การสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

นายอัษฎายุธ รอดพ่าย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ปีการศึกษา 2549

TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS OF

LINEAR VISCOELASTIC MATERIALS

Autsadayut Rodpai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Suranaree University of Technology

Academic Year 2006

การสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

____

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
ประธานกรรมการ

____

(อ. ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

____

(ผศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)
กรรมการ

____

(อ. ดร.สมศักดิ์ ศิวดำรงพงศ์)
กรรมการ

______________________________	______________________________
(รศ. ดร.เสาวณีย์ รัตนพานี)	(รศ. น.อ. ดร.วรพจน์ ขำพิศ)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ	คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

อัษฎายุธ รอดพ่าย : การสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS OF LINEAR VISCOELASTIC MATERIALS) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล, 221 หน้า.

โดยทั่วไปการศึกษาและวิเคราะห์เกี่ยวกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น จะตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท (ความเค้น หรือ ความเครียด) ที่กระทำต่อวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นกับเอาพุท (ความเครียด หรือ ความเค้น) ที่เกิดขึ้นจากการตอบสนองของวัสดุ ซึ่งลักษณะดังกล่าวสามารถใช้หลักการทฤษฎีควบคุมอธิบายพฤติกรรมการตอบสนองทางพลวัตของวัสดุที่เกิดขึ้นได้

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นที่สามารถอธิบายคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ อาทิเช่น พฤติกรรมการคืบ พฤติกรรมการพักความเค้น และพฤติกรรมการคืนรูปของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการวัด คือ ความหนืด ความยืดหยุ่น และความถี่ที่กระทำต่อวัสดุไปประเมินค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด และวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยความถี่ และค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูล ซึ่งสามารถนำไปใช้พัฒนาเครื่องมือวัดให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นได้

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนักศึกษา________________

ปีการศึกษา 2549 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา________

AUTSADAYUT RODPAI : TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS OF LINEAR VISCOELASTIC MATERIALS. THESIS ADVISOR : JIRAPHON SRISERTPOL, Ph.D. 221 PP.

LINEAR VISCOELASTICITY MATERIALS/STRESS/ STRAIN/TRANSFER FUNCTION/LEAST SQUARE METHOD

Generally, the study and analysis of linear viscoelasticity materials is to investigate the relationship between input (stress or strain) on such materials and output (strain or stress) that occurs from the response of such materials. The control theory can be used to find out the dynamic responding behavior of materials.

In the present study, the transfer function synthesis is proposed to accurately describe the properties of the linear viscoelasticity materials, such as, creep, stress relaxation and recovery behaviors of materials. The viscosity, elasticity, and input frequency from the experimental set-up are measured. To determine the transfer function coefficients, the least square method, the weighting least square method with input frequency, and the weighting least square method with variance are used. The results will be used to develop more efficient experimental set-up.

School of Mechanical Engineering Student's Signature__________________

Academic Year 2006 Advisor's Signature__________________

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้จะสำเร็จลุล่วงไม่ได้หากไม่ได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจากท่านอาจารย์จิระพล ศรีเสริฐผล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่คอยให้ความช่วยเหลือสนับสนุน ให้คำปรึกษาและชี้แนะแนวทางการทำวิจัย ตลอดจนคอยกระตุ้นให้กำลังใจ รวมทั้งให้การงาน จนทำให้ผู้ทำวิจัยมีกำลังใจ และกำลังทรัพย์ในการฟันฝ่าอุปสรรคต่าง ๆ จนผ่านไปด้วยดี ขอกราบขอบพระคุณท่านอาจารย์กนต์ธร ชำนิประศาสน์ ที่ให้โอกาสในการทำงานหลาย ๆ ด้าน ทำให้ผู้วิจัยได้รับประสบการณ์ที่เป็นประโยชน์ยิ่ง ตลอดจนคำแนะนำอันเป็นประโยชน์ ทั้งในด้านการศึกษาและการดำเนินชีวิต กราบขอบพระคุณท่านอาจารย์วรพจน์ ขำพิศ อาจารย์เอกชัย จันทสาโร และคณาจารย์ในสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แนะนำแนวทางที่ถูกที่ควรด้วยความเมตตาเสมอมา

นอกจากนี้ยังขอขอบคุณกลุ่มบุคคลต่อไปนี้ คือ คุณอาภรณ์พรรณ ศรีอัครวิทยา, คุณทัศนีย์ ทิพย์สาคร และคุณวันเพ็ญ สืบสาย เจ้าหน้าที่และธุรการประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ คุณเกรียงไกร เพ็ชรน้ำเขียว, คุณเกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน, คุณเมธี คำติ๊บ, คุณเจิมธง ปรารถนารักษ์ และคุณเอกรงค์ สุขจิต นักศึกษาบัณฑิตศึกษา สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ได้ให้ความช่วยเหลือทั้งแรงกายและแรงใจ รวมทั้งสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้ทุนสนับสนุนการทำวิจัย

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่สมฤดี คุณแม่สมศรี ที่ได้เป็นกำลังใจและสนับสนุนลูกคนนี้เสมอมา ขอขอบคุณน้องอ๊อบ ที่คอยเป็นกำลังใจเสมอมา รวมถึงขอบคุณน้องกอล์ฟ ที่คอยให้การดูแลและช่วยเหลือในทุก ๆ ด้านเป็นอย่างดี

อัษฎายุธ รอดพ่าย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย) .... ก

บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ) .... ข

กิตติกรรมประกาศ .... ค

สารบัญ .... ง

สารบัญตาราง .... ซ

สารบัญรูปภาพ .... ฎ

คำอธิบายสัญลักษณ์ .... ฑ

บทที่

1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย 2

1.3 สมมติฐานของการวิจัย 2

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น 2

1.5 ขอบเขตของการวิจัย 2

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 2

2 ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 3

2.1 สมบัติเชิงกลของวัสดุ 3

2.2 วัสดุยืดหยุ่นหนืด 4

2.2.1 วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น 4

2.2.2 วัสดุยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้น 7

2.3 พฤติกรรมของวัสดุยืดหยุ่นหนืด 8

2.3.1 การคืบ 8

2.3.2 การพักความเค้น 10

2.3.3 การคืนรูป 11

2.4 คุณสมบัติเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด 12

2.4.1 ฟังก์ชันการพักเชิงพลวัต 12

2.4.2 ฟังก์ชันความหยุ่นเชิงพลวัต 14

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.3.2 การพักความเค้น (Stress relaxation) 10
2.3.3 การคืนรูป (Recover) 12
2.4 คุณสมบัติเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Dynamic properties of viscoelastic) 13
2.4.1 ฟังก์ชันการพักเชิงพลวัต (Dynamic relaxation functions) 13
2.4.2 ฟังก์ชันความหยุ่นเชิงพลวัต (Dynamic creep compliance function) 15
2.4.3 ความหนืดเชิงพลวัต (Dynamic viscosity) 15
2.4.4 การวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด 16
2.4.4.1 วิธีการลูกตุ้มแบบบิด (Torsion pendulum method) 17
2.4.4.2 การสั่นเนื่องจากแรงแบบมีการสั่นพ้อง (Resonance forced vibration method) 18
2.4.4.3 การสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง (Nonresonance forced vibration method) 19
2.4.4.4 การวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตจากการเฉือน 20
2.5 แบบจำลองสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Models of linear viscoelasticity) 22
2.5.1 แบบจำลองแมกซ์เวลส์ 22
2.5.2 แบบจำลองเคลวิน-โวค 27
2.5.3 แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน (Standard linear model) 31
2.6 ตัวอย่างวัสดุยืดหยุ่นหนืด 36
2.6.1 วัสดุพอลิเมอร์ (Polymer) 36
2.6.2 เลือด (Blood) 39
2.6.3 อาหาร (Food) 40
2.7 ระบบพลวัตในระบบควบคุมอัตโนมัติ (Dynamic control system) 42
2.7.1 ระบบพลวัตเชิงกล 42
2.7.2 ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) 43
2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 45

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3 วิธีดำเนินงานวิจัย 47
3.1 บทนำ 47
3.2 การประมาณค่าฟังก์ชันจากชุดข้อมูล (Estimation function) 47
3.2.1 วิธีสมการกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method) 47
3.2.2 กระบวนการถ่วงน้ำหนัก 51
3.2.3 เมตริกผกผันเทียม (Pseudo inverse) 53
3.2.4 กระบวนการการหาค่าความผิดพลาด 53
3.2.5 กระบวนการการหาค่าความมีเสถียรภาพ 54
3.2.5.1 ความเสถียร และโพล (Stability and poles) 54
3.2.5.2 The Routh-Hurwitz stability criterion 56
3.3 วิธีการทำวิจัย 58
3.3.1 วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก (Non weight least square method) 58
3.3.2 วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weight-least squares method) 60
3.4 ปัญหาทดสอบมาตรฐาน 63
4 ผลการคำนวณและอธิปรายผลการคำนวณ 65
4.1 บทนำ 65
4.2 โปรแกรมวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืด 65
4.2.1 รายละเอียดของโปรแกรมวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน 66
4.2.2 ชุดโปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ 66
4.2.3 ชุดโปรแกรมหลัก 67
4.3 ปัญหาทดสอบมาตรฐาน 75
4.3.1 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 1 75
4.3.2 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 2 78
4.3.3 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 2, m = 3 82
4.3.4 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 4, m = 4 86
4.3.5 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 3, m = 5 90

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.3.6 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 1 จากหัวข้อที่ 4.3.1 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% 95
4.3.7 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 2 จากหัวข้อที่ 4.3.2 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% 100
4.3.8 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 2, m = 3 จากหัวข้อที่ 4.3.3 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% 106
4.3.9 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 4, m = 4 จากหัวข้อที่ 4.3.4 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% 112
4.3.10 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 5, m = 5 จากหัวข้อที่ 4.3.5 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนชุดข้อมูล ±10% 118
4.4 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับปัญหายืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น 126
4.4.1 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับชุดข้อมูลของ Polybutadient พอลิเมอร์ 126
4.4.2 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 133
4.4.2.1 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 10, $G_{oi,Pa}$ = 1.94E+01 134
4.4.2.2 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 1, $G_{oi,Pa}$ = 8.33E+02 140
4.4.2.3 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.1, $G_{oi,Pa}$ = 3.93E+04 146
4.4.2.4 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.01, $G_{oi,Pa}$ = 3.48E+05 152
4.4.2.5 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.001, $G_{oi,Pa}$ = 3.70E+05 158
4.4.2.6 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.0001, $G_{oi,Pa}$ = 1.00E+06 164
4.5 สรุป 170
5 สรุป และ ข้อเสนอแนะ 171
5.1 สรุปผลการวิจัย 172
5.2 ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยต่อ 178
รายการอ้างอิง 179

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ภาคผนวก
ภาคผนวก ก. โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน 183
ภาคผนวก ข. บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.. 219
ประวัติผู้วิจัย... 221

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่

4.1 แสดงผลการคำนวณที่โพลมีค่าเท่ากับ -5 77
4.2 แสดงผลการคำนวณที่โพลมีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j 81
4.3 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -5,-6 และโพลมีค่าเท่ากับ -1,-2,-3 85
4.4 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -2, -5, 3+j, 3-j และ โพลมีค่าเท่ากับ -5, -3, 2+j, 2-j ...89
4.5 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และ โพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8 93
4.6 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่โพลมีค่าเท่ากับ -5 99
4.7 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่โพลมีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j 104
4.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -5,-6 และโพลมีค่าเท่ากับ -1,-2,-3 110
4.9 แสดงแสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -2, -5, 3+j, 3-j และ โพลมีค่าเท่ากับ -5, -3, 2+j, 2-j........116
4.10 แสดงแสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และ โพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8 122
4.11 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient โดยมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 8.3x10^{-4} 126
4.12 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient 131
4.13 ตารางที่ 4.13 Relaxation Time $\lambda_{i,s}$ และ Strength $G_{oi,Pa}$ 133
4.14 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 134
4.15 แสดงผลการคำนวณ 139
4.16 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 140

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

4.17 แสดงผลการคำนวณ 145
4.18 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 146
4.19 แสดงผลการคำนวณ 151
4.20 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 152
4.21 แสดงผลการคำนวณ 157
4.22 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 158
4.23 แสดงผลการคำนวณ 163
4.24 แสดงผลการทดลองของ โพลิเอทีลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 164
4.25 แสดงผลการคำนวณ 169
5.1 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีค่าผิดพลาดน้อยที่สุด 173
5.2 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับค่าความแปรปรวนมีค่าเท่ากับ ±10% 175
5.3 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีค่าผิดพลาดน้อยที่สุดในแต่ละกรณี โดยใช้ข้อมูลของ Yanovsky et al. (1996) 176
5.4 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีค่าผิดพลาดน้อยที่สุดในแต่ละกรณี โดยใช้ข้อมูลของ Kucukpinar et al. (n.d.) 177

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

2.1 แสดงการตอบสนองของวัสดุประเภทต่าง ๆ เมื่อได้รับแรงกระทำ 3
2.2 แสดงพฤติกรรมการความเป็นเชิงเส้นระหว่างความแค้น และความเครียด 4
2.3 แสดงของแข็งยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic solid) หรือสปริง 5
2.4 แสดงของเหลวหนืดเชิงเส้น (Linear viscous fluid) หรือกระบอกสูบแบบนิวทอเนียล (Newtonian dashpot) 5
2.5 แสดงความสัมพันธ์ของความเค้น และความเครียดของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นและการยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นของวัสดุ 8
2.6 แสดงคุณสมบัติการคืบของวัสดุ 9
2.7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความเค้นและความเครียดกับเวลา 9
2.8 แสดงการลดลงของความเค้นเป็นฟังก์ชันกับเวลา 11
2.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการพักความเค้นและการคืนรูปของวัสดุยืดหยุ่นหนืด 13
2.10 เครื่องมือสำหรับวิธีการลูกตุ้มแบบบิด แบบ A และแบบ B 17
2.11 แสดงกราฟการสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วง 18
2.12 เครื่องมือสำหรับการสั่นเนื่องจากแรงแบบมีการสั่นพ้อง 19
2.13 เครื่องมือสำหรับการสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่การสั่นพ้อง 20
2.14 เครื่องมือวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตจากการเฉือน 20
2.15 แบบจำลองของแมกซ์เวลส์สำหรับความเค้นเฉือน 22
2.16 แสดงแผนภาพบล็อกของแบบจำลองแมกซ์เวลส์ 25
2.17 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุทของแบบจำลองแมกซ์เวลส์ 26
2.18 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุทของแบบจำลองแมกซ์เวลส์ 27
2.19 แบบจำลองของเคลวิน-โวค 27
2.20 แสดงแผนภาพบล็อกของแบบจำลองเคลวิน-โวค 29

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

2.21 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุท ของแบบจำลองเคลวิน-โวค 30
2.22 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุท ของแบบจำลองเคลวิน-โวค 32
2.23 แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน 32
2.24 แสดงแผนภาพแบบบล็อกของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน 34
2.25 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุท ของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน 35
2.26 แสดงการตอบสนองของ Shear rate (γ) ที่มี Shear stress (τ) เป็นอินพุท ของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน 36
2.27 แสดงสมบัติการยืดหยุ่นเชิงเส้นและการยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้นของวัสดุ 39
2.28 แสดงค่าความยืดหยุ่นและความหนืดของเลือดที่วิเคราะห์ได้จากมนุษย์ที่เป็นปกติ 41
2.29 แสดงค่าความยืดหยุ่นและความหนืดของเลือดที่วิเคราะห์ได้จากมนุษย์ที่เกิดโรค 41
2.30 แสดงระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง และแผนภาพอิสระ 43
2.31 แสดงแผนภาพบล๊อกของระบบมวล-สปริง-ตัวหน่วง 44
2.32 แสดงแผนภาพบล๊อกของสมการ 2.78 44
3.1 วิธีกำลังสองน้อยสุด 48
3.2 โพลที่ตำแหน่งต่างๆ 55
3.3 ตำแหน่งโพลและการตอบสนองของระบบในโดเมนเวลา 56
3.4 แผนภาพแสดง Flow chart ของวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก 60
3.5 แผนภาพแสดง Flow chart ของวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก 63
4.1 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.1 76
4.2 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.2 79

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.3 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.3 83
4.4 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.4 87
4.5 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.5 91
4.6 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.1 96
4.7 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.2 100
4.8 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.3 106
4.9 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.4 112
4.10 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.5 118
4.11 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขที่ 30 point, 0.01-100 Hz, $a_0 = 1$ ของ Polybutadient 128
4.12 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา 30 point, 0.01-100 Hz, $a_0 = 1$ 135

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.13 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-100 Hz, a_0 = 1 141

4.14 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-100 Hz, a_0 = 1 147

4.15 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-100 Hz, a_0 = 1 153

4.16 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-100 Hz, a_0 = 1 159

4.17 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-100 Hz, a_0 = 1 165

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

b	ค่าคงที่ของตัวหน่วง
E	มอดุลัสของยังตามความยาว
F	แรง
F(t)	แรงกระทำภายนอก ณ เวลา t ใด ๆ
G	มอดุลัสของการเฉือน
$G^*(\omega)$	ค่ามอดุลัสเชิงซ้อน (Complex modulus)
$G'(\omega)$	ค่ามอดุลัสพลังงานสะสม (Storage modulus)
$G''(\omega)$	ค่ามอดุลัสสูญเสีย (Loss modulus)
$J(t)$	ฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Creep compliance)
J^*	ค่าฟังก์ชันความหยุ่นเชิงซ้อน (Complex compliance modulus)
J'	ค่าฟังก์ชันความหยุ่นพลังงานสะสม (Storage compliance)
J''	ค่าฟังก์ชันความหยุ่นสูญเสีย (Loss compliance)
k	ค่าคงที่ของสปริง
M	มวล
X	การขจัด
ε	ความเครียดตามความยาว
ε_0	ความเครียดคงที่ (Strain)
$\dot{\varepsilon}$	ความเร็วของการเปลี่ยนรูปตามยาว
γ	ความเครียดเฉือน (Shear strain)
γ_0	ความเครียดเฉือนคงที่ (Shear strain)
$\dot{\gamma}$	ความเร็วของการเปลี่ยนรูปจากการเฉือน
η_E	ความหนืดตามความยาว
η	ความหนืดจากการเฉือน
η^*	ความหนืดเชิงซ้อน (Complex viscosity)
η'	Dynamic viscosity
η''	Out of phase viscosity
σ	ความเค้น

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โดยทั่วไปเมื่อกล่าวถึงสมบัติเชิงกลของวัสดุแล้ว วัสดุในอุดมคติที่เป็นที่รู้จักกันดี คือ ของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid) และของเหลวหนืด (Viscous liquid) โดยของแข็งยืดหยุ่นนั้น เมื่อได้รับแรงกระทำจากภายนอกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปอยู่ในสมดุลใหม่ แต่เมื่อแรงกระทำนั้นถูกลดให้เป็นศูนย์ วัสดุก็จะคืนสภาพกลับสู่รูปร่างหรือสมดุลดังเดิมทันที (ยกเว้นในกรณีที่ผ่านจุดคราก (Yield)) ตรงกันข้ามกับของเหลวหนืดที่จะเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างไม่สามารถคืนตัวกลับมาอยู่ในสภาพเดิม เมื่อไม่มีแรงกระทำแล้ว ซึ่งความสัมพันธ์จะเป็นไปตามกฎของฮุค (Hook’s law) และกฎของนิวตัน (Newton’s law) ตามลำดับ สำหรับวัสดุบางชนิด เช่น พอลิเมอร์ หรือแม้แต่เลือดและกล้ามเนื้อของมนุษย์ ไม่สามารถจะจัดให้อยู่ในกลุ่มของของแข็งยืดหยุ่นหรือของเหลวหนืดได้ เนื่องจากขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่าง ๆ เช่น ความถี่ อุณหภูมิ เวลา อัตราเร็วในการทดสอบ เป็นต้น ซึ่งวัสดุที่มีคุณสมบัติประเภทนี้จะถูกเรียกว่า วัสดุยืดหยุ่นหนืด (Viscoelastic materials) ซึ่งการตอบสนองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดจะแสดงคุณสมบัติที่ผสมกันระหว่างของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวหนืด (จินตมัย สุวรรณประทีป, 2539)

โดยทั่วไปการศึกษาเกี่ยวกับความยืดหยุ่นหนืด (Viscoelasticity) จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่ไม่เป็นสัดส่วนคงที่ แต่จะขึ้นอยู่กับเวลาในการตอบสนองของวัสดุ คือความสัมพันธ์นี้จะมีลักษณะที่ไม่คงที่ แต่จะเปลี่ยนไปตามเวลา ซึ่งการอธิบายพฤติกรรมของไหลที่เป็นของเหลวหนืด จะอาศัยแบบจำลองที่ใช้กระบอกของเหลวลูกสูบ (Dashpot) และในส่วนของการอธิบายพฤติกรรมของแข็งยืดหยุ่นจะอาศัยแบบจำลองที่ใช้สปริง (Spring) (Geil, 2002) โดยแบบจำลองทั่วไปที่ใช้กับวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Linear viscoelasticity) ได้แก่ แบบจำลองของแมกซ์เวลล์ (Maxwell model) และแบบจำลองของเคลวิน-โวค (Kelvin-Voigt model) (มนัส แซ่ด่าน, 2538) โดยส่วนมากการวิเคราะห์วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นจะพิจารณาที่ความหนืด (Viscosity), ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency) ซึ่งคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดดังกล่าวนั้น สามารถสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนได้ ดังนั้นในการศึกษาวิจัยในครั้งนี้จึงเป็นไปเพื่อการนำข้อมูลที่มีอยู่ อาทิเช่น ความหนืด (Viscosity),

ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency) ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น นำมาใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการหาค่าฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุนั้น ๆ และนำไปใช้เป็นแนวทางเพื่อนำไปพัฒนาองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการวิจัยในระดับต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1. นำข้อมูลที่มีอยู่ อาทิเช่น ความหนืด (Viscosity), ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency) ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น นำมาสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุ
2. ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการเขียนโปรแกรมสำหรับสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอน

1.3 สมมติฐานของการวิจัย

ด้วยคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (ความหนืด (Viscosity), ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency)) สามารถนำมาสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนได้

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

โปรแกรมการหาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น จะวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MATLAB 6.5 และ/หรือ โปรแกรม Microsoft visual studio 6.0

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้ทำการศึกษาการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการเขียนโปรแกรม เพื่อใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุ โดยอาศัยคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นของวัสดุ

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ภาคการศึกษาและวิจัยที่เกี่ยวของกับวัสดุศาสตร์ที่มีคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น
2. การออกแบบและพัฒนาอุปกรณ์สำหรับการวัดความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

บทที่ 2
ปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมบัติเชิงกลของวัสดุ

โดยทั่วไปเมื่อกล่าวถึงคุณสมบัติเชิงกลในวัสดุอุดมคติ จะประกอบไปด้วย

2.1.1 วัสดุที่มีคุณสมบัติของแข็งยืดหยุ่น (Elastic solid)

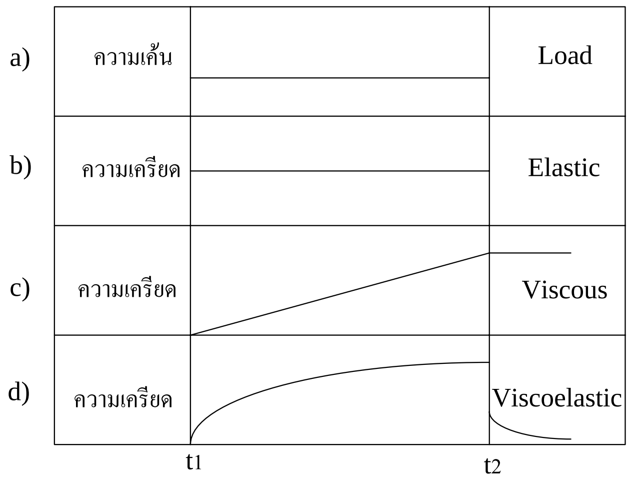
คือวัสดุเมื่อได้รับแรงกระทำจากภายนอกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปอยู่ในสมดุลใหม่ เมื่อแรงกระทำนั้นลดลงเป็นศูนย์ วัสดุก็จะคืนสภาพกลับสู่รูปร่างหรือสมดุลดั้งเดิมทันที (ยกเว้นในกรณีที่ผ่านจุดคราก) ซึ่งความสัมพันธ์จะเป็นไปตามกฎของฮุค (Hook’s law)

2.1.2 วัสดุที่มีคุณสมบัติของเหลวหนืด (Viscous liquid)

คือวัสดุเมื่อได้รับแรงกระทำจากภายนอกก็จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปอยู่ในสมดุลใหม่ เมื่อแรงกระทำนั้นถูกลดให้เป็นศูนย์ วัสดุจะเปลี่ยนรูปร่างอย่างไม่สามารถคืนตัวกลับมาอยู่ในสภาพเดิม เมื่อไม่มีแรงกระทำแล้ว ซึ่งความสัมพันธ์จะเป็นไปตามกฎของนิวตัน (Newton’s law)

2.1.3 วัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืด (Viscoelasticity)

คือวัสดุที่ไม่สามารถจัดให้อยู่ในกลุ่มของของแข็งยืดหยุ่นหรือของเหลวหนืดได้



รูปที่ 2.1 แสดงการตอบสนองของวัสดุประเภทต่าง ๆ เมื่อได้รับแรงกระทำ

เนื่องจากเป็นวัสดุที่แสดงคุณสมบัติทั้งของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวหนืด โดยคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่าง ๆ เช่น อุณหภูมิ เวลา อัตราเร็วในการทดสอบตัวอย่าง ความถี่ เป็นต้น รูปที่ 2.1 แสดงการตอบสนองของวัสดุที่มีคุณสมบัติของแข็งยืดหยุ่น, ของเหลวหนืดและยืดหยุ่นหนืด เมื่อวัสดุได้รับแรงเค้น ณ เวลา t_1 และแรงเค้นมีค่าเป็นศูนย์ ที่เวลา t_2 พบว่า สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติของแข็งยืดหยุ่นจะมีการตอบสนองเป็นไปตามกฎของฮุคดังแสดงในรูปที่ 1b สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติของเหลวหนืดจะมีการตอบสนองเป็นไปตามกฎของนิวตัน ดังแสดงในรูปที่ 1c และสำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืด จะแสดงคุณสมบัติทั้งของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวหนืดดังแสดงในรูปที่ 1d

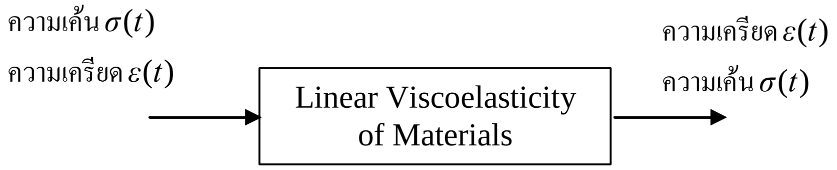
2.2 วัสดุยืดหยุ่นหนืด (Viscoelastic materials)

วัสดุยืดหยุ่นหนืดเป็นวัสดุซึ่งมีคุณสมบัติทั้งของแข็งยืดหยุ่นและของเหลวหนืด โดยทั่วไปการศึกษาวัสดุยืดหยุ่นหนืด จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความความเค้นและความเครียด ซึ่งจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและเวลา (Zhang and Pang, 2002) ซึ่งสามารถจำแนกวัสดุออกได้เป็น 2 ประเภท ดังต่อไปนี้

- วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Linear viscoelasticity of materials)
- วัสดุยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้น (Non-linear viscoelasticity of materials)

2.2.1 วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Linear viscoelasticity of materials)

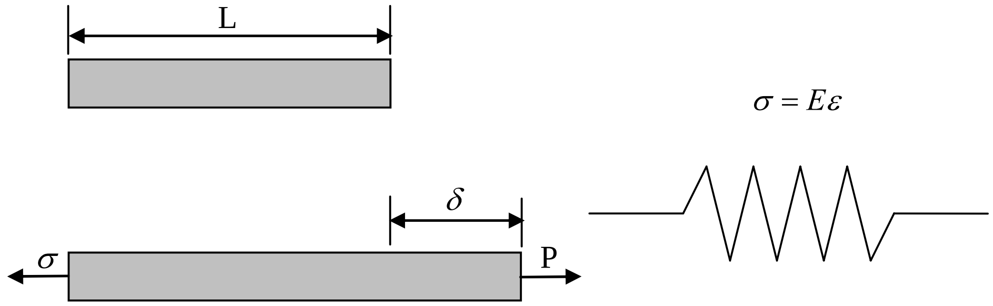
วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ($\sigma(t)$) และความเครียด ($\varepsilon(t)$) ซึ่งขึ้นอยู่กับเวลา หรือ ความถี่ จะมีพฤติกรรมการตอบสนองสัมพันธ์กันระหว่างความเค้นและความเครียดคือ



รูปที่ 2.2 แสดงพฤติกรรมความเป็นเชิงเส้นระหว่างความเค้นและความเครียด

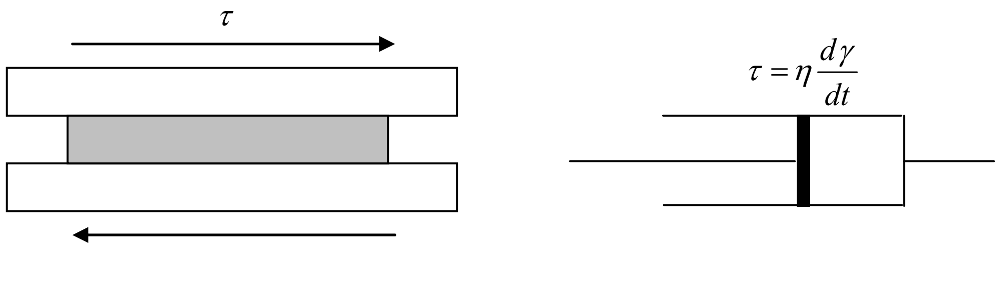
เมื่อมีอินพุท (ความเค้น หรือ ความเครียด) เพิ่มขึ้น ก็จะทำให้เอาพุท (ความเครียด หรือ ความเค้น) เพิ่มขึ้นด้วย (David, 1998) ทำนองเดียวกัน ถ้ามีค่าอินพุท (ความเค้น หรือ ความเครียดลดลง ก็จะทำให้เอาพุท (ความเครียด หรือ ความเค้น) ลดลงด้วย เมื่อเราพิจารณาถึง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนั้น จะมีทฤษฎีที่ใช้อธิบายพฤติกรรมต่าง ๆ สำหรับวัสดุในอุดมคติ โดยทั่วไปวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นจะมีเงื่อนไขว่า วัสดุนั้นต้องถูกกระทำที่ความเครียดต่ำ, อุณหภูมิต่ำ และที่ช่วงความถี่ต่ำในการทดสอบ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการอธิบายพฤติกรรมความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนั้น จะใช้แบบจำลองในการอธิบายพฤติกรรมการตอบสนองต่าง ๆ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น อาทิเช่น แบบจำลองแมกเวลส์ (Maxwell model), แบบจำลองเคลวิน-โวก (Kelvin-Voigt model) และแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน (Standard linear model) ซึ่งแบบจำลองต่าง ๆ เหล่านี้ ช่วยในการอธิบายพฤติกรรมการตอบสนองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ซึ่งจะประกอบไปด้วย ของแข็งยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic solid) หรือสปริงที่เป็นไปตามกฎของฮุค (Hookean spring) ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงของแข็งยืดหยุ่นเชิงเส้น (Linear elastic solid) หรือสปริง

และของเหลวหนืดเชิงเส้น (Linear viscous fluid) หรือกระบอกสูบแบบนิวทอเนียล (Newtonian dashpot) (David, 1998) ดังแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงของเหลวหนืดเชิงเส้น (Linear viscous fluid) หรือ กระบอกสูบแบบนิวทอเนียล (Newtonian dashpot)

กลับมาสู่สมดุลเดิม (พิจารณาที่วัสดุยังไปเกินจากความเค้นจุดคราก (Yield stress)) ซึ่งลักษณะดังกล่าวมีความคล้ายคลึงกับพฤติกรรมของของแข็งยืดหยุ่นดังรูปที่ 1b ดังนั้นถ้าแทนแรงด้วยความเค้น ซึ่งมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับความเครียด โดยมีค่าคงที่คือ มอดุลลัสของยัง ซึ่งความสัมพันธ์ที่ได้กล่าวมาข้างต้น คือ กฎของฮุก จากรูปที่ 2.3 จะได้ว่า

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.1}$$

โดยที่

σ = ความเค้น

ε = ความเครียดตามความยาว

E = มอดุลลัสของยังตามความยาว

ส่วนกรณีการเปลี่ยนแปลงรูปจากการเฉือน จากรูปที่ 2.4 จะได้ว่า

$$\tau = G\gamma \tag{2.2}$$

โดยที่

τ = ความเค้นเฉือน

γ = ความเครียดเฉือน

G = มอดุลลัสของการเฉือน

ซึ่งค่า E และค่า G เป็นสมบัติเฉพาะของวัสดุ แต่สำหรับกระบอกสูบนิวทอเนียลนั้น เมื่อให้แรงกับ กระบอกสูบแล้วลดแรงที่กระทำจนเป็นศูนย์แล้วนั้น กระบอกสูบจะเกิดการสูญเสียพลังงานที่มีอยู่ทันที ซึ่งเมื่อสูญเสียพลังงานไปแล้ว กระบอกสูบก็จะไม่สามารถกลับคืนสู่สมดุลเดิมได้ ซึ่งพฤติกรรมที่เกิดขึ้นนี้มีความคล้ายคลึงกับลักษณะของของเหลวหนืดดังรูปที่ 1c คือ เมื่อลดแรงกระทำลงจนเป็นศูนย์แล้ว ของเหลวหนืดจะไม่สามารถกลับสู่สมดุลเดิมได้ สำหรับของเหลวหนืดอาจกล่าวได้ว่าความสามารถในการไหลของวัสดุหรือความเร็วในการไหลจะแปรผันกับความเค้นของวัสดุนั้น ๆ ซึ่งก็คือกฎของนิวตันสำหรับของไหลนั่นเอง (สมบัติ พุทธจักร, 2547) จะได้ว่า

$$\sigma = \eta_E \dot{\varepsilon} \tag{2.3}$$

โดยที่

σ = ความเค้น

$\dot{\varepsilon}$ = ความเร็วของการเปลี่ยนรูปตามยาว

η_E = ความหนืดตามความยาว

ส่วนกรณีการเปลี่ยนแปลงรูปจากการเฉือน จะได้ว่า

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \tag{2.4}$$

โดยที่

τ = ความเค้นเฉือน

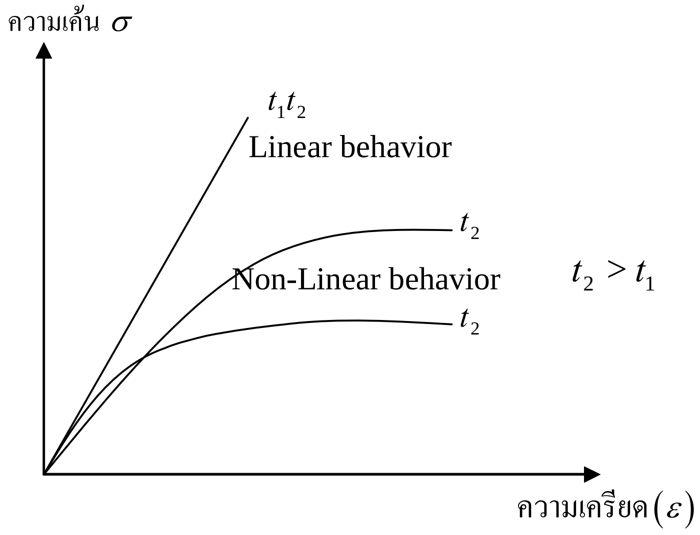
$\dot{\gamma}$ = ความเร็วของการเปลี่ยนรูปจากการเฉือน

η = ความหนืดจากการเฉือน

ซึ่งถ้านำสปริงและกระบอกสูบนิวทอเนียลมาประกอบเข้าด้วยกัน ก็จะสามารถอธิบายพฤติกรรมการตอบสนองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ โดยพฤติกรรมที่มีความสำคัญสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น คือ การคืบ (Creep), การพักความเค้น (Stress relaxation) และการคืนรูป (Recovery) โดยพฤติกรรมเหล่านี้มีความสำคัญสำหรับการทำนายคุณสมบัติของผลิตภัณฑ์ของพอลิเมอร์ได้ เมื่อมีการใช้งานที่มีความเค้นหรือความเครียดต่อเนื่องเป็นเวลานาน เช่น ยางรัดของ, ท่อแก๊สความดันสูง, ยางรองคอสะพาน (มนัส แซ่ด่าน, 2537) หรือเป็นพฤติกรรมที่ช่วยในการทำนายได้ว่ากระบวนการผลิตอาหารมีตัวแปรใดบางที่มีผลกระทบกับการบำรุงรักษาผลิตภัณฑ์อาหารที่ผลิตออกมา เป็นต้น

2.2.2 วัสดุยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้น (Non-linear viscoelasticity of materials)

โดยธรรมชาติแล้ววัสดุจะแสดงคุณสมบัติเป็นวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เมื่อค่าความเค้นและความเครียดมีค่าต่ำค่าหนึ่ง แต่เมื่อความเค้นหรือความเครียดมีค่าสูงเกินระดับนั้นแล้ว วัสดุจะแสดงคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้นแทน โดยความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดนั้นนอกจากจะขึ้นอยู่กับเวลาแล้ว ยังขึ้นอยู่กับระดับของค่าความเค้นและความเครียดอีกดังรูปที่ 2.5 โดย $\varepsilon(t) = f(\sigma, t)$ หรือ $\sigma(t) = f(\varepsilon, t)$ โดยพบว่า วัสดุยืดหยุ่นหนืดไม่เชิงเส้นจะไม่ได้ขึ้นกับเวลาเพียงอย่างเดียว แต่จะขึ้นอยู่กับระดับของความเค้นและความเครียด ซึ่งอิทธิพลที่มีผลกับความเป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นของวัสดุยืดหยุ่นหนืด คือ อุณหภูมิ และ Anisotropy ซึ่งถ้าอุณหภูมิมีค่าสูงขึ้น จะทำให้ความไม่เป็นเชิงเส้นมีค่ามากขึ้น และสำหรับกรณีของ Anisotropy นั้น ระดับหรือลักษณะของการเกิด Anisotropy ในวัสดุยืดหยุ่นหนืดจะมีผลทำให้ระดับความไม่เป็นเชิงเส้นของวัสดุชิ้นนั้น ๆ แตกต่างกันได้ ซึ่งสำหรับงานวิจัยฉบับนี้จะเน้นการศึกษาเฉพาะวัสดุยืดหยุ่นหนืดแบบเชิงเส้นเท่านั้น



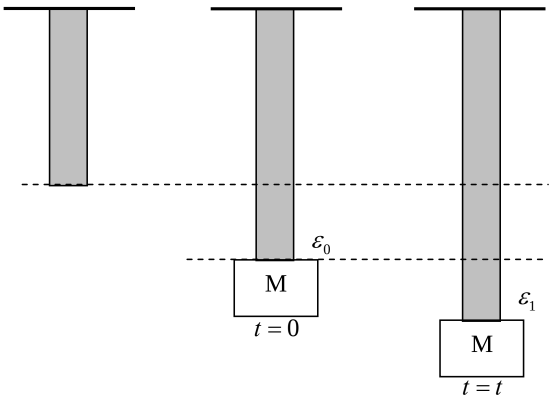
รูปที่ 2.5 แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดของวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นและการยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นของวัสดุ

2.3 พฤติกรรมของวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Viscoelastic behaviors)

ตามที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ผ่านมา พบว่าพฤติกรรมที่สำคัญที่ช่วยในการทดสอบวัสดุยืดหยุ่นหนืด คือ การคืบ (Creep), การพักความเค้น (Stress relaxation) และการคืนรูป (Recovery) ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงพฤติกรรมเหล่านี้ เพื่อเพิ่มความเข้าใจในการศึกษาคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

2.3.1 การคืบ (Creep)

การคืบเป็นการศึกษาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัสดุที่เป็นฟังก์ชันของเวลา เมื่อมีแรงกระทำต่อวัสดุดังแสดงในรูปที่ 2.6 การเปลี่ยนแปลงความเค้นและความเครียดกับเวลาสอดคล้องกับการคืบ ที่เวลา $t = 0$ ความเครียดที่ตอบสนองต่อความเค้นเกิดขึ้นอย่างทันทีทันใด ซึ่งเป็นการตอบสนองของส่วนที่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ แต่ที่เวลา $t > 0$ พบว่าความเครียดจะเพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ และไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเกิดการไหลหนืดและเป็นของไหลแบบนอนนิวทอเนียน (Non-newtonian fluid) เมื่อเวลา $t \to \alpha$ ความเครียดจะมีค่าคงที่ แสดงว่าเข้าสู่สมดุลใหม่ซึ่งถือว่าเป็นคุณสมบัติของของแข็งยืดหยุ่น การคืบเป็นการศึกษาคุณสมบัติเฉพาะของวัสดุ เพื่อบ่งบอกสภาวะการไหลของวัสดุยืดหยุ่นหนืดใด ๆ ซึ่งสิ่งที่ได้จากการวัดค่าการเปลี่ยนแปลงรูปหรือความเครียดกับเวลา ทำให้เราสามารถนิยามฟังก์ชันของ $J(t)$ ซึ่งแสดงการยินยอมให้มีการเปลี่ยนรูปเกิดขึ้นหรือเรียกว่าฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Creep compliance) ซึ่งสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นจะได้ว่า



รูปที่ 2.6 แสดงคุณสมบัติการคืบของวัสดุ

กรณีการเปลี่ยนแปลงรูปจากการเฉือน

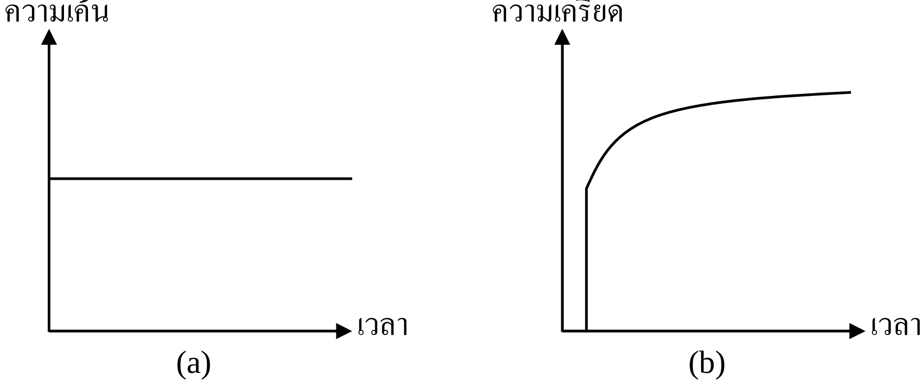
$$J(t) = \frac{\gamma}{\tau_0} \tag{2.5}$$

โดยที่

$J(t)$ = ฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Creep compliance)

γ = ความเครียดเฉือน (Shear strain)

τ_0 = ความเค้นเฉือนคงที่



รูปที่ 2.7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความเค้นและความเครียดกับเวลา (a) ความเค้นคงที่ (b) การตอบสนองของความเครียดที่เกิดขึ้น

จากรูปที่ 2.7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความเครียดกับเวลา เมื่อได้รับความเค้นคงที่ค่าหนึ่ง กรณีการเปลี่ยนแปลงรูปตามยาว

$$J(t) = \frac{\varepsilon}{\sigma_0} \tag{2.6}$$

โดยที่

$J(t)$ = ฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Creep compliance)

ε = ความเครียด (Strain)

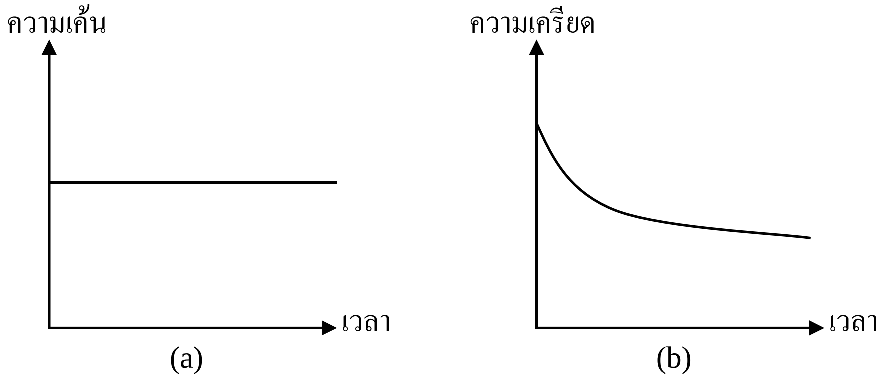
σ_0 = ความเค้นคงที่

ซึ่งค่าฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป จะขึ้นอยู่กับเวลาเพียงอย่างเดียว โดยเมื่อค่า $J(t)$ มีค่ามาก แสดงว่าวัสดุมีค่าความหนืดน้อย ซึ่งการวัดการคืบเป็นวิธีการทดสอบวัสดุโดยวัดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เพิ่มขึ้นภายใต้แรงกระทำคงที่ สามารถทำการทดสอบได้หลายวิธีเช่น การวัดการคืบแบบยืดตัว (Tension), ยุบตัว (Compression) และการเฉือน (Shear) การวัดการคืบแบบยุบตัวนิยมใช้ในการทดสอบงานที่ต้องรองรับน้ำหนักอยู่ตลอดเวลา เช่น ยางรองฐานของอาคาร ยางรองฐานเครื่องจักรกล ยางรองคอสะพาน ถ้ายางมีการคืบมาก ในกรณีของยางรองฐานเครื่องจักรกล ก็อาจจะทำให้เครื่องจักรเกิดความเสียหายได้ เป็นต้น

2.3.2 การพักความเค้น (Stress relaxation)

การพักความเค้นเป็นพฤติกรรมของวัสดุยืดหยุ่นหนืด เมื่อมีความเครียดที่มีค่าคงที่ค่าหนึ่งกระทำต่อวัสดุ ซึ่งการตอบสนองของความเค้นจะมีค่าลดลงดังแสดงในรูปที่ 2.8 การพักความเค้นเป็นวิธีการทดสอบโดยการวัดความเค้นหรือแรงที่ลดลงตามเวลา สำหรับวัสดุพอลิเมอร์ อาทิเช่น ยาง เมื่อทำให้ยางมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างคงที่ นิยมใช้ในการทดสอบปะเก็นยาง (Rubber gasket) แหวนยาง (O–ring) สำหรับใช้ในงานเชื่อมอัดรอยต่อ เพื่อป้องกันการรั่วไหลของของเหลวขณะใช้งาน เมื่อยางถูกอัดในบริเวณพื้นที่ที่จำกัดของรอยต่อจะทำให้เกิดความเค้น (ความดัน) ขึ้นในยาง ซึ่งป้องกันไม่ให้ของเหลวไหลผ่านรอยต่อได้ เมื่อใช้งานเป็นระยะเวลานาน ๆ ความเค้น (ความดัน) ของยางจะค่อย ๆ ลดลง ในที่สุดความดันของของเหลวจะสูงกว่าความเค้น (ความดัน) ของยาง ทำให้ของเหลวรั่วไหลออกมาได้ ดังนั้นการออกแบบรูปร่างและสูตรของยางที่ใช้สำหรับงานประเภทนี้จึงมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง (กาจพันธ์ สกุลแก้ว, 2547) จากที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นพบว่า การคืบและการพักความเค้นนั้นเป็นปรากฏการณ์ที่สำคัญของวัสดุยืดหยุ่นหนืด การพักความเค้นบอกถึงความสามารถของวัสดุในเชิงความยืดหยุ่น (Elastic) หรืออีกนัยหนึ่งก็คือความสามารถในการต้านการเปลี่ยนรูปของวัสดุนั่นเอง ซึ่งสำหรับวัสดุบางชนิด

เช่น พอลิเมอร์ การพักความเค้นจะเกี่ยวข้องโดยตรงกับการเปลี่ยนแปลงไปของลักษณะโครงรูปของโซ่พอลิเมอร์ (สมบัติ พุทธจักร, 2547) ซึ่งสามารถนิยามค่ามอดูลัสหรือฟังก์ชันการพักความเค้นได้ทั้งแบบเฉือนและแบบตามยาว



รูปที่ 2.8 แสดงการลดลงของความเค้นเป็นฟังก์ชันกับเวลา (a) ความเครียดคงที่ (b) การตอบสนองของความเค้นที่เกิดขึ้น

กรณีการเปลี่ยนแปลงรูปจากการเฉือน

$$G(t) = \frac{\tau}{\gamma_0} \tag{2.7}$$

โดยที่

$G(t)$ = มอดุลัสของการเฉือน

τ = ความเค้นเฉือนคงที่

γ_0 = ความเครียดเฉือนคงที่ (Shear strain)

กรณีการเปลี่ยนแปลงรูปตามยาว

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \tag{2.8}$$

โดยที่

$E(t)$ = มอดุลัสของยัง (Young's modulus)

σ = ความเค้น (Stress)

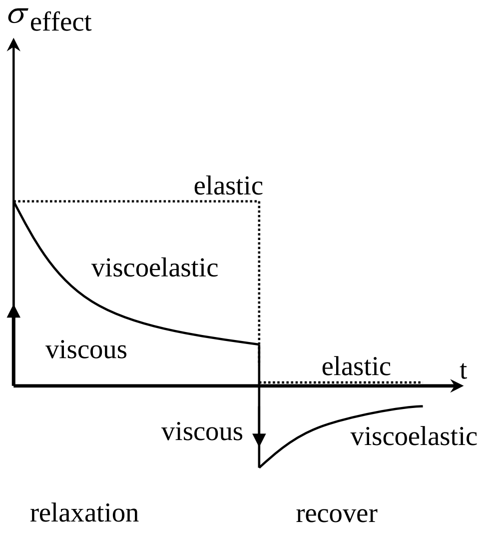
ε_0 = ความเครียดคงที่ (Strain)

ฟังก์ชันการคืบและฟังก์ชันการพักความเค้น สามารถทำนายพฤติกรรมพื้นฐานของวัสดุประเภทนั้น ๆ ได้ ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากต่อการวิเคราะห์ผลิตภัณฑ์ เมื่อมีการใช้งานที่มีความเค้นหรือความเครียดต่อเนื่องเป็นเวลานาน

2.3.3 การคืนรูป (Recover)

การคืนรูปเป็นปรากฏการณ์ที่ต่อเนื่องมาจากการคืบและการพักความเค้น หลังจาก เอาความเค้นหรือความเครียดออก ซึ่งวัสดุยืดหยุ่นหนืดจะมีคุณสมบัติอยู่ระหว่างวัสดุยืดหยุ่น และวัสดุของเหลวหนืด ดังนั้นการหดกลับของวัสดุพวกนี้จึงเกิดขึ้นได้บางส่วน หรือบางส่วนผิดรูปไป ดังรูปที่ 2.9 การวัดการคืนรูปเป็นวิธีการทดสอบโดยการวัดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้น หลังจากปล่อยแรงที่กระทำให้วัสดุยืดหยุ่นหนืดมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง นิยมใช้ในการทดสอบ พอลิเมอร์จำพวกยางสำหรับใช้ในงานที่ต้องรองรับน้ำหนักหรือแรงอัดอยู่ตลอดเวลา เช่น ปะเก็นยาง, แหวนยาง, ยางรองฐานเครื่องจักรกล, ยางรองคอสะพาน, ยางขอบกระจก เพื่อประเมินความสามารถในการคืนสู่รูปร่างเดิมของยาง หลังจากทำให้มีการเปลี่ยนรูปร่างหรือถูกอัดภายใต้แรงอัด ซึ่งจะส่งผลต่อประสิทธิภาพของยางในการรักษาระดับความสามารถในการรองรับน้ำหนักหรือแรงอัด การผิดรูปอยู่ตัวเกิดขึ้นเมื่อยางขณะอยู่ภายใต้ความเค้น (Stress) หรือแรงที่กระทำ (ได้แก่ แรงดึง แรงอัด หรือแรงเฉือน) เป็นระยะเวลาหนึ่ง เช่น เป็นวันหรือสัปดาห์ ทำให้เกิดความเครียด (Strain) ภายในโครงสร้างโมเลกุลที่มีการเชื่อมโยง โครงสร้างโมเลกุลเหล่านั้นจะพยายามปรับตัวเพื่อผ่อนคลายความเครียดที่เกิดขึ้น โดยเกิดการเลื่อนไถลระหว่างกันจนกระทั่งขาดออก จากนั้นเกิดการจัดโครงสร้างการเชื่อมโยงใหม่ โครงสร้างที่เกิดจากการเชื่อมโยงใหม่นี้มีเสถียรภาพมากกว่าเดิม และต้านการกลับคืนสู่รูปเดิมของยางหลังจากปล่อยจากความเค้นหรือแรงที่กระทำ อัตราการเกิดการผิดรูปอยู่ตัวของยางเมื่ออยู่ภายใต้ความเค้นหรือแรงที่กระทำขึ้นอยู่กับอุณหภูมิที่สูงขึ้นและปริมาณของออกซิเจน (ซึ่งเป็นตัวเร่งปฏิกิริยาการขาดของโครงสร้างที่มีการเชื่อมโยงระหว่างโมเลกุล (Devulcanisation) การทดสอบการผิดรูปอยู่ตัวของยางนอกจากเป็นการทดสอบเพื่อประเมินประสิทธิภาพของยางในการคืนสู่รูปเดิม ซึ่งส่งผลต่อคุณภาพของยางเมื่อใช้งานภายใต้แรงอัดหรือน้ำหนักกดคงที่แล้ว ยังเป็นการตรวจสอบเพื่อควบคุมคุณภาพ (Quality control check) ผลที่ได้บอกให้ทราบถึงสถานะการคงรูป (State of cure) ของชิ้นทดสอบยางนั้น ชิ้นทดสอบยางที่ใช้เวลาในการคงรูป (Cure) ต่ำกว่าจุดที่เหมาะสม (Undercured test piece) จะให้ค่าการผิดรูปอยู่ตัวค่อนข้างสูง การทดสอบการผิดรูปอยู่ตัวของยางอาจทดสอบในลักษณะ

ของการยืดตัวหรือการยุบตัวภายใต้ความเค้นคงที่ (Constant stress) หรือความเครียดคงที่ (Constant strain) ก็ได้ (กาจพันธ์ สกุลแก้ว, 2547)



รูปที่ 2.9 แสดงระหว่างการพักความเค้นและการคืนรูปของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

2.4 คุณสมบัติเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Dynamic properties of viscoelastic)

การศึกษาทางรีโอโลยีของวัสดุยืดหยุ่นหนืดนั้นมีหลายรูปแบบ เช่น การดึง การกด หรือการเฉือน ทั้งที่มีคุณสมบัติเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น โดยการกระตุ้นและการวัดการตอบสนองของวัสดุ การกระตุ้นอาจเป็นแบบฉับพลัน หรือแบบต่อเนื่อง หรือแบบฮาร์มอนิก ซึ่งจากข้อมูลที่วัดได้นำไปสู่การวิเคราะห์และคำนวณหาค่าคงที่ ซึ่งแสดงสมบัติเฉพาะ ตลอดจนชี้ให้เห็นถึงความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันทางรีโอโลยีของวัสดุยืดหยุ่นหนืด นอกจากนี้การกระตุ้นเป็นจังหวะของรอบความถี่ ที่เรียกว่าการทดลองเชิงพลวัต ยังสามารถกระทำได้ให้ห้องปฏิบัติการ ซึ่งมีข้อดีคือ ผลจากน้ำหนักของตัวอย่างที่นำมาทดลอง จะไม่มีผลกระทบกับค่าต่าง ๆ ที่วัดได้ เมื่อการกระตุ้นเป็นจังหวะเชิงพลวัตโดยการเฉือน เนื่องจากทิศทางแรงเฉือนตั้งฉากกับทิศทางของน้ำหนัก (สมบัติ พุทธจักร, 2547)

2.4.1 ฟังก์ชันการพักเชิงพลวัต (Dynamic relaxation functions)

การศึกษาทางรีโอโลยีอีกรูปแบบหนึ่ง คือ การศึกษาการตอบสนองเชิงพลวัต โดยเฉพาะการทดลองแบบเฉือน เช่นการให้ความเค้นแล้ววัดความเครียด หรือการให้ความเครียดแก่ระบบแล้ววัดความเค้นที่เกิดขึ้น ซึ่งวิธีการดังกล่าวนำไปสู่การหาฟังก์ชันสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงซ้อนของวัสดุนั้น ๆ ได้ ซึ่งฟังก์ชันการพักเป็นการทดลองโดยการสมมติความเค้นเฉือน การทำ

กับวัสดุยืดหยุ่นหนืด โดยมีค่าเท่ากับ $\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$ โดยค่า γ_0 คือ ค่าแอมพลิจูดของความเครียด หรือความเครียดสูงสุด และ ω คือความถี่ที่ใช้กระตุ้นระบบ ซึ่งจากการทดลองพบว่า การตอบสนองของค่าความเค้นเฉือนมีมุมเฟสที่แตกต่างจากค่าความเครียดเท่ากับค่า ๆ หนึ่ง โดยมุมเฟสมีค่าต่างกัน ซึ่งสามารถเขียนสมการการตอบสนองของความเค้นได้ดังสมการ (2.9)

$$\tau(t) = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \tag{2.9}$$

โดยที่

δ คือ มุมของเฟสต่าง

ดังนั้นจึงสามารถนิยามสองฟังก์ชันมอดุลัสเชิงพลวัต ซึ่งกราฟที่ได้จะแสดงคุณสมบัติเฉพาะของวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่อุณหภูมิค่าหนึ่ง ซึ่งเกี่ยวข้องกับพลังงานสะสม (Storage modulus) คือ $G'(\omega)$ และพลังงานที่สูญเสียเป็นความร้อนในระหว่างการเปลี่ยนรูป (Loss modulus) คือ $G''(\omega)$ ซึ่งก็คือมอดุลัสเชิงซ้อนนั่นเอง ซึ่งฟังก์ชันมอดุลัส $G'(\omega)$ และ $G''(\omega)$ จะแสดงคุณสมบัติเฉพาะและสามารถแสดงในรูปมุมของเฟสต่าง δ ระหว่างความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นพร้อมกับความเค้นสูงสุด τ_0 และความเครียดสูงสุด γ_0 สำหรับความถี่ ω คือ

$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta \tag{2.10}$$

$$G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta \tag{2.11}$$

และจากสมการ (2.10) และ (2.11) มุม δ ยังแสดงมุมซึ่งเกี่ยวข้องกับการเสียพลังงานคือ

$$\tan \delta = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \tag{2.12}$$

ซึ่งสามารถแสดงอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนคือ

$$G^*(j\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega) \tag{2.13}$$

$$\left|G^*(j\omega)\right| = \left(\left(G'(\omega)\right)^2 + \left(G''(\omega)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

2.4.2 ฟังก์ชันความหยุ่นเชิงพลวัต (Dynamic creep compliance function)

นอกจากนี้ยังสามารถแสดงฟังก์ชันความหยุ่นที่แสดงการยินยอมแก่การเปลี่ยนรูปเชิงพลวัต (J) ได้ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนพร้อมทั้งแสดงความสัมพันธ์กับ $G'(\omega)$, $G''(\omega)$ และ $G^*(j\omega)$ คือ

$$J^*(j\omega) = J'(\omega) - jJ''(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}(\cos\delta - j\sin\delta) \quad (2.15)$$

$$J'(\omega) = \frac{G'(\omega)}{G^{*^2}(j\omega)} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\cos\delta = \frac{1}{G'(\omega)\left[1-\tan^2\delta(\omega)\right]} \quad (2.16)$$

$$J''(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G^*(j\omega)^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\sin\delta = \frac{1}{G''(\omega)\left[1-\text{cotan}^2\delta(\omega)\right]} \quad (2.17)$$

$$\tan\left[\delta(\omega)\right] = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \frac{J''(\omega)}{J'(\omega)} \quad (2.16)$$

ซึ่งจากสมการที่ (2.16) และสมการที่ (2.17) พบว่า

เมื่อ $\delta \cong 0^\circ$ จะได้ว่า $J'(\omega) = \frac{1}{G'(\omega)}$ และที่ $\delta \cong 90^\circ$ จะได้ว่า $J'(\omega) = \frac{1}{G''(\omega)}$ ซึ่งพบว่าความถี่ที่ใช้กระตุ้นมีค่า เท่ากับ $0 < \omega < \infty$ พบว่า

$$J'(\omega) \le \frac{1}{G'(\omega)} \quad and \quad J''(\omega) \le \frac{1}{G''(\omega)} \quad (2.17)$$

2.4.3 ความหนืดเชิงพลวัต (Dynamic viscosity)

ส่วนความหนืดเชิงซ้อนที่เป็นฟังก์ชันกับความถี่คือ

$$\tau^*(j\omega) = \eta^*(j\omega)\frac{d\varepsilon^*(j\omega)}{dt} = i\omega\varepsilon^*(j\omega)\eta^*(j\omega) \tag{2.18}$$

จะได้

$$\eta^*(j\omega) = \frac{G^*(j\omega)}{i\omega} = \eta'(\omega) - j\eta''(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} - j\frac{G'(\omega)}{\omega} \tag{2.19}$$

จะได้ส่วนจริงและส่วนจินตภาพคือ

$$\eta'(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} \tag{2.20}$$

และ

$$\eta''(\omega) = \frac{G'(\omega)}{\omega} \tag{2.21}$$

$\eta'(\omega)$ คือ สิ่งที่แสดงคุณสมบัติของความหนืดเชิงพลวัต สำหรับความถี่ต่ำ ๆ แล้วค่า $\eta'(\omega)$, $\eta^*(j\omega)$ จะไม่ขึ้นกับความถี่และแสดงให้เห็นเป็นระนาบ จึงเรียกว่าระนาบความหนืดนิวโตเนียน (η_0) จากสมการ (2.20) พบว่าสำหรับความหนืดของของเหลวที่อัตราการเฉือน (Shear rate) มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$\eta_0 = \lim_{\omega \to 0}\frac{G''(\omega)}{\omega} \tag{2.22}$$

