การพัฒนาโปรแกรมการคำนวณแบบขนานเพื่อจำลองการไหลและอุณหภูมิ โดยใช้เทคนิคมัลติบล็อกและระเบียบวิธีมัลติกริด

นายเกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2551

DEVELOPMENT OF PARALLEL COMPUTING PROGRAM FOR SIMULATION OF FLOW AND TEMPERATURE USING MULTIBLOCK TECHNIQUE AND MULTIGRID METHOD

Kiattisak Ngiamsoongnirn

Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Suranaree University of Technology

Academic Year 2008

การพัฒนาโปรแกรมการคำนวณแบบขนานเพื่อจำลองการไหลและอุณหภูมิ
โดยใช้เทคนิคมัลติบล็อกและระเบียบวิธีมัลติกริด

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

____

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
ประธานกรรมการ

____

(รศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

____

(รศ. ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์)
กรรมการ

____

(อ. ดร.กีรติ สุลักษณ์)
กรรมการ

____

(ศ. ดร.ไพโรจน์ สัตยธรรม)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

____

(รศ. น.อ. ดร.วรพจน์ ขำพิศ)
คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

เกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน : การพัฒนาโปรแกรมการคำนวณแบบขนานเพื่อจำลองการไหลและอุณหภูมิโดยใช้เทคนิคมัลติบล็อกและระเบียบวิธีมัลติกริด (DEVELOPMENT OF PARALLEL COMPUTING PROGRAM FOR SIMULATION OF FLOW AND TEMPERATURE USING MULTIBLOCK TECHNIQUE AND MULTIGRID METHOD) อาจารย์ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร, 145 หน้า.

การไหลและการถ่ายเทความร้อนที่พบตามธรรมชาติและในสิ่งประดิษฐ์ หรือในกระบวนการต่าง ๆ บ่อยครั้งยากที่จะทำการวิเคราะห์เนื่องด้วยความซับซ้อนเชิงเรขาคณิต(Geometric Complexity) และความซับซ้อนเชิงพลศาสตร์ (Dynamic Complexity) ความซับซ้อนเชิงเรขาคณิตนั้นเกิดจากความไม่เรียบง่ายทางรูปทรงของบริเวณที่กำลังพิจารณาซึ่งเป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้สำหรับอุปกรณ์ทุกชนิด ส่วนความซับซ้อนเชิงพลศาสตร์เป็นผลมาจากพฤติกรรมความไม่เชิงเส้นทางฟิสิกส์ ความซับซ้อนเหล่านี้สามารถทำให้ลดลงได้ด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์โดยวิธีการคำนวณชั้นสูง แต่ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมส่วนใหญ่ไม่อาจจะแก้ได้ด้วยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเพียงเครื่องเดียวเนื่องด้วยจำนวณข้อมูลอันมหาศาล ซึ่งนำไปสู่การพัฒนาการคำนวณแบบขนาน

วิทยานิพนธ์นี้กล่าวถึงการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านพลศาสตร์ของไหลขึ้นใหม่โดยจะผสมผสานวิธีการคำนวณ 3 วิธีเข้าด้วยกัน ได้แก่ ระเบียบวิธีมัลติกริด เทคนิคมัลติบล็อก และการคำนวณแบบขนานเพื่อทำการจำลองการไหลและอุณหภูมิในโดเมนที่มีความซับซ้อนทางรูปทรงโดยที่เทคนิคมัลติบล็อกจะแก้ปัญหาความซับซ้อนเชิงเรขาคณิตโดยการแบ่งโดเมนที่ซับซ้อนออกเป็นโดเมนอย่างง่ายหลายโดเมน จากนั้นประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดในแต่ละบล็อกเพื่อเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยซึ่งเป็นการขจัดปัญหาความซับซ้อนทางพลศาสตร์ที่สะท้อนจากการลดลงอย่างล่าช้าของค่าเศษตกค้างของผลเฉลย และสุดท้ายคำนวณแต่ละบล็อกไปพร้อม ๆ กันโดยกระบวนการการคำนวณแบบขนานด้วยคลัสเตอร์คอมพิวเตอร์บนสถาปัตยกรรมหน่วยความจำแบบกระจาย (Distributed Memory) และใช้ชุดคำสั่ง MPI ช่วยในการส่งถ่ายข้อมูลที่จำเป็นระหว่างบล็อก

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนักศึกษา____________________
ปีการศึกษา 2551	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา________________

KIATTISAK NGIAMSOONGNIRN : DEVELOPMENT OF PARALLEL COMPUTING PROGRAM FOR SIMULATION OF FLOW AND TEMPERATURE USING MULTIBLOCK TECHNIQUE AND MULTIGRID METHOD. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. EKACHAI JUNTASARO, Ph. D., 145 PP.

COMPLEX GEOMETRY/MULTIBLOCK TECHNIQUE/MULTIGRID METHOD/ PARALLEL COMPUTING/FLOW AND HEAT TRANSFER

Flow and heat transfer encountered in natural and engineering devices are often hardly to analyze due to its geometric and dynamic complexities. An irregular shape of considering domain gives rise to the geometric complexity, which is inevitable in all devices. For the dynamic complexity, it is occurred from a non-linear behavior in physics of flow. These complexities can be alleviated by computer simulation with using the advanced numerical methods. Mostly, however, the science and engineering problems cannot be resolved by numerical methods with a personal computer due to huge of memory usage, led to the development of parallel computing

This thesis presents the development of computational fluid dynamics (CFD) program, which contains 3 techniques: the multiblock technique, the multigrid method, and the parallel computing. The multiblock technique is used to resolve a complexity of domain by splitting the main domain into several simple sub-domains. Further, the multigrid method is applied in each sub-domain to accelerate convergence rate for resolving the dynamic complexity reflecting by slow rate of residual reduction. Finally, all sub-domains are calculated simultaneously by parallel computing with

using cluster computer on distributed memory architecture and using the MPI library for transferring necessary data among sub-domains.

School of Mechanical Engineering Student’ s Signature________________

Academic Year 2008 Advisor’ s Signature________________

กิตติกรรมประกาศ

ถึงแม้ว่าวิทยานิพนธ์นี้จะสำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความอุตสาหะของผู้เขียนเองก็ตาม แต่คงเกิดขึ้นไม่ได้หากขาดแรงสนับสนุนจากบุคคลหลายฝ่ายโดยจะประกาศกิตติกรรมดังต่อไปนี้

ก่อนอื่นต้องกราบขอบพระคุณพ่อธรรม และแม่นวลตา เหงี่ยมสูงเนิน บิดามารดาผู้ให้กำเนิดตัวข้าพเจ้าเองซึ่งได้เลี้ยงดูอบรมสั่งสอนมาแต่เยาว์วัยและให้การสนับสนุนในทุก ๆ ด้านด้วยดีมาโดยตลอด

ขอบพระคุณสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีที่ให้โอกาสได้ศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษา และขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิประสาทวิชาความรู้แก่ผู้เขียน

ขอบคุณ คุณเกื้อกูล เหงี่ยมสูงเนิน ภรรยาของข้าพเจ้า และครอบครัวแก้วเกิดสำหรับกำลังใจดี ๆ และการสนับสนุนอย่างเต็มที่ในการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา

ขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์) และรองศาสตราจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร อาจารย์ผู้ซึ่งชักนำ ให้โอกาส ให้ความรู้ คำแนะนำอันมีค่า และให้การสนับสนุนข้าพเจ้าในการศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาด้วยดีมาโดยตลอด และขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภุชงค์ อุทโยภาศ ที่ให้ความรู้ด้านการคำนวณแบบขนานและสนับสนุนทุนในการนำเสนอผลงานวิจัย ณ ประเทศญี่ปุ่น

ขอบพระคุณสถานวิจัยสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ที่ให้ทุนสนับสนุนในการนำเสนอผลงานวิจัยในประเทศ

ขอบพระคุณศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ (NECTEC) ที่ให้การสนับสนุนในส่วนของ Cluster เพื่อใช้สำหรับทำวิทยานิพนธ์และงานวิจัย

ขอบพระคุณสถาบันวิทยาศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (IMS) มหาวิทยาลัยแห่งชาติสิงคโปร์ (NUS) ที่ให้การสนับสนุนค่าใช้จ่ายทั้งหมดในการเข้าฟังสัมมนาในหัวข้อ Wall-Bounded and Free – Surface Turbulence and its Computation ระหว่างวันที่ 7-17 ธันวาคม 2547 ที่ประเทศสิงคโปร์

และท้ายที่สุดขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.กีรติ สุลักษณ์ และพี่อาทิตย์ คูณศรีสุข สำหรับคำแนะนำต่าง ๆ อันมีค่า และขาดไม่ได้ขอขอบคุณเพื่อน ๆ และน้อง ๆ บัณฑิตศึกษาที่ใกล้ชิดทุกคนที่มีส่วนทำให้การเรียนในระดับปริญญาโทมีชีวิตชีวาขึ้น

เกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

a	=	ค่าคงที่ที่เปรียบวัดจากการทดลองในแบบจำลองความปั่นป่วน
A	=	เมทริกซ์สัมประสิทธิ์
B_f	=	ฟังก์ชันประสานในแบบจำลองความปั่นป่วน
$\left.\begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_{\varepsilon 1} \\ C_{\varepsilon 2} \\ C_{\varepsilon 3} \\ C_{\mu} \end{array}\right\}$	=	ค่าคงที่ที่เปรียบวัดจากการทดลองในแบบจำลองความปั่นป่วน
d_n	=	ระยะในแนวตั้งฉากจากกริดจุดแรกไปยังผนังที่ใกล้ที่สุด
E	=	ตำแหน่งในทิศตะวันออก
EXP	=	การทดลอง
f_1, f_2, f_3	=	ฟังก์ชันที่ใช้ระงับความปั่นป่วนบริเวณชิดผนัง (Damping Function)
g	=	ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก
G_B	=	พจน์การสร้างความปั่นป่วนเนื่องจากแรงลอยตัว (Turbulent Buoyancy Production Term)
h	=	ขนาดของกริดหรือสัมประสิทธิ์ของการถ่ายเทความร้อน
i, j, k	=	ดัชนีระบุทิศทางในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ
$I_a^b \phi^a$	=	ตัวดำเนินการการประมาณค่าในช่วงระหว่างกริดชุดที่ติดกันโดยการนำข้อมูลที่กริดชุด a ไปประมาณค่าข้อมูลที่กริดชุด b
k	=	ค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนหรือสภาพการนำความร้อน
L	=	ความกว้างของโดเมนที่พิจารณา
MG	=	กริดหลายชุด
N	=	ตำแหน่งในทิศเหนือ
Nu	=	ตัวแปรไร้มิติ Nusselt (= hL/k)
p	=	ความดัน

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

P	=	โหนดคำนวณ (Compute Node) หรือหน่วยประมวลผล (Processor)
P_k	=	พจน์การสร้างความปั่นป่วนเนื่องจากแรงเฉือน
Pr	=	ตัวแปรไร้มิติ Prandtl (= ν/α)
Q	=	อัตราการไหล
Ra	=	ตัวแปรไร้มิติ Rayleigh (= $g\beta(T_H-T_C)L^3\alpha^{-1}\nu^{-1}$)
Re	=	ตัวแปรไร้มิติ Reynolds (=$\rho U_0 L/\mu$)
S	=	พจน์แหล่งกำเนิดในสมการการถ่ายโอนทั่วไปหรือตำแหน่งในทิศใต้
SG	=	กริดชุดเดียว
SP	=	ค่าการได้เปรียบเชิงเวลา (Speed Up)
T	=	อุณหภูมิ
T_H	=	อุณหภูมิที่ผนังด้านร้อน
T_C	=	อุณหภูมิที่ผนังด้านเย็น
T_{ref}	=	อุณหภูมิอ้างอิง
u	=	องค์ประกอบในแนวแกน x
u_j	=	ค่าองค์ประกอบความเร็วหรือความเร็วเฉลี่ยต่อเวลาในทิศทาง j
U_0	=	ความเร็วอ้างอิง
u_τ	=	ความเร็วเสียดทาน (Friction Velocity)
v	=	องค์ประกอบความเร็วในแนวแกน y
$\overline{v^2}$	=	หน่วยวัดทางความเร็วของความปั่นป่วน (Turbulent Velocity Scale)
V_0	=	ความเร็วของการลอยตัว (= $[g\beta L(T_H-T_C)]^{1/2}$)
w	=	องค์ประกอบความเร็วในแนวแกน z
W	=	ตำแหน่งในทิศตะวันตก
x_j	=	ค่าพิกัดในทิศทาง j
y^+	=	พิกัดผนัง (Wall Coordinate) (=yu_τ/ν)
α	=	สภาพการฟุ้งกระจายทางความร้อน (Thermal Diffusivity)
$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha^*\end{matrix}\right\}$	=	ค่าคงที่ที่เปรียบวัดจากการทดลองในแบบจำลองความปั่นป่วน

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

β	=	สัมประสิทธิ์ของการขยายตัวทางความร้อน
δ	=	ความหนาของชั้นชิดผิว
δ_{ij}	=	เมตริกเอกลักษณ์ของ Kronecker Delta
μ	=	ความหนืดทางพลศาสตร์
μ_t	=	ความหนืดทางพลศาสตร์ของ Eddy
ν	=	ความหนืดทางจลนพลศาสตร์ (= μ/ρ)
ε	=	อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วน
ϕ	=	ตัวแปรอิสระหรือผลเฉลยโดยประมาณ
ρ	=	ความหนาแน่น
θ	=	ความหนาของชั้นโมเมนตัม
$\left.\begin{matrix}\sigma_k \\ \sigma_{k1} \\ \sigma_{k2} \\ \sigma_\varepsilon \\ \sigma_\omega \\ \sigma_{\omega 1} \\ \sigma_{\omega 2} \\ \sigma_T\end{matrix}\right\}$	=	ค่าคงที่ Prandtl ที่เปรียบวัดจากการทดลองในแบบจำลองความปั่นป่วน
ω	=	อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะ
Γ	=	สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจายในสมการการถ่ายโอนทั่วไป

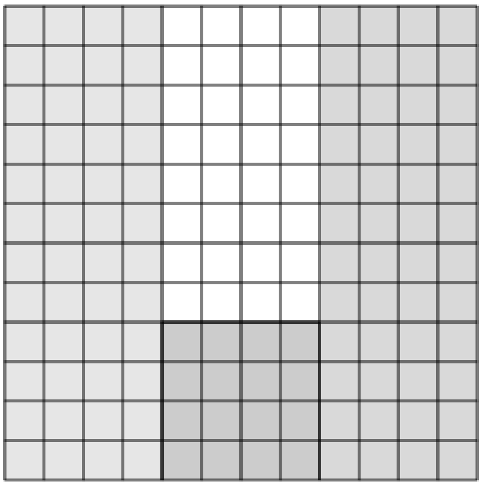
บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

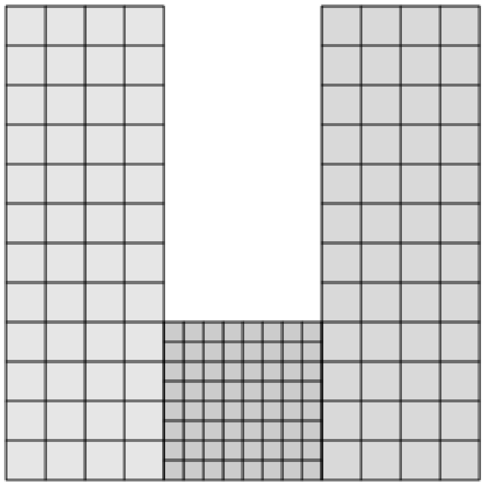
ปัจจุบันคอมพิวเตอร์เข้ามามีบทบาทที่สำคัญต่อการคำนวณทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเป็นอย่างมาก การคำนวณเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้และศึกษากันอย่างแพร่หลายทั้งในภาคอุตสาหกรรมและวงการศึกษา จากความก้าวหน้าในเทคโนโลยีทางด้านคอมพิวเตอร์นี้จึงได้มีการสร้างซอฟต์แวร์ทางการค้าสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขจำนวนมากเพื่อวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมโดยแสดงผลการคำนวณในรูปกราฟฟิคที่สวยงามและง่ายต่อการทำความเข้าใจ ความน่าเชื่อถือของแต่ละซอฟต์แวร์ขึ้นอยู่กับความถูกต้องของผลการคำนวณของซอฟต์แวร์นั้น ๆ สำหรับงานทางด้านการควบคุมและการออกแบบทางพลศาสตร์ของไหลและอุณหพลศาสตร์ถือเป็นงานทางด้านวิศวกรรมเครื่องกลที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขช่วยในการวิเคราะห์ในกรณีที่การวัดหรือการสังเกตุนั้นไม่อาจทำได้ สำหรับภาคอุตสาหกรรมแล้วโดยมากมักจะนำซอฟต์แวร์ทางการค้าจากต่างประเทศเข้ามาใช้งานประจำหน่วยงานซึ่งหากผู้ใช้งานไม่มีความรู้ทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณแล้วก็ไม่อาจจะใช้ซอฟต์แวร์ดังกล่าวได้อย่างมีประสิทธิภาพ และด้วยราคาค่อนข้างสูงของแต่ละซอฟต์แวร์ จึงทำให้การใช้งานซอฟต์แวร์สำเร็จรูปนั้นถูกจำกัดอยู่ที่องค์กรหรือหน่วยงานที่มีเงินทุนหมุนเวียนสูง เพราะฉะนั้นการศึกษาทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการไหลและการถ่ายเทความร้อนจึงเป็นเรื่องสำคัญ ประการแรกจะช่วยให้สามารถใช้ซอฟต์แวร์สำเร็จรูปได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุดและประการที่สองซึ่งเป็นประการสำคัญ กล่าวคือเมื่อมีความรู้ทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการไหลและการถ่ายเทความร้อนแล้ว จะทำให้สามารถประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์หรือยิ่งกว่านั้นพัฒนาต่อไปจนเป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูปไว้ใช้งานเองได้โดยไม่ต้องพึ่งพาซอฟต์แวร์ทางการค้าที่มีราคาแพง

เป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่าพฤติกรรมการไหลสามารถแสดงได้ด้วยสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) และสมการนาเวียร์สโตคส์ (Navier-Stokes Equations) ซึ่งสมการดังกล่าวได้มาจากกฎอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมตามลำดับ สำหรับพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนนั้นสามารถแสดงได้ด้วยสมการอนุรักษพลังงานซึ่งในบางกรณีสามารถลดรูปลงได้เป็นสมการอุณหภูมิ (Temperature Equation) ซึ่งสมการทั้งหมดที่กล่าวมาจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น การแก้สมการดังกล่าวด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นทำได้โดยการแปลงระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของระบบสมการพีชคณิตแล้วจึงทำการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีอยู่

หลายวิธีด้วยกันโดยมีทั้งการแก้โดยตรง (Direct Methods) และการกระทำซ้ำ (Iterative Methods) แต่เนื่องด้วยความไม่เชิงเส้นของสมการ วิธีการแก้โดยตรงจึงเป็นวิธีการที่ไม่เหมาะสม โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าการแก้สมการไม่เชิงเส้นนั้นการแก้โดยวิธีการกระทำซ้ำจะเหมาะสมกว่า แต่วิธีการกระทำซ้ำจะมีข้อด้อยตรงที่ต้องใช้ระยะเวลาในการคำนวณมาก แต่ด้วยความพยายามของนักคำนวณเชิงตัวเลขในอดีตจึงได้มีการค้นพบวิธีการทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณนั้นน้อยลงถึงแม้จะใช้การแก้ด้วยวิธีการกระทำซ้ำวิธีเดิมก็ตาม ซึ่งต่อมาเรียกวิธีนี้ว่า “ระเบียบวิธีมัลติกริด” (Multigrid Method) โดยจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป



(a)



(b)

รูปที่ 1.1 แสดงการสร้างกริด (a) แบบชุดเดียว และ (b) แบบหลายชุด
บนโดนเมนที่เกิดจากสี่เหลี่ยมหลายรูป

การคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งในขั้นตอนแรกนั้นจะต้องทำการกำหนดขอบเขตหรือโดเมน (Domain) ของปัญหาที่สนใจ จากนั้นกำหนดจุดที่จะทำการคำนวณและเก็บค่าที่ต้องการลงไปในขอบเขตของปัญหาซึ่งกระทำโดยการลากเส้นตรงในแนวตั้งตามจำนวนที่ต้องการและลากเส้นตรงในแนวนอนตามจำนวนที่ต้องการเช่นกัน จากนั้นกำหนดให้จุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นในแนวนอนกับเส้นในแนวตั้งนั้นเป็นจุดที่จะทำการคำนวณและเก็บค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องซึ่งกรรมวิธีนี้จะเรียกว่า “การสร้างกริด” (Grid Generation) และกริดในลักษณะดังกล่าวจะเรียกว่า “กริดแบบพิกัดฉาก” (Cartesian Grid) ซึ่งหากโดเมนมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมการสร้างกริดในลักษณะนี้สามารถกระทำได้โดยง่าย และกริดที่ได้จะมีโครงสร้างที่เป็นระบบแน่นอนสอดคล้องกับรูปแบบการจัดเก็บตัวตัวแปรในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ถ้าหากโดเมนเกิดขึ้นจากการประกอบกัน

ของสี่เหลี่ยมหลายรูปดังเช่นในรูปที่ 1.1 (โดเมนที่สนใจคือบริเวณที่มีการแรเงา) ซึ่งการสร้างกริดตามกรรมวิธีที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการสร้างกริดเพียงชุดเดียวลงบนโดเมน โดยถ้าทำการสร้างกริดเพียงชุดเดียวผลที่ได้จะเป็นไปตามรูปที่ 1.1(a) จะพบว่ามีจุดบางส่วนในบริเวณพื้นที่สีขาวซึ่งอยู่นอกเขตของโดเมนและเมื่อทำการเก็บค่าของตัวแปรสำหรับการประมวลผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์แล้วบริเวณดังกล่าวก่อให้เกิดการสิ้นเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์โดยไม่จำเป็นและยิ่งไปกว่านั้นในระหว่างกระบวนการคำนวณจำเป็นต้องมีกรรมวิธีที่ใช้ตรวจสอบเงื่อนไขเพื่อจำกัดขอบเขตของจุดที่จะต้องทำการคำนวณซึ่งนอกจากจะทำให้เกิดความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมแล้วในมุมมองของการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์การตรวจสอบแต่ละเงื่อนไขนั้นต้องใช้เวลาในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์บางส่วนถึงแม้จะไม่มากแต่เวลาจากการตรวจสอบทุกเงื่อนไขในแต่ละรอบการคำนวณนั้นเมื่อรวมทุกรอบแล้วถือว่ามากพอที่จะทำให้การคำนวณต้องใช้เวลานานขึ้น วิธีแก้ไขทำได้โดยการแบ่งโดเมนหลักออกเป็นโดเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมมากกว่าหนึ่งรูปและสร้างกริดชุดเดียวลงบนโดเมนย่อยนั้นผลที่ได้จะเป็นดังรูปที่ 1.1(b) การเก็บข้อมูลของการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิธีนี้สามารถทำได้โดยง่ายโดยการเก็บข้อมูลของแต่ละส่วนแยกเป็นอิสระจากกันและไม่จำเป็นต้องเก็บข้อมูลในบริเวณพื้นที่สีขาวและแต่ละส่วนก็ทำการคำนวณตามปกติโดยไม่ต้องมีการตรวจสอบเงื่อนไขเพื่อจำกัดขอบเขตบริเวณของจุดที่ต้องคำนวณ ยิ่งไปกว่านั้นจำนวนจุดในแต่ละโดเมนย่อยไม่จำเป็นต้องเท่ากันดังที่แสดงในรูปที่ 1.1(b) เป็นผลให้สามารถเพิ่มจำนวณจุดในโดเมนย่อยที่ต้องการความละเอียดของข้อมูลได้และลดจำนวนจุดในโดเมนย่อยที่มีการเปลี่ยนแปลงน้อยได้ งานที่เพิ่มเข้ามาสำหรับกรณีนี้คือการทำให้ข้อมูลในแต่ละส่วนย่อยนั้นมีความสอดคล้องกันโดยจะใช้กรรมวิธีพิเศษจัดการกับข้อมูลบริเวณรอยต่อของแต่ละโดเมน วิธีดังกล่าวนี้เรียกว่า “เทคนิคมัลติบล็อก” (Multiblock Technique) ดังนั้นจึงเรียกโดเมนย่อยแต่ละส่วนนี้ว่า “บล็อก” (Block) อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาการคำนวณของแต่ละบล็อกแล้วพบว่าขณะทำการคำนวณนั้นแต่ละบล็อกมีการคำนวณที่เป็นอิสระจากกัน โดยมีเพียงขั้นตอนพิเศษเฉพาะที่บริเวณรอยต่อของแต่ละบล็อกเท่านั้นที่ทุกบล็อกไม่เป็นอิสระจากกัน เพราะฉะนั้นการคำนวณแต่ละบล็อกสามารถคำนวณไปพร้อม ๆ กันได้ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไปในเทคนิคมัลติบล็อกและรวมถึงวิธีการที่จะคำนวณทุกบล็อกไปพร้อม ๆ กันด้วย

แม้ว่าความเจริญก้าวหน้าด้านเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์จะรุดหน้าไปอย่างรวดเร็วมากก็ตาม แต่สำหรับคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (Personal Computer [PC]) แล้ว ขีดจำกัดทางด้านความเร็วและหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์นั้นเป็นตัวกำหนดปริมาณงานที่ทำได้ในการคำนวณ ซึ่งการคำนวณในกรณีที่ปัญหามีขนาดใหญ่มากนั้นระยะเวลาที่ใช้แม้ว่าจะไม่มากแต่ก็ไม่เป็นที่น่าพอใจหากเวลาที่ใช้นั้นเกี่ยวพันกับเงื่อนไขของเวลาที่ใช้ในการออกแบบผลิตภัณฑ์ ยิ่งไปกว่านั้นหากปริมาณงานนั้นมีขนาดใหญ่มากเกินขีดจำกัดของหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเครื่องนั้น ๆ การประมวลผล

จะเกิดขึ้นไม่ได้เลยแม้ว่าคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเครื่องดังกล่าวจะมีคุณลักษณะเฉพาะทางด้านความเร็วสูงมากก็ตาม การเลือกที่จะไปประมวลผลบนซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ (Supercomputer) นั้นไม่อาจจะกระทำได้สำหรับองค์กรหรือหน่วยงานขนาดเล็กที่ไม่มีเงินทุนมากพอที่จะมีซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ไว้ในความครอบครอง แนวทางปฏิบัติที่เป็นไปได้คือการนำคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่มีอยู่มาเชื่อมต่อกันผ่านเครือข่าย (Network) จากนั้นแบ่งปริมาณงานออกเป็นส่วนย่อยหลายส่วนแล้วให้คอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องทำการคำนวณงานในส่วนย่อยนั้น การคำนวณในลักษณะนี้เรียกว่า “การคำนวณแบบขนาน” (Parallel Computing) และการนำคอมพิวเตอร์จำนวนหลายเครื่องมาเชื่อมต่อกันผ่านเครือข่ายเรียกว่า “คลัสเตอร์” (Cluster) อย่างไรก็ตามการคำนวณแบบขนานนั้นสามารถประยุกต์ใช้กับเทคนิคมัลติบล็อกได้เป็นอย่างดีซึ่งจะแสดงในรายละเอียดต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณแบบขนานโดยใช้เทคนิคมัลติบล็อกร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริดเพื่อลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณและเพื่อรองรับข้อมูลจำนวนมหาศาลสำหรับจำลองการไหลและอุณหภูมิในโดเมนที่มีความซับซ้อน

1.3 สมมติฐานการวิจัย

ของไหลที่พิจารณาเป็นอากาศที่มีพฤติกรรมแบบก๊าซอุดมคติและพิจารณาการไหลในสภาวะคงตัวโดยที่การไหลเป็นแบบไม่อัดตัว

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

สำหรับคลัสเตอร์นั้น คอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องจะเรียกว่า “โหนดคำนวณ” (Compute Node) หรือเรียกโดยย่อว่า “โหนด” ซึ่งแต่ละโหนดจะมีหน่วยประมวณผลกลาง (Central Processing Unit, CPU)เพียงหนึ่งหน่วย และเรียกแต่ละโปรแกรมที่ถูกประมวลผลอยู่บนหน่วยประมวลผลกลางนั้นว่า “กระบวนการ” (Process) นั่นหมายความว่าหน่วยประมวลผลกลางสามารถทำการประมวลผลหลายกระบวนการในขณะเดียวกันได้

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

โดเมนที่พิจารณาเป็นโดเมนที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสามารถแยกออกเป็นโดนเมนย่อยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ ดังนั้นจะไม่พิจารณาโดเมนรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ และไม่พิจารณารูปทรงเรขาคณิตรูปอื่น ในส่วนของกริดที่ใช้จะพิจารณาเฉพาะกริดที่มีโครงสร้างแบบพิกัดฉาก (Structured Cartesian Grid) เท่านั้น

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ได้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณแบบขนานเพื่อคำนวณปัญหาการไหล และ การถ่ายเทความร้อนได้หลากหลายรูปทรงที่มีลักษณะสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือรูปทรงที่เกิดจากการรวมกันของสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสี่เหลี่ยมจัตุรัสหลายรูป

1.6.2 ได้บทความตีพิมพ์ในเอกสารการประชุมวิชาการทั้งในระดับประเทศและนานาชาติ และบทความตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

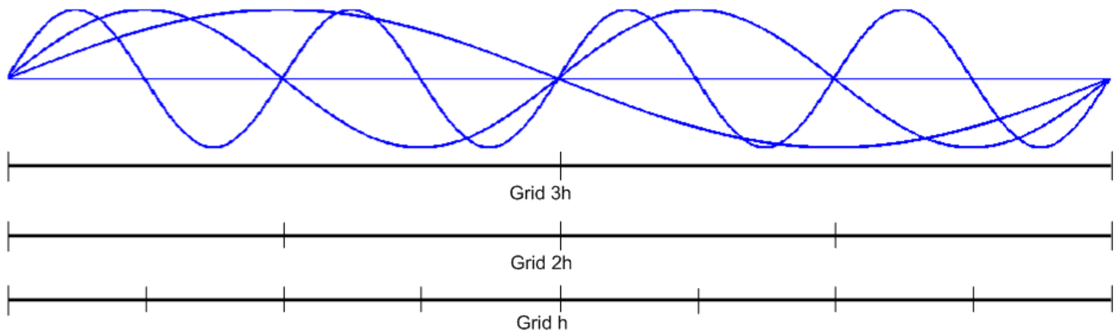
บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขอบข่ายงานสำหรับวิทยานิพนธ์นี้เป็นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและวิธีการคำนวณซึ่งประกอบไปด้วยสามส่วนหลักได้แก่ การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริด เทคนิคการคำนวณแบบมัลติบล็อก และกระบวนการการคำนวณแบบขนาน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 ระเบียบวิธีมัลติกริด

แนวคิดมูลฐานของระเบียบวิธีกริดหลายระดับหรือระเบียบวิธีมัลติกริดคือการรวมการคำนวณที่กระทำบนระดับขนาดของกริดที่แตกต่างกัน โดยการใช้ผลเฉลยจากระดับขนาดอันหนึ่งอันใดไปทำลายองค์ประกอบของความผิดพลาดบนอีกระดับขนาดหนึ่ง ค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณเชิงตัวเลขนั้นเมื่อวิเคราะห์ด้วยอนุกรมฟูเรียร์แล้วสามารถที่จะพิจารณาได้ว่าเป็นการรวมกันอย่างเชิงเส้นของฟังก์ชันคลื่นรูปไซน์และโคไซน์ที่ความยาวคลื่นระดับขนาดต่าง ๆ ซึ่งเป็นที่ทราบกันอย่างแพร่หลายว่าด้วยคุณลักษณะของการคำนวณแบบกระทำซ้ำโดยทั่วไปนั้นมีประสิทธิภาพสูงในการกำจัดค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดที่มีค่าความยาวคลื่นต่ำหรืออีกนัยหนึ่งเพียงเพื่อทำให้ค่าความผิดพลาดนั้นราบเรียบขึ้น กล่าวคือคุณลักษณะของการคำนวณแบบกระทำซ้ำโดยทั่วไปนั้นล้มเหลวต่อการทำให้ค่าความผิดพลาดลดลงจากรูปที่ 2.1 พบว่าคลื่นรูปไซน์หรือโคไซน์ใด ๆ จะมีค่าช่วงความยาวคลื่นสั้นเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของกริดหยาบและจะมีค่าช่วงคลื่นยาวขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของกริดที่ละเอียดกว่า ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าหากขนาดของกริดยิ่งมีขนาดเล็กหรือจำนวณของกริดยิ่งมีจำนวนมากจะเป็นผลให้ได้มาซึ่งค่าความถูกต้องของผลเฉลยสูงแต่ผลลัพธ์ในทางกลับกันคือเมื่อจำนวนกริดมากขึ้นจำนวนค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดช่วงคลื่นยาวนั้นมากขึ้นตาม เป็นผลให้การลดลงของค่าความผิดพลาดเป็นไปอย่างล่าช้าเนื่องจากค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดช่วงคลื่นสั้นจะถูกกำจัดอย่างรวดเร็วในช่วงแรกของรอบการทำซ้ำคงเหลือไว้แต่เพียงค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดช่วงคลื่นยาวซึ่งยากต่อการทำลายให้หมดไปโดยเร็ว จากที่กล่าวไว้ข้างต้นว่าคลื่นรูปไซน์หรือโคไซน์ช่วงคลื่นยาวใด ๆ จะมีลักษณะสั้นเมื่อพิจารณาบนขนาดของกริดที่หยาบกว่า เพราะฉะนั้นจึงเป็นที่มาของระเบียบวิธีกริดหลายระดับซึ่งจะใช้จำนวนของกริดหลายชุดโดยให้แต่ละชุดทำการกำจัดค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดที่มีขนาดของกริดและความคลื่นที่สอดคล้องกัน

แม้ว่าระเบียบวิธีมัลติกริดจะมีการใช้งานกันมาอย่างยาวนานอย่างธรรมเนียมปฏิบัติแม้แต่ในยุคที่ไม่มีคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (ก่อนทศวรรษที่ 60) ซึ่งทฤษฎีทางระเบียบวิธีมัลติกริดได้รับการตีพิมพ์ครั้งแรกโดย R.P. Fedorenko ชาวรัสเซีย ในปี ค.ศ. 1961 และ 1964 และถัดมาในปี ค.ศ. 1966 และ 1971 โดย N.S. Bakhvalov และ G.P. Astrakhantsev ตามลำดับ ซึ่งบทความในขณะนั้นตีพิมพ์โดยโลกค่ายตะวันออกเสียส่วนใหญ่และไม่ได้รับความสนใจจากโลกค่ายตะวันตกเท่าที่ควร จนกระทั่งในปี ค.ศ. 1977 Achi Brandt ชาวอิสราเอลได้ตีพิมพ์บทความที่ทำให้ชาวโลกได้รู้จักและให้ความสนใจในศักยภาพและประโยชน์อันทรงคุณค่าของระเบียบวิธีมัลติกริด ด้วยเหตุนี้เองจึงถือได้ว่า Achi Brandt ได้รับการยกย่องให้เป็นบิดาแห่งระเบียบวิธีมัลติกริด หลังจากนั้นผู้คนเริ่มให้ความสนใจและศึกษาระเบียบวิธีมัลติกริดเรื่อยมาจนกระทั่งเข้าสู่ยุคทองของระเบียบวิธีมัลติกริดในทศวรรษที่ 80 ทฤษฎีจำนวนมากได้มีการตีพิมพ์ในทศวรรษนี้จนทำให้ระเบียบวิธีมัลติกริดกลายเป็นระเบียบวิธีมาตรฐานในการหาผลเฉลยของปัญหาในหลากหลายสาขา ณ เวลานี้เองกลุ่มผู้ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดได้มีการรวมตัวกันจัดตั้งเป็นสมาคมขนาดใหญ่และได้จัดให้มีการประชุมสัมมนาปรึกษาแลกเปลี่ยนองค์ความรู้สืบเนื่องกันมาโดยตลอด



รูปที่ 2.1 แสดงค่าองค์ประกอบของความผิดพลาดเมื่อเปรียบเทียบกับกริดแต่ละขนาด

2.2 เทคนิคมัลติบล็อก

ความซับซ้อนอีกประการหนึ่งในการแก้ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ของไหลคือความซับซ้อนทางรูปร่างของขอบเขตที่พิจารณาหรือรูปทรงของปัญหา กล่าวคือขอบเขตของปัญหามีลักษณะที่ยากต่อการสร้างกริดที่มีโครงสร้างต่อเนื่องแบบพิกัดฉาก (Structured Cartesian Grid) เพียงชุดเดียวให้ครอบคลุมบริเวณทั้งหมด แนวทางปฏิบัติที่นิยมอย่างแพร่หลายคือการแบ่งขอบเขตหลักที่มีรูปร่างซับซ้อนออกเป็นขอบเขตย่อยที่มีลักษณะเรียบง่ายเชิงเรขาคณิต จากนั้นทำการสร้างกริดบนแต่ละขอบเขตย่อยอย่างเป็นอิสระต่อกันซึ่งวิธีนี้เป็นที่ทราบกันดีในนามของเทคนิคมัลติบล็อก การสร้างกริด

สำหรับมัลติบล็อกสามารถจำแนกออกเป็น 2 วิธี ตามลักษณะกริดบริเวณรอยต่อระหว่างบล็อก ได้แก่ การสร้างกริดแบบเหลื่อม (Overlapping Grid) และการสร้างกริดแบบต่อ (Patched Grid) ดังแสดงในรูปที่ 2.2(a) และ 2.2(b) ตามลำดับ การสร้างกริดแบบเหลื่อมนั้นจะมีการซ้อนทับกันของกริดระหว่างบล็อกที่ประชิดกัน การสร้างกริดในลักษณะนี้มีความยืดหยุ่นในการสร้างและเข้ากันกับรูปทรงที่ซับซ้อนได้ดีกว่า แต่มีปัญหาในเรื่องการทำให้ปริมาณต่าง ๆ บริเวณที่เกิดการซ้อนทับกันให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ สำหรับกริดแบบต่อนั้น แต่ละบล็อกเชื่อมต่อกันที่เส้นกริดร่วมโดยไม่มีการซ้อนทับ กริดลักษณะนี้ง่ายต่อการทำให้ปริมาณต่าง ๆ บริเวณรอยต่อเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์แต่มีข้อจำกัดในการสร้าง

สำหรับงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับเทคนิคมัลติบล็อกสามารถสรุปได้ดังนี้

Rai (1985) ใช้กริดแบบต่อกับปัญหาการไหลความเร็วเหนือเสียงผ่านทรงกระบอก การหักเหของคลื่นเสียงบนทางลาดชัน และคลื่นกระแทกหนึ่งมิติในท่อ ซึ่งตรงบริเวณรอยต่อระหว่างบล็อกจะบังคับให้เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ การหาค่าบริเวณรอยต่อกระทำโดยการกำหนดให้บล็อกแรกหาค่าตรงรอยต่อโดยอ้อมผ่านทางสมการผลต่างซึ่งต้องอินทิเกรตหาฟลักซ์จากบล็อกที่สอง จากนั้นเมื่อได้แก้ปัญหาบนบล็อกแรกแล้ว ค่าตรงบริเวณรอยต่อของบล็อกที่สองได้จากการประมาณค่าในช่วงโดยใช้ค่าจากบล็อกแรก

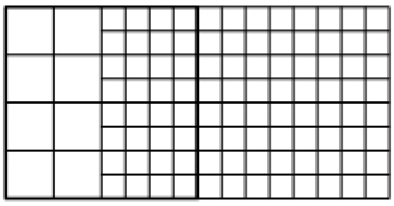
Lee และ Chiu (1992) ใช้กริดแบบต่อกับปัญหาการไหลผ่านขั้นกลับหลัง (Backward-Facing-Step Flow) การไหลในท่อแยกรูปตัวที และการไหลแยกในเส้นเลือด (Aortic Bifurcation Flow) ซึ่งได้ประเมินผลของการใช้แผนวิธีในการหาค่าที่รอยต่อของบล็อกคู่ประชิดระหว่างการสอดคล้องกับกฎการอนุรักษ์และการไม่คำนึงถึงกฎการอนุรักษ์โดยได้แสดงให้เห็นว่าแบบที่สองจะมีความไม่ราบเรียบของเส้นความดันคงที่ตรงรอยต่อแม้ว่าความเร็วจะราบเรียบก็ตาม ยิ่งไปกว่านั้นความไม่ต่อเนื่องของเส้นปริมาณคงที่จะมีผลกระทบอย่างรุนแรงเมื่อรอยต่ออยู่ตรงบริเวณที่มีการหมุนวน

Wright และ Shyy (1993) ได้ใช้กริดแบบเหลื่อมกับปัญหาที่มีความซับซ้อนทางรูปร่างสูงซึ่งได้แสดงถึงศักยภาพทางความยืดหยุ่นของการสร้างกริดแบบเหลื่อมที่มีเหนือกว่ากริดแบบต่อ ทั้งนี้บริเวณที่มีการซ้อนทับกันเกิดจากการเหลื่อมล้ำของกริดมากกว่าสองบล็อก กรรมวิธีในการหาว่าตรงรอยต่อนั้นจะใช้การประมาณค่าในช่วงจากบล็อกใดนั้นได้ถูกนำเสนอในบทความนี้โดยการกำหนดสิทธิ์การมาก่อน (Priority) ของแต่ละบล็อกไว้ บล็อกที่มีสิทธิ์ก่อนจะถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าในช่วงให้แก่ค่าตรงรอยต่อของบล็อกที่กำลังพิจารณา

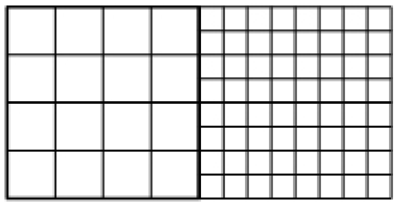
Wang (1995) ใช้กริดแบบเหลื่อมสำหรับแก้สมการออยเลอร์ โดยได้นำเสนอวิธีการใหม่สำหรับการหาค่าตรงรอยต่อระหว่างบล็อกของกริดแบบเหลื่อม ทั้งนี้เนื่องด้วยความไม่สมดุลของค่าอัตราการไหลตรงรอยต่อเป็นปัญหาหลักของกริดลักษณะนี้ บทความนี้ได้รวมวิธีการของกริดแบบ

ต่อและกริดแบบเหลื่อมให้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน โดยวิธีการที่นำเสนอพบว่าให้ผลที่ดีกว่าวิธีการแบบเดิมของกริดแบบเหลื่อมโดยตรงบริเวณรอยต่อนั้นมีความสมดุลของค่าอัตราการไหลทั้งการวิเคราะห์ในแง่คณิตศาสตร์และเชิงตัวเลข

Liu และ Shyy (1996) ใช้กริดแบบต่อกับการไหลแบบราบเรียบผ่านใบพัดโดยจะทำการประมาณค่าในช่วงสำหรับการไหลของโมเมนตัมจากบล็อกข้างเคียงและนำไปเป็นพจน์ก่อกำเนิดในสมการโมเมนตัมและได้นำเสนอวิธีการในการหาค่าตรงรอยต่อเพื่อให้มีความสมดุลการไหลของมวลผ่านทางสมการความดันแก้ไข 2 วิธีด้วยกัน *วิธีแรก* บล็อกคู่ประชิดจะใช้อัตราการไหลของมวลจากบล็อกข้างเคียงเป็นค่าเงื่อนไขที่ขอบของสมการความดันแก้ไขสำหรับบล็อกที่กำลังพิจารณา สำหรับ*วิธีที่สอง* บล็อกแรกจะใช้ค่าอัตราการไหลของมวลจากบล็อกที่สองเป็นค่าเงื่อนไขที่ขอบของสมการความดันแก้ไขเช่นเดียวกันกับวิธีแรกจากนั้นทำการประมาณค่าในช่วงความดันแก้ไขไปยังบล็อกที่สองเพื่อใช้เป็นค่าเงื่อนไขที่ขอบในสมการความดันแก้ไข



(a)



(b)

รูปที่ 2.2 (a) แสดงกริดแบบเหลื่อม (Overlapping Grid)
(b) แสดงการสร้างกริดแบบต่อ (Patched Grid)

2.3 การคำนวณแบบขนาน

อาจกล่าวได้ว่าการจำลองเชิงตัวเลข (Numerical Simulation) นั้นได้เข้ามามีบทบาทอันสำคัญต่อวงการวิทยาศาสตร์มาก บ่อยครั้งการทดลองเพื่อทดสอบทฤษฎีไม่อาจจะเป็นไปได้ด้วยเงื่อนไขของเวลา ค่าใช้จ่ายหรือแม้กระทั่งอาจจะผิดหลักจรรยาบรรณ การจำลองเชิงตัวเลขจึงกลายเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับวงการวิทยาศาสตร์แผนใหม่ ปัญหาทางวิทยาศาสตร์จำนวนมากมีความซับซ้อนสูงการจำลองเชิงตัวเลขจึงอาจจะต้องใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูงกว่าปกติมากในการดำเนินการ ปัญหาที่มีความซับซ้อนสูงที่ถือว่าเป็นสิ่งท้าทายสำหรับวงการวิทยาศาสตร์ได้แก่

- เคมีควอนตัม กลศาสตร์สถิติ ฟิสิกส์สัมพัทธภาพ
- จักรวาลและอวกาศ
- พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณและการจำลองความปั่นป่วน

- การออกแบบวัสดุ และ ตัวนำยิ่งยวด
- ชีววิทยา เภสัชศาสตร์ ลำดับโครโมโซม พันธุวิศวกรรม
- แพทยศาสตร์ และ การจำลองแบบอวัยวะและกระดูก
- การจำลองสภาพอากาศและ สิ่งแวดล้อมโลก

ปัญหาอันท้าทายเหล่านี้เริ่มมีปรากฏในตอนปลายทศวรรษที่ 1980 ซึ่งนำไปสู่การพัฒนาการคำนวณสมรรถนะสูงต่อไป

รัฐบาลสหรัฐอเมริกามีบทบาทสำคัญมากต่อการพัฒนาและการใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูง โดยในช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 กองทัพสหรัฐได้ทุ่มทุนสร้างศูนย์ ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) ขึ้นมาเพื่อเร่งการคำนวณในกองทหารปืนใหญ่ และ 30 ปีหลังจากสงครามโลกครั้งที่ 2 รัฐบาลสหรัฐอเมริกาได้ใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูงในการออกแบบหัวรบนิวเคลียร์ (Nuclear Weapon) การทำลายรหัส (Break Codes) และงานทางด้านระบบรักษาความปลอดภัย ซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ถือเป็นคอมพิวเตอร์สรรถนะสูงสุดที่สามารถสร้างได้ในขณะนั้น แต่เนื่องด้วยราคาต่อหน่วยของซุปเปอร์คอมพิวเตอร์สูงถึง 10 ล้านเหรียญดอลลาร์สหรัฐฯ หรือมากกว่าซุปเปอร์คอมพิวเตอร์จึงเป็นเครื่องอำนวยความสะดวกจำกัดเฉพาะในหน่วยงานวิจัยของรัฐบาลเท่านั้น นับจากนั้นไม่นานซุปเปอร์คอมพิวเตอร์เริ่มมีปรากฏในหน่วยงานนอกรัฐบาล เริ่มตั้งแต่ปลายทศวรรษที่ 1970 ซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ถูกใช้ในงานอุตสาหกรรมหนักในเมืองหลวง และ 30 ปีถัดจากนั้นทั่วโลกได้มีการใช้ซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ในกิจการงานทางธุรกิจและในเวลาต่อมาคำจำกัดความของคำว่าซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ได้เปลี่ยนไป ซึ่งเดิมหมายถึงคอมพิวเตอร์หน่วยประมวลผลกลางเดี่ยวเชื่อมต่อกับตัวประมวลผลแบบเวกเตอร์สมรรถนะสูง ซึ่งปัจจุบันซุปเปอร์คอมพิวเตอร์ยังได้รวมถึงคอมพิวเตอร์แบบขนานที่ประกอบไปด้วยหน่วยประมวลผลกลางนับพันหน่วย

แนวคิดพื้นฐานสำหรับการคำนวณแบบขนานคือ การคำนวณปัญหาต่าง ๆ ด้วยการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วนย่อยแล้วทำการคำนวณในแต่ละส่วนย่อยนั้นไปพร้อมกัน ซึ่งการแบ่งปัญหาอาจจะกระทำได้โดยการแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วนย่อยแล้วคำนวณด้วยวิธีการเดียวกันในแต่ละส่วนย่อยหรือโดยการคำนวณด้วยวิธีการที่แตกต่างกันไปพร้อมกันบนข้อมูลชุดเดียวกัน *แบบแรก*เรียกว่าการคำนวณชุดข้อมูลแบบขนาน (Data Parallelization) และ*แบบที่สอง*คือ การคำนวณการทำงานแบบขนาน (Functional Parallelization)

สำหรับงานวิจัยทางด้านการคำนวณแบบขนานที่ผ่านมาพอจะสรุปโดยสังเขปได้ดังต่อไปนี้

Lonsdale และ Schuller (1993) ได้ทำการทดสอบประสิทธิของการคำนวณด้วยกระบวนการการคำนวณแบบขนานบนสถาปัตยกรรมหน่วยความแบบกระจายร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริด

จุดประสงค์เพื่อค้นหาว่าตัวแก้ระบบสมการเชิงเส้นใดที่ยังคงรักษาประสิทธิภาพไว้ได้ดีเมื่อใช้กับการคำนวณแบบขนานและระเบียบวิธีมัลติกริดเพื่อแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนทางรูปทรง โดยได้ทำการแบ่งโดเมนหลักที่ซับซ้อนออกเป็นโดเมนย่อยอย่างง่ายแล้วประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดในแต่ละโดเมนย่อยซึ่งจำนวนบล็อกต่อจำนวนกระบวนการเป็น 1:1

Drikakis (1996) ได้นำเสนอการพัฒนาการคำนวณแบบขนานร่วมกับเทคนิคมัลติบล็อกเพื่อจำลองการไหลแบบราบเรียบสามมิติสำหรับการไหลในท่อหน้าตัดขยายฉับพลัน (Sudden-Expansion Channel) และการไหลในท่อรูปตัวเอส (S-Shaped Channel) เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างระบบหน่วยความจำร่วมและระบบหน่วยความจำกระจายโดยได้ข้อสรุปที่ว่าประสิทธิภาพของการคำนวณด้วยระบบหน่วยความจำร่วมดีกว่าระบบหน่วยความจำแบบกระจายแต่ทั้งนี้ทั้งนั้นต้องขึ้นอยู่กับสถาปัตยกรรมของระบบคอมพิวเตอร์แบบขนานและระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ด้วย

Serafino (1997) ได้ปรับปรุงโปรแกรมคำนวณการไหลอย่างคงตัวอัดตัวได้ไร้ความหนืดผ่านรูปร่างทางพลศาสตร์อากาศแบบสองและสามมิติด้วยกระบวนการการคำนวณแบบตามลำดับให้เป็นกระบวนการการคำนวณแบบขนานบนสถาปัตยกรรม MIMD หน่วยความจำแยกใช้ชุดคำสั่ง PVM ในการส่งข้อมูลที่จำเป็นระหว่างกระบวนการ สำหรับโปรแกรมการคำนวณนั้นจะทำการคำนวณด้วยเทคนิคมัลติบล็อกและระเบียบวิธีมัลติกริดร่วมกันโดยที่เทคนิคมัลติบล็อกจะซ่อนอยู่ภายในระเบียบวิธีมัลติกริดซึ่งในแต่ละระดับกริดนั้นกริดจะถูกแบ่งออกเป็นบล็อกจำนวนหลายบล็อกและคำนวณทุกบล็อกด้วยการคำนวณแบบขนาน

Wang และ Ferraro (1999) ใช้กระบวนการการคำนวณแบบขนานร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริดคำนวณปัญหาการไหลและอุณหภูมิในขอบเขตรูปลูกบาศก์ซึ่งโปรแกรมการคำนวณสามารถที่จะแบ่งข้อมูลได้ทั้ง 1, 2 และ 3 มิติ

Vatsa และ Wedan (1999) ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมการคำนวณปัญหาการไหลแบบตามลำดับที่มีอยู่แล้วให้กลายเป็นโปรแกรมการคำนวณแบบขนาน วิถีทางวิศวกรรมถูกนำมาใช้เพื่อให้โปรแกรมการคำนวณมีการเปลี่ยนแปลงน้อยที่สุด

Llorente, Prieto-Matias และ Diskin (2001) ได้ทำการคำนวณแบบขนานร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริดกับปัญหาการพาอย่างเดียวและปัญหาการพาผสมกับการแพร่ (Convection-Diffusion) ซึ่งการทำให้กริดหยาบขึ้นนั้นจะเป็นแบบกึ่งหยาบ (Semi-Coarsening) กล่าวคือจำนวนจุดของกริดจะลดลงในบางทิศทางและคงที่ในบางทิศทาง การคำนวณร่วมกันระหว่างกระบวนการการคำนวณแบบขนานและระเบียบวิธีมัลติกริดจะใช้แบบการแบ่งกริด (Multigrid with Grid-Partitioning) สำหรับการทำให้หยาบของกริดนั้นบทความนี้ได้กำหนดจุดวิกฤตที่สามารถทำให้หยาบได้ต่ำสุดเอาไว้เพื่อป้องกันการว่างงานของบางกระบวนการที่เมื่อกริดถูกทำให้หยาบจนกระทั่งต่ำกว่าจุดวิกฤตจำนวนกริดอาจจะไม่สอดคล้องกับจำนวนกระบวนทั้งหมดที่มี

Sterk และ Trobec (2003) ทำการคำนวณแบบขนานร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริดสำหรับปัญหาเชิงเส้นปัวซอง (Poisson) สามมิติด้วยการแบ่งกริด (Multigrid with Grid-Partitioning) กล่าวคือจะมีการแบ่งกริดออกเป็นส่วนย่อยเพื่อคำนวณแบบขนานในแต่ละระดับกริดเมื่อจำนวณจุดน้อยมากจนกระทั่งอัตราส่วนเวลาของการคำนวณต่อเวลาที่ใช้ในการส่งผ่านข้อมูลระหว่างกระบวนการมีค่าน้อยกริดจะถูกรวบรวมและส่งให้กระบวนการหลักคำนวณแทน ซึ่งใช้ชุดคำสั่ง MPI ในการส่งผ่านข้อมูลหว่างกระบวนการ

Jia และ Sunden (2004) ได้นำเสนอวิธีการการคำนวณแบบขนานสำหรับโปรแกรมการคำนวณแบบมัลติบล็อกสามมิติไว้ 3 วิธีด้วยกัน *วิธีการแรก*โดยการประมวลผลบน PC-Clusters หน่วยประมวลผลคู่ (1 โหนดมี 2 หน่วยประมวลผลกลาง) ระบบหน่วยความจำร่วมด้วยระบบปฏิบัติการวินโดวส์ NT ซึ่งทำการคำนวณแบบขนานด้วยการโปรแกรมเชิงมัลติเทรด (Multithread Programming) โดยมีจำนวนเทรดเท่ากับจำนวนบล็อก สำหรับเทรดหรือบล็อกที่อยู่ในโหนดเดียวกันจะทำการแลกเปลี่ยนค่าบริเวณรอยต่อด้วยวิธีการแบบหน่วยความจำร่วม และเทรดหรือบล็อกที่อยู่ต่างโหนดกันจะใช้โปรแกรม WinSockets ในการแลกเปลี่ยนค่า *วิธีการที่สอง*จะทำการประมวลผลบนระบบปฏิบัติการลีนุกซ์ซึ่งใช้ชุดคำสั่ง MPI ในการแลกเปลี่ยนค่าตรงบริเวณรอยต่อระหว่างบล็อกที่อยู่ทั้งต่างโหนดและอยู่ในโหนดเดียวกัน สำหรับ*วิธีการสุดท้าย* จะเป็นการผสมผสานระหว่างวิธีการแรกและวิธีการที่สองโดยบล็อกหรือกระบวนการ (1 บล็อกต่อ 1 กระบวนการ) ที่อยู่โหนดเดียวกันจะใช้โปรแกรม Pthreads ในการแลกเปลี่ยนค่า และบล็อกที่อยู่ต่างโหนดกันจะใช้ชุดคำสั่ง MPI จากการทดสอบพบว่าวิธีแรกมีประสิทธิสูงสุดแต่ในการพัฒนาโปรแกรมนั้นต้องใช้เวลาและความพยายามมากกว่าสองวิธีหลัง ซึ่ง Jia และ Sunden (2004) ได้ให้ข้อสรุปว่าในมุมมองทางด้านวิศวกรรมแล้ววิธีสุดท้ายจะคุ้มทุนกว่าสองวิธีแรก

2.4 เทคนิคการคำนวณและการประยุกต์ใช้งาน

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นงานวิจัยที่ผ่านมาที่มีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริด เทคนิคมัลติบล็อกและการคำนวณแบบขนาน ซึ่งงานส่วนใหญ่จะใช้เพียงระเบียบวิธีใดวิธีหนึ่งหรือรวมเทคนิคการคำนวณของสองวิธีเข้าด้วย ซึ่งมีงานจำนวนน้อยที่จะใช้ทั้งสามเทคนิคร่วมกัน แต่อย่างไรก็ตามงานวิจัยที่มีการประยุกต์ใช้เทคนิคการคำนวณทั้งสามเข้าด้วยกันนั้นจะเน้นไปที่การทดสอบประสิทธิภาพการคำนวณแบบขนานบนระบบสถาปัตยกรรมที่แตกต่างกันมากกว่าไม่ว่าจะเป็นการคำนวณบนสถาปัตยกรรมแบบหน่วยความจำร่วมหรือสถาปัตยกรรมแบบหน่วยความจำแยกหรือการคำนวณบนสถาปัตยกรรมแบบผสมผสาน ซึ่งความแตกต่างกันทางด้านฮาร์ดแวร์นี้นำไปสู่การใช้งานซอฟต์แวร์ที่แตกต่างกันนั่นก็คือการใช้ชุดคำสั่งที่แตกต่างกันในการควบคุมการคำนวณแบบขนาน ตัวอย่างเช่น ชุดคำสั่ง MPI โปรแกรม Winsocket และโปรแกรม Pthreads ตามรายละเอียดข้างบน

เป็นต้น ซึ่งรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Computer Program Code) ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลนั้นจะมีผู้พัฒนามาก่อนหน้านั้นแล้ว งานส่วนใหญ่จะอยู่ที่การนำรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่แล้วที่เป็นการคำนวณแบบตามลำดับ (Sequential Computing) มาแปลงให้เป็นการคำนวณแบบขนาน

วิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการประยุกต์ใช้งานเทคนิคการคำนวณทั้งสามเข้าด้วยกันโดยรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะถูกออกแบบด้วยแนวคิดของการโปรแกรมเชิงวัตถุ (Object-Oriented Programming) นั่นคือแต่ละรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์ย่อยจะถูกพัฒนาแยกเป็นอิสระต่อกันและจากนั้นจะเรียกส่วนโปรแกรมย่อยนี้ผ่านส่วนโปรแกรมหลักซึ่งสามารถเรียกได้ทั้งการคำนวณแบบตามลำดับและการคำนวณแบบขนานโดยไม่มีผลกระทบต่อรหัสโปรแกรมคอมพิวเตอร์ย่อยเลย กล่าวคือสามารถเรียกใช้งานได้ทั้งการคำนวณแบบตามลำดับและการคำนวณแบบขนานโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงของรหัสโปรแกรมย่อย

บทที่ 3

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและเทคนิคการคำนวณ

(Numerical Method and Computation Techniques)

