

**การคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผล  
ต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ**

**นายพีรวัฒน์ มีสุข**

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
ปีการศึกษา 2554

**CALCULATION FOR TEMPERATURE OF DISTRIBUTION  
TRANSFORMER WITH LOAD UNBALANCE  
CONDITIONS EFFECT TO INSULATION  
TRANSFORMER OF LIFE BY USING  
3-D FINITE ELEMENT METHOD**

**Peerawat Meesuk**

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the  
Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering**

**Suranaree University of Technology**

**Academic Year 2011**

การคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผลต่อ  
อายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

\_\_\_\_\_

(ผศ. ดร.อนันต์ อุ่นศิริไธย์)

ประธานกรรมการ

\_\_\_\_\_

(ผศ. ดร.เผด็จ เผ่าละออ)

กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

\_\_\_\_\_

(ผศ. ดร.เกียรติ สุลักษณ์)

กรรมการ

\_\_\_\_\_

(ศ. ดร.ชูกิจ ทิมปีจางค์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

\_\_\_\_\_

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)

คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

พีรวัฒน์ มีสุข : การคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ (CALCULATION FOR TEMPERATURE OF DISTRIBUTION TRANSFORMER WITH LOAD UNBALANCE CONDITIONS EFFECT TO INSULATION TRANSFORMER OF LIFE BY USING 3-D FINITE ELEMENT METHOD) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ, 199 หน้า.

หม้อแปลงจำหน่ายเป็นอุปกรณ์ที่มีความจำเป็นในระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการใช้งาน ในปัจจุบันภาคอุตสาหกรรมมีการแข่งขันกันสูงและมีความต้องการใช้ไฟฟ้าที่เพิ่มขึ้นอย่างมาก จึงนำไปสู่ปัญหาหนึ่งของหม้อแปลงนั่นคือปัญหาการจ่ายโหลดไม่สมดุล หม้อแปลงจำหน่ายที่จ่ายโหลดไม่สมดุลทำให้หม้อแปลงมีสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิที่สูงขึ้น ซึ่งผลกระทบที่เกิดจากอุณหภูมิที่สูงขึ้นจะมีความเกี่ยวข้องกับอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง ดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาและคำนวณสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D finite element method) ที่พัฒนาขึ้นเอง โดยแบบจำลองของสนามแม่เหล็กและอุณหภูมินี้จะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) พร้อมทั้งนำค่าอุณหภูมิที่ได้ไปคำนวณหาอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงโดยใช้ทฤษฎีการเสื่อมสภาพของฉนวน สำหรับการดำเนินการด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์นั้น ได้พัฒนาโดยใช้โปรแกรม MATLAB ในการประมวลผล

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า  
ปีการศึกษา 2554

ลายมือชื่อนักศึกษา \_\_\_\_\_  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา \_\_\_\_\_

PEERAWAT MEESUK : CALCULATION FOR TEMPERATURE OF  
DISTRIBUTION TRANSFORMER WITH LOAD UNBALANCE  
CONDITIONS EFFECT TO INSULATION TRANSFORMER OF LIFE BY  
USING 3-D FINITE ELEMENT METHOD. THESIS ADVISOR : ASST.  
PROF. PADEJ PAO-LA-OR, Ph.D., 199 PP.

DISTRIBUTION TRANSFORMER/TEMPERATURE/TRANSFORMER OF LIFE/  
LOAD UNBALANCE/3-D FINITE ELEMENT METHOD

Distribution transformer is an important device in electrical power system by acting to increase or decrease the voltage for suiting the application. At the present, the competition in industry section is high and the electricity demand greatly increase too, which lead to the load unbalance transformer problem causing to have the magnetic field and temperature rising. The effect of higher temperature will be related with the lifetime of insulation transformer. Therefore, the research of this thesis is to study and calculate the magnetic field and temperature of distribution transformer in the condition of load unbalance by using 3-D finite element method that is ownly developed. The magnetic field and temperature will be in the form of partial differential equation and bring the temperature value to calculate the lifetime of insulation transformer by using the theory of insulation deterioration. The computer simulation based on the use of the finite element method has been delevoped in MATLAB programming environment.

School of Electrical Engineering

Academic Year 2011

Student's Signature \_\_\_\_\_

Advisor's Signature \_\_\_\_\_

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบุคคลและกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำช่วยเหลืออย่างดียิ่งทั้งในด้านวิชาการและด้านการดำเนินงานวิจัยจากบุคคล และกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ได้แก่

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ ผู้ช่วยอธิการบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ และแนะแนวทางอันเป็นประโยชน์แก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด รวมถึงได้ช่วยตรวจทาน และแก้ไขรายงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้จนทำให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นรวมทั้งเป็นกำลังใจ นอกจากนี้ยังมีความเป็นกันเองแก่ผู้วิจัยและเป็นแบบอย่างที่ดีในการดำเนินชีวิตหลาย ๆ ด้าน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนันต์ อุ่นศิริไฉย หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า และอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีทุกท่าน ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาและแนะนำความรู้ทางวิชาการอย่างดียิ่งมาโดยตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยได้ศึกษาและขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีที่ให้ทุนสนับสนุนค่าใช้จ่ายทุกอย่างในการศึกษา รวมทั้งการเผยแพร่ผลงานวิจัย

ขอขอบคุณ คุณสุกัญญา ทัพศรี และ คุณอริยศักดิ์ จิตรธรรมสาร ที่ได้ให้ความช่วยเหลือดูแล และเป็นกำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาและขอบคุณที่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง ๆ บัณฑิตศึกษาทุกท่าน ที่ให้กำลังใจในการทำวิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบคุณ คุณชลธิชา เหล่าทา ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ดูแล ห่วงใย และเป็นกำลังใจอย่างใกล้ชิดแก่ผู้วิจัยเสมอมา

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณอาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ให้ความรู้ทางด้านวิชาการทั้งในอดีตและปัจจุบัน และขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อประยูรท มิสุข คุณแม่รัตนา มิสุข และครอบครัวที่ให้ความรัก กำลังใจ การอบรมเลี้ยงดู และดูแลส่งเสริมทางการศึกษาอย่างดีมาโดยตลอด จนทำให้ผู้วิจัยประสบความสำเร็จในชีวิตเรื่อยมา

พีรวัฒน์ มิสุข

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย).....	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ).....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญตาราง.....	ช
สารบัญรูป.....	ฉ
<b>บทที่</b>	
<b>1 บทนำ.....</b>	<b>1</b>
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์งานวิจัย.....	2
1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น.....	2
1.4 ขอบเขตของงานวิจัย.....	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
1.6 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์.....	3
<b>2 ปรัชญ่วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....</b>	<b>5</b>
2.1 บทนำ.....	5
2.2 ปรัชญ่วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.3 สรุป.....	9
<b>3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....</b>	<b>10</b>
3.1 บทนำ.....	10
3.2 สนามแม่เหล็ก.....	10
3.2.1 พื้นฐานสำหรับทมนามแม่เหล็ก.....	10
3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก.....	17
3.3 หม้อแปลงไฟฟ้า.....	18

## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.3.1 ชนิดของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	19
3.3.2 ส่วนประกอบของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	20
3.3.3 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	23
3.3.4 การสมดุลโหลดของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	24
3.3.5 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟส.....	25
3.4 ทฤษฎีความร้อน.....	27
3.4.1 ความร้อน.....	27
3.4.2 กลไกการถ่ายโอนความร้อน.....	31
3.5 อายุการใช้งานของหม้อแปลง.....	33
3.5.1 ฉนวนที่ใช้ในหม้อแปลง.....	33
3.5.2 ปัจจัยที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง.....	35
3.5.3 อายุการใช้งานทางความร้อน.....	36
3.5.4 ความร้อนที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลง.....	38
3.6 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์.....	40
3.6.1 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	40
3.6.2 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	47
3.7 สรุป.....	52
<b>4 การคำนวณสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์.....</b>	<b>53</b>
4.1 บทนำ.....	53
4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย.....	53
4.2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก.....	53
4.2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุณหภูมิ.....	56
4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์.....	57
4.3.1 การออกแบบอิลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา.....	57



## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.3.2	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์.....	61
4.3.2.1	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	61
4.3.2.2	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	62
4.3.3	การสร้างสมการอิลิเมนต์.....	63
4.3.3.1	สมการอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	63
4.3.3.2	สมการอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	70
4.3.4	การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ.....	75
4.3.5	การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย.....	76
4.3.6	การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ.....	76
4.4	การคำนวณอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์.....	77
4.4.1	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์.....	77
4.4.1.1	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	77
4.4.1.2	ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	78
4.4.2	การสร้างสมการอิลิเมนต์.....	80
4.4.2.1	สมการอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	80
4.4.2.2	สมการอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	89
4.4.3	การแก้ปัญหาภายใต้สถานะชั่วคราว.....	96
4.4.4	การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ.....	97
4.4.5	การประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย.....	97
4.5	สรุป.....	98
5	ผลการจำลองสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ที่มีผลต่ออุณหภูมิของ หม้อแปลงจำหน่าย.....	99
5.1	บทนำ.....	99
5.2	โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก.....	99
5.2.1	โปรแกรมการสร้างกริด.....	99
5.2.2	โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก.....	104

## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

5.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กที่มีผลต่ออุณหภูมิของหม้อแปลงเมื่อพิจารณา การสมดุลโหลด .....	107
5.3.1 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดสมดุล .....	107
5.3.2 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดไม่สมดุล .....	110
5.4 สรุป .....	129
<b>6 ผลการจำลองอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติที่มีผลต่อ อายุการใช้งานของหม้อแปลงจำหน่าย</b> .....	131
6.1 บทนำ .....	131
6.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิแบบ 3 มิติ .....	131
6.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด .....	131
6.2.2 โปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิ .....	132
6.3 ผลการจำลองอุณหภูมิที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง เมื่อพิจารณาการสมดุลโหลด .....	135
6.3.1 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดสมดุล .....	135
6.3.2 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดไม่สมดุล .....	140
6.4 ผลการคำนวณอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลจากอุณหภูมิ .....	175
6.5 สรุป .....	176
<b>7 สรุปและข้อเสนอแนะ</b> .....	177
7.1 สรุป .....	177
7.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต .....	178
รายการอ้างอิง .....	179
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก. การประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขต .....	182
ภาคผนวก ข. การเผยแพร่ผลงานในขณะศึกษา .....	191
ประวัติผู้เขียน .....	199

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
3.1 ลักษณะข้อมูลของอิลิเมนต์.....	42
3.2 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่ง โหนด.....	42
3.3 ลักษณะข้อมูลของอิลิเมนต์.....	48
3.4 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่ง โหนด.....	49
6.1 แสดงค่าอุณหภูมิสูงสุดที่ขีดสุดของหม้อแปลงจำหน่าย.....	174
6.2 ผลการคำนวณอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจำหน่าย.....	175



## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
3.1	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก..... 14
3.2	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม..... 15
3.3	รูปหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส..... 19
3.4	แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส..... 21
3.5	แกนเหล็กหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟส..... 22
3.6	วงจรหม้อแปลงไฟฟ้า..... 23
3.7	วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า..... 24
3.8	แสดงการต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-เดลต้า..... 25
3.9	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-สตาร์..... 26
3.10	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-สตาร์..... 26
3.11	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-เดลต้า..... 26
3.12	การต่อหม้อแปลงแบบ Dy1..... 27
3.13	ปริมาณควบคุมและทิศทางการถ่ายโอนความร้อนแบบ 3 มิติ..... 28
3.14	การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์..... 41
3.15	รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อิลิเมนต์ 4 โหนด..... 41
3.16	การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม..... 42
3.17	รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อิลิเมนต์ 8 โหนด เมื่อพิจารณาอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า..... 48
3.18	การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า..... 50
4.1	พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA..... 59
4.2	การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลง ในแบบ 2 มิติ..... 60
4.3	การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลง ในแบบ 3 มิติ..... 60

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.4	แสดงการพาความร้อนของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 83
5.1	การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชิ้นงาน ..... 101
5.2	ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 101
5.3	แสดงแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ ..... 102
5.4	ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 103
5.5	ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 103
5.6	แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์แบบ 2 มิติ ..... 104
5.7	แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์แบบ 3 มิติ ..... 105
5.8	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดสมมูลแบบ 2 มิติ ..... 108
5.9	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมมูลแบบ 3 มิติ ..... 108
5.10	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมมูลแบบ 3 มิติ ..... 109
5.11	การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดสมมูลแบบ 3 มิติ ..... 109
5.12	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 2 มิติ ..... 111
5.13	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ ..... 111
5.14	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ ..... 112

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.15 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ.....	112
5.16 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง สภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 2 มิติ .....	114
5.17 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ .....	114
5.18 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ .....	115
5.19 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ .....	115
5.20 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 2 มิติ .....	117
5.21 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ .....	117
5.22 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ .....	118
5.23 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ .....	118
5.24 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 2 มิติ.....	120

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.25 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ.....	121
5.26 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ.....	121
5.27 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ.....	122
5.28 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 2 มิติ.....	123
5.29 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ.....	124
5.30 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ.....	124
5.31 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ.....	125
5.32 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 2 มิติ.....	126
5.33 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ.....	127
5.34 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็ก ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ.....	127

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.35 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ.....	128
6.1 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ .....	133
6.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมดุล .....	137
6.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดสมดุล.....	138
6.4 ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดสมดุล .....	140
6.5 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A.....	142
6.6 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A.....	144
6.7 ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A.....	145
6.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B.....	148
6.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B.....	149
6.10 ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B.....	151
6.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C.....	153
6.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิ (°C) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C.....	155



## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.13 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C .....	156
6.14 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A.....	159
6.15 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A .....	160
6.16 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A.....	162
6.17 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B.....	164
6.18 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B.....	166
6.19 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B.....	167
6.20 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวด ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C.....	170
6.21 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C.....	171
6.22 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C.....	173

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันหม้อแปลงจำหน่าย (distribution transformer) เป็นอุปกรณ์ที่มีความจำเป็นอย่างยิ่งในระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า โดยหม้อแปลงไฟฟ้าเป็นอุปกรณ์ที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างระบบไฟฟ้าที่มีแรงดันไฟฟ้าต่างกัน ซึ่งจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการส่ง การจ่าย และการใช้พลังงานไฟฟ้า พลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานพื้นฐานหลักที่ใช้พัฒนาเทคโนโลยี และจากความต้องการใช้ไฟฟ้าที่เพิ่มขึ้นอย่างมากในภาคอุตสาหกรรม ทำให้ระบบไฟฟ้ามีขนาดและความซับซ้อนเพิ่มขึ้น นำไปสู่การใช้งานโหลดที่ไม่สมดุล (unbalance load) ในระบบไฟฟ้าแบบสามเฟส ดังนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจึงนับเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในบรรดาอุปกรณ์ไฟฟ้าทั้งหลาย การขัดข้องหรือการชำรุดเสียหายของหม้อแปลงไฟฟ้า มักมีผลกระทบต่อการใช้ไฟฟ้าเป็นเวลานาน ฉะนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจะต้องมีการจัดสรรโหลดที่ดี เพื่อให้ระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าเป็นระบบที่มีความเสถียร ความน่าเชื่อถือ และอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ยาวนานขึ้น ในสภาวะปกติ อายุการใช้งานของหม้อแปลงจะขึ้นอยู่กับอายุการใช้งานของฉนวน (insulator) ในการคำนวณหาอายุการใช้งานของหม้อแปลงโดยทั่วไปนั้น อายุการใช้งานที่ลดลงตามปกติของหม้อแปลงจะหมายถึงอายุการใช้งานที่ลดลงสะสมที่จุดใดจุดหนึ่ง อันเนื่องมาจากผลของความร้อน (heat) หรืออุณหภูมิ (temperature) ที่เกิดขึ้นขณะหม้อแปลงจ่ายโหลดตามปกติ

การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่ออุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า โดยปกติจะสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการอนุพันธ์ (differential equation) หรือสมการอินทิกรัล (integral equation) ซึ่งเป็นไปได้ยากที่จะหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข อีกทั้งสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น จึงทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว สำหรับวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) วิธีที่มีประสิทธิภาพสูงสุดและได้รับความนิยมแพร่หลายในปัจจุบันได้แก่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method : FEM) โดยเฉพาะงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ซึ่งต้องอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM)

FEM เริ่มวิวัฒนาการมาตั้งแต่ต้นปี ค.ศ. 1950 ปัจจุบันเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมนมาก เนื่องจากปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ ทำให้สามารถคำนวณงานต่าง ๆ ด้วยวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วจน ในปัจจุบันได้มีการนำวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมแทบทุกสาขา ซึ่งระเบียบวิธีนี้จะจัดแบ่งพื้นที่ของปัญหาเป็นชิ้นส่วนย่อยที่ประกอบขึ้นจาก โหนด โดยเชื่อมต่อกันด้วยกริด สำหรับปัญหา 2 มิติ นิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ (linear triangle) และสำหรับปัญหา 3 มิติ นิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ (linear tetrahedral) เพื่อประมาณ โดเมนของปัญหา ซึ่งข้อดีของระเบียบวิธีนี้คือ สามารถหาผลเฉลยของระบบที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ อย่างเช่นหม้อแปลงไฟฟ้าในงานวิจัยนี้ซึ่งมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย นอกจากนี้ระเบียบวิธีนี้ยังง่ายต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่อาจมีหลายลักษณะผสมกันอยู่ในระบบ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องนำวิธี 3-D FEM มาใช้ในการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) พัฒนาโปรแกรม FEM ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายกรณีจ่ายโหลดแบบ 3 เฟส สมดุลและไม่สมดุล
- 2) พัฒนาโปรแกรม FEM แบบ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายกรณีจ่ายโหลดแบบ 3 เฟส สมดุลและไม่สมดุลที่เป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก
- 3) ศึกษาและคำนวณค่าอายุการใช้งานของฉนวนกั้นระหว่างขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่าย เพื่อเปรียบเทียบในกรณีจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุลที่เป็นผลมาจากอุณหภูมิ

## 1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

- 1) แหล่งจ่ายไฟเป็นรูปคลื่นไซน์ที่สมบูรณ์ ไม่คิดผลกระทบจากฮาร์มอนิก
- 2) ขดลวดตัวนำเป็นชิ้นงานเดียวกัน ไม่มีรอยต่อระหว่างชั้นของขดลวด
- 3) โหลดไม่สมดุลจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีขนาดไม่สมดุล (มุมเฟสคงที่) และ กรณีมุมเฟสไม่สมดุล (ขนาดคงที่)
- 4) พิจารณาการต่อหม้อแปลงเป็นแบบ Dy1

#### 1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) ใช้ MATLAB™ เพื่อพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) วิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เป็นแบบ 3 มิติ
- 3) พิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายกรณีจ่ายโหลดไม่สมดุลออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีขนาดไม่สมดุล (มุมเฟสคงที่) และกรณีมุมเฟสไม่สมดุล (ขนาดคงที่)
- 4) พิจารณาเปรียบเทียบผลของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงจำหน่ายในสภาวะจ่ายโหลด 3 เฟส แบบสมดุลและไม่สมดุล
- 5) เปรียบเทียบอายุการใช้งานของฉนวนกั้นระหว่างขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลมาจากอุณหภูมิในสภาวะจ่ายโหลด 3 เฟสแบบสมดุลและไม่สมดุล

#### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้หลักการและแนวความคิดสำหรับการจ่ายโหลดของหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่อการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้น
- 2) ได้ข้อสรุปของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่ออายุการใช้งานของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาทั้งการจ่ายโหลดสมดุล และไม่สมดุล
- 3) ได้โปรแกรมจำลองผลที่เกิดจากการพัฒนาโปรแกรม FEM แบบ 3 มิติ ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้เข้ากับปัญหาจริงในการวิเคราะห์การกระจายตัวของค่าสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่าย

#### 1.6 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย 7 บท และ 2 ภาคผนวก โดยใน**บทที่ 1** เป็นบทนำ กล่าวถึงความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์และเป้าหมายของงานวิจัยวิทยานิพนธ์ รวมทั้งขอบเขตของงานวิจัยส่วนบทอื่น ๆ ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

**บทที่ 2** กล่าวถึงการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ทราบถึงแนวทาง และระเบียบวิธีการดำเนินการวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยผลจากการสำรวจสืบค้นจะใช้เป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์ และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์

**บทที่ 3** นำเสนอทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยวิทยานิพนธ์ โดยเนื้อหาประกอบไปด้วย หัวข้อหลัก ๆ ได้แก่ สนามแม่เหล็ก หม้อแปลงไฟฟ้า ทฤษฎีความร้อน อายุการใช้งานของหม้อแปลงและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

**บทที่ 4** มีเนื้อหาว่าด้วยการคำนวณสนามแม่เหล็กและอนุกรมของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้อธิบายขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กและอนุกรมที่กระจายบริเวณภายในหม้อแปลงจำหน่าย

**บทที่ 5** อธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กที่มีผลต่ออนุกรมพร้อมผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติเมื่อพิจารณาหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดแบบสมดุลและไม่สมดุล โดยกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่ประยุกต์ใช้ในการจำลองผล รวมถึงอธิบายโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผล

**บทที่ 6** อธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลอนุกรมที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง พร้อมผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ และคำนวณอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงเมื่อพิจารณาหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดแบบสมดุลและไม่สมดุล โดยกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่ประยุกต์ใช้ในการจำลองผล รวมถึงอธิบายโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผล

**บทที่ 7** เป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ พร้อมงานวิจัยที่จะดำเนินการต่อ

ภาคผนวกประกอบด้วยเนื้อหา 2 ส่วน ได้แก่ ภาคผนวก ก. กล่าวถึงการประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา เพื่อให้เห็นภาพการทำงานของโปรแกรมภายในงานวิจัย

ภาคผนวก ข. กล่าวถึงการรวบรวมผลงานที่ได้รับการเผยแพร่ของงานวิจัยวิทยานิพนธ์  
ในขณะดำเนินการศึกษา

## บทที่ 2

### ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 บทนำ

วัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ พัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อีลิเมนต์ แบบ 3 มิติ สำหรับการคำนวณค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องดำเนินการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรม และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ทราบถึงแนวทางการวิจัย ระเบียบวิธีที่เคยมีการใช้งานมาก่อน ผลการดำเนินงานข้อเสนอแนะต่าง ๆ จากคณะนักวิจัย ตั้งแต่อดีตเป็นต้นมา โดยใช้ฐานข้อมูลที่เป็นแหล่งสะสมรายงานวิจัยและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้แก่ ฐานข้อมูลจาก IEEE IEE และ ScienceDirect เป็นต้น งานวิจัยดังกล่าวจะใช้เป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์ และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้

#### 2.2 ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การนำเสนอปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากเรื่องการคำนวณการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน สามารถสรุปโดยย่อเป็นตารางได้ดังตารางที่ 2.1 ซึ่งสามารถจัดเรียงลำดับได้ตามปีของผลงานดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
1995	Samesima, Resende, and Araujo	ได้ศึกษาและคำนวณอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ใช้งานด้านอุตสาหกรรม ซึ่งในด้านอุตสาหกรรมนี้จะมีโหลดที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นเป็นจำนวนมาก ในการศึกษาและวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้จะคำนวณหาอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้าในสภาวะที่จ่ายโหลดต่างกันโดยอาศัยทฤษฎีการเสื่อมสภาพของฉนวน

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
2000	Driesen, Deliege, Belmans, and Hameyer	ได้ดำเนินการศึกษาและจำลองผลของสนามแม่เหล็กและความร้อนของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ในส่วนการคำนวณสนามแม่เหล็กจะคำนวณเป็นแบบความถี่เดียว (time - harmonic) และส่วนของแบบจำลองของอุณหภูมิจะคำนวณถึงวัสดุที่ใช้เป็นฉนวนกันระหว่างขดลวดตัวนำโดยคำนวณทั้งสถานะคงตัวและสถานะชั่วคราว
2005	Hwang, Tang, and Jiang	ได้ศึกษาและวิเคราะห์ความร้อนของหม้อแปลงความถี่สูงด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสถานะคงตัวและสถานะชั่วคราว โดยใช้ผลของสนามแม่เหล็กมาใช้เป็นแหล่งกำเนิดความร้อนของหม้อแปลง
2005	Schmidt, Scoberl, and Hamberger	ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกำลังงานสูญเสียในบริเวณแกนเหล็ก ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติในการแก้ปัญหา
2006	Preis, Biro, Buchgraber, and Ticar	ได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จำลองผลและศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากับอุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า ซึ่งวิธีนี้ผู้วิจัยยังได้กล่าวถึง ปัจจัยที่มีผลต่ออุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า อันได้แก่สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและค่าความนำไฟฟ้า
2006	Elmoudi, Lehtonen, and Nordman	ได้ศึกษาและนำเสนอแบบจำลองของความร้อนในหม้อแปลงไฟฟ้าในกรณีจ่ายโหลดด้วยวงจรสมมูลอย่างง่าย เพื่อคำนวณหาความร้อนของน้ำมันหม้อแปลงและจุดอุณหภูมิร้อน (hot spot temperature) ของหม้อแปลงไฟฟ้า ส่วนการคำนวณสนามแม่เหล็กจะได้มาจากการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
2008	Rafajdus, Hrabovcova, Susota, and Vojenciak	ได้ออกแบบและวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในหม้อแปลงไฟฟ้าหนึ่งเฟสเพื่อตรวจสอบการกระจายตัวของความร้อนในวัสดุที่เป็นตัวนำยิ่งยวด
2008	Taheri Sh, Gholami, and Taheri H	ได้ศึกษาอุณหภูมิร้อนของหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กและผลของสนามแม่เหล็กต่อกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นซึ่งอยู่ในรูปของความร้อน และได้ศึกษาการออกแบบขนาดของแกนเหล็กเพื่อลดจุดร้อนภายในหม้อแปลงด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติในการหาผลเฉลย
2009	Tsili, Amoiralis, Kladas, and Souflaris	ได้ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยหลักการระบายความร้อน ประสิทธิภาพการระบายความร้อนเป็นปัจจัยที่แสดงถึงอายุการใช้งานของหม้อแปลง ผู้วิจัยได้ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิ รวมถึงจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดของหม้อแปลงไฟฟ้า
2010	Babaei, and Farahani	ได้ศึกษาและวิเคราะห์การกระจายความร้อนของหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรม ANSYS เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิของหม้อแปลง เมื่อมีการใช้พัดลมระบายความร้อนและไม่ใช้พัดลมระบายความร้อน
2010	Eteiba, Alzahab, and Shaker	ได้ศึกษาและคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงชนิดฉนวนแห้งด้วยวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ เมื่ออุณหภูมิของสภาพแวดล้อมที่ต่างกัน และช่องว่างระหว่างขดลวดแรงสูงและแรงต่ำที่แตกต่างกัน



ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
2010	Li, and Cheng	ได้ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ เพื่อคำนวณหาสนามแม่เหล็กและเส้นแรงแม่เหล็กบริเวณขดลวดของหม้อแปลง เมื่อเกิดการลัดวงจร และนำไปใช้ประโยชน์ในด้านอุตสาหกรรม

จะเห็นได้ว่าการสืบค้นปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ได้สรุปผ่านมา สามารถช่วยให้ผู้ที่ดำเนินการศึกษาหรือพัฒนาเกี่ยวกับงานวิจัยนี้ พอมองภาพอย่างกว้างๆ ออกว่ามีคณะวิจัยใดที่ได้ศึกษาลึกลงไปแล้วบ้าง แต่ยังไม่สามารถแยกเป็นหมวดหมู่ตามวิธีการดำเนินการได้อย่างชัดเจน ดังนั้นในส่วนถัดไปนี้จึงได้ทำการเรียบเรียงและได้เลือกสรรงานวิจัยหลักๆ ที่สำคัญและมีความแตกต่างกันอย่างเด่นชัด จากผลงานที่ได้สรุปไว้ในตารางที่ 2.1 โดยจะได้กล่าวถึง หลักการและวิธีการดำเนินการวิจัยต่างๆ ที่ใช้วิเคราะห์และคำนวณอุณหภูมิที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงเมื่อหม้อแปลงอยู่ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุล รวมทั้งคำนวณการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า โดยจะกล่าวถึงโดยย่อ ดังนี้

เริ่มต้นจาก Li, and Cheng (2010) ได้ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ เพื่อคำนวณหาสนามแม่เหล็กและเส้นแรงแม่เหล็กบริเวณขดลวดของหม้อแปลง เมื่อเกิดการลัดวงจรและนำไปใช้ประโยชน์ในด้านอุตสาหกรรม งานวิจัยของ Schmidt, Scoberl, and Hamberger (2005) ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกำลังงานสูญเสียในบริเวณแกนเหล็ก ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในการแก้ปัญหา

งานวิจัยของ Hwang, Tang, and Jiang (2005) ได้ศึกษาและวิเคราะห์ความร้อนของหม้อแปลงความถี่สูงด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบสถานะคงตัวและสถานะชั่วคราว โดยใช้ผลของสนามแม่เหล็กมาใช้เป็นแหล่งกำเนิดความร้อนของหม้อแปลง งานวิจัยของ Driesen, Deliege, Belmans, and Hameyer (2000) ได้ดำเนินการศึกษาและจำลองผลของสนามแม่เหล็กและความร้อนของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ในส่วนการคำนวณสนามแม่เหล็กจะคำนวณเป็นแบบความถี่เดียวและส่วนของแบบจำลองของอุณหภูมิจะคำนึงถึงวัสดุที่ใช้เป็นฉนวนกั้นระหว่างขดลวดตัวนำโดยคำนวณทั้งสถานะคงตัวและ

สถานะชั่วคราว งานวิจัยของ Eteiba, Alzahab, and Shaker (2010) ได้ศึกษาและคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงชนิดฉนวนแห้งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เมื่ออุณหภูมิของสภาพแวดล้อมที่ต่างกัน พบว่าเมื่ออุณหภูมิสภาพแวดล้อมเพิ่มขึ้นจะทำให้อุณหภูมิของหม้อแปลงเพิ่มขึ้นด้วย

Samesima, Resende, and Araujo (1995) ได้ศึกษาและคำนวณอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ใช้ทางด้านอุตสาหกรรม ซึ่งในด้านอุตสาหกรรมนี้จะมีโหลดที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นเป็นจำนวนมาก ในการศึกษาและวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้จะคำนวณหาอายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้าในสถานะที่จ่ายโหลดต่างกัน โดยอาศัยทฤษฎีการเสื่อมสภาพของฉนวนงานวิจัยของ Tsili, Amoiralis, Kladas, and Souflaris (2009) ได้ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยหลักการระบายความร้อน ประสิทธิภาพการระบายความร้อนเป็นปัจจัยที่แสดงถึงอายุการใช้งานของหม้อแปลง ผู้วิจัยได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิรวมถึงจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดของหม้อแปลงไฟฟ้า

### 2.3 สรุป

บทที่ 2 นี้ ได้นำเสนอรายงานผลการสืบค้นวรรณกรรมและงานวิจัยย้อนหลังที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่จะดำเนินการ จากฐานข้อมูล IEEE IEE ScienceDirect และอื่น ๆ ซึ่งทำให้ทราบถึงแนวทางการวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระเบียบวิธีที่ผู้วิจัยอื่น ๆ ได้นำมาใช้ ผลการดำเนินงาน ข้อเสนอแนะต่าง ๆ จากคณานักวิจัยตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน จากการสืบค้นปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ไม่เคยปรากฏงานวิจัยที่มุ่งเน้นการศึกษาและการคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยการพัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิอย่างละเอียดและชัดเจนมาก่อน ด้วยเหตุนี้งานวิจัยชิ้นนี้จึงพัฒนาขึ้นเพื่อศึกษาแนวทางการคำนวณหาอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสถานะจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุลที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

## บทที่ 3

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 3.1 บทนำ

การศึกษาและเข้าใจถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย นับว่ามีความสำคัญ และเป็นประโยชน์อย่างมากในการดำเนินงาน ทั้งนี้เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ และความเข้าใจในงานสำหรับนำไปเป็นแหล่งอ้างอิงในการดำเนินงานวิจัย ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยนี้ ซึ่งประกอบไปด้วย 5 หัวข้อหลัก ได้แก่ (1) สนามแม่เหล็ก (2) หม้อแปลงไฟฟ้า (3) ทฤษฎีความร้อน (4) อายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้า และ (5) ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ โดยจะกล่าวถึงเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์หรือถูกกล่าวอ้างถึงต่อการดำเนินงานวิจัย ทั้งนี้เพื่อให้เนื้อหา มีความกระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น

#### 3.2 สนามแม่เหล็ก

##### 3.2.1 พื้นฐานสำหรับสนามแม่เหล็ก (เผด็จ เฝ้าละออง, 2549)

การบอกถึงปริมาณอย่างหนึ่งอย่างใดของสรรพสิ่งในธรรมชาติ อาจกระทำได้โดยการบอกถึงขนาดแต่เพียงอย่างเดียวซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงสเกลาร์ หรืออาจบอกทั้งขนาดและทิศทางควบคู่กันซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงเวกเตอร์ พื้นฐานสำคัญในการศึกษาสนามแม่เหล็กจะเริ่มต้นจากทฤษฎีของเวกเตอร์ โดยจะเริ่มต้นด้วยพีชคณิตของเวกเตอร์ ดังนี้

ถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ  $xyz$  จะเขียนเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉากหรือพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate) ได้ในลักษณะ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.1)$$

เมื่อ  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  และ  $\mathbf{k}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ชี้ไปในทิศทางบวกของแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ โดยมี  $A_x$ ,  $A_y$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากของ  $\mathbf{A}$  ในปริภูมิ

ถ้าให้  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{B}$  คือเวกเตอร์ แล้ว  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  คือการคูณกันแบบดอท (dot product) เรียกการคูณแบบนี้ว่า การคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (3.2)$$

เมื่อ  $\theta$  คือมุมระหว่างเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  กับ  $\mathbf{B}$  และ  $0 \leq \theta \leq \pi$

ส่วน  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  คือการคูณกันแบบครอส (cross product) เรียกการคูณแบบนี้ว่า การคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta (\pm \mathbf{n}) \quad (3.3)$$

เมื่อ  $\mathbf{n}$  นิยามให้เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{B}$  โดยเครื่องหมาย  $\pm$  ใช้กำหนดทิศทางของผลคูณเวกเตอร์แบบครอส โดยถ้าเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม  $\theta$  เข้าหาเวกเตอร์  $\mathbf{B}$  จะกำหนดให้  $\mathbf{n}$  เป็นบวก ในทางตรงกันข้ามก็กำหนดให้เป็นลบ หรือยึดหลักการของสกรู โดยถ้าขันสกรูให้เคลื่อนที่เข้าไปในเนื้อวัตถุจะกำหนดให้  $\mathbf{n}$  เป็นบวก และถ้าคลายสกรูออกจากเนื้อวัตถุจะกำหนดให้เป็นลบ ซึ่งเทียบได้กับกฎมือขวานั้นเอง

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (3.4)$$

หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

เมื่อทราบวิธีคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ซึ่งเป็นพื้นฐานเบื้องต้นแล้ว จากนั้นจึงดำเนินการศึกษาถึงการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์และฟังก์ชันเวกเตอร์ (ชัยณรงค์ วิเศษศักดิ์วิชัย, 2545) ซึ่งจะกล่าวต่อไปดังนี้

ถ้าให้  $f$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ 3 ตัวแปร  $f(x, y, z)$  แล้ว ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (3.6)$$

และจากการกำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ที่เรียกว่าเดล (del :  $\nabla$ ) ดังนี้

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

ดังนั้นเมื่อนำ  $\nabla$  กระทำต่อฟังก์ชัน  $f$  จะได้  $\nabla f$  ซึ่งเรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชัน  $f$  โดยจะมีความหมายในลักษณะ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.8)$$

และถ้ากำหนดให้  $\mathbf{A}$  คือเวกเตอร์แล้ว  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  ซึ่งเป็นการคูณกันแบบดอท จะเรียกว่าไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของ  $\mathbf{A}$  นิยามโดย

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

ส่วน  $\nabla \times \mathbf{A}$  ซึ่งเป็นการคูณกันแบบครอส จะเรียกว่าเคิร์ล (curl) ของ  $\mathbf{A}$  นิยามโดย

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.10)$$

หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

ไควเวอร์เจนซ์และเคิร์ลเป็นเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราสามารถใช้เคลดำเนินการสองครั้งเพื่อให้ได้อนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งเรียกว่าลาปลาเซียน (laplacian:  $\nabla^2$ ) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

ให้  $\mathbf{A}$  คือเวกเตอร์ จะได้ลาปลาเซียนของ  $\mathbf{A}$  คือ

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \mathbf{k} \quad (3.13)$$

เอกลักษณ์ของเวกเตอร์ที่สำคัญต่อการดำเนินการอนุพันธ์อันดับสองมีอยู่ 2 เอกลักษณ์ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.14) และ (3.15) ดังนี้คือ

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.15)$$

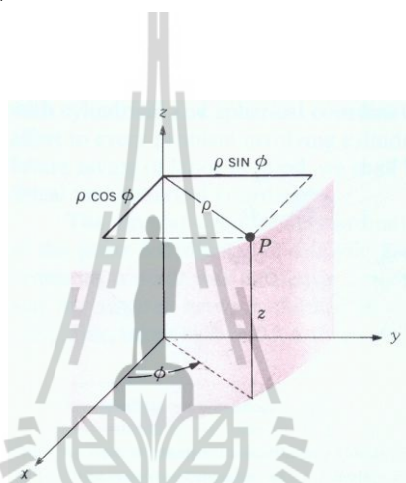
การแปลงระบบพิกัดที่มีพิกัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน (William, 1989) จากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.1 สามารถแสดงได้โดยถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉาก คือ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.16)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  และ  $\mathbf{a}_z$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_x$ ,  $A_y$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากซึ่งจะต้องถูกเปลี่ยนไปอยู่ในรูปส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอก โดยถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.17)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  และ  $\mathbf{a}_z$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_\rho$ ,  $A_\phi$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่า ณ จุด  $P(x,y,z)$  หรือ  $P(\rho,\phi,z)$  จะได้ว่า

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

จะเห็นว่าตัวแปร  $x, y, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $\rho, \phi, z$  และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร  $\rho, \phi, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $x, y, z$

ในการเปลี่ยนจากระบบพิกัดหนึ่งไปเป็นอีกพิกัดหนึ่ง จะใช้หลักการคูณกันของเวกเตอร์แบบดอท การเปลี่ยนพิกัดจากไปเป็นพิกัดทรงกระบอกจะต้องหาค่า  $A_\rho$ ,  $A_\phi$  ที่อยู่ในเทอมของ  $A_x$ ,  $A_y$  โดยที่  $A_z = A_z$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

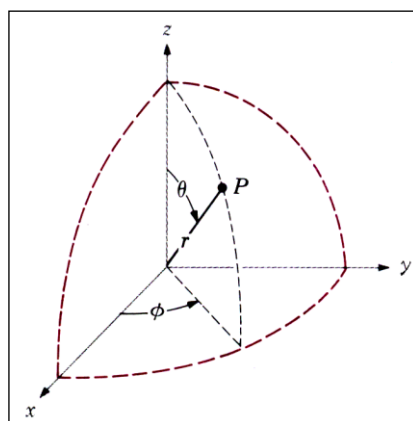
$$\begin{aligned} A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \\ A_\rho &= A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (3.19)$$

ส่วนการแปลงจากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกลม (spherical coordinate) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.2 สามารถแสดงได้โดย ถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดทรงกลม คือ

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (3.20)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_\theta$  และ  $\mathbf{a}_\phi$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_r$ ,  $A_\theta$  และ  $A_\phi$  เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกลม



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม



จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า ณ จุด  $P(x,y,z)$  หรือ  $P(r,\theta,\phi)$  จะได้ว่า

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad , \quad y = r \sin\theta \sin\phi \quad , \quad z = r \cos\theta$$

จะเห็นว่าตัวแปร  $x, y, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $r, \theta, \phi$  และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร  $r, \theta, \phi$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $x, y, z$

การเปลี่ยนพิกัดจากไปเป็นพิกัดทรงกลม จะต้องหาค่า  $A_r, A_\theta, A_\phi$  ที่อยู่ในเทอมของ  $A_x, A_y, A_z$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_r &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r \\ A_r &= A_x \sin\theta \cos\phi + A_y \sin\theta \sin\phi + A_z \cos\theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} A_\theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\theta \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta \\ A_\theta &= A_x \cos\theta \cos\phi + A_y \cos\theta \sin\phi + A_z \sin\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

เมื่อทราบทฤษฎีและคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่จำเป็นแล้ว ต่อไปจะได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (เจลิมพล น้ำค้าง, 2538) ซึ่งต้องอาศัยความรู้ของระบบเวกเตอร์จากข้างต้น

ประจุไฟฟ้า (electric charge) คือปริมาณของความเป็นไฟฟ้าที่สถิตอยู่ในสสารนั้นๆ ซึ่งแรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้าจะเรียกว่าแรงไฟฟ้า (electric force) และถ้าหากประจุไฟฟ้ามีการเคลื่อนที่ด้วย จะเกิดแรงที่เรียกว่าแรงแม่เหล็ก (magnetic force) ด้วยเหตุที่ทั้งแรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็กมีแหล่งกำเนิดเดียวกันคือประจุไฟฟ้าการจัดจำแนกกลุ่มของแรงจึงได้จัดให้ทั้งสองแรงนี้อยู่ในกลุ่มเดียวกันที่เรียกว่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) ทุกๆ ประจุในสสารจะมีความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field intensity) หรืออาจเรียกว่าสนามไฟฟ้า (electric field :  $\mathbf{E}$ ) อยู่ปริมาณหนึ่ง ที่เป็นตัวกำกับให้ประจุหนึ่งออกแรงกระทำต่อประจุหนึ่งด้วยแรงปริมาณหนึ่ง ส่วนความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density) หรืออาจเรียกว่าสนามแม่เหล็ก (magnetic field :  $\mathbf{B}$ ) จะเป็นตัวกำกับให้ออกแรงกระทำเฉพาะประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ ซึ่งสนามแม่เหล็กนี้เองที่เป็นรากฐานของกลไกในการผันแปลงพลังงานจากรูปแบบหนึ่งไปสู่รูปแบบอื่นๆ โดยใช้เป็นพื้นฐานสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในมอเตอร์ เครื่องกำเนิดไฟฟ้า และหม้อแปลง ซึ่งการผันแปลงพลังงานที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์เหล่านี้ จะประกอบด้วยกฎพื้นฐานอยู่ 4 กฎ (Chapman, 1998) คือ

- 1) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำจะเกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น
- 2) เมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวด ที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ (พื้นฐานปรากฏการณ์หม้อแปลง)
- 3) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงทางกลขึ้น (พื้นฐานปรากฏการณ์มอเตอร์)
- 4) เมื่อเส้นลวดตัวนำเคลื่อนที่ผ่านสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้น (พื้นฐานปรากฏการณ์เครื่องกำเนิดไฟฟ้า)

ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็กจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง สามารถแสดงได้โดย

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.24)$$

เมื่อ  $\mu$  คือความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ  $\mu_0\mu_r$  โดยที่  $\mu_0$  คือความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m และ  $\mu_r$  คือความซาบ

ซึ่งได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง ส่วน  $\mathbf{H}$  คือความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity) และจากการศึกษาคุณสมบัติของ  $\mathbf{B}$  พบว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.25)$$

ซึ่งสมการที่ (3.25) นี้คือกฎของเกาส์ (Gauss's law) ในรูปอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็ก โดยถ้านำไปประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ในสมการที่ (3.14) จะสรุปได้ว่าหากไดเวอเรนซ์ของ  $\mathbf{B}$  เท่ากับศูนย์แล้ว ย่อมมีอีกเวกเตอร์หนึ่งที่เกิดจากการกระทำเคิร์ลแล้วได้ผลเป็นเวกเตอร์  $\mathbf{B}$  เวกเตอร์ใดที่เกิดจากการกระทำเคิร์ลแล้วเท่ากับ  $\mathbf{B}$  จะเรียกว่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (magnetic vector potential:  $\mathbf{A}$ ) ดังนี้

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.26)$$

ดังนั้นเมื่อต้องการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  จึงเลี่ยงโดยการไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  ก่อน ซึ่งสามารถคำนวณได้ง่ายกว่า โดยสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  เท่านั้น

### 3.3 หม้อแปลงไฟฟ้า

เป็นอุปกรณ์ที่ใช้เปลี่ยนระดับแรงดันให้สูงขึ้นหรือต่ำลงตามต้องการ ภายในประกอบด้วยขดลวด 2 ชุดคือ ขดลวดปฐมภูมิ (primary winding) และ ขดลวดทุติยภูมิ (secondary winding) แต่สำหรับหม้อแปลงกำลัง (power transformer) ขนาดใหญ่บางตัวอาจมีขดลวดที่สามเพิ่มขึ้นคือ ขดลวดตติยภูมิ (tertiary winding) ซึ่งมีขนาดเล็กกว่าขดลวดปฐมภูมิและขดลวดทุติยภูมิ และแรงดันที่แปลงออกมาจะมีค่าต่ำกว่าขดลวดทุติยภูมิ รูปที่ 3.3 เป็นการแสดงหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส



รูปที่ 3.3 รูปหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส

### 3.3.1 ชนิดของหม้อแปลงไฟฟ้า

หม้อแปลงไฟฟ้าถูกแบ่งออกเป็นชนิดต่างๆ ได้หลายวิธี เช่น แบ่งตามโครงสร้าง ได้แก่ ชนิดแกน (core type) และชนิดเปลือกกรอบ (shell type) หรือแบ่งตามตัวกลางที่ใช้ทำฉนวน และตัวระบายความร้อน ได้แก่ ก๊าซ SF<sub>6</sub> และน้ำมันหม้อแปลง สดท้ายแบ่งตามกำลังไฟฟ้าที่จ่ายออกไปได้แก่ หม้อแปลงไฟฟ้าที่ขนาดมากกว่า 2500 kVA ขึ้นไปเรียกว่า หม้อแปลงไฟฟ้ากำลัง (power transformer) ซึ่งจะอยู่ตามสถานีย่อยไฟฟ้า ส่วนหม้อแปลงไฟฟ้าที่มีขนาดตั้งแต่ 2500 kVA ลงมาจะเรียกว่าหม้อแปลงจำหน่าย (distribution transformer)

สำหรับหม้อแปลงจำหน่ายที่ใช้งานทั่วไปของการไฟฟ้าส่วนภูมิภาคแบ่งออกเป็น 2 ระบบ ได้แก่

- 1) ระบบ 1 เฟส 3 สาย มีใช้งาน 4 ขนาดคือ 10 kVA, 20 kVA, 30 kVA และ 50 kVA
- 2) ระบบ 3 เฟส 4 สาย มีหลายขนาดได้แก่ 30 kVA, 50 kVA, 100 kVA, 160 kVA, 250 kVA, 315 kVA, 400 kVA, 500 kVA, 1000 kVA, 1250 kVA, 1500 kVA และ 2500 KVA

การจำแนกหม้อแปลงตามขนาดกำลังไฟฟ้าที่ใช้งานมีดังนี้

- 1) ขนาดเล็กจนถึง 1 VA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับการเชื่อมต่อระหว่างสัญญาณในงานอิเล็กทรอนิกส์
- 2) ขนาด 1-1000 VA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานด้านเครื่องใช้ไฟฟ้าภายในบ้านขนาดเล็ก
- 3) ขนาด 1 kVA - 1 MVA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานจำหน่ายไฟฟ้าในโรงงาน สำนักงาน ที่พักอาศัย

- 4) ขนาดใหญ่ตั้งแต่ 1 MVA ขึ้นไป เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานระบบไฟฟ้ากำลัง ในสถานีไฟฟ้าย่อย การผลิตและจ่ายไฟฟ้า

นอกจากนี้หม้อแปลงยังสามารถจำแนกชนิดตามจำนวนรอบของขดลวดได้ดังนี้

- 1) หม้อแปลงแรงเคลื่อนไฟฟ้าเพิ่ม (step-up) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบมากกว่าขดลวดปฐมภูมิ
- 2) หม้อแปลงแรงเคลื่อนไฟฟ้าลง (step-down) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบน้อยกว่าขดลวดปฐมภูมิ
- 3) หม้อแปลงที่มีแทปแยก (tap) ทำให้มีขนาดของแรงเคลื่อนไฟฟ้าได้หลายระดับ
- 4) หม้อแปลงที่ใช้สำหรับแยกวงจรไฟฟ้าออกจากกัน (isolating) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบเท่ากับขดลวดปฐมภูมิหรือมีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเท่ากันทั้งสองด้าน

### 3.3.2 ส่วนประกอบของหม้อแปลงไฟฟ้า

หม้อแปลงแบ่งออกตามการใช้งานของระบบไฟฟ้ากำลังได้ 2 แบบคือ หม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส และหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟสแต่ละชนิดมีโครงสร้างสำคัญประกอบด้วย

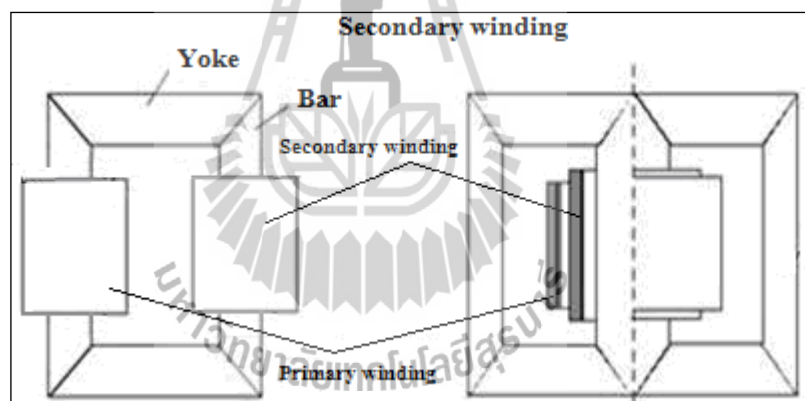
- 1) ขดลวดตัวนำปฐมภูมิ (primary winding) ทำหน้าที่รับแรงเคลื่อนไฟฟ้า
- 2) ขดลวดทุติยภูมิ (secondary winding) ทำหน้าที่จ่ายแรงเคลื่อนไฟฟ้า
- 3) แผ่นแกนเหล็ก (core) ทำหน้าที่เป็นทางเดินสนามแม่เหล็กและให้ขดลวดพันรอบแกนเหล็ก
- 4) ขั้วต่อสายไฟ (terminal) ทำหน้าที่เป็นจุดต่อสายไฟกับขดลวด
- 5) แผ่นป้าย (name plate) ทำหน้าที่บอกรายละเอียดประจำตัวหม้อแปลง
- 6) อุปกรณ์ระบายความร้อน (coolant) ทำหน้าที่ระบายความร้อนให้กับขดลวด เช่น อากาศ, พัดลม, น้ำมัน หรือใช้ทั้งพัดลมและน้ำมันช่วยระบายความร้อน เป็นต้น
- 7) โครง (frame) หรือถังถังของหม้อแปลง (tank) ทำหน้าที่บรรจุขดลวด แกนเหล็กรวมทั้งการติดตั้งระบบระบายความร้อนให้กับหม้อแปลงขนาดใหญ่
- 8.) สวิตช์และอุปกรณ์ควบคุม (switch controller) ทำหน้าที่ควบคุมการเปลี่ยนขนาดของแรงเคลื่อนไฟฟ้า และมีอุปกรณ์ป้องกันไฟฟ้าชนิดต่าง ๆ รวมอยู่ด้วย

วัสดุที่ใช้ทำขดลวดหม้อแปลง โดยทั่วไปทำมาจากสายทองแดงเคลือบน้ำยาฉนวนมีขนาดและลักษณะลวดเป็นทรงกลมหรือแบนขึ้นอยู่กับขนาดของหม้อแปลง ลวดเส้นใหญ่จะมีความสามารถในการจ่ายกระแสได้มากกว่าลวดเส้นเล็ก

หม้อแปลงขนาดใหญ่มักใช้ลวดถักแบบตีเกลียวเพื่อเพิ่มพื้นที่สายตัวนำให้มีความต้านทานของกระแสไฟฟ้ามาน้อย สายตัวนำที่ใช้พันขดลวดบนแกนเหล็กทั้งขดลวดปฐมภูมิและขดลวดทุติยภูมิอาจมีแทปแยก (tap) เพื่อแบ่งขนาดแรงเคลื่อนไฟฟ้า (ในหม้อแปลงขนาดใหญ่จะใช้การเปลี่ยนแทปด้วยสวิตช์อัตโนมัติ)

### แกนเหล็ก (core)

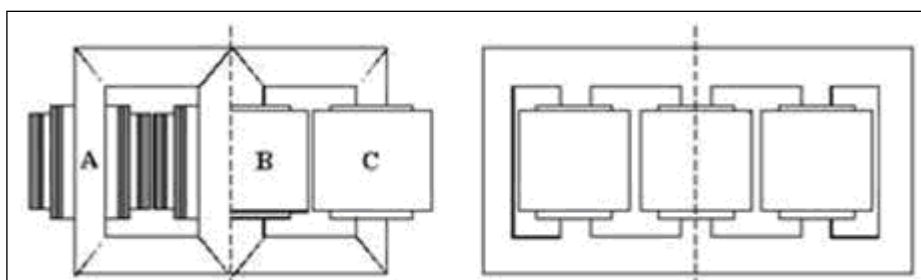
แผ่นเหล็กที่ใช้ทำหม้อแปลงจะมีลักษณะเป็นเหล็กแผ่นบางหลายแผ่นเรียงซ้อนประกอบขึ้นเป็นแกนเหล็กของหม้อแปลง ซึ่งมีด้วยกันหลายรูปแบบเช่น แกนเหล็กแบบ Core และแบบ Shell ดังแสดงแกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟสและ 3 เฟส ได้ดังรูปที่ 3.4 และ 3.5 ตามลำดับ



