เอกสารประกอบการสอนวิชา

ความน่าจะเป็นและสถิติ (103103)

อ.ดร. ธิดารัตน์ อารีรักษ์

บทที่ 1

ความน่าจะเป็น

1.1 ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์

การทดลองสุ่ม (Random Experiment) หมายถึง การทดลองหรือการกระทำที่ให้ผลลัพธ์ออกมาได้หลายอย่าง ทำให้ไม่สามารถบอกผลลัพธ์ที่แน่นอนได้ แม้ว่าการทดลองดังกล่าวจะถูกกระทำซ้ำด้วยวิธีการเช่นเดียวกัน แต่ผลลัพธ์ที่ได้ออกมาก็อาจจะแตกต่างกันได้

ตัวอย่าง (การทดลองสุ่ม)

1. การโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตแต้มที่ลูกเต๋าออก
2. การโยนเหรียญ 2 เหรียญพร้อม ๆ กัน สังเกตจำนวนเหรียญที่หงายด้านหัว
3. การนับจำนวนอนุภาคของสารกัมมันตรังสีที่ปล่อยออกมาในเวลา 1 นาที

ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space) คือ เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่ม เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S

เหตุการณ์ (Event) คือ สับเซตหรือเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> (ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์)

1. การโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตแต้มที่ลูกเต๋าออก จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 3

2. การมีบุตร 3 คน ของสามีภรรยาคู่หนึ่ง สังเกตเพศของบุตร จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ลูกเป็นเพศชายอย่างน้อย 2 คน

3. การมีบุตร 3 คน ของสามีภรรยาคู่หนึ่ง สังเกตจำนวนบุตรชาย จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ลูกเป็นเพศชายอย่างน้อย 2 คน

4. การนับจำนวนอนุภาคของสารกัมมันตรังสีที่ปล่อยออกมาในเวลา 1 นาที จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่มีจำนวนอนุภาคน้อยกว่า 10 อนุภาค

1.2 หลักพื้นฐานการนับ

1.2.1 หลักการบวก (The Addition Principle)

ให้ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่สามารถแบ่งออกได้เป็น k กรณีที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกัน โดยที่

กรณีที่ 1 สามารถเกิดได้ n_1 วิธี
กรณีที่ 2 สามารถเกิดได้ n_2 วิธี
$\vdots$
กรณีที่ k สามารถเกิดได้ n_k วิธี

ดังนั้นเหตุการณ์ E สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าเราสามารถเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B ได้ 3 แบบคือ ทางบก ทางเรือ และทางอากาศ โดยที่ทางบกมี 3 เส้นทาง ทางเรือมี 4 เส้นทาง และทางอากาศมี 2 เส้นทาง จงหาจำนวนเส้นทางทั้งหมดจากเมือง A ไปเมือง B

<u>ตัวอย่าง</u> ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกที่แตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 อย่างน้อย 1 ลูก

1.2.2 หลักการคูณ (The Multiplication Principle)

ให้ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่สามารถแบ่งออกเป็นขั้นตอนได้ k ขั้นตอน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 สามารถเกิดได้ n_1 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 สามารถเกิดได้ n_2 วิธี
⋮
ขั้นตอนที่ k สามารถเกิดได้ n_k วิธี

ดังนั้นเหตุการณ์ E สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งหมด

$$n_1 \cdot n_2 \ldots n_k \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง ในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C จะต้องผ่านเมือง B ถ้าถนนจากเมือง A ถึงเมือง B มี 3 สาย และถนนจากเมือง B ถึงเมือง C มี 2 สาย จงหาจำนวนเส้นทางทั้งหมดในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง C

ตัวอย่าง สมมติว่าป้ายทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาไทยที่แตกต่างกัน 2 ตัว ตามด้วยตัวเลขอีก 4 ตัว โดยกำหนดให้ตัวเลขจำนวนแรกไม่เท่ากับ 0 ถามว่าจะสามารถพิมพ์ป้ายทะเบียนได้ทั้งหมดกี่แผ่น

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาจำนวนเต็มคู่ที่มีค่าตั้งแต่ 20000 ถึง 70000 และไม่มีตัวเลขตัวใดซ้ำกันเลย

1.2.3 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน หมายถึง การนำสิ่งของบางส่วนหรือทั้งหมดมาจัดเรียง โดยถือว่า "ลำดับมีความสำคัญ"

ตัวอย่าง มีตัวอักษรอยู่ทั้งหมด 3 ตัว คือ A, B และ C จะทำการเรียงสับเปลี่ยนได้แบบใดบ้างเมื่อ

1. ต้องการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 1 ตัว
2. ต้องการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 2 ตัว
3. ต้องการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 3 ตัว

การเรียงสับเปลี่ยน สิ่งของ k สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง $(k \leq n)$ จะสามารถทำได้ทั้งหมด

$${}^{n}P_k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ วิธี}$$

<u>หมายเหตุ</u>

1. $n!$ อ่านว่า n แฟคโทเรียล (n factorial) มีความหมายว่า

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

2. $0! = 1$
3. การเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้งหมดที่มีอยู่ n สิ่ง จะสามารถทำได้

$${}^{n}P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่าง 2 ตำแหน่ง คือ เลขา ฯ และผู้ช่วยเลขา ฯ ปรากฏว่ามีผู้สมัครตำแหน่งทั้งสองจำนวน 5 คน จงหาว่าจะสามารถจัดตำแหน่งได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีผู้ชาย 4 คน และผู้หญิง 2 คน ยืนเรียงเป็นแถว จะมีวิธีการยืนทั้งหมดกี่วิธีเมื่อ

1. ผู้หญิงยืนแยกกัน
2. ผู้หญิง 2 คนยืนติดกันทั้งหมด

1.2.4 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ หมายถึง การจัดสิ่งของบางส่วนหรือทั้งหมด โดย "ไม่คำนึงถึงลำดับ"

ตัวอย่าง มีตัวอักษรอยู่ทั้งหมด 3 ตัว คือ A, B และ C จะทำการจัดหมู่ได้แบบใดบ้างเมื่อ

1. ต้องการจัดหมู่ตัวอักษร 1 ตัว
2. ต้องการจัดหมู่ตัวอักษร 2 ตัว
3. ต้องการจัดหมู่ตัวอักษร 3 ตัว

การจัดหมู่ สิ่งของ k สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง $(k \leq n)$ จะมีวิธีจัดได้ทั้งหมด

$$^{n}C_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ วิธี}$$

หมายเหตุ

ความสัมพันธ์ระหว่างการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่สิ่งของ k สิ่งจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง เป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$^{n}C_k = \frac{^{n}P_k}{k!}$$

ตัวอย่าง มีบริษัทอยู่ 5 บริษัท คือ A, B, C, D และ E ถ้าเราต้องการเลือกลงทุนใน 3 บริษัท จะทำได้กี่วิธี

ตัวอย่าง ร้านขายของเก่าแห่งหนึ่งมีแจกันที่แตกต่างกันอยู่ 7 ใบ เป็นแจกันที่มีตำหนิ 3 ใบ ถ้ามีลูกค้ามาซื้อแจกัน 4 ใบ อยากทราบว่าจะเป็นไปได้กี่วิธีที่ลูกค้าจะได้แจกันที่มีตำหนิอย่างน้อย 2 ใบ

<u>ตัวอย่าง</u> บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่งมีจุด 7 จุด ต้องการสร้างรูปเหลี่ยมบรรจุในวงกลม โดยมีจุดมุมเป็นจุดเหล่านี้ จงหาจำนวนรูปเหลี่ยมทั้งหมด

1.3 ความน่าจะเป็นและสมบัติของความน่าจะเป็น

1.3.1 ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ หมายถึง ค่าที่บอกว่าเหตุการณ์นั้นจะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

ตัวอย่าง

1. ความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้นของบริษัท A จะเพิ่มขึ้นในสัปดาห์หน้ามีค่าเท่ากับ 0.6
2. ความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกในวันพรุ่งนี้มีค่าเป็น 0.3

หมายเหตุ

1. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1
2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าเท่ากับ 1 หมายความว่า เหตุการณ์นั้นเกิดขึ้นแน่นอน
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าเท่ากับ 0 หมายความว่า เหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้นแน่นอน
4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าเท่ากับ 0.5 หมายความว่า เหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้น 50%
5. ความน่าจะเป็นบางครั้งแทนได้ด้วยร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์

1.3.2 การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ โดยที่

$$P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกทั้งหมดในเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนสมาชิกทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่าง } S}$$

การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็น แบ่งออกได้เป็นสองแบบ ดังนี้

1. **แบบคลาสสิค (Classical Probability)** มีข้อสมมติหรือข้อกำหนดว่าสมาชิกแต่ละตัวในปริภูมิตัวอย่างมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน สำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นในแบบนี้จะต้องอาศัยหลักการนับ การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่เข้าช่วยในการนับจำนวนสมาชิกในเซต

2. **แบบความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency Probability)** อาศัยความถี่ของข้อมูลซึ่งเกิดขึ้นจริงในอดีตจำนวนมาก เพื่อนำมาหาค่าความน่าจะเป็น

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่าง 4 ตำแหน่ง มีผู้สมัคร 9 คน เป็นชาย 5 คน และหญิง 4 คน ถ้าทุกคนมีความสามารถเท่า ๆ กัน ผู้จัดการฝ่ายบุคคลจึงใช้วิธีจับฉลาก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานชาย 2 คน และหญิง 2 คน

<u>ตัวอย่าง</u> ในการศึกษาเกี่ยวกับระดับผู้บริหารในองค์กรแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าได้ข้อมูลจำแนกตามเพศ อายุ และระดับของการบริหาร ดังนี้

อายุ (ปี)	ผู้บริหารระดับสูง		ผู้บริหารระดับกลาง	
	ชาย	หญิง	ชาย	หญิง
น้อยกว่า 30	1	0	5	3
30-50	7	3	17	9
มากกว่า 50	9	2	12	10
รวม	17	5	34	22

1. ถ้าสุ่มผู้บริหารจากองค์กรนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บริหารนั้นเป็นผู้บริหารระดับกลางที่มีอายุมากกว่า 50 ปี
2. ถ้าสุ่มผู้บริหารระดับกลางจากองค์กรนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บริหารนั้นจะมีอายุมากกว่า 50 ปี
3. ถ้าสุ่มผู้บริหารที่อายุมากกว่า 50 ปี จากองค์กรนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บริหารนั้นเป็นผู้บริหารระดับกลาง

1.3.3 ทบทวนความรู้เรื่องเซต

คอมพลีเมนต์ (Complement) ของเหตุการณ์ A หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดของปริภูมิตัวอย่าง S ที่ไม่อยู่ใน A เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ A'

ยูเนียน (Union) ของเหตุการณ์ A และ B หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน A หรือ B เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$

อินเตอร์เซกชั่น (Intersection) ของเหตุการณ์ A และ B หมายถึง เซตของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน A และ B เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$

เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (Mutually Exclusive Event) เหตุการณ์ $E_1, \ldots, E_n$ จะเรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ถ้า $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, 2, \ldots, n$

1.3.4 สมบัติที่สำคัญของความน่าจะเป็น

1. ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้น

$$P(S) = 1$$

3. $P(\emptyset) = 0$
4. ถ้า $E_1, \ldots, E_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่าง S ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

ตัวอย่าง ให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่างที่ไม่เกิดร่วมกัน โดยที่ $A \cup B \cup C = S$, $P(B) = 0.1$ และ $P(C) = 0.5$ จงหา $P(A)$

กฎข้อที่ 1: ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้วจะได้ว่า

$$\boxed{P(A') = 1 - P(A)}$$

กฎข้อที่ 2:

(2.1) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้วจะได้ว่า

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

(2.2) ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (นั่นคือ $A \cap B = \emptyset$) แล้ว

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

กฎข้อที่ 3: ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S ที่ $B \subseteq A$ แล้วจะได้ว่า

$$\boxed{P(B) \leq P(A)}$$

<u>หมายเหตุ</u> จากกฎข้อที่ 2

1. ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้วจะได้ว่า

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) \;=\; P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

2. ถ้า $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (นั่นคือ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, \ldots, n$) แล้ว

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)}$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.2$ และ $P(A \cap B) = 0.1$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. $P(A')$
2. $P(A \cup B)$
3. $P[(A \cup B)']$
4. $P[(A \cup B)' \cup B]$

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่าง 4 ตำแหน่ง มีผู้สมัคร 9 คน เป็นชาย 5 คน และหญิง 4 คน ถ้าทุกคนมีความสามารถเท่า ๆ กัน ผู้จัดการฝ่ายบุคคลจึงใช้วิธีจับฉลาก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานดังนี้

1. ชายอย่างน้อย 2 คน
2. หญิงอย่างมาก 3 คน

<u>ตัวอย่าง</u> ในการศึกษาเกี่ยวกับระดับผู้บริหารในองค์กรแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าได้ข้อมูลจำแนกตามเพศ อายุ และระดับของการบริหาร ดังนี้

อายุ (ปี)	ผู้บริหารระดับสูง		ผู้บริหารระดับกลาง	
	ชาย	หญิง	ชาย	หญิง
น้อยกว่า 30	1	0	5	3
30-50	7	3	17	9
มากกว่า 50	9	2	12	10
รวม	17	5	34	22

ถ้าสุ่มผู้บริหารจากองค์กรนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ผู้บริหารนั้นไม่เป็นชาย
2. ผู้บริหารนั้นจะมีอายุ 30-50 ปี หรือเป็นชาย
3. ผู้บริหารนั้นเป็นผู้บริหารระดับกลางที่มีอายุมากกว่า 50 ปี

1.4 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

$P(A|B)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A เมื่อเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว นั่นคือ

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>หมายเหตุ</u>

1. จากนิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข เราสามารถเขียนได้ว่า

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

และเมื่อพิจารณา

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

ดังนั้น

$$P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$$

แต่เนื่องจาก

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

ดังนั้น

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \end{aligned}$$

2. พิจารณากรณีที่มี 3 เหตุการณ์

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|(A \cap B))$$

ตัวอย่าง ในการศึกษาเกี่ยวกับระดับผู้บริหารในองค์กรแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าได้ข้อมูลจำแนกตามเพศ อายุ และระดับของการบริหาร ดังนี้

อายุ (ปี)	ผู้บริหารระดับสูง		ผู้บริหารระดับกลาง	
	ชาย	หญิง	ชาย	หญิง
น้อยกว่า 30	1	0	5	3
30-50	7	3	17	9
มากกว่า 50	9	2	12	10
รวม	17	5	34	22

ถ้าสุ่มผู้บริหารจากองค์กรนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ผู้บริหารจะมีอายุมากกว่า 50 ปี ถ้าทราบว่าผู้บริหารคนนั้นเป็นชาย
2. ผู้บริหารจะเป็นชาย ถ้าทราบว่าผู้บริหารคนนั้นมีอายุ 30-50 ปี
3. ผู้บริหารจะเป็นหญิง ถ้าทราบว่าผู้บริหารคนนั้นเป็นผู้บริหารระดับกลาง

1.5 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Event)

ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน หมายถึง การเกิดเหตุการณ์ A ไม่มีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B และการเกิดเหตุการณ์ B ไม่มีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ A นั่นคือ

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

หมายเหตุ

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน กำหนดให้

$$P(A) = 0.2, P(B) = 0.3 \text{ และ } P(C) = 0.4$$

จงหาค่าของ

1. $P(A \cap B)$
2. $P(A \cap B \cap C)$
3. $P(A \cup B \cup C)$
4. $P[(A \cup B) \cap C]$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5$ และ $P(A \cup B) = 0.9$ ถามว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

<u>ตัวอย่าง</u> ในการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง สมมติว่าความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวในแต่ละครั้งเป็น 0.7 จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะออกหัวทั้ง 3 ครั้ง

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าสุ่มไพ่ 3 ใบจากสำรับซึ่งมี 52 ใบ โดยสุ่มทีละใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ A ทั้ง 3 ใบ โดยที่

1. เป็นการสุ่มแบบใส่คืน
2. เป็นการสุ่มแบบไม่ใส่คืน

1.6 ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' Theorem)

ถ้ามีเหตุการณ์ $C_1, \ldots, C_n$ ในปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (นั่นคือ $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$ โดยที่ $i, j = 1, 2, \ldots, n$) และ

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = S$$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งซึ่งเกิดขึ้นในปริภูมิตัวอย่าง S และ

$$\boxed{\begin{aligned} P(A) &= P(C_1)P(A|C_1) + \ldots + P(C_n)P(A|C_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(A|C_i) \neq 0 \end{aligned}}$$

แล้ว

$$\boxed{P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{P(A)}, \quad j = 1, \ldots, n}$$

<u>หมายเหตุ</u>

$P(A)$ ในสมการข้างต้นเรียกว่าความน่าจะเป็นรวม (Total Probability) ของ A

<u>ตัวอย่าง</u> จากข้อมูลของบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า 30% ของพนักงานใหม่ จบจากมหาวิทยาลัยในกรุงเทพฯ ส่วนที่เหลือจบจากมหาวิทยาลัยในต่างจังหวัด และ 20% ของผู้ที่จบจากมหาวิทยาลัยในกรุงเทพฯ จะลาออกภายใน 2 ปี และ 45% ของผู้ที่จบจากมหาวิทยาลัยในต่างจังหวัดจะลาออกภายใน 2 ปี ถ้ามีพนักงานที่ลาออกภายใน 2 ปี จงหาความน่าจะเป็นที่

(1) พนักงานคนนี้จบจากมหาวิทยาลัยในกรุงเทพฯ

(2) พนักงานคนนี้จบจากมหาวิทยาลัยในต่างจังหวัด

ตัวอย่าง ถ้าสินค้าชนิดหนึ่งผลิตโดยใช้เครื่องจักร 3 เครื่อง คือ A, B, C และทราบว่าสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักร A, B, C จะเป็นสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐาน 10%, 5% และ 12% ตามลำดับ ถ้าสุ่มสินค้านี้มา 1 ชิ้น แล้วทำการทดสอบพบว่าเป็นสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐาน อยากทราบว่าโอกาสที่จะผลิตสินค้านี้โดยเครื่องจักร C เป็นเท่าไหร่

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. การสุ่มเครื่องคิดเลขที่แตกต่างกันออกมา 3 เครื่อง จากโรงงานแห่งหนึ่ง สังเกตคุณภาพของเครื่องคิดเลขทั้งสามว่าเป็นไปตามมาตรฐานหรือไม่ จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ได้เครื่องคิดเลขที่เป็นไปตามมาตรฐานไม่เกิน 2 เครื่อง

2. การทดลองโยนลูกเต๋าที่แตกต่างกัน 2 ลูก 1 ครั้ง สังเกตแต้มที่ลูกเต๋าแต่ละลูกออก จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าออกแต้มคู่มากกว่า 1 ลูก

3. การเลือกตัวอักษร 2 ตัวพร้อม ๆ กัน จากคำว่า PROBABILITY สังเกตตัวอักษรที่ได้ จงเขียนปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ได้ตัวอักษรที่ซ้ำกัน

4. มีหนังสือ 10 เล่มที่แตกต่างกัน นำไปแจกให้เด็ก 4 คนได้กี่วิธี (5,040)

5. ต้องการสร้างจำนวนเต็ม 4 หลัก ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 5,000 และหารด้วย 5 ลงตัวจะสร้างได้กี่จำนวน โดยเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน (504)

6. มีชาย 7 คนหญิง 3 คนจงหาจำนวนวิธีในการจัดแถวทั้งหมดตามเงื่อนไขต่อไปนี้

   (1) หญิงสามคนยืนติดกัน (241,920)

   (2) หญิงสามคนยืนแยกกันหมดและให้ผู้ยืนในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถวเป็นผู้ชาย (604,800)