ในบทนี้จะแสดงรายละเอียดทางด้านเทคนิคการคำนวณที่ใช้และทฤษฎีพื้นฐานทางด้านการไหลและการถ่ายเทความร้อนที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ เริ่มต้นที่หัวข้อ 3.1 เป็นการอธิบายที่มาของสมการที่เกี่ยวข้องกับการไหลและการถ่ายเทความร้อนโดยสังเขปโดยการไหลที่พิจารณาจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งปริมาณต่างๆ จะมีการเปลี่ยนแปลงทั้งต่อเวลาและตำแหน่ง เพราะฉะนั้นสมการที่เกี่ยวข้องจึงถูกแสดงให้อยู่ในรูปสมการค่าเฉลี่ยต่อเวลา (Time-Averaged Equations) เป็นเหตุให้สมการที่ได้เกิดพจน์ที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ ด้วยเหตุนี้กรรมวิธี “การจำลองความปั่นป่วน” (Turbulence Modeling) จึงถูกนำมาใช้เพื่อจำลองพจน์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปตัวแปรอิสระที่สามารถหาค่าได้จาก “สมการการถ่ายโอน” (Transport Equations) ของตัวแปรแต่ละตัว เป็นผลให้เกิดสมการสำหรับ “แบบจำลองความปั่นป่วน” (Turbulence Models) ขึ้นโดยได้แสดงรายละเอียดอย่างย่อในหัวข้อ 3.2 และเนื่องด้วยสมการที่เกี่ยวข้องทั้งหมดล้วนถูกแสดงในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยจึงทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีเชิงตัวเลข ดังนั้นสมการทั้งหมดจึงถูกแปลงให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตด้วยกรรมวีธีที่แสดงในหัวข้อ 3.3 โดยในหัวข้อนี้ยังได้อธิบายถึงวิธีการในการแก้ระบบสมการพีชคณิตที่เกิดขึ้นเพื่อให้มีการถ่วงดุลกันระหว่างเวลาที่ใช้ในการคำนวณและปริมาณหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ที่ใช้และเพื่อให้ผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกับกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์ จากนั้นในหัวข้อ 3.4 จะอธิบายถึงเทคนิคการคำนวณสำหรับวิธีการทำซ้ำเพื่อเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลย และสุดท้ายในหัวข้อ 3.5 จะแสดงถึง “เทคนิคมัลติบล็อก” (Mulbiblock Technique) เพื่อแก้ปัญหาความซับซ้อนทางรูปร่างของขอบเขตของปัญหาที่ทำการพิจารณาซึ่งจะพบว่าเทคนิคการแบ่งโดเมนนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้เป็นอย่างดีกับ “การคำนวณแบบขนาน” (Parallel Computing) รายละเอียดที่กล่าวมาข้างต้นจะถูกแสดงโดยลำดับดังต่อไปนี้

3.1 สมการแม่บท (Governing Equations)

การไหลที่พิจารณาจะเป็นการไหลที่สภาวะคงตัว (Steady State) และเป็นการไหลที่ไม่สามารถอัดตัวได้ (Incompressible Flow) โดยจะกำหนดให้คุณสมบัติภายในทางอุณหพลศาสตร์

(Intensive Thermodynamic Properties) และคุณสมบัติการถ่ายโอน (Transport Properties) คงที่ตลอดการไหล สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายพฤติกรรมการไหลได้แก่สมการนาเวียร์สโตคส์ (Naviers-Stokes Equation) ซึ่งประกอบไปด้วยสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) และสมการโมเมนตัม (Momentum Equations) ดังนี้

สมการความต่อเนื่อง:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \hat{u}_j\right) = 0 \tag{3.1}$$

สมการโมเมนตัม:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \hat{u}_j \hat{u}_i\right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \hat{F}_B \tag{3.2}$$

เมื่อ $\hat{F}_B$ แทนแรงเนื่องจากวัตถุ (Body Forces) ซึ่งจะแตกต่างกันไปตามประเภทของการไหล โดยสมการ (3.1) และ (3.2) สามารถใช้ได้ทั้งกับกรณีการไหลแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วน สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนนั้นปริมาณต่าง ๆ จะมีการเปลี่ยนแปลงแบบสุ่มอย่างรวดเร็วต่อเวลาและตำแหน่ง ดังนั้นเครื่องหมาย ‘^’ ที่ปรากฏจะเป็นการระบุค่าของปริมาณต่าง ๆ ที่เวลาใด ๆ ซึ่งการไหลที่พบในชีวิตประจำวันโดยมากจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วนแต่มุมมองทางวิศวกรรมนั้นจะมุ่งไปที่ค่าเฉลี่ย เพราะฉะนั้น ณ เวลาใด ๆ (Instantaneous Time) ปริมาณต่าง ๆ สามารถแยกออกได้เป็นปริมาณค่าเฉลี่ยต่อเวลา (Time-Averaged Quantities) และปริมาณที่กวัดแกว่งกับเวลา (Time-Fluctuating Quantities) ตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\hat{\phi} = \phi + \phi' \tag{3.3}$$

โดยที่ ϕ แทนปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ϕ แทนปริมาณค่าเฉลี่ยต่อเวลาและ ϕ' แทนปริมาณที่กวัดแกว่งกับเวลา และในที่นี้ ϕ เป็นตัวแปรโดยทั่วไปใช้แทน u_i , p, τ_{ij} และ F_B โดยที่ปริมาณค่าเฉลี่ยต่อเวลาสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\phi = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\phi}\,dt \tag{3.4}$$

เมื่อแทนความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ ตามสมการ (3.3) ลงในสมการ (3.1) และ (3.2) จากนั้นทำการเฉลี่ยต่อเวลาในแต่ละสมการจะได้สมการที่อยู่ในรูปค่าเฉลี่ยต่อเวลาเป็น

สมการความต่อเนื่อง:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right) = 0 \tag{3.5}$$

สมการโมเมนตัม:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij} + \overline{\tau'_{ij}}\right) + F_B \tag{3.6}$$

เพื่อเป็นเกียรติแก่ Osborne Reynolds (1842-1912) นักวิทยาศาสตร์และวิศวกรชาวอังกฤษผู้ซึ่งเขียนสมการนาเวียร์สโตคส์ให้อยู่ในรูปค่าเฉลี่ยหรือตัวแปรค่าเฉลี่ยต่อเวลาของความปั่นป่วนในปี ค.ศ. 1895 นั้นจึงเรียกกระบวนการนี้ว่า “การเฉลี่ยต่อเวลาของเรย์โนลด์” (Reynolds Averaging) และเรียกสมการนี้ว่า “สมการนาเวียร์สโตคส์เฉลี่ยต่อเวลาของเรย์โนลด์” (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations [RANS]) ซึ่งเมื่อพิจารณาสมการ (3.6) แล้วจะพบว่าผลของการเฉลี่ยต่อเวลาทำให้เกิดพจน์ซึ่งไม่สามารถตัดทิ้งได้คือ $\overline{\tau'_{ij}}$ และเนื่องจาก τ_{ij} ถูกนิยามให้เป็น “ความเค้นของความหนืด” (Viscous Stresses) หรือ “ความเค้นแบบราบเรียบ” (Laminar Stresses) และเนื่องจากความเหมือนกันทางมิติจึงเรียกพจน์ $\overline{\tau'_{ij}}$ นี้ว่า “ความเค้นแบบปั่นป่วน” (Turbulent Stresses) โดยมีนิยามเป็น $\overline{\tau'_{ij}} = -\rho\overline{u'_i u'_j}$ และเรียกพจน์ $\rho\overline{u'_i u'_j}$ นี้ว่า “ความเค้นของเรย์โนลด์” (Reynolds Stresses) และเนื่องจากนิยามทางคณิตศาสตร์ของความเค้นของความหนืดคือ $\tau_{ij}=\mu(\partial u_j/\partial u_i+\partial u_i/\partial u_j)$ เพราะฉะนั้นสมการ(3.6) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \rho\overline{u'_i u'_j}\right] + F_B \tag{3.7}$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการพิจารณาถึงสมการแม่บทของการไหลโดยไม่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้อง ในกรณีที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้องนั้นจำเป็นต้องแก้สมการเพิ่มอีกหนึ่งสมการนั่นคือสมการอนุรักษ์พลังงาน และเนื่องด้วยการไหลเป็นการไหลที่ไม่สามารถอัดตัวได้การพิจารณาสมการพลังงานแยกออกจากสมการโมเมนตัมและสมการความต่อเนื่องนั้นจึงไม่ถือว่าขัดกับหลักทางฟิสิกส์และคณิตศาสตร์แต่อย่างใด ซึ่งสมการอนุรักษ์พลังงานเฉลี่ยต่อเวลาสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการการถ่ายเทความร้อนเฉลี่ยต่อเวลาได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j T\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho\overline{u_j' T'}\right] \tag{3.8}$$

ซึ่งเรียกพจน์ $-\rho\overline{u_j' T'}$ นี้ว่า “ฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน” (Turbulent Heat Flux)

3.2 การจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Modelling)

สมการการถ่ายโอนที่อธิบายพฤติกรรมการไหลและการถ่ายเทความร้อนที่เขียนให้อยู่ในรูปปริมาณค่าเฉลี่ยต่อเวลาตามสมการ (3.5)-(3.8) นั้นจะปรากฏพจน์ที่มีตัวแปรไม่ทราบค่าอยู่ได้แก่พจน์ความเค้นเรย์โนลด์ $\rho\overline{u_i' u_j'}$ และพจน์ฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน $\rho\overline{u_j' T'}$ และถ้าหากพิจารณาว่าพจน์ดังกล่าวเป็นเสมือนตัวแปรใด ๆ แล้วการแก้ระบบสมการการถ่ายโอนก็ยังไม่สามารถทำให้เกิดผลสัมฤทธิ์ได้เนื่องจากไม่มีสมการที่ใช้สำหรับหาค่าตัวแปรหรือพจน์ดังกล่าว เพราะฉะนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องสร้างความสัมพันธ์หรือสมการเพื่อหาค่าความเค้นเรย์โนลด์และฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน วิธีการที่ใช้สำหรับหาค่าความเค้นเรย์โนลด์สามารถแบ่งได้เป็น 2 วิธีด้วยกัน *วิธีแรก*จะเป็นการสร้างความสัมพันธ์ให้แก่ความเค้นเรย์โนลด์โดยอาศัยความคล้ายคลึงของเรย์โนลด์ (Reynolds Analogy)ระหว่างความเค้นแบบปั่นป่วนและความเค้นแบบราบเรียบหรือเรียกวิธีนี้ว่า “แบบจำลองความหนืดปั่นป่วน” หรือ “แบบจำลองความหนืดเอ็ดดี” (Eddy-Viscosity Model [EVM]) ซึ่งถูกเสนอเป็น “สมมติฐานความหนืดแบบปั่นป่วน” (Turbulent-Viscosity Hypothesis) โดย Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) นักคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศสในปี ค.ศ. 1877 โดยจะอภิปรายในหัวข้อต่อไป สำหรับ*วิธีที่สอง*จะเป็นการสร้างสมการการถ่ายโอนให้แก่แต่ละองค์ประกอบของค่าความเค้นเรย์โนลด์หรือเรียกวิธีนี้ว่า “แบบจำลองความเค้นเรย์โนลด์” (Reynolds Stress Model [RSM]) ซึ่งจะไม่ถูกพิจารณาในที่นี้

3.2.1 สมมติฐานความหนืดแบบปั่นป่วน (Turbulent-Viscosity Hypothesis)

ความเค้นเรย์โนลด์สามารถแบ่งได้เป็นส่วนไอโซทรอปิค (Isotropic Part) และส่วนแอนไอโซทรอปิค (Anisotropic Part) ส่วนไอโซทรอปิคได้แก่ $\overline{u_i'u_j'}\,\delta_{ij}$ ซึ่งเป็นองค์ประกอบในแนวตั้งฉาก โดยมีคุณสมบัติเท่ากันทุกทิศทางดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ของส่วนแอนไอโซทรอปิคได้เป็น $a_{ij} = \overline{u_i'u_j'} - \overline{u_i'u_j'}\,\delta_{ij}$ และเมื่อพลังงานจลน์ความปั่นป่วนมีนิยามเป็น $k = (1/2)\overline{u_i'u_i'}$ เพราะฉะนั้นส่วนแอนไอโซทรอปิคจึงสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_{ij} = \overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} \tag{3.9}$$

จากสมมติฐานความหนืดแบบปั่นป่วน ส่วนแอนไอโซทรอปิคจะแปรผันตรงกับ “ค่าเฉลี่ยของอัตราความเครียด” (Mean Rate of Strain) ดังสมการต่อไปนี้

$$\overline{u_i'u_j'} - \frac{2}{3}k\delta_{ij} = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.10}$$

ซึ่ง μ_t เป็นค่าคงที่ของการแปรผันเรียกว่า “ความหนืดแบบปั่นป่วน” (Turbulent Viscosity) หรือ “ความหนืดเอ็ดดี” (Eddy Viscosity) จากนั้นแทนสมการ (3.10) ลงในสมการ (3.7) และจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายโดยการนำสมการความต่อเนื่องมาช่วยจะได้

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \mu_t\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\rho k\right) + F_B \tag{3.11}$$

3.2.2 สมมติฐานความลาดชันการแพร่ (Gradient-Diffusion Hypothesis)

ฟลักซ์ของปริมาณสเกลาร์ (Scalar Flux) $\overline{u_j'\phi'}$ ใด ๆ จะให้ทั้งทิศทางและขนาดของการถ่ายโอนความปั่นป่วนของตัวแปรสเกลาร์ ϕ นั้น ๆ (Pope [2000]) จากสมมติฐานความลาดชันการแพร่กล่าวว่าการถ่ายโอนดังกล่าวนี้จะลาดชันตามทิศทางของ $-\partial\phi/\partial x_j$ ซึ่งจะต้องมีค่าสเกลาร์ Γ_t ใด ๆ ที่ทำให้

$$\overline{u_j'\phi'} = -\Gamma_t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \tag{3.12}$$

โดยที่ Γ_t มีนิยามเป็น "สัมประสิทธิ์ของการแพร่แบบปั่นป่วน" (Coefficient of Turbulent Diffusivity) เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.8) ค่าฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วนจึงสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\overline{u_j'T'} = -\frac{\mu_t}{\sigma_t}\frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{3.13}$$

โดยที่ σ_t มีนิยามเป็น "ตัวเลขแพรนด์ทึลแบบปั่นป่วนสำหรับการถ่ายเทความร้อน" (Heat Transfer Turbulent Prandtl Number) จากนั้นแทนสมการ (3.13) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j T\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right] \tag{3.14}$$

จากสมการ (3.11) และ (3.14) ดูเหมือนจะเป็นสมการที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยกรรมวิธีเชิงตัวเลขได้แล้วเพราะพจน์ที่เป็นปัญหาได้ถูกจำลองให้อยู่ในรูปตัวแปรที่สามารถหาคำตอบได้ อย่างไรก็ตามพจน์ดังกล่าวได้ถูกจำลองให้อยู่ในรูป "ความหนืดเทียม" (Spurious Viscosity) ที่ไม่มีอยู่จริง เพราะฉะนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องจำลองความหนืดเทียมนี้ต่อไป จึงนำไปสู่กระบวนการการจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Modeling)

3.2.3 แบบจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Models)

การจำลองความปั่นป่วนในกรณีการจำลองความหนืดเอ็ดดีนี้จะทำการสร้างความสัมพันธ์ให้แก่ความหนืดเอ็ดดีโดยสามารถหาค่าความหนืดเอ็ดดีได้จากตัวแปรจำลองที่สามารถหาค่าได้จากสมการการถ่ายโอนของตัวแปรนั้น แบบจำลองความปั่นป่วนที่จะนำเสนอต่อไปนี้จะเป็นแบบจำลองที่ต้องแก้สมการการถ่ายโอนจำนวนสองสมการเพื่อให้ได้ค่าตัวแปรสำหรับหาค่าความหนืดเอ็ดดีซึ่งมีแบบจำลองเป็นจำนวนมากที่ถูกนำเสนอขึ้นในอดีตที่ผ่านมา สำหรับแบบจำลองที่ถูกเลือกใช้ในที่นี้ได้แก่ แบบจำลอง k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) และแบบจำลอง k-ω-SST ของ Menter (1994) โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

แบบจำลอง k-ε ของ Launder และ Sharma (1974)

แบบจำลองนี้จะทำการหาค่าความหนืดเอ็ดดีจากค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วน (Turbulent Kinetic Energy) k และค่าอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วน (Turbulent Kinetic Energy Dissipation rate) ε ดังนี้

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.15}$$

ซึ่งค่า C_μ และ f_μ เป็นค่าที่ได้จากการปรับแก้เทียบกับการทดลองในการไหลอย่างง่าย โดยค่า k และ ε หาได้จากสมการการถ่ายโอนดังต่อไปนี้

สมการพลังจลน์ความปั่นป่วน:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j k\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k + G_B - \rho(\varepsilon + D_k) \tag{3.16}$$

สมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วน:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + G_B)\frac{\varepsilon}{k} - \rho C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \rho E \tag{3.17}$$

สำหรับค่าคงที่จากการทดลองและฟังก์ชันต่าง ๆ มีค่าดังนี้

C_μ=0.09, $C_{\varepsilon}1$=1.44, $C_{\varepsilon}2$=1.92, $D_k = 2 - \left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_j}\right)^2$, $E = 2 - \frac{\quad t}{\quad}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2$, f_1=1.0,

f_2=1-0.3exp$(-Re_T)^2$, $f_\mu = \exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + Re_T/50\right)^2}\right]$, $Re_T = \rho k^2/\varepsilon$, σ_k=1.0, σ_T=0.9 และ σ_ε=1.3

แบบจำลอง k-ω-SST ของ Menter (1994)

สำหรับแบบจำลองนี้ค่าความหนืดเอ็ดดีหาได้จากค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนและค่าอัตราการสูญเสียพลังงานจนล์ความปั่นป่วนจำเพาะ (Turbulent Kinetic Energy Specific Dissipation Rate) ω ซึ่งแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mu_t = a \min\left(\frac{\rho k}{a\omega}, \frac{\rho k}{b|\Omega|}\right) \tag{3.18}$$

โดยที่ a=0.31, b=tanh($\arg_2^2$) และ $\Omega=\partial u_i/\partial x_j-\partial u_j/\partial x_i$ ซึ่งค่า k และ ω คำนวณได้จากสมการการถ่ายโอนดังต่อไปนี้

สมการพลังจลน์ความปั่นปั่วน:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j k\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \sigma_k \mu_t\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k + G_B - \rho\alpha^* \omega k \tag{3.19}$$

สมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j \omega\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \sigma_\omega \mu_t\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \frac{C_\omega}{\mu_t}(P_k + G_B) \\ - \rho\alpha\omega^2 + 2\left(1 - B_f\right)\frac{\rho\sigma_\omega}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\end{aligned} \tag{3.20}$$

“ฟังก์ชันผสมผสาน” (Blending Function) B_f ที่ปรากฏในสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ความปั่นป่วนจำเพาะนั้นมีไว้เพื่อคำนวณหาค่าคงที่ต่าง ๆ ของแบบจำลองโดยจะผสมผสานระหว่างค่าคงที่จากแบบจำลองมาตรฐานของ k-ε เมื่อแปลงให้อยู่ในรูป k-ω และค่าคงที่จากแบบจำลอง k-ω ดั้งเดิมโดย Wicox (1993) ซึ่งทั้งสองแบบจำลองมีข้อดีและข้อเสียที่แตกต่างกันเพราะฉะนั้นฟังก์ชันผสมผสานจะนำเอาข้อดีของแบบจำลองทั้งสองมาใช้ร่วมกัน ฟังก์ชันผสมผสานมีนิยามดังนี้

$$B_f = \tanh(\arg_1^4) \tag{3.21}$$

เมื่อ

$$\mathrm{arg}_1 = \min\left(\mathrm{arg}_2 , \frac{4 \quad {}_2 \mathrm{k}}{\mathrm{CD}_{\mathrm{k}} \ \mathrm{d}_{\mathrm{n}}^2} \right) \text{ และ } {}^{1}\mathrm{CD}_{\mathrm{k}} = \max\left(\frac{2 \quad {}_2}{} \frac{\partial \mathrm{k}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} , 10^{-20} \right)$$

หากกำหนดให้ค่าคงที่ของ k-ω ดั้งเดิมเป็น ϕ_1 และค่าคงที่ของ k-ε ที่ถูกแปลงให้อยู่ในรูปของ k-ω เป็น ϕ_2 ดังนั้นค่าคงที่สำหรับ k-ω-SST ซึ่งได้แก่ค่า α, σ_k, σ_ω และ C_ω สามารถคำนวณได้จาก ความสัมพันธ์ $\phi = B_f \phi_1 + (1 - B_f)\phi_2$ โดยค่าคงที่ของทั้งสองแบบจำลองมีค่าดังต่อไปนี้

ค่าคงที่ของแบบจำลอง k-ω ดั้งเดิม:

$\alpha_1 = 0.075$, $\sigma_{k1} = 0.85$, $\sigma_{\omega_1} = 0.5$ และ $C_{\omega_1} = 0.533$

ค่าคงที่ของแบบจำลองk- ε มาตรฐานเมื่อแปลงให้อยู่ในรูป k-ω:

$\alpha_2 = 0.0828$, $\sigma_{k2} = 1.0$, $\sigma_{\omega_2} = 0.856$ และ $C_{\omega_2} = 0.44$

3.3 การแปลงไม่เต็มหน่วย(Discretization) และการคำนวณระบบสมการ

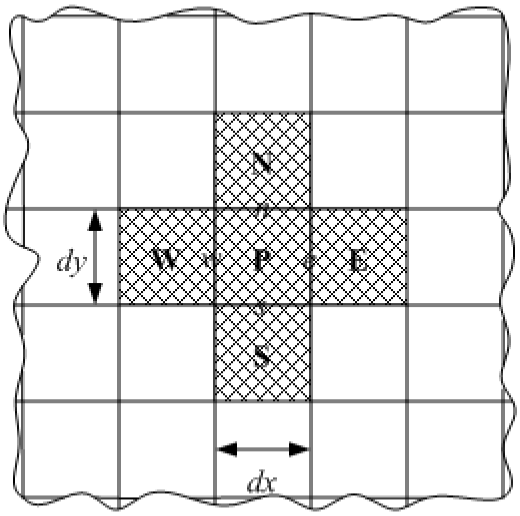
สมการการถ่ายโอนที่อธิบายพฤติกรรมการไหล การถ่ายเทความร้อน และรวมถึงสมการแบบจำลองความปั่นที่กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้นล้วนแสดงอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งไม่สามารถที่จะแก้สมการดังกล่าวด้วยวิธีการทางคอมพิวเตอร์ได้ จึงมีความจำเป็นที่จะต้องแปลงสมการอนุพันธ์ย่อยดังกล่าวให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยกรรมวิธีทางตัวเลขเสียก่อน เมื่อพิจารณาสมการที่เกี่ยวข้องทั้งหมดจะพบว่าสามารถเขียนสมการทั้งหมดให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j \phi\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S^{\phi} \tag{3.22}$$

---

[1] CD มาจาก Cross-Diffusion

โดยที่ ϕ, Γ_ϕ และ S^ϕ มีนิยามที่แตกต่างกันไปในแต่ละสมการ (ดูภาคผนวก ก) โดยการแปลงสมการอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตนั้นสามารถกระทำได้หลายวิธี แต่วิธีที่เลือกใช้ในที่นี้ได้แก่ "ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด" (Finite Volume Method) ซึ่งจะทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาออกเป็นตารางหรือ "ปริมาตรควบคุม" (Control Volume) เล็ก ๆ จำนวนมากโดยตลอดทั้งบริเวณของปัญหาที่กำลังพิจารณาตามรูปที่ 3.1 มีอักษรตัวพิมพ์ใหญ่ได้แก่ E, W, N, S และ P ใช้ระบุตำแหน่งตรงกลางของปริมาตรควบคุม ในขณะที่อักษรตัวพิมพ์เล็กได้แก่ *e, w, n* และ *s* ใช้ระบุตำแหน่งตรงรอยต่อระหว่างปริมาตรควบคุมที่ติดกัน (ดูรูปที่ 3.1)



รูปที่ 3.1 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาออกเป็นปริมาตรควบคุมขนาดเล็ก

ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดจะทำการแปลงสมการอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตโดยการหาค่าปริพันธ์ (Integration) ของสมการการถ่ายโอนในแต่ละปริมาตรควบคุมจากสมการ (3.22) หากพิจารณาในกรณี 2 มิติสามารถกระจายได้ดังนี้

$$\underset{(1)}{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)} + \underset{(2)}{\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)} = \underset{(3)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)} + \underset{(4)}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)} + \underset{(5)}{S^\phi} \qquad (3.23)$$

จากนั้นทำการหาปริพันธ์ของสมการ (3.23) ทุกปริมาตรควบคุม ในกรณีนี้จะทำการหาค่าปริพันธ์ของปริมาตรควบคุมที่จุด P ตามรูปที่ 3.1 ได้ดังต่อไปนี้

พจน์ที่ (1):

$$\left.\begin{aligned}\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)dxdy &= \left[(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w\right](y_n-y_s)\\ &= F_e\phi_e-F_w\phi_w\end{aligned}\right\} \tag{3.24a}$$

พจน์ที่ (2):

$$\left.\begin{aligned}\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)dxdy &= \left[(\rho v\phi)_n-(\rho v\phi)_s\right](x_e-x_w)\\ &= F_n\phi_n-F_s\phi_s\end{aligned}\right\} \tag{3.24b}$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned}F_e &= \rho u_e(y_n-y_s)\\ F_w &= \rho u_w(y_n-y_s)\\ F_n &= \rho v_n(x_e-x_w)\\ F_s &= \rho v_s(x_e-x_s)\end{aligned}\right\} \tag{3.24c}$$

พจน์ที่ (3):

$$\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy = \left[\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right](y_n-y_s) \tag{3.24d}$$

พจน์ที่ (4):

$$\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy = \left[\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n-\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right](x_e-x_w) \tag{3.24e}$$

พจน์ที่ (5):

$$\int_{w}^{e}\int_{s}^{n} S dx dy = \overline{S}\left(x_e - x_w\right)\left(y_n - y_s\right) \tag{3.24f}$$

พจน์ที่ (3) และ (4) ซึ่งเป็นพจน์การแพร่ (Diffusion Term) จะมีพฤติกรรมการกระจายตัวที่ไม่ขึ้นกับทิศทางเพราะฉะนั้นจึงสามารถหาค่าได้ด้วยการประมาณค่าแบบผลต่างกลาง (Central Differencing Approximation) ตัวอย่างเช่นสำหรับพจน์ที่ (3)

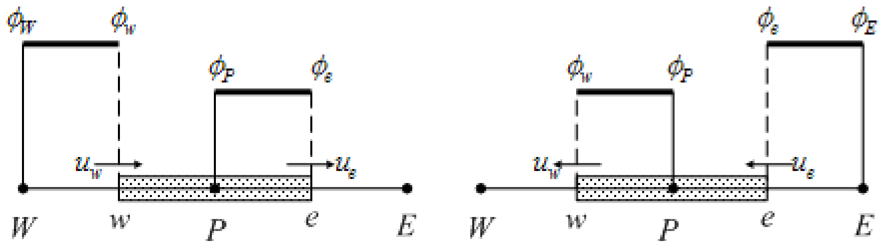
$$\left[\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]\left(y_n - y_s\right) = D_E\left(\phi_E - \phi_P\right) + D_W\left(\phi_P - \phi_W\right) \tag{3.25a}$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned}
D_E &= \Gamma_e \frac{\left(y_n - y_s\right)}{\left(x_E - x_W\right)} \\
\Gamma_e &= f_e\left(\Gamma_E - \Gamma_P\right) + \Gamma_P \\
f_e &= \frac{\left(x_e - x_P\right)}{\left(x_E - x_P\right)} \\
D_W &= \Gamma_w \frac{\left(y_n - y_s\right)}{\left(x_P - x_W\right)} \\
\Gamma_w &= f_w\left(\Gamma_P - \Gamma_W\right) + \Gamma_W \\
f_w &= \frac{\left(x_w - x_W\right)}{\left(x_P - x_W\right)}
\end{aligned}\right\} \tag{3.25b}$$

สำหรับพจน์ที่ (4) สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันตามสมการ (3.25) ในส่วนของพจน์ที่ (1) และ (2) นั้นเป็นการหาค่าที่รอยต่อระหว่างปริมาตรควบคุม การประมาณค่าโดยใช้การประมาณค่าในช่วง (Interpolation) นั้นสามารถกระทำได้แต่อาจจะใช้ไม่ได้กับทุกกรณีเนื่องจากพจน์ดังกล่าวเป็นพจน์การพา (Convection Term) ซึ่งมีพฤติกรรมที่ขึ้นกับทิศทางของการไหลดังนั้นการประมาณค่าที่ไม่เหมาะสมอาจจะมีผลกระทบต่อเสถียรภาพของการคำนวณและความถูกต้องของผลเฉลยได้ เพราะฉะนั้นจึงมีวิธีการประมาณค่าแบบต่าง ๆ อยู่หลายวิธีด้วยกันโดยคำนึงเสถียรภาพของ

การคำนวณและความถูกต้องของผลเฉลย วิธีการที่นำมาใช้ซึ่งจะอภิปรายในที่นี้ได้แก่วิธีการประมาณค่าแบบ UPWIND และ QUICK โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.2 แสดงการประมาณค่าพจน์การพาแบบ FOU เมื่อ (a) ทิศทางการไหลไปทางขวา (b) ทิศทางการไหลไปทางซ้าย

3.3.1 การประมาณค่าแบบ UPWIND

การประมาณค่าด้วยวิธีนี้ค่าที่อยู่ตรงรอยต่อระหว่างปริมาตรควบคุมที่ติดกันจะเท่ากับค่าที่อยู่ตรงกลางปริมาตรควบคุมที่อยู่เหนือทิศทางการไหลกล่าวคือ กรณีที่ทิศทางการไหลไปทางด้านซ้ายจะได้ว่า $\phi_w=\phi_W$ และ $\phi_e=\phi_P$ ส่วนกรณีที่ทิศทางการไหลไปทางด้านขวาจะได้ว่า $\phi_w=\phi_P$ และ $\phi_e=\phi_E$ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 จากสมการ (3.23) เมื่อทำการประมาณค่าพจน์การพาด้วยวิธี UPWIND และพจน์การแพร่ด้วยวิธีผลต่างค่ากลางแล้วจากนั้นจัดรูปใหม่จะได้สมการพีชคณิตที่เขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานตามระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S^{\phi} \tag{3.26}$$

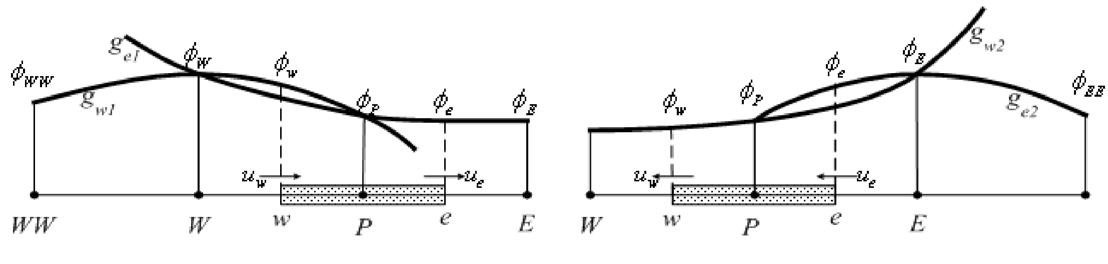
โดยที่

$$\left.\begin{aligned}
a_E &= D_E + \|0, -F_e\| \\
a_W &= D_W + \|0, F_w\| \\
a_N &= D_N + \|0, -F_n\| \\
a_S &= D_S + \|0, F_s\| \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S \\
S^{\phi} &= \overline{S^{\phi}}(x_e - x_w)(y_n - y_s)
\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

เมื่อ $F_e=\rho u_e$, $F_w=\rho u_w$, $F_n=\rho v_n$, และ $F_s=\rho v_s$ และ $\|a,b\|$ แทนค่าที่มากกว่าระหว่าง a และ b ซึ่งการประมาณค่าด้วยวิธีนี้ทำให้การคำนวณมีเสถียรภาพสูง ผลการคำนวณที่ได้อยู่ในขอบเขตที่ควรจะเป็น แต่ให้ค่าความถูกต้องของผลการคำนวณต่ำ วิธีแก้ไขคือการแบ่งให้ปริมาตรควบคุมมีขนาดเล็กมากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ดังนั้นจึงกลายเป็นข้อเสียของการประมาณค่าด้วยวิธีแบบ UPWIND ที่ต้องใช้จุดหรือปริมาตรควบคุมเป็นจำนวนมากในการคำนวณเพื่อให้ได้มาซึ่งความถูกต้องของผลการคำนวณในระดับที่ยอมรับได้ แต่ผลเสียที่ตามมาก็คือความล่าช้าของอัตราการลู่เข้าของผลเฉลย ซึ่งวิธีแก้ไขคือการนำระเบียบวิธีมัลติกริดมาใช้เพื่อเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยโดยจะอภิปรายในรายละเอียดต่อไป

3.3.2 การประมาณค่าแบบ QUICK

สำหรับการประมาณค่าด้วยวิธีนี้จะใช้ฟังก์ชันพีชคณิตกำลังสองลากผ่านจุดต่อ 3 จุด ได้แก่จุดที่อยู่เหนือกระแส 2 จุด และใต้กระแส 1 จุดตามรูปที่ 3.3(a) และ 3.3(b) เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาจะแสดงการประมาณค่าเฉพาะในกรณีหนึ่งมิติเท่านั้น สำหรับกรณีสองและสามมิติก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกันโดยสามารถศึกษาในรายละเอียดได้จาก Peric (1985) และ Versteeg และ Malalaseker (1995)



รูปที่ 3.3 แสดงการประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK เมื่อ (a) ทิศทางการไหลไปทางขวา (b) ทิศทางการไหลไปทางซ้าย

ในกรณีที่ทิศทางการไหลไปทางขวามือ (จากรูป 3.3[a]) จะมีเส้นโค้งแบบพีชคณิตกำลังสอง (Quadratic Curve) g_{e2} และ g_{w1} ลากผ่านจุดสามจุดสำหรับใช้ประมาณค่าแบบพีชคณิตกำลังสองที่ตำแหน่ง e และ w ตามลำดับ และในกรณีที่ทิศทางการไหลไปทางด้านซ้ายมือ (จากรูป 3.3[b]) จะมีเส้นโค้ง g_{e2} และ g_{w2} ใช้สำหรับประมาณค่าแบบพีชคณิตกำลังสองที่ตำแหน่ง e และ w ตามลำดับด้วยเช่นเดียวกัน จากนั้นทำการประมาณค่าแบบพีชคณิตกำลังสองที่ตำแหน่ง e และ w โดยคำนึงถึงทิศทางการไหล

แล้วสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + g_{e1}^1(\phi_E - \phi_P) + g_{e1}^2(\phi_P - \phi_W) & ;\ \rho u_e > 0 \\ \phi_E + g_{e2}^1(\phi_P - \phi_E) + g_{e2}^2(\phi_E - \phi_{EE}) & ;\ \rho u_e < 0 \end{cases} \tag{3.28a}$$

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W + g_{w1}^1(\phi_P - \phi_W) + g_{w1}^2(\phi_W - \phi_{WW}) & ;\ \rho u_w > 0 \\ \phi_P + g_{w2}^1(\phi_W - \phi_P) + g_{w2}^2(\phi_P - \phi_E) & ;\ \rho u_w < 0 \end{cases} \tag{3.28b}$$

เมื่อ

$$\left.\begin{aligned} g_{e1}^1 &= \frac{(2-f_w)(f_e)^2}{1+f_e-f_w} \\ g_{e1}^2 &= \frac{(1-f_e)(1-f_w)^2}{1+f_e-f_w} \\ g_{e2}^1 &= \frac{(1+f_w)(1-f_e)^2}{1+f_{ee}-f_e} \\ g_{e2}^2 &= \frac{(f_{ee})^2 f_e}{1+f_{ee}-f_e} \\ g_{w1}^1 &= \frac{(2-f_{ww})(f_w)^2}{1+f_w-f_{ww}} \\ g_{w1}^2 &= \frac{(1-f_w)(1-f_{ww})^2}{1+f_w-f_{ww}} \\ g_{w2}^1 &= \frac{(1-f_w)^2(1+f_e)}{1+f_e-f_w} \\ g_{w2}^2 &= \frac{(f_e)^2 f_w}{1-f_e-f_w} \end{aligned}\right\} \tag{3.28c}$$

เมื่อนำความสัมพันธ์การประมาณค่าแบบ QUICK ที่ตำแหน่ง *e, w, n* และ *s* แทนลงในพจน์ที่ (1) และ (2) ของสมการที่ (3.23) และจัดพจน์ให้คล้ายคลึงกับพจน์ของการประมาณค่าแบบ UPWIND และย้ายพจน์ที่ไม่เกี่ยวข้องไปไว้ด้านขวาของสมการแล้วจะได้

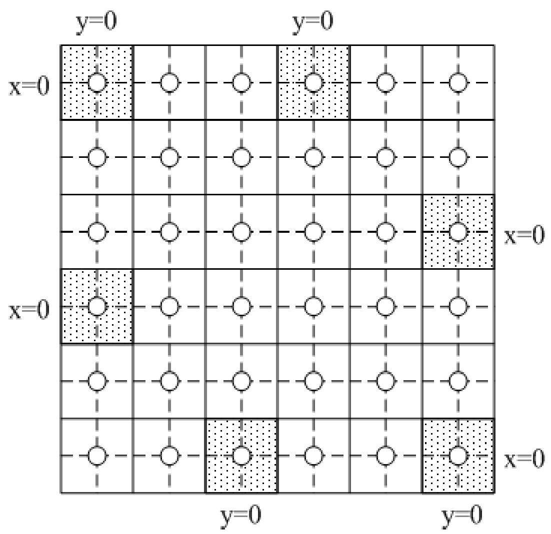
$$a_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S^\phi + S^C \tag{3.29}$$

ซึ่ง S^C คือพจน์ที่เกิดจากการประมาณค่าแบบ QUICK และแสดงในรูปสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} S^C = &-[g_{e1}^1(\phi_E-\phi_P)+g_{e1}^2(\phi_P-\phi_W)]\|F_e,0\|+[g_{e2}^1(\phi_P-\phi_E)+g_{e2}^2(\phi_E-\phi_{EE})]\|-F_e,0\| \\ &+[g_{w1}^1(\phi_P-\phi_W)+g_{w1}^2(\phi_W-\phi_{WW})]\|F_w,0\|-[g_{w2}^1(\phi_W-\phi_P)+g_{w2}^2(\phi_P-\phi_E)]\|-F_w,0\| \\ &-[g_{n1}^1(\phi_N-\phi_P)+g_{n1}^2(\phi_P-\phi_S)]\|F_n,0\|+[g_{n2}^1(\phi_P-\phi_N)+g_{n2}^2(\phi_N-\phi_{NN})]\|-F_n,0\| \\ &+[g_{s1}^1(\phi_P-\phi_S)+g_{s1}^2(\phi_S-\phi_{SS})]\|F_s,0\|-[g_{s2}^1(\phi_S-\phi_P)+g_{s2}^2(\phi_P-\phi_N)]\|-F_s,0\| \end{aligned} \quad (3.30)$$

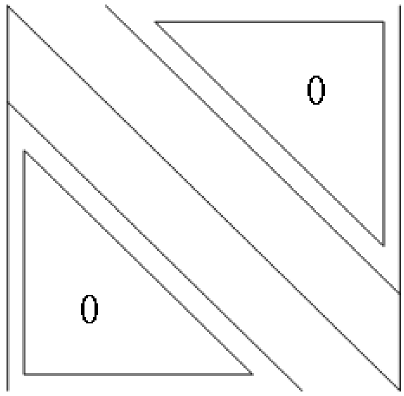
แต่อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการประมาณค่าแบบ QUICK นี้ต้องใช้จุดด้านเหนือทิศทางลมจำนวน 2 จุด ซึ่งปัญหาจะเกิดขึ้นเมื่อตำแหน่งที่ต้องการประมาณค่าอยู่ชิดกับผนังหรือขอบของโดเมน การใช้ค่าที่อยู่นอกโดเมนออกไปโดยใช้การประมาณค่านอกช่วงนั้นอาจทำให้ได้ผลเฉลยที่ไม่ถูกต้อง วิธีการที่เหมาะสมกว่าคือการเลือกใช้การประมาณค่าแบบ UPWIND สำหรับการประมาณค่าของตำแหน่งที่ชิดกับขอบของโดเมน ดังนั้นสมการที่ (3.30) จึงแก้ไขใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S^C = &-[g_{e1}^1(\phi_E-\phi_P)+g_{e1}^2(\phi_P-\phi_W)]\|xF_e,0\|+[g_{e2}^1(\phi_P-\phi_E)+g_{e2}^2(\phi_E-\phi_{EE})]\|-xF_e,0\| \\ &+[g_{w1}^1(\phi_P-\phi_W)+g_{w1}^2(\phi_W-\phi_{WW})]\|xF_w,0\|-[g_{w2}^1(\phi_W-\phi_P)+g_{w2}^2(\phi_P-\phi_E)]\|-xF_w,0\| \\ &-[g_{n1}^1(\phi_N-\phi_P)+g_{n1}^2(\phi_P-\phi_S)]\|yF_n,0\|+[g_{n2}^1(\phi_P-\phi_N)+g_{n2}^2(\phi_N-\phi_{NN})]\|-yF_n,0\| \\ &+[g_{s1}^1(\phi_P-\phi_S)+g_{s1}^2(\phi_S-\phi_{SS})]\|yF_s,0\|-[g_{s2}^1(\phi_S-\phi_P)+g_{s2}^2(\phi_P-\phi_N)]\|-yF_s,0\| \end{aligned} \quad (3.31)$$



รูปที่ 3.4 แสดงตัวอย่างปริมาตรควบคุมที่ไม่ต้องใช้การประมาณค่าแบบ QUICK เมื่อ x=0 และ y=0 ตามสมการ (3.31)

ซึ่ง x มีค่าเป็น 0 สำหรับปริมาตรควบคุมที่อยู่ชิดขอบโดเมนในแนวแกน x และมีค่าเป็น 1 สำหรับปริมาตรควบคุมที่เหลือ และ y จะมีค่าเป็น 0 สำหรับปริมาตรควบคุมที่อยู่ชิดขอบโดเมนในแนวแกน y และมีค่าเป็น 1 สำหรับปริมาตรควบคุมทั่วไปตามรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.5 แสดงเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ซึ่งสมาชิกส่วนใหญ่มีค่าเป็นศูนย์

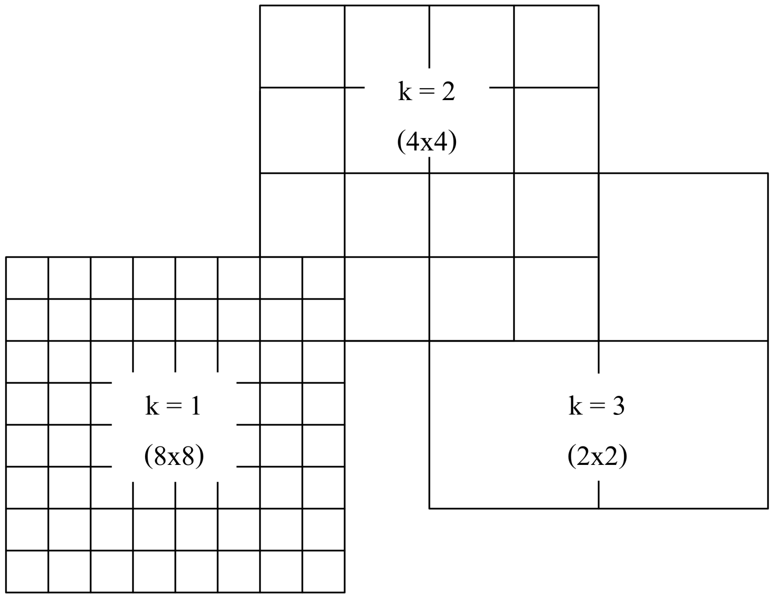
3.3.3 การคำนวณระบบสมการพีชคณิต (Calculation of Algebraic Equation System)

สมการแม่บทที่อธิบายพฤติกรรมการไหลและการถ่ายเทความร้อนได้แก่ สมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม สมการอนุรักษ์พลังงาน และสมการแบบจำลองความปั่นป่วนซึ่งทั้งหมดอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยจึงมีความจำเป็นที่จะต้องแปลงให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตซึ่งสามารถทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ โดยกระบวนการดังกล่าวได้ถูกแสดงในหัวข้อที่ผ่านมาทำให้สมการทั้งหมดเมื่อแปลงให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดแล้วสามารถเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานของระเบียบวิธีดังกล่าวได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S^\phi \qquad (3.32)$$

ซึ่ง ϕ และ S^ϕ จะแตกต่างกันไปในแต่ละสมการ (ดูภาคผนวก ก) สำหรับการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหลสัมประสิทธิ์ส่วนใหญ่จะมีค่าเป็นศูนย์และเมื่อนำมาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะพบว่าสมาชิกส่วนใหญ่จะเป็นศูนย์เกือบทั้งหมดยกเว้นสามแถวหลักในแนวทะแยงมุมตามรูปที่ 3.5 เพราะฉะนั้นการแก้สมการด้วยวิธีการแก้โดยตรงจึงไม่เหมาะสมเนื่องจากจะสิ้นเปลืองหน่วยความจำโดยไม่จำเป็นเพราะว่าการแก้ด้วยวิธีโดยตรงจะต้องทำการเก็บค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดไว้เพื่อที่จะทำการหาคำตอบพร้อมกันในคราวเดียว วิธีที่เหมาะสมกว่าก็คือการแก้ด้วยวิธีทำซ้ำ (Iterative Methods)

ซึ่งการเก็บค่าสัมประสิทธิ์จะเก็บเฉพาะจุดที่ทำการคำนวณเท่านั้น ในที่นี้จะแก้สมการพีชคณิตตามสมการ (3.32) ด้วยวิธี TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) แบบสลับแถวไปมาระหว่างแนวนอนและแนวตั้งรายละเอียดดูได้จากภาคผนวก ข



รูปที่ 3.6 แสดงตัวอย่างกริดที่ระดับต่าง ๆ โดยกริดที่ละเอียดที่สุดมีขนาด 8x8 ปริมาตรควบคุม

อย่างไรก็ตามในมุมมองทางคณิตศาสตร์การแก้ระบบสมการพีชคณิตสามารถที่จะแก้แต่ละสมการแยกออกจากกันได้และนำค่าที่ได้ไปเป็นค่าเริ่มต้นให้กับสมการต่อไป แต่ในแง่ศาสตร์ของการไหลจะต้องคำนึงถึงกฎทางฟิสิกส์อันเป็นที่มาของแต่ละสมการด้วย กล่าวคือสมการแต่ละสมการจะมีความเกี่ยวพันกันทางฟิสิกส์อย่างลึกซึ้ง ซึ่งการแก้แต่ละสมการอย่างเป็นอิสระต่อกันอาจทำให้ผลการคำนวณที่ได้ไม่เป็นไปตามหลักการทางธรรมชาติ จากหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าสมการหลักที่ควบคุมพฤติกรรมการไหลและการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงาน ในกรณีที่การไหลเป็นการไหลแบบไม่อัดตัวความหนาแน่นจะคงที่เป็นผลให้ความดันไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงพลังงานโดยตรง ดังนั้นสมการอนุรักษ์พลังงานจึงสามารถแยกออกมาแก้อย่างอิสระได้ สำหรับสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั้น พจน์ความดันไปปรากฏในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมแต่ไม่ปรากฏในสมการอนุรักษ์มวล ซึ่งความดันมีบทบาทสำคัญในการทำให้เกิดการไหล แต่ในขณะเดียวกันการไหลจะต้องสอดคล้องกับกฎทรงมวลด้วย ดังนั้นสมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัมจึงต้องถูกแก้ควบคู่กันไปโดยในมุมมองทางคณิตศาสตร์ปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวน

สมการนั่นคือ มีสมการสำหรับความเร็วทุกองค์ประกอบแต่ไม่มีสมการสำหรับตัวแปรความดัน เพราะฉะนั้นจึงจำเป็นต้องมีกรรมวิธีในการสร้างสมการสำหรับความดันและเชื่องโยงความเร็วและความดันให้สอดคล้องต่อกันและเป็นไปตามกฎทรงมวล กรรมวิธีดังกล่าวมีอยู่หลายวิธีด้วยกันโดยวิธีที่เลือกใช้ในที่นี้ได้แก่ "ขั้นตอนวิธี SIMPLE" (SIMPLE Algorithm) (ดูภาคผนวก ค)

3.4 ขั้นตอนวิธีมัลติกริด (Multigrid Algorithm)

ขั้นตอนวิธีมัลติกริดจะทำการคำนวณบนกริดหลายชุดที่มีจำนวนของปริมาตรควบคุม (ความละเอียด [Grid Density]) หรือขนาดของปริมาตรควบคุมที่แตกต่างกันโดยจำนวนของปริมาตรควบคุมบนกริดแต่ละชุดจะมีความสัมพันธ์กันเป็นลำดับขั้น ซึ่งจำนวนของปริมาตรควบคุมบนกริดชุดใด ๆ ที่ประกอบกันขึ้นเป็นหนึ่งปริมาตรควบคุมบนกริดชุดถัดไปจะมีความสัมพันธ์กันอย่างไรนั้นสามารถกำหนดเป็นค่าใด ๆ ได้ตามความต้องการและความเหมาะสม ในกรณีนี้จะพิจารณาที่ 2 มิติและพิจารณาเฉพาะจำนวณปริมาตรควบคุมบนกริดชุดที่กำลังพิจารณาจำนวน 4 เซลล์ประกอบกันขึ้นเป็นปริมาตรควบคุม 1 เซลล์ของกริดชุดที่ติดกันตามรูปที่ 3.6 ถ้าให้กริดชุดที่กำลังพิจารณาเป็นกริดชุดละเอียด (Fine Grid) เพราะฉะนั้นจะได้ว่ากริดชุดที่ติดกันคือกริดชุดหยาบ (Coarse Grid) จึงเป็นผลให้กริดชุดละเอียดมีจำนวนปริมาตรควบคุมเป็นสองเท่าในแนวแกนใด ๆ ของกริดชุดหยาบที่ติดกัน โดยที่จำนวนกริดในแนวแกนใด ๆ ของแต่ละชุดหรือแต่ละระดับสามารถหาได้จากความสัมพันธ์ $n = N/2^{(k-1)}$ เมื่อ n เป็นจำนวนของกริดในแนวแกนใด ๆ ของกริดชุด k และ N เป็นจำนวนของกริดในแนวแกนใด ๆ ของกริดชุดที่ละเอียดที่สุด (Finest Grid) และ k=1, 2, 3, 4, …, L เมื่อ L เป็นจำนวนชุดของกริดที่กำหนด ดังนั้นที่ k=L จะเป็นกริดชุดหยาบที่สุด (Coarsest Grid)

เมื่อทำการพิจารณาที่กริดชุด k ใด ๆ แล้วสามารถเขียนสมการผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) ของตัวแปร ϕ^k ใด ๆ ที่อธิบายพฤติกรรมที่กำลังพิจารณาบนกริดชุดดังกล่าวให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตได้เป็น

$$A^k \phi^k = S^k \tag{3.33}$$

การแก้สมการ (3.33) ด้วยวิธีโดยตรง (Direct Methods) เพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง ϕ^k นั้นเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมกับปัญหาที่มีพฤติกรรมไม่เชิงเส้น (Nonlinear Behaviour) วิธีที่ใช้กันทั่วไปได้แก่วิธีการกระทำซ้ำ (Iterative Methods) เพราะฉะนั้นที่รอบการกระทำซ้ำใด ๆ ผลการคำนวณที่ได้จากการแก้สมการ (3.33) จึงเป็นผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate Solution) นั่นคือหากสมการ (3.33) เป็น

สมการของผลเฉลยโดยประมาณซึ่งค่ายังไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่บังคับโดยพฤติกรรมนั้น ๆ จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ประกอบไปด้วยเศษตกค้าง (Residual) ดังสมการ

$$\tilde{A}^k \tilde{\phi}^k = \tilde{S}^k - R^k \tag{3.34}$$

กำหนดให้สัญลักษณ์ '~' แทนผลเฉลยโดยประมาณและค่าที่หาจากผลเฉลยโดยประมาณ อย่างไรก็ตามเป็นที่ทราบกันดีว่าการแก้สมการด้วยวิธีการกระทำซ้ำนั้นการลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงเป็นไปด้วยความล่าช้าเนื่องจากมีประสิทธิภาพที่ไม่ดีพอต่อการกำจัดค่าเศษตกค้างเมื่อแยกด้วยอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series) แล้วจะประกอบไปด้วยค่าองค์ประกอบของเศษตกค้างที่ความยาวคลื่นต่าง ๆ กันเป็นจำนวนมาก ซึ่งวิธีการกระทำซ้ำโดยทั่วไปนั้นจะกำจัดค่าองค์ประกอบของเศษตกค้างได้ดีเฉพาะค่าองค์ประกอบเศษตกค้างที่มีค่าความยาวคลื่นเทียบเคียงกันได้กับขนาดของจุดต่อหรือขนาดของปริมาตรควบคุม จึงนำไปสู่กระบวนการคำนวณบนกริดหลายชุดที่มีขนาดของปริมาตรควบคุมแตกต่างกันเพื่อให้สามารถกำจัดค่าองค์ประกอบของเศษตกค้างได้หลายช่วงความยาวคลื่น ซึ่งเมื่อทำการพิจารณาที่กริดชุดละเอียดที่สุดโดยถ้าผลเฉลยแม่นตรงและผลเฉลยโดยประมาณมีความสัมพันธ์ต่อกันเป็น $\phi^k = \tilde{\phi}^k + e^k$ เมื่อ e^k เป็นค่าการปรับแก้ (Correction) หากรู้ค่าการปรับแก้ก็สามารถหาค่าผลเฉลยแม่นตรงได้ เมื่อแทนความสัมพันธ์ดังกล่าวลงในสมการ (3.33) และลบด้วยสมการ (3.34) จะได้

$$A^k \left(\tilde{\phi}^k + e^k \right) - \tilde{A}^k \tilde{\phi}^k = S^k - \tilde{S}^k + R^k \tag{3.35}$$

จากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้นนั้นการหาค่าปรับแก้ที่กริดชุดละเอียดเพียงชุดเดียวนั้นเป็นไปด้วยความล่าช้า เพราะฉะนั้นจะทำการหาค่าการปรับแก้ที่กริดชุดที่หยาบขึ้นคือ กริดชุด k+1 เพื่อที่จะนำมาปรับแก้ค่าการปรับแก้ที่กริดชุด k ซึ่งกระทำโดยการส่งถ่ายค่าผลเฉลยโดยประมาณจากกริดชุด k ไปยังกริดชุด k+1 ซึ่งจะได้สมการสำหรับกริดชุด k+1 ดังนี้

$$\tilde{A}^{k+1} \left(I_k^{k+1} \tilde{\phi}^k + e^{k+1} \right) - \hat{A}^{k+1} \tilde{\phi}^{k+1} = \tilde{S}^{k+1} - \hat{S}^{k+1} + I_k^{k+1} R^k \tag{3.36}$$

โดยเครื่องหมาย '^' ใช้ระบุว่าพจน์ดังกล่าวคำนวณจากค่าของผลเฉลยที่ถูกส่งถ่ายจากกริดชุดละเอียดลงมายังกริดชุดหยาบและตัวดำเนินการ (Operator) $I_a^b \phi^a$ แสดงถึงทิศทางการส่งถ่ายผลเฉลย

ϕ^a จากกริดชุด a ไปยังกริดชุด b ซึ่งตัวดำเนินการนี้จะใช้ในความหมายและทิศทางเดียวกันทั้งการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดและจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบ จากสมการ (3.36) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\tilde{A}^{k+1}\left(\tilde{\phi}^{k+1}\right) = \hat{C}^{k+1} + \tilde{S}^{k+1} \tag{3.37}$$

โดยที่ $\tilde{\phi}^{k+1} = I_k^{k+1}\tilde{\phi}^k + e^{k+1}$ และ $C^{k+1} = A^{k+1}(I_k^{k+1}\tilde{\phi}^k) - S^{k+1} + I_k^{k+1}R^k$ ซึ่งพจน์ C^{k+1} จะคงที่ตลอดการคำนวณ สำหรับพจน์ S^{k+1} และ $\tilde{S}^{k+1}$ นั้นจะมีค่าเท่ากันในรอบแรกของการคำนวณและจะมีค่าต่างกันในรอบการคำนวณถัดไปซึ่งค่าผลต่างนี้เป็นส่วนหนึ่งในกลไกที่ทำให้ค่าของผลเฉลยในกริดชุดนี้มีการเปลี่ยนแปลง หลังจากที่ทำการคำนวณหาผลเฉลยบนกริดหยาบชุด k+1 ด้วยจำนวนรอบการกระทำซ้ำที่กำหนดแล้วก็ทำการส่งถ่ายผลเฉลยไปยังกริดชุดถัดไปคือกริดชุด k+2 ในกรณีนี้จะให้เป็นกริดชุดที่หยาบที่สุด ซึ่งสามารถเขียนสมการของกริดชุด k+2 ได้ดังนี้

$$\tilde{A}^{k+2}\left(I_{k+1}^{k+2}\tilde{\phi}^{k+1} + e^{k+2}\right) - \hat{A}^{k+2}\tilde{\phi}^{k+2} = \tilde{S}^{k+2} - \hat{S}^{k+2} + I_{k+1}^{k+2}R^{k+1} \tag{3.38}$$

ซึ่งสมการ (3.38) สามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างย่อและมีความคล้ายคลึงกันระหว่างพจน์ต่าง ๆ ตามสมการ (3.37) ได้โดยการเปลี่ยนดัชนีตัวห้อยและตัวยกจาก k เป็น k+1 และ k+1 เป็น k+2 ตามลำดับ จากนั้นทำการคำนวณด้วยวิธีการเดิมบนกริดชุด k+2 และหาค่าการปรับแก้ที่กริดชุดนี้ตามสมการ

$$e^{k+2} = \tilde{\phi}_{New}^{k+2} - \tilde{\phi}_{Old}^{k+2} = \tilde{\phi}_{New}^{k+2} - I_{k+1}^{k+2}\tilde{\phi}^{k+1} \tag{3.39}$$

ซึ่ง $\tilde{\phi}_{\mathrm{New}}^{k+2}$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณสมการ (3.38) ด้วยรอบการกระทำซ้ำที่กำหนด จากนั้นส่งถ่ายค่าการปรับแก้ตามสมการ (3.39) ไปปรับแก้ผลเฉลยที่กริดชุด k+1 จะได้

$$\tilde{\phi}_{Corrected}^{k+1} = I_k^{k+1}\phi^k + I_{k+2}^{k+1}e^{k+2} \tag{3.40}$$

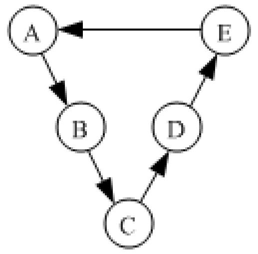
เมื่อปรับแก้ผลเฉลยที่กริดชุด k+1 ตามสมการ (3.40) แล้วจากนั้นทำการคำนวณที่กริดชุด k+1 ตามสมการ (3.36) หรือ (3.37) อีกครั้งด้วยค่าเริ่มต้น $\tilde{\phi}_{\mathrm{Corrected}}^{k+1}$ เสร็จแล้วทำการหาค่าการปรับแก้ดังนี้

$$e^{k+1} = \tilde{\phi}^{k+1}_{New} - \tilde{\phi}^{k+1}_{Old} = \tilde{\phi}^{k+1}_{New} - I^{k+1}_{k}\tilde{\phi}^{k} \tag{3.41}$$

ซึ่ง $\tilde{\phi}^{k+1}_{New}$ เป็นค่าล่าสุดบนกริดชุด k+1 ที่เกิดจากการคำนวณอีกครั้งด้วยค่าเริ่มต้น $\tilde{\phi}^{k+1}_{Corrected}$ จากนั้นส่งถ่ายค่าการปรับแก้ e^{k+1} ไปยังกริดชุด k และทำการปรับแก้ผลเฉลยดังนี้

$$\tilde{\phi}^{k}_{Corrected} = \tilde{\phi}^{k}_{Old} + I^{k}_{k+1}e^{k+1} \tag{3.42}$$

