การวิเคราะห์เชิงปริมาณ

(Quantitative Analysis)

โดย

รองศาสตราจารย์ ดร. คณิต ไข่มุกด์
สาขาวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำนำ

เอกสารคำสอนนี้ ได้รวบรวมจากแผ่นปลิวประกอบคำบรรยายชั่วโมงต่อชั่วโมง จากการสอน วิธีการสถิติเพื่องานวิจัยการปฏิบัติงาน เพื่ออำนวยความสะดวกให้แก่นักศึกษามหาวิทยาลัยภูธรอย่างพวกเรา เป็นสำคัญ

หวังเป็นอย่างยิ่งที่จะได้รับคำติชม ท้วงติง จากนักศึกษาและผู้อ่านทุกท่าน เพื่อที่จะได้แก้ไขปรับปรุงให้เป็นตำราในโอกาสต่อไป

ความดีถ้ามีอยู่บ้าง ขอมอบให้แก่ อาจารย์สุจินต์ พงษ์ศักดิ์ สถาบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์ และ อาจารย์ น.อ. เมธี เทียมทัต ร.น. กองทัพเรือ ผู้เปิดความรู้สาขาวิชานี้แก่ข้าพเจ้าด้วยความเคารพ

รองศาสตราจารย์ ดร. คณิต ไข่มุกด์

สารบัญ

บทที่ 1

วิธีการทางสถิติ เพื่องานวิจัยการปฏิบัติงาน

กำเนิดวิชา

วิชาวิธีการทางสถิติเพื่องานวิจัยการปฏิบัติงานเกิดขึ้นและได้รับความสนใจมาก ในระหว่างสงครามโลกครั้งที่สอง โดยประเทศอังกฤษได้ระดมกำลังมันสมองของประเทศอื่น ได้ แก่นักวิทยาศาสตร์ นักคณิตศาสตร์ และวิศวกร เพื่อมาร่วมกันช่วยแก้ปัญหาในการทำสงคราม โดยมีเป้าหมายหลักก็คือจะใช้ทรัพยากรที่มีอยู่ อันได้แก่ อาวุธยุทโธปกรณ์ ให้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด พร้อมทั้งศึกษากลยุทธ์ในการตั้งรับหรือรุกศัตรู เมื่อเสร็จสิ้นสงครามโลกครั้งที่สอง ปรากฏว่าฝ่ายอังกฤษมีชัย วิชาการทางสถิติเพื่องานวิจัยการปฏิบัติงานก็ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวางอีกทั้งพอที่จะพูดได้ว่า อังกฤษชนะสงครามก็เพราะงานวิจัยการปฏิบัติงานที่ดีนั่นเอง สหรัฐอเมริกาได้ให้ความสนใจมากโดยประยุกต์งานวิจัยการปฏิบัติงานเข้ากับการปฏิบัติงานทางด้านธุรกิจ เพราะมีลักษณะที่จะต้องมีกลยุทธ ในการตั้งรับ หรือรุก กับคู่แข่งขัน และเป็นการใช้ต้นทุนให้น้อยที่สุดเพื่อที่จะได้กำไรสูงสุด ซึ่งทำให้กิจการทางธุรกิจประสบผลสำเร็จเป็นอย่างมาก

ยิ่งในปี พ.ศ. 2490 นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกัน คือ นายยอร์ช บี. แดนท์ซิก (George B. Dantzig) ได้ค้นพบวิธี ซิมเพล็ก (Simplex method) ในการแก้ปัญหา โปรแกรมเชิงเส้น (Linear Programming) ประกอบกับความเจริญทางด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์ ทำให้สามารถคำนวณผลเพื่อหาคำตอบของปัญหาต่างๆ ได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง ส่งผลให้งานวิจัยการปฏิบัติงานรุ่งเรืองขึ้นตามลำดับ และสามารถประยุกต์ใช้ช่วยผู้บริหาร ไม่ว่าจะเป็นการทหาร การธุรกิจ โรงพยาบาล สถาบันการเงิน ห้องสมุด ผังเมือง การขนส่ง แม้แต่การสืบสวนทางคดีอาญา

งานวิจัยการปฏิบัติงาน คืออะไร ?

ได้มีผู้ให้คำนิยามไว้ต่างๆ กัน บางท่านก็ถือว่างานวิจัยการปฏิบัติงาน ก็คือ วิชาวิทยาการจัดการนั่นเอง เพราะเป็นการหากลยุทธ์ให้แก่ผู้บริหาร โดยวิธีทางวิทยาศาสตร์ และนิยามที่รัดกุมอันหนึ่งที่มีผู้ให้นิยามไว้ดังนี้

งานวิจัยการปฏิบัติงาน คือ วิธีการทางวิทยาศาสตร์ ในการเก็บรวมข้อมูลเชิงปริมาณ เพื่อประมวลผลหาคำตอบที่เป็นไปได้ให้แก่ผู้บริหาร โดยปัญหานั้นอยู่ในวิสัยที่จะควบคุมได้

บางท่านก็กล่าวว่า งานวิจัยการปฏิบัติงาน ก็คือ ศิลปะของการออกตัวแบบ (Art of Modeling) โดยแบ่งออกเป็น 3 ตัวแบบ ดังนี้

1. **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mather matical Model)** เป็นตัวแบบ ซึ่งทราบความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ อย่างแน่นอน อาทิเช่น ตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น ตัวแบบการขนส่ง ตัวแบบการมอบหมายงาน ตัวแบบผังโครงการ

พิจารณาจากตัวอย่างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น สมมติว่าบริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด โดย มีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิตสินค้าอยู่ 2 เครื่อง โดยมีขีดจำกัดการทำงาน และจำนวนชั่วโมงต่อหนึ่งหน่วยการผลิตสินค้า ดังตารางต่อไปนี้

จำนวนสินค้าที่ผลิต	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	ขีดจำกัดการใช้งานเป็นชั่วโมงต่อวัน
เครื่องจักรที่ 1 (เวลาเป็นชั่วโมง / หน่วยผลิต)	2	1	3	20
เครื่องจักรที่ 2 (เวลาเป็นชั่วโมง / หน่วยผลิต)	1	2	2	15
กำไร / หน่วยผลิต	5	4	6	

บริษัทจะต้องผลิตสินค้าชนิดที่ 1 ชนิดที่ 2 และชนิดที่ 3 อย่างละกี่หน่วยต่อวัน จึงจะให้ได้กำไรสูงสุด

เราสามารถสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้ ให้ x_j เป็นจำนวนหน่วยผลิตสินค้าชนิดที่ j

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่จะทำให้มีค่าสูงสุด คือ

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

โดยมีขีดจำกัดการใช้งานเป็นชั่วโมงต่อวัน ดังนี้

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. **ตัวแบบเชิงซิมูเลชัน (Simulation Model)** เป็นตัวแบบซึ่งทราบความสัมพันธ์หาตัวแปรต่างๆ บ้าง แต่ไม่แน่นอน มักจะอยู่ในรูปของความน่าจะเป็น ดังนั้นคำตอบที่ได้จึงเป็นลักษณะเชิงความน่าจะเป็นด้วย อาทิเช่น ตัวแบบแถวคอย ตัวแบบพัสดุคงคลัง ตัวแบบเกมส์

พิจารณาจากตัวแบบแถวคอย ซึ่งพบปัญหามากในการให้บริการ และลูกค้าผู้มารับบริการ เช่น การเข้าแถวคอยซื้อตั๋วรถไฟ เนื่องจากการเข้ามาจองตั๋วรถไฟของผู้โดยสาร มีลักษณะไม่แน่นอน แต่พอจะหาการแจกแจงของการมาเข้ารับบริการได้ โดยอาศัยทฤษฎีความน่าจะเป็น ดังนั้นในการพิจารณาเตรียมจำนวนช่องให้บริการแก่ผู้มาจองตั๋ว พิจารณาได้จากความน่าจะเป็นเท่านั้น แต่อย่างไรก็ตาม ตัวแบบเชิงซิมูเลชัน ก็ได้รับการยอมรับกันอย่างกว้างขวางว่าเป็นตัวแบบที่สามารถแก้ปัญหา และให้ทางเลือกคำตอบแก่ผู้บริหารได้อย่างมีระบบ

3. **ตัวแบบเชิงฮิวริสติก (Hueristic Model)** เป็นตัวแบบซึ่งไม่ทราบความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ เลย ดังนั้นการหาคำตอบจึงต้องใช้ประสบการณ์เป็นส่วนใหญ่

ขั้นตอนวิธีการทางสถิติเพื่องานวิจัยการปฏิบัติงาน

1. นิยามปัญหา (Definition of the Problem)

2. สร้างตัวแบบ (Construction of the Model)
3. หาคำตอบของตัวแบบ (Solution of the Model)
4. ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ (Validation of the Model)
5. นำตัวแบบไปใช้ (Implementation of the Model)

นิยามปัญหา

ในขั้นแรกต้องพิจารณาปัญหาให้ถ่องแท้เสียก่อนว่าปัญหาของเราคืออะไร จึงจะสร้างตัวแบบและหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง ตัวอย่างเช่น พิจารณาปัญหาในการกำหนดผังโครงการ ถ้าปัญหาคือทำอย่างไรงานจะเสร็จทันกำหนดเวลา นั่นหมายความว่า จะต้องพิจารณาทุกวิถีทางที่จะเป็นไปได้ในการที่จะทำให้งานนั้นแล้วเสร็จตามกำหนดเวลา ซึ่งอาจจะไม่ได้หมายถึงว่า โครงการนั้นจะทำแล้วเสร็จด้วยค่าใช้จ่ายที่ต่ำที่สุด ดังนั้นการนิยามปัญหาจะต้องชัดเจนว่าต้องการให้โครงการแล้วเสร็จตามกำหนด หรือจะให้โครงการแล้วเสร็จด้วย ค่าใช้จ่ายที่ต่ำที่สุด ซึ่งแน่นอนคำตอบของปัญหาย่อมไม่เหมือนกัน การที่เรานิยามปัญหาให้ถูกต้องแน่ชัดจะช่วยให้การสร้างตัวแบบและการหาคำตอบได้ตรงตามที่ต้องการ ในการตัดสินใจที่จะดำเนินการซื้ออุปกรณ์บางอย่างก็เช่นกัน เราต้องนิยามปัญหาเราให้ชัดเจนว่าต้องการอุปกรณ์ที่ราคาต่ำที่สุดเท่านั้นใช่หรือไม่ หรือต้องการความเชื่อถือได้ของบริษัทผู้ผลิตอุปกรณ์นั้นๆ ด้วย

สร้างตัวแบบ

การสร้างตัวแบบ จะพบว่าส่วนใหญ่ปัญหาที่พบสามารถที่จะสร้างตัวแบบได้หลายวิธี ซึ่งจะส่งผลถึงการหาคำตอบของปัญหาได้หลายวิธีด้วย ปกติการสร้างตัวแบบเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของงานวิจัยการปฏิบัติการ ดังนั้นการสร้างตัวแบบมักจะระดมพลังความคิดเป็นกลุ่ม เพราะสามารถที่จะมองตัวแบบได้หลายแง่ หลายมุม ทำให้การสร้างตัวแบบเป็นไปอย่างรัดกุมและมีประสิทธิภาพ โดยใช้ผู้เชี่ยวชาญในหลายๆ ด้านที่เกี่ยวข้องกับปัญหา เช่น ทางบริษัทการบินพาณิชย์ ต้องการจะตัดสินใจซื้อเครื่องบินก็ต้องพิจารณาในหลายๆ ด้าน อาจพิจารณาระบบควบคุมการบิน ความสะดวกสบายของผู้โดยสาร ความเชื่อถือได้ของบริษัทผู้ผลิตเครื่องยนต์ ความทนทานต่อสภาวะอากาศแปรปรวน ระบบความปลอดภัยฯลฯ ซึ่งต้องอาศัยผู้เชี่ยวชาญในแต่ละด้านรวมกันพิจารณา

หาคำตอบของตัวแบบ

ตัดสินใจสร้างตัวแบบได้แล้วก็สามารถที่จะหาคำตอบของตัวแบบนั้นๆ ได้ตามแต่ชนิดของตัวแบบที่สร้างขึ้น ซึ่งจะหาคำตอบได้อย่างถูกต้องแน่นอน หรือ หาคำตอบด้วยทฤษฎีความน่าจะเป็นหรืออาศัยประสบการณ์ ก็ขึ้นอยู่กับว่าตัวแบบเป็นแบบใด

ตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบ

การพิจารณาความถูกต้องของตัวแบบบางครั้ง พิจารณาได้ยากถ้าสามารถที่จะทดลองกับข้อมูลในอดีตได้ก็จะเป็นการดี แต่ลักษณะบางอย่างของปัญหาก็ไม่สามารถนำมาทดลองได้ อาจจะเป็นเพราะค่าใช้จ่ายสูงเกินไป หรือเป็นอันตราย จึงอาจจะต้องใช้ผู้เชี่ยวชาญ แต่ละสาขามาพิจารณา

นำตัวแบบไปใช้

เป็นการนำตัวแบบที่หาคำตอบ ซึ่งตรวจสอบความถูกต้องและได้ผลเป็นที่น่าพอใจแล้วนำไปปฏิบัติจนริงๆ ซึ่งก็จะต้องติดตามผลด้วยว่าเมื่อนำไปปฏิบัติจริงๆ แล้วได้ผลตรงตามที่คิดไว้หรือไม่

- - - - - - - - - - - - -

บทที่ 2

โปรแกรมเชิงเส้น
(Linear Programing)

เป็นตัวแบบที่ต้องการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดให้สามารถใช้ประโยชน์ได้อย่างสูงสุด อันหมายถึง กำไรสูงสุด หรือ ต้นทุนต่ำสุด คุณลักษณะที่สำคัญในการหาโปรแกรมเชิงเส้นก็คือ ฟังก์ชันที่แทนจุดประสงค์และเงื่อนไขบังคับ (Constraint) มีลักษณะเชิงเส้น เป็นตัวแบบที่สามารถประยุกต์ใช้จริงๆ ได้หลายสาขาดังจะยกเป็นตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1 การวางแผนการผลิต

บริษัทอุตสาหกรรมการผลิตต้องการจะใช้เครื่องจักรที่มีอยู่ 3 ชนิด อันได้แก่ เครื่องโม่ เครื่องกลึงและเครื่องลับ ในการผลิตสินค้า 3 ชนิด ซึ่งจำนวนชั่วโมงของเครื่องจักรแต่ละชนิดไม่เท่ากัน ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ชนิดเครื่องจักร	เวลาที่ใช้ต่อหน่วย (นาที)			เวลาทำงานเครื่อง (นาที / วัน)
	ชนิดที่ 1	ชนิดที่ 2	ชนิดที่ 3	
โม่	1	2	1	430
กลึง	3	0	2	460
ลับ	1	4	0	420
กำไร / หน่วย	3	2	5	

บริษัทจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดจำนวนเท่าไรต่อวัน จึงจะได้กำไรสูงสุด

สามารถสร้างตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นได้ดังนี้

ให้ x_j เป็นจำนวนการผลิตของสินค้า ชนิดที่ j

ทำให้ฟังก์ชัน z มีค่าสูงสุดเมื่อ

$$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับจากจำนวนเวลาสูงสุดที่เครื่องทำงานได้ต่อวัน

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 430 \\ 3x_1 + 2x_3 &\le 460 \\ x_1 + 4x_2 &\le 420 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2 การทำฟาร์ม

บริษัทแห่งหนึ่งมีฟาร์มสำหรับปลูกพืช 3 แห่ง แต่ละฟาร์มจะถูกจำกัดด้วยเนื้อที่และปริมาณทั้งที่ได้รับจากการชลประทาน ข้อมูลสำหรับฤดูกาลที่จะมาถึงมีดังนี้

ฟาร์มที่	จำนวนเนื้อที่ (ไร่)	ปริมาณน้ำที่มีอยู่ (ฟุต^3 / ไร่)
1	400	1500
2	600	2000
3	300	900

ส่วนพืชทั้ง 3 ชนิดที่จะปลูกก็มีความแตกต่างกันในเรื่องปริมาณน้ำที่ใช้ และผลกำไรที่ได้รับต่อไร่ นอกจากนั้นการปลูกพืชแต่ละชนิดยังถูกจำกัดด้วยอุปกรณ์การปลูกด้วย ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ชนิดของพืช	เนื้อที่สูงสุดที่จะปลูกได้	ปริมาณน้ำที่ใช้ (ฟุต^3 / ไร่)	กำไร (บาท / ไร่)
ข้าวเจ้า (A)	700	5	8000
ข้าวสาลี (B)	800	4	6000
ข้าวโพด (C)	300	3	2000

บริษัทจะต้องปลูกพืชแต่ละชนิดในแต่ละฟาร์มเป็นจำนวนเท่าไร ซึ่งจะทำให้ผลกำไร จากการใช้ฟาร์มทั้ง 3 แห่งปลูกพืช แล้วได้กำไรสูงสุด สามารถสร้างตัวแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

ให้ x_{ij} เป็นจำนวนไร่ที่ปลูกพืชชนิดที่ j ในฟาร์มที่ i

$$i = 1, 2, 3, j = A, B, C$$

ทำให้ฟังก์ชัน z มีค่าสูงสุด เมื่อ

$$Z = 8000(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 6000(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) + 2000(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ ดังนี้

เงื่อนไข จำกัดด้วยเนื้อที่ของฟาร์ม

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 400$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 600$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 300$$

เงื่อนไข จำกัดด้วยปริมาณน้ำที่มี

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 3x_{1C} \leq 1500$$

$$5x_{2A} + 4x_{2B} + 3x_{2C} \leq 2000$$

$$5x_{3A} + 4x_{3B} + 3x_{3C} \leq 900$$

เงื่อนไข จำกัดด้วยอุปกรณ์ในการปลูกแต่ละชนิด

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 700$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 800$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \leq 300$$

ตัวอย่าง 2.3 ส่วนผสมของอาหาร

โรงพยาบาลต้องการจะผสมสูตรอาหารปริมาณ 100 ปอนด์ สำหรับผู้ที่จะทำการลดความอ้วนให้มีราคาถูกที่สุด โดยกำหนดว่าจะต้องมีธาตุอาหารดังนี้

1. จะต้องมีแคลเซียม ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 0.8
   และไม่เกิน ร้อยละ 1.2
2. จะต้องมีโปรตีน ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 2.2
3. จะต้องมีกาก ไม่เกิน ร้อยละ 5

โดยส่วนผสมหลักก็คือ แคลเซียมคาร์โบเนต ข้าวโพด และถั่วเหลือง ซึ่งมีปริมาณธาตุอาหารและต้นทุนผลิตต่อปอนด์ ดังนี้

ส่วนผสม	สัดส่วนของส่วนผสมต่อปอนด์			ต้นทุนต่อปอนด์
	แคลเซียม	โปรตีน	กาก	
แคลเซียมคาร์โบเนต	0.380	0.00	0.00	0.0164
ข้าวโพด	0.001	0.09	0.02	0.0463
ถั่วเหลือง	0.002	0.50	0.08	0.1250

สามารถสร้างตัวแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

ให้ x_1 เป็นจำนวนแคลเซียมคาร์โบเนต เป็นปอนด์

x_2 เป็นจำนวน ข้าวโพด เป็นปอนด์

x_3 เป็นจำนวน ถั่วเหลือง เป็นปอนด์

ทำให้ z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ

$$z = 0.0164x_1 + 0.0463x_2 + 0.1250x_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับดังนี้

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \le 1.2$$

$$0.380x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \ge 0.8$$

$$0.09x_2 + 0.50x_3 \le 2.2$$

$$0.02x_2 + 0.08x_3 \le 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

ตัวอย่าง 2.4 ตัดชิ้นส่วนตามสั่งให้มีเศษน้อยที่สุด

โรงงานกระดาษได้รับใบสั่งซื้อกระดาษม้วน ซึ่งมีขนาดกว้างยาว ดังนี้

ใบสั่งซื้อที่	หน้ากว้าง (ฟุต)	ความยาว (ฟุต)
1	5	10000
2	7	30000
3	9	20000

ข้อจำกัดของโรงงานกระดาษก็คือทางโรงงานมีกระดาษม้วนขนาดมาตรฐานอยู่ 2 ขนาด ก็คือ หน้ากว้าง 10 ฟุต และ 20 ฟุต โดยมีความยาวไม่จำกัด บริษัทจะตัดกระดาษตามใบสั่งซื้ออย่างไรจึงจะให้เหลือเศษน้อยที่สุด

สามารถพิจารณาสร้างตัวแบบเชิงเส้นได้ดังนี้

ให้ x_{ij} เป็นความยาวของม้วนที่ i และตัดแบบที่ j

i = 1 สำหรับกระดาษม้วนขนาดมาตรฐานหน้ากว้าง 10 ฟุต

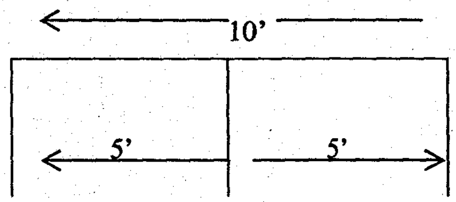
i = 2 สำหรับกระดาษม้วนขนาดมาตรฐานหน้ากว้าง 20 ฟุต

j เป็นแบบของการตัดกระดาษมาตรฐานซึ่งในการตัดกระดาษม้วนขนาดมาตรฐาน หน้ากว้าง 10 ฟุต ต้องได้ 3 แบบ และการตัดกระดาษม้วนขนาดมาตรฐาน หน้ากว้าง 20 ฟุต ตัดได้ 6 แบบ ซึ่งสามารถตัดได้ดังนี้

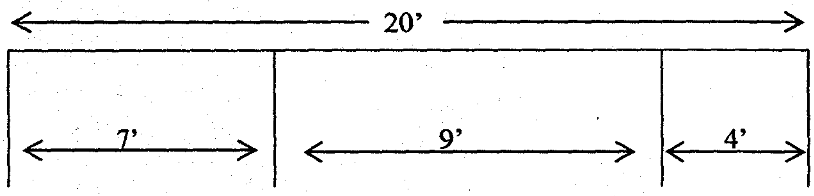
ขนาดตามใบสั่ง	ตัดม้วนที่ 1 (10’) (ชิ้น)			ตัดม้วนที่ 2 (20’) (ชิ้น)						ต้องการทั้งหมด
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
5	2	0	0	4	2	2	1	0	0	10000
7	0	1	0	0	1	0	2	1	0	30000
9	0	0	1	0	0	1	0	1	2	20000
เหลือเศษ (ฟุต)	0	3	1	0	3	1	1	4	2	

ลองพิจารณาดูในกรณีเลือกตัดกระดาษแบบ x_{11}และ x_{25} นั่นคือ ม้วนกระดาษมาตรฐานขนาดกว้าง 10 ฟุต จะตัดเป็น 2 ส่วนๆ ละ 5 ฟุต โดยตัดยาว 5000 ฟุต ก็จะได้กระดาษหน้ากว้าง 5 ฟุต ยาว 10000 ฟุต ตามที่ใบสั่งซื้อที่ 1 ต้องการ สำหรับม้วนกระดาษมาตรฐานขนาดกว้าง 20 ฟุต จะตัดออกเป็นกระดาษหน้ากว้าง 7 ฟุต และ 9 ฟุต ซึ่งเศษที่เหลือตามหน้ากว้างเท่ากับ 4 ฟุต ดังนั้นถ้ากระดาษยาว 30000 ฟุต ก็จะได้กระดาษหน้ากว้าง 7 ฟุต ยาว 30000 ฟุต และหน้ากว้าง 7 ฟุต ยาว 10000 ฟุต เพราะตามใบสั่งที่ 3 ต้องการกระดาษหน้ากว้าง 9 ฟุต เพียง 20000 ฟุต พิจารณาได้จากรูป

x_{11}



x_{25}



จะเห็นได้ว่าถ้าเลือกตัดแบบ x_{11} และ x_{25} จะมีกระดาษเหลือเศษ

$$= 4'(30000) + 9'(10000) = 210000 \text{ ฟุต}^2$$

ดังนั้นการตั้งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ก็จะต้องมีตัวแปรที่เป็นเศษเหลือที่เกิดจากการตัดหน้ากว้างตามใบสั่งซื้อด้วย โดยกำหนดให้

K_1, K_2 และ K_3 เป็นความยาวของส่วนที่เหลือของม้วนโดยมีขนาดหน้ากว้างตามใบสั่งที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

ทำให้ z มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ

$$Z = 3x_{12} + x_{13} + 3x_{22} + x_{23} + x_{24} + 4x_{25} + 2x_{26} + 5k_1 + 7k_2 + 9k_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับดังนี้

$$2x_{11} + 4x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23} + x_{24} - K_1 = 10{,}000$$

$$x_{12} + x_{22} + 2x_{24} + x_{25} - K_2 = 30{,}000$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{25} + 2x_{26} - K_3 = 20{,}000$$

$x_{ij} \geq 0$ ทุกค่าของ i และ j

$k_1, k_2, k_3 \geq 0$

จะเห็นได้ว่าโปรกรมเชิงเส้นจะเป็นชนิดที่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต้องการให้เป็นค่ามากที่สุด หรือน้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขบังคับจะเป็นชนิด ($\leq$) หรือ (=) หรือ ($\geq$) ก็ได้ และตัวแปรจะไม่เป็นเลขจำนวนลบ โดยพอจะสรุปเป็นรูปแบบทั่วไปของตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้น ได้ดังนี้

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ (\leq, = \text{ หรือ } \geq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ (\leq, = \text{ หรือ } \geq)\ b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ (\leq, = \text{ หรือ } \geq)\ b_m$$
$$x_1, x_2, \dots x_n \geq 0$$

เมื่อ c_j, b_i และ a_{ij} ($i = 1, 2, \dots m; j = 1, 2, \dots n$)
เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากการกำหนดโดยปัญหาแต่ละปัญหา
และ x_j เป็นตัวแปรในการตัดสินใจ ส่วนเครื่องหมาย ($\leq, =$ หรือ $\geq$) ใช้สำหรับแต่ละเงื่อนไขบังคับ

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่เป็นค่าต่ำสุด อาจจะเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ค่าสูงสุดได้ โดยค่าต่ำสุด z จะเท่ากับ ค่าสูงสุด -z

เช่น ค่าต่ำสุด $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

ก็คือ ค่าสูงสุด $g = -z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots -c_nx_n$

เนื่องจาก ตัวแบบของโปรแกรมเชิงเส้นมีหลายแบบ เพื่อช่วยในการเข้าปัญหา จึงกำหนดรูปแบบขึ้นมา 2 รูปแบบ คือ

1. รูปแบบคาโนนิคอล (The Canonical Form)

คุณสมบัติของรูปแบบนี้ก็คือ

1.1 ตัวแปรในการตัดสินใจทั้งหมดต้องไม่เป็นค่าลบ

1.2 เงื่อนไขบังคับทุกอันจะต้องอยู่ในรูปของชนิด $\leq$

1.3 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะต้องเป็นชนิดที่ทำให้ค่าสูงสุด

พอสรุปได้ดังนี้

ทำให้เป็นค่าสูงสุด $z = \sum_{j=1}^{n} c_j \ x_j$

เงื่อนไขบังคับ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i , i = 1, 2, \ldots m$

$x_j \geq 0 , j = 1, 2, \ldots n$

2. **รูปแบบมาตรฐาน (The Standard Form)**

คุณสมบัติของรูปแบบนี้ก็คือ

2.1 เงื่อนไขบังคับทุกอันต้องเป็นสมการ

2.2 ธาตุมูล (element) ทางขวามือของแต่ละสมการเงื่อนไขบังคับจะต้องไม่เป็นค่าลบ

2.3 ตัวแปรทุกตัวจะต้องไม่เป็นค่าลบ

2.4 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์จะเป็นชนิดที่ให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้

ดังนั้น ในกรณีที่เงื่อนไขบังคับเป็น $\geq$ เราก็ต้องลบด้วยตัวแปรส่วนเหลือ (Surplus variable)

ในกรณีเงื่อนไขบังคับเป็น $\leq$ เราก็ต้องบวกด้วยตัวแปรส่วนเกิน (Slack variable)

เช่น

เงื่อนไขบังคับ $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b , b \geq 0$

โดยที่ $R_1 \geq 0$

เปลี่ยนเป็น $a_1 x_1 + a_2 x_2 - R_1 = b$

เงื่อนไขบังคับ $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq q , q \geq 0$

โดยที่ $S_1 \geq 0$

เปลี่ยนเป็น $p_1 x_1 + p_2 x_2 + S_1 = q$

พอสรุปได้ดังนี้

ทำให้เป็นค่าสูงสุด $z = \sum_{j=1}^{m} c_j \ x_j$

เงื่อนไขบังคับ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i ; b_i \geq 0 ; i = 1, 2, \ldots m$

$x_j \geq 0 , j = 1, 2, \ldots n$

ทำเป็นรูปแบบมาตรฐาน

ทำให้เป็นค่าสูงสุด $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

เงื่อนไขบังคับ $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j + S_i = b_i , i = 1, 2, \ldots m$$

$$x_j \geq 0 , j = 1, 2, \ldots n$$

$$S_i \geq 0 , i = 1, 2, \ldots m$$

การแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น

1. การหาคำตอบโดยวิธีกราฟ

เป็นวิธีการหาคำตอบที่สามารถอธิบายปัญหาที่เกิดขึ้นได้อย่างชัดเจนโดยวิธีง่ายๆ สามารถมองเห็นเงื่อนไขบังคับและจุดที่ให้คำตอบที่ดีที่สุดได้จากกราฟ แต่มีข้อจำกัดอยู่ที่เราไม่สามารถวาดกราฟในมิติที่มากกว่า 3 มิติได้ นั่นก็แสดงว่าถ้ามีตัวแปรของโปรแกรมเชิงเส้นมากกว่า 3 ตัวแปร ก็ไม่สามารถที่จะหาคำตอบโดยวิธีกราฟได้ อย่างไรก็ตามการหาคำตอบโดยวิธีกราฟนิยมใช้ในกรณีที่ตัวแปรของโปรแกรมเชิงเส้นมี 2 ตัวแปรเท่านั้น เพราะสามารถมองพื้นที่ที่สามารถเป็นคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นได้ง่าย

ตัวอย่าง จงทำให้ สมการวัตถุประสงค์ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = x_1 + 1.5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

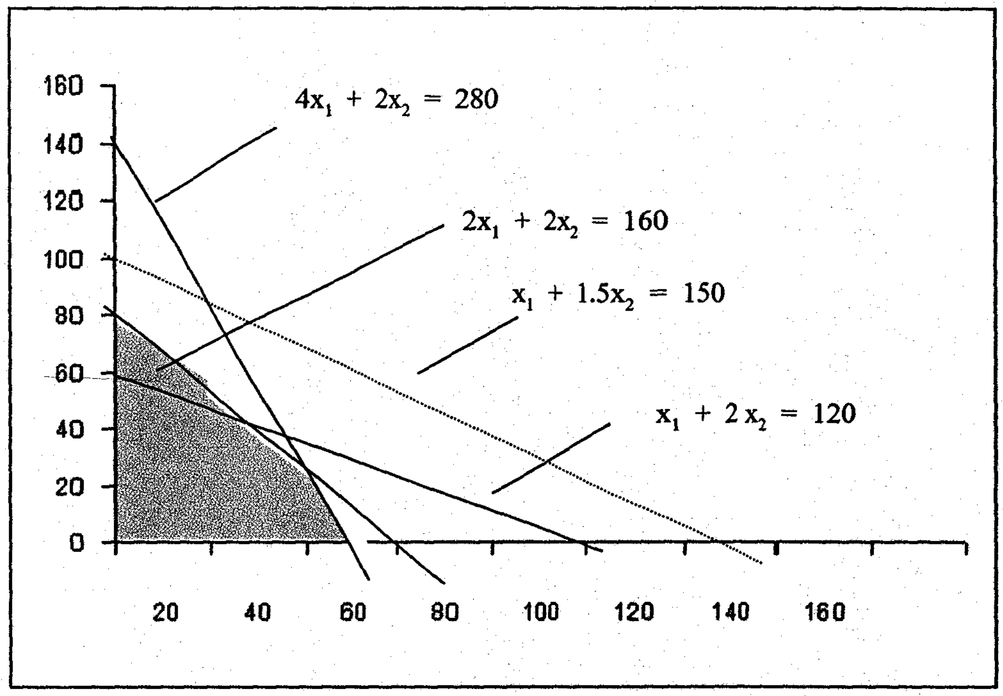
$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

มีขั้นตอนในการหาคำตอบดังนี้

1. นำเงื่อนไขบังคับทั้งหมดมาเขียนลงในกระดาษกราฟ
2. พิจารณาพื้นที่ที่สามารถเป็นคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นได้นั้นก็คือพื้นที่ที่อยู่ภายใต้เงื่อนไขบังคับทั้งหมด และเป็นพื้นที่ ตัวแปรไม่เป็นลบ
3. สมมติคำตอบที่เป็นไปได้ของสมการวัตถุประสงค์ขึ้นมา 1 ค่า แล้วเขียนกราฟสมการเส้นตรงจากสมการวัตถุประสงค์ที่กำหนด
4. เลื่อนสมการวัตถุประสงค์ออกไปเพื่อคำตอบที่ดีกว่าเดิม โดยให้สมการวัตถุประสงค์ที่เลื่อนออกไปขนานกับสมการวัตถุประสงค์เดิม จนกระทั่งถึงจุดซึ่งอยู่ในพื้นที่ที่ทำให้คำตอบของสมการวัตถุประสงค์อยู่ในเงื่อนไขบังคับทั้งหมด จุดสุดท้ายจุดนี้จะเป็นจุดซึ่งทำให้คำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นนี้มีค่าดีที่สุด

จากตัวอย่างสามารถทำได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.5 ทำให้สมการวัตถุประสงค์ Z มีค่าต่ำสุด เมื่อ $Z = 4x_1 + x_2$

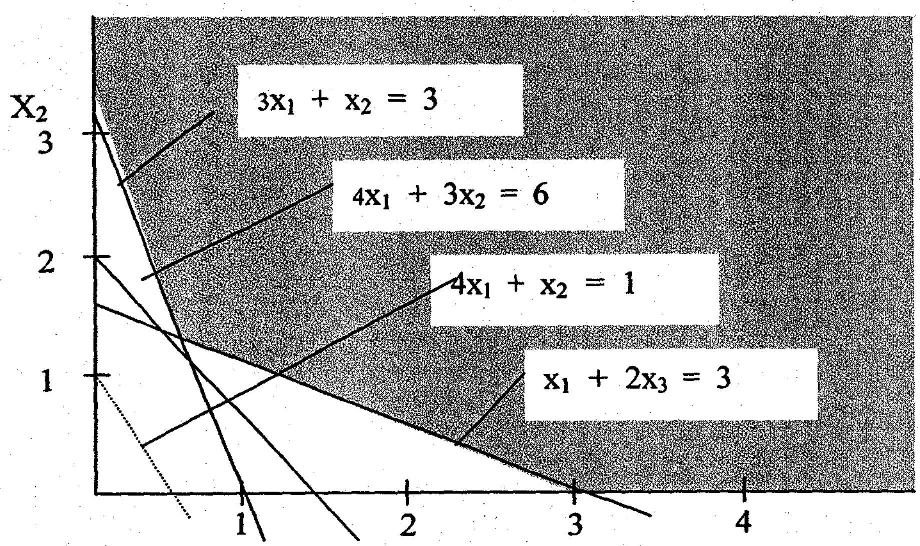
โดยมีเงื่อนไขบังคับ $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

สามารถหาคำตอบในกรณีค่าต่ำสุด ได้ทำนองเดียวกับ กรณีค่ามากสุดต่างกัน ตรงที่การเลื่อนสมการวัตถุประสงค์ลงมาจนกระทั่งถึงจุดสุดท้ายที่ทำให้คำตอบเป็นไปได้ จุดนี้จะทำให้คำตอบของโปรแกรมเชิงเส้นมีค่าดีที่สุด



2. การหาคำตอบโดยวิธีพีชคณิต

ในขั้นแรกจะทำโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานเสียก่อน

ตัวอย่าง 2.6 จงทำให้สมการวัตถุประสงค์ Z มีค่าสูงสุดเป็น $Z = x_1 + 1.5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 160 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 280 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้

$$Z = x_1 + 1.5x_2$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 160 \\ x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \qquad &= 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \qquad + s_3 &= 280 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

เรานำสมการเงื่อนไขมาพิจารณาจะเห็นว่ามี 3 ประการ และตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามี 5 ตัว ดังนั้นเราสามารถที่จะหาคำตอบได้ $5_{C3} = 10$ หนทาง โดยในการแก้สมการแต่ละครั้งจะให้ตัวแปรเป็น ทีละ ตัว จนได้คำตอบออกมาทั้ง 10 ชุด แล้วจึงนำคำตอบที่ได้ไปแทนในสมการวัตถุประสงค์ เพื่อดูว่า คำตอบไหนได้ค่าของสมการวัตถุประสงค์มากที่สุด

คำตอบที่ 1 ให้ $x_1 = x_2 = 0$

จะได้ $s_1 = 160$

$s_2 = 120$

$s_3 = 280$

ค่า $Z = 0$ เพราะไม่ได้ผลิตเลย

คำตอบที่ 2 ให้ $x_1 = s_2 = 0$

จะได้ $x_2 = 60$

$s_1 = 40$

$s_3 = 160$

ค่า $Z = 1(0) + 1.5(60) = 90$

คำตอบที่ 3 ให้ $s_1 = s_2 = 0$

จะได้ $x_1 = 40$

$x_2 = 40$

$s_3 = 40$

ค่า $Z = 1(40) + 1.5(40) = 100$

คำตอบที่ 4 ให้ $s_3 = s_1 = 0$

จะได้ $x_1 = 60$

$x_2 = 20$

$s_2 = 20$

ค่า $Z = 1(60) + 1.5(20) = 90$

คำตอบที่ 5 ให้ $x_2 = s_3 = 0$

จะได้ $x_1 = 70$

$s_1 = 20$

$s_2 = 50$

ค่า $Z = 1(70) + 1.5(0) = 70$

คำตอบที่ 6 ให้ $s_2 = s_3 = 0$

จะได้ $x_1 = 53.33$

$x_2 = 33.33$

$s_1 = -13.32$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

คำตอบที่ 7 ให้ $x_1 = s_1 = 0$

จะได้ $x_2 = 80$

$s_2 = -40$

$s_3 = 120$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

คำตอบที่ 8 ให้ $x_1 = s_3 = 0$

จะได้ $x_2 = 140$

$s_1 = -120$

$s_2 = -160$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

คำตอบที่ 9 ให้ $x_2 = s_1 = 0$

จะได้ $x_1 = 80$

$s_2 = 40$

$s_3 = -40$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

คำตอบที่ 10 ให้ $x_2 = s_2 = 0$

จะได้ $x_1 = 120$

$s_1 = -80$

$s_3 = -200$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

สรุปได้ว่าคำตอบนี้มีที่ถูกก็คือ $x_1 = 40, x_2 = 40$
โดยจะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุดเท่ากับ 100 ตอบ

ตัวอย่าง 2.7 ทำให้สมการวัตถุประสงค์ Z มีค่าต่ำสุดเมื่อ $Z = 4x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานจะได้ $Z = 4x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 - R_1 = 6$

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, R_1 \geq 0, s_1 \geq 0$

นำสมการเงื่อนไขมาพิจารณาจะเห็นว่ามี 3 สมการ และตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 4 ตัว ดังนั้น เราสามารถที่จะหาคำตอบได้ ${}^4c_3 = 4$ หนทาง

ในการแก้สมการแต่ละครั้งจะให้ตัวแปรเป็น 0 ทีละ 1 ตัว จนได้คำตอบออกมาทั้ง 4 ชุด แล้วจึงนำคำตอบที่ได้ไปแทนสมการวัตถุประสงค์เพื่อดูว่าคำตอบไหนให้ค่าของสมการวัตถุประสงค์น้อยที่สุด

<u>**คำตอบที่ 1**</u> ให้ $x_1 = 0$

จะได้ $x_2 = 40$

$R_1 = 3$

$s_1 = -3$

คำตอบนี้มีตัวแปรเป็นลบ เพราะฉะนั้นคำตอบนี้ใช้ไม่ได้

<u>**คำตอบที่ 2**</u> ให้ $x_2 = 0$

จะได้ $x_1 = 3$

$R_1 = 6$

$s_1 = 0$

ค่า $Z = 12$

<u>คำตอบที่ 3</u> ให้ $R_1 = 0$

จะได้ $x_1 = \frac{3}{5}$

$x_2 = \frac{6}{5}$

$s_1 = 0$

ค่า $Z = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$

<u>คำตอบที่ 4</u> ให้ $s_1 = 0$

จะได้ $x_1 = \frac{9}{5}$

$x_2 = \frac{3}{5}$

$R_1 = 3$

ค่า $Z = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$

สรุปได้ว่าคำตอบที่ดีที่สุดก็คือ $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = 1\frac{6}{5}$

โดยจะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด เท่ากับ $3\frac{3}{5}$ หรือ $3 + \frac{3}{5}$ <u>ตอบ</u>

<u>3. การหาคำตอบโดยวิธีซิมเพล็ก</u> (Simplex Method)

เป็นวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้หลักของพีชคณิตเมตริกซ์ เข้ามาช่วยโดยใช้หลักการหาเมตริกซ์ผกผัน (Invert Matrix) ด้วยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงธาตุมูล (elementary row operation) ซึ่งมีกระบวนการหาคำตอบของโปรแกรมเชิงเส้น ดังนี้

1. ทำโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน
2. ทำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้อย่ในรูปของ

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j = 0$$

3. นำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งหมดมาเขียนอยู่ในรูปของตารางซิมเพล็ก ดังนี้

		ตัวแปรนำเข้า	ตัวแปรมูลค่าเพิ่ม	ตัวคงค่าทางขวามือของสมการ
	z	$x_1 \quad x_2 \ldots x_n$	$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \ldots 0$	
z	1	$c_1 \quad c_2 \ldots c_n$	0 0 0...0	0
S_1	0	$a_{11} \quad a_{12} \ldots a_{1n}$	1 0 0...0	b_1
S_2	0	$A_{21} \quad a_{22} \ldots_{2n}$	0 0 1...0	b_2
S_3	0	$A_{31} \quad a_{32} \ldots a_{3n}$	0 0 0...0	b_3
S_m		$a_{m1} \; a_{m2} \ldots a_{mn}$	0 0 0...1	b_m

4. พิจารณาตัวแปรนำเข้า (non-basic variables) ว่าตัวใดจะเป็นสดมภ์หลัก โดยดูจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนำเข้าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่มีค่าลบมากที่สุด (ในกรณีที่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต้องการทำให้มีค่าสูงสุด) หรือที่มีค่าบวกมากที่สุด (ในกรณีที่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต้องการทำให้มีค่าต่ำที่สุด)

5. พิจารณาว่าตัวแปรมูลฐานใด จะต้องออกไปจากแนวตั้งของเงื่อนไขบังคับ เพื่อให้ตัวแปรนำเข้าที่เหมาะสมในข้อ 4 แทนที่ โดยพิจารณาจากตัวคงค่าทางซ้ายมือของสมการเงื่อนไขบังคับ ว่าอัตราส่วนระหว่างตัวคงค่ากับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนำเข้าที่เหมาะสมในข้อ 4 ในแต่ละเงื่อนไขบังคับจำนวนใดมีค่าน้อยที่สุดที่ไม่เป็นค่าลบ

6. ตัวแปรมูลฐานที่อยู่ในแถวเดียวกับอัตราส่วนที่น้อยที่สุดจากข้อ 5 เรียกว่า แถวหลัก (Pivot row) ค่าสัมประสิทธิ์ของสมการเงื่อนไขบังคับที่ตรงกับ สดมภ์หลัก และแถวหลัก เรียกว่า จุดหลัก (Pivot Point)

7. ทำให้จุดหลักเป็น 1 โดยหารด้วยค่าของตัวมันเองตลอดแถว และเปลี่ยนตัวแปรมูลฐานที่ตรงกันแถวหลักเป็นตัวแปรนำเข้าที่ตรงกับสดมภ์หลัก

8. ทำค่าสัมประสิทธิ์ของสมการวัตถุประสงค์และสมการเงื่อนไขบังคับที่ตรงกับสดมภ์หลักให้เป็นศูนย์ โดยการดำเนินการเปลี่ยนแถวเชิงมูลฐาน

9. จะได้ผลลัพธ์ในรอบที่ 1 แล้วพิจารณาอย่างเดียวกับข้อที่ 4 ใหม่จนกระทั่งได้คำตอบที่เหมาะสม หรือไม่สามารถที่จะพิจารณาตัวแปรนำเข้าไปแทนที่ตัวแปรมูลฐานได้อีก

ตัวอย่าง 2.8 จงทำให้สมการวัตถุประสงค์ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = x_1 + 1.5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 2x_2 \leq 160$

