5) จงหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

(5.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 3x}$

(5.2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 9x}$

(5.3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan x}$

(5.4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x}$

(5.5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sqrt[3]{x}}$

(5.6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-1}{\sin x}$

(5.7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin(x+\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}$

(5.8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+\tan x}$

(5.9) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$

(5.10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x+\sin x}{2x}$

(5.11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc(2x)}{\cos(5x)}$

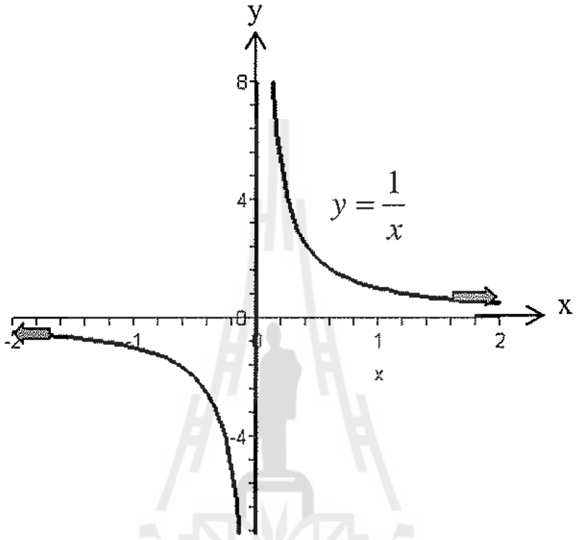
(5.12) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(3t)\cot(5t)}{t\cot(4t)}$

6) จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$ (แนะนำ : ให้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทแซนวิช)

## 1.4 ลิมิตที่อนันต์และลิมิตอนันต์ (Limits at Infinity and Infinite Limits)

**<u>ลิมิตที่อนันต์</u> (Limits at Infinity)**

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$




รูปที่ 1.4.1

จากกราฟ (รูปที่ 1.4.1) จะเห็นว่า เมื่อ $x$ มีค่าบวกเพิ่มมากขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด (เขียนแทนด้วย $x\to+\infty$ ) ค่าของฟังก์ชัน $f$ มีค่าเข้าใกล้ $0$ เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

และเช่นเดียวกัน เมื่อ $x$ มีค่าลบลดน้อยลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีขีดจำกัด ( เขียนแทนด้วย $x\to-\infty$) ค่าของฟังก์ชัน $f$ มีค่าเข้าใกล้ $0$ เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

สังเกตจากกราฟ (รูปที่ 1.4.1) จะเห็นว่าเมื่อ $x\to+\infty$ และ $x\to-\infty$ กราฟของฟังก์ชันเข้าใกล้เส้นตรง $y=0$ ในกรณีนี้เราจะเรียก เส้นตรง $y=0$ ว่า **เส้นกำกับแนวนอน (horizontal asymptote)**

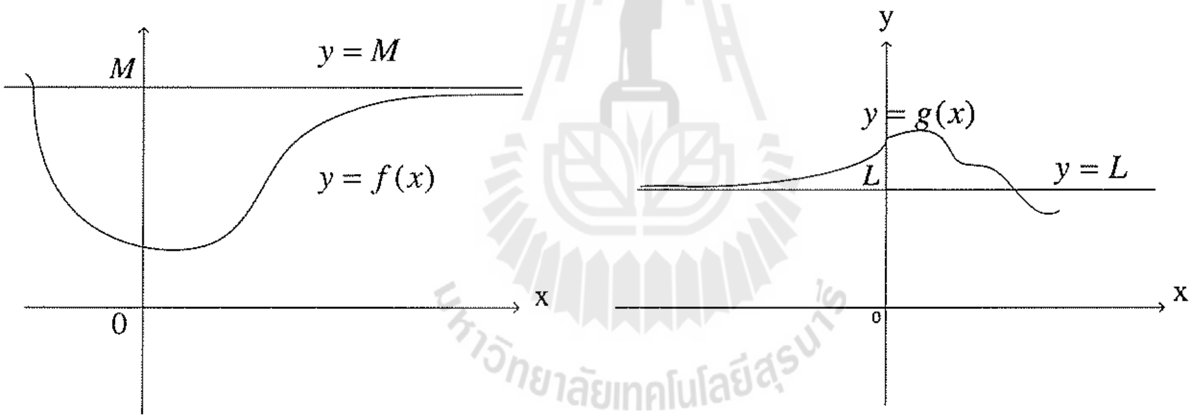
<u>**หมายเหตุ**</u> สัญลักษณ์ $+\infty$ และ $-\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง เราใช้สัญลักษณ์ $x \to +\infty$ ในความหมายที่ว่า "$x$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด" และใช้สัญลักษณ์ $x \to -\infty$ ในความหมายที่ว่า "$x$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด"

<u>**บทนิยามที่ 1.4.1**</u> ถ้าค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง $M$ เมื่อ $x$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด แล้วเราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M \quad \text{หรือ} \quad f(x) \to M \quad \text{เมื่อ} \quad x \to +\infty$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ จำนวนจริง $L$ เมื่อ $x$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด แล้วเราจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{หรือ} \quad f(x) \to L \quad \text{เมื่อ} \quad x \to -\infty$$




รูปที่ 1.4.2 (a) (b)



จากรูปที่ 1.4.2(a) จะเห็นว่า เมื่อ $x$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัดค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่า $M$ ดังนั้น $\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$ และจากกราฟเราก็สังเกตเห็นได้อีกว่า เมื่อ $x$ มีค่าเพิ่มขึ้นกราฟของฟังก์ชัน $f$ เข้าใกล้เส้นตรง $y = M$ จะเรียกเส้นตรงนี้ว่า **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote) ของฟังก์ชัน $f$

ในทำนองเดียวกัน จากรูปที่ 1.4.2 (b) จะเห็นว่า เมื่อ $x$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัดค่าของ $g(x)$ จะเข้าใกล้ $L$ ดังนั้น $\lim_{x \to -\infty} g(x) = L$ และจากกราฟก็สังเกตเห็นได้อีกว่า เมื่อ $x$ มีค่าลดลงกราฟของฟังก์ชัน $g$ จะเข้าใกล้เส้นตรง $y = L$ ซึ่งก็คือ **เส้นกำกับแนวนอน**ของฟังก์ชัน $g$ นั่นเอง

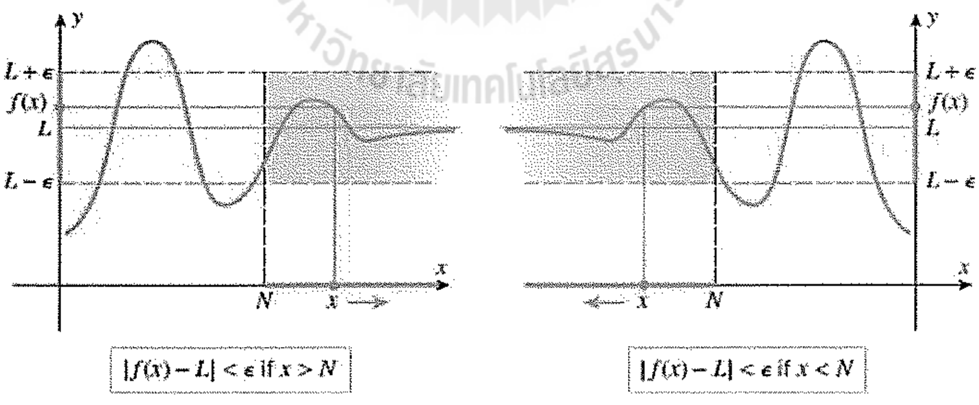
จากบทนิยามที่ 1.4.1 ยังถือว่าเป็นการนิยามที่ยังไม่ชัดเจนนักและไม่เพียงพอที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์สมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตที่อนันต์ ดังนั้นบทนิยามของลิมิตที่อนันต์ที่ชัดเจนและสามารถนำไปใช้พิสูจน์สมบัติต่าง ๆ นิยามได้ดังนี้

**<u>บทนิยามที่ 1.4.2</u>** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $(a,+\infty)$ และ $L$ เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง แล้ว $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $N>0$ ที่ทำให้

ถ้า $x>N$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$ (ดูรูปที่ 1.4.3(a))

**<u>บทนิยามที่ 1.4.3</u>** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $(-\infty,a)$ และ $L$ เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง แล้ว $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $N<0$ ที่ทำให้

ถ้า $x<N$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$ (ดูรูปที่ 1.4.3(b))




รูปที่ 1.4.3 (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

ที่มา : (2005, Anton, Bivens and Davis)

**<u>บทนิยามที่ 1.4.4</u>**

เส้นตรง $y=b$ จะเรียกว่า **เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote) ของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ถ้า

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

**<u>สมบัติของลิมิตที่อนันต์</u>**

สมบัติของลิมิตที่อนันต์ มีสมบัติบางประการเหมือนกับสมบัติของลิมิตที่ได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 1.3 โดยการแทน $x\to a$ ด้วย $x\to+\infty$ หรือ $x\to-\infty$ และมีสมบัติเพิ่มเติมคือ

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ เมื่อ $n=\dfrac{p}{q}$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก และ $q$ เป็นจำนวนคี่

สมบัติสองข้อนี้มีประโยชน์ในการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยมีหลักในการหาค่าลิมิตว่า ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ และถ้าต้องการหา $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ให้นำ $x$ ที่มีกำลังสูงสุดในตัวส่วนหารในเศษและส่วนของ $f(x)$ ก่อน แล้วค่อยนำกฎของลิมิตมาใช้

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.1</u> จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^4}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^4} &= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}\\ &= 2\cdot 0=0\end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 1.4.2** จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{5x+1}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{5x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-2}{x}}{\frac{5x+1}{x}}$$ (นำ $x$ หารทั้งเศษและส่วน)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{5+\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3-2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}5+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{3-(2\cdot 0)}{5+0}=\frac{3}{5}$$ □

**ตัวอย่างที่ 1.4.3** จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-x+1}{7x^4+x-10}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x^2-x+1}{7x^4+x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3x^3+2x^2-x+1}{x^4}}{\frac{7x^4+x-10}{x^4}}$$ (นำ $x^4$ หารทั้งเศษและส่วน)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{7+\frac{1}{x^3}-\frac{10}{x^4}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(7+\frac{1}{x^3}-\frac{10}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+2\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to-\infty}7+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}-10\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{(3\cdot 0)+(2\cdot 0)-0+0}{7+0-(10\cdot 0)}$$

$$= \frac{0}{7} = 0 \qquad \square$$

<u>**ตัวอย่างที่ 1.4.4**</u> จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}{x+3} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{x+3} = \frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{x+3}$$

นำ $x$ หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3} = \frac{\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{x}} = \frac{\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}$$

สำหรับ $x<0$ เราได้ว่า $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{1-0}}{1+0} = -1 \qquad \square$$

**<u>ตัวอย่างที่ 1.4.5</u>** จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา ถ้า $x\to+\infty$ แล้ว

$$\sqrt{x^2+3}\approx\sqrt{x^2} \quad , \quad \sqrt{3x^2-1}\approx\sqrt{3x^2} \quad \text{และ} \quad \sqrt{3x^2+5}\approx\sqrt{3x^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}\approx\frac{\sqrt{x^2}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