ซึ่งถือเป็นการเสร็จสิ้นกระบวนการการคำนวณในหนึ่งรอบการคำนวณของขั้นตอนมัลติกริด รูปแบบการคำนวณจะมีลักษณะคล้ายอักษรตัว “V” ดังรูปที่ 3.7 เพราะฉะนั้นจึงเรียกหนึ่งรอบของการคำนวณด้วยมัลติกริดในลักษณะนี้ว่า “วัฏจักรวี” (V Cycle)



รูปที่ 3.7 แสดงขั้นตอนการคำนวณมัลติกริดด้วยวัฏจักร “V”

จากรูปที่ 3.7 สัญลักษณ์วงกลมแสดงการคำนวณสมการพีชคณิตด้วยการกระทำซ้ำโดยวิธีใดวิธีหนึ่งด้วยจำนวนรอบที่กำหนดเป็นตัวอักษร A, B, C, D และ E ที่ปรากฏอยู่ภายในวงกลม สำหรับจำนวนรอบที่มักพบบ่อยในงานวิจัยที่ผ่านมาจะอยู่ในช่วง 2-4 รอบการคำนวณและการคำนวณจะไปเน้นหนักที่การคำนวณบนกริดชุดที่หยาบที่สุดเนื่องจากว่ามีจำนวนกริดน้อยที่สุดจึงสามารถคำนวณด้วยจำนวนรอบสูง ๆ ได้โดยไม่กระทบต่อเวลาที่ใช้โดยรวมเท่าใดนัก แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นจำนวนรอบที่เหมาะสมจะเปลี่ยนแปลงไปตามปัญหาต่าง ๆ ที่ทำการคำนวณ เพราะฉะนั้นในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะรอบการคำนวณที่ A=B=C=D=E=3 รอบการกระทำซ้ำเท่านั้น

สำหรับการส่งถ่ายผลเฉลยไปมาระหว่างกริดชุดที่ติดกันนั้นที่พบมากในงานวิจัยที่ผ่านมาจะมีอยู่ 2 รูปแบบด้วยกันซึ่งจะแตกต่างกันที่การส่งถ่ายค่าตัวแปรจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบ *โดยรูปแบบแรก*นั้นการส่งถ่ายจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบจะกระทำเฉพาะค่าเศษตกค้างของค่าผลเฉลยโดยประมาณเท่านั้นซึ่งเรียกรูปแบบนี้ว่า “Correction Scheme” หรือเรียกโดยย่อว่า “CS”

โดยรูปแบบนี้จะมีประสิทธิภาพสูงสำหรับปัญหาเชิงเส้นเนื่องจากพฤติกรรมบนกริดชุดต่าง ๆ กันจะเหมือนกัน เพราะฉะนั้นที่กริดหยาบจึงไม่จำเป็นต้องใช้ค่าผลเฉลยจากกริดชุดละเอียด สำหรับ *รูปแบบที่สอง*นั้นจะทำการส่งถ่ายทั้งค่าผลเฉลยโดยประมาณและค่าเศษตกค้าง ซึ่งจะเรียกวิธีนี้ว่า "Full Approximation Scheme" หรือ "FAS" รูปแบบนี้เหมาะสมสำหรับปัญหาไม่เชิงเส้น (แต่ก็สามารถใช้ได้กับปัญหาเชิงเส้น) เนื่องจากพฤติกรรมของตัวแปรอิสระจะแตกต่างกันไปเมื่อถูกแสดงบนกริดชุดที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามวิธีการในการส่งถ่ายนั้นยังแตกต่างกันไปตามแต่ละตัวแปร ซึ่งการส่งถ่ายจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบจะประกอบไปด้วยการส่งถ่ายค่าเศษตกค้าง ค่าผลเฉลย และค่าฟลักซ์ของมวล (Mass Flux) โดยที่ค่าเศษตกค้างจะส่งถ่ายโดยการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยพื้นที่ปริมาตรควบคุม (Area-Weighted Average) ตามตัวอย่างในรูปที่ 3.8 โดยพิจารณาปริมาตรควบคุมกริดชุดหยาบที่ถูกแรเงาซึ่งประกอบไปด้วยปริมาตรควบคุมของกริดชุดละเอียดจำนวน 4 เซลล์โดยผลของการส่งถ่ายจะแสดงดังสมการ (3.43) ในส่วนของค่าผลเฉลยจะส่งถ่ายโดยการประมาณค่าเชิงเส้นในช่วงสองทิศทาง (Bi-Linear Interpolation) ตามสมการ (3.44) ซึ่งจะสาธิตการหาค่าผลเฉลย ϕ_A ของกริดชุดหยาบดังแสดงในรูปที่ 3.8 และสุดท้ายสำหรับการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดชุดละเอียดไปยังกริดชุดหยาบได้แก่การส่งถ่ายค่าฟลักซ์มวลซึ่งการส่งถ่ายจะแตกต่างอย่างสิ้นเชิงจากสองปริมาณแรกที่พิจารณาก่อนหน้านี้โดยจะเป็นการส่งถ่ายที่อ้างอิงจากหลักการประมาณค่าทางคณิตศาสตร์แต่สำหรับฟลักซ์มวลแล้วจะคำนึงถึงหลักทางฟิสิกซ์นั่นคือจะต้องมีความคล้องจองกันระหว่างฟลักซ์มวลของกริดชุดหยาบและฟลักซ์มวลของกริดชุดละเอียด จากรูป 3.8 การหาค่าฟลักซ์มวล F ของกริดชุดหยาบที่ด้าน e ของปริมาตรควบคุมสามารถหาได้โดยการรวมค่าฟลักซ์มวล f_a และ f_b ที่ด้าน e ของปริมาตรควบคุมของกริดชุดละเอียดที่ประกอบกันขึ้นเป็นกริดชุดหยาบตามความสัมพันธ์ $F=f_a+f_b$ (พิจารณารูปที่ 3.1 ประกอบ)

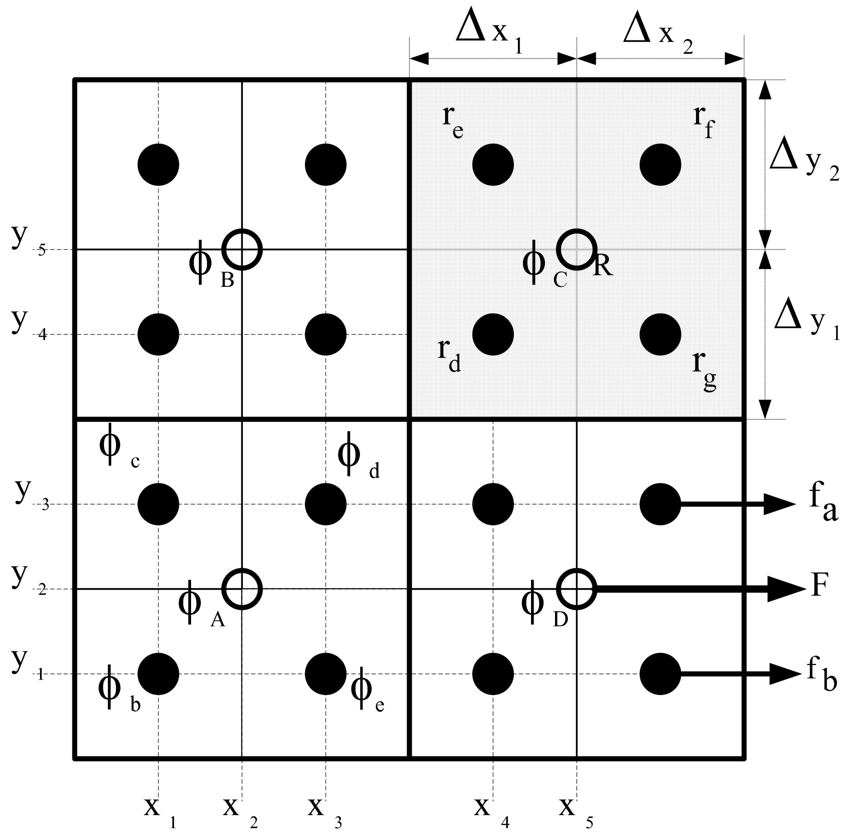
$$(\Delta x_1+\Delta x_2)(\Delta y_1+\Delta y_2)R=\Delta x_1\Delta y_1 r_d+\Delta x_1\Delta y_2 r_e+\Delta x_2\Delta y_2 r_f+\Delta x_2\Delta y_1 r_g \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}\phi_A=&\left(\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}\right)\left[\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)\phi_b+\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)\phi_e\right]\\&+\left(\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}\right)\left[\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)\phi_c+\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)\phi_d\right]\end{aligned} \tag{3.44}$$

สำหรับการส่งถ่ายข้อมูลจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดนั้นจะเป็นการส่งถ่ายค่าการปรับแก้ตามสมการ (3.39) และ (3.41) โดยการส่งถ่ายจะกระทำโดยใช้การประมาณค่าเชิงเส้นในช่วงสองทิศทาง (Bi-Linear Interpolation) ตามสมการ (3.45) ซึ่งแสดงการส่งถ่ายค่าตัวแปร ϕ_A, ϕ_B, ϕ_C และ ϕ_D

จากกริดชุดละเอียดไปยังค่าตัวแปร ϕ_d ของกริดชุดหยาบดังแสดงในรูปที่ 3.8 สำหรับจุดต่ออื่น ๆ ก็สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดียวกัน

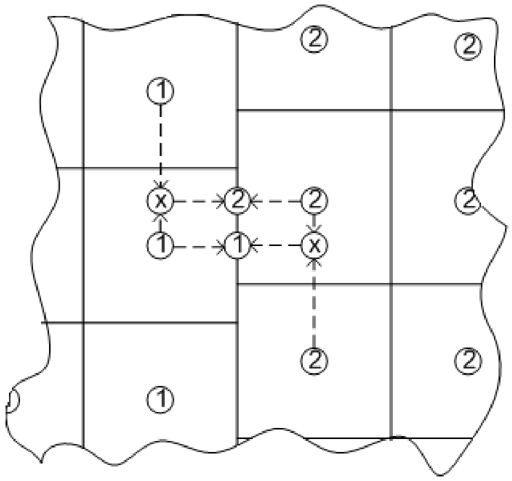
$$\phi_d = \left(\frac{y_5 - y_3}{y_5 - y_2}\right)\left[\left(\frac{x_3 - x_2}{x_5 - x_2}\right)\phi_D + \left(\frac{x_5 - x_3}{x_5 - x_2}\right)\phi_A\right] + \left(\frac{y_3 - y_2}{y_5 - y_2}\right)\left[\left(\frac{x_3 - x_2}{x_5 - x_2}\right)\phi_C + \left(\frac{x_5 - x_3}{x_5 - x_2}\right)\phi_B\right] \tag{3.45}$$



รูปที่ 3.8 แสดงการก่อรูปของกริดละเอียดเพื่อเป็นกริดหยาบ และแสดงการส่งถ่ายผลเฉลย จากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดและจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบ

สำหรับวิธีการในการถ่ายโอนข้อมูลจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดนั้นนอกเหนือจากใช้การประมาณค่าในช่วงสองทิศทางแล้วยังมีวิธีอื่นอีกหลายวิธีซึ่งจะนำอิทธิพลของทิศทางลมเข้ามาพิจารณาด้วยแต่ไม่ขอกล่าวในรายละเอียดในที่นี้ ประเด็นที่จะพิจารณาได้แก่การถ่ายโอนค่าการปรับแก้ค่าพลังานจนล์ความปั่นป่วน k ค่าอัตราการสูญเสียพลังจนน์ความปั่นป่วน ε และค่าอัตราการ

สูญเสียพลังจนน์ความปั่นป่วนจำเพาะ ω เนื่องจากว่าผลของการปรับแก้อาจจะทำให้ปริมาณเหล่านี้มีค่าน้อยกว่าศูนย์ได้ซึ่งขัดกับหลักทางฟิสิกส์และนำไปสู่การคำนวณที่ลู่ออกในที่สุด เพราะฉะนั้นเพื่อป้องกันปัญหาดังกล่าวการปรับแก้ปริมาณเหล่านี้ถูกปรับเปลี่ยนเป็น $\phi_{Corrected}=|\phi_{Old}+\alpha e^{\phi}|$ เมื่อ $0\leq\alpha\leq1$ ซึ่ง α จะมีค่าแตกต่างกันไปตามแต่ละปัญหาและหาก $\alpha=0$ แสดงว่าไม่มีการปรับแก้



รูปที่ 3.9 แสดงการหาค่าบริเวณรอยต่อของบล็อกที่ติดกันโดยการประมาณค่าในช่วงด้วยค่าของจุดภายในแต่ละบล็อก (วงกลมที่มีหมายเลขกำกับคือตำแหน่งที่มีการเก็บข้อมูลของบล็อกหมายเลขนั้น ๆ ส่วนวงกลมที่มีเครื่องหมายกากบาทจะเป็นตำแหน่งเก็บข้อมูลที่ไม่มีอยู่จริงโดยเกิดจากการประมาณค่าในช่วงระหว่างตำแหน่งเก็บข้อมูลข้างเคียงที่มีอยู่จริง)

3.5 เทคนิคมัลติบล็อกและการคำนวณแบบขนาน (Multiblock Technique and Parallel Computing)

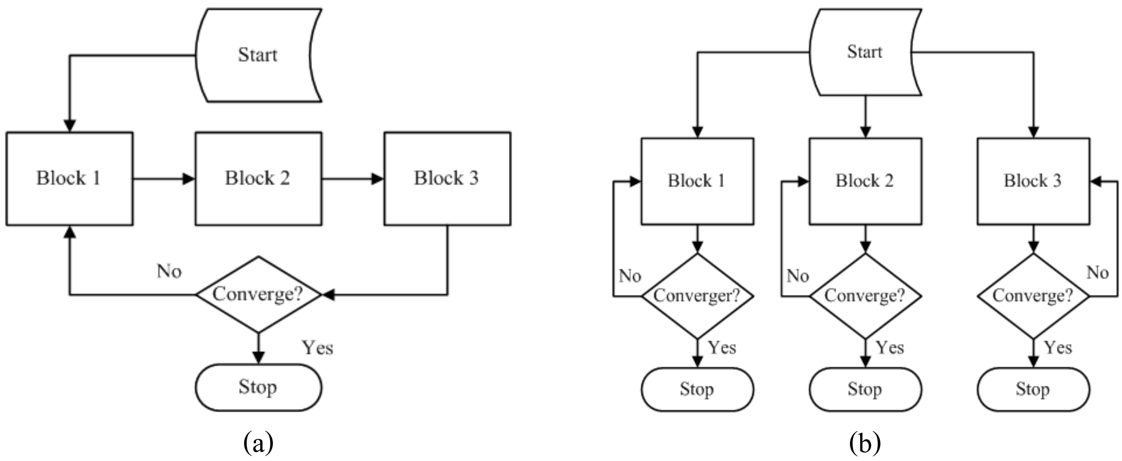
3.5.1 การแบ่งบล็อก (Block Decomposition)

เป็นที่ทราบกันดีว่าการสร้างกริดที่มีโครงสร้างแบบพิกัดฉากชุดเดียว (Single-Structured Cartesian Grid) นั้นไม่สามารถประยุกต์ใช้กับโดเมนที่ไม่เรียบง่ายได้โดยตรง ซึ่งวิธีการสร้างกริดตามรูปที่ 1.1(a) นั้นก็สามารถกระทำได้แต่จะสร้างความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์อีกทั้งยังเป็นการสิ้นเปลืองหน่วยความจำคอมพิวเตอร์โดยไม่จำเป็นโดยจะเห็นผลอย่างชัดเจนเมื่อจำนวนข้อมูลมีขนาดใหญ่มาก วิธีที่จะนำมาใช้ในที่นี้ได้แก่วิธีการแบ่งโดเมน (Domain Decomposition) ตามรูปที่ 1.1(b) โดยทำการแบ่งโดเมนที่สนใจที่มีลักษณะไม่เรียบง่ายออกเป็นโดเมนย่อยที่มีลักษณะเรียบง่ายและสามารถสร้างกริดแบบมีโครงสร้างพิกัดฉากเพียงชุดเดียวไปบนโดเมนย่อยนั้นได้ หากเรียกแต่ละโดเมนย่อยนี้ว่า “บล็อก” เทคนิคนี้ก็สามารถเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่า

“เทคนิคมัลติบล็อก” ซึ่งการแบ่งบล็อกสามารถจำแนกได้เป็นสองวิธีด้วยกันตามลักษณะความเกี่ยวพันกันของเส้นกริดของบล็อกที่ติดกันตรงบริเวณรอยต่อได้แก่กริดแบบเหลื่อม (Overlapping Grid) และกริดแบบต่อกัน (Patched Grid) ดังรูปที่ 2.1(a) และ 2.1(b) ตามลำดับ ซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเลือกใช้การแบ่งบล็อกแบบกริดต่อกันเนื่องด้วยความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์และการแลกเปลี่ยนค่าบริเวณรอยต่อจะกระทำได้สะดวกกว่าแบบกริดเหลื่อมกัน

3.5.2 การหาค่าตัวแปรตรงรอยต่อระหว่างบล็อก (Determination of Variables at Block Interface)

เมื่อโดเมนหลักถูกแบ่งออกเป็นส่วนย่อยหลายบล็อกแล้ว จากนั้นก็สามารถทำการคำนวณไปบนแต่ละบล็อกอย่างเป็นอิสระต่อกันได้เสมือนหนึ่งว่ากำลังทำการคำนวณไปบนโดเมนหลัก แต่การคำนวณที่เป็นอิสระต่อกันนี้ส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่บังคับโดยเงื่อนไขของโดเมนหลักเพราะว่าเงื่อนไขที่ขอบของแต่ละบล็อกนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งด้านที่ไม่ใช่เงื่อนไขจริง เพราะฉะนั้นจึงจำเป็นต้องมีกรรมวิธีในการบังคับให้ผลเฉลยของแต่ละบล็อกนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขของโดเมนหลัก วิธีที่เลือกใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แก่การประมาณค่าในช่วงที่บริเวณรอยต่อระหว่างบล็อกที่ติดกันดังแสดงในรูปที่ 3.9 เพื่อเป็นการแพร่กระจายเงื่อนไขของโดเมนหลักไปยังบล็อกต่าง ๆ



รูปที่ 3.10 แผนภาพแสดงการคำนวณแบบหลายบล็อกโดยที่ (a) คำนวณแบบตามลำดับ และ (b) คำนวณแบบขนาน

3.5.3 การคำนวณแบบหลายบล็อก (Multiblock Computation)

เมื่อโดเมนถูกแบ่งออกเป็นหลายบล็อก การคำนวณสำหรับทุกบล็อกโดยวิธีปกติก็คือการคำนวณไปทีละบล็อกตามลำดับที่มีการกำหนดไว้ล่วงหน้า ในขณะที่กำลังคำนวณบนบล็อกใดบล็อกหนึ่ง บล็อกอื่น ๆ ก็จะไม่มีการคำนวณเกิดขึ้นซึ่งจะรอจนกว่าบล็อกที่มีลำดับการคำนวณก่อนหน้านั้นจะคำนวณเสร็จสิ้นเสียก่อน การคำนวณในลักษณะนี้จะเรียกว่า “การคำนวณแบบตามลำดับ” (Sequential Computing) ดังแสดงในรูปที่ 3.10(a) โดยการคำนวณแบบนี้ถ้าหากยิ่งมีจำนวนบล็อกมากเท่าใดเวลาที่ใช้โดยรวมก็ยิ่งมากขึ้นทวีคูณเพราะนอกจากจะใช้เวลาไปกับการคำนวณแล้วเวลาส่วนหนึ่งที่ต้องเสียไปก็คือเวลาที่ใช้ไปกับการรอการมาถึงของลำดับการคำนวณของแต่ละบล็อกนั่นเอง พิจารณารูปที่ 3.10(b) จะเป็นแผนภาพแสดงการคำนวณทุกบล็อกไปพร้อมกันซึ่งกรณีนี้จะไม่มีการอยู่ว่างเพื่อรอการมาถึงของลำดับที่การคำนวณของบล็อกใดเลยและทุกบล็อกจะมีการทำงานหรือมีการคำนวณอยู่ตลอดเวลา การคำนวณทุกบล็อกไปพร้อมกันนี้จะเรียกว่า “การคำนวณแบบขนาน” (Parallel Computing) อนึ่งถ้าหากทำการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณของทั้งสองกรณีแล้วผลที่ได้จะมีความชัดเจนมากหากมีบล็อกที่ต้องคำนวณอยู่เป็นจำนวณมาก

3.5.4 กระบวนการกับการคำนวณแบบขนาน (Process versus Parallel Computing)

การทำงานหรือการประมวลผลในระบบปฏิบัติการคอมพิวเตอร์นั้นสามารถที่จะทำการประมวลผลโปรแกรมใช้งานต่าง ๆ (ตัวอย่างเช่นโปรแกรม MS-Excel และ โปรแกรม MS-Word เป็นต้น) ได้หลายโปรแกรมไปพร้อมกัน และในแต่ละโปรแกรมก็จะมีการทำงานที่แยกย่อยออกไปซึ่งก็สามารถที่จะทำงานไปพร้อมกันได้ด้วยเช่นกัน การทำงานแยกย่อยที่ปรากฏในแต่ละโปรแกรมนั้น (ตัวอย่างเช่น ในขณะที่เครื่องพิมพ์กำลังพิมพ์งานเอกสารให้โปรแกรม MS-Word และพร้อมกันนั้นผู้ใช้ก็สั่งบันทึกงานในขณะที่เครื่องพิมพ์กำลังพิมพ์อยู่ เป็นต้น) จะมีการประมวลผลในเชิงมัลติเทรด (Multithread) แต่สำหรับการทำงานในระดับระบบปฏิบัติการแล้วตัวระบบปฏิบัติการจะควบคุมการทำงานของทุกโปรแกรมในรูปแบบกระบวนการ (Process) กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือแต่ละหน่วยประมวลผลหรือคอมพิวเตอร์แต่ละเครื่องนั้นสามารถที่จะทำการประมวลผลได้มากกว่าหนึ่งโปรแกรมหรือมากกว่าหนึ่งกระบวนการไปพร้อมกันได้นั่นเอง

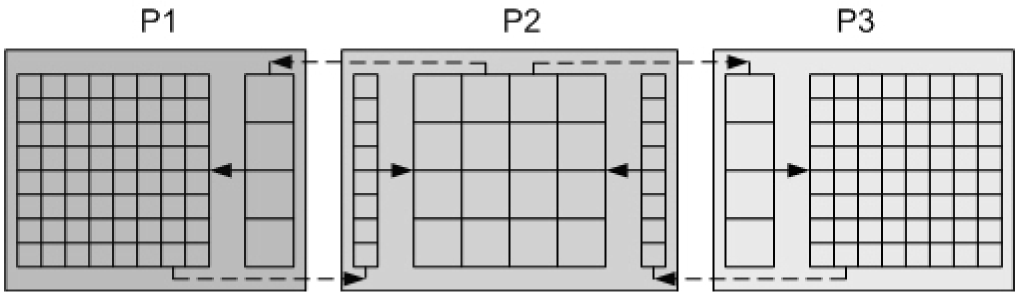
วิทยานิพนธ์นี้จะใช้ชุดคำสั่งของ MPI ควบคุมการทำงานแบบขนาน โปรแกรมจะถูกสั่งการผ่าน “โหนดแม่” (Master Node) เพื่อกำหนดสภาวะเริ่มต้นของการทำงาน จำนวน “โหนดคำนวณ” (Compute Nodes) และจำนวนกระบวนการที่ต้องการถูกระบุโดยผู้ใช้ ทั้งนี้จำนวนกระบวนการไม่ จำเป็นจะต้องเท่ากับจำนวนโหนดคำนวณ เพราะหนึ่งโหนดคำนวณสามารถที่จะประมวลผลได้หลายกระบวนการไปพร้อมกันตามที่กล่าวมาแล้วข้างต้น จากนั้น MPI จะแจ้งให้โหนดแม่ทราบจำนวนกระบวนการผ่านคำสั่ง MPI_Init() และโหนดแม่ก็จะทำการกำหนดหมายเลข

ประจำตัวให้กับแต่ละกระบวนการผ่านคำสั่ง MPI_Comm_rank() และทำการแจกจ่ายโปรแกรมไปยังกระบวนการทั้งหมด จากนั้นแต่ละกระบวนการก็จะทำงานไปตามคำสั่งที่ถูกระบุไว้ในโปรแกรม ด้วยการทำงานในลักษณะนี้จำนวนกระบวนจึงถูกกำหนดให้เท่ากับจำนวนบล็อกที่มีนั่นคือแต่ละกระบวนการจะทำการคำนวณในแต่ละบล็อกที่ไม่ซ้ำกัน การทำงานที่แตกต่างกันในแต่ละบล็อกนั้น (ตัวอย่างเช่น เงื่อนไขขอบเขตที่แตกต่างกันในแต่ละบล็อก) แต่ละกระบวนการจะทราบจากเงื่อนไขที่ถูกตรวจสอบภายในโปรแกรมซึ่งจะถูกกำหนดเป็นข้อมูลเบื้องต้นของการคำนวณโดยจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป อย่างไรก็ตามการคำนวณจะมีประสิทธิภาพสูงสุดก็ต่อเมื่อจำนวนโหนดคำนวณเท่ากับจำนวนกระบวนการหรือบล็อกนั่นคือหนึ่งโหนดคำนวณจะทำการคำนวณเพียงหนึ่งบล็อกเท่านั้น ประสิทธิภาพจะต่ำลงหากโหนดคำนวณทำการคำนวณมากกว่าหนึ่งบล็อกหรือเกิดความไม่เท่าเทียมกันของโหลด (Load Unbalancing) กล่าวคือจำนวนบล็อกในแต่ละโหนดคำนวณมีไม่ เท่ากัน ประเด็นหลังนี้มี ผลกระทบโดยตรงต่อประสิทธิภาพของการคำนวณ แม้ว่าจะทำการคำนวณด้วยโหนดคำนวณที่มากกว่าแต่ประสิทธิภาพอาจจะด้อยกว่าหากมีความไม่เท่าเทียมกันของโหลดเกิดขึ้น นอกจากนั้นการที่แต่ละโหนดคำนวณส่งข้อมูลต่อกันผ่านเครือข่ายก็มีผลกระทบโดยตรงต่อประสิทธิภาพการคำนวณด้วยเช่นกัน แต่ผลกระทบจะมีไม่มากหากเวลาที่ใช้ในการส่งข้อมูลผ่านเครือข่ายนั้นน้อยมากเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ไปกับการคำนวณหลัก

3.5.5 การแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างกระบวนการ (Data Exchanging among Processes)

โปรแกรมจะทำการสร้างข้อมูลขึ้นมาสองชุดได้แก่ชุดข้อมูลหลัก (ชุดลำดับข้อมูลแบบสองมิติตามรูปที่ 3.11) ที่ต้องทำการคำนวณโดยตรงและชุดข้อมูลย่อย (ชุดลำดับข้อข้อมูลแบบหนึ่งมิติตามรูปที่ 3.11) ซึ่งมีไว้สำหรับพักและรับค่าที่ได้จากขอบของบล็อกที่ติดกัน ชุดข้อมูลย่อยนี้จะถูกสร้างขึ้นก็ต่อเมื่อโปรแกรมตรวจสอบได้ว่าด้านใดด้านหนึ่งของบล็อกที่กำลังพิจารณาอยู่เชื่อมต่อกับด้านของบล็อกอื่นเท่านั้น นั่นคือแต่ละด้านของแต่ละบล็อกจะเสมือนว่ามีชุดข้อมูลย่อยนี้ประจำอยู่และจะมีอยู่จริงก็ต่อเมื่อด้านนั้น ๆ เชื่อมต่อกับบล็อกอื่นเท่านั้น การกำหนดเช่นนี้ช่วยในการประหยัดหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ได้ส่วนหนึ่งนั่นคือจะไม่ถูกจองขึ้นมาหากไม่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการคำนวณ จากรูปที่ 3.11 แสดงการแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างบล็อกที่ติดกันซึ่งเมื่อพิจารณากระบวนการ P1 ชุดข้อมูลย่อยของ P1 นี้จะทำหน้าที่เสมือนว่าเป็นค่าที่ขอบด้านขวาของชุดข้อมูลหลัก ในตอนเริ่มต้นของการคำนวณ ชุดข้อมูลย่อยและค่าที่ขอบด้านขวาของชุดข้อมูลหลักจะมีค่าเป็นศูนย์และเมื่อกระบวนการคำนวณเสร็จสมบูรณ์ในแต่ละรอบการคำนวณ ชุดข้อมูลย่อยของ P1 จะร้องขอข้อมูลในคอลัมน์ที่สองของ P2 ผ่านการส่งผ่านข่าวสาร (หากนำข้อมูลหลักของ P1 และ P2 มาซ้อนทับกับข้อมูลหลักในคอลัมน์สุดท้ายของ P1 และข้อมูลหลักในคอลัมน์แรกของ P2 จะหายไป) เมื่อชุดข้อมูลย่อยของ P1 มีค่า (ที่ได้จาก P2) ก็จะทำการส่งไปยังคอลัมน์สุดท้ายของชุดข้อมูลหลัก

โดยตรงและหากจำนวนชุดข้อมูลมีความยาวไม่เท่ากันก็จะส่งโดยการประมาณค่าในช่วง สำหรับกระบวนการอื่นก็สามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน



รูปที่ 3.11 แสดงการแลกเปลี่ยนข้อมูลของบล็อกที่อยู่ต่างกระบวนการ ลูกศรเส้นประแสดงถึงการแลกเปลี่ยนข้อมูลผ่านการส่งข่าวสารระหว่างกระบวนการ ในขณะที่ลูกศรเส้นทึบจะเป็นการแลกเปลี่ยนกันโดยตรง (ดูรูป 3.9 ประกอบ) ในกระบวนการนั้น ๆ

ตารางที่ 3.1 แสดงโครงสร้างข้อมูลสำหรับกำหนดเงื่อนไขที่ขอบของโดเมน

BlockID						
Nx	Ny					
Ox	Oy					
Sx	Sy					
1	Ff	Fi	Fo	NBID	Y1	Y2
2	Ff	Fi	Fo	NBID	Y1	Y2
3	Ff	Fi	Fo	NBID	X1	X2
4	Ff	Fi	Fo	NBID	X1	X2
1	H1	H2	Y1	Y2		
2	H1	H2	Y1	Y2		
3	H1	H2	X1	X2		
4	H1	H2	X1	X2		

3.5.6 การจัดเก็บแฟ้มข้อมูลสำหรับนำเข้าเพื่อทำการคำนวณ

เพื่อให้โปรแกรมสามารถระบุเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขที่ขอบ และเงื่อนไขการเชื่อมต่อได้อย่างถูกต้องและง่ายต่อการใช้งานในกรณีที่ต้องการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขหรือแม้กระทั่งเปลี่ยนปัญหาในการคำนวณ การจัดเก็บข้อมูลแสดงในตารางที่ 3.1 และรายละเอียดต่าง ๆ อธิบายได้ดังต่อไปนี้

- BlockID เป็นการกำหนดหมายเลขประจำตัวของบล็อก ID ซึ่ง ID มีค่ามากกว่า 0
- Nx และ Ny เป็นจำนวนปริมาตรควบคุมของโดเมน ID ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ
- Ox และ Oy เป็นการระบุพิกัดเริ่มต้นของโดเมน ID
- Sx และ Sy เป็นขนาดของความกว้างความสูงของโดเมน ID

สำหรับตัวเลข 1, 2, 3 และ 4 ที่ปรากฏในตารางจะเป็นหมายเลขระบุขอบด้านต่าง ๆ ของโดเมน ได้แก่ *หมายเลข 1*: แทนขอบด้านซ้าย *หมายเลข 2*: แทนขอบด้านขวา *หมายเลข 3*: แทนขอบด้านล่าง และ*หมายเลข 4*: แทนขอบด้านบน ซึ่งเมื่อทำการอ่านข้อมูลมาถึงตำแหน่งหมายเลขใดก็จะเป็นการกำหนดเงื่อนไขให้แก่ขอบด้านนั้น ๆ โดยเงื่อนไขที่ขอบของโดนเมนนั้นแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ กลุ่มเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการไหลและการเชื่อมต่อกับโดเมนอื่น และกลุ่มเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับความร้อน

*กลุ่มแรก*ได้แก่เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการไหลและการเชื่อมต่อโดยจะประกอบไปด้วยพารามิเตอร์ Ff, Fi, Fo และ NBID ซึ่ง Ff, Fi และ Fo จะมีค่าเป็น 0 หรือ 1 โดยที่ Ff จะใช้แทนเงื่อนไขของกระแสอิสระ (Free Stream Boundary Condition) Fi ใช้แทนเงื่อนไขการไหลเข้า (Inflow Boundary Condition) และ Fo ใช้แทนเงื่อนไขการไหลออก (Outflow Boundary Condition) หากต้องการกำหนดให้เงื่อนไขใดมีอยู่ก็กำหนดได้โดยให้พารามิเตอร์ดังกล่าวมีค่าเป็น 1 และหากกำหนดเป็น 0 ก็ถือว่าไม่มีเงื่อนไขนั้นอยู่ที่ขอบด้านที่กำลังพิจารณา สำหรับ NBID นั้นจะเป็นเลขจำนวนเต็มมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ซึ่งจะเป็นหมายเลขประจำตัวของโดเมนข้างเคียงที่เชื่อมต่อกับด้านที่กำลังพิจารณา ในส่วนพารามิเตอร์ที่ตามหลัง NBID ได้แก่ X1, X2, Y1 และ Y2 นั้นจะเป็นการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของระยะทางการเชื่อมต่อ แต่ถ้าหาก X1=X2=Y1=Y2=0 หมายความว่าระยะทางทั้งหมดของด้านนั้นเชื่อมต่อกับโดเมนข้างเคียง อย่างไรก็ตามหากว่าทุกพารามิเตอร์มีค่าเป็นศูนย์นั่นคือ Ff=FI=Fo=NBID=0 จะได้ว่าด้านนั้นถูกกำหนดเงื่อนไขให้เป็นผนังไม่เลื่อนไหล (No-Slip Wall Condition) ซึ่งจะเป็นค่าที่ถูกกำหนดไว้ก่อนในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (Default Conditions)

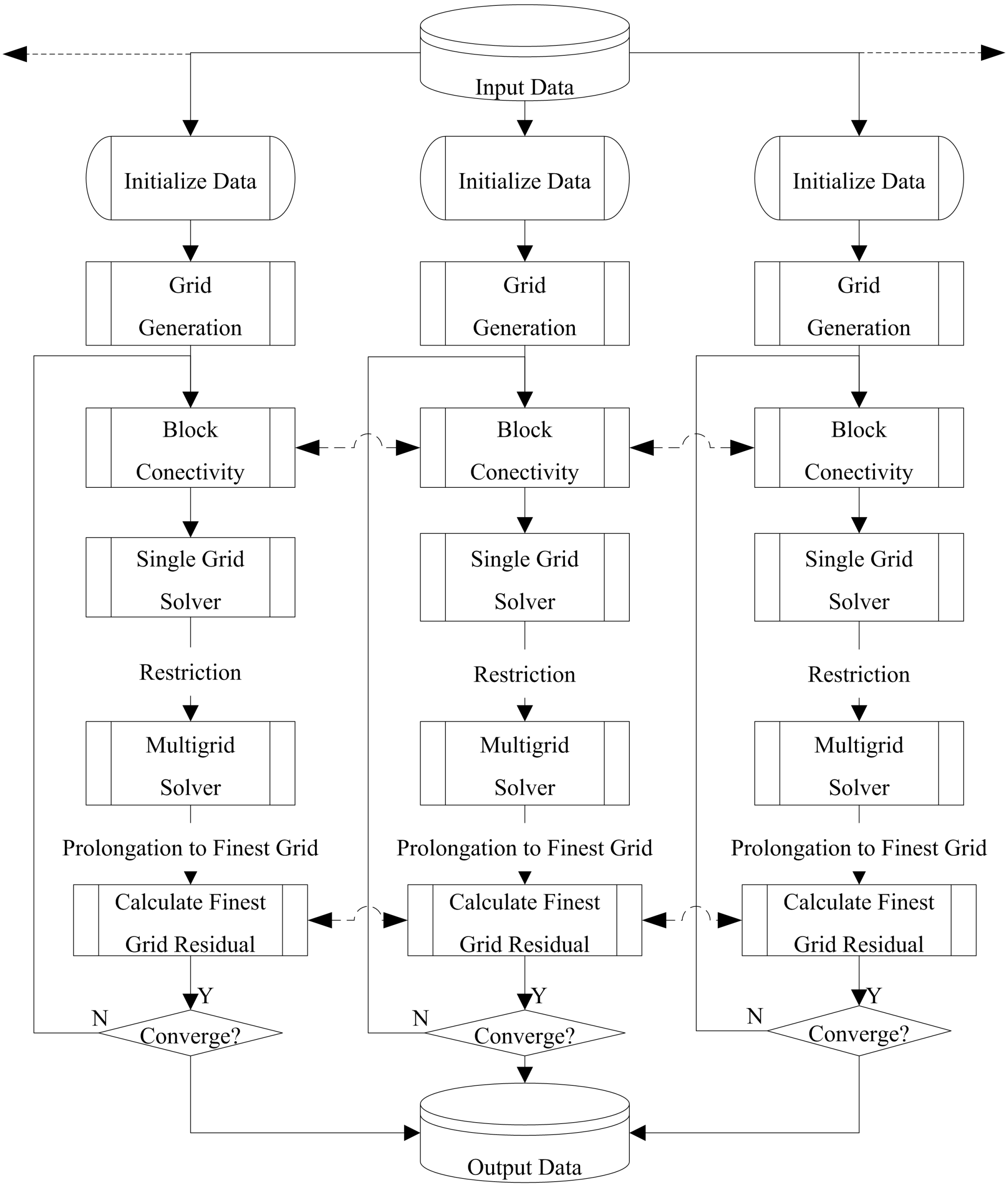
*กลุ่มที่สอง*คือส่วนที่เกี่ยวกับการกำหนดค่าความร้อนโดยจะมีอยู่ 4 เงื่อนไขได้แก่ การกำหนดค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผนังเมื่อ H1>0 และ H2>0 การกำหนดค่าฟลักซ์ความร้อนที่ผนัง (Wall Heat Flux) เมื่อ H1<-1 การกำหนดให้อุณหภูมิที่พื้นผิวมีการเฉลี่ยแบบเชิงเส้นระหว่างปลายทั้งสองด้านเมื่ออุณหภูมิของปลายด้านใดด้านหนึ่งหรือทั้งสองด้านมีการเปลี่ยนแปลงระหว่างการคำนวนโดยให้ H1=-1 และการกำหนดให้ไม่มีการถ่ายเทความร้อนที่ผนัง (Adiabatic Wall) เมื่อ H1=0 ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

(1) <u>กรณี H1>0 และ H2>0</u> เป็นการกำหนดค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิที่ผนังซึ่งจะคำนวณได้จากการประมาณค่าในช่วงระหว่างค่าอุณหภูมิ H1 ที่ตำแหน่ง X1 (หรือ Y1) และค่าของอุณหภูมิ H2 ที่ตำแหน่ง X2 (หรือ Y2) แต่ถ้าหาก H1=H2 แสดงว่าผนังด้านนั้นมีอุณหภูมิเท่ากันตลอดทั้งด้าน

(2) <u>กรณี H1<-1</u> เป็นการกำหนดค่าฟลักซ์ความร้อนซึ่งค่า H1 ก็คือค่าฟลักซ์ความร้อนที่ต้องการป้อนให้โปรแกรมสำหรับทำการคำนวณโดยพารามิเตอร์ H2, X1 (หรือY1) และ X2 (หรือ Y2) นั้นจะถูกละทิ้ง ซึ่งในกรณีนี้มีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ “ตรรกแบบบูล” (Boolean Logic) บางตัวเพื่อแจ้งให้โปรแกรมหลักทราบเพื่อให้มีการปรับเปลี่ยนค่าที่ขอบด้านที่ถูกกำหนดในแต่ละรอบของการคำนวณ

(3) <u>กรณี H1=-1</u> เป็นการกำหนดการกระจายตัวของอุณหภูมิที่พื้นผิวของด้านที่กำลังพิจารณาโดยการเฉลี่ยแบบเชิงเส้นในช่วงระหว่างค่าอุณหภูมิที่จุดปลายทั้งสองของพื้นผิวซึ่งมีการคำนวณใหม่ในทุกๆ รอบการคำนวณ เนื่องจากอุณหภูมิที่ปลายข้างใดข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างอาจมีการเปลี่ยนแปลงในทุกรอบการคำนวณ โดยกรณีนี้จะละทิ้งพารามิเตอร์ H2 เพราะฉะนั้นพารามิเตอร์ที่ต้องทำการกำหนดต่อจาก H1 ได้แก่ X1 (Y1) และ X2 (Y2) ซึ่งเป็นพิกัดจุดปลายทั้งสองข้างในกรณีนี้จะมีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ตรรกแบบบูล (Boolean Logic) บางตัวเพื่อแจ้งให้โปรแกรมหลักทราบเพื่อให้มีการปรับเปลี่ยนค่าที่ขอบด้านที่ถูกกำหนดในแต่ละรอบการคำนวณ

(4) <u>กรณี H1=0</u> จะกำหนดให้ด้านที่กำลังพิจารณาเป็นผนังที่ไม่มีการถ่ายเทความร้อนซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ถูกกำหนดในตอนแรก นั่นคือพารามิเตอร์ตรรกแบบบูล (Boolean Logic) ในกรณีนี้จะถูกกำหนดให้เป็นจริงในตอนเริ่มต้นเพื่อให้มีการคำนวณเงื่อนไขนี้ในทุกๆ รอบการคำนวณ แต่ถ้าหากพารามิเตอร์ตรรกแบบบูล (Boolean Logic) ในกรณีที่ (1) และ (2) ถูกกำหนดให้เป็นจริงพารามิเตอร์ตรรกแบบบูล (Boolean Logic) ในกรณีนี้จะถูกกำหนดให้เป็นเท็จเพื่อยกเลิกการคำนวณสำหรับบังคับให้ข้อมูลภายในโดเมนเป็นไปตามเงื่อนไขนี้



รูปที่ 3.12 แสดงกระบวนการคำนวณโดยรวม

3.5.7 ลำดับขั้นตอนการการคำนวณ (Computation Procedure)

เมื่อกระบวนการ (Process) ทั้งหมดเริ่มต้นทำงานและถูกกำหนดหมายเลขประจำตัวที่ไม่ซ้ำกันโดยโหนดแม่ ซึ่งแต่ละกระบวนการจะทำการประมวลผลโปรแกรมที่แจกจ่ายโดยโหนดแม่ และเมื่อแต่ละกระบวนการสั่งประมวลผลโปรแกรม แต่ละกระบวนการจะทำการอ่านข้อมูลจาก

แฟ้มข้อมูลที่เก็บรายละเอียดทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณไว้และทำการอ่านข้อมูลตั้งแต่ต้นแฟ้มข้อมูลจนกระทั่งค่าหมายเลขประจำตัวของกระบวนการนั้นมีค่าเท่ากับค่า BlockID ตามตารางที่ 3.1 กระบวนการดังกล่าวก็จะทำการอ่านและดึงข้อมูลในส่วนนั้นมากำหนดค่าเริ่มต้น ค่าเงื่อนไขที่ขอบเขต และค่าการตรวจสอบเงื่อนไขต่างๆ สำหรับการคำนวณ โดยการอ่านข้อมูลจะเสร็จสิ้นก็ต่อเมื่อทำการกำหนดค่าต่าง ๆ ตามที่ต้องการได้ครบถ้วนแล้ว จากนั้นก็จะเข้าสู่กระบวนการคำนวณอันดับแรกได้แก่การสร้างกริดในแต่ละบล็อกจากนั้นจะเข้าสู่วนรอบของการคำนวณซึ่งในวนรอบนี้จะมีขั้นตอนวิธีมัลติกริดเป็นตัวเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยอยู่ภายในวนรอบ นอกจากนั้นในแต่ละวนรอบการคำนวณก็จะมีการแลกเปลี่ยนค่าที่ขอบของบล็อกที่ติดกัน ซึ่งเมื่อค่าเศษตกค้างโดยเฉลี่ยของทุกกระบวนนั้นน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ก็จะหยุดการคำนวณและเขียนข้อมูลลงแฟ้มข้อมูลที่แยกกันต่อไป สำหรับกระบวนการคำนวณโดยรวมสามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ตามรูปที่ 3.12

บทที่ 4
การไหลคงตัวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวที่อุณหภูมิคงที่
(Steady Laminar and Incompressible Isothermal Flow)

ในบทนี้จะนำเสนอการคำนวณปัญหาการไหลคงตัวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวที่อุณหภูมิคงที่ ดังนั้นสมการที่เกี่ยวข้องจึงมีเพียงสมการความต่อเนื่องตามสมการที่ (3.1) และสมการโมเมนตัมตามสมการที่ (3.2) เท่านั้น โดยไม่มีแรงที่กระทำต่อตัวของไหล F_B มาเกี่ยวข้องซึ่งได้ละไว้ในฐานที่เข้าใจว่ามีเฉพาะแรงเนื่องจากความดันเท่านั้นที่กระทำต่อตัวของไหลซึ่งได้พิจารณาแยกออกจากแรง F_B แล้ว และเมื่อพิจารณาให้เป็นการไหลแบบสองมิติแล้วสมการดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับตัวแปรสองมิติได้ดังนี้

สมการอนุรักษ์มวล:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{4.1}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vu)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4.2}$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vv)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{4.3}$$

กรรมวิธีในการแก้สมการเหล่านี้ด้วยกระบวนการเชิงตัวเลขนั้นได้อธิปรายไปโดยสังเขปในบทที่ 3 แล้วจึงไม่มีการอภิปรายซ้ำในบทนี้ สำหรับปัญหาที่จะทำการคำนวณและศึกษาพฤติกรรมการไหล พร้อมทั้งทดสอบความถูกต้องและสมรรถนะของโปรแกรมได้แก่ การไหลในโพรงจัตุรัสเนื่องจากการขับเคลื่อนด้านบน (Top Lid-Driven Cavity Flow) และการไหลผ่านท่อตัวแยก “รูปตัวที” (Flow Through a T-Junction) รายละเอียดจะได้แสดงดังต่อไปนี้

4.1 การไหลในโพรงจัตุรัสเนื่องจากการขับเคลื่อนด้านบน

สำหรับการไหลในโพรงจัตุรัสโดยมีการขับเคลื่อนที่ทำให้ของไหลด้านบนเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่นั้น พฤติกรรมที่อยู่ภายในโพรงจะเป็นการไหลที่ไม่ซับซ้อนมากนัก เพราะฉะนั้นปัญหาสำหรับการไหลในลักษณะนี้จึงมักถูกนำไปทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นหรือนำไปทดสอบเทคนิคขั้นสูงรวมทั้งวิธีการที่พัฒนาขึ้นใหม่ ดังนั้นการคำนวณในส่วนนี้จึงเป็นการทดสอบและตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการและเทคนิคบางประการของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นด้วยเช่นกัน โดยจะทำการทดสอบการประมาณค่าพจน์การพา (Convection Schemes) ตามที่ได้อภิปรายในหัวข้อ 3.3.1 และ 3.3.2 และจะทดสอบเทคนิคมัลติบล็อก (Multiblock Technique) รวมทั้งทดสอบสมรรถนะของการคำนวณแบบขนานร่วมกับการใช้เทคนิคการแบ่งโดเมนหรือเทคนิคมัลติบล็อก ซึ่งจะอภิปรายในหัวข้อดังต่อไปนี้

4.1.1 ลักษณะของปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

โดเมนที่พิจารณาจะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยภายในจะมีของไหลบรรจุอยู่ และของไหลด้านบนจะถูกขับให้มีความเร็วคงที่เท่ากับ U_0 m/s ส่งผลให้ของไหลที่บรรจุอยู่ภายในถูกเหนี่ยวนำให้มีการหมุนในลักษณะวนตามเข็มนาฬิกา สำหรับการคำนวณนั้นจะแบ่งเป็นสองกรณี แต่ละกรณีถูกกำหนดโดยค่าตัวเลขเรย์โนล (Reynolds Number) $Re=\rho U_0 L\mu$ เมื่อ L เป็นขนาดของโพรงจัตุรัส สำหรับการคำนวณนั้นจะกำหนดให้ $\rho=L=U_0=1$ และจะเปลี่ยนแปลงค่า μ เพื่อให้ได้ค่า Re ตามที่กำหนดในแต่ละกรณีซึ่งมีสองกรณีได้แก่ที่ Re =1,000 และ Re=5,000 โดยการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในแต่ละกรณีนั้นจะนำค่าความเร็ว U ตามแนวแกน y ที่ตำแหน่งตรงกึ่งกลางความกว้างของโพรงและความเร็ว V ตามแนวแกน x ที่ตำแหน่งตรงกึ่งกลางความสูงของโพรงนำไปเปรียบเทียบกับข้อมูลที่น่าเชื่อถือในกรณีนี้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Ghia, Ghia และ Shin (1986)

4.1.2 ผลการคำนวณและการประเมินผลการประมาณพจน์การพาแบบ QUICK

พิจารณารูปที่ 4.1 ซึ่งเป็นการเปรียบวัดผลการคำนวณของความเร็วโดยใช้การประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK และแบบ FOU ที่จำนวนกริดต่างกันเทียบกับผลการคำนวณของ Ghia et al (1986) ที่ค่า Re=1,000 จะพบว่าการประมาณค่าพจน์การพาแบบ FOU ใช้จำนวนกริดถึง 257x256 จุดความถูกต้องของผลเฉลยยังน้อยกว่าการประมาณค่าแบบ QUICK ที่ใช้ กริดเพียงแค่ 33x33 จุดเท่านั้น และสำหรับ QUICK แล้วจำนวนกริดเพียงแค่ 65x65 จุดผลเฉลยที่ได้นั้นทับกับผลการคำนวณของ Ghia et al (1982) ซึ่ง FOU ต้องใช้กริดถึง 513x513 จุด (ไม่ได้แสดงในที่นี้) จึงจะได้ค่าความถูกต้องในระดับนี้ รูปที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณที่ค่า Re=1,000 และ Re=5,000 โดยใช้การประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK โดยใช้กริดเพียงแค่ 65x65 จุด ผลการคำนวณที่ได้มีระดับความถูกต้องสูงเมื่อเทียบกับผลการคำนวณของ Ghia et al (1982) แม้ว่าค่า Re จะสูงขึ้นมากก็ตาม ซึ่งผลลัพธ์เหล่านี้ถือเป็นสิ่งยืนยันถึงความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นในอีกระดับหนึ่ง

4.1.3 การประเมินศักยภาพของระเบียบวิธีมัลติกริด

สำหรับการทดสอบในส่วนนี้จะทำการคำนวณไปบนกริดจำนวนหลายชุดที่มีขนาดของกริดแตกต่างกันนั่นจึงที่มาของระเบียบวิธีกริดหลายระดับหรือ “ระเบียบวิธีมัลติกริด” (Multigrid Method) สำหรับขั้นตอนและรายละเอียดของการคำนวณด้วยเทคนิคนี้ได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 3.4 สำหรับการประมาณค่าพจน์การแบบ QUICK นั้นจะถูกใช้เฉพาะกริดชุดแรกหรือกริดชุดที่ละเอียดที่สุดเท่านั้นเพราะหากใช้กับกริดชุดหยาบด้วยแล้วบางทีกริดชุดที่หยาบที่สุดอาจจะมีจุดไม่เพียงพอต่อข้อกำหนดของการประมาณค่าแบบ QUICK ดังนั้นเพื่อตัดปัญหาในส่วนนี้ QUICK จึงถูกใช้เฉพาะในกริดชุดที่ละเอียดที่สุดเท่านั้น ให้พิจารณารูปที่ 4.3 ซึ่งแสดงการลดลองของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้จำนวนระดับของกริดที่แตกต่างกัน เมื่อคำนวณที่ Re=1,000 จำนวนกริดที่ใช้เท่ากับ 65x65 จุด จะพบว่ายิ่งใช้จำนวนกริดหลายชุดอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยก็ยิ่งเร็วขึ้น แต่อัตราความเร็วจะเริ่มลดลงเมื่อใช้กริดจำนวนมากกว่า 4 ชุด นั่นคือการใช้กริดจำนวน 5 และ 6 ชุดการลู่เข้าของผลเฉลยไม่ดีไปกว่าการใช้กริดจำนวน 4 ชุดมากเท่าใดนัก เพราะฉะนั้นเมื่อคำนึงปริมาณงานที่ต้องทำเพิ่มขึ้นเมื่อมีจำนวนกริดหลายชุดขึ้น การใช้กริดเพียงแค่ 4 ชุดจึงถือว่าเหมาะสมที่สุด พิจารณารูปที่ 4.4 แสดงการลดลองของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้จำนวนระดับของกริดที่แตกต่างกัน เมื่อคำนวณที่ Re=5,000 จำนวนกริดที่ใช้เท่ากับ 65x65 จุด จะพบว่าการคำนวณด้วยกริดเพียงชุดเดียวหรือแม้แต่สองชุดก็ตามผลเฉลยมีแนวโน้มว่าจะไม่ลู่เข้า ในขณะที่เมื่อใช้กริดจำนวน 3 ชุดผลเฉลยกลับลู่เข้าอย่างรวดเร็วเมื่อเทียบกับกริดเพียงชุดเดียวและกริดสองชุด สำหรับการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้จำนวนกริดมากกว่าสามชุดอัตราการลดลงใกล้เคียงกับกับการใช้กริดสามชุดมากจึงไม่ถูกแสดงในที่นี้ ซึ่งผลของการคำนวณนี้ก็สอดคล้องกับผลการคำนวณของ Varonos และ Bergeles (2001) ที่

การใช้กริดเพียงชุดเดียวผลเฉลยจะไม่ลู่เข้าเมื่อมีการประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK ที่ค่า Re=5,000 ซึ่งผลของการคำนวณนี้ได้แสดงให้เห็นว่านอกจากระเบียบวิธีมัลติกริดจะเป็นตัวเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยแล้วยังจะช่วยรักษาเสถียรภาพในการคำนวณอีกด้วยหากมีการกำหนดเงื่อนไขที่เหมาะสม

4.1.4 การประเมินศักยภาพของเทคนิคการแบ่งโดเมนและการคำนวณแบบขนาน

การคำนวณในส่วนนี้จะเป็นการทดสอบการใช้เทคนิคการแบ่งโดเมนซึ่งก็คือการแบ่งโดเมนหลักออกเป็นโดเมนย่อยโดยแต่ละโดเมนย่อยอาจจะเรียกอีกอย่างว่า “บล็อก” เพราะฉะนั้นวิธีการนี้อาจจะเรียกว่า “เทคนิคมัลติบล็อก” (Multiblock Technique) รูปที่ 4.5 แสดงการแบ่งโดเมนหลักออกเป็น 4 บล็อกอย่างเท่าเทียมกัน โดยแต่ละบล็อกจะมีหมายเลขกำกับ จากนั้นกริดจะถูกสร้างลงในแต่ละบล็อกซึ่งจำนวนกริดในแต่ละบล็อกจะเท่ากับ 41x41 จุด สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องของเทคนิคที่ใช้นั้นจะกระทำโดยวิธีการเดียวกันกับหัวข้อที่ผ่านมา โดยการเปรียบวัดค่าความเร็ว U และ V ในแนวเส้นแบ่งครึ่งของโพรงจัตุรัสทั้งในแนวนอนและแนวตั้ง ซึ่งจะพบว่าอยู่ตรงรอยต่อระหว่างบล็อกพอดี รูปที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วระหว่างผลการคำนวณของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นกับผลการคำนวณของ Ghia et al (1982) เส้นที่ใช้แทนความเร็วที่ แต่ละตำแหน่งในแนวแกนนั้นมีนิยามเดียวกันกับเส้นในรูปที่ 4.1 และ 4.2 และเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.6 แล้วจะพบว่าผลการคำนวณของทั้งสองนั้นสอดคล้องกันดีมากแม้ว่าผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้นนี้เส้นความเร็ว U และเส้นความเร็ว V จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนและแต่ละส่วนจะอยู่ต่างบล็อกกันก็ตาม อนึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าความดันเป็นหนึ่งในปัจจัยที่ทำให้เกิดการไหล ซึ่งสำหรับการคำนวณแล้วหากได้ค่าความดันที่ถูกต้องก็จะส่งผลให้ได้ค่าความเร็วที่ถูกต้องตามมา รูปที่ 4.7 แสดงเส้นระดับของความดันเมื่อลากผ่านรอยต่อระหว่างบล็อก จะพบว่ามีความต่อเนื่องของเส้นเป็นอย่างดี นั่นจึงเป็นผลให้ได้ค่าความเร็วที่ถูกต้องตามรูปที่ 4.6 ในส่วนของการคำนวณแบบขนานนั้นจะทำการทดสอบโดยการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยเทคนิคมัลติบล็อกโดยใช้กลวิธีการคำนวณแบบขนานกับการคำนวณบนโดเมนหลักโดยใช้วิธีการคำนวณแบบดั้งเดิมด้วยจำนวนกริดที่สอดคล้องกัน นั่นคือจะใช้กริดบนโดเมนหลักเท่ากับ 81x81 จุด สำหรับการคำนวณแบบขนานนั้นจะกำหนดให้จำนวนของหน่วยประมวลผลเท่ากับจำนวนของบล็อกและแต่ละบล็อกจะถูกคำนวณโดยแต่ละหน่วยประมวลผล จากรูปที่ 4.8 จะพบว่าด้วยการคำนวณแบบขนานร่วมกับการใช้เทคนิคมัลติบล็อกนี้จะสามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงจากวิธีการดั้งเดิมได้ประมาณสองเท่า ซึ่งผลที่ได้นี้จะชัดเจนมากขึ้นหากจำนวนกริดที่ใช้มีจำนวนมากขึ้น มากจนกระทั่งเวลาที่ใช้ในการส่งผ่านข้อมูลระหว่างหน่วยประมวลผลนั้นน้อยมากเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ในการคำนวณหลัก

4.1.5 สรุปผลการคำนวณ

ผลการคำนวณที่ผ่านมาได้สะท้อนให้เห็นถึงความถูกต้อง เสถียรภาพและสมรรถนะในอีกระดับหนึ่งของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้พัฒนาขึ้น ซึ่งยังมีปัจจัยอื่นอีกหลายประการที่จะกระทบต่อประเด็นดังกล่าว ดันนั้นการคำนวณในส่วนถัดไปจะมีการเพิ่มความยุ่งยากหรือความซับซ้อนในบางส่วนขึ้นสำหรับทดสอบโปรแกรมต่อไป โดยผลลัพธ์ที่ทำการทดสอบและศึกษาในการคำนวณส่วนนี้จะนำไปเป็นข้อมูลเบื้องต้นและใช้สำหรับการคำนวณในส่วนถัดไป โดยผลลัพธ์ของการคำนวณที่ได้เป็นดังนี้

- การใช้การประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK นั้นให้ค่าความถูกถ้องแม่นยำมากกว่าการใช้วิธีการประมาณค่าแบบ FOU มาก แม้ว่าจะใช้จำนวนกริดที่น้อยกว่ามากก็ตาม
- จำนวณระดับของกริดที่เหมาะสมที่ใช้สำหรับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีมัลติกริดเท่ากับ 4 ระดับกริด

4.2 การไหลผ่านท่อแยกรูปตัวที

สำหรับการไหลในท่อแยกนั้นได้มีการประยุกต์ใช้งานในด้านต่าง ๆ จำนวนมากและมีบทบาทสำคัญในอุตสาหกรรมทางเคมี อุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน กลศาสตร์ของไหลทางชีวภาพ (Bio-fluid Mechanics) และการหล่อเย็นในอุปกรณ์เครื่องกำเนิดไฟฟ้า เป็นต้น สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขหรือแม้กระทั่งการทดลองเกี่ยวกับการไหลในท่อแยกนี้ในอดีตที่ผ่านมาพบว่ามีไม่มากเนื่องด้วยความซับซ้อนทางรูปร่าง โดยในจำนวนนั้นได้แก่

