เอกสารประกอบการสอนวิชา

103101 แคลคูลัส 1 (Calculus I)

โดย

ดร. เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน แคลคูลัส 1 นี้ได้ถูกเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอน ในรายวิชา 103101 แคลคูลัส 1 ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในเอกสารเล่มนี้จะประกอบไปด้วยเนื้อหา 5 บทด้วยกัน คือ บทที่ 1 จะเป็นเรื่องของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บทที่ 2 จะเป็นเรื่องของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ส่วนในบทที่ 3 จะเป็นเรื่องของการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ บทที่ 4 จะเป็นเรื่องของฟังก์ชันผกผันซึ่งประกอบไปด้วย ฟังก์ชันผกผัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม ส่วนบทที่ 5 บทสุดท้ายจะเป็นเรื่องของการอินทิเกรต

ผู้เขียนหวังว่าเอกสารประกอบการสอนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่นักศึกษาไม่มากก็น้อย และถ้ามีข้อบกพร่องประการใด ผู้เขียนก็ขออภัยไว้ ณ ที่นี้ด้วย และยินดีที่จะรับฟังคำติชมและพร้อมที่จะแก้ไขให้ดีขึ้นต่อไป

เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์
7 เมษายน 2553

สารบัญ

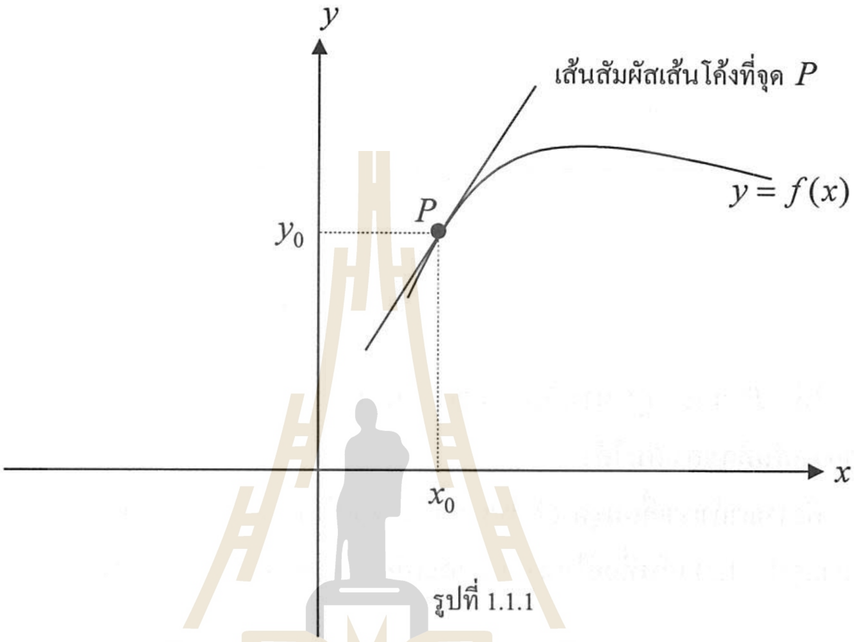
หน้า

บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limits and Continuity)

1.1 ลิมิต (Limits)

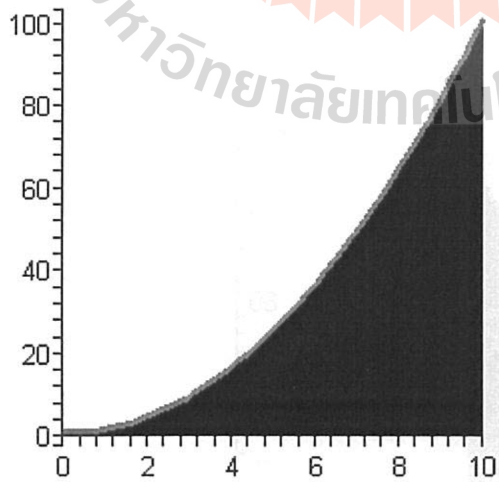
พิจารณาปัญหาดังต่อไปนี้

<u>ปัญหาที่ 1</u> เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ และจุด $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนกราฟของฟังก์ชัน f แล้วเราจะมีวิธีการหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $P(x_0, y_0)$ ได้อย่างไร



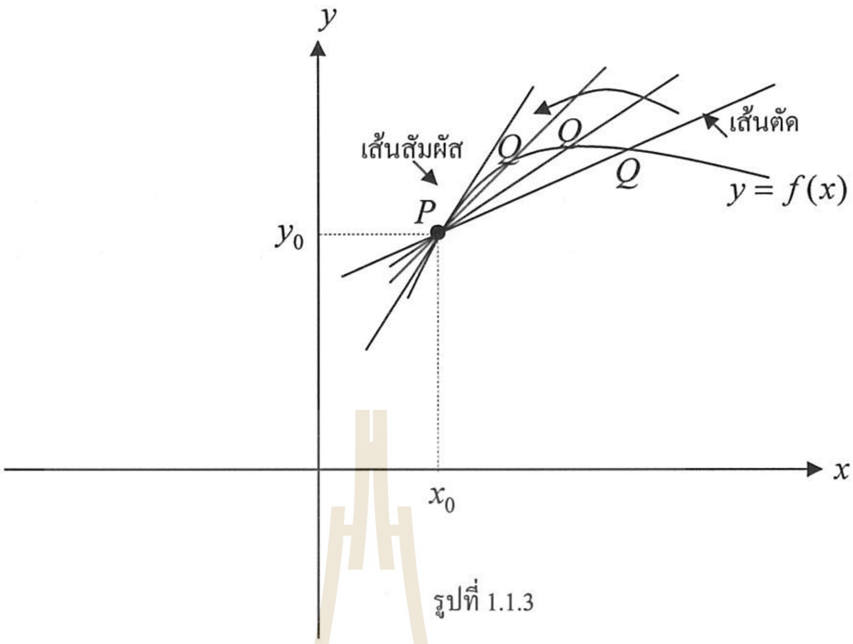
รูปที่ 1.1.1

<u>ปัญหาที่ 2</u> กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $f(x) \geq 0$ แล้วเราจะสามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของกราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง $[0,10]$ บนแกน x ตามรูปที่ 1.1.2 ได้อย่างไร



รูปที่ 1.1.2

เส้นสัมผัสกับลิมิต



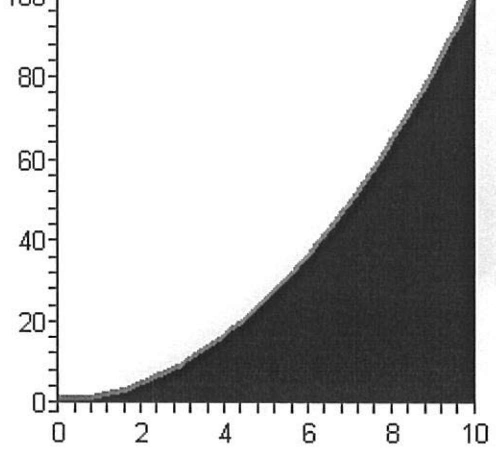
รูปที่ 1.1.3

ให้ P และ Q ต่างเป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้งในระนาบ XY เส้นตรงที่เราลากผ่านจุด P และ Q เรียกว่าเส้นตัดของเส้นโค้ง

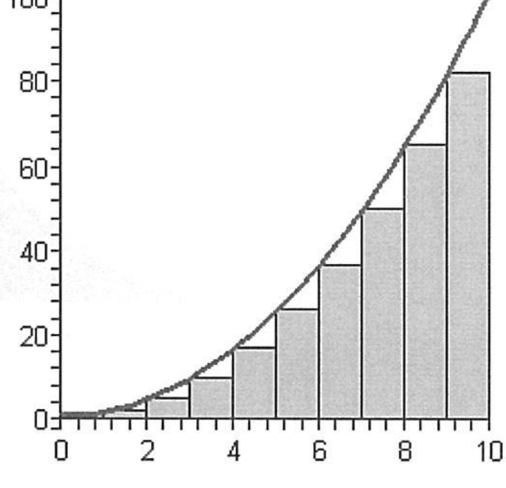
พิจารณาถ้าเราเลื่อนจุด Q ไปตามเส้นโค้งเข้าหาจุด P แล้วเส้นตัดจะหมุนไปสู่ตำแหน่งลิมิต (ตามรูป 1.1.3) เส้นที่อยู่ในตำแหน่งลิมิตนี้ เราจะพิจารณาให้เป็นเส้นสัมผัสที่จุด P (tangent line at P)

พื้นที่กับลิมิต

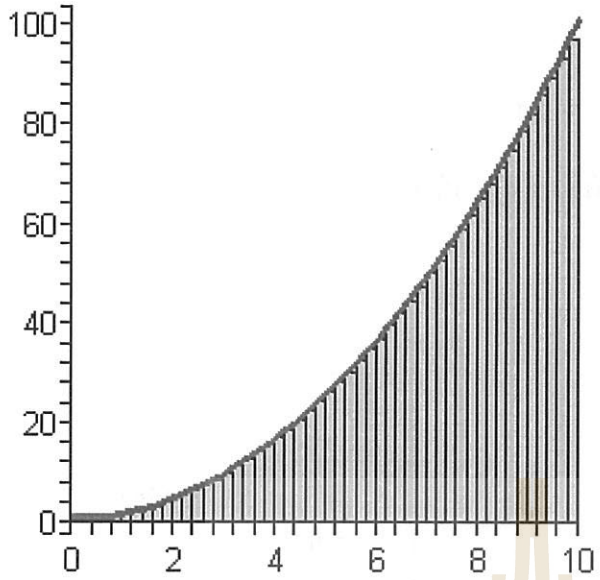
จากเรื่องของการหาเส้นสัมผัสที่นำไปสู่ความคิดเรื่องลิมิต สำหรับเรื่องของการหาพื้นที่ก็เช่นเดียวกัน



(a)



(b)



(c)

รูปที่ 1.1.4

พิจารณาพื้นที่แรเงาในรูป 1.1.4 (a) เราจะหาพื้นที่ประมาณของรูปนี้ได้โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างเท่ากันแนบในใต้เส้นโค้งดังรูป 1.1.4 (b) แล้วบวกพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเหล่านี้ เราจะเห็นว่าพื้นที่ที่ได้จากการประมาณ มีค่าแตกต่างจากค่าจริงค่อนข้างมาก แต่ถ้าเราแบ่งใหม่ให้ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากลดลง ยิ่งความกว้างลดลงมากเท่าไหร่ เราจะเห็นว่าช่องว่างระหว่างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับเส้นโค้งจะน้อยลงด้วย ดังนั้นเมื่อเราบวกพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แบ่งใหม่คราวนี้จะเห็นว่าค่าพื้นที่ที่ได้จะใกล้เคียงกับพื้นที่จริงยิ่งขึ้น ดังรูป 1.1.4 (c) และจะเท่ากับค่าจริงเมื่อเป็นค่าลิมิต

ลิมิต

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \qquad x\neq 1$$

เราจะเห็นว่า เราไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันที่ $x=1$ ได้ แต่เราสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ได้ ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

$x<1$

x	$f(x)$
0	1.0000
0.5	1.5000
0.9	1.9000
0.95	1.9500
0.99	1.9900
0.995	1.9950
0.999	1.9990

ตารางที่ 1.1.1

$x>1$

x	$f(x)$
2	3.0000
1.5	2.5000
1.09	2.0900
1.05	2.0500
1.01	2.0100
1.005	2.0050
1.001	2.0010

ตารางที่ 1.1.2

จากตาราง 1.1.1 จะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

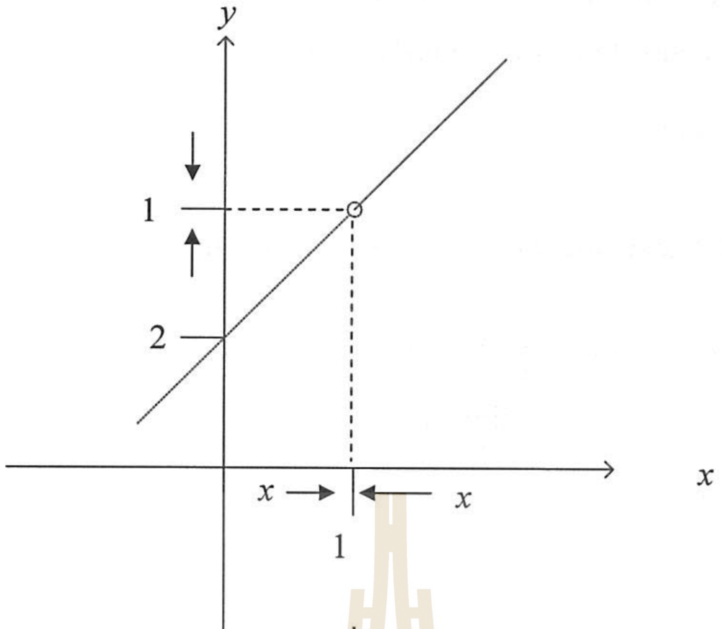
และเรียกลิมิตนี้ว่า **ลิมิตซ้าย (Left – handed limit)**

ในทำนอนเดียวกันจากตาราง 1.1.2 เราจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวาซึ่ง เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

และเรียกลิมิตนี้ว่า **ลิมิตขวา (Right – handed limit)**

นอกจากวิธีการสังเกตค่าของฟังก์ชันที่จุดต่างๆใกล้ 1 จากตารางแล้วเรายังสามารถสังเกตได้จากกราฟของฟังก์ชันด้วย



รูปที่ 1.1.5

จากรูป 1.1.5 เราได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$ และ เมื่อ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เช่นกัน ดังนั้น $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

จะเห็นว่า $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 และเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

<u>บทนิยามที่ 1.1.1</u> ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า L_1 ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางขวา เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางขวาเท่ากับ L_1**

ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า L_2 ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางซ้าย เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_1$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางซ้ายเท่ากับ L_2**

ถ้าลิมิตซ้ายเท่ากับลิมิตขวา นั่นคือ

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

เราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าสู่ x_0 เท่ากับ L**

เราเรียก $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ว่า**ลิมิตข้างเดียว** ของ $f(x)$ ที่ x_0 และ เราเรียก $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ว่า **ลิมิตสองข้าง** ของ $f(x)$ ที่ x_0

หมายเหตุ ถ้า $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ แล้วเราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1.1.1 กำหนด $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ จงหา

1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x < 1$	$f(x)$
0	1.0000
0.1	1.1100
0.5	1.7500
0.55	1.8525
0.95	2.8525
0.99	2.9701
0.999	2.9970

ตารางที่ 1.1.3

$x > 1$	$f(x)$
2	7.0000
1.99	6.9501
1.95	6.7525
1.5	4.7500
1.1	3.3100
1.01	3.0301
1.001	3.0030

ตารางที่ 1.1.4

(1) จากตารางที่ 1.1.3 เราจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $(x < 1)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

(2) จากตารางที่ 1.1.4 เราจะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x > 1)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

(3) จาก $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ □

ตัวอย่างที่ 1.1.2 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x<2 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } x>2 \end{cases}$

จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x<2$	$f(x)$
1	2.0000
1.05	2.1000
1.1	2.2000
1.5	3.0000
1.9	3.8000
1.99	3.9800
1.999	3.9980

ตารางที่ 1.1.5

$x>2$	$f(x)$
3	7.0000
2.99	6.9800
2.9	6.8000
2.5	6.0000
2.1	5.2000
2.01	5.0200
2.001	5.0020

ตารางที่ 1.1.6

(1) จากตารางที่ 1.1.5 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย ($x<2$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=4$

(2) จากตารางที่ 1.1.6 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา ($x>2$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 5 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=5$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

ตัวอย่างที่ 1.1.3 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{5x}$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x<0$	$f(x)$
-0.5	0.3990
-0.25	0.5453
-0.1	0.5910
-0.01	0.5999
-0.001	0.6000
-0.0001	0.6000

ตารางที่ 1.1.7

$x>0$	$f(x)$
0.5	0.3990
0.25	0.5453
0.1	0.5910
0.01	0.5999
0.001	0.6000
0.0001	0.6000

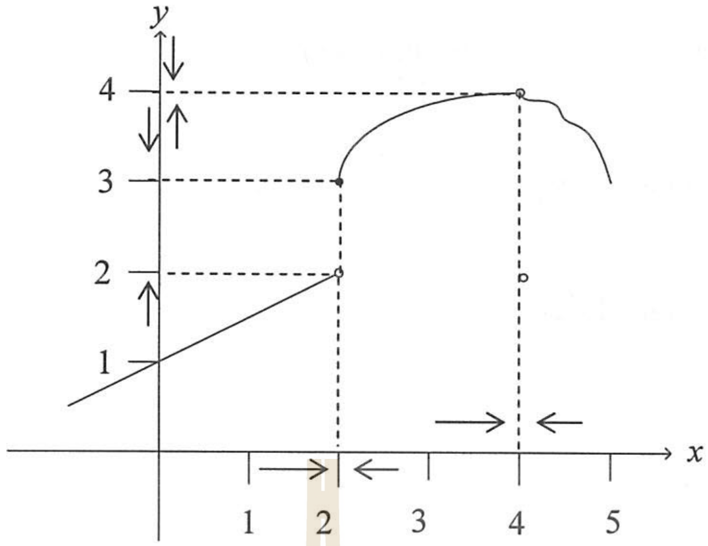
ตารางที่ 1.1.8

(1) จากตารางที่ 1.1.7 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ($x<0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0.6 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0.6$

(2) จากตารางที่ 1.1.8 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ($x>0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0.6 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.6$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.6$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.6$ □

ตัวอย่างที่ 1.1.4 กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ แสดงดังรูปที่ 1.1.6



รูปที่ 1.1.6

จงหาค่าต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$
6. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

<u>วิธีทำ</u> จากกราฟ 1.1.6 เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 ด้วย แต่เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 ดังนั้น

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$ และ (2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

จากกราฟ เราก็จะเห็นได้อีกว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย $(x<4)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา $(x>4)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 เช่นกัน ดังนั้น

(4) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 4$ และ (5) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 4$

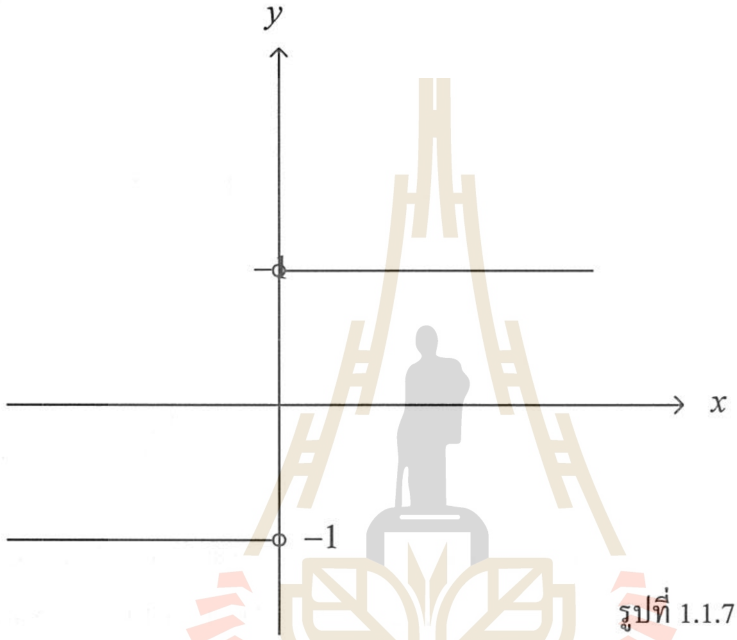
(6) จาก $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 4$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4$ □

ตัวอย่างที่ 1.1.5 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ โดยที่ $x\neq 0$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของ $|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ ดังนั้น $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x}=1, & x>0 \\ \dfrac{-x}{x}=-1, & x<0 \end{cases}$

เพราะฉะนั้นกราฟของฟังก์ชันคือ



รูปที่ 1.1.7

จากรูปที่ 1.1.7 เราจะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x<0)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x>0)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1 ดังนั้น

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ และ

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

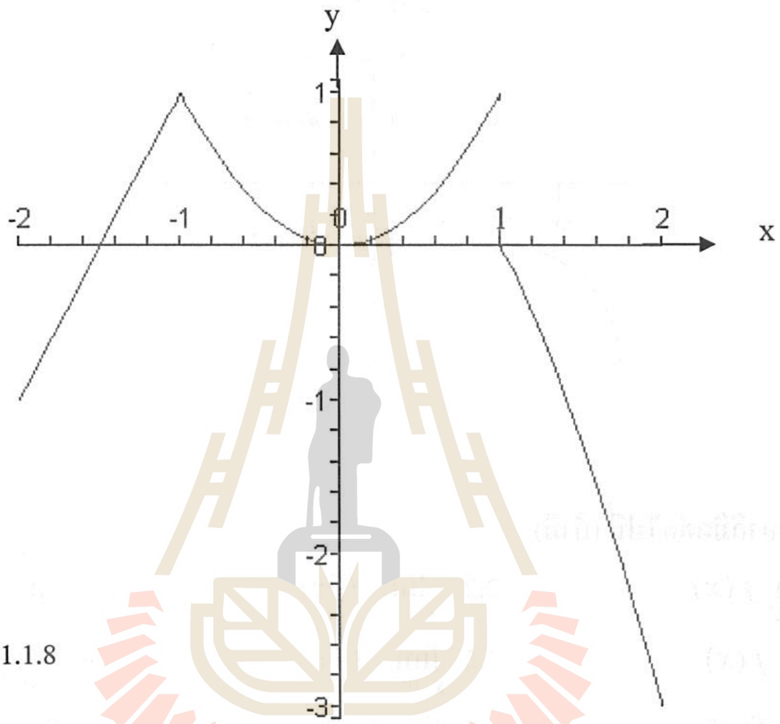
ตัวอย่างที่ 1.1.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x<-1 \\ x^2, & -1\le x<1 \\ 1-x^2, & x\ge 1 \end{cases}$

จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งหาค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (5) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 1.1.8

จากกราฟของ $y=f(x)$ ในรูปที่ 1.1.8 เราจะเห็นได้ว่า

(1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$ (2) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$ (3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ (5) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$ (6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

สรุป จากที่กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้เราสรุปได้ว่า

(1) ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=M$ แล้ว $L=M$

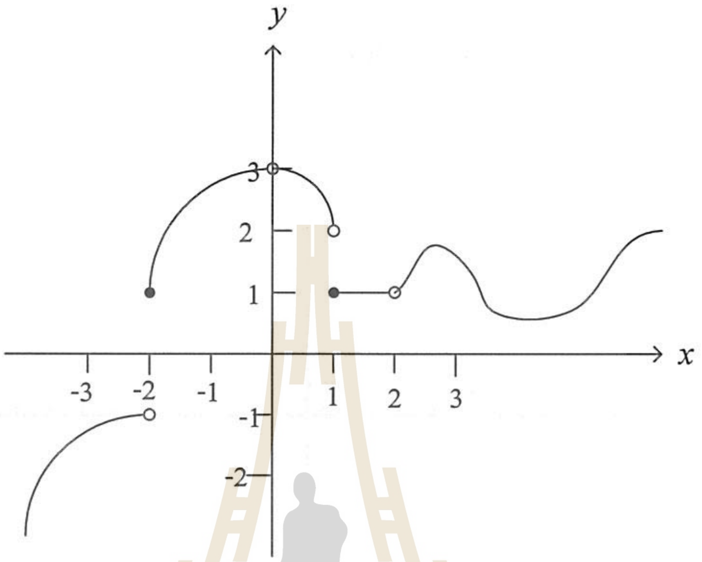
(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

(3) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้หรือไม่มีลิมิต

<u>**แบบฝึกหัดที่ 1.1**</u>

1. กำหนดให้ $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$ แล้วเราสามารถสรุปได้หรือไม่ว่า $f(2) = 6$

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูปข้างล่าง



จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

2.1 $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ 2.2 $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ 2.3 $\lim_{x\to -2} f(x)$

2.4 $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ 2.5 $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ 2.6 $\lim_{x\to 0} f(x)$

2.7 $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ 2.8 $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ 2.9 $\lim_{x\to 1} f(x)$

2.10 $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ 2.11 $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ 2.12 $\lim_{x\to 2} f(x)$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

4. กำหนด $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

4.1 $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ 4.2 $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ 4.3 $\lim_{x\to 2} f(x)$

5. กำหนด $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

5.1 $\lim_{x\to 25^-} f(x)$ 5.2 $\lim_{x\to 25^+} f(x)$ 5.3 $\lim_{x\to 25} f(x)$

6. กำหนด $f(x) = 1 - \dfrac{\sin(3x)}{2x}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

6.1 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 6.2 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 6.3 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

7. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 1 \\ -x^2, & 1 \le x < 3 \\ -(x+6), & x \ge 3 \end{cases}$

พร้อมทั้งหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

7.1 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 7.2 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 7.3 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

7.4 $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ 7.5 $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ 7.6 $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

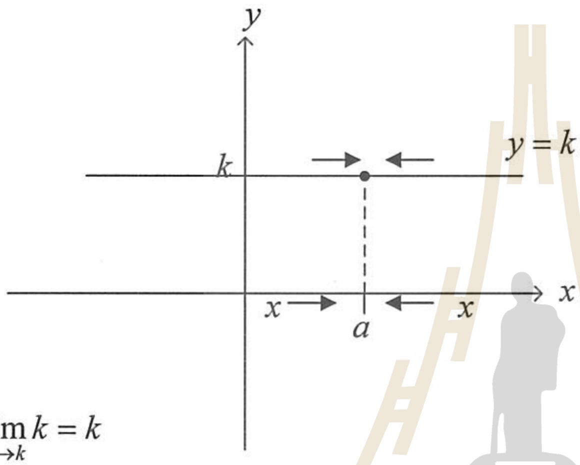
1.2 การหาค่าลิมิตโดยใช้กฎลิมิต (Calculating Limits Using the Limit Laws)

ในหัวข้อนี้เราจะนำกฎลิมิตมาใช้เพื่อหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งจะทำให้การหาค่าของลิมิตง่ายและสะดวกมากกว่า การหาค่าโดยการคำนวณตัวเลข หรือการวาดรูปซึ่งได้แสดงไปแล้วในหัวข้อ 1.1

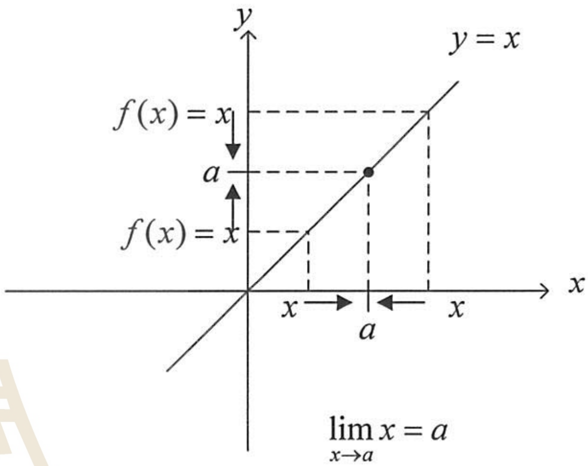
<u>ทฤษฎีบทที่ 1.2.1</u> ให้ a และ k เป็นจำนวนจริง แล้ว

(1a) $\lim\limits_{x\to a} k = k$

(2a) $\lim\limits_{x\to a} x = a$



$\lim\limits_{x\to k} k = k$



$\lim\limits_{x\to a} x = a$

รูปที่ 1.2.1

ตัวอย่างที่ 1.2.1

(1) $\lim\limits_{x\to -1} 2 = 2$　　(2) $\lim\limits_{x\to \pi} -1 = -1$

(3) $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$　　(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{2}$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.2.2</u> ให้ a เป็นจำนวนจริง และสมมุติให้

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L$$

แล้ว

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$

(4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (ถ้า $M \neq 0$)

(5) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, เมื่อ $L > 0$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่

นอกจากนี้, สมบัติข้อ (1) – (5) ยังคงเป็นจริงสำหรับลิมิตด้านเดียว (เมื่อ $x \to a^-$ หรือ $x \to a^+$)

จากทฤษฎีบท 1.2.2 เราสามารถเขียนเป็นภาษาพูดได้คือ

1. ลิมิตของผลบวกเท่ากับผลบวกของลิมิต
2. ลิมิตของผลลบเท่ากับผลลบของลิมิต
3. ลิมิตของผลคูณเท่ากับผลคูณของลิมิต
4. ลิมิตของผลหารเท่ากับผลหารของลิมิต
5. ลิมิตของรากที่ n เท่ากับรากที่ n ของลิมิต

สำหรับกรณีเฉพาะของข้อ (3) ในทฤษฎีบทที่ 1.2.2 เมื่อ $f(x) = k$ เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ เราจะได้ว่า

(6) $\lim_{x\to a}\left(kg(x)\right) = \lim_{x\to a} k . \lim_{x\to a} g(x) = k \lim_{x\to a} g(x)$

จากข้อ (1) – (3) ในทฤษฎีบทที่ 1.2.2 เราสามารถขยายได้ว่า

ถ้า $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1,\ \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$

แล้ว

(7)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right] &= \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x) \\ &= L_1 + L_2 + \ldots + L_n\end{aligned}$$

(8)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f_1(x) - f_2(x) - \ldots - f_n(x)\right] &= \lim_{x\to a} f_1(x) - \lim_{x\to a} f_2(x) - \ldots - \lim_{x\to a} f_n(x) \\ &= L_1 - L_2 - \ldots - L_n\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)\right] &= \left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)\left(\lim_{x\to a} f_2(x)\right)\ldots\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) \\ &= L_1 L_2 \ldots L_n\end{aligned}$$

นอกจากนี้ จากสมบัติข้อ (9) เราจะได้ว่า

(10)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n &= \lim_{x\to a}\underbrace{\left(f(x)\cdot f(x)\ldots f(x)\right)}_{n \text{ terms}} \\ &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\ldots\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \\ &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n\end{aligned}$$

และจากข้อ (10) จะได้

(11) $\lim\limits_{x\to a} x^n = \left(\lim\limits_{x\to a} x\right)^n = a^n$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+3x-1)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-1) &= \lim_{x\to 2}2x^2+\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}1 && \text{(จากกฎข้อ (7), (8))}\\ &= 2\lim_{x\to 2}x^2+3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}1 && \text{(จากกฎข้อ (6))}\\ &= 2(2^2)+3(2)-1 && \text{(จากกฎข้อ (1a), (2a), (11))}\\ &= 13\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} &= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}}{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)} && \text{(จากกฎข้อ (4))}\\ &= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)}}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}1} && \text{(จากกฎข้อ (2),(5))}\\ &= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}1}}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}1} && \text{(จากกฎข้อ (1))}\\ &= \frac{\sqrt{0^2+1}}{0-1}=-1 && \text{(จากกฎข้อ (1a), (2a),(6),(11))}\end{aligned}$$

□

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1.2.3 เราจะเห็นว่าค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}1=0-1=-1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0 ดังนั้นในการหาค่าของลิมิตในตัวอย่างนี้เราจึงสามารถใช้กฎผลหารในข้อที่ 4 ได้

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(5x^2-1)}{3x^2(x-1)^4}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(5x^2-1)}{3x^2(x-1)^4} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}2(5x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3}3x^2(x-1)^4} \quad \text{(จากกฎข้อ (4))}$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-1)}{3\lim\limits_{x\to 3}x^2(x-1)^4} \quad \text{(จากกฎข้อ (6))}$$

$$= \frac{2\left[\lim\limits_{x\to 3}5x^2-\lim\limits_{x\to 3}1\right]}{3\left[\lim\limits_{x\to 3}x^2.\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^4\right]} \quad \text{(จากกฎข้อ (2), (3))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5\lim\limits_{x\to 3}x^2-\lim\limits_{x\to 3}1}{(\lim\limits_{x\to 3}x^2)(\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}1)^4}\right) \quad \text{(จากกฎข้อ (2), (6), (10))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5(3^2)-1}{3^2(3-1)^4}\right) \quad \text{(จากกฎข้อ (1a), (2a), (11))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{44}{9\times 16}\right) = \frac{11}{54}$$

□

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1.2.4 เราจะเห็นว่าค่าของ

$$\lim_{x\to 3}3x^2(x-1)^4 = 3\lim_{x\to 3}x^2.\lim_{x\to 3}(x-1)^4$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 3}x\right)^2.\left(\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}1\right)^4$$

$$= 3.3^2.(3-1)^4 = 432 \neq 0$$

ซึ่งไม่เท่ากับ 0 ดังนั้นในการหาค่าของลิมิตในตัวอย่างนี้เราจึงสามารถใช้กฎผลหารในข้อที่ 4 ได้

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.2.2 ค่าของลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม $P(x) = 2x^2+3x-1$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ $P(2) = 2(2^2)+3(2)-1 = 13$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.3 สำหรับฟังก์ชันพหุนาม $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots c_0$ ใดๆ และให้ a เป็นจำนวนจริงแล้ว

(12) $\lim\limits_{x\to a}P(x) = P(a) = c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_0$

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-1)^3$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to 1}(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-1)^3 = \left(\lim\limits_{x\to 1}\left(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-\right)1\right)^3$ (ใช้กฎข้อ (10))

$$= ((1)^7-6(1)^5+3(1)^4-2(1)^2+1-1)^3 \quad \text{(ใช้กฎข้อ (12))}$$

$$= (1-6+3-2+1-1)^3$$

$$= (-4)^3 = -64$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+1}{3x^2+2}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+2\right)=3(2^2)+2=12+2=14$ (ใช้กฎข้อ 12)

และ

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-2x^2+1\right)=(2^3)-2(2^2)+1=8-8+1=1 \quad \text{(ใช้กฎข้อ 12)}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+2\right)=14\neq 0$ ดังนั้นเราสามารถใช้กฎข้อ (4) จะได้

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+1}{3x^2+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+2)} \quad \text{(ใช้กฎข้อ 4)}$$

$$=\frac{1}{14}$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^3-1}\right)$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=1^3-1=0$ ดังนั้นเราไม่สามารถใช้กฎข้อ (4) ในการหาค่าของลิมิตในข้อนี้ได้ แต่เราสามารถหาค่าของลิมิตได้โดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิตเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันใหม่ดังนี้

$$\frac{x-1}{x^3-1}=\frac{x-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 1$$

ดังนั้น
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)} \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 4)}$$
$$=\frac{1}{1^2+1+1}=\frac{1}{3} \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 1a, 12)} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 1.2.8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

วิธีทำ พิจารณาค่าของ
$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\sqrt{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}-\lim_{x\to 0}1$$
$$=\sqrt{0+1}-1=0$$

ดังนั้นเราไม่สามารถหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ โดยใช้กฎผลหารได้ (กฎข้อ 4) แต่เราสามารถหาค่าของลิมิตโดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิตโดยการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันใหม่ดังนี้

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$
$$=\sqrt{x+1}+1 \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

ดังนั้นค่าลิมิตจะเป็น

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}+\lim_{x\to 0}1 \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 1, 5)}$$
$$=\sqrt{0+1}+1=2 \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 1a, 2a)} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 1.2.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12}$

<u>วิธีทำ</u> จากข้อนี้เราไม่สามารถใช้กฎผลหารได้ทันที เนื่องจากลิมิตของตัวส่วนมีค่าเป็น 0 เมื่อ x เข้าใกล้ -2 แต่เราจะเห็นว่า สำหรับ $x\neq-2$ เราจะได้ว่า $x+2\neq0$ ดังนั้นเราจึงต้องเริ่มต้นโดยการแยกตัวประกอบ $(x+2)$ ออกมาทั้งเศษและส่วนและตัดค่า $(x+2)$ ออกไป จะได้

$$\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12}=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-6)(x+2)}=\frac{(x-4)}{(x-6)} \qquad \text{เมื่อ } x\neq-2$$

ดังนั้นถ้าหาก x เข้าใกล้ -2 แต่ $x\neq-2$ เราสามารถหาค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12} &= \lim_{x\to-2}\frac{(x-4)}{(x-6)} \\
&= \frac{\lim_{x\to-2}(x-4)}{\lim_{x\to-2}(x-6)} && \text{(ใช้กฎข้อ 4)} \\
&= \frac{\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}4}{\lim_{x\to-2}x-\lim_{x\to-2}6} && \text{(ใช้กฎข้อ 2)} \\
&= \frac{-2-4}{-2-6} && \text{(ใช้กฎข้อ 1a และ 2a)} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.2.10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> จากข้อนี้เราไม่สามารถใช้กฎผลหารได้ทันที เนื่องจากลิมิตของตัวส่วนเป็นศูนย์ ฉะนั้นใช้วิธีการทางพีชคณิตช่วยดังนี้

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\times\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}-3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-3^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}$$

$$=\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}$$

$$=\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}-3} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

ดังนั้นค่าลิมิตจะได้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+9}+\lim\limits_{x\to 0}3} \qquad \text{ใช้กฎผลหารและกฎผลบวก}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+9)}+3} \qquad \text{ใช้กฎข้อ 1 และ 9}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0^2+9}+3}$$

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

□

ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ต่อไปนี้เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทฤษฎีบทต่อไปนี้เราจะนำไปใช้ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

ทฤษฎีบทที่ 1.2.3

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$
3. $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$
4. $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

หมายเหตุ ในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์ ซึ่งผู้อ่านสามารถหาอ่านได้ในหนังสือแคลคูลัสทั่วๆไป

ตัวอย่างที่ 1.2.11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

วิธีทำ สำหรับ $x \neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \text{(โดย ทบ. 1.2.3 ข้อ 5)} \qquad \square$$

จากตัวอย่างนี้เราจึงสรุปได้ว่า $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1}$

ตัวอย่างที่ 1.2.12 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$$

ให้ $u=4x$ เราจะได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ ค่าของ $u\to 0$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.13 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{6x}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}\cdot\sin 2x$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{6}\cdot\sin 2x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin 2x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0 \qquad (\text{เมื่อ } x\to 0 \text{ ดังนั้น } 2x\to 0)$$
$$=0$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^2 x)}{x}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\\
&= -1\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 1.2.15 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{\tan^2 3x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{\tan^2 3x} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}\right)^2\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}\right)^2\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\cos 3x}{\sin 3x\cdot\cos 2x}\right)^2\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\right)^2\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\right)^2\\
&= \left(1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\right)^2 \qquad (\text{เมื่อ } x\to 0 \text{ ดังนั้น } 2x\to 0 \text{ และ } 3x\to 0)\\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

□

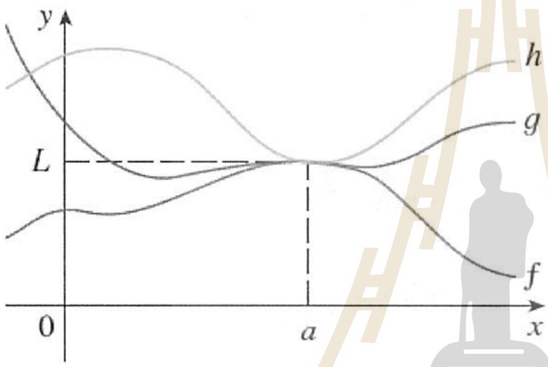
ตัวอย่างที่ 1.2.16 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin\left(x^2\right)}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^2$ เราจะได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ ค่าของ $u\to 0$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin\left(x^2\right)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$$

□

<u>**ทฤษฎีบทที่ 1.2.4**</u> **(ทฤษฎีบทแซนวิช)** ถ้า $f(x)\le g(x)\le h(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a (เงื่อนไขนี้อาจจะยกเว้นที่ a ก็ได้) และถ้า $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$



รูปที่ 1.2.2

รูปที่ 1.2.2 นี้แสดงกราฟของฟังก์ชัน g ที่ถูกบีบให้อยู่ระหว่างกราฟของฟังก์ชัน f และ h ในบริเวณที่ใกล้กับ a ดังนั้นถ้าลิมิตของ f และ h ต่างมีค่าเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a

เพราะฉะนั้นเราก็จะเห็นได้ว่า g ก็จะถูกบังคับให้มีลิมิตเท่ากับ L ด้วย เมื่อ x เข้าใกล้ a

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. กำหนดให้ $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} h(x) = 8$
จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ถ้าลิมิตหาค่าได้ และถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ให้อธิบายด้วยว่าทำไม

(a) $\lim_{x\to a}[f(x)+h(x)]$

(b) $\lim_{x\to a}[f(x)]^2$

(c) $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)}$

(d) $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}$

(e) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}$

(f) $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(h) $\lim_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{h(x)-f(x)}$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้โดยใช้กฎของลิมิต

(a) $\lim_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$

(b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$

(c) $\lim_{x\to 3}(x^2-4)(x^3+5x-1)$

(d) $\lim_{x\to 1}(\dfrac{1+2x}{x^4+3x^2+1})^3$

(e) $\lim_{x\to -2}\sqrt{3x^4+2x+5}$

3. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(a) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

(c) $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

(d) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

(e) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

(f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

(g) $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

(h) $\lim_{t\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(i) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

(j) $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

(k) $\lim_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

(l) $\lim_{t\to 0}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t})$

(m) $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(n) $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

(o) $\lim_{t\to 0}(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t})$

(p) $\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x^4+9x^2}+5x}{x+4}$

(q) $\lim_{x\to 0}\frac{5x-2|x|}{3x-|x|}$

(r) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x+2x^2}{|2x+1|}$

(s) $\lim_{x\to \frac{3}{2}^-}\frac{5+|2x-3|}{x^2-x+1}$

4. จงหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 3x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 9x}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan x}$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sqrt[3]{x}}$

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{\sin x}$

(h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin(x+\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x+\tan x}$

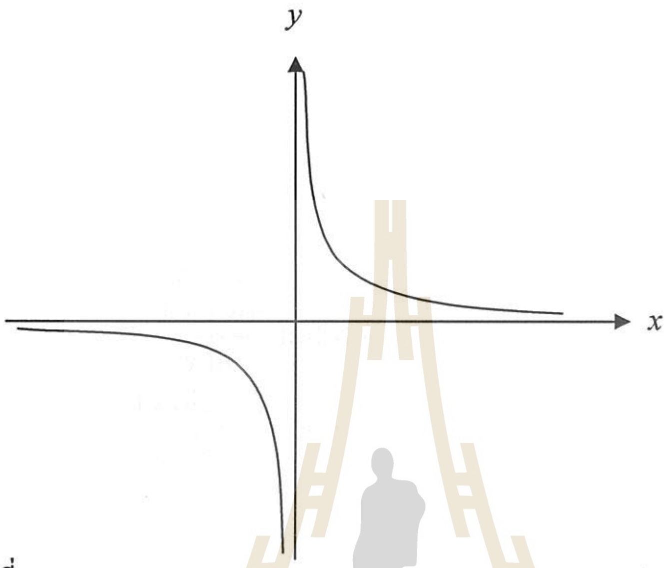
(j) $\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$