นั่นคือ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+5}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ □

**หมายเหตุ** ตัวอย่างที่ 1.4.5 เป็นการหาค่าลิมิตโดยการวิเคราะห์ เพื่อคาดคะเนค่าของลิมิต

**<u>ตัวอย่างที่ 1.4.6</u>** จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=\dfrac{1}{x}$ ดังนั้น $x=\dfrac{1}{u}$ และจะได้ว่า เมื่อ $x\to+\infty$ ค่าของ $u\to 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}&=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\\&=1\end{aligned}$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.7</u> จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.8</u> จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $-1\le\cos x^2\le 1$ เมื่อ $x>0$

ดังนั้น $\frac{-1}{\sqrt{x}}\le\frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

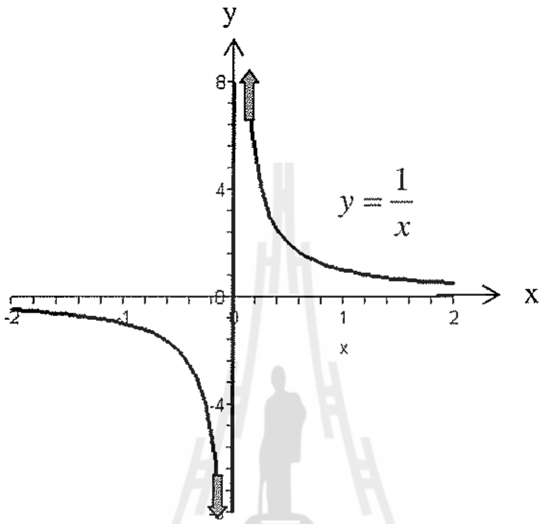
พิจารณา $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=-1\cdot 0=0$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=1\cdot 0=0$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทแซนวิช จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x^2}{\sqrt{x}}=0$ □

**ลิมิตอนันต์** (Infinite Limits)

เมื่อฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

พิจารณาฟังก์ชัน $f$ ที่กำหนดโดย $f(x)=\dfrac{1}{x}$




รูปที่ 1.4.4

พิจารณาจากกราฟของ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จะเห็นว่า เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายค่าของ $f(x)$ จะลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด ซึ่งจะได้ว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายไม่มีค่า ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็นลบอนันต์ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

ในทำนองเดียวกันค่าของ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ซึ่งจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0 ทางขวาไม่มีค่า
ในกรณีเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า $f(x)$ มีลิมิตเป็นบวกอนันต์ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

จากกราฟของ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ จะสังเกตเห็นได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ กราฟของฟังก์ชันเข้าใกล้เส้นตรง $x=0$ ซึ่งเราเรียกเส้นตรงนี้ว่า **เส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)**

**<u>บทนิยามที่ 1.4.5</u>** เส้นตรง $x=a$ จะเรียกว่า **เส้นกำกับแนวยืน (vertical asymptote)** ของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ถ้ากรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

**หมายเหตุ**

(1) ค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้จำนวนจริง $a$ หรือ $x\to+\infty$ หรือ $x\to-\infty$ ค่าของ $f(x)$ อาจจะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด หรือ ลดลงโดยไม่มีขีดจำกัด เขียนเป็นสัญลักษณ์ดังนี้

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$$

(2) ในกรณีที่ 2.1 $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (ดูรูปที่ 1.4.5 (a))

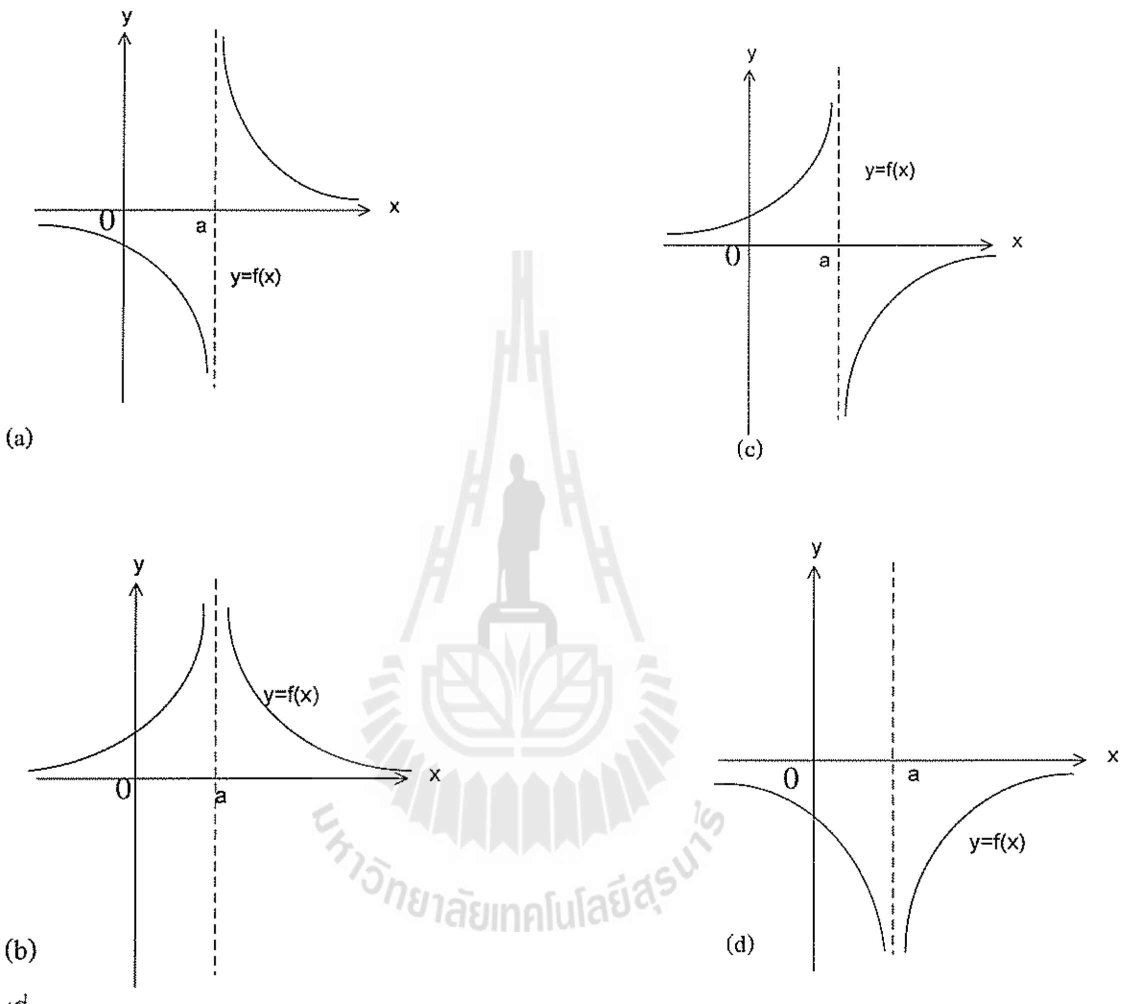
หรือ 2.2 $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ (ดูรูปที่ 1.4.5 (c))

เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ ไม่มีค่า

(3) ในกรณีที่ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ (ดูรูปที่ 1.4.5 (b)) หมายความว่า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$ และ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ (ดูรูปที่ 1.4.5 (d)) มีความหมายว่า $f(x)$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ $a$

(4) การที่ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ไม่ได้หมายความว่า ลิมิตของฟังก์ชันมีหรือหาค่าได้ เพราะ $+\infty$ ไม่ใช่จำนวนจริง แต่เป็นเพียงสัญลักษณ์ซึ่งแทนปริมาณที่มีขนาดใหญ่อย่างไม่มีขีดจำกัด ในทำนองเดียวกัน

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ก็ไม่ได้หมายความว่า ลิมิตของฟังก์ชันมีหรือหาค่าได้ เพราะ $-\infty$ เป็นสัญลักษณ์แทนปริมาณที่ลดลงโดยไม่มีขีดจำกัด




รูปที่ 1.4.5

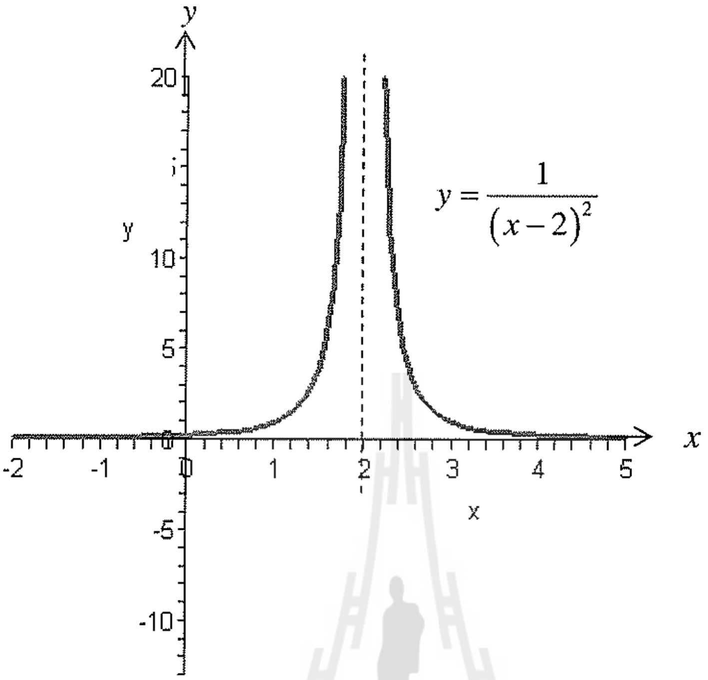


<u>**ตัวอย่างที่ 1.4.9**</u> พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ แล้วจงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f$




รูปที่ 1.4.6

พิจารณาจากกราฟที่ 1.4.6 จะเห็นได้ว่า เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x<2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด ดังนั้น

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$

และพิจารณาจากกราฟที่ 1.4.6 เราก็จะได้ว่า เมื่อ $x$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x>2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขีดจำกัด ดังนั้น

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

(3) จากข้อ (1) และข้อ (2) ก็จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ □

**สมบัติเพิ่มเติม**

ให้ $\lim_{x\to a} g(x)=0$, $\lim_{x\to a} f(x)=L$ และ $g(x)\neq 0$ ในช่วงเปิด $I$ ที่บรรจุ $a$ จะได้ว่า

1. ถ้า $g(x)>0$ สำหรับทุก $x\in I$ และ $x\neq a$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & L>0\\ -\infty, & L<0\end{cases}$

2. ถ้า $g(x)<0$ สำหรับทุก $x\in I$ และ $x\neq a$ แล้ว $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-\infty, & L>0\\ +\infty, & L<0\end{cases}$

**ตัวอย่างที่ 1.4.10** จงหา $\lim_{x\to 5^+}\frac{x^3}{x-5}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 5^+} x^3=5^3=125>0$ และ $\lim_{x\to 5^+} x-5=0$

แต่สำหรับ $x>5$ ค่าของ $x-5>0$ ทำให้ $x-5\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 5^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{\overset{(+)}{x^3}}{\underset{(+)}{x-5}}=+\infty$$ □

**ตัวอย่างที่ 1.4.11** จงหา $\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-17}{x-4}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 4^-}\left(x^2-17\right)=4^2-17=16-17=-1<0$ และ $\lim_{x\to 4^-}(x-4)=0$