- Liepsch, Moravic, Rastogi และ Vlachos (1982) ได้ทำการทดลองและวัดความเร็วในแนวการไหลที่ระนาบสมมาตรของท่อแยกที่อัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของท่อเท่ากับ 8:1 โดยที่ค่าตัวเลข Re และสัดส่วนอัตราการไหลที่ทางออกยังอยู่ในช่วงการไหลแบบราบเรียบ
- Popp และ Sallet (1983) ได้ทำการทดลองการไหลแบบปั่นป่วนในท่อแยกที่อัตราส่วนความกว้างต่อความสูงของท่อเท่ากับ 4:1 และได้วัดความเร็วในแนวการไหลที่ระนาบสมมาตรไว้

- Lee และ Chiu (1992) ได้ทำการคำนวณการไหลแบบราบเรียบผ่านท่อแยกโดยใช้ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดร่วมกับเทคนิคมัลติบล็อกที่ค่าตัวเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 496 ซึ่งผลการคำนวณที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบความถูกต้องกับ Liepsch et al (1982)
- Chen และ Lian (1992) คำนวณการไหลแบบปั่นป่วนผ่านท่อแยกโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) และใช้ "เทคนิคการกันค่า" (Block off Technique) เพื่อขจัดปัญหาความซับซ้อนทางรูปร่างของโดเมน ซึ่งแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ได้แก่แบบจำลองความปั่นป่วนมาตรฐานค่าตัวเลขเรย์โนลด์สูงของ k-ε และผลการคำนวณที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบความถูกต้องกับผลการทดลองของ Popp และ Sallet (1983)
- Neary และ Sotiropoulos (1996) คำนวณการไหลแบบราบเรียบผ่านท่อแยกรูปตัวทีที่ค่าตัวเลขเรย์โนลด์หลายค่า โดยจะใช้เทคนิคการอ้างตำแหน่งของอัลเลย์โดยอ้อม (Indirect-Addressing Array) เพื่อหลีกเลี่ยงกริดที่อยู่นอกขอบเขตของโดเมนที่พิจารณา ผลการคำนวณที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบความถูกกับผลการทดลองของ Liepsch et al (1982)

จากงานอดีตที่ได้อ้างถึงในส่วนของการคำนวณนั้นจะพบว่าเป็นการคำนวณด้วยวิธีปกติยังไม่มีการใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดเพื่อช่วยเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยอาจจะเพราะว่าด้วยความยุ่งยากของการเขียนโปรแกรมเพื่อขจัดปัญหาทางรูปร่างของโดเมนอย่างเช่นเทคนิคการกันค่า (Block-off Technique) ซึ่งอาจจะทำให้สัมฤทธิ์ผลได้ยากกับระเบียบวิธีมัลติกริด หรือแม้แต่การคำนวณของ Neary และ Sotiropoulos (1996) ซึ่งใช้การอ้างอิงตำแหน่งของอัลเลย์โดยอ้อมนั้นอาจจะเป็นวิธีการที่ดีแต่ถ้าต้องสร้างกริดให้ครอบคลุมบริเวณที่ไม่ใช่โดเมนที่พิจารณาด้วยนั้นอาจจะดูไม่เหมาะเพราะจะเป็นการสิ้นเปลืองหน่วยความจำไปโดยเปล่าประโยชน์ สำหรับการคำนวณของ Lee และ Chiu (1992) ซึ่งใช้เทคนิคมัลติบล็อกนั้นก็ไม่มีการนำกลวิธีทางด้านการคำนวณแบบขนานมาใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุดซึ่งทราบกันดีว่าทั้งสองเทคนิคนั้นสามารถใช้ร่วมกันได้เป็นอย่างดียิ่งไปกว่านั้นงานด้านการคำนวณที่อ้างถึงจะมีการประมาณค่าพจน์การพาด้วยค่าอันดับของความแม่นยำอยู่ที่อันดับหนึ่ง (First-Order Discretisation) นั่นคือการใช้ผลต่างต้นลมอันดับหนึ่ง (First-Order Upwind Differencing) สำหรับพจน์การพาเหตุผลก็อาจจะเหมือนกันกับกรณีที่ผ่านมาที่อาจจะเกิดความยุ่งยากมากขึ้นกับเทคนิคการกันค่าหากต้องใช้การประมาณค่าที่อันดับความถูกต้องสูงซึ่งต้องใช้จุดใกล้เคียงที่ห่างออกไปมากกว่าหนึ่งจุด เพราะฉะนั้นการคำนวณในส่วนนี้จะเป็นการนำเทคนิคการคำนวณที่กล่าวถึงมาใช้ร่วมกันเพื่อให้การคำนวณนั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้นสำหรับคำนวณปัญหาการไหลในท่อแยกรูปตัวที

การคำนวณในหัวข้อที่ผ่านเป็นเพียงการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นในเบื้องต้นเท่านั้น สมรรถนะของการคำนวณในส่วนการคำนวณแบบขนานและเทคมัลติบล็อกที่ได้นั้นยังไม่ถือเป็นสัมฤทธิผลของวิธีการที่ใช้ เนื่องจากว่าโดเมนที่พิจารณายังมีลักษณะเรียบง่ายอยู่ กล่าวคือสามารถที่จะคำนวณได้ด้วยวิธีการดั้งเดิม ในหัวข้อนี้จะเป็นการคำนวณในโดเมนที่มีความซับซ้อนขึ้น ความยุ่งยากที่เกิดขึ้นคือการสร้างกริดแบบมีโครงสร้างเพียงชุดเดียวนั้นไม่อาจจะกระทำได้หรืออาจจะไม่เหมาะสมถ้าต้องสร้างกริดทับไปบนกรอบที่เป็นพื้นที่ส่วนใหญ่ให้ครอบคลุมโดเมนที่พิจารณาเพียงส่วนน้อยเพื่อที่จะใช้ "เทคนิคการกันค่า" (Block-off Technique) หรือด้วยการใช้การอ้างอิงโดยอ้อมสำหรับตำแหน่งของอัลเลย์ (Array) รายละเอียดของการคำนวณและผลการคำนวณจะได้อภิปรายดังต่อไปนี้

4.2.1 ลักษณะของปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

รูปที่ 4.9 แสดงลักษณะของการไหลในท่อแยกพร้อมทั้งการแบ่งบล็อก โดยจะมีการไหลเข้าท่อหลักด้วยอัตราการไหล Q_1 ไหลออกจากท่อแยกในแนวตั้งฉากที่อัตราการไหล Q_2 และไหลออกจากท่อหลักในแนวนอนด้วยอัตราการไหล Q_3 ซึ่งการไหลเข้าท่อจะกำหนดให้มีการไหลแบบเต็มรูป (Fully-Developed Flow) ส่วนการไหลออกนั้นจะกำหนดให้ค่าอนุพันธ์ขององค์ประกอบความเร็วในแกนนั้นเทียบกับพิกัดในแกนดังกล่าวมีค่าเท่ากับศูนย์นั่นคือ $\partial\phi/\partial n=0$ เมื่อ $\phi=u$ และ v และ n=x และ y ตามลำดับ สำหรับการคำนวณนั้นจะทำการคำนวณที่ค่า Re=496, 515, 525 และ 1,062 และจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าอัตราส่วนของการไหลออกที่ r =0.44, 0.23, 0.64 และ 0.58 ตามลำดับ เมื่อ $Re=\rho U_0(2L)/\mu$ และ $r=Q_2/Q_1$ โดยที่จะกำหนดให้ $\rho=L=U_0=1$ และเปลี่ยนแปลงค่า μ เพื่อให้ได้ค่า Re ตามที่ต้องการ ในรูปยังแสดงการแบ่งบล็อก ขนาดของบล็อกและหมายเลขกำกับบล็อก โดยที่บล็อกหมายเลข 1-9 และ 11-14 จะมีขนาดเท่ากับ 1x1 เมตร ในขณะที่บล็อก 10 และ 15 มีขนาดเท่ากับ 5x1 เมตร ซึ่งทุกบล็อกจะใช้กริดจำนวนเท่ากันคือ 41x41 จุด ซึ่งบล็อก 10 และ 15 ดูเหมือนว่าจะมีความหนาแน่นของกริดต่ำแต่ก็ไม่มีผลต่อค่าความถูกต้องของผลเฉลยเพราะบริเวณดังกล่าวจะมีค่าความชันของการเปลี่ยนแปลงที่ไม่มากเนื่องจากเป็นบริเวณทางออกซึ่งพฤติกรรมการไหลกำลังจะเข้าสู่ย่านการไหลแบบเต็มรูปแล้ว

4.2.2 ผลการคำนวณ

รูปที่ 4.10 แสดงเส้นระดับของความเร็วสำหรับแต่ละค่าของ Re และ r จะพบว่าเส้นมีความต่อเนื่องกันเป็นอย่างดีผ่านรอยต่อระหว่างบล็อกซึ่งชี้ให้เห็นว่าเทคนิคมัลติบล็อกที่ใช้นั้นไม่มีผลกระทบต่อผลการคำนวณแม้แต่บริเวณการแยกไหลซึ่งเป็นบริเวณที่มีความซับซ้อนของการไหลมากแต่เส้นระดับของความเร็วก็ยังลากผ่านบริเวณดังกล่าวอย่างต่อเนื่องสำหรับทุกค่าของ Re และ

รูปที่ 4.11 แสดงการเปรียบวัดค่าความเร็วที่แต่ละตำแหน่งตามแนวท่อหลักและตามแนวท่อแยกสำหรับ Re=496 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบผลการคำนวณของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นกับผลการทดลองของ Liepsch, Moravic, Rastogi และ Vlachos (1982) จะพบว่าผลการคำนวณสอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลการทดลองโดยจะมีความแตกต่างกันที่พอจะสังเกตุได้ระหว่างผลการทดลองกับผลการคำนวณคือบริเวณใกล้เคียงกับการแยกไหลซึ่งการไหลในบริเวณดังกล่าวจะมีพฤติกรรมการไหลเป็นแบบสามมิติเนื่องจากข้อมูลการทดลองที่นำมาเปรียบเทียบนั้นเป็นการทดลองแบบสามมิติ แต่ที่ระนาบสมมาตรตามแนวความลึกนั้นสามารถที่จะสมมุติได้ว่ามีพฤติกรรมการไหลเป็นแบบสองมิติได้หากมีค่าอัตราส่วนระหว่างความลึกต่อความกว้างหรือสูงของท่อนั้นมากพอ โดยยกเว้นที่บริเวณการแยกไหลซึ่งอาจจะมีพฤติกรรมเบี่ยงเบนไปจากสมมุติฐานดังกล่าว

4.2.3 สมรรถนะของการคำนวณแบบขนานร่วมกับการใช้ระเบียบวิธีมัลติกริด

การทดสอบในส่วนนี้จะทำการทดสอบโดยการประมวลผลด้วยจำนวนหน่วยประมวลผล (Processors) หรือ “โหนดคำนวณ” (Compute Node) ที่แตกต่างกันโดยจะมีการเปลี่ยนแปลงตั้ง 1-15 โหนด นั่นคือการใช้โหนดคำนวณเพียงโหนดเดียวนั้นการประมวลผลจะทำการคำนวณทุกบล็อกไปพร้อมกันโดยโหนดคำนวณดังกล่าวจะทำการการสร้างกระบวนการ (Process) จำนวน 15 กระบวนการ (Processes) ขึ้นมาโดยอัตโนมัติเพื่อรองรับกับจำนวนบล็อกทั้งหมด ในขณะที่ถ้าใช้โหนดคำนวณจำนวน 15 โหนดซึ่งจะเท่ากับจำนวนบล็อก ทำให้แต่ละโหนดคำนวณสร้างกระบวนการขึ้นมาเพียงหนึ่งกระบวนการเท่านั้น แต่สำหรับการใช้จำนวนโหนดคำนวณค่าอื่นนั้น หน่วยประมวลผลหลัก (Master Processor) จะทำการจัดสรรจำนวนงานหรือบล็อกให้แก่แต่ละโหนดคำนวณอย่างเท่าเทียมกันโดยอัตโนมัติ และเพื่อตัดปัญหาในเรื่องความไม่เท่าเทียมกันของปริมาณงานหรือบล็อก จะทำการประมวลผลโดยใช้จำนวนโหนดคำนวณเท่ากับ 1, 3, 5 และ 15 โหนดเท่านั้นเพื่อให้มีการจัดสรรปริมาณงานให้แก่แต่ละโหนดคำนวณได้อย่างลงตัว จากรูปที่ 12-15 เป็นการแสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=496, 515, 525 และ 1,062 ตามลำดับ โดยการคำนวณสำหรับ Re แต่ละค่าจะมีการเปลี่ยนแปลงจำนวนโหนดคำนวณตามที่ได้ระบุไว้ นอกจากนั้นในรูปยังมีการระบุแยกระหว่างการคำนวณโดยใช้กริดเพียงชุดเดียวและกริดจำนวนหลายชุดรวมอยู่ด้วย

เมื่อพิจารณาเฉพาะประสิทธิภาพการคำนวณของระเบียบวิธีมัลติกริด ค่า “การได้เปรียบเชิงเวลา” (Speed Up) SP นั้นสามารถวัดได้จากความแตกต่างระหว่างเส้นค่าเศษตกค้าง SG-1P และ MG-1P ยิ่งเส้นทั้งสองมีความแตกต่างหรือห่างกันมากเท่าใด ค่า SP ที่ได้ก็จะมีค่ามากขึ้นตามลำดับ ตามรูปที่ 12-15 ซึ่งจะมีการเพิ่มค่า Re ขึ้นตามลำดับ จะพบว่าความห่างกันของเส้นทั้งสองนั้นมากขึ้นตามการเพิ่มขึ้นของ Re นั่นคือค่า SP ก็เพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าถ้า Re มีค่าสูงขึ้นพฤติกรรมการไหลก็จะมีความซับซ้อนมากขึ้นด้วย ตารางที่ 4.1 ได้แสดงค่าการได้เปรียบ

เชิงเวลา SP ในรูปตัวเลข โดยที่ค่าการได้เปรียบเชิงเวลาในกรณีของระเบียบวิธีมัลติกริดอย่างเดียวนั้นได้แสดงในแถวที่มีการแรเงาและจะพบว่ามีค่ามากขึ้นตามค่า Re จากนั้นให้พิจารณารูปที่ 15 ซึ่งเป็นการคำนวณที่ค่า Re สูงที่สุดจะพบว่าค่า SP ที่ได้มีค่าสูงถึง 146 (ตามตารางที่ 4.1) โดยเพิ่มขึ้นสูงมากเมื่อเทียบกับการคำนวณที่ Re เท่ากับ 515 และ 525 จึงเป็นกรณีที่น่าสนใจ ดังนั้นจึงมีการทดสอบเพิ่มเติมโดยการเพิ่มจำนวนกริดจากเดิม 41x41 จุดเป็น 81x81 จุดในแต่ละบล็อก ผลการทดสอบเป็นไปตามรูปที่ 4.16 จะพบกว่าการคำนวณโดยใช้กริดเพียงชุดเดียวนั้นค่าเศษตกค้างมีแนวโน้มว่าจะไม่ลู่เข้าในขณะที่เมื่อประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดแล้วค่าเศษตกค้างกลับลู่เข้าในที่สุดตามเส้น MG-1P เพราะฉะนั้นจากผลการทดสอบที่ผ่านมาได้ชี้ให้เห็นว่าระเบียบวิธีมัลติกริดนอกจากจะเป็นตัวเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยแล้วยังช่วยรักษาเสถียรภาพของการคำนวณอีกด้วย

สำหรับสมรรถนะโดยรวมของการคำนวณแบบขนานร่วมกับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดนั้น ค่าการได้เปรียบเชิงเวลา SP จะเป็นอัตราส่วนระหว่างเวลาที่ใช้ในการคำนวณบล็อกทั้งหมดแบบเป็นลำดับทีละบล็อกและใช้กริดเพียงชุดเดียวด้วยหน่วยประมวลผลเพียงหน่วยเดียว (SG-1P)กับเวลาที่ใช้ในการคำนวณบล็อกทั้งหมดแบบขนานร่วมกับระเบียบวิธีมัลติกริดด้วยโหนดคำนวณจำนวนหลายโหนด ผลการทดสอบแสดงตามตารางที่ 4.1 ซึ่งแสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณพร้อมทั้งแสดงค่าการได้เปรียบเชิงเวลาในแต่ละกรณี รูปที่ 4.17 แสดงค่าการได้เปรียบเชิงเวลาเทียบกับจำนวนโหนดที่ใช้ในการคำนวณซึ่งเส้น SP ที่ Re เท่ากับ 515 และ 525 นั้นแทบจะทับกันดังนั้นเพื่อความสะดวกในการพิจารณาค่า SP ที่ Re เท่ากับ 525 นั้นจึงไม่ถูกแสดงโดยที่สมรรถนะของการคำนวณที่ Re เท่ากับ 525 นั้นจะตกลงเล็กน้อยจากการคำนวณที่ Re เท่ากับ 515 เนื่องจากว่ากรณีที่ Re เท่ากับ 525 นั้นมีอัตราส่วนของการไหลเท่ากับ 0.64 ซึ่งมากที่สุดนั่นแสดงว่ามีการไหลออกในท่อแยกมากกว่าปกติซึ่งขัดกับธรรมชาติของการไหลที่การไหลตรงไปตามท่อหลักนั้นจะสะดวกกว่าและอีกประการที่อาจจะมีผลกระทบเพราะเมื่อมีการไหลออกทางท่อแยกมากขึ้นการไหลจะมีพฤติกรรมเป็นสามมิติมากขึ้นตามไปด้วย รูปที่ 4.17 ได้แสดงให้เห็นว่าการคำนวณมีสมรรถนะสูงที่สุดที่ Re เท่ากับ 1,062 เนื่องจากว่าค่า SP นั้นอ้างอิงกับเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยกริดเพียงชุดเดียวจึงเป็นการเน้นย้ำอีกว่าระเบียบวิธีมัลติกริดนั้นเป็นตัวเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยที่ดีแม้ว่าการไหลจะมีพฤติกรรมที่ซับซ้อนก็ตาม

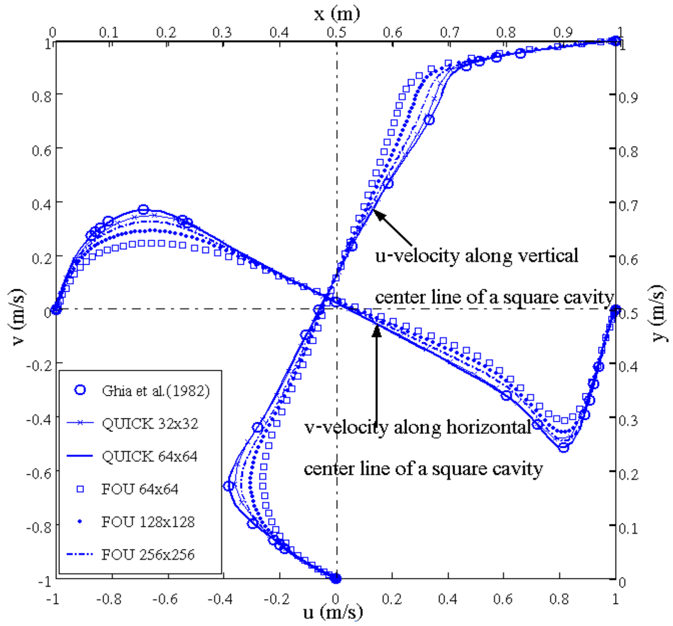
4.2.4 สรุปผลการคำนวณ

การคำนวณในส่วนนี้ถือเป็นการทดสอบความสามารถของเทคนิคมัลติบล็อกที่นำมาใช้ได้เป็นอย่างดีเนื่องจากรูปทรงของปัญหาหรือโดเมนที่พิจารณานั้นไม่สามารถที่จะสร้างกริดแบบมีโครงสร้างเพียงชุดเดียวได้อย่างเหมาะสม แม้ว่าโดเมนจะมีความซับซ้อนขึ้นจากการคำนวณในหัวข้อที่แล้วแต่ผลการคำนวณก็ได้แสดงให้เห็นถึงศักยภาพของเทคมัลติบล็อกที่ใช้ อย่างเช่นเส้น

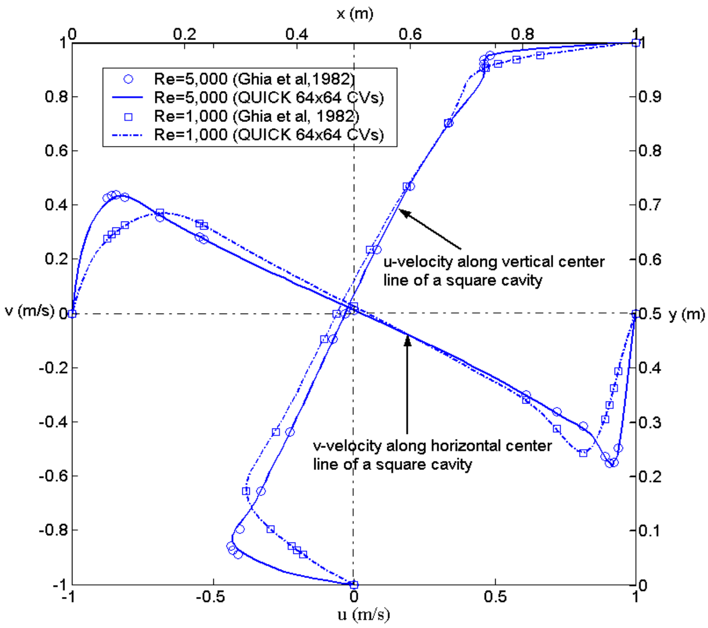
ระดับของความเร็วที่ลากผ่านรอยต่อระหว่างบล็อกได้อย่างราบเรียบไม่มีการกระโดดแม้กระทั่งบริเวณการแยกไหล ซึ่งบริเวณดังกล่าวจะมีพฤติกรรมการไหลเป็นสามมิติและผลการคำนวณในส่วนนี้ก็เน้นย้ำว่าระเบียบวิธีมัลติดกริดนั้นนอกจากจะเป็นตัวเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยที่ดีแล้วยังช่วยรักษาเสถียรภาพในการคำนวณอีกด้วยแม้ว่าการไหลจะมีค่าตัวเลขเรโนลด์สูงก็ตาม

4.3 สรุป

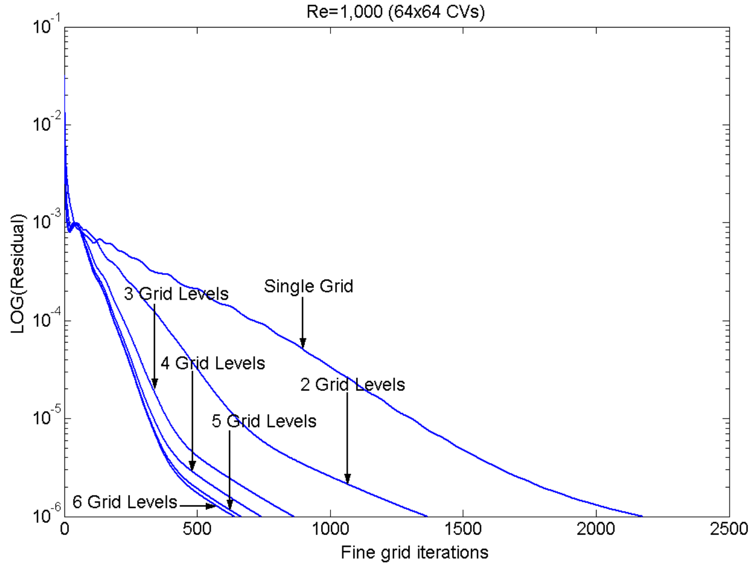
การคำนวณในหัวข้อ 4.1 เป็นการคำนวณการไหลในโพรงจัตุรัสซึ่งโดเมนมีลักษณะเรียบง่ายโดยเพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องโปรแกรมในเบื้องต้น อีกทั้งยังเป็นการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมและทดสอบความถูกต้องของผลเฉลยเมื่อมีการประมาณค่าพจน์การพาด้วยวิธีที่ต่างกันโดยผลการทดสอบที่ได้จะถูกนำมาใช้สำหรับคำนวณปัญหาในหัวข้อ 4.2 ซึ่งเป็นการคำนวณการไหลในต่อแยกรูปตัวทีซึ่งโดเมนที่พิจารณาจะมีความซับซ้อนมากขึ้น ผลการการคำนวณและการทดสอบทั้งหมดได้ชี้ให้เห็นว่าเทคนิคมัลติบล็อกหรือเทคนิคการแบ่งโดเมนนั้นสามารถประยุกต์ใช้ร่วมกับการคำนวณแบบขนานได้เป็นอย่างดีและการคำนวณจะมีสมรรถนะสูงขึ้นเมื่อมีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดเข้ากับแต่ละบล็อกหรือแต่ละโดเมนย่อย อย่างไรก็ตามการคำนวณในบทนี้เป็นการคำนวณปัญหาการไหลแบบราบเรียบผลกระทบหรือผลข้างเคียงอย่างอื่นมีไม่มาก การคำนวณจึงให้สมรรถนะที่ดีและได้ผลการคำนวณที่ถูกต้องสูง ในบทต่อไปจะได้แสดงให้เห็นถึงผลกระทบบางประการที่มีผลต่อค่าความถูกต้องของโปรแกรมและสมรรถนะของการคำนวณ



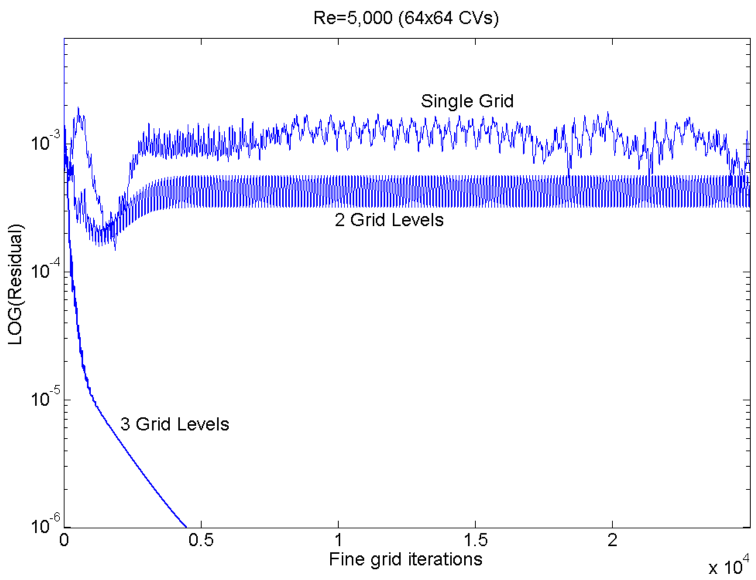
รูปที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วโดยใช้การประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK และ FOU ที่จำนวนกริดตกต่างกันเทียบกับผลการคำนวณของ Ghia, Ghia และ Shin (1882) ที่ Re=1,000



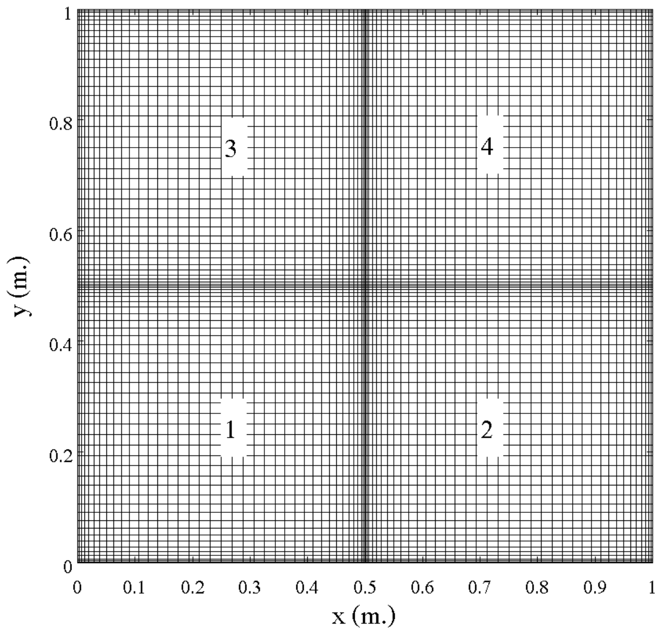
รูปที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็วโดยใช้การประมาณค่าพจน์การพาแบบ QUICK และ FOU ที่ Re=1,000 และ 5,000 เทียบกับผลการคำนวณของ Ghia et al (1882)



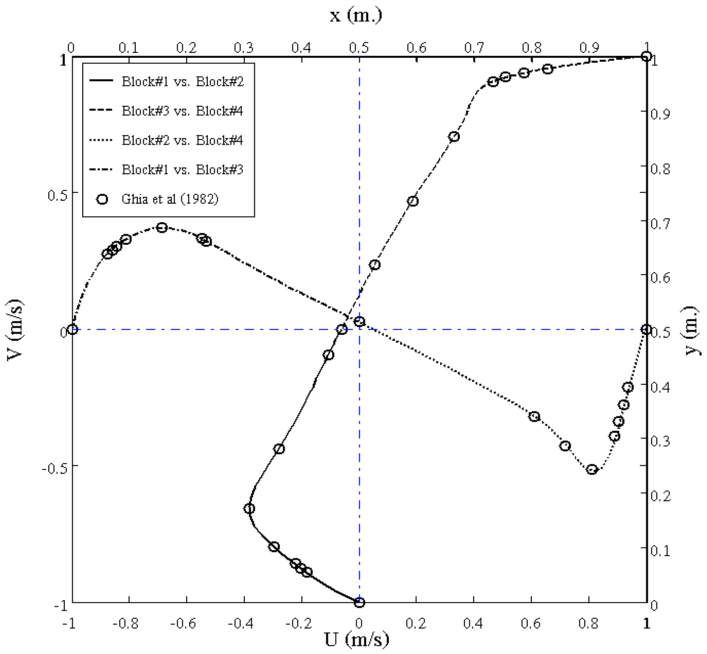
รูปที่ 4.3 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้จำนวนระดับของกริดที่แตกต่างกัน เมื่อคำนวณที่ Re=1,000 จำนวนกริดที่ใช้เท่ากับ 65x65 จุด



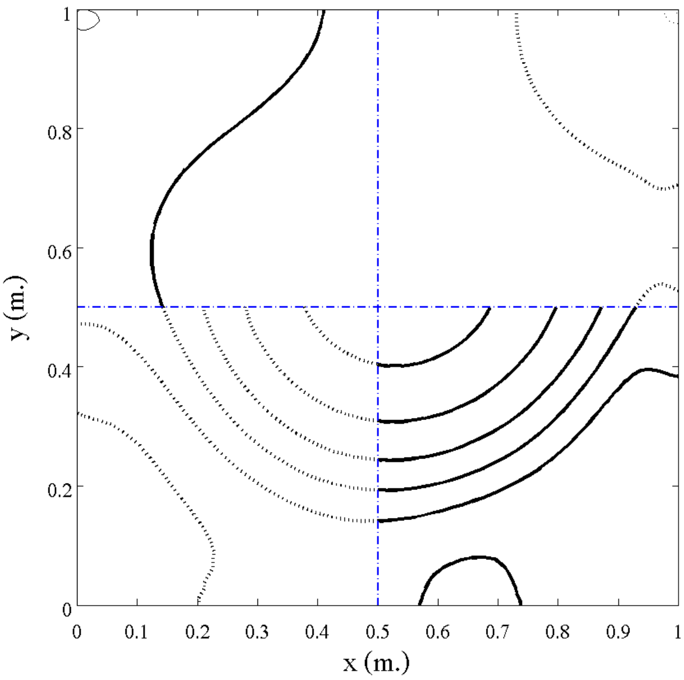
รูปที่ 4.4 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้จำนวนระดับของกริดที่แตกต่างกัน เมื่อคำนวณที่ Re=5,000 จำนวนกริดที่ใช้เท่ากับ 65x65 จุด



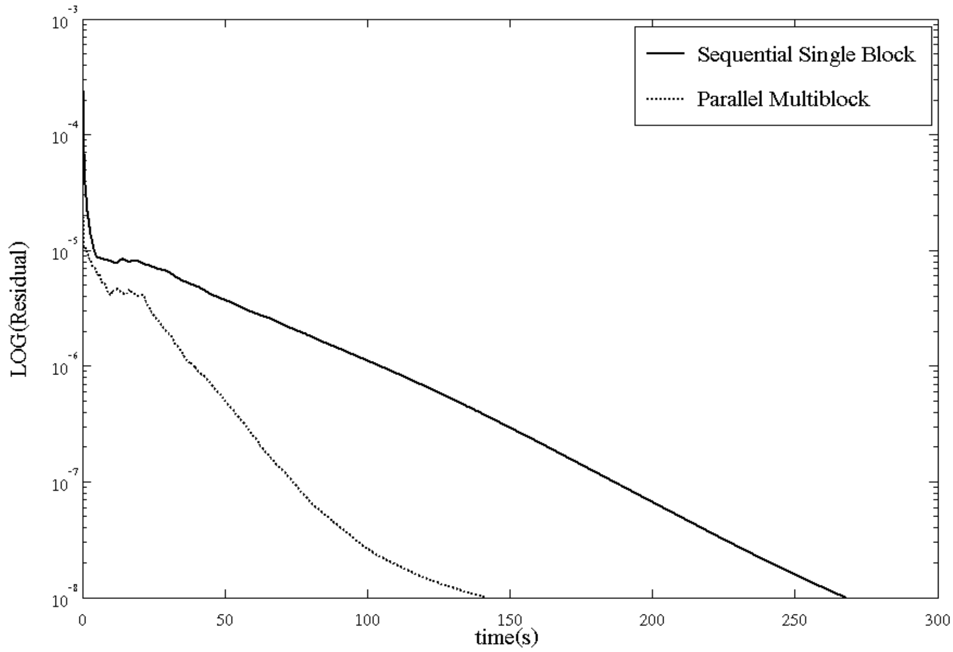
รูปที่ 4.5 แสดงการสร้างกริดบนโดเมนย่อยจากการแบ่งโดเมนหลักออกเป็นสี่ส่วน



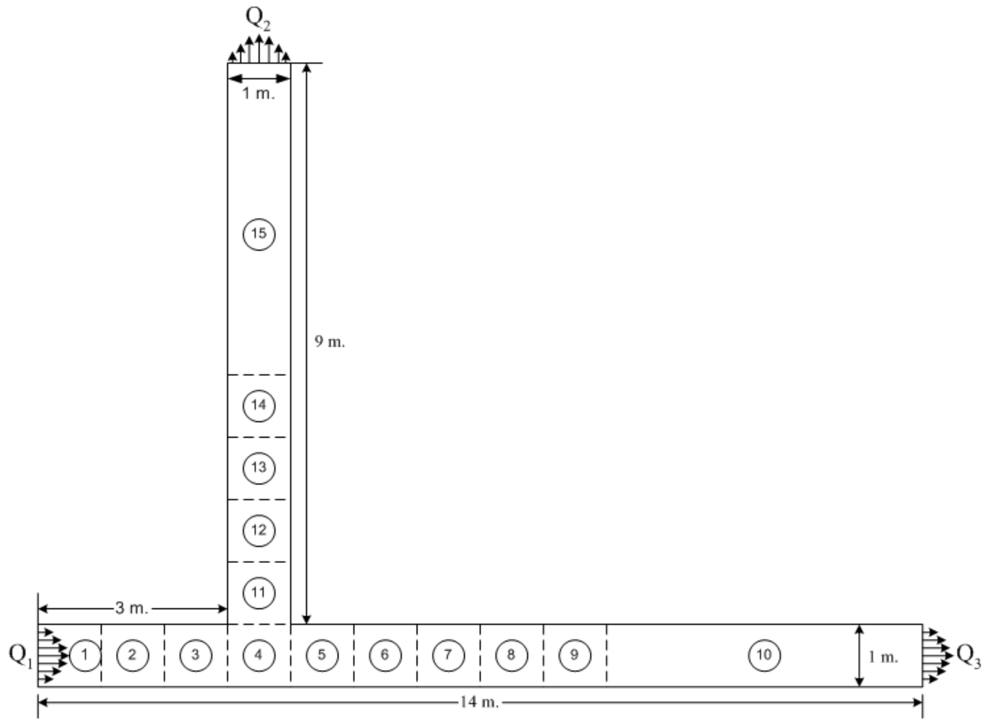
รูปที่ 4.6 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณตรงรอยต่อระหว่างโดเมนย่อย
กับผลการคำนวณของ Ghia et al (1982)



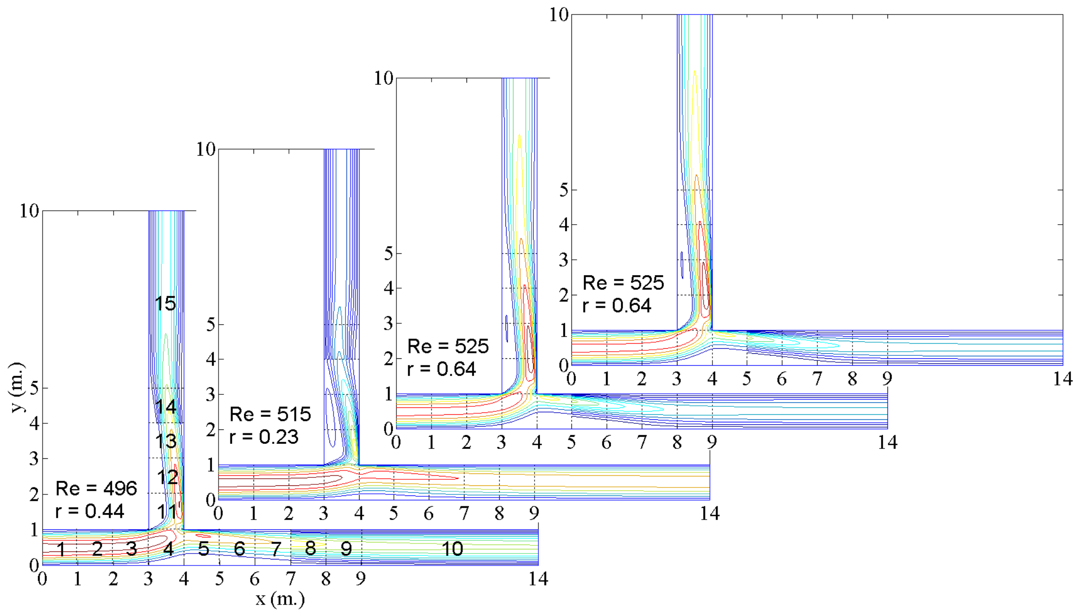
รูปที่ 4.7 แสดงเส้นระดับของความดันเมื่อลากผ่านรอยต่อระหว่างโดเมน



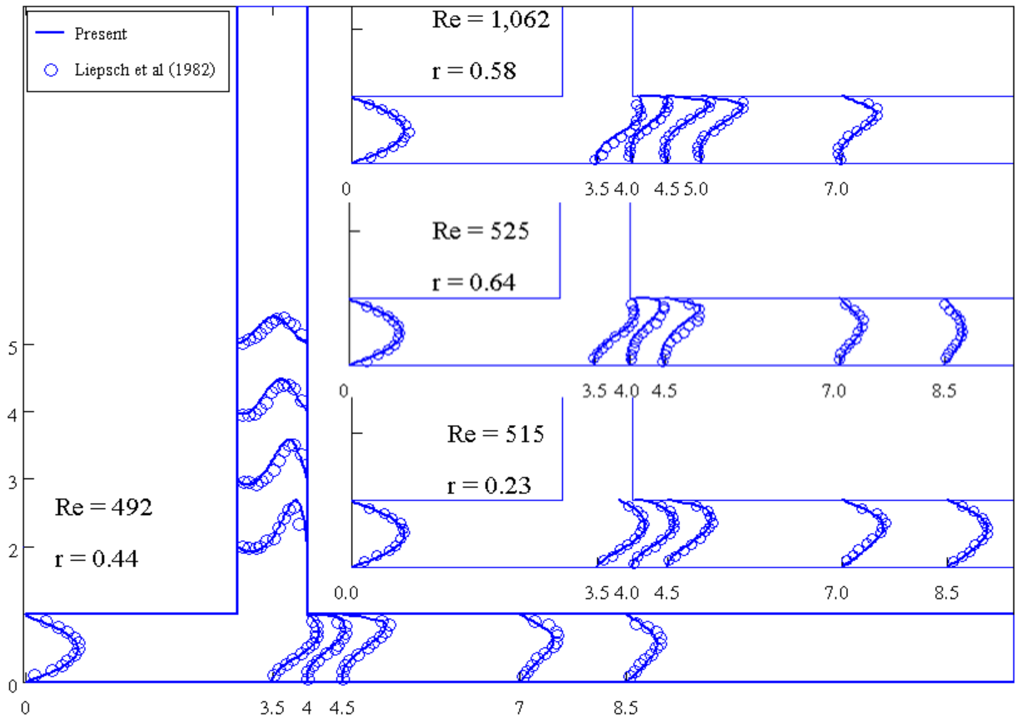
รูปที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบการลดลงของค่าเศษตกค้างต่อเวลาของ
การคำนวณระหว่างการคำนวณแบบหนึ่งโดเมนหลัก
และคำนวณแบบขนานสำหรับหลายโดเมนย่อย



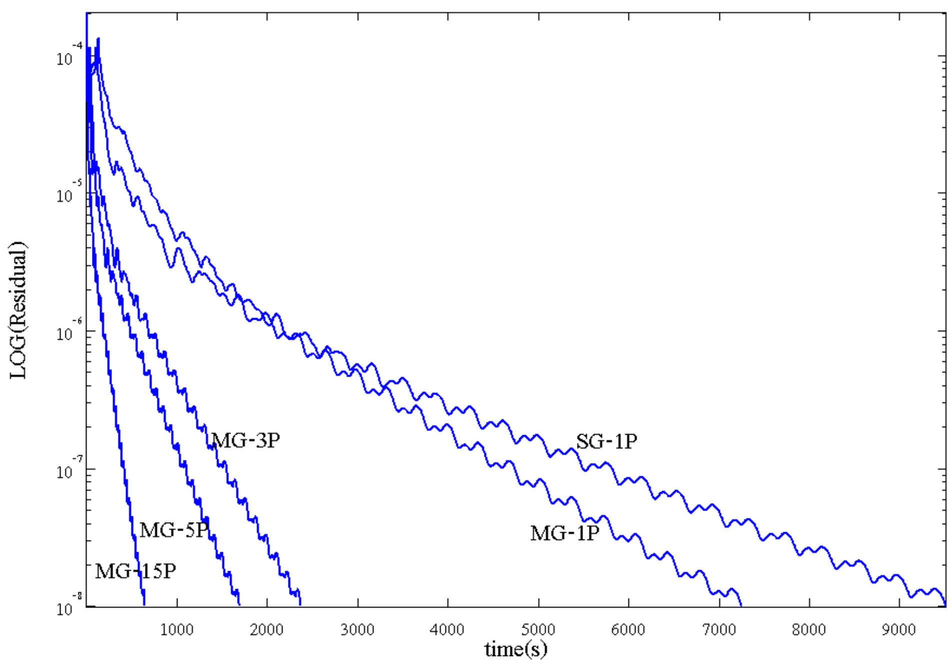
รูปที่ 4.9 แสดงขนาดโดเมนของท่อแยกรูปตัวทีพร้อมทั้งแสดงการแบ่งบล็อกหมายเลขกำกับบล็อกและลักษณะการไหล



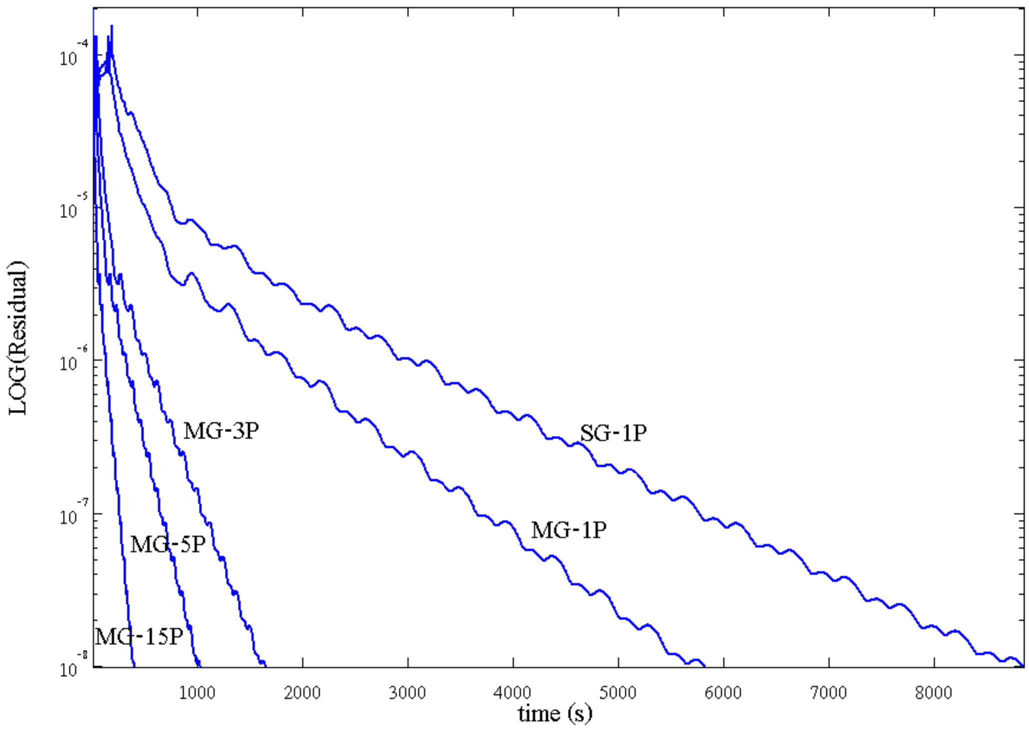
รูปที่ 4.10 แสดงเส้นระดับของความเร็วที่ Re และ r แต่ละค่า



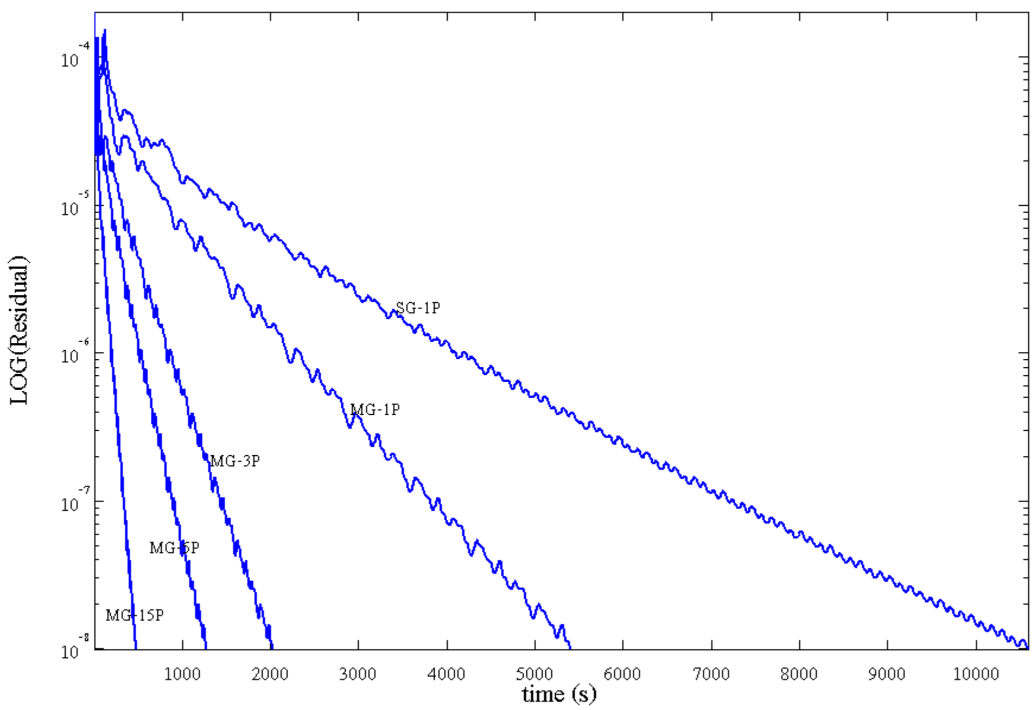
รูปที่ 4.11 แสดงการเปรียบวัดผลการคำนวณกับผลการทดลองของความเร็วที่แต่ละตำแหน่งตามแนวท่อหลักและท่อแยก



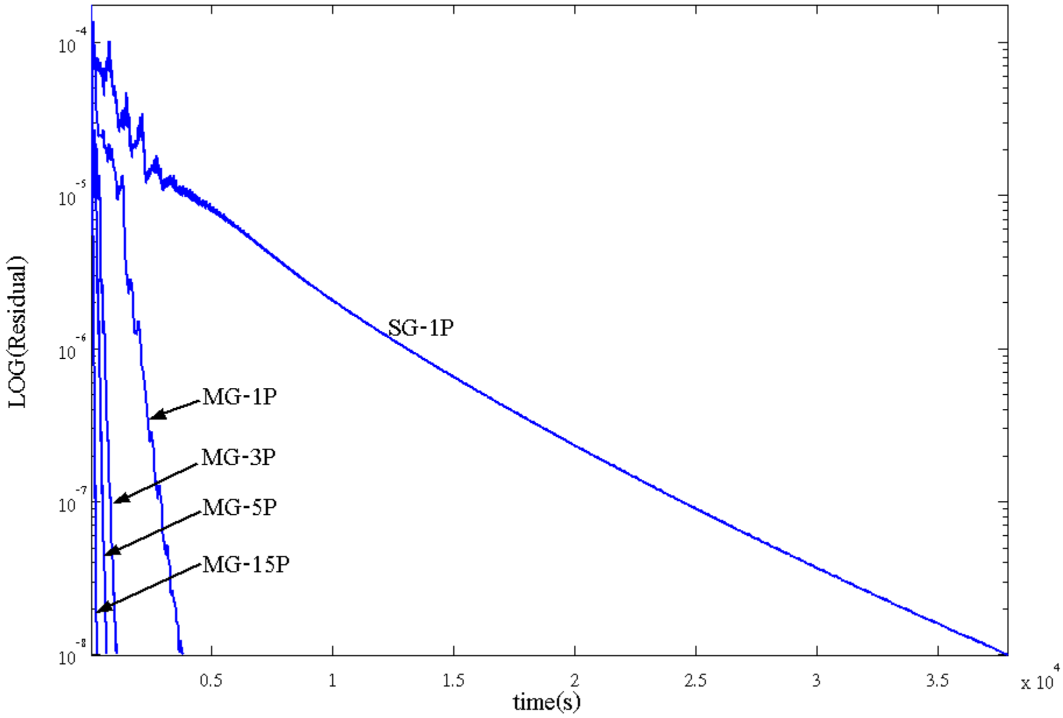
รูปที่ 4.12 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=496 และ r=0.44



รูปที่ 4.13 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=515 และ r=0.23



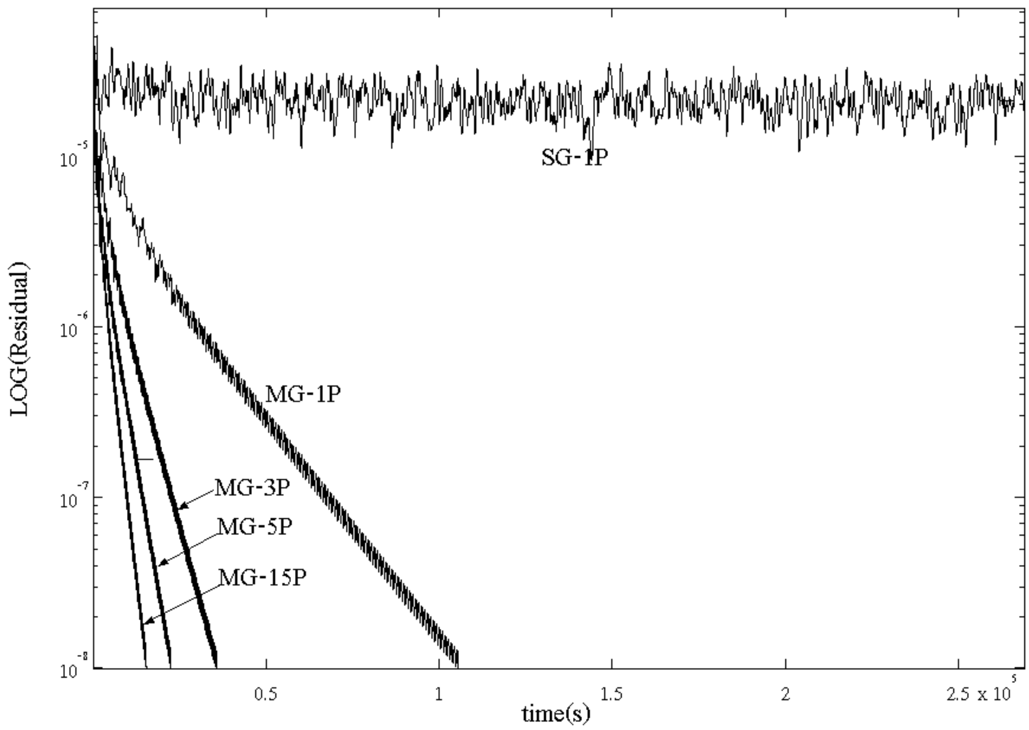
รูปที่ 4.14 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=525 และ r=0.64



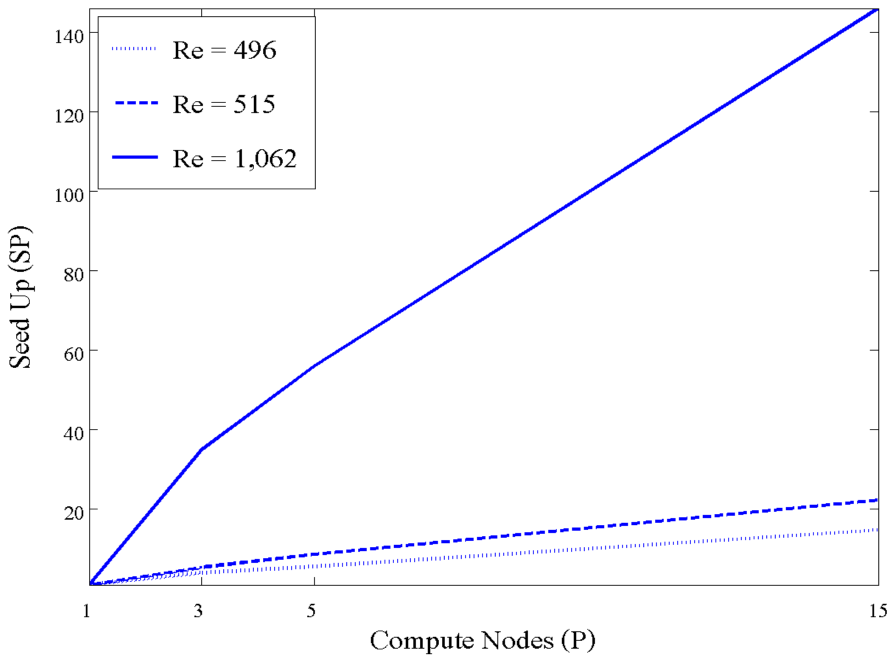
รูปที่ 4.15 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=1,062 และ r=0.58

ตารางที่ 4.1 แสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณและค่าการได้เปรียบเชิงเวลาสำหรับ Re แต่ละค่า

Level-Node	Re=496, r=0.44		Re=515, r=0.23		Re=525, r=0.64		Re=1,062, r=0.58	
	เวลา (s)	SP	เวลา (s)	SP	เวลา (s)	SP	เวลา (s)	SP
SG-1P	9,516.6	1	8,852.6	1	10,587	1	37,880	1
MG-1P	7,252.7	1.31	5,823.7	1.52	5,404.0	1.96	3,823.8	10
MG-3P	2,371.6	4.01	1,645.3	5.38	2,023.4	5.23	1,081.5	35
MG-5P	1,692.2	5.62	1,024.4	8.64	1,270.8	8.33	673.72	56
MG-15P	645.02	14.8	396.28	22.34	475.25	22.3	258.35	146



รูปที่ 4.16 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาที่ Re=1,062 และ r=0.58 เมื่อทำการเพิ่มจำนวนกริดขึ้นเป็นสองเท่าโดยเพิ่มเป็น 81x81 จุด จากเดิม 41x41 จุด



รูปที่ 4.17 แสดงค่าการได้เปรียบเชิงเวลาในการคำนวณที่ Re แต่ละค่า

บทที่ 5
การไหลคงตัวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวที่อุณหภูมิคงที่
(Steady Turbulent and Incompressible Isothermal Flow)

บทที่ผ่านมาเป็นการคำนวณปัญหาการไหลแบบราบเรียบซึ่งมีพฤติกรรมที่ไม่ซับซ้อนมาก ผลกระทบที่มีต่อสมรรถนะและความถูกต้องของการคำนวณจึงยังไม่แสดงออกมาให้เห็นอย่างชัดเจน ซึ่งโดยปกติแล้วการไหลที่พบในชีวิตประจำวันหรือในงานอุตสาหกรรมส่วนใหญ่จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งพฤติกรรมที่บริเวณชั้นชิดผิวจะมีความซับซ้อนและมีการเปลี่ยนแปลงที่รุนแรงกว่าการไหลแบบราบเรียบมาก ซึ่งความปั่นป่วนนี้ยังไม่สามารถหาคำตอบที่เป็นผลเฉลยแม่นตรงได้ จึงมีแต่เพียงการจำลองให้ได้ผลที่ใกล้เคียงเท่านั้น ดังนั้นผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขจึงอาจจะถูกต้องไม่มากนักเมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณปัญหาการไหลแบบราบเรียบ เพราะฉะนั้นในบทนี้จะเป็นการคำนวณปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งจะเกี่ยวข้องกับสมการของแบบจำลองความปั่นป่วนที่จะต้องแก้สมการเพิ่มโดยแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ในบทนี้ได้แก่แบบจำลอง k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) ปัญหาที่จะทำการคำนวณในบทนี้จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการแยกไหล การหมุนวน และการตกกระทบของของไหล ซึ่งพบมากในอุปกรณ์ทางวิศวกรรมซึ่งการแยกไหลและการหมุนวนนี้จะมีผลทั้งในการเพิ่มประสิทธิภาพและลดประสิทธิการทำงานของอุปกรณ์บางอย่างได้ ปัญหาในลักษณะนี้ที่ใช้สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขที่พบบ่อยได้แก่การไหลผ่านขั้นกลับหลัง (Backward-Facing Step) และการไหลในช่องขนานมีครีบติดตั้ง (Channel Flow with Mounted Rib) ซึ่งจะเป็นการจำลองแบบมาจากอุปกรณ์ทางวิศวกรรมเพื่อให้มีรูปทรงที่ง่ายขึ้นสะดวกต่อการแก้ปัญหาเชิงตัวเลข ดังนั้นในบทนี้จึงเป็นการคำนวณปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่านขั้นกลับหลังและผ่านช่องขนานที่มีครีบติดตั้งอยู่ที่ผนังด้านล่างเพื่อศึกษาถึงผลกระทบที่มีต่อความถูกต้องและสมรรถนะของโปรแกรม

5.1 การไหลผ่านขั้นกลับหลัง

การแยกไหลและการตกกระทบของการไหลแบบปั่นป่วนนั้นเกิดขึ้นในการประยุกต์ใช้งานทางวิศวกรรมจำนวนมาก ทั้งการไหลภายในระบบและการไหลภายนอก การไหลภายในอย่างเช่นในท่อบานออก (Diffusers) ระบบการเผาไหม้ และท่อที่มีการเปลี่ยนแปลงของหน้าตัดอย่างเฉียบพลัน ส่วนการไหลภายนอกนั้นก็อย่างเช่นการไหลรอบแพนอากาศ และรอบอาคาร โดยการ

