# วิธีการสร้างและการตีความตัวแปรไร้มิติแบบใหม่

# Construction and Interpretation of Dimensionless Variables in a New Way

ทวิช จิตรสมบูรณ์

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อ. เมือง จ.นครราชสีมา30000

โทร: (044) 224224, โทรสาร: (044)224220, Email: tabon@ccs.sut.ac.th

Tawit Chitsomboon

Dept. of Mechanical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakornratchasima 30000, Thailand

Tel. (044) 224224, Fax. (044) 224220

**บทคัดย่อ**

การสร้างตัวแปรไร้มิติทางกลศาสตร์ของไหลด้วยทฤษฎีไพของบัคกิงแฮมนั้นโดยทั่วไปแล้วจะต้องแก้ปัญหาพีชคณิตสามมิติเป็นจำนวนครั้งเท่ากับจำนวนตัวแปรคุณลักษณ์ที่ต้องการหา บทความนี้จะนำเสนอแนวทางใหม่ในการหาตัวแปรคุณลักษณ์(ตัวแปรไร้มิติ) โดยจะสร้างหน่วยวัดพื้นฐานของมวล ระยะ และเวลา ขึ้นมาจากตัวแปรพื้นฐาน จากนั้นนำหน่วยวัดพื้นฐานมาสังเคราะห์ให้เป็นหน่วยวัดคุณลักษณ์ของตัวแปรที่ต้องการจะวัด วิธีนี้ทำให้ง่ายกว่าวิธีทฤษฎีไพของบัคกิงแฮม เพราะไม่ต้องแก้ปัญหาสมการพีชคณิตสามชั้นหลายครั้ง นอกจากนี้ ยังทำให้เกิดมุมมองที่แปลกใหม่ในการตีความตัวแปรคุณลักษณ์ต่างๆ อีกด้วย ซึ่งทำให้เข้าใจบทบาทของตัวแปรในการสร้างความเหมือนของข้อมูลได้กระจ่างและหลากหลายมากขึ้น

**Abstract**

The use of Buckingham's Pi Theorem in the construction of dimensionless variables of Fluid Mechanics usually involves solving three-variable algebraic equations. This paper will present a new methodology in finding characteristic (dimensionless) variables without having to solve any algebraic equations. Moreover, the new method allow a new interpretation of the characteristic variables which helps further the understanding of the characteristic variables' roles in promoting similarity of data between model testing and prototype.

## 1.บทนำ

เรื่องหน่วยวัดนี้เป็นเรื่องที่คุ้นเคยกันเป็นอย่างดี ทำให้วิศวกรไม่ค่อยได้ให้ความสำคัญเท่าใด หรือให้ความสำคัญเพียงแค่สามารถนำไปใช้งานได้ แท้จริงแล้วเรื่องนี้เป็นเรื่องที่มีความลึกซึ้งซ่อนเร้นอยู่ในความง่ายๆ และมีประเด็นทางปรัชญาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย หลักการโดยทั่วไปในทางวิศวกรรมศาสตร์คือ หลักการที่กล่าวว่า พจน์ต่างๆ ในสมการเดียวกันที่นำมาบวกลบกันนั้นจะต้องมีหน่วยเดียวกัน ซึ่งก็ไม่ใช่เรื่องแปลกหรือลึกซึ้งแต่ประการใด เพราะหากมีใครสักคนกล่าวว่า 3 หมา บวก 5 แรด เท่ากับ 8 ไก่ ใครอีกหลายคนก็อาจหัวเราะเยาะว่าไม่ชอบด้วยเหตุผลโดยพลัน แต่เชื่อหรือไม่ว่าวิศวกรในอดีต (หรือแม้แต่ในปัจจุบัน) ได้สร้างสมการหรือสูตรต่างๆ เพื่อการออกแบบอุปกรณ์ทางวิศวกรรมเป็นจำนวนมากที่มีลักษณะเช่นนี้ กล่าวคือ แต่ละพจน์ของสมการเดียวกันมีหน่วยไม่เหมือนกัน แต่ก็นำมาบวกลบกันได้ เช่นวิศกรท่านหนึ่งอาจจะทำการทดลองวัดหาแรงต้านจากอากาศ (drag) ของหุ่นจำลองรถยนต์ (ซึ่งมีขนาดเล็กกว่ารถยนต์ต้นแบบที่จะสร้างขึ้น) เมื่อได้สร้างสมการให้เกาะกับผลการทดลองเพื่อเป็นสมการปฏิสัมพันธ์วิศวกรรม(engineering correlation)ซึ่งได้สมการเป็น

$$F = 0.01V^2 + 0.002(P - P_a)$$

ซึ่งบ่งบอกว่าแรงฉุดเป็นปฏิภาคกับความเร็วและความแตกต่างระหว่างความดันบรรยากาศกับความดันบรรยากาศที่ระดับน้ำทะเล ซึ่งเป็นสมการที่สมจริงในเชิงตัวเลขเป็นอย่างยิ่งเพราะได้มาจากการทดลองโดยตรง แต่จะเห็นว่าหน่วยของพจน์ทั้งสามในสมการแตกต่างกันมาก

นอกจากหน่วยจะไม่ตรงกันแล้ว การทดลองจนได้สมการมาเช่นนี้ทำให้สิ้นเปลืองมาก เช่นหากในครั้งแรกต้องทำการทดลองเป็นจำนวนสิบจุดการทดลอง ($F$ กับ $V$) ในการซ้ำตัวแปรตัวที่สอง ($P$) ต้องทำอีกสิบจุด ณ จุด ($F$,$V$) ใดๆจุดหนึ่ง รวมทั้งหมดเป็น 100 ครั้ง วิศวกรผู้ชาญฉลาดในอดีตได้ทำการวิเคราะห์และพบแนวทางที่ไม่ต้องทำการทดลองซ้ำบ่อยๆ ซึ่งเกี่ยวพันกับหน่วยวัด และ มิติของตัวแปรต่างๆ ซึ่งได้วิวัฒนาการมาเป็นทฤษฎีของการทำการทดลองเพื่อทำให้ได้ข้อมูลการทดลองที่มีประโยชน์มากที่สุด และประหยัดมากที่สุดด้วย เช่น แทนที่จะต้องทำการทดลองถึง 100 ครั้งก็อาจทำเพียง 10 ครั้งก็พอแล้ว และยังได้ข้อมูลทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพเท่ากับการทำการทดลอง 100 ครั้งทุกประการ

การทดลองดังกล่าวนี้เป็นการทดลองในหุ่นจำลองที่มีขนาดไม่เท่าของจริง แต่สิ่งที่วิศวกรต้องการจริงๆนั้นคือแรงที่กระทำต่อรถยนต์ขนาดใหญ่เท่าของจริง (รถยนต์ต้นแบบ) ดังนั้นแรงจริงควรจะต้องใหญ่กว่านี้ หากหุ่นจำลองเล็กกว่าต้นแบบ 5 เท่า ก็ไม่ได้หมายความว่าแรงจริงจะใหญ่กว่าแรงหุ่นจำลอง 5 เท่าไปด้วย ปัญหานี้เป็นปัญหาที่สำคัญมากกว่าการทำการทดลองมากครั้งเกินไปเสียอีก เพราะหากไม่ทราบกฎของการเปลี่ยนขนาด (scaling law) การทำการทดลองในหุ่นจำลองก็จะไม่มีประโยชน์อะไรเลย ไม่ว่าจะทำมากครั้งหรือทำอย่างประหยัดก็ตาม เพราะข้อมูลที่ได้นี้จะนำไปใช้ประโยชน์ในการออกแบบเครื่องต้นแบบไม่ได้

