การศึกษาเชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก ภายใต้สภาวะการไหลของอากาศร้อน

นายชัยฤกษ์ เชื้อประสาท

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ปีการศึกษา 2559

A NUMERICAL STUDY OF HEAT AND MOISTURE TRANSFERS IN A RICE PADDY GRAIN UNDER HEATED AIR FLOWS

Chairoek Chueaprasat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Doctoral of Philosophy in Mechanical Engineering

Suranaree University of Technology

Academic Year 2016

การศึกษาเชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก ภายใต้สภาวะการไหลของอากาศร้อน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาดุษฎีบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

(ผศ. ดร.กีรติ สุลักษณ์)
ประธานกรรมการ

(รศ. ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

(รศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)
กรรมการ

(ผศ. ดร.อาทิตย์ คูณศรีสุข)
กรรมการ

(ผศ. ดร.เทวรัตน์ ตรีอำนรรค)
กรรมการ

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการและพัฒนาความเป็นสากล

(รศ. ดร.พรศิริ จงกล)
คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

ชัยฤกษ์ เชื้อประสาท : การศึกษาเชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกภายใต้สภาวะการไหลของอากาศร้อน (A NUMERICAL STUDY OF HEAT AND MOISTURE TRANSFERS IN A RICE PADDY GRAIN UNDER HEATED AIR FLOWS) อาจารย์ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์, 202 หน้า.

สมการที่ใช้อธิบายการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลือกที่เกิดขึ้นพร้อมกันในระหว่างกระบวนการอบแห้งได้รับการคำนวณทางกรรมวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamic, CFD) ด้วยวิธีปริมาตรจำกัด เมล็ดข้าวถูกจำลองเป็นรูปทรงรีที่แบ่งออกเป็นสามชั้นอย่างต่อเนื่องกัน ได้แก่ เปลือก รำ และเนื้อข้าว กระบวนการนำความร้อนแบบไม่คงตัวและการแพร่ของความชื้นเกิดขึ้นภายในเมล็ด ส่วนการพาความร้อนและการถ่ายโอนมวลเกิดขึ้นระหว่างผิวของเมล็ดกับอากาศแห้ง สภาวะเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของเมล็ดกระทำโดยให้ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นและการกระจายตัวของความชื้นภายในเมล็ดข้าวแบบเอกรูป (Uniform) รวมถึงอุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศร้อน ในงานวิจัยนี้ได้ใช้ผลการทดลองการอบแห้งแบบชั้นบาง (Thin layer drying) ในการเปรียบเทียบผลการคำนวณทาง CFD ในภาพรวมผลการเปรียบเทียบอยู่ในเกณฑ์น่าพอใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่งพบว่าค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้นที่แกนสั้นของรูปวงรีภายในไม่กี่นาที ส่วนค่าเกรเดียนท์ความชื้นสูงสุดซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญกว่าเกิดขึ้นภายหลังที่เวลาประมาณ 45 นาที จึงสรุปได้ว่าการคำนวณแบบ CFD หากใช้อย่างถูกต้องสามารถใช้เป็นปัจจัยเสริมในการทดลองการอบแห้งในเมล็ดข้าวได้

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนักศึกษา ____________

ปีการศึกษา 2559 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ____________

CHAIROEK CHUEAPRASAT : A NUMERICAL STUDY OF HEAT AND MOISTURE TRANSFERS IN A RICE PADDY GRAIN UNDER HEATED AIR FLOWS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. TAWIT CHITSOMBOON, Ph.D., 202 PP.

CFD IN PADDY DRYING/PADDY DRYING/GRAIN DRYING

Governing equations describing the simultaneous heat and mass transfers for a rice grain during a drying process were solved by using a Computational Fluid Dynamic (CFD) code based upon the finite volume method. The rice grain was modeled as a continuous ellipsoid divided into three layers: hull, bran and endosperm. Unsteady heat conduction and moisture diffusion took place within the kernel and convective heat and mass transfer took place between the kernel surface and the drying air medium. The initial and boundary conditions were given by uniform initial temperature and moisture distributions inside the rice kernel, temperature and relative humidity of the heated air were also specified in the like manner. In this research, experimental results from thin layer drying were used to compare with those of the CFD. In general, the comparisons were satisfactory especially the occurrence of the maximum temperature gradient along the short axis of the ellipsoid within a few seconds. The maximum moisture gradient, which is more important occurred at a much later time in about 45 min. It could thus be concluded that CFD, if used properly, can be used to compliment experiments in paddy drying research.

School of Mechanical Engineering　　　　Student's Signature ______________

Academic year 2016　　　　Advisor's Signature ______________

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างดียิ่ง ทั้งด้านวิชาการและด้านการดำเนินงานวิจัย จากบุคคลและกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ได้แก่

รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์ อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้โอกาสทางการศึกษา ให้คำแนะนำปรึกษา ช่วยแก้ปัญหาและให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด รวมทั้งช่วยผลักดันจนวิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์

โครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษกของสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ผู้สนับสนุนทุนการศึกษาและวิจัย

ขอขอบคุณ คณาจารย์ และบุคลากร ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีทุกท่าน ที่มีส่วนสนับสนุนทั้งทางด้านการศึกษาและการทำงาน พี่น้องบัณฑิตศึกษาทุกท่านที่คอยช่วยเหลือให้ทั้งกำลังกายและกำลังใจ

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ผู้วิจัยขอมอบให้กับบิดาผู้ล่วงลับและมารดาซึ่งเป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ผู้วิจัยตลอดมา

ชัยฤกษ์ เชื้อประสาท

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

α	=	ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่เชิงความร้อน, m^2/s
δ	=	ความสูงชั้นชิดผิว, m
ε	=	สัดส่วนการเคลื่อนตัวของความชื้น
Φ	=	ปริมาณความชื้น, %
λ	=	ค่าการนำความร้อน, W/m-ºC
μ	=	ความหนืดไดนามิก, kg/m-s
ν	=	ความหนืดไคนีมาติก, m^2/s
θ	=	ค่ามุมในระบบแกนเชิงขั้ว
ρ	=	ความหนาแน่น, kg/m^3
A	=	พื้นที่, m^2
a	=	ความเร็วเสียงในอากาศ, m/s
c	=	ค่าความจุความร้อนจำเพาะ, kJ/kg-ºC
D	=	ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่, m^2/s
Gr	=	Grashof number
H	=	ความสูง, m
h	=	ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน, W/m^2-ºC
k	=	ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัตถุ, W/m-ºC
L	=	ความยาว, m
M	=	ปริมาณความชื้น, %
Ma	=	Mach number
Nu	=	Nusselt number
P, p	=	ความดัน, N/m^2
Pr	=	Prandtl number
Q	=	พลังงานความร้อน, J
q	=	อัตราการถ่ายเทความร้อน, W
RH	=	ความชื้นสัมพัทธ์อากาศ, %

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

r	=	ค่ารัศมี, m
Re	=	Reynolds number
S	=	มวลแห้ง, kg
Sc	=	Schmidt number
T	=	อุณหภูมิ, ºC
t	=	เวลา, s
U, u, V, v	=	ความเร็ว, m/s
V	=	ปริมาตร, m^3
W, w	=	มวลความชื้น, kg
x, y, z	=	ตำแหน่งในระบบคาร์ทีเซียน, m
$y+$	=	ตัวแปรไร้มิติของระยะห่างชั้นชิดผิว

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย

ข้าวเป็นผลผลิตทางการเกษตรที่สำคัญของประเทศไทย การเก็บเกี่ยวข้าวต้องกระทำในช่วงที่ข้าวมีความชื้นสูงพอสมควรเพื่อลดอัตราการร่วงหล่นของเมล็ดข้าว ทำให้ข้าวเปลือกที่ได้มีความชื้นค่อนข้างสูง จึงจำเป็นต้องทำการลดความชื้นข้าวเปลือกเพื่อเป็นการถนอมรักษามิให้เกิดการเสียหายเนื่องจากจุลินทรีย์ การอบแห้งเป็นกระบวนการหนึ่งที่นิยมใช้สำหรับการลดความชื้นข้าวเปลือก การอบแห้งที่ดียังทำให้ได้คุณภาพข้าวสารภายหลังการขัดสีที่ดีอีกด้วย ส่วนการอบแห้งที่ไม่เหมาะสมอาจทำให้ข้าวสารที่ได้มีการแตกหักมาก มีสีหมองคล้ำ และธาตุอาหารยังอาจเสื่อมสลายได้อีกด้วย

วิธีการอบแห้งที่เป็นที่นิยมมากที่สุดในอุตสาหกรรมคือการใช้ระบบการเป่าอากาศร้อน (Heated, forced air drying) มีหลักการทำงานคือ ใช้พัดลมเป่าอากาศผ่านระบบให้ความร้อนเพื่อทำให้อากาศร้อนขึ้นถึงประมาณ 100-150ºC จากนั้นเป่าอากาศร้อนให้ไหลผ่านข้าวเปลือกเพื่อให้ดูดซับความชื้นออกจากเมล็ดข้าวเปลือก ความร้อนทำหน้าที่สองอย่างพร้อมกันคือช่วยลดความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศ และเพิ่มสัมประสิทธิ์การแพร่ความชื้นของเมล็ดข้าว นับเป็นวิธีการที่ช่วยประหยัดเวลาและสามารถควบคุมคุณภาพของข้าวเปลือกได้เป็นอย่างดี เครื่องอบแห้งแบบเป่าอากาศร้อนมีหลายชนิด เช่น เครื่องอบแห้งแบบไหลขวางทาง (Cross flow) เครื่องอบแห้งแบบถังพัก (Bin type) เครื่องอบแห้งแบบเมล็ดไหลคลุกเคล้าหรือแบบ LSU (Louisiana State University) (Taggart, 1947) เครื่องอบแห้งแบบฟลูอิไดซ์เบด (Fluidized bed) เครื่องอบแห้งแบบพวยพุ่ง (Spouted bed) และเครื่องอบแห้งแบบหล่นอิสระลมไหลสวนทาง (Free fall, opposed flow) เป็นต้น

ในกระบวนการลดความชื้นนั้นมีองค์ประกอบหลายอย่างที่จำเป็นต้องอาศัยความรู้และความเข้าใจที่ถูกต้อง เพื่อให้การลดความชื้นเป็นไปอย่างประหยัด รวดเร็ว และไม่เกิดความเสียหายต่อเมล็ดข้าวเป็นสำคัญ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องมีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการลดความชื้นของเมล็ดข้าวอย่างลึกซึ้งรวมไปถึงมีการทำการทดลองจนได้ข้อมูลที่ชัดเจน เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบและการใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยนี้เป็นการวิจัยกระบวนการอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกด้วยการเป่าอากาศร้อนแบบลมไหลสวนทาง ซึ่งเป็นระบบอบแห้งที่คิดค้นโดย ทวิช จิตรสมบูรณ์ (กรมทรัพย์สินทางปัญญา, 2550) วิธีการหลักที่จะใช้ในการวิจัยคือกรรมวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) โดยจะพิจารณาเมล็ด

ข้าวเปลือกชื้นหนึ่งเมล็ดที่อยู่ภายใต้สภาวะการไหลของอากาศร้อนเพื่อศึกษาถึงการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก พร้อมทั้งวิเคราะห์การแตกร้าวของเมล็ดข้าวอันเนื่องมาจากผลของความแตกต่างกันของอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ด ซึ่งจะมีผลโดยตรงต่อคุณภาพของเมล็ดข้าวภายหลังที่ผ่านกระบวนการขัดสี

ความยุ่งยากและซับซ้อนของปัญหาในการศึกษานี้จะประกอบด้วยสองส่วนหลัก คือ พฤติกรรมการไหลของอากาศและการถ่ายเทความร้อนและความชื้นพร้อมกันไป สสารที่เกี่ยวข้องมีหลายส่วนคือ อากาศ ของแข็ง (เมล็ดข้าวเปลือก) ไอน้ำ ความร้อน และความเร็วอากาศ ขั้นตอนของกระบวนการคือน้ำจะแพร่จากเนื้อเมล็ดด้านในผ่านชั้นรำและเปลือกข้าวออกมายังผิวเปลือกข้าว พร้อมกันนั้นความร้อนจากอากาศจะถูกนำผ่านผิวเปลือกข้าวเข้าไปยังเนื้อเมล็ดข้าว การให้ความร้อนแก่ทั้งเมล็ดข้าวและน้ำ ทำให้ค่าคุณสมบัติการถ่ายเท (Transport properties) ของเมล็ดข้าวเปลี่ยนไป สำหรับน้ำที่แพร่ออกมายังผิวด้านนอกจะเกิดการระเหยเป็นไอน้ำ โดยดูดซับความร้อนแฝงจากอากาศร้อน จากนั้นก็จะแพร่และพาออกไปด้วยกระแสอากาศที่ปั่นป่วน

ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จะเป็นการกระจายของความชื้นและอุณหภูมิในเมล็ดข้าวที่ตำแหน่งและช่วงเวลาต่าง ๆ ทำให้สามารถนำมาวิเคราะห์หาประเด็นทางวิศวกรรมศาสตร์และด้านอาหารได้ เช่น ศึกษาประเด็นของการแตกร้าวอันเนื่องจากการอบแห้งแบบที่มีเกรเดียนต์ของความชื้นมากเกินไป ประเด็นของการเปลี่ยนจากสภาพนุ่มคล้ายยาง (Rubbery state) ไปเป็นของแข็งเปราะคล้ายแก้ว (Glassy state) หรือกลับกัน อันเนื่องจากอุณหภูมิ T_g (Glass transition temperature) ซึ่งทำให้เกิดได้ทั้งผลดีและผลเสียต่อการอบแห้ง รวมทั้งประเด็นของความรวดเร็วในการอบแห้ง เท่าที่ผู้วิจัยทราบ ยังไม่มีการวิจัยแบบนี้มาก่อน งานวิจัยนี้จึงถือได้ว่าเป็นการนำทางสำหรับการวิจัยในขั้นสูงขึ้นต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกภายใต้สภาวะการไหลของอากาศร้อนโดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข โดยการคำนวณแบบพร้อมกันไป (Simultaneous)

1.2.2 เพื่อวิเคราะห์หาแนวทางในการอบแห้งข้าวเปลือกให้รวดเร็วขึ้นในขณะที่เกิดการแตกหักน้อยลง

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการศึกษาอัตราการถ่ายเทความร้อนและมวลความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดที่อยู่ภายใต้กระแสการไหลของอากาศร้อน โดยเป็นการำนวณแบบพร้อม

กัน การหาคำตอบของปัญหานี้จะเป็นการหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical approach) และเลือกใช้ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite volume method) โดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการแก้สมการควบคุมการไหลโดยใช้โปรแกรม ANSYS CFX (Computational fluid dynamics software program solutions) สมการที่ใช้ในการคำนวณประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวล อนุรักษ์โมเมนตัม อนุรักษ์พลังงาน และอนุรักษ์ความชื้น โดยสมมติว่าความชื้นในเมล็ดข้าวอยู่ในสถานะของเหลว ซึ่งเกิดจากการระเหยไปเป็นไอที่ผิวเมล็ดข้าว ซึ่งทำให้เกิดการแพร่และการพาความชื้นออกไปโดยกระแสอากาศในที่สุด สำหรับการจำลองภายในเมล็ดข้าวจะประกอบด้วยเนื้อข้าว ชั้นรำข้าว และชั้นเปลือกข้าว ปัจจัยการวิจัยจะทำการปรับค่าปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้ ความเร็วอากาศ อุณหภูมิอากาศ ความชื้นสัมพัทธ์อากาศ ความชื้นเริ่มต้นเมล็ดข้าว การวางตัวของเมล็ดข้าวเปลือกที่ทำมุมต่อการไหล ในส่วนของแบบจำลองความปั่นป่วนนั้นจะเป็นการใช้ระบบสองสมการ (k-ε) แล้วเปรียบเทียบกันเพื่อหาระบบที่ให้ความแม่นยำสูงสุดเมื่อเทียบกับผลการทดลอง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้กรรมวิธีจำลองการไหลในการอบแห้งข้าวเปลือกที่แม่นยำ ทำให้ลดเวลาและค่าใช้จ่ายในการวิจัย เพราะลดจำนวนการทดลองลง

1.4.2 ได้ข้อมูลและแนวทางในการลดการใช้พลังงานในการอบแห้ง

1.4.3 ได้ข้อมูลและแนวทางในการลดเวลาการอบแห้ง

1.4.4 ได้ข้อมูลและแนวทางในการลดการแตกร้าวของเมล็ดข้าวอันเนื่องจากการอบแห้ง

อนึ่งคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ได้เสนอให้เพิ่มข้อมูลการวิจัยเพิ่มเติม เพื่อให้ครอบคลุมการทำงานวิจัยอื่น จึงได้แนบเอกสารดังกล่าวไว้เป็นภาคผนวกที่ด้านหลังวิทยานิพนธ์ คือ

ภาคผนวก ก. การวิเคราะห์การดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้เพื่อประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรม

ภาคผนวก ข. การแสดงการไหลผ่านปีกอากาศด้วยกรรมวิธีการส่งคงแบบ

ภาคผนวก ค. โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณ

1.5 รายการอ้างอิง

กรมทรัพย์สินทางปัญญา, สิทธิบัตรการประดิษฐ์ชื่อ “เครื่องอบแห้งแบบการไหลสวนทางในแนวดิ่ง”, เลขที่สิทธิบัตร 22985, ออกเมื่อ 27 ธันวาคม 2550.

Taggart, W.G. (1947). **Rice drying and storage in Louisiana LSU: Agricultural Experiment Station Reports** [On-line]. Available: http://digitalcommons.lsu.edu/apexp/581

บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิชาการและงานวิจัยทางด้านเทคโนโลยีการอบแห้งนั้น มีการศึกษาวิจัยทั้งภายในประเทศและต่างประเทศ ตัวอย่างบางส่วนของงานวิจัยเหล่านี้ ได้แก่ สมชาติ โสภณรณฤทธิ์ (2538) ได้นำเสนอเทคนิคในการอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกโดยเฉพาะสำหรับประเทศไทย ได้แก่ การอบแห้งข้าวเปลือกภายในฉางเก็บรักษาโดยใช้ท่อลมหรือพัดลมเป่าอากาศแวดล้อมเข้าไปในกองเมล็ดพืช และการอบแห้งข้าวเปลือกด้วยเทคนิคแบบฟลูอิดไดซ์เบด (Fluidized bed) ซึ่งเป็นเครื่องอบลดความชื้นข้าวเปลือกที่มีขนาดเล็กถึงขนาดกลาง มีผลเปรียบเทียบกับเครื่องอบแห้งที่ใช้ลมร้อนโดยทั่วไปพบว่ามีความสิ้นเปลืองพลังงานเชื้อเพลิงและไฟฟ้าต่ำกว่า งานวิจัยของ อดิเทพ ทวีรัตนพาณิชย์, สมชาติ โสภณรณฤทธิ์, สมบูรณ์ เวชกามา, งามชื่น คงเสรี และสุนันทา วงศ์ปิยชน (2541) ได้สรุปข้อดีซึ่งอ้างอิงจากการทดลองว่า เทคนิคนี้สามารถกระจายความร้อนของข้าวเปลือกภายหลังกระบวนการอบแห้งให้มีความสม่ำเสมอ มีอัตราการลดความชื้นสูงกว่าแบบอื่นจึงใช้เวลาน้อยกว่าและยังสามารถเพิ่มเปอร์เซ็นต์ข้าวเต็มเมล็ดได้ โดยที่คุณภาพของข้าวเปลือกโดยรวมอยู่ในระดับที่ยอบรับได้ ทวิช จิตรสมบูรณ์ และรุ่ง แกล้วกล้า (2541) ได้นำเสนอตัวแปรไร้มิติเพื่อการนำเสนอข้อมูลการทดลองและการออกแบบเครื่องอบแห้งอาหาร ตัวแปรแต่ละตัวได้มาจากการยุบรวมตัวแปรไร้มิติเข้าด้วยกันเพื่อทำให้จำนวนตัวแปรลดลงเหลือเพียง 3 ตัวแปรหลักที่ช่วยลดงานในการทดลองและยังให้ความหมายเชิงวิศวกรรมศาสตร์ เพื่อการวิเคราะห์ผลที่ได้จากการทดลอง โดยได้ทำการทดลองวัดค่าจริงจากเครื่องอบแห้งอาหารสัตว์เพื่อยืนยันว่าตัวแปรไร้มิติที่สร้างขึ้นสามารถสร้างความเสมือน (Similarity) ของข้อมูลได้ดีพอสมควร

สำหรับงานวิจัยโดยอาศัยทฤษฎีเป็นหลักมีงานของ Luikov (1966) ได้นำเสนอชุดสมการหลักสำหรับการอบแห้งเมล็ดข้าวที่เป็นการเกี่ยวพันกันของการถ่ายเทความร้อนและความชื้น ต่อมานักวิจัยหลายท่านได้ประยุกต์ชุดสมการนี้มาใช้สำหรับทำนายการอบแห้งเมล็ดพืช เช่น Husain, Chen, and Clayton (1973) นำเสนอแบบจำลองของการถ่ายเทความร้อนและมวลโดยอาศัยพื้นฐานสมการของ Luikov ทำนายผลการอบแห้งข้าวเปลือก ซึ่งได้ผลสอดคล้องเป็นอย่างดีกับข้อมูลการทดลอง ต่อมาได้มีความนิยมใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical approach) ซึ่งได้แก่ ระเบียบวิธีชิ้นประกอบจำกัด (Finite element method) ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite volume method)

และระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite difference method) มาช่วยในการหาผลเฉลยของปัญหา (Tang and Sokhansanj, 1994) รวมทั้งนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับการทดลอง เพื่อยืนยันความถูกต้องของคำตอบ

จากงานวิจัยของ Sarker, Kunze, and Strouboulis (1994, 1996) ที่ศึกษาพฤติกรรมการลดความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก โดยอาศัยกระบวนการแพร่ของมวลความชื้นภายในเมล็ดข้าวจากกฎการแพร่ของฟิก (Fick's law of diffusion) และทำการหาคำตอบด้วยกรรมวิธีชิ้นประกอบจำกัด โดยสามารถแสดงค่าการเปลี่ยนแปลงปริมาณความชื้นที่จุดต่อภายในเมล็ดและนำมาหาค่าเฉลี่ยความชื้นสะสม ค่าสภาพแพร่ (Diffusivity) ในส่วนต่าง ๆ ของเมล็ดข้าวได้แก่ ส่วนเนื้อข้าว ส่วนรำข้าว และส่วนเปลือกข้าว จะถูกหาค่าขึ้นมาก่อนโดยอาศัยข้อมูลจากการทดลอง สุดท้ายเมื่อนำผลการทดลองและผลจากการคำนวณมาเปรียบเทียบกันพบว่ามีความสอดคล้องกันค่อนข้างสูง ผลการศึกษายังชี้ให้เห็นว่าค่าการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนต์ของความชื้น (Moisture gradient) มีค่าสูงในทางแกนยาวบริเวณตอนกลางของเมล็ด มีงานวิจัยหลายชิ้นจาก Arkansas Agricultural Experiment Station, Rice Research and Extension Center ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและความชื้นที่มีผลต่อคุณภาพของเมล็ดข้าวเปลือกที่อยู่ภายใต้กระบวนการลดความชื้นด้วยอากาศร้อน ใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบจำกัด (Yang, Jai, Siebenmorgan, and Cnossen, 2000; Yang, Jai, Siebenmorgan, Howell, and Cnossen, 2000) ที่จำลองมาจากสมการการแพร่และสมการพลังงาน (Energy equation) สำหรับ 1/4 ส่วนของเมล็ด พร้อมทั้งการกำหนดเงื่อนไขขอบสำหรับการพิจารณาในเชิงสองมิติ ระเบียบวิธีนี้ยังใช้วิเคราะห์หาการกระจายของความเค้น (Stress distribution) ภายในเมล็ดที่แตกต่างกัน (Jai, Yang, Siebenmorgan, Bautista, and Cnossen, 2000) โดยพบว่าภายใต้กระบวน การลดความชื้นจะเกิดแรงดึง (Tensile force) บริเวณผิวและแรงดัน (Compressive force) จะเกิดบริเวณแกนกลางของเมล็ด นอกจากนี้ยังนำผลที่ได้มาวิเคราะห์การเกิดรอยร้าวภายในเมล็ดข้าวพบว่า ผลที่ได้สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลของการใช้กล้องจุลทรรศน์บันทึกภาพความเร็วสูง (Bautista, Siebenmorgan, and Cnossen, 2000; Bautista and Siebenmorgan, 2000) ได้มีการศึกษาการเกิดรอยร้าวและการแตกหักที่ผิวภายใต้เงื่อนไขของการลดความชื้นและการทำเปียกซ้ำ (Rewetting) โดย Jia, Sun, and Cao (2000) พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และต่อมา Jia, Yang, Siebenmorgen, and Cnossen (2001) ได้นำไปพัฒนาเป็นโปรแกรมการคำนวณทางคอมพิวเตอร์โดยใช้ระเบียบวิธี ชิ้นประกอบจำกัด พร้อมการแสดงผลภาพกราฟฟิกของการคำนวณผลการอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดรวมถึงกระบวนการพัก (Tempering) และยังแสดงผลการกระจายตัวของความเค้นภายในเมล็ดข้าวได้อีกด้วย Wu, Yang, and Jia (2004) ใช้ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดในสองมิติและสามมิติ คำนวณการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในเมล็ดข้าวหนึ่งเมล็ด พบว่าการคำนวณในสองมิติ

มีความเพียงพอต่อการหาค่าพฤติกรรมที่สำคัญที่เกิดขึ้นภายในเมล็ดข้าว เช่น เวลาที่เกิดเกรเดียนต์ของความชื้นสูงสุด อย่างไรก็ตามงานวิจัยเหล่านี้ยังพิจารณาผลที่เกิดขึ้นอยู่เฉพาะภายในเมล็ดข้าวเปลือกเพียงเท่านั้น ยังไม่ได้พิจารณากระบวนการไหลของอากาศที่ใช้ในการอบแห้งภายนอกเมล็ดข้าว ซึ่งจะเป็นงานวิจัยของวิทยานิพนธ์นี้

ข้อสังเกตประการสำคัญของการศึกษาข้างต้นคือการกำหนดเงื่อนไขค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความชื้นเป็นค่าเดียวตลอดพื้นผิว โดยไม่เปลี่ยนตามเวลาที่เปลี่ยนไป ซึ่งไม่ถูกต้องนักหากพิจารณาการไหลของอากาศผ่านเมล็ดข้าว Kaya, Aydin, and Dincer (2006) ศึกษาการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความชื้นของวัสดุชื้นรูปสี่เหลี่ยมภายใต้การไหลของอากาศร้อนโดยใช้โปรแกรมคำนวณทาง CFD โดยวิเคราะห์การไหลและอุณหภูมิโดยรอบวัสดุเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนตลอดพื้นผิวและใช้ความสัมพันธ์ของชั้นชิดผิวหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความชื้นแล้วนำค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสองมาใช้เป็นเงื่อนไขขอบสำหรับคำนวณค่าการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในวัสดุ Chandra Mohan, and Talukdar (2010) นำเสนอกระบวนการที่คล้ายคลึงกันโดยขยายผลไปในสามมิติ พบว่าการใช้ค่าการกระจายตัวของค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทเป็นเงื่อนไขในการคำนวณให้ค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นภายในวัสดุที่สอดคล้องและสมจริงมากขึ้น Robjer Gullman (2010) พัฒนาแบบจำลองการระเหยตัวของความชื้นสำหรับประยุกต์ใช้ในการคำนวณการอบแห้งของวัสดุในช่วงการอบแห้งต่าง ๆ โดยอาศัยโปรแกรมการคำนวณการไหลแบบสำเร็จรูปศึกษาการไหลตัวของอากาศร้อนผ่านวัสดุชื้นที่มีการถ่ายเทความร้อนและความชื้นไปพร้อม ๆ กัน งานวิจัยของ Curcio (2010) พัฒนาแบบจำลองในโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อใช้อธิบายการปรากฏการณ์การถ่ายเทต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการอบแห้งอาหาร ใช้การพิจารณาแบบหลายสถานะ (Multiphase approach) สำหรับวิเคราะห์ความชื้นในรูปของเหลวและไอน้ำ สมการการถ่ายเทโมเมนตัม ความร้อน และความชื้นเกิดขึ้นพร้อมกันโดยการให้ค่าเงื่อนไขขอบที่เหมาะสม โดยไม่มีการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความชื้นที่ผิวสัมผัสของวัสดุเลย ต่อมา Curcio, Aversa, Calabrò, and Iorio (2010) พัฒนาแบบจำลองเพิ่มเติมเพื่อทำนายผลของการหดตัวของอาหารเมื่อสูญเสียความชื้นไปพร้อมกับกระบวนการถ่ายเทอื่น ๆ แบบจำลองที่ได้ช่วยในการเลือกใช้อุปกรณ์ทางอุตสาหกรรมการอบแห้งให้เกิดความเหมาะสม

จะเห็นได้ว่าการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ของเทคโนโลยีการอบแห้งเป็นกระบวนการกึ่งทฤษฎี โดยที่ข้อมูลที่ขอบดังเช่นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความชื้นเป็นค่าที่ต้อง “กำหนด” จากสมการปฏิสัมพันธ์การทดลอง (Correlation equations) ความถูกต้องและเหมาะสมของสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะสูงขึ้นหากหาได้โดยการ “คำนวณ” โดยตรง

มากกว่าการ“กำหนด” จุดประสงค์หลักของการศึกษานี้จึงเพื่อศึกษากระบวนการอบแห้งของเมล็ดข้าวเปลือกด้วยการคำนวณเชิงตัวเลข โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทุกตัวต้องเป็นค่าที่คำนวณได้ไปพร้อมกับการไหลของอากาศภายนอกและการถ่ายเทภายในเมล็ด เพื่อสามารถนำไปใช้ได้อย่างมีความถูกต้องสูง จึงมีความจำเป็นต้องทำการศึกษาวิจัยเพื่อเป็นข้อมูลที่จะใช้สำหรับการปรับปรุงและพัฒนาต่อไป

2.2 รายการอ้างอิง

ทวิช จิตรสมบูรณ์ และรุ่ง แกล้วกล้า. (2541). ตัวแปรไร้มิติในการอบแห้ง. ใน **การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกล**. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี. (2550). **เครื่องอบแห้งแบบการไหลสวนทางในแนวดิ่ง**. สิทธิบัตรไทย เลขที่ 22985. กรุงเทพฯ: กรมทรัพย์สินทางปัญญา กระทรวงพาณิชย์.

สมชาติ โสภณรณฤทธิ์. (2538). แนวทางการจัดการข้าวเปลือกชื้น. ใน **การประชุมราชบัณฑิต**. กรุงเทพฯ: ราชบัณฑิตยสถาน.

อดิเทพ ทวีรัตนพาณิชย์, สมชาติ โสภณรณฤทธิ์, สมบูรณ์ เวชกามา, งามชื่น คงเสรี และสุนันทา วงศ์ปิยชน. (2541). ผลพลอยได้จากการอบแห้งข้าวเปลือกโดยเทคนิคฟลูอิไดเซชัน. ใน **การประชุมราชบัณฑิต**. กรุงเทพฯ: ราชบัณฑิตยสถาน.

Aversa, M., Curcio, S., Calabrò, V., and Iorio, G. (2010). Transport phenomena modeling during drying of shrinking materials. 20th European Symposium on Computer Aided Process Engineering - ESCAPE20 S. Pierucci and G. Buzzi Ferraris (eds.). **Computer Aided Chemical Engineering**. 28: 91-96.

Bautista, R.C., Siebenmorgan, T.J., and Cnossen, A.G. (2000). Fissure formation characterization in rice kernels using video microscopy. **Proceedings of the 12th International Drying Symposium IDS2000** (Paper No. 417). Noordwijkerhout: The Netherlands.

Bautista, R.C., and Siebenmorgan, T.J. (2000). Fissure formation in brown rice kernels observed with a video microscopy system. In B.R. Wells, R.J. Norman and J.-F. Meullenet (eds.). **Rice research studies 2000** (pp. 224-230). Arkansas: Arkansas Agricultural Experiment Station Fayetteville.

Chandra Mohan, V.P., and Talukdar, P. (2010). Three-dimensional numerical modeling of simultaneous heat and moisture transfer in a moist object subjected to convective drying. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 53(21-22): 4638-4650.

Curcio, S. (2010). A multiphase model to analyze transport phenomena in food drying processes. **Drying Technology**. 28(6):773-785.

Husain, A., Chen, C.S., and Clayton, J.T. (1973). Simultaneous heat and mass diffusion in biological materials. **Journal of Agricultural Engineering Research**. 18(3): 343-354.

Jia, C.-C., Sun, D.-W., and Cao, C.-W. (2000). Mathematical simulation of temperature and moisture fields within a grain kernel during drying. **Drying Technology**. 18(6): 1305-1325.

Jai, C-C., Yang, W., Siebenmorgan, T.J., Bautista, R.C., and Cnossen, A.G. (2000). A study of rice fissuring by finite-element simulation of internal stresses combined with video microscopy observation of fissure appearance. In B.R. Wells, R.J. Norman and J.-F. Meullenet (eds.). **Rice research studies 2000** (pp.271-276). Arkansas: Arkansas Agricultural Experiment Station Fayetteville.

Jia, C.-C., Yang, W., Siebenmorgen, T. J., and Cnossen, A. G. (2001). Development of computer simulation software for single grain kernel drying, tempering and stress analysis. **Transactions of the ASAE**. 45(5): 1485-1492.

Kaya, A., Aydin, O., and Dincer, I. (2006). Numerical modelling of heat and mass transfer during forced convection drying of rectangular moist objects. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 49: 3094-3103.

Luikov, A.V. (1966). **Heat and mass transfer in capillary bodies**. Pergamon Press: England.

Robjer Gullman, S.E.H. (2010). **Development of evaporation models for CFD: for application within drying process simulation**. M.S. thesis, Chalmers University of Technology, Sweden.

Sarker, N.N., Kunze, O.R., and Strouboulis, T. (1994). Finite element simulation of rough rice drying. **Drying Technology**. 12 (4): 761-775.

Sarker, N.N., Kunze, O.R., and Strouboulis, T. (1996). Transient moisture gradients in rough rice mapped with finite element model and related to fissures after heated air drying. **Transactions of the ASAE**. 39(2): 625-631.

Tang, J., and Sokhansanj, S. (1994). A model for thin-layer drying of lentils. **Drying Technology**. 12 (4): 849-867.

Wu, B., Yang, W., and Jia, C. (2004). A three-dimensional numerical simulation of transient heat and mass transfer inside a single rice kernel during the drying process. **Biosystems Engineering**. 87(2): 191-200.

Yang, W., Jai, C-C., Siebenmorgan, T.J., and Cnossen, A.G. (2000). Intra-kernel moisture gradients and glass transition temperature in relation to head rice yield variation during heated air drying of rough rice. **Proceedings of the 12th International Drying Symposium IDS2000** (Paper No. 069). Noordwijkerhout: The Netherlands.

Yang, W., Jai, C-C., Siebenmorgan, T.J., Howell, T.A., and Cnossen, A.G. (2000). Intra-kernel moisture and temperature gradients as related head rice yield during the drying and tempering processes. In B.R. Wells, R.J. Norman and J.-F. Meullenet (eds.). **Rice research studies 2000** (pp.446-453). Arkansas: Arkansas Agricultural Experiment Station Fayetteville.

บทที่ 3
การทดสอบแบบจำลองความปั่นป่วนในการคำนวณเชิงตัวเลข

3.1 บทคัดย่อ

เป็นการทดสอบเปรียบเทียบค่าการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับคำตอบเชิงทฤษฎีของปัญหาการไหลผ่านแผ่นบาง การไหลแบบพาความร้อนอิสระผ่านแผ่นความร้อนในแนวตั้ง และการไหลผ่านวัตถุทรงกลม การเปรียบเทียบค่าการคำนวณนี้ก็เพื่อทำให้สามารถตัดสินใจการเลือกใช้แบบจำลองให้เกิดความเหมาะสมกับปัญหาการไหล

3.2 บทนำ

การทดสอบการคำนวณทาง CFD เป็นสิ่งสำคัญของโปรแกรมก่อนการนำไปใช้งานจริง โดยทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณทาง CFD กับผลเฉลยในทางทฤษฎีหรือผลข้อมูลจากการทดลองเพื่อทดสอบความถูกต้องแม่นยำของแบบจำลองการคำนวณ ซึ่งการทดสอบโปรแกรมเพื่อให้แน่ใจว่าผลลัพธ์ของการคำนวณจากแบบจำลองจะถูกนำมาใช้อย่างถูกต้อง งานวิจัยส่วนนี้มุ่งเน้นไปที่การทดสอบแบบจำลองความปั่นป่วนจากการคำนวณทาง CFD ของโปรแกรม FLUENT ซึ่งนิยมใช้สำหรับทำนายการไหลทาง CFD ในเชิงพาณิชย์ที่พัฒนาขึ้นโดย Fluent, Inc. แบบจำลองความปั่นป่วนที่ต้องการจะทดสอบนี้ประกอบด้วยแบบจำลอง k-ε (Jones and Launder, 1972), แบบจำลอง k-ω (Menter and Esch, 2001) และแบบจำลอง Spalart-Allmaras (Spalart and Allmaras, 1992) การตรวจสอบจะมุ่งเน้นไปที่การไหลในแบบสองมิติผ่านแผ่นราบ ได้แก่ การไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) ผ่านแผ่นราบ การไหลแบบพาความร้อนอิสระผ่านแผ่นราบแนวตั้ง การไหลแบบปั่นป่วนบนแผ่นราบ และการไหลผ่านวัตถุทรงกลม ในแต่ละผลลัพธ์ของการคำนวณทาง CFD ได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยในทางทฤษฎีหรือข้อมูลจากการทดลอง วัตถุประสงค์ของการศึกษาครั้งนี้คือเพื่อประเมินความถูกต้องของแบบจำลองการปั่นป่วนที่ใช้ในการคำนวณทาง CFD ของโปรแกรม FLUENT ทั้งนี้ในส่วนรายละเอียดทฤษฎีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ สมการหลักที่ใช้ในการหาคำตอบ รวมทั้งแบบจำลองความปั่นป่วนสามารถหารายละเอียดได้ในคู่มือเอกสารอ้างอิงโดยทั่วไป

3.3 วิธีดำเนินการวิจัย

การทดสอบแบบจำลองจะเริ่มต้นจากกรณีการไหลผ่านรูปทรงพื้นฐาน เมื่อขั้นตอนการทดสอบสมบูรณ์แล้วก็จะสามารถเพิ่มความซับซ้อนของปัญหาการไหลในกระบวนการตรวจสอบเพิ่มขึ้นได้ กระบวนการทดสอบดำเนินการดังนี้

- การไหลในชั้นผิวบาง (Boundary layer) ในย่านความเร็วต่ำ
- การไหลแบบพาความร้อนอิสระ (Free convection flow) ข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้ง
- การไหลในท่อกลม (Duct flow)
- การถ่ายโอนมวลสารด้วยการพา (Convection mass transfer)
- การไหลผ่านชั้นผิวบางแบบปั่นป่วน (Turbulent boundary layer)
- การไหลผ่านวัตถุทรงกลม (Flow over spheroid)

ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบโปรแกรมจะได้เสนอเป็นกรณีต่อไป

3.4 ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

3.4.1 การไหลในชั้นผิวบางในย่านความเร็วต่ำ

การไหลนี้เป็นการไหลในชั้นผิวบางผ่านแผ่นราบ กำหนดให้ความเร็วตรงทางเข้ามีค่า Mach number เท่ากับ 0.2 และมีความดัน 101.325 Pa (ความดันบรรยากาศ) มีอุณหภูมิ 308 K และความเร็วเข้าเป็นความเร็วที่เป็นเอกรูป (Uniform flow) จากข้อมูลข้างต้น สามารถแสดงคุณสมบัติอื่นของไหลได้ดังนี้

Properties of dry air at standard atmospheric pressure, $T = 35^{o}$C

$\rho = 1.14585$ kg/m^3 $\qquad$ $c_p = 1.0066$ kJ/kg-^{o}C

$\mu = 1.888\times10^{-5}$ kg/m-s $\qquad$ $k = 26.74\times10^{-3}$ W/m-^{o}C

$\nu = 1.6485\times10^{-5}$ m^2/s $\qquad$ Pr = 0.711

จากนิยามของค่า Mach number

$$\mathrm{Ma} = V/a \qquad \text{เมื่อ} \qquad a = 20.045\sqrt{T} \tag{3.1}$$

จะได้ความเร็วของอากาศที่ทางเข้าเป็น 70 m/s

เมื่อคำนวณค่า Local Reynolds number จะได้เป็น

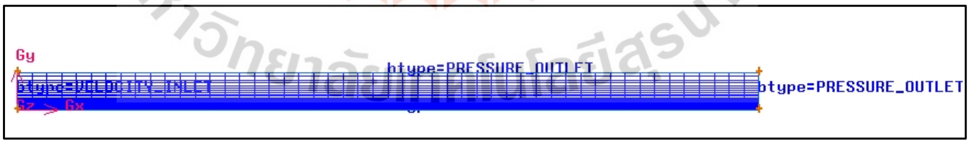
$$\mathrm{Re}_L = UL/\nu = 424628.45 < 3\times10^6 \qquad \text{(Laminar boundary layer)}$$

กริดที่ใช้ในการคำนวณเป็นกริดขนาด 51×51 โดยกริดในทางแกน x (ซึ่งมีขนาด 10 ซม.) ถูกแบ่งออกในขนาดที่เท่ากัน ส่วนกริดในทางแกน y มีความหนาแน่นแตกต่างกันไป โดยกริดมีความหนาแน่นสูงในย่านใกล้แผ่นราบ ทั้งนี้เพื่อให้สามารถแก้สมการได้อย่างถูกต้องมากยิ่งขึ้นในย่านใกล้แผ่นเรียบ ซึ่งการไหลมีความชันของความเร็วสูงกว่าด้านนอก ในขั้นแรกได้ประเมินความหนาของชั้นผิวบางโดยจากความยาวของแผ่นราบ $L = 0.1$ เมตร เพื่อทำการกำหนดความสูงของโดเมนที่จะใช้ในการคำนวณได้อย่างถูกต้อง เส้น Shock wave ควรอยู่ภายในโดเมนที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งจะใช้ประมาณ 5 เท่าของความสูงชั้นชิดผิวที่คำนวณได้จากสมการชั้นชิดผิวของ Blasius (Schlichting, 2004) ที่ความยาวทางออกของโดเมนเป็นเงื่อนไขในการหาความสูงพิจารณาได้จาก $H \geq 5\times\delta$ เมื่อ δ คือค่าความสูงชั้นชิดผิวและหาได้จาก

$$\delta = \frac{5L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \approx 0.0007673 \text{ m} \qquad (3.2)$$

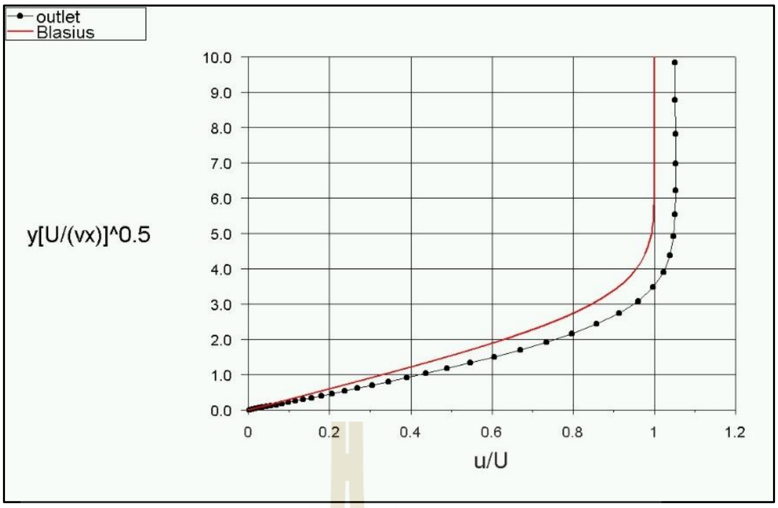
จากการคำนวณจะได้ $\mathrm{Re}_L = 424{,}628.45$ และ $H = 3.8365\times10^{-3}$ m ข้อควรพิจารณาเมื่อทำการหาขนาดของอิลิเมนต์แล้ว ควรพิจารณาด้วยว่าความสูงชั้นชิดผิวที่โนดการคำนวณแรกไม่ควรมีค่าน้อยกว่าขนาดความสูงของอิลิเมนต์ ($\delta_{\Delta x} > \Delta y$)

กำหนดให้ความหนาทางแกน y มีขนาดเป็น 5 มิลลิเมตร โดยให้กริดถัดไปมีความหนาเพิ่มขึ้นครั้งละ 12% จนกระทั่งไม่สามารถขยายตัวได้อีกต่อไป รูปที่ 3.1 แสดงรูปกริดโดเมนที่สร้างด้วยโปรแกรม GAMBIT เวอร์ชัน 2.0.4



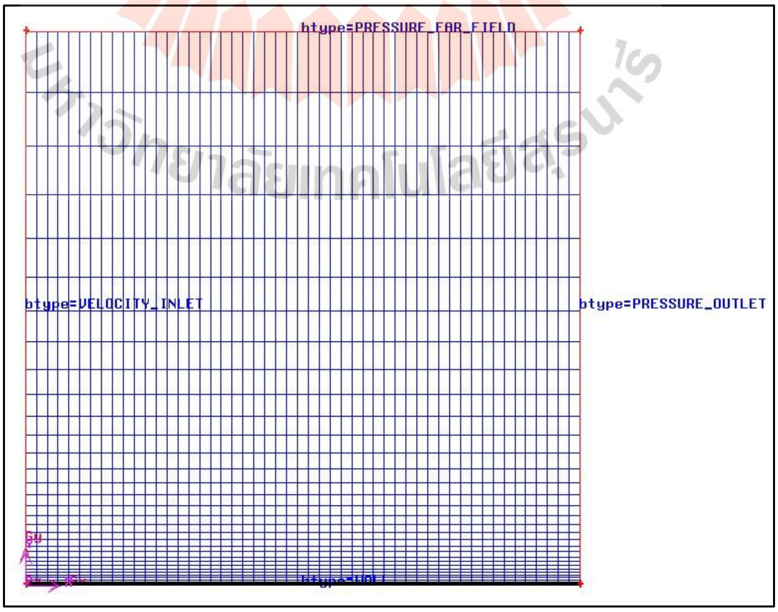
รูปที่ 3.1 กริดสำหรับปัญหาการไหลชั้นผิวบาง

ในการคำนวณด้วยโปรแกรม FLUENT ด้วยการอ่านไฟล์ (.msh) ที่ส่งมาจากโปรแกรม GAMBIT แล้วนั้น จะมีลำดับการกำหนดเงื่อนไขเพื่อทำการคำนวณโดยได้ผลเป็นดังนี้

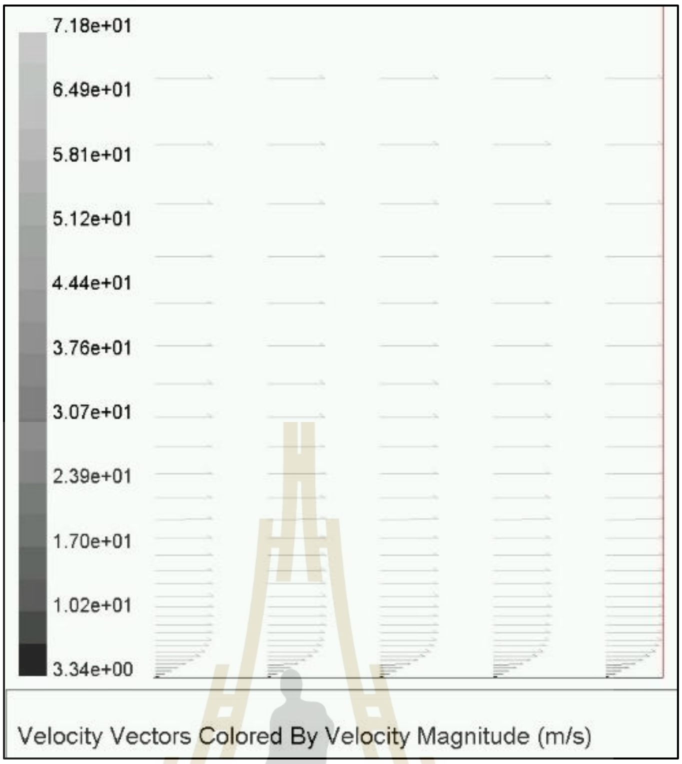


รูปที่ 3.2 เปรียบเทียบรูปแบบของความเร็วที่ทางออกของการไหลแบบราบเรียบ

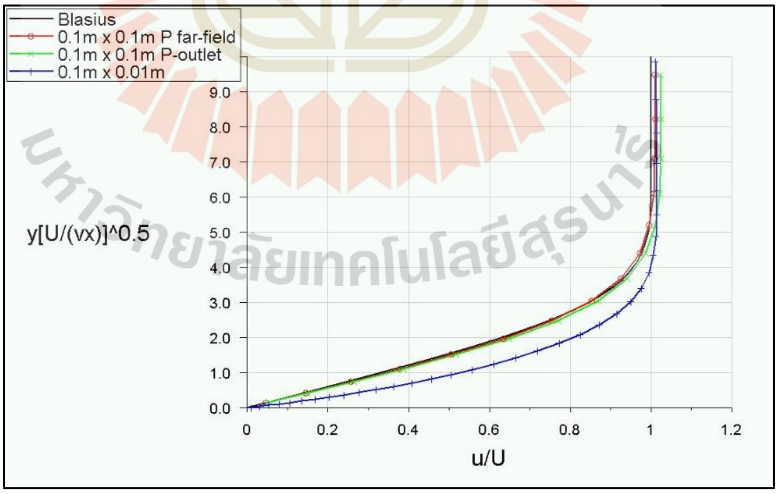
ค่าคำตอบที่ได้เมื่อพล็อตเทียบกับผลเฉลยของ Blasius ดังรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่า ค่าคำตอบที่ได้มีค่าแตกต่างกับค่าเชิงทฤษฎีมากถึง 5.25% ซึ่งอาจจะเป็นผลเนื่องมาจากการกำหนดปัญหาค่าขอบ เนื่องจากพบว่าการกำหนด Boundary conditions ตามนี้ให้ผลคำตอบของปัญหาได้สมจริงที่สุด หรืออาจจะเป็นผลมาจากค่าความสูงของขอบด้านบน จึงได้ทำการกำหนดค่าความสูงของขอบให้มีค่าสูงขึ้น ซึ่งพบว่าให้ผลของคำตอบที่ดีขึ้นดังจะแสดงต่อไป



รูปที่ 3.3 กริดการคำนวณกรณีการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบ



รูปที่ 3.4 เวคเตอร์ความเร็วที่ผิวแผ่นเรียบ



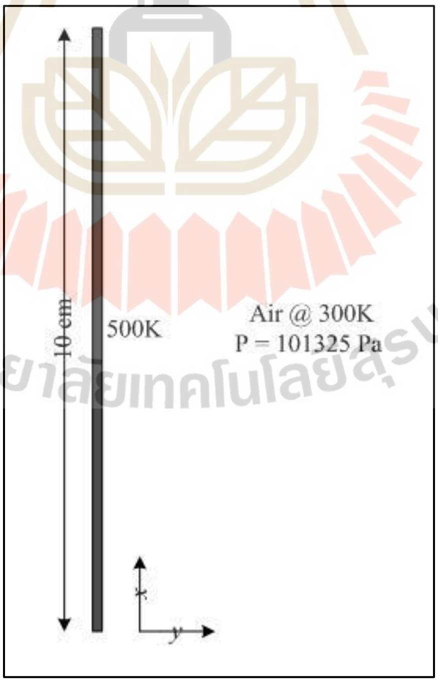
รูปที่ 3.5 เปรียบเทียบรูปแบบความเร็วที่ทางออกแผ่นเรียบของการไหลแบบราบเรียบ

สรุปผลการทดสอบพบว่า ค่าที่ได้เมื่อนำมาเปรียบเทียบค่าคำตอบในเชิงทฤษฎี มีความถูกต้องสูงขึ้น ซึ่งเป็นผลมาจากการเปลี่ยนโดเมนการไหลให้มีความสูงของขอบบนเพิ่มขึ้น

และการกำหนดค่าที่ขอบแต่ละด้านโดยเฉพาะการกำหนดค่าขอบด้านบน พบว่ามีผลต่อค่ากระแสการไหลที่ได้เป็นอย่างยิ่ง ค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับเส้นกราฟที่มีความเบี่ยงเบนต่ำสุดอยู่ที่ 1.03 เปอร์เซ็นต์ ซึ่งลดลงไปมาก อย่างไรก็ตามยังพบว่าค่าความเร็วที่ได้บริเวณทางออก ยังมีค่าความเร็วที่มีค่าสูงกว่าค่าความเร็วที่ทางเข้าอยู่บ้าง ซึ่งอาจจะเป็นผลมาจากการกำหนดค่าที่ขอบ หรือผลอันเกิดจากการให้มีความหนาแน่นของกริดในปริมาณที่ต่ำบริเวณผิวของแผ่นเรียบ เนื่องจากในการทดสอบนี้ได้ทำการเพิ่มค่าความสูงของโดเมนโดยไม่ได้ปรับค่าปริมาณกริดเพิ่มขึ้นด้วย ทั้งนี้ผลของกริดบริเวณทางเข้าก็เป็นส่วนที่น่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง อย่างไรก็ตามผู้ทดสอบยังไม่ได้ทดสอบผลกระทบของการกำหนดโหนดและการตั้งค่าขอบบริเวณนั้นเลย โดยคาดว่าจะทำการทดสอบเมื่อมีการศึกษาเพิ่มขึ้นไป

3.4.2 การไหลแบบพาความร้อนอิสระข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้ง

พิจารณาการไหลแบบพาความอิสระข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้งสูง 10 ซม. ที่อุณหภูมิคงที่ 500 K วางอยู่ที่อากาศอุณหภูมิ 300 K ความดันบรรยากาศ แสดงดังรูปที่ 3.6 เพื่อคำนวณค่าความเร็วและอุณหภูมิในชั้นชิดผิวด้านบนแผ่นและค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งตลอดพื้นผิว ด้วยสมมติฐานว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบ

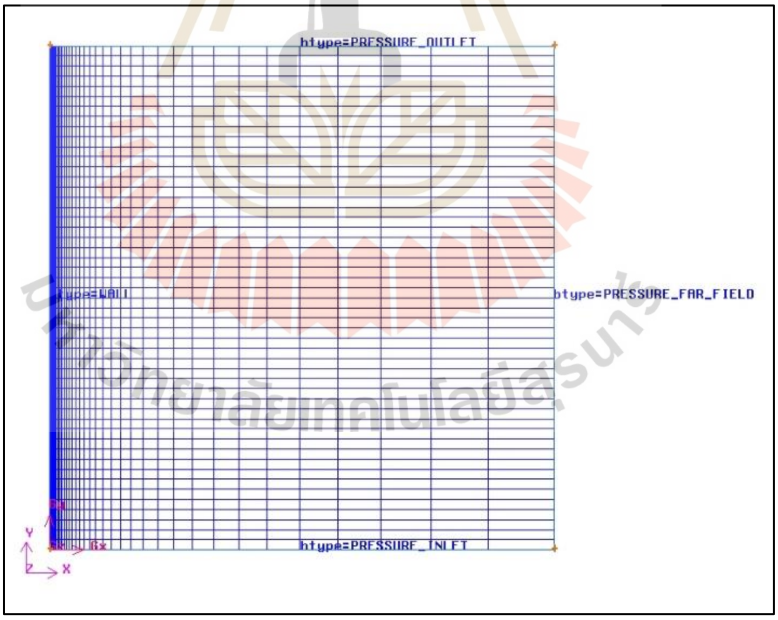


รูปที่ 3.6 การวางตัวของแผ่นความร้อนในแนวตั้ง

การไหลแบบนี้มีลักษณะพิเศษที่แตกต่างไปจากกรณีอื่นตรงที่การขับเคลื่อนของไหลมีที่มาจากแรงลอยตัวอันเป็นผลพวงของแรงโน้มถ่วงของโลก และเป็นการไหลที่มีความเร็วต่ำมาก แผ่นราบในแนวตั้งมีอุณหภูมิ 500 K ทำให้บรรยากาศโดยรอบซึ่งในตอนเริ่มต้นเป็นอากาศหยุดนิ่ง เริ่มร้อนและลอยตัวสูงขึ้นมีลักษณะเป็นชั้นผิวบางทั้งของความเร็วและอุณหภูมิ การสร้างกริดในกรณีนี้คล้ายกับในกรณีการไหลชั้นผิวบางผ่านแผ่นเรียบโดยในขั้นแรกได้ประเมินหาความหนาของชั้นผิวบางตามความสัมพันธ์

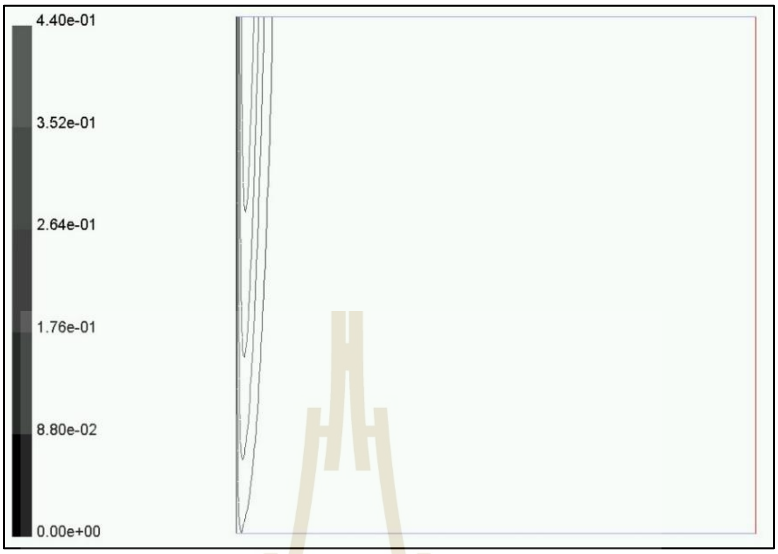
$$\frac{\delta}{y} = 3.93\left(\frac{0.952+\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Gr}_x^{-1/4} \tag{3.3}$$

จะได้ $\delta \approx 0.013$ จากนั้นสร้างกริดให้หนาประมาณ 5 เท่าของ δ โดยให้โดเมนมีขนาด 10×10 ซม^2 ให้มีกริดขนาด 51×51 กริด มีความหนาแน่นบริเวณใกล้ผนังความร้อนแล้วขยายตัว 15% ดังรูปที่ 3.7



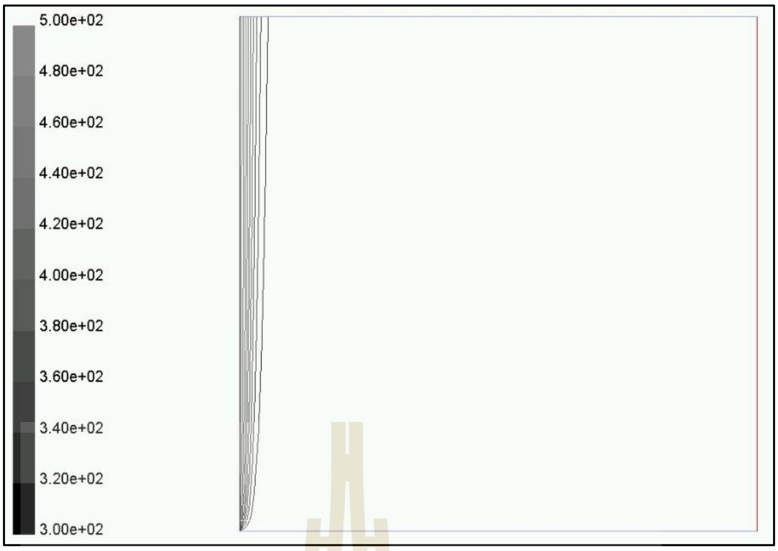
รูปที่ 3.7 กริดสำหรับปัญหาการไหลแบบพาความร้อนอิสระข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้ง

โดยการกำหนดค่าเงื่อนไขต่าง ๆ เพื่อใช้ในการคำนวณได้ผลดังนี้



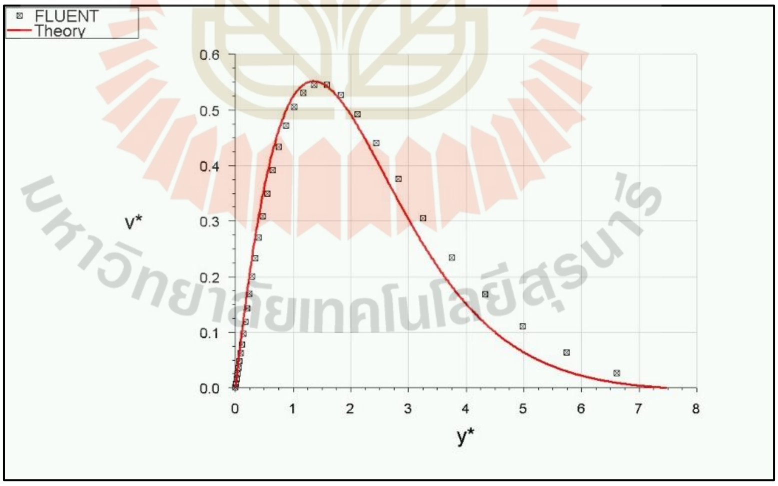
รูปที่ 3.8 เส้นระดับความเร็วที่ผิวแผ่นเรียบ

รูปที่ 3.9 เวคเตอร์ความเร็วที่ผิวแผ่นเรียบ

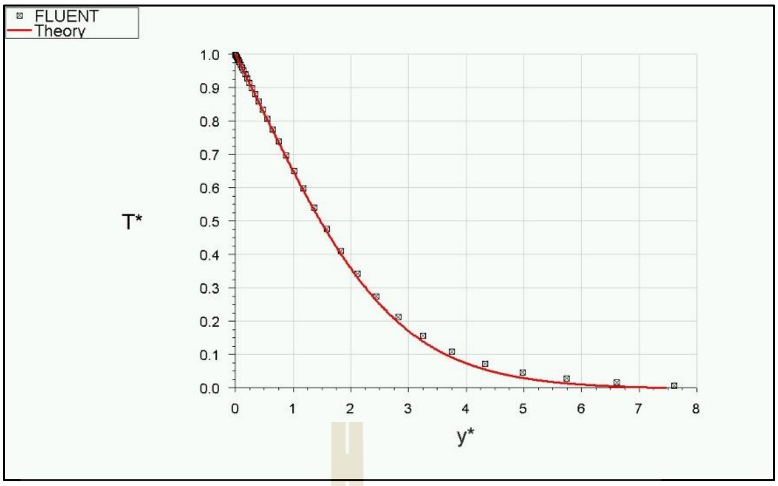


รูปที่ 3.10 เส้นระดับอุณหภูมิที่ผิวแผ่นเรียบ

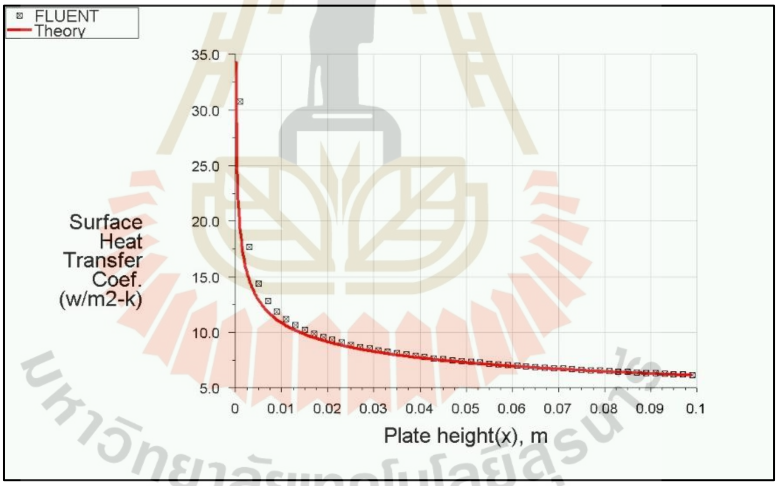
เมื่อนำผลจากการคำนวณมาเปรียบเทียบกับค่าที่หาได้จากผลเฉลยของตัวแปรเสมือน (Similarity solutions) จะได้ผลดังรูปที่ 3.11 ถึง 3.13



รูปที่ 3.11 เปรียบเทียบรูปเสี้ยวของความเร็วที่ทางออกแผ่นเรียบของการไหลแบบพาความร้อนอิสระ



รูปที่ 3.12 เปรียบเทียบรูปแบบของอุณหภูมิที่ทางออกแผ่นเรียบของการไหลแบบพาความร้อนอิสระ



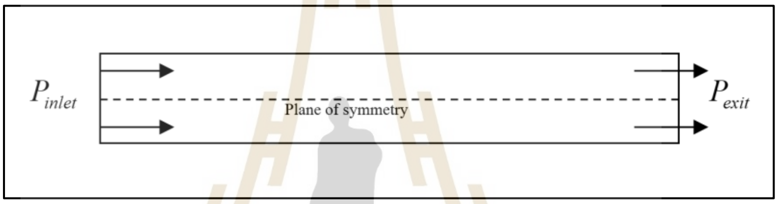
รูปที่ 3.13 เปรียบเทียบรูปแบบค่า Skin friction ทางทฤษฎีบนแผ่นเรียบของการไหลแบบพาความร้อนอิสระ

จากรูปข้างต้นได้แสดงค่าของความเร็ว อุณหภูมิ และสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน โดยนำค่ามาเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎี ซึ่งปรากฏว่าได้ค่าที่คล้ายกันมากโดยมีความแตกต่างกันบ้าง ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าโปรแกรม FLUENT มีความสามารถที่จะแก้ปัญหาได้อย่างแม่นยำพอสมควร ข้อแตกต่างเล็กน้อยที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าทางทฤษฎีที่อาจจะเนื่องมาจากการกำหนดค่าคุณสมบัติต่าง ๆ การกำหนดเงื่อนไขขอบเพื่อให้เกิดความเหมาะสม

และสอดคล้องกับปัญหารวมไปถึงโดเมนที่ต้องการศึกษาล้วนมีผลต่อคำตอบที่ได้ทั้งสิ้น ซึ่งน่าจะสามารถแก้ไขได้ไม่ยากนัก ทั้งนี้โปรแกรม FLUENT ที่ทำการทดสอบนั้นเป็นเวอร์ชัน 5.5.14 โดยที่ปัจจุบันได้พัฒนาไปถึงเวอร์ชัน ANNSYS FLUENT ซึ่งได้เพิ่มความสามารถในการแก้ปัญหารวมทั้งการตั้งเงื่อนไขต่าง ๆ ได้อย่างหลากหลายมากขึ้นไปอีก ทั้งในระดับสองมิติและสามมิติ จึงเห็นควรที่จะนำมาศึกษาเพื่อใช้แก้ปัญหาตามความต้องการได้ต่อไป