พิจารณาเมื่อ $x<4$ ค่าของ $x-4<0$ ทำให้ได้ว่า $x-4\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to 4^-$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{\overset{(-)}{x^2-17}}{\underset{(-)}{x-4}}=+\infty$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.12</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ ดังนั้น $\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}=\dfrac{x-5}{(x+3)(x-1)}$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x+3}=\dfrac{1-5}{1+3}=\dfrac{-4}{4}=-1<0$ และ $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

แต่เราจะต้องพิจารณาเพิ่มเติมว่า $x-1\to 0$ ทางด้านค่าบวกหรือค่าลบ เมื่อ $x\to 1$

**กรณีที่ 1** เมื่อ $x<1$ ค่าของ $x-1<0$ ทำให้ได้ว่า $x-1\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to 1^-$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overset{(-)}{x-5}}{\underset{(+)}{(x+3)}}\cdot\frac{1}{\underset{(-)}{(x-1)}}=+\infty$$

**กรณีที่ 2** เมื่อ $x>1$ ค่าของ $x-1>0$ ทำให้ได้ว่า $x-1\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 1^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-5}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overset{(-)}{x-5}}{\underset{(+)}{(x+3)}}\cdot\frac{1}{\underset{(+)}{(x-1)}}=-\infty$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$ หาค่าไม่ได้ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.4.13</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x^2-6x+9}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\lim\limits_{x\to 3}(x-5)=3-5=-2<0$ และ

$\lim\limits_{x\to 3}x^2-6x+9=\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=(3-3)^2=0$

เนื่องจาก $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x$ ดังนั้น $(x-3)^2\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 3$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-5}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{\overset{(-)}{x-5}}{\underset{(+)}{(x-3)^2}}=-\infty$$ □

**ตัวอย่างที่ 1.4.14** จงหาเส้นกำกับแนวนอน และเส้นกำกับแนวยืนของเส้นโค้ง

$$f(x)=\frac{x+5}{2x-3}$$

วิธีทำ 1) **หาเส้นกำกับแนวนอน** จะพิจารณาจาก $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5}{2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{3}{x}}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

และ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{2x-3}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{x}}{2-\frac{3}{x}}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to-\infty}2-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}$$

ดังนั้น เส้นตรง $y=\frac{1}{2}$ เป็นเส้นกำกับแนวนอนของเส้นโค้ง $f(x)=\frac{x+5}{2x-3}$ (ดูรูปที่ 1.4.7)

2) **หาเส้นกำกับแนวยืน**

เนื่องจากเมื่อ $x=\frac{3}{2}$ จะทำให้ตัวส่วนของ $f$ เป็นศูนย์ แต่ตัวเศษไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเราจะพิจารณา $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{x+5}{2x-3}$

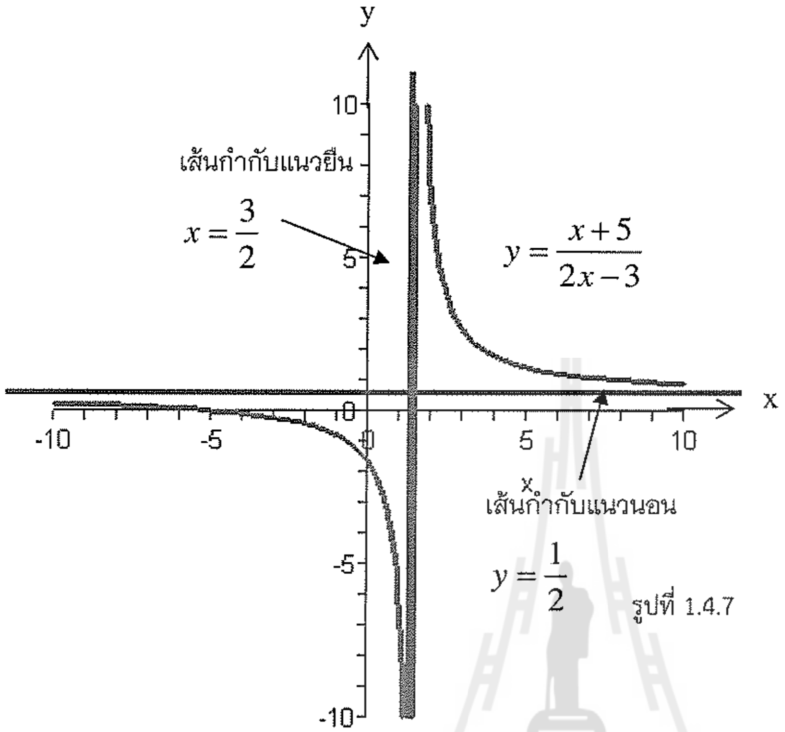
เนื่องจาก เมื่อ $x<\frac{3}{2}$ ค่าของ $2x-3<0$ ดังนั้น $2x-3\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to\frac{3}{2}^-$

เพราะฉะนั้น
$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^-}\frac{\overset{(+)}{x+5}}{\underset{(-)}{2x-3}}=-\infty$$

และ เมื่อ $x>\frac{3}{2}$ ค่าของ $2x-3>0$ ดังนั้น $2x-3\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to\frac{3}{2}^+$

เพราะฉะนั้น
$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^+}\frac{\overset{(+)}{x+5}}{\underset{(+)}{2x-3}}=+\infty$$

ดังนั้น เส้นตรง $x=\frac{3}{2}$ เป็นเส้นกำกับแนวยืน (ดูรูปที่ 1.4.7) □

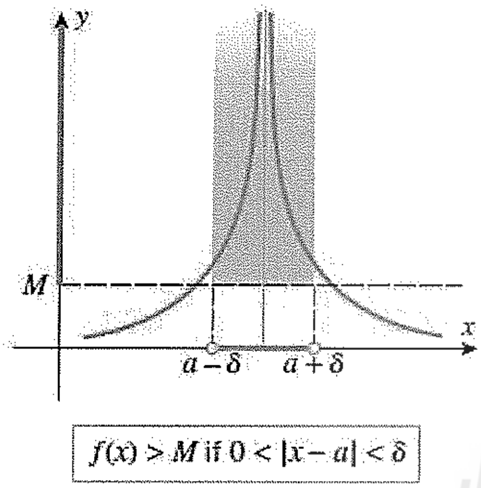


รูปที่ 1.4.7

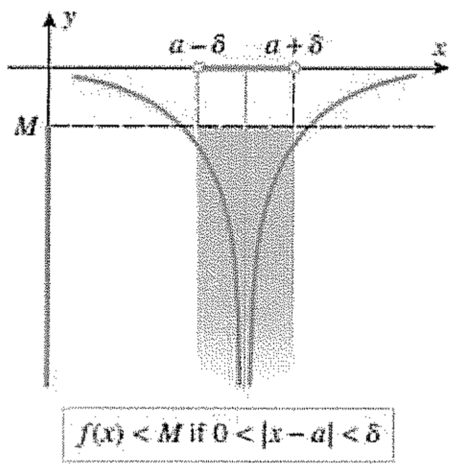
สำหรับบทนิยามของลิมิตอนันต์ ที่เราจะสามารถนำไปพิสูจน์กรณีที่ค่าของฟังก์ชันมีขนาดใหญ่อย่างไม่มีขีดจำกัดโดยตรงคือ

**<u>บทนิยามที่ 1.4.6</u>** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่บรรจุจำนวนจริง $a$ ( $f$ อาจจะไม่นิยามที่ $a$ ก็ได้) แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $M>0$ จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ ที่ทำให้ $f(x)>M$ เมื่อ $0<|x-a|<\delta$ (ดูรูปที่ 1.4.8)

**<u>บทนิยามที่ 1.4.7</u>** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดที่บรรจุจำนวนจริง $a$ ( $f$ อาจจะไม่นิยามที่ $a$ ก็ได้) แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ หมายความว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $M<0$ จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ ที่ทำให้ $f(x)<M$ เมื่อ $0<|x-a|<\delta$ (ดูรูปที่ 1.4.9)




รูปที่ 1.4.8 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$




รูปที่ 1.4.9 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

ที่มา: (2005, Anton, Bivens and Davis)

**ตัวอย่างที่ 1.4.15** จงใช้บทนิยามที่ 1.4.6 พิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4} = +\infty$

วิธีทำ 1.) **วิเคราะห์หา** $\delta$ ให้ $M>0$ เราต้องการหา $\delta>0$ ที่ทำให้

$$\frac{1}{x^4} > M \quad \text{เมื่อ} \quad 0<|x-0|<\delta$$

นั่นคือ $x^4 < \dfrac{1}{M}$ เมื่อ $0<|x|<\delta$ หรือ $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$ เมื่อ $0<|x|<\delta$

ดังนั้น เราจะเลือก $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$

2.) **พิสูจน์** สำหรับทุกจำนวนจริง $M>0$ จะมีจำนวนจริง $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$ ที่ทำให้

ถ้า $0<|x-0|<\delta$ แล้ว $|x|<\delta$ นั่นคือ $x^4<\delta^4$ หรือ $\dfrac{1}{x^4} > \dfrac{1}{\delta^4} = \left(\sqrt[4]{M}\right)^4 = M$

เพราฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4} = +\infty$ □

## แบบฝึกหัดที่ 1.3

1) กำหนด $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=-1,\quad \lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี) ถ้าไม่มีให้อธิบายเหตุผลด้วย

(1.1) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+2g(x)\right]$

(1.2) $\lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-3g(x)+1\right]$

(1.3) $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)g(x)\right)$

(1.4) $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\right]^2$

(1.5) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4+f(x)}$

(1.6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3h(x)+1}{x^2}$

(1.7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-g(x)}{h(x)}$

2) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(2.1) $\lim_{x\to3^+}\frac{2x}{6-2x}$ (2.2) $\lim_{x\to2^-}\frac{x+5}{|x-2|}$

(2.3) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-4}{3+2x-x^2}$ (2.4) $\lim_{x\to-5}\frac{x+4}{x^2+10x+25}$

(2.5) $\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-2x+1}$ (2.6) $\lim_{x\to2^-}\frac{x-3}{x^3-8}$

(2.7) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$ (2.8) $\lim_{x\to-1}\left|\frac{x-5}{1+x}\right|$

(2.9) $\lim_{x\to1}\frac{3-x}{x^4-1}$ (2.10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^3-2x^2+5}$

(2.11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8-x^2}{\sqrt{2x^2-x+1}}$

(2.12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^5+2x^2+3}{3x-2x^2}$

(2.13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x^2-4|}{5+x^2}$

(2.14) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-x^3}}{x-5}$

(2.15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3\sqrt{x}+1}{3x-2}$

(2.16) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$

(2.17) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3) กำหนด $f(x)=\begin{cases} 2x^2+5, & x<0 \\ \dfrac{3-5x^3}{1+4x+x^3}, & x\ge 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ

(3.1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(3.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