การเปลี่ยนมาใช้หน่วยวัดคุณลักษณ์ในการวัดค่าการทดลองจะทำให้ข้อมูลที่วัดจากหุ่นจำลองมีความเสมือนกับข้อมูลในเครื่องต้นแบบที่มีขนาดไม่เท่าหุ่นจำลอง โดยมีผลพลอยได้อันสำคัญคือ ทำให้ประหยัดเป็นอย่างมาก และทำให้ข้อมูลมีความกะทัดรัด ซึ่งเป็นการง่ายต่อการวิเคราะห์และตีความเชิงวิศวกรรมศาสตร์

## 2. หน่วยของปริมาณต่าง ๆ

จากประสบการณ์ของวิศวกรพบว่า ในสมการหนึ่งๆ ที่สร้างมาจากกฎพื้นฐานทางฟิสิกส์นั้น พจน์ต่าง ๆ ในสมการที่นำมาบวกลบกัน จะต้องมีหน่วยเดียวกันเสมอ หากลองพิจารณาสมการเบอร์นูลลีที่คุ้นเคยกันดี

$$p + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h = C_1 \qquad (1)$$

ถ้าเขียนทุกพจน์ให้อยู่ในรูปของหน่วยพื้นฐานคือ มวล ระยะ เวลา จะเห็นว่าทุกพจน์มีหน่วยเดียวกัน ดังนั้นหากหารตลอดด้วยค่าคงตัวสักอันหนึ่งที่มีหน่วยเป็นความดัน เช่น หารตลอดด้วยความดันตรงทางเข้า (ซึ่งอาจให้สัญลักษณ์ว่า $p_\infty$) ก็จะได้สมการเป็น

$$\frac{p}{p_\infty} + \frac{\rho V^2}{2p_\infty} + \frac{\rho g h}{p_\infty} = C_2 \qquad (2)$$

ซึ่งจะเห็นว่าพจน์ทุกพจน์ รวมทั้ง $C_2$ เป็นพจน์ที่ไม่มีหน่วย ดังนั้นการที่กล่าวว่าต้องมีหน่วยเดียวกันนั้น พึงเข้าใจว่าการ"ไม่มีหน่วย"เหมือนกันทั้งหมดก็ถือว่าเป็นการถูกต้องด้วย จุดนี้ได้กลายมาเป็นจุดอ้างอิงที่สะดวกมากและนิยมกันมากในการวิเคราะห์มิติของตัวแปรเพื่อวัตถุประสงค์ในการทำการทดลอง และอาจบัญญัติเป็นหลักการพื้นฐานได้ว่า "พจน์ต่างๆที่จะมีปฏิสัมพันธ์ต่อกันในระบบทฤษฎีหรือระบบการทดลองจะต้องไม่มีหน่วยเหมือนกันทุกพจน์"

### 2.1 หน่วยพื้นฐาน

หน่วยวัดของปริมาณต่างๆนั้นแท้จริงแล้วประกอบด้วยหน่วยพื้นฐานเพียง 3-4 หน่วยเท่านั้น ในวิชากลศาสตร์จะมีหน่วยพื้นฐานเพียง 3 หน่วย คือ มวล (mass) ระยะ (length) และ เวลา(time) ซึ่งอาจให้สัญลักษณ์ได้ว่ามีหน่วยเป็น $M$ $L$ และ $T$ ตามลำดับ หน่วยของปริมาณอื่นๆสามารถเขียนได้ในนามของหน่วยพื้นฐานนี้ทั้งสิ้น เช่น แรง อัตราการไหล ความเร็ว ปริมาตร กำลังงาน เป็นต้น

สมการที่สำคัญที่สุดอันหนึ่งในวิศวกรรมศาสตร์คือสมการที่ได้รับการ"บัญญัติ"ขึ้นมาโดยท่านนิวตัน ที่กล่าวว่า $F = ma$ ดังนั้นหน่วยของ $F$ ต้องเป็นหน่วยเดียวกับ $ma$ ซึ่งเป็นปริมาณที่มีหน่วยของมวล ระยะ เวลาอยู่ในนั้นทั้งหมด แต่เพื่อความสะดวกจึงมักนิยมบัญญัติให้หน่วยวัดแรงเป็นหน่วยนิวตัน (ในระบบ MKS) ซึ่งมีค่าหนึ่งหน่วยนิวตันเป็นขนาดกำหนดที่แน่นอนอันหนึ่ง ส่วน หน่วยวัดความดัน อาจถูกกำหนดให้เป็นปาสคาล (Pascal) ซึ่งสามารถกระจายออกได้เป็น นิวตัน ต่อ ตารางเมตร และหน่วยนิวตันซึ่งเป็นหน่วยของแรงนั้นสามารถกระจายให้อยู่ในรูปหน่วยของ $ma$ (ตามกฎข้อที่สองของนิวตัน) ได้ว่า นิวตัน = $kg \times m/sec^2$ ดังนั้นหน่วยปาสคาลนั้นแท้จริงแล้วก็มีหน่วยพื้นฐานเป็น kg /m-$sec^2$ ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปของมวล ระยะ เวลา ทั้งสิ้น และอาจเขียนให้อยู่ในนามของ $M$, $L$, ,$T$ ได้ว่า $D[Pascal]=ML^{-1}T^{-2}$ (โดยอ่าน $D[Pascal]$ ว่า หน่วยของปาสคาล หรือ Dimension of Pascal)

อาจอุปมาการวัดในลักษณะนี้ดังการวัดสารเคมี ที่มีทั้งสารบริสุทธิ์และสารประกอบ เราสามารถวัดมวลของสารประกอบได้เมื่อทราบโครงสร้างโมเลกุลที่ประกอบด้วยอะตอมของสารบริสุทธิ์ เช่น $H_2O$ ประกอบด้วย หนึ่งโมเลกุลของ $H_2$ และครึ่งโมเลกุลของ $O_2$ เป็นต้น ฉันใดก็ฉันนั้น มิติก็มีทั้งมิติบริสุทธิ์ และมิติประกอบ มิติบริสุทธิ์ในทางกลศาสตร์มีเพียงสาม คือ มวล ระยะ และ เวลา แต่มิติประกอบมีมากมาย เช่น แรง ความดัน ปริมาตร กำลังงาน แรงบิด เป็นต้น เราจึงสามารถวัดค่าของตัวแปรที่มีมิติประกอบได้จาก หน่วยวัดของมิติบริสุทธิ์ที่เป็นองค์ประกอบของมิติประกอบของตัวแปรนั้นๆ

## 3. ทฤษฎีไพของบัคกิงแฮม (Buckingham Pi Theorem)

ในปีค.ศ. 1914 ท่าน บัคกิงแฮม (Buckingham) วิศวกรชาวอังกฤษได้คิดค้นกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างง่ายและกะทัดรัดพอสมควรในการหาตัวแปรไร้มิติ(ซึ่งเรียกในที่นี้ว่าตัวแปรคุณลักษณ์)ให้กับรายการตัวแปรที่จะทำการทดลอง และเรียกกรรมวิธีนี้ว่า "ไพ" ($\pi$) ซึ่งเป็นตัวอักษรกรีกที่มักถูกใช้เป็นสัญลักษณ์ของการคูณกันของกลุ่มตัวแปร ซึ่งเป็นนัยเดียวกันกับการคูณกันของกลุ่มตัวแปรต่างๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งตัวแปรไร้มิติ

