ถ้า $f'(c)>0$ แล้ว โดยบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x=c$ จะได้

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$$

ดังนั้นสำหรับ h ที่มีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \qquad .....(3.1.1)$$

ถ้า $h>0$ แล้ว จากอสมการที่ (3.1.1) จะได้

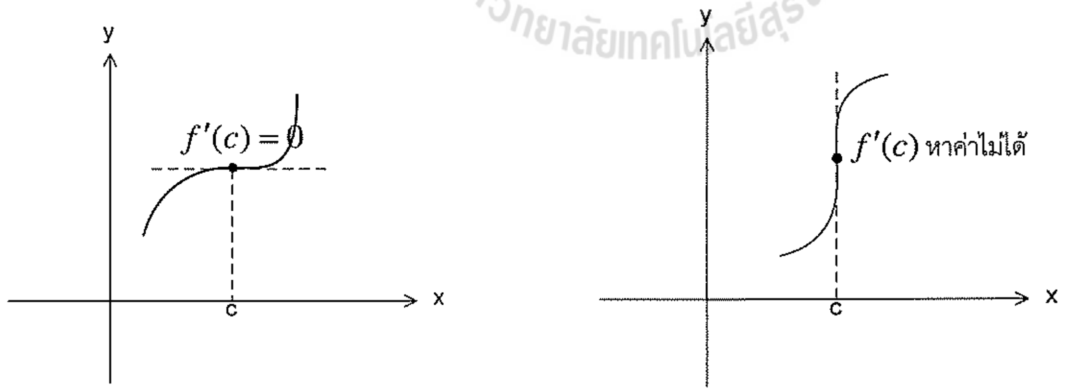
$$f(c+h)-f(c)>0$$

ดังนั้น $f(c+h)>f(c)$ นั่นคือ $f(c)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
และถ้า $h<0$ แล้ว จากอสมการที่ (3.1.1) จะได้

$$f(c+h)-f(c)<0$$

ดังนั้น $f(c+h)<f(c)$ นั่นคือ $f(c)$ ไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจาก f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ ดังนั้น ที่สมมติว่า $f'(c)>0$ ไม่จริง
สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า ถ้ากำหนดให้ $f'(c)<0$ แล้วจะเกิดข้อขัดแย้งขึ้น
ดังนั้น เราจึงสามารถสรุปได้ว่า $f'(c)=0$ เพราะฉะนั้น c เป็นค่าวิกฤติของฟังก์ชัน f □

โดยทั่วไปแล้ว บทกลับของทฤษฎีบทของแฟร์มาต์โดยทั่วไปแล้วไม่จริง นั่นคือ ถ้า c เป็นค่าวิกฤติของฟังก์ชัน f แล้วไม่จำเป็นว่า $f(c)$ จะต้องเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (ดูรูปที่ 3.1.6)



รูปที่ 3.1.6 c เป็นค่าวิกฤติของ f แต่ $f(c)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงหาค่าวิกฤตของ $f(x)=5x^{\frac{7}{5}}-35x^{\frac{2}{5}}$

วิธีทำ พิจารณา

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[5x^{\frac{7}{5}}-35x^{\frac{2}{5}}\right]$$

$$=7x^{\frac{2}{5}}-14x^{\frac{-3}{5}}=\frac{7x-14}{x^{3/5}}$$

$$=\frac{7}{x^{3/5}}(x-2)$$

เพราะฉะนั้น $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=2$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$
ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=2$ และ $x=0$ □

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงหาค่าวิกฤตของ $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

วิธีทำ พิจารณา

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right]$$

$$=\frac{x(2x)-\left(x^2+1\right)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=-1$ และ $x=1$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ แต่ $0\notin D_f$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=-1$ และ $x=1$ □

การหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด

จากทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ที่กล่าวว่า ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่ค่าวิกฤติเราสามารถนำไปใช้ประยุกต์ในการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ได้ดังนี้

1. หาค่าวิกฤตของ f บนช่วงเปิด (a,b)
2. หาค่าของ f ที่ค่าวิกฤติทุก ๆ ค่าบนช่วงเปิด (a,b)

3. หาค่าของ f ที่จุดปลายแต่ละจุดของช่วงปิด $[a,b]$ (หา $f(a)$ และ $f(b)$)
4. นำค่าที่ได้จากข้อ 2) และ ข้อ 3) มาเปรียบเทียบกัน ค่าที่มากที่สุดก็คือ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าที่น้อยที่สุดก็คือ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 3.1.5 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ บนช่วง $[-2,4]$

วิธีทำ **ขั้นที่ 1** หาค่าวิกฤตของ f

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^3-3x^2-9x+10\right]$$
$$=3x^2-6x-9$$
$$=3(x-3)(x+1)$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-1$ และ $x=3$ นั่นคือ ค่าวิกฤตคือ $x=-1$ และ $x=3$

และ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+10=15$

และ $f(3)=(3)^3-3(3)^2-9(3)+10=-17$

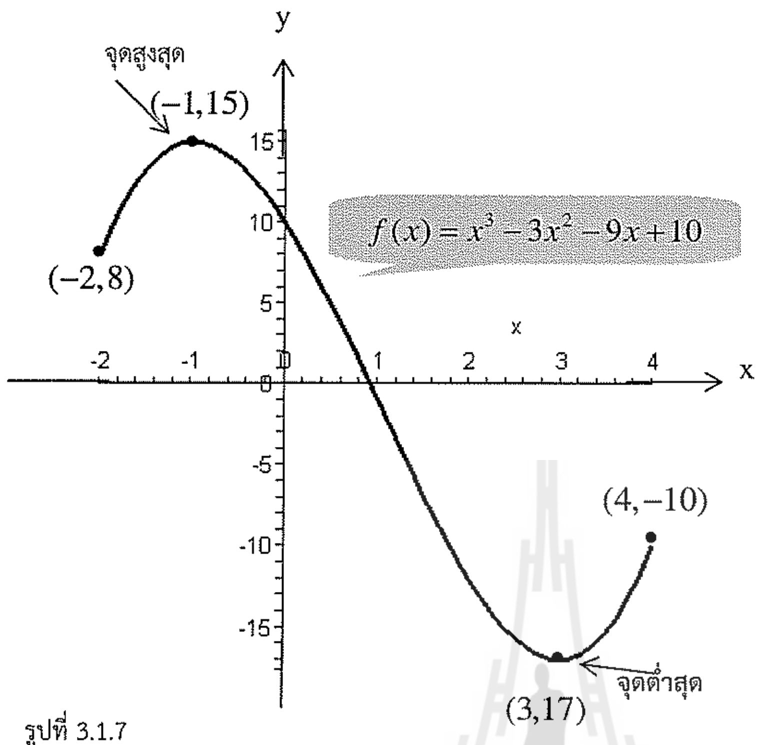
ขั้นที่ 2 $f(-2)=(-2)^3-3(-2)^2-9(-2)+10=8$

$f(4)=(4)^3-3(4)^2-9(4)+10=-10$

ขั้นที่ 3 เปรียบเทียบค่าของ $f(-1), f(3), f(-2)$ และ $f(4)$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 และ 2 จะได้ว่า

จุดปลายซ้าย	ค่าวิกฤติ	ค่าวิกฤติ	จุดปลายขวา
$f(-2)=8$	$f(-1)=15$ ค่าสูงสุด	$f(3)=-17$ ค่าต่ำสุด	$f(4)=-10$

(ดูรูปที่ 3.1.7)



รูปที่ 3.1.7

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.6**</u> จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ บนช่วงปิด $[0,2\pi]$

<u>วิธีทำ</u> **ขั้นที่ 1** หาค่าวิกฤตของ f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[2\sin x-\cos 2x] \\ &= 2\cos x+2\sin 2x \\ &= 2\cos x+4\sin x\cos x \\ &= 2\cos x(1+2\sin x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $\cos x=0$ และ $1+2\sin x=0$ บนช่วงปิด $[0,2\pi]$

จาก $\cos x=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=\dfrac{\pi}{2}$ และ $x=\dfrac{3\pi}{2}$

และ $1+2\sin x=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=\dfrac{7\pi}{6}$ และ $x=\dfrac{11\pi}{6}$

ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=\dfrac{7\pi}{6}$ และ $x=\dfrac{11\pi}{6}$

ขั้นที่ 2 $$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(\pi)=3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos(3\pi)=-1$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$$

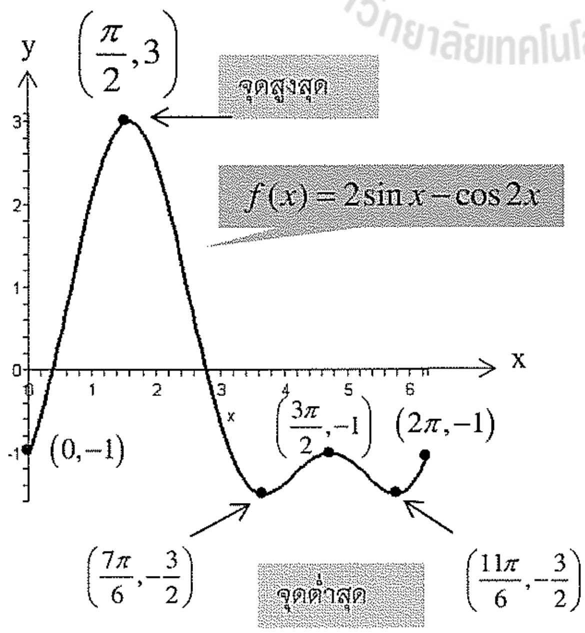
$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$$

ขั้นที่ 3 $f(0)=2\sin 0-\cos 0=-1$

$f(2\pi)=2\sin 2\pi-\cos 2\pi=-1$

ขั้นที่ 4 เปรียบเทียบค่าของ $f(0),\ f\left(\frac{\pi}{2}\right),\ f\left(\frac{7\pi}{6}\right), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ และ $f(2\pi)$ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 และ 3 จะได้ว่า

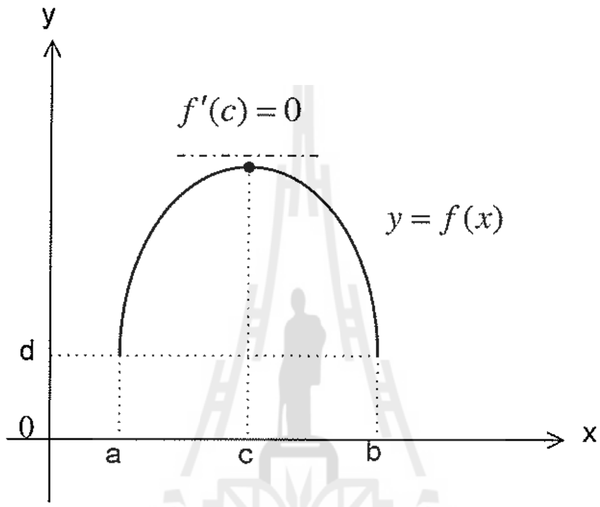
จุดปลายซ้าย	ค่าวิกฤต	ค่าวิกฤต	ค่าวิกฤต	ค่าวิกฤต	จุดปลายขวา
$f(0)=-1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ **ค่าสูงสุด**	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$ **ค่าต่ำสุด**	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$ **ค่าต่ำสุด**	$f(2\pi)=-1$



รูปที่ 3.1.8

ทฤษฎีบทที่ 3.1.6 (ทฤษฎีบทของโรล)
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ถ้า $f(a)=f(b)$ แล้ว จะมี $c\in(a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c)=0$

รูปที่ 3.1.9



พิสูจน์ ให้ $f(a)=f(b)=d$

กรณีที่ 1 ถ้า $f(x)=d$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว โดยทฤษฎีบทที่ 2.3.1 จะได้ว่า $f'(x)=0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$

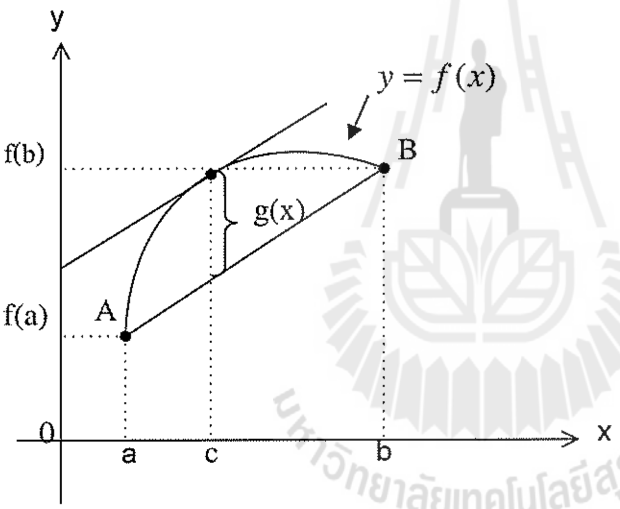
กรณีที่ 2 สมมติให้ $f(x)>d$ สำหรับบางสมาชิก $x\in(a,b)$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 3.1.2 ฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดที่ $x=c$ สำหรับบาง $c\in[a,b]$ นอกจากนี้จะได้อีกว่า $f(c)>d$ ดังนั้น ค่าสูงสุดจะไม่เกิดขึ้นที่ $x=a$ และ $x=b$ ดังนั้น ฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดในช่วงเปิด (a,b) นั่นก็แสดงว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และจากทฤษฎีบทที่ 3.1.5 จะได้ว่า c คือค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และจากการที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ เราจึงได้ว่า $f'(c)=0$