ก) แกนเหล็กแบบ Core

ข) แกนเหล็กแบบ Shell

รูปที่ 3.4 แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส



ก) แกนเหล็กแบบ Core

ข) แกนเหล็กแบบ Shell

### รูปที่ 3.5 แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟส

#### ขดลวด (coil or winding)

หม้อแปลงมีขดลวด 2 ชุด คือขดลวดแรงสูง (primary coil) และขดลวดแรงต่ำ (secondary coil) ขดลวดแรงสูงจะรับแรงดันไฟฟ้าแรงสูงจากสายป้อนและเหนี่ยวนำกับขดลวดแรงต่ำเกิดแรงดันไฟฟ้าออกมาจากหม้อแปลง วัสดุที่ใช้เป็นทองแดงรีดอ่อนหุ้มฉนวนกระดาษหรือเคลือบสารฉนวน ลวดที่ใช้มีทั้งหน้าตัดกลมและสี่เหลี่ยมผืนผ้ารวมทั้งเป็นแผ่นบางๆ

#### ฉนวน (Insulator)

เพื่อป้องกันไม่ให้ขดลวดลัดวงจรถึงกันได้ การพันขดลวดบนแกนเหล็ก จึงควรมีกระดาษอาบน้ำยาฉนวน คั่นระหว่างชั้นของขดลวดและคั่นแยกระหว่างขดลวด ปฐมภูมิกับทุติยภูมิด้วยในหม้อแปลงขนาดใหญ่มักใช้กระดาษอาบน้ำยาฉนวนพันรอบสายตัวนำก่อนพันเป็นขดลวดลงบนแกนเหล็ก นอกจากนี้ ยังใช้น้ำมันชนิดที่เป็นฉนวนและระบายความร้อนให้กับขดลวดอีกด้วย

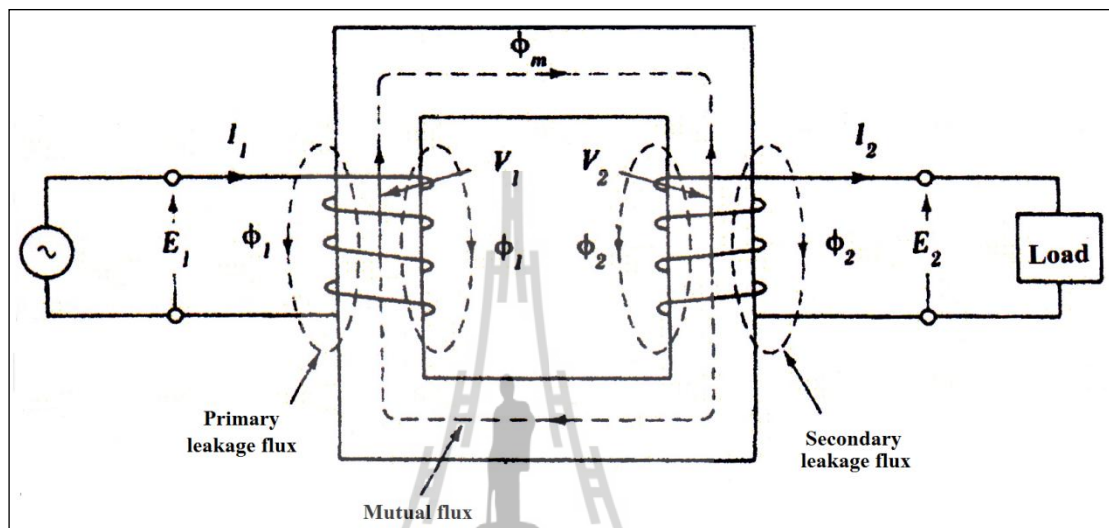
#### น้ำมันหม้อแปลง มีหน้าที่คือ

- เป็นฉนวนไฟฟ้า โดยป้องกันกระแสไฟฟ้ากระโดดจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง ถ้าเทียบกับอากาศแล้ว น้ำมันหม้อแปลงจะทนแรงดันได้สูงกว่าหลายเท่า ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับคุณภาพของน้ำมันหม้อแปลงนั้น ดังนั้นถ้าเราจุ่มตัวนำลงในน้ำมัน ก็จะสามารวางไว้ใกล้กันได้โดยไม่ลัดวงจร

- เป็นที่ระบายความร้อน โดยที่น้ำมันเป็นของเหลวจึงสามารถเคลื่อนตัวมาถ่ายเทความร้อนให้แก่อากาศรอบๆ หม้อแปลงได้ดี ทำให้ขดลวดและแกนเหล็กของหม้อแปลงระบายความร้อนได้ ทำให้ฉนวนที่พันหุ้มขดลวดทนต่อความร้อนสูงได้ และทำให้ฉนวนไม่ร้อนจัดเกินไป ช่วยยืดอายุการใช้งานของหม้อแปลงให้นานขึ้น

### 3.3.3 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า (มงคล ทองสงคราม, 2549)

วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้าเป็นวงจรที่มีสัญลักษณ์มาแทนส่วนประกอบของหม้อแปลงไฟฟ้า เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาและการคำนวณค่าต่างๆในหม้อแปลงไฟฟ้านั้น ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 วงจรหม้อแปลงไฟฟ้า

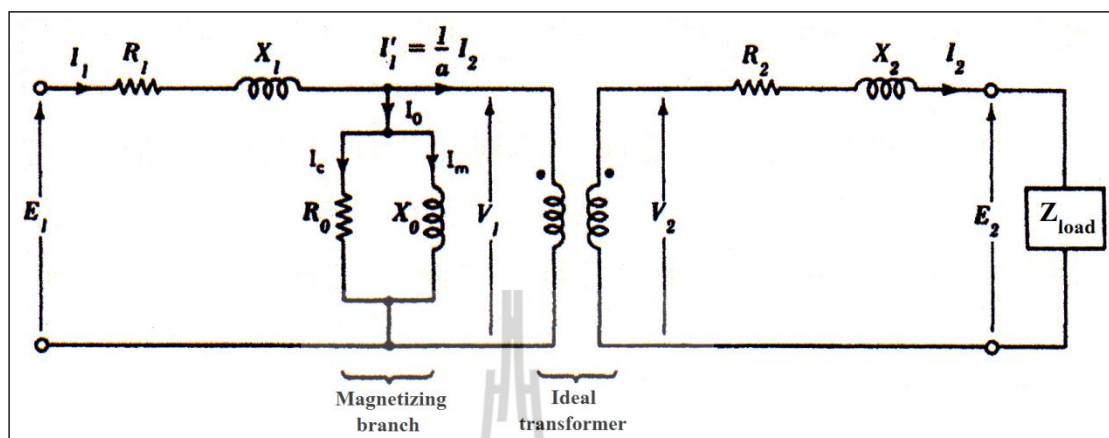
เมื่อฟลักซ์แม่เหล็กที่ไหลที่ขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $\Phi_1, \Phi_2$  ในรูปที่ 3.6) เคลื่อนตัวครบวงจรรอบปิดจะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับ รีแอกแตนซ์ของขดลวดเหนี่ยวนำ ( $X_L$ ) ซึ่งเราเรียกว่าลิกเกจรีแอกแตนซ์ นอกจากนี้ที่ขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิยังมีความต้านทานอยู่จำนวนหนึ่งด้วย ดังนั้นขณะที่หม้อแปลงไฟฟ้าจ่ายโหลดจึงเกิดแรงดันตกคร่อม 2 ส่วน คือ

- ที่ความต้านทานของขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $R_1$  และ  $R_2$ )
- ที่ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $X_1$  และ  $X_2$ )

เมื่อ  $R_1$  คือ ความต้านทานของขดลวดปฐมภูมิ  
 $R_2$  คือ ความต้านทานของขดลวดทุติยภูมิ  
 $X_1$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดปฐมภูมิ  
 $X_2$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดทุติยภูมิ



ถ้านำค่าต่างๆทั้งขณะไม่มีโหลดและขณะจ่ายโหลดมาเขียนวงจรสมมูล จะได้ดัง  
รูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า

เมื่อ  $R_0$  คือ ความต้านทานของหม้อแปลงไฟฟ้าขณะไม่มีโหลด  
 $X_0$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของหม้อแปลงไฟฟ้าขณะไม่มีโหลด

### 3.3.4 การสมดุลโหลดของหม้อแปลงไฟฟ้า

การสมดุลโหลด เป็นการเฉลี่ยโหลดแต่ละเฟสให้มีค่าเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน ซึ่งทำให้กระแสในแต่ละเฟสใกล้เคียงกันด้วย ถ้าหากโหลดไม่สมดุล จะเกิดผลเสียต่อระบบดังนี้

- เกิดความสูญเสียและแรงดันปลายสายตกมาก
- การคงค่าแรงดัน (voltage regulation) ไม่ดี กล่าวคือแรงดันไฟฟ้าในแต่ละเฟสไม่เท่ากัน
- ความสามารถในการจ่ายโหลดของหม้อแปลงลดลง

หม้อแปลงไฟฟ้ามีข้อกำหนดต่างๆไว้ ดังนี้

- หม้อแปลงทั่วไป การไฟฟ้าส่วนภูมิภาค ขอมให้จ่ายโหลดได้ไม่เกิน 80 % ของกระแสพิกัดหม้อแปลง
- การสมดุลเฟสของหม้อแปลง ไม่ควรแตกต่างกันเกิน 20 % ของกระแสเฉลี่ย

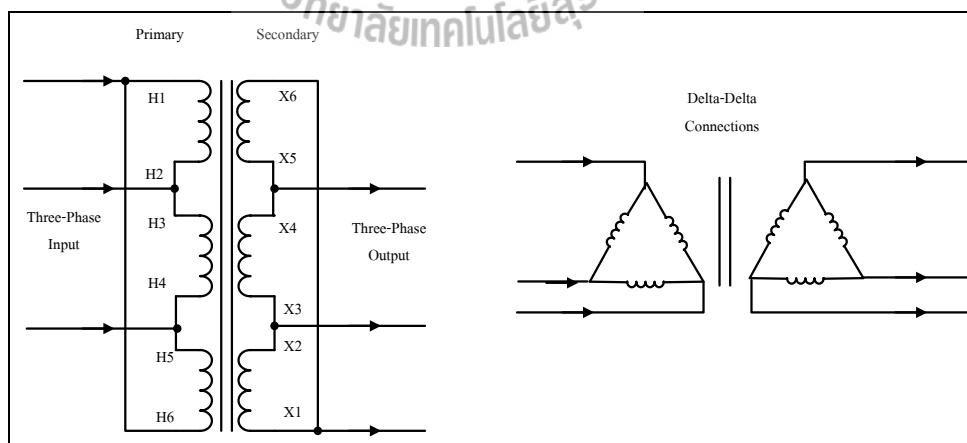
### ผลกระทบจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลของหม้อแปลง 3 เฟส

- 1) จะมีกระแสไหลในสายนิวทรัล ซึ่งจะทำให้แรงดันตกและมีกำลังไฟฟ้าสูญเสียในสายนิวทรัลประสิทธิภาพของระบบจะลดลง
- 2) การคงค่าแรงดันไม่ดี คือเฟสที่มีโหลดต่อในวงจรมากแรงดันจะต่ำ ส่วนเฟสที่มีโหลดต่อน้อยแรงดันจะสูง
- 3) ความสามารถในการจ่ายโหลดของระบบลดลง ไม่สามารถจ่ายได้ตามพิกัด เพราะถูกจำกัดด้วยเฟสที่มีโหลดสูงสุด
- 4) กรณีที่ระบบไม่สมดุลและสายนิวทรัลขาด จะทำให้โหลดในวงจรต่ออนุกรมกัน และคร่อมอยู่กับแรงดันขนาด 400 โวลต์ แรงดันตกคร่อมโหลดบางตัวอาจสูงกว่าปกติ และอาจชำรุดได้

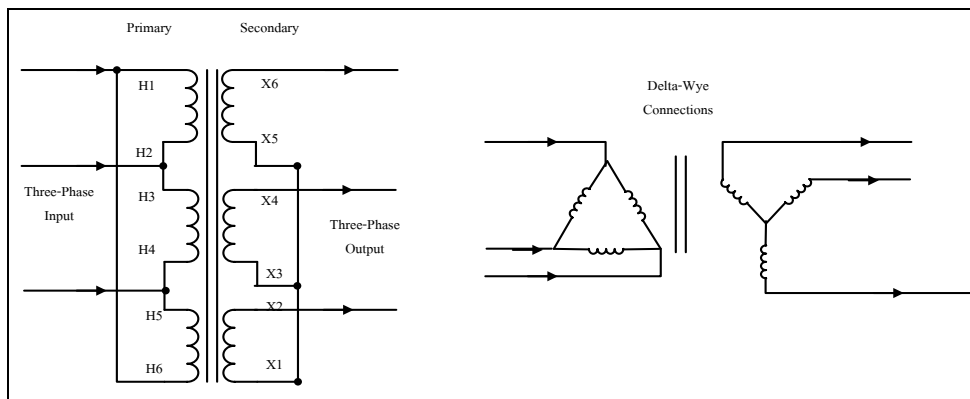
#### 3.3.5 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟส

การที่จะนำหม้อแปลงไฟฟ้าไปใช้งานจะต้องทำการต่อขั้วหม้อแปลงไฟฟ้าให้ถูกต้อง แต่โดยทั่วไปบริษัทผู้ผลิตได้ทำการกำหนดขั้วของหม้อแปลงมาให้แล้ว การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟสสามารถต่อได้ 4 แบบ ดังนี้

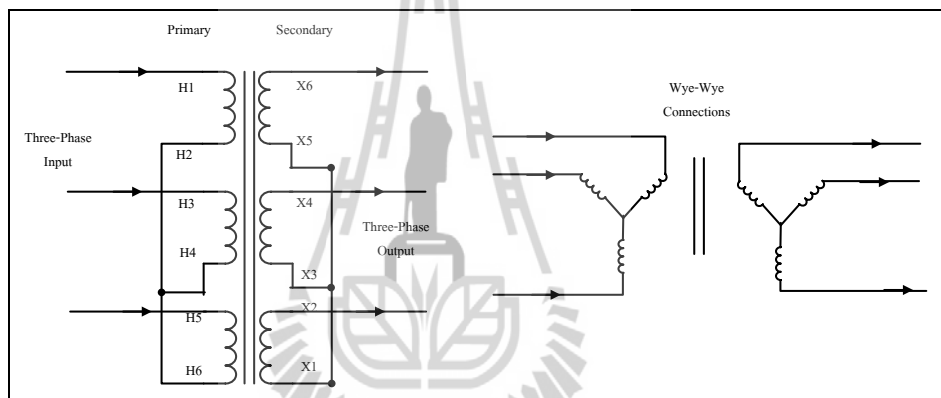
- แบบเดลต้า-เดลต้า (three-phase  $\Delta-\Delta$  connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.8
- แบบสตาร์-เดลต้า (three-phase Y- $\Delta$  connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.9
- แบบเดลต้า-สตาร์ (three-phase  $\Delta$ -Y connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.10
- แบบสตาร์-สตาร์ (three-phase Y-Y connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.11



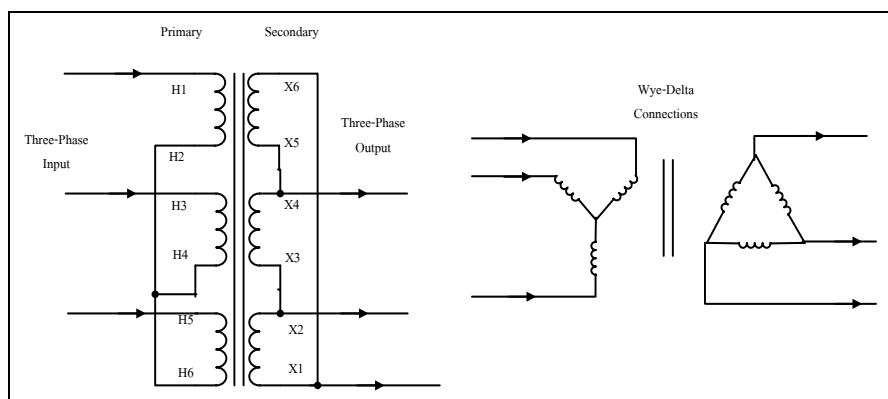
รูปที่ 3.8 แสดงการต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-เดลต้า



รูปที่ 3.9 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-สตาร์

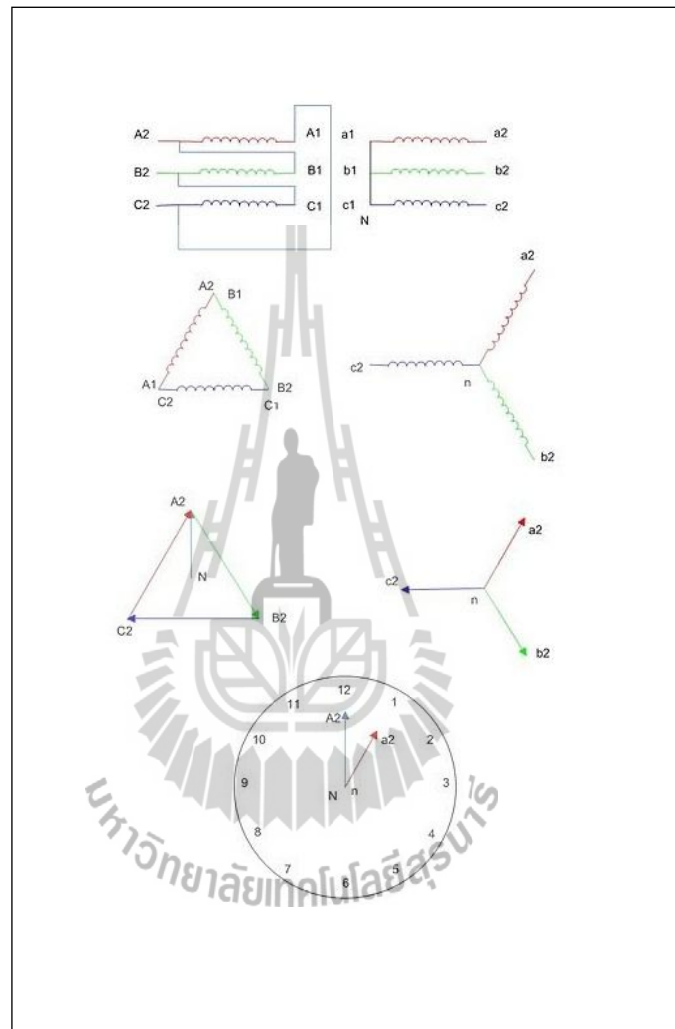


รูปที่ 3.10 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-สตาร์



รูปที่ 3.11 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-เดลต้า

การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟสที่ใช้ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นแบบเดลต้า-สตาร์ ที่ด้านทุติยภูมิของหม้อแปลงเลื่อนเฟสไป  $30^{\circ}$  หรือเรียกว่าแบบ Dy1 ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ (3.12)



รูปที่ 3.12 การต่อหม้อแปลงแบบ Dy1

### 3.4 ทฤษฎีความร้อน

#### 3.4.1 ความร้อน

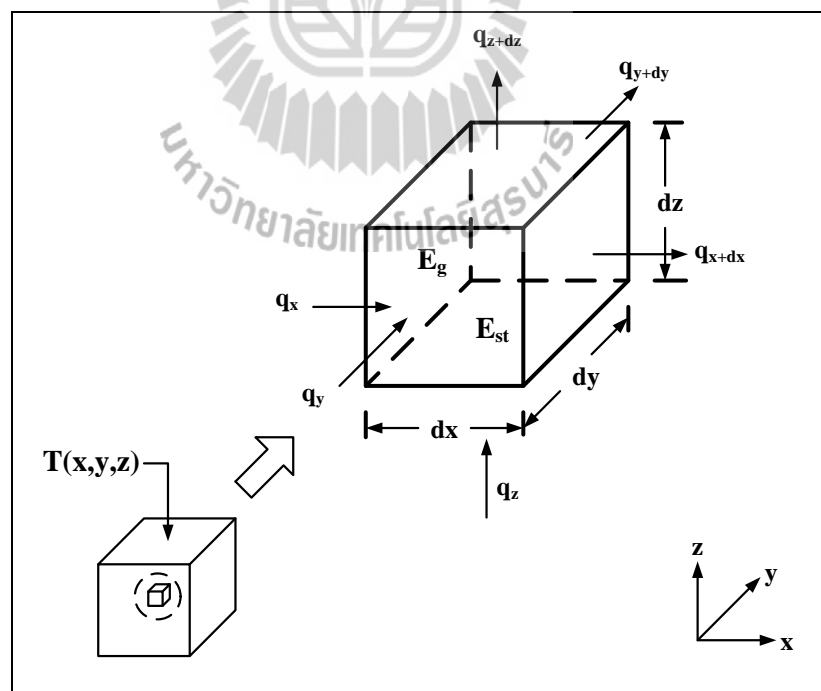
แนวคิดของกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์นั้นเกี่ยวข้องกับโดยตรงกับ กฎของการอนุรักษ์พลังงาน (conservation of energy) มีหลักการว่า “พลังงานสามารถเปลี่ยนรูปหรือถูกถ่ายโอนจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่งได้ แต่ไม่สามารถสร้างขึ้นใหม่หรือทำลายให้สูญสลายไปได้” ดังนั้นเมื่อ

พิจารณาการถ่ายโอนพลังงานระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อม จะพบว่าพลังงานรวมของระบบกับสิ่งแวดล้อมจะมีค่าคงที่ เช่น ในกระบวนการที่ระบบได้รับพลังงานจากสิ่งแวดล้อม ปริมาณพลังงานที่ระบบได้รับจะเท่ากับปริมาณพลังงานที่ระบบสูญเสีย ซึ่งสามารถแสดงการถ่ายโอนพลังงานของระบบใด ๆ (สมชาย อัครทิวา และ ขวัญจิต วงษ์ชาติ, 2545) ได้ดังนี้

$$E_{in} + E_g - E_{st} = E_{out} \quad (3.27)$$

เมื่อ  $E_{in}$  คือ พลังงานที่เข้าสู่ระบบ  
 $E_g$  คือ พลังงานก่อกำเนิด  
 $E_{st}$  คือ พลังงานที่สะสมในระบบ  
 $E_{out}$  คือ พลังงานที่ออกจากระบบ

ในการวิเคราะห์การถ่ายโอนความร้อน ต้องกำหนดปริมาตรควบคุม (control volume) เพื่อสร้างขอบเขตของสมมติฐานในการศึกษา ดังแสดงตัวอย่างได้ดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 ปริมาตรควบคุมและทิศทางการถ่ายโอนความร้อนแบบ 3 มิติ

จากการกำหนดปริมาณความร้อนในรูปแบบ 3 มิติ พลังงานที่เข้าสู่ระบบจะได้ ดังนี้

$$E_{in} = q_x + q_y + q_z \quad (3.28)$$

พลังงานความร้อนที่เข้าสู่ระบบ  $q_x$   $q_y$  และ  $q_z$  ขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -k_x dydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$q_y = -k_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.30)$$

$$q_z = -k_z dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.31)$$

เมื่อ  $k_x$   $k_y$  และ  $k_z$  คือ สัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ในแนวแกน x y และ z ตามลำดับ ดังนั้น แทนสมการที่ (3.29), (3.30) และ (3.31) ลงในสมการที่ (3.28) จะได้

$$E_{in} = -k_x dydz \frac{\partial T}{\partial x} - k_y dx dz \frac{\partial T}{\partial y} - k_z dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.32)$$

ส่วนพลังงานที่ออกจากระบบ จะได้ดังนี้

$$E_{out} = (q_{x+dx}) + (q_{y+dy}) + (q_{z+dz}) \quad (3.33)$$

พลังงานความร้อนที่ออกจากระบบ  $q_{x+dx}$   $q_{y+dy}$  และ  $q_{z+dz}$  เมื่อ  $q_x$   $q_y$  และ  $q_z$  ไหลผ่านระยะ dx dy และ dz โดยอาศัยการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ ดังนี้

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (3.34)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (3.35)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (3.36)$$

ดังนั้น แทนสมการที่ (3.34), (3.35) และ (3.36) ลงในสมการที่ (3.33) จะได้

$$E_{out} = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) + \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) + \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) \quad (3.37)$$

ส่วนพลังงานก่อกำเนิดจะเกิดขึ้นเมื่อมีการส่งถ่ายพลังงานเข้าไปในระบบ แล้วปลดปล่อยพลังงานในรูปของพลังงานเคมี พลังงานไฟฟ้า พลังงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และ พลังงานนิวเคลียร์ เป็นต้น สามารถแสดงในรูปสมการภายใต้ปริมาตรควบคุมที่ศึกษาในรูปแบบ 3 มิติได้ดังนี้

$$E_g = Q dx dy dz \quad (3.38)$$

เมื่อ  $Q$  คือ ปริมาณความร้อนที่ผลิตเอง (internal heat generation)

และพลังงานที่สะสมในระบบ เป็นการสะสมพลังงานในรูปต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นพลังงานความร้อนสัมผัส ความร้อนแฝง พลังงานในรูปอื่นๆ เช่น พลังงานจลน์ พลังงานศักย์ รวมไปถึงพลังงานทางเคมี ได้แก่ พลังงานพันธะ เป็นต้น แสดงในรูปสมการได้ดังนี้

$$E_{st} = \rho_m c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (3.39)$$

เมื่อ  $\rho_m$  คือ ความหนาแน่นมวล (mass density)

- c คือ ความจุความร้อนจำเพาะ (specific heat capacity)  
t คือ เวลา (time)

ดังนั้น แทนสมการที่ (3.28), (3.37), (3.38) และ (3.39) ลงในสมการที่ (3.27) จะได้

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = \rho_m c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz - Q dx dy dz \quad (3.40)$$

หรือจัดรูปใหม่โดยแทนสมการที่ (3.29) (3.30) และ (3.31) ลงในสมการที่ (3.40) จะได้

$$\begin{aligned} k_x dy dz \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx + k_y dx dz \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dy + k_z dx dy \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} dz \\ = \rho_m c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz - Q dx dy dz \end{aligned} \quad (3.41)$$

หรือจัดให้อยู่ในรูปสมการความร้อน ดังนี้

$$k_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + Q = \rho_m c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.42)$$

### 3.4.2 กลไกการถ่ายโอนความร้อน

กลไกการถ่ายโอนความร้อนเป็นพารามิเตอร์ที่มีความสำคัญต่อการคำนวณค่าอุณหภูมิ เป็นการถ่ายโอนพลังงานจากระบบที่มีการเชื่อมกัน ไปยังอุณหภูมิต่าง ๆ กันไปขึ้นกับสภาวะแวดล้อม อาจเกิดขึ้นพร้อมกันหรือเกิดเฉพาะกลไกใดกลไกหนึ่งก็ได้ กลไกการถ่ายโอนความร้อนมี 3 แบบ คือ การนำความร้อน (conduction) การพาความร้อน (convection) และการแผ่รังสีความร้อน (radiation)

#### การนำความร้อน

การนำความร้อนเป็นการถ่ายโอนความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำภายในตัวกลางเดียวกันหรือระหว่างตัวกลางต่างชนิดที่อยู่ติดกัน ซึ่งการถ่ายโอนความร้อนเกิดจากผลของการเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายในตัวกลาง สมการที่ใช้ในการคำนวณหาปริมาณ



การนำความร้อนถูกเสนอขึ้นปี ค.ศ. 1822 โดยนักวิทยาศาสตร์ฝรั่งเศสชื่อ โจเซฟ ฟูเรียร์ (Joseph Fourier) โดยรูปสมการดังนี้

$$\dot{Q}_{cond} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.43)$$

เมื่อ  $\dot{Q}_{cond}$  คือ อัตราการนำความร้อน  
 $A$  คือ พื้นที่ในการถ่ายโอนความร้อน

### การพาความร้อน

การพาความร้อนเป็นการถ่ายโอนความร้อนระหว่างผิวของของแข็งกับของไหลที่มีการเคลื่อนที่ หรือกล่าวได้ว่า เป็นปรากฏการณ์การเคลื่อนที่ของพลังงาน จากแหล่งอุณหภูมิสูงไปยังอุณหภูมิต่ำ โดยที่โมเลกุลตัวกลางมีการเคลื่อนที่ไปด้วย ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของลมที่ผ่านหน้าขดลวดความร้อน ลมดังกล่าวก็จะมีอุณหภูมิสูงตามไปด้วย ซึ่งการพาความร้อนมี 2 แบบคือ การพาความร้อนอย่างไม่อิสระ (forced convection) เกิดขึ้นเมื่อมีแรงภายนอกมาบังคับให้ของไหลเคลื่อนที่ผ่านผิววัตถุที่ร้อนกว่าหรือเย็นกว่า เช่น การใช้พัดลมเป่าอากาศให้เกิดการเคลื่อนที่ผ่านถ้วยกาแฟร้อน เป็นต้น และการพาความร้อนอย่างอิสระ (free convection) เกิดขึ้นเมื่อของไหลเกิดการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงลอยตัว ทำให้เกิดความแตกต่างของความหนาแน่นของของไหลในบริเวณใกล้กับของแข็ง อันเป็นผลจากความแตกต่างของอุณหภูมิในชั้นของของไหล โดยความร้อนจากถ้วยกาแฟจะทำให้อากาศมีความหนาแน่นต่ำลง (เบา) จึงเกิดการเคลื่อนที่ขึ้นด้านบน ขณะเดียวกันอากาศที่เย็นกว่า มีความหนาแน่นสูงกว่าจะเคลื่อนที่มาแทนที่

สมการในการหาอัตราการพาความร้อนจะปรากฏอยู่ในรูป กฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's cooling law) ดังนี้

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty) \quad (3.44)$$

เมื่อ  $h$  คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (convection heat transfer coefficient) ที่ผิวสัมผัสระหว่างของไหลกับวัตถุ

$T_s$  คือ อุณหภูมิของผิววัตถุ

$T_\infty$  คือ อุณหภูมิของของไหลที่อยู่ห่างออกไปจากผิววัตถุ

### การแผ่รังสีความร้อน

การแผ่รังสีความร้อนเป็นการถ่ายโอนความร้อนโดยไม่ต้องอาศัยตัวกลาง ความร้อนจะเคลื่อนที่ไปในรูปคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า และจะเกิดขึ้นได้ดีในบริเวณที่เป็นสุญญากาศ เมื่อพิจารณาการถ่ายโอนความร้อนระหว่างวัตถุใดๆ จะสามารถคำนวณการแผ่รังสีความร้อนได้ ดังนี้

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \epsilon_c \sigma_s (T_s^4 - T_\infty^4) \quad (3.45)$$

เมื่อ  $\epsilon_c$  คือ ค่าสภาพเปล่งรังสี (emissivity)

$\sigma_s$  คือ ค่าคงที่สเตฟาน-โบลทซ์มันน์ (Stefan-Boltzmann constant) มีค่าเท่ากับ  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

## 3.5 อายุการใช้งานของหม้อแปลง

### 3.5.1 จำนวนที่ใช้ในหม้อแปลง (คัมสันดี คาโรจน์, 2541)

หม้อแปลงเป็นอุปกรณ์ไฟฟ้า ที่ไม่มีส่วนประกอบตัวใดเคลื่อนที่ขณะทำงานยกเว้นอุปกรณ์เปลี่ยนแทปในขณะที่หม้อแปลงจ่ายโหลด และอุปกรณ์ช่วยในการระบายความร้อน เช่น บั๊มหรือพัดลม ดังนั้นส่วนประกอบที่จะสึกหรอไปเนื่องจากการเสียดสี จึงไม่มีเหมือนกับอุปกรณ์อย่างมอเตอร์ แต่อุปกรณ์ที่เป็นจำนวนของหม้อแปลง ซึ่งส่วนใหญ่เป็นกระดาษที่มีพวกเยื่อไม้เป็นส่วนประกอบหลัก และในสภาวะปกติพบว่า อายุการใช้งานของหม้อแปลงจะขึ้นอยู่กับอายุการใช้งานของฉนวน ซึ่งสมมติฐานนี้เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป

ในหม้อแปลงแบบจุ่มน้ำมัน และหม้อแปลงแบบแห้งจะมีกระดาษ หรือกระดาษอัดทำหน้าที่เป็นฉนวนหลัก ฉนวนเหล่านี้จะมีส่วนประกอบหลักเป็นพวกเยื่อไม้ตามธรรมชาติ สำหรับหม้อแปลงแบบจุ่มน้ำมันจะมีน้ำมันหม้อแปลงเป็นส่วนประกอบด้วย โดยจะทำหน้าที่เป็นทั้งฉนวนและตัวกลางในการระบายความร้อนด้วย

### คุณสมบัติของฉนวนประเภทกระดาษ

ทั้งหม้อแปลงแบบจุ่มน้ำมันและหม้อแปลงแบบแห้งจะใช้ฉนวนประเภทกระดาษเป็นฉนวนกันระหว่างขดลวด ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาถึงผลของความร้อนที่มีต่ออัตราการ

เสื่อมสภาพของฉนวนประเภทกระดาษ ซึ่งโดยทั่วไปคุณสมบัติของฉนวนประเภทกระดาษสามารถแยกได้เป็น 4 ประเภท

- คุณสมบัติทางกายภาพ หมายถึงคุณสมบัติที่สามารถบ่งบอกลักษณะต่างๆ เช่น ชนิดของฉนวน ความหนาแน่น ความชื้น ความสามารถในการดูดซับน้ำและน้ำมัน ค่าความซาบซึมทางแม่เหล็ก (permeability) เป็นต้น
- คุณสมบัติทางกล หมายถึงความคงทนของฉนวนที่จะทนต่อ แรงดึง แรงอัด แรงเฉือน และความคงทนต่อความร้อน เป็นต้น
- คุณสมบัติทางไฟฟ้า หมายถึงความคงทนต่อค่าแรงดัน หรือกระแสในสภาวะปกติ และในสภาวะที่เกิดกระแสหรือแรงดันอิมพัลส์ เป็นต้น
- คุณสมบัติทางเคมี หมายถึงคุณสมบัติบางอย่าง เช่นความสามารถในการนำไฟฟ้า ของฉนวนในน้ำที่มีค่า pH ต่างกัน และสิ่งเจือปนกันต่างๆออกไป เป็นต้น

โดยทั่วไปการวัดคุณสมบัติทางกลของฉนวนประเภทกระดาษ สามารถวัดได้หลายวิธี โดยวัดค่าที่นิยมใช้คือค่าความแข็งแรงต่อแรงดึง (tensile strength) ในปัจจุบันความสัมพันธ์ระหว่างอายุการใช้งานของฉนวน กับความร้อนที่เกิดกับความเครียดทางไฟฟ้า หรือความเครียดทางกล ยังไม่มีการหาความสัมพันธ์ที่แน่นอน จะมีก็แต่ความสัมพันธ์ทางความร้อน และการหาอายุการใช้งานของฉนวนในปัจจุบันที่นิยมใช้กันโดยทั่วไป จะเป็นการคิดโดยคำนึงเฉพาะผลทางความร้อนเป็นหลัก

#### คุณสมบัติของฉนวนประเภทน้ำมัน

ฉนวนประเภทนี้จะใช้ในหม้อแปลงแบบน้ำมันเท่านั้น โดยทำหน้าที่หลักสองอย่างคือเป็นฉนวนระหว่างขดลวดแรงดันสูงและขดลวดแรงดันต่ำและยังเป็นตัวกลางระบายความร้อนที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กและขดลวด ออกไปสู่ตัวถังหรือตัวกลางระบายความร้อนแบบอื่นต่อไป โดยทั่วไปคุณสมบัติของฉนวนประเภทน้ำมันสามารถแยกได้เป็น 3 ประเภท คือ

- คุณสมบัติทางกายภาพ หมายถึงคุณสมบัติที่สามารถบ่งบอกลักษณะต่างๆ ของน้ำมัน เช่น ชนิดของร่าคาน้ำมัน ความหนาแน่น ปริมาณสิ่งเจือปนในน้ำมัน จุดวาบไฟ ความหนืด เป็นต้น
- คุณสมบัติทางไฟฟ้า หมายถึงความคงทนต่อค่าแรงดันแบรกดาวน์ ค่าความต้านทานจำเพาะ ตัวประกอบการกระจายไดอิเล็กตริก เป็นต้น
- คุณสมบัติทางเคมี หมายถึงคุณสมบัติบางอย่าง เช่นความเป็นกลางของฉนวน เสถียรภาพในการออกซิเดชั่น การตกตะกอนของสิ่งเจือปน การกัดกร่อนที่เกิดจากซัลเฟอร์ เป็นต้น

เนื่องจากว่าน้ำมันในหม้อแปลงสามารถที่จะเปลี่ยนถ่ายได้เมื่อครบตามระยะเวลาที่กำหนด ฉนวนน้ำมันนี้จึงไม่สามารถที่จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ ของอายุการใช้งานที่ลดลงตามเวลาได้เหมือนอย่างในกรณีของฉนวนประเภทกระดาษ แต่อย่างไรก็ตามอายุการใช้งานของหม้อแปลงก็ยังมี ความเกี่ยวข้องเนื่องกับคุณสมบัติต่างๆ ของน้ำมันอยู่ เพราะฉนวนแบบกระดาษยังคงจุ่มอยู่ในน้ำมัน หม้อแปลงของหม้อแปลงแบบน้ำมัน โดยในขณะที่ฉนวนแบบกระดาษจุ่มอยู่ในน้ำมันที่มีอุณหภูมิสูง ความแข็งแรงทางกล และความแข็งแรงทางไดอิเล็กตริก (dielectric strength) จะมีค่าลดลงและอุณหภูมิที่สูงมากจนเกินไป จะทำให้กระดาษเปราะและองค์ประกอบภายในของฉนวนเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เลวลง ทำให้ค่าและความแข็งแรงทางไดอิเล็กตริกลดลงด้วย นอกจากนี้ฟองอากาศที่เกิดขึ้นในหม้อแปลงขณะที่อุณหภูมิของน้ำมันสูงขึ้นกว่า  $140^{\circ}\text{C}$  หรือเกิดจากการที่ภายในหม้อแปลงมีการเปลี่ยนแปลงความดันอย่างกะทันหันซึ่งได้มีการทดลองจ่ายโหลดเกินพิกัดจาก 100% - 180% แล้วทำให้หม้อแปลงมีความดันลดลงอย่างกะทันหัน โดยการฉีดละอองน้ำคลุมตัวถังหม้อแปลง จะพบว่าฟองอากาศเกิดขึ้น โดยส่วนใหญ่จะปรากฏระหว่างขดลวดแรงดันต่ำกับขดลวดแรงดันสูง และนอกจากนั้น ได้มีการวัดค่าความคงทนของหม้อแปลงต่อแรงดันอิมพัลส์พบว่ามีความคงทนกว่าปกติ 10% และได้มีการทดลองคล้ายกัน แต่ระดับโหลดที่ใช้ประมาณ 260% พบว่าความคงทนของหม้อแปลงต่อแรงดันอิมพัลส์ เหลือเพียง 60% ของค่าปกติ ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า ฟองอากาศที่เกิดขึ้นจะทำให้ค่าความแข็งแรงทาง ไดอิเล็กตริกลดลง

จากตัวอย่างนี้พบว่าน้ำมันหม้อแปลงยังเป็นปัจจัยอีกปัจจัยหนึ่ง ที่ทำให้อายุการใช้งานของหม้อแปลงลดลงได้ แต่ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นต่างๆ ในหม้อแปลงไม่สามารถที่จะคาดการณ์ล่วงหน้าได้เป็นระยะเวลานานๆ จึงไม่พบว่ามีผู้นำผลที่เกิดจากฉนวนประเภทน้ำมันหม้อแปลงมารวมประกอบ ในแบบจำลองของการประมาณอายุการใช้งานของหม้อแปลง

### 3.5.2 ปัจจัยที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง

การที่ฉนวนมีการเสื่อมสภาพลงนั้น ก็ขึ้นกับสภาพแวดล้อม ที่ฉนวนต้องเผชิญนั่นเอง ซึ่งสภาพแวดล้อมต่างๆ ที่มีผลต่อการเสื่อมสภาพของฉนวนมี ดังนี้

**อุณหภูมิ** อุณหภูมินับเป็นปัจจัยหลัก ที่ทำให้ฉนวนเสื่อมสภาพลงได้มากที่สุด เพราะขณะที่ฉนวนต้องอยู่ในสภาพที่มีอุณหภูมิสูงเป็นเวลานานๆ ความร้อนจะไปทำลายความเป็นเส้นใยของฉนวน ทำให้โมเลกุลของเซลลูโลสเกิดการแตกแยกเป็น โมเลกุลขนาดเล็กกว่าเดิม และผลที่ตามมาคือความแข็งแรงต่อแรงดึง จะมีค่าลดลงมาก

**ความชื้น** พันธะของออกซิเจน ระหว่างอะตอมของกลูโคส จะเกิดแตกออกเป็น โมเลกุลของไฮดรอกไซด์ (OH) ปรากฏอยู่ข้างละหนึ่ง โมเลกุลใน โมเลกุลของกลูโคส ซึ่งมีผลทำให้ระดับขั้นของพอลิเมอร์ไรเซชัน (Degree of Polymerisation : DP) ลดลง

**ออกซิเจน** เมื่อมีก๊าซออกซิเจนเกิดขึ้น ก๊าซออกซิเจนจะไปจับกับอะตอมของคาร์บอนเกิดเป็นสารประกอบพวกอัลดีไฮด์ (Aldehydes) และกรดซึ่งจะทำให้เกิดน้ำ , คาร์บอนมอนอกไซด์ (CO) และคาร์บอนไดออกไซด์ (CO<sub>2</sub>) จะมีผลทำให้ความแข็งแรงของพันธะในโมเลกุลของกลูโคสอ่อนลง

### 3.5.3 อายุการใช้งานทางความร้อน

ในการหาอายุการใช้งานทางความร้อนของหม้อแปลงนั้น จำเป็นที่จะต้องกล่าวถึงอุณหภูมิของจุดสูงสุดเสียก่อน ซึ่งอุณหภูมิของจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุด หมายถึง อุณหภูมิที่สูงที่สุดที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลงในขณะที่จ่ายโหลด ซึ่งสภาพในการใช้งานจริงจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดนี้อาจจะมีการเปลี่ยนแปลงไปตามสภาวะของโหลด ที่หม้อแปลงต้องจ่ายอันเนื่องมาจาก รูปแบบการกระจายของฟลักซ์แม่เหล็กที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งผลกระทบของการกระจายของฟลักซ์แม่เหล็กที่แตกต่างกันนี้ จะมีผลมากในหม้อแปลงแบบฉนวนแห้ง แต่จะมีผลน้อยในหม้อแปลงแบบน้ำมัน ทั้งนี้เพราะในหม้อแปลงแบบฉนวนแห้ง จุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดจะอยู่บริเวณตอนบนของขดลวด อันเนื่องมาจากการพาความร้อนของน้ำมันที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลง

ในการคำนวณหาอายุการใช้งานของหม้อแปลงเนื่องจากผลทางความร้อนนี้ จะสมมติให้ จุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดนี้มีตำแหน่งที่คงที่ตลอดเวลา โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามสภาวะการจ่ายโหลด ซึ่งการนิยามแบบนี้ จะทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า จุดที่ฉนวนจะมีการเสื่อมสภาพลงได้มากที่สุด จะเกิดขึ้นที่จุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดนั่นเอง

#### ทฤษฎีที่ใช้ในการหาอายุการใช้งานที่ลดลงไป

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่าในฉนวนประเภทกระดาษนั้นประกอบด้วยเซลลูโลสเป็นองค์ประกอบหลัก ซึ่งเป็นสารประเภทอินทรีย์ และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปสำหรับการศึกษากันในเรื่องนี้ ว่าการเสื่อมสภาพของสารอินทรีย์ มีอัตราการเสื่อมสภาพเป็นรูปกราฟเอ็กโปเนนเชียลเป็นไปตามทฤษฎีของ Arrhenius ที่ว่าอัตราการเสื่อมสภาพทางความร้อนของสารอินทรีย์และอินทรีย์จะเป็นผลสะสมของอุณหภูมิ และระยะเวลาการใช้งาน ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$\frac{dR}{dt} = Ae^{-\frac{E}{KT}} \quad (3.46)$$

หรือ

$$\ln(t) = \left[ \frac{E}{K} \right] \frac{1}{T} + B \quad (3.47)$$

หรือ

$$\log(\text{Life}(t)) = A_{10} + \frac{B_{10}}{T} \quad (3.48)$$

โดยที่	$\frac{dR}{dt}$	คือ	อัตราการเสื่อมสภาพฉนวน
	$A, B$	คือ	ค่าคงที่ขึ้นอยู่กับฉนวนแต่ละชนิด
	$A_{10}, B_{10}$	คือ	ค่าคงที่ในระบบฐานสิบขึ้นอยู่กับฉนวนแต่ละชนิด
	$E$	คือ	ค่าพลังงานกระตุ้นของวัสดุ (activation energy)
	$K$	คือ	ค่าคงที่ของ Boltzmann ( $1.38 \times 10^{-23}$ J/K)
	$T$	คือ	เวลาเป็นชั่วโมง
	$T$	คือ	อุณหภูมิสัมบูรณ์หน่วยของเคลวิน โดยมีค่าเท่ากับ $\theta_{hs} + 273$ โดย $\theta_{hs}$ เป็นอุณหภูมิหน่วยของเซลเซียส ณ จุดที่มีอุณหภูมิสูงสุด

สมการที่ (3.46), (3.47) และ (3.48) ส่วนเป็นสมการที่อธิบายทฤษฎีของ Arrhenius ทั้งสิ้นแต่อยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป จากสมการที่ (3.47) ถ้านำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง  $\ln(t)$  กับ  $\frac{1}{T}$  จะได้ความสัมพันธ์เป็นกราฟเส้นตรง ที่มีความชันกราฟเท่ากับ  $\frac{E}{K}$  ซึ่งค่านี้จะ เป็นคุณสมบัติประจำตัวของสารแต่ละชนิด และโดยทั่วไปค่า  $E$  ของฉนวนจะมีค่าตั้งแต่ 0.1 eV ไปจนถึง 1.15 eV โดยปริมาณสารที่มีค่าพลังงานที่ต่ำกว่า 0.5 eV จะมีอยู่ 3% เท่านั้น

ความชันที่ได้จากสมการ (3.47) นั้นมีความสำคัญมากในการหาอายุการใช้งานที่ลดลงของฉนวนโดยสามารถแสดงได้ดังนี้ จากสมการที่ (3.47) เมื่อพิจารณาจุดสองจุด ระหว่างอุณหภูมิ  $T_2$  และ  $T_1$  จะได้ว่า

$$\ln(t_1) - \ln(t_2) = \left[ \frac{E}{K} \right] \left[ \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right] \quad (3.49)$$

สมมติให้ช่วงเวลาดังกล่าวมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจาก  $T_2$  ไปเป็น  $T_1$  ซึ่งทำให้เราเขียนได้ว่า  $T_1 = T_2 + \Delta T$  แล้วแทนลงในสมการที่ (3.49) จะได้ว่า

$$\ln(t_1) - \ln(t_2) = \left[ \frac{E}{K} \right] \left[ \frac{1}{T_2 + \Delta T} - \frac{1}{T_2} \right] \quad (3.50)$$

สามารถเขียนเป็นสมการรูปสุดท้ายได้ดังนี้

$$t_1 = t_2 e^{-\left(\frac{E}{K}\right) \frac{\Delta T}{T_2(T_2 + \Delta T)}} \quad (3.51)$$

### 3.5.4 ความร้อนที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลง

#### กำลังสูญเสียในหม้อแปลง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดปกติ คือ ใช้งานที่กระแสและแรงดันเป็นรูปไซน์ (sinusoidal) เท่านั้น กำลังสูญเสียในหม้อแปลงสามารถแบ่งได้เป็น กำลังสูญเสียขณะไม่มีโหลด (no-load loss หรือ excitation loss) กำลังสูญเสียขณะมีโหลด (load loss หรือ impedance loss) และกำลังสูญเสียรวมซึ่งเท่ากับกำลังสูญเสียขณะไม่มีโหลดรวมกับกำลังสูญเสียขณะมีโหลด

กำลังสูญเสียขณะมีโหลดยังสามารถแยกได้เป็น กำลังสูญเสียเนื่องจากความต้านทาน ( $I^2R$  loss) กับกำลังสูญเสียปลิกย่อย (stray loss) ซึ่งกำลังสูญเสียปลิกย่อยยังแบ่งได้เป็น กำลังสูญเสียปลิกย่อยภายในขดลวด กับกำลังสูญเสียปลิกย่อยที่เกิดขึ้นภายในส่วนประกอบอื่นๆ ( $P_{OSL}$ ) เช่น แกนเหล็ก ตัวถัง เป็นต้น กำลังสูญเสียปลิกย่อยภายในขดลวดแบ่งเป็นกำลังสูญเสียเนื่องจากกระแสวนในขดลวดและกระแสวนระหว่างขดลวดซึ่งรวมเรียกว่า  $P_{EC}$  เพราะฉะนั้นกำลังสูญเสียขณะมีโหลด ( $P_{LL}$ ) จึงเป็นดังสมการ

$$P_{LL} = I^2R + P_{EC} + P_{OSL} \quad (3.52)$$

### การส่งผ่านความร้อนภายในหม้อแปลง

ในหม้อแปลงแบบจุ่มน้ำมัน ความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิของขดลวดกับน้ำมัน จึงทำให้เกิดการส่งผ่านความร้อนจากขดลวดไปยังน้ำมัน ต่อไปยังตัวถังและออกสู่บรรยากาศภายนอกที่สุด ซึ่งถ้าขดลวดที่ใช้เป็นขดลวดขนาดใหญ่และมีฉนวนหนา ความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างขดลวดกับน้ำมันจะสูง ในขณะที่ขดลวดเส้นเล็กและฉนวนบาง ซึ่งมีพื้นที่สัมผัสมากกว่า จะทำให้การส่งผ่านความร้อนเกิดขึ้นได้ดีกว่า มีผลทำให้ความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างขดลวดกับน้ำมันมีค่าน้อย ดังนั้นความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างขดลวดกับน้ำมัน จึงขึ้นอยู่กับโครงสร้างของขดลวด และกำลังสูญเสียที่เกิดขึ้นภายในขดลวด การส่งผ่านความร้อนที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลงสามารถเกิดขึ้นได้ 3 วิธีการด้วยกัน คือ การนำความร้อน (conduction) การแผ่รังสี (radiation) การพาความร้อน (convection)

การส่งผ่านความร้อนโดยการนำความร้อนในหม้อแปลง จะมีความสำคัญน้อยที่สุด และการพาความร้อนจะเป็นการส่งผ่านความร้อนที่มีความสำคัญมากที่สุด ในการวิเคราะห์ปัญหาที่เกี่ยวกับความร้อนที่เกิดขึ้นในหม้อแปลง จึงสามารถวิเคราะห์ได้ด้วยสมการส่งผ่านความร้อน แต่โดยส่วนใหญ่แล้วสมการต่างๆ ที่มีการใช้กันอยู่ในปัจจุบัน จะเป็นสมการหรือสูตรที่ได้จากการทดลอง โดยมีพื้นฐานมาจากสมการเบื้องต้นของการส่งผ่านความร้อน

### การควบคุมความร้อนภายในหม้อแปลง

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า ความร้อนที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลง เกิดจากกำลังสูญเสียที่เกิดขึ้นภายในตัวหม้อแปลงเอง ซึ่งเกิดขึ้นบริเวณขดลวดและแกนเหล็กเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งความร้อนที่เกิดขึ้นนี้ ถ้ามีค่าสูงเกินกว่าพิกัดของฉนวนหม้อแปลงจะทำให้หม้อแปลงเกิดการเสียหายหรืออย่างน้อยที่สุดอายุการใช้งานของหม้อแปลงจะสั้นลง

ด้วยเหตุผลทางเศรษฐกิจ เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการใช้งานหม้อแปลงที่มีพิกัดกำลังสูงมากๆ การระบายความร้อนที่เกิดขึ้นภายในขดลวดและแกนเหล็กของหม้อแปลง จึงเป็นเรื่องสำคัญที่ต้องคำนึงถึง เพราะพิกัดของหม้อแปลงนั้น นอกจากจะพิจารณาได้จากค่ากำลังสูญเสียที่เกิดขึ้นในหม้อแปลงแล้ว ยังสามารถพิจารณาได้จากค่าอุณหภูมิที่เพิ่มสูงขึ้นขณะไม่มีโหลดอีกด้วย หมายความว่าในกรณีที่หม้อแปลงสองลูกที่มีลักษณะทางกายภาพคล้ายกันแต่ความสามารถในการระบายความร้อนของหม้อแปลง ออกสู่บรรยากาศภายนอกแตกต่างกัน พิกัดของหม้อแปลง ทั้งสองก็แตกต่างกันด้วย โดยหม้อแปลงตัวที่สามารถระบายความร้อนออกสู่บรรยากาศภายนอกได้ดีกว่าจะมีพิกัดโหลดที่สูงกว่า