(k) $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^2}$

1.3 ลิมิตที่อนันต์และลิมิตอนันต์ (Limits at infinity and infinite limits)

ลิมิตที่อนันต์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$



รูปที่ 1.3.1

จากกราฟ (รูปที่ 1.3.1) เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าบวกเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด (เขียนแทนด้วย $x \to +\infty$) ค่าของฟังก์ชัน f มี ค่าเข้าใกล้ 0 เราเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

และเช่นเดียวกัน เมื่อ x มีค่าลบลดน้อยลงเรื่อยๆ โดยไม่มีขอบเขตจำกัด (เขียนแทนด้วย $x \to -\infty$) ค่าของฟังก์ชัน f มี ค่าเข้าใกล้ 0 เราเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

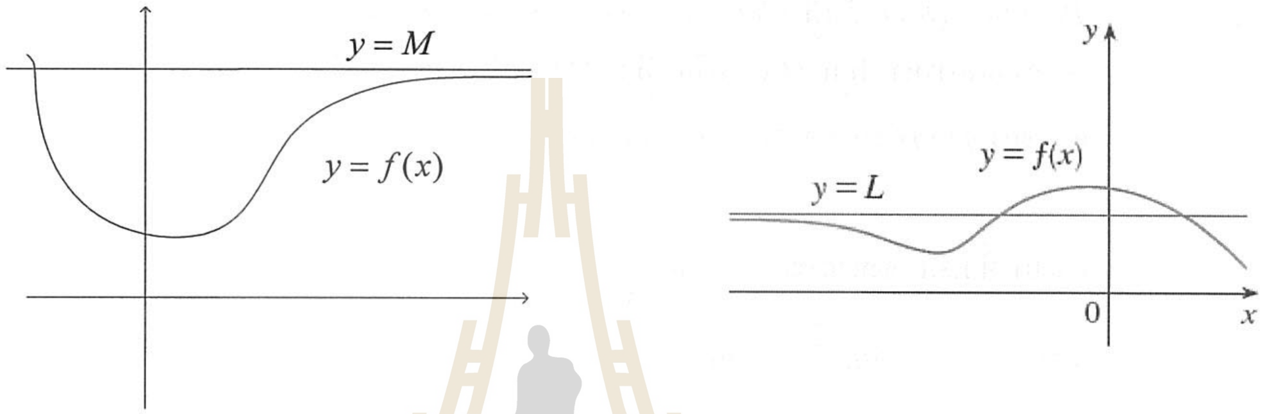
<u>หมายเหตุ</u> สัญลักษณ์ $+\infty$ และ $-\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง เราใช้สัญลักษณ์ $x \to +\infty$ ในความหมายที่ว่า " x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด" และใช้สัญลักษณ์ $x \to -\infty$ ในความหมายที่ว่า " x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด"

<u>**บทนิยามที่ 1.3.1**</u> ถ้าค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง M เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด แล้วเราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M \qquad \text{หรือ} \qquad f(x) \to M \quad \text{เมื่อ} \quad x \to +\infty$$

ในทำนองเดียวกัน, ถ้าค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง L เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด แล้วเราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \text{หรือ} \qquad f(x) \to L \quad \text{เมื่อ} \quad x \to -\infty$$



รูปที่ 1.3.2 (a) (b)

จากรูปที่ 1.3.2(a) จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ M ดังนั้น $\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$ และจากกราฟเราก็สังเกตเห็นได้อีกว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น กราฟของฟังก์ชัน f เข้าใกล้เส้นตรง $y = M$ เราจะเรียกเส้นตรงนี้ว่า **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote)ของฟังก์ชัน f

ในทำนองเดียวกันจากรูปที่ 1.3.2(b) จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ L ดังนั้น $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ และจากกราฟเราก็สังเกตเห็นได้อีกว่า เมื่อ x มีค่าลดลง กราฟของฟังก์ชัน f เข้าใกล้เส้นตรง $y = L$ ดังนั้นเส้นตรงนี้ก็คือ **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote)ของฟังก์ชัน f

คุณสมบัติของลิมิตที่อนันต์

คุณสมบัติของลิมิตที่อนันต์ มีคุณสมบัติบางประการเหมือนกับคุณสมบัติของลิมิตที่ได้พูดไปแล้วในหัวข้อ 1.2 โดยการแทน $x \to a$ ด้วย $x \to +\infty$ หรือ $x \to -\infty$ และมีคุณสมบัติเพิ่มเติมคือ

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะบวก

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะบวก และ $\dfrac{1}{x^n}$ หาค่าได้ เมื่อ $x < 0$

คุณสมบัติสองข้อนี้มีประโยชน์ในการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยมีหลักในการหาค่าลิมิตว่า ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ และถ้าต้องการหา $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ให้เอา x ที่มีกำลังสูงสุดในตัวส่วน หารในเศษและส่วนของ $f(x)$ ก่อนแล้วค่อยนำกฎของลิมิตมาใช้

ตัวอย่างที่ 1.3.1 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^4}$

วิธีทำ
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^4} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^4}$$
$$= 2 \cdot 0 = 0$$
□

ตัวอย่างที่ 1.3.2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1}$

วิธีทำ
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{5x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{5x+1}{x}}$$ (นำ x หารทั้งเศษและส่วน)
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{5 + \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$
$$= \frac{3 - (2 \cdot 0)}{5 + 0} = \frac{3}{5}$$
□

ตัวอย่างที่ 1.3.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-x+1}{7x^4+x-10}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-x+1}{7x^4+x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{3x^3+2x^2-x+1}{x^4}}{\dfrac{7x^4+x-10}{x^4}}\qquad (\text{นำ } x^4 \text{ หารทั้งเศษและส่วน})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{7+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{10}{x^4}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{10}{x^4}\right)}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}+2\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to-\infty}7+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}-10\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4}}$$

$$=\frac{(3\cdot 0)+(2\cdot 0)-0+0}{7+0-(10\cdot 0)}$$

$$=\frac{0}{7}=0$$

□

ตัวอย่างที่ 1.3.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x+3}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3}=\frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x+3}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{x+3}=\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{x+3}$$

นำ x หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3}=\frac{\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{\dfrac{x+3}{x}}=\frac{\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}$$

สำหรับ $x<0$ เราได้ว่า $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}$$

$$=\frac{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$=\frac{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}1-2\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}1+3\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{-\sqrt{1-0}}{1+0}=-1$$

□

ตัวอย่างที่ 1.3.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}$

วิธีทำ พิจารณา ถ้า $x\to+\infty$ แล้ว

$\sqrt{x^2+3}\approx\sqrt{x^2}$, $\sqrt{3x^2-1}\approx\sqrt{3x^2}$ และ $\sqrt{3x^2+5}\approx\sqrt{3x^2}$

ดังนั้น

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}\approx\frac{\sqrt{x^2}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

นั่นคือ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

□

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 1.3.5 เป็นการหาค่าลิมิตโดยการวิเคราะห์เพื่อคาดคะเนค่าของลิมิต

ตัวอย่างที่ 1.3.6 จงหาค่าของ $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=\frac{1}{x}$ ดังนั้น $x=\frac{1}{u}$ และจะได้ว่า เมื่อ $x\to+\infty$ ค่าของ $u\to 0$ ดังนั้น

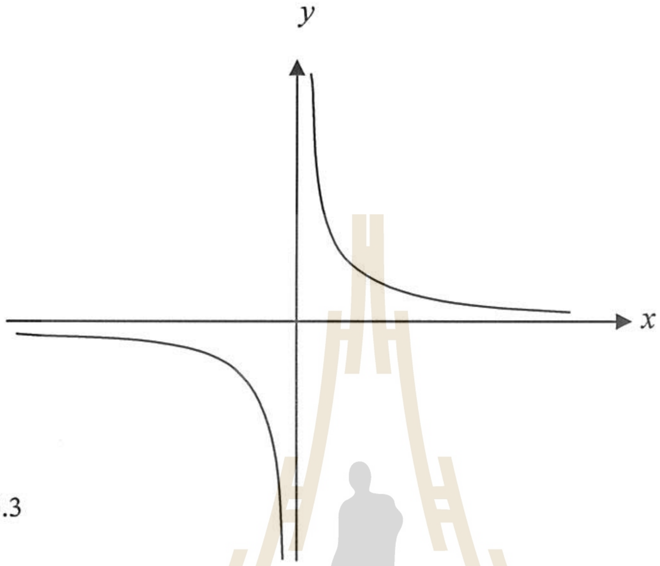
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} &= \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\\ &= 1\end{aligned}$$

□

ลิมิตอนันต์

เมื่อฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

พิจารณาฟังก์ชัน f ที่กำหนดโดย $f(x)=\dfrac{1}{x}$



รูปที่ 1.3.3

พิจารณาจากกราฟของ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย ค่าของ $f(x)$ ลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งจะเห็นว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางซ้ายไม่มีค่า ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็นลบอนันต์ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

ในทำนองเดียวกันกราฟของ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางขวา ซึ่งจะเห็นว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวาไม่มีค่า

ในกรณีเช่นนี้เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็นบวกอนันต์ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

<u>หมายเหตุ</u> 1. ค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a หรือ $x\to+\infty$ หรือ $x\to-\infty$ ค่าของ $f(x)$ อาจจะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด หรือ ลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด เราสามารถเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

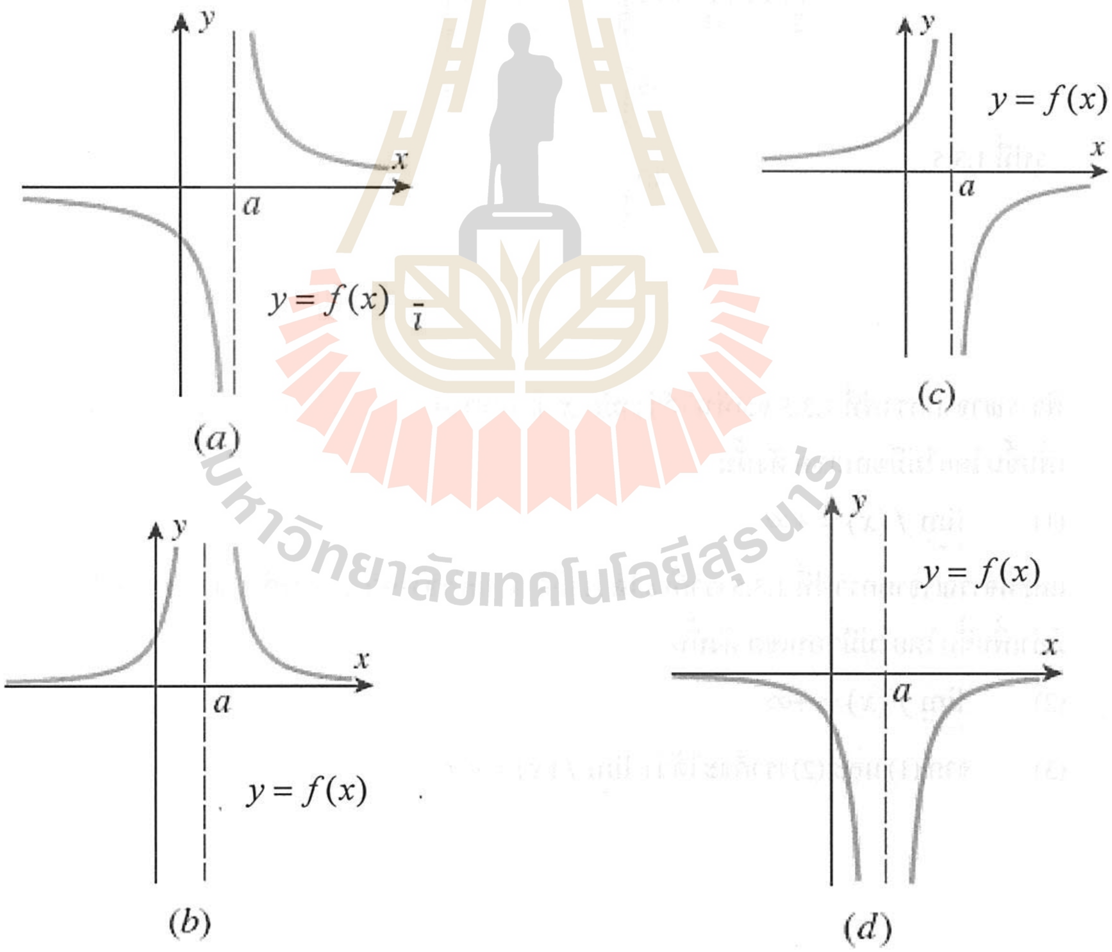
2. ในกรณีที่ 2.1 $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (ดูรูปที่ 1.3.4 (a))

   หรือ 2.2 $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (ดูรูปที่ 1.3.4 (c))

   เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

3. ในกรณีที่ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ดูรูปที่ 1.3.4 (b)) หมายความว่า ลิมิตทางซ้ายและทางขวาของ a ต่างก็เป็น $+\infty$ และ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (ดูรูปที่ 1.3.4 (d))มีความหมายว่า ลิมิตทางซ้ายและทางขวาของ a ต่างก็เป็น $-\infty$

4. การที่ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ไม่ได้หมายความว่า ลิมิตของฟังก์ชันมีหรือหาค่าได้ เพราะ $+\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง แต่เป็นเพียงสัญลักษณ์ซึ่งแทนปริมาณที่มีขนาดใหญ่อย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ในทำนองเดียวกัน $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ ก็ไม่ได้หมายความว่า ลิมิตของฟังก์ชันมีหรือหาค่าได้ เพราะ $-\infty$ เป็นสัญลักษณ์แทนปริมาณที่ลดลงโดยไม่มีขีดจำกัด



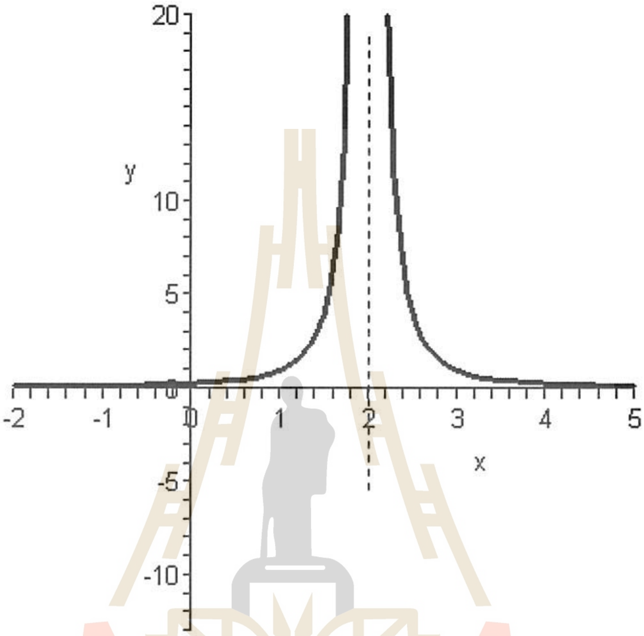
รูปที่ 1.3.4

ตัวอย่างที่ 1.3.7 พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ แล้วจงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f



รูปที่ 1.3.5

พิจารณาจากกราฟที่ 1.3.5 จะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ดังนั้น

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

และพิจารณาจากกราฟที่ 1.3.5 เราก็จะได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขต ดังนั้น

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

(3) จาก (1) และ (2) เราก็จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ □

คุณสมบัติเพิ่มเติม

ให้ $\lim_{x\to a} g(x)=0$, $\lim_{x\to a} f(x)=L$ และ $g(x)\neq 0$ ในช่วงเปิด I ที่บรรจุ a เราจะได้ว่า

1. ถ้า $g(x)>0$ สำหรับทุก $x\in I$ และ $x\neq a$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & L>0\\ -\infty, & L<0\end{cases}$

2. ถ้า $g(x)<0$ สำหรับทุก $x\in I$ และ $x\neq a$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-\infty, & L>0\\ +\infty, & L<0\end{cases}$

ตัวอย่างที่ 1.3.8 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 5^+}\frac{x^3}{x-5}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 5^+} x^3=5^3=125$ และ $\lim_{x\to 5^+} x-5=0$

แต่สำหรับ $x>5$ ค่าของ $x-5>0$ ทำให้ $x-5\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 5^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{x^3}{x-5}=+\infty$$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.9 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-17}{x-4}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 4^-}\left(x^2-17\right)=4^2-17=16-17=-1<0$ และ $\lim_{x\to 4^-}(x-4)=0$

พิจารณาเมื่อ $x<4$ ค่าของ $x-4<0$ ทำให้ได้ว่า $x-4\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to 4^-$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-17}{x-4}=+\infty$$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.10 จงหาค่าของ $\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2+4x+3}$

วิธีทำ จาก $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$ ดังนั้น $\frac{x-2}{x^2+4x+3}=\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$

พิจารณา $\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{x+3}=\frac{\lim_{x\to -1}(x-2)}{\lim_{x\to -1}(x+3)}=\frac{-1-2}{-1+3}=\frac{-3}{2}<0$ และ $\lim_{x\to -1}\left(x+1\right)=0$

แต่เราจะต้องพิจารณาเพิ่มเติมว่า $x+1\to 0$ ทางด้านบวกหรือค่าลบ เมื่อ $x\to -1$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x<-1$ ค่าของ $x+1<0$ ทำให้ได้ว่า $x+1\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to -1^-$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x-2}{(x+3)}\cdot\frac{1}{(x+1)}=+\infty$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x > -1$ ค่าของ $x+1>0$ ทำให้ได้ว่า $x+1 \to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x \to -1^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-2}{(x+3)} \cdot \frac{1}{(x+1)} = -\infty$$

จากทั้งสองกรณีเราจะได้ว่า $\lim_{x\to -1} \frac{x-2}{x^2+4x+3}$ ไม่มี □

ตัวอย่างที่ 1.3.11 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x^2-6x+9}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\lim_{x\to 3}(x-5) = 3-5 = -2 < 0$ และ

$\lim_{x\to 3} x^2-6x+9 = \lim_{x\to 3}(x-3)^2 = (3-3)^2 = 0$

เนื่องจาก $x^2-6x+9 = (x-3)^2 \geq 0$ สำหรับทุกๆ x ดังนั้น $(x-3)^2 \to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x \to 3$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-5}{(x-3)^2} = -\infty$$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.12 จงหาค่าของ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $-1 \leq \cos x^2 \leq 1$ เมื่อ $x > 0$

ดังนั้น $\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x^2}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

พิจารณา $\lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = -1\cdot 0 = 0$ และ $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1\cdot 0 = 0$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทแซนวิซ จะได้ว่า $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x^2}{\sqrt{x}} = 0$ □

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. กำหนด $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-1, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ถ้าไม่มีให้อธิบายด้วยว่าทำไม

1.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2g(x)\right]$

1.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-3g(x)+1\right]$

1.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)g(x)\right)$

1.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\right]^2$

1.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+f(x)}$

1.6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3h(x)+1}{x^2}$

1.7 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-g(x)}{h(x)}$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{2x}{6-2x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+5}{|x-2|}$

2.3 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4}{3+2x-x^2}$

2.4. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x+4}{x^2+10x+25}$

2.5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^2-2x+1}$

2.6. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-3}{x^3-8}$

2.7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$

2.8. $\lim\limits_{x\to-1}\left|\dfrac{x-5}{1+x}\right|$

2.9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-x}{x^4-1}$

2.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3-2x^2+5}$

2.11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8-x^2}{\sqrt{2x^2-x+1}}$

2.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5+2x^2+3}{3x-2x^2}$

2.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-4|}{5+x^2}$

2.14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-x^3}}{x-5}$

2.15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-3\sqrt{x}+1}{3x-2}$

3. กำหนด $f(x)=\begin{cases}2x^2+5, & x<0\\ \dfrac{3-5x^3}{1+4x+x^3}, & x\ge0\end{cases}$

จงหาค่าของ 3.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 3.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

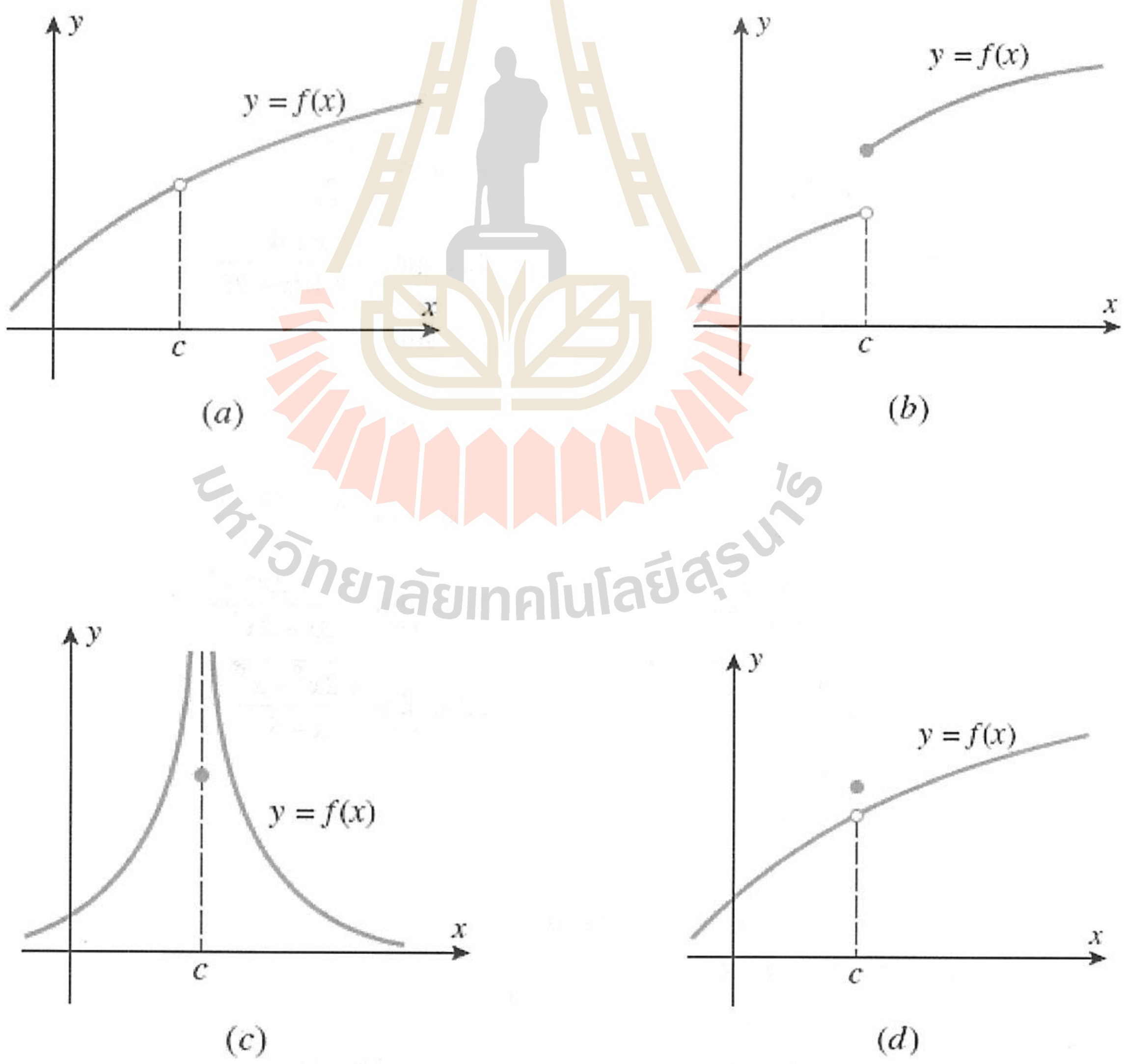
1.4 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

<u>**บทนิยามที่ 1.4.1**</u> ฟังก์ชัน f **จะต่อเนื่องที่จุด** $x=a$ ถ้า f มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. สามารถหาค่า $f(a)$ ได้ หรือ a อยู่ในโดเมนของ f
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ถ้าฟังก์ชัน f ไม่มีสมบัติข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อนี้ เราจะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x=a$
กล่าวว่า ฟังก์ชัน f เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่อง** (continuous function) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดในโดเมน

พิจารณารูปด้านล่าง



รูปที่ 1.4.1

รูปที่ 1.4.1 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องแบบต่างๆ จะพบว่ารูป (a) ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = c$ เนื่องจาก $f(c)$ ไม่สามารถหาค่าได้ รูป (b) และ (c) ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = c$ เนื่องจาก $\lim_{x \to c} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และรูป 7(d) ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = c$ เนื่องจาก $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

ฟังก์ชันในรูป (a) และ (d) จะเรียกว่าเป็น**ความไม่ต่อเนื่องชนิดขจัดได้** (removable discontinuity ซึ่งหมายถึงว่า เป็นความไม่ต่อเนื่องที่เราสามารถกำหนดนิยามหรือค่าของฟังก์ชันใหม่ ณ ตำแหน่งที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง แล้วทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องได้

ฟังก์ชันในรูป (b) จะเรียกว่าเป็น**ความไม่ต่อเนื่องชนิดกระโดด** (jump discontinuity) ซึ่งหมายถึงว่า ความไม่ต่อเนื่องที่เกิดจากค่าของฟังก์ชันเปลี่ยนจากค่าหนึ่งไปสู่อีกค่าหนึ่งในลักษณะเป็นค่ากระโดด จากรูปนี้เราก็เห็นได้ชัดว่ากราฟของฟังก์ชันนี้มีความไม่ต่อเนื่องชนิดกระโดดที่ c

ฟังก์ชันในรูป (c) จะเรียกว่าเป็น**ความไม่ต่อเนื่องชนิดอนันต์** (infinite discontinuity) ซึ่งหมายถึงว่า ความไม่ต่อเนื่องที่เกิดจากการที่ค่าของฟังก์ชันไม่มีขอบเขตจำกัดหรือกล่าวว่าเป็นอนันต์ จากรูปนี้เราก็เห็นได้ว่ากราฟของฟังก์ชันนี้มีความไม่ต่อเนื่องชนิดอนันต์ที่จุด c

ตัวอย่างที่ 1.4.1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x = -1$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(-1)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นโดยสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่องเราจึงได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ □

ตัวอย่างที่ 1.4.2 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

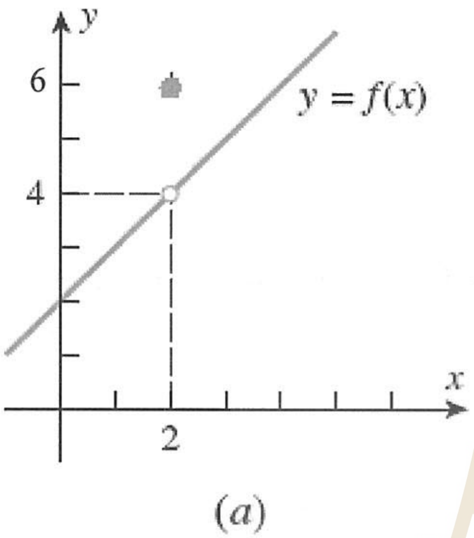
<u>วิธีทำ</u> (1) ฟังก์ชันนิยามที่ $x = 2$ ซึ่ง $f(2) = 6$

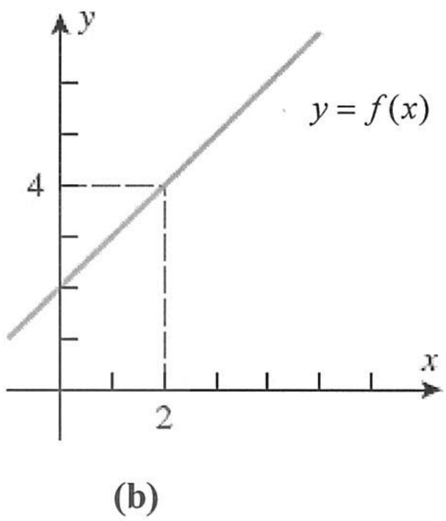
(2) พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x + 2) \qquad \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

(3) จากข้อ (1) และ (2) จะได้ว่า $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ (ดูรูปที่ 1.4.2 (a))

ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$ แบบชนิดขจัดได้ เนื่องจากเราสามารถกำหนดค่าของ $f(2)$ ใหม่ โดยให้ค่า $f(2)=4$ แล้วเราก็จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f ที่เรานิยามใหม่ก็จะต่อเนื่องที่ $x=2$ (ดูรูปที่ 1.4.2 (b))





รูปที่ 1.4.2 □

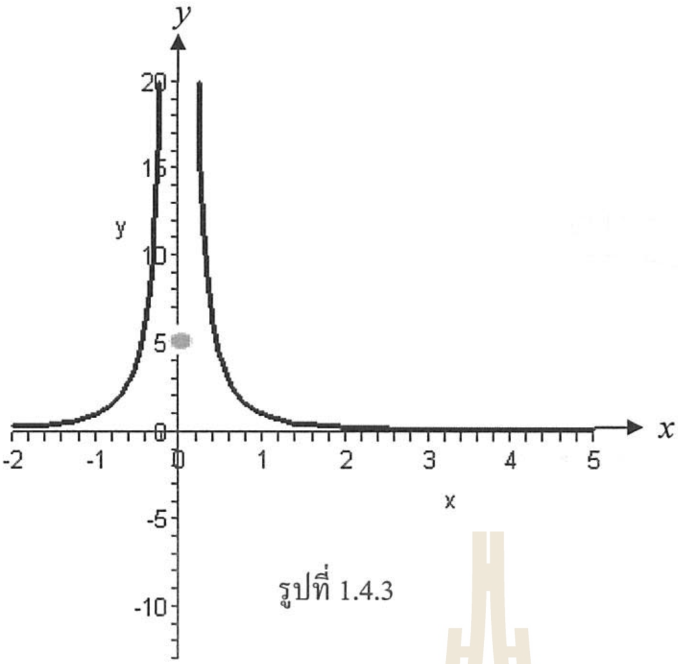
ตัวอย่างที่ 1.4.3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 5, & x=0\end{cases}$

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> (1) f นิยามที่ $x=0$ และ $f(0)=5$

(2) พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ เนื่องจาก $x^2\geq 0$ เสมอ ดังนั้น $x^2\to 0$ ทางด้านบวก เมื่อ $x\to 0$

จากข้อ (2) จะได้ว่าค่าของลิมิตของฟังก์ชัน f หาค่าไม่ได้ ดังนั้นโดยนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องจึงได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และไม่ต่อเนื่องแบบชนิดอนันต์ (ดูรูปที่ 1.4.3) □



รูปที่ 1.4.3

<u>**บทนิยามที่ 1.4.2**</u> ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากทางขวาที่ a ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{(ดูรูปที่ 1.4.4 (a))}$$

และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ a ถ้า

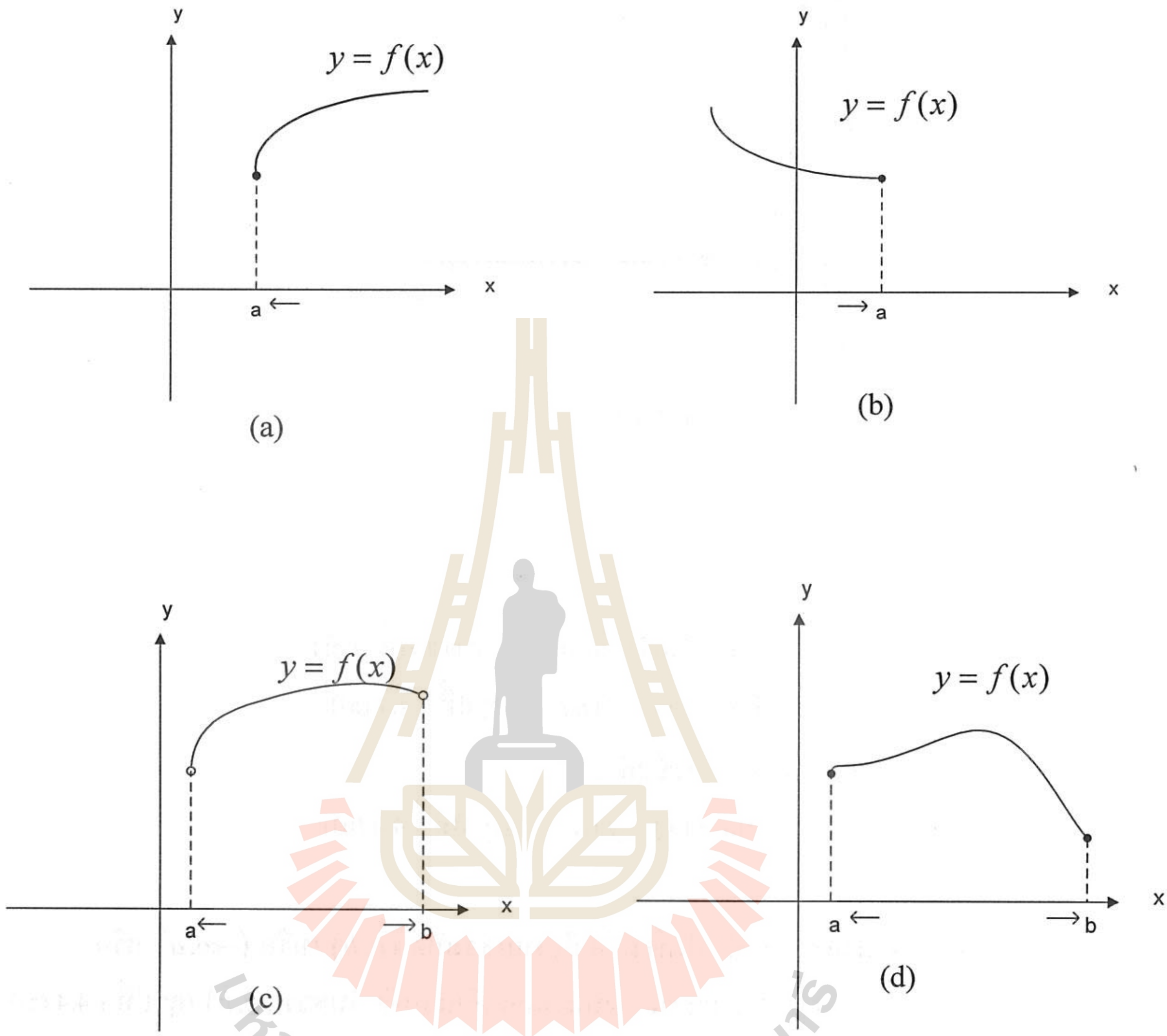
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \qquad \text{(ดูรูปที่ 1.4.4 (b))}$$

<u>**บทนิยามที่ 1.4.3**</u> ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) (หรือ $(-\infty,a)$ หรือ (b,∞) หรือ $(-\infty,\infty)$) ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ทุกๆจำนวนจริงในช่วง (a,b) (ดูรูปที่ 1.4.4 (c))

<u>**บทนิยามที่ 1.4.4**</u> ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้า f มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)
2. f มีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ a
3. f มีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ b

(ดูรูปที่ 1.4.4 (d))



รูปที่ 1.4.4

ตัวอย่างที่ 1.4.4 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$

<u>วิธีทำ</u> (1) จะแสดงว่า f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$

ถ้า $-2<a<2$ แล้วจากกฎของลิมิตจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\sqrt{4-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to a}(4-x^2)}\\ &= \sqrt{4-a^2}\\ &= f(a)\end{aligned}$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ a เมื่อ $-2<a<2$ นั่นก็คือ f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$

(2) จะแสดงว่า f ต่อเนื่องจากทางขวาที่ $x=-2$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to -2^+}(4-x^2)}\\ &= \sqrt{4-(-2)^2}\\ &= 0 = f(-2)\end{aligned}$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องจากทางขวาที่ $x=-2$

(3) จะแสดงว่า f ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

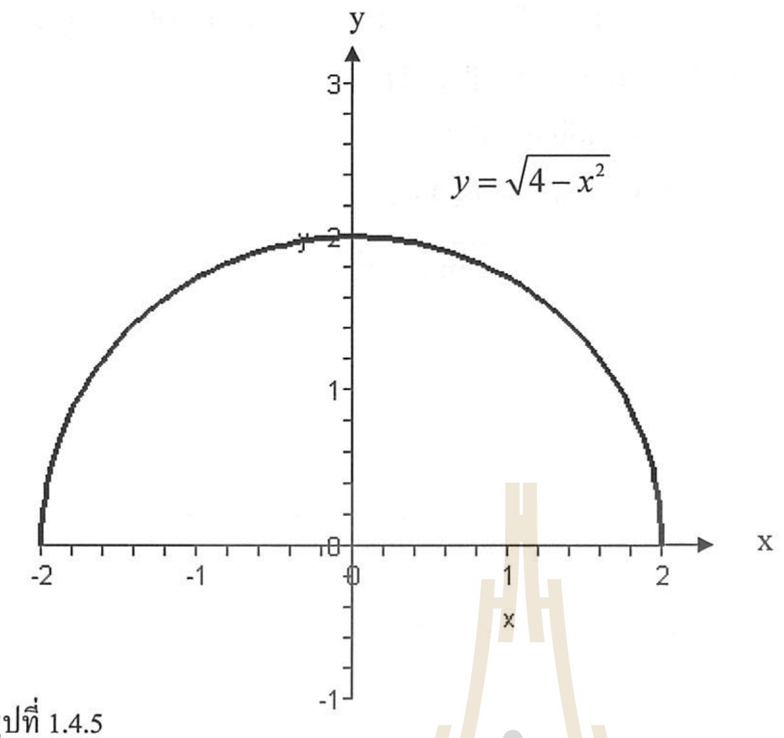
พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to 2^-}(4-x^2)}\\ &= \sqrt{4-(2)^2}\\ &= 0 = f(2)\end{aligned}$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยามเราจึงสามารถสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$

(ดูรูปที่ 1.4.5) □



รูปที่ 1.4.5

ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ถ้าฟังก์ชัน f และ g ต่อเนื่องที่ $x=a$ และ c เป็นค่าคงที่ ดังนั้นฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่ $x=a$ ด้วย

1. $f+g$
2. $f-g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ ถ้า $g(a)\neq 0$

ทฤษฎีบทที่ 1.4.2

1. ฟังก์ชันพหุนามใดๆเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$
2. ฟังก์ชันตรรกยะใดๆเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆจำนวนจริงบนโดเมน

ทฤษฎีบทที่ 1.4.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ b และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

ทฤษฎีบทที่ 1.4.4 ถ้าฟังก์ชัน g ต่อเนื่องที่ a และฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $g(a)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f\circ g$ ซึ่งนิยามโดย $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ต่อเนื่องที่ a

ตัวอย่างที่ 1.4.5 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x-6}{x-2}, & if\ x\neq 2\\ 3 & ,\quad if\ x=2\end{cases}$

จงหาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> (1) เนื่องจาก ฟังก์ชัน f หาค่าได้ที่ $x=2$ และ $f(2)=3$

(2) พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-6}{x-2}$

จาก $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x-6)=2^2-4(2)-6=-10<0$ และ $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-2\right)=0$

แต่เราจะต้องพิจารณาเพิ่มเติมว่า $x-2\to 0$ ทางด้านบวกหรือค่าลบ เมื่อ $x\to 2$

กรณีที่ 1 เมื่อ $x<2$ ค่าของ $x-2<0$ ทำให้ได้ว่า $x-2\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to 2^-$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4x-6}{x-2}=+\infty$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $x>2$ ค่าของ $x-2>0$ ทำให้ได้ว่า $x-2\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 2^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4x-6}{x-2}=-\infty$$

จากทั้งสองกรณีเราจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-6}{x-2}$ ไม่มี

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$ □

ตัวอย่างที่ 1.4.6 จงพิจารณาว่า $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x-4}$ มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่นิยามบนช่วง $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.4.2 ข้อ 2 จะได้ว่า f ต่อเนื่องทุกๆจุดบนช่วง $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ □

ตัวอย่างที่ 1.4.7 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ 2x+1, & 0\le x<2\\ 3x-2, & x\ge 2\end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,2]$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาที่จุด $x=2$ จะได้ว่า $f(2)=3(2)-2=4$

และ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=2(2)+1=5$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)$ จากบทนิยามที่ 1.4.2 เราก็จะได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

เพราะฉะนั้นจากบทนิยามที่ 1.4.4 สรุปได้ว่า f ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,2]$ □

ตัวอย่างที่ 1.4.8 จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\le 2 \\ 2x+k, & x>2 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน f จะต่อเนื่องที่ $x=2$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

จาก $f(2)=k(2^2)=4k$ และ

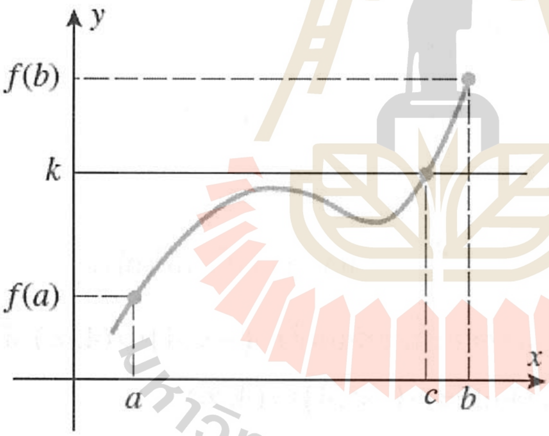
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+k)=2(2)+k=4+k$$

และ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(kx^2)=k\left(2^2\right)=4k$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$ นั่นคือ $4+k=4k$ จะได้ว่า $k=\dfrac{4}{3}$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.4.5</u> (ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง) ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆที่อยู่ระหว่างค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมีจำนวนจริง c ในช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่ง $f(c)=k$