สมมุติว่าต้องการทำการทดลองเพื่อวัดแรงต้านของอากาศที่กระทำต่อรถยนต์คันหนึ่ง (Drag force, $F_D$) ก่อนอื่นวิศวกรจะต้องคำนึงว่าตัวแปรอิสระอะไรบ้างที่มีผลต่อแรงต้าน สมมุติว่าวิศวกรได้ประเมินแล้วว่าแรงฉุดต่อรถยนต์ขึ้นอยู่กับตัวแปรต่างๆดังนี้

$$F_D = f^n(\rho, L, V, \mu, g, p) \qquad (3)$$

ทั้งนี้ตัวแปรอิสระทางขวามือนั้นเป็นค่าคงที่ในปัญหาหนึ่งๆ สำหรับในระบบการไหลมักนิยมให้เป็นค่าที่ต้นน้ำ (upstream) เช่น ความดัน ก็จะเป็นความดันบรรยากาศในขณะที่ทำการทดลอง ซึ่งมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง และไม่ใช่ความดันบนผิวรถยนต์ การหาตัวแปรไร้มิตินั้นเริ่มต้นด้วย

การเขียนหน่วยของปริมาณทุกปริมาณในสมการให้อยู่ในรูปของ $MLT$ จากนั้นเลือก "ตัวแปรซ้ำ" (repeating variables) สมมุติว่าเลือก $\rho, V, L$ เป็นตัวแปรซ้ำ ขั้นต่อไปก็ให้นำตัวแปรซ้ำมายกกำลังและคูณกันทั้งหมด (ทำเป็น $\pi$) เสร็จแล้วนำไปทอน (หาร)ตัวแปรที่เหลือเช่น สำหรับ $F$ ก็ให้สร้างพจน์

$$\frac{F}{\rho^a V^b L^c}$$

ซึ่งพจน์นี้จะเป็นพจน์ที่ไม่มีหน่วยได้ก็ต่อเมื่อ กำลังของหน่วยของ $MLT$ ของเศษ เท่ากับกำลังของ $MLT$ ของส่วน ซึ่งหน่วยของพจน์ต่างๆ ในนามของมิติซ้ำ (repeating dimensions, $MLT$) จะเป็นดังนี้

$F = MLT^{-2}$, $\rho^a = (ML^{-3})^a$, $V^b = (LT^{-1})^b$, $L^c = L^c$

เมื่อเทียบกำลังของ $MLT$ ระหว่างเศษและส่วนให้เท่ากันจะเห็นว่า

กำลังของ $M$ : $1 = a$

กำลังของ $L$ : $1 = -3a + b + c$

กำลังของ $T$ : $-2 = -b$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้โดยง่ายว่า $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$

ดังนั้นตัวแปรไร้มิติที่แสวงหาก็คือ $\frac{F}{\rho^a V^b L^c} = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$

สำหรับตัวแปร $\mu$ ก็สามารถทำได้เช่นเดียวกันทุกประการคือ สร้างกลุ่มไพขึ้นมาก่อนเป็น

$$\frac{\mu}{\rho^a V^b L^c}$$

แล้วทำการกระจายมิติให้อยู่ในรูปของ $MLT$ เสร็จแล้วก็เทียบกำลังของ $MLT$ ระหว่างเศษและส่วนให้เท่ากัน ก็จะสามารถแก้สมการหาค่า $a\ b\ c$ ได้ ซึ่งในกรณีของ $\mu$ จะได้ $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ ทำไปอย่างนี้เรื่อยๆ จนครบทุกตัวแปรที่ต้องการวัด

## 4. แนวคิดเรื่องหน่วยวัดคุณลักษณ์

ปริมาณที่อาจวัดได้อย่างง่ายที่สุดอย่างหนึ่ง คือ ความยาว เรามักพูดกันว่าห้องยาว 10 ฟิต แต่หากวัดด้วยระบบเมตริก ห้องเดียวกันนี้จะยาวประมาณ 3.048 เมตร ดังนั้นความยาวอันเดียวกันอาจมีตัวเลขบ่งบอกความยาวแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความยาวของหน่วยวัด (scale) การที่ห้องยาว 10 ฟุตนั้น ก็คือยาวเป็น10 เท่าของ "ไม้บรรทัด" ที่ใช้วัดนั่นเอง ดังนั้น หากเอาความยาวของห้องหารด้วยความยาวของไม้บรรทัดก็จะได้ค่าตัวเลขของความยาวของห้อง

ค่าตัวเลขความยาวห้อง = ความยาวห้อง (10 ฟุต) / ความยาวไม้บรรทัดวัด (1 ฟุต) = 10

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าแท้จริงแล้วห้องยาว 10 และไม่มีหน่วย เพราะหน่วยฟุตนั้นตัดกันไปหมดแล้วระหว่างหน่วยของห้องกับหน่วยของไม้บรรทัด หากเราใช้ไม้ยาว 2 ฟุตเป็นไม้บรรทัดวัด ก็จะได้ความยาวของห้องเป็น 5 แต่หากใช้ไม้บรรทัดขนาดยาว 3.28 ฟุต (หรือ 1 เมตร) ก็จะได้ความยาวห้องเป็น 3.048 (ซึ่งเท่ากับความยาวในระบบเมตริก) ดังนั้นตัวเลขบอกความยาวของห้องย่อมเปลี่ยนไปแล้วแต่ความยาวของไม้บรรทัดวัด ในทางปฏิบัติเรานิยมนำเอาค่าหน่วยความยาวของไม้บรรทัดวัดไปห้อยไว้หลังตัวเลขบอกความยาวด้วย แล้วเรียกเป็นหน่วยความยาว ว่าฟุต ว่าเมตร แล้วแต่กรณี แต่โดยพื้นฐานจริงๆแล้วไม่ควรมีหน่วยเลย เพราะหน่วยตัดกันไปหมดแล้ว ที่ให้มีหน่วยก็เพื่อความสะดวกในการพูดคุยสื่อสารกัน (แบบชาวบ้าน) เท่านั้น

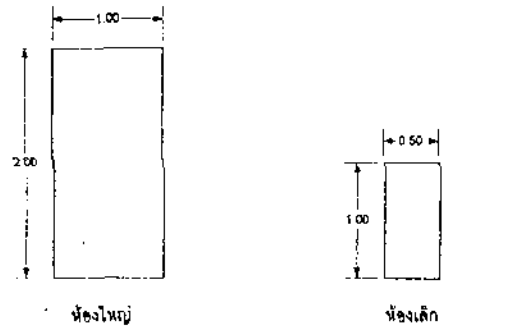
ไม้บรรทัดวัดแบบชาวบ้านนั้นเป็นไม้บรรทัดที่มีความยาวคงที่เสมอ ดังนั้น เราจะใช้ไม้บรรทัดขนาดเดียวกันนี้นี้วัดดวงอาทิตย์ โลก แม่น้ำ คลอง หัวย ลำธาร หรือ วัดช้าง วัว หมา กระต่าย และมด เราจึงสามารถบอกได้ว่าแม่น้ำใหญ่กว่าลำห้วย และ ช้างใหญ่กว่ามดเป็นล้น หากเราถามว่าช้างกับมดใครแข็งแรงกว่ากัน คำตอบแบบชาวบ้านก็คงเป็นว่าช้างต้องแข็งแรงกว่ามดหลายล้านเท่าเพราะแบกของได้หนักกว่ามดมาก แต่คำตอบแบบวิศวกรผู้ชาญฉลาดต้องตอบว่า หากจะให้เป็นธรรมต่อทั้งสองฝ่าย จะใช้ตาชั่ง (ไม้บรรทัดวัดน้ำหนัก) อันเดียวกันเพื่อวัดเทียบความแข็งแรงระหว่างช้างกับมดไม่ได้ ตาชั่ง(หรือหน่วยน้ำหนักที่ใช้วัด)ควรต้องมีขนาดที่เป็นสัดส่วนกับสิ่งที่กำลังถูกวัด เช่น ในส่วนของช้างนั้นอาจจะใช้น้ำหนักตัวของช้างเองเป็น 1 หน่วยน้ำหนัก ส่วนมดนั้นก็ใช้น้ำหนักตัวของมดเป็น 1 หน่วยน้ำหนัก หากใช้หน่วยวัดดังนี้ ช้างอาจจะลากท่อนซุงได้หนักประมาณ 1 เท่าของน้ำหนักตนเอง (ลากได้ 1 หน่วย) แต่มดนั้นอาจลากแมลงที่ตายแล้วได้หนักกว่าตนเองถึง 10 เท่า (ลากได้ 10 หน่วย) ดังนั้นมดจึงแข็งแรงกว่าช้าง 10 เท่าหากวัดด้วยหน่วยวัดที่อิงอยู่กับขนาดของสิ่งที่กำลังวัด