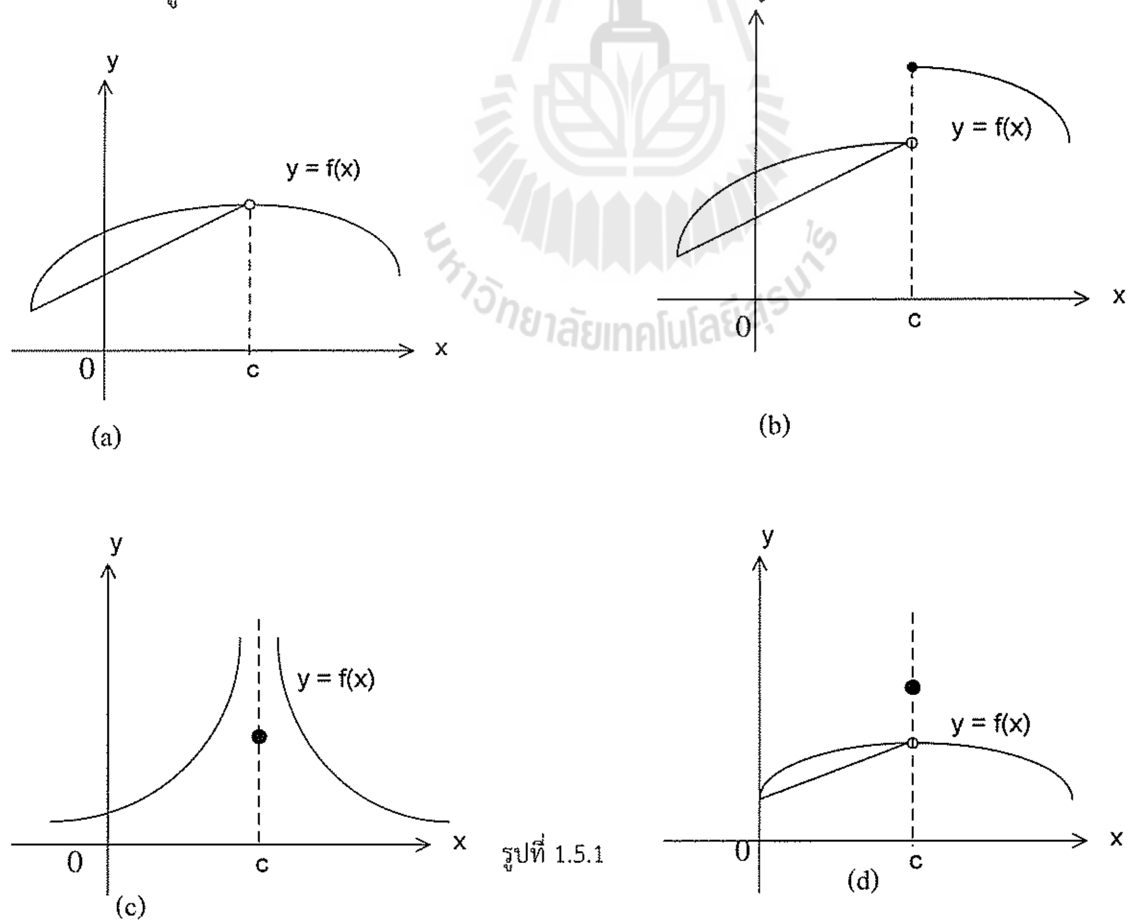
4) จงหาเส้นกำกับแนวยืน และเส้นกำกับแนวนอนของเส้นโค้ง $f(x)=\dfrac{(x^2+2)}{(x^2-9)}$

## 1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Function)

<u>บทนิยามที่ 1.5.1</u> ฟังก์ชัน $f$ **จะต่อเนื่องที่** $x = a$ ถ้า $f$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้ ($a$ อยู่ในโดเมนของ $f$)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ถ้าฟังก์ชัน $f$ ไม่มีสมบัติข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อนี้ เราจะกล่าวว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ และจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $f$ เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่อง** (continuous function) ถ้า $f$ ต่อเนื่องที่ทุกจุดในโดเมน พิจารณารูปด้านล่าง




รูปที่ 1.5.1

รูปที่ 1.5.1 แสดงถึงความไม่ต่อเนื่องแบบต่าง ๆ จะพบว่ารูป (a) ฟังก์ชัน $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=c$ เนื่องจาก $f(c)$ ไม่สามารถหาค่าได้ รูป (b) และ (c) ฟังก์ชัน $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=c$ เนื่องจาก $\lim_{x\to c} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และรูป (d) ฟังก์ชัน $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=c$ เนื่องจาก $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

**<u>บทนิยามที่ 1.5.2</u>**

(1) ฟังก์ชัน $f$ **มีภาวะไม่ต่อเนื่องขจัดได้** (removable discontinuity) ที่ $x=a$ ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ แต่ $f(a)$ หาค่าไม่ได้ หรือถ้า $f(a)$ หาค่าได้ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

ภาวะไม่ต่อเนื่องขจัดได้ เราสามารถกำหนดหรือนิยามค่าของฟังก์ชันใหม่ ณ $x=a$ แล้วทำให้ $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ ได้ (รูปที่ 1.5.1(a) และ (d) ฟังก์ชัน $f$ มีภาวะไม่ต่อเนื่องขจัดได้ ที่ $x=c$)

(2) ฟังก์ชัน $f$ **มีภาวะไม่ต่อเนื่องกระโดด** (jump discontinuity) ที่ $x=a$ ถ้า

$\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$ (รูปที่ 1.5.1(b) ฟังก์ชัน $f$ มีภาวะไม่ต่อเนื่องกระโดดที่ $x=c$)

(3) ฟังก์ชัน $f$ **มีภาวะไม่ต่อเนื่องอนันต์** (infinite discontinuity) ที่ $x=a$ ถ้า กรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(รูปที่ 1.5.1(c) ฟังก์ชัน $f$ มีภาวะไม่ต่อเนื่องอนันต์ที่ $x=c$ )

<u>**ตัวอย่างที่ 1.5.1**</u> กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ จงพิจารณาว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x=-1$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f(-1)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นโดยสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจึงได้ว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=-1$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 1.5.2**</u> กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 6, & x=2\end{cases}$

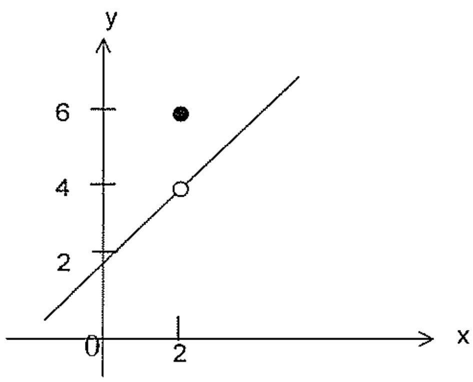
จงพิจารณาว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> (1) ฟังก์ชันนิยามที่ $x=2$ ซึ่ง $f(2)=6$

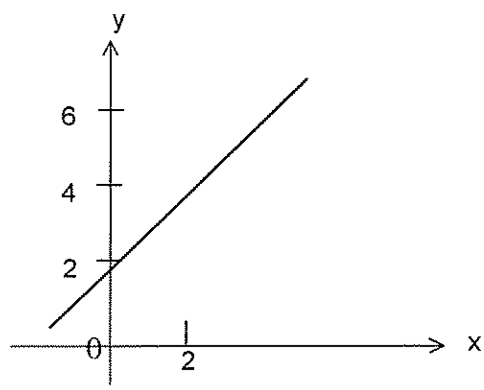
(2) พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}f(x)&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}(x+2)\\&=2+2=4\end{aligned}$$

(3) จากข้อ (1) และ (2) จะได้ว่า $\lim_{x\to 2}f(x)\neq f(2)$ ดังนั้น ฟังก์ชัน $f$ ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ (ดูรูปที่ 1.5.2 (a)) ฟังก์ชัน $f$ มีภาวะไม่ต่อเนื่องขจัดได้ที่ $x=2$ เนื่องจาก เราสามารถกำหนดค่าของ $f(2)$ ใหม่ โดยกำหนดให้ $f(2)=4$ แล้วเราก็จะได้ว่า $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)$ ดังนั้นฟังก์ชัน $f$ ที่เรานิยามใหม่ก็จะต่อเนื่องที่ $x=2$ (ดูรูปที่ 1.5.2 (b)) □




(a)




(b)

รูปที่ 1.5.2

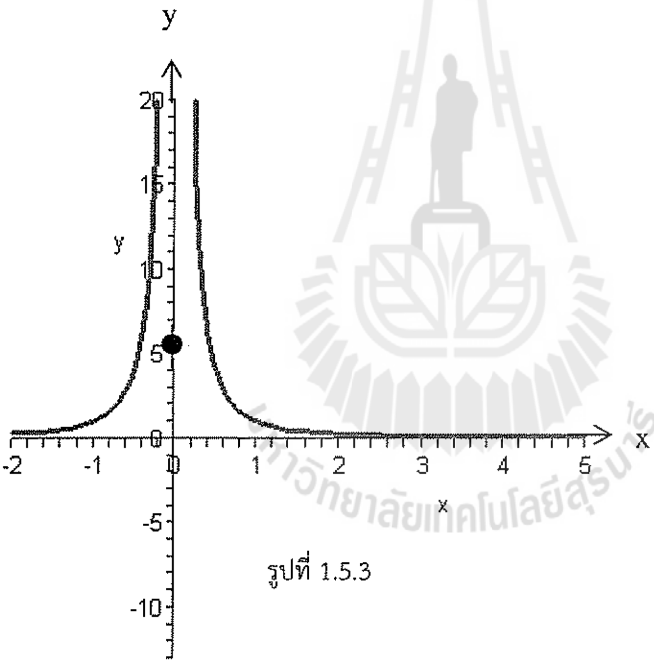
**<u>ตัวอย่างที่ 1.5.3</u>** กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 5, & x=0\end{cases}$

จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องที่ $x=0$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> (1) $f$ นิยามที่ $x=0$ และ $f(0)=5$

(2) พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ เนื่องจาก $x^2\geq 0$ เสมอ ดังนั้น $x^2\to 0$ ทางด้านบวก เมื่อ $x\to 0$

จากข้อ (2) จะได้ว่าค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น โดยนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และมีภาวะไม่ต่อเนื่องอนันต์ (ดูรูปที่ 1.5.3 ) □




รูปที่ 1.5.3

<u>บทนิยามที่ 1.5.3</u> ฟังก์ชัน $f$ เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องจากทางขวาที่** $x=a$ ( เมื่อ $a$ อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $f$ ) ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$ (ดูรูปที่ 1.5.4 (a))

และ $f$ เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องจากทางซ้ายที่** $x=a$ ถ้า

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$ (ดูรูปที่ 1.5.4 (b))

<u>บทนิยามที่ 1.5.4</u> ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(a,b)$ (หรือ $(-\infty,a)$ หรือ $(b,\infty)$ หรือ $(-\infty,\infty)$) ถ้า $f$ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงในช่วง $(a,b)$(หรือ $(-\infty,a)$ หรือ $(b,\infty)$ หรือ $(-\infty,\infty)$) (ดูรูปที่ 1.5.4 (c))