3.4.3 การไหลในท่อกลม

จุดประสงค์ของปัญหานี้เพื่อทดสอบการไหลแบบราบเรียบในท่อกลมโดยพิจารณาเป็นการไหลในสองมิติผ่านท่อหน้าตัดกลมรัศมี 0.02647 เมตร ความยาวของท่อ 9.144 เมตร โดยขอบเขตของปัญหาแสดงดังรูปที่ 3.14

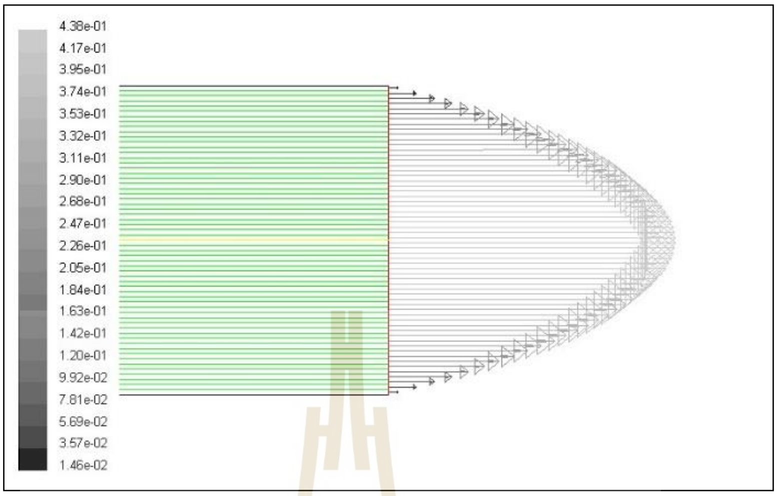


รูปที่ 3.14 ขอบเขตของปัญหาการไหลในท่อ

อากาศที่มีความหนาแน่น 1.1133 kg/m^3 และความหนืด 1.9332×10^{-5} kg/m-s ที่ความดันบรรยากาศ โดยการกำหนดค่าความดันทางเข้า (P_{inlet}) สูงกว่าที่จะทำให้เกิดความดันแตกต่างเริ่มต้น (ΔP_i) ที่ค่าต่าง ๆ ในย่านการไหลแบบราบเรียบ กริดที่ใช้ในการคำนวณภายในท่อแสดงในรูปที่ 3.15

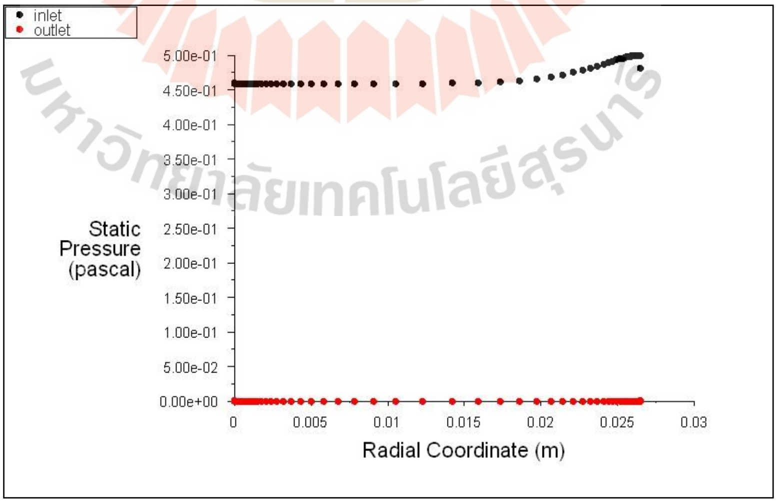
รูปที่ 3.15 กริดสำหรับปัญหาการไหลในท่อ

ด้วยการกำหนดค่าเงื่อนไขต่าง ๆ เพื่อใช้ในการคำนวณได้ผลดังนี้

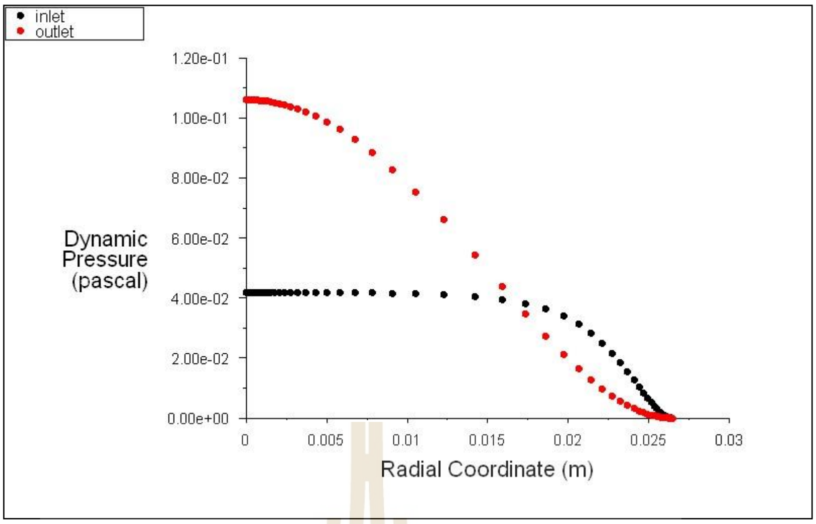


รูปที่ 3.16 เวคเตอร์ความเร็วด้านทางออก

จากรูปที่ 3.16 แสดงค่าเวคเตอร์ความเร็วที่ทางออกท่อการไหลที่ความดันตกคร่อมเริ่มต้น 0.5 Pa ภายหลังการคำนวณพบว่า ค่าความดันสถิตย์และความดันจลน์ที่ทางเข้าและทางออกมีการเปลี่ยนแปลง ดังแสดงในรูปที่ 3.17 และรูปที่ 3.18

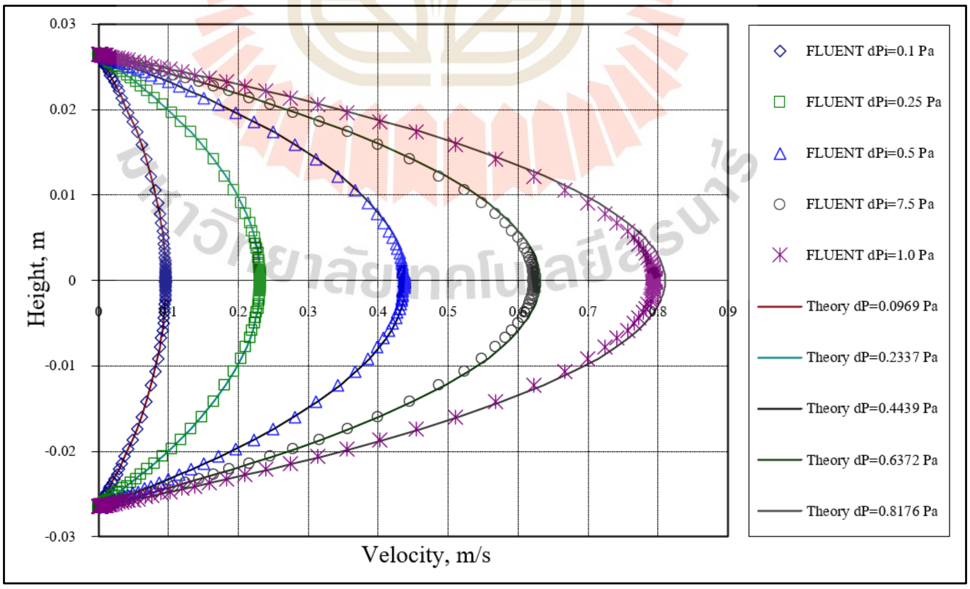


รูปที่ 3.17 ความดันสถิตย์ตามแนวรัศมี



รูปที่ 3.18 ความดันจลน์ตามแนวรัศมี

ทั้งนี้เพื่อเปรียบเทียบค่ารูปแบบของความเร็วกับทางทฤษฎี Poiseuille's flow ที่ความดันตกคร่อมเดียวกันที่เกิดขึ้นภายหลังการคำนวณ แสดงดังรูปที่ 3.19 พบว่าได้ค่าที่สอดคล้องกันอย่างดีโดยเฉพาะที่ค่าความดันตกคร่อมต่ำ ๆ



รูปที่ 3.19 เปรียบเทียบรูปเสี้ยวของความเร็วกับทางทฤษฎีที่ความดันตกคล่อมเดียวกัน

3.4.4 การถ่ายโอนมวลสารด้วยการพา

พิจารณาการไหลผ่านแผ่นราบเพื่อเทียบสอบชั้นชิดผิวของความหนาแน่นมวล ในย่านการไหลของอากาศแบบราบเรียบ โดยกำหนดให้แผ่นเรียบมีค่าสัดส่วนมวลของ H_2O เป็น 1 มีความกว้างมากเพื่อพิจารณาในสองมิติ มีรูปแบบของความเร็วของอากาศแบบเอกรูป ณ ทางเข้า $x = 0$ ด้วยเงื่อนไขของตัวแปรไร้มิติเหล่านี้ คือ $Re_L = 6.4\times10^3$, $Pr = 0.7089$, และ $Sc = 0.6$

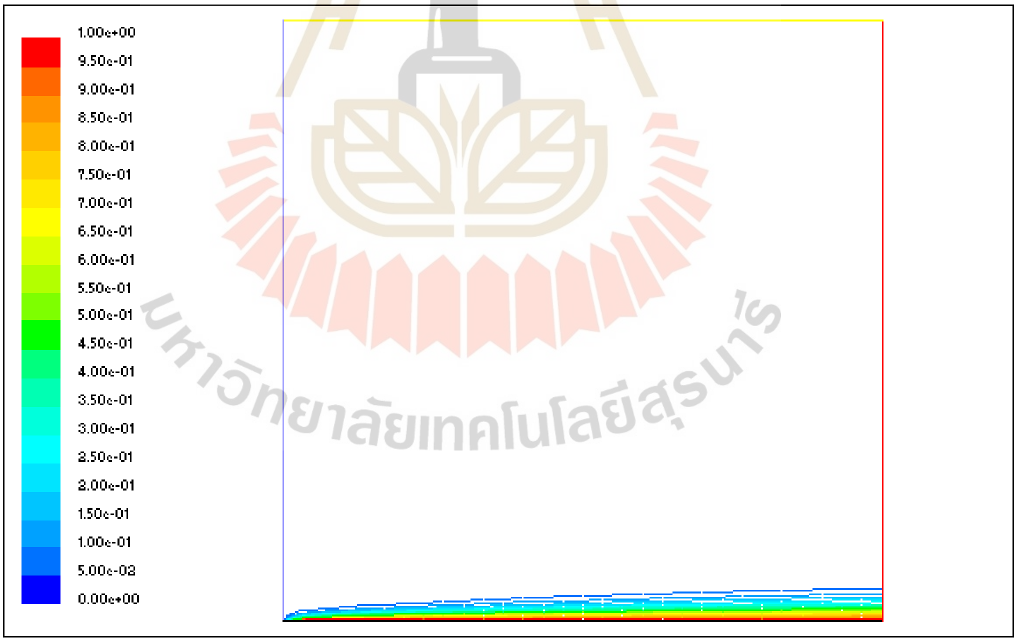
ด้วยเงื่อนไขข้างต้นสามารถกำหนดคุณสมบัติการไหลของอากาศที่ความเร็ว 0.1 m/s ได้ดังนี้

$\rho = 1.1774$ kg/m^3 $\quad c_p = 1.0057$ kJ/kg-ºC

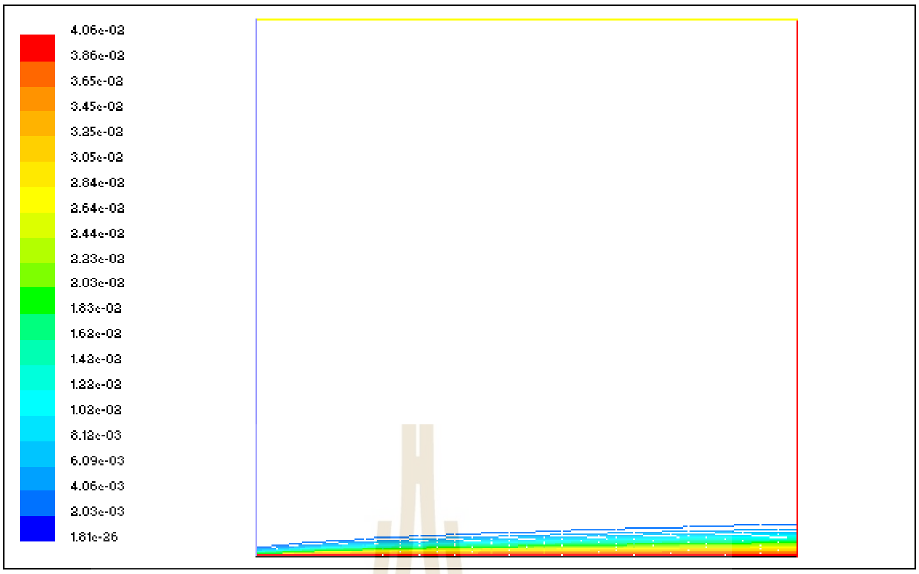
$\mu = 1.8462\times10^{-5}$ kg/m-s $\quad k = 26.24\times10^{-3}$ W/m-ºC

$\nu = 1.569\times10^{-5}$ m^2/s $\quad \alpha = 0.22160$ m^2/s

คำนวณโดยอาศัยแบบจำลองการถ่ายเทพันธุมวล (Species equations) ที่ความดันบรรยากาศ แสดงเส้นสัดส่วนมวลของ H_2O ในรูปที่ 3.20 และแสดงเส้นความหนาแน่นโมลของ H_2O ในรูปที่ 3.21

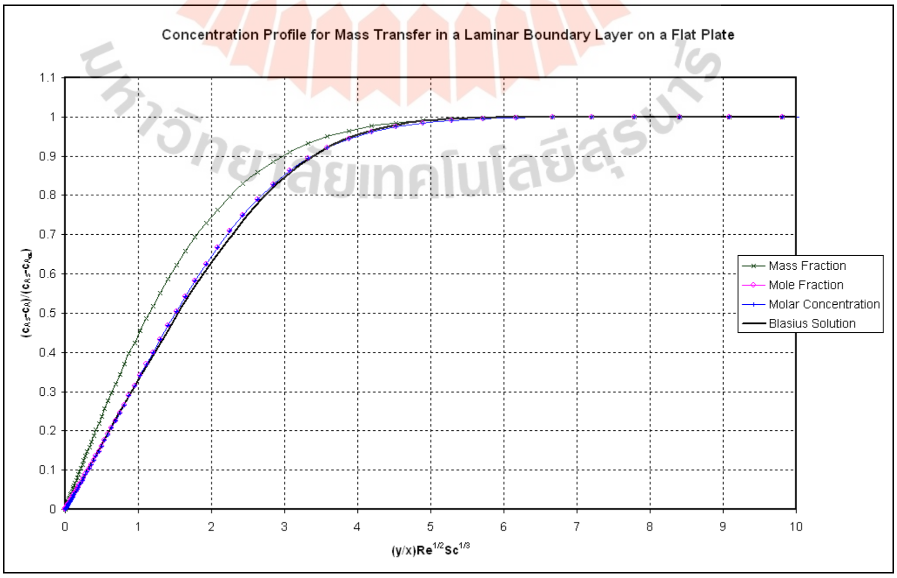


รูปที่ 3.20 เส้นสัดส่วนมวลของ H_2O



รูปที่ 3.21 เส้นความหนาแน่นโมลของ H_2O (kmol/m^3)

เมื่อพิจารณารูปเสี้ยวความหนาแน่นสำหรับการถ่ายเทมวลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบบนแผ่นเรียบเทียบกับรูปแบบคำตอบของ Blasius แสดงดังรูปที่ 3.22 พบว่า รูปแบบของสัดส่วนโมล(Mole fraction) และความหนาแน่นโมล (Molar concentration) ให้ผลสอดคล้องกว่าค่าสัดส่วนมวลของ H_2O

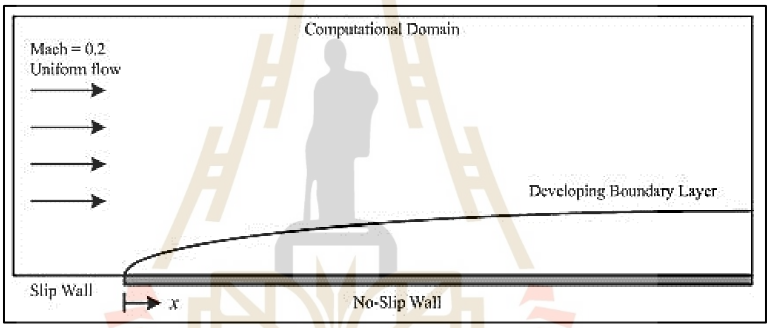


รูปที่ 3.22 รูปเสี้ยวความเข้มข้นสำหรับการถ่ายเทมวลในชั้นชิดผิวแบบราบเรียบบนแผ่นราบ

3.4.5 การไหลผ่านชั้นผิวบางแบบปั่นป่วน

การทดสอบความถูกต้องนี้กระทำโดยเปรียบเทียบค่าความเสียดทานของผิว (Skin friction) และข้อมูล Law-of-the-wall ของแบบจำลองความปั่นป่วนใน FLUENT โดยมุ่งเน้นไปที่ความสามารถขั้นพื้นฐานของแต่ละแบบจำลองการปั่นป่วนเพื่อแก้ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนของชั้นชิดผิวอย่างง่าย การทดสอบแต่ละกรณีประกอบไปด้วย การศึกษาการลู่เข้าของการคำนวณ, การศึกษากริดที่เหมาะสม, การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของ CFD กับข้อมูลทางทฤษฎี/ข้อมูลการทดลอง และการใช้งานแบบจำลองความปั่นป่วนในหลากหลายรูปแบบ

การไหลนี้เป็นการไหลในชั้นผิวบางผ่านแผ่นเรียบ กำหนดให้ความเร็วตรงทางเข้ามีค่า Mach number เท่ากับ 0.2 และมีความดัน 101,325 Pa มีอุณหภูมิ 300 K และความเร็วเข้าเป็นความเร็วเอกรูป (Uniform flow) ดังแสดงในรูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 โดเมนการคำนวณสำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบแบบปั่นป่วน

จากข้อมูลข้างต้นสามารถแสดงความคุณสมบัติอื่น ๆ ของของไหลได้ดังนี้

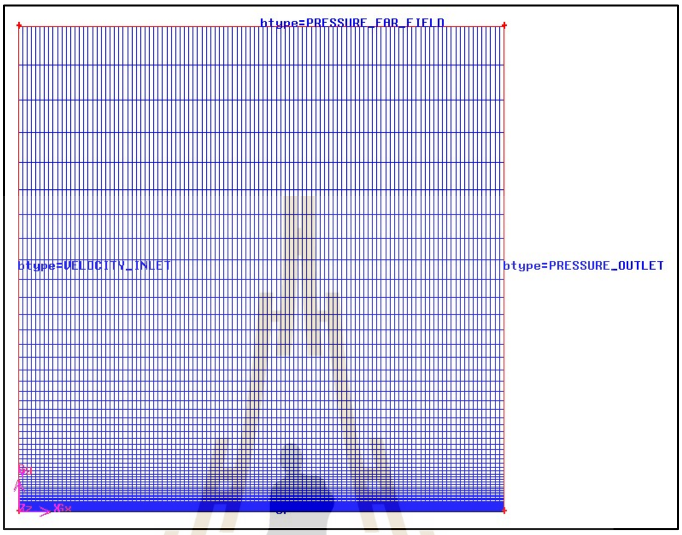
Properties of dry air at standard atmospheric pressure, $T = 300$K

$\rho = 1.225$ kg/m^3	$c_p = 1.00643$ kJ/kg-ºC
$\mu = 1.7894\times10^{-5}$ kg/m-s	$k = 24.2\times10^{-3}$ W/m-ºC
$\nu = 1.4607\times10^{-5}$ m^2/s	Pr = 0.711

จากนิยามของค่า Mach number จะได้ความเร็วของอากาศที่ทางเข้าเป็น 70 m/s เมื่อคำนวณค่า Local Reynolds number ที่ความยาวของแผ่นเรียบ 5 เมตร จะได้เป็น

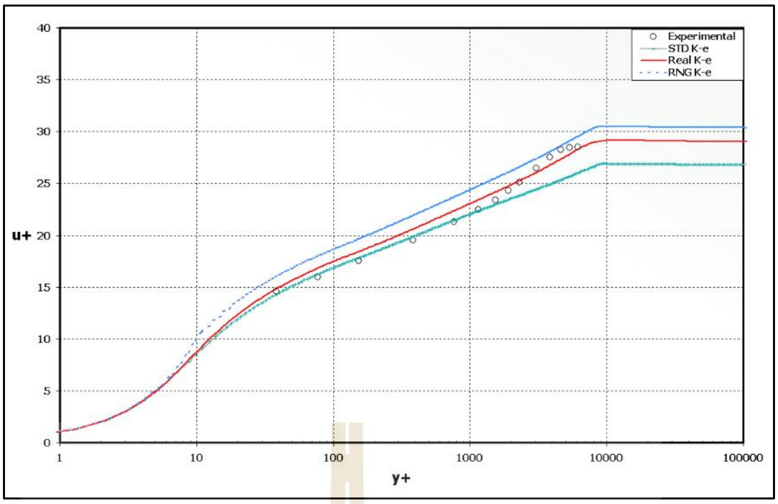
$$\mathrm{Re}_L = UL/\nu = 23960545.43 > 3\times10^6 \qquad \text{(Turbulent boundary layer)}$$

ขนาดของโดเมนที่ใช้ในการพิจารณาในเบื้องต้นนี้ใช้โดเมนขนาด 5×5 ตารางเมตร กริดที่ใช้ในการคำนวณมีขนาด 201×351 กริด โดยในทางแกน y ได้เพิ่มจำนวนกริดบริเวณติดกับแผ่นเรียบ กำหนดเป็นช่วงชั้นผิวบาง

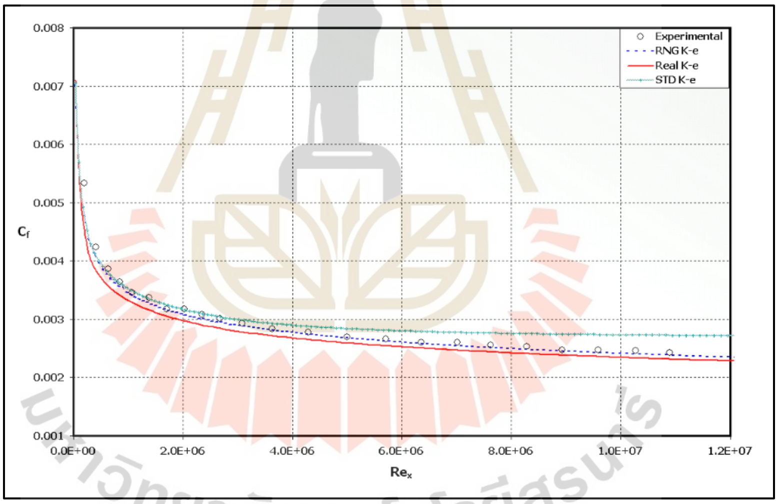


รูปที่ 3.24 กริดการคำนวณกรณีการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นราบ

การคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นบางเป็นไปในทิศทางที่ดีสำหรับการทดสอบเบื้องต้นสำหรับการศึกษาแบบจำลองความปั่นป่วน แบบจำลองความปั่นป่วนที่ดีควรมีความสามารถในการเปรียบเทียบได้ดีกับค่ารูปแบบมาตรฐาน (Law-of-the-wall profile) เปรียบเทียบผลลัพธ์ทาง CFD กับข้อมูลการทดลองในรูปแบบมาตรฐานแสดงในรูปที่ 3.25 ซึ่งข้อมูลการทดลองได้จาก Wieghardt and Tillman (1951) ค่าโปรไฟล์ของการคำนวณนำมาจากบริเวณด้านท้ายของแผ่นราบ ในบริเวณส่วนชั้นราบเรียบ (The laminar sub layer region) ผลจากแต่ละแบบจำลองเป็นแนวเดียวกัน ที่ค่า $y+$ จาก 10 ขึ้นไป แบบจำลองแต่ละชนิดเริ่มแสดงความแตกต่างบางอย่าง ค่าแรงเสียดทานของผิวกับค่าตัวเลขเรย์โนล์ดสำหรับแต่ละแบบจำลองความปั่นป่วนแสดงในรูปที่ 3.26 แบบจำลองความปั่นป่วนเปรียบเทียบกับข้อมูลจากการทดลองโดย Wieghardt and Tillman (1951) สำหรับแผ่นราบเรียบพบว่า แบบจำลองมาตรฐาน k-ε, แบบจำลอง Realizable k-ε และแบบจำลอง Renormalization-group (RNG) k-ε สามารถทำนายให้ผลลัพธ์ที่ได้คล้ายกันมากกับข้อมูลการทดลอง แต่ RNG ให้ผลในภาพรวมที่ดีกว่าแบบอื่น



รูปที่ 3.25 เปรียบเทียบข้อมูลของ Law-of-the-wall



รูปที่ 3.26 เปรียบเทียบค่า Skin friction ทางทฤษฎี

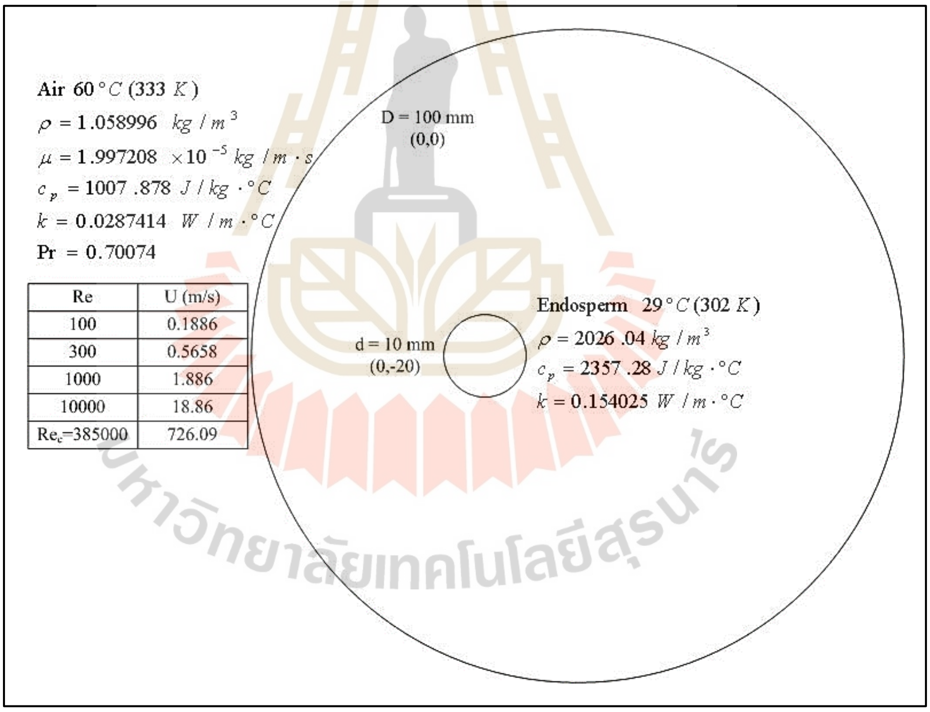
3.4.6 การไหลผ่านวัตถุทรงกลม

เป็นการจำลองการไหลผ่านวัตถุทรงกลมในสามมิติเพื่อสอบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนของแบบจำลองการไหลแบบต่าง ๆ กับสมการปฏิสัมพันธ์ทางวิศวกรรม (Engineering correlation) อ้างอิง (Holman, 1997) โดยจำลองทรงกลมขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 mm อุณหภูมิคงที่ที่ 29ºC มีคุณสมบัติเป็นเนื้อข้าว (Endosperm) คือมีค่า ρ = 2026.04 kg/m^3, c_p = 2357.28 kJ/kg-ºC, และ k = 0.154025 W/m-ºC อยู่ภายใต้การไหลของอากาศร้อนอุณหภูมิ 60 ºC

ที่กำหนดความเร็วการไหลด้วยค่าตัวเลขเรย์โนลด์ (Re) ดังแสดงในตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของอากาศและขอบเขตของปัญหาแสดงในรูปที่ 3.27

ตารางที่ 3.1 ความเร็วของการไหลที่ทดสอบตามค่าตัวเลขเรย์โนลด์

Re	***U* (m/s)**
100	0.1886
300	0.5658
1000	1.886
10000	18.86
$\mathrm{Re}_c = 385000$	726.09



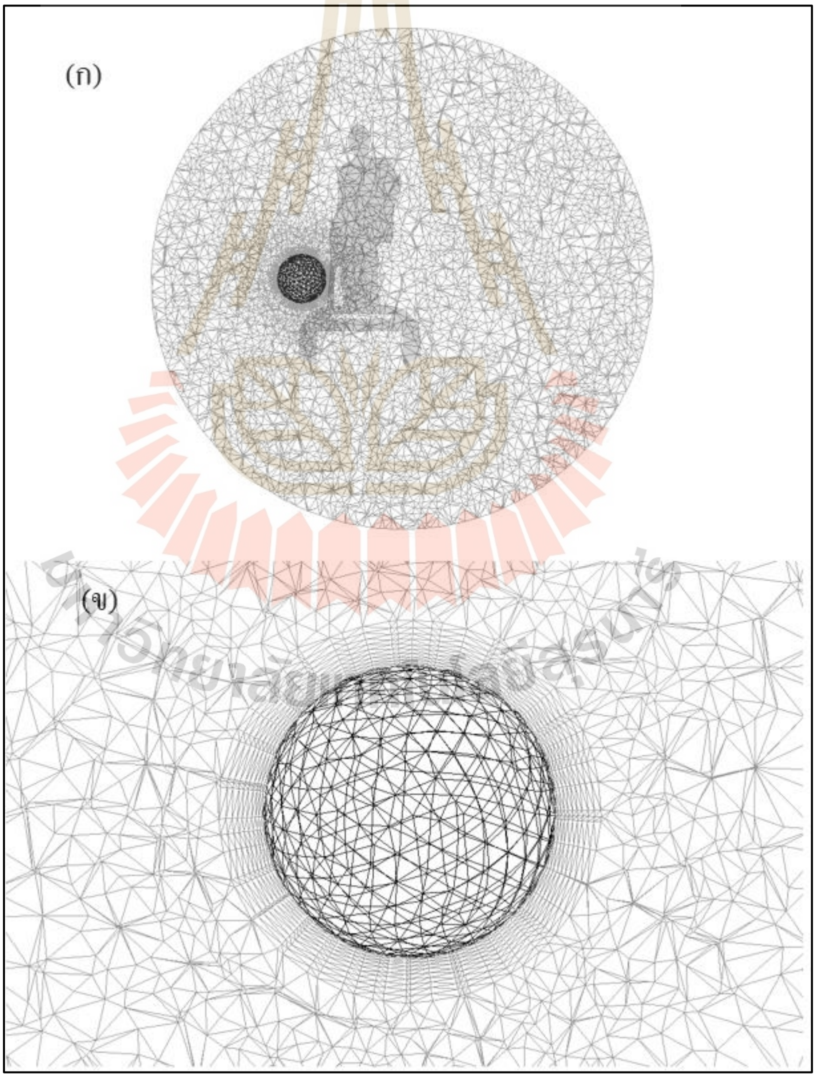
รูปที่ 3.27 ขอบเขตของปัญหาการไหลผ่านทรงกลม

เพื่อทดสอบขนาดของกริดการคำนวณต่อแบบจำลองต่าง ๆ ได้แก่ แบบจำลองแบบราบเรียบและแบบจำลองแบบปั่นป่วน ได้กำหนดขนาดกริดทดสอบไว้ 2 แบบ ดังตารางที่ 3.2 โดยลักษณะของกริดแสดงในรูปที่ 3.28 และรูปที่ 3.29 ทั้งนี้จะใช้กริดหยาบสำหรับแบบจำลอง

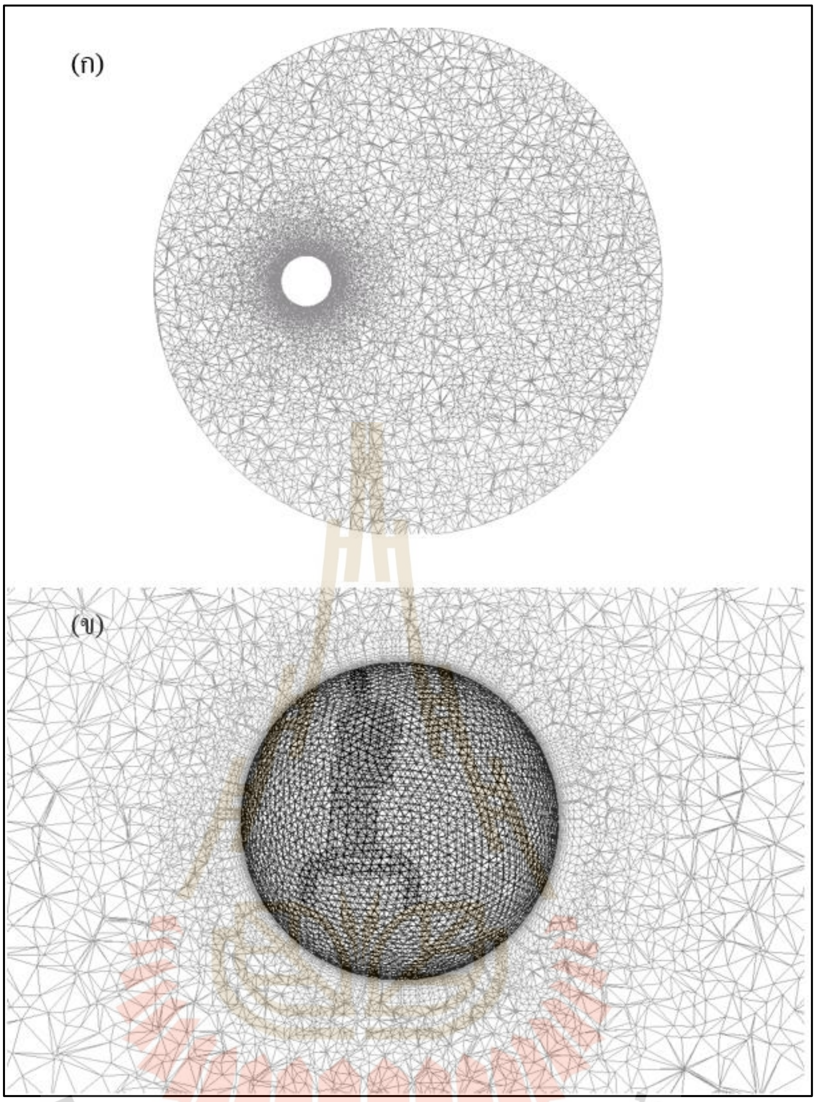
แบบราบเรียบเท่านั้น ส่วนกริดละเอียดจะใช้ทดสอบทั้งแบบจำลองแบบราบเรียบและแบบจำลองแบบปั่นป่วน 3 แบบ คือ Spalart-Allmaras (S-A) model, k - ε model, และ k - ω model

ตารางที่ 3.2 รายละเอียดกริดการคำนวณ

กริด (Grid)	**แบบหยาบ (Coarse)**	**แบบละเอียด (Finer)**
ระยะโนดแรกจากผิว (mm)	0.1	0.0001
จำนวนเซล (Cells)	231,034	607,773
จำนวนโนด (Nodes)	43,156	163,535

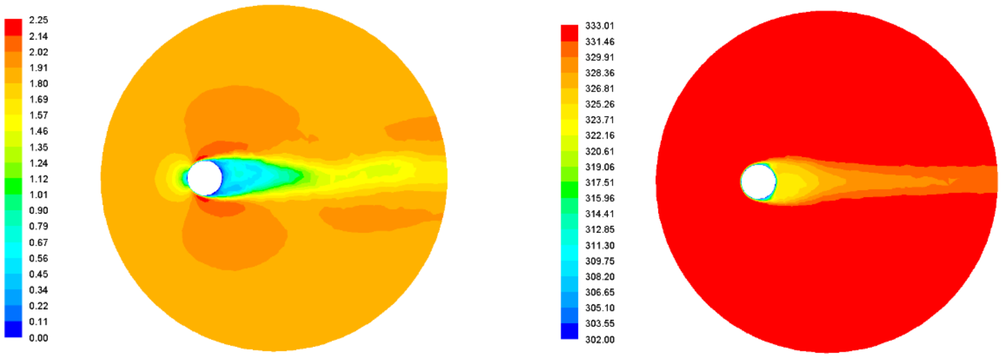


รูปที่ 3.28 กริดโดเมนแบบหยาบ

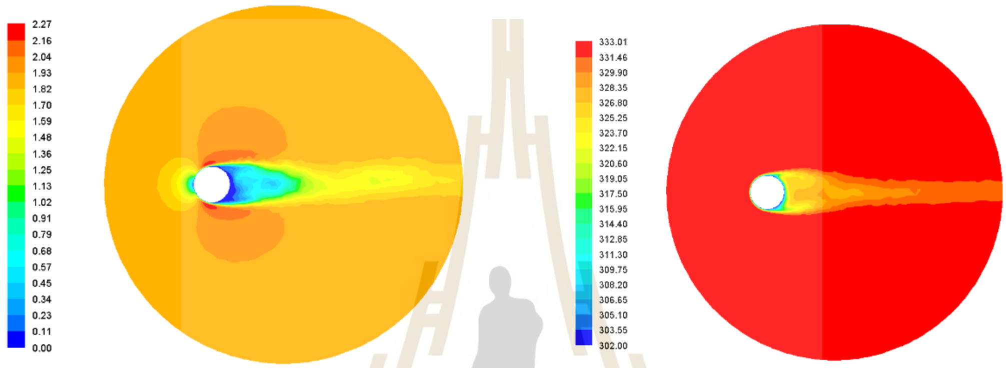


รูปที่ 3.29 กริดโดเมนแบบละเอียด

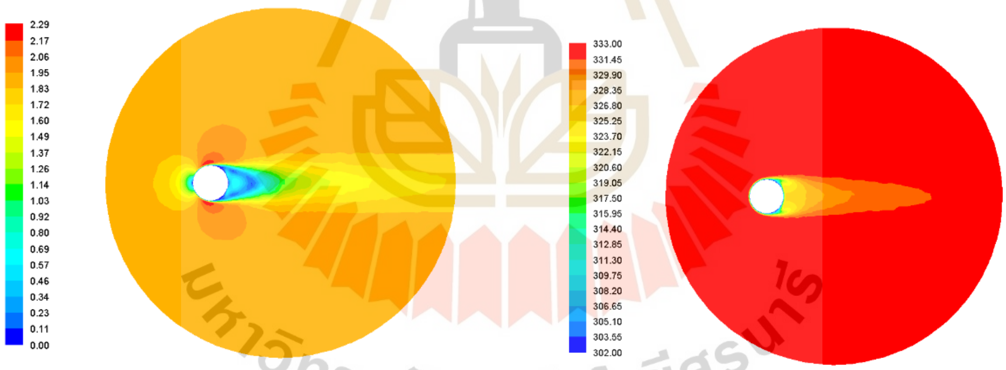
ตัวอย่างเส้นระดับของความเร็วและอุณหภูมิของการทดสอบแบบจำลองต่าง ๆ แสดงในรูปที่ 3.30



(ก) Coarse grid; Laminar; Re = 10^3



(ข) Finer grid; Laminar; Re = 10^3



(ค) Finer grid; S-A model; Re = 10^3

รูปที่ 3.30 ตัวอย่างเส้นระดับความเร็ว (m/s) เส้นระดับอุณหภูมิ (K) ของการจำลองแบบ

ทั้งนี้ได้เปรียบเทียบค่าตัวเลขนัสเซล (Nusselt number) ของการจำลองแบบต่าง ๆ กับสมการปฏิสัมพันธ์ทางวิศวกรรมอ้างอิงจาก Holman (1997) กล่าวถึงปฏิสัมพันธ์ทางทฤษฎีและการทดลองสำหรับการพาความร้อนแบบบังคับ โดย McAdams (1954) แนะนำความสัมพันธ์สำหรับการถ่ายเทความร้อนจากทรงกลมไปยังของไหลที่ไหลตัว ดังนี้

$$Nu_D = 0.37Re_D^{0.6} \qquad \text{สำหรับ } 17 < Re_D < 70000 \qquad (3.4)$$

จาก Welty, Wicks, and Wilson (1983) สำหรับทรงกลมเดี่ยวปฏิสัมพันธ์ที่นำเสนอโดย Whitaker (1972) ที่แนะนำสำหรับเงื่อนไข: $0.71 < \mathrm{Pr} < 380$, $3.5 < \mathrm{Re}_D < 7.6\times10^4$, $1.0 < \mu_\infty / \mu_s < 3.2$ โดยค่าคุณสมบัติต่าง ๆ หาจากที่ค่าอุณหภูมิ T ของอากาศยกเว้น μ_s ที่หาจากค่าอุณหภูมิผิว ซึ่งปฏิสัมพันธ์ของ Whitaker คือ

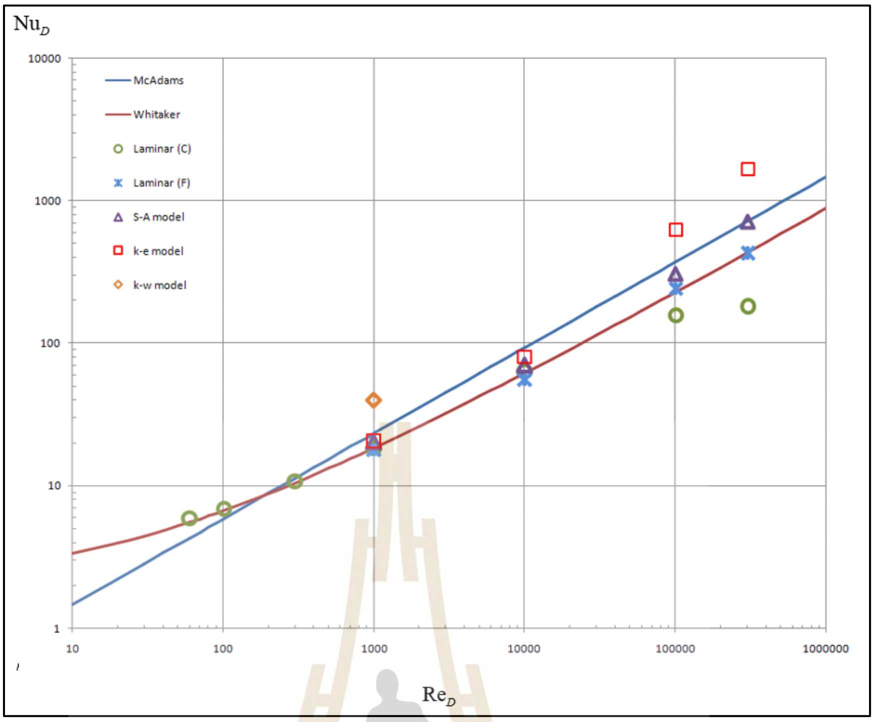
$$\mathrm{Nu}_D = 2 + (0.4\mathrm{Re}_D^{1/2} + 0.06\mathrm{Re}_D^{2/3})\mathrm{Pr}^{0.4}(\mu_\infty / \mu_s)^{1/4} \tag{3.5}$$

ค่าเปรียบเทียบจากสมการปฏิสัมพันธ์ดังสมการที่ 3.4 และสมการที่ 3.5 กับแบบจำลองที่ทดสอบแสดงในตารางที่ 3.3 และแสดงกราฟเปรียบเทียบในรูปที่ 3.31

ตารางที่ 3.3 ค่าตัวเลขนัทเซลเปรียบเทียบ

Re$_D$	**Nu$_D$**		**Coarse**	**Finer (ตารางที่ 3.2)**			
	Eq. (3.4)	**Eq. (3.5)**	**Laminar**	**Laminar**	**S-A**	***k-ε***	***k-ω***
60	4.31	5.55	5.98	-	-	-	-
100	5.86	6.67	6.98	-	-	-	-
300	11.33	10.50	10.91	-	-	-	-
1000	23.35	18.48	18.61	17.95	20.27	20.50	39.69
10000	93.94	61.95	64.17	56.05	70.03	80.60	n/a
100000	370.00	227.97	158.96	245.34	306.87	635.00	n/a
300000	715.28	433.14	181.00	427.72	712.48	1685.83	n/a

จากรูปที่ 3.31 พบว่า แบบจำลองแบบราบเรียบที่ใช้กริดละเอียดให้ค่าที่สอดคล้องกับสมการปฏิสัมพันธ์ที่สอง (สมการที่ 3.5) รวมถึงแบบจำลองความปั่นป่วนแบบ Spalart-Allmaras ทั้งนี้เนื่องจากย่านการไหลที่ทดสอบยังอยู่ในช่วงไม่เกินค่าความเร็ววิกฤติ โดยแบบจำลอง *k-ω* ไม่สามารถหาค่าทดสอบได้เมื่อค่าตัวเลขเรย์โนลด์ที่ทดสอบมากกว่า 1,000 เนื่องจากไม่มีการลู่เข้าของค่าคำตอบจากแบบจำลอง



รูปที่ 3.31 กราฟเปรียบเทียบค่า Nu_D กับ Re_D ของแบบจำลองทดสอบ

3.5 สรุปผลการวิจัย

การสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาทางวิศวกรรมด้วยการคำนวณเชิงตัวเลขเปรียบเทียบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้กับค่าการคำนวณทางทฤษฎีหรือค่าจากการทดลองสำหรับปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ พบว่าได้ค่าที่สอดคล้องกันพอสมควร สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วนที่ทดสอบสำหรับปัญหาการไหลในชั้นชิดผิวแบบจำลอง k-ε ทั้งสามแบบให้ค่าที่สอดคล้องอย่างดีกับค่าอ้างอิง ในปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกลมในสามมิติแบบจำลอง Spalart-Allmaras มีแนวโน้มที่สอดคล้องกับปฏิสัมพันธ์อ้างอิงมากที่สุด ทั้งนี้นอกจากการเลือกใช้แบบจำลองให้เหมาะสมกับปัญหาแล้วยังต้องคำนึงถึงรูปแบบของโดเมน ขนาดของกริด การกำหนดเงื่อนไขให้แบบจำลอง และย่านการไหลที่ใช้โดยประกอบกันเพื่อให้เกิดความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ดังนั้นในการวิจัยต่อไปจะใช้แบบจำลอง Spalart-Allmaras เป็นหลัก

3.6 รายการอ้างอิง

Holman, J. P. (1997). **Heat transfer** (8th ed.). New York: McGraw-Hill.

Jones, W. P., and Launder, B. E. (1972). The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 15: 301-314.

McAdams, W.H. (1954). **Heat Transmission**. New York: McGraw-Hill.

Menter, F., and Esch, T. (2001). Elements of industrial heat transfer predictions. **'COBEM 2001, 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering**.

Schlichting, H. (2004). **Boundary-Layer Theory**. Springer. ISBN 978-3-540-66270-9.

Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. (1992). **A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows**. AIAA Paper 92-0439.

Welty, J.R., Wicks, C.E., and Wilson, R.E. (1983). **Fundamentals of momentum, heat, and mass transfer** (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Whitaker, S. 1972. Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres, and for flow in packed beds and tube bundles. **American Institute of Chemical Engineers Journal**. 18(2): 361-371.

Wieghardt, K., and Tillman, W. (1951). **On the Turbulent Friction Layer for Rising Pressure**. NACA TM-1314.

บทที่ 4
การวิเคราะห์สมการการอบแห้งวัสดุแบบชิ้นเดียว

4.1 บทคัดย่อ

การสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในวัสดุชื้นภายใต้เงื่อนไขสภาวะการอบแห้งของอากาศคงที่ มีช่วงสมการของการอบแห้งแบ่งเป็นสองช่วง คือ ช่วงอัตราการอบแห้งคงที่ ในกรณีที่ค่าความชื้นเฉลี่ยเริ่มต้นของวัสดุมีค่าสูงกว่าค่าความชื้นวิกฤต และช่วงอัตราการอบแห้งลดลงที่ค่าความชื้นเฉลี่ยของวัสดุอยู่ต่ำกว่าค่าความชื้นวิกฤตแต่ไม่ต่ำกว่าค่าความชื้นสมดุล สมการแบบจำลองที่ได้จะแสดงการประยุกต์ใช้สำหรับการหาค่าการการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ดข้าวที่เปลี่ยนแปลงในระหว่างกระบวนการอบแห้ง

4.2 บทนำ

การศึกษากระบวนการเปลี่ยนแปลงภายในเมล็ดพืชเมล็ดเดียวแทนกลุ่มเมล็ดจำนวนมากถึงผลการเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิและความชื้นในระหว่างขั้นตอนกระบวนการอบแห้งและการพักช่วยให้เราเข้าใจได้ถึงผลกระทบของค่าตัวแปรที่ใช้ในกระบวนการอบแห้งและการพัก ทั้งนี้แม้เมล็ดจะอยู่ในกลุ่มกองก็จะได้รับการสัมผัสจากอากาศอบแห้งได้เช่นเดียวกัน เสมือนว่าเมล็ดถูกลดความชื้นอยู่ภายในกอง ดังนั้นค่าคุณภาพของเมล็ดข้าวหนึ่งเมล็ดก็ย่อมจะสามารถแทนค่าคุณภาพของทั้งหมดได้เช่นกัน

หากพิจารณาจำนวนงานวิจัยทั้งทางทฤษฎีและการทดลองที่ผนวกเข้าด้วยกัน เพื่ออธิบายกระบวนการลดความชื้นของเมล็ดพืชแล้ว Luikov (1966) พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการอบแห้งของวัสดุพรุน โดยมีนักวิจัยได้นำมาประยุกต์ใช้สำหรับการอบแห้งเมล็ดพืช Jia et al. (2000) นำแบบจำลองของ Luikov มาใช้พิจารณาผลกระทบของพฤติกรรมเชิงความร้อนของเมล็ด อุณหภูมิภายในและปริมาณความชื้น เพื่อไปเพิ่มความถูกต้องในการคำนวณการอบแห้ง อย่างไรก็ตาม การกำหนดสมมุติฐานบางประการ เช่น กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่และคุณสมบัติของวัสดุเป็นค่าคงที่ เพื่อให้การคำนวณสะดวกขึ้น ย่อมมีผลต่อความถูกต้องของการคำนวณ ในปัจจุบันความเป็นได้ของการระเหยของความชื้นภายในเมล็ดเป็นเรื่องที่สมควรในการพิจารณา นอกจากนี้ นักวิจัยบางท่านยังเห็นประโยชน์ของการพิจารณารูปแบบการกระจายตัวของความชื้น ในระหว่างการ อบแห้งและการพักที่คาดว่าจะมีผลต่อคุณภาพของผลิตภัณฑ์ท้ายสุด

จุดประสงค์สำหรับการศึกษาครั้งนี้จึงเป็นการศึกษาเพื่อสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการอบแห้งวัสดุชิ้นเดียวภายใต้สภาวะอากาศอบแห้งคงที่

4.3 วิธีดำเนินการวิจัย

4.3.1 การวิเคราะห์การอบแห้งก้อนวัสดุ

หากพิจารณาวัสดุชิ้นที่มีมวล S มีมวลแห้งเป็น S_d และมวลความชื้นเป็น W ค่าปริมาณความชื้น (มาตรฐานแห้ง) ของก้อนวัตถุนี้จะนิยามให้เป็น

$$M = \frac{W}{S_d} \tag{4.1}$$

ค่าปริมาณความชื้นของวัสดุยังสามารถเขียนในรูปเปอร์เซ็นต์มาตรฐานเปียกได้เป็น

$$M_w = \frac{100W}{S} \tag{4.2}$$

การเปลี่ยนจากค่า M มาเป็น M_w สามารถทำได้โดยอาศัยความสัมพันธ์

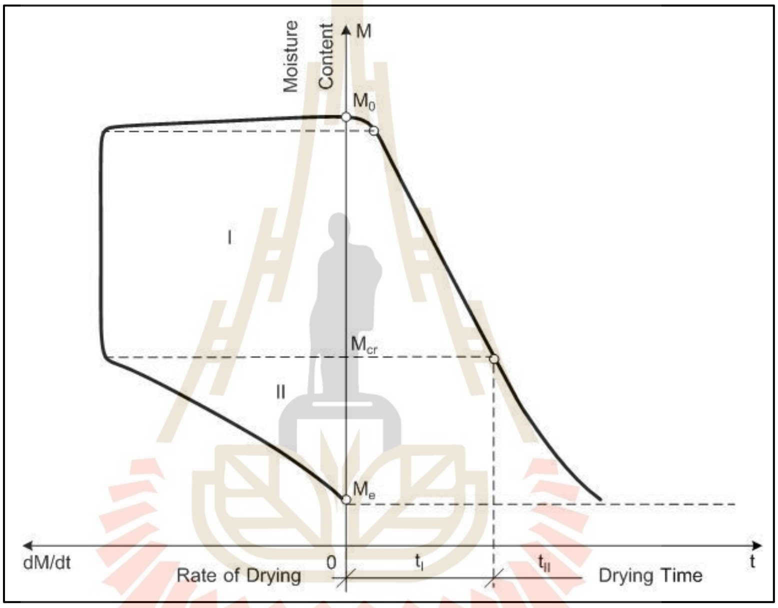
$$M_w = \frac{100M}{1+M} \tag{4.3}$$

และเปลี่ยนจาก M_w มาเป็น M :

$$M = \frac{M_w}{100-M_w} \tag{4.4}$$

ในการอบแห้งวัสดุโดยทั่วไป จะใช้อากาศร้อนเป็นตัวกลางในการอบแห้ง ความร้อนจะถ่ายเทจากอากาศไปยังผิววัสดุ โดยความร้อนส่วนใหญ่จะถูกใช้ไปในการระเหยตัวของน้ำเพื่อให้ไอน้ำเคลื่อนตัวออกจากผิววัสดุไปสู่อากาศ หากวัสดุมีมวลน้ำอิสระที่ผิวจำนวนมาก อุณหภูมิและความเข้มข้นของไอน้ำที่ผิวจะคงที่ ส่งผลให้อัตราการถ่ายเทความร้อนและอัตราการอบแห้งคงที่ไปด้วยโดยที่เงื่อนไขการอบแห้งของอากาศมีค่าคงที่ เมื่อผิวของวัสดุสูญเสียปริมาณน้ำไป

มากแล้ว อุณหภูมิและความเข้มข้นของไอน้ำที่ผิววัสดุย่อมเปลี่ยนแปลงไป โดยจะมีอุณหภูมิจะสูงขึ้นและความเข้มข้นจะลดลง ส่งผลให้อัตราการถ่ายเทความร้อนและอัตราการอบแห้งลดลง และเมื่อระยะเวลาการอบแห้งผ่านไปพอสมควรอัตราการอบแห้งก็จะเข้าสู่ศูนย์ และความชื้นของวัสดุจะเข้าสู่ความชื้นสมดุล M_e จึงสามารถแบ่งการอบแห้งออกได้เป็นสองช่วงโดยช่วงแรกจะเรียกว่า "ช่วงอัตราการอบแห้งคงที่" และช่วงที่สองเรียกว่า "ช่วงอัตราการอบแห้งลดลง" ค่าความชื้นที่อยู่ระหว่างช่วงที่สองนี้เรียกว่า "ความชื้นวิกฤต (M_{cr})" โดยค่าความชื้นที่อ้างถึงทั้งหมดนี้เป็นค่าความชื้นเฉลี่ยของวัสดุ

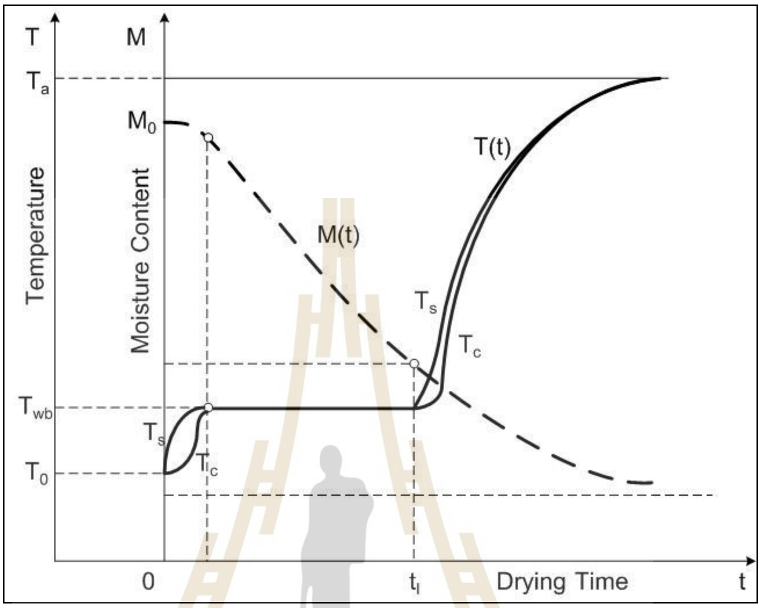


รูปที่ 4.1 เส้นโค้งการอบแห้งและอัตราการอบแห้ง *dM/dt*

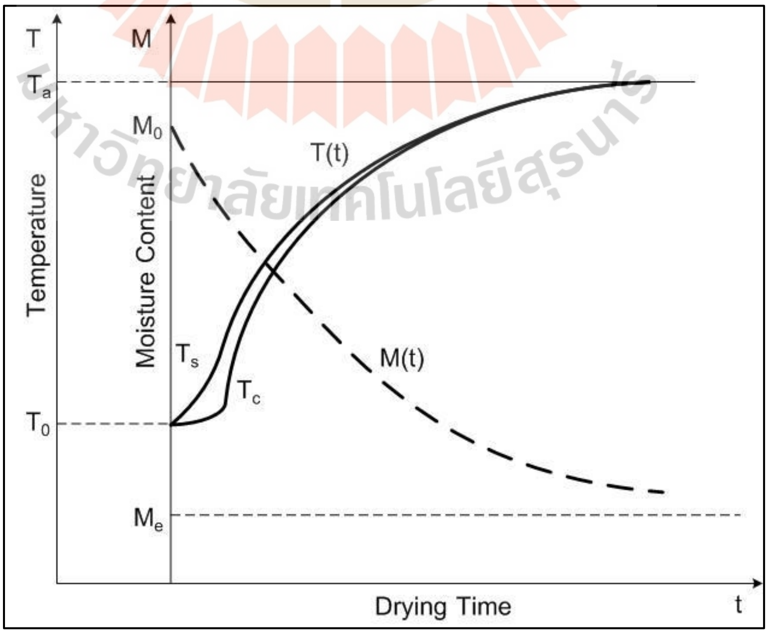
เส้นกราฟการอบแห้งและอัตราการอบแห้ง *dM/dt* แสดงในรูปที่ 4.1 ทั้งสองช่วงของการอบแห้ง (I, คงที่; II, ลดลง) ค่าอุณหภูมิ $T(t)$ และค่าความชื้น $M(t)$ ของวัสดุในระหว่างช่วงการอัตราการอบแห้งคงที่และลดลงแสดงในรูปที่ 4.2

ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ T_0 เข้าสู่ค่าอุณหภูมิกระเปาะเปียก T_{wb} และคงค่าที่ T_{wb} ในช่วงเวลาอัตราการอบแห้งคงที่ เมื่อเริ่มเข้าสู่ช่วงอัตราการอบแห้งลดลงค่าอุณหภูมิของวัสดุจึงเพิ่มค่าอย่างต่อเนื่อง หากดำเนินการอบแห้งต่อเนื่องไปพอสมควร ค่าอุณหภูมิ $T(t)$ จะเพิ่มค่าเข้าสู่ค่าอุณหภูมิ T_a ของอากาศอบแห้ง ในรูปที่ 4.2 ค่า T_s เป็นค่าอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุและค่า T_c เป็นค่าอุณหภูมิตรงกลางเนื้อวัสดุ

ค่าความชื้นและอุณหภูมิของวัสดุที่มีการอบแห้งในช่วงอัตราการอบแห้งลดลงเพียงอย่างเดียวแสดงในรูปที่ 4.3 ในกรณีนี้ค่าความชื้นเริ่มต้น M_0 ต้องมีค่าน้อยกว่าค่าความชื้นวิกฤต M_{cr} ซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่าคุณสมบัติของวัสดุรวมไปถึงเงื่อนไขการอบแห้งในตอนแรกด้วย



รูปที่ 4.2 อุณหภูมิ $T(t)$ และความชื้น M(t) ของวัสดุในระหว่างช่วงอัตราการอบแห้งคงที่และลดลง



รูปที่ 4.3 ความชื้น $M(t)$ และอุณหภูมิ $T(t)$ ของวัสดุในระหว่างช่วงอัตราการอบแห้งลดลง

4.3.2 ช่วงอัตราการอบแห้งคงที่

สมมุติฐาน "ถ้าความชื้นเริ่มต้น M_0 ของวัสดุที่อบแห้งภายใต้สภาวะเงื่อนไขคงที่มีค่ามากกว่าค่าความชื้นวิกฤต M_{cr} แล้วอัตราการอบแห้งของวัสดุจะคงที่เนื่องจากความชื้นที่ออกจากผิววัสดุจะมีค่าอัตราเดียวกันกับที่ผิวอิสระของน้ำภายใต้เงื่อนไขการอบแห้งคงที่ค่าเดียวกัน"

ข้อสรุปแรกจากสมมุติฐานข้างต้น คือ อุณหภูมิที่ผิวของวัสดุอบแห้งจะมีค่าเท่ากับค่าอุณหภูมิกระเปาะเปียก ดังนั้นในช่วงอัตราการอบแห้งคงที่จะได้ว่า

$$T_s = T_{wb} \tag{4.5}$$

ค่าการถ่ายเทความร้อนไปยังวัสดุผ่านชั้นผิวบางหาได้จาก $\dot{q} = h_t(t_a - t_s)$ เมื่อ h_t คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน หากไม่คิดการสูญเสียความร้อนแล้ว ปริมาณความร้อนที่ใช้ในการระเหยของน้ำจากวัสดุไปยังอากาศแวดล้อม สามารถคำนวณได้จาก

$$\dot{q} = -\dot{w}Q_{fg} \tag{4.6}$$

เมื่อ Q_{fg} คือ ค่าความร้อนแฝงของการกลายเป็นไอ

เมื่อรวมสมการข้างต้นเข้าด้วยกันผลที่ได้ดังสมการที่ 4.7 ซึ่งเป็นสมการการถ่ายเทของน้ำที่ใช้ในช่วงอัตราการอบแห้งคงที่

$$\dot{w} = -\frac{h_t}{Q_{fg}}(T_a - T_{wb}) \tag{4.7}$$

ข้อสรุปที่สองของสมมุติฐาน คือ หากเงื่อนไขการอบแห้งคงที่แล้วอุณหภูมิที่ผิวของวัสดุอบแห้งจะมีค่าเท่ากับค่าอุณหภูมิกระเปาะเปียกและจะต้องมีค่าคงที่ในระหว่างช่วงอัตราการอบแห้งคงที่

$$T_s = T_{wb} = \text{ค่าคงที่} \tag{4.8}$$

หากไม่พิจารณาการสูญเสียความร้อนแล้ว ค่าความร้อนที่ให้กับวัสดุอบแห้งจะใช้สำหรับการระเหยตัวของน้ำ ดังนั้น

$$\dot{Q}_d = \dot{Q}_v \tag{4.9}$$

เมื่อ $\dot{Q}_d$ คือ ความร้อนที่ให้กับวัสดุ

$\dot{Q}_v$ คือ ความร้อนที่ใช้สำหรับการระเหยตัวของน้ำจากวัสดุ

ความร้อนที่ให้กับวัสดุผ่านพื้นที่ A สามารถเขียนได้เป็น

$$\dot{Q}_d = A\dot{q}_d = h_t A(T_a - T_s) \tag{4.10}$$

แทนค่าจากสมการที่ 4.8 ลงในสมการที่ 4.10 จะได้

$$\dot{Q}_d = A\dot{q}_d = h_t A(T_a - T_{wb}) \tag{4.11}$$

สุดท้าย ค่าความร้อนที่ใช้สำหรับการระเหยตัวของน้ำจากวัสดุอบแห้ง จะเป็น

$$\dot{Q}_v = -\rho_{sd} V_{sd} Q_{fg} \left(\frac{dM}{dt} \right)_I \tag{4.12}$$

เมื่อ ρ_{sd} คือ ความหนาแน่นของส่วนวัสดุแห้ง

V_{sd} คือ ปริมาตรของส่วนวัสดุแห้ง

dM/dt คือ อัตราการอบแห้งในช่วงการอบแห้งคงที่

เทอม $\rho_{sd} V_{sd}$ มีค่าเท่ากับมวลแห้ง S_d ของวัสดุแห้ง แทนค่าจากสมการที่ 4.11 และสมการที่ 4.12 ลงในสมการที่ 4.9 จะได้

$$\left(\frac{dM}{dt} \right)_I = -\frac{h_t A}{S_d Q_{fg}} (T_a - T_{wb}) \tag{4.13}$$

แทนค่าจากสมการที่ 4.7 ลงในสมการที่ 4.13 จะได้สมการการอบแห้งในช่วงอัตราการอบแห้งคงที่

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_I = \frac{A}{S_d}\dot{w} \tag{4.14}$$

4.3.3 ช่วงอัตราการอบแห้งลดลง

สมมุติฐาน “ถ้าความชื้นเริ่มต้น M_0 ของวัสดุมีค่าน้อยกว่าค่าความชื้นวิกฤต M_{cr} ที่มีการอบแห้งภายใต้สภาวะเงื่อนไขคงที่ จะทำให้อัตราการอบแห้งของวัสดุมีค่าลดลงเมื่อกระบวนการอบแห้งดำเนินไป เนื่องจากความต้านทานการถ่ายเทความชื้นภายในวัสดุมีมากกว่าความต้านทานการถ่ายเทความชื้นภายนอกที่ออกจากผิววัสดุ”

4.3.3.1 สมการการถ่ายเทความร้อนในวัสดุ

สมการการถ่ายเทความร้อนในวัสดุจะสร้างโดยอาศัยเงื่อนไขดังนี้

เงื่อนไข 1 วัสดุเป็นก้อนวัสดุแห้ง ($M = 0$)

เงื่อนไข 2 พลังงานความร้อนทั้งหมดที่ให้กับวัสดุจะมีผลไปเพิ่มอุณหภูมิของวัสดุ

เงื่อนไข 3 ไม่มีแหล่งพลังงานภายในวัสดุ

สมดุลพลังงานบนปริมาตรลูกบาศก์ขนาดเล็กมาก ($dx \cdot dy \cdot dz$) ในระบบแกนฉากจะได้สมการการถ่ายเทความร้อนสำหรับวัสดุ

$$\dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z = \dot{q}_{x+dx} + \dot{q}_{y+dy} + \dot{q}_{z+dz} + \frac{dq}{dt} \tag{4.15}$$

$$\frac{dq}{dt} = \rho_{sd} c_{sd} dxdydz \frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.16}$$