เราเรียก "ไม้บรรทัด" ที่เปลี่ยนไปตามขนาดของปัญหาว่า "หน่วยวัดคุณลักษณ์" (characteristic scale) ซึ่งมีความสำคัญยิ่งในการสร้างตัวแปรคุณลักษณ์ (ตัวแปรไร้มิติ) ทางวิศวกรรมศาสตร์

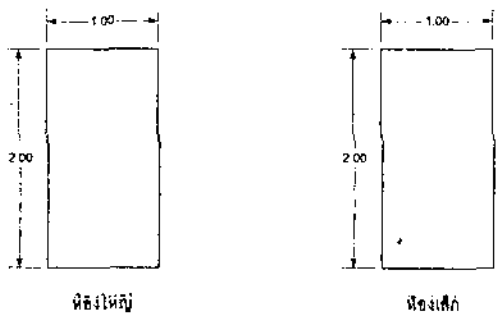
หากจะถามต่อไปว่าทำไมมดตัวนิดเดียวจึงยกของได้หนักกว่าช้างตั้ง 10 เท่า ก็อาจตอบว่ามดไม่ได้มีตัวเล็กอย่างที่คิด หากวัดขนาดของมดด้วยไม้บรรทัดคุณลักษณ์ (ที่ใช้วัดความยาว) เช่นอาจกำหนดว่าให้ใช้ขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของหัวสัตว์ใดๆ เป็นไม้บรรทัดวัดขนาดของสัตว์นั้นๆ ดังนั้น ช้างจะมีช่วงกว้างลำตัวประมาณ 2 และ ยาวประมาณ 5 ส่วนมดจะมีช่วงกว้างลำตัวประมาณ 1 และยาวประมาณ 10 จะเห็นว่าสัตว์ทั้งสองมีขนาดพอฟัดพอเหวี่ยงกันทีเดียว (แม้ช้างจะค่อนข้างสั้กว่าแต่มดก็ได้เปรียบช่วงชกที่ยาวกว่า)

## 5. แนวคิดเรื่องความเสมือน

หากพิจารณาสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองอันที่มีขนาดแตกต่างกัน(ดังรูป)เมื่อวัดด้วยหน่วยวัด "สัมบูรณ์" แต่หากกำหนดว่าให้ใช้ด้านกว้างของสี่เหลี่ยม (หรือด้านยาวก็ได้)เป็นหน่วยวัด จะทำให้ได้ค่าตัวเลขความกว้างและความยาวของทั้งสองเท่ากัน (ดังรูป)




(ก) วัดด้วยหน่วยวัดเดียวกัน




(ข) วัดด้วยความกว้างของห้อง

ดังนั้น หุ่นจำลองนาดเล็กของเครื่องบินอาจมีความเสมือนกับเครื่องบินจริง หากวัดด้วยสเกลของหุ่นจำลอง และ เครื่องบินจริงก็วัดด้วยสเกลของเครื่องบินเอง จากแนวคิดเรื่องความเสมือนทางรูปทรง จึงสามารถกำหนดเป็นคำนิยามได้ว่า: "วัตถุสองอันจะเสมือนกันทางรูปทรงหากมีมิติทุกส่วนเท่ากันทุกประการเมื่อวัดด้วยหน่วยวัดความยาวคุณลักษณ์ (characteristic length scale) ที่กำหนดขึ้นด้วยหลักเกณฑ์อันเดียวกัน" คำว่า "หลักเกณฑ์เดียวกัน" นี้ สามารถยกตัวอย่างให้เห็นกระจ่างขึ้น เช่น ใช้เส้นผ่านศูนย์กลางเหมือนกันหมดในกรณีลูกกลม (ไม่ใช่ว่าลูกปิงปองใช้เส้นผ่านศูนย์กลาง ส่วนลูกเทนนิสใช้ความยาวรัศมี เป็นต้น) หรือ ใช้ความยาวลำตัวเครื่องบินเหมือนกันหมด (ไม่ใช่ว่าต้นแบบใช้ความยาวลำตัว ส่วนหุ่นจำลองใช้ความยาวปีกเป็นต้น)

หากขยายแนวคิดในเรื่องรูปทรง (ซึ่งเป็นเรื่องของมิติของระยะทาง) ออกไปในเรื่องอื่นๆ ด้วย เช่น ความเร็ว ความหนาแน่น ความดัน แรง ความหนืด ความโน้มถ่วง และตั้งคำถามว่า สามารถวัดปริมาณเหล่านี้ด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์ได้ไหม โดยเมื่อวัดแล้วทำให้ปริมาณในสองระบบที่มีขนาดแตกต่างกัน กลายเป็นปริมาณที่เท่ากันได้ หากทำได้เช่นนี้ก็จะเป็นการดีมากเพราะอาจทำการทดลองในหุ่นจำลองที่มีขนาดแตกต่างจากต้นแบบ ซึ่งถ้าหากมีความเสมือนกันทั้งรูปทรงและปริมาณอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง การไหลก็ย่อมจะเหมือนกันทุกประการ ซึ่งจะทำให้สามารถใช้ผลการทดลอง(ที่วัดได้เป็นตัวเลข)จากหุ่นจำลองเพื่อการออกแบบต้นแบบได้

**6. ปรัชญาและแนวคิดเกี่ยวกับมิติของมวล ระยะ เวลา**

เรารู้ดีว่า เวลาคืออะไร แต่หากให้นิยามว่าเวลาคืออะไร ก็อาจจะอ้ำอึ้งกันพอสมควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าให้ตอบในเชิงวิศวกรรมศาสตร์หรือวิทยาศาสตร์ และโดยมีข้อแม้ว่าคำตอบต้องไม่ไปอิงอยู่กับปริมาณอื่นใดที่ยังไม่ได้ให้คำนิยามไว้ เช่น ห้ามใช้ระยะทาง หรือมวล หรือ แรง มาประกอบการนิยาม หากไม่รู้ว่าเวลาคืออะไร ก็ไม่น่าจะรู้ด้วยว่า ความเร็วคืออะไร เพราะความเร็วคือระยะทางต่อเวลา(และระยะทางคืออะไร?) และหากไม่รู้ว่าความเร็วคืออะไรก็จะไม่รู้ด้วยว่า โมเมนตัมคืออะไร เพราะโมเมนตัมคือมวลคูณด้วยความเร็ว (และมวลคืออะไร?) และหากไม่รู้ว่าโมเมนตัมคืออะไรก็ไม่น่ารู้ด้วยว่า แรงคืออะไร เพราะแรงคืออัตราเปลี่ยนต่อเวลาของโมเมนตัม หากไม่รู้ว่าแรงคืออะไรก็ไม่รู้ว่าวิศวกรรมศาสตร์คืออะไร!!!