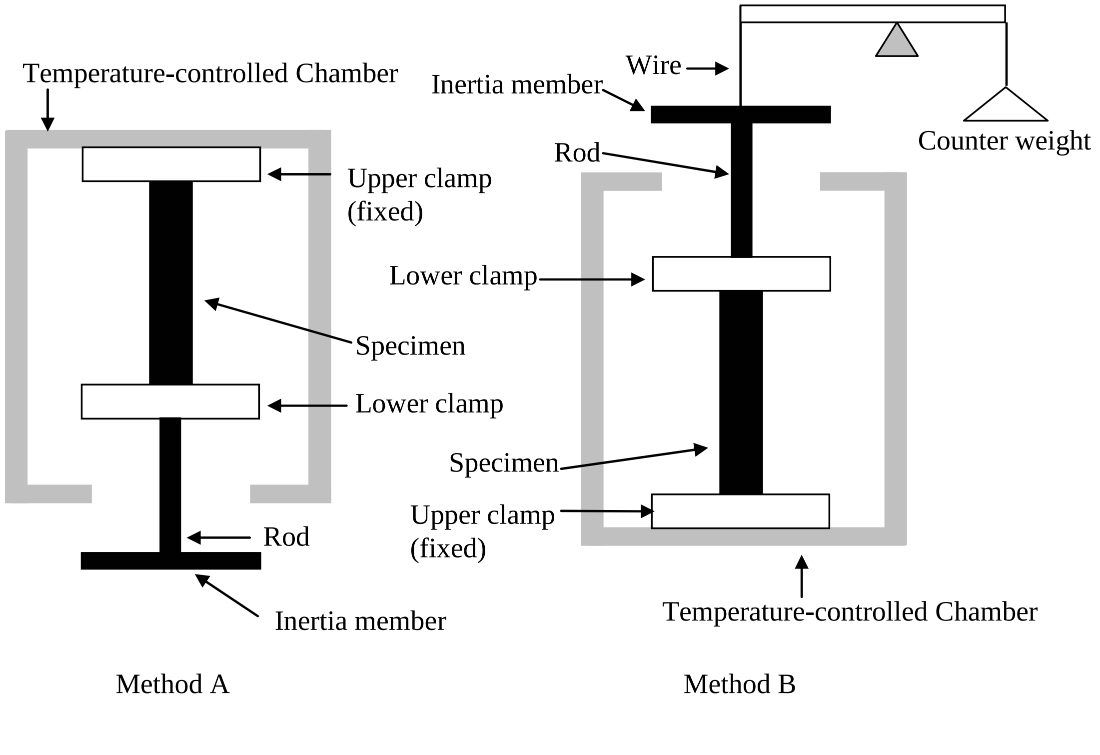
2.4.4 การวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

เครื่องมือที่ใช้สำหรับวัดหรือศึกษาคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืด ซึ่งการศึกษาหาคุณสมบัติเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด เป็นการศึกษาเพื่อหาค่ามอดุลัสพลังงานสะสม, มอดุลัสพลังงานสูญเสีย, ค่า $\tan\delta$ ซึ่งวิธีการต่าง ๆ ที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นวิธีการที่ได้รับความนิยมเพื่อใช้ในการทดสอบวัสดุยืดหยุ่นหนืด โดยการทดสอบเชิงพลวัตของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

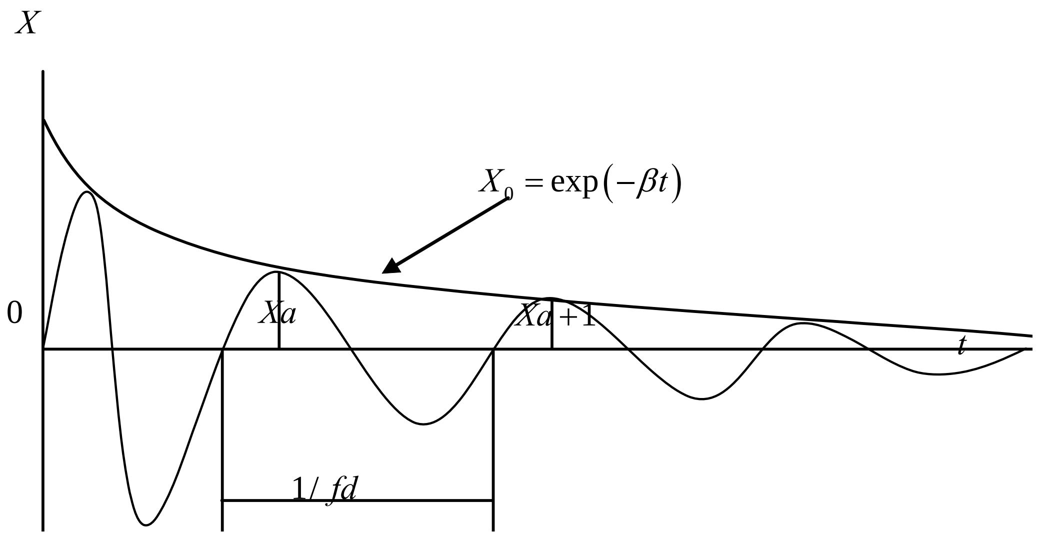
สามารถจำแนกได้เป็น 3 แบบคือ การสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วง (Damped free vibration), การสั่นแบบอิสระแบบมีการสั่นพ้อง (Resonance free vibration) และการสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง (Nonresonance force vibration) ซึ่งวิธีการเหล่านี้เป็นไปตามมาตรฐาน ISO 6721 ซึ่งเป็นมาตรฐานเพื่อใช้ในการทดสอบหาคุณสมบัติเชิงกลเชิงพลวัตของวัสดุ

2.4.4.1 วิธีการลูกตุ้มแบบบิด (Torsion Pendulum Method)

เป็นวิธีการทดสอบวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่ตัวอย่างที่ใช้ทดสอบเป็นของแข็ง โดยใช้วิธีการสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วง (Damped free vibration) โดยวิธีการนี้สามารถจำแนกได้เป็น 2 วิธีการดังรูปที่ 2.10 ซึ่งในการทดสอบวัสดุยืดหยุ่นหนืด โดยใช้วิธีการนี้คือการสร้างแรงบิดให้กับชิ้นทดสอบ โดยค่าอินพุทที่กระทำกับชิ้นทดสอบเป็นไปดังรูปที่ 2.11 ซึ่งค่าที่วัดได้จากการใช้วิธีการนี้คือ ค่าพลังงานสะสม (Storage modulus) คือ $G'(\omega)$ และพลังงานที่สูญเสียเป็นความร้อนในระหว่างการเปลี่ยนรูป (Loss modulus) คือ $G''(\omega)$



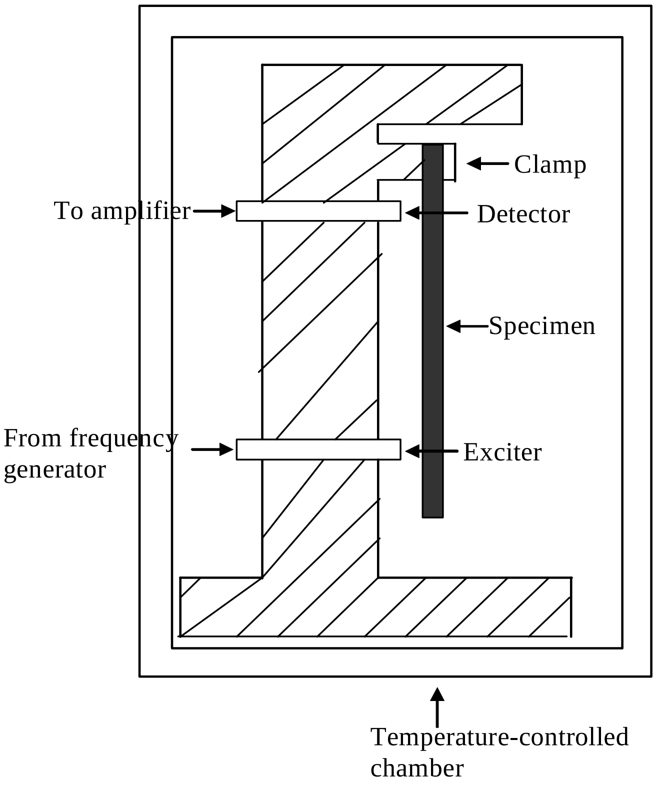
รูปที่ 2.10 เครื่องมือสำหรับวิธีการลูกตุ้มแบบบิด แบบ A และ แบบ B



รูปที่ 2.11 แสดงกราฟการสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วง

2.4.4.2 การสั่นเนื่องจากแรงแบบมีการสั่นพ้อง (Resonance forced vibration method)

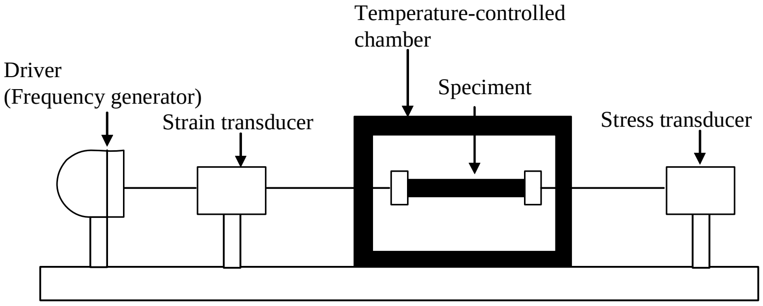
การสั่นเนื่องจากแรงแบบมีการสั่นพ้อง เป็นการทดสอบชิ้นทดสอบโดยการให้แรงกระทำกับชิ้นทดสอบ จนเกิดการสั่นพ้องหรือเกิดเรโซแนนซ์นั่นเอง ซึ่งผลที่ได้จากการทดสอบจะสามารถหาค่ามอดุลัสพลังงานสะสม (Storage modulus) คือ $G'(\omega)$ และค่ามอดุลัสการสูญเสีย (Loss modulus) คือ $G''(\omega)$ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดได้ ซึ่งเครื่องมือที่ใช้ทดสอบเป็นไปตามรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 เครื่องมือสำหรับการสั่นเนื่องจากแรงแบบมีการสั่นพ้อง (Resonance forced vibration method)

2.4.4.3 การสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง (Nonresonance forced vibration method)

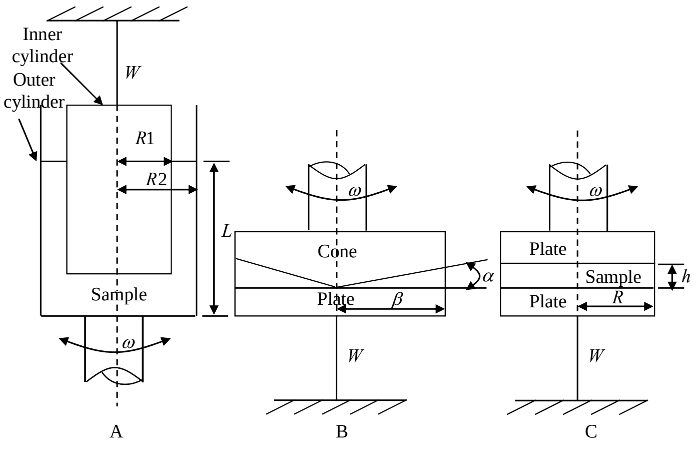
วิธีการสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง เป็นการทดสอบวัสดุยืดหยุ่นหนืดโดยการกระตุ้นระบบด้วยการเปลี่ยนรูปแบบ Sinusoidal ซึ่งค่าที่วัดได้จากวิธีการนี้คือ ค่ามอดุลัสพลังงานสะสม (Storage modulus) คือ $G'(\omega)$, ค่ามอดุลัสการสูญเสีย (Loss modulus) คือ $G''(\omega)$ และค่ามุม δ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืด โดยความถี่ที่ใช้ในการทดสอบอยู่ระหว่าง 0.01 Hz ถึง 100 Hz โดยในการเลือกใช้ความถี่ ควรจะเลือกให้มีค่าต่ำกว่าความถี่ธรรมชาติของวัสดุนั้น ๆ ซึ่งที่ความถี่สูง ๆ นั้น ในการหาคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุยืดหยุ่นหนืดต้องใช้วิธีการการกระจายของคลื่น (Wave propagation) ซึ่งจะไม่ขอกล่าวในหัวข้อนี้ เนื่องจากงานวิจัยนี้ศึกษาวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น เครื่องมือที่ใช้ทดสอบเป็นไปตามรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 เครื่องมือสำหรับการสั่นเนื่องจากแรงแบบไม่มีการสั่นพ้อง (Nonresonance forced vibration method)

2.4.4.4 การวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตจากการเฉือน

การวัดทางรีโอโลยีจากการเฉือนนั้นมี 2 ระบบ กล่าวคือ การให้ความเค้นแล้ววัดความเครียด หรือการให้ความเครียดแล้ววัดความเค้น ซึ่งการวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตจากการเฉือนเป็นการศึกษาวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่มีลักษณะเป็นของไหล (Fluid) โดยเครื่องมือที่ใช้วัดการเฉือน อาทิเช่น เครื่องมือวัดการเฉือนระหว่างทรงกระบอกที่มีแกนร่วม (Concentric cylinder), เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-กรวย (Cone-plate rheometer) และเครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-ระนาบ (Parallel-plate rheometer) ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 เครื่องมือวัดทางรีโอโลยีเชิงพลวัตจากการเฉือน

A: เครื่องมือวัดการเฉือนระหว่างทรงกระบอกที่มีแกนร่วม (Concentric cylinder)

B: เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-กรวย (Cone-plate rheometer)

C: เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาน-ระนาบ (Parallel-plate rheometer)

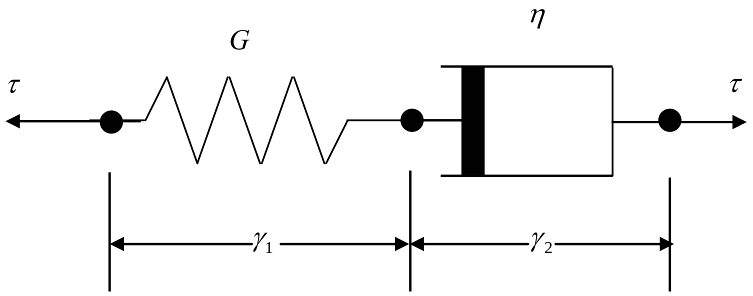
จากรูปที่ 2.14A แสดงเครื่องมือทดลองโดยการเฉือนระหว่างทรงกระบอกที่มีแกนร่วมกัน ซึ่งการเฉือนจะเกิดขึ้นในระหว่างช่องว่างแคบ ๆ ของทรงกระบอกทั้งสอง การทดลองใช้ปริมาณตัวอย่างเพียงเล็กน้อย และการเปลี่ยนรูปเกิดขึ้นอย่างสม่ำเสมอตลอดของผิวสัมผัสที่มีความสูงเป็น L ทรงกระบอกทั้งสองมีรัศมีเท่ากับ *R1* และ *R2* ดังรูปที่ 2.14A ซึ่งในการทำการทดลอง อินพุทของระบบคือค่าเปลี่ยนแปลงเชิงมุมแบบ Sinusoidal โดยมีความถี่เท่ากับ ω แก่ระบบ ซึ่งเครื่องมือวัดการเฉือนระหว่างทรงกระบอกที่มีแกนร่วม (Concentric cylinder) คือค่าความหนืดเชิงซ้อน (Complex viscosity) $(\eta^*(j\omega)=\eta(\omega)-j\eta(\omega))$ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืด จากรูปที่ 2.14B แสดงเครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-กรวย (Cone-plate rheometer) การทดลองโดยการเฉือนแบบระนาบ-กรวย มีข้อดีหลายประการ เช่น ความเร็วของการเปลี่ยนรูปจะไม่ขึ้นกับรัศมีของจาน นั่นคือความเร็วของการเฉือนจะมีความสม่ำเสมอโดยกรวยทำมุมกับระนาบเท่ากับ α เรเดียนกับแนวระดับ β คือรัศมีของกรวย ω คือความเร็วของการหมุนเรเดียน/วินาที) ซึ่งค่าที่วัดได้จากการใช้เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-กรวย (Cone-plate rheometer) คือค่าความหนืดเชิงซ้อน (Complex viscosity) $(\eta^*(j\omega)=\eta(\omega)-j\eta(\omega))$ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืด จากรูปที่ 2.14C แสดงการใช้เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-ระนาบ (Parallel-plate rheometer) โดยเครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-ระนาบ เป็นการวัดค่าต่าง ๆ โดยวัดผ่านโมเมนต์คู่ควบที่เกิดขึ้น ซึ่งในการใช้งานเครื่องมือชนิดนี้ต้องเลือกขนาดของจานระนาบให้เหมาะสมกับความหนืดของวัสดุยืดหยุ่นหนืดนั้น ๆ นอกจากนั้นยังต้องระวังการลื่นไถลที่จะเกิดขึ้น โดยเฉพาะเมื่อมีการทดลองที่อุณหภูมิต่ำ ๆ แล้วจะได้ผลการทดลองที่คลาดเคลื่อนไป เงื่อนไขของการทดลองเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ซึ่งจะต้องสอดคล้องกับธรรมชาติของชนิดวัสดุยืดหยุ่นหนืดนั้น ๆ เช่น ขนาดของแรงตั้งฉาก ขนาดสูงสุดของการเปลี่ยนรูปที่จะทำให้ผลการทดลองยังอยู่ในช่วงยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น เป็นต้น จากรูปที่ 2.14C ค่า R คือ รัศมีของจานระนาบ, h คือ ความสูงของวัสดุทดสอบ โดยค่าที่วัดได้จากเครื่องมือชนิดนี้คือ ค่า $G'(\omega)$, $G''(\omega)$ ยังสามารถใช้เครื่องมือวัดการเฉือนแบบระนาบ-ระนาบ ทดลองการคืบของวัสดุยืดหยุ่นหนืดได้อีกด้วย โดยกำหนดให้ค่าความเค้นมีค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งต้องเป็นค่าที่เหมาะสมคือ จะต้องเป็นค่าที่มีค่าน้อยแล้วทำให้ความเร็วในการเฉือนต่ำเพื่อสามารถวัดค่าความหนืดนิวโตเนียนได้ ซึ่งค่าที่วัดได้จากการทดลองนี้คือ ค่าความหยุ่น ($J(t)$)

2.5 แบบจำลองสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Models of linear viscoelasticity)

แบบจำลองที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงแบบจำลองพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น

2.5.1 แบบจำลองแมกซ์เวลล์

แบบจำลองแมกซ์เวลล์ เป็นแบบจำลองที่ประกอบด้วยสปริงและกระบอกสูบซึ่งนำมาต่ออนุกรมกัน แบบจำลองแมกซ์เวลล์เป็นแบบจำลองพฤติกรรมของของไหลยืดหยุ่นหนืด โดยกำหนดให้ความเค้นมีค่าคงที่ทำให้การขจัดที่เกิดขึ้นมีค่าต่อเนื่องทำให้ได้ว่า ความเครียดรวมมีค่าเท่ากับ ผลรวมของความเครียดของสปริงและกระบอกสูบ



รูปที่ 2.15 แบบจำลองแมกซ์เวลล์สำหรับความเค้นเฉือน

โดยกำหนดให้

τ = ค่าความเค้นเฉือน

γ = ค่าความเครียดเฉือน

$\dot{\gamma}$ = ความเร็วของการเปลี่ยนตามแรงเฉือน

G = มอดุลัสเฉือน

η = ความหนืดของกระบอกของเหลวลูกสูบ

จากรูปจะได้ว่า

$$\gamma_1 = \frac{1}{G}\tau \tag{2.21}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{1}{\eta}\tau \tag{2.22}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt} \tag{2.23}$$

จากสมการที่ 2.21 และ 2.23 จะได้

$$\tau + \frac{\eta}{G}\dot{\tau} = \eta\dot{\gamma} \tag{2.24}$$

เขียนอยู่ในรูป Laplace transform โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น มีค่าเท่ากับ ศูนย์ จะได้ว่า

$$\tau(s) + \frac{\eta}{G}s\tau(s) = \eta s\gamma(s) \tag{2.25}$$

$$\tau(s)\left(1 + \frac{\eta}{G}s\right) = \eta s\gamma(s) \tag{2.26}$$

ซึ่งเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon(s)$ กับ $\sigma(s)$ ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\frac{\gamma(s)}{\tau(s)} = \frac{\left(1 + \frac{\eta}{G}s\right)}{\eta s} \tag{2.27}$$

หรือ

$$\frac{\tau(s)}{\gamma(s)} = \frac{\eta s}{(1+\frac{\eta}{G}s)} = G^*(j\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega) \tag{2.28}$$

สำหรับกรณีการเฉือนจะได้ว่า

$$G'(\omega) + jG''(\omega) = G\left(\frac{\lambda^2\omega^2 + j\lambda\omega}{1+\lambda^2\omega^2}\right) \text{ โดยค่า } \lambda = \frac{\eta}{G} \tag{2.29}$$

$$G'(\omega) = G\left(\frac{\lambda^2\omega^2}{1+\lambda^2\omega^2}\right) \tag{2.30}$$

โดยค่า $G'(\omega)$ = ค่ามอดุลัสเฉือนจริง หรือ ค่ามอดุลัสยืดหยุ่น

$$G''(\omega) = G\left(\frac{\lambda\omega}{1+\lambda^2\omega^2}\right) \tag{2.31}$$

โดยค่า $G''(\omega)$ = ค่ามอดุลัสเฉือนจินตภาพ หรือ ค่ามอดุลัสหนืด
จากสมการที่ (2.15), (2.16), (2.25) และ (2.26) นำมาสร้างแผนภาพบล๊อกจะได้ดังรูปที่ 2.16
จากสมการ (2.24) นำมาอธิบายสมบัติเชิงกลของพอลิเมอร์ เช่น การคืบ
โดยกำหนดให้ความเค้นที่กระทำแก่ระบบมีค่าคงที่ τ_0 คือ

$$\tau = \tau_0 \tag{2.32}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{2.33}$$

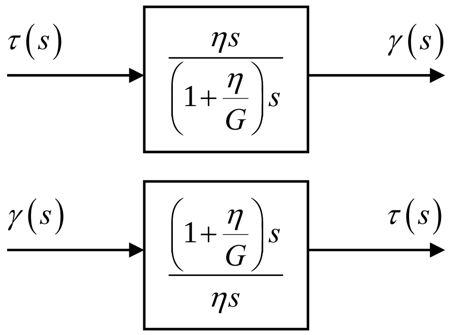
ดังนั้นความเร็วการเปลี่ยนรูปของระบบและจัดได้ใหม่จะได้ว่า

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta} \tag{2.34}$$

จากสมการ (2.34) นั้น เมื่ออินทิเกรต จะได้สมการการเปลี่ยนรูปกับเวลา

โดยที่ t = 0 จะได้ $\gamma_{t=0} = \frac{\tau_0}{E}$ จากสมการ (2.34) จะได้

$$\gamma = \frac{\tau_0}{\eta} t + \frac{\tau_0}{G} \tag{2.35}$$



รูปที่ 2.16 แสดงแผนภาพบล๊อกของแบบจำลองแมกซ์เวลส์

ซึ่งจากรูปที่ 2.16 พบว่าที่ เวลา t = 0 วัสดุมีการคืบเกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ σ_0 / E ซึ่งผลการทดลองพบว่า ที่เวลา t = 0 ไม่มีการคืบเกิดขึ้น และจากรูปที่ 2.16 ยังพบว่าเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ค่าความเครียดหรือค่าการเปลี่ยนแปลงความยาวมีค่าเพิ่มขึ้นแบบเส้นตรง ซึ่งพฤติกรรมดังกล่าวมีลักษณะการเคลื่อนที่แบบของไหลนิวทอเนียน จึงสรุปได้ว่า แบบจำลองแมกซ์เวลล์ ไม่สามารถอธิบายการคืบได้เลย แต่สามารถจะแสดงคุณสมบัติของการคืบในรูปของของไหลนิวทอเนียน ส่วนสมการแมกซ์เวลล์ เมื่อนำมาใช้อธิบายสมบัติเชิงกลของพอลิเมอร์ของการพักความเค้น โดยกำหนดให้ความเครียดกระทำด้วยค่าคงที่ มีค่าเท่ากับ $\gamma = \gamma_0$ คือ

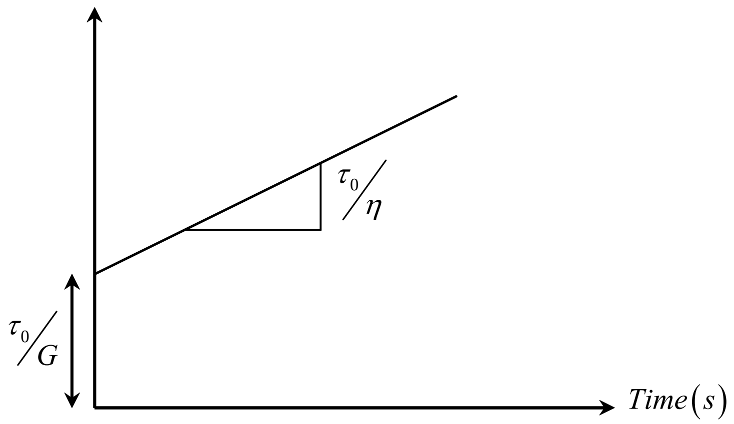
$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \tag{2.36}$$

จากสมการ (2.24) จะได้ว่า

$$0 = \frac{1}{G}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau}{\eta} \qquad (2.37)$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\tau G}{\eta} \qquad (2.38)$$

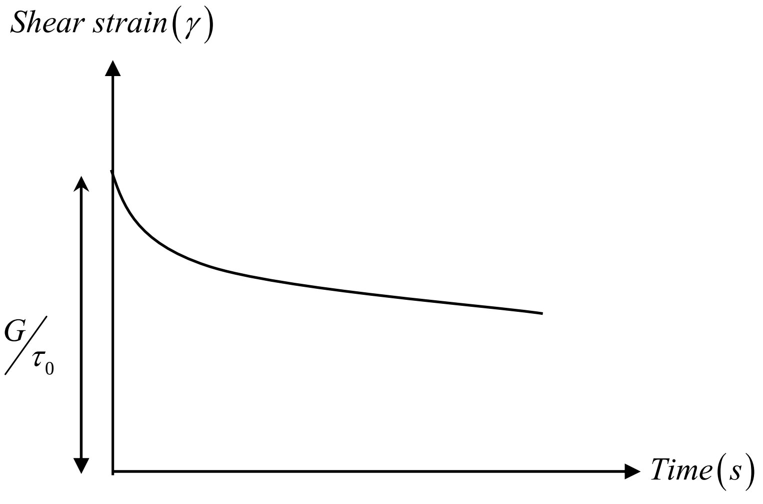


รูปที่ 2.17 แสดงการตอบสนองของ *Shear rate* (γ) ที่มี *Shear stress* (τ) เป็นอินพุทของแบบจำลองแมกซ์เวลส์

จากสมการ (2.38) นั้น เมื่ออินทิเกรต จะได้สมการการเปลี่ยนรูปกับเวลา
โดยที่ t = 0 จะได้ $\tau = \tau_0$ จากสมการ (2.38) จะได้

$$\tau = \tau_0 \exp(-\frac{G}{\eta}t) \qquad (2.39)$$

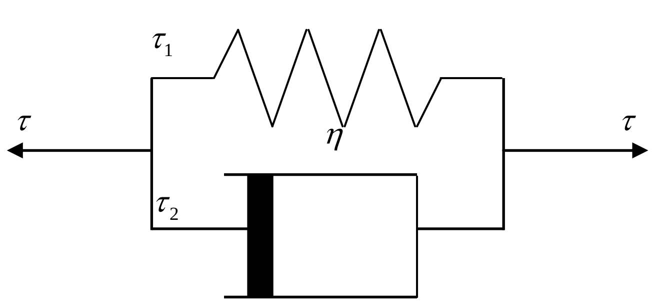
จากรูปที่ 2.17 พบว่าลักษณะของเส้นกราฟที่ได้จะใกล้เคียงกับผลการทดลองแต่ต้องจัดระบบให้เหมาะสมยิ่งขึ้นโดย τ_0 คือความเค้นกระทำเมื่อเวลาที่ t = 0 (สมบัติ พุทธจักร, 2547) ซึ่งสรุปว่า แบบจำลองแมกซ์เวลล์จะแสดงคุณสมบัติการพักความเค้น แต่แบบจำลองแมกซ์เวลล์จะไม่มีคุณสมบัติของการคืนรูป



รูปที่ 2.18 แสดงการตอบสนองของ *Shear stress* (τ) ที่มี *Shear rate* (γ) เป็นอินพุทของแบบจำลองแมกซ์เวลส์

2.5.2 แบบจำลองเคลวิน – โวค

แบบจำลองทั่วไปของเคลวิน-โวค เป็นแบบจำลองที่นำสปริงและกระบอกสูบมาต่อขนานกัน ซึ่งแบบจำลองชนิดนี้จะแสดงพฤติกรรมของของแข็งยืดหยุ่นหนืด โดยถ้าพิจารณาว่าให้ความเค้นเฉือนมีค่าคงที่ และการขจัดมีค่าต่อเนื่อง ซึ่งเป็นผลมาจากสปริงเป็นหลัก ดังรูปภาพที่ 2.19



รูปที่ 2.19 แบบจำลองเคลวิน-โวค

โดยกำหนดให้

τ = ค่าความเค้นเฉือน

γ = ค่าความเครียดเฉือน

$\dot{\gamma}$ = ความเร็วของการเปลี่ยนตามแรงเฉือน

G = มอดุลัสเฉือน

η = ความหนืดของกระบอกของเหลวลูกสูบ

จากรูปจะได้ว่า

$$\gamma_1 = \frac{1}{G}\tau \qquad (2.40)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{1}{\eta}\tau \qquad (2.41)$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_1}{dt} + \frac{d\tau_2}{dt} \qquad (2.42)$$

จะได้

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \qquad (2.43)$$

เขียนอยู่ในรูป Laplace transform โดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น มีค่าเท่ากับ ศูนย์ จะได้ว่า

$$\tau(s) = G\tau(s) + \eta s\tau(s) \qquad (2.44)$$

$$\tau(s) = \left(G + \eta s\right)\gamma(s) \qquad (2.45)$$

ซึ่งเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon(s)$ กับ $\sigma(s)$ ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\frac{\gamma(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{\left(G + \eta s\right)} = J^*(j\omega) = J'\left(\omega\right) - jJ''\left(\omega\right) \qquad (2.46)$$

โดย $J^*\left(j\omega\right)$ คือ ฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Complex compliance) แทนค่า $s = j\omega$ ในสมการ 2.46 จะได้

$$J'(\omega) - jJ''(\omega) = \frac{1}{G}\,\frac{1 + j\lambda\omega}{\left(1 + \lambda^2\omega^2\right)} \text{ โดยค่า } \lambda = \frac{\eta}{G} \tag{2.47}$$

$$J'(\omega) = \left(\frac{1}{G}\right)\frac{1}{1 + \lambda^2\omega^2} \tag{2.48}$$

โดยค่า $J'(\omega)$ คือฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูปจริง

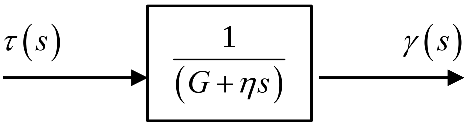
$$J''(\omega) = -\left(\frac{1}{G}\right)\frac{\lambda\omega}{1 + \lambda^2\omega^2} \tag{2.49}$$

โดยค่า $J''(\omega)$ คือฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูปจินตภาพ โดยกำหนดให้

G = ยังมอดุลัสเฉือนของสปริง

η = ความหนืดของกระบอกของเหลวลูกสูบ

จากสมการที่ 2.46 นำมาเขียนแผนภาพบล๊อกจะได้ดังรูปที่ 2.20



รูปที่ 2.20 แสดงแผนภาพบล๊อกของแบบจำลองเคลวิน–โวค

จากสมการ (2.43) นำมาอธิบายสมบัติเชิงกลของพอลิเมอร์ เช่นการคืบ โดยกำหนดให้ความเค้นที่กระทำแก่ระบบมีค่าคงที่ τ_0 คือ

$$\tau = \tau_0 \tag{2.50}$$

$$\frac{d\tau}{dt}=0 \qquad (2.51)$$

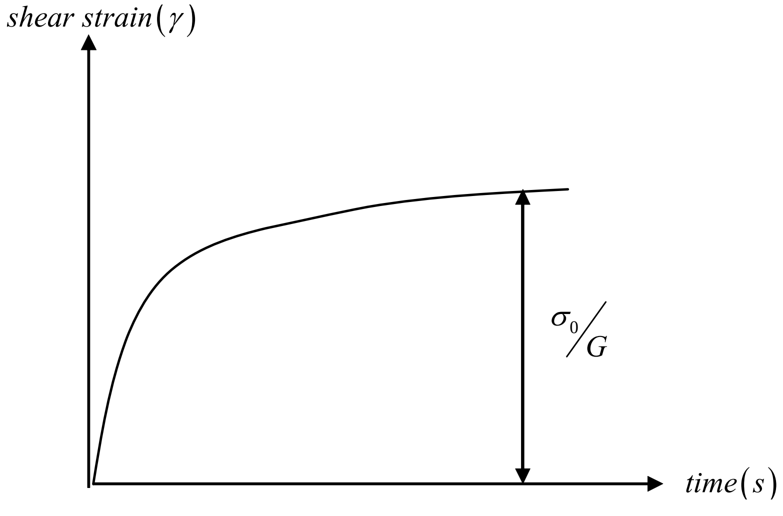
ดังนั้นความเร็วการเปลี่ยนรูปของระบบและจัดได้ใหม่จะได้ว่า

$$\dot{\gamma}+\frac{G}{\eta}\gamma=\frac{\tau_0}{\eta} \qquad (2.52)$$

จากสมการ (2.52) นั้น เมื่ออินทิเกรต จะได้สมการการเปลี่ยนรูปกับเวลา
โดยที่ t = 0 จะได้ $\gamma_{t=0}=\frac{\tau_0}{G}$ จากสมการ (2.52) จะได้

$$\gamma=\frac{\tau_0}{G}\left[1-\exp(\frac{Gt}{\eta})\right] \qquad (2.53)$$

ซึ่งจากรูปที่ 2.21 พบว่าที่ เวลา t = 0 วัสดุมีการคืบเกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ ศูนย์ ซึ่งพบว่าสอดคล้องกับผลการทดลอง จึงสรุปได้ว่า แบบจำลองเคลวิน-โวคอธิบายการคืบได้



รูปที่ 2.21 แสดงการตอบสนองของ *Shear rate* (γ) ที่มี *Shear stress* (τ) เป็นอินพุทของแบบจำลองเคลวิน-โวค

ส่วนสมการเคลวิน-โวค เมื่อนำมาใช้อธิบายสมบัติเชิงกลของการพักความเค้น โดยกำหนดให้ความเครียดกระทำด้วยค่าคงที่ มีค่าเท่ากับ $\gamma = \gamma_0$ คือ

$$\frac{d\gamma}{dt} = 0 \tag{2.54}$$

จากสมการ (2.43) จะได้ว่า

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\tau}{\eta} - \frac{G\gamma}{\eta} = 0 \tag{2.55}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{\tau}{\eta} = \frac{G\gamma_0}{\eta} \tag{2.56}$$

หรือ

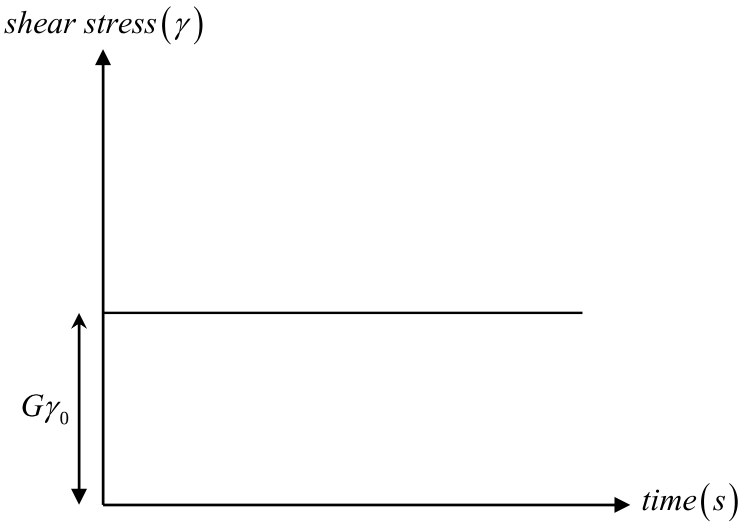
$$\tau = G\gamma_0 \tag{2.57}$$

จากรูปที่ 2.22 และสมการที่ (2.57) พบแบบจำลองเคลวิน-โวค จะไม่สามารถอธิบายคุณสมบัติการพักความเค้น แต่จะแสดงคุณสมบัติของการคืนรูป

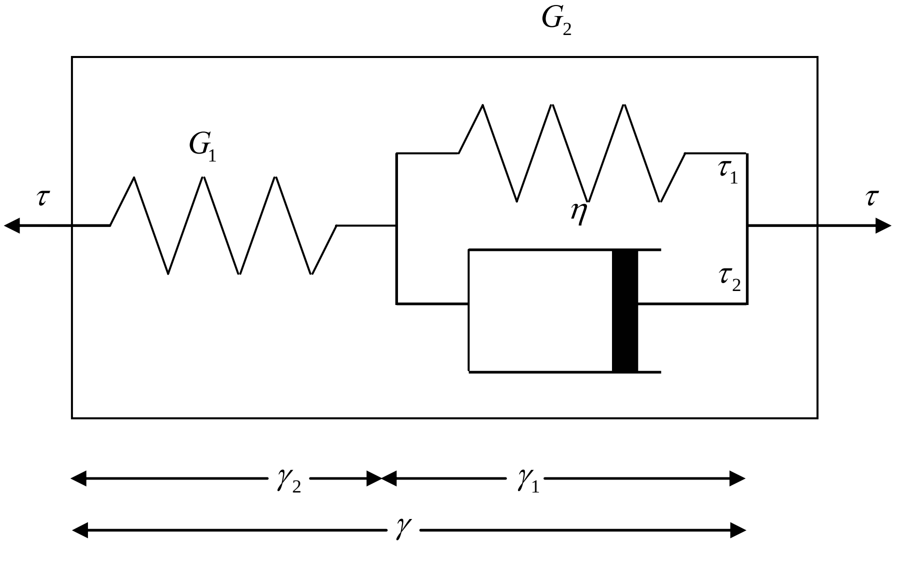
2.5.3 แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน (Standard linear model)

แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐานเป็นแบบจำลองที่นำแบบจำลองเคลวิน–โวคมารวมเข้ากับของแข็งยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (สปริง) เพื่อทำให้แบบจำลองเคลวิน–โวคมีความสมบูรณ์มากขึ้น

ซึ่งทำให้แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐานนี้มีคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นทั้งสามประการ จากรูปที่ 2.23 จะได้



รูปที่ 2.22 แสดงการตอบสนองของ *Shear stress* (τ) ที่มี *Shear rate* (γ) เป็นอินพุทของแบบจำลองเคลวิน-โวค



รูปที่ 2.23 แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 \tag{2.58}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{2.59}$$

$$\tau = G_1\gamma_1 \tag{2.60}$$

$$\tau_1 = G_2\gamma_2 \tag{2.61}$$

$$\tau_2 = \eta\dot{\gamma}_2 \tag{2.62}$$

จะได้ว่า

$$\frac{G_2}{\eta}\gamma + \dot{\gamma} = \frac{1}{\eta}(1 + \frac{G_2}{G_1})\tau + \frac{\dot{\tau}}{G_1} \tag{2.63}$$

จากสมการ (2.63) พบใช้ Laplace transform ในการแก้ปัญหาโดยกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นมีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้ว่า

$$(G_1 + G_2)\tau(s) + \eta s\tau(s) = G_1G_2\gamma(s) + G_1\eta s\gamma(s) \tag{2.64}$$

$$\left[(G_1 + G_2) + \eta s\right]\ \tau(s) = \left[G_1G_2 + G_1\eta s\right]\ \gamma(s) \tag{2.65}$$

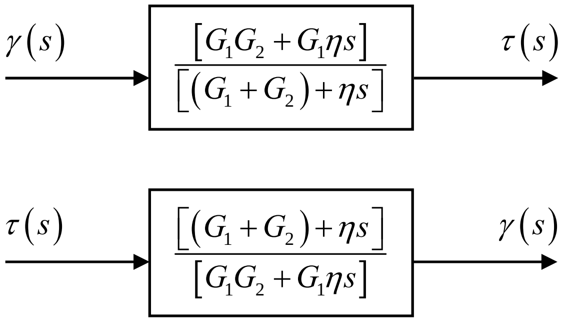
ซึ่งเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon(s)$ กับ $\sigma(s)$ ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\frac{\tau(s)}{\gamma(s)} = \frac{\left[G_1G_2 + G_1\eta s\right]}{\left[(G_1 + G_2) + \eta s\right]} \tag{2.66}$$

หรือ

$$\frac{\gamma(s)}{\tau(s)} = \frac{\left[(G_1 + G_2) + \eta s\right]}{\left[G_1 G_2 + G_1 \eta s\right]} \tag{2.67}$$

จากสมการที่ 2.66 และสมการ 2.67 สามารถนำมาความสัมพันธ์ระหว่าง $\varepsilon(s)$ กับ $\sigma(s)$ ในรูปของแผนภาพบล๊อกจะได้ดังรูปที่ 2.24



รูปที่ 2.24 แสดงแผนภาพบล๊อกของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน

จากสมการ (2.67) ทำการหาอินเวอร์สลาปลาซ เพื่อหาการตอบสนองของความเครียดจะได้ว่า โดยกำหนดให้อินพุทมีค่าเท่ากับ $\tau = \tau_0$ โดยสมการที่ได้จะใช้ในการศึกษาพฤติกรรมการคืบของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

$$\gamma(t) = \frac{\tau_0}{G_1} + \frac{\tau_0}{G_2} \exp\left[1 - \frac{G_2 t}{\eta}\right] \tag{2.68}$$

จากสมการ (2.68) นำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับเวลาจะได้ดังรูปที่ 2.25 ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันความหยุ่นของการยินยอมในการเปลี่ยนรูป (Complex compliance, J^*) จะได้ (Evaristo, Ricardo, et al. (2000))

$$J(t) = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\left[1 - \exp(-\frac{Gt}{\eta})\right] \tag{2.69}$$

หรือเขียนอยู่ในรูปจำนวนเชิงซ้อนจะได้ $J^*(s) = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2\left(1 - \eta/_{G_2} s\right)}$

สำหรับการศึกษาพฤติกรรม การพักความเค้นกำหนดให้ค่า $\gamma = \gamma_0$ จากสมการ (2.63) จะได้ว่า

$$\tau(t)=\tau_0\left[\left(G_2\frac{\gamma_0/\tau_0}{1+G_1/G_2}\right)+\frac{1}{1+G_1/G_2}\exp\left[-\frac{G_1}{\eta}\left(1+\frac{G_2}{G_1}\right)t\right]\right] \quad (2.70)$$

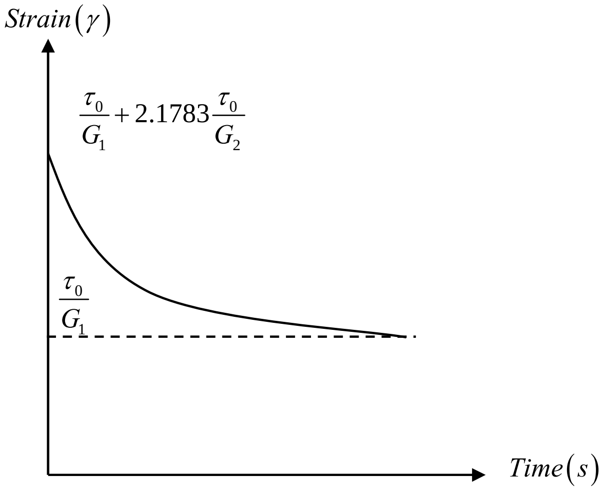
โดยที่ $\tau_0=\gamma_0 G_1$ โดยที่เวลา t = 0 ค่าความเค้นมีค่าเท่ากับ τ_0 จะได้สมการมอดุลัสการพักความเค้นมีค่าเท่ากับ

$$G(t)=\frac{\tau(t)}{\gamma_0}=\frac{G_2}{1+G_2/G_1}+\frac{G_1}{1+G_2/G_1}\exp\left[-\frac{G_1}{\eta}\left(1+\frac{G_2}{G_1}\right)t\right] \quad (2.71)$$

เขียนอยู่ในรูปลาปลาซจะได้ว่า

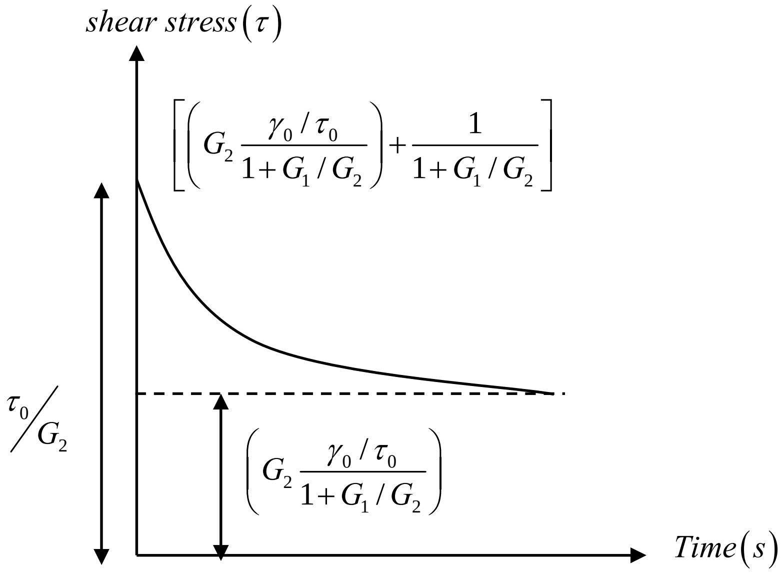
$$G^*(s)=\left(\frac{1+(\eta/G_2)s}{1+(\eta/G_2)s+G_1/G_2}\right)G_1 \quad (2.72)$$

จากสมการ (2.71) นำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น กับ เวลาจะได้ดังรูปที่ 2.25



รูปที่ 2.25 แสดงการตอบสนองของ *Shear rate* (γ) ที่มี *Shear stress* (τ) เป็นอินพุทของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน

ซึ่งพบว่า แบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน จะแสดงคุณสมบัติของการคืบ คุณสมบัติของการหดกลับ การหดตัวกลับ หรือการคืนรูป และคุณสมบัติของการพักความเค้น จากรูปที่ 2.26 ยังพบว่าแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐานนี้ ใช้อธิบายได้ดีสำหรับของแข็งที่สามารถคืนตัวได้ 100% เท่านั้น แต่ไม่เหมาะสมสำหรับวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่คืนตัวได้ไม่ 100% อาทิเช่น พอลิเมอร์ เป็นต้น ซึ่งองค์ความรู้เบื้องต้นช่วยในการศึกษาคุณสมบัติวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น เมื่อกล่าวถึงวัสดุยืดหยุ่นหนืดนั้นมีความสำคัญกับอุตสาหกรรมมากมาย อาทิเช่น พอลิเมอร์ (Polymers), อุตสาหกรรมอาหาร หรือวงการแพทย์ เป็นต้น ดังตัวอย่างที่จะกล่าวโดยสังเขปดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.26 แสดงการตอบสนองของ *Shear stress* (τ) ที่มี *Shear rate* (γ) เป็นอินพุทของแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน

2.6 ตัวอย่างวัสดุยืดหยุ่นหนืด

2.6.1 วัสดุพอลิเมอร์ (Polymer)

กระบวนการทำผลิตภัณฑ์จากวัสดุพอลิเมอร์ทุกชนิด จำเป็นต้องผ่านกระบวนการที่สำคัญคือ กระบวนการขึ้นรูปและการผสม ในกระบวนการทั้งสองนี้เกี่ยวข้องโดยตรงกับการไหลของพอลิเมอร์ในขณะนั้น การศึกษาคุณสมบัติการไหลแบบยืดดึงของพอลิเมอร์หลอมเป็นการศึกษาที่มีผลโดยตรงถึงการหาคุณสมบัติทางกายภาพของพอลิเมอร์หลอม ขณะขึ้นรูป ณ ขั้นตอนสุดท้ายก่อนถูกทำให้แข็งตัวเพื่อที่จะนำไปใช้งาน ซึ่งคุณสมบัติความความยืดหยุ่นหนืดของพอลิเมอร์หลอม เป็นคุณสมบัติที่เป็นตัวกำหนดความแข็งแรงของพอลิเมอร์ขณะหลอมเหลว

โดยธรรมชาติของการไหลของวัสดุพอลิเมอร์มีสมบัติเป็นการไหลแบบยืดหยุ่นหนืด และจะแสดงพฤติกรรมอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งงานวิจัยที่เกี่ยวข้องระหว่างคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดกับวัสดุจำพวกพอลิเมอร์มีมากมาย เช่น

Luc, Rik and Leo (1992) ได้ศึกษาวิจัยหาเอกลักษณ์ของสมการคอนสติติวทีฟ (Constitutive equations) สำหรับวัสดุเชิงประกอบ (Composite materials) ที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสำหรับสมการคอนสติติวทีฟ (Constitutive equations) สำหรับอธิบายวัสดุเชิงเส้นแบบไอโซโทปิก และเป็นวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่อยู่ภายใต้แรงในแนวแกนเดียว (Uniaxial load) จะสามารถเขียนอยู่ในรูปของความเค้น ($\sigma(t)$) และความเครียด ($\varepsilon(t)$) จากกฎของฮุก สามารถเขียนได้ดังสมการ 2.1 ซึ่งแบบจำลองที่ใช้สำหรับบทความฉบับนี้คือ

$$\sigma(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k} .\varepsilon(j\omega) \;= G'(\omega) + jG''(\omega) \tag{2.73}$$

โดยค่า b_k คือ สัมประสิทธิ์พหุนามของเศษ, a_k คือ สัมประสิทธิ์พหุนามของส่วน

วัสดุที่ใช้ในบทความนี้คือ พีวีซี (PVC) และวัสดุเชิงประกอบ ซึ่งเป็นวัสดุพอลิเมอร์ โดยทำการกระตุ้นระบบด้วยฟังก์ชันขั้นบันไดแบบฮาร์โมนิก ซึ่งพบว่าแบบจำลองดังกล่าวสามารถอธิบายพฤติกรรมของวัสดุยืดหยุ่นหนืดได้ดี

Ping and Haddad (1994) ได้ศึกษาวิจัยวิธีการหาเอกลักษณ์ของระบบพลวัตของการตอบสนองทางรีโอโลยีของวัสดุยืดหยุ่นหนืด โดยวัสดุยืดหยุ่นหนืดจะถูกพิจารณาอยู่ในรูปของระบบพลวัต ซึ่งวิธีการนี้เพื่อหาค่าฟังก์ชันการพักความเค้นและการคืบของวัสดุ โดยพิจารณาในโดเมนของความถี่ โดยการสมมติแบบจำลองในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนด้วยวิธีการวิเคราะห์ระบบแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลา (Discrete-time system analysis method) ซึ่งจากตัวอย่างพบว่า วิธีการนี้ให้ค่าที่มีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพอีกวิธีการหนึ่ง

Baltussen and Northolt (2003) ได้ศึกษาวิจัยการตอบสนองของเส้นใยพอลิเมอร์ในช่วงของการปรับตัวโดยภาระกรรมเชิงซ้อน ซึ่งเส้นใยพอลิเมอร์ดังกล่าวจะแสดงพฤติกรรมการคืบและการพักความเค้นในรูปแบบไม่เชิงเส้น เมื่อมีการให้ความเค้นกับพอลิเมอร์ดังกล่าว ซึ่งอัตราส่วนระหว่างอัตราการคืบ (Creep rate) และอัตราการพักความเค้น (Stress relaxation rate) อยู่ในช่วงความชันของการทดสอบแบบแรงดึง และยังไม่สามารถทำนายหาค่ามอดุลัสความยืดหยุ่น (Elastic modulus) โดยใช้ทฤษฎีของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ ซึ่งจากการสังเกตนี้ ทำให้ทราบว่าพอลิเมอร์ดังกล่าวนั้นค่าใดเป็นผลเนื่องมาจากการเกี่ยวพันกันของวัสดุยืดหยุ่นหนืดกับการ

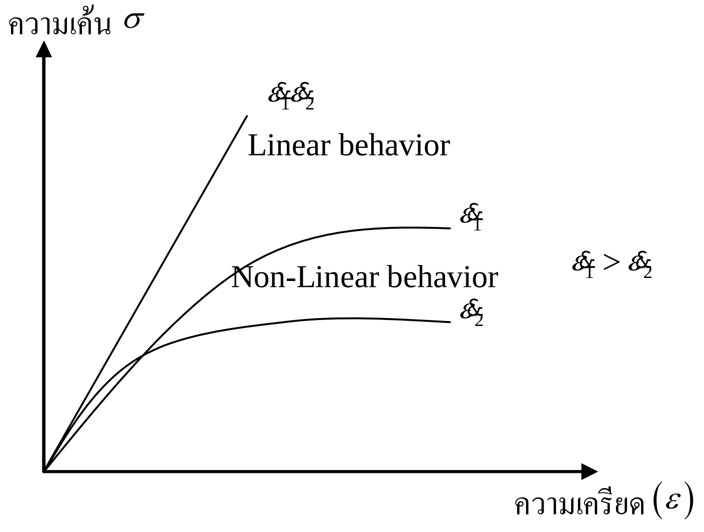
เปลี่ยนแปลงของจุดครากของวัสดุ ซึ่งในการวิเคราะห์ผลของการคืบแบบขั้นบันได และทำการทดลองแบบการพักความเครียด (Strain relaxations strain) กับเส้นใยพอลิเมอร์ผสมระหว่างโพลิสไตรีนและโพลิเฟนิลออกไซด์ ซึ่งเส้นใยชนิดนี้จะแสดงว่า หลักการการเข้ากันได้ (Superposition principle) จะไม่สามารถนำมาใช้ได้กับการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากการดึงของเส้นใยพอลิเมอร์ในจุดที่เลยจุดครากไปแล้ว ซึ่งสรุปว่าในส่วนประกอบต่าง ๆ ของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยแรงดึงนั้น ควรจะใช้สมการคอนสติติวทีฟ (Constitutive equations) สำหรับเส้นใยพอลิเมอร์ในการอธิบายพฤติกรรมของพอลิเมอร์

Chenyang, Chaoxu, Peng, Jiasong and Qinrong (2004) ได้ทำการศึกษาวิจัยอิทธิพลของสายโซ่กิ่งก้านขนาดยาว (Long chain branch) บนคุณสมบัติการไหลแบบยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นและการพักไดอิเล็กตริกของพอลิคาร์บอเนต พบว่า พอลิคาร์บอเนตเชิงเส้น (Linear polycarbonate) นั้น จะประกอบไปด้วยสายโซ่กิ่งก้านขนาดยาว 3 ชนิด ซึ่งจะมีน้ำหนักโมเลกุลใกล้เคียงกัน พบว่าสายโซ่กิ่งก้านขนาดยาวจะไปเพิ่มความยืดหยุ่นของการหลอมเหลว ซึ่งเป็นคุณลักษณะของการคืนรูปความหยุ่น (Recoverable compliance) และค่ามอดุลัสพลังงานสะสม $(G'(\omega))$ พบว่าพอลิเมอร์แบบสายโซ่กิ่งก้านขนาดยาว จะอธิบายความแข็งแรงของพอลิเมอร์ที่อุณหภูมิ ในการหลอมเหลวสูง ๆ และความไวต่อการกระตุ้นที่ค่าแรงเฉือนสูง ๆ ซึ่งจะมีประโยชน์ต่อกระบวนการการขึ้นรูปด้วยแม่พิมพ์ของพอลิเมอร์ชนิดนี้

Kwang, Woo, Dong-ho, Lee, Kyung, Kwan, Inn-kyu, Soo-young and Young (2002) ได้ทำการศึกษาหาแบบจำลองที่ได้จากการสังเกตวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นของพอลิเมอร์แบบไม่กระจายตัว ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ปรับปรุงแก้ไขมาจากแบบจำลองของ Doi และ Edward ซึ่งเป็นแบบจำลองที่เกิดจากทำนายปรากฏการณ์ที่ได้จากการสังเกต ซึ่งมีช่วงในการพิจารณาที่กว้างกว่าของแบบจำลองของ Doi และ Edward ซึ่งแบบจำลองนี้กระทำโดยการพิจารณาเฉพาะผลกระทบของน้ำหนักโมเลกุลของพอลิเมอร์และเป็นวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งสรุปได้ว่าแบบจำลองที่ได้สามารถทำนายค่ามอดุลัสพลังงานสะสม $(G'(\omega))$ และมอดุลัสพลังงานสูญเสีย $(G''(\omega))$ ได้ดีค่าหนึ่ง

ซึ่งจากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาข้างต้น เป็นการศึกษาคุณสมบัติของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นสำหรับวัสดุพอลิเมอร์ ซึ่งงานวิจัยที่ได้กล่าวมานี้เป็นงานวิจัยเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้นที่ทำการศึกษาหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายถึงพฤติกรรมต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นกับวัสดุพอลิเมอร์ ซึ่งตัวแปรที่สำคัญในการศึกษาพฤติกรรมของวัสดุพอลิเมอร์ อาทิเช่น ความถี่ในการตอบสนองสำหรับการวิเคราะห์เชิงพลวัตหรือค่าพลังงานสะสมของวัสดุยืดหยุ่นหนืด (Storage modulus) หรือค่าพลังงานสูญเสีย (Loss modulus) เป็นตัวแปรที่สามารถวัดค่าออกมาได้จากการ

ทดลองต่าง ๆ นอกจากนั้นการทำความเข้าใจและรู้ถึงพฤติกรรมการไหลของวัสดุพอลิเมอร์ในการผลิตผลิตภัณฑ์จากพอลิเมอร์นั้น จะช่วยในการปรับปรุงผลิตภัณฑ์จากพอลิเมอร์ได้ ซึ่งงานวิจัยที่ได้ศึกษาพฤติกรรมการไหลของวัสดุพอลิเมอร์ที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ซึ่งตัวแปรที่ใช้วิเคราะห์วัสดุพอลิเมอร์ อาทิเช่น มอดุลลัสเชิงซ้อน, ความหนืดเชิงซ้อน, ความเค้น, ความเครียด ซึ่งวัสดุพอลิเมอร์จะแสดงสมบัติการยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น (Linear viscoelasticity) ในขอบเขตที่มีความเครียดต่ำ ๆ (Small strains) แต่เมื่อมีความเครียดเพิ่มขึ้นเกินค่าจำกัดหนึ่ง ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างความเค้นกับความเครียดจะหมดไป ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดที่เป็นฟังก์ชันของอัตราการผิดรูป (Rate of deformation) ซึ่งแสดงให้เห็นดังรูปที่ 2.27



รูปที่ 2.27 แสดงสมบัติการยืดหยุ่นเชิงเส้นและการยืดหยุ่นไม่เชิงเส้นของวัสดุ

2.6.2 เลือด (Blood)

เลือดในร่างกายของมนุษย์ก็จัดได้ว่ามีคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเช่นเดียวกัน ซึ่งเลือดจะประกอบไปด้วยเซลล์เม็ดเลือดแดง (Red blood cells) และน้ำเลือด (Plasma) โดยเซลล์เม็ดเลือดแดงจะแสดงคุณสมบัติของแข็งยืดหยุ่น และน้ำเลือดจะแสดงคุณสมบัติของเหลวหนืด (Isogai et al., 1973) ซึ่งอัตราการไหลเวียนของเลือดภายในร่างกายมนุษย์สามารถที่จะบ่งชี้ได้ว่ามนุษย์จะมีร่างกายที่เป็นปกติหรือเกิดโรค เนื่องจากเลือดที่วัดได้จากร่างกายมนุษย์มีอัตราเฉือน (Shear rate) ที่มีความแตกต่างกัน (Chen et al., 1988) ซึ่งความยืดหยุ่น (Elasticity) และความหนืด (Viscosity) ที่วัดได้จากเลือดของร่างกายมนุษย์ที่เป็นปกติจะแสดงให้เห็นดังรูปที่ 2.28 และอัตราเฉือนที่วัดได้จากเลือดของร่างกายมนุษย์ที่เกิดโรคจะแสดงให้เห็นดังรูปที่ 2.29

$$\eta^*(j\omega) = \eta'(\omega) - j\eta''(\omega) \tag{2.74}$$

โดย $\eta'(\omega)$ = Dynamic viscosity

$\eta''(\omega)$ = Out of phase viscosity,

$\eta^*(j\omega)$ = Complex viscosity

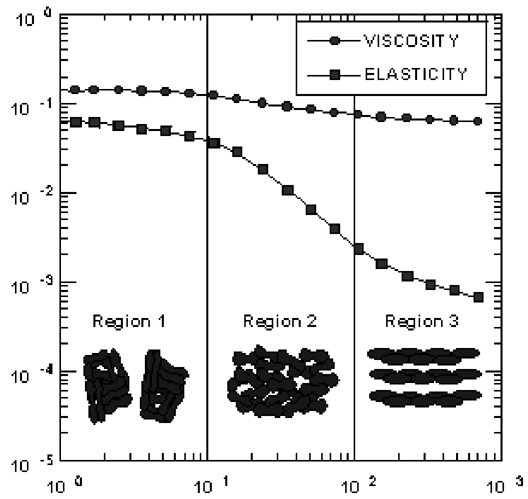
จากรูปที่ 2.28 และ 2.29 จะเห็นได้ว่าความยืดหยุ่น (Elasticity) และความหนืด (Viscosity) ที่วิเคราะห์ได้จากเลือดมนุษย์ที่เป็นปกติและเกิดโรคนั้นจะแตกต่างกัน ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวสามารถใช้ในการวิเคราะห์การเกิดโรคบางชนิดของมนุษย์ได้ และสมการที่ใช้สำหรับหาค่าความหนืดเชิงซ้อน ($\eta^*(j\omega)$) สามารถเขียนอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังสมการ (2.74)

2.6.3 อาหาร (Food)

สำหรับอุตสาหกรรมอาหาร การวิเคราะห์โครงสร้างและพฤติกรรมการไหลของผลิตภัณฑ์อาหารทำให้ทราบว่าผลิตภัณฑ์อาหารนั้น ๆ จะสามารถเก็บรักษาได้นานเพียงใด โดยพบว่าคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดของผักและผลไม้ สามารถช่วยในการเก็บรักษาผักและผลไม้ นั้น ๆ ให้ได้นาน และยังช่วยให้การขนส่งผักและผลไม้ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น (Rao, 1992) การศึกษาคุณสมบัติของวัตถุดิบที่ใช้ในอุตสาหกรรมอาหาร ก็จะช่วยให้ประสิทธิภาพในการผลิตมีมากขึ้นด้วยเช่นกัน อาทิเช่น การศึกษาคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดของแป้งสาลี ซึ่งจะทำให้การทำแป้งสาลีไปผ่านกระบวนการผลิตทำได้มีประสิทธิภาพมากขึ้น เป็นต้น การศึกษาแบบจำลองความยืดหยุ่นหนืดของมะม่วงกวนเป็นการวัดค่าการคืบ (Creep) เพื่อวิเคราะห์เนื้อสัมผัสของมะม่วงกวนที่มีปริมาณของแข็งที่ละลายน้ำได้ทั้งหมด ร้อยละ 65 โดยน้ำหนัก และมีการผันแปรความหนืดโดยใช้เพกติน 4 ระดับคือ ร้อยละ 1 2 3 และ 4 โดยน้ำหนัก จากการศึกษาพบว่าแบบจำลองที่เหมาะสมกับมะม่วงกวนเป็นแบบจำลอง 6 องค์ประกอบคือ มีแบบจำลองแมกซ์เวลล์ 1 หน่วย และแบบจำลองเคลวิน 2 หน่วย และค่า Creep compliance : J (μPa^{-1}) มีค่าลดลงเมื่อปริมาณเพกตินเพิ่มขึ้น และจากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเพกตินที่เพิ่มขึ้นกับค่าตัวแปรต่าง ๆ พบว่าการเพิ่มเพกตินทำให้มะม่วงกวนมีคุณสมบัติยืดหยุ่นเพิ่มขึ้น สมบัติของ การไหลของของเหลวลดลง (อุทัยวรรณ ฉัตรธง และอรุณี อภิชาตสรางกูร, 2548)