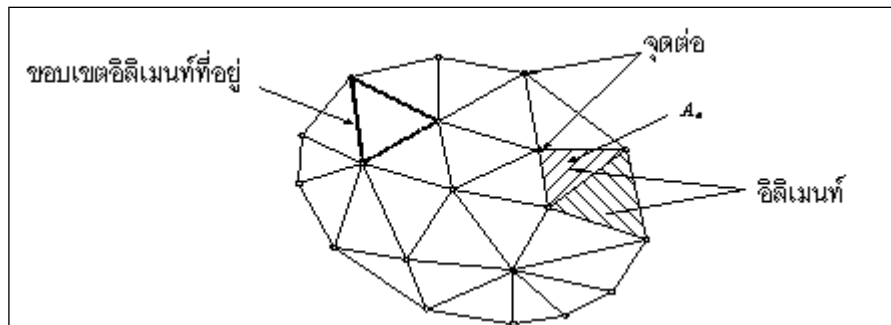
### 3.6 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้คำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) โดยการแบ่งรูปร่างขอบเขตของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ แล้วสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ และเอลิเมนต์ต่าง ๆ จะเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่คำนวณหาค่าผลเฉลย สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิจัยนี้จะดำเนินการคำนวณทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ

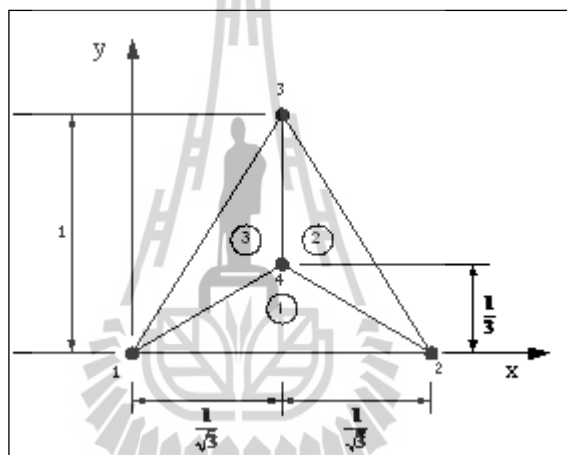
#### 3.6.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ (เผด็จ เผ่าละออ, 2549)

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ คือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นพื้นที่หลาย ๆ ส่วนที่เรียกว่าเอลิเมนต์ โดยที่การกระจัด และแรงภายในของแต่ละเอลิเมนต์ ณ จุดที่เอลิเมนต์ต่อโงกันจะต้องเข้ากันได้และสมดุล ซึ่งเอลิเมนต์ต่าง ๆ นี้ จะขึ้นอยู่กับความละเอียดของแต่ละงานว่าต้องการรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากเท่าใด ซึ่งถ้าพิจารณาแบบ 2 มิติอาจอยู่ในรูปลักษณะของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ โดยค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ที่จะคำนวณออกมานั้นจะมีความแม่นยำขึ้นอยู่กับขนาด และจำนวนของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2542) โดยมีรายละเอียดดังนี้ คือ

1. แบ่งเอลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ (discretization) แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละเอลิเมนต์จะมีพื้นที่  $A_e$  ดังแสดงในรูปที่ 3.14 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งเอลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 2 มิติ (ระนาบ  $xy$ ) โดยใช้เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งประกอบไปด้วย โหนด (nodes) เอลิเมนต์ (elements) และขอบเขตของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายใน (interelement boundaries) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ เอลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด 3 เอลิเมนต์ 4 โหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.14 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์



รูปที่ 3.15 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อีลิเมนต์ 4 โหนด

ข้อมูลเบื้องต้นสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอีลิเมนต์ และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละโหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.15 พร้อมทั้งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.1 ลักษณะข้อมูลของอิลิเมนต์

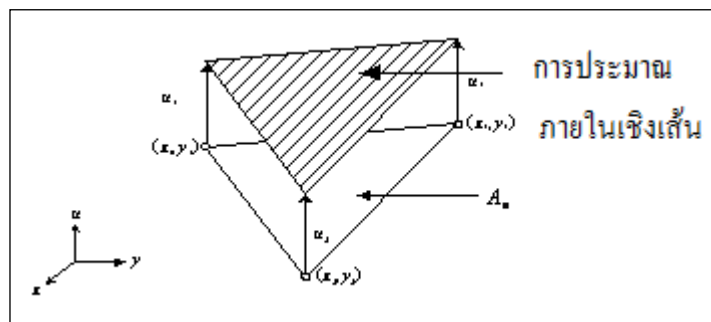
หมายเลขอิลิเมนต์	หมายเลขโหนด		
	โหนด $i$	โหนด $j$	โหนด $k$
1	1	2	4
2	4	2	3
3	1	4	3

หมายเหตุ : โหนด  $i$   $j$  และ  $k$  คือหมายเลขของโหนดที่  $i$   $j$  และ  $k$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตารางที่ 3.2 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด

หมายเลข โหนด	พิกัดแกน $x$	พิกัดแกน $y$
1	0	0
2	$2/\sqrt{3}$	0
3	$1/\sqrt{3}$	1
4	$1/\sqrt{3}$	$1/3$

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ (element interpolation function) อย่างในกรณีอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจะประกอบด้วย 3 โหนดที่มีตัวห้อย  $i$   $j$  และ  $k$  ซึ่งวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.16 (Bickford, 1994) ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอิลิเมนต์แบบเชิงเส้น (linear representation)



รูปที่ 3.16 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ตำแหน่งของโหนด  $(x_n, y_n)$   $n = i, j$  และ  $k$  เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า  $u_n$  โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิเลิเมนต์  $u_e(x, y)$  เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \quad (3.53)$$

โดยที่  $\alpha, \beta, \gamma$  เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโหนดทั้งสามดังนี้

$$u_e(x_i, y_i) = u_i = \alpha + \beta x_i + \gamma y_i$$

$$u_e(x_j, y_j) = u_j = \alpha + \beta x_j + \gamma y_j$$

$$u_e(x_k, y_k) = u_k = \alpha + \beta x_k + \gamma y_k$$

นำค่า  $\alpha, \beta, \gamma$  ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสามข้างต้น แทนค่ากลับลงไปในสมการที่ (3.53) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิเลิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y) = u_i N_i + u_j N_j + u_k N_k \quad (3.54)$$

ซึ่ง  $N_n$ ,  $n = i, j, k$  คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิเลิเมนต์

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2A_e} \quad (3.55)$$

โดยที่

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$	$b_i = y_j - y_k$	$c_i = x_k - x_j$
$a_j = x_k y_i - x_i y_k$	$b_j = y_k - y_i$	$c_j = x_i - x_k$
$a_k = x_i y_j - x_j y_i$	$b_k = y_i - y_j$	$c_k = x_j - x_i$

และ  $A_e$  คือ พื้นที่ของแต่ละอิเลิเมนต์ ซึ่ง  $2A_e$  หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$2A_e = \begin{bmatrix} I & x_i & y_i \\ I & x_j & y_j \\ I & x_k & y_k \end{bmatrix} = x_j(y_k - y_i) + x_i(y_j - y_k) + x_k(y_i - y_j) \quad (3.56)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมาที่มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

3. สร้างสมการของอีลิเมนต์ (element formulation) ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ซึ่งขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ อย่างเช่นกรณีสมการของอีลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้ยกมาเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.16 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{bmatrix}_e \quad (3.57)$$

ซึ่งเขียนโดยย่อได้ว่า  $[K]_e [u]_e = [f]_e$  โดย  $[u]_e$  คือ เมทริกซ์ตัวไม่ทราบค่าที่โหนด และตัวห้อย  $e$  แสดงให้ทราบว่า เป็นเมทริกซ์ระดับอีลิเมนต์ ซึ่งสมการของอีลิเมนต์ดังกล่าว จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นมาให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ การสร้างสมการของอีลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (3.57) สามารถทำได้โดย

- วิธีการโดยตรง (direct approach) วิธีนี้สามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่เข้าใจได้ง่าย ๆ อย่างเช่น ปัญหาต่าง ๆ ในรูปทรง 1 มิติเท่านั้น ซึ่งไม่สามารถขยายเปลี่ยนแปลงเพื่อนำไปใช้กับปัญหาใน 2 หรือ 3 มิติโดยทั่วไปได้

- วิธีการแปรผัน (variational approach) หลักการสำคัญของวิธีการนี้คือ จำเป็นจะต้องทำการหาหรือสร้างฟังก์ชัน ซึ่งเมื่อทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นแล้ว จะเป็นผลให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่กำลังสนใจอยู่ อย่างไรก็ตามวิธีการแปรผันเป็นวิธีการดั้งเดิมที่ใช้กันในช่วงต้น ๆ ของการพัฒนาวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทางด้านโครงสร้าง และยังมีจุดอ่อนอีกคือ จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ ซึ่งปัญหาหลาย ๆ ชนิดในทางปฏิบัติสามารถสร้างสมการอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันนั้นได้

- วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) วิธีนี้จะใช้วิธีการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชัน

แปรผันที่สอดคล้อง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์อิเลเมนต์สำหรับปัญหา โดยทั่ว ๆ ไป และถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน

4. นำสมการของแต่ละอิเลเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน (assembly) เป็นสมการรวมของระบบจากขั้นตอนที่ 1 หากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิเลเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  โหนด จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ โดยแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & \cdot & K_{nm} \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} \quad (3.58)$$

หรือเขียนโดยย่อได้ดังนี้  $[K]_{\text{sys}} [u]_{\text{sys}} = [f]_{\text{sys}}$  จากสมการที่ (3.58) เมทริกซ์  $[K]_{\text{sys}}$  จะมีคุณสมบัติของความเป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ  $[K]_{\text{sys}} = [K]_{\text{sys}}^T$  และมีคุณสมบัติของการจับกลุ่มกันของค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์บริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็นแถบ (Banded matrix) จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวน โหนดเป็นจำนวนมากเพื่อที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่เที่ยงตรง โดยสามารถพัฒนาให้เก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ไว้ในหน่วยความจำเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น

การนำสมการย่อยของแต่ละอิเลเมนต์มาประกอบกันเข้าเป็นสมการรวมของระบบ จำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งหลักการที่จะกล่าวนี้ เป็นหลักการที่ง่าย สามารถทำได้โดยสะดวก เหมาะกับรูปร่างของปัญหาที่มีอิเลเมนต์ย่อยจำนวนมาก ๆ และหลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยสามารถทำความเข้าใจได้จากตัวอย่างรูปร่างของปัญหาดังรูปที่ 3.15 กล่าวคือจะทำการสร้างสมการรวมของระบบซึ่งประกอบด้วย 3 อิเลเมนต์ 4 โหนด โดยจะแสดงการรวมของเมทริกซ์  $[K]_{\text{sys}}$  เพื่อเป็นตัวอย่าง

วิธีการนี้ทำได้โดยเขียนสมการของอิเลเมนต์ต่าง ๆ พร้อมทั้งกำกับหมายเลขของ โหนดทางแฉกบนและแฉกตั้งของแต่ละอิเลเมนต์ให้ถูกต้อง โดยจากรูปที่ 3.15  $[K]_e$  ของอิเลเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วย โหนดหมายเลข 1 2 และ 4 ส่วน  $[K]_e$  ของอิเลเมนต์ที่ 2 ประกอบด้วย โหนด

หมายเลข 2 3 และ 4 และ  $[K]_e$  ของอิลิเมนต์ที่ 3 ซึ่งเป็นอิลิเมนต์สุดท้ายประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 3 และ 4 โดยสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$[K]_{e1} = \begin{bmatrix} & (1) & (2) & (4) \\ (1) & a_1 & b_1 & c_1 \\ (2) & a_2 & b_2 & c_2 \\ (4) & a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$[K]_{e2} = \begin{bmatrix} & (2) & (3) & (4) \\ (2) & d_1 & e_1 & f_1 \\ (3) & d_2 & e_2 & f_2 \\ (4) & d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$[K]_{e3} = \begin{bmatrix} & (1) & (3) & (4) \\ (1) & g_1 & h_1 & i_1 \\ (3) & g_2 & h_2 & i_2 \\ (4) & g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

เมื่อมีหมายเลขกำกับทั้งทางแฉวนอนและแถวตั้งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมทริกซ์ของทุกอิลิเมนต์แล้ว จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวม  $[K]_{sys}$  เช่น ค่าสัมประสิทธิ์  $b_3$  ซึ่งอยู่ในแฉวนอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของอิลิเมนต์ย่อยที่ 1 จะไปปรากฏอยู่ในแฉวนอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ เป็นต้น

$$[K]_{sys} = \begin{bmatrix} & (1) & (2) & (3) & (4) \\ (1) & a_1 + g_1 & b_1 & h_1 & c_1 + i_1 \\ (2) & a_2 & b_2 + d_1 & e_1 & c_2 + f_1 \\ (3) & g_2 & d_2 & e_2 + h_2 & f_2 + i_2 \\ (4) & a_3 + g_3 & b_3 + d_3 & e_3 + h_3 & c_3 + f_3 + i_3 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

5. ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่สอดคล้องกับปัญหาลงในสมการรวมของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่โหนด

6. กำหนดหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ต้องการต่อไป เมื่อทราบค่าผลลัพธ์ที่โหนดต่าง ๆ แล้วสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์นี้ต่อไปได้

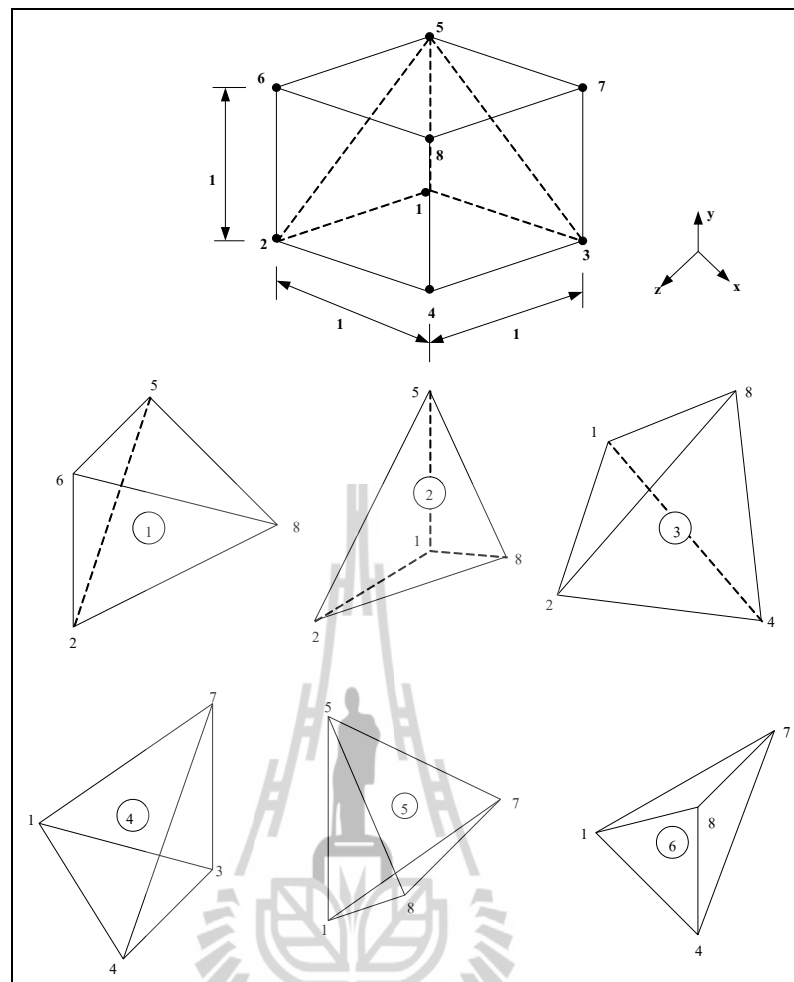
จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอน จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีที่มีแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีส่วนที่สำคัญที่สุดคือการสร้างสมการของอิลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำหนด และในขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้จะนำไปพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณต่อไป

### 3.6.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ (อาานนท์ อิศรมงคลรักษ์, 2552)

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติจะดำเนินการคล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ ที่กล่าวมาข้างต้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติก็ยังคงประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอนเช่นกัน โดยมีรายละเอียดดังนี้ คือ

1. แบ่งอิลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นอิลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละอิลิเมนต์จะมีความเป็นปริมาตร ดังแสดงในรูปที่ 3.17 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งอิลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 3 มิติ (ระนาบ  $xyz$ ) โดยใช้อิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อิลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าทั้งหมด 6 อิลิเมนต์ 8 โหนด ซึ่งข้อมูลเบื้องต้นสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอิลิเมนต์และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละโหนด ซึ่งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ





รูปที่ 3.17 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อลิเมนต์ 8 โหนด เมื่อพิจารณาอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

ตารางที่ 3.3 ลักษณะข้อมูลของอิลิเมนต์

หมายเลข อิลิเมนต์	หมายเลขโหนด			
	โหนด $i$	โหนด $j$	โหนด $k$	โหนด $l$
1	2	8	5	6
2	1	2	8	5
3	1	2	4	8
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

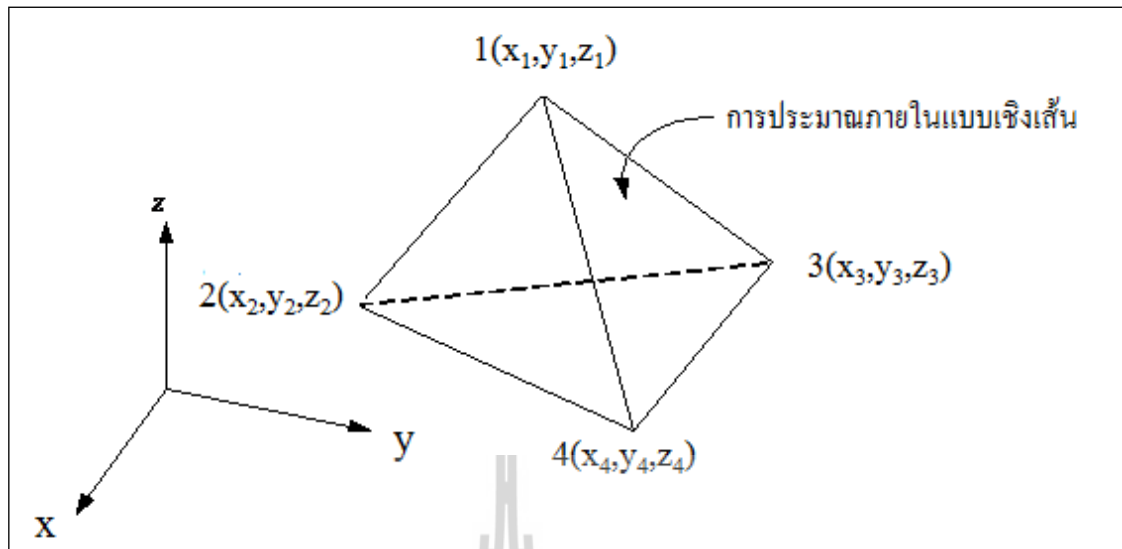
ตารางที่ 3.4 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด

หมายเลข โหนด	พิกัดแกน $x$	พิกัดแกน $y$	พิกัดแกน $z$
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0
4	1	0	1
5	0	1	0
6	0	1	1
7	1	1	0
8	1	1	1

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ อย่างในกรณีอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าจะประกอบด้วย 4 โหนดที่มีตัวห้อย 1 2 3 และ 4 ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอิลิเมนต์แบบเชิงเส้นดังแสดงในรูป 3.18 ตำแหน่งของโหนด  $(x_n, y_n, z_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า  $u_n$  โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนต์  $u_e(x, y, z)$  เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y, z) = \alpha + \beta x + \gamma y + \lambda z \quad (3.63)$$

โดยที่  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโหนดทั้งสี่ดังนี้



รูปที่ 3.18 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

$$u_e(x_1, y_1, z_1) = u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma y_1 + \lambda z_1$$

$$u_e(x_2, y_2, z_2) = u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma y_2 + \lambda z_2$$

$$u_e(x_3, y_3, z_3) = u_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma y_3 + \lambda z_3$$

$$u_e(x_4, y_4, z_4) = u_4 = \alpha + \beta x_4 + \gamma y_4 + \lambda z_4$$

นำค่า  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\lambda$  ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสี่ข้างต้น แทนค่ากลับไปในสมการที่ (3.63) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y, z) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \quad (3.64)$$

ซึ่ง  $N_n, n = 1, 2, 3, 4$  คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad (3.65)$$

โดยที่

$$a_1 = x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3)$$

$$a_2 = x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4)$$

$$a_3 = x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2)$$

$$a_4 = x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3)$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

และ  $V$  คือปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมา  
มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาเล็กน้อยเพียงใดด้วย

สำหรับในขั้นตอนที่ 3-6 จะดำเนินการในทำนองเดียวกันกับวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์  
แบบ 2 มิติที่กล่าวมาแล้วข้างต้นทุกประการ

### 3.7 สรุป

บทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย อันได้แก่ สนามแม่เหล็ก หม้อแปลงไฟฟ้า ทฤษฎีความร้อน อายุการใช้งานของหม้อแปลงไฟฟ้า และระเบียบวิธีไฟไนท์ อิลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้กล่าวเฉพาะส่วนที่จะนำมาใช้หรือส่วนที่จะถูกกล่าวอ้างถึง ในบทต่อ ๆ ไป ทั้งนี้เพื่อเป็นประโยชน์และเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้แก่ผู้ดำเนินงานวิจัย



## บทที่ 4

# การคำนวณสนามแม่เหล็กและอนุภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายด้วย ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

### 4.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element Method : FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการอินทิกรัลดังเช่น สมการสนามแม่เหล็ก และสมการอนุภูมิ เป็นต้น และเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อน หรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ดี อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถรองรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ได้ นอกจากนี้ยังสามารถจำลองผลระบบที่มีความแตกต่างกันทางด้านวัสดุได้ ซึ่งในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้คือ แกนเหล็ก ขดลวด และน้ำมันหม้อแปลง ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและอนุภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย และขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ พร้อมทั้งประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กและอนุภูมิที่กระจายตัวในหม้อแปลงจำหน่ายต่อไป

### 4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและอนุภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย

#### 4.2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก

เมื่อมีกระแสไหลในขดลวดตัวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น และเมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวดที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็ก ( $B$ ) จะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลางสามารถแสดงได้โดย

$$B = \mu H \tag{4.1}$$

เมื่อ  $\mu$  คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ  $\mu_0\mu_r$   
 โดยที่  $\mu_0$  คือ ความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$   
 $\mu_r$  คือ ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นกับวัสดุตัวกลาง  
 $H$  คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity)

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถดำเนินการได้โดยเลี่ยงไปคำนวณหา  
 ศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  ก่อน เนื่องจากคำนวณได้ง่ายกว่า โดยที่สนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถ  
 คำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  เท่านั้น

$$B = \nabla \times A \quad (4.2)$$

จากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) ที่กล่าวว่าสนามแม่เหล็กแปรผันตามเวลาจะ  
 เหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้า  $E$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.3)$$

แทนสมการที่ (4.2) ลงในสมการที่ (4.3) จะได้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A \quad (4.4)$$

และจากกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลา เมื่อสมมติ  
 ให้ความหนาแน่นของกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจาก  
 แหล่งจ่ายมีความถี่ต่ำ แสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times H = J_0 + J_e \quad (4.5)$$

เมื่อ  $J_0$  คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ  $J_e$   
 คือความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) โดยที่

$$J_e = \sigma E \quad (4.6)$$

เมื่อ  $\sigma$  คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.4) จึงได้

$$J_e = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} A \quad (4.7)$$

นำสมการที่ (4.1), (4.2) และ (4.7) แทนลงในสมการที่ (4.5) จะได้

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} A = J_0 \quad (4.8)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ  $A$  พบว่า  $\nabla \cdot A = 0$  ประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ของเวกเตอร์คือ  $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$  ทำให้สามารถเขียนสมการของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กดังสมการที่ (4.9)

$$\nabla^2 A - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} A = -\mu J_0 \quad (4.9)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 2 มิติ ตามระนาบ  $xy$  ซึ่งแปรผันตามเวลา จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (4.10) โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation :PDE) อันดับสอง และเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 3 มิติ ตามระนาบ  $xyz$  ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (4.11) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (4.10)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (4.11)$$

ในกรณีปัญหาที่พิจารณามีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีเพียงความถี่เดียว (time harmonic) โดยสามารถแทน A อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน  $A = Ae^{j\omega t}$  (Christopoulos, 1995) ดังนี้

$$\frac{\partial A}{\partial t} = j\omega A \quad (4.12)$$

เมื่อพิจารณาใน 2 มิติ แทนค่าสมการที่ (4.12) ลงในสมการที่ (4.10) และเมื่อพิจารณาใน 3 มิติ แทนค่าสมการที่ (4.12) ลงในสมการที่ (4.11) จึงได้สมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (4.14)$$

#### 4.2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุณหภูมิ

จากบทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงทฤษฎีของความร้อน โดยการถ่ายเทความร้อนจะแสดงอยู่ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการกระจายตัวของอุณหภูมิ สำหรับปัญหาใน 2 มิติ แสดงได้ดังสมการที่ (4.15) และสำหรับปัญหาใน 3 มิติแสดงได้ดังสมการที่ (4.16) ดังนี้

$$k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.15)$$

$$k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.16)$$

- โดยที่  $T$  คือ อุณหภูมิ (temperature)  
 $k$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity)  
 $\rho$  คือ ความหนาแน่นมวล (mass density)  
 $c$  คือ ความร้อนจำเพาะ (specific heat)  
 $Q$  คือ อัตราปริมาณความร้อนที่ผลิตได้เอง (internal heat generation)

โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งปัญหาการถ่ายเทความร้อนนี้เป็นแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วครู่ (linear transient heat transfer problem) เป็นปัญหาอีกรูปแบบหนึ่งโดยอุณหภูมิที่จุดต่อจะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาซึ่งขั้นตอนของการคำนวณนั้นสามารถทำได้โดยไม่ยากลำบากนัก อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปอาจมีสาเหตุมาจากเงื่อนไขขอบเขต เช่น โหลดปริมาณความร้อนนั้นมีการเปลี่ยนแปลงไป ถ้าเรามองปัญหาเช่นนี้ในภาพรวม การแก้ปัญหาเพื่อหาอุณหภูมิที่เวลาต่างๆกัน ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่นั้นก็เปรียบเสมือนการแก้ปัญหาเพื่อหาผลลัพธ์ของอุณหภูมิของปัญหานั้นภายใต้สถานะอยู่ตัวมาเรียงประกอบกันขึ้น ดังนั้น ในการแก้ปัญหาภายใต้สถานะชั่วครู่ จึงจำเป็นต้องทำการแก้ระบบสมการรวมหลายๆครั้งแทนที่จะต้องแก้ระบบสมการรวมเพียงครั้งเดียวดังเช่นปัญหาภายใต้สถานะอยู่ตัว

### 4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของระบบหม้อแปลงจำหน่าย ดังแสดงในสมการที่ (4.13) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 2 มิติและสมการที่ (4.14) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิตินั้นหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยาก ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

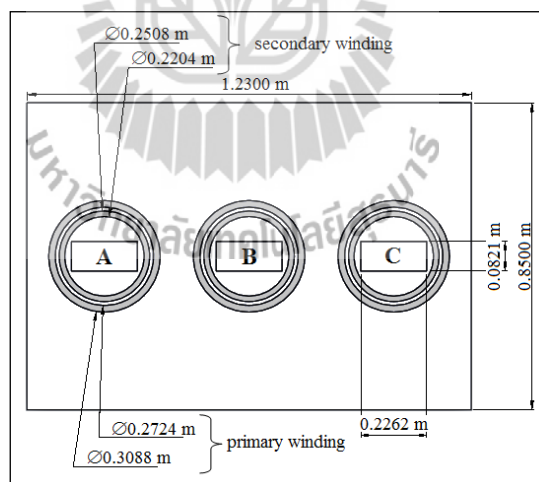
#### 4.3.1 การออกแบบเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

สำหรับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V มีการต่อแบบ Dy1 ซึ่งสามารถแสดงขนาดและพิกัดของหม้อแปลงจำหน่ายที่นำมาพิจารณาได้ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ศึกษาทั้งในรูปแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เพื่อให้เห็นการพิจารณาเอลิเมนต์ที่แตกต่างกันในแต่ละรูปแบบ โดยสิ่งที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และแบบ 3 มิติ ที่เห็นได้ชัด คือ การจำลองผลสำหรับปัญหาที่รูปร่างมีความลึกหรือความหนา เช่น ในหม้อแปลงจำหน่ายจะสามารถแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กได้ทุกส่วนและทุกด้านของชิ้นงาน เป็นต้น การออกแบบกริดให้มีขนาดเล็กหรือใหญ่

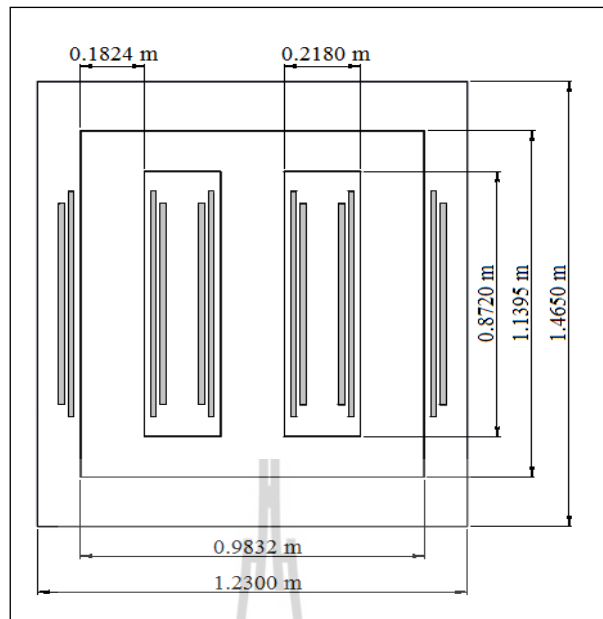
นั้น จะแปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่หรือปริมาตรที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

ขั้นตอนแรก เริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิเลเมนต์รูปสามเหลี่ยม (triangular elements) สำหรับปัญหาในแบบ 2 มิติ โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิเลเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผ่านการเชื่อมต่อกันระหว่างโหนดและอิเลเมนต์ต่าง ๆ การออกแบบกริดเป็นรูปอิเลเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้กล่องเครื่องมือที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB™ โดยจะมีจำนวนโหนดและอิเลเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 7,560 โหนดและ 15,025 อิเลเมนต์ ตามลำดับ การออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 2 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.2

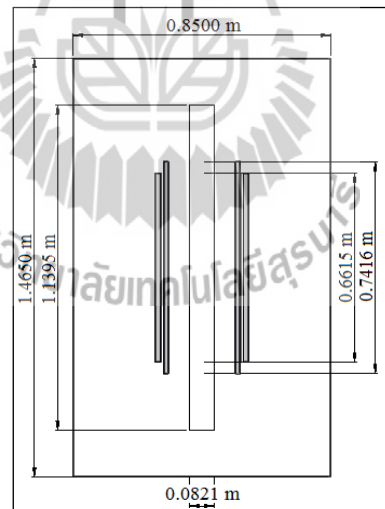
สำหรับปัญหาในแบบ 3 มิติจะเริ่มจากการแบ่งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิเลเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral elements) การออกแบบกริดเป็นอิเลเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรม Solid work โดยจะมีจำนวนโหนดและอิเลเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 24,107 โหนด และ 132,961 อิเลเมนต์ ตามลำดับ สำหรับการออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.3



ก) ด้านบน

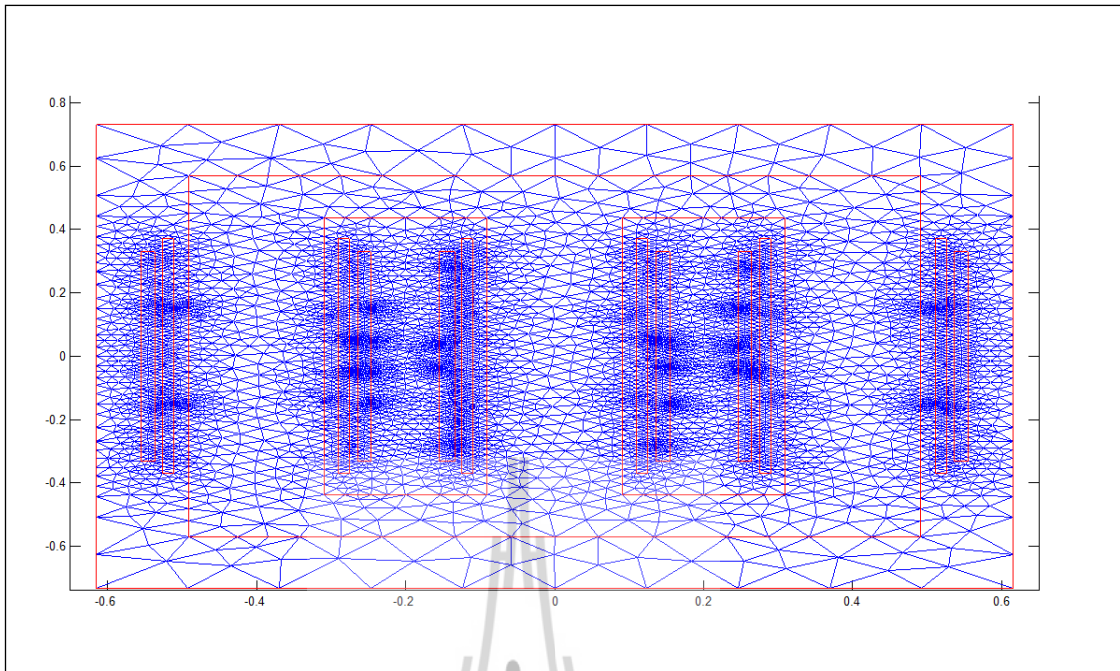


ข) ด้านหน้า

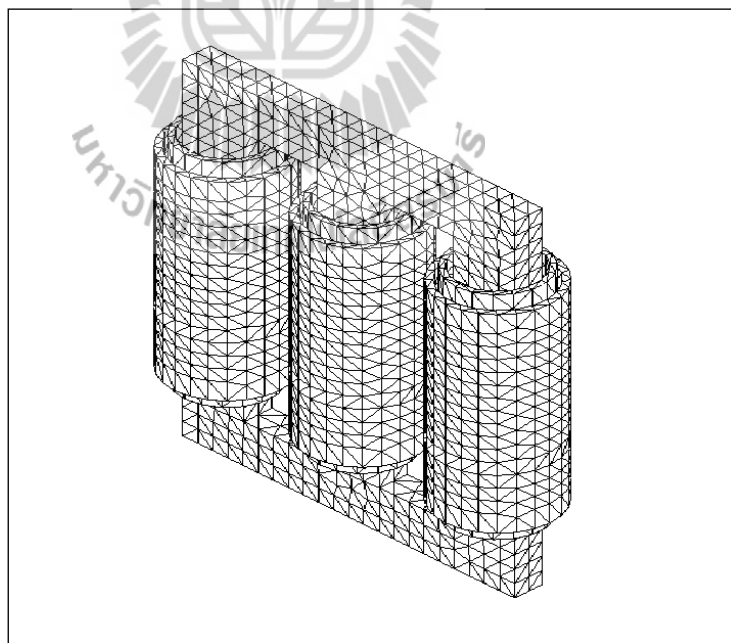


ค) ด้านข้าง

รูปที่ 4.1 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA



รูปที่ 4.2 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลง ในแบบ 2 มิติ



รูปที่ 4.3 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลง ในแบบ 3 มิติ

### 4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์

จากการออกแบบอิลิเมนต์ในหัวข้อที่ 4.3.1 ที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้าทำให้เห็นข้อแตกต่างของปัญหาใน 2 มิติและ 3 มิติ คือรูปแบบของอิลิเมนต์ที่มีรูปร่างที่แตกต่างกัน โดยรูปแบบของอิลิเมนต์ที่แตกต่างกันนี้นำมาซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ในหัวข้อนี้มีความแตกต่างกันด้วย ดังนั้นในขั้นตอนนี้จึงทำการแยกพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ออกเป็นแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงกระบวนการดำเนินงานในการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ที่ถูกต้องตามรูปร่างของอิลิเมนต์ที่เลือกใช้

#### 4.3.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้เป็นการเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ (element interpolation function) โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงปัญหาสามแม่เหล็กซึ่งจะได้

$$A(x, y) = A_i N_i + A_j N_j + A_k N_k \quad (4.17)$$

โดยที่  $N_n$ ,  $n = i, j, k$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ  $A_n$ ,  $n = i, j, k$  คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด  $i, j, k$  ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad \text{เมื่อ } n = i, j, k \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

และ  $\Delta_e$  คือ พื้นที่ของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

### 4.3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

กรณีที่พิจารณาระบบเป็นแบบ 3 มิติ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$A(x, y, z) = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3 + A_4N_4 \quad (4.20)$$

โดยที่  $N_n, n = 1, 2, 3, 4$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ  $A_n, n = 1, 2, 3, 4$  คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด  $1, 2, 3, 4$  ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.21)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3) \end{aligned}$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
 d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
 d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
 d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
 \end{aligned}$$

และ  $V$  คือ ปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

### 4.3.3 การสร้างสมการอิลิเมนต์

#### 4.3.3.1 สมการอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอิลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาสนามแม่เหล็กของระบบ 2 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.13) ที่แสดงก่อนหน้านี้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\omega A + J_0 = 0$$

ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เพื่อหาระบบสมการเชิงเส้น โดยอาศัยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighting functions) ในปัจจุบันการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถือเป็นวิธีที่ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกออกไปได้อีก เช่น วิธีของกาลอ์เคิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหามหาศาล การสร้างสมการของอิลิเมนต์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้ คือ การแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (4.13) จะไม่ก่อให้เกิดค่าเท่ากับศูนย์ หากแต่จะมีค่าเท่ากับ  $R$  แทนดังแสดงด้วยสมการที่ (4.23)



$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (4.23)$$

ซึ่ง  $R$  เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา เศษตกค้าง  $R$  ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าเที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเออร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988; Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง  $R$  ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function :  $W$ ) แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของอิลิเมนต์ ( $\Omega$ ) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_n R d\Omega = 0, \quad n = i, j, k \quad (4.24)$$

สำหรับอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จุดที่ไม่ทราบค่ามี 3 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสาม ดังนั้นจึงต้องการ 3 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (4.24) จะต้องมีค่า  $n = i, j, k$  และโดยปกติเราจะเลือก  $W_n = N_n$  ซึ่งเรียกว่า บับโนฟ-กาลเออร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน  $R$  ด้วยสมการที่ (4.23) ลงในสมการที่ (4.24) จะได้

$$\int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) d\Omega = 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n (j\sigma\omega\mathbf{A}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (N_n \mathbf{J}_0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

พิจารณาการอินทิเกรตที่ละพจน์ของสมการที่ (4.26) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่ละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{V}) d\Omega \quad (4.27)$$

ซึ่ง  $\Gamma$  คือ ขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Omega$  เมื่อเปรียบเทียบกับพจน์แรกของสมการที่ (4.26) จะได้

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{j}$$

และเนื่องจาก  $\mathbf{n}$  คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Gamma$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.26) เมื่อ  $n = i, j, k$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega - \\ & \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega + \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.28) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนต์  $\Gamma$  ที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณกระแสตลอดขอบนอกของอิลิเมนต์นั้นๆ อนึ่ง อิลิเมนต์นั้นๆ อาจวางตัวอยู่ภายในหรืออยู่ติดขอบนอกของพื้นที่ศึกษา ซึ่งในงานวิจัยนี้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ (Salkic, 2005) แสดงดังสมการที่ (4.29) ดังนั้นสมการที่ (4.18) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (4.30) และเนื่องจากสมการที่ (4.30) มีทั้งหมด 3 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.31) ดังนี้

$$\mathbf{A}(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma \quad (4.29)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (4.31)$$

และจากสมการที่ (4.17) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  โดยประมาณในแต่อิลิเมนต์เป็น

$$A(x, y) = [N]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1} \text{ และ } \frac{\partial A}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} \right) d\Omega [A]_{3 \times 1} + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega [A]_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.32)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{3 \times 3} \{A\}_{3 \times 1} = \{F\}_{3 \times 1} \quad (4.33)$$

เมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [M]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega \quad (4.34)$$

จากสมการที่ (4.18) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.35)$$

จากสมการที่ (4.35) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า  $\sigma$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.34) จึงกลายเป็น

$$[M]_{3 \times 3} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.36)$$

สมการที่ (4.36) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (4.37) โดยที่  $N_i = L_1$   $N_j = L_2$  และ  $N_k = L_3$  จะได้

$$\int_{\Delta_e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Delta_e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta_e \quad (4.37)$$

จากสมการที่ (4.36) สามารถพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี คือ  $L_n = L_m$  และ  $L_n \neq L_m$  ในกรณี  $L_n = L_m$  จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  ของรูปสามเหลี่ยมจะได้  $a=2$ ,  $b=c=0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^2 d\Delta_e &= \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{4\Delta_e}{4!} = \frac{2\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ในกรณีที่  $L_n \neq L_m$  จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  และ  $j$  ของรูปสามเหลี่ยม จะได้  $a=b=1$ ,  $c=0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^1 L_2^1 d\Delta_e &= \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{2\Delta_e}{4!} = \frac{\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ที่จุดต่ออื่นๆ ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้รับการพิจารณาในลักษณะนี้เช่นกัน ดังนั้นจากสมการที่ (4.36) จึงได้เมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$  ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.38) ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$  จะมีค่าขึ้นอยู่กับรูปร่างของอิลิเมนต์

$$[M]_{3 \times 3} = \frac{j\omega\sigma\Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

เมทริกซ์  $[K]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [K]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{1 \times 3} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \right) d\Omega \quad (4.39)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดั่งสมการที่ (4.35) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{2\Delta_e} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.40)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.40) ลงในสมการที่ (4.39) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{b_n}{2\Delta_e} \frac{b_m}{2\Delta_e} + \frac{c_n}{2\Delta_e} \frac{c_m}{2\Delta_e} \right) dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.41) \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e^2} (b_n b_m + c_n c_m) \int dx dy \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} (b_n b_m + c_n c_m) \quad n, m = i, j, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{Sym} & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \quad (4.42) \end{aligned}$$

โพลีเวกเตอร์:  $\{F\}_{3 \times 1}$

$$\text{จาก } \{F\}_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.43)$$

หรือ

$$\{F\}_{3 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int N_n dx dy \quad n = i, j, k \quad (4.44)$$

สมการที่ (4.44) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (4.37) โดยที่  $N_i = L_1$ ,  $N_j = L_2$  และ  $N_k = L_3$  ซึ่งจะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  ของรูปสามเหลี่ยมจึงได้  $a = 1$ ,  $b = c = 0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^1 d\Delta_e &= \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{2\Delta_e}{3!} = \frac{\Delta_e}{3} \end{aligned}$$

ซึ่งที่จุดต่อ  $j$  และ  $k$  ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้ลักษณะเช่นเดียวกันนี้ ดังนั้นจากสมการที่ (4.44) จึงได้โพลีเวกเตอร์แสดงได้ดังนี้

$$\{F\}_{3 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 \Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

#### 4.3.3.2 สมการอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การดำเนินการด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะกระทำการในลักษณะเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ซึ่งจะแตกต่างกันอย่างชัดเจนที่ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์โดย

ตั้งต้นจากสมการอนุพันธ์ย่อยของปัญหาสนามแม่เหล็กแบบ 3 มิติ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.14) ที่แสดงก่อนหน้านี้นี้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (4.46)$$

สำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ยังคงประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างด้วยวิธีกาลูร์กินเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติดังสมการที่ (4.24) แต่จะเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตรอบปริมาตรแทนดังแสดงด้วยสมการที่ (4.47)

$$\int_V W_n R dV = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.47)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติจะได้เศษตกค้าง  $R$  ดังสมการที่ (4.48)

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (4.48)$$

สำหรับเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า จุดที่ไม่รู้ค่ามี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสิ้น ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่รู้ค่า นั้นหมายถึงในสมการที่ (4.47) จะต้องมีค่า  $n = 1, 2, 3, 4$  และโดยปกติจะเลือก  $W_n = N_n$  ดังนั้นเมื่อแทนค่า  $R$  ด้วยสมการ (4.48) ลงในสมการที่ (4.47) จะได้

$$\int_V N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) dV = 0 \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & \int_V N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dV - \int_V N_n (j\sigma\omega\mathbf{A}) dV \\ & + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dV = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$



พิจารณาการอินทิเกรตที่สะท้อนของสมการที่ (4.50) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่สะท้อน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เหมือนกับสมการที่ (4.27) ในแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (4.50) เมื่อ  $n = 1, 2, 3, 4$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right) d\Gamma \\ & - \int_V \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV \\ & - \int_V N_n (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV + \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.51) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนต์  $\Gamma$  โดยค่าศักร์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงดังสมการที่ (4.52) ดังนั้นสมการที่ (4.51) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (4.53) และเนื่องจากสมการที่ (4.53) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.54)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV + \int_V N_n (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV \\ & = \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV \\ & + \int_V [N]_{4 \times 1} (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \end{aligned} \quad (4.54)$$

และจากสมการที่ (4.20) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  โดยประมาณในแต่้อลิเมนต์เป็น

$$A(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนท์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_V \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dV [A]_{4 \times 1} + \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 4} d\Omega [A]_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (4.55)$$

หรือเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1} = \{F\}_{4 \times 1} \quad (4.56)$$

เมทริกซ์  $[M]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [M]_{4 \times 4} = \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 4} dV \quad (4.57)$$

จากสมการที่ (4.21) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (4.58)$$

จากสมการที่ (4.58) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า  $\sigma$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.57) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4 \times 4} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.59)$$

สมการที่ (4.59) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดังสมการที่ (4.60) โดยที่  $N_1 = L_1$ ,  $N_2 = L_2$ ,  $N_3 = L_3$  และ  $N_4 = L_4$  จะได้

$$\int_v L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (4.60)$$

จากสมการที่ (4.59) สามารถแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคล้ายในทำนองเดียวกัน กับแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (4.59) เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (4.60) จะได้

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{j\omega\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

เมทริกซ์  $[K]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [K]_{4 \times 4} = \int_v \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dV \quad (4.62)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (4.58) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V}, \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.63)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.63) ลงในสมการที่ (4.62) จะได้

$$\begin{aligned}
[K]_{4 \times 4} &= \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.64) \\
&= \frac{1}{36\mu V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\
&= \frac{1}{36\mu V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \quad n, m = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ & & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ \text{Sym} & & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

โหนดเวกเตอร์:  $\{F\}_{4 \times 1}$

$$\text{จาก} \quad \{F\}_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (4.66)$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดังสมการที่ (4.60) จะได้

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

#### 4.3.4 การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นการนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 ทั้งในระบบ 2 มิติ และ 3 มิติ หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ ดังแสดงได้ดังนี้

$$[M + K]_{n \times n} \{A\}_{n \times 1} = \{F\}_{n \times 1} \quad (4.68)$$

#### 4.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

สำหรับขั้นตอนการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะมีการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ คือ บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเท่ากับศูนย์ ( $A=0$ )

#### 4.3.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณค่าต่างๆ ที่สัมพันธ์กันต่อไปได้ โดยสนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถคำนวณได้จากการเคิร์ลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ( $B = \nabla \times A$ ) ดังแสดงด้วยสมการ (4.69) ดังนั้นเมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 2 มิติ ตามระนาบพิกัด  $xy$  เมื่อมีกระแสตามแนวแกน  $z$  จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $x$  ( $B_x$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $y$  ( $B_y$ ) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.70), (4.71) และ (4.72) ตามลำดับ

$$B = \nabla \times A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k \quad (4.69)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k}{2\Delta_e} \quad (4.70)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left( \frac{b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k}{2\Delta_e} \right) \quad (4.71)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (4.72)$$

เมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 3 มิติ ตามระนาบพิกัด  $xyz$  เมื่อมีกระแสในแนวแกน  $x$  และแนวแกน  $z$  จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $x$  ( $B_x$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $y$  ( $B_y$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $z$  ( $B_z$ ) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.73), (4.74), (4.75) และ (4.76) ตามลำดับ

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (4.73)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_4 A_4}{6V} - \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \quad (4.74)$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (4.75)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (4.76)$$

#### 4.4 การคำนวณอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

ในการคำนวณอุณหภูมิด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์นั้น จะต้องอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของอุณหภูมิที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในการคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายใน 2 มิติ และ 3 มิติ จะแสดงได้ในสมการที่ (4.15) และ (4.16) ที่ผ่านมามาตามลำดับ

##### 4.4.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์

จากการออกแบบอิลิเมนต์ในหัวข้อ 4.3.1 ที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้แล้ว รูปแบบของอิลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณอุณหภูมิด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์นั้นจะใช้รูปแบบเหมือนกับอิลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ทุกประการ เพราะฉะนั้นในหัวข้อนี้จึงข้ามการออกแบบอิลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษาไป ซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ของการคำนวณอุณหภูมินั้นก็จะแยกพิจารณาการประมาณภายในอิลิเมนต์ออกเป็นแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เช่นเดียวกับการคำนวณสนามแม่เหล็กที่ผ่านมา

##### 4.4.1.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้เป็นการเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ (element interpolation function) โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงปัญหาอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายซึ่งจะได้

$$T(x, y) = T_i N_i + T_j N_j + T_k N_k \quad (4.77)$$

โดยที่  $N_n$ ,  $n = i, j, k$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ  $T_n$ ,  $n = i, j, k$  คือผลลัพธ์ของ  
อูณหภูมิในแต่ละโหนด  $i, j, k$  ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad (4.78)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

และ  $\Delta_e$  คือ พื้นที่ของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (4.79)$$

#### 4.4.1.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

กรณีที่พิจารณาระบบเป็นแบบ 3 มิติ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจาย  
ของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$T(x, y, z) = T_1 N_1 + T_2 N_2 + T_3 N_3 + T_4 N_4 \quad (4.80)$$

โดยที่  $N_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ  $T_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  คือผลลัพธ์  
ของค่าอูณหภูมิในแต่ละโหนด  $1, 2, 3, 4$  ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ  
จะได้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (4.81)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\ b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\ b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\ c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\ c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\ c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\ d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\ d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\ d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

และ  $V$  คือ ปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.82)$$



#### 4.4.2 การสร้างสมการอิลิเมนต์

##### 4.4.2.1 สมการอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอิลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาความร้อนในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาความร้อนแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว โดยพิจารณาใน 2 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.15) ที่แสดงก่อนหน้านี้ดังนี้

$$k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

จากสมการจัดรูปให้ด้านขวาของสมการเท่ากับศูนย์จะได้ดังสมการที่ (4.83) สำหรับปัญหาความร้อนใน 2 มิติที่คำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์นี้ก็ยังคงประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างด้วยวิธีกัลเลอร์กินเช่นเดียวกันกับปัญหาสนามแม่เหล็กที่ผ่านมาดังแสดงด้วยสมการที่ (4.84)

$$k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q = 0 \quad (4.83)$$

$$\int_{\Omega} W_n R d\Omega = 0, \quad n = i, j, k \quad (4.84)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาความร้อน จะได้เศษตกค้าง  $R$  ดังสมการที่ (4.85)

$$R = k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q \quad (4.85)$$

ซึ่ง  $R$  เรียกว่าเศษตกค้าง สำหรับอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จุดที่ไม่ทราบค่ามี 3 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสาม ดังนั้นจึงต้องการ 3 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั้นหมายถึงในสมการที่ (4.84) จะต้องมามีค่า  $n = i, j, k$  และโดยปกติเราจะเลือก  $W_n = N_n$  ดังนั้นเมื่อแทน  $R$  ด้วยสมการที่ (4.85) ลงในสมการที่ (4.84) จะได้

$$\int_{\Omega} N_n \left( k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q \right) d\Omega = 0 \quad (4.86)$$

แล้วแตกพจน์ต่างๆ ออกมาเพื่อทำการพิจารณา จะได้

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_n \left( k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_n (Q) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

พจน์แรกของสมการที่ (4.87) แทนการแพร่กระจายความร้อน พจน์ที่สองแทนอัตราความจุความร้อน และพจน์ที่สามแทนปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในอีลิเมนต์ตามลำดับ สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วนโดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{V}) d\Omega \quad (4.88)$$

ซึ่ง  $\Gamma$  คือขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Omega$  เมื่อเปรียบเทียบกับพจน์แรกของสมการที่ (4.87) จะได้

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V} = k \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + k \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j}$$

และเนื่องจาก  $\mathbf{n}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Gamma$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left( k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right)$$

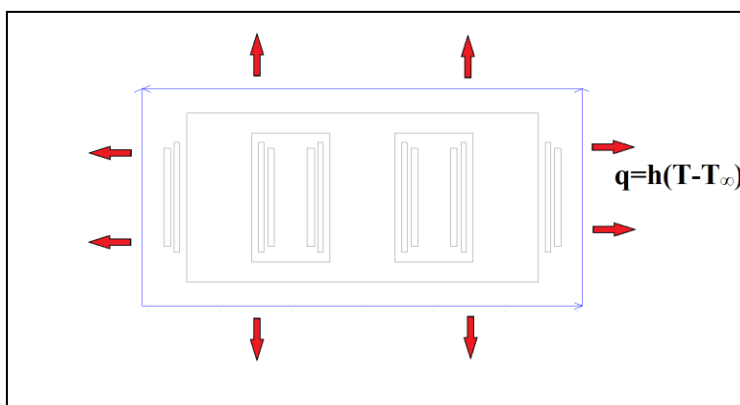
$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.87) เมื่อ  $n = i, j$ ,  $k$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_{\Gamma} N_n \left( k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N_n Q d\Omega = 0 \quad (4.89)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอีลิเมนต์คือพจน์แรกที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือ ปริมาณความร้อนตลอดขอบนอกของอีลิเมนต์นั้นๆ หนึ่ง อีลิเมนต์นั้นอาจวางตัวอยู่กลาง หม้อแปลงจำหน่ายหรืออยู่ติดขอบนอกของหม้อแปลงจำหน่าย หากอีลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่ใน ตำแหน่งขอบนอกทั้งสี่ด้านของหม้อแปลงจำหน่าย ดังแสดงด้วยรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แสดงการพาความร้อนของหม้อแปลงจำหน่าย