7. จงหาจำนวนเลขฐานสองที่มี 7 หลักและประกอบด้วยเลข 0 สามตัว และเลข 1 สี่ตัว (35)

8. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกไพ่ 5 ใบจากสำรับทั้งหมด 52 ใบ (2,598,960)

9. ถ้ามีแผ่นป้าย 10 แผ่น เขียนอักษรกำกับ ดังนี้ S T A T I S T I C S เรียงแผ่นป้ายทั้งหมดในแนวเส้นตรง จะเรียงแผ่นป้ายได้ทั้งหมดกี่วิธีภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

   (1) ไม่กำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม (50,400)

   (2) แผ่นป้ายอักษรเหมือนกันอยู่ติดกัน (120)

10. โรงงานแห่งหนึ่ง มีคนงานทั้งหมด 12 คน และมีงานอยู่ 3 งาน ผู้จัดการโรงงานต้องการจัดให้คนงานเหล่า นี้ทำงานที่ 1 จำนวน 3 คนงานที่ 2 จำนวน 4 คน และงานที่ 3 จำนวน 5 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดคนงานเหล่านี้ให้ทำงาน (27,720)

11. สมมติว่าครอบครัวหนึ่งมีลูกทั้งหมด 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้มีลูกชาย 2 คน (แนะนำ ให้หา sample space ก่อน ต่อจากนั้นจึงหาจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่ว่าครอบครัวนี้มีลูกชายเพียง 2 คน) (0.375)

12. ในงานแสดงแห่งหนึ่ง มีลูกโป่งขายอยู่ 25 ใบ ประกอบด้วยสีเหลือง 10 ใบ สีแดง 8 ใบ และสีน้ำเงิน 7 ใบมีการหยิบลูกโป่งอย่างสุ่มขายไปครั้งละ 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ว่าลูกโป่งลูกที่ 1 และ 2 ที่ขายได้จะเป็นสีเหลือง (0.150)

13. ความน่าจะเป็นที่ชายที่แต่งงานแล้วจะเข้าทำงานในบริษัทนำเข้ารถยนต์แห่งหนึ่งมีค่าเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ผู้หญิงที่แต่งงานแล้วจะเข้ามาทำงานในบริษัทแห่งนี้เท่ากับ 0.3 และความน่าจะเป็นที่ชายที่แต่งงานแล้วจะเข้าทำงานในบริษัทแห่งนี้ถ้าภรรยาของเขาทำงานในบริษัทนี้เท่ากับ 0.6 และความน่าจะเป็นที่สามีหรือภรรยาจะทำงานในบริษัทแห่งนี้มีค่าเท่ากับเท่าไร (0.72)

14. ไพ่ 1 สำรับ มีจำนวน 52 ใบ ดังนี้

ดอกจิก	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A
โพแดง	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A
โพดำ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A
ข้าวหลามตัด	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K	A

สุ่มไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ไพ่โพดำหรือ Q (16/52)

15. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟเสีย 3 หลอด และหลอดไฟดี 7 หลอด หลอดไฟแต่ละหลอดแตกต่างกัน สุ่มหลอดไฟออกมาตรวจสอบคุณภาพครั้งละ 1 หลอด จำนวน 3 ครั้ง แบบไม่ใส่กลับคืน จงหาความน่าจะเป็นที่ครั้งแรกเป็นหลอดดี ครั้งที่ 2 เป็นหลอดเสีย และครั้งที่ 3 เป็นหลอดดี (0.175)

16. ถ้าทราบว่าในจำนวนยางรถยนต์ 15 เส้น มีอยู่ 2 เส้นที่ไม่ได้มาตรฐาน ในการเลือกยางรถยนต์อย่างสุ่มจากยางกองนี้มาตรวจสอบคุณภาพจำนวน 3 เส้นจงหาความน่าจะเป็นที่จะพบยางไม่ได้มาตรฐานเพียงเส้นเดียวเท่านั้น (12/35)

17. กำหนด $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5$ และ $P(A \cap B) = 0.24$ จงหา $P(A' \cup B')$ (0.76)

18. มีการเลือกไพ่อย่างสุ่ม 5 ใบ จากสำรับ 52 ใบ (เลือกแบบไม่ใส่คืนและไม่คิดลำดับ) จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ K 2 ใบ Q 2 ใบ และ J 1 ใบ (0.000055)

19. ในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีเครื่องปริ๊นเตอร์อยู่ทั้งหมด 25 เครื่องโดยเป็นเลเซอร์ปริ๊นเตอร์จำนวน 15 เครื่องและที่เหลือ 10 เครื่องเป็นแบบอิ๊งเจ็ท ถ้าเลือกปริ๊นเตอร์ดังกล่าวอย่างสุ่มมา 6 เครื่อง จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 3 เครื่องเป็นเลเซอร์ปริ๊นเตอร์ (7553/8855)

20. กำหนด $P(A) = 0.6, P(B) = 0.8$ และ $P(A \cap B) = 0.5$ จงหา

(1) $P(A \cup B)$ (0.9)

(2) $P(A' \cap B)$ (0.3)

(3) $P(A \cap B')$ (0.1)

21. ให้ A แทนเหตุการณ์ที่นักศึกษาเลือกใช้โปรแกรม SPSS และ B แทนเหตุการณ์ที่นักศึกษาเลือกใช้โปรแกรม SAS กำหนดให้ $P(A) = 0.30$ และ $P(B) = 0.50$

    (1) ทำไม $P(A) + P(B) \neq 1$?

    (2) จงหา $P(A')$ (0.7)

    (3) จงหา $P(A \cup B)$ (0.8)

    (4) จงหา $P(A' \cap B')$ (0.2)

22. เตาไมโครเวฟ 25 เครื่อง มี 2 เครื่องที่มีตำหนิ ถ้ามีการสุ่มเตาไมโครเวฟดังกล่าวแบบไม่ใส่คืนมา 2 เครื่องจงหาความน่าจะเป็นที่ได้เตามีตำหนิทั้งสองเครื่อง (1/60)

23. เลือกไพ่สี่ใบออกจากสำรับ 52 ใบแบบไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ใบที่หนึ่งเป็นโพดำ ใบที่สองเป็นโพแดงใบที่สามเป็นข้าวหลามตัด และใบที่สี่เป็นดอกจิก (2197/499800)

24. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟที่แตกต่างกันทั้งหมด 12 หลอด โดยมีหลอดเสียปนอยู่ 3 หลอดถ้าสุ่มหลอดไฟจากกล่องมา 2 หลอด โดยสุ่มทีละหลอด จงหาความน่าจะเป็นที่

    (1) ได้หลอดไฟเสียและดีอย่างละ 1 หลอด (9/22)

    (2) ได้หลอดไฟเสียทั้ง 2 หลอด (1/22)

    (3) ได้หลอดไฟเสียอย่างน้อย 1 หลอด (10/22)

25. บริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่งรายงานว่าพนักงานที่ทำงานให้มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ได้ทำประกันชีวิตไว้กับบริษัทถึง 52 % เพื่อยืนยันรายงานนี้บริษัทได้ส่งตัวแทนออกไปสำรวจจำนวนคนที่ทำประกันชีวิตไว้กับบริษัท โดยการสุ่มตัวอย่างพนักงานในมหาวิทยาลัยแห่งนั้นมาสัมภาษณ์ความน่าจะเป็นที่คนที่ 4 จะทำประกัน ถ้า 3 คนแรกไม่ทำประกันมีค่าเท่ากับเท่าไร (0.0575)

26. ความน่าจะเป็นที่ A จะมีชีวิตอยู่ในอีก 30 ปี คือ 0.65 และความน่าจะเป็นที่ B จะมีชีวิตในอีก 30 ปี คือ 0.4 จงหาความน่าจะเป็นที่คนทั้งสองจะมีชีวิตในอีก 30 ปี (0.26)

27. กำหนด $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5$ และ $P(A \cup B) = 0.9$ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ (อิสระ)

28. สมมุติว่าระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการควบคุมเครื่องจักรในโรงงานแห่งหนึ่งมีอยู่ 3 เครื่อง ถ้าคอมพิวเตอร์เครื่องที่ 1 ขัดข้องระบบก็จะผ่านการทำงานไปที่เครื่องที่ 2 และถ้าเครื่องที่ 2 ขัดข้อง ระบบก็จะผ่านงานไปให้คอมพิวเตอร์เครื่องที่ 3 สมมุติว่าการเกิดข้อขัดข้องของคอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องเป็นอิสระต่อกัน และมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.15 จงหาความน่าจะเป็นที่ระบบควบคุมนี้จะสามารถทำงานต่อได้ (0.96625)

29. ร้านขายโทรทัศน์แห่งหนึ่งขายโทรทัศน์อยู่ 3 ยี่ห้อ คือ Sony, Panasonic และ Sumsung พบว่าเปอร์เซ็นต์ของการเลือกซื้อโทรทัศน์เป็น40%, 25% และ 35% ตามลำดับ โดยสินค้าที่ขายไปจะรับประกันสินค้าเป็นระยะเวลา 1 ปีซึ่งทางร้านพบว่าเปอร์เซ็นต์ที่สินค้าที่ขายไปจะมีปัญหาและส่งกลับมาเพื่อเปลี่ยนเครื่องใหม่ของแต่ละยี่ห้อเป็น8%, 25% และ 12% ตามลำดับ ความน่าจะเป็นที่ผู้ซื้อสินค้าแล้วจะได้สินค้าที่ไม่มีปัญหาเท่ากับเท่าไร (0.8635)

30. เครื่องจักร 3 เครื่อง คือ A, B และ C สามารถผลิตสินค้าได้เป็นจำนวน 50%, 30% และ 20% ของจำนวนสินค้าทั้งหมดของโรงงานแห่งนี้ และทราบว่าเปอร์เซ็นต์ของสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐานที่ผลิตจากเครื่องจักรทั้งสาม คือ3%, 4% และ 5% ตามลำดับ สมมุติว่าได้มีการสุ่มสินค้าจากโรงงานนี้มา 1 ชิ้นเพื่อทำการตรวจสอบและพบว่าสินค้าชิ้นนี้ไม่ได้มาตรฐานจงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนี้จะผลิตมาจากเครื่องจักร C (10/37)

31. ในการตรวจวินิจฉัยโรคชนิดหนึ่ง แพทย์ได้ทำการวิจัยและสร้างชุดตรวจขึ้นมาเพื่อตรวจโรคนี้โดยเฉพาะและพบว่าถ้าชุดตรวจแสดงเครื่องหมาย + หมายความว่า ผู้ถูกตรวจเป็นโรคดังกล่าว แต่ถ้าไม่ปรากฏเครื่องหมาย + หมายความว่าไม่เป็นโรคดังกล่าว ในการทดสอบประสิทธิภาพของชุดตรวจนี้ จึงได้ใช้อาสาสมัครที่เป็นและไม่เป็นโรคนี้มาจำนวนหนึ่งได้ผลดังนี้ถ้าผู้ที่เป็นโรคมาทำการตรวจด้วยชุดตรวจแล้วจะปรากฏเครื่องหมาย + ถึง 99 % แต่ถ้าผู้ที่ไม่เป็นมาตรวจจะปรากฏเครื่องหมาย + อยู่ 2 % และตามสถิติที่ผ่านมาจะมีคนเพียง 1 คน ใน 1,000 คน เท่านั้นที่จะมีโอกาสเป็นโรคนี้ ถ้าเราเลือกคน 1 คนอย่างสุ่มมาตรวจโรคด้วยชุดตรวจดังกล่าวและปรากฏผลเป็น + จงหาความน่าจะเป็นที่คน ๆ นี้จะเป็นโรคดังกล่าว (99/2097)

บทที่ 2

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

2.1 ความหมายของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (Random Variable) หมายถึง ฟังก์ชันที่ส่งจากปริภูมิตัวอย่างไปยังเซตของจำนวนจริง

<u>ตัวอย่าง</u>

1. X แทนจำนวนเหรียญที่ออกหัวจากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง

2. X แทนผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองจากการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง

3. X แทนจำนวนนักศึกษา มทส ที่ใช้บริการห้องสมุดวันนี้

4. X แทนเวลาที่ใช้ในการทำงานชิ้นหนึ่งของมานพ

2.2 ประเภทของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่มแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่มีค่าได้แค่เพียงบางค่า โดยที่ค่าที่เป็นไปได้ดังกล่าวอาจจะมีเป็นจำนวนจำกัดหรือเป็นจำนวนอนันต์ที่นับได้

ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่มีค่าต่อเนื่องได้ทุกค่าในช่วง

หมายเหตุ

1. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X คือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (หรือ $x_1, x_2, \ldots$) และค่าที่เป็นไปได้ของ X ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนนับ อาจจะเป็นทศนิยมหรือเศษส่วนก็ได้ เพียงแต่ว่าจำนวนของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะต้องนับได้

2. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ดังนั้นค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X จะมีค่าเป็นช่วง เช่น X มีค่าอยู่ในช่วง $[-3, 5)$ เป็นต้น

ตัวอย่าง

1. X แทนจำนวนเหรียญที่ออกหัวจากการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง

2. X แทนระยะทางเป็นเมตรที่มานะเดินใน 1 วัน

3. X แทนน้ำหนักเป็นกิโลกรัมของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ของ มทส. ทั้งหมด

4. X แทนจำนวนต้นลำไยในพื้นที่ 1 ไร่

2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม 1 ตัว

2.3.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (Probability Function) ของตัวแปรสุ่ม X คือ ฟังก์ชันที่บอกว่าตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับ x ด้วยความน่าจะเป็นเท่าใด

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$f(x) := P(X = x)$ สำหรับทุกค่า x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่มX

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq f(x) \leq 1$ สำหรับทุกค่า x ที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X
2. $\sum_x f(x) = 1$ สำหรับทุกค่า x ที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X
3. $P(A) = \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{x \in A} P(X = x)$

<u>ตัวอย่าง</u> ร้านขายรถแห่งหนึ่งสามารถขายรถได้ไม่เกินวันละ 4 คัน จึงมีการเก็บข้อมูลจำนวนรถที่ขายได้ใน 30 วันที่ผ่านมา เป็นดังนี้

จำนวนรถที่ขายได้ต่อวัน	0	1	2	3	4
จำนวนวัน	12	8	4	4	2
ความน่าจะเป็น					

จงหา

1. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนรถที่ขายได้ต่อวันของร้านขายรถแห่งนี้
2. ความน่าจะเป็นที่ร้านขายรถแห่งนี้จะขายรถได้มากกว่า 3 คันต่อวัน
3. ความน่าจะเป็นที่ร้านขายรถแห่งนี้จะขายรถได้ตั้งแต่ 3 คันขึ้นไปต่อวัน

<u>ตัวอย่าง</u> ในการวัดความยาวของชิ้นส่วนต่าง ๆ จำนวน 114 ชิ้น สามารถจำแนกชิ้นส่วนต่าง ๆ ตามความยาวได้ตามตาราง นี้

ความยาว (มิลลิเมตร)	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
จำนวนชิ้นส่วน	0	3	10	25	40	18	16	2
ความน่าจะเป็น								

จงหา

1. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของความยาวชิ้นส่วน
2. ความน่าจะเป็นที่จะเป็นชิ้นส่วนที่มีความยาวไม่เกิน 5.1 มิลลิเมตร
3. ความน่าจะเป็นที่จะเป็นชิ้นส่วนที่มีความยาวอยู่ระหว่าง 4.95 - 5.35 มิลลิเมตร

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ $-\infty < a < b < \infty$

$$\int_a^b f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ โดยที่ $-\infty < a < b < \infty$

หมายเหตุ

1. $P(X = a) = 0$ สำหรับทุกค่า a
2. $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$ สำหรับทุกค่า a และ b
3. $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ สำหรับทุกค่า a
4. $P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x)dx$ สำหรับทุกค่า a

จากคุณสมบัติในหมายเหตุข้อที่ 1 และ 2 จะเห็นว่าเป็นจริงสำหรับกรณีที่ตัวแปรสุ่มเป็นแบบต่อเนื่องเท่านั้น ส่วนในกรณีที่ตัวแปรสุ่มเป็นแบบไม่ต่อเนื่องคุณสมบัติทั้งสองข้อนี้ไม่เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - ax, & 0 < x < 4 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จงหา

1. ค่าของ a
2. $P(1 < X < 3)$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \le x \le 2 \\ A(x-2), & 2 < x \le 4 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. ค่าของ A
2. $P(1 < X < 3)$
3. $P(X \geq 3)$
4. $P(X \leq 1)$

2.3.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม (Cumulative Probability Distribution Function) ของตัวแปรสุ่ม X หมายถึงฟังก์ชันที่บอกถึงความน่าจะเป็นสะสม เมื่อ X มีค่าน้อยกว่าค่าใดค่าหนึ่ง

$$F(x) := P(X \leq x)$$

หมายเหตุ จากนิยามข้างต้น เราสามารถสังเกตได้ว่า

1. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เนื่องจากความน่าจะเป็นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม (เมื่อ x มีค่ามากขึ้น ฟังก์ชัน $F(x)$ จะที่มีค่ามากขึ้นหรืออาจมีค่าเท่าเดิม แต่จะไม่มีทางที่จะมีค่าลดลง)

3. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่ง เนื่องจากความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 1

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$$F(x) = \sum_{a \leq x} P(X = a) = \sum_{a \leq x} f(a)$$

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง โดยมีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 0, 1, 2, 4

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. $F(2)$
2. $F(1.5)$
3. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ X

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

> ***ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง***
>
> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

ตัวอย่าง ให้ตัวแปรสุ่ม X แทนช่วงเวลาระยะห่างในการโทรเข้าหาศูนย์วิทยุ 191 มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}e^{-x/20}, & 0 \le x < \infty \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. $F(-1)$
2. $F(1)$
3. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของ X

หมายเหตุ

1. จากหัวข้อที่ผ่านมา เราสามารถหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม $F(x)$ จากฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ ได้
2. ถ้าเราต้องการหาฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม $F(x)$ จะสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง โดยที่ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X คือ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (หรือ $x_1, x_2, \ldots$)

$$f(x) = \begin{cases} F(x_1), & x = x_1 \\ F(x_i) - F(x_{i-1}), & x = x_i, i = 2, \ldots, n \text{ (หรือ } i = 2, \ldots) \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X คือ 1, 2, 3 และ X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมคือ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{6}, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ตัวแปรสุ่ม X แทนช่วงเวลาระยะห่างในการ โทรเข้าหาศูนย์วิทยุ 191 มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม คือ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-x/20}, & x \geq 0. \end{cases}$$

จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

2.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม 2 ตัว

2.4.1 กรณีที่ตัวแปรสุ่มทั้งสองเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y คือ

$$f(x,y) := P(X=x, Y=y)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $0 \leq f(x,y) \leq 1$
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3. $P(A) = \sum_{(x,y)\in A} f(x,y)$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมร่วม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมร่วม ของตัวแปรสุ่ม X และ Y คือ

$$F(x,y) := P(X \leq x, Y \leq y)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมร่วมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อ เนื่อง X และ Y คือ

$$F(x,y) = \sum_{a\leq x}\sum_{b\leq y} P(X=a, Y=b) = \sum_{a\leq x}\sum_{b\leq y} f(a,b)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว ของ X คือ

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_y f(x, y)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว ของ Y คือ

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x f(x, y)$$

ตัวอย่าง ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x+y^2), & x = 1,4 \text{ และ } y = -1,0,1,3 \\ 0, & x,y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. ค่าของ A
2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X และ Y
3. $F(4,0)$
4. $P(X \geq 1, 0 < Y \leq 2)$

2.4.2 กรณีที่ตัวแปรสุ่มทั้งสองเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง แล้ว

$$\int\int_{(x,y)\in A} f(u,v)dudv = P((x,y)\in A)$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องมีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x,y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
3. $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)dxdy$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมร่วม