เมื่อ c_{sd} คือ ความจุความร้อนของวัสดุแห้ง

จากสมการที่ 4.15 และสมการที่ 4.16 จะได้

$$\rho_{sd} c_{sd} dxdydz \frac{\partial T}{\partial t} = (\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) + (\dot{q}_y - \dot{q}_{y+dy}) + (\dot{q}_z - \dot{q}_{z+dz}) \tag{4.17}$$

จากสมการการนำความร้อนในหนึ่งมิติทางแกน x

$$\dot{q}_x = -k_{sd}\frac{\partial T}{\partial x}dydz \tag{4.18}$$

$$\dot{q}_{x+dx} = -\left[k_{sd}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{sd}\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dydz \tag{4.19}$$

ในทำนองเดียวกันทางด้านแกน y และแกน z เมื่อรวมเข้าด้วยกันแล้ว จะได้สมการการถ่ายเทความร้อนในสามมิติ (การนำความร้อน)

$$\rho_{sd}c_{sd}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{sd}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{sd}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{sd}\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{4.20}$$

ถ้าค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน k_{sd} เป็นค่าคงที่และวัสดุมีคุณสมบัติเป็นแบบ Isotropic จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\rho_{sd}c_{sd}\frac{\partial T}{\partial t} = k_{sd}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{4.21}$$

หรือ

$$\rho_{sd}c_{sd}\frac{\partial T}{\partial t} = k_{sd}\nabla^2 T \tag{4.22}$$

สำหรับวัสดุที่มีความชื้น เงื่อนไขที่ 1 และ 2 จะใช้ไม่ได้ อย่างไรก็ตาม สมการที่ 4.22 ก็ยังสามารถปรับแก้เพื่อใช้สำหรับวัสดุชื้นได้ โดยพิจารณาว่ามีการเปลี่ยนแปลงค่าความชื้นขนาด ∂M ในปริมาตรขนาดเล็กมากของวัสดุที่ช่วงเวลาสั้น ๆ ∂t ความชื้นสามารถเคลื่อนที่ภายในภายในวัสดุได้ทั้งในรูปของเหลวและไอ สัดส่วนของการเคลื่อนตัวของความชื้นคือมวลไอน้ำต่อมวลความชื้นทั้งหมดที่เปลี่ยนแปลงโดยนิยามให้เป็น

$$\varepsilon = \frac{\partial M_v}{\partial M} \qquad 0 < \varepsilon \le 1 \tag{4.23}$$

มวลของความชื้นที่เป็นไอ ∂M_v ต้องการความร้อนสำหรับการระเหยตัว ดังนั้นสำหรับวัสดุที่อยู่ในเงื่อนไขการอบแห้ง

$$\rho_{sd} c_{sd} \frac{\partial T}{\partial t} = k_{sd} \nabla^2 T + \rho_{sd} Q_{fg} \varepsilon \frac{\partial M}{\partial t} \tag{4.24}$$

เมื่อ dM/dt คือ อัตราการอบแห้งของวัสดุในช่วงอัตราการอบแห้งลดลง

4.3.3.2 สมการการถ่ายเทมวลในวัสดุ

พิจารณาวัสดุที่มีมวลความชื้น สมการการถ่ายเทมวลจะจำกัดอยู่เพียงการถ่ายเทความชื้นภายในวัสดุ โดยวัสดุที่อบแห้งภายใต้เงื่อนไขของอากาศอบแห้งคงที่จะใช้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

เงื่อนไข 1 ค่าความชื้นเฉลี่ย $\bar{M}$ มีค่าต่ำกว่าค่าความชื้นวิกฤต M_{cr} แต่สูงกว่าค่าความชื้นสมดุล M_e

เงื่อนไข 2 เมื่อกระบวนการอบแห้งดำเนินไป ค่าความชื้นของวัสดุจะมีค่าลดลง

เงื่อนไข 3 ความชื้นที่เคลื่อนที่ภายในวัสดุมายังผิวอยู่ในรูป ของเหลว ไอน้ำ หรือทั้งสอง

เงื่อนไข 4 ความร้อนที่ให้กับวัสดุส่วนหนึ่งจะใช้เพิ่มอุณหภูมิให้กับวัสดุ อีกส่วนหนึ่งจะทำให้น้ำระเหยจากวัสดุ โดยไม่มีการสูญเสียความร้อน

เงื่อนไข 5 ไม่มีแหล่งพลังงานภายในวัสดุ

สมดุลความชื้นบนปริมาตรลูกบาศก์ขนาดเล็กมาก ($dx \cdot dy \cdot dz$) ในระบบแกนฉากจะได้สมการการถ่ายเทความชื้นสำหรับวัสดุ

$$\dot{w}_x + \dot{w}_y + \dot{w}_z = \dot{w}_{x+dx} + \dot{w}_{y+dy} + \dot{w}_{z+dz} + \frac{dw}{dt} \tag{4.25}$$

$$\frac{dw}{dt} = \rho_{sd} c_{sd} dxdydz \frac{\partial M}{\partial t} \tag{4.26}$$

จากสมการที่ 4.25 และสมการที่ 4.26 จะได้

$$\rho_{sd} dxdydz \frac{\partial M}{\partial t} = (\dot{w}_x - \dot{w}_{x+dx}) + (\dot{w}_y - \dot{w}_{y+dy}) + (\dot{w}_z - \dot{w}_{z+dz}) \tag{4.27}$$

จากสมการการถ่ายเทมวลในหนึ่งมิติทางแกน x

$$\dot{w}_x = -\rho_{sd} D_w \left(\frac{\partial M}{\partial x} + D_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz \tag{4.28}$$

$$\dot{w}_{x+dx} = -\rho_{sd} \left\{ D_w \left(\frac{\partial M}{\partial x} + D_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[D_w \left(\frac{\partial M}{\partial x} + D_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] dx \right\} dydz \tag{4.29}$$

เมื่อ D_w คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ความชื้นเหลว

D_t คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ทางความร้อน

ในทำนองเดียวกันทางด้านแกน y และแกน z เมื่อรวมเข้าไปในสมการแล้วจะได้รูปแบบของสมการการถ่ายเทความชื้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left[D_w \left(\frac{\partial M}{\partial x} + D_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_w \left(\frac{\partial M}{\partial y} + D_t \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[D_w \left(\frac{\partial M}{\partial z} + D_t \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

ถ้าสมมุติให้

$$D_w = \text{คงที่} \qquad D_t = \text{คงที่} \tag{4.31}$$

สมการที่ 4.30 จะเขียนได้ง่ายขึ้นเป็น

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D_w \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + D_t \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + D_w \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + D_t \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + D_w \left(\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + D_t \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{4.32}$$

หรือ

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D_w\left[\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) + D_t\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\right] \quad (4.33)$$

หรือ

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D_w(\nabla^2 M + D_t \nabla^2 T) \quad (4.34)$$

จากเงื่อนไขที่ 3 แทนค่าด้วยสัมประสิทธิ์การแพร่ของความชื้นทั้งหมดเป็น

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D(\nabla^2 M + D_t \nabla^2 T) \quad (4.35)$$

สมการที่ 4.35 สามารถอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นเมื่อนำไปจำลองการอบแห้งเมล็ดพืชเนื่องจากค่าความชันของอุณหภูมิภายในเมล็ดมีค่าน้อยมากจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\nabla^2 M \quad (4.36)$$

สมการที่ 4.36 นี้สามารถเขียนได้ทั้งในพิกัดแกนตั้งฉาก พิกัดแกนทรงกระบอก หรือพิกัดแกนแบบทรงกลม

ตัวอย่างการนำไปใช้มีงานวิจัยหลายชิ้นจาก Arkansas Rice Research ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและความชื้นที่มีผลต่อคุณภาพของเมล็ดข้าวเปลือกที่อยู่ภายใต้กระบวนการลดความชื้นด้วยอากาศร้อน ใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีชิ้นประกอบจำกัด (Yang et al., 2000a; 2000b) ที่จำลองมาจากสมการการแพร่และสมการพลังงานในระบบแกนทรงกระบอก (Cylindrical coordinate system) สำหรับเมล็ดข้าว 1/4 ส่วนของเมล็ดพร้อมทั้งการกำหนดเงื่อนไขขอบสำหรับการพิจารณาในเชิงสองมิติ ในการสมมุติฐานแบบทั่วไปคือ ให้การเคลื่อนตัวของความชื้นภายในเมล็ดกระทำโดยกระบวนการแพร่ ที่ผิวของเมล็ดมีการแลกเปลี่ยนความร้อนกับอากาศแวดล้อมด้วยการพาความร้อน โดยภายในเมล็ดเป็นแบบการนำ

ความร้อน งานวิจัยนี้สมมุติให้ความชื้นที่แพร่มายังผิวขอบนอกของเมล็ดมีทั้งในรูปของของเหลวและไอและการระเหยตัวเกิดขึ้นได้ทั้งที่ผิวและภายในเมล็ด สมการการถ่ายเทความร้อนและความชื้นสามารถเขียนในระบบแกนทรงกระบอกได้ดังนี้

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}\right) + D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right) + D\left(\frac{\partial^2 M}{\partial z^2}\right) \tag{4.37}$$

$$\rho_g c_g \frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right) + k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \rho_g Q_{fg}\frac{1}{1+M}\frac{\partial M}{\partial t} \tag{4.38}$$

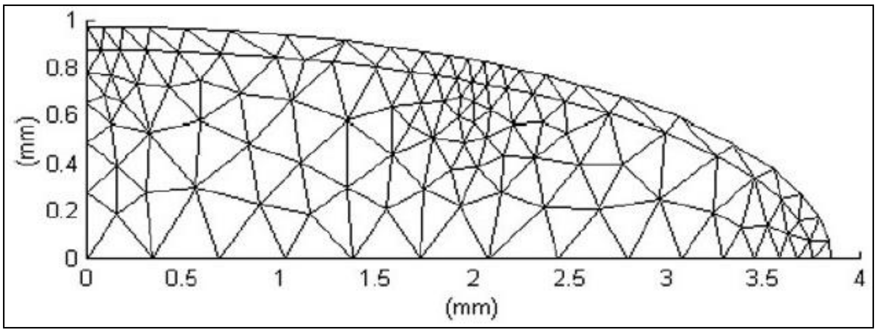
เทอมสุดท้ายในสมการที่ 4.38 สะท้อนค่าการระเหยตัวของความชื้น ค่าเงื่อนไขขอบและค่าเริ่มต้นสำหรับสมการที่ 4.37 และสมการที่ 4.38 ในระหว่างการอบแห้งเป็นดังนี้

$$-D\frac{\partial M}{\partial n} = h_m\left(M - M_e\right) \tag{4.39}$$

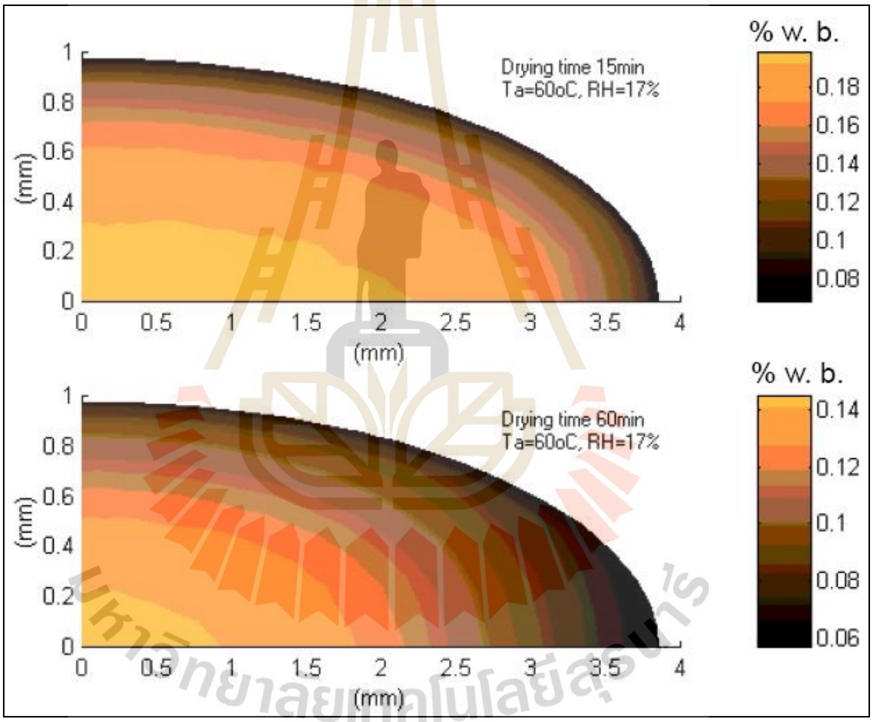
$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = h_t\left(T - T_a\right) + \rho_g\left[Q_{fg} + c_v\left(T_a - T\right)\right]\frac{V}{A(1+M)}\frac{\partial M}{\partial t} \tag{4.40}$$

$$t = 0, \quad M = M_0, \qquad T = T_0 \tag{4.41}$$

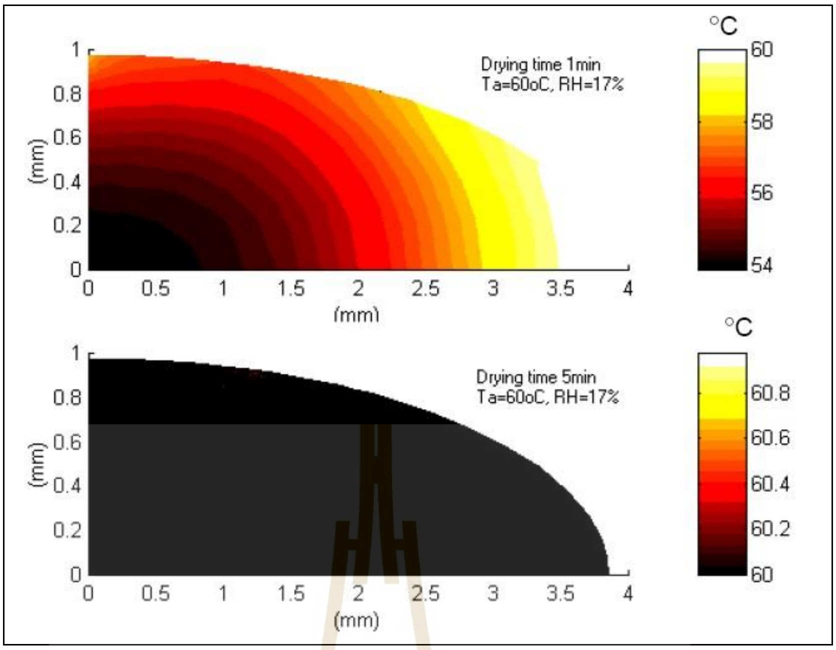
เมื่อ D แทนค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ของความชื้นโดยรวมทั้งในรูปของเหลวและไอ โดยที่ c_a, c_g, c_v, D, h_m, h_t, Q_{fg}, k, M_e, ρ_a และ ρ_g เป็นตัวแปรที่ทราบค่าจากข้อมูลอ้างอิง ภายหลังจากการใช้ระเบียบวิธีชิ้นประกอบจำกัด จะสามารถคำนวณและแสดงค่าได้ดังผลตัวอย่างในรูปที่ 4.4 ถึงรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.4 โดเมนการคำนวณสำหรับเมล็ดข้าว



รูปที่ 4.5 ผลการคำนวณแสดงค่าการกระจายตัวของความชื้นภายในเมล็ดข้าว



รูปที่ 4.6 ผลการคำนวณแสดงค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในเมล็ดข้าว

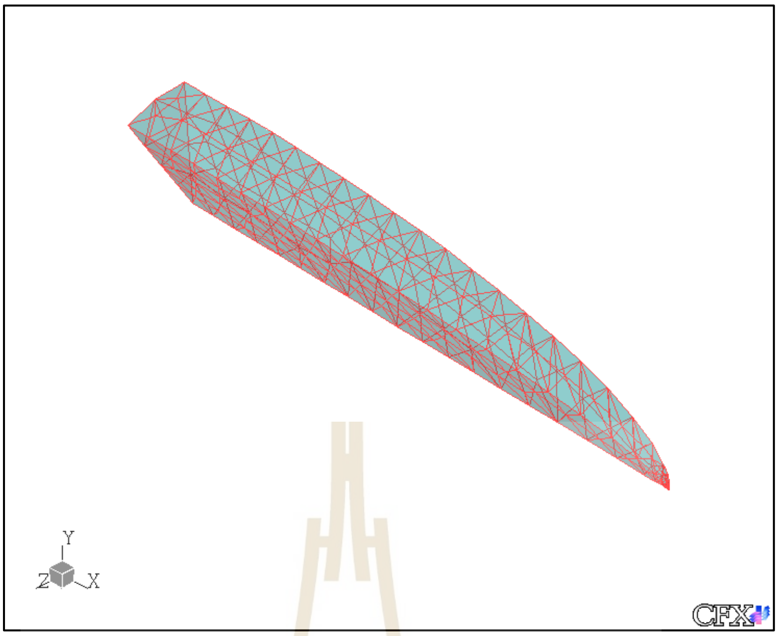
4.4 ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

4.4.1 กรณีศึกษาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก

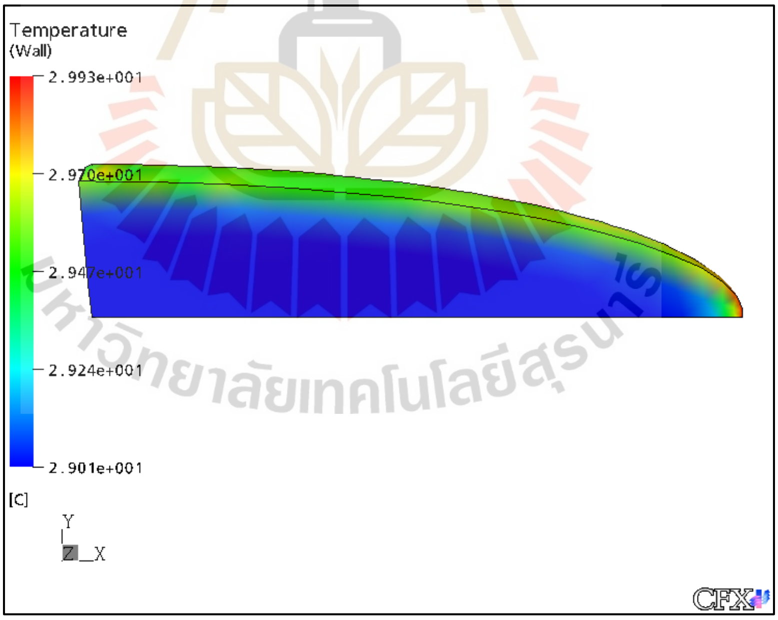
ได้ศึกษาหาอัตราการถ่ายเทความร้อนและมวลความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดที่อยู่ภายใต้กระแสการไหลของอากาศร้อน ใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยปรับค่าปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้ ความเร็วอากาศ อุณหภูมิอากาศ ความชื้นสัมพัทธ์อากาศ ความชื้นเริ่มต้นเมล็ดข้าวและมุมเอียงของการวางตัวของเมล็ดข้าวเปลือก เพื่อนำผลที่ได้ไปพัฒนาวิธีการอบแห้งข้าวเปลือกให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น โดยเฉพาะการลดการใช้พลังงาน การลดเวลาในการอบแห้ง และการลดการแตกหักของเมล็ดข้าว มีหัวข้อที่ศึกษาเป็นลำดับดังนี้

- การศึกษาการถ่ายเทความร้อนและมวลในข้าวขาวหนึ่งเมล็ด

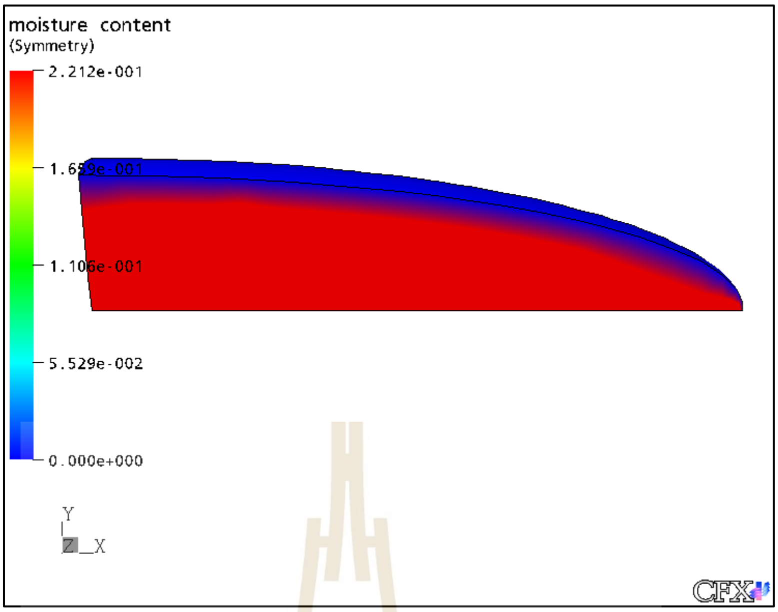
การจำลองเนื้อข้าวขาวหนึ่งเมล็ดโดยใช้โดเมนการคำนวณที่ 1/4 ส่วนหน้าตัดของเมล็ด ดังรูปที่ 4.7 ดำเนินการโดยกำหนดตัวแปรความชื้นให้กับแบบจำลอง กำหนดคุณสมบัติให้กับเนื้อข้าว (Endosperm) โดยกำหนดเงื่อนไขขอบให้มีการพาความร้อนและความชื้นที่ผิวนอกเมล็ด รวมทั้งเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อหาค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ด สามารถแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นได้ดังแสดงในรูปที่ 4.8 และรูปที่ 4.9



รูปที่ 4.7 โดเมนเมล็ดข้าวขาว



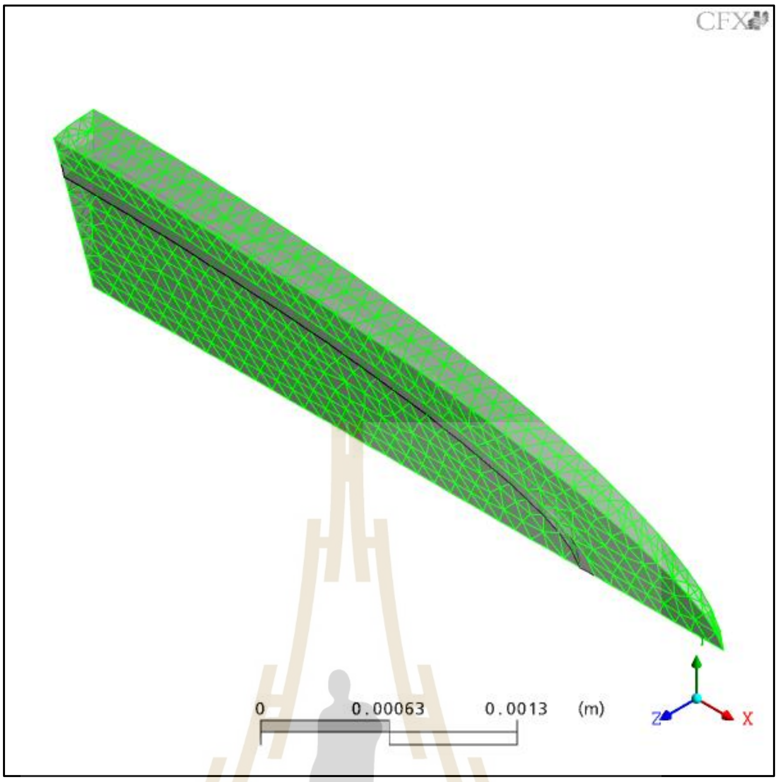
รูปที่ 4.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในเนื้อข้าว



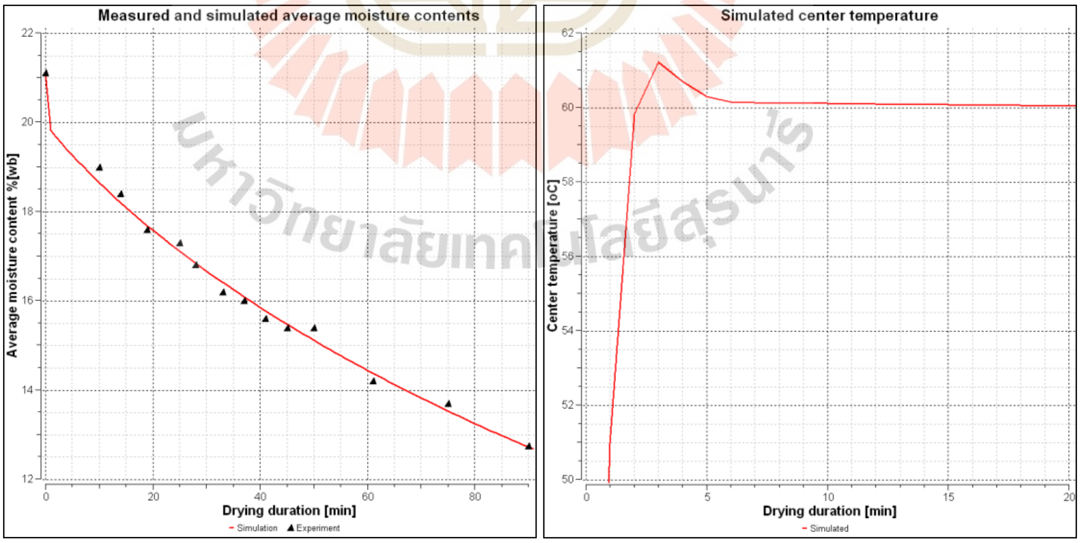
รูปที่ 4.9 การกระจายตัวของความชื้นภายในเนื้อข้าว

- การศึกษาการถ่ายเทความร้อนและมวลในข้าวหนึ่งเมล็ด

การจำลองเนื้อข้าวหนึ่งเมล็ดที่ประกอบไปด้วยชั้นข้าวขาว (Endosperm) ชั้นรำข้าว (Bran) และชั้นเปลือกข้าว (Hull) ใช้โดเมนการคำนวณที่ 1/4 ส่วนหน้าตัดของเมล็ด ดังรูปที่ 4.10 เนินการโดยกำหนดตัวแปรความชื้นให้กับแบบจำลอง กำหนดคุณสมบัติให้กับส่วนประของข้าว โดยกำหนดเงื่อนไขขอบให้มีการพาความร้อนและความชื้นที่ผิวนอกเมล็ด รวมทั้งเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อหาค่าการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ด เพื่อนำผลเปรียบเทียบกับค่าจากการทดลองอ้างอิงทั้งค่าความชื้นเฉลี่ยและอุณหภูมิกลางเมล็ดดังแสดงในรูปที่ 4.11



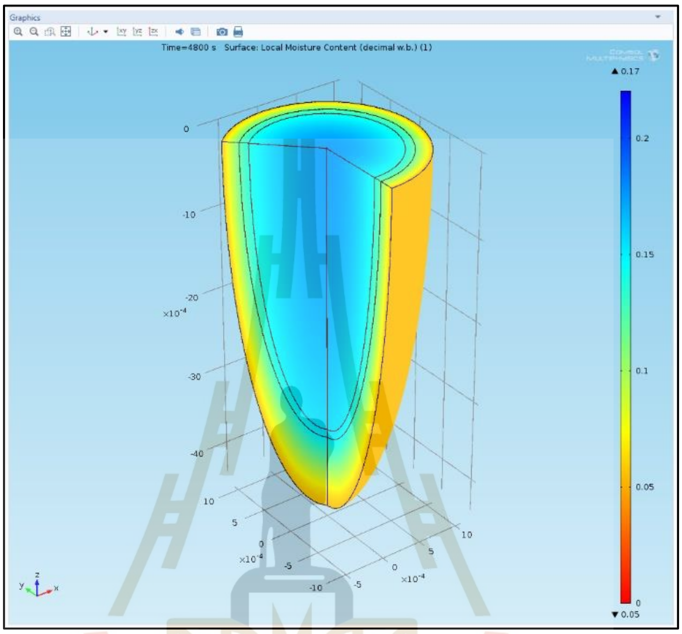
รูปที่ 4.10 โดเมนเมล็ดข้าว



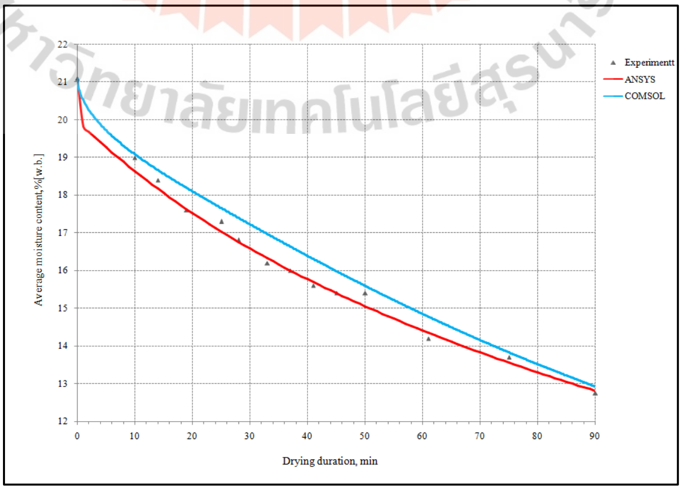
รูปที่ 4.11 การเปรียบเทียบค่าจากการคำนวณเทียบกับการทดลอง

- การเปรียบเทียบการคำนวณจากโปรแกรม ANSYS CFX และโปรแกรม COMSOL

เปรียบเทียบค่าจากการศึกษาการถ่ายเทความร้อนและมวลในข้าวหนึ่งเมล็ด ทั้งการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นดังแสดงในรูปที่ 4.12 และการเปรียบเทียบค่าความชื้นเฉลี่ยดังแสดงในรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.12 การกระจายตัวของความชื้นด้วยโปรแกรม COMSOL



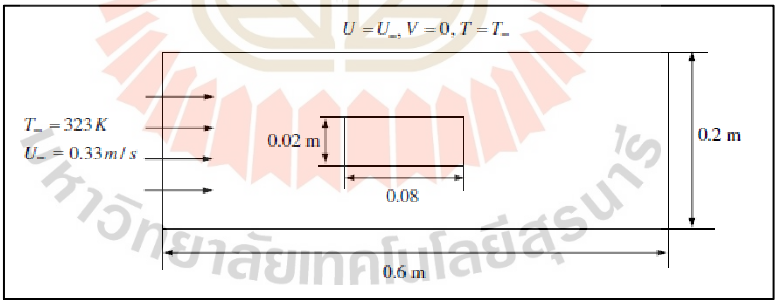
รูปที่ 4.13 การเปรียบเทียบค่าความชื้นเฉลี่ยโปรแกรม ANSYS CFX และโปรแกรม COMSOL

4.4.2 แบบจำลองเส้นการไหลและข้อมูลอุณหภูมิของอากาศอบแห้ง

ศึกษาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ของอากาศร้อนผ่านวัสดุอุณหภูมิคงที่ในสองมิติด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อหาเส้นการไหลและข้อมูลอุณหภูมิของอากาศร้อนรอบวัสดุ พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวของวัสดุกับงานวิจัยอ้างอิง และเปรียบเทียบค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผิวของวัสดุจากการคำนวณด้วยแบบจำลองสองแบบ

จากรูปที่ 4.14 แสดงปัญหาวัสดุอุณหภูมิคงที่ 298 K ความยาวไม่สิ้นสุด ความเร็วของของไหลเป็นแบบเอกรูปที่ทางเข้าโดยมีอุณหภูมิ 323 K เพื่อความสะดวกจะกำหนดให้ค่าคุณสมบัติเป็นค่าคงที่ พิจารณาเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ในสองมิติ (การใช้สมมติฐานเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้จะมีความถูกต้องน้อยหากใช้ในกรณีที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างวัสดุกับของไหลมีค่ามาก) ในกรณีการไหลนี้ใช้เงื่อนไขการไหลของอากาศเป็น $U_\infty = 0.33$ m/s, $T_\infty = 323$ K ค่าคุณสมบัติของอากาศที่ความดันบรรยากาศมีดังนี้ $\rho = 1.09$ kg/m^3, $\mu = 1.95\times10^{-5}$ Pa•s, ν = 1.79×10^{-5} m^2/s, c_p = 1.00792 kJ/kg•K, k = 0.028 W/m•K, α = 2.59×10^{-5} m^2/s และ Pr = 0.70378 โดยวิเคราะห์การไหลจากตัวแปรไร้มิติจะได้ว่า

$$\mathrm{Re}_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{(0.33)(0.08)}{(1.79\times10^{-5})} = 1474.86 < 3\times10^6 \text{ (ชั้นชิดผิวแบบราบเรียบ)}$$

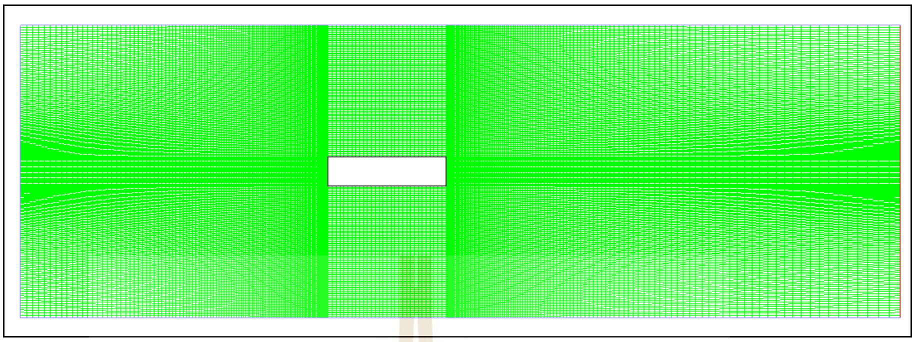


รูปที่ 4.14 โดเมนปัญหาการไหลรอบวัสดุ (Kaya, Aydin, and Dincer, 2006)

เพื่อแสดงค่าเส้นการไหลและเส้นอุณหภูมิคงตัวรอบวัสดุ รวมทั้งค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนโดยรอบวัสดุ โดยใช้สมการควบคุมหลักสำหรับการอนุรักษ์มวล, โมเมนตัม, และพลังงาน อาศัยการคำนวณทางคอมพิวเตอร์เพื่อหาคำตอบด้วยวิธีเชิงตัวเลขโดยการสร้างโดเมนของปัญหาการไหลรอบวัสดุ และเปรียบเทียบผลกับข้อมูลอ้างอิง

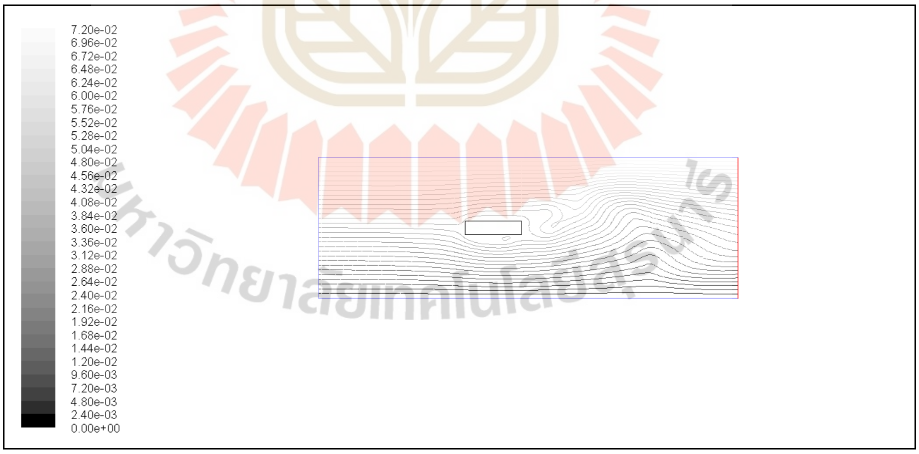
- ผลเฉลยจากการคำนวณด้วย FLUENT

การสร้างโดเมนปัญหากระทำด้วยโปรแกรม GAMBIT ได้ผลดังรูปที่ 4.15

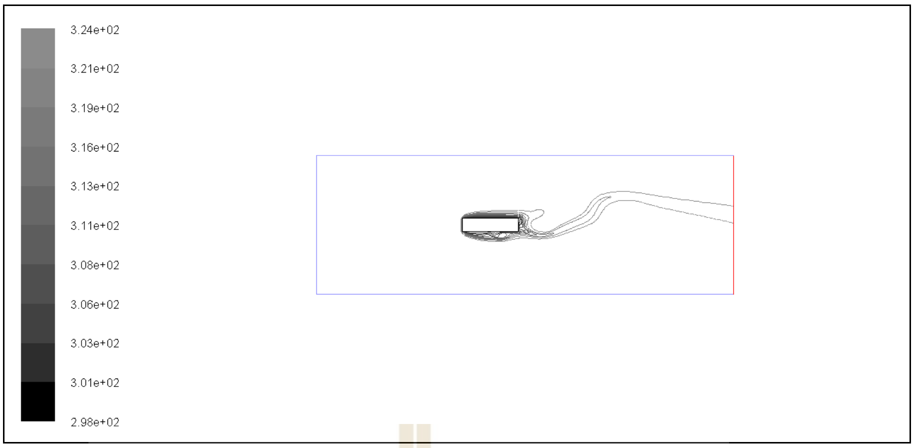


รูปที่ 4.15 กริดโดเมนด้วย GAMBIT

กำหนดปัญหาในสองมิติแบบสภาวะคงตัว แบบจำลองความหนืดเป็นแบบราบเรียบ โดยตรวจสอบการลู่เข้าของผลเฉลยจากสมดุลมวลและสมดุลพลังงานเข้าออกในโดเมนของปัญหา ได้ผลของเส้นการไหลและอุณหภูมิแสดงดังรูปที่ 4.16 และดังรูปที่ 4.17



รูปที่ 4.16 Contours of Stream Function (kg/s)



รูปที่ 4.17 Contours of Static Temperature (K)

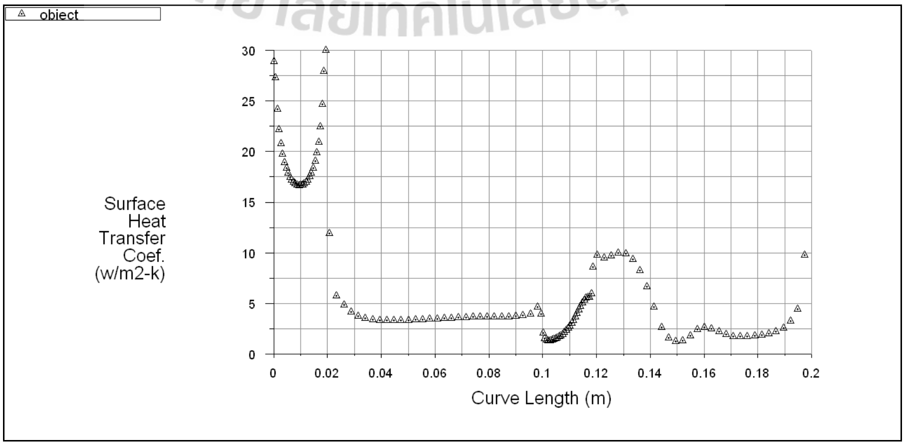
การแสดงค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวสัมผัสโดยนิยามใน FLUENT เป็นไปดังสมการที่ 4.42

$$h_{eff} = \frac{q}{T_{wall} - T_{ref}} \tag{4.42}$$

เมื่อ q คือ ฟลักซ์ความร้อนร่วมการพาและการแผ่รังสี

T_{wall} คือ อุณหภูมิที่พื้นผิว

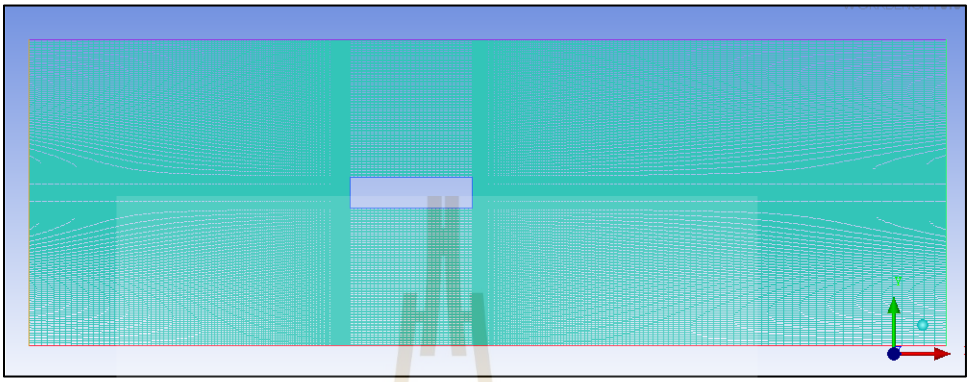
T_{ref} คือ อุณหภูมิอ้างอิง ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวรอบวัสดุดังรูปที่ 4.18



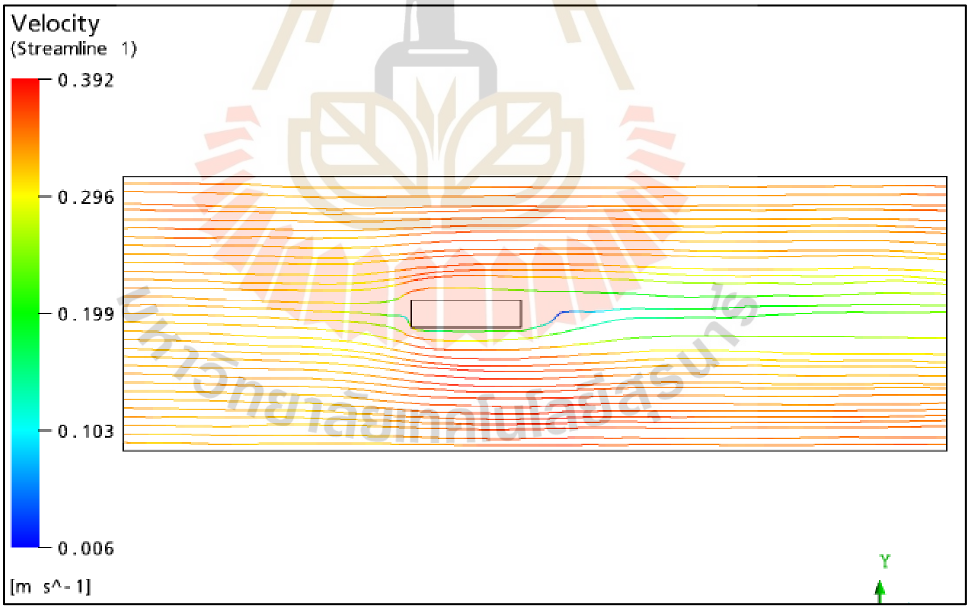
รูปที่ 4.18 Surface Heat Transfer Coef. vs. Curve Length

- ผลเฉลยจากการคำนวณด้วย ANSYS CFX

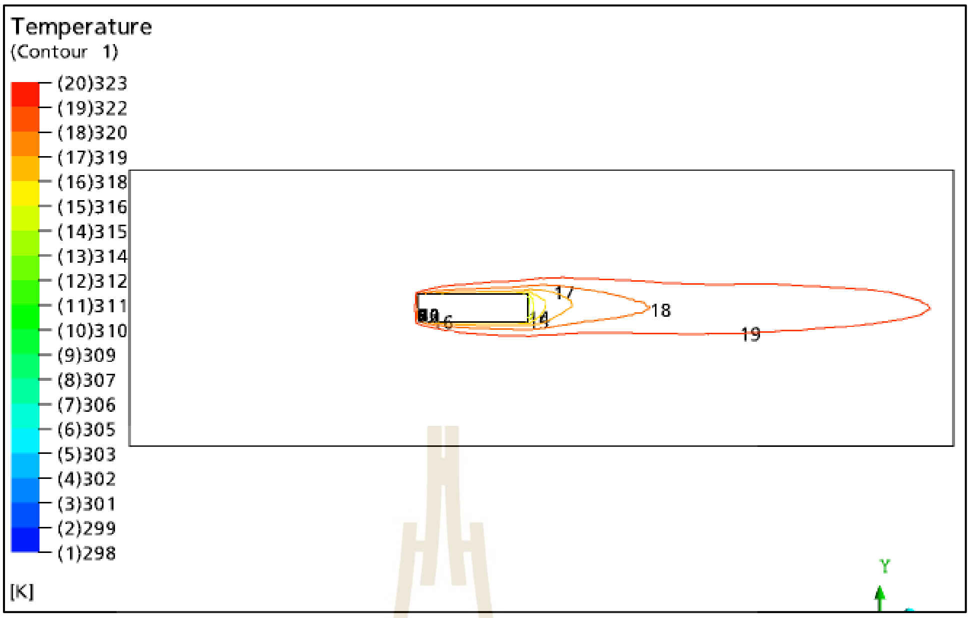
การสร้างโดเมนปัญหากระทำด้วยโปรแกรม ANSYS ICEM CFD แสดงผลดังรูปที่ 4.19 ซึ่งผลของเส้นการไหลและอุณหภูมิแสดงได้ดังรูปที่ 4.20 และรูปที่ 4.21



รูปที่ 4.19 กริดโดเมนด้วย ANSYS ICEM CFD

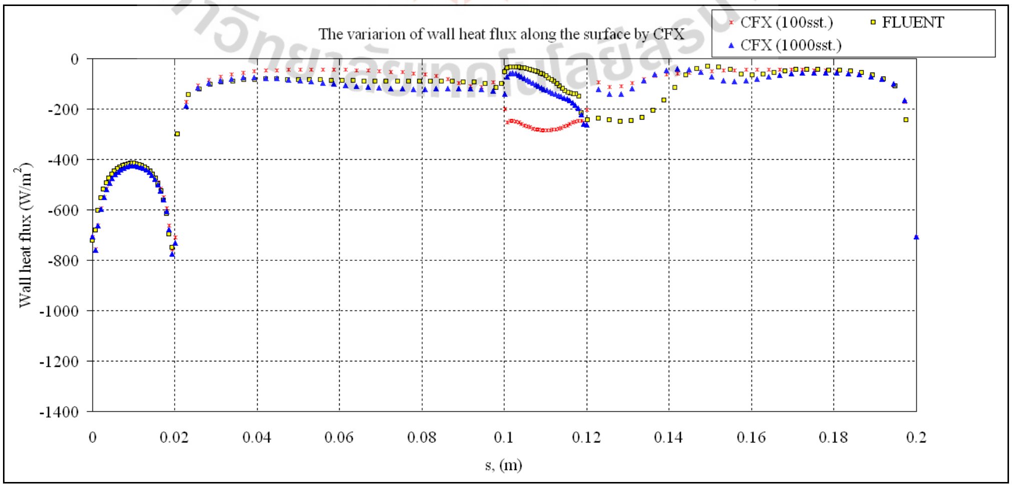


รูปที่ 4.20 เส้นแนวการไหล

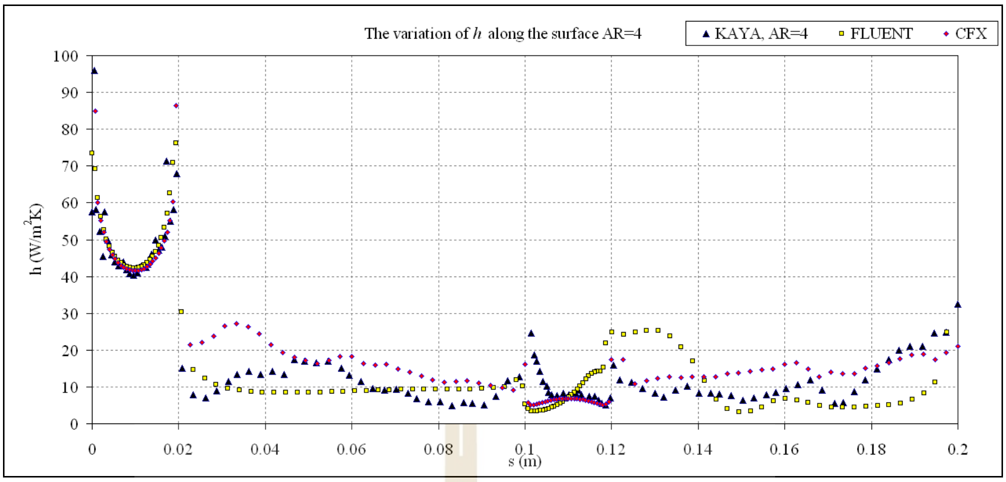


รูปที่ 4.21 เส้นแนวอุณหภูมิ

เมื่อนำค่าฟลักซ์ความร้อนโดยรอบผิววัสดุเปรียบเทียบระหว่างวิธีการคำนวณด้วย CFX และ FLUENT แสดงในรูปที่ 4.22 และรูปที่ 4.23 แสดงค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนโดยรอบผิววัสดุเปรียบเทียบระหว่างวิธีการคำนวณด้วย CFX และ FLUENT กับค่าการคำนวณอ้างอิง (Kaya, Aydin, and Dincer, 2006) ซึ่งพบว่า ค่าการกระจายตัวตลอดแนวผิวให้แนวโน้มไปในทิศทางเดียวกัน



รูปที่ 4.22 ค่าฟลักซ์ความร้อนโดยรอบผิววัสดุเปรียบเทียบ



รูปที่ 4.23 ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนโดยรอบผิววัสดุเปรียบเทียบ

4.4.3 การศึกษาการไหลที่มุมปะทะเมล็ดข้าวต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน

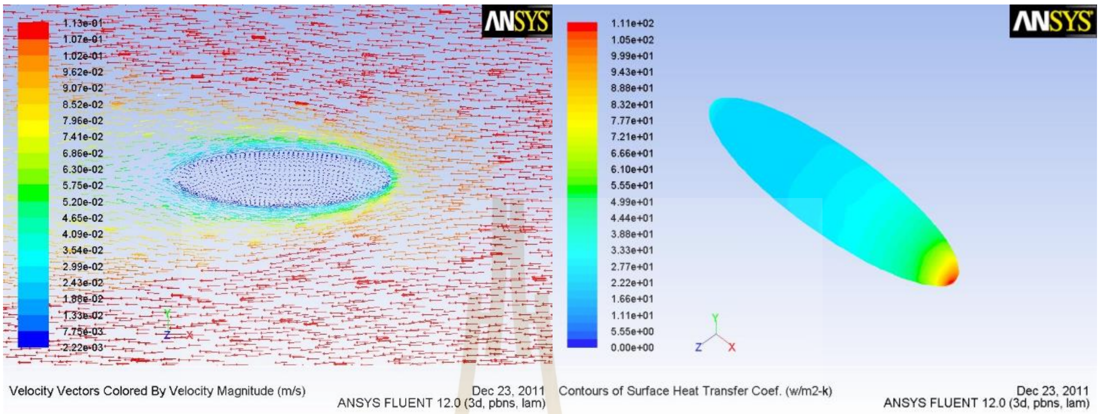
การศึกษาการไหลผ่านเมล็ดข้าวในสามมิติรูปทรงรีในทิศทางต่าง ๆ ได้แก่ ที่มุม 0, 45, 60 และ 90 องศากับแกนยาวของเมล็ดข้าว เพื่อศึกษาผลกระทบต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อน ตารางที่ 4.1 แสดงค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ยตลอดผิวเมล็ดข้าวที่มุมปะทะต่าง ๆ

ตารางที่ 4.1 ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ยตลอดผิวที่มุมปะทะต่าง ๆ

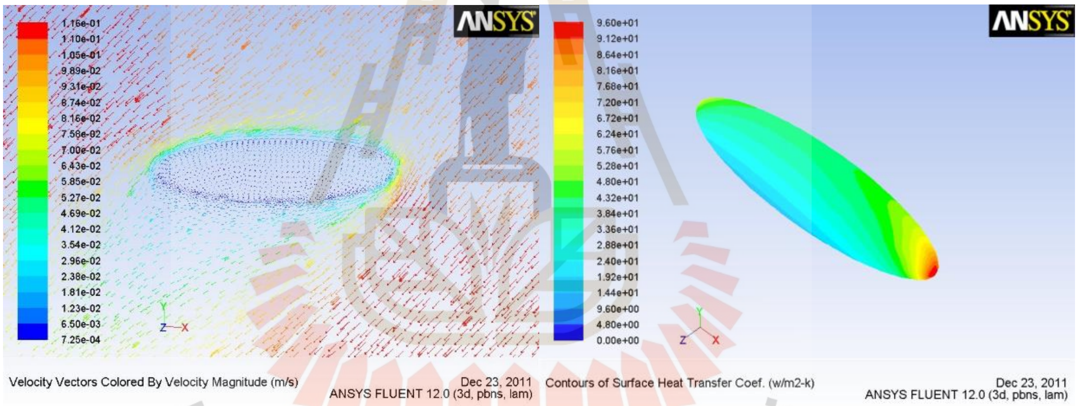
มุมปะทะ (Degree)	ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ย (W/m^2-K)
0	30.01986
45	32.30082
60	33.20421
90	33.94621

จากตารางที่ 4.1 พบว่า ที่การไหลตามแนวยาวของเมล็ดข้าวจะได้ค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนต่ำที่สุด แต่ค่าที่ตำแหน่งปลายด้านปะทะการไหลจะมีค่าสูง (ดังรูปที่ 4.24) ซึ่งรูปแบบการกระจายตัวของค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนจะมีผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในเมล็ดข้าวรวมทั้งการกระจายตัวของความชื้น เนื่องจากปฏิสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลที่แปรผันตามกัน ทั้งนี้เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ยกับค่าที่คำนวณจากสมการอ้างอิง

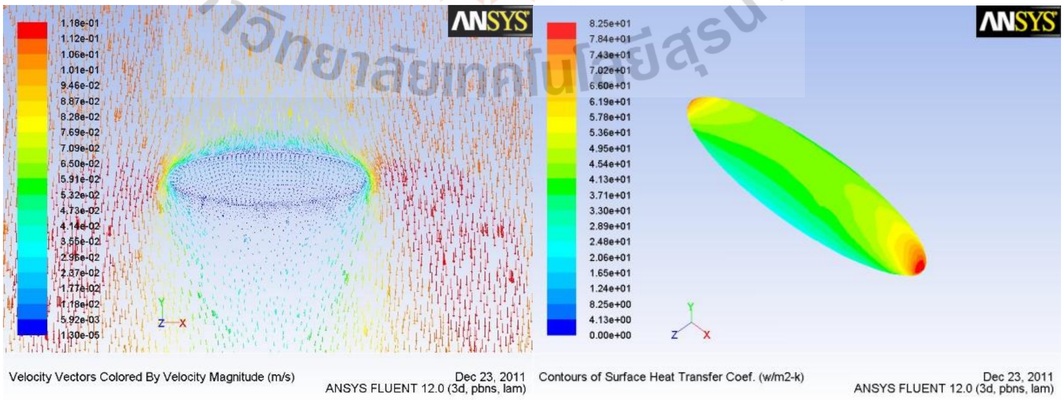
$Nu_D = 2 + (0.4Re_D^{1/2} + 0.06Re_D^{2/3})Pr^{0.4}(\mu_\infty / \mu_s)^{1/4} = 32.8451$ W/m^2-K พบว่า มีค่าที่สอดคล้องกันมากกล่าวได้ว่ามุมปะทะการไหลต่อเมล็ดข้าวมีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนเฉลี่ยค่อนข้างน้อย



(ก) มุมปะทะ 0 องศา



(ข) มุมปะทะ 45 องศา



(ค) มุมปะทะ 90 องศา

รูปที่ 4.24 การกระจายตัวของค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวเมล็ดข้าว

4.5 สรุปผลการวิจัย

การศึกษาและวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในวัสดุชื้นภายใต้เงื่อนไขสภาวะการอบแห้งของอากาศคงที่ เพื่อสร้างสมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการอบแห้งวัสดุชื้นก้อนเดียว โดยสามารถแบ่งช่วงสมการของการอบแห้งได้เป็นสองช่วง คือ ช่วงอัตราการอบแห้งคงที่ พิจารณาได้ในกรณีที่ค่าความชื้นเริ่มต้นของวัสดุมีค่าสูงกว่าค่าความชื้นวิกฤต และช่วงอัตราการอบแห้งลดลงจะเกิดขึ้นเมื่อค่าความชื้นของวัสดุอยู่ต่ำกว่าค่าความชื้นวิกฤต สมการที่ได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้สำหรับการหาค่าการเปลี่ยนแปลงความร้อนและความชื้นภายในวัสดุที่ต้องการอบแห้งได้อย่างหลากหลาย ทั้งนี้จากหัวข้อการศึกษาที่ได้สรุปมายังมีประเด็นการศึกษาอีกมากเพื่อนำสู่การพัฒนาแบบจำลองหรือกระบวนการอบแห้งต่อไป

4.6 รายการอ้างอิง

Bautista, R.C., Siebenmorgan, T.J. and Cnossen, A.G. (2000). Fissure formation characterization in rice kernels using video microscopy. **Proceedings of the 12th International Drying Symposium IDS2000**, Paper No. 417, Noordwijkerhout, The Netherlands.

Jai, C-C., Yang, W., Siebenmorgan, T.J., Bautista, R.C. and Cnossen, A.G. (2000). A study of rice fissuring by finite-element simulation of internal stresses combined with video microscopy observation of fissure appearance. In B.R. Wells, R.J. Norman and J.-F. Meullenet (eds.). **Rice research studies 2000** (pp 271-276). Arkansas: Arkansas Agricultural Experiment Station Fayetteville.

Kays, W.M. and Crawford, M.E. (1993). **Convective heat and mass transfer**. Singapore: McGraw-Hill.

Luikov, A.V. (1966). **Heat and mass transfer in capillary bodies**. New York: Pergaman Press.

Pabis, S., Jayas, D.S. and Cenkowski, S. (1998). **Grain drying theory and practice**. New York: John Wiley & Sons.

Sarker, N.N., Kunze, O.R. and Strouboulis. T. (1994). **Finite element simulation of rough rice drying. Drying Technology**, 12 (4): 761-774.

Yang, W., Jai, C-C., Siebenmorgan, T.J. and Cnossen, A.G. (2000a). Intra-kernel moisture gradients and glass transition temperature in relation to head rice yield variation during heated air drying of rough rice. **Proceedings of the 12th International Drying Symposium IDS2000**, Paper No. 069, Noordwijkerhout, The Netherlands.

Yang, W., Jai, C-C., Siebenmorgan, T.J., Howell, T.A. and Cnossen, A.G. (2000b). Intra-kernel moisture and temperature gradients as related head rice yield during the drying and tempering processes. In B.R. Wells, R.J. Norman and J.-F. Meullenet (eds.). **Rice research studies 2000** (pp 446-453). Arkansas: Arkansas Agricultural Experiment Station Fayetteville.

