<u>**ตัวอย่างที่ 2.2.3**</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = x^3 + 2x - 1$ ที่ $x = 1,\ x = 2$ และ $x = 3$

<u>วิธีทำ</u> อนุพันธ์ของ f ที่ $x = a$ คือ

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3+2(a+h)-1-(a^3+2a-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+2a+2h-1-a^3-2a+1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3+2h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}3a^2+3ah+h^2+2 \\
&= 3a^2+2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ $x = 1,\ x = 2$ และ $x = 3$ คือ

$f'(1) = 3(1)^2 + 2 = 5$, $f'(2) = 3(2)^2 + 2 = 14$ และ $f'(3) = 3(3)^2 + 2 = 29$ □

<u>**บทนิยามที่ 2.2.2**</u> อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ สำหรับสมาชิก x ใด ๆ ในโดเมนของ f นิยามโดย

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad .....(2.2.4)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้แล้ว $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ดังนั้นเราจะเรียกฟังก์ชันที่นิยามนี้ว่า **อนุพันธ์ของ f**

ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกจุดบนโดเมนแล้ว เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่างที่ 2.2.4 กำหนด $f(x)=\sqrt{x+1}$ (สำหรับ $x>-1$) จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จากนิยามของ $f'(x)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}\right)}{h}\times\frac{\left(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ □

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ถ้า $f'(a)=b$ แล้ว จงหาค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{2h}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(a+2h)-f(a)]-[f(a+h)-f(a)]}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{2h \to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} - \frac{1}{2} f'(a)$$

$$= f'(a) - \frac{1}{2} f'(a) = \frac{1}{2} f'(a) \quad \text{(เพราะว่า } 2h \to 0 \text{ เมื่อ } h \to 0$$

$$= \frac{b}{2}$$ □

ตัวอย่างที่ 2.2.6 จงแสดงว่า ถ้าฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ แล้ว

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ ดังนั้น จากบทนิยามที่ 2.2.1 จะได้ว่า $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ และลิมิตหาค่าได้

ให้ $h = -k$ ดังนั้น

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{h} = \lim_{-k \to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{-k}$$

$$= -\lim_{k \to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k} \quad \text{(เพราะว่า } k \to 0 \text{ เมื่อ } -k \to 0\text{)}$$

$$= -f'(a)$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{2h} - \frac{f(a-h)-f(a)}{2h} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} f'(a) - \frac{1}{2}\left(-f'(a)\right)$$

$$= f'(a)$$ □

<u>สัญกรณ์อนุพันธ์</u> (Derivative Notation)

สัญกรณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x คือ $\dfrac{d}{dx}[f(x)]$ ซึ่งอ่านว่า อนุพันธ์ของ $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x (the derivative of $f(x)$ with respect to x) ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) \qquad .....(2.2.5)$$

จากตัวอย่างที่ 2.2.4 จะได้ $\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{x+1}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

และถ้า $y = f(x)$ แล้ว สมการที่ 2.2.5 สามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\frac{d}{dx}[y] = f'(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad .....(2.2.6)$$

และค่าของอนุพันธ์ของ f ที่ $x = a$ สามารถเขียนแทนด้วย

$$\frac{d}{dx}[f(x)]\bigg|_{x=a} = f'(a) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=a} = f'(a)$$

ถ้าตัวแปรอิสระของฟังก์ชันไม่ใช่ตัวแปร x ตัวอย่างเช่น $y = f(u)$ แล้วสมการที่ 2.2.5 และสมการที่ 2.2.6 สามารถเขียนได้เป็น $\dfrac{d}{du}[f(u)] = f'(u)$ และ $\dfrac{dy}{du} = f'(u)$

<u>บทนิยามที่ 2.2.3</u>

ถ้า $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ทางขวาของฟังก์ชัน** f **ที่** x เขียนแทนด้วย $f'(x^+)$

และ ถ้า $\lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เราจะเรียกลิมิตนี้ว่า **อนุพันธ์ทางซ้ายของฟังก์ชัน** f **ที่** x เขียนแทนด้วย $f'(x^-)$

ดังนั้น $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

นั่นคือ $f'(x)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $f'(x^+)$ และ $f'(x^-)$ หาค่าได้ และ $f'(x)=f'(x^+)=f'(x^-)$

<u>บทนิยามที่ 2.2.4</u>

(1) f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ $x\in(a,b)$

(2) f มีอนุพันธ์บนช่วงปิด $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ $x\in(a,b)$

และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่ a และ f มีอนุพันธ์ทางซ้ายที่ b

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.7</u> กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\le 1\\ x+2, & x>1\end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จากบทนิยาม $f'(1)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ และ $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h+2)-(1^2+2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}1=1\end{aligned}$$

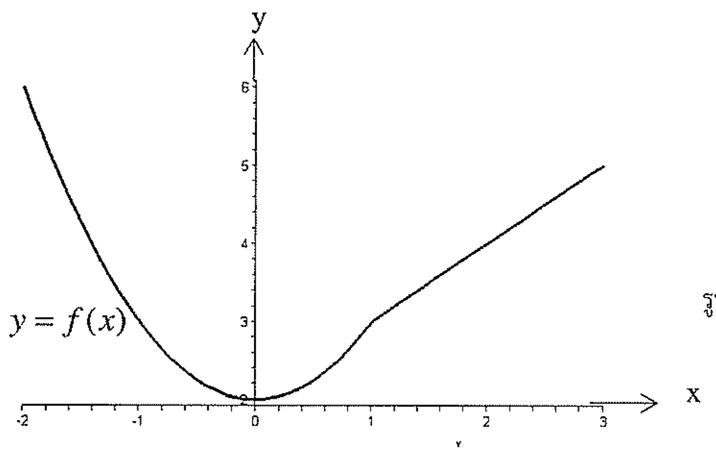
เพราะฉะนั้น $f'(1^+)=1$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{((1+h)^2+2)-(1^2+2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{1+2h+h^2+2-3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{h(2+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}(2+h)=2\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(1^-)=2$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $f'(1)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=1$ (ดูรูปที่ 2.2.1) □



รูปที่ 2.2.1

<u>**ตัวอย่างที่ 2.2.8**</u> จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f(x)=|x|$ มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จากบทนิยาม $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

เนื่องจาก $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ และ $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ หาค่าได้

และ $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-|0|}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\\&=\lim_{h\to 0^+}1\\&=1\end{aligned}$$

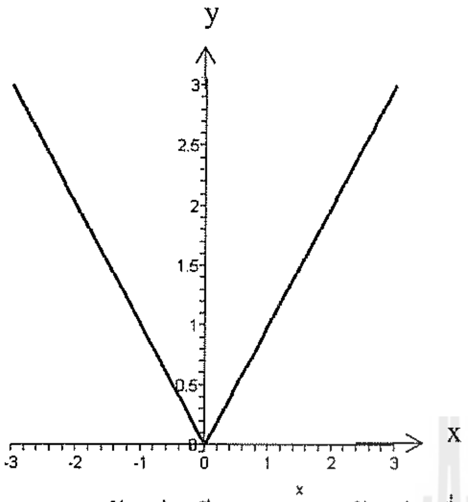
เพราะฉะนั้น $f'(0^+)=1$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}\\&=\lim_{h\to 0^-}-1\\&=-1\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(0^-)=-1$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=0$ (ดูรูปที่ 2.2.2) □



รูปที่ 2.2.2 แสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=|x|$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 2.2.7 และตัวอย่างที่ 2.2.8 ถ้าเราพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน จะเห็นว่า ที่ตำแหน่งกราฟของฟังก์ชันที่มีการหักมุมหรือเป็นยอดแหลม หรือไม่เรียบ (not smooth) แล้ว เราไม่สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ตำแหน่งนั้นได้

<u>**ทฤษฎีบทที่ 2.2.5**</u> ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x=a$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x=a$

