มนุษย์เป็นผู้สร้างคณิตศาสตร์
และเป็นผู้ใช้คณิตศาสตร์
เพื่ออธิบายและทำความเข้าใจ
ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ
อย่างเป็นระเบียบและเป็นระบบ

ประภาศรี อัศวกุล

คำนำ

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้รับการพัฒนาขึ้น เพื่อใช้เป็นอุปกรณ์ในการแก้ปัญหา ในกรณีที่ระเบียบวิธีเชิงทฤษฎีไม่สามารถครอบคลุมเงื่อนไขในปัญหาที่เกิดขึ้นได้ โดยเน้นความเป็นไปได้ ความเหมาะสม ความสามารถในการปรับแปลงให้ใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัจจุบันนี้ ต้องคำนึงความเป็นไปได้และเรื่องประสิทธิภาพ เมื่อนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาเขียนโปรแกรมเพื่อการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ประการหลังนี้เองที่ทำให้เกิดแนวทางใหม่ของการวิจัยและพัฒนา นั่นคือ การคิดค้นเพื่อให้ได้มาซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่สามารถนำมาเขียนโปรแกรมและมีความเหมาะสมกับสถาปัตยกรรมของคอมพิวเตอร์แบบต่าง ๆ กล่าวได้ว่า ความก้าวหน้าของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์แบบต่าง ๆ กล่าวได้ว่า ความก้าวหน้าของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีอิทธิพลสำหรับทิศทางของการวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอย่างไม่หยุดยั้ง ความสำคัญคือ ระเบียบเชิงตัวเลขไม่ใช่สิ่งที่พัฒนาขึ้นให้อยู่บนแผ่นกระดาษเท่านั้น แต่ต้องสามารถปรับแปลงเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบ และพิสูจน์ความถูกต้องในการแก้ปัญหาได้

แนวทางและหลักการของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ใช้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มีรากฐานมาจากวิชาทางคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐานถึงระดับสูง กล่าวคือ แคลคูลัส พีชคณิตเชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์ การวิเคราะห์เชิงจริงและเชิงซ้อน โทโพโลยี (Topology) และการวิเคราะห์ฟังก์ชันนอล (Functional analysis) เป็นต้น โดยการผสมผสานทฤษฎีและสมบัติทางคณิตศาสตร์ในวิชาเหล่านี้กล่าวได้ว่า ทฤษฎีและสมบัติทางคณิตศาสตร์ทำหน้าที่เป็นสถาปนิกออกแบบและผลิตระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ นอกจากนี้ยังมีการคิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ อันเป็นผลสืบเนื่องจากการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรง เพื่อพิสูจน์เกี่ยวกับความสมเหตุสมผล (Validity) การลู่เข้า (Convergence) ความเสถียร (Stability) ขอบเขตของค่าผิดพลาด (Error bound) เป็นต้น ผลการพิสูจน์จากทฤษฎียังสามารถยืนยัน โดยอาศัยการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ได้อีกด้วย

ผู้สอนจัดเตรียมเอกสารประกอบการสอนส่วนที่ 1 นี้ ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของวิชาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับคอมพิวเตอร์ โดยครอบคลุม 2 บทหลัก ๆ คือ พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor polynomials) และการอินเทอร์โพเลต (Interpolation) เพื่อให้นักศึกษาใช้เป็นแนวทางในการศึกษาหัวข้อเหล่านี้ และสามารถศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งค้นคว้าอื่น ๆ ผู้สอนหวังเป็นอย่างยิ่งว่านักศึกษาจะสามารถใช้หลักการและแนวทางของวิชานี้ ให้เกิดประโยชน์ในการค้นคว้าและแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ของนักศึกษาต่อไป

ประภาศรี อัศวกุล

18 ธันวาคม 2550

บทที่ 3

พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor Polynomials)

3.1 การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial function evaluation)

ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n (degree n) ในรูปทั่วไป คือ

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \tag{3.1.1}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a_n \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์นำ ถ้า $a_n = 1$ เรียก $p_n(x)$ ว่า พหุนามโมนิก (monic polynomial) ยังสามารถเขียน $p_n(x)$ ในรูปฟังก์ชันพหุนามรอบจุด x_0 ได้

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + b_n(x - x_0)^n \tag{3.1.2}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ เป็นค่าคงตัว และเรียก x_0 ว่า ศูนย์กลาง ดังนั้น $p_n(x)$ ในสมการ (3.1.2) มีศูนย์กลางที่ 0 เช่น

$$p_3(x) = 2 - 3x + 4x^3$$

เมื่อเขียน $p_3(x)$ รอบจุด 1 จะได้

$$p_3(x) = 3 + 9(x-1) + 12(x-1)^2 + 4(x-1)^3$$

เมื่อกำหนด $p_n(x)$ มาให้ สามารถเขียน $p_n(x)$ ในรูปศูนย์กลางที่ x_0 ได้ โดยคำนวณสัมประสิทธิ์ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ในสมการ (3.1.2) จาก

$$b_k = \frac{p_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3.1.3}$$

การคำนวณฟังก์ชันพหุนามสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยเขียนในรูปกำลังซ้อนใน (nested power form) พิจารณาจากกรณีต่อไปนี้

$$p_3(x) = 1 - 5x + 4x^2 - 2x^3$$

ถ้าคำนวณ $p_3(x)$ ในรูปนี้โดยตรงแล้ว จำนวนครั้งในการคูณเป็น $1+2+3=6$ ครั้ง แต่ถ้าเขียน $p_3(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

$$p_3(x) = 1 + x(-5 + x(4 - 2x))$$

จำนวนครั้งในการคูณเป็น 3 ครั้ง สำหรับ

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \tag{3.1.4}$$

ถ้าคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลัง (power form) นี้โดยตรงแล้ว จำนวนครั้งในการคูณของแต่ละพจน์ เช่น พจน์ $a_k x^k$ ต้องใช้การคูณ k ครั้ง ดังนั้น รวมจำนวนครั้งในการคูณของทุก ๆ พจน์ของ $p_n(x)$ ในสมการ (3.1.4) ได้

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.1.5}$$

และเมื่อรวมการบวกอีก n ครั้ง จำนวนครั้งในการดำเนินการ หรือเรียกโดยย่อว่า flops (floating-point operations) เป็น

$$\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2} \tag{3.1.6}$$

ถ้าเขียน $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

$$p_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x))\ldots)) \tag{3.1.7}$$

จำนวนครั้งในการคูณลดลงเหลือ n ครั้ง และรวมการบวก n ครั้ง ทำให้ได้จำนวน flops ในการคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนในสมการ (3.1.7) เป็น $2n$ ดังนั้น สัดส่วนของ flops ในการคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลังเทียบกับรูปกำลังซ้อนในเป็น

$$\frac{n(n+3)/2}{2n} = \frac{n+3}{4} \tag{3.1.8}$$

เห็นได้ชัดว่าถ้า n มีค่าใหญ่ เช่น $n = 1000$ จำนวน flops ของการคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลังเป็น 501500 และรูปกำลังซ้อนในเป็น 2000 หรือ สัดส่วนของ flops ในการคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลังเทียบกับรูปกำลังซ้อนในเป็น 250 โดยประมาณ

วิธีการเขียนขั้นตอนการคำนวณ $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน พิจารณาได้จากการคำนวณกรณี $p_5(x)$ ดังนี้

$$p_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

เขียน $p_5(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

$$p_5(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4 + a_5x))))$$

การคำนวณ $p_5(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน จึงเริ่มจากวงเล็บข้างในสุด เช่น ต้องการคำนวณ $p_5(6)$ มีขั้นตอนดังนี้ คือ

1. ให้ $b_5 = a_5$
2. $b_4 = a_4 + 6b_5$
3. $b_3 = a_3 + 6b_4$
4. $b_2 = a_2 + 6b_3$
5. $b_1 = a_1 + 6b_2$
6. $b_0 = a_0 + 6b_1$

ผลลัพธ์ที่ได้ คือ $p_5(6) = b_0$

ขั้นตอนวิธี 3.1 การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

ข้อมูลเข้า : $n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, x$

การเริ่มต้น : $b_n = a_n$

for $k = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1, 0$ **do**

$$b_k = a_k + b_{k+1}x$$

end

ผลลัพธ์ : $p_n(x) = b_0$

การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน สามารถแสดงโดยตารางฮอร์เนอร์ (Horner's table) หรือ วิธีฮอร์เนอร์ ดังนี้

ตารางฮอร์เนอร์ การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

ข้อมูลเข้า : c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k	...	a_2	a_1	a_0
		$b_n c$	$b_{n-1} c$	...	$b_{k+1} c$	...	$b_3 c$	$b_2 c$	$b_1 c$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_k	...	b_2	b_1	b_0
ผลลัพธ์ : $p_n(c) = b_0$									

จากตารางฮอร์เนอร์ยังได้ว่า $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 3 ในตารางฮอร์เนอร์ ทำให้ได้ฟังก์ชันพหุนาม

$$q(x) = b_1 + b_2x + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} + b_nx^{n-1} \tag{3.1.9}$$

ซึ่งเป็นผลหาร (quotient) ของ $p_n(x)$ เมื่อหารด้วย $x-c$ และ b_0 หรือ $p_n(c)$ เป็นเศษเหลือ (remainder) นั่นคือ

$$p_n(x) = (x-c)q(x) + b_0 \tag{3.1.10}$$

วิธีฮอร์เนอร์จึงมีชื่อเรียกว่า การหารสังเคราะห์ (synthetic division) ถ้า b_0 หรือ $p_n(c)$ มีค่าเป็นศูนย์ แล้วแสดงว่า c เป็นราก (root) ของ $p_n(x)$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงใช้ตารางฮอร์เนอร์คำนวณ $p_5(3)$ เมื่อ $p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 4x - 40$

วิธีทำ สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์จากพจน์กำลังสูงสุด

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
ข้อมูลเข้า : 3	1	−6	8	0	4	−40
		3	−9	−3	−9	−15
ผลลัพธ์ : $p_5(3) = -55$	1	−3	−1	−3	−5	−55

และจากสมการ (3.1.9) และ (3.1.10) ได้ว่า

$$p_5(x) = (x-3)(x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x - 5) - 55 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงใช้ตารางฮอร์เนอร์คำนวณ $p_5'(2)$ เมื่อ $p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 4x - 40$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ $p_5(x)$

$$p_5'(x) = 5x^4 - 24x^3 + 24x^2 + 4$$

สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์ของ $p_5'(x)$ จากพจน์กำลังสูงสุด

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
ข้อมูลเข้า : 2	5	−2	24	0	4
		10	16	80	160
ผลลัพธ์ : $p_5'(2) = 164$	5	8	40	80	164

และจากสมการ (3.1.9) และ (3.1.10) ยังได้ว่า

$$p_5(x) = (x-3)(x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x - 5) - 55 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงแสดงการหาร $p_3(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ ด้วย $2x - 1$ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ

เขียน $2x-1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ แล้วให้หาร $p_3(x)$ ด้วย $x-\frac{1}{2}$

	a_3	a_2	a_1	a_0
ข้อมูลเข้า : 1/2	1	2	-3	-4
		$1/2$	$5/4$	$-7/8$
ผลลัพธ์ : $p_3(1/2) = -39/8$	1	$5/2$	$-7/4$	$-39/8$

$$x^3+2x^2-3x-4 = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}\right)-\frac{39}{8}$$
$$= (2x-1)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}x-\frac{7}{8}\right)-\frac{39}{8}$$

และถ้า $f(x)=x^3+2x^2-3x-4$ แล้ว $f(1/2) = -39/8$ □

ตัวอย่างที่ 3.1.3 แสดงให้เห็นว่า การหารฟังก์ชันพหุนาม $f(x)$ ด้วย $ax-b$ ให้หาผลหาร $q(x)$ และเศษเหลือ r โดยหาร $f(x)$ ด้วย $x-b/a$ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$f(x) = \left(x-\frac{b}{a}\right)q(x)+r = (ax-b)\frac{q(x)}{a} + r \qquad (3.1.11)$$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงแสดงว่า $2x-1$ เป็นตัวประกอบของ $6x^3-41x^2-9x+14$ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 3.1.3 ให้หารด้วย $x-\frac{1}{2}$

	a_3	a_2	a_1	a_0
ข้อมูลเข้า : 1/2	6	-41	-9	14
		3	-19	-14
ผลลัพธ์ : $p_3(1/2)=0$	6	-38	-28	0

ดังนั้น 1/2 เป็นรากของ $6x^3-41x^2-9x+14$ และ

$$\begin{aligned} 6x^3 - 41x^2 - 9x + 14 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^2 - 38x - 28) \\ &= (2x-1)(3x^2 - 19x - 14) \\ &= (2x-1)(3x+2)(x-7) \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.1.5 จงแสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์ของ $x^n - 1$ จากพจน์กำลังสูงสุด

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
ข้อมูลเข้า : 1	1	0	0	$\cdots$	0	0	-1
		1	1	$\cdots$	1	1	1
ผลลัพธ์ : $p_n(1) = 0$	1	1	1	$\cdots$	1	1	0

ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $x^n - 1$ □

3.2 พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor Polynomials)

