นส่วนต่างๆ รอบแกนที่ผ่านจุด centroid ของชิ้นส่วนเหล่านั้นและขนานกับแกนอ้างอิง
3. ถ้าแกนที่ผ่านจุด centroid ของชิ้นส่วนเหล่านั้นไม่ได้เป็นแกนๆ เดียวกับแกนอ้างอิงแล้ว เราจะใช้ parallel-axis theorem หาค่าของ moment of inertia ของชิ้นส่วนดังกล่าวรอบแกนอ้างอิง

Summation

4. หาค่า moment of inertia ของพื้นที่ประกอบโดยทำการรวมค่าของ moment of inertia ของชิ้นส่วนต่างๆ
5. ถ้าชิ้นส่วนต่างๆ ของพื้นที่ประกอบมีช่องว่างอยู่ในตัวมันเองแล้ว เราจะต้องทำการลบค่าของ moment of inertia ของช่องว่างออกจากค่า moment of inertia ของชิ้นส่วนต่างๆ ที่หาได้

ตัวอย่างที่ 10-3 (10-34)

จงหาค่า moment of inertia ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-3 รอบแกน x และแกน y



รูปที่ Ex 10-3

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 10-3 เราจะเห็นได้ว่า พื้นที่ประกอบ (composite area) เกิดจากการนำพื้นที่ย่อย 3 พื้นที่มาประกอบเข้าด้วยกัน โดยพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $60\,\text{mm} \times 100\,\text{mm}$ ลบด้วยพื้นที่สามเหลี่ยมและพื้นที่ทรงกลม ดังนั้น โดยใช้ parallel-axis theorem เราจะได้ว่า

$$I_x = \left[\frac{1}{12}(60)(100)^3 + 60(100)(50)^2\right] - \left[\frac{1}{36}(30)(60)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(30)(60)(80)^2\right]$$

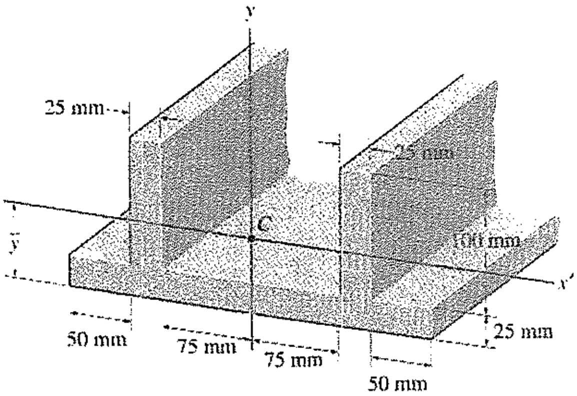
$$-\left[\frac{1}{4}\pi(20)^4 + \pi(20)^2(40)^2\right] = 12.1(10)^6 \ \text{mm}^4 \qquad \text{Ans.}$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(100)(60)^3 + 60(100)(30)^2\right] - \left[\frac{1}{36}(60)(30)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(60)(30)(50)^2\right]$$

$$-\left[\frac{1}{4}\pi(20)^4 + \pi(20)^2(30)^2\right] = 3.68\,(10)^6 \ \text{m}^4 \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 10-4 (10-42)

จงหาค่า moment of inertia ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-4 รอบแกน y



รูปที่ Ex 10-4

วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 10-4 เราจะเห็นได้ว่า พื้นที่ประกอบ (composite area) เกิดจากการนำพื้นที่สี่เหลี่ยมย่อย 3 พื้นที่มาประกอบเข้าด้วยกัน

ระยะ centroid $\bar{y}$ ของพื้นที่ประกอบมีค่าเท่ากับ

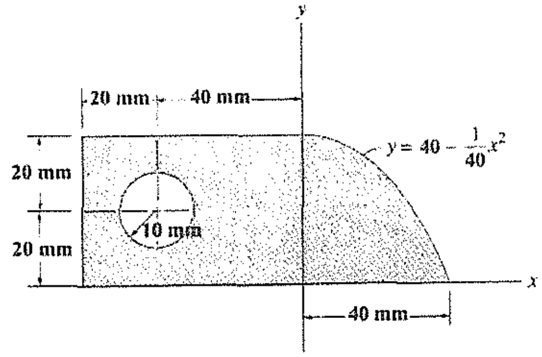
$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}A}{\sum A} = \frac{12.5(300)25 + 75(2)25(100)}{300(25) + 2(25)100} = 37.5\ \text{mm}$$

ดังนั้น โดยใช้ parallel-axis theorem เราจะได้ว่า

$$I_y = \frac{1}{12}(25)(300)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(100)(25)^3 + 25(100)(87.5)^2\right]$$
$$= 94.8\left(10^6\right)\ \text{mm}^4$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 10-5 (10-51 10-52)

จงหาค่า moment of inertia ของพื้นที่ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-5 รอบแกน x และแกน y



รูปที่ Ex 10-5

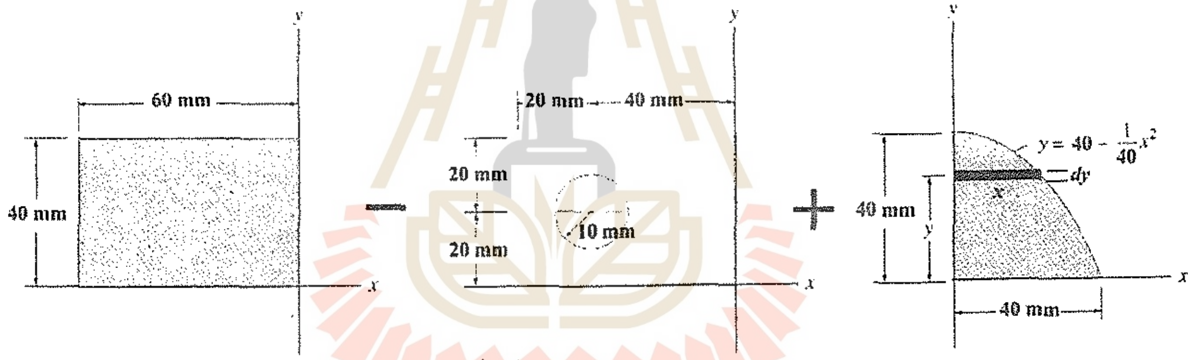
วิธีทำ

จากรูปที่ Ex 10-5 เราจะเห็นได้ว่า พื้นที่ประกอบ (composite area) เกิดจากการนำพื้นที่ย่อย 3 พื้นที่มาประกอบเข้าด้วยกัน โดยพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $40\ \mathrm{mm} \times 60\ \mathrm{mm}$ บวกกับพื้นที่โค้งและลบด้วยพื้นที่ทรงกลม ดังนั้น โดยใช้ parallel-axis theorem และการแบ่งพื้นที่ ดังที่แสดงในรูป เราจะได้ว่า

$$I_x = \frac{1}{12}(60)(40)^3 + (60)(40)(20)^2 - \left[\frac{1}{4}\pi(10)^4 + \pi(10)^2(20)^2\right] + \int_0^{40} y^2\sqrt{1600-40y}\,dy$$

$$= 1.54(10)^6 \quad \mathrm{mm}^4$$

Ans.



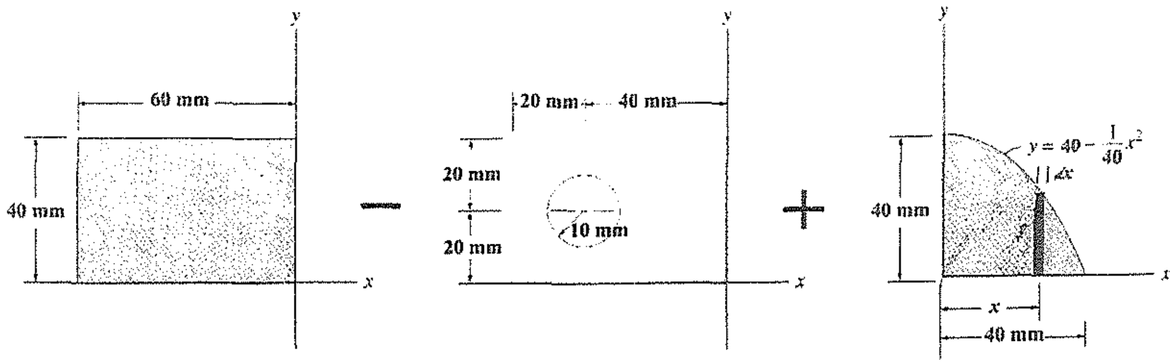
และโดยใช้ parallel-axis theorem และการแบ่งพื้นที่ ดังที่แสดงในรูป เราจะได้ว่า

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(40)(60)^3 + (40)(60)(30)^2\right] - \left[\frac{\pi}{4}(10)^4 + \pi(10)^2(40)^2\right] + \int_0^{40} x^2 y\,dx$$

$$= 2.3695(10)^6 + \int_0^{40} x^2\left(40 - \frac{1}{40}x^2\right)dx$$

$$= 2.71(10)^6 \quad \mathrm{mm}^4$$

Ans.