สรุปแล้วเราอาจไม่ทราบแม้แต่ว่าเวลาคืออะไร จึงไม่มีทางทราบได้ว่าตัวเราคืออะไร เพราะตัวเราก็คือก้อนมวล ที่กินเนื้อที่ (ระยะทาง) และกำลังเดินทางไปในเวลา นอกจากนี้มนุษย์ยังมีจิตสำนึก และ ปฏิสัมพันธ์ของจิตสำนึกที่มีต่อ เวลา ระยะทาง และมวล พระพุทธเจ้าได้ทำทายมนุษย์ไว้ว่า แท้จริงแล้วเราไม่ใช่ตัวตนอย่างที่เราคิด แต่เป็นบางสิ่งบางอย่างที่ท่านให้ชื่อว่า อนัตตา (คือไม่ใช่ตัวตน)

แต่ถึงแม้จะไม่ทราบว่า ระยะ เวลา มวล คืออะไรกันแน่ แต่มนุษย์ก็สามารถ บัญญัติให้สิ่งเหล่านี้เป็นโน่นเป็นนี่ได้ และในทางปฏิบัติจริงนั้นแม้เราจะไม่ทราบว่าอะไรเป็นอะไรอย่างแท้จริงก็สามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ เช่น ไม่รู้ว่าอากาศคืออะไรแต่ก็นำมาใช้ในการหายใจได้ และไม่ทราบว่ามวลของเมล็ดข้าวกินเนื้อที่อยู่ในโลกได้อย่างไรแต่ก็นำมาบริโภคบรรเทาความหิวได้

**7. การสร้างและการวัดด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์**

เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย จะนำเสนอด้วยตัวอย่างการทำการทดลองเพื่อวัดแรงต้านของอากาศที่กระทำต่อรถยนต์คันหนึ่ง (Drag force, $F_D$ สมมุติว่าวิศวกรได้ประเมินแล้วว่า แรงฉุดต่อรถยนต์ขึ้นอยู่กับตัวแปรต่างๆ ดังนี้

$$F_D = f''(\rho, L, V, \mu, g, p) \qquad (4)$$

เนื่องจากตัวแปรทุกตัวมีหน่วยที่ไม่เหมือนกันเลย และไม่มีตัวแปรตัวไหนที่มีหน่วยเป็นหน่วยบริสุทธิ์เลย (ยกเว้น $L$ ที่มีหน่วยเป็น ระยะ ($L$)) ซึ่งเป็นหนึ่งในสามของหน่วยบริสุทธิ์ ($M$ $L$ $T$) ดังนั้นจึงต้องทำการแยกหาหน่วยบริสุทธิ์จากหน่วยประกอบของปริมาณทางขวามือ (อุปมาดังการแยกหาสารบริสุทธิ์จากสารประกอบทางเคมี) เมื่อได้หน่วยบริสุทธิ์แล้วก็จะได้นำไปประกอบกันเป็นหน่วยคุณลักษณ์อื่นๆเพื่อวัดปริมาณอื่นนั้นๆได้

เนื่องจากหน่วยบริสุทธิ์มีอยู่สามหน่วยด้วยกันคือ $M$ $L$ $T$ ดังนั้นจึงต้องใช้หน่วยประกอบ (ทางขวามือ) จำนวนสามหน่วยที่เป็นอิสระต่อกันมา "ทำปฏิกิริยา" กันเพื่อ "สังเคราะห์"หาหน่วยบริสุทธิ์ทั้งสามนี้ การทำปฏิกิริยาในที่นี้หมายถึงการนำมาคูณและหรือหารกันพร้อมทั้งทำการยก

กำลังที่เหมาะสม วิธีการเลือกหน่วยประกอบที่จะมาแยกหาหน่วยบริสุทธิ์นี้มีกฎอยู่ว่าจำนวนหน่วยประกอบอิสระจะต้องเท่ากับจำนวนหน่วยบริสุทธิ์ที่จะทำการแยกหา โดยให้คำนิยาม "หน่วยประกอบอิสระ" ว่าเป็นหน่วยที่ไม่สามารถสร้างขึ้นมาได้จากหน่วยประกอบอื่นที่อยู่ในกลุ่มที่ถูกเลือกด้วยกัน ในตัวอย่างนี้จะสมมุติว่าเลือก $\rho, L, V$ เป็นตัวแปรพื้นฐานซึ่งจะสามารถแยกหาหน่วยบริสุทธิ์ ($M$ $L$ $T$) ได้ดังนี้ ( $d[M]$ อ่านว่า มิติของ $M$ )

$$d[M] = d[\rho]d[L]^3$$
$$d[L] = d[L]$$
$$d[t] = d[L]/d[V] \qquad (5)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าสมการข้างบนทั้งสามนี้เป็นจริง ทั้งนี้ต้องอ่านสมการแรกว่า หน่วยของ $M$ เท่ากับหน่วยของ $\rho$ คูณกับหน่วยของ $L$ ยกกำลังสาม กล่าวคือนำแต่หน่วยมาทำปฏิกิริยากัน ส่วนค่าตัวเลขของหน่วยก็ใช้สมการเดียวกันในการคำนวณ เพียงแต่ตัดสัญลักษณ์ $d[\ ]$ ออกเท่านั้น เพื่อความสะดวก จากนี้ไปจะตัดสัญลักษณ์ $d[\ ]$ ออกจากสมการของหน่วยไม่ว่าจะเป็นการหาหน่วย หรือ การหาค่าตัวเลขของหน่วยก็ตาม ดังนั้น

$$M = \rho L^3, L = L, T = L/V = LV^{-1} \qquad (6)$$

ในขั้นต่อไป หากต้องการวัดแรงด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์ของแรง ก็ต้องทำการสร้างหน่วยวัดนี้ขึ้นมาจากหน่วยวัดบริสุทธิ์ โดยในขั้นแรกต้องเขียนหน่วยของแรงให้อยู่ในรูปของหน่วยบริสุทธิ์ ($M$ $L$ $T$) เสียก่อน ซึ่งจากกฎข้อที่สองของนิวตันได้บัญญัติว่า $F = Ma$ ดังนั้นหน่วยของแรงจึงต้องเท่ากับหน่วยของมวลคูณด้วยหน่วยของความเร่ง แต่หน่วยของความเร่งก็คือหน่วยของความเร็วหารด้วยเวลา และ หน่วยของความเร็วก็คือระยะทางหารด้วยเวลา ดังนั้น

$$F = Ma = \frac{MV}{t} = MLT^{-2} \qquad (7)$$

แต่ได้ทำการนิยามหน่วยและขนาดของ $M$ $L$ $T$ ในนามของหน่วยและขนาดของ $\rho, L, V$ แล้วดังสมการข้างบน ดังนั้นจึงจำเป็นต้องแปลงหน่วยให้อยู่ในหน่วยของ $\rho, L, V$ ดังนี้