ฟังก์ชันที่นิยมใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ คือฟังก์ชันพหุนาม เพราะว่าฟังก์ชันพหุนามมีรูปแบบที่ง่ายในการคำนวณค่า และสมบัติพื้นฐานที่เหมาะและสะดวกในการนำไปใช้ เช่น ความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ได้ เป็นต้น ลักษณะปัญหาที่จะพิจารณาคือ เมื่อรู้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x = x_0$ แล้วจะประมาณค่าของ $f(x)$ สำหรับ $x \neq x_0$ ได้อย่างไร และถ้ามีข้อมูลของอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ เพิ่มมาอีก แล้วจะประมาณค่าของ $f(x)$ สำหรับ $x \neq x_0$ ได้อย่างไร และมีความแม่นตรงมากขึ้นหรือไม่

พิจารณาการประมาณ $f(x)$ เมื่อทราบค่าของ $f(x_0)$ เพียงค่าเดียว ฟังก์ชันพหุนามที่ใช้ประมาณ คือ ฟังก์ชันพหุนาม $p_0(x) = f(x_0)$ หรือฟังก์ชันค่าคงตัว

$$f(x) \approx p_0(x) = f(x_0) \tag{3.2.1}$$

ตัวอย่าง เช่น ในกรณี $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$ สามารถประมาณ e^x โดยใช้ข้อมูลค่าฟังก์ชันของ e^x ที่ $x = 0$ เพียงอย่างเดียว นั่นคือ พหุนาม $p_0(x) = e^{x_0} = e^0 = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าคงตัว ดังนั้น การประมาณอยู่ในรูป

$$e^x \cong p_0(x) = 1 \tag{3.2.2}$$

เมื่อเพิ่มข้อมูลอนุพันธ์ของ $f(x) = e^x$ ที่ $x_0 = 0$ นั่นคือ $f'(0) = 1$ เงื่อนไขของพหุนามที่ใช้ประมาณ e^x คือ พหุนามและฟังก์ชัน e^x ต้องมีค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์เท่ากันที่ $x_0 = 0$ หรือ

$$p_1(0) = f(0), \quad p_1'(0) = f'(0) \tag{3.2.3}$$

ซึ่งในเชิงเรขาคณิตมีความหมายว่า กราฟของ e^x และ $p_1(x)$ ตัดกันที่จุด (0,1) และมีความชันเท่ากัน พหุนามเชิงเส้น $p_1(x)$ ที่สอดคล้องตามเงื่อนไข (3.2.3) นี้ คือ

$$e^x \cong p_1(x) = 1 + x \tag{3.2.4}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเพิ่มข้อมูลอนุพันธ์อันดับสองและสามของ e^x ที่ $x_0 = 0$ เพื่อสร้างพหุนามที่ใช้ประมาณ e^x ให้มีกำลังสูงขึ้น และสอดคล้องตามเงื่อนไขในลักษณะเดียวกับ (3.2.3) กล่าวคือ

$$p_2(0) = 0, \quad p_2'(0) = f'(0), \quad p_2''(0) = f''(0) \tag{3.2.5}$$

และ

$$p_3(0) = 0, \quad p_3'(0) = f'(0), \quad p_3''(0) = f''(0), \quad p_3'''(0) = f'''(0) \tag{3.2.6}$$

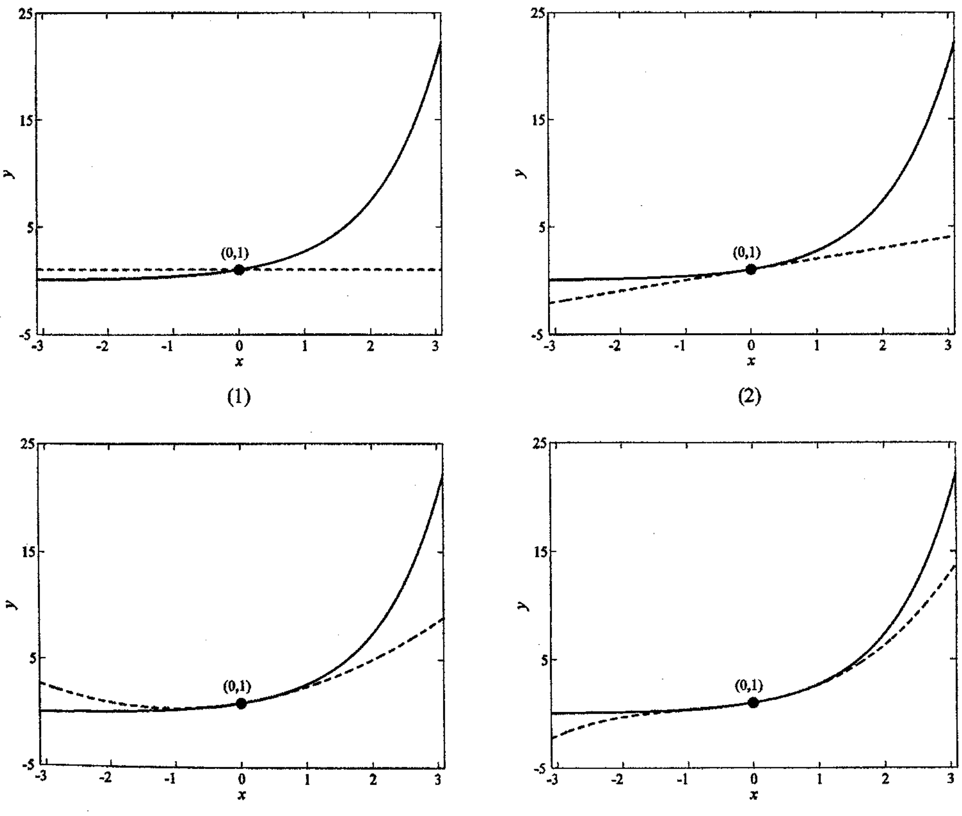
จากเงื่อนไข (3.2.5) และ (3.2.6) จะได้ว่าพหุนามกำลังสองและกำลังสามอยู่ในรูป

$$e^x \cong p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{3.2.7}$$

และ

$$e^x \cong p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \tag{3.2.8}$$

รูปที่ 3.2.1 (1) - (4) แสดงกราฟของ e^x และเส้นประแสดงกราฟของพหุนาม $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ และ $p_3(x)$ ซึ่งเป็นเส้นนอน เส้นตรง พาราโบลา และเส้นโค้งกำลังสาม ตามลำดับ เห็นได้ว่า ถ้าประมาณค่าของ e^x ด้วยพหุนามเหล่านี้ ค่าประมาณจะมีความแม่นยำเมื่อตำแหน่งที่ประมาณอยู่ใกล้ตำแหน่ง $x_0 = 0$



รูปที่ 3.2.1

สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป เมื่อรู้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ สามารถประมาณค่าของ $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปศูนย์กลางที่ x_0 ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &\cong p_n(x) \\ &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + b_n(x-x_0)^n \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

โดยให้ค่าของ $p_n(x)$ และอนุพันธ์เท่ากับค่าของ $f(x)$ และอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} &p_n(x_0) = f(x_0), \quad p_n'(x_0) = f'(x_0), \quad p_n''(x_0) = f''(x_0), \ \ldots, \\ &p_n^{(n)}(x_0) = f_n^{(n)}(x_0) \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

จากเงื่อนไข (3.2.10) สามารถแสดงได้โดยง่ายว่า สัมประสิทธิ์ในสมการ (3.2.9) มีค่าดังนี้

$$b_0 = f(x_0), \quad b_1 = f'(x_0), \quad b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{3.2.11}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (3.2.9) ได้

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

ฟังก์ชันพหุนามในสมการ (3.2.12) มีชื่อเรียกว่า **พหุนามเทย์เลอร์** ระดับขั้น n สำหรับฟังก์ชัน f ที่ $x = x_0$ หรือรอบจุด x_0 ถ้าให้ $x - x_0 = h$ แล้วการเขียนพหุนามเทย์เลอร์ของตัวแปร h ซึ่งก็คือระยะห่างจาก x_0 อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} p_n(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

จากสมการ (3.2.12) และ (3.2.13) สรุปได้ว่าสามารถสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ โดยใช้ข้อมูลของค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ ได้ 2 รูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในรูปกำลังของ $x - x_0$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (3.2.14)$$

รูปแบบที่ 2 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในรูปกำลังของ h

$$p_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \qquad (3.2.15)$$

การประมาณค่าของ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ในสมการ (3.2.14) และ (3.2.15) ควรพิจารณาสำหรับ x ที่อยู่ใกล้ x_0 หรือ สำหรับค่า h ที่มีค่าน้อย เพราะว่าการสร้างพหุนามนี้ใช้ข้อมูลของค่าฟังก์ชันที่และอนุพันธ์ที่ x_0 ดังนั้น การประมาณจะมีความแม่นยำมากขึ้น เมื่อตำแหน่ง x อยู่ใกล้ x_0 นั่นคือ จากรูปแบบทั้งสองของพหุนามเทย์เลอร์

$$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{สำหรับ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ } x_0$$

หรือ

$$f(x_0 + h) \cong p_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \qquad \text{สำหรับ } h \text{ ที่มีค่าน้อย}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n สำหรับ $f(x)=e^x$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(0)$

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^x, & f(0)&=1,\\
f'(x)&=e^x, & f'(0)&=1,\\
f''(x)&=e^x, & f''(0)&=1,\\
f'''(x)&=e^x, & f'''(0)&=1,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x)&=e^x, & f^{(n)}(0)&=1,
\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0=0$ และค่าของ $f^{(k)}(0)$ ในสมการ (3.2.14) ได้

$$p_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$ □

ตัวอย่างที่ 3.2.2 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n สำหรับ $f(x)=\ln x$ รอบจุด $x_0=1$ ในรูปกำลังของ h

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(1)$

$$\begin{aligned}
f(x)&=\ln x, & f(1)&=\ 0,\\
f'(x)&=1/x, & f'(1)&=\ 1,\\
f''(x)&=-1/x^2, & f''(1)&=-1,\\
f'''(x)&=2!/x^3, & f'''(1)&=\ 2!,\\
f^{(4)}(x)&=-3/x^4, & f^{(4)}(1)&=-3!,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x)&=(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n, & f^{(n)}(1)&=(-1)^{n-1}(n-1)!,
\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0=1$ และค่าของ $f^{(k)}(1)$ ในสมการ (3.2.15) ได้

$$p_n(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}h^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}h^k}{k}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.2.3 จงประมาณค่าของ e ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด $x_0 = 0$ ระดับขั้น 1 ถึง 5

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.1 แทนค่า $x = 1$ ใน $p_n(x)$

$$e \cong p_1(1) = 1 + 1 = 2$$
$$e \cong p_2(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2.5$$
$$e \cong p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.666666$$
$$e \cong p_4(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.708333$$
$$e \cong p_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.716666$$

ค่าที่แท้จริงของ $e \cong 2.718281$ □

ตัวอย่างที่ 3.2.4 จงประมาณค่าของ $\ln 1.1$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ของ $\ln x$ รอบจุด $x_0 = 1$ ระดับขั้น 1 ถึง 5

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.2 แทนค่า $h = 0.1$ ใน $p_n(1+h)$

$$\ln 1.1 \cong p_1(1+0.1) = 0.1$$
$$\ln 1.1 \cong p_2(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} = 0.09500000$$
$$\ln 1.1 \cong p_3(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} = 0.09533333$$
$$\ln 1.1 \cong p_4(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} + \frac{(.1)^4}{4} = 0.09530833$$
$$\ln 1.1 \cong p_5(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} + \frac{(.1)^4}{4} + \frac{(.1)^5}{5} = 0.09531033$$

ค่าที่แท้จริงของ $\ln 1.1 \cong 0.09531017$ □

ตัวอย่างที่ 3.2.3 และ 3.2.4 แสดงให้เห็นชัดว่า ถ้าประมาณค่าฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ที่มีระดับขั้นที่สูงขึ้น จะได้ค่าประมาณที่ใกล้ค่าที่แท้จริงมากยิ่งขึ้น และค่าประมาณของ e ที่ได้มีความแม่นยำน้อยกว่าค่าประมาณของ $\ln 1.1$ เพราะว่า ระยะห่าง $x - x_0 = 1$ ในตัวอย่างที่ 3.2.3 มากกว่า $h = x - x_0 = 0.1$ ในตัวอย่างที่ 3.2.4

ตัวอย่างที่ 3.2.5 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = x^3$ รอบจุด $x_0 = 1$

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3, & f(1) &= 1, \\ f'(x) &= 3x^2, & f'(1) &= 3, \\ f''(x) &= 6x, & f''(1) &= 6, \\ f'''(x) &= 6, & f'''(1) &= 6, \\ f^{(4)}(x) &= 0, \end{aligned}$$

แทนค่า $x_0 = 1$ และค่าของ $f^{(k)}(1)$ ในสมการ (3.2.14) ได้พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = x^3$ ดังนี้

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= p_0(x) + f'(1)(x-1) \\ &= 1 + 3(x-1) \\ &= -2 + 3x, \\ p_2(x) &= p_1(x) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 \\ &= 1 - 3x + 3x^2, \\ p_3(x) &= p_2(x) + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

เพราะว่า $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 3 อยู่แล้ว ดังนั้น จึงได้ว่า $f(x) = p_3(x)$ □

3.3 ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)

การประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์รอบจุด $x = x_0$ ซึ่งเป็นพหุนามในรูปกำลังของ $x - x_0$ ย่อมขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่าง x และ x_0 หรือพจน์ $(x - x_0)^k$ ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ในหัวข้อนี้ แสดงให้เห็นชัดเจนเชิงทฤษฎีว่า พจน์เศษเหลือที่เกิดขึ้นเป็นเช่นใด พจน์เศษเหลือนี้จึงเป็นส่วนที่แสดงว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายมีขนาดเท่าใด และยังแสดงได้อีกว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายน้อยลง เมื่อระดับขั้นของพหุนามเทย์เลอร์ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันสูงขึ้น

ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับ $1, 2, 3, \ldots, n+1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a, b]$ ดังนั้น สำหรับ x_0 ใดๆ ใน I สูตรเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \tag{3.3.1}$$

สำหรับแต่ละ $x \in I$ และ

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \tag{3.3.2}$$

เรียก $R_n(x)$ ว่า เศษเหลือ

พิสูจน์

จากทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus)

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

หรือเขียนในรูป

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$
$$= f(x_0) + R_0(x)$$

ดังนั้น กรณี $n=0$ สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริง ต่อไปใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (integration by parts)

$$\int_{x_0}^{x} u\,dv = [\,uv\,]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} v\,du$$

ดำเนินการกับ $R_0(x)$ โดยให้ $u = f'(t)$ และ $dv = dt$ ทำให้ได้ $du = f''(t)\,dt$ แต่สำหรับ v เลือก $v = -(x-t)$ แทนในสูตรได้

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = [\,-f'(t)(x-t)\,]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-t)f''(t)\,dt$$
$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt$$
$$= f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$$

ผลที่ได้คือ

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$$

ซึ่งแสดงว่า สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริงสำหรับ $n=1$ ในทำนองเดียวกัน ใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนกับ $R_1(x)$ โดยให้

$$u = f''(t) \quad \text{และ} \quad dv = (x-t)dt$$

ดังนั้น

$$du = f'''(t)dt \quad \text{และ} \quad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

แทนในสูตรได้

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = \left[-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$$
$$= f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$$
$$= f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + R_2(x)$$

ดังนั้น

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + R_2(x)$$

ซึ่งแสดงว่า สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริงสำหรับ $n=2$ ดำเนินการในทำนองเดียวกัน สำหรับการพิสูจน์จากขั้น $n=2$ ไป $n=3$

สำหรับกรณีทั่วไป สมมุติว่า ได้ดำเนินการพิสูจน์ถึงขั้น $n-1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots$$
$$+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_{n-1}(x)$$

เมื่อ

$$R_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

ใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนกับ $R_{n-1}(x)$ โดยให้

$$u = f^{(n)}(t) \quad \text{และ} \quad dv = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

ดังนั้น

$$du = f^{(n+1)}(t)\,dt \quad \text{และ} \quad v = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

แทนในสูตรได้

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

ดังนั้น

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots$$
$$+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

สรุปผลการพิสูจน์ได้ว่า สูตรเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นจริง ในรูปผลบวกของพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และพจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขต □

พจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขตในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1 มีความไม่สะดวกในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนหรือคาดคะเนค่าคลาดเคลื่อน ทฤษฎีบทต่อไปแสดงวิธีเขียนพจน์เศษเหลือที่ง่ายขึ้นและสะดวกต่อการหาขอบเขต รูปแบบใหม่ของพจน์เศษเหลือนี้มีลักษณะคล้ายกับพจน์ทั่ว ๆ ไปของพหุนามเทย์เลอร์

ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.2

สำหรับพจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขตในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1 สามารถเขียนในรูป

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.3.3}$$

เมื่อ ξ เป็นค่าๆ หนึ่ง ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า x และอยู่ระหว่าง x และ x_0

พิสูจน์

สำหรับค่า x ในช่วง $I = [a, b]$ ตรึงค่า x นี้ และสมมุติว่า $x_0 < x$ เพราะว่า $f^{(n+1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ดังนั้น $f^{(n+1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงย่อย $[x_0, x]$ ของ I จากทฤษฎีบทค่าสุดขีด (extreme value theorem) ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด ทำให้ได้ว่า $f^{(n+1)}(t)$ มีค่าต่ำสุดและสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[x_0, x]$ นั่นคือ มีค่า c และ d ในช่วง $[x_0, x]$ ซึ่งทำให้ $f^{(n+1)}(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และ $f^{(n+1)}(d)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ดังนั้นสำหรับค่า t ใด ๆ ใน $[x_0, x]$ ย่อมได้ว่า

$$f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^n}{n!} \le f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \le f^{(n+1)}(d)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

ผลที่ตามมาคือ

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(d)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

พจน์กลางในอสมการ คือ พจน์เศษเหลือในทฤษฎีบท 3.3.1 และเพราะว่า $f^{(n+1)}(c)$ และ $f^{(n+1)}(d)$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}dt \le R_n(x) \le f^{(n+1)}(d)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

หาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตในอสมการได้

$$f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \le R_n(x) \le f^{(n+1)}(d)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ซึ่งแสดงว่า $R_n(x)$ เป็นค่า ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังชันต่อเนื่อง $f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ บนช่วงปิด $[x_0, x]$ โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate value theorem) ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด ทำให้ได้ว่า มีค่า ξ ค่าหนึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x ซึ่ง

$$R_n(x) \;=\; f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ดังนั้น รูปแบบของพจน์เศษเหลือในสมการ (3.3.3) เป็นจริง ในทำนองเดียวกัน สำหรับการพิสูจน์ในกรณี $x < x_0$ □

จากทฤษฎีบทเทย์เลอร์ ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ สอดคล้องตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ แล้วสามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ในรูป

$$f(x) \;=\; \underbrace{p_n(x)}_{\text{พหุนามเทย์เลอร์}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{เศษเหลือ}} \tag{3.3.4}$$

เมื่อ $p_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จึงเกิดจากการตัดพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ นี้ออกไป ซึ่งเรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (truncation error) นั่นคือ

ถ้า $f(x) \cong p_n(x)$
แล้ว ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายในการประมาณ คือ $R_n(x)$

และรูปแบบของเศษเหลือที่สะดวกในการหาขอบเขตนั้น ใช้รูปแบบจากสมการ (3.3.3)

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ซึ่งแปรตามค่าของ $(x-x_0)^{n+1}$ ฉะนั้นการประมาณ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จะมีความแม่นตรงมากขึ้น เมื่อ x อยู่ใกล้ x_0 และระดับขั้น n สูงขึ้น สำหรับค่า ξ ซึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x เป็นค่าที่ได้พิสูจน์แล้วว่ามีอยู่จริง แต่ในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย จะไม่หาค่า ξ อย่างชัดเจน วิธีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คือ การหาขอบเขตของ $R_n(x)$ นั่นคือ ถ้า M เป็นค่า ๆ หนึ่งซึ่ง

$$\left| f^{(n+1)}(t) \right| \leq M$$

สำหรับแต่ละ t ซึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x แล้วขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายคือ

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1} \tag{3.3.5}$$

ขอบเขตของ
ค่าคลาดเคลื่อน
ตัดปลาย

ตัวอย่างที่ 3.3.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้นใด ๆ สำหรับ $f(x) = \sin x$ รอบจุด $x_0 = 0$ และแสดงพจน์เศษเหลือ

วิธีทำ

หาค่าของอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ $\sin x$ ที่ 0

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, \\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

ฉะนั้น $f^{(2k)}(0) = 0$ และ $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

เพราะว่าอนุพันธ์อันดับเลขคู่ของ $f(x) = \sin x$ ที่ $x_0 = 0$ มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เมื่อแทนค่า $x_0 = 0$ ในสมการ ได้พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\sin x$ รอบจุด $x_0 = 0$ ซึ่งมีเฉพาะพจน์กำลังเลขคี่ ดังนี้

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

และเพราะว่า $f^{(2n+1)}(\xi) = (-1)^n \cos\xi$ แทนในสมการ (3.3.3) ได้พจน์เศษเหลือในรูป

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.3.1) สามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ ในรูป

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}_{\text{พหุนามเทย์เลอร์}} + \underbrace{(-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{\text{เศษเหลือ}}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.3.2 จงกระจาย e^x ในรูปพหุนามเทย์เลอร์ รอบจุด $x_0 = 0$ และพจน์เศษเหลือ

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.1 พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0 = 0$ สำหรับ $f(x) = e^x$ คือ

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

และเพราะว่า $f^{(n+1)}(x) = e^x$ จากสมการ (3.3.3) ได้พจน์เศษเหลือ คือ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ดังนั้น จากสมการ (3.3.1) สามารถเขียนฟังก์ชัน e^x ในรูป

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{พหุนามเทย์เลอร์}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{เศษเหลือ}}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.3.3 จงหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ ในการประมาณ $f(x)=e^x$ บนช่วงปิด $[-1,1]$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0=0$ และพิจารณาว่า อย่างน้อยที่สุดระดับขั้น n ควรเป็นเท่าใด เพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5×10^{-5}

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 3.3.2 พจน์เศษเหลือจากพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n รอบจุด $x_0=0$ สำหรับ $f(x)=e^x$ คือ

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

เพราะว่า $|x|\le 1$ และ ξ อยู่ระหว่าง x และ 0 ดังนั้นสามารถหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายได้ดังนี้

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!}$$

และถ้าต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 0.5×10^{-5} สามารถใช้ขอบเขตที่ได้ โดยให้

$$\frac{e}{(n+1)!} < 0.5\times10^{-5}$$

เพราะว่า $e/10! \cong 0.7\times10^{-6}$ ดังนั้น $n\ge 9$ นั่นคือ ต้องใช้พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้นอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ 9 เพื่อให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายน้อยกว่าค่าที่กำหนดมาให้ □

ในการหาขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ อาจต้องใช้ทฤษฎีบทอนุกรมสลับต่อไปนี้ โดยจะไม่แสดงรายละเอียดการพิสูจน์ของทฤษฎีบท ซึ่งสามารถศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสทั่วๆ ไป

ทฤษฎีบทอนุกรมสลับ 3.3.3

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots \ge 0$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรมสลับ

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$$

ลู่เข้า นั่นคือ

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n < \infty$$

เมื่อ $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + a_n$ และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

$$\left| S - S_n \right| \le a_{n+1} \tag{3.3.6}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 ถ้าประมาณค่าของ $\sin 1$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ โดยต้องการให้ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย $R_n(x)$ น้อยกว่า 0.5×10^{-6} แล้วต้องใช้จำนวนพจน์อย่างน้อยที่สุดเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 3.3.1 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\sin x$ รอบจุด $x_0 = 0$ คือ

$$p_{2n-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

แทนค่า $x = 1$ ได้

$$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} = S_n$$

เพราะว่าพจน์ของ S_n สอดคล้องตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทอนุกรมสลับ ดังนั้นจากอสมการ (3.3.6)

$$\left| R_{2n+1}(x) \right| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

โดยให้

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 0.5\times 10^{-6}$$

แล้วแก้อสมการหาค่า n

$$\log_{10}(2n+1)! > \log_{10} 2 + 6 \cong 6.3$$

เพราะว่า $\log_{10}(10!) \cong 6.6$ ดังนั้น $n \ge 5$ นั่นคือ ต้องใช้อย่างน้อยที่สุด 5 พจน์ ดังนี้

$$\sin 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} \qquad \square$$

3.4 อนุกรมเทย์เลอร์

จากทฤษฎีบทเทย์เลอร์ สามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I ในรูปผลบวกของพหุนามเทย์เลอร์รอบจุด $x_0 \in I$ และเศษเหลือ ดังนี้

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

สำหรับแต่ละ $x \in I$ แล้ว ผลที่ได้คือ อนุกรมกำลังสำหรับ $f(x)$ ในรูป

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (1.3.1)$$

นั่นคือ อนุกรมกำลังในสมการ (1.3.1) ลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in I$ โดยอนุกรมนี้มีชื่อเรียกว่า อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในกรณีที่ $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (1.3.2)$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin's series) สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$

ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 3.3.1 และ 3.3.2 สามารถสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือของฟังก์ชันได้ โดยใช้ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ ในที่นี้ได้สรุปกรณีของฟังก์ชันหลัก ๆ ดังนี้

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} \qquad (1.3.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi \qquad (1.3.4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi \qquad (1.3.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \qquad (1.3.6)$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + \binom{r}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1-r}} \qquad (1.3.7)$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ค่าของ ξ ในสมการ (1.3.3) - (1.3.7) อยู่ระหว่าง x และ 0

จากเอกลักษณ์พีชคณิต สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

$$1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$$

จัดใหม่ในรูป

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad (1.3.8)$$

ซึ่งก็คือ พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $1/(1-x)$ หรือเป็นกรณีเฉพาะของสมการ (1.3.7) โดยแทน r ด้วย -1 และแทน x ด้วย $-x$ สำหรับพจน์เศษเหลือที่ได้ในสมการ (1.3.8) มีรูปแบบที่ง่ายในการคำนวณกว่าพจน์เศษเหลือในสมการ (1.3.7) ผลที่ตามมาอีกอย่างคือ ถ้าแทน x ด้วย $-x$ ในสมการ (1.3.8) จะได้พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $1/(1+x)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x} \qquad (1.3.9)$$

ตัวอย่างที่ 3.4.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน e^{-x} และ e^{-x^2}