บทที่ 11

Virtual Work

จุดประสงค์

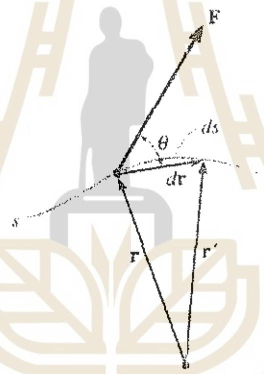
1. เพื่อที่จะได้ทราบและเข้าใจถึงหลักการงานสมมติ (principle of virtual work) และสามารถนำหลักการดังกล่าวมาหาสภาวะสมดุลของชิ้นส่วนโครงสร้างที่เชื่อมต่อกันโดยหมุด (pin-connected member) ได้
2. เพื่อให้เข้าใจถึงพลังงานศักย์ (potential energy) ที่สะสมอยู่ในวัตถุแกร่งและสามารถใช้วิธีพลังงานศักย์ (potential-energy method) ในการตรวจสอบสมดุลและเสถียรภาพของระบบวัตถุแกร่งได้

11.1 นิยามของงาน (Work) และงานสมมติ (Virtual work)

งานเนื่องจากแรง (Work of a Force)

ในวิชากลศาสตร์ แรง $\bar{F}$ จะก่อให้เกิดงานเมื่อแรงดังกล่าวมีการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางของแรง พิจารณาแรง $\bar{F}$ ซึ่งจะถูกระบุได้โดยใช้ vector บอกตำแหน่ง $\bar{r}$ บนแนวการเปลี่ยนตำแหน่ง s ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1 ถ้าแรงเกิดการเคลื่อนที่ไปตามแนวการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวไปยังตำแหน่งใหม่ ซึ่งจะถูกระบุได้โดยใช้ vector บอกตำแหน่ง $\bar{r}' = \bar{r} + d\bar{r}$ แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ $d\bar{r}$ ดังนั้น งาน dU ซึ่งเป็นปริมาณ scalar จะถูกนิยามได้โดยใช้ dot product ในรูป

$$dU = \bar{F}.d\bar{r}$$



รูปที่ 11-1

ถ้า $d\bar{r}$ มีค่าน้อยมากๆ แล้ว ขนาดของ $d\bar{r}$ จะมีค่าโดยประมาณเท่ากับระยะ ds และถ้ากำหนดให้มุมระหว่าง vector $d\bar{r}$ และ $\bar{F}$ มีค่าเท่ากับ θ แล้ว เราจะได้ว่า

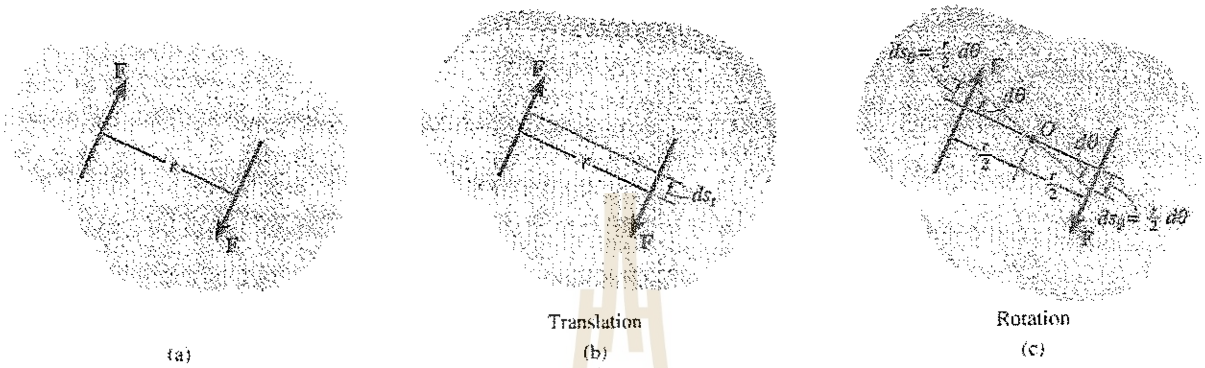
$$dU = F\,ds\cos\theta$$

ซึ่งเราจะแปลความหมายของงานในสมการรูปนี้ได้สองแบบคือ 1.) เป็นผลคูณของขนาดของแรง $\bar{F}$ และองค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแรง $ds\cos\theta$ 2.) เป็นผลคูณของขนาดของการเปลี่ยนตำแหน่ง ds และองค์ประกอบของแรง $F\cos\theta$ ในระบบของหน่วยวัดแบบ SI งานจะมีหน่วยวัดเป็น Joule (J) ซึ่งเทียบได้กับงานที่เกิดจากแรงขนาด 1 N เคลื่อนที่เป็นระยะ 1 m ในทิศทางของแรง

เราควรจะสังเกตด้วยว่า ถ้า $0^o \le \theta < 90^o$ แล้ว องค์ประกอบของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งจะมี sense เดียวกันและงานจะมีค่าเป็นบวก แต่ถ้า $90^o < \theta \le 180^o$ แล้ว องค์ประกอบของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งจะมี sense ที่ตรงกันข้ามและงานจะมีค่าเป็นลบ และถ้า $\theta = 90^o$ (vector ของแรงตั้งฉากกับ vector ของการเปลี่ยนตำแหน่ง) แล้ว งาน dU จะมีค่าเท่ากับศูนย์

งานเนื่องจากแรงคู่ควบ (Work of a Couple)

แรงคู่ควบ (couple) จะก่อให้เกิดงาน เมื่อแรงคู่ควบก่อให้เกิดการหมุนรอบแกน ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของแรงคู่ควบดังกล่าว พิจารณาวัตถุ (body) ซึ่งถูกกระทำโดยแรงคู่ควบที่ทำให้เกิดโมเมนต์ขนาด $M = Fr$ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-2a แรงคู่ควบดังกล่าวจะทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุนเกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 11-2b และ 11-2c ตามลำดับ ในกรณีที่วัตถุเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง กำหนดให้องค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแรงเป็น ds_t ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า งานเนื่องจากแรงๆ หนึ่ง ซึ่งมีค่าเป็นบวก ($F\,ds_t$) จะหักล้างกับงานเนื่องจากแรงอีกแรงหนึ่ง ซึ่งมีค่าเป็นลบ ($-F\,ds_t$)



รูปที่ 11-2

ในกรณีที่วัตถุเกิดการหมุน $d\theta$ รอบแกน ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของแรงคู่ควบผ่านจุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 11-2c แล้ว แรงแต่ละแรงจะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง $ds_\theta = \theta\, r/2$ ในทิศทางของแรง ดังนั้น งานเนื่องจากแรงคู่ควบจะอยู่ในรูป

$$dU = F\left(\frac{r}{2}\right)d\theta + F\left(\frac{r}{2}\right)d\theta = Fr\,d\theta$$

$$dU = M\,d\theta$$

งานในกรณีนี้จะมีค่าเป็นบวก เมื่อโมเมนต์ $\vec{M}$ มีทิศทางไปทางเดียวกับมุม $d\vec{\theta}$ และจะมีค่าเป็นลบ เมื่อโมเมนต์ $\vec{M}$ และมุม $d\vec{\theta}$ มีทิศทางตรงกันข้าม โดยโมเมนต์ $\vec{M}$ และมุม $d\vec{\theta}$ จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามกฎมือขวา (right-hand rule) ดังนั้น แนวกระทำของมุม $d\vec{\theta}$ และแนวกระทำของโมเมนต์ $\vec{M}$ จะขนานกัน เมื่อการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุนของวัตถุเกิดขึ้นบนระนาบเดียวกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าวัตถุหมุนอยู่ใน space แล้ว เราจะต้องทราบองค์ประกอบของมุม $d\vec{\theta}$ ในทิศทางของโมเมนต์ $\vec{M}$ เนื่องจากงานเนื่องจากแรงคู่ควบถูกนิยามโดยใช้ dot product, $dU = \vec{M}.d\vec{\theta}$

งานสมมติ (Virtual Work)

นิยามของงานเนื่องจากแรงและแรงคู่ควบได้ถูกพิจารณาบนพื้นฐานของการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งอยู่ในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุนขนาดเล็กมากๆ ds และ $d\theta$ ตามลำดับ แต่ในงานสมมติ (virtual work) นั้น เราจะพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุนที่ไม่ได้เกิดขึ้นจริง (imaginary หรือ virtual) และมีขนาดเล็กมากๆ δs และ $\delta\theta$ ตามลำดับ ดังนั้น งานสมมติเนื่องจากแรงเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) δs จะอยู่ในรูป

$$\delta U = F\cos\theta\,\delta s \qquad (11\text{-}1)$$

ในทำนองเดียวกัน งานสมมติเนื่องจากแรงคู่ควบเกิดการหมุนสมมติ (virtual rotation) $\delta\theta$ ในระนาบของแรงคู่ควบจะอยู่ในรูป

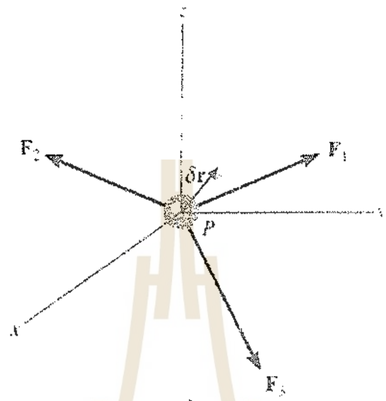
$$\delta U = M\,\delta\theta \qquad (11\text{-}2)$$

11.2 หลักการงานสมมติสำหรับอนุภาค (Particle) และวัตถุแกร่ง (Rigid Body)

อนุภาค

ถ้าอนุภาค ดังที่แสดงในรูปที่ 11-3 เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ $\delta\vec{r}$ แล้ว งานสมมติเนื่องจากระบบของแรงจะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} dU &= \sum \vec{F}.\delta\vec{r} \\ &= (\sum F_x\hat{i} + \sum F_y\hat{j} + \sum F_z\hat{k})\cdot(\delta x\hat{i} + \delta y\hat{j} + \delta z\hat{k}) \\ &= \sum F_x\delta x + \sum F_y\delta y + \sum F_z\delta z \end{aligned}$$



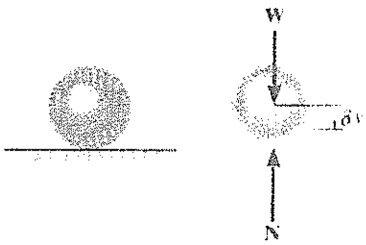
รูปที่ 11-3

ในสภาวะสมดุล $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, และ $\sum F_z = 0$ ดังนั้น งานสมมติเนื่องจากระบบของแรงจะมีค่าเท่ากับศูนย์ หรือ

$$\delta U = 0$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าเราเขียนสมการของงานสมมติสามสมการที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว เราจะได้สมการความสมดุลสามสมการ