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ f มีอนุพันธ์ที่ $x=a$ ดังนั้น $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ หาค่าได้

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)&=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}\cdot(x-a)\\&=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\cdot(0)=0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f(a)=f(a)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ $x=a$ □

หมายเหตุ (1) ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว f อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = a$ ก็ได้ จากตัวอย่างที่ 2.2.8 ก็เห็นได้ว่า ฟังก์ชัน $y = |x|$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

(2) ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้ว f จะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$

2.3 สูตรการหาอนุพันธ์ (Differentiation Formulas)

การใช้บทนิยามในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2 จะเห็นว่าการหาอนุพันธ์ค่อนข้างยุ่งยากและใช้เวลาค่อนข้างนาน ดังนั้นจึงได้มีการสร้างสูตรโดยอาศัยบทนิยามของอนุพันธ์ขึ้นมา ซึ่งสามารถนำมาใช้หาอนุพันธ์ได้ ซึ่งจะกล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

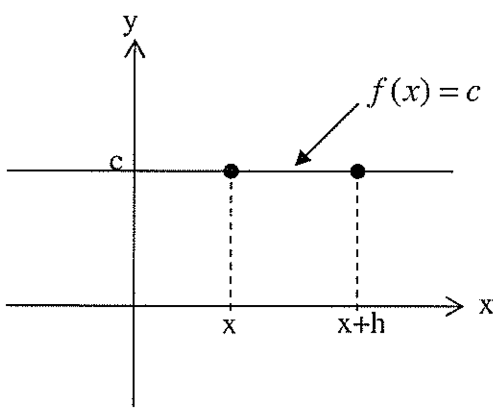
ทฤษฎีบทที่ 2.3.1 (กฎฟังก์ชันค่าคงตัว) ถ้า $f(x)=c$ สำหรับทุก $x \in R$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว $f'(x)=0$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[c]=0$$

พิสูจน์ ให้ $f(x)=c$ ดังนั้น

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$ □

ในเชิงเรขาคณิต ถ้าเราพิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x)=c$ เราจะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน f คือเส้นตรงที่ขนานแกน x ห่างจากแกน x เป็นระยะทาง $|c|$ (ดูรูปที่ 2.3.1) ซึ่งเส้นสัมผัสกับกราฟในทุก ๆ จุด ก็เป็นเส้นตรงขนานแกน x เช่นเดียวกัน ดังนั้นเราก็จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของ f ทุก ๆ จุด มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นก็คือ $f'(x)=0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$



รูปที่ 2.3.1

ตัวอย่างที่ 2.3.1 (1) ถ้า $f(x)=5$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{d}{dx}[5]=0$

(2) ถ้า $f(x)=\pi$ แล้ว $f'(x)=\dfrac{d}{dx}[\pi]=0$ □

ทฤษฎีบทที่ 2.3.2 (กฎฟังก์ชันเอกลักษณ์) ถ้า $f(x)=x$ แล้ว $f'(x)=1$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[x]=1$$

พิสูจน์ ให้ $f(x)=x$ ดังนั้น

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$ □

พิสูจน์ ให้ $f(x)=x^n$ แล้ว

ทฤษฎีบทที่ 2.3.3 (กฎฟังก์ชันกำลัง) ถ้า $f(x)=x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $f'(x)=nx^{n-1}$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

โดยใช้ทฤษฎีบททวินามกระจาย $(x+h)^n$ จะได้

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n\right]-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right]=nx^{n-1}$$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 2.3.2**</u>

$\frac{d}{dx}\left[x^6\right]=6x^5$, $\frac{d}{dx}\left[x^{10}\right]=10x^9$ และ $\frac{d}{dx}\left[x^{100}\right]=100x^{99}$ □

<u>**ทฤษฎีบทที่ 2.3.4**</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว cf จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}[cf(x)]=c\cdot\frac{d}{dx}[f(x)]$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F(x)=cf(x)$ ดังนั้น

$$F'(x)=\frac{d}{dx}[cf(x)]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$=c\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$=c\cdot\frac{d}{dx}[f(x)]$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.3</u>

(1) $\frac{d}{dx}\left[4x^3\right]=4\frac{d}{dx}\left[x^3\right]=4\cdot\left(3x^2\right)=12x^2$

(2) $\frac{d}{dx}\left[\pi x^{19}\right]=\pi\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{19}\right]=\pi\left(19x^{18}\right)=19\pi x^{18}$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.5</u> (กฎผลบวก) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $f+g$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F(x)=f(x)+g(x)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]&=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]+\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]\end{aligned}$$ □

ทฤษฎีบทที่ 2.3.6 (กฎผลลบ) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว $f-g$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)]-\frac{d}{dx}[g(x)]$$

พิสูจน์
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]&=\frac{d}{dx}[f(x)+(-1)g(x)]\\&=\frac{d}{dx}[f(x)]+\frac{d}{dx}[(-1)g(x)] &&\text{(จากทฤษฎีบทที่ 2.3.5)}\\&=\frac{d}{dx}[f(x)]+(-1)\frac{d}{dx}[g(x)] &&\text{(จากทฤษฎีบทที่ 2.3.4)}\\&=\frac{d}{dx}[f(x)]-\frac{d}{dx}[g(x)]\end{aligned}$$ □

จากทฤษฎีบทที่ 2.3.5 และทฤษฎีบทที่ 2.3.6 สามารถขยายไปยังกฎผลบวก (หรือกฎผลลบ) ของฟังก์ชันที่มีมากกว่า 2 ฟังก์ชันได้ ดังนี้

ถ้าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ x ได้ แล้วฟังก์ชัน $f_1+f_2+\cdots+f_n$ (หรือ $f_1-f_2-\cdots-f_n$) จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ x ได้ และ

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\frac{d}{dx}[f_1(x)]+\frac{d}{dx}[f_2(x)]+\cdots+\frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f_1(x)-f_2(x)-\cdots-f_n(x)]=\frac{d}{dx}[f_1(x)]-\frac{d}{dx}[f_2(x)]-\cdots-\frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.4</u> กำหนดให้ $y = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[x^5\right] + \frac{d}{dx}\left[3x^3\right] - \frac{d}{dx}\left[2x^2\right] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= \frac{d}{dx}\left[x^5\right] + 3\frac{d}{dx}\left[x^3\right] - 2\frac{d}{dx}\left[x^2\right] - \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[1] \\
&= 5x^4 + 3\left(3x^2\right) - 2(2x) - 1 + 0 \\
&= 5x^4 + 9x^2 - 4x - 1
\end{aligned}
$$

□

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.7</u> (กฎผลคูณ) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้วผลคูณ fg จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F(x) = f(x)g(x)$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\cdot\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 2.2.5 จะได้ว่า f มีความต่อเนื่อง ดังนั้น $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ และจาก $g(x)$ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับตัวแปร h ดังนั้น $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$ เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] &= \frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] \\ &= f(x)\frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\end{aligned}$$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.3.8</u> ถ้า n เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.5</u> กำหนดให้ $y=\left(x^2+x-1\right)\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[\left(x^2+x-1\right)\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\right] \\ &= \left(x^2+x-1\right)\frac{d}{dx}\left[x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right]+\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\frac{d}{dx}\left[x^2+x-1\right] \\ &= \left(x^2+x-1\right)\cdot\left(\frac{dx^4}{dx}-2\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}+\frac{dx^{\frac{1}{3}}}{dx}\right)+\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\frac{dx^2}{dx}+\frac{dx}{dx}-\frac{d1}{dx}\right) \\ &= \left(x^2+x-1\right)\cdot\left(4x^3-x^{\frac{-1}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)+\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(2x+1) \\ &= \left(x^2+x-1\right)\cdot\left(4x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)+\left(x^4-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(2x+1)\end{aligned}$$ □