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y คือ

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว ของ X คือ

$$f_X(x) = P(X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว ของ Y คือ

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

ตัวอย่าง ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} kx^2y, & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0, & x,y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. ค่าของ k
2. ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X และ Y
3. $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
4. $P(0.5 < X \leq 1, 0 < Y < 1)$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y เป็นดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X และ Y

2.5 ความเป็นอิสระต่อกันของตัวแปรสุ่ม 2 ตัว

ตัวแปรสุ่ม X และ Y จะเป็นอิสระต่อกันถ้า

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

สำหรับทุกค่า x และ y

ตัวอย่าง สมมุติว่า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม ดังนี้

X Y	-3	2	4	$f_X(x)$
1	0.1	0.2	0.2	
3	0.3	0.1	0.1	
$f_Y(y)$				

จงตรวจสอบว่า ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกันหรือไม่

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y เป็นดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงตรวจสอบความเป็นอิสระของ X และ Y

2.6 ค่าคาดหมาย (Expectation Value)

2.6.1 ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

$$E(h(X)) = \sum_x h(x) f(x)$$

2.6.2 ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X มีความน่าจะเป็น ดังนี้

X	0	8	12	16
$P(X=x)$	0.3	0.2	0.3	0.2

จงหา $E(X)$ และ $E\big((X-E(X))^2\big)$

<u>ตัวอย่าง</u> นายสุเทพมีเงินอยู่ 100,000 บาทต้องการนำไปลงทุนมี 2 ทางเลือกดังนี้

1. ลงทุนซื้อพันธบัตรที่ให้อัตราดอกเบี้ยคงที่ 12%
2. ลงทุนซื้อหุ้นบริษัท A ซึ่งมีรายงานปันผลในอดีต ดังตารางต่อไปนี้

อัตราเงินปันผล	ความน่าจะเป็น
30%	0.20
25%	0.20
20%	0.30
15%	0.10
10%	0.10
5%	0.10

ถามว่านายสุเทพควรเลือกลงทุนแบบใด

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $E(X)$ และ $E(X^2)$

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

จงหา $E(X)$

กฎของค่าคาดหมาย

1. $E(a) = a$
2. $E(aX) = aE(X)$
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
4. ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X แทนกระแสไฟฟ้าผ่านลวดทองแดงมีหน่วยเป็นมิลลิแอมแปร์ สมมติให้ X มีค่าอยู่ในช่วง [0, 20] และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X เป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0.05, & 0 < x < 20 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่กระแสจะไหลผ่านลวดทองแดงน้อยกว่า 10 มิลลิแอมแปร์
2. $E(X)$
3. $E(X^2)$
4. $E\big((3X-5)^2\big)$
5. $E\big((X-E(X))^2\big)$

2.7 ความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ความแปรปรวน (Variance) ของตัวแปรสุ่ม X คือ ค่าที่บอกถึงการกระจายของค่าตัวแปรสุ่ม X

$$V(X) = \sigma_X^2 := E\big((X - E(X))^2\big)$$

<u>ทฤษฎีบท</u>

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

<u>หมายเหตุ</u>

1. ค่าความแปรปรวนมาก หมายความว่า ตัวแปรสุ่มนั้นมีการกระจายของข้อมูลมาก
2. ค่าความแปรปรวนน้อย หมายความว่า ตัวแปรสุ่มนั้นมีการกระจายของข้อมูลน้อย

กฎของความแปรปรวน

1. $V(X + a) = V(X)$
2. $V(aX) = a^2V(X)$
3. ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันแล้ว

$$V(aX \pm bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$SD(X) = \sigma_X := \sqrt{V(X)}$$

ตัวอย่าง สมมุติว่าตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

X	-5	-4	1	2
$f(x)$	1/4	1/8	1/2	1/8

จงหา $V(X)$ และ $SD(X)$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

ตัวอย่าง พนักงานขายสินค้าผู้หนึ่งทำหน้าที่ขายสินค้า 2 ชนิดคือ A และ B โดยที่ยอดขายสินค้าทั้งสองชนิดเป็นอิสระต่อกัน เงินเดือนของพนักงานได้จากยอดขาย 20% ของสินค้า A และ 30% ของสินค้า B จากข้อมูลในอดีตพบว่าเขาขายสินค้า A ได้โดยเฉลี่ยเดือนละ 100,000 บ. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8,000 บ. เขาขายสินค้า B ได้เฉลี่ยเดือนละ 60,000 บ. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3,000 บ. จงหาเงินเดือนที่คาดว่าจะได้และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเงินเดือนของพนักงานคนนี้

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. พิจารณาตัวแปรสุ่มที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   X_1 แทนน้ำหนักแรกเกิดของเด็กทารก

   X_2 แทนผลรวมแต้มจากการทอดลูกเต๋าสองลูก

   X_3 แทนผลผลิตข้าวโพดต่อแปลงของฟาร์ม มทส

   X_4 แทนจำนวนรถยนต์ที่เกิดอุบัติเหตุในจังหวัดนครราชสีมาต่อปี

   X_5 แทนจำนวนนักศึกษา มทส ที่เรียนจบภายใน 4 ปี

   จงจำแนกว่าตัวแปรสุ่มใดเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มใดเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (X_1, X_3 เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ส่วน X_2, X_4, X_5 เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง)

2. กำหนดให้ปริภูมิตัวอย่าง

$$S = \{a, b, c, d, e, f\}$$

   และสมมุติว่าผลลัพธ์ในเซตแต่ละตัวมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นเท่าๆ กัน นิยามตัวแปรสุ่ม X ดังนี้ $X(a) = 0, X(b) = 0, X(c) = 1.5, X(d) = 1.5, X(e) = 2$ และ $X(f) = 3$ จงหา

   (1) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ($f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 2, 3 \\ \frac{2}{6}, & x = 0, 1.5 \end{cases}$)

   (2) $P(0.5 < X < 2.7)$ (0.5)

   (3) $P(X > 3)$ (0)

   (4) $P(X \geq 3)$ (1/6)

3. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

   จงหาค่า $E(X(5 - X))$ (5)

4. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม $F(x)$ ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}\left(1 + \ln\left(\frac{4}{x}\right)\right), & 0 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

   จงหาค่า $P(1 \leq X \leq 3)$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{3}{4}\ln 3$)

5. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 2 \le x \le 3 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่า c (3)

6. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

(1) จงหาค่าของ k ที่ทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X (1/12)

(2) จงหา $P(1 \le x \le 2)$ (1/3)

7. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-1}, & -1 < x < \infty \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P(X \ge 1)$ (e^{-2})

8. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

(1) $P(0 \le X \le 1/2)$ (3/4)

(2) $P(1/4 \le X \le 3/4)$ (1/2)

(3) $P(X = 3/4)$ (0)

(4) $P(X \ge 3/4)$ (1/16)

9. ให้ X แทนจำนวนของเมล็ดที่ปลูกขึ้นในการทดลองอิสระ 10 ครั้งและมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 10 \\ x \end{pmatrix} (0.8)^x (0.2)^{10-x}, & x = 1, 2, ..., 10 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P(X \le 8)$ (0.6242)

10. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

จงหาค่า $P(X \le 1)$ และ $E(X^2)$ (0.25 และ 2)

11. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม $f(x,y)$ ดังนี้

		Y			
		0	1	2	3
	0	0.08	0.07	0.04	0
X	1	0.06	0.15	0.05	0.04
	2	0.05	0.04	0.10	0.06
	3	0	0.03	0.04	0.07
	4	0	0.01	0.05	0.06

จงหา

(1) $P(X > 3|Y = 2)$ (0.1786)

(2) $P(X > 3)$ (0.12)

(3) $P(X = 1|0 \le Y \le 1)$ (0.9545)

(4) $P(1 < Y \le 3)$ (0.51)

(5) $E(X)$ (1.7)

(6) $V(X)$ (1.59)

12. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม $f(x,y)$ ดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x + y - 2xy), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

(1) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X (1)

(2) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ Y (1)

(3) $P(X < 0.5, Y > 0)$ (0.5)

(4) $P(X > 0.5)$ (0.5)

(5) $P(0.5 < Y \leq 0.75)$ (0.25)

13. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม $f(x,y)$ ดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่า $E(X)$ (7/12)

14. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน กำหนด $V(X) = 2$ และ $V(Y) = 3$ จงหาค่าของ $V(X - 2Y + 5)$ (14)

15. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมเป็น

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(2x - y + 1), & x = 0,1,2, y = 0,1 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X และ Y ($f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}(4x+1), & x = 0,1,2 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ และ $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(9-3y), & y = 0,1 \\ 0, & y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$)

16. สมมติว่าตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกัน ให้ $Z = X_1 + 3X_2 - 4$, $V(X_1) = 2$ และ $V(X_2) = 5$ แล้ว จงหา $V(Z)$ (47)

17. ให้ $X_i, i = 1,2,3$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าดังนี้

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ } \frac{1}{2} \end{cases}$$

ให้ $Y = X_1 + X_2 + X_3$ จงหา $E(Y)$ (0)

18. ที่ร้านขายของแห่งหนึ่งมีทางออกสำหรับลูกค้าสองช่องทางคือช่องทางออกธรรมดาและช่องทางออก เร่งด่วน ให้ X_1 แทนจำนวนของลูกค้าที่ยืนเข้าแถวรอจ่ายเงินในช่องทางแรก ส่วน X_2 แทนจำนวนของลูกค้าใน ช่องทางที่สอง (ในช่วงระยะเวลาหนึ่ง) สมมุติว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X_1 และ X_2 เป็นดังนี้

$X_1 \quad X_2$	0	1	2	3
0	0.08	0.07	0.04	0
1	0.06	0.15	0.05	0.04
2	0.05	0.04	0.10	0.06
3	0	0.03	0.04	0.07
4	0	0.01	0.05	0.06

(1) จงหา $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$ (0.15)

(2) จงหา $P(X_1 = X_2)$ (0.4)

(3) จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของลูกค้าในทั้งสองช่องทางเท่ากับ 4 คนพอดี (0.17)

(4) จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของลูกค้าในทั้งสองช่องทางอย่างน้อย 4 คน (0.46)

(5) จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X_1 และ X_2 ($f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0.19, & x_1 = 0 \\ 0.30, & x_1 = 1 \\ 0.25, & x_1 = 2 \\ 0.14, & x_1 = 3 \\ 0.12, & x_1 = 4 \end{cases}$ และ $f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0.19, & x_2 = 0 \\ 0.30, & x_2 = 1 \\ 0.28, & x_2 = 2 \\ 0.23, & x_2 = 3 \end{cases}$)

(6) ตรวจสอบดูว่าตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 เป็นอิสระต่อกันหรือไม่ (ไม่อิสระ)

19. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{81}xy, & 0 < x < 3, 0 < y < 3 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา

(1) $P(X < 2.5, Y < 3)$ (0.6944)

(2) $P(X < 2.5)$ (0.6944)

(3) $P(1 < Y < 2.5)$ (0.5833)

20. กำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2(8-y), & 0 < x < 3, 0 < y < 3 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

(1) จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ X ($f_X(x) = \begin{cases} \frac{39}{2}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$)

(2) จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยวของ Y ($f_Y(y) = \begin{cases} 9(8-y), & 0 < y < 3 \\ 0, & y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$)

21. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & x, y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงตรวจสอบความเป็นอิสระของ X และ Y (ไม่อิสระ)

22. กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $E(X)$ และ $E(X^2)$ (3/8 และ 1/5)

23. สมมุติว่า $E(X) = 5$ และ $E(X(X-1)) = 27.5$

(1) จงหา $E(X^2)$ (32.5)

(2) จงหา $E(X - E(X))^2$ (7.5)

บทที่ 3

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องแบบต่าง ๆ

3.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Probability Distribution)

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $x_1, \ldots, x_n$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กันแล้ว จะเรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x, n)$ โดยที่

$$\boxed{f(x,n) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}, \;\; i = 1, 2, \ldots, n}$$

และเขียนแทน X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มได้ดังนี้

$$\boxed{X \sim U(n)}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ความน่าจะเป็นของแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มจะมีค่าเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง

1. โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง ให้

$$X = \begin{cases} 0, & \text{ถ้าเหรียญขึ้นก้อย} \\ 1, & \text{ถ้าเหรียญขึ้นหัว} \end{cases}$$

2. ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง ให้ X แทนแต้มบนลูกเต๋าที่หงาย

ค่าเฉลี่ย

$$\boxed{E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ความแปรปรวน

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

ตัวอย่าง ในกระบวนการเคลือบผิววัตถุชนิดหนึ่ง ความหนาของการเคลือบผิวมีค่าที่เป็นไปได้คือ 0.15, 0.16, 0.17, 0.18 และ 0.19 ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน จงหา

1. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนความหนาของการเคลือบผิวนี้
2. ความน่าจะเป็นที่ความหนาของการเคลือบผิวมีค่ามากกว่า 0.16
3. ความน่าจะเป็นที่ความหนาของการเคลือบผิวมีค่าไม่เกิน 0.16

3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเบอร์นูลี (Bernoulli Probability Distribution)

การทดลองแบบเบอร์นูลี หมายถึง การทดลองที่มีผลลัพธ์ได้เพียง 2 ชนิดเท่านั้น คือ

1. สิ่งที่สนใจ (success)
2. สิ่งที่ไม่สนใจ (failure)

และความน่าจะเป็นในการเกิดสิ่งที่สนใจ และสิ่งที่ไม่สนใจมีค่าคงที่เสมอ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่สอดคล้องกับการทดลองแบบเบอร์นูลี จะเรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลี ดังนั้น ค่าของ X จะมีเพียง 2 ค่า คือ

$$X = \begin{cases} 1, & \text{ถ้า success ด้วยความน่าจะเป็น } p \\ 0, & \text{ถ้า failure ด้วยความน่าจะเป็น } 1-p \end{cases}$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$\boxed{f(x,p) = P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}}$$

โดยที่ $x = 0, 1$ และ $0 \leq p \leq 1$ และเขียนแทน X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลีได้ดังนี้

$$\boxed{X \sim Ber(p)}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลี จะมีค่าที่เป็นไปได้แค่ 2 ค่าเท่านั้น และความน่าจะเป็นของทั้ง 2 ค่ามีค่าคงที่เสมอ

<u>ตัวอย่าง</u>

1. โยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง ให้ X แทนจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว
2. สุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูก จากถุงใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอลสีแดง M ลูก สีขาว N ลูก ให้ X แทนจำนวนลูกบอลสีขาวที่หยิบได้
3. สุ่มหยิบสินค้ามาตรวจสอบ 1 ชิ้น จากการผลิตสินค้าครั้งหนึ่ง ให้ X แทนจำนวนสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐาน

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

$$\boxed{E(X) = \mu = p}$$

ความแปรปรวน

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = p(1-p)}$$

ตัวอย่าง สุ่มหยิบสินค้า 1 ชิ้นจากกล่องที่มีสินค้าที่แตกต่างกัน 10 ชิ้น ซึ่งมีสินค้าชำรุดปนอยู่ 4 ชิ้น จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สินค้าที่ไม่ชำรุด
2. ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการหยิบได้สินค้าชำรุด

3.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม (Binomial Probability Distribution)

การทดลองแบบทวินาม หมายถึง การทดลองแบบเบอร์นูลีซ้ำไป n ครั้ง ภายใต้ภาวะเดียวกัน และการทดลองแต่ละครั้งต้องเป็นอิสระต่อกัน ให้ X แทนจำนวนของ success ดังนั้นค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ $0, 1, 2, \ldots, n$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$\boxed{f(x, n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$$

โดยที่ $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$, $x = 0, 1, \ldots, n$ และ $0 \leq p \leq 1$ เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม X ที่สอดคล้องกับการทดลองแบบทวินามว่ามีการแจกแจงแบบทวินาม และเขียนแทนด้วย

$$\boxed{X \sim B(n, p)}$$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. โยนเหรียญ 1 อัน 5 ครั้ง ให้ X แทนจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว
2. สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูก จากถุงใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอล สีแดง M ลูก สีขาว N ลูก โดยหยิบทีละลูกแล้วใส่คืน ให้ X แทนจำนวนลูกบอลสีขาวที่หยิบได้
3. สุ่มหยิบสินค้ามาตรวจสอบ 15 ชิ้น จากการผลิตสินค้าครั้งหนึ่งโดยหยิบมาทีละชิ้น ให้ X แทนจำนวนสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐาน

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

$$\boxed{E(X) = \mu = np}$$

<u>ความแปรปรวน</u>

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = np(1-p)}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าทราบว่าสินค้าที่บรรจุในกล่องใหญ่ใบหนึ่ง (โดยกล่องนี้บรรจุสินค้าจำนวนมาก) มีสินค้าชำรุดอยู่ 5% ถ้าสุ่มตัวอย่างสินค้าจากกล่องนี้มา 10 ชิ้น แล้วพบว่ามีสินค้าชำรุดตั้งแต่สองชิ้นขึ้นไป จะไม่ยอมรับสินค้านั้นทั้งกล่อง จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่ยอมรับสินค้าทั้งกล่อง
2. ความน่าจะเป็นที่จะไม่ยอมรับสินค้าทั้งกล่อง
3. จำนวนสินค้าชำรุดที่คาดไว้

<u>ตัวอย่าง</u> ความน่าจะเป็นที่คนไข้จะหายจากการเป็นโรคชนิดหนึ่งหลังจากได้รับการรักษามีค่าเท่ากับ 0.4 ถ้ามีคนไข้ที่เป็นโรคชนิดนี้ 10 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1. มีผู้หายจากโรคนี้อย่างน้อยที่สุด 9 คน
2. มีผู้หายจากโรคนี้ไม่เกิน 9 คน
3. มีผู้หายจากโรคนี้ไม่ถึง 9 คน
4. มีผู้ไม่หายจากโรคนี้น้อยกว่า 1 คน
5. มีผู้ไม่หายจากโรคนี้ตั้งแต่ 8 คนขึ้นไป

3.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซง (Poisson Probability Distribution)

การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซง เป็นการแจกแจงที่อธิบายถึงจำนวนครั้งของเหตุการณ์หรือจำนวนสิ่งที่สนใจที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา หรือขอบเขตที่กำหนด

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบปัวซองที่มีพารามิเตอร์ μ แล้ว X จะมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$\boxed{f(x,\mu) = P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}}$$

โดยที่ $x = 0, 1, \ldots$ และ μ แทนจำนวนสิ่งที่สนใจเฉลี่ยในขอบเขตที่กำหนด และเขียนแทนด้วย

$$\boxed{X \sim Poi(\mu)}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวซง จะต้องมีช่วงเวลาหรือขอบเขตที่กำหนด

<u>ตัวอย่าง</u>

ให้ X จำนวนลูกค้าที่จะเข้ามารับประทานอาหาร ในร้านแห่งหนึ่ง ในช่วงเวลา 12:00 - 13:00 น.