พิจารณา free-body diagram ของลูกบอล ซึ่งอยู่ในสภาวะหยุดนิ่งบนพื้น ดังที่แสดงในรูปที่ 11-4 ถ้าเราสมมุติให้ลูกบอลมีการเปลี่ยนตำแหน่งดิ่งลง δy แล้ว น้ำหนักของลูกบอลจะทำให้เกิดงานสมมติที่มีค่าเป็นบวกเท่ากับ $W\delta y$ และแรงปฏิกริยาที่พื้นกระทำต่อลูกบอลจะทำให้เกิดงานสมมติที่มีค่าเป็นบวกเท่ากับ $-N\delta y$ จากเงื่อนไขที่ว่า ในสภาวะที่สมดุล งานสมมติจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น $\delta U = W\delta y - N\delta y = (W - N)\delta y = 0$ และเนื่องจาก $\delta y \neq 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $N = W$



รูปที่ 11-4

วัตถุแกร่ง

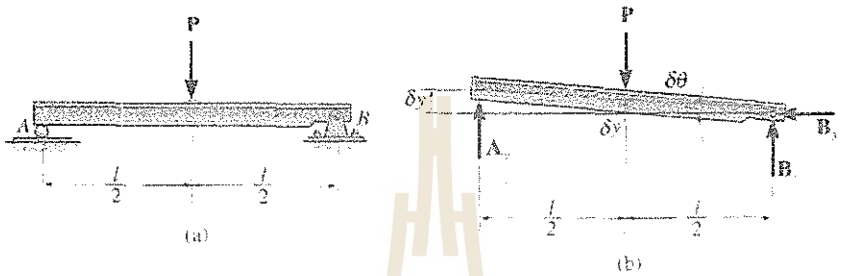
ในทำนองที่คล้ายกับในกรณีของอนุภาค เราสามารถเขียนสมการของงานสมมติ ($\delta U = 0$) ของวัตถุแกร่งที่ถูกกระทำโดยแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกัน (coplanar forces) ได้สามสมการ และถ้าสมการดังกล่าวสอดคล้องกับการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติในแนวแกน x และแกน y และการหมุนสมมติในแนวแกน z ที่ผ่านจุด O บนระนาบ $x - y$ แล้ว เราจะสามารถเขียนสมการสมดุลได้สามสมการคือ $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, และ $\sum M_O = 0$ โดยในการเขียนสมการ

ทั้งสามดังกล่าว เราไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณาถึงงานเนื่องจากแรงภายในที่เกิดขึ้นในวัตถุแกร่ง เนื่องจากวัตถุแกร่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใต้แรงกระทำ นอกจากนั้นแล้ว เมื่อวัตถุเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติแล้ว งานเนื่องจากแรงภายใน ซึ่งเป็นแรงกริยาและแรงปฏิกิริยา แต่ละคู่จะหักล้างกันหมด

พิจารณาคานที่ถูกรองรับอย่างง่าย ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5a เมื่อคานถูกสมมุติให้มีการหมุน $\delta\theta$ รอบจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5b แล้ว แรงที่ทำให้เกิดงานคือ $\vec{P}$ และ $\vec{A}_y$ เนื่องจากระยะ $\delta y = l\delta\theta$ และ $\delta y' = (l/2)\delta\theta$ สมการของงานสมมติในกรณีนี้จะอยู่ในรูป

$$\delta U = A_y(l\delta\theta) - P(l/2)\delta\theta = (A_y - P/2)l\delta\theta = 0$$

และเนื่องจาก $\delta y \neq 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $A_y = P/2$ ขอให้สังเกตด้วยว่า ถ้าเราตัด $\delta\theta$ ออกจากสมการข้างต้นแล้ว เราจะได้สมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด B

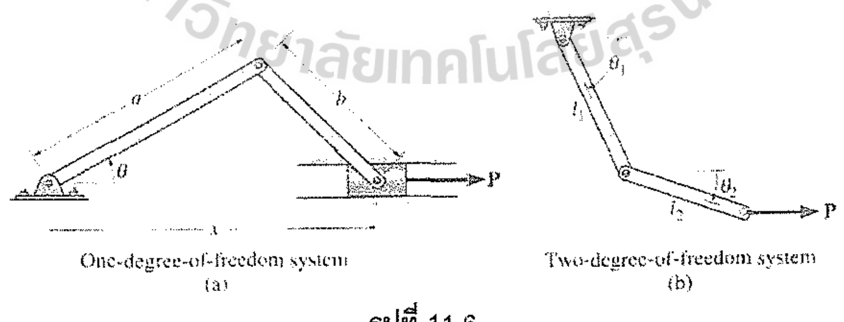


รูปที่ 11-5

เช่นเดียวกับในกรณีของอนุภาค เราจะเห็นได้ว่า การใช้หลักการงานสมมติไม่ได้ช่วยให้เราแก้ปัญหาความสมดุลของวัตถุแกร่งได้ดีขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากว่า ในการใช้สมการงานสมมติแต่ละสมการ เทอมของการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติจะตัดกันเองในที่สุด ซึ่งทำให้ได้สมการที่เหมือนกับการใช้สมการความสมดุลโดยตรง

11.3 หลักการงานสมมติสำหรับระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกัน
(Principle of Virtual Work for a System of Connected Rigid Bodies)

วิธีการงานสมมติเป็นวิธีการที่เหมาะสมมากในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับสมดุลของระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกัน ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 11-6 อย่างไรก็ตาม ก่อนที่เราจะใช้หลักการงานสมมติ (principle of virtual work) ในการแก้ปัญหาดังกล่าว เราจะต้องกำหนด degree of freedom ของระบบ จากนั้น ทำการกำหนดพิกัด (coordinate) เพื่อที่จะได้ทราบตำแหน่งและรูปร่างของระบบ



รูปที่ 11-6

Degrees of Freedom

เราจะทราบรูปร่างของระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันได้ ถ้าเราทราบตำแหน่งของจุดที่สำคัญบางจุดของระบบ ตำแหน่งของจุดดังกล่าวมักจะถูกระบุโดยใช้พิกัดอิสระ q ซึ่งวัดมาจากจุดอ้างอิงที่เรากำหนด และสำหรับทุกๆ พิกัด q ระบบจะมี degree of freedom สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งไปตามแนวแกนของพิกัด โดย degree of freedom ดังกล่า

วจะต้องสอดคล้องกับการยึดรั้งของจุดรองรับของระบบ ดังนั้น ระบบที่มีจำนวน degree of freedom เท่ากับ n จะมีจำนวนพิกัดอิสระทั้งหมด q_n ตัว เพื่อใช้ระบุตำแหน่งของชิ้นส่วนทั้งหมดของระบบ

ระบบ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6a เป็นระบบที่มี degree of freedom เท่ากับ 1 โดยที่มีพิกัดอิสระ $q = \theta$ เป็นพิกัดที่ระบุตำแหน่งของชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกัน (link) และบล็อก อย่างไรก็ตาม ในกรณีนี้ เราอาจจะใช้พิกัด x เป็นพิกัดอิสระของระบบก็ได้ แต่เนื่องจากบล็อกถูกยึดรั้งให้เคลื่อนที่อยู่ในช่อง slot เท่านั้น ดังนั้น พิกัด x จะมีความสัมพันธ์กับพิกัด θ โดยใช้กฎของ cosine เราจะได้ความสัมพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูป $b^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\theta$

ระบบ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6b เป็นระบบที่มี degree of freedom เท่ากับ 2 โดยที่เราจะต้องทราบพิกัดอิสระ θ_1 และ θ_2 เพื่อที่จะระบุตำแหน่งของชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกัน (link) แต่ละชิ้นส่วน เนื่องจากการหมุนของ link ทั้งสองเป็นอิสระต่อกัน

หลักการงานสมมติ (Principle of Virtual Work)

หลักการงานสมมติของระบบวัตถุแกร่งที่ถูกเชื่อมต่อโดยไม่มีแรงเสียดทานจะกล่าวได้ดังนี้ "ระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันจะอยู่ในสมดุล เมื่องานสมมติเนื่องจากแรงและแรงคู่ควบภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบมีค่าเท่ากับศูนย์" หรือ

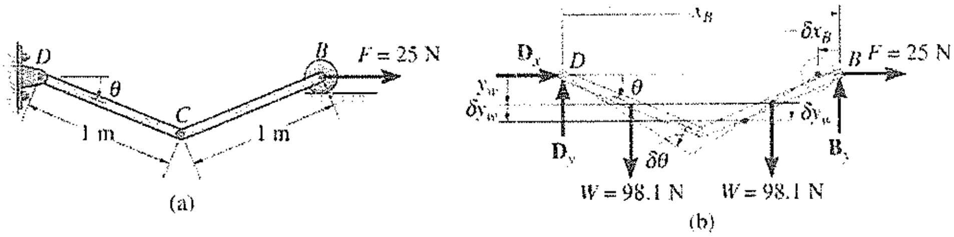
$$\delta U = 0 \tag{11-3}$$

เมื่อ δU เป็นงานสมมติที่เกิดจากแรงและแรงคู่ควบภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบและการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติใดๆ

ตามที่ได้กล่าวไปแล้ว ถ้าระบบมี degree of freedom เท่ากับ n แล้ว เราจะต้องมีจำนวนพิกัดอิสระทั้งหมด q_n ตัว เพื่อใช้ระบุตำแหน่งของชิ้นส่วนทั้งหมดของระบบ ดังนั้น สำหรับระบบดังกล่าว เราจะสามารถเขียนสมการงานสมมติที่เป็นอิสระต่อกันได้เท่ากับ n สมการ โดยที่แต่ละสมการจะเขียนได้จากการกำหนดให้การเปลี่ยนตำแหน่งสมมติค่าหนึ่งเกิดขึ้น ขณะที่การเปลี่ยนตำแหน่งสมมติที่เหลืออีก $n-1$ ค่ามีค่าเท่ากับศูนย์

ตัวอย่างที่ 11-1

กำหนดให้แต่ละชิ้นส่วนของระบบ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-1a มีมวล $10\,\text{kg}$ จงหาค่าของมุม θ ที่ระบบอยู่ในสภาวะสมดุล



รูปที่ Ex 11-1

จากโจทย์ ระบบมี degree of freedom เท่ากับ 1 เนื่องจากตำแหน่งของชิ้นส่วนของระบบทั้งสองชิ้นจะหามาได้โดยใช้ตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว $q = \theta$ จากแผนภาพ free-body diagram ของระบบ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-1b เมื่อ degree of freedom θ มีการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) $\delta\theta$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา (เป็นบวก) แล้ว จะมีเพียงแค่แรง $\bar{F}$ และน้ำหนัก $\bar{W}$ ของชิ้นส่วนของระบบเท่านั้น แรงปฏิกริยา $\bar{D}_x$, $\bar{D}_y$ และ $\bar{B}_y$ จะไม่ทำให้เกิดงานเพราะการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ $\delta\theta$ ไม่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของแรงดังกล่าว

กำหนดให้จุด D เป็นจุดเริ่มต้นของพิกัด (x, y) เราจะหาพิกัดของแรง $\bar{F}$ และน้ำหนัก $\bar{W}$ ที่ขนานไปกับแนวกระทำของแรงได้ดังนี้

$$x_B = 2(1\cos\theta)\,\text{m} \qquad \delta x_B = -2\sin\theta\,\delta\theta\,\text{m}$$

$$y_w = \frac{1}{2}(1\sin\theta)\,\text{m} \qquad \delta y_w = 0.5\cos\theta\,\delta\theta\,\text{m}$$

จากสมการ เราจะเห็นได้ว่า เมื่อมุม θ (และ $\delta\theta$) มีค่าเพิ่มขึ้นแล้ว ระยะ x_B มีค่าลดลงและระยะ y_w มีค่าเพิ่มขึ้น

ถ้าการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ δx_B และ δy_w มีค่าเป็นบวกทั้งคู่แล้ว งานเนื่องจากแรง $\bar{F}$ และน้ำหนัก $\bar{W}$ จะมีค่าเป็นบวกด้วย เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติมีทิศทางไปทางเดียวกันกับแรง $\bar{F}$ และน้ำหนัก $\bar{W}$ ดังนั้น งานสมมติ (virtual work) เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ $\delta\theta$ จะเขียนได้ในรูป

$$\delta U = 0; \qquad W\delta y_w + W\delta y_w + F\delta x_B = 0$$

แทนสมการ δx_B และ δy_w ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$98.1(0.5\cos\theta\,\delta\theta) + 98.1(0.5\cos\theta\,\delta\theta) + 25(-2\sin\theta\,\delta\theta) = 0$$

ขอให้สังเกตด้วยว่า แรง $\bar{F}$ ทำให้เกิดงานที่เป็นลบ เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ δx_B มีค่าเป็นลบ (สวนทางกับแรง)

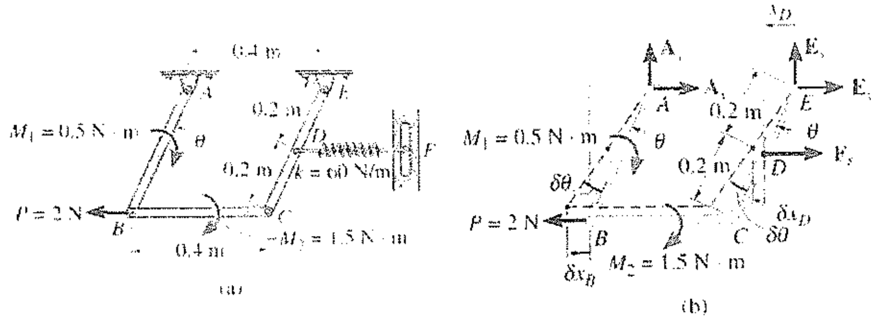
ทำการจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้ค่าของมุม θ ที่ระบบอยู่ในสภาวะสมดุลอยู่ในรูป

$$(98.1\cos\theta - 50\sin\theta)\delta\theta = 0$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{98.1}{50} = 63.0^o \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 11-2

จงหามุม θ ที่ต้องใช้ในการรักษาสมดุลของระบบกล (mechanism) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-2a โดยไม่นำน้ำหนักของชิ้นส่วนของระบบกลมาพิจารณา กำหนดให้สปริงไม่มีการยืดหรือหดตัวเมื่อ $\theta = 0^o$ และวางตัวอยู่ในแนวนอนตลอดเวลาเนื่องจากปลายที่จุด F เป็นล้อเลื่อน (roller)



รูปที่ Ex 11-2

ระบบกล ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-2a มี 1 degree of freedom ดังนั้น ตำแหน่งของชิ้นส่วนของระบบกลสามารถกำหนดได้โดยใช้พิกัดอิสระ θ เพียงตัวเดียว เมื่อ θ มีการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) $\delta\theta$ ในทิศทางที่เป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-2b แล้ว ชิ้นส่วน AB และ EC ของระบบกลจะหมุนไปเป็นมุมที่เท่ากัน เนื่องจากชิ้นส่วนทั้งสองมีความยาวเท่ากัน และชิ้นส่วน BC จะเกิดการเคลื่อนตัวไปทางด้านข้างเท่านั้น ดังนั้น โมเมนต์ $\bar{M}_2$ ที่กระทำต่อชิ้นส่วน BC จะไม่ทำให้เกิดงาน เนื่องจากโมเมนต์จะทำให้เกิดงานได้เมื่อโมเมนต์ทำให้เกิดการหมุนเท่านั้น นอกจากนั้นแล้ว แรงปฏิกิริยาที่จุด A และจุด E ก็ไม่ทำให้เกิดงานด้วย เนื่องจากแรงปฏิกิริยาดังกล่าวไม่มีการเคลื่อนที่ภายใต้แรงกระทำ

กำหนดให้พิกัดบอกตำแหน่งในแนวนอนของจุด B (x_B) และจุด D (x_D) มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุด E และอยู่ในแนวกระทำของแรง $\bar{P}$ และ $\bar{F}_s$ ตามลำดับ จากรูปที่ Ex 11-2 เราจะได้ว่า

$$x_B = 0.4\sin\theta \qquad x_D = 0.2\sin\theta$$

และ

$$\delta x_B = 0.4\cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta x_D = 0.2\cos\theta\,\delta\theta$$

สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติที่เป็นบวก แรง $\bar{F}_s$ จะมีทิศตรงกันข้ามกับพิกัดบอกตำแหน่งในแนวนอน x_D ดังนั้น งานเนื่องจากแรงดังกล่าวจะเป็นลบ และเราจะได้ว่า

$\delta U = 0;$ $$M_1\delta\theta + P\delta x_B + F_s\delta x_D = 0$$

แทนสมการ δx_B และ δx_D ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$0.5\,\delta\theta + 2(0.4\cos\theta\,\delta\theta) - F_s(0.2\cos\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$(0.5 + 0.8\cos\theta\,\delta\theta - 0.2F_s\cos\theta)\,\delta\theta = 0 \qquad (1)$$

สำหรับมุม θ ใดๆ สปริงจะถูกทำให้ยืดเป็นระยะ $x_D = 0.2\sin\theta$ ดังนั้น $\bar{F}_s = 60(0.2\sin\theta) = 12\sin\theta$ ดังนั้น จากสมการ (1) และเนื่องจาก $\delta\theta \neq 0$ เราจะได้ว่า

$$0.5 + 0.8\cos\theta\,\delta\theta - 0.2(12\sin\theta)\cos\theta = 0$$

เนื่องจาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

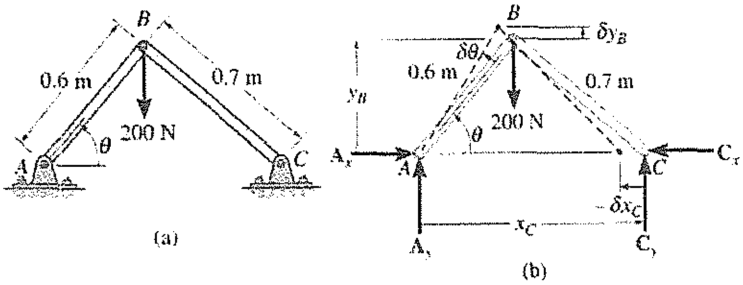
$$1 = 2.4\sin 2\theta - 1.6\cos\theta$$

โดยการลองผิดลองถูก (trial and error) เราจะได้

$$\theta = 36.3^o \qquad \text{Ans.}$$

ตัวอย่างที่ 11-3

จงหาขนาดของแรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x ที่เกิดขึ้นที่หมุด (pin) C เพื่อให้ระบบกล ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-3a อยู่ในสภาวะสมดุล เมื่อกำหนดให้ $\theta = 45^\circ$ และน้ำหนักของชิ้นส่วนของระบบกลมีค่าน้อยมาก



รูปที่ Ex 11-3

เราจะหาแรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x ได้โดยการปลดความต้านทานในแนวนอนของหมุด (pin) ที่จุด C ออก และให้ระบบกลเกิดการเคลื่อนที่ได้ในแนวดังกล่าว ดังนั้น ระบบกลนี้จะมี degree of freedom เท่ากับ 1 ซึ่งจะกำหนดได้โดยใช้พิกัดอิสระ θ เพียงตัวเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-3b เมื่อ θ มีการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) $\delta\theta$ ในทิศทางที่เป็นบวกแล้ว จะมีเฉพาะแรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x และแรง 200 N เท่านั้นที่ทำให้เกิดงาน

