การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ

นาย บุญลือ สวัสดิ์มงคล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-533-008-6

SOFTWARE DEVELOPMENT
FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW

Mr. Boonlue Sawatmongkhon

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering
Suranaree University of Technology
Academic Year 2001
ISBN 974-533-008-6

บุญลือ สวัสดิ์มงคล : การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ (SOFTWARE DEVELOPMENT FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร จำนวน 157 หน้า. ISBN 974-533-008-6

ซอฟต์แวร์ในงานวิจัยนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่อวิเคราะห์การไหลในสภาวะคงตัว (Steady State) สองมิติ และความเร็วของการไหลต่ำกว่าความเร็วเสียง ซอฟต์แวร์พัฒนาขึ้นบนพื้นฐานของระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) โดยค่าของตัวแปรทั้งหมดถูกเก็บไว้ที่ตำแหน่งเดียวกัน (Collocated Grids) และใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow (Rhie and Chow Interpolation) เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการไม่เกาะเกี่ยวกันระหว่างความเร็วกับความดัน แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ (Two-Equation Turbulence Model) ถูกนำมาใช้ในกรณีที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน ซอฟต์แวร์สามารถวิเคราะห์การไหลได้หลากหลายรูปแบบ ได้แก่ การไหลแบบไม่อัดตัว (Incompressible Flow) การไหลแบบอัดตัวได้ (Compressible Flow) การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) ซอฟต์แวร์ได้รับการทดสอบโดยการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง และผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนักศึกษา________________________
ปีการศึกษา 2544	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา__________________

BOONLUE SAWATMONGKHON : SOFTWARE DEVELOPMENT FOR THE SIMULATION OF TWO-DIMENSIONAL FLOW THESIS ADVISOR : DR. EKACHAI JUNTASARO, Ph.D. 157 PP. ISBN 974-533-088-6

The software of this research work is developed for the analysis of steady two-dimensional flow at subsonic speed. The software is developed on the basis of the finite volume method. All the variables are treated on the collocated grid system and the Rhie and Chow interpolation is used to avoid the decoupling between the velocity and the pressure. The two-equation turbulence model is used for the simulation of turbulent flow. The software can analyze various flows: incompressible flow, compressible flow, laminar flow and turbulent flow. The software is tested and validated by comparing the computed results with the analytical solution, the experimental data and the acceptable numerical solution.

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนักศึกษา__________________________
ปีการศึกษา 2544	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา____________________

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บุคคล และกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเหลือ อย่างดียิ่ง ทั้งในด้านวิชาการ และด้านการดำเนินงานวิจัย อาทิเช่น

- อาจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
- รองศาสตราจารย์ นาวาอากาศเอก ดร.วรพจน์ ขำพิศ รองศาสตราจารย์ ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เรืออากาศเอก ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์ และคณาจารย์ประจำสาขาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
- อาจารย์ ดร.วรางค์รัตน์ จันทสาโร อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
- ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ภุชงค์ อุทโยภาศ อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
- คุณอาภรณ์พรรณ ศรีอัครวิทยา คุณทัศนีย์ ทิพย์สาคร และคุณปราณี สิทธิคุณ เจ้าหน้าที่ประจำสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
- คุณอาทิตย์ คูณศรีสุข วิศวกรประจำศูนย์เครื่องมือวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
- คุณคงเทพ บุญมี นิสิตปริญญาโทภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

งานวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการทำวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การเลี้ยงดูอบรมและส่งเสริมการศึกษาเป็นอย่างดีตลอดมา

บุญลือ สวัสดิ์มงคล

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

a	ความเร็วเสียง $a^2 = \gamma RT$ หรือ $a = \frac{\widetilde{T}_\delta}{T_w}\left[1 + r\frac{\gamma-1}{2}M_\delta^2\right] - 1$
A	สัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการจัดรูปสมการตามอย่างระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด
b	$b^2 = r\frac{\gamma-1}{2}M_\delta^2\frac{\widetilde{T}_\delta}{T_w}$
b^ϕ	พจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของ ϕ
B	$B = B^u\frac{\partial y}{\partial \eta} - B^v\frac{\partial x}{\partial \eta}$
B^u	$B^u = -\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{A_P^u}\frac{\partial y}{\partial \eta}$
B^v	$B^v = \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{A_P^v}\frac{\partial x}{\partial \eta}$
C_f	สัมประสิทธิ์ความเสียดทานบนพื้นผิว $C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$
C_p	สัมประสิทธิ์ความดันบนพื้นผิว หรือค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
C_v	ค่าความร้อนจำเพาะที่ปริมาตรคงที่
C_1	ค่าคงที่ตัวที่ 1 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน C_1=1.44
C_2	ค่าคงที่ตัวที่ 2 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน C_2=1.92
C_μ	ค่าคงที่ของ μ_t , $C_\mu = 0.09$
C	$C = C^v\frac{\partial x}{\partial \xi} - C^u\frac{\partial y}{\partial \xi}$
C^u	$C^u = \frac{\Delta\xi\Delta\eta}{A_P^u}\frac{\partial y}{\partial \xi}$
C^v	$C^v = -\frac{\Delta\xi\Delta\eta}{A_P^v}\frac{\partial x}{\partial \xi}$
D	พจน์เสริมของสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $D = 2\frac{\mu}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)$
e_T	พลังงานรวมจำเพาะ $e_T = C_v T + K + k$
E	พจน์เสริมของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $E = 2\frac{\mu\mu_t}{\bar{\rho}\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_m}\right)\left(\frac{\partial^2\widetilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_m}\right)$
f_μ	ฟังก์ชันการหน่วงของ μ_t , $f_\mu = \exp\left[\frac{-3.4}{\left(1+\frac{R_t}{50}\right)^2}\right]$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

f_1	ฟังก์ชันการหน่วงตัวที่ 1 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน f_1=1.0
f_2	ฟังก์ชันการหน่วงตัวที่ 2 ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $f_2 = 1 - 0.3\exp\left(-R_t^2\right)$
h	เอนทัลปี
J	จาโคเบียนของการแปลงพิกัด $J = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}$
k	พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $k = \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2\right)$
k^+	$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}$
k_T	สัมประสิทธิ์ความร้อน
K	พลังงานจลน์ของการไหลเฉลี่ย $K = \frac{1}{2}\left(\bar{u}^2 + \bar{v}^2\right)$
L	ความยาวของแผ่นเรียบ
L_c	ความยาวคอร์ดของส่วนโค้งกลม
m_P	เทอมที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของสมการความดันและสมการค่าแก้ไขความดัน
M	เลขมัค
M_t	เลขมัคของการปั่นป่วน $M_t^2 = 2\frac{k}{a^2}$
p	ความดัน
p'	ค่าแก้ไขความดัน
p_0	ความดันรวม
Pr	เลขพรันด์เทิล $Pr = \frac{\mu C_P}{k_T}$
q	ฟลักซ์ความร้อน
r	Recovery Factor มีค่าเท่ากับ 0.89 สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน
R	ค่าคงที่ของแก๊ส (Gas Constant)
R_t	เรย์โนลดส์นัมเบอร์ของการปั่นป่วน $R_t = \frac{\bar{\rho} k^2}{\mu \varepsilon}$
Re_L	เรย์โนลดส์นัมเบอร์ $Re_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$
Re_x	เรย์โนลดส์นัมเบอร์ $Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

Re_θ	เรย์โนลดส์นัมเบอร์ $Re_\theta = \dfrac{\rho U_\infty \theta}{\mu}$
S^ϕ	พจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของ ϕ
$\overline{S}_i^u$	ค่าเฉลี่ยของพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย โดยไม่คิดผลเนื่องจากความชันของความดันของสมการ x-Momentum
$\overline{S}_i^v$	ค่าเฉลี่ยของพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย โดยไม่คิดผลเนื่องจากความชันของความดันของสมการ y-Momentum
t_{ij}	เทนเซอร์ของความเค้น
T	อุณหภูมิ
u	ความเร็วในแนวแกน x
u_i	ความเร็วที่เขียนอยู่ในรูปของเทนเซอร์
u^*	$u^* = \dfrac{\tilde{u}_\delta}{b}\sin^{-1}\left[\dfrac{2b^2\dfrac{\tilde{u}}{\tilde{u}_\delta} - a}{\sqrt{a^2+4b^2}}\right]$
u^+	$u^+ = \dfrac{\overline{u}}{u_\tau}$
$\hat{u}$	Pseudovelocity
u_τ	$u_\tau = \sqrt{\dfrac{\tau_w}{\rho}}$
U	$U = u\dfrac{\partial y}{\partial \eta} - v\dfrac{\partial x}{\partial \eta}$
U_∞	ความเร็วที่ Free-Stream
$\overline{u'v'}$	ความเค้นของเรย์โนลดส์
$\overline{u'v'}^+$	$\overline{u'v'}^+ = \dfrac{\overline{u'v'}}{u_\tau^2}$
v	ความเร็วในแนวแกน y
$\hat{v}$	Pseudovelocity
V	$V = v\dfrac{\partial x}{\partial \xi} - u\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$
x	พิกัด x ของระบบพิกัดฉาก
x_i	ระบบพิกัดฉากที่เขียนอยู่ในรูปของเทนเซอร์
y	พิกัด y ของระบบพิกัดฉาก

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

y^+	$y^+ = \dfrac{\rho_w y u_\tau}{\mu_w}$
α	$\alpha = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$
α_{e_T}	ตัวประกอบผ่อนคลายสำหรับพลังงานรวม
α_u	ตัวประกอบผ่อนคลายสำหรับความเร็วในทิศทางตามทิศทางของการไหล
α_v	ตัวประกอบผ่อนคลายสำหรับความเร็วในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางของการไหล
α_ε	ตัวประกอบผ่อนคลายอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
α_k	ตัวประกอบผ่อนคลายพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
β	$\beta = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}$
δ	ความหนาของชั้นชิดผิวโดยวัดจากพื้นผิวจนถึงตำแหน่ง $u = 0.99U_\infty$
δ_{ij}	Kronecker Delta
Δ^*	$\Delta^* = \delta\int_0^1 \left(\dfrac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau}\right) d\left(\dfrac{y}{\delta}\right)$
ε	อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d + D$
ε^+	$\varepsilon^+ = \varepsilon(\mu / \rho u_\tau^4)$
ε_d	Dilatation Dissipation Rate of k ซึ่งเป็นส่วนของการไหลแบบอัดตัวได้ $\varepsilon_d = M_t^2 \varepsilon_s$
ε_s	Solenoidal Dissipation Rate of k ซึ่งเป็นส่วนของการไหลแบบไม่อัดตัว
η	พิกัด η ของระบบพิกัดวัตถุ
η_{max}	จำนวนเส้นกริดทั้งหมดของพิกัด η
ϕ	ตัวแปรใดๆ
γ	อัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะ หรือ $\gamma = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$
Γ	สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย
Π	$\Pi = -\overline{u_i' u_j'}\dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$
μ	ความหนืดพลวัตร
μ_t	ความหนืดของการปั่นป่วน $\mu_t = \bar{\rho} c_\mu f_\mu \dfrac{k^2}{\varepsilon}$
ω	อัตราการสูญเสียจำเพาะ (Specific Dissipation Rate)
ρ	ความหนาแน่น

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

σ_e Turbulence Prandtl Number for the Diffusion of Total Energy, $\sigma_e \approx 0.91$

σ_k Effective Prandtl Number for the Diffusion of Turbulence, $\sigma_k \approx 1.0$

σ_ε ค่าคงที่ของสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน $\sigma_\varepsilon \approx 1.3$

τ_{ij} Reynolds-Stress Tensor หรือ Favre-Averaged Reynolds-Stress Tensor

τ_w ความเค้นที่พื้นผิว $\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w$

ξ พิกัด ξ ของระบบพิกัดวัตถุ

ξ_{max} จำนวนเส้นกริดทั้งหมดของพิกัด ξ

ตัวยก

* ค่าที่ได้จากสมการโมเมนตัมซึ่งยังไม่สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง หรือค่าบัดดล

~ ค่าเฉลี่ยของ Favre (Favre Average)

— ส่วนเฉลี่ย (Mean Part) หรือค่าเฉลี่ยเวลา (Time Average)

′ ส่วนแปรผัน (Fluctuating Part) ของการไหลแบบไม่อัดตัว

″ ส่วนแปรผันของการไหลแบบอัดตัวได้

e_T พลังงานรวมจำเพาะ

k พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

p ความดัน

ϕ ตัวแปรใดๆ

u ความเร็วในแนวแกน x

v ความเร็วในแนวแกน y

ε อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

ตัวห้อย

e ค่าที่พื้นผิวควบคุม ซึ่งอยู่ระหว่างจุด P และจุด E

E ค่าที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออกของจุด P

n ค่าที่พื้นผิวควบคุม ซึ่งอยู่ระหว่างจุด P และจุด N

N ค่าที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ทางทิศเหนือของจุด P

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

P	ค่าที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุม
ref	ค่าที่ตำแหน่งทางเข้าของขอบเขต
s	ค่าที่พื้นผิวควบคุม ซึ่งอยู่ระหว่างจุด P และจุด S
S	ค่าที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ทางทิศใต้ของจุด P
t	การไหลแบบปั่นป่วน
w	ค่าที่พื้นผิวควบคุม ซึ่งอยู่ระหว่างจุด P และจุด W หรือค่าที่พื้นผิว
W	ค่าที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตกของจุด P
∞	ค่าที่ Free-Stream
δ	ค่าที่ขอบของชั้นชิดผิว

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

สมการนาเวียร์สโตคส์ (Navier-Stokes Equations) เป็นสมการที่สามารถให้ผลเฉลยอย่างสมบูรณ์แบบสำหรับปัญหาการไหลของของไหล แต่ด้วยความที่สมการนาเวียร์สโตคส์ประกอบขึ้นจากสมการหลายสมการ ซึ่งแต่ละสมการเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Non-Linear) และมีความเกี่ยวพัน (Coupled) กับสมการอื่น จึงทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตคส์ได้ในรูปทั่วไปด้วยระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ ทำให้การศึกษาพฤติกรรมของการไหลในช่วงเวลาที่ผ่านมาจึงต้องอาศัยการทดลองอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ เช่น การใช้อุโมงค์ลม ซึ่งการทดลองแต่ละครั้งใช้เวลาและค่าใช้จ่ายสูง ส่งผลให้การศึกษาพฤติกรรมของการไหลจำกัดอยู่เฉพาะหน่วยงานหรือองค์กรขนาดใหญ่เท่านั้น อีกทั้งการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขของการทดลอง เช่น ขนาด และรูปทรง เป็นต้น เป็นไปด้วยความล่าช้า ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีสมรรถนะสูงกว่าในอดีตมาก จึงได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เป็นเครื่องมือเพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตคส์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ เช่น ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีชิ้นประกอบจำกัด (Finite Element Method) และระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) เป็นต้น พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD) เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของปัญหาการไหล โดย CFD จะทำการจำลองพฤติกรรมของการไหลผ่านทางหน้าจอคอมพิวเตอร์ ทำให้การปรับเปลี่ยนเงื่อนไขของการไหลทำได้สะดวกและใช้เวลาไม่มาก ค่าใช้จ่ายน้อยเป็นข้อดีประการหนึ่งของ CFD ซึ่งทำให้การศึกษาพฤติกรรมของการไหลไม่จำกัดอยู่แต่ในหน่วยงานและองค์กรขนาดใหญ่เท่านั้น นอกจากนี้ CFD ยังสามารถจำลองการไหลในบางสถานการณ์ที่การทดลองไม่สามารถทำได้ เช่น การไหลภายในเตาปฏิกรณ์ปรมาณู

การได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายของ CFD เป็นสาเหตุให้ประเทศในแถบตะวันตกสร้างสินค้าประเภทซอฟต์แวร์ขึ้นมามากมาย การซื้อซอฟต์แวร์เข้ามาใช้งานนั้นจะทำให้ได้ผลที่เร็วกว่าแต่มีราคาแพง และจะทำให้ประเทศไม่สามารถสร้างรากฐานทางวิชาการในด้านนี้ได้ ในขณะที่การสร้างซอฟต์แวร์ขึ้นเองนั้นแม้จะค่อนข้างช้าในระยะเริ่มต้น แต่มีราคาถูกกว่า อีกทั้งยังเป็นการลดการนำเข้าสินค้าทางเทคโนโลยีจากต่างชาติ และสามารถสร้างความเข้มแข็งทางวิชาการในระยะยาวต่อประเทศ

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

สร้างซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียงผ่านวัตถุสองมิติ

1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

1) จำลองการไหลที่สภาวะคงตัวเท่านั้น
2) ของไหลในงานวิจัยนี้คืออากาศ
3) อากาศในงานวิจัยนี้เป็นแก๊สอุดมคติและอยู่ภายใต้สมมุติฐาน Calorically Perfect

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

กรอบของงานวิจัยนี้สนใจศึกษาพฤติกรรมของการไหลภายใต้เงื่อนไขการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียง โดยแบบจำลองการปั่นป่วนที่ใช้เป็นแบบจำลองประเภทสองสมการ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ซอฟต์แวร์ที่สามารถนำไปใช้ศึกษาพฤติกรรมของการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียงผ่านวัตถุสองมิติ

บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง หัวข้อ 2.1 จะกล่าวถึงการคำนวณเชิงตัวเลข โดยจะชี้ให้เห็นถึงข้อเสียของการให้ความหนาแน่นเป็นตัวแปรปฐมฐาน ขั้นตอนวิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาค่าความดัน รวมถึงระบบกริดที่ใช้ในการแก้ปัญหาการไหล หัวข้อ 2.2 จะกล่าวถึงข้อดีและข้อเสียของแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการของแต่ละกลุ่ม หัวข้อ 2.3 จะกล่าวถึงกรณีทดสอบที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

2.1 การคำนวณเชิงตัวเลข

ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมและประสบความสำเร็จเป็นอย่างสูงในการแก้ปัญหาทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ โดยที่หลักการพื้นฐานต่าง ๆ ของระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดได้รับการบรรยายไว้อย่างดีเยี่ยมในหนังสือของ Patankar (1980) และ Versteeg and Malalasekera (1995)

โดยทั่วไปการแก้สมการนาเวียร์สโตคส์นิยมให้ความหนาแน่นเป็นตัวแปรปฐมฐาน (Primitive Variable) เนื่องจากสามารถหาค่าได้โดยตรงจากสมการความต่อเนื่อง ข้อเสียของการให้ความหนาแน่นเป็นตัวแปรปฐมฐานสำหรับการไหลที่ย่านความเร็วต่ำ คือ ที่สภาวะดังกล่าวความหนาแน่นมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก หรืออาจเป็นค่าคงที่ในกรณีที่การไหลเป็นแบบไม่อัดตัว ส่งผลให้ความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความหนาแน่นเป็นแบบไม่ชัดเจน แนวทางการแก้ไขปัญหาข้างต้นที่ได้รับความนิยม คือ การเปลี่ยนตัวแปรปฐมฐานจากความหนาแน่นไปเป็นความดัน โดยค่าของความดันหาได้จากขั้นตอนวิธีต่าง ๆ เช่น ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) ได้รับการเสนอโดย Spalding and Partankar (1972) ขั้นตอนวิธี SIMPLER (SIMPLE-Revised) ได้รับการเสนอโดย Partankar (1979) ขั้นตอนวิธี SIMPLEC (SIMPLE-Consistent) ได้รับการเสนอโดย van Doormal and Raithby (1984) และ ขั้นตอนวิธี PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) ได้รับการเสนอโดย Issa (1986) เป็นต้น

การใช้ความดันเป็นตัวแปรปฐมฐานอาจก่อให้เกิดปัญหาขึ้นเนื่องจากการไม่เกาะเกี่ยวกันระหว่างความเร็วกับความดัน ซึ่งอาจจะทำให้คำตอบที่ได้ผิดหลักการทางฟิสิกส์ แนวทางที่ใช้ในการแก้ไขปัญหาข้างต้นสามารถแบ่งออกเป็นสองแนวทางหลัก ๆ คือ การใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้อง

(Staggered Grid System) และการใช้ระบบกริดแบบจุดร่วม (Collocated Grid System) ร่วมกับกรรมวิธีพิเศษเพิ่มเติม

บุคคลหรือคณะบุคคลที่ประสบความสำเร็จในการใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้อง คือ Patankar and Spalding (1972), Pope (1978), Rastogi (1984), Demirdsic, Gosman, Issa and Peric (1987), Stern, Yoo and Patel (1988), Majumdar and Rodi (1989), Karki and Patankar (1989) และ Koshizuka and Oka (1991) เป็นต้น แต่ปัญหาที่เกิดขึ้นตามมาจากการใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้อง คือ ต้องใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้องร่วมกับการใช้ Contravariant Velocity เพราะว่าหากใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้องร่วมกับ Cartesian Velocity อาจจะทำให้การคำนวณเสียเสถียรภาพได้ง่าย อีกทั้งการใช้ Contravariant Velocity จะทำให้ความเร็วรับรู้ถึงลักษณะการวางตัวของกริด ซึ่งจะทำให้ความถูกต้องของการคำนวณขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของรูปทรงการไหล (Zijlema, Segal and Wesseling, 1995)

การใช้ระบบกริดแบบจุดร่วมร่วมกับกรรมวิธีพิเศษเพิ่มเติมที่สร้างขึ้นเพื่อให้เกิดการเกาะเกี่ยวกันระหว่างความเร็วกับความดัน เป็นอีกแนวทางหนึ่งที่ได้รับความนิยมไม่น้อยไปกว่าการใช้ระบบกริดแบบจุดเยื้อง บุคคลหรือคณะบุคคลที่ประสบความสำเร็จในการใช้ระบบกริดแบบจุดร่วม คือ Habib and Whitelaw (1982), Rhie and Chow (1983), Peric (1985), Chen and Patel (1989), Deng (1989), Piquet and Queutey (1990), Cho and Fletcher (1991), Lien and Leschziner (1991), Melaaen (1991), Coelho and Pereira (1992), Zhu and Rodi (1992), Xu, Gotham and Collins (1993), Rolfes, Visser and Bekker (1993) และ Issa and Oliveira (1994) เป็นต้น กรรมวิธีพิเศษเพิ่มเติมที่กล่าวไว้ข้างต้น ได้แก่ การประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow (Rhie and Chow interpolation) เสนอโดย Rhie and Chow ในปี 1983

Demirdzic, Lilek and Peric (1993) ทำนายพฤติกรรมของการไหลที่ทุกย่านความเร็วด้วยระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดบนระบบกริดแบบจุดร่วมโดยให้ Cartesian Velocity ความดัน และอุณหภูมิเป็นตัวแปรปฐมฐาน ส่วนความหนาแน่นได้จากสมการสภาวะ Demirdzic et al. ชี้ให้เห็นว่าการใช้ความหนาแน่นเป็นตัวแปรปฐมฐานในการไหลที่ย่านความเร็วต่ำนั้นความหนาแน่นมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ซึ่งเป็นเหตุให้ความหนาแน่นและความดันเกี่ยวพันกันอย่างไม่ชัดเจน แต่ Demirdzic et al. แก้ปัญหาการไหลในพิกัดฉาก ซึ่งทำให้การกำหนดเงื่อนไขขอบของรูปทรงการไหลที่ซับซ้อนทำได้ยาก

Hirt, Amsden and Cook (1974) ใช้วิธีเก็บ Cartesian Velocity ไว้ที่ตำแหน่งมุมของปริมาตรควบคุม ส่วนตัวแปรอื่น ๆ ถูกเก็บไว้ที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุม ซึ่งวิธีการดังกล่าวเป็นการป้องกันคำตอบผิดหลักการทางฟิสิกส์เนื่องจากการไม่เกาะเกี่ยวกันของความดันและ

ความเร็ว แต่การดำเนินการตามวิธีของ Hirt et al. มีความซับซ้อนและยุ่งยาก (Rhie and Chow, 1983)

2.2 แบบจำลองการปั่นป่วน

แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการเป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมและประสบความสำเร็จเป็นอย่างสูงในการจำลองการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่ง Patel, Rodi and Scheuerer (1985) ได้ทำการสำรวจแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการที่ได้รับการพัฒนาและเสนอโดยคณะวิจัยกลุ่มต่าง ๆ จนได้ข้อสรุปว่า แบบจำลองการปั่นป่วนที่ให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นที่น่าพอใจคือ

1) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Launder and Sharma (1974)
2) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Lam and Bremhorst (1981)
3) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Chien (1982)
4) แบบจำลอง $k-\omega$ ของ Wilcox and Rubesin (1980)

Lang and Shih (1991) ได้ทำการศึกษาเชิงเปรียบเทียบแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการเป็นจำนวนมาก และพบว่าแบบจำลองการปั่นป่วนที่ให้ผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดีคือ

1) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Chien (1982)
2) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Nagano and Tagawa (1990)
3) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Shih (1990)
4) แบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Yang and Shih (1991)

Lang and Shih ชี้ให้เห็นว่า แบบจำลองในกลุ่มของ Wilcox เช่น Wilcox and Rubesin (1980), Wilcox (1984) และ Wilcox (1991) มีข้อเสียที่เงื่อนไขขอบของ ω ที่พื้นผิว และแบบจำลองของ Lam and Bremhorst (1981) มีข้อเสียที่เงื่อนไขขอบของ ε ที่พื้นผิว และมีความอ่อนไหวต่อเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ ผลการคำนวณจะเปลี่ยนไปเมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นมีการเปลี่ยนแปลง ส่วนแบบจำลองของ Chien (1982), Nagano and Tagawa (1990), Shih (1990) และ Yang and Shih (1991) มีข้อเสียที่ฟังก์ชันการหน่วงภายในแบบจำลอง โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวเขียนอยู่ในรูปของพิกัดที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ซึ่งไม่สะดวกต่อการใช้งานหากรูปทรงการไหลมีความซับซ้อน

จากการทบทวนเอกสารที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ พบว่าแบบจำลอง $k-\varepsilon$ ของ Launder and Sharma (1974) เป็นแบบจำลองที่มีความเหมาะสมที่สุดต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัยนี้ เนื่องจากฟังก์ชันการหน่วงภายในแบบจำลองถูกเขียนอยู่ในรูปของ

พลังงานทำให้การแก้ปัญหามีความสะดวกกว่าแบบจำลองอื่น ๆ ซึ่งฟังก์ชันการหน่วงภายในแบบจำลองถูกเขียนอยู่ในรูปของพิกัดที่ตั้งฉากกับพื้นผิว

2.3 กรณีทดสอบ

Hutchings and Iannuzzelli (1987) ได้กำหนดให้การไหลของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบ (Boundary Layer on a Flat Plate) เป็นหนึ่งในกรณีทดสอบมาตรฐานที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ จากการสำรวจพบว่า ข้อมูลของการไหลของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบมีเป็นจำนวนมาก อย่างไรก็ตาม ข้อมูลที่ได้รับความนิยมและมักถูกนำมาใช้ในการทดสอบโปรแกรมทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ มีดังนี้

1) ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ สำหรับการไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว เช่น ผลเฉลยของบลาเซียส (Blasius’s Solution)
2) ข้อมูลที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง (Direct Numerical Simulation Data, DNS data) สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว ของ Spalart (1988)
3) ผลลัพธ์เชิงวิเคราะห์ สำหรับการไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้ เช่น ที่แสดงใน White (1991)
4) ข้อมูลจากการทดลองของ Maise and McDonald (1968), Fernholz and Finley (1980), Motallebi (1994) และ Motallebi (1996) สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

