4.2 ความคล้ายคลึงเชิงจลน์ (Kinematics similarity)

ความคล้ายคลึงเชิงจลน์ คือหุ่นจำลองกับต้นแบบมีสัดส่วนความเร็ว สัดส่วนเวลา และสัดส่วนความเร่ง ในจุดเดียวกันนั้นจะต้องเท่ากันตลอดในสนามการไหล ทั้งนี้ ก่อนที่หุ่นจำลองกันต้นแบบจะมีความคล้ายคลึงกันเชิงจลน์ได้นั้น หุ่นจำลองกันต้นแบบจะมีความคล้ายคลึงกันเชิงเรขาคณิต

กำหนดให้ a_p คือความเร่งของต้นแบบ และ a_m คือ ความเร่งของหุ่นจำลอง

ดังนั้น $v_r = \frac{v_p}{v_m}$ คือ สัดส่วนความเร็ว

$T_r = \frac{T_p}{T_m}$ คือ สัดส่วนเวลา

$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = \frac{v_r^2}{L_r}$ คือ สัดส่วนความเร่ง

4.3 ความคล้ายคลึงเชิงพลวัต (Dynamic similarity)

ความคล้ายคลึงเชิงพลวัต จะพิจารณาสัดส่วนของแรงต่าง ๆ ที่กระทำต่อหุ่นจำลองและต้นแบบที่สัดส่วนที่เท่ากัน โดยแรงแรงเหล่านั้นประกอบด้วย แรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก (F_g) แรงเนื่องจากความดัน (F_p) แรงเนื่องจากความหนืด (F_v) แรงเนื่องจากความหยืดหยุ่น (F_e) และแรงเนื่องจากความตึงผิว (F_t) ทั้งนี้ ก่อนที่หุ่นจำลองกันต้นแบบจะมีความคล้ายคลึงกันเชิงพลวัตได้นั้น หุ่นจำลองกันต้นแบบจะมีความคล้ายคลึงกันเชิงเรขาคณิตและความคล้ายคลึงกันเชิงจลน์ก่อน

ในสภาวะที่วัตถุอยู่ในสภาวะไม่สมดุล มีผลให้แรงลัพธ์จากแรงดังกล่าวข้างต้นมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ นั้นคือวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งตามกฎของนิวตัน หากจะทำให้สภาวะดังกล่าวกลายเป็นสภาวะที่สมดุล จะสามารถกระทำได้โดยการเพิ่มแรงเนื่องจากความเฉื่อย (F_i) เข้าไปในระบบ โดย แรงเนื่องจากความเฉื่อยนี้มีขนาดเท่ากับแรงลัพธ์ แต่ทิศทางตรงกันข้าม นั่นคือ

$$\sum F = F_g + F_p + F_v + F_e + F_t = F_R \tag{4.1}$$

และ $F_i = -F_R$ ดังนั้น $F_g + F_p + F_v + F_e + F_t + F_i = 0$

เมื่อ

แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง; $F_g = mg = \rho L^3 g$ (4.2)

แรงเนื่องจากความดัน; $F_p = (\Delta p)\cdot A = (\Delta p)\cdot L^2$ (4.3)

แรงเนื่องจากความหนืด; $F_v = \mu \cdot \left(\frac{du}{dy}\right)\cdot A = \mu\cdot\left(\frac{v}{L}\right)\cdot A = \mu \cdot v \cdot L$ (4.4)

แรงเนื่องจากความยืดหยุ่น; $F_e = E_v \cdot A = E_v \cdot L^2$ (4.5)

แรงเนื่องจากความตึงผิว; $F_t = \sigma \cdot L$ (4.6)

แรงเนื่องจากความเฉื่อย; $F_i = ma = \rho \cdot L^3 \cdot \frac{L}{T^2} = \rho \cdot L^4 \cdot T^{-2} = \rho \cdot v^2 \cdot L^2$ (4.7)

ถ้าต้นแบบและหุ่นจำลองมีความคล้ายคลึงเชิงพลวัต จะได้

$$\frac{F_{gP}}{F_{gm}} = \frac{F_{pP}}{F_{pm}} = \frac{F_{vP}}{F_{vm}} = \frac{F_{iP}}{F_{im}} \quad (4.8)$$

หรืออาจจะเขียนได้ว่า

$$\left[\frac{F_i}{F_g}\right]_p = \left[\frac{F_i}{F_g}\right]_m ; \left[\frac{F_i}{F_p}\right]_p = \left[\frac{F_i}{F_p}\right]_m ; \left[\frac{F_i}{F_v}\right]_p = \left[\frac{F_i}{F_v}\right]_m$$

ซึ่งเทอมดังกล่าวข้างบนนี้เรียกว่า สัดส่วนของแรงเนื่องจากความเฉื่อยกับแรงต่าง ๆ โดยเทอมดังกล่าวนี้เป็นเทอมที่ไร้มิติ และมีชื่อเรียกต่าง ๆ ดังนี้

1. ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds Number; Re) คือ อัตราส่วนของแรงเนื่องจากความเฉื่อยกับแรงเนื่องจากความหนืด

$$Re = \frac{F_I}{F_v} = \frac{L^2 v^2 \rho}{Lv\mu} = \frac{Lv\rho}{\mu} = \frac{Lv}{\upsilon} \quad (4.9)$$

โดย R เป็นเทอมที่ไร้มิติ และ L คือ ความยาวใด ๆ ที่มีส่วนสำคัญต่อรูปแบบการไหล เช่น ในกรณีของการไหลในท่อ L จะแทนค่าด้วยเส้นผ่าศูนย์กลาง