แยกไหลนี้การไหลจะพบกับ “ความดันกระแสสวนกลับ” (Adverse Pressure) นั่นคือความดันจะเพิ่มขึ้นในทิศทางของการไหลส่งผลให้ชั้นชิดผิวโตขึ้นและของไหลจะมีการสูญโมเมนตัมในปริมาณที่มากเกินขีดจำกัดในชั้นชิดผิวที่โตขึ้นเรื่อย ๆ ทำให้ของไหลแยกออกจากพื้นผิวของผนังไปในที่สุด และจากนั้นของไหลก็จะตกกระทบผนังที่ปลายกระแสอีกครั้งเมื่อสะสมโมเมนตัมได้มากพอทำให้เกิดฟองของการไหลวน ในการศึกษาการไหลในลักษณะนี้ที่พบมากจะเป็นการศึกษาการไหลผ่านขั้นกลับหลัง ซึ่งจะเป็นหัวข้อสำหรับทำการคำนวณต่อไปนี้

5.1.1 ลักษณะปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

ลักษณะโดเมนที่จะพิจารณาสำหรับการคำนวณในส่วนนี้แสดงตามรูปที่ 5.1 ซึ่งเป็นแผนภาพแสดงการแบ่งโดเมนของรูปขั้นกลับหลัง (Backward-Facing Step) ออกเป็นโดเมนสี่เหลี่ยมย่อยจำนวน 3 โดเมนโดยขนาดของโดเมนจะแปรเปลี่ยนไปตามค่าความสูงของขั้น h รูปที่ 5.2 เป็นการสร้างกริดแบบมีโครงสร้างในโดเมนย่อยแต่ละส่วน การคำนวณปัญหาในส่วนนี้จะอ้างอิงกับการคำนวณของ Le, Moin และ Kim (1997) โดยเป็นการคำนวณด้วยวิธีการแก้สมการนาเวียร์สโตคโดยตรงหรือวิธี DNS ที่ Re_h=5,000 ซึ่งการคำนวณของ Le และคณะ (1997) นั้นจะทำการคำนวณบนโดเมนที่มีลักษณะตรงกันกับ Block2 รวมกับ Block3 ของรูปที่ 5.1 เท่านั้นโดยที่เงื่อนไขตรงทางเข้า (ทางด้านซ้ายของ Block2) จะนำผล DNS ของ Spalart (1988) ซึ่งเป็นการคำนวณปัญหาการไหลบนแผ่นเรียบที่ Re_θ=670 มาทำการประมาณค่าในช่วงนั่นคือการนำข้อมูล DNS มาใช้เป็นเงื่อนไขที่ทางเข้านั่นเอง แต่สำหรับการคำนวณที่จะนำเสนอนี้ซึ่งได้ทราบมาแล้วว่าเป็นการคำนวณค่าเฉลี่ยต่อเวลาของสมการนาเวียร์สโตคการนำข้อมูล DNS มาใช้เป็นเงื่อนไขที่ทางเข้านั้นทำได้ยากเนื่องจากไม่ทราบค่าคุณลักษณะบางตัวของการไหลจึงไม่สามารถที่จะแปลงตัวแปรที่ต้องการที่อยู่ในรูปพิกัดผนัง (Wall Coordinate) หรือ y^+ ให้อยู่ในรูปตัวแปรอิสระได้ วิธีการดั้งเดิมที่ใช้โดยมากจะทำการคำนวณ Block1 และกำหนดเงื่อนไขของการคำนวณให้มีลักษณะเดียวกันกับปัญหาการไหลบนแผ่นเรียบจนเสร็จสิ้นเสียก่อนจากนั้นนำผลเฉลยที่ทางออกของ Block1 มาเป็นเงื่อนไขที่ทางเข้าของ Block2 แต่เนื่องด้วยความสามารถของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนั้นการคำนวณทั้งสองส่วนสามารถที่จะทำร่วมกันและพร้อมกันได้ด้วยกรรมวิธีการคำนวณแบบขนาน

การคำนวณนั้นจะดำเนินการที่ Re_h=5,000 โดยค่า h สามารถกำหนดเป็นค่าใดก็ได้ตามความเหมาะสม เมื่อกำหนดค่า h แล้วก็สามารถหาค่า U_0 ได้จาก Re_h=5,000 และเมื่อได้ค่า U_0 แล้วนำไปแทนใน Re_θ=670 ก็จะทราบค่า θ จากนั้นอ้างความสัมพันธ์ระหว่าง “ชั้นความหนาของโมเมนตัม” (Momentum Thickness) กับการกระจายตัวของความเร็วในชั้นชิดผิวตามสมการ(5.1)

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0}\left(1-\frac{u}{U_0}\right)dy \tag{5.1}$$

แล้วใช้ความสัมพันธ์ "การกระจายตัวของความเร็วแบบกฎหนึ่งส่วนเจ็ด" (One-Seven-Law Velocity Profile) ตามสมการ (5.2)

$$\left(\frac{u}{U_0}\right)_{turb} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \tag{5.2}$$

ก็จะทำให้ทราบค่าความหนาของชั้นชิดผิว (Boundary Layer Thickness) δ จากนั้นนำไปแทนในความสัมพันธ์ของความหนาชั้นชิดผิวตามสมการ (5.3)

$$\frac{\delta}{L} = \frac{0.16}{\mathrm{Re}_L^{1/7}} \tag{5.3}$$

ก็จะทำให้ทราบค่าความยาวของแผ่นเรียบ L (ตามรูปที่ 5.1) เพื่อที่จะทำให้ค่าของผลเฉลยตรงทางออกของ Block1 นั้นสอดคล้องกับข้อกำหนดในการคำนวณ

5.1.2 ผลการคำนวณ

ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมนั้น ในเบื้องต้นจะทำการตรวจสอบผลเฉลยที่ใช้เป็นเงื่อนไขตรงทางเข้าของ Block2 เสียก่อน นั่นคือเป็นการเปรียบวัดความถูกต้องของผลการคำนวณในปัญหาการไหลบนแผ่นเรียบซึ่งก็คือผลเฉลยตรงทางออกของบล็อก 1 นั่นเอง ผลการคำนวณในส่วนนี้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ DNS ในปัญหาการไหลบนแผ่นเรียบของ Spalart (1988) ที่ Re_θ=670 ซึ่งแสดงผลการเปรียบเทียบตามรูปที่ 5.3 จะพบว่าผลเฉลยที่ได้นั้นอยู่ในระดับที่ยอมรับได้และสามารถที่นำไปใช้เป็นเงื่อนไขที่ทางเข้าของ Block2 ได้ จากนั้นทำการพิจารณาการไหลผ่านขั้นกลับหลัง ผลการคำนวณที่อยู่ในรูปเส้นกระแสการไหล (Stream Line) และลูกศรความเร็วแสดงตามรูปที่ 5.4 และ 5.5 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาเส้นกระแสการไหลตามรูปที่ 5.4 นั้นจะพบว่าเส้นมีความต่อเนื่องผ่านรอยต่อระหว่างบล็อกซึ่งอยู่บนขั้นได้เป็นอย่างดี แม้ว่าจะมีการเยื้องกันของกริดตามรูปที่ 5.2 ก็ตาม สำหรับตำแหน่งที่ของไหลตกกระทบผนัง (Reattachment Point) หลังจากที่มีการแยกไหลที่ขั้นนั้นผลการคำนวณที่ได้คือ x/h≈5.4 เมื่อพิจารณา

จากตำแหน่งที่ความเค้นเฉือนที่ผนังมีค่าเป็นศูนย์ตามรูปที่ 5.6 ซึ่งจุดตกกระทบที่ได้จากการคำนวณนั้นจะต่ำกว่าผลการทดลองของ Jovic และ Driver (1994) โดยค่าที่ได้อยู่ระหว่าง 6.0 และ 6.1 ในขณะที่ผล DNS ของ Le และคณะ (1997) ได้เท่ากับ 6.28 ซึ่งสูงกว่าผลการทดลอง จุดตกกระทบที่คำนวณได้ต่ำกว่าผลการทดลองนั้นสาเหตุหลักไม่น่าจะเกิดจากความหนาแน่นของกริดบริเวณผนัง เพราะเมื่อพิจารณาจากค่า y^+ ตามรูปที่ 5.6 แล้วพบว่ามีค่าน้อยกว่า 1 ซึ่งสอดคล้องกับข้อกำหนดในการใช้แบบจำลองความปั่นป่วนสำหรับค่าเลขเรย์โนลด์ต่ำ ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นน่าจะเป็นผลมากจากความสามารถของแบบจำลองที่ใช้ในการทำนายผลการไหลที่มีการแยกไหลและการตกกระทบมากกว่า สำหรับผลการคำนวณค่าองค์ประกอบความเร็วในแนวการไหลตามระยะความสูงที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในแนวการไหลนั้นได้แสดงตามรูปที่ 5.7 ซึ่งทำการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณ DNS ของ Le และคณะ (1997) และผลการทดลองของ Jovic และ Driver (1994) ผลการคำนวณที่ได้สอดคล้องกันดีกับผล DNS และผลการทดลอง ซึ่งค่าความเร็วของ “กระแสอิสระ” (Free Stream) อาจจะสูงกว่าทั้งผล DNS และผลการทดลองเล็กน้อยซึ่งน่าจะเกิดจากการกำหนดค่าความยาว L ที่ไม่เหมาะสมส่งผลให้ได้ค่าความหนาชั้นชิดผิวและค่าความหนาของโมเมนตัมไม่สอดคล้องกับผล DNS ของ Spalart (1988) และที่ x/h=4 ผลการทำนายความเร็วที่บริเวณผนังเบี่ยงเบนไปจากผลการทดลองจนสังเกตุได้เนื่องจากบริเวณดังกล่าวอยู่ในบริเวณของการหมุนวน ซึ่งอาจจะมีผลกระทบต่อความสามารถในการทำนายผลของแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้

5.1.3 การประเมินสมรรถนะของการคำนวณ

รูปที่ 5.8 แสดงการลดลองของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาของการคำนวณด้วยกริดชุดเดียวและกริดหลายชุด จะพบกว่าประสิทธิภาพของระเบียบวิธีมัลติกริดในกรณีการไหลแบบปั่นป่วนนี้ไม่สูงมากนักจากรูปจะพบว่าสามารถลดเวลาในการคำนวณได้ไม่ถึงสองเท่า รูปที่ 5.9 แสดงสมรรถนะทางด้านการคำนวณแบบขนานเมื่อเปรียบเทียบกับการคำนวณแบบตามลำดับ ซึ่งจะพบว่าสามารถลดเวลาลงได้มากกว่าสามเท่า และจากรูปยังได้แสดงการเปรียบเทียบระหว่างการคำนวณแบบขนานด้วยหน่วยประมวลผลเพียงเครื่องเดียวกับการคำนวณแบบตามลำดับด้วยหน่วยประมวลผลเพียงเครื่องเดียวจะพบว่าเส้นการลดลงของค่าเศษตกค้างแทบจะไม่แตกต่างกันซึ่งชี้ให้เห็นว่าเวลาที่ใช้ในการส่งผ่านข้อมูลระหว่างบล็อกหรือระหว่างกระบวนการนั้นน้อยมากเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ในการคำนวณหลัก

5.1.4 สรุปผลการคำนวณ

จากผลการคำนวณที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นถึงความยุ่งยากในการคำนวณปัญหาการไหลแบบปั่นป่วน ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมหรือเทคนิคใหม่ ๆ และวิธีการที่

คิดค้นขึ้นนั้นไม่อาจจะกระทำได้โดยตรงเหมือนกรณีการไหลแบบราบเรียบ เนื่องจากเงื่อนไขที่ขอบเขตนั้นไม่สามารถกำหนดได้อย่างตรงไปตรงมาอาจจะต้องพึ่งข้อมูลการทดลองหรือข้อมูล DNS สำหรับผลการคำนวณในกรณีนี้นั้นผลที่ได้อยู่ในระดับที่น่าพอใจ ความแตกต่างที่เห็นได้อย่างชัดเจนระหว่างผลการคำนวณกับผลการทดลองนั้นอยู่ในบริเวณที่มีการไหลวนซึ่งน่าจะเป็นผลมาจากขีดความสามารถของแบบจำลองความปั่นป่วนในการทำนายการไหลที่มีการแยกไหลและการไหลวน และจากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีมัลติกริดจะพบว่าการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะกระทบต่อประสิทธิภาพของระเบียบวิธีมัลติกริดโดยสามารถลดจำนวนรอบในการคำนวณลงได้ไม่ถึงสองเท่า

5.2 การไหลผ่านช่องขนานที่มีครีบติดตั้งอยู่ที่ผนังด้านล่าง

สำหรับการไหลในกรณีนี้เป็นการเพิ่มครีบไปติดตั้งตรงช่องทางการไหลหลักหรือเพื่อเป็นการกีดขวางการไหลเพื่อบังคับทิศทางการไหลให้มีการไหลวนไปอย่างทั่วถึง โดยในกรณีที่จะนำเสนอนี้จะทำการติดตั้งครีบไว้ที่ผนังด้านล่างของช่องขนานซึ่งจะทำให้เกิดการแยกไหลและการไหลวนเมื่อผ่านครีบซึ่งจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการแลกเปลี่ยนความร้อน สำหรับการคำนวณในส่วนนี้จะยังไม่กล่าวถึงการถ่ายเทความร้อนซึ่งจะทำการศึกเฉพาะผลกระทบของการแยกไหลและการไหลวนที่มีผลต่อความถูกต้องของผลเฉลยและประสิทธิภาพในการคำนวณเท่านั้น โดยมีลายระเอียดดังต่อไปนี้

5.2.1 ลักษณะปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

ลักษณะโดเมนของปัญหาสำหรับการคำนวณในหัวข้อนี้ได้แสดงเป็นแผนภาพตามรูปที่ 5.10 ซึ่งมีลักษณะเป็นท่อยาวแบบสองมิติหรือเป็นช่องขนานโดยมีครีบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสติดตั้งอยู่ที่ผนังด้านล่าง โดยที่ช่องขนานจะมีความยาว L เท่ากับ 1,016 มิลลิเมตรและมีความสูง D เท่ากับ 61 มิลลิเมตร ในขณะที่ครีบมีขนาด H=W=6.36 มิลลิเมตรถูกติดตั้งอยู่ที่ตำแหน่ง l=95.25 มิลลิเมตร โดยความเร็วเฉลี่ย U_0 ที่ทางเข้าช่องขนานมีค่าเท่ากับ 3.6 เมตรต่อวินาที ซึ่งความเร็วที่ทางเข้าช่องขนานจะถูกกำหนดให้มีการกระจายตัวเป็นการไหลเต็มรูปแบบปั่นป่วน โดยถ้า $y/\delta<1$ และ $y/\delta>(D/\delta-1)$ จะให้มีการกระจายตัวตามสมการที่ (5.4)

$$\frac{u}{U_0}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/5.6} \tag{5.4}$$

ในขณะที่ถ้าหาก $1 \le y/\delta \le (D/\delta - 1)$ แล้วจะกำหนดให้ $u=U_0$ โดย δ คือความหนาของชั้นชิดผิวโดยมีค่าเท่ากับ 3.3H สำหรับที่ทางออกจะกำหนดให้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับแกนในแนวการไหลของตัวแปรอิสระทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์

จากรูปที่ 5.10 โดเมนจะถูกแบ่งออกเป็นสามส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมก่อนถึงครีบ ส่วนที่สองบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมเหนือครีบ และส่วนที่สามบริเวณพื้นที่สี่เหลี่ยมหลังครีบ ซึ่งไม่รวมพื้นที่ที่เป็นส่วนของครีบ กริดจะถูกสร้างอย่างอิสระจากกันตามรูปที่ 5.11 ซึ่งแสดงกริดบางส่วนบริเวณใกล้เคียงกับผนังของครีบ สำหรับกริดที่ใช้นั้นมีความละเอียดเพียงพอต่อข้อกำหนดของแบบจำลองความปั่นป่วนค่าตัวเลขเรย์โนลด์ต่ำซึ่งจะได้แสดงในหัวข้อถัดไป

5.2.2 ผลการคำนวณ

รูปที่ 5.12 และ 5.13 แสดงเส้นระดับของความเร็วลัพธ์ซึ่งเส้นลากผ่านรอยต่อระหว่างบล็อกได้อย่างต่อเนื่อง จะพบว่ามีการแยกไหลบริเวณเหนือครีบจากนั้นเกิดการหมุนวนหลังครีบและตกกระทบผนังด้านล่างในที่สุด จุดตกกระทบสำหรับการคำนวณนี้เมื่อดูจากค่าความเค้นเฉือนที่ผนังตามรูปที่ 5.14 แล้วจะอยู่ที่ประมาณ x/H=10.1และรูปที่ 5.14 ยังได้แสดงค่า y^+ ตำแหน่งแรกสูงจากผนังและแสดงที่ตำแหน่งต่าง ๆ ตามแนวการไหลหลังจากผ่านครีบซึ่งค่าที่ได้ไม่เกินหนึ่ง และผลการคำนวณค่าองค์ประกอบความเร็วในแนวการไหลที่ตำแหน่งต่าง ๆ ตามแนวการไหลของช่องขนานนั้นได้นำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Acharya, Myrum และ Baker (1994) ตามรูปที่ 5.15 เมื่อ x/H=0 คือตำแหน่งที่ขอบด้านขวาของครีบ จะพบว่าแนวโน้มของผลเฉลยเป็นไปตามผลการทดลองแต่จะมีที่แตกต่างจากผลการทดลองอย่างเห็นได้ชัดในบริเวณที่มีการแยกไหลอย่างเช่นที่ x/H=-0.5 และ x/H=0.0 เมื่อ $1<y/H<1.5$ และบริเวณที่มีการไหลวนอย่างเช่นที่ x/H=5.4 และ x/H=7.1 เมื่อ $y/H<1.0$ ซึ่งผลการคำนวณที่ได้แสดงในรูปที่ 5.15 นั้นล้วนอยู่ในช่วงก่อนถึงจุดตกกระทบทั้งสิ้น ซึ่งอาจจะตั้งสมมติฐานได้ว่าผลการทำนายที่เบี่ยงเบนไปจากผลการทดลองมากขนาดนี้น่าจะเป็นที่ความบกพร่องของแบบจำลองความปั่นป่วนที่ไม่สามารถทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีการแยกไหลและการไหลวนได้

5.2.3 สมรรถนะของการคำนวณ

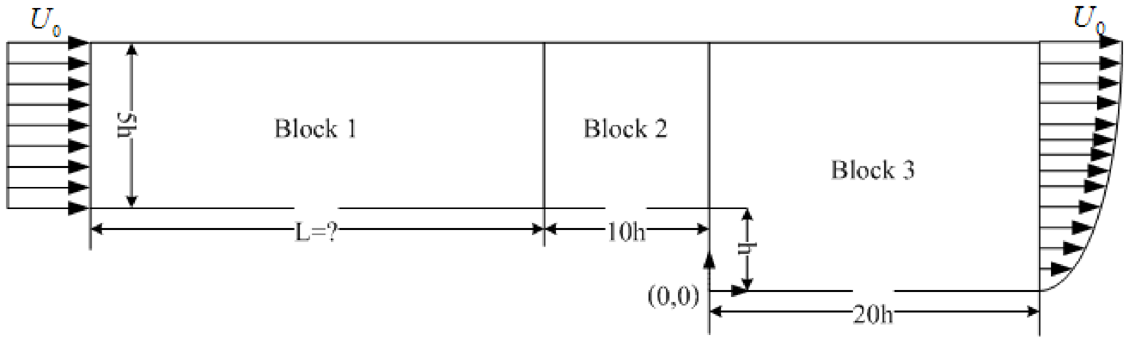
รูปที่ 5.16 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเทียบต่อเวลาของการคำนวณซึ่งเป็นการคำนวณแบบขนานทั้งการใช้กริดชุดเดียวและกริดหลายชุด โดยจะพบว่าถ้าหากใช้กริดเพียงชุดเดียวในการคำนวณนั้นผลเฉลยมีแนวโน้มว่าจะไม่ลู่เข้า แต่เมื่อประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดกับการคำนวณนั้นผลเฉลยกลับลู่เข้าในที่สุด

5.2.4 สรุปผลการคำนวณ

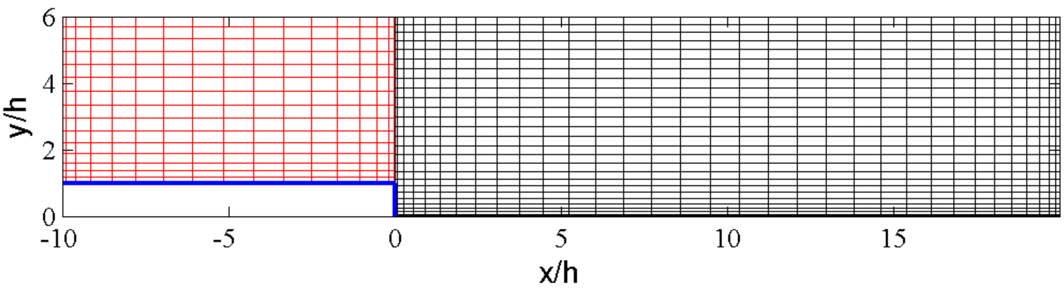
การคำนวณในส่วนนี้แม้ว่าการประยุกต์ระเบียบวิธีมัลติกริดนั้นจะสามารถแสดงศักยภาพออกมาได้เป็นอย่างดี แต่ผลการคำนวณที่ได้นั้นกลับแตกต่างจากผลการทำลองอย่างชัดเจน แต่เมื่อพิจารณาแล้วบริเวณดังกล่าวอยู่ในช่วงของการไหลวน นั่นแสดงว่าผลการคำนวณที่ต่างจากผลการทดลองนี้น่าจะมาจากขีดความสามารถของแบบจำลองความปั่นป่วนที่เลือกใช้

5.3 สรุป

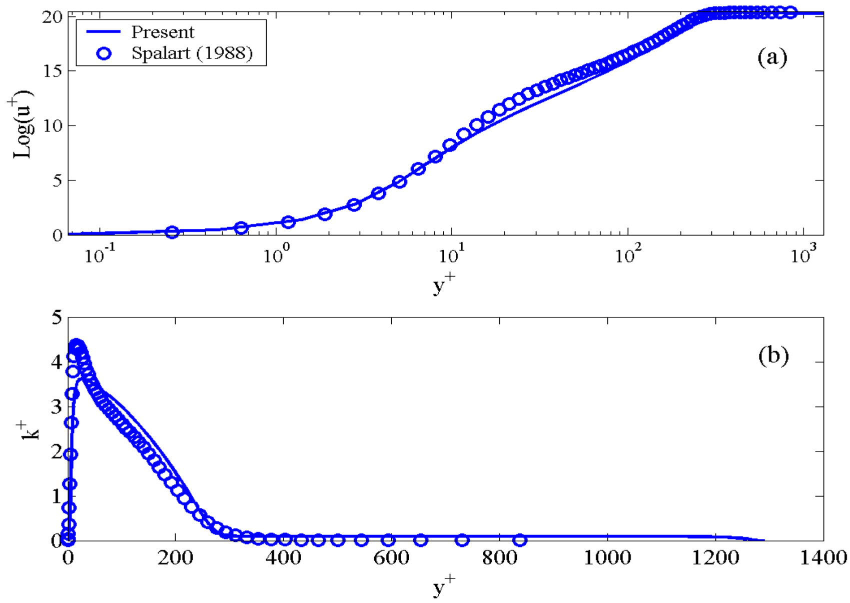
ในบทนี้ได้ทำการทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับการไหลแบบปั่นป่วน ความถูกต้องของผลการคำนวณที่ได้นั้นน้อยกว่ากรณีการไหลแบบราบเรียบเนื่องจากว่าการคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนนั้นต้องเกี่ยวข้องกับแบบจำลองความปั่นป่วน โดยแบบจำลองแต่ละแบบจำลองนั้นจะมีข้อบ่งพร่องในการคำนวณปัญหาบางประเภท ตัวอย่างเช่นแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) นั้นได้แสดงให้เห็นแล้วว่าล้มเหลวโดยสิ้นเชิงต่อการทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีการแยกไหลและการหมุนวน ซึ่งผลการคำนวณที่เบี่ยงเบนไปจากผลการทดลองนั้นไม่ได้เป็นผลโดยจากการใช้เทคนิคมัลติบล็อกหรือการคำนวณแบบขนานแต่อย่างใด ซึ่งผลการทดสอบจากบทที่แล้วก็บ่งบอกได้ถึงความถูกของเทคนิคมัลติบล็อกและการคำนวณแบบขนานที่ใช้ ความปั่นป่วนของการไหลไม่เพียงแต่จะกระทบต่อความถูกต้องของผลการคำนวณเท่านั้น ยังกระทบต่อสมรรถนะของการคำนวณอีกด้วยอย่างเช่นระเบียบวีธีมัลติกริดที่มีประสิทธิภาพลดลงเนื่องจากพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วในบริเวณชั้นชิดผิว



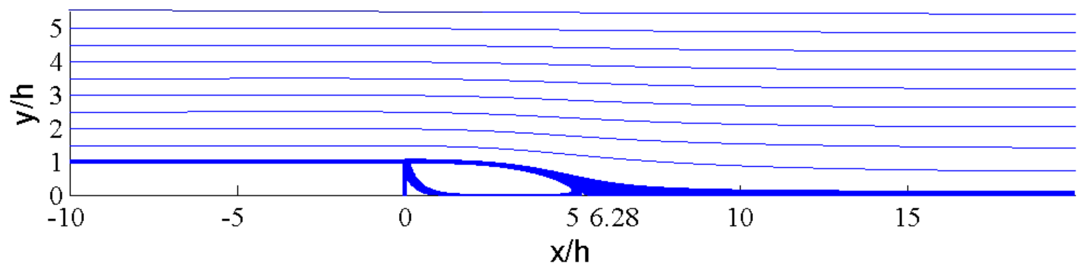
รูปที่ 5.1 แผนภาพแสดงโดเมนรูปขั้นกลับหลัง (ไม่ตรงตามมาตราส่วนจริง)



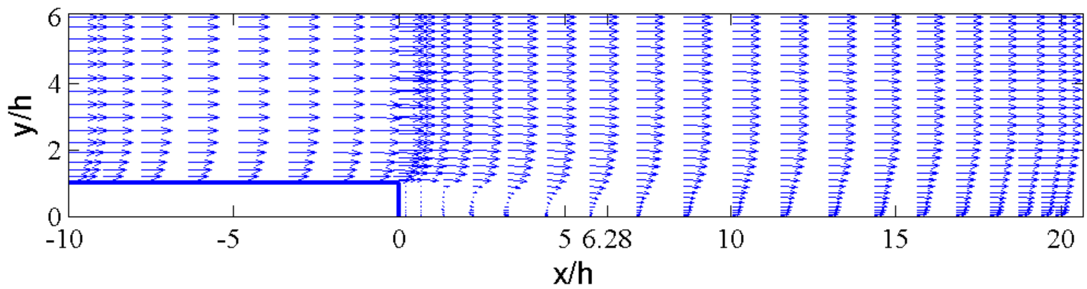
รูปที่ 5.2 แสดงการกระจายตัวของกริดในโดเมนขั้นกลับหลัง



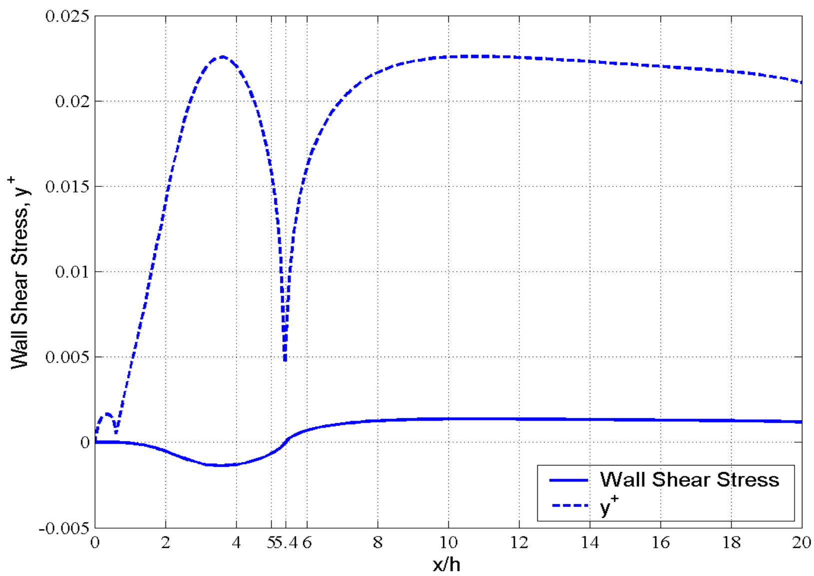
รูปที่ 5.3 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผล DNS ของ Sparlart (1988) ของ (a) ความเร็วในแนวการไหล และ (b) พลังงานจลน์ความปั่นป่วนของการไหล



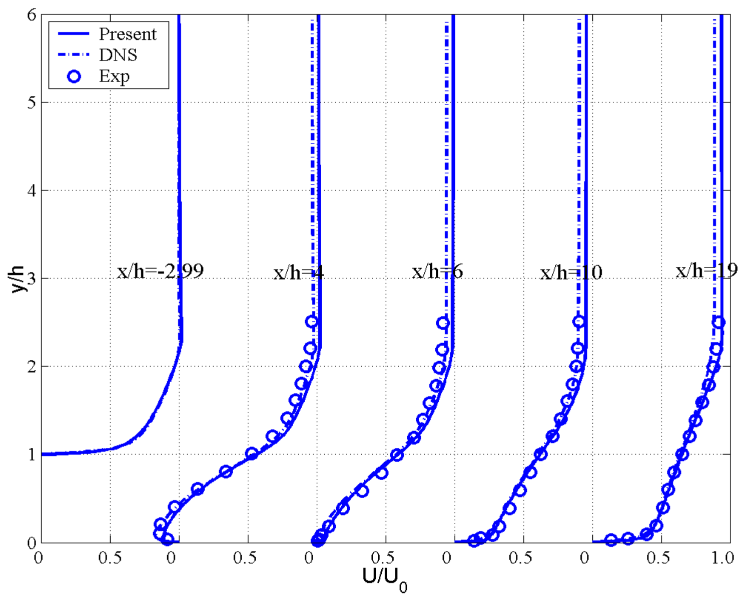
รูปที่ 5.4 แสดงเส้นกระแสการไหล



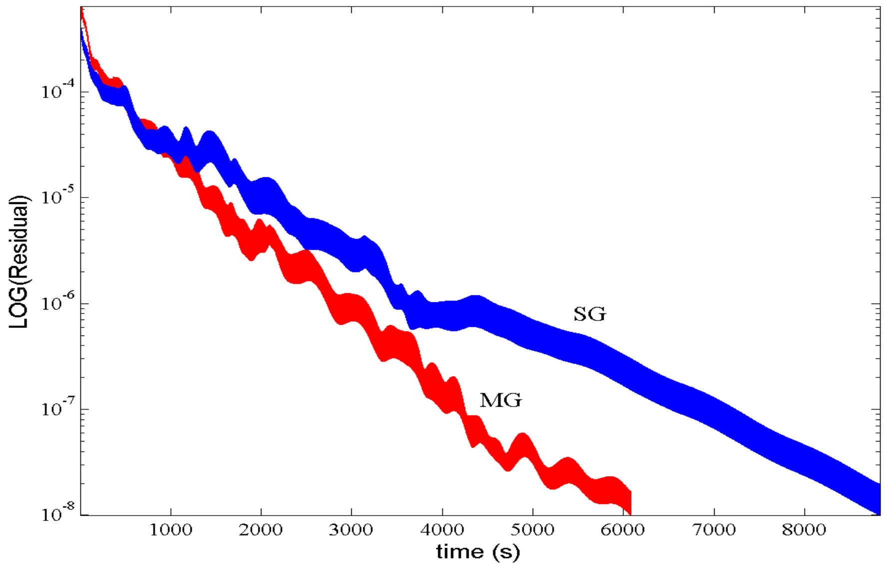
รูปที่ 5.5 แสดงลูกศรความเร็ว



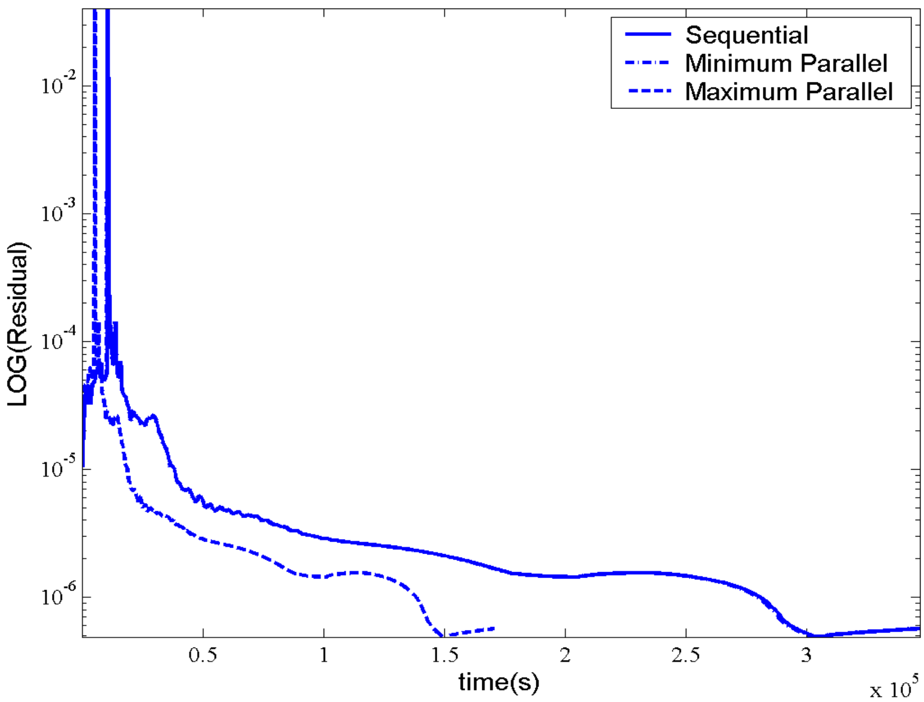
รูปที่ 5.6 แสดงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังหลังการไหลผ่านขั้นและ y^+ ตามแนวผนังหลังการไหผ่านขั้นโดยแสดงที่ตำแหน่งแรกถัดจากผนัง



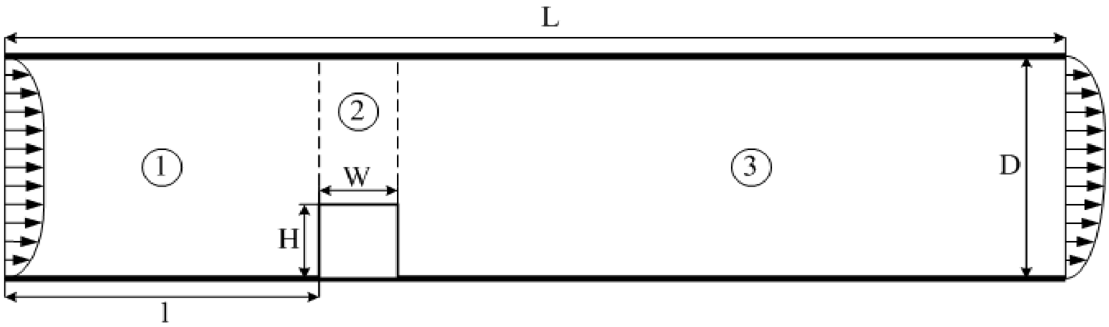
รูปที่ 5.7 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผล DNS ของ Le et al (1997) และผลการทดลองของ Jovic และ Driver (1994)



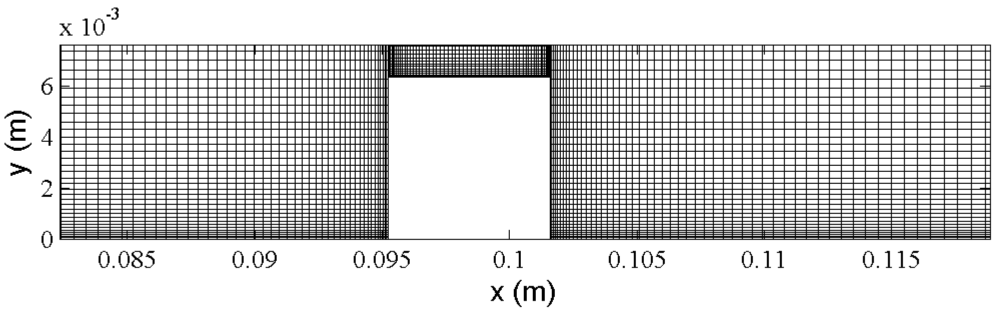
รูปที่ 5.8 แสดงการลดลงของเศษตกค้างเทียบต่อเวลาระหว่างการ
คำนวณโดยใช้กริดชุดเดียวและกริดหลายชุด



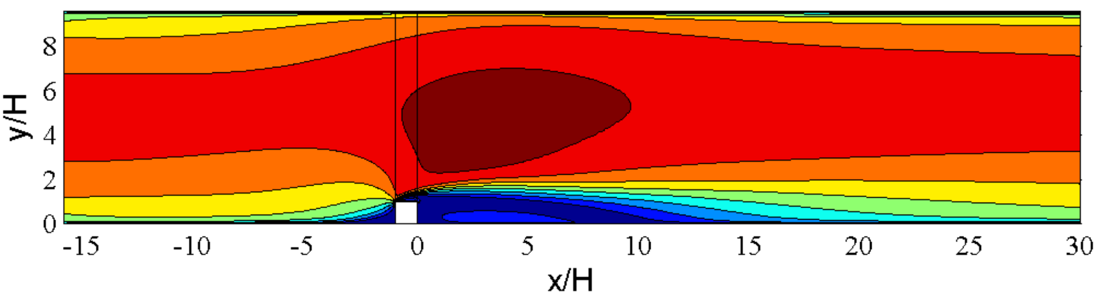
รูปที่ 5.9 แสดงการลดลงของเศษตกค้างเทียบต่อเวลาระหว่างการคำนวณ
แบบขนานและการคำนวณแบบตามลำดับ



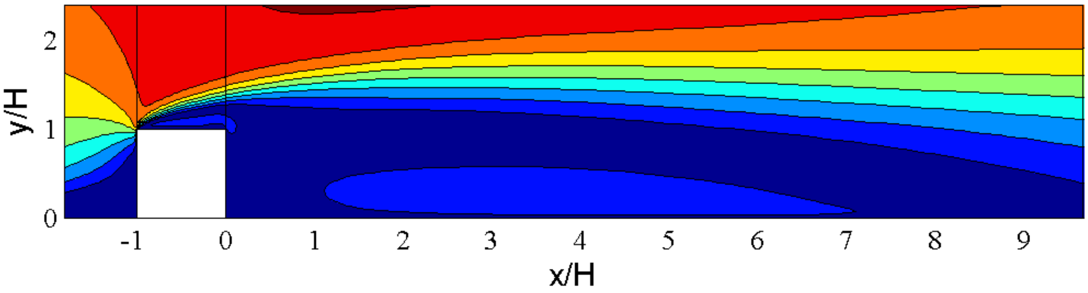
รูปที่ 5.10 แผนภาพแสดงโดนเมนของช่องขนานที่มีสิ่งกีดขวางติดตั้งที่ผนังด้านล่างพร้อมทั้งแสดงการแบ่งบล็อก



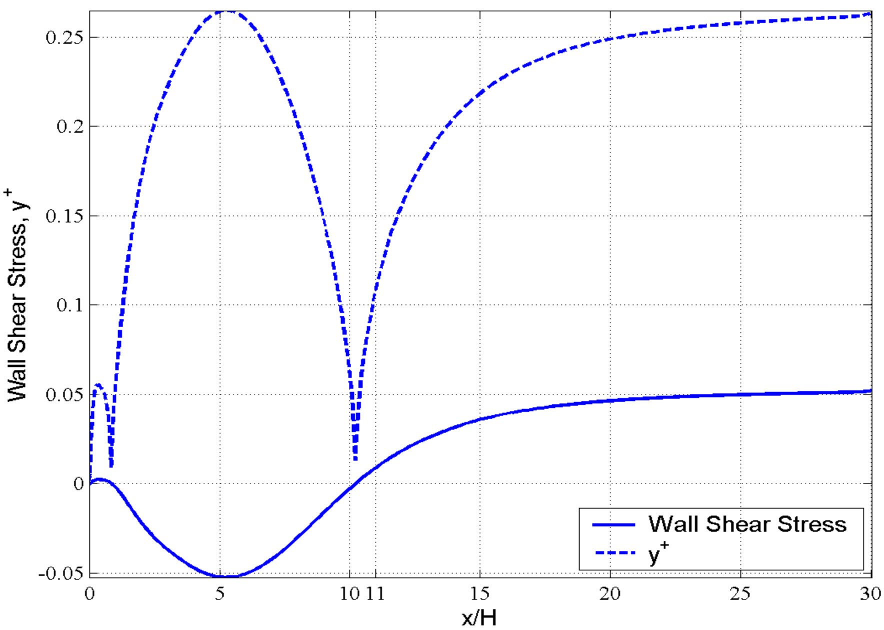
รูปที่ 5.11 แสดงการกระจายตัวของกริดบางส่วนบริเวณใกล้ชิดกับสิ่งกีดขวาง



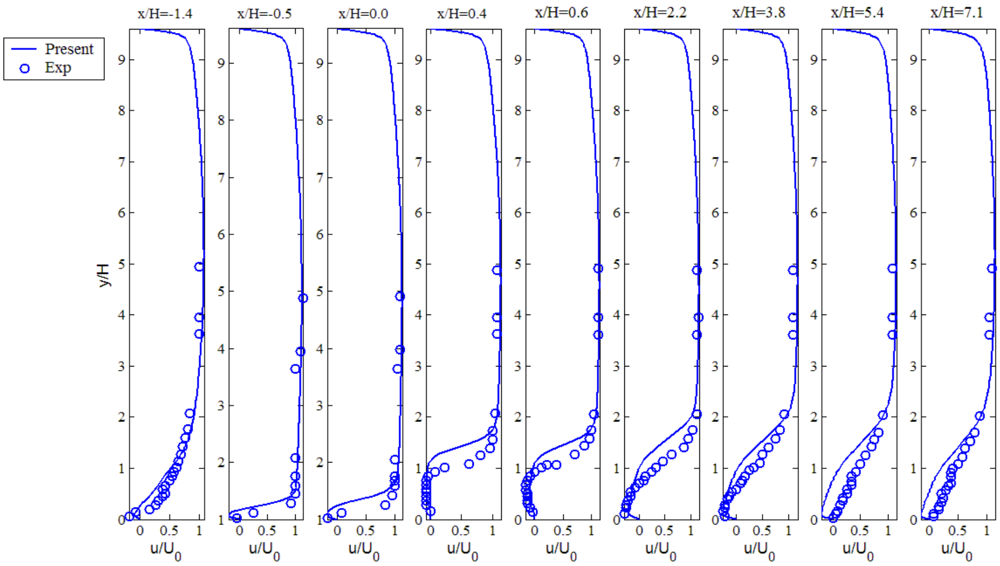
รูปที่ 5.12 แสดงเส้นระดับของความเร็วลัพธ์



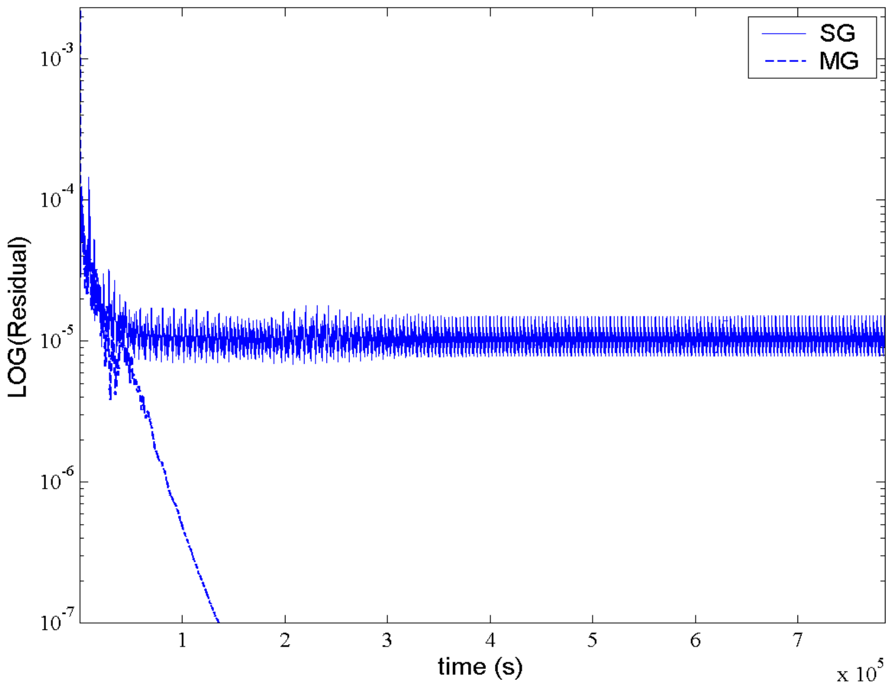
รูปที่ 5.13 แสดงเส้นระดับของความเร็วลัพธ์บางส่วนบริเวณใกล้ชิดกับสิ่งกีดขวาง



รูปที่ 5.14 แสดงค่าความเค้นเฉือนที่ผนังและค่า y^+ จุดแรกจากผนังด้านล่างตามแนวผนังหลังจากผ่านครีบ



รูปที่ 5.15 แสดงการเปรียบผลการคำนวณของความเร็วในแนวการไหลกับผลการทดลองที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในช่องขนานเมื่อตำแหน่ง x/H=0คือตำแหน่งขอบด้ านขวาของสิ่งกีดขวาง



รูปที่ 5.16 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างต่อเวลาของการคำนวณระหว่างการใช้กริดหลายชุดและการใช้กริดเพียงชุดเดียว

บทที่ 6
การไหลแบบปั่นป่วนโดยการพาแบบธรรมชาติ
(Turbulent Natural Convection Flow)

การไหลโดยการพาแบบธรรมชาติ (Natural Convection) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าการพาแบบอิสระ (Free Convection) นั้นจะเกิดขึ้นจากความแตกต่างของอุณหภูมิของของไหล กล่าวคือ ของไหลที่มีอุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิอ้างอิง (อุณหภูมิห้องหรืออุณหภูมิสิ่งแวดล้อมเป็นต้น) จะเคลื่อนที่ขึ้นสู่ที่สูงเนื่องจากมีความหนาแน่นน้อยกว่าของไหลที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิอ้างอิง ในขณะที่ของไหลที่มีอุณภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิอ้างอิงซึ่งมีความหนาแน่นมากกว่าก็จะเคลื่อนที่ลงสู่ที่ต่ำ ส่วนของไหลที่มีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิอ้างอิงจะไม่มีการเคลื่อนที่ โดยการไหลในลักษณะนี้สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น การหมุนเวียนของอากาศภายในบ้าน ตัวอาคารหรือสิ่งก่อสร้างต่าง ๆ เป็นต้น สำหรับการไหลด้วยการพาแบบธรรมชาตินี้พจน์แหล่งกำเนิด (Source Term) ที่ปรากฏในสมการโมเมนตัมนั้นจะมีนิยามเป็น $F_B=-\rho g_i\beta(T-T_0)$ เมื่อ T_0 คืออุณหภูมิอ้างอิงซึ่งในกรณีนี้จะเป็นค่าอุณหภูมิเฉลี่ย และ “พจน์การสร้างจากการลอยตัวแบบปั่นป่วน” (Turbulent Buoyancy Production Term) ที่ปรากฏในสมการแบบจำลองความปั่นป่วนนั้นมีนิยามเป็น $G_B=-(\mu_t g_i\beta/\sigma_T)(\partial T/\partial y)$ สำหรับการคำนวณในบทนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนได้แก่การคำนวณการไหลเวียนของอากาศในที่ว่างพื้นที่ปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและการคำนวณการไหลของอากาศในพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยภายในมีสิ่งกีดขวางติดตั้งอยู่ รายละเอียดจะแสดงดังต่อไปนี้

6.1 การไหลในที่ว่างพื้นที่ปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Flow in an Empty Square Enclosure)

ในการทดสอบโปรแกรมด้วยการไหลในกรณีนี้ซึ่งมีเงื่อนไขที่ขอบเขตไม่ซับซ้อน ดูเหมือนว่าจะไม่มีความยุ่งยากอันใดที่จะกระทบต่อเสถียรภาพของโปรแกรมและความแม่นยำของการคำนวณเลย แต่สำหรับการไหลด้วยการพาโดยธรรมชาตินั้น แรงขับเคลื่อนที่สำคัญที่ทำให้เกิดการไหลได้แก่ แรงขับจากแรงลอยตัว F_B ผ่านทางสมการโมเมนตัมตามสมการที่ (3.7) นั่นแสดงว่าการไหลที่เกิดขึ้นนั้นมาจากอิทธิพลของแรงลอยตัวเป็นหลัก และสำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวแล้วความเร็วในสมการโมเมนตัมนั้นไม่มีความสัมพันธ์ใดที่จะเกี่ยวพันกับอุณหภูมิในสมการอนุรักษ์พลังงานเลย เพราะฉะนั้นการกำหนดค่า “การหน่วงของการคำนวณ” (Under-Relaxation Factor) ที่ไม่เหมาะสมอาจทำให้การคำนวณล่าช้าเกินไปหรือลู่ออกไปในที่สุด อีกประการหนึ่งคือของไหล

ส่วนใหญ่จะมีความเร็วที่ค่อนข้างต่ำหรือไม่มีการไหลเลย การเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะถูกกักบริเวณอยู่ที่ผนัง เพราะฉะนั้นการไหลจึงอาจประกอบไปด้วยการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) ในบางบริเวณหรือการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) ในบางบริเวณและแน่นอนว่าการเปลี่ยนแปลงจากการไหลแบบราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะผ่านย่านการไหลที่เรียกว่า "การไหลแบบทรานซิชัน" (Transitional Flow) ด้วยเหตุนี้จึงมีผลโดยตรงต่อความแม่นยำของโปรแกรมซึ่งไม่ว่าการคำนวณจะมีการใช้เทคนิคขั้นสูง จำนวนของกริดที่ละเอียดมาก หรือการประมาณค่าด้วยค่าอันดับของความแม่นยำสูง (Higher-Order Accuracy Approximation) ก็ตาม แต่หากไม่ใช้แบบจำลองความปั่นป่วนที่เหมาะสมแล้วผลการคำนวณที่ได้อาจจะไม่ดีพอหรือการคำนวณให้ผลเฉลยที่เป็นการไหลแบบราบเรียบไปในที่สุด (Relaminarisation) ซึ่งผลการคำนวณของแต่ละแบบจำลองความปั่นป่วนจะได้ถูกแสดงในรายละเอียดต่อไป

6.1.1 รูปทรงของปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

รูปทรงของปัญหาแสดงดังรูปที่ 6.1 ซึ่งเป็นพื้นที่ว่างปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดความกว้างและสูงเท่ากับ 0.75 เมตรภายในบรรจุอากาศและกำหนดให้มีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากับ 30°C ผนังด้านซ้ายถูกทำให้ร้อนจนกระทั่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 50 °C และผนังด้านขวาถูกทำให้เย็นจนมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 10 °C ด้วยผลต่างอุณหภูมิค่านี้ทำให้ได้ค่าตัวแปรไร้มิติ Rayleight Number (Ra) เท่ากับ $1.58x10^9$ ผนังด้านบนและผนังด้านล่างกำหนดให้เป็นผนังที่มีการนำความร้อนสูงหรือมี "สภาพการนำความร้อนสมบูรณ์แบบ" (Perfect Conductivity) ที่ผนังทุกด้านกำหนดเงื่อนไขให้ไม่มีการลื่นไหล (No Slip) ที่ผนัง

รูปที่ 6.2 แสดงการกระจายตัวของกริดที่ใช้ในการคำนวณ จำนวนกริดที่ใช้เท่ากับ 160x160 จุด ซึ่งจำนวนกริดที่ใช้นี้ได้มีการเปรียบวัดกับเอกสารอ้างอิงแล้วว่ามีความละเอียดเพียงพอ โดย Hsieh และ Lien (2004) ใช้เพียง 125x125 จุดเท่านั้น โดยเหตุที่ต้องใช้ถึง 160x160 ซึ่งมากกว่าเอกสารอ้างอิงก็เพราะว่าต้องการทดสอบสมรรถนะของระเบียบวิธีมัลติกริดที่ใช้ การกระจายตัวของแต่ละจุดนั้นกำหนดให้มีการกระจายตัวแบบโพลิโนเมียลอันดับสาม (Cubic Polynomial) ซึ่งสามารถกำหนดระยะห่างของกริดจุดแรกกับผนังทั้งสองด้านในแนวแกนเดียวกันได้ ในการคำนวณนั้นจะใช้แบบจำลองความปั่นป่วนเรย์โนลด์นัมเบอร์ต่ำสามแบบจำลองได้แก่ แบบจำลอง k-ε ของ Launder-Sharma (1974) แบบจำลอง SST-k-ω ของ Menter (1994) และแบบจำลอง v^2-f ของ Durbin (1995) เงื่อนไขที่ขอบเขตสำหรับแบบจำลองทั้งสามนั้นสามารถกำหนดได้ดังนี้ Launder-Sharma: $k=\varepsilon=0$, Menter: $k=0$ และ $\omega=60\nu/(0.075d^2)$ และ Durbin: $k=v^2=f=0$ และ $\varepsilon=2\nu k_1/d^2$ เมื่อ d คือระยะในแนวตั้งฉากของกริดจุดแรกกับผนังและ k_1 คือค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนของปริมาตร

ควบคุมที่ติดกับผนัง สำหรับค่าเริ่มต้นในการคำนวณนั้น ความเร็วกำหนดให้เท่ากับศูนย์ อุณหภูมิให้เท่ากับค่าอุณหภูมิเฉลี่ย และค่าปริมาณความปั่นป่วน k, ε, ω และ v^2 ควรกำหนดให้ลำดับขนาด (Order of Magnitude) ของปริมาณความปั่นป่วนซึ่งทำให้ค่าความหนืดแบบปั่นป่วนมีลำดับขนาดมากกว่าลำดับขนาดของค่าความหนืดแบบราบเรียบ ซึ่งหากค่าความหนืดแบบปั่นป่วนเริ่มต้นยิ่งมีค่ามากกว่าค่าความหนืดแบบราบเรียบเท่าใดการคำนวณก็ยิ่งจะมีสเถียรภาพมากยิ่งขึ้น แต่จะมีผลทำให้การลู่เข้านั้นช้าลงมาก ในขณะเดียวกันหากกำหนดค่าความหนืดแบบปั่นป่วนเริ่มต้นมีค่าลำดับขนาดใกล้เคียงกับค่าความหนืดแบบราบเรียบก็จะทำให้ผลการคำนวณนั้นลู่เข้าได้เร็วขึ้นแต่ก็เสี่ยงต่อการลู่ออกอย่างรวดเร็วได้ด้วยเช่นกัน

6.1.2 ผลการคำนวณ

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมและความสามารถในการทำนายผลของแต่ละแบบจำลอง ผลการคำนวณตามแนวแกนนอนที่ระดับกึ่งกลางของความสูงจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่น่าเชื่อถือ ในกรณีนี้จะทำการเปรียบวัดกับผลการทดลองของ Ampofo (2003) รูปที่ 6.3 และ 6.4 แสดงค่าความเร็วและอุณหภูมิตามลำดับ ซึ่งทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณของแต่ละแบบจำลองเทียบกับผลการทดลอง โดยที่แบบจำลองของ Menter (1994) จะใช้อักษรย่อเป็น SST แบบจำลองของ Durbin (1995) จะใช้อักษรย่อเป็น V2F แบบจำลอง Launder-Sharma (1974) จะใช้อักษรย่อเป็น LS และผลการทดลองจะให้อักษรย่อแทนเป็น EXP จากรูปจะพบว่าผลการทำนายสำหรับแบบจำลอง LS นั้นไม่ดีเท่าที่ควรในขณะที่แบบจำลอง SST และแบบจำลอง V2F นั้นให้ผลการคำนวณที่ใกล้เคียงกันและใกล้เคียงกับผลการทดลอง และเมื่อทำการขยายภาพผลการคำนวณบริเวณชิดกับผนังทั้งสองด้านตามรูปที่ 6.5 และ 6.6 แล้วจะพบว่าทั้งผลการทำนายความเร็วและอุณหภูมิของ SST และ V2F ใกล้เคียงกันมาก แต่สำหรับการทำนายค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนนั้น V2F จะดีกว่า SST มาก โดยที่ SST ให้ผลการทำนายที่ต่ำกว่าผลการทดลองในขณะที่ V2F ให้ผลการทำนายที่สูงกว่าผลการทดลองเล็กน้อยแต่แนวโน้มก็สอดคล้องกันดีกับผลการทดลองซึ่งอาจจะอธิบายได้ว่า V2F มีตัวแปร v^2 ซึ่งมีที่มามาจากค่าความเค้นเรย์โนลด์ในแนวตั้งฉาก รูปที่ 6.9 แสดงผลการทำนายค่าการถ่ายเทความร้อนที่ผนังซึ่งแสดงอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ Nusselt จะพบว่าทั้ง V2F และ LS นั้นสามารถตรวจจับจุดที่มีค่าการถ่ายเทความร้อนสูงที่สุดที่มุมทั้งสี่ของพื้นที่สี่เหลี่ยมได้ แต่ก็ให้ผลการคำนวณบริเวณผนังทุกด้านสูงกว่าผลการทดลองมากพอสมควรโดยเฉพาะบริเวณที่การเคลื่อนที่ของอากาศมุ่งขึ้นสู่มุมบนของผนังด้านซ้าย ($0.5<s/H<1.0$) และบริเวณที่การเคลื่อนที่ของอากาศพุ่งลงสู่มุมล่างของผนังด้านขวา ($2.5<s/H<3.0$) ซึ่งเมื่อพิจารณาลักษณะของเส้นความร้อนคงที่ตามรูปที่ 6.10 แล้วจะพบว่าบริเวณมุมบนซ้าย ($s/H=1.0$) และมุมล่างขวา

(s/H=3.0) นั้นมีการบิดเบี้ยวของเส้นอุณหภูมิคงที่ซึ่งแสดงให้เห็นว่าบริเวณดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิค่อนข้างสูง เพราะฉะนั้นอาจส่งผลให้การทำนายผลของแต่ละแบบจำลองมีข้อบกพร่องเกิดขึ้นได้ แต่อย่างไรก็ตาม V2F กลับมีแนวโน้มที่ดีเมื่อเทียบกับผลการทดลองที่บริเวณผนังด้านบน (1.0<s/H<2.0) และผนังด้านล่าง (3.0<s/H<4.0) ซึ่งเมื่อพิจารณาจากเส้นความร้อนคงที่แล้วพบว่าบริเวณดังกล่าวมีการวางตัวของเส้นค่อนข้างจะเป็นระเบียบ สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) นั้นสามารถทำนายผลได้ใกล้เคียงกับผลการทดลองที่ผนังทุกด้าน แต่การตรวจจับค่ามากที่สุดของการถ่ายเทความร้อนบริเวณมุมทั้งสี่ด้านนั้นทำได้ไม่ดีพอ แต่ค่าที่ได้ก็ไม่เกินค่าสูงสุดของผลการทดลองซึ่งยอมรับได้ในมุมมองทางวิศวกรรม

6.1.3 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริด (Application of the Multigrid Method)

ผลการคำนวณที่ได้แสดงในหัวข้อ 6.1.2 นั้นได้มีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดเพื่อหาคำตอบในทั้งสามแบบจำลอง ซึ่งจะใช้กริดจำนวนสี่ชุดโดยขนาดของปริมาตรควบคุมจะเพิ่มขึ้นทีละสองเท่า สำหรับแบบจำลอง Launder-Sharma (1974) นั้นหากคำนวณปัญหานี้ด้วยการใช้กริดเพียงชุดเดียวแล้วการคำนวณจะไม่มีการลู่เข้าจึงจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีมัลติเพื่อช่วยเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยซึ่งแสดงดังรูปที่ 6.11 สำหรับแบบจำลองของ Durbin (1995) นั้นการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดสามารถเร่งอัตราการลู่เข้าได้ระดับหนึ่งดังแสดงตามรูปที่ 6.12 และระเบียบวิธีมัลติกริดสามารถเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยได้ดีในการคำนวณด้วยแบบจำลองของ Menter (1994) ดังแสดงในรูปที่ 6.13 ซึ่งทั้งหมดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองแต่ละแบบจำลองนั้นมีความอ่อนไหวต่อการเปลี่ยนแปลงขนาดของกริดที่ใช้