ผลลัพธ์และข้อมูลทั้ง 4 กรณีที่กล่าวมาข้างต้นจะถูกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้เพื่อทดสอบความถูกต้องของซอฟต์แวร์

Wu and Squires (1998a; 1998b) ทำการศึกษาการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมโดยใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภท Large-Eddy Simulation (LES) หลังจากนั้นนำผลการคำนวณที่ได้ไปตรวจสอบความถูกต้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองของ Webster, DeGraaff and Eaton (1996)

บทที่ 3
สมการควบคุม

สมการนาเวียร์สโตคส์ที่กล่าวถึงในบทที่ 1 ประกอบด้วยสมการควบคุมจำนวนสามสมการ คือ สมการความต่อเนื่องซึ่งสร้างขึ้นจากกฎอนุรักษ์มวลของสสาร สมการโมเมนตัมซึ่งสร้างขึ้นจากกฎข้อที่สองของนิวตัน และสมการพลังงานซึ่งสร้างขึ้นจากกฎอนุรักษ์พลังงาน ในบทนี้จะนำเสนอรายละเอียดของสมการควบคุมทั้งสามสมการ จากนั้นจะแสดงรายละเอียดของแบบจำลองการปั่นป่วน และท้ายที่สุดจะอธิบายถึงการแปลงพิกัดจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดวัตถุ

3.1 สมการควบคุมของการไหลแบบไม่อัดตัว

การไหลที่เลขมัคต่ำกว่า 0.3 จัดเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ส่งผลให้ความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเสียดทานระหว่างของไหลด้วยกัน หรือระหว่างของไหลกับพื้นผิวมีปริมาณน้อย อุณหภูมิจึงมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก ดังนั้นความหนาแน่นและความหนืดของของไหลจึงไม่ได้รับผลกระทบจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จึงถือได้ว่าความหนาแน่นและความหนืดของของไหลมีค่าคงที่ ซึ่งส่งผลให้สมการพลังงานไม่มีความเกี่ยวพันกับสมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม ดังนั้น การไหลแบบไม่อัดตัวจึงประกอบด้วยสมการควบคุมเพียงสองสมการ คือ สมการความต่อเนื่อง และสมการโมเมนตัม

3.1.1 การไหลแบบราบเรียบ

สมการควบคุมของการไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัวที่สภาวะคงตัว ประกอบด้วย สมการความต่อเนื่อง และสมการโมเมนตัม ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} \tag{3.2}$$

3.1.2 การไหลแบบปั่นป่วน

การไหลแบบปั่นป่วนนั้นคุณสมบัติของการไหลมีการเปลี่ยนแปลงแบบสุ่มอยู่ตลอดเวลา หรือที่เรียกว่าคุณสมบัติบัดดล (Instantaneous Property) สมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมของการไหลแบบปั่นป่วนที่สภาวะคงตัว สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0 \tag{3.3}$$

$$\rho u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_j} \tag{3.4}$$

โดยที่

$$t_{ij} = t_{ji} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{3.5}$$

พิจารณาพจน์การพา (Convection Term) ของสมการโมเมนตัม จัดรูปเสียใหม่เป็น

$$u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j^* u_i^*\right) - u_i^* \frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} \tag{3.6}$$

จากสมการความต่อเนื่องดังสมการ (3.3) ทำให้พจน์สุดท้ายของสมการ (3.6) มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นพจน์การพาของสมการโมเมนตัมสามารถเขียนได้ดังนี้

$$u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j^* u_i^*\right) \tag{3.7}$$

ใช้สมการ (3.7) ช่วยในการจัดรูปสมการโมเมนตัมในสมการ (3.4) จะได้

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j^* u_i^*\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_j} \tag{3.8}$$

3.1.2.1 ค่าเฉลี่ยเวลา (Time Average)

Reynolds (1895) ได้แบ่งคุณสมบัติของการไหลออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนเฉลี่ย (Mean Part) และส่วนแปรผัน (Fluctuating Part) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\phi^*(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t) \tag{3.9}$$

โดยที่

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi^*(x_i, t)\,dt \tag{3.10}$$

ค่าเฉลี่ยเวลาของส่วนเฉลี่ยมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเวลา ดังนี้

$$\bar{\bar{\phi}}(x_i) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\phi}(x_i)\,dt = \bar{\phi}(x_i) \tag{3.11}$$

ส่วนค่าเฉลี่ยเวลาของส่วนแปรผันมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนี้

$$\overline{\phi'}(x_i, t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\phi^*(x_i, t) - \bar{\phi}(x_i)\right] dt = \bar{\phi}(x_i) - \bar{\bar{\phi}}(x_i) = 0 \tag{3.12}$$

ค่าเฉลี่ยเวลาของผลคูณของตัวแปรใด ๆ สองตัวแปรสามารถคำนวณหาได้ดังนี้

$$\overline{\phi\psi} = \overline{(\bar{\phi} + \phi')(\bar{\psi} + \psi')} = \overline{\bar{\phi}\bar{\psi} + \bar{\phi}\psi' + \bar{\psi}\phi' + \phi'\psi'} = \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'} \tag{3.13}$$

สมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัมในสมการ (3.3) และ (3.8) สามารถเขียนอยู่ในรูปของส่วนเฉลี่ยและส่วนแปรผันได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{u}_i + u'_i) = 0 \tag{3.14}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i)\right] = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{p} + p') + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{t}_{ji} + t'_{ji}) \tag{3.15}$$

โดยการใช้ความสัมพันธ์กันในสมการ (3.11) (3.12) และ (3.13) จึงสามารถหาค่าเฉลี่ยเวลาของสมการ (3.14) และ (3.15) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.16}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{u}_i + \overline{u'_j u'_i}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{t}_{ji}}{\partial x_j} \tag{3.17}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (3.16) และ (3.17) มีความคล้ายคลึงกับสมการ (3.3) และ (3.8) อย่างมาก ยกเว้นมีพจน์เพิ่มเข้ามาอีกหนึ่งพจน์คือ $\overline{u'_j u'_i}$ สมการ (3.17) สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{u}_j \bar{u}_i\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{t}_{ji} - \rho \overline{u'_j u'_i}\right) \tag{3.18}$$

สมการ (3.18) เรียกว่า Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations ส่วนพจน์ $-\rho\overline{u'_j u'_i}$ เรียกว่า Reynolds-Stress Tensor ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้ (Wilcox, 1993)

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} = -\rho\overline{u'_j u'_i} = \mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\rho k + \mu_t \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k}\right) \tag{3.19}$$

3.1.2.2 แบบจำลองการปั่นป่วน

การปรากฏขึ้นของ Reynolds-Stress Tensor ในสมการ (3.18) เป็นเหตุให้จำนวนตัวแปรที่ต้องการหาคำตอบมีมากกว่าจำนวนสมการ ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีการสร้างแบบจำลองการปั่นป่วนขึ้นมาเพื่อหาค่าของ Reynolds-Stress Tensor ในปัจจุบัน แบบจำลองการปั่นป่วนได้รับการเสนอจากบุคคลและหน่วยงานต่าง ๆ เป็นจำนวนมาก แบบจำลองการปั่นป่วนที่ได้รับความนิยมอย่างกว้างขวาง คือ แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทหนึ่งสมการ และแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ เป็นต้น งานวิจัยนี้เลือกใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการในการจำลองการปั่นป่วน เนื่องจากเป็นแบบจำลองการปั่นป่วนที่ไม่ซับซ้อนจนเกินไป และมีความสมบูรณ์แบบในตัวเองในการทำนายพฤติกรรมของการไหล

แบบปั่นป่วน กล่าวคือ ไม่ต้องทราบโครงสร้างของการปั่นป่วน (Turbulence Structure) ก่อนการแก้ปัญหา (Wilcox, 1993) แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ แบบจำลองการปั่นป่วนของ Launder and Sharma (1974) ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ ได้แก่ สมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน และสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน สามารถแสดงในรูปสมการได้ดังนี้ (Launder and Sharma)

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon_s} \tag{3.20}$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \rho\Pi - \rho(\varepsilon_s + D) \tag{3.21}$$

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j}\right] + \rho C_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{k}\Pi - \rho C_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{k} + \rho E \tag{3.22}$$

โดยที่

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-3.4}{\left(1 + \frac{R_t}{50}\right)^2}\right]$$

$$R_t = \frac{\rho k^2}{\mu\varepsilon}$$

$$D = 2\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)$$

$$E = 2\frac{\mu}{\rho}\frac{\mu_t}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)$$

$$\Pi = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$$

$$-\overline{u_i' u_j'} = \frac{\mu_t}{\rho}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij} k$$

3.2 สมการควบคุมของการไหลแบบอัดตัวได้

การไหลที่มีเลขมัคสูงกว่า 0.3 ของไหลจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ค่อนข้างสูงส่งผลให้ความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเสียดทานระหว่างของไหลด้วยกัน หรือระหว่างของไหลกับพื้นผิวมี

ปริมาณมากพอที่จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งเป็นกลไกหนึ่งที่ส่งผลให้ความหนาแน่นและความหนืดของของไหลมีค่าแปรเปลี่ยนไป ดังนั้นการไหลแบบอัดตัวได้จึงมีความซับซ้อนกว่าการไหลแบบไม่อัดตัว ด้วยเหตุนี้การแก้ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้จึงต้องใช้สมการพลังงานร่วมกับสมการสภาวะ (Equation of State) กฎของ Sutherland (Sutherland's Law) และนิยามของเลขพรันด์เทิล นอกเหนือไปจากสมการความต่อเนื่องและสมการโมเมนตัม เนื่องจากความเกี่ยวพันกันระหว่างสมการความต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงาน

3.2.1 การไหลแบบราบเรียบ

สมการควบคุมของการไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้ที่สภาวะคงตัวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}}{\partial x_j} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial(\rho u_j e_T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k_T}{C_v}\frac{\partial e_T}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i t_{ji}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j p) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{k_T}{C_v}\frac{\partial K}{\partial x_j}\right) \tag{3.25}$$

$$p = \rho R T \tag{3.26}$$

$$\mu = \mu_\infty \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + 110}{T + 110} \tag{3.27}$$

$$k_T = \frac{\mu C_p}{Pr} \tag{3.28}$$

3.2.2 การไหลแบบปั่นป่วน

นอกเหนือจากความเร็ว ความเค้น และความดันแล้ว ความหนาแน่นและอุณหภูมิของการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้ก็มีค่าเปลี่ยนแปลงแบบสุ่มอยู่ตลอดเวลาเช่นเดียวกัน กล่าวคือ นอกจากส่วนแปรผันของความเร็ว ความเค้น และความดัน ยังมีส่วนแปรผันของความหนาแน่นและอุณหภูมิเพิ่มเข้ามาอีกด้วย การใช้ค่าเฉลี่ยเวลากับสมการควบคุมจะทำให้เกิดความยุ่งยากและซับซ้อน ดังจะอธิบายด้วยการยกตัวอย่างของสมการความต่อเนื่อง ดังนี้

ความหนาแน่นบัดดลสามารถเขียนอยู่ในรูปผลรวมของส่วนเฉลี่ยและส่วนแปรผันได้ดังนี้

$$\rho^* = \bar{\rho} + \rho' \tag{3.29}$$

แทนสมการ (3.29) ลงในสมการความต่อเนื่องในสมการ (3.23) หลังจากนั้นทำการเฉลี่ยเวลาจะได้ Reynolds-Averaged Continuity Equation สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\bar{u}_i + \overline{\rho' u_i'}\right) = 0 \tag{3.30}$$

จะเห็นได้ว่า มีพจน์เพิ่มขึ้นมาจากเดิมหนึ่งพจน์ การจะแก้ปัญหานี้ได้จะต้องหาค่าของ Correlation ระหว่าง ρ' และ u_i' ซึ่งเป็นเรื่องที่มีความซับซ้อน และความซับซ้อนเช่นเดียวกันนี้จะเพิ่มขึ้นเป็นทวีคูณในสมการโมเมนตัมและสมการพลังงาน

3.2.2.1 Favre Average

Favre (1965) เสนอระเบียบวิธี Density Weighted Average เพื่อหลีกเลี่ยงความซับซ้อนข้างต้น ระเบียบวิธีดังกล่าวอธิบายได้โดยการนิยาม Favre Velocity ดังนี้

$$\tilde{u}_i(x_i) = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho^*(x_i, t) u_i^*(x_i, t) dt \tag{3.31}$$

สมการ (3.31) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{\rho}\tilde{u}_i = \overline{\rho^* u_i^*} = \bar{\rho}\bar{u}_i + \overline{\rho' u_i'} \tag{3.32}$$

เมื่อแทนสมการ (3.32) ลงในสมการความต่อเนื่องดังสมการ (3.30) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) = 0 \tag{3.33}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (3.33) มีความคล้ายคลึงกับสมการความต่อเนื่องในสมการ (3.23) เป็นอย่างมาก

สมการสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^* u_i^*\right) = 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^* u_j^* u_i^*\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ji}^*}{\partial x_j} \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho^* u_j^*\left(h^* + \frac{1}{2} u_i^* u_i^*\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i^* t_{ji}^*\right) - \frac{\partial q_j^*}{\partial x_j} \tag{3.36}$$

$$p^* = \rho^* R T^* \tag{3.37}$$

$$\mu = \mu_\infty \left(\frac{T^*}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + 110}{T^* + 110} \tag{3.38}$$

$$k_T = \frac{\mu C_p}{Pr} \tag{3.39}$$

โดยที่

$$q_j^* = -k_T \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \tag{3.40}$$

$$h^* = C_P T^* \tag{3.41}$$

โดยการใช้ความสัมพันธ์กันในสมการ (3.39) (3.40) และ (3.41) ดังนั้นสมการ (3.40) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$q_j^* = -\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h^*}{\partial x_j} \tag{3.42}$$

คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหลและการไหลสามารถเขียนแยกเป็นสองส่วนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u_i^* &= \tilde{u}_i + u_i'' \\ \rho^* &= \bar{\rho} + \rho' \\ p^* &= \bar{p} + p' \\ h^* &= \tilde{h} + h'' \\ T^* &= \tilde{T} + T'' \\ q_j^* &= \bar{q}_{L_j} + q_j' \end{aligned} \tag{3.43}$$

แทนค่าสมการ (3.43) ลงในสมการ (3.34)-(3.39) จะได้ (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก Wilcox (1993))

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\tilde{u}_i) = 0 \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{t}_{ji} - \overline{\rho u_j'' u_i''}\right] \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_j\left(\tilde{h} + \frac{1}{2}\tilde{u}_i\tilde{u}_i\right) + \tilde{u}_j\frac{1}{2}\overline{\rho u_i'' u_i''}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\bar{q}_{L_j} - \overline{\rho u_j'' h''} + \overline{t_{ji} u_i''} - \overline{u_j'' \frac{1}{2}\rho u_i'' u_i''}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tilde{u}_i\left(\bar{t}_{ji} - \overline{\rho u_j'' u_i''}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \tag{3.47}$$

$$\mu = \mu_\infty \left(\frac{\tilde{T}}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + 110}{\tilde{T} + 110} \tag{3.48}$$

$$k_T = \frac{\mu C_p}{Pr} \tag{3.49}$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (3.44) (3.45) (3.47) (3.48) และ (3.49) มีความคล้ายคลึงกับสมการ (3.23) (3.24) (3.26) (3.27) และ (3.28) อย่างมาก ยกเว้นเพียงพจน์ของ Favre-Averaged Reynolds-Stress Tensor ที่เพิ่มขึ้นมาในสมการโมเมนตัมเท่านั้น ซึ่งเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} = -\overline{\rho u_j'' u_i''} = \mu_t\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\left(\bar{\rho}k + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\right) \tag{3.50}$$

ในสมการ (3.46) จะเห็นได้ว่า มีพจน์ที่ต้องหาค่าเฉลี่ยของผลคูณของส่วนแปรผันอยู่หลายพจน์ ซึ่งจะต้องหาค่าของ Correlation ของพจน์ดังกล่าว โดยรายละเอียดแสดงไว้ใน Wilcox (1993) โดยที่

$$\frac{1}{2}\overline{\rho u_i'' u_i''} = \bar{\rho} k \tag{3.51}$$

$$\overline{\rho u_j'' h''} = q_{T_j} = -\frac{\mu_t}{\sigma_e}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j} \tag{3.52}$$

$$\overline{t_{ji} u_i''} - \overline{u_j'' \frac{1}{2}\rho u_i'' u_i''} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{3.53}$$

แทนสมการ (3.50)-(3.53) ลงในสมการ (3.45) และ (3.46) หลังจากนั้นจัดสมการ (3.44)-(3.49) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_i\right) = 0 \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{u}_i\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{t}_{ji} + \tau_{ji}\right] \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\bar{\rho}\tilde{u}_j\left(\tilde{h} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_i + \bar{\rho}k\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-\bar{q}_{L_j} - q_{T_j} + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tilde{u}_i\left(\bar{t}_{ji} + \tau_{ji}\right)\right] \tag{3.56}$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \tag{3.57}$$

$$\mu = \mu_\infty\left(\frac{\tilde{T}}{T_\infty}\right)^{3/2}\frac{T_\infty + 110}{\tilde{T} + 110} \tag{3.58}$$

$$k_T = \frac{\mu C_p}{Pr} \tag{3.59}$$

เขียนสมการ (3.56) ให้อยู่ในรูปของสมการพลังงานรวมจำเพาะได้ดังนี้ (Varangrat, 1999)

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\tilde{e}_T\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{k_T}{C_v} + \frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial \tilde{e}_T}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\tilde{u}_i\left(\tilde{t}_{ji} + \tau_{ji}\right)\right] - \frac{\partial\left(\tilde{u}_j\bar{p}\right)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{k_T}{C_v} + \frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial (K + k)}{\partial x_j}\right] \tag{3.60}$$

3.2.2.2 แบบจำลองการปั่นป่วน

แบบจำลองการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้ในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ ซึ่งประกอบด้วยสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน และสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{3.61}$$

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j k\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \tau_{ji}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho}\left(\varepsilon_s + \varepsilon_d + D\right) \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j \varepsilon_s\right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_j}\right] \\ &\quad + C_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{k}\tau_{ji}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \\ &\quad - \bar{\rho} C_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{k} - \frac{4}{3}\bar{\rho}\varepsilon_s \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} + \bar{\rho}E\end{aligned} \tag{3.63}$$

โดยที่

$$\varepsilon_d = M_t^2 \varepsilon_s$$

$$M_t^2 = 2\frac{k}{a^2}$$

$$D = 2\frac{\mu}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d + D$$

$$E = 2\frac{\mu\mu_t}{\bar{\rho}\rho}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_m}\right)\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_m}\right)$$

3.3 รูปทั่วไปของสมการควบคุม

สมการควบคุมที่นำเสนอในหัวข้อก่อนหน้านี้ ได้แก่ สมการความต่อเนื่อง สมการโมเมน-ตัม สมการพลังงาน สมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน และสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน ประกอบด้วยพจน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการพา (Convection Term) พจน์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแพร่กระจาย (Diffusion Term) และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย (Source or Sink Term) ดังนั้นสมการควบคุมข้างต้นสามารถเขียนในรูปทั่วไปบนพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S^{\phi} \tag{3.64}$$

ซึ่งค่าของ S^{ϕ} ได้สรุปไว้ในตารางที่ 3.1-3.4

3.4 การแปลงพิกัด

สมการควบคุมในรูปทั่วไปดังสมการ (3.64) นั้นสร้างอยู่ในระบบพิกัดฉากซึ่งเป็นรูปแบบที่ง่าย แต่การกำหนดเงื่อนไขขอบทำได้ยากเมื่อรูปทรงการไหลมีความซับซ้อน ดังนั้นพิกัดฉากจึงถูกแปลงไปเป็นพิกัดวัตถุ โดยวิธีการแปลงพิกัดแสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) \tag{3.66}$$

โดยที่

$$J=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta} \tag{3.67}$$

สมการควบคุมในรูปทั่วไปในสมการ (3.64) เมื่อแปลงไปสู่พิกัดวัตถุจะมีรูปสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho U\phi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\rho V\phi)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial\xi}-\beta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\gamma\frac{\partial\phi}{\partial\eta}-\beta\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\right]+JS^{\phi} \tag{3.68}$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
U &= u\frac{\partial y}{\partial \eta} - v\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
V &= v\frac{\partial x}{\partial \xi} - u\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\alpha &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \\
\beta &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
\gamma &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

หลังการแปลงพิกัดตัวแปรปฐมฐานและสัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจายยังคงเป็นค่าเดียวกันกับก่อนการแปลงพิกัด ส่วนพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียบนพิกัดวัตถุดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จากภาคผนวก ก.

ตารางที่ 3.1 ตัวแปรที่ต้องการทราบค่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของการไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว

สมการ	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}
ความต่อเนื่อง	1	0	0
x-momentum	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
y-momentum	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}$

ตารางที่ 3.2 ตัวแปรที่ต้องการทราบค่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของการไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้

สมการ	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}
ความต่อเนื่อง	1	0	0
x-momentum	u	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x}$
y-momentum	v	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}$
สมการพลังงาน	e_T	$\frac{k_T}{C_v}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[v\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$ $+\frac{\partial}{\partial y}\left[v\left(\frac{4}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}(up)-\frac{\partial}{\partial y}(vp)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_T}{C_v}\frac{\partial K}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_T}{C_v}\frac{\partial K}{\partial y}\right)$

ตารางที่ 3.3 ตัวแปรที่ต้องการทราบค่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว

สมการ	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}
ความต่อเนื่อง	1	0	0
x-momentum	$\bar{u}$	$\mu+\mu_t$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}$
y-momentum	$\bar{v}$	$\mu+\mu_t$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)-\frac{2}{3}\rho\frac{\partial k}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}$
พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน	k	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$\left(2\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\rho k\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\left(2\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\rho k\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ $-\rho\varepsilon_s-2\mu\left[\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2\right]$
อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน	ε_s	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{k}\left\{\left(2\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\rho k\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\left(2\mu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\rho k\right)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right\}$ $-\rho C_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{k}+2\mu\frac{\mu_t}{\rho}\left\{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right)^2\right\}$

ตารางที่ 3.4 ตัวแปรที่ต้องการทราบค่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

สมการ	ϕ	Γ^{ϕ}	S^{ϕ}
ความต่อเนื่อง	1	0	0
x-momentum	$\tilde{u}$	$\mu+\mu_t$	$\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}k)-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}$
y-momentum	$\tilde{v}$	$\mu+\mu_t$	$\frac{\partial}{\partial x}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right]+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}k)-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}$
พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน	k	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$\left(\frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu_t\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\left(\mu_t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\mu_t\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\left(\mu_t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\mu_t\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}$ $+\left(-\frac{2}{3}\mu_t\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu_t\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-2\mu\left[\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial y}\right)^2\right]-\bar{\rho}(\varepsilon_s+\varepsilon_d)$

ตารางที่ 3.4 ตัวแปรที่ต้องการทราบค่า สัมประสิทธิ์ของการแพร่กระจาย และพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียของการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้ (ต่อ)

อัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน	ε_s	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$C_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{k}\Big\{\Big[\Big(\mu_t \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\mu_t \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\Big)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\Big(\mu_t \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\mu_t \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\Big)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}+\Big(\frac{4}{3}\mu_t \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu_t \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\Big)\Big(\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\Big)$ $+\Big(-\frac{2}{3}\mu_t \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{4}{3}\mu_t \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\Big)\Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{4}{3}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\Big)\Big]\Big\}-\bar{\rho}C_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{k}-\frac{4}{3}\bar{\rho}\varepsilon_s\Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\Big)$ $+2\mu\frac{\mu_t}{\bar{\rho}}\Big\{\Big(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}\Big)^2+2\Big(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2}\Big)^2+2\Big(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y^2}\Big)^2\Big\}$
พลังงาน	$\tilde{e}_T$	$\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}$	$\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\tilde{u}\Big[\frac{4}{3}(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\Big]\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\tilde{u}\Big[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\Big]\Big\}$ $+\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\tilde{v}\Big[(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\Big]\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\tilde{v}\Big[\frac{4}{3}(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}-\frac{2}{3}(\mu+\mu_t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\Big]\Big\}$ $-\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}\bar{p})-\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}\bar{p})+\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\Big(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\Big)\frac{\partial k}{\partial x}\Big\}+\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\Big(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\Big)\frac{\partial k}{\partial y}\Big\}$ $-\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\Big(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\Big)\frac{\partial}{\partial x}(K+k)\Big\}-\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\Big(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\Big)\frac{\partial}{\partial y}(K+k)\Big\}$

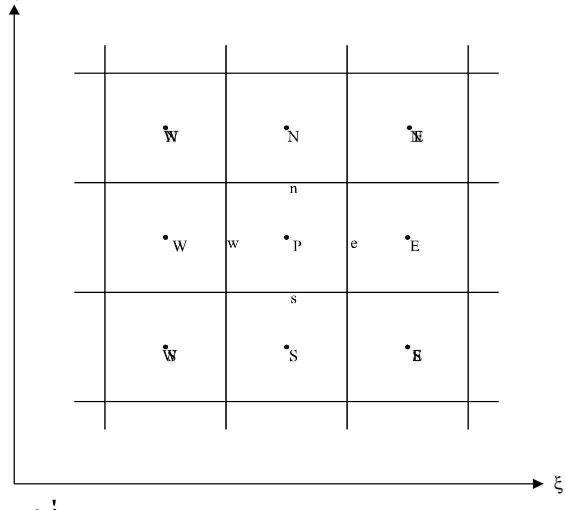
บทที่ 4
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ในบทนี้จะกล่าวถึงการดำเนินการหาคำตอบของสมการนาเวียร์สโตคส์โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในหัวข้อที่ 4.1 จะกล่าวถึงระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด โดยจะทำให้สมการนาเวียร์สโตคส์ซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสามารถหาคำตอบได้โดยกรรมวิธีทางพีชคณิต หัวข้อ 4.2 จะกล่าวถึงระเบียบวิธีที่ใช้ในการหาความดัน โดยจะกล่าวถึงขั้นตอนวิธี SIMPLER สมการความดัน สมการค่าแก้ไขความดัน และการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow ส่วนหัวข้อสุดท้ายหัวข้อที่ 4.3 จะกล่าวถึงขั้นตอนการดำเนินการ

4.1 ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด

ความไม่สามารถหาผลเฉลยได้ในรูปทั่วไปของสมการนาเวียร์สโตคส์ ทำให้การหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตคส์ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแทนการใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ งานวิจัยนี้เลือกใช้ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดด้วยเห็นว่าเป็นระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับปัญหาการไหลของของไหลมากที่สุดเพราะสร้างขึ้นบนพื้นฐานของการสมดุลแห่งฟลักซ์ต่าง ๆ ที่วิ่งผ่านเข้าออกพื้นผิวโดยรอบของก้อนมวล ซึ่งเป็นพฤติกรรมขั้นพื้นฐานที่สุดในการสร้างสมการนาเวียร์สโตคส์ของของไหล (ทวิช จิตรสมบูรณ์ และ สุวรรณา อรรฐาเมศร์, 2542) ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดอธิบายได้ดังนี้

พิจารณารูปที่ 4.1 และสมการ (4.1) ซึ่งเป็นรูปทั่วไปของสมการควบคุมบนพิกัดวัตถุ



รูปที่ 4.1 ปริมาตรควบคุมบนพิกัดวัตถุ

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi)+\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\alpha\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\gamma\frac{\partial \phi}{\partial \eta}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\right]+JS^{\phi} \tag{4.1}$$