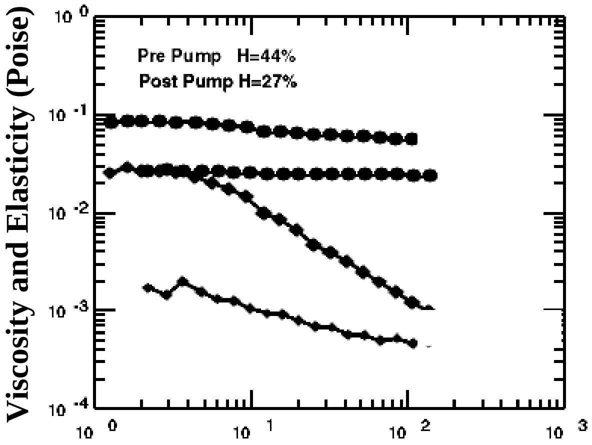
จากตัวอย่างข้างต้นนั้น คือประโยชน์ในการศึกษาวัสดุยืดหยุ่นหนืด ซึ่งในที่นี้จะเห็นได้ว่าปัญหาของการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดยังคงไม่มีคำอธิบายที่ถูกต้อง สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้จะนำคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดมาเป็นส่วนหนึ่งในการศึกษา โดยมีสมมติฐานว่าวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่นำมาศึกษาจะต้องเป็นวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น และ

จะศึกษาถึงวิธีหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุ โดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดขึ้นอยู่กับความถี่ของวัสดุนั้น ๆ



รูปที่ 2.28 แสดงค่าความยืดหยุ่นและความหนืดของเลือดที่วิเคราะห์ได้จากมนุษย์ที่เป็นปกติ

ที่มา: Chen, H.Q., G.H. Zhong, L. Li, Z.Y. Chen and Z.N. Xue. (1988)



รูปที่ 2.29 แสดงค่าความยืดหยุ่นและความหนืดของเลือดที่วิเคราะห์ได้จากมนุษย์ที่เกิดโรค

ที่มา: Chen, H.Q., G.H. Zhong, L. Li, Z.Y. Chen and Z.N. Xue. (1988)

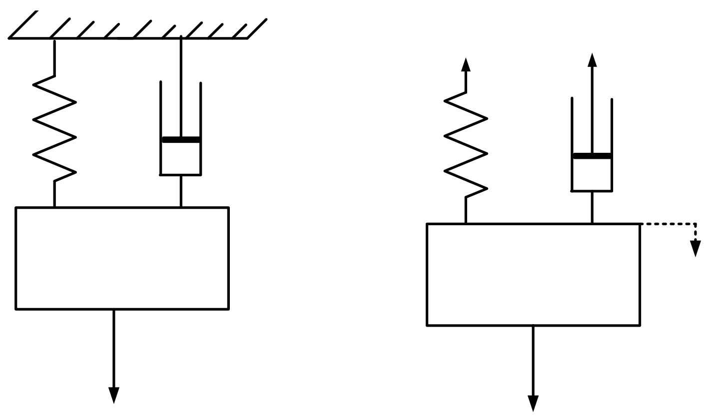
2.7 ระบบพลวัตในระบบควบคุมอัตโนมัติ (Dynamic control system)

การดำเนินงานวิเคราะห์และออกแบบเพื่อควบคุมระบบจำต้องอาศัยแบบจำลอง ซึ่งถือเป็นสิ่งที่มนุษย์สมมุติขึ้น เพื่อแทนหรืออธิบายระบบพลวัตที่ให้ความสนใจอยู่ในขณะนั้น ซึ่งแบบจำลองที่กล่าวถึงในที่นี้คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical models) โดยแบบจำลองที่เขียนขึ้นมานี้เป็นแบบจำลองที่ต้องอาศัยความรู้ทางวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ ที่อาจจะเกี่ยวข้องกับระบบพลวัตนั้น (สราวุฒิ สุจิตจร, 2546) เช่นความรู้ทางด้านฟิสิกส์ ความรู้ทางด้านระบบเชิงกลต่าง ๆ ความรู้ทางด้านไฟฟ้า เป็นต้น ซึ่งในการเลือกใช้แบบจำลองต้องคำนึงว่าแบบจำลองนั้นสามารถวิเคราะห์ และสามารถช่วยในการออกแบบระบบนั้น ๆ ได้หรือไม่ ซึ่งกรณีโดยส่วนใหญ่นั้น เมื่อระบบเป็นเชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญจึงเป็นลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับความนิยมมากที่สุด ซึ่งถ้าระบบที่เราสนใจอยู่ในโดเมนของเวลา เมื่อจัดรูปสมการอย่างเหมาะสม ก็จะได้แบบจำลองที่เรียกว่า แบบจำลองตัวแปรสเตด (State–variable models) หรือถ้าสนใจในโดเมนของความถี่ ก็อาจประยุกต์การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ ผลจากการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไปอยู่ในโดเมนความถี่ เมื่อจัดรูปสมการให้เหมาะสมก็จะได้แบบจำลองที่เรียกว่า ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ซึ่งจะนำไปสู่การเขียนแผนภาพบล๊อก (Block diagram) ของระบบ และกราฟการไหลของสัญญาณ (Signal–flow graph) แต่ในความเป็นจริงแล้วระบบจะมีความสลับซับซ้อนมาก และไม่เป็นเชิงเส้น (Non linear) สูง ซึ่งการที่จะนำสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแทนระบบในลักษณะของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยเกิดความผิดพลาดน้อยที่สุด หรืออยู่ภายในขอบเขตที่พึงยอมรับได้ ผู้ออกแบบจึงต้องตั้งสมมุติฐาน และอาศัยการประมาณบางประการเพื่อปรับระบบให้อยู่ในขอบเขตเชิงเส้น

สำหรับงานวิจัยนี้จะศึกษาโดยตั้งสมมุติฐานว่า ระบบเป็นระบบเชิงเส้น และมีความเสถียร (Stability) โดยจะแสดงเฉพาะระบบทางกลเท่านั้น เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันถ่ายโอนกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

2.7.1 ระบบพลวัตทางกล

เมื่อกล่าวถึงระบบทางกลแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อาศัยกฎของนิวตัน (Newton’s law) โดยอาศัยการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (Free body diagram) อธิบายลักษณะการทำงาน ซึ่งแสดงด้วยระบบมวล–สปริง–ตัวหน่วง (Mass–spring–damper) และอาศัยกฎของนิวตันในการ หาสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบทางกล



รูปที่ 2.30 แสดงระบบมวล–สปริง–ตัวหน่วง และแผนภาพอิสระ

การสร้างแบบจำลอง อาศัยความเข้าใจเรื่องสมดุลของแรง โดยกำหนดให้ X คือการขจัดที่เกิดขึ้นเมื่อมีแรงกระทำ โดยแรงที่กระทำคือ F โดยแรงที่เกิดขึ้นเกิดจากแรงกระทำจากภายนอก (F(t)) โดย k คือค่าคงที่ของสปริง และ b คือค่าคงที่ของตัวหน่วงตามลำดับ ซึ่งจากแผนภาพอิสระจะได้

สปริง

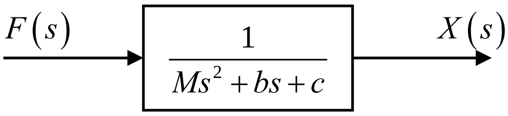
k

$$m\frac{dx^2}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{2.75}$$

2.7.2 ฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function)

โดยทั่วไปฟังก์ชันการถ่ายโอน (Transfer function) สำหรับระบบเวลาคงตัวเชิงเส้น (Linear time-invariant system) ถูกอธิบายโดยอัตราส่วนระหว่างสมการ Laplace transform ระหว่างสัญญาณเอาพุทและสัญญาณอินพุท ภายใต้ข้อกำหนดที่ว่าสภาวะเริ่มต้นเป็นศูนย์ ฟังก์ชันการถ่ายโอนจะถูกนำมาใช้บ่อยครั้งสำหรับงานวิศวกรรม เนื่องจากฟังก์ชันการถ่ายโอนเป็นคุณลักษณะของความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเข้าและออกของระบบเวลาคงตัวเชิงเส้น (Linear time-invariant system) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการวิเคราะห์และออกแบบระบบ พิจารณาสมการ (2.75) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบมวล–สปริง–ตัวหน่วง และเมื่อทำการแปลงลาปลาสภายใต้เงื่อนไขสภาวะเริ่มต้นเป็นศูนย์ จะได้ดังสมการที่ 2.76

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + c} \tag{2.76}$$



รูปที่ 2.31 แสดงแผนภาพบล็อกของระบบมวล–สปริง–ตัวหน่วง

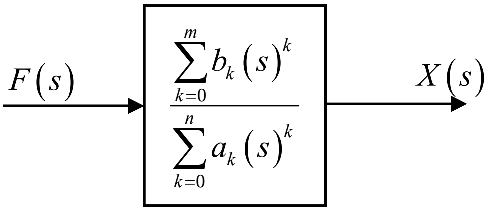
ในการวิเคราะห์หรือออกแบบระบบ เมื่อเราให้อินพุทกับระบบแล้ว สังเกตพฤติกรรมการตอบสนองของเอาพุทที่เกิดขึ้น ซึ่งเอาพุทในที่นี้คือ การขจัดของระบบนั้นเอง ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาสมการโดยทั่วไป สมการเชิงอนุพันธ์ดังสมการที่ (2.77)

$$a_n \frac{\partial^n x}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} x}{\partial t^{n-1}} + ... + a_0 x = b_m \frac{\partial^m f}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial t^{m-1}} + ... + b_0 f \qquad (2.77)$$

และเมื่อทำการแปลงลาปลาซ (James et al., 1993) จะได้ดังสมการที่ 2.78

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (s)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (s)^k} = \mathrm{Re} + j\,\mathrm{Im} \qquad (2.78)$$

โดย $s = j\omega$, R คือ ส่วนจำนวนจริง, *Im* คือ ส่วนจำนวนจินตภาพ, X (S) คือ เอาพุท และ U (s) คือ อินพุท จากสมการ (2.78) เป็นสมการที่ใช้อธิบายระบบโดยทั่วไป (General form) ในโดเมนของความถี่หรือฟังก์ชันถ่ายโอน



รูปที่ 2.32 แสดงบล๊อกไดอะแกรมของสมการ 2.78

ซึ่งพบว่าเมื่อทำการศึกษาจากตัวอย่างที่ผ่านมาพบว่า แบบจำลองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ก็มีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองทางกล โดยแบบจำลองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นไม่ว่าจะเป็นแบบจำลองแมกซ์เวลส์, แบบจำลองเคลวิน–โวค และแบบจำลองเชิงเส้นพื้นฐาน จะมีส่วนประกอบเป็นสปริงและตัวหน่วง ซึ่งใช้ในการอธิบายพฤติกรรมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น โดยมีอินพุทที่กระทำกับวัสดุยืดหยุ่นหนืด คือ ความเค้น และความเครียด โดยขึ้นอยู่กับว่าเราต้องการศึกษาพฤติกรรมใด อาทิพฤติกรรมการคืบ โดยการคืบจะให้อินพุทเป็นความเค้น โดยความเค้นที่ให้มีค่าคงที่ค่าหนึ่งจะได้เอาพุทเป็นความเครียดที่เกิดขึ้น ส่วนถ้าต้องการศึกษาการพักความเค้น อินพุทคือค่าความเครียด โดยความเครียดจะมีค่าคงที่ค่าหนึ่งจะได้เอาพุทเป็นความเค้นที่เกิดขึ้น ดังนั้นวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนได้ เพราะถ้าวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นมีฟังก์ชันถ่ายโอนหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง จะสามารถอธิบายพฤติกรรมต่าง ๆ ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้

2.8 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่มีความเกี่ยวข้องกับการเขียนโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนจากคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นของวัสดุ คือ

Levy (1959) ได้นำเสนอวิธีการทำ Curve fitting สำหรับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นวิธีการทางด้านการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียนของฟังก์ชันถ่ายโอน โดยการใช้วิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) ช่วยในการหาค่า โดยกำหนดให้อินพุท คือ ค่าความถี่ (Frequency), จำนวนจริง และจำนวนจินตภาพ ซึ่งเป็นฟังก์ชันกับความถี่ ซึ่งในการทำแบบจำลองจะกำหนดให้ระบบมีความเสถียร

Sanathanan and Koerner (1962) ได้นำวิธีการของ Levy มาทำการเพิ่มการถ่วงน้ำหนักด้วยการนำสัมประสิทธิ์ของตัวส่วนยกกำลังสอง แล้วคูณเข้าไปในสมการของ Levy และนำมาเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยใช้ภาษา FORTRAN เพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของโพลิโนเมียนเชิงซ้อน พบว่าค่าที่ได้จากการทำการถ่วงน้ำหนักได้ค่าที่มีค่าความผิดพลาดมากกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก ซึ่งจากบทความนี้พบว่าวิธีการของ Levy สามารถทำ Curve fitting ได้ดีกว่าการถ่วงน้ำหนักด้วยการนำสัมประสิทธิ์ของตัวส่วนยกกำลังสอง

Whitfield (1986) ได้ทำการศึกษาวิธีการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนจากข้อมูลที่ได้จากการตอบสนองเชิงความถี่ ซึ่งในการศึกษาได้นำวิธีการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนจากข้อมูลที่ได้จากการตอบสนองเชิงความถี่ของนักวิจัยหลาย ๆ ท่าน มานำเสนอพอว่า วิธีการของ Stahl (1984) ผลเฉลยที่ได้จะเบนออก (Divergent) และวิธีการของ Lawrence และ Rogers (1979) ผลเฉลยที่ได้จะลู่เข้า (Convergent) ส่วนวิธีการของ Sanathanan และ Koerner (1963) เป็นวิธีการที่ไม่นิยม

เนื่องจากมีความยุ่งยาก ซึ่งจากบทความฉบับนี้พบว่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดเชิงเส้นจะมีประสิทธิภาพที่ดีก็ต่อเมื่อระบบตอบสนองที่ความถี่ต่ำ และไม่มีสัญญาณรบกวนกับระบบ

Kumaresan (1990) ได้ทำการศึกษาการบ่งเอกลักษณ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน จากตัวอย่างการตอนสนองเชิงความถี่ ซึ่งบทความฉบับนี้พิจารณาที่โดเมน z (Discrete-time) ซึ่งได้ตั้งข้อสมมุติไว้ว่าระบบเป็นสมการเชิงเส้นและไม่มีสัญญาณรบกวน และยังกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์โพลิโนเมียนของตัวส่วนที่มีลำดับขึ้นศูนย์ มีค่าเท่ากับหนึ่ง ($a_0 = 1$) ซึ่งค่าที่ต้องการหาคือค่าลำดับขั้นของสมการโพลิโนเมียน และสัมประสิทธิ์โพลิโนเมียนของฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งวิธีการในบทความนี้เป็นวิธีการที่มีต้นกำเนิดมาจากวิธีการของ Cauchy และ Jacoby โดยวิธีการในการแก้ปัญหาใช้วิธี Sigular-value decomposition (SVD) ซึ่งวิธีการที่นำเสนอนั้นไม่รับประกันความมีเสถียรภาพของระบบ ซึ่งต้องใช้เทคนิควิเคราะห์ความมีเสถียรภาพเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

Hassul and Shahian (1992) ได้เสนอวิธีการที่จะใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอน โดยมีเงื่อนไขว่าไม่พิจารณาสัญญาณรบกวนของระบบ (Noise-free) จากการทดลองโดยมีข้อมูลของ Magnitude และ Phase โดยใช้เทคนิค Least square ซึ่งจะได้ค่า Pole และ Zero ที่มีความแม่นยำในการคำนวณ

Choe (1999) ได้ทำการศึกษาวิธีการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอย่างง่ายจากการทราบค่าข้อมูลขนาด (Magnitude) และเฟส (Phase) โดยวิธีการใช้วิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) โดยการลดรูปให้สมการเป็นสมการเชิงเส้น เพื่อสะดวกในการคำนวณ และทำการเพิ่มการถ่วงน้ำหนัก เพื่อทำให้การประมาณค่าตัวแปรมีความถูกต้องมากขึ้น โดยพิจารณาระบบที่อยู่ในช่วงความถี่ต่ำโดยการถ่วงน้ำหนัก บทความฉบับนี้ได้ใช้ การถ่วงน้ำหนักด้วย *1/ความถี่* ซึ่งผลที่ได้พบว่าการถ่วงน้ำหนักด้วย *1/ความถี่* สามารถทำให้การทำ Curve fitting นั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น

โดยการวิเคราะห์วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นจะแยกวิเคราะห์ออกเป็น 3 ส่วนหลัก ๆ คือ ความหนืด, ความยืดหยุ่น และความถี่ ซึ่งด้วยคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดนั้น สามารถสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนได้ ดังนั้นการศึกษาวิจัยในครั้งนี้จึงเป็นไปเพื่อการนำข้อมูลที่มีอยู่จริง อาทิเช่น ความหนืด (Viscosity) ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency) ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น นำมาใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ในการหาค่าฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุนั้น ๆ และนำไปใช้เป็นแนวทางเพื่อนำไปพัฒนาองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการวิจัยในระดับต่อไป

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

3.1 บทนำ

สำหรับบทนี้เป็นการนำเสนอระเบียบวิธีที่ใช้ในการดำเนินงานวิจัย โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และทฤษฎีควบคุมการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งขั้นตอนที่นำมาใช้ประกอบไปด้วย การใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least square method), วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weight least square method) วิธีในการสร้างสมการเชิงเส้นโดยค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นตัวแปรต้น และค่าที่ได้จากการทดลองในที่นี้คือ ค่าความหนืด (Viscous), ค่ายืดหยุ่น (Elastic) และความถี่ เป็นตัวแปรตาม โดยใช้วิธีการ Pseudo inverse ในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอน ใช้วิธีหาค่ารากของโพล เพื่อวิเคราะห์ความเสถียรภาพของวัสดุ และได้ทำการหาค่าความผิดพลาดจากนอร์มรากกำลังสอง (Root-square norm : L_2-norm)

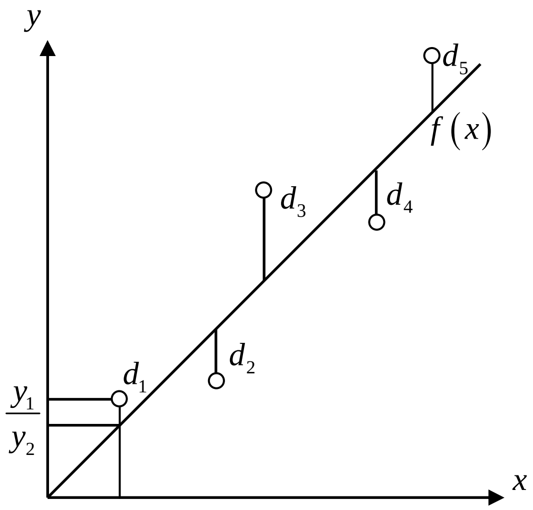
3.2 การประมาณค่าฟังก์ชันจากชุดข้อมูล (Estimation function)

เทคนิคที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันจากชุดข้อมูลที่มีอยู่ โดยใช้วิธีหาเอกลักษณ์ของระบบ หรือชุดข้อมูลที่ต้องการหาฟังก์ชัน ซึ่งมีอยู่หลายวิธี อาทิเช่น การวิเคราะห์สมการกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method = LSM) เป็นต้น โดยวิธีการเหล่านี้เป็นวิธีการประมาณค่าจากค่าความผิดพลาดที่เกิดจากการทำ Curve fitting โดยมีหลักการดังนี้

3.2.1 วิธีสมการกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method)

วิธีการประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด เป็นวิธีที่มีความสำคัญมากในทางวิทยาศาสตร์และทางวิศวกรรมศาสตร์ เช่น การฟิตฟังก์ชันเพื่อสร้างเส้นโค้งเทียบมาตรฐาน (Calibration curve) การเลือกรูปฟังก์ชันที่นำมาฟิตกับข้อมูลมีข้อพิจารณาที่สำคัญคือ เราจะเลือกฟังก์ชันที่ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด (กฤษณะ สาคริก, 2545) ในการฟิตฟังก์ชันกับข้อมูลใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ทำให้ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน (Error function) มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งก็คือ

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{y}_{\text{measurement}} - y_{i,\text{model}} \right)^2 \tag{3.1}$$



รูปที่ 3.1 วิธีกำลังสองน้อยสุด

ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนในสมการ (3.1) เป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดเนื่องจาก ไม่มีการหักล้างกันของค่าความคลาดเคลื่อนที่มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน เนื่องจาก เทอมของ $(\bar{y} - y_i)$ เมื่อยกกำลังสองแล้วเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเมื่อนำค่าความคลาดเคลื่อนมารวมกัน จะไม่เกิดการหักล้างกันขึ้น และเป็นฟังก์ชันที่ให้น้ำหนักกับค่าความเคลื่อนเคลื่อนที่มีขนาดใหญ่มากกว่าขนาดเล็ก เนื่องจากเทอม $(\bar{y} - y_i)^2$ เมื่อค่าที่ได้จากการ $(\bar{y} - y_i)$ มีค่าน้อย ถ้านำไปยกกำลังสองยิ่งมีค่าน้อยลงไปอีก จึงมีความสำคัญน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าที่มีขนาดใหญ่กว่านั้นเอง ซึ่งฟังก์ชันที่ได้รับความนิยมในการประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดซึ่งวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด เป็นวิธีการที่สามารถยืดหยุ่นโดยสามารถนำฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่าที่นอกเหนือจาก สมการเส้นตรงได้ซึ่งขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของฟังก์ชันนั้น ๆ สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันสำหรับการประมาณค่า โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดคือ ฟังก์ชันถ่ายโอนจากวิธีการกำลังสองน้อยสุดนำมาประยุกต์ใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้โดยการใช้ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นฟังก์ชันในการประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้ดังสมการที่ (3.2)

$$G(j\omega_i) = R(\omega_i) + jX(\omega_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega_i)^i}{\sum_{i=1}^{m} a_i (j\omega_i)^i + 1} = \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} \tag{3.2}$$

โดย $n = 0,1,\ldots$ และ $m = 1,2,\ldots$

โดยกำหนดให้ $a_0 = 1$ และ $m \geq n$ เสมอ $R(\omega_i)$ เป็นส่วนจริง (Real part) ซึ่งในการทดลองนี้คือเทอมของค่ายืดหยุ่น (Elastic), $X(\omega_i)$ เป็นส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ซึ่งในการทดลองนี้คือเทอมของค่าความหนืด (Viscous), ω_i คือค่าความถี่ที่ใช้ในการกระตุ้นระบบ ซึ่งในการหาค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนคือ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุด พบว่า

$$\varepsilon_i = \sum_i \left| G(j\omega_i) - \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} \right|^2 \qquad \text{โดย } \varepsilon \text{ คือค่าความผิดพลาด} \tag{3.3}$$

จากสมการ (3.3) พบว่า การนำวิธีการกำลังสองน้อยสุดมาใช้กับสมการ (3.3) จะทำให้สมการที่ได้มีความสลับซับซ้อน เนื่องจากสมการที่ได้จะเป็นสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งจากปัญหาดังกล่าวได้มีผู้เสนอวิธีการเพื่อลดความยุ่งยากของสมการข้างต้น ซึ่งจากงานวิจัยฉบับนี้ศึกษาเฉพาะช่วงที่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งจะพบว่าการทำ Minimization ของสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$\min\left[G(j\omega) - \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right] = 0 \tag{3.4}$$

แทนค่าสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega_i)^i = \left(R(\omega_i) + jX(\omega_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{m} a_i (j\omega_i)^i + 1 \right) \tag{3.5}$$

จากสมการที่ (3.5) ทำการแยกพจน์ให้อยู่ในรูปของ ส่วนจำนวนจริง และ ส่วนจินตภาพจะได้ว่า

$$\sum_{h=0}^{P} b_{2h} (-1)^h \omega_i^{2h} - R(\omega_i) \sum_{u=1}^{r} a_{2u} (-1)^u \omega_i^{2u} +$$
$$X(\omega_i) \sum_{v=0}^{s} a_{2v+1} (-1)^v \omega_i^{2v+1} = R(\omega_i) \tag{3.6}$$

$$\sum_{l=0}^{q} b_{2l+1}(-1)^{l}\,\omega_i^{2l+1} - X(\omega_i)\sum_{u=1}^{r} a_{2u}(-1)^{u}\,\omega_i^{2u} -$$

$$R(\omega_i)\sum_{v=0}^{s} a_{2v+1}(-1)^{v}\,\omega_i^{2v+1} = X(\omega_i) \tag{3.7}$$

กำหนดให้

$$p=[n/2],q=[(n-1)/2],r=[m/2],s=[(m-1)/2]$$

ทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปเมตริก จะได้ว่า

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ 0 & \Omega_4 & \Omega_5 & \Omega_6 \end{pmatrix}\left(b_{even}, b_{odd}, a_{even}, a_{odd}\right)^T = \begin{pmatrix} R \\ X \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

กำหนดให้

$b_{even}=b_2,b_4,...,b_{2p}$, $b_{odd}=b_1,b_3,...,b_{2q+1}$, $a_{even}=a_0,a_2,...,a_r$ และ $a_{odd}=a_1,a_3,...,a_{2s+1}$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_1^2 & \omega_1^4 & \cdots & (-1)^P\,\omega_1^{2P} \\ 1 & -\omega_2^2 & \omega_2^4 & \cdots & (-1)^P\,\omega_2^{2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -\omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & (-1)^P\,\omega_N^{2P} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 R_1 & -\omega_1^4 R_1 & \omega_1^6 R_1 & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_1^{2r} R_1 \\ 1 & -\omega_2^2 R_2 & \omega_2^4 R_2 & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_2^{2r} R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -\omega_N^2 R_N & \omega_N^4 R_N & \cdots & (-1)^{r+1}\omega_N^{2r} R_N \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \omega_1 X_1 & -\omega_1^3 X_1 & \omega_1^5 X_1 & \dots & (-1)^s \omega_1^{2s+1} X_1 \\ \omega_2 X_2 & -\omega_2^3 X_2 & \omega_2^5 X_2 & \dots & (-1)^s \omega_2^{2s+1} X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N X_N & -\omega_N^3 X_N & \omega_N^5 X_N & \dots & (-1)^s \omega_N^{2s+1} X_N \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} \omega_1 & -\omega_1^3 & \omega_1^5 & \dots & (-1)^q \omega_1^{2q+1} \\ \omega_2 & -\omega_2^3 & \omega_2^5 & \dots & (-1)^q \omega_2^{2q+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_N & -\omega_N^3 & \omega_N^5 & \dots & (-1)^q \omega_N^{2q+1} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$\Omega_5 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 X_1 & -\omega_1^4 X_1 & \omega_1^6 X_1 & \dots & (-1)^{r+1} \omega_1^{2r} X_1 \\ \omega_1^2 X_2 & -\omega_2^4 X_2 & \omega_2^6 X_2 & \dots & (-1)^{r+1} \omega_2^{2r} X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^2 X_N & -\omega_N^4 X_N & \omega_N^6 X_N & \dots & (-1)^{r+1} \omega_N^{2r} X_N \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$\Omega_6 = \begin{bmatrix} -\omega_1 R_1 & \omega_1^3 R_1 & -\omega_1^5 R_1 & \dots & (-1)^{s+1} \omega_1^{2s+1} R_1 \\ -\omega_2 R_2 & \omega_2^3 R_2 & -\omega_2^5 R_2 & \dots & (-1)^{s+1} \omega_2^{2s+1} R_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\omega_N R_N & \omega_N^3 R_N & -\omega_N^5 R_N & \dots & (-1)^{s+1} \omega_N^{2s+1} R_N \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

โดย N = จำนวนชุดข้อมูลของชุดจำนวนจริงหรือจำนวนจินตภาพ จากสมการที่ (3.6) เขียนใหม่จะได้ว่า

$$\Omega P = V \tag{3.15}$$

โดย Ω เรียกว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์, P เรียกว่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ และ V เรียกว่าเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด

3.2.2 กระบวนการถ่วงน้ำหนัก

โดยทั่วไปแล้วนั้น กระบวนการการถ่วงน้ำหนักสำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าโดยการใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดนั้นจะให้เมตริกซ์ถ่วงน้ำหนัก ที่เป็นเมตริกซ์ทะแยงมุมที่อยู่กึ่งกลางเมตริก

$$w_k = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_i \end{bmatrix}_{k \times k}$$

โดยค่า w_k คือค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก, i คือ จำนวนชุดข้อมูล และ $k = 2$ เท่าของจำนวนชุดข้อมูล ($2 \times i$) ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้ค่าในการถ่วงน้ำหนัก 4 แบบคือ

แบบที่ 1 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\omega_k}$

แบบที่ 2 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{(\omega_k)^2}$

โดย ω_k = ความถี่ในการตอบสนองระบบ = $\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_i \end{bmatrix}_{1 \times k}$

สำหรับการถ่วงน้ำหนักในแบบที่ 3 และแบบที่ 4 จะใช้ค่าจากความแปรปรวน (Variance) ของชุดข้อมูล ซึ่งเป็นค่าที่บ่งบอกถึงการกระจายตัวของชุดข้อมูลนั้น ๆ

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} \tag{3.16}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x - \bar{x})^2}{N} \tag{3.17}$$

โดย σ^2 คือ ความแปรปรวน, x คือ สมาชิกภายในชุดข้อมูลนั้น ๆ, $\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูล และ N คือ จำนวนชุดข้อมูล

กำหนด

แบบที่ 3 กำหนดให้ $w_k = \sigma_k^2$

แบบที่ 4 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\sigma_k^2}$

โดย $\sigma_k^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{1,R}^2 & \sigma_{2,R}^2 & \dots & \sigma_{i,R}^2 & \sigma_{1,X}^2 & \sigma_{2,X}^2 & \dots & \sigma_{i,X}^2 \end{bmatrix}_{1 \times k}$

ซึ่งจากกระบวนการถ่วงน้ำหนักจากสมการ (3.15) สามารถเขียนใหม่ได้ดังสมการ (3.18)

$$w\Omega P = wV \tag{3.18}$$

3.2.3 เมตริกซ์ผกผันเทียม (Pseudo inverse)

วิธีการเมตริกซ์ผกผันเทียมนั้นเป็นวิธีการหาเมตริกซ์ผกผัน โดยทั่วไปนั้นการหาเมตริกซ์ผกผันของเมตริก Ω^{-1} ใด ๆ นั้น เมตริกซ์ Ω นั้น ต้องเป็นเมตริกซ์ที่เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และต้องมีลักษณะเป็น Full rank คือ ที่ทุกคอลัมน์หรือแถวภายในเมตริก Ω ต้องมีความเป็นอิสระต่อกัน (Linearly independent) แต่ในการหาเมตริกซ์ผกผันเทียมนั้น จะเป็นวิธีการทั่วไปที่ใช้ในการหาเมตริกผกผัน (Generalization of inverse) ซึ่งใช้ในการหาเมตริกซ์ Ω ที่เป็นเมตริกจัตุรัส หรือเมตริกที่มีจำนวนแถวมากกว่าจำนวนคอลัมน์ แต่มีเงื่อนไขว่าเมตริกซ์นั้นต้องเป็นเมตริกซ์ที่มีลักษณะเป็น Full rank เพื่อให้ผลเฉลยที่ได้ Unique นั้นเอง ซึ่งข้อดีอีกประการของวิธีการนี้ก็คือ เป็นวิธีการที่สามารถหาเมตริกซ์ผกผันได้ไม่ว่าเมตริกซ์ Ω จะเป็น Singular matrix หรือ Non-singular matrix คือ เมตริกที่ค่า $\det(\Omega) = 0$ หรือ $\det(\Omega) \neq 0$ ตามลำดับ

$$\Omega = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T \tag{3.19}$$

สำหรับ เมตริกที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วยเมตริก w

$$w\Omega = (\Omega^T w w^T \Omega)^{-1} \Omega^T w^T \tag{3.20}$$

ซึ่งวิธีการเมตริกผกผันเทียมจะต้องมีเงื่อนไขว่าเมตริก Ω ต้องเป็น Full rank ซึ่งสำหรับเมตริกที่เป็น No full rank จะไม่สามารถใช้วิธีการนี้ได้ เนื่องจากผลเฉลยที่ได้นั้นจะมีค่าไม่ Unique แต่สำหรับงานวิจัยนี้พบว่าเมตริกซ์ Ω เป็น Full rank โดยจำนวนแถวมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนคอลัมน์เสมอ ซึ่งในการพิจารณาเลือกใช้วิธีการนี้ พิจารณาจาก Rank (Ω) = จำนวนคอลัมน์หรือไม่ ถ้าเท่ากันแสดงว่าเมตริกซ์ Ω เป็นเมตริกซ์ Full rank

3.2.4 กระบวนการหาค่าความผิดพลาด

ถึงแม้ว่าวิธีการหาผลเฉลยที่ได้กล่าวมาในหัวข้อข้างต้น เป็นวิธีการที่สามารถหาผลเฉลยที่ให้ค่าที่มีความถูกต้องค่าหนึ่งแล้วนั้น แต่สำหรับงานวิจัยนี้ค่าผลเฉลยที่ได้ก็ไม่สามารถการันตีผลเฉลยที่ถูกต้องที่สุดได้ เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้นำค่าความผิดพลาดมาร่วมพิจารณา

ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุด แต่ค่าความผิดพลาดนั้นสามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ เนื่องจากค่าความผิดพลาดของระบบสมการอยู่ในรูปเวกเตอร์ $\varepsilon = [\varepsilon_i]$ ดังนั้นการหาขนาดของค่าความผิดพลาดเพื่อใช้เป็นตัวแทนของค่าความผิดพลาดของระบบสมการ จึงมักหาในรูปของนอร์มของเวกเตอร์ (Vector norm) ซึ่งมีหลายรูปแบบ เช่น นอร์มรากกำลังสอง (Root-square norm : L_2-norm) นอร์มสัมบูรณ์ (Absolute-norm : L_1-norm) และนอร์มค่ามากที่สุด (L_α-norm) ซึ่งแต่ละชนิดมีรูปแบบเป็นดังนี้ (สะอาด, 2544)

L_1-norm : $$\|\varepsilon\|_1 = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \ldots + |\varepsilon_k| \tag{3.21}$$

L_2-norm : $$\|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_k^2} \tag{3.22}$$

L_α-norm : $$\|\varepsilon\|_\alpha = \max_j |\varepsilon_j| \tag{3.23}$$

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ทำการหาค่าความผิดพลาดโดยใช้สมการ (3.22) ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีค่านอร์มรากกำลังสองน้อยที่สุด

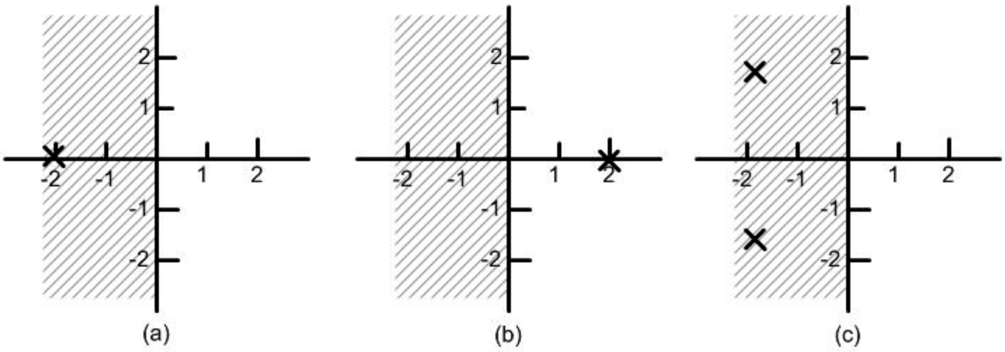
3.2.5 กระบวนการการหาค่าความเสถียร

สิ่งสำคัญที่สุดในสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนั้นคือค่าความเสถียรของวัสดุ กล่าวคือฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการคำนวณ จะต้องมีค่าความเสถียร ซึ่งหมายความว่า เมื่อมีอินพุทที่มีค่าแน่นอนค่าหนึ่ง เอาพุทของระบบจะต้องมีค่าอยู่ในช่วงที่แน่นอน ซึ่งก็คือ ค่าเอาพุทที่ได้ต้องไม่มีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ หรือไม่มีขีดจำกัดนั่นเอง (กนต์ธร ชำนิประศาสน์ และจิระพล ศรีเสริฐผล, 2548) สำหรับระบบเชิงเส้นความต้องการที่จะให้ระบบเสถียรจะขึ้นอยู่กับโพล (Poles) ของฟังก์ชันถ่ายโอน โพล หมายถึง รากของเทอมส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนในขณะที่ศูนย์ (Zeros) หมายถึง รากของเทอมเศษของฟังก์ชันถ่ายโอน

3.2.5.1 ความเสถียร และโพล (Stability and poles)

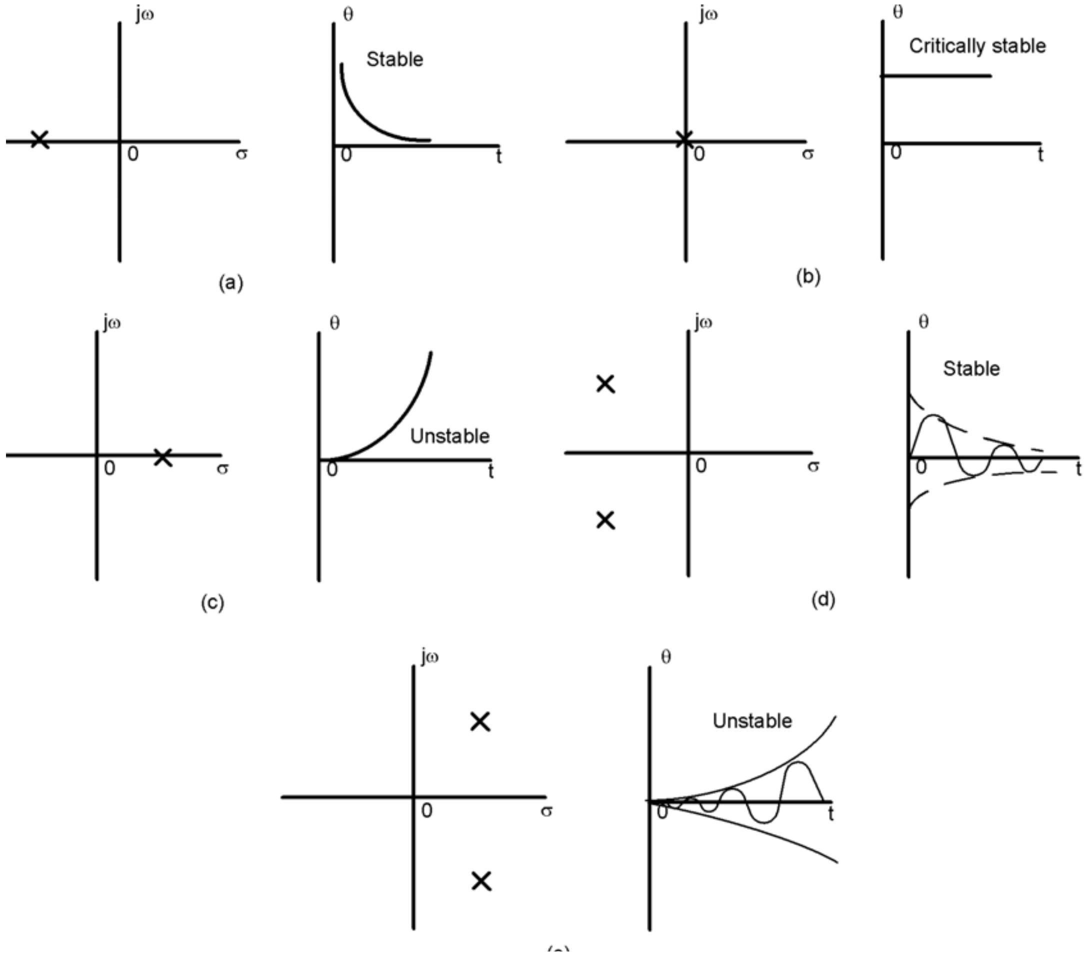
ความเสถียรของระบบสามารถพิจารณาได้จากการตอบสนองของระบบหลังจากได้รับอินพุทแบบการดลเป็นระยะเวลาหนึ่งว่าระบบกลับสู่สภาพเดิมหรือไม่ หากระบบ มีความเสถียรการตอบสนองก็จะกลับคืนสู่สภาพเดิมหลังจากได้รับการกระตุ้น ส่วนระบบที่ไม่มีความเสถียร การตอบสนองของระบบจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป ซึ่งเราสามารถที่จะพิจารณาว่าระบบจะเสถียรหรือไม่นั้นได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบ โดยความเสถียรของระบบจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของโพลของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบนั้น กล่าวได้ว่าการที่

ระบบจะเสถียร ตำแหน่งของโพลควรจะอยู่ด้านซ้ายมือของระนาบเชิงซ้อน ถ้าหากว่ามีโพลใดโพลหนึ่งของระบบเพียงโพลเดียวอยู่ทางด้านขวามือของระนาบเชิงซ้อน ก็จะทำให้ระบบไม่เสถียรภาพดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 โพลที่ตำแหน่งต่าง ๆ

จากรูปที่ 3.2 พบว่ารูปที่ 3.2(a) เป็นตำแหน่งโพลที่มีความเสถียร รูปที่ 3.2(b) แสดงตำแหน่งโพลที่ทำให้ระบบไม่เสถียร และรูปที่ 3.2(c) แสดงตำแหน่งโพลที่ทำให้ระบบ มีเสถียรภาพ สำหรับระบบที่มีโพลซึ่งอยู่บนแกนจินตภาพนั้น การตอบสนองจะมีลักษณะการ แกว่งรอบ ๆ สมดุลโดยขนาดไม่ลดลง ดังนั้นระบบจึงเป็นระบบเสถียรภาพวิกฤติ (Critically stable) ส่วนระบบที่โพลที่จุดกำเนิด (Origin) ก็จะเป็นระบบเสถียรวิกฤติเช่นเดียวกัน



รูปที่ 3.3 ตำแหน่งโพล และการตอบสนองของระบบในโดเมนเวลา

จากรูปที่ 3.3 แสดงตำแหน่งโพลและการตอบสนองของระบบในโดเมนเวลาหลาย ๆ แบบทั้งระบบที่มีความเสถียรและไม่มีความเสถียร ในการพิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน เพื่อวิเคราะห์หาความเสถียรของระบบนั้นซึ่งตำแหน่งโพลจะเป็นส่วนที่สำคัญ

3.2.5.2 The Routh – Hurwitz stability criterion

ในปี ค.ศ. 1877 อี เจ เร้าธ์ ได้คิดค้นวิธีการหารากของสมการว่ามีรากใดที่มีค่าส่วนจำนวนจริงเป็นบวกบ้าง โดยไม่ต้องทำการแก้สมการ เมื่อวิธีการนี้ถูกนำมาใช้กับสมการเฉพาะ

(Characteristic equation) ของระบบควบคุมอัตโนมัติ จึงเป็นวิธีการวิเคราะห์ความเสถียรของระบบได้ อย่างไรก็ตามวิธีการของเร้าธ์ ก็ไม่สามารถบอกได้ว่า ถ้าระบบมีเสถียรภาพแล้ว สถานะของเสถียรภาพดีเพียงใด หรือถ้าต้องการที่จะปรับปรุงการทำงานของระบบให้ดีขึ้นไปอีกจะกระทำได้อย่างไร (วริทธิ์ อึ้งภากรณ์ และรัชทิน จันทร์เจริญ, 2542) พิจารณาสมการเฉพาะ $q(s)$ ซึ่งสามารถเขียนทั่วไปได้ในรูป

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \tag{3.24}$$

เพื่อจะหาความเสถียรของระบบเราจะต้องพิจารณาว่ารากของสมการนี้ มีค่าอยู่ในด้านขวามือของระบบเชิงซ้อนหรือไม่ ซึ่งวิธีการของเร้าธ์จะมีพื้นฐานจากการจัดลำดับสัมประสิทธิ์ของสมการเฉพาะ จากสมการ (3.25) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array} \tag{3.25}$$

เมื่อ $b_{n-1} = \dfrac{-1}{a_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}$ (3.26)

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-3}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

และ $c_{n-1} = \dfrac{-1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} a_n & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{bmatrix}$ เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ (3.28)

วิธีการของเร้าธ์กำหนดไว้ว่าจำนวนรากของ $q(s)$ ที่มีส่วนจริงเป็นบวกนั้นจะเท่ากับจำนวนการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายในแถวตั้งแถวแรกในลำดับใน Routh array ซึ่ง

ข้อกำหนดที่จำเป็นและเพียงพอที่จะกำหนดสภาวะความเสถียรของระบบในการพิจารณาแถวตั้งแถวแรกนี้ เราจะต้องพิจารณากรณีย่อยออกเป็น 4 กรณีด้วย และจำเป็นต้องใช้วิธีการพิจารณาแต่ละกรณีแตกต่างกันออกไป ทั้งนี้ต้องมีการปรับปรุงวิธีการพิจารณาให้เหมาะสมกับแต่ละกรณีด้วย โดยกรณีทั้ง 4 นี้คือ

1. ไม่มีค่าในแนวตั้งแถวแรกเป็นศูนย์เลย

2. มีค่าในแนวตั้งแถวแรกเป็นศูนย์หนึ่งค่า แต่ค่าในแถวนอนมีค่าในแถวแรกเป็นศูนย์นั้นไม่มีค่าอื่นเป็นศูนย์

3. มีค่าในแนวตั้งแถวแรกเป็นศูนย์หนึ่งค่า และค่าในแถวนอนที่มีค่าใน แถวแรกเป็นศูนย์นั้นมีค่าอื่นเป็นศูนย์ด้วย

4. เหมือนกับในกรณี 3 แต่มีรากซ้ำในแกนจินตภาพ

ซึ่งจากวิธีการพิจารณาดังที่ได้กล่าวมานี้ เมื่อนำมาเขียนโปรแกรมเพื่อวิเคราะห์หาความเสถียรภาพของฟังก์ชันถ่ายโอน พบว่าจะมีความยุ่งยากเป็นอย่างมาก แต่เราทราบกันดีอยู่แล้วว่า ความเสถียรของระบบนั้นขึ้นอยู่กับโพลของระบบ โดยถ้าโพลของระบบอยู่ทางด้านขวามือของระนาบเชิงซ้อนแสดงว่าระบบไม่มีความเสถียรดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น เนื่องจาก ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์ได้มีบทบาทสำคัญในการออกแบบและวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับระบบควบคุมและวิเคราะห์ความเสถียรของระบบ ดังนั้นงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการหาค่ารากของ $q(s)$ โดย แยกสมการให้อยู่ในรูป

$$q(s) = (s - r_1)(s - r_2)\ldots(s - r_n) = 0 \tag{3.29}$$

โดยค่า $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$ คือ โพลของระบบที่มีลำดับขั้นเท่ากับ n แล้วพิจารณาค่าโพลที่ได้ว่าทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุมีความเสถียรหรือไม่

3.3 วิธีการทำวิจัย

3.3.1 วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก (Non weight least squares method)

ขั้นตอนที่ 1 ทำการ สร้างเมตริก Ω โดยใช้สมการ 3.16 ถึงสมการ 3.21 และทำการสร้างเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ และเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด

ขั้นตอนที่ 2 จากสมการที่ (3.22) วิธีการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ (P) ใช้วิธี Pseudo-inverse แก้ปัญหาจะได้ดังสมการที่ (3.30)

$$P = \left(\Omega^T \Omega\right)^{-1} \Omega^T V \qquad (3.30)$$

ซึ่งผลที่ได้จากการแก้สมการ (3.30) คือค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นคือ $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$ และ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ นั่นเอง เมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนแล้วนั้น

ขั้นตอนที่ 3 ทำการวิเคราะห์หาความเสถียรของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งถ้าระบบมีความเสถียรให้ทำขั้นตอนที่ 4 แต่ถ้าระบบไม่มีความเสถียรให้ทำขั้นตอนที่ 6

ขั้นตอนที่ 4 ทำการหาค่าความผิดพลาดจาก

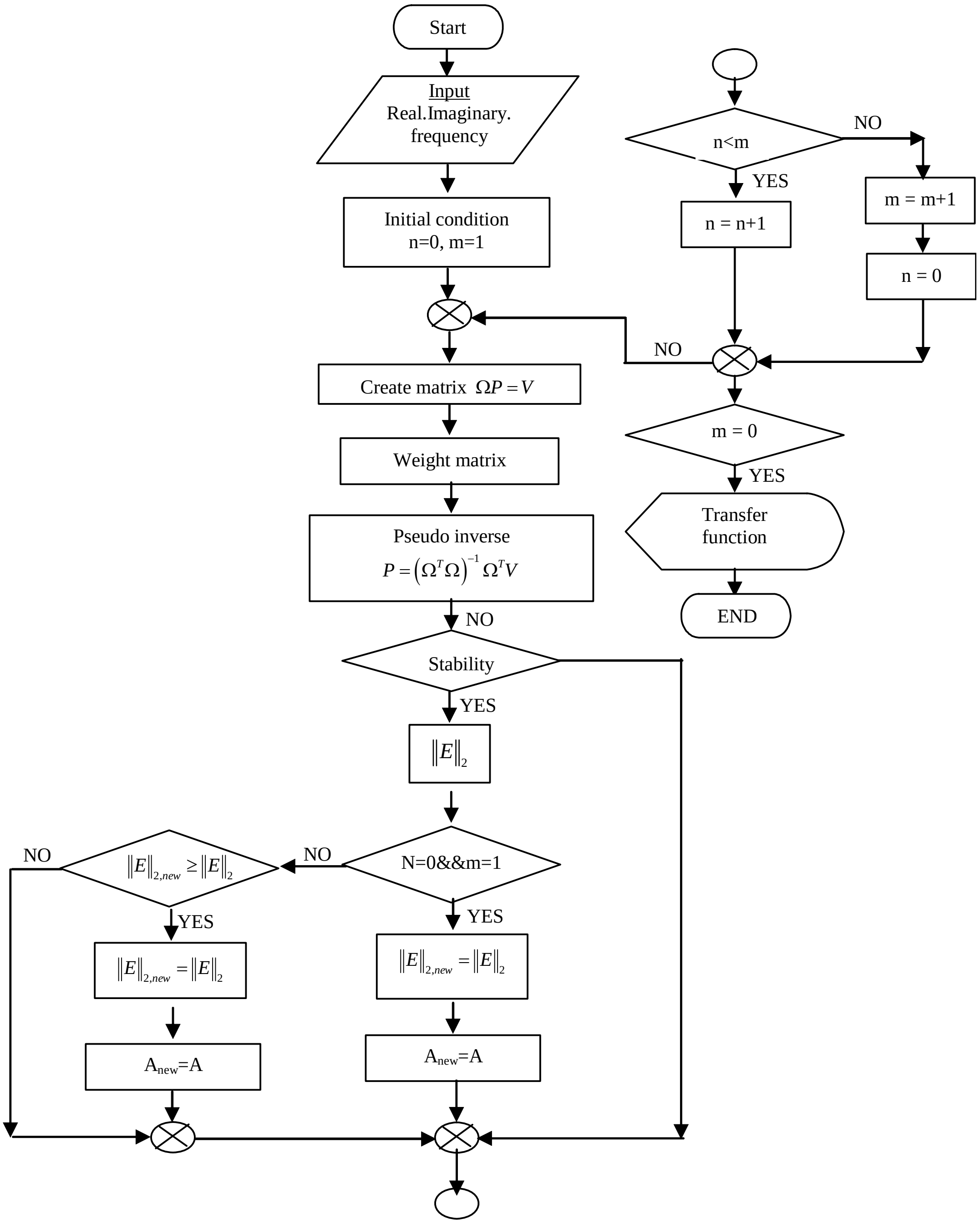
$$\|E\|_2 = \left\| G(j\omega_i) - \frac{B(j\omega_i)}{A(j\omega_i)} \right\|_2 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_k^2} \qquad (3.31)$$

โดย $\|E\|_2$ = นอร์มรากกำลังสอง (Root-square norm: L_2-norm)

ขั้นตอนที่ 5 ทำการเก็บค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยค่าที่นำมาเก็บคือค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและค่าความผิดพลาด ซึ่งค่าที่ได้เป็นค่าที่ทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุดในแต่ละรอบของการคำนวณ

ขั้นตอนที่ 6 ทำการหาค่าระดับของสมการพหุนาม (Degree of polynomial) คือ ค่า n และ m ตามเงื่อนไขที่กำหนด แล้วทำการกระทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 6 จนกว่าค่า m = 10

ซึ่งค่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณจะถูกกำหนดด้วยค่าความเสถียร และค่าความผิดพลาดที่น้อยที่สุดนั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 3.4 แสดง Flow chart ของการเขียนโปรแกรมการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น



รูปที่ 3.4 แผนภาพแสดง Flow chart ของวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก

3.3.2 วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weight-least squares method)

ขั้นตอนที่ 1 จากวิธีการกำลังสองน้อยสุด ทำมาประยุกต์ใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้โดยการใช้ฟังก์ชันถ่ายโอนในการประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลองดังสมการที่ (3.2) โดยกำหนดให้ $a_0 = 1$ และ $m \ge n$ เสมอ $R(\omega_i)$ เป็นส่วนจริงซึ่งในการทดลองนี้

คือเทอมของค่ายืดหยุ่น (Elastic), $X(\omega_i)$ เป็นส่วนจินตภาพ ซึ่งในการทดลองนี้คือเทอมของค่าความหนืด (Viscous), ω_i คือค่าความถี่ที่ใช้ในการกระตุ้นระบบ ซึ่งในการหาค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนคือ $b_0, b_1, \ldots, b_n$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนักจากสมการ (3.13) เทคนิคต่อไปที่จะนำเสนอเป็นเทคนิคกำลังสองน้อยสุดแบบ ถ่วงน้ำหนักโดยฟังก์ชันที่จะนำมาใช้ในการถ่วงน้ำหนัก ในที่นี้คือค่าความถี่ของระบบ โดยค่าความถี่ที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก จะอยู่ในแนวเส้นทแยงมุมที่อยู่กึ่งกลางเมตริก

$$w_k = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_i \end{bmatrix}_{k\times k}$$

โดยค่า w_k คือค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก และ k = 2 เท่าของจำนวนชุดข้อมูล ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ใช้ค่าในการถ่วงน้ำหนัก 4 แบบคือ

แบบที่ 1 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\omega_k}$

แบบที่ 2 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{(\omega_k)^2}$

แบบที่ 3 กำหนดให้ $w_k = \sigma_k^2$

แบบที่ 4 กำหนดให้ $w_k = \dfrac{1}{\sigma_k^2}$

โดย ω_k = ความถี่ และ σ_k^2 = ความแปรปรวน เมื่อมีการถ่วงน้ำหนักจะได้สมการ (3.32) ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$w\Omega P = wV \tag{3.32}$$

โดย P เรียกว่าเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ และ V เรียกว่าเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด

ขั้นตอนที่ 2 จากสมการที่ (3.32) วิธีการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าเวกเตอร์สัมประสิทธ์ (P) ใช้วิธี Pseudo-inverse แก้ปัญหา จะได้ดังสมการที่ (3.33)

$$P = \left(\Omega^T W^T W \Omega\right)^{-1} \Omega^T W^T W V \tag{3.33}$$

ซึ่งผลที่ได้จากการแก้สมการ (3.33) คือค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นคือ $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$ และ $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ นั่นเอง เมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนแล้วนั้น

ขั้นตอนที่ 3 ทำการวิเคราะห์หาความเสถียรของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งถ้าระบบมีความเสถียร ให้ทำขั้นตอนที่ 4 แต่ถ้าระบบไม่มีความเสถียรให้ทำขั้นตอนที่ 6

ขั้นตอนที่ 4 ทำการหาค่าความผิดพลาดจาก

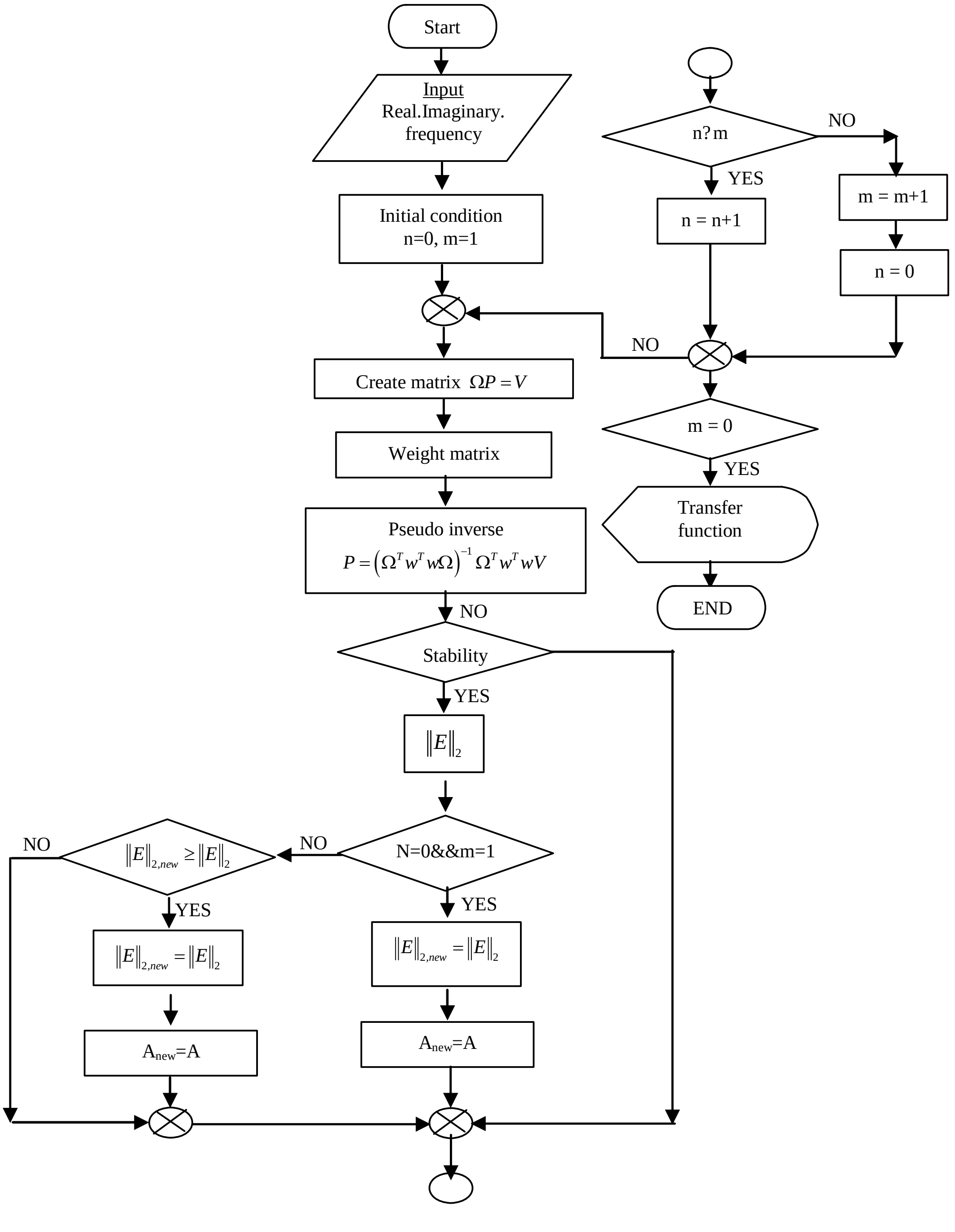
$$\|E\|_2 = \left\| G\left(j\omega_i\right) - \frac{B(j\omega_i)}{A\left(j\omega_i\right)} \right\|_2 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_k^2} \tag{3.33}$$

โดย $\|E\|_2$ = นอร์มรากกำลังสอง (Root-square norm: L_2-norm)

ขั้นตอนที่ 5 ทำการเก็บค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยค่าที่นำมาเก็บคือค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน และค่าความผิดพลาดซึ่งค่าที่ได้เป็นค่าที่ทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุดในการคำนวณแต่ละรอบ

ขั้นตอนที่ 6 ทำการหาค่าระดับของสมการพหุนาม (Degree of polynomial) คือ ค่า n และ m ตามเงื่อนไขที่กำหนด แล้วทำการกระทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 6 จนกว่าค่า m = 10 ซึ่งค่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณจะถูกกำหนดด้วยค่าความมีเสถียร และค่าความผิดพลาดที่น้อยที่สุดนั่นเอง ดังแสดงในรูปที่ 3.5 แสดง Flow chart ของการเขียนโปรแกรมสำหรับการวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก

n<m



รูปที่ 3.5 แผนภาพแสดง Flow chart ของวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก

3.4 ปัญหาทดสอบมาตรฐาน

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งต้องได้รับการทดสอบความถูกต้องในการคำนวณการทดสอบ

โปรแกรมดังกล่าวทำได้โดยนำโปรแกรมไปประยุกต์เข้ากับปัญหาที่ทราบฟังก์ชันถ่ายโอน จากนั้นจึงนำผลเฉลยเชิงตัวเลขนั้นไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานั้น ๆโดยกำหนดให้

ระบบ : $$G(j\omega_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i (j\omega_i)^i}{\sum_{i=1}^{m} a_i (j\omega_i)^i + 1} = R(\omega_i) + jX(\omega_i) \qquad (3.35)$$

แบบจำลอง : $$G^{'}(j\omega_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i^{'} (j\omega_i)^i}{\sum_{i=1}^{m} a_i^{'} (j\omega_i)^i + 1} \qquad (3.36)$$

โดยทำการสร้างข้อมูลค่าส่วนจริง ส่วนจินตภาพและความถี่ของระบบ โดยการกำหนดฟังก์ชันถ่ายโอน แล้วทำการแทนค่าความถี่ลงในสมการ (3.35) แล้วนำค่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพ พร้อมทั้งค่าความถี่ของระบบเป็นค่าอินพุทของโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแล้วนำผลเฉลยที่ได้จากโปรแกรมมาทำการเปรียบเทียบกับค่าจากสมการที่ (3.35)

บทที่ 4
ผลการคำนวณและอภิปรายผลการคำนวณ

4.1 บทนำ

สำหรับบทนี้เป็นการนำเสนอผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น โดยพิจารณาจากชุดข้อมูลที่ได้กับค่าที่ได้จากการประเมินด้วยโปรแกรม นำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจินตภาพกับความถี่ เพื่อวิเคราะห์ผลที่เกิดขึ้น ตลอดจนวิเคราะห์ผลที่ได้จากการใช้โปรแกรมโดยวิธีการถ่วงน้ำหนักที่แตกต่างกัน ซึ่งสำหรับบทนี้แบ่งออกเป็น 3 ส่วนด้วยกัน ประกอบด้วย ส่วนของโปรแกรมวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น, ส่วนที่สองเป็นส่วนของปัญหาทดสอบโปรแกรม ส่วนสุดท้ายเป็นส่วนของผลการทดลองและการอภิปรายผลการทดลอง

4.2 โปรแกรมวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืด

รูปแบบของสมการและขั้นตอนวิธีแก้สมการเพื่อหาผลเฉลย ในบทที่ 3 ได้ถูกนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจะเสนอรายละเอียดในหัวข้อนี้ โดยทั่วไปแล้วในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์มักจะประกอบไปด้วย สามส่วนหลักดังต่อไปนี้