ประเด็นที่จะพิจารณาต่อไปนี้จะเกี่ยวข้องกับผลกระทบของพจน์การสร้างแบบปั่นป่วนเนื่องจากแรงลอยตัว (Turbulent Buoyancy Production Term) G_B ที่มีต่อกริดหยาบซึ่ง Hsieh และ Lien (2004) ได้ระบุว่าพจน์ G_B อาจจะส่งผลต่อเสถียรภาพการคำนวณหากจะคำนวณพจน์นี้สำหรับสมการแบบจำลองความปั่นป่วนในกริดชุดหยาบด้วย ซึ่งการคำนวณของ Hsieh และ Lien ก็ไม่ได้รวมพจน์ G_B ไว้ในกริดชุดหยาบ ในขณะที่ Peng และ Davidson (1999) ก็ระบุไว้เช่นกันว่าพจน์ G_B นั้นมีความไวต่อการเปลี่ยนแปลงขนาดของกริด โดยประเด็นที่จะทำการพิจารณาอีกประการ ได้แก่การปรับเปลี่ยนค่าการหน่วงของการปรับแก้ปริมาณความปั่นตามความสัมพันธ์ $\phi_{Corrected}=|\phi_{Old}+\alpha e^{\phi}|$ ดังที่ได้มีการอภิปรายไว้แล้วในหัวข้อ 3.4 ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะการคำนวณในส่วนของแบบจำลอง SST-k-ω ของ Menter (1994) เท่านั้น รูปที่ 6.14 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้าง เมื่อเส้นทึบแทนการกำหนดให้ G_B=0 ในกริดชุดหยาบสำหรับสมการแบบจำลองความปั่นป่วน ในขณะเดียวกันก็มีการเปลี่ยนแปลงค่าการหน่วงในการปรับแก้ปริมาณความปั่นป่วนด้วย

ซึ่งสัญลักษณ์แต่ละรูปจะแทนค่าการหน่วงแต่ละค่าโดยมีค่าตั้งแต่ 0.1 ถึง 1.0 จากรูปจะพบว่าที่ค่าการหน่วงต่ำสุด (α=0.1) การคำนวณพจน์ G_B ในกริดชุดหยาบด้วยนั้นการลดลงของค่าเศษตกค้างจะรวดเร็วกว่าการกำหนดให้ G_B=0 ในกริดชุดหยาบ แต่เมื่อ $\alpha \geq 0.5$ ผลกลับเป็นไปในทิศทางตรงกันข้าม กล่าวคือการกำหนดให้ G_B=0 จะทำให้ค่าเศษตกค้างลดลงเร็วกว่าการใช้พจน์ G_B ในกริดชุดหยาบ และจะสังเกตเห็นว่ายิ่งค่า α มีค่ามากการลดลงของค่าเศษตกค้างก็จะยิ่งรวดเร็วขึ้นเพราะฉะนั้นการกำหนดค่าที่เหมาะสมจึงควรใช้ α=1.0 และกำหนดให้ G_B=0 ที่กริดชุดหยาบสำหรับปัญหาในกรณีนี้ ซึ่งข้อมูลที่ได้นี้จะถูกนำไปปรับเปลี่ยนค่ากับปัญหาอื่นอีกต่อไป

6.1.4 การเพิ่มประสิทธิภาพในการทำนายผลสำหรับแบบจำลอง Launder-Sharma (Enhancement in Prediction of the Launder-Sharma Model)

จากผลการคำนวณในหัวข้อที่ผ่านมาจะพบว่าแบบจำลองความปั่นป่วน Launder-Sharma (1974) นั้นให้ผลการทำนายที่ผิดพลาดไปจากผลการทดลองมากทั้ง ๆ ที่ทั้งสามแบบจำลองที่ได้นำเสนอผลการคำนวณไปนั้นต่างก็มีกระบวนการที่ได้มาซึ่งค่าความเค้นเรย์โนลด์จาก “แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบเชิงเส้น” (Linear Eddy-Viscosity Model: LEVM) ทั้งสิ้น ในหัวข้อนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะปรับปรุงประสิทธิภาพการทำนายผลสำหรับแบบจำลอง Launder-Sharma (1974) ด้วยการจำลองค่าความเค้นเรย์โนลด์โดยกระจายให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเครียดแบบพีชคณิตฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสอง (Quadratic Stress-Strain Relationship) หรือ “การจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสอง” (Quadratic Eddy-Viscosity Model: QEVM) และการจำลองค่าความเค้นเรย์โนลด์โดยกระจายให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเครียดแบบพีชคณิตฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสาม (Cubic Stress-Strain Relationship) หรือ “การจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสาม” (Cubic Eddy-Viscosity Model: CEVM) ดังแสดงตามสมการต่อไปนี้

การจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสอง (Quadratic Eddy-Viscousity Model: QEVM):

$$\begin{aligned}\overline{u_i'u_j'} &= -\nu_t\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\frac{2}{3}k\delta_{ij}\\ &\quad \underbrace{+C_{\tau 1}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^* + C_{\tau 2}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^* + C_{\tau 3}\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)^*}_{\text{Quatratic terms}}\end{aligned} \tag{6.1}$$

ซึ่งพจน์ที่มีเครื่องหมาย ‘*’ กำกับมีนิยามดังนี้

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^* = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}\delta_{ij} \tag{6.2}$$

รายละเอียดแต่ละพารามิเตอร์ของการจำลองความหนืดเอ็ดดีด้วยฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสองนี้สามารถดูได้จากShih, Zhu และ Lumley (1993)

การจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสาม (Cubic Eddy-Viscousity Model: CEVM):

$$\begin{aligned}
\overline{u_i'u_j'} &= -\nu_t\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\frac{2}{3}k\delta_{ij} \\
&+C_{\tau 1}\frac{\nu_t k}{\varepsilon}\left(S_{ik}S_{jk}-\frac{1}{3}S_{kl}S_{kl}\delta_{ij}\right)+C_{\tau 2}\frac{\nu_t k}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}S_{jk}+\Omega_{jk}S_{ik}\right) \\
&+C_{\tau 3}\frac{\nu_t k}{\varepsilon}\left(\Omega_{ik}\Omega_{jk}-\frac{1}{3}\Omega_{kl}\Omega_{kl}\delta_{ij}\right)+C_{\tau 4}\frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2}\left(S_{ki}\Omega_{lj}+S_{kj}\Omega_{li}\right) \\
&+C_{\tau 5}\frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2}\left(\Omega_{il}\Omega_{lm}S_{mj}+S_{il}\Omega_{lm}\Omega_{mj}-\frac{2}{3}S_{lm}\Omega_{mn}\Omega_{nl}\delta_{ij}\right) \\
&+C_{\tau 6}\frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2}S_{ij}S_{kl}S_{kl}+C_{\tau 7}\frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2}S_{ij}\Omega_{kl}\Omega_{kl}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

รายละเอียดของแต่ละพารามิเตอร์ของการจำลองความหนืดเอ็ดดีด้วยฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสามนี้สามารถดูได้จาก Craft, Launder และ Suga (1996)

จากสมการ (6.1) และ (6.3) จะพบว่าสองพจน์แรกฝั่งขวาของสมการนั้นจะมีนิยามเดียวกันกับกรณีการจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบเชิงเส้น ส่วนพจน์ที่เกินมานั้นเป็นพจน์ในส่วนของการกระจายให้อยู่ในรูปฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสองและสามสำหรับความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเค้นและความเครียด และเป็นที่ทราบกันดีว่าพจน์ความเค้นเรย์โนลด์นี้จะไปปรากฏในสมการค่าเฉลี่ยต่อเวลาของเรย์โนลด์สำหรับสมการโมเมนตัม เพราะฉะนั้นการเปลี่ยนวิธีการในการกระจายค่าความเค้นเรย์โนลด์นั้นย่อมกระทบต่อระบบการแปลงจากสมการอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต ดังนั้นเพื่อให้มีความสะดวกในการแปลง จะทำการแบ่งค่าความเค้นเรย์โนลด์ออกเป็นสองส่วนได้แก่

ส่วนเชิงเส้นและส่วนไม่เชิงเส้น จากนั้นกรรมวิธีในการแปลงก็จะกระทำเช่นเดียวกันกับขั้นตอนที่ได้อภิปรายไว้แล้วในหัวข้อ 3.3 โดยส่วนเชิงเส้นจะถูกรวมเข้ากับสมประสิทธิ์ค่ากลาง a_p ตามสมการที่ 3.26 ในขณะที่ส่วนไม่เชิงเส้นจะถูกย้ายไปยังฝั่งขวาของสมการ 3.26 เพื่อรวมกับพจน์ก่อกำเนิด (Source Term) S^{ϕ} ซึ่งจะถูกคำนวณแบบชัดแจ้ง (Explicit)ในระหว่างกระบวนการการคำนวณ การแบ่งการกระจายค่าความเค้นเรย์โนลด์ออกเป็นสองส่วนนี้นอกจะทำให้ง่ายต่อการแปลงระบบสมการแล้ว ยังทำให้สัมประสิทธิค่ากลางมีความโดดเด่นซึ่งช่วยรักษาเสถียรภาพของการคำนวณได้อีกด้วย

รูปที่ 6.15 และ 6.16 แสดงการเปรียบเทียบค่าที่ได้จากผลการคำนวณกับค่าที่ได้จากผลการทดลองสำหรับความเร็วและอุณหภูมิตามลำดับ ในส่วนของแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) นั้น เมื่อประยุกต์ใช้แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบไม่เชิงเส้นแล้วพบว่าสามารถเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยได้ดีพอสมควรสำหรับการทำนายค่าความเร็วโดยเฉพาะเมื่อใช้แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสาม แต่สำหรับการทำนายการกระจายตัวของอุณหภูมิแล้วผลการคำนวณไม่ได้มีความถูกต้องมากขึ้นเท่าใดนักเหตุผลก็เพราะว่าไม่มีการปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงอันใดกับสมการอนุรักษ์พลังงานเลย สำหรับการทำนายค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนตามรูปที่ 6.17 และค่าความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ตามรูปที่ 6.18 แล้วจะพบว่าในกรณีการใช้แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบไม่เชิงเส้นนั้นสามารถปรับปรุงค่าของผลการคำนวณได้ดีพอสมควรโดยเฉพาะการใช้แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสามนั้นสามารถที่จะตรวจจับค่าสูงสุดทั้งค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนและค่าความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ได้ใกล้เคียงกว่าแบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) และเมื่อพิจารณาความสามารถในการทำนายค่าการถ่ายเทความร้อนที่ผนังตามรูปที่ 6.19 แล้วจะพบว่าการใช้แบบจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบไม่เชิงเส้นนั้นสามารถที่จะทำนายผลได้ใกล้เคียงผลการทดลองมากยิ่งขึ้นกว่าการใช้แบบจำลองเอ็ดดีแบบเชิงเส้นยกเว้นบริเวณที่กระแสการไหลมุ่งสู่มุมบนของผนังด้านซ้าย ($0.5<s/H<1.0$) และมุมล่างของผนังด้านขวา ($2.5<s/H<3.0$) ซึ่งบริเวณดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิด้วยความชันสูง

6.2 การไหลในพื้นที่ปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีสิ่งกีดขวางติดตั้งอยู่ภายใน (Flow in a Square Enclosure with Installed Partitions)

จากผลลัพธ์ในหัวข้อที่ผ่านมานั้นทำให้ทราบถึงแบบจำลองความปั่นป่วนที่เหมาะสมสำหรับปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาแบบอิสระ รวมทั้งได้ทราบถึงความเหมาะสมในการกำหนดค่าพารามิเตอร์บางตัวที่เกี่ยวข้องกับขั้นตอนการคำนวณ สำหรับการคำนวณในส่วนนี้จะ

เป็นการคำนวณในโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสเช่นเดียวกันกับหัวข้อที่ผ่านมาแต่จะมีการติดตั้งสิ่งกีดขวางจำนวณ 5 ชิ้นภายในโดเมนตามรูปที่ 6.20 ซึ่งเป็นการติดตั้งอุปกรณ์สำหรับทำการทดลองโดย Ampofo (2005) โดยสิ่งกีดขวางที่ถูกติดตั้งเข้าไปนี้จะทำหน้าที่คล้ายคลีบโลหะ (Fin) ที่ติดตั้งตามอุปกรณ์ไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์เพื่อเพิ่มอัตราการถ่ายเทความร้อนออกจากฐานติดตั้ง ช่วยลดอุณหภูมิภายในอุปกรณ์ดังกล่าว แม้ว่าลักษณะการติดตั้งหรือโดเมนสำหรับทำการทดลองจะเป็นสามมิติก็ตามแต่ Ampofo ก็ทำการวัดและเก็บข้อมูลแบบสองมิติโดยวัดที่ระนาบตรงกลางในแนวแกนลึก (แกน z) เท่านั้น เนื่องจากว่าด้วยอัตราส่วนระหว่างความลึกต่อความกว้าง (สูง) ของโดเมนนั้นมากพอที่จะสมมุติได้ว่าระนาบตรงกลางในแนวแกนลึกนั้นมีพฤติกรรมเป็นแบบสองมิติ

เนื่องจากโดเมนในกรณีนี้ไม่เรียบง่ายเหมือนกับโดเมนในหัวข้อที่แล้วซึ่งเป็นอุปสรรคต่อการสร้างกริดแบบมีโครงสร้างเพียงชุดเดียวให้ครอบคลุมเฉพาะบริเวณที่ทำการพิจารณาเพราะฉะนั้นการคำนวณในส่วนนี้จะนำเทคนิคมัลติบล็อกมาใช้สำหรับแบ่งโดนเมนที่ซับซ้อนออกเป็นโดเมนสี่เหลี่ยมย่อยหลายโดเมน จากนั้นการสร้างกริดแบบมีโครงสร้างก็สามารถกระทำได้โดยง่ายในแต่ละโดเมนย่อย โดยขั้นตอนการคำนวณหลักที่เป็นเวลาส่วนใหญ่ที่ใช้ไปในแต่ละโดเมนย่อยนั้นสามารถคำนวณได้อย่างเป็นอิสระจากกันมีเพียงค่าที่บริเวณรอยต่อระหว่างโดเมนเท่านั้นที่จะต้องมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างโดเมนย่อยที่ติดกัน ดังนั้นการคำนวณหลักในแต่ละโดเมนย่อยจะถูกคำนวณไปพร้อมกันด้วยกรรมวิธีการคำนวณแบบขนาน รายละเอียดในการคำนวณ ผลการคำนวณและการทดสอบสมรรถนะของโปรแกรมจะได้อภิปรายตามหัวข้อดังต่อไปนี้

6.2.1 รูปทรงของปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

การติดตั้งสำหรับทำการทดลองตามรูปที่ 6.20 นั้นได้ถูกแสดงเป็นแผนภาพอย่างง่ายตามรูปที่ 6.21 ประกอบไปด้วยการแบ่งเป็นโดเมนย่อย หมายเลขกำกับแต่ละโดเมนย่อย และเงื่อนไขที่ขอบเขตของโดเมนหลักซึ่งโดเมนหลักจะมีขนาดเท่ากับ 0.75x0.75 เมตร ส่วนตำแหน่งของสิ่งกีดขวางนั้นจะถูกจัดเรียงในลักษณะสมมาตรตามแนวแกนตั้งและการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบเขตของสิ่งกีดขวางนั้นแสดงดังรูปที่ 6.22 ซึ่งอัตราส่วนของความยาวต่อความหนาของสิ่งกีดขวางมีค่ามากจึงสามารถสมมติได้ว่าค่าอุณหภูมิที่ปลายของสิ่งกีดขวางนั้นมีค่าเท่ากับอุณภูมิของของไหลที่สัมผัสอยู่ที่ปลายสิ่งกีดขวาง ส่วนที่ขอบด้านบนและขอบด้านล่างจะกำหนดให้มีการกระจายตัวแบบเชิงเส้นระหว่างค่าอุณหภูมิที่ผนังด้านร้อนและค่าอุณหภูมิที่ปลายของสิ่งกีดขวางซึ่งก็คือการสมมุติให้สิ่งกีดขวางเป็นวัสดุที่มีสภาพการนำความร้อนสมบูรณ์แบบ รูปที่ 6.23 แสดงการสร้างกริดในแต่ละโดเมนย่อยโดยโดเมนย่อยหมายเลข 1-6 ใช้จำนวนกริดเท่ากับ 64x64 จุด ในขณะที่โดเมนย่อย

หมายเลข 7-12 ใช้กริดเท่ากับ 120x80 จุด ซึ่งกริดจะถูกทำให้หนาแน่นบริเวณรอยต่อระหว่างโดเมน และบริเวณชิดกับผนังเพื่อลดค่าความผิดตัดปลาย (Truncation Error) ที่บริเวณดังกล่าว

จากการคำนวณในห้อข้อที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นแล้วว่าแบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) นั้นเหมาะสมที่สุดสำหรับการคำนวณปัญหาทางด้านการถ่ายเทความร้อน โดยแม้ว่าแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) จะมีการประยุกต์ใช้การจำลองความหนืดเอ็ดดีแบบไม่เชิงเส้นแล้วก็ตาม แต่ก็ไม่สามารถปรับปรุงหรือเพิ่มความแม่นยำในการทำนายผลได้เลย เพราะฉะนั้นแบบจำลองความปั่นป่วนที่ถูกใช้ในการคำนวณสำหรับปัญหาในหัวข้อนี้ก็จะเป็นแบบจำลอง SST-k-ω ของ Menter (1994) และค่าการหน่วงปริมาณความปั่นป่วน α จะใช้เท่ากับ 1 และจะกำหนดให้ $G_B=0$ ที่กริดหยาบทุกระดับ และสำหรับการคำนวณแบบขนานนั้นจะใช้หน่วยประมวลผลจำนวน 12 หน่วยนั่นคือแต่ละหน่วยประมวลผลจะทำการคำนวณเพียงแค่โด-เมนย่อยอันเดียวเท่านั้น แต่สำหรับการทดสอบสมรรถนะของการคำนวณแบบขนานนั้นจะทำการเปลี่ยนแปลงจำนวนหน่วยประมวลผลที่ใช้ ซึ่งเมื่อมีจำนวนหน่วยประมวลผลน้อยกว่าจำนวนโดเมนย่อยก็หมายความว่าจะมีอย่างน้อยหนึ่งหน่วยประมวลผลที่ทำการคำนวณโดเมนย่อยมากกว่าหนึ่งโด-เมน

6.2.2 ผลการคำนวณ

รูปที่ 6.24 แสดงเส้นระดับของความเร็วลัพธ์โดยจะพบว่าเส้นจะลากผ่านเส้นรอยต่อระหว่างโดเมนย่อยอย่างต่อเนื่องไม่มีการกระโดดของเส้นซึ่งชี้ให้เห็นถึงประสิทธิภาพของเทคนิคมัลติบล็อกที่นำมาใช้ รูปที่ 6.25 แสดงลูกศรความเร็วที่บริเวณตรงปลายของสิ่งกีดขวาง รูปที่ 6.26 แสดงความเร็วตามแนวแกนนอนที่ตำแหน่งตรงกลางระหว่างสิ่งกีดขวางที่ติดกันแต่ละคู่ซึ่งจะเป็นการเปรียบเทียบกันระหว่างผลการคำนวณกับข้อมูลการทดลอง ผลการคำนวณที่ได้อยู่ในระดับที่น่าพอใจกล่าวคือมีแนวโน้มเป็นไปตามผลการทดลอง รูปที่ 6.27 แสดงเส้นระดับของอุณหภูมิแนวโน้มของเส้นจะเป็นไปในลักษณะเหมือนกับว่าตำแหน่งของผนังด้านซ้ายนั้นจะอยู่ตรงปลายสิ่งกีดขวาง (พิจารณารูปที่ 6.10 ประกอบ) รูปที่ 6.28 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนตามแนวผนังด้านร้อน (ซ้าย) และผนังด้านเย็น (ขวา) ที่ผนังด้านร้อนซึ่งก็คือบริเวณที่ติดตั้งครีบโลหะนั้น ผลการคำนวณค่าการถ่ายเทความร้อนนั้นให้ผลเป็นที่น่าพอใจโดยมีแนวโน้มเดียวกันกับผลการทดลอง แต่ในขณะที่ผนังด้านขวาค่าการถ่ายเทความร้อนกลับมีพฤติกรรมเหมือนกับกรณีของโพรงจัตุรัสว่างเปล่าที่ได้อภิปรายไปในหัวข้อที่ผ่านมา ซึ่งบ่งบอกว่าครีบโลหะไม่ได้มีการดูดหรือถ่ายเทความร้อนออกมาจากผนังด้านที่ติดตั้งอยู่เลย ส่งผลให้การทำนายค่าการกระจายตัวของอุณหภูมิในแนวแกน x ที่ระดับกึ่งกลางของสั่งกีดขวางแต่ละคู่ตามรูปที่ 6.29 นั้นต่ำกว่าผลการทดลองมาก ซึ่งข้อบกพร่องดังกล่าว

อาจเกิดเนื่องมาจากการใช้การประมาณค่าฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน (Turbulent Heat Flux) ที่ไม่เหมาะสมทำให้ไม่มีพจน์ก่อกำเนิดในสมการอุณหภูมิเลยและยิ่งไปกว่านั้นของไหลที่อยู่ระหว่างปลายครีบกับผนังด้านขวานั้นส่วนใหญ่มีความเร็วเป็นศูนย์ดังนั้นจึงไม่มีกลไกที่จะช่วยยกระดับค่าอุณหภูมิในบริเวณนี้ให้สูงขึ้นได้ และอีกประการก็คือการกำหนดเงื่อนไขที่ปลายครีบไม่เหมาะสมซึ่งอาจจะต้องทำการคำนวณแบบคอนจูเกจ (Conjugate Heat Transfer) และกำหนดให้เงื่อนไขที่ปลายครีบเป็นเงื่อนไขที่มีการนำความร้อนเท่ากับการพาความร้อนที่ปลายครีบจึงจะทำให้อุณหภูมิที่ผนังด้านร้อนนั้นกระจายมายังปลายครีบได้ดี

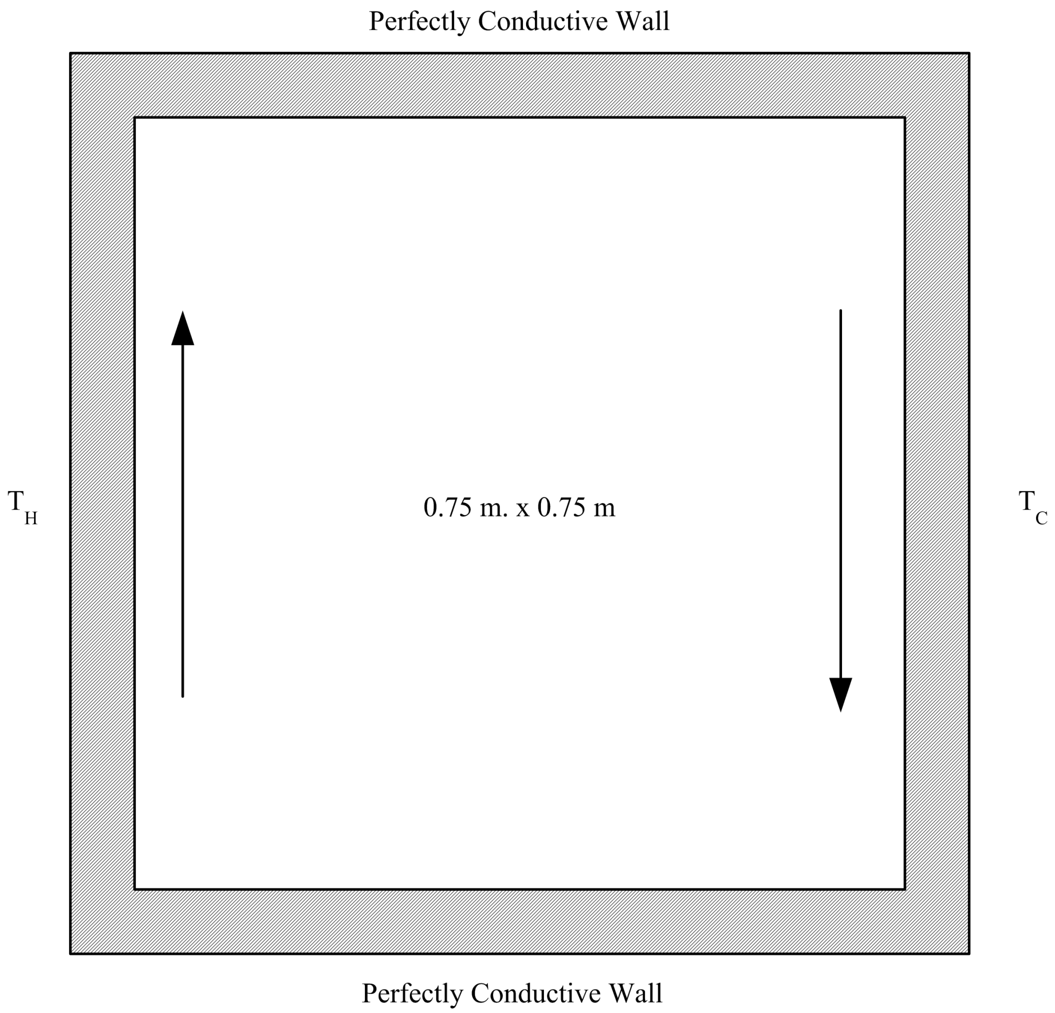
6.2.3 สมรรถนะของการคำนวณ

รูปที่ 6.30 แสดงการลดลองของเศษตกค้างเทียบต่อรอบการคำนวณของกริดละเอียด โดยเป็นการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีมัลติกริด ซึ่งจะพบว่าสามารถลดจำนวนรอบในการคำนวณได้มากกว่าสองเท่า รูปที่ 6.31 แสดงการทดสอบสมรรถนะของการคำนวณแบบขนานโดยการเปลี่ยนแปลงจำนวนของโหนดคำนวณ ซึ่งเวลาที่ใช้ในการหาค่าการได้เปรียบเชิงเวลานั้นจะอ้างอิงกับเวลาของการคำนวณด้วยกริดเพียงชุดเดียงโดยการคำนวณแบบตามลำดับ ดังนั้นค่าการได้เปรียบเชิงเวลาที่ได้จึงมากกว่าค่าการได้เปรียบเชิงเวลาแบบเชิงเส้นซึ่งถือว่าสูงกว่าการได้เปรียบเชิงเวลาแบบเชิงเส้น (Linear Speed-Up) หรือค่าการได้เปรียบเชิงเวลาสมบูรณ์แบบ (Ideal Speed-Up)

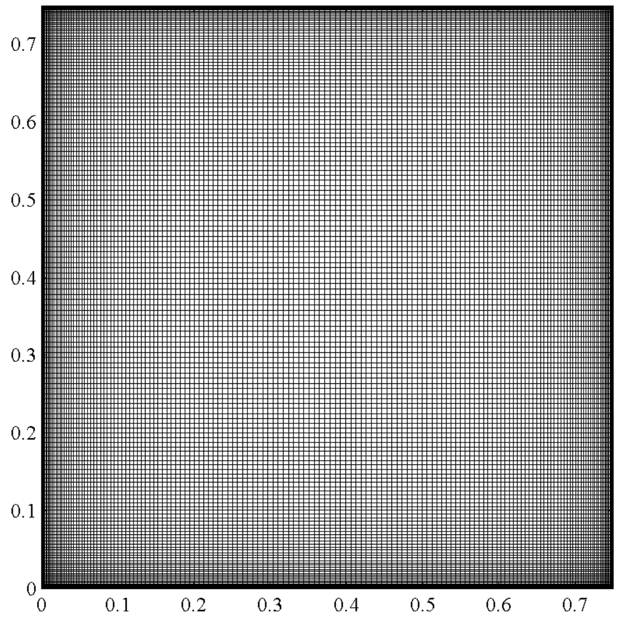
6.3 สรุป

บทนี้เป็นการคำนวณปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อน จากผลการคำนวณได้แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) นั้นล้มเหลวต่อการทำนายปัญหาการไหลชนิดนี้แม้ว่าจะประยุกต์ใช้การจำลองค่าความหนืดเอ็ดดี้แบบไม่เชิงเส้นแล้วก็ตาม ผลการคำนวณที่ได้รับการปรับปรุงให้ถูกต้องมากขึ้นกลับเป็นความเร็วและปริมาณความปั่นป่วนซึ่งไม่มีความสำคัญต่อการออกแบบทางวิศวกรรมมากเท่าใดนัก ในขณะที่การทำนายผลของอุณหภูมิกลับไม่ดีขึ้น เพราะฉะนั้นแบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) จึงเป็นตัวเลือกที่ดีกว่าสำหรับนำมาใช้ทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้อง แต่อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาการไหลที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่มีความซับซ้อนหรือมีการติดตั้งสิ่งกีดขวางเพื่อประโยชน์ใช้งานบางประการ การใช้แบบจำลอง SST-k-ω เพียงอย่างเดียวอาจจะให้ผลการทำนายที่ไม่ดีพอสำหรับการทำนายการถ่ายเทความร้อนโดยเฉพาะการถ่ายเทความร้อนแบบการพาโดยธรรมชาติซึ่งการไหลส่วนใหญ่จะมีความเร็วที่ค่อนข้างต่ำ ซึ่งอาจจะต้องใช้แบบจำลองขั้นสูงสำหรับพจน์ฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน (Turbulent Heat Flux) เพื่อให้มีตัวขับ

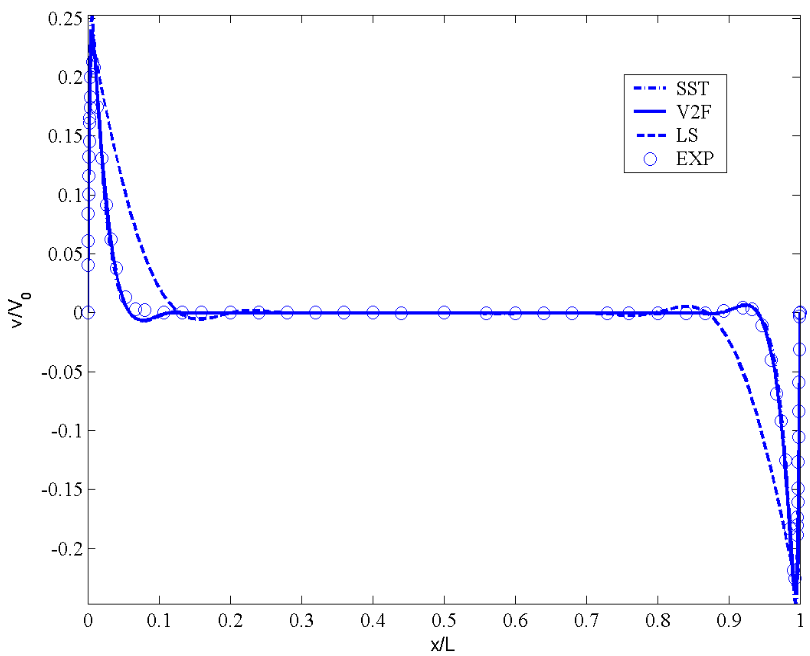
เคลื่อนในสม-การอุณหภูมิหรืออาจจะต้องมี "การคำนวณการถ่ายเทความแบบร่วม" (Conjugate Heat Transfer Calculation) เพื่อให้การถ่ายเทความร้อนจากผนังหรือวัตถุส่งผ่านมายังสิ่งกีดขวางนั้นทำได้ดียิ่งขึ้น



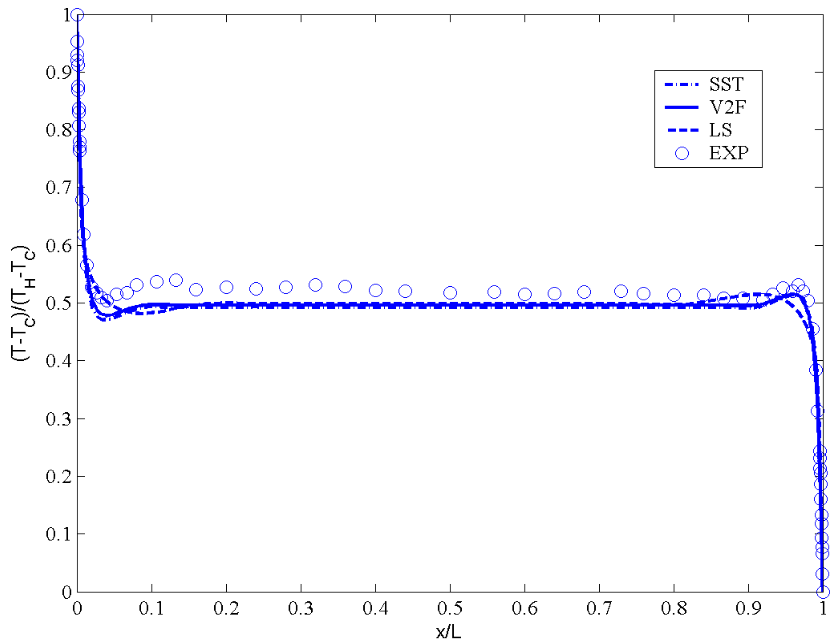
รูปที่ 6.1 แผนภาพแสดงรูปทรงของปัญหาพร้อมทั้งเงื่อนไขขอบเขต โดยที่ T_H=50°C และ T_C=10°C ในขณะที่ผนังด้านบนและด้านล่างได้จากการประมาณค่าเชิงเส้นในช่วงระหว่าง T_H และ T_C



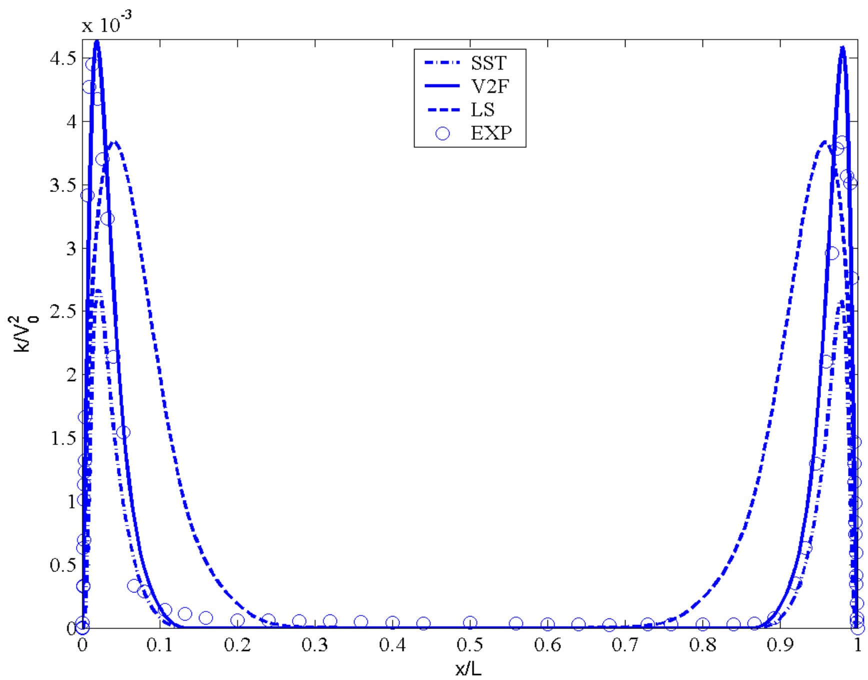
รูปที่ 6.2 แสดงกริดที่ใช้ในการคำนวณ จำนวนกริดเท่ากับ161x161 และกำหนดให้มีการกระจายตัวด้วยฟังก์ชันโพลิโนเมียลกำลังสาม



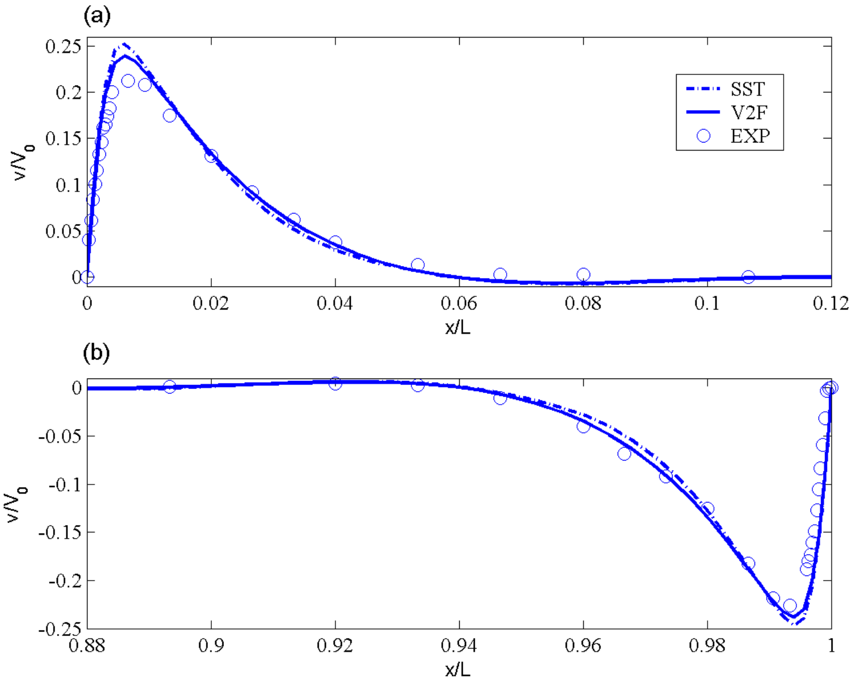
รูปที่ 6.3 แสดงการเปรียบเทียวความเร็วในแนวแกนนอนที่ระดับกึ่งกลางของความสูง



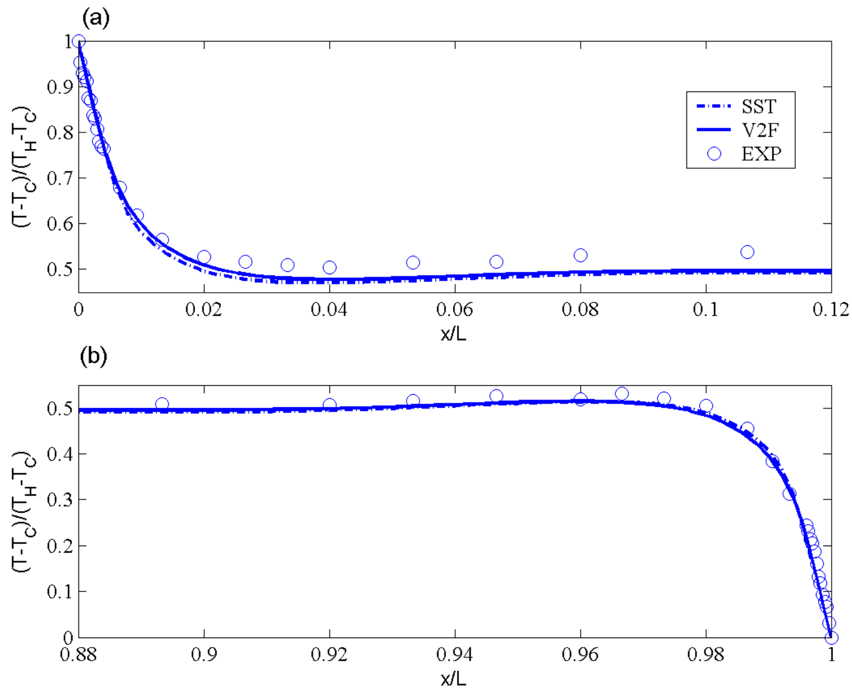
รูปที่ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิในแนวแกนนอนที่ระดับกึ่งกลางของความสูง



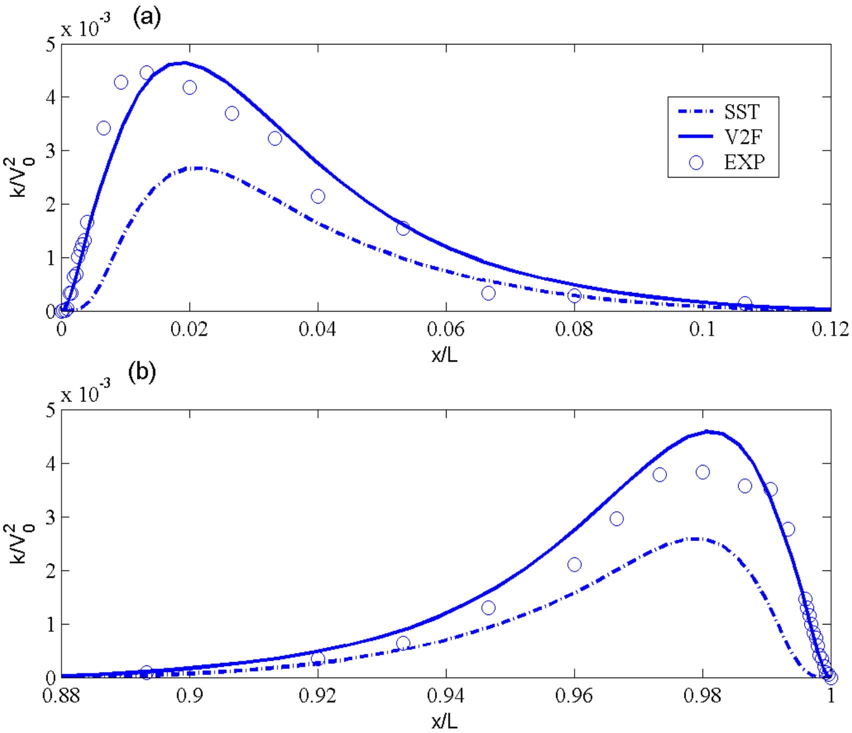
รูปที่ 6.5 แสดงการเปรียบเทียวพลังงานจลน์ความปั่นป่วนในแนวแกนนอน
ที่ระดับกึ่งกลางของความสูง



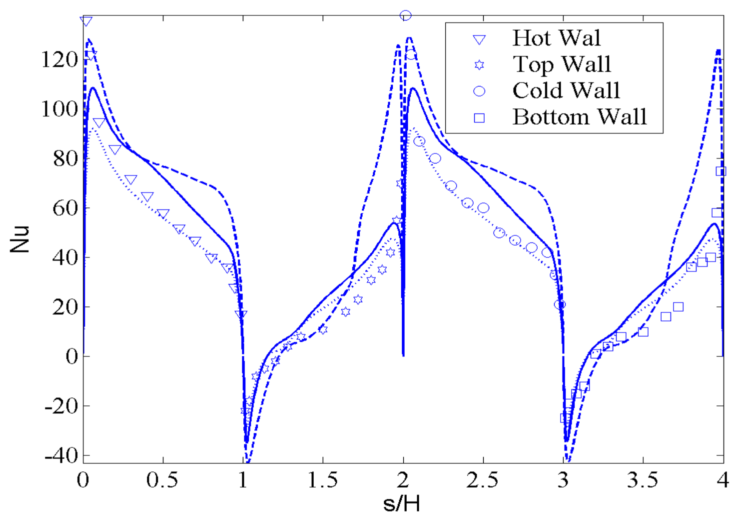
รูปที่ 6.6 แสดงการกระจายตัวของความเร็วบริเวณใกล้ผนัง (a) ด้านซ้าย (b) ด้านขวา



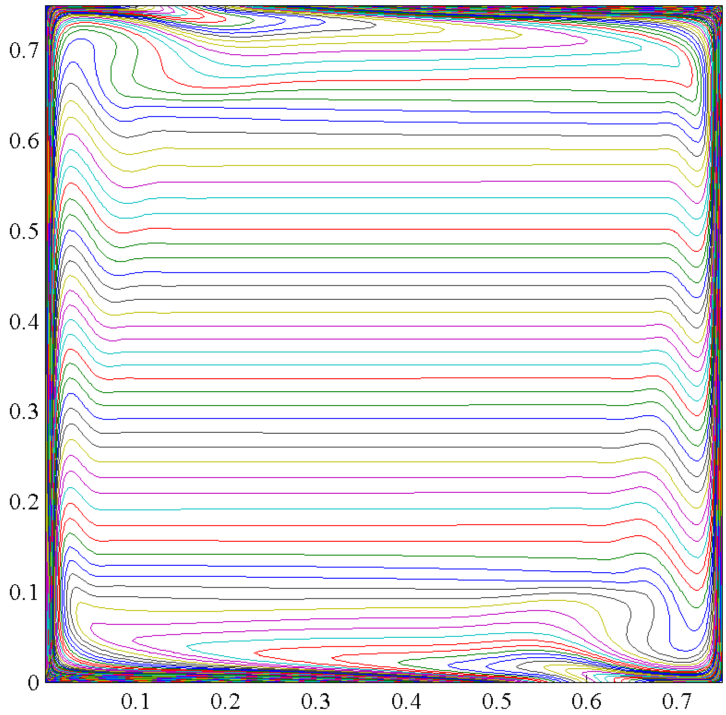
รูปที่ 6.7 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณใกล้ผนัง (a) ด้านซ้าย (b) ด้านขวา



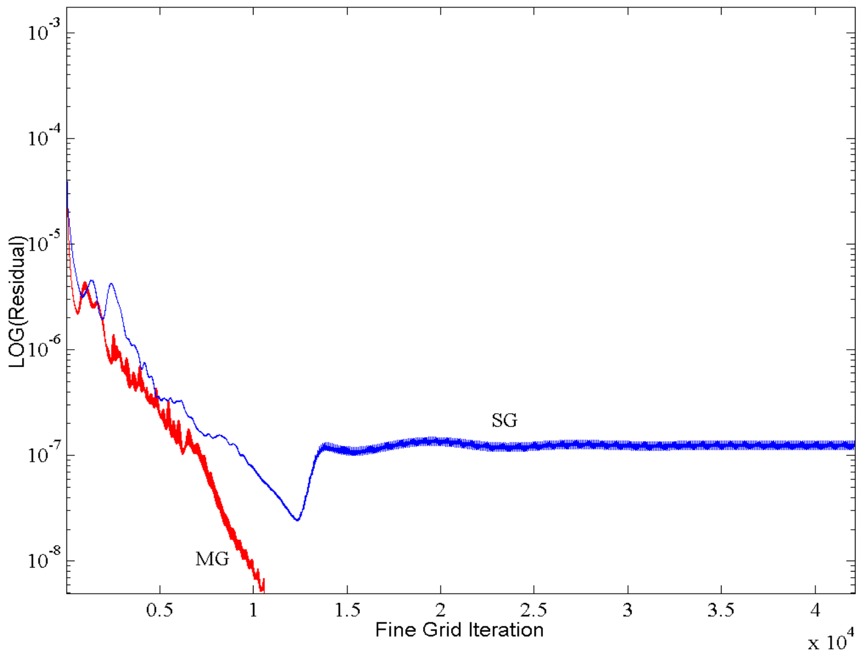
รูปที่ 6.8 แสดงการกระจายตัวของพลังงานจลน์ความปั่นป่วนบริเวณใกล้ผนัง (a) ด้านซ้าย และ (b) ด้านขวา



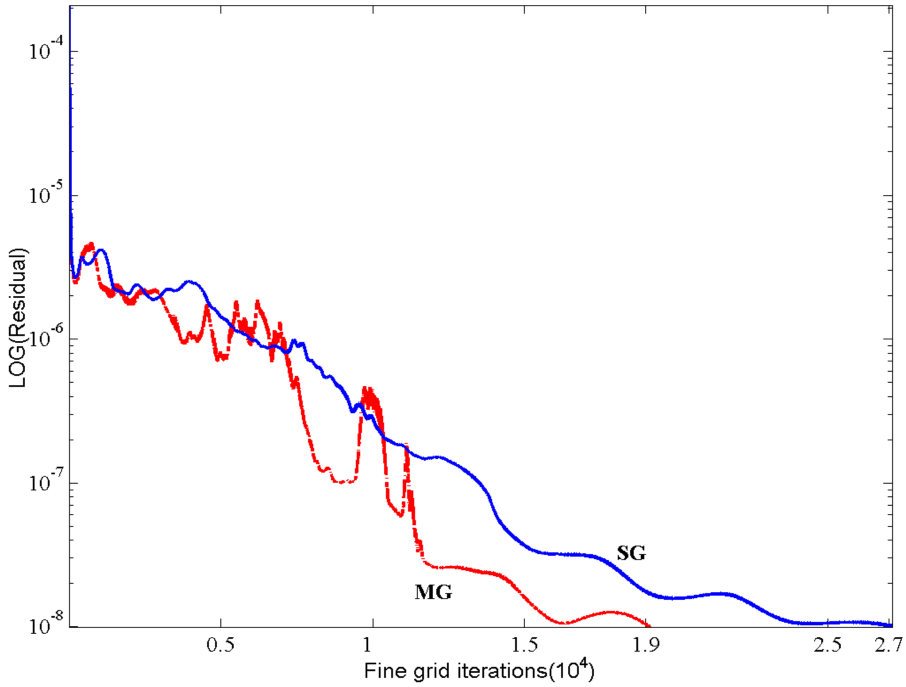
รูปที่ 6.9 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนที่ผนังในรูปของ Nu เมื่อ s/H คือระยะทางที่ลากไปตามผนังในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เมื่อเส้น —— แทนผลการทำนายของ LS, —— แทนผลการทำนายของ V2F, ·· แทนผลการทำนายของ SST และสัญลักษณ์ใช้แทนค่าที่ได้จากผลการทดลอง



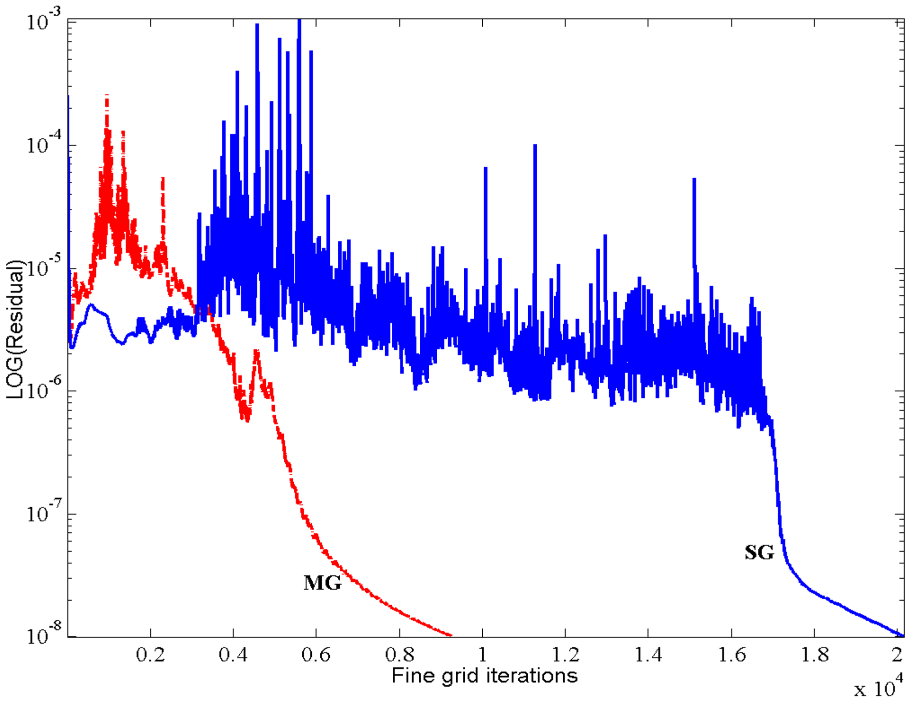
รูปที่ 6.10 แสดงเส้นระดับของอุณหภูมิ



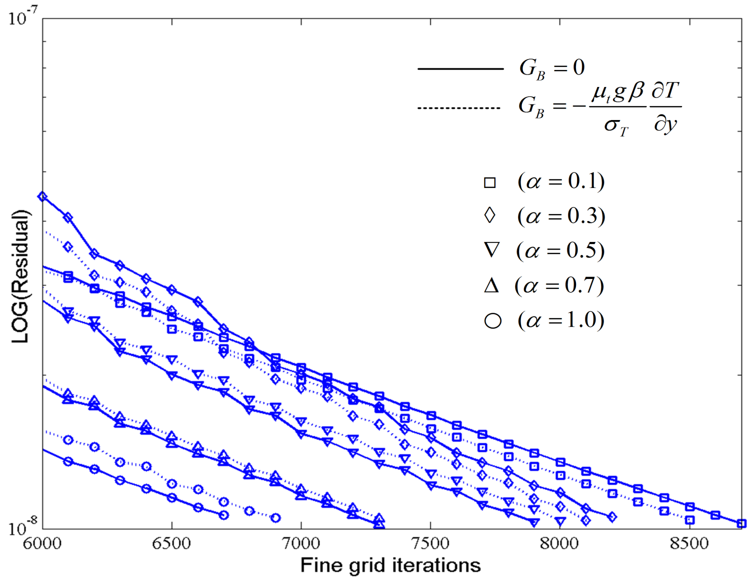
รูปที่ 6.11 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้แบบจำลองของ Launder และ Sharma (1974)



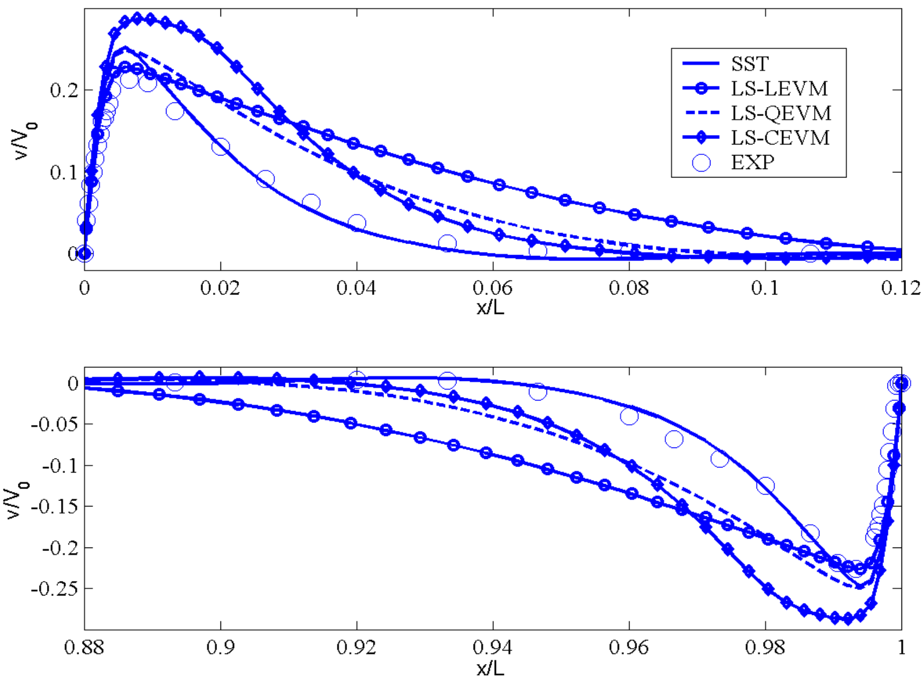
รูปที่ 6.12 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้แบบจำลองของ Durbin (1995)



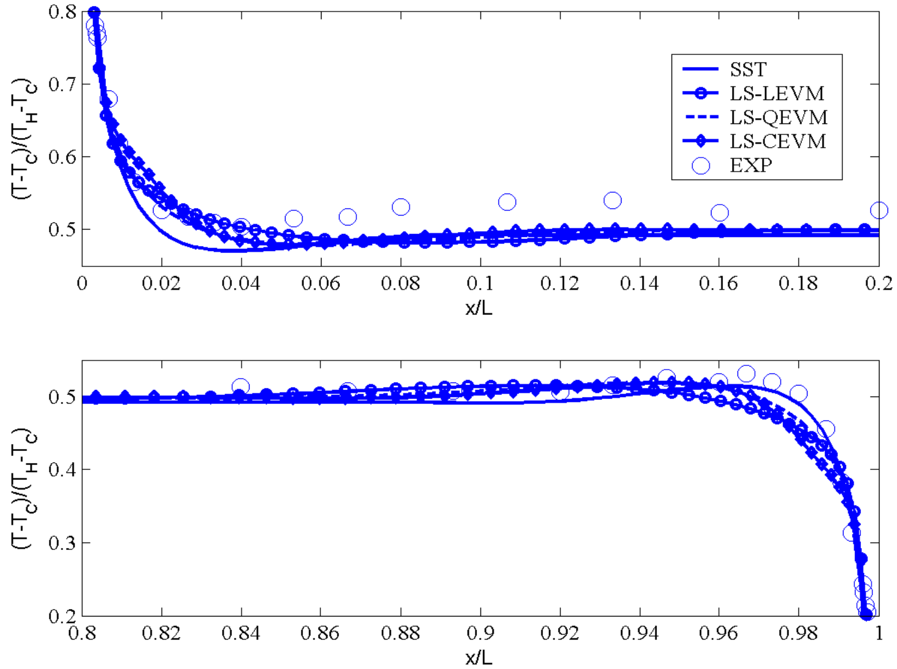
รูปที่ 6.13 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างเมื่อใช้แบบจำลองของ Menter (1994)



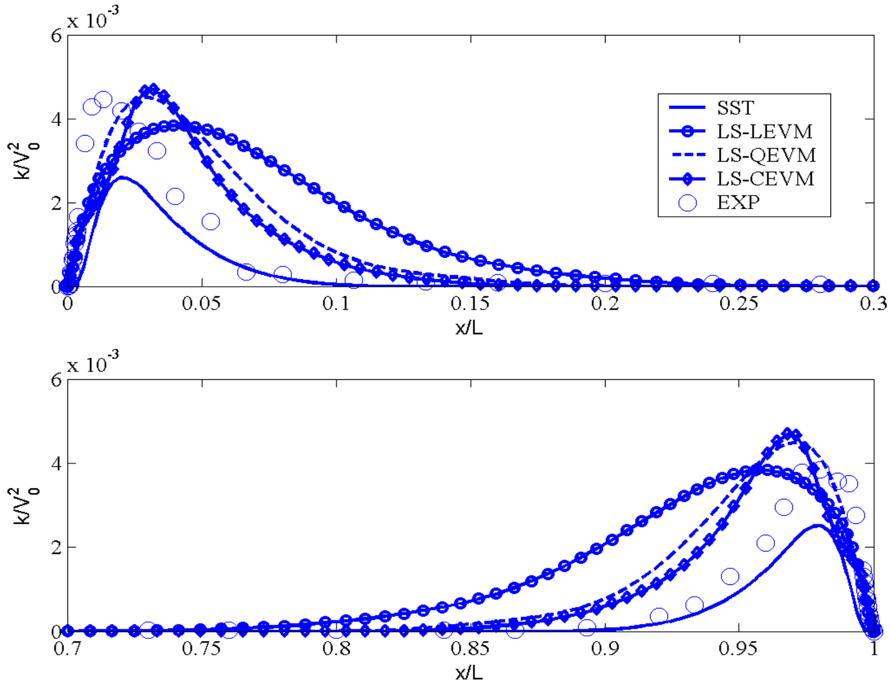
รูปที่ 6.14 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างด้วยการเปลี่ยนแปลงค่าองค์ประกอบในการหน่วงของการปรับแก้ปริมาณความปั่นป่วนและแสดงผลกระทบของพจน์การสร้างแบบปั่นป่วนของแรงลอยตัวที่มีต่อกริดหยาบ