หาปริพันธ์ตลอดปริมาตรควบคุม ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi)d\xi d\eta+\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi)d\eta d\xi &= \int_s^n\int_w^e \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\alpha\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)\right]d\xi d\eta \\ &+\int_w^e\int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\gamma\frac{\partial \phi}{\partial \eta}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\right]d\eta d\xi+\int_s^n\int_w^e JS^{\phi}d\xi d\eta\end{aligned} \tag{4.2}$$

ภายใต้สมมุติฐาน คุณสมบัติของของไหลมีค่าคงที่ตลอดพื้นผิวควบคุม ดังนั้นสมการ (4.2) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\left[\rho U\phi\Delta\eta\right]_w^e+\left[\rho V\phi\Delta\xi\right]_s^n &= \left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\alpha\frac{\partial \phi}{\partial \xi}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)\Delta\eta\right]_w^e \\ &+\left[\frac{\Gamma^{\phi}}{J}\left(\gamma\frac{\partial \phi}{\partial \eta}-\beta\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\Delta\xi\right]_s^n+J\overline{S}^{\phi}\Delta\xi\Delta\eta\end{aligned} \tag{4.3}$$

จัดรูปสมการ (4.3) ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}&(\rho U\Delta\eta)_e\phi_e-(\rho U\Delta\eta)_w\phi_w+(\rho V\Delta\xi)_n\phi_n-(\rho V\Delta\xi)_s\phi_s \\ &=\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_e\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e-\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_w\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_w \\ &+\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_n\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_n-\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_s\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_s \\ &-\left[\left(\frac{\Gamma^{\phi}\beta}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\Delta\eta\right)_w^e+\left(\frac{\Gamma^{\phi}\beta}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\Delta\xi\right)_s^n\right]+J\overline{S}^{\phi}\Delta\xi\Delta\eta\end{aligned} \tag{4.4}$$

ใช้ระเบียบวิธีแบบผลต่างกลาง (Central Differencing Scheme) กับพจน์ $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_e$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)_w$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_n$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right)_s$ ในสมการ (4.4) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta\xi}$$
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta\xi}$$
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta\eta} \qquad (4.5)$$
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)_s = \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta\eta}$$

ใช้ระเบียบวิธีแบบต้นลมอันดับที่หนึ่ง (First Order Upwind Differencing Scheme) กับพจน์ ϕ_e, ϕ_w, ϕ_n, ϕ_s ในสมการ (4.4) ซึ่งแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

$\phi_e = \phi_P$ เมื่อ $(\rho U\Delta\eta)_e > 0$, $\qquad \phi_e = \phi_E$ เมื่อ $(\rho U\Delta\eta)_e < 0$

$\phi_w = \phi_W$ เมื่อ $(\rho U\Delta\eta)_w > 0$, $\qquad \phi_w = \phi_P$ เมื่อ $(\rho U\Delta\eta)_w < 0$

$\phi_n = \phi_P$ เมื่อ $(\rho V\Delta\xi)_n > 0$, $\qquad \phi_n = \phi_N$ เมื่อ $(\rho V\Delta\xi)_n < 0$

$\phi_s = \phi_S$ เมื่อ $(\rho V\Delta\xi)_s > 0$, $\qquad \phi_s = \phi_P$ เมื่อ $(\rho V\Delta\xi)_s < 0$

แม้ว่าระเบียบวิธีแบบต้นลมอันดับที่หนึ่งจะให้ค่าความถูกต้องเพียงอันดับที่หนึ่ง แต่ข้อดีประการหนึ่งของระเบียบวิธีนี้ คือคำตอบที่ได้ในแต่ละรอบของการคำนวณจะไม่มีการแกว่งตัว ซึ่งการแกว่งตัวนี้อาจทำให้การคำนวณหยุดลงโดยทันทีทันใด เช่น หากการแกว่งตัวนั้นทำให้พลังงานจลน์ของการปั่นป่วนมีค่าน้อยกว่าศูนย์ หลังจากนั้นแทนค่าต่าง ๆ ข้างต้นลงในสมการ (4.4) จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + b^\phi \qquad (4.6)$$

A_P, A_E, A_W, A_N, A_S และ b^ϕ แสดงรายละเอียดดังต่อไปนี้

$$A_E = \left(\frac{\Gamma^\phi \alpha\Delta\eta}{J}\right)_e + \max\left[-(\rho U\Delta\eta)_e, 0\right]$$
$$A_W = \left(\frac{\Gamma^\phi \alpha\Delta\eta}{J}\right)_w + \max\left[(\rho U\Delta\eta)_w, 0\right]$$
$$A_N = \left(\frac{\Gamma^\phi \gamma\Delta\xi}{J}\right)_n + \max\left[-(\rho V\Delta\xi)_n, 0\right]$$

$$A_S = \left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_s + \max\left[(\rho V\Delta\xi)_s, 0\right]$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$b^{\phi} = J\bar{S}^{\phi}\Delta\xi\Delta\eta - \left[\left(\frac{\Gamma^{\phi}\beta}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\Delta\eta\right)_w^e + \left(\frac{\Gamma^{\phi}\beta}{J}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\Delta\xi\right)_s^n\right]$$

โดยที่

$$\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_e = \frac{\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_P + \left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_E}{2}$$

$$\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_w = \frac{\left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_P + \left(\frac{\Gamma^{\phi}\alpha\Delta\eta}{J}\right)_W}{2}$$

$$\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_P + \left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_N}{2}$$

$$\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_s = \frac{\left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_P + \left(\frac{\Gamma^{\phi}\gamma\Delta\xi}{J}\right)_S}{2}$$

พจน์ที่อยู่ในเครื่องหมายวงเล็บเหลี่ยมของ b^{ϕ} เรียกว่า พจน์ Cross Derivative โดยพจน์นี้จะมีค่าน้อยมากจึงนิยมรวมเข้ากับค่าเฉลี่ยของพจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสีย b^{ϕ} จะหาจากตัวแปรต่าง ๆ ที่ทราบค่าจากการคำนวณในครั้งก่อน ส่วนการหาค่า ϕ_P ขึ้นอยู่กับประเภทของวิธีการหาคำตอบที่ใช้ หากให้ ϕ_E, ϕ_W, ϕ_N และ ϕ_S เป็นตัวแปรที่ทราบค่าจากการคำนวณในครั้งก่อนจะเรียกการหาคำตอบประเภทนี้ว่า ระเบียบวิธีการหาคำตอบแบบโดดเด่น (Explicit Method) แต่ถ้าหากให้ ϕ_E, ϕ_W, ϕ_N และ ϕ_S เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและทำการหาคำตอบไปพร้อม ๆ กับ ϕ_P จะเรียกการหาคำตอบประเภทนี้ว่า ระเบียบวิธีการหาคำตอบแบบซ่อนเร้น (Implicit Method) ซึ่งอย่างแรกเป็นวิธีการที่ง่ายกว่า แต่ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากกว่า ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีการ Line-by-Line TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) โดยจะทำการหาค่า ϕ_P, ϕ_N และ ϕ_S ไปพร้อม ๆ กัน ส่วนค่า ϕ_E และ ϕ_W เป็นค่าที่ทราบจากการคำนวณในครั้งก่อน ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Versteeg and Malalasekera (1995) การคำนวณจะเริ่มจากบริเวณทางเข้าของขอบเขตแล้วจึงกวาดตัวไปตามทิศทางของการไหลจนถึงทางออกของขอบเขต การกวาดตัวในลักษณะนี้จะทำให้

ผลการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบเร็วกว่าการกวาดตัวในทิศทางอื่น ๆ (Versteeg and Malalasekera, 1995)

4.2 ขั้นตอนวิธี SIMPLER

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นเพื่อหาผลเฉลยของการไหลในย่านความเร็วสูง (เลขมัคมากกว่า 0.8) ซึ่งการไหลเป็นแบบอัดตัวได้ ความหนาแน่นถูกพิจารณาเป็นหนึ่งในตัวแปรปฐมฐาน ส่วนความดันหาได้จากสมการสภาวะ แต่ปัญหาที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่นี้เป็นการหาผลเฉลยของการไหลในย่านความเร็วไม่สูงนัก คือที่เลขมัคไม่เกิน 0.8 ซึ่งความหนาแน่นเปลี่ยนแปลงไม่มาก ส่งผลให้ความดันกับความหนาแน่นเกาะเกี่ยวกันแบบไม่ชัดเจน วิธีการที่นิยมใช้สำหรับการแก้ปัญหานี้คือให้ความดันเป็นตัวแปรปฐมฐานแทนความหนาแน่น แต่เนื่องจากสมการนาเวียร์สโตคส์ไม่มีสมการสำหรับหาค่าของความดันโดยตรง ดังนั้นการจะหาค่าของความดันต้องใช้ขั้นตอนวิธีเพิ่มเติม ได้แก่ ขั้นตอนวิธี SIMPLE ขั้นตอนวิธี SIMPLER ขั้นตอนวิธี SIMPLEC หรือ ขั้นตอนวิธี PISO เป็นต้น งานวิจัยนี้เลือกใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLER ในการหาค่าของความดัน เนื่องจากเป็นขั้นตอนวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายและไม่ยุ่งยากซับซ้อนเกินไป

สมการโมเมนตัมไม่สามารถดำเนินการหาผลเฉลยได้หากไม่ทราบค่าความชันของความดันเสียก่อน โดยทั่วไปความเร็วและความดันจะมีความสัมพันธ์กันโดยอ้อม กล่าวคือ หากทราบความดันที่ถูกต้องจะทำให้ความเร็วซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการโมเมนตัมสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง ขั้นตอนวิธี SIMPLER ถูกนำมาใช้เพื่อเปลี่ยนความสัมพันธ์กันโดยอ้อมระหว่างความเร็วกับความดันไปเป็นความสัมพันธ์กันโดยตรง ขั้นตอนวิธี SIMPLER ประกอบด้วยสมการสองสมการ คือ สมการค่าแก้ไขความดัน และสมการความดัน

4.2.1 สมการค่าแก้ไขความดัน

ค่าของความเร็วและความดันที่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปผลรวมของค่าที่ไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องกับค่าแก้ไขเพื่อให้สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \\ p &= p^* + p' \end{aligned} \tag{4.7}$$

ความเร็วที่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$u_P = \sum_{EWNS} \frac{A^u u}{A_P^u} + \frac{\overline{S}_i^u}{A_P^u} + \left(B^u \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)$$
$$v_P = \sum_{EWNS} \frac{A^v v}{A_P^v} + \frac{\overline{S}_i^v}{A_P^v} + \left(B^v \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \tag{4.8}$$

ส่วนความเร็วที่ไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$u_P^* = \sum_{EWNS} \frac{A^u u^*}{A_P^u} + \frac{\overline{S}_i^u}{A_P^u} + \left(B^u \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right)$$
$$v_P^* = \sum_{EWNS} \frac{A^v v^*}{A_P^v} + \frac{\overline{S}_i^v}{A_P^v} + \left(B^v \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right) \tag{4.9}$$

ความเร็วที่ไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่องจะส่งผลให้มีการสร้างมวลส่วนเกินขึ้นมาในระหว่างการคำนวณ การกำจัดมวลส่วนเกินนี้สามารถทำได้โดยการปรับแก้ความเร็วข้างต้นเพื่อให้ความเร็วมีค่าสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง ดังจะได้อธิบายต่อไป หลังจากนั้นลบสมการ (4.8) ด้วยสมการ (4.9) จะได้สมการต่อไปนี้

$$u'_P = \sum_{EWNS} \frac{A^u u'}{A_P^u} + \left(B^u \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right)$$
$$v'_P = \sum_{EWNS} \frac{A^v v'}{A_P^v} + \left(B^v \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \tag{4.10}$$

ไม่พิจารณาค่าของพจน์ $\sum_{EWNS} \frac{A^u u'}{A_P^u}$ และพจน์ $\sum_{EWNS} \frac{A^v v'}{A_P^v}$ ตามแนวทางของขั้นตอนวิธี SIMPLE ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน Patankar (1980) ดังนั้นสมการ (4.10) จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$u'_P = B^u \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta}$$
$$v'_P = B^v \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \tag{4.11}$$

แทนค่าสมการ (4.11) ลงในสมการ (4.7) จะได้สมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
u &= u^* + \left(B^u \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \\
v &= v^* + \left(B^v \frac{\partial p'}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

จากนิยามของ U และ V ดังสมการ (3.69) คือ

$$
\begin{aligned}
U &= u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \\
V &= v \frac{\partial x}{\partial \xi} - u \frac{\partial y}{\partial \xi}
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

แทนค่าสมการ (4.12) ลงในสมการ (3.69) และจัดรูปสมการใหม่จะได้สมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
U &= U^* + \left(B^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - B^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \left(C^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - C^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p'}{\partial \eta} \\
V &= V^* + \left(C^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - C^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \left(B^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - B^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p'}{\partial \xi}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

พจน์สุดท้ายในสมการ (4.13) จะมีค่าน้อยกว่าพจน์อื่น ๆ มากเมื่อเส้นกริดวางตัวเกือบตั้งฉากกัน (Rhie and Chow, 1983) ดังนั้นจึงไม่พิจารณาค่าจากพจน์ดังกล่าว สมการ (4.13) จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
U &= U^* + B \frac{\partial p'}{\partial \xi} \\
V &= V^* + C \frac{\partial p'}{\partial \eta}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

จากสมการความต่อเนื่อง

$$
(\rho U \Delta \eta)_e - (\rho U \Delta \eta)_w + (\rho V \Delta \xi)_n - (\rho V \Delta \xi)_s = 0 \tag{4.15}
$$

แทนค่าสมการ (4.14) ลงในสมการความต่อเนื่องแล้วจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\left(\rho B\frac{\partial p'}{\partial \xi}\Delta\eta\right)_e - \left(\rho B\frac{\partial p'}{\partial \xi}\Delta\eta\right)_w + \left(\rho C\frac{\partial p'}{\partial \eta}\Delta\xi\right)_n - \left(\rho C\frac{\partial p'}{\partial \eta}\Delta\xi\right)_s + m_P = 0 \qquad (4.16)$$

ใช้ระเบียบวิธีแบบผลต่างกลางกับพจน์ $\frac{\partial p'}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial p'}{\partial \eta}$ ในสมการ (4.16) จัดรูปสมการใหม่เป็น

$$A_P^p p'_P = A_E^p p'_E + A_W^p p'_W + A_N^p p'_N + A_S^p p'_S + m_P \qquad (4.17)$$

โดยที่

$$A_E^p = \left(\rho B\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right)_e$$
$$A_W^p = \left(\rho B\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right)_w$$
$$A_N^p = \left(\rho C\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\right)_n$$
$$A_S^p = \left(\rho C\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\right)_s$$
$$A_P^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p$$
$$m_P = \left(\rho U^*\Delta\eta\right)_e - \left(\rho U^*\Delta\eta\right)_w + \left(\rho V^*\Delta\xi\right)_n - \left(\rho V^*\Delta\xi\right)_s$$

สมการ (4.17) เรียกว่า สมการค่าแก้ไขความดัน m_P คือมวลส่วนเกินที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมมีค่าไม่สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง เพื่อให้ความเร็วที่ได้สอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง จึงต้องใช้ค่าแก้ไขความดันปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัม ดังแสดงในสมการ (4.12)

4.2.2 สมการความดัน

ในหัวข้อ 4.2.1 ได้กล่าวถึงการปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดันเพื่อให้ความเร็วมีค่าสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง แต่ยังไม่ได้กล่าวถึงการหาค่าของความดัน ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าของความดันเพื่อให้ความเร็วและความดันสอดคล้องตามสมการความต่อเนื่อง ขั้นแรกเขียนความเร็วในรูปของสมการต่อไปนี้

$$u_P = \hat{u} + \left(B^u \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^u \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)$$
$$v_P = \hat{v} + \left(B^v \frac{\partial p}{\partial \xi} + C^v \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) \tag{4.18}$$

โดยที่ $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ คือ Pseudovelocity ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\hat{u} = \sum_{EWNS} \frac{A^u u}{A_P^u} + \frac{\overline{S}_i^u}{A_P^u}$$
$$\hat{v} = \sum_{EWNS} \frac{A^v v}{A_P^v} + \frac{\overline{S}_i^v}{A_P^v} \tag{4.19}$$

แทนค่าสมการ (4.18) ลงใน U และ V ดังสมการ (3.69) หลังจากนั้นจัดรูปสมการได้ดังนี้

$$U = \hat{U} + \left(B^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - B^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi} + \left(C^u \frac{\partial y}{\partial \eta} - C^v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta}$$
$$V = \hat{V} + \left(C^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - C^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p}{\partial \eta} + \left(B^v \frac{\partial x}{\partial \xi} - B^u \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{4.20}$$

พจน์สุดท้ายในสมการ (4.20) มีค่าน้อยกว่าพจน์อื่น ๆ มากเมื่อเส้นกริดวางตัวเกือบตั้งฉากกัน (Rhie and Chow, 1983) ดังนั้นจึงไม่พิจารณาค่าจากพจน์ดังกล่าว สมการ (4.20) จึงเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$U = \hat{U} + B \frac{\partial p}{\partial \xi}$$
$$V = \hat{V} + C \frac{\partial p}{\partial \eta} \tag{4.21}$$

แทนค่าสมการ (4.21) ลงในสมการความต่อเนื่องแล้วจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\left(\rho B \frac{\partial p}{\partial \xi} \Delta \eta \right)_e - \left(\rho B \frac{\partial p}{\partial \xi} \Delta \eta \right)_w + \left(\rho C \frac{\partial p}{\partial \eta} \Delta \xi \right)_n - \left(\rho C \frac{\partial p}{\partial \eta} \Delta \xi \right)_s + m_P = 0 \tag{4.22}$$

ใช้ระเบียบวิธีแบบผลต่างกลางกับพจน์ $\frac{\partial p}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ ในสมการ (4.22) จัดรูปสมการใหม่จะได้สมการความดัน ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$A_P^p p = A_E^p p_E + A_W^p p_W + A_N^p p_N + A_S^p p_S + m_P \tag{4.23}$$

โดยที่

$$A_E^p = \left(\rho B \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right)_e$$
$$A_W^p = \left(\rho B \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right)_w$$
$$A_N^p = \left(\rho C \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\right)_n$$
$$A_S^p = \left(\rho C \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\right)_s$$
$$A_P^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p$$
$$m_P = \left(\rho\hat{U}\Delta\eta\right)_e - \left(\rho\hat{U}\Delta\eta\right)_w + \left(\rho\hat{V}\Delta\xi\right)_n - \left(\rho\hat{V}\Delta\xi\right)_s$$

4.2.3 การประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow

การหาค่า m_p ในสมการ (4.17) นั้นต้องหาจากฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุม ซึ่งการหาค่าฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าปริมาตรควบคุม ซึ่งเปรียบได้กับการแตกตัวอย่างสมมาตรจากจุด (Central Difference) สำหรับระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ในการทำเช่นนี้กระบวนการหาคำตอบอาจเสียเสถียรภาพได้ง่าย เพราะเกิดการไม่เกาะเกี่ยวกัน (Decoupling) ระหว่างจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคู่กับจุดที่มีค่าเลขบอกพิกัดเป็นเลขคี่ ซึ่งคำตอบในทั้งสองระบบพิกัดอาจเป็นอิสระต่อกัน (Out of Phase) อย่างสิ้นเชิง โดยที่คำตอบในทั้งสองระบบพิกัดต่างก็ยังเป็นผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตค (ทวิช จิตรสมบูรณ์ และ สุวรรณา อรรฐาเมศร์, 2542) เพื่อสร้างกลไกให้มีการเกาะเกี่ยวกันระหว่างระบบพิกัดข้างต้นจึงได้นำการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow มาใช้แทนการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าปริมาตรควบคุม โดยแสดงรายละเอียดดังนี้

แทนค่าสมการ (4.9) ลงใน U และ V ดังสมการ (3.69) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} U^* &= B\frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \ldots \\ V^* &= C\frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \ldots \end{aligned} \tag{4.24}$$

เพื่อความสะดวกในการอธิบายจึงละพจน์อื่น ๆ ที่ไม่เกี่ยวข้อง การหาฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าปริมาตรควบคุมทำให้ฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมไม่สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุมได้ ($1\Delta\xi$ and $1\Delta\eta$ - Pressure Variation) โดยสามารถตรวจจับได้เพียงการเปลี่ยนแปลงความดันใน 2 ช่วงปริมาตรควบคุมเท่านั้น การประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow จะทำการแก้ไขการหาฟลักซ์ที่หน้าของปริมาตรควบคุมเพื่อให้สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุมได้ ซึ่งอธิบายเป็นสมการได้ดังนี้

$$(\rho U^*)_e = \overline{\rho U^*} + \overline{\rho B}\left(\frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta\xi} - \overline{\frac{\partial p^*}{\partial \xi}}\right)$$

$$(\rho U^*)_w = \overline{\rho U^*} + \overline{\rho B}\left(\frac{p_P^* - p_W^*}{\Delta\xi} - \overline{\frac{\partial p^*}{\partial \xi}}\right)$$

$$(\rho V^*)_n = \overline{\rho V^*} + \overline{\rho C}\left(\frac{p_N^* - p_P^*}{\Delta\eta} - \overline{\frac{\partial p^*}{\partial \eta}}\right)$$

$$(\rho V^*)_s = \overline{\rho V^*} + \overline{\rho C}\left(\frac{p_P^* - p_S^*}{\Delta\eta} - \overline{\frac{\partial p^*}{\partial \eta}}\right)$$

โดยที่เส้นตรงที่อยู่เหนือตัวแปรแทนการหาค่าที่หน้าของปริมาตรควบคุมโดยการเฉลี่ยจากค่าของตัวแปรที่อยู่คนละด้านของหน้าปริมาตรควบคุม จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงความดันใน 2 ช่วงปริมาตรควบคุมถูกแทนที่ด้วยการเปลี่ยนแปลงความดันใน 1 ช่วงปริมาตรควบคุม

4.3 ขั้นตอนการดำเนินการ

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาพฤติกรรมของของไหลขณะไหลผ่านสิ่งกีดขวางสองประเภท คือ การไหลผ่านแผ่นเรียบ และการไหลผ่านส่วนโค้งกลม การไหลผ่านแผ่นเรียบได้รับเลือกเป็นกรณีศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและแบบจำลองการปั่นป่วนที่ใช้ในงานวิจัย ส่วนการไหลผ่านส่วนโค้งกลมได้รับเลือกเป็นกรณีศึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของการประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow

การไหลผ่านแผ่นเรียบเป็นการศึกษาพฤติกรรมการไหลของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบ ซึ่งการไหลของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบนี้เป็นที่นิยมศึกษาอย่างกว้างขวาง เนื่องจากหากทราบพฤติกรรมการ

ไหลของชั้นชิดผิวจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการออกแบบทางด้านอากาศพลศาสตร์และอุปกรณ์ถ่ายเทความร้อน ข้อมูลของการไหลของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบสามารถพบได้ทั่วไป ทั้งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ได้แก่ ผลเฉลยของบลาเซียส (Blasius's solution) ผลเฉลยเชิงตัวเลข เช่น Spalart (1988) และข้อมูลจากการทดลอง เช่น Motallebi (1944) และ Motallebi (1996) เป็นต้น การไหลผ่านแผ่นเรียบนี้อยู่ภายใต้สมมุติฐานความชันของความดันมีค่าเท่ากับศูนย์

การไหลผ่านส่วนโค้งกลมเป็นการศึกษาพฤติกรรมการไหลของชั้นชิดผิวที่ได้รับอิทธิพลจากความชันของความดัน และลักษณะความโค้งของรูปทรงที่ของไหลไหลผ่าน ซึ่งต่างจากกรณีการไหลผ่านแผ่นเรียบ การไหลผ่านส่วนโค้งกลมเป็นการประยุกต์ประเภทหนึ่งที่มีความสำคัญอย่างสูงเนื่องจากสามารถพัฒนาไปสู่การไหลผ่านใบพัดและปีกเครื่องบินได้

ขั้นตอนการดำเนินการแบ่งออกเป็น 3 ส่วน คือ การสร้างกริด การกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ และขั้นตอนการคำนวณ

4.3.1 การสร้างกริด

การสร้างกริดทั้งสำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบและการไหลผ่านส่วนโค้งกลม เลือกใช้วิธี Normalizing Transformation เนื่องจากรูปทรงการไหลที่ต้องการศึกษามีความซับซ้อนค่อนข้างน้อย ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก Hoffman (1992)

4.3.1.1 การไหลผ่านแผ่นเรียบ

กริดตามแนวแกน x ถูกสร้างขึ้นโดยให้ระยะห่างระหว่างกริดแต่ละเส้นมีขนาดที่เท่ากัน ส่วนตามแนวแกน y นั้นกริดจะมีความหนาแน่นแตกต่างกันไป โดยกริดจะมีความหนาแน่นสูงในบริเวณใกล้กับแผ่นเรียบ ทั้งนี้เพื่อให้ผลเฉลยมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นในบริเวณใกล้กับแผ่นเรียบซึ่งการไหลมีความชันของความเร็วสูงกว่าบริเวณอื่น ในขั้นแรกได้ทำการประเมินความหนาของชั้นชิดผิวโดยทางทฤษฎีของการไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว และการไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้ ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 4.1 ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก White (1991) หลังจากนั้นกำหนดให้ความสูงของขอบเขตเป็น 5 เท่าของความหนาของชั้นชิดผิว ส่วนกรณีการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้นั้นไม่สามารถทำการประเมินความหนาของชั้นชิดผิวได้โดยทางทฤษฎี จากการทดสอบเปลี่ยนความสูงของขอบเขตของการคำนวณพบว่า หากให้ความสูงของขอบเขตมีค่า 40 เท่าของความหนาของชั้นชิดผิวของกรณีการไหลแบบราบ

เรียบและอัดตัวได้จะให้คำตอบที่สอดคล้องกับการทดลองในระดับที่ยอมรับได้ ระยะห่างช่วงแรกตามแนวแกน y ถัดจากแผ่นเรียบต้องมีค่าน้อยกว่าความหนาของชั้นชิดผิวจากนั้นขยายตัวเพิ่มขึ้นทีละ 8% สำหรับการไหลแบบราบเรียบ ส่วนการไหลแบบปั่นป่วน Georgiadis, Chitsomboon and Zhu (1994) แนะนำให้กำหนด y^+ ในตำแหน่งแรกถัดจากแผ่นเรียบมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเพื่อให้ผลเฉลยมีความถูกต้องสูง

รูปที่ 4.2ก แสดงรายละเอียดของแผ่นเรียบ รูปที่ 4.2ข แสดงลักษณะการกระจายตัวของกริดสำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบ

4.3.1.2 การไหลผ่านส่วนโค้งกลม

ที่ตำแหน่งทางเข้าของการไหลผ่านส่วนโค้งกลมต้องใช้ข้อมูลของตัวแปรต่าง ๆ จากการคำนวณในส่วนของการไหลผ่านแผ่นเรียบดังนั้นระยะตามแนวแกน y จึงถูกกำหนดโดยการคำนวณในส่วนของการไหลผ่านแผ่นเรียบ ส่วนกริดในแนวแกน x จะหนาแน่นบริเวณส่วนโค้งกลม และเบาบางบริเวณแผ่นเรียบก่อนและหลังส่วนโค้ง

รูปที่ 4.3ก แสดงรายละเอียดของส่วนโค้งกลม และรูปที่ 4.3ข แสดงลักษณะการกระจายตัวของกริดสำหรับการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