ทฤษฎีบทที่ 2.3.9 (กฎผลหาร) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x) \neq 0$ แล้ว ฟังก์ชัน $\dfrac{f}{g}$ จะเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

พิสูจน์ ให้ $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx}[F(x)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h\big(g(x+h)g(x)\big)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x)f(x+h)-g(x)f(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left\{\left[g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\} \\
&= \left[\lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)} \\
&= \left(g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]\right)\cdot\frac{1}{g(x)g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 2.3.6 กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{1+\sqrt{x}}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3+1}{1+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(2x^3+1\right)-\left(2x^3+1\right)\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(2\frac{dx^3}{dx}+\frac{d1}{dx}\right)-\left(2x^3+1\right)\cdot\left(\frac{d1}{dx}+\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(6x^2\right)-\left(2x^3+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}=\frac{10x^3+12x^2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2.3.7 จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)}$ ที่จุด $(2,\dfrac{2}{5})$

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]$$

$$=\frac{\left(1+x^2\right)\frac{dx}{dx}-x\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

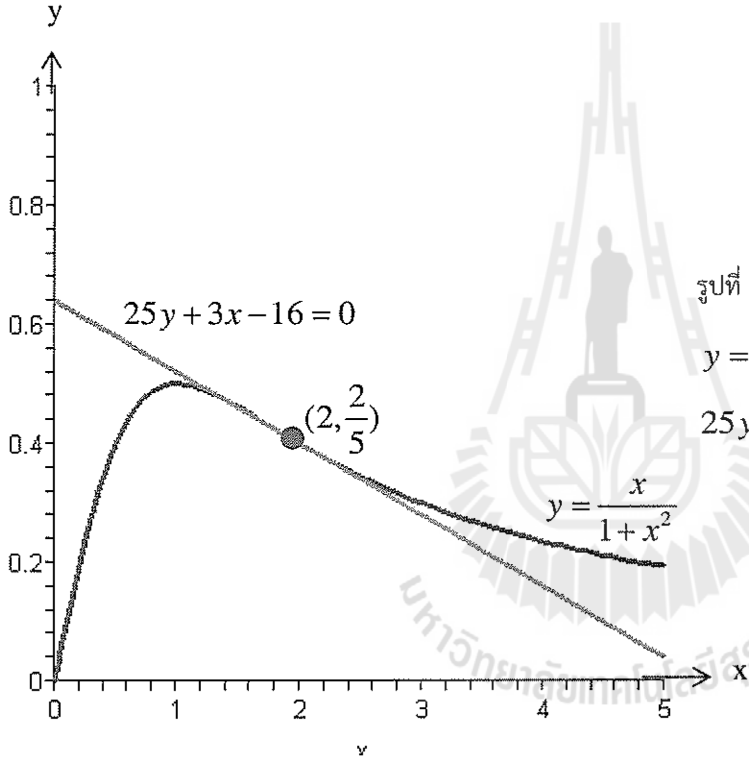
$$=\frac{\left(1+x^2\right)-x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

ดังนั้นความชันของสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่จุด $(2,\dfrac{2}{5})$ คือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \frac{1-(2)^2}{\left(1+2^2\right)^2} = \frac{-3}{25}$$

เพราะฉะนั้น สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)}$ ที่จุด $(2, \frac{2}{5})$ คือ

$$y - \frac{2}{5} = \frac{-3}{25}\left(x-2\right) \qquad \text{หรือ} \qquad 25y + 3x - 16 = 0$$ (ดูรูปที่ 2.3.2) □



รูปที่ 2.3.2 แสดงกราฟของเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ และเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $25y + 3x - 16 = 0$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.3.8**</u> จงหาพิกัดของจุด P ที่อยู่บนกราฟของไฮเพอร์โบลา $y = \dfrac{1}{x}$ ซึ่งเส้นสัมผัสกับกราฟขนานกับเส้นตรง $y = -4x - 1$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{dx^{-1}}{dx} = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

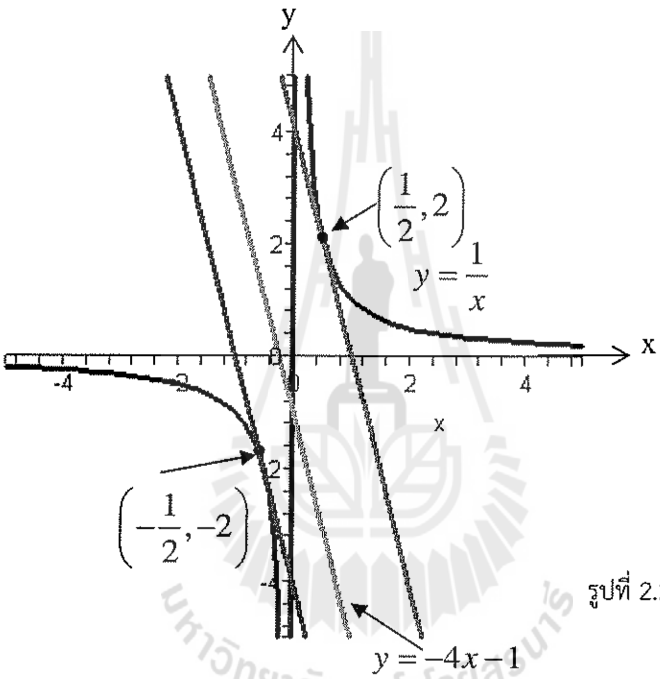
ให้จุด P มีพิกัดเป็น (x_0, y_0) ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_0, y_0) คือ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

เนื่องจากเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด (x_0, y_0) ขนานกับเส้นตรง $y = -4x - 1$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ -4 ดังนั้น จึงได้ว่า

$$-\frac{1}{x_0^2} = -4 \qquad \text{หรือ} \qquad x_0 = \pm\frac{1}{2}$$

ดังนั้นจุด P มีสองจุดคือ $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ และ $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ (ดูรูปที่ 2.3.3) □



รูปที่ 2.3.3

ทฤษฎีบทที่ 2.3.10 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x)\neq 0$ แล้ว $\dfrac{1}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{-\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 2.3.9 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]&=\frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[1]-1\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}\\&=\frac{0-\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}\\&=\frac{-\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$ □

ตัวอย่างที่ 2.3.9 กำหนดให้ $y=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^3+2x+1}\right]\\&=\frac{-\dfrac{d}{dx}\left[x^3+2x+1\right]}{\left(x^3+2x+1\right)^2}\\&=\frac{-\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x+1\right)^2}\end{aligned}$$ □

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1.1) $f(x)=x^3+2x^2-x+2$

(1.2) $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}-x$

(1.3) $f(x)=(x+1)\left(x^2+\sqrt{x}\right)$

(1.4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{x^4}$

(1.5) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^4}\right)\left(x+3x^6\right)$

(1.6) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^3-3x+1}$

(1.7) $f(x)=\dfrac{(x^2+x-1)\sqrt{x}}{x^3-x}$

2) จงพิจารณาว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด $x=a$ หรือไม่

(2.1) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$; $a=1$

(2.2) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le 1 \\ x^2-2x+2, & x>1 \end{cases}$; $a=1$

(2.3) $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x\le 1 \\ 3-x^3, & x>1 \end{cases}$; $a=1$

3) จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f=\begin{cases} x^2, & x\le 2 \\ ax+b, & x>2 \end{cases}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $x=2$

4) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(4,\dfrac{2}{5})$

5) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ ที่ขนานกับเส้นตรง $x-2y=2$

2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับสูตรในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ และ $\cot x$ โดยที่ x มีหน่วยเป็นเรเดียน

ในการหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sin x$ จะใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติและลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งได้เคยกล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 1.3 ทฤษฎีบทที่ 1.3.8 คือ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