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

$$\boxed{E(X) = \mu}$$

<u>ความแปรปรวน</u>

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \mu}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าทราบว่าโดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้าเข้าร้านขายรถยนต์แห่งหนึ่งวันละ 8 คน จงหา

1. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้าร้านตั้งแต่ 3 คนขึ้นไปในวันพรุ่งนี้
2. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้าร้านน้อยกว่า 3 คนในวันพรุ่งนี้
3. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้าร้านน้อยกว่า 3 คนในสองวันต่อจากนี้

ตัวอย่าง พนักงานคนหนึ่ง โดยเฉลี่ยจะรับโทรศัพท์วันละ 14 ครั้ง

1. จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานคนนี้จะรับโทรศัพท์ไม่น้อยกว่า 10 ครั้ง ในวันพรุ่งนี้

2. ถ้าใน 1 วัน พนักงานคนนีทำงานทั้งหมด 10 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานคนนี้จะรับโทรศัพท์มากกว่า 2 ครั้ง ใน 1 ชั่วโมง

3.4.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยความน่าจะเป็นแบบปัวซง

ในการทดลองแบบทวินามที่จำนวนครั้งของการทดลอง n ที่มีค่ามาก และ p มีค่าเข้าใกล้ศูนย์จะทำให้ $\mu = np$ มีค่าเกือบคงที่ จึงทำให้สามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยความน่าจะเป็นแบบปัวซงได้ นั่นคือ

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$$

เมื่อ $x = 0, 1, \ldots, n$

ในกรณีที่ n มีค่ามาก ๆ และ p มีค่าน้อยเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น

$$\boxed{B(n, p) \approx Poi(\mu)}$$

โดยที่

$$\boxed{\mu = np}$$

ตัวอย่าง ผู้จัดการโรงงานผลิตทรานซิสเตอร์มีความเชื่อว่า ทรานซิสเตอร์ของเขาใช้งานได้ถึง 99.9% ถ้าโรงงานขายทรานซิสเตอร์ไป 1000 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ไม่พบทรานซิสเตอร์เสียเลย
2. พบทรานซิสเตอร์เสียตั้งแต่ 5 ตัวขึ้นไป
3. พบทรานซิสเตอร์เสียน้อยกว่า 2 ตัว
4. พบทรานซิสเตอร์ดีตั้งแต่ 994 ตัวขึ้นไป
5. พบทรานซิสเตอร์ดีไม่เกิน 998 ตัว

<u>ตัวอย่าง</u> ในการฉีดวัคซีนชนิดหนึ่งในเด็กทารกจำนวน 2,000 คน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วเด็กทารกจะเกิดการแพ้วัคซีน 1 ใน 10,000 คน จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เด็กแพ้วัคซีนจำนวน 3 คน
2. เด็กแพ้วัคซีนมากกว่า 3 คน
3. เด็กไม่แพ้วัคซีนน้อยกว่า 1998 คน
4. เด็กไม่แพ้วัคซีนตั้งแต่ 1995 คนขึ้นไป

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. เมื่อเราขับรถไปถึงสี่แยกที่มีไฟสัญญาณจราจรความน่าจะเป็นที่เราจะได้ไฟเขียวและขับรถผ่านไปได้เลยมีค่าเท่ากับ 0.20 สมมุติว่าการที่จะขับรถมาถึงสี่แยกและพบไฟเขียวแต่ละครั้งนั้นเป็นอิสระต่อกัน ถ้าขับรถมาถึงสี่แยกนี้ 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบไฟเขียว 1 ครั้ง (0.4096)

2. รักษาผู้ป่วย 10 คน ซึ่งแต่ละคนจะเสียชีวิตด้วยความน่าจะเป็น 0.2

   (1) จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ป่วยเสียชีวิต 1 คน (0.2684)

   (2) จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ป่วยหายเป็นปกติไม่น้อยกว่า 8 คน (0.6778)

3. ความน่าจะเป็นที่คนไข้เอดส์จะหายเท่ากับ 0.4 ถ้าทราบว่าคนไข้ 15 คนเป็นเอดส์ จงหาความน่าจะเป็นที่

   (1) อย่างน้อยรอด 10 คน (0.0338)

   (2) รอด 3 ถึง 8 คน (0.8779)

4. โดยเฉลี่ยแล้วในพื้นที่นา 1 ไร่ จะมีหนูจำนวน 2 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่ในนาแปลงหนึ่งซึ่งมีเนื้อที่ 1 ไร่ จะมีหนูจำนวนไม่เกิน 3 ตัว (0.8571)

5. จำนวนของรอยตำหนิบนผ้า 1 ตารางเมตร ที่ผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่ง มีการแจกแจงแบบปัวซงด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0.1 จงหา

   (1) ความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิ 2 แห่งบนผ้า 1 ตารางเมตร (0.0045)

   (2) ความน่าจะเป็นที่จะพบรอยตำหนิ 1 แห่งบนผ้า 10 ตารางเมตร (0.3679)

6. ความน่าจะเป็นที่จะพบน็อตในรถยนต์ใหม่คันหนึ่งถูกขันเอาไว้ไม่แน่นพอมีค่าเท่ากับ 0.001 สมมุติว่าในรถยนต์คันหนึ่งมีน็อตขันตามจุดต่าง ๆจำนวน 4,000 จุด ความน่าจะเป็นที่จะมีน็อตน้อยกว่าหรือเท่ากับ 6 ตัว ที่ถูกขันเอาไว้ไม่แน่นพอมีค่าเท่าใด (0.8894)

7. สมมติว่าประชากร 1,000 คน จะติดเหล้า 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวอย่างเชิงสุ่มของ 8,000 คน แล้วมีคนติดเหล้าน้อยกว่า 7 คน (0.3133)

8. โอกาสที่คนไข้จะหายจากโรคหัวใจมีประมาณ 40% ถ้าได้มีการสุ่มคนไข้ที่ป่วยเป็นโรคหัวใจจำนวน 15 คนจงหาความน่าจะเป็นที่มีคนไข้ 5 คน หายป่วยจากโรคหัวใจดังกล่าว (0.1859)

9. บริษัทผลิตรองเท้ายี่ห้อหนึ่งจะทำการผลิตรองเท้าในแต่ละครั้งจะผลิตคราวละ 3,000 คู่ โดยทั่วไปแล้วจะพบว่ารองเท้าที่ไม่ได้มาตรฐานมีเพียง 10 ใน 10,000 คู่ความน่าจะเป็นที่จะพบรองเท้าไม่ได้มาตรฐาน 4 คู่ ในการผลิตสินค้า 1 ครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด (0.1680)

10. ผู้จัดการฝ่ายขายของบริษัทผลิตผงซักฟอกแอททีพคาดว่าจะมีผู้ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อนี้ราว 75% ของคนในจังหวัดแห่งหนึ่ง เพื่อยืนยันความเชื่อนี้บริษัทจึงส่งตัวแทนไปสำรวจและได้สุ่มตัวอย่างมา 10 ครอบครัว ให้ X จำนวนครอบครัวที่ใช้ผงซักฟอกยี่ห้อแอททีพ จงหา $E(X), V(X)$ และ$P(4 \leq X < 6)$ (7.5, 1.88 และ 0.0746)

11. ในการสำรวจความคิดเห็นของชาวอเมริกันพบว่ามี 5% ของชาวอเมริกันที่ตอบว่ามีความรู้สึกกลัวเมื่อต้องอยู่บ้านคนเดียวตอนกลางคืนสมมติว่าเราทำการสุ่มตัวอย่างชาวอเมริกันมา 20 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ว่ามีอย่างน้อย 3 คนในกลุ่มตัวอย่างดังกล่าวที่ตอบว่ามีความรู้สึกกลัวเมื่อต้องอยู่บ้านคนเดียวในตอนกลางคืน(0.0754)

12. ในการโยนลูกเต๋าเที่ยงตรง 480 ครั้ง จงหาค่าคาดหวังที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 2 (80)

13. จำนวนของรถที่โทรศัพท์มาขอความช่วยเหลือจากศูนย์จราจรแห่งหนึ่ง โดยเฉลี่ยแล้วมีจำนวน 4 คันต่อชั่วโมง ถ้าโอเปอเรเตอร์ของศูนย์จราจรดังกล่าวพักเที่ยงไปทานข้าวครึ่งชั่วโมงจงหาความน่าจะเป็นที่จะไม่มีโทรศัพท์เข้ามาขอความช่วยเหลือเลยในช่วงเวลาดังกล่าว (0.1353)

14. โดยทั่วไปแล้วผู้โดยสารที่เดินผ่านช่องตรวจอาวุธก่อนที่จะขึ้นเครื่องบินจะมีประมาณ 0.5 % ที่เครื่องตรวจแสดงผลว่าได้พกพาโลหะติดตัวมาด้วยได้มีการเลือกผู้โดยสารอย่างสุ่มมา500 คน เพื่อเข้าเครื่องตรวจจับดังกล่าวและให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนของผู้โดยสารที่เครื่องตรวจจับแสดงผลว่าพกพาโลหะมาด้วย จงหา $P(X = 5)$ (0.0668)

บทที่ 4

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแบบต่าง ๆ

1. การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบยูนิฟอร์ม
2. การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ
3. การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไคสแควร์
4. การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบที

4.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบยูนิฟอร์ม (Uniform Probability Distribution)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีค่าได้ทุกค่าในช่วง (a, b) ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน แล้ว X จะเรียกว่ามีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นอยู่ในรูป

$$\boxed{f(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}}$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มและมีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในช่วง (a, b) จะเขียนแทนได้ด้วย

$$\boxed{X \sim U(a, b)}$$

ข้อสังเกต

ความน่าจะเป็นของแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มแบบยูนิฟอร์มจะมีค่าเท่ากันเสมอ

ค่าเฉลี่ย

$$\boxed{E(X) = \mu = \frac{a+b}{2}}$$

ความแปรปรวน

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

ตัวอย่าง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนจริงที่มีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในช่วง $(10, 30)$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่า

1. ตั้งแต่ 10 ถึง 15
2. มากกว่า 35
3. น้อยกว่าหรือเท่ากับ 14
4. มากกว่าหรือเท่ากับ 20

<u>ตัวอย่าง</u> งานก่อสร้างอาคารหลังหนึ่งจะสำเร็จได้ในช่วงเวลา 24 - 36 เดือน ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน

1. จงหาความน่าจะเป็นที่อาคารหลังนี้จะเสร็จสิ้นภายในเวลา 25 - 30 เดือน
2. ถ้าเริ่มก่อสร้างอาคารหลังนี้ตั้งแต่ต้นเดือนมกราคม 2551 จงหาความน่าจะเป็นที่โครงการนี้จะเสร็จสิ้นก่อนต้นเดือนสิงหาคม 2553

4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติ (Normal Probability Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X จะเรียกว่าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ ถ้าฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X อยู่ในรูป

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ แล้วเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{X \sim N(\mu,\sigma^2)}$$

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

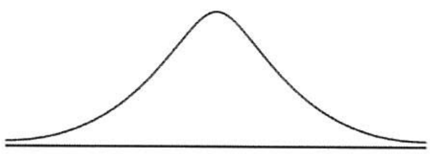
$$\boxed{E(X) = \mu}$$

<u>ความแปรปรวน</u>

$$\boxed{V(X) = \sigma^2}$$

คุณสมบัติที่สำคัญของกราฟการแจกแจงแบบปกติหรือโค้งปกติ

1. โค้งปกติเป็นเส้นโค้งรูประฆังคว่ำ
2. พื้นที่ใต้โค้งปกติมีค่าเท่ากับ 1
3. โค้งปกติมีลักษณะสมมาตรที่ $X = \mu$ โดยที่เส้นตรงนี้เป็นเส้นแบ่งพื้นที่ออกเป็น 2 ส่วน เท่า ๆ กัน
4. การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบปกติ X โดยที่ $a < X < b$ คือ การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ โดยที่ $a < X < b$ นั่นเอง

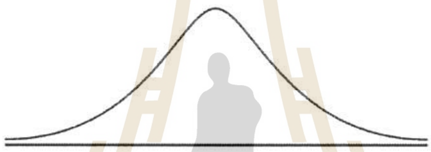


เพื่อความสะดวกในการหาค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปกติ จึงได้มีการจัดทำตารางสำหรับตัวแปรสุ่ม $Z \sim N(0,1)$ ไว้ ซึ่งตัวแปรสุ่ม Z ที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 เรียกว่า ตัวแปรสุ่มแบบปกติมาตรฐาน

ดังนั้น ถ้าเราต้องการหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ทำได้โดยแปลงตัวแปรสุ่ม $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ไปเป็นตัวแปรสุ่ม $Z \sim N(0,1)$ ด้วยวิธีการดังนี้

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

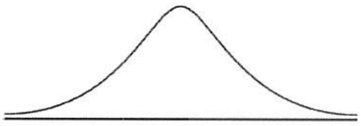
แล้วจึงใช้ตารางสำหรับตัวแปรสุ่ม $Z \sim N(0,1)$ แทน ซึ่งตารางจะให้ $P(Z \le a)$ โดยที่ $a \ge 0$ ดังรูป



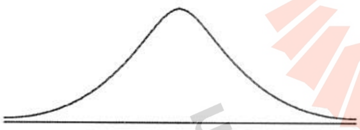
ถ้าเราต้องการหาค่าความน่าจะเป็นรูปแบบอื่น ๆ เช่น $P(Z \ge a)$ หรือ $P(a \le Z \le b)$ เราจะต้องใช้คุณสมบัติของกราฟการแจกแจงแบบปกติหรือโค้งปกติเข้าช่วย

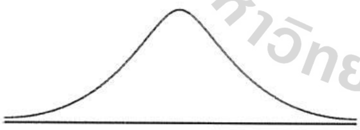
<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่า $X \sim N(0,1)$ จงหา

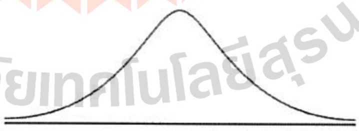
1. $P(X \leq 2.02)$



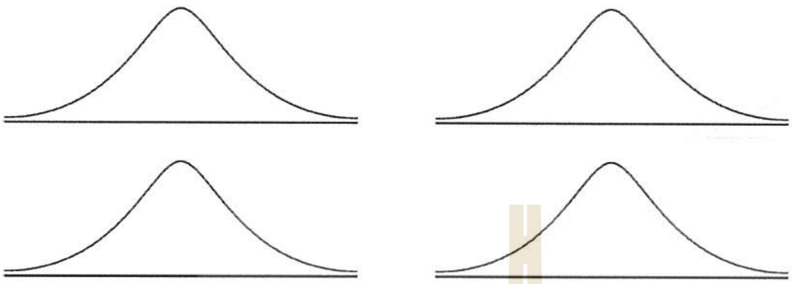
2. $P(X \geq 1.65)$





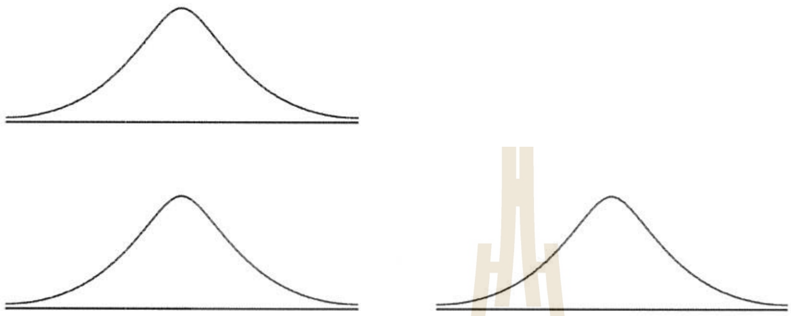


3. $P(X < -1.05)$

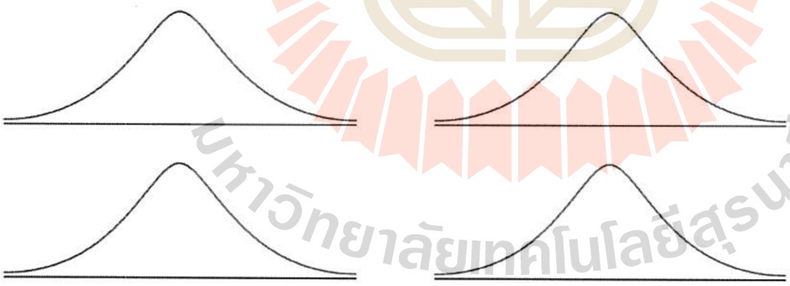


4. $P(X > -1.89)$

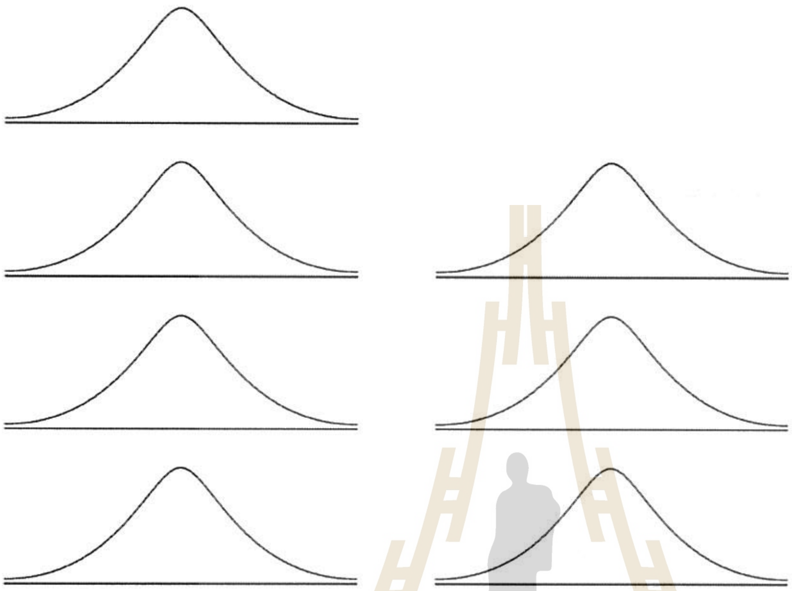
5. $P(1.11 \leq X < 2.22)$



6. $P(-1.06 \leq X < -0.55)$

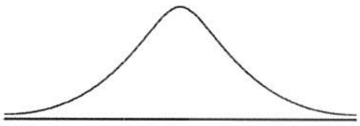


7. $P(-2.01 \leq X \leq 1.34)$



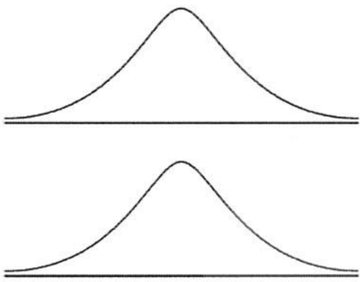
<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่า $X \sim N(0,1)$ จงหาค่า a