กรณีที่ 3 สมมติให้ $f(x)<d$ สำหรับบางสมาชิก $x\in(a,b)$ เราสามารถแสดงได้เช่นเดียวกันว่า มี $c\in(a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c)=0$ (ให้นักศึกษาลองไปทำเป็นแบบฝึกหัด)

เพราะฉะนั้นจากทั้งสามกรณี จะได้ว่า มี $c\in(a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c)=0$ □

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม เป็นทฤษฎีบทที่เป็นการวางนัยทั่วไปของทฤษฎีบทของโรล

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.1.7</u> (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) แล้วจะมีจำนวนจริง $c\in(a,b)$ ที่ทำให้ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



รูปที่ 3.1.10

<u>พิสูจน์</u> ให้ A และ B เป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้งของสมการ $y=f(x)$ โดยที่ A มีพิกัดเป็น $(a,f(a))$ และ B มีพิกัดเป็น $(b,f(b))$ (ดูรูปที่ 3.1.10) ดังนั้นสมการของเส้นตัดกราฟที่ผ่านจุด A และ B คือ

$$y-f(a)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)$$

หรือ

$$y=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a)+f(a)$$

ให้ $g(x)$ แทนผลต่างระหว่างความสูงของกราฟของฟังก์ชัน f และความสูงของเส้นตัด ดังนั้น

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left(\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a)\right) \quad .....(3.1.2)$$

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b) ดังนั้น $g(x)$ ก็จะมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b)

เนื่องจาก $g(a) = 0 = g(b)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.1.6 จะได้ว่ามี $c \in (a,b)$ ที่ทำให้ $g'(c) = 0$

จากสมการที่ (3.1.2) จะได้ $g'(x) = f'(x) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$

ดังนั้น $g'(c) = f'(c) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$

จาก $g'(c) = 0$ จะได้ว่า $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.7</u> จงหาค่า c ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทค่ามัชฌิม สำหรับ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{บนช่วงปิด} \quad [0,2]$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,2]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด $(0,2)$

ฉะนั้นโดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะมี $c \in (0,2)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{-5 - 1}{2} = -3$

จาก $f'(c) = 3c^2 - 4c - 3$ ดังนั้น $3c^2 - 4c - 3 = -3$ นั่นก็คือ $c = 0$ หรือ $c = \dfrac{4}{3}$ แต่

เนื่องจาก $0 \notin (0,2)$ ดังนั้น $c = \dfrac{4}{3}$ □

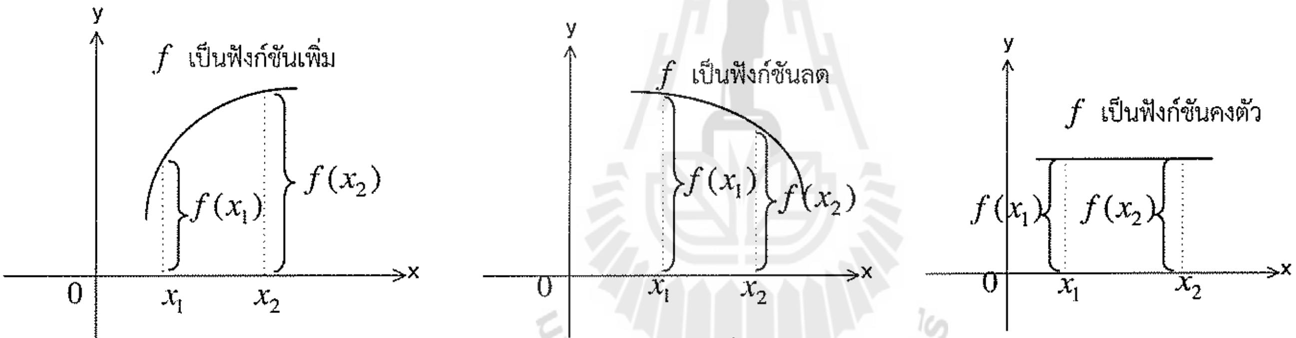
3.2 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing and Decreasing Functions)

<u>บทนิยามที่ 3.2.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และให้ $x_1, x_2 \in I$ แล้ว

(1) ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in I$

(2) ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันลด** บนช่วง I ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in I$

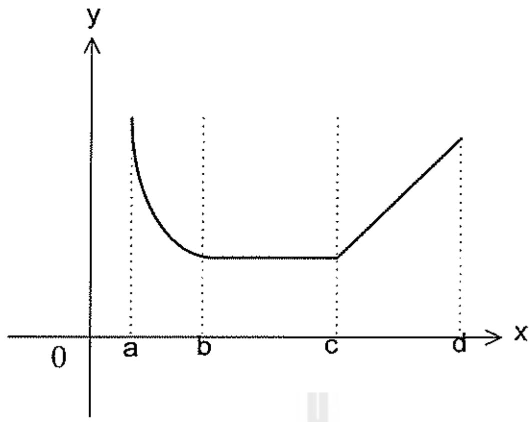
(3) ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันคงตัว** บนช่วง I ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in I$



(a) $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ (b) $f(x_1) > f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ (c) $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ x_1, x_2

รูปที่ 3.2.1

ในการพิจารณาว่า ฟังก์ชันนั้นจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด เราสามารถดูจากกราฟของฟังก์ชันได้ นั่นคือ ถ้ากราฟของฟังก์ชันสูงขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ฟังก์ชัน f ก็จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น และถ้ากราฟของฟังก์ชันลดลงเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ฟังก์ชัน f ก็จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วงนั้น ตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.2.2



รูปที่ 3.2.2

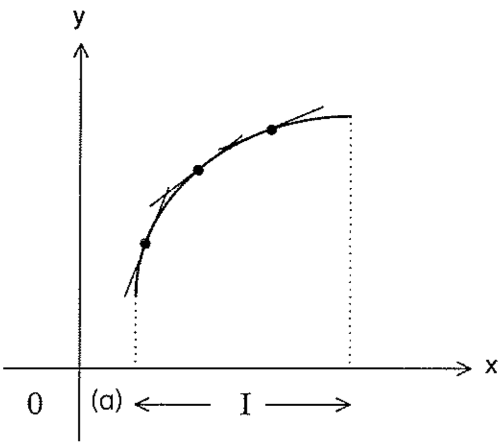
จากรูปที่ 3.2.2 จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a,b]$ และ f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[b,c]$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[c,d]$

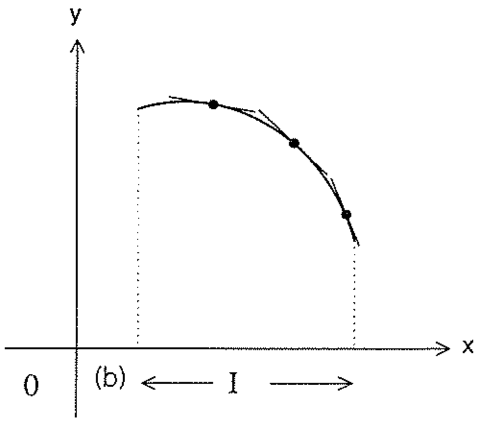
<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.2</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a,b)

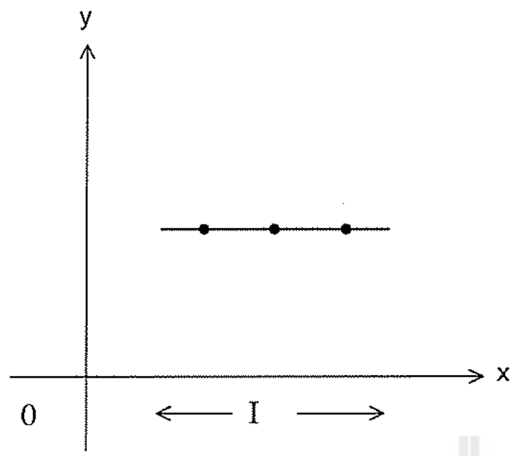
(1) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** บนช่วงปิด $[a,b]$

(2) ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันลด** บนช่วงปิด $[a,b]$

(3) ถ้า $f'(x)=0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันคงตัว** บนช่วงปิด $[a,b]$







รูปที่ 3.2.3 (c)

พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันค่าเพิ่มบนช่วง I (ดูรูป 3.2.3 (a)) พบว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ค่า x ใด ๆ บนช่วง I เป็นบวกเสมอ และทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันค่าลดบนช่วง I (ดูรูป 3.2.3 (b)) จะพบว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่ค่า x ใด ๆ บนช่วง I เป็นลบเสมอ และถ้ากราฟของฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ เราจะพบว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันเป็นศูนย์ (ดูรูปที่ 3.2.3 (c))

__ตัวอย่างที่ 3.2.1__ กำหนด $f(x)=x^2-4x+3$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

__วิธีทำ__ (1) พิจารณาค่าวิกฤต

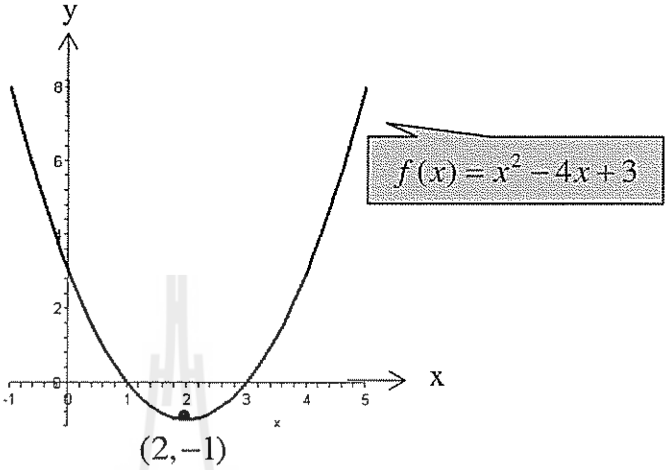
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^2-4x+3\right]=2x-4=2(x-2)$$

และ $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $2(x-2)=0$ นั่นคือ $x=2$
เนื่องจาก $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น $f'(x)$ หาค่าได้ทุก ๆ x บนเซตของจำนวนจริง
ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x=2$

(2) สร้างตารางในการทดสอบช่วงที่ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงโดยการแบ่งช่วง ซึ่งพิจารณาช่วงแบ่งโดยดูจากค่าวิกฤต ดังนี้

ช่วง	$x<2$	$x>2$
ค่าทดสอบ	$x=1$	$x=3$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(1)=-2<0$	$f'(3)=2>0$
ผลสรุป	f มีค่าลดลง	f มีค่าเพิ่มขึ้น

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้น f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.2.2 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,2]$ □



รูปที่ 3.2.4

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.2</u> กำหนด $f(x)=x^3-3x^2+1$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> (1) พิจารณาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^3-3x^2+1\right]=3x^2-6x=3x(x-2)$$

และ $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $3x(x-2)=0$ นั่นคือ $x=0$ และ $x=2$

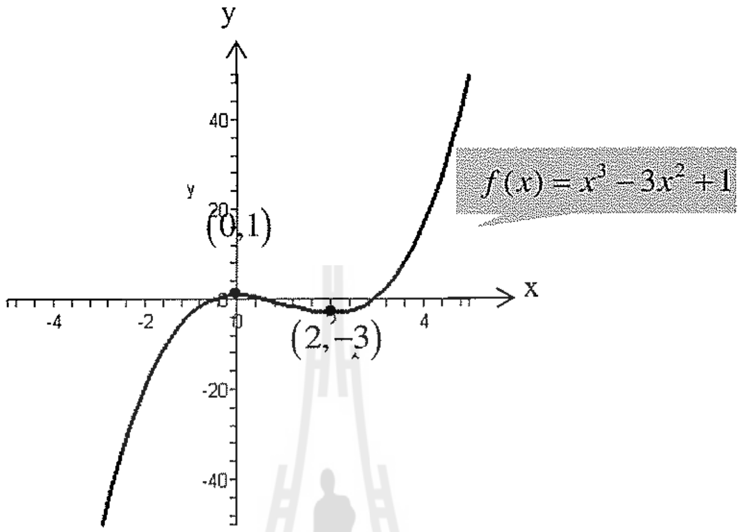
เนื่องจาก $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น $f'(x)$ หาค่าได้ทุก ๆ x บนเซตของจำนวนจริง ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=0$ และ $x=2$

(2) สร้างตารางในการทดสอบช่วงที่ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงโดยการแบ่งช่วง ซึ่งพิจารณาช่วงแบ่งโดยดูจากค่าวิกฤต ดังนี้

ช่วง	$x<0$	$0<x<2$	$x>2$
ค่าทดสอบ	-1	1	3
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(1)=9>0$	$f'(1)=-3<0$	$f'(3)=9>0$
ผลสรุป	f มีค่าเพิ่มขึ้น	f มีค่าลดลง	f มีค่าเพิ่มขึ้น

จากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 3.2.2 จะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[0,2]$ (ดูรูปที่ 3.2.5) □



รูปที่ 3.2.5

<u>**ตัวอย่างที่ 3.2.3**</u> กำหนด $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+2$ จงหาว่า ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงบนช่วงใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> (1) พิจารณาค่าวิกฤต

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[3x^4+4x^3-12x^2+2\right] \\ &= 12x^3+12x^2-24x \\ &= 12x(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

และ $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $12x(x+2)(x-1)=0$ นั่นคือ $x=-2,\ x=0$ และ $x=-1$