$$F = MLT^{-2} = (\rho L^3)(L)(LV^{-1})^{-2} = (\rho)^1(L)^2(V)^2 \qquad (8)$$

สรุปความว่าหน่วยวัดแรงนั้นจะต้องสร้างขึ้นมาจากหน่วยวัดความหนาแน่น คูณกับหน่วยวัดระยะยกกำลังสอง และหน่วยวัดความเร็วยกกำลังสอง และในทำนองเดียวกันค่าตัวเลขของหน่วยวัดแรงก็คือค่าตัวเลขของ $\rho L^2 V^2$ ต่อจากนั้นต้องตระหนักว่าในการวัดนั้นเราวัดว่าสรรพสิ่งใหญ่เป็นกี่เท่าของหน่วยวัด ดังนั้นในการวัดแรงแบบคุณลักษณ์เราจึงเอาขนาดของแรงหารด้วยขนาดของหน่วยวัดคุณลักษณ์ ดังนี้

$$\text{ค่าตัวเลขของแรงที่วัดได้} = \frac{F}{(\rho)^1(L)^2(V)^2} \qquad (9)$$

ซึ่งตำราส่วนใหญ่จะเรียกค่าที่วัดได้นี้ในนามต่างๆ กัน เช่น ตัวแปรไร้มิติ (dimensionless variable), กลุ่มของไพ (Pi group), ตัวแปรเสมือน (similarity variable) แต่ในบทความนี้จะให้ความหมายเป็นเพียงการวัดค่าตัวแปรตัวหนึ่งด้วยหน่วยวัดที่สร้างขึ้นตามขนาดและคุณลักษณะของปัญหาเท่านั้น คำว่าตัวแปรไร้มิติ ซึ่งเป็นคำที่นิยมใช้กันมากที่สุดนั้น ผู้แต่งเห็นว่ากำกวมมาก เพราะดังที่เกริ่นความไว้แต่ต้นแล้วว่า แม้แต่การวัดในระบบชาวบ้านโดยทั่วไปก็อาจถือเป็นตัวแปรไร้มิติได้เช่นเดียวกัน ที่มาของคำว่าตัวแปรไร้มิติน่าจะเกิดจากการติดความที่ว่า ในระบบ MKS หาก $F$ มีหน่วยเป็นนิวตัน ค่าหน่วยวัดคุณลักษณะที่วัดแรง $[(\rho)^1(L)^2(V)^2]$ ก็มีหน่วยเป็นนิวตันด้วย ซึ่งทำให้มิติของหน่วย (นิวตันในที่นี้) ตัดกันหายไปหมด ค่าแรงที่วัดได้จึงไม่มีหน่วย แต่อาจลืมนึกไปว่าแม้แต่การวัดในหน่วยนิวตันเดิมนั้นความหมายก็คือ มีค่าตัวเลขเป็นจำนวนเท่าของหน่วยวัดที่มีขนาดเท่ากับ 1 นิวตัน ดังนั้นจึงมีสถานะเป็นตัวแปรไร้มิติโดยนัยเดียวกัน (เพราะหน่วยนิวตันของสิ่งที่ถูกวัดก็ถูกหน่วยนิวตันของสิ่งวัดตัดออกหมดเช่นเดียวกัน) จึงใคร่ขอเสนอคำว่า ตัวแปรคุณลักษณะ (characteristic variable) ถ้าจะให้ดีขึ้นควรใช้คำว่า ตัวแปรที่วัดค่าด้วยหน่วยคุณลักษณ์ (characteristically-measured variable) แต่ก็มีข้อเสียที่ความเยิ่นเย้อ

เมื่อได้ใช้ $\rho, L, V$ เป็นตัวแปรพื้นฐานแล้ว ดังนั้นหากต้องการวัด $\rho, L, V$ ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระอยู่ทางขวามือของสมการ ค่าของตัวแปรเหล่านี้ก็จะมีค่าเป็น 1 หมด เนื่องจากเอาตัวเองวัดตัวเอง และค่า 1 นี้จะเป็นค่าที่ได้เสมอไม่ว่าจะเปลี่ยน $\rho, L, V$ ไปอย่างไร ถึงจุดนี้อาจเขียนระบบตัวแปรได้ว่า

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = f''(l, t, \mu, g, p) \qquad (10)$$

ดังนั้น $\rho, L, V$ จึงไม่เป็นตัวแปรอีกต่อไปทั้งนี้เพราะมีค่าคงที่เท่ากับหนึ่งตลอดกาล จุดนี้กลายเป็นผลพลอยได้อันสำคัญของการใช้หน่วยวัดคุณลักษณ์ เพราะทำให้ตัวแปรลดลงถึงสามตัว ซึ่งหากทำการทดลองตัวแปรละ 10 จุด ก็เท่ากับว่าลดจำนวนการทดลองลงได้ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ เท่า ซึ่งเป็นการประหยัดอย่างมหาศาล

ตัวแปรอิสระสำคัญในรายการที่ได้เสนอไว้ทางขวามือของสมการที่ต้องวัดอีกสามตัวคือ ความดัน ความหนืด และ ค่าความโน้มถ่วงของโลก ซึ่งจะได้ทำการวิเคราะห์หาหน่วยวัดคุณลักษณ์เป็นลำดับไปดังนี้

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} = (\rho L^3)(L)^{-1}(L/V)^{-2} = \rho V^2 \qquad (11)$$

ดังนั้นการวัด $P$ จะวัดด้วยค่า $P/\rho V^2$ หรือ $P/0.5\rho V^2$ ก็ได้ ซึ่งในกรณีหลังนี้ตำราส่วนใหญ่นิยมเรียกว่า สัมประสิทธิ์ความดัน (pressure coefficient) สำหรับค่าความหนืดนั้นออกจะยุ่งยากสักหน่อย ต้องกลับไปยังสมการที่นิยามความหนืดคือ $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ ดังนั้น $\mu$ จะมีหน่วยดังนี้

$$\mu = \frac{y\tau}{u} = \frac{(L)(F/A)}{V} = \frac{(L)(\rho L^3 V^2/L/L^2)}{V} = \rho LV \qquad (12)$$

ดังนั้นการวัดค่าความหนืดควรจะวัดค่า $\mu/\rho LV$ แต่ด้วยเหตุผลทางประวัติศาสตร์ (การทดลองหาความปั่นป่วนของของไหลโดยท่าน Osborne Reynolds วิศวกรชาวอังกฤษ) จึงนิยมที่จะวัดส่วนกลับของค่านี้ คือ $\rho LV/\mu$ มากกว่า และแทนที่จะเรียกว่าส่วนกลับของความหนืด กลับเรียกกันว่า "ค่าเลขเรย์โนลด์" (Reynolds number) ซึ่งเป็นค่าเลขที่มีความสำคัญมากที่สุดตัวหนึ่งในวิชากลศาสตร์ของไหล เพราะเป็นค่าที่กำหนดคุณลักษณะการไหลว่าจะเป็นแบบราบเรียบหรือแบบปั่นป่วน และมีการตีความค่าตัวเลขค่านี้ได้หลายความหมาย ซึ่งจะได้กล่าวถึงประเด็นนี้ต่อไปในภายหลัง

สำหรับค่าแรงโน้มถ่วงของโลก เราทราบกันดีว่ามีหน่วยเดียวกันกับค่าความเร่งดังนั้น

$$V/\sqrt{gL} \qquad (13)$$

ดังนั้นในการวัด $g$ จึงต้องวัดค่าเลข $g/(V^2/L)$ แต่โดยความนิยมส่วนใหญ่จะวัดรากที่สองของส่วนกลับของค่าเลขนี้ คือ $V/\sqrt{gL}$ และเรียกค่าเลขนี้ว่า "ค่าเลขฟรูด" ( Froude number) เพื่อให้เกียรติยศต่อท่าน Froude วิศวกรชาวฝรั่งเศสในอดีตที่ได้ศึกษาอัตราการไหลของน้ำ