บทที่ 5
การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้น ของเมล็ดข้าวเปลือก

หมายเหตุ : บทที่ 5 นี้เป็นบทความแปล Manuscript ที่ได้เตรียมการไว้เพื่อส่งตีพิมพ์ในวารสารวิชาการ จึงมีเนื้อหาคล้ายคลึงกับบทที่ 1-4 อยู่บ้าง

5.1 บทคัดย่อ

สมการที่ใช้อธิบายการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลือกที่เกิดขึ้นพร้อมกันระหว่างกระบวนการอบแห้งได้ทำการคำนวณทาง CFD ด้วยระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด เมล็ดข้าวเปลือกถูกจำลองเป็นรูปทรงรีที่แบ่งออกเป็นสามชั้นอย่างต่อเนื่องกัน ได้แก่ เปลือก รำ และเนื้อข้าว โดยมีกระบวนการนำความร้อนแบบไม่คงตัวและการแพร่ของความชื้นที่เกิดขึ้นภายในเมล็ดผนวกกับการพาความร้อนและการถ่ายโอนมวลที่เกิดขึ้นระหว่างผิวของเมล็ดข้าวกับอากาศแห้ง ส่วนการกำหนดสภาวะเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบกระทำโดยให้ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นและการกระจายตัวของความชื้นภายในเมล็ดข้าว รวมถึงการกำหนดค่าอุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศร้อน ผลการทดลองการอบแห้งแบบชั้นบางใช้เพื่อตรวจสอบการคำนวณทาง CFD พบว่าค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดภายในเมล็ดข้าวเกิดขึ้นเพียงไม่กี่นาทีแรกของกระบวนการอบแห้ง ส่วนค่าเกรเดียนท์ความชื้นสูงสุดที่ยังปรากฏอยู่จะเป็นส่วนสำคัญที่มีผลกระทบต่อคุณสมบัติจากการอบแห้งของเมล็ดข้าว

5.2 บทนำ

ข้าว (Paddy) เป็นผลผลิตทางการเกษตรที่มีความสำคัญสำหรับประชากรโลกโดยเฉพาะในภูมิประเทศแถบเอเชีย โดยส่วนใหญ่ข้าวจะถูกเก็บเกี่ยวที่ความชื้นสูง ดังนั้น ข้าวเปลือกจึงต้องทำการลดความชื้นทันทีภายหลังการเก็บเกี่ยวเพื่อจะได้เก็บรักษาได้อย่างปลอดภัย กระบวนการอบแห้งนั้นย่อมมีค่าใช้จ่ายแต่ก็มีความสำคัญต่อผลผลิตข้าว การอบแห้งที่เหมาะสมช่วยเพิ่มคุณภาพของเมล็ดข้าวและเพิ่มระยะเวลาการเก็บรักษา ในทางกลับกันกระบวนการอบแห้งที่ไม่เหมาะสมจะมีผลไปลดค่าต้นข้าวและคุณภาพข้าวสีลงได้ กระบวนการอบแห้งที่ดีนั้นจึงจำเป็นต้องมีอัตราการอบแห้งสูง ได้ข้าวคุณภาพสูงโดยมีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

การอบแห้งข้าวเปลือกเป็นกระบวนการที่มีความซับซ้อนมาก แบบจำลองการอบแห้งในทางทฤษฎีต้องการสมการหลักที่ถูกต้องรวมทั้งเงื่อนไขขอบที่เหมาะสม การถ่ายเทความร้อนและความชื้นทั้งภายในและภายนอกเมล็ดข้าวเปลือกเป็นสองกระบวนการหลักทางฟิสิกส์ที่ปรากฏเกี่ยวพันและปฏิสัมพันธ์กันตั้งแต่การระเหยของความชื้นจากความร้อนแฝงให้เป็นไอน้ำ สืบเนื่องจากความสำคัญและความยุ่งยากของกระบวนการอบแห้งจึงทำให้มีการศึกษาวิจัยขึ้นอย่างกว้างขวาง Luikov (1966) นำเสนอชุดสมการหลักสำหรับการอบแห้งข้าวที่เกี่ยวพันกันด้วยการถ่ายเทในสองกระบวนการ นักวิจัยโดยส่วนใหญ่ประยุกต์ใช้สมการเหล่านี้เพื่อทำนายการอบแห้งข้าว Husain, Chen, and Clayton (1973) นำเสนอแบบจำลองความเกี่ยวพันของการถ่ายเทความร้อนและมวลโดยอาศัยสมการของ Luikov พบว่าผลทำนายสำหรับการอบแห้งข้าวเปลือกให้ผลสอดคล้องอย่างดีกับข้อมูลทางการทดลอง การศึกษาเชิงตัวเลขที่ดำเนินการโดย Sarker, Kunze, and Strouboulis (1994, 1996) ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณอัตราการอบแห้งข้าวเปลือก จากการศึกษาปรากฏค่าเกรเดียนท์ความชื้นขึ้นสูงสุดในแนวยาวใกล้บริเวณส่วนกลางของเมล็ดข้าว Jia, Yang, Siebenmorgen, and Cnossen (2000) พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และภายหลัง Jia, Yang, Siebenmorgen, and Cnossen (2001) พัฒนาโปรแกรมคำนวณทางคอมพิวเตอร์โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อันประกอบด้วยภาพกราฟฟิกที่สามารถเห็นค่าที่คำนวณการอบแห้งข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดรวมทั้งกระบวนการพักไปจนถึงการกระจายตัวของความเค้นภายใน Ranjan, Irudayaraj, and Mahaffy (2002) พัฒนาแบบจำลองเชิงปริมาตรในสามมิติสำหรับการทำนายอุณหภูมิและความชื้นสำหรับวัสดุอาหารหลากหลายชนิด การทำนายทั้งหมดให้ผลสอดคล้องอย่างดีกับค่าการทดลองที่ปรากฏและยังแสดงศักยภาพที่ดีสำหรับประยุกต์ในการอบแห้งเมล็ดพืชและอาหาร Wu, Yang, and Jia (2004) ใช้ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดทั้งแบบสองมิติและสามมิติคำนวณการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลือก โดยพบว่าการคำนวณในแบบสองมิติเพียงพอต่อการหาค่าองค์ประกอบที่สำคัญภายในเมล็ดข้าวเปลือกอย่างเช่นเวลาการปรากฏค่าสูงสุดของเกรเดียนท์ความชื้น

ข้อสำคัญของการศึกษาข้างต้นจะเป็นการประมาณการให้ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและมวลเป็นค่าคงที่ซึ่งในความเป็นจริงไม่เป็นดังนั้น Kaya, Aydin, and Dincer (2006) ศึกษาการแปรผันของค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและมวลของวัสดุชื้นรูปทรงสี่เหลี่ยมภายใต้การไหลโดยใช้เทคนิคทาง CFD โดยพิจารณาการไหลผ่านและการกระจายอุณหภูมิรอบวัตถุเพื่อทำนายค่าการแปรผันค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและใช้ปฏิสัมพันธ์ชั้นชิดผิวเพื่อคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล การกระจายตัวของค่าสัมประสิทธิ์นี้นำไปเป็นเงื่อนไขขอบและใช้คำนวณการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในวัสดุชื้น ผลเฉลยที่ได้แสดงค่าที่สอดคล้องอย่างดีกับข้อมูลการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง

จะเห็นได้ว่าการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ของเทคโนโลยีการอบแห้งอาศัยกระบวนการกึ่งทฤษฎีโดยที่ข้อมูลขอบดังเช่นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและมวลจะถูก “กำหนด” จากปฏิสัมพันธ์การทดลอง จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ทุกค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทควร “คำนวณ” มากกว่า “กำหนด”

จุดประสงค์หลักท้ายสุดของการศึกษาคือเพื่อหาค่ากระบวนการอบแห้งของเมล็ดข้าวเปลือกโดยการคำนวณเชิงตัวเลขโดยที่ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเททั้งหมดจะคำนวณเกี่ยวพันไปกับกระแสการไหลและกระบวนการแพร่ภายในเมล็ดข้าวเปลือก อย่างไรก็ตามในลำดับของการศึกษานี้เพื่อลดความยุ่งยาก การไหลภายนอกจะแยกออกไปและค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทที่ขอบจะถูกกำหนดให้

5.3 วิธีดำเนินการ

5.3.1 ทฤษฎีสำหรับการอบแห้ง

การปรับรูปชุดสมการของ Luikov ดังที่ได้กล่าวในข้างต้นนำมาใช้ในการศึกษานี้ สมมุติฐานที่ใช้สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วย: (1) เมล็ดข้าวเปลือกเป็นรูปทรงรีต่อเนื่องกันแบ่งออกเป็นสามชั้น: เปลือก, รำ และข้าวขาว (รูปที่ 5.1 และรูปที่ 5.2) (2) กระบวนการนำความร้อนและการแพร่ความชื้นเป็นแบบไม่คงที่ และ (3) ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและมวลกำหนดให้ที่ขอบ (4) การแตกร้าวหรือการเปลี่ยนรูปทรงของเมล็ดข้าวเปลือกระหว่างการอบแห้งเกิดขึ้นน้อยมาก (5) ไม่เกิดความร้อนขึ้นเองภายในเมล็ดข้าว และ (6) ไม่มีผลของการแผ่รังสีความร้อน จากข้อสมมุติฐานข้างต้น สมการหลักที่ใช้อธิบายการอนุรักษ์ความร้อนภายในเมล็ดข้าวอยู่ในรูปแบบดังนี้:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g c_g T\right) = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T\right) \tag{5.1}$$

เมื่อ T คือ อุณหภูมิ [°C], t คือ เวลา [sec], ρ_g คือ ความหนาแน่นของเมล็ด [$\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$], c_g คือ ค่าความจุความร้อนของข้าว [$\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot {}^{\circ}C^{-1}}$], และ λ คือ ค่าการนำความร้อน [$\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot {}^{\circ}C^{-1}}$]

ทำนองเดียวกัน สมการการแพร่ของ Fick (Luikov, 1966) หรือสมการการถ่ายเทความชื้นสามารถเขียนได้เป็น:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_g \Phi\right) = \nabla \cdot \left(\rho_g D_{\Phi} \nabla \Phi\right) \tag{5.2}$$

เมื่อ Φ คือ ปริมาณความชื้น [dry basis, d.b. (นิยามเป็นมวลของน้ำส่วนด้วยมวลแห้งของก้อนวัสดุ)], และ D_Φ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ [$m^2 \cdot s^{-1}$]

5.3.2 เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

สำหรับสมการอนุรักษ์ความร้อนเงื่อนไขขอบคือ

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_t\left(T - T_a\right) \tag{5.3}$$

เมื่อ n คือ ทิศทางตั้งฉากภายนอก(หรือภายใน)ของผิวเมล็ดข้าว, h_t คือ ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน [$W \cdot m^{-2} \cdot {}^\circ C^{-1}$], และ T_a คือ อุณหภูมิอากาศแวดล้อม

สำหรับสมการอนุรักษ์มวลเงื่อนไขขอบคือ

$$-D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} = h_m\left(\Phi - \Phi_e\right) \tag{5.4}$$

เมื่อ Φ_e คือ ความชื้นสมดุลของเมล็ดภายใต้สภาวะอากาศโดยรอบ และ h_m คือ ค่าสัมประสิทธิ์การพาของมวล [$m \cdot s^{-1}$] เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับทั้งสองสมการเป็นดังนี้:

$$\Phi = \Phi_0, \quad T = T_0 \tag{5.5}$$

เมื่อ Φ_0 คือ ความชื้นเริ่มต้นของเมล็ดข้าว และ T_0 คือ อุณหภูมิเริ่มต้นของเมล็ดข้าวเปลือก

สมการปฏิสัมพันธ์สำหรับ h_t, h_m, λ, ρ_g, c_g, D_Φ และ Φ_e จะนำเสนอดังต่อไปนี้ โดย Lague and Jenkins (1991) ใช้สมการปฏิสัมพันธ์เพื่อหาค่า h_t, h_m, λ, ρ_g และ c_g เป็นดังนี้

$$h_t = 16.09 + 65.87 \times u^{0.53} \tag{5.6}$$

$$h_m = 0.01959 + 0.08073 \times u^{0.553} \tag{5.7}$$

เมื่อ u คือ ความเร็วเฉลี่ยของอากาศ [$m \cdot s^{-1}$]

$$\lambda = \frac{(0.0637 + 0.0958 \times \Phi_{ave})}{(0.656 - 0.475 \times \Phi *_{ave})} \tag{5.8}$$

เมื่อ Φ_{avg} คือ ปริมาณความชื้นเฉลี่ยของเมล็ดในหน่วย kg water/kg dry grain และ $\Phi *_{avg}$ คือ ปริมาณความชื้นเฉลี่ยของเมล็ดในหน่วย kg water/kg wet grain [wet basis, w.b.]

$$\rho_i = A_i \times \frac{1456 + 705 \times \Phi_{ave}}{1 + \Phi_{ave}} \tag{5.9}$$

เมื่อ A_i เป็นค่าคงที่สำหรับส่วนข้าวขาว, ชั้นรำ, และชั้นเปลือกข้าวเป็น 1.257, 1.493, 0.532 ตามลำดับ แบบจำลองค่าความจุความร้อนนำมาจาก Lague and Jenkins (1991) เป็นดังนี้:

$$c_{endosperm} = 1180 + 3766 \times \Phi *_{ave} \tag{5.10}$$

$$c_{bran} = 0.125 / [(1/(1201 + 3807 \times \Phi *_{ave}) - 0.875 / c_{endosperm}] \tag{5.11}$$

$$c_{hull} = 0.2 / [1/(1109 + 4477 \times \Phi *_{ave}) - 0.1 / c_{bran} - 0.7 / c_{endosperm}] \tag{5.12}$$

ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ความชื้นของเมล็ดคำนวณในรูปสมการจาก Lu and Siebenmorgen (1992):

$$D_{endosperm} = \frac{1.6163}{3600} \times \exp[-5289.5 / (T_{ave} + 273.15)] \tag{5.13}$$

$$D_{bran} = 110.969 \times \exp[-7042.5 / (T_{ave} + 273.15)] / 3600 \tag{5.14}$$

$$D_{hull} = 3.0101 \times \exp[-6000.5 / (T_{ave} + 273.15)] / 3600 \tag{5.15}$$

เมื่อ T_{avg} คือ ค่าอุณหภูมิเฉลี่ยของเมล็ดข้าวเปลือก สำหรับค่าความชื้นสมดุลของอากาศอบแห้งใช้ค่าใน ASAE Standards (2001) เป็น:

$$\Phi_e = 0.29394 - 0.046015 \ln[-(T_a + 35.703)\ln(RH)] \tag{5.16}$$

เมื่อ RH คือ ค่าความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศอบแห้ง

5.3.3 ข้อมูลการทดลองที่ใช้

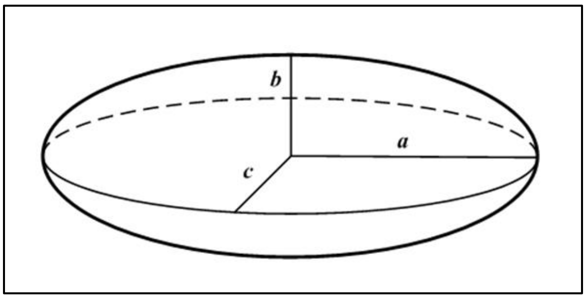
ข้อมูลการทดลองการอบแห้งแบบชั้นบางที่นำเสนอโดย Cnossen and Siebenmorgen (2000) และ Yang, Jia, Siebenmorgen, Howell, and Cnossen (2002) ใช้เทียบสอบกับผลการคำนวณที่จะนำเสนอ เงื่อนไขที่ใช้ในการทดลองแสดงในตารางที่ 5.1 ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของข้าวเปลือกในทุกเคสมีค่าอยู่ที่ 29 °C และความเร็วของอากาศที่ไหลเข้าสู่ชั้นบางของข้าวอยู่ที่ 0.11 $m{\cdot}s^{-1}$

ตารางที่ 5.1 เงื่อนไขอบแห้งของการทดสอบการอบแห้งแบบชั้นบาง

Case	**T_a (°C)**	**%RH**	**M_0 %[w.b.]**
I.	60	17	21.1
II.	42	30	16.4
III.	38	47	21.3

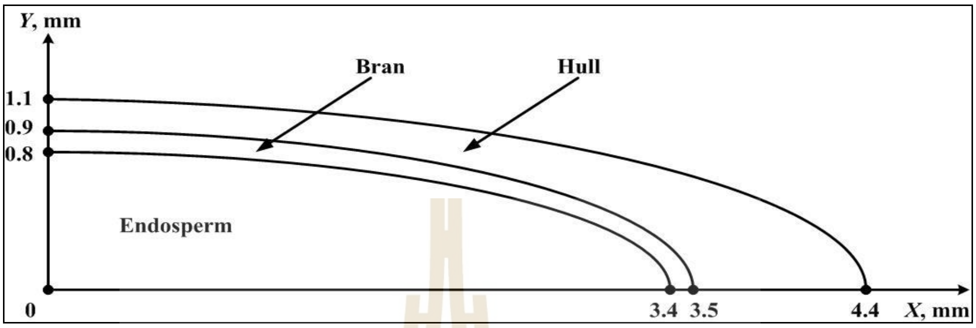
5.3.4 การสร้างขนาดเมล็ดข้าว

ในการศึกษานี้จะสมมุติให้เมล็ดข้าวเปลือกเป็นรูปทรงรีดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 ปริมาตรรูปทรงรีที่ประกอบด้วยแกน a, b, c

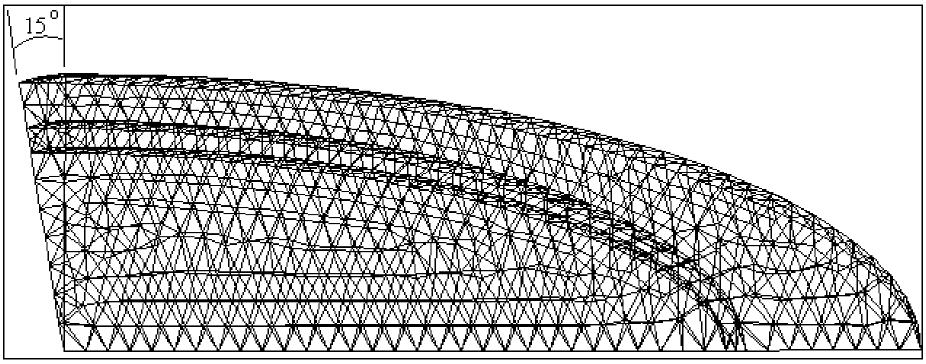
ข้าวเปลือกเมล็ดยาวพันธุ์ Cypress ใช้ในการศึกษานี้ โดยรูปทรงรีกำหนดให้มีขนาดเป็นดังนี้: 8.83 mm เป็นขนาดทางแกนยาว, 2.48 mm เป็นขนาดทางแกนสั้น, 1.92 mm เป็นขนาดของแกนสั้นสุด (Wu et al., 2004) รูปที่ 5.2 แสดงขนาดขององค์ประกอบทั้งสามชั้น



รูปที่ 5.2 ขนาดของส่วนเปลือก, รำ และข้าวขาวของข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ด (หน้าตัด 1/4)

5.3.5 การเก็บรวบรวมข้อมูล

การคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (ANSYS Inc., 2005) ถูกเลือกนำมาใช้หาผลเฉลยของกระบวนการอบแห้ง ในส่วนนี้จะใช้ CFD แก้ปัญหาสมการอนุรักษ์และการถ่ายเทโดยระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด กริดที่ใช้คำนวณทางคอมพิวเตอร์ถูกจำลองขึ้นด้วยกรรมวิธีการสร้างเมสในรูปทรงปิรามิดฐานสามเหลี่ยม ข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดถูกจำลองแบบสมมาตรรอบแกนโดยใช้แนวเส้นศูนย์กลางแกนยาวเป็นแกนสมมาตร คุณลักษณะของการสมมาตรรอบแกนของปัญหาจะถูกคำนวณในขอบข่ายการคำนวณทางคอมพิวเตอร์แบบสองมิติทรงรูปลิ่มมุม 15° ไปในทิศทางที่สาม (ดูรูปที่ 5.3) ด้วยความสมมาตรเพียงเศษหนึ่งส่วนสี่ของพื้นที่หน้าตัดจะถูกคำนวณ ขอบข่ายถูกย่อยเป็น 4,881 เอลิเมนต์ทรงสามเหลี่ยมที่มีจำนวนทั้งหมด 1,487 โหนด โดย CFD จะคำนวณสองสมการหลักสำหรับสองตัวแปร: อุณหภูมิและปริมาณความชื้น การคำนวณโดยขึ้นกับเวลาถูกจัดสรรขั้นเวลาให้เท่ากันใน (i) 1 วินาที สำหรับช่วงแรกของการอบแห้ง; (ii) 1 นาที ภายหลังจากนั้น; โดยข้อพิจารณานี้ได้มาจากการเห็นอัตราการอบแห้งจากการหาค่าทางการทดลอง

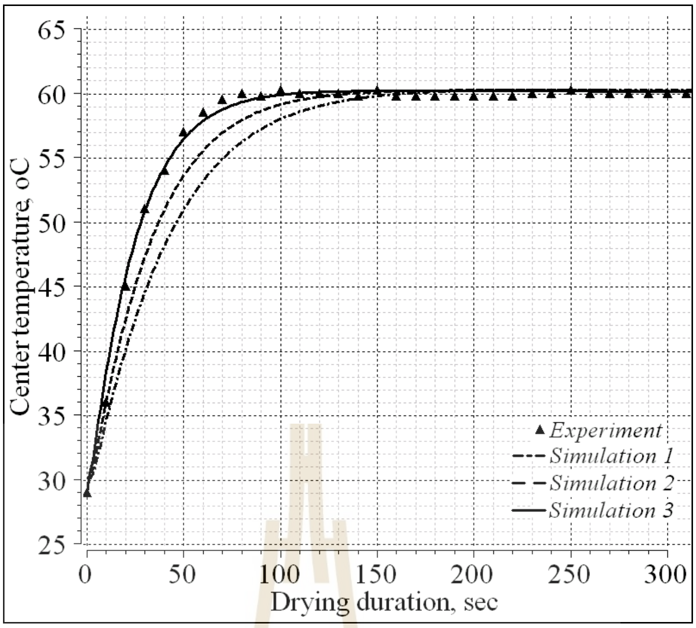


รูปที่ 5.3 กริดโครงสร้างใช้สำหรับลิ่ม 15 องศาในขอบข่ายการคำนวณแบบสมมาตรรอบแกน

เงื่อนไขขอบที่เหมาะสมเป็นที่ต้องการสำหรับผลสำเร็จของงานการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ เงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดในค่าของอุณหภูมิและความชื้นของเมล็ดและอากาศที่อยู่โดยรอบ นอกจากนั้นเงื่อนไขขอบของอุณหภูมิและความชื้นที่แสดงในสมการ (5.3) และ (5.4) ถูกใช้ที่ด้านนอกผิวของเมล็ด เงื่อนไขขอบ “สมมาตร” ถูกใช้ที่ระนาบ θ ด้านสูงและต่ำ และในด้านผิวหน้าตัดของลิ่ม กรณีการทดสอบทั้งหมดจะคำนวณจนกระทั่งกากของสมการมีการลู่เข้า อย่างไรก็ตามการลู่เข้าของการคำนวณถูกยืนยันความถูกต้องด้วยการสังเกตกฎคงมวลของแนวการไหลประกอบไปด้วย

5.4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลและการอภิปรายผล

การเปรียบเทียบค่าของอุณหภูมิที่ส่วนตรงกลางของเมล็ดด้วยข้อมูลการทดลองของ Yang et al. (2002) ได้แสดงในรูปที่ 5.4 ในการคำนวณเริ่มแรก (simulation 1) มีความแตกต่างระหว่างผลที่สองค่าเป็นอย่างมาก โดยเฉพาะในช่วงแรกของการอบแห้ง ความไม่สอดคล้องนี้เชื่อว่าเป็นผลมาจากความคลาดเคลื่อนของค่าพารามิเตอร์ทั้งหลายที่ไม่ได้วัดมาโดยเฉพาะสำหรับข้าวพันธุ์ Cypress ที่ใช้ในการศึกษานี้ โดยวิธีการหาค่าคุณสมบัติของข้าวถูกนำมาจากงานวิจัยอ้างอิง; ตัวอย่างเช่น ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของมวลถูกพัฒนามาสำหรับข้าวพันธุ์ ‘Newbonnet’ โดยมีพารามิเตอร์ส่วนหนึ่งที่เกี่ยวกับอัตราการถ่ายเทความร้อน ดังเช่น ค่าความจุความร้อนของข้าว c_g, ค่าการนำความร้อน λ, และค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน h_t ด้วยข้อสงสัยนี้จึงทำการปรับค่า c_g ด้วยการคูณค่าปรับแก้ ในรูปที่ 5.4 ‘Simlation 1’, ‘Simlation 2’ และ ‘Simlation 3’ นำเสนอเพื่อแสดงผลการคำนวณเมื่อปรับค่า c_g ด้วยการคูณโดย 1.0, 0.8 และ 0.6 ตามลำดับ

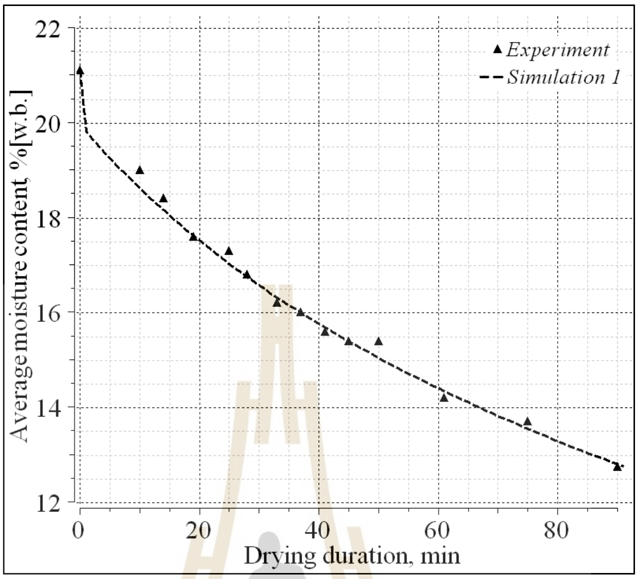


รูปที่ 5.4 ค่าการทดลองและค่าการคำนวณอุณหภูมิตรงกลางเมล็ดข้าวเปลือกที่อากาศอบแห้ง 60 °C และความชื้นสัมพัทธ์ 17%

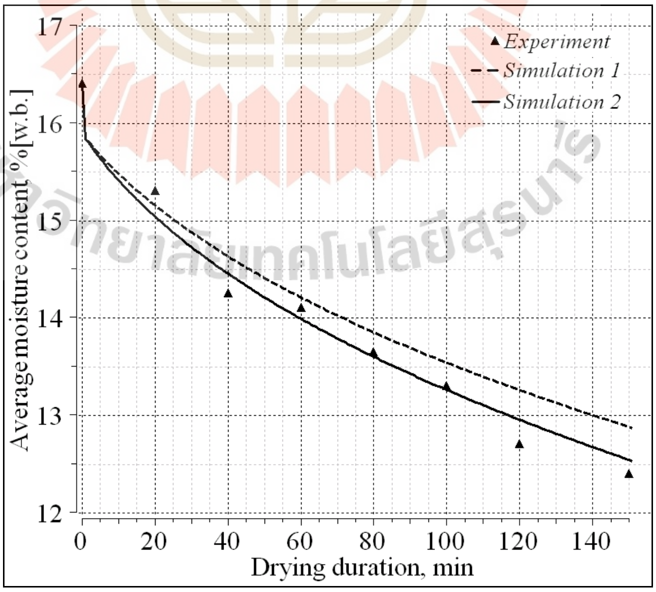
จากผลที่ได้พบว่า ‘Simlation 3’ สอดคล้องอย่างดีที่สุดกับข้อมูลการทดลอง จะเห็นว่าอุณหภูมิตรงกลางของเมล็ดเพิ่มขึ้นถึงค่าอุณหภูมิอากาศอบแห้งด้วยเวลาประมาณ 2 นาที การเพิ่มอย่างรวดเร็วของอุณหภูมิสามารถมีผลให้เกิดความเค้นอันเนื่องจากความร้อนที่ทำให้เมล็ดข้าวเปลือกแตกหักได้ (Sarker et al., 1996)

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าสำหรับกรณีทั้งสามเงื่อนไขการอบแห้งที่ปรากฏในตารางที่ 5.1 นอกจากในกรณีของอุณหภูมิที่กล่าวมาแล้วนั้น ผลในตอนท้ายแสดงความแตกต่างอย่างมากของค่าปริมาณความชื้นเฉลี่ย ค่าสัมประสิทธิ์การพามวล h_m และค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ของมวล D_Φ เป็นพารามิเตอร์หลักที่มีผลต่ออัตราการถ่ายเทความชื้นในท้ายสุดมีการปรับค่าโดยกระทำต่อค่า D_Φ ด้วยการคูณค่าตัวปรับแก้ในส่วนทั้งหมดของเมล็ดโดยที่ยังคงค่าสัมประสิทธิ์การพามวลไม่ให้มีค่าเปลี่ยนแปลง ผลเปรียบเทียบค่าความชื้นเฉลี่ยของทั้งเมล็ดสำหรับทั้งสามกรณีแสดงให้เห็นในรูปที่ 5.5-5.7 Simlation 1’ และ ‘Simlation 2’ แทนผลการคำนวณที่ไม่ได้ปรับค่าและที่ปรับค่าสำหรับ D_Φ ตามลำดับ กรณีที่ I ในรูปที่ 5.5 ไม่ได้มีการปรับค่า; กรณีที่ II ในรูปที่ 5.6 มีตัวปรับค่าด้วยตัวคูณ 1.2 และกรณีที่ III ในรูปที่ 5.7 ปรับค่าด้วยตัวคูณ 1.8 จะเห็นได้ว่าตัวคูณปรับแก้สามารถช่วยเพิ่มค่าการทำนายได้สอดคล้องกับค่าข้อมูลการทดลอง ค่าตัวคูณปรับค่าสำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแพร่มวล, c_D, สามารถสร้างความสัมพันธ์กับค่าอุณหภูมิอากาศอบแห้งในรูปแบบตัวแปรยกกำลังสองเป็น:

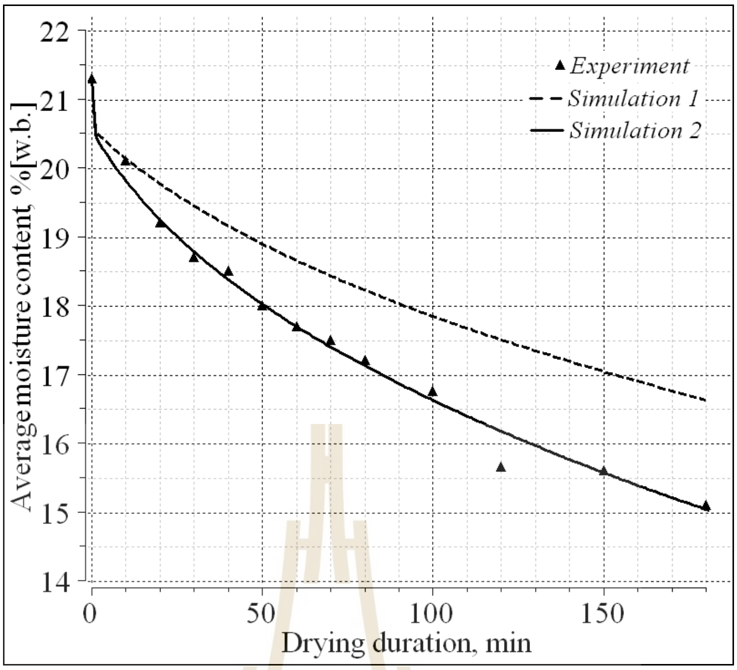
$$c_D = 17.1727 - 0.6348 T_a + 0.00606 T_a^2 \tag{5.19}$$



รูปที่ 5.5 ค่าการทดลองและการคำนวณปริมาณความชื้นเฉลี่ยที่อากาศอบแห้ง 60°C และความชื้นสัมพัทธ์ 17%



รูปที่ 5.6 ค่าการทดลองและการคำนวณปริมาณความชื้นเฉลี่ยที่อากาศอบแห้ง 42°C และความชื้นสัมพัทธ์ 30%

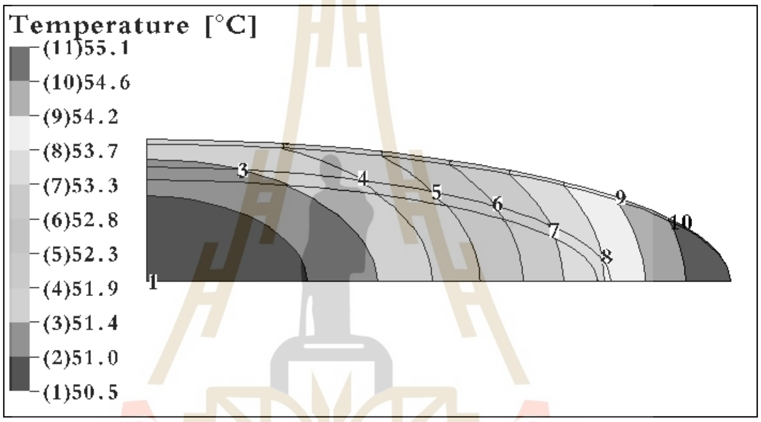


รูปที่ 5.7 ค่าการทดลองและการคำนวณปริมาณความชื้นเฉลี่ยที่อากาศอบแห้ง 38°C และความชื้นสัมพัทธ์ 47%

ค่าเกรเดียนท์ความชื้นเป็นผลกระทบหลักที่ทำให้เกิดการแตกร้าวของเมล็ดข้าว การลดลงอย่างมากของปริมาณความชื้นสามารถสังเกตเห็นได้ในระหว่างช่วงนาทีแรก ๆ ของการอบแห้ง; ภายหลังจากนั้นความชื้นลดลงอย่างช้า ๆ พฤติกรรมนี้เป็นที่ทราบกันดีในทางวิทยาศาสตร์การอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกและยังสามารถทำนายค่าได้อย่างถูกต้องด้วยกรรมวิธีการคำนวณทางคอมพิวเตอร์

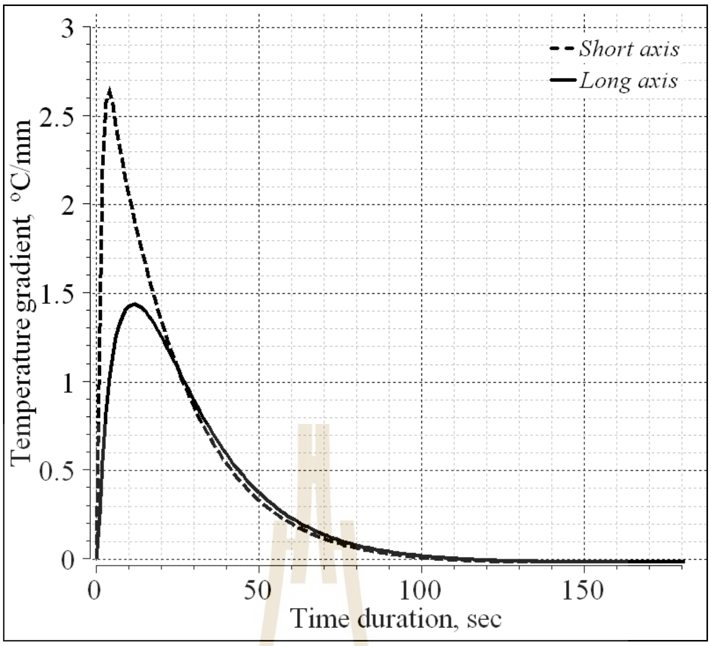
หลากหลายงานวิจัยได้นำเสนอผลอันเกิดจากเกรเดียนท์ความชื้นและอุณหภูมิที่ทำให้เกิดระดับความเค้นอย่างสูงในเมล็ด เนื่องจากเกรเดียนท์อุณหภูมิปรากฏเฉพาะในช่วงนาทีแรก ๆ ของกระบวนการอบแห้ง; ดังนั้นสิ่งนี้จึงมีผลผลกระทบต่อการแตกร้าวน้อยกว่าเกรเดียนท์ความชื้น; ดังนั้นจึงมีงานวิจัยโดยมาก (Sarker et al., 1994; Ranjan et al., 2002; Yang et al., 2002) ที่ละเว้นการนำเสนอในส่วนของอุณหภูมิไป ในทางตรงกันข้ามค่าเกรเดียนท์ความชื้นจะมีค่าค่อนข้างน้อยในช่วงแรกของการอบแห้งเนื่องจากปริมาณความชื้นที่นำออกจากเมล็ดมีได้จำกัด แต่จะมีค่าเพิ่มขึ้นมาอีกโดยตลอดที่กระบวนการอบแห้งดำเนินไป (Yang, Zhang, and Jia, 2005) ดังตัวอย่างที่แสดงเห็นของค่าเกรเดียนท์ความชื้นและอุณหภูมิในรายละเอียดแล้วนั้น จึงเป็นความสำคัญที่จะต้องทราบค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นในเมล็ดข้าวเปลือกในระหว่างกระบวนการอบแห้ง

ข้อดีประการหนึ่งของ CFD ที่สามารถเห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นได้ทั่วทั้งเมล็ดในโดเมนการคำนวณในแต่ละขั้นเวลาได้ การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในเมล็ดภายหลัง 30 วินาที ของกรณีที่ I ได้แสดงในรูปที่ 5.8 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในช่วงเริ่มต้นของการอบแห้งปรากฏค่าความแตกต่างอย่างมากระหว่างบริเวณผิวและส่วนด้านในของเมล็ดข้าวเปลือก (อุณหภูมิแตกต่างอยู่ที่ประมาณ 5°C ภายหลัง 30 วินาที) เมื่อกระบวนการอบแห้งดำเนินไปมีการลดระดับการกระจายตัวของอุณหภูมิอย่างรวดเร็ว ดังนั้นในกระบวนการอบแห้งต้องมีการควบคุมอย่างระมัดระวังที่จะให้เกิดความเสียหายน้อยที่สุดอันเนื่องจากการเพิ่มขึ้นของความเค้นจากความร้อนของอุณภูมิที่เกิดขึ้นภายในเมล็ด



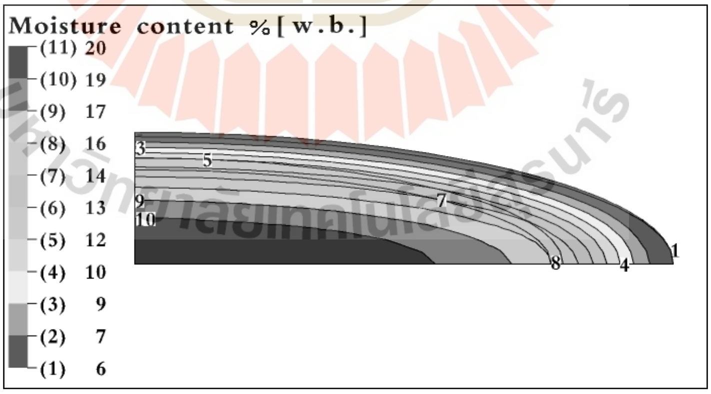
รูปที่ 5.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิภายหลัง 30 วินาที ของกรณีที่ I ในตารางที่ 5.1

สำหรับการคำนวณค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดจะนำเสนอดังนี้ โดยที่ค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิกำหนดโดยความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างจุดนอกสุดของชั้นรำและจุดตรงกลางของเมล็ดข้าวเปลือกหารด้วยระยะระหว่างจุดอุณหภูมิทั้งสอง ค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิตามทิศทางสองแกน (ตามแนวแกนยาวและแนวแกนสั้น) ได้แสดงในรูปที่ 5.9 ซึ่งพบว่าค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดปรากฏที่เวลา 5-10 วินาที ภายหลังเริ่มการอบแห้งและระดับของเกรเดียนท์อุณหภูมิจะลดระดับไปภายหลัง 2 นาที ข้อมูลนี้สอดคล้องกับการค้นพบที่รายงานโดย Yang et al. (2002) ทั้งยังสามารถพบได้อีกว่าค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดในทิศทางของแกนสั้นมีค่าใกล้เคียงเป็นสองเท่าของค่าในทิศทางแกนยาว เนื่องจากค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดจะปรากฏขึ้นเฉพาะในช่วงนาทีแรก ๆ ของกระบวนการอบแห้ง ดังนั้นถ้ามีการใช้อุณหภูมิการอบแห้งที่สูงในกระบวนการอบแห้งจะต้องมีการจัดการอย่างระมัดระวังในการให้เกิดค่าเกรเดียนท์ให้น้อยที่สุด



รูปที่ 5.9 ค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิของกรณีที่ I ในตารางที่ 5.1

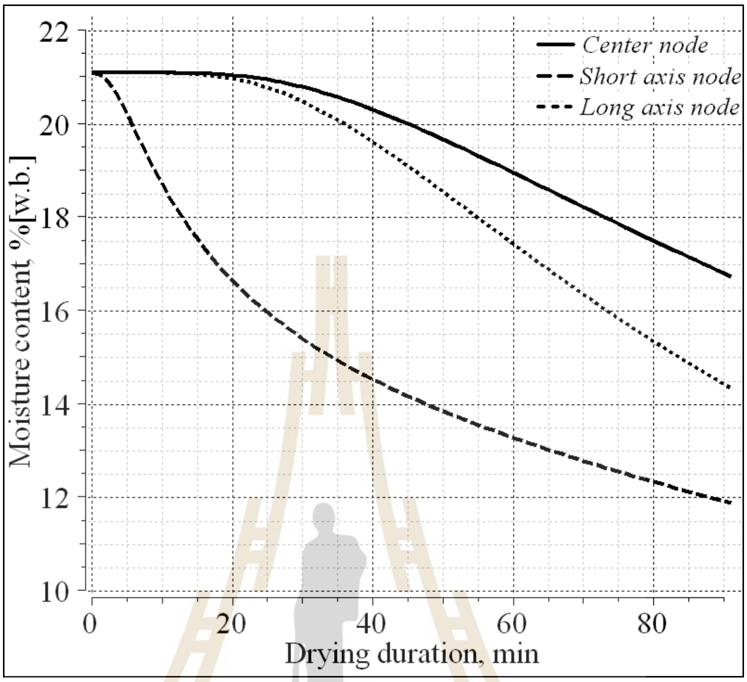
ข้อแตกต่างจากค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิ, การกระจายตัวของความชื้นภายในเมล็ดลดลงอย่างช้า ๆ ดังที่แสดงให้เห็นในรูปที่ 5.10-5.11



รูปที่ 5.10 การกระจายตัวของความชื้นของกรณีที่ I ที่ 80 นาที

การคำนวณปริมาณความชื้นที่สามจุดเลือกในเมล็ดข้าวเปลือกภายใต้เงื่อนไขการอบแห้งของกรณีที่ I แสดงให้เห็นในรูปที่ 5.11 เมื่อกระบวนการอบแห้งดำเนินไปจากส่วนชั้นด้านนอกไปยังส่วนในของเมล็ดข้าวเปลือก ค่าปริมาณความชื้นของจุดตรงกลางจะยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงใน

ระหว่างช่วง 20 นาทีแรก ก่อนที่จะลดตัวลงอย่างช้า ๆ หลังจากนั้น ค่าปริมาณความชื้นที่จุดผิวด้านแกนสั้นมีค่าลดลงอย่างมากและมากกว่าที่จุดผิวด้านแกนยาว

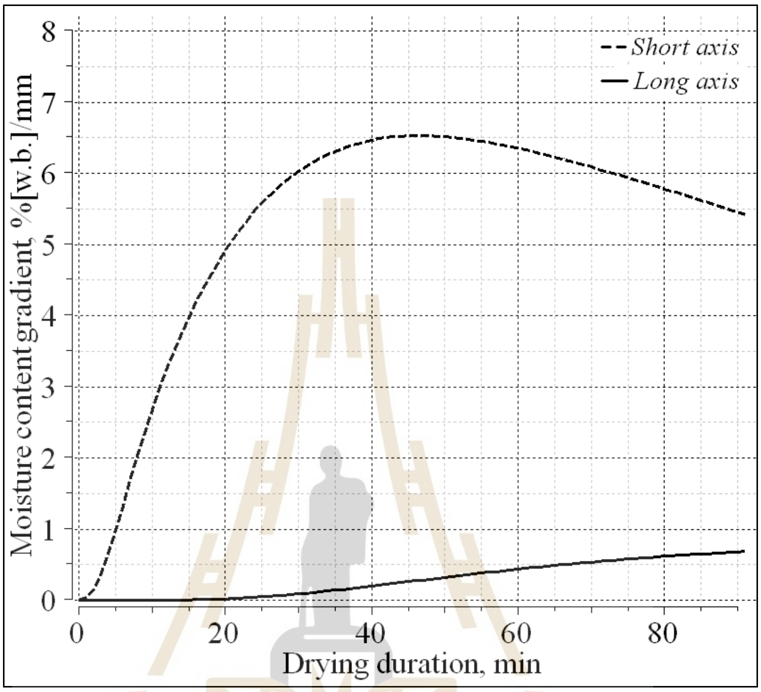


รูปที่ 5.11 ค่าเกรเดียนท์ความชื้นทั้งสามจุดเลือกบนเมล็ดข้าวเปลือกของกรณีที่ I

ค่าเกรเดียนท์ความชื้นคือค่าความแตกต่างของปริมาณความชื้นที่จุดผิวนอกของชั้นรำและจุดกลางของเมล็ดข้าวเปลือกหารด้วยระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง ค่าเกรเดียนท์ความชื้นนี้เป็นแรงขับสำหรับการแพร่ความชื้นจากชั้นด้านในไปยังส่วนผิวของเมล็ด สืบเนื่องจากเมล็ดข้าวนั้นสามารถดูดความชื้นได้และมีพลวัตรทางกายภาพที่เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงความชื้นและอุณหภูมิภายใต้อากาศอบแห้งโดยรอบ เมล็ดข้าวที่เปียกผิวจะเสียความชื้นให้กับอากาศที่แห้งกว่าโดยความชื้นที่สัมพัทธ์โดยจะปรากฏเมื่อความดันไอที่ผิวของเมล็ดมีค่าสูงมากกว่าความดันไอของอากาศโดยรอบ สำหรับด้านแกนยาวค่าเกรเดียนท์ความชื้นจะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่องเป็นผลให้มีการเพิ่มของอัตราการอบแห้ง Sarker et al. (1966) และ Yang et al. (2002) พบว่าค่าเกรเดียนท์ความชื้นภายในเมล็ดข้าวแต่ละเมล็ดนั้นจะมีผลกระทบอย่างมากต่อค่าคุณภาพของข้าวในตอนท้าย

รูปที่ 5.12 แสดงค่าเกรเดียนท์ความชื้นตามแนวของสองแกนภายใต้เงื่อนไขการอบแห้งกรณีที่ I ค่าสูงสุดที่เพิ่มขึ้นที่เวลา 45 นาทีในแนวแกนสั้นอีกทั้งยังเป็นค่าที่มากกว่าในทางแกนยาวซึ่งเป็นข้อยืนยันที่พบได้ในงานวิจัยของ Sarker et al. (1996) การเพิ่มขึ้นอย่างสูงของค่าเกรเดียนท์ความชื้นนั้นจะปรากฏในช่วงแรกของการอบแห้งแล้วจึงค่อย ๆ มีแนวโน้มลดลง ดังนั้นแล้วเทคนิค

กระบวนการอันเหมาะสมอย่างเช่น กระบวนการพักหรือการเว้นช่วงการอบแห้งควรนำมาใช้ก่อนจะเกิดค่าสูงสุดของเกรเดียนท์ของความชื้น เช่นที่เวลา 20 นาที เพื่อที่จะลดปัญหาการแตกร้าวและยังไปเพิ่มคุณภาพของเมล็ดข้าวสีภายหลังกระบวนการอบแห้งได้อีกด้วย



รูปที่ 5.12 ค่าเกรเดียนท์ความชื้นของกรณีที่ I

5.5 บทสรุป

การเกี่ยวพันกันของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดในระหว่างกระบวนการอบแห้งได้คำนวณโดยใช้ CFD เพื่อแก้ปัญหาสมการในด้านการถ่ายเทความร้อนและความชื้น การทำนายผลจาก CFD ได้เทียบสอบด้วยข้อมูลจากการทดลองอ้างอิง โดยค่าการทำนายการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นให้ผลที่สอดคล้องเป็นอย่างดีกับค่าข้อมูลที่วัดมาได้จากการทดลอง ในส่วนของค่าเกรเดียนท์ความชื้นสูงสุดและค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดพบว่าจะปรากฏค่าสูงในด้านแกนสั้นของเมล็ดข้าว ค่าเกรเดียนท์ความชื้นสูงสุดปรากฏอยู่นานกว่าค่าเกรเดียนท์อุณหภูมิสูงสุดโดยเกิดที่เวลาประมาณ 45 นาที การคำนวณด้วย CFD หากใช้อย่างเหมาะสมสามารถช่วยในการวิเคราะห์ปรับปรุงสมรรถภาพและคุณภาพของเทคโนโลยีการอบแห้งเมล็ดข้าวได้

5.6 รายการอ้างอิง

ANSYS Inc. (2005). **ANSYS CFX, Release 10.0** [On-line]. Available: http://www.ansys.com

ASAE. (2001). **ASAE Standards D245.5: Moisture Relationships of Plant-Based Agricultural Products**. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, MI.

Cnossen, A.G., and Siebenmorgen, T.J. (2000). The Glass Transition Temperature Concept in Rice Drying and Tempering: Effect on Milling Quality. **Transactions of the ASAE**. 43(6): 1661-1667.

Husain, A., Chen, C.S., and Clayton, J.T. (1973). Simultaneous Heat and Mass Diffusion in Biological Materials. **Journal of Agricultural Engineering Research**. 18(3): 343-354.

Jia, C.-C., Sun, D.-W., and Cao, C.-W. (2000). Mathematical Simulation of Temperature and Moisture Fields within a Grain Kernel during Drying. **Drying Technology**. 18(6): 1305-1325.

Jia, C.-C., Yang, W., Siebenmorgen, T. J., and Cnossen, A. G. (2001). Development of Computer Simulation Software for Single Grain Kernel Drying, Tempering and Stress Analysis. **Transactions of the ASAE**. 45(5): 1485-1492.

Kaya, A., Aydin, O., and Dincer, I. (2006). Numerical Modelling of Heat and Mass Transfer during Forced Convection Drying of Rectangular Moist Objects. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 49: 3094-3103.

Lague, L., and Jenkins, B.M. (1991). Modeling Pre-Harvest Stress-Cracking of Rice Kernels, Part 2: Implementation and use of the Model. **Transactions of the ASAE**. 34(4): 1812-1823.

Lu, R., and Siebenmorgen, T.J. (1992). Moisture Diffusivity of Long-Grain Rice Components. **Transactions of the ASAE**. 35(6): 1955-1961.

Luikov, A.V. (1966). **Heat and Mass Transfer in Capillary Bodies**. Pergamon Press, England.

Ranjan, R., Irudayaraj, J., and Mahaffy, J. (2002). Modeling Simultaneous Heat and Mass Transfer using the Control-Volume Method. **Numerical Heat Transfer**. 41(Part B): 463-476.

Sarker, N.N., Kunze, O.R., and Strouboulis, T. (1994). Finite Element Simulation of Rough Rice Drying. **Drying Technology**. 12(4): 761-775.

Sarker, N.N., Kunze, O.R., and Strouboulis, T. (1996). Transient Moisture Gradients in Rough Rice Mapped with Finite Element Model and related to Fissures after Heated Air Drying. **Transactions of the ASAE**. 39(2): 625-631.

Wu, B., Yang, W., and Jia, C. (2004). A Three-dimensional Numerical Simulation of Transient Heat and Mass Transfer inside a Single Rice Kernel during the Drying Process. **Biosystems Engineering**. 87(2): 191-200.

Yang, W., Jia, C.-C., Siebenmorgen, T.J., Howell, T.A., and Cnossen, A.G. (2002). Intra-kernel moisture responses of rice to drying and tempering treatment by finite element simulation. **Transactions of the ASAE**. 45(4): 1037-1044.

Yang, W., Zhang, Q., and Jia, C. (2005). Understanding rice breakage through internal work, fracture energy, and glass transition of individual kernels. **Transactions of the ASAE**. 48(3): 1157-1164.

บทที่ 6
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผลการวิจัย

การทดสอบแบบจำลองความปั่นป่วนในการคำนวณเชิงตัวเลข

การทดสอบค่าการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับคำตอบเชิงทฤษฎีของปัญหาการไหลผ่านแผ่นบางในย่านความเร็วต่ำ การไหลแบบพาความร้อนอิสระข้างแผ่นความร้อนในแนวตั้ง การไหลในท่อ การถ่ายโอนมวลสารด้วยการพา การไหลผ่านชั้นผิวบางแบบปั่นป่วน และการไหลผ่านวัตถุทรงกลม โดยการเปรียบเทียบค่าจากการคำนวณกับคำตอบเชิงทฤษฎี เพื่อทำให้สามารถตัดสินใจเลือกใช้แบบจำลองสำหรับการคำนวณให้เกิดความเหมาะสมกับปัญหาการไหลได้ในแต่ละกรณีพบว่าในปัญหาการไหลผ่านวัตถุทรงกลมในสามมิติแบบจำลอง Spalart-Allmaras มีแนวโน้มที่สอดคล้องกับสมการปฏิสัมพันธ์อ้างอิงมากที่สุด

เงื่อนไขการอบแห้งที่มีผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ดข้าว

ศึกษาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ของอากาศร้อนผ่านวัสดุอุณหภูมิคงที่ในสองมิติด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อหาเส้นการไหลและข้อมูลอุณหภูมิของอากาศร้อนรอบวัสดุ พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนที่ผิวของวัสดุกับงานวิจัยอ้างอิง และเปรียบเทียบค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผิวของวัสดุจากการคำนวณด้วยแบบจำลองสองแบบ ทั้งศึกษาหาอัตราการถ่ายเทความร้อนและมวลความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกหนึ่งเมล็ดที่อยู่ภายใต้กระแสการไหลของอากาศร้อนหลายแบบ ใช้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยปรับค่าปัจจัยต่าง ๆ ได้แก่ ความเร็วอากาศ อุณหภูมิอากาศ ความชื้นสัมพัทธ์อากาศ ความชื้นเริ่มต้นเมล็ดข้าว และมุมเอียงของการวางตัวของเมล็ดข้าวเปลือก เพื่อนำผลที่ได้ไปพัฒนาวิธีการอบแห้งข้าวเปลือกให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น โดยเฉพาะการลดการใช้พลังงาน การลดเวลาในการอบแห้ง และการลดการแตกหักของเมล็ดข้าว ซึ่งพบว่ายังมีประเด็นการศึกษาอีกมากที่จะนำไปสู่การพัฒาแบบจำลองการอบแห้งได้อีกต่อไป

การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือก

ทำนายการถ่ายเทความร้อนและมวลความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลือกภายใต้อากาศอบแห้งที่ผันแปรด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับผลการทดลองอ้างอิงพร้อมทั้งพิจารณาหาเงื่อนไขที่เหมาะสมของการอบแห้งเมล็ดข้าวเปลือกที่ใช้อากาศแห้งร้อนเพื่อเป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ปัญหาการอบแห้งและพัฒนาสู่การวิเคราะห์ผลที่จะผนวกเข้ากับ

การไหลต่อไป ทั้งนี้พบว่าค่าเกรเดียนต์อุณหภูมิภายในเมล็ดข้าวเกิดขึ้นเพียงไม่กี่นาทีแรกของกระบวนการอบแห้ง ส่วนค่าเกรเดียนต์ความชื้นอันเป็นส่วนสำคัญที่มีผลกระทบต่อสมบัติการอบแห้งของข้าวที่จะทำให้เกิดความเครียดภายในเมล็ดข้าวและมีผลต่อความแตกร้าวของเมล็ดข้าวได้ต่อไป ค่าเกรเดียนต์ความชื้นสูงสุดและเกรเดียนต์อุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้นบริเวณแกนสั้นของเมล็ดข้าว ผลของเกรเดียนต์ความชื้นสูงสุดที่เกิดขึ้นภายหลังและยาวนานกว่าค่าสูงสุดของเกรเดียนต์อุณหภูมิจะมีผลให้เกิดความเครียดสะสมจากความแตกต่างของความชื้นภายในเมล็ดข้าวและมีผลต่อการแตกหักของเมล็ดข้าวภายหลังกระบวนการขัดสีได้ เห็นได้ว่าค่าการคำนวณเชิงตัวเลขสามารถใช้ในการวิเคราะห์เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพและคุณภาพของกระบวนการอบแห้งได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนและความชื้นของเมล็ดข้าวเปลือกภายใต้การไหลของอากาศร้อนไปพร้อมกันจะทำให้เกิดความสมจริงของปัญหามากขึ้น เนื่องจากการไหลของอากาศร้อนภายนอกเมล็ดที่จะมีผลต่อค่าพารามิเตอร์การถ่ายเทระหว่างเมล็ดข้าวกับอากาศร้อนที่แปรผันไปทำให้รูปแบบการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ดข้าวเปลี่ยนไปตาม เมื่อวิเคราะห์รูปแบบการกระจายตัวของอุณหภูมิและความชื้นภายในเมล็ดข้าวที่จะมีผลต่อคุณภาพของเมล็ดข้าวด้านกายภาพต่าง ๆ ทั้งด้านสี และการแตกร้าว เป็นต้น หากดำเนินการได้ย่อมเป็นผลดีต่อการออกแบบและพัฒนากระบวนการอบแห้งโดยการใช้อากาศร้อน ทั้งยังเป็นแนวทางต่อกระบวนการลดความชื้นแบบอื่น ๆ ได้ด้วย เช่น การใช้ความร้อนจากแสงอาทิตย์ การอบแห้งแบบที่ใช้ไมโครเวฟ การอบแห้งแบบเยือกแข็ง ฯลฯ นอกจากนี้ยังสามารถขยายแนวทางสู่วัสดุหรือผลิตภัณฑ์อื่น ๆ ได้อีกด้วย จึงเป็นหัวข้อที่ควรดำเนินการศึกษาต่อไป

ภาคผนวก ก

การวิเคราะห์การดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้เพื่อประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรม

ก.1 บทคัดย่อ

การศึกษาผลการกระจายตัวของพื้นที่ใบไม้แต่ละชั้น (Canopy structure) ในรูปแบบต่าง ๆ ต่อพฤติกรรมการดูดซับและการทะลุผ่านพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้ วิธีการวิจัยกระทำ โดยใช้แผ่นความร้อนที่มีพฤติกรรมเป็นวัตถุดำ (Blackbody) หรือวัตถุเทา (Gray body) ในการกักเก็บพลังงานความร้อนจากแสงอาทิตย์และการแผ่รังสีที่เกิดภายในโครงแผ่นความร้อน โดยแผ่นความร้อนจะมีลักษณะพรุนเพื่อให้เกิดการทะลุผ่านได้ของรังสีความร้อน ด้วยการเขียนโปรแกรมการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ให้กับแบบจำลอง ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้สร้างปฏิสัมพันธ์ของส่วนประกอบของโครงแผ่นความร้อนที่จะมีผลต่อระบบ ทั้งนี้แบบจำลองถูกสร้างให้สามารถรับพลังงานแสงอาทิตย์โดยตรง เพื่อศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ ที่จะมีต่อลักษณะการดูดซับและการส่งผ่านรังสีความร้อนของโครงแผ่นความร้อน

ผลการวิเคราะห์ในกรณีต่าง ๆ พบว่า การดูดซับพลังงานความร้อนของแต่ละแผ่นขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนพื้นที่ต่อพื้นที่เต็มของชั้นความร้อนนั้น ๆ เป็นสำคัญ ที่จะมีผลต่อทั้งการแผ่รังสี การดูดกลืนรังสี การทะลุผ่านรวมไปถึงการสะท้อนกลับของค่าพลังงานความร้อนในแต่ละชั้น ซึ่งผลโดยรวมที่ได้ออกมาขึ้นกับค่าจำนวนชั้นที่ค่าพื้นที่รวมที่พิจารณานั้น ๆ ด้วย ในกรณีที่ทำการเพิ่มค่าอุณหภูมิของแผ่นความร้อนและการเพิ่มค่าพลังงานแสงอาทิตย์ที่เข้ามาในระบบ พบว่าค่าพลังงานที่แผ่นความร้อนทิ้งออกจากระบบจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากพลังงานการแผ่รังสีที่เพิ่มขึ้น ส่วนการดูดซับพลังงานความร้อนของแผ่นความร้อนแต่ละแผ่น พบว่ามีรูปแบบการกระจายตัวที่สอดคล้องกับการกระจายตัวของพื้นที่ของชั้นความร้อนนั้น กรณีที่น่าสนใจเมื่อทำการศึกษาที่แผ่นความร้อนแผ่นล่างมีคุณสมบัติเป็นพื้นที่เต็มและสามารถสะท้อนรังสีความร้อนได้ทั้งหมด แล้วทำการเพิ่มจำนวนชั้นของโครงแผ่นความร้อนในรูปแบบต่าง ๆ พบว่าระบบสามารถดูดซับพลังงานได้เพิ่มขึ้น

ผลของงานวิจัยนี้ชี้ให้เห็นว่า คำตอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในเชิงวิศวกรรมนั้นสามารถบ่งชี้ได้ว่าโครงแผ่นความร้อนที่ได้ทำการศึกษาจะเป็นต้นแบบและมีความสำคัญต่อการสร้างตัวกักเก็บพลังงานความร้อนที่สามารถใช้ประโยชน์ได้ การศึกษาในที่นี้เป็นเพียงการศึกษาพฤติกรรมของการถ่ายเทพลังงานความร้อนขั้นต้นเท่านั้น การศึกษาขั้นต่อไปอาจจะศึกษาผลเนื่องจากตัวแปรอื่นที่จะส่งผลในการเพิ่มประสิทธิภาพในการกักเก็บพลังงานความร้อนของโครงแผ่นความร้อน เพื่อหาแนวทางในการออกแบบและพัฒนาระบบให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นได้ต่อไป

ก.2 บทนำ

แรงดลใจในการวิจัยนี้ได้จากการที่ได้สังเกตไม้โตเร็วหลายสกุลพบว่ามีคุณลักษณะโครงสร้างกลุ่มใบในภาพรวมที่ค่อนข้างขัดต่อคุณลักษณะอันพึงประสงค์ในเชิงวิศวกรรมศาสตร์

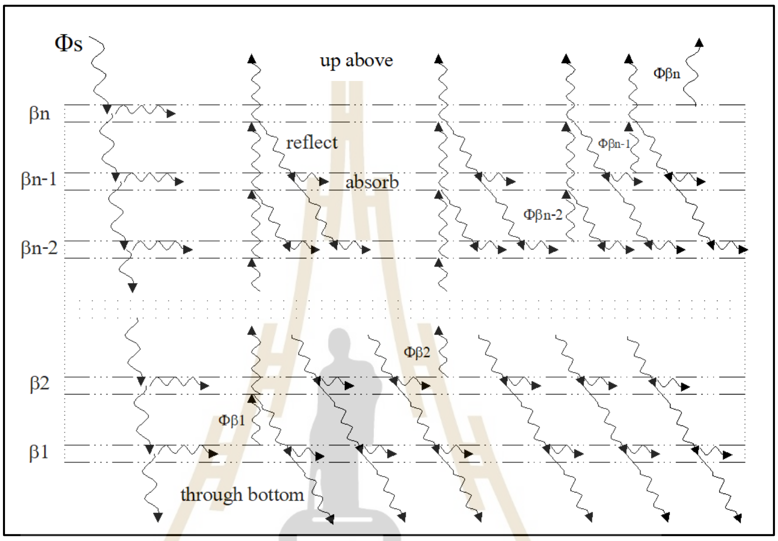
กล่าวคือ มีพื้นที่หน้าตัดในการรับแสงแดดน้อยและมีโครงสร้างใบที่มีขนาดเล็ก และยังโปร่งบางอีกด้วย ซึ่งคุณลักษณะเช่นนี้พิจารณาโดยคร่าวน่าจะได้ข้อสรุปว่าจะทำให้มีพื้นที่รองรับการตกกระทบของแสงแดดน้อยกว่าปกติ แต่ต้นไม้เหล่านี้กลับโตเร็วกว่าปกติ เมื่อได้วิเคราะห์ให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้นจึงได้คาดคะเนว่า ใบที่โปร่งนั้นอาจจะดูดซับพลังงานได้สูงกว่าใบทึบเพราะใบที่โปร่งจะเกิดการสูญเสียจากการสะท้อนแสงออกสู่บรรยากาศน้อยกว่าใบทึบ เพราะชั้นล่าง ๆ ของใบจะสะท้อนแสงขึ้นข้างบนแต่จะถูกหลังใบของชั้นบน ๆ สะท้อนกลับลงข้างล่างเพื่อให้ดูดซับอีก หากสามารถพิสูจน์ว่าการคะเนดังกล่าวเป็นความจริงโดยการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ก็น่าจะประยุกต์ความรู้นั้นเพื่อใช้กับอุปกรณ์ส่งถ่ายความร้อนโดยการใช้หลักการของการแผ่รังสีความร้อนได้ เช่น การรับความร้อนจากพลังงานแสงอาทิตย์เพื่อทำน้ำร้อน เป็นต้น

ในการศึกษาได้ทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการรับส่งพลังงานรังสีความร้อน และการวิเคราะห์ปริมาณการดูดซับและการสะท้อนของชั้นใบต่าง ๆ ของต้นไม้โดยการสมมติให้ใบไม้มีการกระจายในแต่ละชั้นอย่างสม่ำเสมอ ส่วนอุณหภูมิของใบไม้ในทุกชั้นให้เป็นอุณหภูมิเดียวกันหมด ในการศึกษาได้กำหนดให้มีการกระจายของความหนาแน่นใบและจำนวนชั้นใบมีค่าต่าง ๆ กันไป สุดท้ายนำค่าการคำนวณที่ได้มาวิเคราะห์คุณลักษณะ เพื่อหาทางประยุกต์ใช้ประโยชน์เชิงวิศวกรรมต่อไป

โดยการศึกษาพฤติกรรมของวัตถุจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนำเอาวัตถุที่มีลักษณะเป็นแผ่นแบนเรียบหลาย ๆ แผ่นมาวางซ้อนกันให้มีลักษณะเป็นชั้น ๆ โดยแต่ละชั้นจะมีการกระจายตัวของเปอร์เซ็นต์พื้นที่ในลักษณะที่แตกต่างกันออกไปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้สร้างขึ้นภายใต้เงื่อนไขเหล่านี้จะทำการศึกษาพฤติกรรมของการดูดกลืนและส่งผ่านพลังงานความร้อนเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับองค์ประกอบทั้งภายในและภายนอกระบบ องค์ประกอบภายใน ได้แก่ การเปลี่ยนแปลงพื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ จำนวนชั้นของโครงแผ่นความร้อน อุณหภูมิของแผ่นความร้อนโดยแผ่นความร้อนถูกตั้งสมมุติฐานว่าทุกแผ่นมีค่าอุณหภูมิเฉลี่ยเท่ากัน เพื่อตัดปัญหาเกี่ยวกับผลกระทบของเกรเดียนต์อุณหภูมิ (Temperature gradient) ที่จะมีผลต่อการถ่ายเทความร้อนแบบนำความร้อน (Heat conduction) และการถ่ายเทความร้อนแบบพาความร้อน (Heat convection) เนื่องจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สนใจที่จะศึกษาผล เนื่องจากการแผ่รังสีความร้อนของโครงแผ่นความร้อนเป็นหลักซึ่งลักษณะของโครงแผ่นความร้อนสร้างขึ้นสำหรับการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถแสดงได้ดังรูปที่ ก.1

แนวคิดที่ได้นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นได้มาจากพฤติกรรมของต้นไม้ที่มีการกระจายของพื้นที่ใบในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ตามสภาพแวดล้อมที่เปลี่ยนแปลงไป โครงแผ่นความร้อนที่ใช้ทำการศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ถูกสร้างขึ้นมาเพื่อใช้ในการกักเก็บพลังงานความร้อนจากแสงอาทิตย์และดักพลังงานที่จะสูญเสียออกจากแผ่นความร้อน

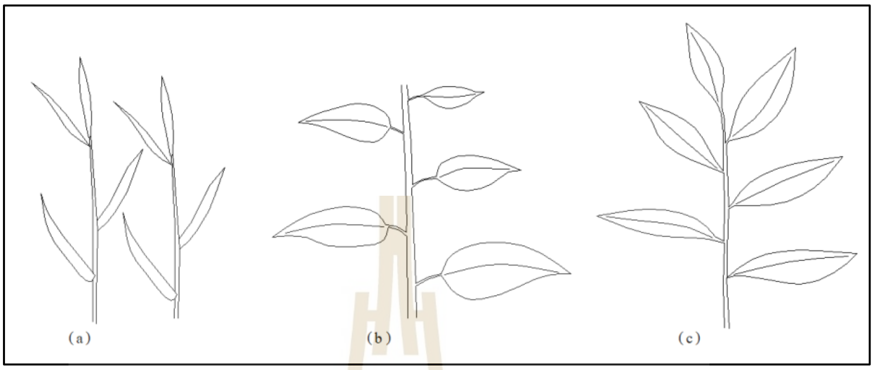
อันเนื่องมาจากการแผ่รังสีความร้อนของแผ่นความร้อนและการทะลุผ่านรูหรือช่องว่างของแผ่นความร้อนจากนั้นเปรียบเทียบกับพฤติกรรมการกักเก็บพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้ โดยสามารถอนุมานได้ว่าโครงแผ่นความร้อนที่เกิดจากการวางตัวของแผ่นวัตถุแบนเรียบน่าจะมีความสามารถในการกักเก็บพลังงานแสงอาทิตย์ได้ดีกว่าแผ่นวัตถุแบนเรียบแผ่นเดียวที่สภาพการถ่ายเทพลังงานความร้อนเดียวกัน



รูปที่ ก.1 กระบวนการในการวิเคราะห์พลังงานความร้อนของโครงแผ่นความร้อน

ได้มีนักวิจัยได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของการดูดกลืนและส่งผ่านพลังงานแสงอาทิตย์ของชั้นใบไม้ โดยมีการตั้งแบบจำลองการกระจายตัวของพื้นที่ของใบไม้แต่ละใบหรือในแต่ละชั้น (Canopy structure) ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ที่แตกต่างกันออกไปในรูปแบบต่าง ๆ ทั้งหมด 3 ประเภท ได้แก่ ใบไม้ที่มีการวางตัวให้พื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ในแนวดิ่งของพืชจำพวกหญ้า (Vertical leaves) ใบไม้ที่มีการวางตัวพื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ในแนวนอน (Horizontal leaves) และใบไม้ที่มีการวางตัวให้พื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ที่มีการวางตัวผสมกันระหว่างการวางตัวในแนวนอนบริเวณโคนต้นและแนวดิ่งบริเวณปลายของต้นไม้ ซึ่งแสดงดังรูปที่ ข.2 โดยการทำการวิจัยได้ศึกษาผลขององค์ประกอบภายนอกต่าง ๆ ที่มีกระทบต่อการดูดกลืนพลังงานแสงอาทิตย์ของใบไม้ อันได้แก่ ค่าความหนาแน่นของรังสีความร้อนที่แผ่มาจากดวงอาทิตย์, อุณหภูมิของอากาศโดยรอบต้นไม้, อุณหภูมิของดิน, ความดันของอากาศ, อุณหภูมิของใบไม้, พลังงานความร้อนที่ถูกกักเก็บไว้ภายในดิน, ความเร็วของลม, การวางตัวเพื่อบังแสงและความชื้นของใบไม้ ล้วนแล้วแต่มีอิทธิพลต่อการดูดกลืนพลังงานแสงอาทิตย์ของ

ใบไม้ทั้งสิ้น แต่จากการวิจัยพบว่าการจัดวางตัวของใบไม้ในแต่ละชั้นและแต่ละใบจะมีผลต่อการดูดกลืนพลังงานแสงอาทิตย์ของใบไม้มากที่สุด โดยจะมีผลต่อการส่งผ่านและดูดกลืนทั้งมวลและพลังงานผ่านชั้นของใบไม้ทุกชั้นจากชั้นบนสุดจนกระทั่งถึงชั้นล่างสุด



รูปที่ ก.2 ลักษณะของใบไม้ (a) พืชจำพวกหญ้า (b) ใบไม้ที่มีการวางตัวพื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ในแนวนอน และ (c) ใบไม้ที่มีการวางตัวให้พื้นที่ในการรับพลังงานแสงอาทิตย์มีการวางตัวผสม

เมื่อทำการวิเคราะห์ผลของการดูดซับพลังงานของชั้นใบไม้แต่ละชั้นที่มีการกระจายตัวของพื้นที่ในการดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์มีค่าเพิ่มขึ้นในลักษณะเอ็กโพเนนเชียลจากยอดต้นไม้จนถึงโคนต้นไม้ และสมมุติให้การกระจายตัวของพื้นที่ของใบไม้ในแต่ละชั้นเป็นแบบวงกลม เมื่อทำการศึกษาที่ความสามารถในการส่งพลังงานแสงอาทิตย์มีค่าสูงสุดและพลังงานแสงอาทิตย์ส่งผ่านที่ค่าความยาวคลื่นระหว่าง 400-700 nm พบว่าพืชหรือต้นไม้แบบที่มีการวางพื้นที่ของใบในการรับพลังงานแสงอาทิตย์ในแนวนอนจะมีการกักเก็บพลังงานแสงอาทิตย์ได้ดีที่สุดเมื่อเทียบกับรูปแบบการวางตัวของโครงสร้างแบบอื่น ๆ ที่ได้ทำการศึกษา โดยผลที่ได้คือ พลังงานแสงอาทิตย์ที่ส่งผ่านชั้นใบไม้แต่ละชั้นมีค่าลดลงแบบเอ็กโพเนนเชียลจากยอดต้นไม้จนถึงโคนต้นไม้ และความสัมพันธ์ระหว่าง Q_0 กับ F เป็นไปตามสมการที่ ก.1

$$\frac{dQ}{dF} = -kQ_F \qquad \text{(ก.1)}$$

$$Q_F = Q_0 e^{-kF} \qquad \text{(ก.2)}$$

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ของ Q_F กับ Q_0 ดังสมการที่ ก.3

$$kF = \ln\left(\frac{Q_F}{Q_0}\right) \tag{ก.3}$$

เมื่อ Q_F คือ ค่าพลังงานความร้อนที่ส่งผ่านชั้นใบไม้แต่ละชั้น

Q_0 คือ ค่าพลังงานความร้อนที่รับมาจากดวงอาทิตย์ที่ยอดของใบไม้

k คือ ค่าคงที่ของการดูดซับพลังงานแสงที่มาตกกระทบ

F คือ พื้นที่เฉลี่ยของแต่ละชั้นของ Canopy structure

โดยผลของการศึกษาแสดงได้ดังรูปที่ ก.3 นอกจากได้ทำการศึกษาการกระจายตัวของพื้นที่ของใบไม้ในแต่ละชั้นแล้ว ยังได้มีการศึกษาผลอันเนื่องมาจากการวางตัวของใบไม้ใบแต่ละใบ ซึ่งจะทำให้เกิดช่องว่างระหว่างใบไม้ขึ้นซึ่งจะมีผลต่อการดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ในแต่ละชั้นของใบไม้ เมื่อ α คือ มุมที่ใบไม้ทำกับแกน x ดังรูปที่ 3.4 ถ้าการวางตัวของใบไม้ทำมุม α ตั้งแต่ 0º-20º เรียกว่า “Lower inclination” และถ้ามุม α ตั้งแต่ 70º-90º จะเรียกว่า “Higher inclination” ซึ่งแต่ละชั้นก็จะมีช่องว่างที่เกิดจากการวางตัวของใบไม้ในแต่ละชั้น แสดงดังรูปที่ ก.5 จากการศึกษาจะได้ความสัมพันธ์ของการส่งผ่านความร้อนของการแผ่รังสีเป็นไปตามสมการที่ ก.4