1. $P(X \leq a) = 0.8907$



2. $P(X \geq a) = 0.1020$

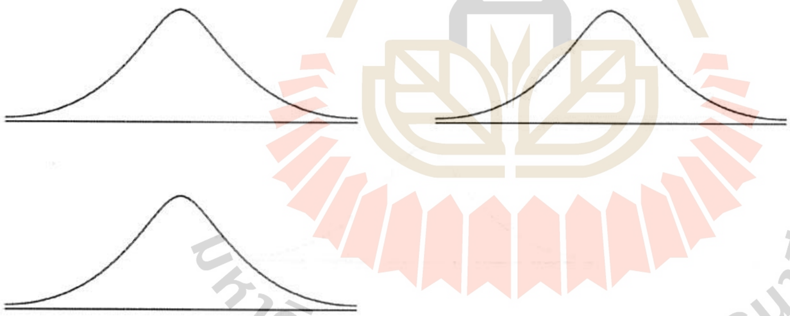
3. $P(X < a) = 0.1492$



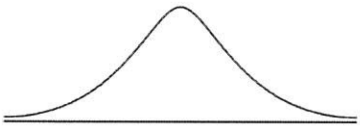
4. $P(X > a) = 0.9783$

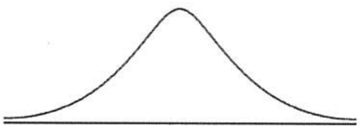
5. $P(0 \leq X < a) = 0.3264$

6. $P(a < X < 0) = 0.4931$



7. $P(-a < X < a) = 0.4246$

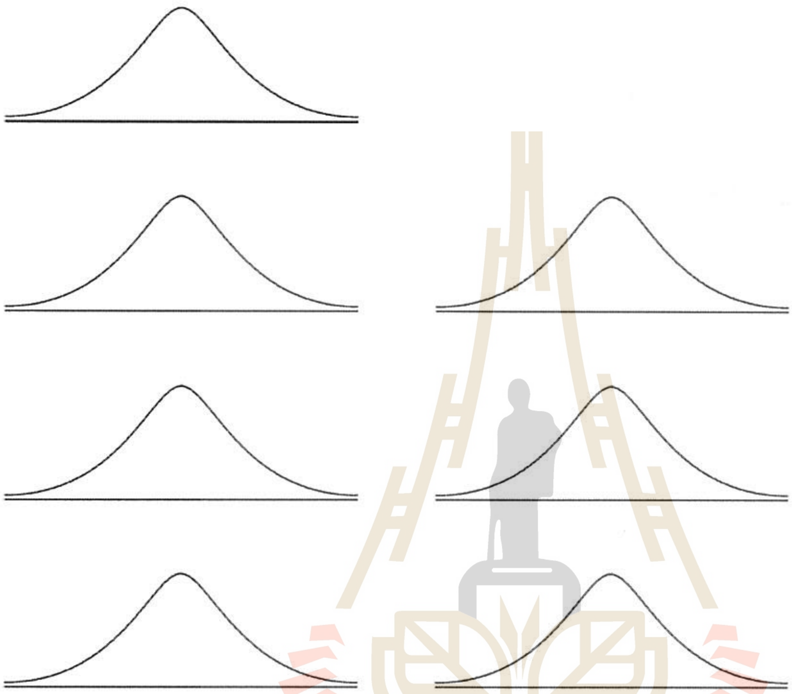




<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X \sim N(1,4)$

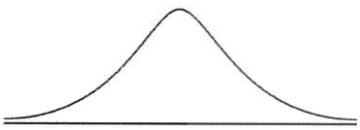
(1) $P(X > 0)$

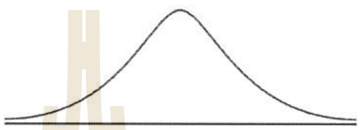
(2) $P(-0.23 < X < 1.56)$



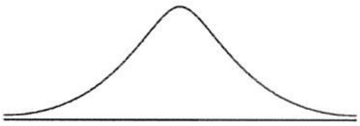
<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X \sim N(1, 4)$ จงหาค่า a ที่ทำให้

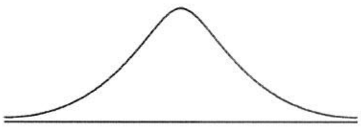
(1) $P(X > a) = 0.7123$





<u>ตัวอย่าง</u> เครื่องจักรของโรงงานแห่งหนึ่งมีอายุการใช้งานโดยเฉลี่ย 5 ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1 ปี ถ้าอายุการใช้งานของเครื่องจักรมีการแจกแจงแบบปกติ จงหาค่าความน่าจะเป็นที่เครื่องจักรนี้จะมีอายุการใช้งานมากกว่า 3 ปี





<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าคะแนนสอบในวิชาสถิติมีการแจกแจงแบบปกติด้วยคะแนนเฉลี่ย 60 คะแนน SD เท่ากับ 15 คะแนน อยากทราบว่ามีนักศึกษากี่เปอร์เซนต์ที่สอบได้คะแนนตั้งแต่ 85 - 95 คะแนน

4.2.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยความน่าจะเป็นแบบปกติ

1. ในกรณีที่ $X \sim B(n,p)$ และ n มีค่ามาก p มีค่าน้อยเข้าใกล้ 0 เราจะประมาณ

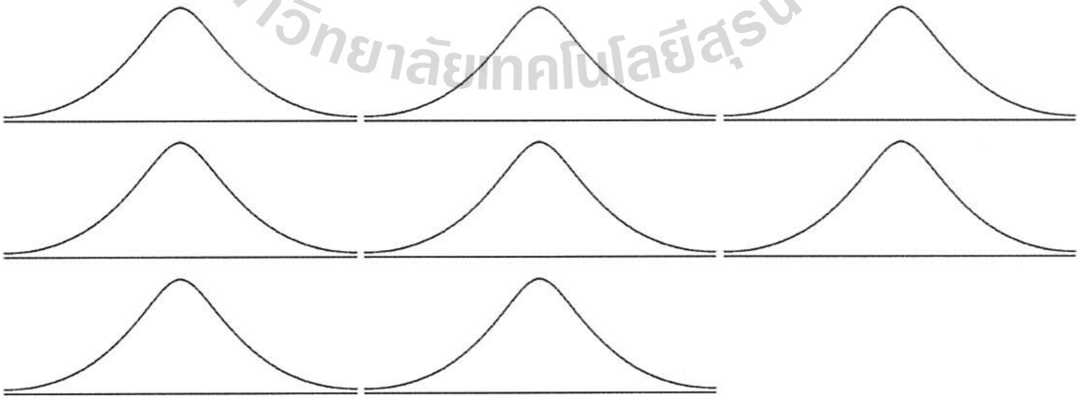
$$B(n,p) \approx Poi(np)$$

2. ในกรณีที่ $X \sim B(n,p)$ และ n มีค่ามาก แต่ p มีค่าไม่เข้าใกล้ 0 เช่น บางที $p = \frac{1}{2}$ ในกรณีนี้ เราจะประมาณ

$$\boxed{B(n,p) \approx N(np, np(1-p))}$$

การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามด้วยความน่าจะเป็นแบบปกติต้องปรับค่าเล็กน้อยเพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงมากขึ้น ค่าที่ใช้ในการปรับ คือ 0.5

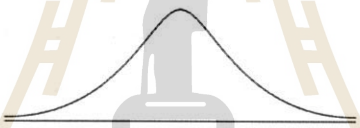
$$\begin{array}{rcl}
\text{ทวินาม} & & \text{ปกติ} \\
P(a < X < b) & = & P(a + 0.5 \leq X \leq b - 0.5) \\
P(a \leq X \leq b) & = & P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5) \\
P(a \leq X < b) & = & P(a - 0.5 \leq X \leq b - 0.5) \\
P(a < X \leq b) & = & P(a + 0.5 \leq X \leq b + 0.5) \\
P(X > a) & = & P(X \geq a + 0.5) \\
P(X \geq a) & = & P(X \geq a - 0.5) \\
P(X < a) & = & P(X \leq a - 0.5) \\
P(X \leq a) & = & P(X \leq a + 0.5)
\end{array}$$



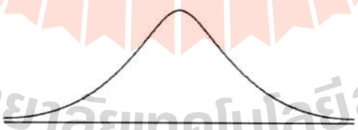
<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $X \sim B(100, \frac{1}{2})$ จงหา

1. $P(40 \leq X \leq 59)$

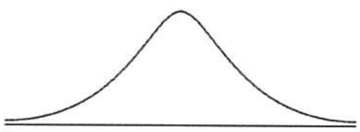
2. $P(52 \leq X < 55)$



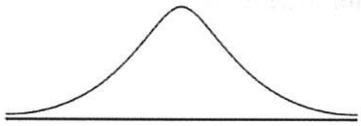
3. $P(42 < X \leq 45)$



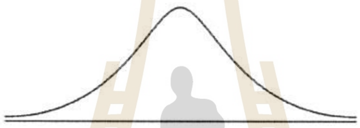
4. $P(49 < X < 51)$



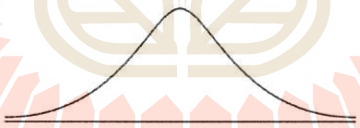
5. $P(X \leq 38)$



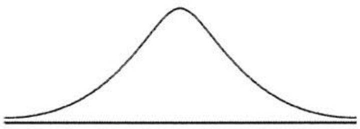
6. $P(X < 63)$



7. $P(X > 47)$

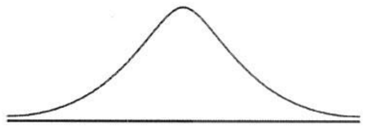


8. $P(X \geq 36)$

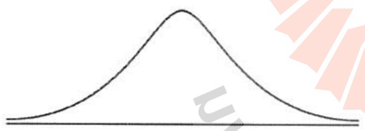


<u>ตัวอย่าง</u> จากการศึกษาพบว่า 43% ของนักศึกษาจะจบหลักสูตรภายใน 4 ปี ถ้ามีการสุ่มนักศึกษามาจำนวน 200 คน เพื่อติดตามผล จงหาความน่าจะเป็นที่

1. จะมีนักศึกษาจบภายใน 4 ปี ตั้งแต่ 40 ถึง 100 คน



2. จะมีนักศึกษาจบภายใน 4 ปี ระหว่าง 75 กับ 95 คน



4.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไคสแควร์ (Chi-square Probability Distribution)

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

หรือ

$$Z^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$$

มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาอิสระ $r = 1$

ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด n จะได้ค่า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ แล้ว

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยองศาอิสระ $r = n$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ ไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ $r = n$ แล้ว ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x;n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}((n/2)-1)!} e^{-x/2} x^{(\frac{n}{2}-1)}, & x > 0 \\ 0, & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้า X มีการแจกแจงแบบทีด้วยองศาอิสระ $r = n$ แล้ว เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{X \sim \chi^2(n)}$$

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

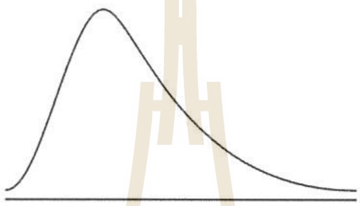
$$E(X) = n$$

<u>ความแปรปรวน</u>

$$V(X) = 2n$$

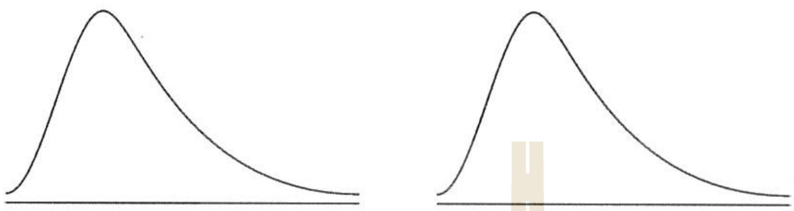
คุณสมบัติที่สำคัญของกราฟการแจกแจงแบบไคสแควร์

1. กราฟมีลักษณะเบ้ขวา
2. พื้นที่ใต้กราฟมีค่าเท่ากับ 1
3. $P(a < X < b)$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟเมื่อ X มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b

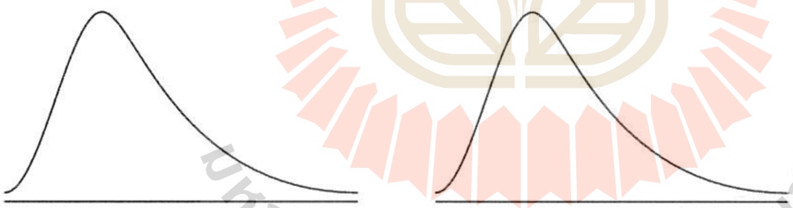


<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X มีการแจกแจงแบบไคสแคว์ ด้วยองศาอิสระ $r = 10$ (หรือ $X \sim \chi^2(10)$)

(1) $P(X > 4.87)$

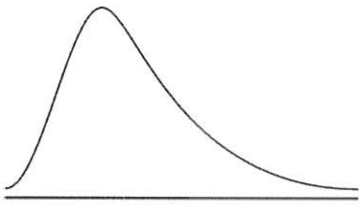


(2) $P(2.56 \leq X \leq 18.3)$

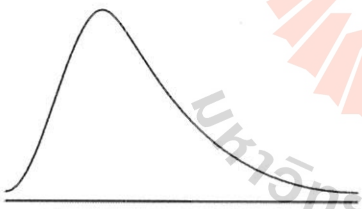


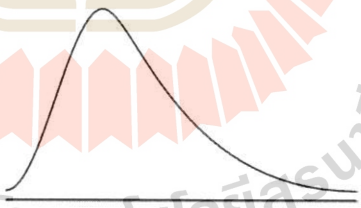
<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ด้วยองศาอิสระ $r = 10$ (หรือ $X \sim \chi^2(10)$) จงหาค่า a ที่ทำให้

(1) $P(X < a) = 0.9$



(2) $P(X > a) = 0.95$





4.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบที (t- Probability Distribution)

ถ้า Z และ V เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันโดยที่ $Z \sim \mathcal{N}(0,1), V \sim \chi^2(n)$ แล้ว ตัวแปรสุ่ม $T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$ จะมีการแจกแจงแบบที ด้วยองศาอิสระ $r = n$ และมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x;n) = \frac{[(n+1)/2-1]!}{[(n/2)-1]!\sqrt{\pi n}}(1+x^2/n)^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty$$

ถ้า X มีการแจกแจงแบบทีด้วยองศาอิสระ $r = n$ แล้ว เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{X \sim t(n)}$$

<u>ค่าเฉลี่ย</u>

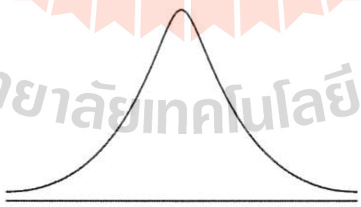
$$E(X) = 0$$

<u>ความแปรปรวน</u>

$$V(X) = \frac{r}{r-2}$$

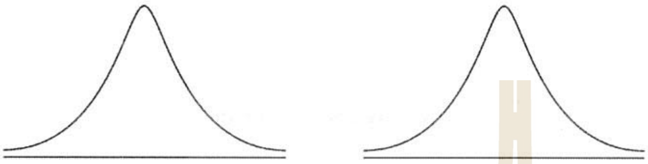
คุณสมบัติที่สำคัญของกราฟการแจกแจงแบบที

1. กราฟเป็นรูประฆังคว่ำ
2. กราฟสมมาตรที่ $X = 0$
3. พื้นที่ใต้กราฟมีค่าเท่ากับ 1
4. $P(t_1 < X < t_2)$ มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟเมื่อ X มีค่าอยู่ระหว่าง t_1 และ t_2

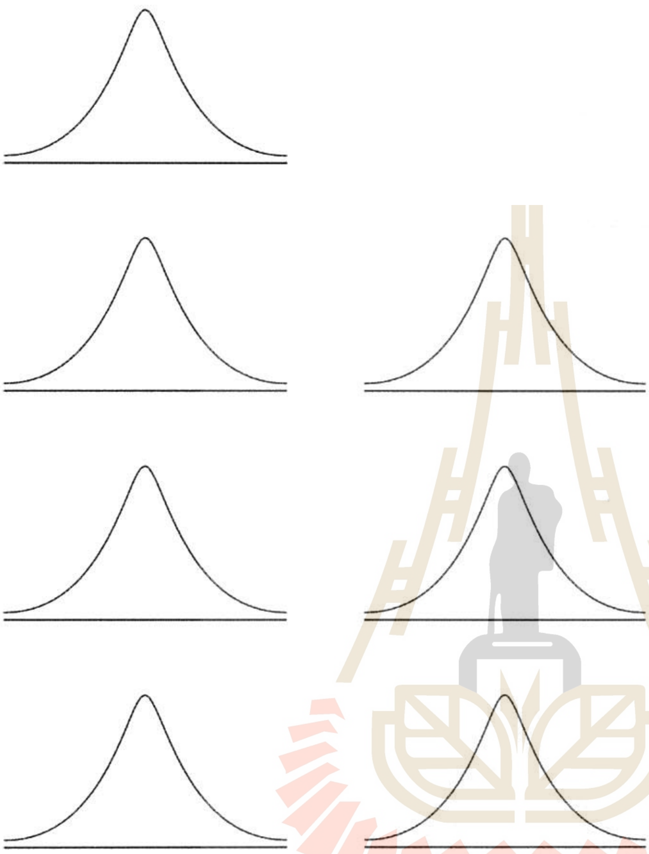


ตัวอย่าง ให้ X มีการแจกแจงแบบทีด้วยองศาอิสระ$r = 5$ (หรือ $X \sim t(5)$)

(1) $P(X \geq 0.920)$

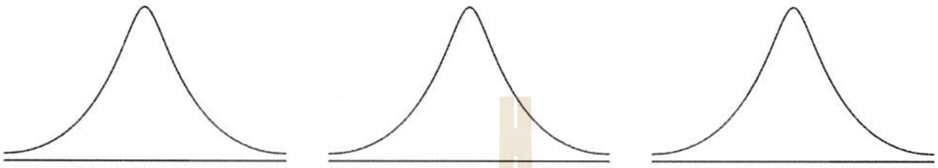


(2) $P(-1.476 \leq X \leq 2.571)$

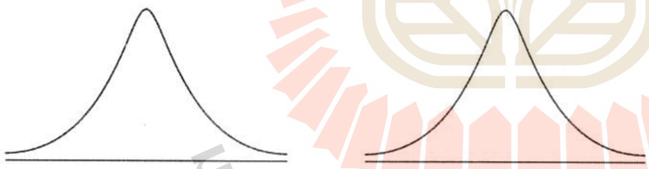


<u>ตัวอย่าง</u> ให้ X มีการแจกแจงแบบทีด้วยองศาอิสระ$r = 5$ (หรือ $X \sim t(5)$) จงหาค่า t ที่ทำให้

(1) $P(X < t) = 0.025$



(2) $P(X > t) = 0.01$



แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มต่อเนื่องบนช่วง $[-1,1]$ จงหา

   (1) $E(X)$ (0)

   (2) $V(X)$ (1/3)

   (3) ค่าของ a ที่ทำให้ $P(-a < X < a) = 0.9$ (0.9)

   (4) $P(X < 2.5)$ (1)

2. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม $Z \sim N(0,1)$ จงหาค่าต่อไปนี้

   (1) $P(Z \leq 2.14)$ (0.9838)

   (2) $P(0 \leq Z \leq 0.81)$ (0.2910)

   (3) $P(Z \geq 1.17)$ (0.1210)

   จงหาค่า a ที่ทำให้

   (4) $P(-a \leq Z \leq a) = 0.668$ (0.97)

   (5) $P(a \leq |Z|) = 0.016$ (2.41)

3. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่ง $X \sim N(4.35, (0.59)^2)$ จงหา

   (1) $P(4 \leq X \leq 5)$ (0.5867)

   (2) $P(X \geq 5.5)$ (0.0256)

4. สมมติว่าความสูงของนักเรียน 800 คน แทนด้วยตัวแปรสุ่ม H มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 66 นิ้ว และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5 นิ้ว จงหา

   (1) $P(65 \leq H \leq 70)$ (0.3674)

   (2) $P(H \geq 72)$ (0.1151)

   (3) จำนวนนักเรียนที่คาดว่าจะมีความสูงอยู่ระหว่าง 65 ถึง 70 นิ้ว (294)

   (4) จำนวนนักเรียนที่คาดว่าจะมีความสูงมากกว่าหรือเท่ากับ 72 นิ้ว (92)

5. สมมติว่า $X \sim B(50, 0.25)$ จงหา

   (1) $P(X \leq 10)$ (0.2578)

   (2) $P(5 \leq X \leq 15)$ (0.8320)

6. อาคารเรียนของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีความสูง 3 ชั้น เวลาที่นักศึกษาคนหนึ่งๆ ต้องรอลิฟท์อยู่ที่ชั้น 2 มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มจาก 0 ถึง 4 นาที ถ้าลิฟท์ใช้เวลา 15 วินาทีในการเคลื่อนที่จากชั้นที่หนึ่งไปยังอีกชั้นหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนหนึ่งซึ่งอยู่ที่ชั้น 2 จะถึงชั้นหนึ่งในเวลา 1.5 นาที (0.3125)

7. ถ้าคะแนนสอบวิชา Probability and Statistics มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 65 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 12 คะแนน โดยเกรดที่ให้ คือ A, B, C, D และ F ผู้ที่ได้คะแนนสูงสุด 10% จะได้เกรด A 20% ถัดมาจะได้ เกรด B 40% ถัดมาจะได้เกรด C 20% ถัดมาจะได้เกรด D และผู้ที่ได้คะแนนต่ำสุด 10% จะได้เกรด F ผู้ที่ได้เกรด A ต้องได้คะแนนอย่างน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด (ให้$P(Z \leq 1.28167) = 0.9$) (80.38)