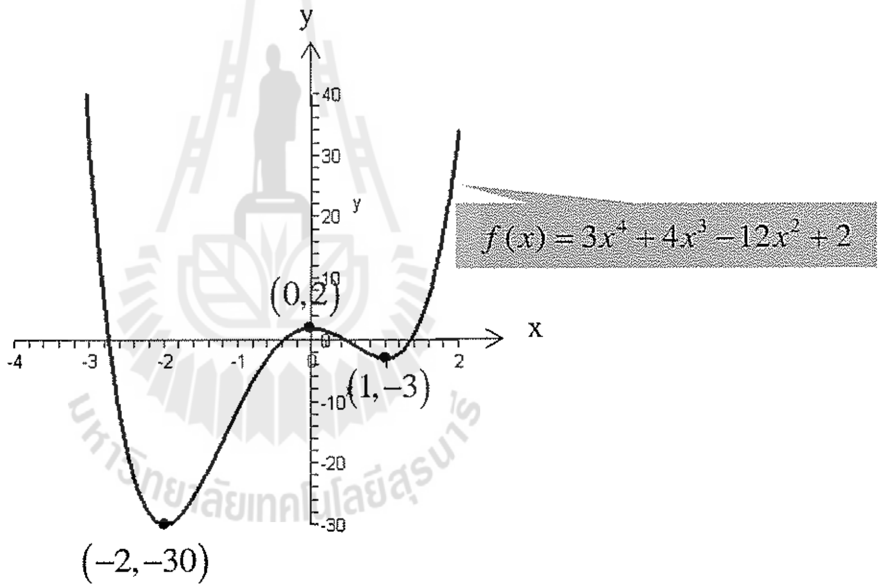
เนื่องจาก $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น $f'(x)$ หาค่าได้ทุก ๆ x บนเซตของจำนวนจริง

ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=-2,\ x=0$ และ $x=1$

(2) สร้างตารางในการทดสอบช่วงที่ฟังก์ชัน f มีค่าเพิ่มขึ้น หรือลดลงโดยการแบ่งช่วง ซึ่งพิจารณาช่วงแบ่งโดยดูจากค่าวิกฤต ดังนี้

ช่วง	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
ค่าทดสอบ	$x=-3$	$x=-1$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-3)=-144<0$	$f'(-1)=24>0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}<0$	$f'(2)=96>0$
ผลสรุป	f มีค่าลดลง	f มีค่าเพิ่มขึ้น	f มีค่าลดลง	f มีค่าเพิ่มขึ้น

เนื่องจาก ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 3.2.2 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นบนช่วง $[-2,0]\cup[1,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $(-\infty,-2]\cup[0,1]$ (ดูรูปที่ 3.2.6) □



รูปที่ 3.2.6

<u>การหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง</u>

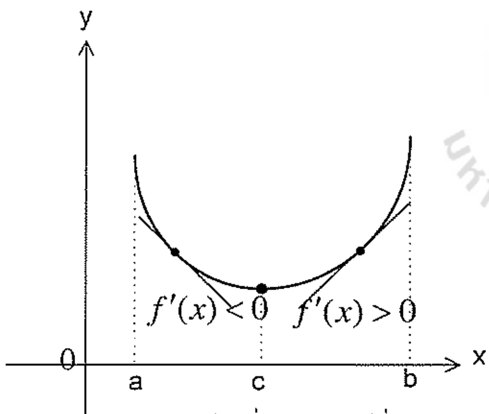
<u>ทฤษฎีบทที่ 3.2.3</u>

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I และ c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f ที่อยู่ในช่วงเปิด I ถ้า ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I (อาจจะยกเว้นที่ c ก็ได้) แล้ว

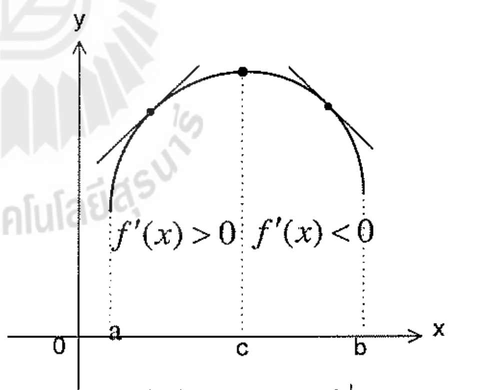
(1) ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับ $x\in(a,c)$ และ $f'(x)>0$ สำหรับ $x\in(c,b)$ แล้ว ฟังก์ชัน f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ (ดูรูปที่ 3.2.7 (a))

(2) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับ $x\in(a,c)$ และ $f'(x)<0$ สำหรับ $x\in(c,b)$ แล้ว ฟังก์ชัน f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ (ดูรูปที่ 3.2.7(b))

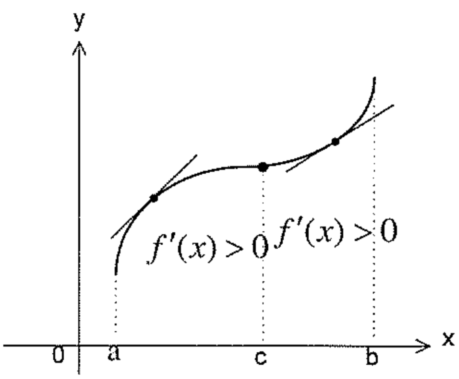
(3) ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับ $x\in(a,c)\cup(c,b)$ หรือ $f'(x)<0$ สำหรับ $x\in(a,c)\cup(c,b)$ แล้ว ฟังก์ชัน f จะไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ (ดูรูปที่ 3.2.7(c) และ (d))

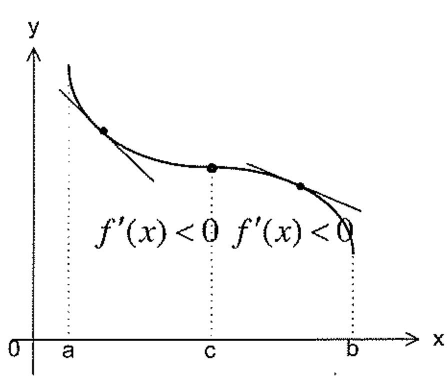


(a) f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c



(b) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c





ข้อสังเกต จากสมบัติข้างบนจะเห็นได้ว่า ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f จะเกิดที่ค่าวิกฤต ซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมาย ดังนั้นสมบัติข้างบนจึงเป็นการทดสอบหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.4</u> จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

<u>วิธีทำ</u> (1) หาค่าวิกฤตของ f

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 - 3x^2 - 9x + 10\right]$$
$$= 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x-3)(x+1)$$

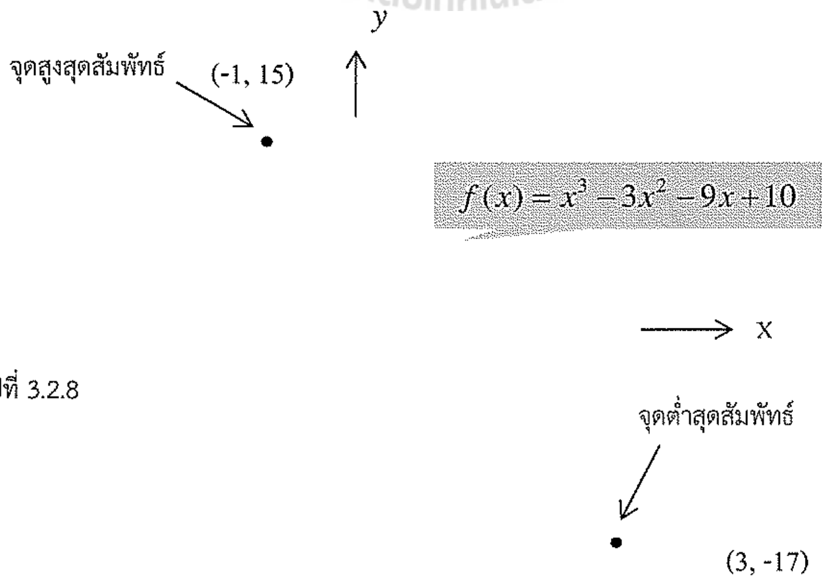
ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$ และ $x = 3$

เนื่องจาก $f'(x)$ หาค่าได้ทุก ๆ $x \in R$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x = -1$ และ $x = 3$

(2) ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x < -1,\ -1 < x < 3$ และ $x > 3$

ช่วง	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
ค่าทดสอบ	$x = -2$	$x = 1$	$x = 4$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-2) = 15 > 0$	$f'(1) = -12 < 0$	$f'(4) = 15 > 0$
ผลสรุป	f เพิ่ม	f ลด	f เพิ่ม

ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.2.3 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = 15$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 3$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(3) = -17$ (ดูรูปที่ 3.2.8) □



รูปที่ 3.2.8

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.5</u> จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^5 - 5x^3$

<u>วิธีทำ</u> (1) หาค่าวิกฤตของ f

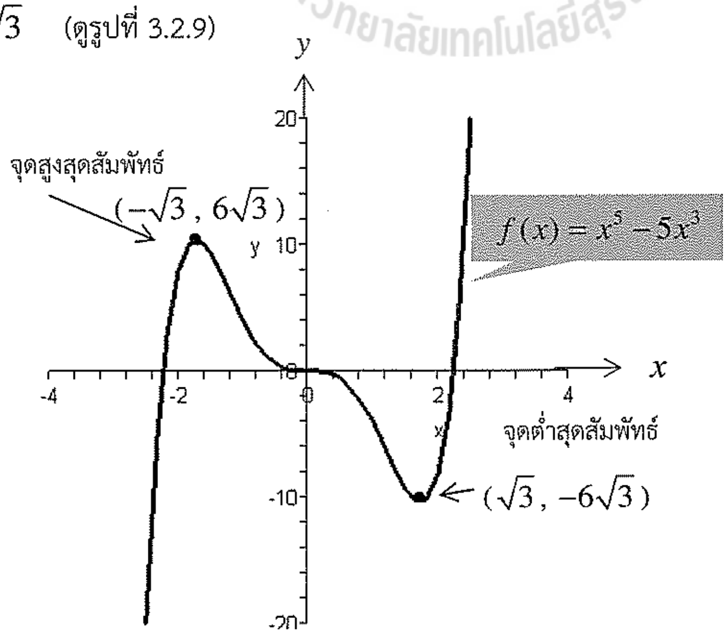
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^5 - 5x^3\right] \\ &= 5x^4 - 15x^2 \\ &= 5x^2\left(x^2 - 3\right) \\ &= 5x^2\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ และ $x = \sqrt{3}$ นั่นคือ ค่าวิกฤตคือ $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ และ $x = \sqrt{3}$

(2) ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{3}$ และ $x > \sqrt{3}$

ช่วง	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
ค่าทดสอบ	$x = -2$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-2) = 20 > 0$	$f'(-1) = -10 < 0$	$f'(1) = -10 < 0$	$f'(2) = 20 > 0$
ผลสรุป	f เพิ่ม	f ลด	f ลด	f เพิ่ม

ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.2.3 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -\sqrt{3}$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = \sqrt{3}$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$ (ดูรูปที่ 3.2.9) □



รูปที่ 3.2.9

<u>**ตัวอย่างที่ 3.2.6**</u> จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> (1) หาค่าวิกฤตของ f

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x-\frac{4}{x^2}\right]=1-4\left(-2x^{-3}\right)$$
$$=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

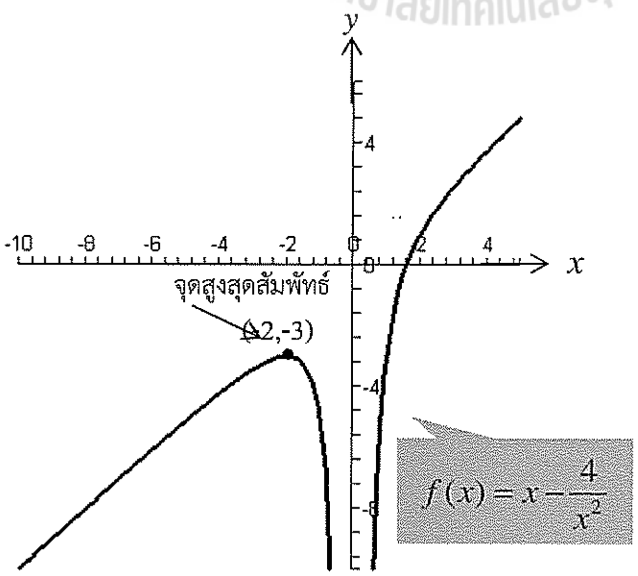
ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x^3+8=0 \Rightarrow x=-2$

และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ แต่ $0\notin D_f$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=-2$

(2) ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x<-2,\ -2<x<0$ และ $x>0$

ช่วง	$x<-2$	$-2<x<0$	$x>0$
ค่าทดสอบ	$x=-3$	$x=-1$	$x=1$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-3)=\frac{19}{27}>0$	$f'(-1)=-7<0$	$f'(1)=9>0$
ผลสรุป	f เพิ่ม	f ลด	f เพิ่ม