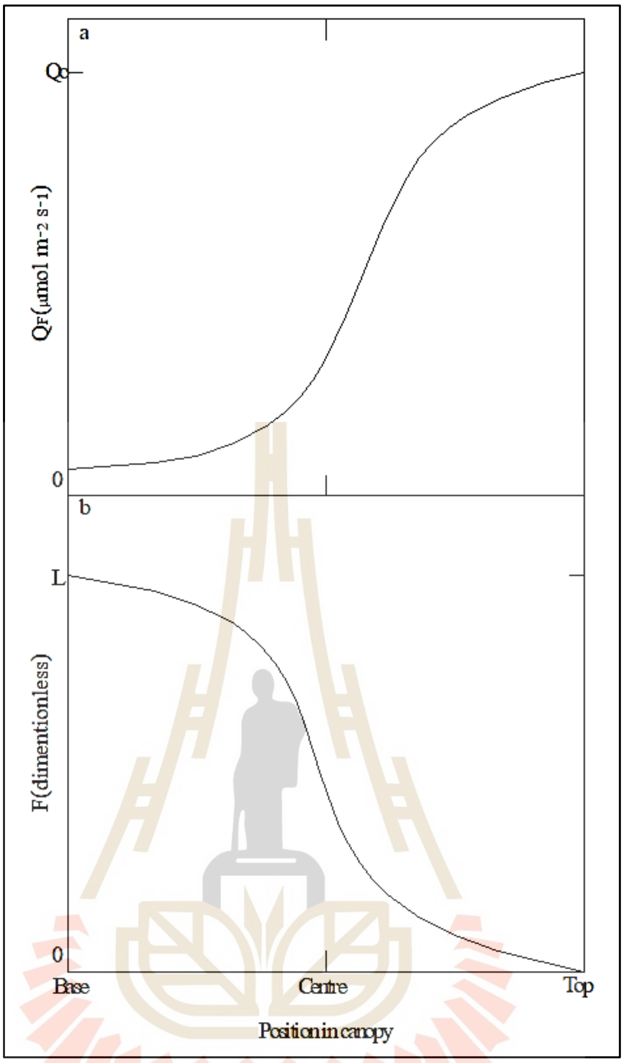
$$T(\theta) = e^{-k_0 L} \tag{ก.4}$$

หรือ

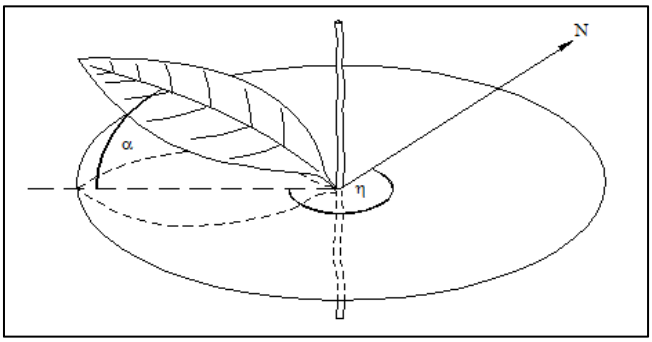
$$-\ln T(\theta) = k_0 L \tag{ก.5}$$

โดยที่ $T(\theta)$ คือ ค่าการส่งผ่านพลังงานความร้อนที่มีทิศทางเดียวกันกับการส่งผ่านพลังงานแสงอาทิตย์ที่เกิดจากการแผ่รังสี (Transmittance of the direct solar beam)

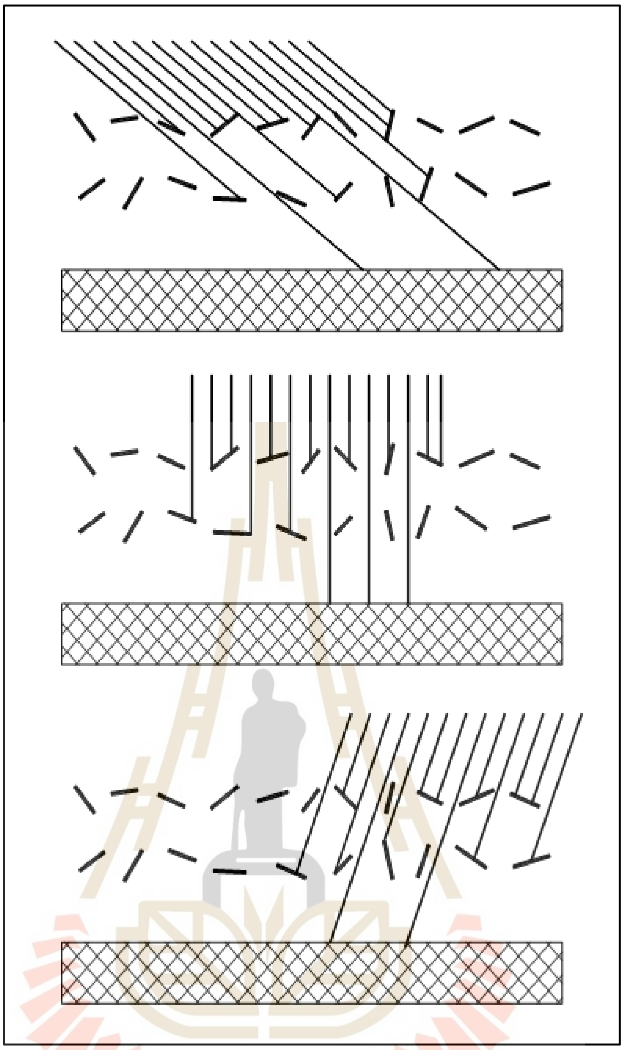
L คือ Leaf area index



รูปที่ ก.3 ความสัมพันธ์ระหว่างการทะลุผ่านของพลังงานแสงอาทิตย์กับการกระจายตัวของพื้นที่ของใบไม้แต่ละชั้น (Canopy level)



รูปที่ ก.4 ลักษณะการวางตัวของใบไม้



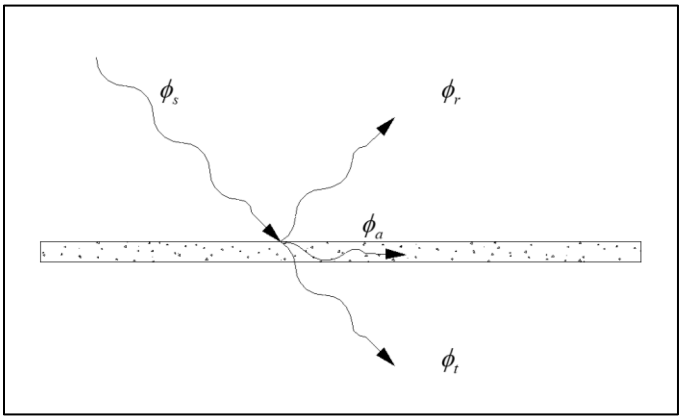
รูปที่ ก.5 ลักษณะของการทะลุผ่านของรังสีความร้อนผ่านช่องว่างระหว่างใบ

ก.3 วิธีดำเนินการวิจัย

ในการพิจารณาการดูดซับรังสีความร้อนของชั้นความร้อน เพื่อการวิเคราะห์ในเบื้องต้น โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์(Mathematical model) ในการหาค่าพลังงานการดูดซับความร้อน ซึ่งจะประกอบด้วยลำดับขั้นในการพิจารณาดังนี้

ก.3.1 การดูดซับพลังงานความร้อนจากแสงแดด

เมื่อพิจารณาการตกกระทบของรังสีความร้อนกับวัตถุตัวกลางชนิดหนึ่ง รังสีที่ตกกระทบวัตถุจะเกิดสะท้อน (Reflect) ทะลุ (Transmit) และบางส่วนก็ถูกดูดซับ (Absorb) ไว้ในวัตถุเอง ซึ่งค่าต่าง ๆ จะขึ้นกับคุณสมบัติของวัตถุที่เป็นตัวกลางนั่นเอง โดยจะมีลักษณะดังรูปที่ ก.6



รูปที่ ก.6 ลักษณะโดยทั่วไปของการตกกระทบของรังสีต่อวัตถุตัวกลาง เมื่อ ϕ_s = heat flux

จากรูปที่ ก.6 จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$\phi_s = \phi_a + \phi_r + \phi_t$$

$$\varphi_s = \alpha\varphi_s + \gamma\varphi_s + \tau\varphi_s$$ ดังนั้นจะได้

$$\alpha + \gamma + \tau = 1 \tag{ก.6}$$

เมื่อ $\alpha = \dfrac{\phi_a}{\phi_s}$ คือ สัมประสิทธิ์การดูดซับของวัตถุ

$\gamma = \dfrac{\phi_r}{\phi_s}$ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของวัตถุ

$\tau = \dfrac{\phi_t}{\phi_s}$ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของวัตถุ

ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสามค่าจะมีค่าขึ้นอยู่กับค่าความยาวของคลื่นแสงที่ตกกระทบด้วย สำหรับวัตถุที่สามารถดูดกลืนพลังงานการแผ่รังสีได้ทั้งหมดโดยที่ไม่มีการสะท้อนและส่งผ่านเลย ($\gamma = \tau = 0$) เรียกวัตถุที่มีพฤติกรรมเช่นนี้ว่าเป็นวัตถุดำหรือ Blackbody แต่สำหรับวัตถุโดยทั่วไปแล้วจะมีคุณสมบัติของตัวกลางทั้งสามแบบจะเรียกว่าเป็นวัตถุเทา หรือ Gray body

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงแผ่นความร้อนจะพิจารณาคุณสมบัติของแผ่นความร้อนในกรณีทั่วไป เพื่อหาความสัมพันธ์ที่ใช้อธิบายกระบวนการดูดซับ

รังสีความร้อน การแผ่รังสีของแผ่นความร้อน รวมถึงการสะท้อนกลับของรังสีความร้อนภายในระบบโครงแผ่นความร้อนที่วิเคราะห์ ในเบื้องต้นโดยใช้ข้อสมมติฐานเพื่ออำนวยความสะดวกในการสร้างแบบจำลองดังนี้

1) ทั้งสองด้านของแผ่นความร้อนมีคุณสมบัติเป็นวัตถุเทา (Gray body) ทึบ สามารถดูดซับและสะท้อนรังสีความร้อนได้เต็มพื้นที่ของชั้นความร้อน การส่งผ่านรังสีความร้อนระหว่างชั้นความร้อนได้มาจากการทะลุผ่านพื้นที่พรุนของแผ่นความร้อนแต่ละชั้น โดยแผ่นความร้อนที่ชั้น n ใด ๆ จะมีคุณสมบัติของแผ่นความร้อนดังนี้

$a_n \equiv$ พื้นที่ในการดูดซับพลังงานความร้อน

$\alpha t_n \equiv$ สัมประสิทธิ์การดูดซับด้านบนของแผ่น

$\alpha b_n \equiv$ สัมประสิทธิ์การดูดซับด้านล่างของแผ่น

$\gamma t_n = 1 - \alpha t_n \equiv$ สัมประสิทธิ์การสะท้อนด้านบนของแผ่น

$\gamma b_n = 1 - \alpha b_n \equiv$ สัมประสิทธิ์การสะท้อนด้านล่างของแผ่น

2) อุณหภูมิของแผ่นความร้อนมีอุณหภูมิคงที่เท่ากันทุกแผ่นในทุก ๆ ชั้น

3) ในระบบโครงแผ่นความร้อนถือว่าแผ่นความร้อนมีความยาวมากเมื่อพิจารณาเชิงสองมิติ โดยจะไม่มีผลกระทบจากระยะระหว่างแผ่นความร้อนแต่ละแผ่น

การวิเคราะห์หาพลังงานความร้อนที่สามารถออกจากระบบโครงแผ่นความร้อนและหาค่าพลังงานที่สามารถดูดซับไว้ได้ ซึ่งจะได้รูปแบบสมการพลังงานที่พิจารณาตามลำดับขั้นตอนการดูดซับความร้อนจากแสงอาทิตย์ที่แผ่มายังแผ่นความร้อนที่มีพื้นที่ต่อพื้นที่เต็ม a_i โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, N$ พิจารณาได้ดังนี้

ตารางที่ ก.1 ลำดับการสะท้อนด้านบนและทะลุผ่านของพลังงานความร้อนจากแสงอาทิตย์, ϕ_s

ชั้นที่	พลังงานที่สะท้อนด้านบน	พลังงานที่ทะลุผ่าน
N (ชั้นบนสุด)	$\gamma t_N a_N \phi_s$	$\phi_s - a_N \phi_s$ หรือ $(1-a_N)\phi_s$
N–1	$\gamma t_{N-1} a_{N-1}(1-a_N)\phi_s$	$(1-a_N)\phi_s - a_{N-1}(1-a_N)\phi_s$ หรือ $(1-a_{N-1})(1-a_N)\phi_s$
N–2	$\gamma t_{N-2} a_{N-2}(1-a_{N-1})(1-a_N)\phi_s$	$(1-a_{N-2})(1-a_{N-1})(1-a_N)\phi_s$
⋮ ⋮	⋮ ⋮	⋮ ⋮
2	$\gamma t_2 a_2(1-a_3)(1-a_4)\ldots(1-a_N)\phi_s$	$(1-a_2)(1-a_3)\ldots(1-a_N)\phi_s$
1 (ชั้นล่างสุด)	$\gamma t_1 a_1(1-a_2)(1-a_3)\ldots(1-a_N)\phi_s$	$(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_N)\phi_s$

จะได้พลังงานที่สะท้อนและทะลุผ่านที่ชั้น n ใด ๆ โดยที่ n มีค่าตั้งแต่ 1, 2, 3, …, N ดังนี้ พลังงานความร้อนจากแสงแดดที่สะท้อนออกด้านบนจากชั้นที่ N ครั้งแรกจะเท่ากับ

$$Q_{up\ above(1)} = \gamma t_N a_N \phi_s$$

พลังงานที่สะท้อนด้านบนแผ่นความร้อนใด ๆ ครั้งแรก กำหนดให้เป็น

$$RT_{n(1)} = \gamma t_n a_n \phi_s \prod_{i=n+1}^{N}(1-a_i) \qquad \text{สำหรับ } n = 1, 2, \ldots, N\text{-}1$$

พลังงานแสงแดดที่ทะลุผ่านชั้นความร้อนที่ชั้น n ใด ๆ ครั้งแรก

$$Q_{transmit,n(1)} = \phi_s \prod_{i=n}^{N}(1-a_i)$$

พลังงานความร้อนจากแสงแดดที่ทะลุผ่านออกด้านล่างจากชั้นที่ 1 ครั้งแรกจะเท่ากับ

$$Q_{through\ down(1)} = \phi_s \prod_{i=1}^{N}(1-a_i)$$

พลังงานความร้อนจากแสงแดดที่สะท้อนและทะลุออกด้านบนจากชั้นที่ N ครั้งที่ 2 จะเป็น

$$Q_{up\ above(2)} = \sum_{j=1}^{N-1} RT_{j(1)} \prod_{i=j+1}^{N}(1-a_i) = \phi_s \sum_{j=1}^{N-1} \gamma t_j a_j \prod_{i=j+1}^{N}(1-a_i)^2$$

พลังงานที่สะท้อนด้านล่างของแผ่นความร้อนที่ n ใด ๆ ครั้งที่ 1 ที่ n มีค่าตั้งแต่ 2, 3, …, N ดังนี้

$$RB_{2(1)} = \gamma b_2 a_2 RT_{1(1)} \qquad \text{สำหรับ } n = 2$$

$$RB_{n(1)} = \gamma b_n a_n \left[\sum_{j=1}^{n-2} RT_{j(1)} \prod_{i=j+1}^{n-1} (1-a_i) + RT_{n-1(1)} \right] \qquad \text{สำหรับ } n = 3, 4, \ldots, N$$

พลังงานความร้อนจากแสงแดดที่ทะลุผ่านออกด้านล่างจากชั้นที่ 1 ครั้งที่ 2 จะเท่ากับ

$$Q_{through\ down(2)} = \sum_{j=2}^{N} RB_{j(1)} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i)$$

เมื่อพิจารณาในรอบต่อไปจะได้สมการพลังงานความร้อนจากแสงแดดที่ออกจากระบบทั้งด้านบนและล่างในรอบที่ m ใด ๆ เมื่อ m มีค่าจาก 2, 3, 4,… ถึง ∞ เมื่อค่าพลังงานที่ออกมีค่าน้อยมาก

$$Q_{up\ above(m)} = \sum_{j=1}^{N-1} RT_{j(m-1)} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i)$$

$$Q_{through\ down(m)} = \sum_{j=2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i)$$

เมื่อ

$$RT_{n(m)} = \gamma t_n a_n RB_{n+1(m-1)} \qquad \text{สำหรับ } n = N\text{-}1$$

$$RT_{n(m)} = \gamma t_n a_n \left[\sum_{j=n+2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=n+1}^{j-1} (1-a_i) + RB_{n+1(m-1)} \right] \qquad \text{สำหรับ } n = 1, 2, \ldots, N\text{-}2$$

$$RB_{n(m)} = \gamma b_n a_n RT_{n-1(m)} \qquad \text{สำหรับ } n = 2$$

$$RB_{n(m)} = \gamma b_n a_n \left[\sum_{j=1}^{n-2} RT_{j(m)} \prod_{i=j+1}^{n-1} (1-a_i) + RT_{n-1(m)} \right] \qquad \text{สำหรับ } n = 3, 4, \ldots, N$$

ดังนั้นเพื่อหาค่าพลังงานแสงแดดที่ออกจากระบบทั้งหมดจะเป็น

$$Q_{up\ abovw\phi_s} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{up\ above(m)} = \gamma t_N a_N \phi_s + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{N-1} RT_{j(m-1)} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i)$$

$$Q_{through\ down\phi_s} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{through\ down(m)} = \phi_s \prod_{i=1}^{N}(1-a_i) + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=1}^{j-1}(1-a_i)$$

พลังงานแสงแดดที่สามารถดูดซับไว้ได้ด้วยระบบโครงแผ่นความร้อนจะหาได้โดย

$$Q_{absorb\phi_s} = \phi_s - Q_{up\ abovw\phi_s} - Q_{through\ down\phi_s} \qquad (ก.7)$$

ก.3.2 การดูดซับพลังงานความร้อนจากการแผ่รังสีความร้อน

การแผ่รังสีความร้อนของแผ่นความร้อนจากกฎของสเตฟาน (Stefan’s law) กล่าวว่า “พลังงานความร้อนที่วัตถุดำหนึ่งหน่วยพื้นที่เปล่งออกมาในรูปความร้อนต่อหน่วยเวลาเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสี่ของอุณหภูมิสมบูรณ์” ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ตามสมการ $\varphi = \sigma T^4$ แต่โดยทั่วไปแล้ววัตถุดำเป็นวัตถุทางอุดมคติ เพื่อให้สามารถใช้ได้จริงในทางปฏิบัติ สเตฟานและโบล์ทมานจึงได้ขยายพจน์เพิ่มเป็น

$$\varphi = \varepsilon\sigma T^4 \qquad (ก.8)$$

โดยที่ φ คือ ฟลักซ์ความร้อน

ε คือ ค่า Emissivity (มีค่าเท่ากับค่า Absorptivity)

σ คือ Stefan Boltzmann’s constant = 5.67×10^{-8} W/m^2·K^4

T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์

ดังนั้นแผ่นที่ n ใด ๆ จะแผ่รังสีออกมาทั้งด้านบนและล่างจะมีค่าเป็น

การแผ่รังสีความร้อนด้านบนแผ่น $\varphi_{tn} = \varepsilon t_n a_n \sigma T^4$ เมื่อ $\varepsilon t_n = \alpha t_n$

การแผ่รังสีความร้อนด้านล่างแผ่น $\varphi_{bn} = \varepsilon b_n a_n \sigma T^4$ เมื่อ $\varepsilon b_n = \alpha b_n$

สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกับขั้นตอนข้างต้น โดยการหาค่าพลังงานรังสีความร้อนที่ออกจากระบบ เพื่อที่จะหาค่าพลังงานที่สามารถดูดซับไว้ได้ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้ พลังงานความร้อนจากการแผ่รังสีออกด้านบนจากชั้นที่ N ครั้งแรกจะเท่ากับ

$$Q_{up\,above(1)} = \varphi_{tN} + \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_{tj} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i)$$

พลังงานที่สะท้อนรังสีด้านล่างของแผ่นความร้อนที่ n ใด ๆ ครั้งแรกที่ n มีค่าตั้งแต่ 2, 3,…, N ดังนี้

$$RB_{2(1)} = \gamma b_2 a_2 \varphi_{t1} \qquad \text{สำหรับ } n = 2$$

$$RB_{n(1)} = \gamma b_n a_n \left[\sum_{j=1}^{n-2} \varphi_{tj} \prod_{i=j+1}^{n-1} (1-a_i) + \varphi_{tn-1} \right] \qquad \text{สำหรับ } n = 3, 4, \ldots, N$$

พลังงานความร้อนจากการแผ่รังสีออกด้านล่างจากชั้นที่ 1 ครั้งแรกจะเท่ากับ

$$Q_{through\,down(1)} = \varphi_{b1} + \sum_{j=2}^{N} \varphi_{bj} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i)$$

พลังงานที่สะท้อนด้านบนแผ่นความร้อนใด ๆ ครั้งแรกจะมีค่าเป็น

$$RT_{n(1)} = \gamma t_n a_n \varphi_{n+1} \qquad \text{สำหรับ } n = N\text{-}1$$

$$RT_{n(1)} = \gamma t_n a_n \left[\sum_{j=n+2}^{N} \varphi_{bj} \prod_{i=n+1}^{j-1} (1-a_i) + \varphi_{bn+1} \right] \qquad \text{สำหรับ } n = 1, 2, \ldots, N\text{-}2$$

เมื่อพิจารณาในรอบต่อไปจะได้สมการพลังงานความร้อนจากการแผ่รังสีที่ออกจากระบบทั้งด้านบนและล่างในรอบที่ m ใด ๆ เมื่อ m มีค่าจาก 2, 3, 4,… ถึง ∞ เมื่อค่าพลังงานที่ออกมีค่าน้อยมาก

$$Q_{up\,above(m)} = \sum_{j=1}^{N-1} RT_{j(m-1)} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i)$$

$$Q_{through\,down(m)} = \sum_{j=2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i)$$

เมื่อ $RT_{n(m)} = \gamma t_n a_n RB_{n+1(m-1)}$ สำหรับ สำหรับ $n = N$-1

$$RT_{n(m)} = \gamma t_n a_n \left[\sum_{j=n+2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=n+1}^{j-1} (1-a_i) + RB_{n+1(m-1)} \right]$$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots, N$-2

$$RB_{n(m)} = \gamma b_n a_n RT_{n-1(m-1)}$$ สำหรับ $n = 2$

$$RB_{n(m)} = \gamma b_n a_n \left[\sum_{j=1}^{n-2} RT_{j(m-1)} \prod_{i=j+1}^{n-1} (1-a_i) + RT_{n-1(m-1)} \right]$$ สำหรับ $n = 3, 4, \ldots, N$

ดังนั้นเพื่อหาค่าพลังงานการแผ่รังสีที่ออกจากระบบทั้งหมดจะเป็น

$$Q_{up\,abovw\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{up\,above(m)} = \varphi_{tN} + \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_{tj} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{N-1} RT_{j(m-1)} \prod_{i=j+1}^{N} (1-a_i)$$

$$Q_{through\,down\varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{through\,down(m)}$$

$$= \varphi_{b1} + \sum_{j=2}^{N} \varphi_{bj} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i) + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{N} RB_{j(m-1)} \prod_{i=1}^{j-1} (1-a_i)$$

พลังงานความร้อนทั้งหมดที่สามารถดูดซับไว้ได้ด้วยระบบโครงแผ่นความร้อนจะหาได้จาก

$$Q_{total\quad absorb} = \phi_s - Q_{up\,abovw\phi_s} - Q_{through\,down\phi_s} - Q_{up\,abovw\varphi} - Q_{through\,down\varphi} \qquad (ก.9)$$

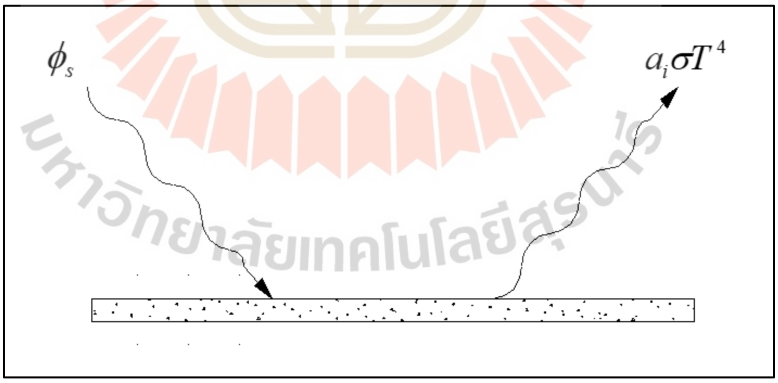
จากการวิเคราะห์ข้างต้นนี้ เราจะนำมาศึกษาความสัมพันธ์ของลักษณะและรูปแบบของโครงแผ่นความร้อนที่มีผลต่อการดูดซับพลังงานความร้อนที่รับเข้ามาจากภายนอก รวมทั้งพลังงานความร้อนจากการแผ่รังสีความร้อนภายในและปริมาณความร้อนที่ทะลุออกไปจากระบบว่ามีความแตกต่างกันอย่างไรบ้าง โดยในส่วนการหาค่าพลังงานความร้อนต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นกับโครงแผ่นความร้อนที่พิจารณานั้นจะใช้การเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เพื่อหาค่าพลังงานความร้อนพร้อมทั้งวิเคราะห์ผลที่ได้ในเชิงตัวเลข (แสดงในภาคผนวก ค)

ก.4 ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

การวิจัยนี้เริ่มต้นโดยการวิเคราะห์การดูดซับพลังงานความร้อนของแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียว เพื่อเป็นตัวเปรียบเทียบค่าพลังงานการดูดซับกับแบบโครงแผ่นความร้อนที่พิจารณาในรูปแบบต่าง ๆ ต่อไป

ก.4.1 การวิเคราะห์จากแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียว

เมื่อแผ่นความร้อนได้รับความร้อนจากแหล่งความร้อน จะมีอุณหภูมิสูงขึ้นพร้อมทั้งมีการแผ่รังสี จนเมื่อระบบเข้าสมดุล (Equilibrium) พลังงานที่แผ่ออกมานั้นจะต้องเท่ากับพลังงานที่ระบบรับเข้าไป ดังรูปที่ ก.7 เราสามารถหาค่าอุณหภูมิของแผ่นความร้อนได้จากกฎทางเทอร์โมไดนามิกส์ข้อที่ 1 ซึ่งแสดงดังสมการที่ ก.10



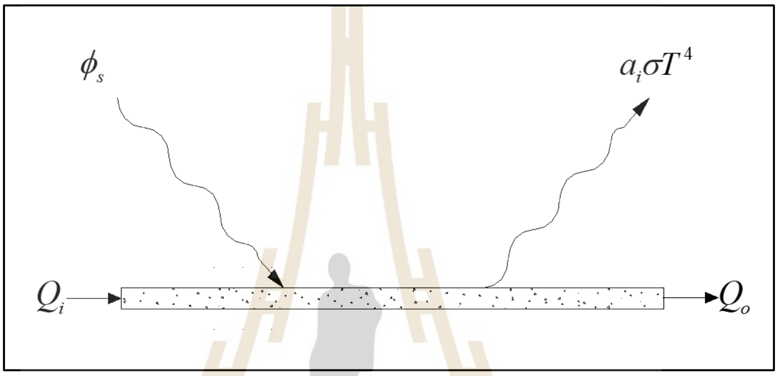
รูปที่ ก.7 การดูดซับรังสีความร้อนและการแผ่รังสีของแผ่นความร้อนแผ่นเดียวที่สมดุล

$$Q_{in} = Q_{out}$$

$$\phi_s = a_i \sigma T^4$$

$$T_{\max} = \left(\frac{\phi_s}{a_i \sigma} \right)^{1/4} \tag{ก.10}$$

เมื่อเราต้องการนำความร้อนของแผ่นความร้อนมาใช้ประโยชน์ โดยการแลกเปลี่ยนความร้อน ดังรูปที่ ก.8 โดยใช้การไหลเข้าออกของพลังงานความร้อนเพื่อทำหน้าที่ดูดซับความร้อน



รูปที่ ก.8 การแลกเปลี่ยนพลังงานความร้อนเพื่อนำไปใช้ประโยชน์

จากระบบพิจารณาที่สมดุลจะได้สมการเป็น

$$\phi_s + Q_i = a_i \sigma T^4 + Q_o$$

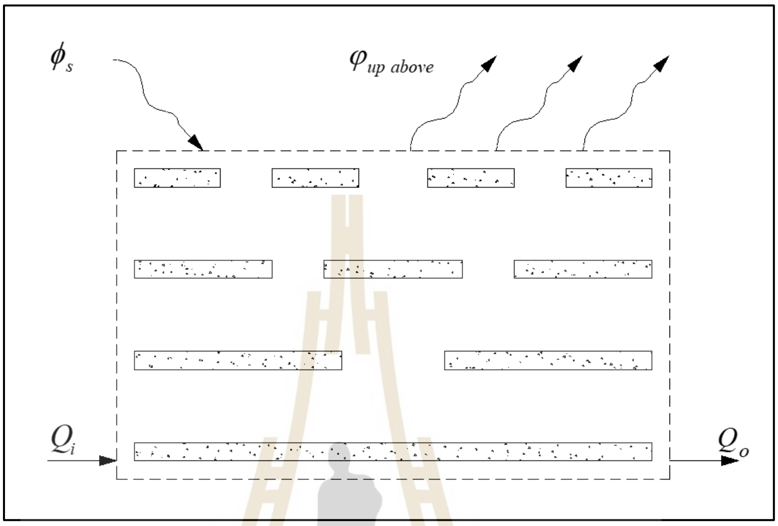
$$\phi_s - a_i \sigma T^4 = Q_o - Q_i = Q_{absorb}$$

$$T_{\max} = \left(\frac{\phi_s - Q_{absorb}}{a_i \sigma} \right)^{1/4} \tag{ก.11}$$

จากสมการที่ ก.10 และสมการที่ ก.11 จะเห็นว่าอุณหภูมิของแผ่นความร้อนจะมีค่าลดลงเมื่อมีการนำความร้อนที่ดูดซับโดยแผ่นความร้อนไปใช้ประโยชน์ ดังนั้น ในการกำหนดอุณหภูมิของแผ่นความร้อนนั้นจะต้องมีค่าไม่มากกว่าอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณจากพลังงานที่ระบบได้รับเข้ามาทั้งหมด เพื่อให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์พลังงาน

ก.4.2 การเพิ่มแผ่นความร้อนเพื่อดักรังสีความร้อนจากการแผ่รังสีของแผ่นความร้อน

เมื่อมีการเพิ่มแผ่นรังสีความร้อนเพื่อทำการดักรังสีความร้อนจากการแผ่รังสีของแผ่นความร้อนแผ่นล่างที่มีพื้นที่เต็มตามรูปที่ ก.9 เพื่อเปรียบเทียบกับแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียว



รูปที่ ก.9 การเพิ่มแผ่นดักรังสีความร้อน โดยแผ่นล่างให้มีพื้นที่เต็ม a_1 = 100%

เราสามารถแบ่งเป็น 2 กรณีที่น่าสนใจ คือ

กรณีที่ 1 เมื่อเปรียบเทียบกับการแผ่รังสีแบบแผ่นเดียวที่มีพื้นที่รวมเท่ากันกับแบบที่มีการเพิ่มแผ่นความร้อนเพื่อดักรังสีความร้อนไว้ด้านบน พบว่า

- แผ่นความร้อนสามารถดูดซับพลังงานความร้อนได้ทั้งหมด ทำให้สามารถแผ่รังสีความร้อนออกมาได้ในอุณหภูมิที่เท่ากับแผ่นความร้อนแผ่นเดียวเต็มที่อุณหภูมิเท่ากัน
- แผ่นความร้อนที่มีการดักรังสีความร้อนจะสามารถดูดซับรังสีความร้อนได้มากกว่า นั้นคือได้ Q_{absorb} มากกว่านั่นเอง เนื่องจากมีพื้นที่ส่วนด้านล่างของแผ่นความร้อนเพื่อดักรังสี

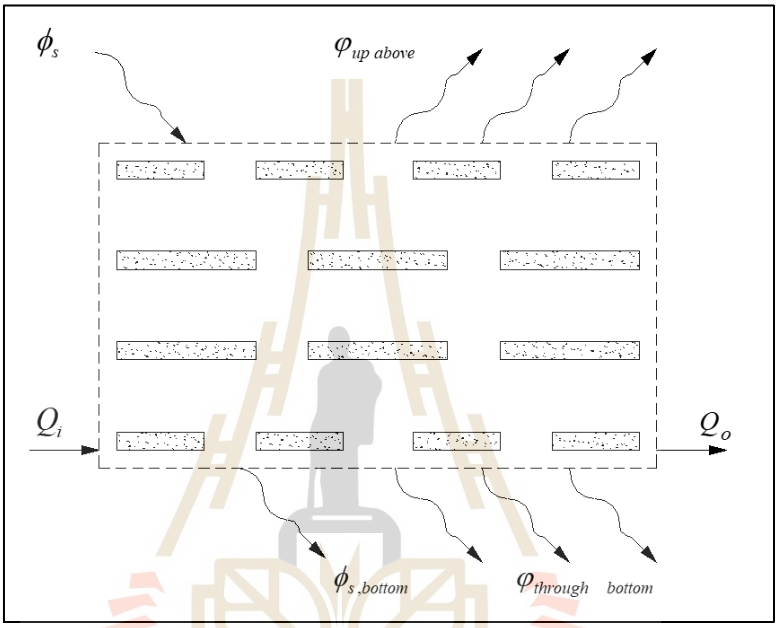
กรณีที่ 2 เมื่อเปรียบเทียบกับแผ่นความร้อนแผ่นเดียวที่มีพื้นที่เท่ากับแผ่นความร้อนแผ่นล่างจะได้

- แบบแผ่นเดียวจะสามารถแผ่รังสีได้ในอุณหภูมิที่มากกว่าแบบมีแผ่นดักเนื่องจากแบบแผ่นเดียวจะมีพื้นที่ในการดูดซับน้อยกว่า ตามสมการที่ ก.11
- ที่อุณหภูมิเท่ากันแผ่นความร้อนทั้งสองแบบจะมีค่ารังสีสะท้อนออกด้านบนเท่ากันไม่ว่าแผ่นความร้อนที่ใช้ดักรังสีจะมีพื้นที่รับแสงขนาดใดก็ตาม ทำให้ความร้อนที่สามารถ

ดูดซับเพื่อนำไปใช้ประโยชน์มีค่าเท่ากันด้วย ทั้งนี้อุณหภูมิของแผ่นความร้อนจะต้องไม่สูงไปกว่าค่าความร้อนที่โครงแผ่นความร้อนสามารถดูดซับไว้ได้

ก.4.3 โครงแผ่นความร้อนที่มีพื้นที่รวมเท่ากับแผ่นเดียวพื้นที่เต็ม 100%

ในกรณีนี้จะทำให้แผ่นความร้อนแผ่นล่างมีความพรุนเกิดการทะลุผ่านของรังสีความร้อนได้ ซึ่งแสดงดังรูปที่ ก.10



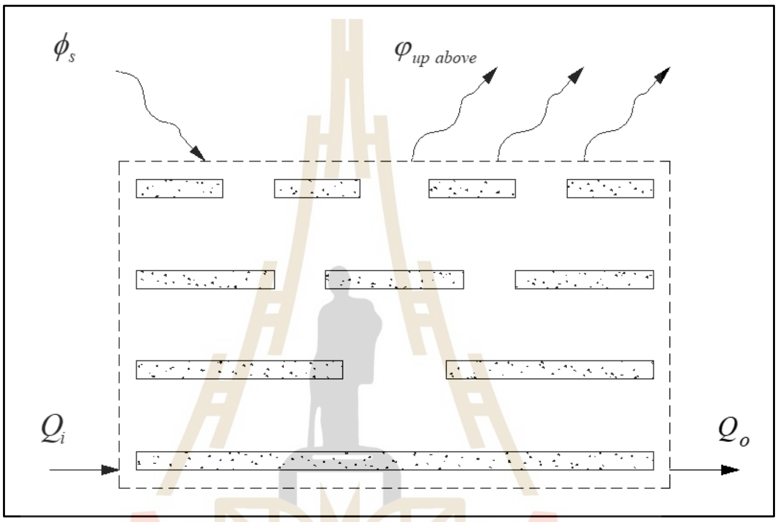
รูปที่ ก.10 ลักษณะโครงแผ่นความร้อนที่มีพื้นที่รวมเท่ากับพื้นที่แผ่นเต็ม

ผลจากการกระทำเช่นนี้สามารถพิจารณาได้ดังนี้ คือ

- การดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์จะมีค่าลดลงทั้งนี้เนื่องจากการรับพลังงานแสงอาทิตย์จะมีพลังงานบางส่วนที่ทะลุผ่านแผ่นความร้อนออกไปได้ ซึ่งจะทำให้ค่าอุณหภูมิที่แผ่นความร้อนสามารถแผ่ออกมาได้มีค่าน้อยกว่าแบบแผ่นเต็มแผ่นเดียว
- ที่ค่าอุณหภูมิเท่ากันแผ่นความร้อนแบบแผ่นเต็มจะมีความร้อนที่ออกจากระบบน้อยกว่าเมื่อเทียบกับโครงแผ่นความร้อนรวมทั้งด้านบนและล่าง ซึ่งทำให้ค่าความร้อนที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้นั้นของโครงแผ่นความร้อนจะมีค่าน้อยกว่าของแบบแผ่นเดียวพื้นที่เต็ม

ก.4.4 โครงแผ่นความร้อนที่มีพื้นที่รวมของโครงแผ่นความร้อนเท่ากับแผ่นเดียวพื้นที่เต็มพร้อมทั้งเพิ่มแผ่นสะท้อนรังสีความร้อนด้านล่างเพื่อให้เกิดการสะท้อนรังสีกลับขึ้นด้านบน

พิจารณาโครงแผ่นความร้อนโดยแผ่นล่างมีคุณสมบัติเป็นพื้นที่เต็มและสามารถสะท้อนรังสีความร้อนได้ทั้งหมด โครงแผ่นความร้อนที่ใช้มีลักษณะดังรูปที่ ก.11 โดยคุณสมบัติด้านบนเป็นวัตถุดำและด้านล่างของแผ่นมีการสะท้อนและการดูดซับรังสีความร้อนที่ค่าต่าง ๆ

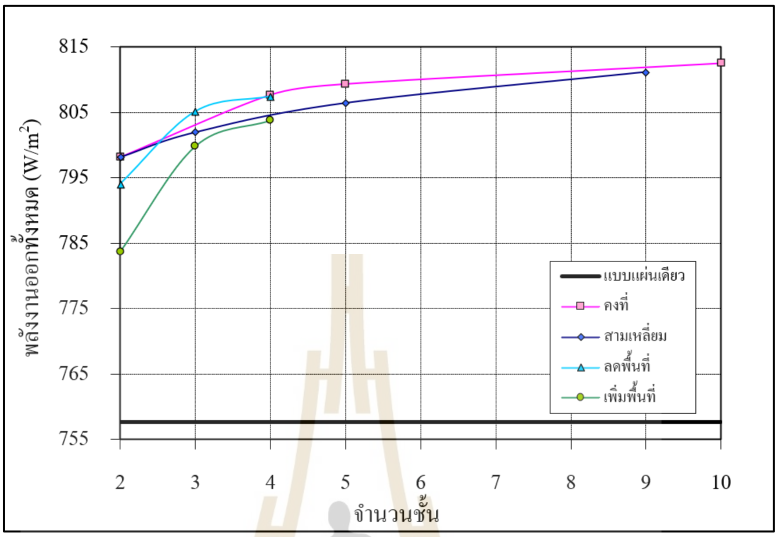


รูปที่ ก.11 โครงแผ่นความร้อนแผ่นล่างทึบมีคุณสมบัติการสะท้อนรังสีได้ทั้งหมดโดยไม่มีการดูดซับ

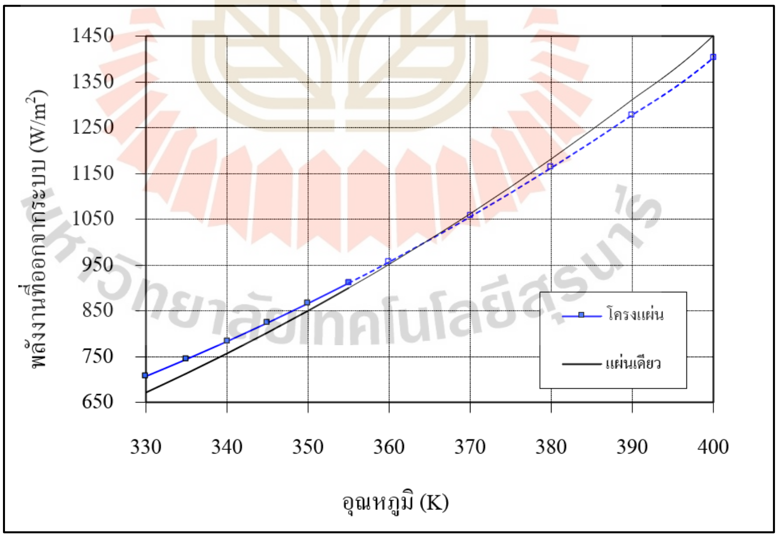
โดยพิจารณาการเพิ่มจำนวนแผ่นความร้อนที่ค่าพื้นที่รวมคงที่ของแผ่นความร้อนรูปแบบต่าง ๆ ดังแสดงผลที่ได้ในรูป ก.12 สำหรับค่าที่ใช้ในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ใช้ที่ค่าพลังงานความร้อนจากแสงแดดที่เข้าเท่ากับ 1000 W/m^2 จากผลการทดลองพบว่าเมื่อทำการเพิ่มค่าจำนวนชั้นของแผ่นความร้อนที่ค่าพื้นที่รวมคงที่จะทำให้ค่าพลังงานสูญเสียออกจากระบบเพิ่มขึ้นหรือทำให้พลังงานที่สามารถดูดซับเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ลดลงนั่นเอง รูปแบบแผ่นความร้อนที่สามารถดูดซับพลังงานได้สูงสุด คือ โครงแผ่นความร้อนที่มีการจัดวางเปอร์เซ็นต์พื้นที่จากล่างเป็น 100, 25 และ 75% ตามลำดับ

กรณีที่พิจารณาโดยเปลี่ยนค่าอุณหภูมิการแผ่รังสีของแผ่นความร้อนค่าต่าง ๆ ที่พลังงานเข้าที่ 1000 W/m^2 โครงแผ่นความร้อนมีเปอร์เซ็นต์พื้นที่แบบ 100-25-75 พร้อมกราฟ

แสดงพลังงานความร้อนที่ออกจากระบบเมื่อเทียบกับอุณหภูมิของแผ่นความร้อนดังแสดงผลที่ได้ในรูป ก.13



รูปที่ ก.12 ค่าพลังงานความร้อนที่ออกจากระบบเมื่อเพิ่มจำนวนชั้นที่โครงแผ่นแบบต่าง ๆ

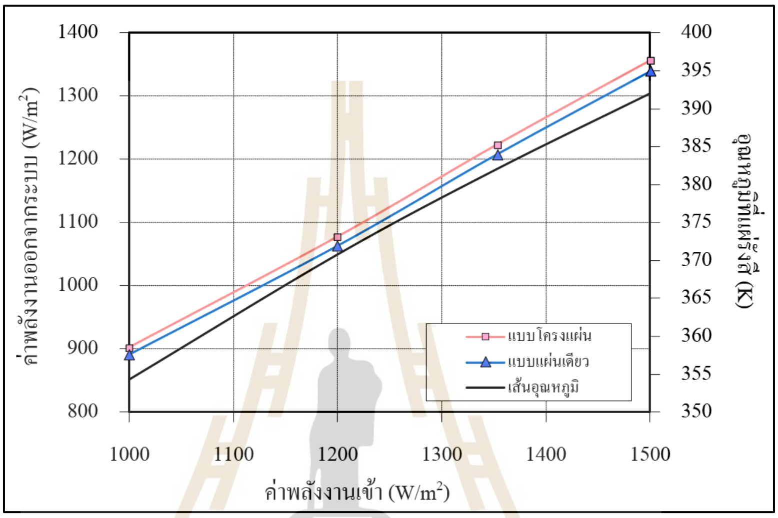


รูปที่ ก.13 ค่าพลังงานความร้อนที่ออกจากระบบเมื่อทำการเพิ่มอุณหภูมิของแผ่นความร้อน

จากผลการทดสอบพบว่า การเพิ่มอุณหภูมิของแผ่นความร้อนจะเพิ่มพลังงานที่ออกจากระบบได้เพิ่มขึ้น โดยเมื่อเพิ่มอุณหภูมิมากขึ้นเทียบกับแบบแผ่นเดียว พลังงานความร้อนที่

ออกจากระบบจะเริ่มมีค่าน้อยลงและน้อยกว่าแบบแผ่นเดียว แต่เป็นช่วงที่ค่าอุณหภูมิสูงกว่าค่าอุณหภูมิที่สามารถแผ่ได้ (ช่วงที่เป็นเส้นประ)

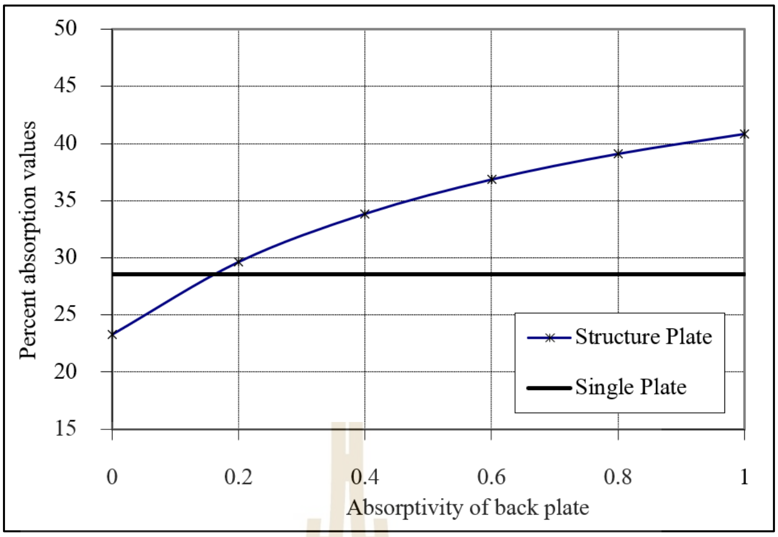
กรณีที่พิจารณาโดยเปลี่ยนค่าพลังงานความร้อนของแสงแดดที่เข้าสู่ระบบและอุณหภูมิการแผ่รังสีของแผ่นความร้อนเปลี่ยนตามค่าอุณหภูมิสูงสุดที่แผ่นความร้อนสามารถแผ่รังสีได้ แสดงดังรูปที่ ก.14



รูปที่ ก.14 ค่าพลังงานที่ออกจากระบบเมื่อเพิ่มพลังงานเข้าและอุณหภูมิการแผ่รังสี

จากผลการทดสอบจะเห็นว่า เมื่อทำการเพิ่มพลังงานเข้าสู่ระบบจะทำให้ค่าอุณหภูมิที่สามารถแผ่รังสีได้สูงขึ้น แต่ค่าพลังงานที่ออกจากระบบทั้งหมดเมื่อเทียบกับแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียวยังมีค่าพลังงานออกจากระบบมากกว่าแบบแผ่นเดียวอยู่ตลอด

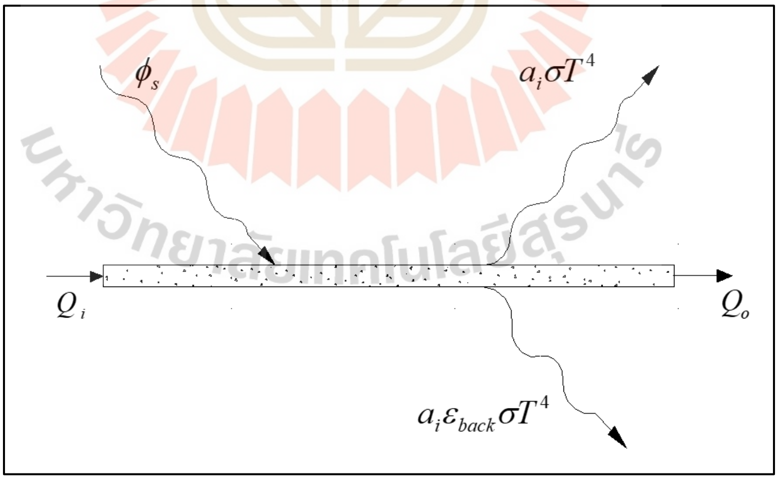
นอกจากนี้ยังพบว่า การเพิ่มแผ่นความร้อนแผ่นล่างจะสามารถเพิ่มพลังงานการดูดซับความร้อนได้เพิ่มขึ้นโดยการเพิ่มคุณสมบัติการดูดซับรังสีความร้อนที่ด้านหลังแผ่นความร้อนที่ค่าต่าง ๆ ซึ่งได้ผลดังรูปที่ ก.15 แสดงค่าปริมาณความร้อนที่สามารถดูดซับไว้ได้เมื่อเปรียบเทียบกับการดูดซับความร้อนได้ของแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียว



รูปที่ ก.15 การดูดซับความร้อนของโครงแผ่นความร้อนที่ด้านหลังมีคุณสมบัติการดูดซับ

ก.4.5 โครงแผ่นความร้อนที่มีพื้นที่รวมของโครงแผ่นความร้อนเท่ากับแผ่นเดียวพื้นที่เต็มพร้อมทั้งเพิ่มแผ่นสะท้อนรังสีความร้อนด้านล่างในรูปแบบอื่น ๆ

แบบที่แผ่นความร้อนมีการแผ่รังสีออกทั้งสองด้าน



รูปที่ ก.16 ระบบแผ่นความร้อนแผ่นเดียวมีการแผ่รังสีออกทั้งสองด้านที่ใช้เปรียบเทียบ

จากรูปที่ ก.16 พลังงานความร้อนที่นำไปใช้ประโยชน์ได้ของแผ่นความร้อนแผ่นเดียวจะมีค่าเท่ากับ

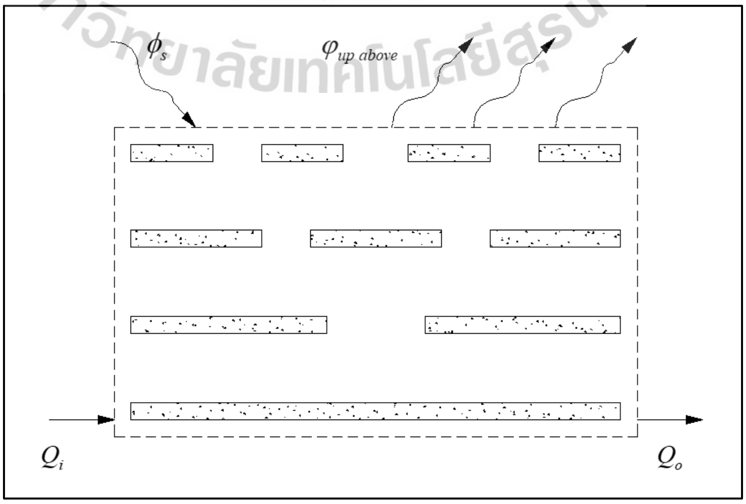
$$Q_{absorb} = Q_0 - Q_i = \phi_s - a_i \sigma T^4 - a_i \varepsilon_{back} \sigma T^4$$

พิจารณาโครงแผ่นความร้อนโดยแผ่นล่างสุดเป็นแผ่นเต็มและมีคุณสมบัติสามารถสะท้อนรังสีความร้อนได้ทั้งหมด ชั้นของแผ่นความร้อนจะสามารถแผ่รังสีออกได้ ทั้งด้านบนและด้านล่างแผ่นความร้อนตามค่า Emissivity ของแผ่นความร้อน โดยจะพิจารณาการแผ่รังสีได้ของแผ่นความร้อนที่ค่าอุณหภูมิที่ไม่ขัดต่อกฎการอนุรักษ์พลังงาน (1st law of thermodynamics) โดยสามารถหาค่าอุณหภูมิสูงสุดได้จากการพิจารณาค่าพลังงานความร้อนจากแสงแดดที่แผ่นความร้อนสามารถดูดซับได้ กับพลังงานความร้อนที่แผ่ออกไปได้ของแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียว ดังนี้

$$Q_{absorb\phi_S} = a_i \varepsilon_{top} \sigma T^4 + a_i \varepsilon_{back} \sigma T^4$$

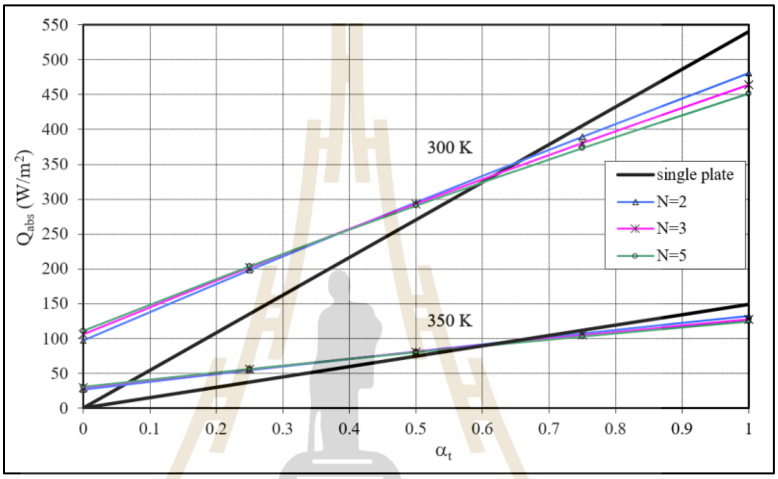
$$\therefore \quad T_{\max} = \left(\frac{Q_{absorb\phi_S}}{a_i \sigma (\varepsilon_{top} + \varepsilon_{back})} \right)^{1/4} \qquad (ก.12)$$

แล้วทำการเพิ่มจำนวนชั้นและค่าพื้นที่รวมของโครงแผ่นความร้อนในรูปแบบต่าง ๆ พร้อมทั้งเปลี่ยนค่าอุณหภูมิของแผ่นความร้อนที่ค่าต่าง ๆ เพื่อผลในการวิเคราะห์และพัฒนาต่อไป โครงแผ่นความร้อนแบบชั้นที่ใช้มีลักษณะดังรูปที่ ก.17

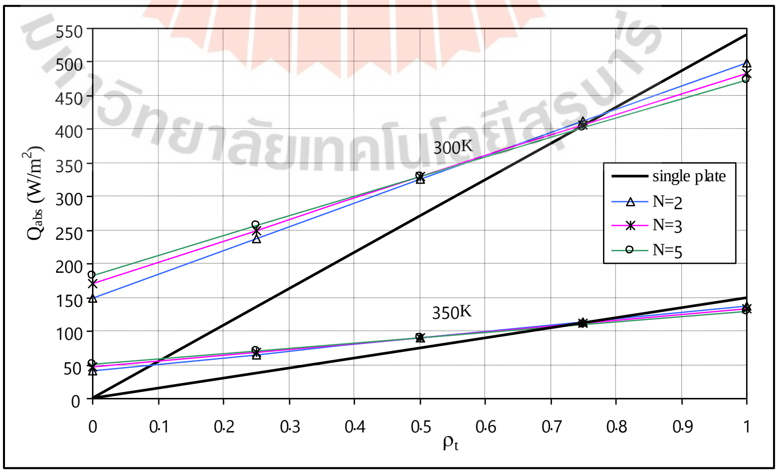


รูปที่ ก.17 โครงแผ่นความร้อนแผ่นล่างทึบมีคุณสมบัติการสะท้อนรังสีได้ทั้งหมด

สำหรับค่าที่ใช้ในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ใช้ที่ค่าพลังงานความร้อนจากแสงแดดที่เข้าเท่ากับ 1000 W/m^2 โดยพิจารณาการเพิ่มจำนวนแผ่นความร้อนที่ค่าพื้นที่รวมต่าง ๆ ของแผ่นความร้อนรวมทั้งการเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิ โดยกำหนดค่าอุณหภูมิที่สนใจในช่วง 275-350 K ทั้งนี้ได้พิจารณารูปแบบชั้นพื้นที่ของโครงแผ่นความร้อนในรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้ คือ แบบพื้นที่เท่ากันทุกชั้น แบบพื้นที่เพิ่มขึ้นตามชั้น และการกระจายตัวของพื้นที่ในแนวตั้งแบบสามเหลี่ยม ดังแสดงในภาคผนวก ค



รูปที่ ก.18 ค่าการดูดซับพลังงานเทียบกับค่าการดูดซับด้านบนที่ค่าการดูดซับด้านล่างมีค่าเป็น 0.3



รูปที่ ก.19 ค่าการดูดซับพลังงานเทียบกับค่าการดูดซับด้านบนที่ค่าการดูดซับด้านล่างมีค่าเป็น 0.7

รูปที่ ก.18 และรูปที่ ก.19 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของค่าพลังงานความร้อนที่ดูดซับได้เทียบกับค่าการดูดซับของด้านบนแผ่น ประเด็นหลักเป็นการเปรียบเทียบค่าการดูดซับพลังงานความร้อนของแบบจำลองโครงแผ่นความร้อนกับแผ่นความร้อนแผ่นเดียวเต็มแผ่น (ที่จำลองสำหรับ Canopy ที่มีความหนามาก ๆ) รูปกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลงตามจำนวนชั้นและอุณหภูมิที่ต่างกัน (300 K หรือ 350 K) ความแตกต่างประการหนึ่งของกราฟทั้งสองรูปคือ ค่าการดูดซับด้านล่างของแผ่น (0.3 หรือ 0.7)

ซึ่งจากรูปพบว่า การดูดซับพลังงานของโครงแผ่นเพิ่มขึ้นเมื่อค่าการดูดซับด้านบนและด้านล่างของแผ่นมีค่าสูงขึ้น จุดสังเกตจากการตัดกันของกราฟเมื่อการดูดซับพลังงานของโครงแผ่นความร้อนมีค่าต่ำกว่าแบบแผ่นเดียวเต็มแผ่น จุดตัดนี้จะเปลี่ยนไปตามค่าพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงคือ เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นเป็น 350 K การดูดซับพลังงานจะลดลงซึ่งเป็นผลมาจากการสูญเสียพลังงานจากการแผ่รังสีซึ่งแปรผันตามค่าอุณหภูมิสัมบูรณ์ยกกำลังสี่

ก.5 สรุปผลการวิจัย

จากการได้ศึกษาถึงการดูดซับความร้อนของโครงแผ่นความร้อนในรูปแบบต่าง ๆ ตามข้อสันนิษฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับการดูดซับพลังงานความร้อนของต้นไม้เพื่อใช้ในการเจริญเติบโต โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามข้อสมมุติฐานที่ตั้งไว้และหาคำตอบโดยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ ผลการทดสอบที่ค่าพลังงานจากแสงแดดเข้าทั้งสองค่า และการเปลี่ยนค่าตัวแปรในระบบสามารถสรุปประเด็นที่สำคัญดังนี้

- ในระบบที่มีพื้นที่รวมเท่ากันรูปแบบของโครงแผ่นความร้อนแบบสามเหลี่ยมจะสามารถให้ค่าอุณหภูมิได้สูงที่สุด ซึ่งหมายถึงการดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ได้มากนั่นเอง
- เมื่อเพิ่มค่าพื้นที่รวมของระบบจะทำให้ค่าอุณหภูมิสูงสุดที่จะสามารถกำหนดได้มีค่าลดลง
- การเพิ่มพลังงานแสงแดดเข้าจะหมายถึงการเพิ่มค่าอุณหภูมิสูงสุดที่จะสามารถกำหนดให้แก่ระบบได้
- เมื่อพิจารณาค่าพลังงานการดูดซับความร้อนได้ของระบบ จะพบว่าการปรับเปลี่ยนค่าตัวแปรในระบบต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาแล้วนั้นจะไม่สามารถเพิ่มค่าพลังงานการดูดซับความร้อนได้มากกว่าแผ่นความร้อนแบบแผ่นเดียวเลย
- ที่ค่าพื้นที่รวมสูง ๆ จะทำให้ค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของระบบมีค่าเข้าใกล้และเท่ากับแบบแผ่นเดียวได้ ทั้งนี้จะมีข้อจำกัดทางอุณหภูมิเป็นสำคัญ

- การเพิ่มอุณหภูมิของแผ่นความร้อนจะสามารถเพิ่มพลังงานการดูดซับความร้อนและพลังงานที่ออกจากระบบได้เพิ่มขึ้น โดยเมื่อเพิ่มอุณหภูมิมากขึ้นเทียบกับแบบแผ่นเดียว พลังงานความร้อนที่ออกจากระบบจะเริ่มมีค่าน้อยลง
- การเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์การดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนด้านหลังจะเป็นการเพิ่มค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของระบบได้แต่ก็ยังไม่สามารถเพิ่มได้มากกว่าแบบแผ่นความร้อนแผ่นเดียวได้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์พฤติกรรมการดูดซับและการส่งผ่านพลังงานความร้อนของโครงแผ่นความร้อน โดยเน้นทางด้านการดักรังสีความร้อนที่สูญเสียเนื่องจากการแผ่รังสีความร้อนของแผ่นแบนเรียบแผ่นเดียว คำตอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในเชิงวิศวกรรมด้วยข้อจำกัดของสมมุติฐาน สามารถบ่งชี้ให้เห็นว่าโครงแผ่นความร้อนที่ได้ทำการศึกษา จะเป็นต้นแบบและมีความสำคัญต่อการสร้างตัวกักเก็บพลังงานความร้อนที่สามารถใช้ประโยชน์ได้ หากแต่การศึกษาในที่นี้เป็นเพียงการศึกษาพฤติกรรมของการถ่ายเทพลังงานความร้อนเบื้องต้น เพื่อใช้เป็นแนวทางในการออกแบบและพัฒนาระบบให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นต่อไป การวิเคราะห์การดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้เพื่อประยุกต์ใช้ในงานวิศวกรรม ได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ของต้นไม้ โดยจำลองการวางตัวของใบไม้ในรูปแบบต่าง ๆ ที่จะมีผลต่อการดูดซับพลังงานแสงอาทิตย์ของชั้นใบไม้ในทั้งด้านหน้าและด้านหลังของใบ ด้วยการจำลองโครงแผ่นความร้อน ผลที่ได้บ่งชี้ว่าไม้พุ่มบางจะมีข้อได้เปรียบที่ค่าการดูดซับของใบมีค่าต่ำ แนวคิดนี้สามารถประยุกต์ใช้งานวิศวกรรมได้ตัวอย่างเช่น การออกแบบแผ่นกักเก็บความร้อนจากแสงอาทิตย์

ก.6 รายการอ้างอิง

Anderson, M.C. (1971). Radiation and crop structure. In Z. Sestak, J. Catsky and P.G. Jarvis (eds.). **Plant Photosynthetic Production : Manual of Methods** (pp 412-466). Dr. W. Junk, The Hague, Netherlands.

Ehleringer, J. R. (1981). **Leaf absorption of Mojave and Sonoran Desert plants** (pp 366-370). Oecologia (Berl) 49.

Ehleringer, J. R. (1988). Temperature and energy budgets. In R. W. Pearcy, J. R. Ehleringer, H. A. Mooney, and P. W. Rundel (eds.). **Plant Physiological Ecology : Field method and instrumentation** (pp 117-135). Chapman and Hall Ltd., London.

Holman, J. P. (1997). **Heat Transfer** (pp 394-515). McGraw-Hill Companies. North America.

Moon, P. (1940). Proposed standard solar radiation curves for engineering use, **J. Franklin Inst.**, 230: 583-618.

Pereira, A.R., Machado, E.C. and de Camargo, M.B.P. (1982). Solar radiation regime in three cassava (Manihot esculenta Crantz) canopies. **Agricultural Meteorology.** 26: 1-10.

Ross, J. (1981). **The Radiation Regime and Architecture of Plant Stands.** Dr.W. Junk, The Hague Netherlands.

Szeicz, G. (1974). Solar radiation for plant growth. **J. Applied Ecology.** 19: 617-636.

Weiss, A. and Norman, J.M. (1985). Partitioning solar radiation into direct and diffuse visible and near-infrared components. **Agriculture and Forest Meteorology.** 34: 205-213.

Yildiz Bayazitoglu and M. Necati Ozisik. (1988). **Elements of Heat Transfer** (pp 394-515). McGraw-Hill Companies. Singapore.