กำหนดให้จุด A เป็นจุดเริ่มต้นของพิกัดบอกตำแหน่ง x_C และ y_B ของแรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x และแรง 200 N ตามลำดับ จากรูปที่ Ex 11-3b เราจะเห็นได้ว่า x_C จะเขียนได้ในรูปของ θ โดยใช้กฎของ cosine

$$0.7^2 = 0.6^2 + x_C^2 - 2(0.6)x_C\cos\theta \tag{1}$$

$$0 = 0 + 2x_C\delta x_C - 1.2\delta x_C\cos\theta + 1.2x_C\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta x_C = \frac{1.2x_C\sin\theta}{1.2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta \tag{2}$$

และ

$$y_B = 0.6\sin\theta$$

$$\delta y_B = 0.6\cos\theta\,\delta\theta \tag{3}$$

เมื่อ x_C และ y_B เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ δx_C และ δy_B ที่เป็นบวกแล้ว แรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x และแรง 200 N จะทำให้เกิดงานที่เป็นลบ เนื่องจากแรงดังกล่าวกระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ δx_C และ δy_B ตามลำดับ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$\delta U = 0;$ $$-200\delta y_B + C_x\delta x_C = 0$$

ทำการแทนสมการ (2) และสมการ (3) ลงในสมการข้างต้นและทำการจัดเทอมต่างๆ เราจะได้ขนาดของแรงปฏิกริยาในแนวนอน C_x

$$-200(0.6\cos\theta\,\delta\theta) + C_x\frac{1.2x_C\sin\theta}{1.2\cos\theta - 2x_C}\delta\theta = 0$$

$$C_x = \frac{-120\cos\theta(1.2\cos\theta - 2x_C)}{1.2x_C\sin\theta} \tag{4}$$

จากสมการที่ (1) เมื่อ $\theta = 45^\circ$ แล้ว

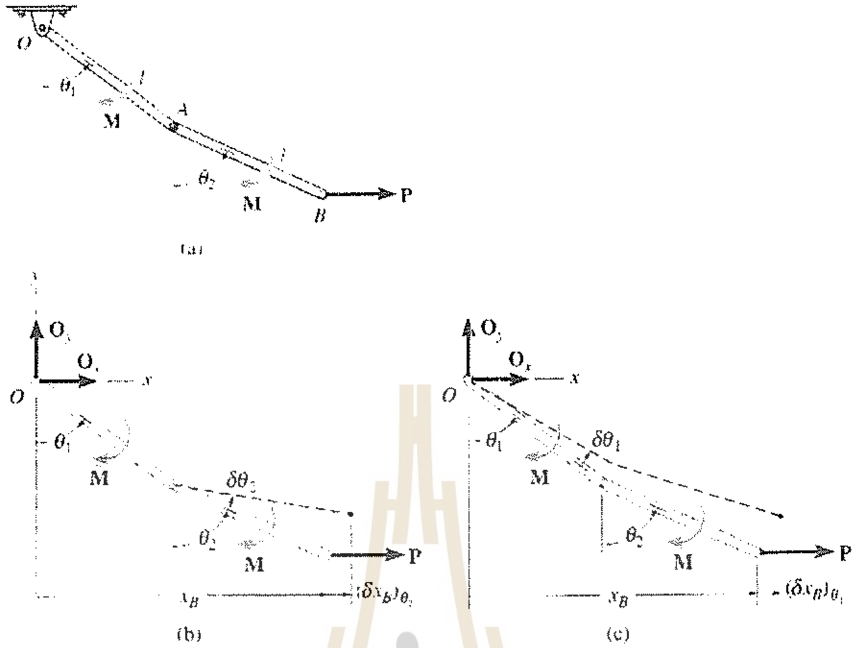
$$x_C = 0.981\text{ m}$$

เมื่อแทนค่ากลับลงในสมการ (4) เราจะได้

$$C_x = 114\text{ N}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 11-4

จงหาสภาวะสมดุลของระบบกล ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4a เมื่อกำหนดให้น้ำหนักของชิ้นส่วนของระบบกลมีค่าน้อยมาก



รูปที่ Ex 11-4

ระบบกล ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4a มี 2 degree of freedom เนื่องจากเราจะต้องใช้พิกัดอิสระ 2 ตัวคือ θ_1 และ θ_2 ในการกำหนดตำแหน่งของชิ้นส่วนของระบบกล ในที่นี้ เราจะใช้พิกัดบอกตำแหน่ง x_B ในการกำหนดตำแหน่งของแรง $\bar{P}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4b และ Ex 11-4c

ถ้ากำหนดให้ θ_1 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงและให้ θ_2 เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ $\delta\theta_2$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4b แล้ว สมการของงานสมมติจะอยู่ในรูป

$$[\delta U = 0]_{\theta_2}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_2} + M\delta\theta_{\theta_2} = 0 \tag{1}$$

ซึ่งแรง P และโมเมนต์ M เป็นขนาดของแรงและโมเมนต์ที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วน AB

เมื่อ θ_2 ไม่มีการเปลี่ยนแปลงและให้ θ_1 เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ $\delta\theta_1$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4c แล้ว สมการของงานสมมติจะอยู่ในรูป

$$[\delta U = 0]_{\theta_1}; \qquad P(\delta x_B)_{\theta_1} + M\delta\theta_{\theta_1} - M\delta\theta_{\theta_1} = 0 \tag{2}$$

พิกัดบอกตำแหน่ง x_B จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดอิสระ θ_1 และ θ_2 ได้ในรูป

$$x_B = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 \tag{3}$$

ในการที่จะหา δx_B ในเทอมของ $\delta\theta_2$ เราจะต้องทำ partial derivative x_B เทียบกับ θ_2 เนื่องจาก x_B เป็นฟังก์ชันของพิกัดอิสระ θ_1 และ θ_2

$$\frac{\partial x_B}{\partial\theta_2} = l\cos\theta_2 \qquad\qquad (\delta x_B)_{\theta_2} = l\cos\theta_2\delta\theta_2$$

เมื่อแทนลงในสมการ (1) เราจะได้

$$(Pl\cos\theta_2 - M)\delta\theta_2 = 0$$

เนื่องจาก $\delta\theta_2 \neq 0$ ดังนั้น

$$\theta_2 = \cos^{-1}\frac{M}{Pl}$$ Ans.

จากสมการ (3) เราจะหา δx_B ในเทอมของ $\delta\theta_1$ ได้ในรูป

$$\frac{\partial x_B}{\partial \theta_1} = l\cos\theta_1 \qquad (\delta x_B)_{\theta_1} = l\cos\theta_1\delta\theta_1$$

เมื่อแทนลงในสมการ (2) เราจะได้

$$(Pl\cos\theta_1 - M)\delta\theta_1 = 0$$

เนื่องจาก $\delta\theta_1 \neq 0$ ดังนั้น

$$\theta_1 = \cos^{-1}\frac{M}{Pl}$$ Ans.

11.4 แรงอนุรักษ์ (Conservative Forces)

งานเนื่องจากแรงที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งเพียงเล็กน้อย (differential displacement) จะถูกเขียนได้ในรูป $dU = F\cos\theta\, ds$ และถ้าแรงมีการเปลี่ยนตำแหน่งไปตามแนว ซึ่งมีความยาว ds แล้ว งานดังกล่าวจะถูกหามาได้จากการทำอินทิเกรทสมการของงานข้างต้นไปตามแนวการเคลื่อนที่ทั้งหมดของแรงในรูป

$$U = \int_s F\cos\theta\, ds$$

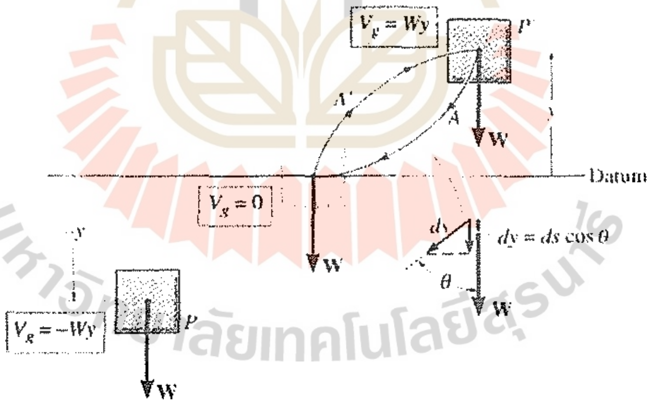
ในการที่จะอินทิเกรทสมการดังกล่าวเราจะต้องทราบความสัมพันธ์ระหว่างแรง F และองค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่ง $ds\cos\theta$ อย่างไรก็ตาม ในบางกรณี งานที่เกิดจากแรงจะเป็นอิสระจากแนวการเคลื่อนที่ของแรง แต่จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของแรงเท่านั้น แรงที่มีลักษณะดังกล่าวจะถูกเรียกว่า แรงอนุรักษ์ (conservative forces)

น้ำหนัก (Weight)