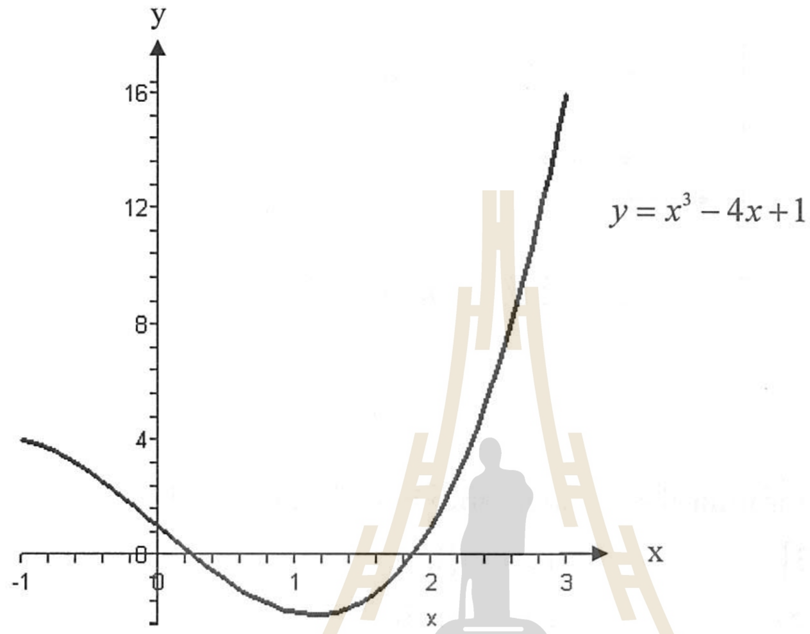
จากรูปที่ 1.4.6 ถ้าค่า $y=k$ อยู่ระหว่างค่า $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว ถ้าลากเส้นตรงความสูง k ขนานกับแกน x ตัดกับกราฟที่จุดใดและลากลงมาขนานกับแกน y จะได้ว่าค่า c อยู่ระหว่าง a และ b

รูปที่ 1.4.6

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.4.6</u> ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ ไม่เท่ากับศูนย์และมีเครื่องหมายต่างกัน แล้วจะมีจำนวนจริง c ในช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่ง $f(c)=0$

ตัวอย่างที่ 1.4.9 กำหนดให้ $f(x)=x^3-4x+1$ เมื่อ $x\in[1,2]$ จงตรวจสอบว่าจะมี $x\in[1,2]$ ที่ทำให้ $f(x)=0$ หรือไม่

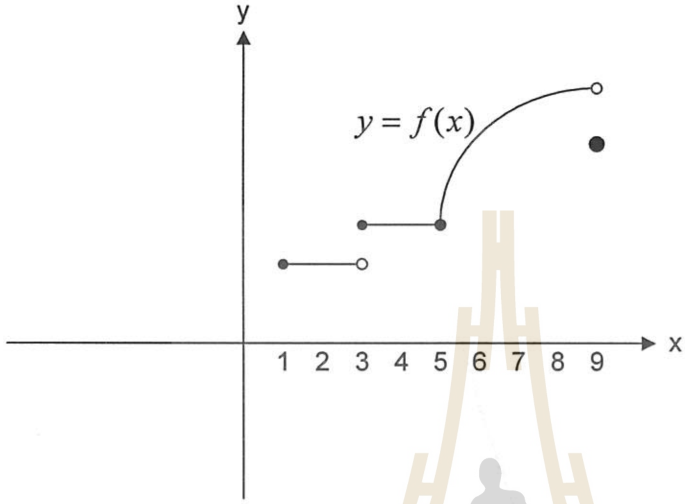
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้นฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[1,2]$ พิจารณา $f(1)=1^3-4(1)+1=-2<0$ และ $f(2)=2^3-4(2)+1=1>0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่1.4.6 จะได้ว่ามี จำนวนจริง $c\in[1,2]$ ซึ่ง $f(c)=0$ (ดูรูปที่ 1.4.7) □



รูปที่ 1.4.7

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ ดังรูปข้างล่าง



จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่ เพราะเหตุใด

1.1	$[1,3]$	1.2	$(1,3)$
1.3	$(3,5]$	1.4	$[3,5]$
1.5	$[5,9]$	1.6	$(5,9)$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=5x^5+3x^3-2x^2-x+1$ มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

3. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$ ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

4. กำหนด $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x\le 4 \\ 7+\dfrac{16}{x}, & x>4 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $x=4$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

5. จงหาค่าของ k ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x=-3$ เมื่อ กำหนดฟังก์ชัน f ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} 9-x^2, & x\ge -3 \\ k/x^2, & x<-3 \end{cases}$$

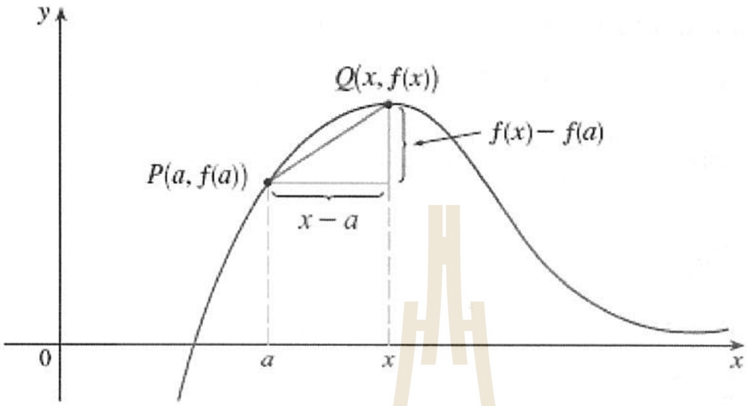
6. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ ต่อเนื่องบนช่วง $(3,+\infty)$ หรือไม่

7. กำหนด $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ จงตรวจสอบว่ามี $x\in[-1,1]$ หรือไม่ที่ทำให้ $f(x)=0$

บทที่ 2 อนุพันธ์ (Derivatives)

2.1 เส้นสัมผัส (The tangent line)

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งในรูปข้างล่าง (ดูรูปที่ 2.1.1)

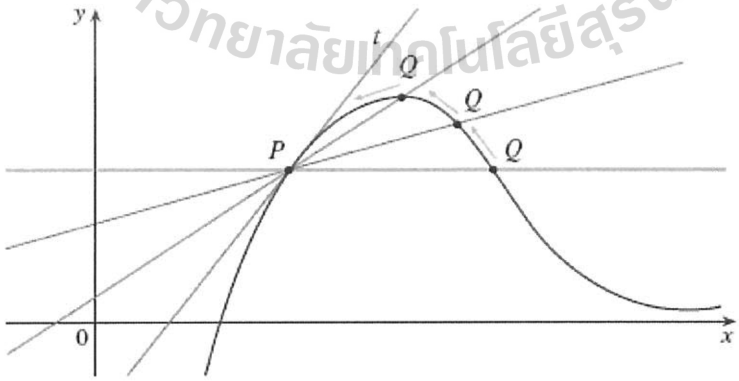


รูปที่ 2.1.1

การหาความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด $P(a, f(a))$ นั้น เริ่มจากการพิจารณาจุด $Q(x, f(x))$ ซึ่งอยู่ใกล้กับจุด P นั่นคือ x มีค่าเข้าใกล้กับ a แต่ $x \neq a$ และคำนวณความชันของเส้นตรง PQ ได้

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

แล้วให้จุด Q เคลื่อนเข้าใกล้จุด P ตามเส้นโค้ง โดยให้ x เข้าใกล้ a ถ้า m_{PQ} เข้าใกล้ค่าคงที่ m แล้วเราจะกำหนดให้ความชันของเส้นตรง t ที่ผ่านจุด P มีความชันเท่ากับ m (ดูรูปที่ 2.1.2)



รูปที่ 2.1.2

<u>บทนิยามที่ 2.1.1</u> เส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P แล้วมีความชัน

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

เมื่อหาค่าของลิมิตนี้ได้

ตัวอย่างที่ 2.1.1 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุด $(2,4)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = x^2$ และ $a = 2$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ที่จุด $(2,4)$ คือ

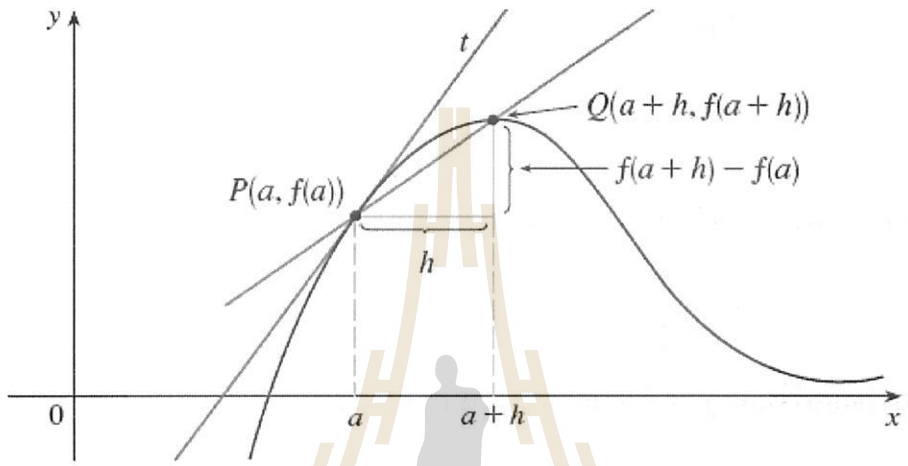
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x + 2) \qquad \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสกราฟของ f มีความชันเท่ากับ 4 และกราฟผ่านจุด $(2,4)$ คือสมการ

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{หรือ} \quad y = 4x - 4$$ □

เราสามารถกำหนดความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ใหม่ได้ดังนี้
ให้ $h = x - a$ แล้ว $x = a + h$ ดังนั้นเขียนความชันของเส้นตัดกราฟได้ใหม่ในรูปที่ 2.1.3

$$\boxed{m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$



รูปที่ 2.1.3

และถ้า $h \to 0$ เมื่อ $x \to a$ โดยกฎการแทนที่ ทำให้สามารถเขียนความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P ในบทนิยามที่ 2.1.1 ได้ใหม่ในรูป

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

<u>หมายเหตุ</u> ในรูปที่ 2.1.3 จุด Q อยู่ทางขวาของจุด P แสดงว่า $h > 0$ แต่ค่าของ $h < 0$ ได้ด้วย ซึ่งก็คือกรณี จุด Q ในรูปที่ 2.1.3 ไปอยู่ทางซ้ายของจุด P

ตัวอย่างที่ 2.1.2 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟของไฮเพอร์โบลา $y=\dfrac{5}{x}$ ที่จุด $(5,1)$

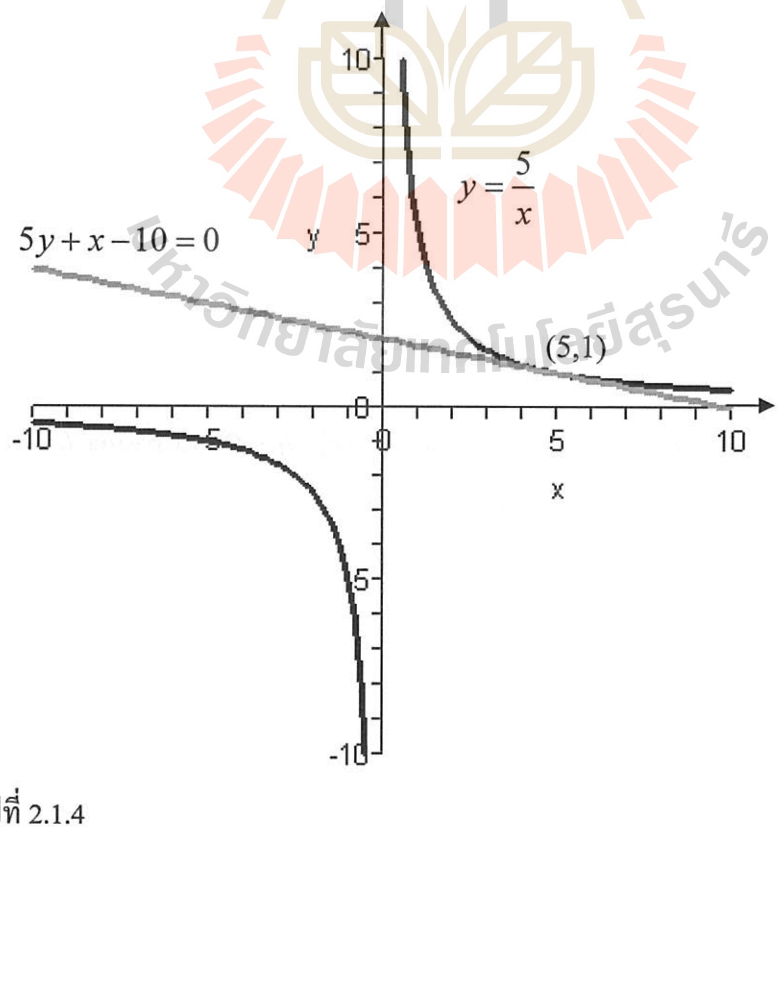
<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x)=\dfrac{5}{x}$ ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(5,1)$ คือ

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{5}{5+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{5-(5+h)}{5+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(5+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{5+h} \qquad \text{เมื่อ } h\neq 0 \\
&= -\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟของไฮเพอร์โบลา $y=\dfrac{5}{x}$ ที่จุด $(5,1)$ คือ

$$y-1=-\frac{1}{5}(x-5) \quad \text{หรือ} \quad 5y+x-10=0$$

กราฟของไฮเพอร์โบลา $y=\dfrac{5}{x}$ และสมการเส้นสัมผัส $5y+x-10=0$ แสดงในรูปที่ 2.1.4□



รูปที่ 2.1.4

ตัวอย่างที่ 2.1.3 จงหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด (1,1), $(4,\dfrac{1}{2})$ และ $(9,\dfrac{1}{3})$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด $\left(a,\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ เมื่อ $a>0$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a-(a+h)}{\left(h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{\left(h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)} \qquad \text{เมื่อ } h\neq 0$$

$$=\frac{-1}{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)}=-\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด (1,1) คือ $m=-\dfrac{1}{2(1)\sqrt{1}}=-\dfrac{1}{2}$ (แทน $a=1$)

ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(4,\dfrac{1}{2})$ คือ $m=-\dfrac{1}{2(4)\sqrt{4}}=-\dfrac{1}{16}$ (แทน $a=4$)

และ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(9,\dfrac{1}{3})$ คือ $m=-\dfrac{1}{2(9)\sqrt{9}}=-\dfrac{1}{54}$ (แทน $a=9$) □

2.2 ปัญหาความเร็ว

ถ้าสมการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงกำหนดโดย

$$s = f(t)$$

เมื่อ s เป็นระยะทางที่กำกับด้วยทิศวัดจากจุดกำเนิดที่เวลา t เรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันบอกตำแหน่งของวัตถุ** (Position function) และเรียกกราฟของ f ว่า **แนววิถี** (trajectory)

พิจารณาการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาจาก $t = a$ ถึง $t = a + h$ (ดูรูปที่ 2.2.1) ได้ว่า

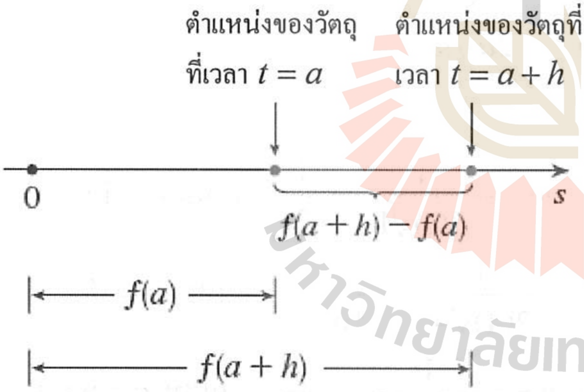
ส่วนเปลี่ยนแปลงในเวลา $\Delta t = (a+h) - a = h$

และ ส่วนเปลี่ยนแปลงในตำแหน่ง $\Delta s = f(a+h) - f(a)$

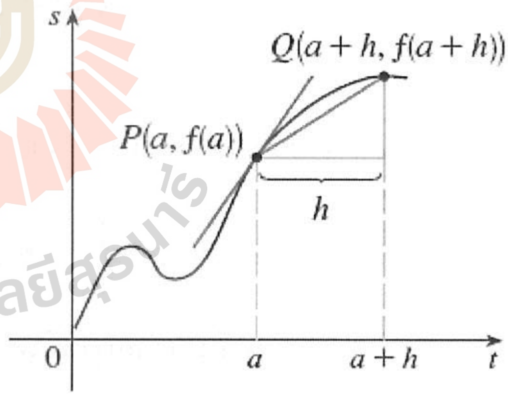
ดังนั้น

$$\boxed{\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

ซึ่งเราจะสังเกตเห็นว่ามันมีค่าเท่ากับความชันของเส้นตรง PQ ในรูปที่ 2.2.2



รูปที่ 2.2.1



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

รูปที่ 2.2.2

ต่อไปคำนวณความเร็วเฉลี่ยบนช่วงเวลาที่สั้นลงสั้นลง โดยให้ $h \to 0$ หรือ $\Delta t \to 0$ ถ้าความเร็วเฉลี่ยเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง แล้วนิยาม**ความเร็วบัดดล (instantaneous velocity)** ที่เวลา a ดังนี้

$$\boxed{v(a) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ถ้าเราเปรียบเทียบปัญหาความเร็วกับปัญหาความชันของเส้นสัมผัสเราย่อมเห็นได้ชัดว่า ถ้ากราฟในรูปที่ 2.2.2 คือกราฟของ $s = f(t)$ แล้ว

ความเร็วเฉลี่ย **คือ** **ความชันของเส้นตรง PQ**

ความเร็วบัดดลที่ a **คือ** **ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P**

ตัวอย่างที่ 2.2.1 กำหนดสมการบอกตำแหน่งของก้อนหินซึ่งตกลงมาจากหน้าผาที่สูง 576 เมตร คือ $s = 16t^2$ เมื่อหน่วยของ s เป็นเมตร และหน่วยของ t เป็นวินาที จงหา

1. ความเร็วของก้อนหินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที
2. เวลาที่ก้อนหินตกถึงพื้น
3. ความเร็วของก้อนหินเมื่อในขณะที่ตกถึงพื้น

<u>วิธีทำ</u> ให้ $s = f(t) = 16t^2$ แล้วความเร็วของวัตถุ (แทนด้วย $v(a)$) เมื่อเวลาผ่านไป a วินาที คือ

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{16(a+h)^2 - 16a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16(a^2 + 2ah + h^2) - 16a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{16h(2a+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 16(2a+h) \qquad \text{เมื่อ } h \neq 0 \\ &= 32a \end{aligned}$$

1. ความเร็วของก้อนหินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที คือ $v(3) = 32(3) = 96$ เมตรต่อวินาที
2. สมมติว่าก้อนหินตกถึงพื้นเมื่อเวลา t_1 วินาที จากหน้าผาสูง 576 เมตรดังนั้น

$$\begin{aligned} 16t_1^2 &= 576 \\ t_1^2 &= \frac{576}{16} = 36 \\ t_1 &= 6 \end{aligned}$$

ดังนั้นก้อนหินตกถึงพื้นเมื่อเวลาผ่านไป 6 วินาที

3. ความเร็วของก้อนหินในขณะที่ตกถึงพื้นคือ

$$v(t_1) = v(6) = 32(6) = 192 \quad \text{เมตรต่อวินาที} \qquad \square$$

2.3 อัตราการเปลี่ยนแปลง

สมมติให้ y แทนปริมาณหรือสมบัติอันหนึ่งทางกายภาพที่ขึ้นอยู่กับค่าของ x ดังนั้นเราสามารถเขียนแทนด้วย ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เพราะฉะนั้นการเปลี่ยนแปลงของค่าของ y จึงขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของค่า x

ถ้า x เปลี่ยนจาก $x = x_1$ ไปเป็น $x = x_2$ แล้วส่วนเปลี่ยนแปลงในค่าของ x คือ

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

ซึ่งทำให้เกิดส่วนเปลี่ยนแปลงในค่าของ y เป็น

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

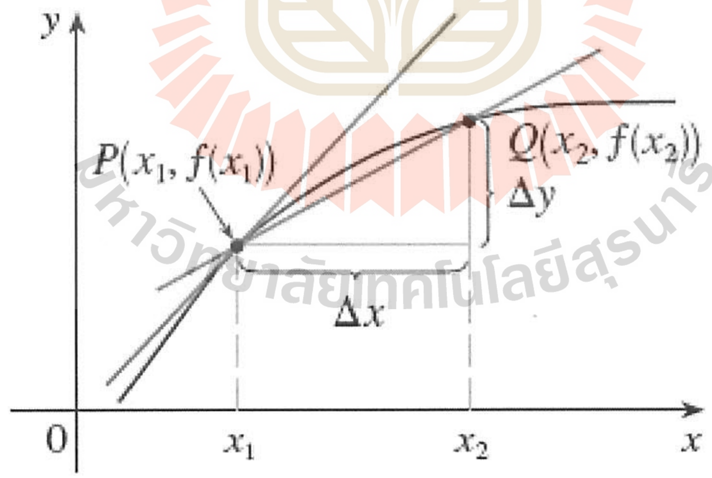
ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วง $[x_1, x_2]$ คือผลหาร

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

และอัตราการเปลี่ยนแปลงบัดดลของ y เทียบกับ x ที่ x_1 คือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

เมื่อเปรียบเทียบปัญหานี้กับปัญหาความชันของเส้นสัมผัสจะเห็นว่า ความหมายเชิงเราขาคณิตของอัตราการเปลียนแปลงเฉลี่ยคือ ความชันของเส้นตรง PQ ในขณะที่อัตรา
การเปลี่ยนแปลงบัดดลที่ x_1 คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $P(x_1, f(x_1))$ (ดูรูปที่ 2.3.1)



รูปที่ 2.3.1

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ให้ $y = x^3 + 1$ จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y บนช่วง $[0,4]$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงบัดดลของ y เทียบกับ x ที่จุด $x = 1$

<u>วิธีทำ</u> 1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y บนช่วง $[0,4]$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(4^3 + 1\right) - \left(0^3 + 1\right)}{4}$$

$$= \frac{64}{4} = 16$$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงบัดดลของ y เทียบกับ x ที่จุด $x = 1$ คือ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + 1) - (1^3 + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) \qquad \text{เมื่อ } x \neq 1$$

$$= 1^2 + 1 + 1 = 3$$

□

<u>**แบบฝึกหัด 2.1**</u>

1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟดังต่อไปนี้ที่จุด P ในแต่ละข้อที่กำหนดให้

1.1 $y = 1 + 2x - x^3, \quad P = (1,2)$

1.2 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad P = (16, \dfrac{1}{4})$

1.3 $y = \dfrac{x-1}{x-2}, \quad P = (3,2)$

1.4 $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}, \quad P = (0,0)$

1.5 $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad P = (\dfrac{1}{3}, 9)$

2. จงหาจุด P ซึ่งอยู่บนกราฟของ $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ และความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ของ f ที่จุด P เท่ากับ 5

3. ถ้าโยนลูกบอลขึ้นไปบนอากาศด้วยความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ 40 เมตร/วินาที และความสูงของลูกบอลเมื่อเวลาผ่านไป t วินาทีคือ $y = 40t - 16t^2$ จงหา

3.1 ความเร็วของลูกบอลที่เวลา $t = 1$ และ $t = 2$

3.2 ระยะทางที่ลูกบอลขึ้นถึงจุดสูงสุด

3.3 เวลาและความเร็วของลูกบอลในขณะที่ตกถึงพื้น

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ หรือไม่

5. ร้านขายน้ำหอมแห่งหนึ่งใช้การโฆษณาทางวิทยุ เพื่อส่งเสริมการขาย กำหนดให้ร้านขายน้ำหอมได้ $P(x)$ ขวด ต่อการโฆษณา x ครั้ง โดยที่

$$P(x) = 6 + 50x - 2x^2$$

5.1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในจำนวนของน้ำหอมที่ขายได้ขณะที่ x เปลี่ยนจาก 5 ถึง 10 ครั้ง

5.2 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนของน้ำหอมที่ขายได้ขณะที่ $x = 5$

6. ปริมาตรของน้ำ (V) ในถังเก็บน้ำขนาดบรรจุ $100,000$ แกลลอน ระหว่างที่ปล่อยให้น้ำไหลเข้าในถัง การเปลี่ยนแปลงของปริมาตรสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันของเวลา t (นาที) ได้ดังนี้

$$V(t)=100,000\left(1-\frac{t}{60}\right)^2$$

สำหรับ $0\le t\le 60$ จงคำนวณอัตราการไหลเข้าที่เวลา $t=0,\ t=10$ และ $t=30$ นาทีและในขณะที่น้ำเต็มถังเก็บน้ำพอดี

2.4 อนุพันธ์ (derivative)

บทนิยามที่ 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งกำหนดโดย $y = f(x)$ และ a เป็นสมาชิกในโดเมนของ f เราจะเรียก

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ว่า **อนุพันธ์ของ f ที่ a** ถ้าหาค่าของลิมิตนี้ได้

สำหรับสมาชิก x ใดๆในโดเมนของ f ให้

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้แล้ว $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ดังนั้นเราจะเรียกฟังก์ชันที่นิยามนี้ว่า **อนุพันธ์ของ f** สัญลักษณ์ที่เขียนแทนอนุพันธ์ของ f ได้แก่ $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ หรือ $\frac{df}{dx}$

สำหรับอนุพันธ์ของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $f'(a)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ หรือ $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$

ให้ $x = a + h$ จะได้ $h = x - a$ เพราะฉะนั้น $h \to 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \to a$ เพราะฉะนั้น

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{เมื่อลิมิตหาค่าได้}$$

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ a หรือ $f'(a)$ หาค่าได้ แล้ว

1. $f'(a)$ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(a, f(a))$
2. ถ้าเราเปรียบเทียบกับปัญหาความเร็ว $f'(a)$ ก็คือ ความเร็วบัดดลที่เวลา a
3. ถ้าเราเปรียบเทียบกับอัตราการเปลี่ยนแปลง $f'(a)$ อัตราการเปลี่ยนแปลงบัดดลของ y เทียบกับ x ที่ $x = a$

ตัวอย่างที่ 2.4.1 กำหนด $f(x)=3x^2$ จงหา $f'(2)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

และ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-3(2)^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3(4+4h+h^2)-12}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{12+12h+3h^2-12}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(12+3h)}{h}, \qquad h\neq 0\\ &= \lim_{h\to 0}(12+3h)\\ &= 12\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(2)=12$ □

ตัวอย่างที่ 2.4.2 กำหนด $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

และ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{x+h+2}{x+h-3}\right)-\frac{x+2}{x-3}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+2)(x-3)-(x+2)(x+h-3)}{h(x+h-3)(x-3)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-3x+hx-3h+2x-6-x^2-hx+3x-2x-2h+6}{h(x+h-3)(x-3)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-5h}{h(x+h-3)(x-3)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-5}{(x+h-3)(x-3)}, \qquad h\neq 0\\ &= \frac{-5}{(x-3)^2}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นเราได้ว่า $f'(x)=\frac{-5}{(x-3)^2}$ □

<u>บทนิยามที่ 2.4.2</u>

ถ้า $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ทางขวาของฟังก์ชัน** f **ที่** x เขียนแทนด้วย $f'(x^+)$ และ

ถ้า $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ทางซ้ายของฟังก์ชัน** f **ที่** x เขียนแทนด้วย $f'(x^-)$

ดังนั้น $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

นั่นคือ $f'(x)$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $f'(x^+)$ และ $f'(x^-)$ หาค่าได้ และ $f'(x^+)=f'(x^-)=f'(x)$

<u>บทนิยามที่ 2.4.3</u>

1. f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุกๆ $x\in(a,b)$
2. f มีอนุพันธ์บนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุกๆ $x\in(a,b)$ และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่จุด a และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่จุด b

ตัวอย่างที่ 2.4.3 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\le 1\\ x+2, & x>1\end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จากบทนิยาม $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ และ $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h+2)-(1^2+2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}1, \qquad h\neq 0\\&=1\end{aligned}$$

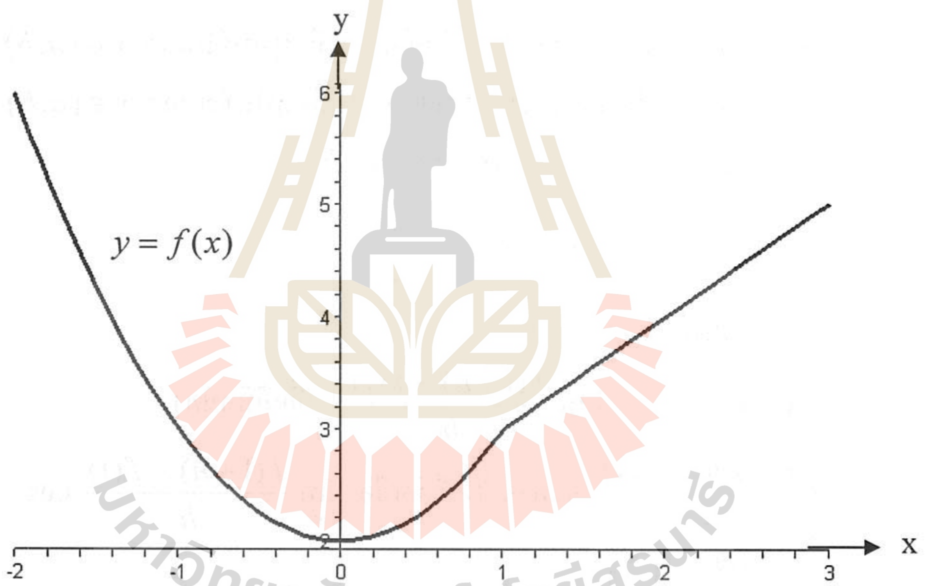
เพราะฉะนั้น $f'(1^+)=1$

และ

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{((1+h)^2+2)-(1^2+2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2+2-3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h(2+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0^-}(2+h), \qquad h\neq 0$$
$$=2$$

ดังนั้น $f'(1^-)=2$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า $f'(1)$ หาค่าไม่ได้เนื่องจาก $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ (ดูรูปที่ 2.4.1)



รูปที่ 2.4.1

ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f(x)=|x|$ มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จากบทนิยาม $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ และ $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-|0|}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}1, \qquad\qquad h\neq 0\\&=1\end{aligned}$$

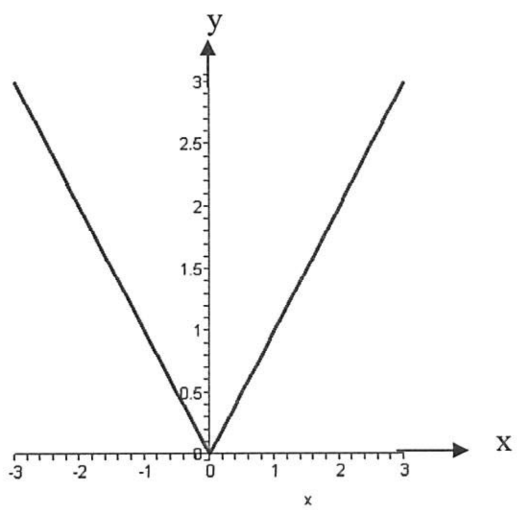
เพราะฉะนั้น $f'(0^+)=1$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}\\&=\lim_{h\to 0^-}-1, \qquad\qquad h\neq 0\\&=-1\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(0^-)=-1$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้เนื่องจาก $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ (ดูรูปที่ 2.4.2) □



รูปที่ 2.4.2 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=|x|$

<u>หมายเหตุ</u> จากตัวอย่างที่ 2.4.3 และ ตัวอย่างที่ 2.4.4 ถ้าเราพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันเราจะเห็นว่าที่ตำแหน่งของกราฟของฟังก์ชันที่มีการหักมุมหรือเป็นยอดแหลม หรือไม่เรียบ(not smooth) แล้วเราไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่งนั้นได้

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.4.1</u> ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ที่ $x = a$ ได้ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $x = a$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ f มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ ดังนั้น $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ หาค่าได้

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}\left(f(x) - f(a)\right) &= \lim_{x \to a} \frac{\left(f(x) - f(a)\right)}{x - a} \cdot (x - a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{\left(f(x) - f(a)\right)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a}(x - a) \\ &= f'(a) \cdot (0) = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f(a) = f(a)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = a$ □

<u>หมายเหตุ</u> 1. ถ้า f มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้ว f อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ ก็ได้ จากตัวอย่างที่ 2.4.4 เราก็เห็นได้ว่า ฟังก์ชัน $y = |x|$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

2. ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้ว f จะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$

2.5 สูตรการหาอนุพันธ์ (Differentiation Formulas)

การใช้บทนิยามในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.4 เราจะเห็นว่าการหาอนุพันธ์ค่อนข้างยุ่งยากและใช้เวลาค่อนข้างนาน ดังนั้นจึงได้มีการสร้างสูตรโดยอาศัยบทนิยามของอนุพันธ์ขึ้นมา ซึ่งเราสามารถนำมาใช้หาอนุพันธ์ได้เลย ซึ่งกล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.5.1</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และให้ c และ n เป็นค่าคงที่ใดๆ แล้ว

1. $$\frac{dc}{dx}=0$$
2. $$\frac{dx}{dx}=1$$
3. $$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$
4. $$\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{d}{dx}f(x)$$
5. $$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$
6. $$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$
7. $$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)=f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$
8. $$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]-f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

สำหรับสูตรที่ 5, 6 และ สูตรที่ 7 สามารถขยายไปใช้หาอนุพันธ์ของผลบวก (หรือผลลบ) และผลคูณของฟังก์ชันมากกว่าสองฟังก์ชันได้ดังนี้ เช่น

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)+h(x))=\frac{d}{dx}[f(x)]+\frac{d}{dx}[g(x)]+\frac{d}{dx}[h(x)]$$

และ

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)h(x))=g(x)h(x)\frac{d}{dx}[f(x)]+f(x)h(x)\frac{d}{dx}[g(x)]+f(x)g(x)\frac{d}{dx}[h(x)]$$

ตัวอย่างที่ 2.5.1 กำหนดให้ $y = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1\right] \\
&= \frac{dx^5}{dx} + 3\frac{dx^3}{dx} - 2\frac{dx^2}{dx} - \frac{dx}{dx} + \frac{d1}{dx} \\
&= 5x^4 + 9x^2 - 2x - 1
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.5.2 กำหนดให้ $y = \left(x^2 + x - 1\right)\left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\right] \\
&= \left(x^2 + x - 1\right)\frac{d}{dx}\left[x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right] + \left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\frac{d}{dx}\left[x^2 + x - 1\right] \\
&= \left(x^2 + x - 1\right)\cdot\left(\frac{dx^4}{dx} - 2\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} + \frac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx}\right) + \left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\frac{dx^2}{dx} + \frac{dx}{dx} - \frac{d1}{dx}\right) \\
&= \left(x^2 + x - 1\right)\cdot\left(4x^3 - x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right) + \left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\cdot(2x + 1) \\
&= \left(x^2 + x - 1\right)\cdot\left(4x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) + \left(x^4 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\cdot(2x + 1)
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.5.3 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{1+\sqrt{x}}$ จงหา $f'(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3+1}{1+\sqrt{x}}\right] \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\dfrac{d}{dx}\left(2x^3+1\right)-\left(2x^3+1\right)\dfrac{d}{dx}\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(2\dfrac{dx^3}{dx}+\dfrac{d1}{dx}\right)-\left(2x^3+1\right)\cdot\left(\dfrac{d1}{dx}+\dfrac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(6x^2\right)-\left(2x^3+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{10x^3+12x^2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.5.4 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)}$ ที่จุด $(2,\dfrac{2}{5})$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

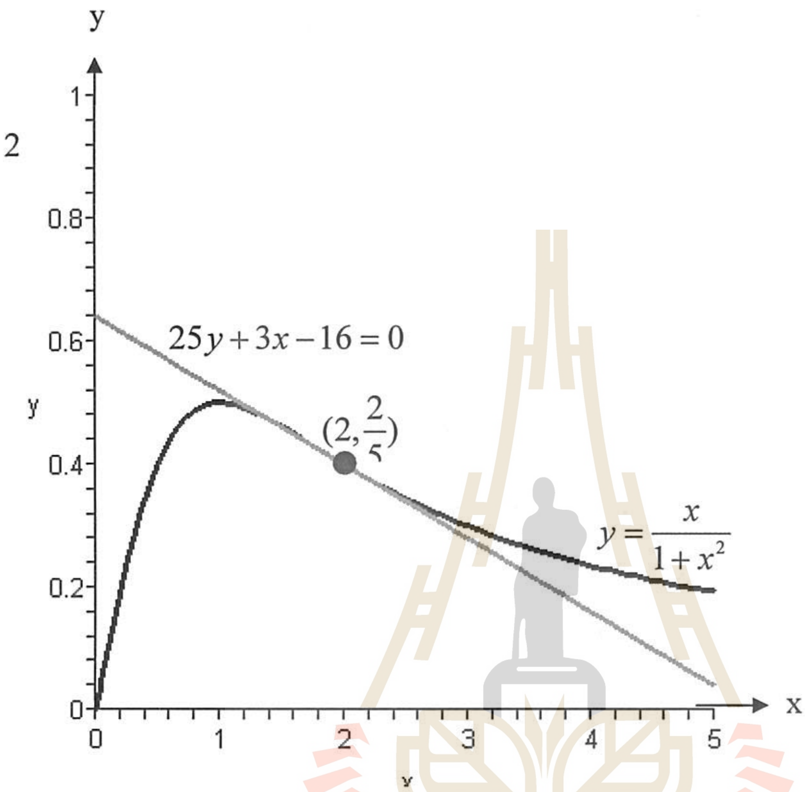
$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x^2}\right] \\
&= \frac{\left(1+x^2\right)\dfrac{dx}{dx}-x\dfrac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+x^2\right)-x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นความชันของสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด $(2,\dfrac{2}{5})$ คือ

$$
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\frac{1-(2)^2}{\left(1+2^2\right)^2}=\frac{-3}{25}
$$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)}$ ที่จุด $(2,\frac{2}{5})$ คือ

$$y-\frac{2}{5}=\frac{-3}{25}(x-2) \qquad \text{หรือ} \qquad 25y+3x-16=0 \ \text{(ดูรูปที่ 2.5.1)} \qquad \square$$



รูปที่ 2.5.1 แสดงกราฟของเส้นโค้ง $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ และเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $25y+3x-16=0$

ตัวอย่างที่ 2.5.5 จงหาพิกัดของจุด P ที่อยู่บนกราฟของไฮเพอร์โบลา $y=\dfrac{1}{x}$ ซึ่งเส้นสัมผัสกับกราฟขนานกับเส้นตรง $y=-4x-1$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{dx^{-1}}{dx}=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

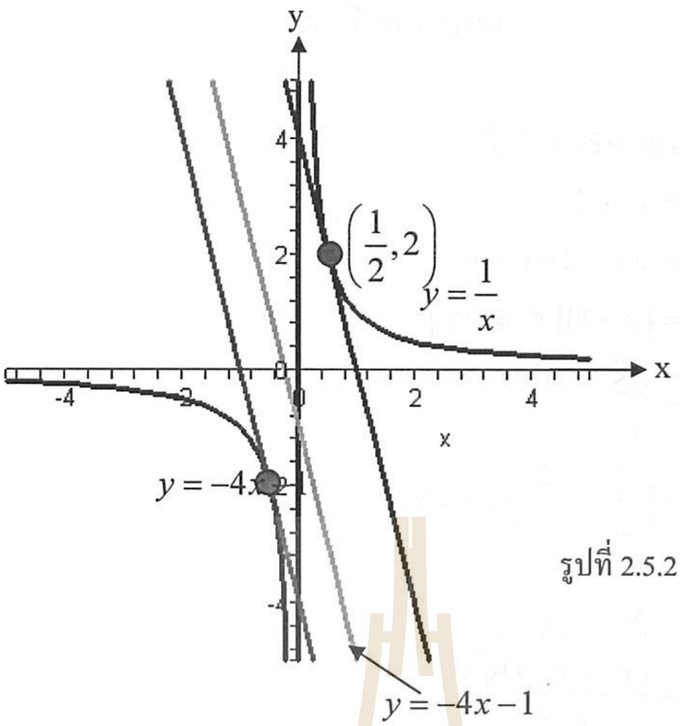
ให้จุด P มีพิกัดเป็น (x_0,y_0) ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_0,y_0) คือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$$

เนื่องจากเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_0,y_0) ขนานกับเส้นตรง $y=-4x-1$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ -4 ดังนั้นเราจึงได้ว่า

$$-\frac{1}{x_0^2}=-4 \qquad \text{หรือ} \qquad x_0=\pm\frac{1}{2}$$

ดังนั้นจุด P มีสองจุดคือ $\left(\frac{1}{2},2\right)$ และ $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ (ดูรูปที่ 2.5.2) $\square$



รูปที่ 2.5.2

<u>**แบบฝึกหัดที่ 2.2**</u>

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

1.2 $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} - x$

1.3 $f(x) = (x+1)\left(x^2 + \sqrt{x}\right)$

1.4 $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{x^4}$

1.5 $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^4}\right)\left(x + 3x^6\right)$

1.6 $f(x) = \dfrac{x^2}{2x^3 - 3x + 1}$

1.7 $f(x) = \dfrac{(x^2 + x - 1)\sqrt{x}}{x^3 - x}$

2. จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ หรือไม่

2.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

2.2 $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \le 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

2.3 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \le 1 \\ 3 - x^3, & x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

3. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$

หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = 2$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(4, \dfrac{2}{5})$

5. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ ที่ขนานกับเส้นตรง $x - 2y = 2$

2.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.6.1</u> ถ้าฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ x และฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และนอกจากนี้

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

หรือเขียนโดยใช้สัญกรณ์ไลบ์นิตซ์ ถ้า $y = f(g(x))$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว $y = f(u)$ และ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 2.6.1 กำหนดให้ $y = \sqrt{u}$ และ $u = 1 + x^3$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\frac{d}{dx}\left(1 + x^3\right) \\
&= \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d}{dx}\left(1 + x^3\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3x^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\left(3x^2\right) \\
&= \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^2}}
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.6.2 กำหนดให้ $y = u^{20}$ และ $u = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3$

จงใช้กฎลูกโซ่หา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{du^{20}}{du}\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3\right) \\
&= 20u^{19}\left(12x^3 - 6x^2 + 10x - 1\right) \\
&= 20\left(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3\right)^{19}\left(12x^3 - 6x^2 + 10x - 1\right)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= 20\left(3(1)^4 - 2(1)^3 + 5(1)^2 - 1 + 3\right)^{19}\cdot\left(12(1)^3 - 6(1)^2 + 10(1) - 1\right) \\
&= 20\cdot(15)\cdot(8)^{19} \\
&= 300\cdot(8)^{19}
\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต

การหาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันประกอบโดยใช้กฎลูกโซ่เราได้

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

เราสังเกตเห็นได้ว่าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบนี้ เราเริ่มจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(g(x))$ ก่อนซึ่งเป็นฟังก์ชันข้างนอกแล้วนำไปคูณกับอนุพันธ์ของ $g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันข้างใน

<u>ตัวอย่างเช่น</u>

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right]^2 &= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\bullet\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right] \\
&= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\cdot\left(\frac{x(2x)-(x^2+1)}{x^2}\right) \\
&= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2(x^4-1)}{x^3}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.6.2 ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ n เป็นจำนวนจริงใดๆแล้ว

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 2.6.3 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(3x^3 - x^5\right)^{-2}$

วิธีทำ ให้ $u = 3x^3 - x^5$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 2.6.2 จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(3x^3 - x^5\right)^{-2} \\
&= -2\left(3x^3 - x^5\right)^{-3}\frac{d}{dx}\left(3x^3 - x^5\right) \\
&= -2\left(3x^3 - x^5\right)^{-3}\left(9x^2 - 5x^4\right) \\
&= \frac{-2\left(9x^2 - 5x^4\right)}{\left(3x^3 - x^5\right)^3}
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.6.4 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2 + 3x + 1}}$

วิธีทำ เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ จะได้ $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 1\right)^{\frac{-1}{3}}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(2x^2 + 3x + 1\right)^{\frac{-1}{3}} \\
&= \frac{-1}{3}\left(2x^2 + 3x + 1\right)^{\frac{-4}{3}}\frac{d}{dx}\left(2x^2 + 3x + 1\right) \\
&= \frac{-1}{3}\left(2x^2 + 3x + 1\right)^{\frac{-4}{3}}(4x + 3) \\
&= \frac{-1}{3}\frac{(4x + 3)}{\left(2x^2 + 3x + 1\right)^{\frac{4}{3}}}
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.6.5 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^4$

วิธีทำ โดยใช้กฎลูกโซ่ และกฎผลหารเราจะได้

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^4\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{(3x-1)(2x)-3(x^2+1)}{(3x-1)^2}\\&=\frac{4(x^2+1)^3(3x^2-2x-3)}{(3x-1)^5}\end{aligned}$$

□

ในกรณีที่ฟังก์ชันประกอบมีฟังก์ชันมาประกอบกันมากกว่าสองฟังก์ชัน เราก็สามารถปรับปรุงกฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้เช่นกัน เช่น

ถ้า $y=f(u),\quad u=g(x),\quad x=h(t)$

จะได้ว่า $y=f\left(g\left(h(t)\right)\right)$ ดังนั้น $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f'(u)g'(x)h'(t)$

ตัวอย่างที่ 2.6.6 กำหนดให้ $y=u^2+1,\quad u=\sqrt{x}$ และ $x=\frac{1}{t^3}$ จงหา $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\\&=\frac{d}{du}(u^2+1)\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^3}\right)\\&=(2u)\cdot\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}\cdot\frac{dt^{-3}}{dt}\\&=(2u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{3}{t^4}\right)\end{aligned}$$

เมื่อ $t=1$ จะได้ $x=1$ และ $u=1$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=(2(1))\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)\left(\frac{-3}{1^4}\right)=-3$

□

2.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Derivatives of Trigonometric Functions)

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ และ $\cot x$

การอนุพันธ์ของ $f(x)=\sin x$ เราจะใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ และลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งได้เคยกล่าวไว้แล้วคือ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

จาก $f(x)=\sin x$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right] \\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\sin x]=\cos x} \qquad \text{.........(1)}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ ก็สามารถแสดงได้เช่นเดียวกับการหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sin x$ และเราจะได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\cos x]=-\sin x} \qquad \text{.........(2)}$$

การหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\tan x$ เราจะใช้สูตรที่(1) และ (2)

จาก $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}[\tan x]=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$
$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x-\sin x\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\tan x]=\sec^2 x}$$

สำหรับสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือก็สามารถหาได้เช่นเดียวกัน

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\sec x]=\sec x\tan x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x]=-\operatorname{cosec} x\cot x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\cot x]=-\operatorname{cosec}^2 x}$$

สำหรับการพิสูจน์ให้ผู้อ่านลองทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบทที่ 2.7.1 ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว เราจะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u\tan u\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u\cot u\dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 2.7.1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^5\tan x + 3\sin(3x)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^5\tan x + 3\sin(3x)\right) \\
&= \left(x^5\frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x\frac{dx^5}{dx}\right) + \left(3\frac{d}{dx}[\sin(3x)]\right) \\
&= \left(x^5\sec^2 x + 5x^4\tan x\right) + \left(3\cos(3x)\frac{d}{dx}(3x)\right) \\
&= \left(x^5\sec^2 x + 5x^4\tan x\right) + 9\cos(3x)
\end{aligned}
$$
□

ตัวอย่างที่ 2.7.2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{x}}\right)$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ จะได้ $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec} x$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{cosec} x\right] \\
&= x^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x]+\operatorname{cosec} x\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= x^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{cosec} x\cot x)+\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\operatorname{cosec} x \\
&= \frac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{x}}\left(-\cot x-\frac{1}{2x}\right)
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.7.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sin^2(x^2+1)$

<u>วิธีทำ</u> ใช้กฎลูกโซ่

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sin^2(x^2+1)\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\frac{d}{dx}\left[\sin(x^2+1)\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)\frac{d}{dx}\left[x^2+1\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)(2x) \\
&= 4x\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.7.4 กำหนด $y=\sqrt[3]{x+\sec x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชันใหม่จะได้ $y=(x+\sec x)^{\frac{1}{3}}$ แล้วใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[x+\sec x]^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}(x+\sec x)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}[x+\sec x] \\
&= \frac{1}{3}(x+\sec x)^{-\frac{2}{3}}(1+\sec x\tan x) \\
&= \frac{1+\sec x\tan x}{3(x+\sec x)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.7.5 กำหนดให้ $y=\tan\left(x^2\cos x\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\tan\left(x^2\cos x\right)\right] \\
&= \sec^2\left(x^2\cos x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\cos x\right) \\
&= \sec^2\left(x^2\cos x\right)\left(x^2\frac{d}{dx}[\cos x]+\cos x\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\right) \\
&= \sec^2\left(x^2\cos x\right)\left(-x^2\sin x+2x\cos x\right) \\
&= \left(2x\cos x-x^2\sin x\right)\left(\sec^2\left(x^2\cos x\right)\right)
\end{aligned}
$$

□

<u>**แบบฝึกหัดที่ 2.3**</u>

1. กำหนด $f'(0)=5,\quad g(0)=0$ และ $g'(0)=3$ จงหา $(f\circ g)'(x)$

2. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

2.1 $y=u^3+2u-1$ และ $u=3x-2$

2.2 $y=\dfrac{1}{u^9}$ และ $u=x^6+4x^5-x^3+1$

2.3 $y=\sqrt{u}$ และ $u=x^2+4x+5$

2.4 $y=\sin u$ และ $u=\sqrt{x}$

2.5 $y=u^3$ และ $u=\cos x$

3. จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ

3.1 $y=u^2,\quad u=\cos x$ และ $x=2\sqrt{t}$

3.2 $y=u^4,\quad u=\tan x$ และ $x=t^5$

3.3 $y=\sqrt{u},\quad u=\cos x$ และ $x=\dfrac{t}{t+1}$

3.4 $y=\dfrac{u+1}{u-2},\quad u=x^2$ และ $x=\sqrt[3]{t}$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $f(x)=\sqrt{2x-\sin^3(6x)}$

4.2 $f(x)=\left[x+\tan(x^2-x+1)\right]^{-2}$

4.3 $f(x)=x^4\cos^2(5x)$

4.4 $f(x)=\sqrt{x}\cot^3\left(\sqrt{x}\right)$

4.5 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{cosec}(2x-1)}$

4.6 $f(x)=(3x+8)^{10}\left(x^5+3x^4+2x^2+3x\right)^5$

4.7 $f(x)=\left(\dfrac{2+x^2}{2-x^2}\right)^8$

4.8 $f(x)=\left[x\cos(3x)-\tan^5(x^6)\right]^7$

5. จงหาสมการเส้นของสัมผัสเส้นโค้ง $y = x\sin 2x$ ที่จุด $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

6. จงหาสมการเส้นของสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2\sqrt{5 - x^2}$ ที่จุด $(1, 2)$

2.8 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $y = f(x)$ เราเรียก y ว่าเป็น**ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) ของ x

ถ้าความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y กำหนดในรูปสมการที่ไม่ได้เขียนค่า y ไว้เด่นชัด จะเรียก y ว่าเป็นฟังก์ชันโดยปริยาย (implicit function) ของ x

เช่น $x^3y^2 - xy + 2 = 0$, $x^2 - y^2 = 1$, $x\tan y + x = y^2$, $\sin(xy) + y = 1$ เป็นต้น

สำหรับวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ทำได้โดยหาอนุพันธ์ของแต่ละเทอมในสมการเทียบกับ x โดยคิดว่า y เป็นฟังก์ชันของ x แล้วใช้กฎลูกโซ่เพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$ เราเรียกการหาอนุพันธ์โดยวิธีนี้ว่า **การหาอนุพันธ์โดยปริยาย**

ตัวอย่างที่ 2.8.1 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

$$2y^2 + xy - x^2 - 3 = 0$$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด (x, y) ใดๆ

<u>วิธีทำ</u> จาก $2y^2 + xy - x^2 - 3 = 0$

จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[2y^2 + xy - x^2 - 3\right] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$2\frac{d}{dx}\left[y^2\right] + \frac{d}{dx}[xy] - \frac{d}{dx}\left[x^2\right] - \frac{d}{dx}3 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y - 2x = 0$$

$$(4y + x)\frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 4y}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.8.2 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $\cos\left(x^3y^2\right)=2x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด (x,y) ใดๆ

<u>วิธีทำ</u> จาก $\cos\left(x^3y^2\right)=2x$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^3y^2\right)\right]=\frac{d}{dx}[2x]$$

$$-\sin\left(x^3y^2\right)\frac{d}{dx}\left[x^3y^2\right]=2$$

$$-\sin\left(x^3y^2\right)\left(2x^3y\frac{dy}{dx}+3x^2y^2\right)=2$$

$$-2x^3y\sin\left(x^3y^2\right)\frac{dy}{dx}=2+3x^2y^2\sin\left(x^3y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(2+3x^2y^2\sin\left(x^3y^2\right)\right)}{2x^3y\sin\left(x^3y^2\right)}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.8.3 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $\dfrac{xy}{1+\sec y}=1+y^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด (x,y) ใดๆ

<u>วิธีทำ</u> จาก $\dfrac{xy}{1+\sec y}=1+y^3$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{xy}{1+\sec y}\right]=\frac{d}{dx}\left[1+y^3\right]$$

$$\frac{(1+\sec y)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-(xy)\left(\sec y\tan y\frac{dy}{dx}\right)}{[1+\sec y]^2}=3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}+y+x\sec y\frac{dy}{dx}+y\sec y-xy\sec y\tan y\frac{dy}{dx}=3y^2[1+\sec y]^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}+x\sec y\frac{dy}{dx}-xy\sec y\tan y\frac{dy}{dx}-3y^2[1+\sec y]^2\frac{dy}{dx}=-y-y\sec y$$

$$\left[x-x\sec y-xy\sec y\tan y-3y^2[1+\sec y]^2\right]\frac{dy}{dx}=-y(1+\sec y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y(1+\sec y)}{\left[x-x\sec y-xy\sec y\tan y-3y^2[1+\sec y]^2\right]}$$

ตัวอย่างที่ 2.8.4 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ

$y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2 = 0$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0,3)$

วิธีทำ จาก $$y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2 = 0$$

จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2\right] = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 2x - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(3y^2 + x^2 - 6y\right)\frac{dy}{dx} = -2xy - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - 2x}{\left(3y^2 + x^2 - 6y\right)}$$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(0,3)$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากับ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\,y=3} = \frac{0}{27-18} = 0$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสคือ $y - 3 = 0(x-0) = 0$ หรือ $y = 3$ □

2.9 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Derivatives)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และถ้า f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้ เราจะเขียนแทนอนุพันธ์ของ f' ด้วย f'' หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$ และเราเรียก f'' ว่า **อนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน** f และเราเรียก f' ว่า **อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน** f ในทำนองเดียวกัน **อนุพันธ์อันดับที่สามของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย f''' หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ซึ่งก็คืออนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชัน f

กล่าวโดยทั่วไปสำหรับจำนวนเต็มบวก n **อนุพันธ์อันดับที่ n ของ ฟังก์ชัน** f จะเขียนแทนด้วย f^n หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ซึ่งก็คืออนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n-1$ ของฟังก์ชัน f

เพราะฉะนั้น ถ้า $y = f(x)$ แล้ว

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ f ที่ x คือ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

อนุพันธ์อันดับที่สองของ f ที่ x คือ $f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x)$

อนุพันธ์อันดับที่สามของ f ที่ x คือ $f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x)$

อนุพันธ์อันดับที่สี่ของ f ที่ x คือ $f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}f'''(x)$

$\vdots$

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ x คือ $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$

ตัวอย่างที่ 2.9.1 กำหนด $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$ จงหา $f^{(4)}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$

ดังนั้น $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x + 1$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = 12x^2 - 18x + 4$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}f''(x) = 24x - 18$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx}f'''(x) = 24$$

เพราะฉะนั้น $f^{(4)}(x) = 24$ □

ตัวอย่างที่ 2.9.2 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ จงหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

จะได้

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(-2x^{-3}\right)=(-2)(-3)x^{-4}=\frac{(-2)(-3)}{x^4}=\frac{3!}{x^4}$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left((-2)(-3)x^{-4}\right)=(-2)(-3)(-4)x^{-5}=\frac{(-2)(-3)(-4)}{x^5}=\frac{-4!}{x^5}$$

$$\vdots$$

ทำในทำนองเดียวกันนี้จะได้ว่า $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$ □

ตัวอย่างที่ 2.9.3 กำหนดให้ $y=\dfrac{x}{x^2+4}$ จงหา $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y=\dfrac{x}{x^2+4}$

จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+4}\right]=\frac{\left(x^2+4\right)-x(2x)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right]=\frac{\left(x^2+4\right)^2(-2x)-\left(4-x^2\right)(4x)\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}$$

$$=\frac{(-2x)\left(x^2+4\right)-(4x)\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\dfrac{2(1)\left(1^2-12\right)}{\left(1^2+4\right)^3}=-\dfrac{22}{125}$ □

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

1.1 $x^4+3x^2y+y^3=1-xy$

1.2 $\sqrt{x}\cos y+\sqrt{y}\sin x=0$

1.3 $x^3=\dfrac{x+y}{x-2y}$

1.4 $\sin(x\sqrt{y})+\tan(\sqrt{y})=1$

1.5 $\cot^3\left(x^2y+y\right)=x$

1.6 $\dfrac{xy^3}{1+\sec y}=x+y^2$

2. กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

2.1 $3x^2+y^3=5$

2.2 $x^3y^3-1=0$

2.3 $x+\sin y=y$

2.4 $x\tan y=y^2$

3. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งต่อไปนี้

3.1 $x^2+xy+y^2=3$ ที่จุด $(1,1)$

3.2 $x^2+y^2-(2x^2+2y^2-x)^2=0$ ที่จุด $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

3.3 $5x^4-x^2=y^2$ ที่จุด $(1,2)$

3.4 $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ ที่จุด $\left(-1,3\sqrt{3}\right)$

4. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{9-5x}$ จงหา $f'''(1)$

5. จงหา $f^{(n)}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก)

5.1 $f(x)=x^n$

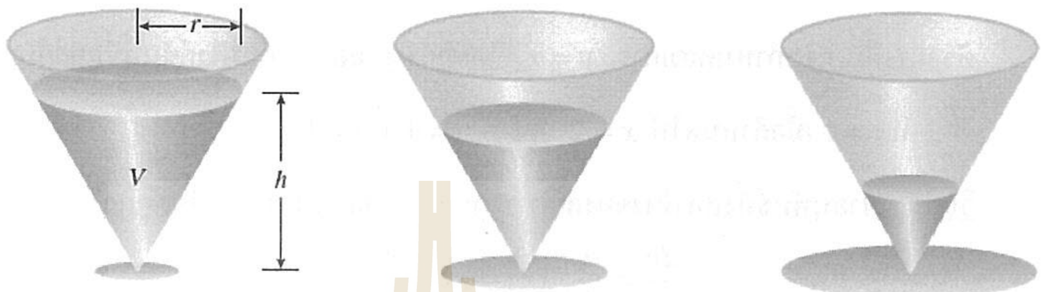
5.2 $f(x)=\dfrac{1}{5x-1}$

5.3 $f(x)=\sqrt{x}$

บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Application of Derivatives)

3.1 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rate)

พิจารณารูปข้างล่าง



รูปที่ 3.1.1

ณ เวลา t ใดๆ

ให้ V แทนปริมาตรของน้ำที่อยู่ในกรวยในเวลา t นาที

ให้ h แทนความสูงของน้ำที่อยู่ในกรวยในเวลา t นาที

และ ให้ r แทนรัศมีของผิวน้ำที่อยู่ในกรวยในเวลา t นาที

เราได้ว่าความสัมพันธ์ของทั้งสามตัวแปรคือสมการ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad ......(*)$$

ซึ่งทั้งสามตัวแปรค่าของมันขึ้นอยู่กับเวลา t ดังนั้นถ้าเราสนใจอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรที่ เวลา t เราก็สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างในสมการ (*) จะได้

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right] = \frac{\pi}{3}\left(\frac{d}{dt}\left[r^2 h\right]\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right) \qquad .....(**)$$

ดังนั้นเราสามารถหา $\frac{dV}{dt}$ ที่เวลา $t = t_0$ ได้โดยใช้สมการ (**) โดยที่เราจะต้องรู้ค่าของ $r, h, \frac{dr}{dt}$ และ $\frac{dh}{dt}$ ที่เวลา $t = t_0$

เราเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ (related rates problem)**

ดังนั้นปัญหาอัตราสัมพัทธ์ก็คือปัญหาที่เกี่ยวกับผลกระทบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาที่มีต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่นๆ เทียบกับเวลา

<u>หมายเหตุ</u> จากปัญหาข้างบนเราสามารถหา อัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของน้ำที่เวลา t (แทนด้วย $\dfrac{dh}{dt}$) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของน้ำที่เวลา t (แทนด้วย $\dfrac{dr}{dt}$) ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3.1.1 กำหนดสมการ $y = x^3$ โดยที่ค่า y และ x เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา t จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t=1$ เมื่อกำหนดให้ $x=2$ และ $\dfrac{dx}{dt}=4$ ที่ $t=1$

<u>วิธีทำ</u> หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ $y = x^3$ เทียบกับ t และใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x^3\right] = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

ดังนั้นค่าของ $\dfrac{dy}{dt}$ ที่ $t=1$ คือ

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 3(2)^2\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 12\cdot 4 = 48$$ □

<u>ขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราสัมพัทธ์</u>

1. เขียนภาพประกอบปัญหา พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและเปลี่ยนแปลงตามเวลา t
2. สร้างสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆที่กล่าวถึงในปัญหา
3. หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t จากสมการที่หาได้ในข้อ 2
4. แก้สมการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการทราบ จากสมการที่ได้ในข้อที่ 3 (การแทนค่าของตัวแปรใดๆ จะทำได้ในขั้นนี้)

ตัวอย่างที่ 3.1.2 อัดกาซเข้าไปในลูกบอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 6 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของลูกบอลลูนในขณะที่รัศมียาว 4 เมตร

<u>วิธีทำ</u> ณ เวลา t ใดๆ ให้ v แทนปริมาตรของลูกบอลลูน

r แทนรัศมีของลูกบอลลูน

จาก ปริมาตรของลูกบอลลูนคือ $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ ....(1)

หาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right] = \frac{4\pi}{3}\cdot\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \qquad ....(2)$$

โจทย์ต้องการหาค่าของ $\frac{dr}{dt}$ เมื่อ $\frac{dV}{dt} = 6$ และ $r = 4$ ดังนั้น แทนค่าลงในสมการที่ (2)

จะได้

$$6 = 4\pi(4)^2\frac{dr}{dt}$$

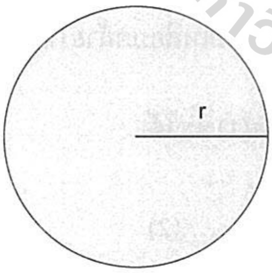
$$\frac{dr}{dt} = \frac{6}{64\pi} = \frac{3}{32\pi}$$

ดังนั้น ในขณะที่รัศมียาวขึ้น 4 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น $\frac{3}{32\pi}$ เมตรต่อนาที □

ตัวอย่างที่ 3.1.3 สมมติว่า น้ำมันรั่วออกจากถังน้ำมัน โดยที่น้ำมันที่รั่วมานี้แผ่กระจายเกิดรอยน้ำมันเป็นรูปวงกลม ซึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น 2 ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมาในขณะที่รัศมีของรอยน้ำมันที่รั่วออกมายาว 60 ฟุต

<u>วิธีทำ</u> ณ เวลา t ใดๆ ให้ A แทนพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา

r แทนรัศมีของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา



จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของน้ำมันที่รั่วออกมาเพิ่มขึ้น 2 ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 2$

โจทย์ต้องการหา $\frac{dA}{dt}$ เมื่อ $r = 60$

จากสูตรพื้นที่ของวงกลมคือ $A = \pi r^2$ ....(1)

ดังนั้น หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการที่ (1) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\pi r^2\right] = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad ....(2)$$

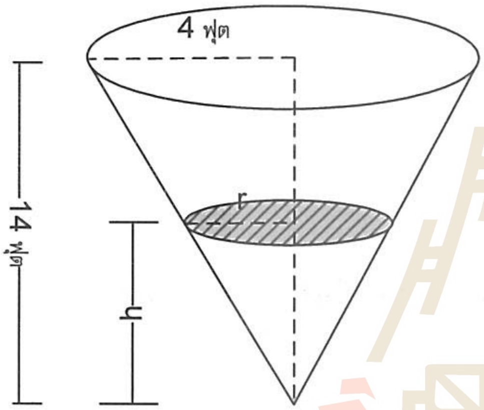
แทนค่า $\frac{dr}{dt} = 2$ และ $r = 60$ ลงในสมการที่ (2) จะได้

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(60)(2) = 240\pi$$

เพราะฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมาเพิ่มขึ้น 240π ตารางฟุตต่อวินาที □

ตัวอย่างที่ 3.1.4 ปล่อยน้ำออกจากภาชนะบรรจุน้ำรูปกรวยกลม ซึ่งมีความสูง 14 ฟุตและรัศมียาว 4 ฟุต ด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของระดับน้ำในขณะที่ระดับน้ำในกรวยอยู่ลึก 6 ฟุต

วิธีทำ



รูปที่ 3.1.2

ณ แวลา t ใดๆ ให้ V แทนปริมาตรของน้ำในกรวย

h แทนความสูงของน้ำในกรวย

r แทนรัศมีของผิวน้ำในกรวย

จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้ำในกรวยลดลงด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\frac{dV}{dt} = -2$

โจทย์ต้องการหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ $h = 6$ ฟุต

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวยคือ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ......(1)

เนื่องจากเราไม่ทราบค่า $\frac{dr}{dt}$ ดังนั้นเราต้องแทน r ในรูปของ h จากสามเหลี่ยมคล้ายในรูปที่ 3.1.2

จะได้ $\frac{r}{h} = \frac{4}{14}$ หรือ $r = \frac{2}{7}h$ ดังนั้นแทน r ลงในสมการ(1) จะได้

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{7}h\right)^2 h = \frac{4}{147}\pi h^3 \qquad ....(2)$$

ดังนั้นหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ(2) เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{147}\pi h^3\right] = \frac{4}{147}\pi\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) \\ &= \frac{4}{49}\pi h^2\frac{dh}{dt}\end{aligned} \qquad ....(3)$$

แทนค่า $\frac{dV}{dt} = -2$ และ $h = 6$ ลงในสมการ(3) จะได้

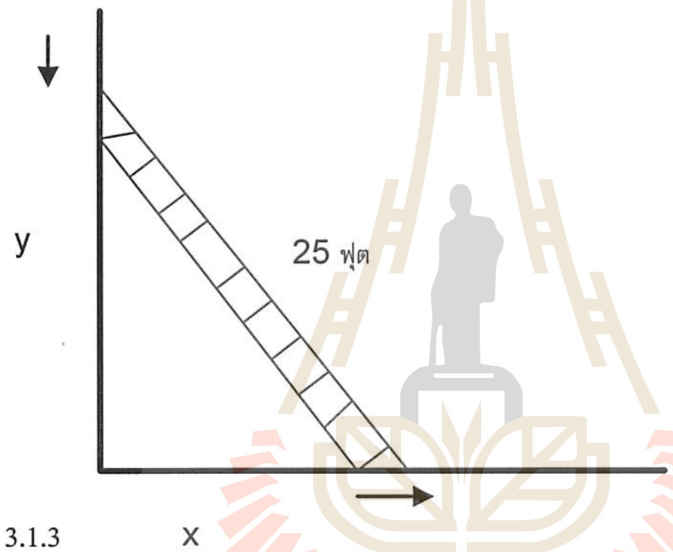
$$-2 = \frac{4}{49}\pi(6)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-49}{72\pi}$$

ดังนั้นระดับน้ำในถังจะลดลงด้วยอัตราเร็ว $\frac{49}{72\pi}$ ฟุตต่อวินาที เมื่อความสูงของน้ำในถังเป็น 6 ฟุต □

ตัวอย่างที่ 3.1.5 บันไดยาว 25 ฟุต วางพาดกำแพงดังรูป (รูปที่ 3.1.3) ถ้าปลายล่างของบันได เลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราคงที่ 3 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดจะเลื่อนลงตามแนวกำแพงด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 7 ฟุต

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 3.1.3

ณ เวลา t ใดๆ ให้ x แทนระยะจากกำแพงถึงปลายล่างของบันได

y แทนระยะจากพื้นดินถึงปลายบนของบันได

เนื่องจากปลายล่างของบันไดเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = 3$

โจทย์ ต้องการหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $x = 7$

โดย ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $x^2 + y^2 = 25^2 = 625$ ……(1)

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{d}{dt}\left[x^2 + y^2\right] = \frac{d}{dt}[625]$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

แทนค่า $\frac{dx}{dt}=3$, $x=7$ และ $y=\sqrt{25^2-7^2}=24$ ลงในสมการที่ (2)

$$2(7)(3)+2(24)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{54}{48}=-\frac{9}{8}$$

ดังนั้นปลายบนของบันไดจะเลื่อนลงตามแนวกำแพงด้วยอัตรา $\frac{9}{8}$ ฟุตต่อวินาที เมื่อปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 7 ฟุต □

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1. ปล่อยกาซออกจากบอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี เมื่อรัศมีของลูกบอลลูนยาว 13 ฟุต และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวของลูกบอลลูนในขณะนั้นด้วย (สูตรหาพื้นที่ผิวของทรงกลมคือ $4\pi r^2$ เมื่อ r คือรัศมี)

2. ถ้าน้ำไหลออกจากถังเก็บน้ำรูปกรวยกลมสูง 8 เมตร และรัศมียาว 4 เมตร ด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาทีจงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของระดับน้ำในขณะที่ระดับน้ำในกรวยอยู่ลึก 6 เมตร

3. เททรายลงบนพื้นราบจะได้กองทรายเป็นรูปกรวยกลม ซึ่งความสูงของกองทรายจะเท่ากับ $\frac{4}{3}$ ของรัศมีที่ฐานเสมอ จงหา

 3.1 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร เมื่อรัศมีที่ฐานยาว 3 ฟุต และอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น 3 ฟุตต่อนาที

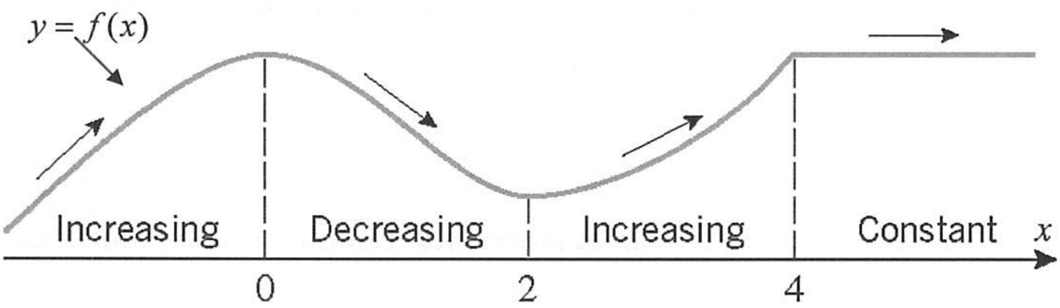
 3.2 จงหาอัตราการเปลี่ยนของรัศมี เมื่อรัศมีที่ฐานยาว 6 ฟุต และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเพิ่มขึ้น 24 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที

4. ถ้าน้ำไหลลงในถังเก็บน้ำรูปทรงกระบอกสูง 8 เมตร และรัศมียาว 4 เมตร ด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์เมตรวินาที ถ้าถังเก็บน้ำรั่ว แล้วจงคำนวณอัตราที่น้ำรั่วออกในขณะที่ระดับน้ำสูง 2 เมตร ซึ่งระดับน้ำกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อวินาที

5. ดวงไฟแขวนอยู่เหนือทางเท้า 20 ฟุต และอยู่ห่างจากผนังตึก ซึ่งตั้งฉากกับทางเท้า 15 ฟุต ชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุตเดินออกจากผนังตึกด้วยอัตราเร็ว 4 ฟุตต่อวินาทีจงหาว่าเงาศีรษะของเขาเคลื่อนที่ไปบนผนังตึกในลักษณะใดและด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อเขาอยู่ห่างจากผนังตึก 6 ฟุต

3.2 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing and Decreasing Function)

พิจารณากราฟของฟังก์ชันในรูป 3.2.1



รูปที่ 3.2.1

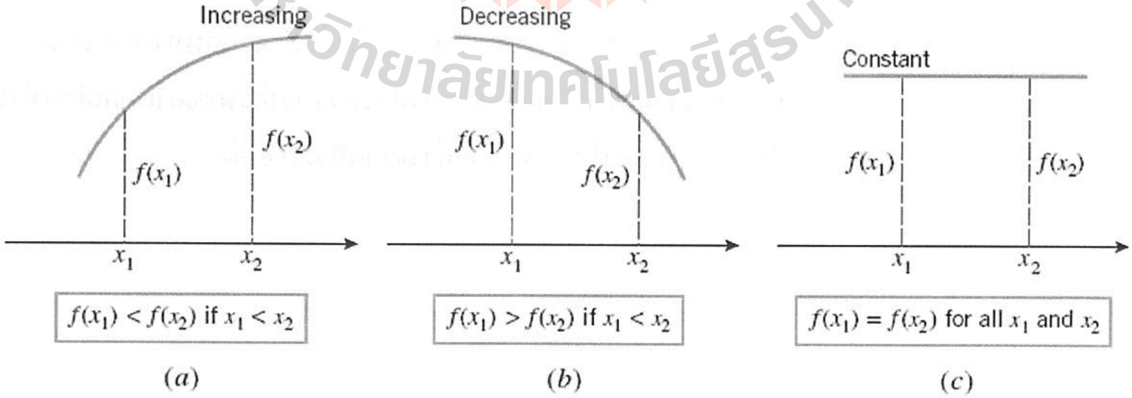
จากรูปที่ 3.2.1 จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0]$, เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0,2]$ และเพิ่มอีกครั้งหนึ่งบนช่วง $[2,4]$ และเป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง $[4,\infty)$

<u>บทนิยามที่ 3.2.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $x_1, x_2 \in I$ แล้ว

(a) f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม**บนช่วง I ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ (ดูรูปที่ 3.2.2(a))

(b) f เป็น**ฟังก์ชัน**ลดบนช่วง I ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ (ดูรูปที่ 3.2.2(b))

(c) f เป็น**ฟังก์ชันค่าคงที่**บนช่วง I ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$ (ดูรูปที่ 3.2.2(c))



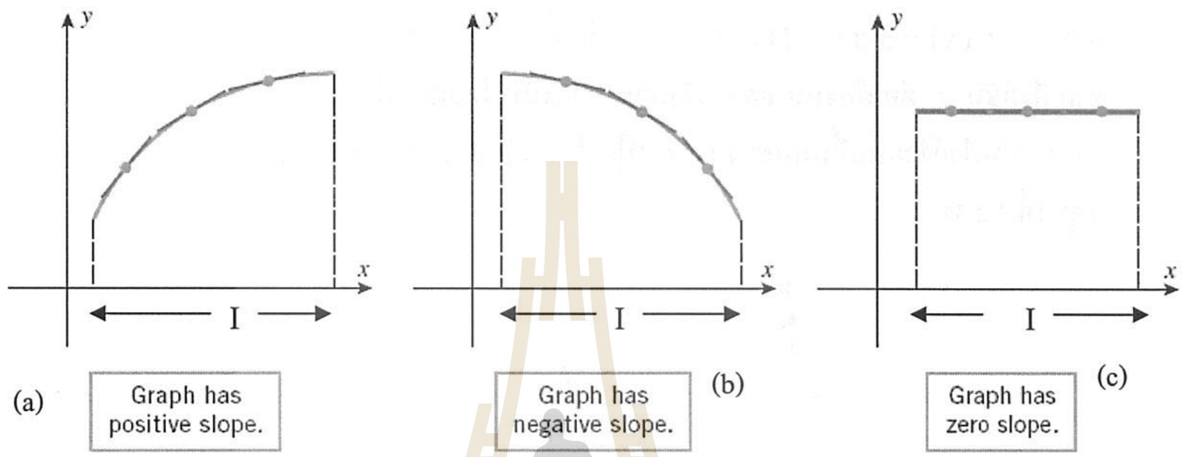
รูปที่ 3.2.2

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b)

(a) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่มขึ้น**บนช่วงปิด $[a,b]$

(b) ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันลดลง**บนช่วงปิด $[a,b]$

(c) ถ้า $f'(x)=0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันค่าคงที่**บนช่วงปิด $[a,b]$



รูปที่ 3.2.3

พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันค่าเพิ่มบนช่วง I (ดูรูป 3.2.3(a)) พบว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ค่า x ใดๆบนช่วง I เป็นบวกเสมอ และทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันค่าลดบนช่วง I (ดูรูป 3.2.3 (b)) ได้ว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ค่า x ใดๆบนช่วง I เป็นลบเสมอ และถ้า กราฟของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันค่าคงที่เราจะพบว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันเป็นศูนย์ (ดูรูปที่ 3.2.3(c))

ตัวอย่างที่ 3.2.1 กำหนด $f(x)=x^2-4x+3$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^2-4x+3\right]$$
$$=2x-4=2(x-2)$$

จะได้ $f'(x)=2(x-2)<0$ ก็ต่อเมื่อ $x<2$

และ $f'(x)=2(x-2)>0$ ก็ต่อเมื่อ $x>2$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้น f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $(-\infty,2]$ □

ตัวอย่างที่ 3.2.2 กำหนด $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

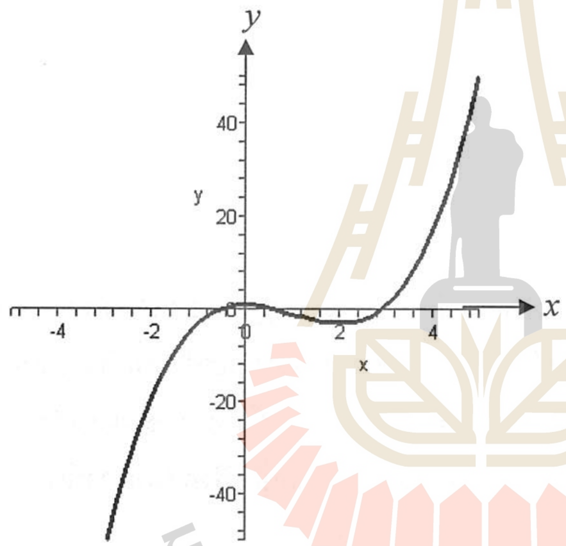
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 - 3x^2 + 1\right]$$
$$= 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

จะได้ $f'(x) = 3x(x-2) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $0 < x < 2$

และ $f'(x) = 3x(x-2) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x < 0$ หรือ $x > 2$

จาก ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จะได้ว่า

ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[0, 2]$ (ดูรูปที่ 3.2.3) □



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

รูปที่ 3.2.3

ตัวอย่างที่ 3.2.3 กำหนด $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

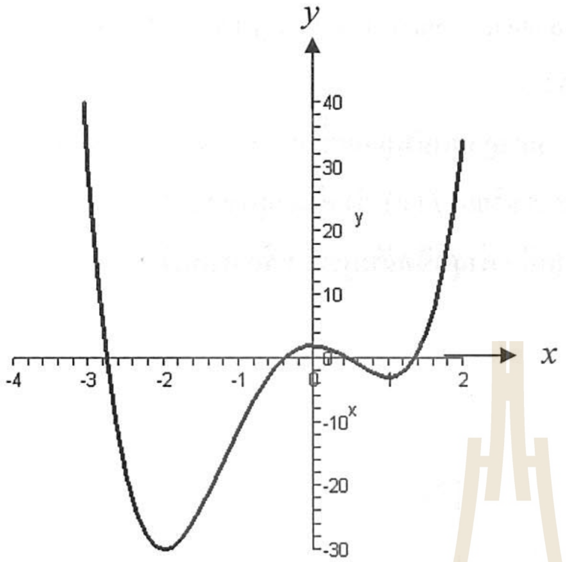
<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2\right]$$
$$= 12x^3 + 12x^2 - 24x$$
$$= 12x(x+2)(x-1)$$

จะได้ว่า $f'(x) = 12x(x+2)(x-1) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x < -2$ หรือ $0 < x < 1$

และ $f'(x) = 12x(x+2)(x-1) > 0$ ก็ต่อเมื่อ $-2 < x < 0$ หรือ $x > 1$

จาก ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 3.2.1 จะได้ว่า ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[-2,0]\cup[1,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $(-\infty,-2][0,1]$ (ดูรูปที่ 3.2.4) □



$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$

รูปที่ 3.2.4

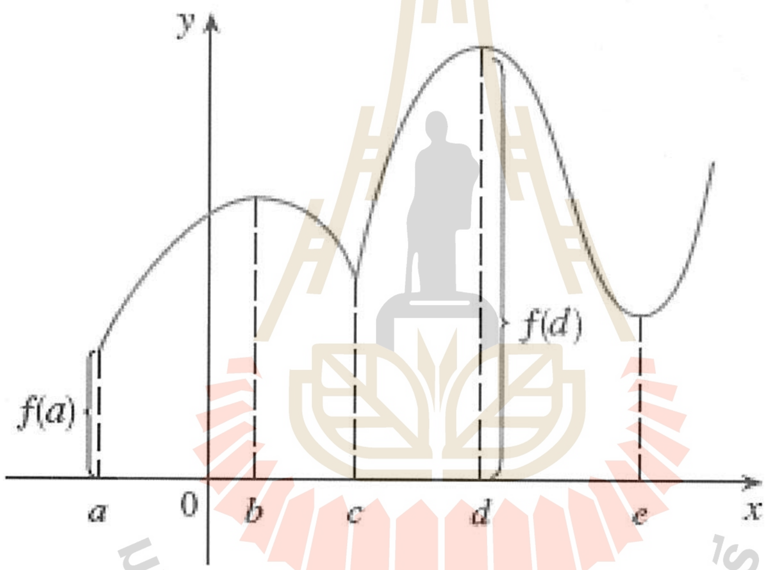
3.3 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Maximum and Minimum value)

<u>บทนิยามที่ 3.3.1</u> ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และให้ $u,v\in I$ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่** u (an absolute minimum at u) ถ้า $f(u)\le f(x)$ สำหรับทุก $x\in I$ และ เราเรียก $f(u)$ ว่า **ค่าต่ำสุดของ** f

ในทำนองเดียวกัน เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่** v (an absolute maximum at v) ถ้า $f(v)\ge f(x)$ สำหรับทุก $x\in I$ และ เราเรียก $f(v)$ ว่า **ค่าสูงสุดของ** f

ชื่อที่ใช้เรียกรวมสำหรับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดคือ **ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ หรือ ค่าสุดขีด**

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$



รูปที่ 3.3.1

จากรูปที่ 3.3.1 เราจะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ d และ มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ a และ $f(d)$ คือค่าสูงสุดของ f ส่วน $f(a)$ คือค่าต่ำสุดของ f

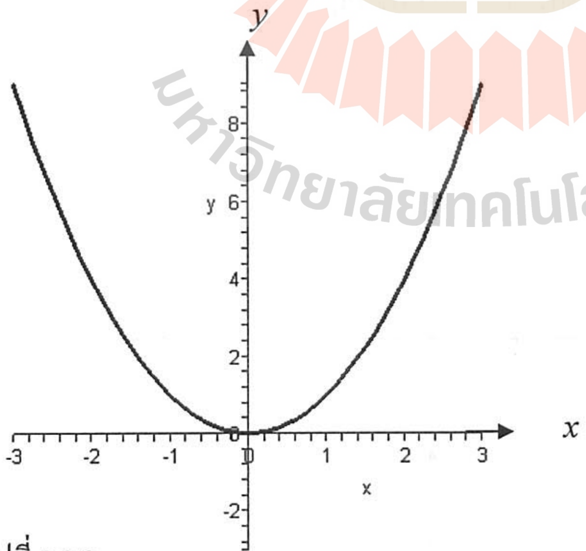
เราเรียก $(a,f(a))$ ว่า จุดต่ำสุดบนกราฟ และ เรียก $(d,f(d))$ ว่าจุดสูงสุดบนกราฟ