1) พรีโปรเซสเซอร์ (Pre-processor)

เป็นขั้นตอนการกำหนดค่าป้อนเข้า (Input) ให้กับโปรแกรม ซึ่งอาจทำได้โดยป้อนค่าให้กับโปรแกรมหลักโดยตรงหรือสร้างเป็นไฟล์ข้อมูลดังกล่าวไว้แล้วจึงสั่งให้โปรแกรมอ่านค่าข้อมูลจากไฟล์อีกครั้งหนึ่ง ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนพรีโปรเซสเซอร์ สำหรับโปรแกรมนี้ค่าป้อนเข้า คือ ความถี่, ค่าที่เป็นจำนวนจริง และค่าที่เป็นจำนวนจินตภาพ ซึ่งในการวิเคราะห์หา ผลเฉลยจะได้ค่าสัมประสิทธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ความแม่นยำของโปรแกรมจะขึ้นอยู่กับจำนวนชุดข้อมูลที่ป้อนเข้า จำนวนทศนิยมที่ใช้สำหรับชุดข้อมูลที่ป้อนเข้า ซึ่งพบว่าจำนวนทศนิยมที่เหมาะสมที่ใช้ ต้องมีนัยสำคัญตั้งแต่ 4 ตำแหน่งขึ้นไป และผลของช่วงของความถี่ที่ป้อนเข้าก็มีผลกับความแม่นยำของโปรแกรมเช่นกัน เนื่องจากโปรแกรมนี้มีความเหมาะสมกับวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นเท่านั้น ดังนั้นความถี่ในการทดสอบ จึงควรอยู่ในช่วงที่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น ซึ่งความถี่ในการ

ทดสอบควรอยู่ระหว่าง 0.1-100 Hz ดังนั้นการกำหนดข้อมูลป้อนเข้าให้กับโปรแกรมในขั้นตอนพรีโปรเซสเซอร์ จึงควรคำนึงถึงจำนวนทศนิยมที่ป้อนเข้า จำนวนชุดข้อมูล และช่วงของความถี่ที่ใช้ทดสอบให้เหมาะสม เพื่อให้ผลเฉลยที่จะได้รับมีความถูกต้องในช่วงที่ยอมรับได้ และเวลาในการคำนวณที่เหมาะสม

2) การคำนวณหาผลเฉลย (Solver)

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมนำมาประยุกต์ใช้แก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมตริกซ์ Ω ไม่ใช่เมตริกซ์จัตุรัสมีด้วยกันหลายวิธี ซึ่งวิธีที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ คือ วิธีเมตริกซ์ผกผัน (Pseudo inverse) ซึ่งวิธีการนี้ได้นำเสนอรายละเอียดไว้ในบทที่ 3 โดยผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณ คือ ค่าสัมประสิทธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน

3) โพสโปรเซสเซอร์ (Post-processor)

ขั้นตอนสุดท้ายของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือการนำเอาผลเฉลยที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 ไปแสดงผลให้อยู่ในรูปแบบกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่

สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นในที่นี้เขียนขึ้นโดยใช้โปรแกรม MATLAB 7.0 มีนามสกุลเป็น .m โปรแกรมดังกล่าวสามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพบนเครื่องคอมพิวเตอร์ Pentium 4 3.00 MHz, Ram 1 GB ระบบปฏิบัติการวินโดว์เอ็กซ์พี (Windows XP) รายละเอียดรวมถึงขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมได้อธิบายในหัวข้อลำดับถัดไปดังนี้

4.2.1 รายละเอียดของโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน

โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนประกอบไปด้วย 2 ชุดใหญ่ คือ ชุดที่หนึ่งเป็นโปรแกรมที่ถูกเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชัน โดยเป็นชุดที่ใช้สำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่โปรแกรมหลักต้องการ เช่น โปรแกรม ComputePQRS, โปรแกรม AVG.m, โปรแกรม ramda1.m ถึง ramda6.m, โปรแกรม ramda12.m และ ramda21.m, โปรแกรม STAT.m ซึ่งโปรแกรมเหล่านี้เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชัน และถูกนำไปประกอบใช้ในโปรแกรมหลัก โดยโปรแกรมหลักประกอบไปด้วยโปรแกรม leastupdate.m, โปรแกรม leastweigh.m, โปรแกรม leastweigh2.m, โปรแกรม leastweighSTAT.m, โปรแกรม leastweighSTAT1.m โดยโปรแกรมหลักเป็นโปรแกรมที่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนได้ รายละเอียดของโปรแกรมเหล่านี้เป็นดังต่อไปนี้

4.2.2 ชุดโปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์

1) โปรแกรม ComputePQRS เป็นโปรแกรมที่เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันโดยรับค่าลำดับขั้นของตัวเศษ (Order of nominator, n) และลำดับขั้นของตัวส่วน (Order of denominator, m) แล้วโปรแกรมจะคำนวณหาค่าดัชนี p, q, r และ s ดังที่ได้กล่าวในบทที่ 3

2) โปรแกรม ramda1.m ถึง ramda6.m, โปรแกรม ramda12.m และ ramda21.m เป็นโปรแกรมที่เขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชัน เพื่อใช้ในการสร้างเมตริกซ์ Ω ดังสมการที่ 3.8 โดย

- ramda1.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการที่ 3.9 โดยรับค่าความถี่, ค่าดัชนี p, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda2.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการ ที่ 3.10 โดยรับค่าส่วนจำนวนจริง, ความถี่, ค่าดัชนี r, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda3.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการที่ 3.11 โดยรับค่าส่วนจำนวนจินตภาพ, ความถี่, ค่าดัชนี s, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda4.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการที่ 3.12 โดยรับค่าความถี่, ค่าดัชนี q, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda5.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการที่ 3.13 โดยรับค่าส่วนจำนวนจินตภาพ, ความถี่ , ค่าดัชนี r, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda6.m คือเมตริกซ์ที่ได้จากสมการที่ 3.14 โดยรับค่าส่วนจำนวนจริง, ความถี่, ค่าดัชนี s, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และสองเท่าของจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda12.m คือเมตริกซ์ศูนย์ โดยรับค่าความถี่, ค่าดัชนี q, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และสองเท่าของจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

- ramda21.m คือเมตริกซ์ศูนย์ โดยรับค่าความถี่, ค่าดัชนี p, จำนวนตัวแปรทั้งหมด และจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

3) โปรแกรม AVG.m เป็นโปรแกรมที่เขียนแบบฟังก์ชันเพื่อหาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูล โดยรับค่าตัวแปรภายในชุดข้อมูลนั้น ๆ กับค่าจำนวนตัวแปรที่อยู่ในชุดข้อมูลนั้น ๆ โดยโปรแกรมจะหาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลนั้น ๆ ออกมา โดยโปรแกรมนี้จะใช้ร่วมกับโปรแกรม STAT.m

4) โปรแกรม STAT.m เป็นโปรแกรมที่เขียนแบบฟังก์ชันที่สามารถหาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูล และค่าความแปรปรวน (Variance) ของชุดข้อมูลนั้นได้ โดยรับค่าตัวแปรภายในชุดข้อมูลนั้น ๆ มา โดยโปรแกรมจะหาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลนั้น ๆ และค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลนั้นออกมา

4.2.3 ชุดโปรแกรมหลัก

เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งประกอบไปด้วย

1) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) ที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก โดยการกำหนดค่าป้อนเข้าเป็นค่าความถี่, ค่าส่วน

จำนวนจริง และค่าส่วนจินตภาพ และทำการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา โดยมีตัวแปรที่สำคัญดังนี้

<u>ส่วนที่1</u> ค่าป้อนเข้า

omega = load('C:\……….\w.txt') ; หรือ *omega = [ป้อนค่า] ;*

R = load('C:\………..\U.txt') ; หรือ *R = [ป้อนค่า] ;*

X = load('C:\………..\V.txt') ; หรือ *X = [ป้อนค่า] ;*

- *omega* คือ ตัวแปรที่ใช้สำหรับเก็บค่าความถี่ที่ป้อนเข้ามา
- *R* คือ ตัวแปรที่ใช้สำหรับเก็บค่าจำนวนจริงของชุดข้อมูลที่ป้อนเข้ามา
- *X* คือ ตัวแปรที่ใช้สำหรับเก็บค่าจำนวนจินตภาพของชุดข้อมูลที่ป้อนเข้ามา

ซึ่งเป็นส่วนที่ใช้ในการดึงข้อมูลมาจากส่วนที่ต้องการโดยใช้ฟังก์ชัน load ของโปรแกรม MATLAB 7.0 ช่วยในการดึงข้อมูล โดยไฟล์ w.txt เป็น text ไฟล์ทำหน้าที่เก็บข้อมูลของความถี่ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $k \times 1$, U.txt เป็น text ไฟล์ทำหน้าที่เก็บข้อมูลของจำนวนจริง ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $k \times 1$ และ V.txt เป็น text ไฟล์ทำหน้าที่เก็บข้อมูลของส่วนจินตภาพ ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $k \times 1$ หรือใช้วิธีการป้อนค่าให้กับ R, X และ omega ได้โดยตรงเลยก็ได้ โดยตัวแปร k คือ จำนวนชุดข้อมูล

<u>ส่วนที่ 2</u> การเตรียมค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ

- การเตรียมค่าดัชนี (Index) *p, q, r* และ *s*

[p ,q ,r ,s] = ComputePQRS (n, m);

โดยการเรียกใช้ฟังก์ชัน ComputePQRS.m

A11 = ramda1 (omega, k, M, p);

A12 = ramda12 (omega, k, M, q);

A13 = ramda2 (R, omega, k, M, r);

A14 = ramda3 (X,omega, k, M, s);

A21 = ramda21(omega, k, M, p);

A22 = ramda4 (omega, k, M, q);

A23 = ramda5 (X, omega, k, M, r);

A24 = ramda6 (R, omega, k, M, s);

- การสร้างเมตริกซ์ *A* ซึ่งเป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาดเท่ากับ $k \times M$ โดย *M* คือจำนวนตัวแปรทั้งหมด ซึ่งในการสร้างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์นั้นต้องเรียกใช้ฟังก์ชัน ramda1 ถึง ramda6 และ ramda12 กับ ramda21 โดยเมตริกซ์ *A* คือ

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \end{bmatrix}$$

- การสร้างเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด ตัวแทนด้วยตัวแปร *B*

B = [R';X'];

โดยการสร้างเวกเตอร์โดยการนำตัวแปร *R* มาทำการทรานโพส และตัวแปร *X* มาทำการทรานโพส เราจะได้เวกเตอร์ *B* ซึ่งเมื่อผ่านส่วนนี้ไปแล้วนั้น จะได้ตัวแปรซึ่งมีความสำคัญสำหรับนำไปใช้ ในการหาผลเฉลยคือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ *A* และเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด *B* จะได้ดังสมการ 3.15

<u>ส่วนที่ 3</u> การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

งานวิจัยฉบับนี้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่ใช้เมตริกซ์จัตุรัส และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์แบบ Full rank โดยใช้วิธีการเมตริกซ์ผกผันดังสมการที่ 3.30 โดยมี Code ดังนี้

*Sol = (inv(A'*A)*A')*B*

- ตัวแปร *Sol* ทำหน้าที่เก็บค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน

ซึ่ง เราจะได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งงานวิจัยฉบับนี้ต้องการฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุด เพราะฉะนั้นต้องไปหาค่าความผิดพลาด หรือค่าความผิดพลาด

<u>ส่วนที่ 4</u> การหาค่าความผิดพลาด

ถึงแม้ว่าวิธีการหาผลเฉลยที่ได้กล่าวมาในหัวข้อข้างต้นเป็นวิธีการที่สามารถหาผลเฉลยที่ให้ค่าที่มีความถูกต้องค่าหนึ่งเท่านั้น แต่สำหรับงานวิจัยนี้ค่าผลเฉลยที่ได้ ก็ไม่สามารถยืนยันผลเฉลยที่ถูกต้องที่สุดได้ เนื่องจากงานวิจัยนี้จะพิจารณาค่าความผิดพลาดของผลเฉลยที่มีค่าน้อยที่สุด

```
G = [ R X]';
Gm = [REstimated parameter XEstimated parameter]';
abs_error = (G-Gm);
error = norm (abs_error)
```

โดยที่

G คือ ตัวแปรที่ไว้เก็บเวกเตอร์ที่ได้จากการวัด โดยมีขนาดเท่ากับ $[k \times 1]$ โดย k ขนาดเป็นสองเท่าของจำนวนชุดข้อมูลทั้งหมด

Gm คือ ตัวแปรที่ไว้เก็บเวกเตอร์ที่ได้จากการจำลอง โดยมีขนาดเท่ากับ $[k \times 1]$

REstimated parameter คือ ตัวแปรที่เก็บค่าจำนวนจริงที่ได้จากโปรแกรม

XEstimated parameter คือ ตัวแปรที่เก็บค่าจำนวนจินตภาพที่ได้จากโปรแกรม

abs_error คือ ตัวแปรเก็บค่าความผิดพลาด

error คือ ค่าความผิดพลาดที่คำนวณได้จากฟังก์ชันนอร์มรากกำลังสอง โดยใช้คำสั่ง *norm* ที่มีอยู่ในโปรแกรม MATLAB 7.0 เอง

ซึ่งเมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุดที่ทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุด โดยตัวแปรที่ใช้เก็บค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอน คือ

num_final คือ ตัวแปรที่ใช้สำหรับเก็บค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุดของเศษ

den_final คือ ตัวแปรที่ใช้สำหรับเก็บค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ดีที่สุดของส่วน

<u>ส่วนที่ 5</u> ส่วนเก็บข้อมูลและแสดงผล

เป็นส่วนที่มี Code ที่ใช้สำหรับเก็บค่าที่ได้จากการคำนวณ และแสดงผลโดยการเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่

2) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) ที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$ โดยการกำหนดค่าป้อนเข้าเป็นค่าความถี่, ค่าส่วนจำนวนจริง และค่าส่วนจินตภาพ แล้วทำการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่ง Code ที่มีอยู่ในโปรแกรมนี้มีความคล้ายคลึงกับโปรแกรม leastupdate.m แต่จะมีความแตกต่างเพียงเล็กน้อยในส่วนของการสร้างเมตริกซ์ทแยงมุม ในส่วนที่ 2 การเตรียมค่าพารามิเตอร์จะเพิ่ม Code การสร้างเมตริกซ์ทแยงมุมเพิ่มขึ้นอีกชุดหนึ่ง

```
W = 1./(omega);
    W = [W' ; W']
for i=1:2*k
  for j=1:2*k
   if i == j
       WK(i,j) = W(i,1);
  else
      WK(i,j) = 0.0;
  end
 end
```

โดย - ตัวแปร W แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักในที่นี้คือ $1/\omega$

- ตัวแปร WK แทนเมตริกซ์ทแยงมุม

ซึ่งเราจะได้เมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งส่วนที่แตกต่างอีกส่วนหนึ่งคือ ส่วนที่ 3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะได้ Code ดังนี้

```
Sol = (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;
```

ซึ่งเมื่อผ่านส่วนนี้ไปแล้ว เราจะได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและฟังก์ชันถ่ายโอน โดยในส่วนที่ 4 และ 5 Code ที่เขียนขึ้นเหมือนกับโปรแกรม leastupdate.m ทุกประการ

3) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) ที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega^2$ โดยการกำหนดค่าป้อนเข้าเป็นค่าความถี่, ค่าส่วนจำนวนจริงและค่าส่วนจินตภาพ แล้วทำการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้ เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่ง Code ที่มีอยู่ในโปรแกรมนี้มีความคล้ายคลึงกับโปรแกรม leastupdate.m แต่จะมีความแตกต่างเพียงเล็กน้อย ในส่วนของการสร้างเมตริกซ์ทแยงมุม ในส่วนที่ 2 การเตรียมค่าพารามิเตอร์ จะเพิ่ม Code การสร้างเมตริกซ์ทแยงมุม เพิ่มขึ้นอีกหนึ่งชุด

```
W = 1./(omega.*omega);
     W = [W' ; W']
for i=1:2*k
for j=1:2*k
 if i == j
   WK(i,j) = W(i,1);
 else
   WK(i,j) = 0.0;
end
end
end
```

โดย - ตัวแปร W แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักในที่นี้คือ $1/\omega^2$

- ตัวแปร WK แทนเมตริกซ์ทแยงมุม

ซึ่งเมื่อผ่านกระบวนการนี้แล้วจะได้เมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งส่วนที่แตกต่างอีกส่วนหนึ่ง คือส่วนที่ 3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะได้ Code ดังนี้

```
Sol =  (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;
```

ซึ่งเราจะได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและฟังก์ชันถ่ายโอน โดยในส่วนที่ 4 และ 5 Code ที่เขียนขึ้นเหมือนกับโปรแกรม leastupdate.m ทุกประการ

4) โปรแกรม leastweightSTAT.m เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิธีการกำลังสองน้อยสุด (Least square method) ที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วย σ^2 โดยกำหนดค่าป้อนเข้าเป็นค่าความถี่, ค่าส่วนจำนวนจริงและค่าส่วนจินตภาพ แล้วทำการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่ง Code ที่มีอยู่ในโปรแกรมนี้มีความคล้ายคลึงกับโปรแกรม leastupdate.m แต่จะมีความแตกต่างเพียงเล็กน้อย ในส่วนของการสร้างเมตริกซ์ทแยงมุมในส่วนที่ 2 การเตรียมค่าพารามิเตอร์ จะเพิ่ม Code การสร้างเมตริกซ์ทแยงมุมอีกชุดหนึ่ง

```
[meanR,stdevR]=stat(R);
[meanX,stdevX]=stat(X);
W1 = diag(ones(k,1),0)
W1 = stdevR.*W1
W1 = diag(W1)
W2 = diag(ones(k,1),0)
W2 = stdevX.*W2
W2 = diag(W2)
W = [W1 ; W2]
for i=1:2*k
 for j=1:2*k
  if i == j
     WK(i,j) = W(i,1);
  else
     WK(i,j) = 0.0;
end
```

- หาค่าความแปรปรวน (σ^2) เก็บอยู่ที่ตัวแปร *stdevR, stdevX*
- หาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลเก็บอยู่ที่ตัวแปร *meanR, meanX*

โดยที่

- ตัวแปร *stdevR* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจริง
- ตัวแปร *stdevX* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *meanR* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจริง
- ตัวแปร *mean)* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *W1* แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักในที่นี้คือ σ^2 ของจำนวนจริง
- ตัวแปร *W2* แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักในที่นี้คือ σ^2 ของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *WK* แทนเมตริกซ์ทแยงมุม

ซึ่งเราจะได้เมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งส่วนที่แตกต่างอีกส่วนหนึ่งคือ ส่วนที่ 3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะได้ Code ดังนี้

```
Sol = (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;
```

ซึ่งเมื่อผ่านส่วนนี้ไปแล้ว เราจะได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและฟังก์ชันถ่ายโอน โดยในส่วนที่ 4 และ 5 Code ที่เขียนขึ้นเหมือนกับโปรแกรม leastupdate.m ทุกประการ

5) โปรแกรม leastweightSTAT1.m เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับวิธีการกำลังสอง น้อยสุด (Least square method) ที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\sigma^2$ โดยการกำหนดค่าป้อนเข้าเป็นค่าความถี่, ค่าส่วนจำนวนจริง และค่าส่วนจินตภาพ แล้วทำการใช้โปรแกรมสำหรับสร้างพารามิเตอร์ที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้เข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาซึ่ง Code ที่มีอยู่ ในโปรแกรมนี้มีความคล้ายคลึงกับโปรแกรม leastupdate.m แต่จะมีความแตกต่างเพียงเล็กน้อย ในส่วนของการสร้างเมตริกซ์ทแยงมุม ในส่วนที่ 2 การเตรียมค่าพารามิเตอร์ จะเพิ่ม Code การสร้างเมตริกซ์ทแยงมุมเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งชุด

```
[meanR,stdevR]=stat(R);
[meanX,stdevX]=stat(X);
W1 = diag(ones(k,1),0)
W1 = stdevR.*W1
W1 = 1./diag(W1)
W2 = diag(ones(k,1),0)
```

- หาค่าความแปรปรวน (σ^2) เก็บอยู่ที่ตัวแปร *stdevR, stdevX*
- หาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลเก็บอยู่ที่ตัวแปร *meanR, meanX*

```
W2 = stdevX.*W2      - หาค่าความแปรปรวน (σ^2) เก็บอยู่ที่ตัวแปร stdevR, stdevX
W2 = 1./diag(W2)     - หาค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลเก็บอยู่ที่ตัวแปร meanR, meanX
W = [W1 ; W2]
for i=1:2*k
  for j=1:2*k
    if i == j
      WK(i,j) = W(i,1);
    else
      WK(i,j) = 0.0;
  end
 end
end
```

โดยที่

- ตัวแปร *stdevR* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจริง
- ตัวแปร *stdevX* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *meanR* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจริง
- ตัวแปร *mean)* เป็นตัวแปรที่ใช้เก็บค่าเฉลี่ยของชุดข้อมูลในส่วนของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *W1* แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก ในที่นี้คือ $1/\sigma^2$ ของจำนวนจริง
- ตัวแปร *W2* แทนค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนัก ในที่นี้คือ $1/\sigma^2$ ของจำนวนจินตภาพ
- ตัวแปร *WK* แทนเมตริกซ์ทแยงมุม

ซึ่งเราจะได้เมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งส่วนที่แตกต่างอีกส่วนหนึ่งคือ ส่วนที่ 3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น จะได้ Code ดังนี้

```
Sol = (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;
```

ซึ่งเราจะได้สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและฟังก์ชันถ่ายโอน โดยในส่วนที่ 4 และ 5 Code ที่เขียนขึ้นเหมือนกับโปรแกรม leastupdate.m ทุกประการ

4.3 ปัญหาทดสอบมาตรฐาน

ในการนำโปรแกรมที่ทำการเขียนขึ้นมาทำการใช้งานนั้น ต้องมีการทดสอบความถูกต้อง ความแม่นยำ และความเสถียรของโปรแกรมนั้น ๆ ก่อน เพื่อเป็นการตรวจสอบว่าโปรแกรมที่ทำการเขียนขึ้นนั้นมีความน่าเชื่อถือเพียงใด สำหรับหัวข้อนี้เป็นการนำเสนอผลการทดสอบโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยการนำโปรแกรมไปประยุกต์เข้ากับปัญหาที่ทราบฟังก์ชันถ่ายโอน จากนั้นจึงนำการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนจากโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานั้น ๆ ซึ่งในการนำเสนอนั้นจะนำเสนอผลการคำนวณออกมาในรูปแบบของค่าสัมประสิทธิ์เปรียบเทียบกันระหว่างสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่ากับค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากโปรแกรม และนำมาเขียนกราฟเปรียบเทียบชุดข้อมูลที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่ากับเส้นกราฟที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากโปรแกรม โดยใช้แผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ โดยในการนำเสนอนั้นจะอยู่บนเงื่อนไขที่ว่าฟังก์ชันถ่ายโอนจะต้องมีความเสถียร ค่าลำดับขั้นของโพลิโนเมียนของตัวเศษจะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าลำดับขั้นของโพลิโนเมียนของตัวส่วนและค่า $a_0 = 1$ เสมอ

4.3.1 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 1

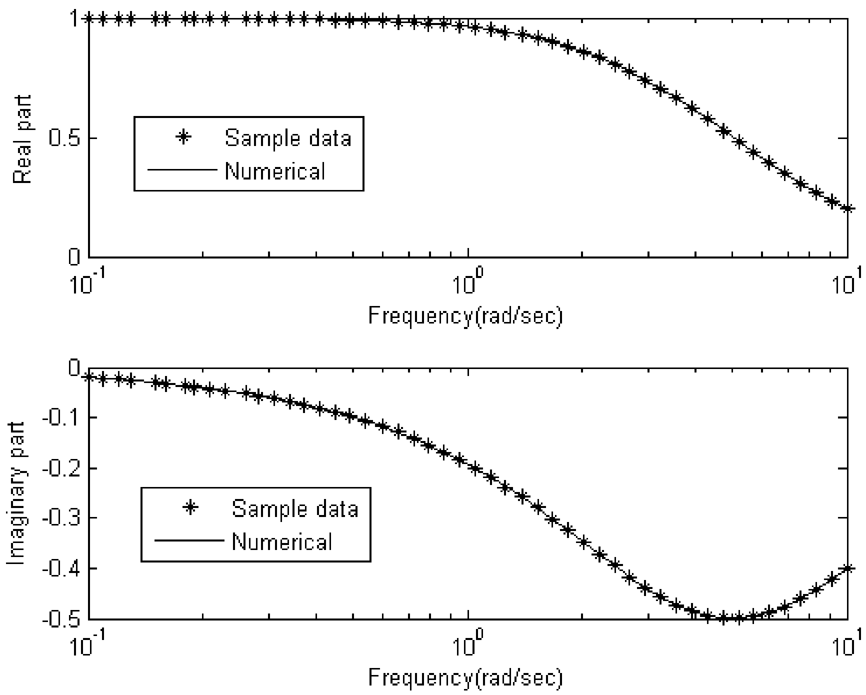
$$G(j\omega) = \frac{1}{0.2j\omega + 1}$$

โดยค่าศูนย์ (Zero) เท่ากับศูนย์ และโพล (Pole) มีค่าเท่ากับ –5 จำนวนชุดข้อมูลมีทั้งหมด 50 ชุด, ความถี่ในการกระตุ้นระบบอยู่ในช่วง 0.1 - 10 Hz, $a_0 = 1$

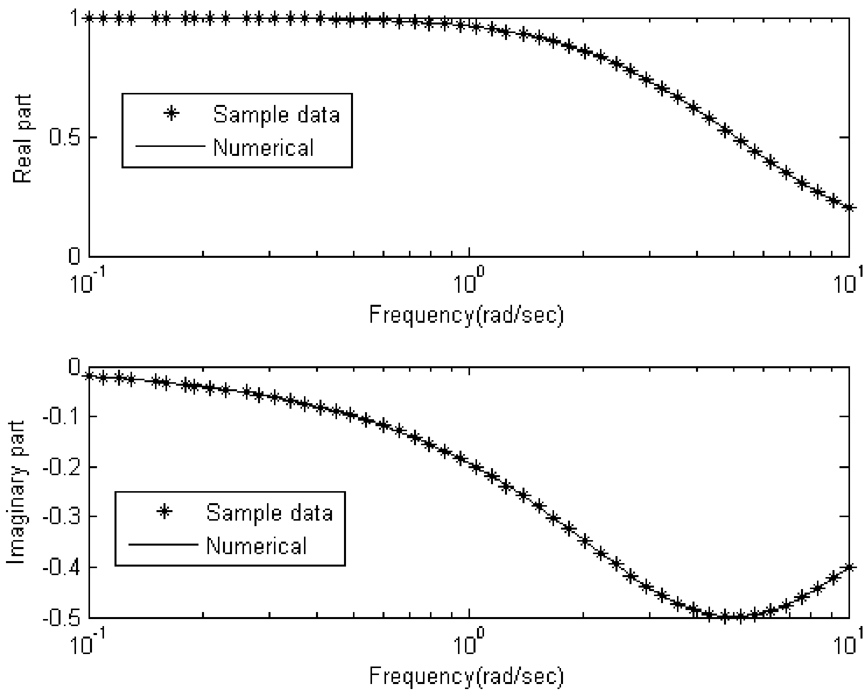
a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Least-square method

b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

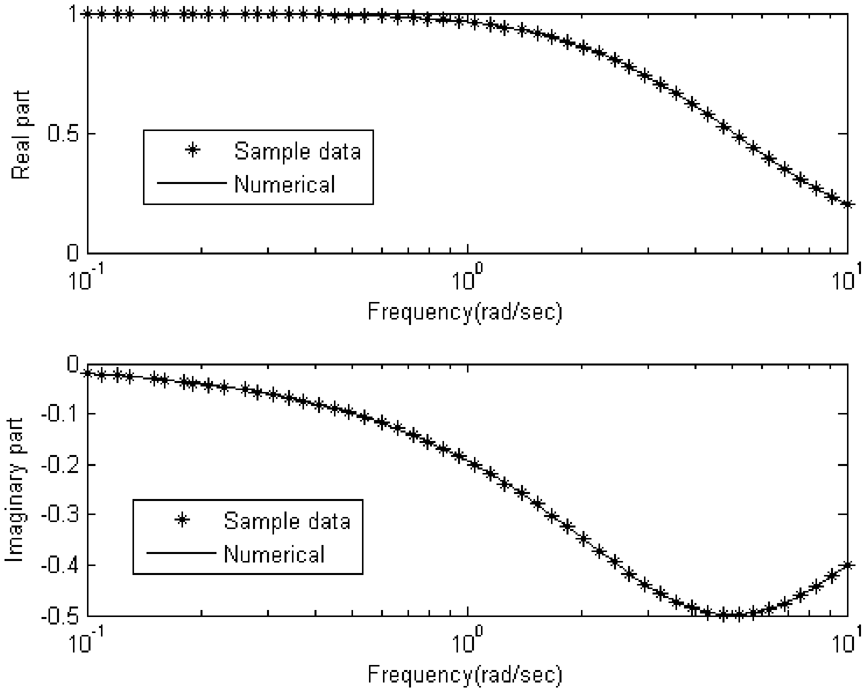
c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ


Real part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)

(a)


Real part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)

(b)



(c)

รูปที่ 4.1 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.1 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$

ตารางที่ 4.1 แสดงผลการคำนวณที่โพลมีค่าเท่ากับ -5

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_1 =$ -6.218e-009 $b_0 = 1$ $a_2 =$ 1.244e-009 $a_1 = 0.2$	$G(j\omega) = \frac{-6.218\times10^{-9}(j\omega)+1}{1.244\times10^{-9}(j\omega)^2+0.2(j\omega)+1}$	0.003291
(b)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$G(j\omega) = \frac{1}{0.2(j\omega)+1}$	0.003310
(c)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2001$	$G(j\omega) = \frac{1}{0.2001(j\omega)+1}$	0.003530

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 0, m = 1 จากตาราง 4.1 ซึ่งผลการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่าโปรแกรม (a) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 0.003291 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ $b_1 =$ -6.218e-009, $b_0 = 1$, $a_2 =$ 1.244e-009, $a_1 = 0.2$, $a_0 = 1$ และจากรูปที่ 4.1 พบว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้ เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน แสดงว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถประมาณค่าชุดข้อมูล เมื่อสังเกตจากตาราง 4.1 พบว่า ค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b) และ (c) นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 0.003291, 0.003310 และ 0.003530 ตามลำดับ

4.3.2 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 2

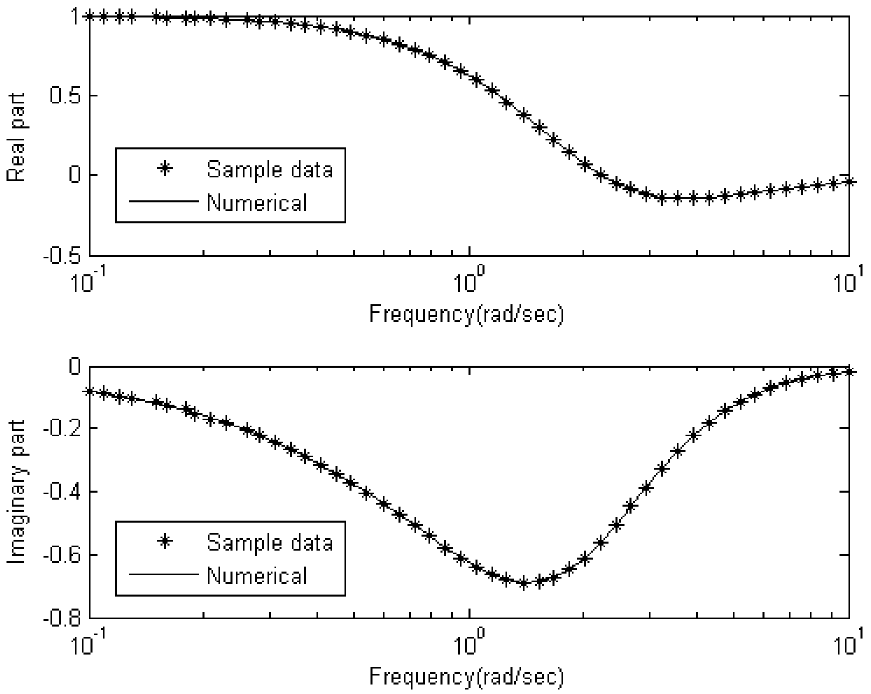
$$G(j\omega) = \frac{1}{0.2\left(j\omega\right)^2 + 0.8(j\omega) + 1}$$

โดยไม่มีค่าศูนย์ (Zero) และโพล (Pole) มีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j จำนวนชุดข้อมูลมีทั้งหมด 50 ชุด, ความถี่ในการกระตุ้นระบบอยู่ในช่วง 0.1 - 10 Hz, $a_0 = 1$

a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Least-square method

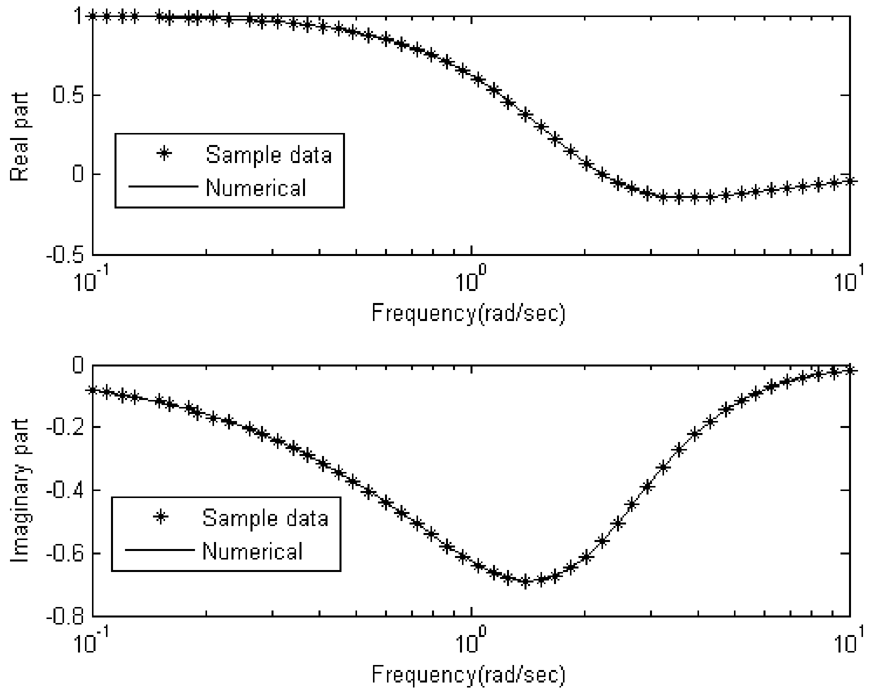
b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ



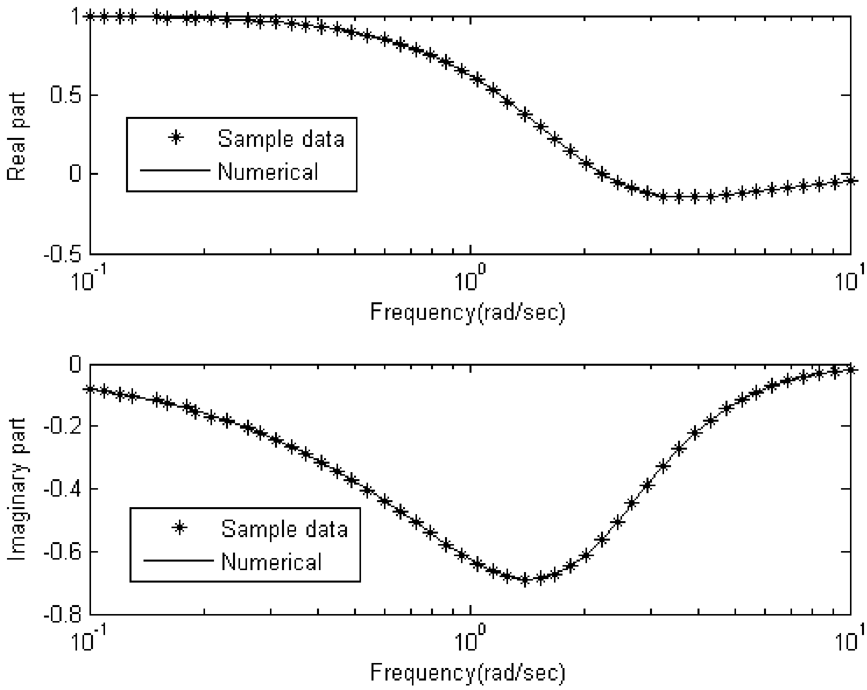
Real part
1
0.5
0
-0.5
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)

(a)



Real part
1
0.5
0
-0.5
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)

(b)



(c)

รูปที่ 4.2 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.2 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนโดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 0, m = 2 จากตาราง 4.2 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ได้ว่าโปรแกรม (b) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 0.011360 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_5 = 1.82x10^{-7}, b_4 = 9.394x10^{-3}, b_3 = 1.532x10^{-3}, b_2 = 0.5880, b_1 = 2.657x10^{-3}, b_0 = 1.0000 และ a_6 = 0.001879, a_5 = 0.00782, a_4 = 0.1282, a_3 = 0.4725, a_2 = 0.7902, a_1 = 0.8027, a_0 = 1.0000

และจากรูปที่ 4.2 พบว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน ซึ่งเมื่อสังเกตจากตาราง 4.2 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม(a), (b) และ (c) นั้น มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 0.011506, 0.011360 และ 0.011514 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.2 แสดงผลการคำนวณที่โพลมีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_0=1$ $a_1=0.8$ $a_2=0.2$	$b_3=-3.368\times10^{8}$ $a_4=5.3510\times10^{-3}$ $b_2=2.675\times10^{-2}$ $a_3=2.217\times10^{-2}$ $b_1=3.8710\times10^{-3}$ $a_2=0.2299$ $b_0=1.0000$ $a_1=0.8040$ $a_0=1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{-3.368\times10^{-8}(j\omega)^3+2.675\times10^{-2}(j\omega)^2+3.8710\times10^{-3}(j\omega)+1}{5.351\times10^{-3}(j\omega)^4+2.217\times10^{-2}(j\omega)^3+0.2299(j\omega)^2+0.8040(j\omega)+1}$	0.011506
(b)	$b_0=1$ $a_1=0.8$ $a_2=0.2$	$b_5=1.82\times10^{-7}$ $a_6=0.001879$ $b_4=9.394\times10^{-3}$ $a_5=0.00782$ $b_3=1.532\times10^{-3}$ $a_4=0.1282$ $b_2=0.5880$ $a_3=0.4725$ $b_1=2.657\times10^{-3}$ $a_2=0.7902$ $b_0=1.0000$ $a_1=0.8027$ $a_0=1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{1.82\times10^{-7}(j\omega)^5+9.394\times10^{-3}+1.532\times10^{-3}(j\omega)^3+0.588(j\omega)^2+2.657\times10^{-3}(j\omega)+1}{0.001879(j\omega)^6+0.00782(j\omega)^5+0.1282(j\omega)^4+0.4725(j\omega)^3+0.7902(j\omega)^2+0.8027(j\omega)+1}$	0.011360
(c)	$b_0=1$ $a_1=0.8$ $a_2=0.2$	$b_5=-1.6340\times10^{-6}$ $a_6=6.1450\times10^{-2}$ $b_4=\ 0.3072$ $a_5=0.2549$ $b_3=\ 0.0458\times10^{-3}$ $a_4=2.6930$ $b_2=11.7400$ $a_3=9.4440$ $b_1=\ 4.1720\times10^{-3}$ $a_2=11.9500$ $b_0=\ 1.0000$ $a_1=0.8044$ $a_0=1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{-1.634\times10^{-6}(j\omega)^5+0.3072(j\omega)^4+0.0458\times10^{-3}(j\omega)^3+11.74(j\omega)^2+4.1720\times10^{-3}(j\omega)+1}{6.1450\times10^{-2}(j\omega)^6+0.2549(j\omega)^5+2.6930(j\omega)^4+9.444(j\omega)^3+11.95(j\omega)^2+0.8044(j\omega)+1}$	0.011514

4.3.3 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 2, m = 3

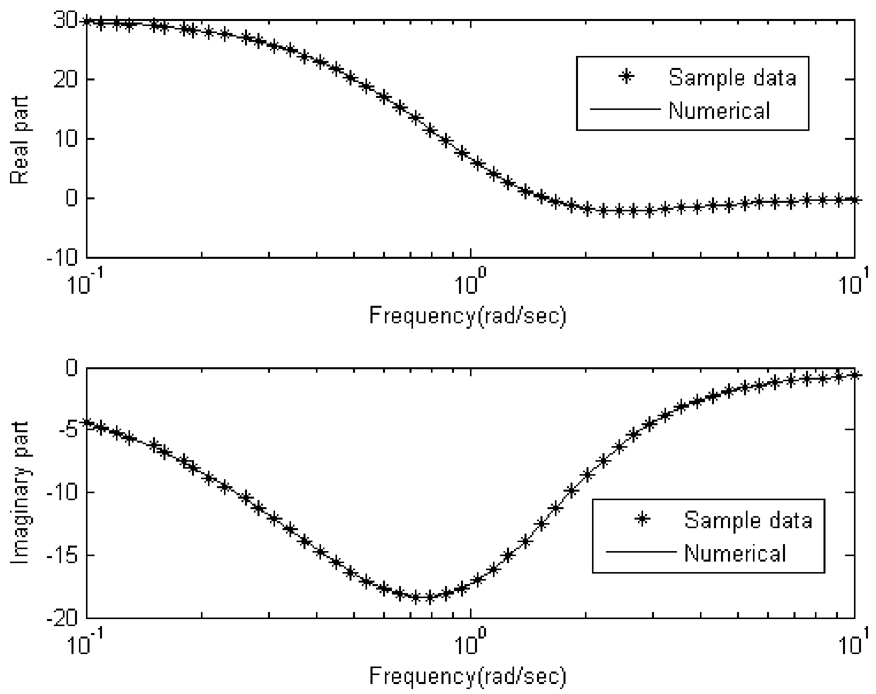
$$G(j\omega) = \frac{1(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 30}{0.1667(j\omega)^3 + (j\omega)^2 + 1.833j\omega + 1}$$

โดยค่าศูนย์ (Zero) เท่ากับ –5, -6 และโพล (Pole) มีค่าเท่ากับ –1, –2 และ –3 จำนวนชุดข้อมูลมีทั้งหมด 50 ชุด, ความถี่ในการกระตุ้นระบบอยู่ในช่วง 0.1 - 10 Hz, $a_0 = 1$

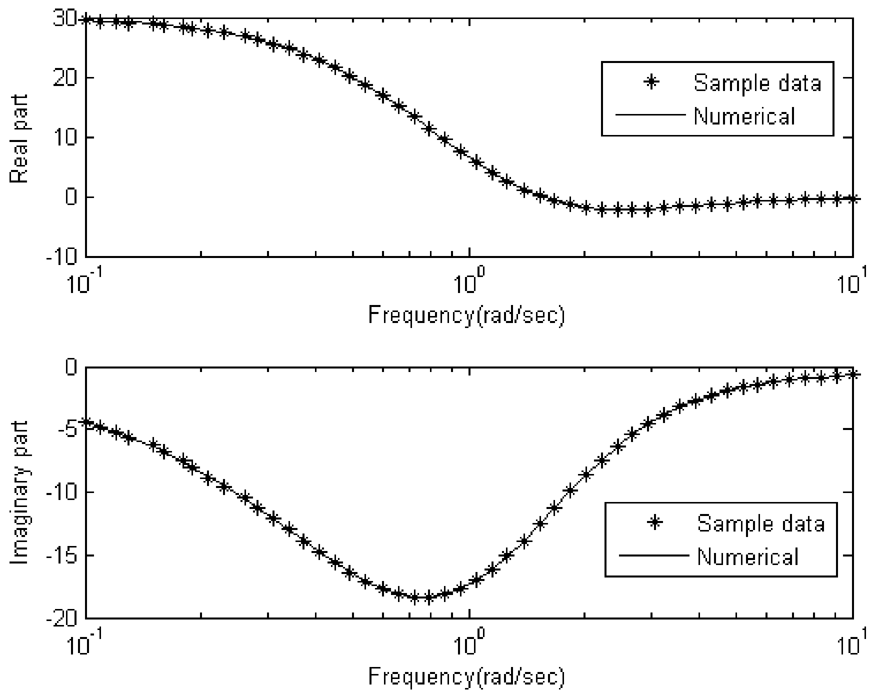
a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Least-square method

b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

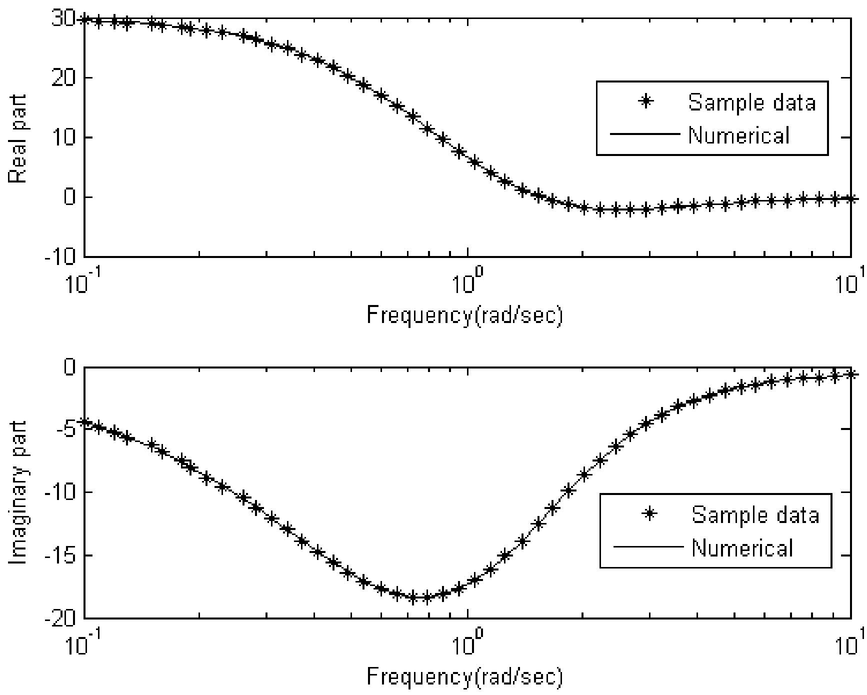
c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ


Real part
30
20
10
0
-10
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
Imaginary part
0
-5
-10
-15
-20
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical

(a)


Real part
30
20
10
0
-10
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
Imaginary part
0
-5
-10
-15
-20
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical

(b)



(c)

รูปที่ 4.3 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.3 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนโดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 2, m = 3 จากตาราง 4.3 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่า โปรแกรม (c) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 0.491948 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_8 = 0.0191, b_7 = 0.2104, b_6 = 2.1360, b_5 = 17.1900, b_4 =63.1200, b_3 = 180.1000, b_2 = 483.0000, b_1 = 11.2000, b_0 = 30.0000 และ a_9 = 0.0032, a_8 = 0.0191, a_7 = 0.2957, a_6 = 1.5790, a_5 = 5.6000, a_4 = 17.8000, a_3 = 29.7400, a_2 = 17.0800, a_1 = 1.8400, a_0 = 1.0000

และจากรูปที่ 4.3 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้ เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้วพบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน ซึ่งเมื่อพิจารณาจากตาราง 4.3 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม (a), (b) และ (c) นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 0.502841, 0.503030 และ 0.491948 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.3 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -5, -6 และโพลมีค่าเท่ากับ -1, -2, -3

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_6 = 0.0012$ $a_7 = 0.0002$ $b_5 = 0.0137$ $a_6 = 0.0191$ $b_4 = 0.1382$ $a_5 = 0.0191$ $b_3 = 1.1100$ $a_4 = 0.1021$ $b_2 = 4.0420$ $a_3 = 0.3351$ $b_1 = 11.1900$ $a_2 = 1.1110$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8390$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.0012(j\omega)^6 + 0.0137(j\omega)^5 + 0.1382(j\omega)^4 + 1.11(j\omega)^3 + 4.0420(j\omega)^2 + 11.9(j\omega) + 30}{0.0002(j\omega)^7 + 0.0191(j\omega)^6 + 0.0191(j\omega)^5 + 0.1021(j\omega)^4 + 0.3351(j\omega)^3 + 1.111(j\omega)^2 + 1.839(j\omega) + 1}$	0.502841
(b)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 0.9606$ $a_3 = 0.1600$ $b_1 = 10.6900$ $a_2 = 0.9840$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8230$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.9606(j\omega)^2 + 10.69(j\omega) + 30}{0.16(j\omega)^3 + 0.984(j\omega)^2 + 1.823(j\omega) + 1}$	0.503030
(c)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_8 = 0.0191$ $a_9 = 0.0032$ $b_7 = 0.2104$ $a_8 = 0.0191$ $b_6 = 2.1360$ $a_7 = 0.2957$ $b_5 = 17.1900$ $a_6 = 1.5790$ $b_4 = 63.1200$ $a_5 = 5.6000$ $b_3 = 180.1000$ $a_4 = 17.8000$ $b_2 = 483.0000$ $a_3 = 29.7400$ $b_1 = 11.2000$ $a_2 = 17.0800$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8400$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.0191(j\omega)^8 + 0.2104(j\omega)^7 + 2.136(j\omega)^6 + 17.19(j\omega)^5 + 63.12(j\omega)^4 + 180.1(j\omega)^3 + 483(j\omega)^2 + 11.2(j\omega) + 30}{0.0032(j\omega)^9 + 0.0191(j\omega)^8 + 0.2957(j\omega)^7 + 1.579(j\omega)^6 + 5.6(j\omega)^5 + 17.8(j\omega)^4 + 29.74(j\omega)^3 + 17.08(j\omega)^2 + 1.84(j\omega) + 1}$	0.491948

4.3.4 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 4, m = 4

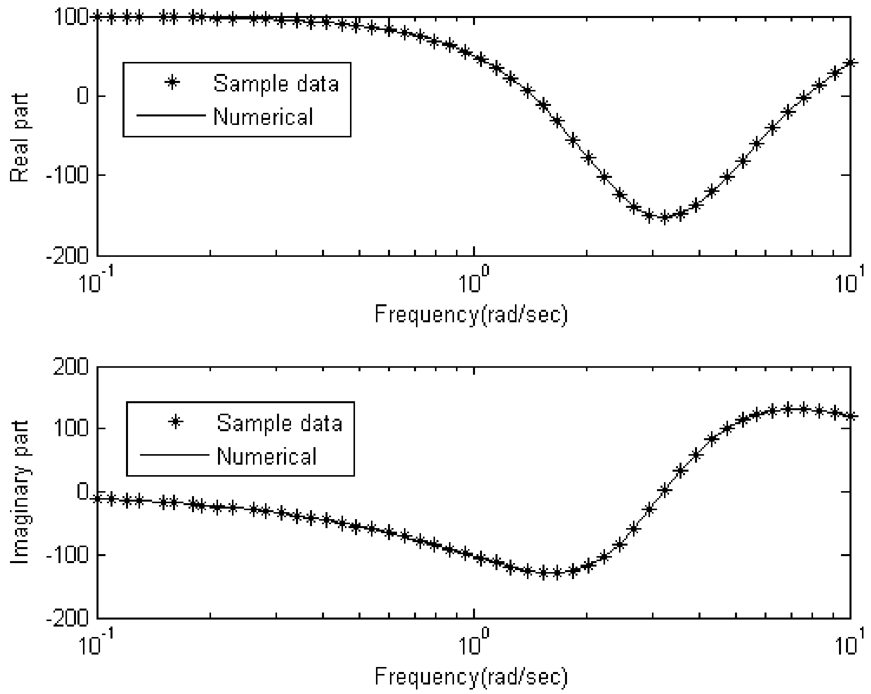
$$G(j\omega)=\frac{(j\omega)^4-(j\omega)^3-22(j\omega)^2-10(j\omega)+100}{0.0083(j\omega)^4+0.1\left(j\omega\right)^3+0.4583\left(j\omega\right)^2+1.0333j\omega+1}$$

โดยค่าศูนย์ (Zero) เท่ากับ -2, –5, 3+j และ 3-j และโพล (Pole) มีค่าเท่ากับ –5, -3, -2+2j และ –2-2j จำนวนชุดข้อมูลมีทั้งหมด 50 ชุด, ความถี่ในการกระตุ้นระบบอยู่ในช่วง 0.1 - 10 Hz, $a_0 = 1$

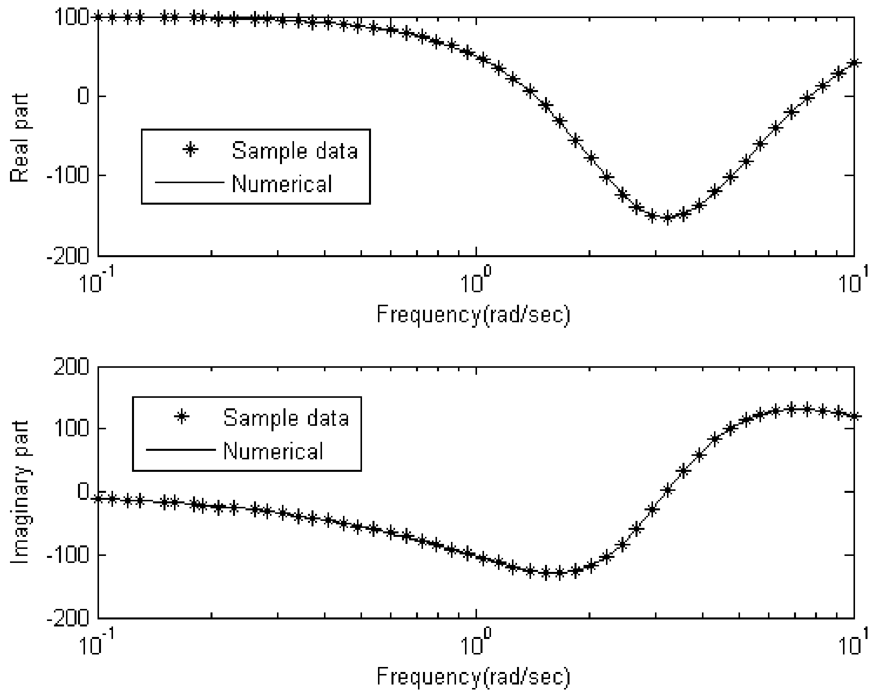
a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Least-square method

b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

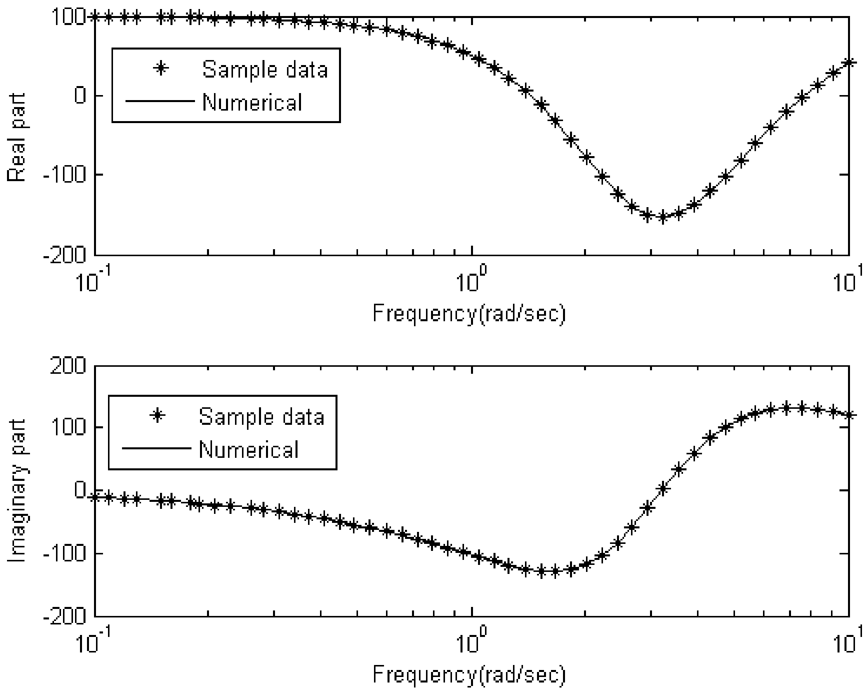
c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ


100
0
-100
-200
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
200
100
0
-100
-200
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(a)


100
0
-100
-200
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
200
100
0
-100
-200
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(b)



(c)

รูปที่ 4.4 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.4 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนโดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 4, m = 4 จากตาราง 4.4 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่าโปรแกรม (a) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 2.167463 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_6 = 0.0224, b_5 = 0.0324, b_4 = 0.0205, b_3 = 1.1440, b_2 = -7.7560, b_1 = -39.8500, b_0 = 99.9300 และ a_6 = 1.8780x10^{-5}, a_5 = 5.1130x10^{-4}, a_4 = 5.5391x10^{-4}, a_3 = 0.0454, a_2 = 0.2644, a_1 = 0.7324, a_0 = 1.0000

และจากรูปที่ 4.4 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณ กับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน ซึ่งเมื่อสังเกตจากตาราง 4.4 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน

ตารางที่ 4.4 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -2, -5, 3+j, 3-j และโพลมีค่าเท่ากับ -5, -3, 2+j, 2-j

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_6 = 0.0224$ $a_6 = 1.8780\times10^{-5}$ $b_5 = 0.0324$ $a_5 = 5.1130\times10^{-4}$ $b_4 = 0.0205$ $a_4 = 5.5391\times10^{-4}$ $b_3 = 1.1440$ $a_3 = 0.0454$ $b_2 = -7.7560$ $a_2 = 0.2644$ $b_1 = -39.8500$ $a_1 = 0.7324$ $b_0 = 99.9300$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.0244(j\omega)^6 + 0.0324(j\omega)^5 + 0.0205(j\omega)^4 + 1.144(j\omega)^3 - 7.756(j\omega)^2 - 39.85(j\omega) + 99.93}{1.8780\times10^{-5}(j\omega)^6 + 5.113\times10^{-4}(j\omega)^5 + 5.5391\times10^{-4}(j\omega)^4 + 0.0454(j\omega)^3 + 0.2644(j\omega)^2 + 0.7324(j\omega) + 1}$	2.1674633
(b)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_4 = 0.3398$ $a_4 = 0.0028$ $b_3 = 1.1340$ $a_3 = 0.0462$ $b_2 = -11.2400$ $a_2 = 0.2859$ $b_1 = -34.8500$ $a_1 = 0.7845$ $b_0 = 99.9900$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.3398(j\omega)^4 + 1.134(j\omega)^3 - 11.24(j\omega)^2 - 34.85(j\omega) + 99.99}{0.0028(j\omega)^4 + 0.0462(j\omega)^3 + 0.2859(j\omega)^2 + 0.7845(j\omega) + 1}$	2.176900
(c)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_6 = 0.3169$ $a_6 = 0.0027$ $b_5 = 6.3240$ $a_5 = 0.0868$ $b_4 = -26.5700$ $a_4 = 0.7060$ $b_3 = -122.6000$ $a_3 = 2.1850$ $b_2 = 288.8000$ $a_2 = 3.2620$ $b_1 = -37.3600$ $a_1 = 0.7597$ $b_0 = 99.9900$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.3169(j\omega)^6 + 6.324(j\omega)^5 - 26.57(j\omega)^4 - 122.6(j\omega)^3 + 288.8(j\omega)^2 - 37.36(j\omega) + 99.99}{0.0027(j\omega)^6 + 0.0868(j\omega)^5 + 0.706(j\omega)^4 + 2.185(j\omega)^3 + 3.262(j\omega)^2 + 0.7597(j\omega) + 1}$	2.529059

โปรแกรม (a), (b) และ (c) นั้น มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 2.167463, 2.176900 และ 2.529059 ตามลำดับ

4.3.5 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 3, m = 5

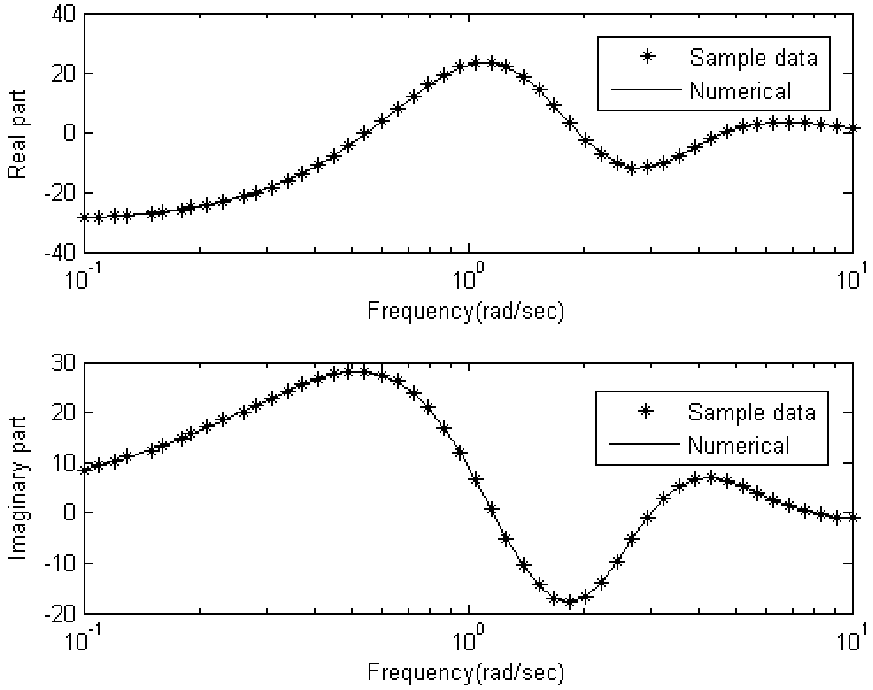
$$G(j\omega)=\frac{(j\omega)^3-10(j\omega)^2+31(j\omega)-30}{4.1667\times10^{-3}(j\omega)^5+0.0729(j\omega)^4+0.4583\left(j\omega\right)^3+1.3542\left(j\omega\right)^2+1.8917j\omega+1}$$

โดยค่าศูนย์ (Zero) เท่ากับ 2, 5 และ 8 และโพล (Pole) มีค่าเท่ากับ -1.5, -2, -3+j, -3-j และ -8 จำนวนชุดข้อมูลมีทั้งหมด 50 ชุด, ความถี่ในการกระตุ้นระบบอยู่ในช่วง 0.1 - 10 Hz, $a_0 = 1$