8. สมมุติว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ $N(15, 9)$ จงหา

   (1) $P(X > 23)$ (0.0038)

   (2) $P(X < 14)$ (0.3707)

9. ถ้าจากการสำรวจพบว่า 15% ของนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีจะฟังวิทยุคลื่น Cool 93.0 ช่วงเวลา 20.00 - 24.00 น. ได้มีการสุ่มตัวอย่างนักศึกษาในมหาวิทยาลัยมาจำนวน 300 คน จงหาความน่าจะเป็น ที่นักศึกษาจะฟังวิทยุคลื่นนี้ในช่วงเวลา 20.00 - 24.00 น. มากกว่า 40 คน (0.7673)

10. สมมติว่ามี 25% ของรถยนต์ในเมืองแห่งหนึ่งไม่ได้ทำประกันภัย ได้มีการเลือกรถยนต์ในเมืองนี้อย่างสุ่มมา 50 คัน และให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนของรถยนต์ที่ยังไม่ทำประกันภัยจากกลุ่มตัวอย่างดังกล่าว จงหา $P(5 \leq X \leq 15)$ (0.832)

บทที่ 5

การสุ่มตัวอย่างและการแจกแจงของฟังก์ชันที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง

การสุ่มตัวอย่าง (Random Sampling) หมายถึง การเลือกข้อมูลบางส่วนมาจากข้อมูลทั้งหมดที่เราสนใจ

ประชากร (Population) หมายถึง ข้อมูลทั้งหมดเกี่ยวกับสิ่งที่เราสนใจ
กลุ่มตัวอย่าง (Sample) หมายถึง ส่วนหนึ่งของประชากรที่ถูกเลือกมาเป็นตัวแทนของประชากร

พารามิเตอร์ (Parameter) หมายถึง ค่าที่บอกถึงลักษณะที่สำคัญของประชากร หรือค่าที่ประมวลได้จากประชากร
ค่าสถิติ (Statistic) หมายถึง ค่าที่บอกถึงลักษณะที่สำคัญของกลุ่มตัวอย่าง หรือค่าที่ประมวลได้จากกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของน้ำหนักเด็กทารกในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง จึงทำการสุ่มทารกมาจำนวน 20 คน แล้วหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

ทฤษฎีบท ลิมิตเข้าสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem)

ให้ $X_1, ..., X_n$ เป็นกลุ่มตัวอย่างขนาด n ซึ่งถูกเลือกมาจากประชากรใด ๆ และการแจกแจกของประชากรดังกล่าวมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และมีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ให้

$$\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$$

เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม $\bar{X}$ จะมีการแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติ $N(\mu, \sigma^2/n)$ เมื่อ n มีค่ามากพอ

หมายเหตุ

1. จากทฤษฎีบทข้างต้นจะได้ว่า $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ เมื่อ n มีค่ามากพอ
2. n มีค่ามากพอ หมายถึง $n \geq 30$

5.1 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง ($\bar{X}$)

5.1.1 กรณีกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 30$)

กรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ ($n \geq 30$) และประชากรมีการแจกแจงแบบใดก็ได้ที่มีค่าเฉลี่ย μ

(1) ถ้าทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 แล้ว

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

(2) ถ้าไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 แล้ว

$$\bar{X} \sim N(\mu, s^2/n)$$

กำหนดให้

n คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง
μ คือค่าเฉลี่ยของประชากร
$\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง
σ^2 คือความแปรปรวนของประชากร
s^2 คือความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าอายุการใช้งานเฉลี่ยของปรอทวัดไข้เป็น 54 ครั้ง ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 ครั้ง โรงพยาบาลแห่งหนึ่งซื้อปรอทวัดไข้มา 50 อัน โดยเลือกซื้ออย่างสุ่ม จงหา

(1) ความน่าจะเป็นที่ปรอทวัดไข้ของโรงพยาบาลจะมีอายุการใช้งานเฉลี่ยน้อยกว่า 52 ครั้ง

(2) ความน่าจะเป็นที่อายุการใช้งานเฉลี่ยของปรอทจะอยู่ระหว่าง 50 ถึง 60 ครั้ง

5.1.2 กรณีกลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$)

กรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก ($n < 30$) และประชากรมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ

(1) ถ้าทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 แล้ว

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

(2) ถ้าไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากร σ^2 แล้ว

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

กำหนดให้

n คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

μ คือค่าเฉลี่ยของประชากร

$\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

σ^2 คือความแปรปรวนของประชากร

s^2 คือความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติว่าน้ำหนักของผู้ชายไทยมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 172 ปอนด์ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 29 ปอนด์

(1) มีการสุ่มผู้ชายไทยมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่น้ำหนักของเขาจะมากกว่า 175 ปอนด์

(2) ได้มีการเลือกผู้ชายไทยอย่างสุ่มมา 20 คน จงหาความน่าจะเป็นที่น้ำหนักเฉลี่ยของกลุ่มนี้ จะมีค่ามากกว่า 175 ปอนด์

<u>ตัวอย่าง</u> ให้อายุการใช้งานของหลอดไฟมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 12,000 ชั่วโมง ถ้าสุ่มหลอดไฟมา 9 หลอด แล้วตรวจสอบอายุการใช้งานคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างได้ 2,980 ชั่วโมงจงหาความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยของอายุการใช้งานของหลอดไฟทั้ง 9 หลอด นั้นจะมากกว่า 13,388 ชั่วโมง

5.2 การแจกแจงของค่าสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง $(\hat{p})$

กรณีที่กลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่ $n \geq 30$

$$\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$$

กำหนดให้

n คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

p คือค่าสัดส่วนของประชากร

$\hat{p}$ คือค่าสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> บริษัทผลิตแบตเตอรี่แห่งหนึ่งทราบว่าโดยปกติแล้วจะมีแบตเตอรี่ที่ไม่ได้มาตรฐานปนมา 10% ถ้าสุ่มตัวอย่างแบตเตอรี่ของบริษัทนี้มา 500 อัน จงหาค่าความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จากตัวอย่างจะไม่ได้มาตรฐานมากกว่า 11%

5.3 การแจกแจงของค่าสถิติ $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

กรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

กำหนดให้

n คือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

σ^2 คือความแปรปรวนของประชากร

s^2 คือความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีความแปรปรวน $\sigma^2 = 6$ จงหาความน่าจะเป็นที่ความแปรปรวนตัวอย่าง s^2

1. มากกว่า 9.1
2. ระหว่าง 3.45 และ 10.75

เมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างมีค่าเท่ากับ 25

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. ถ้าทราบว่าน้ำหนักของแบตเตอรี่ยี่ห้อหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีน้ำหนักเฉลี่ย 400 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 12.1 กรัม ถ้าสุ่มตัวอย่างแบตเตอรี่ยี่ห้อนี้มา 25 อัน จงหา

   (1) ความน่าจะเป็นที่น้ำหนักเฉลี่ยของแบตเตอรี่ตัวอย่างจะอยู่ระหว่าง $\mu \pm \frac{\sigma}{5}$ (0.6826)

   (2) ขนาดของตัวอย่าง ถ้าต้องการให้ 95% ของน้ำหนักเฉลี่ยตัวอย่างต่างจากน้ำหนักเฉลี่ยประชากรไม่เกิน 1% ของน้ำหนักค่าเฉลี่ยประชากร (35)

2. เป็นที่ทราบกันว่าเครื่องจักรอันหนึ่งจะผลิตสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐานประมาณ 2% ได้มีการเลือกตัวอย่างสินค้าที่ผลิตจากเครื่องจักรนี้มา 400 ชิ้นความน่าจะเป็นที่จะมีสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐานปนมาด้วย 3% หรือมากกว่ามีค่าเท่ากับเท่าใด (0.0764)

3. สมมติว่าอายุการใช้งานของหลอดไฟที่ผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 800 ชั่วโมงและมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 40 ชั่วโมงถ้ามีการสุ่มตัวอย่างหลอดไฟจากโรงงานนี้มา 16 หลอด ความน่าจะเป็นที่อายุการใช้งานเฉลี่ยของหลอดไฟจากตัวอย่างชุดนี้จะมีค่าน้อยกว่า775 ชั่วโมง มีค่าเท่ากับเท่าใด (0.0062)

4. ได้มีการเลือกตัวอย่างเชิงสุ่มขนาด 100 มาจากประชากรกลุ่มหนึ่งที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 76$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 256$ ให้ $\bar{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง จงหาค่า$P(75 < \bar{X} < 78)$ (0.6301)

5. โรงงานแห่งหนึ่งกล่าวว่าหลอดไฟที่ผลิตจากโรงงานนี้จะมีอายุการใช้งานเฉลี่ย $\mu = 10,000$ ชั่วโมง เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อดังกล่าวจึงมีการเลือกตัวอย่างขนาด 16 มาทดสอบ ได้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง $s = 400$ ชั่วโมง ให้ $\bar{X}$ แทนอายุการใช้งานเฉลี่ยของตัวอย่าง จงหาความน่าจะเป็น $P(|\bar{X} - \mu| < 213.1)$ (0.95)

6. สุ่มตัวอย่างขนาด 25 จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติซึ่งมีความแปรปรวน $\sigma^2 = 6$ ให้ s^2 เป็นความแปรปรวนของตัวอย่างจงหาค่า $P(s^2 > 9.105)$ (0.05)

7. สุ่มตัวอย่างเด็กเกิดใหม่ 100 คน ให้ $\hat{p}$ เป็นสัดส่วนของเด็กชายจากกลุ่มตัวอย่างดังกล่าว จงหาความน่าจะเป็น $P(0.53 < \hat{p} < 0.62)$ กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่เด็กจะเกิดมาเป็นหญิงหรือชายเท่ากัน (0.2661)

8. ให้ X_1, X_2, X_3 เป็นตัวอย่างเชิงสุ่มที่เลือกมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ $N(0,2)$ ให้ $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ จงหา$V(\bar{X})$ (2/3)

9. ให้ $X_1, X_2, ..., X_{16}$ เป็นตัวอย่างเชิงสุ่มที่เลือกมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ $N(77,25)$ จงหาค่า $P(77 < \bar{X} < 79.5)$ (0.4772)

10. โรงงานผลิตอาหารสัตว์แห่งหนึ่ง พนักงานสามารถบรรจุสินค้าลงกล่องได้โดยเฉลี่ยคนละ 100 กล่องต่อวัน และมีความแปรปรวนเท่ากับ 17.036 กล่อง ถ้าสุ่มตัวอย่างพนักงานมา 30 คนให้ s เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง จงหาค่า $P(s > 5)$ (0.05)

11. ถ้าทราบว่าค่าลงทะเบียนของนักศึกษาใน มทส. มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 5,600 บาท และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 450 บาท ควรจะสุ่มตัวอย่างขนาดเท่าใดเพื่อทำให้ความน่าจะเป็นของค่าลงทะเบียนเฉลี่ยอยู่ระหว่าง 5,450 - 5,750 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.95 (35)

บทที่ 6

การประมาณค่าพารามิเตอร์

การอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) เป็นกระบวนการที่ใช้ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง เพื่อหาข้อสรุปเกี่ยวกับข้อมูลของประชากร การอนุมานเชิงสถิติแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

1. การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter Estimation)
2. การทดสอบสมมติฐาน (Test of Hypothesis)

การประมาณค่าพารามิเตอร์

วิธีการนี้จะใช้ค่าสถิติที่เหมาะสมมาประมาณค่าพารามิเตอร์ การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่จะกล่าวถึงมีดังต่อไปนี้

1. ประมาณค่า μ ด้วย $\bar{X}$
2. ประมาณค่า p ด้วย $\hat{p}$
3. ประมาณค่า σ^2 ด้วย s^2

สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น แบ่งออกได้เป็น 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบจุด และการประมาณค่าแบบช่วง

6.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)

เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยค่าสถิติที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง โดยที่ค่าดังกล่าวจะมีค่าเป็นค่าใดค่าหนึ่ง

6.1.1 การประมาณค่าเฉลี่ยประชากรแบบจุด

ประมาณค่าเฉลี่ยประชากร μ แบบจุดด้วยค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง $\bar{X}$ โดยที่

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

กำหนดให้

X_i แทนค่าของสิ่งที่สนใจ

N แทนขนาดประชากร

n แทนขนาดกลุ่มตัวอย่าง

μ แทนค่าเฉลี่ยของประชากร

$\bar{X}$ แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

6.1.2 การประมาณค่าสัดส่วนประชากรแบบจุด

ประมาณค่าสัดส่วนประชากร p แบบจุดด้วยค่าสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง $\hat{p}$ โดยที่

$$p = \frac{\text{จำนวนสิ่งที่สนใจทั้งหมดในประชากร}}{N}$$

$$\hat{p} = \frac{\text{จำนวนสิ่งที่สนใจทั้งหมดในกลุ่มตัวอย่าง}}{n}$$

กำหนดให้

N แทนขนาดประชากร

n แทนขนาดกลุ่มตัวอย่าง

p แทนค่าสัดส่วนของประชากร

$\hat{p}$ แทนค่าสัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง

6.1.3 การประมาณค่าความแปรปรวนประชากรแบบจุด

ประมาณค่าความแปรปรวนประชากร σ^2 แบบจุดด้วยค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง S^2 โดยที่

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}{N}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

กำหนดให้

X_i แทนค่าของสิ่งที่สนใจ

N แทนขนาดประชากร

n แทนขนาดกลุ่มตัวอย่าง

μ แทนค่าเฉลี่ยของประชากร

$\bar{X}$ แทนค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

σ^2 แทนความแปรปรวนของประชากร

s^2 แทนความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> มีคะแนนสอบของนักศึกษา 600 คน สุ่มคะแนนนักศึกษามา 10 คน พบว่ามีคะแนนดังนี้ 36, 42, 34, 40, 64, 50, 22, 54, 60 และ 32 จงประมาณค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนของคะแนนสอบนักศึกษาทั้ง 600 คน และประมาณว่ามีนักศึกษาเป็นสัดส่วนเท่าใดจากทั้งหมด 600 คน ที่ได้คะแนนมากกว่า 50 คะแนน (จงใช้การประมาณค่าแบบจุด)

6.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยค่าสถิติที่ได้จากกลุ่มตัวอย่าง โดยที่ค่าดังกล่าวจะมีค่าเป็นช่วง

ช่วงความเชื่อมั่น หมายถึง ช่วงของการประมาณพารามิเตอร์
ระดับความเชื่อมั่น หมายถึง ความน่าจะเป็นที่พารามิเตอร์จะอยู่ในช่วงที่ประมาณได้
ระดับนัยสำคัญ (α) หมายถึง ความน่าจะเป็นที่พารามิเตอร์จะไม่อยู่ในช่วงที่ประมาณได้

$$\alpha = 1 - \text{ระดับความเชื่อมั่น}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ค่าเฉลี่ยคะแนนสอบของนักศึกษา 600 คน อยู่ในช่วง 40-69 ด้วยระดับความเชื่อมั่น 95% หมายความว่า ความน่าจะเป็นที่ค่าเฉลี่ยจะอยู่ในช่วง 40-69 มี ค่าเท่ากับ 0.95 หรือ 95%

6.2.1 การสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของประชากร

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของประชากร แบ่งออกได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1: $n < 30$ และสมมติว่าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้นช่วงการประมาณค่าของ μ ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ คือ

(1) ทราบค่า σ^2

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) ไม่ทราบค่า σ^2

$$\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

กรณีที่ 2: $n \geq 30$ ประชากรมีการแจกแจงแบบใดก็ได้ ช่วงการประมาณค่าของ μ ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ คือ

(1) ทราบค่า σ^2

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) ไม่ทราบค่า σ^2

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

กำหนดให้

μ คือค่าเฉลี่ยของประชากร

$\bar{X}$ คือค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง

σ คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

s คือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่าง

n คือขนาดของตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> โรงงานผลิตสายเบรกแห่งหนึ่งต้องการทราบว่าสายเบรกที่ผลิตได้จะสามารถรับแรงดึงได้โดยเฉลี่ยเท่าใดเพื่อที่จะประมาณค่าเฉลี่ยของแรงดึงนั้น ได้มีการเลือกตัวอย่างเชิงสุ่มมา 32 เส้น แล้วทำการตรวจสอบแรงดึงของแต่ละเส้นต่อจากนั้นจึงหาค่าเฉลี่ยของตัวอย่างได้ 42,196 ปอนด์ จากประสบการณ์ทางโรงงานทราบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแรงดึงมีค่าเท่ากับ 500 ปอนด์ จงประมาณค่าแรงดึงเฉลี่ยของสายเบรคที่ผลิตจากโรงงานนี้ กำหนดให้ $\alpha = 0.1$

<u>ตัวอย่าง</u> นักวิจัยคนหนึ่งต้องการทราบว่าในไส้กรอก 1 ชิ้น มีไขมันปริมาณเท่าใด จึงได้สุ่มตัวอย่างไส้กรอกมา 10 ชิ้น และนำไปตรวจหาปริมาณไขมันได้ดังนี้ 25.2, 21.3, 22.8, 17.0, 29.8, 21.0, 25.5, 16.0, 20.9 และ 19.5 มิลลิกรัม สมมติว่าปริมาณไขมันในไส้กรอกมีการแจกแจงแบบปกติ จงหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยปริมาณไขมันในไส้กรอกที่ระดับความเชื่อมั่น 95 %

6.2.2 การสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนของประชากร

เมื่อ $n \geq 30$ ช่วงการประมาณค่าของ p ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ คือ

$$\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

กำหนดให้

$p =$ สัดส่วนของประชากร

$\hat{p} =$ สัดส่วนของกลุ่มตัวอย่าง

$q = 1 - p$

$\hat{q} = 1 - \hat{p}$

$n =$ ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> ในการสำรวจเกี่ยวกับการมีบ้านของคนกรุงเทพ ได้มีการสุ่มคนกรุงเทพมา 100 คน พบว่าผู้ที่มีบ้านเป็นของตนเองมีจำนวน 60 คน จงประมาณค่าสัดส่วนของคนกรุงเทพที่มีบ้านเป็นของตนเองที่ระดับความเชื่อมั่น 90%

6.2.3 การสร้างช่วงความเชื่อมั่นสำหรับความแปรปรวนของประชากร

เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ ช่วงการประมาณค่าของ σ^2 ที่ระดับความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ คือ

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

กำหนดให้

$\sigma^2 =$ ความแปรปรวนของประชากร

$s^2 =$ ความแปรปรวนของตัวอย่าง

$n =$ ขนาดของตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าสุ่มตัวอย่างขนาด 31 จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติและคำนวณความแปรปรวนตัวอย่างได้ 25 จงประมาณค่าแบบช่วงของ σ^2 ที่ระดับนัยสำคัญ 5 %

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จากตัวอย่างเกรดเฉลี่ยที่เลือกมาแบบสุ่มของนิสิตปีสุดท้ายจำนวน 36 คน ได้ข้อมูลดังนี้

2.76, 3.04, 2.61, 2.27, 2.87, 2.90

2.74, 2.74, 2.22, 2.71, 3.11, 2.19

2.78, 3.14, 2.12, 2.74, 2.78, 2.74

2.69, 2.81, 2.66, 2.51, 2.39, 2.63

2.10, 2.66, 2.08, 2.14, 3.18, 2.61

2.78, 2.63, 2.14, 2.54, 2.48, 2.33

จากข้อมูลค่าของเกรดเฉลี่ยเท่ากับ 2.6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 0.3 จงหาช่วงความเชื่อมั่น 99% ของเกรดเฉลี่ยของนิสิตปีสุดท้ายทั้งหมด (2.4712 - 2.7288)