2. ตัวเลขฟรูด (Froude Number; F_r) คือ อัตราส่วนของแรงเนื่องจากความเฉื่อยกับแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gL}} \quad (4.10)$$

โดย L คือ ความยาวใด ๆ ที่มีความสำคัญต่อรูปแบบการไหล เช่น ในกรณีที่เป็นเรือ ค่าของ L คือ ความยาวตามแนวระดับผิวน้ำ แต่ถ้าเป็นการไหลในทางน้ำเปิดค่าของ L คือ ความลึกของน้ำ

ในกรณีที่หุ่นจำลองมีความคล้ายคลึงเชิงพลวัตกับต้นแบบ แสดงว่าทั้งคู่จะต้องมีค่า F_r เท่ากัน ซึ่งค่า v จะผันแปรตาม $\sqrt{gL}$ เมื่อ g คือ ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \sqrt{L_r}$ (เมื่อ F_r เท่ากัน)

$T_r = \frac{T_p}{T_m} = \sqrt{L_r}$ (เมื่อ F_r เท่ากัน) และเรียกว่า สัดส่วนของเวลา

$a_r = 1$

$$Q_r = \frac{Q_p}{Q_m} = (L_r)^{5/2} \text{ (เมื่อ } F_r \text{ เท่ากัน)}$$

3. ตัวเลขมัค (Mach Number; M) คือ สัดส่วนความเร็วของของไหล (หรือความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในของไหลสถิต) กับความเร็วของคลื่นเสียงในของไหลนั้น

$$M = \frac{V}{c} \tag{4.11}$$

เมื่อ c คือ ความเร็วของคลื่นเสียงในของไหลนั้น ๆ

ถ้า	M < 1	เรียกการไหลว่า subsonic
	M = 1	เรียกการไหลว่า sonic
	M > 1	เรียกการไหลว่า supersonic
	M มีค่าสูงมาก ๆ	เรียกการไหลว่า hypersonic

4. ตัวเลขวีเบอร์ (Weber Number; W_n) คือ รากที่สองของสัดส่วนของแรงเนื่องจากความเฉื่อยกับแรงตึงผิว โดยทั่ว ๆ ไป การไหลมักจะไม่นำแรงตึงผิวมาพิจารณา แต่มีบางกรณีที่แรงตึงผิวมีความสำคัญ ตัวอย่างเช่น กรณีที่วัตถุแผ่นระนาบจมอยู่ในการไหล จะมีชั้นบาง ๆ ของของเหลวไหลผ่านพื้นผิวของวัตถุนั้น แรงตึงผิวจะมีผลมาก

$$W = \left(\frac{\rho V^2 L^2}{\sigma L}\right)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}} \tag{4.12}$$

5. ตัวเลขออยเลอร์ (Euler Number; E_n) คือ สัดส่วนของแรงเนื่องจากความเฉื่อยกับแรงเนื่องจากความดัน

$$E = \frac{V}{\sqrt{2\left(\frac{\Delta p}{\rho}\right)}} = \frac{V}{\sqrt{2g\left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)}} \tag{4.13}$$

4.4 มิติของปริมาณ (Dimensions of physical quantities)

มิติพื้นฐาน (Basic dimension) คือ มวลสาร (M) ความยาว (L) และเวลา (T) ซึ่งทั้งสามมิตินี้มีความสัมพันธ์กันตามกฎข้อที่สองของนิวตัน คือ F = ma และมีมิติเป็น

$$F = MLT^{-2} \tag{4.14}$$

ตารางที่ 4.1 มิติของปริมาณทางกายภาพและหน่วยในระบบ SI

ปริมาณและคุณสมบัติ	หน่วย	สัญญลักษณ์	มิติ	
			F-L-T	M-L-T
พื้นที่	m^2	A	L^2	L^2
ปริมาตร	m^3	V	L^3	L^3
ความเร็ว	m/s	v	LT^{-1}	LT^{-1}
ความเร่ง	m/s^2	a	LT^{-2}	LT^{-2}
ความเร็วเชิงมุม	rad/s	w	T^{-1}	T^{-1}
แรง	N	F	F	MLT^{-2}
มวลสาร	kg	m	FT^2L^{-1}	M
น้ำหนักจำเพาะ	N/m^3	γ	FL^{-3}	$ML^{-2}T^{-2}$
ความหนาแน่น	kg/m^3	ρ	FT^2L^{-4}	ML^{-3}
ความดัน	N/m^2	p	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
ความหนืดสัมบูรณ์	kg/m s	μ	FTL^{-2}	$ML^{-1}T^{-1}$
ความหนืดจลน์	m^2/s	υ	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
โมดูลัสความยืดหยุ่น	N/m^2	E	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
กำลัง	Watt	P	FLT^{-1}	ML^2T^{-3}
แรงบิด	N m	T	FL	ML^2T^{-2}
อัตราการไหล	m^3/s	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
ความเฉือน	N/m^2	τ	FL^{-2}	$ML^{-1}T^{-2}$
ความตึงผิว	N/m	σ	FL^{-1}	MT^{-2}
น้ำหนัก	N	W	F	MLT^{-2}
อัตราการไหลเชิงน้ำหนัก	N/s	W	FT^{-1}	MLT^{-3}

4.5 **ทฤษฎี** Buckingham π (Buckingham π theorem)