$x_1 - 2x_2 \leq 120$

$4x_1 + 2x_{2x} \leq 280$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

วิธีทำ (1) ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้

ทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = x_1 + 1.5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 2x_2 + S_1 = 160$

$x_1 - 2x_2 + S_2 = 120$

$4x_1 + 2x_{2x} + S_3 = 280$

$x_1, x_2, S_1, S_2, S_{3x} \geq 0$

(2) ทำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้อยู่ในรูปของ

$z - x_1 - 1.5\,x_2 = 0$

(3) นำสมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งหมดมาเขียนอยู่ในรูปแบบของตาราซิมเพล็ก

		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
	A	1	-1	-1.5	0	0	0	0	
	S_1	0	2	2	1	0	0	160	80
	S_2	0	1	2	0	1	0	120	60
	S_3	0	4	2	0	0	1	280	140
รอบที่ 1	Z	1	-0.25	0	0	0.75	0	90	
	S_1	0	1	0	1	-1	0	40	40
	X_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0.5	0	60	120
	S_3	0	3	0	0	-1	1	160	53.33
รอบที่ 2	Z	1	0	0	0.25	0.5	0	100	
	X_1	0	1	0	1	-1	0	40	
	X_2	0	0	1	-0.5	1	0	40	
	S_3	0	0	0	-3	2	1	40	

จากตารางซิมเพล็กรอบที่ 2 จะได้ว่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่มีค่าสูงสุด เมื่อ $x_1 = 40$

$x_2 = 40$

จะได้ $z = 40 + 1.5(40)$

$= 40 + 60$

$= 100$ ตอบ

ตัวอย่าง 2.9 จงทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ z มีค่าต่ำสุดเมื่อ $z = x_1 - 3x_2 + x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 4x_2 \leq 7$

$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 12$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(1) ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานจะได้

ทำให้ z มีค่าต่ำสุดเมื่อ $z = x_1 - 3x_2 + x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 4x_2 + s_1 = 7$

$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_2 = 12$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_3 = 10$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

(2) ทำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ให้อยู่ในรูปของ

$z - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

(3) นำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรทั้งหมดมาเขียนอยู่ในรูปแบบตารางซิมเพล็ก

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
Z	1	-1	3	-3	0	0	0	0	
s_1	0	2	4	0	1	0	0	7	1.75
s_2	0	4	3	8	0	1	0	12	4
s_3	0	3	-1	2	0	0	1	0	-0
Z	1	-2.5	0	-1	-0.75	0	0	-5.25	
x_2	0	0.5	1	0	0.25	0	0	1.75	
s_2	0	2.5	0	8	-0.75	1	0	6.75	
s_3	0	3.5	0	2	0.25	0	1	1.75	

จากตารางซิมเพล็กรอบที่ 1 จะได้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่มีค่าต่ำสุด เมื่อ

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1.75$$

$$x_3 = 0$$

จะได้ $$z = 0 - 3(1.75) + 0$$

$$= -5.25$$

<u>ตอบ</u>

ข้อสังเกต (1) สำหรับตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าที่เราไม่เลือก แถวที่ 3 เป็นแถวหลักก็เพราะว่า ธาตุมูลในสดมภ์หลักในแถวที่ 3 มีค่าเป็นลบ ดังนั้น ในทางทฤษฎีเมื่ออัตราส่วนต่ำสุด ถึงแม้ ว่าจะได้ค่าเป็นศูนย์ ก็คือว่าเป็นค่าลบศูนย์ จึงไม่พิจารณาว่าค่านี้ เป็นอัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบฉะนั้นจึงเลือกแถวที่ 1 ซึ่งมีอัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบก็คือ 1.75

(2) ที่ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ออกมาเป็นลบ เป็นเพราะว่าการกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ และเงื่อนไขบังคับ เป็นการสมมุติขึ้นมาเพื่อพิจารณา วิธีหาคำตอบแบบ ซิมเพล็กเท่านั้น ไม่ได้เอามาจากตัวแบบโปรแกรมเชิงเส้นที่สร้างขึ้นเพื่อประยุกต์ใช้กับงานจริง

ในการแก้ปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์แบบทำให้มีค่าต่ำสุด อาจจะมีคำตอบโดยทำฟังก์ชันวัตถุประสงค์นี้ให้เป็นแบบทำให้มีค่าสูงสุดเสียก่อนก็ได้ โดยเอาลบหนึ่งคูณตลอดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ดังนี้

ทำให้ค่า z มีค่าต่ำสุด = ทำให้ (-z) มีค่ามากที่สุด

= ทำให้ $(-x_1 + 3x_2 - x_3)$ มีค่ามากที่สุด

จะได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ G มีค่าสูงสุด เมื่อ $G + x_1 - 3x_2 + x_2 = 0$ โดยมีเงื่อนไขบังคับเหมือนเดิม ซึ่งสามารถสร้างตารางซิมเพล็กได้ ดังนี้

	G	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
G	1	1	-3	1	0	0	0	0	
s_1	0	2	4	0	1	0	0	7	1.75
s_2	0	4	3	8	0	1	0	12	4
s_3	0	3	-1	2	0	0	1	0	-0
G	1	2.5	0	1	0.75	0	0	5.25	
x_2	0	0.5	1	0	0.25	0	0	1.75	
s_2	0	2.5	0	8	-0.75	1	0	6.75	
s_3	0	3.5	0	2	0.25	0	1	1.75	

ซึ่งจะได้คำตอบเหมือนกัน คือ เมื่อฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าสูงสุด

จะได้ $x_1 = 0$

$x_2 = 1.75$

$x_3 = 0$

โดย $G = 5.25$

นั่นก็คือ $-z = 5.25$

$z = -5.25$

<u>ตอบ</u>

ตัวแปรเทียม (Artificial Variables)

จะสังเกตได้ว่าในกรณีที่แก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยตารางซิมเพล็ก ตารางเริ่มแรกจะต้องมีตัวแปรมูลฐาน อยู่ในรูปแบบของ เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) ดังนั้น ในกรณีที่เงื่อนไขบังคับของตัวแปรเชิงเส้นอยู่ในรูปสมการ เราจะต้องเพิ่มตัวแปรเทียมเข้าไป และในกรณีที่ เงื่อนไขบังคับ ของตัวแปรเชิงเส้น อยู่ในรูปอสมการ ที่มีเครื่องหมาย ≥ หลังจากลบด้วยตัวแปรส่วนเหลือเพื่อทำให้เป็นสมการ แล้วจะต้องเพิ่มตัวแปรเทียมเข้าไปอีก ทั้งนี้ ก็เพื่อให้ตารางซิมเพล็กเริ่มแรก มีตัวแปรมูลฐานอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์เอกลักษณ์ดังกล่าวข้างต้น

ตัวอย่าง เช่น ถ้าเงื่อนไขบังคับมีดังนี้

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

เราจะต้องเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$3x_1+x_2+A_1=3$$
$$4x_1+x_2-R_1+A_2=6$$
$$x_1+2x_2+S_1=3$$

โดยที่ A_1 ก็คือตัวแปรเทียมที่เพิ่มเข้าไปในเงื่อนไขบังคับที่ 1

R_1 ก็คือตัวแปรส่วนเหลือที่ลบนิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการ เพื่อเปลี่ยนเป็นสมการ

A_2 ก็คือตัวแปรเทียมที่เพิ่มเข้าไป ในเงื่อนไขบังคับที่ 2 หลังจากเปลี่ยนเป็นสมการ

S_1 ก็คือตัวแปรส่วนเกิน ที่ทำให้อสมการเป็นสมการ

ดังนั้น เราจะได้ตัวแปรมูลฐานคือ A_1, A_2 และ S_1 ที่ทำให้ตารางซิมเพล็กเริ่มแรกอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์เอกลักษณ์

ตัวแปรนำเข้า	ตัวแปรมูลฐาน	คำตอบ
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{vmatrix}$

วิธีการหาคำตอบในกรณีที่ตารางซิมเพล็กเริ่มต้นมีตัวแปรเทียม

1. **เทคนิคเอ็ม (M - Technique)**

ใช้ในกรณีที่มีตัวแปรเทียมเข้ามาเกี่ยวข้อง เราจะสมมุติค่า M เป็นค่ามากและมากกว่า 0 เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ ในกรณีที่ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ เป็นฟังก์ชั่นที่ทำให้ค่ามากที่สุด สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ จะเป็น –M นั่นหมายความว่าถ้าตัวแปรเทียมมีค่าเพียงเล็กน้อยก็จะทำให้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์มีค่าลดลงมาก ก็คือ ตัวแปรเทียมจะต้องเป็นค่าน้อยสุดแต่เป็นลบไม่ได้ ได้แก่ ศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับการสมมติตัวแปรเทียมตั้งแต่ต้น ในกรณีที่ฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันที่ทำให้มีค่าต่ำที่สุด สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมในฟังก์ชันวัตถุประ สงค์ จะเป็น +M นั่นหมายความว่า ถ้าตัวแปรเทียมมีค่าต่ำที่สุด สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมมีค่าเพียงเล็กน้อยก็จะทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์มีค่าเพิ่มขึ้นมาก ก็คือตัวแปรเทียมจะต้องมีค่าน้อยที่สุด แต่เป็นลบไม่ได้ ได้แก่ ศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับการสมมติตัวแปรเทียมตั้งแต่ต้น ตารางซิมเพล็กเริ่มแรกจะได้จากการทำตารางซิมเพล็กที่มีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมเป็นศูนย์จากนั้นก็สามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการซิมเพล็กปกติ

ตัวอย่าง 2.10 จะทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้

$$z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - MA_1 - MA_2$$
$$z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + MA_1 + MA_2 = 0$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 - R_1 + A_2 = 10$$

$$A_1 = 7 - x_1 - x_2 - x_3$$
$$A_2 = 10 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + R_1$$

แทนใน Z

$$Z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + M(7 - x_1 - x_2 - x_3) + M(10 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + R_1) = 0$$
$$Z - 2x_1 - Mx_1 - 2Mx_1 - 3x_2 - Mx_2 + 5Mx_2 + 5x_3 - Mx_3 - Mx_3 + MR_1 + 7M + 10M = 0$$
$$Z - 2x_1 - 3x_2 + 4Mx_2 + 5x_3 - 2Mx_3 + MR_1 + 17M = 0$$
$$Z - (3M + 2)x_1 - (3 - 4M)x_2 + (5 - 2M)x_3 + MR_1 + 17M = 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	A_1	A_2	คำตอบ	อัตราส่วนน้อยที่สุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-2	-3	5	0	M	M	0	
A_1	0	1	1	1	0	1	0	7	
A_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10	
z	1	(-3M-2)	(+4M-3)	(-2M-3)	+M	0	0	-17M	
A_1	0	1	1	1	0	1	0	7	7
A_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10	5
z	1	0	$(-\frac{7}{2}M - 8)$	$(-\frac{M}{2} + 6)$	$-\frac{M}{2} - 1$	0	$\frac{3}{2}M + 1$	$-2M + 10$	
A_1	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{4}{7}$
x_1	0	1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5	-
z	1	0	0	$\frac{50}{7}$	$\frac{1}{7}$	$M+\frac{16}{7}$	$M-\frac{1}{7}$	$\frac{102}{7}$	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	
x_1	0	1	0	$\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$+\frac{1}{7}$	$\frac{45}{7}$	

$\therefore$ จะได้คำตอบที่ทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์สูงสุด $= \frac{102}{7}$

โดยมี $x_1 = \frac{45}{7}$

$x_2 = \frac{4}{7}$

$x_3 = 0$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 2.11 จงทำให้มีค่าต่ำสุด เมื่อ $z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$$
$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปมาตรฐานจะได้

$$z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + MA_1 + MA_2$$
$$z - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - MA_1 - MA_2 = 0$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 5$$
$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - R_1 + A_2 = 15$$
$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_1 = 20$$

$A_1 = 5 - X_1 - X_2 - X_3$

$A_2 = 15 - X_1 - 5X_2 - 3X_3 + R_1$

แทนใน Z

$$Z - 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 - M(5 - X_1 - X_2 - X_3) - M(15 - X_1 - 5X_2 + 3X_3 + R_1) = 0$$

$$Z - 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 - 5M + MX_1 + MX_2 + MX_3 - 15M + MX_1 + 5MX_2 - 3MX_3 - MR_1 = 0$$

$$Z - 5X_1 + MX_1 + MX_1 + 6X_2 + MX_2 + 5MX_2 + 7X_3 + MX_3 - 3MX_3 - MR_1 - 5M - 15M = 0$$

$$Z - X_1(5 - 2M) + (6 + 6M)X_2 + (7 - 2M)X_3 - MR_1 - 20M = 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	A_1	A_2	S_1	คำตอบ	อัตราส่วนน้อยที่สุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-5	6	7	0	-M	-M	0	0	
A_1	0	1	1	1	0	1	0	0	5	
A_2	0	1	5	-3	-1	0	1	0	15	
S_1	0	5	-6	10	0	0	0	1	20	
z	1	2M-5	6M+6	-2M+7	-M	0	0	0	20M	
A_1	0	1	1	1	0	1	0	0	5	5
A_2	0	1	5	-3	-1	0	1	0	15	3
S_1	0	5	-6	10	0	0	0	1	20	$-\frac{20}{6}$

z	1	$(4\frac{4}{5}M+\frac{19}{5})$	0	$(\frac{8}{5}M+\frac{53}{5})$	$(\frac{M}{5}+\frac{6}{5})$	0	$-\frac{6}{5}M-\frac{6}{5}$	0	$2M-18$	
A_1	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	2	$\frac{5}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	3	-5
S_1	0	$\frac{31}{5}$	0	$\frac{32}{5}$	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	1	38	5.9
z	1	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-M-\frac{53}{5}$	$-M-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{125}{4}$	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{4}$	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{15}{4}$	
S_1	0	3	0	0	-2	-4	2	1	30	

$\therefore$ จะได้คำตอบ ที่ทำให้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่ำสุด $= -\frac{125}{4}$

โดยมี $x_1 = 0$

$x_2 = \frac{15}{4}$

$x_3 = \frac{5}{4}$

ส่วน 1.01 <u>ตอบ</u>

2. เทคนิคสองเฟส (Two Phase Technique)

ใช้ในกรณีที่ต้องการตรวจสอบในเฟสที่ 1 เสียก่อนว่าโปรแกรมเชิงเส้นที่สนใจจะหา คำตอบได้หรือไม่ ถ้าหาได้ก็จะได้ดำเนินการหาคำตอบในเฟสที่ 2 ต่อไป และเป็นการแก้ไข ข้อบกพร่องของเทคนิคเอ็ม ซึ่งอาจจะเกิดผิดพลาดขึ้นในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์เพราะว่าสัมประสิทธิ์ที่กำหนดใหม่ค่ามาก จึงแตกต่างกับสัมประสิทธิ์ของ x_j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์มาก ทำให้การเปรียบเทียบและการปัดเศษมีข้อผิดพลาด

มีวิธีดำเนินการหาคำตอบดังนี้

1. เฟสที่ 1

ทำเช่นเดียวกับเทคนิคเอ็ม แต่ในการที่จะเริ่มแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็ก เราจะเปลี่ยนฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันผลบวกของตัวแปรเทียม หลังจากที่หาคำตอบโดยวิธีซิมเพล็กจนได้คำตอบที่น้อย ที่สุดแล้ว ค่าของฟังก์ชันผลบวกของตัวแปรเทียมเท่ากับศูนย์ แสดงว่าปัญหานี้จะหาคำตอบได้โดยทำต่อในเฟสที่ 2

2. เฟสที่ 2

เมื่อคำตอบที่ดีที่สุดในเฟสที่ 1 เป็นศูนย์ เราก็จะเอาตารางซิมเพล็กสุดท้ายในเฟสที่ 1 มาเป็นตารางเริ่มต้นในเฟสที่ 2 โดยเอาฟังก์ชันวัตถุประสงค์เดิมมาแทนที่ฟังก์ชันผลบวกของตัวแปรเทียมและตัดสดมภ์ของตัวแปรเทียมทิ้งไป จากนั้นก็นำสัมประสิทธิ์ของ x_j ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้เป็นศูนย์แล้วจึงทำโดยวิธีซิมเพล็กปกติ จนกระทั่งได้คำตอบที่ดีที่สุด

ตัวอย่าง 2.12 จงทำให้ค่า z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 3x_1 + 5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 \le 4$$
$$x_2 \le 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$z = 3x_1 + 5x_2 - MA_1$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + S_1 = 4$$
$$x_2 + s_2 = 6$$
$$3x_1 + 2x_2 - R_1 + A_1 = 18$$

ฟังก์ชันผลบวกของตัวแปรเทียมก็คือ $A = A_1$

MIN $A = A_1$

จาก $A_1 = 18 - 3x_1 - 2x_2 + R_1$

$\therefore$ $A = 18 - 3x_1 - 2x_2 + R_1$

$A + 3x_1 + 2x_2 - R_1 = 18$

เฟสที่ 1

	A	x_1	x_2	R_1	S_1	S_2	A_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
A	1	0	0	0	0	0	-1	0	
S_1	0	1	0	0	1	0	0	4	
S_2	0	0	1	0	0	1	0	6	
A_1	0	3	2	-1	0	0	1	18	
A	1	3	2	-1	0	0	0	18	
S_1	0	1	0	0	1	0	0	4	4
S_2	0	0	1	0	0	1	0	6	-
A_1	0	3	2	-1	0	0	1	18	6
A	1	0	2	-1	-3	0	0	6	
X_1	0	1	0	0	1	0	0	4	-
S_2	0	0	1	0	0	1	0	6	6
A_1	0	0	2	-1	-3	0	0	6	3
A	1	0	0	0	0	0	0	0	
X_1	0	1	0	0	1	0	0	4	
s_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	3	
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	3	

ทำให้เราทราบว่าโปรแกรมเชิงเส้นนี้สามารถหาคำตอบได้

เฟสที่ 2

	z	x_1	x_2	R_1	S_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_1	0	1	0	0	1	0	4	
s_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	3	
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	3	
z	1	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	27	
x_1	0	1	0	0	1	0	4	-
s_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	3	6
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	3	-6
z	1	0	0	0	3	5	42	
X_1	0	1	0	0	1	0	4	
R_1	0	0	0	1	3	2	6	
x_2	0	0	1	0	0	1	6	

ฉะนั้นค่าฟังก์ชันมีค่าสูงสุด = 42

โดยมี $x_1 = 4$

$x_2 = 6$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 2.13 จงทำให้ค่า z มีค่าต่ำที่สุด เมื่อ $z = 5x_1 - 6x_1 - 7x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$$
$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + MA_1 + MA_2$$

โดยมีเงื่อนบังคับ

$$x_1 + 5x_2 - 3x_3 - R_1 + A_1 = 15$$
$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_1 = 20$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + A_2 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, S_1 \geq 0$$

ฟังชันผลบวกของตัวแปรเทียมก็คือ $A = A_1 + A_2$

จาก $A_1 = 15 - X_1 - 5X_2 + 3X_3 + R_1$

$A_2 = 5 - X_1 - X_2 - X_3$

$\therefore \quad A = 15 - X_1 - 5x_2 + 3x_3 + R_1 + 5 - X_1 - X_2 - X_3$

$A = -2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + R_1 + 20$

$A + 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - R_1 = 20$

เฟสที่ 1

	A	x_1	x_2	x_3	R_1	A_1	S_1	A_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
A	1	0	0	0	0	-1	0	-1	0	
A_1	0	1	5	-3	-1	1	0	0	15	
S_1	0	5	-6	10	0	0	1	0	20	
A_2	0	1	1	1	0	0	0	1	5	
A	1	0	0	-2	-1	0	0	0	20	
A_1	0	1	5	-3	-1	1	0	0	15	3
S_1	0	5	-6	10	0	0	1	0	20	-
A_2	0	1	1	1	0	0	0	1	5	5
A	1	$4/5$	0	$8/5$	$\frac{1}{5}$	$6/5$	0	0	2	
x_2	0	$\frac{1}{5}$	5	$-3/5$	-1/5	$1/5$	0	0	3	-
S_1	0	$31/5$	0	$32/5$	$-6/5$	$6/5$	1	0	38	$95/16$
x_3	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	2	$5/4$
A	1	0	0	0	0	1	0	-1	0	
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$3/8$	$15/4$	
S_1	0	3	0	0	-2	2	1	-4	30	
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	$5/4$	

ทำให้ทราบว่าโปรแกรมเชิงเส้นนี้ สามารถหาคำตอบได้

เฟสที่ 2

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	S_1	คำตอบ
z	1	-5	6	7	0	0	0
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
S_1	0	3	0	0	-2	1	30
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{4}$
z	1	$\frac{23}{2}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{125}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{15}{4}$
S_1	0	3	0	0	-2	1	30
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{5}{4}$

ฉะนั้น ค่าฟังก์ชันมีค่าต่ำสุด $= -\frac{125}{4}$

โดยมี $x_1 = 0$

$x_2 = \frac{15}{4}$

$x_3 = \frac{5}{4}$ <u>ตอบ</u>

$A_1 = 3 - 3x_1 - X_2$

$A_2 = 6 - 4x_1 - X_2 + R_1$

$A = 3 - 3x_1 - X_2 + 6 - 4x_1 - X_2 + R_1$

$= -7x_1 - 2x_2 + R_1 + 9$

$A + 7x_1 + 2x_2 - R_1 = 9$

ตัวอย่าง 2.14 จงทำให้ค่า Z มีค่าต่ำสุดเมื่อ $z = 4x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน จะได้

$$Z = 4x_1 - x_2 + MA_1 + MA_2$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + x_2 + A_1 = 3$$
$$x_1 - x_2 - R_1 + A_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 3$$
$$x_1, x_2, A_1, A_2, S_1 \geq 0$$

ฟังชันผลบวกของตัวแปรเทียมก็คือ $A = A_1 + A_2$

เฟสที่ 1

	A	X_1	X_2	R_3	A_1	A_2	S_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
A	1	0	0	0	-1	-1	0	0	
A_1	0	3	1	0	1	0	0	3	
A_2	0	4	1	-1	0	1	0	6	
S_1	0	1	2	0	0	0	1	3	
A	1	7	2	-1	0	0	0	9	
A_1	0	3	1	0	1	0	0	3	1
A_2	0	4	1	-1	0	1	0	6	$\frac{3}{2}$
S_1	0	1	2	0	0	0	1	3	3
A	1	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$	0	0	2	
X_2	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	
A_2	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	0	0	2	
S_2	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1	2	

จะเห็นว่าคำตอบที่น้อยที่สุดในเฟสที่ 1 ไม่เป็นศูนย์ แสดงว่า ปัญหาอันนี้หาคำตอบไม่ได้

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 2.15 จงทำให้ค่า Z มีค่าต่ำสุด เมื่อ $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 15$$

$$33x_1 - 10x_2 + 9x_3 \leq 33$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + MA_1$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + 10x_2 + 5x_3 + S_1 = 15$$

$$33x_1 - 10x_2 + 9x_3 + S_1 = 33$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - R_1 + A_1 = 4$$

ฟังชันผลบวกของตัวแปรเทียมก็คือ $A = A_1$

นั่นคือ $A - A_1 = 0$

$$A_1 = 4 - X_1 - 2x_2 - X_3 + R_1$$

$$A = 4 - X_1 - 2x_2 - X_3 + R_1$$

$$A - 4 + X_1 + 2x_2 + X_3 - R_1 = 0$$

$$A + X_1 + 2x_2 + X_3 - R_1 = 4$$

เฟสที่ 1

	A	X_1	X_2	X_3	R_1	S_1	S_2	A_1	คำตอบ
A	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
S_1	0	3	10	5	0	1	0	0	15
S_2	0	33	-10	9	0	0	1	0	33
A_1	0	1	2	1	-1	0	0	1	4
A	1	1	2	1	-1	0	0	0	4
S_1	0	3	10	5	0	1	0	0	15
S_2	0	33	-10	9	0	0	1	0	33
A_1	0	1	2	1	-1	0	0	1	4
A	1	$^2/_5$	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	0	1
X_2	0	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{3}{2}$
S_1	0	36	0	14	0	1	1	0	48
X_3	0	$\frac{2}{5}$	0	0	-1	$-\frac{1}{5}$	0	1	1
A	1	0	0	$-\frac{7}{45}$	-1	$\frac{19}{90}$	$\frac{1}{90}$	0	$\frac{7}{5}$
X_2	0	0	1	$\frac{23}{60}$	0	$\frac{11}{120}$	$\frac{1}{120}$	0	$\frac{11}{10}$
S_1	0	1	0	$\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{4}{3}$
X_3	0	0	0	$\frac{7}{45}$	-1	$\frac{19}{90}$	$\frac{1}{90}$	1	$\frac{7}{15}$

ฉะนั้นหาคำตอบไม่ได้เพราะคำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดในเฟสที่ 1 ไม่เป็นศูนย์

<u>ตอบ</u>

กรณีที่จะเกิดขึ้นในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็ก

1. ดีเจนเนอเรซี (Degeneracy)

เกิดขึ้นในกรณีแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็กในรอบต่อไป แล้วได้ค่าคำตอบที่เหมือนเดิมเป็นเพราะว่ากรณีที่ช่องคำตอบของตัวแปรหลัก หรือ ตัวแปรนำที่เข้ามาแทนที่ตัวแปรหลักในการนำซิมเพล็กรอบที่แล้วมามีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นแถวที่ตรงกับคำตอบที่เป็นศูนย์นี้จะเป็นแถวหลักเสมอ เพราะอัตราต่ำสุดที่ไม่เป็นลบก็คือศูนย์

การเกิดดีเจนเนอเรซี อาจจะเป็นแบบถาวร หรือแบบชั่วคราวก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับธาตุมูลซึ่งตรงกับสดมภ์หลักและแถวที่มีคำตอบเป็นศูนย์ว่า ธาตุมูลนั้นมีค่าเป็นลบ หรือเป็นบวก ถ้าธาตุมูลนั้นมีค่าเป็นบวกแสดงว่าปัญหานี้จะเกิดดีเจนเนอเรซีถาวร เพราะว่าแถวซึ่งตรงกับคำตอบที่เป็นศูนย์จะเป็นแถวหลักเสมอ ถ้าธาตุมูลนั้นมีค่าเป็นลบ แสดงว่าปัญหานี้จะเกิดดีเจนเนอเรซีชั่วคราว เพราะแถวหลักคืออัตราส่วนต่ำที่ไม่เป็นลบถัดไป ซึ่งจะไม่ใช่แถวซึ่งไม่ตรงกับคำตอบที่เป็นศูนย์

ข้อสังเกต จะสังเกตเห็นว่าในกรณีทำซิมเพล็กการพิจารณาอัตราส่วนต่ำสุด จะไม่พิจารณา ในกรณีที่ธาตุมูล ซึ่งตรงกับสดมภ์หลักเป็นลบ ในทำนองเดียวกันถ้าอัตราส่วนต่ำสุดเป็นศูนย์ แต่ว่าธาตุมูลซึ่งตรงกับสดมภ์หลักเป็นลบ ก็จะไม่พิจารณาแถวนี้เป็นแถวหลักด้วย แต่ในกรณีที่คำตอบเป็นลบและธาตุมูลนำไปหาอัตราส่วนต่ำสุดเป็นลบด้วย อัตราส่วนต่ำสุดที่ได้ก็จะเป็นบวก ซึ่งก็นำไปพิจารณาเปรียบเทียบเพื่อหาแถวหลักได้ตามปกติ

ก. กรณีดีเจนเนอเรซีถาวร

ตัวอย่าง 2.16 จงทำให้ค่า z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 3x_1 + 9x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1\ x_2 \geq 0$$

จะได้ตารางเริ่มต้น

		z	x_1	x_2	S_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
	z	1	-3	-9	0	0	0	
	S_1	0	1	4	1	0	8	2
	S_2	0	1	2	0	1	4	2
รอบที่ 1	z	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18	
รอบที่ 2	x_2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	2	8
	S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
	z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18	
	x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	
	x_1	0	1	0	-1	2	0	

จะเห็นว่าค่า z จะมีค่าสูงสุดเท่ากับ 18

โดยมี $x_1 = 0, \ x_2 = 2$

ตั้งแต่รอบที่ 1 เพราะเกิด ดีเจนเนอเรซีถาวร

<u>ตอบ</u>

หมายเหตุ ถ้าตรวจสอบโดยวิธีกราฟจะพบว่ามีเงื่อนไขบังคับ $x_1 + 2x_2 \le 4$ แล้วเงื่อนไขบังคับ $x_1 + 4x_2 \le 8$ ก็ไม่มีความหมายในการพิจารณาพื้นที่ที่เป็นคำตอบ

ข. กรณีดีเจนเนอเรซีชั่วคราว

ตัวอย่าง 2.16 จงทำให้ z มีค่าสูงสุดเมื่อ $z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 3 \\
4x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 &\le 5 \\
-3x_1 &\le 0 \\
x_1, x_2, x_3 &\le 0
\end{aligned}
$$

จะได้ตารางเริ่มต้น

	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-3	-1	-2	0	0	0	0	
S_1	0	4	1	2	1	0	0	3	$\frac{3}{4}$
S_2	0	4	$\frac{1}{2}$	-2	0	1	0	5	$\frac{5}{4}$
S_3	0	-3	0	0	0	0	1	0	-0
z	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{9}{4}$	
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
S_2	0	0	$-\frac{1}{2}$	-4	-1	1	0	2	-
S_3	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$
z	1	0	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	3	
x_1	0	1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	
S_2	0	0	$\frac{3}{2}$	0	1	1	$\frac{8}{3}$	8	
x_3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	

ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{3}{2}$ แล้วจะทำให้ z มีค่าสูงสุด = 3

จะเห็นว่าเกิด ดีเจนเนอเรซีชั่วคราวขึ้น ในตารางเริ่มต้น โดยธาตุมูลที่ตรงกับสดมภ์หลัก และคำตอบที่เป็นศูนย์ มีค่าเป็นลบ จึงไม่พิจารณาแถวนี้เป็นแถวหลัก เมื่ออัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ ปรากฏว่าได้แถว S_1 เป็นแถวหลัก และทำต่อไปก็หาค่าที่ดีขึ้นได้

<u>ตอบ</u>

2. คำตอบที่ไม่มีขอบเขต (Unbounded Solution)

เกิดขึ้นในกรณีแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็ก และได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว แต่ปรากฏว่า ยังหาคำตอบที่ดีกว่าที่หาได้ตามวิธีการของซิมเพล็กอีก นั่นคือ คำตอบที่หาได้เป็นคำตอบที่ไม่มีขอบเขต ซึ่งเป็นเพราะการกำหนดเงื่อนไขบังคับไม่ถูกต้อง อาจพิจารณาได้เป็น 2 กรณีคือ

ก . เงื่อนไขบังคับไม่มีขอบเขตและคำตอบก็ไม่มีขอบเขตด้วย

ตัวอย่าง 2.17 จงทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 2x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $x_1 - x_2 \leq 10$

$2x_1 - x_2 \leq 40$

$x_1, x_2 \geq 0$

ตารางเริ่มต้น

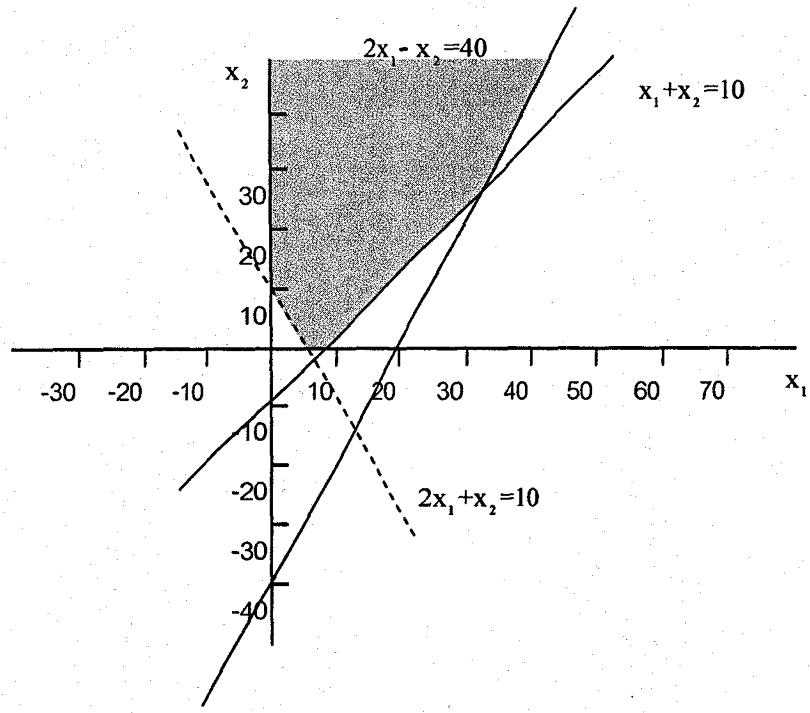
	z	x_1	x_2	S_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-2	-1	0	0	0	
S_1	0	1	-1	1	0	10	
S_2	0	2	-1	0	1	40	
z	1	0	-3	2	0	20	
x_1	0	1	-1	1	0	10	
S_2	0	0	1	1	1	20	
z	1	0	0	5	3	80	
x_1	0	1	0	2	1	30	
x_2	0	0	1	1	1	20	

จะได้คำตอบที่ทำให้ z มีค่าสูงสุด = 80

โดย $x_1=30, x_2=20$

ลองพิจารณาดู ถ้า $x_1= 40, x_2= 40$ จะได้ $z = 120$

ซึ่งมีค่ามากกว่าที่หาได้โดยวิธีการซิมเพล็ก และสามารถหาค่ามีมากกว่าได้อย่างไม่จำกัดจะเห็นได้ชัดถ้าพิจารณากราฟ



<u>ข้อสังเกต</u> ถ้าพิจารณาสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับตามสดมภ์จะพบว่าสดมภ์ x_2 จะมีธาตุมูลทุกตัวเป็นลบ ดังนั้นในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีซิมเพล็ก ให้พิจารณาธาตุมูลในทุกสดมภ์เสียก่อน ซึ่งบางครั้งอาจจะเกิดกรณีนี้ได้เมื่อทำให้รอบถัดไปดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.18 จงทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 8x_5$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_3 - 4x_4 + x_5 \le 10$$

$$-5x_1 + x_2 + 4x_4 + x_5 \le 5$$

$$-3x_1 + 6x_3 + x_4 + 9x_5 \le 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

จะได้ตารางเริ่มต้นดังนี้

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-1	-1	7	-5	8	0	0	0	0	
S_1	0	0	-1	1	-4	1	1	0	0	10	-
S_2	0	-5	-1	0	4	5	0	1	0	5	$\frac{5}{4}$
S_3	1	-3	-3	6	1	9	0	0	1	3	3
z	0	$-\frac{29}{4}$	$\frac{17}{4}$	7	0	$\frac{57}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{25}{4}$	
S_1	0	-5	1	1	0	6	1	1	0	15	
x_4	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	
S_3	0	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	6	0	$\frac{31}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	

พิจารณาดูจากสดมภ์หลัก จะเห็นว่า ธาตุมูลทุกตัวเป็นลบหมด และธาตุมูลในสดมภ์คำตอบเป็นบวกหมด ดังนั้น จึงไม่สามารถที่จะหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีซิมเพล็ก และบอกได้ว่าคำตอบสำหรับปัญหานี้ไม่มีขอบเขต

ตอบ

ข. เงื่อนไขบังคับไม่มีขอบเขตแต่คำตอบมีขอบเขต

ตัวอย่าง 2.19 จงทำให้ z มีค่าสูงสุดเมื่อ $z = 6x_1 - 2x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $2x_1 - x_2 \leq 2$

$x_1 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

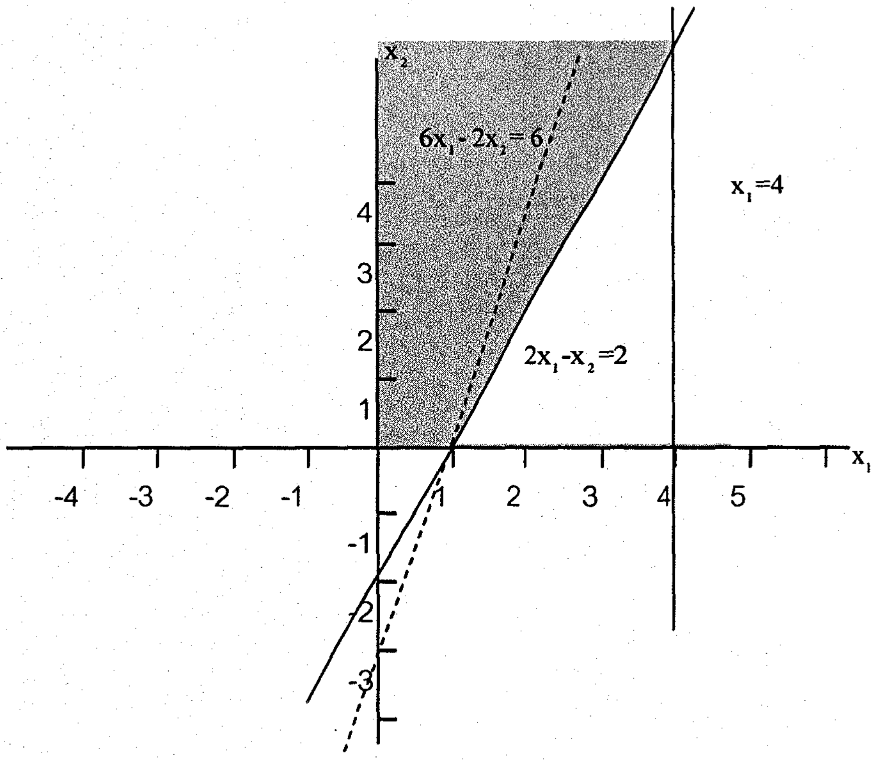
ตารางเริ่มต้น

	z	x_1	x_2	S_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-6	2	0	0	0	
S_1	0	2	-1	1	0	2	1
S_2	0	1	0	0	1	4	4
z	1	0	-1	3	0	6	
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	-
S_2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
z	1	0	0	2	2	12	
x_1	0	1	0	0	1	4	
x_2	0	0	1	-1	2	6	

จะได้คำตอบนี้ทำให้ z มีค่าสูงสุด = 12

โดย $x_1 = 4, x_2 = 6$ และจะหาคำตอบที่ดีกว่านี้ไม่ได้แล้ว

พิจารณาได้จากกราฟ



3. หาค่าตัวแปรนำเข้าได้หลายชุดที่ทำให้คำตอบดีที่สุดเหมือนกัน (Alternative Optimal Solution)

ในกรณีที่สมการวัตถุประสงค์ขนานกับสมการของเงื่อนไขบังคับ จะทำให้ได้คำตอบหลายชุดที่ให้คำตอบที่ดีที่สุดเหมือนกัน สามารถพิจารณาได้จากตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.20 จงทำให้ค่า มีค่าสูงสุดเมื่อ $z = 4x_1 + 14x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 + 7x_2 \le 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \le 21$$
$$x_1,\ \ x_2 \ge 0$$

ตารางเริ่มต้น

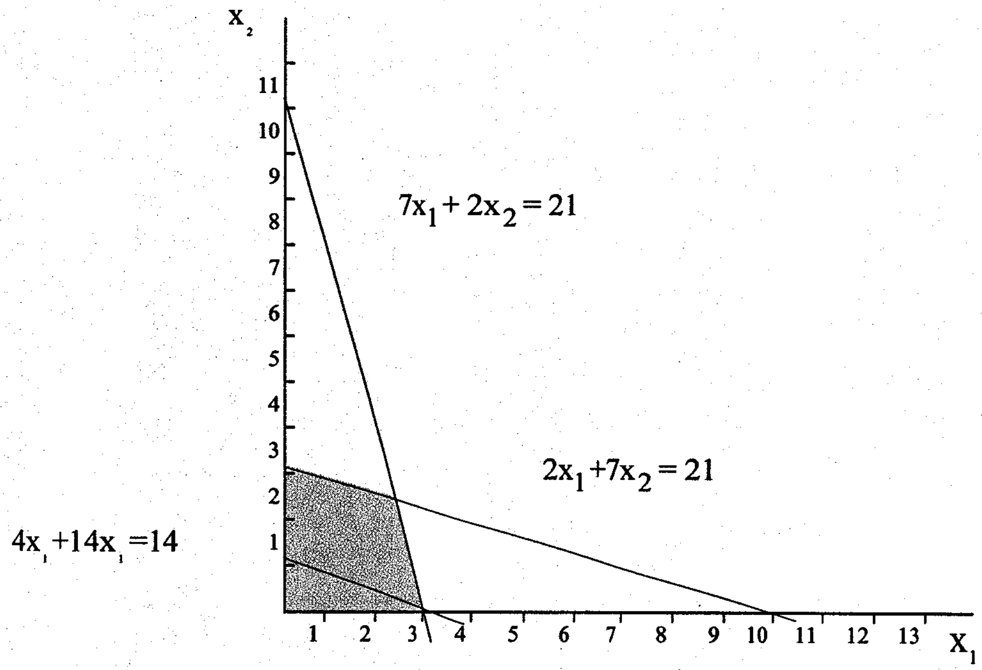
	z	x_1	x_2	S_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-4	-14	0	0	0	
S_1	0	2	7	1	0	21	
S_2	0	7	2	0	1	21	
z	1	0	0	2	0	42	
x_2	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	3	
S_2	0	$\frac{45}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	1	15	
z	1	0	0	2	0	42	
x_2	0	0	1	$\frac{7}{45}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{3}$	
x_1	0	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{7}{3}$	

พิจารณาจาก รอบที่ 1 ปรากฏว่าได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว แต่ถ้าลองนำตัวแปรเข้า x_1 เข้าไปอีกก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุดอีกชุดหนึ่ง

นั่นคือ เมื่อค่าสูงสุด $z = 42$ ค่า $x_4 = 0,\ x_2 = 3$

หรือ $x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = \frac{7}{3}$

ซึ่งจะเข้าใจได้ดีขึ้นเมื่อพิจารณาจากกราฟ



ตัวอย่าง 2.21 จงทำให้ z มีค่าสูงสุดเมื่อ $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 10$$
$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \ge 1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

ตารางเริ่มต้น

	z	x_1	x_2	x_3	R_1	S_1	S_2	A_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-1	-2	-3	0	0	0	M	0	
S_1	0	1	2	3	0	1	0	0	10	
S_2	0	1	1	0	0	0	1	0	5	
A_1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	
z	1	-M-1	-2	-3	M	0	0	0	-M	
S_1	0	1	2	3	0	0	1	0	10	10
S_2	0	1	1	0	0	1	0	0	5	5
A_1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	1

z	1	0	-2	-3	-1	0	0	M+1	1	
S_1	0	0	2	3	1	1	0	-1	9	3
S_2	0	0	1	0	1	0	1	-1	4	-
x_1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	-
z	1	0	0	0	0	1	0	M	10	
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{9}{12}$
S_2	0	0	1	0	1	0	1	-1	4	4
x_1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	-
z	1	0	0	0	0	1	0	M	10	
x_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
x_2	0	0	1	0	1	0	1	-1	4	
x_1	0	1	0	0	-1	0	0	1	1	

จะเห็นว่า เมื่อ z มีค่าสูงสุด = 10 โดย $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$

หรือ $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{3}$

<u>ตอบ</u>

4. กรณีที่ไม่มีคำตอบที่เป็นได้

บางครั้งในการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กไม่สามารถที่จะหาคำตอบได้ ซึ่งเกิดขึ้นได้เพราะเงื่อนไขที่กำหนดให้ ไม่ก่อให้เกิดพื้นที่ที่จะเป็นคำตอบได้

ตัวอย่าง 2.22 จงทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 3x_1 + 2x_2$

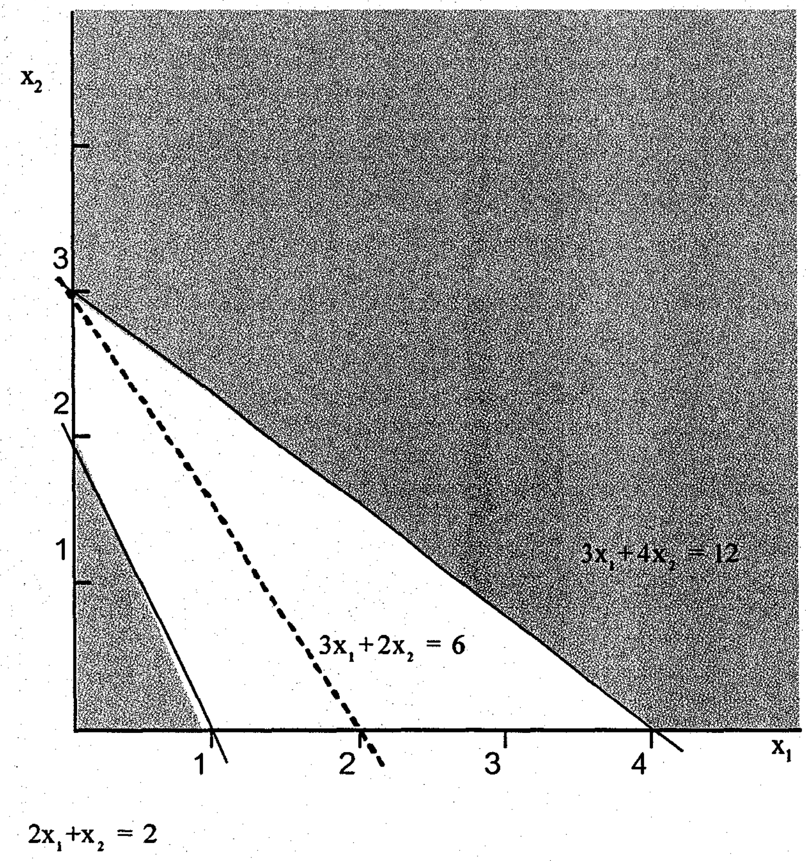
โดยเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 + x_2 \le 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12$$
$$x_j \ge 0$$