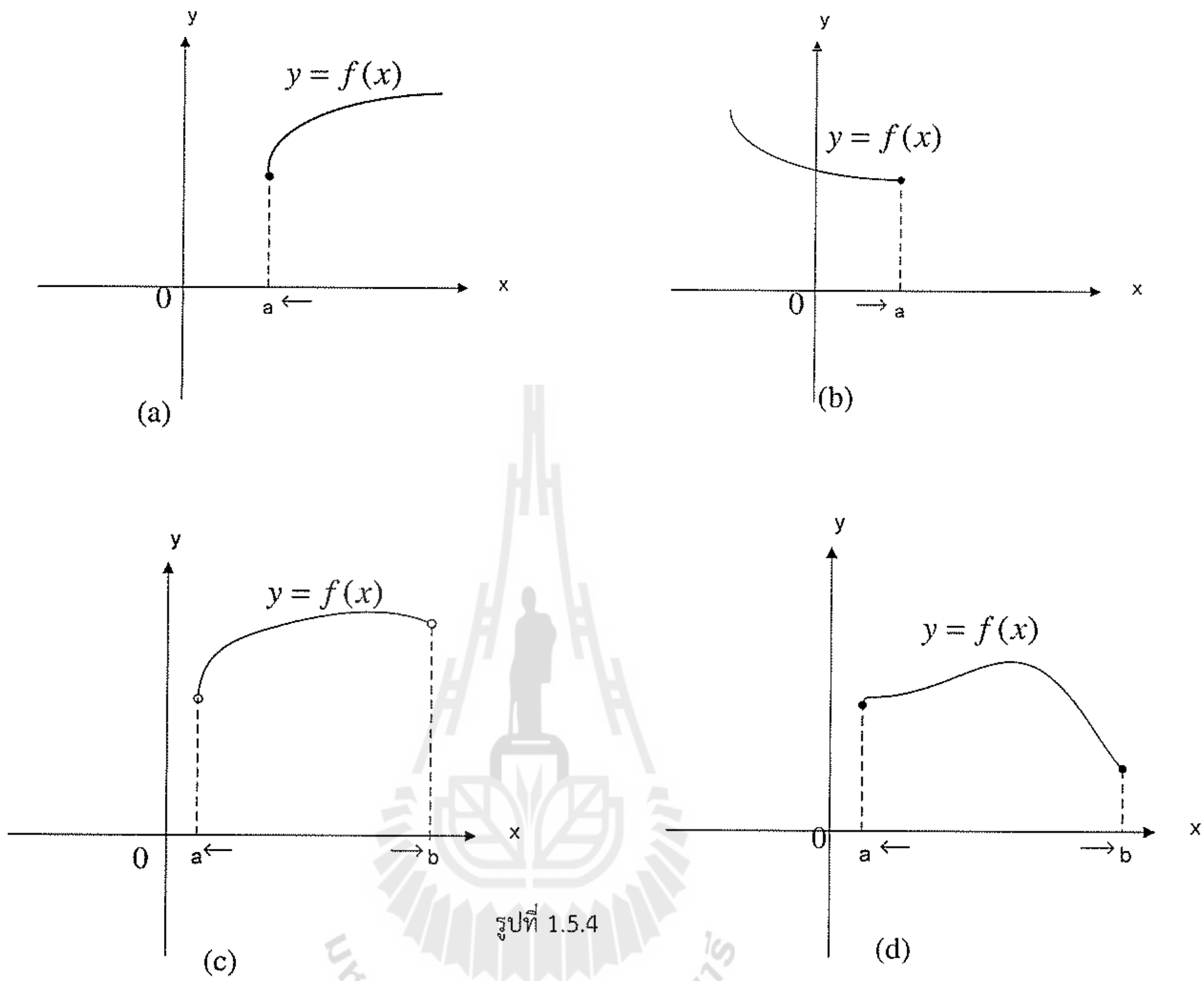
<u>บทนิยามที่ 1.5.5</u> ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้า $f$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $f$ มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(a,b)$

(2) $f$ มีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ $a$

(3) $f$ มีความต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $b$

(ดูรูปที่ 1.5.4 (d))




รูปที่ 1.5.4



**<u>ตัวอย่างที่ 1.5.4</u>** จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$

<u>วิธีทำ</u> (1) จะแสดงว่า $f$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$

ถ้า $-2<a<2$ แล้ว จากกฎของลิมิต จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\sqrt{4-x^2} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to a}(4-x^2)} = \sqrt{4-a^2} \\
&= f(a)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f$ ต่อเนื่องที่ $a$ เมื่อ $-2<a<2$ นั่นก็คือ $f$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-2,2)$

(2) จะแสดงว่า $f$ ต่อเนื่องจากทางขวาที่ $x=-2$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to -2^+}(4-x^2)}\\ &= \sqrt{4-(-2)^2}\\ &= 0 = f(-2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f$ ต่อเนื่องจากทางขวาที่ $x=-2$

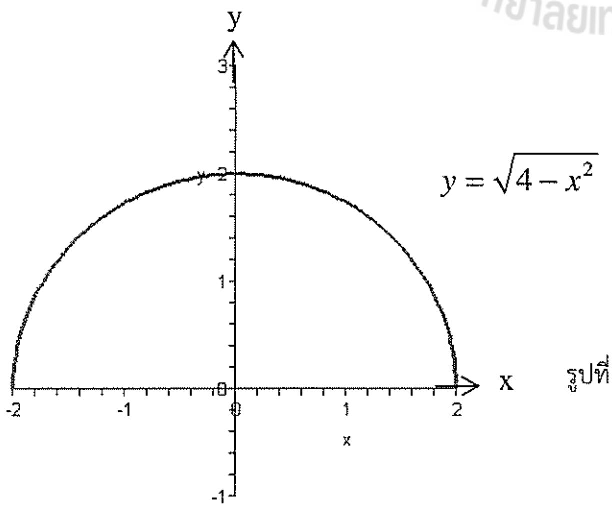
(3) จะแสดงว่า $f$ ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to 2^-}(4-x^2)}\\ &= \sqrt{4-(2)^2}\\ &= 0 = f(2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f$ ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

เพราะฉะนั้น จากบทนิยามที่ 1.5.5 เราจึงสามารถสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2,2]$ (ดูรูปที่ 1.5.5) □




รูปที่ 1.5.5

**ทฤษฎีบทที่ 1.5.6** ถ้าฟังก์ชัน $f$ และ $g$ ต่อเนื่องที่ $x=a$ แล้วฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ ด้วย

(1) $f+g$

(2) $f-g$

(3) $cf$ เมื่อ $c$ เป็นค่าคงที่

(4) $fg$

(5) $\dfrac{f}{g}$ ถ้า $g(a)\neq 0$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1.5.6 สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยาก สามารถพิสูจน์ได้โดยนำกฎของลิมิตที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 1.3 ในที่นี้จะพิสูจน์ข้อ (1) ส่วนข้ออื่น ๆ ให้นักศึกษาลองทำเป็นแบบฝึกหัด

__พิสูจน์__ 1) จะพิสูจน์ว่า $f+g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ เมื่อ $a$ อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน จากกฎผลบวกของลิมิต และฟังก์ชัน $f$ และ $g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)\\ &= \lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)\\ &= f(a)+g(a)\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

นั่นคือ $f+g$ มีความต่อเนื่องที่ $x=a$ □

**ทฤษฎีบทที่ 1.5.7**

1. ฟังก์ชันพหุนามใด ๆ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $R=(-\infty,\infty)$
2. ฟังก์ชันตรรกยะใด ๆ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงบนโดเมน

<u>พิสูจน์</u> 1) จากทฤษฎีบทที่ 1.3.3 ในหัวข้อ 1.3 ได้กล่าวไว้แล้วว่า ถ้า $P_n(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น $n$ ใด ๆ แล้ว $\lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$ สำหรับจำนวนจริง $a$ ใด ๆ
ดังนั้น $P_n(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

2) จากทฤษฎีบท 1.3.4 ในหัวข้อ 1.3 จะได้ว่า ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใด ๆ และ $Q(a) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันตรรกยะ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงบนโดเมน

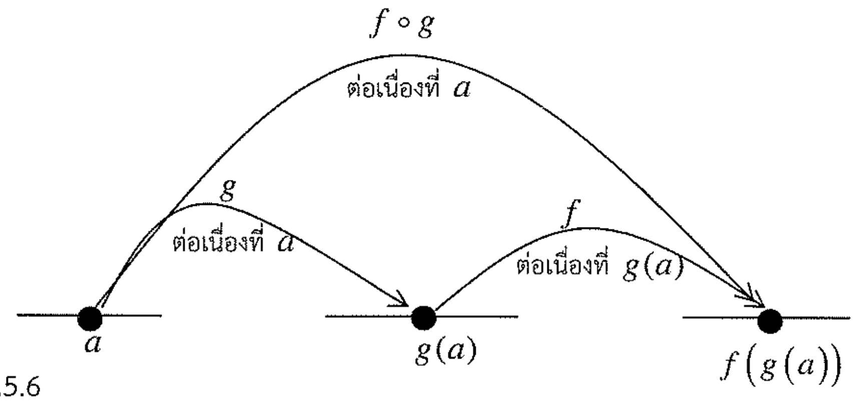
□

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.5.8</u> ถ้า $\lim_{x\to a} g(x) = L$ และ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $L$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L)$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.5.9</u> ถ้า $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $a$ และ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $g(a)$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ซึ่งนิยามโดย $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $a$ (ดูรูปที่ 1.5.6)

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ ถ้านักศึกษาสนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือแคลคูลัสที่ได้อ้างอิงท้ายเล่มของเอกสารประกอบการสอน



รูปที่ 1.5.6

**<u>ตัวอย่างที่ 1.5.5</u>** กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x-6}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> (1) เนื่องจาก ฟังก์ชัน $f$ หาค่าได้ที่ $x=2$ และ $f(2)=3$

(2) พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-6}{x-2}$

จาก $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x-6) = 2^2-4(2)-6 = -10 < 0$ และ $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-2\right)=0$

แต่เราจะต้องพิจารณาเพิ่มเติมว่า $x-2\to 0$ ทางด้านบวกหรือค่าลบ เมื่อ $x\to 2$

**กรณีที่ 1** เมื่อ $x<2$ ค่าของ $x-2<0$ ทำให้ได้ว่า $x-2\to 0$ ทางด้านค่าลบ เมื่อ $x\to 2^-$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{(-)}{x^2-4x-6}}{\underset{(-)}{x-2}} = +\infty$$

**กรณีที่ 2** เมื่อ $x>2$ ค่าของ $x-2>0$ ทำให้ได้ว่า $x-2\to 0$ ทางด้านค่าบวก เมื่อ $x\to 2^+$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{(-)}{x^2-4x-6}}{\underset{(+)}{x-2}} = -\infty$$

จากทั้งสองกรณีเราจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x-6}{x-2}$ ไม่มี

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.5.6</u> จงพิจารณาว่า $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x-4}$ มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่นิยามบนช่วง $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.5.7 ข้อ 2 จะได้ว่า $f$ ต่อเนื่องทุก ๆ จุด บนช่วง$(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.5.7</u> กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 2x+1, & 0\le x<2 \\ 3x-2, & x\ge 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า $f$ มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,2]$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาที่ $x=2$ จะได้ว่า $f(2)=3(2)-2=4$

และ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=2(2)+1=5$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)$ จากบทนิยามที่ 1.5.3 จะได้ว่า $f$ ไม่ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=2$

เพราะฉะนั้น จากบทนิยามที่ 1.5.5 สรุปได้ว่า $f$ ไม่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,2]$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.5.8</u> จงหาค่าของ $k$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x=2$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f$ ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} kx^2, & x\le 2 \\ 2x+k, & x>2 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากฟังก์ชัน $f$ จะต่อเนื่องที่ $x=2$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