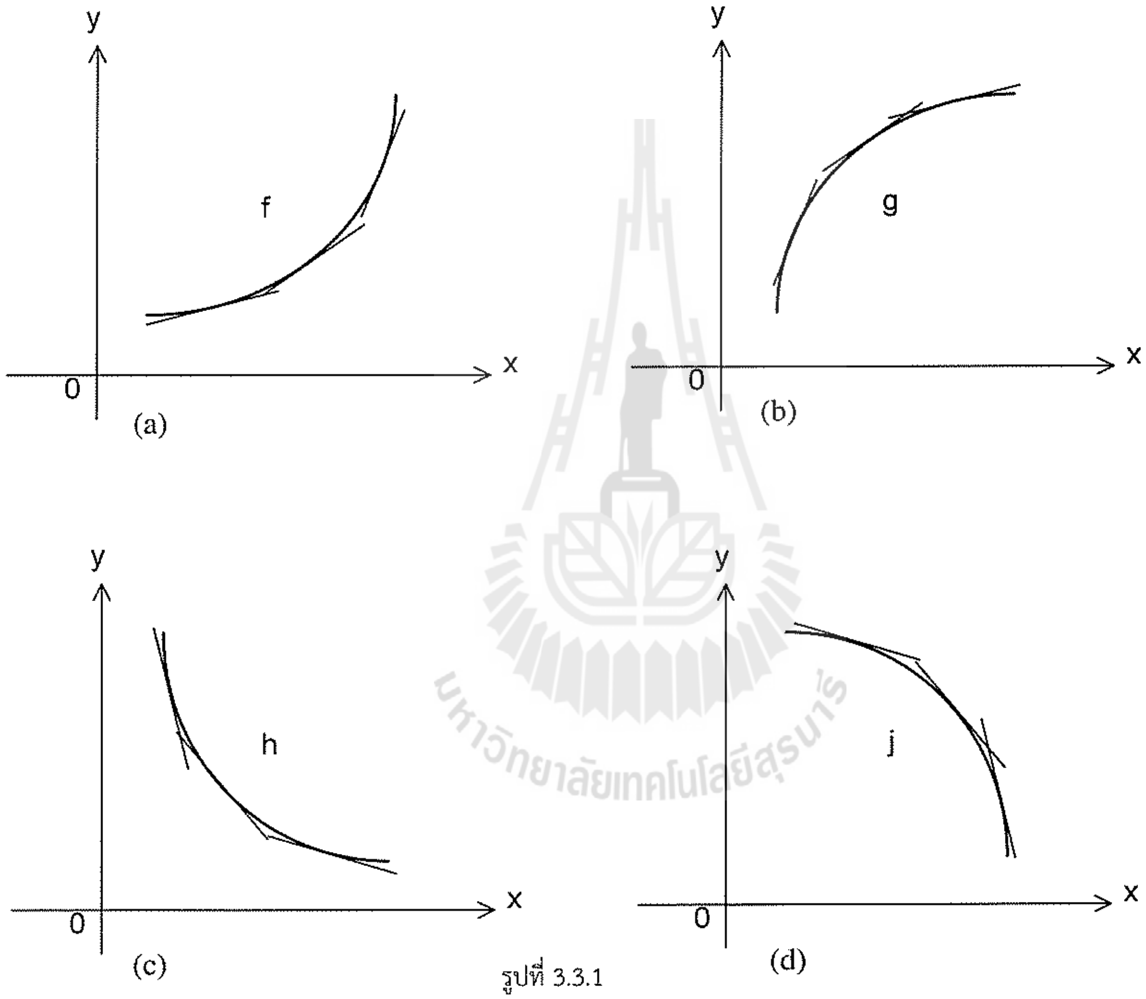
ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.2.3 จะได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f(-2)=-3$ (ดูรูปที่ 3.2.10) □



รูปที่ 3.2.10

3.3 ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้า (Concavity and Points of Inflection)

พิจารณากราฟในรูปข้างล่าง



รูปที่ 3.3.1

พิจารณา กราฟที่ 3.3.1 (a) และ (b) จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แต่สิ่งที่ต่างกันของกราฟของทั้งสองฟังก์ชัน คือ **ความเว้า** จากรูป (a) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $f'(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย (นักศึกษาสามารถพิจารณาได้จากความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ f ที่ x) ในทำนองกลับกัน

รูป (b) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $g'(x)$ มีค่าลดลง (นักศึกษาสามารถพิจารณาได้จากความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ g ที่ x)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณากราฟที่ 3.3.1 (c) และ (d) จะเห็นว่าฟังก์ชัน h และ j เป็นฟังก์ชันลดทั้งคู่ แต่สิ่งที่ต่างกันของกราฟของทั้งสองฟังก์ชัน คือ **ความเว้า** จากรูป (c) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $h'(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นด้วย (นักศึกษาสามารถพิจารณาได้จากความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ h ที่ x) ส่วนรูป (d) เมื่อ x เพิ่มขึ้นค่าของ $j'(x)$ มีค่าลดลง (นักศึกษาสามารถพิจารณาได้จากความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ j ที่ x)

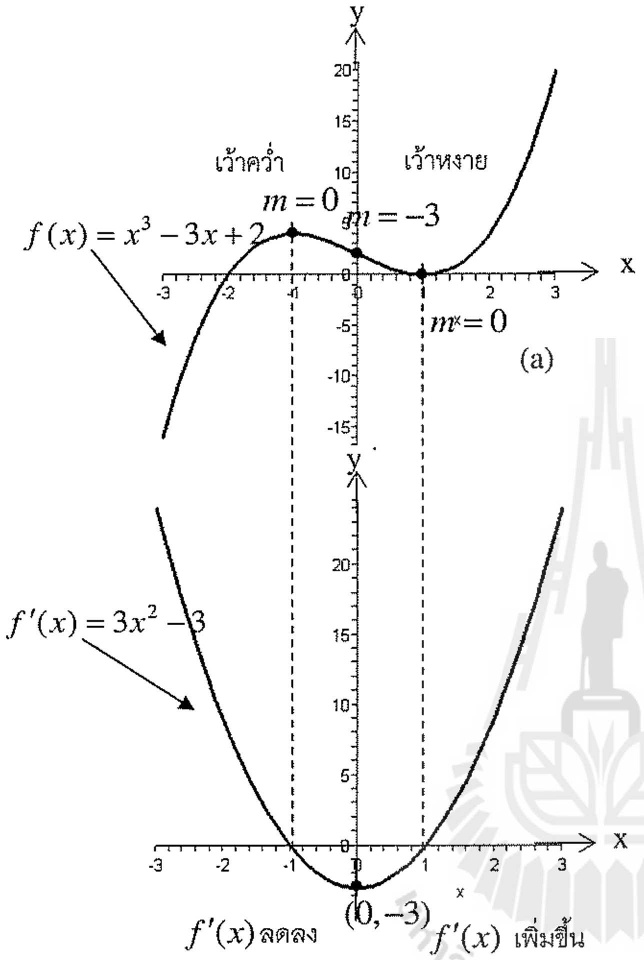
จากรูปที่ 3.3.1 (a) - (d) จะเห็นได้เพิ่มเติมว่า กราฟของ f และ h มีลักษณะความเว้าเหมือนกัน คือ **เว้าหงาย** และอนุพันธ์ของ f และ h มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนกราฟของ g และ j มีลักษณะความเว้าเหมือนกัน คือ **เว้าคว่ำ** และอนุพันธ์ของ g และ j มีค่าลดลงเมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น เราสามารถนิยามการเว้าหงาย เว้าคว่ำของกราฟ ได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 3.3.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด I เราจะกล่าวว่ากราฟของ f

(1) **เว้าหงาย** (concave upward) บนช่วง I ถ้า $f'(x)$ เพิ่มขึ้นบนช่วง I

(2) **เว้าคว่ำ** (concave downward) บน I ถ้า $f'(x)$ ลดลงบนช่วง I

<u>**ตัวอย่างที่ 3.3.1**</u> กำหนด $f(x)=x^3-3x+2$ ซึ่งกราฟของ f แสดงดังรูปที่ 3.3.2 (a)



รูปที่ 3.3.2 (b)

จากกราฟของ f (ดังแสดงในรูปที่ 3.3.2(a)) จะเห็นว่ากราฟของ f เว้าคว่ำบนช่วง $(-\infty,0)$ เพราะว่า $f'(x)=3x^2-3$ มีค่าลดลงบนช่วง $(-\infty,0)$ (ดูรูปที่ 3.3.2 (b)) และกราฟของ f เว้าหงายบนช่วง $(0,\infty)$ เพราะ $f'(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง $(0,\infty)$ (ดูรูปที่ 3.3.2(b))

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.3.2**</u>

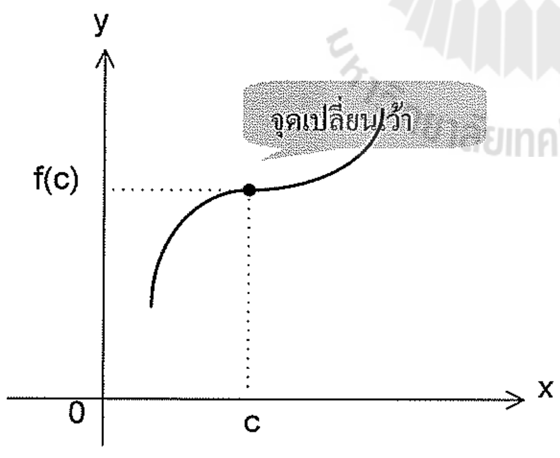
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่สองได้บนช่วงเปิด I

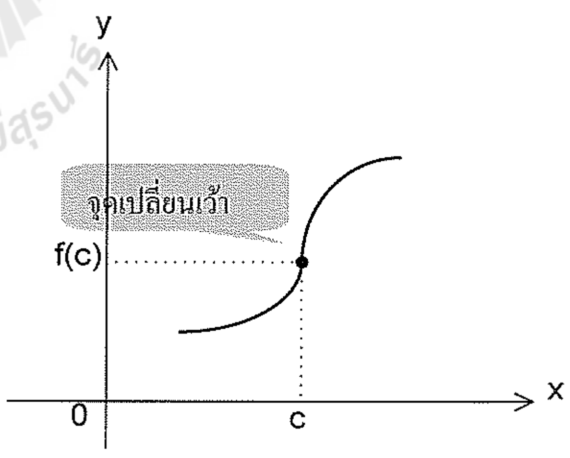
(1) ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว กราฟของฟังก์ชัน f **เว้าหงาย** บนช่วงเปิด I

(2) ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว กราฟของฟังก์ชัน f **เว้าคว่ำ** บนช่วงเปิด I

<u>**บทนิยามที่ 3.3.3**</u>

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I และ $c \in I$ เราจะเรียกจุด $(c, f(c))$ ว่า **จุดเปลี่ยนเว้า** (inflection point) ถ้ากราฟของ f มีการเปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำ (หรือ เปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหวาย) ที่จุด $\left(c, f\left(c\right)\right)$(เครื่องหมายของ f'' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ c)





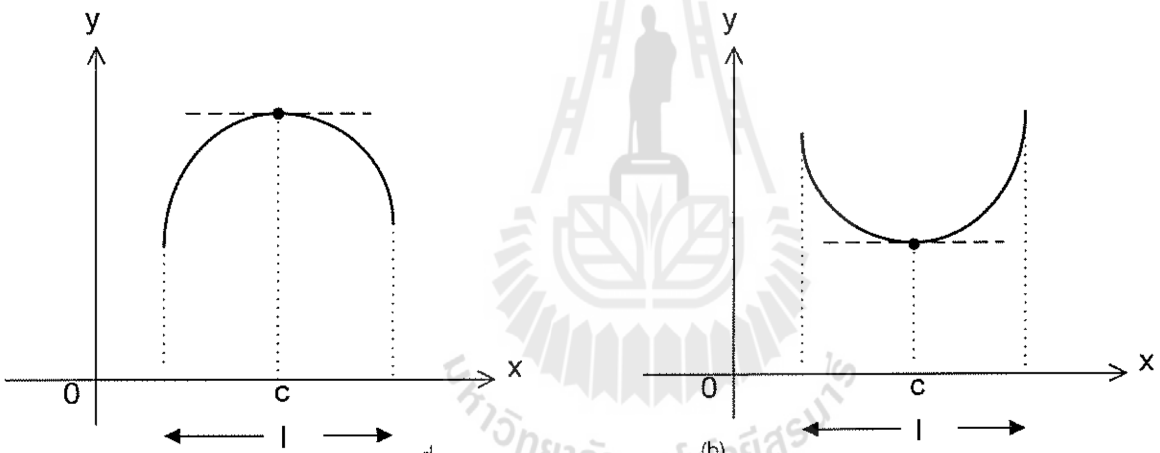
รูปที่ 3.3.3

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.3.4</u>

ถ้า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้าของกราฟของฟังก์ชัน f แล้ว $f''(c)=0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้

<u>**การใช้อนุพันธ์ที่สองหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน**</u>

พิจารณารูปด้านล่าง



รูปที่ 3.3.4

จากรูปที่ 3.3.4 (a) จะเห็นว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่ค่าวิกฤต c ($f'(c)=0$) และลักษณะของกราฟเว้าคว่ำบนช่วง I ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.3.2 จะได้ $f''(x)<0$ สำหรับ $x \in I$ นั่นคือ $f''(c)<0$ และจากรูป 3.3.4 (b) จะเห็นว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์เกิดขึ้นที่ค่าวิกฤต c ($f'(c)=0$) และลักษณะของกราฟเว้าหงายบนช่วง I ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.3.2 จะได้ $f''(x)>0$ สำหรับ $x \in I$ นั่นคือ $f''(c)>0$ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ดังนี้

<u>**ทฤษฎีบทที่ 3.3.5**</u>

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มี $f'(c)=0$ และ f หาอนุพันธ์ที่สองได้บนช่วงเปิดที่บรรจุ c

(1) ถ้า $f''(c)>0$ แล้ว f จะมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $\left(c, f(c)\right)$

(2) ถ้า $f''(c)<0$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $\left(c, f(c)\right)$