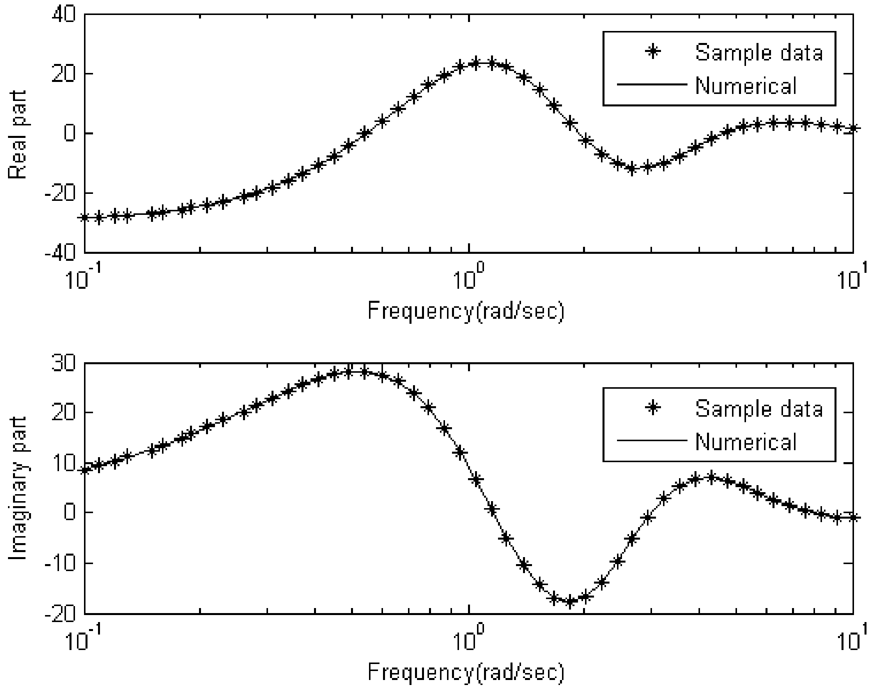
a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Least-square method

b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

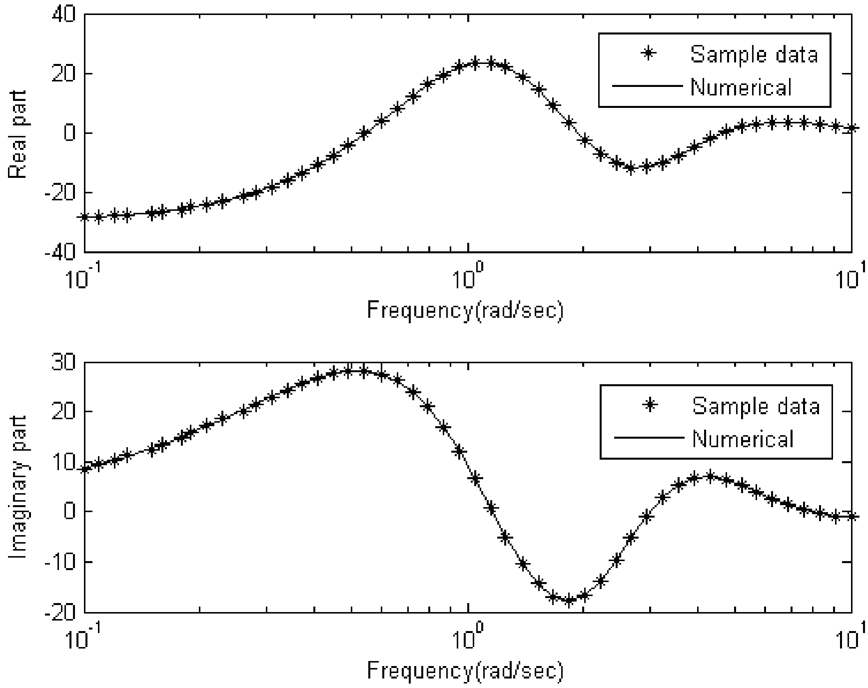
c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้น


Sample data
Numerical
Real part
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Frequency(rad/sec)

(a)


Sample data
Numerical
Real part
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Frequency(rad/sec)

(b)



(c)

รูปที่ 4.5 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.5 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรม มีค่า n = 3, m = 5 จากตาราง 4.5 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่า โปรแกรม (c) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 1.127855 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_8 = -4.7520x10^{-5}, b_7 = 9.2860x10^{-4}, b_6 = 1.1490x10^{-3}, b_5 = 3.7020, b_4 = -37.5700, b_3 = 118.0000, b_2 = -123.0000, b_1 = 30.9100, b_0 = -30.0000 และ a_8 = 9.0060x10^{-5}, a_7 = 736270, a_6 = 0.2819, a_5 = 1.7530, a_4 = 5.2240, a_3 = 7.6270, a_2 = 5.1470, a_1 = 1.8960, a_0 = 1.0000

จากรูปที่ 4.5 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน แสดงว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้จากโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นสามารถประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้

ตารางที่ 4.5 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และโพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_3 = 1.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $b_2 = -10.000$ $a_4 = 0.0729$ $b_1 = 31.0000$ $a_3 = 0.4583$ $b_0 = -30.000$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$b_9 = -2.1910\times10^{-7}$ $a_9 = 3.0050\times10^{-6}$ $b_8 = 3.9610\times10^{-6}$ $a_8 = 5.1320\times10^{-5}$ $b_7 = 6.2080\times10^{-4}$ $a_7 = 5.9850\times10^{-4}$ $b_6 = -6.0980\times10^{-2}$ $a_6 = 5.5520\times10^{-3}$ $b_5 = 7.5050\times10^{-2}$ $a_5 = 0.0349$ $b_4 = -0.5880$ $a_4 = 0.1632$ $b_3 = 2.6660$ $a_3 = 0.5961$ $b_2 = -11.2900$ $a_2 = 1.4460$ $b_1 = 30.4800$ $a_1 = 1.9100$ $b_0 = -30.0100$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{\begin{gathered}-2.191\times10^{-7}(j\omega)^9 + 3.961\times10^{-6}(j\omega)^8 \\ +6.208\times10^{-4}(j\omega)^7 - 6.098\times10^{-2}(j\omega)^6 \\ +7.505\times10^{-2}(j\omega)^5 - 0.588(j\omega)^4 \\ +2.666(j\omega)^3 - 11.29(j\omega)^2 + 30.48(j\omega) \\ -30.01\end{gathered}}{\begin{gathered}3.005\times10^{-6}(j\omega)^9 + 5.132\times10^{-5}(j\omega)^8 \\ +5.985\times10^{-4}(j\omega)^7 + 5.552\times10^{-3}(j\omega)^6 \\ +0.0349(j\omega)^5 + 0.1632(j\omega)^4 + 0.5961(j\omega)^3 \\ +1.446(j\omega)^2 + 1.91(j\omega) + 1\end{gathered}}$	1.133333
(b)	$b_3 = 1.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $b_2 = -10.000$ $a_4 = 0.0729$ $b_1 = 31.0000$ $a_3 = 0.4583$ $b_0 = -30.000$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$b_5 = -1.2520\times10^{-5}$ $a_5 = 0.0349$ $b_4 = 9.4520\times10^{-5}$ $a_4 = 0.1632$ $b_3 = 0.9986$ $a_3 = 0.5961$ $b_2 = -10.0000$ $a_2 = 1.4460$ $b_1 = 31.0000$ $a_1 = 1.9100$ $b_0 = -30.0000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{\begin{gathered}-1.252\times10^{-5}(j\omega)^5 + 9.452\times10^{-5}(j\omega)^4 \\ +0.9986(j\omega)^3 - 10(j\omega)^2 + 31(j\omega) - 30\end{gathered}}{\begin{gathered}0.0349(j\omega)^5 + 0.1632(j\omega)^4 + 0.5961(j\omega)^3 \\ +1.446(j\omega)^2 + 1.91(j\omega) + 1\end{gathered}}$	1.133020

ตารางที่ 4.5 แสดงผลการคำนวณที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และโพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8 (ต่อ)

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(c)	$b_3 = 1.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $b_2 = -10.000$ $a_4 = 0.0729$ $b_1 = 31.0000$ $a_3 = 0.4583$ $b_0 = -30.000$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$b_8 = -4.7520\times10^{-5}$ $a_8 = 9.0060\times10^{-5}$ $b_7 = 9.2860\times10^{-4}$ $a_7 = 0.0167$ $b_6 = 1.1490\times10^{-3}$ $a_6 = 0.2819$ $b_5 = 3.7020$ $a_5 = 1.7530$ $b_4 = -37.5700$ $a_4 = 5.2240$ $b_3 = 118.0000$ $a_3 = 7.6270$ $b_2 = -123.0000$ $a_2 = 5.1470$ $b_1 = 30.9100$ $a_1 = 1.8960$ $b_0 = -30.0000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-4.752\times10^{-5}(j\omega)^8 + 9.286\times10^{-4}(j\omega)^7 + 1.149\times10^{-3}(j\omega)^6 + 3.702(j\omega)^5 - 37.57(j\omega)^4 + 118(j\omega)^3 - 123(j\omega)^2 + 30.01(j\omega) - 30}{9.006\times10^{-5}(j\omega)^8 + 0.0167(j\omega)^7 + 0.2819(j\omega)^6 + 1.753(j\omega)^5 + 5.224(j\omega)^4 + 7.627(j\omega)^3 + 5.147(j\omega)^2 + 1.896(j\omega) + 1}$	1.127855

จากส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ได้ถูกต้อง ซึ่งเมื่อสังเกตจากตาราง 4.5 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b) และ (c) นั้นมีค่าใกล้เคียงกันดังนี้คือ 1.133333, 1.133020 และ 1.127855 ตามลำดับ

4.3.6 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 1 จากหัวข้อที่ 4.3.1 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10%

เนื่องจากผลที่ได้จากการทดลองพบว่า ชุดข้อมูลที่ได้จะมีค่าความแปรปรวน (Variance) ของชุดข้อมูลค่าหนึ่ง จึงมีแนวความคิดว่าถ้านำค่าความแปรปรวน (Variance) ของชุดข้อมูลนั้น ๆ มาเป็นค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักจะทำให้โปรแกรมมีความแม่นยำมากขึ้นหรือไม่ ซึ่งในหัวข้อนี้จะใช้ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาทำการถ่วงน้ำหนักให้กับสมการที่ได้จากกระบวนการกำลังสองน้อยสุด โดยกำหนดให้

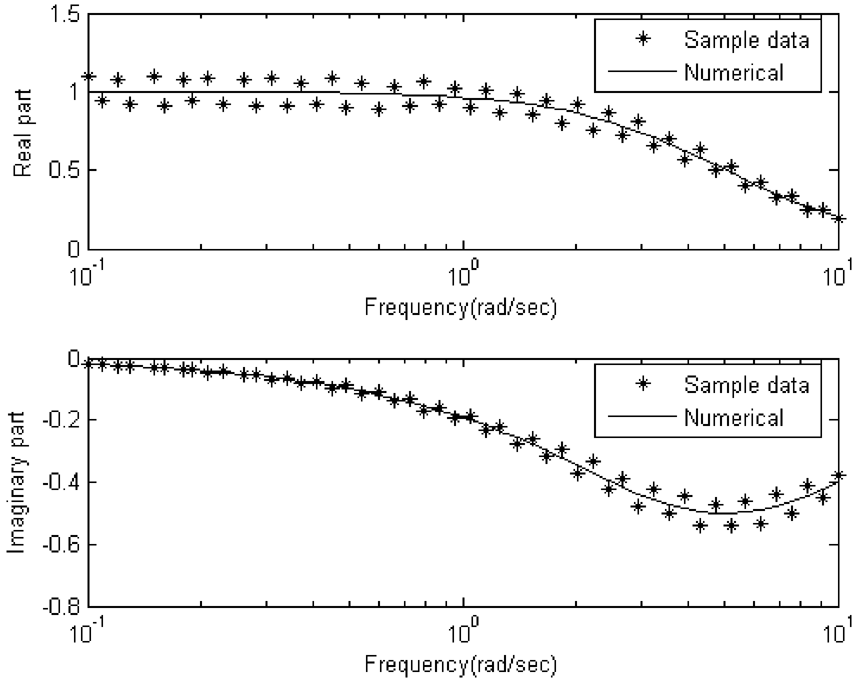
a) โปรแกรม leastupdate.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Least-square method

b) โปรแกรม leastweight.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

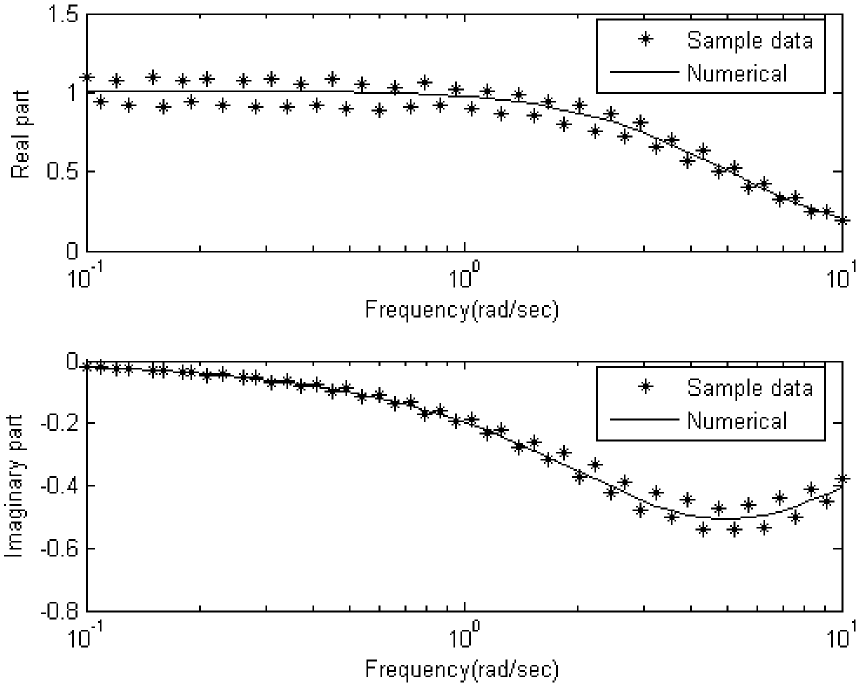
c) โปรแกรม leastweight2.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\omega^2$ โดย ω คือ ความถี่ที่ให้การกระตุ้นระบบ

d) โปรแกรม leastweightSTAT.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ σ^2 โดย σ^2 คือ ความแปรปรวน (Variance)

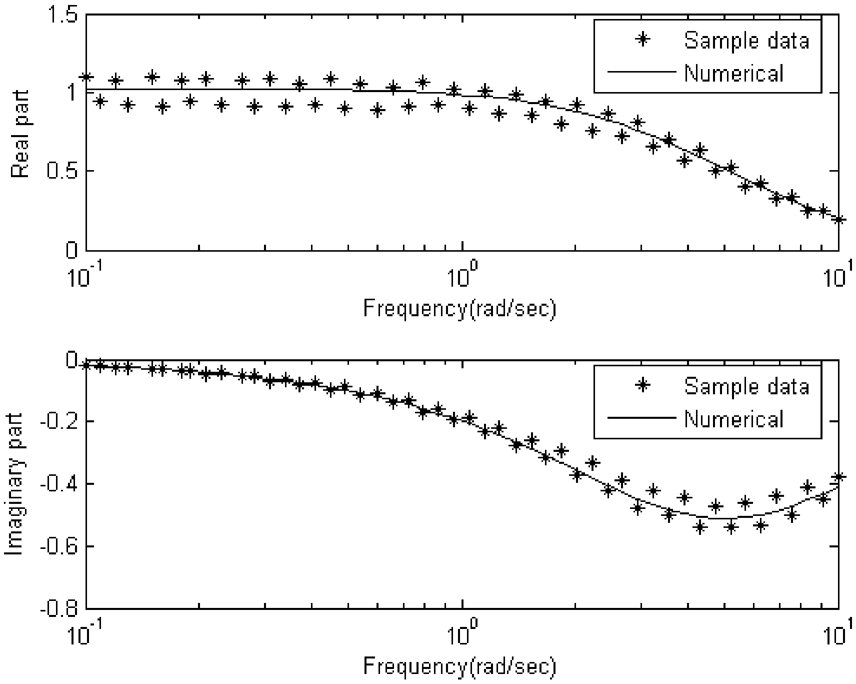
e) โปรแกรม leastweightSTAT1.m เป็นโปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์โดยใช้วิธี Weight least-square method โดยให้ Weighting function คือ $1/\sigma^2$ โดย σ^2 คือ ความแปรปรวน (Variance)


Real part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)

(a)

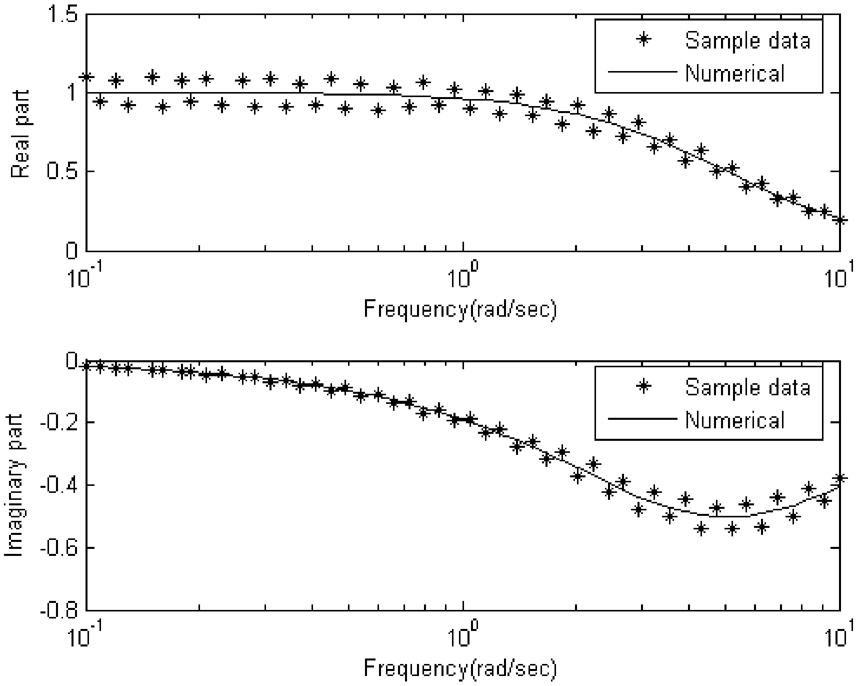

Real part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)
Imaginary part
Sample data
Numerical
Frequency(rad/sec)

(b)



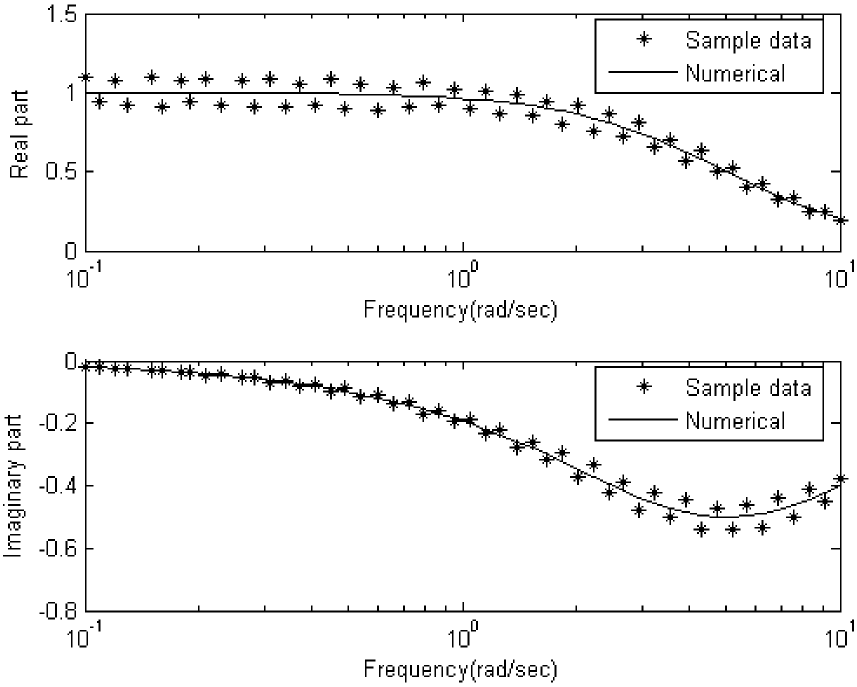
1.5
1
0.5
0
Real part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Imaginary part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical

(c)



1.5
1
0.5
0
Real part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Imaginary part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical

(d)



(e)

รูปที่ 4.6 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.1 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

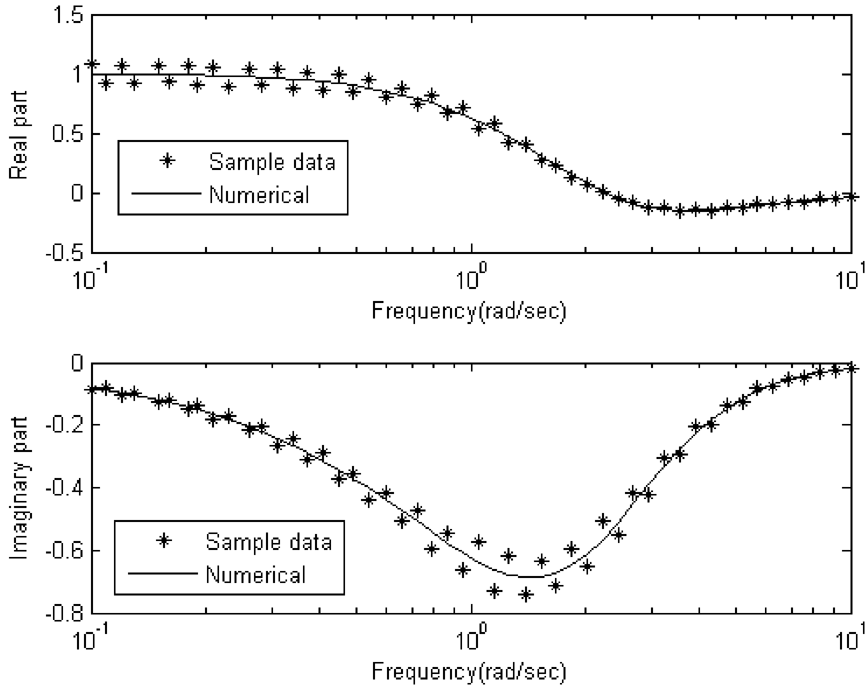
จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรม มีค่า $n = 0$, $m = 1$ และกำหนดให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% และมีการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักให้กับการคำนวณ โดยการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาช่วยในการถ่วงน้ำหนักจากตาราง 4.6 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่าโปรแกรม (e) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 0.487166 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_2 = 3.9560x10^{-4}, b_1 = 9.8520x10^{-4}, b_0 = 1.0020 และ a_2 = 3.8010x10^{-4}, a_1 = 0.1996, a_0 = 1.0000 และจากรูปที่ 4.6 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้วพบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน ซึ่งเมื่อสังเกตจากตาราง 4.6

ตารางที่ 4.6 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่โพลมีค่าเท่ากับ -5

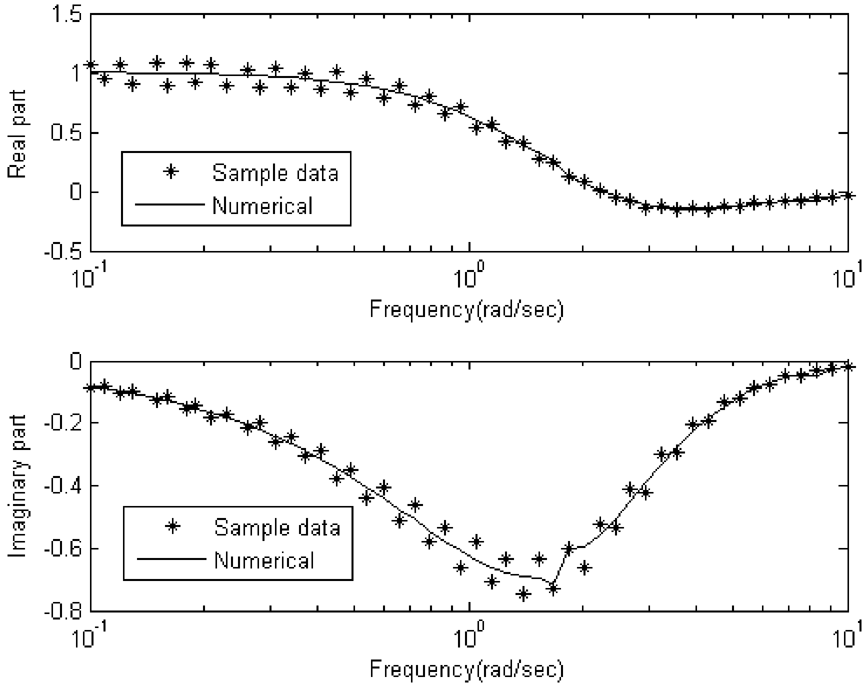
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_1 = 3.8030\times10^{-4}$ $a_1 = 0.2010$ $b_0 = 0.9999$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3.8030\times10^{-4}(j\omega)+0.9999}{0.2010(j\omega)+1}$	0.487453
(b)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_1 = 2.5060\times10^{-3}$ $a_1 = 0.2030$ $b_0 = 1.0090$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.5060\times10^{-3}(j\omega)+1.0090}{0.203(j\omega)+1}$	0.489563
(c)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$a_1 = 1.014$ $b_0 = 0.1998$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.1998}{1.014(j\omega)+1}$	0.495653
(d)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_1 = 4.6400\times10^{-4}$ $a_1 = 0.2012$ $b_0 = 1.0000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{4.64\times10^{-4}(j\omega)+1}{0.2012(j\omega)+1}$	0.487414
(e)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.2$	$b_2 = 3.9560\times10^{-4}$ $a_2 = 3.8010\times10^{-4}$ $b_1 = 9.8520\times10^{-4}$ $a_1 = 0.1996$ $b_0 = 1.0020$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3.956\times10^{-4}(j\omega)^2+9.852\times10^{-4}(j\omega)+1.002}{3.801\times10^{-4}(j\omega)^2+0.1996(j\omega)+1}$	0.487166

พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b), (c), (d) และ (e) นั้น มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 0.487453, 0.489563, 0.495653, 0.487414 และ 0.487166 ตามลำดับ

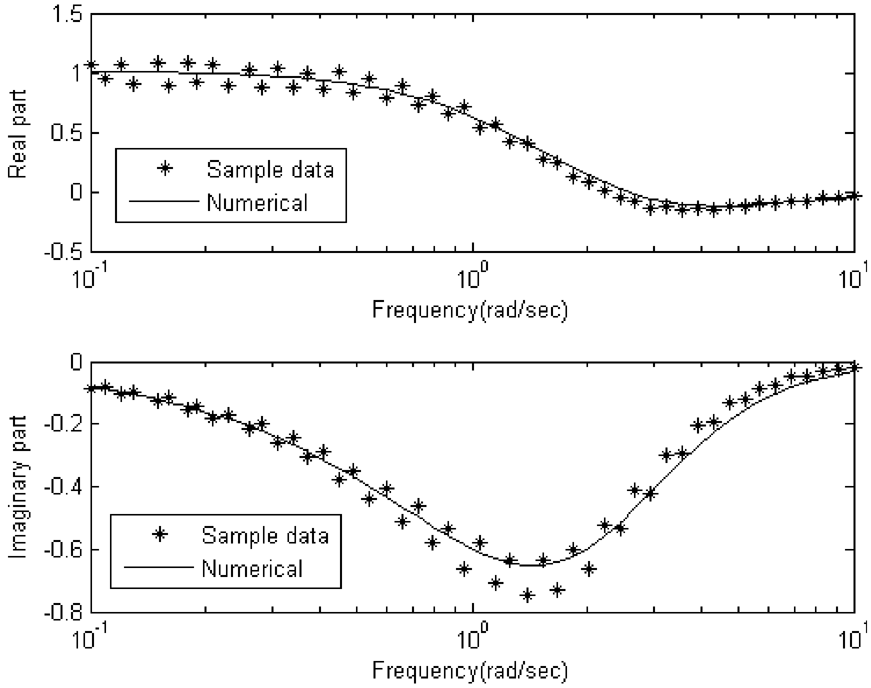
4.3.7 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ n = 0, m = 2 จากหัวข้อที่ 4.3.2 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10%



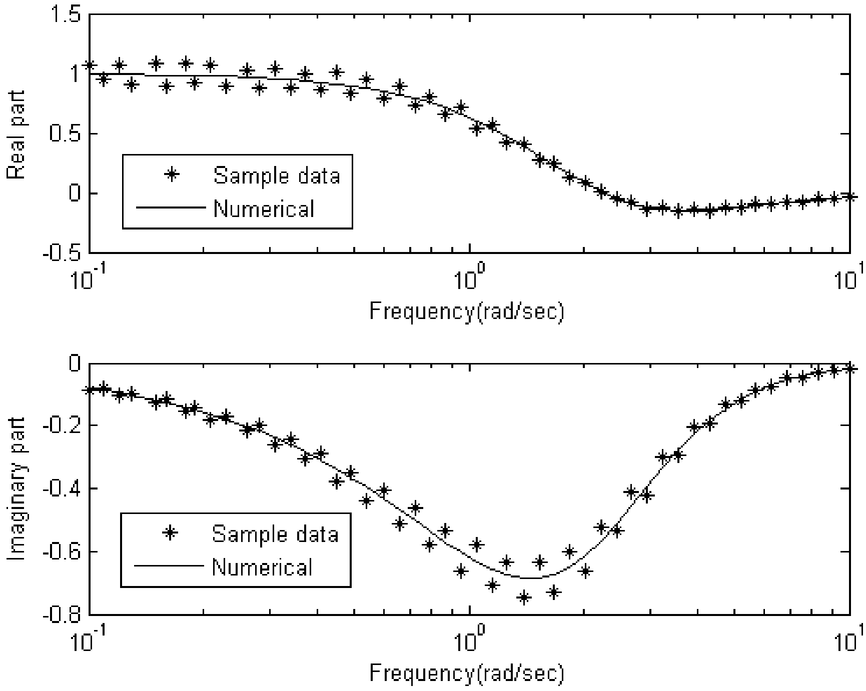
(a)


1.5
1
0.5
0
-0.5
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(b)

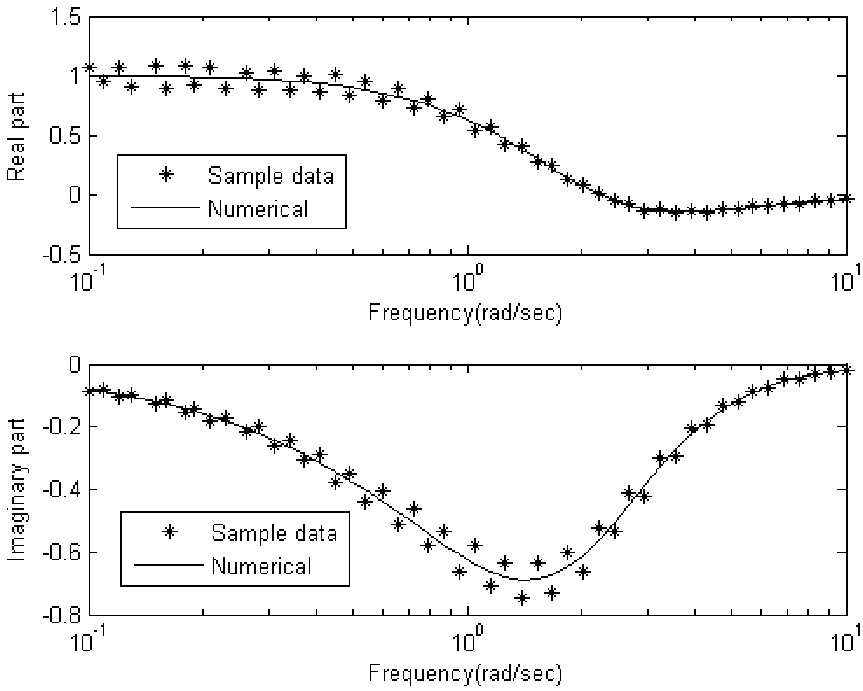

1.5
1
0.5
0
-0.5
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(c)



1.5
1
0.5
0
-0.5
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.7 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.2 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 0, m = 2 และกำหนดให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% และมีการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักให้กับการคำนวณ โดยการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาช่วยในการถ่วงน้ำหนัก จากตาราง 4.7 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่า โปรแกรม (e) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 0.432772 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_2 = 8.704x10^{-4}, b_1 = -1.241x10^{-4}, b_0 = 1.0010 และ a_2 = 0.1999, a_1 = 0.7994, a_0 = 1.0000 และจากรูปที่ 4.7 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน จากการสังเกตพบว่า

ตารางที่ 4.7 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่โพลมีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j

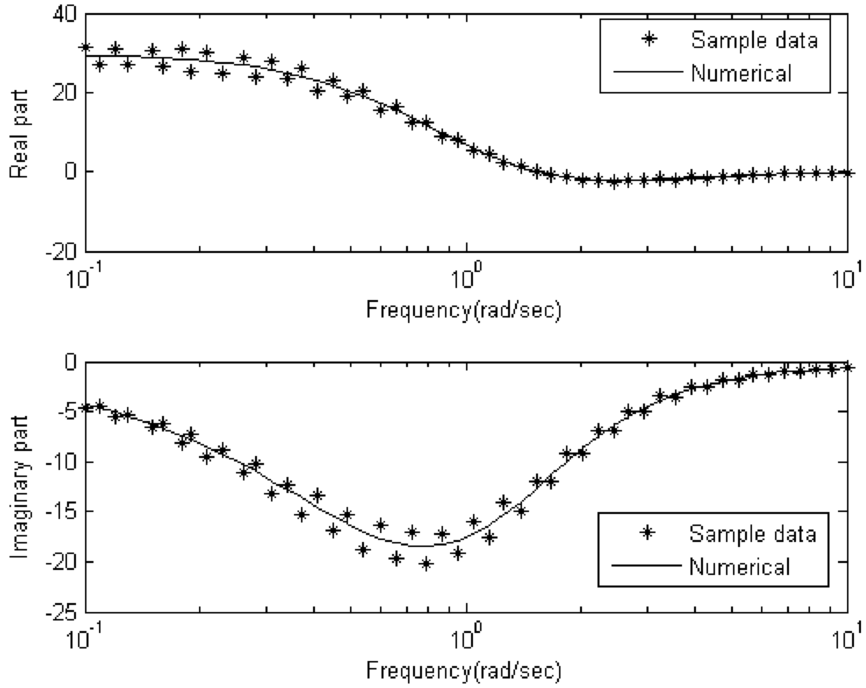
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.8$ $a_2 = 0.2$	$b_5 = -1.6560\times10^{-6}$ $a_5 = 3.3420\times10^{-6}$ $b_4 = 1.6530\times10^{-5}$ $a_4 = 3.6590\times10^{-3}$ $b_3 = -2.3120\times10^{-4}$ $a_3 = 1.5560\times10^{-2}$ $b_2 = 1.9980\times10^{-2}$ $a_2 = 0.2141$ $b_1 = -4.9410$ $a_1 = 0.7917$ $b_0 = 0.9988$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{-1.656\times10^{-6}(j\omega)^5 + 1.653\times10^{-5}(j\omega)^4 - 2.312\times10^{-4}(j\omega)^3 + 1.998\times10^{-2}(j\omega)^2 - 4.941(j\omega) + 0.9988}{3.342\times10^{-6}(j\omega)^5 + 3.659\times10^{-3}(j\omega)^4 + 1.556\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.2141(j\omega)^2 + 0.7917(j\omega) + 1}$	0.433324
(b)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.8$ $a_2 = 0.2$	$b_7 = -4.757\times10^{-7}$ $a_7 = 7.8170\times10^{-7}$ $b_6 = 6.2660\times10^{-6}$ $a_6 = 8.9550\times10^{-4}$ $b_5 = -8.3420\times10^{-5}$ $a_5 = 3.9640\times10^{-3}$ $b_4 = 5.2890\times10^{-3}$ $a_4 = 6.8240\times10^{-2}$ $b_3 = -3.0050\times10^{-3}$ $a_3 = 0.2693$ $b_2 = 0.3399$ $a_2 = 0.5269$ $b_1 = 5.869\times10^{-3}$ $a_1 = 0.7951$ $b_0 = 1.0070$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{-4.757\times10^{-7}(j\omega)^7 + 6.266\times10^{-6}(j\omega)^6 - 8.342\times10^{-5}(j\omega)^5 + 5.289\times10^{-3}(j\omega)^4 - 3.005\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.3399(j\omega)^2 + 5.869\times10^{-3}(j\omega) + 1.007}{7.817\times10^{-7}(j\omega)^7 + 8.955\times10^{-4}(j\omega)^6 + 3.964\times10^{-3}(j\omega)^5 + 6.824\times10^{-2}(j\omega)^4 + 0.2693(j\omega)^3 + 0.5269(j\omega)^2 + 0.7951(j\omega) + 1}$	0.432890

ตารางที่ 4.7 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่โพลมีค่าเท่ากับ 2+j, 2-j (ต่อ)

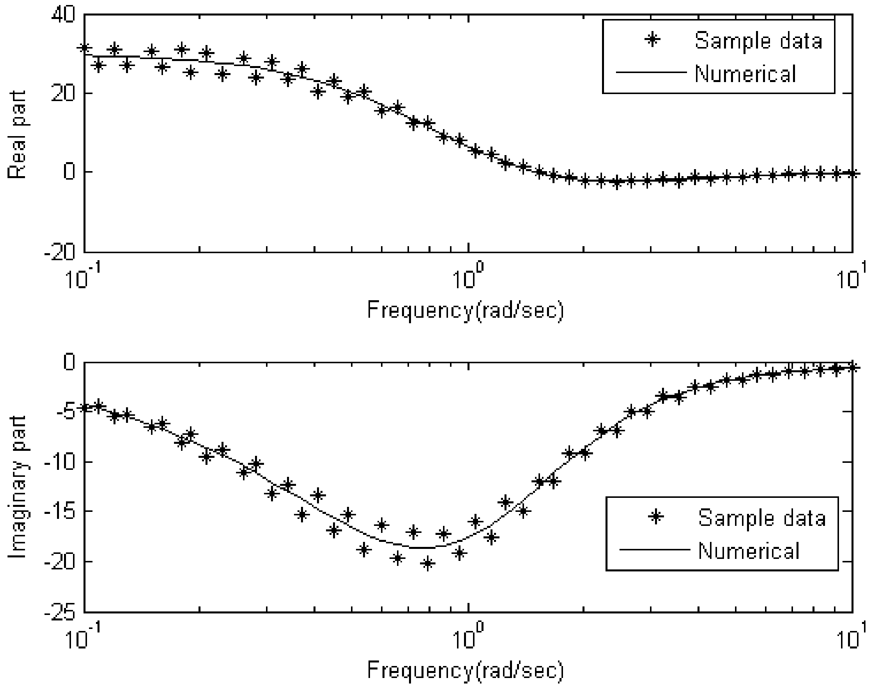
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(c)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.8$ $a_2 = 0.2$	$b_1 = 4.5270\times10^{-3}$ $a_1 = 0.1578$ $b_0 = 1.0150$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{4.527\times10^{-3}(j\omega)+1.015}{0.1578(j\omega)+1}$	0.504411
(d)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.8$ $a_2 = 0.2$	$b_3 = -7.0570\times10^{-5}$ $a_3 = 7.0710\times10^{-4}$ $b_2 = 6.0500\times10^{-4}$ $a_2 = 0.1946$ $b_1 = -3.1740\times10^{-3}$ $a_1 = 0.7895$ $b_0 = 0.9947$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-7.057\times10^{-5}(j\omega)^3 + 6.05\times10^{-4}(j\omega)^2 - 3.174\times10^{-3}(j\omega) + 0.9947}{7.071\times10^{-4}(j\omega)^3 + 0.1946(j\omega)^2 + 0.7895(j\omega)+1}$	0.434986
(e)	$b_0 = 1$ $a_1 = 0.8$ $a_2 = 0.2$	$b_2 = 8.7040\times10^{-5}$ $a_2 = 0.1999$ $b_1 = -1.2410\times10^{-3}$ $a_1 = 0.7994$ $b_0 = 1.001$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{8.704\times10^{-5}(j\omega)^2 - 1.241\times10^{-5}(j\omega)+1.001}{0.1999(j\omega)^2 + 0.7994(j\omega)+1}$	0.432772

สำหรับโปรแกรม (b) นั้น เส้นกราฟที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้น จะเกิดการแกว่งที่ความถี่ประมาณ 1.0 - 2.0 Hz ที่กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ ส่วนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ กราฟมีความสอดคล้องกันระหว่างเส้นกราฟที่ได้จากโปรแกรม (b) กับชุดข้อมูล และเมื่อสังเกตจากตาราง 4.7 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชัน ถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b), (c), (d) และ (e) นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 0.433324, 0.432890, 0.504411, 0.434986 และ 0.432772 ตามลำดับ

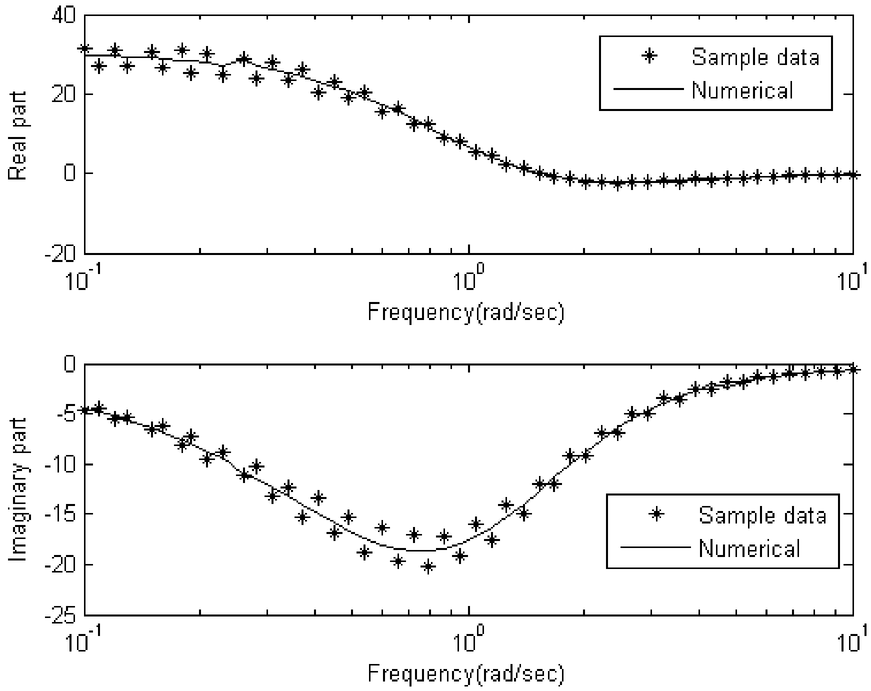
4.3.8 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 2, m = 3 จากหัวข้อที่ 4.3.3 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10%



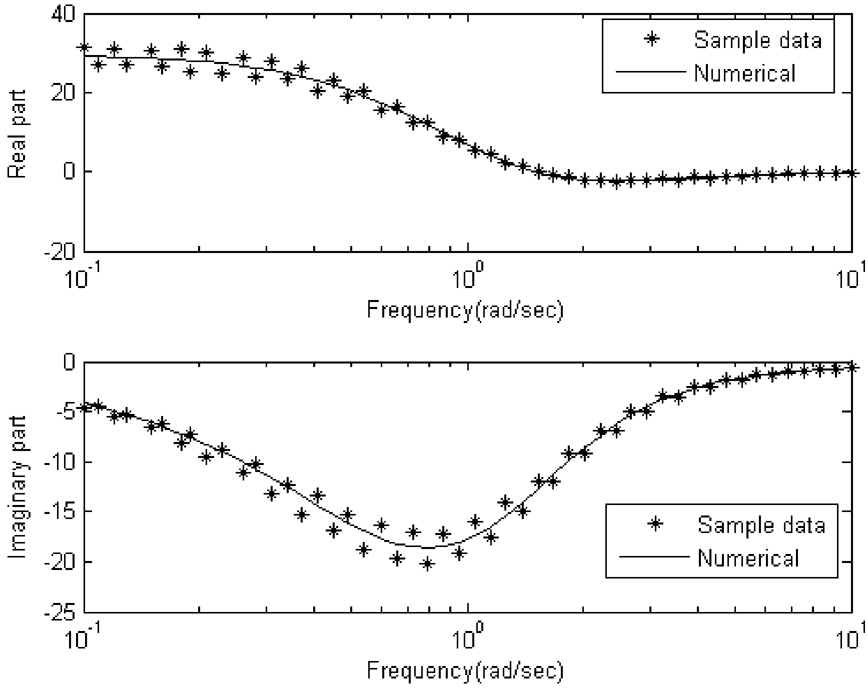
(a)


40
20
0
-20
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
0
-5
-10
-15
-20
-25
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

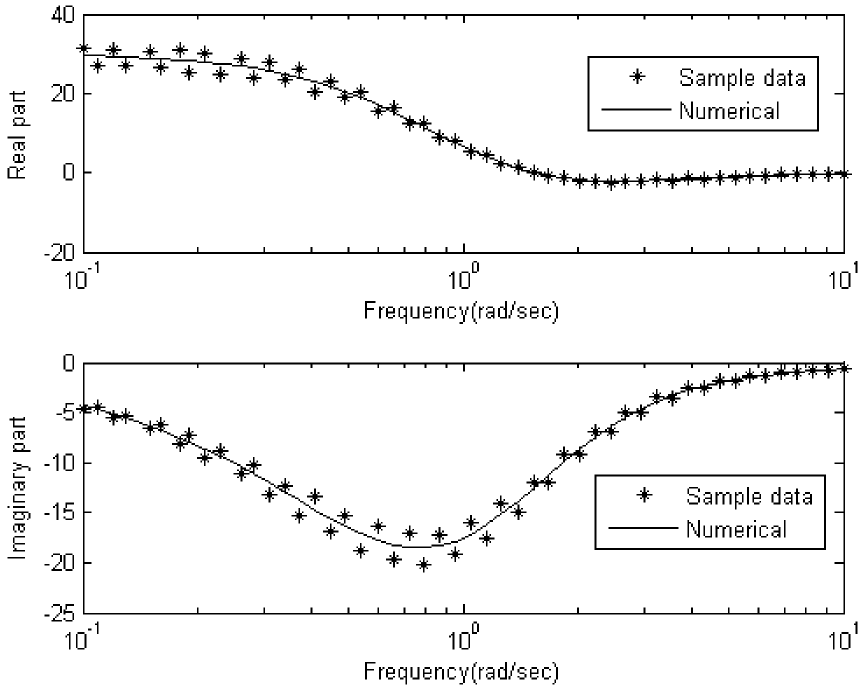
(b)


40
20
0
-20
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
0
-5
-10
-15
-20
-25
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(c)


40
20
0
-20
Real part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
0
-5
-10
-15
-20
-25
Imaginary part
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical

(d)



(e)

รูปที่ 4.8 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.3 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega^2\right)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\sigma^2\right)$, (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 2, m = 3 และกำหนดให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% และมีการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักให้กับการคำนวณ โดยการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาช่วยในการถ่วงน้ำหนัก จากตาราง 4.8 พบว่าจากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ว่าโปรแกรม (c) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 11.18367 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ $b_9 = -4.617x10^{-6}$, $b_8 = 6.277x10^{-4}$, $b_7 = 3.075x10^{-2}$, $b_6 = 0.3837$, $b_5 = 3.157$, $b_4 = 32.12$, $b_3 = 52.63$, $b_1 = 496.2$, $b_0 = 3.208$, $b_0 = 30.3$ และ $a_9 = 1.59x10^{-6}$, $a_8 = 5.851x10^{-3}$, $a_7 = 1.78x10^{-2}$, $a_6 = 0.5945$, $a_5 = 1.464$, $a_4 = 10.62$, $a_3 = 25.57$, $a_2 = 9.7560x10-2$, $a_1 = 0.4590$, $a_0 = 1.0000$

ตารางที่ 4.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -5, -6 และโพลมีค่าเท่ากับ -1, -2, -3

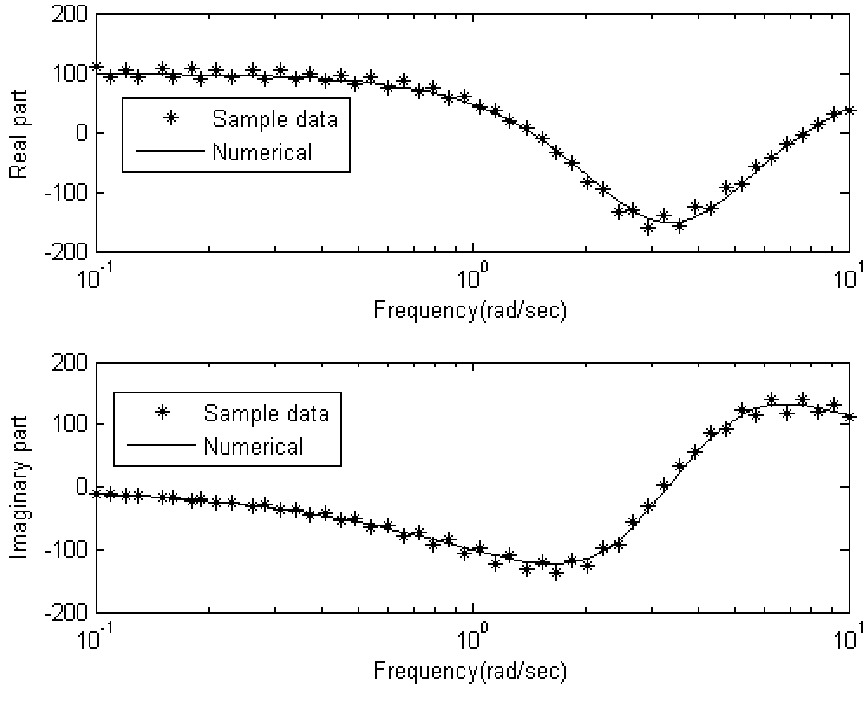
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_5 = -3.4760\times10^{-5}$ $a_5 = 1.1730\times10^{-5}$ $b_4 = 1.0110\times10^{-3}$ $a_4 = 1.0410\times10^{-2}$ $b_3 = 5.2730\times10^{-2}$ $a_3 = 3.1230\times10^{-2}$ $b_2 = 0.6155$ $a_2 = 0.6080$ $b_1 = 3.1920$ $a_1 = 1.5480$ $b_0 = 29.8700$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-3.476\times10^{-5}(j\omega)^5 + 1.011\times10^{-3}(j\omega)^4 + 5.273\times10^{-2}(j\omega)^3 + 06155(j\omega)^2 + 3.192(j\omega) + 29.87}{1.173\times10^{-5}(j\omega)^5 + 1.041\times10^{-2}(j\omega)^4 + 3.123\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.608(j\omega)^2 + 1.548(j\omega) + 1}$	11.29538
(b)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 7.9270\times10^{-2}$ $a_3 = 8.7670\times10^{-3}$ $b_1 = 3.5850$ $a_2 = 0.6288$ $b_0 = 29.9900$ $a_1 = 1.5680$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{7.927\times10^{-2}(j\omega)^2 + 3.585(j\omega) + 29.99}{8.767\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.6288(j\omega)^2 + 1.568(j\omega) + 1}$	11.27139
(c)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_9 = -4.1670\times10^{-6}$ $a_9 = 1.5900\times10^{-6}$ $b_8 = 6.2770\times10^{-4}$ $a_8 = 5.8510\times10^{-3}$ $b_7 = 3.0750\times10^{-2}$ $a_7 = 1.7810\times10^{-2}$ $b_6 = 0.3837$ $a_6 = 0.5945$ $b_5 = 3.1570$ $a_5 = 1.6460$ $b_4 = 32.1200$ $a_4 = 10.6200$ $b_3 = 52.6300$ $a_3 = 25.5700$ $b_2 = 496.200$ $a_2 = 16.8900$ $b_1 = 3.2080$ $a_1 = 1.5700$ $b_0 = 30.3000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-4.617\times10^{-6}(j\omega)^9 + 6.277\times10^{-4}(j\omega)^8 + 3.075\times10^{-2}(j\omega)^7 + 0.3837(j\omega)^6 + 3.157(j\omega)^5 + 32.12(j\omega)^4 + 52.63(j\omega)^3 + 496.2(j\omega)^2 + 3.208(j\omega) + 30.3}{1.59\times10^{-6}(j\omega)^9 + 5.851\times10^{-3}(j\omega)^8 + 1.781\times10^{-2}(j\omega)^7 + 0.5945(j\omega)^6 + 1.646(j\omega)^5 + 10.62(j\omega)^4 + 25.57(j\omega)^3 + 16.89(j\omega)^2 + 1.57(j\omega) + 1}$	11.18367

ตารางที่ 4.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -5, -6 และโพลมีค่าเท่ากับ -1, -2, -3 (ต่อ)

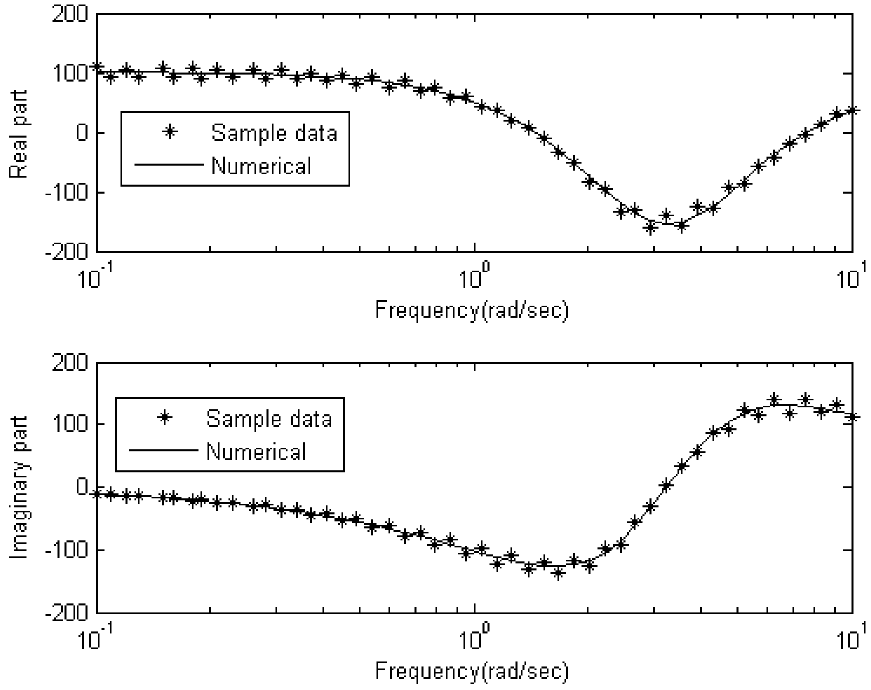
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(d)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_3 = 2.9840\times10^{-3}$ $a_4 = 2.0990\times10^{-4}$ $b_2 = 0.5100$ $a_3 = 8.3230\times10^{-2}$ $b_1 = 7.1950$ $a_2 = 0.8124$ $b_0 = 29.5900$ $a_1 = 1.6470$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.984\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.51(j\omega)^2 + 7.195(j\omega) + 29.59}{2.099\times10^{-4}(j\omega)^4 + 8.323\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.8124(j\omega)^2 + 0.1647(j\omega) + 1}$	11.42687
(e)	$b_2 = 1.0000$ $a_3 = 0.1667$ $b_1 = 11.0000$ $a_2 = 1.0000$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8330$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 3.3120\times10^{-2}$ $a_2 = 0.5986$ $b_1 = 3.3510$ $a_1 = 1.5590$ $b_0 = 30.020$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3.312\times10^{-2}(j\omega)^2 + 3.351(j\omega) + 30.02}{0.5986(j\omega)^2 + 1.559(j\omega) + 1}$	11.26641

และจากรูปที่ 4.8 พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้ว พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน แสดงว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้จากโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นสามารถประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้จากส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ได้สอดคล้องกัน จากการสังเกตพบว่าสำหรับโปรแกรม (c) นั้น เส้นกราฟที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนที่เกิดจากการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้น เกิดจากการแกว่งตัวในช่วงความถี่โดยประมาณ 0.3 - 0.4 Hz ที่กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ และเมื่อสังเกตจากตาราง 4.8 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b), (c), (d) และ (e) นั้นมีค่าใกล้เคียงกัน ดังนี้คือ 11.29538, 11.27139, 11.18367, 11.42687 และ 11.26641 ตามลำดับ

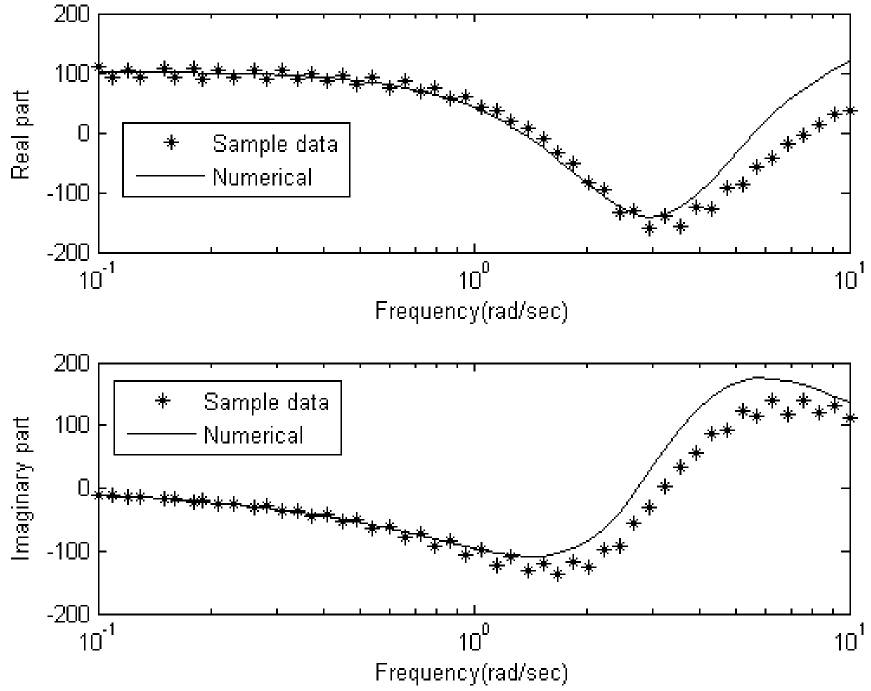
4.3.9 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 4, m = 4 จากหัวข้อที่ 4.3.4 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10%



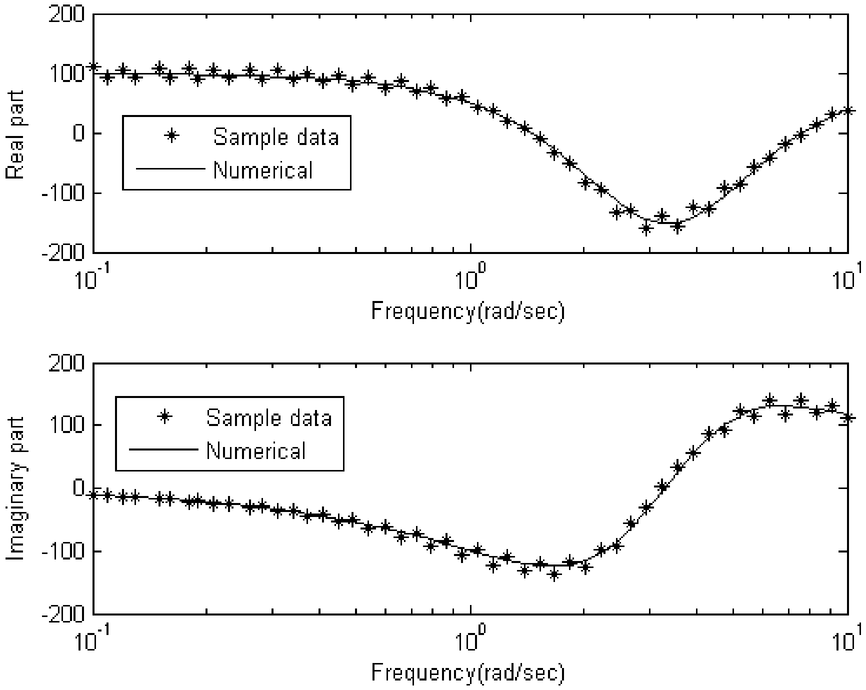
(a)


200
100
0
-100
-200
Real part
Sample data
Numerical
10-1
100
101
Frequency(rad/sec)
200
100
0
-100
-200
Imaginary part
Sample data
Numerical
10-1
100
101
Frequency(rad/sec)

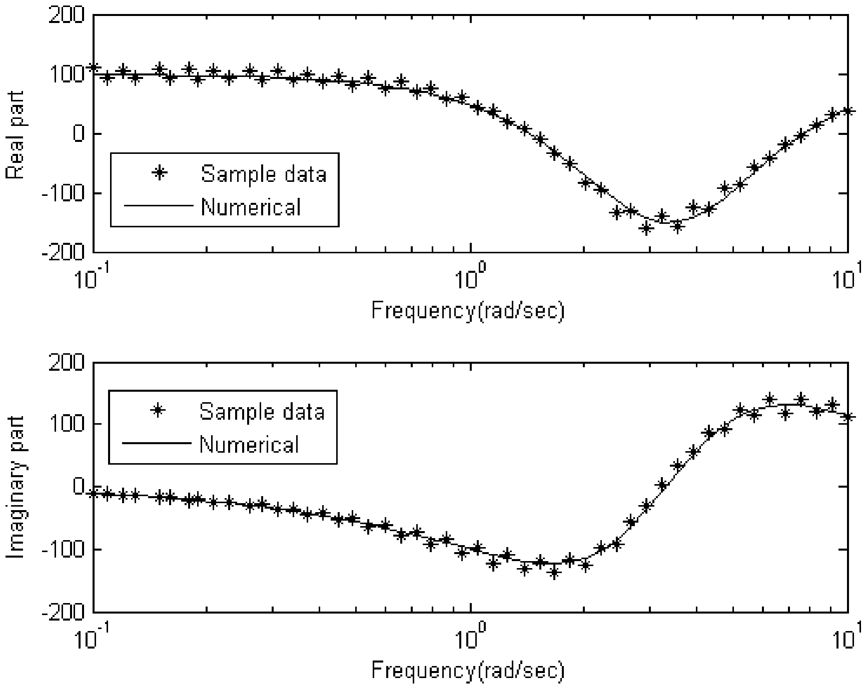
(b)


200
100
0
-100
-200
Real part
Sample data
Numerical
10-1
100
101
Frequency(rad/sec)
200
100
0
-100
-200
Imaginary part
Sample data
Numerical
10-1
100
101
Frequency(rad/sec)

(c)


200
100
0
-100
-200
Real part
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)
200
100
0
-100
-200
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.9 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับความถี่ของฟังก์ชันถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.4 โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 4, m = 4 และกำหนดให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% และมีการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักให้กับการคำนวณ โดยการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาช่วยในการถ่วงน้ำหนัก จากการสังเกตจากตาราง 4.9 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b), (c), (d) และ (e) นั้นมีค่าดังนี้คือ 73.40000, 66.88256, 315.50240, 71.92250 และ 74.32050 ตามลำดับ จะได้ว่าโปรแกรม (b) มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดคือ 66.88256โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_3 = 0.1795, b_1 = 9.154, b_0 = -68.3600, b_0 = 101.2000 และ $a_3 = 3.8910\text{x}10^{-4}$, $a_2 = 9.7560\text{x}10^{-2}$, a_1 = 0.4590,

ตารางที่ 4.9 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -2, -5, 3+j, 3-j และโพลมีค่าเท่ากับ -5,-3, 2+j, 2-j