กล่าวโดยสรุปอีกครั้งหนึ่ง เราเริ่มต้นด้วยการระบุสมการความสัมพันธ์ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปรที่มีมิติต่างๆที่ไม่เหมือนกัน คือ

$$F_D = f''(\rho, L, V, \mu, g, p) \qquad (14)$$

และสุดท้ายได้จัดระบบและลดจำนวนตัวแปรได้เสียใหม่เป็น

$$\frac{F_D}{\rho V^2 L^2} = f''\left(\frac{p}{\rho V^2}, \frac{\rho LV}{\mu}, \frac{V}{\sqrt{gL}}\right) \qquad (15)$$

**8. ตัวแปรเสมือน(Similarity Variables)**

ตำราหลายเล่มพยายามอธิบายความเสมือนในสามประเด็นคือ ความเสมือนทางรูปทรง (geometric similarity) ความเสมือนทางการเคลื่อนตัว (kinematic similarity) และ ความเสมือนทางพลศาสตร์ (dynamic similarity) กล่าวโดยสรุป ความเสมือนทางการเคลื่อนตัวหมายความว่าแนวเส้นการไหล(streamline) มีความเสมือนกัน ส่วนความเสมือนทางพลศาสตร์หมายความว่า แรงที่กระทำต่อรูปทรงมีความเสมือนกัน และระบบสองระบบจะเหมือนกับทุกประการถ้ามีความเสมือนกันทางรูปทรงทางการเคลื่อนตัว และทางพลศาสตร์

แต่ในบทความนี้ ได้นำเสนอเฉพาะความเสมือนทางรูปทรงเท่านั้น เพราะไม่เห็นความจำเป็นของการนำเสนอความเสมือนทางการเคลื่อนตัวและทางพลศาสตร์ ซึ่งเห็นว่าจะสร้างความสับเพิ่มมากขึ้นโดยไม่เกิดประโยชน์สักเท่าใดนัก จึงขอนำเสนอว่า การไหลในสองระบบที่ค่าตัวเลขระบบไม่เหมือนกัน จะกลายเป็นเหมือนกันทุกประการได้ถ้า 1) มีความเสมือนทางรูปทรง และ 2) ค่าตัวแปรคุณลักษณ์ทั้งหลายที่มีความสำคัญต่อการไหลมีค่าเท่ากัน ซึ่งหากครบสองประการนี้ก็จะครอบคลุมความเสมือนทางการเคลื่อนตัวและความเสมือนทางพลศาสตร์โดยปริยาย ทั้งนี้สามารถให้เหตุผลได้ว่า หากรูปทรงเหมือนกันก็เท่ากับว่าเป็นวัตถุขนาดเดียวกัน และถ้าตัวแปรที่ควบคุมการไหลทั้งหมดเหมือนกัน เช่น ความหนาแน่น ความเร็ว ความดัน ความหนืด แรงโน้มถ่วง (รวมทั้งตัวแปรอื่นๆที่อาจมีนัยสำคัญต่อการไหลที่กำลังวิเคราะห์ เช่น แรงตึงผิว ความดันไอ) ก็แสดงว่าเป็นปัญหาเดียวกันนั่นเอง หากของไหลมีความรู้สึกที่สัมผัสตัวเลขได้ ของไหลก็จะไม่อาจแยกแยะได้ว่าเป็นคนละปัญหา ในมุมมองของของไหล ปัญหาทั้งสองมีค่าตัวเลขเท่ากัน และเป็นปัญหาเดียวกันทุกประการ คำตอบที่ได้ก็ย่อมเป็นคำตอบที่เป็นค่าตัวเลขเดียวกันด้วย

ตำราภาษาอังกฤษบางเล่มเรียกตัวแปรที่ได้รับการทอนด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์ว่า ตัวแปรเสมือน (similarity variable) ซึ่งผู้แต่งไม่ค่อยจะเห็นด้วย เนื่องจากเห็นว่าแท้จริงแล้วตัวแปรเหล่านี้ก็คือตัวแปร "ธรรมดา" เพียงแต่วัดด้วยหน่วยวัด"คุณลักษณ์"ที่มีขนาดแปรผันเป็นสัดส่วนกับขนาดของปัญหาเท่านั้นเอง "ค่าตัวเลข"ของตัวแปร(ธรรมดา)เหล่านี้ต่างหากที่ทำให้เกิดความเสมือนระหว่างการไหลในหุ่นทดลองกับเครื่องต้นแบบ

สำหรับแรงที่วัดด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์นี้ ตำราส่วนมากนิยมเรียกว่า สัมประสิทธิ์ของแรง (force coefficient) หากเป็นแรงลาก ก็จะเรียกว่าสัมประสิทธิ์แรงลาก (drag coefficient) และหากเป็นแรงยกก็เรียกว่าสัมประสิทธิ์แรงยก (lift coefficient) เป็นต้น ทั้งนี้โดยการมีตัวเลข 1/2 ประกอบอยู่ด้วยเสมอ กล่าวคือ

$$Drag\ coefficient = C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} \qquad (16)$$

$$Lift\ coefficient = C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} \qquad (17)$$

ซึ่งจากมุมมองของบทความนี้ควรจะเรียกว่า แรงฉุดคุณลักษณ์ (characteristic drag) และแรงยกคุณลักษณ์ (characteristic lift) ตามลำดับ ตัวแปรเสมือน หรือ ตัวแปรไร้มิติ หรือ ตัวแปรคุณลักษณ์ แล้วแต่ว่าจะเรียกกันนี้ มักนิยมตั้งชื่อเพื่อให้เกียรติแก่วิศวกรในอดีต แต่มีตัวแปรสองตัวที่มีความสำคัญมากที่สุดต่อการศึกษากลศาสตร์ของไหล คือ ค่าเลขเรโนลด์ (Reynolds number) และ ค่าเลข ฟรูด (Froude number) จึงขอขยายความ และ ตีความ ค่าเลขสองตัวนี้ไว้พอสังเขป ดังนี้

ค่าเลขเรโนลด์ ($\rho VD/\mu$)

ท่าน Osborne Reynolds วิศวกรชาวอังกฤษ (ซึ่งชื่อของท่านนับว่าเป็นชื่อที่คุ้นหูที่สุดชื่อหนึ่งในวงการกลศาสตร์ของไหล) ได้ข้อสรุปจากการทดลองการไหลในท่อกลมว่า ของไหลเปลี่ยนสภาพจากการไหลแบบราบเรียบเป็นการไหลแบบปั่นป่วน เมื่อค่าตัวเลข $\rho VD/\mu$ มีค่าใหญ่เกินค่าวิกฤตค่าหนึ่ง และค่าเลขวิกฤตนี้เท่ากันเสมอไม่ว่าขนาดท่อจะใหญ่หรือเล็กเท่าใดก็ตาม หรือของไหลจะมีความหนาแน่นหรือความหนืดมากน้อยเพียงใดก็ตาม ซึ่งทำให้เกิดปัญหาการตีความว่าค่าเลขนี้ (ซึ่งได้ตั้งให้เป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบว่า ค่าเลขเรโนลด์) มีนัยสำคัญอย่างไร เพราะมักเป็นตัวแปรในการทำการทดลองหรือการศึกษาใด ๆ ในทางกลศาสตร์ของไหลเสมอ ประกอบกับความจริงที่ว่าการไหลในการใช้งานจริงนั้น ส่วนใหญ่จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วนเสมอ