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางกายภาพที่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องจำนวน n และมีจำนวน m มิติ เพื่อหาความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านั้น สามารถกระทำได้โดยอาศัยทฤษฎี Buckingham π ซึ่งจะรวมตัวแปรต่าง ๆ เหล่านั้นเข้าไว้เป็นเทอมที่ไร้มิติ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. แจกแจงตัวแปรทุกตัวที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่กำลังพิจารณา ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) พร้อมทั้งเขียนมิติของตัวแปรทุกตัวให้อยู่ในรูปของมิติพื้นฐานคือ M, L, T
2. เขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านั้นในรูปของฟังก์ชั่น $F(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) = 0$
3. จำนวนสมการ π ที่พิจารณามีจำนวน n-m สมการ
4. เลือกตัวแปรซ้ำที่มีจำนวนเท่ากับจำนวนของมิติพื้นฐาน โดยที่ตัวแปรซ้ำที่เลือกนั้นจะต้องมีมิติพื้นฐานครบถ้วนเมื่อนำมารวมกัน
5. ให้ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}$ เป็นเทอมไร้มิติที่เกิดจากการรวมกลุ่มของตัวแปรที่ได้กำหนดไว้ X_1, X_2, X_3, $\ldots, X_n$ เข้าด้วยกัน และนำกลุ่มตัวแปรเหล่านั้นมาเขียนความสัมพันธ์ได้ในรูปของ $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) = 0$
6. π เทอมแรกจะเท่ากับผลคูณของตัวแปรซ้ำกับตัวแปรใด ๆ อีก 1 ตัวที่เหลือ (ที่ไม่ใช่ตัวแปรซ้ำ) และ π เทอมต่อ ๆ ไปก็จะเท่ากับผลคูณของตัวแปรซ้ำกับตัวแปรที่เหลือตัวต่อ ๆ ไปตามลำดับ
7. ให้ตัวแปรของ π เทอมแรก มีดัชนีไม่ทราบค่าเป็น a_1, a_2, และ a_3 (ในกรณีที่มีตัวแปรซ้ำ 3 ตัว) ส่วนตัวแปรอีก 1 ตัวมีเลขดัชนีเท่ากับ 1 สำหรับ π เทอมที่สองจะมีดัชนี b_1, b_2, b_3, และ 1 ตามลำดับ และทำเช่นเดียวกันต่อ ๆ ไปจนครบทุกเทอม
8. แก้สมการหาค่า a_1, a_2, และ a_3 สำหรับสมการ π เทอมแรก และสมการเทอมต่อ ๆ ไปจนครบทุกสมการ
9. จัดรูปของ π แต่ละเทอมให้อยู่ในรูปง่าย ๆ และอาจจะรวม π บางเทอมเข้าด้วยกัน และคำตอบที่ได้จะสามารถบอกได้ว่า สิ่งที่ต้องการวิเคราะห์นั้น เป็นฟังก์ชั่นของตัวแปรใดบ้าง แต่ละตัวมีดัชนีเป็นเท่าใด

ตัวอย่าง 4.1 จงหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลผ่านฝายรูปสี่เหลี่ยม กำหนดให้อัตราการไหลขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำเหนือสันฝาย และความเร็วของกระแสน้ำ

วิธีทำ

ตัวแปร	สัญลักษณ์	มิติ
อัตราการไหล	Q	L^3T^{-1}
ความสูงของระดับน้ำเหนือสันฝาย	h	L
ความเร็วของกระแสน้ำ	v	LT^{-1}

$F(Q, h, v) = 0$

จำนวนตัวแปร n = 3 ตัว และจำนวนมิติ m = 2 ตัว ดังนั้น จำนวนสมการ = n-m = 1 สมการ

เลือก Q, h เป็นตัวแปรซ้ำ จะได้

$\pi_1 = Q^{a_1}h^{a_2}v$ จะได้ $(L^3T^{-1})^{a_1}(L)^{a_2}(LT^{-1}) = (MLT)^0$

มิติของ L; $3a_1 + a_2 + 1 = 0$

มิติของ T; $-a_1 - 1 = 0$

จะได้ $a_1 = -1$, $a_2 = 2$

เทอมที่ไร้มิติ; $\pi_1 = Q^{-1}h^2v = \dfrac{vh^2}{Q}$

เขียนสมการของอัตราการไหลในเชิงฟังก์ชันของตัวแปรได้เป็น

$$f\left(\frac{vh^2}{Q}\right) = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของอัตราการไหล Q จะได้

$$Q = f_1\left(\frac{1}{vh^2}\right) = C\left(\frac{1}{vh^2}\right)$$ เมื่อ C คือค่าคงที่

ตัวอย่าง 4.2 จงหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลผ่านท่อขนาดเล็ก ที่วางอยู่ในแนวระดับ กำหนดให้อัตราการไหลขึ้นอยู่กับการสูญเสียความดัน ความยาวท่อ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของหลอด และความหนืดสัมบูรณ์ของของไหล

วิธีทำ

ตัวแปร	สัญลักษณ์	มิติ
อัตราการไหล	Q	L^3T^{-1}
การสูญเสียความดัน	ΔP	$ML^{-1}T^{-2}$
ความยาวท่อ	L	L
ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของท่อ	D	L
ความหนืดสัมบูรณ์ของของไหล	μ	$ML^{-1}T^{-1}$

$$F(Q, \Delta P, L, D, \mu) = 0$$

จำนวนตัวแปร n = 5 ตัว และจำนวนมิติ m = 3 ตัว ดังนั้น จำนวนสมการ = n-m = 2 สมการ

เลือก Q, D, μ เป็นตัวแปรซ้ำ จะได้

$\pi_1 = Q^{a_1}D^{a_2}\mu^{a_3}\Delta P$ จะได้ $(L^3T^{-1})^{a_1}(L)^{a_2}(ML^{-1}T^{-1})^{a_3}(ML^{-1}T^{-2}) = (MLT)^0$