จาก $f(2)=k(2^2)=4k$ และ

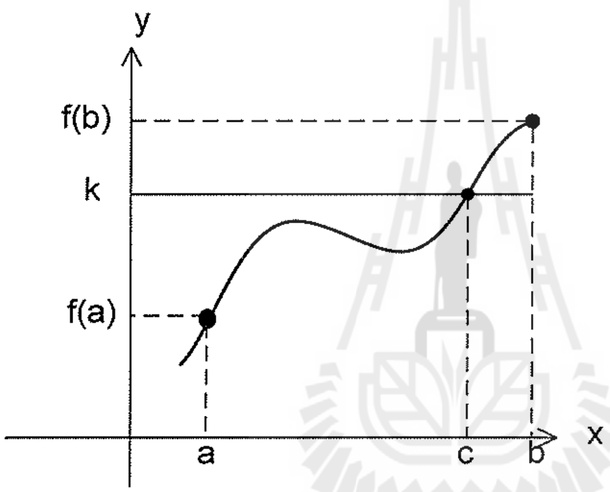
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(2x+k)=2(2)+k=4+k$$

และ

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(kx^2)=k\left(2^2\right)=4k$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ นั่นคือ $4+k=4k$ จะได้ว่า $k=\dfrac{4}{3}$ □

**ทฤษฎีบทที่ 1.5.10** **(ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง)** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $k$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่อยู่ระหว่างค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว จะมีจำนวนจริง $c$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่ง $f(c)=k$



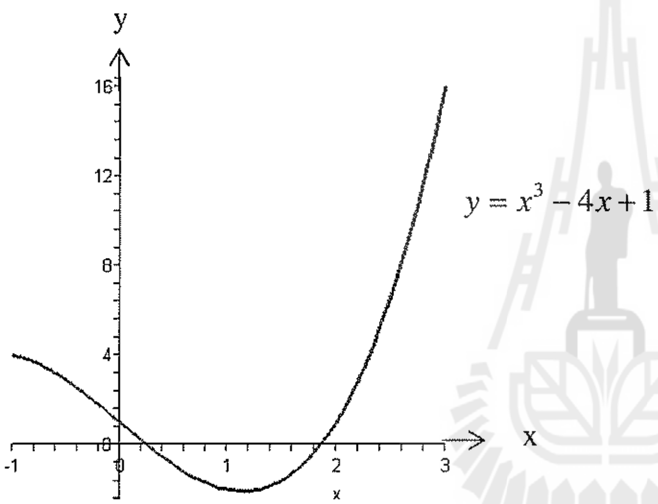

รูปที่ 1.5.7

จากรูปที่ 1.5.7 ถ้าค่า $y=k$ อยู่ระหว่างค่า $f(a)$ และ $f(b)$ แล้ว ถ้าลากเส้นตรงความสูง $k$ ขนานกับแกน $x$ ตัดกับกราฟที่จุดใดและลากลงมาขนานกับแกน $y$ จะได้ว่าค่า $c$ อยู่ระหว่าง $a$ และ $b$

**ทฤษฎีบทที่ 1.5.11** ถ้าฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f(a)$ และ $f(b)$ ไม่เท่ากับศูนย์ และมีเครื่องหมายต่างกัน (นั่นคือ $f(a)\cdot f(b)<0$) แล้วจะมีจำนวนจริง $c$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่ง $f(c)=0$

**ตัวอย่างที่ 1.5.9** กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 4x + 1$ เมื่อ $x \in [1,2]$ จงตรวจสอบว่าจะมี $x \in [1,2]$ ที่ทำให้ $f(x) = 0$ หรือไม่

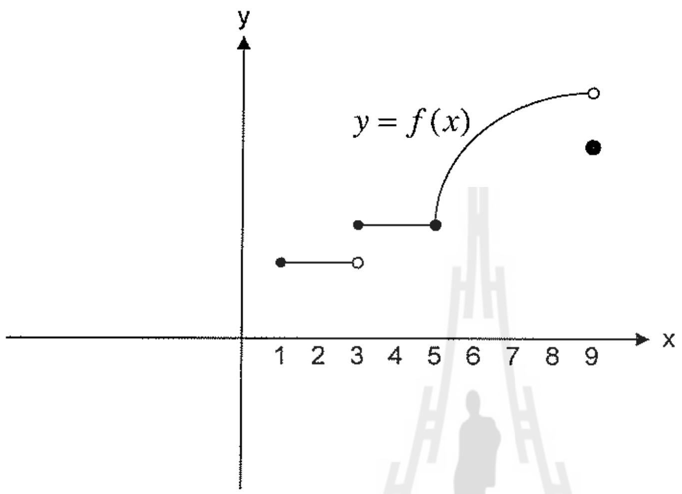
วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้นฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[1,2]$ พิจารณา $f(1) = 1^3 - 4(1) + 1 = -2 < 0$ และ $f(2) = 2^3 - 4(2) + 1 = 1 > 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 1.5.11 จะได้ว่า มีจำนวนจริง $c \in [1,2]$ ซึ่ง $f(c) = 0$ (ดูรูปที่ 1.5.8) □




รูปที่ 1.5.8

**<u>แบบฝึกหัดที่ 1.4</u>**

1) กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ดังรูปข้างล่าง




จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่ เพราะเหตุใด

(1.1) $[1,3]$ (1.2) $(1,3)$

(1.3) $(3,5]$ (1.4) $[3,5]$

(1.5) $[5,9]$ (1.6) $(5,9)$

2) จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = 5x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

3) จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

4) กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \le 4 \\ 7 + \dfrac{16}{x}, & x > 4 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า $f$ ต่อเนื่องที่ $x = 4$ หรือไม่เพราะเหตุใด

5) จงหาค่าของ $k$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f$ มีความต่อเนื่องที่ $x = -3$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f$ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \ge -3 \\ k/x^2, & x < -3 \end{cases}$$

6) จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ ต่อเนื่องบนช่วง $(3,+\infty)$ หรือไม่

7) กำหนด $f(x)=x^3+x^2-2x-1$ จงตรวจสอบว่ามี $x\in[-1,1]$ หรือไม่ที่ทำให้ $f(x)=0$

8) จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องจากทางขวาที่ $x=2$ หรือไม่

(8.1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<2 \\ 3x-1, & x\geq 2 \end{cases}$

(8.2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ 3x-3, & x>2 \end{cases}$

(8.3) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leq 2 \\ 3x-3, & x>2 \end{cases}$

9) กำหนด $g(x)=\dfrac{\left(x^2-9\right)}{x-3}$ จงหาว่า $g(3)$ มีค่าเท่ากับเท่าไหร่ จึงจะทำให้ $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=3$

10) จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ใดบ้าง

(10.1) $y=\dfrac{1}{x-2}-3x$

(10.2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}+1$

(10.3) $y=\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$

(10.4) $y=\dfrac{1}{|x|+1}-\dfrac{x^2}{2}$

(10.5) $y=\sqrt{2x+1}$

# บทที่ 2

# อนุพันธ์

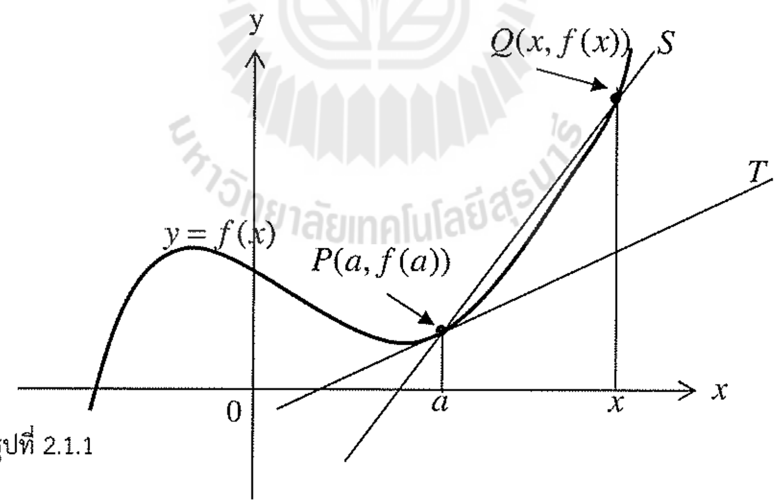
# (Derivatives)

## 2.1 เส้นสัมผัส ความเร็ว และอัตราการเปลี่ยนแปลง

<u>เส้นสัมผัส</u> (Tangent Line)

ในหัวข้อที่ 1.1 เราได้พูดถึงแนวคิดของลิมิตว่าสามารถนำไปใช้นิยามเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งได้อย่างไร ในหัวข้อนี้เราจะพูดถึงรายละเอียดเกี่ยวกับสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป (ดูรูปที่ 2.1.1)




รูปที่ 2.1.1

ให้ $P(a, f(a))$ เป็นจุดที่อยู่บนเส้นโค้ง (กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$) แล้วความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $P$ ( เส้นตรง $T$ ) มีค่าเท่ากับเท่าใด

ให้ $Q(x, f(x))$ เป็นอีกจุดหนึ่งที่อยู่บนเส้นโค้ง (ต่างจากจุด $P$) และให้ $S$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P$ และ $Q$ (เรียกว่า เส้นตัดกราฟ) ดังนั้น ความชันของเส้นตรง $S$ คือ

$$m_{PQ} = m_S = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad x \neq a \qquad .....(2.1.1)$$

ให้จุด $Q$ เคลื่อนเข้าใกล้จุด $P$ ตามเส้นโค้ง โดยให้ $x$ เข้าใกล้ $a$ (ดูรูปที่ 2.2.2) ถ้า $m_{PQ}$ ($m_{PQ}$ คือความชันของเส้นตรง $PQ$) เข้าใกล้ค่าคงที่ $m$ แล้วเราจะกำหนดให้ความชันของเล้นตรง $T$ ที่ผ่านจุด $P$ มีความชันเท่ากับ $m$ ดังนั้น เราสามารถนิยามความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ได้ดังนี้

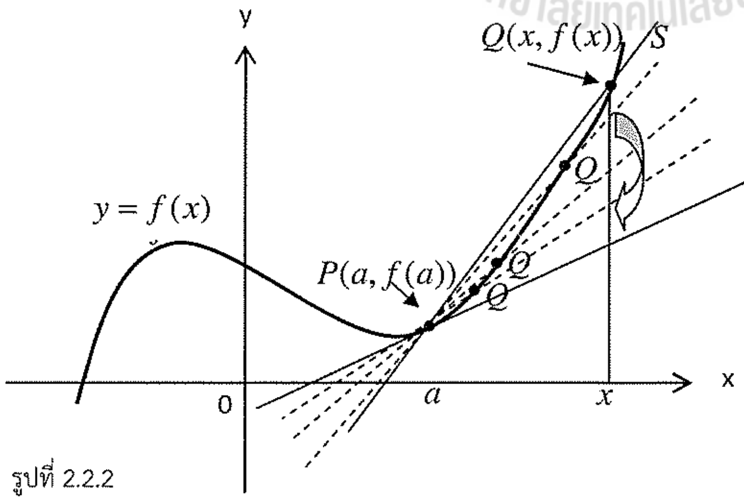
**<u>บทนิยามที่ 2.1.1</u>** เส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด $P(a, f(a))$ และมีความชันเท่ากับ