จาก $f(x)=\sin x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\sin x]=\cos x} \qquad .....(2.4.1)$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\cos x$ ก็สามารถแสดงได้เช่นเดียวกับการหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sin x$ และ จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\cos x]=-\sin x} \qquad .....(2.4.2)$$

การหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \tan x$ เราจะใช้สูตรที่ (2.4.1) และ (2.4.2)

จาก $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] \\
&= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}\sin x - \sin x \dfrac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x}$$

สำหรับสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือ ก็สามารถหาได้เช่นเดียวกัน

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\cot x] = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

สำหรับการพิสูจน์ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.1**</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^5 \tan x + 3\sin x$

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^5 \tan x + 3\sin x\right) \\
&= \left(x^5 \frac{d}{dx}[\tan x] + \tan x \frac{dx^5}{dx}\right) + \left(3\frac{d}{dx}[\sin x]\right) \\
&= \left(x^5 \sec^2 x + 5x^4 \tan x\right) + (3\cos x) \\
&= x^4\left(x\sec^2 x + 5\tan x\right) + 3\cos x
\end{aligned}
$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.2**</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{x}}\right)$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ จะได้ว่า $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec} x$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cosec} x\right] \\
&= x^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[\operatorname{cosec} x] + \operatorname{cosec} x \frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= x^{-\frac{1}{2}}(-\operatorname{cosec} x \cot x) + \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\operatorname{cosec} x \\
&= \frac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{x}}\left(-\cot x - \frac{1}{2x}\right)
\end{aligned}
$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.3**</u> กำหนดให้ $y = \tan x \cdot \sin x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎผลคูณ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[\tan x \cdot \sin x] = \tan x \frac{d}{dx}[\sin x] + \sin x \frac{d}{dx}[\tan x] \\
&= \tan x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sec^2 x \\
&= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x + \sin x \cdot \sec^2 x = \sin x\left(1 + \sec^2 x\right)
\end{aligned}
$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.4</u> กำหนดให้ $y=\dfrac{\sec x}{x^2}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> โดยใช้กฎผลหาร จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sec x}{x^2}\right]\\&=\frac{x^2\dfrac{d}{dx}[\sec x]-\sec x\dfrac{d}{dx}\left[x^2\right]}{x^4}\\&=\frac{x^2\sec x\tan x-2x\sec x}{x^4}\\&=\frac{\sec x\left(x\tan x-2\right)}{x^3}\end{aligned}$$

2.5 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

จากในหัวข้อที่ 2.3 และ 2.4 เราได้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของ ผลบวก ผลลบ ผลคูณ ผลหาร ของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ไม่ได้ซับซ้อน สำหรับในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งสูตรในการหาอนุพันธ์ของของฟังก์ชันประกอบที่เราจะใช้นี้ เรียกว่า **กฎลูกโซ่** ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.5.1</u> **(กฎลูกโซ่)** ถ้าฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $F = f \circ g$ ซึ่งนิยามโดย $F(x) = f\left(g\left(x\right)\right)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$F'(x) = \left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

ในสัญกรณ์ไลบ์นิทซ์ ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

<u>พิสูจน์</u>

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)}\right)\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{g(x+h)\to g(x)}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{g(x+h)-g(x)}\cdot g'(x) \quad (\because g(x+h)\to g(x) \text{ เมื่อ } h\to 0) \\
&= f'(g(x))\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 2.5.1</u> กำหนดให้ $y=\sqrt{u}$ และ $u=1+x^3$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\frac{d}{dx}\left(1+x^3\right) \\
&= \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d}{dx}\left(1+x^3\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3x^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\left(3x^2\right) \\
&= \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.5.2 กำหนดให้ $y = u^{20}$ และ $u = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3$ จงใช้กฎลูกโซ่หา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

วิธีทำ โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{du^{20}}{du} \cdot \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3\right) \\
&= 20u^{19}\left(12x^3 - 6x^2 + 10x - 1\right) \\
&= 20\left(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 3\right)^{19}\left(12x^3 - 6x^2 + 10x - 1\right)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= 20\left(3(1)^4 - 2(1)^3 + 5(1)^2 - 1 + 3\right)^{19} \cdot \left(12(1)^3 - 6(1)^2 + 10(1) - 1\right) \\
&= 20 \cdot (15) \cdot (8)^{19} \\
&= 300 \cdot (8)^{19}
\end{aligned}
$$

□

ข้อสังเกต

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ โดยใช้กฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right] = \left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

จะสังเกตเห็นได้ว่าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบนี้ เราจะเริ่มจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(g(x))$ ก่อนซึ่งเป็นฟังก์ชันข้างนอกแล้วนำไปคูณกับอนุพันธ์ของ $g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันข้างใน

<u>ตัวอย่างเช่น</u>

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right]^2 &= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\\ &= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\cdot\left(\frac{x(2x)-(x^2+1)}{x^2}\right)\\ &= 2\left[\frac{x^2+1}{x}\right]\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\\ &= \frac{2(x^4-1)}{x^3}\end{aligned}$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 2.5.2</u> ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.5.3</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(3x^3 - x^5\right)^{-2}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = 3x^3 - x^5$ ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2.5.2 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(3x^3-x^5\right)^{-2}\\ &= -2\left(3x^3-x^5\right)^{-3}\frac{d}{dx}\left(3x^3-x^5\right)\\ &= -2\left(3x^3-x^5\right)^{-3}\left(9x^2-5x^4\right)\\ &= \frac{-2\left(9x^2-5x^4\right)}{\left(3x^3-x^5\right)^3}\end{aligned}$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 2.5.4**</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x^2+3x+1}}$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ จะได้ $f(x)=\left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{-1}{3}}$

ให้ $u=\left(2x^2+3x+1\right)$ ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 2.5.2 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{-1}{3}}\\&=\frac{-1}{3}\left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{-4}{3}}\frac{d}{dx}\left(2x^2+3x+1\right)\\&=\frac{-1}{3}\left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{-4}{3}}(4x+3)\\&=\frac{-1}{3}\frac{(4x+3)}{\left(2x^2+3x+1\right)^{\frac{4}{3}}}\end{aligned}$$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 2.5.5**</u> จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{3x-1}\right)^4$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=\dfrac{x^2+1}{3x-1}$ ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 2.5.2 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^4\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{(3x-1)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}\\&=4\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^3\cdot\frac{(3x-1)(2x)-3\left(x^2+1\right)}{(3x-1)^2}\\&=\frac{4\left(x^2+1\right)^3\left(3x^2-2x-3\right)}{(3x-1)^5}\end{aligned}$$ □

ในกรณีที่ฟังก์ชันประกอบ มีฟังก์ชันมาประกอบกันมากกว่าสองฟังก์ชัน เราก็สามารถปรับปรุงกฎลูกโซ่เพื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้เช่นกัน เช่น

ถ้า $y = f(u),\quad u = g(x)$ และ $x = h(t)$

จะได้ว่า $y = f\left(g\left(h(t)\right)\right)$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = f'(u)g'(x)h'(t)$

<u>ตัวอย่างที่ 2.5.6</u> กำหนดให้ $y = u^2 + 1,\quad u = \sqrt{x}$ และ $x = \dfrac{1}{t^3}$ จงหา $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\\ &= \frac{d}{du}\left(u^2+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^3}\right)\\ &= (2u)\cdot\frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx}\cdot\frac{dt^{-3}}{dt}\\ &= (2u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{3}{t^4}\right)\end{aligned}$$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $x = 1$ และ $u = 1$ เพราะฉะนั้น $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = (2(1))\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1}}\right)\left(\dfrac{-3}{1^4}\right) = -3$ □