4.3.2 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

งานวิจัยนี้ดำเนินการแก้สมการนาเวียร์สโตคส์ภายใต้เงื่อนไขสภาวะคงตัวและการไหลในย่านความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียง ดังนั้นคุณลักษณะของสมการนาเวียร์สโตคส์จึงจัดอยู่ในประเภทอิลลิปติค เงื่อนไขเริ่มต้นของทั้งการไหลผ่านแผ่นเรียบและการไหลผ่านส่วนโค้งกลมจึงกำหนดให้คุณสมบัติของของไหลมีค่าเท่ากับคุณสมบัติของของไหลที่ความดัน 1 บรรยากาศ และอุณหภูมิ 300 เคลวิน ส่วนเงื่อนไขขอบแยกเป็นสองกรณีคือกรณีการไหลผ่านแผ่นเรียบ และกรณีการไหลผ่านส่วนโค้งกลม ดังแสดงรายละเอียดได้ดังนี้

4.3.2.1 การไหลผ่านแผ่นเรียบ

เงื่อนไขขอบที่ทางเข้ากำหนดเป็น Subsonic Inflow คือกำหนดค่าให้กับ u และ v ส่วนตัวแปรอื่นหาโดยใช้การประมาณค่านอกช่วง ที่ทางออกกำหนดเป็น

Subsonic Outflow คือกำหนดค่าความดัน ส่วนตัวแปรอื่นหาโดยใช้การประมาณค่านอกช่วง ที่พื้นผิวของแผ่นเรียบใช้เงื่อนไข No Slip คือความเร็วมีค่าเท่ากับศูนย์ พลังงานจลน์ของการปั่นป่วนและอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนมีค่าเท่ากับศูนย์ตลอดขอบด้านล่างของขอบเขต ส่วนความดันหาโดยใช้การประมาณค่านอกช่วง ที่ขอบด้านบนของขอบเขตใช้การประมาณค่านอกช่วงกับทุกตัวแปร สำหรับเงื่อนไขขอบของพลังงานรวมจำเพาะหาได้จากความสัมพันธ์ $e_T = C_v T + K + k$ รูปที่ 4.2ค แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของการไหลผ่านแผ่นเรียบ เนื่องจากการกำหนดเงื่อนไขขอบของค่าแก้ไขความดันสำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบและการไหลผ่านส่วนโค้งกลมมีขั้นตอนและวิธีดำเนินการเหมือนกัน ดังนั้นจะกล่าวถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบของค่าแก้ไขความดันในภายหลัง

4.3.2.2 การไหลผ่านส่วนโค้งกลม

เงื่อนไขขอบที่ทางเข้าถูกกำหนดจากการแก้ปัญหาการไหลผ่านแผ่นเรียบ ยกเว้นความดันซึ่งหาโดยใช้การประมาณค่านอกช่วง เงื่อนไขขอบที่ทางออก ขอบด้านล่าง และขอบด้านบนของขอบเขตกำหนดเช่นเดียวกันกับกรณีการไหลผ่านเรียบ รูปที่ 4.3ค แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

ในส่วนของเงื่อนไขขอบของค่าแก้ไขความดัน สรุปได้ดังนี้ จากนิยามของค่าแก้ไขความดัน $p = p^* + p'$ ทำให้ค่าแก้ไขความดันที่ทางออกของขอบเขตมีค่าเท่ากับศูนย์ ค่าแก้ไขความดันที่ขอบด้านบนของขอบเขตหาโดยใช้การประมาณค่านอกช่วง ส่วนที่ทางเข้าและที่พื้นผิวซึ่งเป็นตำแหน่งที่ทราบค่าที่แน่นอนของความเร็ว การกำหนดเงื่อนไขขอบของค่าแก้ไขความดันที่ทางเข้าของขอบเขตพิจารณาจากสมการ (4.19) ดังต่อไปนี้

$$U_{inflow} = U^*_{inflow} + B\frac{\partial p'}{\partial \xi}$$

แต่เนื่องจากทราบค่าที่แน่นอนของ U_{inflow} ดังนั้นเงื่อนไขขอบที่ทางเข้าของขอบเขตจึงถูกกำหนดโดย $\frac{\partial p'}{\partial \xi} = 0$ ส่วนที่ขอบด้านล่างของขอบเขตพิจารณาในแนวทางเดียวกันกับที่ทางเข้าของขอบเขตดังนั้นจึงได้ว่า $\frac{\partial p'}{\partial \eta} = 0$

4.3.3 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนการคำนวณภายหลังจากการสร้างกริด กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและกำหนดเงื่อนไขขอบ สำหรับการไหลแต่ละประเภทแสดงดังต่อไปนี้

4.3.3.1 การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว

1) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาความเร็ว
2) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
3) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
4) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
5) กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 จนกระทั่งผลการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ

4.3.3.2 การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว

1) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาความเร็ว
2) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
3) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
4) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
5) คำนวณพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนและอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน โดยเลือกใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทหนึ่งสมการ
6) กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1 จนกระทั่งการคำนวณครบ 500 รอบ เพื่อสร้างเงื่อนไขเริ่มต้น
7) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาความเร็ว
8) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
9) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน

10) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
11) คำนวณสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
12) คำนวณสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
13) กลับไปทำในขั้นตอนที่ 7 จนกระทั่งผลการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ

4.3.3.3 การไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้

1) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาความเร็ว
2) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
3) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
4) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
5) คำนวณสมการพลังงานเพื่อหาพลังงานรวมจำเพาะ
6) คำนวณความหนาแน่นจากสมการสภาวะ
7) คำนวณความหนืดพลวัตรจากกฎของ Sutherland
8) คำนวณสภาพนำความร้อนจากนิยามของเลขพรันด์เทิล
9) กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 จนกระทั่งผลการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ

4.3.3.4 การไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

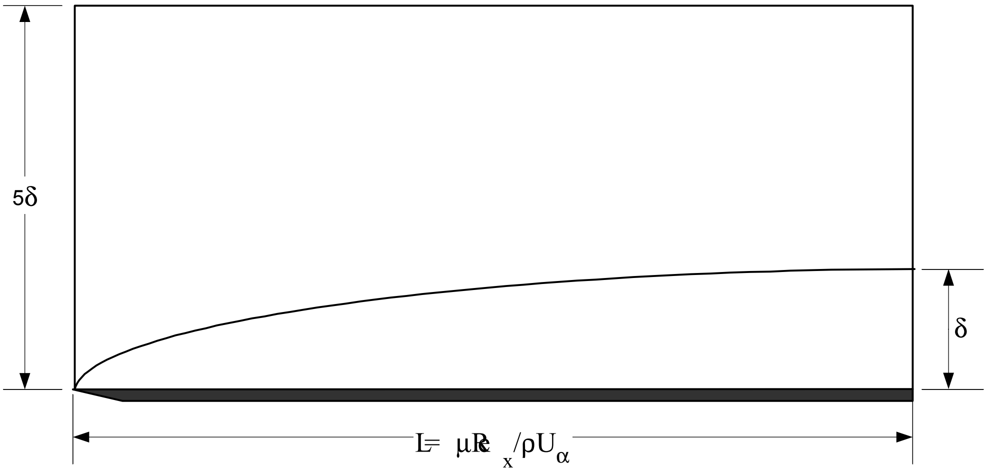
1) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาค่าความเร็ว
2) คำนวณสมการความดันเพื่อหาค่าความดัน
3) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
4) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
5) คำนวณพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนและอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนโดยเลือกใช้แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทหนึ่งสมการ
6) คำนวณสมการพลังงานเพื่อหาพลังงานรวมจำเพาะ

7) คำนวณความหนาแน่นจากสมการสภาวะ
8) คำนวณความหนืดพลวัตรจากกฎของ Sutherland
9) คำนวณสภาพนำความร้อนจากนิยามของเลขพรันด์เทิล
10) กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 1 จนกระทั่งการคำนวณครบ 500 รอบ เพื่อสร้างเงื่อนไขเริ่มต้น
11) คำนวณสมการโมเมนตัมเพื่อหาความเร็ว
12) คำนวณสมการความดันเพื่อหาความดัน
13) คำนวณสมการค่าแก้ไขความดันเพื่อหาค่าแก้ไขความดัน
14) ปรับแก้ความเร็วที่ได้จากสมการโมเมนตัมด้วยค่าแก้ไขความดัน ดังสมการ (4.12)
15) คำนวณสมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
16) คำนวณสมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนเพื่อหาอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน
17) คำนวณสมการพลังงานเพื่อหาพลังงานรวมจำเพาะ
18) คำนวณความหนาแน่นจากสมการสภาวะ
19) คำนวณความหนืดพลวัตรจากกฎของ Sutherland
20) คำนวณสภาพนำความร้อนจากนิยามของเลขพรันด์เทิล
21) กลับไปทำตามขั้นตอนที่ 11 จนกระทั่งผลการคำนวณลู่เข้าหาคำตอบ

ตารางที่ 4.1 ความหนาของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบ

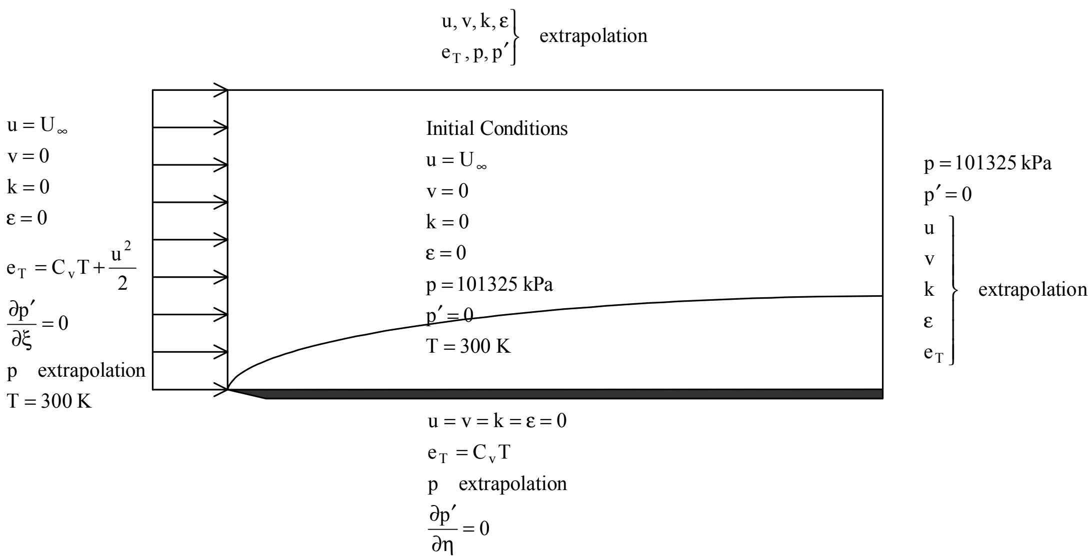
ประเภทของการไหล	ความหนาของชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบ[1]
การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว	$\frac{\delta}{L} \approx \frac{5.0}{\sqrt{Re_L}}$
การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว	$\frac{\delta}{L} \approx \frac{0.16}{\sqrt[7]{Re_L}}$
การไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้	$\frac{\delta}{L}\sqrt{Re_L} \approx \sqrt{C_w}\left[5.0+\left(0.2+0.9\frac{T_w}{T_{aw}}\right)(\gamma-1)M_\infty^2\right]$

[1] $C_w \approx \left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{-1/3}$ และ T_{aw} คือ Adiabatic-Wall Temperature

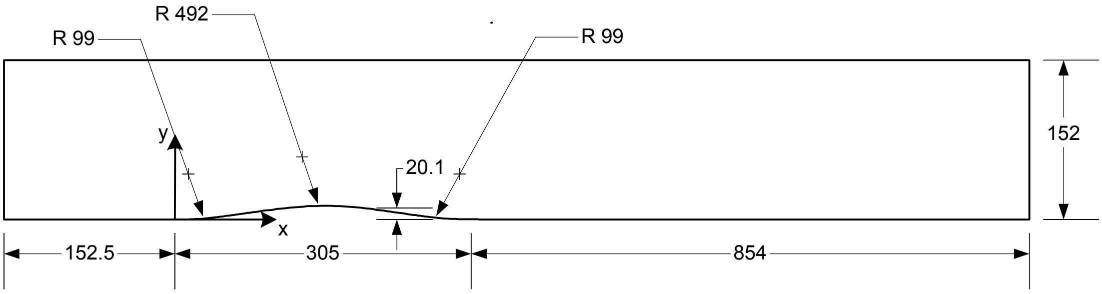


รูปที่ 4.2ก รายละเอียดของแผ่นเรียบ

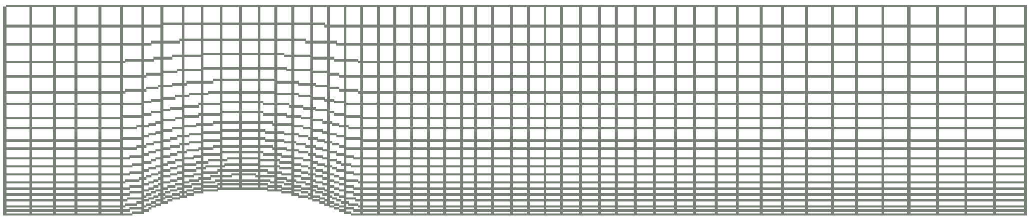
รูปที่ 4.2ข การกระจายตัวของกริดสำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบ (แสดงทุก 5 เส้นกริด)



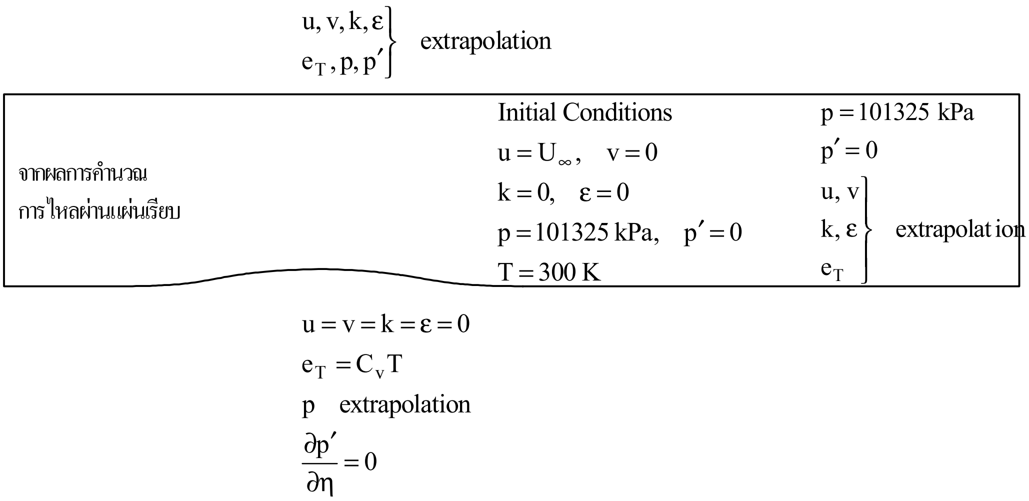
รูปที่ 4.2ค เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นของการไหลผ่านแผ่นเรียบ



รูปที่ 4.3ก รายละเอียดของส่วนโค้งกลม (หน่วยเป็นมิลลิเมตร)



รูปที่ 4.3ข การกระจายตัวของกริดสำหรับการไหลผ่านส่วนโค้งกลม (แสดงทุก 5 เส้นกริด)



รูปที่ 4.3ค เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นของการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

บทที่ 5

ผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผล

ในบทนี้จะนำเสนอในส่วนของผลการวิจัย โดยผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์จะนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ และข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หัวข้อที่ 5.1 จะกล่าวถึงผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผลของการไหลผ่านแผ่นเรียบ ส่วนข้อที่ 5.2 จะกล่าวถึงผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผลของการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

5.1 การไหลผ่านแผ่นเรียบ

ตารางที่ 5.1 แสดงข้อมูลป้อนเข้าของการไหลผ่านแผ่นเรียบ

5.1.1 การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว

การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัวนั้นถูกนำมาใช้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในงานวิจัย รูปที่ 5.1 และ 5.2 แสดงการกระจายตัวของความเร็วและสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์มีค่าสอดคล้องอย่างดีกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ รูปที่ 5.3 แสดงลูกศรความเร็วที่ระยะ X ต่าง ๆ จะเห็นว่ารูปทรงของชั้นชิดผิวค่อย ๆ หนาขึ้น ซึ่งเป็นไปตามที่คาดการณ์ไว้

5.1.2 การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว

การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวนั้นถูกนำมาใช้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการที่ใช้ในงานวิจัย รูปที่ 5.4-5.7 แสดงการกระจายตัวของความเร็ว ความเค้นเฉือนของการปั่นป่วน พลังงานจลน์ของการปั่นป่วน และอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบที่ $\mathrm{Re}_\theta = 1410$ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์มีค่าคลาดเคลื่อนไปจากข้อมูล DNS ของ Spalart (1988) เพียงเล็กน้อยเท่านั้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองการปั่นป่วนที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้สามารถจำลองการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวได้เป็นที่น่าพอใจ

5.1.3 การไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้

การไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้นั้นถูกนำมาใช้ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการคำนวณสมการพลังงาน รูปที่ 5.8 แสดงการกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบที่เลขมัค 0.4 0.6 0.8 4 และ 8 รูปที่ 5.9 แสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบที่เลขมัค 0.4 0.6 และ 0.8 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์มีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ เป็นที่น่าสังเกตว่าการกระจายตัวของความเร็วที่เลขมัค 0.4 0.6 และ 0.8 มีความคล้ายกันมาก โดยการกระจายตัวของความเร็วจะมีความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อเลขมัคมีค่าสูงขึ้น ในรูปที่ 5.8 ที่เลขมัค 4 และ 8 การกระจายตัวของความเร็วจะมีความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อเปรียบเทียบกับที่เลขมัค 0.4 0.6 และ 0.8

5.1.4 การไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้ในหัวข้อที่ผ่านมา จะเห็นได้ว่าซอฟต์แวร์ได้รับการพัฒนาจนถึงขั้นที่สามารถจำลองได้ทั้งการไหลแบบอัดตัวได้และการไหลแบบปั่นป่วน ดังนั้นในหัวข้อนี้จะแสดงผลการคำนวณเชิงตัวเลขของการไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

รูปที่ 5.10-5.13 แสดงการกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบที่ $M_\infty = 0.824$ จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์มีค่าสอดคล้องกับผลการทดลองของ Maise and McDonald (1968), Fernholz and Finley (1980), Motallebi (1994) และ Motallebi (1996) โดยที่

$$u^* = \frac{\tilde{u}_\delta}{b}\sin^{-1}\left[\frac{2b^2\dfrac{\tilde{u}}{\tilde{u}_\delta} - a}{\sqrt{a^2+4b^2}}\right] \tag{5.1}$$

$$a = \frac{\tilde{T}_\delta}{T_w}\left[1 + r\frac{\gamma-1}{2}M_\delta^2\right] - 1 \tag{5.2}$$

$$b^2 = r\frac{\gamma-1}{2}M_\delta^2\frac{\tilde{T}_\delta}{T_w} \tag{5.3}$$

$$\Delta^* = \delta\int_0^1\left(\frac{u_\delta^* - u^*}{u_\tau}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{5.4}$$

5.2 การไหลผ่านส่วนโค้งกลม

การไหลผ่านส่วนโค้งกลมเป็นการศึกษาอิทธิพลจากความชันของความดัน และความโค้งของวัตถุที่ขวางการไหลต่อการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว งานวิจัยในอดีต (Barlow and Johnston, 1988; Bradshaw et al., 1988a; 1988b; Gillis and Johnston, 1983; Moser and Moin, 1987; So and Mellor, 1973; Webster et al., 1996) และงานวิจัยของ Wu and Squires (1998a, 1998b) แสดงให้เห็นถึงอิทธิพลจากความชันของความดัน และความโค้งของวัตถุที่ขวางการไหล ส่วนโค้งกลมที่นำมาใช้เป็นกรณีทดสอบนี้ประกอบขึ้นจากการสัมผัสกันของส่วนโค้งกลม 3 ส่วน คือส่วนโค้งกลมคว่ำ 1 ส่วนและส่วนโค้งกลมหงาย 2 ส่วน ซึ่งสัมผัสกับส่วนโค้งกลมคว่ำและแผ่นเรียบที่ตำแหน่งด้านหน้าและด้านหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ ดังรูปที่ 4.3ก ที่ทางเข้าของขอบเขต กำหนดให้ความหนาของชั้นชิดผิวมีขนาด 1.5 เท่าของความสูงของส่วนโค้งกลม โดยคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ทางเข้าของขอบเขตสร้างขึ้นจากการแก้ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านแผ่นเรียบ ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์ได้รับการตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองของ DeGraaff (1999) ตารางที่ 5.2 แสดงข้อมูลป้อนเข้าสำหรับการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

เนื่องจากความหนาของชั้นชิดผิวที่ทางเข้าของขอบเขตมีขนาดสูงกว่าความสูงของส่วนโค้งกลม และมุมระหว่างแผ่นเรียบและเส้นสัมผัสส่วนโค้งกลมมีขนาดมากที่สุดเพียง 15 องศาเท่านั้น ดังนั้นจึงกำหนดให้ทิศทางในแนวแกน y คือทิศทางในแนวตั้งฉากกับแผ่นเรียบ การระบุพิกัดของส่วนโค้งกลมนี้กำหนดให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดสัมผัสระหว่างแผ่นเรียบกับส่วนโค้งกลมหงายที่ด้านหน้าของส่วนโค้งกลมคว่ำดังรูปที่ 4.3ก

รูปที่ 5.14 และ 5.15 แสดงสัมประสิทธิ์ความดันสถิตที่พื้นผิว และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิว ตามลำดับ จากรูปที่ 5.14 แสดงให้เห็นว่าการประกอบกันของส่วนโค้งกลมทั้งสามส่วนดังกล่าวทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความดันทั้งหมด 4 ช่วง คือ ที่บริเวณส่วนโค้งกลมหงายด้านหน้าของส่วนโค้งกลมคว่ำ ซึ่งความดันเพิ่มขึ้นเล็กน้อย หลังจากนั้นความดันจะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเข้าสู่ด้านหน้าของส่วนโค้งกลมคว่ำและความดันจะมีค่าต่ำที่สุดที่จุดยอดของส่วนโค้งกลมคว่ำ หลังจากนั้นความดันจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่ด้านหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ และความดันจะลดลงอีกครั้งที่บริเวณส่วนโค้งกลมหงายด้านหลังส่วนโค้งกลมคว่ำ จากรูปที่ 5.15 แสดงให้เห็นว่าปัจจัยที่มีผลต่อสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิว ได้แก่ ความชันของความดันและลักษณะการโค้งของส่วนโค้งกลม กล่าวคือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวจะมีค่าลดลงเมื่อชั้นชิดผิวไหลผ่านส่วน

โค้งกลมคว่ำ หรือไหลผ่านบริเวณที่มีความชันของความดันสวนทิศการไหล (Adverse Pressure Gradient) และสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อชั้นชิดผิวไหลผ่านส่วนโค้งกลมหงาย หรือไหลผ่านบริเวณที่มีความชันของความดันตามทิศการไหล (Favourable Pressure Gradient) (Bandyopadhyay and Ahmed, 1993 quoted in Wu and Squires, 1998a) จากรูปที่ 5.15 จะเห็นได้ว่าในช่วง $-0.33 \le x/L_c \le 0$ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวมีค่าลดลงเนื่องจากการไหลของชั้นชิดผิวได้รับผลกระทบจากความชันของความดันสวนทิศการไหล สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วง $0 < x/L_c < 0.15$ เนื่องจากการไหลของชั้นชิดผิวได้รับผลกระทบจากอิทธิพลจากความชันของความดันตามทิศการไหลมากกว่าอิทธิพลของการไหลผ่านส่วนโค้งกลมคว่ำ ที่บริเวณก่อนถึงจุดยอดของส่วนโค้งกลมคว่ำ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวมีค่าค่อนข้างคงที่ เนื่องจากเกิดปรากฏการณ์ Relaminarization ขึ้นที่บริเวณนี้ โดยปรากฏการณ์ดังกล่าวจะทำลายส่วนแปรผันของการไหลแบบปั่นป่วน (Webster, DeGraaff and Eaton, 1996) สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วบริเวณด้านหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ เนื่องจากความชันของความดันสวนทิศการไหลและการไหลผ่านส่วนโค้งกลมคว่ำ หลังจากนั้น สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วอีกครั้ง เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงจากความชันของความดันสวนทิศการไหลไปเป็นความชันของความดันตามทิศการไหล (Wu and Squires, 1998a) รูปที่ 5.14 และ 5.15 แสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์ความดันสถิตที่พื้นผิวและสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าสอดคล้องกับข้อมูลจากการทดลอง

รูปที่ 5.16 แสดงค่าของ U_e ซึ่งมีนิยามคือ $U_e = 0.99u_{max}$ เมื่อ u_{max} คือค่าของความเร็วสูงสุดในแต่ละตำแหน่งตามแนวแกน X จะเห็นได้ว่าที่จุดยอดและด้านหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ ค่าของ U_e สอดคล้องเป็นอย่างดีกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง แต่ที่ตำแหน่งตั้งแต่ส่วนโค้งกลมหงายซึ่งอยู่ด้านหลังส่วนโค้งกลมคว่ำจนถึงทางออกของขอบเขต U_e ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าสูงกว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลอง รูปที่ 5.17 แสดงลูกศรความเร็วที่ระยะ X ต่าง ๆ รูปที่ 5.18 แสดงเส้นคอนทัวร์ของความดัน

การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวที่ตำแหน่งต่าง ๆ ตามแนวแกน X ดังรูปที่ 5.19-5.29 แสดงให้เห็นว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าสอดคล้องเป็นอย่างดีกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ยกเว้นที่ตำแหน่ง $X/L_c = 11/12$ ดังรูปที่ 5.22 เนื่องจากที่บริเวณดังกล่าวขนาดของ Intermittent Reversal มีค่ามากกว่าบริเวณใกล้เคียงมาก (Wu and Squires, 1998a)

รูปที่ 5.30-5.41 แสดงการกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลของชั้นชิดผิวที่ตำแหน่งต่าง ๆ ตามแนวแกน X หากพิจารณาในเชิงคุณภาพจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลขมี

ค่าสอดคล้องเป็นอย่างดีกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง แต่หากพิจารณาในเชิงปริมาณจะพบว่าความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่าน้อยกว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลองในทุก ๆ ตำแหน่งตลอดแนวแกน X พอสมควร ทั้งนี้เนื่องจากแบบจำลองการปั่นป่วนที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการแบบเชิงเส้น ซึ่งอยู่ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า ส่วนแปรผันของความเร็วมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของส่วนแปรผันของความเร็วทั้งสามทิศทาง ทำให้ส่วนแปรผันของความเร็วทั้งสามทิศทางมีค่าเท่ากัน คือ $u' = v' = w'$ ซึ่งในความเป็นจริงนั้นส่วนแปรผันของความเร็วในแต่ละทิศทางมีค่าไม่เท่ากัน โดยส่วนแปรผันของความเร็วในทิศทางเดียวกับทิศทางหลักของการไหลจะมีค่าสูงที่สุด หากทำการเปลี่ยนแบบจำลองการปั่นป่วนจากเดิม คือแบบจำลองประเภทสองสมการแบบเชิงเส้นไปเป็นแบบจำลองประเภทสองสมการแบบไม่เชิงเส้น มีแนวโน้มที่จะทำให้ผลการคำนวณเชิงตัวเลขสอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองมากยิ่งขึ้น ในรูปที่ 5.31 แสดงการกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่จุดยอดของส่วนโค้งกลม จะเห็นได้ว่าเกิด Knee Point ขึ้นที่ $y/\delta \approx 0.15$ ซึ่งเป็นผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากการทำลาย Turbulence Production ใน Outer Region โดยความโค้งบริเวณด้านหน้าของส่วนโค้งกลมคว่ำ ความชันของความดันตามทิศการไหล และการสร้าง Internal Layer เหนือพื้นผิวบริเวณด้านหน้าของส่วนโค้งกลมคว่ำ จะสังเกตเห็นได้ว่าที่ตำแหน่งต่ำกว่า Knee Point คือที่ $y/\delta < 0.15$ ความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่จุดยอดของส่วนโค้งกลมมีค่ามากกว่าความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่บริเวณทางเข้าของขอบเขต (X/L_c = -6/12) แต่ที่ตำแหน่งสูงกว่า Knee Point คือที่ $y/\delta > 0.15$ ความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่จุดยอดของส่วนโค้งกลมกลับมีค่าน้อยกว่าความเค้น $\overline{u'^2}$ ที่ทางเข้าของขอบเขต ส่วนที่บริเวณด้านหลังจุดยอดของส่วนโค้งกลม ตำแหน่งของ Knee Point และค่าสูงสุดของความเค้น $\overline{u'^2}$ จะเกิดขึ้นที่ระยะห่างจากพื้นผิวมากขึ้น ซึ่งเป็นคุณลักษณะของการไหลของชั้นชิดผิวผ่านบริเวณที่มีความชันของความดันสวนทิศการไหลขนาดใหญ่ (Baskaran et al., 1987; Simpson, 1989 quoted in Wu and Squires, 1998a)