2. เพื่อที่จะหาค่าเฉลี่ยของ compressive strength ของแท่งคอนกรีตที่ผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่ง วิศวกรโยธาได้เลือกตัวอย่างเชิงสุ่มแท่งคอนกรีตมา 12 แท่ง แล้วทำการทดสอบหา compressive strength ได้ผลดังนี้

2216, 2237, 2249, 2204, 2225, 2301

2281, 2263, 2318, 2255, 2275, 2295

จงหาช่วงประมาณค่าเฉลี่ยของ compressive strength ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% (2237.3169 - 2282.5165)

3. ภาชนะที่ใช้บรรจุกรดกำมะถันมีน้ำหนัก (หน่วยออนซ์) ดังนี้

9.8, 10.2, 10.4, 9.8, 10.0, 10.2, 9.6

จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับค่าเฉลี่ยของน้ำหนักภาชนะสำหรับบรรจุกรดกำมะถันซึ่งสมมติว่ามีการแจกแจงแบบปกติ (9.7384 - 10.2616)

4. สมมติว่าการไฟฟ้าฝ่ายผลิตแห่งประเทศไทย ต้องการสำรวจความคิดเห็นเกี่ยวกับให้เงินกู้ยืมกับผู้ที่ต้องการเปลี่ยนตู้เย็นไปเป็นรุ่นใหม่ที่ประหยัดพลังงานไฟฟ้าจึงได้ทำการสุ่มตัวอย่างขนาด $n = 100$ แล้วสอบถามพบว่ามีผู้เห็นด้วยกับโครงการนี้เท่ากับ 36 คนจงหาว่าช่วงแห่งความเชื่อมั่นสำหรับสัดส่วนประชากรที่เห็นด้วยกับโครงการดังกล่าวที่ระดับความเชื่อมั่น 95% (0.26592 - 0.45408)

5. จากตัวอย่างสุ่มของครอบครัวในเมืองหลวงแห่งหนึ่งมีขนาด $n = 500$ มีโทรทัศน์ไว้ในครอบครอง 160 ครอบครัว จงหาช่วงความเชื่อมั่น 90% สำหรับสัดส่วนที่แท้จริงของครอบครัวในเมืองหลวงที่มีโทรทัศน์ไว้ในครอบครอง (0.2857 - 0.3543)

6. สมมติว่าน้ำหนักของแผ่น CD ที่ผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ เพื่อที่จะประมาณค่าความแปรปรวน จึงได้สุ่มตัวอย่างแผ่น CD จากโรงงาน 25 แผ่นแล้วตรวจชั่งน้ำหนักพบว่ามีค่าเฉลี่ย 4.05 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.8 กรัม จงหาช่วงความเชื่อมั่น 95% ของความแปรปรวนน้ำหนักแผ่น CD (0.3902 - 1.2387)

7. เพื่อที่จะหาค่าเฉลี่ย μ ของสินทรัพย์ของบริษัทต่าง ๆ ซึ่งตั้งอยู่ในกรุงเทพมหานคร จึงได้มีการสุ่มตัวอย่างขนาด 30 แล้วหาค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X} = 11.091$ ล้านบาท ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างเท่ากับ $s = 14.405$ ล้านบาทจงหาช่วงเชื่อมั่นเพื่อประมาณค่า μ โดยใช้ $\alpha = 0.10$ (6.7647 - 15.4173)

8. เพื่อที่จะหารายจ่ายเฉลี่ยต่อเดือนของนักศึกษาแต่ละคน จึงได้มีการสุ่มตัวอย่างมา 7 คน แล้วบันทึกข้อมูลรายจ่ายต่อเดือนได้ดังนี้

   5460, 5900, 6090, 6310, 7160, 8840, 9930

   จงหาช่วงการประมาณค่ารายจ่ายเฉลี่ยต่อเดือนของนักศึกษาที่ระดับนัยสำคัญ 0.01 (4753.0901 - 9444.0527)

9. ในการสอบวิชา Probability and Statistics อาจารย์ได้ออกข้อสอบมาตรฐานไว้ชุดหนึ่งและต้องการประมาณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของนักศึกษาที่ความเชื่อมั่น90% จึงสุ่มนักศึกษามาจำนวน 20 คน และให้ทำข้อสอบชุดนี้ได้ข้อมูลดังนี้

   85, 75, 56, 89, 67, 72, 58, 91, 53, 61,
   46, 84, 75, 39, 79, 86, 59, 65, 70, 92

   ช่วงประมาณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการสอบที่ความเชื่อมั่น 90% เป็นเท่าใด (12.2187 - 21.0866)

10. ระบบลงทะเบียนของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง โดยเฉลี่ยนักศึกษาคนหนึ่งจะใช้เวลา 3.1 ชั่วโมงในการลงทะเบียนระบบเก่ามหาวิทยาลัยจึงมีนโยบายจัดระบบการลงทะเบียนใหม่ เพื่อลดเวลาในการลงทะเบียนให้น้อยลง จึงได้ทดลองระบบลงทะเบียนออนไลน์โดยทดลองกับนักศึกษาจำนวน 16คนและบันทึกข้อมูลเวลาที่ใช้ในการลงทะเบียน (ชั่วโมง) ดังนี้

    1.3, 1.5, 0.8, 2.1, 1.8, 0.6, 0.5, 1.1
    1.2, 0.9, 1.9, 1.2, 0.7, 1.3, 0.6, 0.5

    ช่วงความเชื่อมั่น 90% ของเวลาเฉลี่ยที่นักศึกษาใช้ในการลงทะเบียนเท่ากับเท่าใด (0.9018 - 1.3482)

11. เจ้าของสวนส้มโอแห่งหนึ่งต้องการทราบขนาดของผลส้มโอโดยการวัดความยาวเส้นรอบวงของผลส้มโอแต่ละผล(หน่วยเป็นนิ้ว) จึงสุ่มตัวอย่างผลส้มโอมา 20 ผล ให้ X แทนความยาวเส้นรอบวงของผลส้มโอแต่ละผล คำนวณ

ได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 184.25, \quad \sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^2 = 8.25$$

ช่วงความเชื่อมั่น 98% ของความยาวเส้นรอบวงโดยเฉลี่ยของส้มโอทั้งหมดเท่ากับเท่าใด (8.8384 - 9.5866)

12. ในกล่องใบหนึ่งมีลูกปิงปองสีขาวและสีเหลืองรวมกัน 12 ลูก สุ่มหยิบลูกปิงปองแบบใส่คืนจำนวน 100 ครั้ง ปรากฏว่าเป็นลูกปิงปองสีขาว 72 ครั้ง จงประมาณว่าในกล่องจะมีปิงปองสีขาวกี่ลูกด้วยความเชื่อมั่น 95% (8 - 10)

บทที่ 7

การทดสอบสมมติฐาน

สมมติฐาน (Hypothesis) หมายถึง ความเชื่อหรือสิ่งที่คาดว่าจะเกิดขึ้น
การทดสอบสมมติฐาน (Test of Hypothesis) หมายถึง การทดสอบความเชื่อหรือสิ่งที่คาดไว้

ตัวอย่าง

1. บริษัทผู้ผลิตหลอดไฟออกจำหน่ายเชื่อว่า หลอดไฟที่เขาผลิตจะชำรุดไม่เกิน 5%
2. ผู้จัดการโรงงานเงาะกระป๋องเชื่อว่า น้ำหนักเฉลี่ยของเงาะกระป๋องจะหนักอย่างน้อย 200 กรัม

การตั้งสมมติฐานทางสถิติ

ในการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ โดยใช้ข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง เพื่อสรุปว่าสิ่งที่คาดไว้เป็นจริงหรือไม่ จะต้องตั้งสมมติฐานเพื่อการทดสอบ ซึ่งประกอบไปด้วยสมมติฐาน 2 ชนิด คือ

(1) สมมติฐานว่าง (Null Hypothesis) แทนด้วยสัญลักษณ์ H_0

(2) สมมติฐานแย้ง (Alternative Hypothesis) แทนด้วยสัญลักษณ์ H_1

หลักเกณฑ์ในการตั้งสมมติฐาน

กรณีที่ 1 : ถ้าสิ่งที่คาดไว้มีเครื่องหมายเท่ากับ ให้ตั้งเป็น H_0 ส่วน H_1 ให้เป็นข้อความที่ตรงข้ามกับ H_0

กรณีที่ 2 : ถ้าสิ่งที่คาดไว้ไม่มีเครื่องหมายเท่ากับ ให้ตั้งเป็น H_1 ส่วน H_0 ให้เป็นข้อความที่ตรงข้ามกับ H_1

ตัวอย่าง ผู้จัดการโรงงานเงาะกระป๋องเชื่อว่าน้ำหนักเฉลี่ยของเงาะกระป๋องจะหนักอย่างน้อย 200 กรัม

H_0 :

H_1 :

ตัวอย่าง บริษัทผู้ผลิตหลอดไฟแห่งหนึ่งอ้างว่าหลอดไฟของเขามีอายุการใช้งานเฉลี่ยนานกว่า 1,000 ชั่วโมง

$$H_0 \quad :$$
$$H_1 \quad :$$

ตัวอย่าง บริษัทผู้ผลิตหลอดไฟออกจำหน่ายเชื่อว่าหลอดไฟที่เขาผลิตจะชำรุดไม่เกิน 5%

$$H_0 \quad :$$
$$H_1 \quad :$$

ประเภทของการทดสอบสมมติฐาน

1. การทดสอบแบบข้างเดียว (One-Sides Test)

ให้สังเกตจาก H_1 ถ้าใน H_1 เป็นเครื่องหมายมากกว่า หรือน้อยกว่า เราจะเรียกว่าการทดสอบแบบข้างเดียว นั่นคือ

แบบที่ 1

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

แบบที่ 2

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

2. การทดสอบแบบสองข้าง (Two-Sided Test)

ให้สังเกตจาก H_1 ถ้าใน H_1 เป็นเครื่องหมายไม่เท่ากับ เราจะเรียกว่าการทดสอบแบบสองข้าง นั่นคือ

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

ขั้นตอนของการทดสอบสมมติฐาน

1. ตั้งสมมติฐาน
2. เลือกตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ
3. คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบ
4. กำหนดระดับนัยสำคัญ
5. สร้างขอบเขตที่จะปฏิเสธสมมติฐาน
6. สรุปผลการทดสอบ

7.1 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยของประชากร

<u>ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบ</u>

กรณีที่ 1: $n < 30$ ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ

(1) ทราบค่า σ^2

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(2) ไม่ทราบค่า σ^2

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

องศาอิสระ $r = n - 1$

กรณีที่ 2: $n \geq 30$ ประชากรมีการแจกแจงแบบใดก็ได้

(1) ทราบค่า σ^2

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(2) ไม่ทราบค่า σ^2

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ผู้จัดการโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่ง คาดว่าปริมาณวัตถุดิบเฉลี่ยที่ใช้ในโรงงานจะไม่ต่ำกว่า 880 ตันต่อวัน เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อดังกล่าว จึงเก็บข้อมูลปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ต่อวันมา 50 วัน คำนวณปริมาณวัตถุดิบเฉลี่ยได้ 871 ตันต่อวัน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับ 21 ตัน การคาดคะเนของผู้จัดการถูกต้องหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

<u>ตัวอย่าง</u> ผู้ผลิตไอศครีมรายหนึ่งเชื่อว่าไอศครีมของเขาประกอบด้วยแคลอรี่เฉลี่ย 500 แคลอรี่ต่อกรัม เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อนี้ เขาจึงสุ่มไอศครีมหนักก้อนละ 1 กรัม มา 25 ก้อน คำนวณปริมาณแคลอรี่เฉลี่ยได้ 510 แคลอรี่ต่อกรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 23 แคลอรี่ อยากทราบว่าสิ่งที่ผู้ผลิตเชื่อสมเหตุสมผลหรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.10 กำหนดให้ปริมาณแคลอรี่ในไอศครีมหนัก 1 กรัม มีการแจกแจงแบบปกติ

7.2 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร

ค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบ เมื่อ $n \geq 30$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

ตัวอย่าง บริษัทขายเครื่องสำอางยี่ห้อ PS คาดว่าผู้หญิงไทยใช้เครื่องสำอางยี่ห้อ PS อย่างน้อย 20 % เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อนี้ จึงสุ่มตัวอย่างผู้หญิงไทยมา 500 คน ปรากฏว่ามีผู้ใช้เครื่องสำอาง PS จำนวน 95 คน อยากทราบว่าสิ่งที่บริษัทคาดไว้เชื่อถือได้หรือไม่ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.01

7.3 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าความแปรปรวนของประชากร

<u>ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ</u> เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

องศาอิสระเท่ากับ $n-1$

<u>ตัวอย่าง</u> ในกระบวนการเคลือบผิวแผ่น CD เราจะยอมรับว่ากระบวนการเคลือบผิวดังกล่าวได้มาตรฐาน ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของความหนาของสารเคลือบผิวที่วัดจาก dice cut มีค่าไม่เกิน 0.50 ม.ม. ได้มีการเลือกแผ่น CD มา 1 แผ่น แล้วทำ dice cut ออก 15 ชิ้น แล้วหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มตัวอย่างได้ 0.64 ม.ม. จงตัดสินว่าจะสามารถยอมรับกระบวนการผลิตดังกล่าวว่าได้มาตรฐานหรือไม่ ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% สมมติให้ความหนาของสารเคลือบผิวมีการแจกแจงแบบปกติ

แบบฝึกหัดบทที่ 7

1. ได้มีการรายงานว่า เงินเดือนของผู้จัดการธนาคารในประเทศไทยโดยเฉลี่ยแล้วมีค่ามากกว่า 42,000 บาท ได้มีการเลือกผู้จัดการธนาคารมา30 คน แล้วหาค่าเฉลี่ยตัวอย่างได้ 43,260 บาท โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างเท่ากับ 5,230 บาท จงตั้งสมมติฐานแล้วทำการทดสอบค่าเฉลี่ยประชากรโดยใช้ $\alpha = 0.05$ (ยอมรับ H_0)

2. ได้มีความเชื่อว่ารายได้เฉลี่ยของนักศึกษาฝึกงานตามโรงงานมีค่าน้อยกว่า60 บาทต่อวัน เพื่อที่จะตรวจสอบความเชื่อนี้ ได้สุ่มตัวอย่างโรงงานมา 8 แห่ง แล้วบันทึกรายได้ต่อวันของนักศึกษาฝึกงานได้ดังนี้

   60, 56, 60, 55, 70, 55, 60, 55

   จงตั้งสมมติฐานเพื่อตรวจสอบความเชื่อดังกล่าวโดยใช้ $\alpha = 0.10$ (ยอมรับ H_0)

3. นักศึกษามีความเชื่อว่าจะถอนวิชาเรียนประมาณ 15% ได้มีการสุ่มตัวอย่างขนาด 200 พบว่านักศึกษาถอนวิชาเรียน 38 คนจงตั้งสมมติฐานเพื่อทำการทดสอบความเชื่อดังกล่าวโดยใช้ $\alpha = 0.05$ (ยอมรับ H_0)

4. ผู้บริหารโรงงานแห่งหนึ่งเชื่อว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนคนไข้นอกที่จะต้องเข้ารับการผ่าตัดมีค่ามากกว่า 8 คนต่อวัน ได้มีการสุ่มตัวอย่างมา 15 วันแล้วนับจำนวนคนไข้ที่จะต้องเข้ารับการผ่าตัดในแต่ละวันได้ผลดังนี้

   25, 30, 5, 15, 18, 42, 16, 9, 10, 12, 12, 38, 8, 14, 27

   กำหนดให้ $\alpha = 0.10$ (ปฏิเสธ H_0)

5. สมมติว่า $H_0 : \mu = 100, H_1 : \mu \neq 100$ คำนวณค่าสถิติได้ $Z = 2.30$ จงตรวจสอบว่าจะต้องยอมรับหรือปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.01, 0.05$ ($\alpha = 0.01$ ยอมรับ H_0, $\alpha = 0.05$ ปฏิเสธ H_0)

6. ข้อมูลจากกรมแรงงานอ้างว่าคนงานที่ได้งานทำจากการสมัครทางอินเทอร์เน็ตไม่เกิน 50% เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อนี้ จึงสุ่มตัวอย่างคนงานจำนวน 703 คน แล้วสอบถามพบว่ามี61% ของจำนวนดังกล่าวตอบว่าได้งานทำจากการสมัครทางอินเทอร์เน็ต จงตรวจสอบข้อมูลดังกล่าวโดยที่ $\alpha = 0.05$ (ปฏิเสธ H_0)

7. สมมติว่าน้ำหนักของช็อกโกแลตที่ผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ และผู้จัดการโรงงานเชื่อว่าน้ำหนักเฉลี่ยของช็อกโกแลตแต่ละก้อนจะมีค่ามากกว่า 0.8535 กรัมเพื่อที่จะทดสอบความเชื่อดังกล่าว จึงเลือกตัวอย่างขนาด 13 แล้วตรวจชั่งน้ำหนักได้ข้อมูลจากตัวอย่างดังนี้

   0.751, 0.841, 0.856, 0.799, 0.966, 0.859, 0.857, 0.942, 0.873, 0.809, 0.890, 0.878, 0.905

   จงตรวจสอบความเชื่อดังกล่าวที่ $\alpha = 0.05$ (ยอมรับ H_0)

8. จากข้อ 7 ถ้าสมมติว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากรคือ $\sigma = 0.0565$ กรัม จงตรวจสอบความเชื่อดังกล่าวที่ $\alpha = 0.05$ (ยอมรับ H_0)

9. วิศวกรควบคุมคุณภาพของโรงงานผลิตขวดน้ำอัดลมแห่งหนึ่งอ้างว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของน้ำหนักขวดน้ำอัดลมมีค่าน้อยกว่า 0.051 ออนซ์เพื่อที่จะทดสอบความเชื่อดังกล่าวจึงสุ่มตัวอย่างขวดน้ำอัดลมมา 24 ขวด แล้วหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากตัวอย่างได้ $s = 0.039$ จงตรวจสอบความเชื่อนี้ที่ $\alpha = 0.05$ (ยอมรับ H_0)

ภาคผนวก

Table 2 Individual Binomial Distribution

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9900	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0100	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1002	.0576	.0349	.0168	.0084	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2065	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734

Table 2 **(Continued)**

n	*x*	.01	.05	.10	.15	.20	.25	*p* .30	.35	.40	.45	.50
8	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0403	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.8953	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.0995	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0050	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0002	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0000	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0000	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.8864	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.1074	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0060	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0002	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	0000	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0000	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
12	7	.0000	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.8775	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.1152	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.0070	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0003	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0000	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0000	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.8687	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.1229	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.0081	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0003	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0000	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0000	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.8601	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.1303	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.0092	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0004	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0000	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417

Table 2 **(Continued)**

n	*x*	*.01*	*.05*	*.10*	*.15*	*.20*	*.25*	*p* *.30*	*.35*	*.40*	*.45*	*.50*
15	5	.0000	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.8515	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.1376	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.0104	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0005	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0000	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0000	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0000	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.8429	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.1447	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.0117	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0006	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0000	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0000	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0000	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052

Table 2 (Continued)

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
17	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.8345	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.1517	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.0130	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0007	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0000	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0000	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0000	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.8262	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.1586	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.0144	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0008	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0000	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0000	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0000	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003