พิจารณาวัตถุที่มีตำแหน่งเริ่มต้นอยู่ที่ P' ดังที่แสดงในรูปที่ 11-7 ถ้าวัตถุถูกเคลื่อนลงตามแนว A ไปยังตำแหน่งใหม่แล้ว สำหรับการเปลี่ยนตำแหน่ง s ไปตามแนวการเคลื่อนที่ดังกล่าว เราจะได้ว่า องค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทางของน้ำหนัก $\vec{W}$ จะมีขนาดเท่ากับ $dy = ds\cos\theta$ เนื่องจากแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งมีทิศเดียวกัน ดังนั้น งานที่เกิดขึ้นมีค่าเป็นบวก โดยที่

$$U = \int_s W\cos\theta\, ds = \int_0^y W\, dy = Wy$$

ในลักษณะที่คล้ายกัน งานที่ทำโดยน้ำหนัก $\vec{W}$ เมื่อวัตถุถูกเคลื่อนไปเป็นระยะ y กลับไปยังตำแหน่ง P' ตามแนว A' จะมีค่าเท่ากับ $U = -Wy$ งานในกรณีนี้มีเครื่องหมายเป็นลบ เนื่องจากแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งมีทิศตรงกันข้าม



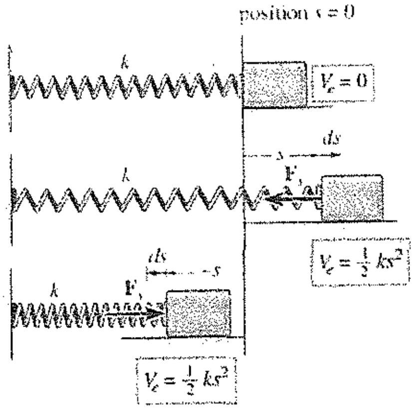
รูปที่ 11-7

โดยสรุปแล้ว เราจะเห็นได้ว่าน้ำหนักของวัตถุเป็นแรงอนุรักษ์ (conservative forces) เพราะงานที่ทำโดยน้ำหนักขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งเท่านั้น และเป็นอิสระจากแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุ

สปริงแบบยืดหยุ่น (Elastic Spring)

แรงที่เกิดจากสปริงแบบยืดหยุ่น ($F_s = ks$) เป็นแรงอนุรักษ์ ถ้าสปริงดังกล่าวถูกยึดติดเข้ากับวัตถุและวัตถุถูกย้ายตำแหน่งไปตามแนวใดๆ จากตำแหน่ง s_1 ไปยังตำแหน่ง s_2 โดยทำให้สปริงเกิดการยืดหรือหดตัวแล้ว งานที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็นลบ เนื่องจากสปริงจะส่งแรง F_s กระทำต่อวัตถุในทิศทางที่ตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ds ดังที่แสดงในรูปที่ 11-8 ดังนั้น ไม่ว่าสปริงจะถูกทำให้เกิดการยืดหรือหดตัว งานที่เกิดขึ้นจะเป็นอิสระจากแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยที่

$$U = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} (-ks)\, ds = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$$



รูปที่ 11-8

แรงเสียดทาน (Friction)

ในทางตรงกันข้ามกับแรงอนุรักษ์ พิจารณาแรงเสียดทานที่กระทำต่อวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่อยู่บนพื้นผิวที่อยู่กับที่ งานที่เกิดจากแรงเสียดทานจะขึ้นอยู่กับแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้าแนวดังกล่าวมีความยาวมาก งานก็จะเกิดมากขึ้น ดังนั้น แรงเสียดทานจึงไม่เป็นแรงอนุรักษ์ และงานที่เกิดขึ้นจะสูญเสียไปในรูปของความร้อน

11.5 พลังงานศักย์ (Potential Energy)

เมื่อแรงอนุรักษ์กระทำต่อวัตถุแล้ว แรงดังกล่าวจะทำให้วัตถุมีความสามารถที่จะทำงานได้ ซึ่งจะถูกวัดอยู่ในรูปของพลังงานศักย์ (potential energy) และจะมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของวัตถุ

พลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง (Gravitational Potential Energy)

ถ้าวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง y เหนือระดับอ้างอิง (datum) ดังที่แสดงในรูปที่ 11-7 แล้ว น้ำหนักของวัตถุจะมีพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง V_g เป็นบวก เพราะว่าน้ำหนัก $\vec{W}$ มีความสามารถที่จะทำให้เกิดงานที่เป็นบวก เมื่อวัตถุถูกเคลื่อนที่กลับมายังระดับอ้างอิง ในทางตรงกันข้าม ถ้าวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง y ต่ำกว่าระดับอ้างอิง (datum) แล้ว น้ำหนักของวัตถุจะมีพลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วง V_g เป็นลบ เนื่องจากน้ำหนักทำให้เกิดงานที่เป็นลบ เมื่อวัตถุถูกเคลื่อนที่กลับมายังระดับอ้างอิง ที่ระดับอ้างอิง $V_g = 0$

ระยะ y จะเป็นบวก เมื่ออยู่เหนือระดับอ้างอิง ดังนั้น พลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของน้ำหนัก $\vec{W}$ จะถูกเขียนได้ในรูป

$$V_g = Wy \qquad (11\text{-}4)$$

พลังงานศักย์เนื่องจากความยืดหยุ่น (Elastic Potential Energy)

พลังงานศักย์เนื่องจากความยืดหยุ่น V_e ซึ่งเกิดจากสปริงที่ยึดติดอยู่กับวัตถุเกิดการยืดตัวหรือหดตัวจากตำแหน่งที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ($s = 0$) ไปยังตำแหน่ง s จะถูกเขียนได้ในรูป

$$V_e = \frac{1}{2}ks^2 \qquad (11\text{-}5)$$

ในกรณีนี้ V_e จะมีเป็นบวกเสมอ เนื่องจากในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของสปริงๆ จะมีความสามารถที่ทำให้เกิดงาน เพื่อที่จะกลับคืนสู่ตำแหน่งเดิมที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเสมอ

Potential Function

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าวัตถุถูกกระทำโดยแรงโน้มถ่วงและแรงเนื่องจากความยืดหยุ่นแล้ว พลังงานศักย์ V ของวัตถุจะเขียนได้ในรูป

$$V = V_g + V_e \qquad (11\text{-}6)$$

ซึ่งจะมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งของวัตถุจากระดับอ้างอิงดังที่แสดงโดยสมการที่ 11-4 และ 11-5

ถ้าระบบวัตถุแกร่งที่ถูกเชื่อมต่อโดยไม่มีแรงเสียดทานมี degree of freedom เท่ากับหนึ่ง โดยที่ตำแหน่งของระบบถูกกำหนดโดยพิกัดอิสระ q แล้ว พลังงานศักย์ของระบบจะเขียนได้ในรูป

$$V = V(q)$$

งานที่เกิดจากแรงอนุรักษ์ที่กระทำให้ระบบเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่ง q_1 ไปยัง q_2 จะหาได้จากสมการ

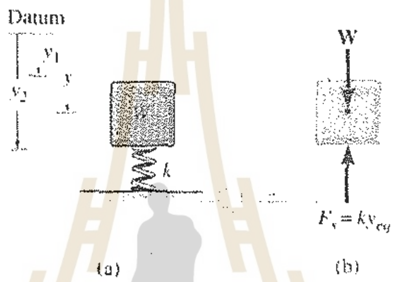
$$U_{1-2} = V(q_1) - V(q_2) \tag{11-7}$$

ยกตัวอย่างเช่น พลังงานศักย์ของระบบ ซึ่งประกอบด้วยบล็อกที่มีน้ำหนัก $\vec{W}$ รองรับโดยสปริง ดังที่แสดงในรูปที่ 11-9a สามารถเขียนได้ในรูปของพิกัดอิสระ y จากตำแหน่งอ้างอิงที่สปริงไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะอยู่ในรูป

$$V = -Wy + \frac{1}{2}ky^2 \tag{11-8}$$

ถ้าบล็อกเคลื่อนที่จากตำแหน่ง y_1 ลงไปยังตำแหน่ง y_2 แล้ว งานเนื่องจากน้ำหนัก $\vec{W}$ และแรง $\vec{F}_s$ จะอยู่ในรูป

$$U_{1-2} = V(y_1) - V(y_2) = -W(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}ky_1^2 - \frac{1}{2}ky_2^2$$



รูปที่ 11-9

11.6 เกณฑ์กำหนดของพลังงานศักย์สำหรับความสมดุล (Potential-energy Criterion for Equilibrium)

ระบบที่มีหนึ่ง degree of freedom

เมื่อการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นในระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันอย่างไร้แรงเสียดทานมีค่าที่น้อยมากๆ เช่น จาก q ถึง $q + dq$ แล้ว สมการที่ 11-7 จะอยู่ในรูป

$$dU = V(q) - V(q + dq)$$

หรือ

$$dU = -dV$$

นอกจากนั้นแล้ว ถ้าระบบเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) δq แล้ว เราจะได้ว่า $\delta U = -\delta V$ สำหรับสภาวะความสมดุล หลักการงานสมมติ (principle of virtual work) กำหนดให้ $\delta U = 0$ ดังนั้น เราจะได้ว่า $\delta V = 0$ และเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการคณิตศาสตร์แล้ว เราจะได้ว่า

$$\frac{dV}{dq} = 0 \tag{11-9}$$

ดังนั้น เมื่อระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันอย่างไร้แรงเสียดทานอยู่ในความสมดุลแล้ว การเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ V จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ยกตัวอย่างเช่น เราจะหาตำแหน่งที่สปริงและบล็อก ดังที่แสดงในรูปที่ 11-9 อยู่ในความสมดุลได้จากการ differentiate สมการที่ 11-8

$$\frac{dV}{dy} = -W + ky = 0$$

ดังนั้น ตำแหน่งของความสมดุล $y = y_{eq}$ จะอยู่ในรูป

$$y_{eq} = \frac{W}{k}$$

ซึ่งเป็นสมการเดียวกันกับสมการที่เราสามารถหาได้โดยใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง $\sum F_y = 0$ ที่กระทำอยู่บน free-body diagram ของบล็อก ดังที่แสดงในรูปที่ 11-9b