มิติของ M; $a_3 + 1 = 0$

มิติของ L; $3a_1 + a_2 - a_3 - 1 = 0$

มิติของ T; $-a_1 - a_3 - 2 = 0$

จะได้ $a_1 = -1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$

เทอมที่ไร้มิติ; $\pi_1 = Q^{-1}D^3\mu^{-1}\Delta P = \dfrac{D^3\Delta P}{Q\mu}$

$\pi_2 = Q^{b_1}D^{b_2}\mu^{b_3}L$ จะได้ $(L^3T^{-1})^{b_1}(L)^{b_2}(ML^{-1}T^{-1})^{b_3}(L) = (MLT)^0$

มิติของ M; $b_3 = 0$

มิติของ L; $3b_1 + b_2 - b_3 + 1 = 0$

มิติของ T; $-b_1 - b_3 = 0$

จะได้ $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$

เทอมที่ไร้มิติ; $\pi_2 = Q^0D\mu^0L = DL$

เขียนสมการของอัตราการไหลในเชิงฟังก์ชันของตัวแปรได้เป็น

$$f\left(\frac{D^3\Delta P}{Q\mu}, DL\right) = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของอัตราการไหล Q จะได้

$$\frac{Q\mu}{D^3\Delta P} = f_1(DL)$$

ดังนั้น

$$Q = \frac{D^3\Delta P}{\mu} f_1(DL)$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลในการใช้ฝายรูปสามเหลี่ยม ที่มีมุมยอดเท่ากับ θ วัดค่าอัตราการไหลในทางน้ำเปิด ซึ่งพบว่า อัตราการไหล ขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำเหนือสันฝาย ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความเร็วของน้ำที่ไหลเข้าสู่ตัวฝาย และมุมยอดของฝาย

2. จงหาสมการทั่วไป ของการสูญเสียเฮดต่อหน่วยความยาว ($\Delta h/L$) ของท่อเรียบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน กำหนดให้การสูญเสียดังกล่าวขึ้นอยู่กับความเร็ว ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของท่อ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความหนืดสัมบูรณ์ และความหนาแน่นของของไหล

3. จงหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลต่อหน่วยความกว้างของฝาย กำหนดให้อัตราการไหลข้ามฝายต่อหน่วยความกว้างของฝายขึ้นอยู่กับความสูงของระดับน้ำเหนือสันฝาย ความสูงของสันฝาย และความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

4. จงหาตัวแปรที่ควรจะนำไปใช้ในการนำเสนอผลการทดลองในการศึกษาแรงขับเคลื่อนของใบพัดเครื่องบิน โดยสร้างเป็นหุ่นจำลองที่มีความคล้ายคลึงเชิงเรขาคณิตกับต้นแบบ แล้วนำไปทดสอบในอุโมงค์ลม กำหนดให้ แรงขับเคลื่อนขึ้นอยู่กับความเร็วรอบของการหมุน ความเร็วของการเคลื่อนที่ เส้นผ่าศูนย์กลางของใบพัด ความหนืดสัมบูรณ์ของอากาศ ความหนาแน่นของอากาศ และความเร็วเสียง

5. จงหาสมการทั่วไปของอัตราการไหลที่เป็นชั้นบาง ๆ ข้ามฝายน้ำล้น กำหนดให้ อัตราการไหลขึ้นอยู่กับความสูงของสันฝาย ความสูงของระดับน้ำเหนือสันฝาย ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ความหนืดสัมบูรณ์ ความหนาแน่น และแรงตึงผิวของของไหล

6. น้ำอุณหภูมิ 10°C ไหลในท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 75 mm ซึ่งวางอยู่ในแนวระดับ ด้วยความเร็วเฉลี่ย 3 m/s ความดันที่ลดลงในระยะทาง 10 m ของท่อมีค่า 14 kPa ถ้าใช้แกสโซีน (S = 0.68) ที่ 30°C ในท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 25 mm ซึ่งมีความคล้ายคลึงกันเชิงเรขาคณิตและสภาพการไหลมีความคล้ายคลึงกันเชิงพลวัต จงคำนวณหาความเร็วในการไหลของแกสโซรีน และค่าความดันที่ลดลงในระยะทาง 3 m ของท่อนี้

7. ในการทดลองเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของวาล์วขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 600 mm โดยใช้หุ่นจำลองที่มีความคล้ายคลึงเชิงเรขาคณิตขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 300 mm และใช้อากาศที่ 25°C กับหุ่นจำลอง ถ้าหากวาล์วต้นแบบจะต้องใช้กับน้ำที่ 30°C และมีพิสัยของความเร็วระหว่าง 1 ถึง 2.5 m/s จงคำนวณหาพิสัยของอัตราการไหลของอากาศในการทดลอง

8. ลำของน้ำพ่นออกมาจากช่องเปิดขอบคม (Orifice) ที่อยู่ด้านข้างของถังน้ำ ซึ่งมีผิวน้ำเปิดสู่บรรยากาศ ในการศึกษานี้ได้สร้างหุ่นจำลองสัดส่วน 1:10 และใช้น้ำในการทดลองเช่นเดียวกัน

เมื่อทั้งต้นแบบและหุ่นจำลองมีความคล้ายคลึงกันเชิงพลวัต จงคำนวณหาสัดส่วนของอัตราการไหล และแรงที่กระทำต่อถัง

9. หุ่นจำลองของมาตรเวนจูรี่ที่มีมิติเชิงเส้นเป็น 1/5 ของต้นแบบ ต้นแบบทำงานกับน้ำที่ 20°C ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของคอคอดเท่ากับ 60 cm และความเร็วที่คอคอดมีค่า 6 m/s ถ้าหุ่นจำลองทำงานกับน้ำที่ 95°C จงคำนวณหาอัตราการไหลที่จะใช้ในหุ่นจำลองเพื่อให้ได้สภาพความคล้ายคลึงกัน