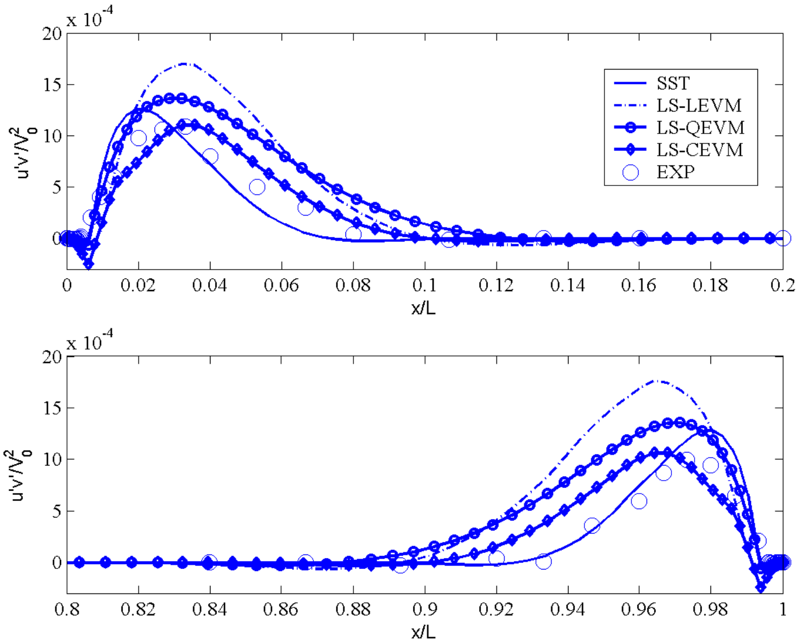
รูปที่ 6.15 แสดงการทำนายความเร็วของแต่ละแบบจำลองเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง



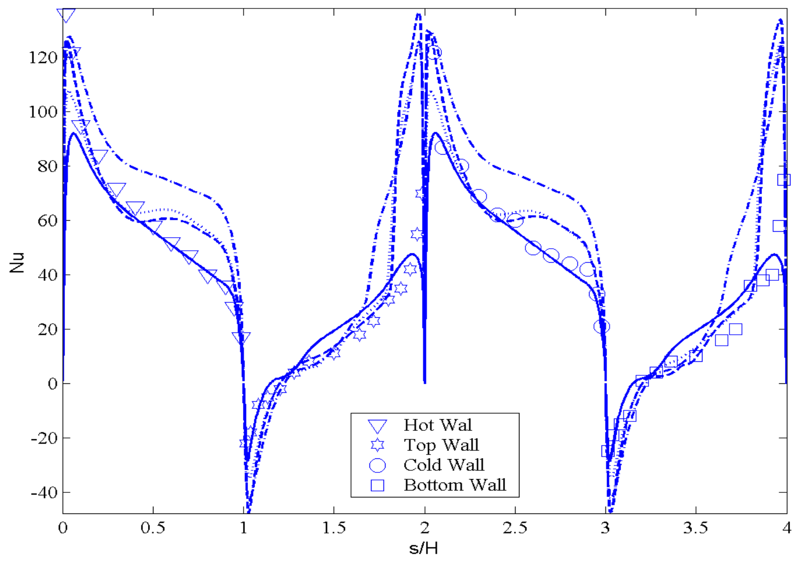
รูปที่ 6.16 แสดงการทำนายอุณหภูมิของแต่ละแบบจำลองเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง



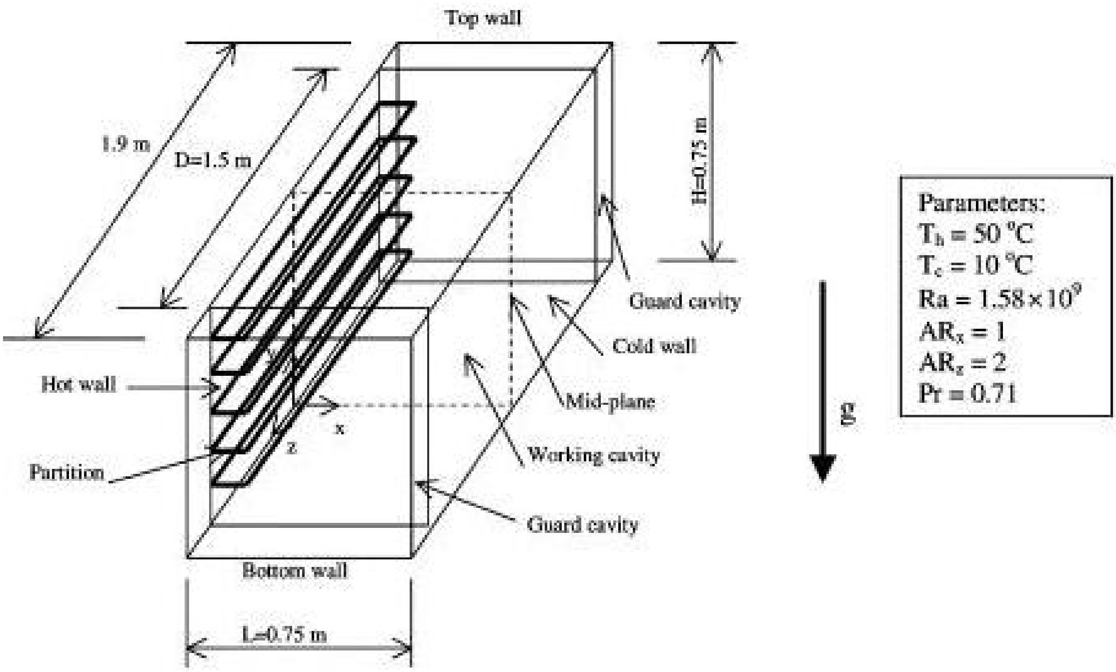
รูปที่ 6.17 แสดงการทำนายค่าพลังงานจลน์ความปั่นป่วนของแต่ละแบบจำลองเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง



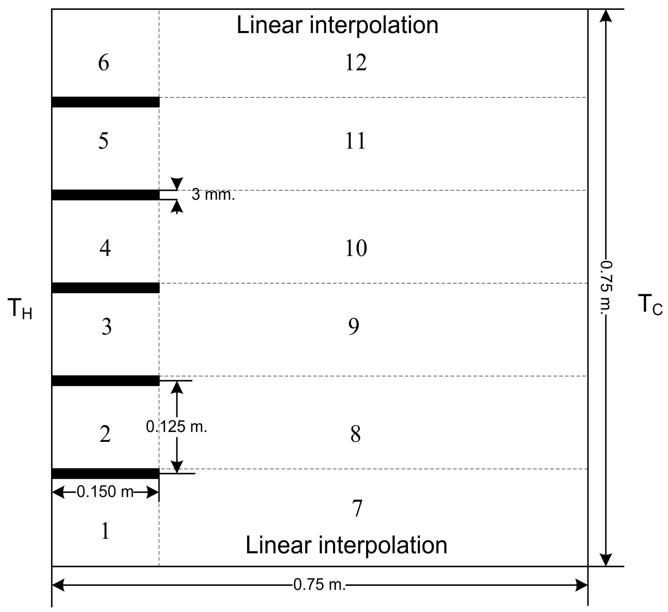
รูปที่ 6.18 แสดงการทำนายค่าความเค้นเรย์โนลด์ในแนวเฉือนของแต่ละแบบจำลองเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการทดลอง



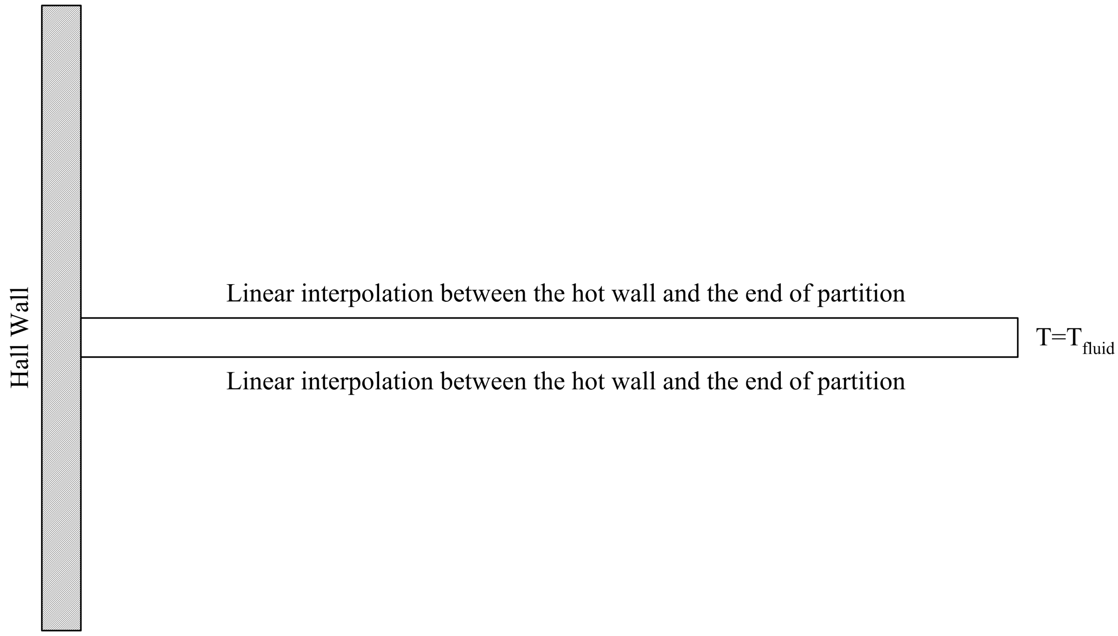
รูปที่ 6.19 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนที่ผนังเมื่อ s/H คือระยะทางตามแนวผนังในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเริ่มจากมุมล่างซ้าย ซึ่งแต่ละเส้นใช้แทนแต่ละแบบจำลองดังนี้: —— เป็นผลการทำนายของ SST, — — เป็นผลการทำนายของ CEVM, ·· เป็นผลการทำนายของ QEVM, —·— เป็นผลการทำนายของ LEVM และสัญลักษณ์แต่รูปแทนผลจากการทดลอง



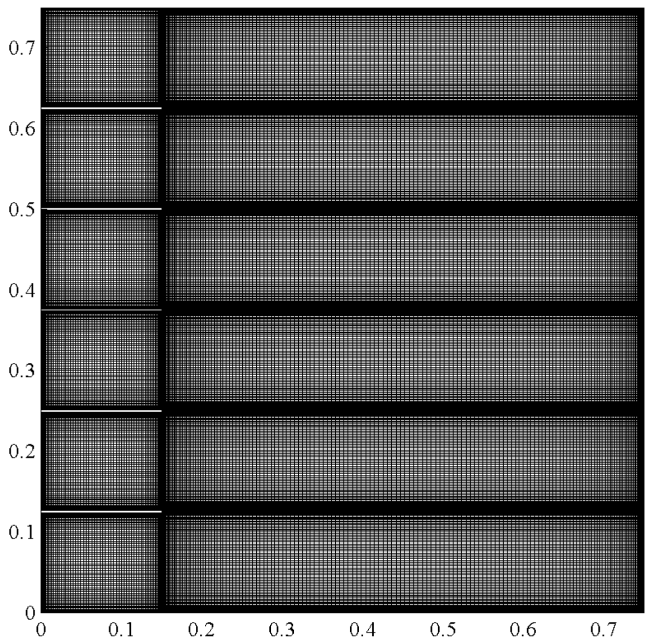
รูปที่ 6.20 รูปแสดงการติดตั้งอุปกรณ์สำหรับทำการทดลอง (ภาพจาก Ampofo [2005])



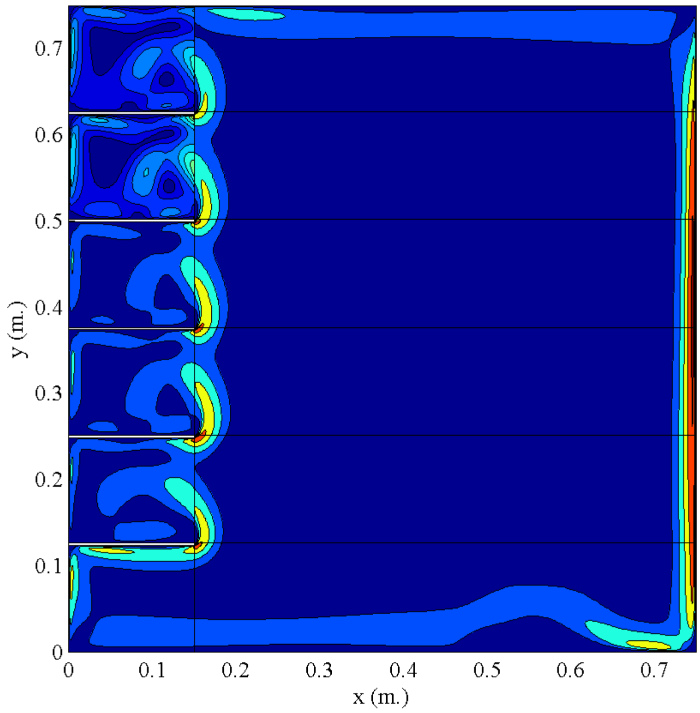
รูปที่ 6.21 แผนภาพแสดงโดนเมนและการแบ่งโดนสำหรับการคำนวณ พร้อมทั้งหมายเลขกำกับ
แต่ละโดเมนย่อยและเงื่อนไขที่ขอบเขตสำหรับโดเมนหลัก



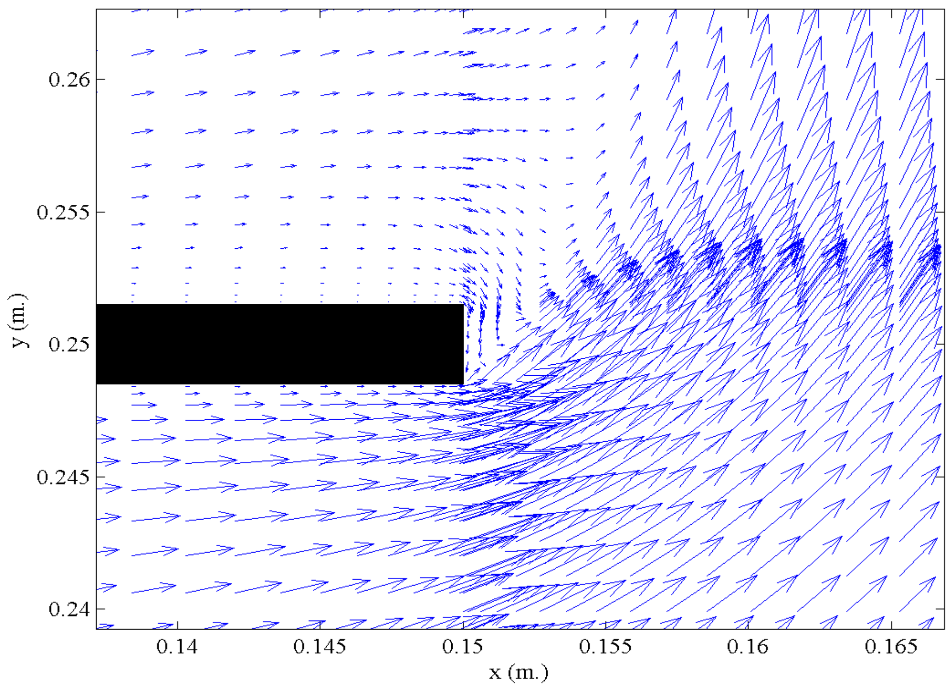
รูปที่ 6.22 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่สิ่งกีดขวาง



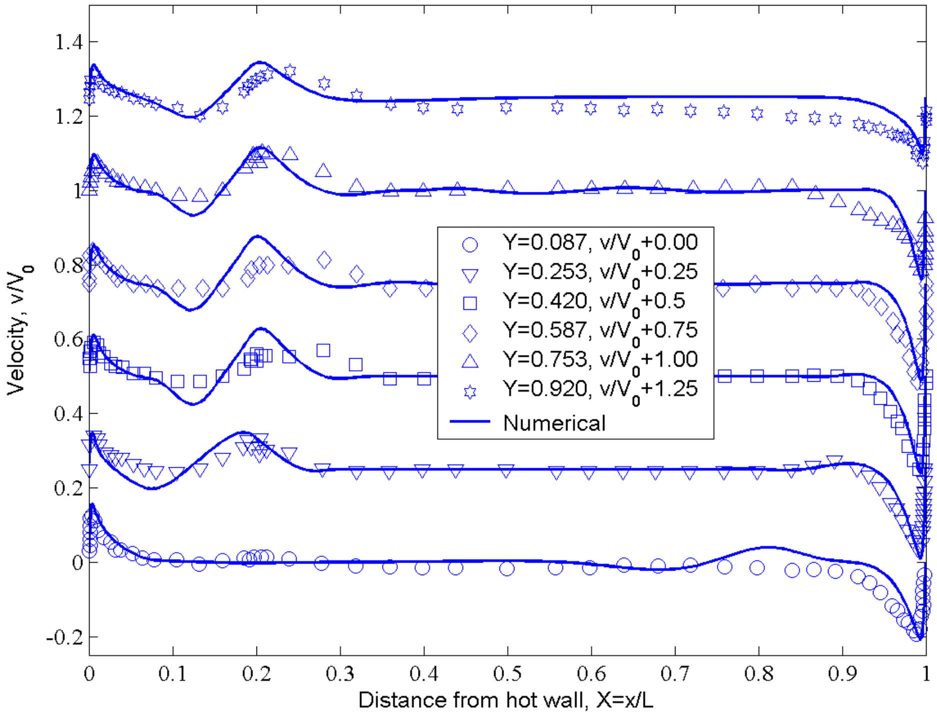
รูปที่ 6.23 แสดงการสร้างกริดในแต่ละโดนเมนย่อยโดยโดเมนย่อยหมายเลข 1-7 ใช้กริดเท่ากับ 64x64 ในขณะที่โดเมนย่อยหมายเลขที่ 6-12 ใช้กริดเท่ากับ 128x80



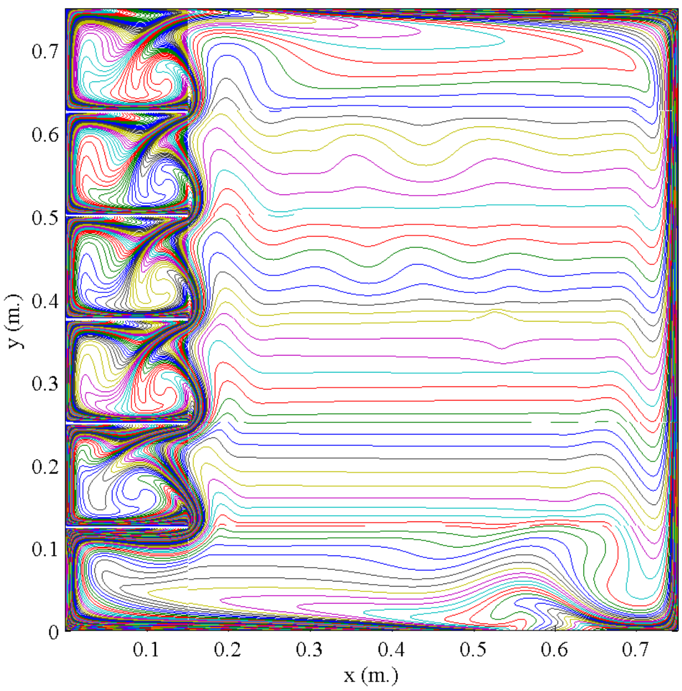
รูปที่ 6.24 แสดงเส้นระดับของความเร็วลัพธ์



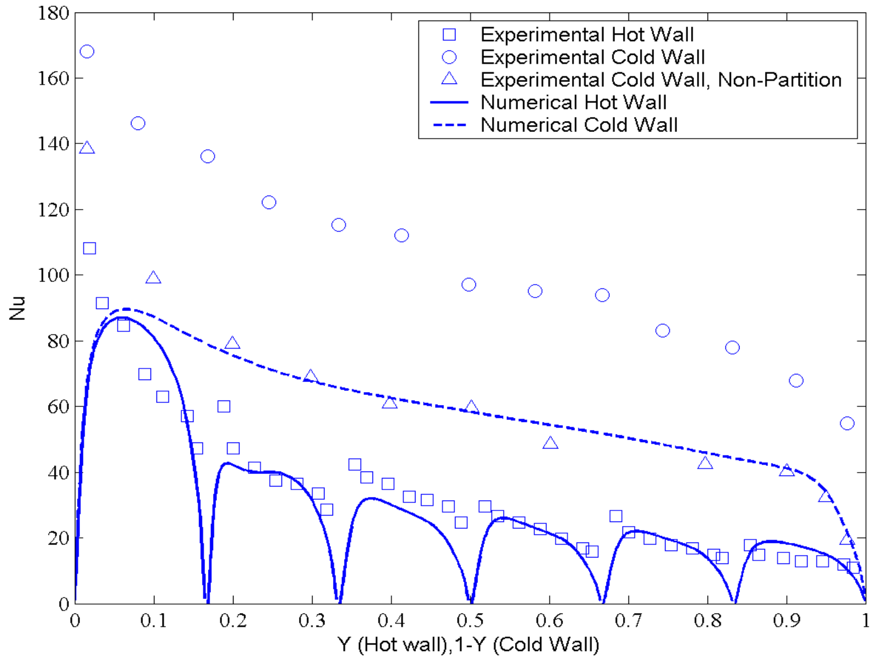
รูปที่ 6.25 แสดงเวคเตอร์ความเร็วที่บริเวณปลายของสิ่งกีดขวางอันที่สองนับจากด้านล่าง



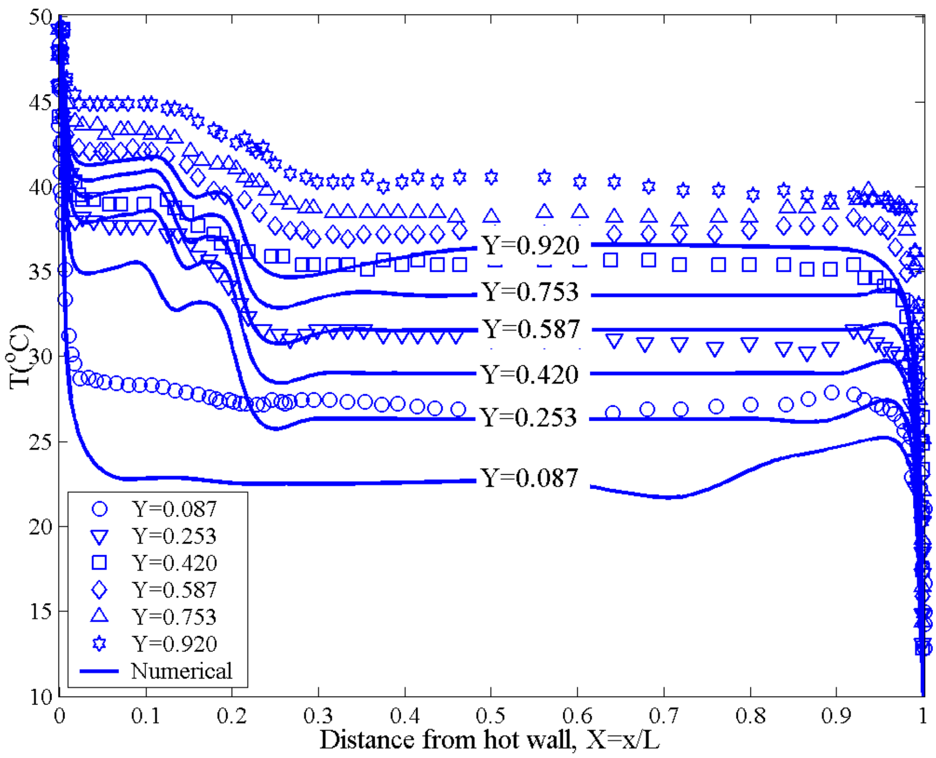
รูปที่ 6.26 แสดงการกระจายตัวของความเร็วตามแนวแกนนอน
ที่กึ่งกลางของสิ่งกีดขวางแต่ละคู่



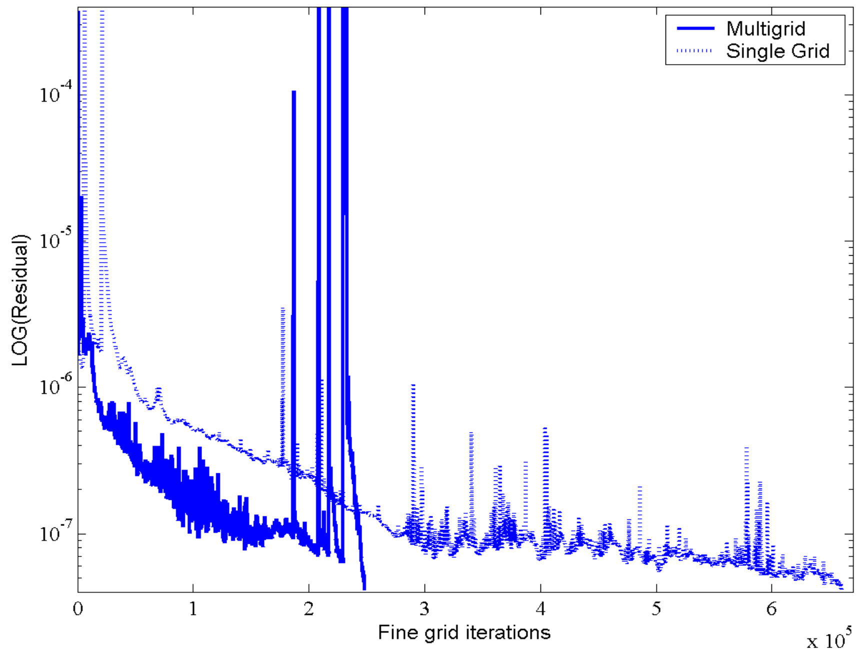
รูปที่ 6.27 แสดงเส้นระดับของอุณหภูมิ



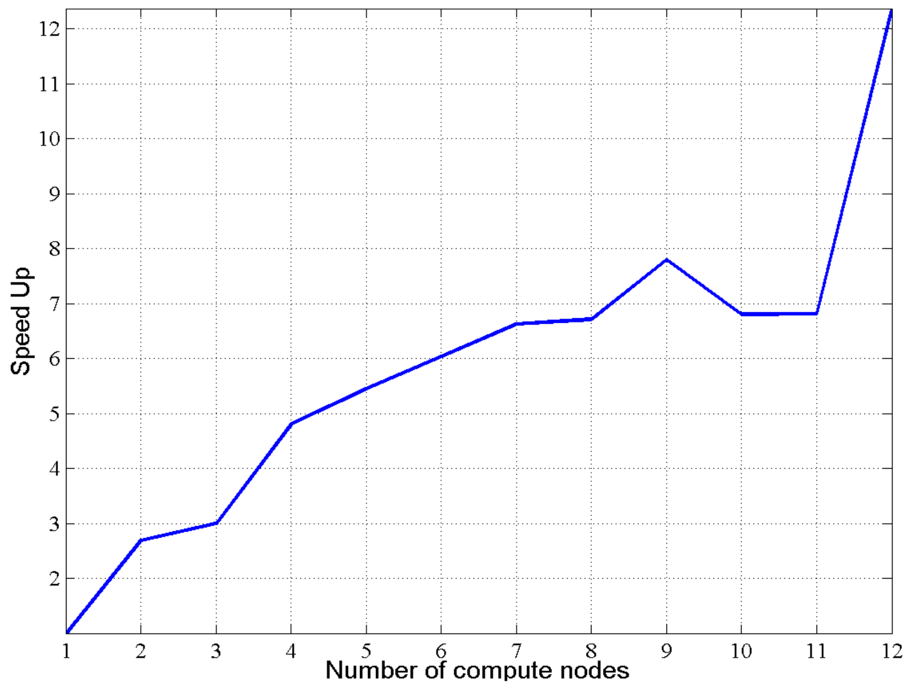
รูปที่ 6.28 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนตามแนวผนังด้านร้อน (ซ้าย) และผนังด้านเย็น (ขวา)



รูปที่ 6.29 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิตามแนวแกนนอนที่กึ่งกลางของสิ่งกีดขวางแต่ละคู่



รูปที่ 6.30 แสดงการเปรียบเทียบการลดลงของเศษตกค้างระหว่าง
การใช้กริดชุดเดียวและการใช้กริดหลายชุด



รูปที่ 6.31 การทดสอบสมรรถนะการคำนวณแบบขนาน

บทที่ 7
การไหลแบบปั่นป่วนสามมิติ
(Three-Dimension Turbulent Flow)

บทนี้จะเป็นการคำนวณปัญหาการไหลประเภทเดียวกันกับบทที่ 5 นั่นคือเป็นการไหลอย่างคงตัวแบบปั่นป่วนที่อุณหภูมิคงที่ แต่เหตุที่ต้องพิจารณาแยกจากกันเนื่องจากว่าการไหลในกรณีนี้เป็นการไหลแบบสามมิติ ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะต้องมีการพัฒนาเพิ่มเติมจากบทที่ผ่านมา ซึ่งกรรมวิธีในการแปลงสมการรวมทั้งเทคนิคการคำนวณแต่ละแบบที่นำมาใช้นั้นจะต้องทำการปรับปรุงเพื่อให้รองรับกับปัญหาสามมิติอีกทั้งจะต้องเริ่มต้นทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมอีกครั้ง สำหรับแบบจำลองความปั่นในบทนี้จะเลือกใช้แบบจำลอง SST-k-ω ของ Menter (1994) โดยแทนที่จะเป็นแบบจำลอง k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) เนื่องจากแบบจำลอง Launder-Sharma มีข้อด้อยอยู่ที่พจน์ก่อกำเนิด $E=2\nu\nu_t(\partial^2 u_i/\partial x_j\partial x_k)^2$ ที่เพิ่มเข้ามาในสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ ε นั้นมีความยุ่งยากในการเขียนโปรแกรมสำหรับปัญหาสามมิติมาก ซึ่งพจน์นี้จะเกี่ยวข้องกับการหาค่า "อนุพันธ์อันดับสองแบบไขว้" (Cross Derivative) ตัวอย่างเช่น $\partial^2 u/(\partial x\partial y)$ โดยวิธีการที่จะทำให้สะดวกขึ้นได้แก่การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของความเร็วทุกองค์ประกอบเทียบกับพิกัดทั้งสามทิศทางเพื่อที่จะนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาทำการหาค่าอนุพันธ์ซ้ำอีกครั้งจะพบว่าต้องสูญเสียเวลาในส่วนนี้มากพอสมควร และ Hsieh และ Lien (2004) ยังระบุด้วยว่าพจน์ดังกล่าวนี้มีความอ่อนไหวต่อความหนาแน่นของกริดบริเวณชิดกับผนังสูง ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นการคำนวณในบทนี้จึงใช้แบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) สำหรับปัญหาที่จะทำการคำนวณนั้นจะเป็นการไหลในโพรงแบบลูกบาศก์ซึ่งของไหลด้านบนจะถูกขับหรือเฉือนด้วยความเร็วคงที่ส่งผลให้ของไหลภายในโพรงมีการเคลื่อนที่ตามไปด้วย

7.1 ระบบสมการพีชคณิต

กรรมวิธีในการแปลงสมการการถ่ายโอนทั่วไปตามสมการ (3.23) ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตตามสมการ (3.26) ที่ได้แสดงในหัวข้อที่ 3.3 นั้นเป็นการแปลงแบบสองมิติซึ่งทำการหาค่าปริพันธ์ (Integrate) เทียบกับพื้นที่ ส่วนการแปลงแบบสามมิตินั้นจะเป็นการหาค่าปริพันธ์เทียบกับปริมาตรซึ่งสามารถกระทำได้ในทำนองเดียวกัน ดังนั้นสมการ (3.26) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + a_T\phi_T + a_B\phi_B + S^{\phi} \tag{7.1}$$

ซึ่ง $a_P=a_E+a_W+a_N+a_S+a_T+a_B$ โดยสัมประสิทธิ์ค่าอื่นสามารถหาได้ในทำเดียวกันกับสมการ (3.27a)-(3.27f) โดยมีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยในสมการคือ

$$D_E = \Gamma_e \frac{\left(y_n - y_s\right)\left(z_t - z_b\right)}{\left(x_E - x_W\right)} \tag{7.2}$$

$$D_W = \Gamma_w \frac{\left(y_n - y_s\right)\left(z_t - z_b\right)}{\left(x_P - x_W\right)} \tag{7.3}$$

$$F_e = \rho u_e\left(y_n - y_s\right)\left(z_t - z_b\right) \tag{7.4}$$

$$F_w = \rho u_w\left(y_n - y_s\right)\left(z_t - z_b\right) \tag{7.5}$$

และสำหรับสมการการปรับแก้ความดันเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_P p'_P - (a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + a_T p'_T + a_B p'_B) = S_m \tag{7.6}$$

โดยที่

$$a_E = \frac{(y_n - y_s)^2 (z_t - z_b)^2}{a_P\big|_e} \tag{7.7}$$

$$a_W = \frac{(y_n - y_s)^2 (z_t - z_b)^2}{a_P\big|_w} \tag{7.8}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B \tag{7.9}$$

$$S_m = (u_w^* - u_e^*)(y_n - y_s)(z_t - z_b) \\ + (v_s^* - v_n^*)(x_e - x_w)(z_t - z_b) + (w_b^* - w_t^*)(x_e - x_w)(y_n - y_s) \quad (7.10)$$

และ

$$u_e^* = \frac{u_E - u_P}{x_E - x_P} - \left(\frac{(p_E - p_P)}{(x_E - x_P)} - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_e \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)(z_t - z_b)}{\left.a_P\right|_e} \quad (7.11)$$

$$u_w^* = \frac{u_P - u_W}{x_P - x_W} - \left(\frac{(p_P - p_W)}{(x_P - x_W)} - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_w \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)(z_t - z_b)}{\left.a_P\right|_w} \quad (7.12)$$

ซึ่งพจน์ที่ไม่ได้แสดงนั้นสามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน และดัชนีตัวห้อยที่เพิ่มเข้ามาได้แก่ T และ B จะใช้แทนตำแหน่งข้างเคียงจุด P ในตำแหน่งด้านบนและด้านล่างตามลำดับ สำหรับการคำนวณระบบสมการพีชคณิตนั้นจะทำการคำนวณเช่นเดียวกันกับกรณีสองมิติคือใช้ขั้นตอนวิธี TDMA แบบเส้นในแต่ละระนาบและมีการสลับไปมาระหว่างระนาบโดยจะคำนวณในระนาบ XY ด้วยขั้นตอนวิธี TDMA แบบเส้นหนึ่งรอบจากนั้นคำนวณด้วยวิธีเดิมบนระนาบ YZ อีกหนึ่งรอบและต่อด้วยระนาบ XZ อีกหนึ่งรอบถือเป็นสามรอบการคำนวณซึ่งจะสอดคล้องพอดีกับระเบียบวิธีมัลติกริดที่จะทำการคำนวณจำนวน 3 รอบในกริดแต่ละระดับ

7.2 การส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริด

ขั้นตอนหนึ่งในระเบียบวิธีมัลติกริดนั้นคือการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดชุดที่ติดกัน จากรูปที่ 7.1 ซึ่งแสดงตำแหน่งศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมของกริดละเอียดที่อยู่ล้อมรอบตำแหน่งศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมที่หยาบกว่าซึ่งที่ตำแหน่งกริดหยาบ I, J, K ใด ๆ จะมีจุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมของกริดละเอียดจำนวน 8 จุดล้อมรอบอยู่ตามรูป ในการส่งถ่ายค่าเศษตกค้างนั้นจะทำการส่งถ่ายค่าแบบถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาตรนั่นคือจากรูป 7.1 ก็จะได้ $R_{I,J,K}V_{I,J,K} = \sum r_{nb}v_{nb}$ เมื่อ nb แทนดัชนีอักษรตัวเล็กดังแสดงในรูป R แทนค่าเศษตกค้าง และ V แทนขนาดของปริมาตรควบคุมในตำแหน่งของค่าเศษตกค้างนั้นอยู่ รูปที่ 7.2 แสดงการวางตัวของตำแหน่งศูนย์กลางปริมาตรควบคุมของกริดละเอียดเทียบกับตำแหน่งศูนย์กลางปริมาตรควบคุมของกริดหยาบ ซึ่งการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบและจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดนั้นจะทำวิธีการเดียวกันคือการประมาณค่าในช่วงแบบสามทิศทางดังแสดงในรูปที่ 7.3 และ 7.4 ซึ่งเป็นตัวอย่างของการ

ส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดที่จุดศูนย์กลางปริมาตรควบคุมที่ตำแหน่ง i, j, k และ i-1, j-1, k-1 โดยเส้นที่มีหัวลูกศรกำกับนั้นจะแสดงทิศทางการประมาณค่าในช่วง สำหรับการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดละเอียดไปยังกริดหยาบก็สามารถกระทำได้ในทำนองเดียวกัน ในส่วนของการส่งถ่ายฟลักซ์การไหลนั้นเพื่อให้เป็นไปตามกฎทรงมวลฟลักซ์การไหลของปริมาตรควบคุมของกริดหยาบจะเท่ากับผลรวมของฟลักซ์การไหลของปริมาตรควบคุมของกริดละเอียดที่ก่อตัวกันขึ้นเป็นปริมาตรควบคุมของกริดหยาบ

7.3 ลักษณะของปัญหาและรายละเอียดการคำนวณ

สำหรับปัญหาที่จะทำการคำนวณในบทนี้คือการไหลในโพรงรูปลูกบาศก์มีขนาด กว้างxยาวxสูงเท่ากับ 1x1x1 เมตรโดยด้านบนจะถูกเฉือนหรือขับให้มีความเร็วเท่ากับ U_0 เมตรต่อวินาทีจากซ้ายไปขวาเป็นผลให้ของไหลภายในโพรงจะมีการหมุนวนลักษณะวนตามเข็มนาฬิกาในระนาบ XY ซึ่งการคำนวณในกรณีนี้จะกำหนดให้ Re=3,200 โดยที่ความหนาแน่นและความหนืดจะใช้ค่าจริงของอากาศ กริดที่ใช้มีขนาดเท่ากับ 64x64x32 จุดและมีการกระจายตัวแบบฟังก์ชันเส้นโค้งกำลังสามตามรูปที่ 7.5 ซึ่งสามารถบังคับให้มีความหนาแน่นสูงบริเวณชิดผนังได้ การคำนวณสำหรับระเบียบวิธีมัลติกริดจะใช้กริด 4 ระดับและจะมีการทดสอบการปรับค่าการหน่วงปริมาณความปั่นป่วน จากนั้นจะนำผลการคำนวณความเร็ว u ในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง x=0.5 เมตรและความเร็ว v ในแนวแกน x ที่ความสูง y=0.5 เมตรไปเปรียบเทียบความถูกต้องกับผลการทดลองของ Prasad และ Koseff (1989)

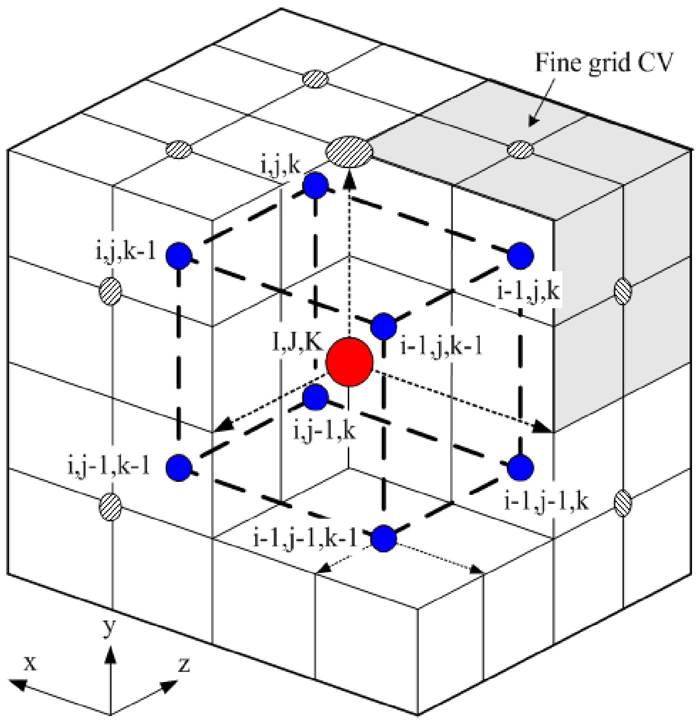
7.4 ผลการคำนวณ

รูปที่ 7.6 แสดงเส้นกระแสการไหลจะพบว่ามีการหมุนวนอยู่สามส่วนคือการหมุนวนหลักตรงกลางโพรงและการหมุนวนย่อยบริเวณมุมด้านล่างทั้งสองของโพรง เมื่อของไหลในโพรงถูกเหนี่ยวนำให้มีการไหลโดยการเฉือนด้านบนของโพรง ของไหลบริเวณผนังด้านขวาจะเคลื่อนที่ลงตามผนัง ในขณะที่ความดันจะลดลงทีละน้อยและเมื่อใกล้จะถึงตำแหน่งที่ y=0.5 ความดันเริ่มที่จะเพิ่มขึ้น ซึ่งอัตราการเพิ่มขึ้นจะสูงขึ้นทีละน้อยในขณะที่ความเร็วเริ่มช้าลงจนกระทั่งแรงเนื่องจาก “ความดันกระแสสวนกลับ” (Adverse Pressure) เอาชนะแรงเฉื่อยของการไหลได้ของไหลจึงแยกออกจากผนังตรงตำแหน่งบริเวณใกล้เคียงกับมุมล่างขวาส่งผลให้ของไหลบริเวณมุมนี้ถูกเหนี่ยวนำให้มีการไหลวนในทิศทางตรงกันข้าม และเมื่อแรงเนื่องจากความดันกระแสสวนกลับเริ่มอ่อนกำลังลงการไหลจึงตกกระทบที่ผนังด้านล่างและเกิดการแยกไหลอีกครั้งบริเวณใกล้มุมล่างซ้ายส่งผลให้ของไหลบริเวณนี้ถูกเหนี่ยวนำให้มีการไหลวนในทิศทางตรงกันข้ามเช่นกันดังแสดงในรูปที่ 7.7(a) และ 7.7(b) จากนั้นทำการเปรียบเทียบระหว่างผลการคำนวณกับผลการทดลองของความเร็วในแนว

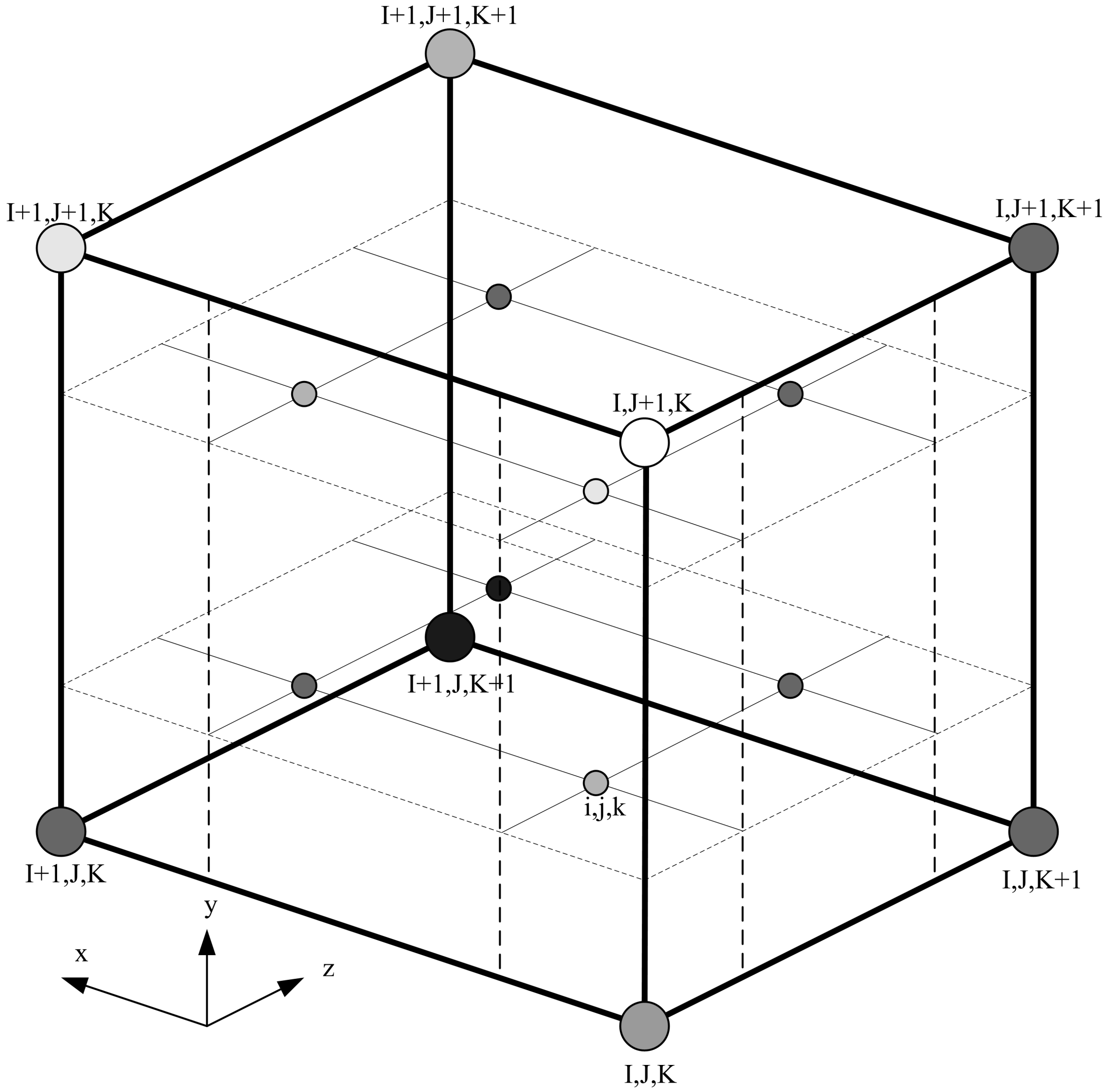
เส้นผ่านศูนย์กลางโพลงทั้งในแนวนอนและแนวตั้ง ผลการเปรียบเทียบที่ได้แสดงตามรูปที่ 7.8 และผลการคำนวณที่ได้เป็นที่น่าพอใจพอสมควร

7.5 การประเมินศักยภาพของระเบียบวิธีมัลติกริด

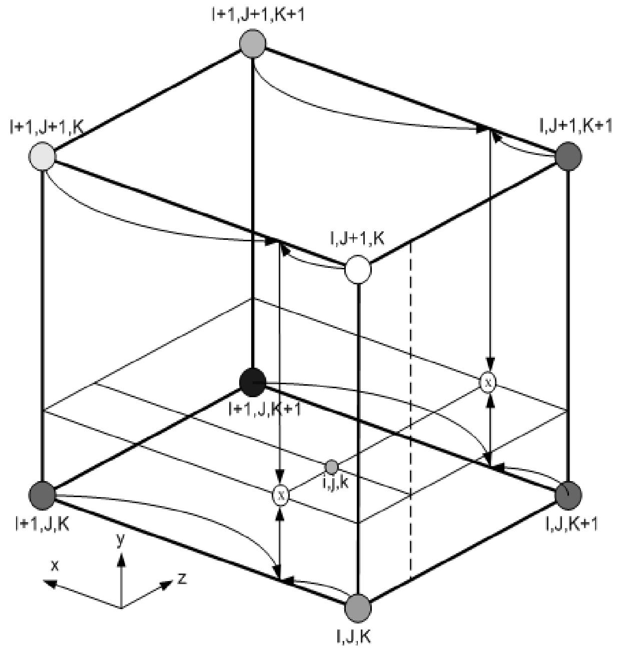
รูปที่ 7.9 แสดงการทดสอบประสิทธิภาพของการคำนวณปัญหการไหลแบบสามมิติด้วยระเบียบวิธีมัลติกริดซึ่งจะพบว่าสามารถลดจำนวนรอบในการคำนวนได้ประมาสองเท่าสำหรับการใช้ค่าการปรับแก้ปริมาณความปั่นป่วนเท่ากับ 0.1 และสามารถลดจำนวนรอบลงได้ถึงสามเท่าในกรณีการใช้ค่าการปรับแก้เท่ากับ 0.3 นั่นแสดงให้เห็นว่าการแก้สมการในกริดหยาบและมีการปรับแก้ปริมาณความปั่นป่วนด้วยนั้นจะช่วยเร่งอัตราการลู่เข้าให้เร็วขึ้นด้วย



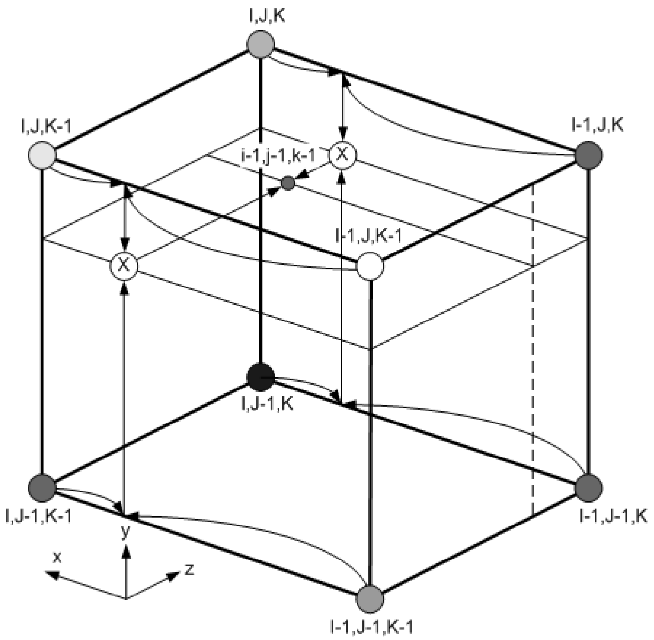
รูปที่ 7.1 แสดงการวางตัวของปริมาตรควบคุมของกริดละเอียดที่ประกอบกันขึ้นเป็นปริมาตรควบคุมของกริดหยาบ



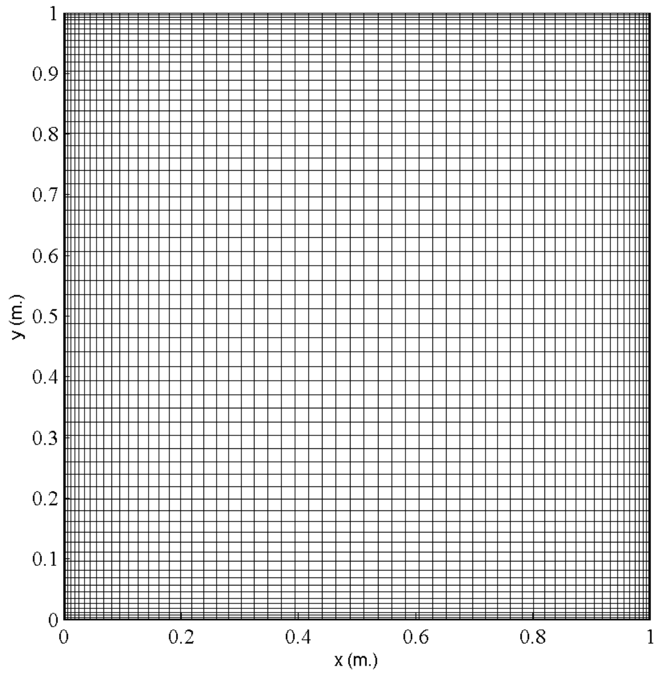
รูปที่ 7.2 แสดงการวางตัวของจุดที่อยู่ตรงศูนย์กลางปริมาตรควบคุม
ของกริดละเอียดและปริมาตรควบคุมของกริดหยาบ



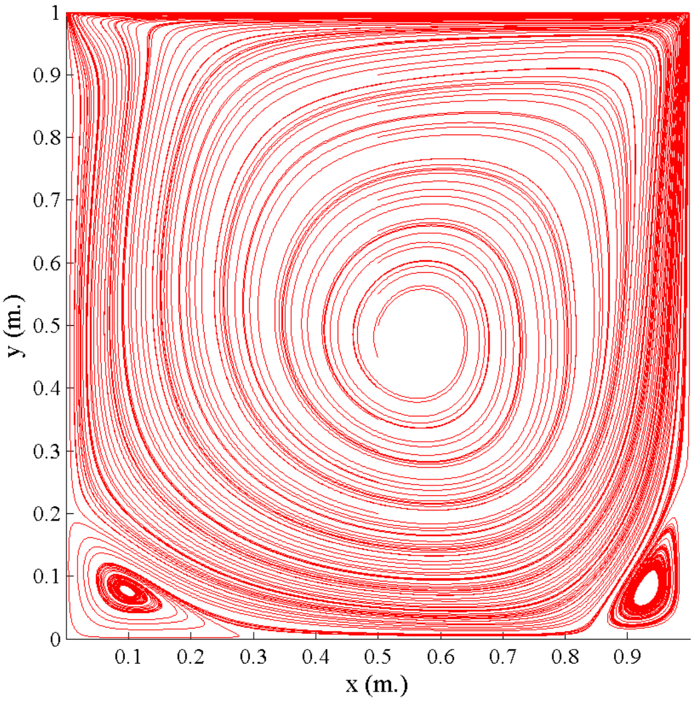
รูปที่ 7.3 แสดงการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดที่ตำแหน่ง i, j, k ตรงจุดศูนย์กลางปริมาตรควบคุมของกริดละเอียด



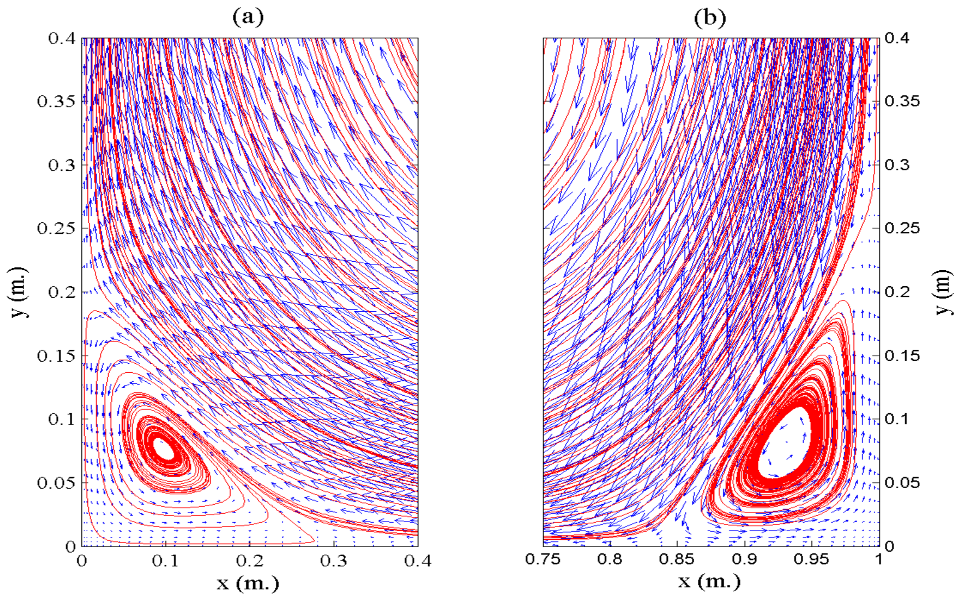
รูปที่ 7.4 แสดงการส่งถ่ายผลเฉลยจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียดที่ตำแหน่ง i-1, j-1, k-1 ตรงจุดศูนย์กลางปริมาตรควบคุมของกริดละเอียด



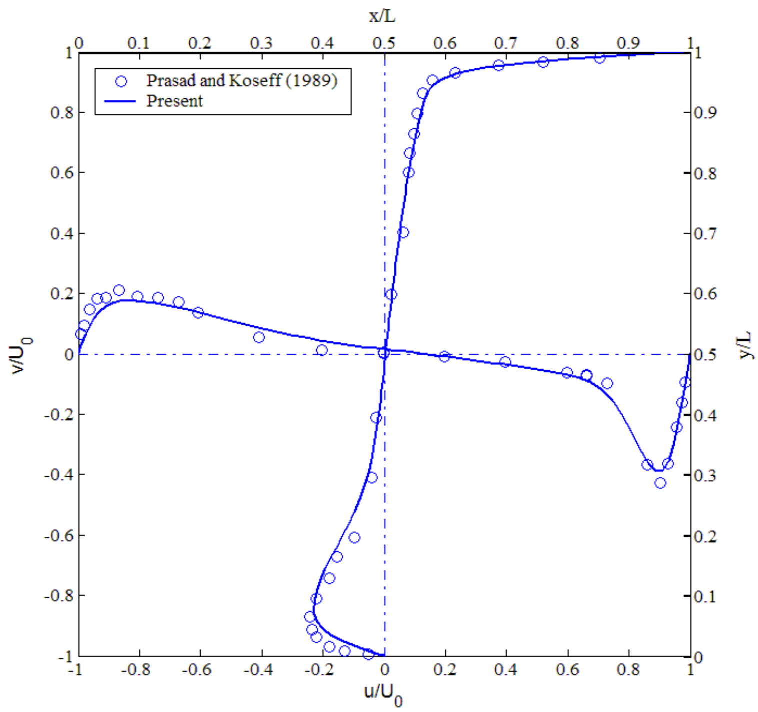
รูปที่ 7.5 แสดงการกระจายตัวของกริดในระนาบสมมาตร XY



รูปที่ 7.6 แสดงเส้นกระแสการไหลในระนาบสมมาตร XY

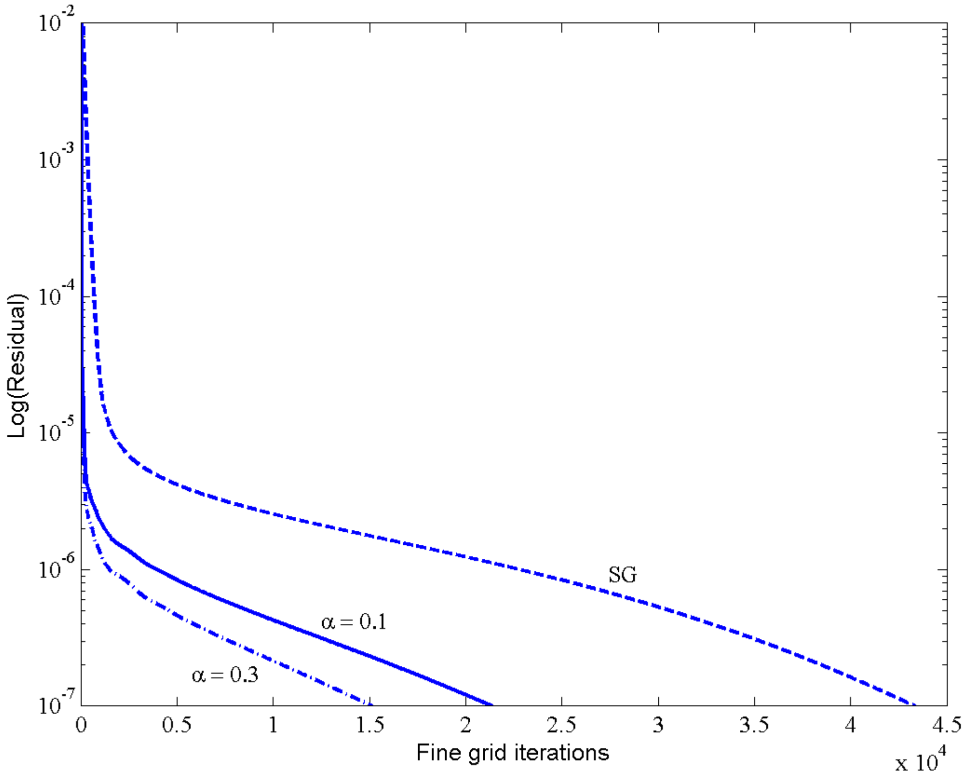


รูปที่ 7.7 แสดงการหมุนวนในทิศทางตรงกันข้ามกับการหมุนวนหลักที่ (a) มุมล่างซ้าย และ (b) มุมล่างขวา (อัตราส่วนไม่ถูกต้อง)



m

รูปที่ 7.8 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลการทดลองของความเร็วในแนวศูนย์กลางโพรงทั้งในแนวนอนและแนวตั้ง



รูปที่ 7.9 แสดงการลดลงของค่าเศษตกค้างระหว่างการใช้
กริดเพียงชุดเดียวและการใช้กริดหลายชุด

บทที่ 8
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุป

การคำนวณที่ผ่านมาทั้งหมดเป็นผลจากการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองเพราะฉะนั้นจึงต้องมีกระบวนการในการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมรวมทั้งการทดสอบความถูกต้องและความสามารถของเทคนิคที่นำมาใช้ในโปรแกรมได้แก่เทคนิคมัลติบล็อก ระเบียบวิธีมัลติกริด และการคำนวณแบบขนาน การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมนั้นจะนำผลการคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่น่าเชื่อถือ ผลการคำนวณด้วยวิธี DNS และผลการทดลอง จากการทดสอบพบว่าผลการคำนวณให้ผลเป็นที่น่าพอใจโดยเฉพาะการคำนวณในกรณีการไหลแบบราบเรียบอีกทั้งเทคนิคที่นำมาใช้ก็แสดงประสิทธิภาพได้เต็มความสามารถเนื่องจากความซับซ้อนในกรณีการไหลแบบราบเรียบไม่สูงมากนัก สำหรับกรณีการไหลแบบปั่นป่วนนั้นเนื่องจากเป็นการไหลที่ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงแม้ว่าจะเป็นการไหลในรูปทรงอย่างง่ายก็ตาม (การไหลแบบราบเรียบก็ไม่สามารถจะหาผลเฉลยแม่นตรงได้ในกรณีการไหลในรูปทรงที่ซับซ้อน) การไหลในรูปทรงอย่างง่ายจึงเป็นเครื่องมือสำหรับการสร้างแบบจำลองความปั่นป่วนเพื่อนำไปใช้สำหรับการคำนวณในรูปทรงทั่วไป เพราะฉะนั้นจึงส่งผลให้ผลการคำนวณในกรณีการไหลแบบปั่นป่วนนั้นเบี่ยงเบนไปจากผลการการทดลองอยู่บ้างแม้ว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะไม่มีข้อผิดพลาดก็ตาม ความถูกต้องของผลเฉลยจึงอยู่ที่ความสามารถของแบบจำลองความปั่นป่วนแต่ละแบบจำลองที่เหมาะสมต่อการทำนายผลในแต่ละปัญหา ซึ่งจากผลการคำนวณที่ผ่านมาได้แสดงให้เห็นว่าแบบจำลอง k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) นั้นให้ผลในการทำนายการไหลที่มีการหมุนวน การแยกไหล และการตกกระทบได้ไม่ดีเท่าที่ควร แต่อย่างไรก็ตามไม่มีการเปรียบเทียบการทำนายผลการไหลประเภทนี้กับแบบจำลองความปั่นป่วนอื่น ๆ ว่าให้ผลการคำนวณที่แม่นยำมากน้อยเพียงใด ซึ่งเป็นสิ่งที่ควรจะต้องดำเนินการในโอกาสต่อไป และสำหรับปัญหาที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้องโดยเฉพาะอย่างยิ่งการไหลที่เกิดจากการเหนี่ยวนำโดยความแตกต่างของอุณหภูมิหรือการไหลที่มีการพาแบบอิสระนี้ พบว่าแบบจำลอง Launder-Sharma นั้นล้มเหลวต่อการทำนายโดยสิ้นเชิงแม้ว่าจะมีการประยุกต์ใช้การกระจายความหนืดเอ็ดดีแบบไม่เชิงเส้นแล้วก็ตามซึ่งเฉพาะความเร็วและปริมาณทางความปั่นป่วนเท่านั้นที่ได้รับการปรับปรุงความถูกต้องของผลเฉลยให้ดีขึ้นในขณะที่การทำนายการถ่ายเทความร้อนนั้นกลับไม่ได้รับการปรับปรุงเท่าที่ควร โดยที่แบบจำลอง SST-k-ω ของ Menter (1994) ซึ่งแม้จะมีการกระจายพจน์ความหนืดเอ็ดดีแบบเชิงเส้นก็ตาม

กลับให้ผลการคำนวณที่ดีสำหรับการทำนายการถ่ายเทความร้อน เพราะฉะนั้นเมื่อได้มาซึ่งแบบจำลองที่เหมาะสมสำหรับทำการคำนวณปัญหาการพาโดยธรรมชาติแล้ว จึงนำแบบจำลองดังกล่าวทำการคำนวณปัญหาในโดเมนที่ซับซ้อนซึ่งก็คือการไหลโดยการพาแบบธรรมชาติในพื้นที่ปิดและมีสิ่งกีดขวางติดตั้งอยู่ภายในซึ่งปัญหานี้มีลักษณะเดียวกันกับการติดตั้งครีบระบายความร้อนกับอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์และไฟฟ้าต่าง ๆ และผลการทำนายพบว่าความเร็วที่คำนวณได้ใกล้เคียงและมีแนวโน้มเดียวกันกับผลการทดลอง แต่สำหรับอุณหภูมิแล้วกลับให้ผลการทำนายที่ต่ำกว่าผลการทดลองมากแม้จะมีแนวโน้มเดียวกันก็ตาม ซึ่งระดับของอุณหภูมิที่ต่ำกว่านี้ส่งผลให้ค่าการถ่ายเทความร้อนที่ผนังด้านเย็นมีแนวโน้มเดียวกันกับกรณีการถ่ายเทความร้อนที่ไม่มีสิ่งกีดขวางหรือครีบติดตั้งที่ผนังด้านร้อน นั่นแสดงว่าว่าครีบไม่ได้มีการดูดหรือทำการถ่ายเทความร้อนออกมาจากผนังด้านร้อนเลยซึ่งเป็นผลมาจากการกำหนดเงื่อนไขหรือทำการคำนวณที่ไม่เหมาะสมสำหรับครีบ เพราะฉะนั้นแนวทางที่จะปรับปรุงผลการคำนวณนี้ก็คือการคำนวณแบบการถ่ายเทความร้อนร่วม (ConjugateHeat Transfer) ซึ่งก็คือทำการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในส่วนที่เป็นครีบด้วย และอีกแนวทางหนึ่งก็คือการใช้การกระจายค่าฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วนด้วยฟังก์ชันที่ซับซ้อนขึ้นซึ่งจะทำให้เกิดพจน์ก่อกำเนิดในสมการอุณหภูมิขึ้นโดยจะเป็นกลไกช่วยยกระดับของอุณหภูมิให้สูงขึ้น

สำหรับการคำนวณที่ผ่านมาทั้งหมดสามารถนำมาสรุปอีกครั้งได้ดังนี้

1) การคำนวณในหัวข้อ 4.1 เป็นการคำนวณการไหลในโพรงจัตุรัสซึ่งโดเมนมีลักษณะเรียบง่ายโดยเพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในเบื้องต้น อีกทั้งยังเป็นการหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมและทดสอบความถูกต้องของผลเฉลยเมื่อมีการประมาณค่าพจน์การพาด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน โดยผลการทดสอบที่ได้จะถูกนำมาใช้สำหรับคำนวณปัญหาในหัวข้อ 4.2 ซึ่งเป็นการคำนวณการไหลในต่อแยกรูปตัวทีโดยโดเมนที่พิจารณาจะมีความซับซ้อนมากขึ้น ผลการการคำนวณและการทดสอบทั้งหมดได้ชี้ให้เห็นว่าเทคนิคมัลติบล็อกนั้นสามารถประยุกต์ใช้ร่วมกับการคำนวณแบบขนานได้เป็นอย่างดีและการคำนวณจะมีสมรรถนะสูงขึ้นเมื่อมีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีมัลติกริดในแต่ละบล็อกหรือแต่ละโดเมนย่อย ยิ่งไปกว่านั้นข้อดีของการประยุกต์ใช้เทคนิคมัลติบล็อกนั้นก็คือกริดสามารถทำให้ละเอียดหรือหยาบในบางบริเวณได้หรือเฉพาะที่ได้

2) ในบทที่ 5 ได้ทำการทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับการไหลแบบปั่นป่วน ความถูกต้องของผลการคำนวณที่ได้นั้นน้อยกว่ากรณีการไหลแบบราบเรียบเนื่องจากว่าการคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนนั้นต้องเกี่ยวข้องกับแบบจำลองความปั่นป่วนซึ่งแบบจำลองแต่ละแบบจำลองจะมีข้อเด่นและข้อด้อยในแต่ละปัญหาที่แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่นแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) ได้แสดงให้เห็นว่าล้มเหลวโดยสิ้นเชิงในการทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีการ

แยกไหลและการหมุนวน ซึ่งผลการคำนวณที่ต่างไปจากผลการทดลองนั้นไม่ได้เป็นผลโดยตรงจากการใช้เทคนิคมัลติบล็อกหรือการคำนวณแบบขนานแต่อย่างใด โดยความปั่นป่วนของการไหลไม่เพียงแต่จะกระทบต่อความถูกต้องของผลการคำนวณเท่านั้น ยังกระทบต่อสมรรถนะของการคำนวณอีกด้วย ตัวอย่างเช่นระเบียบวิธีมัลติกริดที่มีประสิทธิภาพลดลงเนื่องจากพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงที่รวดเร็วในบริเวณชั้นชิดผิวและถ้าหากรอยต่อระหว่างบล็อกอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงสูงด้วยแล้วก็จะกระทบต่ออัตราการลู่เข้าของผลเฉลยด้วยเช่นกัน

3) ในบทที่ 6 เป็นการคำนวณปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อน จากผลการคำนวณได้แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε ของ Launder และ Sharma (1974) นั้นล้มเหลวต่อการทำนายผลการคำนวณกับการไหลชนิดนี้แม้ว่าจะประยุกต์ใช้การจำลองค่าความหนืดเอ็ดดี้แบบไม่เชิงเส้นแล้วก็ตาม ผลการคำนวณที่ได้รับการปรับปรุงให้ถูกต้องมากขึ้นกลับเป็นความเร็วและปริมาณความปั่นป่วนซึ่งไม่มีความสำคัญต่อการออกแบบทางวิศวกรรมความร้อนมากนัก ในขณะที่การทำนายผลของอุณหภูมิกลับไม่ได้รับการปรับปรุงให้ดีขึ้น เพราะฉะนั้นแบบจำลองความปั่นป่วน SST-k-ω ของ Menter (1994) จึงเป็นตัวเลือกที่ดีกว่าสำหรับนำมาใช้ทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้อง แต่อย่างไรก็ตามสำหรับโดเมนที่มีความซับซ้อนหรือมีการติดตั้งสิ่งกีดขวางเพื่อประโยชน์ใช้งานบางประการนั้นการใช้แบบจำลอง SST-k-ω เพียงอย่างเดียวอาจจะให้ผลการทำนายที่ไม่ดีพอสำหรับการทำนายการถ่ายเทความร้อนโดยเฉพาะการถ่ายเทความร้อนแบบการพาโดยธรรมชาติซึ่งการไหลส่วนใหญ่จะมีความเร็วที่ค่อนข้างต่ำ ซึ่งอาจจะต้องใช้แบบจำลองขั้นสูงสำหรับพจน์ฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน (Turbulent Heat Flux) เพื่อให้มีตัวขับเคลื่อนในสมการอุณหภูมิหรืออาจจะต้องมี “การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบร่วม” (Conjugate Heat Transfer Calculation) เพื่อให้การถ่ายเทความร้อนจากผนังหรือวัตถุส่งผ่านมายังสิ่งกีดขวางนั้นทำได้ดียิ่งขึ้น

4) บทที่ 7 จะเป็นการคำนวณปัญหาการไหลแบบสามมิติซึ่งจะเป็นการทดสอบการใช้งานสำหรับระเบียบวิธีมัลติกริดเนื่องจากว่าการส่งถ่ายผลเฉลยนั้นแม้ว่าจะสามารถปรับปรุงจากกรณีสองมิติมาเป็นสามมิติได้อย่างตรงไปตรงมาก็ตามแต่สำหรับในเชิงการเขียนโปรแกรมแล้วมีความยุ่งยากและซับซ้อนอยู่พอสมควร โดยจากผลการทดสอบที่ได้พบว่าการไหลแบบสามมิตินั้นมีผลกระทบต่อประสิทธิภาพของระเบียบวิธีมัลติกริดซึ่งเกิดเนื่องมาจากการไหลในสามทิศทางทำให้การประมาณค่าในช่วงระหว่างกริดนั้นไม่สามารถตรวจจับทิศทางของการไหล และ “หน่วยงาน” (Work Unit) ที่เพิ่มขึ้นสำหรับระเบียบวิธีมัลติกริดนั้น ในกรณีสองมิติอาจจะไม่มีผลกระทบมากเท่าใดนักเพราะในแง่ของการเขียนโปรแกรมแล้วการจองอัลเลย์แบบสองมิตินั้นตำแหน่งของอัลเลย์ในหน่วยความจำสามารถทำให้มีความต่อเนื่องกันได้ นั่นคือการกวาดไปของดัชนีตัวชี้ตำแหน่งทั้งในอัลเลย์และในหน่วยความจำนั้นมีลักษณะที่สอดคล้องกัน ไม่มีการกระโดดไปมาระหว่างตำแหน่ง

ของอัลเลย์ในหน่วยความจำ ซึ่งมีผลกระทบต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณ แต่สำหรับกรณีสามมิติแล้ว การจองอัลเลย์แบบสามมิติและให้แต่ละตำแหน่งของอัลเลย์ในหน่วยความจำติดกันมีความต่อเนื่องกันนั้นทำได้ยากเพราะฉะนั้นการคำนวณจึงมีการกระโดดไปมาระหว่างตำแหน่งของอัลเลย์ในหน่วยความจำซึ่งต้องเสียเวลาส่วนหนึ่งในการกลับไปเริ่มต้นที่ตำแหน่งแรกในหน่วยความที่ดัชนีตัวชี้ตัวแรกของอัลเลย์นั้นชี้อยู่ จากนั้นจึงทำการค้นหาตำแหน่งในหน่วยความจำที่ดัชนีตัวชี้ตำแหน่งของอัลเลย์ (Array) ที่ต้องการนั้นอยู่ ซึ่งเวลาที่สูญเสียไปนี้เมื่อพิจารณาร่วมกับหน่วยงานที่เพิ่มขึ้นของมัลติกริดแล้วจะพบว่ามีผลกระทบต่อประสิทธิภาพในการคำนวณอย่างมาก

8.2 ข้อเสนอแนะ

จากบทสรุปที่ผ่านมาทำให้ทราบถึงข้อบกพร่องบางประการสำหรับวิธีการ เงื่อนไข และเทคนิคที่นำมาใช้ รวมถึงการทดสอบที่ควรปฏิบัติในโอกาสต่อไป ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้มีแนวทางที่สามารถปรับปรุงให้ดีขึ้นและมีข้อมูลช่วยสนับสนุนในการดำเนินการต่อไปได้ โดยในมุมมองของผู้เขียนจึงขอเสนอแนะวิธีการและแนวทางในการดำเนินการตามลำดับหัวข้อของบทสรุปดังต่อไปนี้

1) การไหลในท่อแยกรูปตัวทีนั้นเป็นปัญหาที่มีการประยุกต์ใช้งานที่สามารถพบได้ไม่ยากในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น การผสมกันระหว่างน้ำร้อนและน้ำเย็นเพื่อให้ได้ระดับอุณหภูมิที่ต้องการซึ่งการไหลจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน จึงควรจำลองปัญหาดังกล่าวด้วยการไหลแบบปั่นป่วนซึ่งสามารถเปรียบเทียบความถูกต้องของการคำนวณได้กับผลการทดลองของ Popp และ Sallet (1983)

2) ทำการคำนวณและศึกษาเชิงเปรียบเทียบแบบจำลองความปั่นป่วนต่าง ๆ กับปัญหาที่มีการไหลวน การแยกไหล และการไหลตกกระทบ

3) ทำการประยุกต์ใช้การคำนวณแบบ “การถ่ายเทความร้อนร่วม” (Conjugate Heat Transfer) และประยุกต์ใช้แบบจำลองขั้นสูงสำหรับพจน์ฟลักซ์ความร้อนแบบปั่นป่วน (Turbulent Heat Flux) กับปัญหาที่มีการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่มีความซับซ้อน

4) ทำการปรับปรุงการส่งถ่ายผลเฉลยระหว่างกริดด้วยการส่งถ่ายแบบต่าง ๆ ที่มีการนำเอาอิทธิพลของทิศทางการไหลมาพิจารณาร่วม ตัวอย่างเช่น การส่งถ่ายแบบต้นลม และทำการปรับปรุงการจองหน่วยความจำของอัลเลย์ให้ตำแหน่งในการวางตัวของอัลเลย์นั้นสอดคล้องกับตำแหน่งในหน่วยความจำเพื่อหลีกเลี่ยงการกระโดดไปมาของตัวชี้ตำแหน่งของอัลเลย์ในหน่วยความจำ

รายการอ้างอิง

Ampofo, F. (2004). Turbulent natural convection in an air filled partitioned square cavity. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 25: 103-114.

Ampofo, F. (2005). Turbulent natural convection of air in a non-partitioned or partitioned cavity with differentially heated vertical and conducting horizontal walls. **Experimental Thermal and Fluid Science**. 29: 137-157.

Chen, H. and Lian, G. (1992). The numerical computation of turbulent flow in tee-junction. **Journal of Hydrodynamics.** Ser. B(4): 19-25.

Craft, T.J., Launder, B.E. and Suga, K. (1996). Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 17(2): 108-115.

Drikakis, D. (1996). A parallel multiblock characteristic-based method for three-dimensional incompressible flows. **Advances in Engineering Software**. 26: 111-119.

Durbin, P.A. Separated flow computations with k-ε-v^2 Model. **AIAA Journal**. 33: 659-664.

Jia, R. and Sunden, B. (2004). Parallelization of multiblock CFD code via three strategies for fluid flow and heat transfer analysis. **Computers & Fluids**. 33: 57-80.

Ghia, U. Ghia, K.N., and Shin, C. (1986). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method, **Journal of Computational Physics**. 48: 387-411.

Hsieh, K.J. and Lien, F.S. (2004). Numerical modeling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 25: 659-670.

Iwai, H., Nakabe, K. and Suzuki, K. (2000). Flow and heat transfer characteristics of backward-facing step laminar flow in a rectangular duct. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 43: 457-471.

Launder, B.E. and Sharma, B. I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of a flow near a spinning disk. **Letter in Heat and Mass Transfer.** 1: 131-138.

Le, H., Moin, P., and Kim, J. (1997). Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over a backward-facing step. **Journal of Fluid Mechanics**. 330: 349-374.

Lee, D. and Chiu, J.J (1992). Computation of physiological bifurcation flows using a patched grid. **Computer & Fluids**. 21(4): 519-535.

Liepsch, D., Moravic, S., Rastogi, A.K. and N.S. Vlachos, N.S. (1982). Measurements and calculations of laminar flow in flow in a ninety-degree bifurcation. **Journal of Biomechanics**.. 15: 473.

Liu, J. and Shyy, W. (1996). Assessment of grid interface treatments for multiblock incompressible viscous flow computation **Computers & Fluids**. 25(8): 719-740.

Llorente, I.M., Priet-Matias, M. and Diskin, B. (2001). A parallel multigrid solver for 3D convection and convection diffusion problems. **Parallel Computing**. 27: 1715-1741.

Lonsdale, G. and Schuller, A. (1993). Multigrid efficiency for complex flow simulations on distributed memory machines. **Parallel Computing**. 19: 23-32.

Launder, B.E. and Sharma, B.I. (1974). Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. **Letters in Heat and Mass Transfer.** 1(2): 131-138.

Markatos, N.C. and Pericleous, K.A. (1983). Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 27: 755-772.

Menter, F.R. (1994). Two-equation eddy-viscosity models for engineering applications. **AIAA Journal**. 3(8): 1598-1605.

Neary, V.S. and Sotiropoulos, F. (1996). Numerical investigation of laminar flow through 90-degree diversions of rectangular cross-section. **Computers & Fluids**. 25(2): 95-118.

Nie, J.H. and Armaly, B.F. (2004). Reverse flow regions in three-dimensional backward-facing step flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 47: 4713-4720.

Nie, J.H. and Armaly, B.F. (2004). Convection in laminar three-dimensional separated flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 47: 5407-5416.

Patankar, S. V. and Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 15: 1787.

Peng, S.-H. and Davidson, L. (1999). Computation of turbulent buoyant flow in enclosures with low-Reynolds-number k-ω models. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 20: 172-184.

Peric, M. (1985). **A finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex ducts** Ph.D. Dissertation, Imperial College, UK.

Pope, S.B. (2000). **Turbulent Flows**. New York: Cambridge University Press.

Popp, M. and Sallet, D.W. (1983). Experimental investigation of one- and two-phase flow through a Tee-junction. **In Proceedings of the International Conference on the Physical Modeling of Multiphase Flow**. (pp 67-88). Coventry, England.

Prasad, A.K. and Koseff, J.R. (1989). Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. **Physics of Fluids. A**. 1(2): 208-218.

Rai, M.M (1986). A Conservative treatment of zonal boundaries for euler equation calculations. **Journal of Computational Physics**. 62: 472-503.

Sparlart, P.R. (1988). Direct Simulation of a turbulent boundary layer up to Re_θ=1410. **Journal of Fluid Mechanics**. 187: 61-98.

Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995). **An introduction to computational fluid dynamics.** Longman, Scientific & Technical.

Rhie, C. M. and Chow, W. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. **AIAA Journal**. 21(11): 1525-1532.

Serafino, D.D. (1997). A parallel implementation of a multigrid multiblock euler solver on distributed memory machines. **Parallel Computing**. 23: 2095-2113.

Shih, T.H., Zhu, J., and Lumley, J.L. (1993). A Realisable Reynolds stress algebraic equation model. **NASA Technical Memorandum**. 105993.

Sterk, M. and Trobec, R. (2003). Parallel performances of a multigrid poisson solver. **In Proceedings of the Second International Symposiuym on Parallel and Distributed Computing**. IEEE: Computer Society.

Vatsa, V.N. and Wedan, B.W. (1999). Parallelization of a multiblock flow code: an engineering implementation. **Computer & Fluids**. 28: 603-614.

Varonos, A.A and Bergeles, G.C. (2001). A multigrid method with higher-order discretization schemes. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. 35: 395-420.

Wang, P. and Ferraro, R.D. (1999). Parallel multigrid finite volume computation of three-dimensional thermal convection. **Computers & Mathematics with Application: An Internal Journal**. 37: 49-60.

Wang, Z.J. (1995). A Fully conservative interface algorithm for overlapped grids. **Journal of Computational Physics**. 122: 96-106.

Wilcox, D.C. (1993). **Turbulence Modelling for CFD**. DCW Industries.

Wright, J.A. and Shyy, W. (1993). A Pressure-based composite grid method for the Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**. 107: 225-238.

Zhou, Y., Zhang, I., Staroselsky, I. and Chen, H. (2004). Numerical simulation of laminar and turbulent buoyancy-driven flows using a lattice boltzmann based algorithm. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. 47: 4869-4879.

ภาคผนวก ก

รายละเอียดของตัวแปรในสมการการถ่ายโอนทั่วไป

ตารางที่ ก.1 แสดงรายละเอียดตัวแปรของแต่ละสมการในสมการการถ่ายโอนทั่วไป

สมการ	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}
สมการความต่อเนื่อง	1	0	0
[1]สมการโมเมนตัม	u_i	$\mu + \mu_t$	$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \right) + F_B$
สมการการถ่ายเทความร้อน	T	$\frac{k}{C_p} + \frac{\mu_t}{\sigma_T}$	0
[2]สมการแบบจำลองความปั่นป่วน k-ε	k	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$P_k + G_B - \rho(\varepsilon + D_k)$
	ε	$\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + G_B)\frac{\varepsilon}{k} - \rho C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + \rho E$
[2]สมการแบบจำลองความปั่นป่วน k-ω-SST	k	$\mu + \sigma_k \mu_t$	$P_k + G_B - \rho\alpha^* \omega k$
	ω	$\mu + \sigma_\omega \mu_t$	$\frac{C_\omega}{\mu_t}(P_k + G_B) - \rho\alpha\omega^2 + 2\left(1 - B_f\right)\frac{\rho\sigma_\omega}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}$

[1] $F_B = -\rho g_i (T - T_0)/T_0$ ในกรณีการไหลเนื่องจากการพาโดยธรรมชาติและเป็นศูนย์ในกรณีอื่น

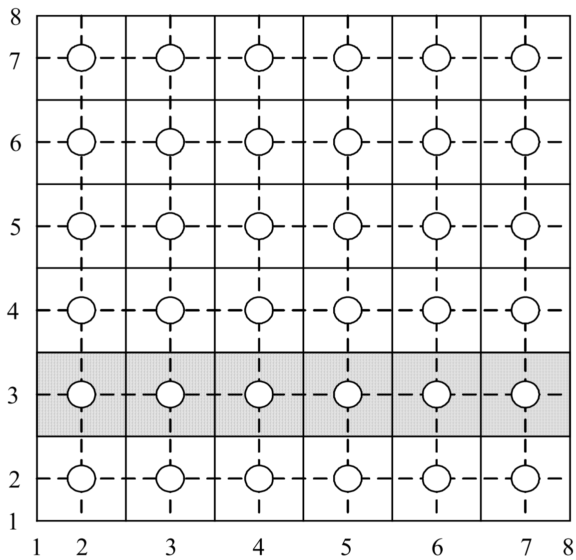
[2] $G_B = 0$ ในกรณีการไหลที่ไม่เกี่ยวข้องกับการพาโดยธรรมชาติ

ภาคผนวก ข

ขั้นตอนวิธี TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)

ขั้นตอนวิธี TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm)

การคำนวณแบบทำซ้ำด้วยวิธี Jacobi และ Gauss-Seidel นั้นเป็นวิธีที่ง่ายสำหรับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่การคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงนั้นเป็นไปด้วยความล่าช้ามากเมื่อปัญหาที่ทำการคำนวณนั้นมีขนาดใหญ่ ด้วยเหตุนี้จึงเป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมสำหรับการคำนวณปัญหาทั่ว ๆ ไปทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ การคำนวณด้วยวิธีโดยตรงอย่างเช่น “การตัดแบบเกาส์” (Guassian Elimination) นั้น ถึงแม้ว่าจะเป็นวิธีที่สามารถคาดเดาเวลาที่ใช้ในการคำนวณได้ก็ตามแต่เป็นวิธีที่ไม่เหมาะสมสำหรับการคำนวณปัญหาทางด้านของไหล ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีว่าวิธีโดยตรงนั้นจะต้องทำการเก็บสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องไว้ทั้งหมด ซึ่งทำให้สิ้นเปลืองหน่วยความจำเป็นอันมาก และยิ่งไปกว่านั้นการคำนวณทางด้านพลศาสตร์ของไหลด้วยระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) นั้นทำให้ได้ระบบสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์เกือบทั้งหมด ซึ่งการเก็บค่าสัมประสิทธ์ที่เป็นศูนย์นี้ไว้จึงดูไม่คุ้มค่ากับปริมาณหน่วยความจำที่ต้องเสียไป Thomas (1979) (อ้างถึงใน Versteeg และ Malalasekera [1995]) ได้พัฒนาเทคนิคการคำนวณที่เรียกว่า TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) ซึ่งก็คือการแก้ด้วยวิธีโดยตรงในกรณีหนึ่งมิติ แต่ก็สามารถประยุกต์ใช้กับกรณีปัญหาหลายมิติได้ดังจะกล่าวต่อไป



รูปที่ ข.1 แสดงปริมาตรควบคุมแบบสองมิติ

โดยวิธีนี้นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการคำนวณทางด้านพลศาสตร์ของไหลเพราะเวลาที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนของวิธีนี้ไม่มากและก็มีการใช้หน่วยความจำในปริมาณที่น้อยอีกด้วยเมื่อเปรียบเทียบกับการแก้โดยตรงทั้งระบบสมการ

จากสมการพีชคณิตที่ได้จากกระบวนการแปลงไม่เต็มหน่วยของสมการที่ควบคุมพฤติกรรมการไหลและการถ่ายเทความร้อน

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S^{\phi} \qquad (ข\ 1)$$

เมื่อประยุกต์ใช้กับปริมาตรควบคุมที่มีการแรเงาตามรูปที่ ข.2 แล้วจะได้

$$a_{23}\phi_{23} = a_{13}\phi_{13} + a_{33}\phi_{33} + a_{22}\phi_{22} + a_{24}\phi_{24} + S_{23}^{\phi} \qquad (ข.2)$$

$$a_{33}\phi_{33} = a_{23}\phi_{23} + a_{43}\phi_{43} + a_{32}\phi_{32} + a_{34}\phi_{34} + S_{33}^{\phi} \qquad (ข.3)$$

$$a_{43}\phi_{43} = a_{33}\phi_{33} + a_{53}\phi_{53} + a_{42}\phi_{42} + a_{44}\phi_{44} + S_{43}^{\phi} \qquad (ข.4)$$

$$a_{53}\phi_{53} = a_{43}\phi_{43} + a_{63}\phi_{63} + a_{52}\phi_{52} + a_{54}\phi_{54} + S_{53}^{\phi} \qquad (ข.5)$$

$$a_{63}\phi_{63} = a_{53}\phi_{53} + a_{73}\phi_{73} + a_{62}\phi_{62} + a_{64}\phi_{64} + S_{63}^{\phi} \qquad (ข.6)$$

$$a_{73}\phi_{73} = a_{63}\phi_{63} + a_{83}\phi_{83} + a_{72}\phi_{72} + a_{74}\phi_{74} + S_{73}^{\phi} \qquad (ข.7)$$

จากนั้นย้ายพจน์ที่ทราบค่าไปยังฝั่งขวาของสมการและพจน์ที่ไม่ทราบค่าไปยังฝั่งซ้ายของสมการจะได้

$$a_{23}\phi_{23} - a_{33}\phi_{33} = a_{13}\phi_{13} + a_{22}\phi_{22} + a_{24}\phi_{24} + S_{23}^{\phi} \qquad (ข.8)$$

$$-a_{23}\phi_{23} + a_{33}\phi_{33} - a_{43}\phi_{43} = a_{32}\phi_{32} + a_{34}\phi_{34} + S_{33}^{\phi} \qquad (ข.9)$$

$$-a_{33}\phi_{33} + a_{43}\phi_{43} - a_{53}\phi_{53} = a_{42}\phi_{42} + a_{44}\phi_{44} + S_{43}^{\phi} \tag{ข.10}$$

$$-a_{43}\phi_{43} + a_{53}\phi_{53} - a_{63}\phi_{63} = a_{52}\phi_{52} + a_{54}\phi_{54} + S_{53}^{\phi} \tag{ข.11}$$

$$-a_{53}\phi_{53} + a_{63}\phi_{63} - a_{73}\phi_{73} = a_{62}\phi_{62} + a_{64}\phi_{64} + S_{63}^{\phi} \tag{ข.12}$$

$$a_{73}\phi_{73} = a_{63}\phi_{63} + a_{83}\phi_{83} + a_{72}\phi_{72} + a_{74}\phi_{74} + S_{73}^{\phi} \tag{ข.13}$$

และจัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{23} & -a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{23} & a_{33} & -a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{43} & -a_{53} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{43} & a_{53} & -a_{63} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{53} & a_{63} & -a_{73} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{63} & a_{73} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{23} \\ \phi_{33} \\ \phi_{43} \\ \phi_{53} \\ \phi_{63} \\ \phi_{73} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{13}\phi_{13} + a_{22}\phi_{22} + a_{24}\phi_{24} + S_{23}^{\phi} \\ a_{32}\phi_{32} + a_{34}\phi_{34} + S_{33}^{\phi} \\ a_{42}\phi_{42} + a_{44}\phi_{44} + S_{43}^{\phi} \\ a_{52}\phi_{52} + a_{54}\phi_{54} + S_{53}^{\phi} \\ a_{62}\phi_{62} + a_{64}\phi_{64} + S_{63}^{\phi} \\ a_{83}\phi_{83} + a_{72}\phi_{72} + a_{74}\phi_{74} + S_{73}^{\phi} \end{Bmatrix} \tag{ข.14}$$

เพื่อความสะดวกจะเขียนสมาชิกของเมทริกซ์ทั้งหมดให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเป็น

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & d_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & d_5 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & d_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \tag{ข.15}$$

ขั้นตอนวิธี TDMA จะทำการกำจัดให้สมาชิกทั้งหมดที่อยู่ด้านล่างแนวทแยงหลัก (Main Diagonal) ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ให้เป็นศูนย์ซึ่งจะมีขั้นตอนวิธีที่เหมือนกับการกำจัดแบบเกาส์ (Guassian Elimination) แต่ในกรณีนี้จะกระทำเฉพาะแนวทแยงกลาง 3 แถวเท่านั้น อันดับแรกจะทำการตัด b_2 ซึ่งเมื่อเขียนสมการสำหรับเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 1 และ 2 จะได้ดังนี้

$$d_1\phi_1 + a_1\phi_2 = c_1 \tag{ข.16}$$

$$b_2\phi_1 + d_2\phi_2 + a_2\phi_2 = c_2 \tag{ข.17}$$

คูณสมการ (ข.16) ด้วย b_2 และคูณสมการ (ข.17) ด้วย d_1 จะได้

$$b_2 d_1\phi_1 + b_2 a_1\phi_2 = b_2 c_1 \tag{ข.18}$$

$$b_2 d_1\phi_1 + d_1 d_2\phi_2 + a_2 d_1\phi_2 = d_1 c_2 \tag{ข.19}$$

จากนั้นนำสมการ (ข.18) ไปลบออกจากสมการ (ข.19) จะได้

$$(b_2 d_1 - b_2 d_1)\phi_1 + (d_1 d_2 - b_2 a_1)\phi_2 + a_2 d_1\phi_3 = d_1 c_2 - b_2 c_1 \tag{ข.20}$$

จากนั้นหารสมการ(ข. 20) ด้วย d_1 จะได้

$$(d_2 - \frac{b_2 a_1}{d_1})\phi_2 + a_2\phi_3 = c_2 - \frac{c_1 b_2}{d_1} \tag{ข.21}$$

จะพบว่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ด้านล่างแนวทแยงหลักสำหรับสมการ (ข.20) จะหายไปและเพื่อความสะดวกจะกำหนดค่าสัมประสิทธิ์สำหรับสมการ (ข.21) ใหม่เป็น

$$d_2' = d_2 - \frac{b_2 a_1}{d_1} \tag{ข.22}$$

$$c_2' = c_2 - \frac{c_1 b_2}{d_1} \tag{ข.23}$$

ซึ่งเมทริกซ์ผลลัพท์ที่เกิดจากการตัดสัมประสิทธิ์ b_2 จะกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2' & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & d_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & d_5 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & d_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2' \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \tag{ข.24}$$

จากนั้นจะทำการตัด b_3 โดยใช้สมการสำหรับสมาชิกของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 2 และ 3 ดังนี้

$$d_2'\phi_2 + a_2\phi_3 = c_2' \tag{ข.25}$$

$$b_3\phi_2 + d_3\phi_3 + a_3\phi_4 = c_3 \tag{ข.26}$$

คูณสมการ (ข.25) ด้วย b_3 และคูณสมการ (ข.26) ด้วย d_2' จะได้

$$b_3 d_2'\phi_2 + a_2 b_3\phi_3 = b_3 c_2' \tag{ข.27}$$

$$b_3 d_2'\phi_2 + d_2' d_3\phi_3 + a_3 d_2'\phi_4 = c_3 d_2' \tag{ข.28}$$

นำสมการ (ข.27) ไปลบออกจากสมการ (ข.28) จะได้

$$(b_3 d_2' - b_3 d_2')\phi_2 + (d_2' d_3 - a_2 b_3)\phi_3 + a_3 d_2'\phi_4 = c_3 d_2' - b_3 c_2' \tag{ข.29}$$

จะพบว่าสัมประสิทธ์ที่อยู่ด้านล่างแนวทแยงหลักสำหรับสมาชิกในแถวที่สามจะหายไป จากนั้นหารสมการ (ข.30) ด้วย d_2' จะได้

$$(d_3 - \frac{a_2 b_3}{d_2'})\phi_3 + a_3\phi_4 = c_3 - \frac{b_3 c_2'}{d_2'} \tag{ข.30}$$

และกำหนดค่าสัมประสิทธิ์สำหรับสมการ (ข.30) ใหม่เป็น

$$d_3' = d_3 - \frac{a_2 b_3}{d_2'} \tag{ข.31}$$

$$c_3' = c_3 - \frac{b_3 c_2'}{d_2'} \tag{ข.32}$$

ซึ่งเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้จากการตัด b_3 เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2' & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3' & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & d_4 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & d_5 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & d_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2' \\ c_3' \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \tag{ข.33}$$

จากนั้นทำการตัด b_4, b_5 และ b_6 ด้วยวิธีการเดิมซึ่งสุดท้ายจะได้เมทริกซ์ที่สมาชิกทั้งหมดที่อยู่ด้านล่างแนวทะแยงหลักเป็นศูนย์ทั้งหมดดังสมการ (ข.34)

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2' & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3' & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4' & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5' & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2' \\ c_3' \\ c_4' \\ c_5' \\ c_6' \end{Bmatrix} \tag{ข.34}$$

จากขั้นตอนที่ได้แสดงมาข้างต้นจะพบว่ามีเพียงสมาชิกในแนวทแยงหลักของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และสมาชิกในเมทริกซ์ผลลัพธ์เท่านั้นที่มีการเปลี่ยนแปลง และเมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างสมการ (ข.22) กับ (ข.31) และ (ข.23) กับ (ข.32) แล้วจะพบว่ามีรูปแบบของดัชนีตัวห้อยที่คล้ายคลึงกัน ซึ่งสามารถเขียนดัชนีตัวห้อยให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} d_i' &= d_i - \frac{b_i a_{i-1}}{d_{i-1}'} \\ c_i' &= c_i - \frac{c_{i-1}' b_i}{d_{i-1}'} \end{aligned}\right\} \quad i = 2, 3, ..., 6 \tag{ข.35}$$

เมื่อพิจารณาสมการ (ข.34) แล้วจะพบว่าสามารถหาค่า ϕ_6 ได้โดยง่ายจาก

$$\phi_6 = \frac{c_6'}{d_6'} \tag{ข.36}$$

เมื่อรู้ ϕ_6 ก็สามารถหาค่า ϕ_5 ได้และเมื่อรู้ ϕ_5 ก็สามารถหาค่า ϕ_4 ได้และในทำนองเดียวกันก็สามารถหาค่า ϕ_1, ϕ_2, และ ϕ_3 ได้โดยการแทนค่าย้อนกลับโดยสามารเขียนความสัมพันธ์ดังกล่าวให้อยู่ในรูปดัชนีตัวห้อยโดยทั่วไปได้ดังนี้

$$\phi_i = \frac{c_i' - a_i \phi_{i+1}}{d_i'} \tag{ข.37}$$

ซึ่ง $c_1' = c_1$ และ $d_1' = d_1$ โดยที่ i = 5, 4, 3, 2 และ 1

จากขั้นตอนที่ได้แสดงมานั้นเป็นการหาคำตอบด้วยวิธี TDMA ในแบบหนึ่งมิติเท่านั้น การหาคำตอบสำหรับกรณีสองมิตินั้นสามารถทำได้โดยการประยุกต์ใช้ขั้นตอนวิธี TDMA กับชุดข้อมูลที่อยู่ในแถวแนวนอนเดียวกัน จากนั้นก็เลื่อนไปหาคำตอบสำหรับชุดข้อมูลในแถวแนวนอนแถวถัดไปซึ่งวิธีนี้ก็คือการหาคำตอบด้วย “ขั้นตอนวิธี TDMA แบบเส้นต่อเส้น” (Line-by-Line TDMA) ยิ่งไปกว่านั้นถ้าหากทำการหาคำตอบสำหรับแถวในแนวนอนเสร็จสิ้น แล้วจากนั้นหาคำตอบสำหรับแถวในแนวตั้งและสลับไปมาก็จะได้ว่าเป็นการหาคำตอบด้วย “ขั้นตอนวิธี TDMA แบบเส้นต่อเส้นสลับไปมา” (Alternating Line-By-Line TDMA) ซึ่งการสลับไปมานี้จะช่วยให้การกระจายค่าที่ขอบเขตของโดเมนแพร่ไปยังจุดที่อยู่ภายในโดเมนได้อย่างเท่าเทียวกัน

อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาระบบสมการตามสมการ (ข.34) แล้วจะพบว่าสมาชิกของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ส่วนใหญ่มีค่าเป็นศูนย์ซึ่งหากทำการแก้สมการ (ข.34) ด้วยวิธีโดยตรงแล้วจะต้องทำการเก็บค่าสมาชิกของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ไว้ทั้งหมดซึ่งจะเป็นการสิ้นเปลืองหน่วยความจำคอมพิวเตอร์โดยไม่จำเป็น แต่ถ้าหากทำการแก้สมการ (ข.34) ด้วยขั้นตอนวิธี TDMA แล้วจะมีเพียงสามแถวในแนวทแยงหลักเท่านั้นที่ถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ นอกจากนั้นในการสร้าง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับขั้นตอนวิธี TDMA นี้จะใช้เพียงตัวแปรอาร์เรย์ (Array) หนึ่งมิติ a, b และ d สำหรับเก็บค่าเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และ c สำหรับเก็บค่าเมทริกซ์ผลลัพธ์เท่านั้นโดยไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแปรสำหรับเก็บค่า d' และ c' ซึ่งสมารถใช้ตัวแปร d และ c แทนได้โดยไม่กระทบต่อผลการคำนวณโดยเมื่อพิจารณาจากสมการ (3.5) แม้ว่า d_i และ c_i จะกลายเป็นค่าใหม่แล้วก็ตามแต่เมื่อมีการเลื่อนดัชนีตัวห้อยขึ้นไปแล้วจะพบว่าไม่มีการใช้ค่าที่ d_{i-1}และ c_{i-1} อีกเลย ยิ่งไปกว่านั้นทั้ง d_i และ c_i ที่ใช้แทนค่า d'_i และ c'_i จะถูกนำมาใช้อีกครั้งในค่าของ d'_{i-1} และ c'_{i-1} เมื่อมีการเลื่อนดัชนีตัวห้อยขึ้น และเพื่อให้สามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย สมการ (ข.35) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปดัชนีห้อยทั่วไปดังนี้

$$\left.\begin{aligned} d_i\ (\equiv d'_i) &= d_i - \frac{b_i a_{i-1}}{d_{i-1}(\equiv d'_{i-1})} \\ c_i(\equiv c'_i) &= c_i - \frac{c_{i-1} b_i}{d_{i-1}(\equiv d'_{i-1})} \end{aligned}\right\} \quad i = 2, 3, ..., 6 \qquad (ข.36)$$

ภาคผนวก ค

ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Pressure Link Equation)

ขั้นตอนวิธี SIMPLE

สมการอนุรักษ์โมเมมตัมเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตที่ผ่านกระบวนการการแปลงไม่เต็มหน่วย (Discretization Process) แล้วจะได้

$$a_P u_P = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_w - p_e)(y_n - y_s) \tag{ค.1}$$

$$a_P v_P = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_s - p_n)(x_e - x_w) \tag{ค.2}$$

ซึ่งสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการกฎอนุรักษ์มวลตามสมการนี้

$$(u_e - u_w)(y_n - y_s) + (v_n - v_s)(x_e - x_w) = 0 \tag{ค.3}$$

หากค่าความดันที่ปรากฏตามสมการ (ค.1) และ (ค.2) นั้นถูกต้องก็จะทำให้ค่าความเร็วสอดคล้องตามกฎอนุรักษ์มวลในสมการ (ค.3) แต่ถ้าหากไม่ทราบค่าความดันจึงจำเป็นที่จะต้องมีวิธีการเพื่อจะคำนวณหาค่าความดัน ซึ่งขั้นตอนวิธี SIMPLE เริ่มต้นกระบวนด้วยการเดาค่าความดัน p* สำหรับสมการ (ค.1) และ (ค.2) จึงเป็นผลให้ได้ค่าความเร็ว u* และ v* ตามสมการ

$$a_P u_P^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_w^* - p_e^*)(y_n - y_s) \tag{ค.4}$$

$$a_P v_P^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_s^* - p_n^*)(x_e - x_w) \tag{ค.5}$$

กำหนดให้ค่าความดันปรับแก้ (Pressure Correction) p' คือผลต่างระหว่างค่าความดันที่ถูกต้อง (Correct Pressure) p และค่าความดันที่เดา (Guessed Pressure) p* ตามสมการ

$$p = p^* + p' \tag{ค.6}$$

และหากประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวกับค่าความเร็วก็จะได้เป็น

$$u = u^* + u' \tag{ค.7}$$

$$v = v^* + v' \tag{ค.8}$$

จากนั้นนำสมการ (ค.4) และ (ค.5) ไปลบออกจากสมการ (ค.1) และ (ค.2) ตามลำดับจะได้

$$a_P(u_P - u_P^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_w - p_w^*) - (p_e - p_e^*)](y_n - y_s) \tag{ค.9}$$

$$a_P(v_P - v_P^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_s - p_s^*) - (p_n - p_n^*)](x_e - x_w) \tag{ค.10}$$

เมื่อประยุกต์ใช้ความสัมพันธ์ตามการ (ค.6)–(ค.8) กับสมการ (ค.9) และ (ค.9) แล้วสามารถเขียนสมการดังกล่าวได้ใหม่เป็น

$$a_P u'_P = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_w - p'_e)(y_n - y_s) \tag{ค.11}$$

$$a_P v'_P = \sum a_{nb} v'_{nb} + (p'_s - p'_n)(x_e - x_w) \tag{ค.12}$$

หลักการสำคัญของขั้นตอนวิธี SIMPLE ก็คือการกำหนดให้ $\Sigma a'_{nb}u'_{nb}=0$ และ $\Sigma a'_{nb}v'_{nb}=0$ เพราะฉะนั้นค่าความเร็วปรับแก้ (Velocities Correction) ในสมการ (ค.11) และ (ค.12) จะลดรูปเป็น

$$u'_P = (p'_w - p'_e)(y_n - y_s) / a_P \tag{ค.13}$$

$$v'_P = (p'_s - p'_n)(x_e - x_w) / a_P \tag{ค.14}$$

เพราะฉะนั้นค่าความเร็วที่ถูกต้อง (Correct Velocities) จึงเป็น

$$u_P = u_P^* + (p'_w - p'_e)(y_n - y_s) / a_P \tag{ค.15}$$

$$u_e = u_e^* + \frac{(y_n - y_s)}{a_P\big|_e}(p'_P - p'_E) \quad (ค.16)$$

$$u_w = u_w^* + \frac{(y_n - y_s)}{a_P\big|_w}(p'_W - p'_P) \quad (ค.17)$$

$$v_P = v_P^* + (p'_s - p'_n)(x_e - x_w)/a_P \quad (ค.18)$$

$$v_n = v_n^* + \frac{(x_e - x_w)}{a_P\big|_n}(p'_P - p'_N) \quad (ค.19)$$

$$v_s = v_s^* + \frac{(x_e - x_w)}{a_P\big|_s}(p'_S - p'_P) \quad (ค.20)$$

จากนั้นแทนค่าสมการ (ค.16), (ค.17), (ค.20) และ (ค.21) ลงในการสมการ (ค.3) จะได้

$$\begin{aligned}(u_w^* - u_e^*)(y_n - y_s) + (v_s^* - v_n^*)(x_e - x_w) &= \frac{(y_n - y_s)^2}{a_P\big|_e}(p'_P - p'_E) \\ &- \frac{(y_n - y_s)^2}{a_P\big|_w}(p'_W - p'_P) + \frac{(x_e - x_w)^2}{a_P\big|_n}(p'_P - p'_N) - \frac{(x_e - x_w)^2}{a_P\big|_s}(p'_S - p'_P)\end{aligned} \quad (ค.21)$$

จัดรูปสมการใหม่และเขียนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดจะได้

$$a_P p'_P - (a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S) = S_m \quad (ค.22)$$

โดยที่

$$a_E = \frac{(y_n - y_s)^2}{a_P\big|_e} \quad (ค.23)$$

$$a_W = \frac{(y_n - y_s)^2}{a_P\big|_w} \qquad \text{(ค.24)}$$

$$a_N = \frac{(x_e - x_w)^2}{a_P\big|_n} \qquad \text{(ค.25)}$$

$$a_S = \frac{(x_e - x_w)^2}{a_P\big|_s} \qquad \text{(ค.26)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \text{(ค.27)}$$

$$S_m = (u_w^* - u_e^*)(y_n - y_s) + (v_s^* - v_n^*)(x_e - x_w) \qquad \text{(ค.28)}$$

ซึ่งกระบวนการที่กล่าวมาทั้งหมดขั้นต้นสามารถสรุปขั้นตอนการคำนวณและเขียนเป็นผังงานได้ตามรูปที่ ค.1 แต่อย่างไรก็ตามในขั้นตอนการปรับแก้ค่าความเร็วและความดันนั้นมีความจำเป็นที่จะต้องหน่วงค่าไว้เพื่อไม่ให้การคำนวณขาดเสถียรภาพโดยการปรับเปลี่ยนการปรับแก้ดังนี้

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \qquad \text{(ค.29)}$$

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \qquad \text{(ค.30)}$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \qquad \text{(ค.31)}$$

ซึ่งค่าการหน่วง (Under-Relaxation) α_p α_u และ α_v มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 โดยถ้ามีค่ามากก็จะทำให้ได้ผลการคำนวณที่เร็วขึ้นแต่มีเสถียรภาพในการคำนวณต่ำ ในขณะที่หากมีค่าน้อยก็จะทำให้ได้ผลการคำนวณที่มีเสถียรภาพสูงแต่จะใช้เวลาในการคำนวณนานขึ้น สำหรับค่า $u^{(n-1)}$ และ $v^{(n-1)}$ ที่ปรากฏในสมการ (ค. 32) และ (ค.33) นั้นคือค่าที่ได้จากรอบกระทำซ้ำรอบที่แล้วในขณะที่ u และ v คือค่าที่ได้จากการปรับแก้แล้วในรอบปัจจุบัน

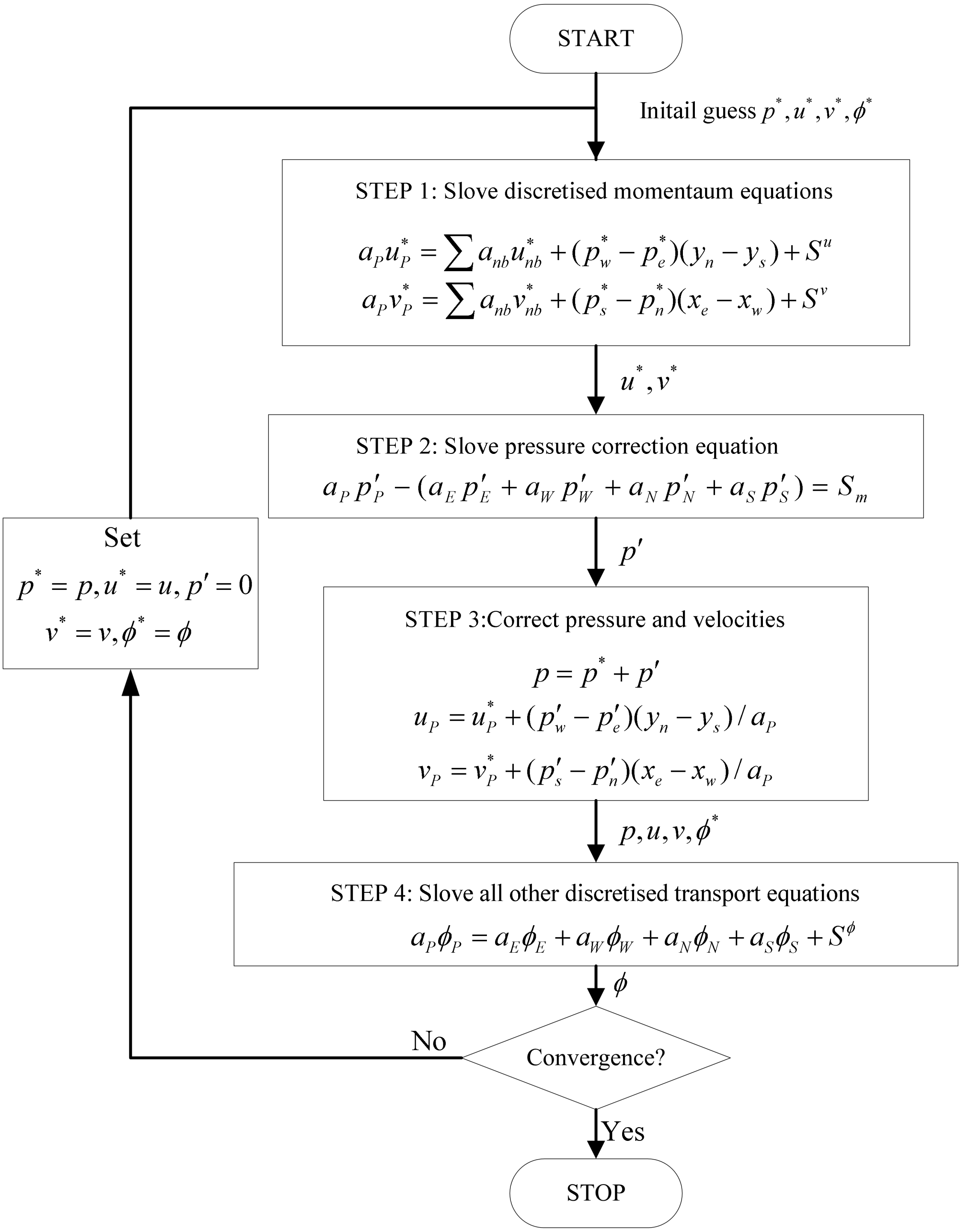
อย่างไรก็ตามเมื่อทำการพิจารณาพจน์ค่าความลาดชันของความดัน (Pressure Gradient) ตามสมการ (ค.1) และ (ค.2) แล้วจะพบว่าถ้าหากค่าของความดันมีลักษณะขึ้นลงคล้ายตารางหมากรุกซึ่งนั่นหมายถึงว่ามีค่าความลาดชันที่สูงมาก แต่ค่าความลาดชันที่ได้กลับมีค่าเป็นศูนย์เมื่อทำการประมาณค่าด้วยผลต่างกลางอันดับสอง (Second-Order Central Differencing) สำหรับวิธีแก้สามารถกระทำโดยการเปลี่ยนตำแหน่งการเก็บค่าของความเร็วบนกริดให้เยื้องกับตำแหน่งการเก็บค่าของความดันเพื่อให้ค่าของความดันในจุดที่ติดกันตกคร่อมปริมาตรควบคุมของความเร็วพอดีซึ่งการเก็บตัวแปรในลักษณะนี้จะเรียกว่าการเก็บแบบ “ระบบกริดเยื้อง” (Staggered Grid) (ดูรายละเอียดได้ใน Versteegและ Malalasekera [1995]) แต่ถ้าเป็นการเก็บตัวแปรไว้ที่ตำแหน่งเดียวกันหรือตำแหน่งร่วม (Collocated Grid) จะใช้การประมาณค่าของ Rhie และ Chow (1983) เข้ามาช่วย จากสมการ (ค. 28) u_e^*, u_w^*, u_n^* และ u_s^* จะคำนวณได้จากการประมาณค่าในช่วง ซึ่งเพื่อให้ความเร็วและความดันมีความสัมพันธ์กันในทางฟิสิกส์มากขึ้น Rhie และ Chow (1983) จึงได้ทำการปรับแก้พจน์ดังกล่าวตามสมการดังต่อไปนี้

$$u_e^* = \frac{u_E - u_P}{x_E - x_P} - \left(\frac{(p_E - p_P)}{(x_E - x_P)} - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_e \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{\left.a_P\right|_e} \quad (ค.32)$$

$$u_w^* = \frac{u_P - u_W}{x_P - x_W} - \left(\frac{(p_P - p_W)}{(x_P - x_W)} - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_w \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{\left.a_P\right|_w} \quad (ค.33)$$

$$v_n^* = \frac{v_N - v_S}{y_N - y_S} - \left(\frac{(p_N - p_P)}{(y_N - y_P)} - \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_n \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{\left.a_P\right|_n} \quad (ค.34)$$

$$v_s^* = \frac{v_P - v_S}{y_P - y_S} - \left(\frac{(p_P - p_S)}{(y_P - y_S)} - \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_s \right) \frac{(x_e - x_w)(y_n - y_s)}{\left.a_P\right|_s} \quad (ค.35)$$



รูปที่ ค.1 แผนภาพแสดงรายเอียดขั้นตอนวิธี SIMPLE

ภาคผนวก ง

บทความทางวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างการศึกษา

รายชื่อบทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างการศึกษา

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2003). **Parallel computing on the Navier-Stoke solver**. In Proceedings of the 7th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering. Bangkok, Thailand: Chulalongkorn University

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2003). **Parallel computing on the Navier-Stokes solver with the multigrid method**. In Proceedings of the 17th National Mechanical Engineering Conference. Prachinburi, Thailand: Srinakarinvirot University.

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2004). **A parallel semi-coarsening multigrid algorithm for solving the Reynolds-averaged Navier-Stokes equation**. In Proceedings of the 7th International Conference on High Performance Computing and Grid in Asia Pacific Region (pp 258-266). Tokyo, Japan: IEEE, Computer Society.

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2004). **Parallel computation of complex geometry flow using a multi-block technique**. In Proceedings of the 8th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering. Nakhon Ratchasima, Thailand: Suranaree University of Technology.

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2006). **Parallel computation of turbulent flow over a backward-facing step**. In Proceedings of the 10th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering. Chiang Mai, Thailand: Chiang Mai University.

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, V., Juntasaro, E. (2006). **Multigrid acceleration of three turbulence models in predicting stratified flow driven by natural convection in a square cavity**. In Proceedings of the 20th National Mechanical Engineering Conference. Nakhon Ratchasima,Thailand: Suranaree University of Technology.

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, E., Juntasaro, V. and Utthayopas, P. (2007). **Parallel computation of turbulent natural convection in an enclosure with installed partitions**. In Proceedings of the 11th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering**.** Phuket, Thailand: Prince of Songkla University (Phuket Campus).

Ngiamsoongnirn, K., Juntasaro, V., Utthayopas, P and Juntasaro, E. and. (2007). **Parallel multigrid implementation in computation of turbulent natural convection in an enclosure with installed partitions**. In Proceedings of the 21st National Mechanical Engineering Conference. Pattaya, Thailand: Royal Thai Air Force Academy.

ประวัติผู้เขียน

นายเกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน เกิดเมื่อวันที่ 3 พฤษภาคม 2520 ที่ จ. ขอนแก่น ปัจจุบันมีชื่ออยู่ในทะเบียนบ้านเลขที่ 64 หมู่ 2 ต. สระโพนทอง อ. เกษตรสมบูรณ์ จ. ชัยภูมิ สมรสกับนางเกื้อกูล เหงี่ยมสูงเนิน (แก้วเกิด) ยังไม่มีบุตร เริ่มต้นการศึกษาในระดับประถมศึกษาชั้นปีที่ 1-6 ที่โรงเรียนบ้านโพธิ์ (คุรุราษฎร์ประสิทธิ์) อ. เกษตรสมบูรณ์ จ. ชัยภูมิจากนั้นศึกษาต่อในระดับมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 1-6 ที่โรงเรียนเกษตรสมบูรณ์วิทยาคม อ. เกษตรสมบูรณ์ จ. ชัยภูมิ และจบการศึกษาในปี พ.ศ. 2539 และได้ศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี และสำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ในปี พ.ศ. 2543 ภายหลังจบการศึกษาได้เข้าทำงานในตำแหน่งผู้ควบคุมห้องปฏิบัติการทางวิทยาศาสตร์หลักสูตรพิเศษ (ภาคภาษาอังกฤษ) ที่โรงเรียนโยธินบูรณะ กรุงเทพมหานคร และในปี พ.ศ. 2544 ได้เข้าทำงานที่โรงเรียนซับม่วงวิทยา อ. ตาพระยา จ. สระแก้ว ในตำแหน่งอาจารย์ (อัตราจ้าง) สอนรายวิชาฟิสิกส์และเคมีในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย จากนั้นในปี พ.ศ. 2545 ได้ทำงานในตำแหน่งผู้ช่วยวิจัยของรองศาสตราจารย์ ดร. เอกชัย จันทสาโร ซึ่ง ดร. เอกชัย จันทสาโรได้ผลักดันให้ศึกษาต่อระดับบัณฑิตศึกษาในคณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ในปี พ.ศ. 2547 โดยในระหว่างเป็นผู้ช่วยวิจัยและศึกษาต่อในระดับบัณฑิตศึกษานั้นได้มีการนำเสนอผลงานวิจัยทั้งในระดับชาติและนานาชาติซึ่งได้แสดงรายละเอียดในภาคผนวก ง.