บทนิยามที่ 3.3.2

1. จะเรียก f ว่า**มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่** c (a relative or local maximum at c) ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $c\in(a,b)$ และ $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วงเปิดนั้น และเรียก $f(c)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum value) และเรียกจุด $(c,f(c))$ ว่า**จุดสูงสุดสัมพัทธ์**
2. จะเรียก f ว่า**มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่** c (a relative or local maximum at c) ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $c\in(a,b)$ และ $f(c)\leq f(x)$ สำหรับทุก x บนช่วงเปิดนั้น และเรียก $f(c)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative miniimum value) และเรียกจุด $(c,f(c))$ ว่าจุด**ต่ำสุดสัมพัทธ์**

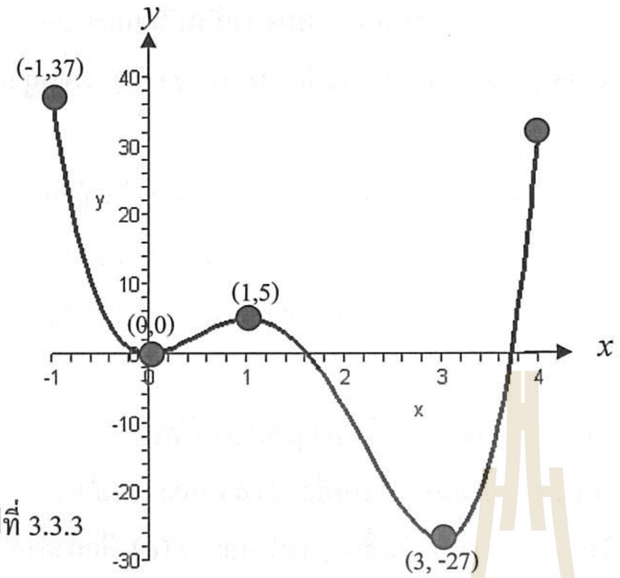
ชื่อที่ใช้เรียกรวมสำหรับค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ **ค่าสุดขีดสัมพัทธ์**
จากรูปที่ 3.3.1 เราจะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ a และ d นั่นคือ $f(a)$ และ $f(d)$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c และ e นั่นคือ $f(c)$ และ $f(e)$ คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 3.3.1 กำหนดให้ $f(x)=x^2$
เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{R}$ และจาก $f(0)=0$ ดังนั้นได้ว่า $f(0)\leq f(x)$ สำหรับทุกๆ $x\in\mathbb{R}$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และ $f(0)=0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f แต่ฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (ดูรูปที่ 3.3.2)



รูปที่ 3.3.2

ตัวอย่างที่ 3.3.2 กำหนดให้ $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ โดยที่ $x\in[-1,4]$



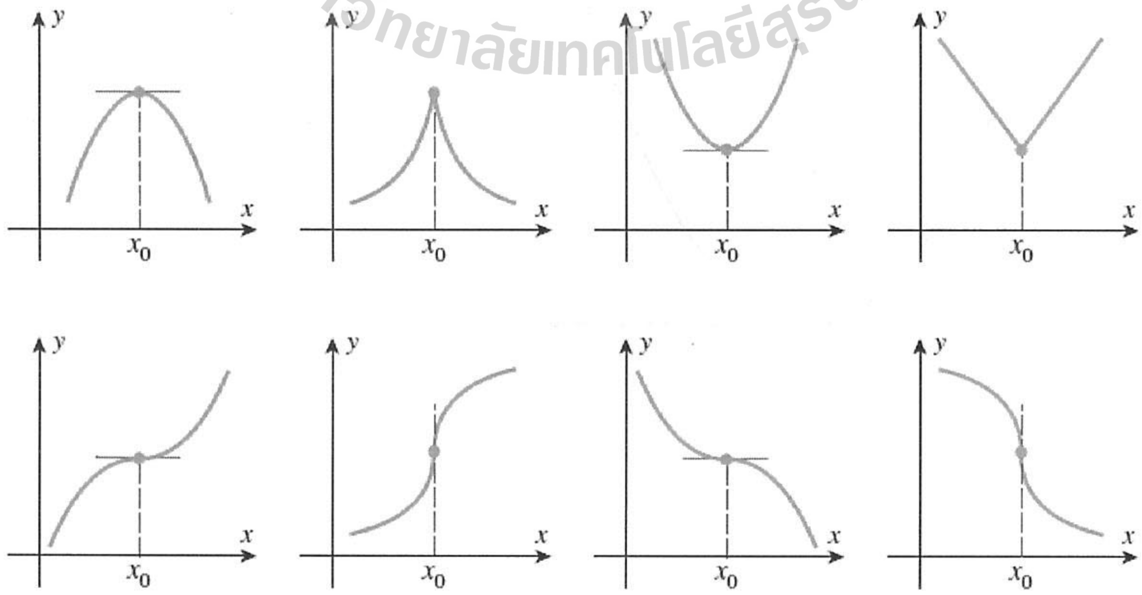
รูปที่ 3.3.3

พิจารณาจากกราฟเราจะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(1)=5$ ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(0)=0$ และ $f(3)=-27$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-1$ และค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(-1)=37$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ -27 □

ทฤษฎีบทที่ 3.3.1 ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว $f'(c)=0$ หรือ f ไม่มีอนุพันธ์ที่ c

บทนิยามที่ 3.3.3 ค่าวิกฤต (critical number) ของฟังก์ชัน f คือค่า c ที่อยู่ในโดเมนของ f ซึ่ง $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

พิจารณาแต่ละฟังก์ชัน f ที่มีกราฟต่อไปนี้ มี x_0 เป็นค่าวิกฤต



รูปที่ 3.3.4

จากรูปที่ 3.3.4 แสดงกราฟของฟังก์ชันที่มี x_0 เป็นค่าวิกฤต จะสังเกตเห็นได้ว่ารูปแถวบน ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ แต่รูปแถวล่างที่ $x = x_0$ ไม่ได้ทำให้ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ นั่นแสดงว่า ถึงแม้ว่า x_0 จะเป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชันแต่ก็ไม่จำเป็นว่า $f(x_0)$ จะเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 3.3.3 จงหาค่าวิกฤตของ $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}\right]$$

$$= 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{\frac{-1}{3}} = \frac{5x-10}{x^{1/3}}$$

$$= \frac{5}{x^{1/3}}(x-2)$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 2$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x = 2$ และ $x = 0$ □

ตัวอย่างที่ 3.3.4 จงหาค่าวิกฤตของ $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right]$$

$$= \frac{x(2x) - \left(x^2+1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -1$ และ $x = 1$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมือ $x = 0$ แต่ $0 \notin D_f$

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x = -1$ และ $x = 1$ □

<u>หมายเหตุ</u> ขั้นตอนในการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ นั้นทำได้ดังนี้

1. หาค่าของ f ที่ค่าวิกฤตของ f ในช่วงเปิด (a,b)

2. หาค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$
3. นำค่าที่ได้จากข้อ 1 และ ข้อ 2 มาเปรียบเทียบกัน ค่าที่มากที่สุดก็จะคือค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าที่น้อยที่สุดก็คือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 3.3.5 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ บนช่วง $[-2,4]$

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 1** หาค่าวิกฤตของ f

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^3-3x^2-9x+10\right]$$
$$=3x^2-6x-9$$
$$=3(x-3)(x+1)$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$ และ $x=3$ นั่นคือค่าวิกฤตคือ $x=-1$ และ $x=3$

และ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+10=15$

และ $f(3)=(3)^3-3(3)^2-9(3)+10=-17$

ขั้นที่ 2 $f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-9(-2)+10=8$

$f(4)=(4)^3-3(4)^2-9(4)+10=-10$

ขั้นที่ 3 เปรียบเทียบค่าของ $f(-1), f(3), f(-2)$ และ $f(4)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 และ 2 ได้ว่า

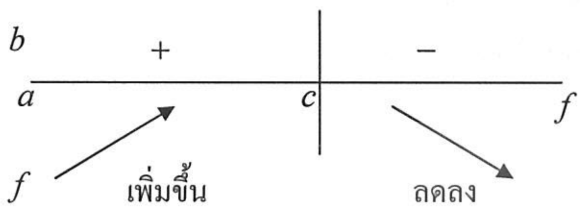
$f(-1)=15$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$f(3)=-17$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ □

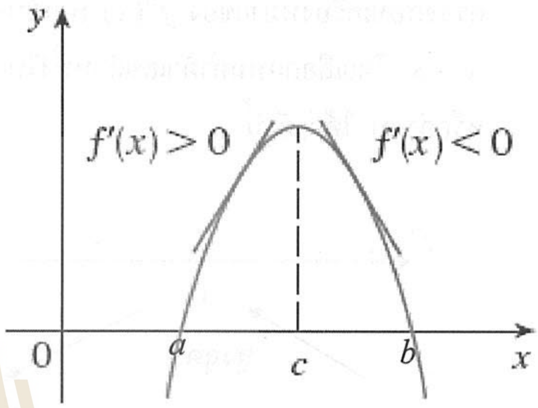
การหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ให้ c เป็นค่าวิกฤตของ f และสมมติว่า f ต่อเนื่องที่ c และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ซึ่งบรรจุ c (แต่อาจจะเว้นที่ c)

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับ $a<x<c$ และ $f'(x)<0$ สำหรับ $c<x<b$ แล้ว f มี **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่** c

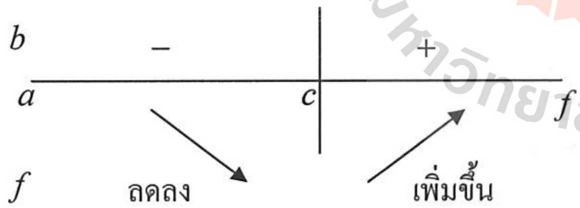


จุดสูงสุดสัมพัทธ์

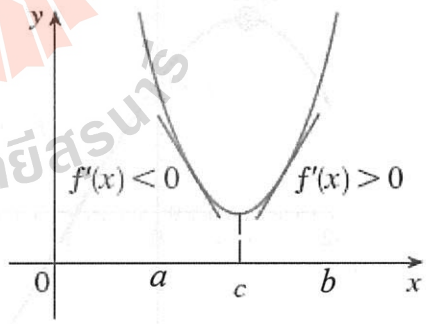


$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับ $a<x<c$ และ $f'(x)>0$ สำหรับ $c<x<b$ แล้ว f มี **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่** c



จุดต่ำสุดสัมพัทธ์



$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

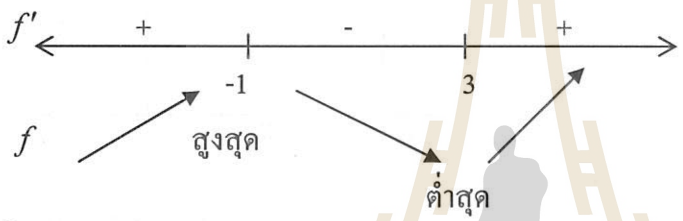
ข้อสังเกต 1. จากสมบัติข้างบนเราจะเห็นว่า ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f จะเกิดที่ค่าวิกฤต ซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมาย ดังนั้นสมบัติข้างบนจึงเป็นการทดสอบหาค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

ตัวอย่างที่ 3.3.6 จงหาค่าสุดขีดและค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

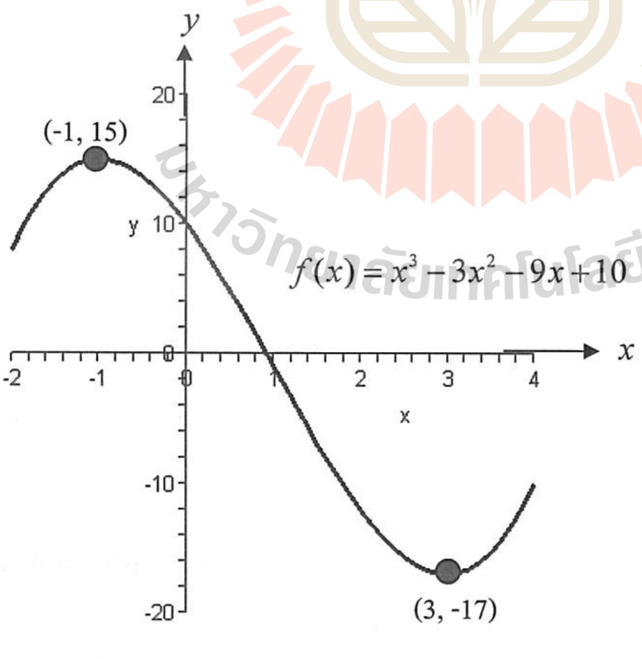
<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤตของ f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^3 - 3x^2 - 9x + 10\right] \\ &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$ และ $x = 3$ นั่นคือค่าวิกฤตคือ $x = -1$ และ $x = 3$ ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนจริง บนช่วง $x < -1,\ -1 < x < 3$ และ $x > 3$ โดยเลือกแทนค่าตัวเลขตัวหนึ่งในแต่ละช่วง แล้วแทนค่าใน $f'(x)$ เพื่อดูว่าเป็นค่าบวกหรือค่าลบ ได้ค่าดังนี้



ดังนั้นจะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = 15$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 3$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(3) = -17$ (ดูรูปที่ 3.3.5) □



รูปที่ 3.3.5

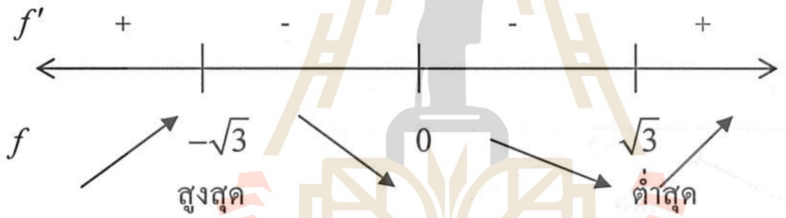
ตัวอย่างที่ 3.3.7 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=x^5-5x^3$

<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤตของ f

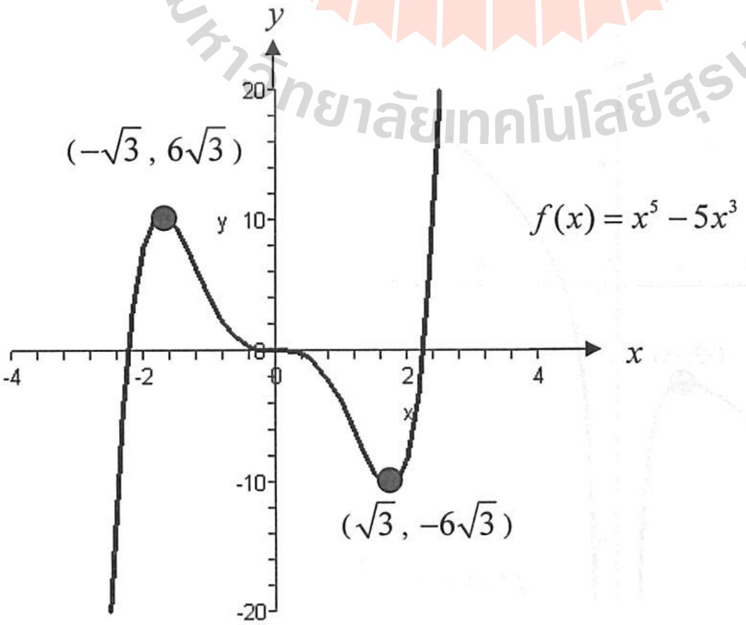
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^5-5x^3\right] \\
&= 5x^4-15x^2 \\
&= 5x^2\left(x^2-3\right) \\
&= 5x^2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0,\quad x=-\sqrt{3}$ และ $x=\sqrt{3}$ นั่นคือค่าวิกฤตคือ $x=0,\quad x=-\sqrt{3}$ และ $x=\sqrt{3}$

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนจริง บนช่วง $x<-\sqrt{3},\quad -\sqrt{3}<x<0,\quad 0<x<\sqrt{3}$ และ $x>\sqrt{3}$ โดยเลือกแทนค่าตัวเลขตัวหนึ่งในแต่ละช่วง แล้วแทนค่าใน $f'(x)$ เพื่อดูว่าเป็นค่าบวกหรือค่าลบเหมือนในตัวอย่างที่ 3.3.5 ได้ค่าดังนี้



ดังนั้นจะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-\sqrt{3}$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\sqrt{3}$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$ (ดูรูปที่ 3.3.6) □



รูปที่ 3.3.6

ตัวอย่างที่ 3.3.8 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤตของ f

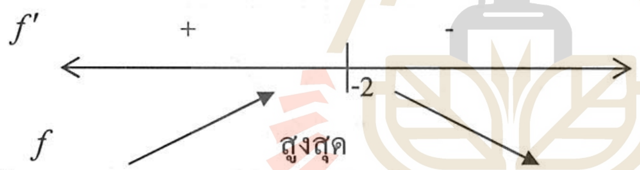
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{4}{x^2}\right] = 1 - 4\left(-2x^{-3}\right)$$

$$= 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

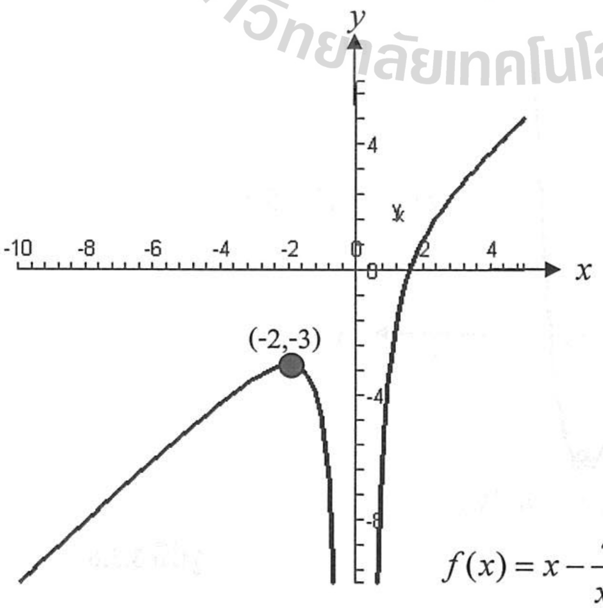
ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$ แต่ $0 \notin D_f$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x = -2$

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนจริง บนช่วง $x < -2$ และ $x > -2$ โดยเลือกแทนค่าตัวเลขตัวหนึ่งในแต่ละช่วง แล้วแทนค่าใน $f'(x)$ เพื่อดูว่าเป็นค่าบวกหรือค่าลบเหมือนในตัวอย่างที่ 3.3.5 ได้ค่าดังนี้



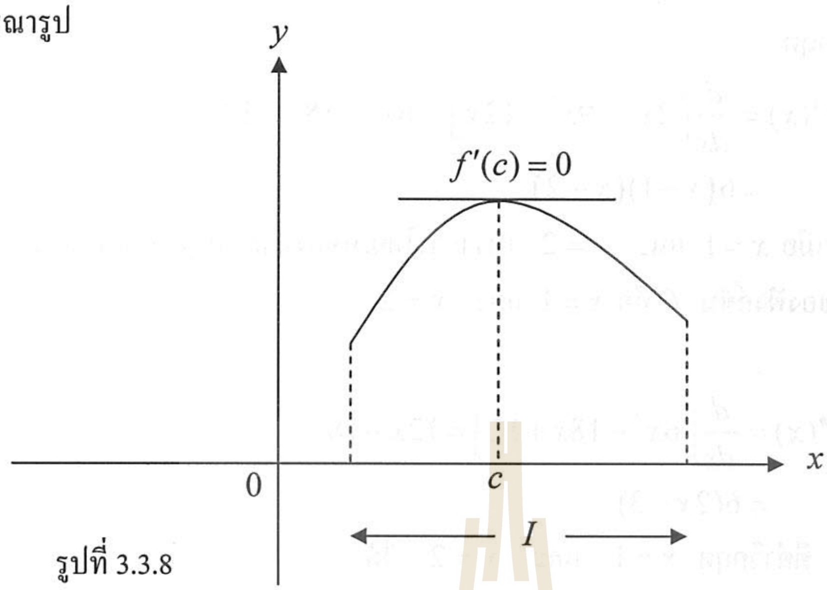
ดังนั้นจะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = -3$
(ดูรูปที่ 3.3.7) □



$f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$ รูปที่ 3.3.7

การใช้อนุพันธ์อันดับสองหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

พิจารณารูป



รูปที่ 3.3.8

สังเกตได้ว่าจุดสูงสุดเกิดที่ค่าวิกฤต c เส้นสัมผัสกราฟ ณ จุด $(c, f(c))$ ขนานกับแกน x ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ลักษณะกราฟเป็นโค้งคว่ำ ซึ่งจะเห็นว่าบนช่วง I ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด x ใน I มีค่าลดลงเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบน I ดังนั้น $f''(x) < 0$ บน I จึงได้ว่า $f''(c) < 0$ นั่นคือจากรูป 3.3.8 ถ้า $f'(c) = 0$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว $f''(c) < 0$ และในทางกลับกัน ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.3.2</u> ให้ c เป็นค่าวิกฤตของ f และสมมติว่า f ต่อเนื่องที่ c และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ซึ่งบรรจุ c (แต่อาจจะเว้นที่ c)และ ให้ $f''(x)$ หาค่าได้บนช่วงเปิด (a,b)

1. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

หมายเหตุ ถ้า $f'(c) = 0$ และ $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้แล้วไม่สามารถทดสอบโดยวิธีนี้ต้องทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 3.3.9 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ โดยใช้อนุพันธ์อันดับสองทดสอบ

<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[2x^3-9x^2+12x\right]=6x^2-18x+12$$
$$=6(x-1)(x-2)$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ และ $x=2$ เพราะว่าโดเมนของฟังก์ชัน f คือเซตของจำนวนจริงดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x=1$ และ $x=2$

จาก

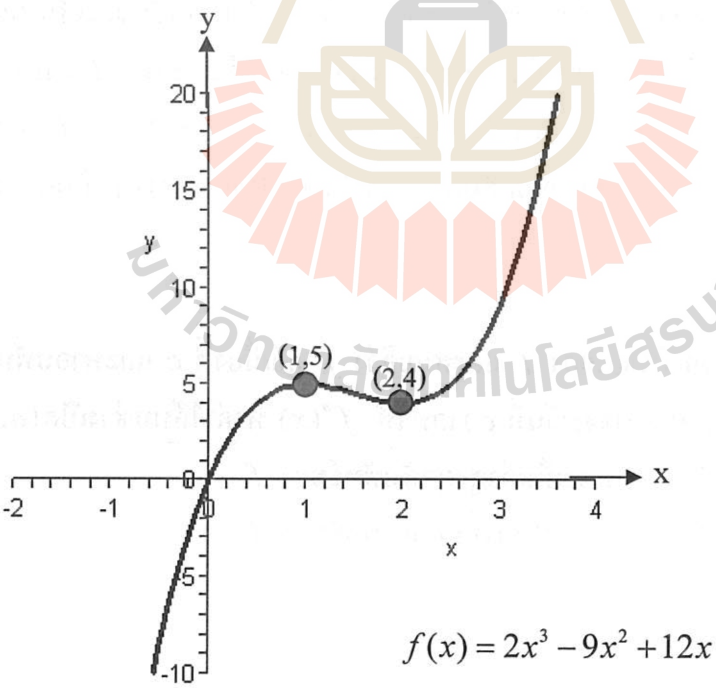
$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[6x^2-18x+12\right]=12x-18$$
$$=6(2x-3)$$

คำนวณค่าของ f'' ที่ค่าวิกฤต $x=1$ และ $x=2$ ได้

$$f''(1)=6(2(1)-3)=-6<0 \quad \text{และ} \quad f''(2)=6(2(2)-3)=6>0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(1)=5$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2)=4$ (ดูรูปที่ 3.3.9) □



รูปที่ 3.3.9

ตัวอย่างที่ 3.3.10 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x, \quad 0<x<2\pi$ โดยใช้อนุพันธ์อันดับสองทดสอบ

<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]=\frac{1}{2}-\cos x$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $\cos x=\dfrac{1}{2}$

เนื่องจาก $0<x<2\pi$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=\dfrac{\pi}{3}$ และ $x=\dfrac{5\pi}{3}$

จาก $f''(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}-\cos x\right]=\sin x$

คำนวณค่าของ f'' ที่ค่าวิกฤต $x=\dfrac{\pi}{3}$ และ $x=\dfrac{5\pi}{3}$ ได้

$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

และ $f''\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\dfrac{5\pi}{3}$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\dfrac{\pi}{3}$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ

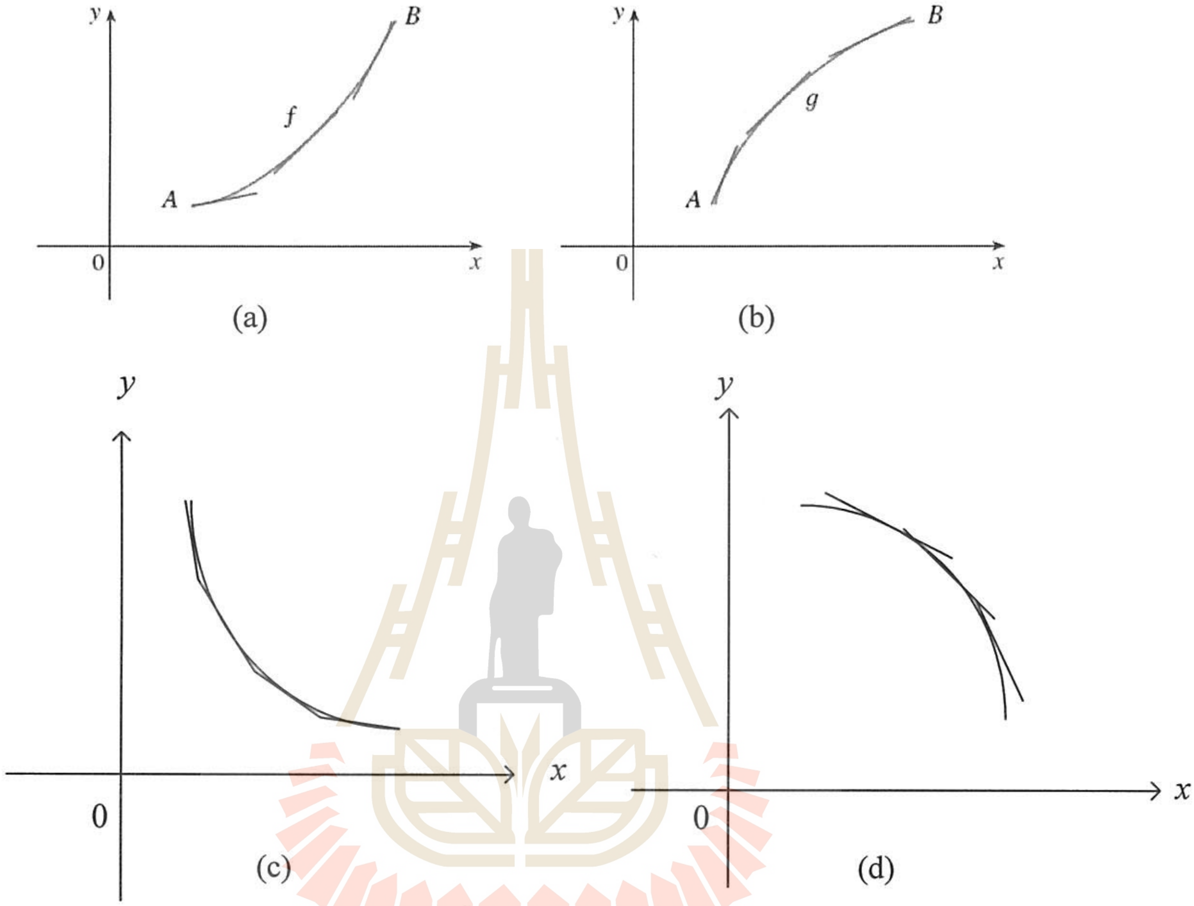
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$$

□

3.4 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า (Concavity and Points of Inflection)

พิจารณากราฟในรูปข้างล่าง



รูปที่ 3.4.1

พิจารณากราฟ (a) กับ (b) จะเห็นว่ากราฟทั้งสองเป็นฟังก์ชันเพิ่มทั้งคู่แต่สิ่งที่ต่างกันคือความเว้า, รูป (a) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $f'(x)$ เพิ่มขึ้นด้วย ในทำนองกลับกัน รูป (b) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $f'(x)$ กลับลดลง

พิจารณากราฟ (c) และ (d) จะเห็นว่ากราฟทั้งสองเป็นฟังก์ชันลดทั้งคู่ แต่รูป (c) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $f'(x)$ เพิ่มขึ้น ส่วนรูป (b) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $f'(x)$ กลับลดลง

เราจะเห็นว่า กราฟรูป (a) และ (c) มีลักษณะความเว้าเหมือนกันคือเว้าหงาย และ $f'(x)$ เพิ่มขึ้น และ กราฟรูป (b) และ (d) มีลักษณะความเว้าเหมือนกันคือเว้าคว่ำ และ $f'(x)$ ลดลง จากทั้งสองกรณีทำให้สรุปได้ว่า

<u>บทนิยามที่ 3.4.1</u> ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I จะกล่าวว่ากราฟของ f

(1) **เว้าหงาย** (concave up) บน I ถ้า f' เพิ่มขึ้นบน I

(2) **เว้าคว่ำ** (concave down) บน I ถ้า f' ลดลงบน I

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.4.1</u> ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์อันดับสองได้บนช่วง I

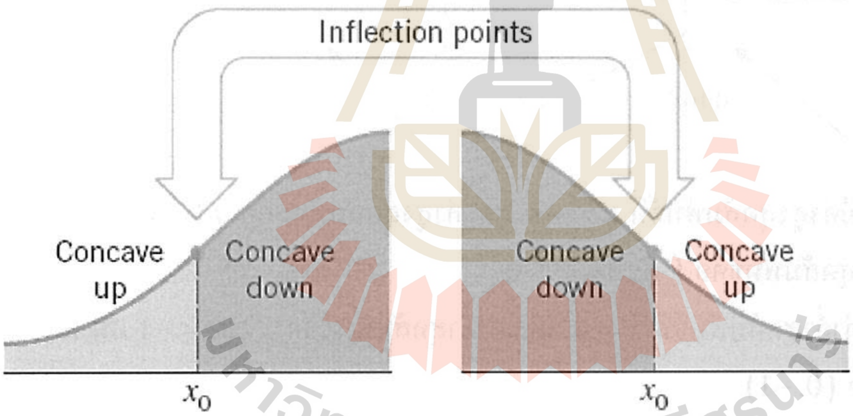
(1) ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว กราฟของ f **เว้าหงายบน** I

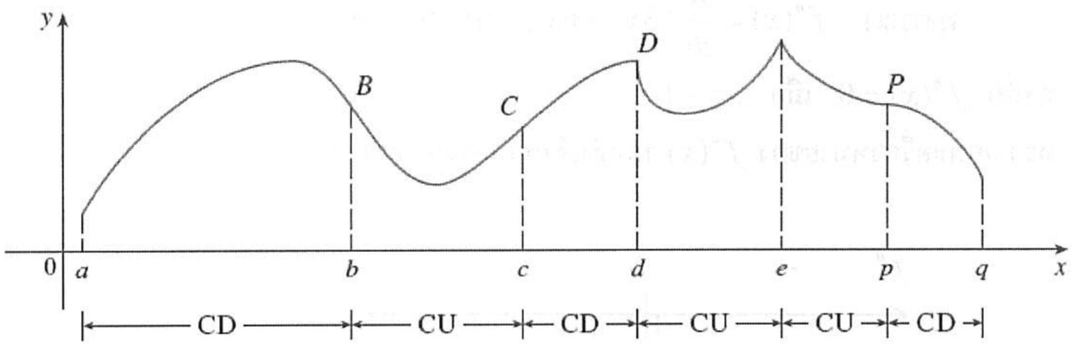
(2) ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว กราฟของ f **เว้าคว่ำบน** I

<u>บทนิยามที่ 3.4.2</u> จุด $(c, f(c))$ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ เป็น**จุดเปลี่ยนเว้า** (inflection point) ถ้า

1. f ต่อเนื่องที่ c
2. f'' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ c

<u>หมายเหตุ</u> เงื่อนไขข้อ 2 ก็คือ เส้นโค้งเปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงาย หรือเปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำ





รูปที่ 3.4.2

จากรูปที่ 3.4.2 จะได้ว่า จุด B, C, D และ P เป็นจุดเปลี่ยนเว้า และกราฟเว้าหงายบนช่วง [b,c], [d,e] และ [e,p] และกราฟเว้าคว่ำบนช่วง [a,b], [c,d] และ [p,q]

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จงหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชัน เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ พร้อมทั้งร่างกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+3x^2-1$

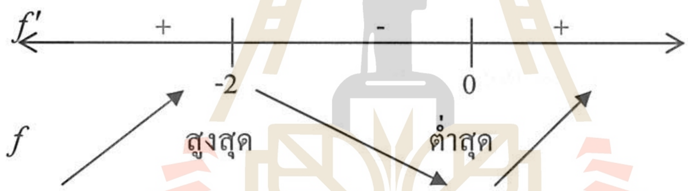
<u>วิธีทำ</u> 1. หาค่าวิกฤต

จาก $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^3+3x^2-1\right]=3x^2+6x=3x(x+2)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ และ $x=-2$ เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x=0$ และ $x=-2$

2. หาจุดสุดขีดสัมพัทธ์

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนจริง บนช่วง $x<-2$, $-2<x<0$ และ $x>0$ ได้ดังนี้



ดังนั้น ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2)=3$ เพราะฉะนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(-2,3)$

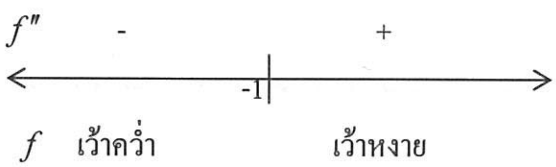
และ ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(0)=-1$ เพราะฉะนั้น จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(0,-1)$

3. หาจุดเปลี่ยนเว้า และช่วงที่ f เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ

พิจารณา $f''(x)=\dfrac{d}{dx}\left[3x^2+6x\right]=6x+6=6(x+1)$

ดังนั้น $f''(x)=0$ เมื่อ $x=-1$

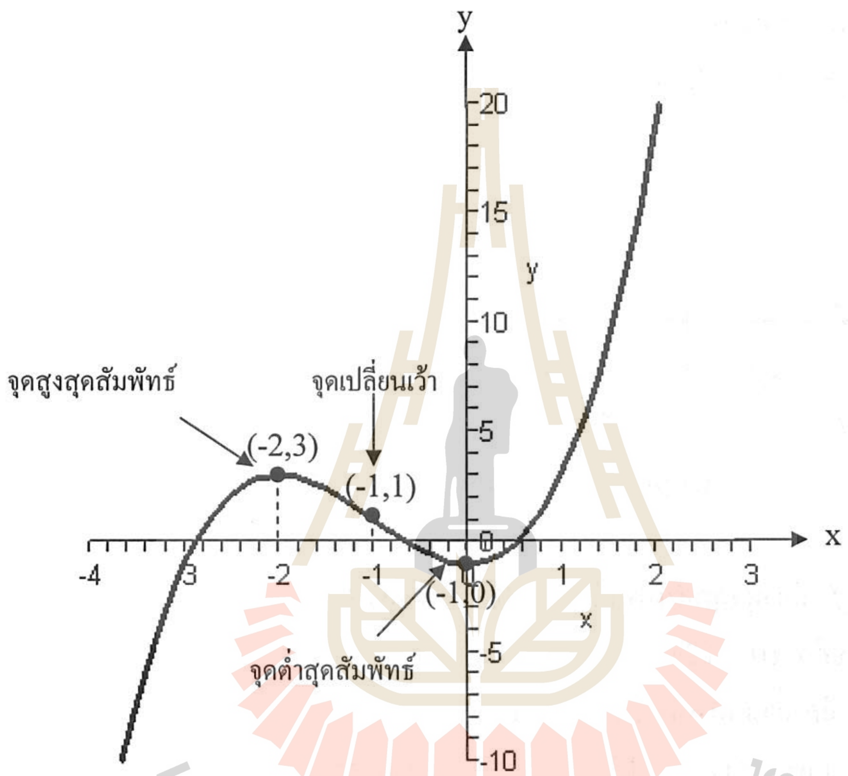
ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนจริงบนช่วง $x<-1$ และ $x>-1$ ได้ผลดังนี้



เนื่องจาก กราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงายเมื่อ $x=-1$ ดังนั้นจะได้ว่าจุด $(-1, f(-1))=(-1,1)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

และ f เว้าหงายบนช่วง $(-1,\infty)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $(-\infty,-1)$

4. ร่างกราฟของ f



รูปที่ 3.4.3

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชัน เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ พร้อมทั้งร่างกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 2x^2 - 12$

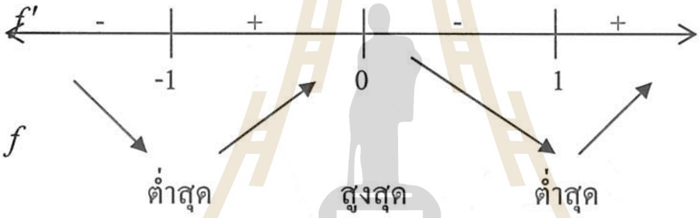
<u>วิธีทำ</u> 1. หาค่าวิกฤต

จาก $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^4 - 2x^2 - 12\right] = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0,\ x = -1$ และ $x = 1$ และ เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x = 0,\ x = -1$ และ $x = 1$

2. หาจุดสุดขีดสัมพัทธ์

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนเส้นจำนวนจริง บนช่วง $x < -1,\ \ -1 < x < 0$, $0 < x < 1$ และ $x > 1$ ได้ผลดังนี้



ดังนั้นฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = -12$ ดังนั้นจุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(0,-12)$

และฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และ $x = 1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = -13$ และ $f(1) = -13$ ดังนั้นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์มีสองจุดคือ $(-1,-13)$ และ $(1,-13)$

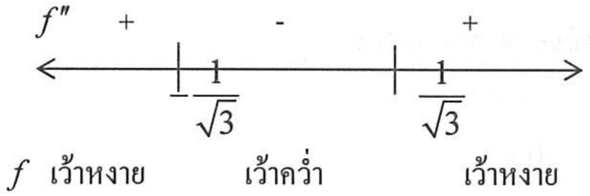
3. หาจุดเปลี่ยนเว้า และช่วงที่ f เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ

พิจารณา

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[4x^3 - 4x\right] = 12x^2 - 4 = 4(3x^2-1) = 4(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$$

ดังนั้น $f''(x) = 0$ เมื่อ $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

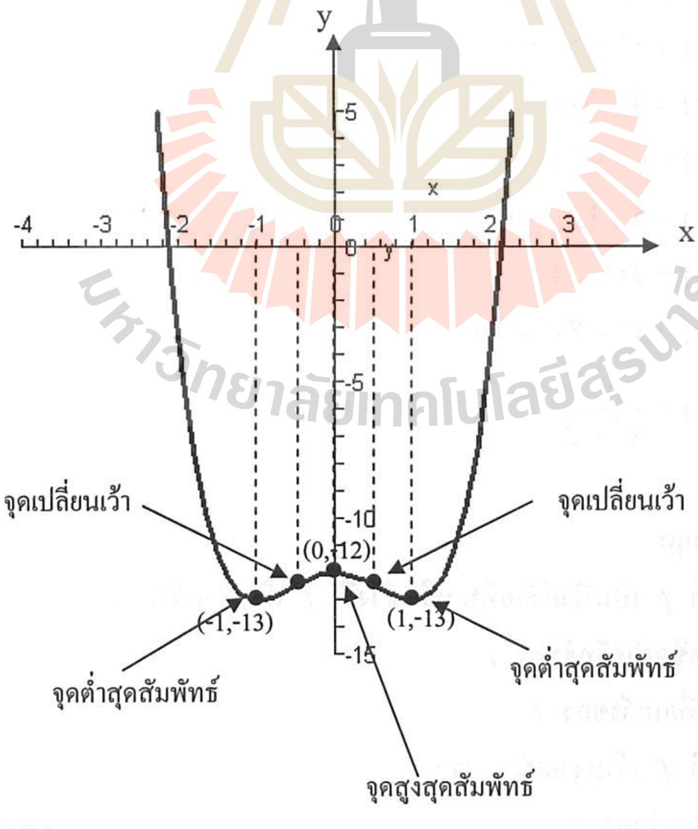
ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนเส้นจำนวนจริงบนช่วง $x < -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ได้ผลดังนี้



เนื่องจาก กราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำเมื่อ $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ f เปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงายเมื่อ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังนั้นจะได้ว่าจุด $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{113}{9}\right)$ และ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{113}{9}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

และได้ว่า f เว้าหงายบนช่วง $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4. ร่างกราฟของ f



รูปที่ 3.4.4

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1. จงหาค่าสุดขีดและค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x) = 8 - 3x, \quad x \ge 1$

1.2 $f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 3$

1.3 $f(x) = 1 + (x+2)^2, \quad -2 \le x < 5$

1.4 $f(x) = 1 - x^4, \quad -2 < x \le 2$

1.5 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 2 \\ 2x - 4, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

2. จงหาค่าวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 5x^2 + 4x$

2.2 $f(x) = x^3 + x^2 - x$

2.3 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}$

2.4 $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - x\right)$

2.5 $f(x) = 4x - \tan x$

3. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

3.2 $f(x) = 4 - 3x - x^2$

3.3 $f(x) = (x+2)^3$

3.4 $f(x) = 5 + 12x - x^3$

3.5 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

3.6 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

3.7 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

จงหา

(a) ค่าวิกฤต

(b) ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

(c) ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

(d) จุดเปลี่ยนเว้าของ f

(e) ช่วงที่ f เว้าหงายหรือ เว้าคว่ำ

(f) ร่างกราฟของ f

4. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชันเพิ่มหรือลด และเว้าหงายหรือเว้าคว่ำ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $f(x)=\cos x, \quad x\in[0,2\pi]$

4.2 $f(x)=\sin^2(2x), \quad x\in[0,\pi]$

4.3 $f(x)=\tan x, \quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

4.4 $f(x)=2x+\cot x, \quad x\in(0,\pi)$

4.5 $f(x)=\sin x\cos x, \quad x\in[0,\pi]$

3.5 ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุด (Applied Maximun and Minimum Problems)