โดยเทคนิคเอ็ม สามารถได้ตารางซิมเพล็กเริ่มต้นดังนี้

	z	x_1	x_2	R_1	S_1	A_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	(-3-3M)	(-2-4M)	M	0	0	-12M	
S_1	0	2	1	0	1	0	2	
A_1	0	3	4	-1	0	1	12	
z	1	1+5M	0	M	2+4M	0	4M	
x_2	0	2	1	0	1	0	2	
A_1	0	-5	0	-1	-4	1	4	

จะเห็นได้ว่า ไม่สามารถที่จะทำต่อไปได้ เพราะสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนำเข้าไม่เป็นลบ และค่าคำตอบติดค่า M หรือพิจารณาจากรางสุดท้ายว่าตัวแปรเทียมมีค่าเป็นบวก ซึ่งสามารถพิจารณาให้เห็นได้ชัดโดยพิจารณาจากกราฟ



ปัญหาคู่เสมอกัน (Dual Problem)

จากการศึกษาของนักคณิตศาสตร์ว่า ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นทุกปัญหาสามารถสร้างปัญหาคู่เสมอกันขึ้นมาได้ ซึ่งจะสามารถช่วยลดความยุ่งยากในการหาคำตอบของปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นเดิมลงเพื่อที่จะให้เข้าใจง่ายขึ้น ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นเดิมที่จะนำมาสร้างปัญหาคู่เสมอกันเรียกว่า ปัญหาปฐมภูมิ (Primal Problem)

การเปลี่ยนปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นจากปัญหาปฐมภูมิเป็นปัญหาคู่เสมอกัน

1. ในกรณีที่ปัญหาปฐมภูมิอยู่ในรูปแบบคาโนนิคัล

ตัวอย่าง 2.23 เช่น จงทำให้ Z มีค่าสูงสุดเมื่อ $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \leq b_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \leq b_m$$

$$x_j \geq 0$$

จะได้ปัญหาคู่เสมอกันคือ

จงหาค่าให้ D มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} y_i \geq c_1$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2} y_i \geq c_z$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{in} y_i \geq c_n$$

$$y_i \geq 0$$

ซึ่งพอพิจารณาความสัมพันธ์ของปัญหาปฐมภูมิ และปัญหาคู่เสมอกันได้ดังนี้

1. ปัญหาคู่เสมอกัน มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ตรงกันข้ามกับปัญหาปฐมภูมิ
2. ปัญหาคู่เสมอกัน มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นผลบวกของตัวแปร y_i จำนวนเท่ากับจำนวนเงื่อนไขบังคับในปัญหาปฐมภูมิ โดยมีสัมประสิทธิ์ก็คือตัวคงค่าทางขวามือของเงื่อนไขบังคับแต่ละเงื่อนไขบังคับ
3. จำนวนเงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่เสมอกันจะเท่ากับจำนวนตัวแปร x_j ในปัญหาปฐมภูมิ โดยแต่ละเงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่เสมอกัน ก็คือ ผลบวกของตัวแปร y_i ที่มีสัมประสิทธิ์ คือ สัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_j ในทุกเงื่อนไขบังคับ ดังนี้

   เงื่อนไขบังคับที่ 1 ของปัญหาคู่เสมอกัน ก็คือ ผลบวกของตัวแปร y_i ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_j ในทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหาปฐมภูมิ

   เงื่อนไขบังคับที่ 2 ในทุกเงื่อนไขบังคับของปัญหาปฐมภูมิ เงื่อนไขบังคับอื่น ๆ ก็ทำนองเดียวกัน
4. เครื่องหมายของสมการในเงื่อนไขบังคับของปัญหาปฐมภูมิจะตรงกันข้ามกับเงื่อนไขบังคับของปัญหาคู่เสมอกัน

ตัวอย่าง 2.24 เช่น **จงทำให้ Z มีค่าต่ำสุด เมื่อ** $z = 5x_1 + 6x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 9x_2 &\le 60 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 45 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 20 \\ x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

จะได้ปัญหาคู่เสมอกันคือ

ตัวอย่าง 2.25 เช่น **จงทำให้ค่า Z มีค่าต่ำสุด เมื่อ** $D = 60y_1+45y_2+20y_3+30y_4$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} y_1+2y_2+5y_3 &\ge 5 \\ 9y_1+3y_2+2y_3 &\ge 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

2. ในกรณีที่ปัญหาปฐมภูมิอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

จะเห็นว่าในกรณีที่โปรแกรมเชิงเส้นอยู่ในรูปแบบมาตรฐาน เงื่อนไขบังคับทุกอันจะอยู่ในรูปของสมการ เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงความสับสน ให้ดูจากตัวอย่างที่ปัญหาปฐมภูมิมีเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการเพียงสมการเดียว

ตัวอย่าง 2.26 จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\geq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\geq b_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ในรูปแบบคาโนนิคัล เงื่อนไขบังคับแรกจะต้องเปลี่ยนเป็น 2 เงื่อนไขบังคับ ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\geq b_1 \\ -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 &\leq -b_1 \end{aligned}$$

ดังนั้นเราต้องสร้างตัวแปร y_i ในปัญหาคู่เสมอกันให้มีค่าได้ไม่จำกัด โดย

$$y = y_i^+ - y_i^-$$

ค่า i ในที่นี้ก็คือเงื่อนไขบังคับที่ i ที่เป็นสมการในกรณีนี้ เงื่อนไขบังคับที่ 1 เป็นสมการ

โดยที่ $y = y_i^+ - y_i^-$

ดังนั้นจากปัญหาปฐมภูมิ ที่อยู่ในรูปแบบคาโนนิคัลดังกล่าวคือ

ตัวอย่าง 2.27 จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\geq b_1 \\ -a_{11} x_1 - a_{12} x_2 &\leq -b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\geq b_2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

จากหลักการที่กล่าวแล้ว จะได้ปัญหาคู่เสมอกัน คือ

จงทำให้ D มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = b_1 (y_1^+ - y_1^-) + b_2 y_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} a_{11} (y_1^+ - y_1^-) + a_{12} y_2 &\geq c_1 \\ a_{21} (y_1^+ - y_1^-) + a_{22} y_2 &\geq c_2 \\ y_1^+, y_1^-, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ในกรณีนี้เป็นไปได้ว่าค่า y_1 ที่คำนวณออกมาได้อาจจะเป็นค่าลบ ทั้งนี้ต้องเข้าใจว่าการสร้างปัญหาคู่เสมอกันขึ้นมาก็เพื่อช่วยหาคำตอบของปัญหาปฐมภูมิให้ง่ายขึ้น ปัญหาคู่เสมอกันไม่ได้เป็นปัญหาในสถานการณ์จริงๆ และการกำหนด y_1^+ และ y_1^- ก็เพื่อที่จะให้เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาซิมเพล็กที่ว่าตัวแปรทุกตัวจะต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง 2.28 จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

จะได้ปัญหาคู่เสมอกันคือ

จงทำให้ **D** มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = 5y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-)$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) &\geq 5 \\ 2y_1 - (y_2^+ - y_2^-) &\geq 12 \\ y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) &\geq 4 \\ y_1, y_2^+, y_2^- &\geq 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.29 จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 5x_1 + 6x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_1 + 5x_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

x_1 ไม่จำกัดเครื่องหมาย

$$x_2 \geq 0$$

จะได้ปัญหาคู่เสมอกันคือ

จงทำให้ D มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = 5y_1 - 3y_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 5 \\ 2y_1 - 5y_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

y_1 ไม่จำกัดเครื่องหมาย

$$y_2 \geq 0$$

ข้อสังเกตที่ 1) ในกรณีที่มีค่าตัวแปรไม่จำกัดเครื่องหมายแสดงว่ามาจากเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ ในกรณีนี้จะเห็นว่า x_r ไม่จำกัดเครื่องหมายแสดงว่าเงื่อนไขบังคับอันแรกจะเป็นสมการ คือ $y_1 + y_2 = 5$

2) การที่มีเงื่อนไขบังคับทีเป็นสมการแสดงว่ามาจากค่าตัวแปรที่ไม่จำกัดเครื่องหมาย ในกรณีนี้จะเห็นว่า เงื่อนไขแรกคือ $y_1 + y_2 = 5$ เป็นสมการ $\therefore$ y_1 ก็ไม่จำกัดเครื่องหมายด้วย

ตัวอย่าง 2.30 จงทำให้ค่า Z มีค่าต่ำสุดเมื่อ $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \leq 0$$

เปลี่ยนเป็นปัญหาคู่เสมอกันจะได้

จงหาทำให้ D มีค่าสูงสุด เมื่อ $D = 10y_1$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$y_1 \leq 3$$
$$y_1 - y_2 = 4$$
$$y_1, y_2 \leq 0$$

เพราะว่า x_2 ในปัญหาปฐมภูมิ มีค่าไม่จำกัด ฉะนั้นเงื่อนไขที่ 2 ของปัญหาคู่เสมอกันก็เป็นสมการ

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 2.31 จงทำให้ค่า Z มีค่าสูงสุดเมื่อ $z = x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1 + x_2 = 5$$
$$3x_1 - x_2 = 6$$
$$x_1, x_2 \quad \text{ไม่จำกัดเครื่องหมาย}$$

เปลี่ยนเป็นปัญหาคู่เสมอกันจะได้

จงหาทำให้ D มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = 5y_1 + 6y_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$2y_1 + 3y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1, y_2 \quad \text{ไม่จำกัดเครื่องหมาย}$$

<u>ตอบ</u>

ความสัมพันธ์ของปัญหาปฐมภูมิกับปัญหาคู่เสมอกัน

นำโจทย์ใน **ตัวอย่าง 2.28** มาหาคำตอบโดยวิธีซิมเพล็ก จะได้รูปแบบมาตรฐานคือ ทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MA1$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + A_1 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, A_1 \geq 0$$

ตารางซิมเพล็กเริ่มต้น

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	A_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
Z	1	-5	-12	-4	0	M	0	
S_1	0	1	2	1	1	0	5	
A_1	0	2	-1	3	0	1	2	
Z		(-5-2M)	(-12+M)	(-4-3M)	0	0	-2M	
S_1	0	1	2	1	1	0	5	5
A_1	0	2	-1	3	0	1	2	$\frac{2}{3}$

	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	A_1	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
Z	1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}+M$	$\frac{8}{3}$	
S_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{13}{7}$
x_3	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-
Z	1	$-\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{40}{7}$	$(-\frac{4}{7}+M)$	$\frac{192}{7}$	
x_2	0	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{13}{7}$	13
x_3	0	$\frac{5}{7}$	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{5}$
Z	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{7}$	$(-\frac{2}{5}+M)$	$28\frac{1}{5}$	
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{5}$	

ซึ่งจะได้คำตอบที่ทำให้ค่า z มีค่าสูงสุดโดย $z = 28\frac{1}{5}$

เมื่อ

$$x_1 = \frac{9}{5}$$

$$x_2 = \frac{8}{5}$$

$$x_3 = 0$$

เราสามารถเปรียบเทียบได้กับปัญหาคู่เสมอกัน ซึ่งเมื่อทำเป็นรูปแบบมาตรฐานจะได้ว่า จงทำให้ D มีค่าต่ำสุด เมื่อ $D = 5y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) + MA_1 + MA_2 + MA_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) - R_1 + A_1 &= 5 \\ 2y_1 - (y_2^+ - y_2^-) - R_2 + A_2 &= 12 \\ y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) - R_3 + A_3 &= 4 \\ y_1, y_2^+, y_2^-, R_1, R_2, R_3, A_1, A_2, A_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ทำเป็นตารางซิมเพล็กจะได้

	D	y_1	y_2^+	y_2^-	R_1	R_2	R_3	A_1	A_2	A_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
D	1	-5	-2	2	0	0	0	-M	-M	-M	0	
A_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5	
A_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12	
A_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4	
D	1	(-5+4M)	(-2+4M)	(2-4M)	(-M)	(-M)	(-M)	0	0	0	21M	
A_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5	$\frac{5}{2}$
A_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12	-
A_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4	$\frac{4}{3}$
D	1	$\frac{8}{3}M-\frac{13}{3}$	0	0	-M	-M	$\frac{1}{3}M-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}M+\frac{2}{3}$	$\frac{47}{3}M+\frac{8}{3}$	
A_1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	7
A_2	0	$\frac{7}{3}$	0	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$
y_2^+	0	$\frac{1}{3}$	1	-1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	4

D	1	0	-8M+13	8M-13	-M	-M	3M-5	1	0	-4M+5	5M+20	
A_1	0	0	-1	1	-1	0	1	0	0	-1	1	1
A_2	0	0	-7	7	0	-1	2	0	1	-2	4	$\frac{4}{7}$
y_1	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4	-
D	1	0	0	0	-M	$(\frac{1}{7}M-\frac{13}{7})$	$(\frac{5}{7}M-\frac{9}{7})$	0	$(-\frac{8}{7}M+\frac{13}{7})$	$(-\frac{12}{7}M+\frac{9}{7})$	$\frac{3}{7}M+\frac{192}{7}$	
A_1	0	0	0	0	-1	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{5}$
y_2^-	0	0	-1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	2
y_1	0	1	0	0	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{40}{7}$	-
D	1	0	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	$(-M+\frac{9}{5})$	$(-M+\frac{8}{5})$	-M	$\frac{141}{5}$	
R_3	0	0	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$	
y_2^-	0	0	-1	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
y_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{29}{5}$	
D	1	0	0	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	$(\frac{9}{5}-M)$	$(\frac{8}{5}-M)$	(-M)	$28\frac{1}{5}$	
R_3	0	0	0	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$	
y_2^-	0	0	-1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
y_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{20}{5}$	

ซึ่งจะได้คำตอบที่ทำให้ค่า D มีค่าต่ำสุดโดย $D = 28\frac{1}{5}$

เมื่อ $y_1 = \frac{29}{5}, y_2^+ = 0, y_2^- = \frac{2}{5}$

ฉะนั้น $y_2 = y_2^+ - y_2^- = 0 - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$

ข้อสังเกต

1. สังเกตได้ว่า y_2 จะมีเครื่องหมายเป็นลบได้
2. เมื่อเปรียบเทียบปัญหาปฐมภูมิกับปัญหาคู่เสมอกันจะเห็นว่า

ค่าสูงสุดของ $z = 28\frac{1}{5}$ = ค่าต่ำสุดของ D

3. จากตารางซิมเพล็ก ในปัญหาคู่เสมอกันในตารางสุดท้ายจะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียม คือ

A_1 มีสัมประสิทธิ์ $\frac{9}{5}$- M

A_2 มีสัมประสิทธิ์ $\frac{8}{5}$- M

A_3 มีสัมประสิทธิ์ -M

จะเห็นว่าคำตอบของ x_1, x_2, x_3 ในปัญหาปฐมภูมิ

ก็คือ $x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = \frac{8}{5}, x_3 = 0$

ซึ่งตรงกับตัวคงค่าที่ลบกับ M ในตารางซิมเพล็กสุดท้ายของปัญหาคู่เสมอกัน

4. ในทำนองเดียวกับข้อ 3 จะเห็นว่า ในตารางซิมเพล็กสุดท้ายของปัญหาปฐมภูมิ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรมูลฐาน คือ

S_1 สัมประสิทธิ์ $\frac{29}{5}$

A_1 สัมประสิทธิ์ $(-\frac{2}{5} + M)$

จะเห็นได้ว่าคำตอบของ y , y_2 ในปัญหาคู่เสมอกันก็คือ

$$y_1 = \frac{29}{5}, y_2 = -\frac{2}{5}$$

ซึ่งตรงกับตัวคงค่าที่บวกกับ M หรือตัวคงค่าเดี่ยว ในตารางซิมเพล็กสุดท้ายของปัญหา ปฐมภูมิ เมื่อทราบความสัมพันธ์ของคำตอบระหว่างปัญหาปฐมภูมิกับปัญหาคู่เสมอกันแล้ว การทำปัญหาคู่เสมอกันก็เพื่อช่วยแก้ปัญหาปกติ ปัญหาที่จะทำปัญหาคู่เสมอกันก็ในกรณี ปัญหาปฐมภูมิที่ต้องการทำให้ค่าของฟังก์ชันที่ค่าต่ำสุด และเงื่อนไขบังคับอยู่ในรูปของ ≥ ซึ่งทำให้ต้องเพิ่มตัวแปรเทียม และยุ่งยากในการแก้ปัญหา ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.32 จงทำให้ฟังก์ชัน z มีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

ทำให้เป็นปัญหาคู่เสมอกันจะได้

ทำให้ฟังก์ชัน D มีค่าสูงสุด เมื่อ

$$D = 8y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 3y_2 \le 2$$

$$4y_1 + 2y_2 \le 3$$

$$3y_1 + y_2 \le 1$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

ทำให้เป็นรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$D = 8y_1 + 6y_2$$

$$y_1 + 3y_2 + s_1 = 2$$

$$4y_1 + 2y_2 + s_2 = 3$$

$$3y_1 + y_2 + s_3 = 1$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

จะได้ตารางซิมเพล็กเริ่มต้น

	D	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
D	1	-8	-6	0	0	0	0	
S_1	0	1	3	1	0	0	2	2
S_2	0	4	2	0	1	0	3	$\frac{3}{4}$
S_3	0	3	1	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$
D	1	0	$-\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	
S_1	0	0	$\frac{8}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{8}$
S_2	0	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$
y_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
D	1	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{19}{4}$	
y_2	0	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{5}{8}$	
S_2	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{4}$	
y_1	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

จะได้ค่า D ซึ่งมีค่ามากที่สุด $= \frac{19}{4}$ โดย $y_1 = \frac{1}{8}$

$$y_2 = \frac{5}{8}$$

นั่นคือ z จะมีค่าน้อยที่สุด $= \frac{19}{4}$ โดย $x_1 = \frac{5}{4}$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{9}{4}$$

<u>ตอบ</u>

ตัวอย่างที่ 2.33 จากปัญหาต่อไปนี้ให้คำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีเทคนิคเอ็ม แล้วสร้างปัญหาคู่เสมอกันก่อนแล้วหาคำตอบที่ดีที่สุด

จงทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

โดยเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq 40$$
$$x_1, \quad x_2, x_3 \geq 0$$

โดยวิธีเทคนิคเอ็ม

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

จงทำให้ z มีค่าสูงสุด เมื่อ $z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_2 - MA_1$

โดยเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + A_1 = 30$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 + S_1 = 40$$
$$x_1, \quad x_2, x_3 \qquad \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	A_1	S_2	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
z	1	-5	-2	-3	M	0	0	
A_1	0	1	5	2	1	0	30	
S_1	0	1	-5	-6	0	1	40	
z	1	-M-5	-5M-2	-2M-2	0	0	-30M	
A_1	0	1	5	2	1	0	30	6
S_1	0	1	-5	-6	0	1	40	-
z	1	$-\frac{23}{5}$	0	$-\frac{11}{5}$	$m+\frac{2}{5}$	0	12	
x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6	30
S_1	0	2	0	-4	1	1	70	35
z	1	0	23	7	M+5	0	150	
x_1	0	1	5	2	1	0	30	
S_1	0	0	-10	-8	-1	1	10	

นั่นคือ z มีค่าสูงสุดเท่ากับ 150 โดยที่ $x_1 = 30, x_2 = 0$

ถ้าทำเป็นปัญหาคู่เสมอกันก่อนจะได้

จงทำค่า D ให้มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $D = 30(y_1^+ - y_1^-) + 40y_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$(y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 5$$
$$5(y_1^+ - y_1^-) - 5y_2 \geq 2$$
$$2(y_1^+ - y_1^-) - 6y_2 \geq 3$$

y_1 ไม่จำกัดเครื่องหมาย

$$y_2 \geq 0$$

ทำให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานจะได้

$$D = 30y_1^+ - 30y_1^- + 40y_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$y_1^+ - y_1^- + y_2 - R_1 + A_1 = 5$$
$$5y_1^+ - 5y_1^- - 5y_2 - R_2 + A_2 = 2$$
$$2y_1^+ - 2y_1^- - 6y_2 - R_3 + A_3 = 3$$
$$y_1,\ y_2^+,\ y_2^- \geq 0$$

	D	y_1^+	y_1^-	y_2	R1	R2	R3	A_1	A_2	A_3	คำตอบ	อัตราส่วนต่ำสุดที่ไม่เป็นลบ
D	1	-30	30	-40	0	0	0	-M	-M	-M	0	
A_1	0	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	5	
A_2	0	5	-5	-5	0	-1	0	0	1	0	2	
A_3	0	2	-2	-6	0	0	-1	0	0	1	3	
D	1	8M-30	-8M-30	-10M-40	-M	-M	-M	0	0	0	10M	
A_1	0	1	-1	1	-1	0	0	1	0	0	5	5
A_2	0	5	-5	-5	0	-1	0	0	1	0	2	$\frac{2}{5}$
A_3	0	2	-2	-6	0	0	-1	0	0	1	3	$\frac{3}{2}$
D	1	0	0	-2M-70	-M	$-6+\frac{3}{5}M$	-M	0	$6-\frac{8}{5}M$	0	$12+\frac{34}{5}M$	
A_1	0	0	0	2	-1	$\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{23}{5}$	23
y_1^+	0	1	-1	-1	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	-
A_3	0	0	0	-4	0	$\frac{2}{5}$	-1	0	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{11}{5}$	$\frac{11}{5}$

D	1	0	0	4M-130	-M	0	$-15+\frac{M}{2}$	0	-M	$15+\frac{3}{2}M$	$45+\frac{7}{2}M$	
A_1	0	0	0	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	
y_1^+	0	1	-1	-3	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
R_2	0	0	0	-10	0	1	$-\frac{5}{2}$	0	-1	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	
D	1	0	0	4M-130	-30	0	0	30-M	-M	-M		
R_3	0	0	0	0	-2	0	1	2	0	-1		
y_1^+	0	1	-1	-3	-1	0	0	1	0	0		
R_2	0	0	0	-10	-5	0	0	5	-1	0		

นั่นคือ ค่า D มีค่าต่ำสุด = 150 เมื่อ $y_1^+ = 5$

$y_1^- = 0$

$y_2 = 0$

ตอบ

บทที่
2
แบบทดสอบชุดที่ 2.1

โปรแกรมเชิงเส้น

1. จงแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

1.1 ทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2 ทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$
โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\geq 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 &\leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.3 ทำให้ Z มีค่ามากที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$
โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\leq 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. การผสมอาหารสำหรับคนไข้ มีส่วนประกอบ 3 อย่าง คือ นม เนื้อ และไข่ ทางโรงพยาบาลต้องการผสมอาหารให้มีราคาต่ำที่สุด แต่ต้องให้มีวิตามิน A ไม่น้อยกว่า 1 มิลลิกรัม วิตามิน C ไม่น้อยกว่า 50 มิลลิกรัม และวิตามิน D ไม่น้อยกว่า 10 มิลลิกรัม ต่อมื้อ โดยอาหารที่จะนำมาผสมกันมีวิตามินต่างๆ และราคาต่อหน่วยดังตารางต่อไปนี้

วิตามิน (มิลลิกรัม)	นม (แกลลอน)	เนื้อ (ปอนด์)	ไข่ (โหล)
A	1	1	10
C	100	10	10
D	10	100	10
ราคาต่อหน่วย (บาท)	20	22	10

จงสร้างโปรแกรมเชิงเส้น และหาส่วนผสมที่เหมาะสม

3. จงทำค่า Z ให้มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + x_4 \leq 25$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

$$4x_1 + 6x_3 \geq 5$$

$$2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_4 ไม่จำกัดเครื่องหมาย

แบบทดสอบชุดที่ 2.2

ปัญหาคู่เสมอกัน

1. จงแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีปัญหาคู่เสมอกัน

   1.1 จงทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + 3x_2$

   โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 5 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

   1.2 จงทำให้ Z มีค่าสูงที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4$

   โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

   1.3 จงทำให้ Z มีค่าสูงที่สุด $Z = 2x_2 - 5x_3$

   โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. จงพิจารณาปัญหา จงทำให้ Z มีค่าสูงที่สุดเมื่อ $Z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

   โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leq b_1 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq b_2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

เมื่อ b_1 และ b_2 เป็นตัวคงค่า ถ้าตารางสุดท้ายที่ทำให้ Z มีค่าสูงสุด คือ

	Z	x_1 x_2 x_3	s_1 s_1	คำตอบ
Z	1	0 a 7	d e	150
x_1	0	1 b 2	1 0	30
s_1	0	0 c -8	-1 1	30

เมื่อค่า a, b, c , d และ e เป็นตัวคงค่า จงหาว่า

2.1 จงหาค่า b_1 และ b_2

2.2 คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่เสมอกัน

2.3 ค่าของ a, b และ c ในตารางสุดท้ายที่ดีที่สุด

3. ถ้าต้องการทำให้ Z มีค่าสูงสุดที่ $Z = 2x_2 - 5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

จงหาว่า

3.1 เปลี่ยนเป็นปัญหาคู่เสมอกัน

3.2 หาคำตอบของปัญหาคู่เสมอกันแล้วเปรียบเทียบกับการหาคำตอบจากรูปแบบเดิม

1.3 ถ้าตัวเลขทางขวามือของปัญหาข้างบน เปลี่ยนจาก (2, 6, 0) เป็น (2, 10, 5) จงหาคำตอบที่ดีที่สุด

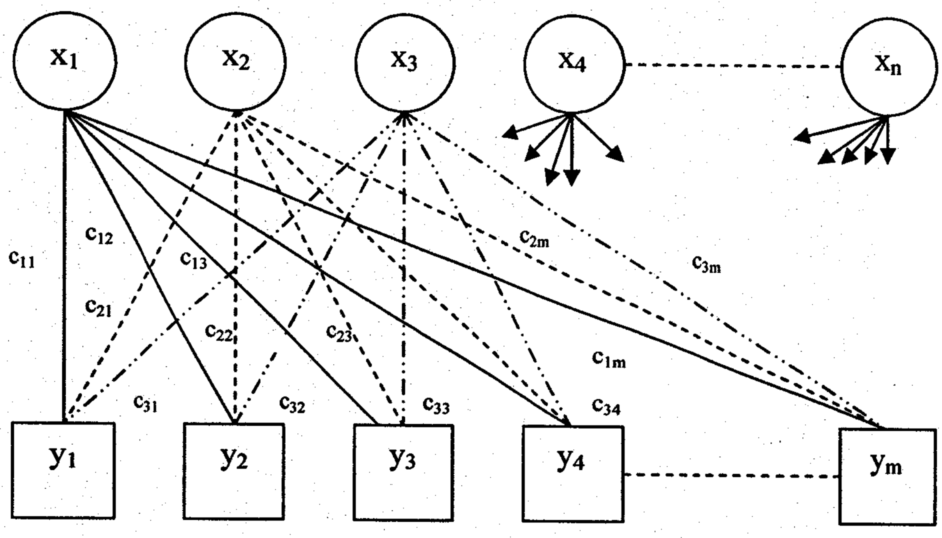
บทที่ 3

ปัญหาการขนส่ง
The Transportation Problem

เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในกรณีที่ต้องการขนย้ายผลผลิตจากโรงงานไปยังคลังสินค้าหรือต้องการขนย้ายวัตถุดิบจากแหล่งกำเนิดไปยังโรงงานที่ต้องการ โดยใช้ค่าขนย้ายน้อยที่สุด ในทางปฏิบัติ สถานที่เริ่มต้นและสถานที่จุดหมายปลายทางมีหลายแห่ง และค่าขนส่งแต่ละแห่งก็ไม่เท่ากัน ปัญหาจึงต้องพิจารณาว่า จะขนส่งสินค้าจากจุดเริ่มต้นใด เป็นจำนวนเท่าไร ไปยังแหล่งจุดหมายปลายทางใด โดยที่ปริมาณสินค้าทั้งหมดจากแหล่งเริ่มต้น และปริมาณสินค้าทั้งหมดที่แหล่งจุดหมายปลายทางมีจำนวนเท่ากัน

สามารถพิจารณาแบบหุ่นของปัญหาการขนส่งได้จากแผนภาพข้างล่าง

แหล่งเริ่มต้น



แหล่งจุดหมายปลายทาง

ส่วนแบบหุ่นในการแก้ปัญหา ถ้ามองในลักษณะของโปรแกรมเชิงเส้นก็สามารถที่จะสร้างแบบหุ่นได้ดังนี้

ให้ Z เป็นต้นทุนการขนส่ง

โดย $Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \ldots + c_{nm}x_{nm}$

$i = 1, 2, \ldots n$ เป็นแหล่งเริ่มต้นการขนส่ง

$j = 1, 2, \ldots m$ เป็นแหล่งจุดหมายปลายทางการขนส่ง

x_{ij} หมายถึง จำนวนสินค้าที่จะส่งจากแหล่งเริ่มต้น ไปยังแหล่งจุดหมายปลายทาง

c_{ij} หมายถึง ค่าขนส่งจากแหล่งเริ่มต้น ไปยังแหล่งจุดหมายปลายทาง

ฉะนั้นจะต้องทำให้ค่า มีค่าน้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขบังคับดังนี้

1. เงื่อนไขบังคับที่ถูกจำกัดด้วยจำนวนสินค้าที่แหล่งเริ่มต้น

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$$

เมื่อ a_i ก็คือจำนวนสินค้าที่แหล่งเริ่มต้น i

2. เงื่อนไขบังคับที่ถูกจำกัดด้วยจำนวนสินค้าที่ต้องการของแต่ละแหล่งจุดหมายปลายทาง

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$$

เมื่อ b_j ก็คือจำนวนสินค้าที่ต้องการของแหล่งจุดหมายปลายทาง j ถ้าสมมติให้มีแหล่งกำเนิด 2 แหล่ง และจุดหมายปลายทาง 3 แหล่ง จะสร้างโปรแกรมเชิงเส้น สรุปได้ดังนี้

	z	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	คำตอบ
z	1	$-c_{11}$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{21}$	$-c_{22}$	$-c_{23}$	0
เงื่อนไขจากแหล่งกำเนิด	0	1	1	1	0	0	0	a_1
	0	0	0	0	1	1	1	a_2
เงื่อนไขจากจุดหมายปลายทาง	0	1	0	0	1	0	0	b_1
	0	0	1	0	0	1	0	b_2
	0	0	0	1	0	0	1	b_3

ในการปฏิบัติการแก้ปัญหาการขนส่งโดยวิธีซิมเพล็กยุ่งยากเพราะมีเงื่อนไขบังคับมาก จึงมีผู้ได้ปรับปรุงวิธีการแก้ไขปัญหาการขนส่งโดยพิจารณาดังนี้

จุดหมายปลายทาง (j)

	1	2	3	จำนวนที่มี
แหล่งกำเนิด (i) 1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	x_{13} c_{13}	a_1
2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	x_{23} c_{23}	a_2
ความต้องการ	b_1	b_2	b_3	

ในทางทฤษฎี เราจะขนส่งสินค้าทั้งหมดที่มีไปยังจุดหมายปลายทางที่ต้องการทั้งหมดโดยให้

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ในกรณีนี้หมายความว่า $b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2$

แต่ในทางปฏิบัติจริงๆ อาจจะเป็นไปได้ว่าจุดหมายปลายทางต้องการสินค้าน้อยกว่าสินค้าที่มี หรือ สินค้าที่มีจากแหล่งเริ่มต้น มีน้อยกว่าความต้องการของสินค้าที่จุดหมายปลายทาง ดังนั้นเพื่อให้เป็นไปตามทฤษฎีที่ต้องการให้ $\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ก็ต้องเพิ่มแหล่งเริ่มต้นลวง (dummy source) หรือจุดหมายปลายทางลวง (dummy destination) แล้วแต่กรณี โดยให้ค่าขนส่งของจุดหมายปลายทางลวง มีค่าสูงมาก โดยให้เท่ากับ ในลักษณะเดียวกับตัวแปรเทียมในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็ก และให้ค่าขนส่งของแหล่งเริ่มต้นลวง มีค่าเท่ากับศูนย์เพราะไม่มีสินค้าที่จะขนส่งจริงๆ เพียงแต่สร้างขึ้นมาเพื่อการแก้ปัญหาเท่านั้นในลักษณะเดียวกับตัวแปรส่วนเกิน ในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นโดยวิธีซิมเพล็ก

<u>การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหาการขนส่ง</u>

1. หาผลลัพธ์เริ่มต้นที่เป็นไปได้
2. หาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดจากผลลัพธ์เริ่มต้น

การหาผลลัพธ์เริ่มต้น

1. กฎมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือ (North – West corner rule)

จะทำการจัดสรรการขนส่งโดยเริ่มจากมุมด้านซ้ายบนสุดก่อนโดยดูความต้องการของจุดหมายปลายทางแรก และจำนวนที่แหล่งกำเนิดมีอยู่โดยจัดสรรให้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ ก็คือ เท่ากับจำนวนที่น้อยกว่าระหว่างความต้องการของจุดหมายปลายทางแรกและแหล่งกำเนิดแรก เมื่อจัดสรรไปเต็มที่แล้วส่วนที่เหลือก็จะทยอยจัดสรรทแยงลงมาทางขวา ตามปริมาณที่ต้องการของจุดหมายปลายทาง และแหล่งกำเนิดโดยจัดสรรให้เต็มที่เป็นลำดับ จากจุดหมายปลายทางแหล่งกำเนิดแรกไปสู่แหล่งสุดท้ายดังตัวอย่าง เช่น

ตัวอย่าง 3.1

จุดหมายปลายทาง

แหล่งกำเนิด	1	2	3	4	จำนวนที่มี
1	x_{11} [10]	x_{12} [0]	x_{13} [20]	x_{14} [11]	15
2	x_{21} [12]	x_{22} [7]	x_{23} [9]	x_{24} [20]	25
3	x_{31} [0]	x_{32} [14]	x_{33} [16]	x_{34} [18]	5
ความต้องการ	5	15	15	10	

นำมาจัดสรรโดยกฎมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือได้ดังนี้

จุดหมายปลายทาง

แหล่งกำเนิด	1	2	3	4	
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
	5	15	15	10	

ซึ่งมีค่าขนส่งรวม $= 5(10) + 10(0) + 5(7) + 15(9) + 5(20) + 5(18)$

$= 410$ <u>**ตอบ**</u>

ข้อที่น่าสังเกต สำหรับวิธีนี้ก็คือ เราจะไม่นำค่าขนส่งเข้ามาเกี่ยวข้องในการหาผลลัพธ์เริ่มต้นเลย

ตัวอย่าง 3.2

		จุดหมายปลายทาง					จำนวนที่มี
		1	2	3	4	5	
แหล่งกำเนิด	1	20	19	14	21	16	40
	2	15	20	13	19	16	60
	3	18	15	18	20	65	90
	4	0	0	0	0	0	50
ความต้องการ		30	40	70	40	60	240

ปัญหานี้จะเห็นว่าปริมาณความต้องการมากกว่าจำนวนที่มี ฉะนั้นจะต้องเพิ่มแหล่งกำเนิดลวงเข้าไป โดยกำหนดให้ค่าใช้จ่ายเป็นศูนย์

โดยวิธีการของกฎ มุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือ จัดสรรได้ดังนี้

		จุดหมายปลายทาง					จำนวนที่มี
		1	2	3	4	5	
แหล่งกำเนิด	1	30	10				40
	2		30	30			60
	3			40	40	10	90
	4					50	50
ความต้องการ		30	40	70	40	90	240

ซึ่งมีค่าขนส่งรวม = 30(20) + 10(19) + 30(20) + 30(13) + 40 (18) + 40(20) + 10(65)

+ 50(0)

= 3,950 <u>ตอบ</u>

2. วิธีค่าขนส่งน้อยที่สุด (Least Cost Method)

สืบเนื่องจากวิธีกฎมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือไม่ได้นำเอาค่าขนส่งเข้ามาเกี่ยวข้องในการหาผลลัพธ์เริ่มต้น จึงได้ให้ผลลัพธ์เริ่มต้นไม่ได้อยู่ในลักษณะที่ใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเท่าที่ควร จึงได้หาวิธีค่าขนส่งที่น้อยที่สุดขึ้นมา

มีวิธีการหาดังนี้

ก. จะเริ่มจัดสรรให้เซลที่มีค่าขนส่งน้อยที่สุดก่อน โดยจัดสรรให้มากที่สุด เท่าที่จะทำได้

ข. ขีดฆ่าแถวหรือสดมภ์ที่มีการจัดสรรตามต้องการแล้ว

ค. ทำการจัดสรรเซลที่ว่างอยู่ตามขบวนการในข้อ ก. และ ข. จนกระทั่งทุกเซลได้รับการจัดสรรหมด

จากตัวอย่าง 3.1

	1	2	3	4	
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

<u>ขั้นที่ 1</u> จัดสรรให้เซลมีค่าขนส่งน้อยที่สุดให้มากที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

	15			
12		9	20	25
0		16	18	5
5		15	10	

ขั้นที่ 2 จัดสรรให้เซลมีค่าขนส่งน้อยที่สุดให้มากที่สุด ในเซลที่ยังจัดสรรไม่ครบ

	15			
		9	20	25
5				
		15	10	

ขั้นที่ 3 ทำนองเดียวกัน จะได้ผลลัพธ์เริ่มต้นดังนี้

	15		
		15	10
5			

ซึ่งมีค่าขนส่งรวม = 15(0) + 5(0) + 15(9) + 10(20)

= 335 **ตอบ**

จากตัวอย่าง 3.2

	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	65	90
4	0	0	0	0	0	50
	30	40	70	40	60	

ขั้นที่ 1

1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	65	90
4					50	
	30	40	70	40	10	

ขั้นที่ 2

20	19	14	21	16	40
		60			
18	15	18	20	65	90
				50	
30	40	10	40	10	

ขั้นที่ 3

20	19	10	21	16	30
		60			
18	15	18	20	65	90
				50	
30	40		40	10	

ขั้นที่ 4

20		10	21	16	30
		60			
18	40		20	65	50
				50	
30			40	10	

ขั้นที่ 5

20		10	21	10	20
		60			
18	40		20		50
				50	
30			40		

ขั้นที่ 6

		10	21	10	20
		60			
30	40		20		20
				50	
			40		

ขั้นที่ 7

		10	20	10
		60		
30	40		20	
				50

ซึ่งมีค่าขนส่งรวม = 30(18) + 40(15) + 10(14) +60(13) + 20(21) + 20(20) + 10(16) + 50(0)

= 3,040 **ตอบ**

3. วิธีประมาณของโวเกล (Vogel 's Approximation Method)

เมื่อปัญหาการขนส่งมีแหล่งกำเนิด และจุดหมายปลายทางมากขึ้น การหาผลลัพธ์เริ่มต้นโดยวิธีค่าขนส่งน้อยที่สุด ก็จะมีความยุ่งยากมากขึ้น จึงได้มีการสร้างวิธีประมาณของโวเกล หรือเรียกสั้นๆ ว่า แวม (VAM)

มีวิธีการดังนี้

1. หาผลต่างของค่าขนส่งในเซลที่มีค่าต่ำสุดและต่ำสุดถัดมาทั้งทางแถวและสดมภ์
2. พิจารณาดูค่าที่แตกต่างกันมากที่สุดอยู่ทางแถวหรือสดมภ์ ก็จะใช้แถวหรือสดมภ์นั้นเป็นการจัดสรรครั้งแรก โดยจัดสรรให้แก่ค่าขนส่งที่น้อยที่สุด มากที่สุดเท่าที่จะมากได้
3. ถ้าแถวหรือสดมภ์ได้รับการจัดสรรหมดแล้วก็จะขีดฆ่าเพื่อให้ทราบว่าจะไม่พิจารณาค่าขนส่งในแถวนั้น หรือสดมภ์นั้นอีก
4. ทำตามข้อ 1, 2, 3 ใหม่ จนกระทั่งจัดสรรได้ครบ ตัวอย่างเช่น

จากตัวอย่าง 3.1

	1	2	3	4	
1	10	0	20	11	15
2	12	7	9	20	25
3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

รอบที่ 1

	1	2	3	4		ผลต่างทางแถว
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18		14
		15 15	15 15	10 10		
ผลต่างทางสดมภ์	10	7	7	7		

รอบที่ 2

	2	3	4		ผลต่างทางแถว
1	0 15	20	11		11
2	7	9	20	25	2
		15	10		
ผลต่างทางสดมภ์	7	11	9		

รอบที่ 3

	3	4
2	9 15	20 10

สรุปว่าโดยวิธีของแวมจะจัดสรรดังนี้

	15		
		15	10
5			

ซึ่งจะได้ค่าขนส่ง = 5(0) + 15(0) + 15(9) +20(10)

= 335 **<u>ตอบ</u>**

จากตัวอย่าง 3.2

	1	2	3	4	5	
1	20	19	14	21	16	40
2	15	20	13	19	16	60
3	18	15	18	20	65	90
4	0	0	0	0	0	50
	30	40	70	40	60	

<u>รอบที่ 1</u>

	1	2	3	4	5	ผลต่างทางแถว	
1	20	19	14	21	16	40	2
2	15	20	13	19	16	60	2
3	18	15	18	20	65	90	3
4	0	0	0	0 40	0	10	0
	30	40	70	0	60		
ผลต่างทางสดมภ์	15	15	13	19	16		

รอบที่ 2

	1	2	3	5		ผลต่างทางแถว
1	20	19	14	16	40	2
2	15	20	13	16	60	2
3	18	15	18	65	90	3
4	0	0	0	0 / 10		
	30	40	70	50		
ผลต่างทางสดมภ์	15	15	13	16		

รอบที่ 3

	1	2	3	5		ผลต่างทางแถว
1	20	19	14	16 / 40		2
2	15	20	13	16	60	2
3	18	15	18	65	90	3
	30	40	70	10		
ผลต่างทางสดมภ์	3	4	1	49		

รอบที่ 4

	1	2	3	5		ผลต่างทางแถว
2	15	20	13	16	50	2
3	18	15	18	65	90	3
	30	40	70			
ผลต่างทางสดมภ์	3	5	5	49		

รอบที่ 5

	1	2	3		
2	15	20	13 50		2
3	18	15	18	90	3
	30	40	20		
	3	5	5		

รอบที่ 6

	1	2	3
3	18 30	15 40	18 20

สรุปว่าโดยวิธีของแวมจะจัดสรรดังนี้

	1	2	3	4	5
1					40
2			50		10
3	30	40	20		
4				40	10

ซึ่งมีค่าขนส่งรวม $= 30(18) + 40(15) + 20(18) + 60(13) + 50(13) + 40(0) + 10(0) + 10(16)$

$+ 40(16)$

$= 2950$ **ตอบ**

ข้อสังเกต กรณีที่ค่าต่ำสุดซ้ำกันผลต่างจะเอาตัวต่ำสุดกับตัวที่มีค่าต่างกันออกไปที่มีค่าต่ำถัดไป

การหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดจากผลลัพธ์เริ่มต้น

จากการที่ได้ผลลัพธ์เริ่มต้นแล้วไม่ว่าจะโดยวิธีใด ก่อนที่จะนำมาพิจารณาหาคำตอบที่ดีที่สุดต่อไป ให้พิจารณาดูก่อนว่าเซลล์ที่มีการจัดการขนส่ง เท่ากับจำนวนแหล่งจุดหมายปลายทางบวกกับจำนวนแหล่งเริ่มต้น ลบ 1 หรือไม่ นั่นคือ

ถ้าให้ $n =$ จำนวนแหล่งเริ่มต้น

$m =$ จำนวนแหล่งจุดหมายปลายทาง

จะได้ว่า

จำนวนเซลล์ที่มีการจัดการขนส่ง $= n + m - 1$

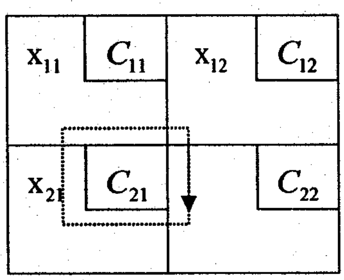
ถ้าไม่เท่ากันแสดงว่าปัญหาไม่สามารถหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดได้

ถ้าเท่ากันให้ทำต่อโดยวิธีใด วิธีหนึ่ง ดังต่อไปนี้

1. วิธีหินกลิ้ง (Stepping Stone Methed)