Table 2 **(Continued)**

n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	p .30	.35	.40	.45	.50
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.8179	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.1652	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.0159	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0010	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0000	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0000	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0000	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
25	0	.7778	.2774	.0718	.0172	.0038	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.1964	.3650	.1994	.0759	.0236	.0063	.0014	.0003	.0000	.0000	.0000
	2	.0238	.2305	.2659	.1607	.0708	.0251	.0074	.0018	.0004	.0001	.0000
	3	.0018	.0930	.2265	.2174	.1358	.0641	.0243	.0076	.0019	.0004	.0001
	4	.0001	.0269	.1384	.2110	.1867	.1175	.0572	.0224	.0071	.0018	.0004
	5	.0000	.0060	.0646	.1564	.1960	.1645	.1030	.0506	.0199	.0063	.0016
	6	.0000	.0010	.0239	.0920	.1633	.1828	.1472	.0908	.0442	.0172	.0053
	7	.0000	.0001	.0072	.0441	.1108	.1654	.1712	.1327	.0800	.0381	.0143
	8	.0000	.0000	.0018	.0175	.0623	.1241	.1651	.1607	.1200	.0701	.0322
	9	.0000	.0000	.0004	.0058	.0294	.0781	.1336	.1635	.1511	.1084	.0609
	10	.0000	.0000	.0000	.0016	.0118	.0417	.0916	.1409	.1612	.1419	.0974
	11	.0000	.0000	.0000	.0004	.0040	.0189	.0536	.1034	.1465	.1583	.1328
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0012	.0074	.0268	.0650	.1140	.1511	.1550
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0025	.0115	.0350	.0760	.1236	.1550
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0007	.0042	.0161	.0434	.0867	.1328
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0064	.0212	.0520	.0974
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0021	.0088	.0266	.0609
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0031	.0115	.0322
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0042	.0143
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0053

Table 3 Individual Poisson Distribution

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

Table 3 (Continued)

x	λ = 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ = 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339

Table 3 (Continued)

x	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241

Table 3 (Continued)

x	λ = 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x	λ = 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ = 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189

Table 3 **(Continued)**

x	λ = 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

Table 3 (Continued)

	λ									
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

Table 4 Cumulative Standard Normal Distribution

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$F(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1 - F(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

Table 5 Cumulative Student's t Distribution

Entry is t where $P[T < t] = p$ and ν is the Degree of Freedom

$\nu \backslash p$	.60	.70	.80	.90	.95	.975	.990	.995	.999	.9995
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.60
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.22	12.94
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.859
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.405
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611	3.922
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	.257	.533	.860	.1325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	.255	.528	.849	1.298	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.495
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	.254	.527	.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.415
100	.254	.526	.845	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.174	3.389
200	.254	.525	.843	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.339
500	.253	.525	.842	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.106	3.310
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Table 6 Cumulative Chi-square Distribution

	p									
ν	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40
1	$0.0^{6}393$	$0.0^{5}157$	$0.0^{4}393$	$0.0^{3}157$	$0.0^{3}982$	$0.0^{2}393$	0.0158	0.0642	0.148	0.275
2	$0.0^{3}100$	$0.0^{2}200$	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.713	1.02
3	0.0153	0.0243	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.00	1.42	1.87
4	0.0639	0.0908	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.65	2.19	2.75
5	0.158	0.210	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.34	3.00	3.66
6	0.299	0.381	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.07	3.83	4.57
7	0.485	0.598	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	4.67	5.49
8	0.710	0.857	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	5.53	6.42
9	0.972	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	6.39	7.36
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	7.27	8.30
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	8.15	9.24
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	9.03	10.2
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	9.93	11.1
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	10.8	12.1
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.3	11.7	13.0
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.2	12.6	14.0
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.0	13.5	14.9
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	12.9	14.4	15.9
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	13.7	15.4	16.9
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	14.6	16.3	17.8
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	15.4	17.2	18.8
22	6.40	6.98	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	16.3	18.1	19.7
23	6.92	7.53	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	17.2	19.0	20.7
24	7.45	8.08	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	18.1	19.9	21.7
25	7.99	8.65	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	18.9	20.9	22.6
26	8.54	9.22	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	19.8	21.8	23.6
27	9.09	9.80	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	20.7	22.7	24.5
28	9.66	10.4	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	21.6	23.6	25.5
29	10.2	11.0	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	22.5	24.6	26.5
30	10.8	11.6	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	23.4	25.5	27.4
31	11.4	12.2	14.5	15.7	17.5	19.3	21.4	24.3	26.4	28.4
32	12.0	12.8	15.1	16.4	18.3	20.1	22.3	25.1	27.4	29.4
33	12.6	13.4	15.8	17.1	19.0	20.9	23.1	26.0	28.3	30.3
34	13.2	14.1	16.5	17.8	19.8	21.7	24.0	26.9	29.2	31.3
35	13.8	14.7	17.2	18.5	20.6	22.5	24.8	27.8	30.2	32.3
36	14.4	15.3	17.9	19.2	21.3	23.3	25.6	28.7	31.1	33.3
37	15.0	16.0	18.6	20.0	22.1	24.1	26.5	29.6	32.1	34.2
38	15.6	16.6	19.3	20.7	22.9	24.9	27.3	30.5	33.0	35.2
39	16.3	17.3	20.0	21.4	23.7	25.7	28.2	31.4	33.9	36.2
40	16.9	17.9	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	32.3	34.9	37.1
41	17.5	18.6	21.4	22.9	25.2	27.3	29.9	33.3	35.8	38.1
42	18.2	19.2	22.1	23.7	26.0	28.1	30.8	34.2	36.8	39.1
43	18.8	19.9	22.9	24.4	26.8	29.0	31.6	35.1	37.7	40.0
44	19.5	20.6	23.6	25.1	27.6	29.8	32.5	36.0	38.6	41.0
45	20.1	21.3	24.3	25.9	28.4	30.6	33.4	36.9	39.6	42.0
46	20.8	21.9	25.0	26.7	29.2	31.4	34.2	37.8	40.5	43.0
47	21.5	22.6	25.8	27.4	30.0	32.3	35.1	38.7	41.5	43.9
48	22.1	23.3	26.5	28.2	30.8	33.1	35.9	39.6	42.4	44.9
49	22.8	24.0	27.2	28.9	31.6	33.9	36.8	40.5	43.4	45.9
50	23.5	24.7	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	41.4	44.3	46.9

Table 6 **(Continued)**

ν	p = 0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
1	0.455	0.708	1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	12.1
2	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	15.2
3	2.37	2.95	3.67	4.64	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	17.7
4	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	20.0
5	4.35	5.13	6.06	7.29	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	22.1
6	5.35	6.21	7.23	8.56	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	24.1
7	6.35	7.28	8.38	9.80	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	26.0
8	7.34	8.35	9.52	11.0	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	27.9
9	8.34	9.41	10.7	12.2	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	29.7
10	9.34	10.5	11.8	13.4	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	31.4
11	10.3	11.5	12.9	14.6	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	33.1
12	11.3	12.6	14.0	15.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	34.8
13	12.3	13.6	15.1	17.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	36.5
14	13.3	14.7	16.2	18.2	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	38.1
15	14.3	15.7	17.3	19.3	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	39.7
16	15.3	16.8	18.4	20.5	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	41.3
17	16.3	17.8	19.5	21.6	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	42.9
18	17.3	18.9	20.6	22.8	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	44.4
19	18.3	19.9	21.7	23.9	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	46.0
20	19.3	21.0	22.8	25.0	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	47.5
21	20.3	22.0	23.9	26.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	49.0
22	21.3	23.0	24.9	27.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	50.5
23	22.3	24.1	26.0	28.4	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	52.0
24	23.3	25.1	27.1	29.6	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	53.5
25	24.3	26.1	28.2	30.7	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	54.9
26	25.3	27.2	29.2	31.8	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	56.4
27	26.3	28.2	30.3	32.9	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	57.9
28	27.3	29.2	31.4	34.0	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	59.3
29	28.3	30.3	32.5	35.1	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	60.7
30	29.3	31.3	33.5	36.3	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	62.2
31	30.3	32.3	34.6	37.4	41.4	45.0	48.2	52.2	55.0	61.1	63.6
32	31.3	33.4	35.7	38.5	42.6	46.2	49.5	53.5	56.3	62.5	65.0
33	32.3	34.4	36.7	39.6	43.7	47.4	50.7	54.8	57.6	63.9	66.4
34	33.3	35.4	37.8	40.7	44.9	48.6	52.0	56.1	59.0	65.2	67.8
35	34.3	36.5	38.9	41.8	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6	69.2
36	35.3	37.5	39.9	42.9	47.2	51.0	54.4	58.6	61.6	68.0	70.6
37	36.3	38.5	41.0	44.0	48.4	52.2	55.7	59.9	62.9	69.3	72.0
38	37.3	39.6	42.0	45.1	49.5	53.4	56.9	61.2	64.2	70.7	73.4
39	38.3	40.6	43.1	46.2	50.7	54.6	58.1	62.4	65.5	72.1	74.7
40	39.3	41.6	44.2	47.3	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4	76.1
41	40.3	42.7	45.2	48.4	52.9	56.9	60.6	65.0	68.1	74.7	77.5
42	41.3	43.7	46.3	49.5	54.1	58.1	61.8	66.2	69.3	76.1	78.8
43	42.3	44.7	47.3	50.5	55.2	59.3	63.0	67.5	70.6	77.4	80.2
44	43.3	45.7	48.4	51.6	56.4	60.5	64.2	68.7	71.9	78.7	81.5
45	44.3	46.8	49.5	52.7	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1	82.9
46	45.3	47.8	50.5	53.8	58.6	62.8	66.6	71.2	74.4	81.4	84.2
47	46.3	48.8	51.6	54.9	59.8	64.0	67.8	72.4	75.7	82.7	85.6
48	47.3	49.8	52.6	56.0	60.9	65.2	69.0	73.7	77.0	84.0	86.9
49	48.3	50.9	53.7	57.1	62.0	66.3	70.2	74.9	78.2	85.4	88.2
50	49.3	51.9	54.7	58.2	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7	89.6

Table 6 (Continued)

ν	p = 0.0005	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
51	24.1	25.4	28.7	30.5	33.2	35.6	38.6	42.4	45.3	47.8	50.3
52	24.8	26.1	29.5	31.2	34.0	36.4	39.4	43.3	46.2	48.8	51.3
53	25.5	26.8	30.2	32.0	34.8	37.3	40.3	44.2	47.2	49.8	52.3
54	26.2	27.5	31.0	32.8	35.6	38.1	41.2	45.1	48.1	50.8	53.3
55	26.9	28.2	31.7	33.6	36.4	39.0	42.1	46.0	49.1	51.7	54.3
56	27.6	28.9	32.5	34.3	37.2	39.8	42.9	47.0	50.0	52.7	55.3
57	28.2	29.6	33.2	35.1	38.0	40.6	43.8	47.9	51.0	53.7	56.3
58	28.9	30.3	34.0	35.9	38.8	41.5	44.7	48.8	51.9	54.7	57.3
59	29.6	31.0	34.8	36.7	39.7	42.3	45.6	49.7	52.9	55.6	58.3
60	30.3	31.7	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	50.6	53.8	56.6	59.3
61	31.0	32.5	36.3	38.3	41.3	44.0	47.3	51.6	54.8	57.6	60.3
62	31.7	33.2	37.1	39.1	42.1	44.9	48.2	52.5	55.7	58.6	61.3
63	32.5	33.9	37.8	39.9	43.0	45.7	49.1	53.4	56.7	59.6	62.3
64	33.2	34.6	38.6	40.6	43.8	46.6	50.0	54.3	57.6	60.5	63.3
65	33.9	35.4	39.4	41.4	44.6	47.4	50.9	55.3	58.6	61.5	64.3
66	34.6	36.1	40.2	42.2	45.4	48.3	51.8	56.2	59.5	62.5	65.3
67	35.3	36.8	40.9	43.0	46.3	49.2	52.7	57.1	60.5	63.5	66.3
68	36.0	37.6	41.7	43.8	47.1	50.0	53.5	58.0	61.4	64.4	67.3
69	36.7	38.3	42.5	44.6	47.9	50.9	54.4	59.0	62.4	65.4	68.3
70	37.5	39.0	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	59.9	63.3	66.4	69.3
71	38.2	39.8	44.1	46.2	49.6	52.6	56.2	60.8	64.3	67.4	70.3
72	38.9	40.5	44.8	47.1	50.4	53.5	57.1	61.8	65.3	68.4	71.3
73	39.6	41.3	45.6	47.9	51.3	54.3	58.0	62.7	66.2	69.3	72.3
74	40.4	42.0	46.4	48.7	52.1	55.2	58.9	63.6	67.2	70.3	73.3
75	41.1	42.8	47.2	49.5	52.9	56.1	59.8	64.5	68.1	71.3	74.3
76	41.8	43.5	48.0	50.3	53.8	56.9	60.7	65.5	69.1	72.3	75.3
77	42.6	44.3	48.8	51.1	54.6	57.8	61.6	66.4	70.0	73.2	76.3
78	43.3	45.0	49.6	51.9	55.5	58.7	62.5	67.3	71.0	74.2	77.3
79	44.1	45.8	50.4	52.7	56.3	59.5	63.4	68.3	72.0	75.2	78.3
80	44.8	46.5	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	69.2	72.9	76.2	79.3
81	45.5	47.3	52.0	54.4	58.0	61.3	65.2	70.1	73.9	77.2	80.3
82	46.3	48.0	52.8	55.2	58.8	62.1	66.1	71.1	74.8	78.1	81.3
83	47.0	48.8	53.6	56.0	59.7	63.0	67.0	72.0	75.8	79.1	82.3
84	47.8	49.6	54.4	56.8	60.5	63.9	67.9	72.9	76.8	80.1	83.3
85	48.5	50.3	55.2	57.6	61.4	64.7	68.8	73.9	77.7	81.1	84.3
86	49.3	51.1	56.0	58.5	62.2	65.6	69.7	74.8	78.7	82.1	85.3
87	50.0	51.9	56.8	59.3	63.1	66.5	70.6	75.7	79.6	83.0	86.3
88	50.8	52.6	57.6	60.1	63.9	67.4	71.5	76.7	80.6	84.0	87.3
89	51.5	53.4	58.4	60.9	64.8	68.2	72.4	77.6	81.6	85.0	88.3
90	52.3	54.2	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	78.6	82.5	86.0	89.3
91	53.0	54.9	60.0	62.6	66.5	70.0	74.2	79.5	83.5	87.0	90.3
92	53.8	55.7	60.8	63.4	67.4	70.9	75.1	80.4	84.4	88.0	91.3
93	54.5	56.5	61.6	64.2	68.2	71.8	76.0	81.4	85.4	88.9	92.3
94	55.3	57.2	62.4	65.1	69.1	72.6	76.9	82.3	86.4	89.9	93.3
95	56.1	58.0	63.2	65.9	69.9	73.5	77.8	83.2	87.3	90.9	94.3
96	56.8	58.8	64.1	66.7	70.8	74.4	78.7	84.2	88.3	91.9	95.3
97	57.6	59.6	64.9	67.6	71.6	75.3	79.6	85.1	89.2	92.9	96.3
98	58.4	60.4	65.7	68.4	72.5	76.2	80.5	86.1	90.2	93.8	97.3
99	59.1	61.1	66.5	69.2	73.4	77.0	81.4	87.0	91.2	94.8	98.3
100	59.9	61.9	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	87.9	92.1	95.8	99.3

Table 6 (Continued)

	p									
ν	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
51	52.9	55.8	59.2	64.3	68.7	72.6	77.4	80.7	88.0	90.9
52	53.9	56.8	60.3	65.4	69.8	73.8	78.6	82.0	89.3	92.2
53	55.0	57.9	61.4	66.5	71.0	75.0	79.8	83.3	90.6	93.5
54	56.0	58.9	62.5	67.7	72.2	76.2	81.1	84.5	91.9	94.8
55	57.0	60.0	63.6	68.8	73.3	77.4	82.3	85.7	93.2	96.2
56	58.0	61.0	64.7	69.9	74.5	78.6	83.5	87.0	94.5	97.5
57	59.1	62.1	65.7	71.0	75.6	79.8	84.7	88.2	95.8	98.8
58	60.1	63.1	66.8	72.2	76.8	80.9	86.0	89.5	97.0	100.1
59	61.1	64.2	67.9	73.3	77.9	82.1	87.2	90.7	98.3	101.4
60	62.1	65.2	69.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6	102.7
61	63.2	66.3	70.0	75.5	80.2	84.5	89.6	93.2	100.9	104.0
62	64.2	67.3	71.1	76.6	81.4	85.7	90.8	94.4	102.2	105.3
63	65.2	68.4	72.2	77.7	82.5	86.8	92.0	95.6	103.4	106.6
64	66.2	69.4	73.3	78.9	83.7	88.0	93.2	96.9	104.7	107.9
65	67.2	70.5	74.4	80.0	84.8	89.2	94.4	98.1	106.0	109.2
66	68.3	71.5	75.4	81.1	86.0	90.3	95.6	99.3	107.3	110.5
67	69.3	72.6	76.5	82.2	87.1	91.5	96.8	100.6	108.5	111.7
68	70.3	73.6	77.6	83.3	88.3	92.7	98.0	101.8	109.8	113.0
69	71.3	74.6	78.6	84.4	89.4	93.9	99.2	103.0	111.1	114.3
70	72.4	75.7	79.7	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	112.3	115.6
71	73.4	76.7	80.8	86.6	91.7	96.2	101.6	105.4	113.6	116.9
72	74.4	77.8	81.9	87.7	92.8	97.4	102.8	106.6	114.8	118.1
73	75.4	78.8	82.9	88.8	93.9	98.5	104.0	107.9	116.1	119.4
74	76.4	79.9	84.0	90.0	95.1	99.7	105.2	109.1	117.3	120.7
75	77.5	80.9	85.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6	121.9
76	78.5	82.0	86.1	92.2	97.4	102.0	107.6	111.5	119.9	123.2
77	79.5	83.0	87.2	93.3	98.5	103.2	108.8	112.7	121.1	124.5
78	80.5	84.0	88.3	94.4	99.6	104.3	110.0	113.9	122.3	125.7
79	81.5	85.1	89.3	95.5	100.7	105.5	111.1	115.1	123.6	127.0
80	82.6	86.1	90.4	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8	128.3
81	83.6	87.2	91.5	97.7	103.0	107.8	113.5	117.5	126.1	129.5
82	84.6	88.2	92.5	98.8	104.1	108.9	114.7	118.7	127.3	130.8
83	85.6	89.2	93.6	99.9	105.3	110.1	115.9	119.9	128.6	132.0
84	86.6	90.3	94.7	101.0	106.4	111.2	117.1	121.1	129.8	133.3
85	87.7	91.3	95.7	102.1	107.5	112.4	118.2	122.3	131.0	134.5
86	88.7	92.4	96.8	103.2	108.6	113.5	119.4	123.5	132.3	135.8
87	89.7	93.4	97.9	104.3	109.8	114.7	120.6	124.7	133.5	137.0
88	90.7	94.4	98.9	105.4	110.9	115.8	121.8	125.9	134.7	138.3
89	91.7	95.5	100.0	106.5	112.0	117.0	122.9	127.1	136.0	139.5
90	92.8	96.5	101.1	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2	140.8
91	93.8	97.6	102.1	108.7	114.3	119.3	125.3	129.5	138.4	142.0
92	94.8	98.6	103.2	109.8	115.4	120.4	126.5	130.7	139.7	143.3
93	95.8	99.6	104.2	110.9	116.5	121.6	127.6	131.9	140.9	144.5
94	96.8	100.7	105.3	111.9	117.6	122.7	128.8	133.1	142.1	145.8
95	97.9	101.7	106.4	113.0	118.8	123.9	130.0	134.2	143.3	147.0
96	98.9	102.8	107.4	114.1	119.9	125.0	131.1	135.4	144.6	148.2
97	99.9	103.8	108.5	115.2	121.0	126.1	132.3	136.6	145.8	149.5
98	100.9	104.8	109.5	116.3	122.1	127.3	133.5	137.8	147.0	150.7
99	101.9	105.9	110.6	117.4	123.2	128.4	134.6	139.0	148.2	151.9
100	102.9	106.9	111.7	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4	153.2