จากเงื่อนไขขอบเขตแบบการพาความร้อน เราจึงจำเป็นต้องแทนพจน์นี้ด้วยเงื่อนไขการพาความร้อนดังแสดงด้วยสมการที่ (4.90)

$$q = h(T - T_{\infty}) \quad (4.90)$$

โดยที่  $h$  คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน

$T_{\infty}$  คือ อุณหภูมิอากาศรอบนอก

และเมื่อความร้อน ( $q$ ) ที่ไหลออกจากขอบจะมีค่าเป็นลบ ดังนั้นจากสมการที่ (4.89) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N_n (-h(T - T_{\infty})) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N_n Q d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

จากสมการที่ (4.91) จัดรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์ที่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} N_n (hT) d\Gamma \\ = \int_{\Omega} N_n Q d\Omega + \int_{\Gamma} N_n (h(T_{\infty})) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.92)$$

และเนื่องจากสมการที่ (4.92) มีทั้งหมด 3 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.93) ดังนี้

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( [N]_{3 \times 1} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \frac{\partial T}{\partial x} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} (hT) d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} Q d\Omega + \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} (h(T_{\infty})) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.93)$$

และจากสมการที่ (4.77) จึงได้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ  $T$  โดยประมาณในแต่ละอิลิเมนต์เป็น

$$T(x, y) = [N]_{1 \times 3} [T]_{3 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial T}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} [T]_{3 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} [T]_{3 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( [N]_{3 \times 1} \rho c [N]_{1 \times 3} \right) d\Omega \left[ \dot{T} \right]_{3 \times 1} + \int_{\Omega} \left( k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} \right) d\Omega [T]_{3 \times 1} \\ & + \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} h [N]_{1 \times 3} d\Gamma [T]_{3 \times 1} = \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} h T_{\infty} d\Gamma + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} Q d\Omega \end{aligned} \quad (4.94)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 สมการได้ดังนี้

$$[C]_{3 \times 3} \left\{ \dot{T} \right\}_{3 \times 1} + \left[ [K_c] + [K_h] \right]_{3 \times 3} \{T\}_{3 \times 1} = \{Q_h\}_{3 \times 1} + \{Q_o\}_{3 \times 1} \quad (4.95)$$

โดย  $[C]_{3 \times 3}$  คือ เมทริกซ์ของการจุความร้อน  
 $[K_c]_{3 \times 3}$  คือ เมทริกซ์ของการแพร่กระจายความร้อน  
 $[K_h]_{3 \times 3}$  คือ เมทริกซ์ของการพาความร้อน  
 $\{Q_h\}_{3 \times 1}$  คือ โหลดเวกเตอร์การพาความร้อน  
 $\{Q_e\}_{3 \times 1}$  คือ โหลดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตเอง

เมทริกซ์ของการจุความร้อน:  $[C]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [C]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} ([N]_{3 \times 1} \rho c [N]_{1 \times 3}) d\Omega \quad (4.96)$$

จากสมการที่ (4.78) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.97)$$

จากสมการที่ (4.97) และหากความหนาแน่นมวล  $\rho$  และความร้อนจำเพาะ  $c$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.96) จึงกลายเป็น

$$[C]_{3 \times 3} = \rho c \int N_n N_m dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.98)$$

สมการที่ (4.98) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่เหมือนดังหัวข้อที่ผ่านมาจะได้

$$[C]_{3 \times 3} = \frac{\rho c \Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

เมทริกซ์ของการแพร่กระจายความร้อน:  $[K_c]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [K_c]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} \left( k \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{1 \times 3} + k \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \right) d\Omega \quad (4.100)$$

จากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (4.97) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{2\Delta_e} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.101)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.101) ลงในสมการที่ (4.100) จะได้

$$\begin{aligned} [K_c]_{3 \times 3} &= k \int \left( \frac{b_n}{2\Delta_e} \frac{b_m}{2\Delta_e} + \frac{c_n}{2\Delta_e} \frac{c_m}{2\Delta_e} \right) dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.102) \\ &= \frac{k}{4\Delta_e^2} (b_n b_m + c_n c_m) \int dx dy \\ &= \frac{k}{4\Delta_e} (b_n b_m + c_n c_m) \quad n, m = i, j, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_c]_{3 \times 3} &= \frac{k}{4\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{k}{4\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ \text{Sym} & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \quad (4.103) \end{aligned}$$

เมทริกซ์ของการพาความร้อน:  $[K_h]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [K_h]_{3 \times 3} = \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} h [N]_{1 \times 3} d\Gamma \quad (4.104)$$

จากสมการที่ (4.104) และหากสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $h$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.104) เมื่อพิจารณาการถ่ายเทความร้อนบนพื้นผิวของอีลิเมนต์จึงกลายเป็น

$$[K_h]_{3 \times 3} = h \int N_n N_m dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.105)$$

สมการที่ (4.105) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่เหมือนดังที่ผ่านมามาจะได้

$$[K_h]_{3 \times 3} = \frac{h \Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

ส่วนการถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบของอีลิเมนต์แบบ 2 มิติจะได้กล่าวถึงต่อไป

โหลตเวกเตอร์การพาความร้อน:  $\{Q_h\}_{3 \times 1}$

$$\text{จาก } \{Q_h\}_{3 \times 1} = \int_{\Gamma} [N]_{3 \times 1} h T_{\infty} d\Gamma \quad (4.107)$$

หรือเมื่อพิจารณาการถ่ายเทความร้อนบนพื้นผิวของอีลิเมนต์ ดังนั้นสมการที่ (4.107) จึงกลายเป็น

$$\{Q_h\}_{3 \times 1} = h T_{\infty} \int N_n dx dy \quad n = i, j, k \quad (4.108)$$

สมการที่ (4.108) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ได้ดังนี้

$$\{Q_h\}_{3 \times 1} = \frac{h T_{\infty} \Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$



ส่วนการถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบของอิเลเมนต์แบบ 2 มิติจะได้อีกกล่าวถึงต่อไป

โหลคเวคเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตเอง:  $\{Q_e\}_{3 \times 1}$

$$\text{จาก } \{Q_e\}_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} Q d\Omega \quad (4.110)$$

หรือ

$$\{Q_e\}_{3 \times 1} = Q \int N_n dx dy \quad n = i, j, k \quad (4.111)$$

สมการที่ (4.111) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ได้ดังนี้

$$\{Q_e\}_{3 \times 1} = \frac{Q\Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

นอกจากการถ่ายเทความร้อนบนพื้นผิวของอิเลเมนต์ที่แสดงไปแล้วยังมีการถ่ายเทความร้อนตลอดขอบใดขอบหนึ่งของอิเลเมนต์ซึ่งมีความหนาเท่ากับ  $t$  และขอยกตัวอย่างระหว่างโหนด  $i$  และ  $j$  ตรงขอบของอิเลเมนต์ที่มียาวเท่ากับ  $l$  การประดิษฐ์อิเลเมนต์ที่สอดคล้องกับการถ่ายเทความร้อนตลอดขอบดังกล่าวจะได้

$$[K_h]_{3 \times 3} = \frac{htl}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\{Q_h\}_{3 \times 1} = \frac{hT_{\infty}tl}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

#### 4.4.2.2 สมการอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การดำเนินการคำนวณอุณหภูมิด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติจะกระทำการในลักษณะเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ซึ่งจะแตกต่างกันอย่างชัดเจนที่ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์โดยตั้งต้นจากสมการอนุพันธ์ย่อยของปัญหาความร้อนแบบ 3 มิติ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.16) ที่แสดงก่อนหน้านี้นี้ดังนี้

$$k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q = 0 \quad (4.115)$$

สำหรับการคำนวณอุณหภูมิด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ ก็ยังคงประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างด้วยวิธีกาลอ์คินเช่นเดียวกันกับการคำนวณสามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติที่ผ่านมาดังแสดงด้วยสมการที่ (4.116)

$$\int_V W_n R dV = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.116)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติจะได้เศษตกค้าง  $R$  ดังสมการที่ (4.117)

$$R = k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q \quad (4.117)$$

สำหรับอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า จุดที่ไม่รู้ค่ามี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่รู้ค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (4.116) จะต้องมีค่า  $n = 1, 2, 3, 4$  และโดยปกติจะเลือก  $W_n = N_n$  ดังนั้นเมื่อแทนค่า  $R$  ด้วยสมการ (4.117) ลงในสมการที่ (4.116) จะได้ว่า

$$\int_V N_n \left( k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + Q \right) dV = 0 \quad (4.118)$$

แล้วแตกพจน์ต่างๆ ออกมาเพื่อทำการพิจารณา จะได้

$$\int_V N_n \left( k \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV - \int_V N_n \left( \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV + \int_V N_n (Q) dV = 0 \quad (4.119)$$

พจน์แรกของสมการที่ (4.119) แทนการแพร่กระจายความร้อน พจน์ที่สองแทนอัตราความจุความร้อน และพจน์ที่สามแทนปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เองภายในอิลิเมนต์ตามลำดับ สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ ดังนั้นจากสมการที่ (4.119)  $n = 1, 2, 3, 4$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_{\Gamma} N_n \left( k \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) d\Gamma - \int_V \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV - \int_V N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V N_n Q dV = 0 \quad (4.120)$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนต์คือพจน์แรกที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณความร้อนตลอดขอบนอกของอิลิเมนต์นั้นๆ อีหนึ่ง อิลิเมนต์นั้นอาจวางตัวอยู่กลางหม้อแปลงจำหน่ายหรืออยู่ติดขอบนอกของหม้อแปลงจำหน่าย หากอิลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่ในตำแหน่งขอบนอกทั้งหกด้านของหม้อแปลงจำหน่าย ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตแบบการพาความร้อนเราจึงจำเป็นต้องแทนพจน์นี้ด้วยเงื่อนไขการพาความร้อนดังสมการที่ (4.90) ที่ผ่านดังนั้นจากสมการที่ (4.120) จะได้

$$\int_{\Gamma} N_n (-h(T - T_{\infty})) d\Gamma - \int_V \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV - \int_V N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\Omega} N_n Q dV = 0 \quad (4.121)$$

จากสมการที่ (4.121) จักรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับอิลิเมนต์ที่ได้ดังนี้

$$\int_V N_n \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V \left( k \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV$$

$$+ \int_{\Gamma} N_n (hT) d\Gamma = \int_V N_n Q dV + \int_{\Gamma} N_n (h(T_\infty)) d\Gamma \quad (4.122)$$

และเนื่องจากสมการที่ (4.122) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.123) ดังนี้

$$\int_V \left( [N]_{4 \times 1} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV + \int_V \left( k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{\partial T}{\partial x} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{\partial T}{\partial y} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dV$$

$$+ \int_{\Gamma} [N]_{4 \times 1} (hT) d\Gamma = \int_V [N]_{4 \times 1} Q dV + \int_{\Gamma} [N]_{4 \times 1} (h(T_\infty)) d\Gamma \quad (4.123)$$

และจากสมการที่ (4.80) จึงได้ลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ  $T$  โดยประมาณในแต่ละอิลิเมนต์เป็น

$$T(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [T]_{4 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial T}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [T]_{4 \times 1}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [T]_{4 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [T]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_V \left( [N]_{4 \times 1} \rho c [N]_{1 \times 4} \right) dV \left[ \dot{T} \right]_{4 \times 1} + \int_V \left( k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} \right) dV [T]_{4 \times 1}$$

$$+ \int_{\Gamma} [N]_{4 \times 1} h [N]_{1 \times 4} d\Gamma [T]_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} h T_\infty d\Gamma + \int_V [N]_{4 \times 1} Q dV \quad (4.124)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการได้ดังนี้

$$[C]_{4 \times 4} \left\{ \dot{T} \right\}_{4 \times 1} + \left( [K_c] + [K_h] \right)_{4 \times 4} \{T\}_{4 \times 1} = \{Q_h\}_{4 \times 1} + \{Q_e\}_{4 \times 1} \quad (4.125)$$

เมทริกซ์ของการจุความร้อน:  $[C]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [C]_{4 \times 4} = \int_V \left( [N]_{4 \times 1} \rho c [N]_{1 \times 4} \right) dV \quad (4.126)$$

จากสมการที่ (4.81) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.127)$$

จากสมการที่ (4.127) และหากความหนาแน่นมวล  $\rho$  และความร้อนจำเพาะ  $C$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.126) จึงกลายเป็น

$$[C]_{4 \times 4} = \rho c \int N_n N_m dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.128)$$

สมการที่ (4.128) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรเหมือนดังหัวข้อที่ผ่านมาจะได้

$$[C]_{4 \times 4} = \frac{\rho c V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

เมทริกซ์ของการแพร่กระจายความร้อน:  $[K_c]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [K_c]_{4 \times 4} = \int_V \left( k \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + k \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dV \quad (4.130)$$

จากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (4.127) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V}, \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.131)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.131) ลงในสมการที่ (4.130) จะได้

$$\begin{aligned} [K_c]_{4 \times 4} &= k \int \left( \frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.132) \\ &= \frac{k}{36V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\ &= \frac{k}{36V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$[K_c]_{4 \times 4} = \frac{k}{36V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ \text{Sym} & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (4.133)$$

เมทริกซ์ของการพาความร้อน:  $[K_h]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก} [K_h]_{4 \times 4} = \int_{\Gamma} [N]_{4 \times 1} h [N]_{1 \times 4} d\Gamma \quad (4.134)$$

จากสมการที่ (4.134) และหากสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $h$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.134) เมื่อพิจารณาการถ่ายเทความร้อนบนปริมาตรของอิเลเมนต์ที่จึงกลายเป็น

$$[K_h]_{4 \times 4} = h \int_{\Gamma} N_n N_m dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.135)$$

สมการที่ (4.135) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรจะได้

$$[K_h]_{4 \times 4} = \frac{hV}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

ส่วนการถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบของอิเลิเมนต์แบบ 3 มิติจะได้กล่าวถึงต่อไป

โพลีเวกเตอร์การพาความร้อน:  $\{Q_h\}_{4 \times 1}$

$$\text{จาก } \{Q_h\}_{4 \times 1} = \int_{\Gamma} [N]_{4 \times 1} h T_{\infty} d\Gamma \quad (4.137)$$

หรือเมื่อพิจารณาการถ่ายเทความร้อนบนปริมาตรของอิเลิเมนต์ดั่งนั้นสมการที่ (4.137) จึงกลายเป็น

$$\{Q_h\}_{4 \times 1} = h T_{\infty} \int N_n dx dy dz \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.138)$$

สมการที่ (4.138) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรได้ดังนี้

$$\{Q_h\}_{4 \times 1} = \frac{h T_{\infty} V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

ส่วนการถ่ายเทความร้อนบริเวณขอบของอิเลิเมนต์แบบ 3 มิติจะได้กล่าวถึงต่อไป

โหนดเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนที่ผลิตเอง:  $\{Q_o\}_{4 \times 1}$

$$\text{จาก } \{Q_o\}_{4 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{4 \times 1} Q d\Omega \quad (4.140)$$

หรือ

$$\{Q_o\}_{4 \times 1} = Q \int N_n dx dy dz \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.141)$$

สมการที่ (4.141) ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรได้ดังนี้

$$\{Q_o\}_{4 \times 1} = \frac{QV}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

นอกจากการถ่ายเทความร้อนบนปริมาตรของอีลิเมนต์ที่แสดงไปแล้วยังมีการถ่ายเทความร้อนตลอดพื้นผิวขอบใดขอบหนึ่งของอีลิเมนต์ และขอยกตัวอย่างพื้นผิวของอีลิเมนต์ที่ประกอบด้วยโหนด 2 , 3 และ 4 ซึ่งพื้นผิวดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับ A การประดิษฐ์อีลิเมนต์ที่สอดคล้องกับการถ่ายเทความร้อนตลอดพื้นผิวขอบดังกล่าวจะได้

$$[K_h]_{4 \times 4} = \frac{hA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

$$\{Q_h\}_{4 \times 1} = \frac{hT_{\infty}A}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$



#### 4.4.3 การแก้ปัญหภายใต้สถานะชั่วคราว

ปัญหาในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราวซึ่งปัญหาแบบ 2 มิติ และ 3 มิติจะใช้วิธีการแก้ปัญหาคือคล้ายกัน โดยค่าอนุกรมจะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งการแก้ปัญหามาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราวเช่นนี้ทำได้ค่อนข้างยาก โดยการแก้สมการที่ (4.95) เมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติและสมการที่ (4.125) เมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ จากข้างต้นจะต้องอาศัยวิธีการแก้ปัญหภายใต้สถานะชั่วคราวที่ใช้วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) เพื่อให้ได้ค่าผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

การแก้ปัญหภายใต้สถานะชั่วคราวจะใช้วิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด โดยจะมีลักษณะของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับค่า  $\beta$  ที่เลือกใช้ ดังแสดงในสมการที่ (4.145) โดย  $\Delta t$  คือค่าของช่วงเวลา (time step) โดยถ้าเลือกใช้  $\beta = 0$  จะเป็นวิธีของออยเลอร์ (Euler) ถ้า  $\beta = 1/2$  เป็นวิธีของ แครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ถ้า  $\beta = 2/3$  เป็นวิธีของกาลเลอร์กิน (Galerkin) และถ้า  $\beta = 1$  จะเรียกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference) ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังดังสมการที่ (4.146) เนื่องจากวิธีนี้ประกันการลู่เข้าของผลลัพธ์ และผลลัพธ์จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง

$$\beta \left\{ \dot{T} \right\}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \left\{ \dot{T} \right\}^t = \frac{\{T\}^{t+\Delta t} - \{T\}^t}{\Delta t} \quad (4.145)$$

$$\left\{ \dot{T} \right\}^{t+\Delta t} = \frac{\{T\}^{t+\Delta t} - \{T\}^t}{\Delta t} \quad (4.146)$$

จากการเลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง สมการที่ (4.95) และสมการที่ (4.125) จึงพัฒนามาเป็นสมการที่ (4.147) จากนั้นแทนค่าสมการที่ (4.146) ลงในสมการที่ (4.147) จึงได้ผลลัพธ์ของสมการไฟไนต์อีลิเมนต์เมื่อพิจารณาปัญหาในสถานะชั่วคราว ดังสมการที่ (4.148)

$$[C] \left\{ \dot{T} \right\}^{t+\Delta t} + [K] \{T\}^{t+\Delta t} = \{Q\}^{t+\Delta t} \quad (4.147)$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t} [C] + [K] \right) \{T\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [C] \{T\}^t + \{Q\}^{t+\Delta t} \quad (4.148)$$

โดยที่  $[K] = [K_c] + [K_h]$

และ  $\{Q\} = \{Q_h\} + \{Q_o\}$

#### 4.4.4 การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นกรนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 ทั้งในระบบ 2 มิติและ 3 มิติ หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ ดังนั้นจึงได้สมการรวมของงานวิจัยนี้เมื่อพิจารณาปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว คือ

$$\left( \frac{1}{\Delta t} [C]_{n \times n} + [K]_{n \times n} \right) \{T\}_{n \times 1}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [C]_{n \times n} \{T\}_{n \times 1}^t + \{Q\}_{n \times 1}^{t+\Delta t} \quad (4.149)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$([C]_{n \times n} + \Delta t [K]_{n \times n}) \{T\}_{n \times 1}^{t+\Delta t} = [C]_{n \times n} \{T\}_{n \times 1}^t + \Delta t \{Q\}_{n \times 1}^{t+\Delta t} \quad (4.150)$$

เมื่อ  $[M]_{n \times n} = [C]_{n \times n} + \Delta t [K]_{n \times n}$

$$[F]_{n \times 1} = [C]_{n \times n} \{T\}_{n \times 1}^t + \Delta t \{Q\}_{n \times 1}^{t+\Delta t}$$

ดังนั้นจึงได้สมการรวมของงานวิจัยนี้คือ

$$[M]_{n \times n} \{T\}_{n \times 1}^{t+\Delta t} = [F]_{n \times 1} \quad (4.151)$$

#### 4.4.5 การประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

ขั้นตอนการหาค่าผลเฉลยของอนุกรม  $\mathbf{T}$  เริ่มจากการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้แก่หม้อแปลงจำหน่าย และเงื่อนไขขอบเขตบริเวณต่างๆ โดยงานวิจัยนี้มีค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในรอบแรกที่พิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายคือ  $\mathbf{T}(t=0) = 0$

ส่วนค่าโพลเวกเตอร์ของปริมาณความร้อนจะใช้ค่าปริมาณความร้อนที่ผลิตขึ้นเองของทั้งพื้นที่หรือปริมาตรที่พิจารณา โดยค่าปริมาณความร้อนจะหาได้จากความสัมพันธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กดังนี้

$$Q = \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \quad (4.152)$$

เมื่อ  $\sigma$  คือ ค่าสภาพนำทางไฟฟ้า

$\mathbf{A}$  คือ ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

เมื่อพิจารณาระบบเป็นแบบความถี่เดียว (time-harmonic) ซึ่งในงานวิจัยนี้แรงดันไฟฟ้าของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าความถี่ 50 Hz โดยสามารถแทน  $\mathbf{A}$  ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนจะได้  $\mathbf{A} = \mathbf{A}e^{j\omega t}$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.152) จะได้

$$Q = \frac{\sigma \omega^2}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* \quad (4.153)$$

เมื่อ  $\omega$  คือ ความถี่เชิงมุม

$\mathbf{A}^*$  คือ ค่าเชิงซ้อนสังยุคของ  $\mathbf{A}$

#### 4.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่าย ประกอบด้วยคำเนิ่งถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ทางไฟฟ้าและคุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุที่แตกต่างกันในระบบ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตค่างของกาลเลอร์กิน โดยการคำนวณสนามแม่เหล็กจะพิจารณาระบบเป็นแบบความถี่เดียว ส่วนการคำนวณอุณหภูมิจะคำนวณปัญหาเป็นแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว รายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 5 และบทที่ 6 ต่อไป

## บทที่ 5

### ผลการจำลองสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ที่มีผลต่ออุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย

#### 5.1 บทนำ

การจำลองผลของงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง โดยเน้นไปที่การคำนวณอุณหภูมิเมื่อหม้อแปลงอยู่ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุล ซึ่งค่าอุณหภูมิที่คำนวณได้นั้นจะมีผลมาจากค่าสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องศึกษาถึงการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ภายในหม้อแปลงจำหน่าย ในบทที่ 5 นี้จึงได้กล่าวถึงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจำลองผลและอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยโปรแกรมทั้งหมดถูกออกแบบให้ทำงานบนพื้นฐานการใช้งานของ MATLAB™

#### 5.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

การคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์สามารถดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนภายในโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ดำเนินการสร้างกริดด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อนำข้อมูลของโหนดและอิลิเมนต์มาพัฒนาต่อด้วยโปรแกรม MATLAB™ ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง โดยอธิบายถึงโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ได้ดังนี้

##### 5.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด

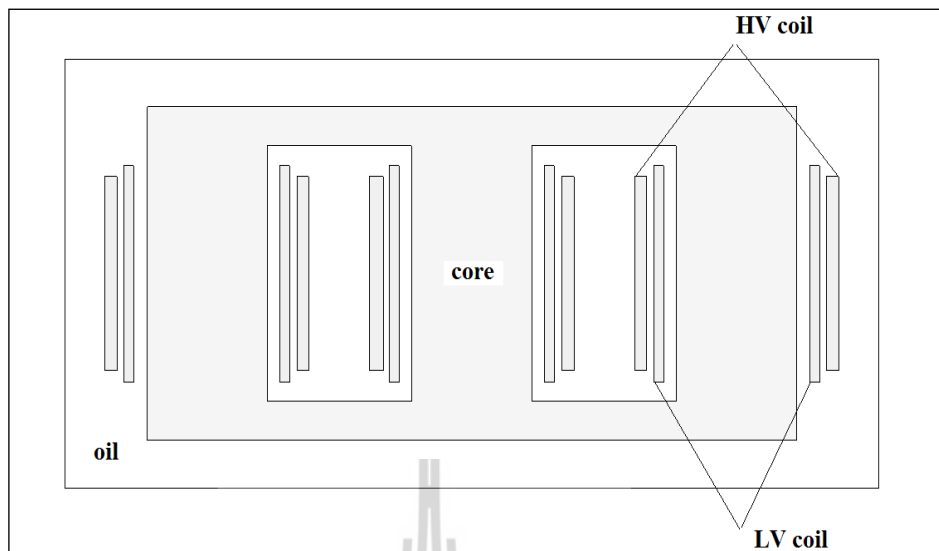
โปรแกรมการสร้างกริดในงานวิจัยนี้ สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB™ ซึ่งสามารถสร้างกริดได้เฉพาะปัญหาแบบ 2 มิติ เท่านั้น ส่วนระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากโปรแกรม Solid work โดยสามารถเลือกความละเอียดของกริดให้เหมาะสมกับระบบได้ทั้งกริดแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ จากนั้นจึงนำข้อมูลของการ

สร้างกริดที่จำเป็นมาพัฒนาเป็น โปรแกรมไฟในอิลิเมนต์ต่อไป ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 2 มิติได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิคัดในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขอิลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ส่วนข้อจำกัดของกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปนี้คือไม่สามารถระบุค่าเงื่อนไขขอบเขตให้กับระบบที่มีหลากหลายเนื้อวัสดุในชิ้นเดียวกันได้ ดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำประโยชน์ของกล่องเครื่องมือนี้มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดแต่เพียงเท่านั้น ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 3 มิติได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิคัดในแนวแกน  $x$   $y$  และ  $Z$  ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขอิลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยในงานวิจัยนี้ได้นำโปรแกรม Solid work มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดเช่นเดียวกับกล่องเครื่องมือ PDETOOL เพียงเท่านั้น ส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟในอิลิเมนต์อื่น ๆ อันได้แก่ การสร้างสมการของแต่ละอิลิเมนต์ การสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต การแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยและการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการนั้น จะทำการพัฒนาด้วยโปรแกรม MATLAB<sup>TM</sup> ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง โดยผู้ทำการวิจัยเพื่อจำลองผลต่อไป

สำหรับวิธีไฟในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ได้แก่ พื้นที่ที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และพื้นที่ที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง โดยพื้นที่ขดลวดตัวนำประกอบไปด้วย

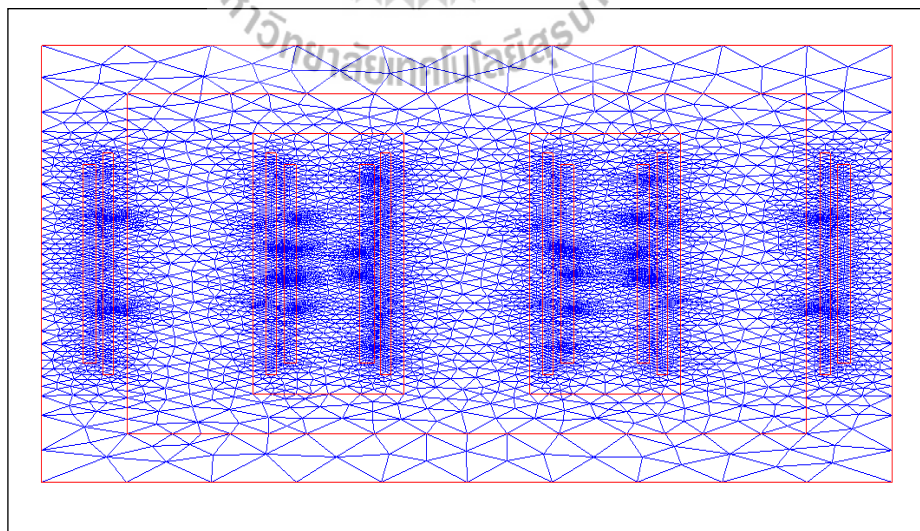
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส C
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส C

ในกล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายให้มีความกว้าง 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตรดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชิ้นงาน

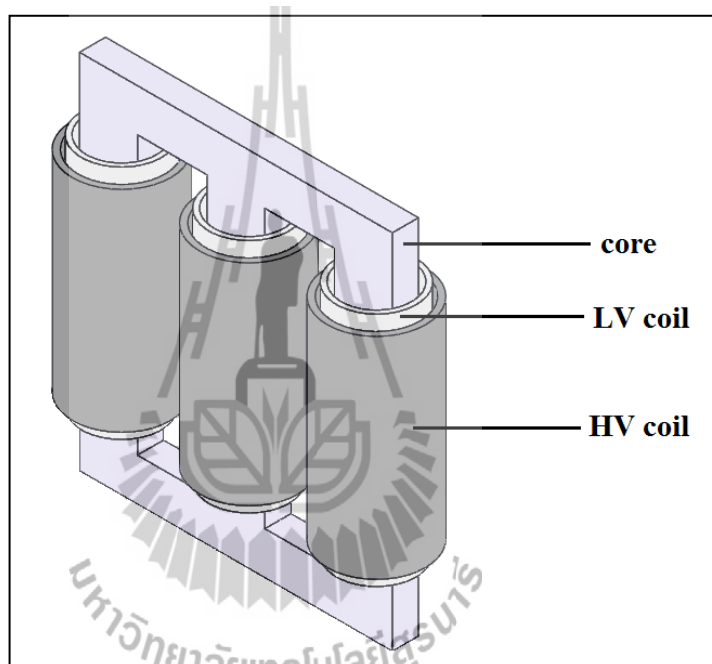
หลังจากแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายแล้ว จึงสั่งให้ PDETOOL สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ดังรูปที่ 5.2



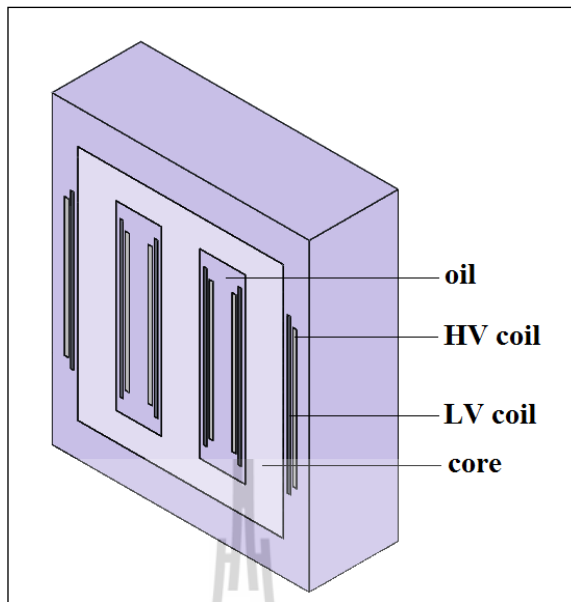
รูปที่ 5.2 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับวิธีไฟไนท์โอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งปริมาตรที่ศึกษาออกเป็นปริมาตรย่อย ๆ ได้แก่ ปริมาตรที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และปริมาตรที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง เหมือนกับการแบ่งพื้นที่ศึกษาของวิธีไฟไนท์โอลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ในโปรแกรม Solid work ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดปริมาตรของปัญหาให้มีความกว้าง 0.85 เมตร ยาว 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตร โดยในรูปที่ 5.3 จะแสดงเฉพาะส่วนที่เป็นแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่าย ในรูปที่ 5.4 จะแสดงภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

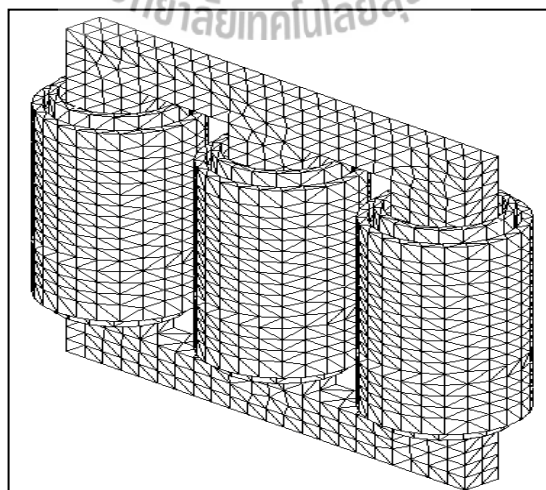


รูปที่ 5.3 แสดงแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.4 ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

หลังจากแบ่งปริมาตรของปัญหาเป็นหมวดหมู่แล้ว จึงสั่งให้โปรแกรม Solid work สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบทรงสี่เหลี่ยมที่จืดต่อ ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ได้ดังรูปที่ 5.5

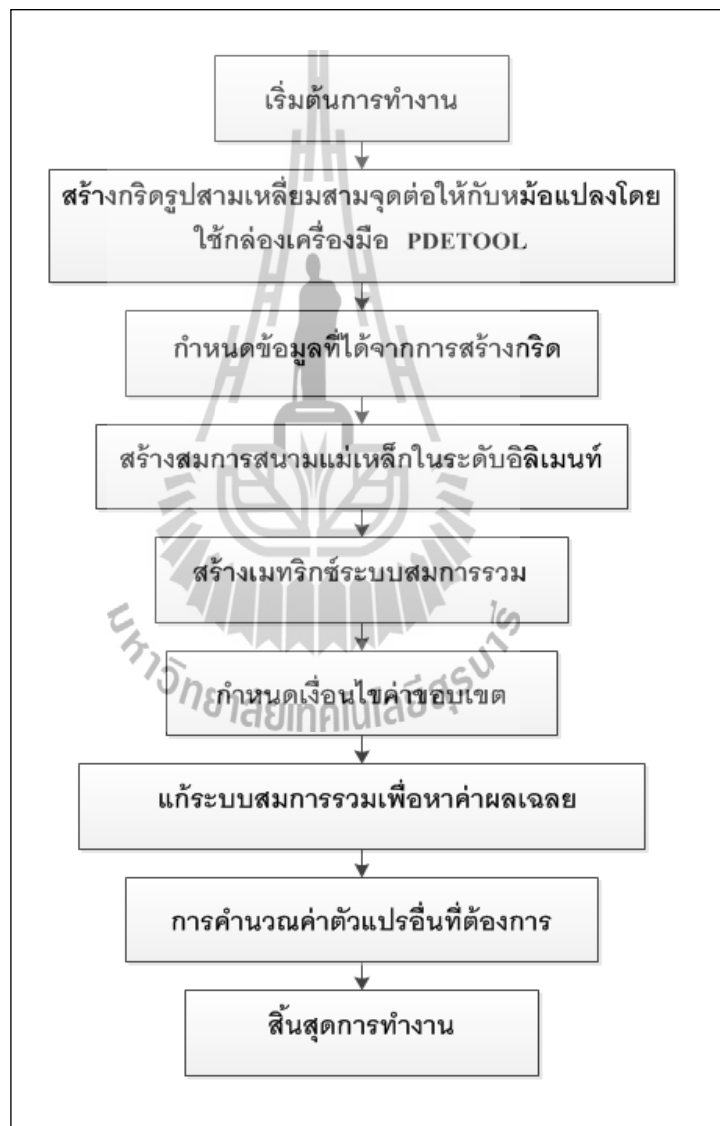


รูปที่ 5.5 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

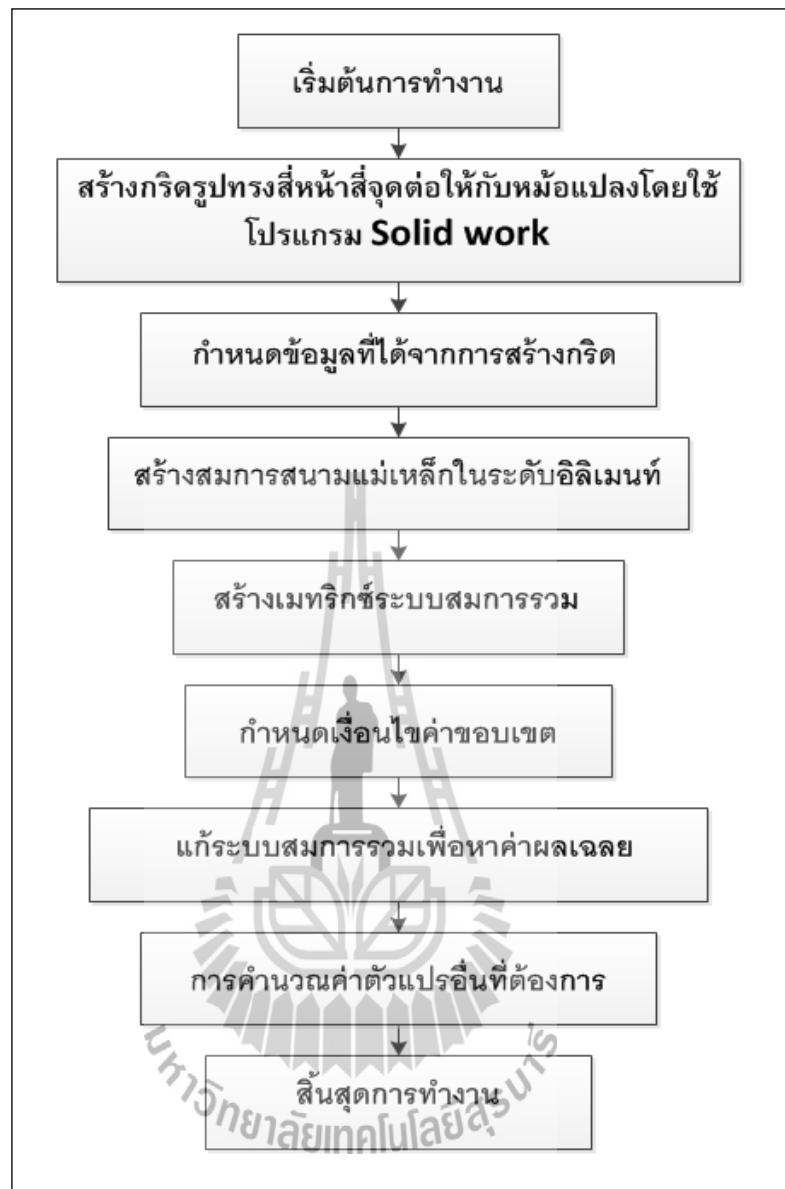


## 5.2.2 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

ในขั้นตอนนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยข้อมูลที่จำเป็นในการประดิษฐ์โปรแกรมนั้นได้จากในหัวข้อ 5.2.1 ที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 5.6 และ รูปที่ 5.7 ตามลำดับ



รูปที่ 5.6 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.7 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

จากแผนภูมิในรูปที่ 5.6 และรูปที่ 5.7 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลของระบบแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมและความแตกต่างระหว่างวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ อย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอน จะได้อธิบายถึงรายละเอียดหน้าที่ต่าง ๆ ของการดำเนินงานของระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ไปพร้อมๆ กันดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการกำหนดข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด : ขั้นตอนนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของโหนดและอิลิเมนต์จากกล่องเครื่องมือ PDETOOL ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลประกอบด้วย จำนวนและตำแหน่งของโหนด หมายเลขโหนดที่ประกอบขึ้นเป็นอิลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของอิลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของชิ้นงานในระบบ เป็นต้น สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของโหนดและอิลิเมนต์จากโปรแกรม Solid work ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลจะได้เหมือนกับปัญหาแบบ 2 มิติ

ขั้นตอนการสร้างสมการสนามแม่เหล็กในระดับอิลิเมนต์ : ขั้นตอนนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอิลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมสามจุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติ ของทุก ๆ อิลิเมนต์ และสำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอิลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ ของทุก ๆ อิลิเมนต์ เนื่องจากภายในระบบมีชิ้นงานที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันอยู่ 3 ชนิด คือ แกนเหล็ก ขดลวดตัวนำและน้ำมันหม้อแปลง ซึ่งวัตถุทั้งสามมีค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าที่แตกต่างกันออกไปได้แก่ แกนเหล็กมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $2.08 \times 10^6$  ค่าความซบซิมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 3000 ส่วนขดลวดตัวนำมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $5.8 \times 10^7$  ค่าความซบซิมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 1 และน้ำมันหม้อแปลงมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ 1.08 ค่าความซบซิมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 0.05 โดยการสร้างสมการอิลิเมนต์เมทริกซ์ของแต่ละอิลิเมนต์จะต้องคำนึงถึงค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าของวัตถุที่เกี่ยวข้องในแต่ละอิลิเมนต์นั้น ๆ ด้วย

ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม : ขั้นตอนนี้ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติโปรแกรมจะทำหน้าที่รวมสมการของอิลิเมนต์ย่อยเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 3.6 ของบทที่ 3 ซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ทั้งหมด  $n$  โหนดจะก่อให้เกิดเมทริกซ์ระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งสิ้น  $n$  สมการ

ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวม โดยงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงทั้ง 4 ด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ ก็จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 3 มิติ คือ ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจะต้องกำหนดทั้ง 6 ด้านให้มีค่าเท่ากับศูนย์

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย : ขั้นตอนนี้ ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โปรแกรมจะทำการแก้ระบบสมการรวมซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ประจำโหนดโดยการเลือกใช้ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ขั้นตอนการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการ : ขั้นตอนสุดท้ายนี้ จะนำค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ มาคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็ก โดยค่าสนามแม่เหล็กจะหาได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

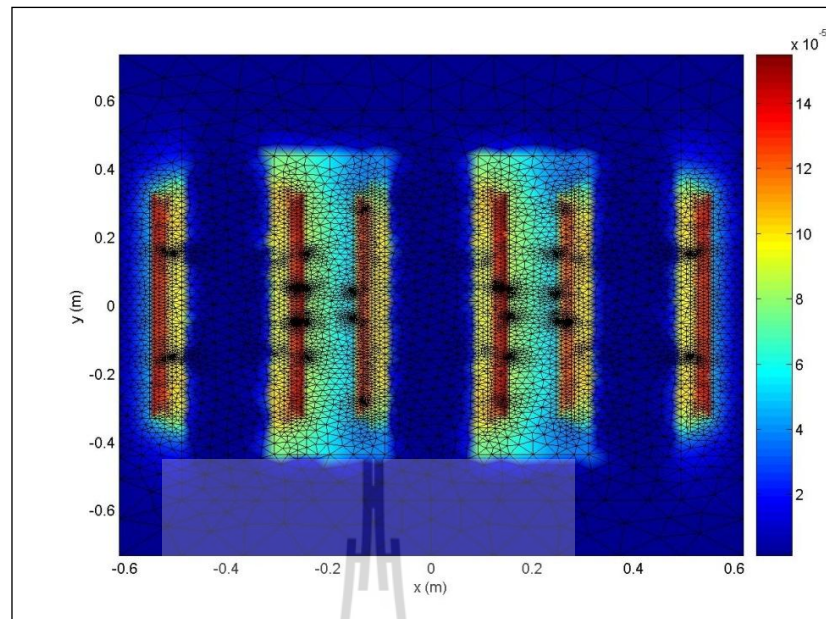
### 5.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กที่มีผลต่ออุณหภูมิของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการสมดุลโหลด

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ โดยจะเน้นผลการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก แต่จะแสดงผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ เฉพาะค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างและความคล้ายคลึงกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เท่านั้น โดยจะทำการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA โดยจะแยกการจำลองออกเป็น 2 กรณีเพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างของลักษณะของการกระจายค่าสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของสภาวะการจ่ายโหลดของหม้อแปลงดังนี้

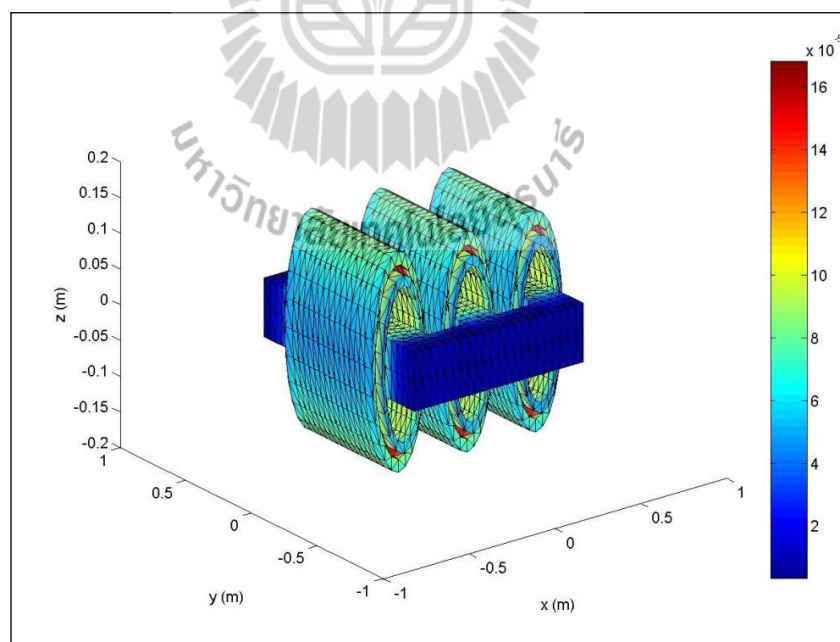
#### 5.3.1 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดสมดุล

ผลการจำลองสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล (ซึ่งแต่ละเฟสจะมีขนาดโหลดเท่ากันเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ทั้งนี้เนื่องจากในสภาวะปกติหม้อแปลงจะจ่ายโหลดที่ประมาณ 80% ของค่าพิกัด) จะแสดงได้ดังนี้

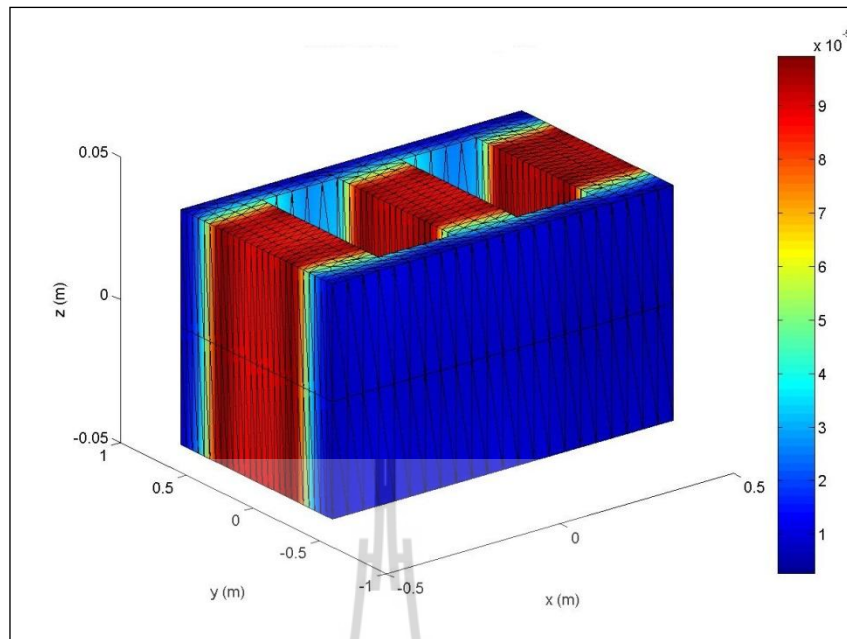
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดสมดุลแบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.8
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.9
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.10
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.11



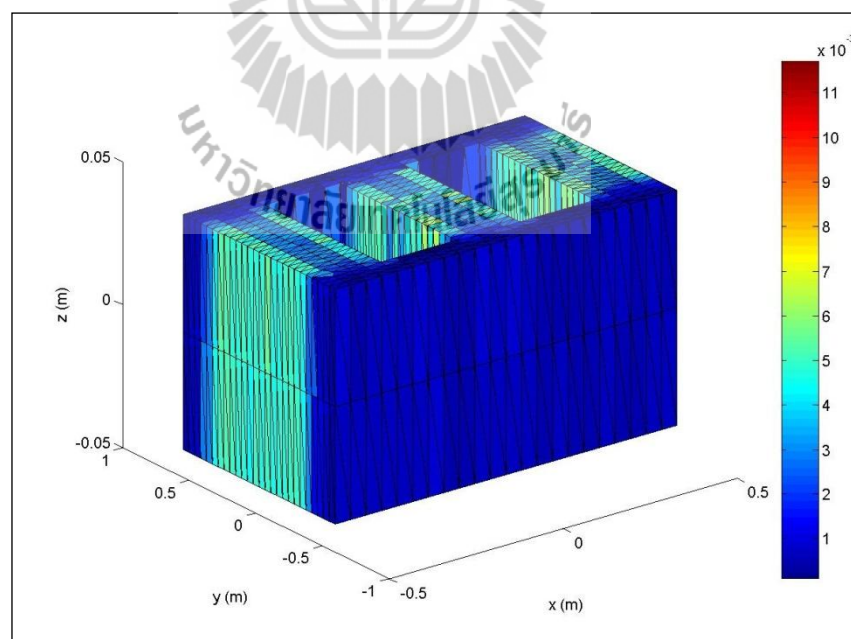
รูปที่ 5.8 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลด สมดุลแบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.9 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงใน สภาวะจ่ายโหลดสมดุล แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.10 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดสมดุลงแบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.11 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมดุลงแบบ 3 มิติ

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณากรณีจ่ายโหลดสมดุลที่ปรากฏพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แสดงในรูปที่ 5.8, 5.9 และ 5.10 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลง และผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเห็นยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วยโดยเฉพาะในรูปที่ 5.10 และจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ถ้ากระแสไหลตรงกันทุกเฟสเนื่องจากจ่ายโหลดสมดุล บริเวณแกนเหล็กนั้นจะมีการกระจายตัวของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กที่สม่ำเสมอและมีความสมมาตร ซึ่งพิจารณาได้จากความสม่ำเสมอของสีบริเวณแกนเหล็ก ส่วนในรูปที่ 5.11 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความสมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดสมดุลของหม้อแปลง

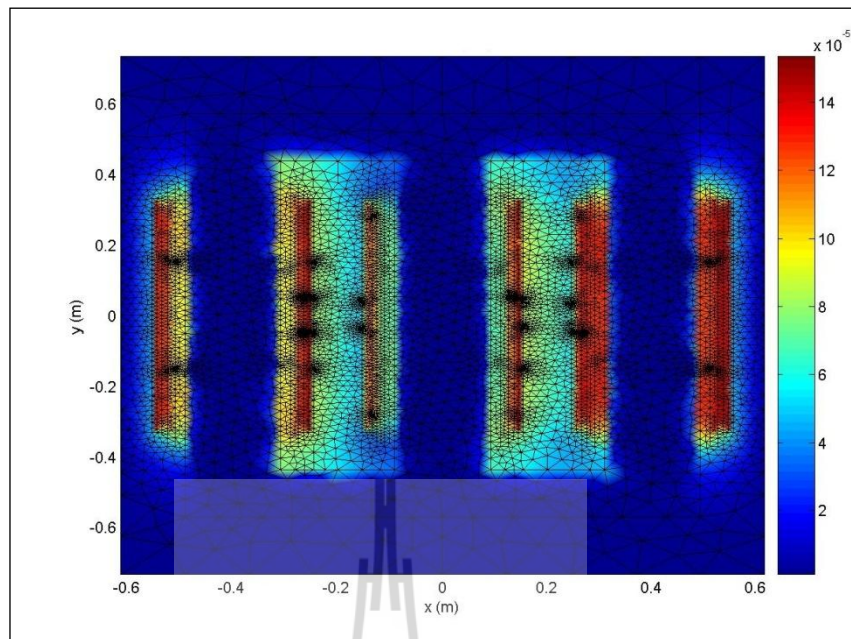
### 5.3.2 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดไม่สมดุล

ผลการจำลองสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลจะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบไม่สมดุลขนาด (มุมเฟสคงที่) และ แบบไม่สมดุลมุมเฟส (ขนาดคงที่) ดังนี้

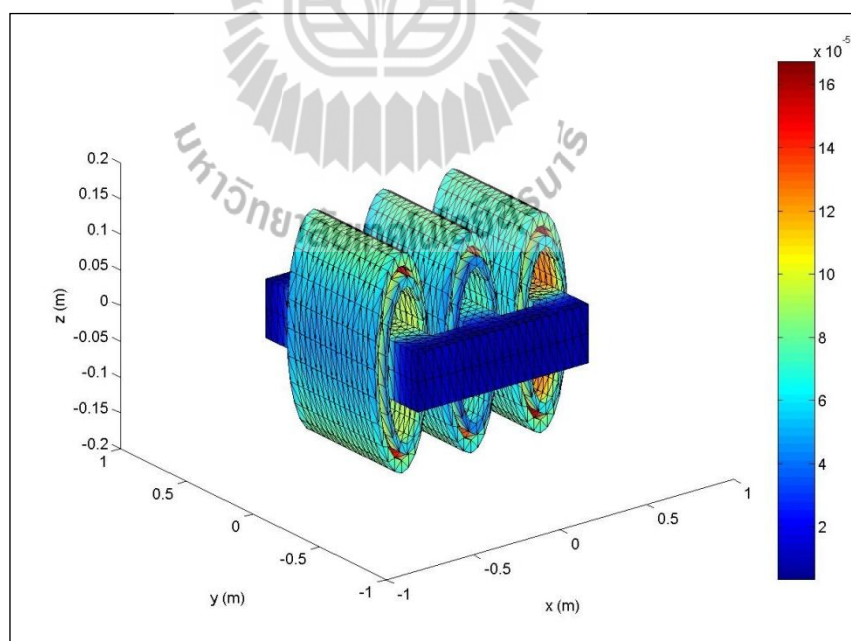
#### 1. ผลการจำลองสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลขนาด

อ้างอิงขนาดเฟส A (เฟส A มีขนาดโหลดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส B มีขนาดโหลดลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดโหลดเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด)

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.12
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.13
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.14
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.15

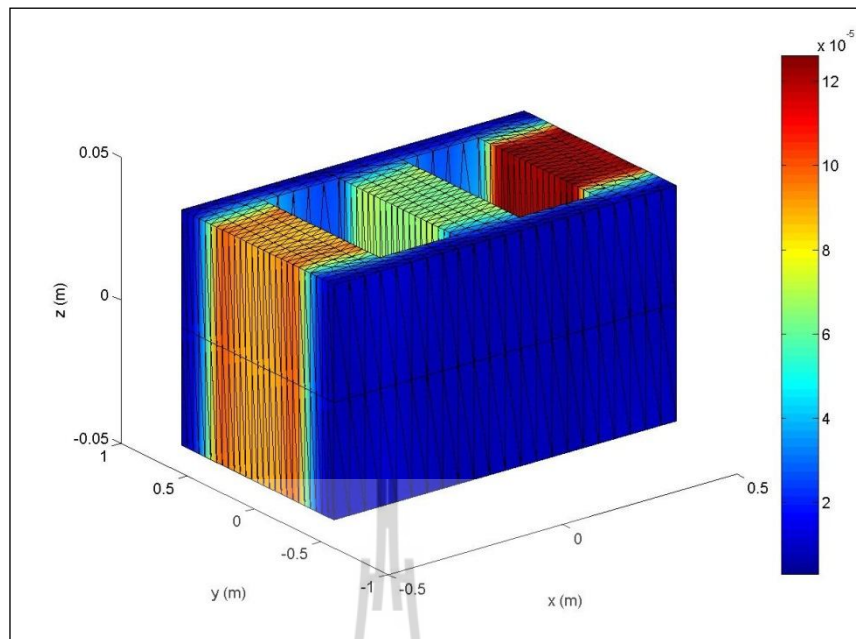


รูปที่ 5.12 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลด ไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 2 มิติ

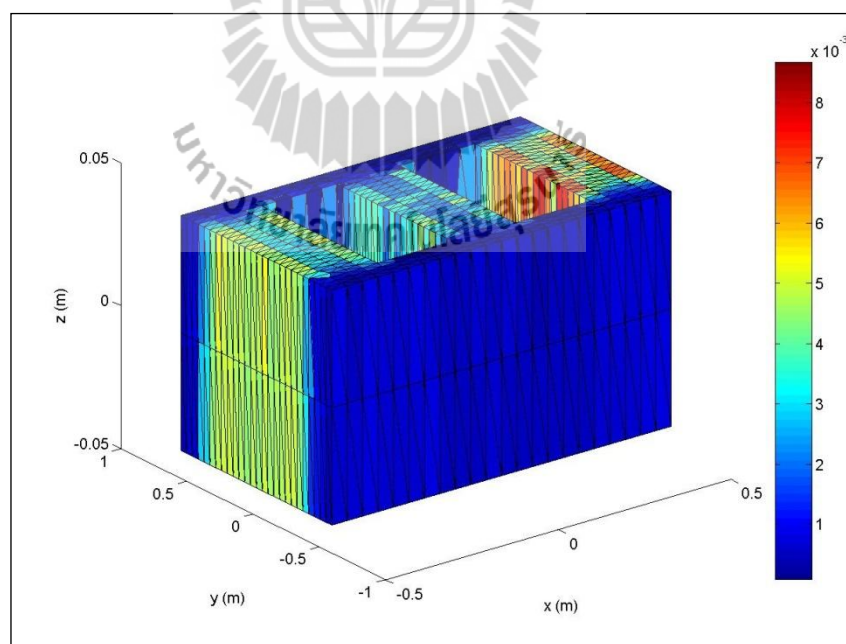


รูปที่ 5.13 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ





รูปที่ 5.14 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ

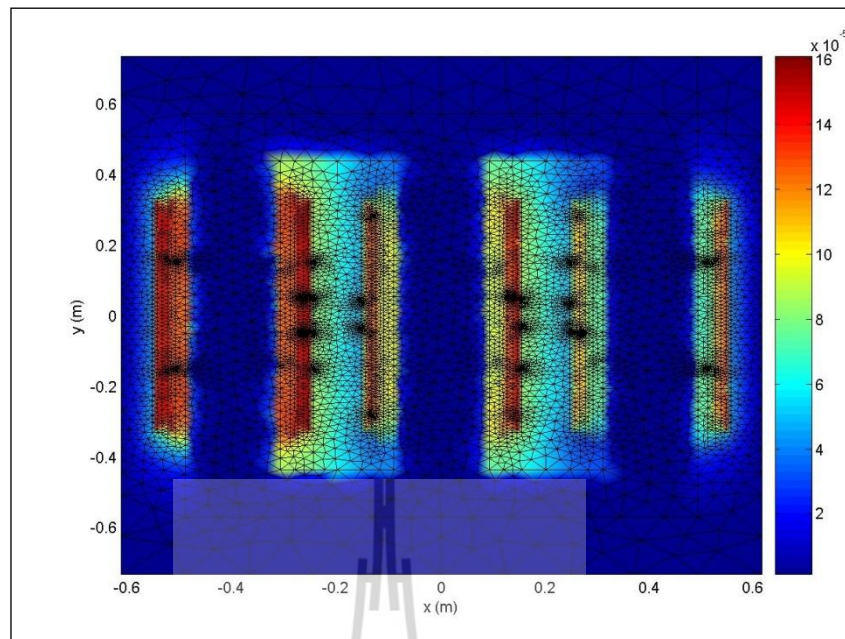


รูปที่ 5.15 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แบบ 3 มิติ

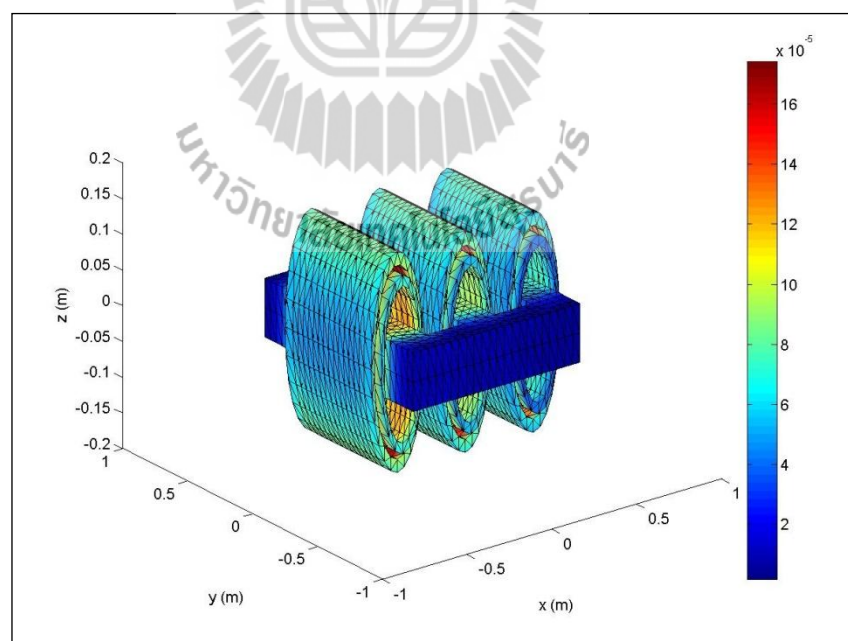
ในกรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยการอ้างอิงขนาดปกติเฟส A เป็นหลัก ส่วนเฟส B มีขนาดน้อยกว่าปกติและเฟส C มีขนาดสูงกว่าเฟสปกติ ในรูปที่ 5.12, 5.13 และ 5.14 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วยในรูปที่ 5.14 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส B จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อยกว่าเฟส A เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส B จ่ายกระแสโหลดน้อยกว่าเฟส A และในทำนองเดียวกันเฟส C จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงที่สุด เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส C จ่ายกระแสโหลดสูงที่สุด ส่วนในรูปที่ 5.15 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดในบริเวณที่มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลของหม้อแปลงนั่นเอง

**อ้างอิงขนาดเฟส B** (เฟส B มีขนาดโหลดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดโหลดเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดโหลดลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด)

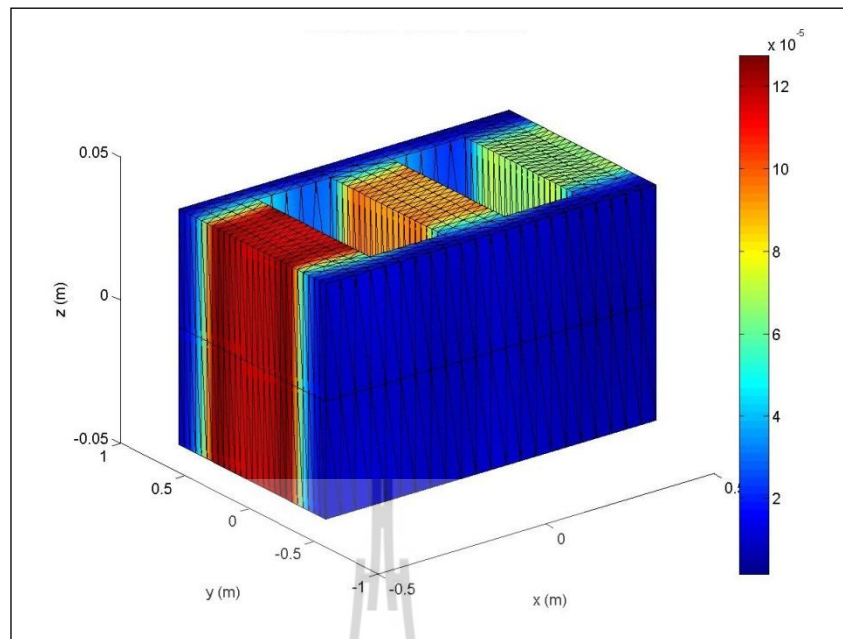
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.16
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.17
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.18
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.19



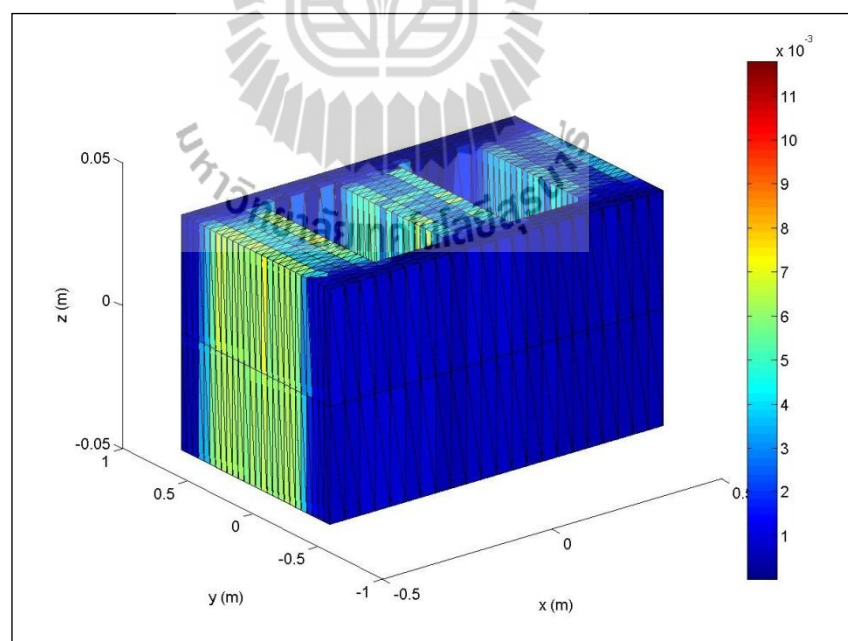
รูปที่ 5.16 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลด ไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.17 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงใน สภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.18 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ

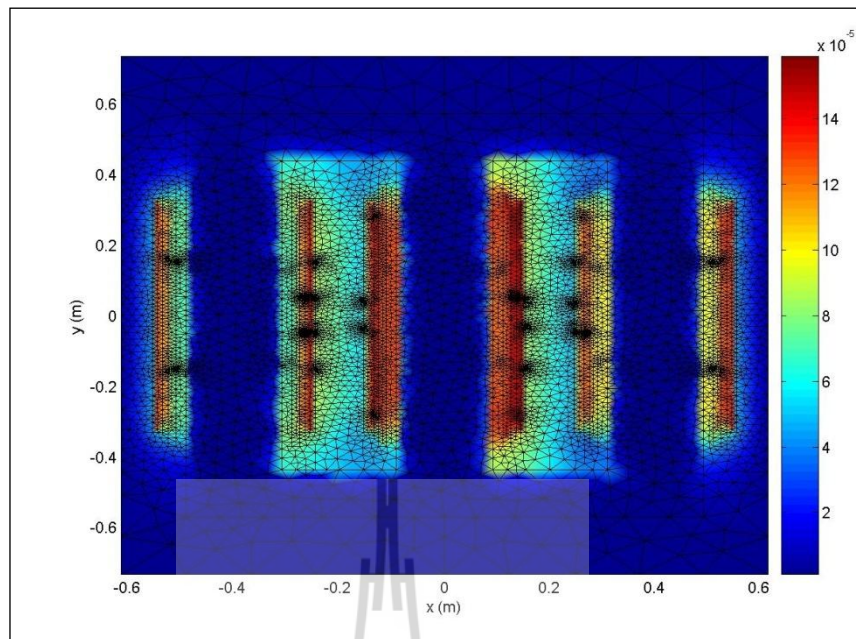


รูปที่ 5.19 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แบบ 3 มิติ

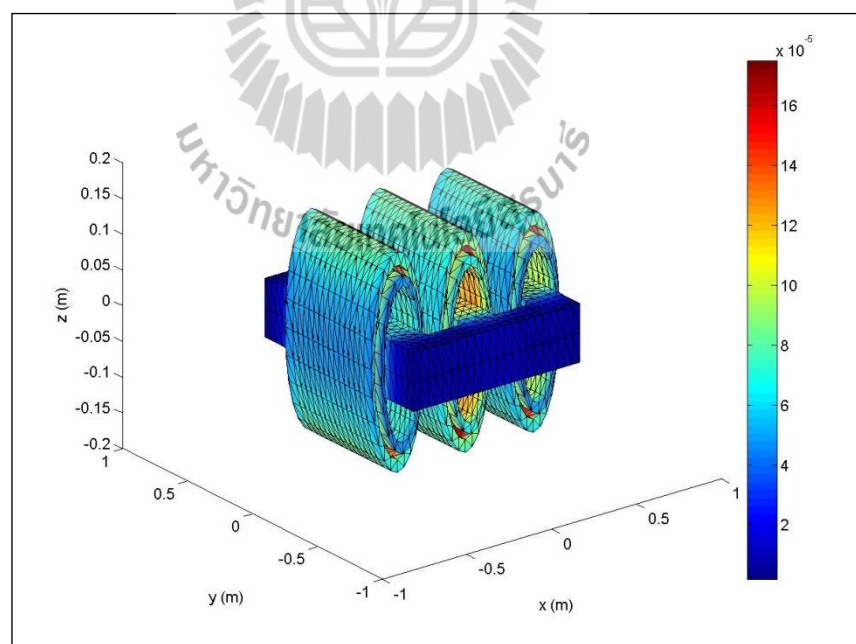
ในกรณีการอ้างอิงขนาดปกติเฟส B เป็นหลัก ส่วนเฟส A มีขนาดสูงกว่าปกติและเฟส C มีขนาดน้อยกว่าเฟสปกติในรูปที่ 5.16, 5.17 และ 5.18 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ในรูปที่ 5.18 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส A จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมากกว่าเฟส B เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส A จ่ายกระแสไหลมากกว่าเฟส B และในทำนองเดียวกันเฟส C จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อยที่สุดเนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส C จ่ายกระแสไหลค่าน้อยที่สุด ส่วนในรูปที่ 5.19 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลของหม้อแปลงเช่นเดียวกันกับกรณีอ้างอิงขนาดเฟส A

**อ้างอิงขนาดเฟส C** (เฟส C มีขนาดไหลลดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดไหลลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด และเฟส B มีขนาดไหลเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด)

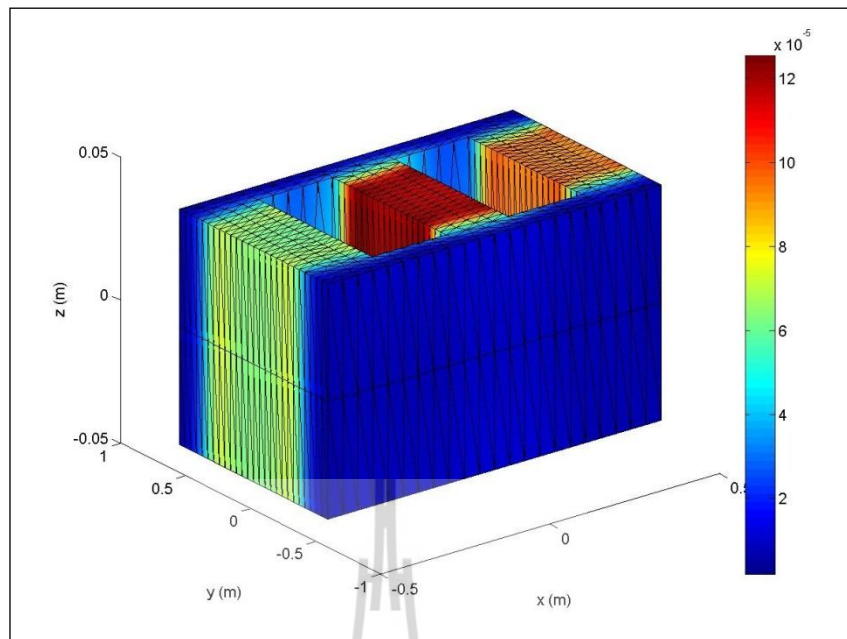
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.20
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.21
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.22
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.23



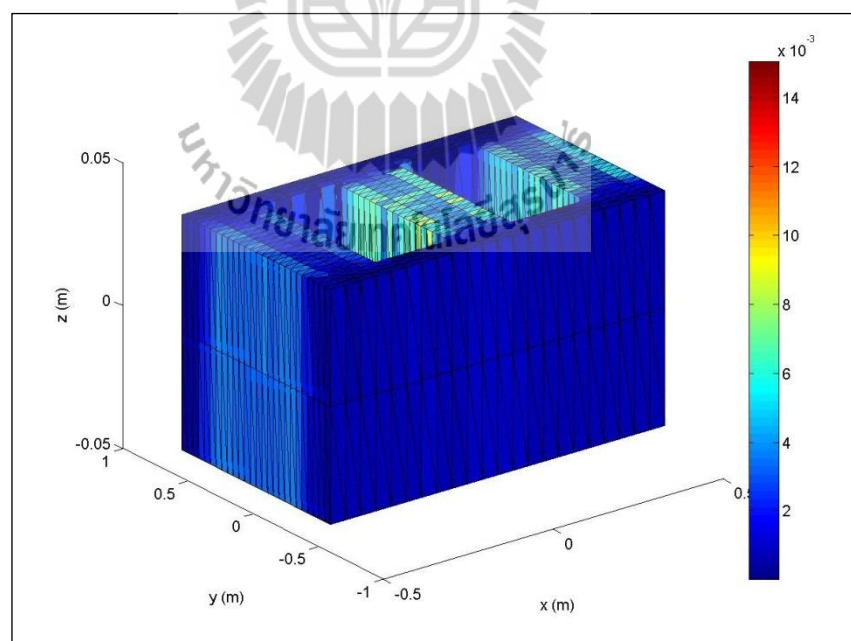
รูปที่ 5.20 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลด ไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.21 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.22 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.23 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แบบ 3 มิติ

ในกรณีการอ้างอิงขนาดปกติเฟส C เป็นหลัก ส่วนเฟส A มีขนาดน้อยกว่าปกติและเฟส B มีขนาดสูงกว่าเฟสปกติ ในรูปที่ 5.20, 5.21 และ 5.22 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเห็นยวน่าให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ในรูปที่ 5.22 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส A จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อยกว่าเฟส C เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส A จ่ายกระแสไหลค่น้อยกว่าเฟส C และในทำนองเดียวกันเฟส B จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงที่สุด เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส B จ่ายกระแสไหลคดสูงที่สุด ส่วนในรูปที่ 5.23 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลของหม้อแปลงเช่นเดียวกันกับกรณีอ้างอิงขนาดเฟส A และเฟส B ที่ผ่านมา

เมื่อพิจารณากรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางขนาดทุกแบบที่ปรากฏพบว่าค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่ามากที่บริเวณค่ากระแสไหลคดมีค่ามาก และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมีค่าน้อยที่บริเวณกระแสไหลคดมีค่าน้อย โดยการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่มีผลมาจากสภาวะการจ่ายโหลดไม่สมดุล แบบไม่สมดุลขนาดทุกแบบจะมีความไม่สมมาตรอันเนื่องมาจากกระแสไหลคดทั้งสามเฟสของหม้อแปลงนั้นไม่สมดุล

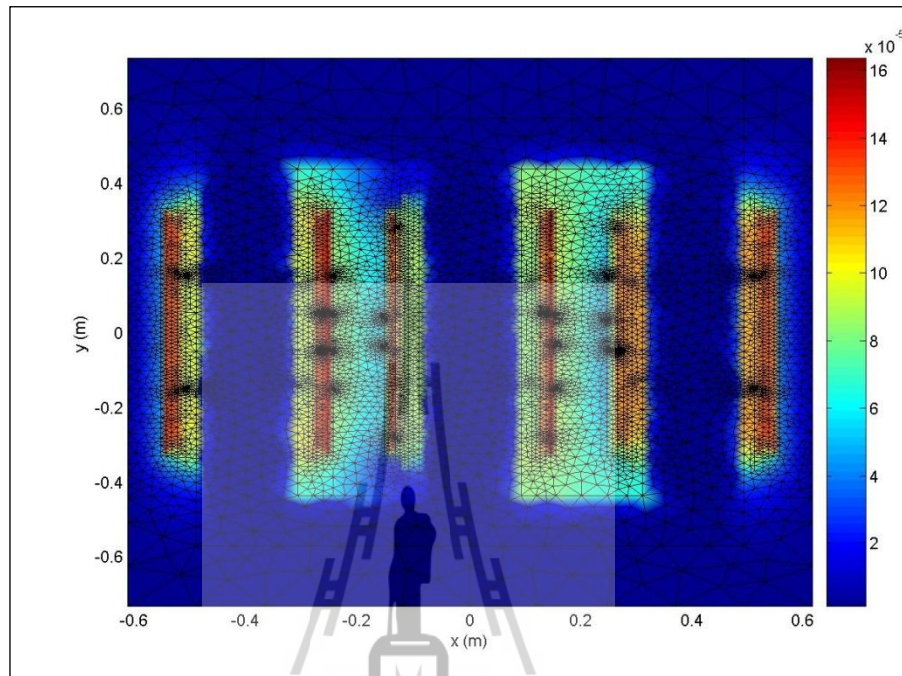
## 2. ผลการจำลองสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุล แบบไม่สมดุลมุมเฟส

อ้างอิงมุมเฟสเฟส A (เฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลคดเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลคดเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลคดลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

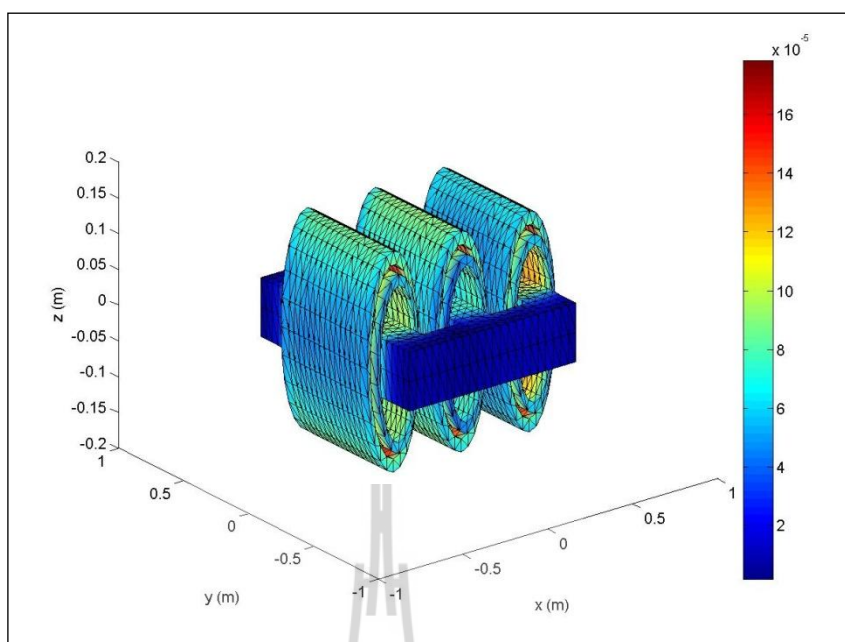
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.24
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.25
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.26



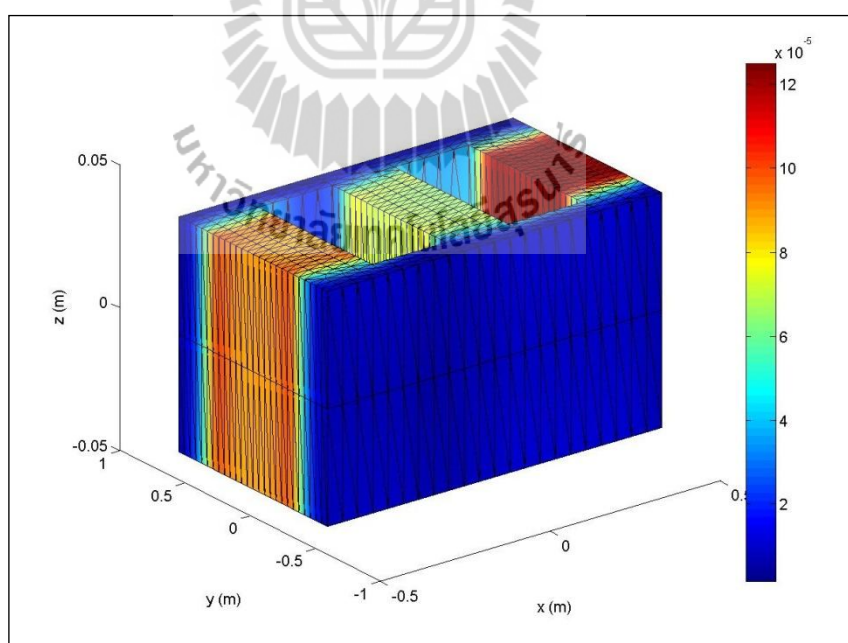
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.27



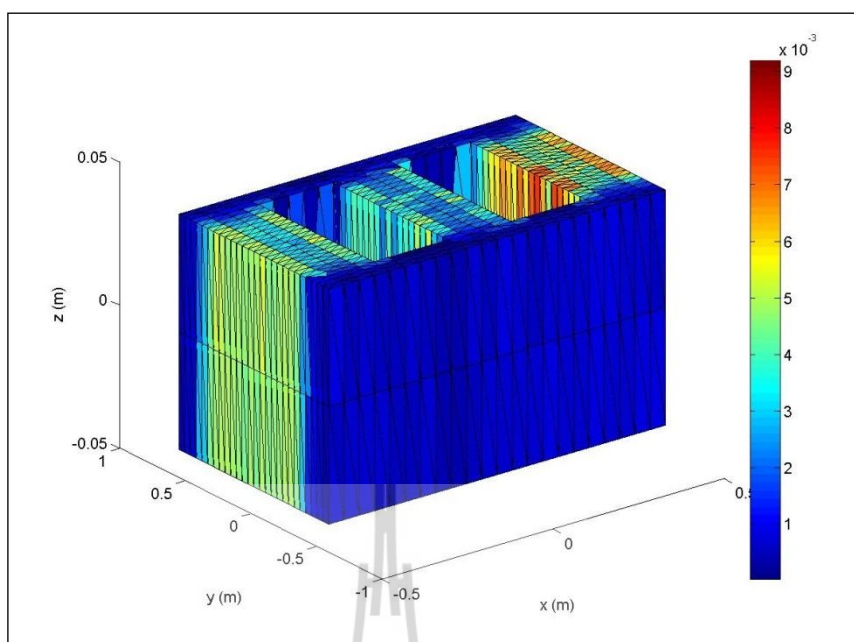
รูปที่ 5.24 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.25 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.26 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.27 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แบบ 3 มิติ

ในกรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยการอ้างอิงมุมเฟสเฟส A เป็นหลัก ส่วนเฟส B มีมุมเฟสเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  และเฟส C มีมุมเฟสลดลง  $30^\circ$  ในรูปที่ 5.24 , 5.25 และ 5.26 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงเช่นเดียวกันและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ในรูปที่ 5.26 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส B จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อยเนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส B จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสมากขึ้น และในทำนองเดียวกันเฟส C จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมาก เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส C จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสน้อยลง ส่วนในรูปที่ 5.27 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสของหม้อแปลงและมีลักษณะเช่นเดียวกันกับกรณีไม่สมดุลทางขนาดที่ผ่านมา

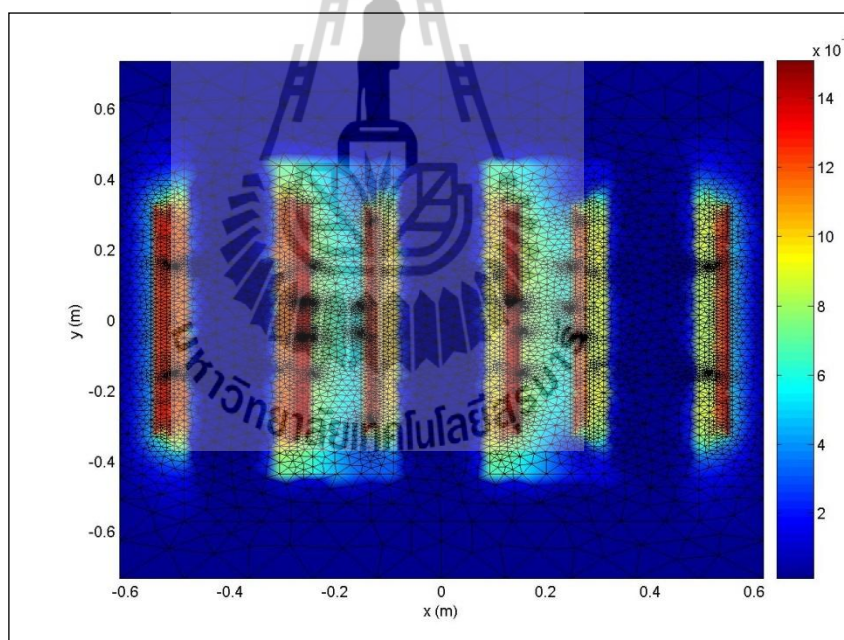
**อ้างอิงมุมเฟสเฟส B** (เฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลลดเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.28

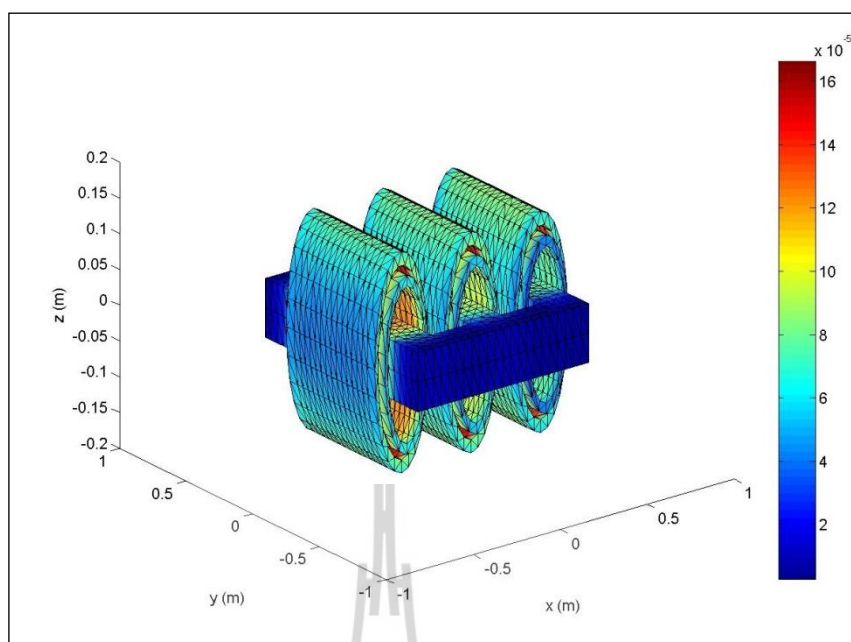
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.29

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.30

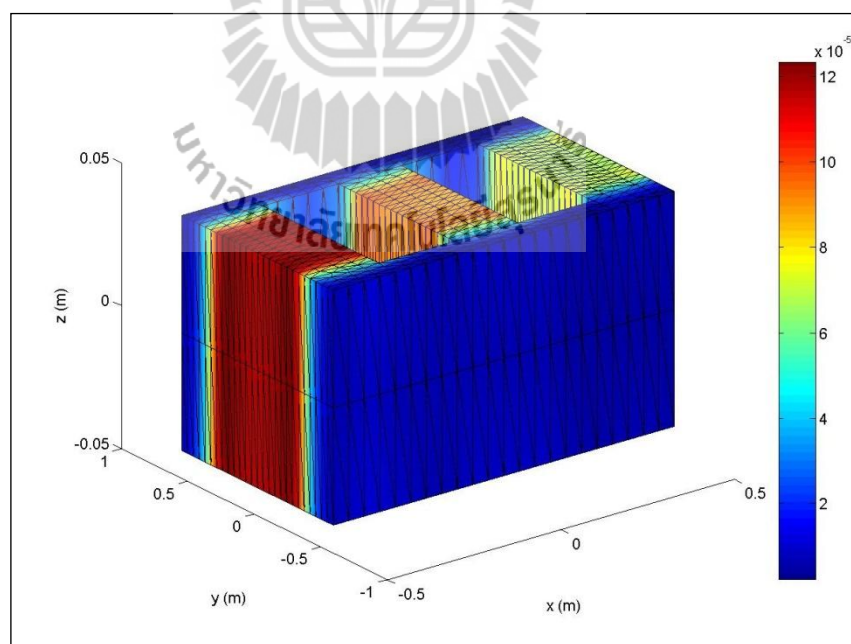
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.31



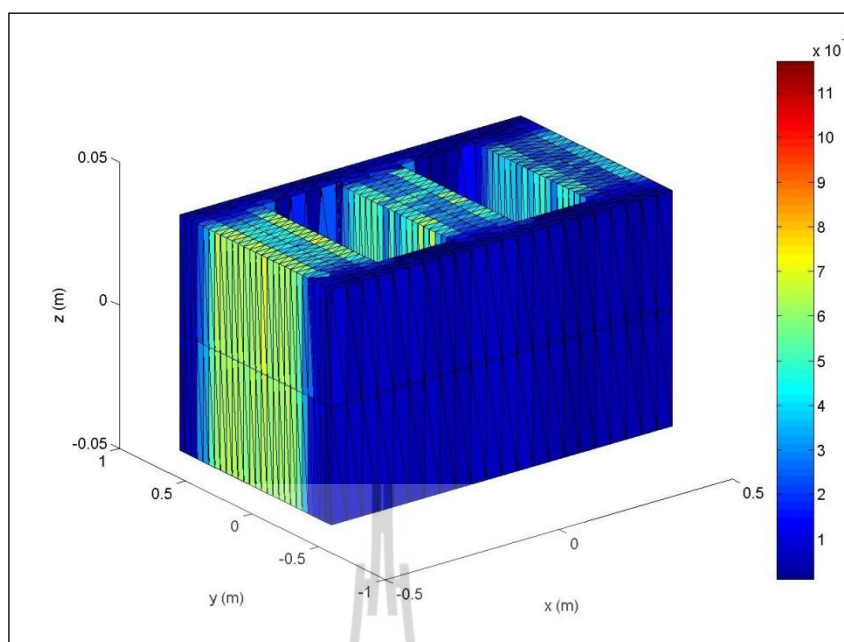
รูปที่ 5.28 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.29 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.30 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.31 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แบบ 3 มิติ

ในกรณีอ้างอิงมุมเฟสเฟส B เป็นหลัก ส่วนเฟส A มีมุมเฟสลดลง  $30^\circ$  และเฟส C มีมุมเฟสเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  ในรูปที่ 5.28 , 5.29 และ 5.30 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ในรูปที่ 5.30 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส A จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมาก เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส A จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสน้อยลง และในทำนองเดียวกันเฟส C จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อย เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส C จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 5.31 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสของหม้อแปลงเช่นเดียวกันกับกรณีที่ผ่านมา

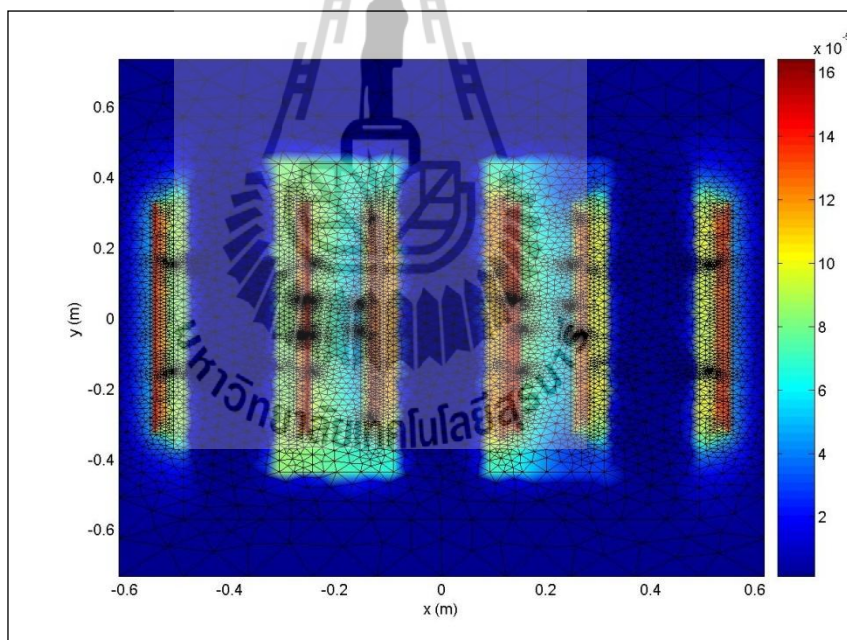
อ้างอิงมุมเฟสเฟส C (เฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.32

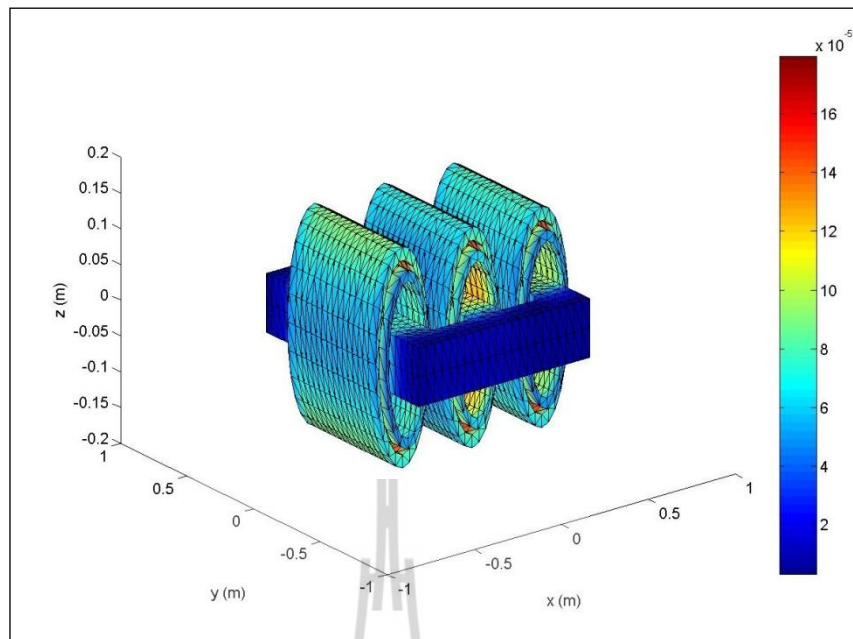
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.33

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.34

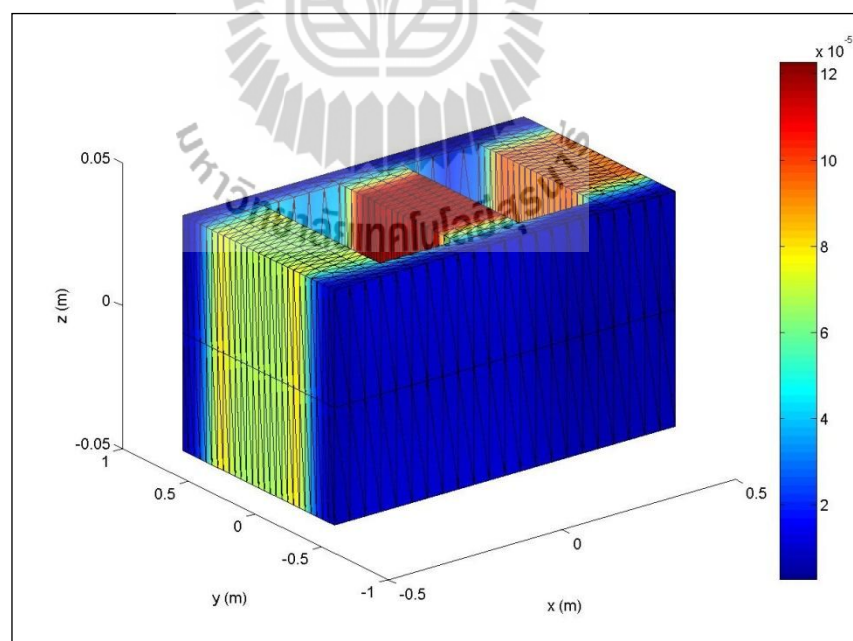
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.35



รูปที่ 5.32 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ( $\text{Wb/m}$ ) ของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 2 มิติ

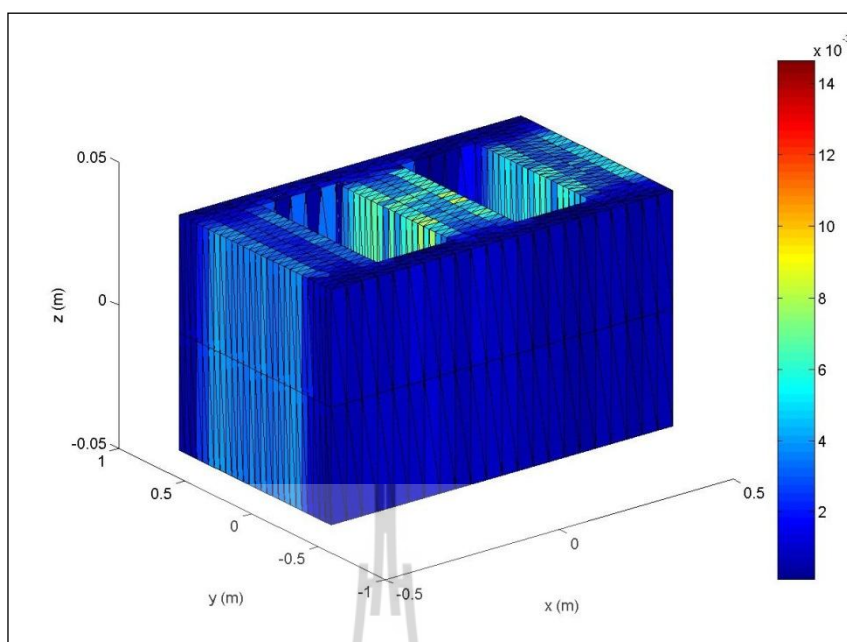


รูปที่ 5.33 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.34 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ





รูปที่ 5.35 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่าย โหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แบบ 3 มิติ

ในกรณีอ้างอิงมุมเฟสเฟส C เป็นหลัก ส่วนเฟส A มีมุมเฟสเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  และเฟส B มีมุมเฟสลดลง  $30^\circ$  ในรูปที่ 5.32, 5.33 และ 5.34 ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงและผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ในรูปที่ 5.34 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเฟส A จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กน้อย เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส A จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสมากขึ้น และในทำนองเดียวกันเฟส B จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมาก เนื่องจากขดลวดด้านทุติยภูมิของเฟส B จ่ายกระแสโหลดที่มีมุมเฟสน้อยลง ส่วนในรูปที่ 5.35 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตรเนื่องจากการจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสของหม้อแปลงเช่นเดียวกันกับกรณีที่ผ่านมา

เมื่อพิจารณากรณีสถานะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสทุกแบบที่ปรากฏพบว่าค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีค่ามากที่สุดที่บริเวณค่ามุมเฟสของกระแสโหลดมีค่าน้อย และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมีค่าน้อยที่บริเวณค่ามุมเฟสของกระแสโหลดมีค่ามาก โดยการกระจายตัวของค่าศักย์เชิง

เวกเตอร์แม่เหล็กที่มีผลมาจากสภาวะการจ่ายโหลดไม่สมดุล แบบไม่สมดุลมุมเฟสทุกแบบจะมีความไม่สมมาตรอันเนื่องมาจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดทั้งสามเฟสของหม้อแปลงนั้นไม่สมดุล เช่นเดียวกันกับสภาวะไม่สมดุลแบบไม่สมดุลขนาด

เมื่อพิจารณาค่าสนามแม่เหล็กในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล ไม่สมดุลทางขนาด และไม่สมดุลทางมุมเฟส ในรูปที่ 5.11 , 5.15 , 5.19 , 5.23 , 5.27 , 5.31 และ 5.35 ซึ่งเป็นการจำลองผลเฉพาะในส่วนของแกนเหล็กหม้อแปลงเท่านั้น พบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าสูงที่สุดที่บริเวณที่มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงสูงที่สุด และในรูปที่ 5.11 ลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความสมมาตร เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้ทำการจำลองผลหม้อแปลงแบบ 3 เฟสในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล ในรูปที่ 5.15 , 5.19 , 5.23 , 5.27 , 5.31 และ 5.35 ลักษณะของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความไม่สมมาตร เนื่องจากค่ากระแสโหลดและค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงแบบ 3 เฟสไม่สมดุล

#### 5.4 สรุป

บทที่ 5 เป็นการอธิบาย โปรแกรมจำลองผลพร้อมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุล ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB™ ซึ่งโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติและ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังรูปที่ 5.6 และ 5.7 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลงที่จ่ายกระแสให้กับโหลดภายนอก จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงกว่าบริเวณอื่นๆ และค่าจะสูงที่สุดที่บริเวณที่จ่ายกระแสโหลดสูงสุด บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่มีขดลวดล้อมรอบอยู่ ก็จะถูกเหนี่ยวนำโดยขดลวดตัวนำ ทำให้มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นไปตาม ดังนั้นสนามแม่เหล็กบริเวณนั้นก็จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นของแกนเหล็กเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูง โดยกรณีหม้อแปลงจำหน่ายจ่ายโหลดสมดุลจะมีการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กเป็นแบบสมมาตร กรณีจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กจะมีค่าสูงในเฟสที่หม้อแปลงจำหน่ายจ่ายโหลดสูง จะมีค่าน้อยในเฟสที่หม้อแปลงจำหน่ายจ่ายโหลดน้อย และการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กจะมีลักษณะไม่สมมาตร กรณีจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กจะมีค่าสูงในเฟสที่มุมเฟสของโหลดของหม้อแปลง

จำหน่ายมีค่าลดลง จะมีค่าน้อยในเฟสที่มุมเฟสของโหนดของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าเพิ่มขึ้น และการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กจะมีลักษณะไม่สมมาตรเช่นเดียวกับกรณีไม่สมดุลทางขนาด



## บทที่ 6

### ผลการจำลองอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่มีผลต่ออายุการใช้งานของหม้อแปลงจำหน่าย

#### 6.1 บทนำ

ในบทที่ 5 เป็นการอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลพร้อมผลการจำลองค่าสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณค่าอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง ดังนั้นสำหรับบทที่ 6 เป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ในการคำนวณค่าอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่าย โดยมีแหล่งกำเนิดความร้อน (heat source) ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) ของปัญหาความร้อนนั้นมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก สำหรับการคำนวณอุณหภูมิในบทนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาในสถานะชั่วคราว ซึ่งขั้นตอนและวิธีการจะมีความคล้ายคลึงกันกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ใช้คำนวณสนามแม่เหล็กในบทที่ 5 ที่ผ่านมา ซึ่งโปรแกรมทั้งหมดถูกออกแบบให้ทำงานบนพื้นฐานของ MATLAB™ เช่นเดียวกัน

#### 6.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิแบบ 3 มิติ

การคำนวณค่าอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์สามารถดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนภายในโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ดำเนินการสร้างกริดด้วยโปรแกรม Solid work เพื่อนำข้อมูลของโหนดและอีลิเมนต์มาพัฒนาต่อด้วยโปรแกรม MATLAB™ ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองจากผู้ทำการวิจัยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่เลือกใช้ จะเป็นการวิเคราะห์ปัญหาความร้อนในสถานะชั่วคราว แบบ 3 มิติ ซึ่งอธิบายโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลได้ดังนี้

##### 6.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด

โปรแกรมการสร้างกริดในงานวิจัยในบทนี้ จะใช้การสร้างกริดจากโปรแกรม Solid work โดยสามารถเลือกความละเอียดของกริดให้เหมาะสมกับระบบ จากนั้นนำข้อมูลจากการสร้างกริดที่จำเป็นมาพัฒนาเป็นโปรแกรมไฟไนต์อีลิเมนต์ต่อไป ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด ได้แก่ ข้อมูลของระยะพิกัดในแนวแกน  $x$  ,  $y$  และ  $z$  ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขอีลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดวัสดุในระบบ ข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อ

กำหนดเงื่อนไขขอบเขต ส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์อื่นๆ อันได้แก่ การสร้างสมการอิลิเมนต์ การสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และการแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยนั้น จะทำการพัฒนาด้วยโปรแกรม MATLAB™ ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง จากผู้ทำการวิจัยเพื่อจำลองผลต่อไป

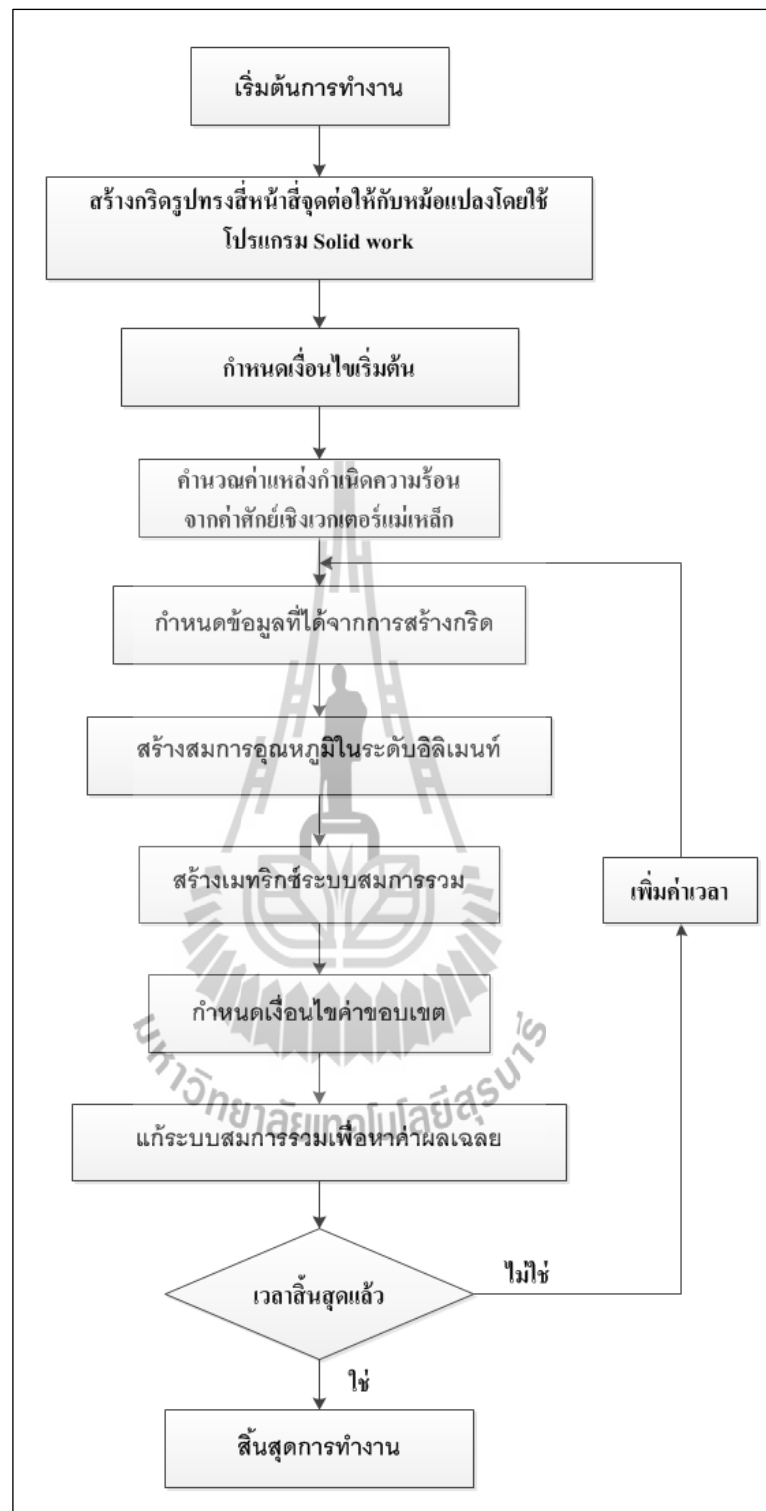
สำหรับวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้จะแบ่งปริมาตรย่อย ได้แก่ ปริมาตรที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็กและปริมาตรที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง โดยปริมาตรของขดลวดตัวนำประกอบไปด้วย

- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส C
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส C

และกำหนดปริมาตรของปัญหาให้มีความกว้าง 0.85 เมตร ยาว 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตร เหมือนกับการแบ่งปริมาตรในหัวข้อที่ 5.2.1

### 6.2.2 โปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิ

ในขั้นตอนนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อจำลองผลค่าอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ โดยวิเคราะห์ปัญหาเป็นแบบปัญหาความร้อนแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว โดยข้อมูลที่จำเป็นในการประดิษฐ์โปรแกรมนั้นได้มาจากในหัวข้อ 6.2.1 ที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิแบบ 3 มิติสามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 6.1 ดังนี้



รูปที่ 6.1 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

จากแผนภูมิในรูปที่ 6.1 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลทางปัญหาความร้อนในสถานะชั่วคราว เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมอย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอนจะได้อธิบายถึงรายละเอียดและหน้าที่ต่างๆ ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการกำหนดข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด : ขั้นตอนนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นจะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของโหนดและอิเลเมนต์จากโปรแกรม Solid work ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลจะได้เหมือนกับการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ทุกประการ

ขั้นตอนการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้น : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะกำหนดว่าอุณหภูมิเริ่มต้น  $T(t=0) = 0$  สำหรับการคำนวณในรอบแรก ส่วนการคำนวณรอบเวลาถัดไปจะใช้คำตอบจากรอบที่ผ่านมาเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งนี้การดูเข้าหาคำตอบที่ถูกต้องและจำนวนรอบเวลาสิ้นสุดการคำนวณจะขึ้นอยู่กับเวลาที่หม้อแปลงจำหน่ายอยู่ในสภาวะจ่ายโหลดจนกระทั่งความร้อนของหม้อแปลงคงที่

ขั้นตอนการคำนวณค่าแหล่งกำเนิดความร้อน (heat source) : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะนำค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมาคำนวณเป็นค่าแหล่งกำเนิดความร้อน ซึ่งค่าแหล่งกำเนิดความร้อนนี้จะถูกนำไปใช้เพื่อเป็นโหลดความร้อนสำหรับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์

ขั้นตอนการสร้างสมการอุณหภูมิในระดับอิเลเมนต์ : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะสร้างสมการอิเลเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของรูปทรงสี่เหลี่ยมที่จุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ ของทุกๆ อิเลเมนต์ เนื่องจากภายในระบบมีชิ้นงานที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันอยู่ 3 ชนิด คือ แกนเหล็ก ขดลวดตัวนำและน้ำมันหม้อแปลง ซึ่งวัตถุทั้งสามมีค่าคุณสมบัติทางความร้อนที่แตกต่างกันออกไป ได้แก่ แกนเหล็กมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $2.08 \times 10^6$  ค่าความร้อนจำเพาะ ( $c$ ) เท่ากับ 478.39 ค่าความหนาแน่นมวล ( $\rho$ ) เท่ากับ 7,650 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ( $k$ ) เท่ากับ 19 ส่วนขดลวดตัวนำมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $5.8 \times 10^7$  ค่าความร้อนจำเพาะ ( $c$ ) เท่ากับ 387 ค่าความหนาแน่นมวล ( $\rho$ ) เท่ากับ 8,954 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ( $k$ ) เท่ากับ 385 และน้ำมันหม้อแปลงมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ 1.08 ค่าความร้อนจำเพาะ ( $c$ ) เท่ากับ 2,080 ค่าความหนาแน่นมวล ( $\rho$ ) เท่ากับ 849 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ( $k$ ) เท่ากับ 0.12 และสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 50 โดยการสร้างสมการอิเลเมนต์เมทริกซ์ของแต่ละอิเลเมนต์จะต้องคำนึงถึงค่าคุณสมบัติทางความร้อนของวัตถุที่เกี่ยวข้องในแต่ละอิเลเมนต์นั้นๆ ด้วย

ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่รวมสมการของอิเลเมนต์ย่อยเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมดังแสดงรายละเอียดอยู่ใน

หัวข้อที่ 3.6 ของบทที่ 3 ซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอิเลิเมนต์ทั้งหมด  $n$  โหนดจะก่อให้เกิดเมทริกซ์ระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งสิ้น  $n$  สมการ

ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวม โดยงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 3 มิติ เป็นการพาความร้อนสู่อุณหภูมิสภาพแวดล้อมภายนอกที่บริเวณขอบถังของหม้อแปลงจะต้องกำหนดทั้ง 6 ด้าน

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำการแก้ระบบสมการรวมซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยของอุณหภูมิ (T) ที่ประจำโหนดโดยการเลือกใช้ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

เนื่องจากปัญหาความร้อนนี้แปรผันตามเวลา โปรแกรมจะวนรอบจนกระทั่งสิ้นสุดรอบเวลาที่กำหนด

### 6.3 ผลการจำลองอุณหภูมิของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการสมดุลโหลด

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองการกระจายตัวของค่าอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลิเมนต์ แบบ 3 มิติ โดยจะทำการจำลองการกระจายตัวของค่าอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA โดยจะแยกการจำลองออกเป็น 2 กรณีเพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างของลักษณะของการกระจายค่าอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของสถานะการจ่ายโหลดของหม้อแปลงจำหน่ายดังนี้

#### 6.3.1 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดสมดุล

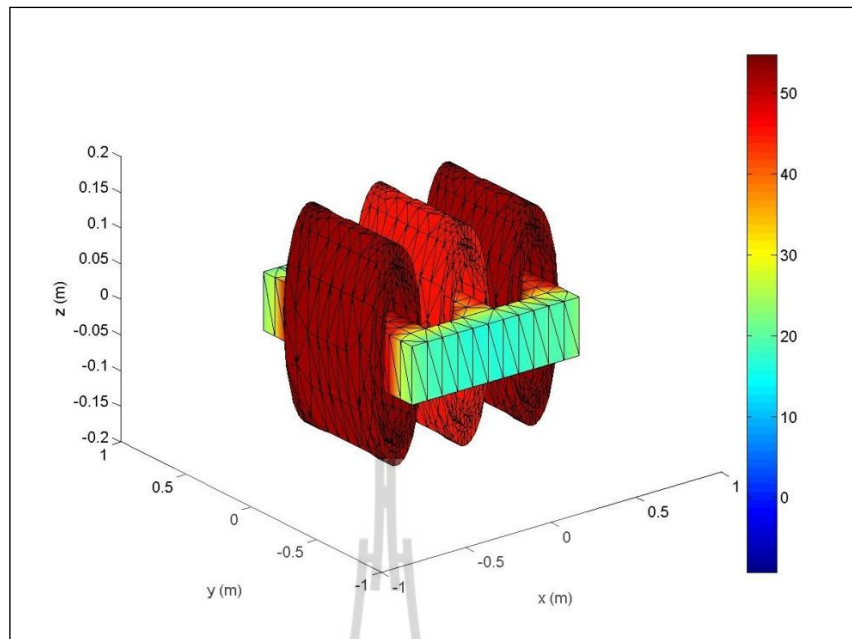
ผลการจำลองอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสถานะจ่ายโหลดสมดุล (ซึ่งแต่ละเฟสจะมีขนาดโหลดเท่ากันเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ทั้งนี้เนื่องจากในสภาวะปกติหม้อแปลงจะจ่ายโหลดที่ประมาณ 80% ของค่าพิกัด) จะแสดงได้ดังนี้

- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมดุล แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.2

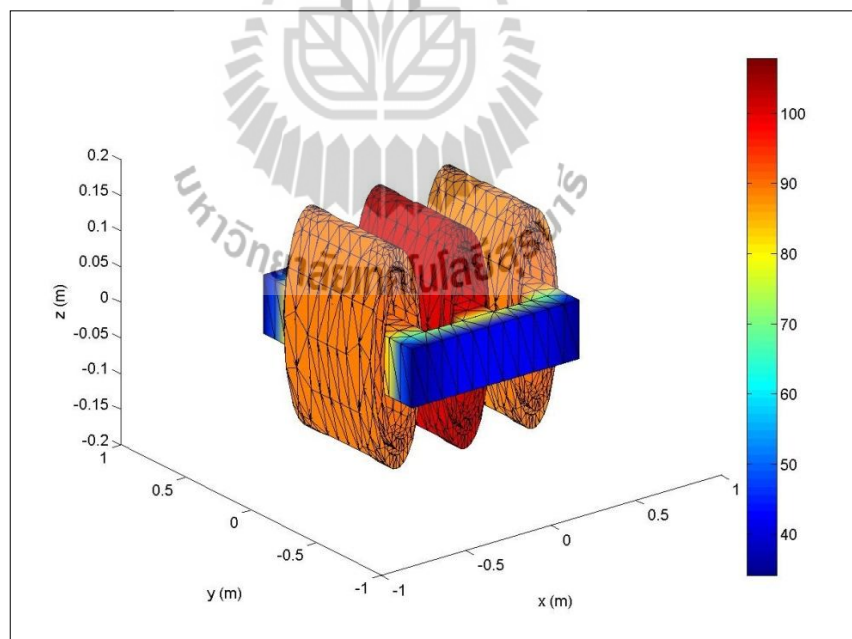
- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมดุล แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.3

- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดสมดุล แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.4

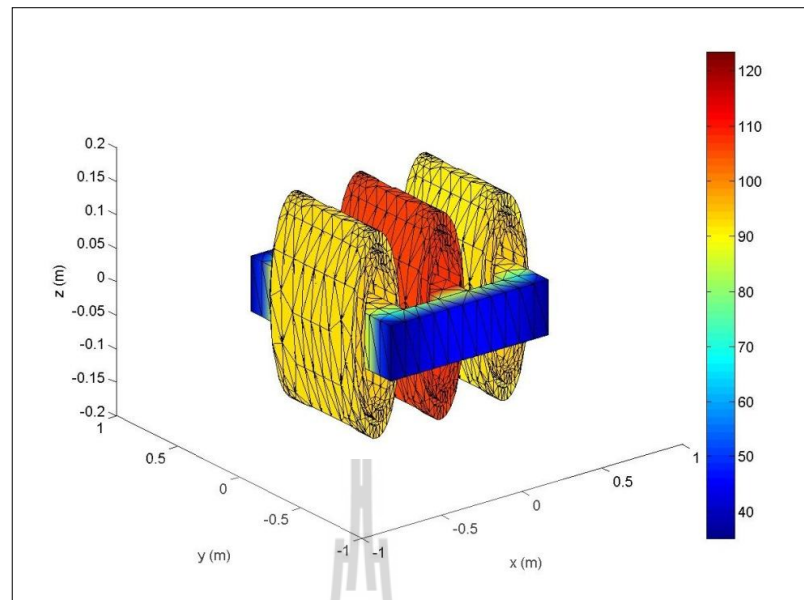




ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

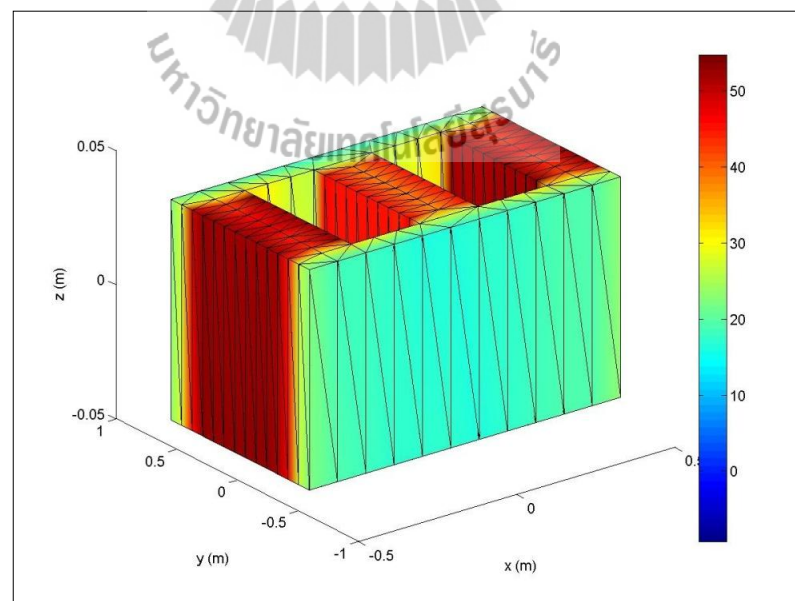


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

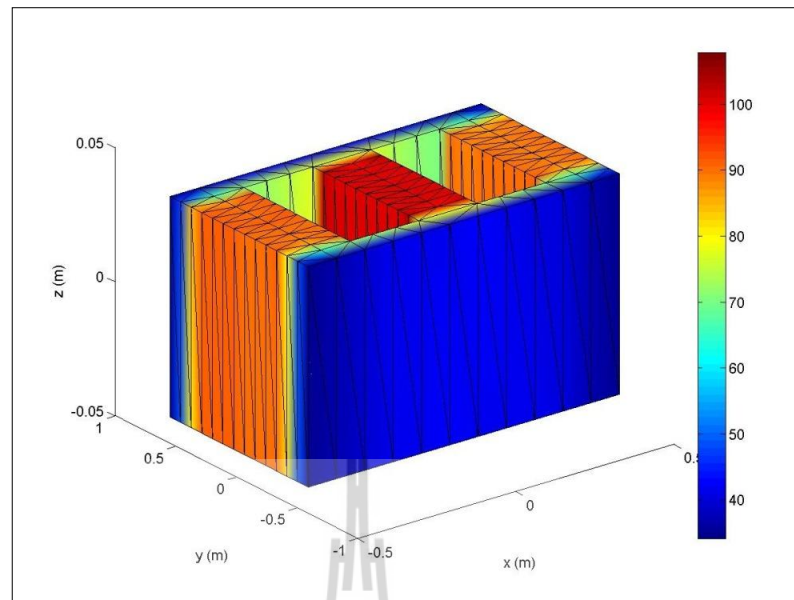


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

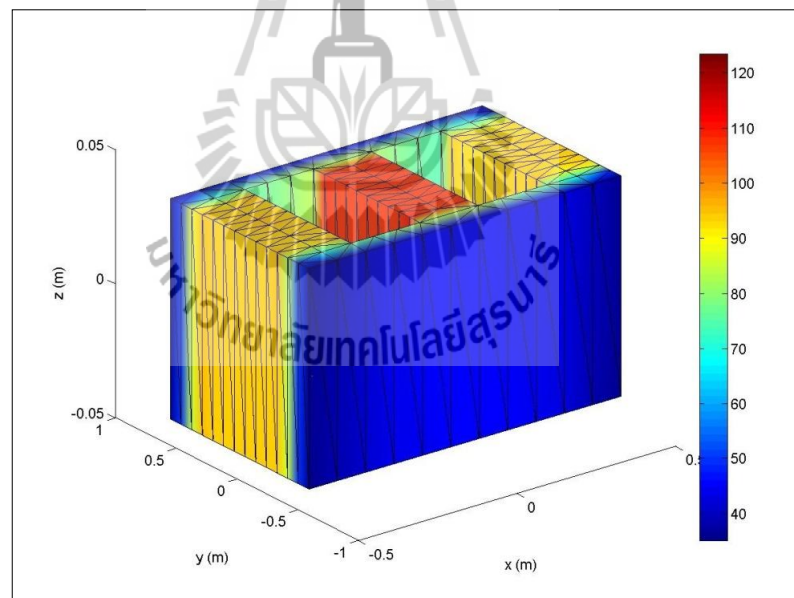
รูปที่ 6.2 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

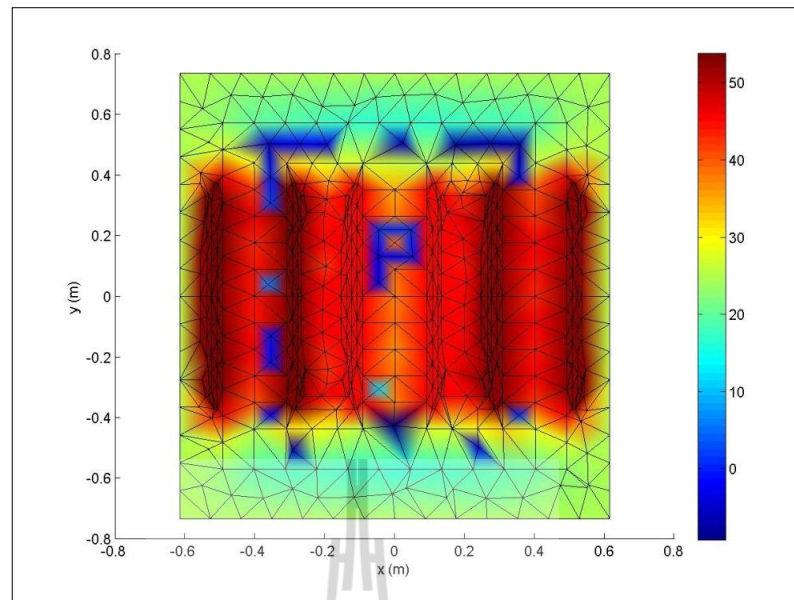


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

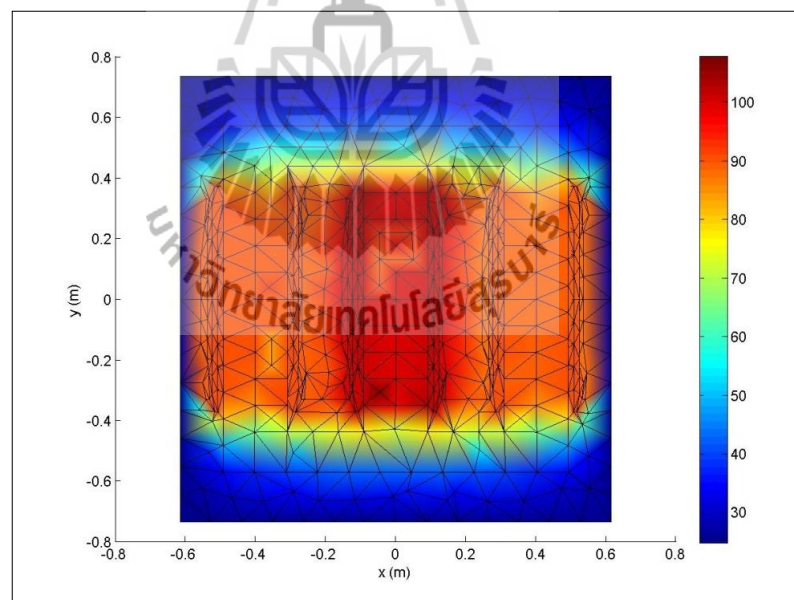


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

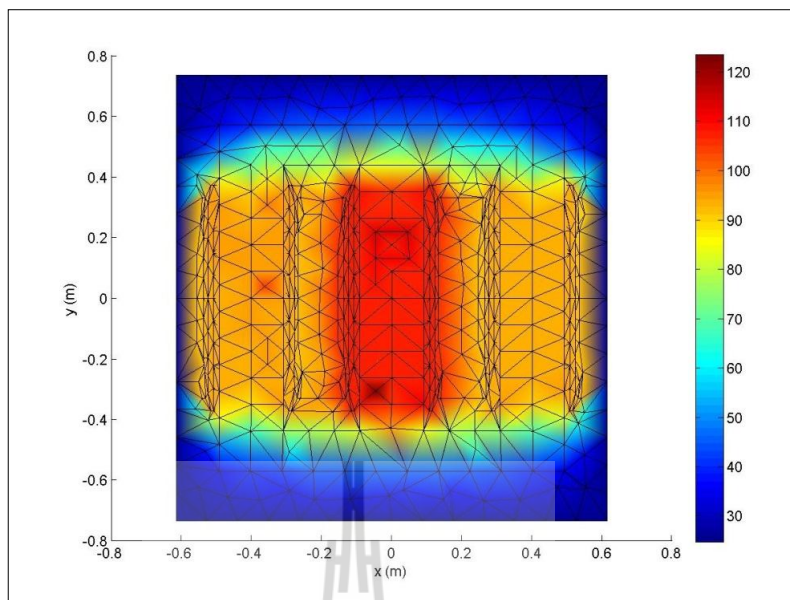
รูปที่ 6.3 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.4 ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง  
ในสถานะจ่ายโหลดสมดุล

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณากรณีจ่ายโหลดสมดุลที่ปรากฏพบว่า ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.2 นั้น จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณขดลวดตัวนำซึ่งอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก จึงมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำบริเวณตรงกลางของหม้อแปลง และผลของค่าอุณหภูมินี้จะมีค่าการกระจายตัวที่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.3 นั้นจะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนเหล็กนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในรูปที่ 6.4 จะเป็นการแสดงภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

### 6.3.2 กรณีพิจารณาหม้อแปลงจ่ายโหลดไม่สมดุล

ผลการจำลองอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลจะแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบไม่สมดุลขนาด (มุมเฟสคงที่) และ แบบไม่สมดุลมุมเฟส (ขนาดคงที่) ดังนี้

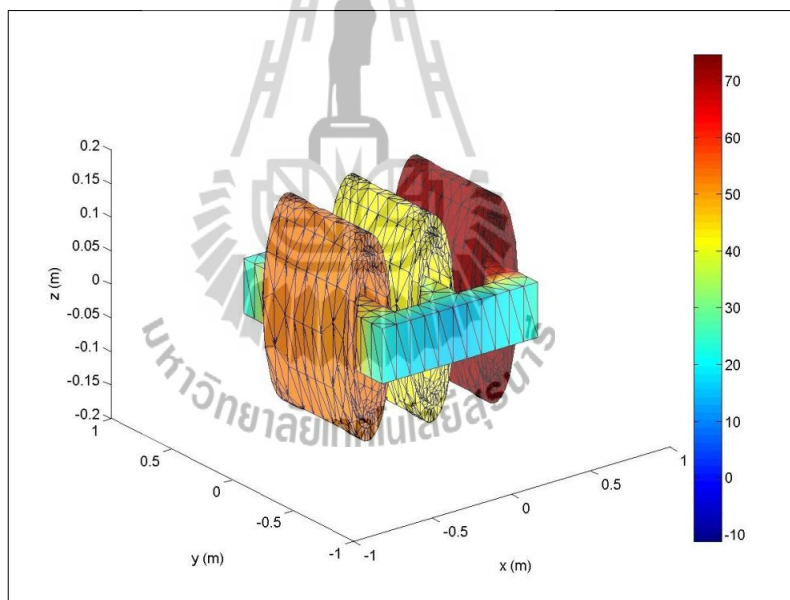
### 1. ผลการจำลองอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลขนาด

อ้างอิงขนาดเฟส A (เฟส A มีขนาดโหลดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส B มีขนาดโหลดลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดโหลดเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด)

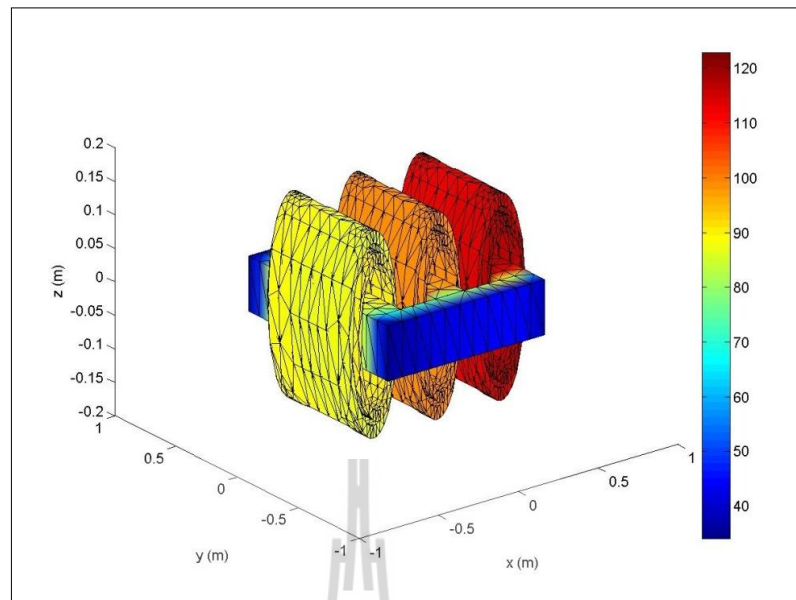
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.5

- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.6

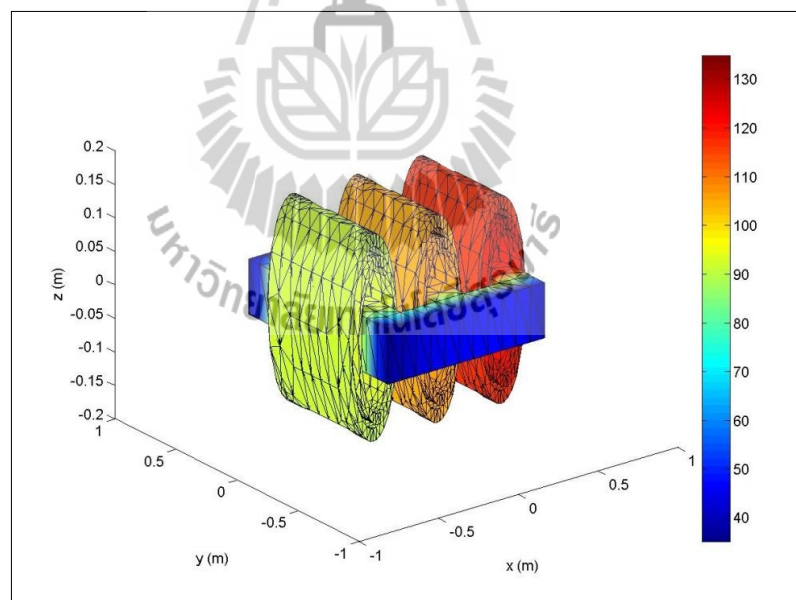
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.7



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

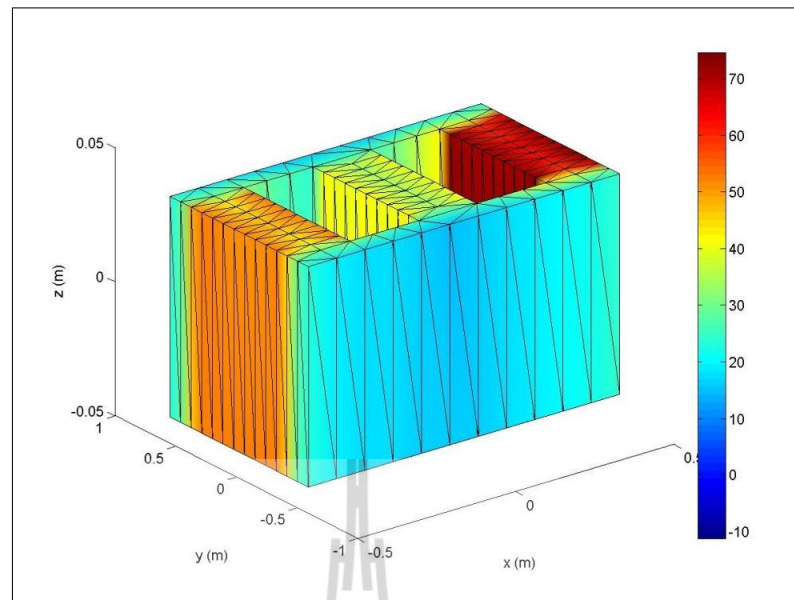


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

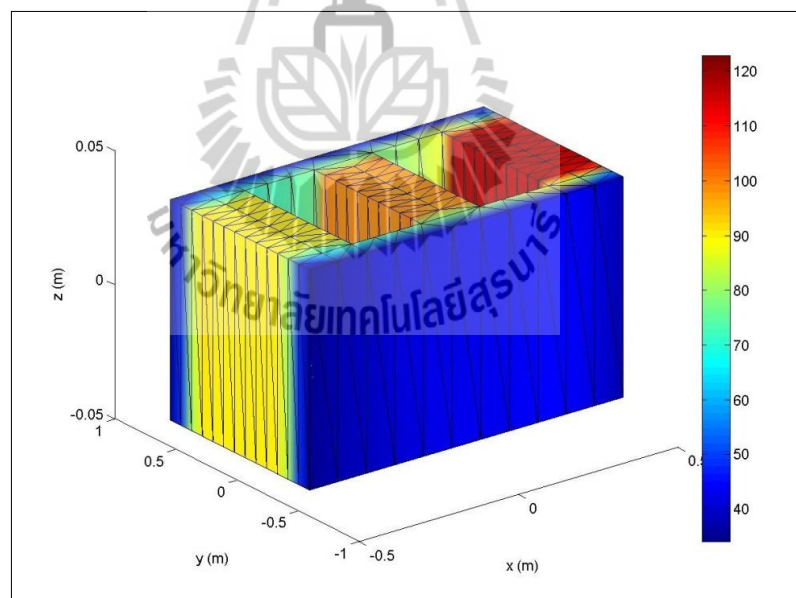


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.5 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A

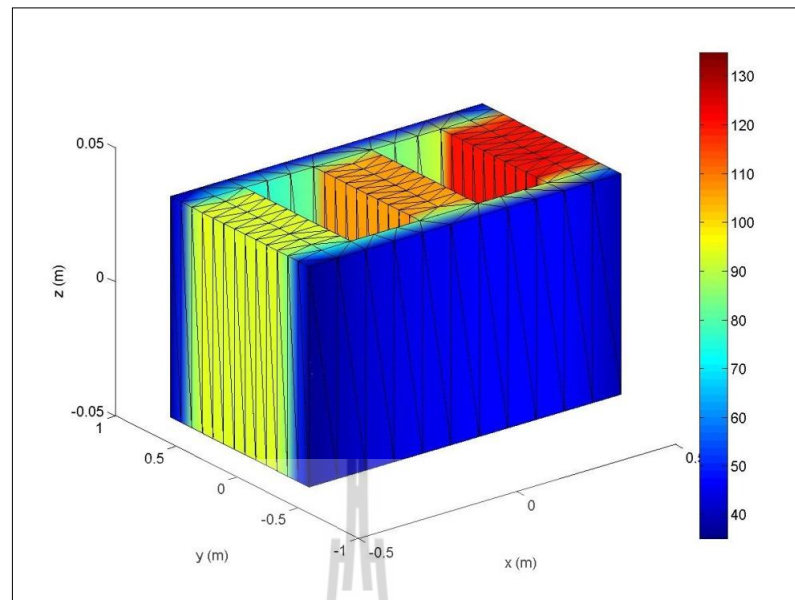


ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



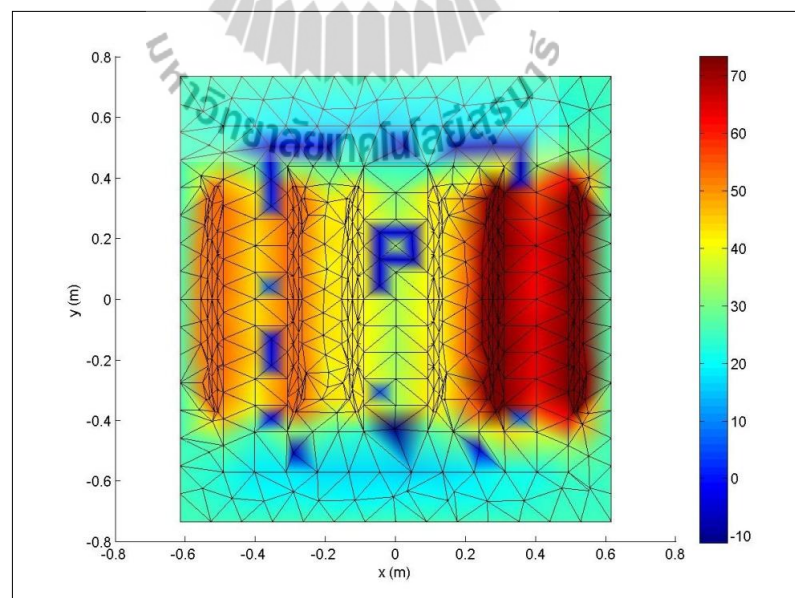
ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



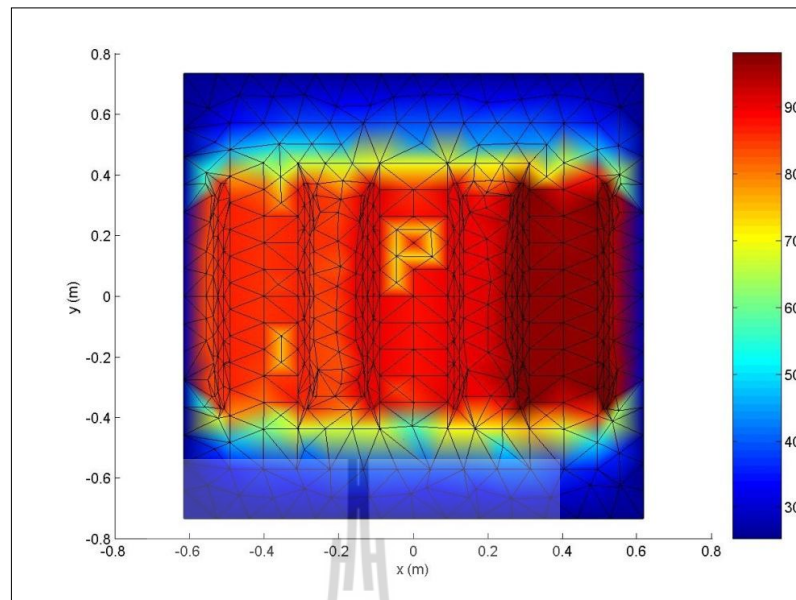


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

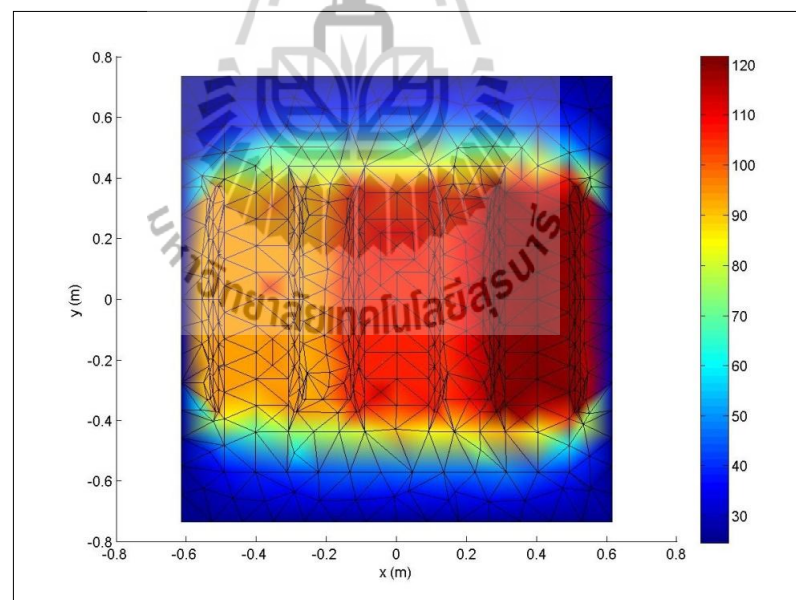
รูปที่ 6.6 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



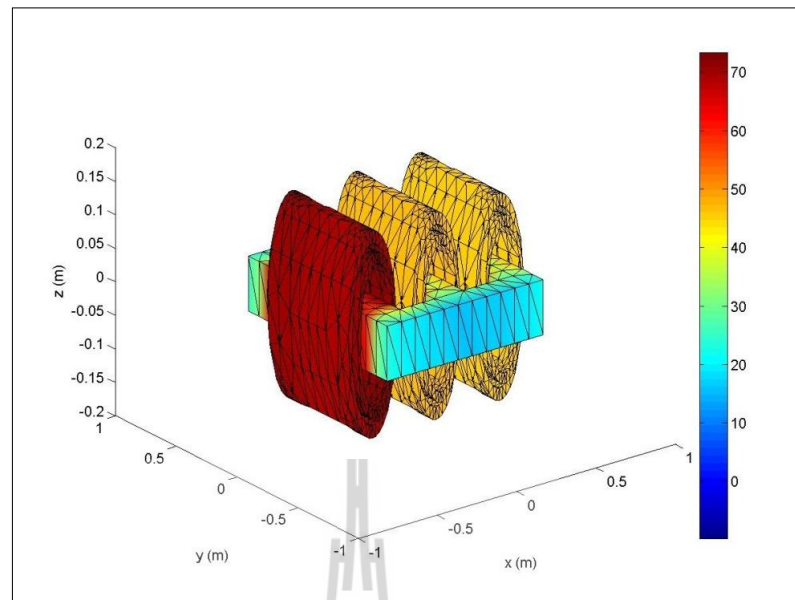
ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.7 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A

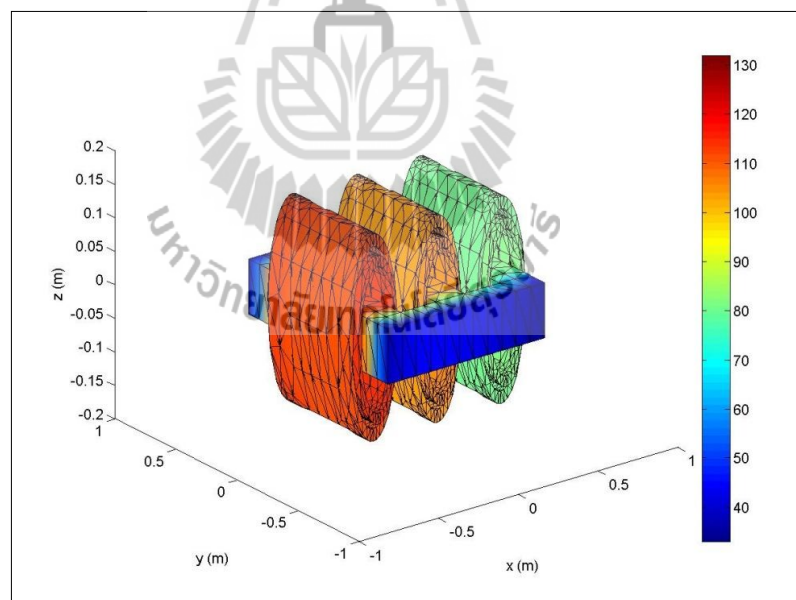
ในกรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยการอ้างอิงเฟส A เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.5 นั้น จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง ซึ่งผลการจำลองค่าอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้แสดงไปแล้วในบทที่ 5 บริเวณเฟส C จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส C มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส C เพิ่มขึ้นด้วย ส่วนบริเวณเฟส B จะมีอุณหภูมิลดลงจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส B มีค่าลดลงทำให้อุณหภูมิที่เฟส B ลดลงด้วย และผลของค่าอุณหภูมินี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.6 นั้นจะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนเหล็กนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในรูปที่ 6.7 จะเป็นการแสดงภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงในทุกช่วงเวลาได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

**อ้างอิงขนาดเฟส B** (เฟส B มีขนาดโหลดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดโหลดเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดโหลดลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด)

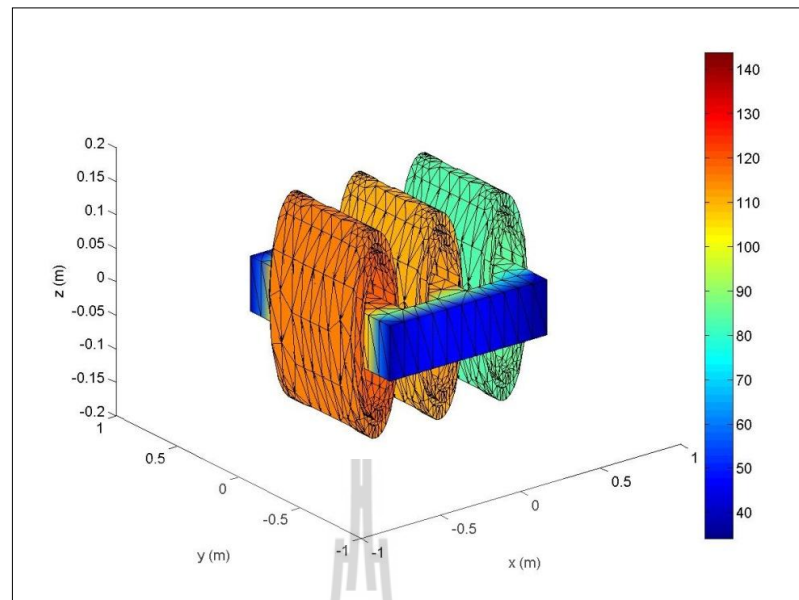
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.8
- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.9
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.10



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

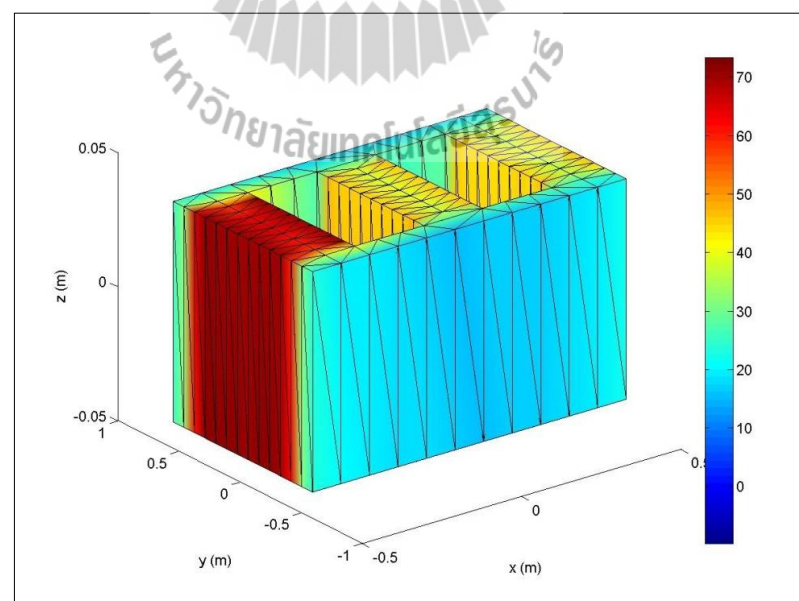


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

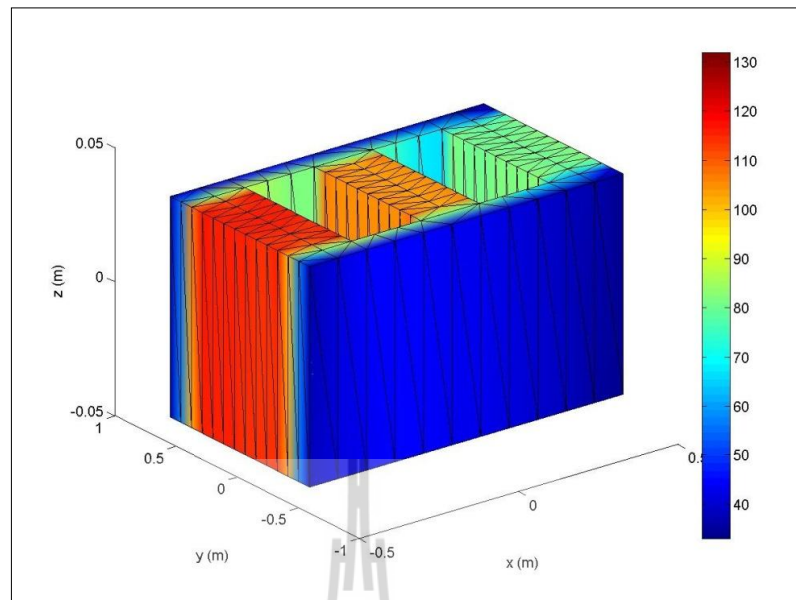


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

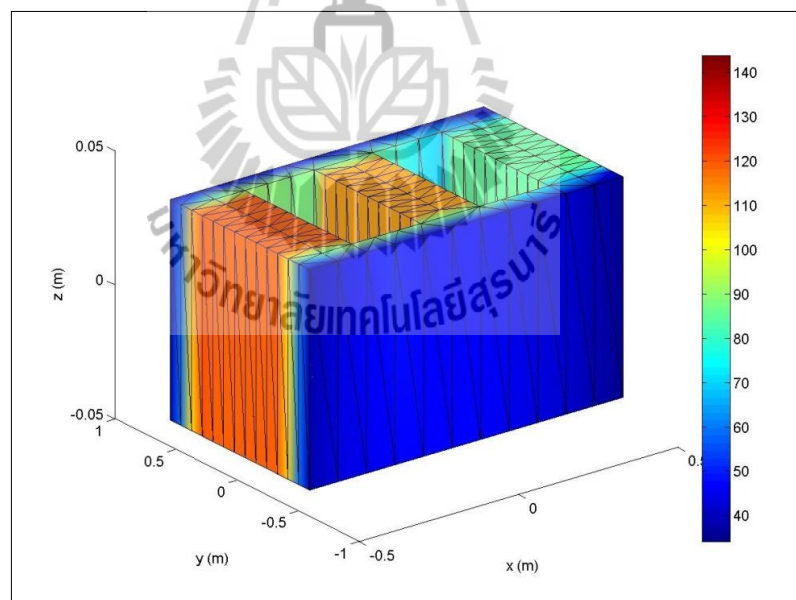
รูปที่ 6.8 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

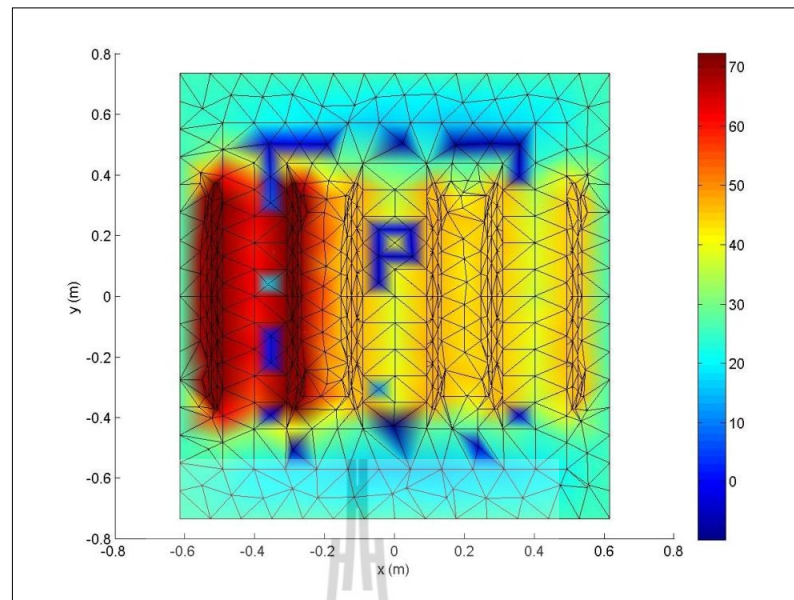


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

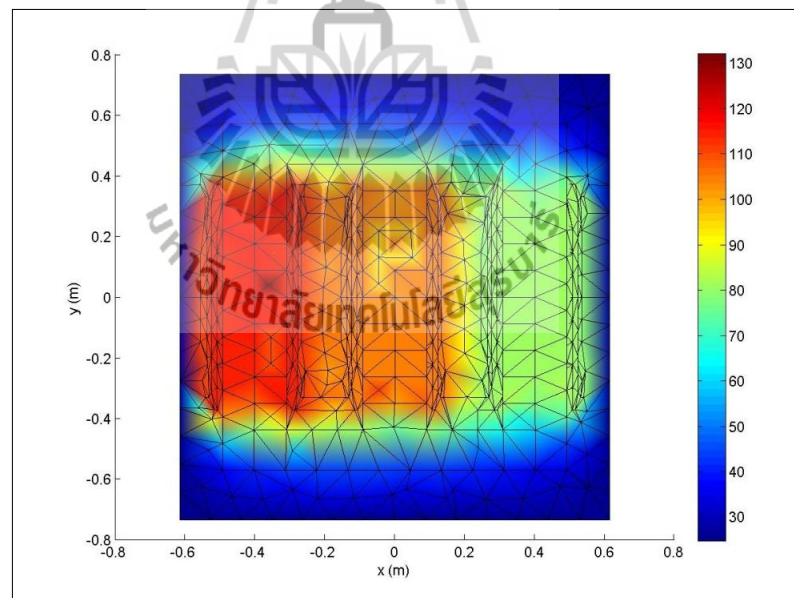


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

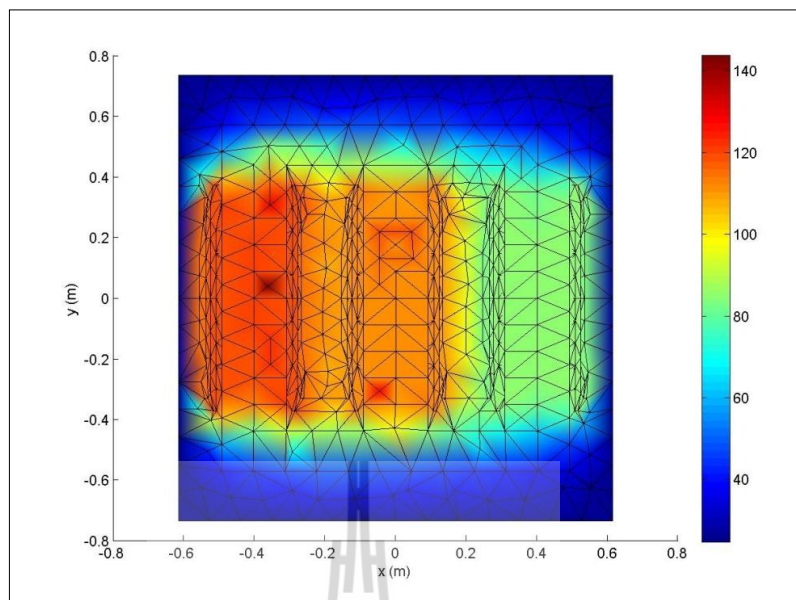
รูปที่ 6.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.10 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B

ในกรณีการอ้างอิงเฟส B เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.8 นั้น จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆที่บริเวณขดลวดตัวนำ ซึ่งผลการจำลองของอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก บริเวณเฟส C จะมีอุณหภูมิลดลงจากการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส C มีค่าลดลงจึงทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส C ลดลงด้วย ส่วนบริเวณเฟส A จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส A มีค่ามากขึ้นด้วยจึงทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส A เพิ่มขึ้นและค่าอุณหภูมินี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.9 นั้นจะเป็นการแสดงผลการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลงที่เวลาต่างๆ ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนหลักนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในรูปที่ 6.10 จะเป็นการแสดงผลภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงในทุกช่วงเวลาได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

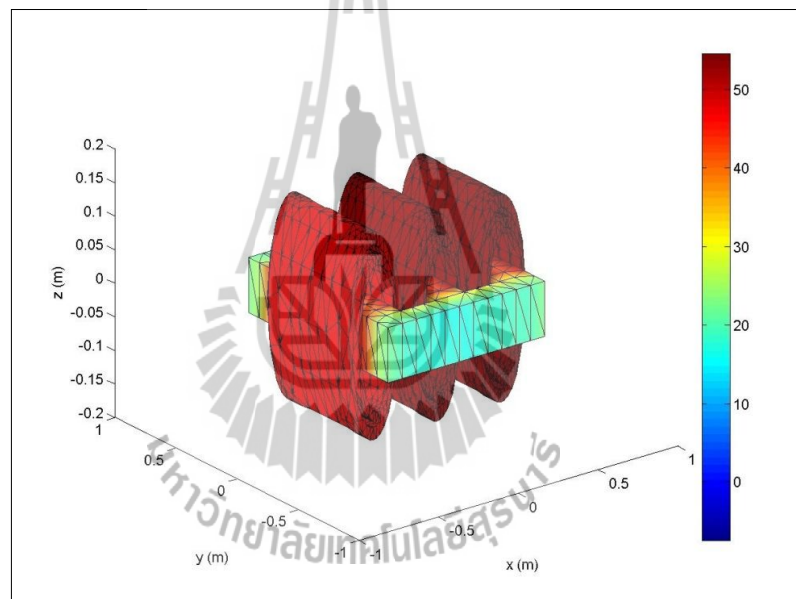


อ้างอิงขนาดเฟส C (เฟส C มีขนาดโหนดปกติเท่ากับ 80% ของค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดโหนดลดลงเท่ากับ 60% ของค่าพิกัด และเฟส B มีขนาดโหนดเพิ่มขึ้นเท่ากับ 100% ของค่าพิกัด)