วิธีทำ สร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน e^{-x} และ e^{-x^2} โดยแทน x ด้วย $-x$ และแทน x ด้วย $-x^2$ ในสมการ (1.3.3) ตามลำดับ ผลที่ได้คือ

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง $-x$ และ 0

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง $-x^2$ และ 0 □

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $\arctan x$

วิธีทำ การสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $\arctan x$ สามารถใช้สมการ (1.3.9) ได้ โดยเริ่มด้วยการแทน x ด้วย t^2 ในสมการ (1.3.9)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง x ได้

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$$

ทำให้ได้พหุนามเทย์เลอร์และพจน์เศษเหลือสำหรับฟังก์ชัน $\arctan x$ ซึ่งง่ายกว่าการสร้างพหุนามเทย์เลอร์โดยตรง สำหรับการหาปริพันธ์ซึ่งทำให้ได้พจน์เศษเหลือนั้นใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (Integral Mean Value Theorem) □

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงสร้างอนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน e^x

วิธีทำ จากสมการ (1.3.3) พิจารณาพจน์เศษเหลือ

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

โดยตรึงค่า x และเพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ดังนั้น สำหรับแต่ละจำนวนจริง x

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi} = 0$$

ทำให้ได้ว่า อนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน e^x คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

และอนุกรมลู่เข้าสู่ e^x สำหรับแต่ละจำนวนจริง x □

ตัวอย่างที่ 3.4.4 จงสร้างอนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน $\sin x$

วิธีทำ จากสมการ (1.3.4) พิจารณาพจน์เศษเหลือ

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

โดยตรึงค่า x และเพราะว่า $|\cos\xi| \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi \right| \le \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| = 0$$

ดังนั้น อนุกรมแมคคลอรินสำหรับฟังก์ชัน $\sin x$ คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

และ อนุกรมลู่เข้าสู่ $\sin x$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง x □

สำหรับกรณีที่เหลือในสมการ (1.3.5) - (1.3.9) พิจารณาพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ ในแต่ละกรณีโดยให้ $n \to \infty$ เพื่อวิเคราะห์การลู่เข้า จะทำให้รู้ว่า อนุกรมลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน $f(x)$ สำหรับค่าใดของ x สรุปอนุกรมแมคคลอรินของฟังก์ชันหลัก ๆ และช่วงที่อนุกรมลู่เข้าในตารางที่ 3.4.1

ตารางที่ 3.4.1

อนุกรมแมคคลอริน	ช่วงที่อนุกรมลู่เข้า
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$	$-1 < x \le 1$
$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$-1 < x < 1$
$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$-1 \le x \le 1$

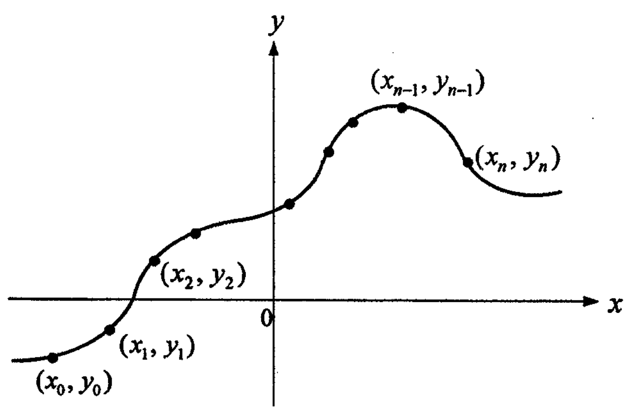
บทที่ 4
การอินเทอร์โพเลต (Interpolation)

4.1 พหุนามอินเทอร์โพเลต (Interpolating Polynomials)

ในปัญหาวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่จำเป็นต้องสร้างฟังก์ชันหรือหาสูตร เพื่อเชื่อมโยงระหว่างตัวแปร 2 ตัวจากเซตของจุดข้อมูลจำนวนหนึ่ง โดยมีสมมุติฐานว่า ตัวแปรทั้งสองเชื่อมโยงกันด้วยฟังก์ชัน ๆ หนึ่ง กระบวนการอันหนึ่งที่ใช้คือ การสร้างฟังก์ชันโดยให้กราฟของฟังก์ชันผ่านจุดข้อมูลจำนวนจำกัดจำนวนหนึ่ง หรือที่เรียกว่า **การอินเทอร์โพเลต** เช่น มีเซตของจุดข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots, (x_n, y_n)\}$$

โดยที่ค่าของ x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน การอินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ ก็คือการลากเส้นเชื่อมโยงจุดเหล่านี้นั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1

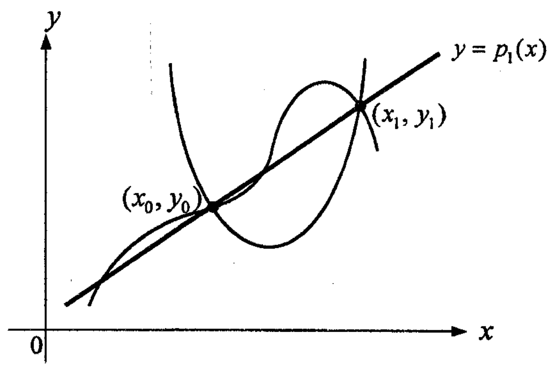


รูปที่ 4.1.1

ปัญหาคือ การลากเส้นเชื่อมโยงจุดข้อมูลเหล่านี้ทำได้หลายลักษณะ ด้วยเหตุนี้ การสร้างฟังก์ชันเพื่ออินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลจึงเลือกฟังก์ชันชนิดฟังก์ชันพหุนาม เพราะว่าฟังก์ชันพหุนามมีสมบัติที่เด่นชัดประการหนึ่งคือ สำหรับจุดข้อมูล $n+1$ จุดที่ไม่ซ้ำกัน ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นอย่างมากที่สุด n ซึ่งกราฟผ่านทั้ง $n+1$ จุดนี้ มีเพียง**หนึ่งเดียว**เท่านั้น (uniqueness) ตัวอย่างเช่น สำหรับข้อมูล 2 จุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1) โดยที่ $x_0 \neq x_1$ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 1 หรือฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) เพียงหนึ่งเดียวที่กราฟผ่านทั้งสองจุดนี้คือ

$$p_1(x) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + y_0 \tag{4.1.1}$$

ความชันของเส้นตรงคือ $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ ฉะนั้น ถ้าไม่จำกัดว่าเลือกฟังก์ชันเชิงเส้น แล้วจะมีเส้นโค้งอีกหลายเส้นที่ผ่านจุดทั้งสองนี้ได้ ดังรูปที่ 4.1.2



รูปที่ 4.1.2

สำหรับข้อมูล 3 จุด (x_0, y_0), (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) โดยที่ x_0, x_1, x_2 ไม่ซ้ำกัน สามารถสร้าง $p_2(x)$ ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นไม่เกิน 2

$$p_2(x) = a + bx + cx^2 \tag{4.1.2}$$

หรือฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) เพียงหนึ่งเดียวที่กราฟผ่านทั้งสามจุดนี้ได้ โดยใช้เงื่อนไขที่กราฟของ $p_2(x)$ ต้องผ่านทั้งสามจุดนี้

$$p_2(x_0) = y_0, \quad p_2(x_1) = y_1, \quad p_2(x_2) = y_2$$

ทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ ซึ่งมี a, b, c เป็นตัวไม่รู้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} a + bx_0 + cx_0^2 &= y_0 \\ a + bx_1 + cx_1^2 &= y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 &= y_2 \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

หรือเขียนระบบสมการ (4.1.3) ในรูปสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (4.1.4)$$

ดำเนินการแก้สมการหาค่าของ a, b, c ก็จะได้ $p_2(x)$ ในสมการ (4.1.2) ซึ่งอินเทอร์โพเลดข้อมูลทั้งสามจุด

ในกรณีเซตของจุดข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

โดยที่ค่าของ $x_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน ในทำนองเดียวกับกรณีข้างต้น ถ้าสร้างฟังก์ชันพหุนามฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นไม่เกิน n

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (4.1.5)$$

โดยให้อินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ แล้ว $p_n(x)$ ต้องสอดคล้องตามเงื่อนไข

$$p_n(x_0) = y_0, \quad p_n(x_1) = y_1, \quad p_n(x_2) = y_2, \ \ldots, \ p_n(x_n) = y_n \qquad (4.1.6)$$

ทำให้ได้ระบบสมการเชิงเส้น $n+1$ สมการ ซึ่งมี $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นตัวไม่รู้ค่า โดยเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.1.7}$$

เมทริกซ์ $X = \left[x_k^j\right]$, $k, j = 0, 1, \ldots, n$ ในสมการ (4.1.7) มีชื่อเรียกว่า เมทริกซ์วองแดร์มงด์ (Vandermonde matrix) โดยสามารถแสดงได้ว่า

$$\det(X) = \prod_{0 \le k < j \le n} (x_k - x_j) \tag{4.1.8}$$

เพราะว่าค่าของ x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ไม่ซ้ำกัน ฉะนั้น $\det(X) \neq 0$ จึงได้ว่าสมการ (4.1.7) มีผลเฉลย $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$ เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น สรุปได้ว่าฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในสมการ (4.1.5) ซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูลทั้ง $n+1$ จุดนี้ มีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น และเรียกฟังก์ชันพหุนามที่อินเทอร์โพเลตข้อมูล $n+1$ จุดนี้ว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตระดับขั้น n

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงสร้างพหุนามเชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดบนกราฟของ $y = \cos x$ ที่ $x = 0$ และ $\dfrac{\pi}{3}$

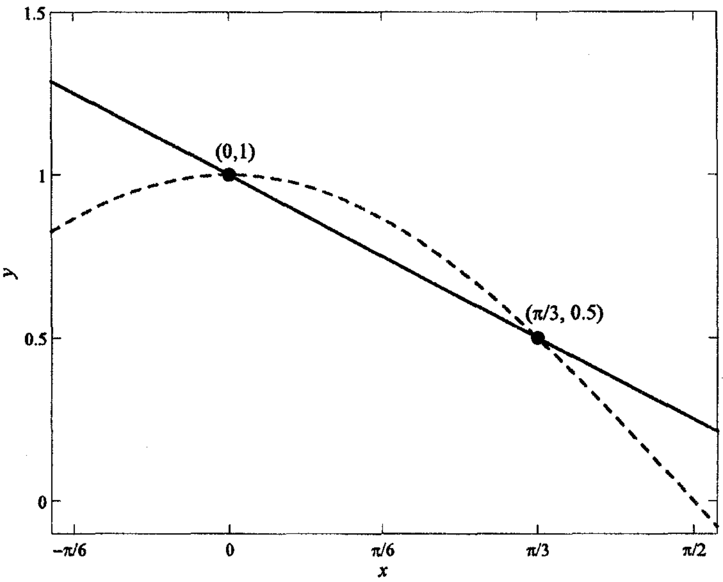
วิธีทำ ให้ $x_0 = 0$ และ $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ คำนวณ

$$y_0 = \cos x_0 = \cos 0 = 1 \quad \text{และ} \quad y_1 = \cos x_1 = \cos\frac{\pi}{3} = 0.5$$

แทนค่า x_0, x_1, y_0, y_1 ในสมการ (4.1.1) ได้พหุนามเชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด $(0,1)$ และ $(\pi/3, 0.5)$ บนกราฟของ $y = \cos x$ ดังนี้

$$p_1(x) = -\frac{3}{2\pi}x + 1$$

รูปที่ 4.1.3 แสดงกราฟเส้นตรงของ $p_1(x)$ ตัดกราฟของ $\cos x$ ซึ่งแทนด้วยเส้นประที่จุด $(0,1)$ และ $(\pi/3,\ 0.5)$ □



รูปที่ 4.1.3

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงสร้างพหุนามกำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดบนกราฟของ $y = x^3$ ที่ $x = -1,\ 1$ และ 3

วิธีทำ ให้ $x_0 = -1,\ x_1 = 1$ และ $x_2 = 3$ คำนวณ

$$y_0 = (-1)^3 = -1, \quad y_1 = (1)^3 = 1 \quad \text{และ} \quad y_2 = (3)^3 = 27$$

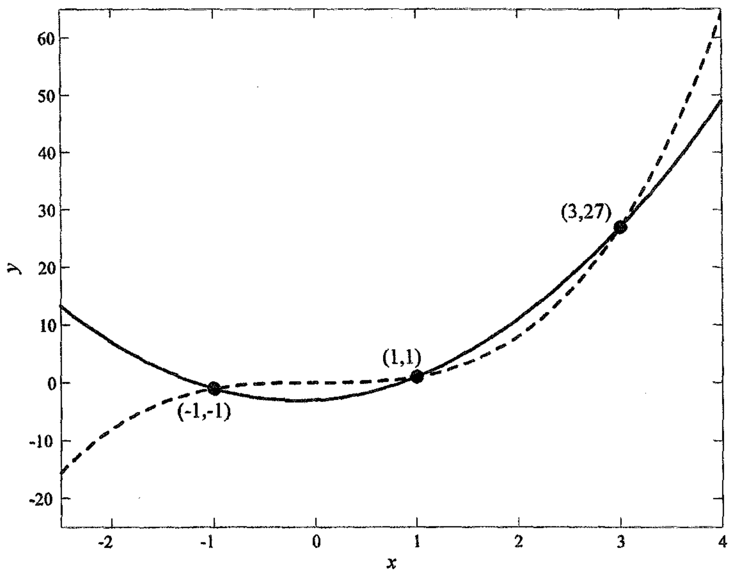
แทนค่า $x_0,\ x_1,\ x_2, y_0,\ y_1,\ y_2$ ในสมการ (4.1.3) ได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a \ - b \ + c &= -1 \\ a \ + b \ + c &= 1 \\ a + 3b + 9c &= 27 \end{aligned}$$