ภาคผนวก ข

การแสดงการไหลผ่านปีกอากาศด้วยกรรมวิธีการส่งคงแบบ

ข.1 บทคัดย่อ

ส่วนนี้เป็นการศึกษาการแสดงเส้นการไหลผ่านทรงกระบอกหน้าตัดรูปปีกอากาศ (Airfoil) ในสองมิติด้วยกรรมวิธีการส่งคงแบบหรือ Conformal mapping มีวัตถุประสงค์เพื่อนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) มาใช้ในปัญหาการไหลในสองมิติผ่านสิ่งกีดขวางทรงกระบอกหน้าตัดรูปทรงต่าง ๆ ได้แก่ หน้าตัดกลม หน้าตัดแผ่นเรียบบางและหน้าตัดรูปปีกอากาศ เพื่อหาค่าความดันที่เกิดขึ้นรอบสิ่งกีดขวางรวมทั้งหาค่าแรงยกที่กระทำกับวัตถุนั้น ๆ พร้อมด้วยเปรียบเทียบผลการไหลที่ได้จากกรรมวิธีการส่งคงแบบกับการไหลจริงเพื่อให้การไหลที่ได้มีความสมจริงมากขึ้น ทั้งนี้ได้ใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ในการแสดงเส้นการไหลจากสมการเส้นการไหลที่ได้

ผลการศึกษาพบว่าสามารถใช้ฟังก์ชันการส่งการไหลผ่านทรงกระบอกกลมไปเป็นการไหลผ่านปีกอากาศได้ ทั้งนี้ต้องเพิ่มการไหลโดยการหมุนวน (Flow with circulation) เข้าไปในสมการศักย์เชิงซ้อน (Complex potential) ของการไหล ค่าความแข็งแรง (Strength) ของการหมุนวนที่เหมาะสมมีค่าเท่ากับสองเท่าของผลคูณของรัศมีของทรงกระบอกกลมกับความเร็วของการไหลและค่าไซน์ของมุมปะทะการไหล, $2aU\sin\alpha$ เพื่อให้การไหลมีความสมจริงตามเงื่อนไขของคุตตา (Kutta condition) และนำไปคำนวณค่าแรงยกที่กระทำกับปีกอากาศ พบว่าแรงยกมีค่าเท่ากับผลคูณของความหนาแน่นของของไหลกับความเร็วของการไหลและค่าคงที่การหมุนวน, $\rho U\Gamma$ อีกทั้งยังสามารถปรับรูปทรงและขนาดของปีกอากาศได้โดยการปรับค่าพารามิเตอร์รูปทรงให้ได้รูปทรงตามความต้องการเพื่อนำไปใช้วิเคราะห์การไหล รวมทั้งนำไปใช้ออกแบบปีกอากาศได้ต่อไป

ข.2 บทนำ

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนที่พบโดยทั่วไปในส่วนนำของเนื้อเรื่องที่มีการใช้จำนวนเชิงซ้อนเพื่ออำนวยความสะดวกในการแสดงค่า รวมทั้งการใช้เครื่องหมายและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้จำนวนเชิงซ้อนมีประโยชน์ในการนำไปใช้มากขึ้น

ข.2.1 จำนวนเชิงซ้อน

ในระบบตัวเลขจำนวนจริงนั้นการหาคำตอบของสมการพหุนาม เช่น $x^2-1=0$ สามารถหาได้อย่างสมเหตุสมผล ในศตวรรษที่ 16 การหาคำตอบของสมการพีชคณิตกำลังสองและกำลังสี่ โดย Girolamo Cardano*[*GIROLAMO CARDANO (1501-1576) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี เป็นผู้เสนอสูตรสำหรับหาคำตอบสมการพหุนาม] ที่ได้นำเสนอแนวคิดสำหรับการแสดงค่ารากที่สองของตัวเลขจำนวนจริงติดลบ เขาพบว่าการนำค่า $\sqrt{-1}$ มาใช้ร่วมกับระบบตัวเลขจำนวนจริงที่มีอยู่เดิม โดยใช้กฎทางคณิตศาสตร์ด้วยแล้วผลคูณของค่าตัวเลขนี้จะเป็น

$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$ เป็นผลทำให้สมการพีชคณิต เช่น $x^2+1=0$ หาคำตอบได้ อย่างไรก็ตาม การสมมุติของ Cardano ก็ถูกมองข้ามไปจากนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่จนเวลาล่วงเลยมากว่า 300 ปี ตัวอักษร i สำหรับการแทนค่า $\sqrt{-1}$ ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในทางคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 19 โดย Carl Friendrich Gauss**[**CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) นักคณิตศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงชาวเยอรมัน มีผลงานในการสร้างรูปแบบและสัญลักษณ์ในการใช้จำนวนเชิงซ้อน] ได้แสดงให้เห็นว่าระบบจำนวนเชิงซ้อนสามารถจะนำมาขยายขอบข่ายของระบบจำนวนจริง ทำให้การหาค่ารากที่สองของจำนวนจริงลบก็หายไปพร้อมกับความลึกลับซับซ้อนก็กลายเป็นการสมมติขึ้นมาแทน โดยสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์แทนได้ว่า

$$i^2 = -1 \tag{ข.1}$$

การรวมกันของตัวเลขจำนวนจริงและตัวสัญลักษณ์ i ซึ่งเรียกว่าเป็น หน่วยจินตภาพ (Imaginary unit) จะใช้ในการสร้างค่าจำนวนเชิงซ้อน z ได้เป็น

$$z = x + iy \tag{ข.2}$$

เมื่อ x และ y เป็นค่าตัวเลขจำนวนจริง ค่า x เรียกว่า “ส่วนจำนวนจริง (Real part)” ของจำนวนเชิงซ้อน z และค่า y เรียกว่าเป็น “ส่วนจินตภาพหรือส่วนสมมุติ (Imaginary part)” ของ z และจะใช้สัญลักษณ์แทนเป็น

$$\operatorname{Re} z = x \text{ และ } \operatorname{Im} z = y \tag{ข.3}$$

ในการแสดงค่าส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพของ z นอกจากนี้แล้ว Gauss ยังแสดงค่าคำตอบของสมการพหุนาม

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

พบว่าทุกค่าคำตอบเป็นค่าจำนวนเชิงซ้อน ผลที่ได้นี้ได้กลายมาเป็นทฤษฎีพื้นฐานทางพีชคณิตของตัวเลขเชิงซ้อน

ข.2.2 คุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน z สามารถจะแสดงค่าได้ในรูปของคู่ลำดับ

$$z = (x, y) \tag{ข.4}$$

เนื่องจาก x และ y ต่างมีค่าเป็นจำนวนจริง ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าเป็น $(x, 0)$ จะแสดงถึงค่าจำนวนจริงแท้ และจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าเป็น $(0, y)$ จะเรียกว่าเป็นจำนวนจินตภาพแท้ (Pure imaginary numbers) หากกำหนดจำนวนเชิงซ้อนสองค่าใด ๆ เป็น $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$ ให้มีค่าเท่ากัน การกำหนดนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองมีทั้งส่วนจริงส่วนจินตภาพเหมือนกัน คือ

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } x_1 = x_2 \text{ และ } y_1 = y_2 \tag{ข.5}$$

การบวก

การกระทำทางพีชคณิตด้วยการบวก (Additive) ของจำนวนเชิงซ้อนแสดงอยู่ในรูปพิกัดคู่ลำดับได้เป็น

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{ข.6}$$

ทั้งนี้ จากสมการที่ ข.6 เมื่อทำการบวกค่า $(x_1, y_1) + (0,0) = (x_1+0, y_1+0) = (x_1, y_1)$ และ $(x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1-x_2, y_1 - y_2) = (0,0)$ จากผลที่ได้จะเรียกค่าว่าเป็นเอกลักษณ์การบวก (Additive identity)

$$0 = (0,0) \tag{ข.7}$$

นอกจากนี้แล้วค่าตัวผกผันการบวก (Additive inverse) ของ z_1 จะเป็น

$$-z_1 = (-x_1, -y_1) \tag{ข.8}$$

การลบ

การกระทำทางพีชคณิตของการลบ (Subtraction) ของจำนวนเชิงซ้อนกำหนดเป็น

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad \text{(ข.9)}$$

การรวมกันของจำนวนเชิงซ้อนจะเป็นไปตามกฎทางคณิตศาสตร์ และสามารถแสดงในรูปของสมการได้ดังนี้

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$ กฎการสลับที่ของการบวก (ข.10)

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$ กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการบวก (ข.11)

การคูณ

การกระทำทางพีชคณิตของการคูณ (Multiplication) ของจำนวนเชิงซ้อนกำหนดได้เป็น

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \text{(ข.12)}$$

ทั้งนี้การคูณกันของ $(x, y)(1,0) = (x - 0, y + 0) = (x, y)$ ได้ผลเป็นค่าเดิมเราจึงเรียกว่าเป็นเอกลักษณ์การคูณ (Multiplicative identity)

$$1 = (1, 0) \quad \text{(ข.13)}$$

หาก $z = (x, y)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะสามารถหาจำนวนเชิงซ้อน z^{-1} ซึ่งเรียกว่า “ค่าตัวผกผันการคูณ (Multiplicative inverse)” ด้วยเงื่อนไข $zz^{-1} = 1$ กำหนดให้ $z^{-1} = (x_1, y_1)$ จะได้

$$(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + yx_1) = (1,0)$$

การเท่ากันของค่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพจากผลที่ได้ คือ

$$xx_1 - yy_1 = 1, \quad xy_1 + yx_1 = 0$$

จาก Cramer's rule*[*GABRIEL CRAMER (1704-1752) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์] สามารถนำมาใช้ในการหาค่า x_1 และ y_1 ได้โดย

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \text{และ} \qquad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

ดังนั้น ค่าตัวผกผันการคูณจะมีค่าเป็น

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \qquad \text{เมื่อ } z \neq 0 \qquad (\text{ข}.14)$$

การหาร

จากค่าตัวผกผันการคูณ สามารถนำหาค่าการหารของจำนวนเชิงซ้อนไม่เป็นศูนย์ได้เป็น

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 (z_2)^{-1} \qquad \text{เมื่อ } z_2 \neq 0 \qquad (\text{ข}.15)$$

คุณสมบัติอื่น ๆ ของการคูณและการบวกที่ใช้สำหรับจำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วย

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \qquad \text{กฎการสลับที่ของการคูณ} \qquad (\text{ข}.16)$$

$$z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \qquad \text{กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ} \qquad (\text{ข}.17)$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \quad \text{กฎการแจกแจง} \tag{ข.18}$$

เนื่องจากระบบจำนวนเชิงซ้อนเป็นส่วนมาขยายเพิ่มเติมของระบบจำนวนจริง หาก พิจารณาค่าที่ตรงกันของหน่วยจินตภาพ

$$i = (0, 1) \tag{ข.19}$$

กับค่า -1 = (-1, 0) และเนื่องจากว่า i^2 = -1 จะสามารถแสดงการคำนวณได้เป็น

$$(0,1)(0,1) = (0 - 1, 0)$$

ซึ่งเป็นจริง ทั้งหมดนี้เป็นการพัฒนาของระบบจำนวนเชิงซ้อนที่อาศัยการแสดงค่าแบบคู่ลำดับ

ข.2.3 การแสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนด้วยกราฟ

โดยทั่วไปจำนวนเชิงซ้อนจะเขียนอยู่ในรูป $z = x + iy$ ซึ่งเป็นการแสดงค่าในระนาบคาร์ทีเซียน จำนวนเชิงซ้อนอีกแบบหนึ่งเรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนสังยุค (Complex conjugate) เขียนแทนโดย $\bar{z}$ และกำหนดให้มีค่าเป็น

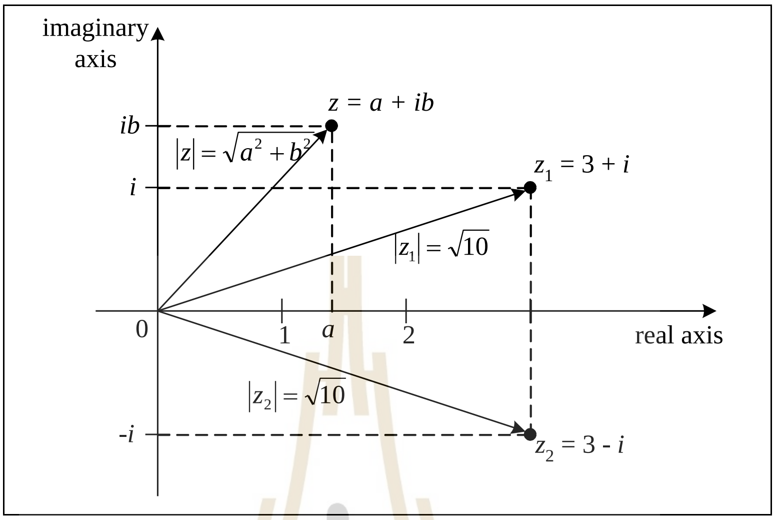
$$\bar{z} = x - iy \tag{ข.20}$$

การหาค่าจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนนั้นกระทำได้โดยการเปลี่ยนเครื่องหมายในส่วนจินตภาพและจะมีผลเป็น

$$\overline{(\bar{z})} = z \tag{ข.21}$$

การใช้แผนภาพเพื่อแสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $z = a + ib$ ในรูปแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian representation) ค่าจำนวนเชิงซ้อนจะแทนด้วยจุด (a, b) ในระนาบของ (x, y) โดยแกน x กับแกน y นั้นตั้งฉากกันและมีขนาดของสเกลเท่ากัน แกน x จะเรียกว่า “แกนจริง (Real axis)” และ

แกน y เรียกว่า "แกนจินตภาพ (Imaginary axis)" ระนาบในรูปแบบนี้เรียกว่า "ระนาบเชิงซ้อน (Complex plane)" หรือระนาบพิกัดฉาก ซึ่งสามารถที่จะแสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนได้ในทุกค่า



รูปที่ ข.1 ระนาบเชิงซ้อนแบบคาร์ทีเซียนของ z

จากรูปที่ ข.1 แสดงจำนวนเชิงซ้อนสามค่าคือ $z = a + ib$, $z_1 = 3 + 1i$ และ $z_2 = 3 - 1i$ ทั้งในรูปแบบจุดและเวคเตอร์ในระนาบ z จะเห็นว่า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของกันคือ $z_2 = \bar{z}_1$ สามารถเห็นได้จากแผนภาพถึงความคล้ายคลึงกันของจำนวนเชิงซ้อนสังยุคทั้งคู่จากตำแหน่งและรูปร่าง ทั้งในแบบจุดและเวคเตอร์ จะเห็นได้ว่าค่าในแกนจริงนั้นมีค่าเท่ากัน

การคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปคาร์ทีเซียนกระทำได้โดยการกระจายค่าการคูณจากกฎทางพีชคณิตและทำการรวมพจน์โดยอาศัยความสัมพันธ์ $i^2 = -1$ดังนั้นถ้า $z_1 = a + ib$ และ $z_2 = c - id$ ผลคูณจะเป็น

$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (ข.22)$$

ให้ λ เป็นจำนวนจริงคงที่ค่าหนึ่งคูณกับจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ผลคูณนี้จะเป็น

$$\lambda z = \lambda a + i\lambda b \qquad (ข.23)$$

ถ้ากำหนดให้ $z = x + iy$ จะได้ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนนี้กับจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของตัวมันเองเป็น

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2 + y^2) \qquad (\text{ข}.24)$$

จะมีค่าเป็นจำนวนจริงบวกทุกกรณี ค่าตัวเลข $(x^2 + y^2)^{1/2}$ เรียกว่า “มอดูลัส (Modulus)” ของ z เขียนแทนด้วย $|z|$ หรือ

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2} \qquad (\text{ข}.25)$$

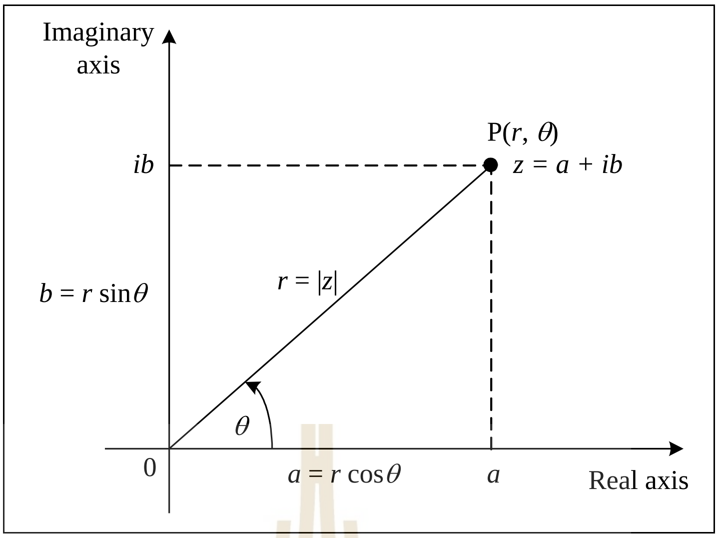
ค่าของ $|z|$ คือ ระยะทางของเส้นตรง (เวคเตอร์) จากจุดตัดแกนในระนาบเชิงซ้อนที่แสดงค่าของ z (ดังแสดงในรูปที่ ข.1)

ในการหาผลการหารของจำนวนเชิงซ้อนในระนาบพิกัดฉาก จะหาได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของตัวหารทั้งตัวตั้งและตัวหารก่อน

ถ้าให้ $z_1 = a + ib$ และ $z_2 = c + id$ ผลการหารของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองค่าจะหาได้จากขั้นตอนดังนี้

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2} \qquad (\text{ข}.26)$$

อีกทางเลือกหนึ่งซึ่งทำให้ง่ายต่อการกำหนดรูปแบบเชิงซ้อนของผลลัพธ์ด้วยการแสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว (Polar representation) หรือบางทีเรียกว่าอยู่ในรูป (r,θ) จะอาศัยพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) แสดงค่าจำนวนเชิงซ้อน z ในระนาบ (แสดงในรูปที่ ข.2) ทั้งนี้ระยะของจุด P จากจุดตัดแกนจะมีค่าเป็น $r = |z|$ อีกทั้ง θ เป็นค่ามุมที่วัดจากแกนจริงด้านบวกไปยังเส้นตรง OP ตามหลักของการวัดมุมแบบทวนเข็มนาฬิกาให้แสดงค่ามุมเป็นบวก ดังแสดงเป็นลูกศรเชิงมุมในรูปที่ ข.2



รูปที่ ข.2 รูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน z

ค่ามุม θ นี้เรียกว่า "ค่าอาร์กิวเมนต์ (Argument)" ของ z โดยจะเขียนเชิงสัญลักษณ์เป็น $\theta = \arg z$ ค่าอาร์กิวเมนต์ของ z นี้จะไม่เป็นค่า ๆ เดียวเนื่องจากว่าหากเราพิจารณาที่ค่า r เท่าเดิมแต่เปลี่ยน θ ไปเป็น $\theta + 2k\pi$ เมื่อ $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ก็สามารถที่จะกำหนดค่าของจุด P ในระนาบ z ได้ ณ จุดเดียวกัน เพื่อที่จะลดค่าของมุมซ้ำซ้อนที่มีมากเนื่องจากการบวกค่าผลคูณ 2π นี้ทำได้โดยการจำกัดช่วงของค่า θ ให้แสดงค่าอยู่ในช่วง

$$-\pi < \theta < \pi \qquad \text{(ข.27)}$$

ค่า θ ที่เลือกใช้โดยวิธีนี้เรียกว่า "ค่ามุขสำคัญ (Principal value)" ของค่าอาร์กิวเมนต์ของ z เขียนเป็นสัญลักษณ์แทนด้วย $\operatorname{Arg} z$ ดังนั้นความสัมพันธ์ของ $\arg z$ และ $\operatorname{Arg} z$ จะเป็นดังนี้

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \text{(ข.28)}$$

กระบวนการหาค่ามุขสำคัญ $\operatorname{Arg} z$ จาก $\arg z$ กระทำได้จากการบวกเข้าหรือลบออกด้วยผลคูณของ 2π กับตัวเลขจำนวนเต็มจนกว่าจะได้ผลดังสมการที่ ข.27 จากรูปที่ ข.2 พบว่าพิกัดเชิงขั้วที่แสดงจุด P ที่ค่า $z = x + iy$ คือ (r, θ) ความสัมพันธ์ระหว่างการแสดงค่าในรูปคาร์ทีเซียนและรูปเชิงขั้วจะเป็น

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{ข.29}$$

ในการแสดงค่าโดยพิกัดเชิงขั้วแบบซ้ำซ้อนของจำนวนเชิงซ้อนจะอาศัยทฤษฎี de Moivre's theorem*[* ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสเป็นผู้นำเสนอการแสดงค่าจำนวนจินตภาพในทางตรีโกณมิติ] นั้นคือ

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{ข.30}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน z จะเขียนอีกแบบหนึ่งได้เป็น

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{ข.31}$$

เมื่อ $r = |z|$ และ $\theta = \arg z$

จากสมการที่ ข.31 เป็นการแสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว ซึ่งจะช่วยอำนวยความสะดวกเป็นอย่างมากในการหาค่าผลคูณและผลหารของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าให้ $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ และ $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ จะแสดงได้ว่า

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ และ } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{ข.32}$$

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนสองค่าใด ๆ (w และ z) ที่แสดงในรูปแบบเชิงซ้อนนี้จะต้องมีค่ามอจดูลัสเท่ากันกล่าวคือ

$$|w| = |z| \tag{ข.33}$$

นอกจากนี้แล้วค่าอาร์กิวเมนต์ก็จะต้องเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\arg w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{ข.34}$$

ผลที่ได้นี้จะมีความสำคัญมากเมื่อเรานำมาใช้หาค่ารากที่ q ใด ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน z จาก

$$w = z^{p/q} \tag{ข.35}$$

เมื่อ p, q เป็นจำนวนเต็ม ในการหาค่ารากตามสมการที่ ข.35 ก่อนอื่นจะต้องกำหนดค่าจำนวนเชิงซ้อน w และ z ในรูปเชิงขั้วเป็น

$$w = \rho e^{i\phi} \text{ และ } z = re^{i\theta} \tag{ข.36}$$

ต่อมาทำการเพิ่มค่าจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองโดยการยกกำลังเพื่อให้สอดคล้องกับสมการที่ ข.35 ดังนั้น

$$\left(\rho e^{i\phi}\right)^q = \left(re^{i\theta}\right)^p$$
$$\rho^q e^{iq\phi} = r^p e^{ip\theta}$$

จะเห็นว่า $\rho^q = r^p$ ดังนั้น $\rho = r^{p/q}$ และค่าอาร์กิวเมนต์ทั้งสองจะเป็น

$$q\phi = p\theta + 2k\pi$$

$$\phi = \frac{p\theta + 2k\pi}{q}$$

ค่า q จะมีความสัมพันธ์กับ k เป็น $k = 0,1,\ldots,q-1$ ดังนั้นค่ารากที่ q มีค่าเป็น $w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}$ ตามสมการที่ ข.35 และจะสามารถเขียนได้ว่า

$$w_k = r^{p/q} \exp\left[i\left(\frac{p\theta + 2k\pi}{q}\right)\right] \tag{ข.37}$$

สำหรับค่า $k = 0,1,...,q-1$ หากว่าจำนวนเต็ม k มีค่ามากกว่า q - 1 หรือน้อยกว่า 0 ค่าคำตอบของค่ารากจะเป็นค่าเดียวกับค่ารากที่ได้มาก่อนเนื่องจากการซ้ำซ้อนกันของค่ารากที่ค่าอาร์กิวเมนต์ตามจำนวนคาบ $2q\pi$

สังเกตเห็นว่าเมื่อเขียนจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูปเชิงขั้วแล้วค่าหน่วยจินตภาพ i จะเป็น

$$i = e^{i\pi/2} \text{ โดยที่ } |i| = 1 \text{ และ } \mathrm{Arg}\, i = \pi/2 \tag{ข.38}$$

ในตอนท้ายนี้จะพิจารณาถึงความไม่เท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนที่เรียกว่า triangle inequality ถ้าให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ พบว่า

$$|a| + |b| \geq |a + b| \tag{ข.39}$$

อีกตัวอย่างหนึ่งสำหรับค่าจำนวนเชิงซ้อนสามค่า z_1, z_2 และ z_3

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \geq |z_1 - z_3| \tag{ข.40}$$

ผลที่ได้ในสมการที่ ข.40 นี้อาศัยความสัมพันธ์ตามสมการที่ ข.39 โดยให้ค่า $a = z_1 - z_2$ และ $b = z_2 - z_3$ สมการที่ ข.40 ชี้ให้เห็นว่าผลรวมของค่าระยะสองด้านใด ๆ ของสามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดของจำนวนเชิงซ้อนสามค่าจะไม่สามารถมีค่าเกินระยะรวมของทั้งสามด้านได้ นอกเหนือจากว่ามีสองจุดใด ๆ หรือทั้งสามจุดเป็นจุดเดียวกัน

ข.2.4 เส้นโค้ง โดเมน และบริเวณของระนาบ

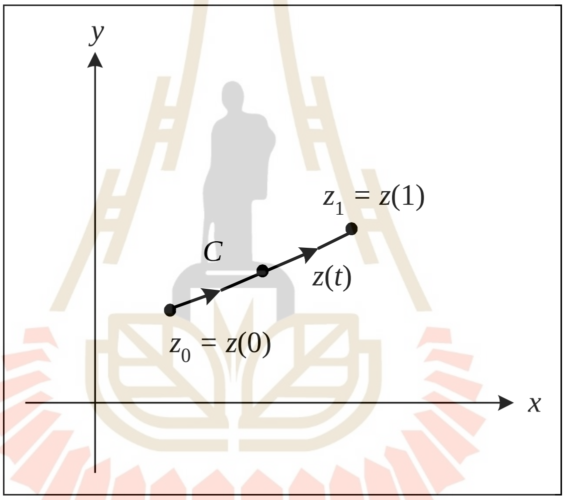
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนวคิดพื้นฐานของการกำหนดขอบเขตของจุดในระนาบ ส่วนแรกคือเส้นโค้ง กำหนดให้ $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ เป็นค่าฟังก์ชันต่อเนื่องสองค่าที่ขึ้นกับค่าพารามิเตอร์จำนวนจริง t ที่อยู่ในช่วง $a \leq t \leq b$ ให้ส่วนโค้ง (Curve) C ในระนาบเกิดจากการเชื่อมโยงกันระหว่างจุด $[x(a), y(a)]$ ไปยังจุด $[x(b), y(b)]$ โดยที่จุดใด ๆ บนส่วนโค้งนี้มีความสัมพันธ์เป็น

$$C : z(t) = x(t) + iy(t) \text{ สำหรับ } a \leq t \leq b \tag{ข.41}$$

ถ้า $z_0 = x_0 + iy_0$ และ $z_1 = x_1 + iy_1$ เป็นสองจุดใด ๆ ดังนั้นส่วนของเส้นที่เชื่อมโยงจุด z_0 ไปยังจุด z_1 ก็จะมีความสัมพันธ์เป็น

$$C : z(t) = [x_0 + (x_1 - x_0)t] + i[y_0 + (y_1 - y_0)t] \text{ สำหรับ } 0 \le t \le 1 \qquad (ข.42)$$

นอกจากนี้จะใช้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ ข.42 อาศัยรูปเวกเตอร์แทนเส้นตรง (ในรูปที่ ข.3) โดยจุดเริ่มต้นคือ $z_0 = x_0 + iy_0$ และทิศทางของเส้นจะอยู่ในแนว $z_1 - z_0$ จึงสามารถเขียนความสัมพันธ์ของเส้นโค้ง C ในสมการที่ ข.42 ได้เป็น $C : z(t) = [z_0 + (z_1 - z_0)t]$ สำหรับ $0 \le t \le 1$



รูปที่ ข.3 ส่วนของเส้นตรง C ต่อระหว่าง z_0 กับ z_1

หากพบว่าเส้นโค้ง C มีคุณสมบัติ $z(a) = z(b)$ กล่าวได้ว่าเส้นโค้งนี้เป็นเส้นโค้งปิด (close curve) และหากเส้นโค้งไม่มีการตัดกันของตัวมันเองแล้ว เส้นโค้ง C จะเป็นเส้นโค้งปิดได้โดยง่าย และจะเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้เป็น $z(t_1) \ne z(t_2)$ โดยที่ $t_1 \ne t_2$ ยกเว้นเมื่อ $t_1 = a$ และ $t_2 = b$ เช่น วงกลม C ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ และมีรัศมีเป็น R จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปรของเส้นโค้งปิดได้เป็น

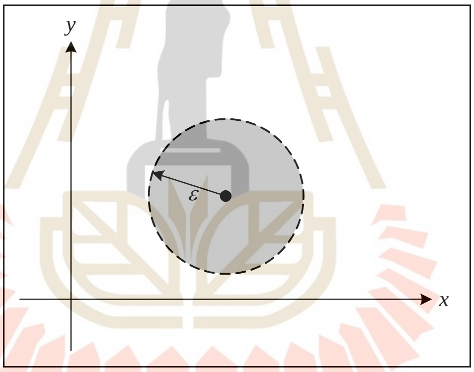
$$C : z(t) = (x_0 + R\cos t) + i(y_0 + R\sin st) = z_0 + Re^{it} \text{ สำหรับ } 0 \le t \le 2\pi \qquad (ข.43)$$

ความคิดเบื้องต้นอันหนึ่งในการอธิบายกลุ่มเซตของจุดในระนาบคือ ย่านใกล้เคียง ε (ε-neighborhood) ของจุด z_0 เป็นกลุ่มเซตที่เป็นไปตามเงื่อนไข

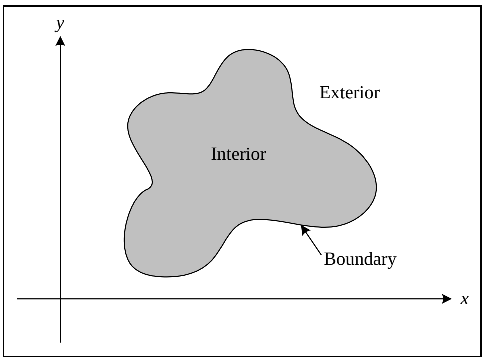
$$\left|z - z_0\right| < \varepsilon \qquad (ข.44)$$

กลุ่มเซตนี้จะเป็นรูปวงกลมเปิดรัศมี ε ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์รอบจุด z_0 ดังรูปที่ ข.44

จุด z_0 เรียกว่าเป็นจุดข้างใน (Interior point) ของกลุ่มเซต S เมื่อมีค่าย่านใกล้เคียง ε ของจุด z_0 อยู่ภายใน S ทุกจุด และ z_0 เรียกว่าเป็นจุดข้างนอก (Exterior point) ของกลุ่มเซต S เมื่อไม่มีค่าย่านใกล้เคียง ε ของจุด z_0 อยู่ภายใน S เลย ถ้า z_0 เป็นค่าที่อยู่ระหว่างจุดข้างในกับจุดข้างนอกของกลุ่มเซต S จะเรียกว่าเป็นจุดขอบ (Boundary point) ของกลุ่มเซต S โดยจะมีคุณสมบัติของค่าย่านใกล้เคียง ε จุด z_0 อยู่ทั้งข้างในและข้างนอกกลุ่มเซต S ดังตัวอย่างในรูปที่ ข.5



รูปที่ ข.4 ค่าย่านใกล้เคียง ε ของจุด z_0



รูปที่ ข.5 จุดข้างใน จุดข้างนอก และเส้นขอบของกลุ่มเซต

กลุ่มเซต S จะเรียกว่า “เซตเปิด (Open sets)” ถ้าทุกจุดเป็นจุดข้างในของกลุ่มเซต S กลุ่มเซตที่เรียกว่า “เซตปิด (Closed sets)” หากรวมจุดข้างในทุกจุดกับจุดที่อยู่บนเส้นขอบ และกลุ่มเซต S จะเรียกว่า “เซตเชื่อมโยง (Connected sets)” หากทุกคู่ของจุด z_1 และ z_2 อยู่ร่วมกันได้ โดยส่วนโค้งนั้นยังคงอยู่ในกลุ่มเซต S

กลุ่มเซตที่ต่อกันแบบเปิดจะเรียกว่า “โดเมน (Domain)” โดเมนที่ประกอบด้วยบางส่วนหรือไม่มีส่วนประกอบของจุดขอบเขตซึ่งเรียกว่า “บริเวณ (Region)” เช่น เซต $\{z:1<\operatorname{Im} z\le 2\}$ เป็นบริเวณ เซตที่เป็นผลรวมกันของโดเมนกับเส้นขอบเรียกว่าเป็นบริเวณปิด (Closed region) เช่น $\{z:x\le y\}$ เป็นบริเวณปิด เซตที่เรียกว่าเป็นเซตมีขอบเขต (Bounded sets) ถ้าทุกจุดสามารถล้อมรอบได้ด้วยวงกลมที่มีรัศมีค่าหนึ่ง และจะเป็นจริงได้เมื่อ $R>0$ สำหรับจุด z ในกลุ่มเซต S จะได้ว่า $|z|\le R$ เช่น รูปสี่เหลี่ยม $\{z:|x|\le 4$ และ $y\le 3\}$ เป็นเซตมีขอบเขต เนื่องจากว่ามันบรรจุอยู่ในวงกลม $|z|=5$ ส่วนเซตที่ไม่สามารถปิดล้อมได้ด้วยวงกลมจะเรียกว่าเป็นเซตไม่มีขอบเขต (Unbounded set)

ข.2.5 ตัวแปรและฟังก์ชัน

ค่าฟังก์ชันของตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน z ที่มีค่าภายใต้กลุ่มเซต D จะเขียนอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อน w ได้เป็น

$$w=f(z) \tag{ข.45}$$

เนื่องจาก $z=x+iy$ สำหรับระบบแกน ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่า $w=u+iv$ เมื่อ u และ v เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน w หรือเขียนได้เป็น

$$f(x+iy)=u+iv \tag{ข.46}$$

ทั้งนี้ค่า u และ v นั้นขึ้นกับค่า x และ y จึงสามารถเขียนฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex function, f) ได้เป็น

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{ข.47}$$

สำหรับการแสดงค่าด้วยพิกัดเชิงขั้ว $(z=re^{i\theta})$ สามารถเขียนฟังก์ชันเชิงซ้อนในทำนองเดียวกันนี้ได้เป็น

$$f(re^{i\theta}) = u + iv \tag{ข.48}$$

ค่า u และ v ต่างขึ้นกับค่า r และ θ จึงสามารถเขียนฟังก์ชันเชิงซ้อนในระบบแกนพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

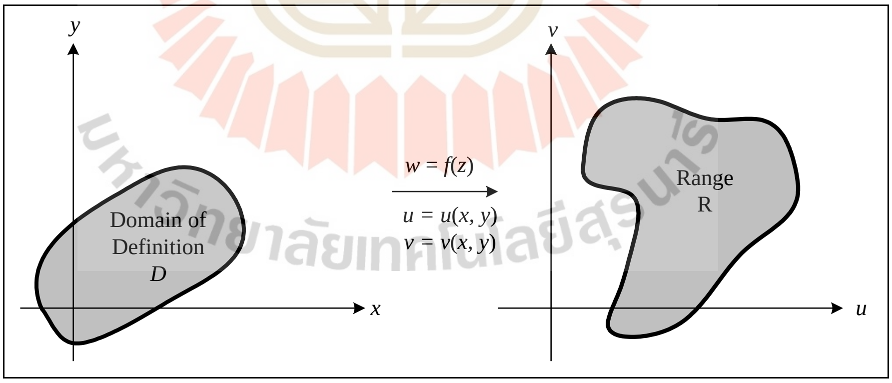
$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \tag{ข.49}$$

ข.2.6 การแปลงเชิงเส้น

การแปลง (Transformation) ค่าภายในโดเมน D ในระนาบ xy ไปยังระนาบ uv โดยฟังก์ชัน f สามารถเขียนได้เป็น

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{ข.50}$$

พิจารณาว่าเป็นการแปลงจากกลุ่มเซต D ในระนาบ z ไปยังบริเวณ R อันใหม่ในระนาบ w (รูปที่ ข.6)



รูปที่ ข.6 การแปลงโดย $w = f(z)$

ถ้าหากว่าการแปลงของจุดสองจุดบนระนาบ z ที่ไม่เป็นจุดเดียวกัน $z_1 \neq z_2$ ไปยังจุดในระนาบ w และยังคงมีค่าไม่เท่ากัน $f(z_1) \neq f(z_2)$ แล้วฟังก์ชันการแปลงนี้จะเรียกว่าเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-One) นอกจากนี้หากต้องการแสดงค่าของตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน z ในรูปฟังก์ชันของตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน w จะต้องหาฟังก์ชันการย้อนกลับของ $w = f(z)$ หรือฟังก์ชัน

ผกผัน (Inverse function) เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์เป็น $z = g(w)$ โดยจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรจำนวนเชิงซ้อนได้เป็น

$$g(f(z)) = z \text{ สำหรับทุกค่าของ } z \text{ ภายใต้เซตของโดเมนที่ต้องการแปลง และ}$$
$$f(g(w)) = w \text{ สำหรับทุกค่าของ } w \text{ ภายใต้เซตของโดเมนที่ต้องการแปลง} \qquad \text{(ข.51)}$$

พิจารณาการแปลงในรูปแบบต่าง ๆ ที่ใช้ฟังก์ชันในการแปลงจะสามารถพิจารณาได้ดังนี้

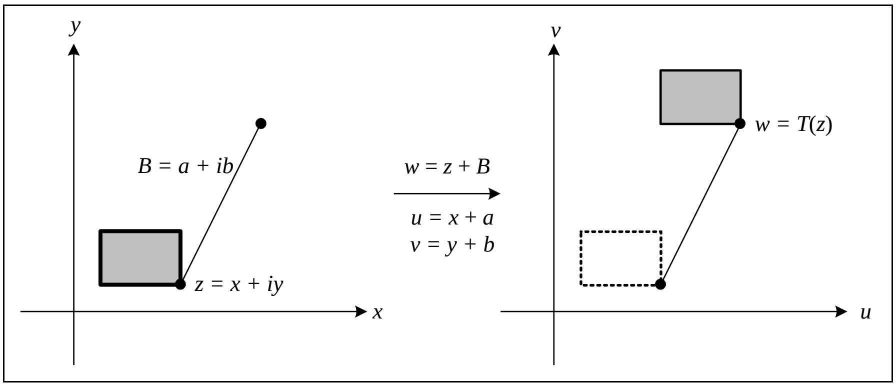
การเลื่อนขนาน

หากค่า $B = a + ib$ เป็นค่าจำนวนเชิงซ้อนคงที่ค่าหนึ่ง การแปลงโดยฟังก์ชัน T ตามความสัมพันธ์

$$w = T(z) = z + B = x + a + i(y + b) \qquad \text{(ข.52)}$$

เป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งของระนาบ z ไปยังระนาบ w เรียกว่า การแปลงโดยการเลื่อนขนาน (translation) โดยที่จุด z จะถูกเปลี่ยนตำแหน่งไปด้วยเวกเตอร์ $a + ib$ จากเดิมไปยังระนาบ w (ดังรูปที่ ข.7) ตามความสัมพันธ์ $w = T(z)$ และฟังก์ชันการแปลงผกผัน (Inverse transformation) จะเป็น

$$z = T^{-1}(w) = w - B = u - a + i(v - b) \qquad \text{(ข.53)}$$



รูปที่ ข.7 การแปลงแบบเลื่อนขนาน $w = T(z) = z + B = x + a + i(y + b)$

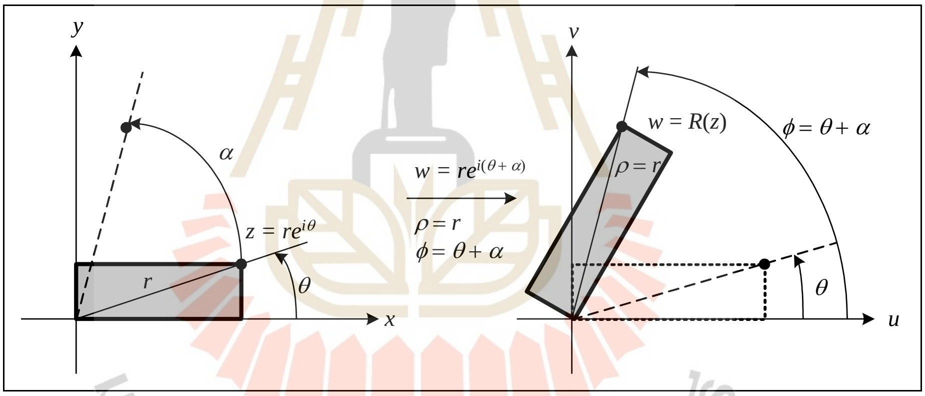
การหมุน

ถ้า α เป็นค่าจำนวนจริงคงที่ค่าหนึ่ง การแปลงโดย

$$w = R(z) = ze^{i\alpha} = re^{i\theta}e^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)} \qquad (ข.54)$$

จะเป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งโดยฟังก์ชัน R สำหรับค่าในระนาบ z ไปยังระนาบ w เรียกว่าเป็น การแปลงโดยการหมุน (Rotation) ที่จุด z ถูกหมุนไปด้วยมุม α และเปลี่ยนตำแหน่งไปที่ $w = R(z)$ (ดังรูปที่ ข.8) หากใช้พิกัดเชิงขั้ว $w = \rho e^{i\phi}$ สำหรับระนาบ w แล้วฟังก์ชันการแปลงผกผันจะเป็น

$$z = R^{-1}(w) = we^{-i\alpha} = \rho e^{i\theta}e^{-i\alpha} = re^{i(\theta-\alpha)} \qquad (ข.55)$$



รูปที่ ข.8 การแปลงโดยการหมุน $w = R(z) = re^{i(\theta+\alpha)}$

การเปลี่ยนขนาด

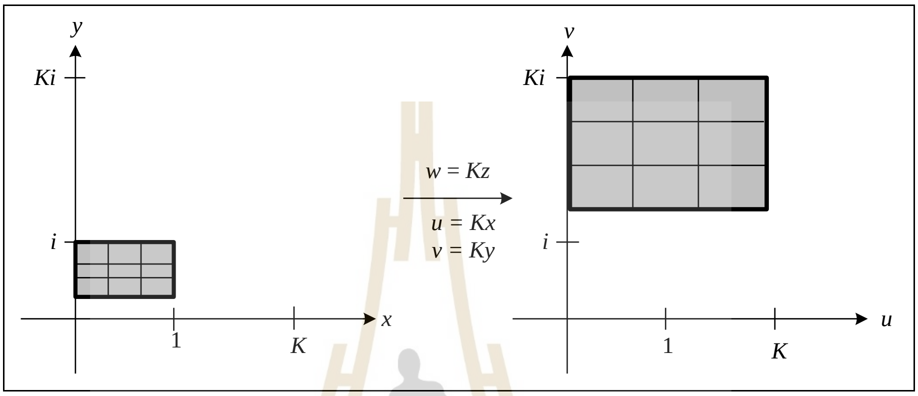
กำหนดให้ K เป็นค่าจำนวนจริงบวกคงที่ค่าหนึ่ง การแปลงโดยฟังก์ชัน S ตามความสัมพันธ์

$$w = S(z) = Kz = Kx + iKy \qquad (ข.56)$$

จะเป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งที่เรียกว่า "การแปลงโดยการเปลี่ยนขนาด (Magnification)" ถ้าหากค่า $K > 1$ การแปลงนี้จะเป็นการเพิ่มระยะทางระหว่างจุดไปตามขนาด

ของค่า K (ดังรูปที่ ข.9) หากค่า $K<1$ การแปลงนี้จะเป็นการลดระยะทางระหว่างจุดลงไปตามสัดส่วนของค่า K และฟังก์ชันการแปลงย้อนกลับของการแปลงโดยการเปลี่ยนขนาดนี้จะเป็น

$$z=S^{-1}(w)=\frac{1}{K}w=\frac{1}{K}u+i\frac{1}{K}v \qquad (ข.57)$$



รูปที่ ข.9 การเปลี่ยนขนาด $w=S(z)=Kz=Kx+iKy$

ถ้าให้ $A=Ke^{i\alpha}$ และ $B=a+ib$ โดยที่ $K>0$ การแปลงตามความสัมพันธ์

$$w=W(z)=Az+B \qquad (ข.58)$$

จะยังเป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งของระนาบ z ไปยังระนาบ w อยู่ การแปลงนี้เรียกว่าเป็นการแปลงเชิงเส้น (Linear transformation) เป็นของการแปลงในสามแบบข้างต้นพร้อมกัน สำหรับฟังก์ชันการแปลงผกผันก็จะเป็น

$$z=W^{-1}(w)=\frac{1}{A}w-\frac{B}{A} \qquad (ข.59)$$

การแปลงที่ทำให้รูปทรงใหม่ที่เปลี่ยนไปแต่ยังคงมีความคล้ายคลึงกับรูปเดิมอยู่ดังเช่นการแปลงแบบเชิงเส้นนี้จะเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นการแปลงเสมือน (Similarity mapping)

ข.2.7 สมการโคซี-รีมันน์

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเดียวภายใต้บริเวณ R ในระนาบ z แล้วค่าอนุพันธ์ (Derivative) ของ $f(z)$ จะนิยามได้เป็น

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (ข.60)$$

โดยจะเรียกว่าเป็นเป็นค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ ที่ตำแหน่ง z ในบางครั้งอาจจะใช้ h แทนค่า Δz ก็ได้

หากพบว่าค่าอนุพันธ์ $f'(z)$ สามารถหาได้ทุกจุดภายใต้ขอบเขต R แล้วจะเรียก $f(z)$ ว่าเป็นวิเคราะห์ (Analytic) ที่ R และจะกล่าวได้ว่าฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic function) ใน R หากฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้วค่าในย่านใกล้เคียง $\varepsilon, |z - z_0| < \varepsilon$ สามารถหาค่าอนุพันธ์ตาม $f'(z)$ ได้ทุกจุด

เงื่อนไขขั้นต้นที่จะทำให้ $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใต้บริเวณ R ได้ ค่า u และ v ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของสมการโคซี-รีมันน์ (Cauchy-Riemann equations*)[*นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน BERNHARD RIEMANN (1826-1866) และ KARL WEIERSTRASS (1815-1897) ผู้เสนอการวิเคราะห์เชิงซ้อน] กล่าวคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (ข.61)$$

เพื่อให้สมการโคซี-รีมันน์สอดคล้องในบริเวณ R จะสมมุติว่าอนุพันธ์เหล่านี้มีค่าต่อเนื่องใน R *<u>เงื่อนไขจำเป็น</u>* เพื่อที่ $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ค่าลิมิต

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y)\} - \{u(x,y) + iv(x,y)\}}{\Delta x + i\Delta y}$$

ต้องหาค่าได้และเป็นอิสระจากทิศทางการเข้าใกล้ศูนย์ของ Δz (หรือ Δx และ Δy) เมื่อทำการพิจารณาการเข้าใกล้ทั้งในสองทิศทางจะแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณี 1 : $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ ในกรณีนี้ค่าลิมิตจะกลายเป็น

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\left[\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\right]\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

นั่นคือสามารถหาค่าอนุพันธ์ย่อยได้

กรณี 2 : $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ ในกรณีนี้ค่าลิมิตจะกลายเป็น

$$\lim_{\Delta y \to 0}\left\{\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}\right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

ขณะนี้ $f(z)$ จะไม่สามารถเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ถ้าลิมิตทั้งสองค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นเงื่อนไขจำเป็นที่ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้คือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

สมการโคซี-รีมันน์ จะทำให้ค่าอนุพันธ์เป็นค่าต่อเนื่องในบริเวณ R และเป็นเงื่อนไขให้ $f(z)$ นั้นเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ R ด้วยเช่นกัน ส่วนฟังก์ชัน $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ นั้นบางครั้งเรียกว่าเป็นฟังก์ชันสังยุค (Conjugate function) ซึ่งหากทราบค่าตัวใดตัวหนึ่งแล้วก็จะสามารถหาค่าอีกตัวหนึ่งได้ ตามความสัมพันธ์ของสมการโคซี-รีมันน์

ข.2.8 ฟังก์ชันฮาร์มอนิก

หากว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสมการโคซี-รีมันน์มีความสอดคล้องกันในบริเวณ R ด้วยแล้ว ค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ u และ v เทียบกับ x และ y จะสามารถหาค่าได้และมีค่าต่อเนื่อง โดยอาศัยความสัมพันธ์ของสมการโคซี-รีมันน์จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (ข.62)$$

ตามเงื่อนไขนี้ กล่าวได้ว่าค่าทั้งในส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันวิเคราะห์มีความสัมพันธ์เป็นไปตามสมการลาปลาซ (Laplace's equation*)[*PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749-1827) นักคณิตศาสตร์ผู้มีชื่อเสียงชาวฝรั่งเศส ผู้คิดค้นพื้นฐานของทฤษฎีศักย์ (Potential theory)] คือ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \text{ หรือ } \nabla^2\psi \quad \text{เมื่อ } \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{ข.63}$$

การกระทำโดย ∇^2 มักเรียกว่า "ลาปลาเซียน (Laplacian)" ฟังก์ชัน $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ที่เป็นไปตามสมการลาปลาซภายใต้บริเวณ R เรียกว่าเป็น "ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic functions)" หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าเป็นฮาร์มอนิกใน R

ถ้าให้ $\Delta z = dz$ เป็นค่าความแตกต่างที่เพิ่มขึ้นจาก z จะพบว่า

$$\Delta w = f(z+\Delta z)-f(z) \tag{ข.64}$$

เรียกว่าเป็นส่วนที่เพิ่มขึ้นใน $w=f(z)$ ถ้าหากว่าฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นค่าต่อเนื่องรวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งหาค่าได้และมีความต่อเนื่องข้างในบริเวณ R แล้วจะได้

$$\Delta w = f'(z)\Delta z+\varepsilon\Delta z = f'(z)dz+\varepsilon dz \tag{ข.65}$$

เมื่อ $\varepsilon \to 0$ ในขณะที่ $\Delta z \to 0$ จะทำให้ได้ว่า

$$\Delta w = f'(z)dz \tag{ข.66}$$

เรียกว่าเป็นค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของ w หรือ $f(z)$ ทั้งนี้จากนิยามในสมการที่ ข.62 และสมการที่ ข.66 สามารถกล่าวได้ว่า

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{ข.67}$$

พิจารณาได้ว่า d/dz เป็นการกระทำต่อ $w=f(z)$ เพื่อให้ได้ความสัมพันธ์เป็น $dw/dz=f'(z)$

หากค่าฟังก์ชัน $f(z)$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใต้บริเวณที่มีค่าของจุด z_0 อยู่ และหากพบว่าค่าที่จุดนี้มีค่าเป็นศูนย์ $f(z_0)=g(z_0)=0$ แต่ค่าอนุพันธ์ $g'(z_0)\neq 0$ สามารถจะใช้หลักเกณฑ์โลปิตาล (L'Hospital's rule**)[**GUILLAUME FRANCOIS ANTOINE L'HOSPITAL (1661-1704) ลูกศิษย์ของ Johann Bernoulli] ในการหาค่าลิมิตได้โดย

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \tag{ข.68}$$

ในกรณีที่ $f'(z_0)=g'(z_0)=0$ หลักเกณฑ์โลปิตาลยังสามารถที่จะใช้อีกได้เช่นกัน โดยการหาค่าอนุพันธ์อันดับต่อไป

ข.2.9 คุณสมบัติตั้งฉาก

หากฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์แล้วค่าตำแหน่งใด ๆ ในระนาบ w มีค่าเป็น

$$u(x,y)=\alpha, \qquad v(x,y)=\beta \tag{ข.69}$$

เมื่อทั้ง α และ β มีค่าคงที่ จะพบว่าค่าทั้งสองเป็นค่าที่ตั้งฉาก (Orthogonal) กันหรือเป็นค่าที่ตั้งฉากกันที่จุดตัดเดียวกัน (ดังที่แสดงในรูปที่ ข.10) ถึงแม้จะใช้การแปลงจากระนาบ z ไปยังระนาบ w แล้วค่าของตัวแปรก็ยังคงเป็นค่าที่ตั้งฉากกันที่จุดนั้นอยู่เสมอ พิสูจน์คุณสมบัติตั้งฉากนี้โดยพิจารณาสมาชิกสองเส้นใด ๆ ตามลำดับ กำหนดให้ $u(x,y)=\alpha_1$ และ $v(x,y)=\beta_1$ เมื่อทั้ง α_1 และ β_1 มีค่าคงที่

ทำการหาค่าอนุพันธ์ของ $u(x,y)=\alpha_1$ เทียบกับ z จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

พบว่าความชันของ $u(x,y)=\alpha_1$ คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial y}$$

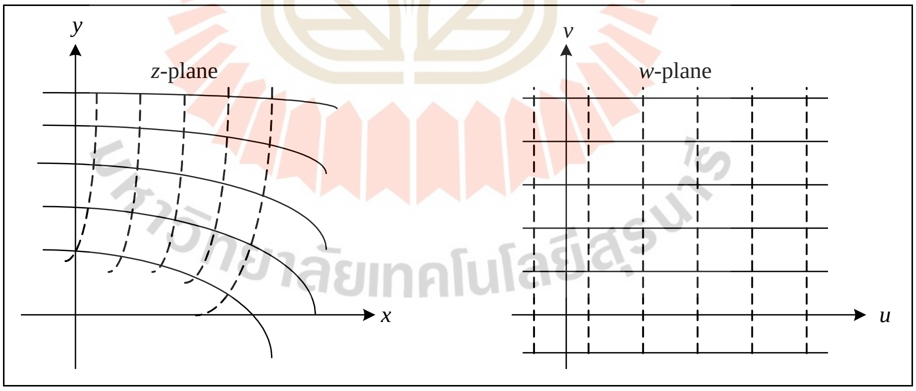
ในทำนองเดียวกัน ความชันของ $v(x,y) = \beta_1$ คือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial v}{\partial y}$$

หาค่าผลคูณของความชันทั้งสองเส้น โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังสมการโคซี-รีมันน์จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

เนื่องจากค่าผลคูณของความชันของเส้นสองเส้นที่ตัดกันมีค่าเป็น -1 จะหมายถึงว่าเส้นสองเส้นนั้นตั้งฉากกัน



รูปที่ ข.10 คุณสมบัติตั้งฉาก

4.3 วิธีดำเนินการวิจัย

4.3.1 การแปลงหรือการส่ง

จากกลุ่มเซตของสมการ

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \qquad (ข.70)$$

ตามนิยามโดยทั่วไปถือว่าเป็นการแปลงหรือการส่ง (Transformation or mapping) ที่เกิดขึ้นระหว่างจุดบนระนาบ uv และระนาบ xy สมการที่ ข.70 นี้เรียกว่า “สมการการแปลง (transformation equation)” หากการแปลงโดยจุด ๆ จุดหนึ่งในระนาบ uv เป็นจุด ๆ เดียวในระนาบ xy และยังกระทำได้ในทางกลับกันจะเรียกว่าเป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งดังที่ได้กล่าวมาแล้ว นั่นคือเซตของจุดในระนาบ xy จะถูกส่ง (Mapped) ไปเป็นเซตของจุดในระนาบ uv และทำในทางตรงกันข้ามได้ จุดที่เกิดขึ้นระหว่างระนาบทั้งสองเรียกได้ว่าเป็นภาพ (Images) ของกันและกัน

ภายใต้การแปลงของบริเวณปิด R ของระนาบ xy ไปเป็นบริเวณปิด R' ในระนาบ uv หากให้ ΔA_{xy} และ ΔA_{uv} แทนพื้นที่ของบริเวณทั้งสองโดยที่ u และ v มีค่าต่อเนื่องและหาค่าอนุพันธ์ได้แล้ว สามารถแสดงได้ว่า

$$\lim \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| \qquad (ข.71)$$

ค่า lim เป็นค่าลิมิตของ ΔA_{xy} (หรือ ΔA_{uv}) หากเขียนในรูปของดิเทอร์มิแนนท์จะเป็น

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (ข.72)$$

เรียกว่าจาโคเบียนของการแปลง (Jacobian of the transformation*)[*ชื่อท้ายของนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851) ศึกษาทางด้านอนุพันธ์เชิงย่อย และทางด้านกลศาสตร์] ของเซตในสมการที่ ข.70

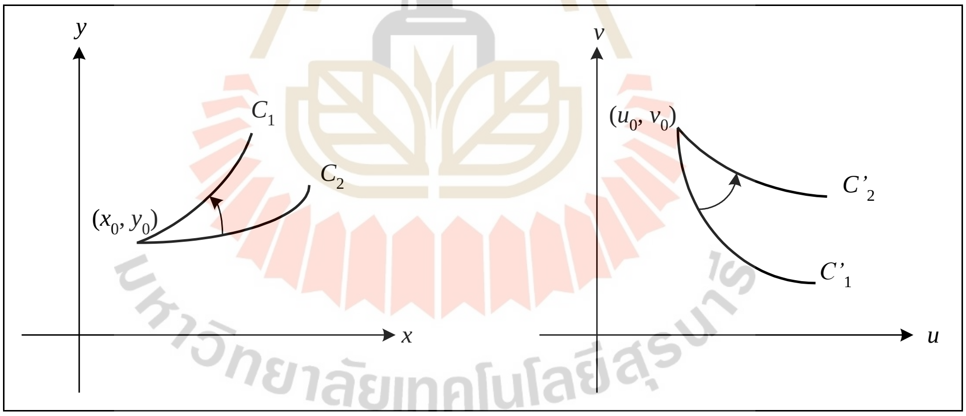
การหาค่า x และ y ในรูปของ u และ v โดยการแปลงเป็น $x = x(u, v)$ และ $y = y(u, v)$ เรียกว่าเป็นการแปลงผกผัน (Inverse transformation) ของค่าตามความสัมพันธ์ในสมการที่ ข.70 หาก x และ y เป็นค่าเดียว (Single-value) สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้และมีความต่อเนื่องแล้ว พบว่าค่าจาโคเบียนของการแปลง $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ จะเป็นส่วนกลับของ $\partial(u,v)/\partial(x,y)$ นอกจากนี้ถ้า u และ v มีฟังก์ชันต่อเนื่องและหาค่าอนุพันธ์ $\partial(u,v)/\partial(x,y)$ ได้ในบริเวณ R แล้วการแปลงตามสมการที่ ข.70 จะเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

หาก u และ v เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันวิเคราะห์ตัวแปรเชิงซ้อน $z = x + iy$ โดยที่ $w = u + iv = f(z) = f(x+iy)$ ในกรณีนี้จาโคเบียนของการแปลงจะมีค่าเป็น

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,v)} = |f'(z)|^2 \qquad (ข.73)$$

การแปลงในบริเวณนี้จะเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งได้ก็ต่อเมื่อ $f'(z) \neq 0$ หากมีจุดที่มีค่าอนุพันธ์ $f'(z) = 0$ จะเรียกจุดนี้ว่า "จุดวิกฤติ (Critical point)"

สำหรับการแปลงตามสมการที่ ข.70 จุด (x_0, y_0) ของระนาบ xy ถูกแปลงไปยังจุด (u_0, v_0) ของระนาบ uv (ดังรูปที่ ข.11) หากส่วนโค้ง C_1 และ C_2 ตัดกันที่จุด (x_0, y_0) ถูกแปลงไปเป็นโค้ง C_1' และ C_2' ที่มีการตัดกันที่จุด (u_0, v_0) ถ้าการแปลงนี้มีค่ามุมที่จุด (x_0, y_0) ระหว่าง C_1 และ C_2 เท่ากับค่ามุมที่จุด (u_0, v_0) ระหว่างโค้ง C_1' และ C_2' ทั้งขนาดและทิศทาง การแปลงนี้จะเรียกว่า "การส่งคงแบบ (Conformal)" ที่จุด (x_0, y_0) ส่วนการส่งที่ค่ามุมเท่ากันแต่ไม่จำเป็นต้องมีทิศทางเหมือนกันจะเรียกว่า มีด้านเท่ากัน (Isogonal)



รูปที่ ข.11 การส่งคงแบบ

ทั้งหมดนี้จะเป็นไปตามทฤษฎีบทมูลฐาน คือ

ทฤษฎีบท ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $f'(z) \neq 0$ ในบริเวณ R แล้วการแปลง $w = f(z)$ จะเป็นการส่งคงแบบที่ทุกจุดของ R

หากในการแปลงจาก $w = f(z)$ ของจุดในระนาบ w ไปยังจุดใหม่ที่ $z = f(w)$ นั้นมีค่าเป็นค่าเดิมจะเรียกจุดนี้ว่าเป็นจุดตรึง (Fixed points) หรือจุดยืนยง (Invariant points)

การแปลงโดยทั่วไปจะสามารถสรุปรูปแบบของการแปลงได้อย่างคร่าว ๆ โดยถ้าให้ α, β เป็นค่าจำนวนเชิงซ้อน และ a, θ_0 เป็นค่าจำนวนจริงคงที่ จะสามารถสรุปได้เป็น

1. การเลื่อนขนาน (Translation) $w = z + \beta$
2. การหมุน (Rotation) $w = e^{i\theta_0} z$
3. การขยาย (Stretching) $w = az$
4. การผกผัน (Inversion) $w = 1/z$

นอกจากการแปลงแบบเชิงเส้นดังที่ได้กล่าวมาก่อนนี้แล้วนั้น การแปลงอีกอันหนึ่งคือ

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad \text{(ข.74)}$$

โดยที่ α, β, δ และ γ เป็นค่าจำนวนเชิงซ้อน เรียกการแปลงนี้ว่าเป็นการแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformation) หรือการแปลงเชิงเศษส่วน (Fractional transformation) การแปลงแบบนี้สามารถที่จะพิจารณาได้ว่าเป็นการแปลงร่วมกันทั้ง 4 แบบ ตามที่ได้แสดงไว้ข้างต้น

ข.3.2 การประยุกต์ใช้ทางฟิสิกส์ของการส่งคงแบบ

ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ โดยมากแล้วเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์จะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) และยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่เรียกว่า “เงื่อนไขขอบ (Boundary conditions)” การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เป็นไปตามเงื่อนไขที่ขอบจะเรียกว่า “ข้อปัญหาค่าขอบ (Boundary-value-problem)”

ฟังก์ชันที่เป็นไปตามสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(ข.75)}$$

ภายใต้บริเวณ R จะเรียกว่าเป็น “ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic)” ใน R นอกจากนี้หาก $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน R แล้ว ค่า u และ v จะเป็นค่าฮาร์มอนิกใน R ด้วยเช่นกัน ค่าฟังก์ชัน u และ v เรียกว่าเป็น “ฟังก์ชันสังยุค (Conjugate function)” หากทราบค่าของตัวใดตัวหนึ่งก็จะสามารถหาค่าของอีกตัวได้เช่นกัน โดยพิสูจน์ว่า

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=|f'(z)|\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)$$

โดยที่ $w=f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และ $f'(z)\neq 0$ โดยฟังก์ชัน $\Phi(x,y)$ แปลงไปยังฟังก์ชัน $\Phi[u(x,y),v(x,y)]$ เมื่อทำการหาอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

ทำการหาอนุพันธ์อีกครั้งหนึ่งจะได้

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

นำมาบวกกัน จะได้

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial v}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$

เพราะว่า u และ v เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

โดยใช้สมการโคซี-รีมันน์

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

พบว่า

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=\left|f'(z)\right|^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

ดังนั้นผลบวกข้างต้นจะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=\left|f'(z)\right|^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}\right)$$

เพราะว่า $\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y^2=0$ และ $f'(z)\neq 0$ ดังนั้นสามารถแสดงได้ว่า $\partial^2\Phi/\partial u^2+\partial^2\Phi/\partial v^2=0$ พิสูจน์ได้ว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิก $\Phi(x,y)$ ยังคงเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกภายใต้การแปลง $w=f(z)$ เมื่อ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และ $f'(z)\neq 0$

ปัญหาของค่าขอบสำหรับบริเวณ R ที่มีส่วนโค้ง C ปิดล้อมนั้น ชนิดของปัญหาค่าขอบที่มีความสำคัญสองชนิดได้แก่

1. **ข้อปัญหาของดิริชเลต์** (Dirichlet's problem*)[*PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHILET (1805-1859) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน] เป็นการหาค่าฟังก์ชัน Φ ที่เป็นไปตามสมการลาปลาซใน R และทราบค่าที่ขอบ C

2. **ข้อปัญหาของนอยมันน์** (Neumann's problem*)[*CARL NEUMENN (1832-1925) นักคณิตศาสตร์และนักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน] เป็นการหาค่าฟังก์ชัน Φ ที่เป็นไปตามสมการลาปลาซใน R และทราบค่าอนุพันธ์แนวฉาก (normal derivative), $\partial\Phi/\partial n$ บนขอบ C

ข้อปัญหาของนอยมันน์สามารถเขียนอยู่ในรูปข้อปัญหาของดิริชเลต์ได้ กล่าวคือ หากสามารถหาค่าคำตอบข้อปัญหาของดิริชเลต์ได้แล้วจะสามารถหาค่าข้อปัญหาของนอยมันน์ได้เช่นเดียวกัน (อย่างน้อยในทางทฤษฎี) ทั้งข้อปัญหาของดิริชเลต์และข้อปัญหาของนอยมันน์สามารถที่จะหาคำตอบสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว R โดยอาศัยการแปลงหรือการส่งคงแบบ แนวคิดพื้นฐานในการหาคำตอบจะดำเนินการดังนี้

(a) ใช้ฟังก์ชันการส่งในการแปลงปัญหาค่าขอบสำหรับบริเวณ R ไปยังบริเวณที่สมนัยกันสำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยหรือระนาบ

(b) หาคำตอบสำหรับปัญหาในรูปทรงใหม่

(c) ใช้ค่าคำตอบจาก (b) โดยใช้ฟังก์ชันการส่งผกผัน

ทฤษฎีที่สำคัญสำหรับที่จะใช้ในขณะนี้ได้แก่

ทฤษฎีบท 1 หาก $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ R ของระนาบ z แล้วจะมีฟังก์ชันผกผัน $z = g(w)$ เป็นค่าเพียงอย่างเดียว (Exist และ Unique) ใน R โดยที่ $f'(z) \neq 0$ ใน R

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $\Phi(x, y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกใน R และถูกแปลงไปสู่ R' ของระนาบ w โดยอาศัยฟังก์ชันการส่ง $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ $f'(z) \neq 0$ นั้นคือ $x(u,v), y(u,v)$ แล้ว $\Phi(x, y) = \Phi[x(u,v), y(u,v)] \neq \Psi(u,v)$ จะเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกใน R' หรือกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า ค่าฟังก์ชันฮาร์มอนิกที่ถูกแปลงยังคงเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกภายใต้การแปลงแล้ว $w = f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $\Phi = a$ (ค่าคงที่ค่าหนึ่ง) บนขอบหรือเส้นของขอบ C ของบริเวณในระนาบ z แล้วจะได้ $\Psi = a$ ที่อยู่บน C' ในระนาบ w ในทำนองเดียวกันนี้ถ้าค่า $\partial\Phi/\partial n = 0$ บน C แล้วค่าอนุพันธ์แนวฉากของ Ψ ก็จะมีค่าเป็นศูนย์บน C'

ข.3.3 การประยุกต์ในปัญหาการไหลของของไหล

บ่อยครั้งที่มีการใช้กรรมวิธีของตัวแปรเชิงซ้อนเพื่อหาค่าคำตอบของปัญหาการไหลทั้งในทางด้านกลศาสตร์ของไหล, กลศาสตร์ไฮโดรลิค หรือทางอากาศพลศาสตร์ โดยอาศัยสมมุติฐานเบื้องต้นคือ

1. **เป็นการไหลในสองมิติ** พิจารณาว่าค่าของตัวแปรไม่ขึ้นกับแกนการไหลหรือเป็นค่าคงที่ตลอดระนาบของแกนนี้ เช่น การไหลผ่านทรงกระบอกที่มีความยาวมากจนสามารถตัดผลกระทบที่เกิดขึ้นกับแกนในทิศทางของความยาวนี้ออกไปได้

2. **การไหลเป็นแบบคงตัว** ค่าคุณสมบัติหรือค่าตัวแปรนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่ง (x, y) เท่านั้นโดยที่ไม่ขึ้นกับมิติของเวลา