จุดเริ่มต้นของทางเดินก็คือเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรการขนส่งหรือตัวแปรนำเข้าในโปรแกรม เส้นทางเดินจะเดินทางเป็นวงจร ก็คือจากเซลล์เริ่มต้นจะลากไปในแนวตั้งฉากหรือขนานไปยังเซลล์ที่มีการจัดสรรขนส่ง และจะเปลี่ยนทิศของทางเดินจากตั้งฉากเป็นขนาน หรือขนานเป็นตั้งฉากได้ในกรณีที่เซลล์นั้นเป็นเซลล์ที่มีการจัดสรรขนส่งเท่านั้น และเมื่อกลับมายังเซลล์เริ่มต้นที่เป็นเซลล์ที่ไม่มีการจัดการขนส่งได้ถือว่าครบวงจร ส่วนเซลล์ที่มีการเปลี่ยนทิศของทางเดิน เรียกว่า จุดยอด (Vertex) ดังพิจารณาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3

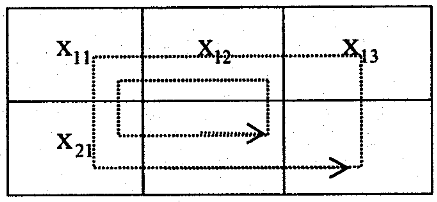


เซล 22 เป็นเซลที่ไม่มีการจัดการขนส่ง ฉะนั้นจะเป็นจุดเริ่มต้นของทางเดิน

เมื่อลากทางเดินไปตามแกนนอน ถึงเซลล์ที่มีการจัดสรรการขนส่ง 21 ก็เปลี่ยนทิศไปตามแกนดิ่ง ซึ่งเซลล์ที่มีการจัดการขนส่ง 11 และเปลี่ยนทิศไปตามแกนนอน ถึงเซลล์ที่มีการจัดการขนส่ง 12 แล้วเปลี่ยนทิศเป็นตามแนวดิ่งกลับลงไปยังเซลล์ 22 เริ่มต้นก็ครบวงจร ส่วนเซลล์ 21, 11 และ 12 ก็เป็นจุดยอด

ในทำนองเดียวกันทิศทางของวงจร อาจจะกลับกันเป็นทวนเข็มนาฬิกาก็ได้ นั่นคือวิ่งจากเซลล์ 22 ไป 12 ไป 11 ไป 21 และกลับมา 22 ก็ครบวงจรเช่นกัน

ตัวอย่าง 3.4

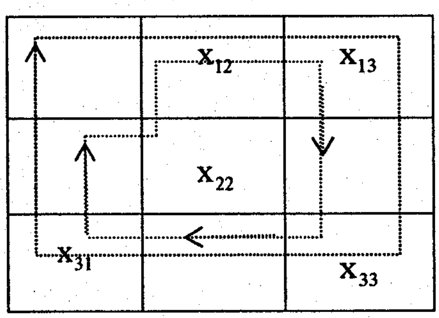


เนื่องจากเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรขนส่งมี 2 เซลล์ก็คือเซลล์ 22 และ 23 และจำนวนเซลล์ที่มีการจัดสรรขนส่งมี 4 เซลล์ ซึ่งเท่ากับจำนวนแถว บวกสดมภ์ ลบ 1 จึงสามารถ หาวงจรได้ 2 วงจร โดยที่แต่ละวงจรจะเป็นไปในทิศทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้

สำหรับวงจรของเซลล์ 22 ก็จะมีจุดยอด คือ เซลล์ 21, 11 และ 12

สำหรับวงจรของเซลล์ 23 ก็จะมีจุดยอด คือ เซลล์ 21, 11 และ 13

ตัวอย่าง 3.5



จะเห็นได้ว่ามีเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรขนส่ง 4 เซลล์ ดังนั้นสามารถหาจุดเริ่มต้นของวงจรได้ 4 เซลล์ ดังต่อไปนี้

จุดเริ่มต้นที่เซลล์ 11 จะมีจุดยอดคือเซลล์ 13, 33, และ 31

จุดเริ่มต้นที่เซลล์ 21 จะมีจุดยอดคือเซลล์ 22, 12, 13, 33, และ 31

จุดเริ่มต้นที่เซลล์ 32 จะมีจุดยอดคือเซลล์ 12, 13, และ 33

จุดเริ่มต้นที่เซลล์ 23 จะมีจุดยอดคือเซลล์ 22, 12, และ 13

การพิจารณาหาคำตอบที่ดีที่สุดโดยวิธีหินกลิ้ง

1. พิจารณาค่าขนส่งของเซลล์ที่เป็นจุดยอดของวงจรของเซลล์เริ่มต้น โดยให้เครื่องหมายบวกกับเซลล์จุดยอด เซลล์แรกของวงจรแล้วสลับกับเครื่องหมายลบกับเซลล์จุดยอดถัดไป โดยสลับเครื่องหมายไปทุกจุดยอด จนครบวงจรนั้นๆ หาผลบวกของค่าขนส่ง ถ้าผลออกมามีค่าเป็นลบก็แสดงว่ายังสามารถลดค่าขนส่งได้อีก

2. ให้หาผลรวมของค่าขนส่งดังข้อ 1. ทุกเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรขนส่ง

3. เลือกเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรขนส่งที่มีผลรวมของค่าขนส่งเป็นลบมากที่สุดมาทำการกลิ้ง การกลิ้งก็คือเราจะกลิ้งปริมาณการขนส่งของทุกจุดยอดของวงจร โดยพยายามกลิ้งให้มากที่สุดเท่าที่จะกลิ้งได้ โดยที่ปริมาณนั้นเมื่อกลิ้งแล้วไม่ทำให้จุดยอดใดๆ เป็นลบ ปริมาณนั้นก็จะมาอยู่ในเซลล์เริ่มต้นได้จำนวนเท่าไหร่ เอาปริมาณนั้นลบกับปริมาณการขนส่งในเซลล์จุดยอดเซลล์แรก แล้วไปบวกกับปริมาณการขนส่งในเซลล์จุดยอดถัดไป ทำอย่างนี้สลับกันไปจนหมดจุดยอด

4. ทำทำนองเดียวกับข้อ 1-3 ใหม่ จนกระทั่งผลรวมของค่าขนส่งไม่เป็นลบ ก็จะแสดงว่าการจัดสรรขนส่งในกรณีนี้ดีที่สุดแล้ว

5. ในการกลิ้งถ้าปรากฏว่ามีเซลล์ที่มีการจัดสรรขนส่งน้อยกว่าจำนวนแถวบวกจำนวนสดมภ์ลบด้วย 1 จะต้องใส่ปริมาณการขนส่งเป็น 0 เพื่อให้สามารถหาวงจรเซลล์ได้ครบทุกเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรขนส่ง

ตัวอย่าง 3.6 จากคำตอบในการหาผลลัพธ์เริ่มต้น โดยกฎมุมทิศตะวันตกเฉียงเหนือในตัวอย่างที่ 3.1

10 / 5	0 / 10	20 / 18	11 / -2
12 / -5	7 / 5	9 / 15	20 / 5
0 / -15	14 / 9	16 / +9	18 / 5

เซลล์ 21 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $12 - 10 + 0 - 7 = -5$

เซลล์ 31 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $0 - 10 + 0 - 7 + 20 - 18 = -15$

เซลล์ 32 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $14 + 7 + 20 - 18 = 9$

เซลล์ 13 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $20 - 9 + 7 - 0 = +18$

เซลล์ 33 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $16 - 9 + 20 - 18 = 9$

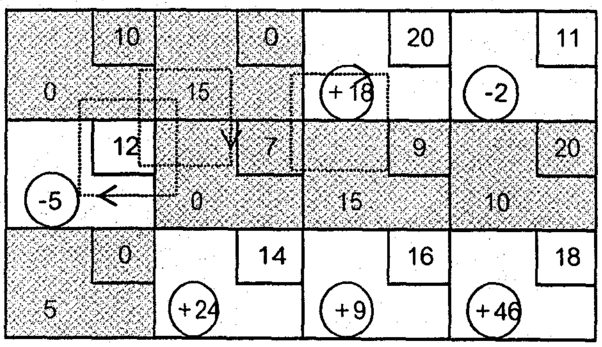
เซลล์ 14 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $11 - 20 + 7 - 0 = -2$

เพิ่มจากค่าผลรวมขนส่งของเซลล์ 31 มีค่าลบมากที่สุด ฉะนั้นถ้ากลิ้งปริมาณการขนส่งมายังเซลล์นี้ สามารถที่จะลดค่าขนส่งรวมได้อีก จะเห็นว่าปริมาณมากที่สุดที่จะกลิ้งมาได้โดยที่ปริมาณที่เซลล์จุดยอดไม่เป็นลบได้เท่ากับ 5 หน่วย ดังนั้นจะกลิ้งได้ดังนี้

วิธีการกลิ้ง

1. ดึงปริมาณ 5 หน่วย จากจุดยอด 34 มาที่เซลล์เริ่มต้น
2. เอาปริมาณ 5 หน่วย ลบจากปริมาณจุดยอด 11 และเพิ่มให้กับจุดยอด 12 ลบจากจุดยอด 22 เพิ่มให้กับจุดยอด 24 ตามลำดับ

เสร็จแล้วจะได้การขนส่งใหม่ได้ดังนี้



จากนั้นก็ทำวิธีเดิมอีกโดยพิจารณาเซลล์ที่ไม่มีการขนส่งว่ามีเซลล์ที่มีค่าผลรวมการขนส่งเป็นลบอีกหรือไม่ ถ้ามีก็กลิ้งปริมาณการขนส่งที่มากที่สุดเท่าที่จะกลิ้งได้โดยจุดยอดของวงจรมีปริมาณไม่เป็นลบมายังเซลล์ที่มีค่าผลรวมการขนส่งเป็นลบมากที่สุด ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งค่าผลรวมการขนส่งของเซลล์ที่ไม่มีการขนส่งไม่เป็นลบ ก็จะเป็นการจัดสรรการขนส่งที่ดีที่สุดแล้ว

<u>พิจารณา</u>

เซลล์ 21 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 12 - 10 + 0 - 7 = -5

เซลล์ 32 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 14 - 0 + 10 - 0 = +24

เซลล์ 13 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 20 – 9 + 7 – 0 = +18

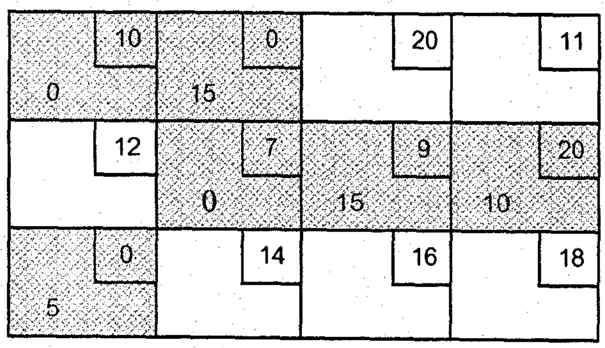
เซลล์ 33 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 16 – 0 + 10 – 15 + 7 – 9 =+9

เซลล์ 14 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 11 – 20 + 7 – 0 = -2

เซลล์ 34 มีผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ 18 – 0 + 10 – 0 + 7 – 9 +20 = +46

จะเห็นว่าเซลล์ 21 มีผลรวมค่าขนส่งตามวงจรเป็นค่าลบสูงสุด ฉะนั้นจะกลิ้งวงจรนี้

ปรากฏว่าปริมาณที่กลิ้งได้เป็นศูนย์ จึงเป็นการเปลี่ยนเซลล์ที่ไม่มีการจัดสรรการขนส่งเท่านั้น จะได้การขนส่งดังนี้



ฉะนั้นจะต้องหาผลรวมค่าขนส่งของเซลล์ 22 จะได้

เซลล์ 32 จะได้เหมือนเดิม

เซลล์ 13 จะได้ $20 - 9 + 12 - 10 = +13$

เซลล์ 14 จะได้ $11 - 20 + 12 - 10 = -7$

เซลล์ 33 จะได้ $16 - 0 + 12 - 9 = 19$

เซลล์ 34 จะได้ $18 - 0 + 12 - 20 = +10$

เนื่องจากเซลล์ 14 ให้ผลรวมค่าขนส่งเป็นวงสูงสุด ฉะนั้นจึงกลิ้งมาที่เซลล์ 14 แต่กลิ้งได้ศูนย์ จะได้การขนส่งใหม่ดังนี้

10	0 15	20	11 0
12 0	7	9 15	20 10
0 5	14	10	18

พิจารณาเซลล์ 22 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $7 - 0 + 11 - 20 = -2$

พิจารณาเซลล์ 11 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $10 - 11 + 20 - 12 = -3$

พิจารณาเซลล์ 32 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $14 - 0 + 12 - 20 + 11 - 0 = +17$

พิจารณาเซลล์ 13 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $20 - 11 + 20 - 9 = +20$

พิจารณาเซลล์ 33 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $10 - 0 + 12 - 9 = +13$

พิจารณาเซลล์ 34 ค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $18 - 0 + 12 - 20 = +10$

จะเห็นว่าผลรวมค่าขนส่งเซลล์ 11 มีค่าลบสูงสุด แต่เมื่อกลิ้งแล้วได้ปริมาณศูนย์ จะได้ดังนี้

10 0	0 15	20	11 0
12	7	9 15	20 10
0 5	14	10	18

เซลล์ 21 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $12 - 10 + 11 - 20 = -7$

เซลล์ 22 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $7 - 0 + 1 - 20 = -2$

เซลล์ 32 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $14 - 0 + 10 - 15 = +9$

เซลล์ 13 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $20 - 11 + 20 - 9 = 20$

เซลล์ 33 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $10 - 0 + 10 - 11 + 20 - 9 = +20$

เซลล์ 34 มีค่าผลรวมค่าขนส่ง เท่ากับ $18 - 0 + 10 - 11 = 7$

จะเห็นว่าผลรวมค่าขนส่งเซลล์ 21 มีค่าลบสูงสุด แต่ปริมาณที่กลิ้งได้เป็นศูนย์ และจะกลับไปยังรูปแบบการขนส่งเดิม จึงลองพิจารณาเซลล์ 22 ที่มีค่าลบถัดไปแล้วกลิ้งดู ปรากฏว่าจะได้การจัดสรรขนส่งดังนี้

10	0 5	20	11 10
12	7 10	9 15	20 0
0 5	14	10	18

แล้วลองพิจารณาดูผลรวมของค่าขนส่งแต่ละเซลล์ที่ไม่ได้รับการขนส่งอีก

เซลล์ 11 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $10 - 0 + 7 - 20 + 11 = +8$

เซลล์ 21 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $12 - 20 + 11 - 20 + 7 = +10$

เซลล์ 32 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $14 - 0 + 11 - 20 + 7 = +12$

เซลล์ 31 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $20 - 9 + 7 - 0 = +18$

เซลล์ 33 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $10 - 9 + 7 - 0 + 10 - 20 + 9 = +7$

เซลล์ 34 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ $18 - 11 + 0 - 7 + 20 = +20$

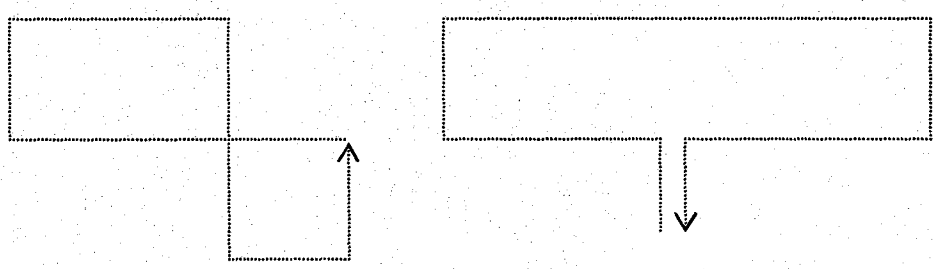
จะเห็นว่าผลรวมการขนส่งทุกเซลล์ที่ไม่ได้รับการจัดการขนส่ง ไม่เป็นลบแล้ว แสดงว่าถึงจุดการจัดสรรการขนส่งที่ดีที่สุดแล้ว ซึ่งมีค่า $= 5 \times 0 + 10 \times 11 + 10 \times 7 + 15 \times 9 + 0 \times 20 + 5 \times 0$

$$= 315$$

<u>**ตอบ**</u>

หมายเหตุ

1. อาจจะเป็นไปได้ที่เซลล์นี้ไม่ได้รับการจัดสรรการขนส่ง สามารถที่จะมีวงจรได้หลายวงจร ซึ่งก่อให้เกิดค่าผลรวมค่าขนส่งที่ได้จากการบวก/ลบ สลับกันไป ของค่าขนส่งต่อหน่วยของจุดยอดมีค่าต่างกันออกไป ซึ่งในทางปฏิบัติเราจะเลือกวงจรใดก็ได้ และการพิจารณากลิ้งก็พิจารณาทุกวงจรที่เป็นไปได้
2. ทางเดินของวงจรอาจจะตัดกันในลักษณะดังนี้ก็ได้



เพราะหลักการการลากทางเดินของวงจร จะเป็นวงจรก็ต่อเมื่อทางเดินจะกลับมาที่เซลล์เริ่มต้น และทิศทางของทางเดินจะเปลี่ยนจากแนวนอนเป็นแนวดิ่ง หรือจากแนวดิ่งไปเป็นแนวนอนได้ ก็ต่อเมื่อเซลล์นั้นเป็นเซลล์ที่มีการจัดการขนส่ง ซึ่งลักษณะวงจรดังข้างบนก็ไม่ผิดกติกาอันใด

2. วิธีของตัวคูณ (The Method of Multipliers)

เป็นการแก้ปัญหาในการหาค่าใช้จ่ายในการขนส่ง ซึ่งยุ่งยากในวิธีกลิ้งหินโดยใช้หลักการของทฤษฎีคู่เสมอกัน ซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีดังนี้

1. สร้างแถว U_i และสดมภ์ V_j
   i เป็นจุดเริ่มต้นที่ i
   j เป็นจุดหมายปลายทางที่ j
2. หาค่า U_i และ V_j โดยพิจารณาเซลที่ถูกกำหนดให้มีการขนส่งให้มีค่า

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

และให้ U_i ที่มีค่าใช้จ่ายในการขนส่งสูงสุดของเซลล์ที่มีการ Assign การขนส่งเป็นศูนย์ก่อน เพื่อง่ายในการคำนวณ แล้วพิจารณาไปเรื่อยๆจนได้ค่า U_i และ V_j ทั้งหมด

3. พิจารณาเซลล์ที่ไม่มีการขนส่ง หาค่า $C_{ij} - (U_i + V_j)$ทำโดยวิธีกลิ้งหินจากค่า $C_{ij} - (U_i + V_j)$ ที่มีค่าลบมากที่สุด ไปยังค่าลบต่ำสุด ก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุดในการจัดการขนส่ง

ตัวอย่าง 3.7 จากจุดเริ่มต้นที่ได้จากวิธีประมาณของโวเกลจากตัวอย่าง 3.2

จุดหมายปลายทาง

จุดตั้งต้น

	1	2	3	4	5		U_i
1	 +5	19 +9	14 +1	21 +5	16 40	40	0
2	15 30	20 +10	13 20	19 +3	16 10	60	0
3	18 -2	15 40	18 50	20 -1	65 +44	90	5
	0 +1	0 +6	0 +3	0 40	0 10	50	-16
	30	40	70	40	60	240	
V_j	15	10	13	16	16		

**(ค่าในวงกลมเป็นค่าของ $C_{ij} - (U_i + V_j)$)

จะเห็นได้ว่า เซลล์ 31มีค่า $C_{31} - (U_3 + V_1) = 18 - (5 + 15) = -2$

เซลล์ 34 มีค่า $C_{34} - (U_3 + V_4) = 20 - (5 + 16) = -1$

ฉะนั้นจะต้องกลิ้ง โดยวิธีกลิ้งหินสองครั้ง โดยครั้งแรกกลิ้งที่เซลล์ว่าง 31 จะได้คำตอบดังนี้

	1	2	3	4	5
1					40
2			50		10
3	30	40	20		
ตัวลวง				40	10

และกลิ้งอีกครั้งที่เซลล์ว่าง 34 ก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้

	1	2	3	4	5
1					40
2			60		0
3	30	40	10	10	
ตัวลวง				30	20

โดยมีค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมด $= (30 \times 18) + (40 \times 15) + (60 \times 13)$

$+ (10 \times 18) + (10 \times 20) + (30 \times 0)$

$+ (40 \times 16) + 20(0)$

$= 2,940$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.8 จากตารางการขนส่งเริ่มต้นซึ่งหามาได้โดยวิธีประมาณของโวเกลจากตัวอย่าง 3.1

จุดหมายปลายทาง

		1	2	3	4	U_i
จุดเริ่มต้น	1	10 / 5	0 / 10	20 / +4	11 / -16	7
	2	12 / +9	7 / 5	9 / 15	20 / 5	0
	3	0 / -1	14 / +9	16 / +9	18 / 5	-2
	V_j	3	7	9	20	

จะเห็นได้ว่า เซลล์ 14มีค่า $C_{14} - (U_1 + V_4) = -16$

เซลล์ 31 มีค่า $C_{31} - (U_3 - V_1) = -1$

ฉะนั้นจะต้องกลิ้ง โดยวิธีกลิ้งหินสองครั้ง โดยครั้งแรกกลิ้งที่เซลล์ว่าง 14 จะได้คำตอบดังนี้

5	5		5
	10	15	0
			5

และกลิ้งอีกครั้งที่เซลล์ว่าง 31 ก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนี้

0	5		10
	10	15	
5			0

โดยมีค่าใช้จ่ายในการขนส่งทั้งหมดน้อยที่สุด $= (5 \times 0) + (10 \times 7) + (15 \times 9) + (10 \times 11)$

$+ (5 \times 0)$

$= 315$ <u>ตอบ</u>

การประยุกต์ใช้วิธีของตัวคูณ ในกรณีที่ต้องการให้ค่าขนส่งสูงสุด

สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน แต่ให้กลิ้งในเซลล์ที่มีค่า $C_{ij} - (U_i + V_j)$ มีค่าเป็นบวกมากที่สุดไปค่าบวกน้อยที่สุด และศูนย์ตามลำดับ ก็จะได้คำตอบที่ดีที่สุด

5	10	+4	-
+9	5	15	5
-	+9	+9	5

	15		
5	0	15	5
			5

	15		
5		15	5
	0		5

	10		
5		10	10
	0	5	

	10	5	
5		10	10
	5		

		15	
5	10		10
	5		

ค่าขนส่งสูงสุด = 700 **ตอบ**

กรณีที่ต้องการจัดสรรการขนส่งให้มีค่าการขนส่งสูงสุด

โดยปกติการจัดการขนส่งถ้าเป็นกิจการขนส่งของเราเองก็จะพยายามจัดการขนส่งให้ค่าขนส่งรวมหลังจากที่ขนส่งจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทาง เป็นจำนวนที่ต้องการแล้ว ค่าขนส่งมีค่าน้อยที่สุด แต่ในบางกรณีถ้าเรามองในแง่ที่เรามีพาหนะที่จะจัดการขนส่ง เราก็ต้องการที่จะจัดการขนส่งให้มีค่าขนส่งสูงสุด

กรณีที่ต้องการทำให้ค่าขนส่งสูงสุด ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับการทำให้ค่าขนส่งต่ำสุด แต่การพิจารณากลิ้งเซลล์ที่ไม่ได้รับการจัดสรรขนส่งที่มีผลรวมการขนส่งตามวงจรที่มีค่าเป็นบวกมากที่สุด และจะทำจนกระทั่งทุกเซลล์ที่ไม่ได้รับการจัดสรรขนส่งมีค่าไม่เป็นบวกก็ถือว่าเป็นจุดที่จัดสรรการขนส่งแล้ว จะได้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งสูงสุด

ข้อที่น่าสังเกตุก็คือ วิธีการหาตารางการขนส่งเริ่มต้นที่แล้วมา วิธีของค่าขนส่งน้อยที่สุด และวิธีประมาณของโวเกล เป็นตารางเริ่มต้นที่เอื้ออำนวยให้กับการขนส่งที่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ดังนั้น ถ้าเราเริ่มต้นจากตารางพวกนี้ก็จะทำให้เสียเวลาในการทำเพื่อให้ได้คำตอบที่มีค่าขนส่งสูงสุด ดังนั้นเราจะพิจารณาหาตารางเริ่มต้นที่เอื้ออำนวยต่อการจัดการขนส่ง โดยใช้หลักการอันเดียวกันกับวิธีหาผลลัพธ์เริ่มต้น โดยวิธีค่าขนส่งน้อยที่สุด เป็นวิธีขนส่งมากที่สุด และวิธีประมาณของโวเกลก็พิจารณาค่าขนส่งในเซลล์ที่มีค่าสูงสุดและสูงสุดถัดมา แล้วดูค่าที่แตกต่างกันมากที่สุด แล้วเลือกจัดสรรค่าที่มากที่สุดก่อน หรือไม่ก็อาจจะเริ่มต้นจากวิธีกฎทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ซึ่งไม่ได้เอื้อให้แก่วิธีจัดสรรค่าขนส่งให้ได้ค่าขนส่งต่ำสุดหรือสูงสุด

1. วิธีกฎทิศตะวันออกเฉียงเหนือหาผลลัพธ์เริ่มต้น ใช้หลักการเดียวกันเพราะไม่ได้เอาค่าใช้จ่ายในการขนส่งเข้ามาเกี่ยวข้อง

ตัวอย่าง 3.9 จากตัวอย่าง การจัดการขนส่งเดิม โดยเริ่มต้นจากตารางที่ได้รับการจัดสรรการขนส่งเริ่มต้นด้วยกฎทิศตะวันออกเฉียงเหนือ แล้วให้จัดสรรการขนส่งให้ได้ค่าขนส่งสูงสุด โดยวิธีหินกลิ้งและวิธีของตัวคูณ

10 5	0 10	20	11
12	7 5	9 15	20 5
0	14	16	18 5

<u>โดยวิธีหินกลิ้ง</u>

เซลล์ 21 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 12 – 10 + 0 – 7 = -5

เซลล์ 31 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 10 + 0 – 7 + 20 – 18 = -15

เซลล์ 32 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 14 – 7 + 20 – 18 = +9

เซลล์ 13 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 20 – 9 + 7 – 0 = +18

เซลล์ 33 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 16 – 9 + 20 – 18 = +9

เซลล์ 14 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 11 - 20 + 7 – 0 = -2

จะเห็นว่าเซลล์ 13 มีค่าผลรวมค่าขนส่งสูงสุด เพราะฉะนั้นจะกลิ้งมาที่เซลล์ให้มากที่สุดจะได้

[10] 5	[0]	[20] 10	[11]
[12]	[ ] 15	[9] 5	[20] 5
[0]	[14]	[16]	[18] 5

พิจารณาต่อไป

เซลล์ 21 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 12 – 10 + 20 – 9 = +13

เซลล์ 31 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 10 + 20 – 9 + 20 – 18 = +3

เซลล์ 32 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 14 – 7 + 20 – 18 = +9

เซลล์ 13 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 16 – 9 + 20 – 18 = +9

เซลล์ 14 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 11 – 20 + 9 – 20 = -20

เซลล์ 12 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 - 20 + 9 – 7 = -19

จะเห็นว่าเซลล์ 21 มีค่าผลรวมค่าขนส่งสูงสุด เพราะฉะนั้นจะกลิ้งมาที่เซลล์ให้มากที่สุดจะได้

[10] 0	[0]	[10] 15	[11]
[12] 5	[7] 15	[9]	[20] 5
[0]	[14]	[16]	[18] 5

พิจารณาต่อไป

เซลล์ 31 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 12 + 20 – 18 = -10

เซลล์ 12 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 7 + 12 – 10 = -5

เซลล์ 32 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 14 – 7 + 12 – 18 = -9

เซลล์ 23 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 9 – 12 + 0 – 20 = -23

เซลล์ 33 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 16 – 20 + 10 – 12 + 20 – 18 = -4

เซลล์ 14 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 11 – 20 + 12 – 10 = -7

จะเห็นว่าเซลล์ 32 มีค่าผลรวมค่าขนส่งสูงสุด เพราะฉะนั้นจะกลิ้งมาที่เซลล์ให้มากที่สุดจะได้

10 0	0	20 15	11
12 5	7 10	9	20 10
0	14 5	16	18

พิจารณาต่อไป

เซลล์ 31 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 12 + 7 – 14 = -19

เซลล์ 12 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 0 – 7 + 12 – 10 = -5

เซลล์ 23 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 9 – 12 + 10 – 20 = -13

เซลล์ 33 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 16 – 14 + 7 – 1 + 10 – 20 = -13

เซลล์ 14 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 11 – 20 + 12 – 10 = -7

เซลล์ 34 มีค่าผลรวมขนส่ง เท่ากับ 18 – 14 + 7 – 20 = -9

จะเห็นว่าเซลล์ทุกเซลล์มีค่าลบหมด เพราะฉะนั้นการจัดการขนส่งแบบนี้ จะได้ค่าขนส่งสูงสุดแล้ว

โดยมีค่าขนส่ง = 5 x 12 + 10 x 7 + 5 x 14 + 15 x 20 + 10 x 20

= 60 + 70 + 70 + 300 + 200

= 700 <u>ตอบ</u>

โดยวิธีของตัวคูณ

1

				U_i
10 5	0 10	20 +18	11 -	-7
2 -	9 5	9 15	20 5	0
0 -	14 +5	16 +5	18 5	-2
V_j 17	7	9	20	

2

5	10		
	5	15	5
			5

3

5		10	
	15	5	5
			5

4

5		10	
	15	0	10
		5	

ตรวจสอบดูอีกทีว่าทำให้ได้ค่าขนส่งสูงสุดแล้วหรือยัง

5

				U_i
10 5	0 -	20 10	11 -	11
12 +	7 10	9 5	20 10	0
0 -	14 5	16 0	18 -	7
V_j -1	7	9	20	

6

5		10	
	10	5	10
	5		

(7)

0		15	
5	10		10
	5		

(8)

10 0	0	20 15	11
12 5	7 10	9	20 10
0	14 5	16	18

จะเห็นว่าได้ค่าขนส่งสูงสุดแล้ว

โดยมีค่าขนส่งรวม = (0 x 10) + (5 x 12) + (10 x 7) + (5 x 14) + (15 x 20) + (10 x 20)

= 60 + 70 + 70 +300 +200

= 700 <u>ตอบ</u>

วิธีค่าขนส่งสูงสุด (Largest cost Method) หาผลลัพธ์เริ่มต้น

หลักการก็ทำนองเดียวกันกับวิธีค่าขนส่งน้อยที่สุด ต่างกันก็เฉพาะการพิจารณาจัดสรรการขนส่ง จะพยายามจัดสรรการขนส่งในเซลล์ที่มีค่าขนส่งสูงที่สุดก่อน

ตัวอย่าง 3.10 จากตารางแสดงต้นทุนการขนส่งและปริมาณการขนส่งจากจุดเริ่มต้น ไปยังจุดหมายปลายทาง

		จุดหมายปลายทาง 1	2	3	4	จำนวนที่มี
จุดเริ่มต้น	1	10	0	20 15	11	15
	2	12 5	7 10	9	20 10	25
	3	0 0	14 5	16	18	5
ปริมาณที่ต้องการ		5	15	15	10	

โดยวิธีค่าขนส่งสูงสุดจะได้

10	0	20 15	11
12 5	7 10	9	20 10
0	14 5	16	18

จากตารางผลลัพธ์เริ่มต้น โดยวิธีค่าขนส่งสูงสุดนำไปหาการจัดสรรการขนส่งที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดโดยวิธีของตัวคูณ ก่อนอื่นต้องเพิ่มศูนย์เข้าไปเพื่อให้จำนวนเซลล์ที่ถูกจัดสรรการขนส่งเท่ากับจำนวนแถวบวกสดมภ์ลบหนึ่ง

					U_i
	10 +7	0 +2	20 15	11 0	-9
	12 5	7 10	9 -	20 10	0
	0 -	14 5	16 -	18 -	7
V_j	12	7	29	20	

ฉะนั้นจะกลิ้งเซลล์ 11 และเซลล์ 12 จะได้ดังนี้

		15	0
5	10		10
	5		

0		15	
5	10		10
	5		

	0	15	
5	10		10
	5		

ลองตรวจสอบว่า ยังสามารถที่จะเพิ่มค่าขนส่งได้อีกหรือไม่ ปรากฏว่า

					U_i
	+5	0	15	-	-7
	5	10	-	10	0
	-	5	-	-	7
V_j	12	7	27	20	

∴ ดังนั้น จะต้องกลิ้งเซลล์ 11 จะได้

0		15	
5	10		10
	5		

ตรวจสอบอีกครั้ง

					U_i
	0	-	15	-	0
	5	10	-	10	2
	-	5	-	-	9
V_j	10	5	20	18	

แสดงว่าการจัดสรรการขนส่งนี้ทำให้ได้ค่าขนส่งสูงสุดแล้ว

โดยมีค่าขนส่งรวม = 15 x 20 + 5 x 12 + 10 x 7 + 10 x 7 + 10 x 20 + 5 x 14

= 700 <u>ตอบ</u>

อาจทดสอบดูว่าถ้าการกำหนด U_i, V_j ใหม่ให้ต่างออกไป ก็สามารถที่จะหาการจัดการขนส่งสูงสุดได้เหมือนกัน

					U_i
	0	-	15	-	-2
	5	10	-	10	0
	-	5	-	-	7
V_j	12	7	27	20	

แสดงว่าการจัดการขนส่งนี้ทำให้ได้ค่าขนส่งสูงสุดแล้ว

วิธีการประมาณของโวเกล เพื่อหาตารางเริ่มต้น

วิธีการในทำนองเดียวกันกับวิธีการประมาณของโวเกล ในแบบที่ต้องการทำให้ค่าขนส่งต่ำที่สุด เพียงแต่การพิจารณาผลต่างของค่าขนส่งจะพิจารณาผลต่างของค่าขนส่งต่อหน่วยที่มีค่าสูงสุดกับสูงสุดถัดมา แล้วเลือกผลต่างที่สูงสุดเพื่อจัดสรรการขนส่งลงไปที่เซลที่มีค่าขนส่งต่อหน่วยสูงสุดให้มากที่สุดเท่าที่จะมากได้ เมื่อได้ตารางเริ่มต้นแล้ว ก็สามารถที่จะหาการจัดสรรขนส่งที่ดีที่สุดด้วยวิธีกลิ้งหินหรือวิธีของตัวแปรคูณก็ได้

ตัวอย่าง จากตัวอย่างเดิม

10	0	20	11	15
12	7	9	20	25
0	14	16	18	5
5	15	15	10	

ให้หาตารางเริ่มต้นสำหรับการหาค่าการจดสรรขนส่งที่มีค่าสูงสุดด้วยวิธีการประมาณของโวเกล

				ปริมาณที่มี	Δ_1	Δ_2	Δ_3
		15		15	9*	-	-
5	10		10	25	8	8	13*
	5			5	2	4	4
ปริมาณความต้องการ 5	15	15	10				
Δ_1 2	7	4	2				
Δ_2 12*	7	-	2				
Δ_3 -	7	-	2				

ต่อไปนำมาพิจารณาหาว่าเป็นการจัดสรรที่ได้ค่าขนส่งสูงที่สุดแล้วยังปรากฏว่าเป็นการจัดสรรที่ได้ค่าขนส่งสุดแล้ว จึงไม่ต้องทำต่อ

ดังนั้นจะมีการจัดสรรการขนส่งดังนี้

		15	
5	10		10
	5		

โดยมีค่าขนส่งรวม = 15 x 20 + 5 x 12 + 10 + 7 + 10 x 20 + 5 x 14

= 700 <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.11 จากตารางความต้องการและปริมาณของที่มีพร้อมทั้งค่าขนส่งต่อหน่วยดังนี้

10	20	5	7	10
13	9	12	18	20
4	15	7	9	30
15	7	1	0	40
3	6	5	9	50
60	60	20	10	

พิจารณาหาตารางเริ่มต้นโดยวิธีของค่าขนส่งสูงสุด จะจัดสรรการขนส่งได้ดังนี้

	10		
20			
	30		
40			
	20	20	10

ต่อไปทำต่อโดยวิธีของตัวคูณ เพื่อหาวิธีการจัดสรรการขนส่งที่จะทำให้ค่าขนส่งสูงสุด

เนื่องจากจำนวนเซลที่ได้รับการจัดสรรขนส่งไม่เท่ากับจำนวนสดมภ์บวกแถวลบหนึ่ง ฉะนั้นจึงต้องเพิ่มศูนย์เข้าไปในเซลใดเซลหนึ่งเพื่อจะได้ทำต่อไปได้

					U_i
	10 (-)	20 / 10	5 (-)	7 (-)	8
	13	9 (-)	12 / 0	18 (-)	7
	4 (-)	15 / 30	7 (-)	9 (-)	3
	15	7 (-)	1 (-)	0 (-)	9
	3 (-)	6 / 20	5 / 20	9 / 10	0
V_j	6	12	5	19	

ปรากฏว่ากาจัดสรร การขนส่งแบบนี้เป็นการจัดสรรการขนส่งที่ให้ค่าขนส่งสูงสุดแล้ว

โดย

ค่าขนส่งรวม = 10 x 20 + 20 x 13 + 0 x 12 + 30 x 15 + 40 x 15

+ 20 x 12 + 20 x 5 + 10 x 19

= 200 + 260 + 450 + 600 + 240 + 100 + 190

= 2,040 **ตอบ**

แบบหุ่นการขนส่งที่สามารถส่งต่อไปได้อีก

(Transshipment Model)

ในทางปฏิบัติปัญหาการขนส่งจุดหมายปลายทาง อาจจะเป็นจุดเริ่มต้นสำหรับขนส่งไปยังจุดหมายปลาทางใหม่ เพราะการขนส่งสถานการณ์จริง มักจะมีการขนส่งเป็นทอดๆ เช่น ขนส่งจากกรุงเทพฯ มาถึงหาดใหญ่ก่อน แล้วหาดใหญ่จึงส่งต่อมาปัตตานี

เป็นการขยายว่าจุดหมายปลายทางในแบบหุ่นของการขนส่งสามารถเป็นจุดเริ่มต้นที่จะส่งสินค้าต่อไปอีก และจุดเริ่มต้นในแบบหุ่นของการขนส่งอาจจะเป็นจุดหมายปลายทางของการขนส่งสินค้าอีกก็ได้ จึงสร้างแบบหุ่นการขนส่งที่ให้จุดหมายปลายทางเป็นจุดเริ่มต้นได้ และจุดเริ่มเป็นจุดหมายปลายทางได้อีก ซึ่งแบบหุ่นอันนี้อันนี้สามารถลดค่าขนส่งลงได้อีก ตัวอย่างเช่น การขนส่งจากกรุงเทพฯ มาปัตตานีแพงกว่าการขนส่งจากกรุงเทพฯ มาหาดใหญ่แล้วไปปัตตานี ซึ่งรูปแบบอันนี้อาจจะมองให้ง่ายโดยพิจารณาว่า ปัตตานีเป็นเมืองเล็ก การขนส่งจากกรุงเทพฯ มีปริมาณน้อย แต่เราจำเป็นต้องใช้รถขนาดเดียวกันขนสินค้า ทำให้ค่าใช้จ่ายต่อหน่วยสูง แต่ถ้าเราแวะหาดใหญ่ก่อน จะสามารถบรรทุกสินค้ามาส่งที่หาดใหญ่ได้ด้วย โดยบรรทุกสินค้ามาส่งที่หาดใหญ่ได้ด้วย โดยบรรทุกสินค้าเต็มรถเลย ค่าขนส่งต่อหน่วยก็ลดลง และในวามเป็นจริงการขนส่งสินค้ามักจะเป็นข่ายงาน (net work) โดยส่งได้เป็นทอดๆ

ตัวอย่าง 3.12 จงพิจารณาการจัดสรรการขนส่งที่เป็นแบบหุ่น การขนส่งที่สามารถส่งต่อไปได้ โดยทำให้ค่าใช้จ่ายในการขนส่งต่ำที่สุด กำหนดค่าขนส่งต่อหน่วยและปริมาณที่ต้องการพร้อมปริมาณที่มีอยู่ดังตาราง

จุดหมายปลายทาง (j)

		1	2	3	ปริมาณที่มีอยู่
จุดเริ่มต้น (i)	1	10	20	30	100
	2	20	50	40	200
ปริมาณที่ต้องการ		100	100	100	

จัดเป็นแบบหุ่นการขนส่งที่สามารถส่งไปได้

จุดหมายปลายทาง / จุดเริ่มต้น		i		j			ปริมาณที่มีอยู่
		1	2	1	2	3	
i	1			10	20	30	100 + C
	2			20	30	40	200 + C
j	1						C
	2						C
	3						C
ปริมาณที่ต้องการ		C	C	100 + C	100 + C	100 + C	300 + C

จะเห็นว่า จุดหมายปลายทาง 5 จุด (ผลรวมของจุดหมายปลายทางและจุดเริ่มต้นเดิม)

จุดเริ่มต้น 5 จุด

จะสังเกตได้ว่า 1. จุดหมายปลายทางกับจำนวนจุดเริ่มต้นของแบบหุ่นการขนส่งที่สามารถส่งต่อได้เป็นจำนวนที่เท่ากัน

2. จำนวนปริมาณที่ต้องการและปริมาณที่มีอยู่ จะเพิ่มจากเดิมเท่ากับตัวคงค่าหนึ่งตัวให้เท่ากับ c

โดย $c \geq \sum a_i$ หรือ $\sum b_j$

a_i เป็นปริมาณที่มีอยู่ของจุดเริ่มต้นที่ i

b_j เป็นปริมาณที่ต้องการของจุดหมายปลายทาง j

ในที่นี้ $\sum a_i = \sum b_j = 300$

$\therefore$ ให้ $C = 300$

และสมมุติค่าขนส่งของเซลที่เหลือขึ้นมาเพื่อจะใช้ในการหาคำตอบที่ดีที่สุดในการจัดการขนส่ง

∴ จะได้แบบหุ่นใหม่ดังนี้

		i		j			ปริมาณที่มีอยู่
		1	2	1	2	3	
i	1	0	80	10	20	30	400
	2	10	0	20	50	40	500
j	1	20	30	0	40	10	300
	2	40	20	10	0	20	300
	3	60	70	80	20	0	300
ปริมาณที่ต้องการ		300	300	400	400	400	1800

หาตารางเริ่มต้นโดยวิธีประมาณของโวเกลจะได้

						Δ
0	80	10	20	30	400	10
10	0	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20	300	10
60	70	80	20	0 / 300	300	20*
300	300	400	100	100		
Δ 10	30	10	20	20		

						Δ
0	80	10	20	30	400	10
10	0	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	300	10
40	20	10	0	20	300	10
300	300	400	100	100		
Δ 10	30	10	20	20		

						Δ
0	80	10	20	30	400	10
10	0 / 300	20	50	40	500	10
20	30	0	40	10	500	10
300	300	400	100	100		
Δ 10	30	10	20	20		

					Δ
0	10	20	30	400	10
10	20	50	40		10
20	0	40	10 / 100		10
300	400	100	100		
Δ 10	10	20	20		

				Δ
0	10	20	400	10
10	20	50	200	10
20	0	40	200	20*
300	400	100		
Δ 10	10	20		

				Δ
0	10	20 / 100	400	10
10	20	50	200	10
300	200	100		
Δ 10	10	30		

			Δ
0 / 300	10	300	10
10	20 / 200	200	10
Δ 10	10		

∴ จะได้รับการจัดสรรขนส่งเริ่มต้นดังนี้

300			100	
	300	200		
		200		100
			300	
				300

โดยมีค่าใช้จ่ายในการขนส่งรวม = 300 x 0 + 300 x 0 + 200 x 20 + 200 x 0 + 100 x 20 + 300 x 0 + 100 x 10 + 300 x 0

= 4000 + 2000 + 1000

= 7000 <u>ตอบ</u>

หาการจัดสรรการขนส่งที่จะให้ได้ค่าขนส่งน้อยที่สุด โดยวิธีของตัวคูณ

						U_i
	0 / 300	80 / +	10	20 / 100	30 / +	0
	10 / +	0 / 300	20 / 200	50 / +	40 / +	-10
	20 / +	30 / +	0 / 200	40 / +	10 / 100	-30
	40 / +	20 / +	10 / +	0 / 300	20 / +	-20
	60 / +	70 / +	80 / +	20 / +	0 / 300	-40
V_j	0	10	30	20	40	

กลิ้ง x_{13}

0 / 300	80 / +	10	20 / 100	30 / +
10 / +	0 / +	20 / 200	50 / +	40 / +
20 / +	20 / +	0 / 200	40 / +	10
+	20 / +	10 / +	0 / 300	20 / +
60 / +	70 / +	80 / +	20 / +	0 / 300