แก้สมการได้ $a = -3,\ b = 1,\ c = 3$ ดังนั้นพหุนามกำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด $(-1,-1),\ (1,1)$ และ $(3,27)$ บนกราฟของ $y = x^3$ คือ

$$p_2(x) = -3 + x + 3x^2$$

รูปที่ 4.1.4 แสดงกราฟพาราโบลาของ $p_2(x)$ ตัดกราฟของ x^3 ซึ่งแทนด้วยเส้นประที่จุด $(-1,-1),\ (1,1)$ และ $(3,27)$ □



รูปที่ 4.1.4

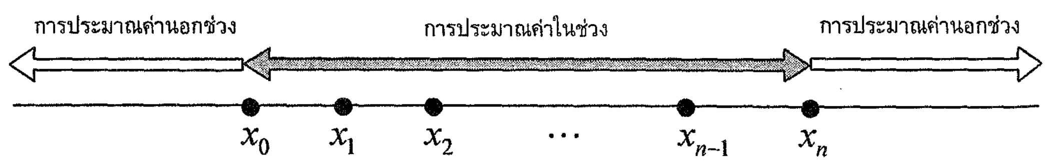
คำศัพท์วิชาการ

คำศัพท์วิชาการที่เกี่ยวข้องในบทนี้ที่ควรรู้ คือ

จุดต่อ (nodes, knots or breakpoints) หมายถึง ค่า $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

การประมาณค่าในช่วง (interpolation) หมายถึง การประมาณค่าที่ตำแหน่ง x ซึ่งอยู่ระหว่างจุดต่อ

การประมาณค่านอกช่วง (extrapolation) หมายถึง การประมาณค่าที่ตำแหน่ง x ซึ่งไม่อยู่ระหว่างจุดต่อ



4.2 พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

ในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตที่สะดวกในการใช้ และเหมาะในการวิเคราะห์สมบัติทางทฤษฎีวิธีหนึ่ง คือ การใช้สูตรลากรองจ์ (Lagrange's formula) ซึ่งสร้างพหุนามเพื่ออินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

ในรูปผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชัน $l_k(x)$ ดังนี้

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \tag{4.2.1}$$

โดยที่ $l_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{j\neq k} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

โดยชื่อเรียกของ $l_k(x)$ คือ พหุนามลากรองจ์ และเรียกพหุนามซึ่งเขียนในรูปสมการ (4.2.1) ว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ (Lagrange interpolating polynomial)

โดยการแทนค่า x ด้วย x_j ในสมการ (4.2.2) จะได้สมบัติที่สำคัญของพหุนามลากรองจ์ $l_k(x)$ คือ

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \tag{4.2.3}$$

และโดยการแทนค่า x ด้วย x_k ในสมการ (4.2.1) ผลที่ได้คือ

$$p_n(x_k) = y_0 l_0(x_k) + y_1 l_1(x_k) + \cdots + y_k l_k(x_k) + \cdots + y_n l_n(x_k) = y_k$$

สำหรับ $k = 0, 1, \ldots, n$ ซึ่งแสดงว่าพหุนาม $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล $n+1$ จุด $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$

การสร้างพหุนามเพื่ออินเทอร์โพเลตเซตของจุดข้อมูลด้วยสูตรลากรองจ์ มีความสะดวกมากกว่าวิธีหาสัมประสิทธิ์ของพหุนามโดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังแสดงในตัวอย่างที่ 4.1.2 โดยพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์มีโครงสร้างพิเศษในรูปผลบวกเชิงเส้นของพหุนามลากรองจ์ $l_k(x)$ โครงสร้างพิเศษนี้เองที่ทำให้สะดวกในการใช้ การแทนค่าและการเขียนโปรแกรม ในที่นี้แสดงการเขียนพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 1, 2, 3

พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 1

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 2

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 3

$$\begin{aligned} p_3(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 2 จุด $\{(0,1),\ (\pi/3, 0.5)\}$

วิธีทำ สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น โดยแทนค่า $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$ $x_1 = \frac{\pi}{3},\ y_1 = 0.5$ ในสมการ (4.2.4) ได้

$$p_1(x) \;=\; (1)\frac{x-(\pi/3)}{0-(\pi/3)} + (0.5)\frac{x-0}{(\pi/3)-0} = -\frac{3}{2\pi}x + 1$$

ซึ่งเหมือนกับพหุนามอินเทอร์โพเลตเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 4.1.1 □

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(-1,-1),\ (1,1),\ (3,27)\}$

วิธีทำ สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง โดยแทนค่า $x_0 = -1,\ y_0 = -1,$ $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ x_2 = 3,\ y_2 = 27$ ในสมการ (4.2.5) ได้

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (-1)\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + (1)\frac{(x-(-1))(x-3)}{(1-(-1))(1-3)} + (27)\frac{(x-(-1))(x-1)}{(3-(-1))(3-1)} \\ &= -3 + x + 3x^2 \end{aligned}$$

ซึ่งเหมือนกับพหุนามอินเทอร์โพเลตกำลังสองในตัวอย่างที่ 4.1.2 □

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(0,1),\ (-2,3),\ (1,5)\}$

วิธีทำ สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง โดยแทนค่า $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$ $x_1 = -2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$ ในสมการ (4.2.5) ได้

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 1\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} + 3\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} + 5\cdot\frac{(x-0)(x+2)}{(1-0)(1+2)} \\ &= 1 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}x^2 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้นและกำลังสองจากข้อมูลของค่า $\ln x$ ในตาราง แล้วใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $\ln 3$

x	1.0	4.0	5.0
$\ln x$	0	1.386294	1.609438

วิธีทำ เพราะว่าต้องการประมาณ $\ln 3$ และ 3 อยู่ระหว่าง 1 และ 4 ดังนั้นในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น จึงให้ $x_0 = 1.0,\ x_1 = 4.0$ จากสมการ (4.2.4)

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

แทนค่าได้

$$p_1(x) = 0\frac{x-4}{1-4} + 1.386294\,\frac{x-1}{4-1} = \frac{1.386294}{3}(x-1)$$

เพราะฉะนั้น

$$\ln 3 \cong p_1(3) = 0.924196$$

สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง จากสมการ (4.2.5)

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

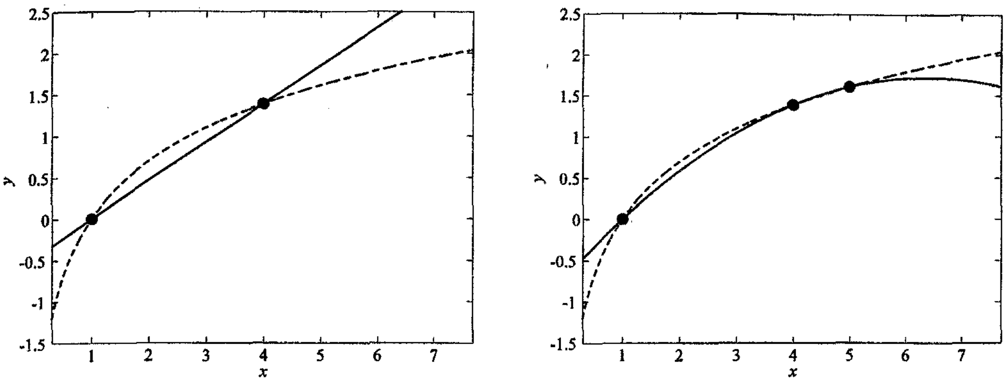
แทนค่าได้

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0 + 1.386294\frac{(x-1)(x-5)}{(4-1)(4-5)} + 1.609437\,\frac{(x-1)(x-4)}{(5-1)(5-4)} \\ &= -\,\frac{1.386294}{3}(x-1)(x-5) + \frac{1.609438}{4}(x-1)(x-4) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\ln 3 \cong p_2(3) = 1.043674$$

ค่าที่แท้จริงของ $\ln 3 = 1.098612$ การประมาณด้วยพหุนามกำลังสองให้ค่าประมาณที่ดีกว่าในกรณีนี้ รูปที่ 4.2.1 (1) - (2) แสดงกราฟของ $\ln x$ ด้วยเส้นประ และกราฟเส้นตรงหรือพหุนามลากรองจ์เชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด (1,0) และ (4, ln 4) และกราฟพาราโบลาหรือพหุนามลากรองจ์กำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลทั้งสามจุด □



(1) (2)

รูปที่ 4.2.1

ตัวอย่างที่ 4.2.5 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1 ถึง 4 จากข้อมูลในตาราง ซึ่งมาจากฟังก์ชัน $f(x) = \sin(e^x)$ ใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $f(1.2)$ และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าที่แท้จริง $\sin(e^{1.2}) = -0.177577$

x	0	0.5	1.0	1.5.	2.0
$\sin(e^x)$	0.841471	0.996965	0.410781	-0.973507	0.893855

วิธีทำ เพราะว่า 1.2 อยู่ระหว่างจุดต่อ 1.0 และ 1.5

ในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น จึงให้ $x_0 = 1.0,\ x_1 = 1.5$ แทนค่าในสมการ (4.2.4) ได้

$$p_1(x) \;=\; .410781\,\frac{x-1.5}{1-1.5} \;+\; (-.973507)\frac{x-1}{1.5-1}$$

สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง ให้ $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1.0,\ x_2 = 1.5$ แทนค่า ในสมการ (4.2.5) ได้

$$p_2(x) \;=\; .996965\frac{(x-1)(x-1.5)}{(.5-1)(.5-1.5)} \;+\; .410781\,\frac{(x-.5)(x-1.5)}{(1-.5)(1-1.5)}$$
$$+\; (-.973507)\frac{(x-.5)(x-1)}{(1.5-.5)(1.5-1)}$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1.0,\ x_2 = 1.5,\ x_3 = 2.0$ และ $x_0 = 0,$ $x_1 = 0.5,\ x_2 = 1.0,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 2.0$ สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 3 และ 4 ตามลำดับ แทนค่าได้

$$p_3(x) = .841471\frac{(x-.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-.5)(0-1)(0-1.5)} + .996965\frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(.5-0)(.5-1)(.5-1.5)}$$
$$+ .410781\frac{(x-0)(x-.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-.5)(1-1.5)} + (-.973507)\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)}{(1.5-0)(1.5-.5)(1.5-1)}$$

$$p_4(x) = .841471\frac{(x-.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(0-.5)(0-1)(0-1.5)(0-2)}$$
$$+ .996965\frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(.5-0)(.5-1)(.5-1.5)(.5-2)}$$
$$+ .410781\frac{(x-0)(x-.5)(x-1.5)(x-2)}{(1-0)(1-.5)(1-1.5)(1-2)}$$
$$+ (-.973507)\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)(x-2)}{(1.5-0)(1.5-.5)(1.5-1)(1.5-2)}$$
$$+ .893855\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)(x-1.5)}{(2-0)(2-.5)(2-1)(2-1.5)}$$

ประมาณ $\sin(e^{1.2})$ โดยแทนค่า $x = 1.2$ ใน $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x),\ p_4(x)$ ได้

$$\sin(e^{1.2}) \cong p_1(1.2) = -0.142934$$
$$\sin(e^{1.2}) \cong p_2(1.2) = -0.047161$$
$$\sin(e^{1.2}) \cong p_3(1.2) = -0.273948$$
$$\sin(e^{1.2}) \cong p_4(1.2) = -0.181969$$

เมื่อเทียบกับค่าที่แท้จริงของ $\sin(e^{1.2}) = -0.177577$ ค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละกรณี คือ