10. แรงหน่วงของคลื่นที่กระทำต่อหุ่นจำลองของเรือ แล่นด้วยความเร็ว 3 m/s มีค่าเท่ากับ 16 N ถ้าต้นแบบมีความยาวเป็น 15 เท่าของหุ่นจำลอง จงคำนวณว่าต้นแบบจะแล่นด้วยความเร็วเท่าใด และขนาดของแรงหน่วงที่กระทำจะเป็นเท่าไหร่ เมื่อแล่นในของเหลวชนิดเดียวกันกับหุ่นจำลอง

บทที่ 5
ระบบท่อ

ระบบท่อประกอบด้วยอุปกรณ์หลายอย่างด้วยกัน เช่น ท่อ ข้อต่อ ข้องอ วาล์ว ปั๊ม ถังเก็บกัก เป็นต้น ซึ่งในการพิจารณาระบบท่อเพื่อออกแบบและการใช้งาน สิ่งที่ต้องพิจารณา คือ การสูญเสียพลังงาน ความเร็วการไหล อัตราการไหล ความดันในท่อ เป็นต้น ดังที่จะกล่าวถึงในแต่ละหัวข้อต่อไปนี้

5.1 **ตัวเลขเรย์โนลด์** (Reynolds number; Re)

ในการพิจารณาพฤติกรรมของของไหล โดยเฉพาะการสูญเสียพลังงาน จำเป็นที่ต้องพิจารณาว่าการไหลนั้นเป็นการไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) หรือเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent flow) ทั้งนี้ ปัจจัยที่ใช้ประกอบการพิจารณาคือ ค่าความหนาแน่นของของไหล (ρ) ค่าความหนืดของของไหล (μ) ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ (D) และความเร็วเฉลี่ยของของไหล (v)

Osborne Reynolds เป็นคนแรกที่อธิบายการไหลแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วนด้วยตัวเลข ซึ่งเรียกว่า ตัวเลขเรย์โนลด์ (Re) ดังสมการต่อไปนี้

$$\mathrm{Re} = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{vD}{\upsilon} \qquad \text{เมื่อ } \upsilon = \frac{\mu}{\rho} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{m}{s} \cdot m \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m \cdot s}{kg}$$

ดังนั้น ตัวเลขเรย์โนลด์จึงเป็นค่าที่ไม่มีหน่วย

Re < 2000	เรียกว่า การไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow)
2000 < Re < 4000	เรียกว่า การไหลในช่วงเปลี่ยนแปลง (Transition Flow)
R > 4000	เรียกว่า การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent flow)

ตัวอย่าง 5.1 กลีเซอรีนที่ 25 °C ไหลในท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 150 mm ด้วยความเร็วเฉลี่ยของการไหลเท่ากับ 3.6 m/s จงพิจารณาว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือการไหลแบบปั่นป่วน

กำหนดให้ ความหนาแน่น และความหนืดของกลีเซอรีน เท่ากับ 1258 kg/m^3 และ 9.60×10^{-1} Pa-s ตามลำดับ

วิธีทำ

จาก $$Re = \frac{vD\rho}{\mu}$$

แทนค่า $$Re = \frac{\left(3.6\frac{m}{s}\right)(0.15\,m)\left(1{,}258\frac{kg}{m^3}\right)}{9.60\times10^{-1}\ Pa\cdot s} = 708$$

$Re = 708 < 2000$ การไหลเป็นแบบราบเรียบ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 5.2 น้ำที่ 70 °C ไหลในท่อทองแดงที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.02527 m และพื้นที่หน้าตัดท่อ 5.017×10^{-4} m^2 ด้วยอัตราการไหล 285 L/min จงพิจารณาว่าเป็นการไหลแบบราบเรียบหรือการไหลแบบปั่นป่วน

กำหนดให้ น้ำมีความหนืดจลน์ (υ) เท่ากับ 4.11×10^{-7} m^2/s

วิธีทำ

$$v = \frac{Q}{A} = \left(0.285\frac{m^3}{s}\times\frac{1\,min}{60\,s}\right)\left(\frac{1}{5.017\times10^{-4}\ m^2}\right) = 9.47\ m/s$$

จาก $$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{vD}{\upsilon}$$

$$Re = \frac{\left(9.47\frac{m}{s}\right)(0.02527\,m)}{4.11\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}} = 5.82\times10^5$$

$Re = 5.82\times10^5 > 4{,}000$ การไหลเป็นแบบปั่นป่วน

ตัวอย่าง 5.3 จงคำนวณหาช่วงของความเร็วเฉลี่ยสำหรับการไหลในช่วงเปลี่ยนแปลงของน้ำมันชนิดหนึ่งที่อุณหภูมิ 15 °C ในท่อเหล็กขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 52.5 mm

กำหนดให้ น้ำมันชนิดนี้มีความถ่วงจำเพาะ 0.89 และความหนืด (μ) 1×10^{-1} N-s/ m^2

วิธีทำ

สำหรับการไหลในช่วงเปลี่ยนแปลง $\Rightarrow 2{,}000 < \mathrm{Re} < 4{,}000$

จาก $\mathrm{Re} = \dfrac{vD\rho}{\mu}$

$$v = \frac{\mathrm{Re}\,\mu}{D\rho} = \frac{\mathrm{Re}\left(1 \times 10^{-1}\,\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^2}\right)}{(0.0525\,\mathrm{m})\left(0.89 \times 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)} = \left(2.14 \times 10^{-3}\right)\mathrm{Re}$$