ค่าขนส่งต่ำสุด $\therefore$ $= 200 \times 20 + 100 \times 20 + 100 \times 10$

$= 7{,}000$

ตอบ

แบบหุ่นการขนส่งเพื่อให้เวลาเดินทางน้อยที่สุด

เป็นอีกแบบหุ่นหนึ่งของการแก้ปัญหาขนส่ง โดยมองในแง่เวลาการจัดการขนส่งให้เสร็จสิ้นในเวลาที่สั้นที่สุด เป็นแบบหุ่นที่แตกต่างจากปัญหาการขนส่งที่มองเฉพาะค่าใช้จ่ายในการขนส่ง เพราะถ้ามองในแง่เวลาการจัดสรรการขนส่ง อาจจะทำไปพร้อมๆ กันได้ แต่ให้การจัดสรร ปริมาณสินค้าจากจุดเริ่มต้น ไปยังจุดหมายปลายทางทั้งหมดแล้วเสร็จในเวลาน้อยที่สุด

แบบหุ่นนี้หาตารางเริ่มต้นจากวิธีกฎทิศตะวันตกเฉียงเหนือ เพราะเป็นการจัดสรรตามปริมาณที่ต้องการและปริมาณที่มีอยู่

ตัวอย่าง 3.13 ถ้าต้องการจัดสรรการขนส่งจากจุดเริ่มต้น 3 แหล่ง ไปยังจุดหมายปลายทาง 4 แหล่ง โดยกำหนดปริมาณการขนส่งที่ต้องการและที่มี พร้อมทั้งเวลาที่ใช้ขนส่งจากแต่ละจุดเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทาง ดังต่อไปนี้

10	10	20	11	15
1	7	9	20	25
12	14	16	18	5
12	8	15	10	

ทำการจัดสรรการขนส่งเริ่มต้นจากวิธีกฎทิศตะวันตกเฉียงเหนือ จะได้

10 12	10 3	20	11
1	7 5	9 15	20 5
12	14	16	18 5

จากนี้ก็เริ่มหาเวลาที่น้อยที่สุดที่ทำการจัดสรรปริมาณทั้งหมดจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทางได้เสร็จสิ้น

1. พิจารณาค่าเวลา (t) ในเซลที่ได้รับการจัดสรร ดูว่า t ในเซลใดมีค่ามากที่สุดให้เท่ากับ t*

2. พิจารณาดูเซลที่ไม่ได้รับการจัดสรรว่ามีเซลไหนบ้างที่มีค่า t มากกว่าหรือเท่ากับt* จะกากะบาดเซลนั้นทิ้งแล้วย้ายปริมาณที่จัดการขนส่งในเซลที่มี t* ออกให้หมดโดยย้ายโดยวิธีของการกลิ้งหินตามวงจรใดๆ ก็ได้

3. ทำในทำนองเดียวกับข้อ 1 อีก โดยพิจารณาจากเซลที่เหลือจากถูกกากะบาดแล้วจนกระทั่งทุกเซลถูกขีดทิ้งหมด ก็จะหมายวามว่าไม่มีเซลที่ไม่ได้รับการจัดสรรการขนส่งใดที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ t* ในเซลที่ถูกจัดสรรการขนส่งแล้ว ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

10 12	10 3	20	11
1	7 5	9 15	20 5
12	14	16	18 5

1. เซลที่ถูกจัดสรรมีค่าเวลามากที่สุดเท่ากับ 20

$\therefore$ t* = 20

2. เซลที่ไม่ถูกจัดสรรที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 20 ก็คือ เซล 13 $\therefore$ กากะบาดทิ้ง

3. กลิ้งปริมาณ 5 ออกจากเซล 24 (เซลที่ถูกจัดสรรการขนส่งที่ใช้เวลามากที่สุด)

$\therefore$ กลิ้งตามวงจร $x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12}$

จะได้การจัดสรรใหม่ดังนี้

12			3
	8	15	2
			5

แต่ยังไม่หมดต้องกลิ้งต่อตามวงจร

จะจัดสรรใหม่ดังนี้

10 10	10	20	11 5
1 2	7 8	9 15	20
12	14	16	18 5

เมื่อกลิ้งปริมาณในเซล 24 หมดแล้วก็พิจารณาเวลาใหม่

1. ในเซลที่ถูกจัดสรรปรากฏว่า เซล 34 มีค่าเวลามากที่สุด =18

$\therefore \quad t^* = 18$

2. กากะบาดเซลที่ไม่ถูกจัดสรรที่มีค่าเวลาสูงกว่าหรือเท่ากับ 18

3. กลิ้งปริมาณ 5 ออกจากเซล 34 ตามวงจร

จะได้

11 10	10		11
1 2	7 8	9 15	
12	14	16	18 5

ต่อไปพิจารณาเวลาใหม่ (1) ปรากฏว่าเซลที่ถูกจัดสรร 31 มีค่าเวลามากที่สุด = 12

$\therefore \; t^* = 12$

(2) กากะบาดเซลที่ไม่ได้รับการจัดสรรที่มีค่าเวลามากกว่าหรือเท่ากับ 12

(3) ปรากฏว่าไม่สามารถกลิ้งปริมาณ 5 ออกจากเซล 31 ได้อีกแล้ว ฉะนั้น เวลาที่น้อยที่สุดในการจัดสรรการขนส่งให้แล้วเสร็จตามต้องการเท่ากับ 12

<u>**ตอบ**</u>

ตัวอย่าง ถ้ามีแหล่งเริ่มต้น 4 แหล่ง และแหล่งจุดหมายปลายทาง 4 แหล่ง โดยมีตารางแสดงปริมาณสินค้าที่ต้องการและปริมาณสินค้าที่มีอยู่ในแต่ละแหล่ง จุดหมายปลายทางและแหล่งเริ่มต้น พร้อมทั้งเวลาที่ใช้ในการขนส่งจากแหล่งแต่ละแหล่งเริ่มต้นไปแต่ละแหล่งจุดหมายปลายทาง ดังนั้น

	แหล่งจุดหมายปลายทาง				ปริมาณที่มีอยู่
แหล่งเริ่มต้น	6	7	3	4	
	7	9	1	2	
	6	5	16	7	
	18	9	10	10	
ปริมาณที่ต้องการ	10	5	10	5	

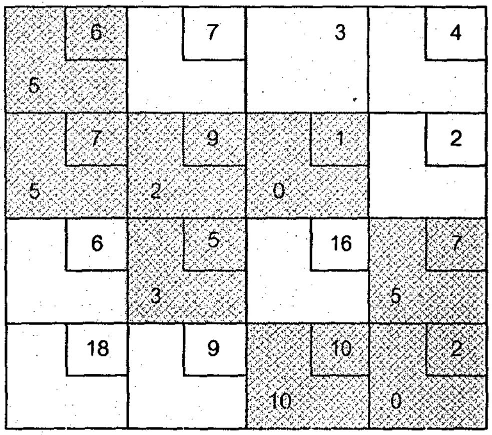
วิธีทำ การจัดสรรการขนส่ง เริ่มต้นด้วยกฎทิศตะวันตกเฉียงเหนือ จะได้

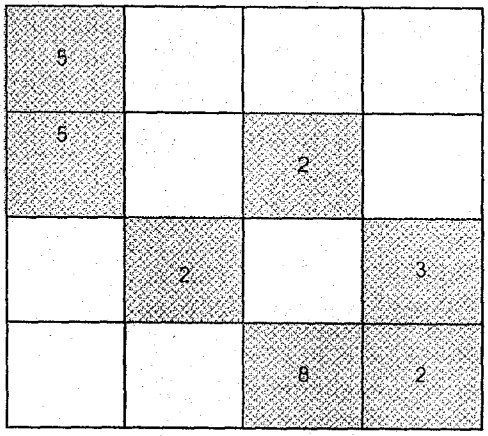
5			
5	2		
	3	5	
		5	5

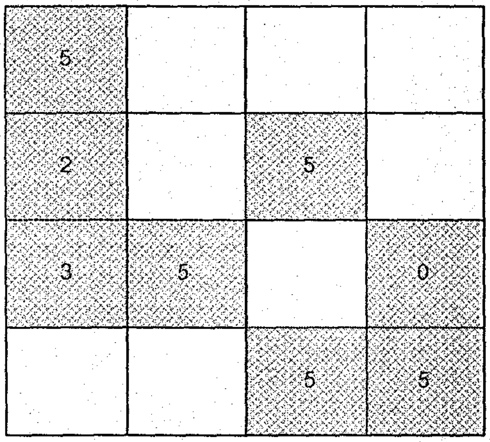
และดำเนินการทำนองเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว เพื่อหาการจัดสรรการขนส่งที่เสียเวลาการขนส่งน้อยที่สุด

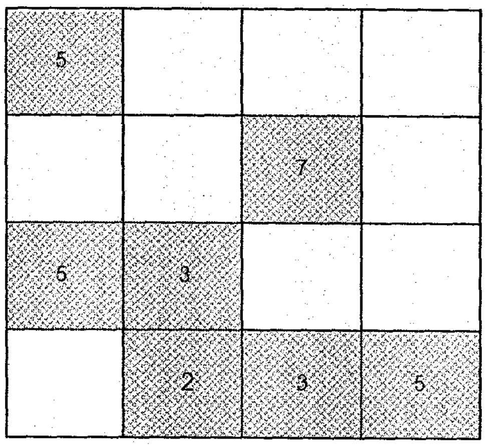
6 5	7	3	4
7 5	9 2	1	2
6	5 3	16 5	7
18	9	10 5	2 5

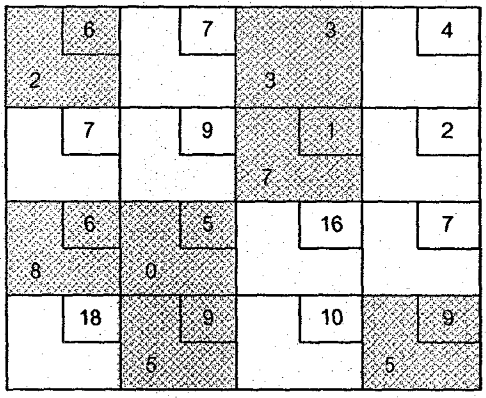
6 5	7	3	4
7 5	9 2	1	2
6	5 3	16	7 5
18	9	10 10	2 0

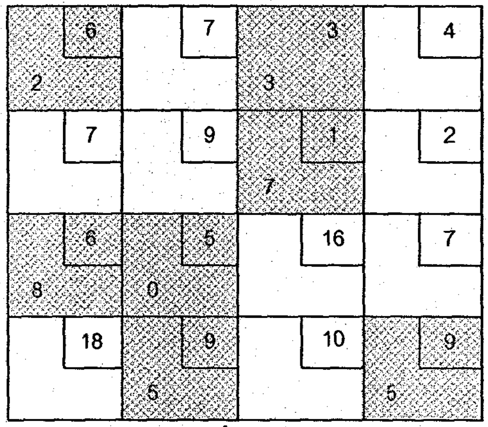












ดังนั้น เวลาต่ำสุดที่ใช้ในการขนส่งจากแหล่งเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทาง = 9 **ตอบ**

แบบหุ่นการมอบหมายงาน
(The Assignment Model)

เป็นอีกรูปแบบหนึ่งในการที่จะมอบหมายงานแต่ละอย่างให้กับแต่ละคนหรือแต่ละเครื่องจักร ให้เหมาะสม หรือให้ค่าใช้จ่ายในการทำงานชิ้นนั้นให้สำเร็จด้วยค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ลักษณะที่แตกต่าง จากการขนส่งทั่วไปก็คือ การมอบมายงาน 1 งานต่อเครื่องจักร 1เครื่อง หรือคน 1 คน

ลองพิจารณาสถานการณ์ในการมอบหมายงาน m งาน ให้กับเรื่องจักร n เครื่อง โดยมี
ค่าใช้จ่าย = C_{ij}
โดยที่ $i = 1, 2, 3, ...m$
และ $j = 1, 2, 3, ...n$
จุดประสงค์ก็คือต้องการมอบหมายงานให้แก่เครื่องจักร (โดย 1 งานต่อเครื่องจักร 1 เครื่อง) ให้มี ค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด
ซึ่งสามารถเขียนเป็นรูปแบบทั่วไป ดังนี้

เครื่องจักร

		1	2	n	ปริมาณที่มีอยู่
	1	C_H	C_{12}	C_{1n}	1
งาน	2	C_{21}	C_{22}	C_{2n}	1
	.				
	.				
	.				
	m	C_{m1}	C_{m2}	C_{mn}	1
ปริมาณที่ต้องการ		1	1	1	

ในการแก้ปัญหา จะต้องทำให้ค่า $m = n$ เสียก่อน ทำนองเดียวกับปัญหาการขนส่งโดยทั่วไป ซึ่ง อาจจะจัดเป็นรูปแบบของโปรแกรมเชิงเส้นได้ ดังนี้

ทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ ; \ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ ; \ j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n$$

$$xij = \begin{cases} 0 & \text{ถ้างานที่ } j \text{ ไม่ถูกมอบหมายโดยเครื่องจักรที่ } i \\ 1 & \text{ถ้างานที่ } j \text{ ถูกมอบหมายโดยเครื่องจักรที่ } i \end{cases}$$

หลักการในการหาผลลัพธ์แบบหุ่นการมอบหมายงานจะอธิบายไปพร้อมกับตัวอย่าง

ตัวอย่าง ถ้ามีเครื่องจักรอยู่ 3 เครื่อง และงานอยู่ 3 งาน โดยมีค่าใช้จ่ายของเครื่องจักรแต่ละเครื่อง ในการทำงานแต่ละงาน ดังตารางต่อไปนี้

เครื่องจักร

		1	2	3	ปริมาณที่มีอยู่
งาน	1	5	7	9	1
	2	14	10	12	1
	3	15	13	16	1
ปริมาณที่ต้องการ		1	1	1	

การมอบหมายงานเริ่มต้นจะมอบหมายงานในลักษณะของเส้นทะแยงมุมตามกฎทิศตะวันออกเฉียงเหนือ ดังนี้

5 1	7	9
14	10 1	12
15	13	16 1

วิธีหาคำตอบที่ดีที่สุด คือ มอบหมายให้กับเครื่องจักรแบบ 1 ต่อ 1 โดยมีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด ทำได้ดังนี้

1. จะดูตามแถว ค่าใช้จ่ายในเซลที่น้อยที่สุด ลบออกจากค่าใช้จ่ายแต่ละเซลในแถว (ค่าน้อยที่สุดในแถวที่ i ให้เท่ากับ p_i) จะได้

0	2	4	$P_1 = 5$
4	0	2	$P_2 = 10$
2	0	3	$P_3 = 13$

2. จากข้อ 1 ถ้ายังมอบหมายงานไม่ได้ตามที่ต้องการ ก็ให้ดูตามคอลัมน์ค่าใช้จ่ายในเซลที่น้อยที่สุด ลบออกจากค่าใช้จ่ายแต่ละเซลล์ในคอลัมน์ (ค่าน้อยที่สุดในคอลัมน์ที่ j ให้เท่ากับ q_j) จะได้

0	2	2
4	0	0
2	0	1
$q_1 = 0$	$q_2 = 0$	$q_3 = 2$

ดังนั้นสามารถเมื่อมอบหมายงานได้ดังนี้

5 1	7	9
14	10	12 1
15	13 1	16

และจะสิ้นค่าใช้จ่าย $= 1 \times 5 + 1 \times 13 + 1 \times 12$

$= 30$

หรือค่าใช้จ่าย $= P_1 + P + P_3 + q_2$ **<u>ตอบ</u>**

ในบางครั้งการแก้ปัญหาการมอบหมายงาน อาจจะยุ่งยากมากขึ้น พิจารณาได้จากตัวอย่างดังนี้

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้ามีงาน 4 งาน และเครื่องจักร 4 เครื่อง และมีค่าใช้จ่ายในการมอบหมายงานกับเครื่องจักร ดังตารางต่อไปนี้

	1	2	3	4	ปริมาณที่มีอยู่
1	1	4	6	3	1
2	9	7	10	9	1
3	4	5	11	7	1
4	8	7	8	5	1
ปริมาณที่ต้องการ	1	1	1	1	

พิจารณาตามแถวเพื่อหาค่าใช้จ่ายต่ำสุดไปลบออกจากแต่ละเซลล์ในแถวจะได้

	1	2	3	4	
1	0	3	5	2	$p_1 = 1$
2	2	0	3	2	$p_2 = 7$
3	0	1	7	3	$p_3 = 4$
4	3	2	3	0	$p_4 = 5$

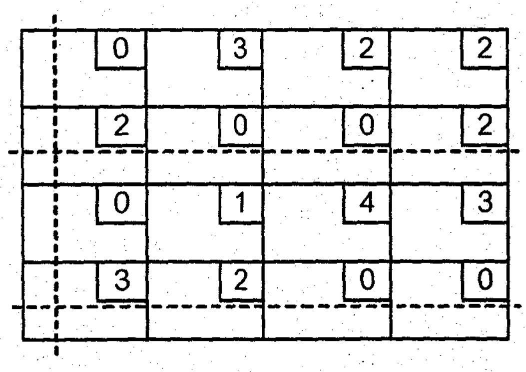
พิจารณาตามคอลัมน์ เพื่อหาค่าใช้จ่ายต่ำสุดไปลบออกจากแต่ละเซลล์ในคอลัมน์จะได้

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

$q_3 = 3$

จากตารางอันนี้ เราไม่สามารถที่จะมอบหมายงานได้ถูกต้อง ดังนั้นจะต้องพิจารณาต่อไป โดยทำดังนี้

1. ลากเส้นตามแนวตั้งหรือแนวนอนที่น้อยเส้นที่สุด ซึ่งสามารถผ่านเซลล์ที่มีค่าใช้จ่ายที่เป็นศูนย์ได้ทุกเซลล์ ถ้าจำนวนเส้นเท่ากับ n จะสามารถมอบหมายงานได้ แต่ถ้าไม่เท่ากับ n ก็จะมอบหมายงานได้ไม่ครบตามต้องการ พิจารณาดูจะได้ดังนี้



ปรากฏว่าได้ 3 เส้น ดังนั้น ยังมอบหมายงานได้ไม่ครบตามต้องการ

2. ให้พิจารณาเซลล์ที่ไม่ถูกเส้นตรงลากผ่าน ว่าเซลล์ใดมีค่าใช้จ่ายต่ำที่สุด (ให้ = r) แล้วเอาค่าใช้จ่ายนั้นเป็นตัวลบออกจากค่าใช้จ่ายทุกเซลล์ที่ไม่ถูกเส้นตรงลากผ่าน และเอาจำนวนนี้ไปบวกกับค่าใช้จ่ายของเซลล์ที่เป็นจุดตัดของเส้นตรงในแนวตั้งและแนวนอน ดังต่อไปนี้

จะได้ว่า $r = 1$ เป็นค่าใช้จ่ายในเซลล์ 32

ดังนั้นเอาค่า 1 ไปลบออกจากค่าใช้จ่ายของเซลล์ทุกเซลล์ที่ไม่ได้ถูกเส้นตรงลากผ่าน จะได้

0	2	4	1
2	0	0	2
0	0	3	2
3	2	0	0

แล้วบวกกับค่าใช้จ่ายที่เซลล์ที่เส้นตรงแนวตั้งและแนวนอนตัดกัน จะได้

0	2	1	1
3	0	0	2
0	0	3	2
4	2	0	0

แล้วลากเส้นตรงตามแนวนอนและแนวตั้งใหม่ให้ผ่านเซลล์ที่มีค่าใช้จ่ายเป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้

0	2	1	1
3	0	0	2
0	0	3	2
4	2	0	0

ปรากฏว่าลากได้ 4 เส้น เท่ากับจำนวน n พอดี ดังนั้น เราสามารถมอบหมายงานเท่ากับเครื่องจักรได้แล้ว ดังนี้

1 1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5 1

โดยมีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด $= 1 \times 1 + 1 \times 5 + 1 \times 10 + 1 \times 5$

$= 21$

ซึ่งมีค่า $= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + q_3 + r$

$= 1 + 7 + 4 + 5 + 3 + 1$

$= 21$ **<u>ตอบ</u>**

บทที่ 4

การประเมินโปรแกรมและเทคนิคการตรวจสอบ
Program Evaluation and Review Technique

4.1 การประเมินโปรแกรมและเทคนิคการตรวจสอบ Program Evaluation and Review Technique

การประเมินโปรแกรมและเทคนิคการตรวจสอบหรือเรียกสั้นๆ ว่า PERT ได้รับการพัฒนาขึ้นมาเมื่อประมาณปี ค.ศ. 1950 โดยที่ทำการโครงการพิเศษของกองทัพเรือของสหรัฐอเมริกา โดยเฉพาะโครงการจรวดขั้วโลก ซึ่งประกอบด้วยบริษัทผู้รับเหมาหลัก 250 บริษัท และบริษัทรับเหมาย่อย 9,000 บริษัท คงจะมองเห็นว่าโครงการอันนี้ยุ่งยากซับซ้อนแค่ไหนส่วนการที่จะรักษาควบคุม ตรวจสอบงานย่อยๆ เป็นร้อยเป็นพันของโครงการ การนำ PERT เข้ามาใช้ในโครงการนั้น ช่วยให้ผู้บริหารทราบว่า

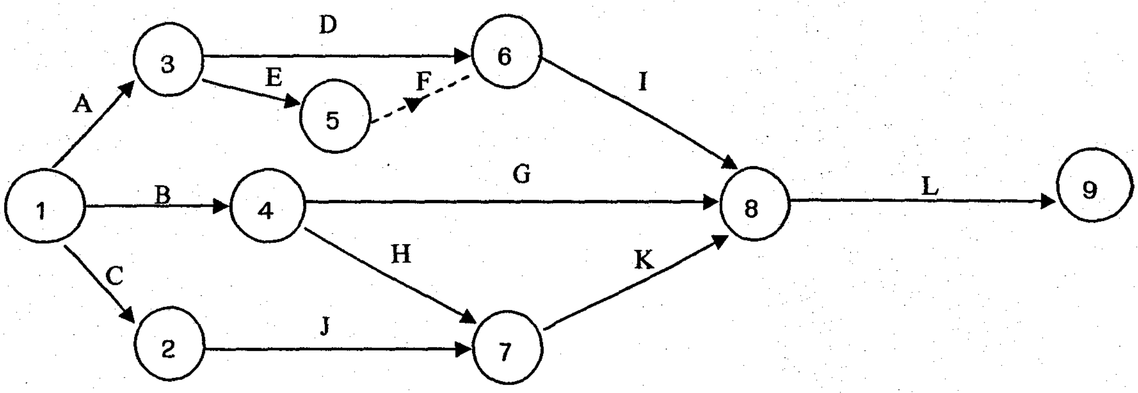
1. โครงการนี้จะเสร็จเมื่อไร
2. แต่ละส่วนของโครงการมีกำหนดการว่าเริ่มและเสร็จเมื่อไร
3. ในส่วนย่อยๆ เป็นร้อยเป็นพันของโครงการมีส่วนใดบ้างที่จะต้องเสร็จตรงเวลา เพื่อจะไม่ให้โครงการใหญ่เสร็จช้าออกไป
4. เป็นไปได้ไหมที่จะเอาทรัพยากรจากส่วนที่ไม่วิกฤต (ส่วนที่สามารถเลื่อนเวลาแล้วเสร็จออกไปได้) ไปยังส่วนวิกฤต (ส่วนที่ต้องเสร็จตามเวลา) โดยที่ไม่ให้มีผลกระทบต่อเวลาที่ใช้ทั้งหมดที่ให้โครงการใหญ่แล้วเสร็จ
5. ในส่วนย่อยๆ เป็นร้อยเป็นพันโครงการของโครงการทั้งหมด ตรงไหนและเวลาใดที่ผู้บริหารจะต้องเข้มงวดเป็นพิเศษ

ตัวอย่าง 4.1 บริษัทไพโอเนียร์ ต้องการขายเครื่องรุ่นใหม่ เพื่อการแนะนำผลิตภัณฑ์ใหม่ให้ได้ 1,000 เครื่อง โดยกำหนดกิจกรรมดังนี้

สัญลักษณ์ของกิจกรรม	รายละเอียดของกิจกรรม	จะต้องผ่านกิจกรรมนี้มาก่อน
A	พัฒนาแผนการโฆษณา	-
B	พัฒนาแผนการฝึกอบรม	-
C	พัฒนาแผน ส่งเสริม วัตถุดิบ	-
D	กำหนดเวลาโฆษณา วิทยุ โทรทัศน์ และหนังสือพิมพ์	A
E	พัฒนาการทำสำเนาโฆษณา	A
F	กิจกรรมลวง (Dummy Activity) คืองานที่ไม่ใช้เวลา ซึ่งดูง่ายๆ จากกิจกรรม I จะเริ่มต้นไม่ได้จนกว่ากิจกรรม E เสร็จเรียบร้อยแล้ว	E

สัญลักษณ์ของกิจกรรม	รายละเอียดของกิจกรรม	จะต้องผ่านกิจกรรมนี้มาก่อน
G	เตรียมส่งเสริมวัตถุดิบซึ่งจะใช้	B
H	เตรียมวัตถุดิบที่จะใช้ในโปรแกรมฝึกหัดอบรม	B
I	ให้มีการโฆษณา แนะนำผลิตภัณฑ์ทางสื่อมวลชน	D, F
J	คัดเลือกผู้บริหารที่จะให้การฝึกอบรมได้	C
K	เปิดโปรแกรมฝึกอบรม	H, J
L	ผลิตภัณฑ์ได้ 1,000 หน่วย	G, I, K

จากข้อมูลดังกล่าวสามารถนำมาเขียนเป็นข่ายงาน PERT (PERT Network)



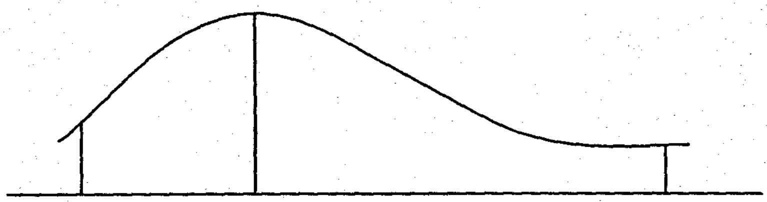
หมายเหตุ 1. จุดเริ่มต้นหรือจุดสิ้นสุดกิจกรรมเรียกว่า โหนด (node) ปกติจะเขียนเป็นตัวเลขแล้วล้อมด้วยวงกลม เช่น 4 อ่านว่าโหนดที่ 4

2. กิจกรรมลวง ใช้แทนด้วยเส้นไข่ปลา

3. เลขที่ของโหนดเรียงตามลำดับงาน โดยเลขที่สูงกว่าอยู่ทางขวามือ

เวลาที่ใช้ในแต่ละกิจกรรมของข่ายงาน PERT ปกติจะใช้เป็นสัปดาห์ ในการแสดงเวลาที่ใช้ทำกิจกรรมหนึ่งๆ ให้แล้วเสร็จ เราจะประมาณจากเวลาทำงานที่ใช้ทำกิจกรรมนี้ แล้วหารด้วยจำนวนวันทำงานต่อสัปดาห์ ตัวอย่างเช่น ถ้ามีกิจกรรมที่คาดว่าจะใช้เวลา 10 วันทำงาน และปกติสัปดาห์หนึ่งทำงาน 5 วัน เราก็จะประมาณได้ว่ากิจกรรมนี้คาดว่าจะใช้เวลา 2 สัปดาห์ และปกติถ้าเป็นทศนิยมก็จะใช้เพียงหลักเดียว

เนื่องจากความไม่แน่นอนเข้ามาเกี่ยวข้องกับโครงการ ซึ่งไม่สามารถทำได้ในวิธีและเวลาเดียวกันกับที่เคยผ่านมาแล้ว การประมาณค่าของเวลาของกิจกรรม เราก็จะใช้การแจกแจงของความน่าจะเป็นเข้ามาช่วย จะได้ว่าเวลาที่ใช้ในการทำกิจกรรมจะมีการแจกแจงแบบเบต้า (Beta distribution) ดังนี้



a: เวลาที่น้อยที่สุดที่จะทำให้กิจกรรมนั้นแล้วเสร็จ

b: เวลาที่มากที่สุดที่จะทำให้กิจกรรมนั้นแล้วเสร็จ

m: เวลาปกติที่ทำให้กิจกรรมนั้นแล้วเสร็จ

จากคุณสมบัติของการแจกแจงแบบเบต้าจะได้ว่า

ค่าคาดหมายของเวลา = $E(t) = \frac{a+4m+b}{6}$

โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\frac{b-a}{6}$

ดังนั้นจากค่า a, m และ b ที่กำหนดให้ของแต่ละกิจกรรม ดังตารางข้างล่างนี้ สามารถหาเวลาที่คาดหมายแต่ละส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกิจกรรมได้ดังนี้

กิจกรรม	a	m	b	ค่าคาดหมาย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
A	1	2	3	2	.33
B	1	2	3	2	.33
C	1	2	3	2	.33
D	1	2	9	3	1.33
E	2	3	10	4	1.33
F		(กิจกรรมลวง)		0	0
G	3	6	15	7	2.00
H	2	5	14	6	2.00
I	1	4	7	4	1.00
J	4	9	20	10	2.67
K	1	2	9	3	1.33
L	4	4	4	4	0

4.2 เส้นทางวิกฤต (The Critical Path)

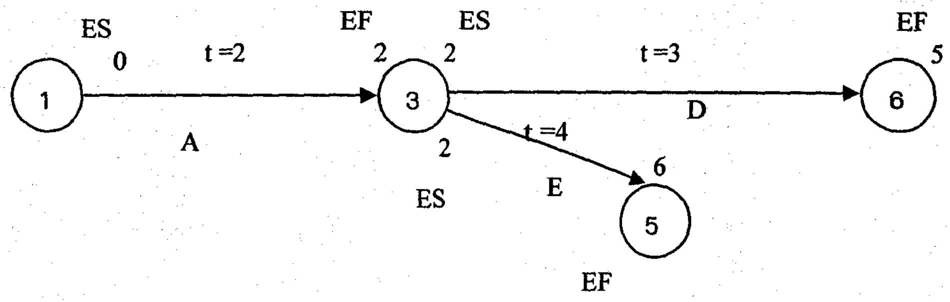
เส้นทางวิกฤตก็คือ เส้นทางที่ใช้เวลามากที่สุดในการทำโครงการให้แล้วเสร็จ ใช้ตัวย่อว่า CPM ซึ่งวิธีการหาเส้นทางวิกฤตนั้นเราพิจารณาได้จาก

1. กฎเวลาเริ่มต้นแรกสุด (The Earliest-Start-Time Rule) ใช้คำย่อว่า ES

2. กฎเวลาแล้วเสร็จแรกสุด (The Earliest-Finish-Time Rule) ใช้คำย่อว่า EF

ซึ่งอธิบายวิธีหา ES และ EF ได้ดังนี้

ในการเขียนข่ายงานของโครงการ เราจะมีค่าคาดหมายของเวลากำกับอยู่ที่เส้นทางเชื่อมโหนดด้วย ดังตัวอย่างเช่น

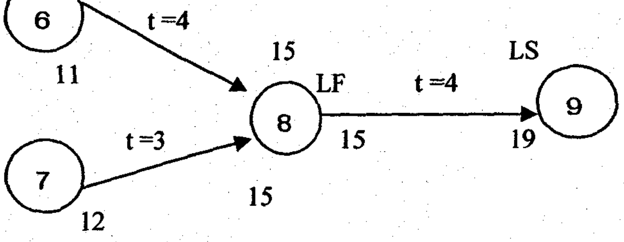


จากโหนดเริ่มต้น 1 ES = 0 เมื่อผ่านเส้นทางกิจกรรม A ต้องใช้ค่าคาดหมายของเวลาเท่ากับ 2 เมื่อถึงโหนด 3 ก็คือต้องใช้เวลาเท่ากับ 2 ดังนั้น EF = 2 ส่วนทางเดินจากโหนดที่ 3 ไปยังโหนดที่ 5 และ 6 ก็เช่นเดียวกัน จากจุดเริ่มต้นของโหนด 3 ต้องผ่านเวลาการทำกิจกรรม A เท่ากับ 2 ดังนั้นที่โหนด 3 จะเริ่มต้นด้วย ES = 2 ถ้าทำกิจกรรม D ก็ต้องผ่านค่าคาดหมายของเวลาเท่ากับ 3 ดังนั้น เมื่อทำกิจกรรม D เสร็จแล้ว ก็ต้องใช้เวลาเท่ากับ 5 ดังนั้น EF = 5 ทำนองเดียวกันถ้าผ่านกิจกรรม E ไปยังโหนด 5 ก็ต้องผ่านค่าคาดหมายของเวลาเท่ากับ 4 ก็จะได้ EF = 6

3. กฎเวลาเริ่มต้นช้าที่สุด (The Latest – Start – Time Rule) ใช้ตัวย่อว่า LS

4. กฎเวลาแล้วเสร็จช้าที่สุด (The Latest – Finish – Time Rule) ใช้ตัวย่อว่า LF

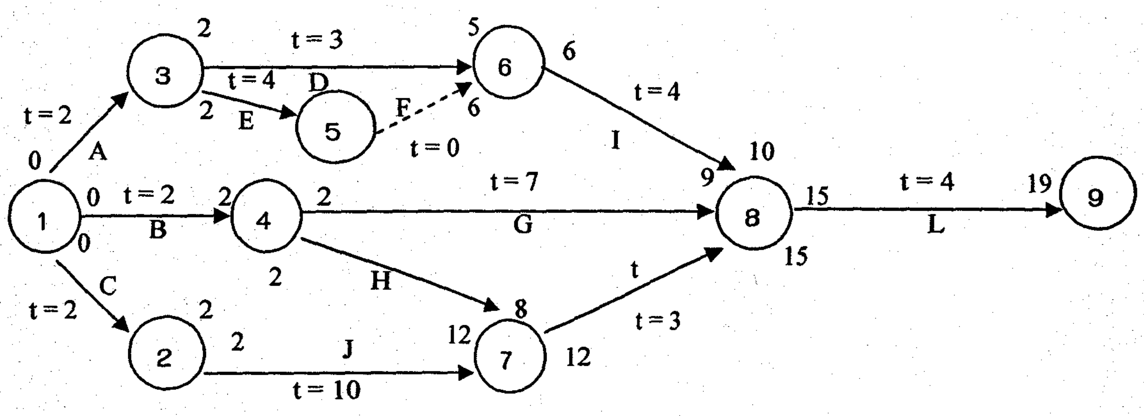
ซึ่งสามารถอธิบายวิธีหา LS และ LF ได้ทำนองเดียวกับการหา ES และ EF เพียงแต่เราจะเริ่มจากโหนดสุดท้าย ซึ่งมีเวลาเท่ากับที่หาไว้ตอนหา EF ไปโหนดที่ 1 ดังตัวอย่างเช่น



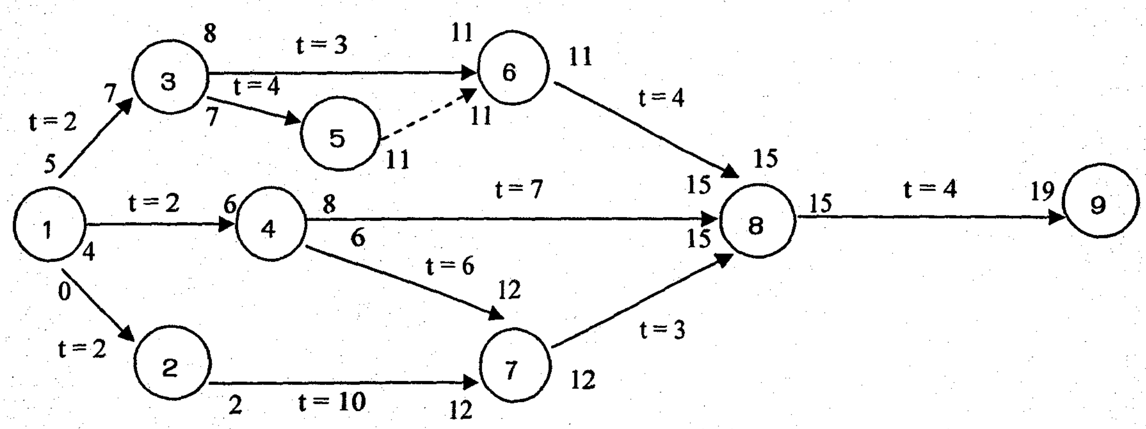
ในการหาเส้นทางวิกฤต เราพิจารณาจากส่วนเกินที่ได้จาก LS – ES หรือ LF – EF แล้วเท่ากับ 0

จากข่ายงานอันเดิมนำมาหาเส้นทางวิกฤต โดยเอาค่าคาดหมายของเวลาจากตารางหน้า 129

<u>หา ES และ EF</u>



<u>หา LS และ LF</u> โดยใช้ EF เมื่อผ่านกิจกรรมสุดท้าย ซึ่ง เท่ากับ 19แล้วทำถอยหลังมายังโหนดที่ 1



ข้อสังเกต 1. ในการหา ES และ EF ในกรณีที่ทางเข้าโหนดมีหลายทาง และ EF ต่างกัน เมื่อผ่านไป ES ต่อกิจกรรมใหม่ ให้เลือก EF ที่มีค่าสูงสุด

2. ในการหา LS และ LF ในกรณีที่ทางออกโหนดมีหลายทาง และ LF มีหลายตัวให้เลือกตัวที่ต่ำที่สุด เป็น LS ของกิจกรรมต่อไป

ซึ่งสรุปได้จากตาราง

กิจกรรม	ES	LS	EF	LF	LS-ES หรือ LF-EF	กิจกรรมที่เป็นเส้นทางวิกฤต
A	0	5	2	7	5	
B	0	4	2	6	4	
C	0	0	2	2	0	*
D	2	8	5	11	6	
E	2	7	6	11	5	
F					กิจกรรมลวง	
G	2	8	9	15	6	
H	2	6	8	12	4	
I	6	11	10	15	5	
J	2	2	12	12	0	*
K	12	12	15	15	0	*
L	5	15	19	19	0	*

ก็จะได้ว่าเส้นทางวิกฤตก็คือเส้นทางที่ผ่านกิจกรรม C, J, K และ L

4.3 การประมาณค่าความน่าจะเป็นใน PERT

การพิจารณาเวลาของกิจกรรมเป็นค่าที่แน่นอน แต่การหาเวลาเพื่อประมาณวันที่สิ้นสุดโครงการนั้นไม่แน่นอน จากตัวอย่างที่แล้วเราทราบว่า เส้นทางวิกฤตคือ C-J-K-L ซึ่งใช้เวลาที่คาดหมายทั้งหมดเท่ากับ 19 สัปดาห์

เราจะพิจารณาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานสำหรับแต่ละกิจกรรมที่อยู่บนเส้นทางวิกฤต และกิจกรรมเหล่านี้มีความเป็นอิสระต่อกันในทางสถิติ ดังนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเวลารวมทั้งหมด จะหาได้จากสูตร

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเวลารวมของข่ายงานที่อยู่บนเส้นทางวิกฤต

$$= \sqrt{(SD_1) + (SD_2) + (SD_3) + (SD_4)}$$

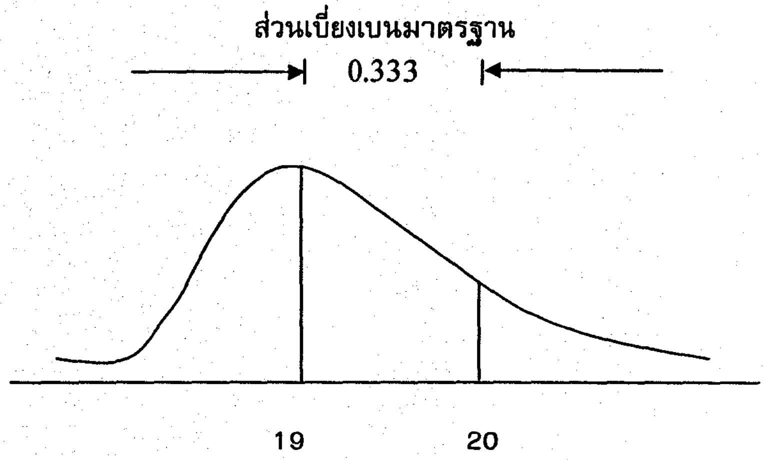
$$= \sqrt{(.33)^2 + (2.67)^2 + (1.33)^2 + (0)^2}$$

$$= \sqrt{0.1089 + 7.1289 + 1.7689 + 0}$$

$$= \sqrt{9.01}$$

$$= 3.00$$

ฉะนั้นจากข้อมูลอันนี้ ถ้าเราต้องการทราบโอกาสที่โครงการจะแล้วเสร็จใน 20 สัปดาห์ PERT มีสมมติฐานว่าการแจกแจงของเวลาที่ทำให้โครงการแล้วเสร็จเป็นปกติ เพื่อความเข้าใจก็สามารถเขียนเป็นรูปได้ดังนี้



เพื่อแสดงให้เห็นว่าเวลารวมของข่ายงาน (19 สัปดาห์) และเวลาแล้วเสร็จโครงการที่ตั้งไว้ (20 สัปดาห์) เราทราบว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเส้นทางวิกฤต ก็คือ 3 สัปดาห์ ดังนั้นระยะทางจากค่าเฉลี่ยถึง 20 สัปดาห์ที่เป็นค่ามาตราฐาน

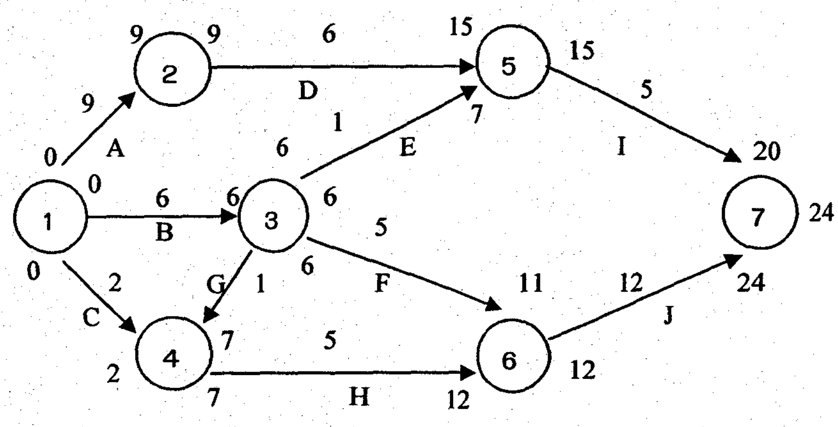
ก็คือ $Z = \frac{20-19}{3} = 0.33$

นำค่านี้ไปเปิดตารางปกติมาตรฐาน ทำให้ทราบว่าพื้นที่ใต้โค้งปกติ จากทางซ้ายของโค้งปกติไปถึงจุด 20 สัปดาห์ มีค่าเท่ากับ 0.6293

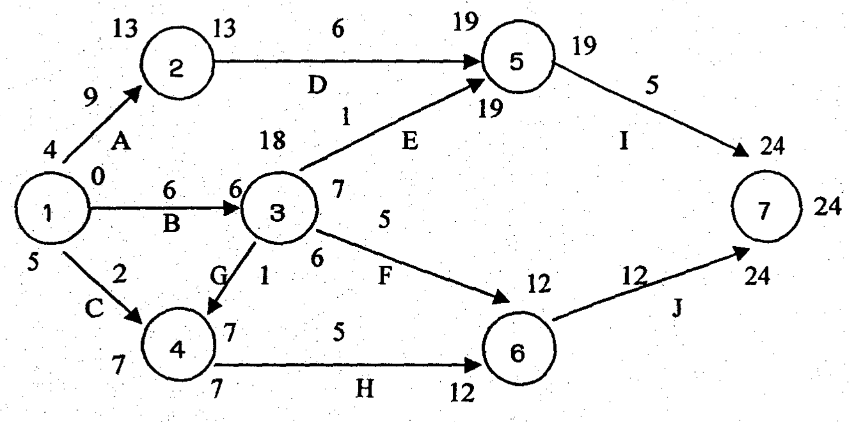
นั่นก็คือบอกได้ว่า โอกาสที่โครงการนี้จะแล้วเสร็จภายใน 20 สัปดาห์เท่ากับร้อยละ 62.93

ตัวอย่าง 4.2

<u>หา ES และ EF</u>

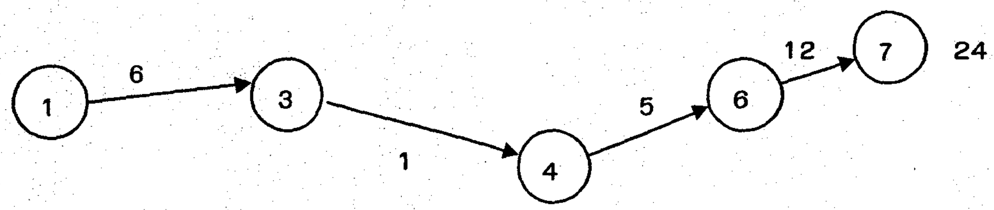


หา LS และ LF



กิจกรรม	ES	LS	EF	LF	LS-ES หรือ LF-EF	กิจกรรมที่เป็นเส้นทางวิกฤต
A	0	4	9	13	4	
B	0	0	6	6	0	Yes
C	0	5	2	7	5	
D	9	13	15	19	4	
E	6	18	7	19	12	
F	6	7	11	12	1	
G	6	6	7	7	0	Yes
H	7	7	12	12	0	Yes
I	15	19	20	24	4	
J	12	12	24	24	0	Yes