ในตำราส่วนใหญ่มักนิยมที่จะตีความค่าเลขโรโนลด์โดยการแปลงเสียก่อน กล่าวคือ เอา $V/L$ คูณตลอดทั้งด้านล่างและด้านบน จึงเขียนค่าเลขเรโนลด์ได้เสียใหม่ว่า $\rho V^2/(\mu V/L)$ ซึ่งสามารถตีความได้ว่าเป็นอัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อย (inertia force) ต่อหน่วยพื้นที่ กับแรงเสียดทานต่อหน่วยพื้นที่ (หรือความเค้นเฉือนนั่นเอง) ซึ่งต้องอาศัยจินตนาการเป็นอย่างมากจึงจะพอตีความได้ได้

ในบทความนี้ ได้ทำการคำนวณหาการวัดความหนืดโดยใช้หน่วยคุณลักษณ์และใช้ $\rho, L, V$ หรือ $(\rho, D, V)$ เป็นตัวแปรพื้นฐานในการสร้างหน่วยวัดคุณลักษณ์แล้วนั้น ได้พบว่าควรวัดค่าความหนืดโดยทอนค่าเสียด้วย $\rho VL$ (ซึ่งเป็นหน่วยวัดคุณลักษณ์ของความหนืดนั่นเอง) ดังนั้นเราจึงวัดค่าตัวเลข $\mu/\rho VL$ หรือหากเราจะวัดส่วนกลับของค่าเลขนี้ก็ย่อมได้ เพราะหากทราบค่าตัวหนึ่งก็ทราบอีกค่าตัวหนึ่งเนื่องจากเป็นการทอดประทับแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one correspondence) ค่าส่วนกลับนี้ $(\rho VL/\mu)$ เรียกกันว่า "ค่าเลขเรโนลด์" (ซึ่งมักนิยมให้สัญลักษณ์ว่า Re) ซึ่งอาจตีความหมายแบบกำปั้นทุบดินได้ว่า เป็นค่าเลขส่วนกลับของค่าความหนืด (ที่วัดด้วยหน่วยคุณลักษณ์) ดังนั้นค่านี้จะมีค่าสูงเมื่อความหนืดคุณลักษณ์มีค่าต่ำ และมีค่าต่ำเมื่อความหนืดคุณลักษณ์มีค่าสูง การที่ความหนืดคุณลักษณ์มีค่าสูงก็แสดงว่ามีการต้านทานการไหลสูง เพราะโดยสามัญสำนึกของไหลที่มีความหนืดสูงกว่าเช่นกาวเหนียวย่อมไหลได้ยากกว่าของไหลที่มีความหนืดน้อยกว่าเช่นน้ำ ถ้าการไหลจะออกนอกสู่นอกทางก็จะถูกต้านด้วยแรงเสียดทานสูง ทำให้การไหลกลับมาอยู่ในสู่ในทางดังเดิม (แรงเสียดทานคุณลักษณ์ขึ้นอยู่กับค่าความหนืดคุณลักษณ์) ดังนั้นการไหลจึงมีระเบียบราบเรียบ (เพราะออกนอกสู่นอกทางได้ลำบาก) ซึ่งเรียกกันว่า การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) แต่หากความหนืดคุณลักษณ์มีค่าต่ำ (ค่าเลขเรโนลด์สูง) แรงต้านการไหลและแรงต้านทานการออกนอกสู่นอกทางการไหลก็มีน้อย ของไหลจึงสามารถออกนอกสู่นอกทางได้โดยง่าย การไหลก็กลายเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow)

ค่าเลขฟรูด ($V/\sqrt{gL}$)

สำหรับค่าเลขฟรูดเป็นค่าที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์การไหลที่มีผิวการไหลสัมผัสอยู่กับบรรยากาศโลก (free surface flow) ซึ่งสามารถตีความค่าเลขนี้ได้ในทำนองเดียวกันกับค่าเลขเรโนลด์ ตำราโดยทั่วไป โดยมากมักนิยมยกกำลังสองแล้วคูณด้วยความหนาแน่นและพื้นที่การไหล ซึ่งจะทำให้ได้พจน์ $\rho AVV/(\rho ALg)$ ซึ่งจากการประมาณการเชิงขนาด(order of magnitude analysis) จะตีความได้ว่าเป็นค่าของแรงเฉื่อยหารด้วยน้ำหนักของของไหล

แต่บทความนี้ได้ทำการสร้างค่าตัวเลขหน่วยวัดคุณลักษณ์สำหรับแรงโน้มถ่วงพบว่า ควรวัดค่าแรงโน้มถ่วงด้วยค่าตัวเลขของ $V^2/L$ ดังนั้นจึงวัดหาค่าตัวเลข $g/(V^2/L)$ (แต่ด้วยเหตุผลทางประวัติศาสตร์ทำให้นิยมวัดค่ารากที่สองของส่วนกลับของค่านี้แทน คือ $V/\sqrt{gL}$ ) จึงขอเสนอการตีความว่า อาจพิจารณาว่าค่าแรงโน้มถ่วงคุณลักษณ์นั้นเป็นตัวหน่วงให้ของไหลแบนแนบติดอยู่กับผิวโลก หากค่าแรงโน้มถ่วงคุณลักษณ์น้อยเกินไป (ค่าเลขฟรูดสูง) ผิวของการไหลที่เปิดออกสู่บรรยากาศอาจมีการกระโดดขึ้นได้ (เอาชนะแรงโน้มถ่วงได้) จนอาจกลายเป็นการกระโดดของผิวน้ำได้ ซึ่งเรียกว่าผิวกระโดด (hydraulic jump)

## 9.สรุป

วิธีการสร้างและการตีความหน่วยวัดคุณลักษณ์ดังที่นำเสนอในตำรานี้แตกต่างจากตำรามาตรฐานทางกลศาสตร์ของไหลโดยทั่วไป วิธีนี้สร้างหน่วยวัดพื้นฐานจากตัวแปรพื้นฐานเสียก่อนซึ่งสามารถกระทำได้โดยง่ายด้วยการสังเกต(ไม่ต้องแก้สมการ) จากนั้นจึงนำหน่วยวัดพื้นฐานไปประกอบกันเป็นหน่วยวัดปริมาณต่าง ๆโดยตรง โดยไม่ต้องแก้สมการพิชคณิต แม้วิธีการจะแตกต่างจากวิธีการมาตรฐานในตำราส่วนใหญ่ แต่ได้ผลลัพธ์สุดท้ายเช่นเดียวกัน นอกจากนี้ได้นำเสนอการตีความตัวแปรเสมือนเสียใหม่ให้เหมือนกับตัวแปรธรรมดาที่ถูกวัดด้วยหน่วยวัดคุณลักษณ์ ทำให้ได้มุมมองที่แปลกใหม่และหลากหลายมากยิ่งขึ้นกว่าเท่าที่มีปรากฏในตำรามาตรฐานทั้งหลาย

## 10. กิตติกรรมประกาศ

ข้อความ รูปภาพ และสมการ ในบางส่วนของบทความนี้เป็นการคัดตอนมาจากหนังสือ "กลศาสตร์ของไหลวิศวกรรม" โดย ทวิช จิตรสมบูรณ์ ซึ่งกำลังอยู่ในระหว่างการจัดพิมพ์โดยสำนักพิมพ์ McGraw-Hill จึงขอขอบคุณสำนักพิมพ์มา ณ โอกาสนี้