หลักเกณฑ์ในการทำโจทย์มีดังนี้

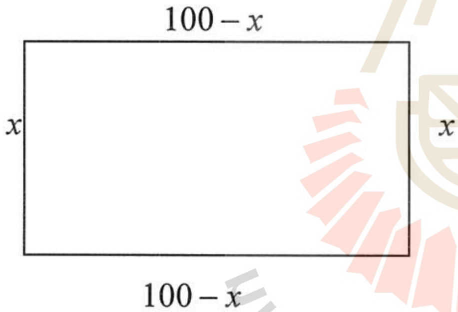
1. พิจารณาว่าโจทย์ต้องการ ค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของอะไรบ้างให้สมมติตัวแปรแทนสิ่งที่ต้องการหา เช่น สมมติว่าแทนด้วย Q
2. พิจารณาว่า Q เกี่ยวข้องกับตัวแปรอะไรบ้าง ให้เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้นกับ Q
3. เขียนตัวแปร Q ที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ให้อยู่ในรูปของตัวแปรเดียว แล้วหาขอบเขตของตัวแปรนั้น
4. หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ Q

ตัวอย่างที่ 3.5.1 จงหาขนาดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเส้นรอบรูป 200 ฟุต และมีพื้นที่มากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x แทนความกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

y แทนความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



จะได้ $A = xy = x(100-x)$ และ x อยู่ในช่วง $[0,100]$ ดังนั้นเราได้

$$A(x) = 100x - x^2, \quad x \in [0,50]$$

จาก $A(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น $A(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,100]$

พิจารณา $A'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[100x - x^2\right] = 100 - 2x$ จะได้ $A'(x) = 0$ เมื่อ $x = 50$

ค่าสูงสุดของ $A(x)$ บนช่วง $[0,100]$ จะเกิดขึ้นที่จุดปลายช่วง คือ 0 หรือ 100 หรือที่ค่าวิกฤต คือ $x = 50$ ดังนั้น คำนวณค่า $A(x)$ ที่ $x = 0,\ 50,\ 100$ ได้ว่า

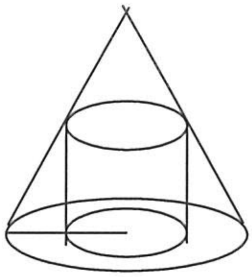
$$A(0) = 0, \qquad A(50) = 2500 \quad \text{และ} \quad A(100) = 0$$

ดังนั้น A มีค่าสูงสุดที่ $x = 50$ และค่าสูงสุดคือ 2500

นั่นคือ สี่เหลียมผืนผ้าจะมีจะมีพื้นที่มากที่สุดเมื่อมีความยาวด้านละ 50 ฟุต □

ตัวอย่างที่ 3.5.2 จงหารัศมีและความสูงของทรงกระบอก (กลมตรง) ที่มีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งสามารถบรรจุลงในกรวย (กลมตรง) ที่มีรัศมีฐานยาว 8 นิ้ว และสูง 12 นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>



ให้ r แทนรัศมีของทรงกระบอก

h แทนความสูงของทรงกระบอก

V แทนปริมาตรของทรงกระบอก

จากสูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอกจะได้

$$V = \pi r^2 h \qquad .....(1)$$

หาความสัมพันธ์ของ h และ r โดยสามเหลี่ยมคล้าย

จะได้ $\dfrac{12-h}{r} = \dfrac{12}{8}$ หรือ $h = 12 - \dfrac{3}{2}r$ .....(2)

แทนค่า (2) ลงใน (1) จะได้ $V(r) = \pi r^2(12 - \frac{3}{2}r) = 12\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^3$ ....(3)

เนื่องจาก r คือรัศมีของทรงกระบอก ดังนั้น $0 \le r \le 8$ และจาก V เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,8]$ ดังนั้น V จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0,8]$

พิจารณา

$$V'(r) = \frac{d}{dr}\left[12\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^3\right] = 24\pi r - \frac{9}{2}\pi r^2$$

$$= \pi r\left(24 - \frac{9}{2}r\right)$$

ดังนั้น $V'(r) = 0$ เมื่อ $r = 0$ และ $r = \dfrac{16}{3}$

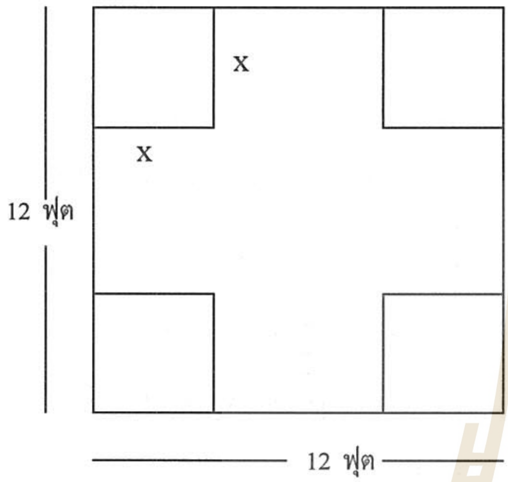
ค่าสูงสุดของ V บนช่วง $[0,8]$ จะเกิดขึ้นที่จุดปลายช่วง คือ 0 หรือ 8 หรือที่ค่าวิกฤต คือ $r = 0$ และ $r = \dfrac{16}{3}$ ดังนั้น คำนวณค่า V ที่ $r = 0,\ 8,\ \dfrac{16}{3}$ ได้ว่า

$V(0) = 0,\qquad V(8) = 0$ และ $V\left(\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{1024\pi}{9}$

ดังนั้นปริมาตรมากที่สุดของทรงกระบอกที่บรรจุในกรวยที่กำหนดคือ $\dfrac{1024\pi}{9}$ ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อรัศมีของทรงกระบอกยาว $\dfrac{16}{3}$ นิ้ว และสูง $h = 12 - \left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{16}{3}\right) = 4$ นิ้ว □

ตัวอย่างที่ 3.5.3 กล่องกระดาษไม่มีฝา มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส สร้างจากกระดาษที่มีพื้นที่ 144 ตารางฟุต ต้องการตัดมุมทั้งสี่มุมออก เป็นรูปสี่เหลียมจัตรัสเท่ากันทุกมุม แล้วพับส่วนที่เหลือเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากฝาเปิด จะต้องตัดมุมทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละเท่าไร กล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ



ให้ x แทนความยาวของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่จะตัดออก

V แทนปริมาตรของกล่องกระดาษที่สร้าง

จาก ปริมาตรของกล่องกระดาษ = พื้นที่ฐาน × สูง

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
V &= (12-2x)^2 x \\
&= \left(144-48x+4x^2\right)x \\
&= 4x^3-48x^2+144x
\end{aligned}
$$

และ x อยู่ในช่วง $[0,6]$ เนื่องจาก V เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และเป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น V ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,6]$ เพราะฉะนั้น V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[0,6]$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
V'(x) &= \frac{d}{dx}\left[4x^3-48x^2+144x\right] \\
&= 12x^2-96x+144 \\
&= 12(x-6)(x-2)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $V'(x)=0$ เมื่อ $x=6$ และ $x=2$

พิจารณาค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$V(0)=0$, $V(2)=128$ และ $V(6)=0$

ดังนั้นปริมาตรมากที่สุดของกล่องกระดาษคือ 128 ลูกบาศก์ฟุต เมื่อตัดมุมทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 ฟุต □

ตัวอย่างที่ 3.5.4 บริษัทผลิตยาได้วันละ x ขวด ใช้ต้นทุน $\frac{x^2}{4}+350x+2500$ บาท ปรากฏว่าขายได้ขวดละ $500-\frac{x}{2}$ บาท บริษัทจะต้องผลิตยาวันละกี่ขวดจึงจะได้กำไรมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> รายรับของบริษัท $R(x)=\left(500-\frac{x}{2}\right)x$

ให้ $P(x)$ แทนกำไรของบริษัทที่ได้จากการขายยา x ขวด ดังนี้

$$P(x)=\left(500-\frac{x}{2}\right)x-\left(\frac{x^2}{4}+350x+2500\right)$$

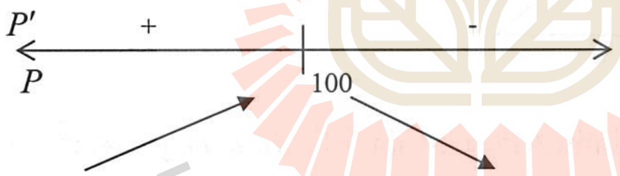
$$=150x-\frac{3x^2}{4}-2500$$

โดเมนของ P คือ $[0,\infty)$

พิจารณา $P'(x)=\frac{d}{dx}\left[150x-\frac{3x^2}{4}-2500\right]=150-\frac{3}{2}x$

ดังนั้น $P'(x)=0$ เมื่อ $x=100$

พิจารณาเครื่องหมายของ $P'(x)$ จะได้



ดังนั้นที่ $x=100$ ทำให้ P มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และเนื่องจาก P เป็นฟังก์ชันลดบน $[100,\infty)$

ดังนั้น $P(100)\geq P(x), \qquad \forall x\in[100,\infty)$

และจาก P เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0,100]$ ดังนั้น $P(100)\geq P(x), \qquad \forall x\in[0,100]$

เพราะฉะนั้น $P(100)=5,000$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ดังนั้นบริษัทควรผลิตยาวันละ 100 ขวดถึงจะได้กำไรสูงสุด □

แบบฝึกหัดที่ 3.3

1. ถ้าต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้รั้วบ้านกั้นเป็นด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้าเขามีลวดหนามยาว 400 เมตร เขาจะกั้นรั้วได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด

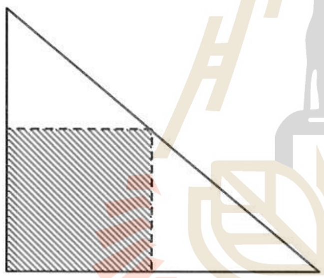
2. สี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีเส้นรอบรูปยาว $2L$ จะต้องมีด้านกว้างและด้านยาวยาวเท่าใด จึงจะทำให้มีพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมากที่สุด

3. กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่ 1,000 ตารางเซนติเมตร จะสามารถสร้างทรงกระบอก ไม่มีฝาปิด ได้มีปริมาตรมากที่สุดเท่าไร

4. ผลบวกของเลขจำนวนหนึ่งกับสามเท่าของเลขอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 70 จงหาว่าผลคูณของเลขสองจำนวนที่มีค่ามากที่สุดเท่าใด

5. พิจารณาสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวเส้นรอบรูปเป็น 10 นิ้ว สร้างเป็นทรงกระบอกโดยการหมุนรอบขอบด้านหนึ่ง จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ทรงกระบอกมีปริมาตรมากที่สุด

6. สามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละ 90, 120, 150 หน่วย ให้หาว่าจะบรรจุสี่เหลี่ยมมุมฉากลงไปภายในสามเหลี่ยมนี้ (ให้มีมุมฉากร่วมกันดังภาพ) ได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด



7. จงหาความยาวที่สั้นที่สุดของบันไดที่พาดรั้วสูง 10 ฟุต ไปถึงกำแพงที่อยู่ห่างจากรั้วไป 4 ฟุต

8. ผู้หญิงคนหนึ่งกำลังจะจมน้ำร้องให้คนช่วย โดยอยู่ห่างจากฝั่ง 75 เมตร มีชายคนหนึ่งได้ยินจึงรีบไปช่วยโดยที่ชายคนนี้ยืนอยู่ติดฝั่งและห่างจากผู้หญิง 170 เมตร ถ้าชายคนนี้วิ่งไปช่วยเขาวิ่งด้วยความเร็ว 5 เมตรต่อวินาที และเขาสามารถว่ายน้ำได้ 3 เมตรต่อวินาที จงหาว่าชายผู้นี้ต้องวิ่งด้วยระยะทางเท่าใดจึงจะไปช่วยผู้หญิงคนนี้เร็วที่สุด

9. ในการประมาณการปลูกมันสำปะหลังพบว่า ถ้าขุดมันสำปะหลัง 100 กิโลกรัม จะขายได้กิโลกรัมละ 1.50 บาท ถ้ายังไม่ขุดและรอต่อไป จะได้มันสำปะหลังเพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 10 กิโลกรัม แต่ราคาขายจะลดลงไปสัปดาห์ละ 0.05 บาทต่อกิโลกรัม ดังนั้นควรขายมันสำปะหลังเมื่อใด จึงจะมีรายได้ จากการขายมากที่สุด

บทที่ 4 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Functions)

4.1 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Functions)

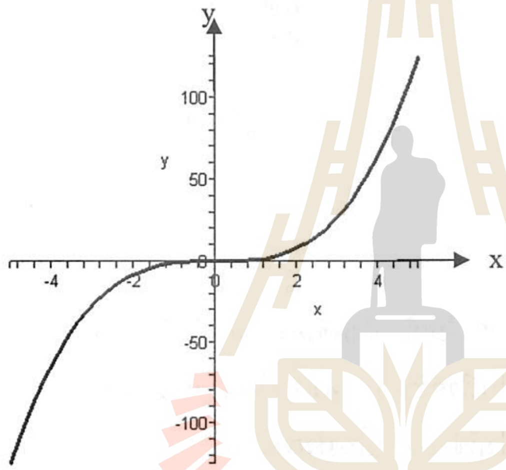
__บทนิยาม 4.1.1__ ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เราจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

หรือจะเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ สำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f : A \xrightarrow{1-1} B$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3$



รูปที่ 4.1.1

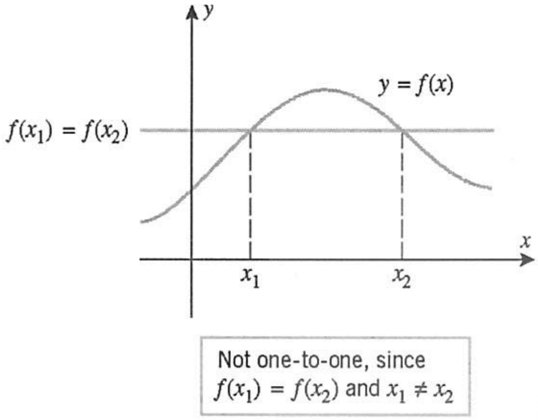
เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น สมการ $y = x^3$ จะมีผลเฉลย x เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ สอดคล้องกับค่าของ y ที่อยู่ในเรนจ์ของ f

ซึ่งผลเฉลย x กำหนดโดย $x = y^{\frac{1}{3}}$ ....(1)

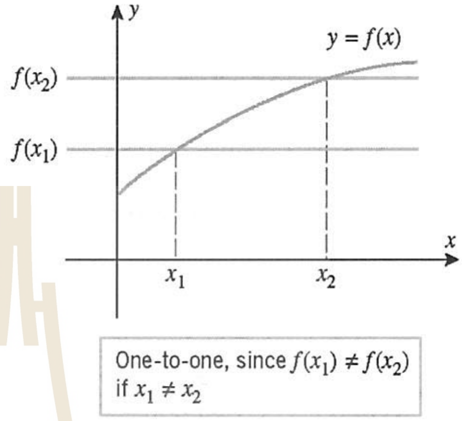
นั่นก็คือ กำหนด x อยู่ในรูปฟังก์ชันของ y เราจะเรียกฟังก์ชันใหม่นี้ว่า **ฟังก์ชันผกผัน**ของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1}

จากสมการ (1) แทน $x = f^{-1}(y)$ ดังนั้น $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$

<u>ทฤษฎีบท 4.1.1</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่ง และ $f'(x) > 0$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x ที่อยู่บนโดเมน แล้วฟังก์ชัน f จะมีฟังก์ชันผกผัน



รูปที่ 4.1.2 (a)



รูปที่ 4.1.2 (b)

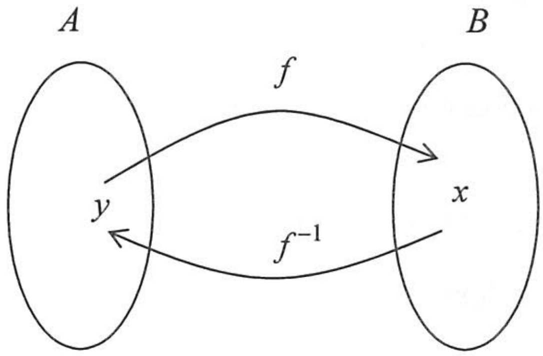
จากรูปที่ 4.1.2 (a) เราจะเห็นว่า ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นฟังก์ชัน f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน แต่รูปที่ 4.1.2(b) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นฟังก์ชัน f ในรูปที่ 4.1.2(b) มีฟังก์ชันผกผัน จากรูปที่ 4.1.2(b) เราจะเห็นว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า f **เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด**

<u>บทนิยาม 4.1.2</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B แล้ว f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1} ซึ่งมีโดเมนเป็นเซต B และมีเรนจ์เป็นเซต A โดยที่ f^{-1} มีสมบัติดังนี้

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \qquad (*)$$

สำหรับทุกๆ $x \in B$

บทนิยาม 2 กล่าวว่า ถ้า f มีการส่ง y ไปยัง x แล้ว f^{-1} จะมีการส่ง x กลับมายัง y ดังรูป



รูปที่ 4.1.3

ข้อสังเกต โดเมนของ f^{-1} = เรนจ์ของ f

เรนจ์ของ f^{-1} = โดเมนของ f

ตัวอย่างที่ 4.1.1 ฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=x^3$ คือ $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ เนื่องจาก ถ้า $y=x^{\frac{1}{3}}$ แล้ว $f(y)=f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=x$ □

ตัวอย่างที่ 4.1.2 ถ้า $f(2)=5$, $f(3)=7$, และ $f(9)=1$ จงหา

$f^{-1}(5)=2$

$f^{-1}(7)=3$

$f^{-1}(1)=9$

ตัวอย่างที่ 4.1.3 กำหนด $f(x)=2x-1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f'(x)=2>0$ สำหรับทุก x บนเซตของจำนวนจริง

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1}

ให้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x=f(y)=2y-1$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{x+1}{2}=y=f^{-1}(x)$

ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=2x-1$ คือ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 4.1.4 กำหนด $f(x)=x^3+2$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 บนช่วง $(0,\infty)$ หรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f'(x)=3x^2>0$ สำหรับทุก $x\in(0,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1}

ให้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x=f(y)=y^3+2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{x-2}=y=f^{-1}(x)$

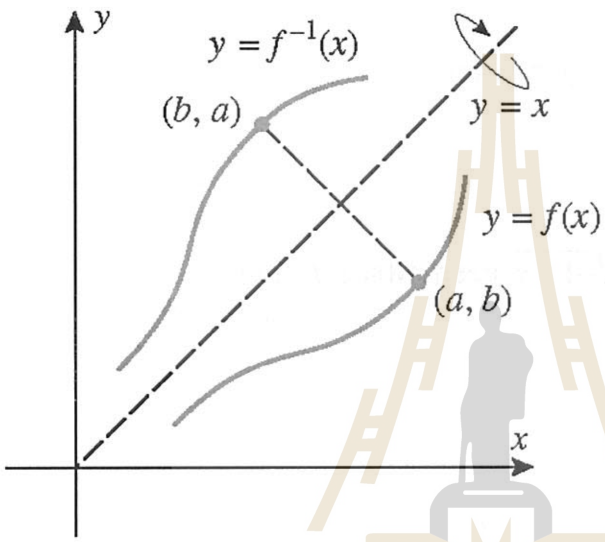
ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=x^3+2$ คือ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$ □

<u>กราฟของฟังก์ชันผกผัน</u>

ถ้าจุด (a,b) เป็นจุดๆหนึ่งบนกราฟของ f แล้วจุด (b,a) เป็นจุดบนกราฟของ f^{-1}

เนื่องจาก $f(a)=b$ ทำให้ได้ว่า $f^{-1}(b)=a$

นั่นคือ จุด (a,b) อยู่บนกราฟของ f ก็ต่อเมื่อจุด (b,a) อยู่บนกราฟของ f^{-1} แต่จุด (b,a) เป็นจุดสะท้อนของจุด (a,b) เทียบกับเส้นตรง $y=x$ ดังนั้นเราสามารถเขียนกราฟของ f^{-1} ได้โดยการสะท้อนกราฟของ f เทียบกับเส้นตรง $y=x$

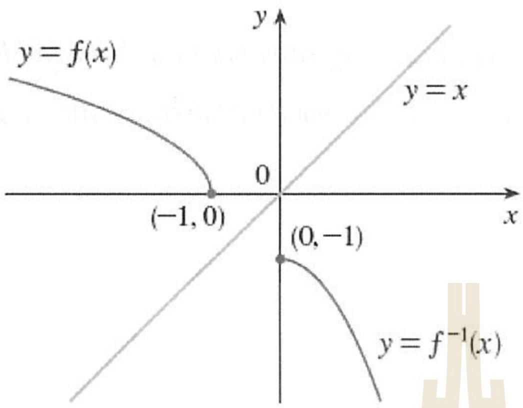


รูปที่ 4.1.4 แสดงกราฟของ f และ f^{-1}

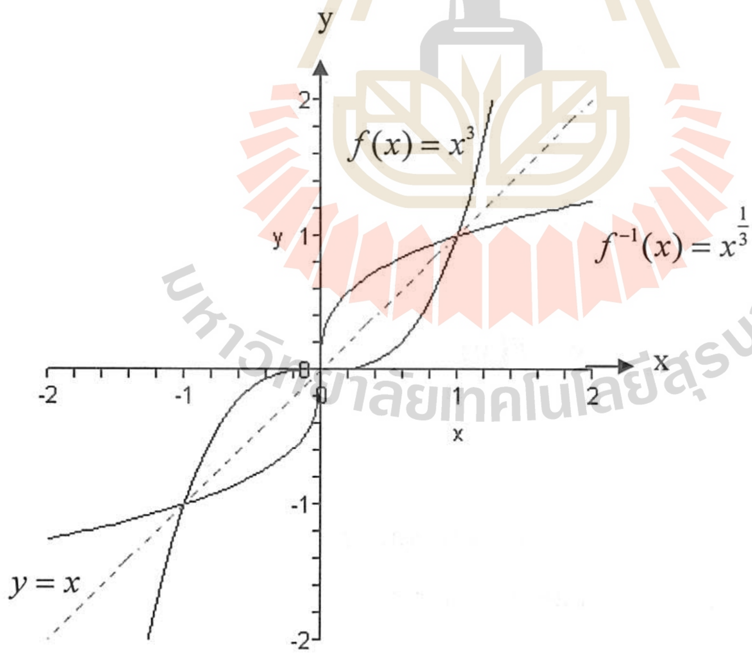
<u>สมบัติของฟังก์ชันผกผัน</u>

1. $y=f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x=f(y)$
2. $D_{f^{-1}}=R_f$
3. $R_{f^{-1}}=D_f$
4. $f^{-1}(f(x))=x$ สำหรับทุก x ที่อยู่บนโดเมนของ f
5. $f(f^{-1}(x))=x$ สำหรับทุก x ที่อยู่บนโดเมนของ f^{-1}
6. $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่บนโดเมนของ f
7. กราฟของ f^{-1} จะสะท้อนกับกราฟของ f เทียบกับเส้นตรง $x=y$

ตัวอย่างแสดงกราฟของ f และ f^{-1}



รูปที่ 4.1.5 แสดงกราฟของ $f(x) = \sqrt{-1-x}$ และกราฟของ $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geq 0$



รูปที่ 4.1.6 แสดงกราฟของ $f(x) = x^3$ และกราฟของ $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน (Derivatives of Inverse Functions)

ให้ $y = f^{-1}(x)$ เราต้องการหา $\dfrac{dy}{dx}$

จาก $y = f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x = f(y)$ โดยการหาอนุพันธ์แบบปริยายเทียบกับ x เราจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx} f(y) \quad \Rightarrow \quad 1 = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{f'(y)}$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

ทฤษฎีบท 4.1.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและหาอนุพันธ์ได้ โดยมี f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f และ $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$ แล้วฟังก์ชันผกผัน f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)} \qquad \ldots..(2)$$

หมายเหตุ $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{df^{-1}}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.1.5 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ คือเซต ของจำนวนจริง และจงหาค่าของ $(f^{-1})'(10)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^3+x\right]=3x^2+1>0$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

จากสูตร $(f^{-1})'(10)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(10)\right)}$ .....(*)

และ $f'(x)=3x^2+1$

ให้ $f^{-1}(10)=a$ ดังนั้น $10=f(a)=a^3+a$

เพราะฉะนั้น $a=2$ นั่นคือ $f^{-1}(10)=2$

แทนค่า $f'(f^{-1}(10))=f'(2)=3(2)^2+1=13$ ลงในสมการ (*) จะได้

$$(f^{-1})'(10)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(10)\right)}=\frac{1}{13}$$ □

ตัวอย่าง 4.1.6 กำหนด $f(x)=\dfrac{4x^2}{x+1}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 บนช่วง $(0,\infty)$ และจงหา $(f^{-1})'(2)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{4x^2+8x}{(x+1)^2}>0$ สำหรับทุก $x\in(0,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

จากสูตร $(f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$ .....(*)

ให้ $f^{-1}(2)=a$ ดังนั้น $2=f(a)=\dfrac{4a^2}{a+1}$ หรือ $4a^2-2a-2=0$

เพราะฉะนั้น $a=1$ นั่นคือ $f^{-1}(2)=1$

แทนค่า $f'(f^{-1}(2))=f'(1)=\dfrac{4(1)^2+8(1)}{(1+1)^2}=3$ ลงในสมการ(*) จะได้

$$(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{3}$$ □

<u>หมายเหตุ</u> จากสมการ (2) ในทฤษฎีบทที่ 4.1.2 เราสามารถเขียนเป็นสูตรได้ใหม่ดังนี้

จาก $y = f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x = f(y)$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x)$$

และ

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \quad \ldots(**)$$

แทนค่าที่ได้ในสมการ (**) ลงในสมการ (2) เราก็จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \ldots.(3)$$

แบบฝึกหัดที่ 4.1

1. จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ด้วย พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของ f และ f^{-1}

   1.1 $f(x) = x - 1$

   1.2 $f(x) = 2x - 1$

   1.3 $f(x) = \sqrt{x-1}$

   1.4 $f(x) = -\sqrt{x-1}$

   1.5 $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

   1.6 $f(x) = (1-2x)^3$

   1.7 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

   1.8 $f(x) = \dfrac{1-2x}{1+x}$

   1.9 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

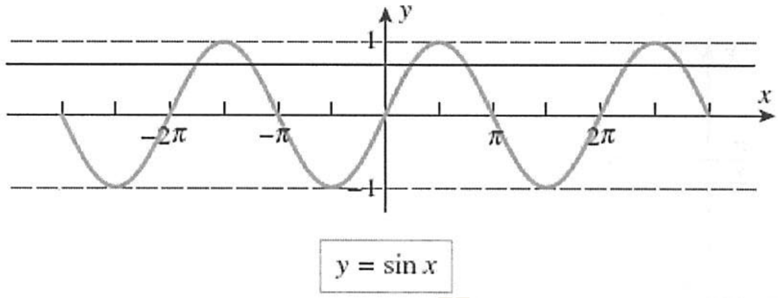
2. กำหนด $f(x) = x^3 + x$ จงหา $f^{-1}(2)$

3. กำหนด $f(x) = 1 + 2x^3$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และจงหา $\left(f^{-1}\right)'(3)$

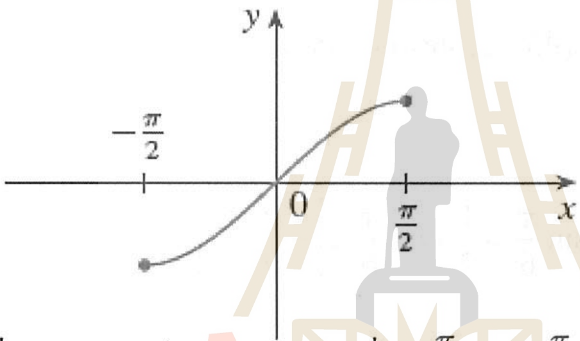
4. กำหนด $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และจงหา $\left(f^{-1}\right)'(-2)$

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (The Inverse Trigonometric Functions)

พิจารณา ฟังก์ชัน $y = \sin x$



รูปที่ 4.2.1 (a) ฟังก์ชัน $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$



รูปที่ 4.2.1 (b) ฟังก์ชัน $y = \sin x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

จากที่เราทราบกันดีอยู่แล้วว่าฟังก์ชัน $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1 (ดูรูปที่ 4.2.1 (a)) ดังนั้นเราไม่สามารถหาฟังก์ชันผกผันของมันได้แต่ ถ้าเราจำกัดโดเมนของฟังก์ชัน $y = \sin x$ โดยให้ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ เราจะเห็นว่ามันจะ เป็นฟังก์ชัน 1-1 (ดูรูปที่ 4.2.1(b)) ดังนั้นเราสามารถหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $y = \sin x$ ได้ และเราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กไซน์** เขียนแทนด้วย

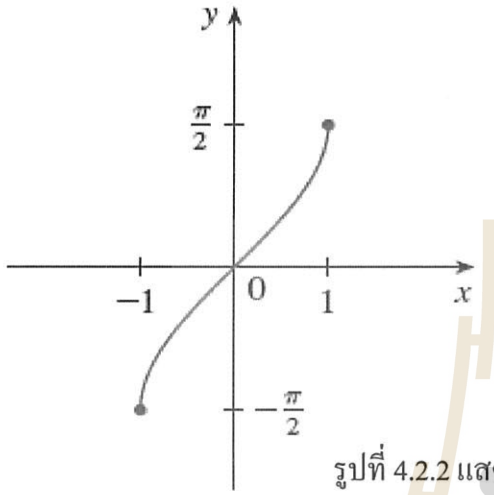
$y = \sin^{-1} x$ หรือ $y = \arcsin x$

นั่นคือ

$y = \sin^{-1} x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin y = x$

และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

โดเมนของ $\sin^{-1}$ คือ $[-1,1]$ และ เรนจ์ของ $\sin^{-1}$ คือ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ซึ่งเรียกว่า **ค่าหลัก (principle value)** ของ $\sin^{-1}$



รูปที่ 4.2.2 แสดงกราฟของ $y=\sin^{-1}x$

ตัวอย่างที่ 4.2.1

1. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ เพราะว่า $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ และ $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\pi}{4}$ เพราะว่า $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

3. $\sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ เพราะว่า $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ และ $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

4. $\sin^{-1}2$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก 2 ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $\sin^{-1}$

สมการการตัดออก (The cancellation equations) คือ

$\sin^{-1}(\sin x) = x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\sin^{-1} x) = x$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin(\sin^{-1} 0.7)$

เนื่องจาก $0.7 \in [-1,1]$ ดังนั้นใช้กฎการตัดออกจะได้ $\sin(\sin^{-1} 0.7) = 0.7$

2. $\sin^{-1}(\sin 0.3)$

เนื่องจาก $0.3 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ดังนั้นใช้กฎการตัดออกจะได้ $\sin^{-1}(\sin 0.3) = 0.3$

3. $\sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)$

เนื่องจาก $\frac{4\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้นใช้กฎการตัดออกไม่ได้

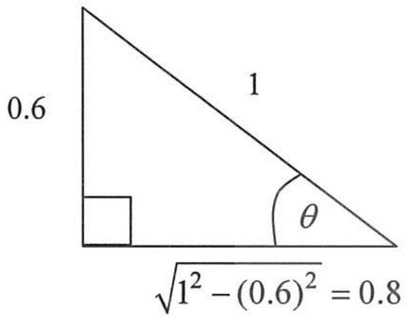
พิจารณา $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$ ดังนั้น

$\sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$ เพราะว่า $\frac{\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ และใช้กฎการตัดออก

4. $\cos\left(\sin^{-1} 0.6\right)$

ให้ $\theta = \sin^{-1} 0.6$ ดังนั้น $\sin\theta = 0.6 = \dfrac{0.6}{1}$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก



เพราะฉะนั้น $\cos\left(\sin^{-1} 0.6\right) = \cos\theta = \dfrac{0.8}{1} = 0.8$ □

<u>**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน**</u> $y = \sin^{-1} x$

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์ สามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นฟังก์ชัน $y = \sin^{-1} x$ เมื่อ $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ก็สามารถหาอนุพันธ์ได้เช่นกัน

การหาอนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1} x$ ทำได้ดังนี้

ให้ $y = \sin^{-1} x$ ดังนั้น $\sin y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{d}{dx}[\sin y] = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y}$

เนื่องจาก $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos y \ge 0$ ฉะนั้น $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ เมื่อ $-1 < x < 1$

ฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ เมื่อ $-1 < x < 1$

และ ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

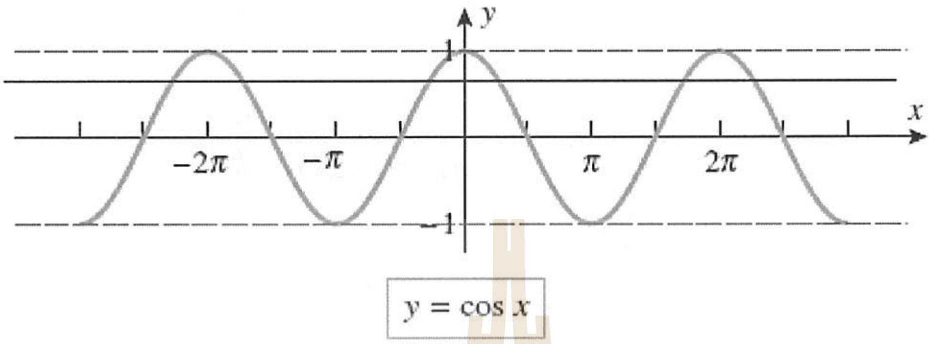
1. $f(x)=\sin^{-1}(4x)$
2. $f(x)=\sin^{-1}(\cos 2x)$

<u>วิธีทำ</u> (1) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(4x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}[4x]=\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

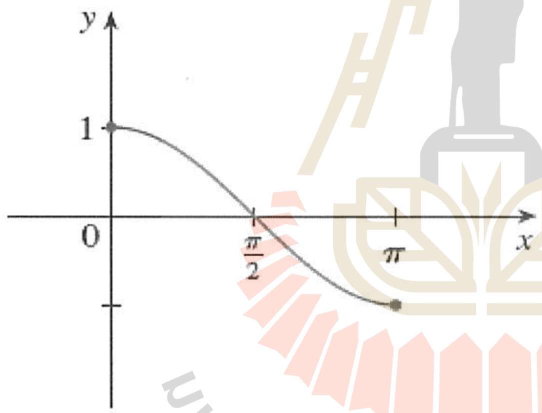
(2)
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(\cos 2x)\right]=\frac{1}{\sqrt{1-(\cos 2x)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\cos 2x)$$
$$=\frac{-2\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos^2(2x)}}$$

ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์ (The Arccosine Function)

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ สามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกับฟังก์ชันผกผันของไซน์



รูปที่ 4.2.3(a) กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$



รูปที่ 4.2.3(b) กราฟของ $y = \cos x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

ดังนั้นฟังก์ชัน $y = \cos x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$ มีฟังก์ชันผกผัน เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์** เขียนแทนด้วย

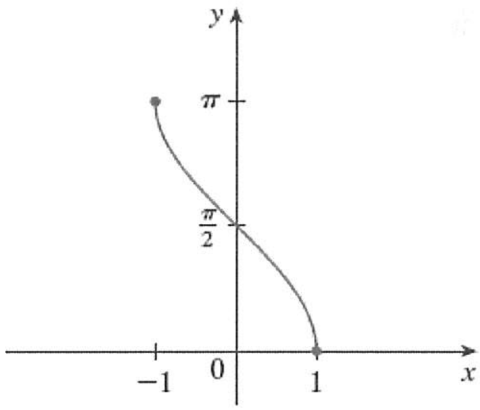
$$y = \cos^{-1} x \quad \text{หรือ} \quad y = arc\cos x$$

นั่นคือ

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \cos y = x$$

และ $0 \le y \le \pi$

โดเมนของ $\cos^{-1}$ คือ $[-1,1]$ และเรนจ์ของ $\cos^{-1}$ คือ $[0,\pi]$ ซึ่งเรียกว่าค่าหลักของ $\cos^{-1}$



รูปที่ 4.2.4 กราฟของ $y=\cos^{-1}x$

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงหาค่าของ

1. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ให้ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=y$ ดังนั้น $\cos y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{\pi}{4}\in[0,\pi]$ ดังนั้น $\frac{\pi}{4}=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. $\cos^{-1}0$

ให้ $\cos^{-1}0=y$ ดังนั้น $\cos y=0$

เนื่องจาก $\cos\left[\frac{\pi}{2}\right]=0$ และ $\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$ ดังนั้น $\frac{\pi}{2}=\cos^{-1}0$

3. $\cos^{-1}(2)$

เนื่องจาก 2 ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $\cos^{-1}$ ดังนั้น $\cos^{-1}(2)$ ไม่นิยาม

สมการการตัดออก (The cancellation equations) คือ

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 \le x \le \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \text{เมื่อ} \qquad -1 \le x \le 1$$

ตัวอย่างที่ 4.2.5 จงหาค่าของ

1. $\cos(\cos^{-1} 0.7)$

เพราะว่า $0.7 \in [0,1]$ ดังนั้น ใช้กฎการตัดออกจะได้ $\cos(\cos^{-1} 0.7) = 0.7$

2. $\cos^{-1}(\cos 3)$

เพราะว่า $3 \in [0,\pi]$ ดังนั้น ใช้กฎการตัดออกจะได้ $\cos^{-1}(\cos 3) = 3$

3. $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$

เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

จาก $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$ ดังนั้น $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ □

<u>**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน**</u> $y = \cos^{-1} x$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \cos^{-1} x$ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับการหาอนุพันธ์ของ $\sin^{-1} x$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{สำหรับ } -1 < x < 1$$

และถ้า $u = u(x)$ และสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.2.6 จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\cos^{-1}(x^3)$
2. $f(x)=\cos^{-1}(\sin(x^2))$

<u>วิธีทำ</u> (1)

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x^3)\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^3$$

$$=\frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \qquad \square$$

(2)

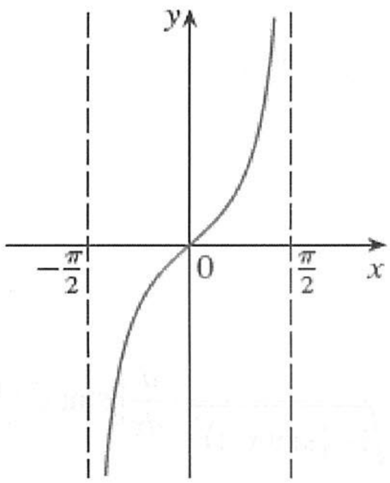
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(\sin(x^2))\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(x^2))^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\sin(x^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(x^2))^2}}\cdot\left(\cos(x^2)\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\right)$$

$$=-\frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-(\sin(x^2))^2}} \qquad \square$$

ฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์ (The Arctangent Function)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = \tan x$ เมื่อ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

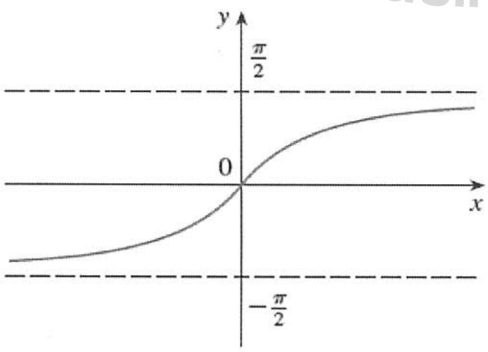


รูปที่ 4.2.5 กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

เราจะเห็นว่า ฟังก์ชันนี้ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์ จะมีฟังก์ชันผกผัน เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์แทนเจนต์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์** เขียนแทนด้วย $\tan^{-1}$ หรือ arctan ซึ่งนิยามดังนี้

$y = \tan^{-1} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ และ $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$

โดเมนของ $\tan^{-1}$ คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์ของ $\tan^{-1}$ คือ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$



รูปที่ 4.2.6 กราฟของ $y = \tan^{-1} x$

เอกลักษณ์การตัดออก

$\tan^{-1}(\tan x) = x$ เมื่อ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\tan(\tan^{-1} x) = x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

ตัวอย่างที่ 4.2.7 จงหาค่าของ

1. $\tan(\tan^{-1} 3)$

เนื่องจาก 3 อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $\tan^{-1}$ ดังนั้นโดยกฎการตัดออกจะได้ $\tan(\tan^{-1} 3) = 3$ □

2. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

เนื่องจาก $\dfrac{3\pi}{4} \notin \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ดังนั้นใช้กฎการตัดออกไม่ได้

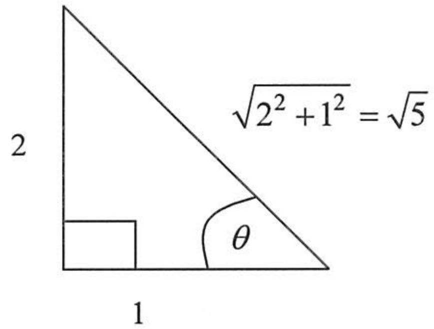
พิจารณา $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

ดังนั้น $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ เพราะว่า $-\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ และใช้กฎการตัดออก

3. $\cos(\tan^{-1} 2)$

ให้ $\theta = \tan^{-1} 2$ ดังนั้น $\tan\theta = 2 = \dfrac{2}{1}$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก



เพราะฉะนั้น $\cos(\tan^{-1} 2) = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

□

__อนุพันธ์ของฟังก์ชัน__ $y = \tan^{-1} x$

เนื่องจากฟังก์ชันแทนเจนต์ หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์ก็หาอนุพันธ์ได้เช่นกัน เราหาอนุพันธ์ของ $y = \tan^{-1} x$ โดยใช้การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

จาก $y = \tan^{-1} x$ ดังนั้น $\tan y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x

$$\frac{d}{dx}[\tan y] = \frac{dx}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y}$

จาก $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x\right] = \dfrac{1}{1+x^2}$

ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1} u\right] = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot \dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.2.8 จงหาอนุพันธ์ของ $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

__วิธีทำ__

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a}\right] = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= \frac{a^2}{a} \cdot \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{a}{a^2+x^2} \qquad \square$$

สำหรับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ที่เหลือนั้น จะได้ใช้น้อยกว่าฟังก์ชันผกผันที่เราได้พิจารณามาแล้วทั้งสามฟังก์ชัน เราจึงสรุปฟังก์ชันผกผันที่เหลือไว้ดังต่อไปนี้

1. $y = \csc^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \csc y = x$ สำหรับ $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ และ $|x| \geq 1$