เส้นทางวิกฤต คือ



ค่าเวลาใน CPM = 24

ตัวอย่าง 4.3

ถ้ากำหนด a, m, b ให้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะทำเสร็จภายใน 24 + 5 = 29 สัปดาห์

กิจกรรม	a	m	b	ค่าคาดหมายระยะเวลา (a+4m+b) / 6	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (b-a) / 6	
1-2	8	9	10	9	0.33	
1-3	6	7	9	7.17	0.5	*
1-4	9	12	15	12	1.00	
3-4	5	5	5	5	0.00	*
3-5	8	10	11	9.83	0.5	
3-6	11	15	20	15.167	1.5	
4-6	3	4	6	4.167	0.5	*
2-5	5	6	8	6.167	0.5	
5-7	8	10	12	10	0.67	
6-7	4	5	10	5.667	1.00	*

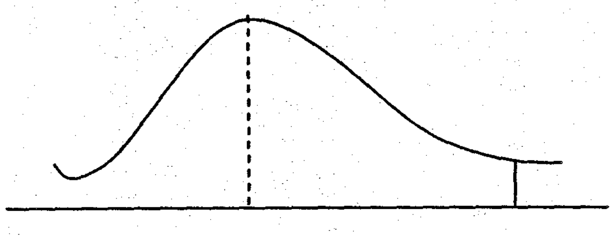
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานบนเส้นวิกฤต $= \sqrt{(0.5)^2 + (0.00)^2 + (0.5)^2 + (1.00)^2}$

$= \sqrt{1.5}$

$= 1.225$

ถ้า ค่าเวลาใน CPM = 24

$$Z = \frac{29-24}{1.23} = 4.07$$



ดังนั้น $P\{Z \le 4.07\} = 1.00$ หรือ 100%

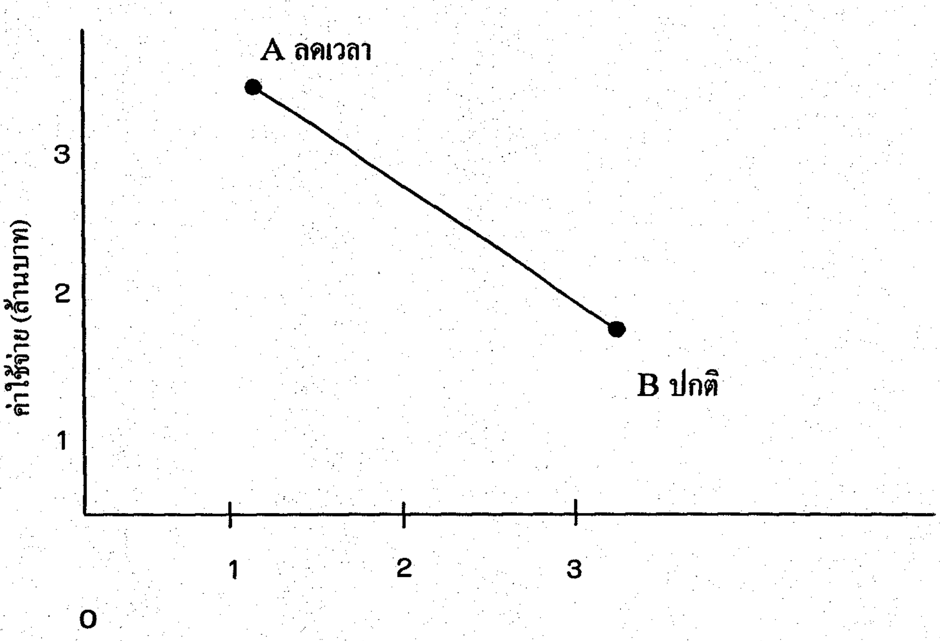
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะทำเสร็จภายในเวลา 29 สัปดาห์เท่ากับ 1 หรือ 100 % <u>**ตอบ**</u>

4.4 การลดเวลาในการทำโครงการให้แล้วเสร็จ (Crashing a Project)

การลดเวลาในการทำโครงการให้แล้วเสร็จมีเป้าหมายที่จะหาว่า ในกิจกรรมทั้งหลายบนเส้นทางวิกฤตที่สามารถลดเวลาลงโดยเสียค่าใช้จ่ายในการลดเวลาน้อยที่สุด เราจะลดเวลาที่ใช้ในโครงการให้มากที่สุด โดยเสียค่าใช้จ่ายในการทำโครงการให้แล้วเสร็จน้อยที่สุด

เราสามารถเปรียบเทียบความสัมพันธ์ของเวลาและใช้จ่ายได้จากกราฟ ดังนี้

ค่าใช้จ่าย (ล้านบาท)

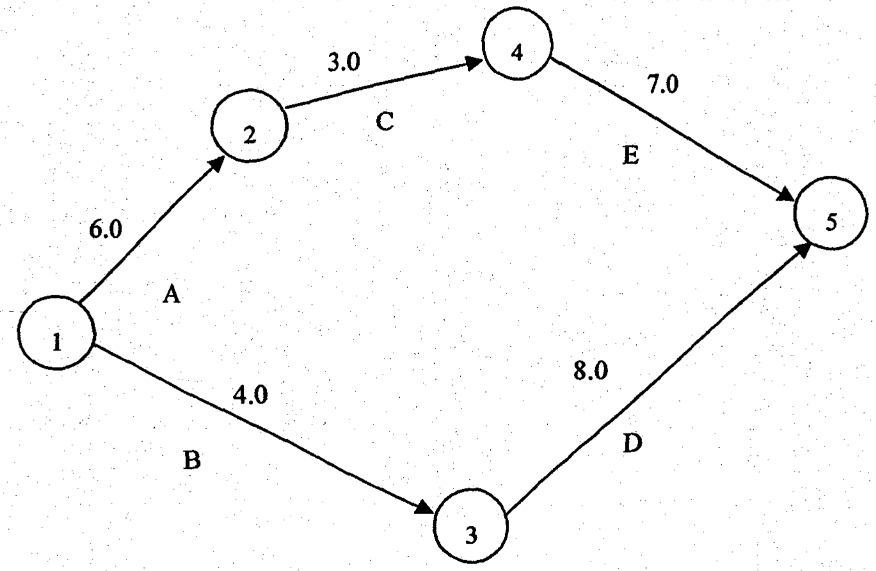


เวลา (เดือน)

จะเห็นว่าปกติโครงการนี้ทำงานใช้เวลา 3 เดือน เสียค่าใช้จ่าย 1 ล้านบาท แต่ถ้าเราต้องการทำโครงการนี้ให้แล้วเสร็จในเวลา 1 เดือน ก็ต้องเสียค่าใช้จ่ายถึง 3 ล้านบาท

การลดเวลาในการทำโครงการให้แล้วเสร็จ พิจารณาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4 จากข่ายงานต่อไปนี้เวลาปกติในการทำโครงการดังนี้

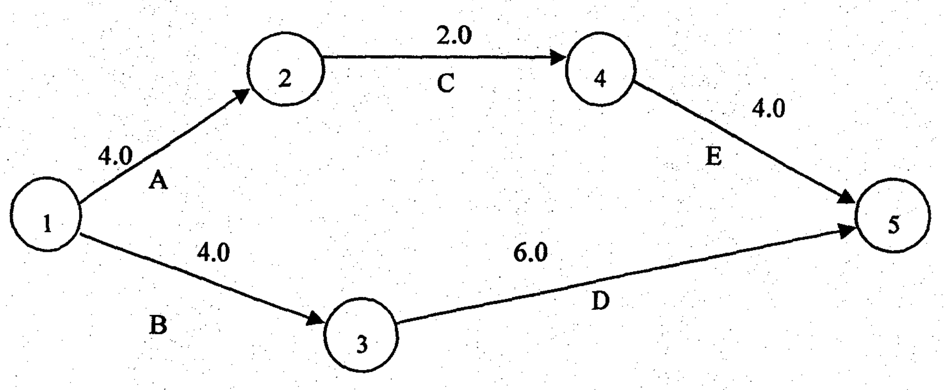


และกำหนดค่าใช้จ่ายในการลดเวลาในการทำโครงการให้แล้วเสร็จดังนี้

กิจกรรม	เวลา (สัปดาห์)		ค่าใช้จ่าย (บาท)		ค่าใช้จ่ายในการลดต่อสัปดาห์
	ปกติ	ลด	ปกติ	ลด	
A	6.0	4.0	10,000	14,000	2,000
B	4.0	3.0	5,000	8,000	3,000
C	3.0	2.0	4,000	5,000	1,000
D	8.0	6.0	9,000	12,000	1,500
E	7.0	4.0	7,000	8,000	333
	ค่าใช้จ่ายรวม		35,000	47,000	

ถ้าต้องการให้ทำโครงการนี้แล้วเสร็จในเวลา 10 สัปดาห์ จะต้องเสียค่าใช้จ่ายเท่าใด

__วิธีทำ__ ขั้นแรกเราก็หาเส้นทางวิกฤตก่อน ปรากฏว่าเส้นทางวิกฤตก็คือ A ⟶ C ⟶ E เวลาที่ใช้ปกติเท่ากับ 16 สัปดาห์ โดยมีค่าใช้จ่ายรวมเท่ากับ 35,000 บาท จากนั้นก็พิจารณาลดโดยเส้นทางวิกฤต ที่มีค่าใช้จ่ายในการลดน้อยที่สุด ไปตามลำดับ จนกระทั่งสามารถทำให้เสร็จภายใน 10 สัปดาห์ ส่วนเส้นทางอื่นถ้าใช้เวลามากกว่า 10 สัปดาห์ ก็ลดด้วย แต่ถ้าเท่ากับหรือน้อยกว่า 10 สัปดาห์ อยู่แล้วก็ไม่จำเป็นต้องลดให้เสียค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น สำหรับปัญหานี้พิจารณาลดได้ ดังนี้



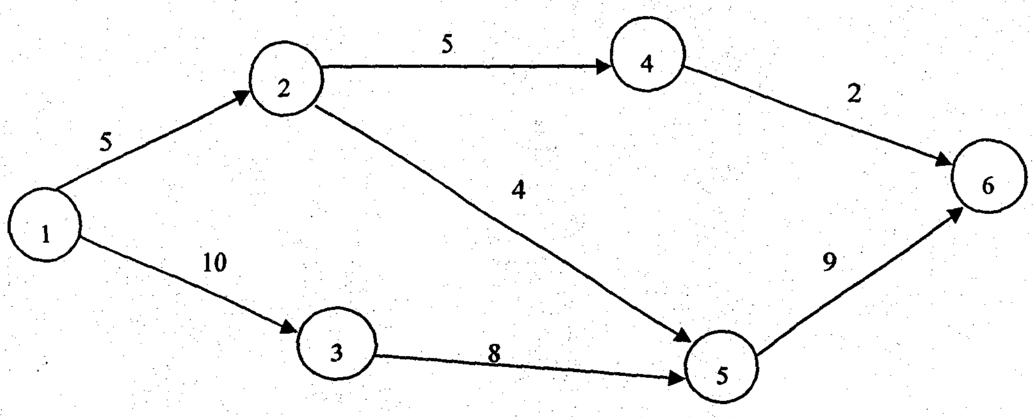
		ระยะเวลา ของโครงการ	ค่าใช้จ่ายรวม ของข่ายงาน
1.	ข่ายงานเริ่มต้น	16.0	35,000
2.	ลดกิจกรรม E ลงเป็น 4 สัปดาห์	13.0	36,000
3.	ลดกิจกรรม C ลงเป็น 2 สัปดาห์	12.0	37,000
4.	ลดกิจกรรม D ลงเป็น 6 สัปดาห์	12.0	40,000
5.	ลดกิจกรรม A ลงเป็น 4 สัปดาห์	10.0	44,000

ดังนั้นถ้าต้องการทำโครงการนี้ให้แล้วเสร็จใน 10 สัปดาห์ โดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดเท่ากับ 44,000 บาท __ตอบ__

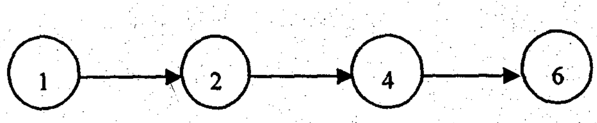
4.5 ปัญหาการไหลผ่านสูงสุด (The Maximal-Flow Problem)

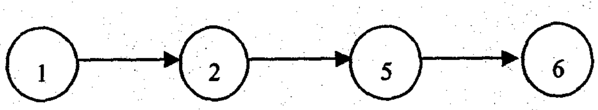
ปัญหาการไหลผ่านสูงสุดใช้ได้ในกรณีที่มีโหนดเริ่มต้น 1 โหนด และโหนดปลายทาง 1 โหนด ปกติจะใช้ในกรณีการไหลผ่านข่ายงานจากจุดโหนดเริ่มต้น ไปยังจุดโหนดปลายทาง ทำให้ปริมาณการไหลผ่านมีปริมาณสูงสุด อันได้แก่ การไหลของรถไปตามข่ายงานจะปล่อยให้ไหลไปอย่างไรจึงจะไหลได้เป็นจำนวนมากที่สุด โดยมีความจุของถนนเป็นข้อจำกัด การปล่อยน้ำไปตามท่อจะปล่อยให้ไหลไปตามข่ายงานอย่างไร จึงจะไปสู่จุดหมายปลายทางได้มากที่สุด โดยมีความจุของท่อประปาเป็นข้อจำกัด หรือการปล่อยกระแสไฟฟ้าก็ในทำนองเดียวกัน

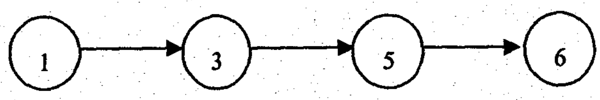
ตัวอย่าง 4.5 การที่จะให้รถจากแห่งหนึ่งไปยังอีกแห่งหนึ่ง โดยผ่านข่ายงานดังรูปเป็นจำนวนที่มากที่สุดที่สามารถผ่านจากโหนด 1 ไปยังโหนด 6 ได้โดยถนนที่เชื่อมเมืองแต่ละเมืองมีข้อจำกัดเกี่ยวกับปริมาณรถที่จะผ่านได้ ดังตัวเลขที่ปรากฏกำกับเส้นทางอยู่ (หน่วยเป็นพันคัน)



การพิจารณาหาปริมาณที่ไหลได้สูงสุดขั้นแรกเราต้องดูก่อนว่ามีเส้นทางใดบ้างที่สามารถให้รถผ่านจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายทาง จะเห็นว่ามี 3 เส้นทางดังนี้

1) 

2) 

3) 

ขั้นต่อไปเราก็ต้องลองส่งปริมาณสูงสุดของรถที่สามารถไหลไปตามเส้นทางที่ 1) ที่ 2) และที่ 3) ตามลำดับ จะได้ปริมาณการไหลดังนี้

ในเส้นทางที่ 1) จะไหลไปได้มากที่สุดเท่ากับ 2,000 คัน

ในเส้นทางที่ 2) จะไหลไปได้มากที่สุดเท่ากับ 3,000 คัน เพราะว่าจากโหนดที่ 1 ไหลไปโหนด 2 ในเส้นทางที่ 1) เสียแล้ว 2,000 คัน

ในเส้นทางที่ 3) จะไหลไปได้มากที่สุดเท่ากับ 6,000 คัน เพราะว่าจากโหนด 5 ไหลไปโหนด 6 ในเส้นทางที่ 2) เสียแล้ว 3,000 คัน

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า ปริมาณการไหลของรถทั้งหมด ถ้ามีการจัดสรรให้ไหลตามที่กล่าวแล้วก็จะไหลได้ 2,000 + 3,000 + 6,000 = 11,000 คัน

แต่เราจะเห็นได้ว่า เส้นทางที่ 3 นี้ ถ้ามีการจัดลำดับการจัดสรรการไหลต่างกันออกไป ดังเช่น

ในเส้นทางที่ 2) ไหลได้มากที่สุด 4,000 คัน

ในเส้นทางที่ 3) ไหลได้มากที่สุด 5,000 คัน เพราะจากโหนดที่ 5 ไหลไปโหนดที่ 6 ในเส้นทางที่ 2) เสียแล้ว 4,000 คัน

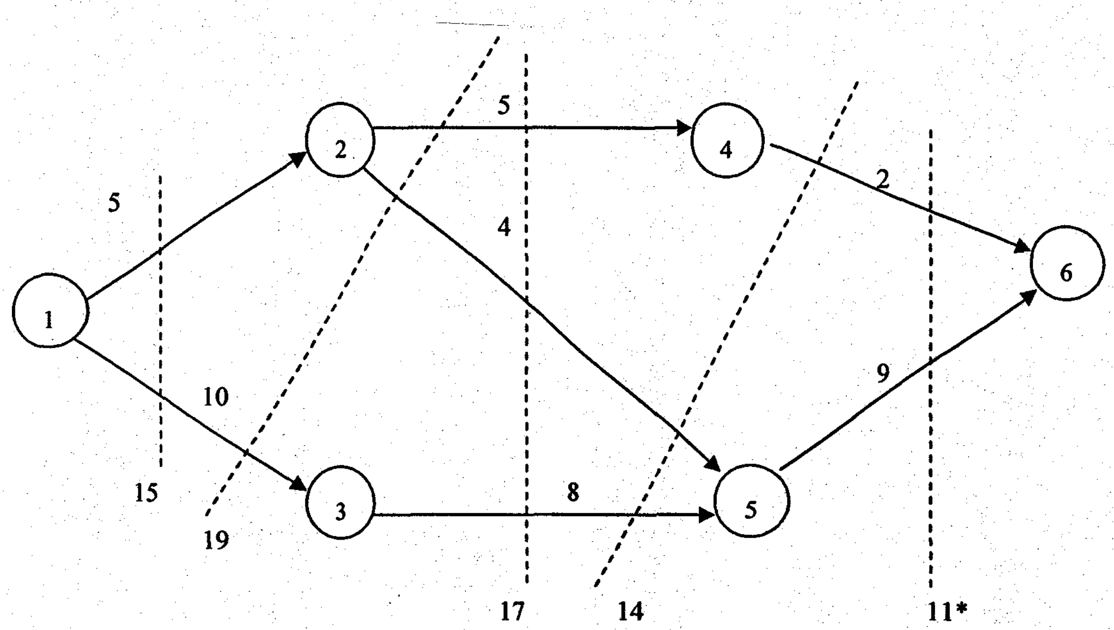
ในเส้นทางที่ 1) ไหลได้มากที่สุด 1,000 คัน เพราะจากโหนดที่ 1 ไหลไปโหนดที่ 2 ในเส้นทางที่ 2 เสียแล้ว 4,000 คัน

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ปริมาณการไหลของรถทั้งหมดถ้ามีการจัดสรรให้ไหลตามที่กล่าวแล้ว ก็จะไหลได้ 4,000 + 5,000 + 1,000 = 10,000 คัน

ถ้ามาพิจารณาดูว่าเส้นทางจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายทาง 3 เส้นทาง ดังนั้นสามารถจัดลำดับการจัดสรรการไหลได้ 3! = 3 * 2 * 1 = 6 หนทาง จึงอาจจะเป็นไปได้ว่ามีคำตอบถึง 6 ทาง ซึ่งเราจะต้องทำทุกหนทางเพื่อที่จะเปรียบเทียบดูว่าการไหลตามเส้นทางไหนอย่างละเท่าไร จึงจะไหลได้ปริมาณสูงสุด ถ้าจำนวนเส้นทางจุดเริ่มต้นไปยังจุดปลายทางมีหลายเส้นทางขึ้น ก็จะเสียเวลาในการคำนวณมากขึ้น จึงได้มีผู้คิดวิธีเส้นตัดที่มีค่าน้อยที่สุด

4.6 เส้นตัดที่มีค่าน้อยที่สุด (Minimum Cut Set)

มีหลักการง่ายๆ คือ พยายามลากเส้นทุกเส้นที่จะเป็นไปได้ในการแบ่งโหนดออกเป็น 2 ฝ่ายแต่ละเส้นที่ลากขึ้นมาจะติดกับเส้นทางงจากโหนดหนึ่งไปยังอีกโหนดหนึ่ง ซึ่งแต่ละเส้นทางนั้น มีปริมาณความจุในการไหลไม่เท่ากัน แล้วพิจารณาผลบวกของความจุของแต่ละเส้นทางที่เส้นนี้ตัด ค่าที่น้อยที่สุดจะเท่ากับค่าไหลผ่านสูงสุด พิจารณาได้จาก

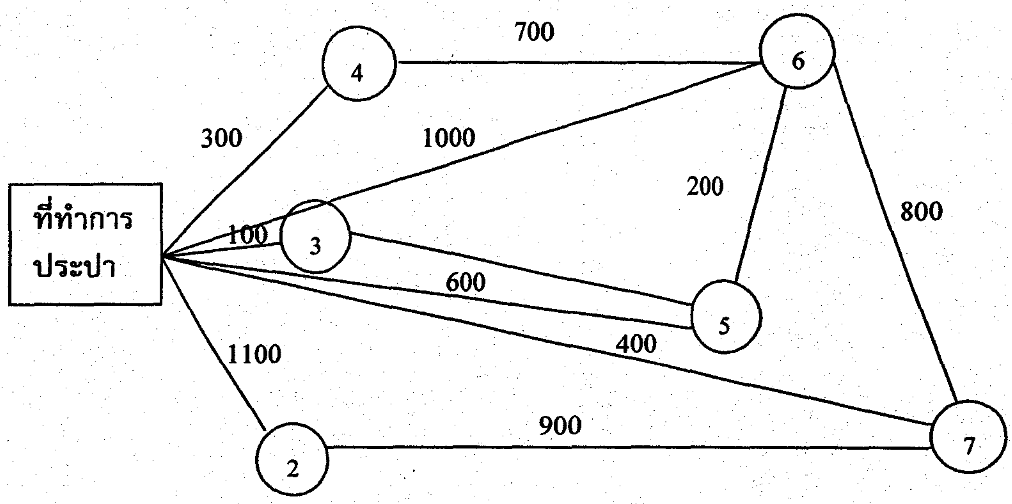


จะเห็นเส้นตัดที่มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ 11
นั่นคือ ปริมาณไหลผ่านของรถทั้งหมดสูงสุดไหลได้เท่ากับ 11,000 คัน **ตอบ**

4.7 การกระจายไหลผ่านทางเดียวโดยระยะทางสั้นที่สุด (Minimum Spanning Tree Flow)

การกระจายไหลผ่านทางเดียวโดยระยะทางสั้นที่สุด เป็นเรื่องเกี่ยวกับการหาวิธีที่จะไปถึงโหนดทั้งหมดในข่ายงานจากโหนดเริ่มต้น ลักษณะปัญหานี้สามารถประยุกต์กับการเดินสายโทรศัพท์ การส่งน้ำประปาไปยังแหล่งที่ต้องการ การเดินสายไฟ ลักษณะที่เป็นเฉพาะก็คือ มีลักษณะแบบต้นไม้ (tree) ซึ่งมีการแตกกิ่งก้านสาขาออกไปยังยอด แล้วก็เสร็จภารกิจเป็นการส่งไปอย่างเดียว

ตัวอย่าง 4.6 การวางแผนระบบการส่ง โดยจากที่ทำการประปาจะต้องส่งน้ำไปยังเมืองต่างๆ 6 เมือง โดยแต่ละเมืองมีระยะทางห่างจากที่ทำการประปาไม่เท่ากัน โดยกำหนดระยะทางให้ดังนี้



เราจะต้องส่งน้ำไปทุกเมืองด้วยระยะทางสั้นที่สุด

ขั้นตอนวิธีของการกระจายไหลผ่านทางเดียว

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตารางของระยะทางระหว่างโหนด เพราะว่าบางโหนดไม่สามารถเชื่อมกับโหนดอื่นได้ เราจะใช้อักษร M ซึ่งมีความหมายเหมือนกับในโปรแกรมเชิงเส้นที่ว่าเป็นค่ามากๆ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกโหนดใดๆ ก็ได้มาทำเครื่องหมายกากบาท (X) แล้วตัดคอลัมน์นั้นออกทั้งหมด

ขั้นตอนที่ 3 หาจำนวนที่น้อยที่สุดในแถว แล้ววงกลมล้อมรอบค่านั้น แล้วรอบต่อไปนั้นจะทำเครื่องหมาย X ตรงกับโหนดนี้แล้วทิ้งคอลัมน์ที่ตรงกับโหนดนี้

ขั้นตอนที่ 4 ทำซ้ำจากข้อ 3 $\longrightarrow$ 4 จนกระทั่งโหนดทั้งหมดได้เชื่อมกันหมดแล้วในขั้นตอนที่ 1 จะได้

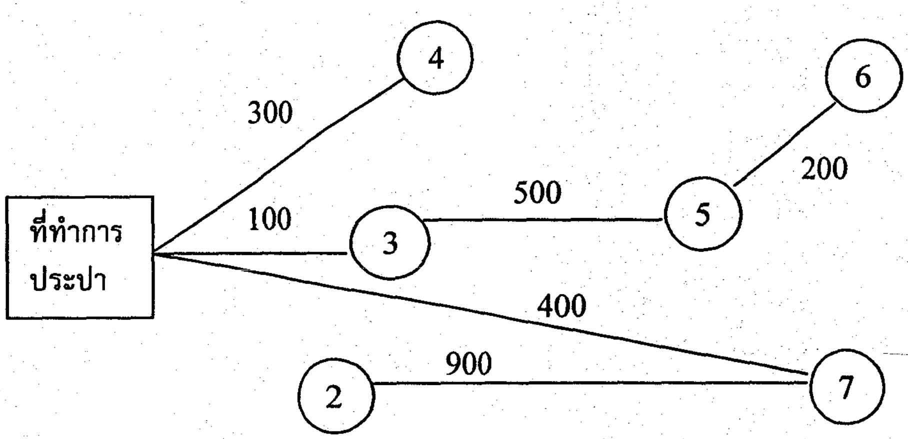
จากโหนด	ไปยังโหนด						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1,100	100	300	600	1,000	400
2	1,100	0	M	M	M	M	900
3	100	M	0	M	500	M	M
4	300	M	M	0	M	700	M
5	600	M	500	M	0	200	M
6	1,000	M	M	700	200	0	800
7	400	900	M	M	M	800	0

ส่วนวิธีทำขั้นตอนที่ 2-4 จะได้

ตัวเชื่อม		1	2	3	4	5	6	7
ขั้นตอนที่ 2 เลือกโหนด 1	X1		1,100	100	300	600	1,000	400
เป็นตัวเชื่อมแล้วกากบาท	2		0	M	M	M	M	900
และตัดคอลัมน์ที่ 1 ทิ้ง	3		M	0	M	500	M	M
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	4		M	M	M	M	700	M
ในแถวที่กากบาท (100)	5		M	500	M	0	200	M
แล้ววงกลมไว้	6		M	M	700	200	0	800
	7		900	M	M	M	800	0
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถวที่ 3	X1		1,100		300	600	1,000	400
และตัดคอลัมน์ที่ 3 ทิ้ง	2		0		M	M	M	900
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	X3		M		M	500	M	M
ในแถวที่กากบาท (300)	4		M		M	M	700	M
แล้ววงกลมไว้	5		M		M	0	200	M
	6		M		700	200	0	800
	7		900		M	M	800	0
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถว	X1		1,100			600	1,000	400
ที่ 4 และตัดคอลัมน์ 4 ทิ้ง	2		0			M	M	900
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	X3		M			500	M	M
ในแถวกากบาท (400)	X4		M			M	700	M
และวงกลมไว้	5		M			0	200	M
	6		M			200	0	800
	7		900			M	800	0

ตัวเชื่อม		1	2	3	4	5	6	7
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถว 7	X1		1,100			600	1,000	
และตัดคอลัมน์ 7 ทิ้ง	2		0			M	M	
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	X3		M			500	M	
ในแถวที่กากบาท (500)	X4		M			M	700	
แล้ววงกลมไว้	5		M			0	200	
	6		M			200	0	
	X7		900			M	800	
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถวที่ 5	X1		1,100				1,000	
และตัดคอลัมน์ที่ 5 ทิ้ง	2		0				M	
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	X3		M				M	
ในแถวที่กากบาท (200)	X4		M				700	
แล้ววงกลมไว้	X5		M				200	
	6		M				0	
	X7		900				800	
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถว	X1		1,000					
ที่ 6 และตัดคอลัมน์ 6 ทิ้ง	2		0					
ขั้นตอนที่ 3 หาค่าน้อยที่สุด	X3		M					
ในแถวกากบาท (900)	X4		M					
และวงกลมไว้	X5		M					
	X6		M					
	X7		900					
ขั้นตอนที่ 4 กากบาทแถว 2	X1							
และคอลัมน์ 2 ทิ้ง	X2							
ทุกโหนดได้รับการเชื่อม	X3							
หมดแล้ว ฉะนั้นเป็น	X4							
คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว	X5							
	X6							
	X7							

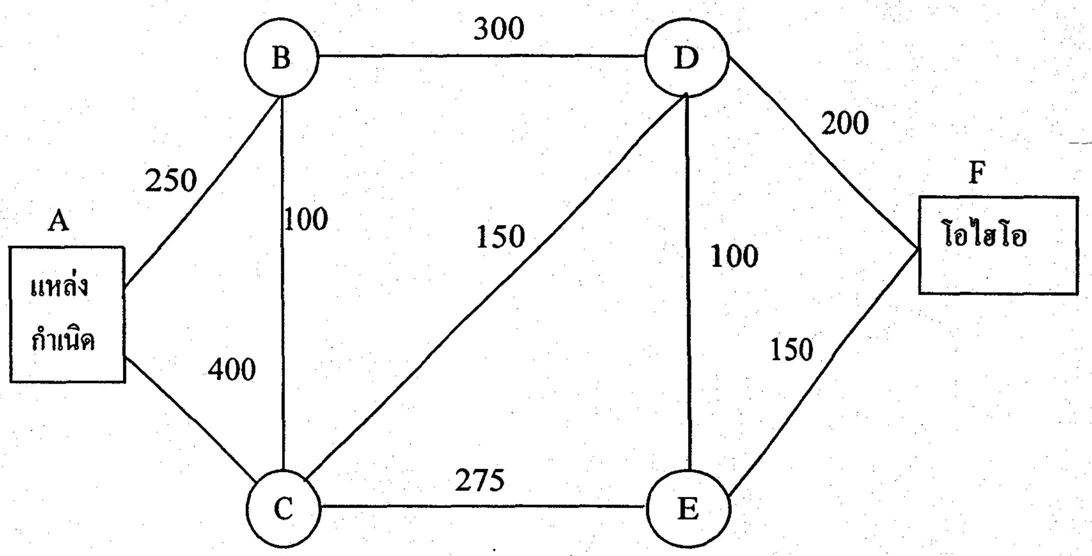
ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดในการกระจายไหลผ่านทางเดียว จะต้องใช้ท่อประปา 2,400 ฟุตโดยเชื่อมกัน ดังนี้



ตอบ

4.8 ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (The Shortest – Route Problem)

ปัญหาเส้นทางที่สั้นที่สุด เป็นการหาระยะทางน้อยที่สุดจากแหล่งเริ่มต้นไปยังจุดหมายปลายทาง โดยผ่านทางข่ายงานที่เชื่อมกัน ตัวอย่างเช่น การขนส่งวัตถุดิบจากแหล่งกำเนิดไปยังรัฐโอไฮโอ มีข่ายงานและระยะทางระหว่างโหนดดังนี้



สำหรับปัญหาเล็กๆ มีข่ายงานไม่ซ้ำซ้อนก็สามารถที่จะหาเส้นทางที่สั้นที่สุดได้ง่าย แต่ถ้าปัญหาซับซ้อนมากขึ้น ก็ต้องมีหลักในการพิจารณาเพื่อให้ทำได้อย่างมีระบบ

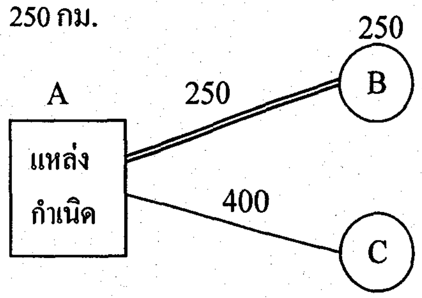
วิธีแก้ปัญหานี้เราเขียนรายการของโหนดแต่ละโหนดในข่ายงาน ว่ามีเส้นทางออกจากโหนดนั้นๆ มีเส้นทางอะไรบ้าง โดยแต่ละเส้นทางจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษ 2 ตัว บอกว่าเส้นทางนี้ออกจากโหนดไหนถึงโหนดไหน พร้อมทั้งความยาวของโหนดทั้งสอง โดยจะเรียงลำดับจากระยะทางจากน้อยไปมาก พิจารณาดูได้จากตาราง ต่อไปนี้

A	B	C	D	E	F
AB-250	BC-100	CB-100	DE-100	ED-100	
AC-400	BD-300	CD-150	DC-150	EF-150	
		CE-275	DF-200	EC-275	
			CE-275		

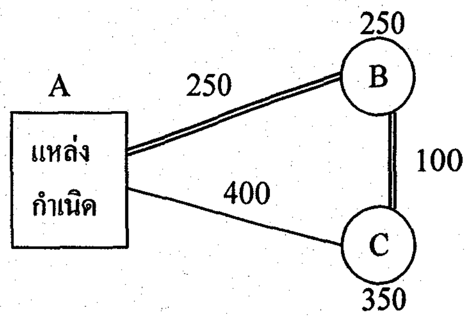
วิธีการพิจารณา

ขั้นที่ 1 มีเพียง 2 ทางที่ออกจากจุดกำเนิด เส้นทาง AB สั้นที่สุด

ดังนั้น โหนด B ใกล้ที่สุดจากจุดกำเนิด ดังนั้น เลือกเส้นทาง AB ซึ่งระยะทางสั้นที่สุดเท่ากับ 250 กม.



ขั้นที่ 2 โหนดที่ใกล้จุดกำเนิดที่สุดอันดับสองก็คือ ใกล้ที่สุดทั้ง A และ B ก็คือ C และ D ห่าง 300 กม. จาก B และ C ห่าง 100 กม. จาก B เราจะเลือก C และจะได้ว่าระยะทางสั้นที่สุดจากกจุดกำเนิดไปถึง C เท่ากับ 350 กม. ซึ่งแสดงได้ดังนี้



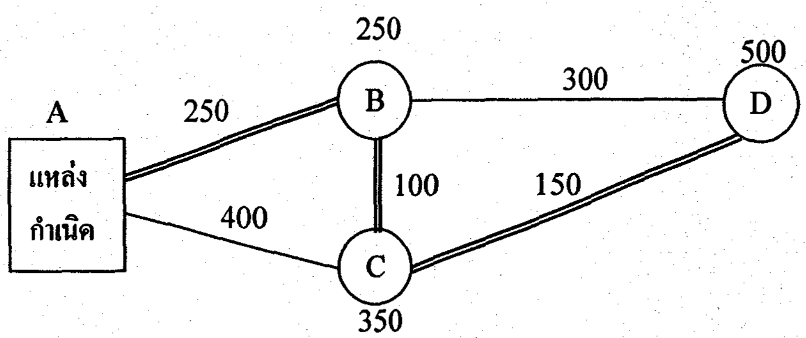
ขั้นที่ 3 โหนดที่ใกล้จุดกำเนิดที่สุดอันดับสาม ก็คือใกล้ที่สุดทั้ง B และ C นั่นคือ D และ E จะเห็นว่ามี 2 ทาง ที่จะไป D จาก E และจาก C

$D + 300 = 550$

และ $C + 150 = 500$

ฉะนั้นเราเลือกเอาทาง CD ต่อไปดูโหนด E

E ก็คือ $C + 275 = 625$ สรุปได้ว่าโหนด D ใกล้ที่สุดจาก B หรือ C และใช้ระยะทาง 500 กม. ถึง D ดังรูป



ขั้นที่ 4 โหนดที่ใกล้จุดกำเนิดที่สุดอันดับสี่ ก็คือใกล้ที่สุดจาก C และ D นั้นก็คือ E และ F โดยทั้งสองทางไปยัง E จาก C และ D

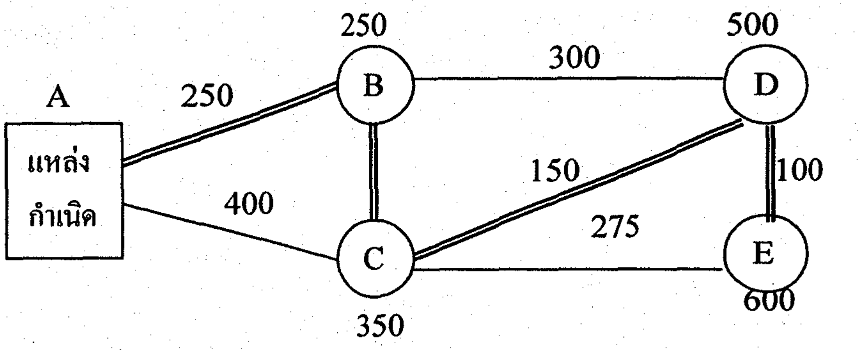
C + 275 = 625 และ

D + 100 = 600

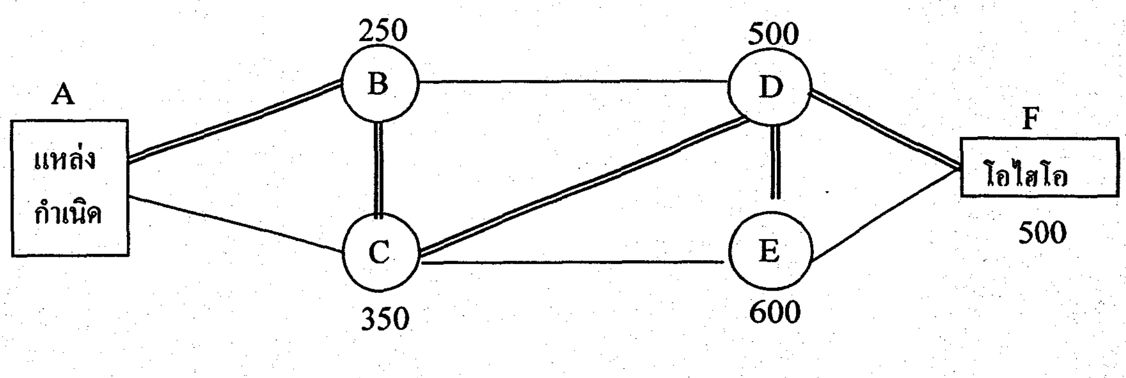
เราเลือกทาง DE ต่อไปดูโหนด F

F และ D + 200 = 700

สรุปว่า โหนด E อยู่ใกล้ C และ D เราจะใช้ระยะทาง 600 กม. ไปยังโหนดสุดท้าย



ขั้นที่ 5 โหนดที่ใกล้จุดกำเนิดที่สุดอันดับห้า ก็คือใกล้ที่สุดจาก D และ F เฉพาะโหนด F เราเปรียบเทียบกับทาง DE (500 + 200) และทาง EF (600 +150) และเลือก DF เราเขียน 700 เหนือ F เราก็จะได้เส้นทางที่สั้นที่สุดที่สมบูรณ์ ดังนี้



สรุปได้ว่าข่ายงานนี้จะได้เส้นทางที่สั้นสุดเท่ากับเส้นทางนั้นก็คือ

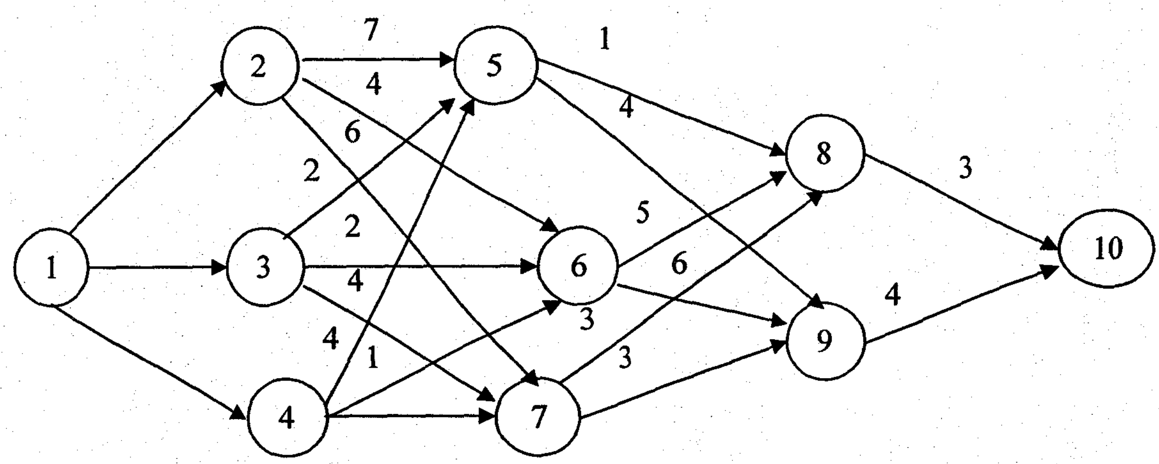
A ⟶ B ⟶ C ⟶ D ⟶ F

โดยใช้ระยะทางสั้นที่สุด = 700 กม. <u>**ตอบ**</u>

บทที่ 5 โปรแกรมพลวัต
Dynamic Programing

เป็นรูปแบบการนำไปใช้งาน ซึ่งมีลักษณะพิเศษเฉพาะงาน ไม่สามารถกำหนดตายตัวเป็นแบบหุ่นแน่นอนได้

รูปแบบอันหนึ่งซึ่งนำประยุกต์ใช้ได้ในหลายสถานการณ์ เกิดขึ้นเมื่อประมาณปี ค.ศ. 1950 โดยนายริชาร์ค เบลแมน (Richard Belman) เป็นรูปแบบที่เขาสร้างขึ้นเพื่อที่จะจัดส่งสินค้าจากเมือง 1 ไปยังเมือง 10 โดยในระหว่างทางจะมีทิศทางเป็นไปได้หลายทางในการที่จะเลือกเดินทางต่อ ๆ กันไป จนกว่าจะถึงเมือง 10 ซึ่งแต่ละหนทางมีการเลี่ยงภัยไม่เหมือนกัน ดังนั้นบริษัทรับประกันภัยได้วางอัตราการประกันภัยสำหรับเส้นทางตามที่กำหนดให้ ปัญหาก็คือว่า จะทำอย่างไรจึงจะเลือกเส้นทางที่เสียค่าประกันภัยน้อยที่สุด โดยกำหนดดังรูป



เราสามารถพิจารณาค่าประกันการขนส่งโดยสรุปได้ดังนี้

	2	3	4
1	2	4	3

	5	6	7
2	7	4	6
3	3	2	4
4	4	1	5

	8	9
5	1	4
6	6	3
7	3	3

	10
8	3
9	4

ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ง่าย ๆ ดังนี้

เส้นทางที่เป็นไปได้คือ 1 → 2 → 6 → 9 → 10

จะใช้ค่าประกันภัยรวม 2 + 4 + 3 + 4 = 13

ถ้าเลือกเส้นทาง 1 → 2 → 6 → 9 → 10

จะใช้ค่าประกันภัยรวม 3 + 1 + 3 + 4 = 11

ดังนั้นในขั้นต้นจะเห็นว่า ถ้าเรามองเฉพาะค่าประกันภัยที่น้อยที่สุดเฉพาะระหว่างเมืองเท่านั้นไม่เพียงพอ ทำอย่างไรจึงจะสร้างเป็นแบบหุ่นทางคณิตศาสตร์ที่แน่นอนในการแก้ปัญหาในลักษณะเดียวกันนี้

ให้ $f_n(s,x_n)$ เป็นค่าประกันรวมที่ดีที่สุดสำหรับขั้นสุดท้ายที่ n

s: เป็นจุดที่เดินทางถึง

x_n : เป็นจุดที่เป็นจุดหมายปลายทางในแต่ละขั้นตอน

x_n^* เป็นค่า x_n ที่ทำให้ $f_n(x, x_n)$ ต่ำที่สุด

$f_n^*(s)$ เป็นค่าต่ำสุดของ $f_n^*(s, x_n)$

นั่นคือ $f_n^*(s) = f_n(s, x_n)$

จุดประสงค์ก็คือต้องการให้ $f_n^*(1)$ มีค่าต่ำที่สุด

วิธีพิจารณา ให้เริ่มพิจารณาย้อนหลัง โดย

เริ่มจาก **ขั้นที่ 1**

s	f_1*s	x_1
8	3	10
9	4	10

ขั้นที่ 2

s \ x_2	$f_2(s,x_2)=c_{sx_2}+f_1^*(x_2)$			x_2^*
	8	9	$f_2^*(s)$	
5	1+3	4+4	4	8
6	6+3	3+4	7	9
7	3+3	3+4	6	8