ทฤษฎีบทที่ 2.5.3 ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า

1. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u \cdot \dfrac{du}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u \cdot \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \cdot \dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \cdot \dfrac{du}{dx}$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 2.5.7 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sin^2(x^2+1)$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทที่ 2.5.2 และทฤษฎีบทที่ 2.5.3 จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sin^2(x^2+1)\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\frac{d}{dx}\left[\sin(x^2+1)\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)\frac{d}{dx}\left[x^2+1\right] \\
&= 2\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)(2x) \\
&= 4x\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่างที่ 2.5.8 กำหนด $y=\sqrt[3]{x+\sec x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันใหม่จะได้ $y=(x+\sec x)^{\frac{1}{3}}$ แล้วทฤษฎีบทที่ 2.5.2 และทฤษฎีบทที่ 2.5.3 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}[x+\sec x]^{\frac{1}{3}}\\&=\frac{1}{3}(x+\sec x)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}[x+\sec x]\\&=\frac{1}{3}(x+\sec x)^{-\frac{2}{3}}(1+\sec x\tan x)\\&=\frac{1+\sec x\tan x}{3(x+\sec x)^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}$$ □

ตัวอย่างที่ 2.5.9 กำหนดให้ $y=\tan\left(x^2\cos x\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทที่ 2.5.3 และกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left[\tan\left(x^2\cos x\right)\right]\\&=\sec^2\left(x^2\cos x\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\cos x\right)\\&=\sec^2\left(x^2\cos x\right)\left(x^2\frac{d}{dx}[\cos x]+\cos x\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\right)\\&=\sec^2\left(x^2\cos x\right)\left(-x^2\sin x+2x\cos x\right)\\&=\left(2x\cos x-x^2\sin x\right)\left(\sec^2\left(x^2\cos x\right)\right)\end{aligned}$$ □

ตัวอย่างที่ 2.5.1 กำหนด $f(1-x^3)=4x^2$ จงหา $f'(9)$

วิธีทำ ให้ $f(1-x^3)=4x^2$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[4x^2\right]=\frac{d}{dx}\left[f\left(1-x^3\right)\right]$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$
\begin{aligned}
8x &= f'(1-x^3)\cdot\frac{d}{dx}\left(1-x^3\right) \\
&= -3x^2 f'(1-x^3)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$f'(1-x^3)=\frac{-8}{3x}$$

ให้ $x=-2$ จะได้ว่า $1-x^3=1-(-2)^3=9$ เพราะฉะนั้น $f'(9)=\dfrac{-8}{3(-2)}=\dfrac{4}{3}$ □

__ตัวอย่างที่ 2.5.11__ กำหนดให้ $f(0)=0$ และ $f'(0)=2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f\Big(f\big(f\big(f(x)\big)\big)\Big)$ ที่ $x=0$

<u>วิธีทำ</u> โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$(f\circ f\circ f\circ f)'(x)=f'\big(f\circ f\circ f(x)\big)\cdot f'\big(f\circ f(x)\big)\cdot f'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
(f\circ f\circ f\circ f)'(0) &= f'\big(f\circ f\circ f(0)\big)\cdot f'\big(f\circ f(0)\big)\cdot f'\big(f(0)\big)\cdot f'(0) \\
&= f'(0)\cdot f'(0)\cdot f'(0)\cdot f'(0) \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16
\end{aligned}
$$

□

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1) กำหนด $f'(0)=5,\quad g(0)=0$ และ $g'(0)=3$ จงหา $(f\circ g)'(0)$

2) จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

(2.1) $y=u^3+2u-1$ และ $u=3x-2$

(2.2) $y=\dfrac{1}{u^9}$ และ $u=x^6+4x^5-x^3+1$

(2.3) $y=\sqrt{u}$ และ $u=x^2+4x+5$

(2.4) $y=\sin u$ และ $u=\sqrt{x}$

(2.5) $y=u^3$ และ $u=\cos x$

3) จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ

(3.1) $y=u^2,\quad u=\cos x$ และ $x=2\sqrt{t}$

(3.2) $y=u^4,\quad u=\tan x$ และ $x=t^5$

(3.3) $y=\sqrt{u},\quad u=\cos x$ และ $x=\dfrac{t}{t+1}$

(3.4) $y=\dfrac{u+1}{u-2},\quad u=x^2$ และ $x=\sqrt[3]{t}$

4) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(4.1) $f(x)=\sqrt{2x-\sin^3(6x)}$

(4.2) $f(x)=\left[x+\tan(x^2-x+1)\right]^{-2}$

(4.3) $f(x)=x^4\cos^2(5x)$

(4.4) $f(x)=\sqrt{x}\cot^3\left(\sqrt{x}\right)$

(4.5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{cosec}(2x-1)}$

(4.6) $f(x)=(3x+8)^{10}\left(x^5+3x^4+2x^2+3x\right)^5$

(4.7) $f(x)=\left(\dfrac{2+x^2}{2-x^2}\right)^8$

(4.8) $f(x)=\left[x\cos(3x)-\tan^5(x^6)\right]^7$

5) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=x\sin 2x$ ที่จุด $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

6) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=x^2\sqrt{5-x^2}$ ที่จุด $(1,2)$

7) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สมบัติว่า $f'(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\in R\setminus\{0\}$
จงหาอนุพันธ์ของ $f\left(x^2+2x+1\right)$

8) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $f(x)$ ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(8.1) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}},\ (2,2)$

(8.2) $f(x)=\sqrt[5]{x^5+1},\ (0,1)$

(8.3) $f(x)=\sqrt{3+\sqrt{x}},\ (36,3)$

2.6 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher Derivatives)

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และถ้า f' ซึ่งเป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้ เราจะเขียนแทนอนุพันธ์ของ f' ด้วย f'' หรือ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ และเรียก f'' ว่า **อนุพันธ์ที่สองของฟังก์ชัน** f และเรียก f' ว่า **อนุพันธ์ที่หนึ่งของฟังก์ชัน** f

ในทำนองเดียวกัน **อนุพันธ์ที่สามของฟังก์ชัน** f เขียนแทนด้วย f''' หรือ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ซึ่งก็คืออนุพันธ์ของอนุพันธ์ที่สองของฟังก์ชัน f นั่นเอง กล่าวโดยทั่วไป สำหรับจำนวนเต็มบวก n **อนุพันธ์ที่** n **ของฟังก์ชัน** f จะเขียนแทนด้วย f^n หรือ $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ซึ่งก็คือ อนุพันธ์ของอนุพันธ์ที่ $n-1$ ของฟังก์ชัน f เพราะฉะนั้น ถ้า $y = f(x)$ แล้ว

อนุพันธ์ที่หนึ่งของ f ที่ x คือ $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

อนุพันธ์ที่สองของ f ที่ x คือ $f''(x) = \dfrac{d}{dx}f'(x)$

อนุพันธ์ที่สามของ f ที่ x คือ $f'''(x) = \dfrac{d}{dx}f''(x)$

อนุพันธ์ที่สี่ของ f ที่ x คือ $f^{(4)}(x) = \dfrac{d}{dx}f'''(x)$

$\vdots$

อนุพันธ์ที่ n ของ f ที่ x คือ $f^{(n)}(x) = \dfrac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$

สัญกรณ์ สำหรับอนุพันธ์อันดับสูง

1. อนุพันธ์ที่หนึ่ง $y',\ f'(x),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d}{dx}[f(x)]$
2. อนุพันธ์ที่สอง $y'',\ f''(x),\ \dfrac{d^2y}{dx^2},\ \dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
3. อนุพันธ์ที่สาม $y''',\ f'''(x),\ \dfrac{d^3y}{dx^3},\ \dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
4. อนุพันธ์ที่สี่ $y^{(4)},\ f^{(4)}(x),\ \dfrac{d^4y}{dx^4},\ \dfrac{d^4}{dx^4}[f(x)]$
5. อนุพันธ์ที่ n $y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \dfrac{d^ny}{dx^n},\ \dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