ถ้า $f''(c)=0$ แล้ว ไม่สามารถทดสอบโดยใช้อนุพันธ์ที่สองได้ ต้องทดสอบค่าสุดขีดสัมพัทธ์โดยใช้อนุพันธ์ที่หนึ่ง

<u>**ตัวอย่างที่ 3.3.2**</u> จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ โดยใช้อนุพันธ์ที่สองทดสอบ

<u>วิธีทำ</u> หาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[2x^3-9x^2+12x\right]=6x^2-18x+12$$
$$=6(x-1)(x-2)$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=1$ และ $x=2$ เพราะว่าโดเมนของฟังก์ชัน f คือเซตของจำนวนจริง ดังนั้นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x=1$ และ $x=2$

จาก

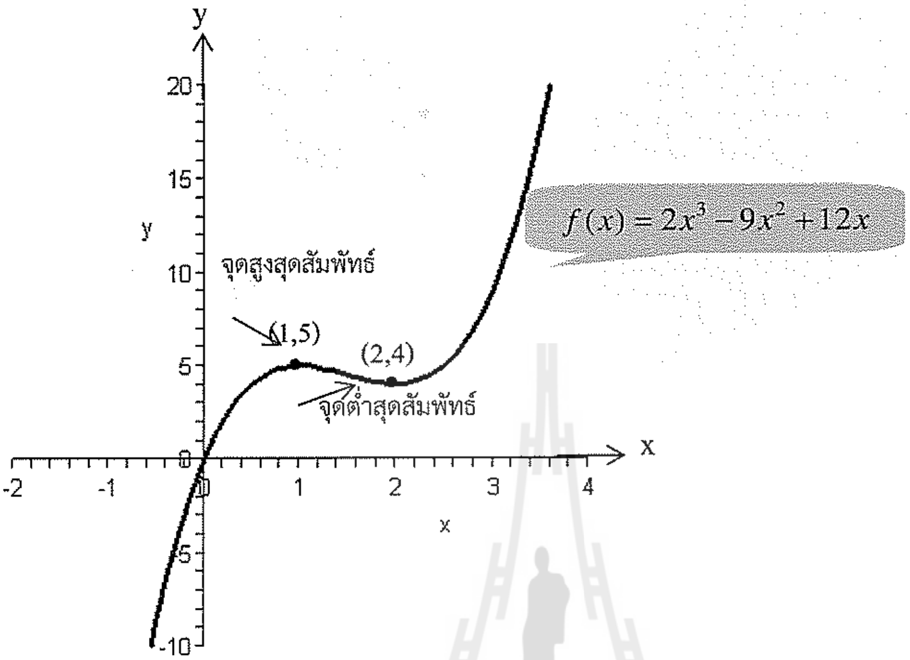
$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left[6x^2-18x+12\right]=12x-18$$
$$=6(2x-3)$$

คำนวณค่าของ f'' ที่ค่าวิกฤต $x=1$ และ $x=2$ ได้

$$f''(1)=6(2(1)-3)=-6<0 \quad \text{และ} \quad f''(2)=6(2(2)-3)=6>0$$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(1)=5$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=2$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2)=4$ (ดูรูปที่ 3.3.5) □



รูปที่ 3.3.5

__ตัวอย่างที่ 3.3.3__ จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x)=\dfrac{x}{2}-\sin x,\quad 0<x<2\pi$ โดยใช้อนุพันธ์ที่สองทดสอบ

__วิธีทำ__ หาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2}-\sin x\right]=\frac{1}{2}-\cos x$$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $\cos x=\dfrac{1}{2}$

เนื่องจาก $0<x<2\pi$ ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=\dfrac{\pi}{3}$ และ $x=\dfrac{5\pi}{3}$

จาก $f''(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{2}-\cos x\right]=\sin x$

คำนวณค่าของ f'' ที่ค่าวิกฤต $x=\dfrac{\pi}{3}$ และ $x=\dfrac{5\pi}{3}$ ได้

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

และ $f''\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$

ดังนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{5\pi}{3}$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ

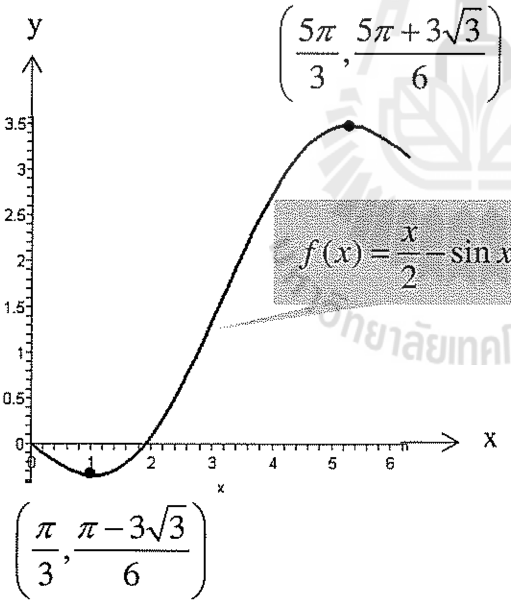
$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi+3\sqrt{3}}{6}$$

และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=\frac{\pi}{3}$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{6}$$



รูปที่ 3.3.6

<u>ตัวอย่างที่ 3.3.4</u> จงหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชัน เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ พร้อมทั้งร่างกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

<u>วิธีทำ</u> (1) หาค่าวิกฤต

จาก $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^3 + 3x^2 - 1\right] = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ ดังนั้น $f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $x = -2$ ดังนั้นค่าวิกฤตของ f คือ $x = 0$ และ $x = -2$

(2) หาจุดสุดขีดสัมพัทธ์

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x < -2$, $-2 < x < 0$ และ $x > 0$ ได้ดังนี้

ช่วง	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
ค่าทดสอบ	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-3) = 9 > 0$	$f'(-1) = -3 < 0$	$f'(1) = 9 > 0$
ผลสรุป	f เพิ่ม	f ลด	f เพิ่ม

ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 3.2.3 จะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = 3$ เพราะฉะนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(-2, 3)$

และ ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(0) = -1$ เพราะฉะนั้น จุดต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $(0, -1)$

(3) หาจุดเปลี่ยนเว้า และช่วงที่ f เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ

พิจารณา $f''(x) = \frac{d}{dx}\left[3x^2 + 6x\right] = 6x + 6 = 6(x+1)$

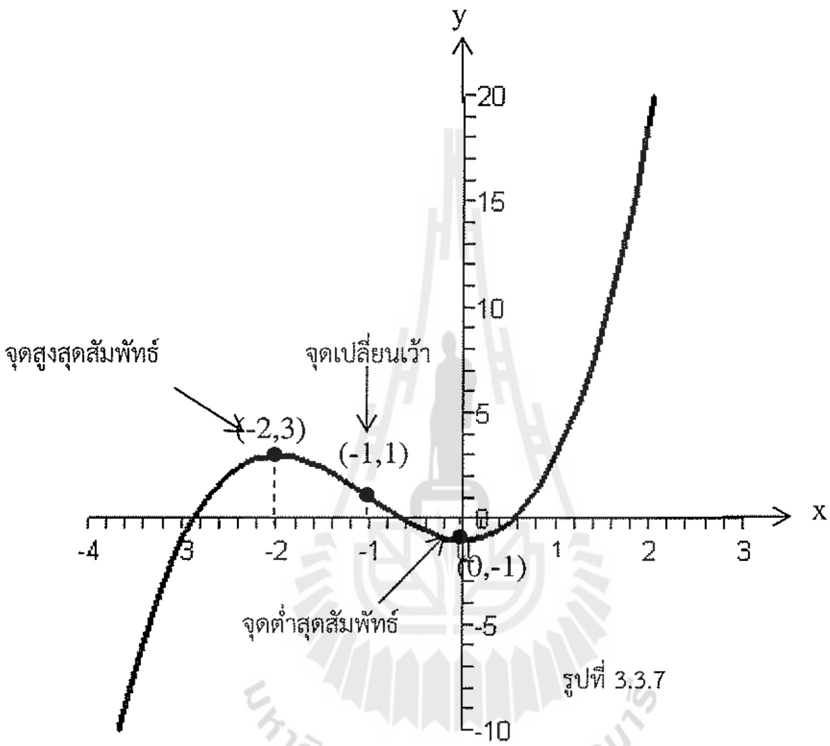
ดังนั้น $f''(x) = 0$ เมื่อ $x = -1$

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง $x < -1$ และ $x > -1$ ได้ผลดังนี้

ช่วง	$x < -1$	$x > -1$
ค่าทดสอบ	$x = -2$	$x = 0$
เครื่องหมายของ $f''(x)$	$f''(-2) = -12 < 0$	$f''(0) = 6 > 0$
ผลสรุป	f เว้าคว่ำ	f เว้าหงาย

ดังนั้นกราฟของ f เว้าหงายบนช่วง $(-1,\infty)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $(-\infty,-1)$ เนื่องจาก กราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงาย เมื่อ $x=-1$ ดังนั้น จะได้ว่าจุด $(-1,f(-1))=(-1,1)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

(4) ร่างกราฟของ f



รูปที่ 3.3.7

__ตัวอย่างที่ 3.3.5__ จงหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชัน เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ พร้อมทั้งร่างกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^4-2x^2-12$

__วิธีทำ__ (1) หาค่าวิกฤต

จาก $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^4-2x^2-12\right]=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$

ดังนั้น $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0,\ x=-1$ และ $x=1$ และ เนื่องจาก โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง ดังนั้น ค่าวิกฤตของ f คือ $x=0,\ x=-1$ และ $x=1$

(2) หาจุดสุดขีดสัมพัทธ์

ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x<-1,\ -1<x<0,\ 0<x<1$ และ $x>1$ ได้ผลดังนี้

ช่วง	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$x>1$
ค่าทดสอบ	$x=-2$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
เครื่องหมาย $f'(x)$	$f'(-2)=-24<0$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}>0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$	$f'(2)=24>0$
ผลสรุป	f ลด	f เพิ่ม	f ลด	f เพิ่ม

ดังนั้น ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(0)=-12$ ฉะนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $(0,-12)$ และจากฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=-1$ และ $x=1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1)=-13$ และ $f(1)=-13$ ดังนั้น จุดต่ำสุดสัมพัทธ์มีสองจุดคือ $(-1,-13)$ และ $(1,-13)$

(3) หาจุดเปลี่ยนเว้า และช่วงที่ f เว้าหงายหรือเว้าคว่ำ

พิจารณา $f''(x)=\frac{d}{dx}\left[4x^3-4x\right]=12x^2-4=4(3x^2-1)=4(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$

ดังนั้น $f''(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

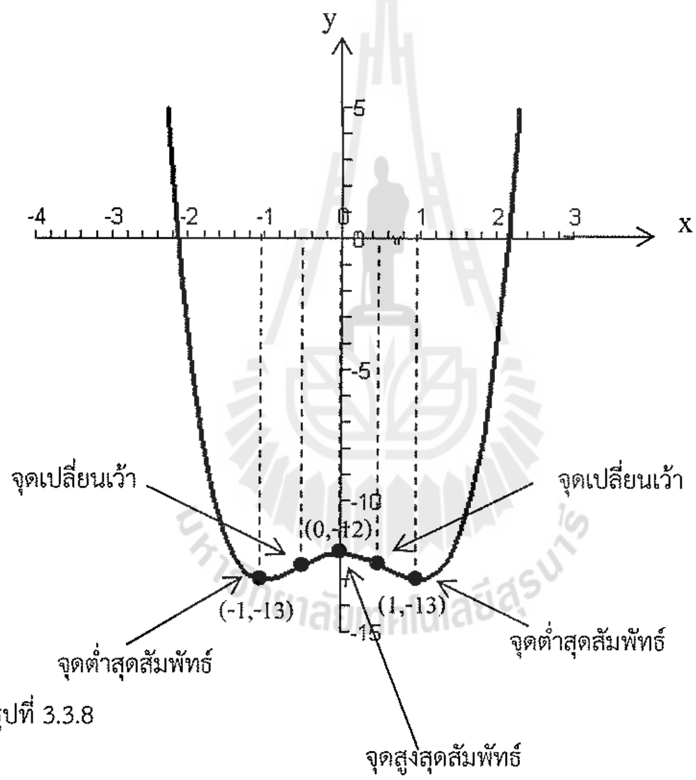
ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง $x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ ได้ผลดังนี้

ช่วง	$x<-\frac{1}{\sqrt{3}},$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x>\frac{1}{\sqrt{3}}$
ค่าทดสอบ	$x=-1$	$x=0$	$x=1$
เครื่องหมายของ $f''(x)$	$f''(-1)=8>0$	$f''(0)=-4<0$	$f''(1)=8>0$
ผลสรุป	f เว้าหงาย	f เว้าคว่ำ	f เว้าหงาย

จะได้ว่า f เว้าหวายบนช่วง $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

เนื่องจาก กราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าหงายเป็นเว้าคว่ำเมื่อ $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ f เปลี่ยนจากเว้าคว่ำเป็นเว้าหงายเมื่อ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังนั้นจะได้ว่าจุด $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{113}{9}\right)$ และจุด $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{113}{9}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนเว้า

(4) ร่างกราฟของ f



รูปที่ 3.3.8

3.4 การวาดกราฟ

สมบัติที่ช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f มีดังต่อไปนี้

(1) โดเมนของฟังก์ชัน f

(2) จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

(3) ความสมมาตร (ฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่ ฟังก์ชันมีคาบ)[1]

(4) เส้นกำกับแนวนอน เส้นกำกับแนวยืน (ได้อธิบายในหัวข้อที่ 1.4)