ขั้นที่ 3

s \ x_3	$f_3(s,x_3)=c_{sx_3}+f_2^*(x_3)$				x_3^*
	5	6	7	$f_3^*(s)$	
2	7+4	4+7	6+6	11	5, 6
3	3+4	2+7	4+6	7	5
4	4+4	1+7	5+6	8	5, 6

ขั้นที่ 4

x_4 / s	$f_4(s,x_4)=c_{sx_4}+f_3^*(x_4)$				x_4^*
	2	3	4	$f_4^*(s)$	
1	2+11	4+7	3+8	11	3, 4

ฉะนั้นเส้นทางทั้งหมดก็คือ (1) → (3) → (5) → (8) → (10)

(1) → (4) → (5) → (8) → (10)

( ) → (1) → (4) → (6) → (9)   10

ซึ่งทั้งสามเส้นทางจะเสียค่าใช้จ่ายในการประกันภัยน้อยที่สุดเท่ากับ 11 **ตอบ**

อีกลักษณะหนึ่งของปัญหาโปรแกรมพลวัตก็คือ ปัญหาการจัดสรรส่งสินค้าให้แก่ร้านต่างๆ โดยต้องการกำไรสูงสุด การแก้ปัญหาพิจารณาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง บริษัทขายลำไยจากเชียงใหม่ ส่งลำไยให้กับร้านที่กรุงเทพ โดยแต่ละร้านให้กำไรต่อลังไม่เท่ากัน ซึ่งพอสรุปเป็นตารางกำไรดังนี้

		ร้าน			
		1	2	3	4
จำนวนลัง	0	0	0	0	0
	1	4	2	6	2
	2	6	4	8	3
	3	7	6	8	4
	4	7	8	8	4
	5	7	9	8	4
	6	7	10	8	4

ให้หาว่า จะจัดส่งลำไยให้กับร้านใดเป็นจำนวนเท่าไรจึงจะทำให้กำไรตอบแทนรวมสูงที่สุด

การสร้างแบบหุ่นเพื่อแก้ปัญหา

กำหนด $p_i(x)$ เป็นกำไรในการจัดสรร x ไปยังร้าน i จุดประสงค์ก็คือทำให้ z มีค่าสูงสุด

เมื่อ $z = P_1(x_4)+P_2(x_3)+P_3(x_2)+P_4(x_1)$

โดยมีเงื่อนไข $x_1+x_2+x_3+x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$f_n(s,x_n)$ เป็นกำไร

s: จำนวนลังที่ส่ง

n: จำนวนร้าน

x_n : การจัดสรรเริ่มต้น

$f_n^*(s)$ เป็นค่าสูงสุดของ $f_n(s,x_n)$

นั่นคือ $f_n(s,x_n) = p_{(s-n)}(x_n)+f^*_{(n-1)}(s-x_n)$

$f_n^*(s)$ = ค่าสูงสุดของ $\left\{P_{(s-n)}(x_n)+f_{n-1}^*(s-x_n)\right\}$

วิธีการแก้ปัญหาให้พิจารณาย้อนหลังโดย

ขั้นที่ 1 ร้านที่ 4

S	$f_1^*(s)$	x_1^*
0	0	0
1	2	1
2	3	2
3	4	3
4	4	4, 3
5	4	5, 4, 3
6	4	6, 5, 4, 3

S: จำนวนลังที่ส่ง

$f_1^*(s)$: กำไร

x_1^* : จำนวนลังที่ส่งไปให้ลูกค้าร้านที่ 4

ขั้นที่ 2 ร้านที่ 3

s \ x_2	$f_2(s,x_2)=P_3(x_2)+f^*_1(s-x_2)$							$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	2	6						6	1
2	3	8	8					8	1, 2
3	4	9	10	8				10	2
4	4	10	11	10	8			11	2
5	4	10	12	11	10	8		12	2
6	4	10	12	12	11	10	8	12	2, 3

x_2^* : จำนวนลังที่ส่งไปให้ลูกค้าร้านที่ 3

ขั้นที่ 3 ร้านที่ 2

s \ x_3	$f_3(s,x_3)=P_2(x_3)+f^*_2(s-x_3)$							$f_3^*(s)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	6	2						6	0
2	8	8	4					8	0, 1
3	10	10	10	6				10	0, 1, 2
4	11	12	12	12	8			12	1, 2, 3
5	12	13	14	14	14	9		14	2, 3, 4
6	12	14	15	16	16	15	10	16	3, 4

x_3^* : จำนวนลังที่ส่งไปให้ลูกค้าร้านที่ 2

ขั้นที่ 4 ร้านที่ 1

x_4 / s	$f_4(s,x_4)=P_1(x_4)+f^*_3(s-x_4)$							$f^*_4(s)$	x^*_4
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	6	4						6	1
2	8	10	6					10	1
3	10	12	12	7				12	1, 2
4	12	14	14	13	7			14	1, 2
5	14	16	16	15	13	7		16	1, 2
6	16	18	18	17	15	13	7	18	1, 2

x_4^* : จำนวนลังที่ส่งไปให้ลูกค้าร้านที่ 1

จะได้กำไรสูงสุดในการส่งสินค้าไปให้ร้านค้าเท่ากับ 18 โดยที่สามารถจัดส่งไหลายวิธีดังต่อไปนี้

วิธีส่ง	ร้านที่ 1	ร้านที่ 2	ร้านที่ 3	ร้านที่ 4
1	1	2	2	1
2	1	3	1	1
3	1	3	2	0
4	1	4	1	0
5	2	1	2	1
6	2	2	1	0
7	2	2	2	0
8	2	0	1	0

การพิจารณาวิธีทำการส่งสินค้า

1. ดูขั้นสุดท้ายจะเห็นว่ากำไรสูงงสุดเท่ากับ 18 ซึ่งอาจจะส่งให้ร้านที่ 1 จำนวน 1 ลัง หรือ 2 ลัง ก็ได้ นั่นคือ $x_1 = 1,2$
2. ดูขั้นที่ 3 ถ้าส่ง $x_1 = 1$ สามารถส่งให้ร้านที่เหลือได้อีก 5 ถ้าส่ง $x_1 = 2$ สามารถส่งให้ร้านที่เหลือได้อีก 4
3. จะเห็นว่าในขั้นที่ 3 ถ้าส่ง $x_1 = 1$ สามารถส่งต่อที่เหลือให้ร้าน 2 ได้ $x_2 = 2,3,4$ ถ้าส่งให้ $x_1 = 2$ สามารถส่งต่อที่เหลือให้ร้านที่ 2 ได้ $x_2 = 1,2,3$
4. ในขั้นที่ 2 ถ้าส่ง $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ก็เหลืออีก 3 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

ถ้าส่ง $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ ก็เหลืออีก 2 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

ถ้าส่ง $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ ก็เหลืออีก 1 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

ถ้าส่ง $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ ก็เหลืออีก 3 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

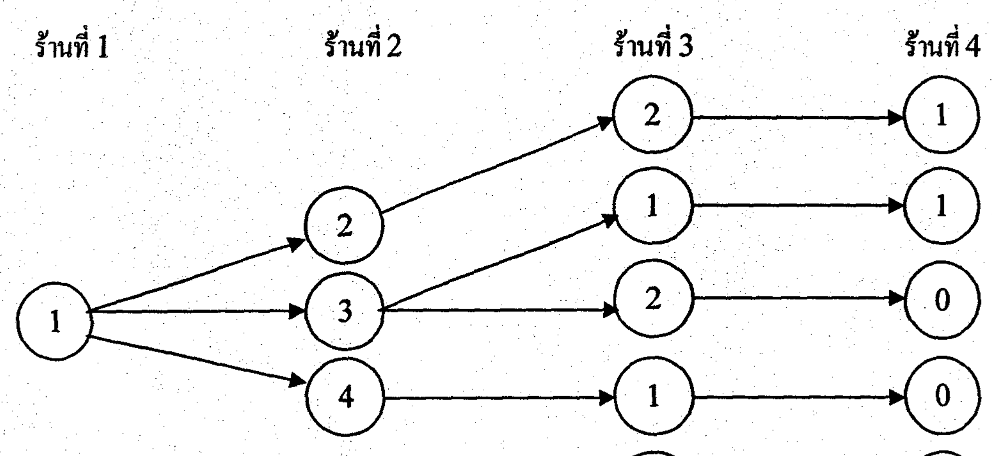
ถ้าส่ง $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ ก็เหลืออีก 2 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

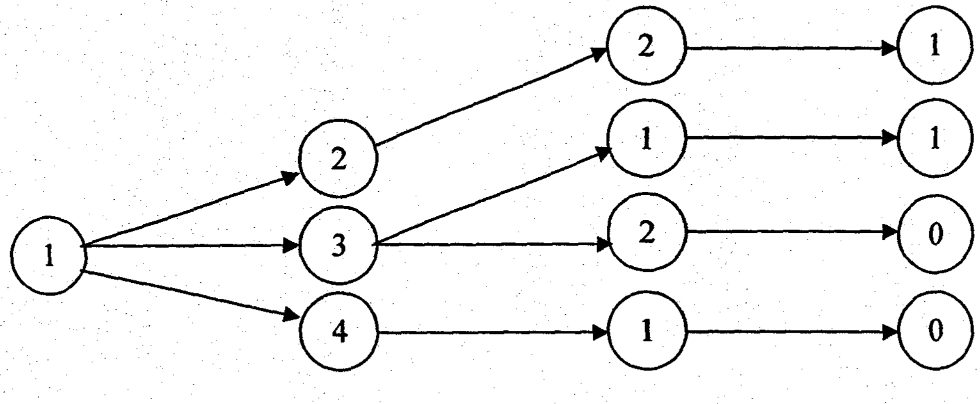
ถ้าส่ง $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ก็เหลืออีก 1 ที่จะส่งต่อให้ร้านที่ 3 และ 4

5. ในขั้นที่ 1 ถ้าส่ง

x_1	x_2	x_3		x_4
1	2	2	จะได้	1
1	3	1	จะได้	1
1	3	2	จะได้	0
1	4	1	จะได้	0
2	1	2	จะได้	1
2	2	1	จะได้	1
2	2	2	จะได้	0
2	3	1	จะได้	0

เราจะพิจารณาการเลือกแนวทางการจัดสรรโดยใช้แผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้





ตอบ

อีกรูปแบบหนึ่งของโปรแกรมพลวัตคือ มองในแง่ของความน่าจะเป็น ซึ่งจะอธิบายพร้อมกับยกตัวอย่างประกอบดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง มหาวิทยาลัยตั้งทีมวิจัยเพื่อพัฒนามหาวิทยาลัย 3 ทีม โดยการทำการวิจัยเป็นอิสระต่อกัน และผู้บริหารเห็นว่ามีเงินที่พอจะจ้างผู้เชี่ยวชาญมาเป็นที่ปรึกษางานวิจัยทั้งหมดเพียง 2 คน จึงมีปัญหาว่า จะให้ผู้เชี่ยวชาญมาเป็นที่ปรึกษาแก่ทีมวิจัยทีมใด จึงจะให้โอกาสที่จะประสบผลล้มเหลวน้อยที่สุด โดยกำหนดค่าความน่าจะเป็นที่จะล้มเหลวของและทีมวิจัย และจำนวนผู้เชี่ยวชาญดังนี้

ทีมวิจัย

		ก	**ข**	**ค**
จำนวนผู้เชี่ยวชาญ	0	0.4	0.6	0.8
	1	0.2	0.4	0.5
	2	0.15	0.2	0.3

การพิจารณาเพื่อแก้ปัญหานี้ใช้หลักการทำนองเดียวกับการส่งลำไยในตัวอย่างที่แล้วแต่แทนที่จะพิจารณาผลบวกของกำไร ก็เป็นการพิจารณาผลคูณของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน พิจารณาย้อนหลังโดย

ขั้นที่ 1 พิจารณาจากทีม ค ก่อน

S	$f_1(s)$	x_1^*
0	0.80	0
1	0.50	1
2	0.30	2

S: จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

x_1^*: จำนวนผู้เชี่ยวชาญที่ทีม ค ได้รับ

$f_1(s)$: ความน่าจะเป็นที่จะล้มเหลวเมื่อได้ผู้เชี่ยวชาญ S คน

ขั้นที่ 2 พิจารณาทีม ข หลังจากพิจารณาทีม ค แล้ว

x_2 / s	$f_2(s,x_2)=P_2(x_2)+f^*_1(s-x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	0	2	3		
0	(0.60) (0.80)			0.48	0
1	(0.60) (0.50)	(0.40) (0.80)		0.30	0
2	(0.60) (0.30)	(0.40) (0.50)	(0.20) (0.80)	0.16	2

x_2 : จำนวนผู้เชี่ยวชาญที่ทีม ข ได้

$f_2(s, x_2)$: ความน่าจะเป็นที่จะล้มเหลว เมื่อทีม ข ได้ผู้เชี่ยวชาญ หลังจากพิจารณาให้ทีม ค มาแล้ว

$f_2^*(s)$: ความน่าจะเป็นที่ล้มเหลวน้อยที่สุด

x_2^* : จำนวนผู้เชี่ยวชาญที่ทีม ข ได้รับหลังจากพิจารณา ค มาแล้ว

ขั้นที่ 3 พิจารณาทีม ก หลังจากพิจารณาทีม ข และ ค แล้ว

x_3 / s	$f_3(s, x_3) = P_3(x_3) + f^*{}_2(s - x_3)$			$f_3^*(s)$	x_3^*
	0	2	3		
0	(0.40) (0.48)			0.192	0
1	(0.40) (0.30)	(0.20) (0.48)		0.096	1
2	(0.40) (0.16)	(0.20) (0.30)	(0.15) (0.48)	0.06	1

ดังนั้นสรุปได้ว่า จะได้ความน่าจะเป็นที่ประสบผลล้มเหลวน้อยที่สุด ถ้าให้ที่ปรึกษาแก่ทีม ก 1 คน ทีม ข 0 คน และทีม ค 1 คน ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่ประสบผลล้มเหลวเพียง 0.06

<u>**ตอบ**</u>

บทที่ 6
วิธีการซิมเพล็กคู่เสมอกัน
Dual Simplex Method

เนื่องด้วยวิธีซิมเพล็กคู่เสมอกันจะใช้ในการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม (IntegerProgramming) จึงขออธิบายวิธีแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้น โดยวิธีซิมเพล็กคู่เสมอกัน ดังนี้

วิธีซิมเพล็กคู่เสมอกัน เปปีนปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่ตารางซิมเพล็กเริ่มต้นอยู่ในรูปแบบของปัญหาที่ให้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด แต่คำตอบเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปไม่ได้ ซึ่งตรงกันข้ามกับตารางซิมเพล็กเริ่มต้นของวิธีที่ให้ผลลัพธ์ที่ยังไม่ดีที่สุด แต่คำตอบเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ ซึ่งจะเข้าใจได้ดีจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1 จงทำ Z ให้มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1 + x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_i \geq 0$$

การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กคู่เสมอกันมีวิธีการดังนี้

1. ทำให้ตัวเลขทางขวามือเป็นลบ จะได้เงื่อนไขบังคับใหม่ดังนี้

$$-3x_1 - x_2 \geq -3$$
$$-4x_2 - 3x_2 \geq -6$$
$$-x_1 - 2x_2 \geq -3$$

2. สร้างตารางซิมเพล็กใหม่ได้ดังนี้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	คำตอบ
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
s_1	0	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	0	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	0	-1	-2	0	0	1	-3

จะเห็นว่าช่องคำตอบของเงื่อนไขบังคับเป็นค่าลบหมด ซึ่งเป็นค่าที่เป็นไปไม่ได้ แต่พิจารณาเงื่อนไขการได้คำตอบที่ดีที่สุดของตารางซิมเพล็ก ที่ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์จะเห็นว่าเป็นค่าสัมประสิทธิ์ เป็นลบหมดแล้ว นั่นแสดงว่าได้คำตอบที่ดีที่สุดแล้ว

3. ทำตัวแปรให้เป็นผลลัพธ์ให้เป็นบวกให้หมด โดยแยกเป็น 2 กรณีดังนี้

3.1 กรณีทำให้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์มีค่าน้อยที่สุด ในอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์ กับตัวแปรเงื่อนไขบังคับ ที่ตรงกัน โดยพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ในเงื่อนไขบังคับ ที่เป็นลบเท่านั้น โดยเลือกอัตราส่วนที่น้อยที่สุดเป็นตัวแปรนำเข้า โดยตัวแปรมูลฐานที่จะต้องออกไป ก็พิจารณาช่องคำตอบที่มีค่าลบมากที่สุดก่อน

3.2 กรณีทำให้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์มีค่ามากที่สุด ให้เลือกตัวแปรนำเข้าโดยพิจารณาจากอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเงื่อนไขบังคับที่ตรงกัน โดยพิจารณาเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ในเงื่อนไขที่เป็นลบเท่านั้น โดยเลือกอัตราส่วนที่มีค่าไม่คิดเครื่องหมายน้อยที่สุด

ถ้าสัมประสิทธิ์ของเงื่อนไขบังคับเป็นบวกหรือศูนย์หมด จะหาคำตอบไม่ได้ ดังนั้นจากตารางซิมเพล็กคู่เสมอกันเริ่มต้น จะได้ตารางในรอบที่ 1 เป็น

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	คำตอบ
Z	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
s_1	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
s_3	0	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	1

และในรอบที่ 2 จะได้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	คำตอบ
Z	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_3	0	0	0	1	-1	1	0

จะเห็นได้ว่าคำตอบที่เป็นไปได้และเป็นคำตอบที่ดีที่สุดแล้ว เมื่อค่า Z ที่มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ $\frac{12}{5}$

โดยที่ $x_1 = \frac{3}{5}$ และ $x_2 = \frac{6}{5}$ **ตอบ**

โปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม

(Integer Programming)

เป็นการปรับคำตอบจากโปรแกรมเชิงเส้นที่มีคำตอบที่ดีที่สุด ไม่เป็นจำนวนเต็มเพราะในการแก้ไขปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นบางครั้ง จำนวนผลิตที่เหมาะสมจะต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม โดยปัดเศษทิ้ง แต่จะทำให้ใช้ทรัพยากรไปอย่างไม่เต็มที่ และฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์จะลดลงมากเกินไป ซึ่งไม่เป็นที่ต้องการของผู้ผลิต แต่ถ้าปัดเศษขึ้นก็จะทำให้เกินเงื่อนไขบังคับ จึงมีผู้คิดเปลี่ยนคำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้เป็นจำนวนเต็มดังนี้

วิธีของโกโมริ (Comori Method)

เมื่อแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นด้วยวิธีปกติแล้ว ปรากฏว่าคำตอบที่ดีที่สุดมีค่าไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม ก็จะสร้างเงื่อนไขบังคับเพิ่มเข้าไป โดยเงื่อนไขบังคับใหม่นี้สามารถสร้างได้จากเงื่อนไขบังคับที่คำตอบไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม โดยแยกส่วนที่เป็นจำนวนเต็มออกจากเศษส่วน จะพิจารณาได้ง่ายเข้าถ้าพิจารณาพร้อมไปกับตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.2 จงทำ Z ให้มีค่ามากที่สุด เมื่อ $Z = 7x_1 + 9x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ $-x_1+3x_2$ £6

$7x_1+3x_2 \leq 6$

$7x_1+2x_2 \leq 35$

x_1, x_2 เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ซึ่งสามารถหาคำตอบที่ให้ฟังก์ชั่นวัตถุประสงค์สูงที่สุดดังนี้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	คำตอบ
Z	1	0	0	$\frac{28}{1}$	$\frac{15}{11}$	63
x_2	0	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

การสร้างเงื่อนไขบังคับใหม่ใส่เข้าไป พิจารณาได้จากเงื่อนไขบังคับที่มีคำตอบไม่เป็นจำนวนเต็มเงื่อนไขบังคับแรก คือ

$$x_2+\frac{7}{22}s_1+\frac{1}{22}s_2 = \frac{7}{2}$$

$$x_2+(0+\frac{7}{22})s_1+(0+\frac{1}{22})s_2 = 3+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{7}{22}s_1-\frac{1}{22}s_2 = x_2-3$$

เนื่องจาก x_2 จะต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม และจะมากกว่า $3\frac{1}{2}$ ไม่ได้ เพราะจะทำให้ไม่อยู่ในเงื่อนไขบังคับ ฉะนั้นค่า $x_2 - 3$ จะต้องน้อยกว่า 0 (แต่อาจจะทำให้ x_1 ในเงื่อนไขบังคับอันที่ 2 เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า $4\frac{1}{2}$ ได้ หลังจากทำซิมเพล็กคู่เสมอกัน)

$$\therefore \frac{1}{2}-\frac{7}{22}s_1-\frac{1}{22}s_2 \le 0$$

เราจะเพิ่มเงื่อนไขนี้เข้าไปในตารางซิมเพล็กคู่ที่ได้คำตอบที่ที่สุดเดิม โดยทำเงื่อนไขบังคับใหม่ที่จะเพิ่มเข้าไปนี้ เป็นรูปแบบมาตรฐานเสียก่อนดังนี้

$$\frac{1}{2}-\frac{7}{22}s_1-\frac{1}{22}s_2 + s_3 = 0$$

จะได้ตารางซิมเพล็กเพื่อทำซิมเพล็กคู่เสมอกัน ดังนี้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	คำตอบ
Z	1	0	0	$\frac{28}{1}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	0	0	1	$-\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	3 ½
x_1	0	1	0	$\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	4 ½
s_3	0	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$

โดยหลักการซิมเพล็กคู่เสมอกัน จะได้ตารางซิมเพล็กที่ได้คำตอบดีที่สุดอีกคำตอบ คือ

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	คำตอบ
Z	1	0	0	0	1	8	59
x_2	0	0	1	0	0	1	3
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
s_1	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

ปรากฏว่า x_1 ยังมีคำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็มอยู่ จึงสร้างเงื่อนไขบังคับใหม่อีก ดังนี้

$$x_1+\frac{1}{7}s_2-\frac{1}{7}s_3 = 4\frac{4}{7}$$

$$x_1+(0+\frac{1}{7})s_2-(0+\frac{1}{7})s_3 = 4+\frac{4}{7}$$

$$\frac{4}{7}-\frac{1}{7}s_2+\frac{1}{7}s_3 = x_1-4$$

x_1 เป็นจำนวนเต็มที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $4\frac{4}{7}$

$$\therefore \frac{4}{7} - \frac{1}{7}s_2 + \frac{1}{7}s_3 = 0$$

ทำเป็นรูปแบบมาตรฐานจะได้

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{7}s_2 + \frac{1}{7}s_3 + s_4 = 0$$

เพิ่มเข้าไปในตารางซิมเพล็กสุดท้ายจะได้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	คำตอบ
Z	1	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_1	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

โดยวิธีซิมเพล็กคู่เสมอกันจะได้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	คำตอบ
Z	1	0	0	0	0	2	7	55
x_2	0	0	1	0	0	1	0	3
x_1	0	1	0	0	0	-1	1	4
x_1	0	0	0	1	0	-4	1	1
s_2	0	0	0	0	1	6	-7	4

จะเห็นว่าคำตอบที่ดีที่สุดคำตอบนี้ให้คำตอบเป็นเลขจำนวนเต็ม จะได้ค่า Z ที่มีค่าสูงสุดเท่ากับ 55 โดยที่ $x_1 = 4, x_2 = 3$ <u>ตอบ</u>

จากตัวอย่างที่แล้วมารากฏว่าค่าที่มีค่าที่ดีที่สุดของ x_1 และ x_2 เป็นค่าจำนวนเต็มที่น้อยกว่า x_1 และ x_2 ที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม อาจจะทำให้เข้าใจว่าเมื่อหาคำตอบที่ดีที่สุดที่เป็นจำนวนเต็ม ก็คือปัดเศษทิ้ง จากคำตอบที่ดีที่สุดจะไม่เป็ฯจำนวนเต็ม จึงจะยกตัวอย่างอีกตัวอย่างหนึ่ง ซึ่งเป็นกรณีคำตอบที่ดีที่สุดที่เป็ฯจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า คำตอบที่ดีที่สุดที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 6.3 จงทำ Z ให้มีค่ามากที่สุด เมื่อ $Z = 3x_1 + 5x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1 + 4x_2 \le 9$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 11$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

สร้างตารางซิมเพล็กได้ดังนี้

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	คำตอบ
Z	1	-3	-5	0	0	0
s_1	0	1	4	1	0	9
s_2	0	2	3	0	1	11
Z	1	$-\frac{7}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{45}{4}$
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$
s_2	0	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{17}{4}$
Z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{86}{5}$
x_2	0	0	1	5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{5}$

จะเห็นว่าคำตอบที่ Z มีค่าสูงสุดก็คือ $Z = \frac{86}{5}$

โดยที่ $x_1 = \frac{17}{5}$ และ $x_2 = \frac{7}{5}$

เมื่อต้องการให้คำตอบที่ออกมาเป็นจำนวนเต็ม ก็ต้องสร้างเงื่อนไขบังคับเข้าไปตามวิธีของโกโมริ

จาก

$$x_2+\frac{2}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2 \quad =\frac{7}{5}$$

$$x_2+\frac{2}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2 \quad =1\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2 \quad =1+\frac{2}{5}-x_2$$

$$\frac{2}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2 \quad =\frac{2}{5}+1-x_2$$

X_2 เป็นเลขจำนวนเต็มที่จะเกิน 1 ไม่ได้ เพราะ 1 เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า $\frac{7}{5}$

$$\therefore \frac{2}{5}s_1-\frac{1}{5}s_2 \quad \geq \quad \frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{5}s_1+\frac{1}{5}s_2 \quad \leq -\frac{2}{5}$$

นำไปทำเป็นรูปแบบมาตรฐานเพื่อเพิ่มเงื่อนไขบังคับเข้าไปในผลลัพธ์ที่ดีที่สุดเดิมจะได้

	Z	**x_1**	**x_2**	**s_1**	**s_2**	**s_3**	**คำตอบ**
Z	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{86}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{7}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{17}{5}$
s_3	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$
Z	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	17
x_2	0	0	1	0	0	1	1
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4
s_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1

ดังนั้นคำตอบที่ดีที่สุดเมื่อค่า x_1 เป็นจำนวนเต็มก็คือ $Z = 17$ โดยที่

$x_1 = 4$ และ $x_2 = 1$ **ตอบ**

บทที่ 7
ทฤษฎีเกม
Games Theory

ทฤษฎีเกมถูกพัฒนาขึ้นจากการหากลยุทธ์ (Strategies) เพื่อจะเอาชนะคู่แข่งขันโดยนำมาใช้กับการทหารก่อน เป็นเกมเพราะเป็นการแข่งขันทางกลยุทธ์กันระหว่าง 2 ฝ่าย เป็นการตั้งรับหรือรุกแล้วแต่สถานการณ์ที่เกิดขึ้น โดยมีเป้าหมายก็คือให้ได้ประโยชน์สูงสุดหรือเสียประโยชน์น้อยที่สุดแล้วแต่กรณี ภายหลังสงครามสงบได้นำมาประยุกต์ใช้กับการแข่งขันทางธุรกิจ ปรากฏว่าได้ผลดี จึงได้พัฒนาขึ้นเป็น

ทฤษฎีเกม

เกมสองคนผลรวมเป็นศูนย์ (Two Person Zero-Sum Games)

		ผู้เล่น	
		กลยุทธ์ Q	กลยุทธ์ R
ผู้เล่น X	กลยุทธ์ M	X ได้ 2	X ได้ 3
	กลยุทธ์ N	Y ได้ 1	Y ได้ 2

จากตารางนี้อธิบายได้ว่า มีผู้เล่น 2 ฝ่าย คือผู้เล่น X และ ผู้เล่น Y แต่ละคนมีกลยุทธ์ 2 วิธี คือผู้เล่น Y มีกลยุทธ์ Q และกลยุทธ์ R ส่วนผู้เล่น X มีกลยุทธ์ M และกลยุทธ์ N ซึ่งกลยุทธ์ทั้งหมดเมื่อมาเขียนเป็นตารางแล้ว ทำให้ทราบว่าผู้เล่น X เลือกกลยุทธ์ M ส่วน Y เลือกกลยุทธ์ Q ปรากฏว่าผลตอบแทนของผู้เล่น X เท่ากับ 3 ถ้าผู้เล่นเลือกกลยุทธ์ N ส่วน Y เลือกกลยุทธ์ Q ปรากฏว่าผลตอบแทนจะเป็นของผู้เล่น Y เท่ากับ 2 ทั้งนี้มูติฐานที่ว่า ผู้เล่นทั้ง 2 ฝ่ายมีความสามารถเท่ากัน ผู้เล่น Y ก็จะทราบว่าผู้เล่น X จะต้องเลือกกลยุทธ์ M เพราะเป็นกลยุทธ์ที่เอื้อประโยชน์กับ X ผู้เล่น Y ก็จำเป็นที่จะต้องเลือกกลยุทธ์ที่เอื้อประโยชน์ให้กับ น้อยที่สุด ดังนั้น Y จะเลือกกลยุทธ์ Q

ดังนั้นทุกครั้งที่เล่น X จะได้ผลประโยชน์เท่ากับ 2 นั้นก็หมายความว่า Y เสียผลประโยชน์เท่ากับ 2 (เพราะเป็นเกมที่สองคนผลรวมเป็นศูนย์) ถ้าประโยชน์เท่ากับ 2 นี้ เราจะเรียกว่า ค่าของเกม

นั่นคือค่าของเกมของ X เท่ากับ 2

หรือ ค่าของเกมของ Y เท่ากับ -2

เพื่อความสะดวกในการหากลยุทธ์ที่ดีที่สุด และค่าของเกม เราจะเขียนตารางข้างต้นอยู่ในรูปของ Matrix โดยเรียกว่า Pay of Matrix

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

ค่าธาตุมูลที่เป็นบวก จะเป็นค่าที่เอื้อประโยชน์ต่อผู้เล่นในแนวนอน
ค่าธาตุมูลที่เป็นลบ จะเป็นค่าที่เอื้อประโยชน์ต่อผู้เล่นในแนวตั้ง

กลยุทธ์บริสุทธิ์และจุดอานม้า (Pure Strategies and Saddle Points)

กลยุทธ์บริสุทธิ์ หมายความเมื่อทางฝ่าย X หรือ Y เลือกเล่นกลยุทธ์วิธีใดแล้วก็จะเลือกเล่นกลยุทธ์นั้นตลอดไป ค่าของเกมในกรณีนี้เรียกว่า จุดานม้า (Saddle points) (วิธีพิจารณาง่ายๆ ว่าเป็นจุดอานม้าหรือไม่ ก็โดยดูว่าค่านั้นมากที่สุดในแนวตั้งและน้อยที่สุดในแนวนอนหรือไม่)

กลยุทธ์ผสม (Mixed Strategies)

ในกรณีที่ไม่มีกลยุทธ์บริสุทธิ์ ก็แสดงว่าทางฝ่าย X และ Y จะเลือกเล่นกลยุทธ์ต่างๆ สลับกัน ซึ่งเรียกว่า กลยุทธ์ผสม ซึ่งวิธีการหากลยุทธ์ผสม และค่าของเกมได้ ดังต่อไปนี้

1. ในกรณีที่เป็นเกมขนาด 2 X 2

1.1 วิธีเลขคณิต

กำหนดเพย์ออฟเมตริกดังนี้

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

จะเห็นว่าทั้ง X และ Y ไม่สามารถที่จะเลือกกลยุทธ์ในการเล่นเกมที่แน่นอนได้ เพราะถ้า X เลือกกลยุทธ์ที่ 1 และ Y เลือกกลยุทธ์ที่ 1 X จะได้ตอบแทนถึง 4 แต่ถ้า Y เลือกกลยุทธ์ที่ 2 X จะได้ค่าตอบแทนคือ 1 ในทำนองเดียวกันถ้า X เลือกกลยุทธ์ที่ 2 และ Y เลือกกลยุทธ์ที่ 1 X จะได้ค่าตอบแทนเพียง 3 แต่ถ้า Y เลือกกลยุทธ์ที่ 2 X จะได้ค่าตอบแทนถึง 4 ทำให้ไม่สามารถกำหนดกลยุทธ์บริสุทธิ์ได้

พิจารณาวิธีเลขคณิต

1. หาความแตกต่างของธาตุมูลในแนวนอนและแนวตั้ง

$$\begin{array}{cccc} & \multicolumn{2}{c}{Y} & \triangle x \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & & \begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \\ \triangle Y & 2 \quad\quad 3 & & \end{array}$$

2. จับที่ตัวเลขความแตกต่างที่ได้ในข้อ 1 ทั้งแนวตั้งและแนวนอน

$$\begin{array}{ccc} & Y & \triangle x \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \\ & 3 \quad\quad 2 & \end{array}$$

3. หาสัดส่วนของกลยุทธ์ของ X และ Y

$$\begin{array}{ccc} & Y & \triangle x \\ X & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \frac{1}{1+4}=\frac{1}{5} \\ \frac{4}{1+4}=\frac{4}{5} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \frac{3}{3+2} & \frac{2}{3+2} \\ =\frac{3}{5} & =\frac{2}{5} \end{array} & \end{array}$$

ก็จะได้กลยุทธ์ผสมดังนี้

X จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{5}$ ของครั้งที่เล่นเกมนี้ทั้งหมด

X จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{4}{5}$ ของครั้งที่เล่นเกมนี้ทั้งหมด

Y จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{3}{5}$ ของครั้งที่เล่นเกมนี้ทั้งหมด

Y จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{5}$ ของครั้งที่เล่นเกมนี้ทั้งหมด

1.2 วิธีพีชคณิตเมตริกซ์

ให้เพย์ออฟเมตริกซ์ เป็นเมตริกซ์ A ของเกม

กลยุทธ์ที่ดีที่สุดของ $x = \dfrac{(1\ \ 1)\ \mathrm{Adj}\ A}{(1\ \ 1)\ \mathrm{Adj}\ A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

หมายเหตุ ในเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวและสดมภ์เท่ากันเมตริกซ์ผูกพัน Adjoint A ก็คือเมตริกซ์สับเปลี่ยน (Transpose) ของเมตริกซ์โคแฟกเตอร์ (Cofactor)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

มีโคแฟกเตอร์

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45-48 = -3$$

$$C_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -(36-42) = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(32-35) = -3$$

$$C_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(18-24) = 6$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(9-21) = -12$$

$$C_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(8-14) = 6$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(12-15) = -3$$

$$C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(6-12) = 6$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (5-8) = -3$$

$$\therefore \mathrm{Cof}\ A = C = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\ A = C^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี้ $C^T = C$ แต่โดยทั่วไปไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

ในทำนองเดียวกัน

กลยุทธของ $Y = \dfrac{(1 \;\; 1)\text{ Cof } A}{(1 \;\; 1)\text{ Adj } A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

และจะได้ค่าของเกม $= \dfrac{|A|}{(1 \;\; 1)\text{ Adj } A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$

จากตัวอย่างเดิม

$$A = \begin{pmatrix}5 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$$

$$C\,of\;A = \begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\text{Adj A} = \begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

$\therefore$ กลยุทธ์ x
$$= \frac{(1 \;\; 1)\begin{pmatrix}4 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}}{(1 \;\; 1)\begin{pmatrix}4 & 1\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$
$$= \frac{(1 \;\; 4)}{(1 \;\; 4)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$
$$= \frac{(1 \;\; 4)}{5}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

นั่นคือ X จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 $= \frac{1}{5}$ หาจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 2 $= \frac{4}{4}$ หาจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ Y
$$= \frac{(1 \;\; 1)\begin{pmatrix}4 & -3\\1 & 5\end{pmatrix}}{(1 \;\; 1)\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$
$$= \frac{(3 \;\; 2)}{5}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

นั่นคือ Y จะเลือกกลยุทธ์ที่ 1 $= \frac{2}{5}$ หาจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

จะเลือกกลยุทธ์ที่ 2 $= \frac{2}{5}$ หาจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

$$\text{กลยุทธ์ Y} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{(20-3)}{5} = \frac{17}{5}$$ <u>ตอบ</u>

การหาค่าเกมอาจจะหาได้จากความน่าจะเป็นร่วม (Jjoint Probability Method) เมื่อได้กลยุทธผสมแล้วก็สามารถพิจารณาหาค่าของเกมได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Y} \\ & & \begin{array}{cc} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \\ \text{X} & \begin{array}{c} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ความน่าจะเป็นนี้จะได้ 5 $= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$

ความน่าจะเป็นนี้จะได้ 3 $= \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$

ความน่าจะเป็นนี้จะได้ 1 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$

ความน่าจะเป็นนี้จะได้ 4 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}$

$\therefore$ ค่าคาดหมาย $= 5\text{x} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + 3\text{x} \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) + 1 \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) + 4\text{x} \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5}\right)$

$= \frac{17}{5}$ <u>ตอบ</u>

ซึ่งก็คือค่าของเกมนั่นเอง

2. ในกรณีที่เป็นเกมขนาด 2 x M หรือ M x 2

2.1 การหาคำตอบโดยการโดมิแนนซ์ (Dominance)

เป็นการพิจารณาตัดกลยุทธที่มีเหตุผลแน่ชัดว่าไม่ควรเลือกออกไป จนกระทั่งให้เหลือเป็นเกมขนาด 2 x 2 แล้วจึงค่อยพิจารณาโดยการหาค่าเกมขนาด 2 x 2 ต่อไป

ตัวอย่าง 6.4 กำหนดเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

โดยวิธีโดมิแนนซ์จะเห็นว่า กลยุทธ์ที่ 2 ของ x เป็นกลยุทธ์ที่ x จะต้องเลือกไม่ว่า y เลือกกลยุทธ์ใดก็ตาม ดังนั้นกลยุทธ์ที่ 2 นี้ x จะไม่เลือกเด็ดขาด ก็จะเหลือเป็นเพย์ออฟเมตริกซ์ขนาด 2 x 2 ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

โดยวิธีเลขคณิต จะได้กลยุทธ์ผสมดังนี้

$$\begin{array}{llllll} & & & \Delta x & \text{สลับที่} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix} \\ \Delta y & 2 \quad\ 3 & & & & \\ \text{สลับที่} & 3 \quad\ 2 & & & & \\ & \frac{3}{5} \quad\ \frac{2}{5} & & & & \end{array}$$

นั่นคือ x จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{5}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{3}{5}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

Y จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{3}{5}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{5}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

และค่าของเกม $= 1(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5})+3(\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5})+4(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5})+1(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5})$

$= \frac{6}{25}+\frac{27}{25}+\frac{16}{25}+\frac{6}{25}$

$= \frac{55}{25}+\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 6.5 กำหนดเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ในกรณีนี่ y จะเห็นว่ากลยุทธ์ที่ 3 และ 4 นั้น เป็นกลยุทธ์ที่ทำให้ y เสียผลประโยชน์ ไม่ว่า x จะเลือกกลยุทธ์ใดก็ตาม ดังนั้น y จะไม่เลือก 2 กลยุทธ์นี้

ดังนั้นเราสามารถโดมิแนนซ์เพย์ออฟเมตริกซ์ เหลือเป็น

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

แล้วหาค่า ของเกมโดยวิธีเลขคณิต จะได้

$$\begin{array}{llccc} & & \Delta x & \text{สลับที่} & \\ & \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{matrix} \\ \Delta y & \quad 6 \qquad 2 & & & \\ \text{สลับที่} & \quad 2 \qquad 6 & & & \\ & \quad \frac{2}{8} \qquad \frac{6}{8} & & & \end{array}$$

$\therefore$ x จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{3}{8}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{5}{8}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

Y จะเลือกเล่นกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{4}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{4}$ ของครั้งที่เล่นทั้งหมด

โดยมีค่าของเกม $= 1(\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}) - 6(\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4}) - 7(\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4}) - 4(\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4})$

$= \frac{3}{32} + \frac{36}{32} + \frac{35}{32} + \frac{60}{32}$

$= \frac{134}{32} = \frac{-67}{32} = -4\frac{3}{8}$ <u>ตอบ</u>

2.2 การหาคำตอบโดยวิธีเกมย่อย (Subgames)

ถ้าเราไม่สามารถลดขนาดของเกมลงโดยวิธีโดมิแนนซ์เป็นขนาด 2 x 2 ได้ เราก็จะใช้วิธีเกมย่อย โดยแยกเกมนั้นออกเป็นเกมขนาด 2 x 2 หลายๆ อัน แล้วเลือกกลยุทธ์ของเกมย่อยที่ให้ค่าเกมสูงสุด เป็นกลยุทธ์ผสมที่จะใช้สำหรับเกมนี้

ตัวอย่าง 6.6 กำหนดเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

จะเห็นว่า x จะไม่เลือกกลยุทธ์ที่ 4 เพราะทำให้ x เสียผลประโยชน์ ไม่ว่า y จะเลือกกลยุทธ์ใด

$\therefore$ โดยวิธีมิเนนซ์เหลือเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

จากเมตริกซ์นี้ ไม่สามารถใช้วิธีมิเนนซ์ได้อีก จึงใช้วิธีเกมย่อยดังนี้

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

จาก $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ปรากฏว่าเป็นกลยุทธ์บริสุทธิ์โดยมีค่าของเกม = 1
นั่นคือ x จะเลือกกลยุทธ์ที่ 2 และ y จะเลือกกลยุทธ์ที่ 1 เสมอไป

จาก $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ปรากฏว่าเป็นกลยุทธบริสุทธิ์ โดยมีค่าเกม = 1
นั่นคือ x จะเลือกกลยุทธ์ที่ 2 และ y จะเลือกกลยุทธ์ที่ 1 เสมอไป

จาก $\begin{array}{cc} 0 & 3 \end{array}$ $\quad\quad$ Δx สลับที่

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 3 & \frac{3}{6} \\ 5 & 3 & \frac{3}{6} \end{array}$$

Δy สลับที่ $\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$

ค่าของเกม

$$= 0\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -1$$

นั่นคือ x จะเลือกกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

Y จะเลือกกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{3}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{3}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

จากเกมย่อยทั้งหมดปรากฏว่า เกมย่อยที่ให้ค่าเกมสูงสุดโดยไม่คิดเครื่องหมายเท่ากัน ฉะนั้นจะเลือกเกมได้ 3 วิธี

ซึ่งสรุปได้จากเพย์ออฟเมตริกซ์ที่กำหนดให้แต่แรก ดังนี้

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
X & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

วิธีที่ 1 x เลือกกลยุทธ์ที่ 1 และ y เลือกกลยุทธ์ที่ 2 เสมอไป

วิธีที่ 2 x เลือกกลยุทธ์ที่ 3 และ y เลือกกลยุทธ์ที่ 1 เสมอไป

วิธีที่ 3 x เลือกกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{2}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

Y เลือกกลยุทธ์ที่ 1 เป็นสัดส่วน $\frac{1}{3}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