<u>ตัวอย่างที่ 2.6.1</u> กำหนด $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+x-3$ จงหา $f^{(4)}(x)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+x-3$

ดังนั้น

$$f'(x)=4x^3-9x^2+4x+1$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)=12x^2-18x+4$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}f''(x)=24x-18$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{d}{dx}f'''(x)=24$$

เพราะฉะนั้น $f^{(4)}(x)=24$ □

<u>ตัวอย่างที่ 2.6.2</u> กำหนดให้ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ จงหาอนุพันธ์ที่ n ของ f

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=\frac{1}{x^2}$

จะได้

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(-2x^{-3}\right)=(-2)(-3)x^{-4}=\frac{(-2)(-3)}{x^4}=\frac{3!}{x^4}$$

$$f'''(x)=\frac{d}{dx}\left((-2)(-3)x^{-4}\right)=(-2)(-3)(-4)x^{-5}=\frac{(-2)(-3)(-4)}{x^5}=\frac{-4!}{x^5}$$

$$\vdots$$

ทำในทำนองเดียวกันนี้ จะได้ว่า $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$ □

ตัวอย่างที่ 2.6.3 กำหนดให้ $y=\dfrac{x}{x^2+4}$ จงหา $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$

วิธีทำ จาก $y=\dfrac{x}{x^2+4}$

จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x^2+4}\right]=\frac{\left(x^2+4\right)-x(2x)}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right]=\frac{\left(x^2+4\right)^2(-2x)-\left(4-x^2\right)(4x)\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}$$

$$=\frac{(-2x)\left(x^2+4\right)-(4x)\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=\dfrac{2(1)\left(1^2-12\right)}{\left(1^2+4\right)^3}=-\dfrac{22}{125}$ □

2.7 การหาอนุพันธ์โดยปริยาย (Implicit Differentiation)

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราศึกษาฟังก์ชันที่เขียนในรูป $y = f(x)$ ซึ่งเราเรียก y ว่า เป็น**ฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function)** ของ x ตัวอย่างเช่น $y = x^3 + 1,\quad y = x\sin x,\quad y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ เป็นต้น อย่างไรก็ตามบางฟังก์ชันอาจนิยามโดยปริยายด้วยความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อย่างเช่น

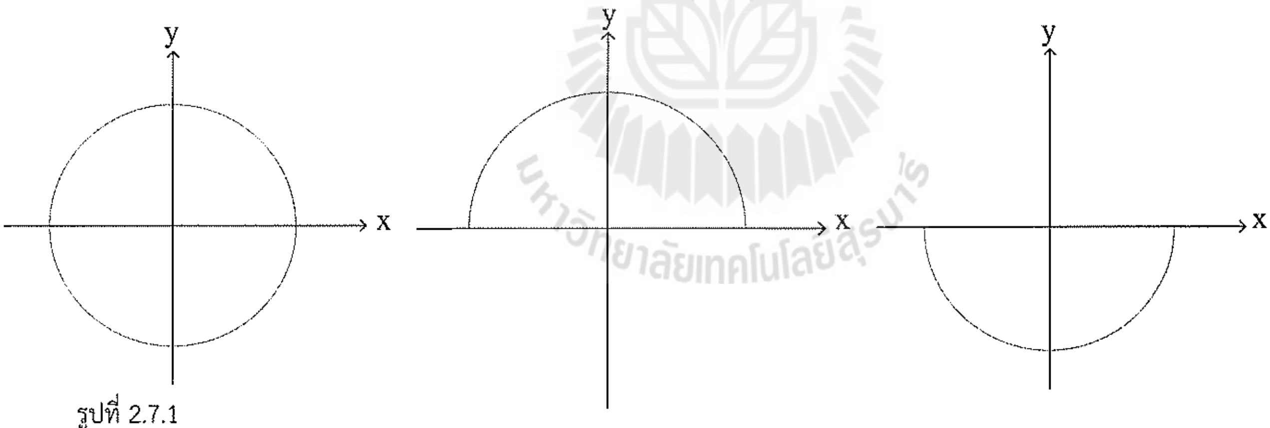
$$x^2 + y^2 = 1 \qquad .....(2.7.1)$$

หรือ

$$x^3 + y^3 = 6xy \qquad .....(2.7.2)$$

สำหรับสมการที่นิยามโดยปริยายนี้บางสมการเราสามารถเขียน y ในเทอมของ x ได้ (คือ $y = f(x)$) จากสมการ (2.7.1) เขียน y ในเทอมของ x ได้เป็น $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ดังนั้น มีสองฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ (2.7.1) คือ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ และ $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$

กราฟของ f และ g คือครึ่งวงกลมบน และครึ่งวงกลมล่างของ วงกลม $x^2 + y^2 = 1$ (ดูรูปที่ 2.7.1)



รูปที่ 2.7.1

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y = \sqrt{1-x^2}$ (c) $y = -\sqrt{1-x^2}$

จากสมการที่ 2.7.2 การจะเขียน y ในเทอมของ x เหมือนสมการที่ 2.7.1 นั้นเป็นการยากในการจัดรูป (นักศึกษาสามารถลองทำดูได้) อย่างไรก็ตาม เมื่อเรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ 2.7.2 นั้นจะหมายความว่า สมการ $x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$

เป็นจริงทุก ๆ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f

เพราะฉะนั้น ถ้า x และ y มีความสัมพันธ์ในรูป $F(x,y)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว โดยนิยาม y เป็นฟังก์ชันของ x เราจะกล่าวว่า y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $F(x,y)=c$

ในการหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x ของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายนั้น เราไม่จำเป็นที่จะต้องจัดรูปแบบสมการในรูป y ในเทอมของ x แต่เราสามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์ของแต่ละเทอมในสมการเทียบกับ x โดยคิดว่า y เป็นฟังก์ชันของ x แล้วใช้กฎลูกโซ่เพื่อหา $\dfrac{dy}{dx}$ เราเรียกการหาอนุพันธ์โดยวิธีนี้ว่า **การหาอนุพันธ์โดยปริยาย** (implicit differentiation)

<u>ตัวอย่างที่ 2.7.1</u> กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ

$$2y^2+xy-x^2-3=0$$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ

<u>วิธีทำ</u> จาก $2y^2+xy-x^2-3=0$

จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[2y^2+xy-x^2-3\right]=\frac{d}{dx}[0]$$

$$2\frac{d}{dx}\left[y^2\right]+\frac{d}{dx}[xy]-\frac{d}{dx}\left[x^2\right]-\frac{d}{dx}3=0$$

$$4y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y-2x=0$$

$$(4y+x)\frac{dy}{dx}=2x-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+4y}$$

□

ตัวอย่างที่ 2.7.2 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ $\cos\left(x^3y^2\right)=2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ

วิธีทำ จาก $\cos\left(x^3y^2\right)=2x$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[\cos\left(x^3y^2\right)\right]=\frac{d}{dx}[2x]$$

$$-\sin\left(x^3y^2\right)\frac{d}{dx}\left[x^3y^2\right]=2$$

$$-\sin\left(x^3y^2\right)\left(2x^3y\frac{dy}{dx}+3x^2y^2\right)=2$$

$$-2x^3y\sin\left(x^3y^2\right)\frac{dy}{dx}=2+3x^2y^2\sin\left(x^3y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(2+3x^2y^2\sin\left(x^3y^2\right)\right)}{2x^3y\sin\left(x^3y^2\right)}$$ □

ตัวอย่างที่ 2.7.3 กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $\frac{xy}{1+\sec y}=1+y^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ

วิธีทำ จาก $\frac{xy}{1+\sec y}=1+y^3$ จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{xy}{1+\sec y}\right]=\frac{d}{dx}\left[1+y^3\right]$$

$$\frac{(1+\sec y)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-(xy)\left(\sec y\tan y\frac{dy}{dx}\right)}{[1+\sec y]^2}=3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}+y+x\sec y\frac{dy}{dx}+y\sec y-xy\sec y\tan y\frac{dy}{dx}=3y^2[1+\sec y]^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx}+x\sec y\frac{dy}{dx}-xy\sec y\tan y\frac{dy}{dx}-3y^2[1+\sec y]^2\frac{dy}{dx}=-y-y\sec y$$

$$\left[x + x\sec y - xy\sec y\tan y - 3y^2\left[1+\sec y\right]^2\right]\frac{dy}{dx} = -y(1+\sec y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(1+\sec y)}{\left[x + x\sec y - xy\sec y\tan y - 3y^2\left[1+\sec y\right]^2\right]}$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 2.7.4</u> กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการ

$y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2 = 0$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0,3)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2 = 0$

จะได้

$$\frac{d}{dx}\left[y^3 + x^2y + x^2 - 3y^2\right] = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 2x - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(3y^2 + x^2 - 6y\right)\frac{dy}{dx} = -2xy - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy - 2x}{\left(3y^2 + x^2 - 6y\right)}$$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(0,3)$ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง มีความชันเท่ากับ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\,y=3} = \frac{0}{27-18} = 0$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสคือ $y - 3 = 0(x-0) = 0$ หรือ $y = 3$ □

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1) กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย ด้วยสมการต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

(1.1) $x^4 + 3x^2y + y^3 = 1 - xy$

(1.2) $\sqrt{x}\cos y + \sqrt{y}\sin x = 0$

(1.3) $x^3 = \dfrac{x+y}{x-2y}$

(1.4) $\sin(x\sqrt{y}) + \tan(\sqrt{y}) = 1$

(1.5) $\cot^3\left(x^2y + y\right) = x$

(1.6) $\dfrac{xy^3}{1+\sec y} = x + y^2$

2) กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยายด้วยสมการต่อไปนี้ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(2.1) $3x^2 + y^3 = 5$

(2.2) $x^3y^3 - 1 = 0$

(2.3) $x + \sin y = y$

(2.4) $x\tan y = y^2$

3) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้ เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งดังต่อไปนี้

(3.1) $x^2 + xy + y^2 = 3$ ที่จุด $(1,1)$

(3.2) $x^2 + y^2 - (2x^2 + 2y^2 - x)^2 = 0$ ที่จุด $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

(3.3) $5x^4 - x^2 = y^2$ ที่จุด $(1,2)$

(3.4) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ ที่จุด $\left(-1, 3\sqrt{3}\right)$

4) กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{9-5x}$ จงหา $f'''(1)$

5) จงหา $f^{(n)}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก)

(5.1) $f(x) = x^n$ (5.2) $f(x) = \dfrac{1}{5x-1}$ (5.3) $f(x) = \sqrt{x}$

บทที่ 3

การประยุกต์ของอนุพันธ์

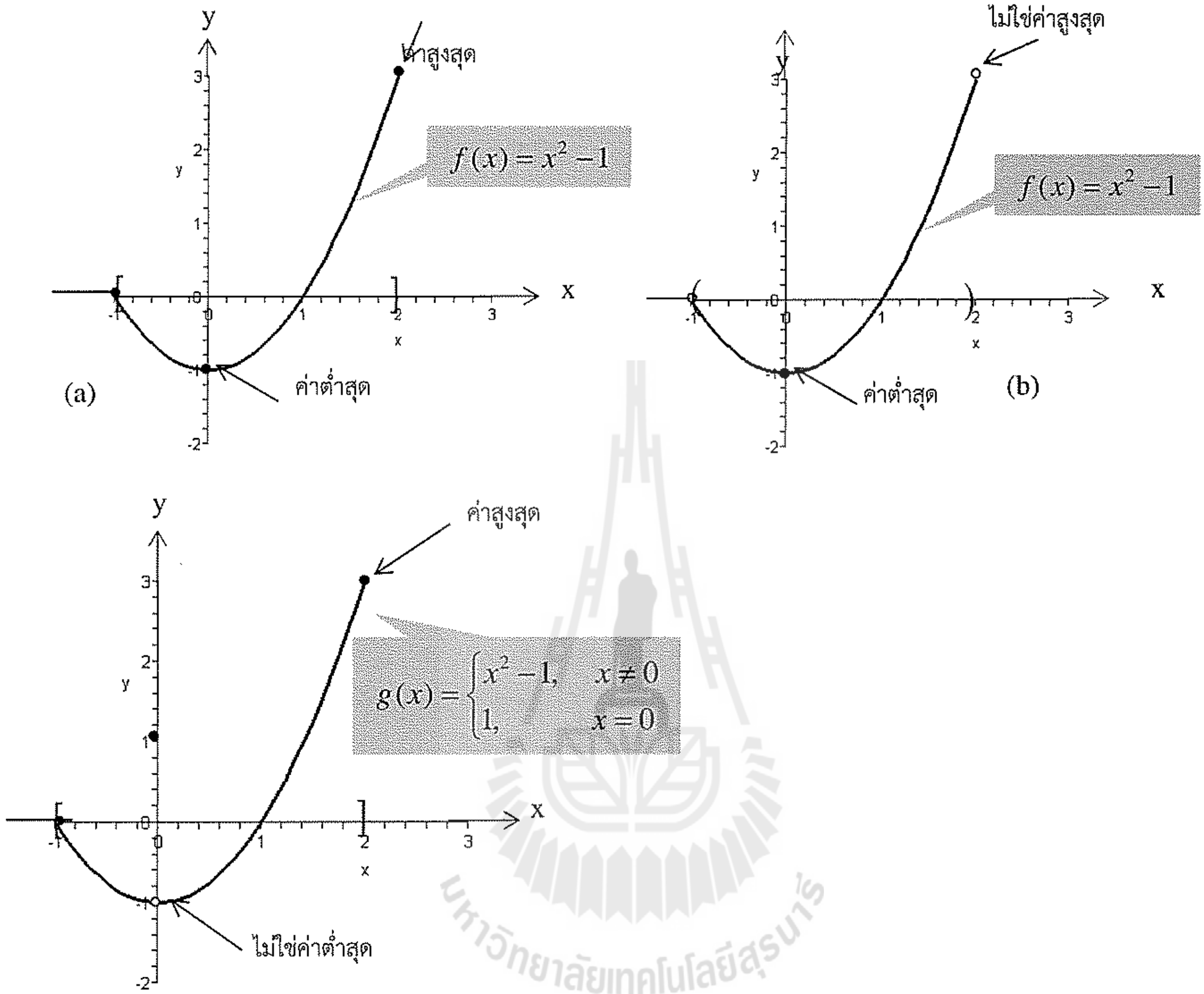
(Application of Derivatives)

3.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด (Maximum and Minimum Values)

<u>บทนิยามที่ 3.1.1</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f **มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum at u) (หรือค่าสูงสุด) ที่จุด $x_0 \in I$ ถ้า $f(x) \le f(x_0)$ สำหรับทุก $x \in I$ และจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) (หรือค่าต่ำสุด) ที่จุด $x_0 \in I$ ถ้า $f(x_0) \le f(x)$ สำหรับทุก $x \in I$
เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f **มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์** (absolute extremum) (หรือค่าสุดขีด) ที่จุด $x = x_0$ ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือมีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์อย่างใดอย่างหนึ่งที่จุด $x = x_0$

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด $x = x_0$ บนช่วง I แล้ว $f(x_0)$ คือค่าที่สูงสุดของฟังก์ชัน f บนช่วง I และถ้าฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด $x = x_0$ บนช่วง I แล้ว $f(x_0)$ คือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f บนช่วง I

ในกรณีทั่วไปไม่จำเป็นที่ฟังก์ชันจะต้องมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงที่กำหนด (ดูรูปที่ 3.1.1)