2. $y = \sec^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \sec y = x$ สำหรับ $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ และ $|x| \geq 1$

3. $y = \cot^{-1} x \quad \Leftrightarrow \quad \cot y = x$ สำหรับ $y \in (0, \pi)$ และ $x \in (-\infty, \infty)$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

1. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1$
2. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1$
3. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty$
4. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \ |x| > 1$
5. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \ |x| > 1$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\dfrac{1}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty$

ตัวอย่างที่ 4.2.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\tan^{-1}(\cot x)$

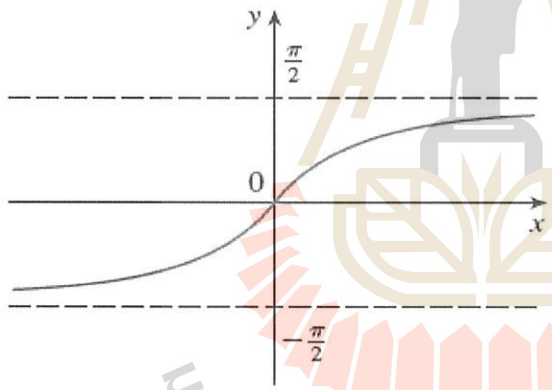
วิธีทำ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\cot x)\right]=\frac{1}{1+\cot^2 x}\cdot\frac{d}{dx}\left[\cot x\right]$$
$$=\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}=-1 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.2.10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

วิธีทำ ให้ $u=\frac{1}{x}$ ดังนั้น เมื่อ $x\to 0^+$ จะได้ $u\to +\infty$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to +\infty}\tan^{-1}u=\frac{\pi}{2}$ (ดูรูปที่ 4.2.7) $\square$



รูปที่ 4.2.7

ตัวอย่างที่ 4.2.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{\cot^{-1}x}$

วิธีทำ ใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์จะได้

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\cot^{-1}x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\cot^{-1}x}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}x\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\cot^{-1}x}}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\cot^{-1}x}} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.2.12 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^2\left(\sin^{-1} x\right)^3$

<u>วิธีทำ</u> ใช้กฎผลคูณและใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์จะได้

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^2\left(\sin^{-1} x\right)^3\right] = x^2\frac{d}{dx}\left[\left(\sin^{-1} x\right)^3\right] + \left(\sin^{-1} x\right)^3\frac{d}{dx}\left[x^2\right] \\
&= 3x^2\left(\sin^{-1} x\right)^2\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1} x\right] + 2x\left(\sin^{-1} x\right)^3 \\
&= 3x^2\left(\sin^{-1} x\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\left(\sin^{-1} x\right)^3 \\
&= x\left(\sin^{-1} x\right)^2\left[\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sin^{-1} x\right]
\end{aligned}$$

□

แบบฝึกหัดที่ 4.2

1. จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ 2. $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{7}\right)$

3. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{12\pi}{7}\right)$ 4. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{23\pi}{6}\right)$

2. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้วิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. $\sin\left(\cos^{-1}x\right)$ 2. $\tan\left(\cos^{-1}x\right)$

3. $\csc\left(\tan^{-1}x\right)$ 4. $\sin\left(\tan^{-1}x\right)$

5. $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$ 6. $\sin\left(\sec^{-1}x\right)$

7. $\cot\left(\sec^{-1}x\right)$

3. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}x\right)$ 2. $y=\cos^{-1}(2x+1)$

3. $y=\tan^{-1}\left(x^2\right)$ 4. $y=\sec^{-1}\left(x^7\right)$

5. $y=\cot^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ 6. $y=(\tan x)^{-1}$

7. $y=\dfrac{1}{\tan^{-1}x}$ 8. $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9. $y=\sec^{-1}x+\csc^{-1}x$ 10. $y=(x+1)^3\left(\tan^{-1}\left(x^2\right)\right)$

4. กำหนดให้สมการต่อไปนี้นิยาม y เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

1. $x^3+x\tan^{-1}y=\sin x$

2. $\sin^{-1}(xy)=\cos^{-1}(x-y)$

4.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม (Exponential and Logarithm Functions)

ฟังชันเลขชี้กำลัง

ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a^x \qquad ....(1)$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่บวก เราเรียก a ว่า ฐาน (base) ของ f และ x เป็นตัวแปร เราเรียก x ว่า เลขชี้กำลัง (exponent)

เรานิยามค่าของ a^x ดังต่อไปนี้

1. ถ้า $x = 0$ แล้ว $a^0 = 1$
2. ถ้า $x = n$ และ $n = 1,2,3,\ldots$ แล้ว $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ term}}$
3. ถ้า $x = -n$ และ $n = 1,2,3,\ldots$ แล้ว $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4. ถ้า $x = \dfrac{m}{n}$ และ $n = 1,2,3,\ldots$ และ $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

   แล้ว $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
5. ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้วประมาณค่าของ x

   ด้วยจำนวนตรรกยะ r และ นิยาม $a^x = \lim_{r \to x} a^r$

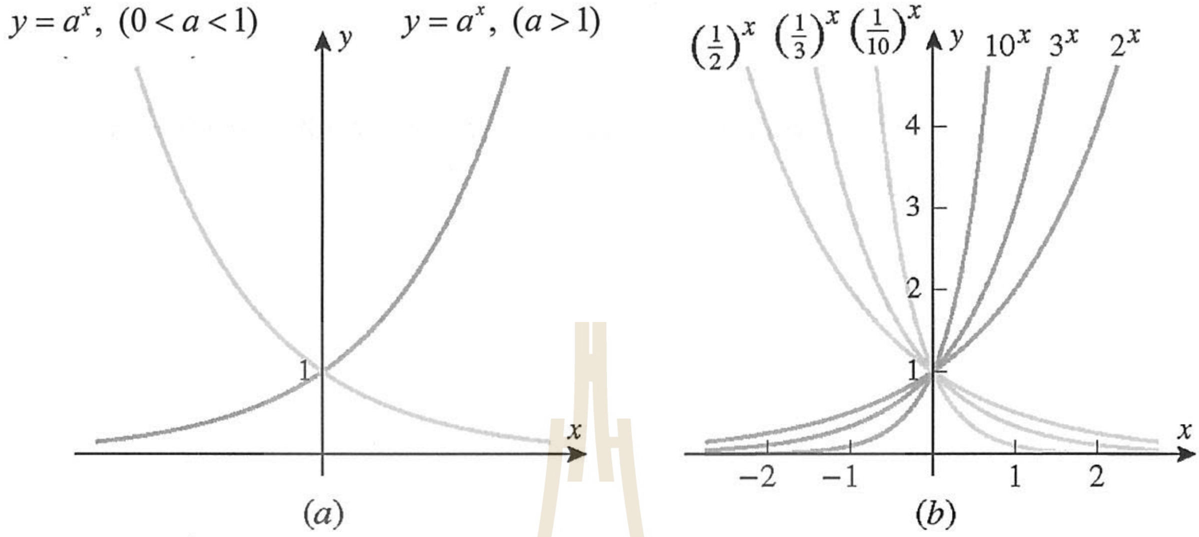
จากข้อ (1) – (5) เราจะเห็นว่า ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง <u>นิยามบนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด</u>

กฎของเลขชี้กำลัง

ถ้า $a > 0,\ b > 0$ และ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $a^0 = 1$
2. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$
4. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
5. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
6. $\left(ab\right)^x = a^x b^x$

กราฟแสดงฟังก์ชันเลขชี้กำลัง



รูปที่ 4.3.1

จากรูปที่ 4.3.1(a) เราจะเห็นว่า ถ้า $a > 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แต่ ถ้า $0 < a < 1$ กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

รูปที่ 4.3.1(b) แสดงกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ ที่มีค่า a (ฐานของฟังก์ชัน f) ต่างๆกัน

จากกราฟเราจะเห็นว่า

1. ทุกฟังก์ชันจะผ่านจุด $(0,1)$ เนื่องจาก $a^0 = 1$ สำหรับทุกๆ $a > 0$
2. $y = a^x > 0$ สำหรับทุกๆ $a > 0$ และ ทุกจำนวนจริง x
3. โดเมนของฟังก์ชัน $y = a^x$ คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์คือ $(0, \infty)$
4. ฟังก์ชัน $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นฟังก์ชัน 1-1
5. ถ้า $a > 1$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ และ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \infty$
6. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

อนุพันธ์ของ $f(x) = a^x$

โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ได้

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \qquad ....(1)$$

คำถาม $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = ?$

ถ้าวิเคราะห์ค่าของ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$ โดยวิธีการคำนวณ ด้วยการเลือก $a=2$ และ $a=3$

h	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\frac{2^h-1}{h}$	0.7177	0.6956	0.6934	0.6932
$\frac{3^h-1}{h}$	1.1612	1.1047	1.0992	1.0987

ผลที่ได้คือ

$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \approx 0.69 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \approx 1.10$

ดังนั้นน่าจะมีค่าของ a ค่าหนึ่งระหว่าง 2 และ 3 ซึ่งทำให้ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = 1$

โดยทั่วไปนิยมแทนเลขจำนวนนี้ด้วยสัญลักษณ์ e

บทนิยามที่ 4.3.1 ให้ e เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

หมายเหตุ $e \approx 2.718281828459045...$

ถ้า $f(x)=e^x$ แทน $a=e$ ในสมการ (1) จะได้

$$f'(x)=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

นั่นคือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{x}=e^x}$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

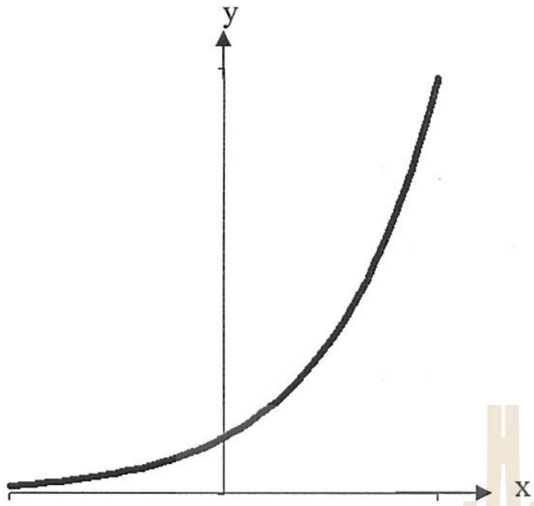
$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{u}=e^u\frac{du}{dx}}$$

<u>สมบัติของฟังก์ชันกำลังฐาน</u> e

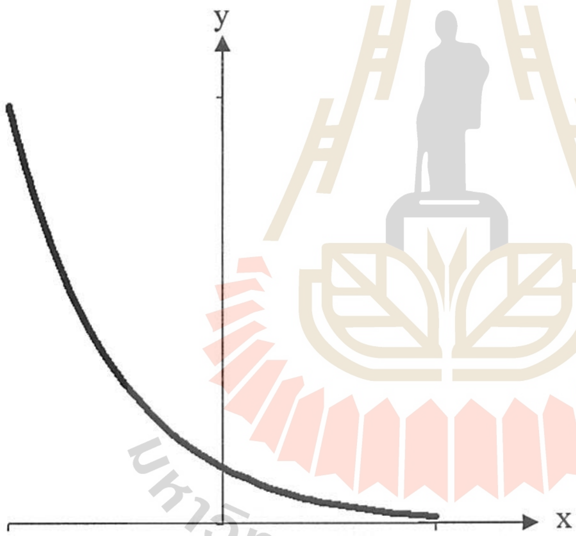
1. ค่าของ $e^x>0$ สำหรับทุกค่าของ x
2. $f(x)=e^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
3. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$
5. $\frac{d}{dx}e^x=e^x$
6. ถ้า u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้วโดยการใช้กฎลูกโซ่ จะแสดงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$$

กราฟของฟังก์ชัน $y = e^{x}$ **และ** $y = e^{-x}$



รูปที่ 4.3.2(a) กราฟของ $y = e^{x}$



รูปที่ 4.3.2(a) กราฟของ $y = e^{-x}$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = 2x^3e^x$

(2) $y = xe^{\cos x}$

(3) $y = e^{e^{-\sin x}}$

<u>วิธีทำ</u> (1) จาก $y = 2x^3e^x$ ดังนั้นใช้กฎผลคูณหาอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[2x^3e^x\right] = 2\left(x^3e^x + 3x^2e^x\right) = 2x^2e^x(x+3) \qquad \square$$

(2) จาก $y = xe^{\cos x}$ ดังนั้นใช้กฎผลคูณและกฎลูกโซ่หาอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[xe^{\cos x}\right] = \left(xe^{\cos x}(-\sin x) + e^{\cos x}\right) = e^{\cos x}\left(1 - x\sin x\right) \qquad \square$$

(3) จาก $y = e^{e^{-\sin x}}$ ใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{e^{-\sin x}}\right] = e^{e^{-\sin x}}\left(\frac{d}{dx}\left[e^{-\sin x}\right]\right) = e^{e^{-\sin x}}\left(e^{-\sin x}(-\cos x)\right)$$

$$= -\cos x\left[e^{\left(e^{-\sin x} - \sin x\right)}\right] \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)\cdot\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1 \qquad \square$$

<u>ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Functions)</u>

จากฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งเขียนแทนด้วย $\log_a$ เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน** a แทนด้วย $\log_a$ เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน** a

<u>บทนิยามที่ 4.3.2</u> ถ้า $a>0$ และ $a\neq 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $\log_a x$ เรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึมของ x ฐาน a ซึ่งฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันนี้ก็คือ a^x ดังนั้น

$$y=\log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad x=a^y \qquad (a>0, \quad a\neq 1)$$

โดเมนของฟังก์ชัน $y=\log_a x$ คือ $(0,\infty)$

เรนจ์ของฟังก์ชัน $y=\log_a x$ คือ $(-\infty,\infty)$

ค่าของฟังก์ชัน $\log_a x$ ก็คือ **เลขชี้กำลังของฐาน** a ตัวอย่างเช่น

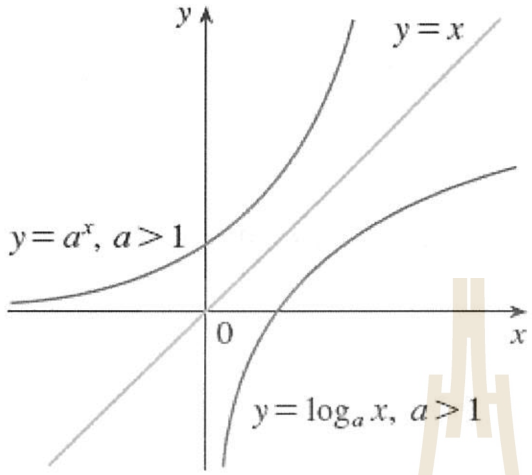
$$\log_3 81=4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3^4=81$$

$$\log_2 8=3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2^3=8$$

$$\log_3 1=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3^0=1$$

$$\log_{10} 0.01=-2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 10^{-2}=0.01$$

กราฟของฟังก์ชัน $y = a^x$ และ $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 1$



รูปที่ 4.3.3

กราฟของ $y = \log_a x$ ได้จากการสะท้อนกราฟของ $y = a^x$ เทียบกับเส้นตรง $y = x$ ดังแสดงในรูปที่ 4.3.3 สำหรับกรณี $a > 1$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ และ $f^{-1}(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน ดังนั้นจะได้ว่า

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = a^{\log_a x} = x \qquad \text{สำหรับ}\textbf{จำนวนจริงบวก}\ x\ \text{ใดๆ}$$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = \log_a a^x = x \qquad \text{สำหรับจำนวนจริง}\ x\ \text{ใดๆ}$$

สมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันลอการิทึม (Laws of Logarithms)

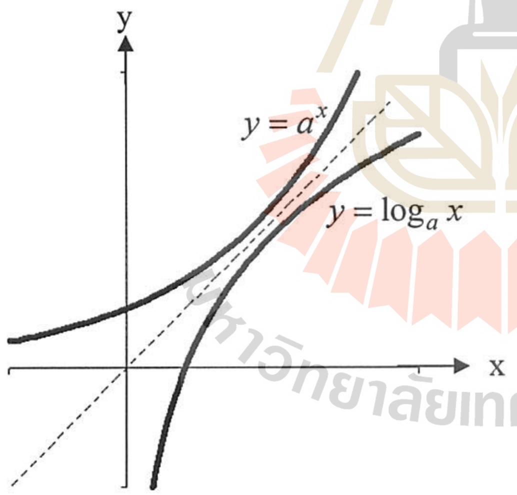
ถ้า $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, และ $b \neq 1$ แล้ว

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
4. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a (x^y) = y \log_a x$
6. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
7. ถ้า $a > 1$ แล้ว

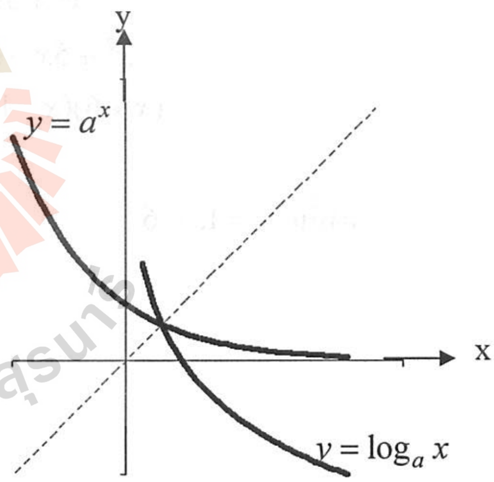
$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ และ $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = \infty$ (ดูรูปที่ 4.3.4 (a))

8. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$ (ดูรูปที่ 4.3.4 (b))



รูปที่ 4.3.4 (a) กราฟของ $y = a^x$ และ $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 1$



รูปที่ 4.3.4 (b) กราฟของ $y = a^x$ และ $y = \log_a x$ เมื่อ $0 < a < 1$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงหาค่าของ

1.) $\log_2 10+\log_2 12-\log_2 15$ 2.) $\log_{a^2} a^3$ 3.) $3^{\log_9 4}$

<u>วิธีทำ</u> (1)

$$\log_2 10+\log_2 12-\log_2 15=\log_2\left(\frac{10\times 12}{15}\right)=\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$=\log_2 4-\log_2 3=\log_2 2^2-\log_2 3$$
$$=2-\log_2 3$$

(2) $\log_{a^2} a^3=\dfrac{\log_b a^3}{\log_b a^2}=\dfrac{3\log_b a}{2\log_b a}=\dfrac{3}{2}$

(3) $3^{\log_9 4}=3^{\log_{3^2} 2^2}=3^{\frac{2}{2}\log_3 2}=3^{\log_3 2}=2$ □

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงหาค่าของ x จากสมการ $10^{\log_{10}(x^2+5x)}=6$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $10^{\log_{10}(x^2+5x)}=6$ จะได้

$$x^2+5x=6$$
$$x^2+5x-6=0$$
$$(x+6)(x-1)=0$$

ดังนั้น $x=1,\ -6$ □

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติและฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ (The Natural Logarithm and Exponential Functions)

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติคือ ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน e นิยมเขียนแทนด้วย ln หรือ $\log_e$ นั่นคือ

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y \quad (\text{หรือ } x = \exp(y))$$

และ $\ln(e^x) = x$ สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$

$e^{\ln x} = x$ สำหรับ $x \in (0, \infty)$

หมายเหตุ เราเรียก ฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ ว่า **ฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ**

เนื่องจากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x) = e^x$ หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลังก็ย่อมหาอนุพันธ์ได้เช่นกัน

เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ ได้ดังนี้

ให้ $y = \ln x$ ดังนั้น $e^y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ได้

$$\frac{d}{dx}\left[e^y\right] = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \quad e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$

ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.3.5 จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \ln\left(\sin x\right)$

2. $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>วิธีทำ</u> (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \ln\left(\sin x\right) = \ln(\sin\frac{\pi}{2}) = \ln(1) = 0$

เพราะว่าฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ และฟังก์ชันไซน์ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(2) ให้ $u = \frac{1}{x}$ ดังนั้นเมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ว่า $u \to +\infty$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$ □

ตัวอย่างที่ 4.3.6 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f\left(x\right) = e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'\left(x\right) = \frac{d}{dx}\left[e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\right] = e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\frac{d}{dx}\left[x^3-2x^2+4x+1\right]$$
$$= e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\left(3x^2-4x+4\right)$$
□

ตัวอย่างที่ 4.3.7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f\left(x\right) = \sqrt{1+e^{4x}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'\left(x\right) = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+e^{4x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{1+e^{4x}}}\frac{d}{dx}\left[1+e^{4x}\right]$$
$$= \frac{4e^{4x}}{2\sqrt{1+e^{4x}}} = \frac{2e^{4x}}{\sqrt{1+e^{4x}}}$$
□

ตัวอย่างที่ 4.3.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\ln|x|$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

ดังนั้น

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\ln x, & x>0\\ \dfrac{d}{dx}\ln(-x), & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{1}{-x}.(-1), & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x\neq 0$ □

ตัวอย่างที่ 4.3.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt[3]{\ln(1-\cos x)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{\ln(1-\cos x)}\right]=\frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left[\ln(1-\cos x)\right]\\&=\frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(1-\cos x)}\cdot\frac{d}{dx}[1-\cos x]\\&=\frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sin x}{(1-\cos x)}\\&=\frac{\sin x}{3(1-\cos x)\left(\ln(1-\cos x)\right)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$

□

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

ผลที่ได้จากการหาอนุพันธ์ของ $y = e^x$ และ $y = \ln x$ ทำให้เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึมสำหรับกรณีทั่วไปได้ดังนี้

1. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$
2. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}$

สรุปสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ และ $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u \dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ และ $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ และ $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}$ และ $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{1}{u\ln a}\dfrac{du}{dx}$

เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่างที่ 4.3.10 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = xe^x - x$ 2. $y = 5^{2x+1}$ 3. $y = \log_a(5x+3)$

<u>วิธีทำ</u> (1) จาก $y = xe^x - x$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[xe^x - x\right] = \left(xe^x + e^x\right) - 1$

(2) จาก $y = 5^{2x+1}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[5^{2x+1}\right] = 5^{2x+1}\ln 5 \cdot \dfrac{d}{dx}[2x+1] = 2\left(5^{2x+1}\ln 5\right)$

(3) จาก $y = \log_a(5x+3)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\log_a(5x+3)\right] = \frac{1}{(5x+3)\ln a}\cdot\frac{d}{dx}[5x+3]$$

$$= \frac{5}{(5x+3)\ln a}$$

□

ตัวอย่างที่ 4.3.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$ 2. $y=e^{\left(e^{x}\right)}$ 3. $y=e^{3x}\ln x$

<u>วิธีทำ</u> (1) จาก $y=\ln\left(1+e^{x}\right)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\ln\left(1+e^{x}\right)\right]=\frac{1}{1+e^{x}}\cdot\frac{d}{dx}\left[1+e^{x}\right]=\frac{e^{x}}{1+e^{x}} \qquad \square$$

(2) จาก $y=e^{\left(e^{x}\right)}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[e^{\left(e^{x}\right)}\right]=e^{\left(e^{x}\right)}\cdot\frac{d}{dx}e^{x}=e^{\left(e^{x}\right)}.e^{x}=e^{e^{x}+x}$ $\square$

(3) จาก $y=e^{3x}\ln x$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[e^{3x}\ln x\right]=e^{3x}\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\left(3e^{3x}\right)=\frac{e^{3x}}{x}+3e^{3x}\ln x \qquad \square$$

การหาอนุพันธ์โดยลอการิทึม (Logarithmic Differentiation)

เป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูปผลคูณ ผลหาร และในรูปฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ใส่ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้างในสมการ $y = f(x)$
2. หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x
3. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.3.12 จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\sin x)^{\ln x}$ เมื่อ $0 < x < \pi$

วิธีทำ ใส่ฟังก์ชัน ln เข้าไปทั้งสองข้างจะได้

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\ln x} = \ln x \cdot \ln(\sin x) \qquad \text{.....(1)}$$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (1) จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}\left[\ln x \cdot \ln(\sin x)\right]$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\cot x \cdot \ln x + \frac{\ln(\sin x)}{x}\right] = (\sin x)^{\ln x}\left[\cot x \cdot \ln x + \frac{\ln(\sin x)}{x}\right] \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.3.13 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \left[(x+1)(x+2)(x+3)\right]/(x+4)$

วิธีทำ ใส่ฟังก์ชัน ln เข้าไปทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln\left(\left[(x+1)(x+2)(x+3)\right]/(x+4)\right) \\ &= \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4)\end{aligned} \qquad \text{.....(2)}$$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ (2) จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= y\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right] \\ &= \left[(x+1)(x+2)(x+3)/(x+4)\right]\cdot\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right]\end{aligned} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.3.14 จงหาอนุพันธ์ของ $y=(\cos x)^x - x^{\cos x}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y_1=(\cos x)^x$ และ $y_2 = x^{\cos x}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[y_1-y_2]=\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_2}{dx}$

จะหา $\frac{dy_1}{dx}$ และ $\frac{dy_2}{dx}$

จาก $y_1=(\cos x)^x$ ใส่ฟังก์ชัน ln ลงไปทั้งสองข้างจะได้ $\ln y_1 = \ln(\cos x)^x = x\cdot\ln\cos x$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y_1]=\frac{d}{dx}[x\cdot\ln\cos x]$$

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}=-x\tan x+\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1[-x\tan x+\ln(\cos x)]=(\cos x)^x[-x\tan x+\ln(\cos x)]$$

จาก $y_2=x^{\cos x}$ ดังนั้น $\ln y_2=\ln x^{\cos x}=\cos x\cdot\ln x$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y_2]=\frac{d}{dx}[\cos x\cdot\ln x]$$

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}=\frac{\cos x}{x}+\ln x\cdot(-\sin x)$$

$$\frac{dy_2}{dx}=y_2\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right]=x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right]$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_2}{dx}$$

$$=(\cos x)^x[-x\tan x+\ln(\cos x)]-x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right]$$ □

แบบฝึกหัดที่ 4.3

1. จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้

1.1. $5\ln x = 2$

1.2 $e^{2x+3} - 7 = 0$

1.3 $5^{\log_5(x^2+2x)} = 3$

1.4 $\ln(\ln x) = 1$

1.5 $2\ln x = \ln 2 + \ln(3x-4)$

2. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(1-6x)}$

2.3 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

2.4 $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x}$

2.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$

2.6 $\lim\limits_{x\to 3^+} \log_{10}(x^2 - 5x + 6)$

2.7 $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos x)$

3. จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

3.2 $f(x) = \sin(\ln x^2)$

3.3 $f(x) = \ln(\tan x)$

3.4 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

3.5 $f(x) = \sqrt[5]{\log_{10}(x^3)}$

3.6 $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

3.7 $f(x) = x^3 \ln(x^2 - 1)$

3.8 $f(x) = x^2 \ln(2 + e^{3x})$

3.9 $f(x) = \ln(x^4 \cos^2 x)$

3.10 $f(x)=10^{\sec x}$

3.11 $f(x)=\ln\left|x^5+4x^4-3x^3+2x^2-x\right|$

3.12 $f(x)=\ln(e^x+2xe^{-x})$

3.13 $f(x)=\left[\log_3(1+3^x)\right]^3$

3.14 $f(x)=\ln(\ln(\tan x))$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y=\ln(x^3-7)$ ที่จุด $(2,0)$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ลอการิทึม

5.1 $y=(3x-1)^4(x^4+4x^3-1)^6$

5.2 $y=\sqrt{x}e^{x^2}(x^2+2)^9$

5.3 $y=\dfrac{\sin^2 x\tan^3 x}{(x+1)^2}$

5.4 $y=x^{2x}$

5.5 $y=x^{\sin x^2}$

5.6 $y=x^{(\cos x)^x}$

5.7 $y=\dfrac{(x+1)(x^2+2x+1)(x^3-1)}{(x+3)(x+2)}$

5.8 $y=(\ln x)^{\cos x}+(\cos x)^{\ln x}$

5.9 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x-2}}$

6. จงหาอนุพันธ์โดยปริยายของ $y=\ln(x^2+y^2)$

บทที่ 5 การอินทิเกรต (Integration)

5.1 ค่าเชิงอนุพันธ์ (Differentials)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad .....(1)$$

เมื่อ Δy คือส่วนเปลี่ยนแปลงของ y ขณะที่ x มีค่าเปลี่ยนแปลงไป Δx

ดังนั้น $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

จาก (1) เราสามารถประมาณค่าของ Δy ได้ดังนี้

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \qquad \text{เมื่อ } \Delta x \text{ มีค่าเข้าใกล้ } 0$$

เราเรียก $f'(x)\Delta x$ ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ของ f ที่ x

บทนิยามที่ 5.1.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ Δx เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x

(i) ค่าเชิงอนุพันธ์ของ x เขียนแทนด้วย dx กำหนดโดย $dx = \Delta x$

(ii) ค่าเชิงอนุพันธ์ของ y หรือ f ที่ x เขียนแทนด้วย dy หรือ df

กำหนดโดย $dy = df = f'(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5.1.1 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของ y ที่ x ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $y = x^3 + 2x^2 - x + 5$

จาก $$dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

ดังนั้น $$dy = \frac{d}{dx}\left[x^3 + 2x^2 - x + 5\right]dx = \left(3x^2 + 4x - 1\right)dx$$

2. $y = x^2 \cos x$

จาก $$dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx$$

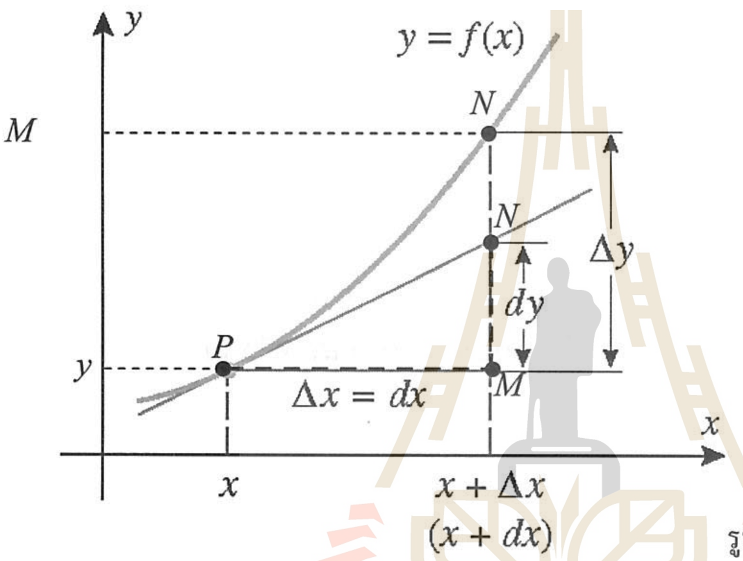
ดังนั้น $$dy = \frac{d}{dx}\left[x^2 \cos x\right]dx = \left(-x^2 \sin x + 2x\cos x\right)dx$$

3. $y=\sqrt{x^2+1}$

จาก $\qquad dy = f'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx$

ดังนั้น $\qquad dy = \dfrac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{1/2}\right]dx = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ $\square$

ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์



รูปที่ 5.1.1

ให้ $P(x,y)$ และ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง $y=f(x)$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $P(x,y)$ คือ $f'(x)$

และจากรูปจะได้ว่า $\qquad f'(x)=\dfrac{|MN|}{\Delta x}$ $\qquad$ เมื่อ $|MN|$ แทนความยาวของเส้นตรง MN

ดังนั้น $|MN| = f'(x)\Delta x$ จากนิยามของค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า $|MN| = dy$

พิจารณาผลต่าง $\Delta y - dy$ เมื่อพิจารณาเทียบกับ Δx จะได้

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

เพราะฉะนั้น $\qquad \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{\Delta x}\right) = f'(x) - f'(x) = 0$

ดังนั้น ถ้า Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $\Delta y - dy$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ด้วย นั่นก็คือ ถ้าค่าของ Δx มีค่าน้อยมากๆ เราสามารถประมาณค่า Δy ได้ด้วย dy

เพราะฉะนั้น $\quad \Delta y \approx dy \quad$ เมื่อ $\quad \Delta x$ มีค่าน้อยมากๆ $(\Delta x \approx 0)$

ตัวอย่างที่ 5.1.2 กำหนดให้ $y = 2x^2 + x - 1$

จงหา dy และ Δy เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = dx = 0.1$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = f(x) = 2x^2 + x - 1$ และ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left(2(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 1\right) - \left(2x^2 + x - 1\right)\\ &= \left(2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1\right) - \left(2x^2 + x - 1\right)\\ &= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1 - 2x^2 - x + 1\\ &= (4x+1)\Delta x + 2(\Delta x)^2\end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$ จะได้ $\Delta y = (4(1)+1)0.1 + 2(0.1)^2 = 0.52$

จาก $dy = f'(x)dx$ ดังนั้น $dy = \dfrac{d}{dx}\left[2x^2 + x - 1\right]dx = (4x+1)dx$

แทนค่า $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$ จะได้ $dy = (4(1)+1)0.1 = 0.5$ □

ตัวอย่างที่ 5.1.3 จงเปรียบเทียบค่าของ Δy และ dy ถ้ากำหนดให้

$$y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 3$$

1. x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.05
2. x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.01

<u>วิธีทำ</u> 1. จาก $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 3$, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

และ $\Delta x = 2.05 - 2 = 0.05$

พิจารณา $f(2) = 2(2)^3 - (2)^2 + 2(2) + 3 = 19$

และ $f(2.05) = 2(2.05)^3 - (2.05)^2 + 2(2.05) + 3 = 20.12775$

ดังนั้น $\Delta y = f(2.05) - f(2) = 1.12775$

จาก

$$\begin{aligned}dy = f'(x)dx &= \frac{d}{dx}\left[2x^3 - x^2 + 2x + 3\right]dx\\ &= \left(6x^2 - 2x + 2\right)dx\end{aligned}$$

แทนค่า $x = 2$ และ $dx = \Delta x = 0.05$ จะได้

$$dy = \left(6(2)^2 - 2(2) + 2\right)(0.05) = 1.1$$

ดังนั้น $\Delta y - dy = 1.12775 - 1.1 = 0.02775$

2. จาก $\Delta x = 2.01 - 2 = 0.01$ และ

$f(2.01) = 2(2.01)^3 - (2.01)^2 + 2(2.01) + 3 = 19.221102$

ดังนั้น $\Delta y = f(2.01) - f(2) = 19.221102 - 19 = 0.221102$

และ $dy = \left(6(2)^2 - 2(2) + 2\right)\left(0.01\right) = 0.22$

ดังนั้น $\Delta y - dy = 0.221102 - 0.22 = 0.001102$

จากข้อ (1) และข้อ (2) เปรียบเทียบค่าของ Δy และ dy เราจะเห็นว่าเมื่อค่าของ Δx มีค่าน้อย ค่าของ Δy และ dy มีค่าใกล้เคียงกัน □

ตัวอย่างที่ 5.1.4 จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[4]{17}$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x) = x^{1/4}$ ดังนั้น $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{1/4}\right] = \frac{1}{4x^{3/4}}$

จากความสัมพันธ์ $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \approx dy$

ดังนั้น $f(x+\Delta x) \approx dy + f(x) = f'(x)\Delta x + f(x)$

เราต้องการหา $\sqrt[4]{17} = f(17)$ เลือก $x = 16$ และ $\Delta x = 1$

ดังนั้น $f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$ และ $f'(16) = \frac{1}{4(16)^{3/4}} = \frac{1}{32}$

จาก $f(x+\Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x)$

จะได้ $f(16+1) \approx f'(16)(1) + f(16) = \frac{1}{32} + 2 \approx 2.03125$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[4]{17} \approx 2.03125$ □

สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dc = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $d(ku) = kdu$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่
3. $d(u+v) = du + dv$
4. $d(uv) = udv + vdu$
5. $du^n = nu^{n-1}du$
6. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$ ถ้า $v \neq 0$
7. $de^u = e^u du$
8. $da^u = a^u \ln a\, du$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์
9. $d\ln u = \dfrac{1}{u}du$
10. $d\sin u = \cos u\, du$
11. $d\cos u = -\sin u\, du$
12. $d\tan u = \sec^2 u\, du$

ตัวอย่างที่ 5.1.5 จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = e^{-3x}$

$$\begin{aligned} dy &= de^{-3x} \\ &= e^{-3x}d(-3x) \\ &= -3e^{-3x}dx \end{aligned}$$

2. $y = \cos(2x)$

$$\begin{aligned} dy &= d\cos(2x) \\ &= -\sin(2x)d\left(2x\right) \\ &= -2\sin(2x)dx \end{aligned}$$

3. $y = \sin^3(5x)$

$$\begin{aligned} dy &= d\sin^3(5x) \\ &= 3\sin^2(5x)d\left(\sin(5x)\right) \\ &= 3\sin^2(5x)\cos(5x)d(5x) \\ &= 15\sin^2(5x)\cos(5x)dx \end{aligned}$$

□

5.2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral)

บทนิยามที่ 5.2.1 เราจะเรียกฟังก์ชัน F ว่าเป็น **ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative)ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุกๆ x ในโดเมนของ f

ตัวอย่างเช่น 1. $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^4$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$ เพราะ

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{5}\right]=x^4=f(x)$$

2. $F(x)=\sin x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$ เพราะ

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[\sin x]=\cos x=f(x)$$

3. $F(x)=\sin x+1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$ เพราะ

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[\sin x+1]=\cos x=f(x)$$

4. $F(x)=\sin x+c$ (เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$ เพราะ $F'(x)=\dfrac{d}{dx}[\sin x+c]=\cos x=f(x)$

จากข้อ 3 และ 4 จะเห็นได้ว่า ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I แล้ว ฟังก์ชัน $F(x)+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I ด้วย

เพราะว่า $\dfrac{d}{dx}\big(F(x)+C\big)=F'(x)=f(x)$ ทุก $x\in I$

เราเรียก $F(x)+C$ ว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** (general antiderivative) ของ f บนช่วง I

ตัวอย่างที่ 5.2.1 จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x)=x^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]=x^2=f(x)$

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน f คือ $\dfrac{x^3}{3}+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ □

(2) $f(x)=x^n$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]=x^n$

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน f คือ $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ □

(3) $f(x)=\sin(3x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{-\cos(3x)}{3}\right]=\sin(3x)=f(x)$

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน f คือ $\dfrac{-\cos(3x)}{3}+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ □

(4) $f(x)=\sin(kx)$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{-\cos(kx)}{k}\right]=\sin(kx)=f(x)$

ดังนั้นปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน f คือ $\dfrac{-\cos(kx)}{k}+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ □

บทนิยามที่ 5.2.2 เราจะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ f ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$

เพราะฉะนั้นถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f แล้ว $\int f(x)dx=F(x)+C$

อ่านว่า " อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f เทียบกับ x คือ $F(x)+C$ "

เราจะเรียกสัญลักษณ์ $\int$ ว่า **เครื่องหมายอินทิกรัล (integral sign)**

เรียก $f(x)$ ว่า **ตัวถูกอินทิเกรต(integrand)**

เรียก x ว่า **ตัวแปรของการอินทิเกรต (variable of integration)**

เรียก C ว่า **ค่าคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration)**

จากตัวอย่างที่ 5.2.1 เราจะได้ว่า

1. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\int \sin(3x) dx = \frac{-\cos(3x)}{3}$

4. $\int \sin(kx) = \frac{-\cos(kx)}{k} + C$

ตารางสูตรของการอินทิเกรต		
อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต	**สูตรอนุพันธ์**	
1. $\int 1 dx = x + C$	$\frac{d}{dx} x = 1$	
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$(n \neq -1)$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx} \ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	
6. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$	
7. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$	
8. $\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \cos ec^2 x$	
9. $\int \cos ec\, x \cot x dx = -\cos ecx + C$	$\frac{d}{dx}(-\cos ecx) = \cos ecx \cot x$	
10. $\int e^x dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	
11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x$	$(a \neq 1)$

ตัวอย่างที่ 5.2.2

(1) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ เมื่อ C คือค่าคงที่ใดๆ

(2) $\int \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ เมื่อ C คือค่าคงที่ใดๆ

(3) $\int \tan x \cos x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$ เมื่อ C คือค่าคงที่ใดๆ

(4) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$ เมื่อ C คือค่าคงที่ใดๆ

__หมายเหตุ__ ให้ $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = f(x)$

หรือ $\int f(x) dx = F(x) + C$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$$

หรือ

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + C$$

ตัวอย่างเช่น

(1) $\frac{d}{dx}\left(\int \cos x dx\right) = \cos x$

(2) $\int \frac{d}{dx}(\cos x) dx = \cos x + C$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2.1</u>

1. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3. $\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))dx$

$$= c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots c_n$ เป็นค่าคงที่ใดๆ

ตัวอย่างที่ 5.2.3 จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int (\sin x + 2x^3 + 5)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int (\sin x + 2x^3 + 5)dx = \int \sin x dx + 2\int x^3 dx + 5\int 1dx$$

$$= (-\cos x + C_1) + 2\left(\frac{x^4}{4} + C_2\right) + 5(x + C_3)$$

$$= -\cos x + \frac{x^4}{2} + 5x + (C_1 + 2C_2 + 5C_3)$$

$$= -\cos x + \frac{x^4}{2} + 5x + C$$

เมื่อ $C = C_1 + 2C_2 + 5C_3$ □

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกและไม่ผิดกฎทางคณิตศาสตร์ เราสามารถนำค่าคงตัวที่เกิดจากการอินทิเกรตแต่ละฟังก์ชันมารวมกันเป็นค่าคงตัว C เพียงตัวเดียวได้

ตัวอย่างที่ 5.2.4 จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int \left(\frac{x^2 - 2x^4}{x^4}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \left(\frac{x^2 - 2x^4}{x^4}\right)dx = \int \frac{x^2}{x^4}dx - \int \frac{2x^4}{x^4}dx$$

$$= \int x^{-2}dx - 2\int 1dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2x + C$$

$$= -\frac{1}{x} - 2x + C$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.5 จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{\sqrt{x}} dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{x^{1/2}} dx \\
&= \int \left(\frac{4x^3}{x^{1/2}} - \frac{2x^2}{x^{1/2}} + \frac{5x}{x^{1/2}} \right) dx \\
&= 4\int x^{5/2} dx - 2\int x^{3/2} dx + 5\int x^{1/2} dx \\
&= 4\left(\frac{2}{7} x^{7/2} \right) - 2\left(\frac{2}{5} x^{5/2} \right) + 5\left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) + C \\
&= \frac{8}{7} x^{7/2} - \frac{4}{5} x^{5/2} + \frac{10}{3} x^{3/2} + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.6 จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
\int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \int \left(\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x \right) dx \\
&= \int \sec^2 x dx + 2\int \sec x \tan x dx + \int \tan^2 x dx \\
&= 2\int \sec^2 x dx + 2\int \sec x \tan x dx - \int 1 dx \\
&= 2\tan x + 2\sec x - x + C
\end{aligned}$$