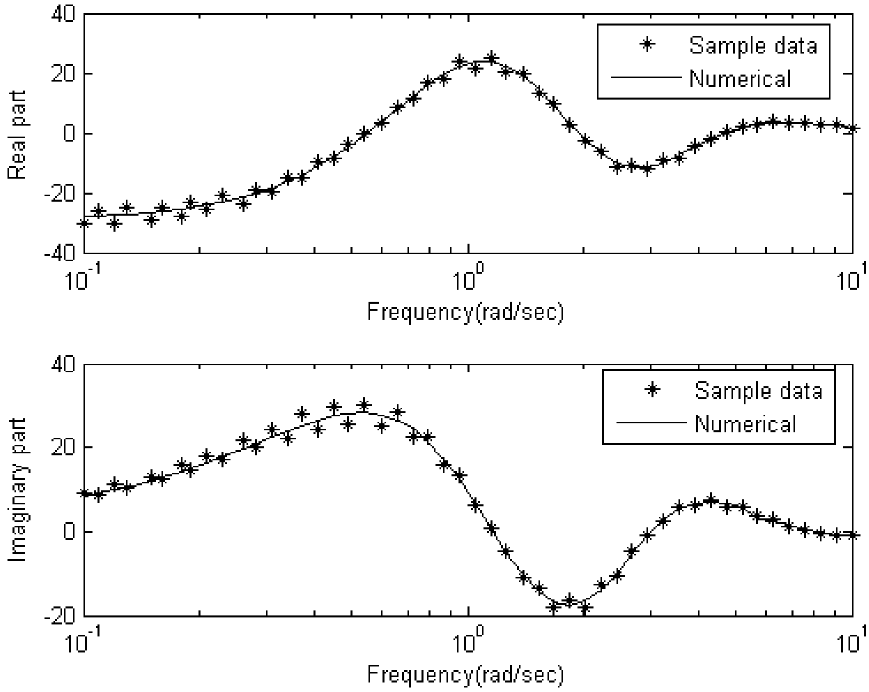
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 9.5050$ $a_2 = 8.7380\times10^{-2}$ $b_1 = -70.0300$ $a_1 = 0.4622$ $b_0 = 98.6000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{9.505(j\omega)^2 - 70.03(j\omega) + 98.6}{8.738\times10^{-2}(j\omega)^2 + 0.4622(j\omega) + 1}$	73.40000
(b)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_3 = 0.1795$ $a_3 = 3.8910\times10^{-4}$ $b_2 = 9.1540$ $a_2 = 9.7560\times10^{-2}$ $b_1 = -68.3600$ $a_1 = 0.4590$ $b_0 = 101.2000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{0.1795(j\omega)^3 + 9.154(j\omega)^2 - 68.36(j\omega) + 101.2}{3.891\times10^{-4}(j\omega)^3 + 9.756\times10^{-2}(j\omega)^2 + 0.459(j\omega) + 1}$	66.88256
(c)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 18.2100$ $a_2 = 9.9730$ $b_1 = -66.4300$ $a_1 = 0.4770$ $b_0 = 102.1000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{18.21(j\omega)^2 - 66.4330.48(j\omega) + 102.1}{9.973(j\omega)^2 + 0.477(j\omega) + 1}$	315.50240

ตารางที่ 4.9 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ -2, -5, 3+j, 3-j และโพลมีค่าเท่ากับ -5,-3, 2+j, 2-j (ต่อ)

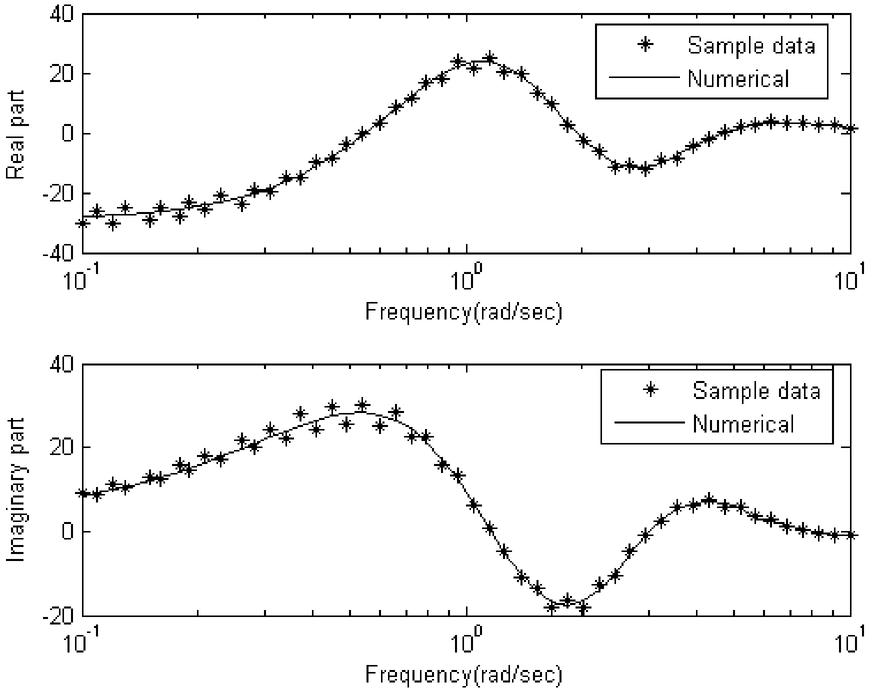
Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(d)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_3 = 0.1807$ $a_3 = 1.0770\times10^{-3}$ $b_2 = 8.3280$ $a_2 = 0.0955$ $b_1 = -66.1400$ $a_1 = 0.4596$ $b_0 = 97.3700$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{0.1899(j\omega)^3 + 8.469(j\omega)^2 - 66.59(j\omega) + 98.78}{1.098\times10^{-3}(j\omega)^3 + 9.562\times10^{-2}(j\omega)^2 + 0.4631(j\omega) + 1}$	71.92250
(e)	$b_4 = 1.0000$ $a_4 = 0.0083$ $b_3 = -1.0000$ $a_3 = 0.1000$ $b_2 = -22.0000$ $a_2 = 0.4583$ $b_1 = -10.0000$ $a_1 = 1.0333$ $b_0 = 100.0000$ $a_0 = 1.0000$	$b_2 = 9.3170$ $a_2 = 8.6970\times10^{-2}$ $b_1 = -68.9400$ $a_1 = 0.4582$ $b_0 = 96.9300$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{9.503(j\omega)^2 - 69.69(j\omega) + 98.43}{8.694\times10^{-2}(j\omega)^2 + 0.4625(j\omega) + 1}$	74.32050

a_0 = 1.0000 จากค่าความผิดพลาดพบว่าโปรแกรม (c) มีค่าความผิดพลาดสูงกว่าโปรแกรมอื่นมาก และเมื่อสังเกตจากรูปที่ 4.9 โปรแกรม (c) นั้น เส้นกราฟกับชุดข้อมูลนั้นไม่สอดคล้องกันที่ความถี่มีค่าตั้งแต่ 1 Hz เป็นต้นไป ส่วนโปรแกรมอื่น ๆ นั้นพบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้วจะได้ว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกัน แสดงว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้จากโปรแกรมเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นสามารถประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้จากส่วนจำนวนจริงกับความถี่และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่สอดคล้องกัน

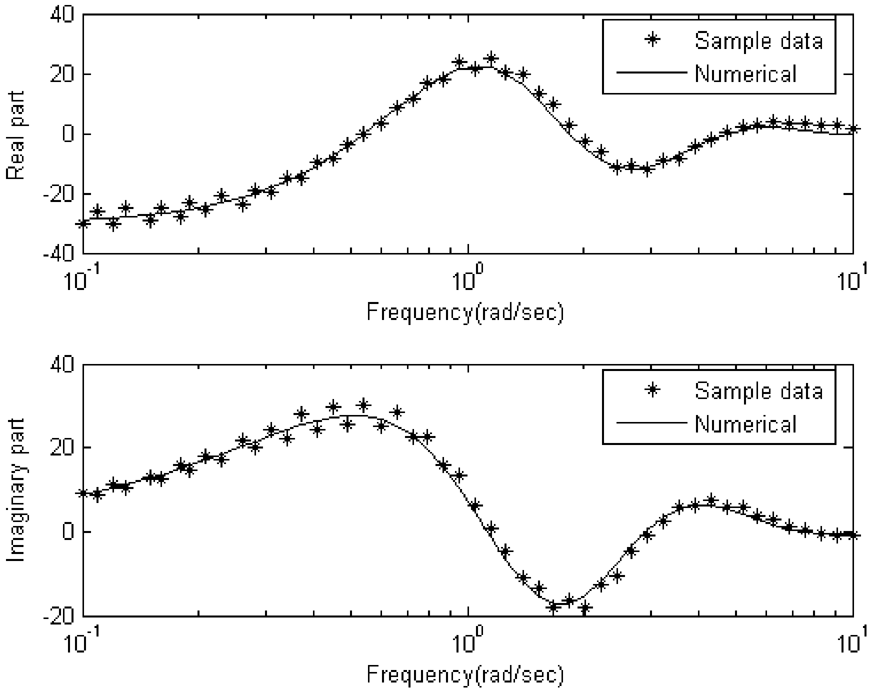
4.3.10 พิจารณาฟังก์ชันถ่ายโอน ที่ n = 3, m = 5 จากหัวข้อที่ 4.3.5 โดยกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล



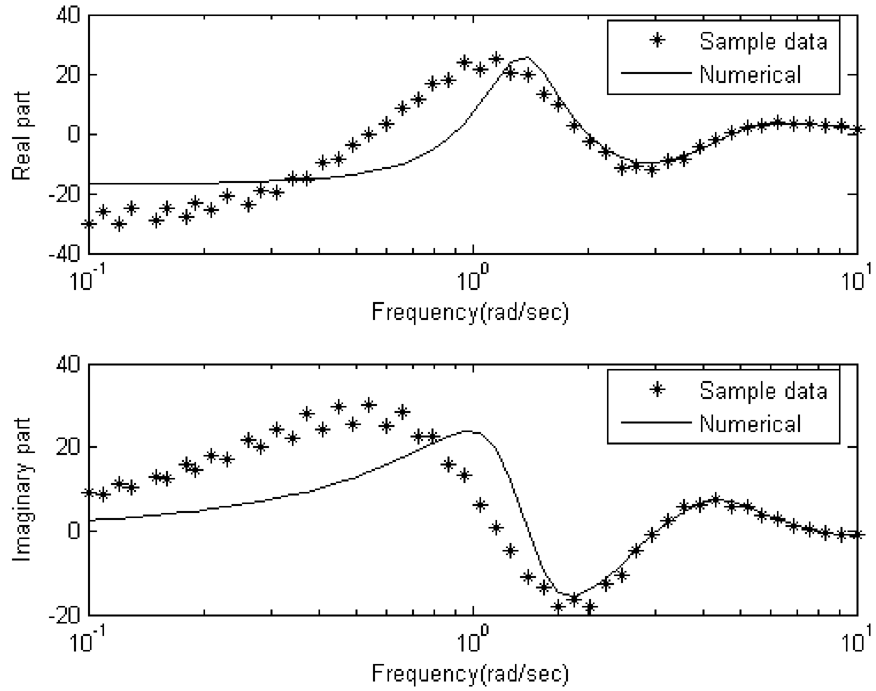
(a)


40
20
0
-20
-40
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
40
20
0
-20
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

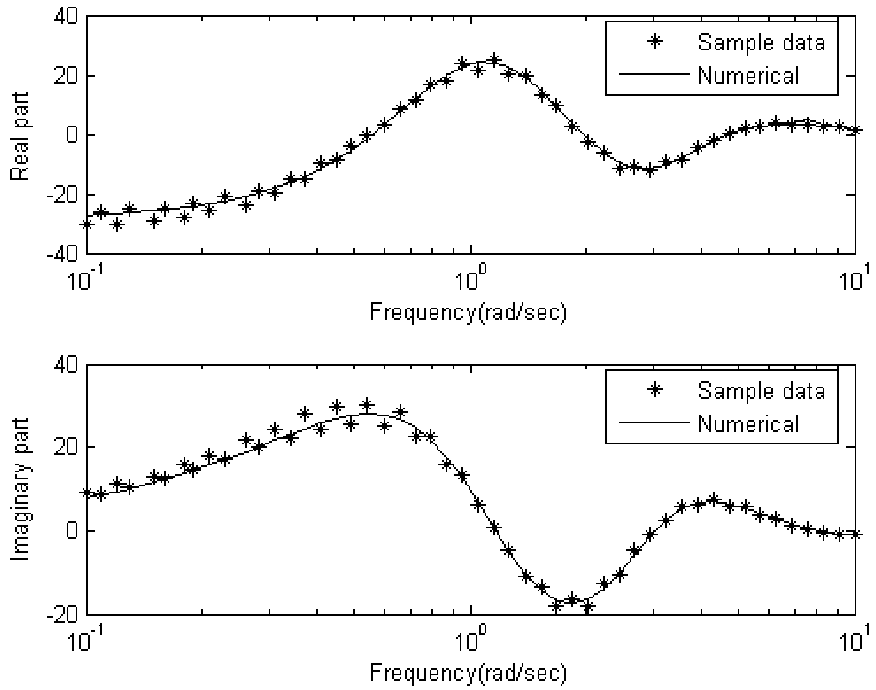
(b)


40
20
0
-20
-40
Real part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)
40
20
0
-20
Imaginary part
Sample data
Numerical
10^-1
10^0
10^1
Frequency(rad/sec)

(c)


Sample data
Numerical
Real part
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
Imaginary part
Frequency(rad/sec)

(d)


Sample data
Numerical
Real part
Frequency(rad/sec)
Sample data
Numerical
Imaginary part
Frequency(rad/sec)

(e)

รูปที่ 4.10 แผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ กับความถี่ ของฟังก์ชัน ถ่ายโอนตามหัวข้อ 4.3.5โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ ถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega^2\right)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\sigma^2\right)$, (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$

จากผลที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน โดยกำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้ในการทดสอบโปรแกรมมีค่า n = 3, m = 5 และกำหนดให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% และมีการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักให้กับการคำนวณ โดยการเพิ่มวิธีการถ่วงน้ำหนักโดยใช้ ค่าความแปรปรวนของชุดข้อมูลมาช่วยในการถ่วงน้ำหนัก จากการสังเกตจากตาราง 4.10 พบว่าค่าความผิดพลาดที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของโปรแกรม (a), (b), (c), (d) และ (e) นั้นมีค่าดังนี้คือ 12.65607, 12.25032, 16.91956, 92.32480 และ 14.15827 ตามลำดับ จะได้ว่าโปรแกรม (b) มีค่าความผิดพลาดน้อยสุดคือ 12.25032 โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ b_4 = -2.672x10^{-3}, b_3 = 0.9771, b_1 = -10.05, b_0 = 30.82, b_0 = -30.1 และ a_5 = -4.261x10^{-3}, a_4 = 7.192x10^{-2}, a_3 = 0.4584, a_2 = 1.348, a_1 = 1.891, a_0 = 1.0000

ตารางที่ 4.10 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และโพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_3 = 1.0000$ $b_2 = -10.0000$ $b_1 = 31.0000$ $b_0 = -30.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $a_4 = 0.0729$ $a_3 = 0.4583$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$a_{10} = 3.3660\times10^{-7}$ $b_9 = 5.6020\times10^{-6}$ $a_9 = 3.4210\times10^{-6}$ $b_8 = -2.2170\times10^{-5}$ $a_8 = 7.8840\times10^{-5}$ $b_7 = 1.1110\times10^{-3}$ $a_7 = 5.6830\times10^{-4}$ $b_6 = -6.5320\times10^{-3}$ $a_6 = 5.8760\times10^{-3}$ $b_5 = 8.0180\times10^{-2}$ $a_5 = 3.0470\times10^{-2}$ $b_4 = -0.4904$ $a_4 = 0.1617$ $b_3 = 2.5500$ $a_3 = 0.5587$ $b_2 = -10.5200$ $a_2 = 1.4430$ $b_1 = 30.1600$ $a_1 = 1.8380$ $b_0 = -29.2000$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{5.602\times10^{-6}(j\omega)^9 - 2.217\times10^{-6}(j\omega)^8 + 1.111\times10^{-3}(j\omega)^7 - 6.532\times10^{-3}(j\omega)^6 + 8.018\times10^{-2}(j\omega)^5 - 0.4904(j\omega)^4 + 2.55(j\omega)^3 - 10.52(j\omega)^2 + 30.16(j\omega) - 29.2}{3.366\times10^{-7}(j\omega)^{10} + 3.421\times10^{-6}(j\omega)^9 + 7.884\times10^{-5}(j\omega)^8 + 5.683\times10^{-4}(j\omega)^7 + 5.876\times10^{-3}(j\omega)^6 + 3.047\times10^{-2}(j\omega)^5 + 0.1617(j\omega)^4 + 0.5587(j\omega)^3 + 1.443(j\omega)^2 + 1.838(j\omega) + 1}$	12.65607
(b)	$b_3 = 1.0000$ $b_2 = -10.0000$ $b_1 = 31.0000$ $b_0 = -30.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $a_4 = 0.0729$ $a_3 = 0.4583$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$a_5 = 4.2610\times10^{-3}$ $b_4 = -2.6720\times10^{-3}$ $a_4 = 7.1920\times10^{-2}$ $b_3 = 0.9771$ $a_3 = 0.4584$ $b_2 = -10.0500$ $a_2 = 1.3480$ $b_1 = 30.1000$ $a_1 = 1.3480$ $b_0 = -30.3700$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{-2.672\times10^{-3}(j\omega)^4 + 0.9771(j\omega)^3 - 10.05(j\omega)^2 + 30.82(j\omega) - 30.1}{4.261\times10^{-3}(j\omega)^5 + 7.192\times10^{-2}(j\omega)^4 + 0.4584(j\omega)^3 + 1.348(j\omega)^2 + 1.891(j\omega) + 1}$	12.25032

ตารางที่ 4.10 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และโพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8 (ต่อ)

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(c)	$b_3 = 1.0000$ $b_2 = -10.0000$ $b_1 = 31.0000$ $b_0 = -30.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $a_4 = 0.0729$ $a_3 = 0.4583$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$a_5 = 6.3240\times10^{-3}$ $b_4 = -0.1388$ $a_4 = 8.2970\times10^{-2}$ $b_3 = 0.7255$ $a_3 = 0.5219$ $b_2 = -11.8900$ $a_2 = 1.4370$ $b_1 = 29.5500$ $a_1 = 1.9470$ $b_0 = -30.3500$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-0.1388(j\omega)^4 + 0.7255(j\omega)^3 - 11.89(j\omega)^2 + 29.55(j\omega) - 30.35}{6.324\times10^{-3}(j\omega)^5 + 8.297\times10^{-2}(j\omega)^4 + 0.5219(j\omega)^3 + 1.437(j\omega)^2 + 1.947(j\omega) + 1}$	16.91956
(d)	$b_3 = 1.0000$ $b_2 = -10.0000$ $b_1 = 31.0000$ $b_0 = -30.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $a_4 = 0.0729$ $a_3 = 0.4583$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$b_4 = -3.4660\times10^{-2}$ $a_4 = 2.7450\times10^{-2}$ $b_3 = 0.5951$ $a_3 = 0.1524$ $b_2 = -5.4600$ $a_2 = 0.6999$ $b_1 = 12.0800$ $a_1 = 0.7291$ $b_0 = -17.0400$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-3.466\times10^{-2}(j\omega)^4 + 0.5951(j\omega)^3 - 5.46(j\omega)^2 + 12.08(j\omega) - 17.04}{2.745\times10^{-2}(j\omega)^4 + 0.1524(j\omega)^3 + 0.6999(j\omega)^2 + 0.7291(j\omega) + 1}$	92.32480

ตารางที่ 4.10 แสดงผลการคำนวณที่ได้จากการกำหนดให้ชุดข้อมูลมีความแปรปรวนของชุดข้อมูล ±10% ที่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 2, 5, 8 และโพลมีค่าเท่ากับ -1.5, -2, 3+j, 3-j, 8 (ต่อ)

Program	Plant	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(e)	$b_3 = 1.0000$ $b_2 = -10.0000$ $b_1 = 31.0000$ $b_0 = -30.0000$ $a_5 = 4.1667\times10^{-3}$ $a_4 = 0.0729$ $a_3 = 0.4583$ $a_2 = 1.3542$ $a_1 = 1.8917$ $a_0 = 1.0000$	$a_8 = 1.0300\times10^{-5}$ $b_7 = 1.9590\times10^{-4}$ $a_7 = 9.8490\times10^{-5}$ $b_6 = -9.6740\times10^{-4}$ $a_6 = 2.0480\times10^{-3}$ $b_5 = 3.3820\times10^{-2}$ $a_5 = 1.3120\times10^{-2}$ $b_4 = -0.2156$ $a_4 = 0.1070$ $b_3 = 1.8150$ $a_3 = 0.4597$ $b_2 = -9.7310$ $a_2 = 1.3530$ $b_1 = 30.1300$ $a_1 = 1.7530$ $b_0 = -28.1900$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{-1.959\times10^{-4}(j\omega)^7 - 9.674\times10^{-4}(j\omega)^6 + 3.382\times10^{-2}(j\omega)^5 - 0.2156(j\omega)^4 + 1.815(j\omega)^3 - 9.731(j\omega)^2 + 30.13(j\omega) - 28.19}{1.03\times10^{-5}(j\omega)^8 + 9.849\times10^{-5}(j\omega)^4 + 2.048\times10^{-3}(j\omega)^6 + 1.312\times10^{-2}(j\omega)^5 + 0.107(j\omega)^4 + 0.4597(j\omega)^3 + 1.353(j\omega)^2 + 1.753(j\omega) + 1}$	14.15827

พบว่าโปรแกรม (d) นั้นมีค่าความผิดพลาดสูงกว่าโปรแกรมอื่น ๆ มาก ตามมาด้วยโปรแกรม (c) และ (e) ตามลำดับ และเมื่อสังเกตจากรูปที่ 4.9 โปรแกรม (d) นั้น เส้นกราฟกับชุดข้อมูลนั้นไม่สอดคล้องกันที่ความถี่มีค่าตั้งแต่ 0.1 - 3 Hz ส่วนโปรแกรมอื่น ๆ นั้น พบว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้ เมื่อนำมาเขียนกราฟแล้วจะได้ว่าเส้นกราฟที่ได้จากการคำนวณกับจุดของ ชุดข้อมูลมีความสอดคล้องกันดี

จากปัญหาทดสอบที่ได้นำมาทดสอบโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคำนวณหากับค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่า ซึ่งพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมมีค่าไม่เท่ากับค่าของสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่า ไม่ว่าจะเป็นค่าของสัมประสิทธิ์ที่ได้ และลำดับขั้นของโพลิโนเมียน แต่ที่ $m = 1$ ค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมจะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่านั่นหมายความว่าเฉพาะค่าที่ $m = 1$ โปรแกรมสามารถจะคำนวณได้ค่าที่มีความแม่นยำมากที่สุด ซึ่งจากค่าความผิดพลาดที่ได้มีค่าน้อยที่สุดนั่นเอง โดยที่ลำดับขั้นของโพลิโนเมียนที่มากขึ้น ค่าความผิดพลาดก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย และค่าสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้จากโปรแกรมและค่าลำดับขั้นของโพลิโนเมียน ก็จะมีค่าแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทราบค่า แต่เมื่อพิจารณากราฟที่ได้จะมีความสอดคล้องกันระหว่างค่าที่ได้จากการคำนวณกับค่าของชุดข้อมูล ซึ่งแสดงว่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่คำนวณได้จากโปรแกรมมีความถูกต้องที่สามารถยอมรับได้ ในกรณีเพิ่มความแปรปรวนให้กับชุดข้อมูลเท่ากับ ±10% เพื่อจำลองชุดข้อมูลให้มีคล้ายคลึงกับชุดข้อมูลที่ได้จากการวัดจากปัญหาทดสอบ พบว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนได้ ซึ่งพบว่าความถูกต้องของสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนกับสัมประสิทธิ์ของปัญหาการทดสอบมีค่าความถูกต้อง โดยสังเกตจากค่าความผิดพลาด พบว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน ถ่ายโอนได้ค่าถูกต้องและแม่นยำที่สุดที่ลำดับชั้นของโพลิโนเมียนซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 และ 2 ($m = 1, 2$) ซึ่งค่าความผิดพลาดจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเมื่อมีลำดับชั้นของโพลิโนเมียนเพิ่มขึ้น แต่เมื่อสังเกตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริง, จำนวนเชิงซ้อนกับความถี่ พบว่าค่าที่ได้จากโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนกับจำนวนชุดข้อมูลจะมีความสอดคล้องกัน สำหรับค่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งจากการทดสอบโปรแกรมทั้งแบบไม่มีค่าความแปรปรวน และมีค่าความแปรปรวนเท่ากับ ±10% นั้น โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งโปรแกรมที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนักและมีการถ่วงน้ำหนัก โดยค่าที่เหมาะสมสำหรับใช้ในการถ่วงน้ำหนักคือ $1/\omega, 1/\omega^2, 1/\sigma^2$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า โปรแกรมที่เขียนขึ้นเพื่อสังเคราะห์หา

ฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนได้มีความถูกต้องและแม่นยำ ซึ่งจะสามารถนำไปใช้งานได้

4.4 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับปัญหายืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น

โปรแกรมที่ทำการเขียนขึ้นเพื่อสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อผ่านกระบวนการทดสอบกับปัญหามาตรฐาน พบว่ามีความแม่นยำและมีความเสถียร จึงได้นำโปรแกรมดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับปัญหายืดหยุ่นหนืด โดยการนำผลการทดลองที่ได้มาทำการใช้ร่วมกับโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนเพื่อวิเคราะห์ผลของโปรแกรมสังเคราะห์ฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นว่ามีความถูกต้องและแม่นยำเพียงใดเพื่อนำมาใช้กับการทดลองจริง ซึ่งในการรันโปรแกรมนั้น ผู้ทำการวิจัยจะทำการนำชุดข้อมูลของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น อาทิ ความถี่, มอดุลัสพลังงานสะสม (Storage modulus), มอดุลัสการสูญเสีย (Loss modulus) มาเป็นอินพุทให้กับโปรแกรม แล้วนำไปเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างมอดุลัสพลังงานสะสมกับความถี่ และมอดุลัสการสูญเสียกับความถี่ เพื่อวิเคราะห์ผลของการสังเคราะห์ฟังก์ชันถ่ายโอนก็ได้

4.4.1 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับชุดข้อมูลของ Polybutadient พอลิเมอร์

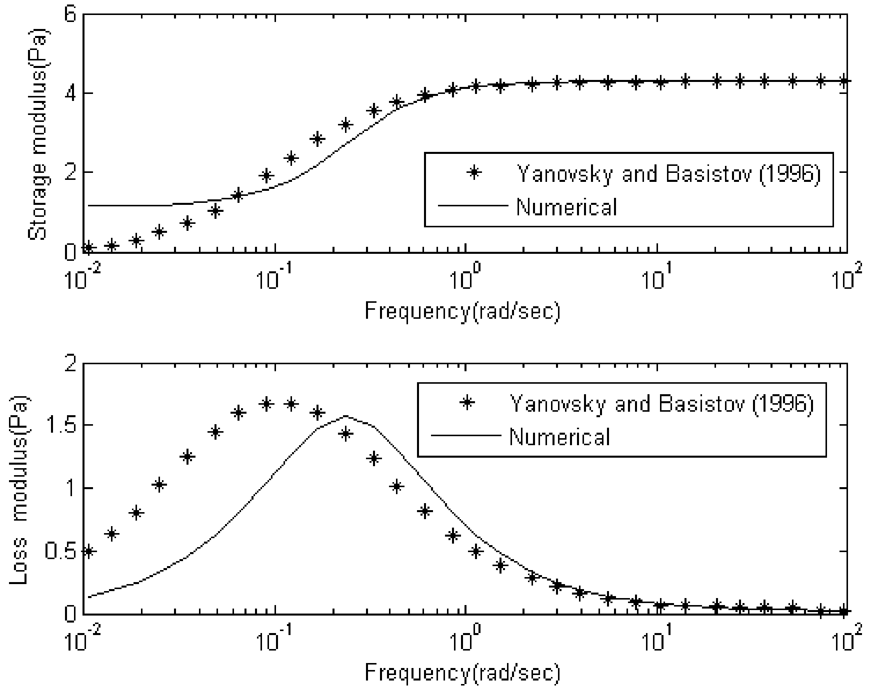
ตารางที่ 4.11 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient โดยมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 8.3×10^{-4}

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0105	0.0982	0.4900
2	0.0140	0.1724	0.6377
3	0.0187	0.2956	0.8099
4	0.0249	0.4923	1.0310
5	0.0348	0.7380	1.2522
6	0.0486	1.0573	1.4491
7	0.0646	1.4499	1.5968
8	0.0901	1.9160	1.6710
9	0.1198	2.3576	1.6719
10	0.1671	2.8238	1.5993
11	0.2332	3.2165	1.4286
12	0.3258	3.5357	1.2336

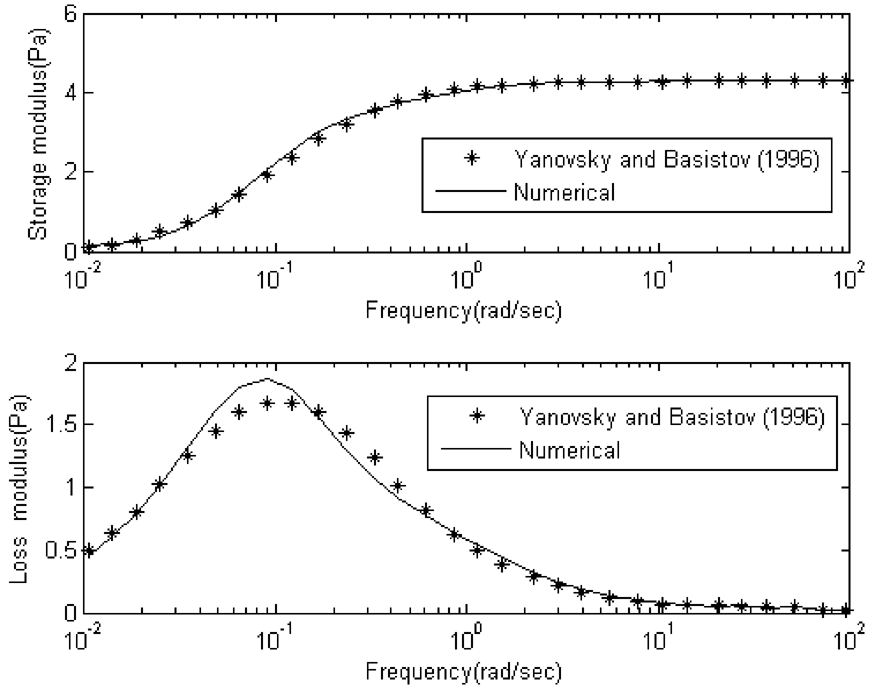
ตารางที่ 4.11 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient โดยมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 8.3×10^{-4} (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
13	0.4340	3.7813	1.0141
14	0.6074	3.9291	0.8189
15	0.8499	4.0769	0.6237
16	1.1343	4.1512	0.5023
17	1.5144	4.1764	0.3806
18	2.2262	4.2264	0.2834
19	2.9724	4.2516	0.2107
20	3.9697	4.2524	0.1627
21	5.5622	4.2777	0.1145
22	7.7974	4.2541	0.0907
23	10.4109	4.2794	0.0671
24	13.9040	4.2801	0.0680
25	20.4439	4.3056	0.0688
26	27.3033	4.3063	0.0452
27	36.4642	4.3071	0.0460
28	51.1045	4.3080	0.0467
29	71.6229	4.3088	0.0232
30	95.6539	4.3096	0.0240

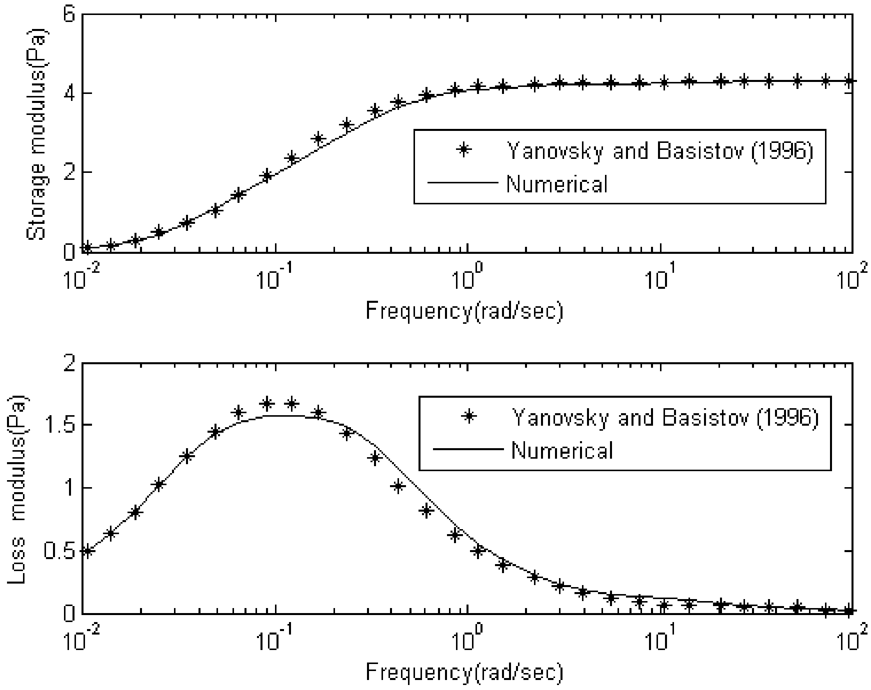
ที่มา: Yanovsky G. Yu., Basistov G. Yu. and Siginer A. Dennis (1996)


6
4
2
0
Storage modulus(Pa)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Frequency(rad/sec)
2
1.5
1
0.5
0
Loss modulus(Pa)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Frequency(rad/sec)

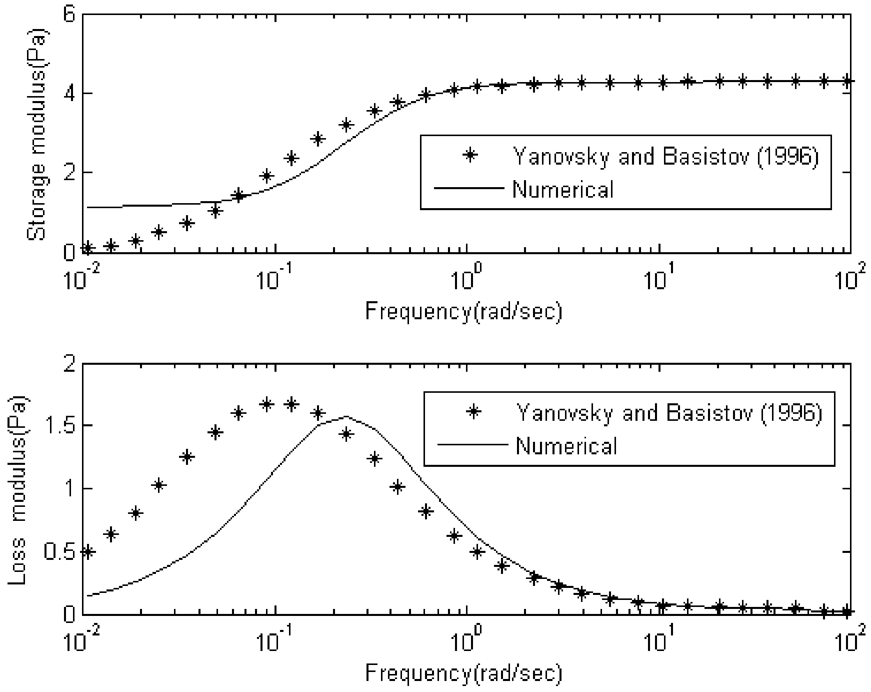
(a)


6
4
2
0
Storage modulus(Pa)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Frequency(rad/sec)
2
1.5
1
0.5
0
Loss modulus(Pa)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Frequency(rad/sec)

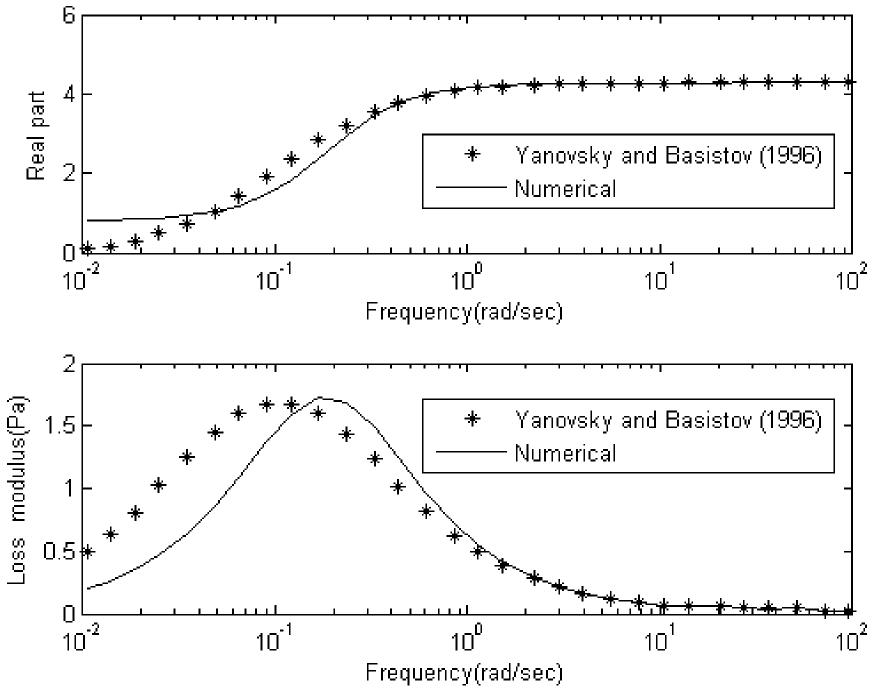
(b)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical

(c)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Yanovsky and Basistov (1996)
Numerical

(d)



(e)

รูปที่ 4.11 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริง กับความถี่และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขที่ 30 point, 0.01 - 100 Hz, $a_0 = 1$ ของ Polybutadient โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากตารางที่ 4.12 พบว่า โปรแกรม leastweigth2.m สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 0.588785 โดยมีค่าฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega) = \dfrac{22.7600(j\omega)^3 + 322.5000(j\omega)^2 + 49.0200(j\omega) + 0.01968}{5.2770(j\omega)^3 + 77.4700(j\omega)^2 + 23.2500(j\omega) + 1.0000}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ -14.016, -0.1533, -4.0253×10^{-4}

ตารางที่ 4.12 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\left\Vert E \right\Vert_2$
(a)	$b_4 = 5.3100\times10^{-5}$ $a_4 = 1.2250\times10^{-5}$ $b_3 = 6.9720\times10^{-3}$ $a_3 = 1.6240\times10^{-3}$ $b_2 = 0.2534$ $a_2 = 5.8850\times10^{-2}$ $b_1 = 18.2300$ $a_1 = 4.2580$ $b_0 = 1.1560$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{5.31\times10^{-5}(j\omega)^4 + 6.972\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.2534(j\omega)^2 + 18.23(j\omega) + 1.156}{1.225\times10^{-5}(j\omega)^4 + 1.624\times10^{-3}(j\omega)^3 + 5.885\times10^{-2}(j\omega)^2 + 4.258(j\omega) + 1}$	2.979437
(b)	$b_7 = 2.2540\times10^{-7}$ $a_7 = 5.2030\times10^{-8}$ $b_6 = 3.2390\times10^{-5}$ $a_6 = 7.5430\times10^{-6}$ $b_5 = 1.3970\times10^{-3}$ $a_5 = 3.2460\times10^{-4}$ $b_4 = 0.1120$ $a_4 = 0.0262$ $b_3 = 1.4540$ $a_3 = 0.3417$ $b_2 = 69.9300$ $a_2 = 16.3800$ $b_1 = 45.7200$ $a_1 = 13.5000$ $b_0 = 0.0800$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.254\times10^{-7}(j\omega)^7 + 3.239\times10^{-5}(j\omega)^6 + 1.397\times10^{-3}(j\omega)^5 + 0.112(j\omega)^4 + 1.454(j\omega)^3 + 69.93(j\omega)^2 + 45.72(j\omega) + 0.08}{5.203\times10^{-8}(j\omega)^7 + 7.543\times10^{-6}(j\omega)^6 + 3.246\times10^{-4}(j\omega)^5 + 0.0262(j\omega)^4 + 0.3417(j\omega)^3 + 16.38(j\omega)^2 + 13.5(j\omega) + 1}$	0.592566
(c)	$b_3 = 22.76000$ $a_3 = 5.2770$ $b_2 = 322.5000$ $a_2 = 77.4700$ $b_1 = 49.0200$ $a_1 = 23.2500$ $b_0 = 0.0197$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{22.76(j\omega)^3 + 322.5(j\omega)^2 + 49.02(j\omega) + 0.01968}{5.277(j\omega)^3 + 77.47(j\omega)^2 + 23.25(j\omega) + 1}$	0.588785

ตารางที่ 4.12 แสดงผลการทดลองของ Polybutadient (ต่อ)

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(d)	$b_4 = 1.5130\times10^{-4}$ $a_4 = 3.5030\times10^{-5}$ $b_3 = 6.9080\times10^{-3}$ $a_3 = 1.6210\times10^{-3}$ $b_2 = 0.4985$ $a_2 = 0.1157$ $b_1 = 18.8000$ $a_1 = 4.4200$ $b_0 = 1.1333$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{1.513\times10^{-4} + 6.908\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.4985(j\omega)^2 + 18.8(j\omega) + 1.1333}{3.503(j\omega)^4 + 1.621\times10^{-3}(j\omega)^3 + 0.1157(j\omega)^2 + 4.42(j\omega) + 1}$	2.888459
(e)	$b_6 = 7.1940\times10^{-8}$ $a_6 = 1.6540\times10^{-8}$ $b_5 = 1.9120\times10^{-5}$ $a_5 = 4.4440\times10^{-6}$ $b_4 = 5.3260\times10^{-4}$ $a_4 = 1.2400\times10^{-4}$ $b_3 = 6.1160\times10^{-2}$ $a_3 = 0.0142$ $b_2 = 0.7668$ $a_2 = 0.1808$ $b_1 = 23.3400$ $a_1 = 5.4800$ $b_0 = 0.8063$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{7.194\times10^{-8}(j\omega)^6 + 1.912\times10^{-5}(j\omega)^5 + 5.326\times10^{-4}(j\omega)^4 + 6.116\times10^{-2}(j\omega)^3 + 0.7668(j\omega)^2 + 23.34(j\omega) + 0.8063}{1.654\times10^{-8}(j\omega)^6 + 4.444\times10^{-6}(j\omega)^5 + 1.24\times10^{-4}(j\omega)^4 + 0.0142(j\omega)^3 + 0.1808(j\omega)^2 + 5.48(j\omega) + 1}$	2.076397

4.4.2 การประยุกต์ใช้โปรแกรมกับโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

จากบทความของ Kucukpinar et. al. (n.d.) เป็นบทความที่ทำการศึกษาช่วงของการเกิดการหลอมละลายของแสง โดยอาศัยแบบจำลอง Wagner เพื่อจำลองค่าของ Storage และ Loss modulus จากชุดข้อมูลที่ได้จากการทดสอบ ซึ่งพบว่าแบบจำลอง Wagner สามารถจำลองค่า Storage และ Loss modulus ได้ดี โดยสมการของ Wagner แสดงดังสมการที่ 4.1 และสมการที่ 4.2

$$G'(j\omega) = \sum \frac{G_{oi}\lambda_i^2\omega^2}{1+\lambda_i^2\omega^2} \tag{4.1}$$

$$G''(j\omega) = \sum \frac{G_{oi}\lambda_i\omega}{1+\lambda_i^2\omega^2} \tag{4.2}$$

โดยค่า G_{oi} คือ Strength

λ_i คือ Relaxation time

ตารางที่ 4.13 Relaxation time $\lambda_{i,s}$ และ Strength $G_{oi,Pa}$

	Exceed 350D60
$\lambda_{i,s}$	$G_{oi,Pa}$
10	1.94E+01
1	8.33E+02
0.1	3.93E+04
0.01	3.48E+05
0.001	3.70E+05
0.0001	1.00E+06

ที่มา: Esra, K., Kilham, M. K. and Paul, P. T. (n.d.)

โดย 350D60 มีน้ำหนักโมเลกุล (M_w) เท่ากับ 1000000 *g/mol*, อัตราส่วนระหว่างน้ำหนักโมเลกุล (M_w) ต่อน้ำหนักโมเลกุลเฉลี่ยกับจำนวนโมล (M_n) นั้นมีค่าเท่ากับ 2.5, ความหนาแน่นเท่ากับ 0.917 g/cm^3, จุดหลอมละลายที่ 119 $^\circ C$ และดัชนีการหลอมละลาย (Melt index) เท่ากับ 1 *g/10min*

4.4.2.1 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 10, $G_{oi,Pa}$ = 1.94E+01

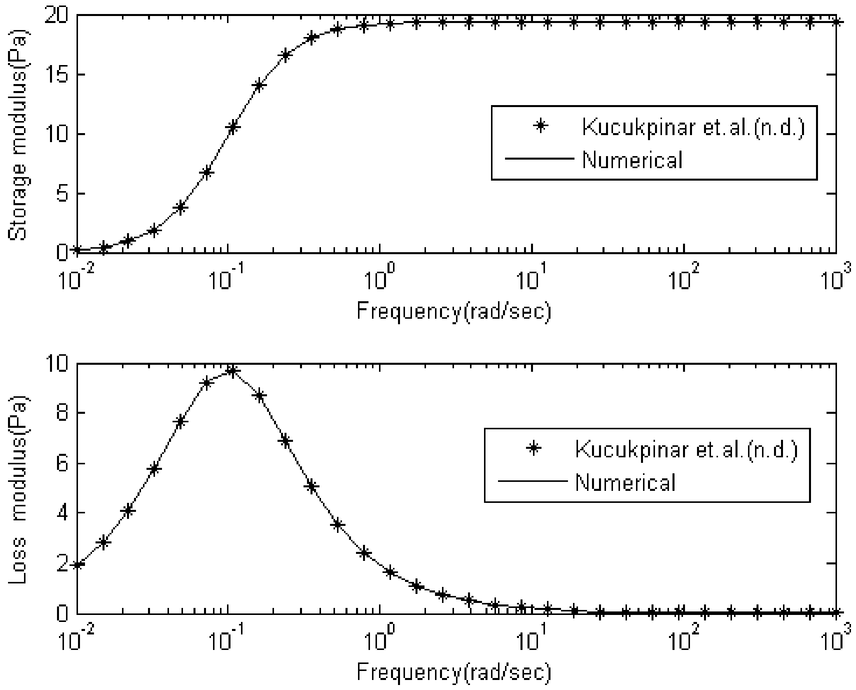
ตารางที่ 4.14 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.1921	1.9208
2	0.0149	0.4199	2.8230
3	0.0221	0.9051	4.0915
4	0.0329	1.8951	5.7597
5	0.0489	3.7486	7.6597
6	0.0728	6.7189	9.2305
7	0.1083	10.4686	9.6695
8	0.1610	14.0005	8.6946
9	0.2395	16.5200	6.8976
10	0.3562	17.9829	5.0482
11	0.5298	18.7327	3.5356
12	0.7880	19.0926	2.4228
13	1.1721	19.2598	1.6432
14	1.7433	19.3364	1.1092
15	2.5929	19.3712	0.7471
16	3.8566	19.3870	0.5027
17	5.7362	19.3941	0.3381
18	8.5317	19.3973	0.2274
19	12.6896	19.3988	0.1529
20	18.8739	19.3995	0.1028
21	28.0722	19.3998	0.0691

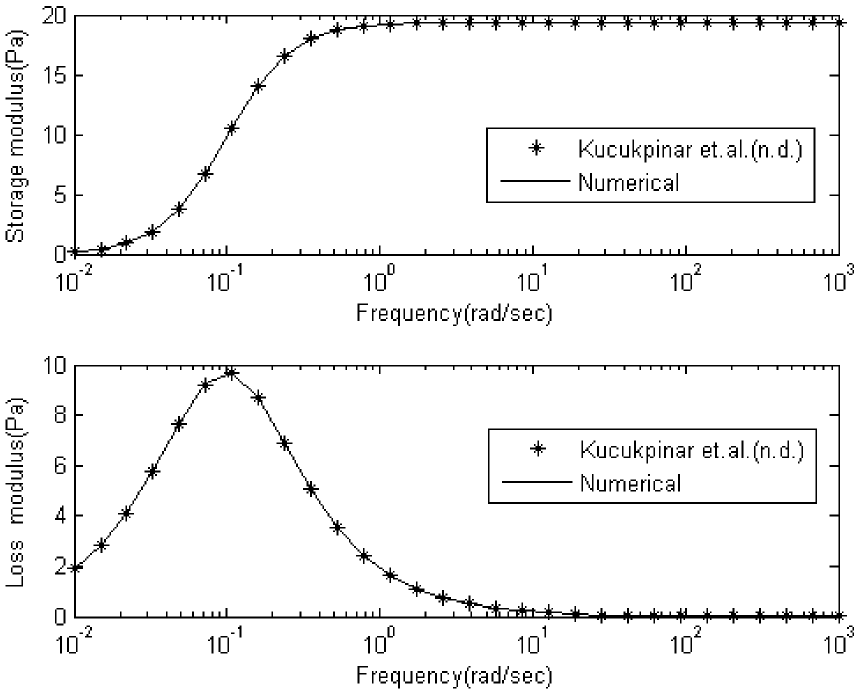
ตารางที่ 4.14 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
22	41.7532	19.3999	0.0465
23	62.1017	19.3999	0.0312
24	92.3671	19.4000	0.0210
25	137.3824	19.4000	0.0141
26	204.3360	19.4000	0.0095
27	303.9195	19.4000	0.0064
28	452.0354	19.4000	0.0043
29	672.3358	19.4000	0.0029
30	1000.0000	19.4000	0.0019

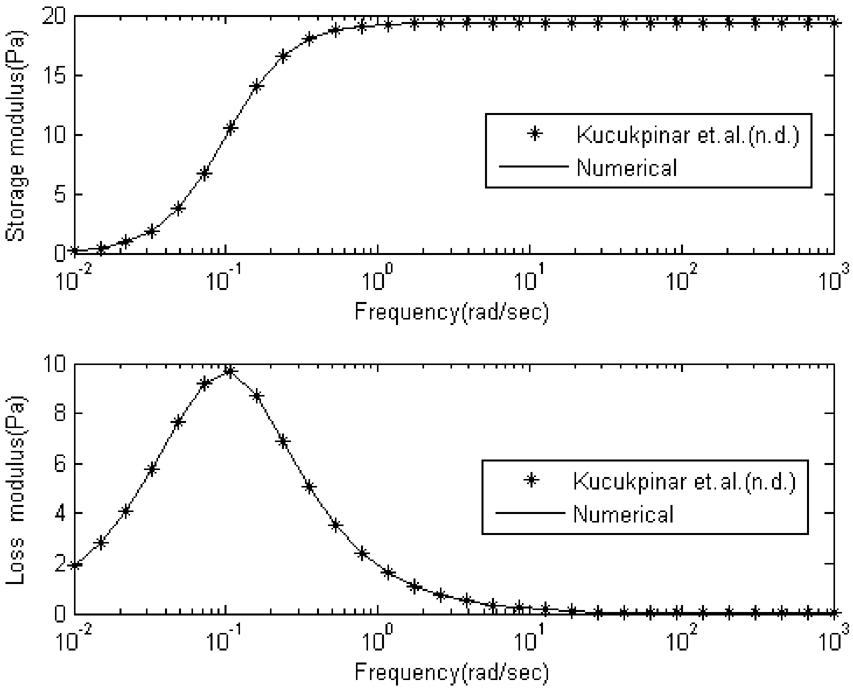
ที่มา: จากการแทนค่าในสมการที่ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s}$ = 10, $G_{oi,Pa}$ = 1.94E+01



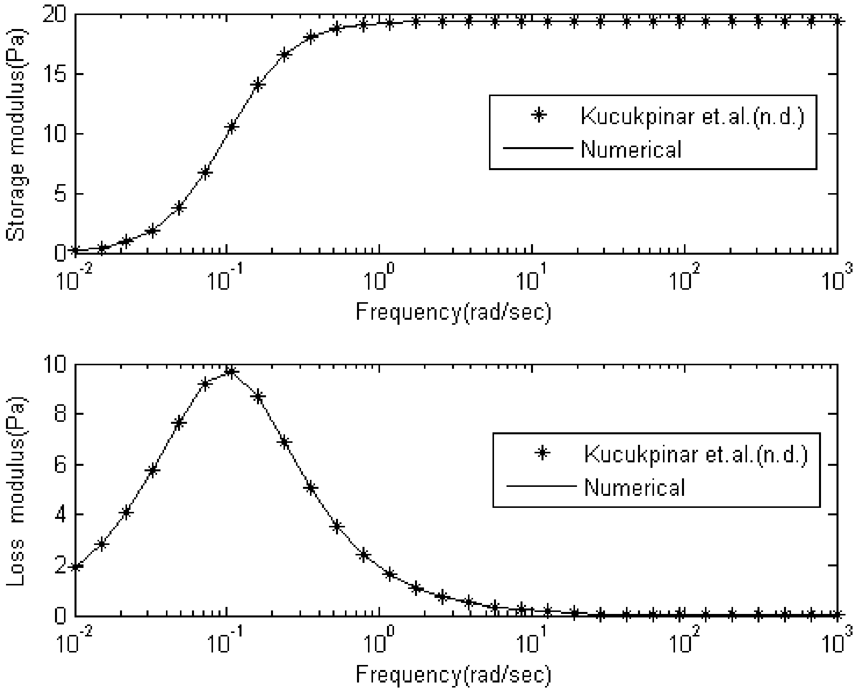
(a)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical

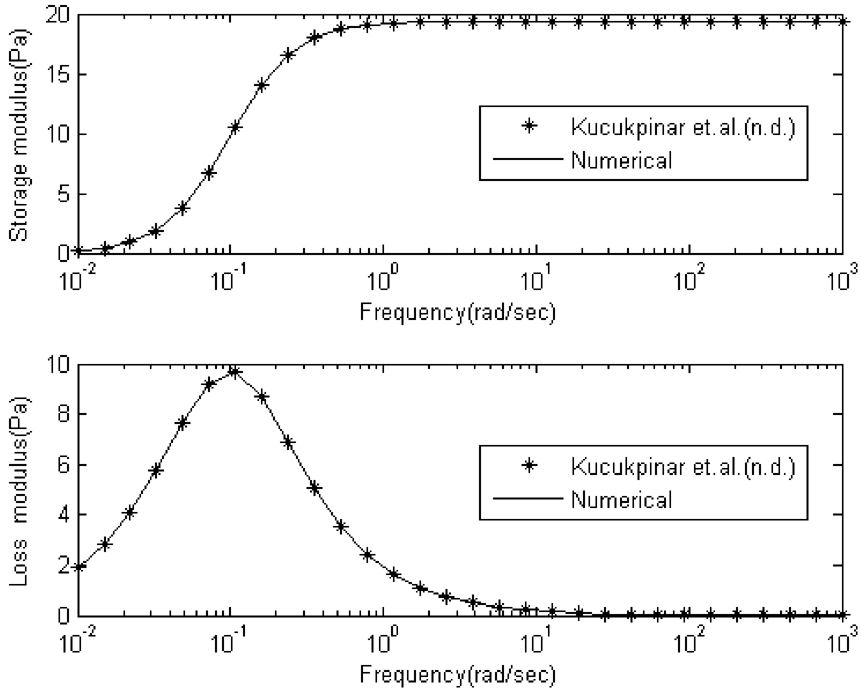
(b)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical

(c)


Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.12 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรง กับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากตารางที่ 4.15 พบว่าโปรแกรม leastweigth.m สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 9.85351×10^{-3} โดยมีค่าฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega)=\dfrac{2.9870\times10^{-2}(j\omega)^2+194.0000(j\omega)+1.1880\times10^{-5}}{1.5140\times10^{-2}(j\omega)^2+10.0000(j\omega)+1.0000}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ -6605.1000, -0.1

ตารางที่ 4.15 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$b_1 = 194.1000$ $a_1 = 10.0000$ $b_0 = 0.001405$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{194(j\omega) + 1.405\times10^{-3}}{10(j\omega)+1}$	1.407071×10^{-2}
(b)	$b_2 = 0.02987$ $a_2 = 1.514\times10^{-3}$ $b_1 = 194.0000$ $a_1 = 10.0000$ $b_0 = 1.1880\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.9870\times10^{-2}(j\omega)^2 + 194.0000(j\omega) + 1.1880\times10^{-5}}{1.5140\times10^{-2}(j\omega)^2 + 10.0000(j\omega) + 1.0000}$	9.85351×10^{-3}
(c)	$b_1 = 193.9000$ $a_1 = 9.9973$ $b_0 = 2.1960\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{193.9(j\omega) + 2.196\times10^{-5}}{9.9973(j\omega)+1}$	1.257821×10^{-2}
(d)	$b_1 = 194.1000$ $a_1 = 10.0100$ $b_0 = -3.8740\times10^{-4}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{194(j\omega) - 3.874\times10^{-4}}{10.01(j\omega)+1}$	1.407071×10^{-2}
(e)	$b_1 = 194.0000$ $a_1 = 10.000$ $b_0 = 6.1940\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{194(j\omega) + 6.194\times10^{-3}}{10(j\omega)+1}$	1.884144×10^{-2}

4.4.2.2 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 1, $G_{oi,Pa}$ = 8.33E+02

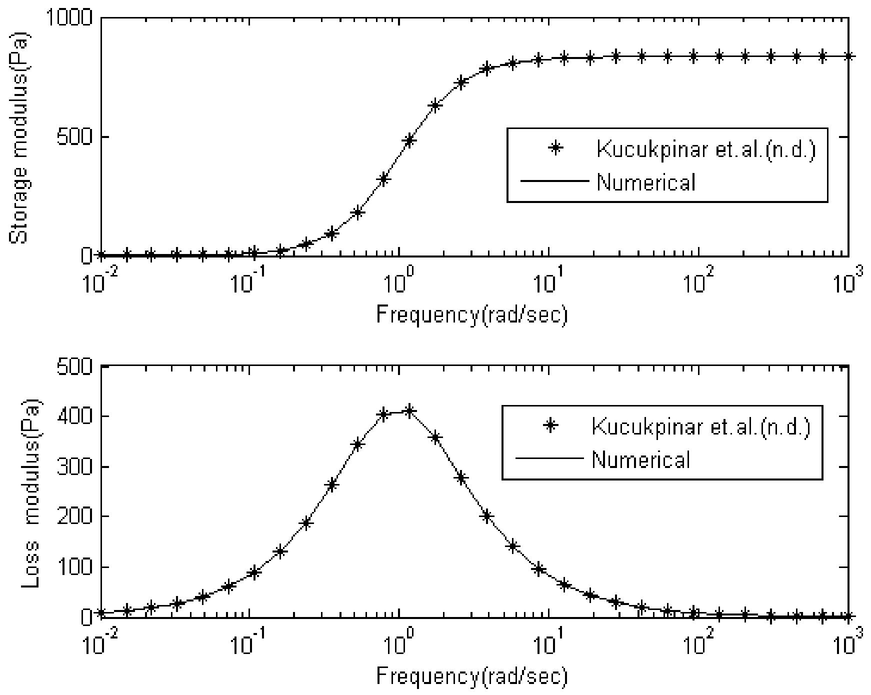
ตารางที่ 4.16 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.0833	8.3292
2	0.0149	0.1842	12.3869
3	0.0221	0.4075	18.4187
4	0.0329	0.9009	27.3789
5	0.0489	1.9903	40.6688
6	0.0728	4.3902	60.3141
7	0.1083	9.6505	89.1388
8	0.1610	21.0533	130.7447
9	0.2395	45.1900	188.6826
10	0.3562	93.8014	263.3209
11	0.5298	182.5854	344.6103
12	0.7880	319.1250	404.9572
13	1.1721	482.0894	411.3032
14	1.7433	626.7708	359.5253
15	2.5929	725.1454	279.6610
16	3.8566	780.5227	202.3851
17	5.7362	808.4302	140.9360
18	8.5317	821.7111	96.3130
19	12.6896	827.8589	65.2391
20	18.8739	830.6681	44.0114
21	28.0722	831.9443	29.6359
22	41.7532	832.5225	19.9391
23	62.1017	832.7841	13.4100
24	92.3671	832.9024	9.0173
25	137.3824	832.9559	6.0630

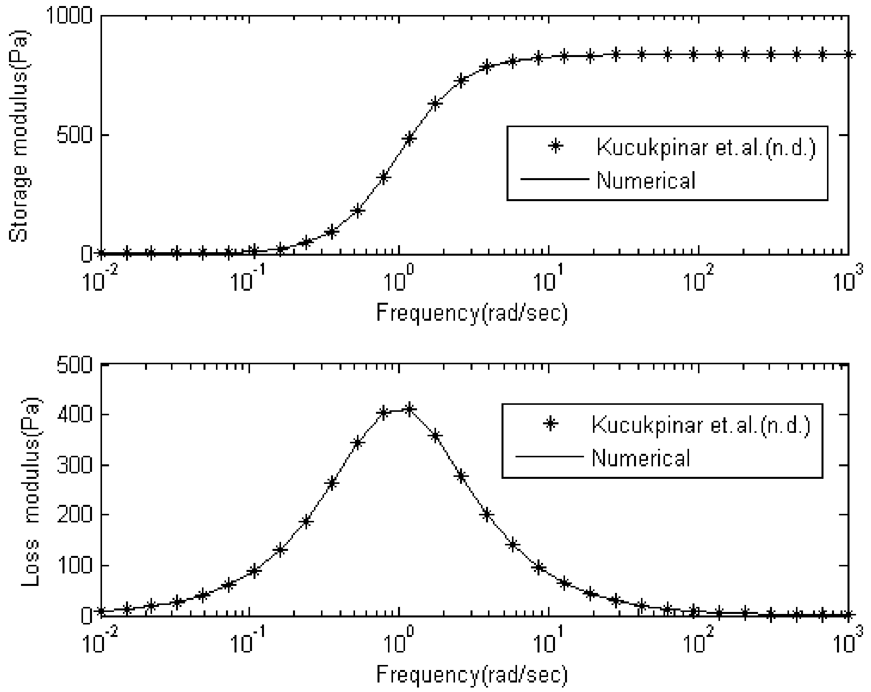
ตารางที่ 4.16 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
26	204.3360	832.9800	4.0765
27	303.9195	832.9910	2.7408
28	452.0354	832.9959	1.8428
29	672.3358	832.9982	1.2390
30	1000.0000	832.9992	0.8330