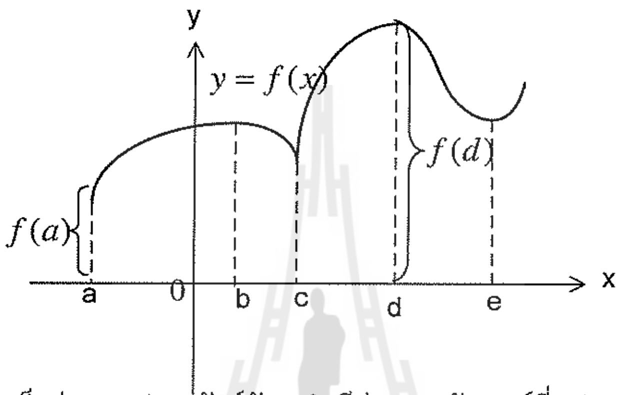


รูปที่ 3.1.1 (c)

จากรูปที่ 3.1.1 (a) และ (b) เราจะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x)=x^2-1$ จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[-1,2]$ แต่ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงเปิด $(-1,2)$ นอกจากนี้ในรูปที่ 3.1.1(c) เราจะเห็นว่า ฟังก์ชัน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งทำให้มีผลต่อการมีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (ฟังก์ชัน g ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์)

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.1.2</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ฟังก์ชัน f จะมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

พิจารณาเส้นโค้งของ $y = f(x)$ ดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.1.2

จากรูปที่ 3.1.2 จะเห็นว่า กราฟของฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ d และ มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ a และ $f(d)$ คือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f ส่วนค่า $f(a)$ คือ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน f และเราเรียก $(a, f(a))$ ว่า จุดต่ำสุดบนกราฟ และ เรียก $(d, f(d))$ ว่า จุดสูงสุดบนกราฟ

<u>บทนิยามที่ 3.1.3</u>

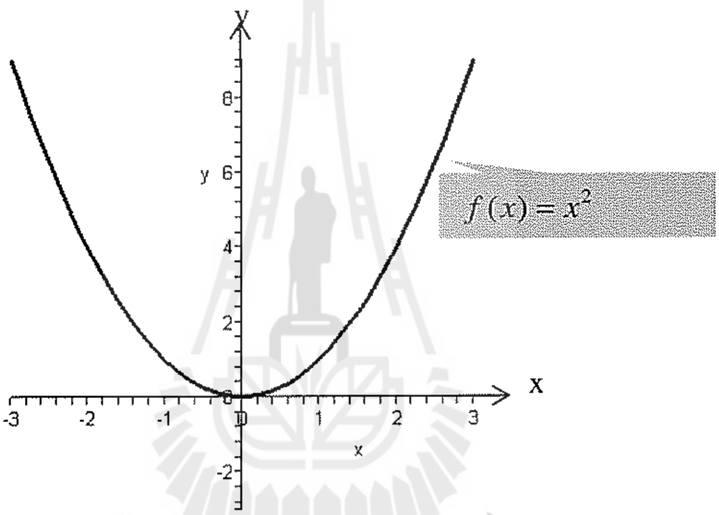
1. จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $x_0 \in (a,b)$ และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ และเรียก $f(x_0)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum value) และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่า **จุดสูงสุดสัมพัทธ์**

2. จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่ x_0 ถ้า มีช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง $x_0 \in (a,b)$ และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ และเรียก $f(x_0)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum value) และเรียกจุด $(x_0, f(x_0))$ ว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์**

ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ อย่างใดอย่างหนึ่งที่ x_0 แล้ว จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า มี**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์**ที่ x_0

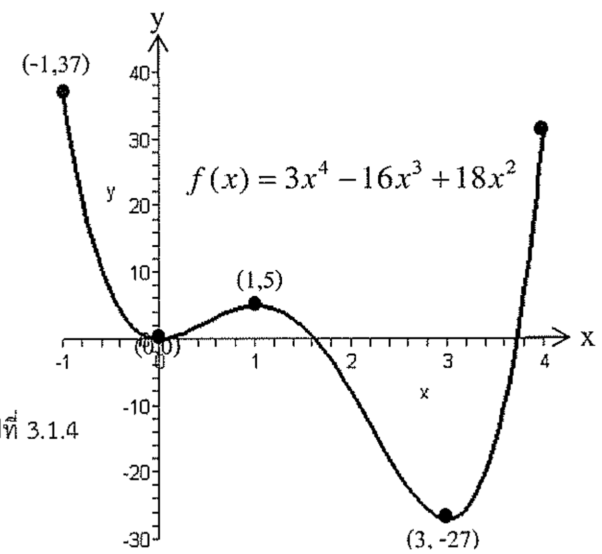
จากรูปที่ 3.1.2 เราจะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ b และ d นั่นคือ $f(b)$ และ $f(d)$ คือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c และ e นั่นคือ $f(c)$ และ $f(e)$ คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.1**</u> กำหนดให้ $f(x)=x^2$ เนื่องจาก $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in R$ และจาก $f(0)=0$ ดังนั้นได้ว่า $f(0)\leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in R$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และ $f(0)=0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f แต่ฟังก์ชัน f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (ดูรูปที่ 3.1.3)



รูปที่ 3.1.3

<u>**ตัวอย่างที่ 3.1.2**</u> กำหนดให้ $f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$ โดยที่ $x\in[-1,4]$

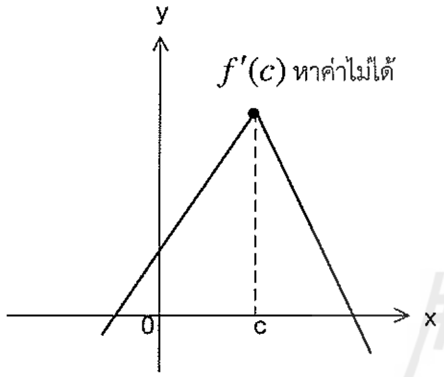


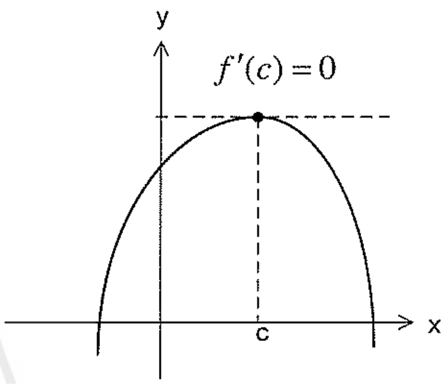
รูปที่ 3.1.4

พิจารณาจากกราฟ จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(1)=5$ และฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(0)=0$ และ $f(3)=-27$

ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x=-1$ และ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(-1)=37$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ $x=3$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ -27 □

<u>บทนิยามที่ 3.1.4</u> จำนวนจริง c ใด ๆ ที่อยู่บนโดเมนของฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ค่าวิกฤต** (critical number) ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้





รูปที่ 3.1.5 แสดง c เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f

<u>ทฤษฎีบทที่ 3.1.5</u> (ทฤษฎีบทแฟร์มาต์) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่บรรจุ c ถ้าฟังก์ชัน f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=c$ แล้ว $x=c$ คือ ค่าวิกฤติของฟังก์ชัน f นั่นคือ $f'(c)=0$ หรือฟังก์ชัน f ไม่มีอนุพันธ์ที่ c

<u>พิสูจน์</u> **กรณีที่ 1** ถ้า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x=c$ แล้วโดยบทนิยามที่ 3.1.4 ก็จะได้ว่า c เป็นค่าวิกฤติ ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริง

กรณีที่ 2 ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $x=c$ แล้ว $f'(c)>0$ หรือ $f'(c)<0$ หรือ $f'(c)=0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

สมมติว่า $f'(c)\neq 0$ ดังนั้น $f'(c)>0$ หรือ $f'(c)<0$