(5) ค่าวิกฤต

(6) ช่วงที่ค่าของ f มีค่าเพิ่มขึ้น และช่วงที่ค่าของ f มีค่าลดลง

(7) ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

(8) ความเว้า (ช่วงที่กราฟเว้าหงาย และช่วงที่กราฟเว้าคว่ำ)

(9) จุดเปลี่ยนเว้า

<u>ตัวอย่างที่ 3.4.1</u> จงเขียนกราฟของ $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

<u>วิธีทำ</u> (1) โดเมนของ f คือ เซตของจำนวนจริงยกเว้นที่ -2 และ 2 $(\mathbb{R}-\{-2,2\})$

(2) ตัดแกน y ที่จุด $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$ และไม่ตัดแกน x

(3) จาก $f(-x)=f(x)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือมีสมมาตรเทียบกับแกน y

(4) พิจารณาเส้นกำกับแนวนอน

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=1 \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=1$$

ดังนั้น เส้นตรง $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน

---

[1] f เป็นฟังก์ชันคู่ ก็ต่อเมื่อ $f(-x)=f(x)$ สำหรับทุก $x\in D_f$ และกราฟของฟังก์ชันคู่มีสมมาตรเทียบกับแกน y

f เป็นฟังก์ชันคี่ ก็ต่อเมื่อ $f(-x)=-f(x)$ สำหรับทุก $x\in D_f$ และกราฟของฟังก์ชันคู่มีสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

f เป็นฟังก์ชันมีคาบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง p ที่ทำให้ $f(x+p)=f(x)$ สำหรับทุก x และ $x+p$ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f

พิจารณาเส้นกำกับแนวยืน

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+1}{x^2-4}=+\infty, \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+1}{x^2-4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1}{x^2-4}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+1}{x^2-4}=+\infty$$

ดังนั้น เส้นตรง $x=-2$ และ $x=2$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน

(5) หาค่าวิกฤต

$$f'(x)=\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

ดังนั้น ค่าวิกฤตคือ $x=0$ เพียงค่าเดียว เพราะ -2 และ 2 ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f

(6) พิจารณาช่วงที่ค่า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้น และมีค่าลดลง โดยพิจารณาจากเครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง $x<-2,\quad -2<x<0,\quad 0<x<2$ และ $x>2$

ช่วง	$x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<2$	$x>2$
ค่าทดสอบ	$x=-3$	$x=-1$	$x=1$	$x=3$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f'(-3)=\frac{6}{5}>0$	$f'(-1)=\frac{10}{9}>0$	$f'(1)=-\frac{10}{9}<0$	$f'(3)=-\frac{6}{5}<0$
ผลสรุป	f เพิ่ม	f เพิ่ม	f ลด	f ลด

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,2)\cup(2,\infty)$

(7) จากข้อ (6) จะได้ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ ดังนั้นจุดสูงสุดสัมพัทธ์คือ $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

(8) พิจารณา $f''(x)=\dfrac{30x^2+40}{\left(x^2-4\right)^3}=\dfrac{10\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$ ดังนั้นไม่มีค่า x ที่ทำให้ $f''(x)=0$

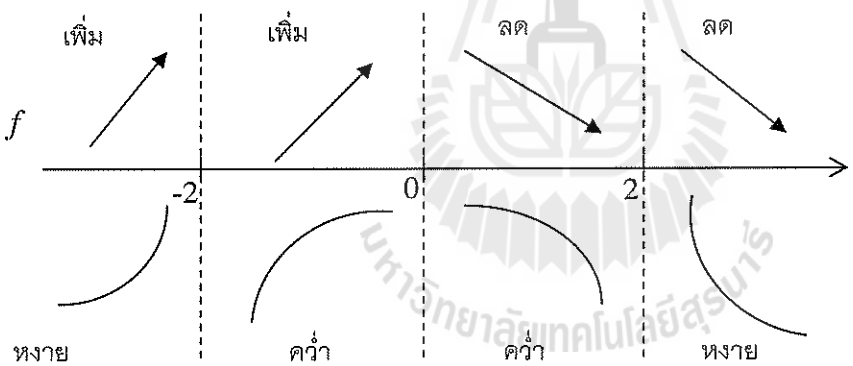
ตรวจสอบเครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง $x<-2,\quad -2<x<2$ และ $x>2$

ช่วง	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
ค่าทดสอบ	$x=-3$	$x=-1$	$x=3$
เครื่องหมายของ $f'(x)$	$f''(-3)=\frac{62}{25}>0$	$f''(-1)=-\frac{70}{27}<0$	$f''(3)=\frac{62}{25}>0$
ผลสรุป	f เว้าหงาย $\cup$	f เว้าคว่ำ $\cap$	f เว้าหงาย $\cup$

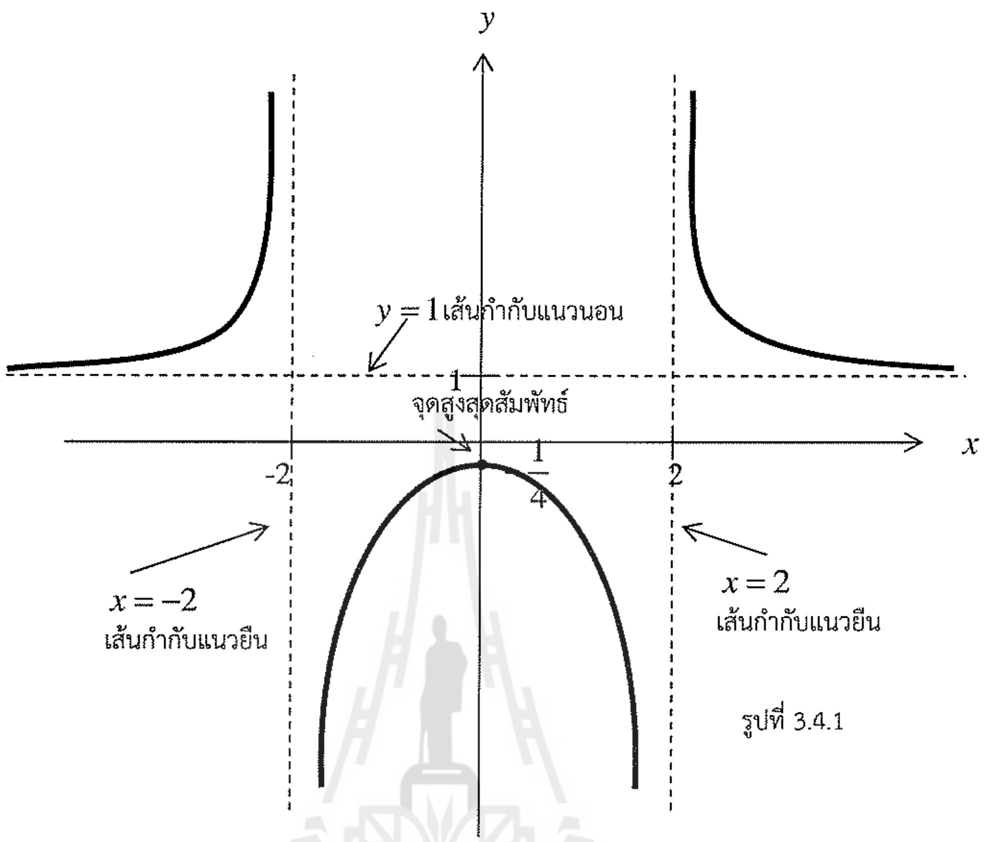
ดังนั้นช่วงที่กราฟของ f เว้าหงาย คือ $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ และช่วงที่กราฟของ f เว้าคว่ำ คือ $(-2,2)$

(9) จากข้อ (8) จะได้ว่า f ไม่มีจุดเปลี่ยนเว้า เพราะ -2 และ 2 ไม่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f

จากข้อ (6) - (8) เราจะได้ผลสรุปของกราฟของ f ดังนี้



ดังนั้นนำข้อมูลที่ได้มาเขียนกราฟ จะได้กราฟดังนี้



y
x
$y = 1$ เส้นกำกับแนวนอน
1
จุดสูงสุดสัมพัทธ์
-2
2
$\frac{1}{4}$
$x = -2$
เส้นกำกับแนวยืน
$x = 2$
เส้นกำกับแนวยืน

รูปที่ 3.4.1

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1) จงหาค่าสุดขีด และค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1.1) $f(x) = 8 - 3x, \qquad x \geq 1$

(1.2) $f(x) = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 3$

(1.3) $f(x) = 1 + (x+2)^2, \qquad -2 \leq x < 5$

(1.4) $f(x) = 1 - x^4, \qquad -2 < x \leq 2$

(1.5) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 5, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

2) จงหาค่าวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

(2.1) $f(x) = 5x^2 + 4x$

(2.2) $f(x) = x^3 + x^2 - x$

(2.3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}$

(2.4) $f(x) = \sqrt{x}(1 - x)$

(2.5) $f(x) = 4x - \tan x$

3) กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังต่อไปนี้

(3.1) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(3.2) $f(x) = 4 - 3x - x^2$

(3.3) $f(x) = (x+2)^3$

(3.4) $f(x) = 5 + 12x - x^3$

(3.5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

(3.6) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

(3.7) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$

จงหา

(a) ค่าวิกฤต

(b) ช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันลด

(c) ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

(d) จุดเปลี่ยนเว้าของ f

(e) ช่วงที่ f เว้าหงาย หรือเว้าคว่ำ

(f) ร่างกราฟของ f

4) จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ จุดเปลี่ยนเว้า และพิจารณาว่าช่วงใดที่กราฟของฟังก์ชันเพิ่มหรือลด และเว้าหงายหรือเว้าคว่ำ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(4.1) $f(x) = \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$

(4.2) $f(x) = \sin^2(2x), \quad x \in [0, \pi]$

(4.3) $f(x) = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(4.4) $f(x) = 2x + \cot x, \quad x \in (0, \pi)$

(4.5) $f(x) = \sin x \cos x, \quad x \in [0, \pi]$

5) จงร่างกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

(5.1) (a) $f(1) = 2, \quad f(3) = -1 \quad , f'(1) = f'(3) = 0$

(b) $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 1$ และ $x > 3$, $f'(x) < 0$ เมื่อ $1 < x < 3$

(c) $f''(x) > 0$ เมื่อ $x > 2$, $f''(x) < 0$ เมื่อ $x < 2$

(5.2) (a) $f(2) = 4, \quad f'(2) = 0$

(b) $f'(3)$ หาค่าไม่ได้

(c) $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 2$ และ $x > 3$, $f'(x) < 0$ เมื่อ $2 < x < 3$

(d) $f''(x) < 0$ เมื่อ $x \neq 3$

(5.3) (a) $f(0) = 4 \ , \quad f'(0) = 0$

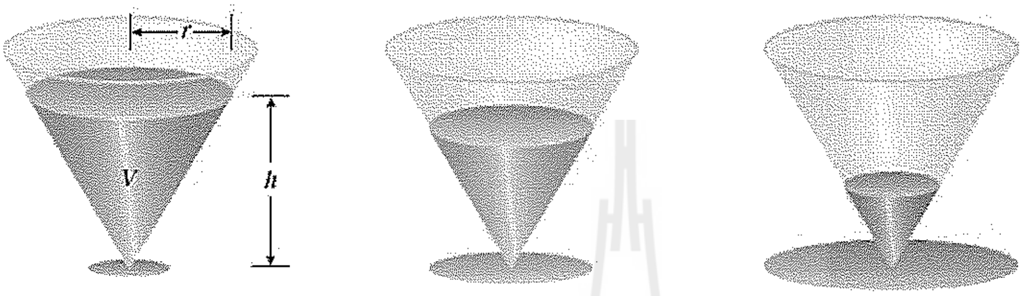
(b) $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < 0$, $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > 0$

(c) $f''(x) < 0$ เมื่อ $-2 < x < 1$, $f''(x) > 0$ เมื่อ $x < -2$ และ $x > 1$

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$ และ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

3.5 อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates)

พิจารณารูปด้านล่าง



รูปที่ 3.5.1 ที่มา : (2005, Anton, Bivens, and Davis)

ณ เวลา t ใด ๆ

ให้ V แทนปริมาตรของน้ำ ที่อยู่ในกรวย ในเวลา t นาที

ให้ h แทนความสูงของน้ำ ที่อยู่ในกรวย ในเวลา t นาที

และ ให้ r แทนรัศมีของผิวน้ำ ที่อยู่ในกรวย ในเวลา t นาที

เราได้ว่า ความสัมพันธ์ของทั้งสามตัวแปร คือสมการ

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad .....(3.5.1)$$

ซึ่งค่าของทั้งสามตัวแปรขึ้นอยู่กับเวลา t ดังนั้น ถ้าเราสนใจอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรที่ เวลา t เราก็สามารถหาได้ โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างในสมการ (3.5.1) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi r^2 h\right]=\frac{\pi}{3}\left(\frac{d}{dt}\left[r^2h\right]\right)\\ &=\frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt}+2rh\frac{dr}{dt}\right)\end{aligned} \qquad .....(3.5.2)$$

ดังนั้น เราสามารถหา $\frac{dV}{dt}$ ที่เวลา $t=t_0$ ได้โดยใช้สมการ (3.5.2) โดยที่จะต้องรู้ค่าของ $r, h, \frac{dr}{dt}$ และ $\frac{dh}{dt}$ ที่เวลา $t=t_0$ เราเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ (related rates problem)**