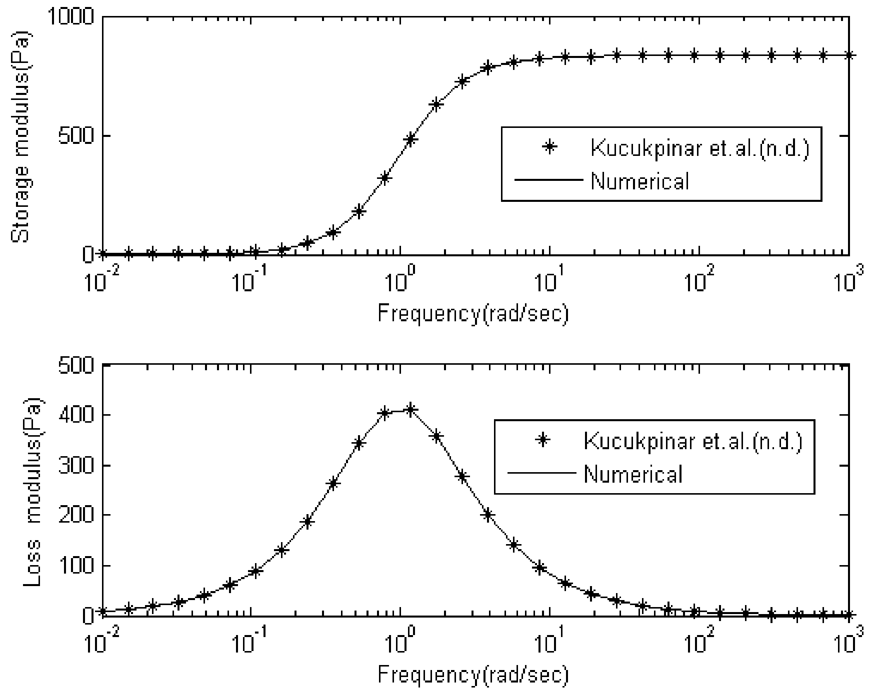
ที่มา: จากการแทนค่าในสมการ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s}$ = 1, $G_{oi,Pa}$ = 8.33E+02



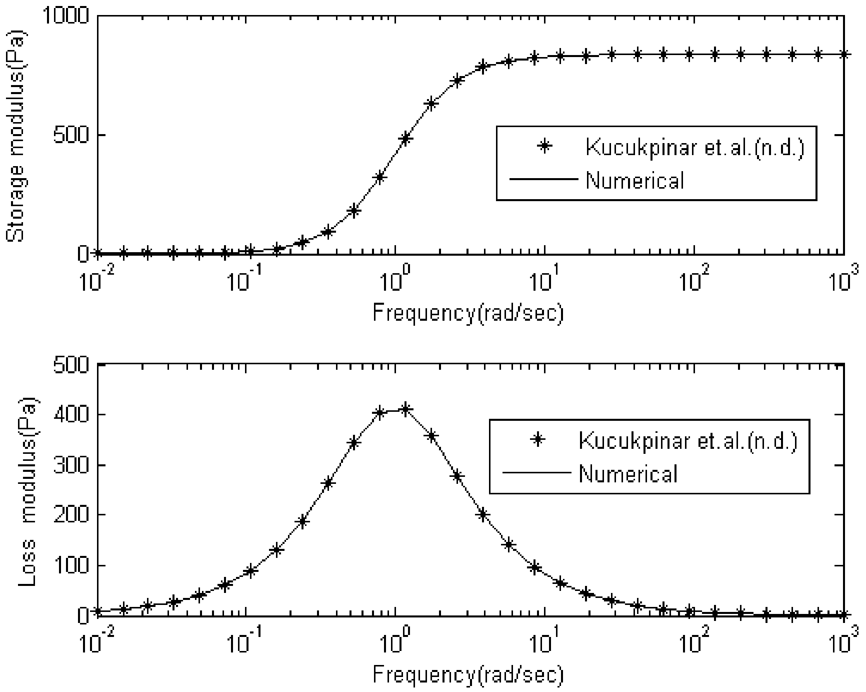
(a)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical

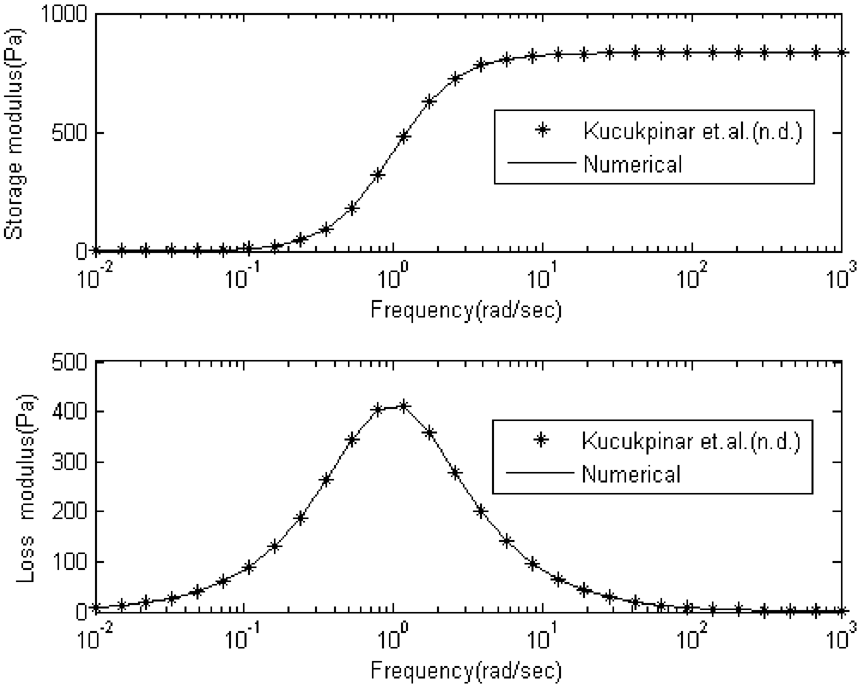
(b)


Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical

(c)


1000
500
0
Storage modulus(Pa)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
500
400
300
200
100
0
Loss modulus(Pa)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency(rad/sec)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical

(d)



(e)

รูปที่ 4.13 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega^2\right)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\sigma^2\right)$, (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$

จากตารางที่ 4.17 พบว่าโปรแกรม leastweigth.m สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 6.602797×10^{-2} โดยมีค่าฟังก์ชันถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega)=\dfrac{5.175\times10^{-3}(j\omega)^3+45.18(j\omega)^2+833(j\omega)-1.46\times10^{-3}}{6.213\times10^{-6}(j\omega)^3+5.424\times10^{-2}(j\omega)^2+1.054(j\omega)+1}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ $-8710.6,\ -18.473,\ -1.0002$

ตารางที่ 4.17 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_3 = 5.1750\times10^{-3}$ $a_3 = 6.2130\times10^{-6}$ $b_2 = 45.1800$ $a_2 = 5.4240\times10^{-2}$ $b_1 = 833.0000$ $a_1 = 1.0540$ $b_0 = -1.4600\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{5.175\times10^{-3}(j\omega)^3 + 45.18(j\omega)^2 + 833(j\omega) - 1.46\times10^{-3}}{6.213\times10^{-6}(j\omega)^3 + 5.424\times10^{-2}(j\omega)^2 + 1.054(j\omega) + 1}$	6.602797×10^{-2}
(b)	$b_1 = 833.0000$ $a_1 = 1.0000$ $b_0 = 1.7040\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{833(j\omega) + 1.704\times10^{-6}}{(j\omega) + 1}$	6.948565×10^{-2}
(c)	$b_4 = 157.8000$ $a_4 = 0.1894$ $b_3 = 3.8690\times10^{5}$ $a_3 = 404.6000$ $b_2 = 16.8000$ $a_2 = 464.5000$ $b_1 = 832.7000$ $a_1 = 1.0200$ $b_0 = 3.9550\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{157.8(j\omega)^4 + 3.869\times10^{5}(j\omega)^3 + 16.8(j\omega)^2 + 832.7(j\omega) + 3.955\times10^{-6}}{0.1894(j\omega)^4 + 404.6(j\omega)^3 + 464.5(j\omega)^2 + 1.02(j\omega) + 1}$	1.047932×10^{-1}
(d)	$b_1 = 833.0000$ $a_1 = 1.0000$ $b_0 = 2.8990\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{833(j\omega) + 2.899\times10^{-3}}{(j\omega) + 1}$	6.914183×10^{-2}
(e)	$b_2 = 0.2328$ $a_2 = 2.7950\times10^{-4}$ $b_1 = 833.0000$ $a_1 = 1.0000$ $b_0 = -1.0960\times10^{-2}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \frac{0.2328(j\omega)^2 + 833(j\omega) - 1.096\times10^{-2}}{2.795\times10^{-4}(j\omega)^2 + (j\omega) + 1}$	7.518535×10^{-2}

4.4.2.3 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.1, $G_{oi,Pa}$ = 3.93E+04

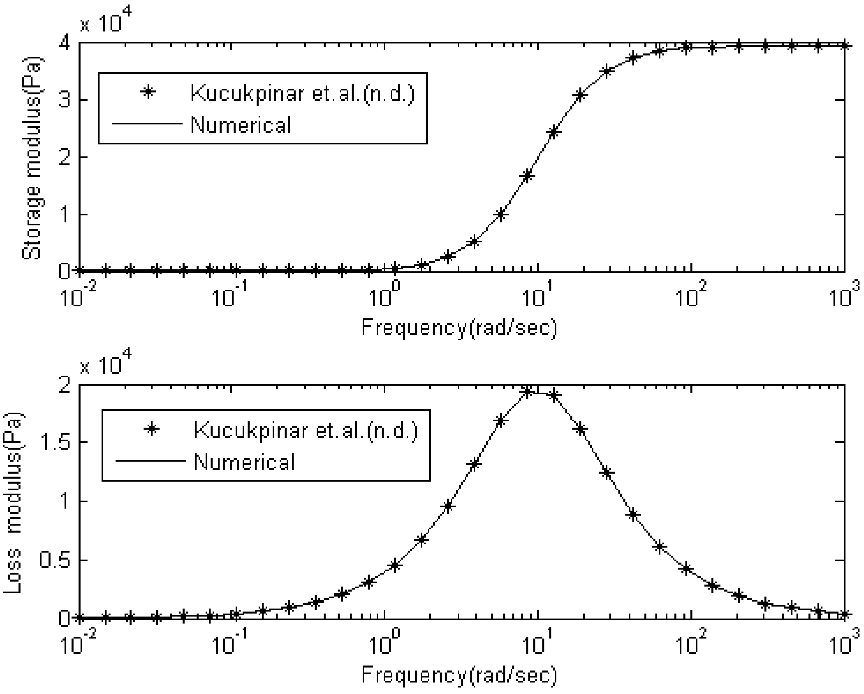
ตารางที่ 4.18 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.0394	39.4000
2	0.0149	0.0872	58.6015
3	0.0221	0.1928	87.1609
4	0.0329	0.4266	129.6382
5	0.0489	0.9436	192.8151
6	0.0728	2.0874	286.7756
7	0.1083	4.6175	426.5089
8	0.1610	10.2136	634.2788
9	0.2395	22.5875	943.0995
10	0.3562	49.9337	1401.7469
11	0.5298	110.2947	2081.6931
12	0.7880	243.1705	3085.7394
13	1.1721	533.9510	4555.4985
14	1.7433	1162.1238	6666.1192
15	2.5929	2482.1210	9572.5985
16	3.8566	5101.4083	13227.6649
17	5.7362	9754.4180	17005.1580
18	8.5317	16597.6936	19454.1948
19	12.6896	24305.7299	19154.0401
20	18.8739	30763.9064	16299.6925
21	28.0722	34963.2943	12454.7921
22	41.7532	37262.5626	8924.4829
23	62.1017	38404.2007	6184.0826
24	92.3671	38943.5419	4216.1709
25	137.3824	39192.3465	2852.7928

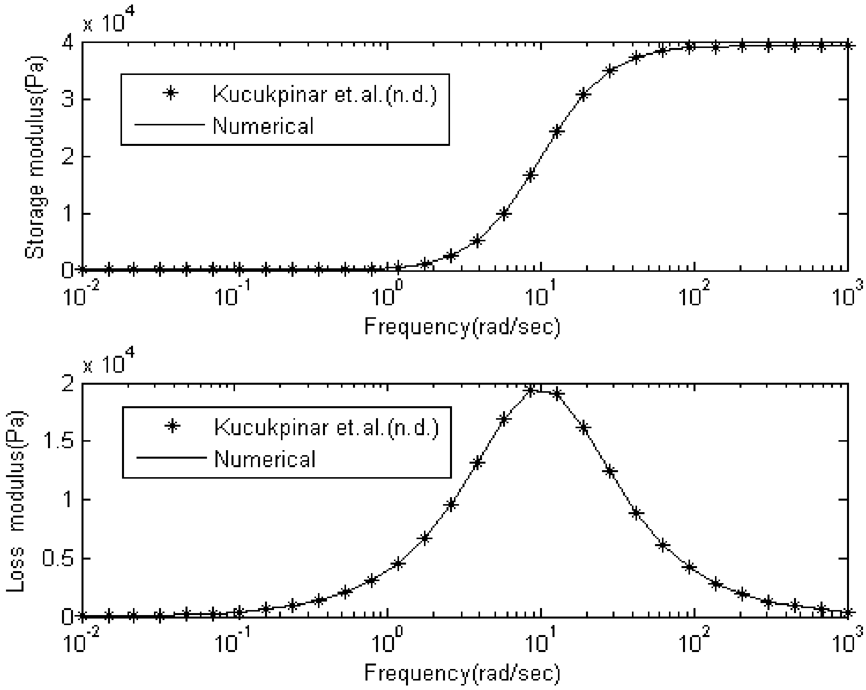
ตารางที่ 4.18 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
26	204.3360	39305.8614	1923.5899
27	303.9195	39357.3902	1294.9937
28	452.0354	39380.7275	871.1869
29	672.3358	39391.2858	585.8871
30	1000.0000	39396.0604	393.9606

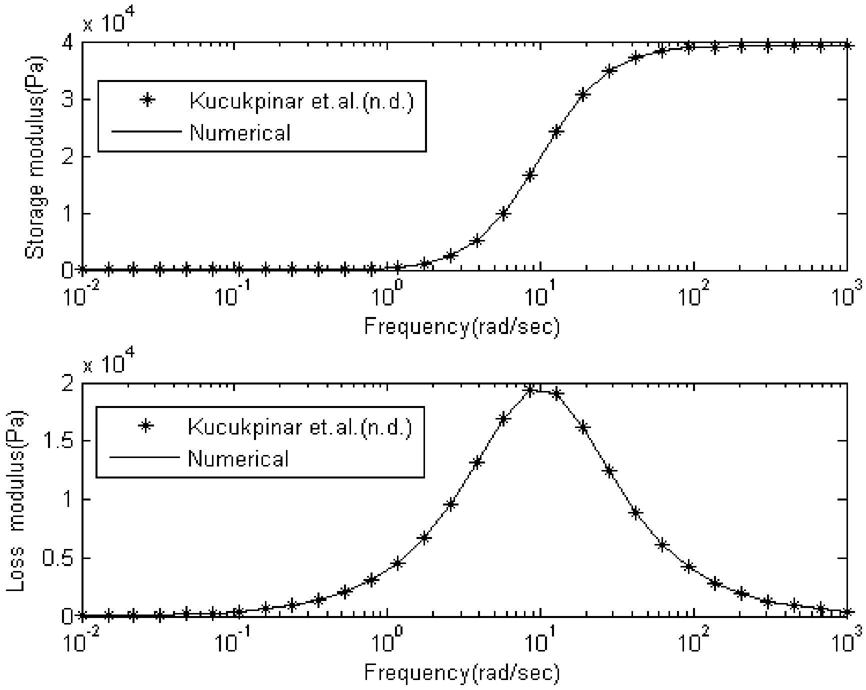
ที่มา: จากการแทนค่าในสมการ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s}$ = 0.1, $G_{oi,Pa}$ = 3.93E+04



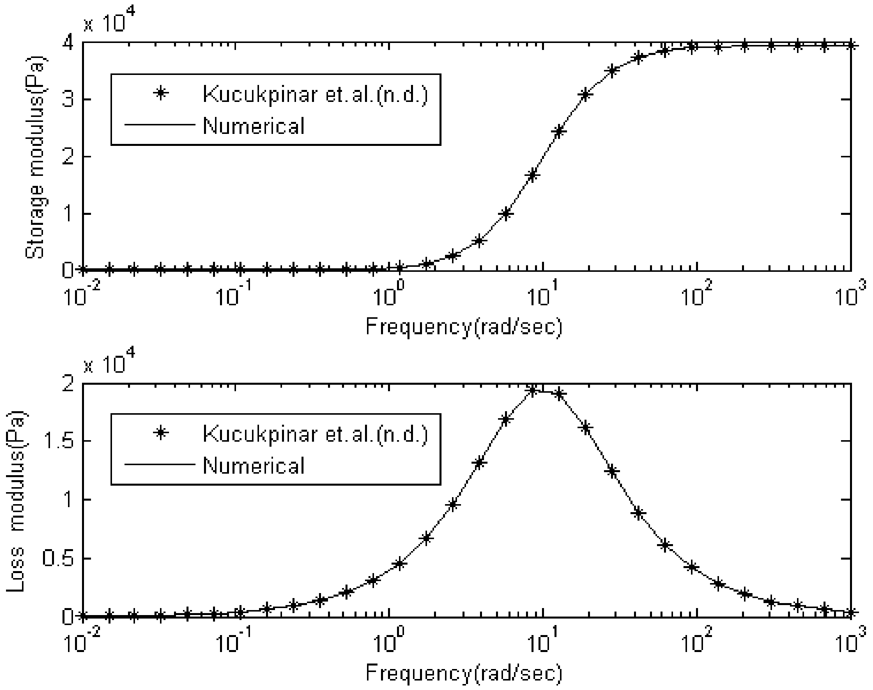
(a)


x 10^4
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^4
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

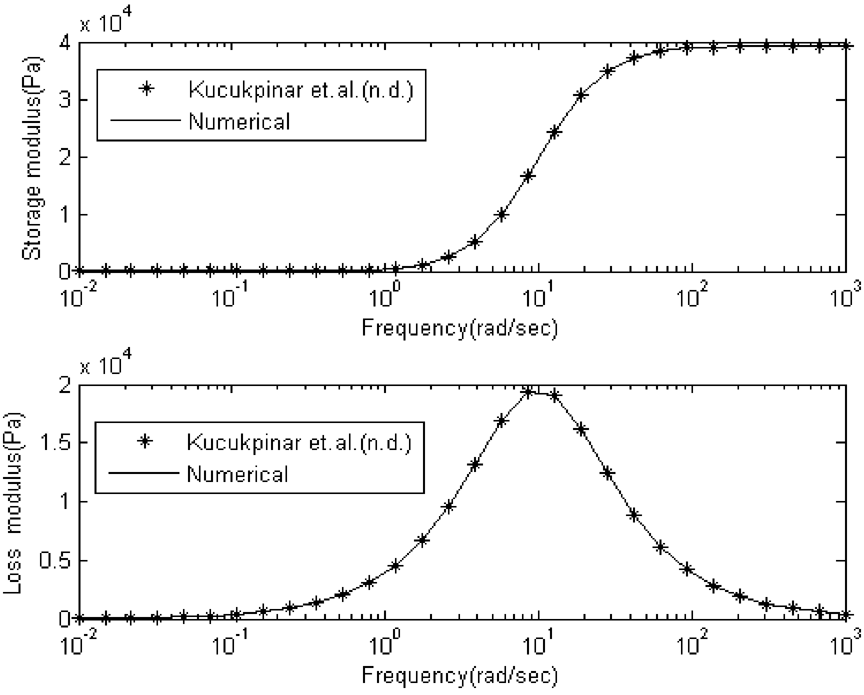
(b)


x 10^4
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^4
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(c)


x 10^4
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Storage modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)
x 10^4
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Loss modulus(Pa)
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.14 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของ โพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega\right)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\omega^2\right)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\sigma^2\right)$, (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(1/\sigma^2\right)$

จากตารางที่ 4.19 พบว่าโปรแกรม leastupdate.m สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 4.456085×10^{-1} โดยมีค่าฟังก์ชัน ถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega) = \dfrac{3930(j\omega) - 9.67\times10^{-6}}{0.1(j\omega)+1}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ -10

ตารางที่ 4.19 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$b_1 = 3930.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = -9.6700\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3930(j\omega) - 9.67\times10^{-6}}{0.1(j\omega)+1}$	4.456085×10^{-1}
(b)	$b_1 = 3930.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = -1.2530\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3930(j\omega) - 1.253\times10^{-5}}{0.1(j\omega)+1}$	4.511994×10^{-1}
(c)	$a_4 = 4.7620\times10^{-11}$ $b_3 = 1.3920\times10^{6}$ $a_3 = 35.4300$ $b_2 = 14.6000$ $a_2 = 354.3000$ $b_1 = 3929.0000$ $a_1 = 0.1037$ $b_0 = -5.4050\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{1.392\times10^{6}(j\omega)^3 + 14.6(j\omega)^2 + 3929(j\omega) - 5.405\times10^{-6}}{4.762\times10^{-11}\left(j\omega\right)^{-11} + 35.43(j\omega)^3 + 354.3(j\omega)^2 + 0.1037(j\omega) + 1}$	7.031556×10^{-1}
(d)	$b_1 = 3930.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = 2.2750\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3930(j\omega) + 2.275\times10^{-3}}{0.1(j\omega)+1}$	4.459817×10^{-1}
(e)	$b_1 = 3930.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = -1.0170\times10^{-2}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3930(j\omega) - 1.017\times10^{-2}}{0.1(j\omega)+1}$	4.466982×10^{-1}

4.4.2.4 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.01, $G_{oi,Pa}$ = 3.48E+05

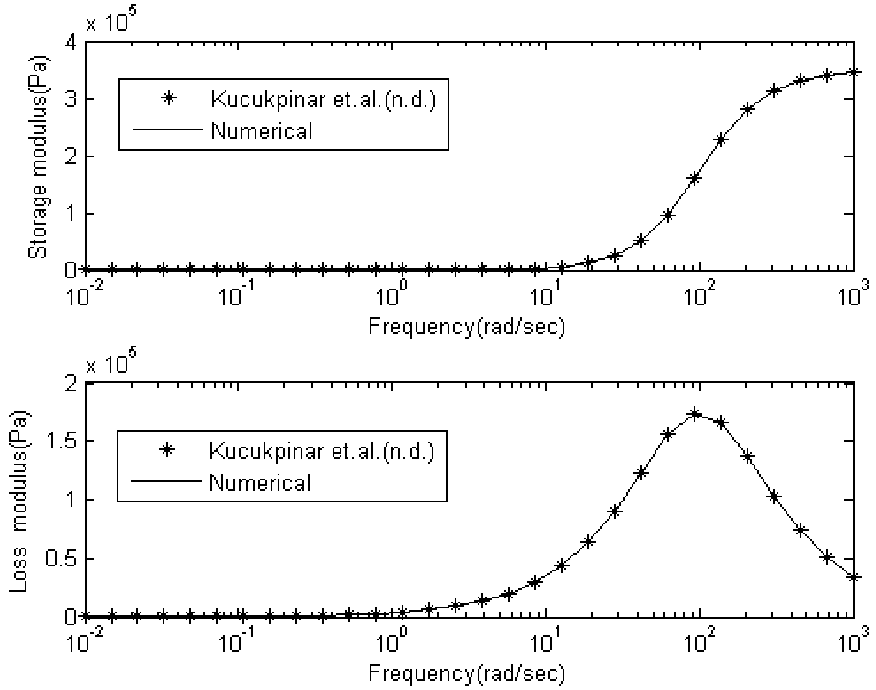
ตารางที่ 4.20 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.0035	34.8000
2	0.0149	0.0077	51.7599
3	0.0221	0.0170	76.9851
4	0.0329	0.0377	114.5040
5	0.0489	0.0833	170.3077
6	0.0728	0.1844	253.3075
7	0.1083	0.4079	376.7571
8	0.1610	0.9023	560.3697
9	0.2395	1.9962	833.4645
10	0.3562	4.4159	1239.6465
11	0.5298	9.7688	1843.7625
12	0.7880	21.6100	2742.2308
13	1.1721	47.8025	4078.3557
14	1.7433	105.7319	6064.9410
15	2.5929	233.8156	9017.3817
16	3.8566	516.8298	13401.1069
17	5.7362	1141.2847	19896.3449
18	8.5317	2514.7710	29475.6891
19	12.6896	5514.9074	43460.0227
20	18.8739	11970.2140	63421.9870
21	28.0722	25420.7387	90554.9729
22	41.7532	51661.5382	123730.7591
23	62.1017	96856.5109	155964.3616
24	92.3671	160213.4487	173452.9648
25	137.3824	227476.0041	165578.7335

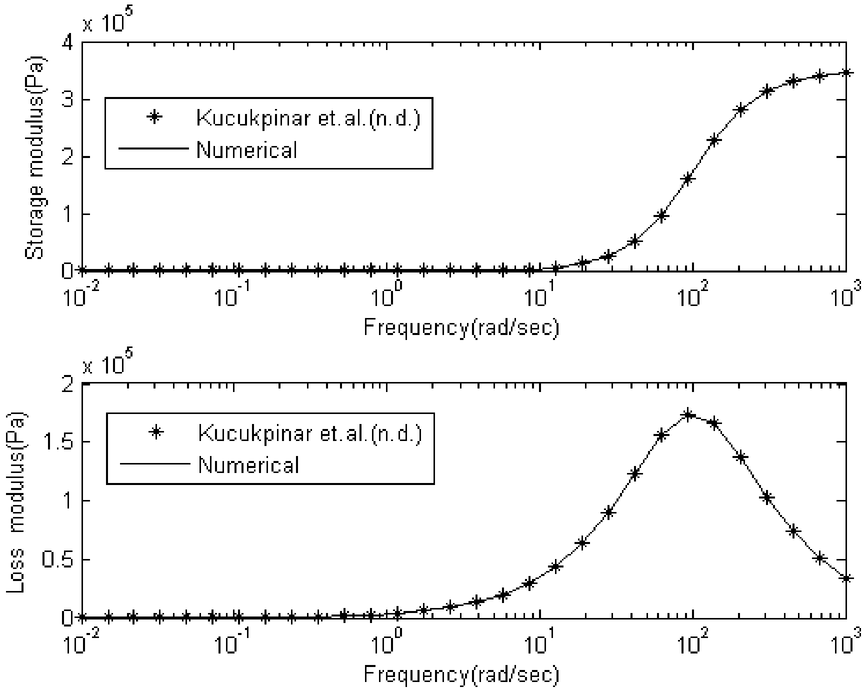
ตารางที่ 4.20 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
26	204.3360	280757.7673	137400.0695
27	303.9195	314004.6979	103318.3650
28	452.0354	331763.8080	73393.3301
29	672.3358	340468.1090	50639.5959
30	1000.0000	344554.4554	34455.4455

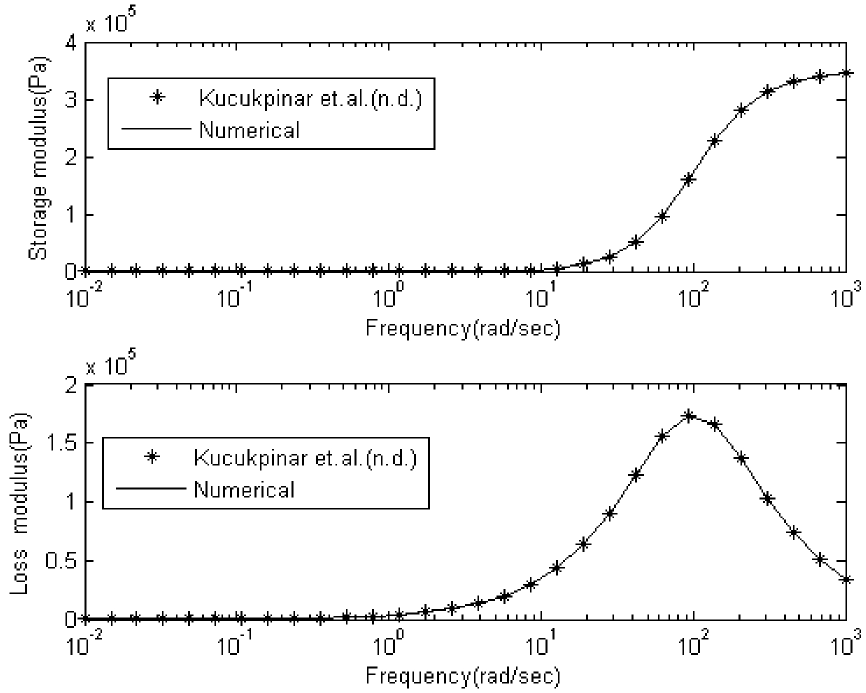
ที่มา: จากการแทนค่าในสมการ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s}$ = 0.01, $G_{oi,Pa}$ = 3.48E+05



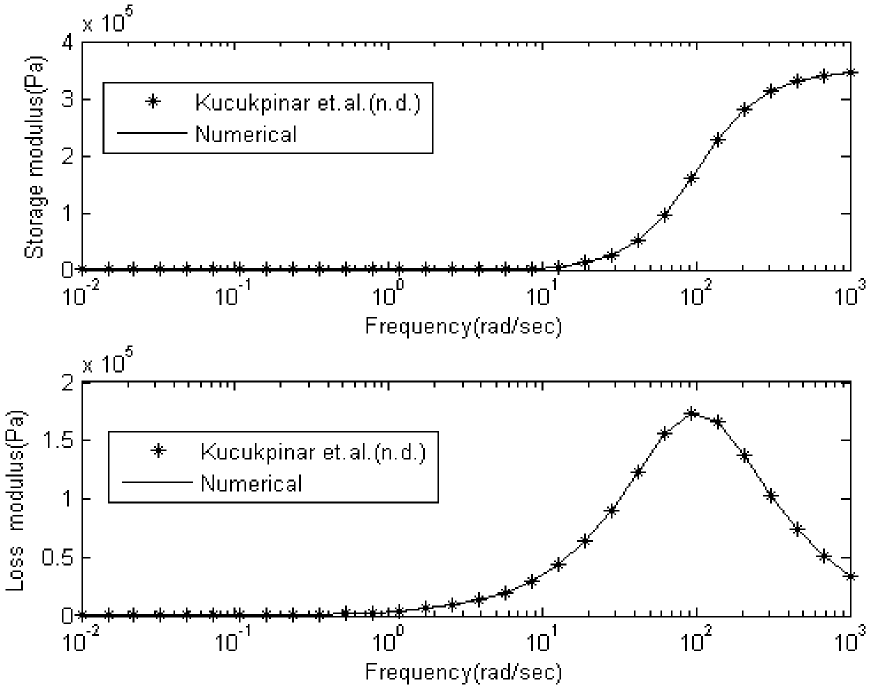
(a)


x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

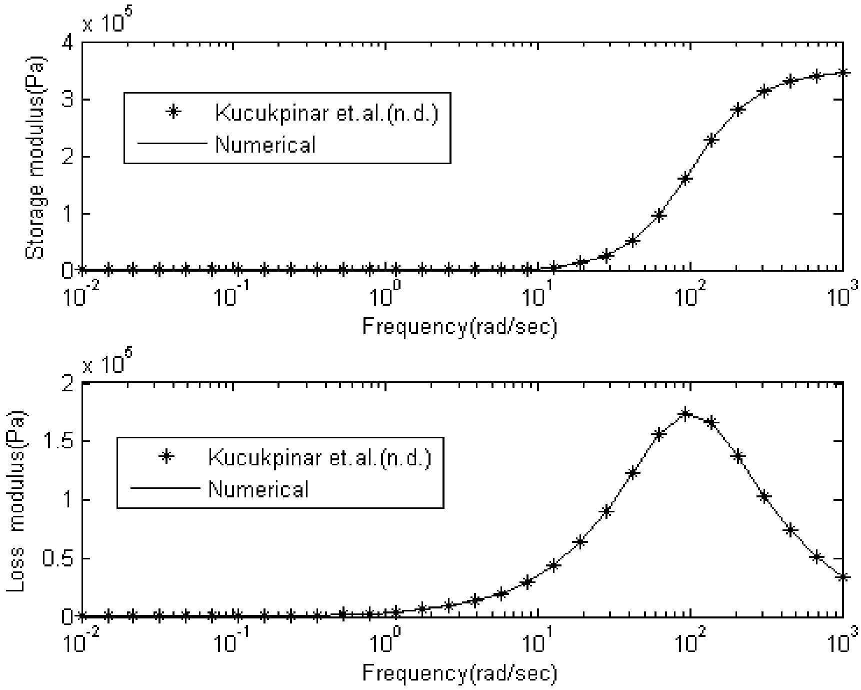
(b)


x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(c)


x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.15 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากตารางที่ 4.21 พบว่าโปรแกรม leastweigthSTAT1.m สามารถหาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 4.409813x10^{-1} โดยมีค่าฟังก์ชันการถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega) = \dfrac{3480(j\omega) + 3.27\times10^{-3}}{1.909\times10^{-13}\left(j\omega\right)^2 + 0.01(j\omega) + 1}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ -5.2383x10^{10}, -100

ตารางที่ 4.21 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$a_2 = 1.0830\times10^{-13}$ $b_1 = 3480.0000$ $a_1 = 0.0100$ $b_0 = -7.9780\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3480(j\omega) - 7.9780\times10^{-6}}{1.083\times10^{-13}\left(j\omega\right)^2 + 0.01(j\omega) + 1}$	4.414864×10^{-1}
(b)	$b_1 = 3480.0000$ $a_1 = 0.0100$ $b_0 = 8.1890\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3480(j\omega) + 8.189\times10^{-6}}{0.01(j\omega) + 1}$	8.680005×10^{-1}
(c)	$a_4 = 3.3300\times10^{-11}$ $b_3 = 1.0630\times10^{6}$ $a_3 = 3.0540$ $b_2 = 8.6620$ $a_2 = 305.4000$ $b_1 = 3479.0000$ $a_1 = 1.2490\times10^{-2}$ $b_0 = 1.5770\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{1.063\times10^{6}(j\omega)^3 + 8.662(j\omega)^2 + 3479(j\omega) + 1.577\times10^{-5}}{3.33\times10^{-11}\left(j\omega\right)^{-11} + 3.054(j\omega)^3 + 305.4(j\omega)^2 + 1.249\times10^{-2}(j\omega) + 1}$	5.654003×10^{-1}
(d)	$a_2 = 6.4430\times10^{-14}$ $b_1 = 3480.0000$ $a_1 = 0.0100$ $b_0 = -1.7480\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3480(j\omega) - 1.748\times10^{-3}}{6.443\times10^{-14}\left(j\omega\right)^2 + 0.01(j\omega) + 1}$	4.423841×10^{-1}
(e)	$a_2 = 1.9090\times10^{-13}$ $b_1 = 3480.0000$ $a_1 = 0.0100$ $b_0 = 3.2700\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{3480(j\omega) + 3.27\times10^{-3}}{1.909\times10^{-13}\left(j\omega\right)^2 + 0.01(j\omega) + 1}$	4.409813×10^{-1}

4.4.2.5 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.001, $G_{oi,Pa}$ = 3.70E+05

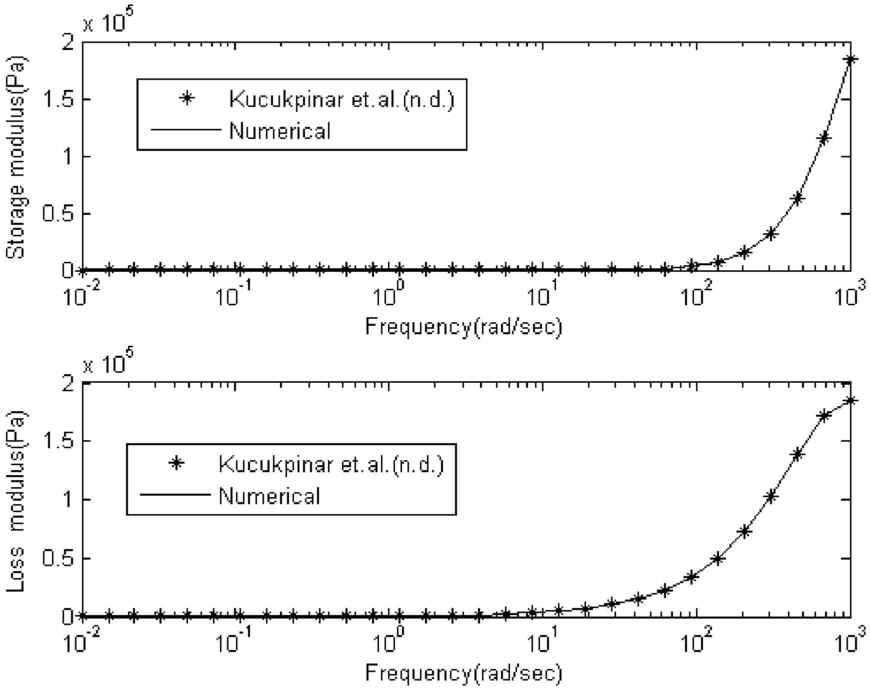
ตารางที่ 4.22 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.0000	3.7000
2	0.0149	0.0001	5.5032
3	0.0221	0.0002	8.1852
4	0.0329	0.0004	12.1743
5	0.0489	0.0009	18.1074
6	0.0728	0.0020	26.9321
7	0.1083	0.0043	40.0576
8	0.1610	0.0096	59.5797
9	0.2395	0.0212	88.6160
10	0.3562	0.0470	131.8032
11	0.5298	0.1039	196.0377
12	0.7880	0.2298	291.5769
13	1.1721	0.5083	433.6773
14	1.7433	1.1245	645.0297
15	2.5929	2.4876	959.3828
16	3.8566	5.5031	1426.9283
17	5.7362	12.1739	2122.3066
18	8.5317	26.9302	3156.4913
19	12.6896	59.5701	4694.3998
20	18.8739	131.7562	6980.8630
21	28.0722	291.3475	10378.5212
22	41.7532	643.9091	15421.7948
23	62.1017	1421.4675	22889.3513
24	92.3671	3130.0168	33886.7112
25	137.3824	6853.9881	49889.8632

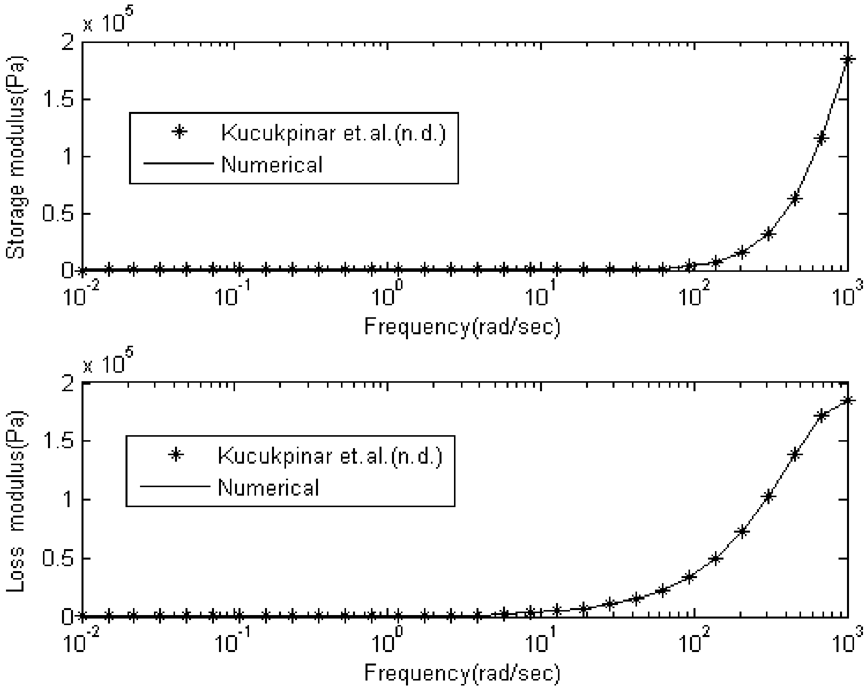
ตารางที่ 4.22 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
26	204.3360	14829.5011	72574.1090
27	303.9195	31286.0230	102941.7955
28	452.0354	62776.7594	138875.7699
29	672.3358	115185.2698	171321.0537
30	1000.0000	185000.0000	185000.0000

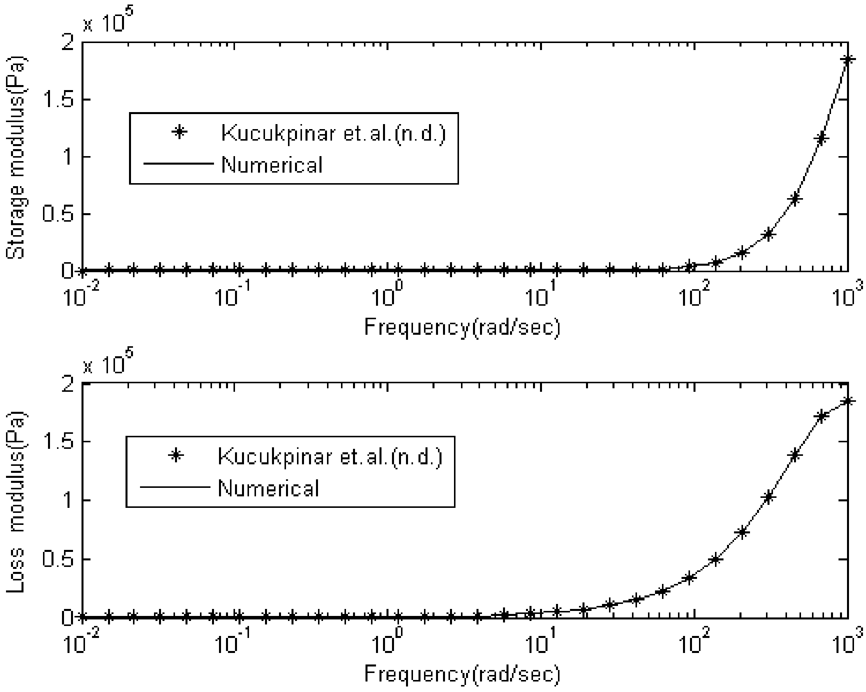
ที่มา: จากการแทนค่าในสมการ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s} = 0.001$, $G_{oi,Pa} = 3.70E{+}05$



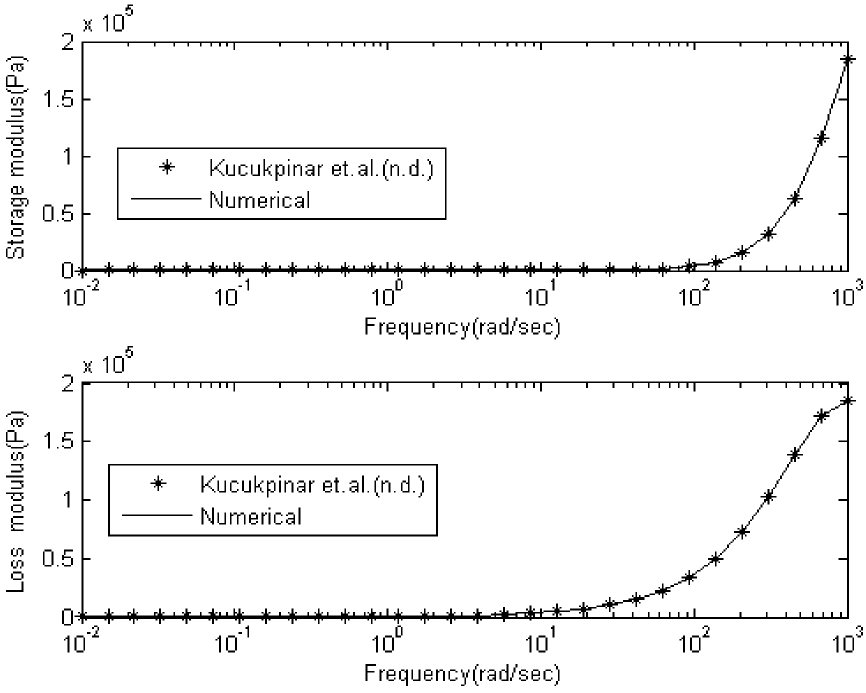
(a)


x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(b)

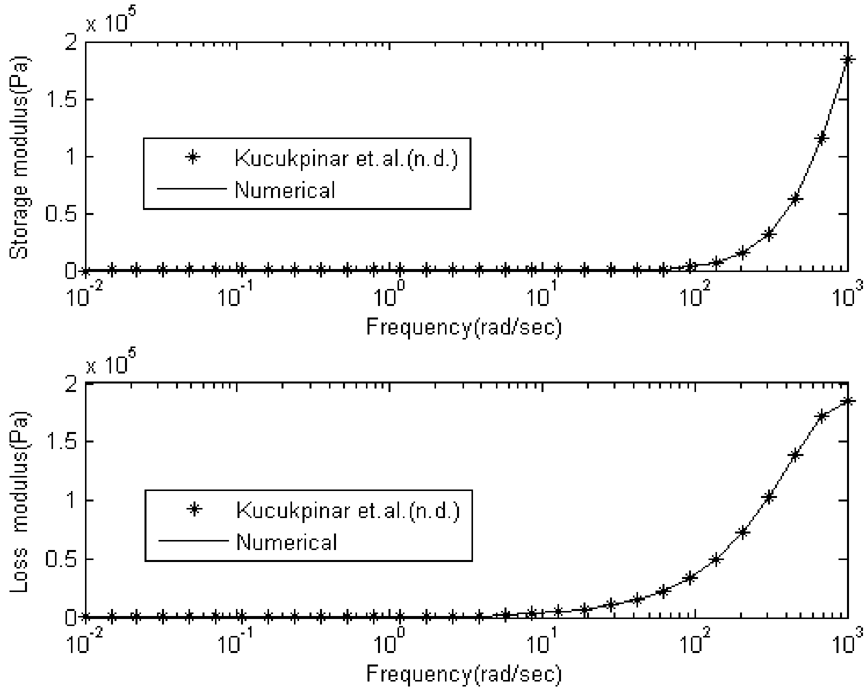

x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(c)



x 10^5
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^5
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.16 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากตารางที่ 4.23 พบว่าโปรแกรม leastweighSTAT.m สามารถหาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 5.194400×10^{-2} โดยมีค่าฟังก์ชันการถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega)=\dfrac{370(j\omega)-1.104\times10^{-6}}{5.456\times10^{-14}\left(j\omega\right)^2+0.001(j\omega)+1}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ $-1.8329\times10^{10},\ -1000$

ตารางที่ 4.23 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$a_2 = 5.8440\times10^{-14}$ $b_1 = 370.0000$ $a_1 = 0.0010$ $b_0 = 3.0670\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{370(j\omega)+3.067\times10^{-6}}{5.844\times10^{-14}(j\omega)^2+0.001(j\omega)+1}$	5.195003×10^{-2}
(b)	$b_1 = 370.0000$ $a_1 = 0.0010$ $b_0 = -1.3140\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{370(j\omega)-1.314\times10^{-5}}{0.001(j\omega)+1}$	4.712568×10^{-1}
(c)	$b_1 = 369.9000$ $a_1 = 1.024\times10^{-3}$ $b_0 = -2.7170\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{369.9(j\omega)-2.717\times10^{-5}}{1.024\times10^{-3}(j\omega)+1}$	5.446555×10^{3}
(d)	$a_2 = 5.4560\times10^{-14}$ $b_1 = 370.0000$ $a_1 = 0.0010$ $b_0 = -1.1040\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{370(j\omega)-1.104\times10^{-6}}{5.456\times10^{-14}(j\omega)^2+0.001(j\omega)+1}$	5.197005×10^{-2}
(e)	$a_2 = 6.5690\times10^{-14}$ $b_1 = 370.0000$ $a_1 = 0.0010$ $b_0 = 2.9430\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega)=\dfrac{370(j\omega)+2.943\times10^{-5}}{6.569\times10^{-14}(j\omega)^2+0.001(j\omega)+1}$	5.194400×10^{-2}

ตารางที่ 4.25 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\lVert E \rVert_2$
(a)	$a_2 = 6.5490\times10^{-14}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = -2.0880\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) - 2.088\times10^{-6}}{6.549\times10^{-14}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.431636×10^{-2}
(b)	$b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = -2.2150\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) - 2.215\times10^{-6}}{0.0001(j\omega) + 1}$	2.815557×10^{-1}
(c)	$b_3 = 2.2750\times10^{4}$ $a_3 = 2.2750$ $b_2 = 1.0730$ $a_2 = 227.5000$ $b_1 = 99.9700$ $a_1 = 1.0820\times10^{-2}$ $b_0 = -1.2690\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.275\times10^{4}(j\omega)^3 + 1.073(j\omega)^2 + 99.97(j\omega) - 1.269\times10^{-6}}{2.275(j\omega)^3 + 227.5(j\omega)^2 + 1.082\times10^{-2}(j\omega) + 1}$	1.990718×10^{-2}
(d)	$a_2 = 6.3580\times10^{-14}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = 1.3450\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) + 1.345\times10^{-6}}{6.538\times10^{-14}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.431637×10^{-2}
(e)	$a_2 = 1.0130\times10^{-13}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = 2.3890\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) + 2.389\times10^{-6}}{1.013\times10^{-13}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.442149×10^{-2}

4.4.2.6 พิจารณาที่ $\lambda_{i,s}$ = 0.0001, $G_{oi,Pa}$ = 1.00E+06

ตารางที่ 4.24 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา

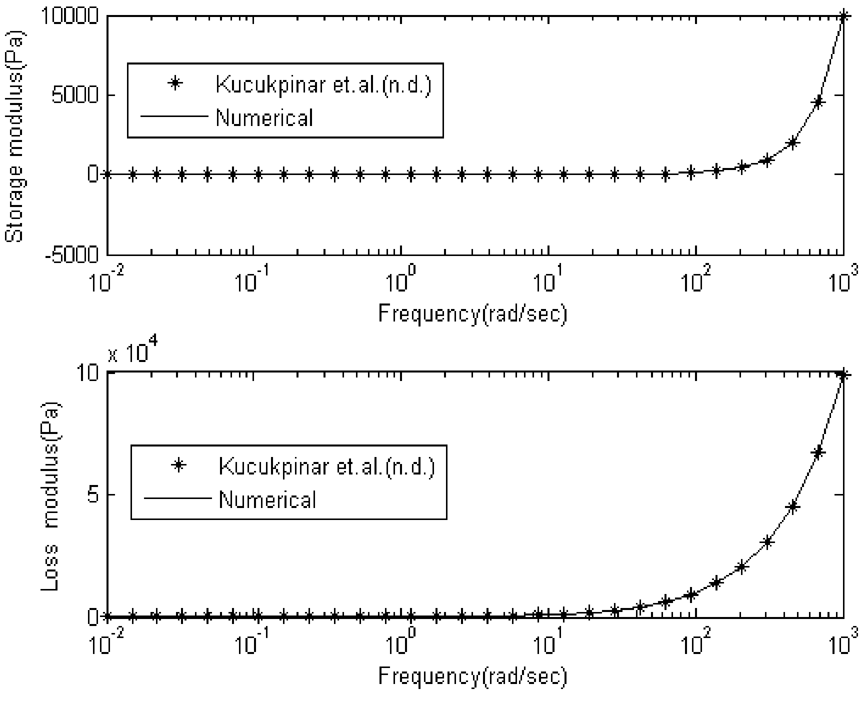
No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
1	0.0100	0.0000	1.0000
2	0.0149	0.0000	1.4874
3	0.0221	0.0000	2.2122
4	0.0329	0.0000	3.2903
5	0.0489	0.0000	4.8939
6	0.0728	0.0001	7.2790
7	0.1083	0.0001	10.8264
8	0.1610	0.0003	16.1026
9	0.2395	0.0006	23.9503
10	0.3562	0.0013	35.6225
11	0.5298	0.0028	52.9832
12	0.7880	0.0062	78.8046
13	1.1721	0.0137	117.2102
14	1.7433	0.0304	174.3329
15	2.5929	0.0672	259.2944
16	3.8566	0.1487	385.6620
17	5.7362	0.3290	573.6151
18	8.5317	0.7279	853.1672
19	12.6896	1.6103	1268.9590
20	18.8739	3.5622	1887.3851
21	28.0722	7.8804	2807.1941
22	41.7532	17.4330	4175.2461
23	62.1017	38.5647	6209.9299
24	92.3671	85.3095	9235.9206
25	137.3824	188.7036	13735.6455

ตารางที่ 4.24 แสดงผลการทดลองของโพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยา (ต่อ)

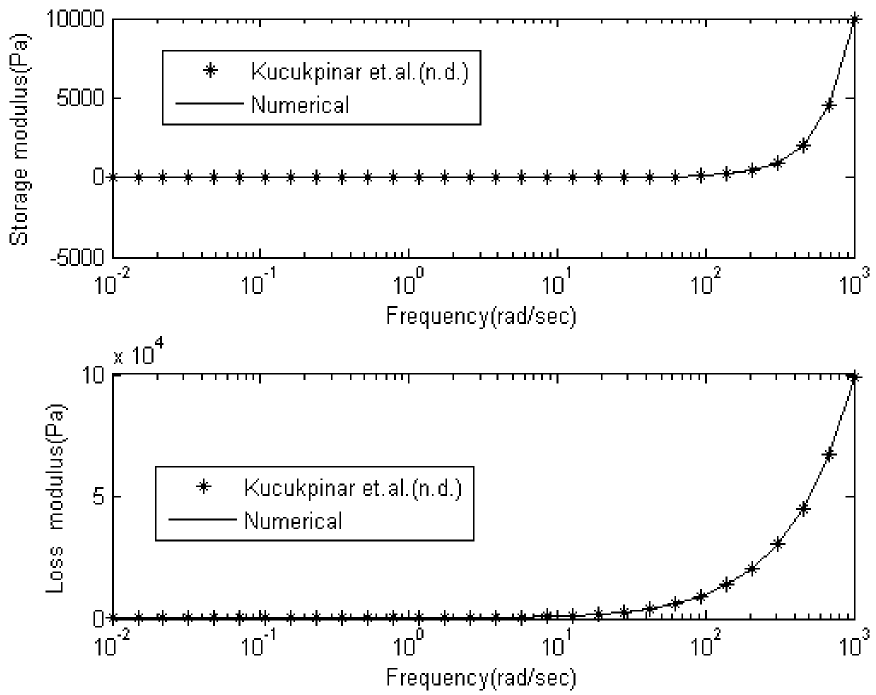
No.	Frequency (rad/sec)	Storage modulus (Pa)	Loss modulus (Pa)
26	204.3360	417.3576	20425.0691
27	303.9195	922.8185	30363.9076
28	452.0354	2039.1929	45111.3578
29	672.3358	4500.0120	66931.0235
30	1000.0000	9900.9901	99009.9010

ที่มา: จากการแทนค่าในสมการ (4.1) และ (4.2) โดยกำหนดให้ค่า $\lambda_{i,s}$ = 0.0001,

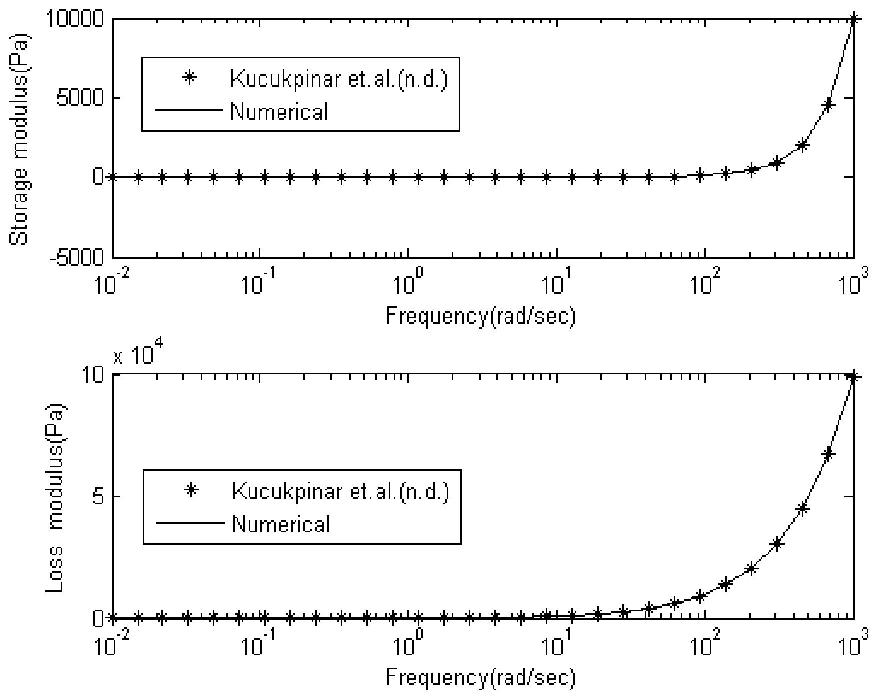
$G_{oi,Pa}$ = 1.00E+06



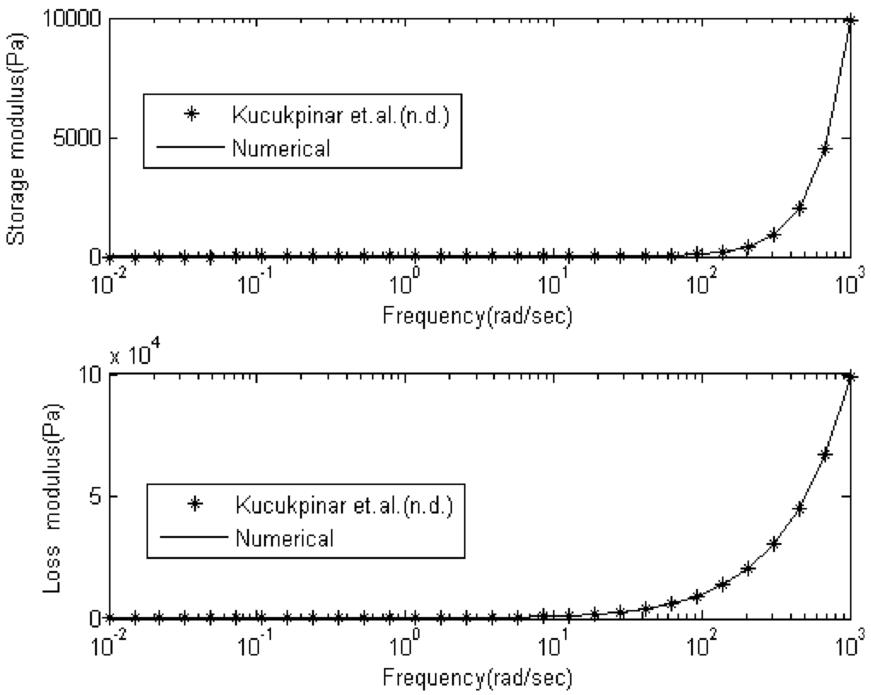
(a)


10000
5000
0
-5000
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^4
10
5
0
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

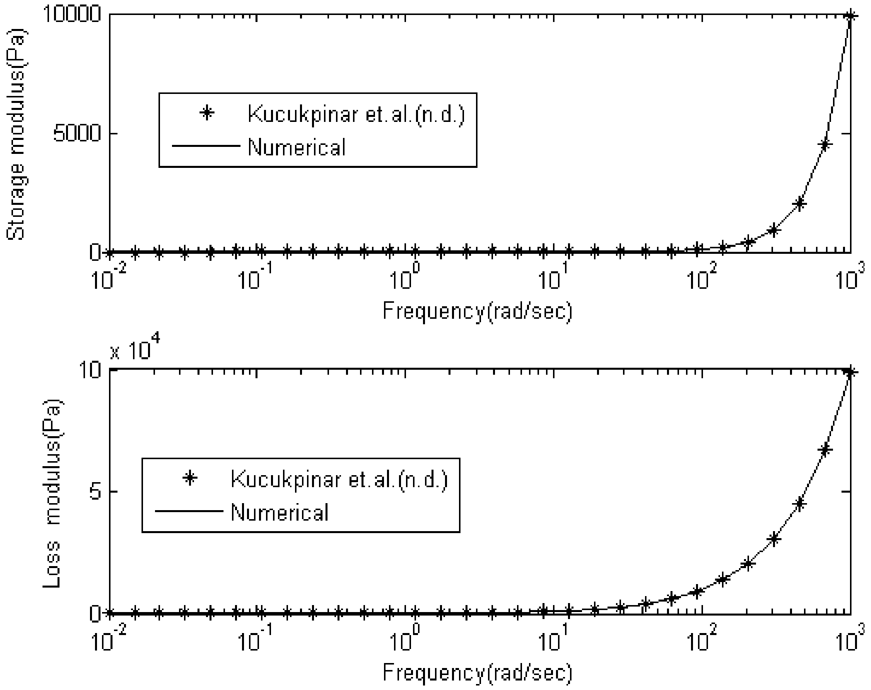
(b)


10000
5000
0
-5000
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)
x 10^4
10
5
0
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
Frequency(rad/sec)

(c)


10000
5000
0
Storage modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frequency(rad/sec)
x 10^4
10
5
0
Loss modulus(Pa)
Kucukpinar et.al.(n.d.)
Numerical
10^-2
10^-1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frequency(rad/sec)

(d)



(e)

รูปที่ 4.17 แสดงแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ เปรียบเทียบระหว่างผลแม่นตรงกับผลคำนวณเชิงตัวเลขของ (Pole) โพลิเอทิลีนที่มีความหนาแน่นต่ำ (Linear low density polyethylene) โดยใช้ Metallocene เป็นตัวเร่งปฏิกิริยาที่ 30 point, 0.01-1000 Hz, $a_0 = 1$ โดย (a) วิธีกำลังสองน้อยสุด, (b) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega)$, (c) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\omega^2)$, (d) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (σ^2), (e) วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $(1/\sigma^2)$

จากตารางที่ 4.25 พบว่าโปรแกรม leastupdate.m สามารถหาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ค่าความผิดพลาดมีค่าต่ำที่สุด คือ 1.431636×10^{-2} โดยมีค่าฟังก์ชันการถ่ายโอนเท่ากับ $G(j\omega)=\dfrac{100(j\omega)-2.088\times10^{-6}}{6.549\times10^{-14}\left(j\omega\right)^2+0.0001(j\omega)+1}$ โดยมีค่าโพล (Pole) เท่ากับ

-1.5268×10^{9}, -10000

ตารางที่ 4.25 แสดงผลการคำนวณ

Program	Estimated parameter	Transfer function	$\|E\|_2$
(a)	$a_2 = 6.5490\times10^{-14}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = -2.0880\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) - 2.088\times10^{-6}}{6.549\times10^{-14}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.431636×10^{-2}
(b)	$b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = -2.2150\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) - 2.215\times10^{-6}}{0.0001(j\omega) + 1}$	2.815557×10^{-1}
(c)	$b_3 = 2.2750\times10^{4}$ $a_3 = 2.2750$ $b_2 = 1.0730$ $a_2 = 227.5000$ $b_1 = 99.9700$ $a_1 = 1.0820\times10^{-2}$ $b_0 = -1.2690\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{2.275\times10^{4}(j\omega)^3 + 1.073(j\omega)^2 + 99.97(j\omega) - 1.269\times10^{-6}}{2.275(j\omega)^3 + 227.5(j\omega)^2 + 1.082\times10^{-2}(j\omega) + 1}$	1.990718×10^{-2}
(d)	$a_2 = 6.3580\times10^{-14}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = 1.3450\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) + 1.345\times10^{-6}}{6.538\times10^{-14}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.431637×10^{-2}
(e)	$a_2 = 1.0130\times10^{-13}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = 2.3890\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	$G(j\omega) = \dfrac{100(j\omega) + 2.389\times10^{-6}}{1.013\times10^{-13}(j\omega)^2 + 0.0001(j\omega) + 1}$	1.442149×10^{-2}

4.5 สรุป

1. พิจารณาจากปัญหาที่ใช้ในการทดสอบ พบว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $1/\omega^2$ และสำหรับชุดข้อมูลที่ไม่มีความแปรปรวน จะได้ว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งแบบถ่วงน้ำหนักและไม่ถ่วงน้ำหนักนั้นจะให้ค่าความผิดพลาดที่น้อยที่สุด โดยขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของชุดข้อมูลที่ให้กับโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน แสดงว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $1/\omega^2$ สามารถสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนได้