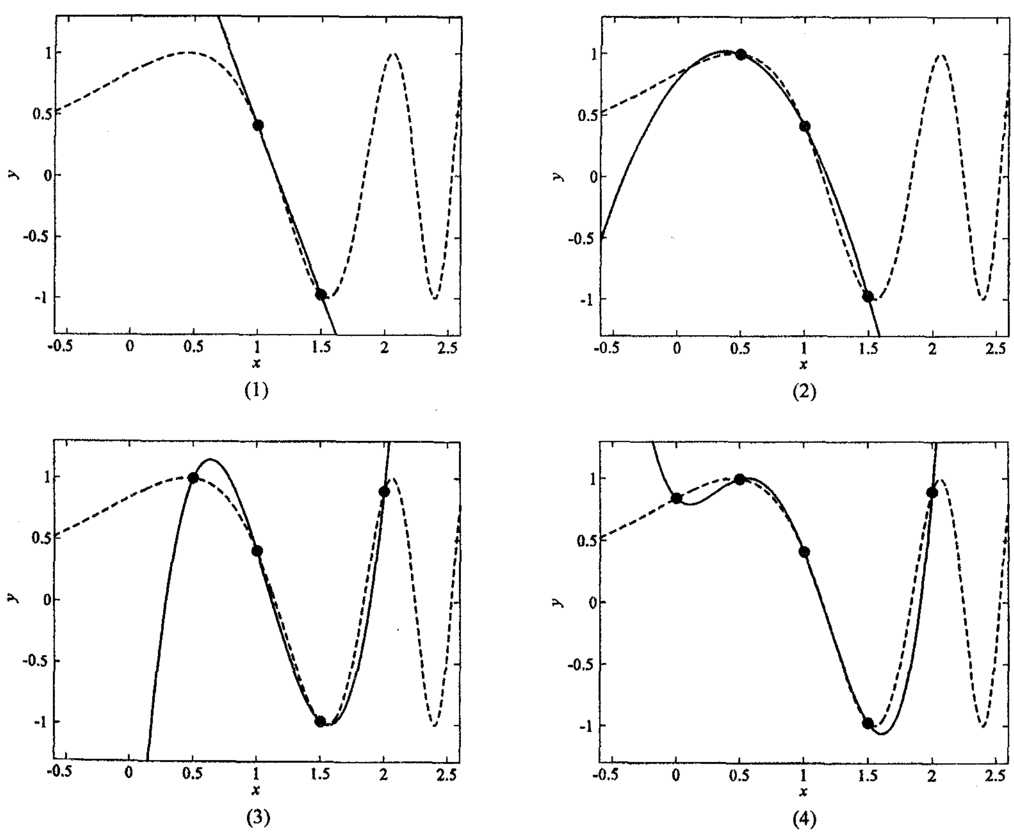
$$\left|\sin(e^{1.2}) - p_1(1.2)\right| \cong 0.034643$$
$$\left|\sin(e^{1.2}) - p_2(1.2)\right| \cong 0.130416$$
$$\left|\sin(e^{1.2}) - p_3(1.2)\right| \cong 0.096371$$
$$\left|\sin(e^{1.2}) - p_4(1.2)\right| \cong 0.004392$$

ในตัวอย่างนี้ $p_4(x)$ ประมาณค่า $\sin(e^x)$ ที่ตำแหน่ง $x = 1.2$ ได้ดีที่สุด แต่มิได้หมายความว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้นที่สูงกว่าจะประมาณค่าได้ใกล้

เคียงกว่าเสมอไป ดูได้จาก $p_1(x)$ ซึ่งประมาณ $\sin(e^{1.2})$ ได้ใกล้เคียงกว่า $p_2(x)$ ในตัวอย่างนี้ยังเห็นได้ว่า ถ้าใช้พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ที่สร้างขึ้นเพื่อประมาณค่านอกช่วงแล้ว ค่าคลาดเคลื่อนจะสูง เช่น ประมาณ $\sin(e^x)$ ที่ตำแหน่ง $x=1.7$ ด้วย $p_1(x)$ และ $p_2(x)$ จะถือว่าเป็นการประมาณค่านอกช่วง และในทำนองเดียวกัน สำหรับการประมาณค่านอกช่วงที่ตำแหน่ง $x=2.1$ ด้วย $p_3(x)$ และ $p_4(x)$ ผลที่ได้จากการคำนวณในการประมาณค่านอกช่วงและค่าคลาดเคลื่อน คือ

$$\sin(e^{1.7}) \cong p_1(1.7) = -1.527222, \quad \left|\sin(e^{1.7}) - p_1(1.7)\right| \cong 0.803460$$
$$\sin(e^{1.7}) \cong p_2(1.7) = -1.750691, \quad \left|\sin(e^{1.7}) - p_2(1.7)\right| \cong 1.026929$$
$$\sin(e^{2.1}) \cong p_3(2.1) = 2.013903, \quad \left|\sin(e^{2.1}) - p_3(2.1)\right| \cong 1.062240$$
$$\sin(e^{2.1}) \cong p_4(2.1) = 2.302978, \quad \left|\sin(e^{2.1}) - p_4(2.1)\right| \cong 1.351315$$

รูปที่ 4.2.2 (1) - (4) แสดงกราฟของ $\sin(e^x)$ ด้วยเส้นประ และกราฟของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ และ $p_4(x)$ ตามลำดับ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า กราฟเบี่ยงเบนจากกราฟของ $\sin(e^x)$ มากสำหรับช่วงที่อยู่นอกจุดต่อ □

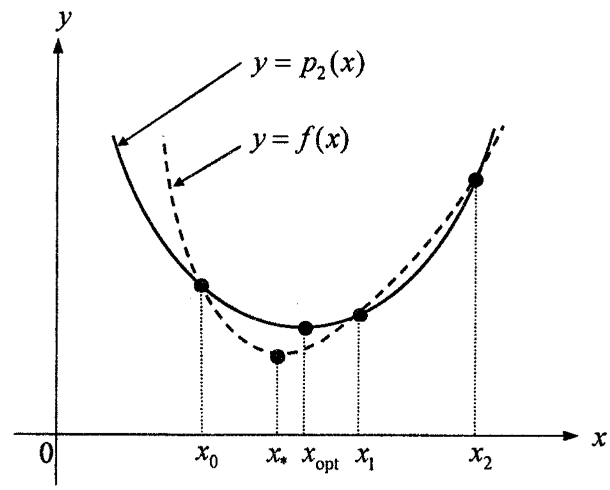


รูปที่ 4.2.2

ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์กำลังสองยังมีประโยชน์ ในการประมาณตำแหน่งที่ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด เพราะว่าสำหรับฟังก์ชันที่เรียบหรือหาอนุพันธ์ได้แล้วในบริเวณที่ฟังกชันมีค่าสุดขีดนั้น กราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคล้ายกราฟของพาราโบลาดังรูปที่ 4.2.3 ถ้าตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x)$ อยู่ระหว่าง x_0, x_1 และ x_2 แล้วหาตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของพหุนามอินเทอร์โพเลทลากรองจ์กำลังสองโดยหาอนุพันธ์ของ $p_2(x)$ จากสมการ (4.2.5) แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$x_{\text{opt}} = \frac{y_0(x_1^2 - x_2^2) + y_1(x_2^2 - x_0^2) + y_2(x_0^2 - x_1^2)}{2y_0(x_1 - x_2) + 2y_1(x_2 - x_0) + 2y_2(x_0 - x_1)} \tag{4.2.7}$$

ซึ่งคือตำแหน่งทีเกิดค่าสุดขีดของ $p_2(x)$ และใช้ประมาณตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ x_* ดังแสดงในรูปที่ 4.2.3



รูปที่ 4.2.3

ตัวอย่างที่ 4.2.6 จงใช้พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสองประมาณค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x) = x + \frac{1}{x}$ โดยให้จุดต่อเป็น $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.5$ และ $x_2 = 5.0$

วิธีทำ คำนวณค่าของ $f(x)$ ที่จุดต่อ

$$x_0 = 0.1, \quad y_0 = f(x_0) = 10.1$$
$$x_1 = 0.5, \quad y_1 = f(x_1) = 2.5$$
$$x_2 = 5.0, \quad y_2 = f(x_2) = 5.2$$

แทนค่าในสมการ (4.2.7) คำนวณ x_{opt} ได้

$$x_{\text{opt}} = 2.675$$

และ

$$y_{\text{opt}} = f(x_{\text{opt}}) = 3.048832$$

ซึ่งคือ ค่าประมาณของค่าต่ำสุดของ $f(x)$ อย่างไรก็ตามการประมาณค่าสามารถทำได้แม่นยำยิ่งขึ้น โดยการทำซ้ำ (iteration) นั่นคือ ใช้ค่า $x_{\text{opt}} = 2.675$ แทนที่ x_0 เพราะว่าค่าของ $y_0 = 10.1$ สูงสุด แล้วใช้สูตรจากสมการ (4.2.7) คำนวณค่า x_{opt} ใหม่ ในทำนองเดียวกันสำหรับรอบต่อไป ผลการคำนวณแสดงในตาราง เห็นได้ว่าในรอบที่ 7-9 ค่าของ x_{opt} และ y_{opt} ลู่เข้าสู่ค่า 1.0 และ 2.0 ตามลำดับ โดยค่าต่ำสุดที่แท้จริงของ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ คือ $f(1) = 2$

	x_0	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_{opt}	y_{opt}
1	0.100000	10.100000	0.500000	2.500000	5.000000	5.200000	2.675000	3.048832
2	2.675000	3.048832	0.500000	2.500000	5.000000	5.200000	0.743750	2.088288
3	2.675000	3.048832	0.500000	2.500000	0.743750	2.088288	1.461992	2.145990
4	1.461992	2.145990	0.500000	2.500000	0.743750	2.088288	1.081032	2.006074
5	1.461992	2.145990	1.081032	2.006074	0.743750	2.088288	1.055653	2.002934
6	1.055653	2.002934	1.081032	2.006074	0.743750	2.088288	1.015836	2.000247
7	1.055653	2.002934	1.081032	2.006074	1.015836	2.000247	0.996627	2.000011
8	1.055653	2.002934	0.996627	2.000011	1.015836	2.000247	0.999681	2.000000
9	0.999681	2.000000	0.996627	2.000011	1.015836	2.000247	1.000029	2.000000

□

4.3 ผลต่างตัวหาร (Divided Differences)

การสร้างพหุนาม $p_n(x)$ เพื่ออินเทอร์โพเลดเซตของข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots ,(x_n, y_n)\}$$

อีกรูปแบบหนึ่ง คือ การสร้างในรูปแบบที่สามารถจัด $p_n(x)$ ให้เป็นรูปแบบกำลังซ้อนในได้ เมื่อมีข้อมูลเพิ่มขึ้น สามารถสร้างพหุนามให้มีระดับขั้นสูงขึ้นจากพหุนามเดิม โดยเพิ่มพจน์ใหม่อีกหนึ่งพจน์ ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบ เพราะว่าไม่สามารถทำได้ในกรณีของพหุนามอินเทอร์โพเลดลากรองจ์ และมีระบบในการคำนวณสัมประสิทธิ์ รูปแบบของพหุนามที่กล่าวมามีลักษณะที่วิเคราะห์ได้ดังนี้

ถ้า $p_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n-1$ ซึ่งอินเทอร์โพเลดเซตของข้อมูล n จุด คือ $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ และเมื่อมีข้อมูลใหม่ (x_n, y_n) เพิ่มอีก 1 จุดแล้ว ต้องการสร้าง $p_n(x)$ พหุนามระดับขั้น n จาก $p_{n-1}(x)$ ในรูป

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + r(x) \qquad (4.3.1)$$

โดยที่ $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลดเซตของข้อมูลชุดเดิมและที่ (x_n, y_n) อีก 1 จุด จากเงื่อนไขที่ว่าทั้ง $p_{n-1}(x)$ และ $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลดข้อมูล $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ โดยแทนค่า $x = x_k,\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ในสมการ (4.3.1) ทำให้ได้

$$r(x_k) = p_n(x_k) - p_{n-1}(x_k) = y_k - y_k = 0$$

สำหรับ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ดังนั้น $r(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$r(x) = c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (4.3.2)$$

เมื่อ c_n เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว จากสมการ (4.3.1) และ (4.3.2) ทำให้เห็นโครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลดจากระดับขั้น 0 ถึง n อย่างเป็นระบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= y_0 \\
p_1(x) &= p_0(x) + c_1(x-x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\
p_3(x) &= p_2(x) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\vdots \\
p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + c_{n-1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2}) \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

ารหาค่าของสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ทำตามลำดับ และใช้สมบัติที่ว่า

$p_1(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1
$p_2(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2
$p_3(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2, x_3
$\vdots$		$\vdots$
$p_{n-1}(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$
$p_n(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$

โดยแทนค่า $x = x_1$ ใน $p_1(x)$ ในสมการ (4.3.3) ได้ค่า c_1 ดังนี้

$$
c_1 = \frac{p_1(x_1) - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{4.3.4}
$$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่า $x = x_2$ ใน $p_2(x)$ ในสมการ (4.3.3) ได้ค่า c_2 ดังนี้

$$
c_2 = \frac{p_2(x_2) - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - \left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) \right)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$
c_2 = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.3.5}
$$

กระบวนการหาสัมประสิทธิ์สำหรับ $c_3, c_4, \ldots, c_n$ สามารถดำเนินต่อไปในลักษณะเดียวกัน เพียงแต่การจัดรูปแบบของสัมประสิทธิ์เหล่านี้มีลักษณะพิเศษที่เรียกว่า ผลต่างตัวหาร ดังเช่น ค่าของ c_1 และ c_2 ในสมการ (4.3.4) และ (4.3.5) เป็นต้น ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาระบบการคำนวณผลต่างตัวหารและสมบัติที่เกี่ยวข้อง ประโยชน์โดยตรงของผลต่างตัวหารในเรื่องพหุนามอินเทอร์โพเลต คือ การหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามในสมการ (4.3.3) ได้อย่างเป็นระบบ

บทนิยาม 4.3.1 ผลต่างตัวหารอันดับต่าง ๆ ของฟังก์ชัน $f(x)$ มีบทนิยามและสัญกรณ์ดังนี้

ผลต่างตัวหารอันดับศูนย์ของฟังก์ชัน f ที่ x_i คือ ค่าฟังก์ชันของ f ที่ x_i

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{4.3.6}$$

ผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f ที่ x_i และ x_{i+1} นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับศูนย์ คือ

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.3.7}$$

ผลต่างตัวหารอันดับสองของฟังก์ชัน f ที่ x_i, x_{i+1} และ x_{i+2} นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับสอง คือ