รูปที่ 5.42-5.52 แสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วน จะเห็นได้ว่า ความเค้นเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อชั้นชิดผิวไหลผ่านบริเวณส่วนหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ ซึ่งบริเวณนี้มีความชันของความดันสวนทิศการไหลขนาดใหญ่ หลังจากนั้น เมื่อการไหลของชั้นชิดผิวเข้าสู่บริเวณแผ่นเรียบด้านหลังของส่วนโค้งกลม ความเค้นเฉือนจะมีค่าลดลงเนื่องจากอิทธิพลจากความชันของความดันตามทิศการไหล

รูปที่ 5.53-5.63 แสดงให้เห็นว่า การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนมีลักษณะเดียวกันกับการกระจายตัวของความเค้นเฉือน คือ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อชั้นชิดผิวไหลผ่านบริเวณส่วนหลังของส่วนโค้งกลมคว่ำ และมีค่าลดลงเมื่อการไหลของชั้นชิดผิวเข้าสู่บริเวณแผ่นเรียบด้านหลังของส่วนโค้งกลม

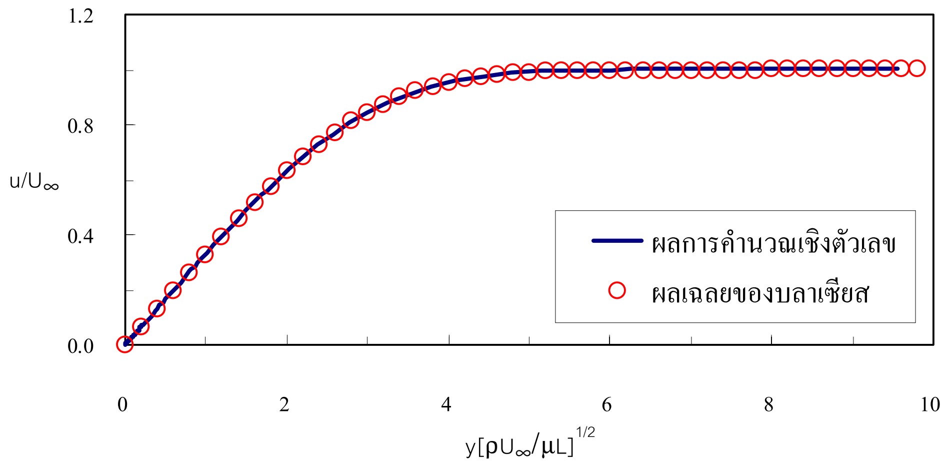
จากรูปที่ 5.42-5.63 แสดงให้เห็นว่า ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากซอฟต์แวร์ของการกระจายตัวของความเค้นเฉือนและการกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนมีค่าคลาดเคลื่อนไปจากข้อมูลจากการทดลองในลักษณะเดียวกัน คือ ผลการคำนวณเชิงตัวเลขมีค่ามากกว่าข้อมูลที่ได้จากการทดลอง เนื่องจากแบบจำลองการปั่นป่วนที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการแบบเชิงเส้น ซึ่งอยู่ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า ส่วนแปรผันของความเร็วมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของส่วนแปรผันของความเร็วทั้งสามทิศทาง

ตารางที่ 5.1 ข้อมูลป้อนเข้าของการไหลผ่านแผ่นเรียบ

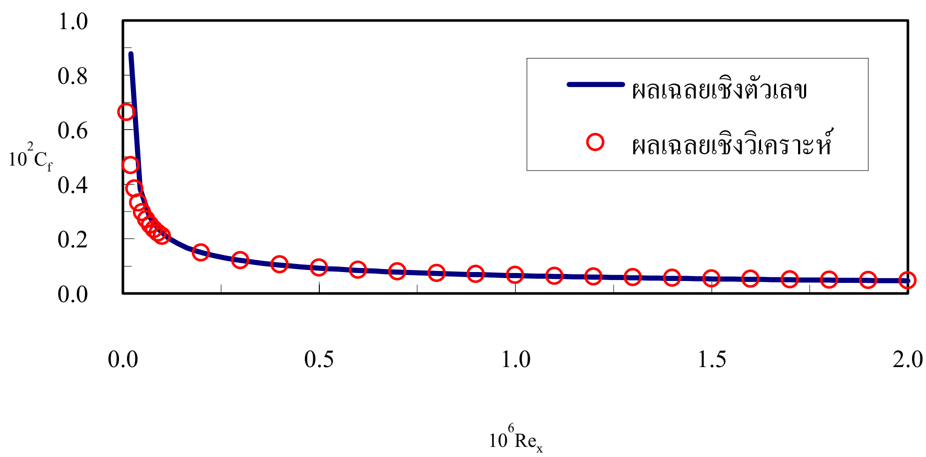
ตัวแปร	**การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว**	**การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว**	**การไหลแบบราบเรียบและอัดตัวได้**	**การไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้**
ξ_{max}	101	201	151	151
η_{max}	101	151	151	151
Re_L	0.02×10^6	6×10^6	2×10^6	19.5×10^6
M_∞	0.01	0.1	0.4, 0.6, 0.8, 4, 8	0.824
T_∞ (K)	300	300	300	300
P_∞ (Pa)	101,325	101,325	101,325	110,995.5
T_w (K)	-	-	300	Adiabatic Recovery Temperature
α_u	0.2	0.2	0.5	0.5
α_v	0.2	0.2	0.5	0.5
α_k	-	0.2	0.5	0.5
α_ε	-	0.2	0.5	0.5
α_{e_T}	-	-	0.5	0.5

ตารางที่ 5.2 ข้อมูลป้อนเข้าของการไหลผ่านส่วนโค้งกลม

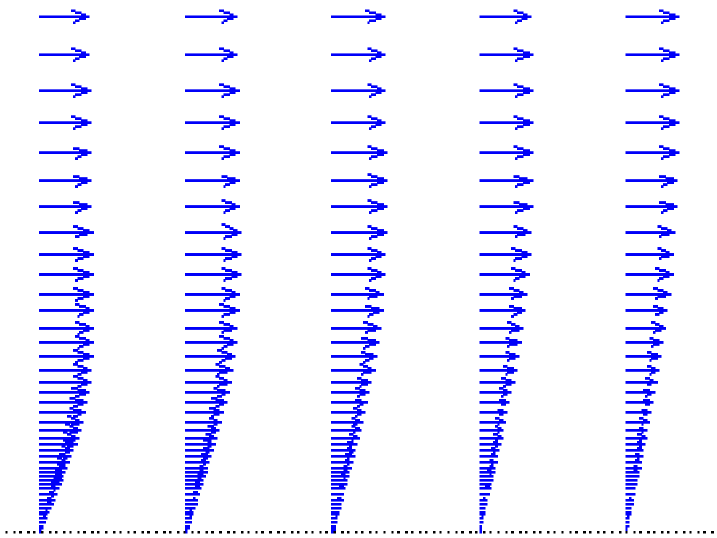
ตัวแปร	**การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว**
ξ_{max}	201
η_{max}	101
U_{∞} (m/s)	14.4
T_{∞} (K)	300
P_{∞} (Pa)	101,325
α_u	0.2
α_v	0.2
α_k	0.2
α_{ε}	0.2
α_{e_T}	0.2
α_p	0.02



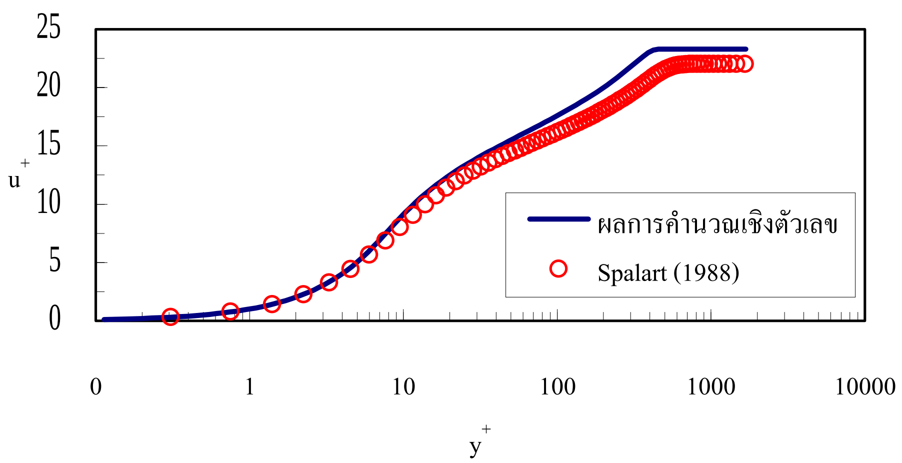
รูปที่ 5.1 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ



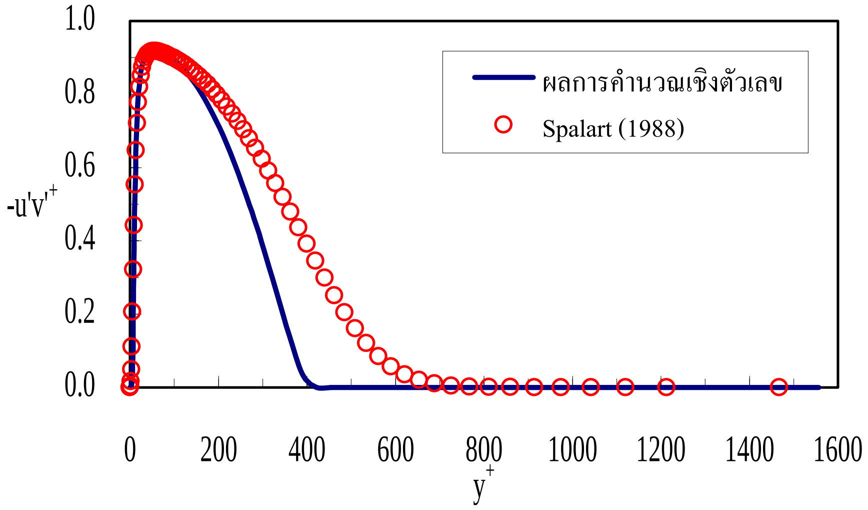
รูปที่ 5.2 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ



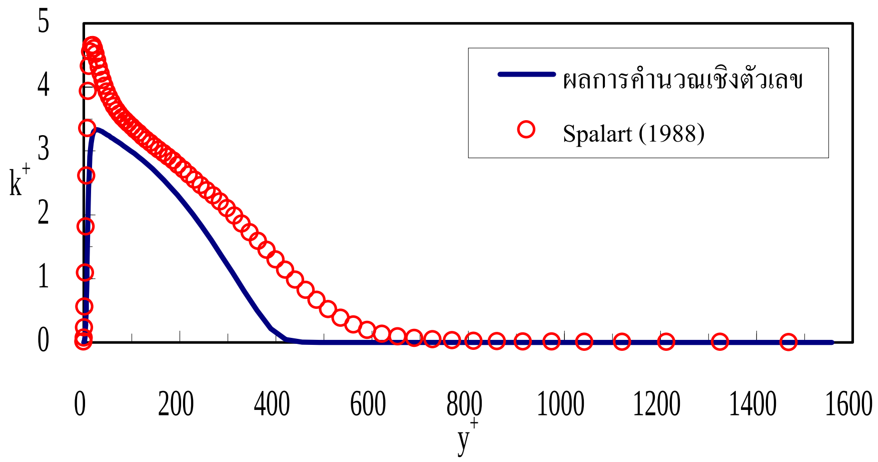
รูปที่ 5.3 ลูกศรความเร็ว (บางส่วน) ที่ระยะ X ต่าง ๆ ของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบ



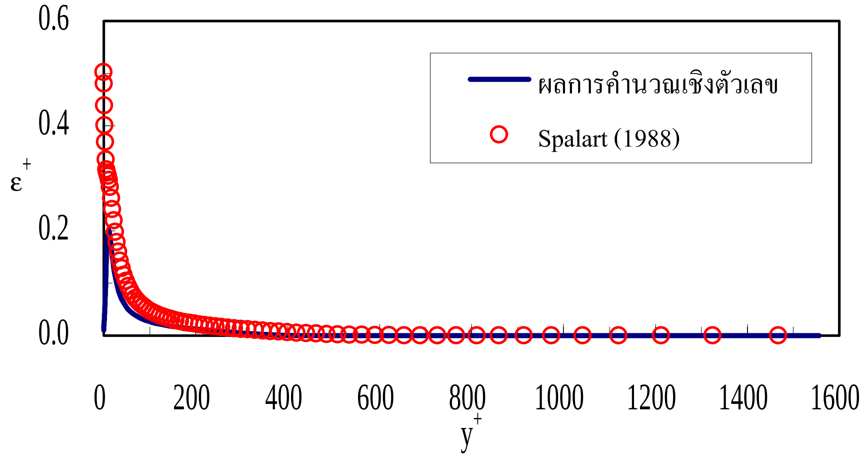
รูปที่ 5.4 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบที่ $Re_\theta = 1410$



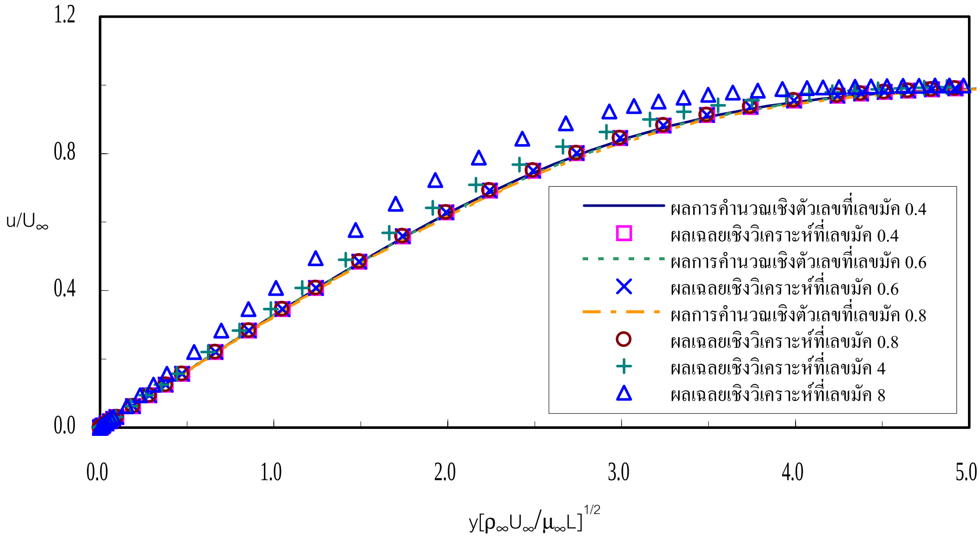
รูปที่ 5.5 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการปั่นป่วนของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบที่ $Re_\theta = 1410$



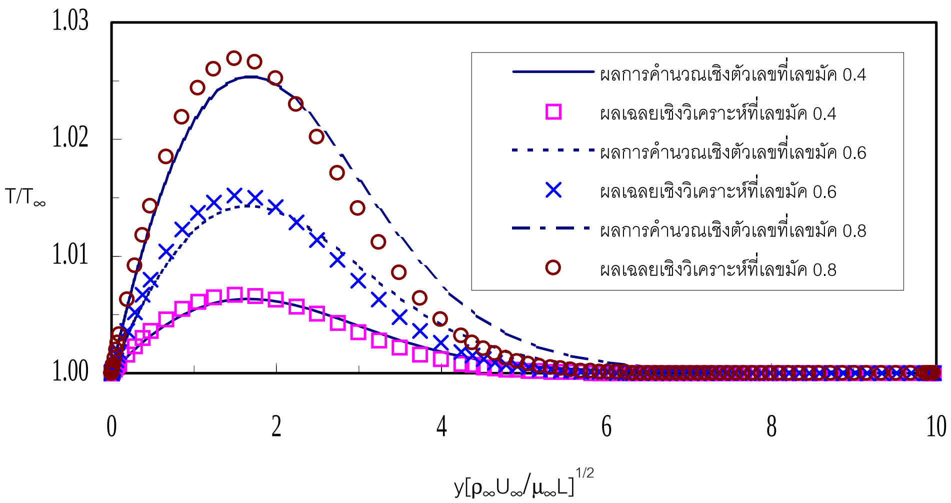
รูปที่ 5.6 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบที่ $Re_\theta = 1410$



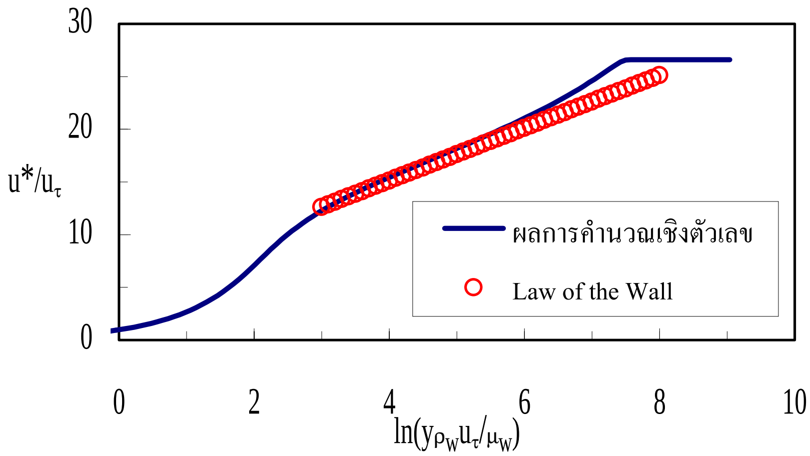
รูปที่ 5.7 การกระจายตัวของอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวบนแผ่นเรียบที่ $Re_\theta = 1410$



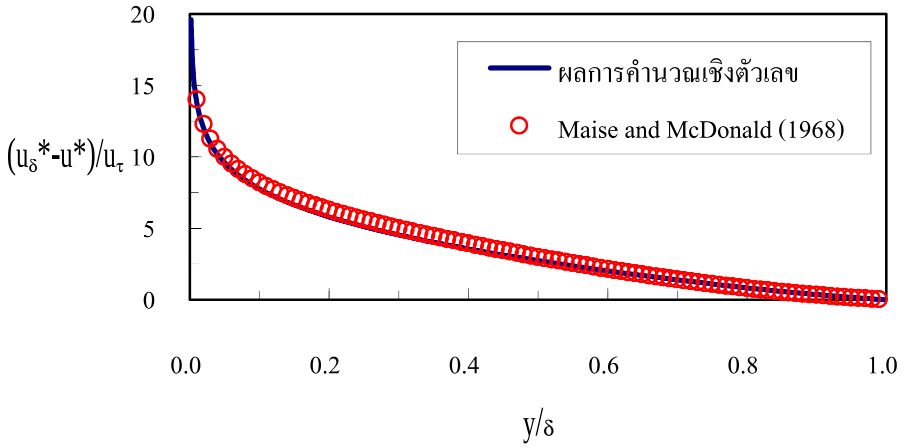
รูปที่ 5.8 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบที่เลขมัค 0.4, 0.6, 0.8, 4 และ 8



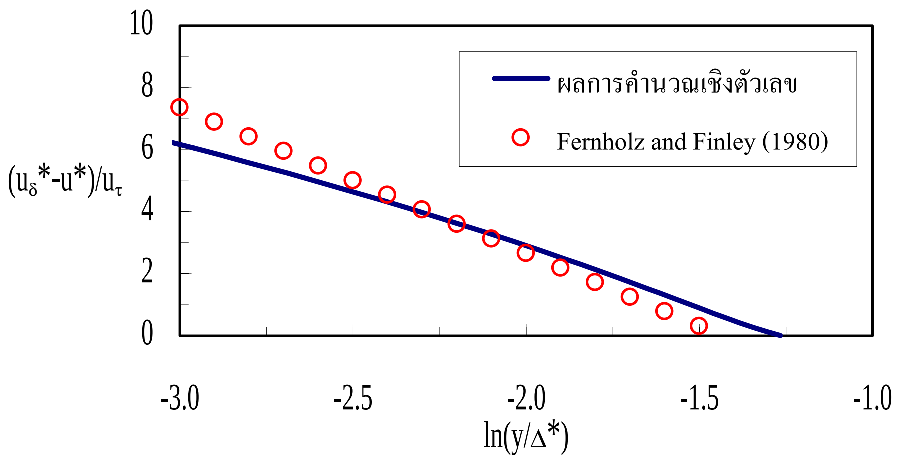
รูปที่ 5.9 การกระจายตัวของอุณหภูมิของการไหลของชั้นชิดผิวแบบราบเรียบและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบที่เลขมัค 0.4, 0.6 และ 0.8



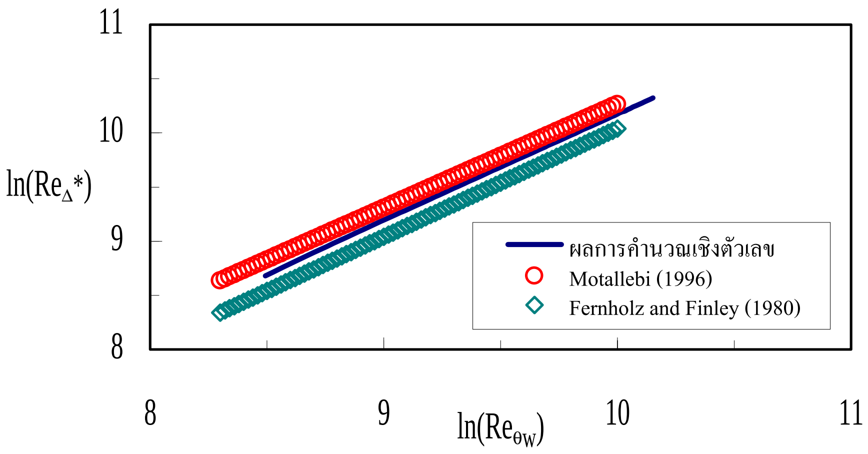
รูปที่ 5.10 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ เมื่อ M_∞= 0.824



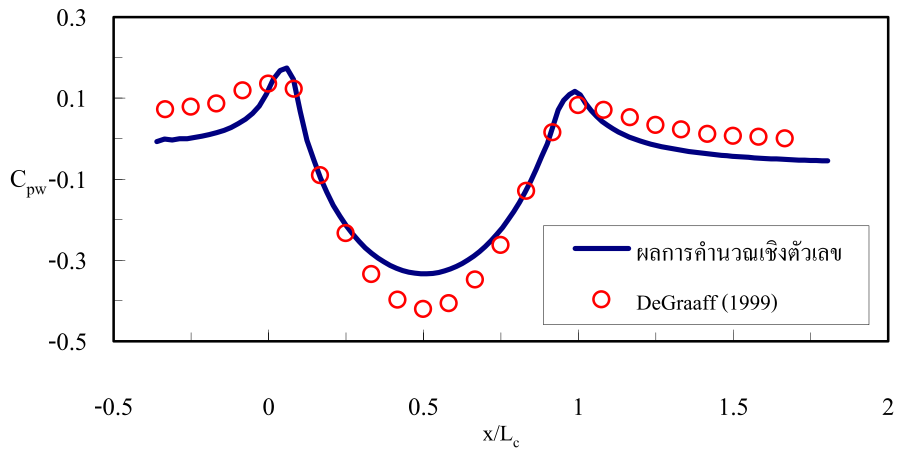
รูปที่ 5.11 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ เมื่อ $M_\infty = 0.824$



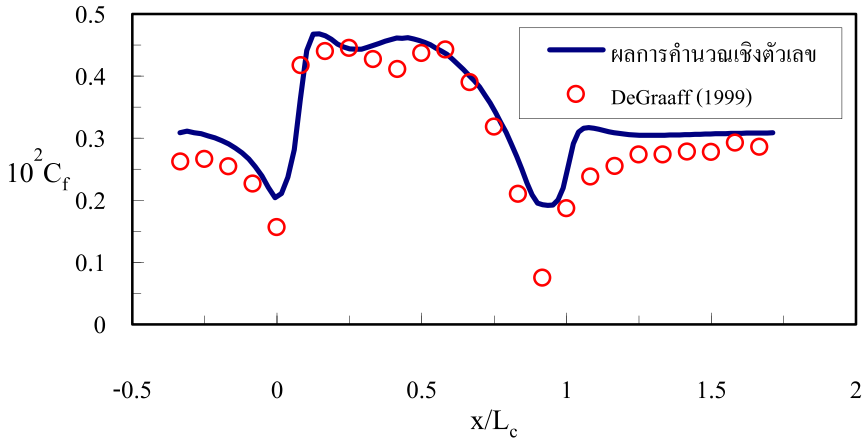
รูปที่ 5.12 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ เมื่อ $M_\infty = 0.824$



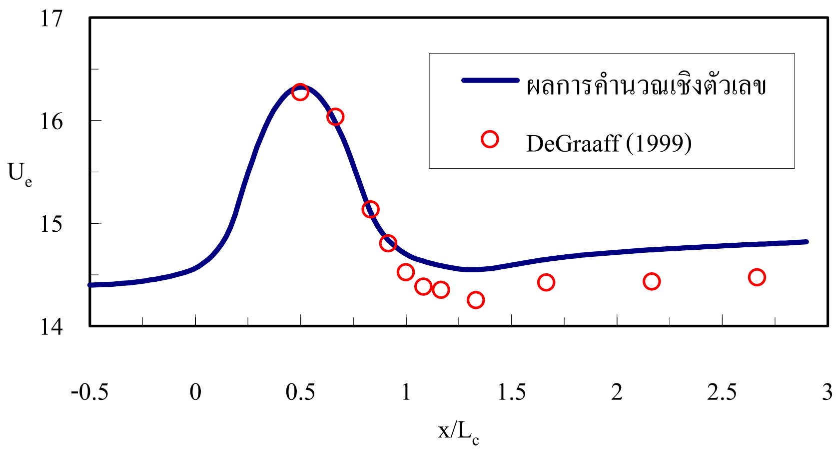
รูปที่ 5.13 ความสัมพันธ์ระหว่าง $Re_{\Delta}*$ กับ $Re_{\theta w}$ ของการไหลของชั้นชิดผิวแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้บนแผ่นเรียบ