2. เมื่อพิจารณาให้ชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนของข้อมูลเท่ากับ ±10% และได้ทำการเพิ่มการถ่วงน้ำหนักด้วยค่าความแปรปรวนมีค่าเท่ากับ σ^2, $1/\sigma^2$ ลงไปในโปรแกรมการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนพบว่าโปรแกรมที่เกิดจากการถ่วงน้ำหนักด้วย $1/\omega$, $1/\omega^2$, $1/\sigma^2$ นั้นสามารถลดค่าความผิดพลาดได้มากกว่าไม่มีการถ่วงน้ำหนัก และยังพบอีกว่าโปรแกรมที่มีการถ่วงน้ำหนักด้วย σ^2 ไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ถ่วงน้ำหนัก เนื่องจากค่าฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้นั้นมีค่าความผิดพลาดสูง

3. โปรแกรมการสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนไปใช้กับข้อมูลที่ได้จากการทดลองจริง ผลที่ได้พบว่าโปรแกรมสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนได้ ซึ่งการใช้โปรแกรมสังเคราะห์ฟังก์ชันกับข้อมูลที่ได้นำเสนอนั้น พบว่าการถ่วงน้ำหนักด้วยค่าความถี่ทั้งแบบ $1/\omega$, $1/\omega^2$ ทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุด แต่เมื่อสังเกตจากค่าโพล (Pole) ที่ได้จากการคำนวณ พบว่าค่าโพล (Pole) ที่ได้จากการคำนวณมีค่าห่างจากแกนส่วนจินตภาพมากซึ่งอาจกล่าวได้ว่าวัสดุยืดหยุ่นหนืดที่นำมาใช้ในการทดลองนั้นมีความเสถียรสูงนั่นเอง

บทที่ 5
สรุปและข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ในการวิจัย คือการนำข้อมูลที่มี คือความหนืด (Viscosity), ความยืดหยุ่น (Elasticity) และความถี่ (Frequency) ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนำมาสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนของวัสดุ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการเขียนโปรแกรมสำหรับสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอน ซึ่งการศึกษาเกี่ยวกับความยืดหยุ่นหนืด (Viscoelasticity) จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ที่ไม่เป็นสัดส่วนคงที่ แต่จะขึ้นอยู่กับเวลาในการตอบสนองของวัสดุ โดยในการวิเคราะห์วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นสามารถพิจารณาจากคุณสมบัติความหนืด (Viscous), ความยืดหยุ่น (Elastic) และความถี่ (Frequency) ที่กระทำต่อวัสดุ ดังนั้นคุณสมบัติความยืดหยุ่นหนืดข้างต้นนั้นสามารถสังเคราะห์หาฟังก์ชันการถ่ายโอนได้ โดยวิธีระเบียบเชิงตัวเลข และทฤษฎีควบคุมนี้มาใช้ร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยสุด (Least squares method), วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weight Least squares method) ในการสร้างสมการเชิงเส้นโดยค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนเป็นตัวแปรต้นและค่าที่ได้จากการทดลองในที่นี้คือ ค่าความหนืด (Viscous), ค่ายืดหยุ่น(Elastic) และความถี่ (Frequency) เป็นตัวแปรตามโดยใช้วิธีการ Pseudo inverse ในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอนใช้วิธีหาค่ารากของสมการคุณลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) เพื่อหาตำแหน่งของโพลมาพิจารณาความเสถียรของวัสดุและหาค่าความผิดพลาดจากนอร์มรากกำลังสอง (Root-square norm: L_2-norm) ใช้พิจารณาเปรียบเทียบความถูกต้องของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้ โดยขั้นตอนในการทำการคำนวณโดยการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนนั้นแบ่งเป็น 3 ส่วน คือ ส่วนที่หนึ่งเป็นส่วนของการทดสอบโปรแกรมโดยการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ ส่วนที่สองเป็นการทดสอบโปรแกรมโดยชุดข้อมูลมีค่าความแปรปรวนแล้วใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$, σ^2, $1/\sigma^2$ เพื่อหาสัมประสิทธิ์ฟังก์ชัน ถ่ายโอนและส่วนสุดท้ายเป็นการใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนกับชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลองในการหาแบบจำลองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นนั้น ความถูกต้องของแบบจำลองมีความสำคัญอย่างมากในการวิจัย และพัฒนาทางด้านวัสดุศาสตร์ซึ่งผู้วิจัยต้องการนำเสนอแนวทางความคิดในการสังเคราะห์หาแบบจำลองของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ที่ใช้ผลจากการทดลองที่ได้

และความยืดหยุ่นจากการเปลี่ยนแปลงความถี่ในการกระทำต่อวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นโดยใช้ทฤษฎีการควบคุมในการวิเคราะห์เชิงพลวัตของการให้อินพุท (ความเค้นหรือความเครียด) ในรูปของแรงฮาร์โมนิกส์แก่วัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นและจะได้การตอบสนองในรูปของเอาพุท (ความเครียดหรือความเค้น) ซึ่งจากหลักการทางทฤษฎีควบคุมดังกล่าวทำให้เราสามารถพิจารณาวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนได้

ซึ่งงานวิจัยทางด้านนี้ ยังมีบทความอยู่ในปริมาณน้อย จึงทำให้ผู้วิจัยใช้สมมุติฐานในการสร้างชุดข้อมูลที่นำมาใช้ในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นโดยนำวิธีการระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทฤษฎีควบคุมมาเขียนโปรแกรม ดังนั้นผลที่ได้จากการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนอาจจะมีผลที่แตกต่างกันในทางปฏิบัติก็ได้แต่ทั้งนี้ทั้งนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นแต่ละชนิดก็ยังไม่มีมาตรฐานใดที่ถูกกำหนดขึ้นสำหรับวัสดุแต่ละชนิด

ผู้วิจัยได้พิจารณาและคาดหวังว่า ผลที่เกิดขึ้นจากงานวิจัยของข้าพเจ้าจะเป็นประโยชน์สำหรับผู้ที่สนใจในแนวทางการศึกษาวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นโดยใช้ทฤษฎีควบคุมมาประกอบการพิจารณา

5.1 สรุปผลการวิจัย

1. จากการคำนวณในส่วนที่หนึ่ง พบว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ทั้งแบบไม่มีการถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ จะได้ว่าการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนโดยใช้โปรแกรมทั้งแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ฟังก์ชันถ่ายโอน และทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุดดังตารางที่ 5.1 พบว่าเมื่อฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าอันดับที่สูงขึ้นหรือมีค่า n และ m ที่มากขึ้นผลการประเมินค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้นั้นจะมีค่าความผิดพลาดเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน

ตารางที่ 5.1 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด ในแต่ละกรณี

n	m	program	Estimated parameter	$\|E\|_2$
0	1	(a)	$b_1 =$ -6.218e-009 $b_0 = 1$ $a_2 = 1.244$e-009 $a_1 = 0.2$	0.003291
0	2	(b)	$b_5 = 1.82\times10^{-7}$ $a_6 = 0.001879$ $b_4 = 9.394\times10^{-3}$ $a_5 = 0.00782$ $b_3 = 1.532\times10^{-3}$ $a_4 = 0.1282$ $b_2 = 0.5880$ $a_3 = 0.4725$ $b_1 = 2.657\times10^{-3}$ $a_2 = 0.7902$ $b_0 = 1.0000$ $a_1 = 0.8027$ $a_0 = 1.0000$	0.011360
2	3	(c)	b_8=0.0191 $a_9 = 0.0032$ b_7=0.2104 $a_8 = 0.0191$ $b_6 = 2.1360$ $a_7 = 0.2957$ $b_5 = 17.1900$ $a_6 = 1.5790$ $b_4 = 63.1200$ $a_5 = 5.6000$ $b_3 = 180.1000$ $a_4 = 17.8000$ $b_2 = 483.0000$ $a_3 = 29.7400$ $b_1 = 11.2000$ $a_2 = 17.0800$ $b_0 = 30.0000$ $a_1 = 1.8400$ $a_0 = 1.0000$	0.491948
4	4	(a)	$b_6 = 0.0224$ $a_6 = 1.8780\times10^{-5}$ $b_5 = 0.0324$ $a_5 = 5.1130\times10^{-4}$ $b_4 = 0.0205$ $a_4 = 5.5391\times10^{-4}$ $b_3 = 1.1440$ $a_3 = 0.0454$ $b_2 = -7.7560$ $a_2 = 0.2644$ $b_1 = -39.8500$ $a_1 = 0.7324$ $b_0 = 99.9300$ $a_0 = 1.0000$	2.167463

ตารางที่ 5.1 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

ในแต่ละกรณี (ต่อ)

n	m	program	Estimated parameter	$\|E\|_2$
3	5	(c)	$b_8 = -4.7520\times10^{-5}$ $a_8 = 9.0060\times10^{-5}$ $b_7 = 9.2860\times10^{-4}$ $a_7 = 0.0167$ $b_6 = 1.1490\times10^{-3}$ $a_6 = 0.2819$ $b_5 = 3.7020$ $a_5 = 1.7530$ $b_4 = -37.5700$ $a_4 = 5.2240$ $b_3 = 118.0000$ $a_3 = 7.6270$ $b_2 = -123.0000$ $a_2 = 5.1470$ $b_1 = 30.9100$ $a_1 = 1.8960$ $b_0 = -30.0000$ $a_0 = 1.0000$	1.127855

โดยกำหนดให้ (a) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก

(b) คือโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$

(c) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega^2$

แสดงให้เห็นว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ทำการเขียนขึ้นนี้ สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีลำดับขั้นโพลิโนเมียนต่ำได้ดีซึ่งจากผลที่ได้จากโปรแกรมที่ m = 1, 2 และ 3 นั้นค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยกว่าที่ m = 4 และ 5 มากนั้นเองและจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ จะได้ว่าเส้นกราฟที่สร้างขึ้นจากฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากโปรแกรมกับชุดข้อมูลมีค่าสอดคล้องกันซึ่งผลการทดลองในส่วนที่หนึ่งนี้เองแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนที่เขียนขึ้นมานั้น สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีความถูกต้องพอเพียง

2. ในส่วนที่สองนั้นชุดข้อมูลจากฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีความความแปรปรวนเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เพราะในทางปฏิบัตินั้นในการวัดค่าความหนืด และความยืดหยุ่นของวัสดุซึ่งค่าที่วัดได้จะมีความแปรปรวนจากการวัดเกิดขึ้นซึ่งในส่วนที่หนึ่งนั้นไม่มีการพิจารณาจากลักษณะที่เกิดขึ้นได้ดังกล่าวจึงทำให้เกิดการถ่วงน้ำหนักด้วยค่าความแปรปรวนเกิดขึ้นซึ่งค่าที่ใช้ในการถ่วงน้ำหนักสำหรับส่วนที่สองจะมีดังนี้คือ $1/\omega$, $1/\omega^2$ กับ σ^2, $1/\sigma^2$ ซึ่งสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนและค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุดดังตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน ที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

สำหรับค่าความแปรปรวนมีค่าเท่ากับ ±10%

n	m	program	Estimated parameter	$\|E\|_2$
0	1	(e)	$b_2 = 3.9560\times10^{-4}$ $a_2 = 3.8010\times10^{-4}$ $b_1 = 9.8520\times10^{-4}$ $a_1 = 0.1996$ $b_0 = 1.0020$ $a_0 = 1.0000$	0.487166
0	2	(c)	$a_5 = 1.7530\times10^{-3}$ $b_4 = 4.9090\times10^{-3}$ $a_4 = 1.9720$ $b_3 = 0.0023$ $a_3 = 7.9190$ $b_2 = 9.9050$ $a_2 = 10.1100$ $b_1 = 4.7230\times10^{-4}$ $a_1 = 0.7995$ $b_0 = 1.0010$ $a_0 = 1.0000$	0.407771
2	3	(b)	$b_2 = 0.1334$ $a_3 = 1.5370\times10^{-2}$ $b_1 = 3.6620$ $a_2 = 0.6207$ $b_0 = 29.9400$ $a_1 = 1.5790$ $a_0 = 1.0000$	10.670690
4	4	(b)	$b_3 = 0.1314$ $a_3 = 1.8710\times10^{-5}$ $b_2 = 9.3670$ $a_2 = 9.5440\times10^{-2}$ $b_1 = -67.1700$ $a_1 = 0.4550$ $b_0 = 100.3000$ $a_0 = 1.0000$	65.475620
3	5	(b)	$a_5 = 4.0780\times10^{-3}$ $b_4 = 6.9120\times10^{-3}$ $a_4 = 7.1720\times10^{-2}$ $b_3 = 0.9968$ $a_3 = 0.4560$ $b_2 = -10.2200$ $a_2 = 1.3510$ $b_1 = 30.1600$ $a_1 = 1.9060$ $b_0 = -30.3700$ $a_0 = 1.0000$	12.044400

โดยกำหนดให้ (a) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนัก

(b) คือโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$

(c) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega^2$

(d) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2

(e) คือ โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\sigma^2$

ผลจากการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอน พบว่าการถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ มีแนวโน้มว่าสามารถทำให้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนมีค่าความ

ถูกต้องและแม่นยำมากขึ้นกว่าโปรแกรมที่ไม่มีการถ่วงน้ำหนัก เมื่อข้อมูลมีค่าความแปรปรวนเกิดขึ้น ส่วนการถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2 เป็นค่าที่ไม่ทำให้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนมีความแม่นยำมากขึ้น คือพบว่าแนวโน้มเมื่อมีการถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2 ไม่สามารถทำให้โปรแกรมมีค่าถูกต้องและแม่นยำขึ้น การถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ และเมื่อสังเกตจากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างส่วนจำนวนจริงกับความถี่ และส่วนจำนวนจินตภาพกับความถี่ พบว่าเมื่อลำดับขั้นโพลิโนเมียนมีค่าเพิ่มมากขึ้น การถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2 ข้อมูลที่ได้จากการคำนวณและชุดข้อมูลไม่สอดคล้องกัน และยังทำให้ค่าความผิดพลาดมีค่าสูงมาก การประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนในส่วนนี้ จึงสรุปได้ว่าการถ่วงน้ำหนักด้วยค่า σ^2 ไม่เหมาะสมในการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน ซึ่งจากตารางที่ 5.2 พบว่า การถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$ มีแนวโน้มว่าสามารถทำให้โปรแกรมมีความถูกต้องและแม่นยำมากที่สุด ตามด้วยการถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega^2$ กับค่า $1/\sigma^2$

3. ส่วนที่สามเป็นการนำโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนไปใช้กับชุดข้อมูลจริงที่ได้จากการทดลอง ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำข้อมูลของ Yanovsky et al. (1996) และ Kucukpinar et al. (n.d.) ดังตารางที่ 4.11 และ 4.14 โดยใช้โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนพบว่าได้ค่าเป็นไปดังตารางที่ 5.3 และตารางที่ 5.4 ตามลำดับ

ตารางที่ 5.3 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดในแต่ละกรณี โดยใช้ข้อมูลของ Yanovsky et al. (1996)

Ref.	program	Estimated parameter	$\|E\|_2$
Yanovsky et al. (1996)	(c)	$b_3 = 22.7600$ $a_3 = 5.2770$ $b_2 = 322.5000$ $a_2 = 77.4700$ $b_1 = 49.0200$ $a_1 = 23.2500$ $b_0 = 0.01968$ $a_0 = 1.0000$	0.588785

ตารางที่ 5.4 แสดงผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการถ่ายโอนที่มีค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดในแต่ละกรณี โดยใช้ข้อมูลของ Kucukpinar et al. (n.d.)

Ref.	Relaxation time $\lambda_{i,s}$	Strength $G_{0i,Pa}$	Program	Estimated parameter	$\lVert E \rVert_2$
Kucukpinar et al. (n.d.)	10	1.94E+01	(b)	$b_2 = 0.02987$ $a_2 = 1.514\times10^{-3}$ $b_1 = 194.0000$ $a_1 = 10.0000$ $b_0 = 1.1880\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	9.85351×10^{-3}
	1	8.33E+02	(a)	$b_3 = 5.1750\times10^{-3}$ $a_3 = 6.2130\times10^{-6}$ $b_2 = 45.1800$ $a_2 = 5.4240\times10^{-2}$ $b_1 = 833.0000$ $a_1 = 1.0540$ $b_0 = -1.4600\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	6.602797×10^{-2}
	0.1	3.93E+04	(a)	$b_1 = 3930.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = -9.6700\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	4.456085×10^{-1}
	0.01	3.48E+05	(e)	$a_2 = 1.9090\times10^{-13}$ $b_1 = 3480.0000$ $a_1 = 0.1000$ $b_0 = 3.2700\times10^{-3}$ $a_0 = 1.0000$	4.409813×10^{-1}
	0.001	3.70E+05	(e)	$a_2 = 6.5690\times10^{-14}$ $b_1 = 370.0000$ $a_1 = 0.0010$ $b_0 = 2.9430\times10^{-5}$ $a_0 = 1.0000$	5.194400×10^{-2}
	0.0001	1.00E+06	(a)	$a_2 = 6.5490\times10^{-14}$ $b_1 = 100.0000$ $a_1 = 0.0001$ $b_0 = -2.0880\times10^{-6}$ $a_0 = 1.0000$	1.431636×10^{-2}

จากชุดข้อมูลที่นำมาใช้นั้น เป็นชุดข้อมูลของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น จากการศึกษาพบว่า โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ สามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนมีความถูกต้อง เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากการสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนกับชุดข้อมูลที่วัดได้ จากผลการประเมินสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งสามส่วน จึงสรุปได้ว่าโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนทั้งแบบไม่ถ่วงน้ำหนักและแบบถ่วงน้ำหนักด้วยค่า $1/\omega$, $1/\omega^2$ และ $1/\sigma^2$ นั้นเป็นวิธีการที่สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนมีความถูกต้อง โดยพิจารณาจากค่าความผิดพลาดที่มีค่าน้อยที่สุด และความเสถียรของฟังก์ชันถ่ายโอน

5. 2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยต่อไป

ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อการเขียนโปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถนำไปพัฒนาร่วมกับการสร้างเครื่องมือวัดความหนืด, ความยืดหยุ่นของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น ที่ต้องการทราบถึงพฤติกรรมทางพลวัตของวัสดุในการทดสอบ และการสร้างวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นได้ หรือสามารถนำความรู้ที่ได้ทำการศึกษานี้เป็นแนวทางในการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาทางด้านวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้นต่อไป

รายการอ้างอิง

กนต์ธร ชำนิประศาสน์ และจิระพล ศรีเสริฐผล. (2548). **ระบบควบคุมอัตโนมัติ**. สาขาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

กฤษณะ สาคริก. (2545). **วิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับนักเคมี**. พิมพ์ครั้งที่ 2. บริษัทธนาเพรส แอนด์ กราฟฟิค จำกัด.

กาจพันธ์ สกุลแก้ว. (2547). **การทดสอบการผิดรูปอยู่ตัวของยาง** [ออนไลน์]. ได้จาก: http://www.stkc.go.th/stportalContent.php?id=223

จินตมัย สุวรรณประทีป. (2539). **ความยืดหยุ่นหนืดแบบไม่เชิงเส้นของพอลิเมอร์**. วารสารโลหะ วัสดุและแร่ 5(2) : 17-22.

จินตมัย สุวรรณประทีป. (2547). **การทดสอบสมบัติทางกลของพลาสติก**. กรุงเทพฯ: สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น).

มนัส แซ่ด่าน. (2538). **รีโอโลยีเบื้องต้น**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์โฟร์เพช จำกัด.

วริทธิ์ อึ๊งภากรณ์ และรัชทิน จันทร์เจริญ. (2543). **ระบบควบคุมเชิงเส้น**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สราวุฒิ สุจิตจร. (2546). **การควบคุมอัตโนมัติ**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่น อินโดไชน่า

สมบัติ พุทธจักร. (2547). **สมบัติเชิงฟิสิกส์เชิงรีโอโลยีและเชิงวิศวกรรมของยาง.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์:โรงพิมพ์ฝ่ายเทคโนโลยีทางการศึกษา สำนักวิทยบริการมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

อุทัยวรรณ ฉัตรธง และอรุณี อภิชาตสรางกูร. (2547). **แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติคของมะม่วงกวน** [ออนไลน์]. ได้จาก: http://www.phtnet.org/download/FullPaper/pdf/2ndSeminarKKU/af062.pdf

Ali, E. H. and Karim, Y. K. (1995). A transfer function computational algorithm for linear control system. **IEEE Control systems**. 114-118.

Baltussen J. J. M. and Northolt. (2003). The viscoelastic extension of polymer fibres:complex loadings. **Polymer ELSEVIER**. Vol. 44 : 1957-1966.

Chapra, C. S. and Canale, P. R. (2002). **Numerical Methods for Engineers**. New York: McGraw-Hill.

Chenyang, L., Chaoxu, L., Peng, C., Jiasong, H. and Qingrong, F. (2004). Influence of long-chain branching on linear viscoelastic flow properties and dielectric relaxation of polycarbonates. **Polymer ELSEVIER**. Vol. 45 : 803-2812.

Chen, H. Q., G. H. Zhong, L. Li, Z. Y. Chen and Z. N. Xue. (1988). The viscoelasticity of human blood at low shear rate. **IEEE Enginerring in medicine & biology society**. 705-706.

Cho, S. K., Kim, S. W., Lee, D-H., Park, S. L., Min, E. K., Seo, H. K., Kang, I-K. I., Park, S-Y. and Kwow, Y. (2002). A Phenomenological Model for Linear Viscoelasticity of Monodisperse Linear Polymer. **Macro molecular Research**. Vol. 10 : 266-272.

David, S. W. (1991). **Fundamentals of Matrix Computations**. New York: JOHN WILEY & SON.

Dillard, A. D. (1998). Linear Viscoelastic Constitutive Medels. **Virginia Tech**. 2.1-2.14.

Esra, K., Dilhan, M. K. and Paul. P. T. (n.d.). **Viscoelasticity of polyethylenes produced with single site metallocene catalysis** [On-line]. Available: http://www.hfmi.stevens-tech.edu/publications

Evaristo, R., Ricardo, D-C., Margarita, G. P., Rosa, M. M. and Catalina, S. (2000). **Polymer Viscoelasticity Stress and Strain in Practice**. New York: Marcel Dekker Inc.

Geil, D. M. (2002). An iterative method for viscoelastic modeling of prosthetic feet. **Journal of biomechanics**. 35 : 1405-1410.

Hassul, M. and Shahian, B. (1992). "Frequency Domain Identification for Undergraduates". **IEEE Transaction on education**. Vol. 35, No. 4 : 368-375.

Isogai, Y., A. Itda, I. Chikatsu, K. Mochizuki and M. Abe. (1973). Dynamic viscoelasticity of blood during clotting in health and disease. **Biorheology**. 10 : 411-424.

Ju, S. K., C. K. Song, B. S. Jeon, J. W. Ryu, Y. S. Jang, S. S. Kim and S. H. Lee. (2001). A frequency domain identification method using total least squares. **IEEE**. 1855-1859.

Kim, J. S., Song, C. K., Jeon, B. S., Ryu, J. W., Jang, Y. S., Kim, S. S., and Lee, S. H. (2001). A Frequency Domain Identification Method Using Total Least Squares. **IEEE International Symposium**. Vol. 3 : 1855–1859.

Kwang, S. C., Kyung, H. A. and Seung, J. L. (2004). Universality of linear viscoelasticity of Monodisperse Linear Polymers. **Journal of polymer science: part B: polymer physics**. Vol. 42 : 2730-2734.

Luc, P., Rik, P. and Leo, V. B. (1992). Identification of the Constitutive Equations for Linear Viscoelastic Composite Materials, Instrumentation and Measurement Technology Conference 9th. **IEEE**. 709-715.

Levy, E. C. (1959). Complex-curve fitting. **IRE Trans. Autom. Contr.** Vol. 4 : 37-43.

Magrab, B. E., Azarm, S., Balachandran, B., Duncan, J., Herold, K. and Walsh, G. (n.d). **An Engineer's Guide to MATLAB**. New Jersey: Prentice Hall.

Misra, P. (1988). Transfer function matrices of singular state space systems. **IEEE Control systems**. 2091-2092.

Naser, F. A-M. and Stanoje, B. (1994). An algorithm for calculating markov parameters from transfer function matrices. **Computers Elect. Eng.** 21 : 77-87.

Rao, M. A. and Steffe, J. F. (1992). **Viscoelastic Properties of Foods**. London and New York: Elsevier Applied Science.

Roderic, S. L. (1999). **Viscoelastic Solids**. Boca Raton : CRC Press.

Sanathananan, C. K. and Koerner, J. (1963). Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials. **IEEE Trans. Autom. Contr.** Vol. 8 : 56-58.

Schoukens J. and Pintelon. (1991). **Identification of Linear Systems A Practical Guideline to Accurate Modeling.** New York: Pergamon Press.

Whitfield, A. H. (1986). Transfer function synthesis using frequency response data, Int. **J. Control**. Vol. 43 : 1413-1426.

Yanovsky, G. Y., Basistov, G. Y. and Siginer, A. D. (1996). Linear inverse problems in viscoelastic continua and a minimax method for fredhom equation of the first kind, Int. **J. Engng sci**. Vol. 34 : 1221-1245.

Yeon-Wook, C. (1999), Frequency Domain Identification for a Simple Plant, **SICE**. 1015-1020.

Yehia, M. H. (2000). **Mechanical Behaviour of Engineering Materials. Volume 2. Dynamic Loading and Intelligent Material Systems**. London: Kluwer Academic Publishers.

Ping, Y. and Yehia, M. H. (1994). A dynamic system identification method for the characterization of the rheological response of a class of viscoelastic material, Int. **J. pores Ves. & piping.** Vol 61 : 87-97.

ภาคผนวก

โปรแกรมสังเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอน

Code โปรแกรม

1. โปรแกรม Computer PQRS.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ComputerPQRS.m                                    %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                       %%%
%%% Master degree of mechanical engineering           %%%
%%% ID.no.: M4540113                                  %%%
%%% n = order of nominator                            %%%
%%% m = order of denominator                          %%%
%%% p = n/2                                           %%%
%%% q = (n-1)/2                                       %%%
%%% r = m/2                                           %%%
%%% s = (m-1)/2                                       %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [p,q,r,s] =PQRS(n,m)
p = n/2;
p = fix(p);
q = (n-1)/2;
   if q >=0
      q=fix(q);
   else
      q = q;
   end
r = m/2;
r = fix(r);
s = (m-1)/2;
 if s >=0
      s=fix(s);
 else
```

```
    s = s;
end
```

2. โปรแกรม AVG.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% AVG.m                                                     %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                %%%
%%% Master degree of mechanical engineering                   %%%
%%% ID.no.: M4540113                                          %%%
%%% x = Data point                                            %%%
%%% n = number of data point                                  %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function mean = avg(x,n)
    mean = sum(x)/n;
```

3. โปรแกรม STAT.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% stat.m                                              %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                         %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                    %%%
%%% [u,v]=sdv(u,v,s)                                    %%%
%%%   mean  = avarage of data                           %%%
%%%   stdev = variance                                  %%%
%%%   x     = Data                                      %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [mean,stdev] = stat(x)
n = length(x);
mean = avg(x,n);
stdev =(sum((x-mean).^2)./n);
```

4. โปรแกรม ramda1.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda1.m                                            %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                         %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                    %%%
%%% ramda1 -[A11]=ramda1(omega,k,M,p)       %%%
%%% omega = frequency                                   %%%
%%% n = order of nominator                              %%%
%%% m = order of denominator                            %%%
%%% k = 2 x amount of data                              %%%
%%% M = n+m+1                                           %%%
%%% p = n/2;                                            %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function A11 = ramda1(omega,k,M,p)
```

```
for i=0:p
   for j=1:k
      A11(j,i+1) = ((-1)^i).*(omega(1,j).^(2*i));
   end
end
```

5. โปรแกรม ramda2.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda2.m                                         %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                      %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                 %%%

%%% ramda2 is [A13]=ramda2(R,omega,k,M,r)   %%%
%%% R     = Date in Real axis                        %%%
%%% omega = frequency                                %%%
%%% n = order of nominator                           %%%
%%% m = order of denominator                         %%%
%%% k = 2 x amount of data                           %%%
%%% M = n+m+1                                        %%%
%%% r = m/2                                          %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [A13] = ramda2(R,omega,k,M,r)
format long g
if r==0
   fprintf('No matric A13\n');
   A13=0;
else
for i=1:r
   for j=1:k
```

```
            A13(j,i) = ((-1)^(i+1)).*(omega(1,j).^(2*i)).*R(1,j);
    end
end
end
```

6. โปรแกรม ramda3.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda3.m                                                    %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                  %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                            %%%
%%% ramda3 is [A14]=ramda3(X,omega,k,M,r)   %%%
%%% X     = Date in imaginaly axis                              %%%
%%% omega = frequency                                           %%%
%%% n = order of nominator                                      %%%
%%% m = order of denominator                                    %%%
%%% k = 2 x amount of data                                      %%%
%%% M = n+m+1                                                   %%%
%%% s= (m-1)/2;                                                 %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [A14] = ramda3(X,omega,k,M,s)
format long g
if s < 0
    fprintf('No matric A14\n');
    A14=0;
else
    for i=0:s
        for j=1:k
            A14(j,i+1) = ((-1)^(i)).*(omega(1,j).^((2*i)+1)).*X(1,j);
        end
```

```
    end
end
```

7. โปรแกรม ramda4.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda4.m                                           %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                         %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                   %%%
%%% ramda4 is [A22]=ramda(omega,k,M,r)      %%%
%%% omega = frequency                                  %%%
%%% n = order of nominator                             %%%
%%% m = order of denominator                           %%%
%%% k = 2 x amount of data                             %%%
%%% M = n+m+1                                          %%%
%%% q= (n-1)/2                                         %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function A22 = ramda4(omega,k,M,q)
if q < 0
    fprintf('No matric A22\n');
    A22=0;
else
  for i=0:q
      for j=1:k
          A22(j,i+1) = ((-1)^(i)).*(omega(1,j).^((2*i)+1));
      end
  end
end
```

8. โปรแกรม ramda5.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%%% ramda5.m                                         %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                      %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                 %%%
%%% ramda5 is [A23]=ramda5(X,omega,k,M,r)   %%%
%%% X     = Date in imaginaly axis                   %%%
%%% omega = frequency                                %%%
%%% n = order of nominator                           %%%
%%% m = order of denominator                         %%%
%%% k = 2 x amount of data                           %%%
%%% M = n+m+1                                        %%%

%%% r= m/2                                           %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [A23] = ramda5(X,omega,k,M,r)
if r == 0
  fprintf('No matric A23\n');
  A23=0;
else
  for i=1:r
    for j=1:k
      A23(j,i) = ((-1)^(i+1)).*(omega(1,j).^(2*i).*X(1,j));

 end

  end
end
```

9. โปรแกรม ramda6.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda6.m                                         %%%
```

```
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                  %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                             %%%
%%% ramda6 is [A24]=ramda6(R,omega,k,M,r)   %%%
%%% R     = Date in Real axis                                    %%%
%%% omega = frequency                                            %%%
%%% n = order of nominator                                       %%%
%%% m = order of denominator                                     %%%
%%% k = 2 x amount of data                                       %%%
%%% M = n+m+1                                                    %%%
%%% s = (m-1)/2                                                  %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [A24] = ramda6(R,omega,k,M,s)
format short g
if s<0
   fprintf('No matric A24\n');
   A24=0;
else
   for i=0:s
      for j=1:k
         A24(j,i+1) = ((-1)^(i+1)).*(omega(1,j).^((2*i)+1)).*R(1,j);
      end


   end
end
```

10. โปรแกรม ramda12.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda12.m                                                    %%%
```

```
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                    %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                               %%%
%%% ramda12 is [A12]=ramda(omega,k,M,r)     %%%
%%% omega = frequency                                              %%%
%%% n = order of nominator                                         %%%
%%% m = order of denominator                                       %%%
%%% k = 2 x amount of data                                         %%%
%%% M = n+m+1                                                      %%%
%%% q= (n-1)/2                                                     %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function A12 = ramda12(omega,k,M,q)
if q < 0
   fprintf('No matric A22\n');
   A12=0;
else
  for i=0:q
      for j=1:k

          A12(j,i+1) = 0.0;
      end


   end
end
```

11. โปรแกรม ramda21.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% ramda21.m                                                      %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                    %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
```

```
%%% ID.no.: M4540113                                  %%%
%%% ramda21 -[A21]=ramda21(omega,k,M,p)               %%%
%%% omega = frequency                                 %%%
%%% n = order of nominator                            %%%
%%% m = order of denominator                          %%%
%%% k = 2 x amount of data                            %%%
%%% M = n+m+1                                         %%%
%%% p = n/2                                           %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function A21 = ramda21(omega,k,M,p)
for i=0:p
```

```
for j=1:k
      A21(j,i+1) = 0.0;
  end
end
```

12. โปรแกรม leastupdate.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% leastupdate.m                                  %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                     %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                %%%
%%% Least squart method                             %%%
%%% No weighting function                           %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear

%%%%%%%%%%%%%%%% Input data%%%%%%%%%%%%%%%%%% %%

  omega=load('C\:w.txt');
  R=load('C:\U.txt');
  X=load('C:\V.txt');
  [N,M]= size(omega);
  [N1,M]= size(R);
  [N2,M]= size(X);
  if N~=1
    omega = omega';
  elseif N1~=1
    R = R';
  elseif N2~=1
    X = X';
  end
```

```
%%% %%%%%%%%%%%%%initial condition %%%%%%%%%%%%%%%

   Count = 0;
   n     = 0;
   m     = 0;
   Eold  = 0;
   iter  = 0;
   errornew=0;
   anew=0;
   bnew=0;
   Nnew =0;
   Mnew =0;
 %%%%%%%%%%%%%%%%calculate p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%

   [N,M]= size(R);

   k = M;          % amount of data
%%%%%%%%%%%%%%% Loop for 10 Order %%%%%%%%%%%%%%%
for m=1:10
  for n=0:m
     M = n+m+1;
%%%%%%%%%%%%%%% find value p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%

     [p,q,r,s]=ComputePQRS(n,m);

%%%%%%%%%%%%%%%%find ramda  %%%%%%%%%%%%%%%%%%
     A11 = ramda1(omega,k,M,p);
     A12 = ramda12(omega,k,M,q);
     A13 = ramda2(R,omega,k,M,r);
     A14 = ramda3(X,omega,k,M,s);
     A21 = ramda21(omega,k,M,p);
```

```
A22 = ramda4(omega,k,M,q);
A23 = ramda5(X,omega,k,M,r);
A24 = ramda6(R,omega,k,M,s);

%%%%%%%%%%%%%% create rectangula matric A %%%%%%%%%%%%%%
if n==0&&m==1

   A=[A11 A14;A21 A24];

elseif n==1&&m==1

   A=[A11 A12 A14;A21 A22 A24];

elseif  n==0

   A=[A11 A13 A14;A21 A23 A24];
else
   A=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24];
end
%%%%%%%%%%%%%%%% create vector B  %%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[R';X'];

%%%%%%%%%%%%%%%% Psuedo Inverse %%%%%%%%%%%%%%%%%%

[NN,MM]=size(A)
RR= rank(A)
if RR==MM
   Sol =  (inv(A'*A)*A')*B
else
```

```
    break
 end
%%%%%%%%%%%%%% Set Form G(jw)  %%%%%%%%%%%%%%%%%%
   a(1,1)=1.0;      %%% constant
   NU = (n+1)/2;
   KU = ceil(NU);
     for i=1:KU
         b((2*i)-1,1)=Sol(i,1);
     end
     L=(n+1)-KU;
     for i=1:L
         b(2*i,1)=Sol(KU+i,1);
     end
     MI = m./2;
     KI = fix(MI);
     for i=1:KI
         a((2*i)+1,1)=Sol(n+i+1,1);
         aeven(i,1)=Sol(n+i+1,1);
     end
     L=m-KI;
     for i=1:L
         a(2*i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
         aodd(i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
     end

%%%%%%%%%%%%%%% Roots of poles %%%%%%%%%%%%%%%%%%
 Ra=flipud(a);


Ra=Ra';
 Ra_root=roots(Ra);
 Root_real=real(Ra_root);
```

```
for i=1:m
    if Root_real(i,1)>=0
       rr=1;
       fprintf('at n=%d,m=%d Unstability system',n,m);
       break
    else
        rr=0;
    end
end
  for i=1:m+1
      atotal(i,n+1,m)=a(i,1);
  end

  for i=1:n+1
      btotal(i,m,n+1)=b(i,1);
  end
```

%%%%%%%%%%%%%%% **Transfer function** %%%%%%%%%%%%%%%

```
if rr == 0               % if of stability check
  num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
  den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
  sys = tf(num,den)

  [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
  u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);

v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);

  for i=1:k
```

```
    Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
    Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
  end

  G=[ R X]';
  Gm=[Rmodel Xmodel]';
  abs_error = (G-Gm);
%%%%%%%%%%%% Adjusted coefficient of determination %%%%%%%%%
    error = norm(abs_error)
    errorTotal(m,n+1)=error

  if m==1&&n==0
    anew=a;
    bnew=b;
    Nnew=n;
    Mnew=m;
    errornew=error;
  else

    if errornew>error

      errornew=error
      anew = a;
      bnew = b;
      Nnew = n;
      Mnew = m;
      sys = tf(num,den)
    end
    if errornew<=error
      errornew=errornew
```

```
          anew = anew;
          bnew = bnew;
          Nnew = Nnew;
          Mnew = Mnew;

          sys = tf(num,den)

        end
    end
else
    if m==1&&n==0
        num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
        den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
        sys = tf(num,den)
        [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);

        u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
        v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);


    for i=1:k

        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
        error = norm(abs_error)
        errornew=error;
```

```
        anew=a;
        bnew=b;
        Nnew=n;
        Mnew=m;
    end

end

     end
    iter=iter+1
end
```

%%%%%%%%%%%%% **Display** %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%/n');
fprintf('Final Transfer functin/n');
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nn');
    num_final = flipud(bnew)';   % Flip Row from up to down
    den_final = flipud(anew)';   % Flip Row from up to down
    sys = tf(num_final,den_final)
```

%%%%%% **Plot between real vs. frequency and imagine vs. frequency**%%%%%

```
[magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
    for i=1:k

        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
```

```
   end
subplot(2,1,1);
semilogx(omega,R,'*k',omega,Rmodel,'-k');

xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Storage  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
subplot(2,1,2);
semilogx(omega,X,'*k',omega,Xmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Loss  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
```

13. โปรแกรม leastweight.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% leastweigh.m                                               %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                                 %%%
%%% Master degree of mechanical engineering %%%
%%% ID.no.: M4540113                                           %%%
%%% Least squart method                                        %%%
%%% with weighting function  by 1/frequency %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Input data %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  omega=load('C\:w.txt');
  R=load('C:\U.txt');
  X=load('C:\V.txt');
  [N,M]= size(omega);
  [N1,M]= size(R);
```

```
[N2,M]= size(X);
if N~=1
   omega = omega';

elseif N1~=1
   R = R';

 elseif N2~=1
   X = X';

 end
     %%%%%%%%%%%%%%%% initial condition%%%%%%%%%%%%%%%%

 Count = 0;
 n     = 0;

m     = 0;
 Eold  = 0;
 iter  = 0;
 errornew=0;
 anew=0;
 bnew=0;
 Nnew =0;
 Mnew =0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%calculate p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%%%

 [N,M]= size(R);
 k = M;            % amount of data

%%%%%%%%%%%%%% Create Weighting Function %%%%%%%%%%%%%
```

```
      W = 1./(omega);
      W = [W' ; W']
for i=1:2*k
  for j=1:2*k
   if i == j
      WK(i,j) = W(i,1);
   else
      WK(i,j) = 0.0;
   end
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%% Loop for 10 Order %%%%%%%%%%%%%%%
for m=1:10
   for n=0:m
      M = n+m+1;
  %%%%%%%%%%%%%%% find value p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%

      [p,q,r,s]=ComputePQRS(n,m);

  %%%%%%%%%%%%%%%find ramda  %%%%%%%%%%%%%%%%%%
      A11 = ramda1(omega,k,M,p);
      A12 = ramda12(omega,k,M,q);
      A13 = ramda2(R,omega,k,M,r);

      A14 = ramda3(X,omega,k,M,s);
      A21 = ramda21(omega,k,M,p);
      A22 = ramda4(omega,k,M,q);

      A23 = ramda5(X,omega,k,M,r);
      A24 = ramda6(R,omega,k,M,s);
```

```
%%%%%%%%%%%%%%  create rectangula matric A %%%%%%%%%%%%%%
    if n==0&&m==1

       A=[A11 A14;A21 A24];
       elseif n==1&&m==1

       A=[A11 A12 A14;A21 A22 A24];

    elseif  n=0

       A=[A11 A13 A14;A21 A23 A24];
    else
       A=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24];
    end
%%%%%%%%%%%%%%%%% create vector B  %%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[R';X'];

%%%%%%%%%%%%%%%% Psuedo Inverse %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

  Sol =  (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;

%%%%%%%%%%%%%%% Set Form G(jw)  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

  a(1,1)=1.0;  %%% constant
  NU = (n+1)/2;
  KU = ceil(NU);
    for i=1:KU

         b((2*i)-1,1)=Sol(i,1);
```

```
        end
        L=(n+1)-KU;
        for i=1:L
            b(2*i,1)=Sol(KU+i,1);
        end

        MI = m./2;
        KI = fix(MI);
        for i=1:KI

            a((2*i)+1,1)=Sol(n+i+1,1);
            aeven(i,1)=Sol(n+i+1,1);
        end
        L=m-KI;
        for i=1:L
            a(2*i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
            aodd(i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);

    end

%%%%%%%%%%%%%%% Roots of poles %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ra=flipud(a);
Ra=Ra';
Ra_root=roots(Ra);
Root_real=real(Ra_root);
for i=1:m
    if Root_real(i,1)>=0
        rr=1;
        fprintf('at n=%d,m=%d Unstability system',n,m);
        break
    else
```

```
        rr=0;
      end
   end
     for i=1:m+1
         atotal(i,n+1,m)=a(i,1);
     end

     for i=1:n+1
         btotal(i,m,n+1)=b(i,1);
     end

%%%%%%%%%%%%%%% Transfer function %%%%%%%%%%%%%%%%%
if rr == 0              % if of stability check
     num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
     den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
     sys = tf(num,den)
     [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
     u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
     v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);

     for i=1:k

         Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
         Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
     end


     G=[ R X]';
     Gm=[Rmodel Xmodel]';
     abs_error = (G-Gm);
%%% Adjusted coefficient of determination %%%%
```

```
    error = norm(abs_error)
    errorTotal(m,n+1)=error

if m==1&&n==0
    anew=a;
    bnew=b;
    Nnew=n;
    Mnew=m;

errornew=error;
else

    if errornew>error

        errornew=error
        anew = a;
        bnew = b;
        Nnew = n;
        Mnew = m;
        sys = tf(num,den)
    end
    if errornew<=error
        errornew=errornew
        anew = anew;
        bnew = bnew;
        Nnew = Nnew;
        Mnew = Mnew;
        sys = tf(num,den)

    end
end
```

```
else
  if m==1&&n==0
     num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
     den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
     sys = tf(num,den)
     [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
     u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
     v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
  for i=1:k
     Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
     Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
  end

  G=[ R X]';
  Gm=[Rmodel Xmodel]';
  abs_error = (G-Gm);
     error = norm(abs_error)
     errornew=error;
     anew=a;
     bnew=b;
     Nnew=n;
     Mnew=m;
  end

end

   end
  iter=iter+1
end

%%%%%%%%%%%%%%% Display %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%/n');
fprintf('Final Transfer functin/n');
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nn');
   num_final = flipud(bnew)';   % Flip Row from up to down
   den_final = flipud(anew)';   % Flip Row from up to down
   sys = tf(num_final,den_final)
```

%%%%%% **Plot between real vs. frequency and imagine vs. frequency**%%%%%

```
[magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
   for i=1:k
      Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
      Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
   end
subplot(2,1,1);
semilogx(omega,R,'*k',omega,Rmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Storage  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
subplot(2,1,2);
semilogx(omega,X,'*k',omega,Xmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Loss  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
```

14. โปรแกรม leastweight2.m

%%

```
%%% leastweigh2.m                                        %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai            %%%
%%% Master degree of mechanical engineering   %%%
%%% ID.no.: M4540113                                     %%%
%%% Least squart method                                  %%%
%%% with weighting function  by 1/frequency^2 %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc

clear

%%%%%%%%%%%%%%%%  Input data %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  omega=load('C\:w.txt');
  R=load('C:\U.txt');
  X=load('C:\V.txt');
  [N,M]= size(omega);
  [N1,M]= size(R);
  [N2,M]= size(X);

 if N~=1
     omega = omega';
  elseif N1~=1
     R = R';
  elseif N2~=1
     X = X';

  End

       %%%%%%%%%%%%%%%% initial condition%%%%%%%%%%%%%%%
   Count = 0;
```

```
n     = 0;
m     = 0;
Eold  = 0;
iter  = 0;
errornew=0;
anew=0;
bnew=0;
Nnew =0;
Mnew =0;
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%**calculate p,q,r,s** %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
[N,M]= size(R);
k = M;          % amount of data
```

```
%%%%%%%%%%%%%% Create Weighting Function %%%%%%%%%%%%%%

W = 1./((omega).*(omega));
     W = [W' ; W']
for i=1:2*k
  for j=1:2*k
   if i == j
     WK(i,j) = W(i,1);
   else
     WK(i,j) = 0.0;
   end
  end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%% Loop for 10 Order %%%%%%%%%%%%%%%%%

for m=1:10
   for n=0:m
     M = n+m+1;

  %%%%%%%%%%%%%%%%% find value p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%%%

     [p,q,r,s]=ComputePQRS(n,m);

  %%%%%%%%%%%%%%%%%find ramda  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

 A11 = ramda1(omega,k,M,p);
     A12 = ramda12(omega,k,M,q);
     A13 = ramda2(R,omega,k,M,r);
     A14 = ramda3(X,omega,k,M,s);
     A21 = ramda21(omega,k,M,p);
```

```
    A22 = ramda4(omega,k,M,q);
    A23 = ramda5(X,omega,k,M,r);
    A24 = ramda6(R,omega,k,M,s);

%%%%%%%%%%%%%% create rectangula matric A %%%%%%%%%%%%%%
    if n==0&&m==1

      A=[A11 A14;A21 A24];

    elseif n==1&&m==1

      A=[A11 A12 A14;A21 A22 A24];

    elseif  n==0

      A=[A11 A13 A14;A21 A23 A24];

    else
      A=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24];
    end
%%%%%%%%%%%%%%%% create vector B  %%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[R';X'];

%%%%%%%%%%%%%%% Psuedo Inverse %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

  Sol =  (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;

%%%%%%%%%%%%%% Set Form G(jw)  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

  a(1,1)=1.0;  %%% constant
```

```
 NU = (n+1)/2;
 KU = ceil(NU);
   for i=1:KU

       b((2*i)-1,1)=Sol(i,1);

   end
   L=(n+1)-KU;
   for i=1:L
      b(2*i,1)=Sol(KU+i,1);
   end

   MI = m./2;
   KI = fix(MI);
   for i=1:KI
      a((2*i)+1,1)=Sol(n+i+1,1);

aeven(i,1)=Sol(n+i+1,1);
   end
   L=m-KI;
   for i=1:L
      a(2*i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
      aodd(i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
   end


%%%%%%%%%%%%%% Roots of poles %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ra=flipud(a);
Ra=Ra';
Ra_root=roots(Ra);
Root_real=real(Ra_root);
```

```
for i=1:m
  if Root_real(i,1)>=0

    rr=1;
    fprintf('at n=%d,m=%d Unstability system',n,m);
    break
  else
    rr=0;
  end
end
 for i=1:m+1
    atotal(i,n+1,m)=a(i,1);
 end

 for i=1:n+1
    btotal(i,m,n+1)=b(i,1);
 end
%%%%%%%%%%%%%% Transfer function %%%%%%%%%%%%%%%%%
if rr == 0          % if of stability check
  num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
  den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
  sys = tf(num,den)
  [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
  u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
  v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);


  for i=1:k

    Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
    Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
```

```
  end

  G=[ R X]';
  Gm=[Rmodel Xmodel]';
  abs_error = (G-Gm);
%%% Adjusted coefficient of determination %%%%

  error = norm(abs_error)
    errorTotal(m,n+1)=error

  if m==1&&n==0
    anew=a;
    bnew=b;
    Nnew=n;
    Mnew=m;
    errornew=error;
  else

    if errornew>error

      errornew=error
      anew = a;
      bnew = b;
      Nnew = n;
      Mnew = m;
      sys = tf(num,den)
    end
    if errornew<=error
      errornew=errornew
      anew = anew;
      bnew = bnew;
```

```
            Nnew = Nnew;
            Mnew = Mnew;
            sys = tf(num,den)
        end
    end
else
    if m==1&&n==0
        num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
        den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
        sys = tf(num,den)
        [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
        u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
        v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
    for i=1:k
        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
        error = norm(abs_error)
        errornew=error;
        anew=a;
        bnew=b;
        Nnew=n;

    Mnew=m;
    end


end
```

```
     end
    iter=iter+1
end


%%%%%%%%%%%%%%% Display %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%/n');
fprintf('Final Transfer functin/n');
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nn');
    num_final = flipud(bnew)';   % Flip Row from up to down
    den_final = flipud(anew)';   % Flip Row from up to down
    sys = tf(num_final,den_final)

%%%%%% Plot between real vs. frequency and imagine vs. frequency%%%%%

[magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
    for i=1:k
        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end
subplot(2,1,1);
semilogx(omega,R,'*k',omega,Rmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Storage  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
subplot(2,1,2);
semilogx(omega,X,'*k',omega,Xmodel,'-k');
```

```
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Loss  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
```

15. โปรแกรม leastweighSTAT.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% leastweighSTAT.m                                  %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                  %%%
%%% Master degree of mechanical engineering   %%%
%%% ID.no.: M4540113                                   %%%
%%% Least squart method                                %%%
%%% with weighting function  by varaince        %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc

clear

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Input data %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
  omega=load('C\:w.txt');
  R=load('C:\U.txt');

  X=load('C:\V.txt');
  [N,M]= size(omega);
  [N1,M]= size(R);
  [N2,M]= size(X);
  if N~=1
    omega = omega';
  elseif N1~=1
    R = R';
```

```
elseif N2~=1
   X = X';

End

        %%%%%%%%%%%%%%%% initial condition%%%%%%%%%%%%%%%%

  Count = 0;
  n     = 0;
  m     = 0;
  Eold  = 0;
  iter  = 0;
  errornew=0;
  anew=0;
  bnew=0;
  Nnew =0;
  Mnew =0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%calculate p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%%%

  [N,M]= size(R);
  k = M;          % amount of data

%%%%%%%%%%%%%% Create Weighting Function %%%%%%%%%%%%%

     [meanR,stdevR]=stat(R);
     [meanX,stdevX]=stat(X);
     W1 = diag(ones(k,1),0)
     W1 = stdevR.*W1
     W1 = diag(W1)
     W2 = diag(ones(k,1),0)
```

```
    W2 = stdevX.*W2
    W2 = diag(W2)
    W = [W1 ; W2]
 for i=1:2*k
    for j=1:2*k
       if i == j
          WK(i,j) = W(i,1);


  else
          WK(i,j) = 0.0;
       end
    end
  end
```

%%%%%%%%%%%%%%%%% **Loop for 10 Order** %%%%%%%%%%%%%%%%

```
for m=1:10
  for n=0:m
    M = n+m+1;
```

%%%%%%%%%%%%%%%% **find value p,q,r,s** %%%%%%%%%%%%%%%%%

```
    [p,q,r,s]=ComputePQRS(n,m);
```

%%%%%%%%%%%%%%%%**find ramda** %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```
    A11 = ramda1(omega,k,M,p);
    A12 = ramda12(omega,k,M,q);
    A13 = ramda2(R,omega,k,M,r);
    A14 = ramda3(X,omega,k,M,s);
    A21 = ramda21(omega,k,M,p);
```

```
A22 = ramda4(omega,k,M,q);
A23 = ramda5(X,omega,k,M,r);
A24 = ramda6(R,omega,k,M,s);

%%%%%%%%%%%%%% create rectangula matric A %%%%%%%%%%%%%%
if n==0&&m==1

   A=[A11 A14;A21 A24];

elseif n==1&&m==1

   A=[A11 A12 A14;A21 A22 A24];

elseif  n==0

   A=[A11 A13 A14;A21 A23 A24];
else
   A=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24];
end
%%%%%%%%%%%%%%%%% create vector B  %%%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[R';X'];

%%%%%%%%%%%%%%%% Psuedo Inverse %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Sol =  (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;

%%%%%%%%%%%%%% Set Form G(jw)  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
a(1,1)=1.0;  %%% constant
NU = (n+1)/2;
KU = ceil(NU);
  for i=1:KU

        b((2*i)-1,1)=Sol(i,1);


  end
  L=(n+1)-KU;
  for i=1:L
      b(2*i,1)=Sol(KU+i,1);
  end

  MI = m./2;
  KI = fix(MI);
  for i=1:KI
      a((2*i)+1,1)=Sol(n+i+1,1);
      aeven(i,1)=Sol(n+i+1,1);
  end
  L=m-KI;
  for i=1:L
      a(2*i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
      aodd(i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
  end

%%%%%%%%%%%%%%% Roots of poles %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ra=flipud(a);
Ra=Ra';
Ra_root=roots(Ra);
Root_real=real(Ra_root);
for i=1:m
```

```
    if Root_real(i,1)>=0
      rr=1;
      fprintf('at n=%d,m=%d Unstability system',n,m);
      break
    else
       rr=0;
    end
end
   for i=1:m+1
       atotal(i,n+1,m)=a(i,1);

   end
   for i=1:n+1
       btotal(i,m,n+1)=b(i,1);
   end
```

%%%%%%%%%%%%%% **Transfer function** %%%%%%%%%%%%%%%%%

```
if rr == 0              % if of stability check
   num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down

   den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
   sys = tf(num,den)
   [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
   u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
   v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);


   for i=1:k

       Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
       Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
```

```
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
%%% Adjusted coefficient of determination %%%%
        error = norm(abs_error)
        errorTotal(m,n+1)=error

    if m==1&&n==0
        anew=a;
        bnew=b;
        Nnew=n;
        Mnew=m;
        errornew=error;
    else

        if errornew>error

            errornew=error
            anew = a;
            bnew = b;
            Nnew = n;
            Mnew = m;
            sys = tf(num,den)
        end

        if errornew<=error
            errornew=errornew
            anew = anew;
            bnew = bnew;
```

```
        Nnew = Nnew;
        Mnew = Mnew;
        sys = tf(num,den)

      end
    end
else
    if m==1&&n==0
      num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
      den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down

     sys = tf(num,den)
      [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
      u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
      v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
    for i=1:k
      Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
      Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
      error = norm(abs_error)
      errornew=error;
      anew=a;
      bnew=b;
      Nnew=n;
      Mnew=m;
    end
```

```
end

     end
   iter=iter+1
end

%%%%%%%%%%%%%% Display %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%/n');
fprintf('Final Transfer functin/n');
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nn');
   num_final = flipud(bnew)';   % Flip Row from up to down

   den_final = flipud(anew)';   % Flip Row from up to down
   sys = tf(num_final,den_final)
%%%%%% Plot between real vs. frequency and imagine vs. frequency%%%%%

[magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
   for i=1:k
       Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
       Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
   end
subplot(2,1,1);
semilogx(omega,R,'*k',omega,Rmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Storage  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
subplot(2,1,2);
semilogx(omega,X,'*k',omega,Xmodel,'-k');
```

```
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Loss  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
```

16. โปรแกรม leastweighSTAT1.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% leastweighSTAT1.m                                                    %%%
%%% Write by Autsadayut  Rodpai                  %%%
%%% Master degree of mechanical engineering   %%%
%%% ID.no.: M4540113                                                     %%%
%%% Least squart method                                                  %%%
%%% with weighting function  by 1/varaince    %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc
clear

%%%%%%%%%%%%%%%%  Input data %%%%%%%%%%%%%%%%%%
  omega=load('C\:w.txt');
  R=load('C:\U.txt');
  X=load('C:\V.txt');
  [N,M]= size(omega);
  [N1,M]= size(R);
  [N2,M]= size(X);
  if N~=1
    omega = omega';
  elseif N1~=1
    R = R';
  elseif N2~=1
    X = X';
```

End

%%%%%%%%%%%%%%%% **initial condition**%%%%%%%%%%%%%%%%

```
Count = 0;
n     = 0;
m     = 0;
Eold  = 0;
iter  = 0;
errornew=0;
anew=0;
bnew=0;
Nnew =0;
Mnew =0;
```

%%%%%%%%%%%%%%%%%**calculate p,q,r,s** %%%%%%%%%%%%%%%%%

```
[N,M]= size(R);

k = M;          % amount of data
```

%%%%%%%%%%%%% **Create Weighting Function** %%%%%%%%%%%%%

```
[meanR,stdevR]=stat(R);
[meanX,stdevX]=stat(X);
W1 = diag(ones(k,1),0)
W1 = stdevR.*W1
W1 = 1./diag(W1)
W2 = diag(ones(k,1),0)
W2 = stdevX.*W2
W2 = 1./diag(W2)
W = [W1 ; W2]
for i=1:2*k
```

```
      for j=1:2*k
         if i == j
            WK(i,j) = W(i,1);
         else
            WK(i,j) = 0.0;
         end
      end
   end
%%%%%%%%%%%%%%%% Loop for 10 Order %%%%%%%%%%%%%%%%

for m=1:10

   for n=0:m
      M = n+m+1;

 %%%%%%%%%%%%%%%% find value p,q,r,s %%%%%%%%%%%%%%%%


    [p,q,r,s]=ComputePQRS(n,m);
 %%%%%%%%%%%%%%%%find ramda  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
      A11 = ramda1(omega,k,M,p);
      A12 = ramda12(omega,k,M,q);
      A13 = ramda2(R,omega,k,M,r);
      A14 = ramda3(X,omega,k,M,s);
      A21 = ramda21(omega,k,M,p);
      A22 = ramda4(omega,k,M,q);
      A23 = ramda5(X,omega,k,M,r);
      A24 = ramda6(R,omega,k,M,s);

 %%%%%%%%%%%%%  create rectangula matric A %%%%%%%%%%%%%
      if n==0&&m==1
```

```
        A=[A11 A14;A21 A24];

    elseif n==1&&m==1

        A=[A11 A12 A14;A21 A22 A24];
  elseif  n==0

        A=[A11 A13 A14;A21 A23 A24];
    else
        A=[A11 A12 A13 A14;A21 A22 A23 A24];
    end
%%%%%%%%%%%%%%% create vector B  %%%%%%%%%%%%%%%%%

B=[R';X'];

%%%%%%%%%%%%%%% Psuedo Inverse %%%%%%%%%%%%%%%%%%

  Sol =  (inv(A'*WK'*WK*A))*A'*WK'*WK*B;

%%%%%%%%%%%%%% Set Form G(jw)  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%

  a(1,1)=1.0;  %%% constant
  NU = (n+1)/2;
  KU = ceil(NU);
    for i=1:KU

          b((2*i)-1,1)=Sol(i,1);

    end
    L=(n+1)-KU;
```

```
    for i=1:L
        b(2*i,1)=Sol(KU+i,1);
    end

    MI = m./2;
    KI = fix(MI);
    for i=1:KI
        a((2*i)+1,1)=Sol(n+i+1,1);
        aeven(i,1)=Sol(n+i+1,1);
    end
    L=m-KI;
    for i=1:L
        a(2*i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
        aodd(i,1)=Sol(n+KI+i+1,1);
    end
```

```
%%%%%%%%%%%%% Roots of poles %%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ra=flipud(a);
Ra=Ra';
Ra_root=roots(Ra);
Root_real=real(Ra_root);
for i=1:m
  if Root_real(i,1)>=0
    rr=1;
    fprintf('at n=%d,m=%d Unstability system',n,m);
    break
  else
     rr=0;
  end
end
```

```
    for i=1:m+1
        atotal(i,n+1,m)=a(i,1);
    end

    for i=1:n+1
        btotal(i,m,n+1)=b(i,1);
    end

 %%%%%%%%%%%%%% Transfer function %%%%%%%%%%%%%%%%%
if rr == 0              % if of stability check
    num = flipud(b)';   % Flip Row from up to down
    den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
    sys = tf(num,den)
    [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);

    u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
    v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);



    for i=1:k


        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
%%% Adjusted coefficient of determination %%%%
        error = norm(abs_error)
        errorTotal(m,n+1)=error
```

```
    if m==1&&n==0
        anew=a;
        bnew=b;
        Nnew=n;
        Mnew=m;
        errornew=error;
    else

        if errornew>error
             errornew=error
            anew = a;
            bnew = b;
            Nnew = n;
            Mnew = m;
            sys = tf(num,den)

    end
        if errornew<=error
            errornew=errornew
            anew = anew;
            bnew = bnew;
            Nnew = Nnew;
            Mnew = Mnew;
            sys = tf(num,den)

        end
    end
else
    if m==1&&n==0
        num = flipud(b)';    % Flip Row from up to down
```

```
        den = flipud(a)';   % Flip Row from up to down
        sys = tf(num,den)
        [magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
        u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
        v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
    for i=1:k
        Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
        Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
    end

    G=[ R X]';
    Gm=[Rmodel Xmodel]';
    abs_error = (G-Gm);
        error = norm(abs_error)
        errornew=error;
        anew=a;
        bnew=b;
        Nnew=n;
        Mnew=m;
    end

end

     end
    iter=iter+1
end

%%%%%%%%%%%%%%%% Display %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%/n');
```

```
fprintf('Final Transfer functin/n');
fprintf('%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%nn');
   num_final = flipud(bnew)';   % Flip Row from up to down
   den_final = flipud(anew)';   % Flip Row from up to down
   sys = tf(num_final,den_final)
```

%%%%%% **Plot between real vs. frequency and imagine vs. frequency**%%%%%%

```
[magnitude,phase,w]=bode(sys,omega);
u=magnitude.*cos(phase.*pi./180);
v=magnitude.*sin(phase.*pi./180);
   for i=1:k
       Rmodel(1,i)=u(1,1,i);
       Xmodel(1,i)=v(1,1,i);
   end
subplot(2,1,1);

semilogx(omega,R,'*k',omega,Rmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Storage  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
subplot(2,1,2);
semilogx(omega,X,'*k',omega,Xmodel,'-k');
xlabel('Frequency(rad/sec)');
ylabel('Loss  modulus (Pa)');
legend('Yanovsky and Basistov','Numerical');
```

ภาคผนวก ข

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

รายชื่อบทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในขณะศึกษา

1. “Numerical Algorithm for Transfer Function Synthesize using Experimental Frequency Response Data” The 8th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering. pp. 269-272, 21-23 July 2004.

2. “การสังเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวัสดุยืดหยุ่นหนืดเชิงเส้น” การประชุมเสนอผลงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา ครั้งที่ 5. หน้า 111. 10-11 ตุลาคม 2548

ประวัติผู้วิจัย

นายอัษฎายุธ รอดพ่าย เกิดเมื่อวันที่ 25 มกราคม พุทธศักราช 2520 สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต(วิศวกรรมเครื่องกล) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา เมื่อปีพุทธศักราช 2545 ภายหลังสำเร็จการศึกษาได้เข้าศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เมื่อ ปี พุทธศักราช 2545