ดังนั้นปัญหาอัตราสัมพัทธ์ ก็คือ ปัญหาที่เกี่ยวกับผลกระทบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรบางตัวเทียบกับเวลาที่มีต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่น ๆ เทียบกับเวลา

หมายเหตุ จากปัญหาข้างบนเราสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของน้ำที่เวลา t (แทนด้วย $\frac{dh}{dt}$) และอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีของน้ำที่เวลา t (แทนด้วย $\frac{dr}{dt}$) ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3.5.1 กำหนดสมการ $y = x^3$ โดยที่ค่า y และ x เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับเวลา t จงหา $\frac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$ เมื่อกำหนดให้ $x = 2$ และ $\frac{dx}{dt} = 4$ ที่ $t = 1$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ $y = x^3$ เทียบกับ t และใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x^3\right] = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

ดังนั้นค่าของ $\frac{dy}{dt}$ ที่ $t = 1$ คือ

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 3(2)^2\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1} = 12 \cdot 4 = 48$$

□

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราสัมพัทธ์

1. เขียนภาพประกอบปัญหา พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและเปลี่ยนแปลงตามเวลา t
2. สร้างสมการที่แสดงความสัมพันธ์ ของตัวแปรต่าง ๆ ที่กล่าวถึงในปัญหา
3. หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t จากสมการที่หาได้ในข้อ 2
4. แก้สมการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการทราบ จากสมการที่ได้ในข้อที่ 3 (การแทนค่าของตัวแปรใด ๆ จะทำได้ในขั้นนี้

<u>**ตัวอย่างที่ 3.5.2**</u> อัดก๊าซเข้าไปในลูกบอลลูนทรงกลม ด้วยอัตรา 6 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี ของลูกบอลลูน ในขณะที่รัศมียาว 4 ฟุต

<u>วิธีทำ</u> ณ เวลา t ใด ๆ ให้ v แทนปริมาตรของลูกบอลลูน

r แทนรัศมีของลูกบอลลูน

จาก ปริมาตรของก๊าซในลูกบอลลูนทรงกลม คือ $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ .....(3.5.3)

หาอนุพันธ์ของสมการ (3.5.3) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right] = \frac{4\pi}{3}\cdot\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \qquad .....(3.5.4)$$

โจทย์ต้องการหาค่าของ $\frac{dr}{dt}$ เมื่อ $\frac{dV}{dt} = 6$ และ $r = 4$ ดังนั้น แทนค่าลงในสมการที่ (3.5.4) จะได้

$$6 = 4\pi(4)^2\frac{dr}{dt}$$

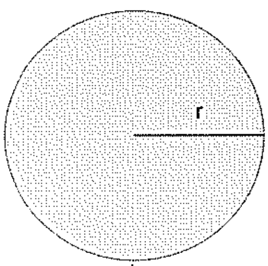
$$\frac{dr}{dt} = \frac{6}{64\pi} = \frac{3}{32\pi}$$

ดังนั้นในขณะที่รัศมียาวขึ้น 4 ฟุต อัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น $\frac{3}{32\pi}$ ฟุตต่อนาที □

<u>**ตัวอย่างที่ 3.5.3**</u> สมมติว่าน้ำมันรั่วออกจากถังน้ำมัน โดยที่น้ำมันที่รั่วมานี้แผ่กระจายเกิดรอยน้ำมันเป็นรูปวงกลม ซึ่งมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น 2 ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา ในขณะที่รัศมีของรอยน้ำมันที่รั่วออกมายาว 60 ฟุต

<u>วิธีทำ</u> ณ เวลา t ใด ๆ ให้ A แทนพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา

r แทนรัศมีของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา



จากอัตราการเปลี่ยนแปลง ของรัศมีของน้ำมันที่รั่วออกมา เพิ่มขึ้น 2 ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 2$

โจทย์ต้องการหา $\frac{dA}{dt}$ เมื่อ $r = 60$

จากสูตรพื้นที่ของวงกลมคือ $A = \pi r^2$ .....(3.5.5)

ดังนั้น หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการที่ (3.5.5) เทียบกับ t จะได้

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\pi r^2\right] = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad .....(3.5.6)$$

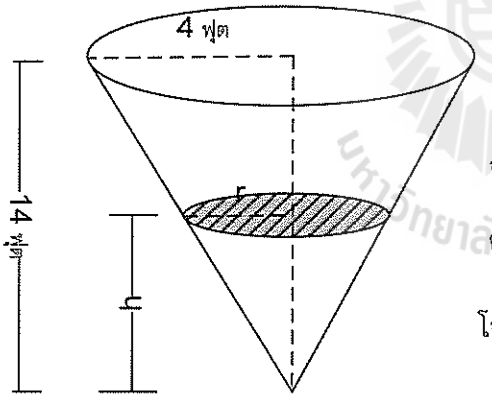
แทนค่า $\frac{dr}{dt} = 2$ และ $r = 60$ ลงในสมการที่ (3.5.6) จะได้

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(60)(2) = 240\pi$$

ฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรอยน้ำมันที่รั่วออกมา**เพิ่มขึ้น** 240π ตารางฟุตต่อวินาที □

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.4</u> ปล่อยน้ำออกจากภาชนะบรรจุน้ำรูปกรวยกลม ซึ่งมีความสูง 14 ฟุตและรัศมียาว 4 ฟุต ด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของระดับน้ำ ในขณะที่ระดับน้ำในกรวยอยู่ลึก 6 ฟุต

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 3.5.2

ณ เวลา t ใด ๆ ให้ V แทนปริมาตรของน้ำในกรวย

h แทนความสูงของน้ำในกรวย

r แทนรัศมีของผิวน้ำในกรวย

จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรน้ำในกรวยลดลงด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\frac{dV}{dt} = -2$

โจทย์ต้องการหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ $h = 6$ ฟุต

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวยคือ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .....(3.5.7)

เนื่องจาก เราไม่ทราบค่า $\dfrac{dr}{dt}$ ดังนั้น เราต้องแทน r ในรูปของ h จากสามเหลี่ยมคล้ายในรูปที่ 3.5.2 จะได้ $\dfrac{r}{h}=\dfrac{4}{14}$ หรือ $r=\dfrac{2}{7}h$ ดังนั้น แทน r ลงในสมการ (3.5.7) จะได้

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{7}h\right)^2 h=\frac{4}{147}\pi h^3 \qquad .....(3.5.8)$$

ดังนั้น หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (3.5.8) เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{4}{147}\pi h^3\right]=\frac{4}{147}\pi\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right)\\&=\frac{4}{49}\pi h^2\frac{dh}{dt}\end{aligned} \qquad .....(3.5.9)$$

แทนค่า $\dfrac{dV}{dt}=-2$ และ $h=6$ ลงในสมการ (3.5.9) จะได้

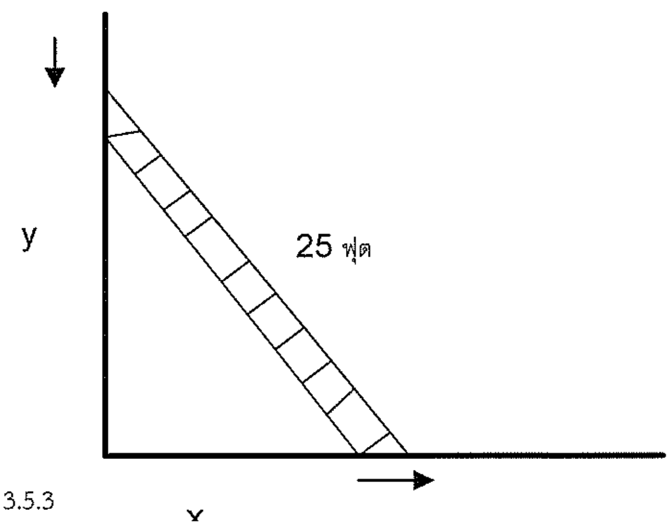
$$-2=\frac{4}{49}\pi(6)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-49}{72\pi}$$

ดังนั้นระดับน้ำในถังจะ**ลดลง**ด้วยอัตราเร็ว $\dfrac{49}{72\pi}$ ฟุตต่อวินาทีเมื่อความสูงของน้ำในถังเป็น 6 ฟุต □

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.5</u> บันไดยาว 25 ฟุต วางพาดกำแพงดังรูป (รูปที่ 3.5.3) ถ้าปลายล่างของบันไดเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราคงที่ 3 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าปลายบนของบันไดจะเลื่อนลงตามแนวกำแพงด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 7 ฟุต

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 3.5.3

ณ เวลา t ใด ๆ ให้ x แทนระยะจากกำแพงถึงปลายล่างของบันได

y แทนระยะจากพื้นดินถึงปลายบนของบันได

เนื่องจาก ปลายล่างของบันไดเลื่อนออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 3 ฟุตต่อวินาที ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}=3$

โจทย์ต้องการหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ $x=7$

โดย ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $x^2+y^2=25^2=625$ .....(3.5.10)

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการที่ (3.5.10) จะได้

$$\frac{d}{dt}\left[x^2+y^2\right]=\frac{d}{dt}[625]$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \quad .....(3.5.11)$$

แทนค่า $\dfrac{dx}{dt}=3$, $x=7$ และ $y=\sqrt{25^2-7^2}=24$ ลงในสมการที่ (3.5.11)

$$2(7)(3)+2(24)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{42}{48}=-\frac{7}{8}$$

ดังนั้นปลายบนของบันไดจะ**เลื่อนลง**ตามแนวกำแพงด้วยอัตรา $\dfrac{7}{8}$ ฟุตต่อวินาทีเมื่อปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 7 ฟุต □

แบบฝึกหัดที่ 3.2

1) ปล่อยก๊าซออกจากบอลลูนทรงกลมด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี เมื่อรัศมีของลูกบอลลูนยาว 13 ฟุต และหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ผิวของลูกบอลลูนในขณะนั้นด้วย (สูตรหาพื้นที่ผิวของทรงกลมคือ $4\pi r^2$ เมื่อ r คือรัศมี)

2) ถ้าน้ำไหลออกจากถังเก็บน้ำรูปกรวยกลมสูง 8 เมตร และรัศมียาว 4 เมตร ด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลง ของความสูงของระดับน้ำ ในขณะที่ระดับน้ำในกรวยอยู่ลึก 6 เมตร

3) เททรายลงบนพื้นราบ จะได้กองทรายเป็นรูปกรวยกลม ซึ่งความสูงของกองทรายเท่ากับ $\frac{4}{3}$ ของรัศมีที่ฐานเสมอ จงหา

(3.1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตร เมื่อรัศมีที่ฐานยาว 3 ฟุต และอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเพิ่มขึ้น 3 ฟุตต่อนาที

(3.2) อัตราการเปลี่ยนของรัศมี เมื่อรัศมีที่ฐานยาว 6 ฟุต และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเพิ่มขึ้น 24 ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที

4) ถ้าน้ำไหลลงในถังเก็บน้ำรูปทรงกรวยสูง 8 เมตร และรัศมียาว 4 เมตร ด้วยอัตรา 3 ลูกบาศก์เมตรวินาที ถ้าถังเก็บน้ำรั่วแล้ว จงคำนวณอัตราที่น้ำรั่วออก ในขณะที่ระดับน้ำสูง 2 เมตร ซึ่งระดับน้ำกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อวินาที

5) ดวงไฟแขวนอยู่เหนือทางเท้า 20 ฟุต และอยู่ห่างจากผนังตึก ซึ่งตั้งฉากกับทางเท้า 30 ฟุต ชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินออกจากผนังตึกด้วยอัตราเร็ว 4 ฟุตต่อวินาที จงหาว่าเงาศีรษะของเขา เคลื่อนที่ไปบนผนังตึกในลักษณะใด และด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อเขาอยู่ห่างจากผนังตึก 6 ฟุต

3.6 ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Applied Maximun and Minimum Problems)

หลักเกณฑ์ในการทำโจทย์มีดังนี้

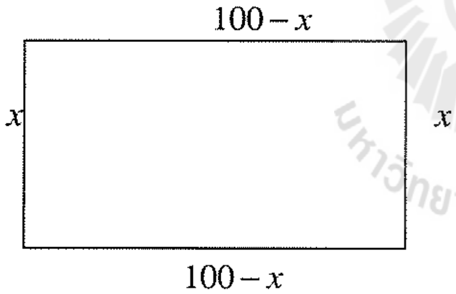
1) พิจารณาว่าโจทย์ต้องการค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของอะไรบ้าง ให้สมมติตัวแปรแทนสิ่งที่ต้องการหา เช่น สมมติว่าแทนด้วย Q
2) พิจารณาว่า Q เกี่ยวข้องกับตัวแปรอะไรบ้าง ให้เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้นกับ Q
3) เขียนตัวแปร Q ที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ให้อยู่ในรูปของตัวแปรเดียว แล้วหาขอบเขตของตัวแปรนั้น
4) หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ Q

ตัวอย่างที่ 3.6.1 จงหาขนาดของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเส้นรอบรูป 200 ฟุต และมีพื้นที่มากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้ x แทนความกว้างของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

y แทนความยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้า

A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



จะได้ $A = xy = x(100-x)$ และ x อยู่ในช่วง $[0,100]$ ดังนั้นเราได้

$A(x) = 100x - x^2, \quad x \in [0,100]$

จาก $A(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น $A(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,100]$

พิจารณา $A'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[100x - x^2\right] = 100 - 2x$ จะได้ $A'(x) = 0$ เมื่อ $x = 50$