เมื่อ $\mathrm{Re} = 2000;\ v = \left(2.14 \times 10^{-3}\right)(2{,}000) = 4.3\,\mathrm{m/s}$

เมื่อ $\mathrm{Re} = 4000;\ v = \left(2.14 \times 10^{-3}\right)(4{,}000) = 8.56\,\mathrm{m/s}$

ดังนั้น ช่วงการไหลในช่วงเปลี่ยนแปลงมี $4.3\,\mathrm{m/s} < v < 8.56\,\mathrm{m/s}$ ตอบ

5.2 สมการดาร์ซี (Darcy's equation)

จากสมการทั่วไปของสมการพลังงาน

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_A - h_R - h_L = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \tag{5.2}$$

เมื่อ h_A คือ พลังงานที่ได้จากปั้ม

h_R คือ พลังงานที่น้ำเปลี่ยนเป็นพลังงานกล หรือพลังงานที่นำไปใช้กับกังหัน

h_L คือ พลังงานที่สูญเสียไปในระบบ ประกอบด้วยการสูญเสียหลักและการสูญเสียรอง

พลังงานที่สูญเสียไปในระบบนั้น มีการสูญเสียเนื่องจากแรงเสียดทานเป็นการสูญเสียหลัก โดยสามารถหาค่าได้จากสมการดังต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า สมการดาร์ซี (Darcy's equation)

$$h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \tag{5.3}$$

เมื่อ h_L คือ พลังงานที่สูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทาน

L คือ ความยาวของท่อหรือความยาวของการไหล (m หรือ ft)

D คือ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางท่อ (m หรือ ft)

v คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหล (m/s หรือ ft/s)

f คือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (Friction factor)

สมการข้างต้น สามารถใช้ได้กับสภาพการไหลได้ทั้งแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน สำหรับการคำนวณหาการสูญเสียรองจะกล่าวต่อไปในหัวข้อที่ 5.7

5.3 **การสูญเสียพลังงานในการไหลแบบราบเรียบ** (Friction loss in laminar flow)

การสูญเสียพลังงานในการไหลแบบราบเรียบ สามารถหาค่าได้จากสมการของ Hagen-Poiseuille ดังนี้

$$h_L = \frac{32\mu Lv}{\gamma D^2} \tag{5.4}$$

สมการข้างต้น ใช้ในกรณีที่ Re < 2000 หรือเป็นการไหลแบบราบเรียบ อย่างไรก็ตาม สมการของดาร์ซีก็สามารถใช้กับการไหลแบบราบเรียบได้เช่นกัน ดังนั้น

$$f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{32\mu Lv}{\gamma D^2}$$

$$f = \frac{32\mu Lv}{\gamma D^2} \times \frac{2gD}{Lv^2} = \frac{64\mu g}{vD\gamma}$$

$$f = \frac{64\mu}{vD\rho} \qquad \text{เมื่อ } \rho = \frac{\gamma}{g}$$

$$f = \frac{64}{Re} \qquad \text{เมื่อ } Re = \frac{vD\rho}{\mu}$$

สำหรับการไหลแบบราบเรียบ สมการของดาร์ซี คือ $h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$ เมื่อ $f = \frac{64}{Re}$

ตัวอย่าง 5.4 จงคำนวณหาพลังงานที่สูญเสียไป เมื่อกลีเซอรีนที่ 25 °C ไหลในท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 150 mm ยาว 30 m ด้วยความเร็วเฉลี่ย 4.0 m/s

กำหนดให้ กลีเซอรีนที่ 25 °C มีความหนาแน่น เท่ากับ 1258 kg/m^3 และความหนืด เท่ากับ 9.60 x 10^{-1} Pa-s

วิธีทำ

$$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{\left(4\frac{m}{s}\right)(0.150\,m)\left(1{,}258\frac{kg}{m^3}\right)}{9.60\times10^{-1}\ Pa\cdot s} = 786$$

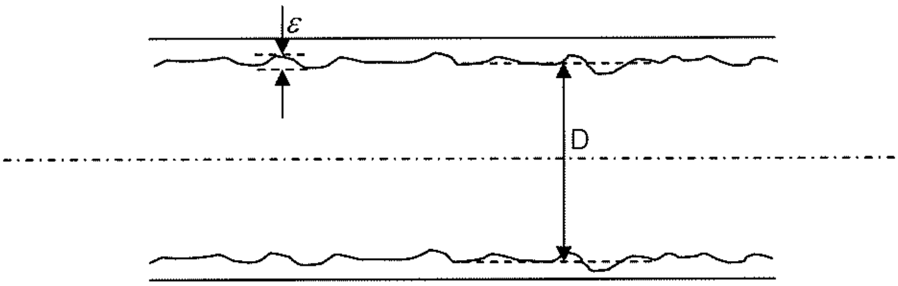
$Re = 786 < 2{,}000$ การไหลเป็นแบบราบเรียบ

$$h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{เมื่อ } f = \frac{64}{Re}$$

$$h_L = \left(\frac{64}{786}\right)\left[\left(\frac{30\,m}{0.15\,m}\right)\left(\frac{\left(4\frac{m}{s}\right)^2}{2\times 9.81\frac{m}{s^2}}\right)\right] = 13.2\,m$$ <u>ตอบ</u>

5.4 **การสูญเสียพลังงานในการไหลแบบปั่นป่วน** (Friction loss in turbulent flow)

สำหรับการสูญเสียพลังงานในการไหลแบบปั่นป่วนสามารถนำสมการของดาร์ซีมาใช้ได้ โดยสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (f) หาค่าได้จากแผนผังมู้ดดี้ (Moody Diagram) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขเรย์โนลด์ และอัตราส่วนระหว่างขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางท่อเฉลี่ยภายใน (D) กับ ความขรุขระเฉลี่ย (ε) ทั้งนี้ ความขรุขระเฉลี่ยของท่อขึ้นกับชนิดของท่อและอายุการใช้งานของท่อ