3. **ความเร็วในรูปอนุพันธ์ของศักย์** หากเราให้ V_x และ V_y แทนค่าความเร็ว ณ ตำแหน่ง (x, y) ในทิศทางทั้งสอง จะมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชัน Φ ที่เรียกว่า "ศักย์ความเร็ว (Velocity potential)" กล่าวคือ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{ข.76}$$

จากสมมติฐานนี้ถ้า C เป็นเส้นโค้งปิดในระนาบ z และ V_t เป็นค่าความเร็วในทิศทางเชิงเส้นสัมผัส (Tangential) บน C แล้ว

$$\oint_C V_t ds = \oint_C V_x dx + V_y dy = 0 \tag{ข.77}$$

ค่าอินทิเกรตในสมการที่ ข.77 เรียกว่า "การหมุนวน (Circulation)" ของของไหลที่เกิดขึ้นบน C หากค่าการหมุนวนนี้มีค่าเป็นศูนย์จะเรียกว่า "ไม่หมุนวน (Irrotational)" หรือการหมุนวนอิสระ (Circulation free)

4. **การไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้** ค่าความหนาแน่นหรือมวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของของไหลมีค่าคงที่ ถ้า V_n เป็นค่าความเร็วในทิศทางตั้งฉากบน C แล้วสามารถสรุปได้ว่า

$$\oint_C V_n ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0 \tag{ข.78}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \tag{ข.79}$$

สมการทั้ง 2 นั้นสมมูลกันที่เรียกว่า "สมการความต่อเนื่อง (Equation of continuity)"

5. **เป็นของไหลที่ไม่มีความหนืดหรือความเสียดทานภายใน** ของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวาง หากไม่มีความหนืดแล้วแรงเนื่องจากความดันบนพื้นผิวของสิ่งกีดขวางจะตั้งฉากกับพื้นผิว ของไหลที่ไม่มีความหนืดและอัดตัวไม่ได้นิยมเรียกว่า ของไหลในอุดมคติ (Ideal fluid)

จากสมการที่ ข.76 และสมการที่ ข.79 พบว่าค่า Φ ที่เรียกว่าศักย์ความเร็วนั้นเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกที่เป็นไปตามสมการของลาปลาซ และมีฟังก์ชันฮาร์มอนิกสังยุค คือ $\Psi(x, y)$ จะแทนด้วยฟังก์ชัน

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \tag{ข.80}$$

หากทำการหาค่าอนุพันธ์ของสมการ (4.80) นี้จะได้ว่า

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_x - iV_y \tag{ข.81}$$

ดังนั้นค่าความเร็วหรือบางครั้งเรียกว่า “ความเร็วเชิงซ้อน (Complex velocity)” จะแสดงได้เป็น

$$\upsilon = V_x + iV_y = \overline{d\Omega / dz} = \overline{\Omega'(z)} \tag{ข.82}$$

โดยจะมีขนาด

$$V = |\upsilon| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \left|\overline{\Omega'(z)}\right| = |\Omega'(z)| \tag{ข.83}$$

จุดที่มีค่าความเร็วเป็นศูนย์ หรือที่ $\Omega'(z) = 0$ เรียกว่า “จุดชะงัก (Stagnation points)” ส่วนฟังก์ชัน $\Omega(z)$ นี้เรียกว่า “ศักย์เชิงซ้อน (Complex potential)”

พิจารณาพารามิเตอร์หนึ่งของเส้นโค้ง ถ้าให้

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta \tag{ข.84}$$

เมื่อ α และ β เป็นค่าคงที่ เส้นคงที่ทั้งสองนี้จะตั้งฉากกันและแต่ละเส้นจะมีชื่อเรียกเป็นเส้นศักย์เท่ากัน (equipotential lines, Φ) และเส้นกระแสไหล (streamlines, Ψ) ของการไหล ในการไหลแบบคงตัวเส้นกระแสไหลจะหมายถึง เส้นทางการไหลของของไหล

ฟังก์ชัน Φ นี้เรียกว่า "ฟังก์ชันกระแสไหล (Stream function)" และฟังก์ชัน Ψ เรียกว่า "ฟังก์ชันศักย์ความเร็ว (Velocity potential function)" หรือที่เรียกว่าศักย์ความเร็ว

จากทฤษฎีที่ปรากฏพบว่าไม่ได้มีจุดในระนาบ z ที่ทำให้ของไหลมีการเกิดขึ้นมาหรือสูญหายไป ที่จะทำให้ขัดกับสมการความต่อเนื่อง จุดที่ว่านี้คือจุดกำเนิด (Source) และแอ่ง (Sink) หากเราอินทิเกรตรอบเส้นโค้งปิด C และพบว่ามีจุดเหล่านี้ภายในจะทำให้ค่าอินทิเกรตมีค่าไม่เป็นศูนย์

ในทางทฤษฎีค่า $\Omega(z)$ สามารถนำไปพิจารณาการไหลในสองมิติได้ กรณีโดยทั่วไปของการไหล ได้แก่

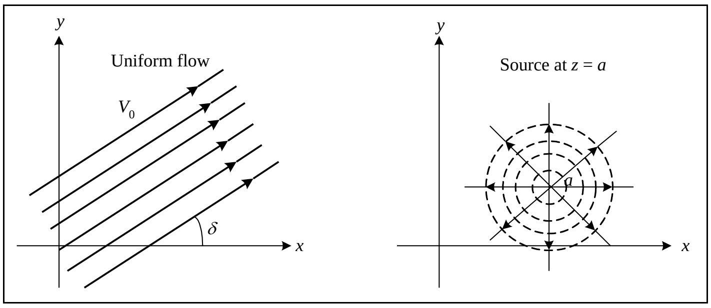
1. **การไหลเอกรูป** (Uniform flow) กรณีนี้ค่าศักย์เชิงซ้อนของการไหลของของไหลมีความเร็วคงที่ V_0 ทิศทางทำมุม δ กับแกน x ด้านบวกจะมีศักย์เชิงซ้อนเป็น (ดังรูปที่ ข.12)

$$\Omega(z) = V_0 e^{-i\delta} z \qquad \text{(ข.85)}$$

2. **แหล่งกำเนิด** (Source) ถ้ามีการไหลออกมาในอัตราคงที่ของเส้นการไหลจากแหล่งกำเนิดที่ $z = a$ (ดังรูปที่ ข.12) ค่าศักย์เชิงซ้อนจะเป็น

$$\Omega(z) = k \ln(z - a) \qquad \text{(ข.86)}$$

โดยที่ $k > 0$ เรียกว่า "ความแข็งแรง (Strength)" ของแหล่งกำเนิด เส้นกระแสไหลที่แสดงในรูปจะเป็นเส้นทึบส่วนเส้นประก็จะเป็นเส้นศักย์เท่ากัน



รูปที่ ข.12 การไหลเอกรูปและแหล่งกำเนิดที่จุด $z = a$

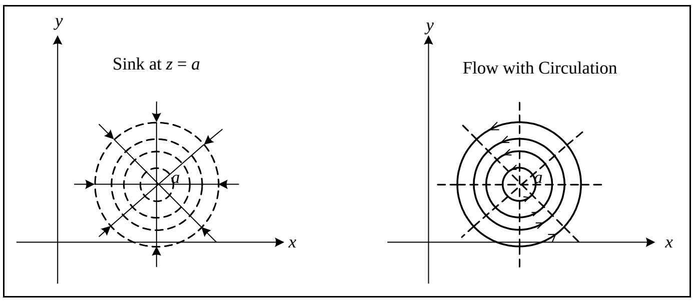
3. **แอ่ง** (Sink) กรณีของไหลจะสูญหายไปที่จุด $z = a$ (ดังรูปที่ ข.13) ค่าศักย์เชิงซ้อนจะเหมือนกันกับกรณีของแหล่งกำเนิดเพียงแต่ค่าความแข็งแรงมีค่าเป็นลบเท่านั้นเอง

$$\Omega(z) = -k\ln(z-a) \qquad \text{(ข.87)}$$

4. **การไหลโดยการหมุน** (Flow with circulation) การไหลนี้ค่าศักย์เชิงซ้อนจะเป็น

$$\Omega(z) = -ik\ln(z-a) \qquad \text{(ข.88)}$$

ดังแสดงในรูปที่ ข.13 ค่าขนาดของความเร็วของของไหลที่จุดใด ๆ จะเป็นค่าแปรผกผันกับระยะทางจากจุด $z = a$ โดยที่จุดนี้เรียกว่าเป็นการไหลวน (Vortex) และค่า k นั้นเป็นความแข็งแรงของการไหลในกรณีนี้ หากค่า k เปลี่ยนเป็นค่าลบจะทำให้การไหลเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิการอบจุด $z = a$



รูปที่ ข.13 แอ่งที่จุด $z = a$ และการไหลโดยการหมุน

5. **การวางซ้อนของการไหล** (Superposition of flows) เป็นการรวมค่าศักย์เชิงซ้อนในกรณีต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เช่น หากมีค่าแหล่งกำเนิดที่จุด $z=-a$ และค่าแอ่งที่จุด $z=a$ โดยที่ค่าความแข็งแรง ของการไหลเท่ากัน ค่าศักย์เชิงซ้อนจะเป็น

$$\Omega(z) = k\ln(z+a) - k\ln(z-a) = k\ln[(z+a)/(z-a)] \tag{ข.89}$$

กำหนดให้ $a \to 0$ และ $k \to \infty$ ในกรณีที่ $2ka = \mu$ เป็นค่าจำกัดได้ศักย์เชิงซ้อนเป็น

$$\Omega(z) = \frac{\mu}{z} \tag{ข.90}$$

นี่คือศักย์เชิงซ้อนที่กำหนดลักษณะการรัดตัว (Doublet) หรือไดโพล (Dipole) คือวิธีการจัดหมู่ของแหล่งกำเนิดและแอ่งที่มีกำลังน้ำเท่ากันถูกแยกออกจากกันโดยระยะทางเล็ก ๆ ปริมาณ μ จะเรียกว่า "ไดโพลโมเมนต์ (Dipole moment)"

4.4 ผลลัพธ์และการอภิปรายผล

กรณีศึกษาการไหลแบบเอกรูปโดยใช้การส่งคงแบบ ภายใต้แนวคิดของการใช้วิธีการส่งคงแบบในการศึกษาการไหลเอกรูปแบบคงตัวในระนาบ z เพื่อใช้กับการไหลผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงต่าง ๆ โดยอาศัยแนวทางที่ได้ศึกษามา ต่อไปจะทำการแปลงเส้นกระแสการไหลเส้นหนึ่งให้กลายไปเป็นแนวขอบของสิ่งกีดขวาง ส่วนค่าฟังก์ชันกระแสไหลเส้นอื่นจะกลายเป็นตัวแสดงเส้นกระแสไหลรอบ ๆ สิ่งกีดขวางนั้น

ข.4.1 การไหลผ่านทรงกระบอกกลม

ในส่วนนี้จะเป็นการศึกษาการไหลเอกรูปในสองมิติ ด้วยความเร็ว U ไปในทิศทางบวกของแกน x ผ่านทรงกระบอกหน้าตัดกลมรัศมี a มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดระนาบการไหล พร้อมทั้งแสดงการกระจายตัวของความดันรอบ ๆ ผิวของทรงกระบอก นอกจากนี้ยังศึกษาการไหลแบบเดียวกันนี้ผ่านแผ่นระนาบบางเอียงขนาดยาวมาก มีขนาดความกว้างเป็น $4a$ และแผ่นเรียบวางทำมุม α กับการไหล

ก่อนอื่นนั้นจะแสดงการแปลงหนึ่งที่เป็นพื้นฐานที่มีความสำคัญในเรื่องการไหลมากคือ

$$w = z + \frac{1}{z} \tag{ข.91}$$

เรียกว่า Joukowski transformation*[*NIKOLAI JEGOROVICH JOUKOWSKI (1846-1921) นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย ที่ได้ทำการศึกษาและพัฒนาวิชาการทางด้านทฤษฎีการไหลแบบ Subsonic ในทางอากาศพลศาสตร์] หรือการแปลงเยาโคสกี เป็นการแปลงโดยใช้การส่งคงแบบเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากระนาบ z ไปยังระนาบ w การแปลงนี้มีค่าที่มีนัยสำคัญที่เกี่ยวข้องกันระหว่างวงกลมและเส้นตรง เมื่อหาค่าอนุพันธ์ของสมการการแปลงเยาโคสกีจะได้

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} \tag{ข.92}$$

พบว่า จุดวิกฤติจะเกิดขึ้นที่ $z = \pm 1$ เนื่องจากค่าอนุพันธ์มีค่าเป็นศูนย์ ดังแสดงในจาการที่ ข.91 ก็คือจุด ± 2 ในระนาบ w ซึ่งเป็นจุดที่ไม่คงแบบ

โดยใช้ค่า $z = re^{i\theta}$ และค่ามุม $-\pi < \theta < \pi$ แทนลงในสมการที่ ข.91 จะได้

$$w = u + iv = re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

ทำให้ได้ว่า

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \tag{ข.93}$$

การแปลงเยาโคสกีจะแปลงวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย $|z| = 1$ ไปเป็นเส้นตรง $-2 < u \le 2, v = 0$ โดยที่ส่วนอื่นภายนอกวงกลมจะส่งไปเป็นส่วนที่เหลือของระนาบ w อย่างไรก็ตามส่วนที่อยู่ภายในวงกลมก็จะถูกแปลงไปยังส่วนที่เหลือนี้ด้วยเช่นกัน ดังนั้นเมื่อทำการแปลงทั้งระนาบ z ในระนาบ w จะมีค่าซ้อนทับกันสองค่า ดังนั้นเพื่อที่จะให้ยังเป็นการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จะกำหนดค่า z ทีละส่วน โดยในกรณีของจุดบนเส้น $-2 < u \le 2, v = 0$ จะยังไม่พิจารณา

การแสดงค่าการซ้อนทับกันจะเห็นได้ชัดเจนขึ้นเมื่อกำหนดให้

$$w = T(z) = z + 1/z \tag{ข.94}$$

ทั้งนี้จะพบว่า

$$T(z) = T(1/z) \tag{ข.95}$$

ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าทุกจุดในระนาบ w ยกเว้นที่ $w = \pm 2$ จะประกอบด้วยค่าสองค่าจากรูปเดิมในระนาบ z หากกำหนดให้ค่าทั้งสองนี้เป็น z_1 และ z_2 จะได้ว่า

$$T(z_1) = T(z_2) \tag{ข.96}$$

โดยความสัมพันธ์ของค่าทั้งสองนี้จะเป็น

$$z_1 / z_2 = 1 \tag{ข.97}$$

ผลสุดท้ายที่ได้นี้มีความสำคัญกล่าวคือเป็นการกำหนดค่า z ที่แปลงไปยังระนาบ w เนื่องจากค่า z_1 และ z_2 จะไม่ตั้งอยู่ในบริเวณเดียวกันทำให้การแปลงเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง การแปลงโดย $w = T(z)$ สำหรับวงกลม $|z| = 1$ พบว่าหาก z_1 อยู่ภายใน $|z| = 1$ แล้ว z_2 จะอยู่ภายนอก

จากค่า v ในสมการที่ ข.93 พบว่าหาก $r < 1$ (จุดในวงกลม $|z| = 1$) ครึ่งบนของวงกลมจะส่งไปเป็นครึ่งล่างของระนาบ w และแปลงผกผันได้ หาก $r > 1$ (จุดนอกวงกลม $|z| = 1$) ในส่วนครึ่งบนที่เหลือของระนาบ z จะถูกส่งไปเป็นครึ่งบนของระนาบ w และกระทำการแปลงผกผันได้ ผลทั้งหมดนี้แสดงในรูปที่ ข.14 ส่วนตัดของเส้นรอบวงจะเป็นเส้นตรงจาก B' ไป D'

เมื่อทำการแปลงผกผันจากการหาคำตอบตามสมการที่ ข.91 สำหรับค่า z อาศัยสูตรทางพีชคณิต จะได้ว่า

$$z = \tfrac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4})$$

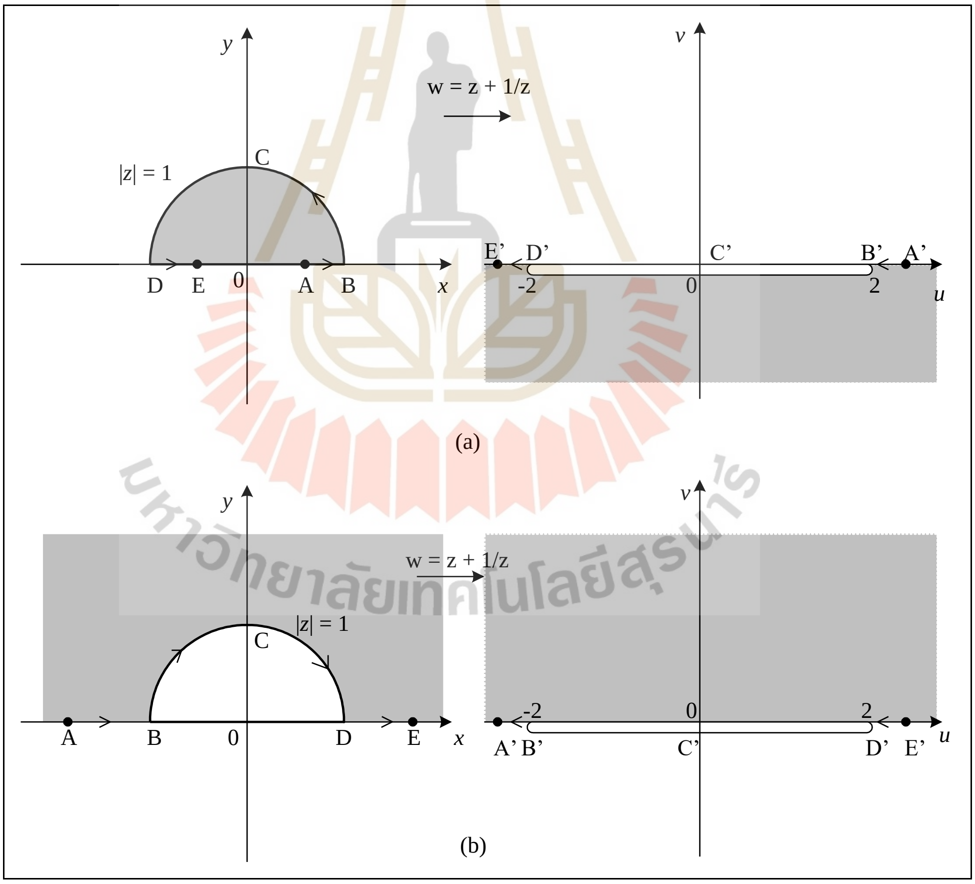
สำหรับค่า $|z| > 1$ ก็จะได้ว่า

$$\left| w + \sqrt{w^2 - 4} \right| > 2$$

ก็คือส่วนบนของระนาบ w แปลงมาเป็นภายนอกของ $|z| = 1$ ในระนาบ z

โดยแนวคิดนี้ จะหาค่าศักย์เชิงซ้อนดังที่เคยแสดงมาแล้วได้ตามสมการ

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Omega'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_x - iV_y$$



รูปที่ ข.14 การแปลงโดย $z + 1/z$

จากการไหลแบบเอกรูป $\Omega(z) = Uz(\delta = 0)$ สามารถประมาณคำตอบได้เป็น $\Omega = Aw$ เมื่อ A เป็นค่าคงที่ที่ต้องการหาค่า สำหรับการแปลงเยาโคสกีของวงกลมรัศมี a และให้เป็นไปตามความสัมพันธ์ $z_1 z_2 = 1$ จะสามารถประมาณค่าศักย์เชิงซ้อนได้ว่าเป็น

$$\Omega(z) = A\left(\frac{z}{a} + \frac{a}{z}\right) \tag{ข.98}$$

เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์จะได้

$$\frac{d\Omega}{dz} = A\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{z^2}\right) \tag{ข.99}$$

สำหรับที่ค่า z มีค่ามาก ๆ ความเร็วจะเป็น $V_x = U, V_y \approx 0$ จากสมการที่ ข.99 ทำให้ได้ค่า $A/a = U$ หรือ $A = aU$ นั้นคือค่าศักย์เชิงซ้อนของการไหลจะเป็น

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \tag{ข.100}$$

เมื่อ U และ a เป็นค่าคงที่จำนวนจริงบวก

พิจารณาการแปลงตามสมการที่ ข.100 เป็นการแปลงเส้นรอบรูปวงกลม $|z| = a$ ไปเป็นเส้นตรง $-2a < \Phi \le 2a, \Psi = 0$ ในระนาบ w สำหรับที่ค่า z มีค่าสูงมาก ๆ ค่า $\Omega(z) \approx Uz$ เป็นไปตามเงื่อนไขของการไหล เพื่อจะแสดงค่าศักย์ความเร็ว Φ และฟังก์ชันกระแสไหล Ψ จะแทนค่า $z = x + iy$ ลงในสมการที่ ข.100 พบว่า

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = U\left(x + iy + \frac{a^2}{x + iy}\right) = U\left[x + iy + \frac{a^2(x + iy)}{x^2 + y^2}\right]$$

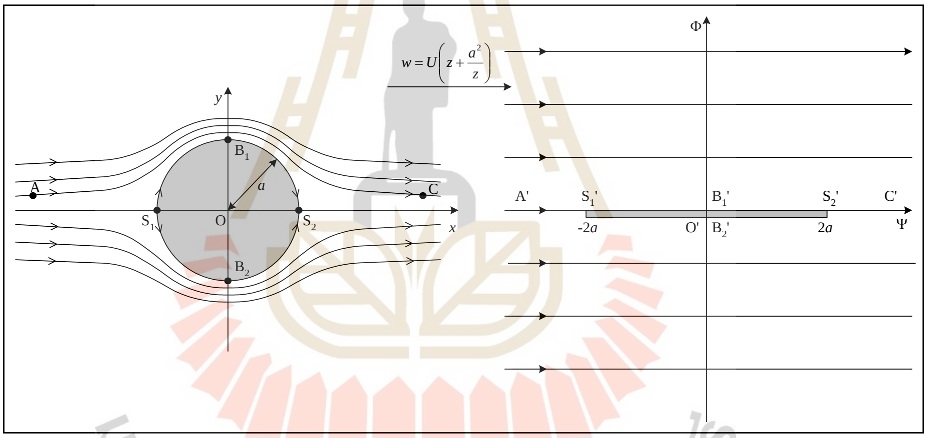
$$\Omega(z) = Ux\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) + iUy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\Phi = Ux\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right), \qquad \Psi = Uy\left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) \tag{ข.101}$$

จากสมการที่ได้ดังกล่าวนี้เส้นกระแสไหล $\Psi = 0$ จะเป็น $|x| > a, y = 0$ และ $x^2 + y^2 = a^2$ เทียบได้เป็นเส้นการไหลบนแกน x กับเส้นรอบวง $|z| = 1$ ส่วนเส้น $\Psi =$ ค่าคงที่ จะใช้อธิบายเส้นกระแสไหลที่ไหลผ่านทรงกระบอกในระนาบ z ดังนั้นเส้นกระแสไหลภายนอกวงกลม $x^2 + y^2 = a^2$ จะเป็นไปตามสมการ

$$\mathrm{Uy}\left(1-\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}\right)=\mathrm{constant} \qquad (ข.102)$$

เส้นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมนี้แสดงในรูปที่ ข.15 พิจารณาสมการที่ ข.100 ที่ $d\Omega/dz = 0$ หรือความเร็วมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $z = \pm a$ ดังนั้นจุดชะงักไหลที่เกิดขึ้นทั้งสองจุดแทนด้วย S_1 ที่จุด $z = -a$ และ S_2 ที่จุด $z = a$



รูปที่ ข.15 การไหลผ่านทรงกระบอก

หากพิจารณาโดยให้ $z = re^{i\theta}$ แทนลงไปในสมการศักย์เชิงซ้อนจะพบว่า

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = U\left(re^{i\theta} + \frac{a^2e^{-i\theta}}{r}\right) = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + iU\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

$$\Phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \qquad \Psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \qquad (ข.103)$$

สำหรับเส้นกระแสไหลที่ $\Psi =$ ค่าคงที่ $= \beta$ หรือ

$$U\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta=\beta$$

จะได้เป็นเส้นกระแสไหลผ่านทรงกระบอกกลม นอกจากนี้ที่ $\Psi = 0$ จะหมายถึงจุด $r = a$ ที่ $\theta = 0$ และ π เป็นตำแหน่งจุดชะงักไหล ส่วนเส้นศักย์เท่ากัน คือ $\Phi =$ ค่าคงที่ $= \omega$ จะได้

$$U\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta=\omega$$

เส้นศักย์เท่ากันจะมีคุณสมบัติตั้งฉากกับเส้นกระแสไหล เส้นรอบรูปวงกลม $r = a$ นั้นก็เป็นเส้นกระแสไหลเช่นเดียวกันทำให้ของไหลจะไม่ไหลผ่านเส้นกระแสไหลเข้าไปได้ จึงสามารถพิจารณาเป็นการไหลผ่านวงกลมได้

เพื่อหาค่าความเร็ว ณ จุดใด ๆ บนระนาบจะสามารถหาได้โดย

$$\Omega'(z)=U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}e^{-i2\theta}\right)=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)+i\frac{Ua^2}{r^2}\sin 2\theta$$

เมื่อค่าศักย์ความเร็ว คือ

$$\upsilon=\overline{\Omega'(z)}=U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)-i\frac{Ua^2}{r^2}\sin 2\theta \qquad (ข.104)$$

และมีขนาดเป็น

$$V=|\upsilon|=\sqrt{\left[U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\right]^2+\left[\frac{Ua^2}{r^2}\sin 2\theta\right]^2}$$

$$V = U\sqrt{1 - \frac{2a^2\cos 2\theta}{r^2} + \frac{a^4}{r^4}} \qquad (ข.105)$$

พบได้อีกว่าที่บริเวณห่างจากวงกลมมาก จากสมการที่ ข.104 จะได้ $\upsilon = U$ โดยประมาณคือมีความเร็วในทิศทางแกนบวก x เป็นค่าคงที่ U ซึ่งเป็นจริง สำหรับจุดชะงักไหล คือ จุดที่ความเร็วการไหลเป็นศูนย์จะหาได้โดย

$\Omega'(z) = 0$ จะได้ $U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = 0$ หรือที่จุด $z = a$ และ $z = -a$

เพื่อหาค่าการกระจายตัวของความดันรอบผิวของรูปทรงกระบอกนี้จะอาศัย Bernoulli's theorem*[* JACOB BERNOULLI (1654.1705) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์] โดยที่ตำแหน่ง ∞ ค่าความเร็วและความดันจะเป็น U และ p_∞ เป็นค่าคงที่ตามความสัมพันธ์ $\frac{1}{2}\rho U^2 + p_\infty$ จะได้ว่า

$$\tfrac{1}{2}\rho U^2 + p_\infty = \tfrac{1}{2}\rho V^2 + p$$

จากค่าความเร็วในสมการที่ ข.105 ที่ $r = a$ จะได้ความเร็วเป็น

$$V = U\sqrt{2 - 2\cos 2\theta}$$

ดังนั้นการกระจายตัวของความดันรอบผิวของรูปทรงกระบอกที่ค่ามุม θ ใด ๆ จะเป็น

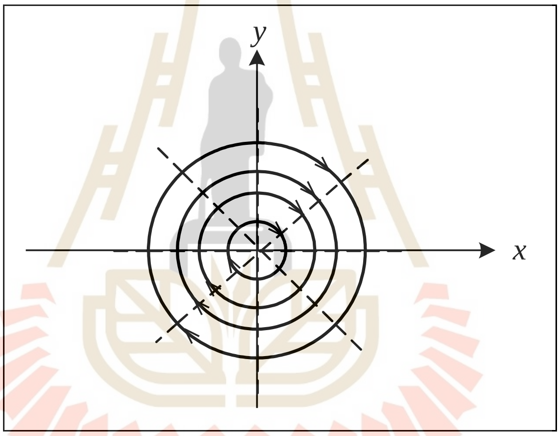
$$p = p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho U^2 - \rho V^2(1 - \cos 2\theta) \qquad (ข.106)$$

เพื่อยืนยันค่าที่ได้ว่ามีความถูกต้องจะพบว่า ค่าความดันสูงสุดจะเกิดที่จุดชะงักไหล $S_1(\theta = \pi)$ และ $S_2(\theta = 0)$ ส่วนค่าความดันต่ำสุดจะเกิดขึ้นที่จุด $B_1(\theta = \pi/2)$ และ $B_2(\theta = -\pi/2)$ การกระจายตัวของความดันนี้มีความสมมาตรกันรอบวงกลม ดังนั้นการไหลนี้จึงไม่ทำให้เกิดแรงยก (Lift) และแรงส่ง (Thrust) บนรูปทรงกระบอกกลม

พิจารณาการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีศักย์เชิงซ้อนเป็น $\Omega(z) = ik\ln z$ เมื่อ $k > 0$ ที่เป็นการไหลโดยการหมุนวน ให้ $z = re^{i\theta}$ ดังนั้น

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = ik(\ln r + i\theta) = ik\ln r - k\theta \qquad (\text{ข}.107)$$

หรือ $\Phi = -k\theta, \Psi = k\ln r$ เส้นกระแสการไหลกำหนดโดย $\Psi =$ ค่าคงที่ หรือ $r =$ ค่าคงที่ (แสดงด้วยเส้นทึบในรูปที่ ข.16) จะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z = 0$ ส่วนเส้นศักย์เท่ากันนั้นกำหนดโดย $\Phi =$ ค่าคงที่ แสดงด้วยเส้นประในรูปที่ ข.16



รูปที่ ข.16 การไหลหมุนวนจุดศูนย์กลางที่ $z = 0$

เนื่องจาก

$$\Omega'(z) = \frac{ik}{z} = \frac{ik}{r}e^{-i\theta} = \frac{k\sin\theta}{r} + \frac{ik\cos\theta}{r} \qquad (\text{ข}.108)$$

ดังนั้นความเร็วเชิงซ้อนกำหนดโดย

$$\upsilon = \overline{\Omega'(z)} = \frac{ik}{z} = \frac{ik}{r}e^{-i\theta} = \frac{k\sin\theta}{r} + \frac{ik\cos\theta}{r} \qquad (\text{ข}.109)$$

จะเห็นได้ว่าทิศทางการเคลื่อนที่ของของไหลมีทิศตามเข็มนาฬิกา (ดังรูปที่ ข.16) ความเร็วนั้นกำหนดโดย $V = |\upsilon| = k/r$ เพราะฉะนั้นศักย์เชิงซ้อนที่จะใช้อธิบายการไหลของของไหลที่หมุนรอบจุด $z = 0$

ถ้า C เป็นเส้นโค้งที่ปิดล้อม $z = 0$ แล้วอินทิกรัลของการหมุนวนกำหนดโดย

$$\gamma = \oint_C V_t ds = \oint_C V_x dx + V_y dy = \oint_C -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = \oint_C -d\Phi = \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k \qquad (ข.110)$$

ในพจน์ของการหมุนวนศักย์เชิงซ้อนจะสามารถเขียนได้ในรูป $\Omega(z) = \dfrac{i\gamma}{2\pi} \ln z$

สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลที่มีศักย์เชิงซ้อนเป็น

$$\Omega(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z \qquad (ข.111)$$

ศักย์เชิงซ้อนนี้จะมีผลของการหมุนวนบนการไหลผ่านรูปวงกลม ถ้าให้ $z = re^{i\theta}$ จะได้ว่า

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} + i\left\{U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\ln r\right\} \qquad (ข.112)$$

ดังนั้นเส้นศักย์เท่ากันและเส้นการไหล จะเป็น

$$\Phi = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi}, \qquad \Psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta + \frac{\gamma}{2\pi}\ln r \qquad (ข.113)$$

ในกรณีทั่วไปจะมีจุดชะงักไหลสองจุดเกิดขึ้นเมื่อ $\Omega'(z) = 0$ นั้นคือ

$$U\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{i\gamma}{2\pi z}=0 \text{ หรือ } \quad z=\frac{-i\gamma}{4\pi U}\pm\sqrt{a^2-\frac{\gamma^2}{16\pi^2U^2}} \tag{ข.114}$$

ในกรณีของ $\gamma = 4\pi aU$ จะพบว่ามีจุดหยุดนิ่งเพียงจุดเดียว รูปแบบของการไหลจะเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับขนาดของ γ ในการไหลที่สมนัยกับ $\gamma < 4\pi aU$ จะมีจุดหยุดนิ่งอยู่สองตำแหน่งบนทรงกระบอกกลม ในกรณี $\gamma > 4\pi aU$ มีจุดหยุดนิ่งเพียงจุดเดียวในกระแสไหล

สำหรับเส้นการไหล $\Psi = 0$ ซึ่งกำหนดให้เป็นเส้นรอบวงของทรงกระบอกรัศมี $r = a$ เมื่อค่าการหมุนวน $\gamma = 2\pi k$ เพิ่มขึ้น ความเร็วจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้านบนของทรงกระบอกและความเร็วจะมีค่าลดลงทางด้านล่าง ค่าความเร็วในแต่ละแนวจะเป็นดังนี้

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=U\cos\theta\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right),\ v_\theta=-\frac{\partial\Psi}{\partial r}=-U\sin\theta\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{k}{r} \tag{ข.115}$$

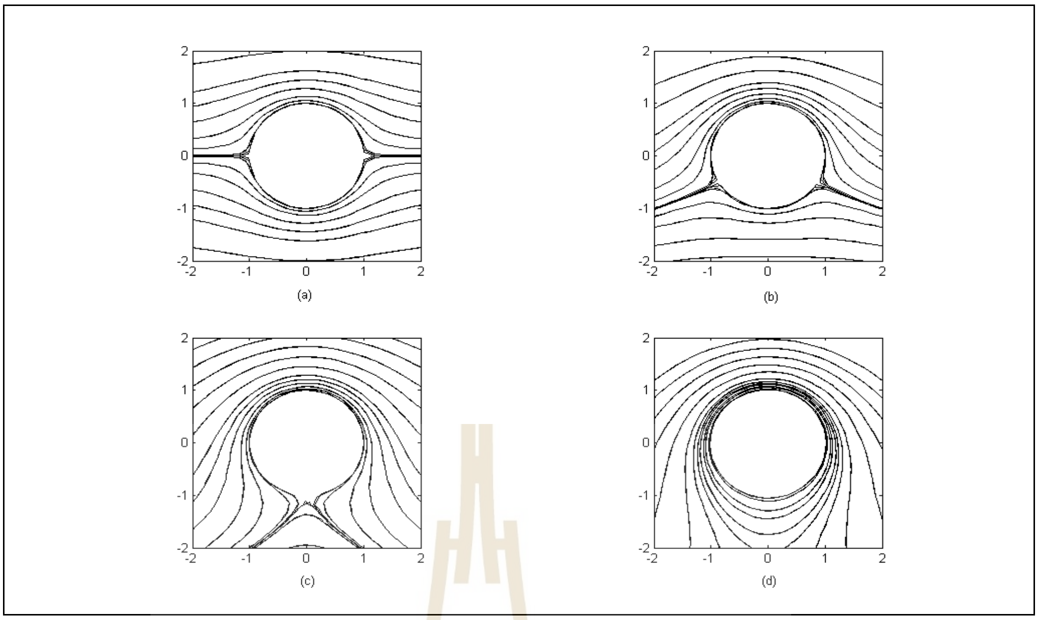
ที่ความเร็วที่ผิวนั้นมีเพียงความเร็วในแนวสัมผัสเท่านั้น ดังนั้นจะพบว่า

$$v_r(r=a)=0 \qquad v_\theta(r=a)=-2U\sin\theta-\frac{k}{a} \tag{ข.116}$$

จุดชะงักไหลจะปรากฏบนผิวทรงกระบอกที่มุม θ_S เมื่อ $v_\theta = 0$ จากสมการด้านบนจะได้ว่า

$$\sin\theta_S=-\frac{k}{2Ua} \tag{ข.117}$$

สำหรับการแสดงเส้นการไหล รูปที่ ข.17a สำหรับค่า $k = 0$, $\theta_S = 0°$ และ $180°$ เป็นการไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่ไม่มีการหมุนวน รูปที่ ข.17b สำหรับค่า $k/Ua = 0, \theta_S = -30°$ และ $210°$ และในรูปที่ ข.17c เป็นกรณีจำกัดที่จุดหยุดนิ่งสองจุดมาพบกันที่ด้านล่าง โดยค่า $k = 2$, $\theta_S = -90°$ สำหรับค่า $k > 2Ua$ จะได้ค่าจุดหยุดนิ่งเพียงจุดเดียวและไม่ได้อยู่บนทรงกระบอกตามรูปที่ ข.17d



รูปที่ ข.17 การไหลผ่านทรงกระบอกกลมด้วยการหมุนวนที่ค่า $k/(Ua)$ เป็น (a) 0, (b) 1.0, (c) 2.0 และ (d) 4.0

ข.4.2 ทฤษฎีแรงยกของคุตตา-เยาโคสกี

สำหรับการไหลผ่านทรงกระบอก (ดังรูปที่ ข.17) นั้นพบว่า มีแรงดันดันขึ้นในแนวดิ่ง โดยจะแปรผันไปตามความเร็วการไหลและความแข็งแรงของการหมุนวนจะเห็นได้จากเส้นการไหลว่าความเร็วด้านบนของทรงกระบอกมีความเร็วสูงขึ้นและจะทำให้ความดันต่ำตามสมการเบอร์นูลีย์

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_S - \frac{1}{2}\rho\left(2U\sin\theta + \frac{k}{a}\right)^2 \qquad (ข.118)$$

หาก b เป็นความยาวของทรงกระบอกที่ลึกลงไป แรงลาก (Drag force, D) จะหาได้โดยการอินทิเกรตความดันที่อยู่ในแนวระนาบตลอดพื้นผิว

$$D = -\int_0^{2\pi} \left(p_S - p_\infty\right)\cos\theta\, ba\, d\theta \qquad (ข.119)$$

เมื่อแทนค่าความดันลงไปในสมการจะพบว่าค่าอินทิกรัลของ $\cos\theta$ คูณกับค่ายกกำลังของ $\sin\theta$

ตลอดรอบโคจร 2π จะเป็นศูนย์ เป็นผลให้

$$D = 0 \tag{ข.120}$$

กรณีนี้เป็นไปดังคำกล่าวของ d'Alembert*[* JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ผู้เป็นที่รู้จักในงานทางด้านกลศาสตร์] คือ "ภายใต้การไหลที่ไม่มีความหนืด แรงลากของวัสดุรูปทรงต่าง ๆ ที่อยู่ภายในการไหลเอกรูปจะมีค่าเป็นศูนย์"

ส่วนแรงยก (Lift force, L) ในทิศทางตั้งฉากกับการไหลโดยให้ทิศทางขึ้นเป็นบวก จะเป็นผลรวมของแรงดันแนวดิ่ง

$$L = -\int_0^{2\pi} (p_S - p_\infty) \sin\theta b a d\theta \tag{ข.121}$$

โดยที่ค่าอินทิกรัลตลอด 2π ของเลขยกกำลังคี่ของ $\sin\theta$ จะมีค่าเป็นศูนย์ จึงเหลือเพียงเทอมการไหลวนเท่านั้นแรงยกที่ได้จะมีค่าเป็น

$$L = \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{4k}{aU} ba \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \rho U (2\pi k) b \tag{ข.122}$$

หรือ

$$\frac{L}{b} = \rho U \gamma$$

เห็นได้ว่าค่าแรงยกไม่ปรากฏค่ารัศมีของทรงกระบอก แต่พบว่าค่าการหมุนวน γ นั้นขึ้นกับขนาดของวัตถุและตำแหน่งพิกัด สมการที่ ข.122 นี้แสดงโดย W. M. Kutta*[* WILHELM KUTTA (1867-1944) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน] ในปี 1902 และถูกนำเสนอโดย N. Joukowski ในปี 1906 กล่าวว่า "ภายใต้การไหลที่ไม่มีความหนืด ค่าแรงยกต่อหน่วยความลึกของรูปทรงกระบอกขนาดต่าง ๆ ที่ปรากฏในการไหลเอกรูปจะเท่ากับ $\rho U\gamma$ เมื่อ γ เป็นค่าการหมุนวนสุทธิที่ขึ้นกับขนาดของวัตถุ ทิศทางของแรงยกจะเป็น 90° กับทิศทางการไหลที่การหมุนตรงข้ามกับการไหลวน" คำกล่าวที่สัมพันธ์กันของทั้งคู่นี้เรียกว่าเป็นทฤษฎีแรงยกของคุตตา-เยาโคสกี (Kutta-Joukowski lift theorem) ในปัญหาการวิเคราะห์ปีกอากาศ จะแสดงค่าการหมุนวน γ ว่าเป็นฟังก์ชันของรูปทรงปีกอากาศ ตำแหน่งที่แสดงพิกัดและการไหลเอกรูปที่มุมปะทะ α

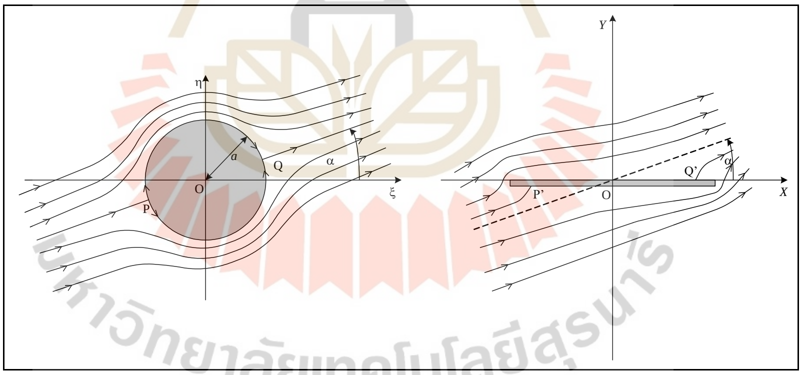
ข.4.3 การไหลผ่านแผ่นระนาบบาง

เพื่อหาการไหลผ่านแผ่นเอียง โดยการแปลงการไหลผ่านทรงกระบอกกลม (ดังรูปที่ ข.15) ที่ภาพของขอบวงกลมพบว่าส่วนตัด S_1' ถึง S_2' มีความยาวเป็น $4a$ ความกว้างมีค่าน้อยจนถือว่าเป็นศูนย์ได้ ผลที่ได้นี้จะใช้เป็นหน้าตัดของแผ่นบางยาวที่มีความกว้างเป็น $4a$ และความยาวของแผ่นตั้งฉากกับแนวการไหล

จากการแปลงเยาโคสกีในสมการที่ ข.100 และค่าศักย์เชิงซ้อนของการไหลแบบเอกรูปที่ได้แสดงค่าไว้ $(\Omega = Ue^{-i\delta}z)$ โดยจะแทนค่า $z = e^{-i\delta}\zeta$ ลงไปจะได้

$$w = U\left(e^{-i\alpha}\zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta}\right) \quad (ข.123)$$

ผลที่ได้จากสมการนี้จะแสดงถึงการไหลแบบเอกรูปความเร็ว U ในระนาบ ζ เอียงทำมุม α กับแกนจริง ไหลผ่านทรงกระบอกกลมขนาด $|\zeta| = a$ ที่แสดงในด้านซ้ายของรูปที่ ข.18 โดยที่ $\zeta = \xi + i\eta$ และจุด P กับจุด Q เป็นจุดชะงักไหล



รูปที่ ข.18 การไหลผ่านแผ่นเอียง

ภายใต้การใช้การแปลงเยาโคสกีอีกครั้งหนึ่ง

$$Z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \text{ จากการหาคำตอบทางพีชคณิตจะได้ } \zeta = \frac{Z \pm \sqrt{Z^2 - 4a^2}}{2} \quad (ข.124)$$

จะใช้คำตอบที่เป็นค่าบวก เนื่องจากว่าเป็นค่าที่ทำให้การไหลมีความสมจริง โดยที่ $Z = X + iY$ รูปทรงกระบอกขนาด $|\zeta| = a$ จะแปลงไปเป็นแผ่นบางกว้าง $4a$ ทั้งนี้ตำแหน่งของแผ่นจะเป็น $-2a < X < 2a, Y = 0$ ในระนาบ Z อย่างไรก็ตามทิศทางการไหลในระนาบ ζ ไม่เปลี่ยนแปลงและจะแปลงไปเป็นการไหลทำมุม α กับแกน X ในระนาบ Z

เมื่อแทนค่าคำตอบจากสมการที่ ข.124 ลงในสมการที่ ข.123 เพื่อหาค่าศักย์เชิงซ้อนของการไหลตามภาพด้านขวาในรูปที่ ข.18 คือ

$$w = U\left[(\cos\alpha - i\sin\alpha)\zeta + \frac{a^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{\zeta}\right]$$

$$w = U\cos\alpha\left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right) + iU\sin\alpha\left(-\zeta + \frac{a^2}{\zeta}\right)$$

$$w = UZ\cos\alpha + iU\sin\alpha\left(\frac{a^2 - \zeta^2}{\zeta}\right)$$

พิจารณาเทอมในวงเล็บจะได้ว่า

$$\frac{a^2 - \zeta^2}{\zeta} = \frac{a^2 - \left(\frac{Z+\sqrt{Z^2-4a^2}}{2}\right)^2}{\frac{Z+\sqrt{Z^2-4a^2}}{2}} = \frac{4a^2 - Z^2 - 2Z\sqrt{Z^2 - 4a^2} - Z^2 + 4a^2}{2(Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2})}$$

$$\frac{a^2 - \zeta^2}{\zeta} = \frac{-Z^2 + 4a^2 - Z\sqrt{Z^2 - 4a^2}}{Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2}} = -\frac{Z^2 - 4a^2 + Z\sqrt{Z^2 - 4a^2}}{Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2}}$$

$$\frac{a^2 - \zeta^2}{\zeta} = -\frac{\sqrt{Z^2 - 4a^2}\,(Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2})}{Z + \sqrt{Z^2 - 4a^2}} = -\sqrt{Z^2 - 4a^2}$$

จะได้สมการการแปลงเป็น

$$w = U(Z\cos\alpha - i\sin\alpha\sqrt{Z^2 - 4a^2}) \qquad (ข.125)$$

เป็นค่าศักย์เชิงซ้อนที่ต้องการนำไปแสดงค่าเส้นกระแสไหลต่อไป เมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์และให้ $dw/dz = 0$ เพื่อหาจุดชะงักไหลจะพบว่า

$$\frac{dw}{dz} = 0 = U\left(\cos\alpha - i\sin\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2Z}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}}\right)$$

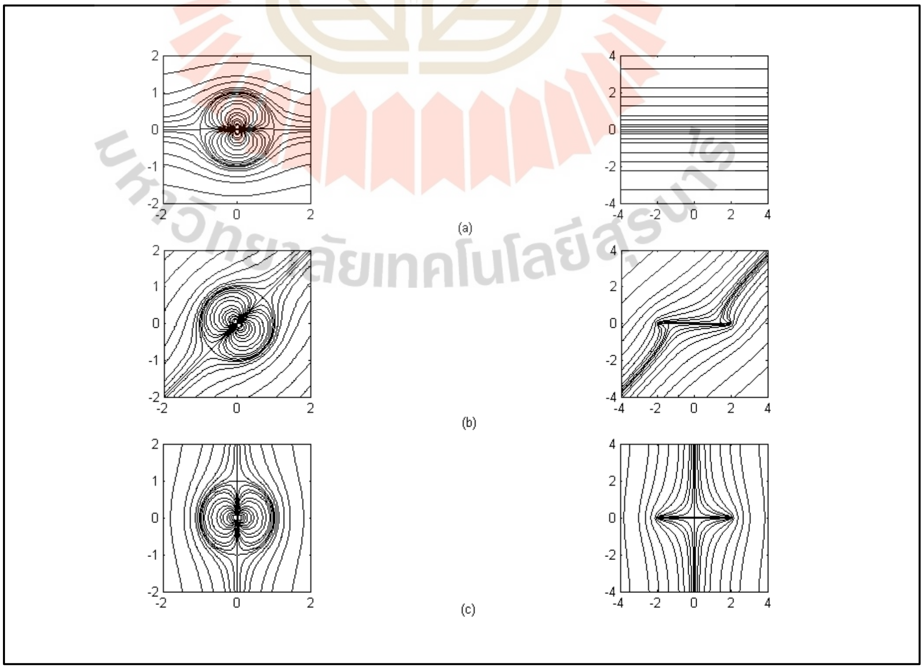
$$\cos\alpha = i\sin\alpha \frac{Z}{\sqrt{Z^2 - 4a^2}}$$

$$(Z^2 - 4a^2)\cos^2\alpha = (-1)Z^2\sin^2\alpha$$

$$Z^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 4a^2\cos^2\alpha$$

$$\therefore Z = \pm 2a\cos\alpha$$

คือที่จุด $Z = \pm 2a\cos\alpha$ เป็นจุดชะงักไหลสองจุดแสดงในรูปด้านขวาของรูปที่ ข.18 โดยที่จุด P' อยู่ด้านล่างของแผ่นและจุด Q' อยู่ด้านบนของแผ่น จุดทั้งสองย่อมเป็นจุดที่มีค่าความดันสูงที่สุด เนื่องจากจุดทั้งสองมีการแยกตัวและอยู่คนละด้านของแผ่นทำให้การไหลจะเกิดแรงกระทำทั้งสองด้านของแผ่น เป็นผลให้มีการหมุนตัวของแผ่นไปตามกระแสการไหลได้



รูปที่ ข.19 การแปลงเยาโคสกีของการไหลผ่านทรงกระบอกกลมเป็นแผ่นเรียบที่ค่ามุมปะทะเป็น

(a) 0°, (b) 45° และ (c) 90°

สำหรับเส้นกระแสไหลนั้น เมื่อได้สมการการแปลงมาแล้วจะใช้โปรแกรมในการแสดงเส้นการไหล รูปที่ ข.19 แสดงเส้นกระแสไหลผ่านทรงกระบอกกลมรัศมีหนึ่งหน่วยและแปลงไปเป็นแผ่นระนาบบางที่มุมปะทะต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ในการแสดงค่าสมการเส้นกระแสไหลที่ค่าคงที่ค่าต่าง ๆ

การสร้างความถูกต้องและสมจริงให้กับคำตอบที่ได้ซึ่งยังไม่มีความสอดคล้องกับทางฟิสิกส์ โดยเฉพาะตรงจุดปลายของแผ่นบางที่ $X = \pm 2a, Y = 0$ แนวทางในการแก้ไขเพื่อหาค่าการไหลที่มีค่าสมจริงในทุก ๆ จุดนี้ กระทำได้โดยการบวกเทอมการไหลด้วยการหมุนวน $(-ik\ln\zeta)$ เข้าไปในสมการที่ ข.123 เพื่อรวมเข้ากับการไหลผ่านทรงกระบอก หากค่าที่นำมารวมเข้านั้นเป็นค่าที่มีความเหมาะสมจะทำให้จุดชะงักไหลย้ายตำแหน่งไปอยู่ที่จุดปลายของแผ่นซึ่งจะทำให้การไหลมีความสมจริงขึ้น

ข.4.4 การไหลผ่านปีกอากาศ

พิจารณาการส่งคงแบบของเยาโคสกีอีกครั้ง

$$w = z + \frac{\lambda^2}{z} \qquad (ข.126)$$

หากวิเคราะห์การส่งของรูปทรงกระบอกกลมรัศมี a ที่ปรากฏในระนาบ z ไปยังระนาบ w จะพิจารณาได้เป็น

1. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และ $\lambda = a$ วงกลมนี้จะถูกส่งไปเป็นเส้นตรงระหว่าง -2λ กับ 2λ และอยู่บนแกนจริง

2. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $(x_c, 0)$ และ $\lambda = a - x_c$ วงกลมนี้จะถูกส่งไปเป็นแพนอากาศ (vane) ที่มีรูปทรงสมมาตรกับแกนจริง

3. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, y_c)$ และ $\lambda = \sqrt{a^2 - y_c^2}$ วงกลมนี้จะถูกส่งไปเป็นส่วนโค้ง

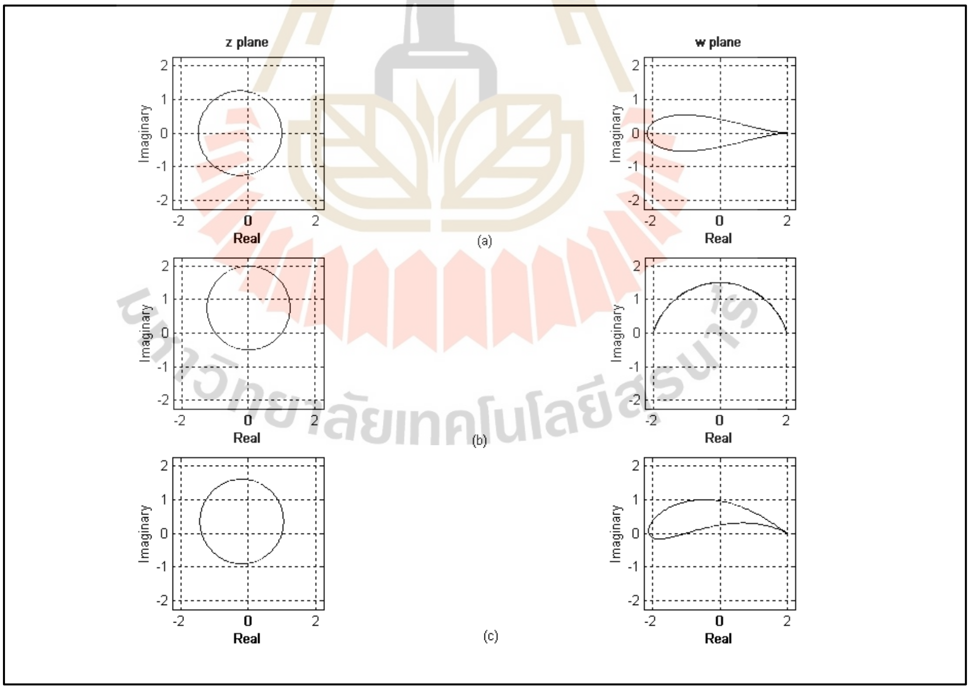
4. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (x_c, y_c) และ $\lambda = -x_c + \sqrt{a^2 - y_c^2}$ วงกลมนี้จะถูกส่งไปเป็นรูปหน้าตัดปีกอากาศ (Airfoil) ทรงไม่สมมาตร

ในกรณีแรกได้พิจารณามาแล้ว สำหรับกรณีอื่น ๆ โดยให้ C เป็นวงกลมในระนาบ z และมีเส้นรอบวงผ่านจุด $z = \lambda$ และมีจุด $z = -\lambda$ เป็นจุดข้างใน ภายใต้การแปลงดังสมการที่ ข.126 จะได้ตำแหน่งอนุพันธ์ 1 $dw/dz = 0$ ที่ $z = \pm\lambda$ ซึ่งเป็นจุดวิกฤติ พบว่ามุมที่มีจุดยอดที่ $z = \lambda$

จะเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าภายใต้การแปลง มีข้อสังเกตที่น่าสนใจในกรณีที่เส้นโค้ง C ปิดล้อมวงกลม $|z| = a$ ภายใต้การแปลงจะถูกส่งไปยังส่วนร่องจาก $w = -2\lambda$ ไปยัง $w = 2\lambda$ ดังนั้นขณะที่ C เข้าใกล้ $|z| = a$ จะได้ว่า C' เข้าใกล้เส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $w = -2\lambda$ ไปยัง $w = 2\lambda$ ทำให้ได้ปลายแหลมที่ $w = 2\lambda$ ในกรณีที่ C ไม่ได้ปิดล้อมวงกลม $|z| = a$ ทั้งหมด C' จะปิดล้อมส่วนของร่องที่สมนัยกับส่วนของวงกลม $|z| = a$ ภายใน C

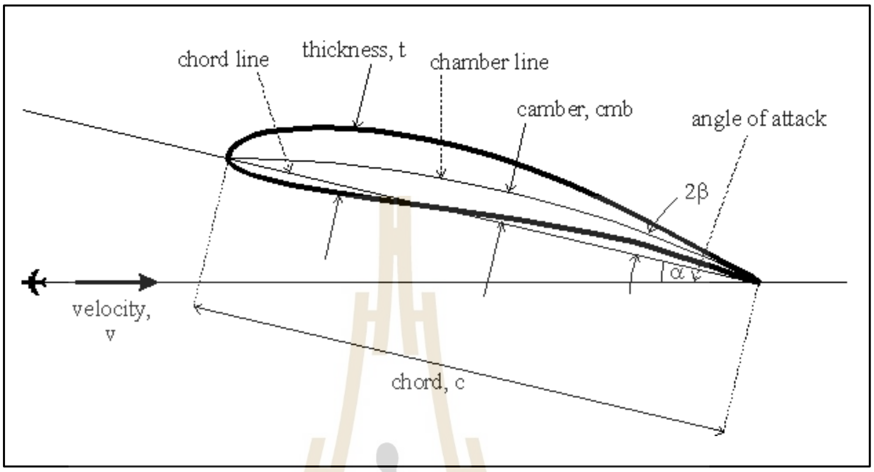
ความจริงที่ว่า C' ที่เกิดจากการแปลงคล้ายคลึงกับภาคตัดขวางของปีกเครื่องบินหรือปีกอากาศ ที่มีความสำคัญมากในทางอากาศพลศาสตร์ และถูกนำมาใช้ครั้งแรกโดย Joukowski ด้วยเหตุผลดังกล่าวรูปลักษณะเช่นนี้จึงถูกเรียกว่า ปีกอากาศเยาโคสกี (Joukowski airfoil) และการส่งในลักษณะนี้ก็เรียกว่า “การแปลงเยาโคสกี”

ผลของการย้ายจุดศูนย์กลางของรูปวงกลมภายใต้การแปลงเยาโคสกีแสดงในรูปที่ ข.20 รายละเอียดของการแปลงเป็นดังนี้ ในรูปที่ ข.20 (a) เป็นการแปลงวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (-0.25, 0), รูปที่ ข.20 (b) วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0.75) และในรูปที่ ข.20 (c) วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (-0.2, 0.35) โดยวงกลมมีรัศมี $a = 1.25$ และเป็นการใช้โปรแกรมในการแปลง



รูปที่ ข.20 การแปลงเยาโคสกีของรูปวงกลมที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางต่าง ๆ

พบว่าเมื่อย้ายพิกัดจุดศูนย์กลางของวงกลมไปทางแกน x จะเป็นการเพิ่มความหนา (Thickness) ของปีกอากาศ และหากย้ายพิกัดจุดศูนย์กลางของวงกลมไปทางแกน y จะเป็นการเพิ่มความโค้ง (Camber) ของปีกอากาศ รายละเอียดเบื้องต้นของปีกอากาศแสดงในรูปที่ ข.21



รูปที่ ข.21 ปีกอากาศ

รูปทรงปีกอากาศเยาโคสกีจะมีรูปทรงโค้งมนจากปลายด้านหน้าและมีปลายแหลมที่ส่วนท้ายโดยที่มุมของเส้นความโค้ง 2β ที่ทำกับเส้นคอร์ด พบว่าค่า β จะมีความสัมพันธ์กับตำแหน่งพิกัดในแนวตั้งของจุดศูนย์กลางทรงกระบอกกลม คือ

$$\beta = \sin^{-1}(y_c)$$

สำหรับมุมปะทะนั้น ในบางทีจะเรียกว่า “Physical” คือ มุม α ที่ทำกับทิศการไหลเอกรูปของเส้นคอร์ด มุมปะทะที่น่าสนใจอันหนึ่งในทางอากาศพลศาสตร์คือ

$$\alpha' = \alpha - \beta$$

พบว่า เมื่อมุม α' นี้มีค่าเป็นศูนย์ค่าแรงยกจะมีค่าเป็นศูนย์เช่นกัน ดังนั้นค่ามุม α' จึงนิยมเรียกว่าเป็นมุมปะทะประสิทธิผล (Effective angle of attack)

ก่อนที่จะทำการวิเคราะห์กระแสความเร็วและความดันสำหรับกรณีของการไหลผ่านปีกอากาศพิจารณาการไหลด้วยการหมุนวนเพิ่มเติมเล็กน้อย เนื่องจากทฤษฎีของคุตตา-เยาโคสกีแสดงให้เห็นว่าแรงยกนั้นมีค่าแปรผันกับค่าการหมุนวน และพบว่าค่าการหมุนวนนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปค่าคงที่ใด ๆ ได้ ผลเฉลยของการไหลผ่านทรงกระบอกกลมแสดงให้เห็นว่าควรหาจุดชะงักไหลบนปีกอากาศให้เกิดความสมจริงโดยการหาค่าการหมุนวนที่เหมาะสม เพื่อย้ายจุดชะงักไหลด้านท้ายปีกอากาศไปยังปลายท้ายสุดของปีกอากาศ เงื่อนไขที่เป็นการหาค่าที่เหมาะสมของการหมุนวนสำหรับรูปทรงที่พิจารณานี้เรียกว่า เงื่อนไขของคุตตา (Kutta condition)

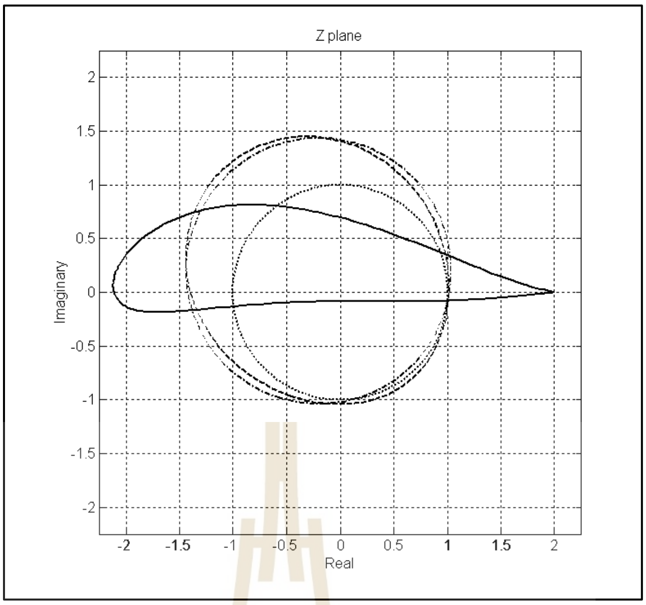
การใช้เงื่อนไขของคุตตานี้ การหมุนวนจะไม่ได้เป็นตัวแปรใด ๆ และการหาค่าแรงยกของปีกอากาศจะใช้กรรมวิธีเช่นเดียวกับที่เคยแสดงสำหรับการไหลผ่านทรงกระบอก เนื่องจากว่าการใช้ค่าการหมุนวนใด ๆ ต่างเป็นคำตอบของปัญหาการไหลผ่านปีกอากาศ เงื่อนไขของคุตตาจึงเป็นการเลือกใช้เพียงค่าเดียวให้มีความเหมาะสมที่สุดกับการไหลที่เกิดขึ้นจริง

การไหลผ่านปีกอากาศเมื่อไม่มีค่าการหมุนวนจะมีจุดชะงักไหลสองจุด โดยจุดหนึ่งจะเกิดที่ผิวด้านล่างของปีกอากาศใกล้กับปลายด้านหน้า อีกจุดจะเกิดที่ผิวด้านบนใกล้กับปลายท้ายปีก เมื่อมีการหมุนวนเกิดขึ้นกับการไหล จุดชะงักไหลจะเปลี่ยนตำแหน่งโดยที่จุดชะงักไหลด้านท้ายจะย้ายตำแหน่งไปทางด้านปลายของปีกอากาศจะเป็นการหาค่าการหมุนวนที่ทำให้จุดชะงักไปอยู่ที่ปลายท้ายของปีกอากาศ โดยที่จะไม่พบค่าอนุพันธ์ของความเร็วที่ตำแหน่งปลายและผลกระทบของการไหลวน (Vorticity emission) จะไม่เกิดขึ้น เรียกได้ว่า “เกิดสมดุล (Equilibrium)” และค่าการหมุนวนนี้จะเป็นค่าการหมุนวนรอบปีกอากาศที่เหมาะสมจะใช้ γ_{Kutta} เพื่อเป็นการแสดงค่าและจะใช้ค่านี้ไปตลอด เห็นได้ว่าค่าการหมุนวนที่ถูกต้องนี้จะขึ้นอยู่กับความเร็วของการไหล มุมปะทะการไหลและรูปทรงของปีกอากาศ

ก่อนที่จะหาสมการสำหรับการไหลผ่านปีกอากาศจะนำเสนอขั้นตอนการสร้างปีกอากาศรูปแบบหนึ่งที่เป็นการแปลงจากวงกลมไปเป็นรูปหน้าตัดปีกอากาศโดยมีขั้นตอนในการส่ง 4 ขั้นตอน ผลของการแปลงแต่ละขั้นนั้นแสดงตามรูปที่ ข.22

ขั้นตอนแรกแสดงในสมการที่ ข.127 กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วยภายใต้ระนาบเชิงซ้อน z_1

$$z_1 = \cos\theta + i\sin\theta \tag{ข.127}$$



รูปที่ ข.22 ขั้นตอนการส่งเพื่อสร้างปีกอากาศ

ขั้นที่สองจะแปลงจากระนาบ z_1 ไปยังระนาบ z_2 โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเคลื่อนที่ไปเป็นขนาดเท่ากับ $x_c + iy_c$ และจุด $1 + 0i$ ของรูปวงกลมหนึ่งหน่วยจะถูกส่งไปยังจุด $x_t + iy_t$ ซึ่งทำให้เราได้จุดสองคู่นี้เป็นความสัมพันธ์กันไปตามสมการดังต่อไปนี้

$$z_2 = [x_t - x_c + i(y_t - y_c)]z_1 + x_c + iy_c \qquad (ข.128)$$

การแปลงนั้นขั้นนี้ทำให้ได้พารามิเตอร์ที่สำคัญที่ทำให้เกิดรูปทรง 4 ค่า คือ x_c, y_c, x_t และ y_t ผลของพารามิเตอร์แต่ละค่าจะมีผลต่อรูปทรงของปีกอากาศในส่วนต่าง ๆ ดังแสดงไว้ในตารางที่ ข.1

ขั้นที่สามเป็นการปรับตำแหน่งวงกลมในระนาบ z_2 ไปยังระนาบ z_3 เป็นไปตามสมการ

$$z_3 = z_2 + \frac{(x_t + iy_t - 1)(x_t + iy_t - \Delta)}{z_2 + \Delta} \qquad (ข.129)$$

การแปลงขั้นนี้จะปรับรูปทรงของวงกลมในลักษณะยืดหยุ่นเพื่อให้ได้รูปทรงของปีกอากาศที่หลากหลายขึ้น ทำให้ได้พารามิเตอร์ในการปรับขนาด Δ เพิ่มมาอีกหนึ่งค่า