ค่าสูงสุดของ $A(x)$ บนช่วง $[0,100]$ จะเกิดขึ้นที่จุดปลายช่วง คือ 0 หรือ 100 หรือที่ค่าวิกฤต คือ $x = 50$ ดังนั้น คำนวณค่า $A(x)$ ที่ $x = 0,\ 50,\ 100$ ได้ว่า

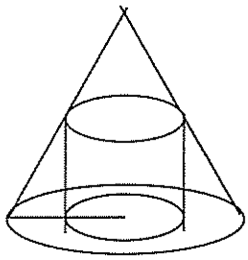
$$A(0) = 0, \qquad A(50) = 2500 \qquad \text{และ} \qquad A(100) = 0$$

ดังนั้น A มีค่าสูงสุดที่ $x = 50$ และค่าสูงสุดคือ 2500

นั่นคือ สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีความยาวด้านละ 50 ฟุต □

<u>**ตัวอย่างที่ 3.6.2**</u> จงหารัศมีและความสูงของทรงกระบอก (กลมตรง) ที่มีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งสามารถบรรจุลงในกรวย (กลมตรง) ที่มีรัศมีฐานยาว 8 นิ้ว และสูง 12 นิ้ว

<u>วิธีทำ</u>



ให้ r แทนรัศมีของทรงกระบอก

h แทนความสูงของทรงกระบอก

V แทนปริมาตรของทรงกระบอก

จากสูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอกจะได้

$$V = \pi r^2 h \qquad .....(3.6.1)$$

หาความสัมพันธ์ของ h และ r โดยสามเหลี่ยมคล้าย

จะได้ $\dfrac{12-h}{r} = \dfrac{12}{8}$ หรือ $h = 12 - \dfrac{3}{2}r$ .....(3.6.2)

แทนค่า (3.6.2) ลงใน (3.6.1) จะได้ $V(r) = \pi r^2 (12 - \frac{3}{2}r) = 12\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^3$ .....(3.6.3)

เนื่องจาก r คือ รัศมีของทรงกระบอก ดังนั้น $0 \le r \le 8$ และจาก V เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,8]$ ดังนั้น V จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[0,8]$

พิจารณา

$$V'(r) = \frac{d}{dr}\left[12\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^3\right] = 24\pi r - \frac{9}{2}\pi r^2$$
$$= \pi r\left(24 - \frac{9}{2}r\right)$$

ดังนั้น $V'(r) = 0$ เมื่อ $r = 0$ และ $r = \dfrac{16}{3}$

ค่าสูงสุดของ V บนช่วง $[0,8]$ จะเกิดขึ้นที่จุดปลายช่วง คือ 0 หรือ 8 หรือที่ค่าวิกฤต

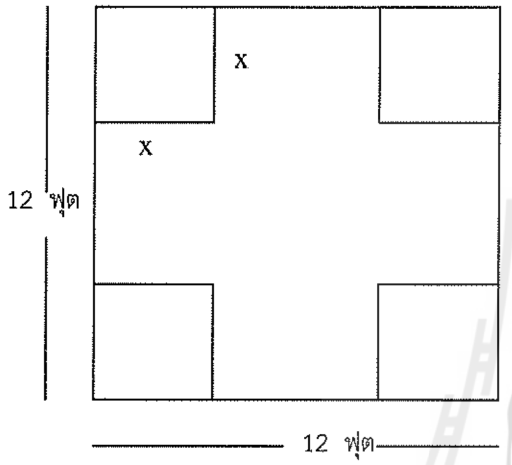
คือ $r = 0$ และ $r = \dfrac{16}{3}$ ดังนั้น คำนวณค่า V ที่ $r = 0,\ 8,\ \dfrac{16}{3}$

ได้ว่า $V(0) = 0,$ $V(8) = 0$ และ $V\left(\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{1024\pi}{9}$

ดังนั้น ปริมาตรมากที่สุด ของทรงกระบอก ที่บรรจุในกรวยที่กำหนดคือ $\dfrac{1024\pi}{9}$ ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อรัศมีของทรงกระบอกยาว $\dfrac{16}{3}$ นิ้ว และสูง $h = 12 - \left(\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{16}{3}\right) = 4$ นิ้ว □

ตัวอย่างที่ 3.6.3 กล่องกระดาษไม่มีฝามีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส สร้างจากกระดาษที่มีพื้นที่ 144 ตารางฟุต ต้องการตัดมุมทั้งสี่มุมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตรัสเท่ากันทุกมุม แล้วพับส่วนที่เหลือเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากฝาเปิด จะต้องตัดมุมทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละเท่าไรกล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ



ให้ x แทนความยาวของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่จะตัดออก

V แทนปริมาตรของกล่องกระดาษที่สร้าง

จาก ปริมาตรของกล่องกระดาษ = พื้นที่ฐาน × สูง

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} V &= (12-2x)^2 x \\ &= \left(144-48x+4x^2\right)x \\ &= 4x^3-48x^2+144x \end{aligned}$$

และ x อยู่ในช่วง $[0,6]$ เนื่องจาก V เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และเป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น V ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,6]$ เพราะฉะนั้น V มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด$[0,6]$

พิจารณา

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{d}{dx}\left[4x^3-48x^2+144x\right] \\ &= 12x^2-96x+144 \\ &= 12(x-6)(x-2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $V'(x)=0$ เมื่อ $x=6$ และ $x=2$

พิจารณาค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$V(0)=0,\qquad V(2)=128\quad$ และ $\quad V(6)=0$

ดังนั้น ปริมาตรมากที่สุดของกล่องกระดาษคือ 128 ลูกบาศก์ฟุต เมื่อตัดมุมทั้งสี่มุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 ฟุต □

__ตัวอย่างที่ 3.6.4__ บริษัทผลิตยาได้วันละ x ขวด ใช้ต้นทุน $\dfrac{x^2}{4}+350x+2500$ บาท ปรากฏว่าขายได้ขวดละ $500-\dfrac{x}{2}$ บาท บริษัทจะต้องผลิตยาวันละกี่ขวด จึงจะได้กำไรมากที่สุด

__วิธีทำ__ รายรับของบริษัท $R(x)=\left(500-\dfrac{x}{2}\right)x$

ให้ $P(x)$ แทนกำไรของบริษัทที่ได้จากการขายยา x ขวด ดังนี้

$$P(x)=\left(500-\frac{x}{2}\right)x-\left(\frac{x^2}{4}+350x+2500\right)$$

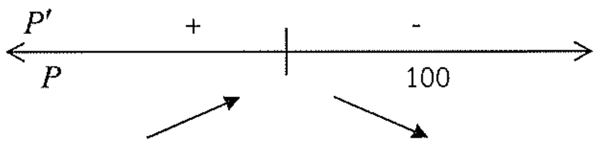
$$=150x-\frac{3x^2}{4}-2500$$

โดเมนของ P คือ $[0,\infty)$

พิจารณา $P'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[150x-\dfrac{3x^2}{4}-2500\right]=150-\dfrac{3}{2}x$

ดังนั้น $P'(x)=0$ เมื่อ $x=100$

พิจารณาเครื่องหมายของ $P'(x)$ จะได้



ดังนั้นที่ $x=100$ ทำให้ P มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และเนื่องจาก P เป็นฟังก์ชันลด บน $[100,\infty)$

ดังนั้น $P(100)\geq P(x),\quad \forall x\in[100,\infty)$

และจาก P เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $[0,100]$ ดังนั้น $P(100)\geq P(x),\quad \forall x\in[0,100]$

เพราะฉะนั้น $P(100)=5,000$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ดังนั้นบริษัทควรผลิตยาวันละ 100 ขวดจึงจะได้กำไรสูงสุด □

แบบฝึกหัดที่ 3.3

1) ถ้าต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้รั้วบ้านกั้นเป็นด้านหนึ่งของที่ดินแปลงนี้ ถ้าเขามีลวดหนามยาว 400 เมตร เขาจะกั้นรั้วได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด

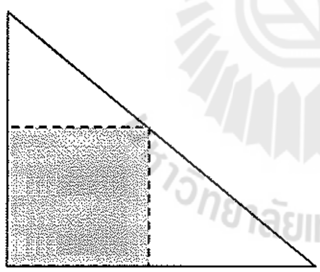
2) สี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีเส้นรอบรูปยาว $2L$ จะต้องมีด้านกว้างและด้านยาวยาวเท่าใด จึงจะทำให้มีพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมากที่สุด

3) กระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีพื้นที่ 1,000 ตารางเซนติเมตร จะสามารถสร้างทรงกระบอก ไม่มีฝาปิดได้ปริมาตรมากที่สุดเท่าไร

4) ผลบวกของเลขจำนวนหนึ่งกับสามเท่าของเลขอีกจำนวนหนึ่งเท่ากับ 60 จงหาว่าผลคูณของเลขสองจำนวนมีค่ามากที่สุดเท่าใด

5) พิจารณาสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวเส้นรอบรูปเป็น 12 นิ้วสร้างเป็นทรงกระบอกโดยการหมุนรอบขอบด้านหนึ่ง จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ทรงกระบอกมีปริมาตรมากที่สุด

6) สามเหลี่ยมมุมฉากยาวด้านละ 90, 120, 150 หน่วย ให้หาว่าจะบรรจุสี่เหลี่ยมมุมฉากลงไปภายในสามเหลี่ยมนี้ (ให้มีมุมฉากร่วมกันดังภาพ) ได้พื้นที่มากที่สุดเท่าใด



7) ในการประมาณการปลูกมันสำปะหลังพบว่า ถ้าขุดมันสำปะหลัง 100 กิโลกรัม จะขายได้กิโลกรัมละ 1.50 บาท ถ้ายังไม่ขุดและรอต่อไป จะได้มันสำปะหลังเพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 10 กิโลกรัม แต่ราคาขายจะลดลงไปสัปดาห์ละ 0.05 บาทต่อกิโลกรัม ดังนั้นควรขายมันสำปะหลังเมื่อใด จึงจะมีรายได้จากการขายมากที่สุด

3.7 ค่าเชิงอนุพันธ์ (Differentials)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad .....(3.7.1)$$

เมื่อ Δy คือ ส่วนเปลี่ยนแปลงของ y ขณะที่ x มีค่าเปลี่ยนแปลงไป Δx

ดังนั้น $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

จาก (3.7.1) สามารถประมาณค่าของ Δy ได้ดังนี้

$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ เมื่อ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0

เราเรียก $f'(x)\Delta x$ ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ของ f ที่ x

<u>บทนิยามที่ 3.7.1</u> ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ Δx เป็นส่วนเปลี่ยนแปลงของ x

(i) ค่าเชิงอนุพันธ์ของ x เขียนแทนด้วย dx กำหนดโดย $dx = \Delta x$

(ii) ค่าเชิงอนุพันธ์ของ y หรือ f ที่ x เขียนแทนด้วย dy หรือ df กำหนดโดย $dy = df = f'(x)dx$

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.1</u> จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของ y ที่ x ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $y = x^3 + 2x^2 - x + 5$

จาก $dy = f'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx$

ดังนั้น $dy = \dfrac{d}{dx}\left[x^3 + 2x^2 - x + 5\right]dx = \left(3x^2 + 4x - 1\right)dx$

2. $y = x^2 \cos x$

จาก $dy = f'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx$

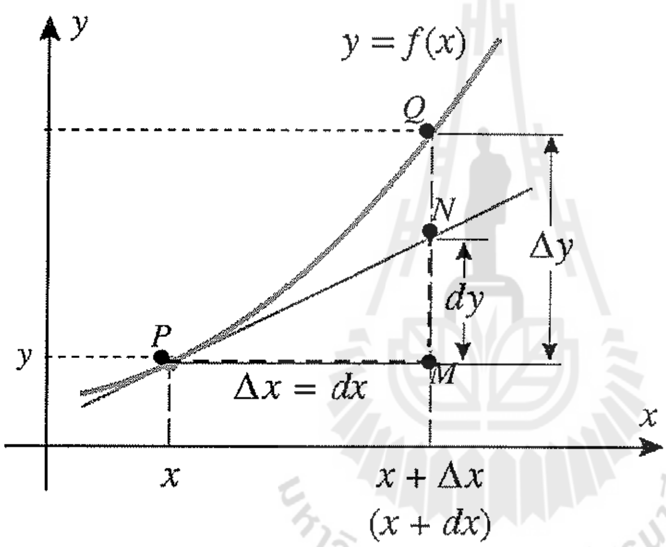
ดังนั้น $dy = \dfrac{d}{dx}\left[x^2 \cos x\right]dx = \left(-x^2 \sin x + 2x\cos x\right)dx$

3. $y=\sqrt{x^2+1}$

จาก $\quad dy = f'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx$

ดังนั้น $\quad dy = \dfrac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{1/2}\right]dx = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ □

ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์



รูปที่ 3.7.1

ที่มา: (2005, Anton, Bivens, and Davis.)

ให้ $P(x,y)$ และ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง $y=f(x)$
เนื่องจาก ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $P(x,y)$ คือ $f'(x)$
และจากรูป จะได้ว่า $\quad f'(x)=\dfrac{|MN|}{\Delta x}$ เมื่อ $|MN|$ แทนความยาวของเส้นตรง MN
ดังนั้น $|MN| = f'(x)\Delta x$ จากนิยามของค่าเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า $|MN| = dy$
พิจารณาผลต่าง $\Delta y - dy$ เมื่อพิจารณาเทียบกับ Δx จะได้

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

เพราะฉะนั้น $\quad \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{\Delta x}\right) = f'(x) - f'(x) = 0$