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad .........(2.1.2)$$

ถ้าค่าของลิมิตนี้หาค่าได้

และสมการของเส้นสัมผัสนี้ คือ

$$y - f(a) = m(x-a) \qquad \text{หรือ} \qquad y = f(a) + m(x-a)$$




รูปที่ 2.2.2

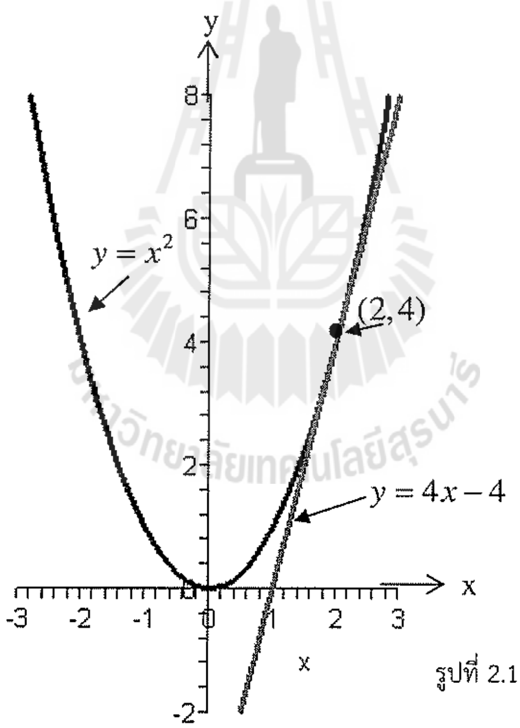
**<u>ตัวอย่างที่ 2.1.1</u>** จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุด $(2,4)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x) = x^2$ และ $a = 2$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ที่จุด $(2,4)$ คือ

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2}(x+2) \\
&= 2+2 = 4
\end{aligned}
$$

ดังนั้นสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟของ $f$ ที่มีความชันเท่ากับ 4 และกราฟผ่านจุด $(2,4)$ คือ สมการ

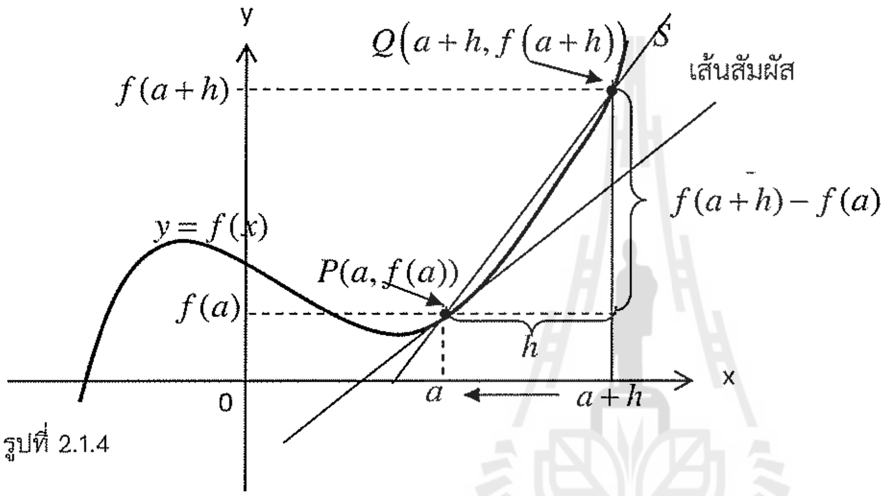
$$y-4 = 4(x-2) \quad \text{หรือ} \quad y = 4x-4$$ (ดูรูปที่ 2.1.3) □




รูปที่ 2.1.3

เราสามารถกำหนดความชันของเส้นสัมผัสกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ได้ใหม่ดังนี้ ให้ $h = x - a$ แล้ว $x \to a$ ก็ต่อเมื่อ $h \to 0$ ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการ (2.1.2) ในเทอมของ $a$ และ $h$ ได้ดังนี้ (ดูรูปที่ 2.1.4)

$$\boxed{m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad .....(2.1.3)$$




รูปที่ 2.1.4

**หมายเหตุ** ในรูปที่ 2.1.4 จุด $Q$ อยู่ทางขวาของจุด $P$ แสดงว่า $h > 0$ แต่ค่าของ $h < 0$ ได้เช่นเดียวกัน ซึ่งก็คือกรณีที่จุด $Q$ ในรูปที่ 2.1.4 อยู่ทางซ้ายของจุด $P$

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.2</u> จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟไฮเพอร์โบลา $y = \frac{5}{x}$ ที่จุด $(5,1)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x) = \frac{5}{x}$ ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(5,1)$ คือ

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

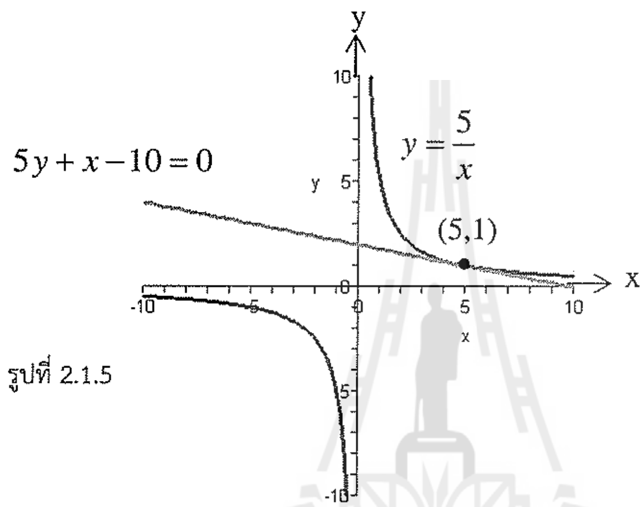
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{5}{5+h}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{5-(5+h)}{5+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(5+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{5+h} = -\frac{1}{5}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกับกราฟไฮเพอร์โบลา $y=\frac{5}{x}$ ที่จุด $(5,1)$ คือ

$$y-1=-\frac{1}{5}(x-5) \qquad \text{หรือ} \qquad 5y+x-10=0$$

กราฟของไฮเพอร์โบลา $y=\frac{5}{x}$ และ สมการเส้นสัมผัส $5y+x-10=0$ แสดงในรูปที่ 2.1 □




รูปที่ 2.1.5

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.3**</u> จงหาความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ที่จุด $(1,1)$, $(4,\frac{1}{2})$ และ $(9,\frac{1}{3})$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด $\left(a,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ เมื่อ $a>0$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a-(a+h)}{\left(h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{\left(h\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}$$

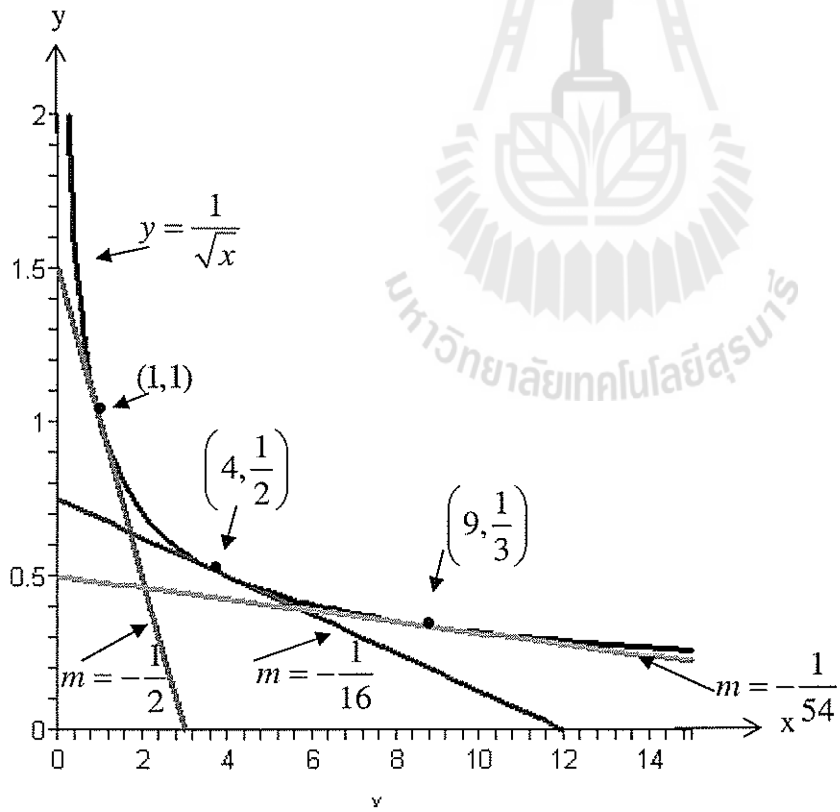
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\right)\times\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(1,1)$ คือ $m = -\frac{1}{2(1)\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$ (แทน $a=1$)

ความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(4,\frac{1}{2})$ คือ $m = -\frac{1}{2(4)\sqrt{4}} = -\frac{1}{16}$ (แทน $a=4$)

และความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(9,\frac{1}{3})$ คือ $m = -\frac{1}{2(9)\sqrt{9}} = -\frac{1}{54}$ (แทน $a=9$) □




รูปที่ 2.1.6 แสดงกราฟของ $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ และเส้นสัมผัสกับกราฟที่จุด $(1,1)$, $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(9,\frac{1}{3}\right)$

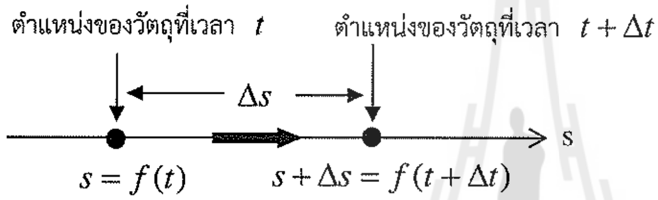
**<u>ความเร็ว (Velocities)</u>**

สมมติว่าวัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรง (ในแนวแกน $s$) แล้ว ตำแหน่งของวัตถุที่เวลา $t$ จะเขียนแทนด้วยฟังก์ชัน

$$s = f(t)$$

ระยะขจัดที่วัตถุเคลื่อนที่จาก เวลา $t$ ไปยังเวลา $t+\Delta t$ (ดูรูปที่ 2.1.7) คือ

$$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$$




รูปที่ 2.1.7

ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ณ ช่วงเวลา $(t, t+\Delta t)$ คือ

$$\boxed{v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

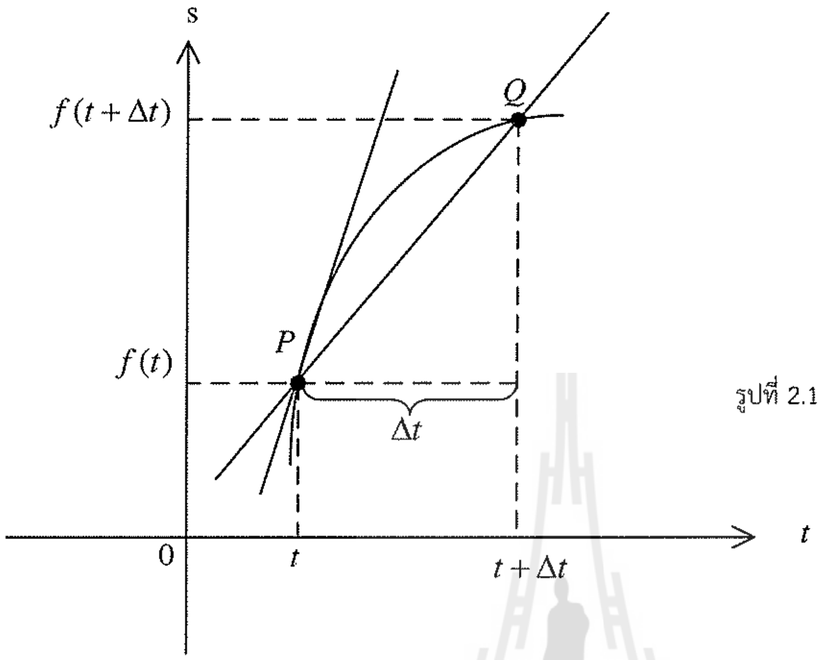
และเราสามารถนิยามความเร็วขณะหนึ่ง (instantaneous velocity) ที่เวลา $t$ ได้ดังนี้