กลยุทธ์ที่ 2 เป็นสัดส่วน $\frac{2}{3}$ ของจำนวนครั้งที่เล่นทั้งหมด

โดยถ้าเลือกวิธีที่ 1 , 2 ค่าของเกมจะเป็นประโยชน์ต่อ x คือได้ = 1

ถ้าเลือกวิธีที่ 3 ค่าของเกมจะเป็นประโยชน์ต่อ y คือได้ = 1

<u>ตอบ</u>

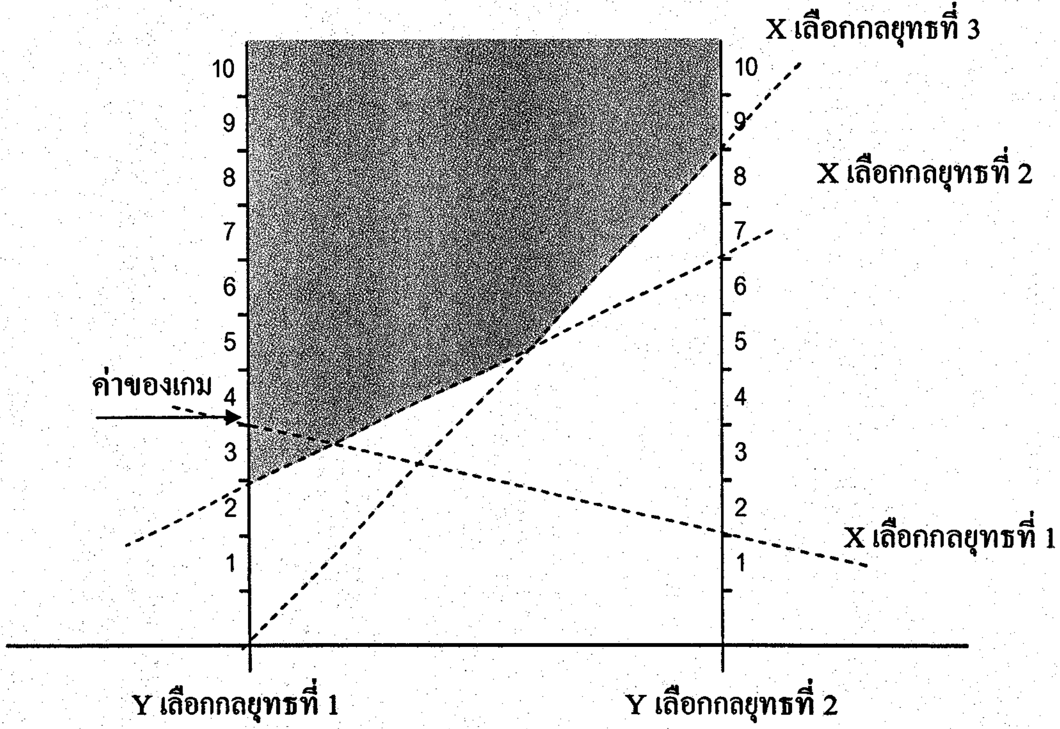
2.3 การหาคำตอบโดยวิธีกราฟ

เป็นการตรวจสอบคำตอบ เพราะสามารถหาค่าของเกมได้ง่ายๆ แต่ไม่ทราบกลยุทธ์ผสม

ตัวอย่าง 6.7 กำหนดเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

นำมาเขียนกราฟได้เป็น



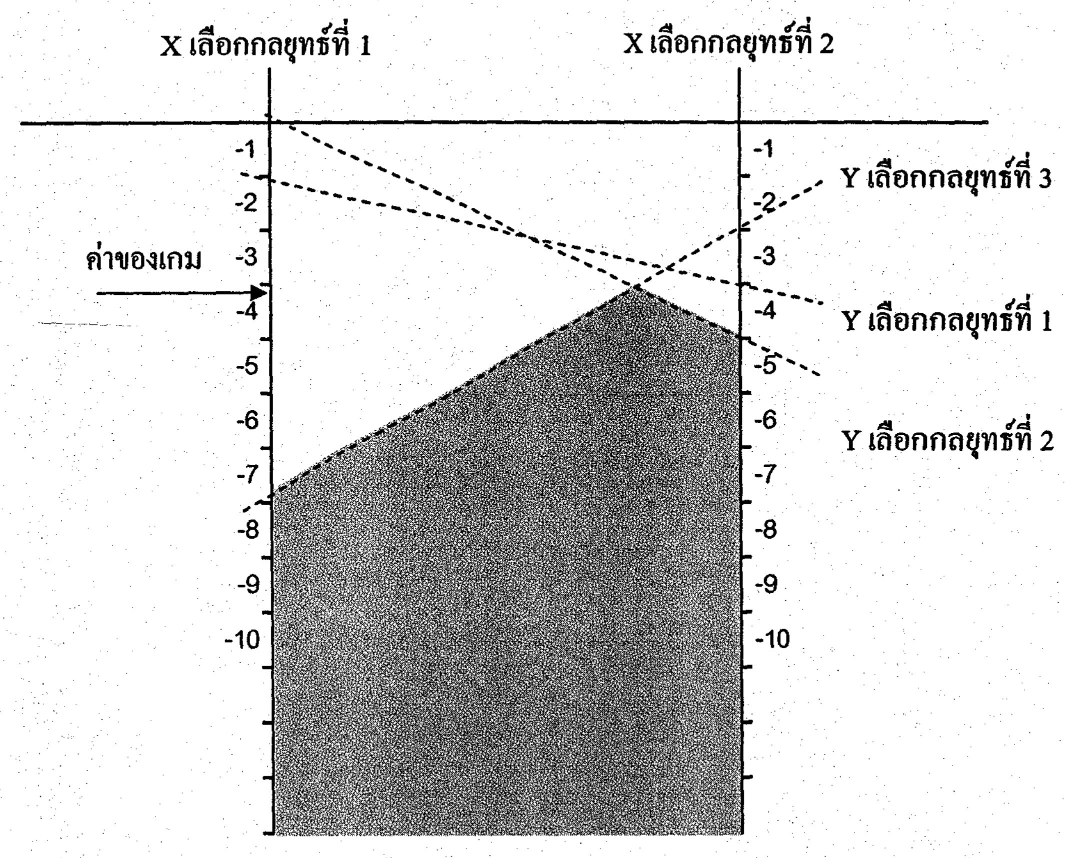
เนื่องจากเพย์ออฟเมตริกซ์ที่กำหนดให้อื้อประโยชน์ให้กับ x ดังนั้นค่าของเกมก็คือจุดต่ำสุดของพื้นที่ที่กวาดมาจากข้างบน ดังในภาพ

<u>**ตอบ**</u>

ตัวอย่าง 6.8 กำหนดเพย์ออฟเมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -7 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

นำมาวาดกราฟจะได้



เนื่องจากเพย์ออฟเมตริกซ์นี้เอื้อประโยชน์ให้กับ y ดังนั้นค่าของเกมก็คือจุดที่พื้นที่กวาดจากด้านล่างขึ้นไปจนถึงจุดสูงสุด

<u>ตอบ</u>

การแก้ปัญหาเกมที่มีขนาด 3 x 3 และใหญ่กว่า

นอกจากวิธีหาจุดอานม้าเพื่อดูว่ามีกลยุทธ์บริสุทธิ์หรือไม่ และโดยวิธีโดมิแนนซ์ เพื่อลดขนาดของเกมลงให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถหาคำตอบได้แล้ว เราก็จำนำเอาวิธีของโปรแกรมเชิงเส้นมาช่วยแก้ปัญหาเกมที่มีขนาด 3x3 และใหญ่กว่าขึ้นไป โดยมีวิธีการโดยสรุปดังต่อไปนี้

สมการเพย์ออฟติกเป็นขนาด 3 x 3 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ x_i เป็นสัดส่วนของกลยุทธ์ที่ i ของ x

กำหนดให้ y_i เป็นสัดส่วนของกลยุทธ์ที่ i ของ y

กำหนดให้ G เป็นค่าของเกม

มองในแง่ Y

$$\begin{aligned} a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 &\le G \\ a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 &\le G \qquad (1) \\ a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 &\le G \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \qquad (A) \end{aligned}$$

จาก (1)

$$\begin{aligned} \frac{a_{11}\ y_1}{G} + \frac{a_{12}\ y_2}{G} + \frac{a_{13}\ y_3}{G} &\le 1 \\ \frac{a_{21}\ y_1}{G} + \frac{a_{22}\ y_2}{G} + \frac{a_{23}\ y_3}{G} &\le 1 \\ \frac{a_{31}\ y_1}{G} + \frac{a_{32}\ y_2}{G} + \frac{a_{33}\ y_3}{G} &\le 1 \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวก กำหนดให้ $\hat{y}_i = \frac{y_i}{G}$

$\therefore$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{11}\,\hat{y}_1 + a_{12}\,\hat{y}_2 + a_{13}\,\hat{y}_3 &\ge G \\ a_{21}\,\hat{y}_1 + a_{22}\,\hat{y}_2 + a_{23}\,\hat{y}_3 &\ge G \qquad (2) \\ a_{31}\,\hat{y}_1 + a_{32}\,\hat{y}_2 + a_{33}\,\hat{y}_3 &\ge G \end{aligned}$$

โดยที่ $\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3 = \frac{1}{G}$

จุดประสงค์ของ y ก็คือให้ค่า G อยู่ในระดับต่ำสุด นั้นก็คือทำให้ $\frac{1}{G}$ มีค่าสูงสุด ตั้งเป็นปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นดังนี้

จงทำ Z ให้มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$
\begin{aligned}
a_{11}\hat{y}_1 + a_{12}\hat{y}_2 + a_{12}\hat{y}_3 &\leq 1 \\
a_{21}\hat{y}_1 + a_{22}\hat{y}_2 + a_{23}\hat{y}_3 &\leq 1 \\
a_{31}\hat{y}_1 + a_{32}\hat{y}_2 + a_{33}\hat{y}_3 &\leq 1
\end{aligned}
$$

เมื่อหาคำตอบได้แล้ว ก็สามารถหาค่าของเกมและสัดส่วนของกลยุทธ์ที่ y จะเล่นได้

มองในแง่ x

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &\geq G \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{21}x_3 &\geq G \\
a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &\geq G \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ $x_i = \frac{x_i}{G}$

$$
\begin{aligned}
a_{11}\hat{x}_1 + a_{21}\hat{x}_2 + a_{31}\hat{x}_3 &\geq 1 \\
a_{12}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + a_{32}\hat{x}_3 &\geq 1 \\
a_{13}\hat{x}_1 + a_{23}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

โดยมี $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 = \frac{1}{G}$

จุดประสงค์ของ X ก็คือ ให้ค่า G มีค่าสูงสุด นั่นก็คือทำให้ $\frac{1}{G}$ มีค่าต่ำที่สุด ตั้งเป็นปัญหาเชิงเส้น ดังนี้

ทำให้ Q มีค่าสูงสุดเมื่อ $Q = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3$

$$
\begin{aligned}
a_{11}\hat{x}_1 + a_{21}\hat{x}_2 + a_{31}\hat{x}_3 &\geq 1 \\
a_{12}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + a_{32}\hat{x}_3 &\geq 1 \\
a_{13}\hat{x}_1 + a_{23}\hat{x}_2 + a_{33}\hat{x}_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

เมื่อหาคำตอบได้แล้ว ก็สามารถหาค่าของเกม และสัดส่วนของกลยุทธ์ที่ X จะเล่นได้

ค่าของเกมนี้หาได้จากการมองในแง่ y และการมองในแง่ X จะต้อง เท่ากัน

ตัวอย่าง จากเพย์ออฟเมตริกซ์ต่อไปนี้ จงหาค่าของเกมและกลยุทธ์ผสม

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

ในแง่ของ y

$$\begin{aligned} 4\hat{y}_2 - 2\hat{y}_3 &\leq 1 \\ 3\hat{y}_1 - 5\hat{y}_2 + \hat{y}_3 &\leq 1 \\ -2\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + 6\hat{y}_3 &\leq 1 \\ \hat{y}_1 + 4\hat{y}_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

ถ้ามองในแง่ของ y ก็พยายามที่จะทำให้ G มีค่าน้อยที่สุด คือ $\frac{1}{G}$ มากที่สุด ทำให้

$\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3$ มีค่าสูงที่สุด โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} 4\hat{y}_2 - 2\hat{y}_3 &\leq 1 \\ 3\hat{y}_1 - 5\hat{y}_2 + \hat{y}_3 &\leq 1 \\ -2\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + 6\hat{y}_3 &\leq 1 \\ \hat{y}_1 + 4\hat{y}_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

ทำให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

$$\begin{aligned} 4\hat{y}_2 - 2\hat{y}_3 + s_1 &\leq 1 \\ 3\hat{y}_1 - 5\hat{y}_2 + \hat{y}_3 + s_2 &\leq 1 \\ -2\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + 6\hat{y}_3 + s_3 &\leq 1 \\ \hat{y}_1 + 4\hat{y}_3 + s_4 &\leq 1 \end{aligned}$$

แก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์

	$\frac{1}{G}$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_3$	S_1	S_2	S_3	S_4	คำตอบ	
$\frac{1}{G}$	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	อัตราต่ำสุด
S_1	0	0	4	-2	1	0	0	0	1	-
S_2	0	3	-5	1	0	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$
S_3	0	-2	1	6	0	0	1	0	1	-
S_4	0	1	0	4	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{G}$	1	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	อัตราต่ำสุด
S_1	0	0	4	-2	1	0	0	0	1	$\frac{1}{4} = 0.25$
$\hat{y}_1$	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	-
S_3	0	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	1	1	0	$\frac{5}{3}$	-
S_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5} = .4$
$\frac{1}{G}$	1	0	0	-2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	อัตราต่ำสุด
$\hat{y}_2$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	-
$\hat{y}_1$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{3}{4}$	-
S_3	0	0	0	$\frac{11}{2}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{27}{12}$	$\frac{27}{66} = \frac{9}{22} = .409$
S_4	0	0	0	$\frac{27}{6}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{6}{27} = \frac{1}{18}$ .05
$\frac{1}{G}$	1	0	0	0	$\frac{13}{27}$	$\frac{5}{27}$	0	$\frac{12}{27}$	$\frac{10}{9}$	
$\hat{y}_2$	0	0	1	0	$\frac{11}{54}$	$-\frac{1}{27}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	
$\hat{y}_1$	0	1	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{8}{27}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{9}$	
S_3	0	0	0	0	$\frac{59}{54}$	$\frac{29}{27}$	1	$-\frac{11}{9}$	$\frac{5}{3}$	
$\hat{y}_3$	0	0	0	1	$-\frac{5}{54}$	$-\frac{2}{27}$	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{18}$	

จะได้ $\frac{1}{G} = \frac{10}{9}$, $\hat{y}_1 = \frac{7}{9}$, $\hat{y}_2 = \frac{5}{18}$, $\hat{y}_3 = \frac{1}{18}$

$$\therefore \quad G = \frac{9}{10}$$

จาก $\hat{y}_1 = \frac{y_i}{G}$ หรือ $y_1 = \frac{\hat{y}_i}{G} . G$

$$\therefore \quad y1 = \frac{7}{9} x \frac{9}{10} = \frac{7}{10}$$

$$y2 = \frac{15}{18} x \frac{9}{10} = \frac{1}{4}$$

$$y3 = \frac{1}{18} x \frac{9}{10} = \frac{1}{20}$$

ถ้าพิจารณาในแง่ของ x

นั่นคือ จะต้องพยายามทำให้ G มีค่ามากที่สุด หรือ $\frac{1}{G}$ น้อยที่สุด ทำให้ $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3$ มีค่าน้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$3\hat{x}_2 - 2\hat{x}_3 + \hat{x}_4 \geq 1$$

$$4\hat{x}_1 - 5\hat{x}_2 + \hat{x}_3 \geq 1$$

$$-2\hat{x} + \hat{x}_2 + 6\hat{x}_3 + 4\hat{x}_4 \geq 1$$

แก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กคู่เสมอกัน โดยเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับให้เป็น $\leq$ จะได้

$$-3\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - \hat{x}_4 \leq -1$$

$$-4\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 \leq -1$$

$$+2\hat{x} - \hat{x}_2 - 6\hat{x}_3 - 4\hat{x}_4 \leq -1$$

เปลี่ยนเป็นรูปแบบมาตรฐาน จะได้

$$-3\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 - \hat{x}_4 + s_1 = -1$$

$$-4\hat{x}_1 + 5\hat{x}_2 - \hat{x}_3 + s_2 = -1$$

$$+2\hat{x} - \hat{x}_2 - 6\hat{x}_3 - 4\hat{x}_4 + s_3 = -1$$

	$\frac{1}{G}$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	S_1	S_2	S_3	คำตอบ
$\frac{1}{G}$	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
S_1	0	0	-3	2	-1	0	0	0	-1
S_2	0	-4	-5	-1	0	1	1	0	-1
S_3	0	-2	1	-6	-4	0	0	1	-1
$\frac{1}{G}$	1	-1	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$\hat{x}_2$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
S_2	0	-4	-	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{8}{3}$
S_3	0	2	0	$-\frac{20}{3}$	$\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$
$\frac{1}{G}$	1	0	0	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	1
$\hat{x}_2$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
$\hat{x}_1$	0	1	0	$-\frac{7}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{2}{3}$
S_3	0	0	0	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-2
$\frac{1}{G}$	1	0	0	$-\frac{35}{18}$	0	$-\frac{28}{36}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{10}{9}$
$\hat{x}_2$	0	0	1	$-\frac{29}{27}$	0	$-\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{5}{27}$
$\hat{x}_1$	0	1	0	$-\frac{59}{54}$	0	$-\frac{10}{27}$	$\frac{11}{54}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{13}{27}$
$\hat{x}_4$	0	0	0	$-\frac{11}{9}$	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

จะได้ $\frac{1}{G} = \frac{10}{9}$, $\hat{x}_1 = \frac{13}{27}$, $\hat{x}_2 = \frac{5}{27}$, $\hat{x}_2 = \frac{4}{9}$

$G = \frac{9}{10}$

จาก $\hat{x}_i = \frac{\hat{x}_i}{G}$ หรือ $\hat{x}_i = \hat{x}_i G$

จะได้ว่า $x_1 = \frac{13}{27} x \frac{9}{10} = \frac{13}{30}$

$x_2 = \frac{5}{27} x \frac{9}{10} = \frac{1}{6}$

$x_3 = 0$

$x_4 = \frac{4}{9} x \frac{9}{10} = \frac{2}{5}$

นั่นคือ กลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุดของ x คือ $(\frac{13}{30} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad \frac{2}{5})$

กลยุทธ์ผสมที่ดีที่สุดของ y คือ $(\frac{7}{10} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{20})$

โดยมีค่าของเกม $= \frac{9}{10}$ **<u>ตอบ</u>**

แบบทดสอบชุดที่ 1

(โปรแกรมเชิงเส้น)

1. จงแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้

1.1 ทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1+3x_2-5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1+x_2+x_3 = 7$$
$$2x_1-5x_2+x_3 \geq 10$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

1.2 ทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 5x_1+6x_2-7x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1+5x_2+3x_3 \geq 15$$
$$5x_1-6x_2+10x_3 \leq 20$$
$$x_1+x_2+x_3 = 5$$
$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

1.3 ทำให้ Z มีค่ามากที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1+x_2-3x_3+5x_4$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$x_1+7x_2+3x_3+7x_4 \leq 46$$
$$3x_1-x_2+x_3+2x_4 \leq 8$$
$$2x_1+3x_2+x_3+x_4 \leq 10$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

2. การผสมอาหารสำหรับคนไข้ มีส่วนประกอบ 3 อย่างคือ นม เนื้อ และไข่ ทางโรงพยาบาลต้องการผสมอาหารให้มีราคาต่ำที่สุด แต่ต้องให้มีวิตามิน A ไม่น้อยกว่า 1 มิลลิกรัม วิตามิน C ไม่น้อยกว่า 50 มิลลิกรัม และวิตามิน D ไม่น้อยกว่า 10 มิลลิกรัม ต่อมื้อ โดยอาหารที่จะนำมาผสมกันมีวิตามินต่างๆ และราคาต่อหน่วยดังตารางต่อไปนี้

วิตามิน (มิลลิกรัม)	นม (แกลลอน)	เนื้อ (ปอนด์)	ไข่ (โหล)
A	1	1	10
C	100	10	10
D	10	100	10
ราคาต่อหน่วย (บาท)	20	22	10

จงสร้างโปรแกรมเชิงเส้น และหาส่วนผสมที่เหมาะสม

3. จงทำค่า Z ให้มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1+x_2-6x_3+x_4$

โดยมีเงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
3x_1+x_4 &\leq 25 \\
x_1+x_2+x_3+x_4 &= 20 \\
4x_1+6x_3 &\geq 5 \\
2x_2+3x_3+2x_4 &\leq 30 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

x_4 ไม่จำกัดเครื่องหมาย

แบบทดสอบชุดที่ 2
(ปัญหาคู่เสมอกัน)

1. จงแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธีปัญหาคู่เสมอกัน

1.1 จงทำให้ Z มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1+3x_2$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$2x_1+3x_2 \leq 30$

$x_1+2x_2 \geq 10$

$x_1-x_2 \geq 0$

$x_1 \geq 5$

$x_2 \geq 0$

1.2 จงทำให้ Z มีค่าสูงที่สุด เมื่อ $Z = 2x_1+x_2-5x_3+6x_4$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$2x_1+x_3+x_4 \leq 8$

$2x_1+2x_2+x_3+2x_4 \leq 12$

$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$

1.3 จงทำให้ Z มีค่าสูงที่สุด เมื่อ $Z = 2x_2-5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$x_1+x_3 \geq 2$

$2x_1+x_2+6x_3 \leq 6$

$x_1-x_2+3x_3 =0$

$x_1,x_2,x_3 \geq 0$

2. จงพิจารณาปัญหา จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ $Z = 5x_1+2x_2-3x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$x_1+5x_2+2x_3 \leq b_1$

$x_1+5x_2+6x_3 \leq b_2$

$x_1,x_2,x_3 \geq 0$

เมื่อ b_1 และ b_2 เป็นตัวคงค่า ถ้าตารางสุดท้ายที่ทำให้ Z มีค่าสูงสุด คือ

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	คำตอบ
Z	1	0	a	7	d	e	150
x_1	0	1	b	2	1	0	30
s_1	0	0	c	-8	-1	1	10

เมื่อค่า a, b, c, และ d เป็นตัวคงค่า จงหาว่า

2.1 จงหาค่า b_1 และ b_2

2.2 คำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาคู่เสมอกัน

2.3 ค่าของ a, b และ c ในตารางสุดท้ายที่ดีที่สุด

3. ถ้าต้องการให้ Z มีค่าสูงที่สุดที่ $Z = 2x_2 - 5x_3$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

จงหาว่า 3.1 เปลี่ยนเป็นปัญหาคู่เสมอกัน

3.2 หาคำตอบของปัญหาคู่เสมอกันแล้วเปรียบเทียบกับการหาคำตอบจากรูปแบบเดิม

3.3 ถ้าตัวเลขทางขวามือของปัญหาข้างบน เปลี่ยนจาก (2, 6, 0) เป็น (2, 10, 5) จงหาคำตอบที่ดีที่สุด

แบบทดสอบชุดที่ 3

(ปัญหาการขนส่ง)

1. จากแบบหุ่นของการขนส่งต่อไปนี้ จงหาคำตอบเริ่มต้นโดยวิธีทิศตะวันตกเฉียงเหนือ วิธีการขนส่งน้อยที่สุด และวิธีประมาณของโวเกล แล้วเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายในการขนส่งด้วย

1.1

1	2	6	7
0	4	2	12
3	1	5	11
10	10	10	

1.2

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

1.3

10	20	5	7	10
13	9	12	8	20
4	15	7	9	30
14	7	1	0	40
3	12	5	19	50
60	60	20	10	

2. พิจารณาปัญหาการมอบหมายงานที่มีเครื่องจักร 4 ประเภท จำวนเครื่องจักรทั้ง 4 ประเภทอยู่จำนวน 25, 30, 20 และ 30 เครื่องตามลำดับ และงาน 4 ชนิดมีอยู่จำนวน 20, 30, 10 และ 20 ชิ้นตามลำดับ และมีข้อจำกัดว่าเครื่องจักรประเภทที่ 4 ไม่สามารถทำงานชนิดที่ 4 ได้ ตารางค่าใช้จ่ายต่อหน่วยกำหนดดังนี้

		ชนิดของงาน				
		1	2	3	4	5
	1	10	2	3	15	9
ประเภทของ	2	5	10	15	2	4
เครื่องจักร	3	15	5	14	7	15
	4	20	15	13	-	8

จงหาวิธีมอบหมายเครื่องจักรทำงานให้มีประสิทธิภาพดีที่สุด

3. ให้ทำให้ค่าขนส่งสูงสุด

10	20	5	7	10
13	9	12	8	20
4	15	7	9	30
15	7	1	0	40
3	12	5	19	50
60	60	20	10	

โดยตารางเริ่มต้นโดยวิธีประมาณของโวเกล และหาคำตอบที่มากที่สุดโดยวิธีของตัวคูณ

จุดหมายปลายทาง

		1	2	3	4	
	1	6	7	3	4	9
จุดเริ่มต้น	2	7	9	1	2	4
	3	6	5	16	7	15
	4	18	9	10	2	8
		10	5	10	5	

ในตารางเป็นเวลาของการขนส่งจากจุดเริ่มต้นไปจุดหมายปลายทาง ให้หาเวลาที่สั้นที่สุดในการจัดสรรการขนส่ง

5. โรงพิมพ์แบ่งงานออกเป็น 4 ประเภท โดยมีช่างเรียงพิมพ์ 6 คน เขาจะมอบงานพิมพ์ให้คนทั้ง 6 ให้ได้ประโยชน์สูงสุด โดยคนงานแต่ละคนทำงานแต่ละงานจะได้กำไรดังนี้

จำนวนคนงาน	ประเภทของงาน 1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	25	20	33	13
2	42	38	43	24
3	55	54	47	32
4	63	65	50	39
5	69	73	52	45
6	74	80	53	50

6. ปัญหาการขนส่งโดยมีโรงงาน 2 โรงงานที่จะส่งให้คลังสินค้า 3 แห่ง จำนวนสินค้าที่โรงงานทั้ง 2 ผลิตได้ = 200 และ 300 หน่วย ขณะที่ความต้องการของคลังสินค้าต้องการ 100, 200 และ 50 หน่วย ตามลำดับ นอกจากการขนส่งสินค้าโดยตรงแล้ว ถ้ากำหนดเป็นแบบหุ่นที่สามารถส่งต่อไปได้อีก

จงหาปริมาณที่การขนส่งที่เหมาะที่สุด โดยกำหนดค่าขนส่งต่อหน่วยดังนี้

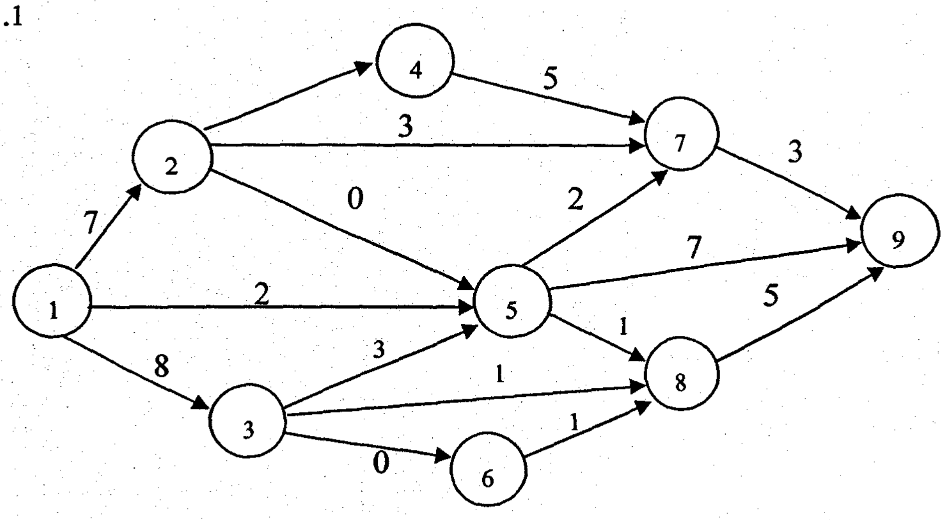
		โรงงาน		คลังสินค้า		
		1	2	1	2	3
โรงงาน	1	0	6	7	8	9
	2	6	0	5	4	3
	1	7	2	0	5	1
คลังสินค้า	2	1	5	1	0	4
	3	8	9	7	6	0

แบบทดสอบชุดที่ 4

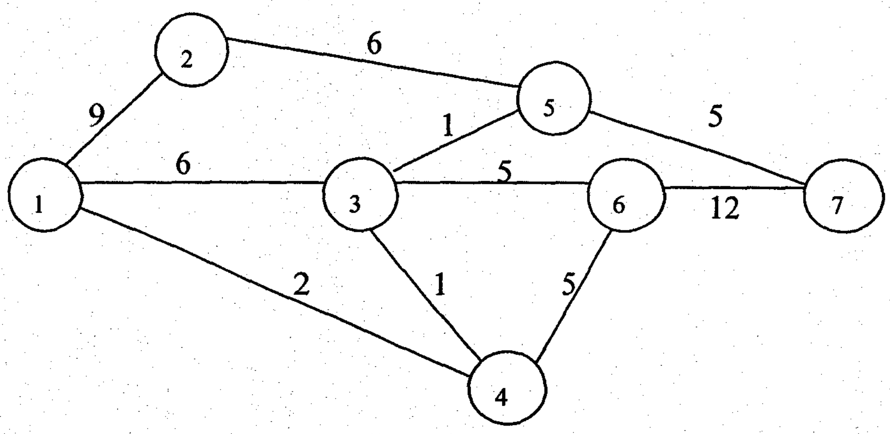
(การประเมินโปรแกรมและเทคนิคการตรวจสอบ)

1. กำหนดข่ายงานต่อไปนี้ จงหาเส้นทางวิกฤต

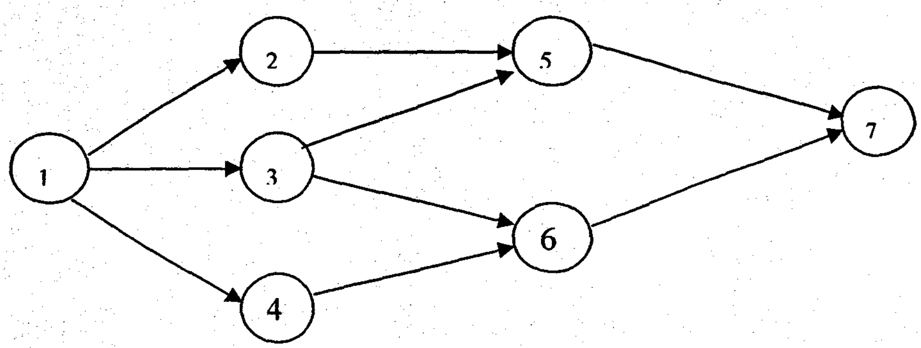
1.1



1.2



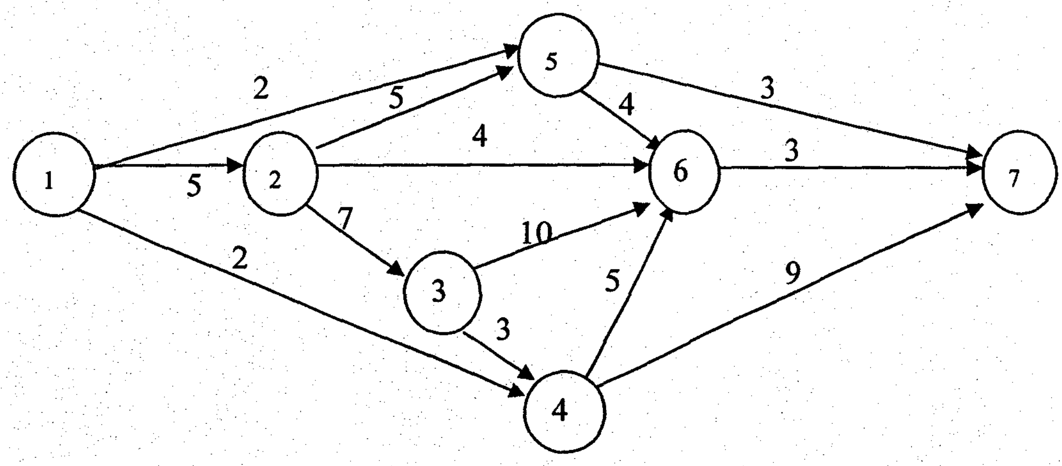
2. จากข่ายงานต่อไปนี้ จงหาเส้นทางวิกฤต และหาความน่าจะเป็นที่จะทำโครงการนี้เสร็จภายในเวลา 28 สัปดาห์



กำหนดเวลาเป็นสัปดาห์ โดย

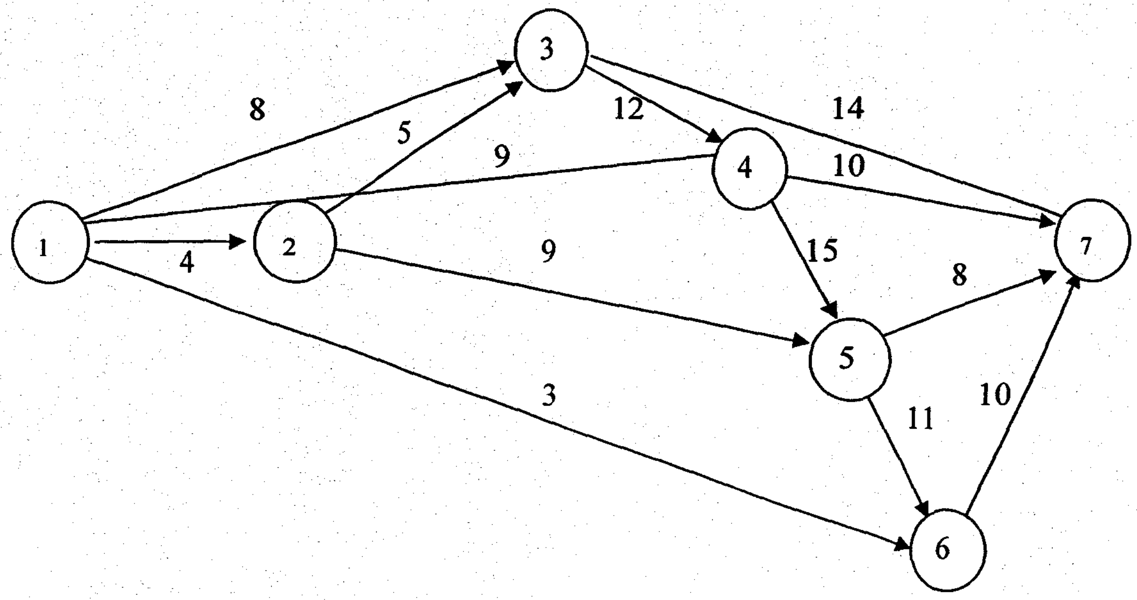
กิจกรรม	a	m	b
1-2	8	9	10
1-3	6	7	9
1-4	9	12	15
3-4	5	5	5
3-5	8	10	11
3-6	11	15	20
4-6	3	4	6
2-5	5	6	8
5-7	8	10	12
6-7	4	5	10

3. จากข่ายงานต่อไปนี้ ถ้าต้องการลดเวลาทำงานแล้วเสร็จลงให้เหลือ 15 สัปดาห์ จะต้องสิ้นค่าใช้จ่ายอย่างน้อยที่สุดเท่าใด



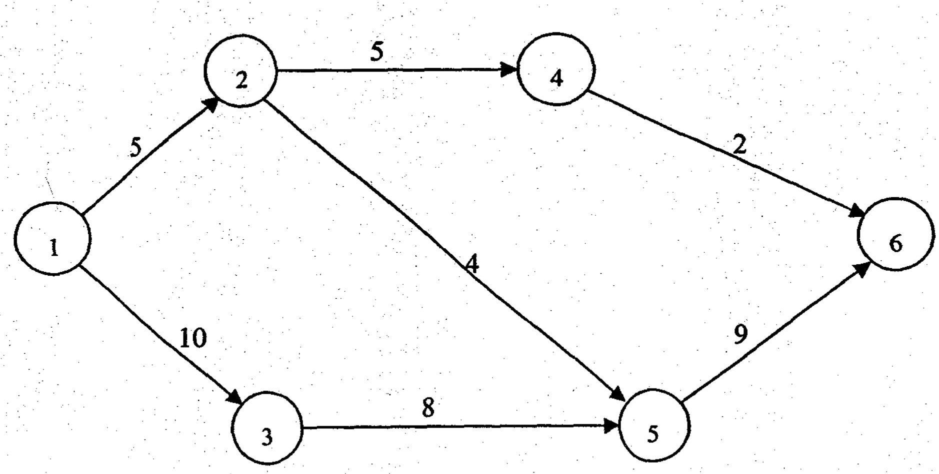
กิจกรรม	เวลา (สัปดาห์)		ค่าใช้จ่าย		ค่าใช้จ่ายต่อหน่วยในการลดเวลา
	ปกติ	ลด	ปกติ	ลด	
1-2	5	2	100	200	100/3
1-4	2	1	50	80	30
1-5	2	1	150	180	30
2-3	7	5	200	250	25
2-5	5	2	20	40	20/3
2-6	4	2	20	40	10
3-4	3	1	60	80	10
3-6	10	6	30	60	30/4
4-6	5	2	10	20	10/3
4-7	9	5	70	90	5
5-6	4	1	100	130	10
5-7	3	1	140	160	10
6-7	3	1	200	240	20
			1150	1570	

4. จากข่ายงานต่อไปนี้ ถ้าต้องการลดเวลาทำงานแล้วเสร็จลงให้เหลือ 32 สัปดาห์ จะต้องสิ้นค้าใช้จ่ายอย่างน้อยที่สุดเท่าใด



กิจกรรม	เวลา (สัปดาห์)		ค่าใช้จ่าย		ค่าใช้จ่ายต่อหน่วยในการลดเวลา
	ปกติ	ลด	ปกติ	ลด	
1-2	4	1	100	400	100
1-3	8	5	400	640	80
1-4	9	6	120	180	20
1-6	3	1	20	60	20
2-3	5	3	60	100	20
2-5	9	7	210	270	30
3-4	12	8	400	800	100
3-7	14	12	120	140	10
4-5	15	10	500	750	50
4-7	10	6	200	220	5
5-6	11	8	160	240	80/3
5-7	8	5	70	110	40/3
6-7	10	2	100	180	10
			2460	4090	

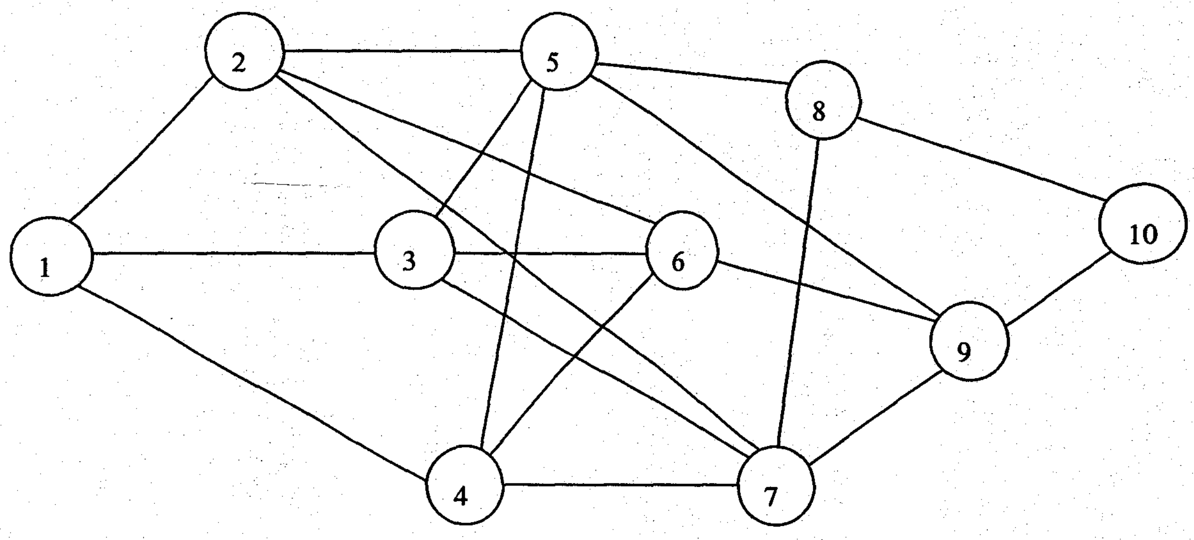
5. ถ้ากำหนดความจุของถนนและข่ายงานของถนนจากเมือง 1 ไปยังเมือง 6 ดังต่อไปนี้ จงหาค่าการไหลผ่านสูงสุด (ตัวเลขจำนวนรถมีหน่วยเป็นพันคัน)



แบบทดสอบชุดที่ 5

(โปรแกรมพลวัต)

1. จากข่ายงานต่อไปนี้ จงหาเส้นทางที่เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดที่จะเดินทางจากโหนด (1) ไปยังโหนด (10)



กำหนดค่าใช้จ่ายในการเดินทางดังนี้

	2	3	4
1	4	1	3

	5	6	7
2	6	2	4
3	1	4	4
4	2	3	6

	8	9
5	6	3
6	3	3
7	1	2

	10
8	4
9	3

2. นักศึกษาคนหนึ่งประสบปัญหาในการเรียนวิชาเลือก 8 วิชา จกภาควิชา 3 ภาควิชา โดยเขาจะเลือกเอาอย่างน้อย 1 วิชา จากแต่ละภาควิชา โดยมีจุดประสงค์ที่จะให้ได้ความรู้มากที่สุด กำหนดตารางแสดงปริมาณความรู้ที่ได้ดังนี้

ภาควิชา	**จำนวนวิชาที่เลือก**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
คณิตศาสตร์	10	25	50	70	80	100	100	100
ฟิสิกส์	35	40	40	50	60	80	90	100
เคมี	15	30	35	40	70	75	100	100

จงแก้ปัญหานี้ด้วยโปรแกรมพลวัต

แบบทดสอบชุดที่ 6
(โปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม)

1. จงทำ Z ให้มีค่าสูงสุด เมื่อ

$$Z = 4X_1+6X_2+2X_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$4x_1-4x_2 \le 5$$
$$-x_1+6x_2 \le 5$$
$$-x_1+6x_2+x_3 \le 5$$

x_1, x_2, x_3 เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

2. จงทำให้ Z มีค่าสูงสุด เมื่อ

$$Z = 3X_1+X_2+3X_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$-x_1+2x_2+x_3 \le 4$$
$$4x_2-3x_3 \le 2$$
$$x_1-3x_2+2x_3 \le 3$$

x_1, x_2, x_3 เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

3. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของ Z ที่มีค่าสูงสุด เมื่อ

$$Z = 20X_1+10X_2+10X_3$$

โดยมีเงื่อนไขบังคับ

$$2x_1+20x_2+4x_3 \le 15$$
$$6x_1+20x_2+4x_2 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

แบบทดสอบชุดที่ 7

(ทฤษฎีเกม)

1. โดยวิธีโปรแกรมเชิงเส้น จงหากลยุทธ์และค่าของเกมจากเพย์ออฟเมตริกซ์ต่อไปนี้ แล้วนำค่าที่ได้มาเปรียบเทียบกับวิธีกราฟ

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. จงหากลยุทธ์ที่เหมาะสมและค่าของเกมต่อไปนี้

2.1
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

2.3
$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ศัพท์

ศัพท์

ภาษาไทย	หน้า	ภาษาอังกฤษ	page
ทางเดิน	79,80,85,121	Path	79,80,85,121
เทคนิคสองเฟส	29	two-phase technique	29
เทคนิคเอ็ม	25,29,47,58	m-technique	25,29,47,58
ธาตุมูล	11,18,22,37,158	element	11,18,22,37,158
แบบหุ่นการขนส่งที่สามารถส่งต่อไปได้อีก	101	transshipment model	101
แบบหุ่นการมอบหมายงาน	111,112	assignment model	111,112
ปัญหาการไหลผ่านสูงสุด	130	miximal-flow problem	130
ปัญหาคู่เสมอกัน	48,49,50,177,178	dual problem	48,49,50,177,178
โปรแกรมเชิงเส้น	5,10,12,13,14	linear programming	5,10,12,13,14
โปรแกรมเชิงเส้นจำนวนเต็ม	151,149,188	integer programming	151,149,188
โปรแกรมพลวัต	140,142,147,187	dynamic programming	140,142,147,187
เพย์ออฟเมตริกซ์	159,162,163,164,165	pay off matrix	159,162,163,164,165
เมตริกซ์ผกผัน	-	invert matrix	-
เมตริกซ์สับเปลี่ยน	159	transpose matrix	159
เมตริกซ์เอกลักษณ์	24	identity matrix	24
รูปแบบคาโนนิคอล	10	canonical form	10
รูปแบบมาตรฐาน	11,14,17,18,20	standard form	11,14,17,18,20
วงจร	79,80,81,82,85	circle	79,80,81,82,85
วิธีกลิ้งหิน	86,88,98,87	method of stepping stone	86,88,98,87
วิธีของโกโมริ	151,155	gomori method	151,155
วิธีของตัวคูณ	86,89,90,93,96	method of multiplier	86,89,90,93,96
วิธีซิมเพล็ก	18,29,37,40,41	simplex method	18,29,37,40,41
วิธีซิมเพล็กคู่เสมอกัน	149,153,172	dual simplex method	149,153,172
สดมภ์หลัก	19,22,37,39,42	pivot column	19,22,37,39,42
เส้นตัดที่มีค่าน้อยที่สุด	131,132	minimum cut set	131,132
เส้นทางวิกฤต	121,122,123,124,125	critical path	121,122,123,124,125
แหล่งเริ่มต้นลวง	67	dummy source	67

บรรณานุกรม

นราศรี ไววนิชกุล. การวิจัยขั้นดำเนินงาน1. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

เลวิน, ริชาร์ด ไอ. และ เคริ์กพาตริค, ซี เอ. วิธีเชิงปริมาณสำหรับฝ่ายจัดการ. แปลโดย เอกชัย ชัยประเสริฐสิทธิ. กรุงเทพมหานคร: ไทยวัฒนาพานิช, 2516.

วิจิตร ตัณฑสุทธิ์ และคณะ. การวิจัยดำเนินงาน. กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

อุดม ใยเจริญ และสุทธิชัย โง้วศิริ. วิจัยการดำเนินงานเบื้องต้น. กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2519.

Ackoff, Russell L. Fundamentals of operations research. New York: John Wiley Inc., 1968.

Hiller, F.S. and Lieberman, G.J. Introduction to Operations Research. Holdeir-Day, Inc., 1967.

Sasient, Murice and Others. Operations Research: methods and Problem. New York: John Wiley Inc., 1959.

Taha, H.A. Opreation Research: An Introduction. New York: Macmillan Co., 1971.

Wagner, Harvey M. Principles of Operations Research. 2 nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975.