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \tag{4.3.8}$$

การนิยามผลต่างตัวหารดำเนินการตามลำดับได้ โดยผลต่างตัวหารอันดับ k ของฟังก์ชัน f ที่ $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับ $k-1$ ดังนี้

$$\begin{aligned} &f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] \\ &\quad = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

การคำนวณผลต่างตัวหารสำหรับเซตข้อมูล $\{(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)\}$ เมื่อ $f_i = f(x_i)$ สามารถแสดงอย่างเป็นระบบในรูปตารางผลต่างตัวหาร (divided difference table) โดยผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง $f[x_i, x_{i+1}]$ คำนวณจากค่า x_i, x_{i+1} และ f_i, f_{i+1} ในคอลัมน์ที่ 1 และ 2 ในตารางที่ 4.3.1 และผลต่างตัวหารอันดับสอง $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ คำนวณจากผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งสองค่าที่อยู่ถัดกัน นั่นคือ $f[x_i, x_{i+1}]$ และ $f[x_{i+1}, x_{i+2}]$ ในคอลัมน์ที่ 3 และค่า x_i, x_{i+2} ในคอลัมน์ที่ 1 ในทำนองเดียวกันสำหรับผลต่างตัวหารอันดับสามและอันดับอื่น ๆ ตารางที่ 4.3.1 แสดงเฉพาะผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สองและสาม

การคำนวณผลต่างตัวหารในรูปแบบตารางผลต่างตัวหารเป็นแบบแผนการคำนวณก่อนยุคที่จะมีคอมพิวเตอร์ ผู้ศึกษาวิชานี้ในเบื้องต้นสามารถสร้างความเข้าใจระเบียบการคำนวณจากตารางได้เป็นอย่างดี และสามารถใช้แบบแผนการคำนวณนี้เป็นแนวทางเพื่อเป็นพื้นฐานการพัฒนาระบบการคำนวณในเรื่องอื่น พิจารณาจากตารางที่ 4.3.1 คอลัมน์ที่ 1 และ 2 คือ ข้อมูลเข้า และคอลัมน์ที่ 3 เป็นต้นไปเป็นผลการคำนวณผลต่างตัวหารในแต่ละรอบในขั้นตอนวิธี 4.3.1

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$			
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_i	f_i	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_{i+1}	f_{i+1}	$f[x_i, x_{i+1}]$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_{i+2}	f_{i+2}	$f[x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$\vdots$	$\cdots$
x_{i+3}	f_{i+3}	$f[x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_{n-1}	f_{n-1}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_n	f_n	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$

ตารางที่ 4.3.1

ขั้นตอนวิธี 4.3.1 การคำนวณผลต่างตัวหาร

ข้อมูลเข้า : $n, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$

การเริ่มต้น :

for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ **do**

$c_k = f_k$

end

การคำนวณผลต่างตัวหาร :

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**

for $i = n, n\text{-}1, \ldots, k$ **do**

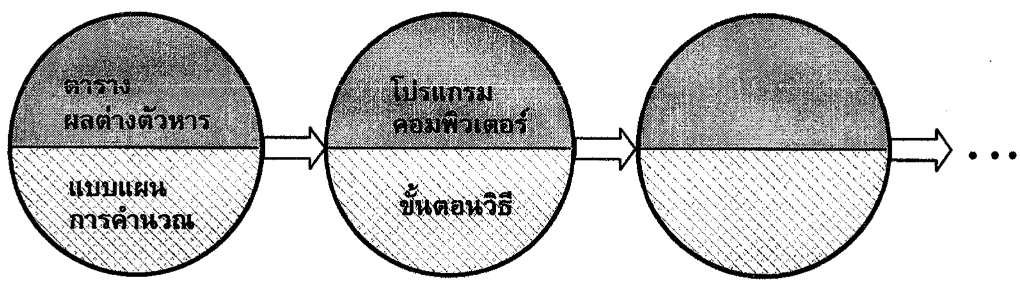
$c_i = (c_i - c_{i-1})/(x_i - x_{i-k})$

end

end

ผลลัพธ์ :

$c_0 = f_0,\ c_1 = f[x_0, x_1],\ c_2 = f[x_0, x_1, x_2],\ \ldots\ , c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$



ในยุคที่ไม่มีคอมพิวเตอร์ ตารางผลต่างตัวหารเป็นตัวอย่างที่ดีของผลที่ได้จากการจัดระเบียบแบบแผนการคำนวณผลต่างตัวหารอย่างเป็นระบบ ถึงแม้ว่าในปัจจุบันนี้ จะมีการใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์อย่างกว้างขวาง และมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีประสิทธิภาพใช้ได้โดยสะดวก ผู้ศึกษาวิชานี้ในเบื้องต้นก็ยังต้องฝึกการคำนวณจากระดับพื้นฐาน เช่น การสร้างตารางผลต่างตัวหารด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเพื่อให้เกิดความคิด ที่อาจจะนำไปพัฒนาวิธีการคำนวณแบบใหม่ที่สอดคล้องกับงานวิจัยเชิงทฤษฎีและทิศทางการพัฒนาเทคโนโลยีได้

ตัวอย่างที่ 4.3.1 สาธิตการคำนวณผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 1 ถึง 3 เพื่อให้ผู้ศึกษาสังเกตว่า ผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนามในที่สุดแล้วต้องมีค่าเป็นศูนย์ ในการกำหนดจุดต่อในตัวอย่างที่ 4.3.1 ใช้จุดต่อที่มีระยะห่างเท่า ๆ กัน ผู้ศึกษาสามารถเปลี่ยนเป็นค่าอื่นได้ ซึ่งในที่สุดแล้วผลต่างตัวหารต้องมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงคำนวณผลต่างตัวหารอันดับต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันพหุนาม โดยแสดงในรูปตารางผลต่างตัวหาร

(1) $f(x)=x$ (2) $f(x)=x^2$ (3) $f(x)=x^3$

โดยให้จุดต่อเป็น 1, 2, 3, 4, 5, 6

วิธีทำ

(1) $f(x)=x \;\Rightarrow\; f_i = f(x_i) = x_i$

จากสมการ (4.3.7) และ (4.3.8) คำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งและสองได้ดังนี้ เช่น

$$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = \frac{3-2}{3-2} = 1$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \frac{1-1}{3-1} = 0$$

ซึ่งแสดงผลในตารางผลต่างตัวหาร ผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งในกรณีนี้ คือ ความชันของเส้นตรง $f(x)=x$ ซึ่งมีค่าเป็น 1 ทำให้ได้ว่าผลต่างตัวหารอันดับสองมีค่าเป็น 0

x_i	$f_i = x_i$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1		
2	2	1	
3	3	1	0
4	4	1	0
5	5	1	0
6	6	1	0

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี (2) $f(x)=x^2$ และ (3) $f(x)=x^3$ การคำนวณผลต่างตัวหาร แสดงผลในตารางผลต่างตัวหารได้ดังนี้

(2) $f(x)=x^2 \Rightarrow f_i = f(x_i) = x_i^2$

x_i	$f_i = x_i^2$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1			
2	4	3		
3	9	5	1	
4	16	7	1	0
5	25	9	1	0
6	36	11	1	0

(3) $f(x)=x^3 \Rightarrow f_i = f(x_i) = x_i^3$

x_i	$f_i = x_i^3$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1				
2	8	7			
3	27	19	6		
4	64	37	9	1	
5	125	61	12	1	0
6	216	91	15	1	0

จากการคำนวณผลต่างตัวหารทั้งสามกรณี สังเกตได้ว่า

ผลต่างตัวหารอันดับสองของพหุนามระดับขั้น 1 มีค่าเป็นศูนย์
ผลต่างตัวหารอันดับสามของพหุนามระดับขั้น 2 มีค่าเป็นศูนย์
ผลต่างตัวหารอันดับสี่ของพหุนามระดับขั้น 3 มีค่าเป็นศูนย์

ในทำนองเดียวกับอนุพันธ์อันดับ $k+1$ ของพหุนามระดับขั้น k มีค่าเป็นศูนย์ □

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงคำนวณผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ โดยแสดงในรูปตารางผลต่างตัวหาร ให้จุดต่อเป็น 2, −3, 1, 6, 0

วิธีทำ คำนวณค่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ ที่จุดต่อ 2, −3, 1, 6, 0 ได้ค่าดังแสดงในคอลัมน์ที่ 2 ในตาราง แล้วคำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สอง สาม ตามลำดับ และในที่สุดได้ผลต่างตัวหารอันดับสี่มีค่าเป็นศูนย์

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
2	-8				
-3	-98	18			
1	-6	23	-5		
6	64	14	-1	1	
0	-8	12	2	1	0

□

สำหรับกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน โดยที่

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ h เป็นระยะห่างระหว่างจุดต่อ การคำนวณผลต่างตัวหารอาจปรับเป็นการคำนวณผลต่างของค่าฟังก์ชันก่อน ในที่นี้ จะพิจารณา**ตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้า** (forward difference operator) ซึ่งแทนด้วย Δ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3.2 ตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีบทนิยามและสัญกรณ์ดังนี้

$$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i) \tag{4.3.10}$$

$$\Delta f(x_i) = \Delta^1 f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \tag{4.3.11}$$

$$\begin{aligned} \Delta^k f(x_i) &= \Delta(\Delta^{k-1} f(x_i)) \\ &= \Delta^{k-1}(\Delta f(x_i)) \\ &= \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i), \qquad k \geq 1 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

โดยใช้สัญกรณ์ตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าสำหรับกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน สามารถแสดงตารางผลต่าง (difference table) ในทำนองเดียวกับตารางผลต่างตัวหาร ดังตารางที่ 4.3.2

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\ldots$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^3 f_{n-4}$	$\ldots$
x_n	f_n	Δf_{n-1}	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\ldots$

ตารางที่ 4.3.2

ความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างตัวหารและผลต่างในกรณีจุดต่ออยู่ห่างจากกันเป็นระยะ h เท่า ๆ กัน สามารถแสดงโดยใช้สัญกรณ์ของผลต่างตัวหารและตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าได้ดังนี้ คือ

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{h}\Delta f(x_i)$$

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \\ &= \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{h}\right] \\ &= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_i) \end{aligned}$$

และในกรณีผลต่างตัวหารอันดับ k

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_i) \qquad (4.3.13)$$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงสร้างตารางผลต่างของเซตข้อมูลในตาราง

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8
f_i	.9801	.9211	.8253	.6967

(ข้อมูลค่าฟังก์ชันมาจาก $f(x) = \cos x$)

วิธีทำ จากสมการ (4.3.11) และ (4.3.12) คำนวณผลต่างอันดับหนึ่ง สอง และสามได้

$$\begin{aligned}
\Delta f_0 &= f_1 - f_0 &&= .9211 - .9801 &&= -.0590 \\
\Delta f_1 &= f_2 - f_1 &&= .8253 - .9211 &&= -.0957 \\
\Delta f_2 &= f_3 - f_2 &&= .6967 - .8253 &&= -.1286
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f_0 &= \Delta f_1 - \Delta f_0 &&= -.0957 - (-.0590) &&= -.0367 \\
\Delta^2 f_1 &= \Delta f_2 - \Delta f_1 &&= -.1286 - (-.0957) &&= -.0329
\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = -.0329 - (-.0367) = .0038$$

แสดงในตารางผลต่างได้ดังนี้

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.0590		
0.6	.8253	-.0957	-.0367	
0.8	.6967	-.1286	-.0329	.0038

□

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงสร้างตารางผลต่างตัวหารของเซตข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 โดยใช้สูตรในสมการ (4.3.13)

วิธีทำ ใช้สูตรในสมการ (4.3.13) โดยแทนค่า $h = 0.2$ และค่าจากตารางผลต่างในตัวอย่างที่ 4.3.3 ได้ตารางผลต่างตัวหารดังนี้

x_i	f_i	$\frac{\Delta f_i}{h}$	$\frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}$	$\frac{\Delta^3 f_i}{3!h^3}$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.2950		
0.6	.8253	-.4786	-.4590	
0.8	.6967	-.6431	-.4113	.0795

□

ในการศึกษาการประมาณอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ยังจะได้ว่า จากการคำนวณอนุพันธ์ในเชิงทฤษฎี

$$f'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ ถ้า h มีค่าน้อยแล้ว โดยใช้สัญกรณ์ของผลต่างตัวหารและตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าและสมการ (4.3.13) จะได้ว่า สามารถประมาณอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่ $x = x_i$ ในรูป

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{1}{h}\Delta f(x_i) = f[x_i, x_{i+1}]$$

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2} = \frac{1}{h^2}\Delta^2 f(x_i) = 2f[x_i, x_{i+1}]$$

และ

$$f^{(k)}(x_i) \cong \frac{1}{h^k}\Delta^k f(x_i) = k!\, f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] \qquad (4.3.14)$$

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประมาณของอนุพันธ์ของฟังก์ชันและผลต่างตัวหาร จะศึกษาการประมาณอนุพันธ์ในรายละเอียดอีกครั้ง

4.4 พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน

(Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

ในการนำเข้าสู่เรื่องผลต่างตัวหารในหัวข้อ 4.3 ได้ใช้แนวคิดสำหรับการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตที่ว่า ถ้า $p_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n-1$ ซึ่งอินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล n จุด คือ $\{(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1})\}$ และเมื่อมีข้อมูลใหม่ (x_n,y_n) เพิ่มอีก 1 จุดแล้ว โครงสร้างของ $p_n(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n เกิดจากการปรับ $p_{n-1}(x)$ ด้วยการเพิ่มพจน์พหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$p_n(x) \;=\; p_{n-1}(x) \;+\; c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (4.4.1)$$