ระบบที่มี n degree of freedom

เมื่อระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันอย่างไร้แรงเสียดทานมี degree of freedom เท่ากับ n แล้ว พลังงานศักย์ทั้งหมดของระบบจะเป็นฟังก์ชันกับพิกัดอิสระ n ตัวหรือ $V = V(q_1, q_2, ..., q_n)$ แต่ในการที่จะใช้เกณฑ์กำหนดของพลังงานศักย์สำหรับความสมดุล $\delta V = 0$ ข้างต้น เราจะต้องหาการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ δV โดยใช้ chain rule ที่เรียนไปแล้วในวิชา differential equations ในรูป

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n = 0$$

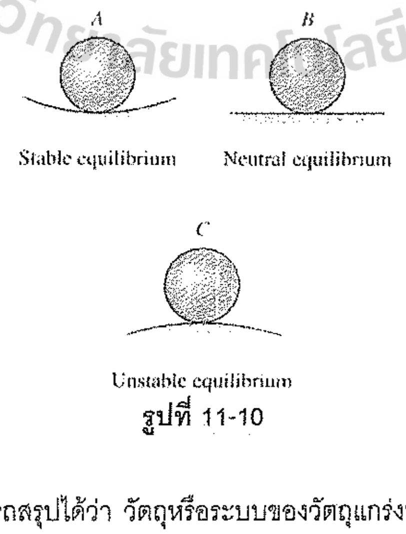
เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งสมมติ (virtual displacement) $q_1, q_2, ..., q_n$ แต่ละตัวเป็นอิสระต่อกัน สมการดังกล่าวจะถูกต้องเมื่อ

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0,\ ...,\ \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$$

ซึ่งจะทำให้เราสามารถเขียนสมการที่เป็นอิสระต่อกัน n สมการ สำหรับระบบที่มี n degree of freedom

11.7 เสถียรภาพของความสมดุล (Stability of Equilibrium)

หลังจากที่เราได้ตำแหน่งและรูปร่างของวัตถุหรือระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันที่อยู่ในสมดุลแล้ว ในบางครั้งเราจะต้องตรวจสอบว่า ตำแหน่งและรูปร่างดังกล่าวมีความสมดุลเป็นแบบไหน ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาลูกบอลที่วางอยู่บนพื้นสามแบบอย่างมีความสมดุล ดังที่แสดงในรูปที่ 11-10 เมื่อลูกบอลอยู่ในตำแหน่ง A แล้ว เราจะเรียกสภาวะสมดุลนี้ว่า สมดุลอย่างมีเสถียรภาพ (stable equilibrium) เนื่องจากว่า ถ้าลูกบอลเกิดการเคลื่อนที่ไปบน slope เล็กน้อยแล้ว ลูกบอลจะกลับมายังตำแหน่ง A เสมอ ซึ่งตำแหน่ง A นี้จะเป็นตำแหน่งที่ลูกบอลมีพลังงานศักย์*ต่ำสุด* เมื่อลูกบอลอยู่ในตำแหน่ง B แล้ว เราจะเรียกสภาวะสมดุลนี้ว่า สมดุลอย่างเป็นกลาง (neutral equilibrium) เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งเล็กน้อยไปทางซ้ายหรือทางขวาของตำแหน่ง B แล้ว ลูกบอลจะยังคงอยู่ที่ตำแหน่งใหม่และยังคงอยู่ในสภาวะสมดุล ซึ่งสภาวะนี้เป็นสภาวะที่ลูกบอลมีพลังงานศักย์*คงที่* เมื่อลูกบอลอยู่ในตำแหน่ง C แล้ว เราจะเรียกสภาวะสมดุลนี้ว่า สมดุลอย่างไม่มีเสถียรภาพ (unstable equilibrium) เนื่องจากว่า ถ้าลูกบอลเกิดการเคลื่อนที่เล็กน้อยแล้ว ลูกบอลจะเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งเริ่มต้น โดยพลังงานศักย์ของลูกบอลจะมีค่าลดลงเรื่อยๆ ซึ่งตำแหน่ง C นี้จะเป็นตำแหน่งที่ลูกบอลมีพลังงานศักย์*สูงสุด*



รูปที่ 11-10

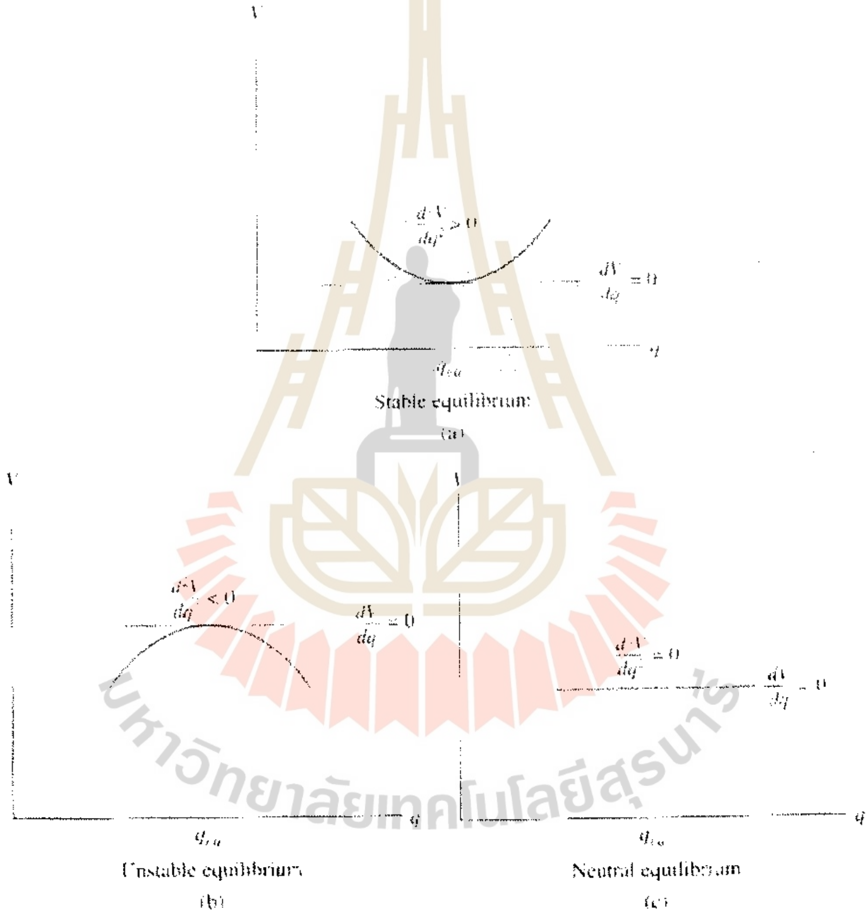
ประเภทของความสมดุล

จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่า วัตถุหรือระบบของวัตถุแกร่งที่เชื่อมต่อกันจะมีความสมดุลแบ่งได้เป็น 3 ประเภทคือ

1. สมดุลอย่างมีเสถียรภาพ (stable equilibrium)
2. สมดุลอย่างเป็นกลาง (neutral equilibrium)
3. สมดุลอย่างไม่มีเสถียรภาพ (unstable equilibrium)

ระบบที่มีหนึ่ง degree of freedom

จาก section ที่ผ่านมา ระบบที่มีหนึ่ง degree of freedom จะอยู่ในความสมดุลได้ก็ต่อเมื่ออนุพันธ์แรก (first derivative) ของพลังงานศักย์จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์หรือ $dV/dq = 0$ ถ้านำพลังงานศักย์มาเขียนกราฟเทียบกับพิกัดอิสระ q ดังที่แสดงในรูปที่ 11-11 แล้ว เราจะได้ว่า จุดที่อนุพันธ์แรก (first derivative) ของพลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ (ตำแหน่งที่มีความสมดุล) จะเป็นตำแหน่งที่เส้นกราฟมี slope เป็นศูนย์ ซึ่งจะเป็นได้ 3 กรณีคือ จุดดังกล่าวเป็นจุดที่มีค่าพลังงานศักย์ต่ำสุด, สูงสุด, หรือเป็นจุดดัดกลับ (inflection point) ดังนั้น ในการตรวจสอบเสถียรภาพ (stability) ของวัตถุ เราจะต้องหาอนุพันธ์ที่สอง (second derivative) ของพลังงานศักย์ และทำการตรวจสอบว่าตำแหน่งที่มีความสมดุลดังกล่าว $q = q_{eq}$ ว่ามีเสถียรภาพหรือไม่



รูปที่ 11-11

ถ้า $V = V(q)$ มีค่าต่ำสุด ดังที่แสดงในรูปที่ 11-11a แล้ว

$$\frac{dV}{dq} = 0,\ \frac{d^2V}{dq^2} > 0 \qquad \text{stable equilibrium} \qquad (11\text{-}10)$$

ถ้า $V = V(q)$ มีค่าสูงสุด ดังที่แสดงในรูปที่ 11-11b แล้ว

$$\frac{dV}{dq} = 0,\ \frac{d^2V}{dq^2} < 0 \qquad \text{unstable equilibrium} \qquad (11\text{-}11)$$

ถ้าอนุพันธ์ที่สองของพลังงานศักย์ที่ได้มีค่าเป็นศูนย์แล้ว เราจะตรวจสอบเสถียรภาพโดยการหาอนุพันธ์ที่มีลำดับถัดไป และสมดุลที่มีเสถียรภาพจะเกิดขึ้นถ้าลำดับของอนุพันธ์ดังกล่าวเป็นเลขคู่และเครื่องหมายของอนุพันธ์ดังกล่าวเป็นบวกเท่านั้น นอกเหนือจากนั้น ระบบจะไม่มีเสถียรภาพ (unstable)

ถ้าระบบอยู่ในสมดุลอย่างเป็นกลาง (neutral equilibrium) ดังที่แสดงในรูปที่ 11-11c แล้ว

$$\frac{dV}{dq} = \frac{d^2V}{dq^2} = \frac{dV^3}{dq^3} = \ldots = 0 \qquad \text{neutral equilibrium} \qquad (11\text{-}12)$$