□

การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปร (integration by substitution)

สมมติให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ ฟังก์ชัน f และให้ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

แล้ว $$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

ดังนั้นเขียนในรูปของอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้ว่า

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \qquad \text{............(1)}$$

จาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ดังนั้นได้ว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \qquad \text{..............(2)}$$

ให้ $u = g(x)$ และ $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ดังนั้นค่าเชิงอนุพันธ์ของ g เทียบกับ x

คือ $du = g'(x)dx$

แทนค่า $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$ ลงใน (2) จะได้

$$\boxed{\int f(u)du = F(u) + C} \qquad \text{..............(3)}$$

ขั้นตอนของการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตที่ได้กล่าวข้างบนโดยการแทนค่า $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$ เราเรียกว่า **วิธีการแทนค่าด้วยตัวแปร** u

พิจารณา อินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int (x^2+5)^{20} 2xdx$

ถ้าให้ $u = x^2 + 5$ แล้ว $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2+5\right] = 2x$ ซึ่งจะได้ว่า $du = 2xdx$

ดังนั้นหาค่าอินทิกรัลได้

$$\int (x^2+5)^{20} 2xdx = \int u^{20} du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x^2+5)^{21}}{21} + C$$ □

<u>**ทฤษฎีบทที่ 5.2.2**</u> ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และมีเรนจ์บนช่วง I

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตได้บนช่วง I แล้ว

$$\int f(u(x))\frac{du(x)}{dx}dx = \int f(u)du$$

<u>หมายเหตุ</u> ในการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยวิธีแทนค่าด้วยตัวแปร u ในทฤษฎีบทที่ 5.2.2 นั้นเราจะต้องเลือกตัวแปร u ที่เหมาะสมด้วยถึงจะหาค่าอินทิกรัลได้

ตัวอย่างที่ 5.2.7 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต $\int 2x\sin\left(x^2-1\right)dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^2-1$ ดังนั้น $du=\dfrac{d}{dx}\left[x^2-1\right]dx=2xdx$

เพราะฉะนั้นหาค่าอินทิกรัลได้

$$\begin{aligned}\int 2x\sin\left(x^2-1\right)dx &= \int \sin u\,du\\ &= -\cos u+C\\ &= -\cos\left(x^2-1\right)+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.8 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^3-5$ ดังนั้น $du=\dfrac{d}{dx}\left[x^3-5\right]dx=\left(3x^2\right)dx$ หรือ $\dfrac{du}{3}=x^2dx$

เพราะฉะนั้นหาค่าอินทิกรัลได้

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{1/2}}du=\frac{1}{3}\int u^{-1/2}du\\ &= \frac{1}{3}\left(2u^{1/2}\right)+C\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-5}+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.9 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int x^2e^{x^3+1}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^3+1$ ดังนั้น $du=\dfrac{d}{dx}\left[x^3+1\right]dx=3x^2dx$ หรือ $\dfrac{du}{3}=x^2dx$

เพราะฉะนั้นหาค่าอินทิกรัลได้

$$\begin{aligned}\int x^2e^{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int e^u du\\ &= \frac{1}{3}e^u+C\\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+1}+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.10 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \sin^2(3x)\,dx$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sin^2(3x) = \dfrac{1-\cos(6x)}{2}$ ดังนั้น

$$\int \sin^2(3x)\,dx = \int \frac{1-\cos(6x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(6x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(6x)\,dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\int \cos u\,du$$

$u = 6x, \quad du = 6dx$ หรือ $dx = \dfrac{du}{6}$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin u + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin(6x) + C$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.11 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \dfrac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x + \cos x$ ดังนั้น $du = \dfrac{d}{dx}[x+\cos x]\,dx = (1-\sin x)\,dx$

เพราะฉะนั้นหาค่าอินทิกรัลได้

$$\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \int u^{-2}\,du$$

$$= -\frac{1}{u} + C$$

$$= -\frac{1}{x+\cos x} + C$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.12 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = 5x+1$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}[5x+1]dx = 5dx$ หรือ $\frac{du}{5} = dx$

เพราะฉะนั้น

$$\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)\,dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 u \cos u\,du$$

ให้ $v = \sin u$ ดังนั้น $dv = \frac{d}{du}\sin u\,du = \cos u\,du$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)dx &= \frac{1}{5}\int \sin^3 u \cos u\,du \\
&= \frac{1}{5}\int v^3 dv \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{v^4}{4}\right) + C \\
&= \frac{\sin^4 u}{20} + C \\
&= \frac{\sin^4(5x+1)}{20} + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.13 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x-3$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}[x-3]dx = dx$

จาก $x = u+3$ ดังนั้น $x^2 = (u+3)^2 = u^2 + 6u + 9$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}}dx &= \int \frac{u^2+6u+9}{\sqrt{u}}du \\
&= \int \left(u^{3/2} + 6u^{1/2} + 9u^{-1/2}\right)du \\
&= \frac{2}{5}u^{5/2} + 4u^{3/2} + 18u^{1/2} + C \\
&= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 4(x-3)^{3/2} + 18(x-3)^{1/2} + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5.2.14 จงหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = \ln x$ ดังนั้น $du = \frac{1}{x} dx$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx &= \int u^2 du \\
&= \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{(\ln x)^3}{3} + C \\
&= \ln x + C
\end{aligned}
$$

□

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1. จงหาดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $y = \sin(3x+4)$

1.2 $y = \ln(\cos x)$

1.3 $y = x + \sqrt[3]{x}$

1.4 $y = 3^x + 1$

2. จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int \frac{x^4 - x^3 + x^2}{x^3} dx$

2.2 $y = \int \left(\frac{5}{x^{\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} \right) dx$

2.3 $y = \int \frac{\ln 3x}{x} dx$

2.4 $y = \int \left(e^{-2x} + e^{5x-1} \right) dx$

2.5 $y = \int x \cos(x^2+1) dx$

2.6 $y = \int 3^{\cos x} \sin x dx$

2.7 $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

2.8 $y = \int (2x-1)(3-x^2) dx$

2.9 $y = \int \sec x (\tan x - 2\cos x) dx$

2.10 $y = x^2 \sqrt{2-x} dx$

2.11 $y = \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)^4} dx$

2.12 $y = \int t \cos(t^2) dt$

2.13 $y = \int \sqrt{\sin \pi x} \cos \pi x \, dx$

2.14 $y = \int \sqrt{1+\sqrt{1+x}} dx$

5.3 สัญลักษณ์ซิกมาและการคำนวณพื้นที่โดยใช้ลิมิตผลบวก

พิจารณา $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ เราจะเห็นว่าแต่ละเทอมเขียนอยู่ในรูปของ k^2 เมื่อ $k=1,2,3,4,5$ เราสามารถเขียนแทนจำนวน $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ โดยใช้สัญลักษณ์ซิกมาได้ดังนี้

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

ซึ่งเราจะเรียกว่า " ผลรวมของ k^2 เมื่อ k มีค่าตั้งแต่ 1 จนถึง 5 "

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$$

สำหรับกรณีทั่วๆไป ถ้ากำหนดให้ $f(k)$ เป็นฟังก์ชันของ k และให้ m,n เป็นจำนวนเต็มที่ $m \le n$ แล้ว

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)$$

เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum$ ว่า **ซิกมา (sigma)** ซึ่งจะแทนผลรวม

k คือดัชนีของผลรวม (index of summation)

m คือขีดจำกัดล่างของผลรวม (lower limits of summation)

n คือขีดจำกัดบนของผลรวม (upper limits of summation)

ตัวอย่างเช่น

1. $\sum_{k=1}^{4} k^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3$

2. $\sum_{k=5}^{7} (2k+1) = (2(5)+1)+(2(6)+1)+(2(7)+1)$

$= 11+13+15 = 39$

3. $\sum_{k=1}^{4} k\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{3}\right) + 4\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. $\sum_{k=0}^{5}(-1)^{k}(2k+1) = (-1)^{0}(2(0)+1) + (-1)^{1}(2(1)+1) + (-1)^{2}(2(2)+1) + (-1)^{3}(2(3)+1)$

$$+(-1)^{4}(2(4)+1) + (-1)^{5}(2(5)+1)$$

$$= 1-3+5-7+9-11 = -6$$

ทฤษฎีบทที่ 5.3.1

1. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (เมื่อ c ไม่ได้ขึ้นอยู่กับดัชนี k)
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
4. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
7. $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{n\ term} = nc$

ตัวอย่างที่ 5.3.1 จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{25} k(k+2)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\sum_{k=1}^{25} k(k+2) = \sum_{k=1}^{25}\left(k^2+2k\right) = \sum_{k=1}^{25} k^2 + 2\sum_{k=1}^{25} k$$

$$= \frac{25(26)(51)}{6} + 2\left[\frac{25(26)}{2}\right]$$

$$= 6175$$

□

ตัวอย่างที่ 5.3.2 จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{30} (k+1)^3$

<u>วิธีทำ</u>

$$\sum_{k=1}^{30} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{30}\left(k^3+3k^2+3k+1\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{30} k^3 + 3\sum_{k=1}^{30} k^2 + 3\sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} 1$$

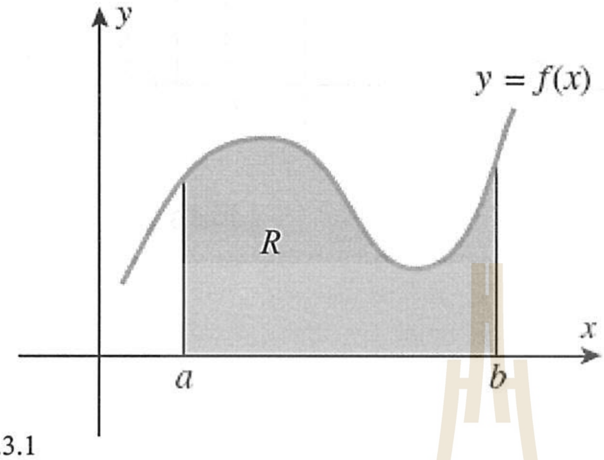
$$= \left(\frac{30(31)}{2}\right)^2 + \left(\frac{3(30)(31)(61)}{6}\right) + \left(\frac{3(30)(31)}{2}\right) + 30$$

$$= 246015$$

□

การหาพื้นที่

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ บนช่วง $[a,b]$ ให้ R เป็นบริเวณใต้กราฟของ f ซึ่งปิดล้อมด้วยแกน x เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 5.3.1



รูปที่ 5.3.1

ให้ A คือพื้นที่ของบริเวณ R เราสามารถหาค่า A ได้ดังนี้

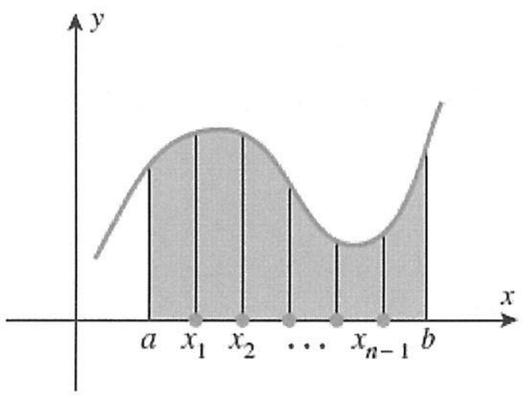
1. แบ่ง $[a,b]$ เป็นช่วงย่อยๆ n ช่วง ด้วยจุดแบ่ง $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
ดังนั้น ช่วงย่อยทั้ง n ช่วงย่อยที่แบ่ง $[a,b]$ คือ
$[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-1},x_n]$ ซึ่งเรียกว่า ผลแบ่งกั้น (partition) ของ $[a,b]$ โดยเราจะแทนเซตนี้ด้วย $P = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ (ดูรูปที่ 5.3.2)
2. ให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$
3. ให้ x_k^* เป็นจุดใดๆในช่วงย่อยที่ k นั่นคือ

$$x_{k-1} \leq x_k^* \leq x_k$$

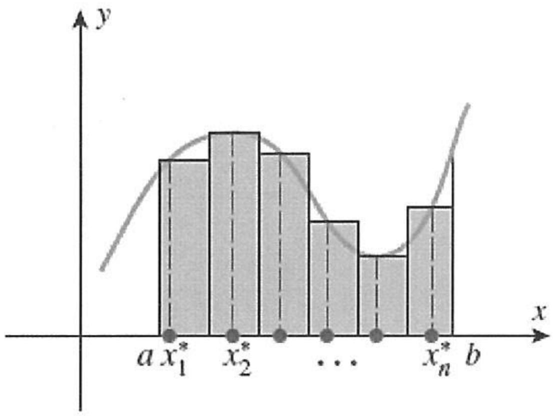
4. คำนวณ $f(x_k^*)\Delta x_k$ = **พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วง** $[x_{k-1},x_k]$
5. ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับพื้นที่รวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังนั้น
S_n = พื้นที่โดยประมาณของบริเวณ R (ดูรูปที่ 5.3.3)
6. ให้ $\|P\|$ เป็นค่าสูงสุดของ Δx_k สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$
เราเรียก $\|P\|$ ว่านอร์ม (norm) ของผลแบ่งกั้น P

ถ้า $\lim_{\|P\|\to 0} S_n$ หาค่าได้ และไม่ขึ้นอยู่กับวิธีการแบ่งของ $[a,b]$ และการเลือก x_k^* แล้วพื้นที่ของบริเวณ R คือ

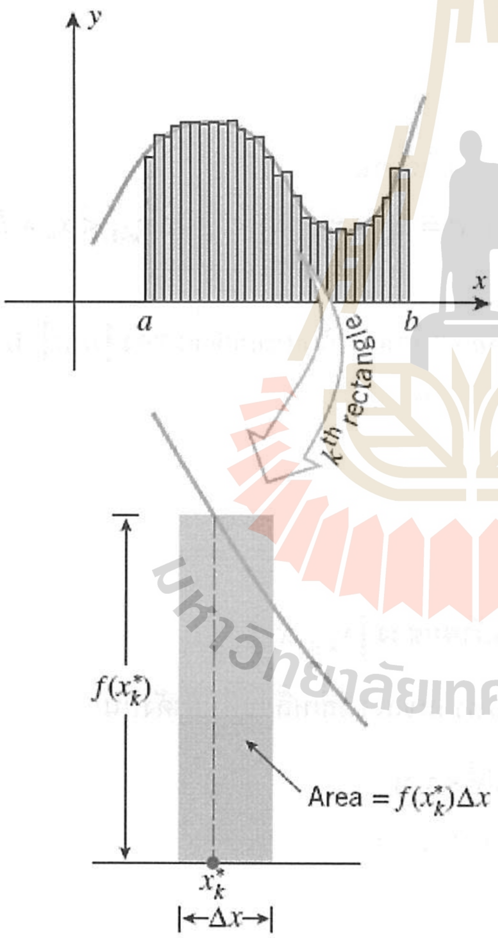
$$A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \qquad .....(*) \qquad \text{(ดูรูปที่ 5.3.4)}$$



รูปที่ 5.3.2



รูปที่ 5.3.3



รูปที่ 5.3.4

หมายเหตุ เราเรียก $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k$ ว่า **ผลบวกรีมันน์** และลิมิต (*) เรียกว่า **อินทิกรัลจำกัดเขต** นั่นคือ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k$$

บทนิยามที่ 5.3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f(x)\geq 0$ สำหรับทุกๆ $x\in[a,b]$ แล้ว พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y=f(x)$ บนช่วงปิด $[a,b]$ คือ

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

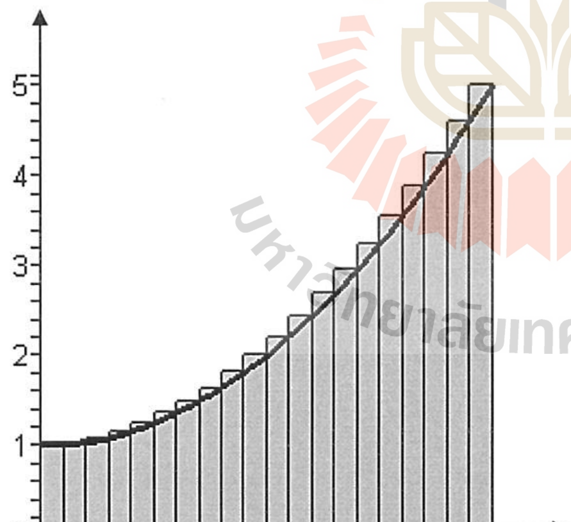
ตัวอย่างที่ 5.3.3 จงหาพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=x^2+1$ กับแกน X บนช่วง $[0,2]$

วิธีทำ (1) แบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆกัน ยาวช่วงละ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

ดังนั้น $x_0 = 0,\ x_1 = 0+\frac{2}{n} = \frac{2}{n},\ x_2 = 0+2\left(\frac{2}{n}\right) = 2\left(\frac{2}{n}\right)...,\ x_i = 0+i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$

$(i=0,1,...,n)$



(2) เลือก $x_i^* = x_i =$ จุดปลายขวาของช่วง $[x_{i-1},x_i]$ ดังนั้น

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2+1 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2+1$$

(3) เนื่องจาก ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมพืนผ้ารูปที่ i เท่ากับ $\frac{2}{n}$ ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลียมผืนผ้ารูปที่ i เท่ากับ

$$f(x_i^*)\Delta x_i = \left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2+1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

และผลรวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูปเท่ากับ

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2+1\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)+1\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2$$

โดยสูตรการผลบวกจะได้ว่า

$$A_n = \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)+2$$
$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)+2$$
$$= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}+2 = \frac{14}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}$$

ดังนั้นพื้นที่ใต้เส้นโค้งคือ

$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{14}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}\right) = \frac{14}{3}$$

ดังนั้นพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = x^2+1$ กับแกน X บนช่วง $[0,2]$ เท่ากับ $\frac{14}{3}$ ตารางหน่วย □

5.4 อินทิกรัลจำกัดเขต (The Definite Integral)

<u>**บทนิยามที่ 5.4.1**</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ให้ x_k^* เป็นจุดใดๆ ใน $[x_{k-1}, x_k]$ **อินทิกรัลจำกัดเขต**ของ f จาก a ถึง b มีนิยามดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \qquad \ldots.(*)$$

เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้ และไม่ขึ้นอยู่กับวิธีการแบ่ง $[a,b]$ และการเลือก x_k^*

เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้**บน $[a,b]$ เมื่อลิมิตในสมการ (*) หาค่าได้

<u>**ทฤษฎีบทที่ 5.4.1**</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้**บน $[a,b]$

<u>หมายเหตุ</u>

1. เราเขียนแทนอินทิกรัลจำกัดเขตของ f บนช่วง $[a,b]$ ด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$

เราเรียก $f(x)$ ว่า ตัวถูกอินทิเกรต (Integrand)

x เรียกว่า ตัวแปรการอินทิเกรต (variable of integration)

a และ b เรียกว่า ลิมิตล่าง (lower limit of integration) และ ลิมิตบน (upper limit of integration) ของการอินทิเกรต

2. $\int_a^b f(x)dx$ เป็นค่าตัวเลขค่าหนึ่งซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ x ดังนั้นเราสามารถแทน x ด้วยสัญลักษณ์อื่นๆเช่น

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

3. ในนิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต ฟังก์ชัน f นิยามบนช่วง $[a,b]$ นั่นคือ $a<b$ เราสามารถขยายนิยามไปยังกรณีต่อไปนี้

a. ถ้า $a>b$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b. ถ้า $a=b$ แล้ว $\int_a^a f(x)dx = 0$

<u>สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต</u>

กำหนดให้ อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ และ $\int_a^b g(x)dx$ หาค่าได้ แล้ว

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

2. $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2-a^2}{2}$

3. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

4. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใดๆ

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. ถ้า $f(x) \ge 0$ บน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

   และ $\int_a^b f(x)dx =$ พื้นที่ใต้กราฟ f จาก a ถึง b

7. ถ้า $f(x) \ge g(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5.4.1

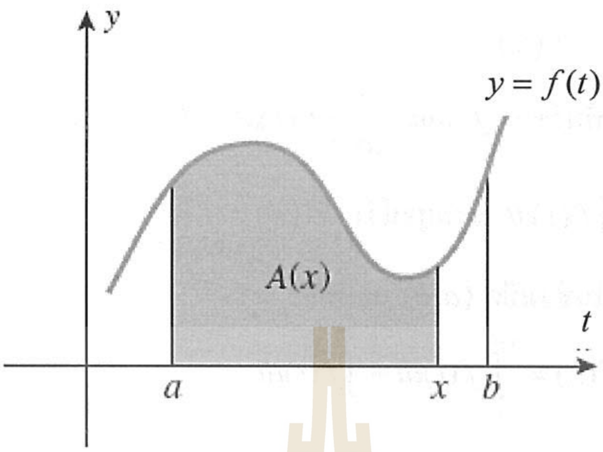
(1) $\int_2^2 x^2 dx = 0$

(2) $$\int_1^0 (1-x)dx = -\int_0^1 (1-x)dx = -\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx\right) = -\left((1(1-0)) - \left(\frac{1^2-0^2}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ ทุกๆ $x \in [a,b]$



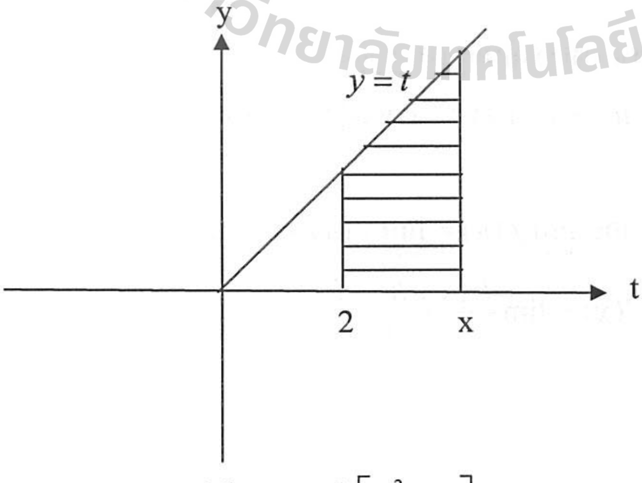
รูปที่ 5.4.1

จะเห็นว่า $\int_a^x f(t)dt$ คือพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(t)$ กับแกน t บนช่วง $[a,x]$ ทุกๆค่า $x \in [a,b]$ ซึ่งค่าของพื้นที่นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ x เพราะฉะนั้นถ้าให้ $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ ทุกๆ $x \in [a,b]$ ทำให้เราได้ว่า $A'(x) = f(x)$ ทุกๆ $x \in [a,b]$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ ทุก $x \in [a,b]$

ตัวอย่างที่ 5.4.2 ให้ $f(t) = t$ และ $a = 2$ ดังนั้น

$$F(x) = \int_2^x tdt = \frac{x^2 - 2^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2$$



เพราะฉะนั้น $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_2^x tdt = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2} - 2\right] = x = f(x)$ □

ทฤษฎีบทมูลฐานบทที่หนึ่งของแคลคูลัส(The First Fundamental Theorem of Calculus)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ c เป็นค่าคงตัวที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ ให้ $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ ทุก $x\in[a,b]$ จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $F'(x)=f(x)$

นั่นก็คือ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f และ $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt=f(x)$ ทุก $x\in[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ จะพิสูจน์ว่า $F'(x)=f(x)$

ให้ x และ $x+h$ อยู่ในช่วงเปิด (a,b) ฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt\right)-\int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

สำหรับ $h\neq 0$ จะได้ว่า $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

สมมติให้ $h>0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[x,x+h]$ ดังนั้น จะมี l และ u ที่อยู่ใน $[x,x+h]$ ซึ่ง $f(l)=m$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และ $f(u)=M$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ดังนั้น $mh\leq\int_x^{x+h} f(t)dt\leq Mh$ หรือ $f(l)h\leq\int_x^{x+h} f(t)dt\leq f(u)h$

เนื่องจาก $h>0$ ดังนั้น

$f(l)\leq\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt\leq f(u)$ หรือ $f(l)\leq\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leq f(u)$ ….(*)

พิสูจน์ในทำนองเดียวกันจะได้ว่าสมการ(*) เป็นจริงในกรณีที่ $h<0$

ให้ $h\to 0$ จะได้ $l\to x$ และ $u\to x$ เพราะว่า $l,u\in[x,x+h]$

จาก f ต่อเนื่องที่ x ดังนั้น

$\lim\limits_{h\to 0} f(l)=\lim\limits_{l\to x} f(l)=f(x)$ และ $\lim\limits_{h\to 0} f(u)=\lim\limits_{u\to x} f(u)=f(x)$

โดยทฤษฎีบทแซนวิชจะได้ว่า $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ □

ตัวอย่างที่ 5.4.3

1. ถ้า $F(x)=\int_1^x (3t^2-1)dt$ แล้ว $F'(x)=3x^2-1$

2. ถ้า $F(x)=\int_3^x \left(\sqrt{t^2+3t+1}\right)dt$ แล้ว $F'(x)=\sqrt{x^2+3x+1}$

3. ถ้า $F(x)=\int_a^x \cos(t^3)dt$ แล้ว $F'(x)=\cos(x^3)$

ตัวอย่างที่ 5.4.4 จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y=\int_2^{\sqrt{x}} \sin t\,dt$

วิธีทำ ให้ $u=\sqrt{x}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\int_2^{\sqrt{x}} \sin t\,dt\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_2^{u} \sin t\,dt\right]$$

$$=\frac{d}{du}\left[\int_2^{u} \sin t\,dt\right]\cdot\frac{du}{dx}=\sin u\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$=\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 5.4.5 กำหนดให้ $F(x)=\int_x^1 t^2\cos t\,dt$ จงหา $F'(x)$

วิธีทำ จาก $F(x)=\int_x^1 t^2\cos t\,dt=-\int_1^x t^2\cos t\,dt$

ดังนั้น $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[-\int_1^x t^2\cos t\,dt\right]=-\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^2\cos t\,dt\right]=-x^2\cos x \qquad \square$

ตัวอย่างที่ 5.4.6 กำหนดให้ $y=\int_{x}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\int_{x}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt=\int_{x}^{0}\sqrt{t^2+4}dt+\int_{0}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt=-\int_{0}^{x}\sqrt{t^2+4}dt+\int_{0}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt\right]=\frac{d}{dt}\left[-\int_{0}^{x}\sqrt{t^2+4}dt+\int_{0}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt\right]\\
&=\frac{d}{dt}\left[-\int_{0}^{x}\sqrt{t^2+4}dt\right]+\frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{x^3}\sqrt{t^2+4}dt\right]\\
&=\left(-\sqrt{x^2+4}\right)+\left(3x^2\sqrt{\left(x^3\right)^2+4}\right)\\
&=3x^2\sqrt{x^6+4}-\sqrt{x^2+4}
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทมูลฐานบทที่สองของแคลคูลัส (The second Fundamental Theorem of Calculus)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ใดๆของ f บน $[a,b]$ (นั่นคือ $F'(x)=f(x)$) แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad .....(**)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทมูลฐานบทที่หนึ่งของแคลคูลัสจะได้ว่า $G'(x)=f(x)$ หรือ G เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน f

จาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ดังนั้น $F(x)=G(x)+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใดๆ สำหรับ $x\in(a,b)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \big(G(b)+C\big)-\big(G(a)+C\big) \\ &= \left(\int_a^b f(t)dt+C\right)-\left(\int_a^a f(t)dt+C\right) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

หมายเหตุ เราเขียนแทน $F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$

หรือ $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$

ดังนั้นจาก (**) เราจะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b$

ตัวอย่างที่ 5.4.7 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_1^2 (x^2+1)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2+1)dx &= \left[\frac{x^3}{3}+x+C\right]_{x=1}^{x=2} \\ &= \left(\frac{2^3}{3}+2+C\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1+C\right) \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5.4.7 จะเห็นว่าค่าคงที่ C จะลบกันหมดไป ดังนั้นเราจึงอาจจะละค่าคงที่ C ได้ในการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต

ตัวอย่างที่ 5.4.8 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{x=0}^{x=\pi/2}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

□

ตัวอย่างที่ 5.4.9 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_{-1}^{3} \left|1-x^2\right| dx$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\left|1-x^2\right| = \begin{cases} 1-x^2, & x \in [-1,1] \\ -\left(1-x^2\right), & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{3} \left|1-x^2\right| dx = \int_{-1}^{1} \left|1-x^2\right| dx + \int_{1}^{3} \left|1-x^2\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx + \int_{1}^{3} -\left(1-x^2\right) dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=3}$$

$$= \left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right] - \left[\left(3-\frac{3^3}{3}\right) - \left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right]$$

$$= 8$$

□

อินทิกรัลจำกัดเขตและการแทนค่า

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงการอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปร เพื่อช่วยในการหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต ซึ่งเหมือนกับการอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปรเพื่อช่วยในการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตซึ่งได้กล่าวมาแล้ว

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.4.2</u> ให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง g' มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ f มีความต่อเนื่องบนเรนจ์ของ g

ถ้า $u = g(x)$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$

หมายเหตุ $du = g'(x)\,dx$

ตัวอย่างที่ 5.4.10 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x^2+1$ จะได้ $du = 2x\,dx$

เมื่อ $x=-1$ จะได้ $u = (-1)^2+1 = 2$ และเมื่อ $x = 2$ จะได้ $u = (2)^2+1 = 5$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_2^5 \sqrt{u}\,du = \int_2^5 u^{\frac{1}{2}}\,du$$
$$= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=2}^{u=5} = \frac{2}{3}\left[5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right]$$

□

ตัวอย่างที่ 5.4.11 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x^3+2x+1$ จะได้ $du = (3x^2+2)\,dx$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $u = 1^3+2(1)+1 = 4$ และถ้า $x=2$ จะได้ $u = 2^3+2(2)+1 = 13$

เพราะฉะนั้น

$$\int_1^2 \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}\,dx = \int_4^{13} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_4^{13} u^{-1/2}\,du$$
$$= \left[2\sqrt{u}\right]_{u=4}^{u=13}$$
$$= 2\sqrt{13} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{13} - 4$$

□

ตัวอย่างที่ 5.4.12 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)^3\cos t\,dt$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=1-\sin t$ จะได้ $du=-\cos t\,dt$ หรือ $-du=\cos t\,dt$

เมื่อ $t=-\dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $u=1-\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)=2$ และถ้า $t=\dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $u=1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)^3\cos t\,dt=\int_2^0 u^3(-du)=\int_0^2 u^3(du)$$

$$=\left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=2}=\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=4$$

□

ตัวอย่างที่ 5.4.13 จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_1^2\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=\ln x$ จะได้ $du=\dfrac{1}{x}dx$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $u=\ln 1=0$ และถ้า $x=2$ จะได้ $u=\ln 2$

เพราะฉะนั้น

$$\int_1^2\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\ln 2}\sin u\,du=\left[-\cos u\right]_{u=0}^{u=\ln 2}$$

$$=(-\cos(\ln 2))-(-\cos 0)$$

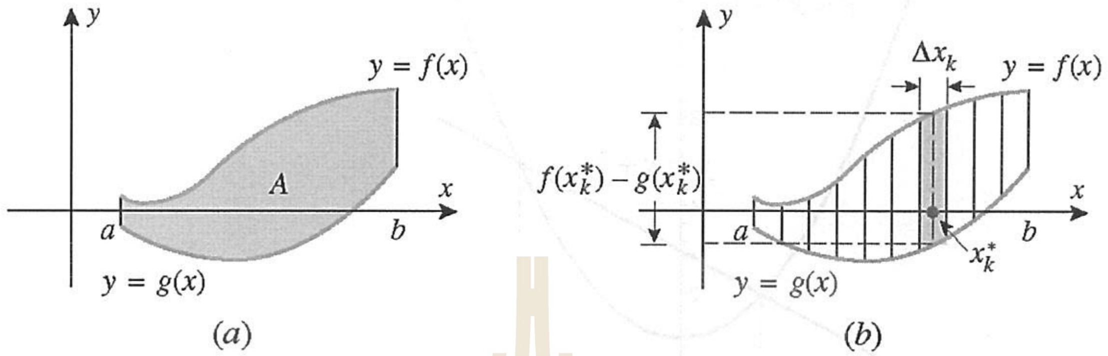
$$=1-\cos(\ln 2)$$

□

พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ให้ R เป็นบริเวณระหว่างกราฟของ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ (ซึ่ง $g(x) \le f(x)$ บนช่วง $[a,b]$)

เราต้องการหาพื้นที่ของบริเวณ R



รูปที่ 5.4.2

ให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ และให้ x_k^* เป็นจุดใดๆใน $[x_{k-1}, x_k]$ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ k คือ $\Delta A_k =$ สูง $\times$ กว้าง $= \left[f(x_k^*) - g(x_k^*)\right]\Delta x_k$

พื้นที่โดยประมาณของบริเวณ R คือ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k^*) - g(x_k^*)\right]\Delta x_k$$

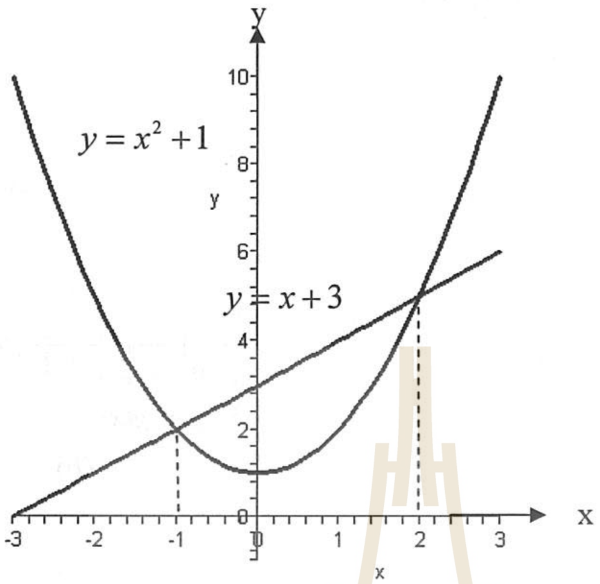
ซึ่งเป็นผลรวมรีมันน์ของฟังก์ชัน $f - g$

ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k^*) - g(x_k^*)\right]\Delta x_k = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k^*) - g(x_k^*)\right]\Delta x_k = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

ตัวอย่างที่ 5.4.14 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และ $y = x + 3$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 5.4.3

จุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ กับ $y = x + 3$ คือ $(-1,2)$ และ $(2,5)$

จะได้ว่าพื้นที่ $= \int_{-1}^{2} \left((x+3) - (x^2+1) \right) dx$ (ดูรูปที่ 5.4.3)

$$= \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2 \right) dx$$

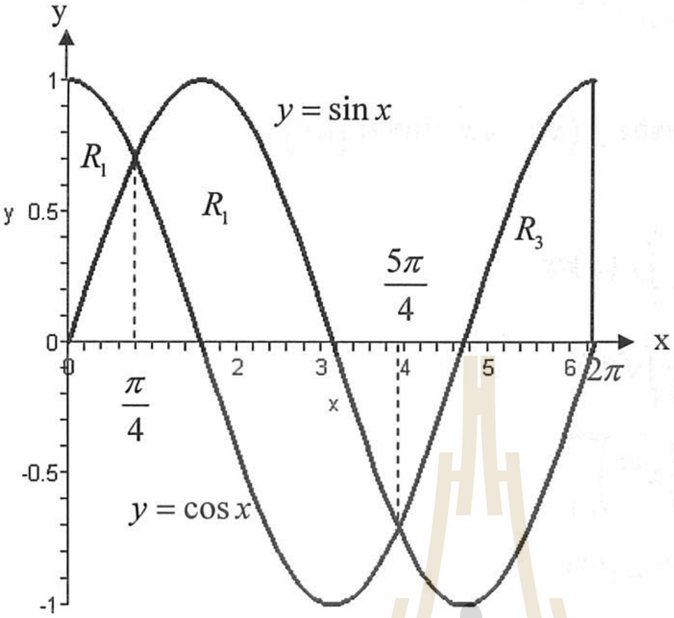
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{x=-1}^{x=2}$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2(2) \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right]$$

$$= \frac{9}{2}$$ ตารางหน่วย □

ตัวอย่างที่ 5.4.15 จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=\sin x,\quad y=\cos x$ เส้นตรง $x=0$ และ $x=2\pi$

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 5.4.4

จะได้ว่าพื้นที่ $=R_1+R_2+R_3$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)dx+\int_{5\pi/4}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx \\
&= \left[\sin x+\cos x\right]_{x=0}^{x=\pi/4}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{x=\pi/4}^{x=5\pi/4}+\left[\sin x+\cos x\right]_{x=5\pi/4}^{x=2\pi} \\
&= \left[\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-(\sin 0+\cos 0)\right]+\left[\left(-\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&\quad +\left[(\sin 2\pi+\cos 2\pi)-\left(\left(\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right] \\
&= 4\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ตารางหน่วย □

ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน (average value)

ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,b]$ คือ

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 5.4.16 จงหาค่าเฉลี่ยของ $f(x)=\sqrt{x}$ บนช่วง $[1,4]$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
f_{avg} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{1}{4-1}\int_1^4 \sqrt{x}dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)_{x=1}^{x=4} \\
&= \frac{2}{9}\left(4^{3/2}-1^{3/2}\right) \\
&= \frac{2}{9}(7) = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่างที่ 5.4.17 จงหาค่าเฉลี่ยของ $f(x)=\sin^2 x$ บนช่วง $[0,2\pi]$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}
f_{avg} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{2}-\frac{\sin 2(2\pi)}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\sin 2(0)}{4}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1. จงหาค่าของผลรวมต่อไปนี้

1.1 $\sum_{k=1}^{5}\left(k^2-k\right)$

1.2 $\sum_{n=1}^{6}\sin n\pi$

1.3 $\sum_{k=1}^{101}\left(7k+3\right)$

1.4 $\sum_{k=1}^{30}k(k-1)(k+2)$

1.5 $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^3}{n^2}$

2. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X บนช่วงที่กำหนดให้ โดยให้ผลแบ่งกั้น P แบ่งช่วงที่กำหนดให้ออกเป็น n ช่วงย่อยๆเท่ากัน และเลือก $x_i^*=x_i$ ทุกๆ $i=1,2,3,\ldots,n$

2.1 $f(x)=\frac{x}{2}$; $[1,4]$

2.2 $f(x)=5-x$; $[0,5]$

2.3 $f(x)=4-\frac{1}{4}x^2$; $[0,3]$

2.4 $f(x)=1-x^3$; $[-3,-1]$

3. จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

3.1 $F(x)=\int_0^x\left(t^3+t-1\right)dt$

3.2 $F(x)=\int_x^3\left(\sin\left(t^2\right)+t\right)dt$

3.3 $F(x)=\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{t^2+t+3}\right)dt$

4. กำหนดให้ $F(x)=\int_4^x\sqrt{t^2+9}\,dt$ จงหา

4.1 $F(4)$ 4.2 $F'(4)$ 4.3 $F''(4)$

5. จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

5.1 $\int_{-1}^{1}\left(3x^2+x+1\right)dx$

5.2 $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

5.3 $\int_{1}^{2}\left(\frac{x^3+3\sqrt{x}+x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

5.4 $\int_{0}^{\pi/3}\left(2x-\sec x\tan x\right)dx$

5.5 $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$

5.6 $\int_{-3}^{2}\left|3x^2+x\right|dx$

5.7 $\int_{-1}^{2}\sqrt{2+|x|}\,dx$

5.8 $\int_{0}^{1}(2x+1)^5\,dx$

5.9 $\int_{0}^{4}3x\sqrt{25-x^2}\,dx$

5.10 $\int_{-1}^{2}(x+2)(x-1)dx$

5.11 $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}dx$

5.12 $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

5.13 $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^3}\,dx$

5.14 $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\left(\cos x+1\right)^5 dx$

5.15 $\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

5.16 $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$

5.17 $\int_{0}^{1} \frac{y^2dy}{\sqrt{4-3y}}$

6. กำหนดให้ $\int_{1}^{4} f(x)dx = 5$ จงหา $\int_{0}^{1} f(3x+1)dx$

7. กำหนดให้ $\int_{0}^{4} f(x)dx = 1$ จงหา $\int_{-2}^{0} xf(x^2)dx$

8. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่างๆในแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 $y = x^2,\quad y=\sqrt{x},\quad x=\frac{1}{4},\quad x=1$

8.2 $y = x^3-4x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3$

8.3 $y = x^2,\quad y = x+2$

8.4 $y = 2+|x-1|,\quad y=-\frac{1}{5}x+7$

8.5 $y = x,\quad y=4x,\quad y=-x+2$

8.6 $y = x^3-4x^2+3x,\quad y=0$

8.7 $y = x^2 - 4, \quad y = 8 - 2x^2$

9. จงหาค่าเฉลี่ยของ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ บนช่วง $[1,3]$

10. จงหาค่าเฉลี่ยของ $f(x) = \cos^2 x$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

บรรณานุกรม

1. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, **แคลคูลัส 1**, พิมพ์ครั้งที่ 4, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 2552.
2. ประภาศรี อัศวกุล, **แคลคูลัส 1**, พิมพ์ครั้งที่ 9, ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษา มหาวิทยาลัย เทคโนโลยีสุรนารี, นครราชสีมา, 2552.
3. ลำดวน ยอดยิ่ง, **แคลคูลัส 1-1**, พิมพ์ครั้งที่ 2, ส. เอเชียเพรส(1989) จำกัด, กรุงเทพมหานคร, 2549.
4. Anton, H., Bivens, I., Davis, S., **Calculus**, 8th edition., John Wiley & Sons, USA, 2005.
5. Ayres, F., Mendelson., **Calculus**, 4th edition., McGraw-Hill, New York, 2000.
6. Ryan, M., **Calculus Workbook for Dummies**, Wiley Publishing, Inc., Indiana, 2005.
7. Stewart, J., **Calculus**, 5th edition., Brooks/Cole- Thomson Learning, USA, 2003.