เพื่อใช้สัญกรณ์ผลต่างตัวหาร กำหนดให้ค่า y_i มาจากฟังก์ชัน $y=f(x)$ และเขียน f_i แทน $y_i=f(x_i)$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ การคำนวณสัมประสิทธิ์ c_n จัดให้อยู่ในรูปผลต่างตัวหาร ซึ่งเมื่อเขียนพหุนามเรียงจากระดับขั้น 0 ถึงระดับขั้น n จะเห็นโครงสร้างอย่างเป็นระบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f[x_0] \\
p_1(x) &= p_0(x) + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
p_3(x) &= p_2(x) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \qquad (4.4.2)\\
&\;\vdots \\
p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}) \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
$$

โดยที่

$p_0(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0
$p_1(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0,\ x_1$
$p_2(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0,\ x_1,\ x_2$
$p_3(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3$
$\vdots$		$\vdots$
$p_{n-1}(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$
$p_n(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$

และพหุนามเหล่านี้มีชื่อเรียกว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน ซึ่งทำหน้าที่อินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลตามที่กำหนดเช่นเดียวกับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ เพียงแต่มีโครงสร้างที่แตกต่างกัน ดังที่เปรียบเทียบในตารางที่ 4.4.1 โครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น n มีรูปแบบเป็นผลบวกเชิงเส้นของพหุนามลากรองจ์ระดับขั้น n ในขณะที่โครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น n เมื่อพิจารณาจากสมการ (4.4.2) ในรายละเอียด จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = {} & f[x_0] \\
& + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
& + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& \vdots \\
& + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}) \\
& + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{4.4.3}
$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับพหุนามเทย์เลอร์ เพราะว่ารูปแบบของ $p_n(x)$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของพหุนามจากระดับขั้น 0 ถึงพหุนามจากระดับขั้น n โดยสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังต่าง ๆ ของ $p_n(x)$ คำนวณจากผลต่างตัวหาร ซึ่งแสดงผลอยู่ที่แนวทแยงมุมในตารางผลต่างตัวหารที่ 4.4.2

พหุนามระดับขั้น n อินเทอร์โพเลตที่จุด $(x_0,f_0), (x_1,f_1), \ldots, (x_n,f_n)$	
พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์	พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน
$p_n(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x) + f_3 l_3(x) + \cdots + f_n l_n(x)$	$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$
เมื่อ $l_i(x),\ i = 0,1,\ldots,n$ เป็นพหุนามลากรองจ์ระดับขั้น n	เมื่อ $c_i,\ i = 0,1,\ldots,n$ เป็นผลต่างตัวหาร $f[x_0,x_1,\ldots,x_i]$

ตารางที่ 4.4.1

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$\cdots$	$f[\cdot,\cdot,\ldots,\cdot]$
x_0	f_0					
x_1	f_1	$f[x_0,x_1]$				
x_2	f_2	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	f_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	f_n	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]$

ตารางที่ 4.4.2

ตัวอย่างที่ 4.4.1 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(0,1), (-2,3), (1,5)\}$ ในรูปพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน

วิธีทำ สร้างตารางผลต่างตัวหารได้

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
0	**1**		
-2	3	**-1**	
1	5	2/3	**5/3**

จากสมการ (4.4.3) ให้จุดต่อเป็น $x_0 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 1$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าตรงแนวทแยงมุมในตาราง จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันกำลังสองในรูป

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 1 + (-1)(x-0) + (5/3)(x-0)(x-(-2)) \\ &= 1 - x + \frac{5}{3}x(x+2) \end{aligned}$$

ถ้าคูณกระจายแล้วรวมพจน์ จะได้

$$p_2(x) = 1 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}x^2$$

ซึ่งก็คือพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ในตัวอย่างที่ 4.2.3 □

ตัวอย่างที่ 4.4.2 จากตัวอย่างที่ 4.3.2 จงเขียนฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ ในรูปพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน โดยให้จุดต่อเป็น $2, -3, 1, 6, 0$

วิธีทำ ตารางผลต่างตัวหารในตัวอย่างที่ 4.3.2 คือ

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
2	-8				
-3	-98	18			
1	-6	23	-5		
6	64	14	-1	1	
0	-8	12	2	1	0

จากสมการ (4.4.3) ให้จุดต่อเป็น $x_0 = 2,\ x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 6$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าในแนวทแยงมุมของตาราง จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในรูป

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -8 + (18)(x-2) + (-5)(x-2)(x-(-3)) \\ &\quad + (1)(x-2)(x-(-3))(x-1) \\ &= -8 + 18(x-2) - 5(x-2)(x+3) + (x-2)(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

หรือให้จุดต่อเป็น $x_0 = -3,\ x_1 = 1,\ x_2 = 6,\ x_3 = 0$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าในแนวทแยงมุมของตารางผลต่างตัวหารที่สอดคล้องกับจุดต่อทั้งสี่นี้ จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในรูป

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -98 + 23(x-(-3)) + (-1)(x-(-3))(x-1) \\ &\quad + (1)(x-(-3))(x-1)(x-6) \\ &= -98 + 23(x+3) - (x+3)(x-1) + (x+3)(x-1)(x-6) \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะเขียนพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในกรณีนี้ด้วยจุดต่อชุดใดก็ตาม ย่อมได้ว่า

$$f(x) = p_3(x)$$

เพราะว่าจุดข้อมูลมาจาก $f(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น 3 อยู่แล้ว □

ตัวอย่างที่ 4.4.3 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 จงประมาณค่าของ cos(.25) ด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตเชิงเส้น กำลังสองและกำลังสาม

วิธีทำ ใช้ตารางผลต่างตัวหารในตัวอย่างที่ 4.3.4

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.2950		
0.6	.8253	-.4786	-.4590	
0.8	.6967	-.6431	-.4113	.0795

ใช้จุดต่อ .2, .4, .6 และ .8 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้น กำลังสอง และกำลังสาม ตามลำดับได้

$$p_1(x) = .9801 - .2950(x-.2)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - .4590(x-.2)(x-.4)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + .0795(x-.2)(x-.4)(x-.6)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\cos(.25) &\cong p_1(.25)\\ &= .9801 - .2951(.25-.2) = .9653\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(.25) &\cong p_2(.25)\\ &= p_1(.25) - .4590(.25-.2)(.25-.4) = .9688\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(.25) &\cong p_3(.25)\\ &= p_2(.25) + .0795(.25-.2)(.25-.4)(.25-.6) = .9690\end{aligned}$$

ค่าที่แท้จริงเลขทศนิยม 4 ตำแหน่งของ cos(.25) คือ .9689

ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 4.3.3 สามารถใช้ประโยชน์จากตารางผลต่างตัวหารได้เพิ่มเติม เช่น ใช้จุดต่อ .4, .6 และ .8 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสอง แล้วประมาณค่า $\cos x$ ที่ตำแหน่งระหว่างจุดต่อเหล่านี้เป็นต้น □

ตัวอย่างที่ 4.4.4 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสองจากข้อมูลของค่า $\ln x$ ในตัวอย่างที่ 4.2.4 แล้วใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $\ln 3$

x	1.0	4.0	5.0
$\ln x$	0	1.386294	1.609438

วิธีทำ สร้างตารางผลต่างตัวหารจากข้อมูล 3 จุด ได้

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
1.0	0		
4.0	1.386294	0.462098	
5.0	1.609438	0.223144	-0.059739

ใช้จุดต่อ 1.0, 4.0 และ 5.0 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสอง ตามลำดับได้

$$p_1(x) = 0 + .462098(x-1)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - .059739(x-1)(x-4)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\ln 3 &\cong p_1(3)\\ &= .462098(3-1) = .924196\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 3 &\cong p_2(3)\\ &= p_1(3) - .059739(3-1)(3-4) = 1.043674\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์เดียวกันกับที่ได้ในตัวอย่างที่ 4.2.4

ในตัวอย่างนี้จะแสดงข้อดีของการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน เช่น ถ้ามีจุดข้อมูลใหม่ (2.0, 0.693147) เพิ่มขึ้น เพียงเพิ่มข้อมูลใหม่นี้ลงในแถวใหม่ต่อจากแถวล่างสุดของตารางเดิม แล้วคำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สอง และสาม ดังผลที่แสดงในแถวแรเงาล่างสุดของตารางผลต่างตัวหาร

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1.0	0			
4.0	1.386294	0.462098		
5.0	1.609438	0.223144	-0.059739	
2.0	**0.693147**	**0.305430**	**-0.041143**	**0.018595**

ทำให้สร้างพหุนามกำลังสามโดยปรับจาก $p_2(x)$ เดิมได้

$$p_3(x) = p_2(x) + .018595(x-1)(x-4)(x-5)$$

และประมาณ $\ln 3$ ด้วย $p_3(x)$ นี้ได้

$$\begin{aligned}\ln 3 &\cong p_3(3)\\ &= p_2(3) + .018595(3-1)(3-4)(3-5) = 1.118055\end{aligned}$$

ถ้าเปรียบเทียบกับการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เมื่อมีจุดข้อมูลใหม่ จะต้องเริ่มเขียนในรูปผลบวกของพหุนามลากรองจ์ใหม่ในรูป

$$p_3(x) = 0\,l_0(x) + 1.386294\, l_1(x) + 1.609438\, l_2(x) + 0.693147\, l_3(x)$$

ไม่สามารถปรับจากพหุนามเดิม $p_2(x)$ ได้ดังที่แสดงข้างต้น จากตาราง สามารถสร้าง $p_2(x)$ ใหม่ได้ โดยใช้จุดต่อ 4.0, 5.0 และ 2.0 ผลที่ได้คือ

$$p_2(x) = 1.386294 + .223144(x-4) - .041143(x-4)(x-5)$$

ประมาณ $\ln 3$ ด้วย $p_2(x)$ ใหม่นี้ได้

$$\begin{aligned}\ln 3 &\cong p_2(3)\\ &= 1.386294 + .223144(3-4) - .041143(3-4)(3-5)\\ &= 1.080864\end{aligned}$$

ซึ่งใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงเลขทศนิยม 4 ตำแหน่งของ $\ln 3$ คือ 1.098612 มากกว่าค่าประมาณที่ได้จาก $p_3(x)$ □

การสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน ในกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ อยู่ห่างจากกันเป็นระยะ h เท่าๆ กัน โดยที่

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

จะมีรูปแบบที่ง่ายกว่าในกรณีจุดต่อทั่ว ๆ ไป ด้วยการกำหนดตัวแปรใหม่ s ในรูป

$$s = \frac{x - x_0}{h} \tag{4.4.4}$$

แล้วเขียนผลต่าง $x - x_i$ ในรูป

$$x - x_i = x_0 + sh - (x_0 + ih) = h(s - i)$$

แทนค่า $x - x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ในสมการ (4.4.3) ได้

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(x_0 + sh) \\ &= f[x_0] + sh\,f[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ &\quad + s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

โดยใช้สัญกรณ์ของตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าจากสมการ (4.3.13)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f(x_0)$$

และสัมประสิทธิ์ทวินามรูปทั่วไป

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

แทนในสมการ (4.4.5) ได้

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \tag{4.4.6}$$

สูตรของพหุนามในสมการ (4.4.5) หรือ (4.4.6) มีชื่อเรียกว่า สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี (Newton-Gregory forward interpolation formula)

ตัวอย่างที่ 4.4.5 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 จงประมาณค่าของ cos(.25) โดยใช้สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี เชิงเส้น กำลังสองและกำลังสาม

วิธีทำ ตารางผลต่างในตัวอย่างที่ 4.3.3 ซึ่งมีจุดต่อเป็น $x_0 = .2,\ x_1 = .4,\ x_2 = .6,\ x_3 = .8$ และ $h = .2$ คือ

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.0590		
0.6	.8253	-.0957	-.0367	
0.8	.6967	-.1286	-.0329	.0038

จากสมการ (4.4.6) สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี เชิง เส้น กำ ลังสอง และกำลังสาม คือ

$$p_1(x) = f[x_0] + s\Delta f(x_0)$$
$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$
$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)$$

แทนค่า $x = .25$ ในสมการ (4.4.4) คำนวณค่า s ได้

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{.25 - .2}{.2} = .25$$

คำนวณค่าประมาณของ cos(.25) ได้

$$\cos(.25) \cong p_1(.25) = .9801 + .25(-.0590) = .9653$$

$$\cos(.25) \cong p_2(.25) = p_1(.25) + \frac{(.25)(.25-1)}{2!}(-.0367) = .9688$$

$$\cos(.25) \cong p_3(.25) = p_2(.25) + \frac{(.25)(.25-1)(.25-2)}{3!}(.0038) = .9690$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์เดียวกันกับที่ได้ในตัวอย่างที่ 4.4.3 □

บรรณานุกรม

Atkinson, K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, Wiley, New York, 1989.

Atkinson, K. E., *Elementary Numerical Analysis*, Wiley, New York, 1985.

Chapra, S. C. and Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, Boston, 1998.

Cheney, W.and Kincaid, D., *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1994.

Faires, J. D. and Burden, R. L., *Numerical Methods*, PWS, Boston, 1993.

Wood, A., *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Harlow, 1999.