ระบบที่มีสอง degree of freedom

การตรวจสอบเสถียรภาพของระบบจะมีความซับซ้อนขึ้นอย่างมาก เมื่อระบบมีจำนวน degree of freedom เพิ่มขึ้น ในกรณีที่ระบบมีสอง degree of freedom โดยมีพิกัดอิสระ q_1 และ q_2 แล้ว เราสามารถใช้ calculus of variation พิสูจน์ได้ว่า ระบบจะมีสมดุลที่มีเสถียรภาพที่จุด $q_{1,eq}$ และ $q_{2,eq}$ เมื่อ

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right) > 0$$

และระบบจะมีสมดุลแต่ไม่มีเสถียรภาพที่จุด $q_{1,eq}$ และ $q_{2,eq}$ เมื่อ

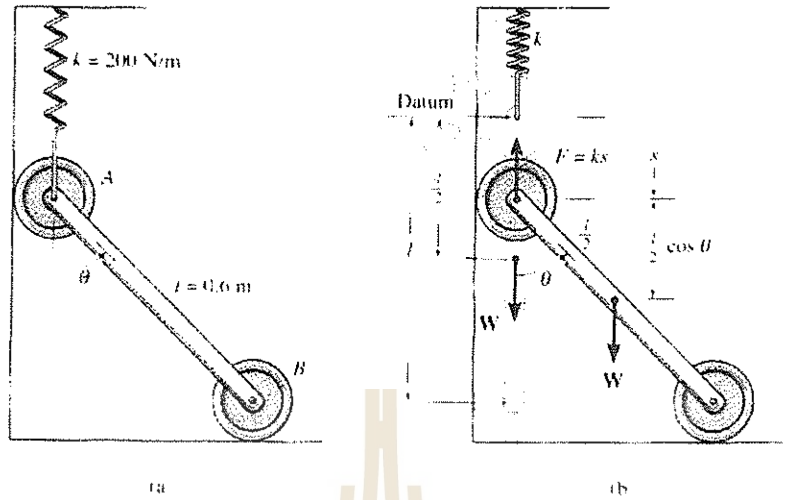
$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right)\right] < 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\right) < 0$$

ตัวอย่างที่ 11-5

แท่งเหล็ก AB ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-5a มีมวล $10\,\text{kg}$ สปริงจะไม่มีการยืดตัวเมื่อ $\theta = 0^o$ จงหาขนาดของมุม θ ที่ระบบอยู่ในสภาวะสมดุล และจงตรวจสอบว่าระบบดังกล่าวอยู่ในสภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพหรือไม่



รูปที่ Ex 11-5

กำหนดให้ตำแหน่งปลายสุดของแท่งเหล็ก เมื่อสปริงยังไม่มีการยืดตัว ($\theta = 0^\circ$) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-5b เป็นระดับอ้างอิง (datum) ดังนั้น เมื่อแท่งเหล็กเกิดการเคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ แล้ว สปริงจะมีพลังงานศักเพิ่มขึ้นเนื่องจากการยืดตัวของสปริงและน้ำหนักจะมีพลังงานศักย์ลดลงเนื่องจากมีการเปลี่ยนตำแหน่งโดยการเคลื่อนที่ลง ดังนั้น

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 - W\left(s + \frac{l}{2}\cos\theta - \frac{l}{2}\right)$$

เนื่องจาก $l = s + l\cos\theta$ หรือ $s = l(1-\cos\theta)$ เราจะได้ว่า

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2 - \frac{Wl}{2}(1-\cos\theta)$$

ที่สภาวะความสมดุล

$$\frac{dV}{d\theta} = kl^2(1-\cos\theta)\sin\theta - \frac{Wl}{2}\sin\theta = 0$$

หรือ

$$l\left[kl(1-\cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\sin\theta = 0$$

สมการข้างต้นจะสอดคล้องก็ต่อเมื่อ

$\sin\theta = 0$ ซึ่งเราจะได้ $\theta = 0^o$ Ans.

และ

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - \frac{W}{2kl}\right) = 53.8^o$$ Ans.

ในตรวจสอบว่าระบบดังกล่าวอยู่ในสภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพหรือไม่นั้น เราจะต้องหาอนุพันธ์ที่สองของ V

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2(1-\cos\theta)\cos\theta + kl^2\sin\theta\sin\theta - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

$$= kl^2(\cos\theta - \cos 2\theta) - \frac{Wl}{2}\cos\theta$$

แทนค่า $\theta = 0^o$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0^o} = -29.4 < 0 \qquad \text{Ans.}$$

ดังนั้น ระบบจะอยู่ในความสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพเมื่อ $\theta = 0^o$

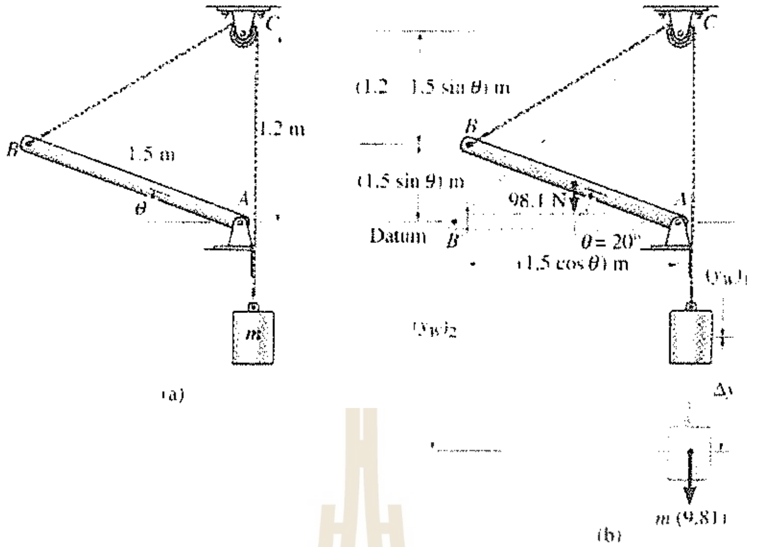
แทนค่า $\theta = 53.8^o$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53.8^o} = 46.9 > 0 \qquad \text{Ans.}$$

ดังนั้น ระบบจะอยู่ในความสมดุลที่มีเสถียรภาพเมื่อ $\theta = 53.8^o$

ตัวอย่างที่ 11-6

จงหามวล m ของบล็อกเพื่อที่จะทำให้ระบบ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-6a อยู่ในสภาวะสมดุล เมื่อแท่งเหล็กมีมวล $10\,\text{kg}$ และ $\theta = 20^o$ จากนั้น จงตรวจสอบว่าระบบดังกล่าวอยู่ในสภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพหรือไม่



รูปที่ Ex 11-6

กำหนดให้แกนนอนที่ผ่านจุด A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-6b เป็นระดับอ้างอิง (datum) เมื่อมุม $\theta = 0^o$ สมมุติให้บล็อกอยู่ที่ระดับ $(y_W)_1$ ใต้ระดับอ้างอิง ดังนั้น ที่มุม θ เราจะได้ว่า

$$V = V_e + V_g = 98.1\left(\frac{1.5\sin\theta}{2}\right) - m(9.81)(\Delta y) \qquad (1)$$

ระยะ $\Delta y = (y_W)_2 - (y_W)_1$ จะเขียนได้ในรูปของพิกัดอิสระ θ โดยการหาผลต่างของความยาว chord $B'C$ และ BC โดยที่

$$B'C = \sqrt{1.5^2 - 1.2^2} = 1.92$$

$$BC = \sqrt{(1.5\cos\theta)^2 + (1.2 - 1.5\sin\theta)^2} = \sqrt{3.69 - 3.60\sin\theta}$$

ดังนั้น

$$\Delta y = B'C - BC = 1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60\sin\theta}$$

เมื่อแทน Δy ลงในสมการ (1) เราจะได้

$$V = V_e + V_g = 98.1\left(\frac{1.5\sin\theta}{2}\right) - m(9.81)(1.92 - \sqrt{3.69 - 3.60\sin\theta}) \qquad (2)$$

ที่สภาวะความสมดุล

$$\frac{dV}{d\theta} = 73.6\cos\theta - \left[\frac{m(9.81)}{2}\right]\left(\frac{3.60\cos\theta}{\sqrt{3.69 - 3.60\sin\theta}}\right) = 0$$

$$\left.\frac{dV}{d\theta}\right|_{\theta=20^o} = 69.14 - 15.08m = 0$$

$$m = \frac{69.14}{15.08} = 6.53\,\text{kg} \qquad \text{Ans.}$$

ในตรวจสอบว่าระบบดังกล่าวอยู่ในสภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพหรือไม่นั้น เราจะต้องหาอนุพันธ์ที่สองของ V

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -73.6\sin\theta - \left[\frac{m(9.81)}{2}\right]\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-(3.60\cos\theta)^2}{(3.69 - 3.60\sin\theta)^{3/2}} - \left[\frac{m(9.81)}{2}\right]\left(\frac{-3.60\sin\theta}{\sqrt{3.69 - 3.60\sin\theta}}\right)$$

ที่สภาวะความสมดุล $\theta = 20^o$ และ $m = 6.53\,\mathrm{kg}$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -47.6 < 0 \qquad \text{Ans.}$$

ดังนั้น ระบบจะอยู่ในความสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพ

หนังสืออ้างอิง

1. Hibberler, R.C., " Engineering Mechanics: Statics," 8th Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1998
2. Beer, F.P., and Johnston, E.R., Jr., " Vector Mechanics for Engineers: Statics, " 3rd SI metric Ed., McGraw-Hill, New York, NY, 1998
3. "ศัพท์วิทยาการวิศวกรรมโยธา" คณะกรรมการวิชาการวิศวกรรมโยธา, วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย, 2540