ขั้นที่สี่เป็นขั้นตอนสุดท้ายในการแปลงโดยใช้การส่งเยาโคสกีดังสมการที่ ข.130

$$z = z_3 + \frac{1}{z_3} \qquad (ข.130)$$

การแปลงนี้จะทำให้ได้รูปทรงปีกอากาศแสดงอยู่ในระนาบ Z

ตามขั้นตอนข้างต้นนี้นิยมนำมาใช้ในการสร้างรูปทรงปีกอากาศ เพื่อให้ได้รูปทรงที่ต้องการได้อย่างง่ายดาย และมีความหลากหลายโดยรูปทรงของปีกอากาศจะขึ้นอยู่กับค่าของพารามิเตอร์ทั้งห้าค่า

ตารางที่ ข.1 พารามิเตอร์รูปทรงและผลที่ได้กับรูปหน้าตัดปีกอากาศ

พารามิเตอร์	**ผลกระทบ**	**ช่วง**
x_c	ความหนาของปีกอากาศ	-0.2 ถึง 0
y_c	ความโค้งจากต้นถึงท้าย	-0.2 ถึง 0.2
x_t	ความหนาตลอดปีกอากาศ	1 ถึง 1.1
y_t	ความโค้งตลอดปีกอากาศ	-1 ถึง 1.1
Δ	ตำแหน่งผลกระทบของ x_c	0 ถึง 0.8

รูปทรงปีกอากาศที่ได้จากการใช้การแปลงเยาโคสกีนี้ยังช่วยในการคำนวณหาแรงยกของปีกอากาศได้ โดยการลดรูปปัญหาในการไหลไม่มีความหนืดสำหรับทรงกระบอกหมุน พร้อมยังพบได้ว่ารูปทรงปีกอากาศที่ได้จากการส่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลม (x_c, y_c) เป็นอย่างมาก

สำหรับการแปลงการไหลผ่านทรงกระบอกกลมขนาด $|\zeta| = a$ ที่วางอยู่ในการไหลเอกรูปที่มุมปะทะการไหล α การไหลรอบทรงกระบอกนี้สามารถอธิบายได้โดยศักย์การไหลเชิงซ้อนตามสมการ

$$\frac{dw}{d\zeta} = U\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2}\right) \qquad (ข.131)$$

การไหลตามสมการนี้ได้แสดงมาแล้วในรูปที่ ข.19 พบว่า แม้การไหลจะมีมุมในการไหลเป็นเท่าใด ความเร็วที่ผิววงกลมจะมีขนาดเท่ากับความเร็วที่ด้านตรงกันข้ามของวงกลม

ส่งผลค่าความดันที่ผิวมีค่าเท่ากันทั้งสองข้างของวงกลมทำให้แรงกระทำหักล้างกันไปจึงไม่มีค่าแรงยกสำหรับการไหลในกรณีนี้

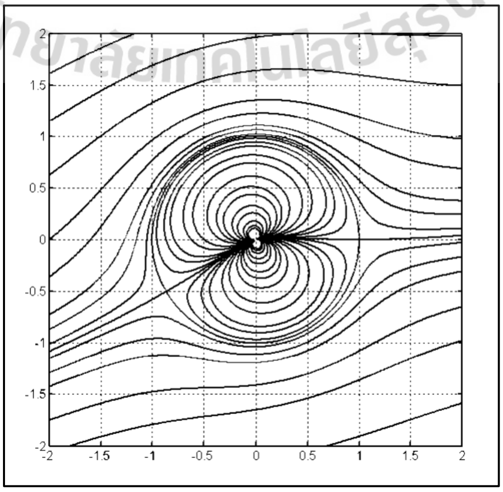
เมื่อเพิ่มการไหลโดยการหมุนรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมเข้าไปซึ่งกรณีนี้คือรอบจุดกำเนิดและมีการหมุนตามเข็มนาฬิกา จะทำให้สามารถเปลี่ยนรูปแบบการไหลภายใต้สมการการแปลงเป็น

$$w = U\left(e^{-i\alpha}\zeta + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta}\right) + i\frac{\gamma}{2\pi}\ln\zeta \qquad (ข.132)$$

และค่าฟังก์ชันศักย์เชิงซ้อนจะหาได้จากสมการอนุพันธ์เทียบกับ ζ

$$\frac{dw}{d\zeta} = U\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{\zeta^2}\right) + i\frac{\gamma}{2\pi\zeta} \qquad (ข.133)$$

ผลจากการใส่ค่าการไหลโดยการหมุนเข้าไปจะพบความแตกต่างได้ตามรูปที่ ข.23 พบว่า เป็นการเพิ่มการไหลแนวสัมผัสในทิศตามเข็มนาฬิกาทำให้ความเร็วของการไหลจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้านบนและมีค่าลดลงทางด้านล่างของวงกลม ส่งผลให้เกิดความแตกต่างของความดันและทำให้เกิดแรงยกขึ้นในที่สุด ทั้งนี้ยังต้องทราบค่าการหมุนวนที่เหมาะสมที่จะนำมารวมเข้าในการไหลด้วย



รูปที่ ข.23 การไหลผ่านทรงกระบอกกลมหนึ่งหน่วยด้วยการหมุนที่มุมปะทะ 15°

หากสามารถคำนวณการไหลรอบวงกลมหนึ่งหน่วยนี้ได้แล้วเป็นไปได้ที่จะแปลงการไหลจากระนาบ ζ ไปยังระนาบ Z ให้เป็นการไหลรอบรูปหน้าตัดปีกอากาศได้ (ดังรูปที่ ข.24) การแปลงนี้สามารถทำได้จากกระบวนการส่งคงแบบโดย 3 ฟังก์ชันการส่ง

(1) ζ เป็นฟังก์ชันของ z_2

(2) z_2 เป็นฟังก์ชันของ z_3

(3) z_3 เป็นฟังก์ชันของ Z

ทั้งนี้จากศักย์การไหลจะต้องสร้างฟังก์ชันความสัมพันธ์ w ที่เป็นฟังก์ชันของ Z เมื่อใช้กฎลูกโซ่จะสามารถหาคำตอบสำหรับการไหลรอบปีกอากาศได้โดย

$$\frac{dw}{dZ}=\frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz_2}\frac{dz_2}{dz_3}\frac{dz_3}{dZ} \qquad \text{(ข.134)}$$

นอกจากนี้ได้แสดงแล้วว่าจุด $\zeta=1+0i$ บนวงกลมหนึ่งหน่วยจะถูกส่งไปยังจุดปลายท้ายสุดของปีกอากาศ เพื่อให้การไหลผ่านปีกอากาศมีความราบเรียบที่จุดปลายนี้จะต้องเป็นจุดชะงักไหลมีค่าความเร็วเป็นศูนย์ ดังนั้นค่าการหมุน γ จะสามารถคำนวณได้โดยการแทนค่า $\zeta=a+0i$ สำหรับวงกลมขนาดใด ๆ ลงในสมการที่ ข.133 และกำหนดให้ค่าเป็นศูนย์จะได้เพื่อหาค่าการหมุนวน

$$\left.\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\zeta=a}=U\left(e^{-i\alpha}-\frac{a^2e^{i\alpha}}{a^2}\right)+i\frac{\gamma}{2\pi a}=0$$

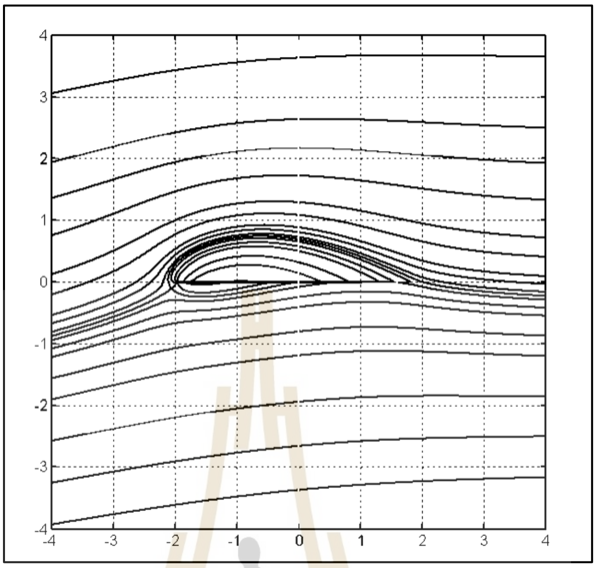
$$i\frac{\gamma}{2\pi a}=-U\left(\cos\alpha-i\sin\alpha-\cos\alpha-i\sin\alpha\right)$$

$$i\frac{\gamma}{2\pi a}=i2U\sin\alpha$$

$$\gamma=4\pi aU\sin\alpha$$

จะทำให้ได้ค่าความแข็งแรงของการหมุนตามเงื่อนไขคุตตาของทรงกระบอกรัศมี a ที่เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับความเร็วของกระแสการไหล มุมปะทะ และขนาดของทรงกระบอกเป็น

$$\Gamma = \gamma_{\text{Kutta}} = 4\pi a U \sin\alpha \qquad (ข.135)$$



รูปที่ ข.24 การไหลผ่านรูปหน้าตัดปีกอากาศที่มุมปะทะ 15°

จากข้อสรุปทฤษฎีแรงยกของคุตตา-เยาโคสกีที่กล่าวไว้ว่า แรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวที่กระทำบนทรงกระบอกหน้าตัดรูปทรงต่างๆ จะเท่ากับ $\rho\bar{U} \times \bar{\Gamma}$ เมื่อ $\bar{\Gamma}$ คือ เวกเตอร์ของค่าการหมุนวน ซึ่งตามกฎมือขวาแล้วแรงนี้จะตั้งฉากกับทั้ง $\bar{\Gamma}$ และ $\bar{U}$

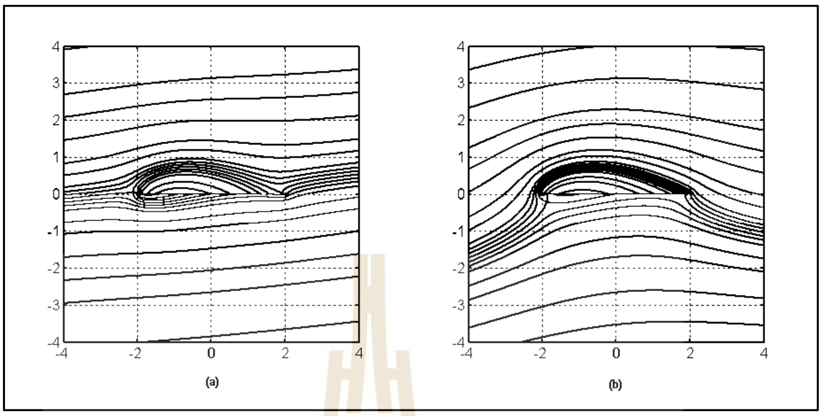
ฉะนั้นหากทรงกระบอกนี้มีหน้าตัดเป็นรูปปีกอากาศและ U เป็นความเร็วสัมพัทธ์ในทางแกน x แล้วจะได้ว่า

$$L = \rho U \Gamma; \qquad D = 0 \qquad (ข.136)$$

เมื่อ L และ D เป็นค่าแรงยกและแรงลาก แรงทั้งสองนี้จะอยู่ในทิศทาง y และ x หากวางแกน x เป็นแกนการไหล โดยแรงทั้งสองนี้จะเป็นแรงต่อหน่วยความยาวของปีกอากาศ สำหรับกรณีแรงลากมีค่าเป็นศูนย์นั้นเป็นผลมาจากมุมปะทะกับปีกอากาศที่ความเร็วต่ำความดันสูงในส่วนหน้าที่ทำให้เกิดแรงฉุดสมดุลกับแรงจากด้านท้ายปีก

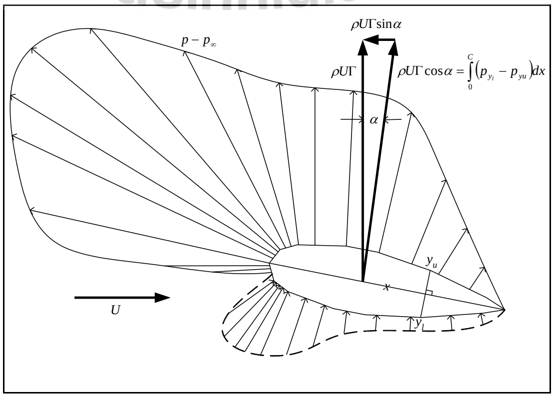
ทฤษฎีของคุตตาเยาโคสกีกล่าวได้อีกแง่หนึ่งว่า แรงที่เกิดขึ้นกับวัตถุภายใต้การไหลเอกรูปจะเท่ากับผลคูณของความหนาแน่นของของไหล ความเร็วของกระแสไหลและค่าการหมุนวน มีทิศทางตั้งฉากกับกระแสการไหล นอกจากนี้หากพิจารณาถึงเงื่อนไขขอบสำหรับปัญหา

การไหลไม่มีการหมุนวน (Irrotational flow) แล้วจะมีคำตอบที่ถูกต้องเพียงค่าเดียวเท่านั้นที่จะเป็นไปตามเงื่อนไขขอบที่ ∞ และที่วัตถุ คือค่าการหมุนวนต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของคุตตา



รูปที่ ข.25 การไหลผ่านรูปหน้าตัดปีกอากาศที่มุมปะทะ 15° กรณี (a) ไม่มีค่าการหมุน (b) มีค่าการหมุนมากกว่า Γ

สำหรับการไหลผ่านปีกอากาศที่มุมปะทะค่าหนึ่งในการไหลไม่มีความหนืด หากไม่มีการหมุนวนแล้วจุดชะงักไหลตอนท้ายจะปรากฏที่ผิวด้านบน แสดงดังรูปที่ ข.25 (a) ซึ่งในกรณีนี้ค่าแรงยกจะมีค่าเป็นศูนย์ หากเราใส่ค่าการไหลด้วยการหมุนเป็นค่าที่เหมาะสมตามเงื่อนไขของคุตตาแล้วจะทำให้การไหลมีความสมจริงและค่าแรงยกมีค่าเป็น $\rho U\Gamma$ ดังแสดงในรูปที่ ข.24 ในกรณีที่ค่าการหมุนวนมีค่ามากกว่า Γ แล้วจะเกิดจุดชะงักไหลด้านล่างปีกอากาศซึ่งเป็นผลให้การไหลมีความไม่สมจริง แสดงดังรูปที่ ข.25 (b)



รูปที่ ข.26 การกระจายตัวของความดันบนปีกอากาศ

การกระจายตัวของความดันดังแสดงในรูปที่ ข.26 จุดแสดงความดันเป็นรูปลูกศรที่มีทิศทางชี้ออกจะเป็นจุดที่มีความต่ำกว่าค่าอ้างอิง หากลูกศรชี้เข้าจะมีค่ามากกว่าค่าอ้างอิงโดยที่ขนาดนั้นจะแปรผันกับค่า $|p - p_{\infty}|$ ณ ตำแหน่งที่กระทำ สำหรับการไหลในอุดมคติแรงสุทธิที่กระทำบนปีกอากาศคือ แรงยกจะค่าเป็น $\rho U\Gamma$ กระทำในทิศตั้งฉากกับ U โดยที่ขนาดของแรงสามารถที่จะแสดงในรูปผลรวมของสองส่วน ส่วนหนึ่งอยู่ในทิศทางตั้งฉากกับเส้นคอร์ดมีค่าเป็น $\rho U\Gamma\cos\theta$ หาได้โดยการอินทิเกรตตลอดความยาวคอร์ดของความแตกต่างของความดันระหว่างจุด y_u และ y_l ทางด้านบนและด้านล่างผิว และอีกส่วนหนึ่งนั้นอยู่ในทิศทางขนานกับเส้นคอร์ดมีค่าเป็น $\rho U\Gamma\sin\theta$ แสดงถึงแรงดูดจากส่วนหน้าในการไหลที่เกิดขึ้นจริงนั้นความหนืดจะมีผลกระทบกับการกระจายตัวของความดันและทำให้เกิดแรงต้านสำหรับแรงลากขึ้น อย่างไรก็ดีสำหรับการไหลในกรณีนี้หากมุมปะทะมีค่าน้อยแล้วการกระจายตัวของความดันในทางทฤษฎีก็ยังเป็นค่าประมาณที่น่าเชื่อถือพอสมควร

ข.5 สรุปผลการวิจัย

การนำกรรมวิธีการส่งคงแบบมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาในการไหลไม่มีความหนืดโดยอาศัยความรู้ทางตัวเลขเชิงซ้อนมาประยุกต์ใช้ ถือได้ว่าเป็นเครื่องมือที่ช่วยลดงานในการคำนวณ เพิ่มความสะดวกในการแสดงผลได้เป็นอย่างมาก ทั้งนี้การแปลงก็สามารถทำได้หลากหลายและหากใช้ฟังก์ชันในการแปลงที่เหมาะสมแล้วก็จะสามารถนำมาใช้กับปัญหาที่วิเคราะห์อยู่ได้โดยง่าย

สำหรับปัญหาการไหลผ่านปีกอากาศที่ได้ทำการวิเคราะห์และแสดงมาแล้วนั้น แม้ว่าการแปลงจะได้รูปทรงที่ต้องการ แต่หากพบว่าการไหลที่เกิดขึ้นมีความไม่สมจริง ก็ต้องทำการสร้างเงื่อนไขเพิ่มเติมสำหรับการไหลให้การไหลมีความถูกต้องและสมจริงมากขึ้นโดยเงื่อนไขและทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้มีผู้ที่ได้เสนอไว้มาประยุกต์ให้เกิดความเหมาะสมกับปัญหาที่พิจารณา

ในการแปลงทรงกระบอกกลมมาเป็นรูปภาคตัดของปีกอากาศมีขั้นตอนในการแปลงถึง 4 ขั้นตอน แต่หากจะลดขั้นตอนการปรับยืดรูปวงกลมออกไปก็กระทำได้เช่นกัน สำหรับการแปลงเยาโคสกีนั้นพบว่าเมื่อเขียนสมการในรูปของตัวแปรเชิงซ้อนระนาบ Z จากการแก้ปัญหาทางพีชคณิตจะได้คำตอบมาสองค่าคือ $(Z \pm \sqrt{Z^2 - 4\lambda})/2$ เพื่อแทนค่ากับในสมการการแปลงศักย์การไหลเชิงซ้อน พบว่าสมการจะให้ค่าที่ถูกต้องหากแทนค่าบวกเมื่อส่วนจริงมีค่าบวก และแทนค่าลบเมื่อส่วนจริงมีค่าเป็นลบ รายละเอียดของการแปลงจะใช้โปรแกรม MATLAB ในการแสดงผลโดยจะสร้างโปรแกรมคำสั่งในรูป m-file (แสดงในภาคผนวก ข) นอกจากนี้การปรับเปลี่ยนรูปทรงของปีกอากาศก็สามารถทำได้โดยการปรับค่าพารามิเตอร์รูปทรงทั้ง 5 ค่า จะทำให้สามารถวิเคราะห์การไหลผ่านปีกอากาศรูปทรงต่าง ๆ ได้หลากหลายขึ้นเพื่อใช้ในการพัฒนาปีกอากาศได้ต่อไป

ข.6 รายการอ้างอิง

Bertin, J. J. and Smith, M. L. (1998). **Aerodynamics for engineers** (3rd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

Fisher, S. D. (1990). **Complex variables** (2nd ed.). California: Wadsworth.

Greenberg, M. D. (1998). **Advanced engineering mathematics** (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

Jeffrey, A. (1992). **Complex analysis and applications**. Florida: CRC Press.

Kreyszig, E. (1999). **Advanced engineering mathematics** (8th ed.). Sigapore: John Wiley & Sons.

Kuethe, A. M. and Chow, C-Y. (1998). **Foundations of aerodynamics bases of aerodynamic design** (5th ed.). New York: John Wiley & Sons.

Mathews, J. H. (1997). **Complex variables for mathematics and engineering** (2nd ed. Vol.II). USA: Wm. C. Brown.

O'Neil, P. V. (1995). **Advanced engineering mathematics** (4th ed.). USA: PWS.

Pettit, G.W. (2001). **Model to evaluate the aerodynamic energy requirements of active materials in morphing wings** [On-line] (Master dissertation, Virginia Polytechnic Institute). 76, SS 4332-01.

Saff, E. B., Snider, A. D. and Treffethen, L. N. (1993). **Fundamentals of complex analysis for mathematics, science, and engineering** (2nd ed.). London: Prentice-Hall.

Spiegel, M. R. (1968). **Schaum's outline of theory and problem of mathematical handbook of formulas and tables** (Inter. ed. 1990). Singapore: McGraw-Hill.

White, F. M. (1994). **Fluid mechanics**. Singapore: McGraw-Hill.

White, F. M. (1991). **Viscous fluid flow**. Singapore: McGraw-Hill.

ภาคผนวก ค

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณ

ค.1 โค้ดโปรแกรมโครงแผ่นความร้อน

```
/*

*************************************************************
****************
 This program in C-language modifies in temperature absorbed
on plate to steady state before radiate.
*************************************************************
****************
 */

#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
#define P 200
#define Qin 1000.0//1353
#define chk 0.00001
#define s 5.67e-8
#define e 10e-20

void input(void);
FILE *ptr;

int i,j,k,m2,x,z,N,ans=0,ans2,l,t;
float
T,Tb,NA,NC,B,Z,n,y,mid,min,sum,db,absback,abstop,percent;
float Atot,Qs,Qsingle,Qbottom,Qup_above,Qtotal_emit,
           Qtot_absorb1,Qtot_absorb2,Qtot_absorbPlus;
float Qs_upb,Qs_btm,Qs_upb2,Qs_btm2,Qbtm_sol;
float
A[P],Qtrn[P][P],Qrfc[P][P],Qrad[P],Qupb[P],Qbtm[P],Qext[P],Qtr
n2[P][P],

     Qrfc2[P][P],Qrfc3[P][P],Qupb2[P],Qbtm2[P],abck[P],rb[P],r
t[P],em[P],
      Qabs[P],Qabs2[P],Tp[P],Tpmax[P];

main(void)
{

ptr=fopen("c:\datatest.dat","w");

START:

  input();

  Atot=0.0;
  for(i=N;i>0;i--)
     Atot=Atot+A[i];

SOLVE:
```

```
      printf("\nABSORPTIVITY AT BACK OF ALL PLATE (0-1) :\n");
Y:
      printf("\tabsorb back = ");
      scanf("%f",&absback);
   if(absback<0||absback>1) goto Y;

percent = 0.0;
for(t=0;t<=4;t++){          //lopp of percent temperature

for(l=0;l<=4;l++){                //loop absorbtivity at top
plate

//defind matrix values equal to zero
   for(j=0;j<=N+1;j++){
           for(i=0;i<=N+1;i++){
               Qtrn[i][j]=0.0;Qrfc[i][j]=0.0;Qtrn2[i][j]=0.0;
          Qrfc2[i][j]=0.0;Qrfc3[i][j]=0.0;}
      Qabs[i]=0.0;Qabs2[i]=0.0;

Qrad[i]=0.0;Qupb[i]=0.0;Qbtm[i]=0.0;Qupb2[i]=0.0;Qbtm2[i]=0.0;

Qext[i]=0.0;rb[i]=0.0;rt[i]=0.0;em[i]=0.0;Tp[i]=0.0;Tpmax[i];}

//   t = 4;
//   l = 4;
   abstop = 0.25*l;      //**************
   percent = 0.25*t;
   for(i=1;i<=N;i++){
      em[i] = abstop;
      abck[i] = absback;
         rt[i] = 1.0-em[i];
     rb[i] = 1.0-abck[i];
     Tp[i] = 300;//K
   }

   printf("\n\n:::::::::PROGRM RESALTS FOR:::::::::");
   printf("\nAbsorbtivity Top : %f",abstop);
   printf("\nAbsorbtivity Back : %f",absback);
   printf("\nPercent Radiation : %f",percent);
   printf("\n\nFIRST RADIATION Tp = %f",Tp[1]);
//SOLVE:
//part radiation
I**************************************************************
*
   for(i=2;i<=N+1;i++){
           j = i-1; k = i-2;
      Qrfc2[j][i] = em[j]*A[j]*s*pow(Tp[j],4);
      Qrfc3[j][k] = abck[j]*A[j]*s*pow(Tp[j],4);

//   printf("\nQrfc2[%d][%d]=%f",j,i,Qrfc2[j][i]);
//   printf("\nQrfc3[%d][%d]=%f",j,k,Qrfc3[j][k]);
   }

      Qtrn2[N-1][N-2] = Qrfc3[N][N-1]*(1.0-A[N-1]);
```

```
    Qrfc2[N-1][N] = Qrfc2[N-1][N]+rt[N-1]*Qrfc3[N][N-1]*A[N-1];
    Qabs2[N-1] = Qrfc3[N][N-1]*(1-(1.0-A[N-1])-rt[N-1]*A[N-1]);
    Qabs2[N] = 0.0;

//    printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",N-1,N-2,Qtrn2[N-1][N-2]);
//    printf("\nQrfc2[%d][%d]=%f",N-1,N,Qrfc2[N-1][N]);
//    printf("\nQabs2[%d]=%f",N-1,Qabs2[N-1]);

      if(N>=3)
            for(i=N-1;i>=2;i--){
                  j = i-1; k = i-2;
            Qtrn2[i][j] = Qtrn2[i][j]+Qrfc3[i][j];
            Qtrn2[j][k] = Qtrn2[i][j]*(1-A[j]);
         Qrfc2[j][i] = Qrfc2[j][i]+rt[j]*Qtrn2[i][j]*A[j];
            Qabs2[j] = Qtrn2[i][j]*(1-(1.0-A[j])-rt[j]*A[j]);

//    printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",i,j,Qtrn2[i][j]);
//    printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",j,k,Qtrn2[j][k]);
//    printf("\nQrfc2[%d][%d]=%f",j,i,Qrfc2[j][i]);
//    printf("\nQabs2[%d]=%f",j,Qabs2[j]);
            }
    Qrfc2[0][1] = Qtrn2[1][0]+Qrfc3[1][0];
    Qupb2[0] = Qrfc2[N][N+1];
    Qs_upb2 = Qrfc2[N][N+1];

//printf("\n%f\t%f",Qrfc2[0][1],Qs_upb2);

      for(m2=1;m2<=100;m2++)
      {
      Qtrn2[1][2] = Qrfc2[0][1]*(1.0-A[1]);
         Qrfc2[1][0] = rb[1]*Qrfc2[0][1]*A[1];
      Qabs2[1]+= Qrfc2[0][1]*(1-(1.0-A[1])-rb[1]*A[1]);

//    printf("\nQtrn2[1][2]=%f",Qtrn2[1][2]);
//    printf("\nQrfc2[1][0]=%f",Qrfc2[1][0]);
//    printf("\nQabs2[1]=%f",Qabs2[1]);

         for(i=3;i<=N+1;i++){
            j=i-1;k=i-2;
             Qtrn2[k][j] = Qtrn2[k][j]+Qrfc2[k][j];
         Qtrn2[j][i] = Qtrn2[k][j]*(1.0-A[j]);
            Qrfc2[j][k] = rb[j]*Qtrn2[k][j]*A[j];
             Qabs2[j]+= Qtrn2[k][j]*(1-(1.0-A[j])-rb[j]*A[j]);

//    printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",k,j,Qtrn2[k][j]);
//    printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",j,i,Qtrn2[j][i]);
//    printf("\nQrfc2[%d][%d]=%f",j,k,Qrfc2[j][k]);
//    printf("\nQabs2[%d]=%f",j,Qabs2[j]);
            }
         Qupb2[m2] = Qtrn2[N][N+1];
            Qtrn2[N-1][N-2] = Qrfc2[N][N-1]*(1.0-A[N-1]);
         Qrfc2[N-1][N] = rt[N-1]*Qrfc2[N][N-1]*A[N-1];
      Qabs2[N-1]+= Qrfc2[N][N-1]*(1-(1.0-A[N-1])-rt[N-1]*A[N-
1]);
```

```
//   printf("\nQupb2[%d]=%f",m2,Qupb2[m2]);
//   printf("\nQtrn2[N-1][N-2]=%f",Qtrn2[N-1][N-2]);
//   printf("\nQrfc2[N-1][N]=%f",Qrfc2[N-1][N]);
//   printf("\nQabs2[N-1]=%f",j,Qabs2[N-1]);

      if(N>=3)
           for(i=N-1;i>=2;i--){
                j=i-1;k=i-2;
              Qtrn2[i][j] = Qtrn2[i][j]+Qrfc2[i][j];
                Qtrn2[j][k] = Qtrn2[i][j]*(1-A[j]);
                 Qrfc2[j][i] = rt[j]*Qtrn2[i][j]*A[j];
                 Qabs2[j]+= Qtrn2[i][j]*(1-(1.0-A[j])-
rt[j]*A[j]);

//   printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",i,j,Qtrn2[i][j]);
//   printf("\nQtrn2[%d][%d]=%f",j,k,Qtrn2[j][k]);
//   printf("\nQrfc2[%d][%d]=%f",j,i,Qrfc2[j][i]);
//   printf("\nQabs2[%d]=%f",j,Qabs2[j]);

                }
      Qrfc2[0][1] = Qtrn2[1][0]+Qrfc2[1][0];
      Qext[m2] = Qupb2[m2];
     Qs_upb2+= Qupb2[m2];
//      printf("\n%f\t%f",Qupb2[m2],Qs_upb2);
      if(Qext[m2]<=chk)
           goto CHKK2;
//      getch();
     }

CHKK2:
   if(abstop==0)
    if(absback==0)
     abstop = e;
   Qabs2[0] = 0.0;
   printf("\n\nTotal Energy For Emitt     :
%f",NC*(abstop+absback)*s*pow(300,4));
   printf("\nTotal Energy Emittion Out : %f",Qs_upb2);
   printf("\nPlate Absorbtion First :");
     for( int plate=N ; plate>=1 ; plate-- ){
        printf("\nPlate [%d] : %f",plate,Qabs2[plate]);
      Qabs2[0] += Qabs2[plate];
   }
   printf("\nTotal Energy Absorption First : %f",Qabs2[0]);


//computation:****Part I Solar Radiation
Absorption*****************************
   Qtrn[N+1][N] = Qin*NC;
   for(i=N+1;i>=2;i--){
     j = i-1;k = i-2;
      Qtrn[j][k] = Qtrn[i][j]*(1.0-A[j]);
      Qrfc[j][i] = rt[j]*Qtrn[i][j]*A[j];
      Qabs[j] = Qtrn[i][j]*(1-(1.0-A[j])-rt[j]*A[j]);
     }
```

```
   Qupb[0] = Qrfc[N][N+1];
   Qrfc[0][1] = Qtrn[1][0];
   Qs_upb = Qrfc[N][N+1];

      for(m2=1;m2<=100;m2++)
   {
      Qtrn[1][2] = Qrfc[0][1]*(1.0-A[1]);
         Qrfc[1][0] = rb[1]*Qrfc[0][1]*A[1];
      Qabs[1]+= Qrfc[0][1]*(1-(1.0-A[1])-rb[1]*A[1]);

      for(i=3;i<=N+1;i++){
           j = i-1; k = i-2;
            Qtrn[k][j] = Qtrn[k][j]+Qrfc[k][j];
         Qtrn[j][i] = Qtrn[k][j]*(1.0-A[j]);
           Qrfc[j][k] = rb[j]*Qtrn[k][j]*A[j];
            Qabs[j]+= Qtrn[k][j]*(1-(1.0-A[j])-rb[j]*A[j]);
           }
         Qupb[m2] = Qtrn[N][N+1];

           Qtrn[N-1][N-2] = Qrfc[N][N-1]*(1.0-A[N-1]);
         Qrfc[N-1][N] = rt[N-1]*Qrfc[N][N-1]*A[N-1];
      Qabs[N-1]+= Qrfc[N][N-1]*(1-(1.0-A[N-1])-rt[N-1]*A[N-
1]);
      if(N>=3)
           for(i=N-1;i>=2;i--){
                      j=i-1;k=i-2;
              Qtrn[i][j] = Qtrn[i][j]+Qrfc[i][j];
                Qtrn[j][k] = Qtrn[i][j]*(1-A[j]);
                 Qrfc[j][i] = rt[j]*Qtrn[i][j]*A[j];
                 Qabs[j]+= Qtrn[i][j]*(1-(1.0-A[j])-
rt[j]*A[j]);
                }

      Qrfc[0][1] = Qtrn[1][0]+Qrfc[1][0];
      Qext[m2] = Qupb[m2];
     Qs_upb+= Qupb[m2];
      if(Qext[m2]<=chk)
           goto CHK;
//       getch();
      }

 CHK:
   Qabs[0] = 0.0;
   printf("\n\nTotal Energy IN            : %f",Qtrn[N+1][N]);
   printf("\nTotal Energy Emittion Out : %f",Qs_upb);
   printf("\nPlate Absorbtion Second :");
      for( int plate=N ; plate>=1 ; plate-- ){
         printf("\nPlate [%d] : %f",plate,Qabs[plate]);
      Qabs[0] += Qabs[plate];
   }
   printf("\nTotal Energy Absorption Second : %f",Qabs[0]);
```

```
/*Find temperature of
plate***************************************************/

   Qtot_absorb1 = 0.0;
   for(i=1;i<=N;i++){
      Qabs[i]+= Qabs2[i];    //*********
      Qtot_absorb1 += Qabs[i];  //**********
   }
     Qs_upb += Qs_upb2;

   Tp[0] = 0.0;
   for(i=1;i<=N;i++){
           Tpmax[i] =
pow(Qabs[i]/(A[i]*(abstop+absback)*s),0.25);
         Tpmax[i]-= 300;
         Tp[i] = 300+percent*Tpmax[i];
         Tp[0] += Tp[i];
   }

   printf("\n\nTotal Energy IN Control Volume : %f",Qin +
NC*(abstop+absback)*s*pow(300,4));
   printf("\nTotal Energy Emittion Out      : %f",Qs_upb);
   printf("\nPlate Absorbtion First+Second : DTempmax :
Temp");
     for( int plate=N ; plate>=1 ; plate-- ){
         printf("\nPlate [%d] :
%f\t%f\t%f",plate,Qabs[plate],Tpmax[plate],Tp[plate]);
   }
   printf("\nTotal Energy Absorption First+Second :
%f",Qtot_absorb1);


//single radiation Rigid
Body:************************************************//
//    T = pow((Qin*NC*abstop)/(NC*(abstop+absback)*s),0.25);
   T = Tp[0];
   Tb = Tp[0]/N;          //Average Temperature
//    if(T>300){
//    Tb = 300+percent*(T-300);
      Qs = NC*1*s*pow(Tb,4);
      Qsingle = Qs+NC*1*s*pow(Tb,4);
//    }
/*    else{
      Tb = T;
      Qs = NC*abstop*s*pow(Tb,4);
      Qsingle = Qs+NC*absback*s*pow(Tb,4);
   }*/
   printf("\n\nTotal Energy Absorp by Single Plate :
%f",Qin*NC*1);
   printf("\nPlate Tempmax : Temp : %f\t%f",T,Tb);
   printf("\nTotal Energy Emittion Out Top          : %f",Qs);
   printf("\nTotal Energy Emittion Out Top&Bottom   :
%f",Qsingle);
```

```
   printf("\nEnergy Absorp by Single Plate (Top)    :
%f",Qin*NC*1-Qs);
   printf("\nEnergy Absorp by Single Plate(Top&Bot):
%f",Qin*NC*1-Qsingle);


//part
radiation*****************************************************
***********

   for(i=2;i<=N+1;i++){
          j=i-1;k=i-2;
      Qrfc2[j][i] = em[j]*A[j]*s*pow(Tp[j],4);
      Qrfc3[j][k] = abck[j]*A[j]*s*pow(Tp[j],4);
       Qabs[j]-= Qrfc2[j][i] + Qrfc3[j][k];
       Qabs2[j] = 0.0;
   }

      Qtrn2[N-1][N-2] = Qrfc3[N][N-1]*(1.0-A[N-1]);
   Qrfc2[N-1][N] = Qrfc2[N-1][N]+rt[N-1]*Qrfc3[N][N-1]*A[N-1];
   Qabs2[N-1] = Qrfc3[N][N-1]*(1-(1.0-A[N-1])-rt[N-1]*A[N-1]);
   Qabs2[N] = 0.0;

      if(N>=3)
           for(i=N-1;i>=2;i--){
                j=i-1;k=i-2;
           Qtrn2[i][j] = Qtrn2[i][j]+Qrfc3[i][j];
           Qtrn2[j][k] = Qtrn2[i][j]*(1-A[j]);
        Qrfc2[j][i] = Qrfc2[j][i]+rt[j]*Qtrn2[i][j]*A[j];
            Qabs2[j] = Qtrn2[i][j]*(1-(1.0-A[j])-rt[j]*A[j]);
           }
   Qrfc2[0][1] = Qtrn2[1][0]+Qrfc3[1][0];
   Qupb2[0] = Qrfc2[N][N+1];
   Qs_upb2 = Qrfc2[N][N+1];

      for(m2=1;m2<=100;m2++)
      {
       Qtrn2[1][2] = Qrfc2[0][1]*(1.0-A[1]);
         Qrfc2[1][0] = rb[1]*Qrfc2[0][1]*A[1];
       Qabs2[1]+= Qrfc2[0][1]*(1-(1.0-A[1])-rb[1]*A[1]);
         for(i=3;i<=N+1;i++){
            j=i-1;k=i-2;
             Qtrn2[k][j] = Qtrn2[k][j]+Qrfc2[k][j];
         Qtrn2[j][i] = Qtrn2[k][j]*(1.0-A[j]);
            Qrfc2[j][k] = rb[j]*Qtrn2[k][j]*A[j];
             Qabs2[j]+= Qtrn2[k][j]*(1-(1.0-A[j])-rb[j]*A[j]);
            }
         Qupb2[m2] = Qtrn2[N][N+1];
            Qtrn2[N-1][N-2] = Qrfc2[N][N-1]*(1.0-A[N-1]);
         Qrfc2[N-1][N] = rt[N-1]*Qrfc2[N][N-1]*A[N-1];
       Qabs2[N-1]+= Qrfc2[N][N-1]*(1-(1.0-A[N-1])-rt[N-1]*A[N-
1]);

       if(N>=3)
```

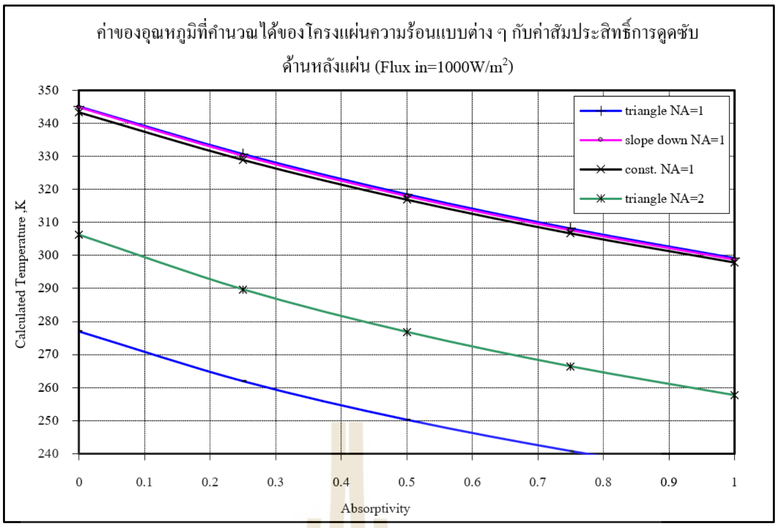
```
                for(i=N-1;i>=2;i--){
                     j=i-1;k=i-2;
                  Qtrn2[i][j] = Qtrn2[i][j]+Qrfc2[i][j];
                     Qtrn2[j][k] = Qtrn2[i][j]*(1-A[j]);
                     Qrfc2[j][i] = rt[j]*Qtrn2[i][j]*A[j];
                     Qabs2[j]+= Qtrn2[i][j]*(1-(1.0-A[j])-
rt[j]*A[j]);
                     }
      Qrfc2[0][1] = Qtrn2[1][0]+Qrfc2[1][0];
      Qext[m2] = Qupb2[m2];
//      printf("\n%f\t%f",Qupb2[m2-1],Qs_upb2);
      Qs_upb2+= Qupb2[m2];
      if(Qext[m2]<=chk)
          goto CHK2;
//      getch();
      }

  CHK2:
   Qabs2[0] = 0.0;
   Qtot_absorb2 = 0.0;
   for(i=1;i<=N;i++){
      Qabs2[0] += Qabs2[i];
      Qabs[i] += Qabs2[i];
      Qtot_absorb2 += Qabs[i];
   }
   Qup_above = Qs_upb + Qs_upb2;
     Qtotal_emit = Qup_above;
   Qtot_absorbPlus = Qin*NC + NC*(abstop+absback)*s*pow(300,4)
- Qtotal_emit;

   printf("\n\nTotal Energy For Emitt Third    : %f",Qs_upb2);
   printf("\nTotal Energy Emittion Out CV.     :
%f",Qtotal_emit);
   printf("\nPlate Absorbtion Final :");
     for( int plate=N ; plate>=1 ; plate-- ){
        printf("\nPlate [%d] : %f",plate,Qabs[plate]);
   }
   printf("\nTotal Energy Absorption Final     :
%f",Qtot_absorb2);
   printf("\nTotal Energy Absorption Final II :
%f",Qtot_absorbPlus);

//OUTPUT FILE
   fprintf(ptr,"\n%d\n",N);
   fprintf(ptr,"%.2f\n",percent*100);
   fprintf(ptr,"%f\n",abstop);
   fprintf(ptr,"%f\n",absback);
//   fprintf(ptr,"%f\n",T);
   fprintf(ptr,"%f\n",Tb);
//   fprintf(ptr,"%f\n",Qtotal_emit);
//   fprintf(ptr,"%f\n",Qtot_absorb1);
   fprintf(ptr,"%f\n",Qtot_absorbPlus);
//   fprintf(ptr,"%f\n",Qabs[0]);
//   fprintf(ptr,"%f\n",Qs);
```

```
//   fprintf(ptr,"%f\n",Qsingle);
   fprintf(ptr,"%f\n",Qin*NC*1-Qs);
   fprintf(ptr,"%f\n",Qin*NC*1-Qsingle);

 }                     //close loop temp
   for(i=1;i<=N;i++)

      fprintf(ptr,"%d\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\n",i,A[i],Tpmax[i
],Tp[i],Qabs[i]);

}            //close loop absorptivity

   printf("\nDo you want to continous Program?");
  ANS:
   printf("Yes{1}/No{0} : = ");
   scanf("%d",&ans);
   if(ans<=-1||ans>=2)
      goto ANS;
   if(ans==1){
          printf("Do you want to change the layer of plate?");
     ANS2:
      printf("Yes{1}/No{0} : = ");
         scanf("%d",&ans2);
   if(ans2<=-1||ans2>=2)
          goto ANS2;
      if(ans2==1)
          goto START;
      else
                goto SOLVE;
       }
   fclose(ptr);
   printf("You can see all data in file
C:\\BC5\\BIN\\datatest.dat\n");
   getch();
      return 0;
}

/**************************************************************
*****************/
void input(void)
{
      clrscr();
      printf("PROGRAM FIND SOLAR ENERGY ABSORBTION BY PLATE
STRUCTURE.\n");
      printf("CASE : Bottom plate solid refrectivity 100%.\n");

      printf("INSERT TOTAL AREA OF PLATE STRUCTURE : NA = ");
      scanf("%f",&NA);

      printf("\nSELECT PLATE ARRANGE AREA OF UP LAYER (1-6).");
   printf("\n1 area constant in each layer.");
   printf("\n2 triangle area max in middle.");
   printf("\n3 triangle area min in middle.");
   printf("\n4 slope area max on top layer.");
```

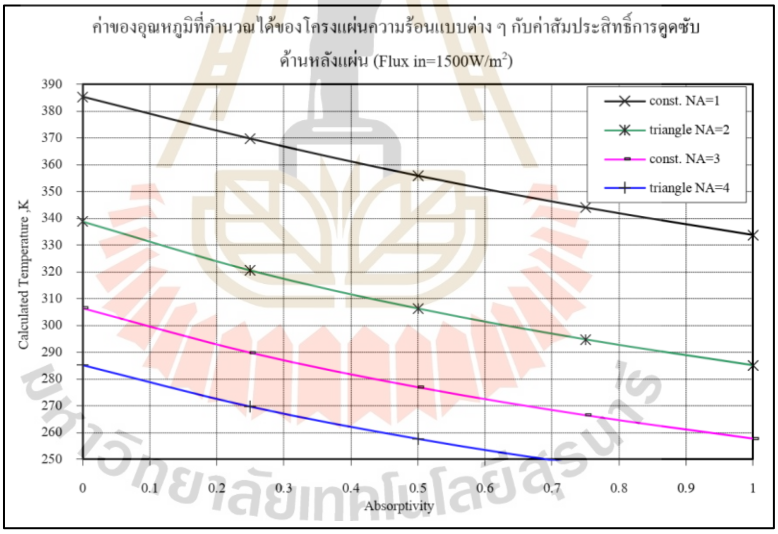
```
   printf("\n5 slope area min on top layer.");
   printf("\n6 any types area of layer.\n");

 input:
   printf("choose(1-6) : ");
   scanf("%d",&x);

   if(x<1||x>6)
     goto input;

   if(x!=1)
   if(x!=6){
      if(x<4||x>5){
        odd:
              printf("INSERT NUMBER OF PLATE(Odd number): N =
");
                scanf("%d",&N);
         n=N;
         Z=n/2;
         z=n/2;
         y=Z-z;
         if(y==0)
           goto odd;
         goto L145;
      }
      printf("INSERT NUMBER OF PLATE : N = ");
           scanf("%d",&N);
     L145:
      printf("\nINSERT MINIMUM AREA OF PLATE STRUCTURE.\nMIN
Area = ");
      scanf("%f",&min);
         mid=n/2+0.5;
   }

   if(x==1)
   {
         printf("INSERT NUMBER OF PLATE : N = ");
           scanf("%d",&N);
         B=100*NA/N;
      for(i=N;i>0;i--)
                A[i]=B;
   }

      if(x==2)
   {
    sum=1;
    for(i=2;i<mid-1;i++)
      sum=sum+i;
    db=(100*NA-min*(2*mid-1))/(2*sum+mid-1);
    A[1]=min;
    for(i=2;i<=mid;i++)
      A[i]=A[i-1]+db;
    for(i=mid+1;i<=N;i++)
      A[i]=A[i-1]-db;
```

```
    }

      if(x==3)
    {
     sum=1;
     for(i=2;i<=mid-1;i++)
       sum=sum+i;
     db=(100*NA-min*(2*mid-1))/(2*sum);
     j=mid;
     A[j]=min;
     for(i=mid-1;i>=1;i--)
       A[i]=A[i+1]+db;
     for(i=mid+1;i<=N;i++)
       A[i]=A[i-1]+db;
    }

      if(x==4)
    {
     sum=1;
     for(i=2;i<=N-1;i++)
       sum=sum+i;
     db=(100*NA-min*N)/sum;
     A[1]=min;
     for(i=2;i<=N;i++)
       A[i]=A[i-1]+db;
    }

      if(x==5)
    {
     sum=1;
     for(i=2;i<=N-1;i++)
       sum=sum+i;
     db=(100*NA-min*N)/sum;
     j=N;
     A[j]=min;
     for(i=N-1;i>=1;i--)
       A[i]=A[i+1]+db;
    }

      if(x==6)
    {
     printf("INSERT NUMBER OF PLATE : N = ");
     scanf("%d",&N);
     for(i=1;i<=N;i++)
     {
      printf("\tA[%d] = ",i);
         scanf("%f",&A[i]);
     }
    }

      printf("\nCHECK YOUR PERCENT AREA OF PLATE STRUCTURE
AGAIN(DIVIDE BY 100).\n");
   NC=0.0;
   for(i=1;i<=N;i++){
```

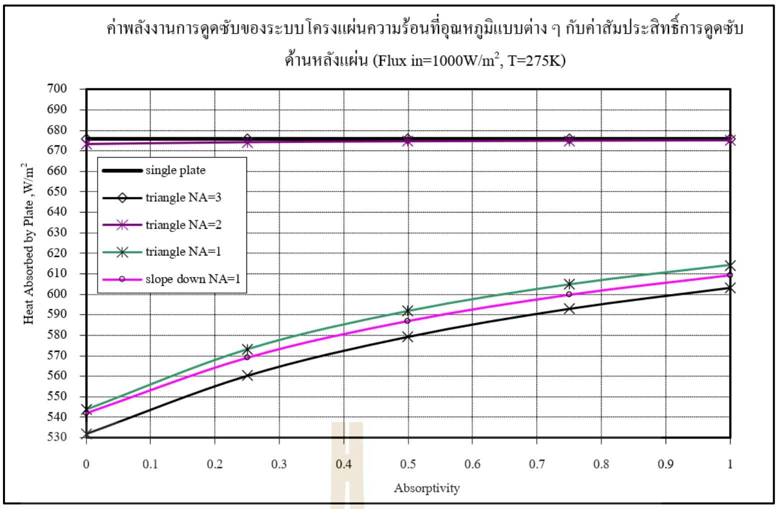
```
            A[i]=A[i]/100.0;
        printf("LAYER %d = %.6f\n",i,A[i]);
         NC=NC+A[i];
        }
    printf("NC = %.2f\n",NC);
    getch();
    return;
}
```



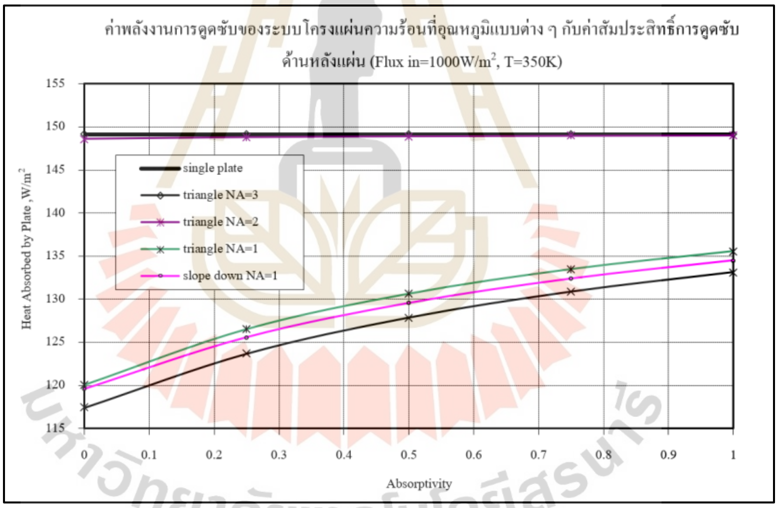
รูปที่ ค.1 กราฟแสดงค่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ของโครงแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



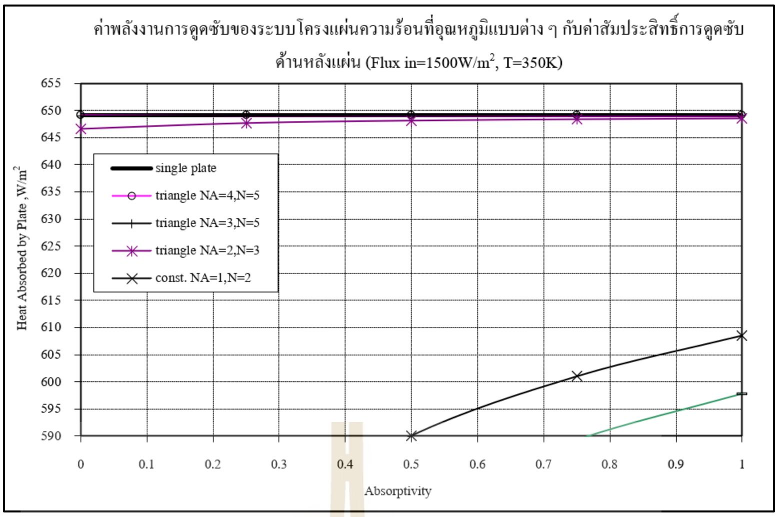
รูปที่ ค.2 กราฟแสดงค่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ของโครงแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



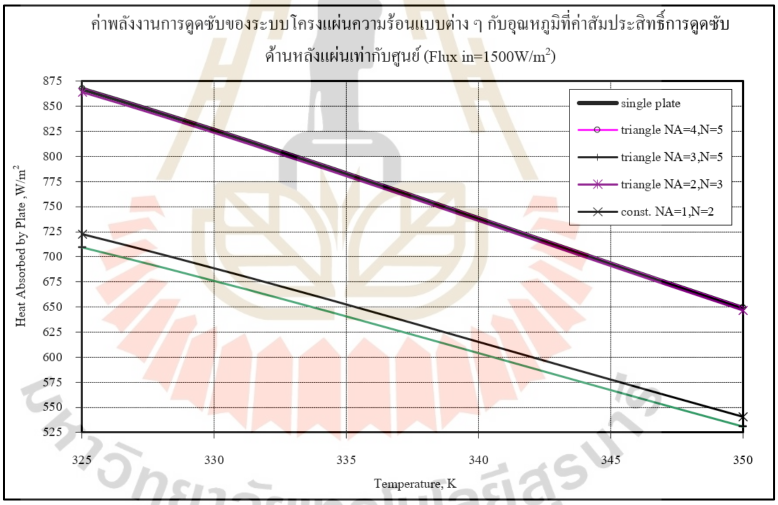
รูปที่ ค.3 กราฟแสดงค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



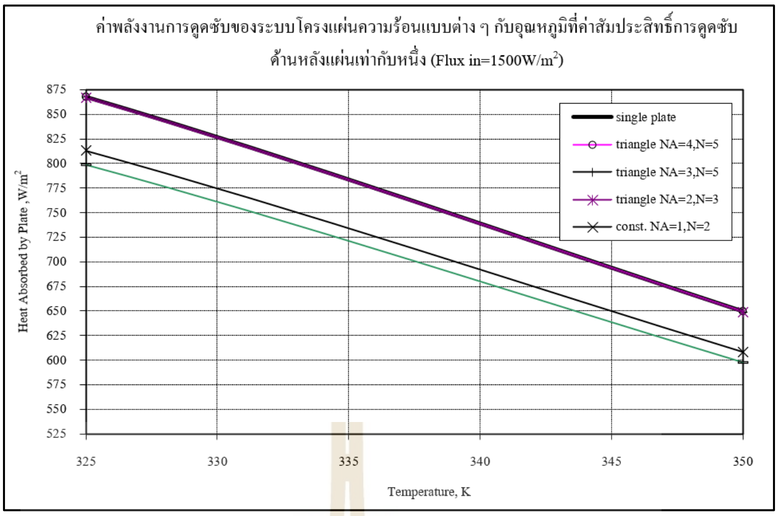
รูปที่ ค.4 กราฟแสดงค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



รูปที่ ค.5 กราฟแสดงค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



รูปที่ ค.6 กราฟแสดงค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ



รูปที่ ค.7 กราฟแสดงค่าพลังงานการดูดซับความร้อนของแผ่นความร้อนแบบต่าง ๆ

ค.2 โค้ดโปรแกรมการส่งคงแบบ

โปรแกรม MATLAB สำหรับแสดงเส้นการไหลผ่านทรงกระบอกหน้าตัดกลม

```
%M-file for Potential Flow
%Flow Pass Rotating Cylinder

clear all
set(0,'DefaultAxesFontSize',12);
set(gcf,'DefaultAxesLineWidth',1.5);

a =1;
U =10;
alfa =pi*(15/180);

x =-4 : 0.01 : 4;
y =-4 : 0.01 : 4;
x =x';y =y';
[x y]=meshgrid(x,y);
Gamma =4*pi*a*U*sin(alfa);

z =x +i*y;
z1=U*((cos(alfa)-i*sin(alfa)).*z +(a^2)*((cos(alfa)+i*sin(alfa))./z))+i*Gamma*log(z)/(2*pi);
psi =imag(z1);
co =[-100 -82.5 -62.5 -42.5 -32.5 -22.5 -17.5 -12.5 -7.5 -5 -2.5 -1.5 -0.5 0 0.5 1.5 2.5 5 7.5 12.5 17.5 22.5 32.5 42.5 62.5 82.5 100];
contour(x,y,psi,co,'b')
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis equal, grid
axis([-2 2 -2 2])
```

โปรแกรม MATLAB สำหรับแสดงเส้นการไหลผ่านแผ่นเรียบ

```
%m-file flow pass circle and flat plate:
clear all
set(0,'DefaultAxesFontSize',12);
set(gcf,'DefaultAxesLineWidth',1.5);
U =10;
a =1;
alfa =pi*(30/180);

for m =1:161
   y(m) = -4.05 + 0.051*m;
   for n =1:161
      x(n) = -4.05 + 0.051*n;
      phi(m,n)=U*((x(n)*sin(alfa)-y(m)*cos(alfa))*(a^2/(x(n)^2+y(m)^2)-1));
   end
end
co =[-82.5 -62.5 -42.5 -32.5 -22.5 -17.5 -12.5 -7.5 -5 -2.5 -1.5 -0.5 0 0.5 1.5 2.5 5 7.5 12.5 17.5 22.5 32.5 42.5 62.5 82.5];
subplot(3,2,1);
contour(x,y,phi,co,'k');
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis equal;
%axis off;
axis([-2 2 -2 2])

for  n =1:161
    Y(n) = -4.05 + 0.05*n;
    for m =1:161
      X(m) = -4.05 + 0.05*m;
      if m < 81
```

```
            W(n,m)=U*((X(m)+i*Y(n))*cos(alfa)+i*sin(alfa)*sqrt((X(m)+i*Y(n))^2-4*a^2
));
        else
            W(n,m)=U*((X(m)+i*Y(n))*cos(alfa)-i*sin(alfa)*sqrt((X(m)+i*Y(n))^2-4*a^2
));
        end
    end
end
phi =real(W);
Psi =imag(W);
co =[-42.5 -32.5 -22.5 -17.5 -12.5 -7.5 -5 -2.5 -1.5 0 1.5 2.5 5 7.5 12.5 17.5 22.5 32.5 42.5];
subplot(3,2,2);
contour(X,Y,Psi,co,'k');
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis equal
%axis off;
axis([-4 4 -4 4])
```

โปรแกรม MATLAB สำหรับแสดงการแปลงเยาโคสกี

```
%M-file :Conformal Mapping -the Joukowski transformation w =(z +1/z):


alpha =0:pi/90:2*pi;

r =1.25;

x =r -1;

z1=-x +r*exp(i*alpha);

a =r -x;

subplot(3,2,1)

plot(real(z1),imag(z1))

axis('equal'), grid

title('z plane')

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])


w =z1+(a^2)./z1;

subplot(3,2,2)

plot(real(w),imag(w))

axis('equal'), grid

title('w plane')

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])
```

```
%To move the circle in the z plane and obtain another aerofoil try,
for example:

y =(r^2 - 1)^0.5;

z2 = y*i + r*exp(i*alpha);

a =(r^2 - y^2)^0.5;

subplot(3,2,3)

plot(real(z2),imag(z2))

axis('equal'), grid

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])


w = z2 + (a^2)./z2;

subplot(3,2,4)

plot(real(w),imag(w))

axis('equal'), grid

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])


x =0.2;

y =(r^2 - (1+x)^2)^0.5;

z3 = -x + y*i + r*exp(i*alpha);

a = -x +(r^2 - y^2)^0.5;

subplot(3, 2,5)

plot(real(z3),imag(z3))

axis('equal'), grid

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')
```

```
axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])

w = z3 + (a^2)./z3;

subplot(3,2,6)

plot(real(w),imag(w))

axis('equal'), grid

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])
```

โปรแกรม MATLAB สำหรับแสดงการออกแบบปีกอากาศเยาโคสกี

```
%M-file :Conformal Mapping -the Joukowski transformation w =(z +1/z)/2 :

alpha =0:pi/90:2*pi;

a =1.0;

z1=a*exp(i*alpha);

%subplot(2,2,1)

plot(real(z1),imag(z1),'b:')

L1=findobj(gcf,'type','line');

set(L1,'LineWidth',1.5)

axis('equal')

title('z plane')

xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])

hold on

grid on


xc =-0.2;

yc =0.2;

xt =1.0;

yt =-0.1;

Del =0.1;


z2=(xt -xc +i*(yt -yc)).*z1/a +xc +i*yc;

%subplot(2,2,2)
```

```
plot(real(z2),imag(z2),'m-.')
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis('equal')
title('zeta plane')
xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')
axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])

z3=z2+(-1+xt +i*yt )*(xt +i*yt -Del )./(z2+Del );
%subplot(2,2,3)
plot(real(z3),imag(z3),'r--')
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis('equal')
title('Z plane')
xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')
axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])

z4=z3+a^2./z3;
%subplot(2,2,4)
plot(real(z4),imag(z4),'k-')
L1=findobj(gcf,'type','line');
set(L1,'LineWidth',1.5)
axis('equal')
title('Z plane')
```

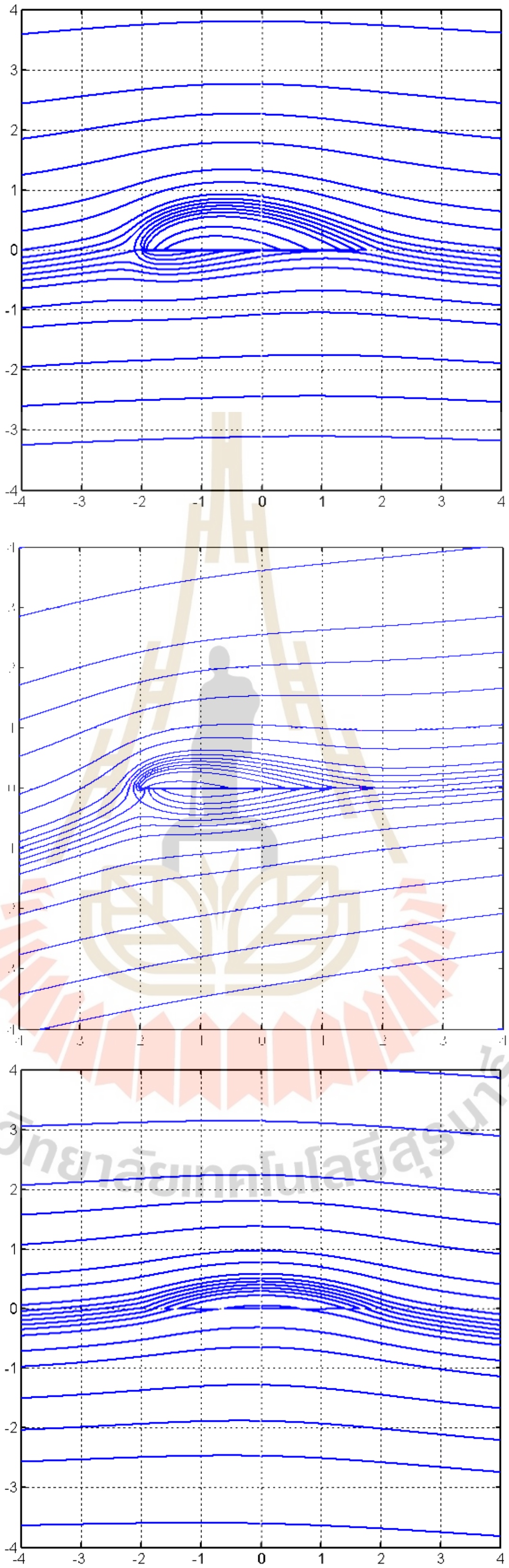
```
xlabel('Real'), ylabel('Imaginary')

axis([-2.25 2.25 -2.25 2.25])

hold off
```

โปรแกรม MATLAB สำหรับแสดงเส้นการไหลผ่านปีกอากาศ

```
%M-file for Potential Flow
%Flow Pass Rotating Cylinder mapped to Joukowski-airfoil

clear all
set(0,'DefaultAxesFontSize',12);
set(gcf,'DefaultAxesLineWidth',1.5);

a =1;
U =10;
alfa =pi*(10/180);
Gamma =4*pi*a*U*sin(alfa);

xc =-0.2;
yc =0.2;
xt =1.0;
yt =0.0;

x =-4 : 0.01 : -0.001;
y =-4 : 0.01 : 4;
x =x';y =y';
[x y]=meshgrid(x,y);

z1=x +i*y;
```

```
z2=( z1-(z1.^2-4*a^2).^0.5 )/2;

z3=( z2-xc -i*yc ).*a/( xt -xc +i*(yt -yc));

w =U*((cos(alfa)-i*sin(alfa)).*z3+(a^2)*((cos(alfa)+i*sin(alfa))./z3))+
i*Gamma*log(z3)./(2*pi);

psi =imag(w);

co =[-100 -82.5 -62.5 -42.5 -32.5 -22.5 -17.5 -12.5 -7.5 -5 -2.5 -1.5 -0.75 0 0.75 1.5 2.5 5 7.5 12.5 17.5 22.5 32.5 42.5 62.5 82.5
100];

contour(x,y,psi,co,'b')

L1=findobj(gcf,'type','line');

set(L1,'LineWidth',1.5)

axis equal

axis([-4 4 -4 4])

grid on

hold on


X =0:0.01:4;

Y =-4:0.01:4;

X =X';Y =Y';

[X Y]=meshgrid(X,Y);


z1=X +i*Y;

z2=( z1+(z1.^2-4*a^2).^0.5 )/2;

z3=( z2-xc -i*yc ).*a/( xt -xc +i*(yt -yc));

w =U*((cos(alfa)-i*sin(alfa)).*z3+(a^2)*((cos(alfa)+i*sin(alfa))./z3))+
i*Gamma*log(z3)./(2*pi);

psi1=imag(w);
```

```
co  = [-100 -82.5 -62.5 -42.5 -32.5 -22.5 -17.5 -12.5 -7.5 -5 -2.5 -1.5 -0.75 0 0.75 1.5 2.5 5 7.5 12.5 17.5 22.5 32.5 42.5 62.5 82.5
100];

contour(X,Y,psi1,co,'b')

L1 = findobj(gcf,'type','line');

set(L1,'LineWidth',1.5)

axis equal

axis([-4 4 -4 4])
```



รูปที่ ค.8 การไหลผ่านปีกอากาศรูปทรงต่าง ๆ ที่มุมปะทะ 10°

ประวัติผู้เขียน

นายชัยฤกษ์ เชื้อประสาท เกิดเมื่อวันที่ 12 พฤษภาคม พ.ศ. 2520 เริ่มศึกษาชั้นประถมที่โรงเรียนบ้านแดงสว่าง ชั้นประถมศึกษาที่ 5-6 ที่โรงเรียนภูมิวิทยา ชั้นมัธยมศึกษาที่โรงเรียนภูเขียว จังหวัดชัยภูมิ และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล (เกียรตินิยมอันดับ 1) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา เมื่อปี พ.ศ. 2543 โดยหลังจากสำเร็จการศึกษาได้รับใบอนุญาตเป็นผู้ประกอบวิชาชีพวิศวกรรมควบคุม ระดับภาคีวิศวกร สาขาวิศวกรรมเครื่องกล และเริ่มทำงานที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุนารี ตำแหน่งวิศวกร ประจำที่สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

เมื่อ พ.ศ. 2552 เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาเอก สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ขณะศึกษาได้รับทุนโครงการปริญญาเอกกาญจนาภิเษก (คปก.) บริหารจัดการโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ในขณะนั้น