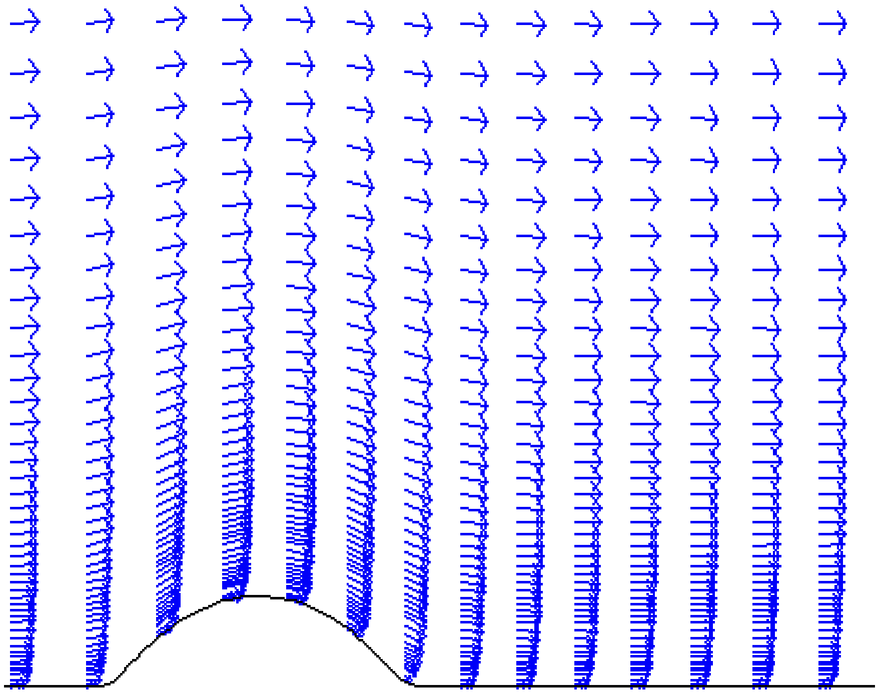
รูปที่ 5.14 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความดันสถิตที่พื้นผิวของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลม



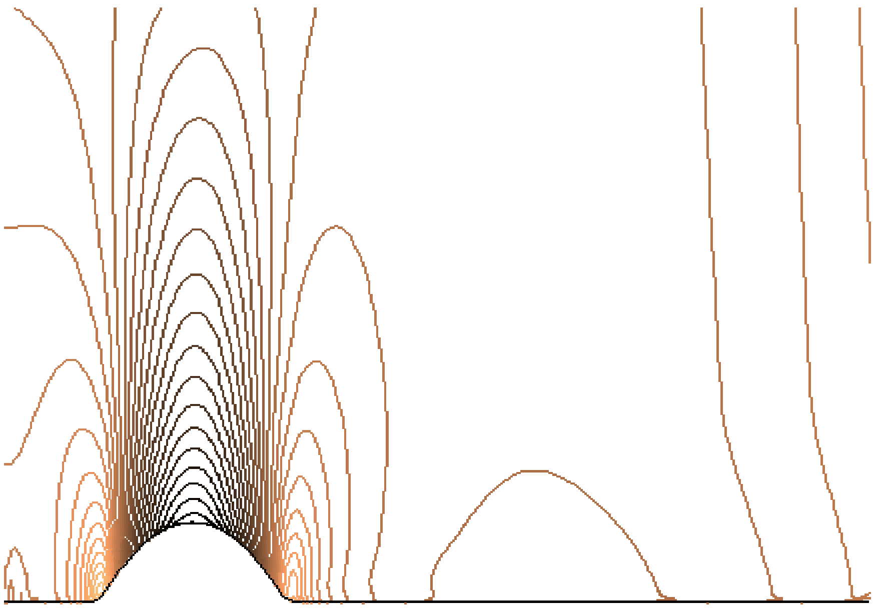
รูปที่ 5.15 การกระจายตัวของสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่พื้นผิวของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลม



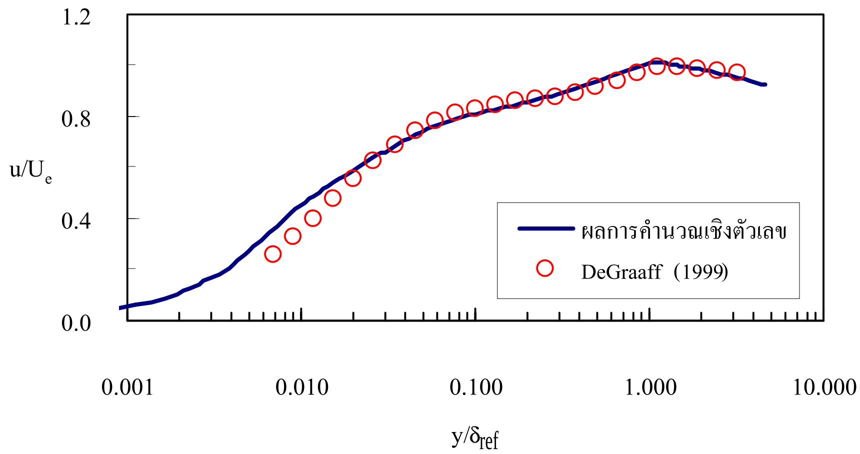
รูปที่ 5.16 การกระจายตัวของ U_e ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลม



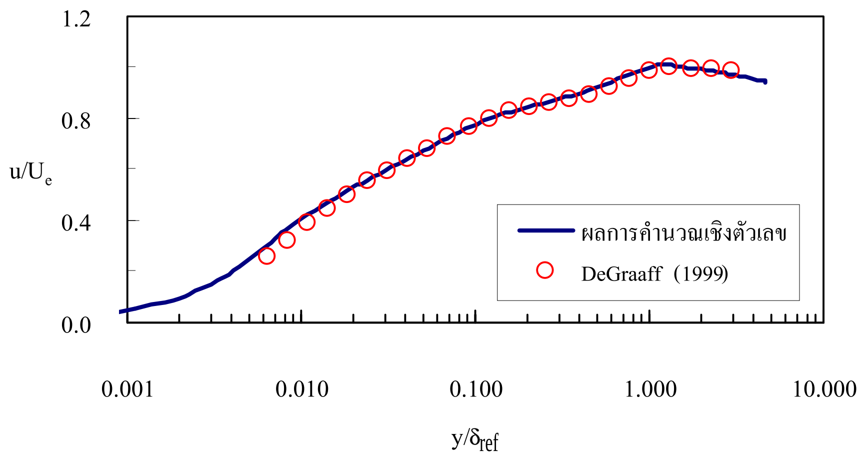
รูปที่ 5.17 ลูกศรความเร็ว (บางส่วน) ที่ระยะ X ต่าง ๆ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลม



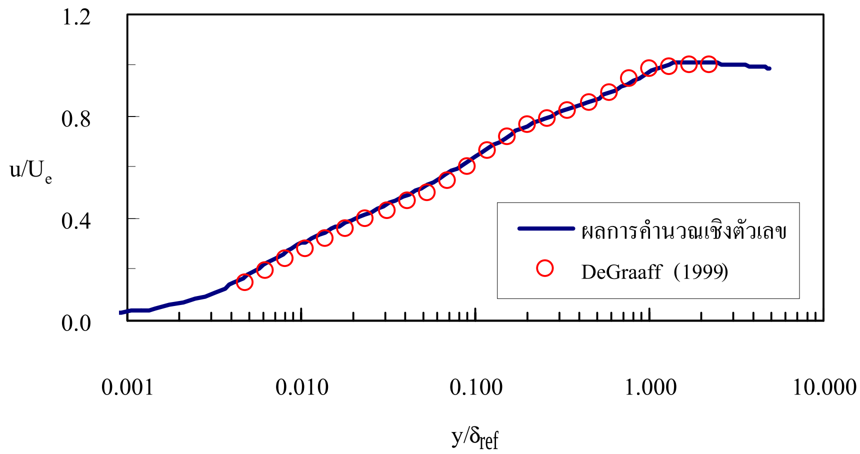
รูปที่ 5.18 เส้นคอนทัวร์ของความดันของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลม



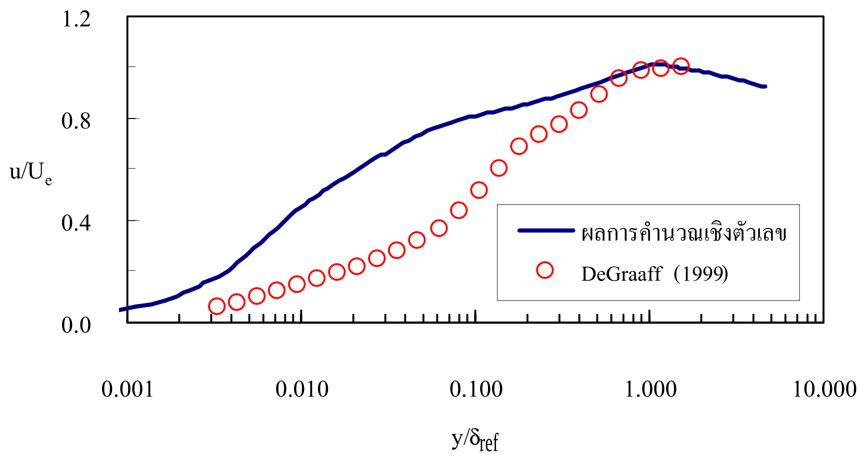
รูปที่ 5.19 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 6/12$



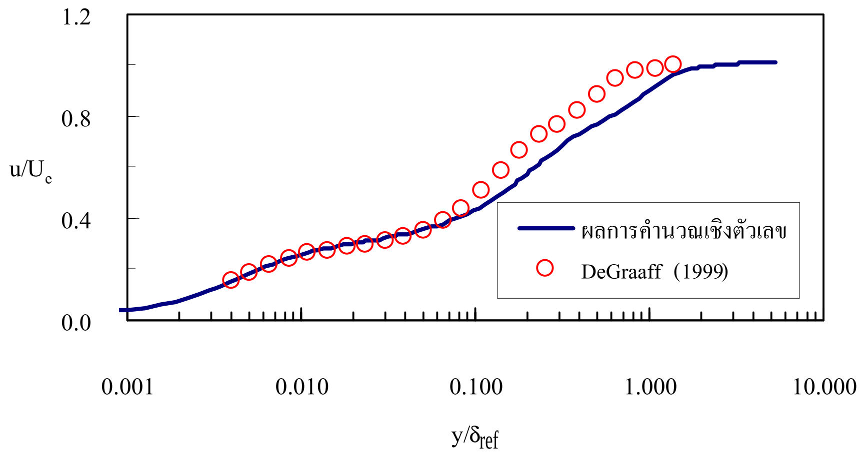
รูปที่ 5.20 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 8/12$



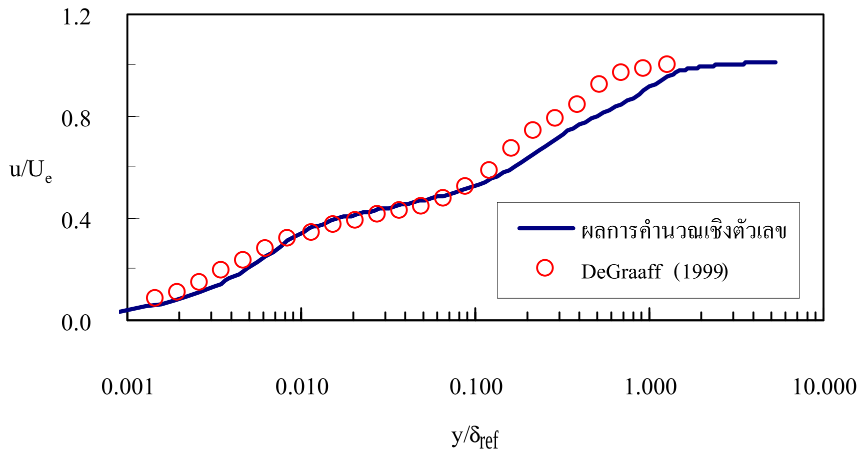
รูปที่ 5.21 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 10/12$



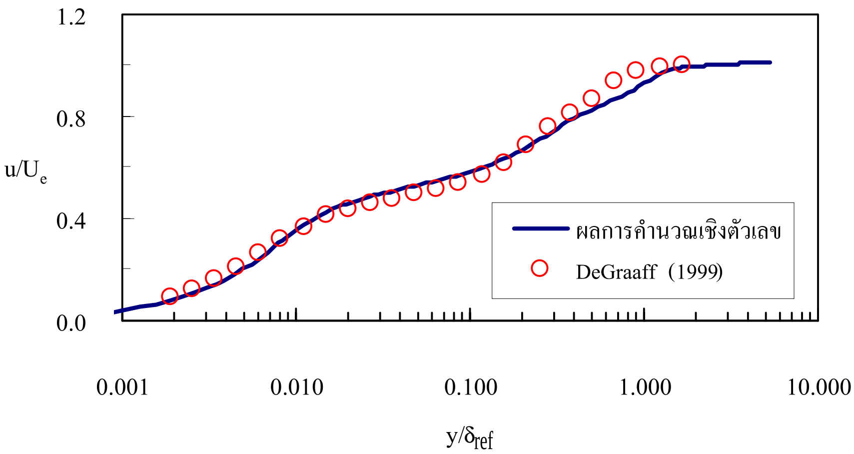
รูปที่ 5.22 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 11/12$



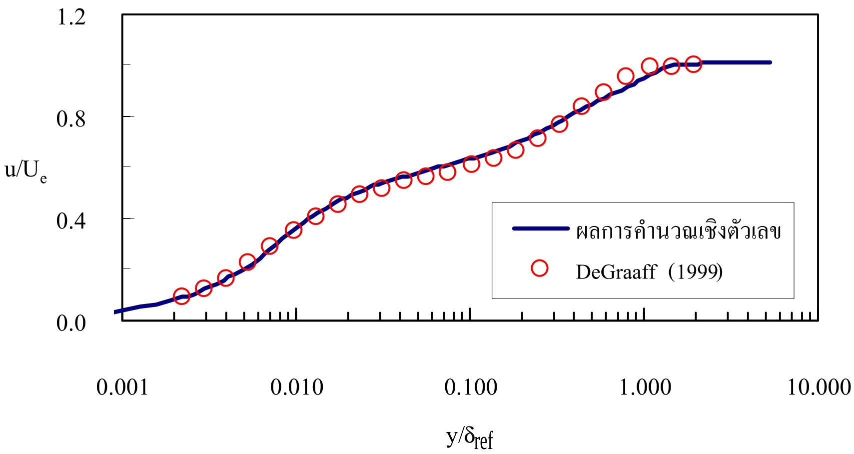
รูปที่ 5.23 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 12/12$



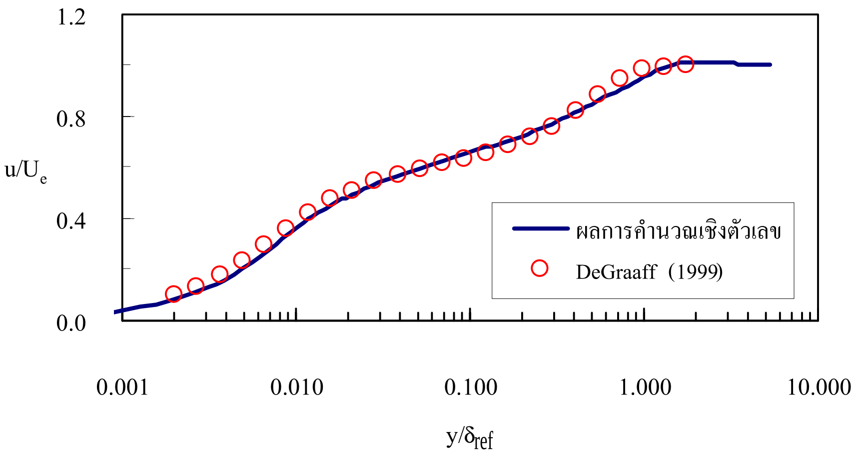
รูปที่ 5.24 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 13/12$



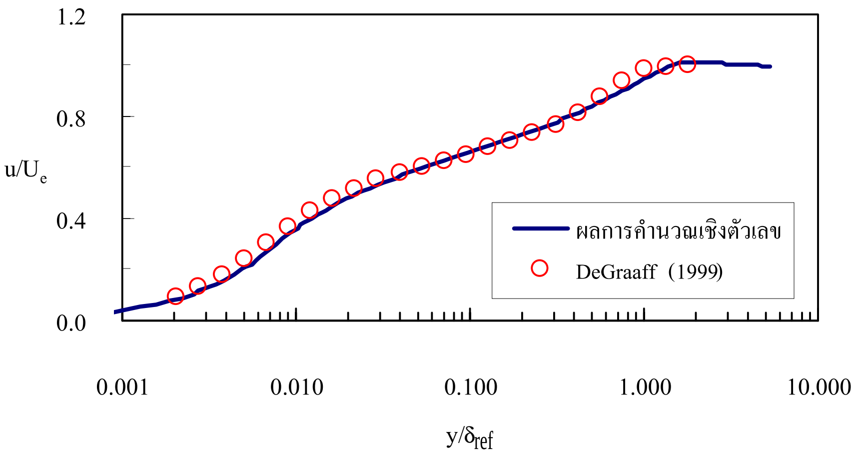
รูปที่ 5.25 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 14/12$



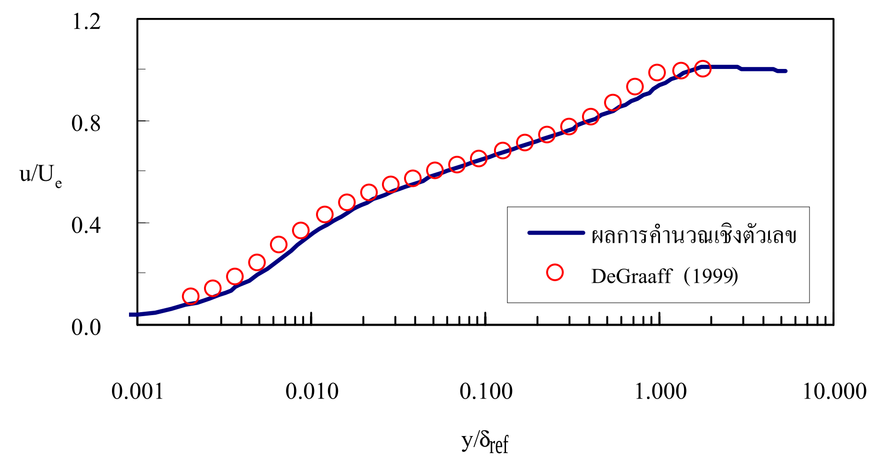
รูปที่ 5.26 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 16/12$



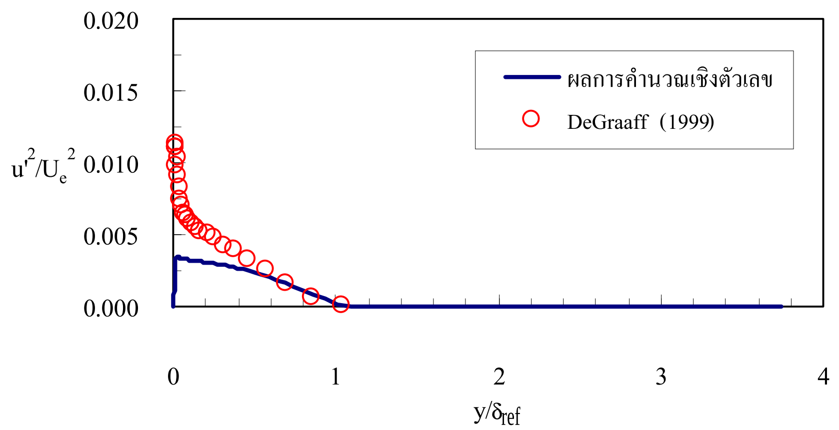
รูปที่ 5.27 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 20/12$



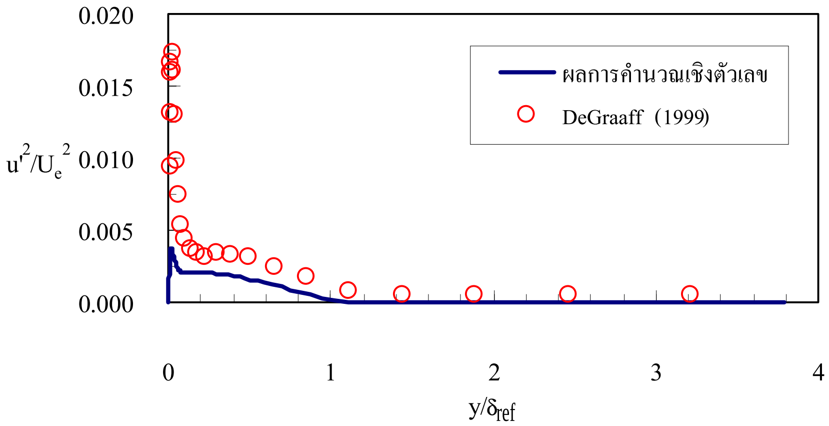
รูปที่ 5.28 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 26/12$



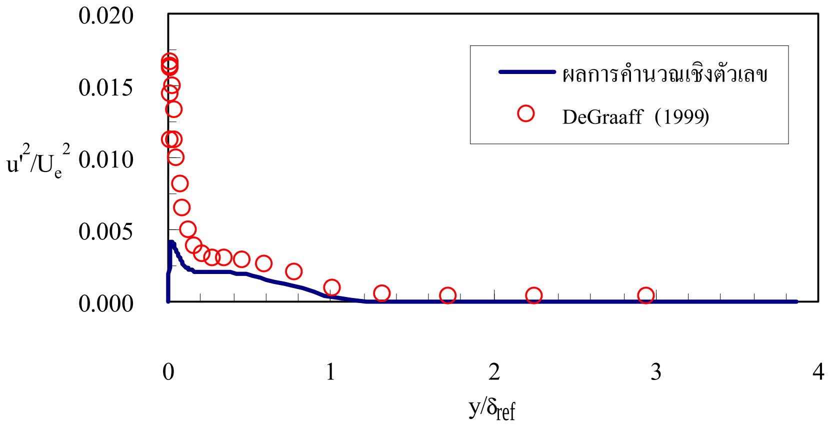
รูปที่ 5.29 การกระจายตัวของความเร็วของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 32/12$



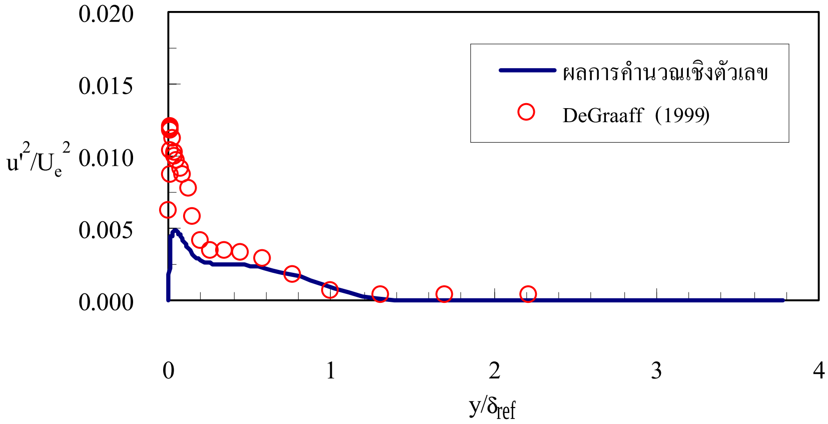
รูปที่ 5.30 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = -6/12$



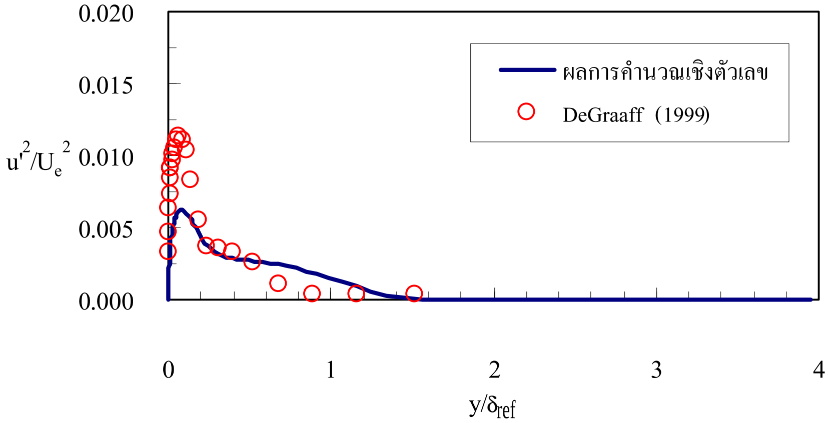
รูปที่ 5.31 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 6/12$



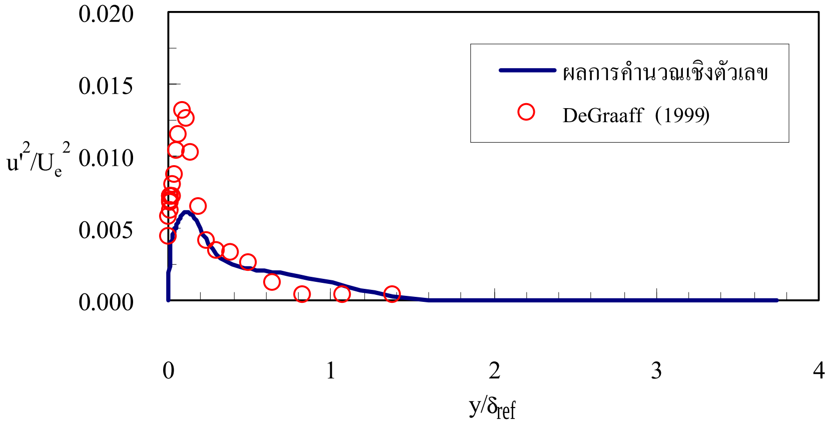
รูปที่ 5.32 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $X/L_c = 8/12$



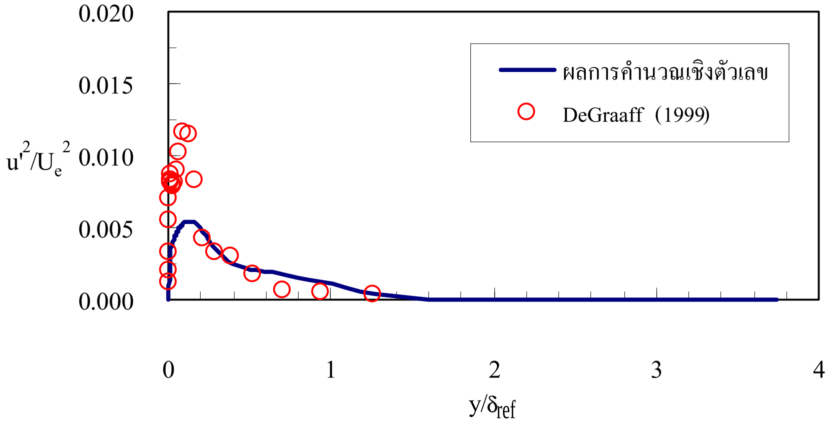
รูปที่ 5.33 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง X/L_c = 10/12



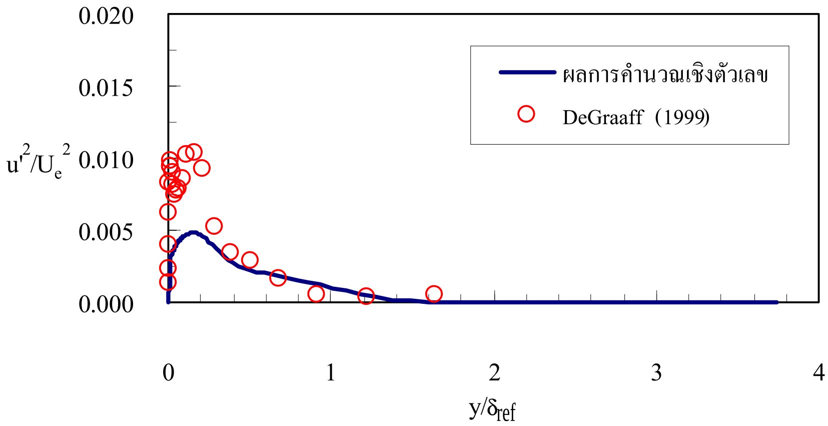
รูปที่ 5.34 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง X/L_c = 11/12