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

เมื่อค่าลิมิตนี้หาค่าได้

ถ้าเราเปรียบเทียบปัญหาความเร็วกับปัญหาความชันของเส้นสัมผัส เราย่อมเห็นได้ชัดว่า ถ้ากราฟในรูปที่ 2.1.8 คือ กราฟของ $s = f(t)$ แล้ว

| | | |
|---|---|---|
| **ความเร็วเฉลี่ย** | **คือ** | **ความชันของเส้นตรง** $PQ$ |
| **ความเร็วขณะหนึ่งที่** $t$ | **คือ** | **ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด** $P(t, f(t))$ |




รูปที่ 2.1.8

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.4**</u> กำหนดสมการบอกตำแหน่งของก้อนหินซึ่งตกลงมาจากหน้าผาสูง 576 เมตร คือ $s=16t^2$ เมื่อหน่วยของ $s$ เป็นเมตร และหน่วยของ $t$ เป็นวินาที จงหา

1. ความเร็วของก้อนหินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที
2. เวลาที่ก้อนหินตกถึงพื้น
3. ความเร็วของก้อนหิน ในขณะที่ตกถึงพื้น

<u>วิธีทำ</u> ให้ $s=f(t)=16t^2$ แล้วความเร็วของวัตถุ (แทนด้วย $v(a)$ ) เมื่อเวลาผ่านไป $a$ วินาทีคือ

$$\begin{aligned}
v(a) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(a+\Delta t)-f(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{16(a+\Delta t)^2-16a^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{16(a^2+2a\Delta t+(\Delta t)^2)-16a^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{16\Delta t(2a+\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}16(2a+\Delta t) = 32a
\end{aligned}$$

1. ความเร็วของก้อนหินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที คือ $v(3)=32(3)=96$ เมตรต่อวินาที
2. สมมติว่า ก้อนหินตกถึงพื้นเมื่อเวลา $t_1$ วินาที จากหน้าผาสูง 576 เมตร ดังนั้น

$$16{t_1}^2 = 576$$

$${t_1}^2 = \frac{576}{16} = 36$$

$$t_1 = 6$$

ฉะนั้น ก้อนหินตกถึงพื้น เมื่อเวลาผ่านไป 6 วินาที

3. ความเร็วของก้อนหินในขณะที่ตกถึงพื้นคือ

$$v(t_1) = v(6) = 32(6) = 192 \quad \text{เมตรต่อวินาที}$$ □

<u>อัตราการเปลี่ยนแปลง</u> (Rates of Change)

**<u>บทนิยามที่ 2.1.2</u>** อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y = f(x)$ บนช่วง $[a, a+h]$ คือ

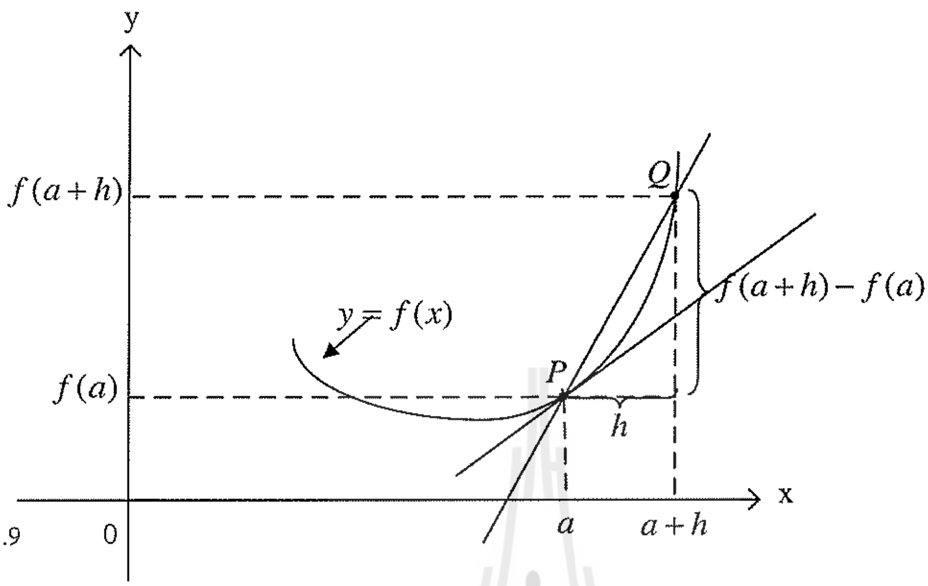
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{เมื่อ} \quad h \neq 0$$

**<u>บทนิยามที่ 2.1.3</u>** อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y = f(x)$ ที่ $x = a$ คือ

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

เมื่อค่าลิมิตนี้หาค่าได้

ในทางเรขาคณิต อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y = f(x)$ บนช่วง $[a, a+h]$ คือ ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P(a, f(a))$ และ $Q(a+h, f(a+h))$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y = f(x)$ ที่ $x = a$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $P(a, f(a))$ (ดูรูปที่ 2.1.9)




รูปที่ 2.1.9

**หมายเหตุ** เราสามารถนิยามอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y=f(x)$ ได้อีกแบบดังนี้

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y=f(x)$ บนช่วง $[x_1,x_2]$ คือ

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{เมื่อ } x_1 \neq x_2$$

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y=f(x)$ ที่ $x=x_1$ คือ

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.5**</u> ให้ $y=x^3+1$ จงหา

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y$ บนช่วง $[0,4]$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y$ เทียบกับ $x$ ที่จุด $x=1$

<u>วิธีทำ</u> 1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $y$ บนช่วง $[0,4]$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{\left(4^3+1\right)-\left(0^3+1\right)}{4}$$

$$=\frac{64}{4}=16$$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของ $y$ เทียบกับ $x$ ที่จุด $x=1$ คือ

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3+1)-(1^3+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) \\
&= 1^2+1+1 = 3
\end{aligned}$$

□

## แบบฝึกหัด 2.1

1) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟดังต่อไปนี้ที่จุด $P$ ในแต่ละข้อที่กำหนดให้

(1.1) $y = 1 + 2x - x^3, \quad P = (1,2)$

(1.2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad P = (16, \dfrac{1}{4})$

(1.3) $y = \dfrac{x-1}{x-2}, \quad P = (3,2)$

(1.4) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}, \quad P = (0,0)$

(1.5) $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad P = (\dfrac{1}{3}, 9)$

2) จงหาจุด $P$ ซึ่งอยู่บนกราฟของ $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ และความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ $f$ ที่จุด $P$ เท่ากับ $5$

3) ถ้าโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศด้วยความเร็วเริ่มต้นเท่ากับ $40$ เมตร/วินาที และความสูงของลูกบอลเมื่อเวลาผ่านไป $t$ วินาทีคือ $y = 40t - 16t^2$ จงหา

(3.1) ความเร็วของลูกบอลที่เวลา $t = 1$ และ $t = 2$

(3.2) ระยะทางที่ลูกบอลขึ้นถึงจุดสูงสุด

(3.3) เวลาและความเร็วของลูกบอลขณะที่ตกถึงพื้น

4) ร้านขายน้ำหอมแห่งหนึ่งใช้การโฆษณาทางวิทยุ เพื่อส่งเสริมการขาย กำหนดให้ร้านขายน้ำหอมได้ $P(x)$ ขวด ต่อการโฆษณา $x$ ครั้ง โดยที่ $P(x) = 6 + 50x - 2x^2$

(4.1) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนน้ำหอมที่ขายได้ขณะที่ $x$ เปลี่ยนจาก 5 ถึง 10 ครั้ง

(4.2) จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนน้ำหอมที่ขายได้ ขณะที่ $x = 5$

5) ปริมาตรของน้ำ $(V)$ ในถังเก็บน้ำขนาดบรรจุ $100,000$ แกลลอน ระหว่างที่ปล่อยให้น้ำไหลออกจากในถัง การเปลี่ยนแปลงของปริมาตรสามารถเขียนในรูปของฟังก์ชันของเวลา $t$ (นาที) ได้ดังนี้

$$V(t) = 100,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2$$

สำหรับ $0 \le t \le 60$ จงคำนวณอัตราการไหลออกที่เวลา $t = 0,\ t = 10$ และ $t = 30$ นาทีและในขณะที่น้ำหมดถัง

## 2.2 อนุพันธ์ (Derivative)

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาความชันของเส้นสัมผัส ปัญหาความเร็ว และปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง นักศึกษาจะพบว่า ทั้งสามปัญหานี้ล้วนเกี่ยวข้องกับลิมิต

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad .....(2.2.1)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ในปัญหาความชันของเส้นสัมผัส ค่าของลิมิตที่ (2.2.1) คือ ความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$

ในปัญหาความเร็ว ค่าของลิมิตที่ (2.2.1) คือ ความเร็วขณะหนึ่งที่ $t = a$ ของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง และมีฟังก์ชันบอกตำแหน่งคือ $s = f(t)$

ส่วนในปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง ค่าของลิมิตที่ (2.2.1) คือ อัตราการเปลี่ยนขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $y = f(x)$

ดังนั้น เราจะนิยามลิมิตที่ (2.2.1) ด้วยสัญกรณ์พิเศษดังนี้

<u>บทนิยามที่ 2.2.1</u> อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = a$ นิยามโดย

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad .....(2.2.2)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ถ้าลิมิตหาค่าได้ เราจะกล่าวว่า $f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = a$

**หมายเหตุ** เราสามารถนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = a$ ได้อีกแบบดังนี้

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad .....(2.2.3)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

**ตัวอย่างที่ 2.2.1** กำหนด $f(x)=3x^2$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

และ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-3(2)^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(4+4h+h^2)-12}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{12+12h+3h^2-12}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(12+3h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(12+3h) \\
&= 12
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(2)=12$ □

**ตัวอย่างที่ 2.2.2** กำหนด $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ จงหา $f'(8)$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(8)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(8+h)-f(8)}{h}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้ และ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(8+h)-f(8)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{8+h+2}{8+h-3}\right)-2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{10+h-(10+2h)}{h(5+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(5+h\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{5+h} \\
&= \frac{-1}{5}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(8)=\dfrac{-1}{5}$ □