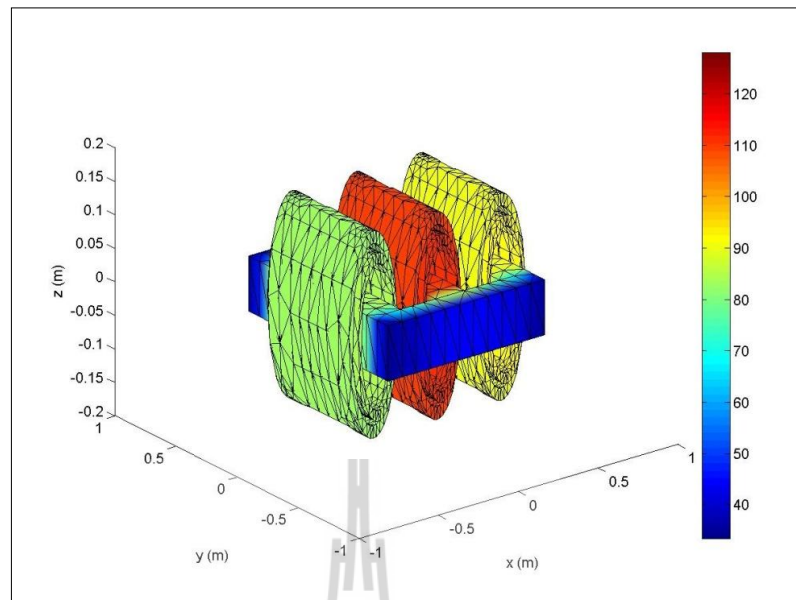
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.11

- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.12

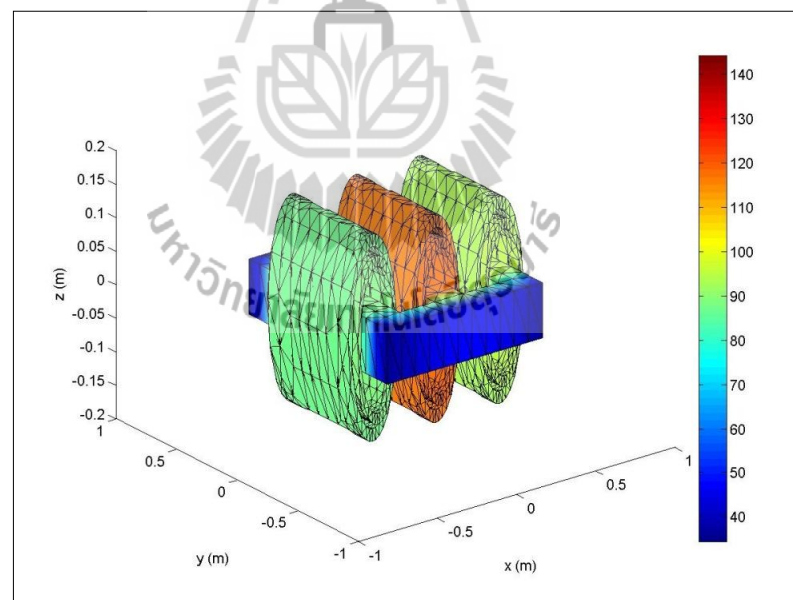
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.13



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

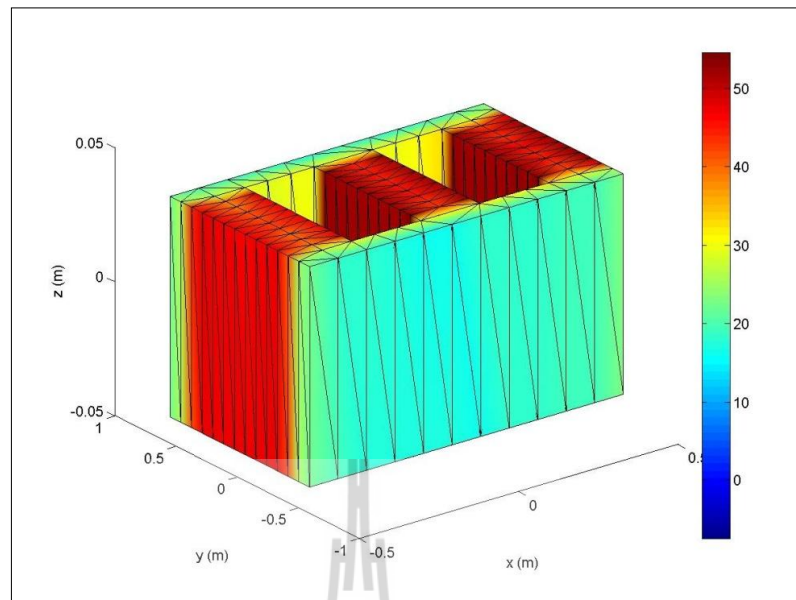


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

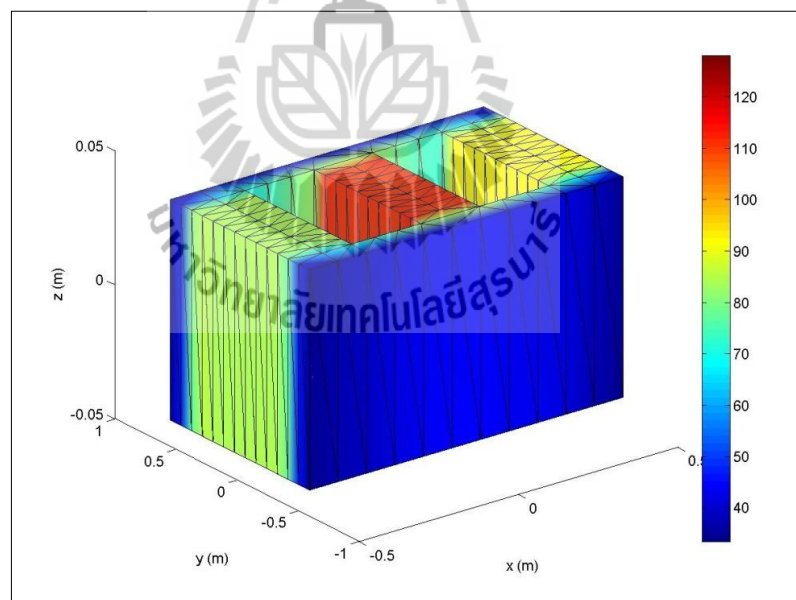


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

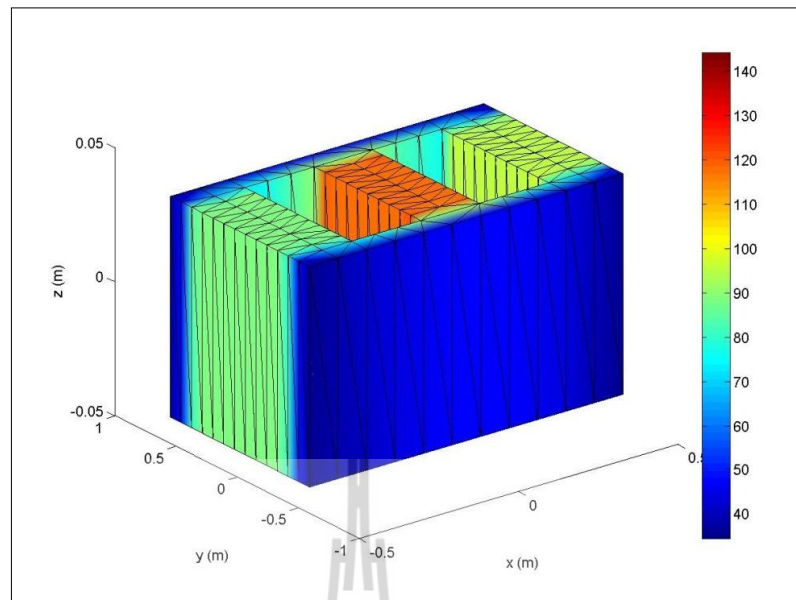
รูปที่ 6.11 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

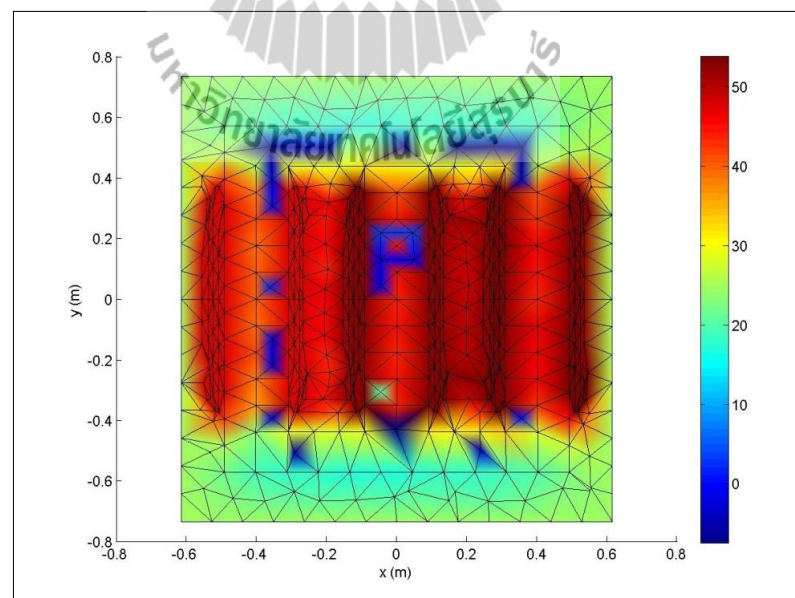


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

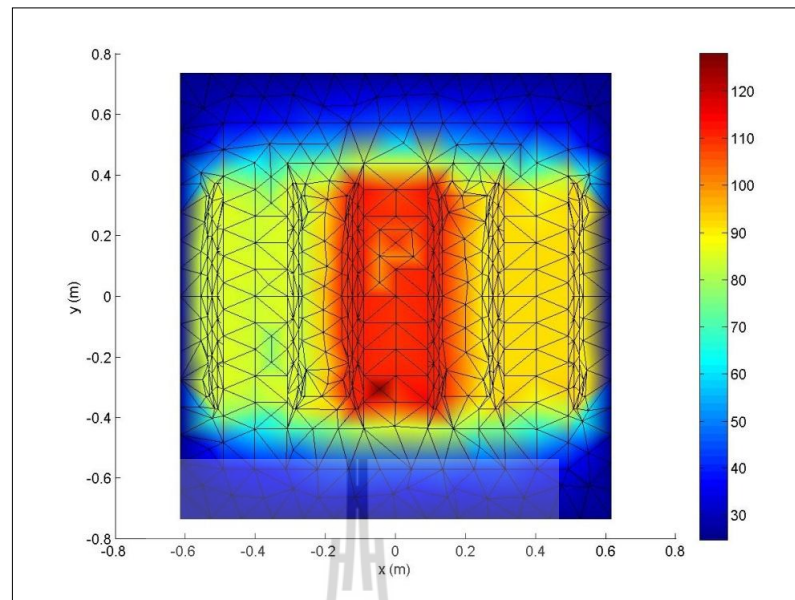


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

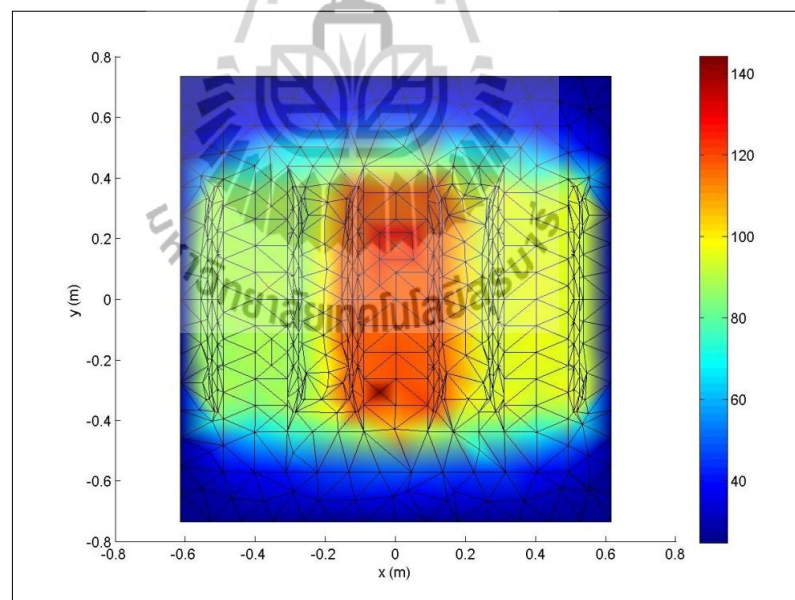
รูปที่ 6.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.13 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C

ในกรณีการอ้างอิงเฟส C เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.11 นั้น จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิเวลาต่างๆที่บริเวณขดลวดตัวนำ ซึ่งอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก บริเวณเฟส A จะมีอุณหภูมิลดลงจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส A มีค่าลดลงทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส A ลดลงด้วย ส่วนบริเวณเฟส B จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ากระแสโหลดที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส B มีค่ามากขึ้นด้วย ทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส B เพิ่มขึ้น และค่าอุณหภูมินี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.12 นั้นจะเป็นการแสดงผลการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่เวลาต่างๆ ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนเหล็กนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในภาพที่ 6.13 จะเป็นการแสดงภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงในทุกช่วงเวลาได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

เมื่อพิจารณากรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางขนาดทุกแบบที่ปรากฏพบว่าค่าอุณหภูมิจะสูงขึ้นในบริเวณที่มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นด้วย และเนื่องจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะสูงที่บริเวณที่มีค่ากระแสโหลดมีค่าสูง เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าขดลวดในเฟสที่มีค่ากระแสโหลดมากจะทำให้ขดลวดเฟสนั้นมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วย

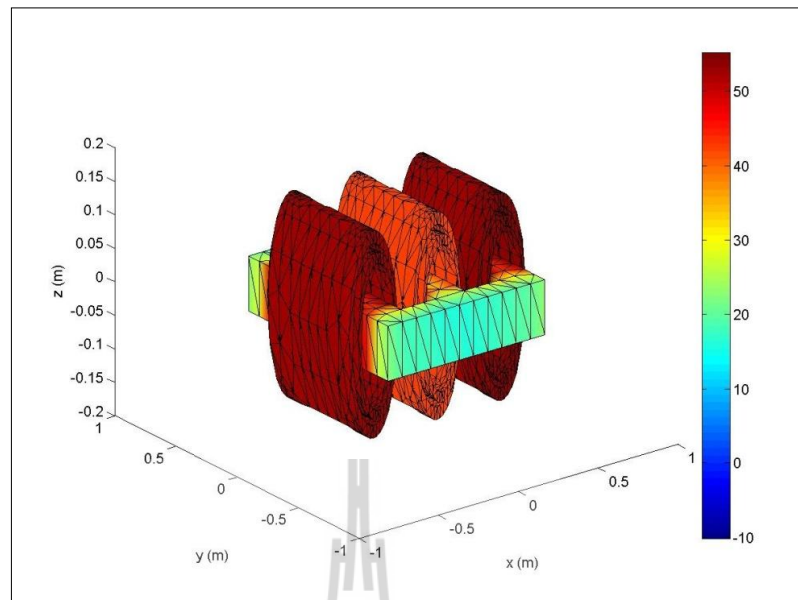
## 2. ผลการจำลองอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลมุมเฟส

**อ้างอิงมุมเฟสเฟส A** (เฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

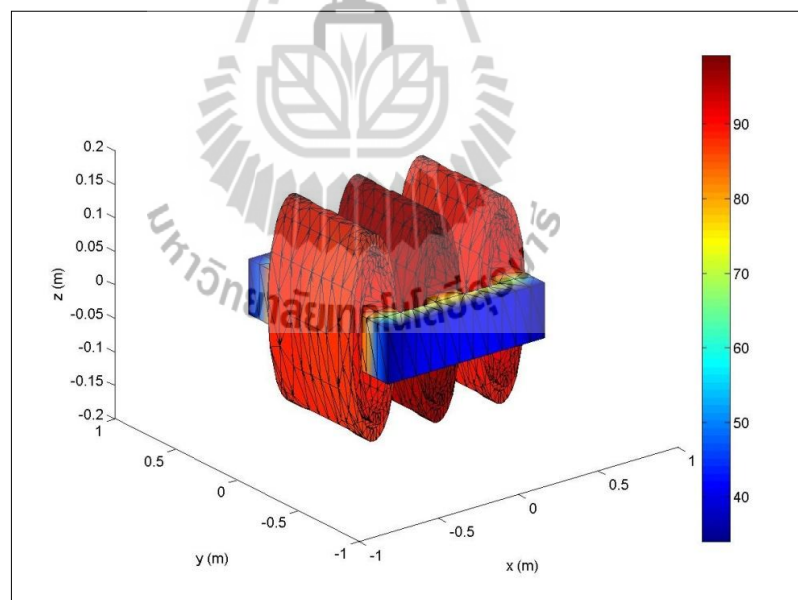
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.14

- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.15

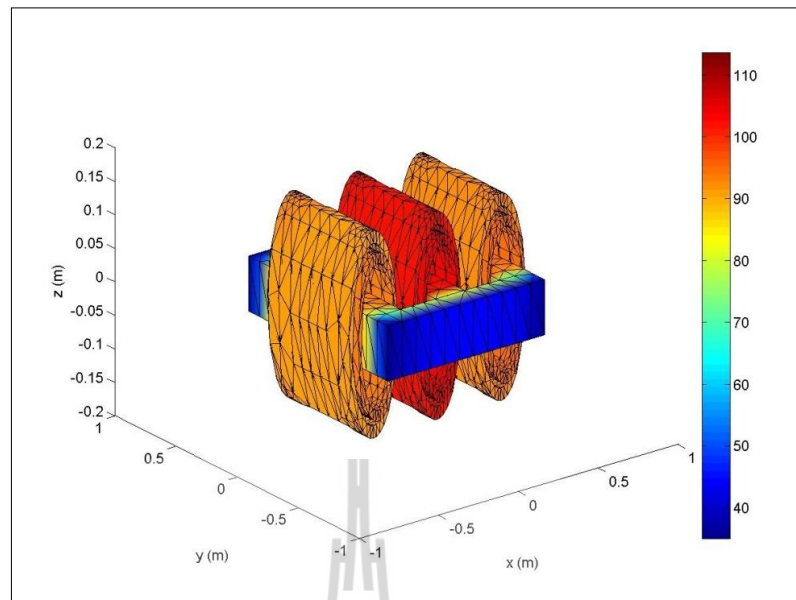
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.16



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

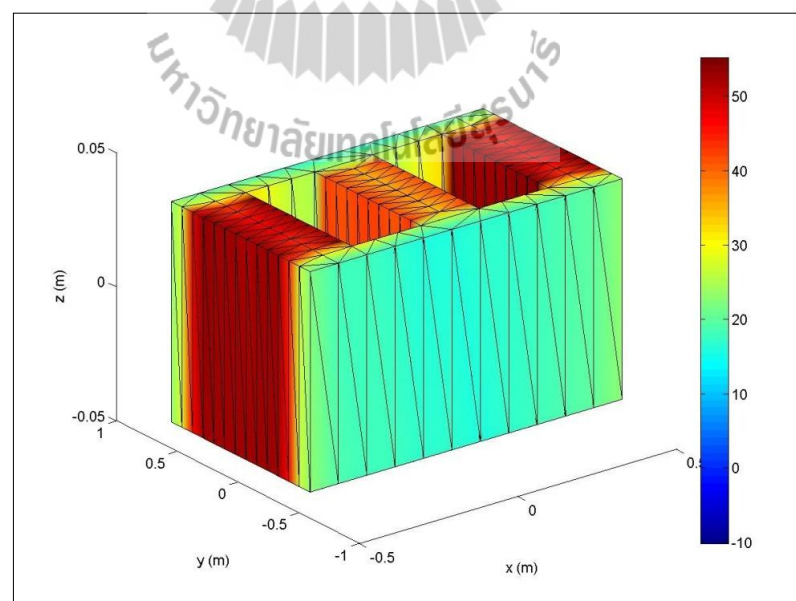


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



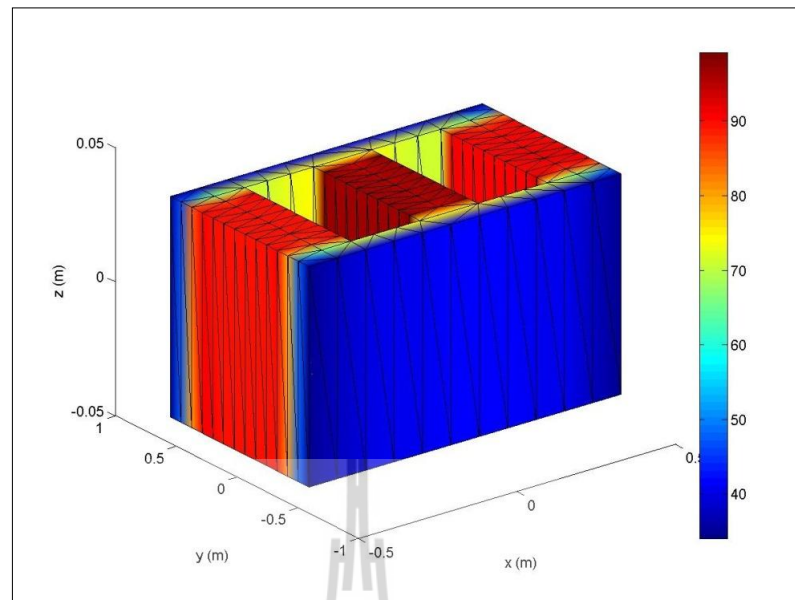
ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.14 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A

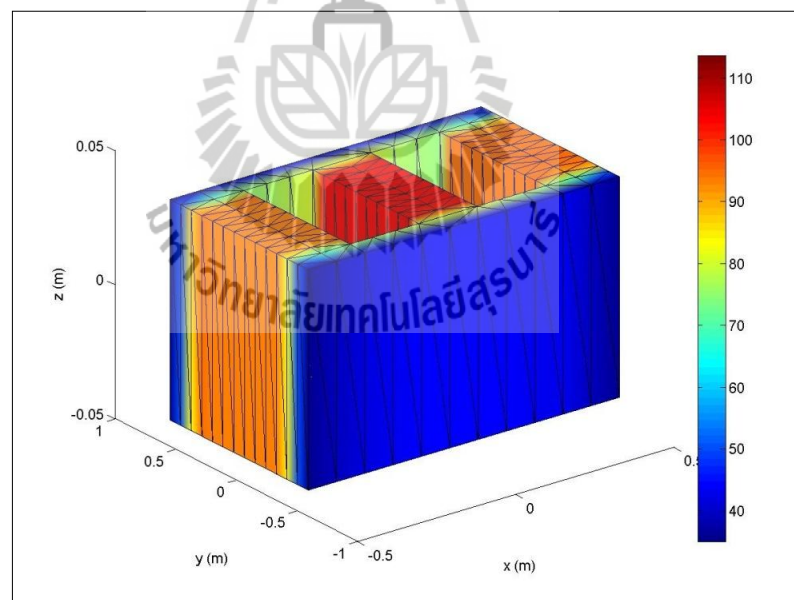


ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



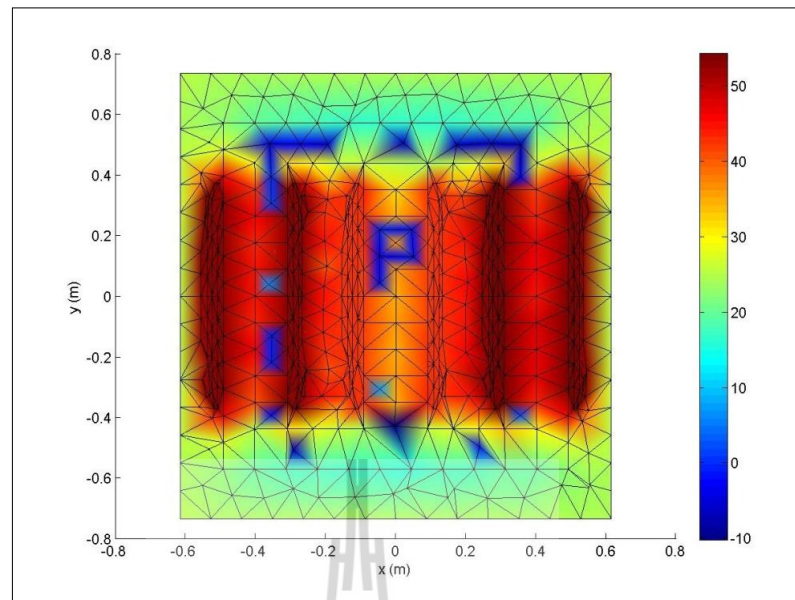


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

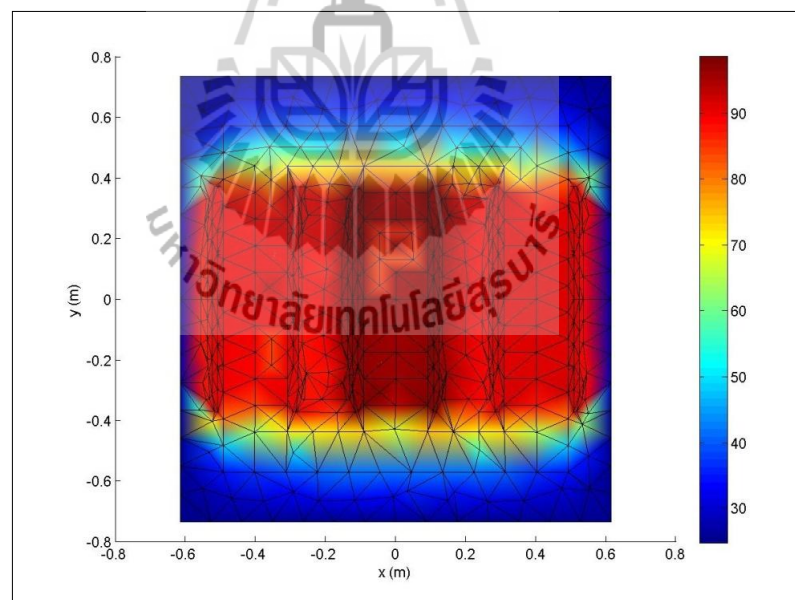


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

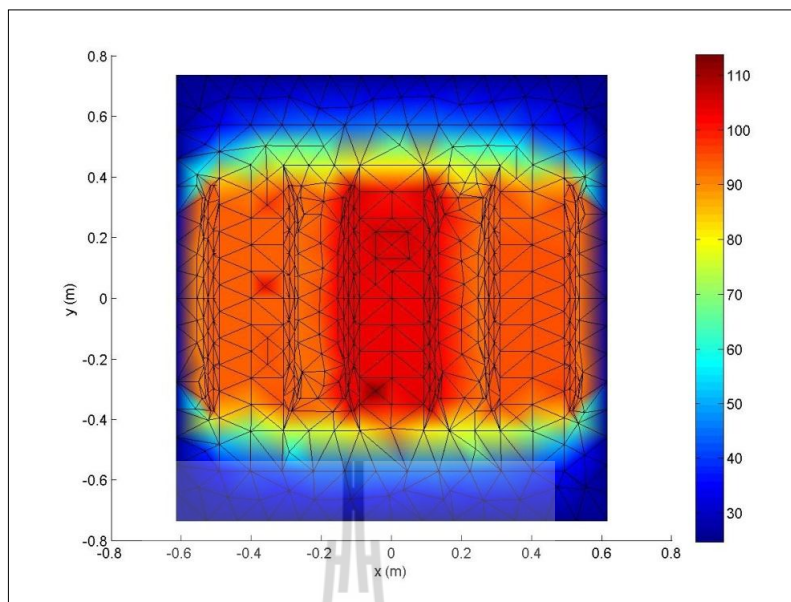
รูปที่ 6.15 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.16 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A

ในกรณีสถานะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยการอ้างอิงมุมเฟสเฟส A เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.14 จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง ซึ่งผลการจำลองค่าอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 5 เช่นเดียวกันกับกรณีของการจ่ายโหลดสมดุล บริเวณเฟส B จะมีอุณหภูมิลดลงจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส B มีค่าน้อยลงทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส B ลดลงด้วย ส่วนบริเวณเฟส C จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส C มีค่าเพิ่มขึ้นทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส C เพิ่มขึ้นด้วย และผลของค่าอุณหภูมิภายในหม้อแปลงนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.15 นั้นจะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนหลักนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในภาพที่ 6.16 จะเป็นการแสดงภาพตัดขวาง

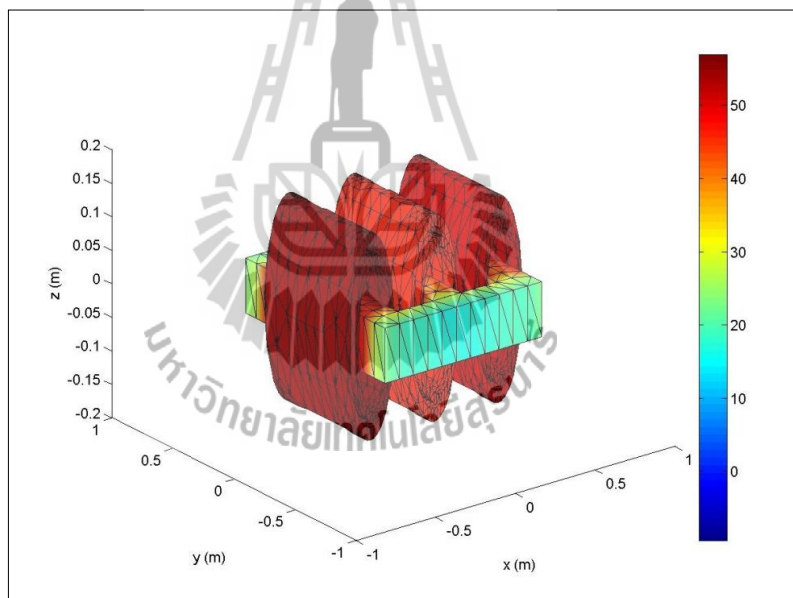
ตามแนวแกนหลักเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงที่ช่วงเวลาต่างๆ ได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

**อ้างอิงมุมเฟสเฟส B** (เฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลลดเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสไหลเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

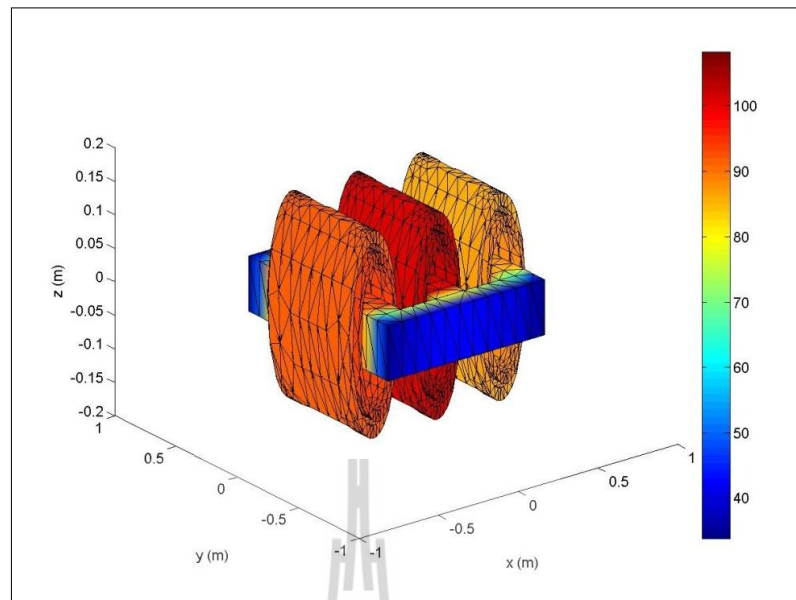
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.17

- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.18

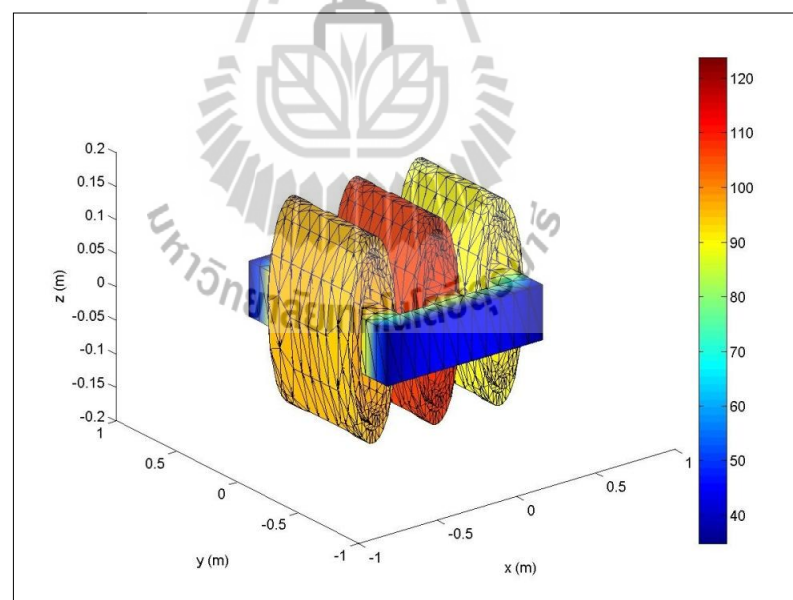
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.19



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

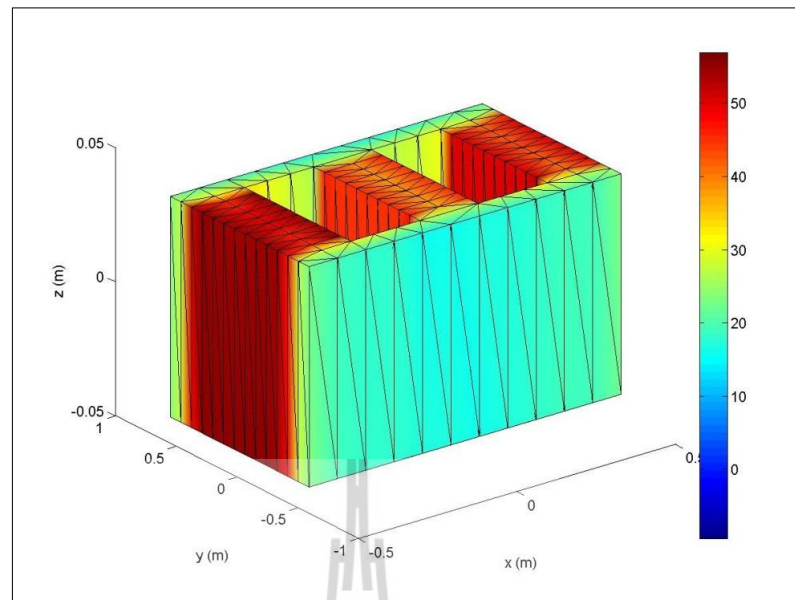


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

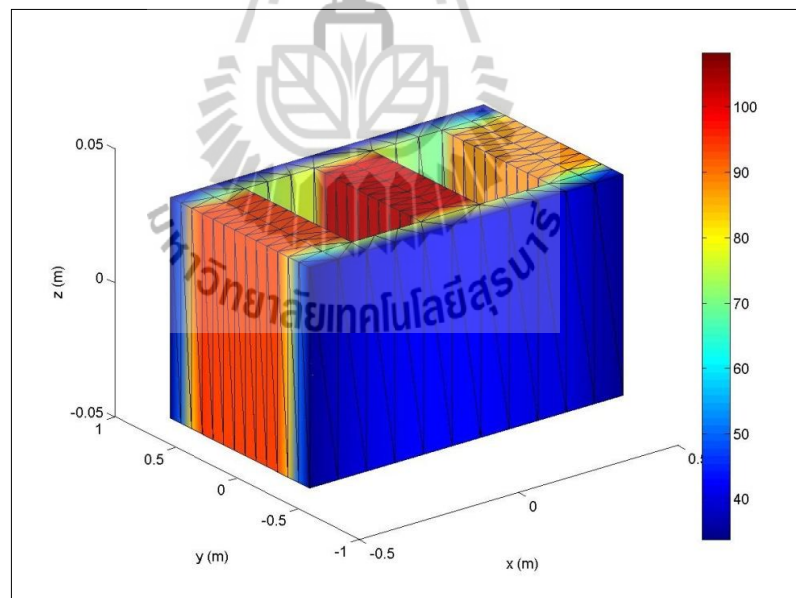


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

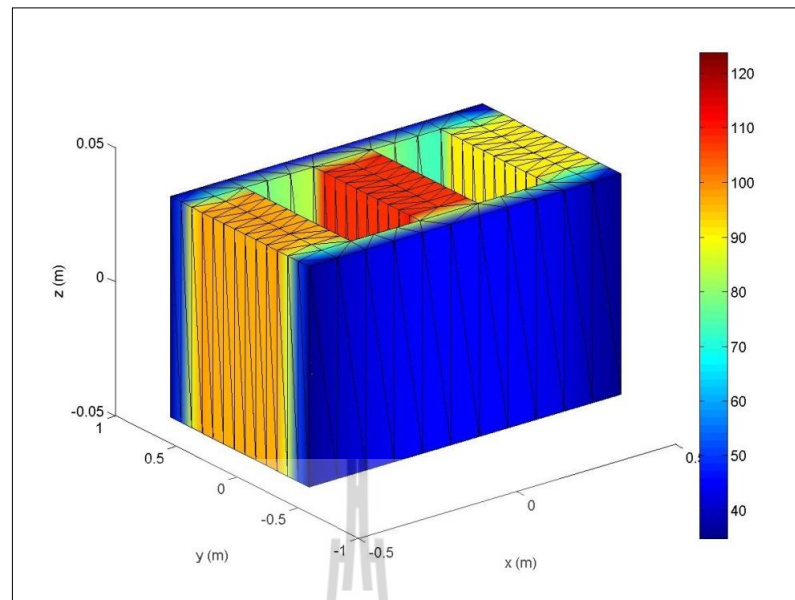
รูปที่ 6.17 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

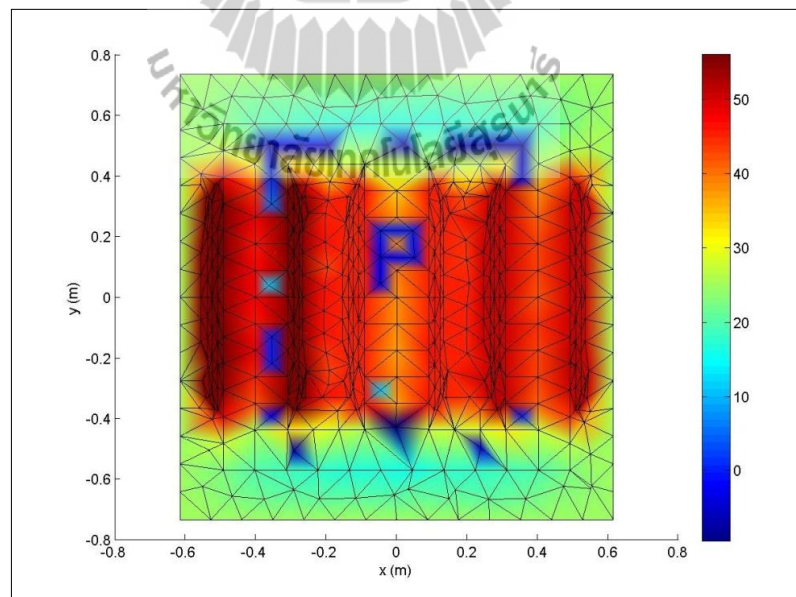


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

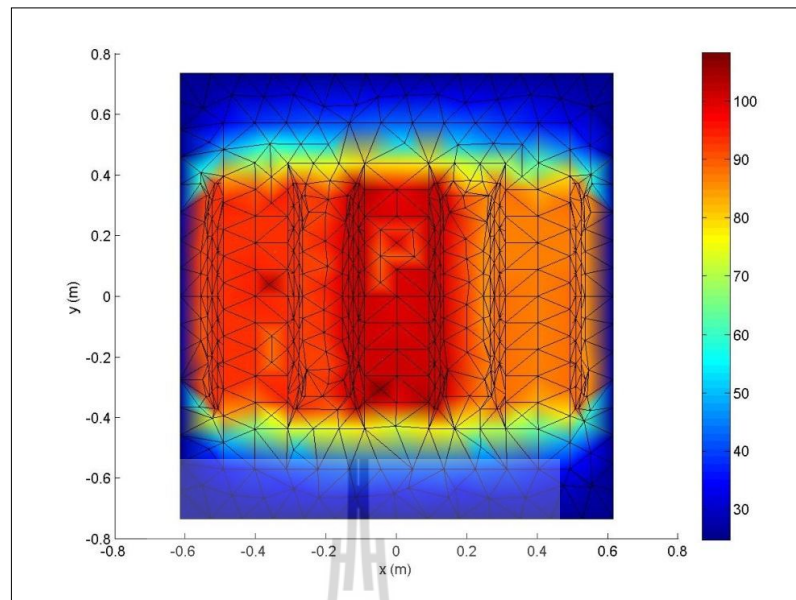


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

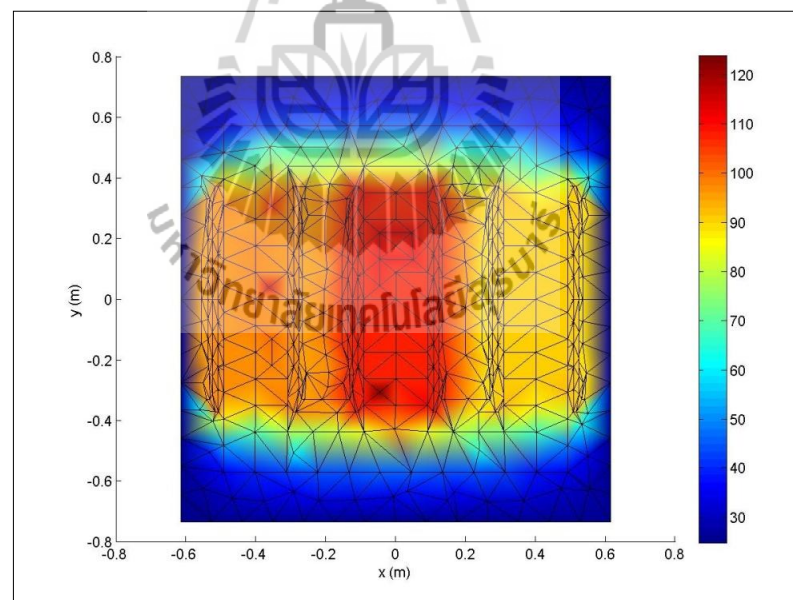
รูปที่ 6.18 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

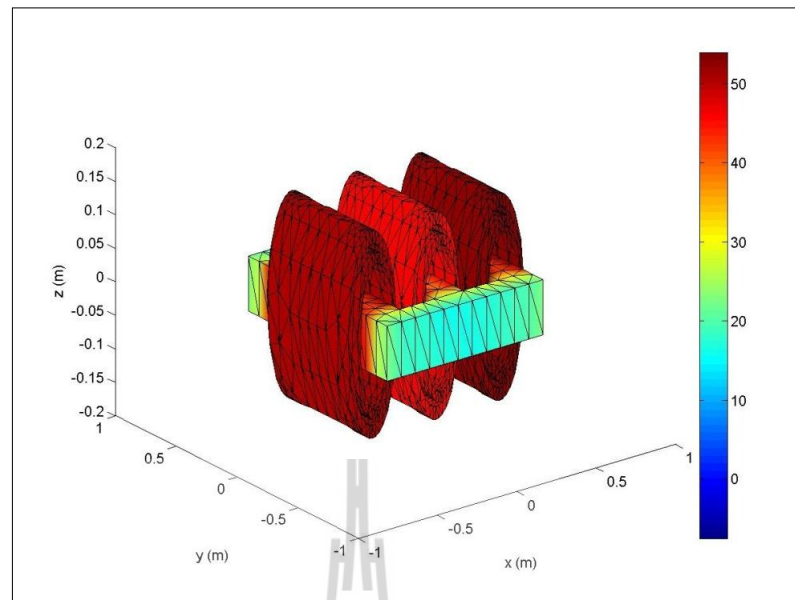
รูปที่ 6.19 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง  
ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B



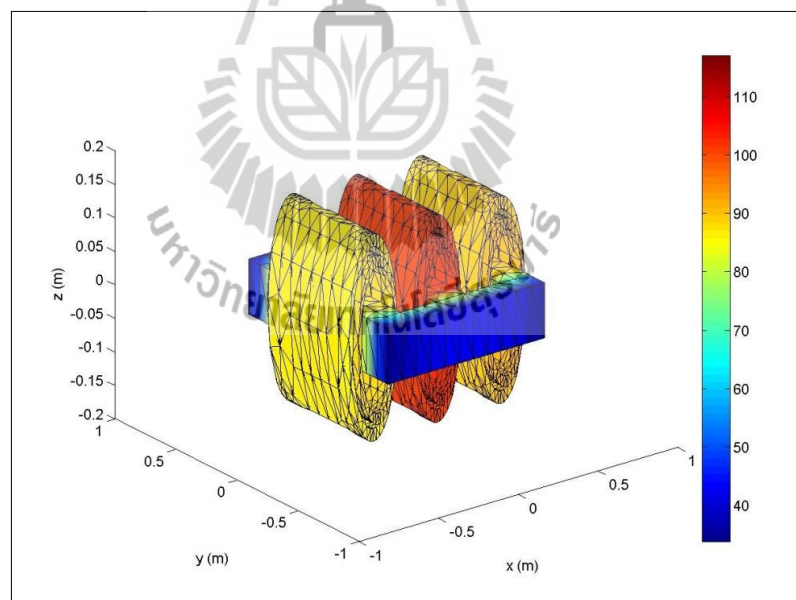
ในกรณีอ้างอิงมุมเฟสเฟส B เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.17 จะเป็นการแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง ซึ่งผลการจำลองค่าอุณหภูมิที่ได้นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเช่นเดียวกันกับกรณีของการจ่ายโหลดสมดุล บริเวณเฟส A จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส A มีค่าเพิ่มขึ้น ทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส A เพิ่มขึ้นด้วย ส่วนบริเวณเฟส C จะมีอุณหภูมิลดลงจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดที่เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส C มีค่าลดลงทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส C ลดลงด้วย และผลของค่าอุณหภูมิภายในหม้อแปลงนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นจนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มมากขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.18 นั้นจะเป็นการแสดงผลการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลง ซึ่งผลของค่าอุณหภูมิที่แกนเหล็กนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และในภาพที่ 6.19 จะเป็นการแสดงผลภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในหม้อแปลงที่ช่วงเวลาต่างๆ ได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

**อ้างอิงมุมเฟสเฟส C** (เฟส C มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดเท่ากับค่าพิกัด ส่วนเฟส A มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดเพิ่มขึ้น  $30^\circ$  จากค่าพิกัด และเฟส B มีขนาดมุมเฟสของกระแสโหลดลดลง  $30^\circ$  จากค่าพิกัด)

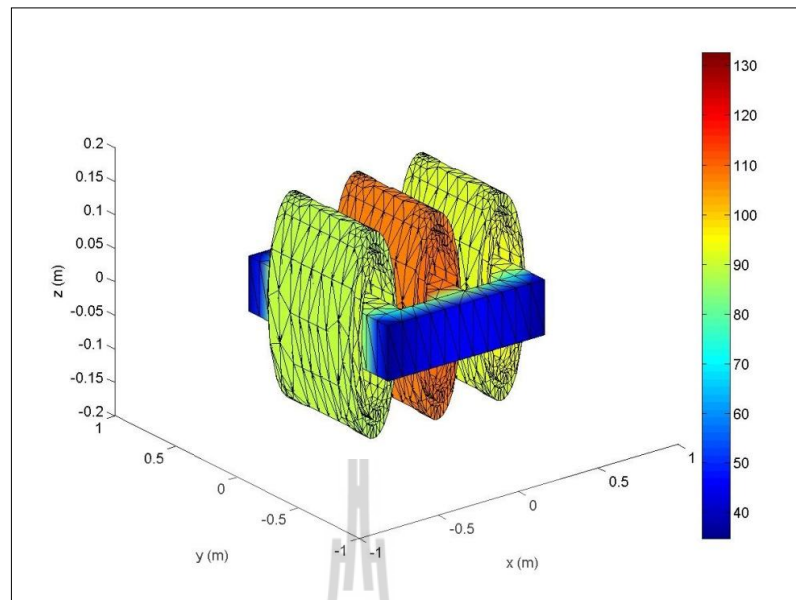
- การกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.20
- การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.21
- ภาพตัดขวางตามแนวแกนเหล็กของการกระจายตัวของอุณหภูมิของหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.22



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

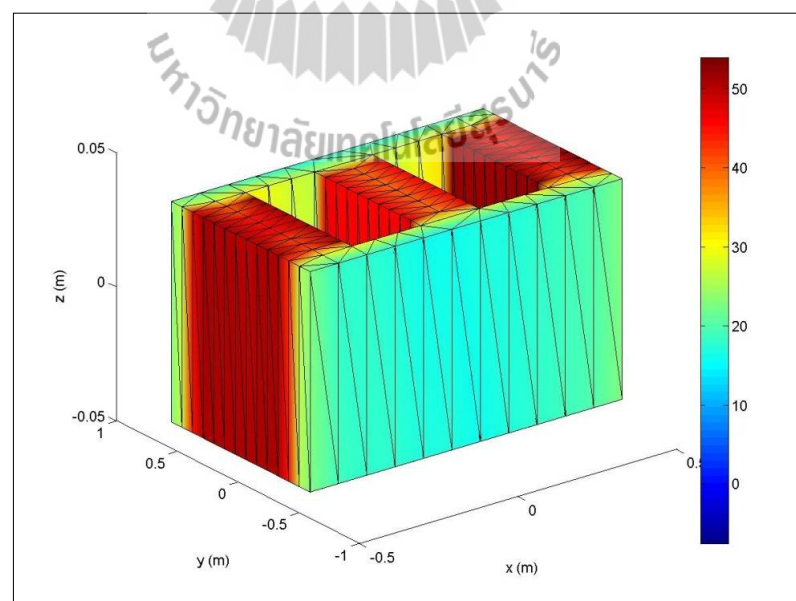


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

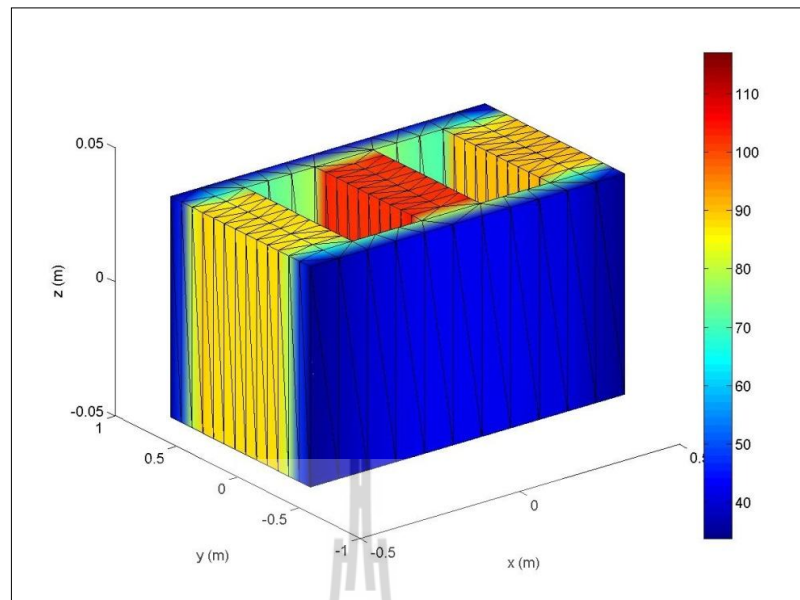


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

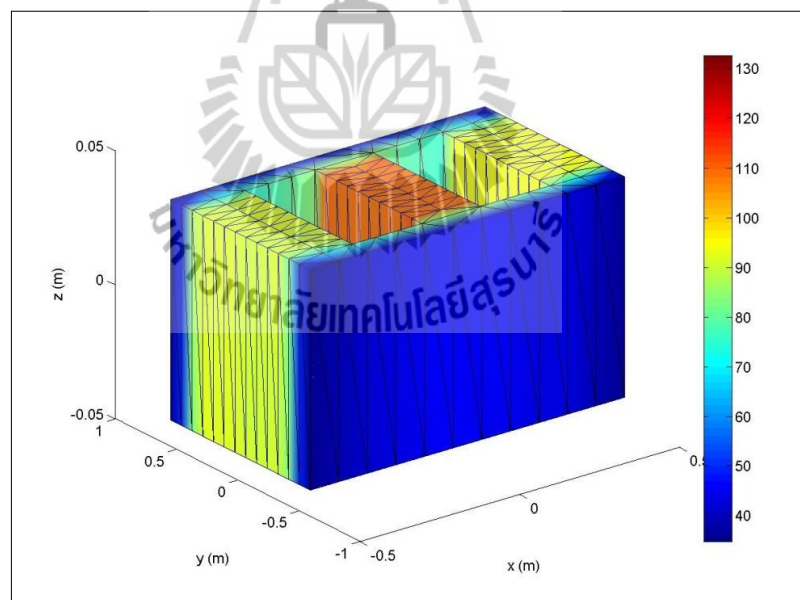
รูปที่ 6.20 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง ในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟส โดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง

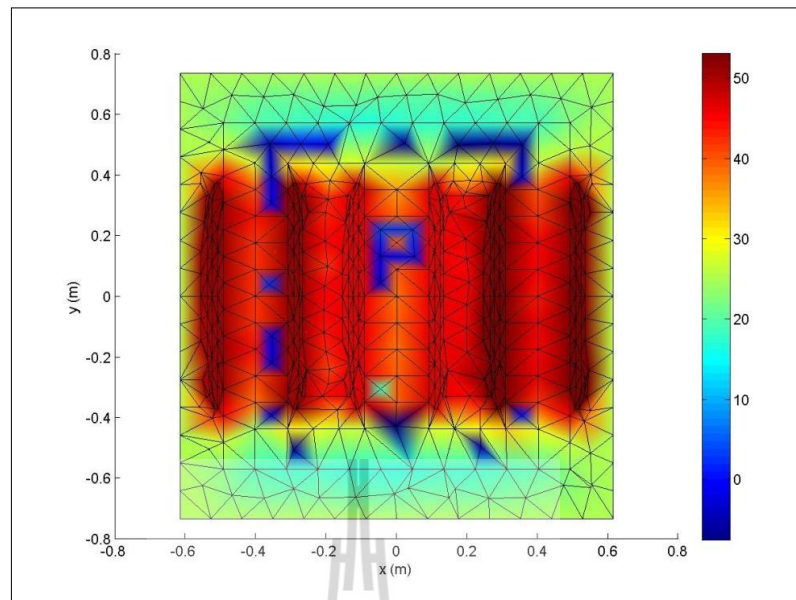


ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง

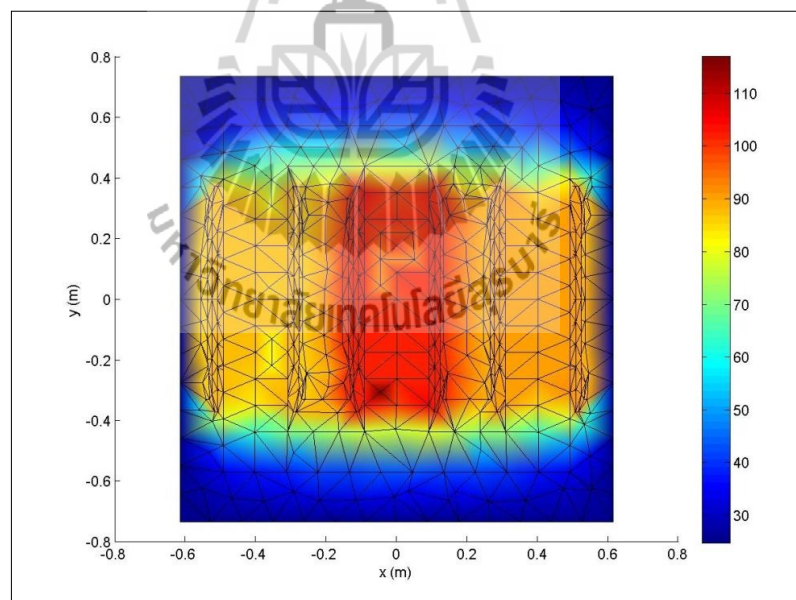


ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

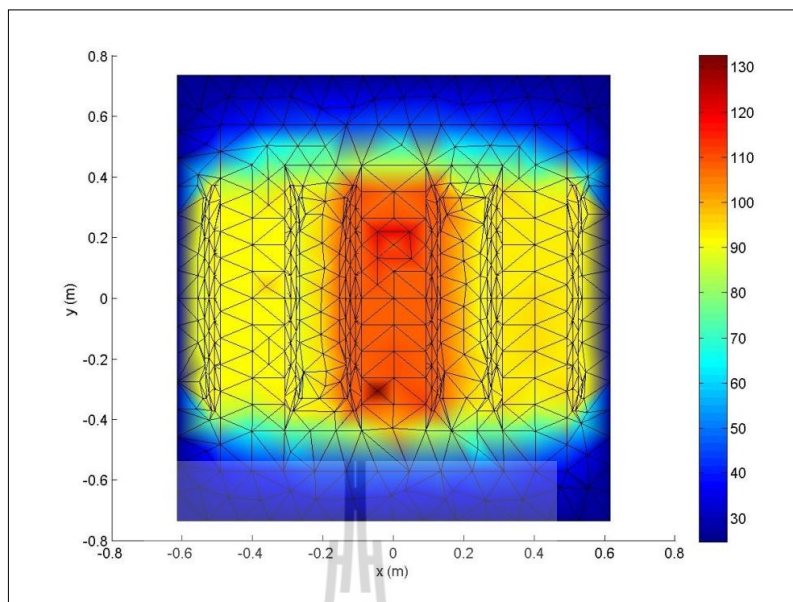
รูปที่ 6.21 การกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง  
ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C



ก) ที่เวลา 100 ชั่วโมง



ข) ที่เวลา 500 ชั่วโมง



ค) ที่เวลา 1000 ชั่วโมง

รูปที่ 6.22 ภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักของการกระจายตัวของอุณหภูมิ ( $^{\circ}\text{C}$ ) ของหม้อแปลง ในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C

ในกรณีอ้างอิงมุมเฟสเฟส C เป็นหลัก ค่าอุณหภูมิที่แสดงในรูปที่ 6.20 จะเป็นการแสดง การกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง ซึ่งผลการจำลองค่าอุณหภูมิที่ได้ นั้นจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเช่นเดียวกันกับกรณีของการจ่ายโหลดสมดุล บริเวณ เฟส A จะมีอุณหภูมิลดลงจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟสของกระแสโหลดที่ เพิ่มขึ้นส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส A มีค่าลดลง ทำให้อุณหภูมิที่ขดลวดเฟส A ลดลงด้วย ส่วนบริเวณเฟส B จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจากกรณีการจ่ายโหลดสมดุลเนื่องจากค่ามุมเฟส ของกระแสโหลดที่ลดลงส่งผลให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของเฟส B มีค่าสูงขึ้น ทำให้อุณหภูมิ ที่ขดลวดเฟส B เพิ่มขึ้นด้วย และผลของค่าอุณหภูมิภายในหม้อแปลงนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้น จนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงเข้าสู่สถานะคงตัวเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ส่วนในรูปที่ 6.21 นั้นจะเป็น การแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิเฉพาะที่บริเวณแกนหลักของหม้อแปลง ซึ่งผลของค่า อุณหภูมิที่แกนหลักนั้นจะมีผลมาจากการกระจายตัวของอุณหภูมิจากขดลวดตัวนำ และใน ภาพที่ 6.22 จะเป็นการแสดงภาพตัดขวางตามแนวแกนหลักเพื่อให้เห็นการกระจายตัวของอุณหภูมิ ภายในหม้อแปลงที่ช่วงเวลาต่างๆ ได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

เมื่อพิจารณากรณีสภาวะจ่ายโหลดแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสทุกแบบที่ปรากฏพบว่าค่าอุณหภูมิในขดลวดที่มีมุมเฟสของกระแสโหลดลดลงจะสูงขึ้นเมื่อเทียบกับขดลวดเฟสเดียวกันในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล และอุณหภูมิในขดลวดที่มีมุมเฟสของกระแสโหลดสูงขึ้นจะลดลงเมื่อเทียบกับขดลวดเฟสเดียวกันในสภาวะจ่ายโหลดสมดุล

สภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลทั้ง 2 แบบนั้น จะทำให้หม้อแปลงจำหน่ายมีค่าอุณหภูมิที่เปลี่ยนไปตามค่าขนาดและมุมเฟสของกระแสโหลด เนื่องจากขนาดและมุมเฟสของกระแสโหลดมีผลต่อค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และอุณหภูมิของหม้อแปลงนั้นก็จะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าขดลวดในเฟสที่มีค่าขนาดของกระแสโหลดมากจะทำให้ขดลวดเฟสนั้นมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วย และขดลวดในเฟสที่มีค่ามุมเฟสของกระแสโหลดน้อยจะทำให้ขดลวดเฟสนั้นมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วยเช่นเดียวกัน แสดงอุณหภูมิสูงสุดที่ขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายในทุกกรณีได้ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 แสดงค่าอุณหภูมิสูงสุดที่ขดลวดของหม้อแปลงจำหน่าย

ขดลวด เฟส	อุณหภูมิสูงสุด (°C)						
	สมดุล (กรณีที่ 1)	ไม่สมดุล					
		ทางขนาด (อ้างอิงขนาดเฟส)			ทางมุมเฟส (อ้างอิงมุมเฟสเฟส)		
		A (กรณีที่ 2)	B (กรณีที่ 3)	C (กรณีที่ 4)	A (กรณีที่ 5)	B (กรณีที่ 6)	C (กรณีที่ 7)
A	94.110	93.680	118.794	88.452	93.407	97.075	91.550
B	107.145	105.509	111.326	117.386	102.787	107.633	108.468
C	93.125	119.963	84.750	95.509	94.460	91.036	93.590

จากตารางที่ 6.1 จะเป็นการแสดงอุณหภูมิสูงสุดที่ขดลวดของหม้อแปลงจำหน่าย ซึ่งแยกพิจารณาเป็น 7 กรณี โดยเรียงลำดับจากคอตมัน์ซ้ายไปหาคอตมัน์ด้านขวาตามลำดับ แสดงได้ดังนี้ คือ 1.) กรณีโหลดสมดุล 2.) กรณีโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส A 3.) กรณีโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B 4.) กรณีโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C 5.) กรณีโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A 6.) กรณีโหลดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส B

และ 7.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C จากนั้นนำค่าอุณหภูมิที่ได้ไปคำนวณหาอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงต่อไป

#### 6.4 ผลการคำนวณอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลจากอุณหภูมิ

การคำนวณหาอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจะอาศัยทฤษฎีของ Arrhenius ที่กล่าวไปแล้วในหัวข้อ 3.5.3 โดยฉนวนที่พิจารณาในงานวิจัยนี้คือ ฉนวนที่กั้นบริเวณขดลวดแรงสูงและแรงต่ำ และเป็นฉนวนประเภทกระดาษเซลลูโลส ซึ่งค่าคงที่ที่ใช้ในการคำนวณในงานวิจัยนี้จะ เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับชนิดของฉนวน จากการจำลองผลอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่ายดังตารางที่ 6.1 สามารถนำค่าอุณหภูมิสูงสุดที่ขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายมาคำนวณอายุการใช้งานของ ฉนวนหม้อแปลงได้ตามตารางที่ 6.2 ดังนี้

ตารางที่ 6.2 ผลการคำนวณอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจำหน่าย

ขดลวด เฟส	อายุการใช้งานของฉนวน (ปี)						
	สมดุล (กรณีที่ 1)	ไม่สมดุล					
		ทางขนาด (อ้างอิงขนาดเฟส)			ทางมุมเฟส (อ้างอิงมุมเฟสเฟส)		
		A (กรณีที่ 2)	B (กรณีที่ 3)	C (กรณีที่ 4)	A (กรณีที่ 5)	B (กรณีที่ 6)	C (กรณีที่ 7)
A	110.37	115.783	8.41	209.24	119.36	79.56	147.046
B	27.19	32.24	17.70	9.66	42.96	25.85	23.71
C	123.19	7.505	321.47	94.50	106.14	155.85	116.97

จากตารางที่ 6.2 จะเป็นการแสดงอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจำหน่าย ซึ่งแยกพิจารณาเป็น 7 กรณี โดยเรียงลำดับจากคอลัมน์ซ้ายไปหาคอลัมน์ด้านขวาตามลำดับ เช่นเดียวกับ ตารางที่ 6.1 แสดงได้ดังนี้ คือ 1.) กรณีโหนดสมดุล 2.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาด โดยอ้างอิงขนาดเฟส A 3.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส B 4.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางขนาดโดยอ้างอิงขนาดเฟส C 5.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่ สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส A 6.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดย อ้างอิงมุมเฟสเฟส B และ 7.) กรณีโหนดไม่สมดุลแบบไม่สมดุลทางมุมเฟสโดยอ้างอิงมุมเฟสเฟส C จะเห็นได้ว่าอุณหภูมิของขดลวดมีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง โดยเมื่ออุณหภูมิของ



ขดลวดสูงชันจะทำให้อายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงมีค่าลดลงและเมื่ออุณหภูมิของขดลวดลดลงจะทำให้อายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งอุณหภูมิที่สูงขึ้นหรือลดลงนี้มีผลมาจากสภาวะการจ่ายโหลดของหม้อแปลงจำหน่าย

ตามมาตรฐาน ANSI กำหนดอายุการใช้งานฉนวนที่ทำมาจากเซลลูโลสว่า ขณะหม้อแปลงจ่ายโหลดมีค่าอุณหภูมิที่ขดลวดเฉลี่ย  $120\text{ }^{\circ}\text{C}$  ตลอดเวลา ฉนวนหม้อแปลงจะมีอายุการใช้งานประมาณเท่ากับ  $6.5 \times 10^4$  ชั่วโมงหรือ 7.4 ปี แต่โดยทั่วไปแล้วการจ่ายโหลดจะเป็นการจ่ายโหลดรายวัน (daily load) ซึ่งมีค่าโหลดไม่เท่ากันตลอดทั้งวัน อุณหภูมิของสภาพแวดล้อมก็ไม่คงที่ตลอดจนอุณหภูมิของแต่ละฤดูกาลก็ไม่เท่ากัน จึงมีสภาพที่มีทั้งอุณหภูมิสูงกว่าและต่ำกว่า อายุการใช้งานจึงยาวกว่า และอาจใช้งานได้นานถึง 30 ปี

## 6.5 สรุป

บทที่ 6 เป็นการอธิบายโปรแกรมจำลองผลพร้อมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของอุณหภูมิในหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA ในสภาวะจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุล ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB ซึ่งโปรแกรมจำลองผลอุณหภูมิแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังรูปที่ 6.1 จากผลลัพธ์ของค่าอุณหภูมิที่ได้จากการจำลองผลจะพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลงที่จ่ายกระแสให้กับโหลดภายนอกจะมีค่าอุณหภูมิสูงกว่าบริเวณอื่นๆ เนื่องจากอุณหภูมิจะมีผลมาจากค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะมีผลมาจากค่ากระแสที่หม้อแปลงจ่ายให้กับโหลดภายนอก และผลของอุณหภูมิที่ได้จะกระจายไปทั่วบริเวณของหม้อแปลง จนกระทั่งอุณหภูมิของหม้อแปลงอยู่ในสภาวะอยู่ตัว ค่าอุณหภูมิที่สูงชันจะทำให้อายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงนั้นลดลง แต่ในทางปฏิบัติโหลดของหม้อแปลงจะไม่เท่ากันตลอดทั้งวันและสภาพอุณหภูมิภายนอกมีการเปลี่ยนแปลงไปตลอดทั้งวัน เพราะฉะนั้นอายุการใช้งานของฉนวนจะมีการเปลี่ยนแปลงได้

## บทที่ 7

### สรุปและข้อเสนอแนะ

#### 7.1 สรุป

งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยและการจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิที่เกิดขึ้นภายในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA เพื่อพิจารณาคูผลกระทบของค่าสนามแม่เหล็กที่มีผลต่ออุณหภูมิและผลของอุณหภูมิที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายอยู่ในสภาวะการจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุล การจำลองผลใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB<sup>TM</sup> ที่พัฒนาขึ้นเองพร้อมตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมให้เป็นที่น่าเชื่อถือ

การสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในบทที่ 2 ถือเป็นรากฐานที่สำคัญในการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ ทั้งนี้เพื่อเป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์และพัฒนาต่อยอดองค์ความรู้ในงานวิจัย การศึกษาทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยในบทที่ 3 ทั้งเรื่องสนามแม่เหล็ก หม้อแปลงไฟฟ้า ทฤษฎีความร้อน การหาอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงและระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ ต่างได้ถูกนำมาใช้เป็นพื้นฐานความรู้และความเข้าใจในการดำเนินงานวิจัย ส่วนการดำเนินงานในบทที่ 4 เป็นขั้นตอนการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองและอธิบายถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้เลือกใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาลออร์คิน ส่วนในบทที่ 5 เป็นการอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงความคล้ายคลึงและความแตกต่างของวิธีการคำนวณ พร้อมนำเสนอผลการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กภายในส่วนต่างๆของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาหม้อแปลงในสภาวะจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุล โดยได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยกระบวนการสร้างกริดแบบ 2 มิติได้เลือกใช้กล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่อยู่ในโปรแกรม MATLAB<sup>TM</sup> และการสร้างกริดแบบ 3 มิติได้เลือกใช้โปรแกรม Solid work ในบทที่ 6 ได้อธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลพร้อมนำเสนอผลการจำลองการ

กระจายอุณหภูมิภายในหม้อแปลงจำหน่ายที่มีผลกระทบมาจากสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาหม้อแปลงอยู่ในสถานะจ่ายโหลดสมดุลและไม่สมดุลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์แบบ 3 มิติ ทั้งนี้เพื่อให้เห็นถึงลักษณะการกระจายตัวของค่าอุณหภูมิที่สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริงยิ่งขึ้น จากนั้นได้ทำการคำนวณหาอายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงจากค่าอุณหภูมิสูงสุดที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ จะพบว่ากระแสโหลดของหม้อแปลงจะมีผลต่ออุณหภูมิของหม้อแปลง และอุณหภูมิสูงสุดที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจะมีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลง

## 7.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต

1. คำนวณอายุการใช้งานเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายอยู่ในสถานะจ่ายโหลดไม่เป็นเชิงเส้นและไม่คงที่
2. การเปรียบเทียบผลการจำลองสนามแม่เหล็กและอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายกับค่าที่ได้จากการวัดจริงในทางปฏิบัติ



## รายการอ้างอิง

- คมสันต์ คาโรจน์. (2541). ผลกระทบของกระแสฮาร์มอนิกที่มีต่ออายุการใช้งานของหม้อแปลงกำลัง. วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เฉลิมพล น้ำค้าง. (2538). ทฤษฎีสถานาไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- ไชยชาญ หินเกิด. (2537). เครื่องกลไฟฟ้า 1 (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี
- นักสิทธิ์ คุ้มพัฒนาชัย. (2533). การถ่ายเทความร้อน (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2547). ไฟไนต์อิลิเมนต์ในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2549). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เผด็จ เผ่าละออ. (2548). การออกแบบแนวใหม่ของมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการสิ้นเปลืองโดยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- มงคล ทองสงคราม. (2536). สนามแม่เหล็กไฟฟ้า (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ : รามการพิมพ์
- มงคล ทองสงคราม. (2549). หม้อแปลงไฟฟ้า (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ : รามการพิมพ์
- Babaie, H., and Farahani, F. F. (2010). Analysis of Thermal Behavior of High Frequency Transformers Using Finite Element Method. **J.Electromagnetic Analysis & Application**,2010,2,627-632
- Carstea, D., Carstea, I., and Carstea, A. (2005). Numerical Simulation of Coupled Magnetic and Thermal Fields in Two-Bars Line. **Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services. 7th International Conference** ,vol.1:311-314
- Chen, Q., S., Zhang, H., Prasad, V. (2001). Heat transfer and kinetics of bulk growth of silicon carbide. **Journal of Crystal Growth**. 230, 239-246
- Christopoulos, C. (1995). The Transmission-Line Modeling Method: TLM, **IEEE Press, USA**

- Dasgupta, I. (2002). **Design of Transformers**. New Delhi:Tata McGraw Hill.
- Driesen, J., Deliege, G., Belmans, R., and Hameyer, K. (2000). Coupled thermo-magnetic simulation of a foil-winding transformer connected to a nonlinear load. **IEEE Transactions on Magnetics**. **36(4)**: 1381 – 1385.
- Electrical, B. H.,(2003). **Transformers** (2nd ed.). New Delhi: Tata McGraw-Hill
- Elmoudi, A., Lehtonen, M., and Nordman, H. (2006). Thermal model for power transformers dynamic loading. **Electrical Insulation, 2006. Conference Record of the 2006 IEEE International Symposium**\_, 214-217
- Hernandez, C., and Arjona, M. A. (2007). Design of distribution transformers based on a knowledge-based system and 2D finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design** **43** , 659-665
- Hwang, C. C., Tang, P. H., and Jiang Y. H. (2005). Thermal analysis of high-frequency transformers using finite elements coupled with temperature rise method. **IEE Proceedings Electric Power Applications**, vol.4 832 - 836
- Jang, J. Y., and Chiu, Y. W. (2007). Numerical and experimental thermal analysis for a metallic hollow cylinder subjected to step-wise electro-magnetic induction heating. **Applied Thermal Engineering** **27**, 1883-1894
- Kulkarni, S. V., Khaparde, S. A. (2004). **Transformer Engineering Design and Practice**.,USA:Marcel Dekker, Inc.
- Preis, K., Biro, O., Buchgraber, G., and Ticar, L. (2006). Thermal-electromagnetic coupling in the finite-element simulation of power transformers. **IEEE Transactions on Magnetics**. **42(4)**: 999 – 1002
- Rafajdus, P., Hrabovcova, V., Susota, M., and Vojeneiak, M. (2008). Design of superconducting traction transformer and its thermal analysis. **Electrical Machines, 2008. ICEM 2008. 18th International Conference** , 1-6
- Rao, J. S., (1999). **Dynamics of plates**. New Delhi:Narosa Publishing House.
- Rao, N. N., (1994). **Elements of Engineering Electromagnetics** (4 th ed). New Jersey:Prentice hall.

- Samesima, M. I., Wilson, R. J., and Araujo, S. C. N.(1995). Analysis of transformer loss of life driving nonlinear industrial loads by the finite elements approach. **Industry Applications Conference, 1995. Thirtieth IAS Annual Meeting, IAS '95., Conference Record of the 1995 IEEE.** vol.3 2175 - 2179
- Saraiva, E., Chaves, M. L. R., and Camacho, J. R. (2008). Three-Phase Transformer Representation Using FEMM, and a Methodology for Air Gap Calculation. **Electrical Machines, 2008. ICEM 2008. 18th International Conference.** 1-6
- Smolka, J., Ingham, D. B., Elliott, L., and Nowak, A. J. (2007). Enhanced numerical model of performance of an encapsulated three-phase transformer in laboratory environment. **Applied Thermal Engineering.** 27 , 156-166
- Tsili, M. A., Amoiralis, E. I., Kladas, A. G., and Souflaris, A. T. (2009). Hybrid Numerical-Analytical Technique for Power Transformer Thermal Modeling. **IEEE Transactions on Magnetics.** 45(3): 1408 – 1411
- Vecchio, R. D., Poulin, B., Feghali, P. T., and Ahuja, R. (2001). **Transformer design principles : with applications to core-form power transformers.** Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers.
- Wakil, N. E., Chereches, N. C., and Padet, J. (2006). Numerical study of heat transfer and fluid flow in a power transformer. **International Journal of Thermal Sciences** 45, 615-626



ภาคผนวก ก

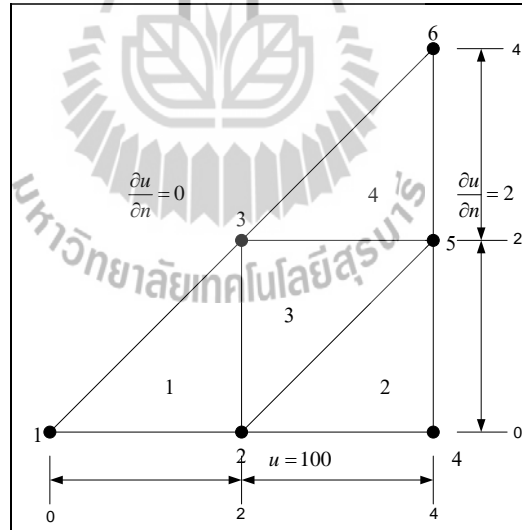
การประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขต

สำหรับปัญหาในสถานะชั่วคราวนั้น การประยุกต์เงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial condition) ของปัญหาเป็นสิ่งที่สำคัญมาก โดยทั่วไปเงื่อนไขเริ่มต้นสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (ก.1)

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z) \quad (\text{ก.1})$$

โดยที่  $T_0$  คือ อุณหภูมิเริ่มแรกที่ตำแหน่งต่างๆบนวัตถุนั้น

การประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบเขต (boundary condition) เป็นส่วนสำคัญอีกอย่างหนึ่งในขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้มีการประยุกต์ใช้เงื่อนไขค่าขอบเขตอยู่ 2 แบบด้วยกันคือ การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์ (Neumann) และการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคเลต (Dirichlet) ซึ่งจะทำการยกตัวอย่างระบบขนาดเล็กเพื่อให้เห็นภาพการประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบเขตทั้ง 2 แบบ โดยสามารถแสดงกริดของปัญหารวมทั้งการระบุขอบเขตของปัญหาทั้งแบบนอยมันน์และดิริคเลตได้ดังรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1 ตัวอย่างปัญหาสำหรับประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต

กำหนดให้เมทริกซ์  $[K_{sys}]$  ของสมการเชิงเส้นระบบรวม  $[K_{sys}]\{u\} = \{f_{sys}\}$  เป็นดังสมการที่ (ก.2)



$$[K_{sys}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (ก.2)$$

กำหนดให้โหนดเวกเตอร์แต่ละอิลิเมนต์เมื่ออิลิเมนต์นั้นไม่มีขอบใดเป็นขอบเขตของปัญหา แสดงได้ดังสมการที่ (ก.3) และเมื่ออิลิเมนต์นั้นมีขอบเป็นขอบเขตของปัญหาแสดงได้ดังสมการที่ (ก.4)

$$\{f^{(e)}\} = \frac{Q\Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (ก.3)$$

$$\{f^{(e)}\} = \frac{Qh_{mn}d\Delta_e}{3} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \quad (ก.4)$$

โดยที่  $Q$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์ ซึ่งในที่นี้สมมติให้มีค่าเท่ากับ 1  
 $h_{mn}$  คือ ระยะห่างระหว่างโหนด m และ n  
 $d$  คือ ค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์  
 $\Delta_e$  คือ พื้นที่ประจำอิลิเมนต์  
 $i, j, k$  คือ ค่าประจำโหนดของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อโหนดนั้นเป็นโหนดที่ติดกับขอบแบบนอยมันน์ที่พิจารณาและมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อไม่ติดกับขอบนอยมันน์

เนื่องจากการกำหนดเงื่อนไขแบบนอยมันน์จะมีความสัมพันธ์กับโหนดเวกเตอร์แต่ละอิลิเมนต์โดยตรง ดังนั้นจึงต้องทำการกำหนดเงื่อนไขแบบนอยมันน์ในแต่ละอิลิเมนต์ก่อนที่จะทำ

การสร้างสมการโพลีโนเมียลระบบรวมแล้วจึงกำหนดเงื่อนไขแบบตรีเคิลเพื่อทำการแก้ระบบสมการเชิงเส้นต่อไป

### การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์

การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์จะกระทำกับอิลิเมนต์ที่อยู่บริเวณขอบของเงื่อนไขซึ่งจากรูปที่ ก.1 ประกอบกับจากสมการที่ (ก.2) และ (ก.3) เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์สามารถเขียนเป็นสมการโพลีโนเมียลแต่ละอิลิเมนต์ได้ดังนี้ (เมื่อสมมติให้  $Q = 1$ )

$$\{f^{(1)}\} = \frac{(2\sqrt{2})(0)(2)}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{f^{(2)}\} = \frac{(2)(2)(2)}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.67 \\ 2.67 \end{bmatrix}$$

$$\{f^{(3)}\} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.67 \\ 0.67 \end{bmatrix}$$

$$\{f^{(4)}\} = \frac{(2)(2)(2)}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(2\sqrt{2})(0)(2)}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.67 \\ 2.67 \end{bmatrix}$$

จากโพลีโนเมียลแต่ละอิลิเมนต์สามารถเขียนเป็นโพลีโนเมียลระบบรวมได้ดังนี้

$$\{f_{sys}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.67 \\ 0.67 \\ 2.67 \\ 6.01 \\ 2.67 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้สมการระบบรวมสำหรับปัญหาในรูปที่ ก.1 ดังสมการที่ (ก.5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.67 \\ 0.67 \\ 2.67 \\ 6.01 \\ 2.67 \end{bmatrix} \quad (\text{ก.5})$$

#### การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคิล

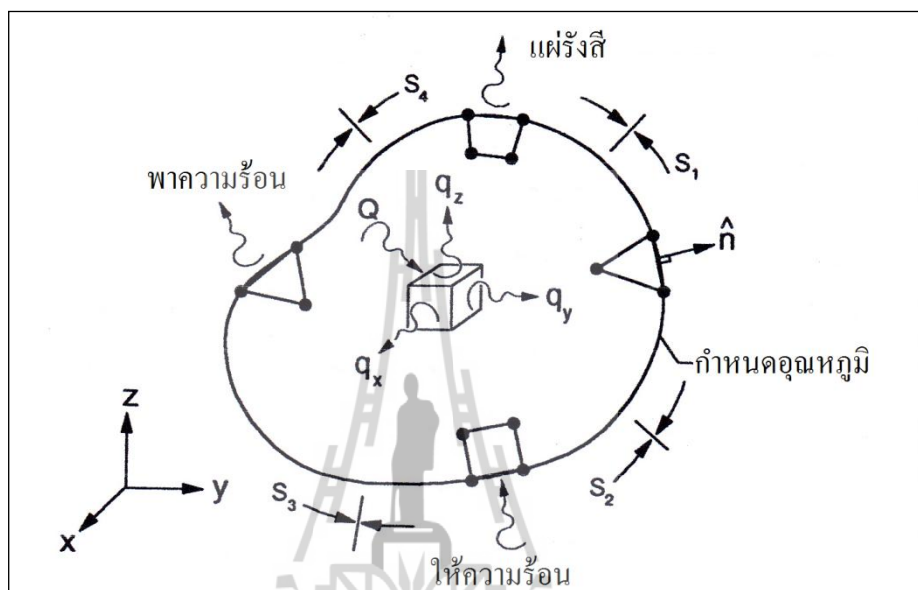
หลังจากได้สมการระบบรวมดังสมการที่ (ก.5) แล้ว จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคิล โดยจากรูปที่ ก.1 ทราบค่าคำตอบที่โหนด 1, 2 และ 4 มีค่าเป็น 100 ดังนั้นเมื่อทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตแบบดิริคิลจึงได้สมการที่ (ก.6)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 0.67 - 6(100) - 5(100) - 2(100) \\ 100 \\ 6.01 - 2(100) - 3(100) - 1(100) \\ 2.67 - 3(100) - 6(100) - 2(100) \end{bmatrix} \quad (\text{ก.6})$$

จากสมการที่ (ก.6) สามารถนำไปแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาผลเฉลยได้ในขั้นตอนถัดไป

### การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อน

การถ่ายเทความร้อนในของแข็ง 3 มิติที่ประกอบด้วยการนำความร้อนในโดเมน โดยที่พื้นผิวรอบนอกอาจมีการกำหนดอุณหภูมิ การให้ปริมาณความร้อนที่ผิว การพาความร้อน รวมไปถึงการแผ่รังสี ซึ่งตัวอย่างของปัญหาการถ่ายเทความร้อนจะแสดงได้ดังรูปที่ ก.2 ดังนี้



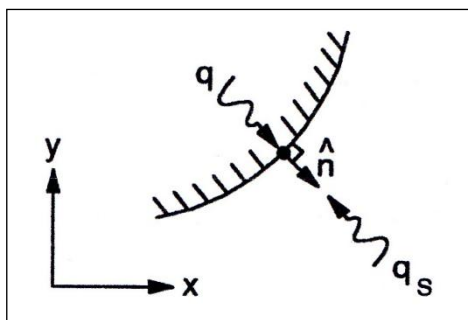
รูปที่ ก.2 การถ่ายเทความร้อนโดยทั่วไปใน 3 มิติ

จากรูปที่ ก.2 เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการถ่ายเทความร้อนโดยทั่วไปประกอบไปด้วย

1. การกำหนดอุณหภูมิที่ผิวตลอดผิว  $S_1$  จะแสดงได้ดังสมการที่ (ก.7)

$$T_s = T_1(x, y, z, t) \quad (\text{ก.7})$$

2. การกำหนดปริมาณความร้อนตลอดผิว  $S_2$  จะอาศัยการสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนไหลเข้า ดังรูปที่ ก.3



รูปที่ ก.3 การสมมูลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อกำหนดปริมาณความร้อนไหลเข้าจากกฎของฟูรีเยร์ (Fourier's law) จะแสดงได้ดังสมการที่ (ก.8) ดังนี้

$$q = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \quad (\text{ก.8})$$

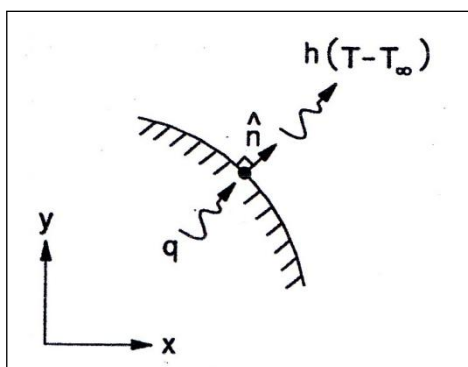
ซึ่ง  $n_x$ ,  $n_y$  และ  $n_z$  เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หน่วย  $\hat{n}$  ที่ตั้งฉากกับขอบนั้นดังสมการที่ (ก.9)

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k} \quad (\text{ก.9})$$

โดย  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  และ  $\hat{k}$  เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ หากกำหนดปริมาตรความร้อน  $q_s$  ที่ไหลเข้าขอบให้มีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงได้ดังสมการที่ (ก.10) ดังนี้

$$q_s = -q = k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z \quad (\text{ก.10})$$

3. การกำหนดการพาความร้อนตลอดผิว  $S_3$  จะอาศัยการสมมูลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน ดังรูปที่ ก.4



รูปที่ ก.4 การสมดุลของการถ่ายเทความร้อนเมื่อเกิดการพาความร้อน  
จากรูปที่ ก.4 จะได้สมการที่ (ก.11) ดังนี้

$$q = h(T - T_{\infty}) \quad (\text{ก.11})$$

โดยที่  $h$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  
 $T$  คือ อุณหภูมิที่ขอบ ณ ตำแหน่งที่พิจารณานั้น  
 $T_{\infty}$  คือ อุณหภูมิจากอากาศรอบนอก

แทนสมการที่ (ก.8) ลงในสมการที่ (ก.11) จะได้สมการการพาความร้อนดังนี้

$$-k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = h(T - T_{\infty}) \quad (\text{ก.12})$$

4. การกำหนดการแผ่รังสีตลอดผิว  $S_4$  จะแสดงได้ดังสมการที่ (ก.13)

$$-k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x - k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y - k_z \frac{\partial T}{\partial z} n_z = \varepsilon \sigma (T^4 - \bar{T}_{\infty}^4) - \alpha q_r \quad (\text{ก.13})$$

โดยที่  $\varepsilon$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การเปล่งรังสี (emissivity)  
 $\sigma$  คือ ค่าคงตัวของเซเดฟาน-โบลต์ซมันน์ (Stefan-Boltzmann constant)

- $\bar{T}_\infty$  คือ อุณหภูมิของตัวกลางสำหรับการแผ่รังสี
- $\alpha$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนความร้อน (absorptivity)
- $q_r$  คือ ปริมาณความร้อนที่ตกกระทบเนื่องจากการแผ่รังสี





ภาคผนวก ข

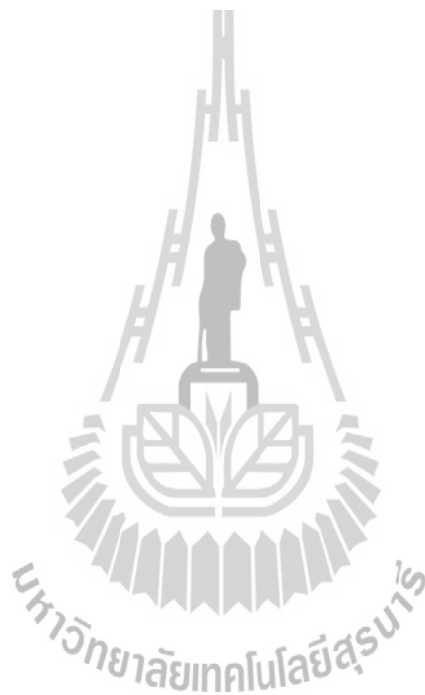
บทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



## รายชื่อบทความวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

Meesuk, P., Kulworawanichpong, T., and Pao-la-or, P. (2011). Magnetic Field Analysis for a Distribution Transformer with Unbalanced Load Conditions by Using 3-D Finite Element Method. **The World Academy of Science Engineering and Technology**, issue 60, December 2011. pp. 339-344



# Magnetic Field Analysis for a Distribution Transformer with Unbalanced Load Conditions by using 3-D Finite Element Method

P. Meesuk, T. Kulworawanichpong, and P. Pao-la-or

**Abstract**—This paper proposes a set of quasi-static mathematical model of magnetic fields caused by high voltage conductors of distribution transformer by using a set of second-order partial differential equation. The modification for complex magnetic field analysis and time-harmonic simulation are also utilized. In this research, transformers were study in both balanced and unbalanced loading conditions. Computer-based simulation utilizing the three-dimensional finite element method (3-D FEM) is exploited as a tool for visualizing magnetic fields distribution volume a distribution transformer. Finite Element Method (FEM) is one among popular numerical methods that is able to handle problem complexity in various forms. At present, the FEM has been widely applied in most engineering fields. Even for problems of magnetic field distribution, the FEM is able to estimate solutions of Maxwell's equations governing the power transmission systems. The computer simulation based on the use of the FEM has been developed in MATLAB programming environment.

**Keywords**—Distribution Transformer, Magnetic Field, Load Unbalance, 3-D Finite Element Method (3-D FEM)

## I. INTRODUCTION

TRANSFORMER is a device that can convert electrical voltage from one circuit at one side of the transformer winding to another voltage level in the circuit connected across the other side of the transformer winding. Between transformer's windings, there is no physical connection. The voltage transfer can be induced by the mean of electromagnetic phenomena. Transformers are either step-up or step-down types. They are used for changing the voltage level in order to satisfy the standard voltage level of power transmission and distribution systems. Transformers are vital so that the outage or failure of the transformers can cause some interruption or a wide area blackout. To use the transformer in electrical power applications, efficiency, stability and reliability of the transformers are necessary. To evaluate the

efficiency of the transformer is to determine magnetic field distribution which results in transformer's power losses. The magnetic field distribution depends on loading conditions. Due to the increasing electrical demand in industries transformers have been connected with various types of loads. Some are balanced but there are unbalanced loads. Refer to standard provided by Provincial Electric Authority of Thailand (PEA), an unbalanced load is defined by 20% of current magnitude different between phase pairs.

Finite Element Method (FEM) is one of the most popular numerical methods used for computer simulation. The key advantage of the FEM over other numerical methods in engineering applications is the ability to handle nonlinear, time-dependent and complex geometry problems. Therefore, this method is suitable for solving the problem of magnetic field distribution, the FEM is able to estimate solutions of Maxwell's equations governing the power transmission systems. Although the conventional methods are simpler than the use of the FEM, they are limited for the system of simple geometry. In practice, several material structures can be found within the distribution transformer. Employing the FEM can include these effects by choosing material magnetic permeability for each additional structure domain. With this feature, the FEM is one of potential numerical simulation tools for analyzing magnetic field problems of combined material regions. To utilize the advantages of the 3-D Finite Element Method (3-D FEM) for handling the magnetic field problems, 3-D FEM model development and problem formulation need to be defined in magnetic field problems of distribution transformer.

In this paper, magnetic field modeling of distribution transformer is briefed in Section II. Section III is to illustrate the utilization of the 3-D FEM by using Galerkin approach for the magnetic field modeling described in Section II. The domain of study with the 3-D FEM can be discretized by using linear tetrahedron elements. Section IV gives simulation results of magnetic field distribution of distribution transformers in both balanced and unbalanced load conditions. This section also gives some discussion. The simulation conducted herein is based on the 3-D FEM method given in Section III. All the programming instructions are coded in MATLAB program environment. The last section gives conclusion.

P. Meesuk is with the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND (e-mail: tumpp\_winner@hotmail.com).

T. Kulworawanichpong is with the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND (e-mail: thanatch@sut.ac.th).

P. Pao-la-or is with the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND (corresponding author to provide phone: 0-4422-4407; fax: 0-4422-4601; e-mail: padej@sut.ac.th).

II. MAGNETIC FIELD MODELING FOR A DISTRIBUTION TRANSFORMER

In magnetic field calculations, the magnetic vector potential (**A**) carries a bundle of information consisting of magnetic field intensity (**H**), and magnetic flux density (**B**). For convenience, some assumptions are made as follows: the magnetic materials of the cores are isotropic, and the displacement currents are negligible due to low supply frequency (50 Hz). Hence, (1) describes the temporal and spatial variations of **A** [1], [2]

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_0 = 0 \tag{1}$$

..., where  $\mu$  is the magnetic permeability,  $\sigma$  is the electrical conductivity, and  $\mathbf{J}_0$  is the applied current density.

This paper has considered the system governing by using the time-harmonic mode and representing the magnetic vector potential in complex form,  $\mathbf{A} = A e^{j\omega t}$  [3], therefore,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = j\omega A$$

..., where  $\omega$  is the angular frequency.

Refer to (1), by employing the complex form of the magnetic field and when considering the problem of three dimensions in cartesian coordinate ( $x, y, z$ ), hence

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\omega \sigma A + \mathbf{J}_0 = 0 \tag{2}$$

Analytically, there is no simple exact solution of the above equation. Therefore, in this paper the 3-D FEM is chosen to be a potential tool for finding approximate magnetic field solutions for the quasi-static partial differential equation described as in (2) [4], [5].

III. 3-D FEM FOR THE DISTRIBUTION TRANSFORMER

A. Discretization

This paper determines a 3  $\phi$ , Dy1, 400 kVA, 22kV/400V distribution transformer. Fig. 1 depicts the detail of the distribution transformer. The domain of study with the 3-D FEM can be discretized by using linear tetrahedron elements. This can be accomplished by using Solidworks for 3-D grid generation. Fig. 2 displays grid representation of the test system. The region domain consists of 24,107 nodes and 132,961 elements.

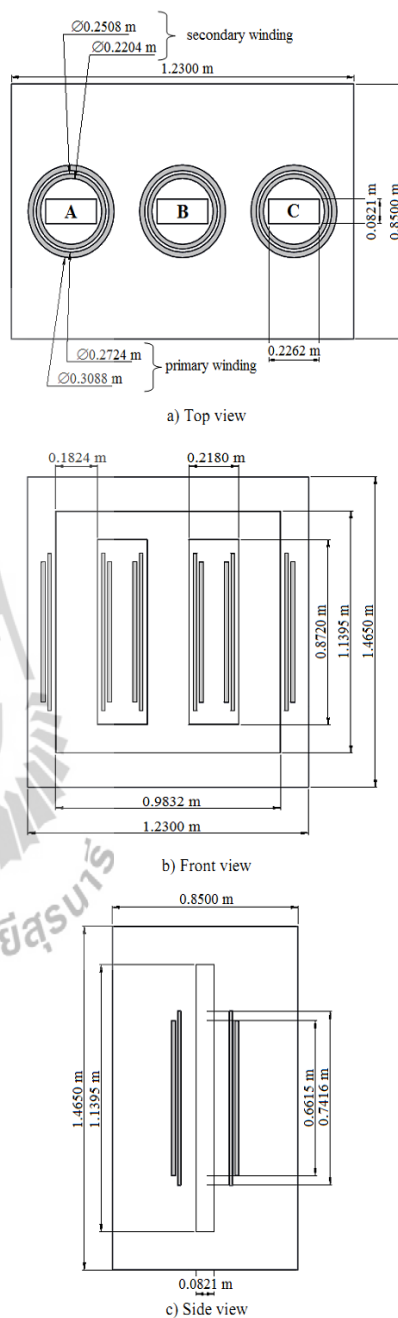


Fig. 1 Detail of the distribution transformer with dimension

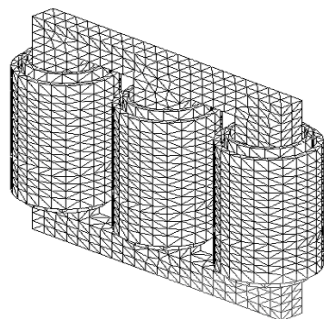


Fig. 2 Discretization of the system given in Fig. 1

**B. 3-D FEM Formulation**

An equation governing each element is derived from the Maxwell's equations directly by using Galerkin approach, which is the particular weighted residual method for which the weighting functions are the same as the shape functions. The shape function for 3-D FEM used in this research is the application of 4-node tetrahedron element (three-dimensional linear element) [6]-[8]. According to the method, the magnetic vector potential is expressed as follows

$$A(x, y, z) = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3 + A_4N_4 \quad (3)$$

..., where  $N_i, i = 1, 2, 3, 4$  is the element shape function and the  $A_i, i = 1, 2, 3, 4$  is the approximation of the magnetic vector potential at each node (1, 2, 3, 4) of the elements, which is

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

..., where  $V$  is the volume of the tetrahedron element, which is expressed as

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

and

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\ b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\ b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\ c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\ c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\ c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\ d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\ d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\ d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

The method of the weighted residue with Galerkin approach is then applied to the differential equation, refer to (2), where the integrations are performed over the element domain  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_i (j\sigma\omega A) d\Omega + \int_{\Omega} (N_i J_0) d\Omega = 0$$

, or in the compact matrix form

$$[M + K]\{A\} = \{F\} \quad (4)$$

$$M = j\omega\sigma \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$= \frac{j\omega\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = J_0 \int_{\Omega} N_i d\Omega = \frac{J_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



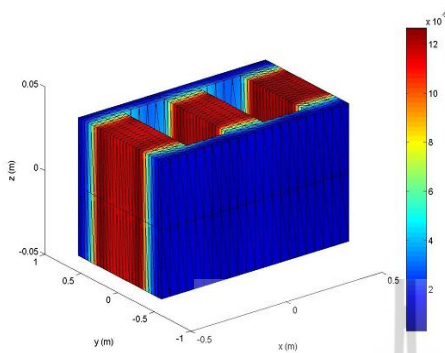


Fig. 6 Magnetic vector potential distribution (wb/m) of the transformer core for load balancing case

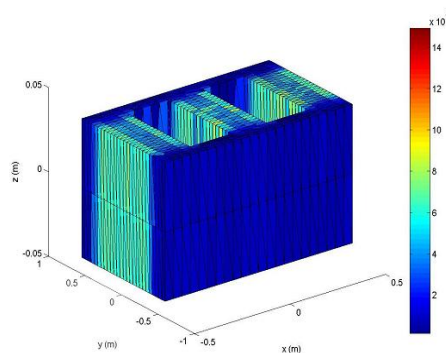


Fig. 9 Magnetic flux density distribution (T) of the transformer core for load balancing case

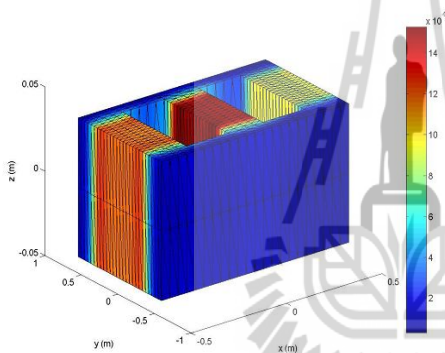


Fig. 7 Magnetic vector potential distribution (wb/m) of the transformer core for magnitude unbalance case

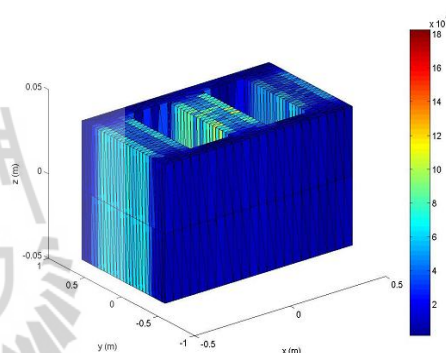


Fig. 10 Magnetic flux density distribution (T) of the transformer core for magnitude unbalance case

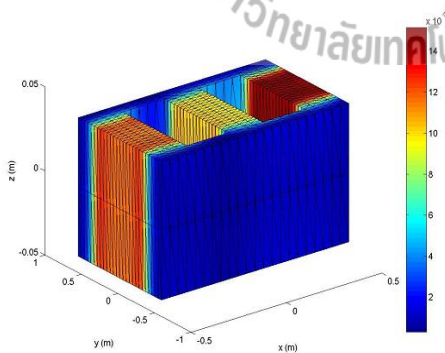


Fig. 8 Magnetic vector potential distribution (wb/m) of the transformer core for phase unbalance case

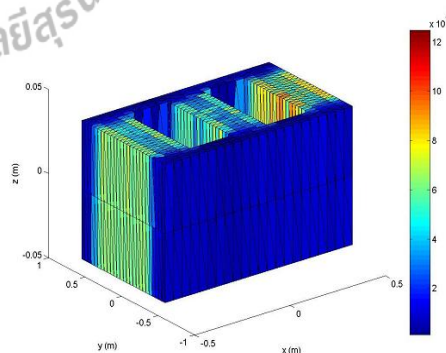


Fig. 11 Magnetic flux density distribution (T) of the transformer core for phase unbalance case

From which the results of magnetic vector potential that distribute throughout the transformer for balanced load case, magnitude unbalance case, and phase unbalance case as shown in Fig. 3-5. As can be seen, in all cases the magnetic vector potential has the maximum value at the transformer coils. This is because the coils are energized by the transformer's input current. The magnetic vector potential at the transformer coil induced the magnetic vector potential at the transformer core. This can be considered as shown in Fig. 6-8. The magnetic vector potential at the transformer core is relative to the magnetic vector potential at the transformer coil.

When considering the magnetic vector potential of the load balance case as shown in Fig. 3 and Fig. 6, the magnetic vector potential distributed symmetrically throughout the transformer volume due to balanced three-phase currents. For magnitude unbalance case, the magnetic vector potential is shown in Fig. 4 and Fig. 7. They illustrated that magnetic vector potential distribution is unsymmetrical at the transformer coil and the transformer core. The magnetic vector potential is high at phase B while that of phase C is low according to their current values. The phase unbalance case is shown in Fig. 5 and Fig. 8. The distribution of the magnetic vector potential is also unsymmetrical according to their phase values.

In Fig. 9-11, the magnetic flux density distributed in the transformer core when considering the load balance case, the magnitude unbalance case, and the phase unbalance case. As can be seen, the magnetic flux density is relative to the magnetic vector potential. In other word, the magnetic flux density is the rate of change in the magnetic vector potential.

#### V. CONCLUSION

This paper has studied the magnetic field distribution throughout the volume of the distribution transformer resulting from loading conditions of balance and unbalance. The unbalanced load conditions can be divided into magnitude unbalance case and phase unbalance case.  $3\phi$ , Dy1, 400 kVA, 22kV/400V distribution transformer were investigated. The computer simulation is performed by using 3-D Finite Element Method (3-D FEM) instructed in MATLAB programming codes. As a result, distribution of the magnetic vector potential and the magnetic flux density throughout the volume of the transformer are symmetrical when the load is balanced. It is the unsymmetrical distribution of which the magnitude unbalance case and phase unbalance case. This confirmed that the magnetic flux density is the rate of change in the magnetic vector potential.

#### REFERENCES

- [1] N.A. Demerdash and D.H. Gillott, "A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.74, pp. 682-685, 1974.
- [2] W.N. Fu, *Electromagnetic field analysis of induction motors by finite element method and its application to phantom loading*, Ph.D. Thesis, Hong Kong Polytechnic University, China, 1999.
- [3] C. Christopoulos, *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*, IEEE Press, USA, 1995.
- [4] P. Pao-la-or, T. Kulworawanichpong, S. Sujitjorn and S. Peaiyoung, "Distributions of Flux and Electromagnetic Force in Induction Motors: A Finite Element Approach," *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 5, No. 3, pp.617-624, 2006.
- [5] P. Pao-la-or, A. Isaramongkolrak and T. Kulworawanichpong, "Finite Element Analysis of Magnetic Field Distribution for 500-kV Power Transmission Systems," *Engineering Letters*, Vol. 18, No. 1, pp.1-9, 2010.
- [6] R.W. Lewis, P. Nithiarasu and K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, USA, 2004.
- [7] M.A. Bhatti, *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*, John Wiley & Sons, USA, 2006.
- [8] P.I. Kattan, *MATLAB Guide to Finite Elements (2nd edition)*, Springer Berlin Heidelberg, USA, 2007.
- [9] S.V. Kulkarni and S.A. Khaparde, *Transformer engineering design and practice*, Marcel Dekker, USA, 2004.
- [10] V.N. Mittle, and A. Mittle, *Design of electrical machines*, Standard Publishers, 1996.

## ประวัติผู้เขียน

นายพีรวัฒน์ มีสุข เกิดเมื่อวันที่ 19 สิงหาคม พ.ศ. 2529 เกิดที่อำเภอเมือง จังหวัดสุพรรณบุรี สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนนครณัฐศึกษาลัย จังหวัดสุพรรณบุรี เมื่อปี พ.ศ. 2548 ได้เข้าศึกษาต่อระดับปริญญาตรี ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมไฟฟ้า) ในปี พ.ศ. 2552 หลังจากสำเร็จการศึกษาได้ เข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีในปีเดียวกัน โดยขณะศึกษาได้ปฏิบัติงานเป็นผู้ช่วยสอนปฏิบัติการของสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีจำนวน 6 รายวิชา ได้แก่ (1) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้ามูลฐาน (2) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้า 1 (3) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้า 2 (4) ปฏิบัติการการแปลงผันพลังงานกลไฟฟ้า (5) ปฏิบัติการวงจรอิเล็กทรอนิกส์ และ (6) ปฏิบัติการเครื่องจักรกลไฟฟ้า 2 ทั้งนี้มีความสนใจในด้านการวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานระบบไฟฟ้ากำลัง

ระหว่างศึกษาในระดับปริญญาโท ได้มีผลงานวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่โดยมีปรากฏดังภาคผนวก ข.