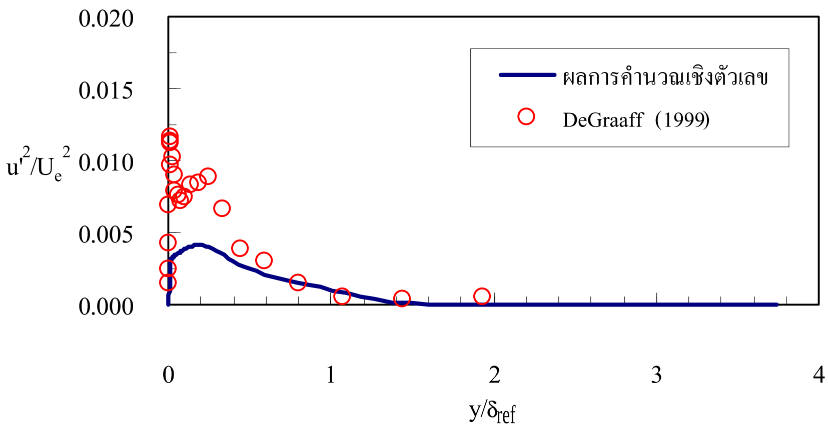
รูปที่ 5.35 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง X/L_c = 12/12



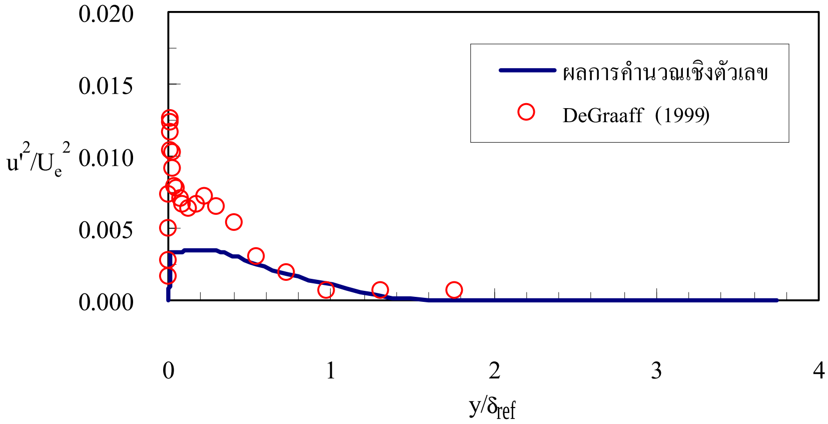
รูปที่ 5.36 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง X/L_c = 13/12



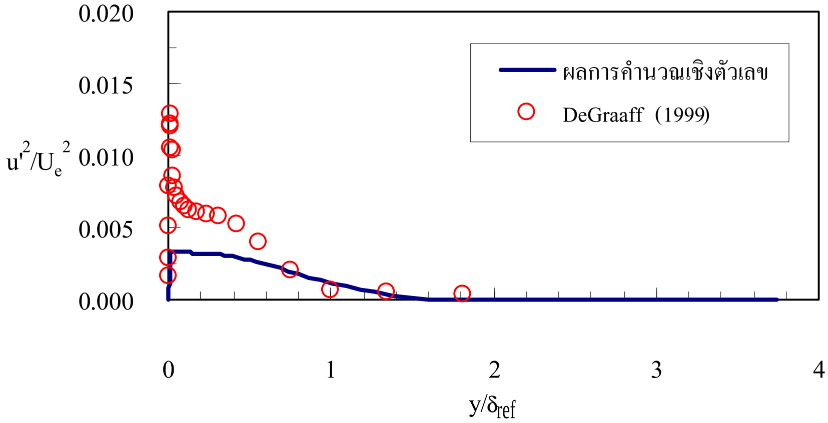
รูปที่ 5.37 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 14/12$



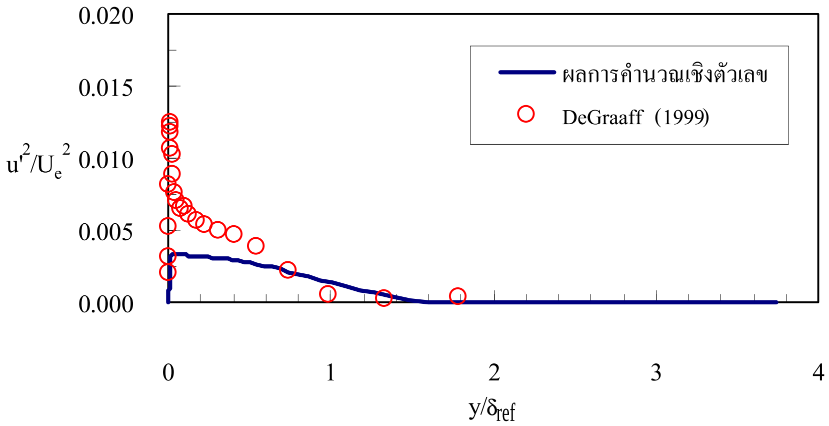
รูปที่ 5.38 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 16/12$



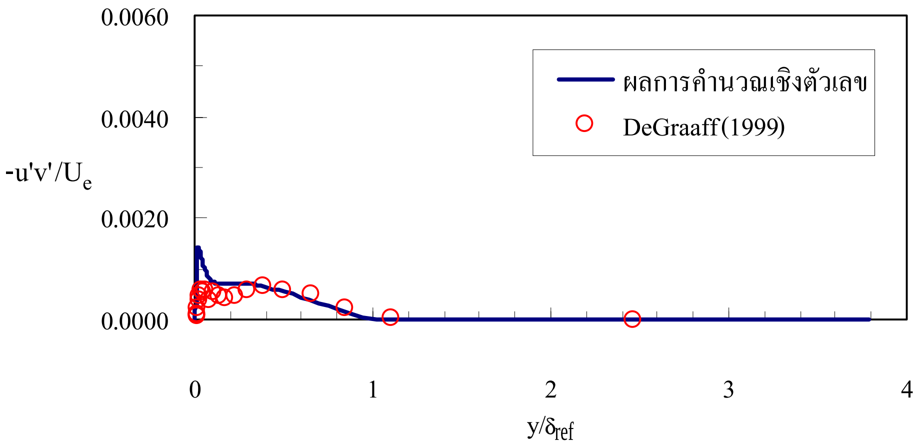
รูปที่ 5.39 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 20/12$



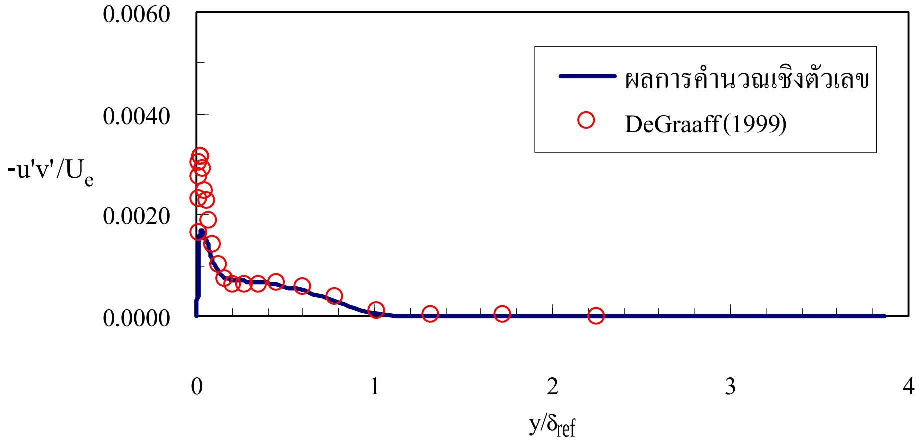
รูปที่ 5.40 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 26/12$



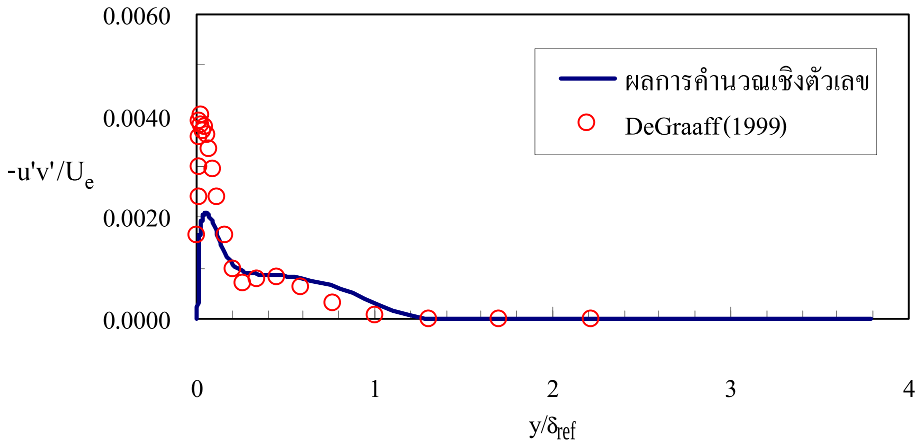
รูปที่ 5.41 การกระจายตัวของความเค้น $\overline{u'^2}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 32/12$



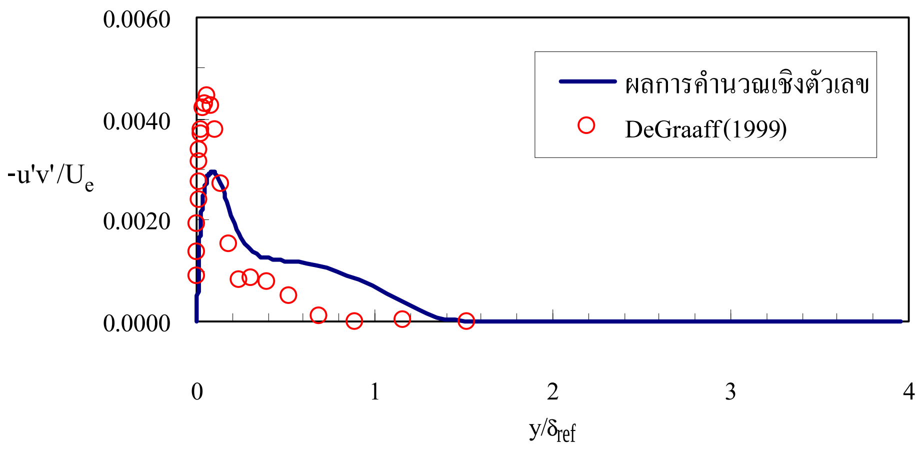
รูปที่ 5.42 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 6/12$



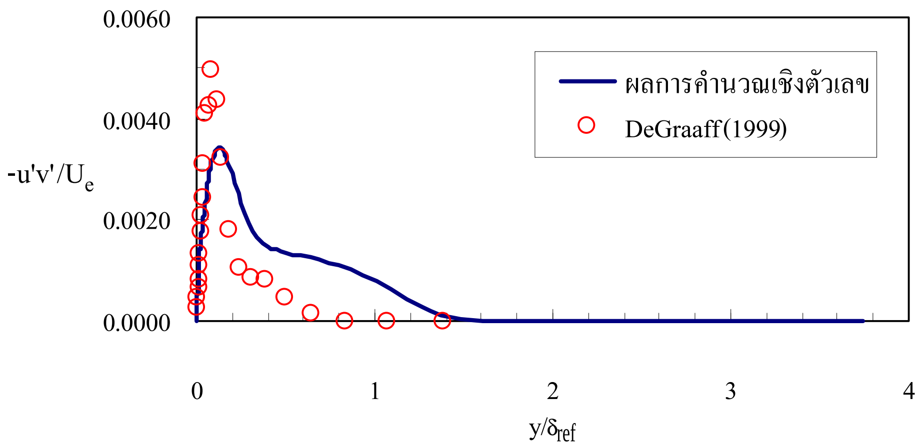
รูปที่ 5.43 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 8/12$



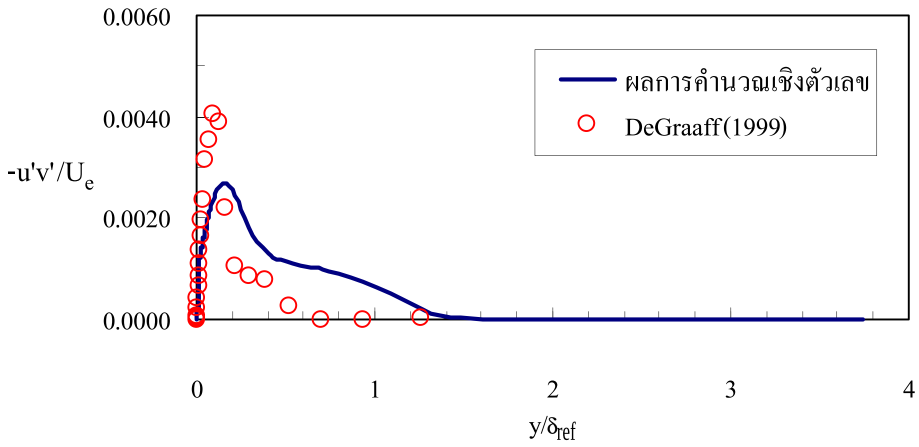
รูปที่ 5.44 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 10/12$



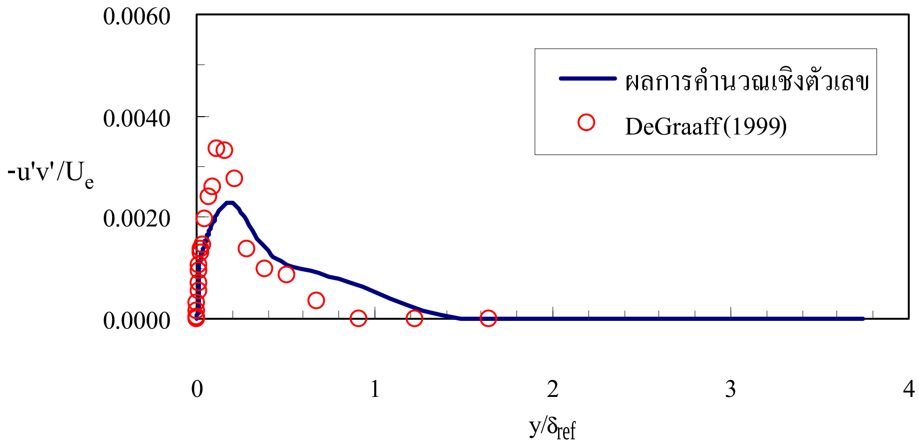
รูปที่ 5.45 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 11/12$



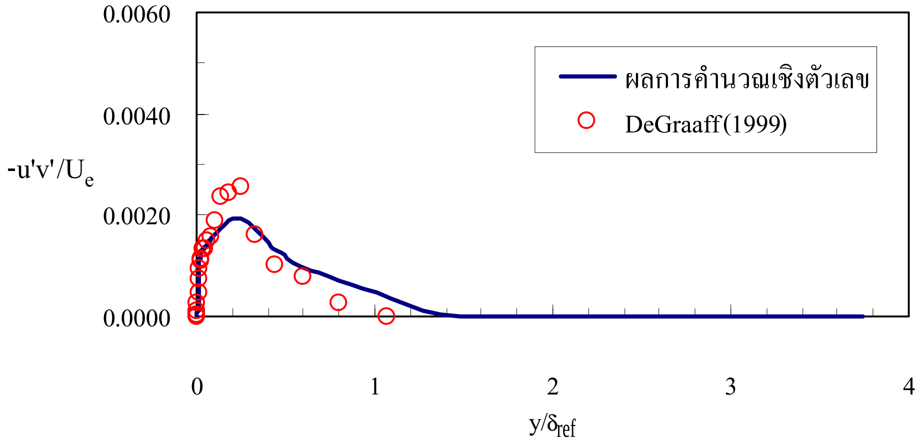
รูปที่ 5.46 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 12/12$



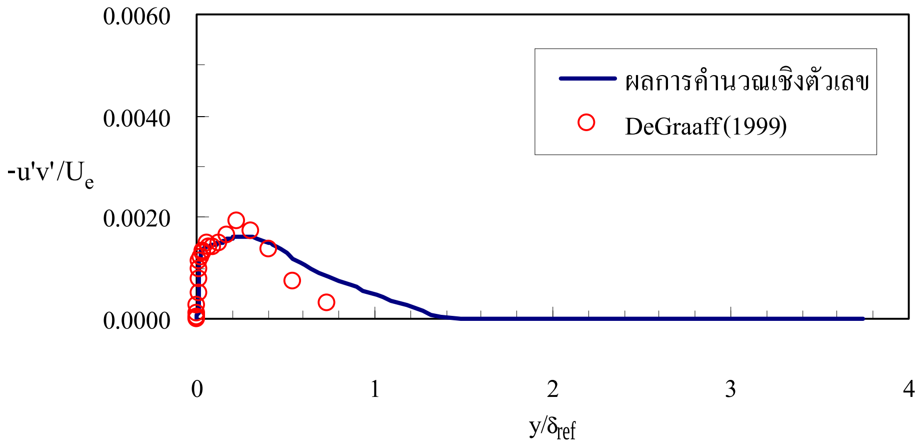
รูปที่ 5.47 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 13/12$



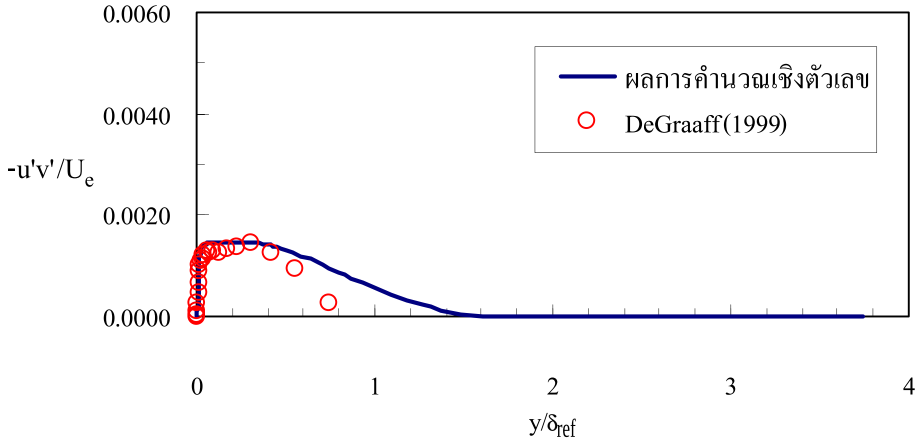
รูปที่ 5.48 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 14/12$



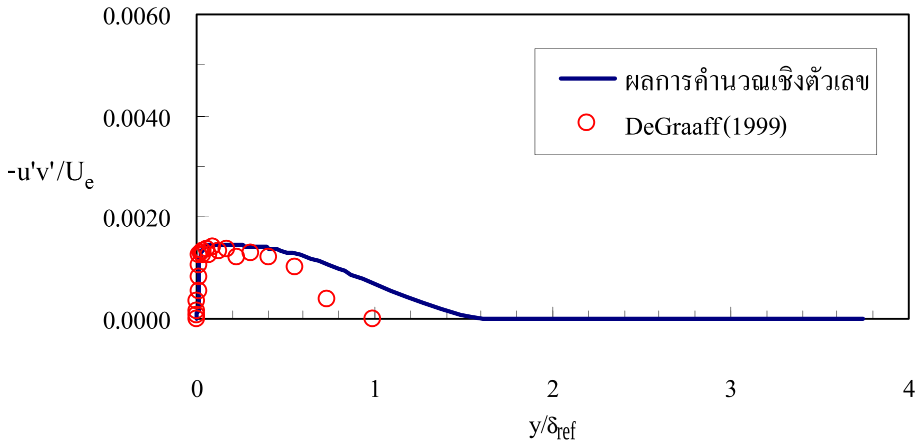
รูปที่ 5.49 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 16/12$



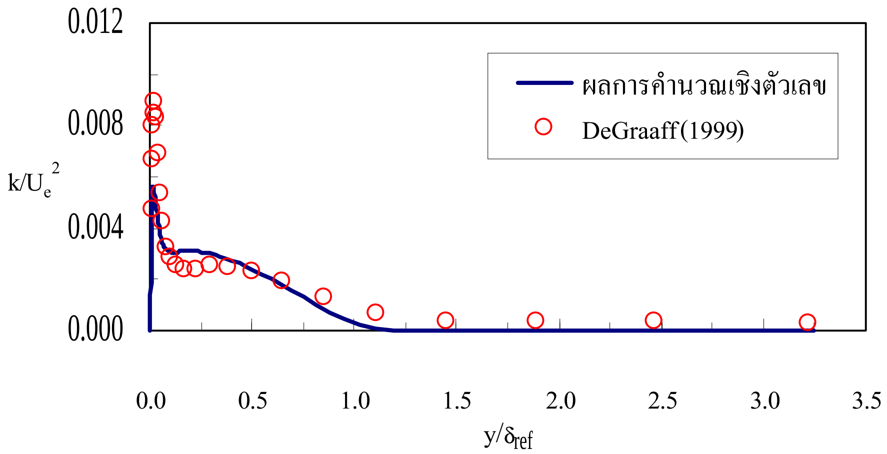
รูปที่ 5.50 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 20/12$



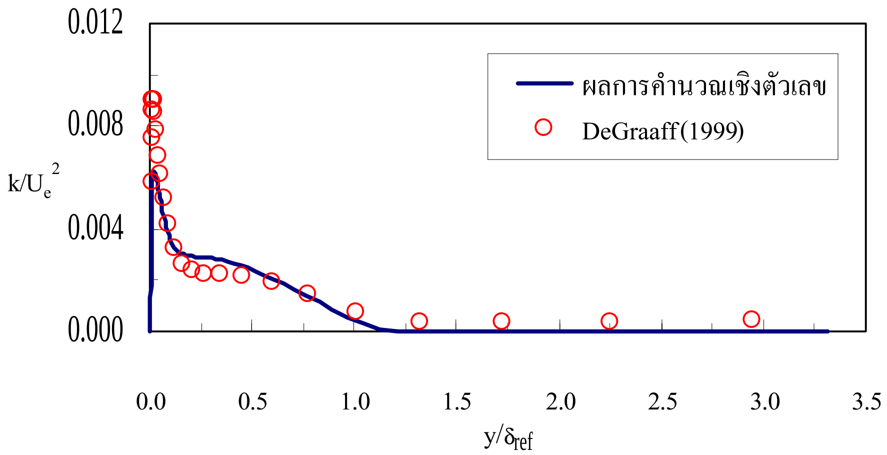
รูปที่ 5.51 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 26/12$



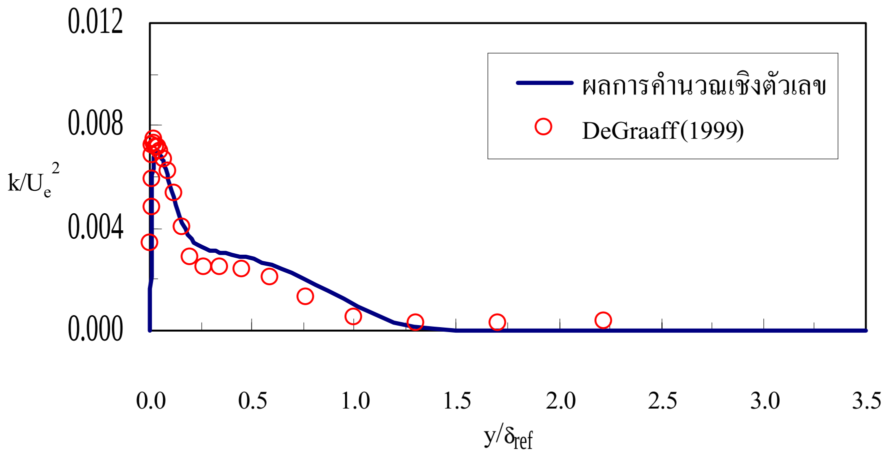
รูปที่ 5.52 การกระจายตัวของความเค้นเฉือนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 32/12$



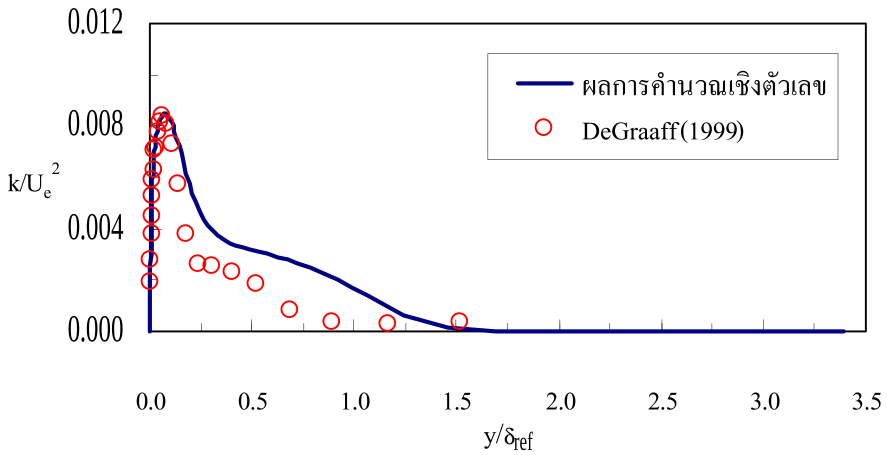
รูปที่ 5.53 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 6/12$



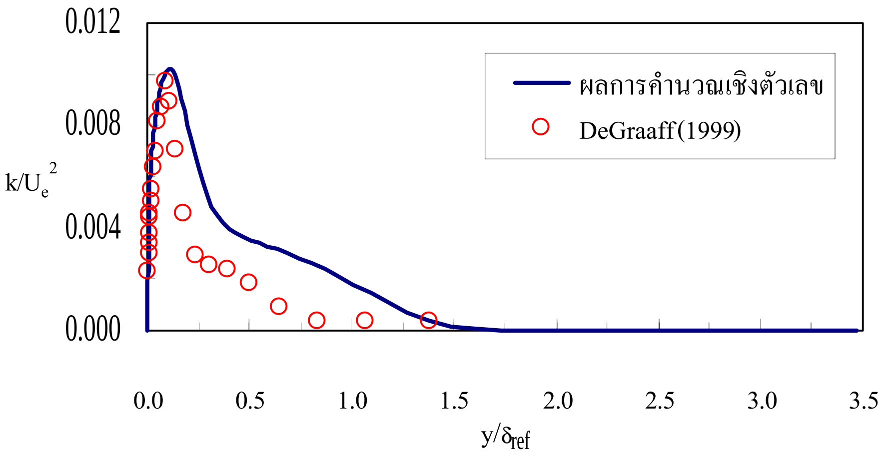
รูปที่ 5.54 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 8/12$