ภาพที่ 5.1 ความขรุขระเฉลี่ยและเส้นผ่าศูนย์กลางภายในท่อ

ตัวอย่าง 5.5 จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน สำหรับน้ำที่ 70 °C ไหลด้วยความเร็ว 9.14 m/s ในท่อเหล็กที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 25 mm

กำหนดให้ น้ำที่ 70 °C มีความหนืดจลน์ เท่ากับ 4.11×10^{-7} m^2/s และท่อมีความขรุขระเฉลี่ย เท่ากับ 2.4×10^{-4} m

วิธีทำ

$$Re = \frac{vD}{\upsilon} = \frac{\left(9.14\frac{m}{s}\right)(0.025\,m)}{4.11\times 10^{-7}\frac{m^2}{s}} = 5.6\times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{2.4\times 10^{-4}\,m}{0.025\,m} = 0.0096$$

จาก Moody Diagram จะได้ f = 0.038 <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 5.6 จากตัวอย่าง 5.5 ถ้าความเร็วเฉลี่ยของน้ำเปลี่ยนมาเป็น 0.14 m/s จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (f)

วิธีทำ

$$Re = \frac{vD}{\upsilon} = \frac{\left(0.14\frac{m}{s}\right)(0.025\,m)}{4.11\times10^{-7}\,\frac{m^2}{s}} = 8.52\times10^{3}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{2.4\times10^{-4}\,m}{0.025\,m} = 0.0096$$

จาก Moody Diagram จะได้ f = 0.044 <u>ตอบ</u>

จากตัวอย่าง 5.5 และ 5.6 พบว่า เมื่อความเร็วลดลง ค่า f จะเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 5.7 จงคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน สำหรับเอทธิลแอลกอฮอล์ที่ 25 °C ไหลด้วยความเร็วเฉลี่ย 5.3 m/s ในท่อเหล็กขนาดเส้นผ่าศูนยกลางภายใน เท่ากับ 0.0381 m และความขรุขระเฉลี่ย เท่ากับ 4.6 x 10^{-4} m

กำหนดให้ เอทธิลแอลกอฮอล์ที่ 25 °C มีความหนาแน่น 787 kg/m^3 และความหนืด 1.00 x 10^{-3} Pa-s

วิธีทำ

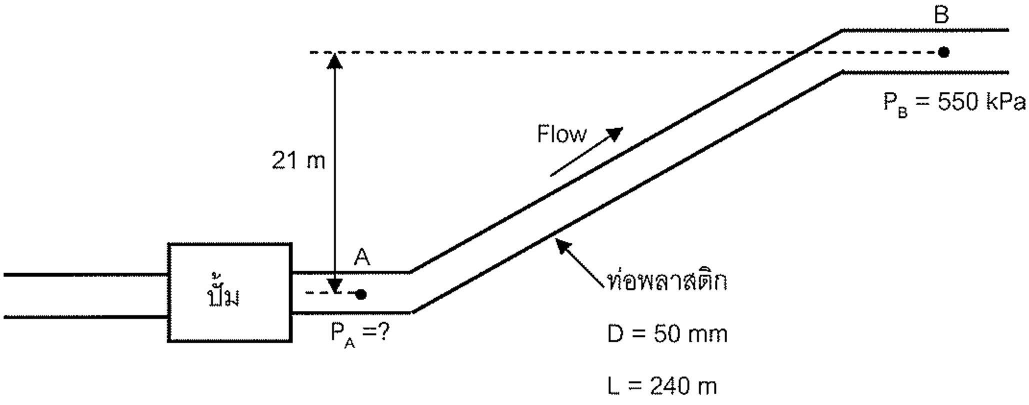
$$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{\left(5.3\frac{m}{s}\right)(0.0381m)\left(787\frac{kg}{m^3}\right)}{1\times10^{-3}\,Pa\cdot s} = 1.59\times10^{5}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4.6\times10^{-5}\,m}{0.0381m} = 0.001$$

จาก Moody Diagram จะได้ f = 0.0225 <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 5.8 จากภาพ เบนซินที่ 50 °C ไหลผ่านปั๊มไปยังจุด B ซึ่งมีความดัน 550 kPa ถ้ามีอัตราการไหล 110 L/min จงคำนวณหาความดันที่ต้องออกจากปั๊ม

กำหนดให้ เบนซินที่ 50 °C มีความถ่วงจำเพาะ 0.86 ความหนืด เท่ากับ 4.2×10^{-4} Pa·s และท่อมีความขรุขระเฉลี่ยเท่ากับ 3×10^{-7} m



วิธีทำ

จาก $$\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} + h_A - h_L = \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g} \qquad (1)$$

จาก $A_A v_A = A_B v_B$

เนื่องจาก $A_A = A_B$ ดังนั้น $v_A = v_B$

จากสมการที่ (1)

$P_A = P_B + \gamma\left[(z_A - z_B) + h_L\right]$ เมื่อ $z_A - z_B = 21$ m

หาค่า h_L จากการพิจารณาค่า Re

เมื่อ $$v = \frac{Q}{A} = \frac{1.83 \times 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}}{1.963 \times 10^{-3}\ m^2} = 0.932\ m/s$$

$$Q = 110\frac{L}{min} \times \frac{1m^3}{1000L} \times \frac{1min}{60s} = 1.83 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

$$Re = \frac{vD\rho}{\mu} = \frac{\left(0.932\frac{m}{s}\right)(0.050\,m)\left(0.86 \times 1000\frac{kg}{m^3}\right)}{4.2 \times 10^{-4}\ Pa \cdot s} = 9.54 \times 10^4$$

$Re = 9.54 \times 10^4$ การไหลแบบปั่นป่วน

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{3 \times 10^{-7}\ m}{0.050\,m} = 0.000006$$

จาก Moody Diagram; $f = 0.018$

$$h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0.018 \times \left(\frac{240\,\text{m}}{0.050\,\text{m}} \right) \times \left(\frac{\left(0.932 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 3.83\,\text{m}$$

$$\therefore P_A = 550\,\text{kPa} + \left(0.86 \times 9.81 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \right) (21\text{m} + 3.83\,\text{m}) = 550\,\text{kPa} + 209 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 759\,\text{kPa}$$

$$P_A = 759\,\text{kPa}$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 5.9 น้ำที่อุณหภูมิ 20°C ไหลอยู่ในท่อเหล็กกล้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 50 cm จงคำนวณหาอัตราการไหลของน้ำในท่อนี้

กำหนดให้ ความลาดเชิงชลศาสตร์ (h_L/L) เท่ากับ 0.006 น้ำที่ 20°C มีความหนืดจลน์เท่ากับ 1 x 10^{-6} m^2/s และท่อมีความขรุขระเฉลี่ย เท่ากับ 0.046 m

วิธีทำ

จาก $h_L = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$

$$\frac{h_L}{L} = f \times \frac{1}{D} \times \frac{v^2}{2g} = 0.006 \qquad (1)$$

หาค่า f จากการพิจารณา N_R

จาก $Re = \frac{vD\rho}{\mu} \Rightarrow v = ?$

สมมุติ $f_1 = 0.03$, จากสมการที่ (1)

$$0.006 = (0.03) \left(\frac{1}{0.050\text{m}} \right) \left(\frac{v^2}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right)$$

$$v = 1.4\,\text{m/s}$$

$$Re = \frac{\left(1.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (0.5\text{m})}{1 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 7 \times 10^5$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.046\,\text{m}}{0.5\,\text{m}} = 0.092$$

จาก Moody Diagram; $f_2 = 0.0135$ ซึ่งไม่เท่ากับ f_1 ที่ได้สมมุติไว้ในครั้งแรก จึงต้องสมมุติใหม่

สมมุติ $f_2 = 0.0135$, จากสมการที่ (1)

$$0.006 = (0.0135)\left(\frac{1}{0.050\text{m}}\right)\left(\frac{v^2}{2\times 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)$$

$$v = 2.12\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{\left(2.12\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0.5\text{m})}{1\times 10^{-6}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 10^6$$

จาก Moody Diagram; $f_3 = 0.0135 = f_2$

$$\therefore v = 2.12\,\text{m/s}$$

$$Q = \left[\frac{\pi}{4}(0.5\,\text{m})^2\right]\left(2.12\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0.416\,\text{m}^3/\text{s}$$ ตอบ

5.5 **สมการสำหรับสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน** (Equation for the friction factor)

นอกจากการหาค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน ด้วย Moody Diagram แล้วนั้น ยังมีสมการอื่น ๆ อีกที่สามารถจะวิเคราะห์และหาค่าดังกล่าวได้ กล่าวคือ สำหรับการไหลแบบราบเรียบ ($Re < 2000$) สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$f = \frac{64}{R} \tag{5.5}$$

สำหรับการไหลที่อยู่ในช่วง Transition ($2000 < Re < 4000$) จะไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานได้ แต่สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน ($Re > 4000$) สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{1}{3.7\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)} + \frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^2} \tag{5.6}$$

5.6 การสูญเสียรอง (Minor losses)

การสูญเสียรอง คือ การสูญเสียพลังงานที่เกิดจากการเปลี่ยนขนาดและทิศทางการไหลเนื่องจากวัสดุที่ของเหลวไหลผ่าน ซึ่งสามารถหาค่าได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$h_L = K\left(\frac{v^2}{2g}\right) \tag{5.7}$$

เมื่อ h_L คือ การสูญเสียรอง

K คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสีย เป็นค่าที่ขึ้นกับชนิดและรูปร่างของวัสดุที่ของเหลวไหลผ่าน

v_1 คือ ความเร็วเฉลี่ย ณ ตำแหน่งที่พิจารณาการสูญเสียรอง

การสูญเสียรอง พิจารณาที่สภาวะต่าง ๆ ดังนี้

5.6.1 การขยายหน้าตัดท่อทันทีทันใด

เมื่อของไหลไหลจากท่อที่มีขนาดเล็กไปสู่ท่อที่มีขนาดใหญ่กว่า ซึ่งเป็นท่อที่มีการขยายพื้นที่หน้าตัดการไหลอย่างทันทีทันใด ความเร็วจะลดลงเมื่อไหลเข้าสู่ท่อที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัดที่ใหญ่กว่า เนื่องจากเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ดังนั้น ทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานซึ่งสามารถค่าได้จากสมการดังนี้

$$h_L = K\left(\frac{v_1^2}{2g}\right)$$

เมื่อ v_1 คือ ความเร็วเฉลี่ย ณ ท่อที่มีขนาดเล็กกว่า และกำลังไหลไปสู่ท่อที่มีขนาดใหญ่กว่า

K คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสูญเสีย ซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของท่อทั้งสอง

$$= \left[1-\frac{A_1}{A_2}\right]^2 = \left[1-\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2\right]^2$$

ตัวห้อย “1”= ท่อที่มีขนาดเล็กกว่า

ตัวห้อย “2”= ท่อที่มีขนาดใหญ่กว่า