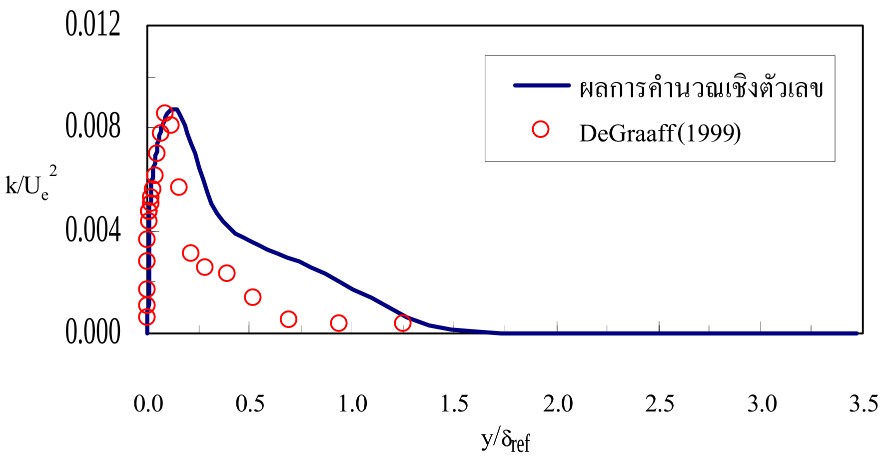
รูปที่ 5.55 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 10/12$



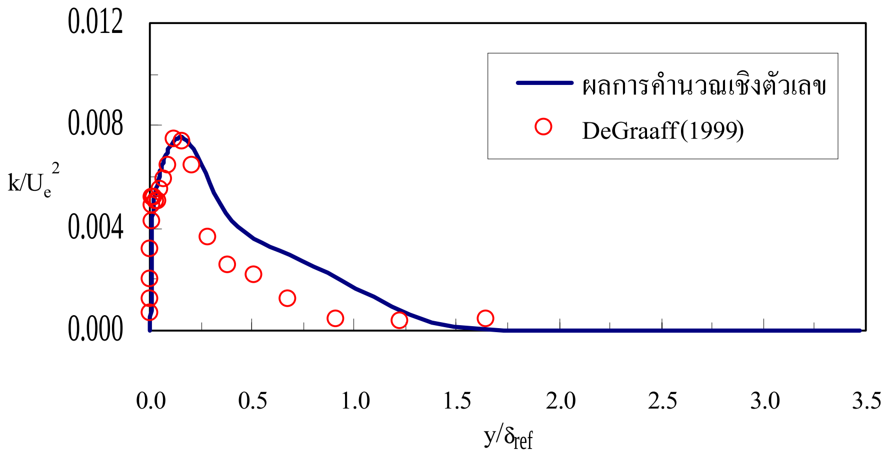
รูปที่ 5.56 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 11/12$



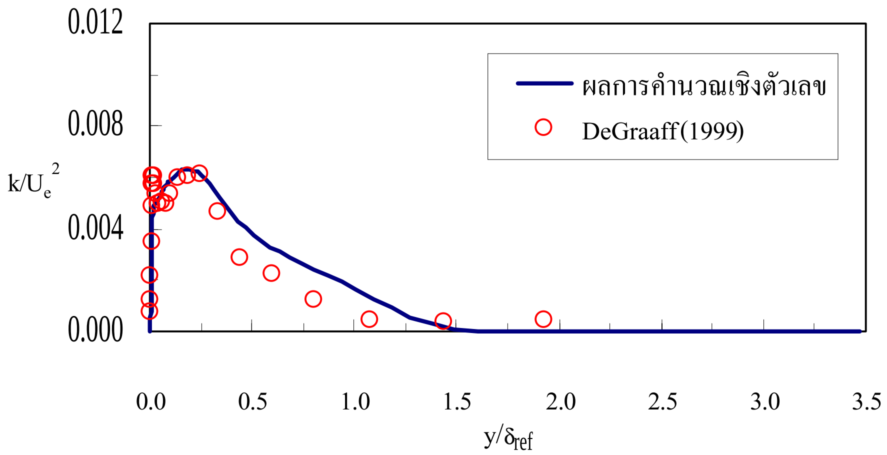
รูปที่ 5.57 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 12/12$



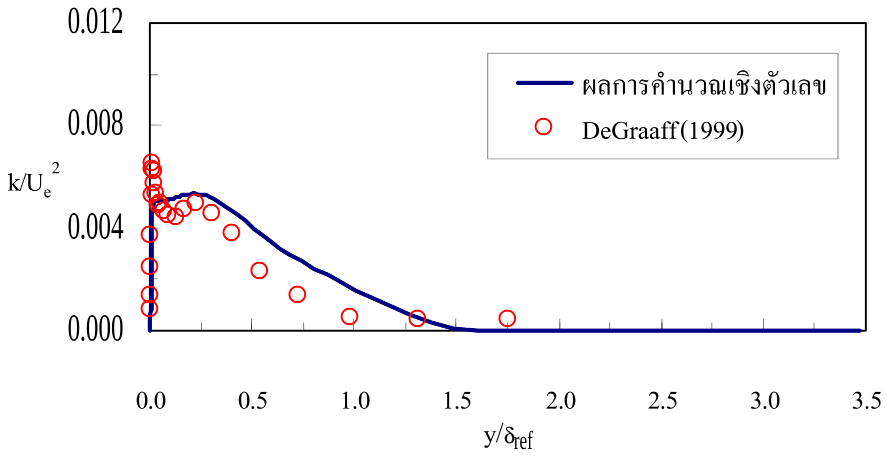
รูปที่ 5.58 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/Lc = 13/12$



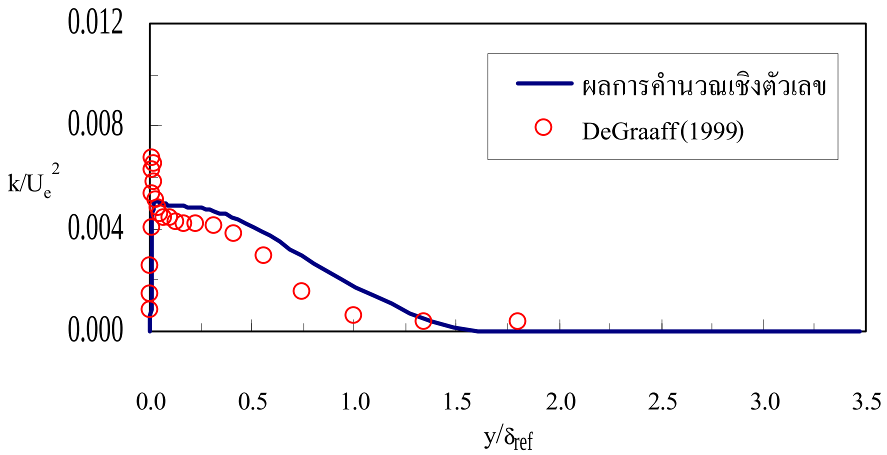
รูปที่ 5.59 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 14/12$



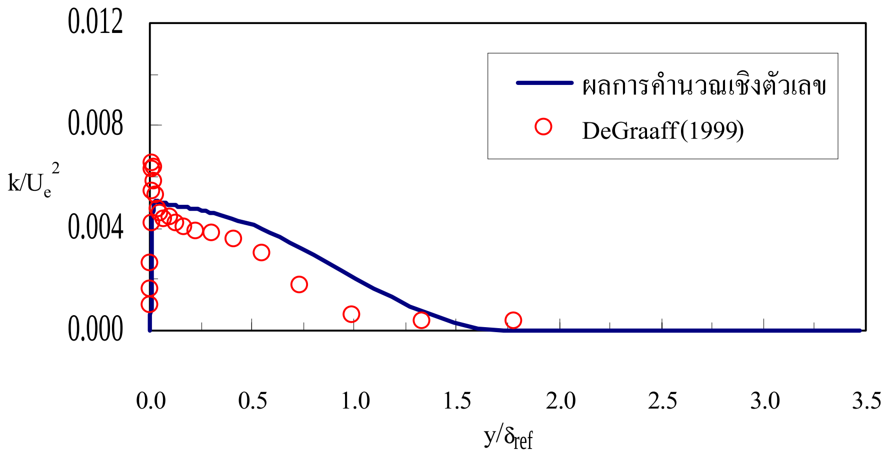
รูปที่ 5.60 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง $x/L_c = 16/12$



รูปที่ 5.61 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง x/L_c = 20/12



รูปที่ 5.62 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง x/L_c = 26/12



รูปที่ 5.63 การกระจายตัวของพลังงานจลน์ของการปั่นป่วนของการไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัวผ่านส่วนโค้งกลมที่ตำแหน่ง x/L_c = 32/12

บทที่ 6
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิจัยโดยสรุปรวมถึงข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป หัวข้อ 6.1 จะกล่าวถึงผลสรุปการวิจัย ได้แก่ กรรมวิธีวิธีต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในงานวิจัย และกรณีทดสอบเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของซอฟต์แวร์ หัวข้อ 6.2 จะกล่าวถึงข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไปเพื่อปรับปรุงให้ซอฟต์แวร์มีความสามารถและความถูกต้องสูงขึ้น

6.1 สรุปผลการวิจัย

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การสร้างซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียงแบบสองมิติ โดยดำเนินการหาผลเฉลยของสมการนาเวียร์สโตคส์ที่สภาวะคงตัว ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เลือกใช้ในงานวิจัยนี้ คือ ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัดร่วมกับระบบกริดแบบจุดร่วม (Collocated Grid System) โดยตัวแปรทั้งหมดถูกเก็บไว้ที่ตำแหน่งเดียวกันทั้งหมดเพื่อลดความซับซ้อนของการเขียนรหัสโปรแกรม การประมาณค่าในช่วงของ Rhie and Chow ถูกนำมาใช้เพื่อป้องกันการไม่เกี่ยวพันกันระหว่างความเร็วกับความดัน แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการ k-ε ของ Launder and Sharma (1974) ถูกนำมาใช้ในกรณีที่การไหลเป็นการไหลแบบปั่นป่วน เนื่องจากซอฟต์แวร์ที่พัฒนาขึ้นนี้เป็นการจำลองการไหลที่ย่านความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียง ซึ่งความดันและความหนาแน่นมีความเกี่ยวพันกันอย่างไม่ชัดเจน ดังนั้นจึงเลือกให้ความดันเป็นตัวแปรปฐมฐานแทนความหนาแน่น โดยความดันหาได้จากขั้นตอนวิธี SIMPLER ซอฟต์แวร์ได้รับการตรวจสอบความถูกต้องโดยการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ข้อมูลจากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง (Direct Numerical Simulation Data, DNS data) ของ Spalart (1988) และข้อมูลจากการทดลอง ได้แก่ Maise and McDonald (1968), Fernholz and Finley (1980), Motallebi (1994), Motallebi (1996) และ DeGraaff (1999) พบว่าผลการคำนวณส่วนใหญ่ที่ได้จากซอฟต์แวร์มีความถูกต้องสอดคล้องกับข้อมูลที่นำมาเปรียบเทียบ แต่ในบางกรณีพบว่าผลการคำนวณที่ได้ยังมีความคลาดเคลื่อนอยู่บ้าง ซึ่งน่าจะเป็นผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากแบบจำลองการปั่นป่วนที่เลือกใช้ยังไม่สามารถจำลองการปั่นป่วนได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์แบบ

6.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

เนื่องจากซอฟต์แวร์ที่สร้างขึ้นอยู่ภายใต้เงื่อนไขการไหลที่ความเร็วต่ำกว่าความเร็วเสียง (Subsonic Flow) ในสภาวะคงตัว (Steady State) แบบสองมิติ (Two-Dimensional Flow) ดังนั้นเพื่อให้ซอฟต์แวร์มีความสามารถสูงขึ้น จึงมีความเห็นว่าควรปรับปรุงให้ซอฟต์แวร์สามารถจำลองการไหลในสภาวะไม่คงตัว (Unsteady State) แบบสามมิติ (Three-Dimensional Flow) และปรับเปลี่ยนแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการแบบเชิงเส้นไปเป็นแบบจำลองการปั่นป่วนประเภทสองสมการแบบไม่เชิงเส้น เพื่อให้ซอฟต์แวร์สามารถจำลองการปั่นป่วนได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น รวมทั้งนำกระบวนการคำนวณแบบขนาน (Pararell Computing) มาใช้ในซอฟต์แวร์ เพื่อให้การคำนวณมีความรวดเร็วยิ่งขึ้น

รายการอ้างอิง

รายการอ้างอิง

ทวิช จิตรสมบูรณ์ และ สุวรรณา อรรฐาเมศร์. (ธันวาคม 2542). โมย่า: โปรแกรมเพื่อวิเคราะห์การไหล. **สัมมนาวิชาการวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 13 เล่ม 1** (หน้า 124-131). กรุงเทพมหานคร: วีเจ พริ้นติ้ง.

บุญลือ สวัสดิ์มงคล และ เอกชัย จันทสาโร. (กำลังจัดพิมพ์). การพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อจำลองการไหลแบบสองมิติ. **สัมมนาวิชาการวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 15.**

Cho, N-H., and Fletcher, C. A. J. (1991). Computation of turbulent conical diffuser flows using a non-orthogonal grid system. **Computers & Fluids** 19: 347-361.

Coelho, P. J., and Pereira, J. C. F. (1992). Finite volume computation of the turbulent flow over a hill employing 2D or 3D non-orthogonal collocated grid systems. **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 14: 423-441.

DeGraaff, D. B. (1999). **Reynolds number scaling of the turbulent boundary layer on a flat plate and on swept and unswept bumps.** Ph.D. Dissertation, Stanford University, California.

Demirdzic, I., Lilek, Z., and Peric, M. (1993) A collocated finite volume method for predicting flows at all speeds. **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 16: 1029-1050.

Deng, G. B. (1989). Numerical simulation of incompressible turbulent appendage-flat plate junction flows. In C. Taylor, W. G. Habashi and M. M. Hafez (eds.). **Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow** (pp. 793-803). Swansea, U. K.: Pineridge.

Fernholz, H. H., and Finley, P. J. (1980). A critical commentary on mean flow data for two-dimensional compressible turbulent boundary layers. **AGARDograph** (May, 1980).

Hassid, S., and Poreh, M., (1978). A turbulent energy dissipation model for flows with drag reduction. **ASME Journal of Fluids Engineering** 100: 107-112.

Hoffman, J. D. (1992). **Numerical methods for engineers and scientists.** Singapore: McGraw-Hill.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Issa, R. I., and Oliveira, P. J. (1994). Numerical prediction of phase separation in two-phase flow through T-junctions. **Computers & Fluids** 23: 347-372.

Juntasaro, E., and Sawatmongkhon, B. (1999). Compressible laminar flow forwards a numerical wind tunnel. In **Proceedings of the 13th National Mechanical Engineering Conference** (pp. 132-137). Bangkok.

Juntasaro, E., Uthayopas, P., Sawatmongkhon, B., and Boonmee, K. (2001). High performance computing for compressible turbulent flow. In **Proceedings of the South East Asia Forum on High Performance Computing** (pp.26-27). Bangkok.

Juntasaro, E., Uthayopas, P., Sawatmongkhon, B., and Boonmee, K. (2001). High performance computing for steady two-dimensional turbulent flow. In **Proceedings of the 5th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering** (pp.126-140). Bangkok.

Karki, K. C., and Patankar, S. V. (1989). Pressure based calculation procedure for viscous flows at all speeds in arbitrary configurations. **AIAA Journal** 27 (9): 1167-1174.

Kwak, D., Chang, J. L. C., Shanks, S. P., and Chakravarthy, S. R. (1986). A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables. **AIAA Journal** 24: 390-396.

Lang, N. J., and Shih, T. H. (1991). **A critical comparison of two-equation turbulence models.** Ohio: ICOMP. (NASA Technical Memorandum 105237).

Launder, B. E., and Sharma, B. I. (1974). Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. **Letters in Heat and Mass Transfer** 1: 131-138.

Lien, F-S., and Leschziner, M. A. (1991). Multigrid convergence acceleration for complex flow including turbulence. In W. Hackbush and U. Trottenberg (eds.). **Multigrid Methods III** (Vol 98, pp 277-288). Basel: Birkhauser.

Maise, G., and McDonald, H. (1968). Mixing length and kinematic eddy viscosity in a compressible boundary layer. **AIAA Journal** 6 (1): 73-80.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Melaaen, M. C. (1991). Analysis of fluid flow in constricted tubes and ducts using body-fitted non-staggered grids. **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 15: 895-923.

Michelassi, V., and Martelli, F. (1990). Efficient solution of turbulent incompressible separated flows. In P. Wesseling (ed.). **Proceedings of the 8th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics** (pp. 373-390). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Motallebi, F. (1994). Mean flow study of two-dimensional subsonic turbulent boundary layers. **AIAA Journal** 32 (11): 2153-2161.

Motallebi, F. (1996). Reynolds number effects on the prediction of mean flow data for adiabatic 2-D compressible boundary layers. **Aeronautical Journal** (February, 1996): 53-59.

Nicholas, J., Chitsomboon, T., and Zhu, J. (1994). **Modification of the two-equation turbulence model in NPARC to a Chien low Reynolds number k-ε formulation.** Ohio: ICOMP. (NASA Technical Memorandum 106710).

Patankar, S. V. (1980). **Numerical heat transfer and fluid flow.** United States of America: Hemisphere.

Patel, V. C., Rodi, W., and Scheuerer, G. (1985). Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: A review. **AIAA Journal** 23 (9): 1308-1319.

Peric, M. (1985). **Finite volume method for the prediction of three-dimensional fluid flow in complex duct.** Ph.D. Thesis, Imperial College, London.

Piquet, J., and Quentey, P. (1990). Computation of the viscous flow past a prolate spheroid at incidence. In P. Wesseling (ed.). **Proceedings of the 8th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics** (pp. 464-473). Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Rhie, C. M., and Chow, W. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. **AIAA Journal** 21 (11): 1525-1532.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Rolfes, H., Visser, J. A., and Bekker, A. (1993). Simulation of wind flow over arbitrary shaped buildings. In C. Taylor (ed.). **Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow** (pp. 643-654). Swansea, U. K.: Pineridge.

Spalart, P. R. (1988). Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$. **Journal of Fluid Mechanics** 187: 61-98.

Uslu, S. (1994). **Numerical prediction of transonic flow in turbine blade passages.** Ph.D. Thesis, Imperial College, London.

Varangrat, S. (1999). **Computational study of compressible flow in an S-shaped duct.** Ph.D. Thesis, Imperial College, London.

Versteeg, H. K., and Malalasekera, W. (1995). **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method.** Malaysia: Longman Scientific & Technical.

Webster, D. R., DeGraaff, D. B., and Eaton, J. K. (1996). Turbulence characteristics of a boundary layer over a two-dimensional bump. **Journal of Fluid Mechanics** 320: 53-69.

White, F. M. (1991). **Viscous fluid flow.** Second edition. Singapore: McGraw-Hill.

Wilcox, D. C. (1993). **Turbulence modeling for CFD.** California: DCW.

Wu, X., and Squires, K. D. (1998a). Numerical investigation of the turbulent boundary layer over a bump. **Journal of Fluid Mechanics** 362: 229-271.

Wu, X., and Squires, K. D. (1998b). Prediction of the high-Reynolds-number flow over a two-dimensional bump. **AIAA Journal** 36 (5): 799-808.

Xu, Z. G., Gotham, D. H. T., and Collins, M. W. (1993). Numerical modeling of three-dimensional turbulent flow in package air-conditioning units with inclined heat exchangers. In C. Taylor (ed.). **Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow** (pp. 328-337). Swansea, U. K.: Pineridge.

Zhu, J., and Rodi, W. (1992). Computation of axisymmetric confined jets in a diffuser. **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 14: 241-251.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

Zijlema, M., Segal, A., and Wesseling, P. (1995). **Finite volume computational of 2D incompressible turbulent flows in general coordinates on staggered grids** [On-line]. Available: http://ta.twi.tudelft.nl/isnas/report94-24/isrep2.html

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

พจน์ที่ก่อให้เกิดการสร้างหรือการสูญเสียบนพิกัดวัตถุของการไหลแบบต่าง ๆ

ก.1 การไหลแบบราบเรียบและไม่อัดตัว

ก.1.1 สมการโมเมนตัมในแนวแกน x

$$S^{u} = -\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

ก.1.1 สมการโมเมนตัมในแนวแกน y

$$S^{v} = -\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)$$

ก.2 การไหลแบบราบเรียบและอัดตัว

ก.2.1 สมการโมเมนตัมในแนวแกน x

$$S^{u} = -\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)$$

ก.2.2 สมการโมเมนตัมในแนวแกน y

$$S^{v} = -\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)$$

ก.2.3 สมการพลังงาน

$$
\begin{aligned}
S^{e_t} = & \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{4}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)u-\frac{2}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)u\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{4}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)u-\frac{2}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)u\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)u-\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)u\right]\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)u-\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)u\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)v-\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)v\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)v-\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)v\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{4}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)v-\frac{2}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)v\right]\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{4}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)v-\frac{2}{3}\frac{\mu}{J}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)v\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(up)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \eta}(up)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]-\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(vp)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}(vp)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right] \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{k_T}{C_v}\frac{1}{J}\left(\frac{\partial K}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial K}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{k_T}{C_v}\frac{1}{J}\left(\frac{\partial K}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial K}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{k_T}{C_v}\frac{1}{J}\left(\frac{\partial K}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial K}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{k_T}{C_v}\frac{1}{J}\left(\frac{\partial K}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial K}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \eta}
\end{aligned}
$$

ก.3 การไหลแบบปั่นป่วนและไม่อัดตัว

ก.3.1 สมการโมเมนตัมในแนวแกน X

$$
\begin{aligned}
S^{\bar{u}} = & \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& -\frac{2}{3}\frac{\rho}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial k}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial p}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)
\end{aligned}
$$

ก.3.2 สมการโมเมนตัมในแนวแกน y

$$
\begin{aligned}
S^{\bar{v}} = & \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\eta} \\
& -\frac{2}{3}\frac{\rho}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial k}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial p}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)
\end{aligned}
$$

ก.3.3 สมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

$$
\begin{aligned}
S^{k} = & \frac{1}{J}\left[2\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)-\frac{2}{3}\rho k\right]\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) \\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \\
& +\frac{1}{J}\left[2\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\rho k\right]\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) \\
& -\frac{2\mu}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right] \\
& -\rho\varepsilon_s
\end{aligned}
$$

ก.3.4 สมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

$$
\begin{aligned}
S^{\varepsilon_s} = C_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{k} \Bigg\{ & \frac{1}{J}\left[2\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - \frac{2}{3}\rho k \right]\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\
& + \frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \\
& + \frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\
& + \frac{1}{J}\left[2\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) - \frac{2}{3}\rho k \right]\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \Bigg\} \\
+ 2\mu \frac{\mu_t}{\rho} \Bigg\{ & \frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^2 \\
& + \frac{2}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^2 \\
& + \frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 \\
& + \frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^2 \\
& + \frac{2}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right]^2 \\
& + \frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \right]^2 \Bigg\} \\
- \rho C_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{k} &
\end{aligned}
$$

ก.4 การไหลแบบปั่นป่วนและอัดตัวได้

ก.4.1 สมการโมเมนตัมในแนวแกน X

$$
\begin{aligned}
S^{\tilde{u}} = & \frac{1}{3J}\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \\
& - \frac{2}{3J}\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \\
& + \frac{1}{J}\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \right\} \\
& - \frac{2}{3J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\bar{\rho}k)\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta}(\bar{\rho}k)\frac{\partial y}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{J}\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)
\end{aligned}
$$

ก.4.2 สมการโมเมนตัมในแนวแกน y

$$
\begin{aligned}
S^{v} = {} & \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi}\right\} \\
& +\frac{1}{3J}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\eta}\right\} \\
& -\frac{2}{3J}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\eta}\right\} \\
& -\frac{2}{3J}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{\rho}k)\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{\rho}k)\frac{\partial x}{\partial\eta}\right]-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)
\end{aligned}
$$

ก.4.3 สมการพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

$$
\begin{aligned}
S^{k} = {} & \frac{1}{J}\left[\frac{4}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)-\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right]\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) \\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) \\
& +\frac{1}{J}\left[-\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{4}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right]\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right) \\
& -\frac{2\mu}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right] \\
& -\bar{\rho}(\varepsilon_s+\varepsilon_d)
\end{aligned}
$$

ก.4.4 สมการอัตราการสูญเสียพลังงานจลน์ของการปั่นป่วน

$$
\begin{aligned}
S^{\varepsilon_s} = & \frac{C_1 f_1}{J}\frac{\varepsilon_s}{k}\left\{\left[\frac{4}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)-\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right]\times\right.\\
& \left[\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\\
& +\frac{\mu_t}{J^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\\
& +\frac{1}{J}\left[-\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{4}{3}\frac{\mu_t}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\bar{\rho}k\right]\times\\
& \left.\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\right\}\\
& +2\mu\frac{\mu_t}{\bar{\rho}}\left\{\frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]^2\right.\\
& +\frac{2}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]^2\\
& +\frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\eta}\right]^2\\
& +\frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]^2\\
& +\frac{2}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial\xi}\right]^2\\
& \left.+\frac{1}{J^2}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{J}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial\eta}\right]^2\right\}\\
& -\frac{4}{3J}\bar{\rho}\varepsilon_s\left[\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)+\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)\right]\\
& -\bar{\rho}C_2 f_2\frac{\varepsilon_s^2}{k}
\end{aligned}
$$

ก.4.5 สมการพลังงาน

$$
\begin{aligned}
S^{e_t} =\; & \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{4}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{u}-\frac{2}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{u}\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{4}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{u}-\frac{2}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{u}\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{u}-\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{u}\right]\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{u}-\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{u}\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{v}-\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{v}\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{v}-\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{v}\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{4}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{v}-\frac{2}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{v}\right]\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{4}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\tilde{v}-\frac{2}{3}\frac{(\mu+\mu_t)}{J}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\tilde{v}\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{u}p)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{u}p)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]-\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{v}p)\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{v}p)\frac{\partial x}{\partial \eta}\right] \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{1}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial k}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{1}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial k}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{1}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial k}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{1}{J}\left(\frac{\partial k}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial k}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\left(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \eta}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]\right\}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \eta}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]\right\}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\
& -\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\right\}\frac{\partial x}{\partial \xi} \\
& +\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\left(\frac{k_T}{C_v}+\frac{\mu_t}{\sigma_e}\right)\frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \xi}(K+k)\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\right\}\frac{\partial x}{\partial \eta}
\end{aligned}
$$

ภาคผนวก ข

แบบจำลองการปั่นป่วนประเภทหนึ่งสมการของ Hassid and Poreh (1975)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \tilde{u}_j k\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \rho(\Pi - \varepsilon)$$

โดยที่

$$\mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k}\lambda\left[1 - \exp\left(-A_\mu R_k\right)\right]$$

$$\Pi = -\overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$$

$$-\overline{u_i' u_j'} = \frac{\mu_t}{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k$$

$$\varepsilon = \left[\frac{C_1}{C_\mu}\mu_t + C_2\mu\right]\frac{k}{\rho\lambda^2}$$

$$\sigma_k = 1.0$$

$$C_\mu = 0.548$$

$$\lambda = \kappa y \quad \text{where} \quad y \le 0.2\delta$$

$$\lambda = 0.09\delta \quad \text{where} \quad y > 0.2\delta$$

$$\kappa = 0.41$$

$$R_k = \frac{\rho\lambda\sqrt{k}}{\mu}$$

$$A_\mu = 0.029$$

$$C_1 = 0.164$$

$$C_2 = 0.336$$

ภาคผนวก ค

รหัสโปรแกรม

หมายเหตุ : ภาคผนวก ค ดูที่ตัวเล่มวิทยานิพนธ์

ประวัติผู้เขียน

นายบุญลือ สวัสดิ์มงคล เกิดเมื่อวันที่ 2 มีนาคม พุทธศักราช 2519 สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) (เกียรตินิยมอันดับสอง) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เมื่อปีพุทธศักราช 2542 ภายหลังสำเร็จการศึกษาได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโทวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปัจจุบัน เป็นผู้ช่วยวิจัยของ อาจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร อาจารย์ประจำสาขาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี