

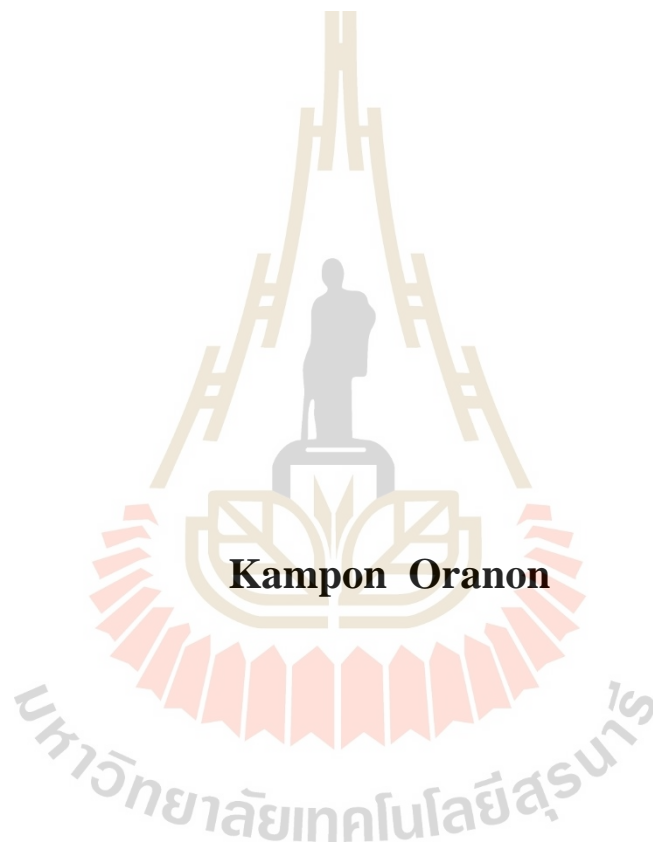
การพัฒนาเทคนิคมัลติกริดเฉพาะบริเวณเพื่อช่วยเร่งการดูเข้า
ของการคำนวณเชิงตัวเลข



นายกัมพล อรนนท์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ปีการศึกษา 2563

**DEVELOPMENT OF LOCAL MULTIGRID TECHNIQUE
TO ACCELERATE THE CONVERGENCE OF
NUMERICAL COMPUTATION**



**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Doctor Philosophy in Mechanical Engineering
Suranaree University of Technology
Academic Year 2020**

การพัฒนาเทคนิคคัดกรองเฉพาะบริเวณเพื่อช่วยเร่งการดูเข้า

ของการคำนวณเชิงตัวเลข

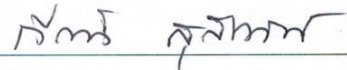
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นักวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาคุณวุฒิบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์



(ศ. ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช)

ประธานกรรมการ



(ผศ. ดร.กীরติ สุตक्षण)

กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)



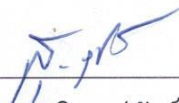
(รศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)

กรรมการ



(ผศ. ดร.ชรา อังสกุล)

กรรมการ



(ผศ. ดร.สุกกิจ รูปจันทร์)

กรรมการ



(รศ. ร.อ. ดร.กนตธร ชานีประศาสน์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการและพัฒนาความเป็นสากล



(รศ. ดร.พรศิริ จงกล)

คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

กัมพล อรนนท์ : การพัฒนาเทคนิคมัลติกริดเฉพาะบริเวณเพื่อช่วยเร่งการลู่เข้าของ
การคำนวณเชิงตัวเลข (DEVELOPMENT OF LOCAL MULTIGRID TECHNIQUE TO
ACCELERATE THE CONVERGENCE OF NUMERICAL COMPUTATION)

อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กิรติ สุลักษณ์, 73 หน้า.

วิธีเชิงตัวเลขถูกใช้ในการหาผลเฉลยระบบสมการพีชคณิตขนาดใหญ่ ที่ได้จากการประมาณ
ค่าสมการอนุพันธ์ย่อย การคำนวณแบบวนซ้ำร่วมกับวิธีมัลติกริดถูกประยุกต์ใช้เพื่อให้การคำนวณ
วิธีเชิงตัวเลขมีประสิทธิภาพดีขึ้น อย่างไรก็ตามการคำนวณมักประสบปัญหาการลู่เข้าช้าเมื่อ
ความคลาดเคลื่อนเข้าสู่โหมคความถี่ต่ำ การลู่เข้าของแต่ละบริเวณบนโดเมนมีความเร็วแตกต่างกัน
เป็นพฤติกรรมเฉพาะบริเวณ การดำเนินการมัลติกริดแบบดั้งเดิมที่คำนวณทั้งโดเมนจึงสิ้นเปลือง
งานวิจัยนำเสนอเทคนิคการคำนวณแบบเฉพาะบริเวณ โดยการปรับปรุงวิธีการคำนวณเฉพาะบริเวณ
บนหลักการวิธี FAC ผสมร่วมกับวิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิต เรียกว่า วิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิตแบบ
เฉพาะบริเวณ (LAMG) การคำนวณมีการตรวจสอบความคลาดเคลื่อนระหว่างรอบการคำนวณ
บริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงถูกคำนวณต่อด้วยวิธี LAMG ที่นำเสนอ ส่วนบริเวณที่มี
ความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าเกณฑ์กำหนดจะถูกละเว้นการคำนวณ วิธีการคำนวณที่นำเสนอสามารถ
ปรับปรุงพื้นที่การคำนวณให้เหมาะสมกับแต่ละรอบการคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยถูก
นำไปทดสอบกับปัญหาชั้นซิดผิว 1 มิติที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลัน การทดสอบได้ประเมิน
ผลกระทบของการกำหนดค่าเริ่มต้น 3 รูปแบบ ได้แก่ แบบศูนย์ แบบไซน์และแบบเตรียมจากกริด
หยาบ พบว่าค่าเงื่อนไขแบบเตรียมจากกริดหยาบให้การลู่เข้าเร็วที่สุด จากนั้นทดสอบผลกระทบของ
การกำหนดค่าเงื่อนไขขอบชั่วคราว พบว่าการกำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราวน้อยกว่าหรือเท่ากับ
เงื่อนไขหยุดให้เสถียรภาพดี เมื่อประเมินเวลาที่ใช้ในการคำนวณพบว่า วิธี LAMG ที่นำเสนอ
สามารถช่วยลดเวลาการคำนวณได้ 8-53% เทียบกับวิธี AMG แบบดั้งเดิม การทดสอบได้ขยายผลสู่
ปัญหา 2 มิติ พบว่าสามารถลดเวลาการคำนวณได้ 16-40% เทียบกับวิธี AMG แบบดั้งเดิม

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ปีการศึกษา 2563

ลายมือชื่อนักศึกษา กัมพล อรนนท์

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา กิรติ สุลักษณ์

KAMPON ORANON : DEVELOPMENT OF LOCAL MULTIGRID
TECHNIQUE TO ACCELERATE THE CONVERGENCE OF NUMERICAL
COMPUTATION. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. KEERATI
SULUKSNA, Ph. D. 73 PP.

ALGEBRAIC MULTIGRID/ACCELERATION TECHNIQUE/
LOCALIZED METHOD/NUMERICAL METHOD/FAST CONVERGENCE

Numerical methods are usually used to solve large algebraic equation systems obtained by estimating partial differential equations. Iterative calculations including with multigrid are used to make numerical methods more effective. However, calculations are often encountered with slow convergence when an error reaches low-frequency mode. The convergence of each area on the domain has a different slowness, a different local behavior. Conventional multigrid operations that compute the entire domain are wasteful. The research presented the local computational techniques. By improving the local computation method based on the fast adaptive composite grid (FAC) method, combined with the algebraic multigrid (AMG) method. It is the so-called local algebraic multigrid (LAMG) method. With this method, the error was checked during the calculation cycle. The region with a high deflection was calculated using the LAMG method, while the remaining areas with a deflection below the criterion were omitted. The proposed method can be effectively adjusted to the calculation area to suit each calculation cycle. Issues of one-dimensional boundary layer problems that alter rapidly have been evaluated. The assessment evaluated the effect of the initial conditions as follows: zero, sine and C-grid. The C-grid condition was found to provide the fastest convergence. The evaluation has been tested

on the effect of temporary boundary condition setting. It is found that the condition constrain of less than or equal to the converging condition give the more stability than other rest cases. Determine the computational time, it was found that the proposed LAMG method can reduce the computational time by 8-53 percent compared to the conventional AMG method for one-dimensional problems. The test was extended to a two-dimensional problem and it was found that the computational time was reduced by 16-40% relative to the conventional AMG method.



School of Mechanical Engineering

Academic Year 2020

Student's Signature

Advisor's Signature

Kompon Corman

Keerthi Juler

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สามารถสำเร็จลุล่วงได้จะด้วยเฉพาะความสามารถของผู้เขียนคนเดียวก็หาไม่ ตลอดระยะเวลาที่ศึกษา ผู้คนทั้งหมดที่ผ่านเข้ามาในชีวิตล้วนมีส่วนให้ความรู้ ให้ประสบการณ์ ช่วยต่อเติมเสริมสานวิทยานิพนธ์เล่มนี้ให้มีความสมบูรณ์ทั้งสิ้น อาทิ คณาจารย์ บุคคลอันเป็นที่รัก บริวารชิดใกล้ เพื่อนพี่น้องนิสิตนักศึกษาทุกระดับทั้งที่สำเร็จการศึกษาและกำลังศึกษา เจ้าหน้าที่มหาวิทยาลัยทุกภาคส่วน ตลอดจนญาติสนิทมิตรสหาย คุณของทุกท่านไม่อาจตอบแทนด้วยสิ่งของมีค่าใด นอกจากพรอันประเสริฐจากคุณพระศรีรัตนตรัยที่ผู้เขียนเคารพศรัทธาเหนือสิ่งอื่นใด มีองค์สมเด็จพระสัมมาสัมพุทธเจ้าเป็นประธานตลอดจนสิ่งศักดิ์สิทธิ์ทั้งหลายในสากลโลก จงดลบรรดาลให้ทุกท่านมีความสุขความเจริญ ขอความสุขสวัสดิ์พิพัฒนามงคลสมบูรณ์พูลผลจงมีแก่ท่านทั้งหลาย หากท่านปรารถนาสิ่งใดของจงสำเร็จสมหวังทุกประการเทอญ

ความดีทั้งหมดของวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขออุทิศให้แก่ บิดาและมารดาผู้ให้กำเนิดข้าพเจ้า อันเป็นผู้ให้การสนับสนุนในขั้นต้น ผู้ประคับประคองในระหว่างและผู้ยอมรับความสำเร็จในบั้นปลาย สิ่งน่าคิดเตือนอันใดอันพึงมีในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ข้าพเจ้าผู้เขียนขอรับไว้แต่เพียงผู้เดียว

กัมพล อรนนท์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย).....	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ).....	ข
กิตติกรรมประกาศ.....	ง
สารบัญ.....	จ
สารบัญตาราง.....	ช
สารบัญรูป.....	ซ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ.....	ญ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	2
1.4 วิธีการดำเนินงานวิจัย.....	2
1.5 สถานที่ศึกษาวิจัย.....	3
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
2 ปรัชญ์นั้วรรณกรรม.....	4
2.1 การจำลองสมการความไม่ต่อเนื่อง.....	4
2.2 วิธีมัลติกริด.....	7
2.3 วิธีกริดผสมแบบปรับตัวเร็ว.....	11
2.4 วิธีกริดหลายระดับแบบปรับตัวได้.....	14
2.5 วิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิต.....	16
3 เทคนิคเฉพาะบริเวณสำหรับปัญหา 1 มิติ.....	21
3.1 อัลกอริทึมแบบเฉพาะบริเวณ.....	21
3.2 กรณีทดสอบสำหรับปัญหา 1 มิติ.....	25
3.3 ผลการจำลองปัญหา 1 มิติ.....	27

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.4	สรุปผลการจำลองปัญหา 1 มิติ.....	57
4	เทคนิคเฉพาะบริเวณสำหรับปัญหา 2 มิติ.....	58
4.1	การจำลองปัญหา.....	58
4.2	แอกทีฟโซนสำหรับปัญหา 2 มิติ.....	59
4.3	การสอบเทียบความถูกต้องของวิธี LAMG.....	61
4.4	ผลการจำลองและอภิปรายผล.....	63
4.5	วิเคราะห์และสรุปผลการจำลองปัญหา 2 มิติ.....	70
5	บทสรุปและข้อเสนอแนะ.....	72
5.1	บทสรุปเทคนิคการคำนวณมัลติกริดแบบเฉพาะบริเวณ.....	72
5.2	ข้อเสนอแนะ.....	73
	รายการอ้างอิง.....	74
	ประวัติผู้เขียน.....	76

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 3.1	
เปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ A.....	36
ตารางที่ 3.2	
เปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ B.....	44
ตารางที่ 3.3	
เปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ C.....	50
ตารางที่ 3.4	
เปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ D.....	56
ตารางที่ 4.1	
ผลเปรียบเทียบการคำนวณระหว่างวิธี LAMG และ GAMG.....	70



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
รูปที่ 2.1 โดเมนปัญหา 1 มิติ	5
รูปที่ 2.2 ลักษณะความคลาดเคลื่อนแบบเส้นและแบบราบเรียบ	8
รูปที่ 2.3 โหมคความคลาดเคลื่อนบนโดเมน 8 จุดต่อ	8
รูปที่ 2.4 แผนวิธีมัลติกริด	9
รูปที่ 2.5 ขั้นตอนวิธีมัลติกริดแบบ V-Cycle	10
รูปที่ 2.6 การเรียงลำดับชั้นของกริดผสม	11
รูปที่ 2.7 ขั้นตอนวิธี FAC	13
รูปที่ 2.8 ขั้นตอนวิธี MLAT	15
รูปที่ 2.9 ความคลาดเคลื่อนแบบราบเรียบเชิงพีชคณิต	18
รูปที่ 2.10 การรวมกริด	18
รูปที่ 2.11 ความสัมพันธ์อินเทอร์โพลชันระหว่างกริดหยาบและกริดละเอียด	19
รูปที่ 2.12 การเลือกกริดหยาบสำหรับปัญหา 1 มิติ	20
รูปที่ 3.1 การเลือกกริดหยาบบนโดเมน 1 มิติ	22
รูปที่ 3.2 มัลติกริดแบบแอกทีฟโซน	22
รูปที่ 3.3 ขั้นตอนวิธี LAMG	24
รูปที่ 3.4 สอบเทียบความแม่นยำกริดทดสอบ A	28
รูปที่ 3.5 การลู่เข้ากริดทดสอบ A	30
รูปที่ 3.6 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกริดทดสอบ A	32
รูปที่ 3.7 การปรับปรุงแอกทีฟโซนกริดทดสอบ A	34
รูปที่ 3.8 ผลการคำนวณวิธี L-AMG กริดทดสอบ A	35
รูปที่ 3.9 สอบเทียบความแม่นยำกริดทดสอบ B	38
รูปที่ 3.10 การลู่เข้ากริดทดสอบ B	39
รูปที่ 3.11 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกริดทดสอบ B	40
รูปที่ 3.12 การปรับปรุงแอกทีฟโซนกริดทดสอบ B	42
รูปที่ 3.13 ผลการคำนวณวิธี LAMG กริดทดสอบ B	43

สารบัญรูป (ต่อ)

หน้า

รูปที่ 3.14	การลู่เข้ากรณีทดสอบ C	46
รูปที่ 3.15	จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ C	47
รูปที่ 3.16	การปรับปรุงแอกทิฟ โชนกรณีทดสอบ C	48
รูปที่ 3.17	ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ C	49
รูปที่ 3.18	การลู่เข้ากรณีทดสอบ D	52
รูปที่ 3.19	จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ D	53
รูปที่ 3.20	การปรับปรุงแอกทิฟ โชนกรณีทดสอบ D	54
รูปที่ 3.21	ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ D	55
รูปที่ 4.1	ปัญหาลาปลาซ 2 มิติ	58
รูปที่ 4.2	ลำดับการรวมกริดละเอียดเป็นกริดหยาบ	60
รูปที่ 4.3	ลำดับการสร้างกริดหยาบมีลักษณะทวนเข็มนาฬิกา	61
รูปที่ 4.4	ผลเฉลยของวิธีเชิงตัวเลขปัญหาการแพร่ 2 มิติ	62
รูปที่ 4.5	สอบเทียบความแม่นยำกรณีปัญหา 2 มิติด้วยขนาด 80×60 กริด	63
รูปที่ 4.6	จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนกริดขนาด 80×60 กริด	64
รูปที่ 4.7	ลำดับการปรับปรุงแอกทิฟ โชนกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนโดเมนขนาด 80×60 กริด	65
รูปที่ 4.8	จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนขนาด 400×300 กริด	66
รูปที่ 4.9	ลำดับการปรับปรุงแอกทิฟ โชนกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนโดเมนขนาด 400×300 กริด	67
รูปที่ 4.10	จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ บนขนาด 400×300 กริด	68
รูปที่ 4.11	ลำดับการปรับปรุงแอกทิฟ โชนกรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ บนโดเมนขนาด 400×300 กริด	69
รูปที่ 4.12	เปรียบเทียบการลดของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างปัญหาแบบสมมาตร และไม่สมมาตร	71

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

δ	=	เงื่อนไขการคำนวณ ความคลาดเคลื่อน
ε	=	ค่าคงที่ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันอนุพันธ์ย่อย
ϕ	=	ตัวแปร ตัวไม่ทราบค่า
ϕ	=	เวกเตอร์ตัวแปร ผลเฉลยแม่นยำตรง
$\hat{\phi}$	=	เวกเตอร์ค่าประมาณผลเฉลยแม่นยำตรง
φ	=	Eigen function
v, v_1, v_2	=	รอบที่ใช้ในการคำนวณภายใน
θ	=	ค่าคงที่ threshold $0 < \theta \leq 1$
ω_{ij}	=	ค่าถ่วงน้ำหนัก (factor) ที่สัมพันธ์กับเอเลเมนต์ i, j
ω	=	โดเมนย่อย
Ω	=	โดเมนทั้งหมด
b	=	เวกเตอร์ค่าคงที่ของระบบสมการเชิงเส้น
e	=	ความคลาดเคลื่อน (ร้อยละ)
e	=	เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อน (ร้อยละ)
h	=	ขนาดของกริด หรือกริดละเอียด ($2h$ กริดที่มีขนาดเป็นสองเท่า)
i, j	=	ดัชนี ค่าบ่งชี้เอเลเมนต์ หรือค่าบ่งชี้แถวหรือหลักบนเมทริกซ์
k	=	โหมดความคลาดเคลื่อน หรือ eigenvalue
l	=	ระดับกริด
m	=	จำนวนรอบการคำนวณ
n	=	จำนวนกริดเอเลเมนต์
r	=	เศษเหลือ
r	=	เวกเตอร์เศษเหลือ
x	=	พิกัดตำแหน่งแกนนอน
y	=	พิกัดตำแหน่งแกนตั้ง
A	=	เมทริกซ์ระบบสมการเชิงเส้น
C	=	เซตของเอเลเมนต์กริดหยาบ

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

F	=	เซตของเอเลเมนต์กริดละเอียด
h	=	ขนาดกริด/กริดละเอียด
H	=	ระดับกริดหยาบ
I	=	เมทริกซ์เอกลักษณ์
I_{2h}^h	=	เมทริกซ์ส่งผ่านข้อมูล
l	=	ระดับกริด
L	=	ระดับกริดหยาบสูงสุด
\mathbb{R}	=	เซตของจำนวนจริง
AMG	=	มัลติกริดเชิงพีชคณิต
AMR	=	adaptive mesh refinement
BC	=	เงื่อนไขขอบ
FAC	=	fast adaptive composite grid
GAMG	=	global algebraic multigrid
LAMG	=	local algebraic multigrid
MG	=	มัลติกริด
MLAT	=	multi-level adaptive technique
\subseteq	=	สับเซตที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ
\emptyset	=	เซตว่าง
\in	=	การเป็นสมาชิกของเซต
\leftarrow	=	การนำข้อมูลจากการดำเนินการด้านขวาไปเก็บไว้ในตัวแปรทางซ้าย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่ใช้หาผลเฉลยระบบสมการพีชคณิตในรูปเมทริกซ์ขนาดใหญ่ที่สมาชิกส่วนใหญ่มีค่าเป็นศูนย์ มักเกิดความคลาดเคลื่อนสะสม (Moukalled, F., Mangani, L and Darwish, M., 2016) ส่งผลให้คำตอบไม่แม่นยำ การแก้ด้วยวิธีคำนวณแบบวนซ้ำ ช่วยแก้ปัญหาความคลาดเคลื่อนสะสม ทั้งยังใช้พื้นที่การเก็บข้อมูลน้อยกว่าและใช้การคำนวณที่น้อยเมื่อเทียบกับวิธีการแก้โดยตรง จึงนิยมนำมาใช้แก้หาผลเฉลยสมการอนุพันธ์ย่อย โดยเฉพาะกับปัญหาที่ไม่สามารถหาผลเฉลยสมการแม่นยำตรงได้

แม้ว่าปัจจุบันคอมพิวเตอร์จะถูกพัฒนาขึ้นใช้เป็นเครื่องมือช่วยคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพ พร้อมกันนี้เทคนิคการคำนวณแบบวนซ้ำได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการคำนวณหลากหลายวิธี (Hackbusch, W., 1994) (Kelley, C. T., 1995) (Saad, Y., 2003) อย่างไรก็ตาม การแก้ปัญหามีระบบสมการเชิงเส้นขนาดใหญ่ส่งผลให้การคำนวณลู่เข้าช้า เทคนิคการคำนวณแบบมัลติกริด (multigrid) จึงถูกพัฒนาขึ้นในหลากหลายรูปแบบ (Fedorenko, P. 1962) อาทิ มัลติกริดเชิงพีชคณิต (algebraic multigrid) (Poussin, F. V., 1968) การคำนวณแบบวนซ้ำโดยทั่วไป เช่น วิธีเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel) การลู่เข้าเกี่ยวข้องกับการลดลงของโหนดความคลาดเคลื่อน (Brandt, A., 1977) ความคลาดเคลื่อนโหนดความถี่สูงสามารถลดได้เร็ว ขณะที่ความคลาดเคลื่อนโหนดความถี่ต่ำลดลงได้ยากกว่า เทคนิคมัลติกริดถูกพัฒนาขึ้นเพื่อจัดการกับความคลาดเคลื่อนโหนดความถี่ต่ำ (Briggs, W. L., 1987) เทคนิคมัลติกริดแบบ Fast Adaptive Composite Grid (FAC) (McCormick, S., 1984) (McCormick, S and Thomas, J., 1986) ออกแบบให้คำนวณบนกริดแบบโครงสร้าง จุดเด่นคือ เป็นการคำนวณแบบเฉพาะบริเวณด้วยกริดละเอียดและคำนวณทั้งโดเมนด้วยกริดหยาบ ตามลำดับโครงสร้างของกริด จึงช่วยประหยัดการคำนวณ วิธี FAC มีความคล้ายกับวิธี Multilevel Adaptive Technique (MLAT) (Brandt, A., 1977) อย่างไรก็ตาม ทั้งวิธี FAC และ MLAT ไม่มีอัลกอริทึมช่วยจำแนกพื้นที่ ดังนั้นการคำนวณจึงต้องมีการเตรียมกริดไว้ล่วงหน้า จึงมีข้อจำกัดในการใช้งาน เป็นที่ทราบกันดีว่าพฤติกรรมของปัญหาวิธีเชิงตัวเลขล้วนเป็นแบบเฉพาะบริเวณ จึงมักพบการสร้างกริดละเอียดแตกต่างกันในแต่ละพื้นที่ กริดละเอียดสูงจะถูกสร้างคลุมพื้นที่ที่มีพฤติกรรมผันแปรสูงและมีอิทธิพลต่อความถูกต้องของการคำนวณ ส่วนกริดหยาบจะอยู่ในบริเวณที่มีพฤติกรรมราบเรียบ การเตรียมชุดกริดจึงต้องออกแบบกริดให้เหมาะสม

กับปัญหา การใช้กริดละเอียดสูงช่วยรับประกันความแม่นยำแต่ต้องใช้เวลาในการคำนวณนานขึ้น โดยลำดับ การจัดการปัญหาแบบเฉพาะบริเวณเพื่อลดภาระการคำนวณจึงน่าสนใจเพราะจะช่วยลดเวลาการคำนวณได้

งานวิจัยนี้พัฒนาอัลกอริทึมสำหรับการคำนวณแบบเฉพาะบริเวณบนพื้นฐานมัลติกริด โดยโปรแกรมจะค้นหาและจำแนกพื้นที่การคำนวณเป็นสองส่วน คือ (1) แอ็กทีฟโซน (active zone) เป็นส่วนความคลาดเคลื่อนสูง จำเป็นต้องคำนวณต่อเพื่อลดความคลาดเคลื่อน และ (2) เมเจอร์โซน (mature zone) เป็นส่วนที่ความคลาดเคลื่อนต่ำ สามารถละการคำนวณในรอบนั้นได้ จึงช่วยประหยัดการคำนวณ สำหรับแอ็กทีฟโซนที่ความคลาดเคลื่อนสูงจะถูกจัดการด้วยเทคนิคมัลติกริด การคำนวณดำเนินเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งแอ็กทีฟโซนหมดไป ดังนั้นเทคนิคที่ถูกพัฒนาขึ้นนี้จึงเป็นการคำนวณเฉพาะบริเวณ (local relaxation) ที่ผนวกเทคนิคการปรับปรุงพื้นที่ (adaptive region) เทคนิคการปรับกริด (adaptive mesh) เข้ากับวิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิต

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อพัฒนาเทคนิคการคำนวณแบบมัลติกริดเฉพาะบริเวณเพื่อช่วยเร่งความเร็วในการคำนวณเชิงตัวเลข

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 ปัญหาที่พิจารณาเป็นปัญหาการแพร่แบบคงตัวใน 2 มิติ
- 1.3.2 แก้ปัญหาด้วยวิธีเชิงตัวเลขบนพื้นฐานของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์
- 1.3.3 ใช้เทคนิคการคำนวณแบบมัลติกริดเฉพาะบริเวณช่วยเร่งความเร็วในการคำนวณ
- 1.3.4 ใช้ภาษา C++ ในการพัฒนาโปรแกรม
- 1.3.5 ใช้ซอฟต์แวร์อื่นช่วยในการสร้างกริดและการแสดงผลเชิงกราฟฟิก
- 1.3.6 ใช้กริดแบบโครงสร้าง

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

- 1.4.1 ศึกษาการเขียนโปรแกรมที่เกี่ยวข้องสำหรับงานวิจัย
 - 1) การเขียนโปรแกรมภาษา C++ เพื่อช่วยพัฒนารหัสโปรแกรม
 - 2) การใช้โปรแกรมเพื่อช่วยแสดงผลเชิงกราฟฟิก
 - 3) การใช้โปรแกรมเพื่อช่วยสร้างกริด
- 1.4.2 สืบค้นวรรณกรรมงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
 - 1) การจำลองปัญหาและการแบ่งโดเมนปัญหาออกเป็นส่วนย่อย

- 2) การหาผลเฉลยระบบสมการพีชคณิตด้วยวิธีเชิงตัวเลข
- 3) การหาผลเฉลยโดยใช้วิธีมัลติกริดและวิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิต
- 4) ศึกษาแผนวิธีการหาผลเฉลยด้วยวิธีมัลติกริดที่เกี่ยวข้อง

1.4.3 เขียนโปรแกรมต้นแบบสำหรับคำนวณสมการพีชคณิตเพื่อใช้สอบเทียบโดยใช้วิธีกริดเชิงเดี่ยวและวิธีมัลติกริด

1.4.4 เขียนโปรแกรมที่ใช้เทคนิคมัลติกริดเฉพาะบริเวณเพื่อปรับปรุงความเร็วในการคำนวณของวิธีมัลติกริด

1.4.5 ตรวจสอบความถูกต้องและปรับปรุงโปรแกรมให้การคำนวณมีประสิทธิภาพพร้อมประเมินผล

1.4.6 วิจารณ์และสรุปผล

1.5 สถานที่ศึกษาวิจัย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้รับสโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้เทคนิคเร่งการลู่เข้าของการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขบนพื้นฐานการคำนวณด้วยวิธีมัลติกริดเฉพาะบริเวณ

บทที่ 2

ปริทัศน์วรรณกรรม

วิธีการหาผลเฉลยสมการอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีเชิงตัวเลข ปัจจัยหนึ่งที่ข้องกับความแม่นยำของคำตอบคือ จำนวนกริดที่ใช้ในการคำนวณ การใช้กริดความละเอียดสูงมักให้คำตอบที่มีความถูกต้องสูงกว่าการใช้กริดแบบหยาบ อย่างไรก็ตาม กริดที่ละเอียดสูงต้องใช้เวลาคำนวณมากและดูเข้าช้า เพื่อจะเร่งการคำนวณให้รวดเร็วยิ่งขึ้นจำเป็นต้องอาศัยเทคนิคการคำนวณเข้ามาช่วย

2.1 การจำลองสมการความไม่ต่อเนื่อง

2.1.1 การประมาณสมการอนุพันธ์และระบบสมการพีชคณิต

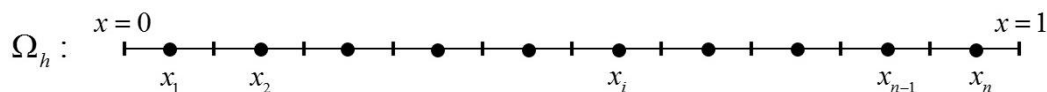
กำหนดปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) 1 มิติ บนโดเมน $\Omega = (0, 1)$ ที่ประกอบด้วยพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งและพจน์อนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha(x) \frac{\partial \phi}{\partial x} = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2-1)$$

เมื่อ $\phi(0) = g_0$ และ $\phi(1) = g_1$ เป็นเงื่อนไขขอบ โดเมนถูกแบ่งออกเป็น n เอลเมนต์ขนาดเท่ากันจึงได้เอลเมนต์ขนาด $h = 1/n$ ดังรูปที่ 2.1 รูปแบบการประมาณค่าพจน์อนุพันธ์ โดยพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งประมาณโดยวิธีผลต่างต้นลมซึ่งให้อันดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง ส่วนพจน์อนุพันธ์อันดับสองถูกประมาณด้วยวิธีผลต่างกลาง ซึ่งให้อันดับความแม่นยำอันดับสอง ดังสมการที่ (2-2) และ (2-3) ตามลำดับ

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \quad (2-2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \quad (2-3)$$



รูปที่ 2.1 โดเมนปัญหา 1 มิติ

ด้วยรูปแบบการประมาณค่าดังกล่าว เมื่อนำไปประยุกต์เข้ากับระบบโดเมนในรูปที่ 2.1 จึงได้รูปแบบสมการพีชคณิต ดังสมการที่ (2-4)

$$a_{i+1}\phi_{i+1} + a_i\phi_i + a_{i-1}\phi_{i-1} = b_i \quad (2-4)$$

เมื่อ $a_{i+1} = -(1 + \alpha(x_i)h)$ $a_{i-1} = -1$ และ $a_i = -(a_{i+1} + a_{i-1})$ เป็นสัมประสิทธิ์ส่วน $b_i = -h^2 f_i$ เป็นขอสเทอม เขียนในรูประบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$A\phi = b \quad (2-5)$$

โดย ϕ และ b เป็นเวกเตอร์ขนาด \mathbb{R}^n ส่วน A เป็นเมทริกซ์ขนาด ซึ่งมีความเด่นชัดในแนวทแยงมุม (diagonal dominant) ที่มีลักษณะดังสมการที่ (2-6)

$$\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad (2-6)$$

2.1.2 วิธีการคำนวณแบบวนซ้ำ

ใช้สำหรับหาผลเฉลยระบบสมการขนาดใหญ่และมีสมาชิกส่วนใหญ่เป็นศูนย์ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น มีหลายวิธีและหลักการคำนวณ อาทิ

(ก) วิธี Jacobi การคำนวณเริ่มจากกำหนดค่าเริ่มต้นให้ ϕ ด้วยค่าเริ่มต้นดังกล่าว สมการที่หนึ่งได้คำตอบ $\phi_1^{(1)}$ สมการที่สองได้คำตอบ $\phi_2^{(1)}$ การคำนวณเป็นไปตามลำดับจนกระทั่งได้คำตอบสมการสุดท้าย $\phi_n^{(1)}$ เรียกว่า 1 รอบ (iteration) คำตอบถูกใช้เป็นค่าเริ่มต้นในรอบถัดไป

(ข) วิธี Gauss-Seidel จากค่าเริ่มต้น ϕ การคำนวณเป็นไปตามลำดับสมการคำตอบจากสมการที่หนึ่ง ($\phi_1^{(1)}$) ถูกใช้เป็นค่าเริ่มต้นบนการคำนวณสมการที่สอง คำตอบจากสมการ

หนึ่งและสองถูกใช้เป็นตัวเริ่มต้นการคำนวณสมการที่สาม คำตอบของการคำนวณบนสมการที่ผ่านมามากใช้เป็นตัวเริ่มต้นสำหรับสมการถัดไป ตามลำดับจนกระทั่งสมการสุดท้าย

(ค) วิธี Preconditioning and Iterative ใช้เมทริกซ์ปรับสภาพ (P) ปรับสมการก่อนการคำนวณแบบวนซ้ำเริ่ม ในรูป $P^{-1}A\phi = P^{-1}b$ โดยเมทริกซ์ปรับสภาพมีค่าประมาณ A^{-1} ทำให้ $P^{-1}A$ เป็นเมทริกซ์ที่มีสมบัติการลู่เข้าที่ดี

(ง) วิธี Incomplete LU (ILU) decomposition เป็นการปรับปรุงสมบัติโดยการแยกตัวประกอบ A ด้วยเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง (L) เมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน (U) และเมทริกซ์ R ที่ทำให้ $A = LU + R$ การคำนวณด้วยวิธีวนซ้ำหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นในรูป $(A - R)\phi^{(m)} = (b - A\phi^{(m-1)})$ เมื่อ $\phi^{(m)}$ คือค่าปรับปรุงการคำนวณในรอบที่ (m) ตามความสัมพันธ์ $\phi^{(m)} \leftarrow \phi^{(m-1)} + \phi^{(m)}$

การพัฒนาวิธีคำนวณแบบวนซ้ำนั้นเพื่อปรับปรุงอัตราการลู่เข้าให้ดีขึ้น ให้คำตอบเป็นค่าประมาณผลเฉลยแม่นยำตรง ความคลาดเคลื่อนที่ถูกใช้เป็นเงื่อนไขการหยุดการคำนวณนิยมใช้อาติ เศษเหลือ (residual error)

$$r^{(m)} = b - A\phi^{(m)} \quad (2-7)$$

โดยเศษเหลือที่มากที่สุดต้องน้อยกว่าเงื่อนไขความคลาดเคลื่อน (δ) ที่กำหนด นั่นคือ

$$\max_{j=1}^n \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi_j^{(m)} \right| < \delta \quad (2-8)$$

ยูคลิดนอร์ม (Euclid norm) หรือนอร์ม-2 (second-norm) ของเศษเหลือน้อยกว่าเงื่อนไขกำหนด ดังสมการ (2-9)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi_j^{(m)} \right)^2} < \delta \quad (2-9)$$

และร้อยละของความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุด ดังสมการ (2-10)

$$\max_{i=1}^n \left| \frac{\phi_i^{(m)} - \phi_i^{(m-1)}}{\phi_i^{(m)}} \right| \times 100 < \delta \quad (2-10)$$

2.2 วิธีมัลติกริด (multigrid method [MG])

2.2.1 โหมดความคลาดเคลื่อน (error mode)

วิธีมัลติกริดพัฒนาขึ้นบนหลักการโหมดความคลาดเคลื่อนความถี่ต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับชุดกริด (Brandt, A. 1977) ที่เขียนได้ในรูปอนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series) ดังสมการที่ (2-11)

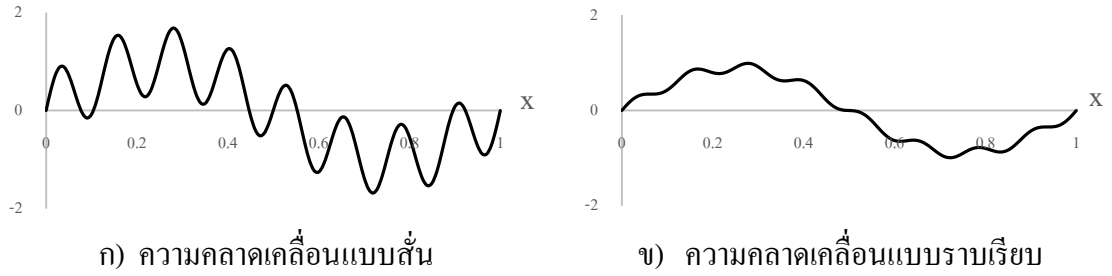
$$e_h(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sin(k\pi x) \quad (2-11)$$

เมื่อ k คือโหมดความคลาดเคลื่อน ที่มีแอมพลิจูดความคลาดเคลื่อนขนาด α_k สำหรับแต่ละพจน์ดังนี้

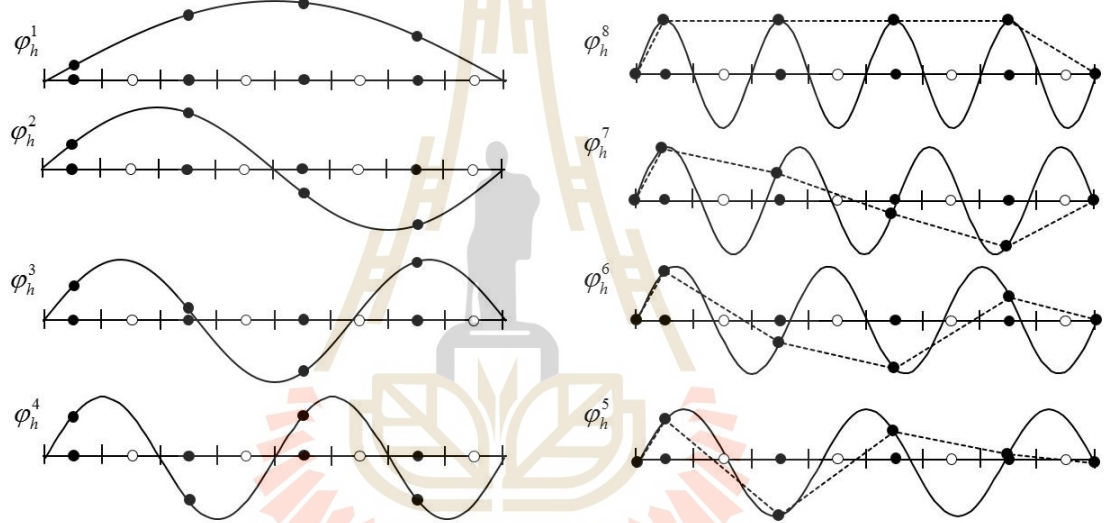
$$\varphi_h^k = \sin(k\pi x) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2-12)$$

เรียกว่าไอเกนฟังก์ชัน ในการคำนวณแบบวนซ้ำ ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนที่มีความถี่สูง (k ค่ามาก) สามารถกำจัดได้ด้วยการคำนวณไม่กี่รอบ แอมพลิจูดของความคลาดเคลื่อน α_k จะลดลงได้เร็ว จากความคลาดเคลื่อนที่มีลักษณะสั้นกลายเป็นความคลาดเคลื่อนที่มีความราบเรียบ (รูปที่ 2.2) ขณะที่ความคลาดเคลื่อนที่มีความถี่ต่ำ (k ค่าน้อย) แอมพลิจูดของความคลาดเคลื่อนจะลดได้ยากกว่า (Trottenberg, U., Oosterlee, C. W. and Schuller, A., 2001)

จากสมการ (2-1) โหมดความคลาดเคลื่อนมีค่าในช่วงไม่เกินจำนวนจุดต่อที่กำหนด ($1 \leq k \leq n$) พิจารณารูปที่ 2.3 ความคลาดเคลื่อนในแต่ละความถี่บนโดเมนขนาด $n_h = 8$ จุดต่อขนาดเอลเมนต์เท่ากับ h แสดงด้วยเส้นต่อเนื่อง ที่โหมดความคลาดเคลื่อนเดียวกันหากลดจำนวนจุดต่อลงครึ่งหนึ่ง (จุดดำที่บ) โหมดความคลาดเคลื่อนที่มีความถี่สูง $k > \frac{n_h}{2}$ จะไม่ปรากฏบนจุดต่อชุดใหม่ได้จึงถูกปรับให้เป็นโหมดความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำ (เส้นประ)



รูปที่ 2.2 ลักษณะความคลาดเคลื่อนแบบสั่นและแบบราบเรียบ



รูปที่ 2.3 โหมดความคลาดเคลื่อนบนโดเมนขนาด 8 จุดต่อ

พิจารณา ที่จุดต่อ i ใดๆ $x_i = (2i-1)/2n$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ จะได้รูปแบบดังสมการที่ (2-13) เมื่อปรับลดจำนวนจุดต่อลงครึ่งหนึ่ง (ขนาดเอลเมนต์เป็น $2h$) ส่งผลให้ความถี่ของฟังก์ชันเพิ่มเป็น $2k$ ดังสมการ (2-14)

$$\varphi_{i,k}^h = \sin\left(\frac{k\pi(2i-1)}{2n}\right) \quad (2-13)$$

$$\varphi_{i,2k}^{2h} = \sin\left(\frac{k\pi(2i-1)}{2(n/2)}\right) = \sin\left(\frac{(2k)\pi(2i-1)}{2n}\right) \quad (2-14)$$

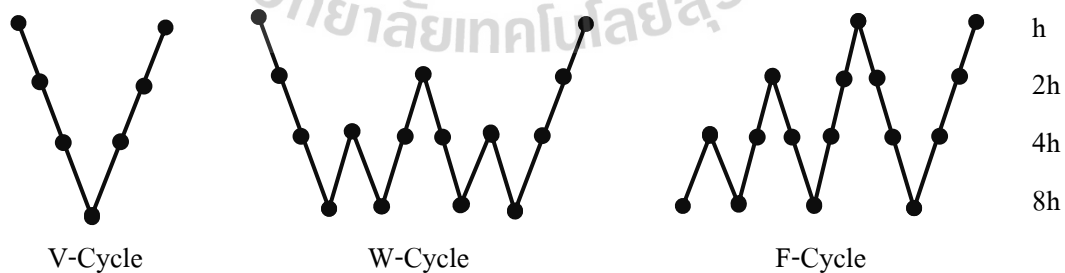
ในทางตรงข้าม หากแบ่งโดเมนละเอียดขึ้นจะทำให้ความคลาดเคลื่อนปรากฏในโหนดความถี่ต่ำ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนขนาดของเอลเมนต์ทำให้ความถี่ของฟังก์ชันเปลี่ยนไป หากต้องการให้การคำนวณสามารถลดความคลาดเคลื่อนได้อย่างมีประสิทธิภาพต้องปรับให้ค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ในโหนดความถี่สูง โดยปรับใช้กริดที่มีขนาดใหญ่ขึ้น อย่างไรก็ตาม กริดที่มีความละเอียดสูงจะให้ความแม่นยำดีกว่ากริดที่ละเอียดต่ำ ดังนั้นการใช้กริดมากกว่าหนึ่งชุดที่มีหลายขนาดในการคำนวณ จึงช่วยให้การคำนวณลู่เข้าเร็วขึ้น เรียกการคำนวณด้วยเทคนิคนี้ว่า วิธีมัลติกริด

2.2.2 เทคนิคมัลติกริด

มีการใช้กริดหลายชุดในการคำนวณ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องส่งผ่านข้อมูลระหว่างชุดกริด การส่งข้อมูลจากกริดหยาบไปยังกริดละเอียด เรียกว่าโปรลองเกชัน (prolongation) ใช้ตัวดำเนินการ $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{n_h} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{2h}}$ การส่งข้อมูลจากกริดละเอียดไปกริดหยาบเรียกว่าเรสทริคชัน (restriction) ใช้ตัวดำเนินการ $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{n_{2h}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$ การคำนวณระบบสมการเชิงเส้น (2-5) เริ่มคำนวณบนกริดละเอียดสุดได้ผลลัพธ์เป็นค่าประมาณ $\hat{\phi}$ และความคลาดเคลื่อน e โดย $e = \phi - \hat{\phi}$ เป็นค่าปรับแก้ ซึ่งจะถูกรคำนวณบนกริดหยาบด้วยสมการเศษเหลือ (2-15) แล้วจึงส่งค่ามาปรับแก้บนกริดละเอียด

$$r = b - A\hat{\phi} = Ae \quad (2-15)$$

ค่าปรับแก้ที่ได้จากการคำนวณบนกริดหยาบนั้น สำหรับการคำนวณที่มีมากกว่าสองระดับกริด มีรูปแบบที่หลากหลาย ดังตัวอย่างแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แผนวิธีมัลติกริด

ขั้นตอนวิธีมัลติกริดแบบสองชุดกริดแสดงดังรูปที่ 2.5 การคำนวณเริ่มจากกริดละเอียดโดยทั่วไป มักกำหนดอยู่ระหว่าง 1 ถึง 3 รอบ จะเห็นว่าบนกริดหยาบเป็นการคำนวณหาค่าปรับปรุง e ของกริดละเอียด ค่าปรับปรุงของกริดหยาบได้จากการแก้สมการเศษเหลือบนกริดหยาบระดับถัดไปเรื่อย ๆ

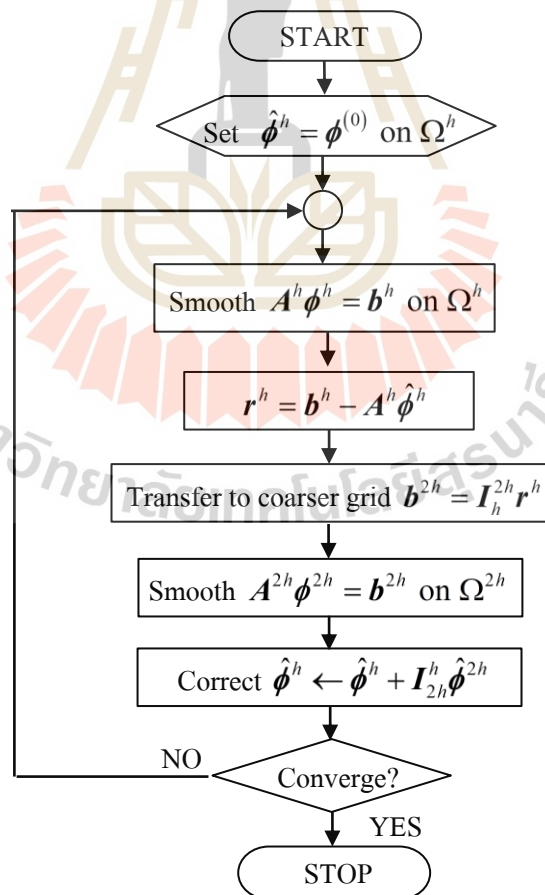
จนถึงกริดชุดหยาบสุด จากนั้นค่าปรับปรุงแต่ละชุดกริดหยาบจะถูกส่งถ่ายไปปรับปรุงค่าบนกริดละเอียดลำดับถัดไปเรื่อย ๆ จนถึงกริดละเอียดสุด วงรอบการคำนวณมีลักษณะเป็นรูปตัววี (V) เรียกว่า V-Cycle

ข้อดี

- ถูกออกแบบมาสำหรับแก้ไขปัญหาการลู่เข้าช้าจากพฤติกรรมความคลาดเคลื่อนแบบราบเรียบ
- ให้การคำนวณที่มีเสถียรภาพดี

ข้อด้อย

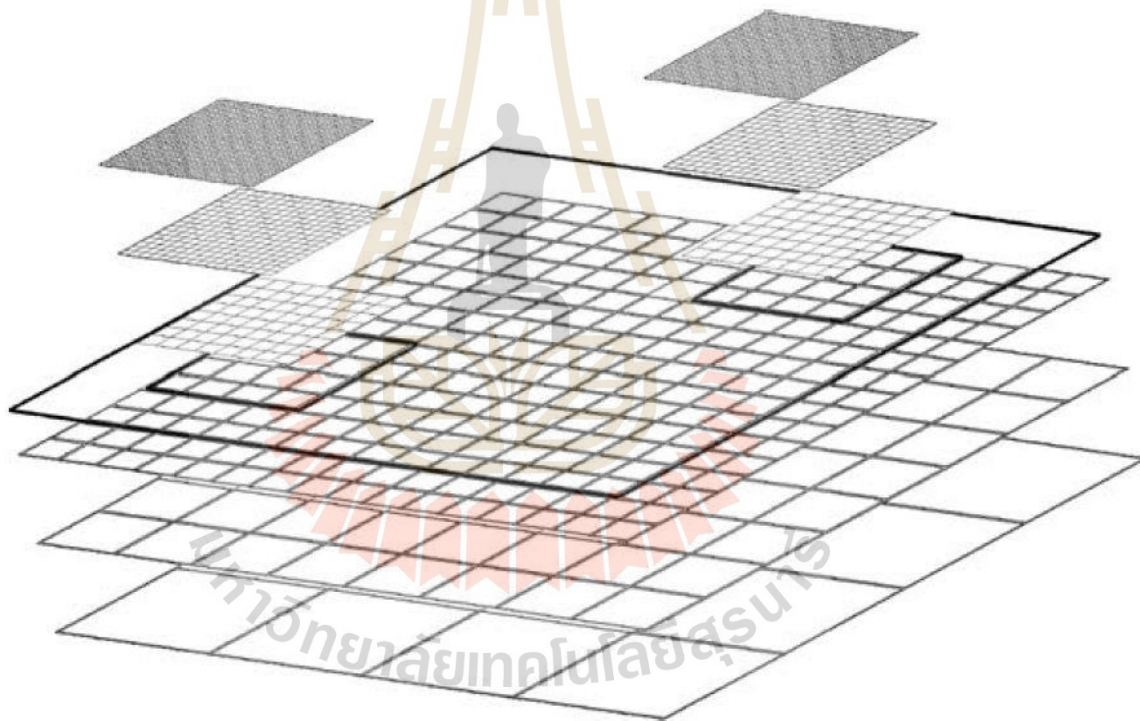
- การสร้างกริดหยาบและการคำนวณบนกริดชุดใหม่ต้องอาศัยข้อมูลเชิงโครงสร้างของกริดตลอดจนสมการควบคุมที่ใช้ในการจำลองปัญหา
- เป็นเทคนิคการการคำนวณและการปรับปรุงกริดทั้งโดเมน



รูปที่ 2.5 ขั้นตอนวิธีมัลติกริดแบบ V-Cycle

2.3 วิธีกริดผสมแบบปรับตัวเร็ว

วิธีกริดผสมแบบปรับตัวเร็ว (Fast Adaptive Composite grid) หรือเรียกว่าวิธี FAC เป็นเทคนิคการจัดการพื้นที่เฉพาะบริเวณ ถูกสร้างขึ้นเพื่อจัดการกับบริเวณที่ต้องการความแม่นยำเฉพาะบริเวณ ซึ่งช่วยประหยัดการคำนวณ (McCormick, 1984) ออกแบบให้คำนวณบนกริดผสมคือ ใช้กริดหลายขนาดบนกริดชุดเดียวกัน โดยกริดเป็นแบบสม่ำเสมอ (regular grid) กริดผสมประกอบด้วยกริดหยาบซึ่งเป็นกริดฐานคลุมทั้งโดเมน กริดละเอียดจะถูกสร้างวางซ้อนทับกริดหยาบลงไป ดังรูปที่ 2.6 จะเห็นว่ากริดละเอียดไม่ได้ถูกสร้างคลุมทั้งโดเมน แต่ถูกสร้างขึ้นเฉพาะบริเวณที่มีความสำคัญ ในการคำนวณแบบ FAC จำนวนระดับกริดและขนาดกริดขึ้นอยู่กับแต่ละปัญหา



รูปที่ 2.6 การเรียงลำดับชั้นของกริดผสม

อย่างไรก็ตาม กริดละเอียดที่ถูกสร้างเฉพาะบริเวณสามารถซ้อนทับกันได้มากกว่าหนึ่งชั้น โดยไม่ส่งผลกระทบต่อเสถียรภาพการคำนวณ (Lee B., McCormick S. F., Philip, B. and Quinlan, D. J., 2004) แนวคิดการปรับปรุงกริดให้ละเอียดเฉพาะบริเวณพัฒนามาจากวิธีการปรับปรุงเมชแบบปรับตัวได้ หรือวิธี AMR (adaptive mesh refinement) (Berger, M., 1982) เป็นเทคนิคการคำนวณบนกริดแบบพลวัต (dynamic mesh) กริดจะถูกปรับปรุงเฉพาะบริเวณจนกว่าจะได้ขนาดที่เหมาะสมและมีความแม่นยำ

ข้อนำสังเกตของวิธี FAC คือการคำนวณใช้กริดคงที่ กริดแต่ละระดับถูกจัดวางไว้ชัดเจน กริดละเอียดถูกสร้างคลุมเฉพาะบริเวณที่ต้อง เช่น บริเวณที่ต้องการความแม่นยำสูง ที่ระดับกริดเดียวกันกริดมีขนาดเท่ากัน การคำนวณไล่ระดับจากกริดละเอียดที่สุดมายังกริดหยาบ พื้นที่การคำนวณขึ้นกับการวางกริดแต่ละระดับ กริดผสม 2 ระดับกริดที่มีกริดละเอียดเฉพาะบริเวณ ซ้อนทับบนกริดหยาบ การคำนวณระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้เทคนิคแบบ FAC แสดงดังรูปที่ 2.7

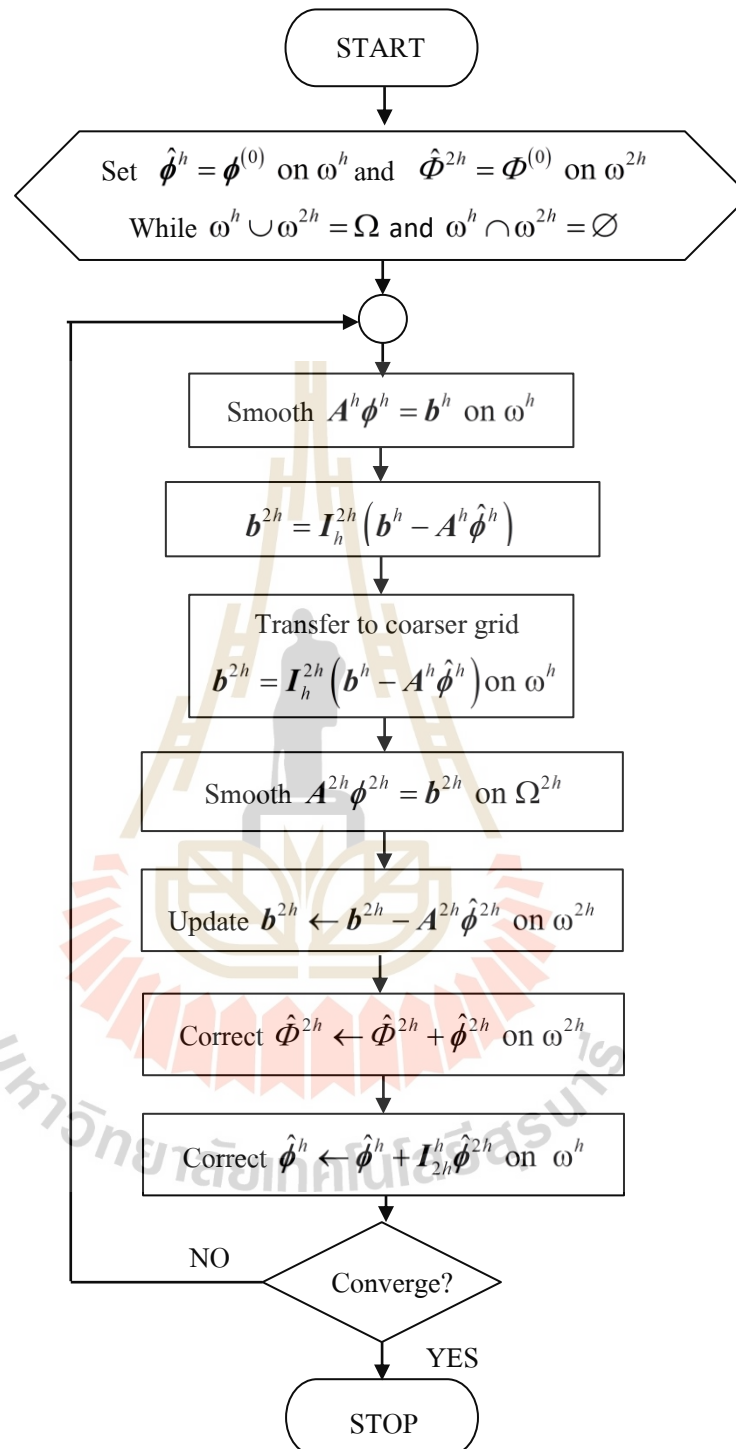
การคำนวณเริ่มบนกริดละเอียดสุดซึ่งเป็นการคำนวณเฉพาะบริเวณไล่ลำดับไปยังกริดหยาบ ลำดับถัดไปจนกระทั่งถึงกริดหยาบสุด จากนั้นปรับปรุงค่าย้อนกลับจากกริดหยาบมายังกริดละเอียด เนื่องจากกริดละเอียดถูกสร้างขึ้นเป็นสับโดเมนของกริดหยาบ ขอบของกริดละเอียดจึงถูกวางภายในโดเมนกริดหยาบ การคำนวณจึงต้องมีการประมาณจุดเชื่อมต่อ (interface point) ตามแนวขอบระหว่างกริดหยาบและกริดละเอียดเป็นค่าประมาณของขอบชั่วคราวขณะคำนวณบนกริดละเอียด (Briggs, W. L., Henson, V. E. and McCormick, S. F., 2000) ดังนั้นข้อเด่นของวิธี FAC คือการที่ไม่จำเป็นต้องคำนวณโดยอาศัยกริดละเอียดทั้งโดเมน

ข้อดี

- เป็นเทคนิคการคำนวณที่ถูกออกแบบมาให้ช่วยประหยัดการคำนวณโดยใช้การคำนวณเฉพาะบริเวณ
- ช่วยประหยัดการคำนวณในพื้นที่ที่นอกบริเวณกริดละเอียด

ข้อด้อย

- พัฒนบนพื้นฐานกริดแบบสม่ำเสมอ ซึ่งเป็นกริดที่ไม่ยืดหยุ่นต่อปัญหา
- การคำนวณแบบเฉพาะบริเวณจะคำนวณตามโครงสร้างระดับกริดที่กำหนดขึ้น เพราะไม่มีอัลกอริทึมในการเลือกพื้นที่การคำนวณเอง
- ใช้ระดับกริดการคำนวณคงที่



รูปที่ 2.7 ขั้นตอนวิธี FAC

2.4 วิธีกริดหลายระดับแบบปรับตัวได้

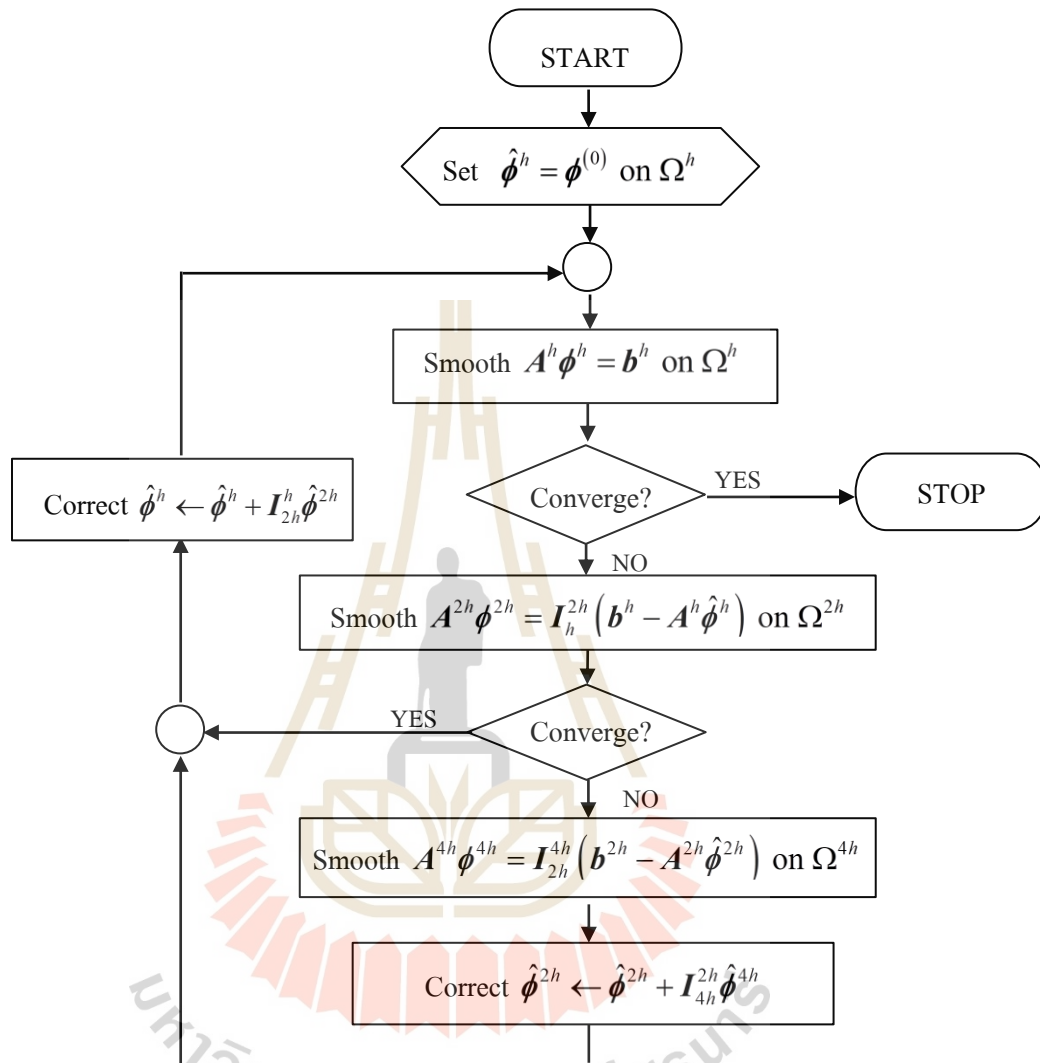
วิธีกริดหลายระดับแบบปรับตัวได้ (multi-level adaptive technique: MLAT) การคำนวณด้วยวิธีมัลติกริด โดยทั่วไปมักกำหนดจำนวนชุดกริดไว้ชัดเจน การคำนวณเริ่มจากกริดละเอียดไปหากริดหยาบ จากนั้นปรับแก้ไขค่าจากกริดหยาบย้อนกลับมายังกริดละเอียดเป็นลำดับอย่างมีแบบแผน เป็นการคำนวณแบบระดับกริดคงที่ อย่างไรก็ตามได้มีการพัฒนาวิธีมัลติกริดที่สามารถปรับตัวได้ การคำนวณแต่ละรอบใช้ระดับกริดไม่เท่ากัน โดยพิจารณาจากเกณฑ์การลู่เข้า 1) หากอัตราการลู่เข้าสูงเป็นตามเกณฑ์ที่กำหนด การคำนวณจะยังดำเนินการบนระดับกริดนั้นต่อไป 2) หากอัตราการลู่เข้าต่ำกว่ากำหนด การคำนวณจะถูกปรับให้ไปอยู่บนกริดที่หยาบกว่า และ 3) หากการคำนวณลู่เข้าสู่ค่าตอบแล้วจะไม่คำนวณบนระดับกริดหยาบที่เหลือและจะนำผลการคำนวณกลับไปปรับปรุงค่าที่ระดับกริดละเอียด วิธี MLAT จึงมีจุดเด่นเรื่องการปรับได้ของระดับกริดที่ใช้ จึงช่วยประหยัดการคำนวณบนชุดกริดที่ไม่จำเป็นลงได้ ขั้นตอนการตรวจสอบอัตราการลู่เข้าช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการคำนวณและใช้การคำนวณในระดับกริดที่เหมาะสมกับปัญหาวิธี MLAT พัฒนาจากแผนวิธีการประมาณแบบสมบูรณ์ FAS (full approximation scheme) ซึ่งเป็นแผนวิธีการประมาณค่าบนกริดหยาบสำหรับการคำนวณระบบสมการไม่เชิงเส้น (Briggs et. al., 2000) (Shiralashetti, S. C., Kantli, M. H. and Deshi, A. B., 2016) อย่างไรก็ตาม MLAT พัฒนามาบนพื้นฐานของเทคนิคกริดซึ่งปรับใช้ได้กับทั้งปัญหาเชิงเส้นและปัญหาไม่เชิงเส้น ขั้นตอนวิธีกริดหลายระดับแบบปรับตัวได้ บนกริด 3 ชุดที่ขนาด h $2h$ และ $4h$ มีขั้นตอน ดังรูปที่ 2.8

ข้อดี

- เป็นการคำนวณบนระดับกริดไม่คงที่
- มีการตรวจสอบการลู่เข้าระหว่างการคำนวณในแต่ละระดับกริด เมื่อพบการลู่เข้าจะไม่คำนวณระดับกริดหยาบที่เหลือ ช่วยประหยัดการคำนวณ
- อัลกอริทึมสามารถปรับให้เป็นที่ต้องการคำนวณแบบทั้ง โดเมนหรือแบบเฉพาะบริเวณได้

ข้อด้อย

- หากเป็นการคำนวณเฉพาะบริเวณ จะต้องมีการสร้างโครงสร้างของกริดมาจำเพาะ เนื่องจากไม่มีอัลกอริทึมที่ใช้ในการหาพื้นที่หรือแบ่งพื้นที่ให้เกิดการคำนวณเฉพาะบริเวณ



รูปที่ 2.8 ขั้นตอนวิธี MLAT

การตรวจสอบการลู่เข้าคำนวณจากนอร์มของเศษเหลือ (residual norm) ของกริดหยาบเทียบกับกริดละเอียด (Brandt, A., 1977) ดังสมการ (2-16)

$$\|r^{2h}\| \leq \varepsilon \|r^h\| \quad (2-16)$$

เมื่อ $\|\cdot\|$ หมายถึงนอร์มใด ๆ นอร์มอันดับที่ P กำหนดได้จาก

$$\|r\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |r_i|^p} \quad (2-17)$$

และ $0.001 \leq \varepsilon \leq 0.7$ จากอัลกอริทึมจะพบว่าวิธี MLAT มีความใกล้เคียงกับวิธี FAC (Briggs, et. al., 2000) อย่างไรก็ตาม วิธี FAC ค่อนข้างเจาะจงโดยตรงสำหรับเทคนิคเฉพาะบริเวณ และให้เสถียรภาพในการคำนวณมากกว่า (McCormick, S. and Thomas, J., 1986)

2.5 วิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิต (algebraic multigrid [AMG])

การสร้างกริดหยาบของวิธีมัลติกริดพื้นฐานทั่วไปใช้เทคนิคเชิงเรขาคณิต คือการเพิ่มขนาดกริดคราวละเท่าตัวจากกริดละเอียดขนาด h เป็น $2h$ $4h$ เรื่อยไปตามลำดับ การส่งข้อมูลระหว่างชุดกริดอาศัยหลักการอินเตอร์โพลชันและเรสทริกชัน การดำเนินการเช่นนี้ใช้ได้ผลดีกับกริดแบบโครงสร้างที่สามารถเพิ่มหรือลดขนาดได้ง่าย สำหรับปัญหารูปทรงซับซ้อนที่ต้องใช้กริดไว้โครงสร้างช่วยในการแก้ปัญหา การเพิ่ม/ลดกริดในรูปแบบเชิงเรขาคณิตไม่สามารถทำได้ ดังนั้นจึงได้พัฒนามัลติกริดแบบพีชคณิต AMG (algebraic multigrid) AMG ใช้เพียงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่แก้ได้จากระบบสมการ โดยไม่จำเป็นต้องทราบความสัมพันธ์ของโครงสร้างกริดในเชิงกายภาพ โครงสร้างกริดหยาบจะปรับเปลี่ยนไปตามความมีอิทธิพลของเอเลเมนต์ที่ติดกัน (Brezina, Falgout, MacLachlan, Manteuffel, McCormick and Ruge, 2005) (Gee, Hu and Tuminaro, 2009) ในความเป็นจริงแล้ว AMG ใช้ชุดกริดเพียงหนึ่งชุด ไม่มีลำดับชุดกริดหยาบในเชิงกายภาพ กระบวนการคำนวณเกิดขึ้นด้วยวิธีทางตัวเลข ดังนั้นมัลติกริดเชิงพีชคณิตจึงเป็นหลักการในรูปแบบมัลติเลเวล (multi-level) ไม่ใช่ในรูปแบบมัลติกริด อย่างไรก็ตามการอธิบายเทคนิคมัลติเลเวลด้วยเทคนิคมัลติกริดจะช่วยให้ทำความเข้าใจได้ง่ายกว่า การคำนวณด้วยวิธี AMG จึงใช้สัญลักษณ์ l เมื่อ $l \in \{0, 1, 2, \dots, L\}$ โดย $l=0$ แทนระดับกริดเริ่มต้นที่ละเอียดสุด ส่วน $l=L$ แทนระดับกริดหยาบสุด ข้อแตกต่างระหว่างวิธี MG และ AMG คือวิธี MG ใช้จำนวนชุดกริดหยาบคงที่แล้วปรับวิธีการคำนวณซ้ำ ขณะที่วิธี AMG ใช้วิธีการคำนวณซ้ำพื้นฐาน อาทิ Gauss-Seidel แล้วปรับปรุงวิธีการทำกริดหยาบให้สอดคล้องกับปัญหา (Trottenberg, et al., 2001)

2.5.1 การทำกริดหยาบ (coarsening)

ขั้นตอนการทำกริดหยาบด้วยเทคนิค AMG ใช้ความสัมพันธ์ของระบบสมการเชิงเส้น ดังนี้

$$A^l \phi^l = b^l \quad \text{หรือ} \quad \sum_{j \in \Omega^l} a_{ij}^l \phi_j^l = b_i^l, \quad (i \in \Omega^l) \quad (2-18)$$

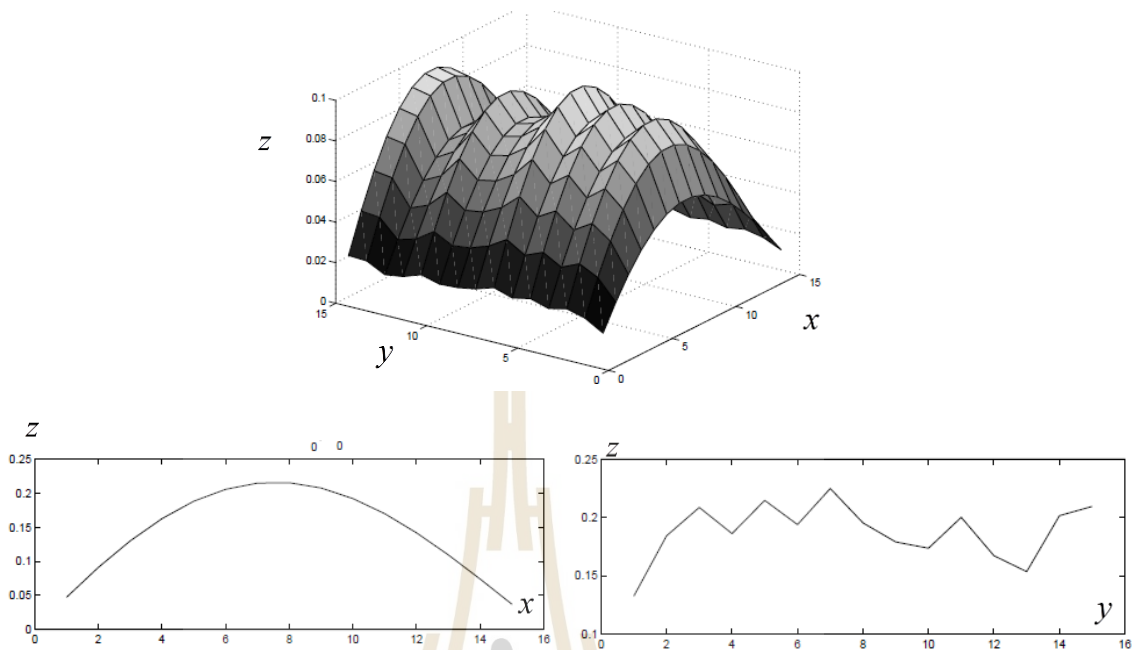
เมื่อ Ω' แทนเซตของกริดบนโดเมนที่ระดับกริด l ที่มีจำนวน n_l จุดต่อ โดยหลักการแล้ว การเปลี่ยนระดับกริดในการคำนวณเกิดขึ้นเมื่อการคำนวณเข้าสู่โหมดความคลาดเคลื่อนแบบราบเรียบ (ดูรูปที่ 2.2) นั่นคือการคำนวณสูญเสียอัตราการเข้าที่ดี พฤติกรรมดังกล่าวนี้จะพบว่า $r' \approx 0$ ซึ่งทำให้ได้สมการเศษเหลือ (2-15) มีรูปแบบเป็นดังนี้

$$A'e' \approx 0 \quad (2-19)$$

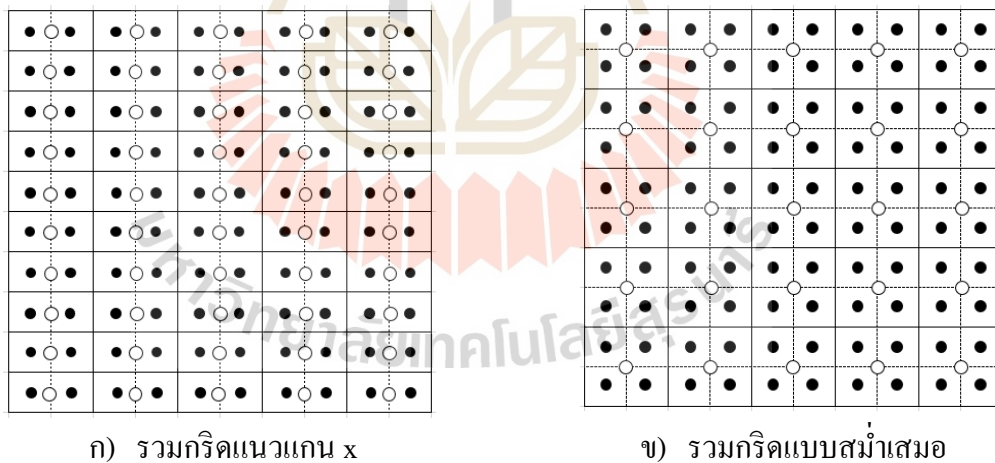
กระบวนการทำกริดชุดใหม่จะเกิดขึ้นในทิศทางเพิ่มความถี่ความคลาดเคลื่อน โดยการรวมกริดสร้างเป็นกริดใหม่ การรวมกันพิจารณาจากความราบเรียบของความคลาดเคลื่อนของเอเลเมนต์ที่อยู่ติดกัน ซึ่งสัมพันธ์กับค่าสัมประสิทธิ์ a_{ij} ในสมการ (2-18) กล่าวคือหากกริด $i \in \Omega'$ และ N_i เป็นเซตของกริดทั้งหมดที่ติดกับ i ถ้า $j \in N_i$ และ a_{ij} มีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าอื่น เงื่อนไขพิจารณาแสดงดังสมการ (2-20)

$$-a_{ij} \geq \theta \max_{i \neq k} |a_{ik}| \quad \text{โดย } 0 < \theta < 1 \quad (2-20)$$

ความคลาดเคลื่อนจะมีลักษณะราบเรียบในทิศทาง $i-j$ หรือ $e_i \approx e_j$ เรียกว่า กริด j มีอิทธิพลมากต่อกริด i (Falgout, R. D., 2006) (Briggs, et. al., 2000) จากรูปที่ 2.9 ฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนแนวแกน x เป็นแบบราบเรียบมีหนึ่งโหมดความถี่ ขณะที่แนวแกน y เป็นแบบสั้นมีหลายโหมดความถี่ การสร้างกริดหยาบได้จากการรวมกริดในแนวทิศทาง x ดังรูปที่ 2.10 จุดดำ (●) แทนจุดต่อของกริดละเอียด (ระดับกริด l) ส่วนจุดโปร่ง (○) แทนจุดต่อของกริดหยาบ (ระดับกริด $l+1$) การรวมกริดหรือการทำกริดหยาบในแนวแกน x จึงเป็นการเพิ่มโหมดความถี่ของฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนในแนวแกน x อย่างไรก็ตาม หากค่าสัมประสิทธิ์มีค่าใกล้เคียงกันทุกทิศทาง แสดงว่าความคลาดเคลื่อนมีความราบเรียบทุกทิศทาง การรวมกริดจะเป็นแบบสม่ำเสมอ (รูปที่ 2.10ข)



รูปที่ 2.9 ความคลาดเคลื่อนแบบราบเรียบเชิงพีชคณิต (algebraic error) (Briggs, et. al., 2000)



รูปที่ 2.10 การรวมกริด

ดังนั้นกริดละเอียดบนโดเมน Ω' บนความสัมพันธ์ A' ถูกรวมเป็นกริดหยาบตามเงื่อนไขความมีอิทธิพลของกริดที่อยู่ติดกันดังสมการ (2-20) ความสัมพันธ์ระหว่างกริดชุดใหม่กับกริดชุดเดิม เซตของ กริดจะถูกนำไปคำนวณหาค่าถ่วงน้ำหนักสำหรับใช้เป็นเมทริกซ์ส่งผ่านข้อมูลระหว่างชุดกริด การรวมกริดโดยคำนึงถึงทิศทางของความราบเรียบของความคลาดเคลื่อนช่วยให้ประสิทธิภาพในการคำนวณบนกริดหยาบที่ดี กรณีที่เป็นการคำนวณแบบเซลล์เป็นศูนย์กลาง

(cell centroid method) จุดต่อของกริดหยาบจะอยู่ระหว่างกลุ่มจุดต่อของกริดละเอียด การส่งข้อมูลระหว่างชุดกริดสามารถเขียนในรูปความสัมพันธ์ดังนี้

$$(\mathbf{e}^l)_i = (\mathbf{I}_{l+1}^l \mathbf{e}^{l+1})_i = \omega_{ij} \mathbf{e}_j^{l+1} \text{ เมื่อ } i \in \Omega^l \text{ และ } j \in \Omega^{l+1} \quad (2-21)$$

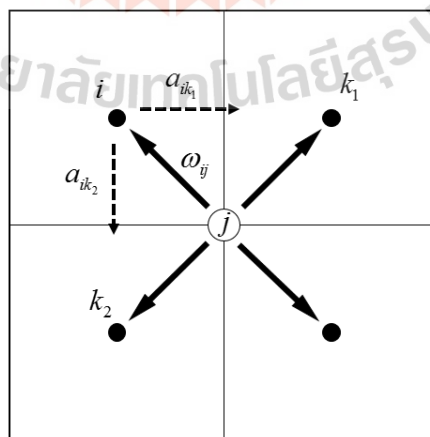
การหาค่าถ่วงน้ำหนัก ω_{ij} ในสมการ (2-21) พิจารณาการรวมกริดละเอียดเป็นกริดหยาบในรูปที่ 2.11 เซตของกริดหยาบที่ j โดย $j \in \Omega^{l+1}$ ให้ i และ k เป็นกริดละเอียดบนระดับกริด l และอยู่ในเซตของกริดหยาบ j ดังนั้น

$$\omega_{ij} = \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}_j^l} a_{ik}}{\sum_{p, q \in \mathcal{N}_j^l, p \neq q} a_{pq}} \quad (2-22)$$

โดย Galerkin product ระบบกริดหยาบสามารถคำนวณได้ด้วยความสัมพันธ์ ดังนี้

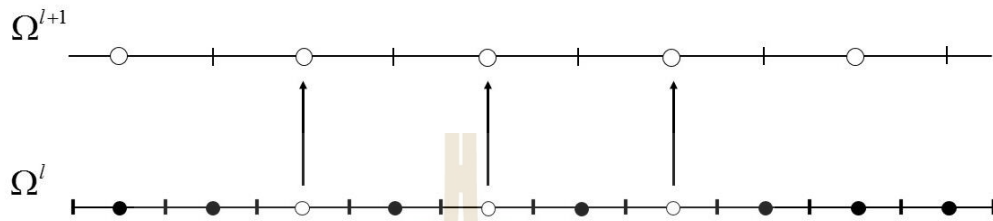
$$\mathbf{A}^{l+1} = \mathbf{I}_l^{l+1} \mathbf{A}^l \mathbf{I}_{l+1}^l \quad (2-23)$$

เมื่อ $\mathbf{I}_{l+1}^l = (\mathbf{I}_l^{l+1})^T$ เป็นความสัมพันธ์ของตัวดำเนินการอินเตอร์โพลชันและเรสทริกชัน



รูปที่ 2.11 ความสัมพันธ์อินเตอร์โพลชันระหว่างกริดหยาบและกริดละเอียด

สำหรับปัญหา 1 มิติ วิธีสร้างกริดหยาบใช้แนวคิดเดียวกับวิธีที่ใช้กับปัญหา 2 มิติ พิจารณาโดเมน Ω^l เอเลเมนต์บางส่วนจะถูกพิจารณาเลือกเป็นกริดหยาบโดยใช้เงื่อนไข (2-20) ดังแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 การเลือกกริดหยาบสำหรับปัญหา 1 มิติ

ดังนั้นเซตของตัวแทนกริดที่ถูกเลือกจะเป็นกริดหยาบ (C) และกริดที่เหลือจะเป็นกริดละเอียด (F) ดังความสัมพันธ์ $C \cup F = \Omega$ และ $C \cap F = \emptyset$ โดยมีเงื่อนไขคือ ไม่มีกริดหยาบใดอยู่ติดกัน เมทริกซ์สำหรับส่งข้อมูลระหว่างกริดสำหรับปัญหา 1 มิติอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$(\mathbf{e}^l)_i = (\mathbf{I}_{l+1}^l \mathbf{e}^{l+1})_i = \begin{cases} e_i & \text{if } i \in C \\ \sum_{j \in C_i} \omega_{ij} e_j & \text{if } i \in F \end{cases} \quad (2-24)$$

เมื่อ C_i หมายถึง เซตของกริดหยาบที่อยู่ติดกับกริดละเอียด i โดย $\omega_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$

บทที่ 3

เทคนิคเฉพาะบริเวณสำหรับปัญหา 1 มิติ

3.1 อัลกอริทึมแบบเฉพาะบริเวณ

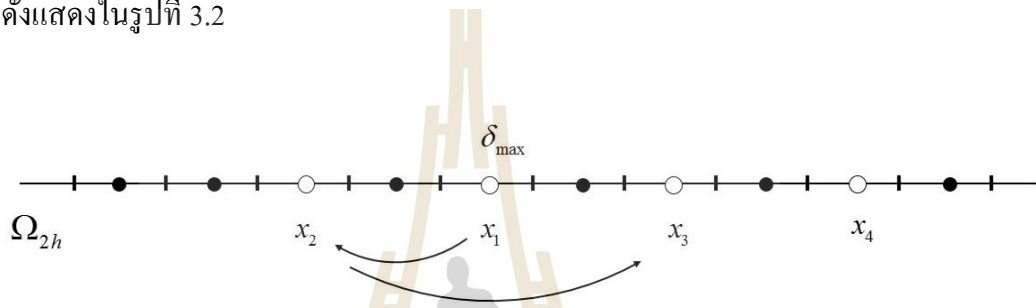
แนวคิดการจัดการปัญหาเฉพาะบริเวณอยู่บนข้อเท็จจริงที่ว่า แต่ละพื้นที่ของการคำนวณบนโดเมนมีการลู่เข้าไม่พร้อมกัน ดังนั้นการคำนวณควรเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณที่ให้ผลลัพธ์ยังไม่ลู่เข้าที่เรียกว่า แอกทีฟโซน (active zone) ส่วนบริเวณที่มีการลู่เข้าแล้วจะละการคำนวณไว้ เรียกพื้นที่นี้ว่า เมเชอร์โซน (mature zone) สิ่งที่ใช้จำแนกทั้งสองโซนใช้ 2 เกณฑ์ คือเศษเหลือและร้อยละของความคลาดเคลื่อน ตามสมการที่ (2-8) และ (2-10) ตามลำดับ ซึ่งในที่นี้เรียกรวมว่าความคลาดเคลื่อน (δ) โดยเมื่อก้าวถึงความคลาดเคลื่อนในเอลเมนต์ที่ i จะหมายถึง ค่ามากที่สุดโดยสัมบูรณ์ระหว่างตัวแปรทั้งสอง

$$\delta_i = \max(|e_i|, |r_i|) \quad (3-1)$$

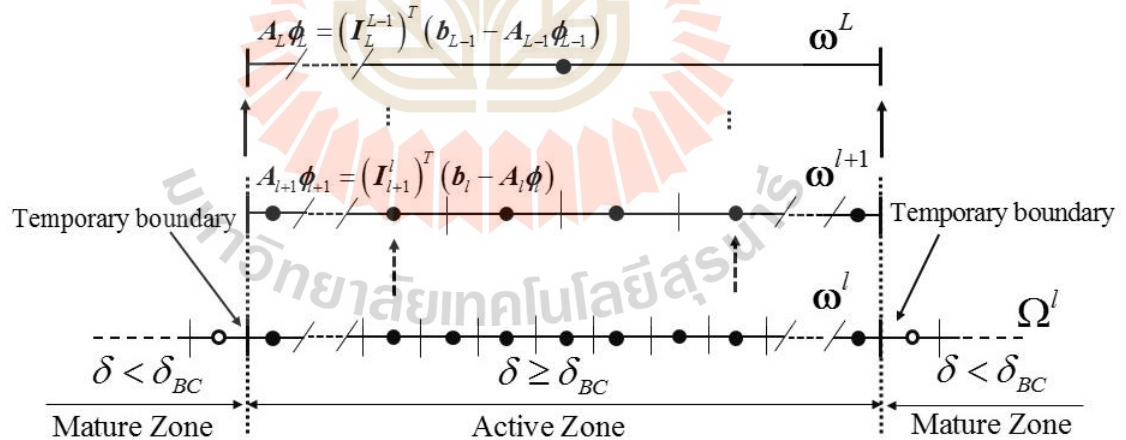
การจำแนกโดเมนดังกล่าวเกิดขึ้นเฉพาะบนโดเมนกริดละเอียด (ระดับกริด $l=0$) สำหรับโดเมนกริดละเอียด Ω' แอกทีฟโซนเป็นโดเมนย่อยแทนด้วย ω' โดยหากการคำนวณยังไม่ลู่เข้า แอกทีฟโซนจะมีขนาดเล็กกว่าหรือเท่ากับโดเมนทั้งหมด $\omega' \subseteq \Omega'$ ดังนั้นเมเชอร์โซน คือบริเวณส่วนที่เหลือ $\omega' = \Omega' - \omega'$

ในทางปฏิบัติการค้นหาบริเวณและขอบเขตของแอกทีฟโซนทำได้โดยการคำนวณบนกริดละเอียดทั้งโดเมนก่อน เมื่อปรับปรุงค่าการคำนวณแล้วจึงหาความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นของแต่ละเอลเมนต์ ทำการกำหนดเงื่อนไขความคลาดเคลื่อนสำหรับขอบชั่วคราวให้เป็น δ_{BC} โดยเอลเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าเงื่อนไขขอบชั่วคราว ($\delta_i \geq \delta_{BC}$) จะถูกจัดให้อยู่ในแอกทีฟโซน การกำหนดพื้นที่แอกทีฟโซนเริ่มจากค้นหาเอลเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนมากที่สุด ($\delta_{\max} = \max(|e_{\max}|, |r_{\max}|)$) เอลเมนต์ดังกล่าวจะถูกใช้เป็นจุดเริ่มต้นและนับเป็นเอลเมนต์ที่ 1 ของ กริดหยาบ เอลเมนต์ในลำดับถัดมาจะอยู่ด้านซ้าย-ขวา โดยเว้นระยะหนึ่งจุดต่อ ดังรูปที่ 3.1 ดำเนินการจนกว่าจะขยายไปถึงเอลเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าเกณฑ์ ($\delta_i < \delta_{BC}$) เอลเมนต์แรกที่พบที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าเกณฑ์ที่กำหนด จะถูกจัดให้เป็นขอบชั่วคราว บริเวณส่วนที่เหลือจะถูกกำหนดให้เป็นเมเชอร์โซนโดยอัตโนมัติ อย่างไรก็ตามแม้จะพบว่ามีบางส่วนที่มี

ความคลาดเคลื่อนมากกว่าเกณฑ์ของขอบชั่วคราว ก็จะถูกกันเป็นเมเชอร์โซนและถูกพิจารณาในรอบการคำนวณถัดไป การเรียงลำดับหมายเลขโหนดบนกริดหยาบ จุดต่อที่หนึ่งจะเป็นจุดต่อที่มีความคลาดเคลื่อนสูงสุด จากนั้นจึงแผ่ขยายออกมายังจุดต่ออื่นที่อยู่รอบ ๆ โดยพิจารณาเอาlementที่อยู่ติดกันตามลำดับ จนกว่าจะถึงเอเลเมนต์ที่มีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าเงื่อนไขขอบชั่วคราวที่กำหนดหรือจนกว่าจะถึงขอบของโดเมนทั้ง 2 ด้าน เมื่อกำหนดขอบเขตพื้นที่แอกทีฟโซนบนกริดละเอียดเป็นที่เรียบร้อย การคำนวณและการปรับปรุงค่าแบบมัลติกริดจะเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณดังกล่าว นั้น ดังแสดงในรูปที่ 3.2

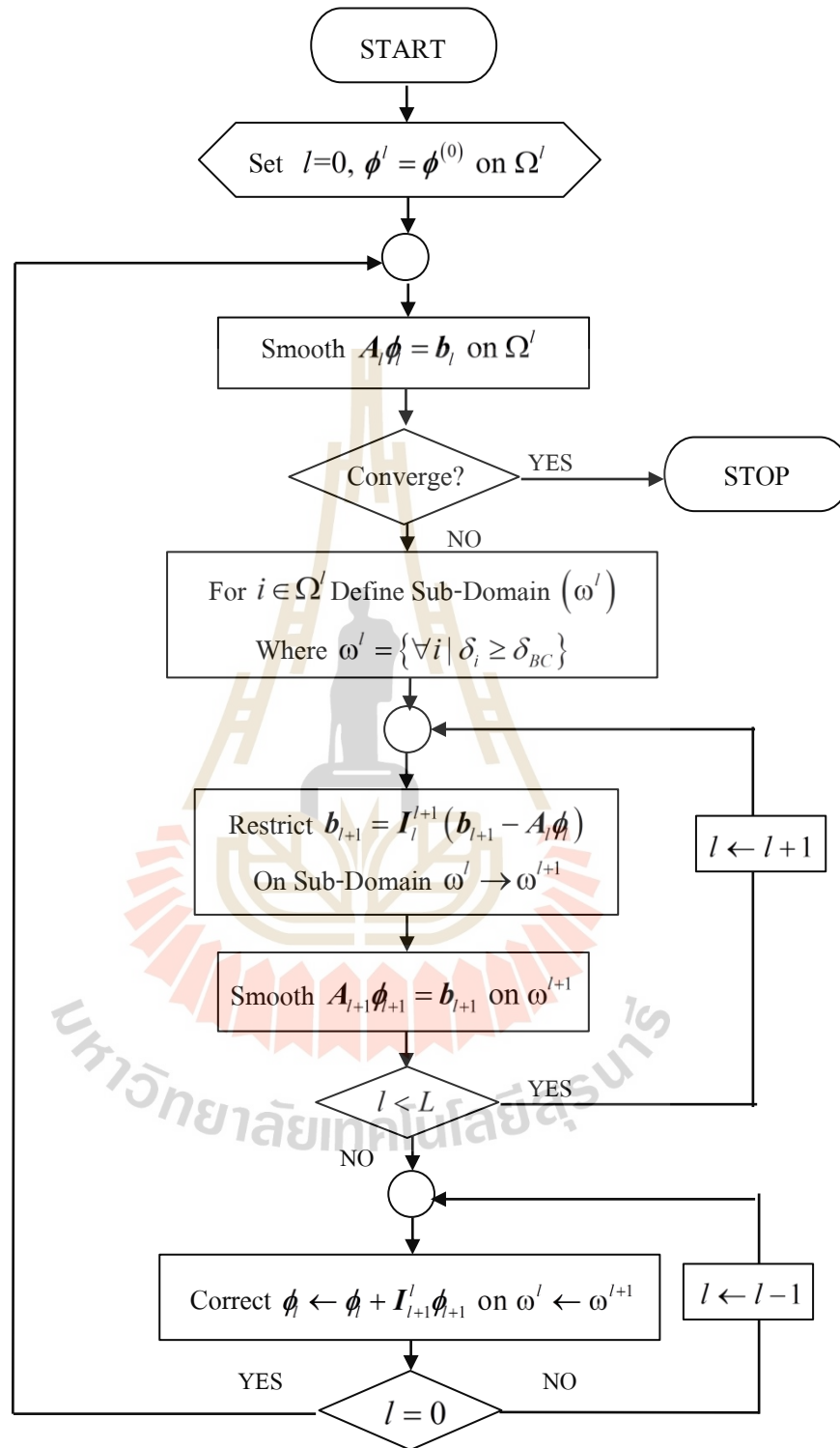


รูปที่ 3.1 การเลือกกริดหยาบบนโดเมน 1 มิติ



รูปที่ 3.2 มัลติกริดแบบแอกทีฟโซน

งานวิจัยนี้ใช้เทคนิคมัลติกริดเชิงพีชคณิตในการคำนวณแบบเฉพาะบริเวณ ดังนั้นจึงเรียกว่าวิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิตเฉพาะบริเวณ LAMG (local algebraic multigrid) การคำนวณใช้เงื่อนไข $\delta_{Criteria}$ เป็นเกณฑ์การลู่เข้าเพื่อการหยุดคำนวณ ดังนั้นที่ขอบชั่วคราวจึงให้ $\delta_{Criteria} = \delta_{BC}$ ขั้นตอนวิธี LAMG แสดงดังรูปที่ 3.3 อัลกอริทึมของวิธี LAMG เงื่อนไขที่ถูกใช้ในการจำแนกแอกทีฟโซนออกจากเมเชอร์โซนอยู่ในขั้นตอนการกำหนดลำดับโดเมน โดยใช้เงื่อนไขเดียวกับตรวจสอบการลู่เข้าจะสังเกตเห็นว่า หากบริเวณทั้งหมดมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด แอกทีฟโซนจะคลุมพื้นที่ทั้งโดเมน $\omega' = \Omega'$ การคำนวณจะเป็นแบบมัลติกริดทั้งโดเมน เมื่อการคำนวณดำเนินไปบนสภาพการลู่เข้าแต่ละบริเวณที่ต่างกัน เมื่อการคำนวณลู่เข้าแอกทีฟโซนจะลดขนาดลงโดยลำดับ การเปลี่ยนแปลงขนาดของแอกทีฟโซนช่วยให้ (ก) ระดับกริดสูงสุด L ที่ใช้ในแต่ละรอบไม่เท่ากัน (ข) พื้นที่แอกทีฟโซนปรับปรุงในรอบการคำนวณ ดังนั้นการคำนวณด้วยวิธี LAMG กริดหยาบจะถูกสร้างขึ้นใหม่ในรอบการคำนวณให้เหมาะสมกับสภาพพื้นที่ ระหว่างรอบการคำนวณพื้นที่ที่จะถูกปรับปรุงตลอดจึงเป็นไปได้ที่แอกทีฟโซนอาจมีขนาดเพิ่มขึ้น ลดขนาดลงหรือเปลี่ยนตำแหน่งไปจากเดิม ทั้งนี้ขึ้นกับลักษณะของปัญหา พื้นที่ที่เคยเป็นเมเชอร์โซนอาจกลับมาเป็นแอกทีฟโซนได้เช่นกัน การกำหนดเมเชอร์โซนจึงพิจารณาตามเกณฑ์ของขั้นตอนวิธีคำนวณในแต่ละรอบ การคำนวณจะดำเนินไปจนกระทั่งไม่พบแอกทีฟโซนเหลืออยู่ในโดเมน การคำนวณหยุดและผลเฉลยลู่เข้าสู่คำตอบ



รูปที่ 3.3 ขั้นตอนวิธี LAMG

3.2 กรณีทดสอบสำหรับปัญหา 1 มิติ

เพื่อทดสอบประสิทธิภาพการคำนวณของวิธี LAMG จึงได้นำไปประยุกต์แก้ปัญหาค่าขอบแบบ 1 มิติ ที่มีรูปทั่วไปของสมการควบคุมเขียนได้ดังสมการ (3-2) โดยทำการประเมินเปรียบเทียบกับวิธี AMG แบบไม่ปรับปรุงพื้นที่ ซึ่งต่อไปจะเรียกว่าวิธีมัลติกริดเชิงพีชคณิตแบบทั้งโดเมน GAMG (global algebraic multigrid)

$$\varepsilon \frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha(x) \frac{d\phi}{dx} + \beta(x)\phi = f(x); \quad (x_1 < x < x_2) \quad (3-2)$$

เมื่อ $0 < \varepsilon \ll 1$ และ $f \geq 0$ โดย $\alpha(x)$ $\beta(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใดๆ และ $\phi(x_1) = \phi_1$, $\phi(x_2) = \phi_2$ เป็นเงื่อนไขค่าขอบทั้งสองด้าน ปัญหานี้มักเรียกว่าปัญหาชั้นขีดผิวซึ่งเหมาะใช้ทดสอบเทคนิคปรับปรุงเฉพาะบริเวณ เพราะพฤติกรรมของผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงเกรเดียนต์ที่สูงมากในบางบริเวณ หากใช้กริดไม่เหมาะสมอาจส่งผลให้ผลเฉลยมีความถูกต้องต่ำ สมการควบคุมถูกแจกแจงเป็น 4 กรณีทดสอบ A B C และ D ดังสมการ (3-2a) - (3-2d) ตามลำดับ พบว่าปัญหาทดสอบ A B และ C เป็นปัญหาเชิงเส้น ส่วนปัญหา D เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น โดยสัมประสิทธิ์ $\alpha(x)$ ถูกแทนด้วย $\phi(x)$

กรณีทดสอบ A

$$\varepsilon \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (3-2a)$$

$$\phi(-1) = 1, \quad \phi(1) = 2, \quad \varepsilon = 0.005$$

กรณีทดสอบ B

$$\varepsilon \frac{d^2\phi}{dx^2} + x \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (3-2b)$$

$$\phi(-1) = 1, \quad \phi(1) = 2, \quad \varepsilon = 0.0001$$

กรณีทดสอบ C

$$\varepsilon \frac{d^2\phi}{dx^2} + |x| \frac{d\phi}{dx} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \phi = 0 \quad (3-2c)$$

$$\phi(-1) = 1, \quad \phi(1) = 2, \quad \varepsilon = 0.01$$

กรณีทดสอบ D

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \frac{d\phi}{dx} + 0.5|\phi| = 0 \quad (3-2d)$$

$$\phi(-1) = 1, \phi(1) = 1, \varepsilon = 0.001$$

สมการอนุพันธ์ถูกเปลี่ยนให้เป็นสมการพีชคณิต โดยพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งถูกประมาณด้วยวิธีผลต่างต้นลมตามสมการ (2-2) ส่วนพจน์อนุพันธ์อันดับสองถูกประมาณด้วยวิธีผลต่างกลางตามสมการที่ (2-3) ได้รูปแบบสมการพีชคณิตของกรณีทดสอบ A-D ที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขตามลำดับดังนี้

$$-\left(\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right)\phi_{i+1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} - \frac{1}{h}\right)\phi_i - \left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)\phi_{i-1} = 0 \quad (3-3a)$$

$$-\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{x_i}{h}\right)\phi_{i+1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{x_i}{h}\right)\phi_i - \left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)\phi_{i-1} = 0 \quad (3-3b)$$

$$-\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{|x_i|}{h}\right)\phi_{i+1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{|x_i|}{h} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right)\phi_i - \left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)\phi_{i-1} = 0 \quad (3-3c)$$

$$-\left(\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{\phi_i}{h}\right)\phi_{i+1} + \left(\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{\phi_i}{h}\right)\phi_i - \left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)\phi_{i-1} = 0.5|\phi_i| \quad (3-3d)$$

การคำนวณใช้กริดแบบสม่ำเสมอทั้งโดเมน แต่ละกรณีทดสอบใช้กริดจำนวน 1000 2000 4000 และ 8000 เพื่อตรวจสอบความเป็นอิสระกริด (grid independent) การคำนวณใช้เทคนิควนซ้ำแบบ Gauss-Seidel นอกจากนี้ เป็นที่ทราบว่าสำหรับการคำนวณแบบวนซ้ำ เงื่อนไขค่าเริ่มต้นมีความสำคัญส่งผลกระทบต่อความเร็วของการเข้าสู่ค่าตอบ อย่างไรก็ตามเทคนิคการคำนวณที่มีเสถียรภาพควรให้ผลการคำนวณที่เข้าสู่ค่าตอบในทุกเงื่อนไขค่าเริ่มต้น เพื่อแสดงให้เห็นความมีเสถียรภาพไม่ขึ้นกับเงื่อนไขค่าเริ่มต้นดังกล่าว จึงกำหนดเงื่อนไขทดสอบ กำหนดค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกันสามกรณี คือ (1) ค่าเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ (2) ค่าเริ่มต้นแบบฟังก์ชันไซน์โหมดความถี่เป็นจำนวนเต็ม และ (3) ค่าเริ่มต้นที่คำนวณบนกริดชุดหยาบสุดแล้วส่งถ่ายผลเฉลยไปไว้บนกริดละเอียดสุด (กริดฐาน) นอกจากนี้ยังได้ทดสอบผลกระทบของการกำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราว โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อน δ สามกรณีได้แก่ (1) $\delta_{BC} = 0.01$ (2) $\delta_{BC} = 0.0001$ และ (3) $\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-7}$

การประเมินใช้การนับเวลาในการคำนวณตั้งแต่การเตรียมชุดข้อมูลจนกระทั่งการคำนวณเสร็จ ไม่นับรวมเวลาที่ใช้ในการเขียนข้อมูลลงไฟล์

3.3 ผลการจำลองปัญหา 1 มิติ

การคำนวณด้วยวิธีวนซ้ำ การกำหนดค่าเริ่มต้นส่งผลต่อการเข้าสู่ค่าตอบ วิธีวนซ้ำที่มีเสถียรภาพจะให้การลู่เข้าไม่ว่าจะกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยรูปแบบใด ดังนั้นเพื่อทดสอบเสถียรภาพการคำนวณของเทคนิค LAMG ที่พัฒนาขึ้น จึงนำไปทดสอบกับค่าเริ่มต้นที่ต่างกัน 3 กรณี ได้แก่ (1) ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ โดยกำหนดค่าตัวแปรทั้งหมดที่อยู่ภายในโดเมนมีค่าเท่ากับศูนย์ (2) ค่าเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันไซน์ เป็นค่าเริ่มต้นที่เลียนพฤติกรรมของโหมดค่าความคลาดเคลื่อน โดยค่าตัวแปรจะถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันไซน์ และ (3) ค่าเริ่มต้นจากการประมาณค่าบนกริดหยาบ เนื่องจากกริดละเอียดเป็นกริดคำตอบที่ต้องการส่วนกริดหยาบเป็นกริดที่ใช้เพื่อเร่งการคำนวณ ด้วยวิธีมัลติกริดการทำนายผลเฉลยบนกริดละเอียดต้องใช้กริดหยาบเข้าร่วมด้วย ดังนั้นการกำหนดค่าเริ่มต้นของกริดละเอียดโดยเตรียมจากกริดหยาบจึงมีความน่าสนใจ ซึ่งเทคนิคเช่นนี้สอดคล้องกับวิธี Full Multigrid (FMG) พร้อมกันนี้ยังศึกษาผลของเงื่อนไขขอบชั่วคราว δ_{BC} ต่อผลการคำนวณ เนื่องจากการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบชั่วคราวจะส่งผลโดยตรงต่อขนาดของแอกทิพโซน โดยค่า δ_{BC} ที่ต่ำจะส่งผลให้ขนาดแอกทิพโซนมีขนาดใหญ่เกินความจำเป็น ขณะที่การกำหนดค่า δ_{BC} สูงจะทำให้ได้แอกทิพโซนขนาดเล็กจนทำให้การคำนวณขนาดเสถียรภาพได้ โดยแบ่งการทดสอบเป็น 3 กรณี ได้แก่ (1) กรณีเงื่อนไขขอบมีค่าน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด ($\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-7}$, $\delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-4}$) (2) กรณีเงื่อนไขขอบมีค่ามากกว่าเงื่อนไขหยุด ($\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-2}$, $\delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-7}$) และ (3) กรณีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขหยุดมีค่าเท่ากัน ($\delta_{BC} = \delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-4}$)

3.3.1 กรณีทดสอบ A

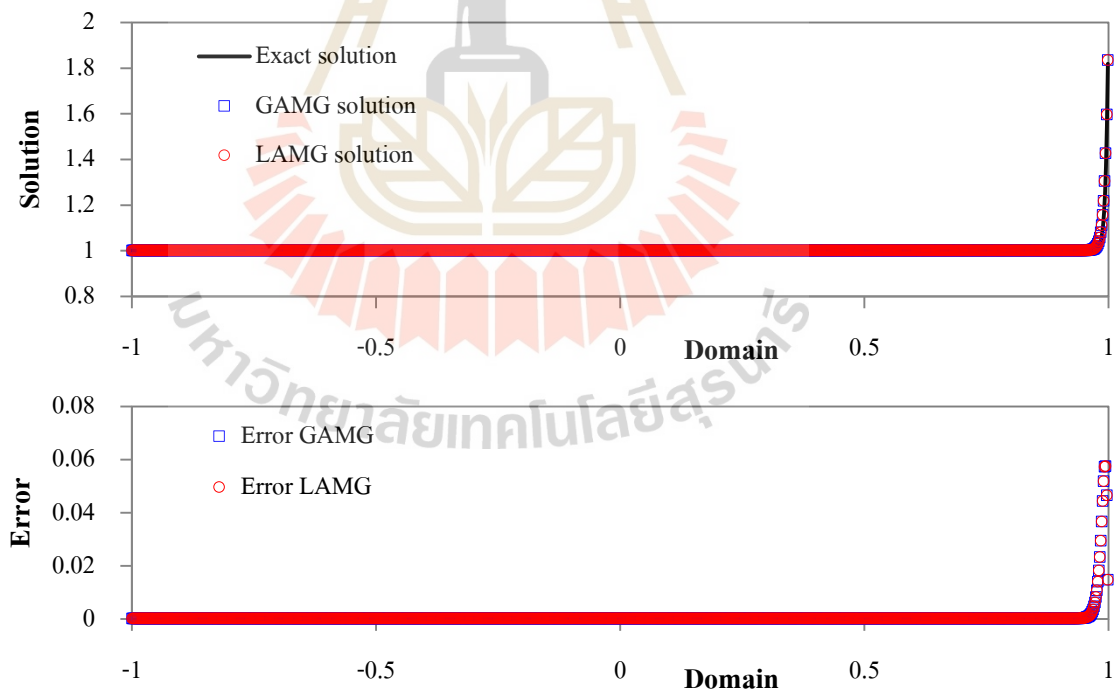
ผลเฉลยแม่นยำตรงเพื่อสอบเทียบความแม่นยำของการคำนวณวิธีเชิงตัวเลขสมการอนุพันธ์ (3-2a) แสดงได้ดังสมการ (3-4)

$$\phi(x) = (1 - \exp(-2/\varepsilon)) + \exp((x-1)/\varepsilon) \quad (3-4)$$

ความถูกต้องผลการคำนวณพิจารณาจากค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่างระหว่างค่าการคำนวณจากวิธีเชิงตัวเลขเทียบกับค่าแม่นยำตรง ตามความสัมพันธ์ (3-5)

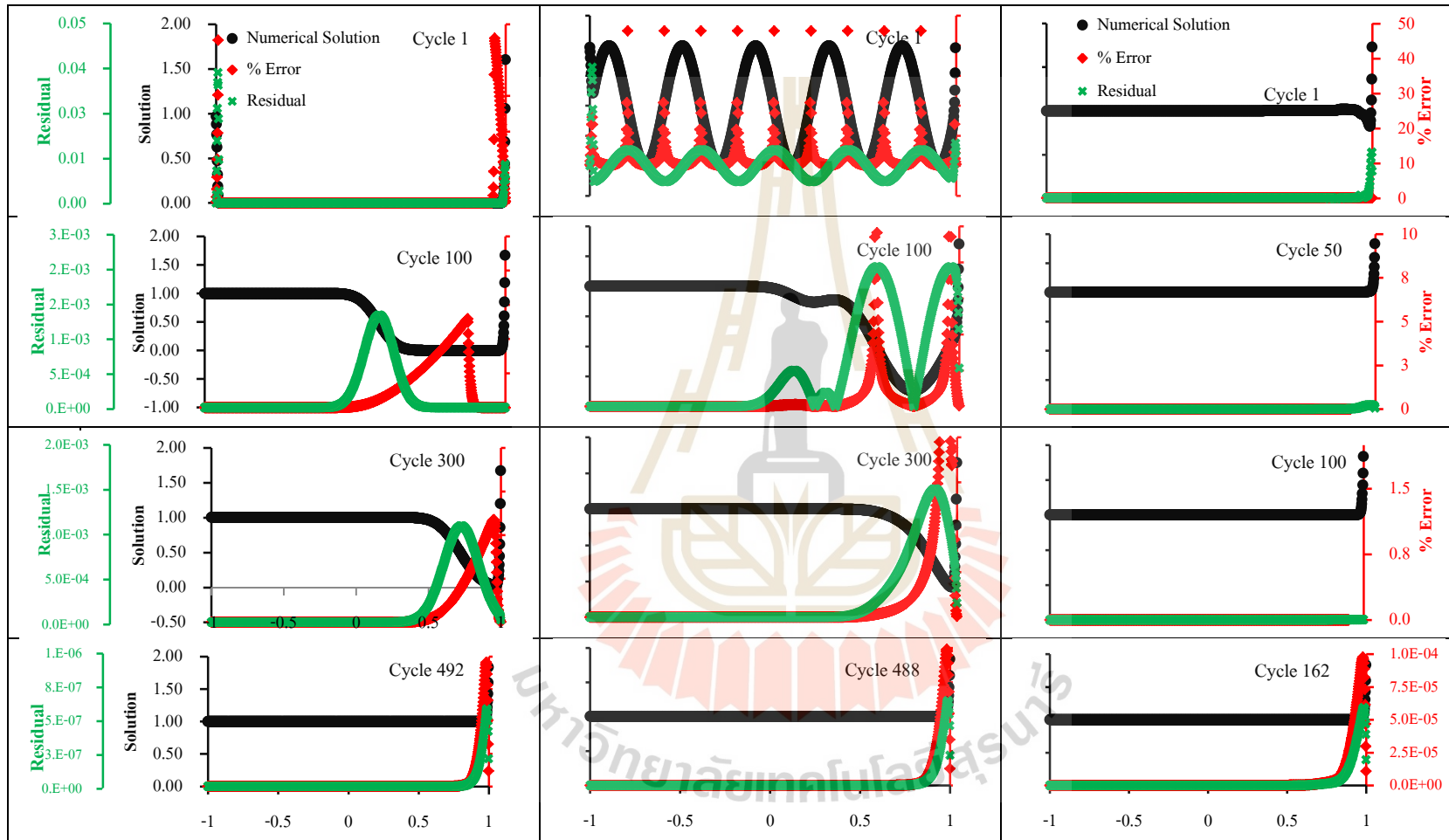
$$e = |\phi - \hat{\phi}| \quad (3-5)$$

เมื่อ ϕ และ $\hat{\phi}$ คือค่าผลเฉลยแม่นยำและค่าการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขตามลำดับ ค่าแสดง ความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณด้วยวิธี GAMG และวิธี LAMG บนโดเมนแสดงดังรูปที่ 3.4 การคำนวณกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นด้วยค่าศูนย์ สำหรับวิธี LAMG กำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราวที่ $\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-7}$ การคำนวณใช้ 1000 จุดต่อ จากรูปแสดงให้เห็นว่า (รูปที่ 3.4 บน) ผลการคำนวณ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขทั้งสองวิธีให้ผลสอดคล้องกันและได้ข้อมูลที่ซ้อนทับกับค่าแม่นยำพอดี (รูปที่ 3.4 ล่าง) ค่าคลาดเคลื่อนบนโดเมนด้านซ้ายให้ค่าคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ ขณะที่บนโดเมนด้านขวา มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเนื่องจากเป็นบริเวณที่ปัญหาเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างฉับพลัน จำนวน จุดต่อในบริเวณดังกล่าวมีความละเอียดต่ำทำให้จับพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงฉับพลันนี้ได้ไม่ดีนัก จึงเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้น อย่างไรก็ตามความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น วิธี LAMG และวิธี GAMG ให้ผลความคลาดเคลื่อนที่สอดคล้องกัน และค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดมีค่าประมาณ 3% แสดงให้เห็นว่า วิธี LAMG ที่ใช้การคำนวณแบบเฉพาะบริเวณให้ผลการคำนวณที่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องเทียบได้กับ การคำนวณวิธี GAMG ที่ใช้การคำนวณแบบทั้งโดเมน



รูปที่ 3.4 สอบเทียบความแม่นยำกรณีทดสอบ A (บน) ผลคำนวณวิธีเชิงตัวเลขเทียบกับค่าแม่นยำ (ล่าง) ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณเชิงตัวเลข

การศึกษาผลของเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ในการคำนวณได้กำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราว และเงื่อนไขการลู่เข้าให้มีค่าน้อย ($\delta_{BC} = \delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-7}$) เพื่อให้มั่นใจว่าเมเซอร์โซนจะลู่เข้าอย่างแท้จริงและจะไม่กลับมาเป็นแอกทิฟโซนอีกครั้งและได้ค่าขอบที่ถูกต้องสำหรับใช้เป็นขอบชั่วคราวของการคำนวณเฉพาะบริเวณ การคำนวณใช้กริดแบบสมมาตรจำนวน 1000 จุด การแสดงผลแบ่งเป็น 2 แบบ (1) พฤติกรรมการลู่เข้าแสดงในรูปร้อยละความคลาดเคลื่อน (\square) และค่าเศษเหลือ (\times) และ (2) ผลการคำนวณทั้งแอกทิฟโซนและเมเซอร์โซน (\bullet) บนโดเมน [-1,1] ผลการคำนวณเมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ โซนและกริดหยุดแสดงผลดังรูป 3.5 พบว่า กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.5ก) การเปลี่ยนแปลงของความคลาดเคลื่อนและลักษณะการลู่เข้ารอบที่ 0 200 300 และ 492 (ลู่เข้า) รอบ ความคลาดเคลื่อนปรับลดลงเริ่มจากขอบซ้ายไปขอบขวา ขนาดแอกทิฟโซนลดลงโดยลำดับไปทางขอบด้านขวาตามพฤติกรรมการลดลงของความคลาดเคลื่อนก่อนลู่เข้าสู่คำตอบ บริเวณด้านขวาเป็นส่วนที่มีการเปลี่ยนแปลงจับปล้นจาก 1 ไป 2 ส่งผลให้บริเวณดังกล่าวลู่เข้าช้า จึงเป็นพื้นที่สุดท้ายของแอกทิฟโซนในการคำนวณ กรณีกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยฟังก์ชันไซน์ (รูปที่ 3.5ข) ที่มีขนาดแอมพลิจูดเริ่มต้นเท่ากับหนึ่ง เมื่อการคำนวณดำเนินไป พบว่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนเริ่มลดลงจากขอบด้านซ้ายไปขอบด้านขวา เริ่มปรากฏการลู่เข้าขยายพื้นที่ไปขอบด้านขวาตามลำดับ จนกระทั่งการคำนวณสิ้นสุดที่ 488 รอบ พื้นที่สุดท้ายของการคำนวณอยู่บริเวณขอบด้านขวามือเช่นเดียวกับกรณีค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ และกรณีการกำหนดค่าเริ่มต้นจากกริดหยุด การเตรียมค่าเริ่มต้นเริ่มคำนวณจากกริดหยุดแล้วส่งถ่ายข้อมูลมาไว้บนกริดละเอียดตามลำดับจนถึงกริดละเอียดสุด โดยไม่มีการคำนวณซ้ำใด ๆ ระหว่างส่งข้อมูลดังกล่าว (รูปที่ 3.5ค) ด้วยการกำหนดค่าเริ่มต้นวิธีดังกล่าว เพียงรอบแรกของการคำนวณเกิดพื้นที่เมเซอร์โซนถึง 65% ซึ่งเกิดขึ้นบริเวณด้านซ้ายโดเมน เนื่องจากลักษณะของผลเฉลยบริเวณด้านซ้ายโดเมนมีความราบเรียบการลู่เข้าจึงเกิดขึ้นได้ง่ายกว่า ความคลาดเคลื่อนทั้งหมดอยู่ในออคเตอร์ดำเมื่อเทียบสเกลกับผลการคำนวณอื่นในรอบเดียวกัน ผลการคำนวณพบว่าด้วยวิธี LAMG ลู่เข้าสู่คำตอบโดยใช้การคำนวณเพียง 162 รอบ การกำหนดค่าเริ่มต้นทั้งสามกรณีตำแหน่งจุดยอดของความคลาดเคลื่อนมีพฤติกรรมการปรับลดขนาดลงพร้อมเคลื่อนตัวจากพื้นที่ด้านซ้ายไปด้านขวาของโดเมนเหมือนกัน



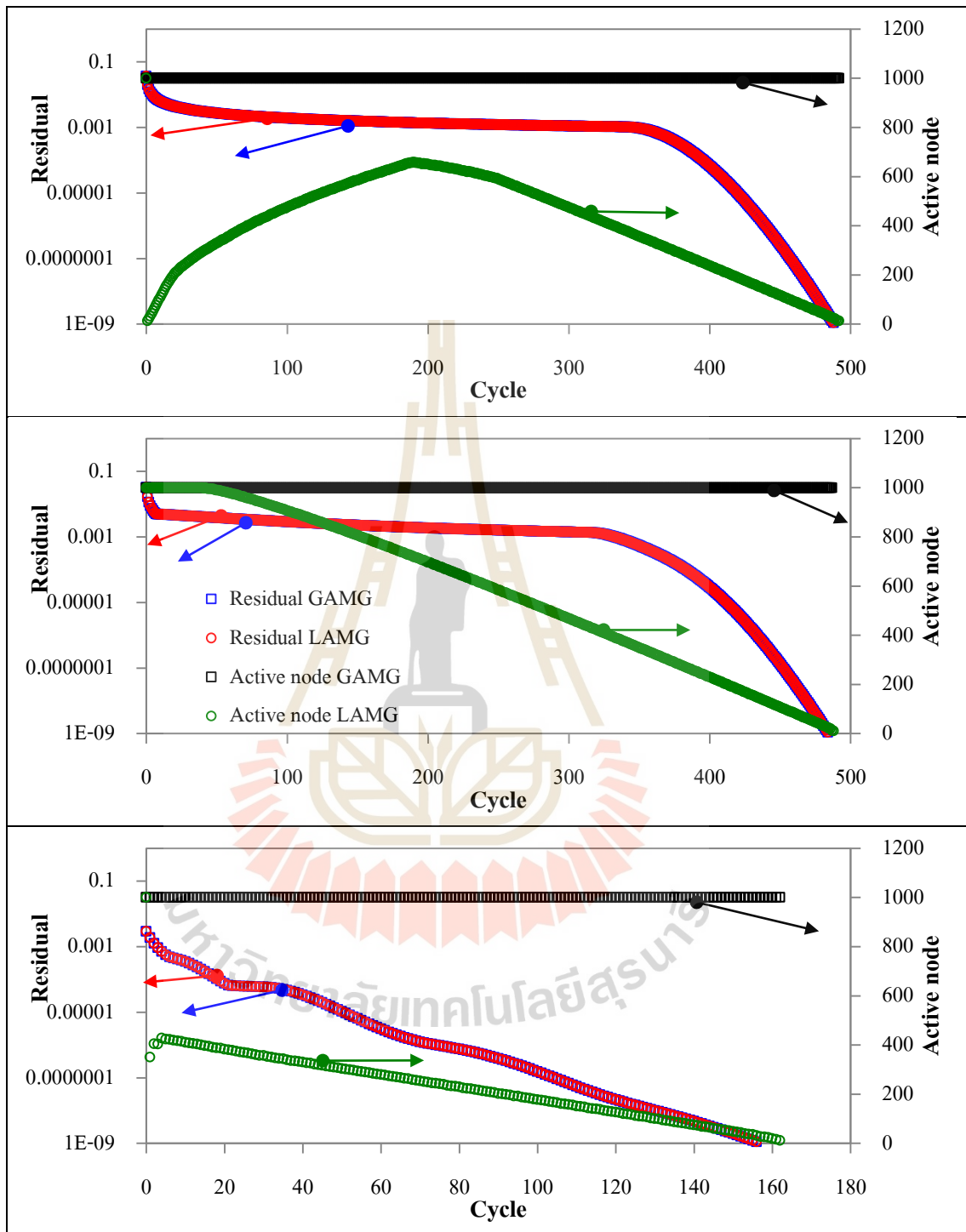
(ก)

(ข)

(ค)

รูปที่ 3.5 การลู่เข้ากรณีทดสอบ A (ก)ค่าเริ่มต้นศูนย์ (ข)ค่าเริ่มต้น 1.5 (ค)ค่าเริ่มต้น 10

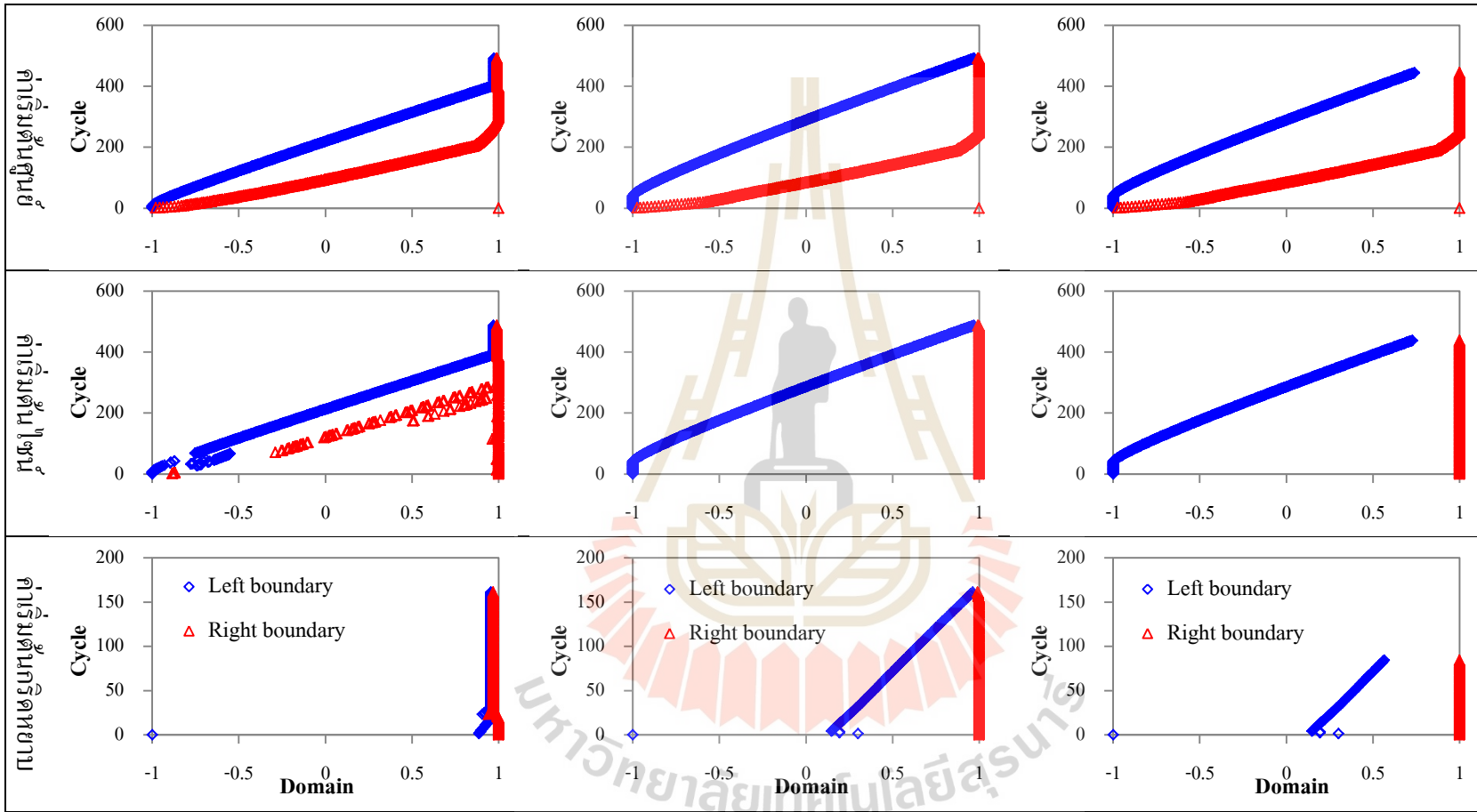
เมื่อพิจารณาจำนวนจุดต่อบนกริดฐานที่ใช้ในแต่ละรอบที่สัมพันธ์กับการคำนวณ ในรูปที่ 3.5 จนกระทั่งการคำนวณสิ้นสุด รูปที่ 3.6 แสดงเศษเหลือและจุดต่อในแต่ละรอบ การคำนวณ โดยเปรียบเทียบระหว่างวิธี LAMG และ GAMG กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.6 บน) จุดต่อที่ใช้ในการคำนวณแต่ละรอบพบว่าวิธี LAMG ใช้จำนวนจุดต่อน้อยในรอบต้น หลังจากนั้นใช้ จำนวนจุดต่อเพิ่มขึ้น (พื้นที่แอกทิฟ โชนขยายขึ้น) จำนวนจุดต่อเพิ่มมากที่สุดรอบที่ 200 หลังจากนั้น พื้นที่แอกทิฟ โชนลดลงโดยลำดับ จนกระทั่งลู่เข้า เปรียบเทียบกับวิธี GAMG ซึ่งใช้จำนวนกริดฐาน เท่ากันทุกรอบการคำนวณ ที่ 1000 จุดต่อ พบว่าการลดลงของเศษเหลือใกล้เคียงกับวิธี LAMG ซึ่งใช้ การคำนวณเพียงบางส่วนของโดเมน กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.6 กลาง) ช่วงรอบต้นวิธี LAMG ใช้ จำนวนจุดต่อทั้งพื้นที่โดเมนเท่ากับวิธี GAMG จากนั้นปริมาณจุดต่อปรับลดลงโดยลำดับอย่างมี เสถียรภาพ ไม่มีลักษณะของการขยายตัวของแอกทิฟ โชนในระหว่างการคำนวณเหมือนกรณี ค่าเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.6 บน) พื้นที่แอกทิฟ โชนลดลงอย่างเป็นลำดับจนกระทั่งการคำนวณลู่เข้า ขณะที่การลดลงของเศษเหลือทั้งสองวิธีก็มีลักษณะสอดคล้องกัน และกรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ (รูปที่ 3.6 ล่าง) การกำหนดค่าเริ่มต้นจากกริดหยาบเพียงรอบแรกของการคำนวณทำให้จุดต่อลดลง เหลือเพียง 35% ของโดเมน (เหลือแอกทิฟ โชน 35%) เมื่อการคำนวณดำเนินไปจำนวนจุดต่อลดลง โดยลำดับ แสดงให้เห็นถึงการปรับปรุงแอกทิฟ โชนอย่างมีประสิทธิภาพ ด้วยกราฟเส้นที่แสดงจำนวน จุดต่อที่ใช้คำนวณ พิจารณาพื้นที่ใต้กราฟนั้นคือจำนวนกริดฐานทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณ พื้นที่ ใต้กราฟน้อยหมายถึงการคำนวณที่น้อย ขณะที่พื้นที่ใต้กราฟของวิธี GAMG ใช้จำนวนจุดต่อคงที่ ตลอดการคำนวณ ผลต่างของพื้นที่ใต้กราฟของวิธี LAMG และ GAMG จึงหมายถึงการคำนวณที่ LAMG ประหยัดได้ ขณะที่การลดลงของเศษเหลืออยู่ในอัตราเดียวกัน



รูปที่ 3.6 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ A
(บน) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (กลาง) ค่าเริ่มต้นไซน์ (ล่าง) ค่าเริ่มต้นกริดหยาบ

พิจารณาการปรับปรุงขอบชั่วคราวของการคำนวณวิธี LAMG ด้วยเงื่อนไขขอบชั่วคราวสามกรณีได้แก่ (1) กรณีเงื่อนไขขอบมีค่าน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด ($\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-7}$, $\delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-4}$) (2) กรณีเงื่อนไขขอบมีค่ามากกว่าเงื่อนไขหยุด ($\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-2}$, $\delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-7}$) และ (3) กรณีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขหยุดมีค่าเท่ากัน ($\delta_{BC} = \delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-4}$) รูปที่ 3.7 กราฟแสดงตำแหน่งขอบของแอกทีฟโซนในแต่ละรอบการคำนวณ โดยจุด \square และ \triangle แทนขอบชั่วคราวด้านซ้ายและด้านขวาของแอกทีฟโซนตามลำดับ โดยสัมพันธ์กับรอบการคำนวณ (แกน y) และตำแหน่งบนโดเมน (แกน x) โดยช่วงระหว่างจุด \square และ \triangle (ระยะในแนวแกน x ในรอบเดียวกัน) คือขนาดพื้นที่ที่แอกทีฟโซนที่ต้องคำนวณด้วยมัลติกริด กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์พบว่าในช่วงรอบต้น แอกทีฟโซนอยู่บนพื้นที่ขอบด้านซ้าย จากนั้นขยายขนาดพร้อมกับเคลื่อนไปทางขอบด้านขวาซึ่งเป็นบริเวณที่มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงค่าฉับพลันจาก 1 ไป 2 ลักษณะการเคลื่อนตำแหน่งของแอกทีฟโซนเช่นนี้แสดงถึงความไม่มีเสถียรภาพของแอกทีฟโซน กรณีค่าเริ่มต้นไซน์ที่ใช้เงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.7ข) และเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.7ค) จากแอกทีฟโซนที่คลุมทั้งโดเมน เมื่อการคำนวณดำเนินไปขอบของแอกทีฟโซนด้านซ้ายปรับลดขนาดลงมาขอบด้านขวาโดยลำดับ จนกระทั่งลู่อเข้าแสดงถึงเสถียรภาพที่ดีในการคำนวณด้วยวิธี LAMG ส่วนกรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบที่ใช้เงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด (ภาพซ้ายล่าง) มีขนาดแอกทีฟโซนต่ำมาก ทำให้การคำนวณด้วยมัลติกริดไม่เต็มประสิทธิภาพ การคำนวณส่วนใหญ่เป็นการคำนวณแบบทั้งโดเมนด้วยกริดเชิงเตี้ยเพื่อกำหนดพื้นที่แอกทีฟโซนมากกว่าเป็นการคำนวณแบบ LAMG จึงเป็นลักษณะของการกำหนดเงื่อนไขขอบไม่เหมาะสมไม่สามารถปรับใช้กับปัญหาทั่วไปได้

วิธีการจัดการปัญหาแบบเฉพาะบริเวณ LAMG เน้นคำนวณมัลติกริดเฉพาะบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าเกณฑ์กำหนด ดังนั้นอัลกอริทึมจึงต้องมีเกณฑ์กำหนดที่เหมาะสมสำหรับการกำหนดพื้นที่ดังกล่าว ข้อนิยามพื้นที่แอกทีฟโซนในอุดมคติตามขั้นตอนวิธี LAMG คือ (1) แอกทีฟโซนจะปกคลุมบริเวณที่มีผลการคำนวณยังไม่ลู่อเข้าทั้งหมด (2) แอกทีฟโซนมีขนาดเริ่มต้นเท่ากับโดเมนแล้วลดขนาดลงมาตามลำดับ นั่นคือตลอดการคำนวณบริเวณที่ถูกกำหนดเป็นแอกทีฟโซนจะไม่กลับมาเป็นแอกทีฟโซนอีก แสดงถึงความมีเสถียรภาพของขอบเขตแอกทีฟโซน (3) แอกทีฟโซนเป็นบริเวณเดียวที่ถูกคำนวณวิธีมัลติกริด แอกทีฟโซนจึงควรมีขนาดเพียงพอสำหรับการคำนวณแบบมัลติกริด เป็นต้น หากพิจารณาดังนี้ รูปที่ 3.7ข และรูปที่ 3.7ค กรณีค่าเริ่มต้นไซน์และค่าเริ่มต้นกริดหยาบคือลักษณะของพื้นที่แอกทีฟโซนที่พึงประสงค์ตามนิยามข้างต้น



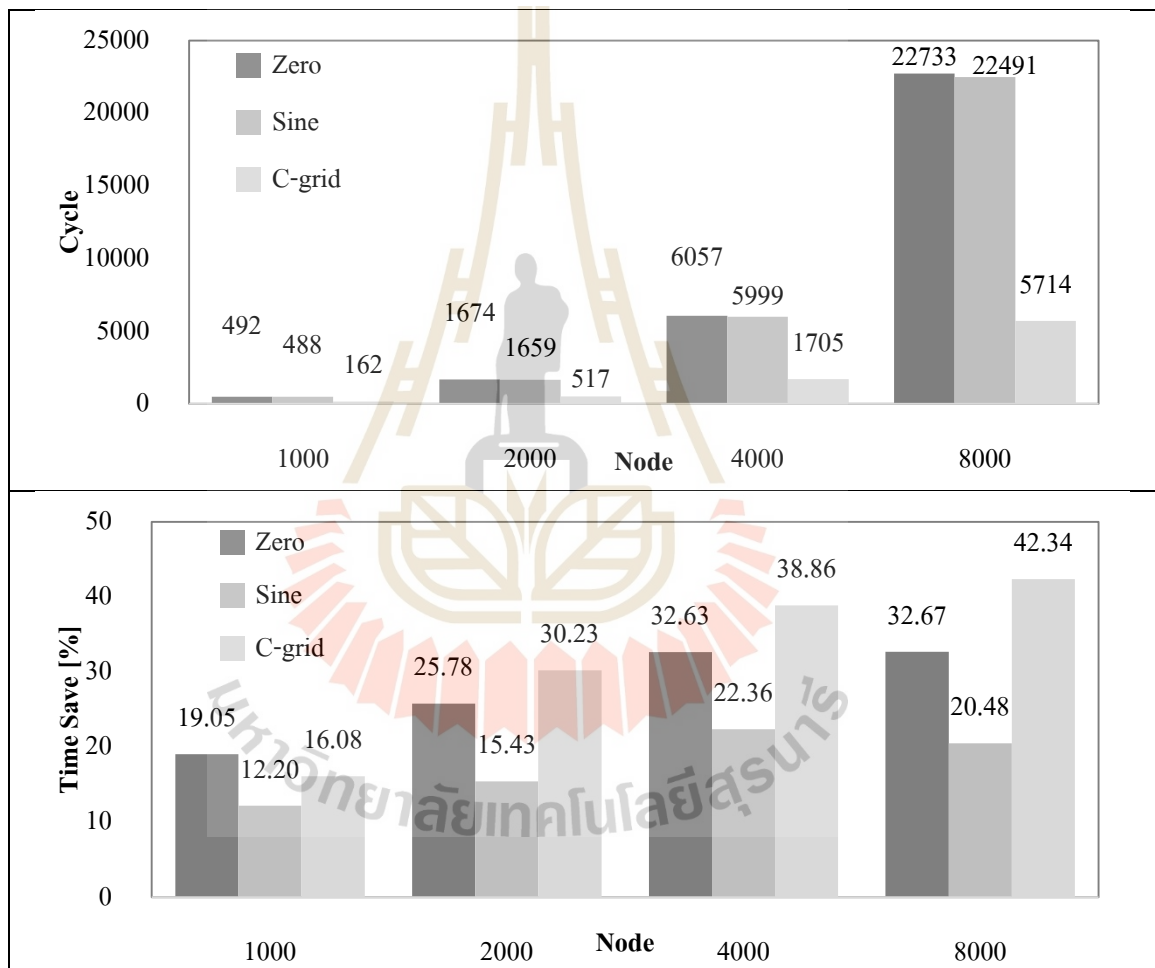
(ก) กรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด

(ข) กรณีเงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด

(ค) กรณีเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด

รูปที่ 3.7 การปรับปรุงเอกทิพโซนครณีทดสอบ A

ผลการคำนวณกรณีทดสอบ A โดยกรณีใช้เงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด $\delta_{BC} = \delta_{Criteria}$ ซึ่งเท่ากับ 1.0×10^{-7} บนกริดจำนวน 1000 2000 4000 และ 8000 แสดงดังรูปที่ 3.8 รูปแสดงรอบที่ใช้คำนวณและเวลาที่วิธี LAMG ประหยัดได้เทียบกับวิธี GAMG จากรูปที่ 3.8 ล่าง พบว่าวิธี LAMG ช่วยประหยัดเวลาคำนวณลงได้มากที่สุด 42% และมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อใช้กริดมากขึ้น รอบและเวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละเงื่อนไข แสดงรายละเอียดดังตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.8 ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ A (บน) รอบการคำนวณ (ล่าง) เวลาที่ประหยัดได้

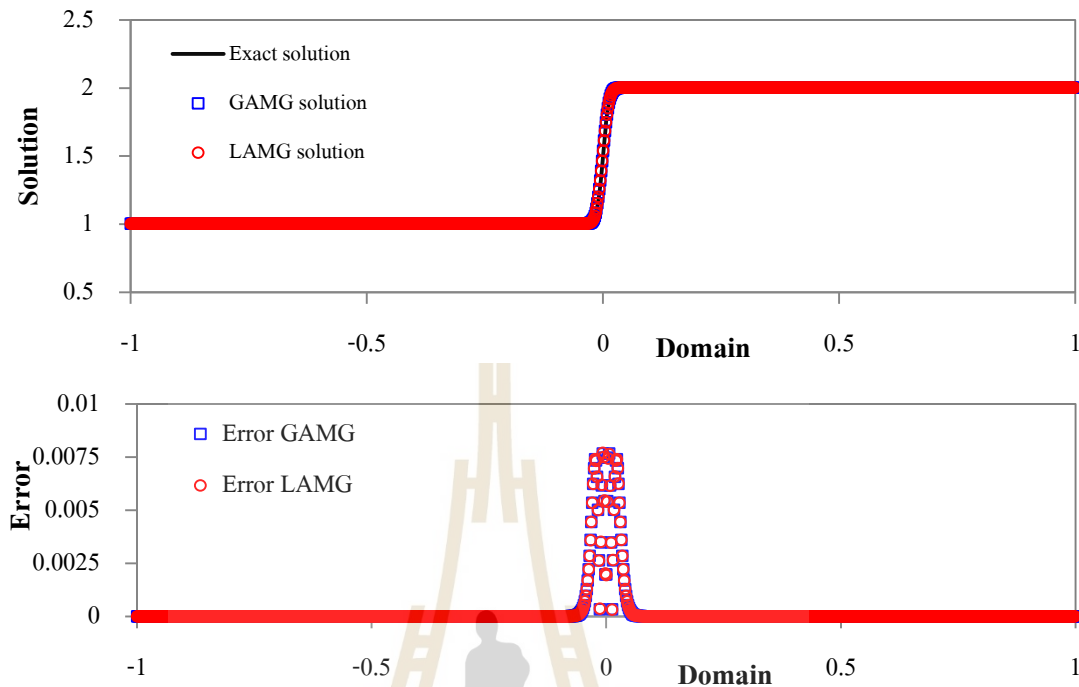
ตารางที่ 3.1 ผลเปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ A

Zero initialization					
Node	GAMG		LAMG		Time
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	Save (%)
1000	492	1.26	492	1.02	19.05
2000	1499	6.71	1499	4.98	25.78
4000	5368	44.29	5368	29.84	32.63
8000	19875	308.14	19875	207.47	32.67
Sine initialization					
	GAMG		LAMG		Time
	Cycle	Time(second)	Saved (%)	Time(second)	Save (%)
1000	488	1.23	488	1.08	12.20
2000	1476	6.61	1476	5.59	15.43
4000	5266	43.92	5266	34.10	22.36
8000	19397	300.11	19397	238.64	20.48
Coarse-grid initialization					
	GAMG		LAMG		Time
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	Save (%)
1000	162	0.286	162	0.24	16.08
2000	223	1.118	223	0.78	30.23
4000	682	5.79	682	3.54	38.86
8000	2054	32.468	2054	18.72	42.34

3.3.2 กรณีทดสอบ B

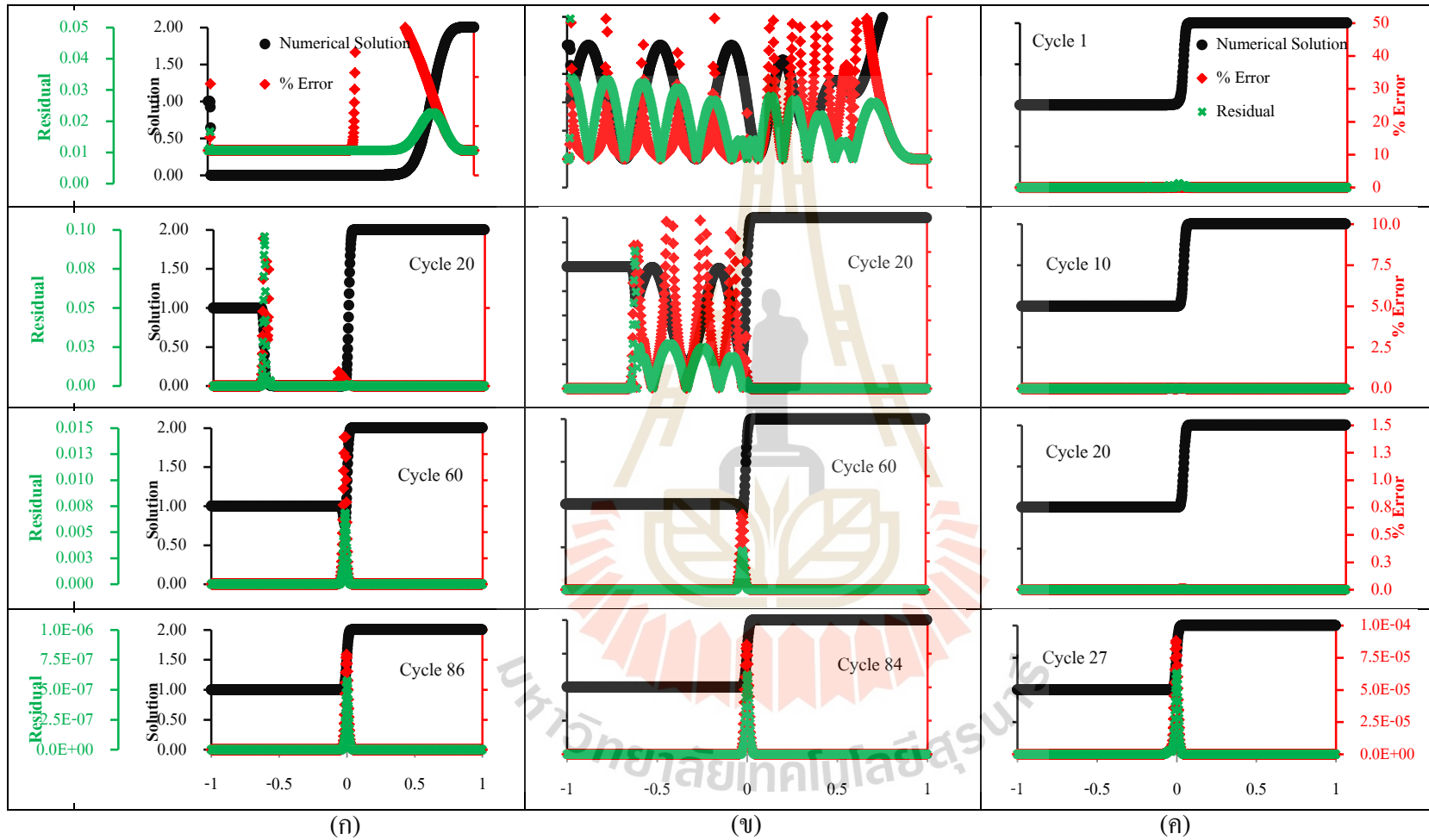
ปัญหามีพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างฉับพลันบริเวณกึ่งกลางโดเมน จาก 1 ไป 2 ขณะที่บริเวณขอบด้านซ้ายและด้านขวามีความราบเรียบ ผลเฉลยสมการอนุพันธ์ (3-2b) สามารถแสดงด้วยสมการแม่นยำในรูปของไฮเปอร์โบลิกซ์ฟังก์ชันความถูกต้องของผลการคำนวณ ด้วยวิธีเชิงตัวเลขพิจารณาจากค่าคลาดเคลื่อนตามความสัมพันธ์ในสมการ (3-5) บนโดเมน จำนวน 1000 จุดต่อ ที่กำหนดค่าเริ่มต้นด้วยศูนย์ วิธี LAMG กำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราวที่ $\delta_{BC} = 1.0 \times 10^{-7}$ ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณบนโดเมนแสดงดังรูปที่ 3.9 ค่าคลาดเคลื่อนที่มีค่าสูงเกิดขึ้นบริเวณกลางโดเมนซึ่งเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าฉับพลัน ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดมีค่าน้อยกว่า 3% ขณะที่ขอบด้านซ้ายและด้านขวามีค่าคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ วิธี LAMG และวิธี GAMG ให้พฤติกรรมความคลาดเคลื่อนสอดคล้องกันและมีขนาดแอมพลิจูดใกล้เคียงกัน แสดงให้เห็นว่าวิธี LAMG ลู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องและให้ผลคำนวณแม่นยำเทียบเท่าวิธี GAMG

รูปที่ 3.10 เปรียบเทียบพฤติกรรมการลู่เข้าของเงื่อนไขเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.10ก) เงื่อนไขเริ่มต้นไซน์ (รูปที่ 3.10ข) และเงื่อนไขเริ่มต้นกริดหยาบ (รูปที่ 3.10ค) รูปแสดงร้อยละ ความคลาดเคลื่อน (\square) ค่าเศษเหลือ (\times) และ ผลการคำนวณ (\bullet) บนโดเมน ทั้งสามกรณีมีพฤติกรรมการลู่เข้าจากขอบสองด้านมาบรรจบกันตรงกลางโดเมนซึ่งเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าฉับพลัน สอดคล้องกับพฤติกรรมการลดลงของความคลาดเคลื่อนโดยมีลักษณะปรับลดขนาดลงจากขอบทั้งสองด้านเข้ามาบริเวณตรงกลางเช่นเดียวกัน กรณีค่าเริ่มต้นไซน์ (รูปที่ 3.10ข) จะเห็นพฤติกรรมการลดลงของความคลาดเคลื่อนอย่างชัดเจนโดยสังเกตจากจุดยอดของกราฟ ความคลาดเคลื่อน ในรอบที่ 20 พบว่าความคลาดเคลื่อนแอมพลิจูดสูงอยู่บริเวณตรงกลางมีลักษณะตรงกันกับผลการคำนวณ (จุด \bullet) บริเวณดังกล่าวยังไม่ลู่เข้า ขณะที่บริเวณขอบทั้งสองด้านมีลักษณะราบเรียบแสดงถึงการลู่เข้าที่ดำเนินมาพร้อมกันทั้งสองด้านเข้ามาบรรจบกันกลางโดเมน กรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ (รูปที่ 3.10ค) ให้การลู่เข้าดีที่สุด มีขนาดของความคลาดเคลื่อนอยู่ในระดับต่ำที่สุดเมื่อเทียบสเกลเดียวกับกรณีอื่น

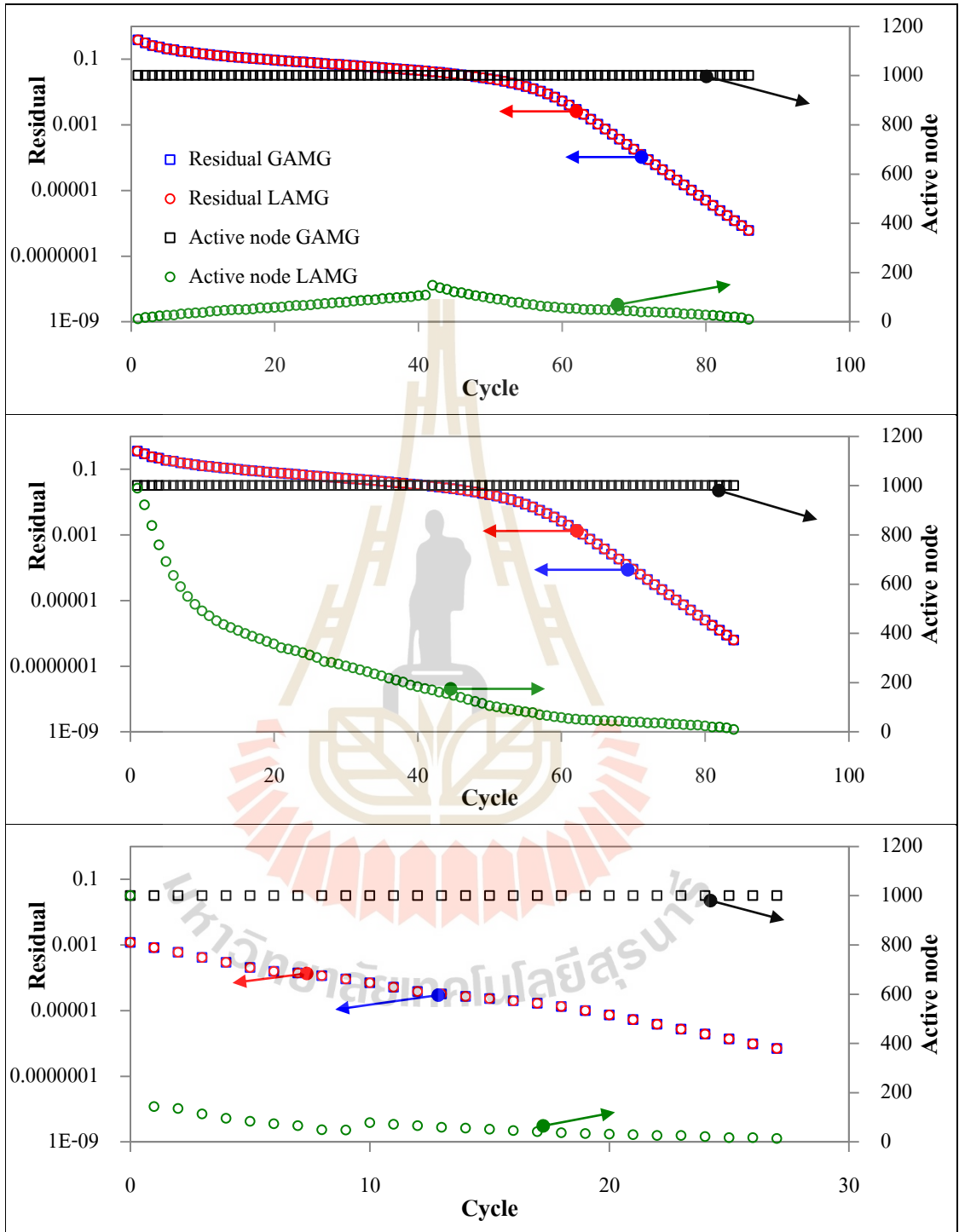


รูปที่ 3.9 สอบเทียบความแม่นยำกรณีทดสอบ B (บน) ผลคำนวณวิธีเชิงตัวเลขเทียบกับค่าแม่นยำตรง (ล่าง) ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณเชิงตัวเลข

พิจารณาจำนวนกริดที่ใช้คำนวณแต่ละรอบ พบว่ากริดกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยศูนย์ (รูปที่ 3.11 บน) พฤติกรรมการลดลงของเศษเหลือและจำนวนจุดต่อที่ใช้ในแต่ละรอบ การคำนวณใช้จุดต่อน้อยในรอบต้น แล้วจุดต่อเพิ่มขึ้นตามลำดับมากที่สุดที่ 40 รอบเป็นลักษณะการขยายแอกทีฟโซน แล้วจำนวนจุดต่อลดลงกระทั่งเข้าสู่ กรณีก่าเริ่มต้น ไซน์และค่าเริ่มต้นกริดหยาบ รูปที่ 3.11 กลาง และ รูปที่ 3.11 ล่าง ตามลำดับ จำนวนจุดต่อลดลงโดยลำดับจนกระทั่งเข้าสู่คำตอบ เป็นลักษณะของการปรับปรุงแอกทีฟโซนที่มีเสถียรภาพ ค่าความคลาดเคลื่อนทั้งวิธี LAMG และ GAMG ลดลงโดยลำดับพร้อมกันแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการคำนวณแบบ LAMG ที่ใช้กริดจำนวนน้อยกว่ามากแต่ให้อัตราการลู่เข้าเท่ากับวิธี GAMG

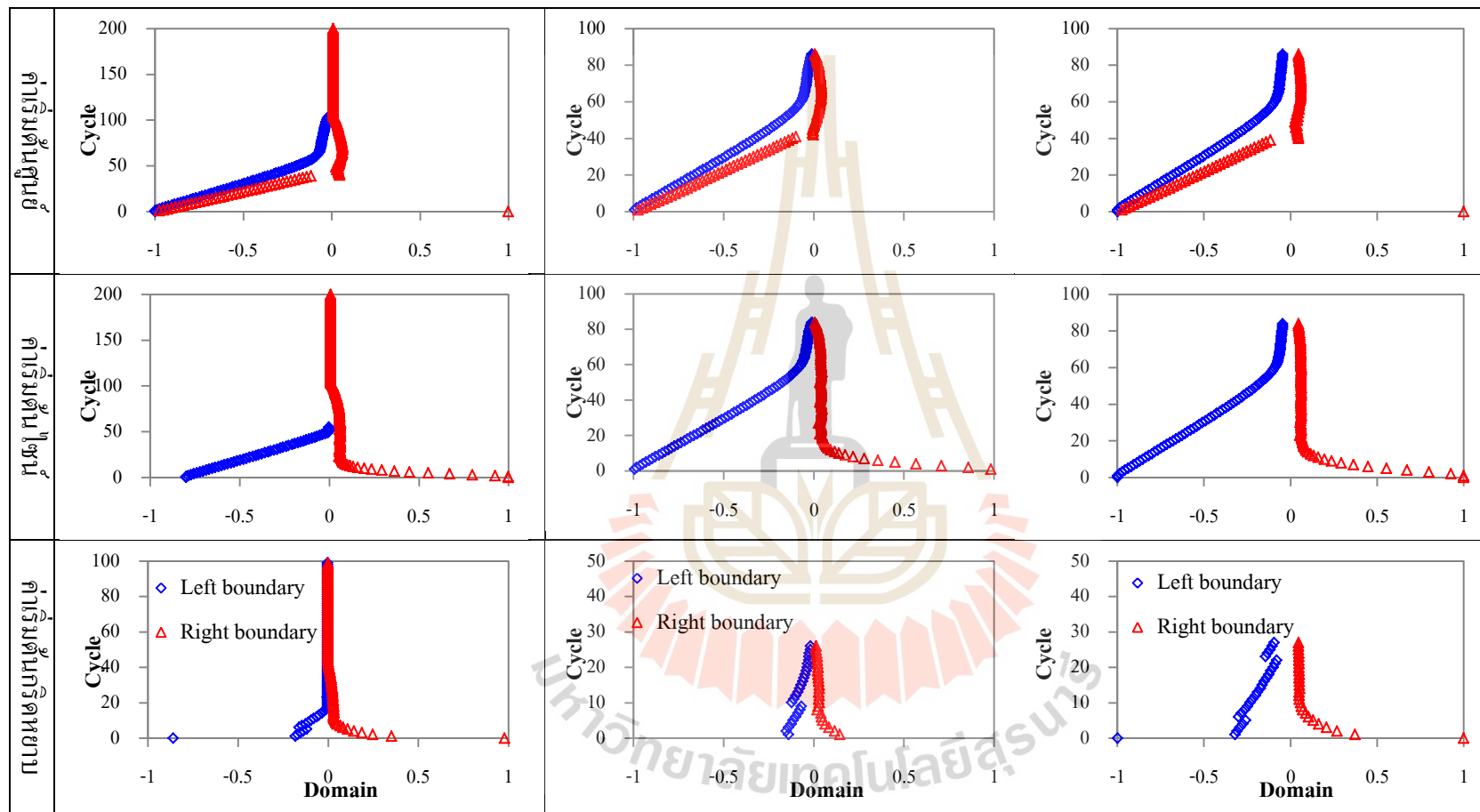


รูปที่ 3.10 การลู่เข้ากรณีทดสอบ B (ก) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (ข) ค่าเริ่มต้นไซน์ (ค) ค่าเริ่มต้นกิริคหยาบ



รูปที่ 3.11 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ B
 (บน) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (กลาง) ค่าเริ่มต้นไซน์ (ล่าง) ค่าเริ่มต้นกริดหยาบ

ลักษณะการปรับปรุงแอกทีฟโซนขณะคำนวณ รูปที่ 3.12 โดยจุด \square และ \circ แทนขอบชั่วคราวด้านซ้ายและด้านขวาของแอกทีฟโซนตามลำดับ โดยสัมพันธ์กับรอบการคำนวณ (แกน y) และตำแหน่งบนโดเมน (แกน x) โดยช่วงระหว่างจุด \square และ \circ (ระยะในแนวแกน x) คือขนาดแอกทีฟโซน กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ (แถวบน) แอกทีฟโซนมีลักษณะการขยายตัวพร้อมกับเคลื่อนไปบริเวณพื้นที่กลางโดเมน แอกทีฟโซนมีพื้นที่เล็กเป็นลักษณะของแอกทีฟโซนที่ไม่มีเสถียรภาพ กรณีค่าเริ่มต้นไนซ์ (แถวกลาง) และค่าเริ่มต้นกริดหยาบ (แถวล่าง) แอกทีฟโซนปรับลดขนาดจากขอบทั้งสองด้านเข้าสู่บริเวณกลางโดเมนโดยลำดับ เป็นลักษณะของแอกทีฟโซนที่มีเสถียรภาพดี กรณีการคำนวณใช้เงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.12ก) ให้ได้ขนาดแอกทีฟโซนเล็ก (มีจุดต่อน้อย) การคำนวณด้วยมัลติกริดไม่เต็มประสิทธิภาพ การคำนวณส่วนใหญ่เป็นแบบกริดเชิงเดียว เมื่อการคำนวณเกิดความคลาดเคลื่อนราบเรียบทำให้ลู่อูเข้า ผลการคำนวณเปรียบเทียบระหว่างวิธี LAMG และ GAMG เมื่อใช้กริดจำนวน 1000 2000 4000 และ 8000 แสดงดังรูปที่ 3.13 การกำหนดค่าเริ่มต้นด้วยกริดหยาบใช้รอบการคำนวณน้อยกว่ากรณีอื่นประมาณ 3 เท่าและวิธี LAMG ใช้เวลาน้อยกว่าวิธี GAMG มากสุดถึง 53% และมีแนวโน้มเพิ่มมากขึ้นเมื่อใช้กริดมากขึ้น วิธี LAMG ใช้รอบการคำนวณเท่ากับวิธี GAMG ทุกกรณี มีรายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 3.2

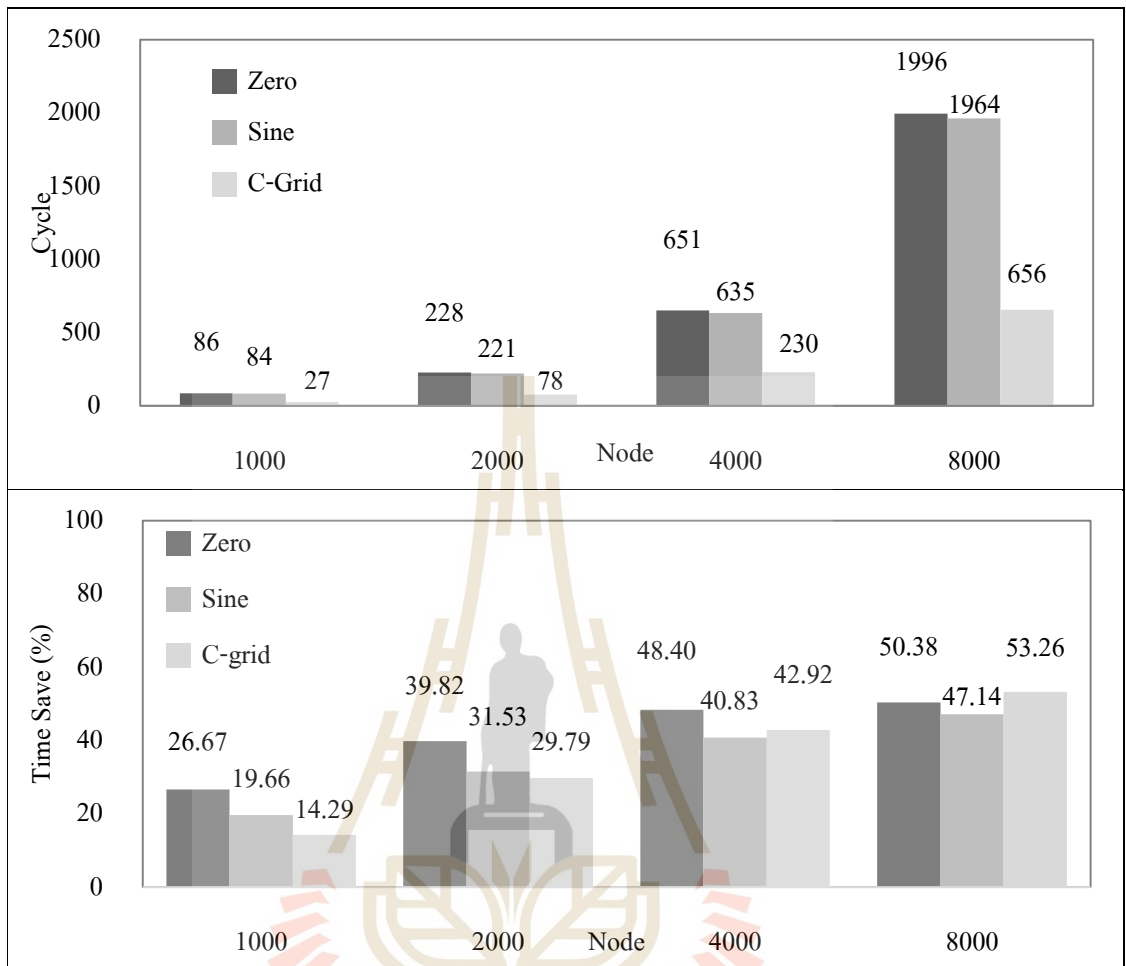


(ก) กรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด

(ข) กรณีเงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด

(ค) กรณีเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด

รูปที่ 3.12 การปรับปรุงเอกทิพโซนกรณีทดสอบ B



รูปที่ 3.13 ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ B (บน) รอบการคำนวณ
(ล่าง) เวลาที่ประหยัดได้

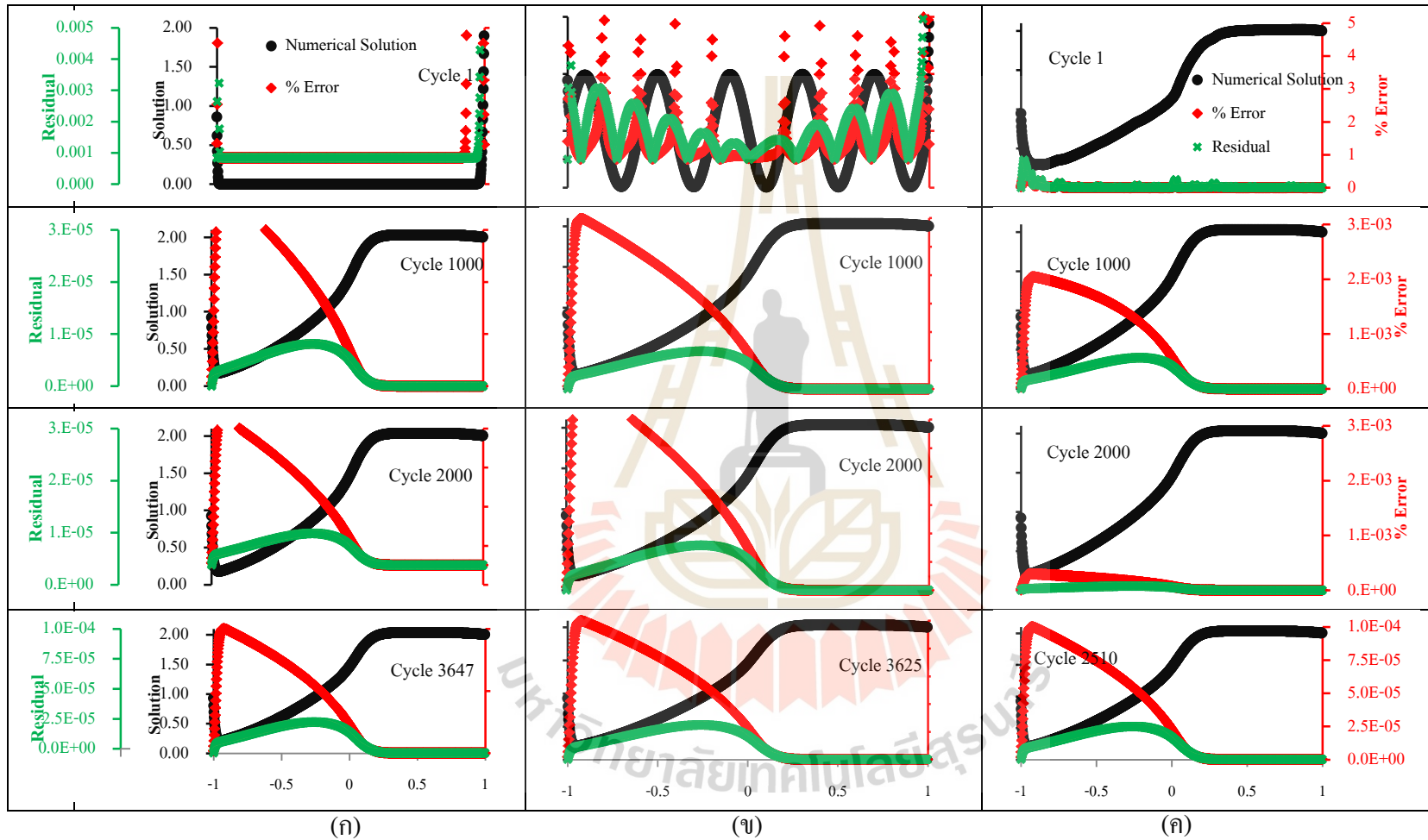
ตารางที่ 3.2 ผลเปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ B

Zero initialization					
Node	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	86	0.3	86	0.22	26.67
2000	228	1.13	228	0.68	39.82
4000	651	5.62	651	2.9	48.40
8000	1996	31.62	1996	15.69	50.38
Sine initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	84	0.29	84	0.233	19.66
2000	221	1.11	221	0.76	31.53
4000	635	5.32	635	3.148	40.83
8000	1964	31.18	1964	16.481	47.14
Coarse-grid initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	27	0.14	27	0.12	14.29
2000	78	0.47	78	0.33	29.79
4000	230	2.12	230	1.21	42.92
8000	656	11.19	656	5.23	53.26

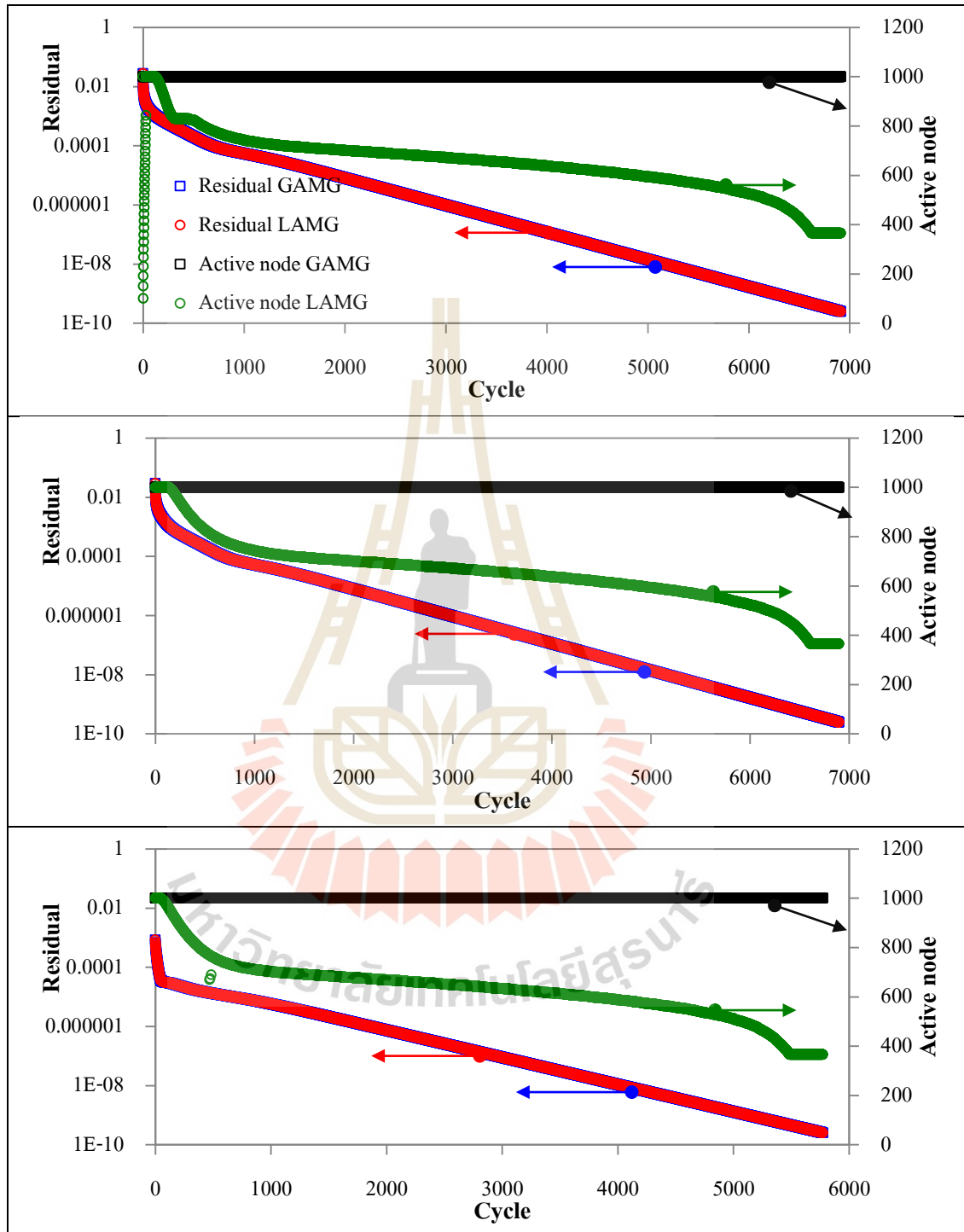
3.3.3 กรณีทดสอบ C

เป็นปัญหาเชิงเส้นที่มีลักษณะผลเฉลยแบบเรียบบริเวณด้านขวาโดเมน บริเวณด้านซ้ายมีลักษณะเปลี่ยนค่าฉับพลัน พฤติกรรมปัญหาซับซ้อน พฤติกรรมการลู่เข้าแสดงดังรูปที่ 3.14 เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นเป็น ศูนย์ (รูปที่ 3.14ก) ไซน์ (รูปที่ 3.14ข) และกริดหยาบ (รูปที่ 3.14ค) ความคลาดเคลื่อนเริ่มลดลงจากฝั่งขวาที่ปัญหาามีพฤติกรรมแบบราบเรียบ พื้นที่เอกทิฟโซนปกคลุมพื้นที่ส่วนใหญ่ของโดเมน เมื่อพิจารณาลักษณะของกราฟความคลาดเคลื่อนที่ 1000 รอบ กราฟมีลักษณะเป็นเส้นตรงบริเวณด้านขวาของโดเมน และด้านซ้ายมีลักษณะโค้งราบเรียบ แสดงให้เห็นพฤติกรรมการลู่เข้าจากบริเวณด้านขวามาด้านซ้ายโดเมน ซึ่งความคลาดเคลื่อนบริเวณด้านซ้ายของโดเมนเป็นลักษณะของความคลาดเคลื่อนแบบราบเรียบ เป็นพฤติกรรมความคลาดเคลื่อนในโหมดความถี่ต่ำที่ลดลงได้ยาก ขอบของโหมดความคลาดเคลื่อนความถี่ต่ำนี้อยู่ที่ตำแหน่ง $x=0.25$ พบว่าตรงกับตำแหน่งกราฟผลการคำนวณ (จุด ●) ที่เปลี่ยนจากเส้นตรงเป็นเส้นโค้ง การลดความคลาดเคลื่อนในบริเวณด้านซ้ายโดเมนจึงลดได้ยาก แอกทิฟโซนจึงลดพื้นที่ได้น้อย กรณีทดสอบ C สามารถลดพื้นที่การคำนวณลงได้เพียง 35% ก่อนการลู่เข้า และใช้การคำนวณมากที่สุดถึงกว่า 3600 รอบ พิจารณาจำนวนกริดที่ใช้ในแต่ละรอบการคำนวณ รูปที่ 3.15 ทั้งสามกรณีมีลักษณะการลดลงของจุดต่อโดยลำดับอย่างมีเสถียรภาพ การลดลงของความคลาดเคลื่อนวิธี LAMG และ GAMG มีพฤติกรรมลดลงสอดคล้องกัน

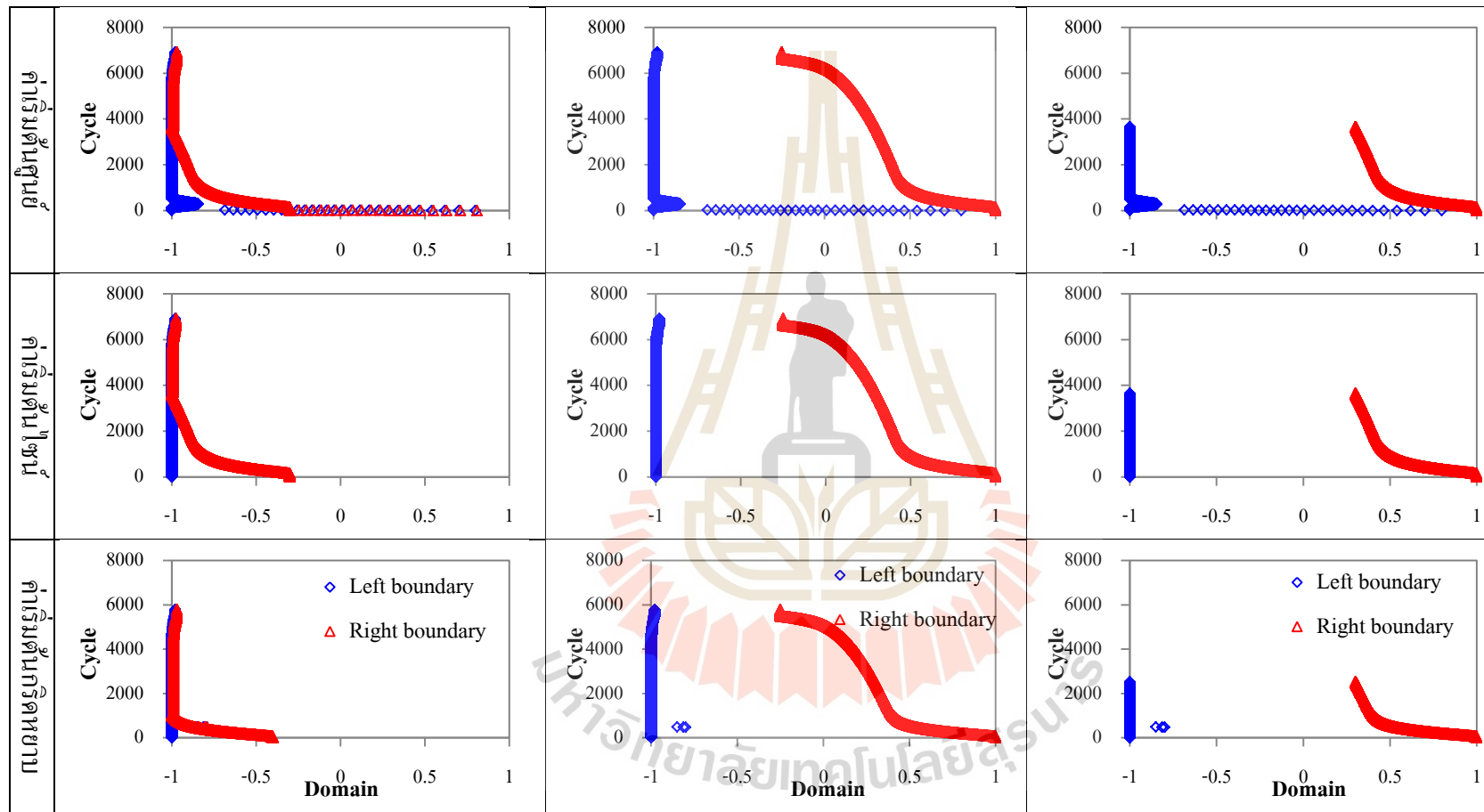
การปรับปรุงขนาดแอกทิฟโซน จากรูปที่ 3.16 แอกทิฟโซนลดลงจากขอบด้านขวามาขอบด้านซ้ายอย่างรวดเร็วในรอบต้น เนื่องจากปัญหามีลักษณะราบเรียบด้านขวามือ กรณีเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.16ก) แอกทิฟโซนมีขนาดใหญ่ ปรับปรุงพื้นที่ได้น้อยกว่ากรณีเงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.16ข) ส่วนกรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.16ค) เกิดแอกทิฟโซนขนาดเล็ก การคำนวณด้วยมัลติกริดไม่เต็มประสิทธิภาพ การคำนวณส่วนใหญ่เกิดขึ้นบนกริดเชิงเดี่ยวเมื่อความคลาดเคลื่อนเข้าสู่โหมดราบเรียบ ทำให้ไม่สามารถลู่เข้าสู่เงื่อนไขหยุดที่กำหนดได้ อย่างไรก็ตาม จากรูปที่ 3.17 วิธี LAMG สามารถปรับลดแอกทิฟโซนได้ 35% สามารถประหยัดการคำนวณได้มากที่สุดถึง 22 % โดยประมาณ และเมื่อเพิ่มจำนวนจุดต่อยังมีแนวโน้มประหยัดขึ้นได้อีก รายละเอียดดังแสดงในตารางที่ 3.3



รูปที่ 3.14 การลู่เข้ากรณีทดสอบ C (ก) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (ข) ค่าเริ่มต้น 1 (ค) ค่าเริ่มต้นกริดหาย



รูปที่ 3.15 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ C
(บน) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (กลาง) ค่าเริ่มต้นไซน์ (ล่าง) ค่าเริ่มต้นกริดหยาบ

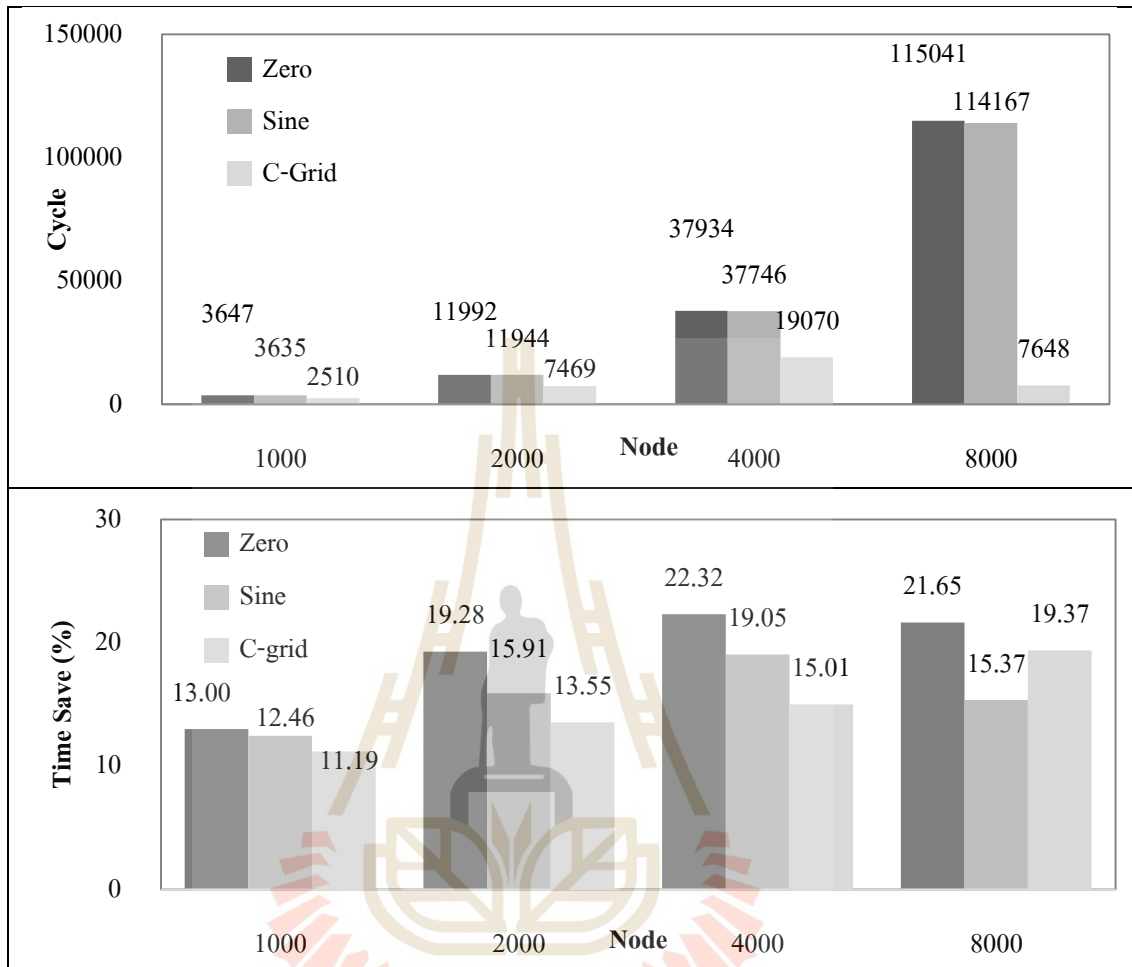


(ก) กรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด

(ข) กรณีเงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด

(ค) กรณีเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด

รูปที่ 3.16 การปรับปรุงแอททิพโซนกรณีทดสอบ C



รูปที่ 3.17 ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ C (บน) รอบการคำนวณ (ล่าง) เวลาที่ประหยัดได้

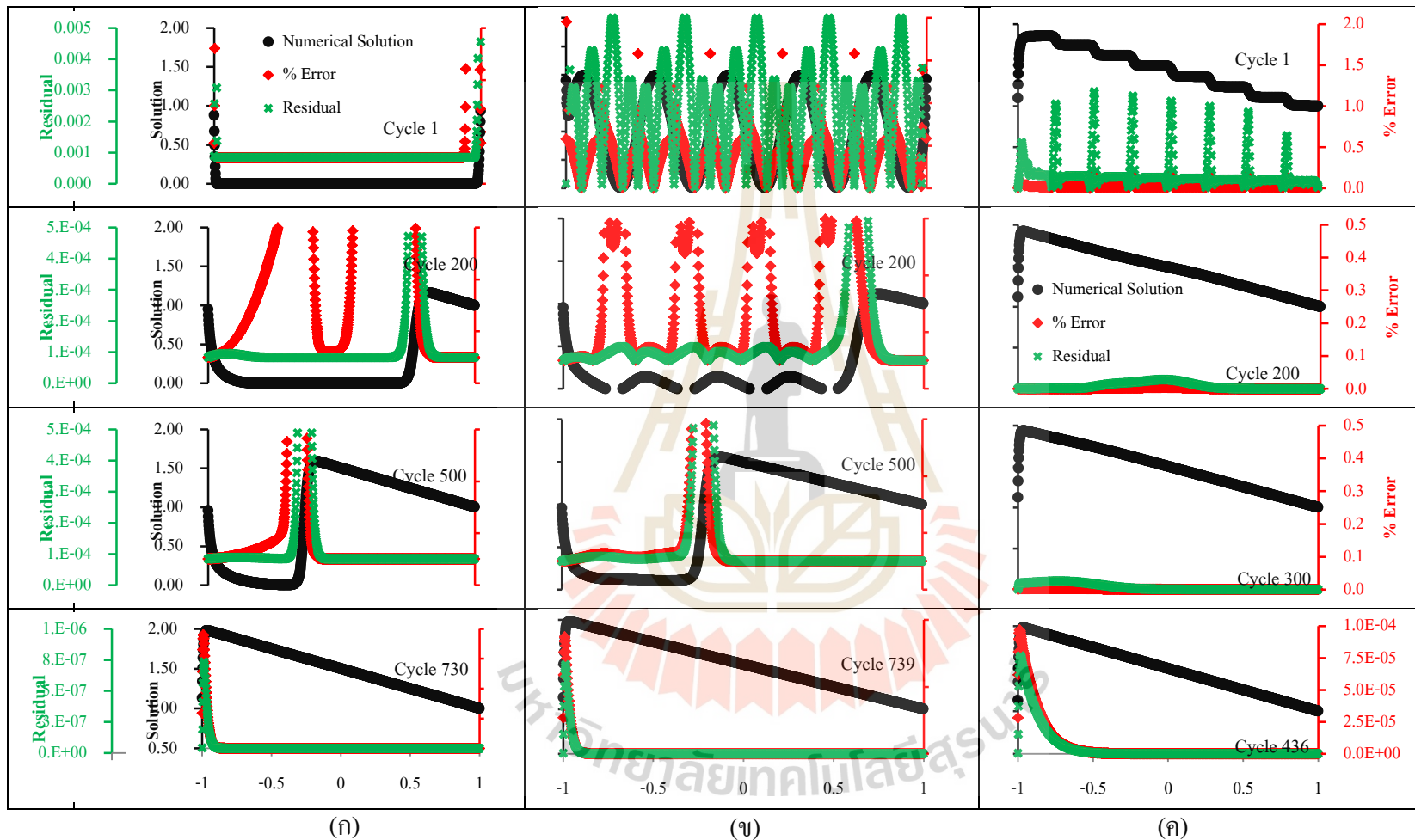
ตารางที่ 3.3 ผลเปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ C

Zero initialization					
Node	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	3647	9.77	3647	8.5	13.00
2000	11992	54.14	11992	43.7	19.28
4000	37934	318.85	37934	247.69	22.32
8000	115041	1839.49	115041	1441.26	21.65
Sine initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	3635	9.71	3635	8.5	12.46
2000	11944	53.8	11944	45.24	15.91
4000	37746	313.46	37746	253.74	19.05
8000	114167	1760.52	114167	1490	15.37
Coarse-grid initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	2510	6.7	2510	5.95	11.19
2000	7469	32.33	7469	27.95	13.55
4000	19070	150.58	19070	127.98	15.01
8000	7648	119.18	7648	96.09	19.37

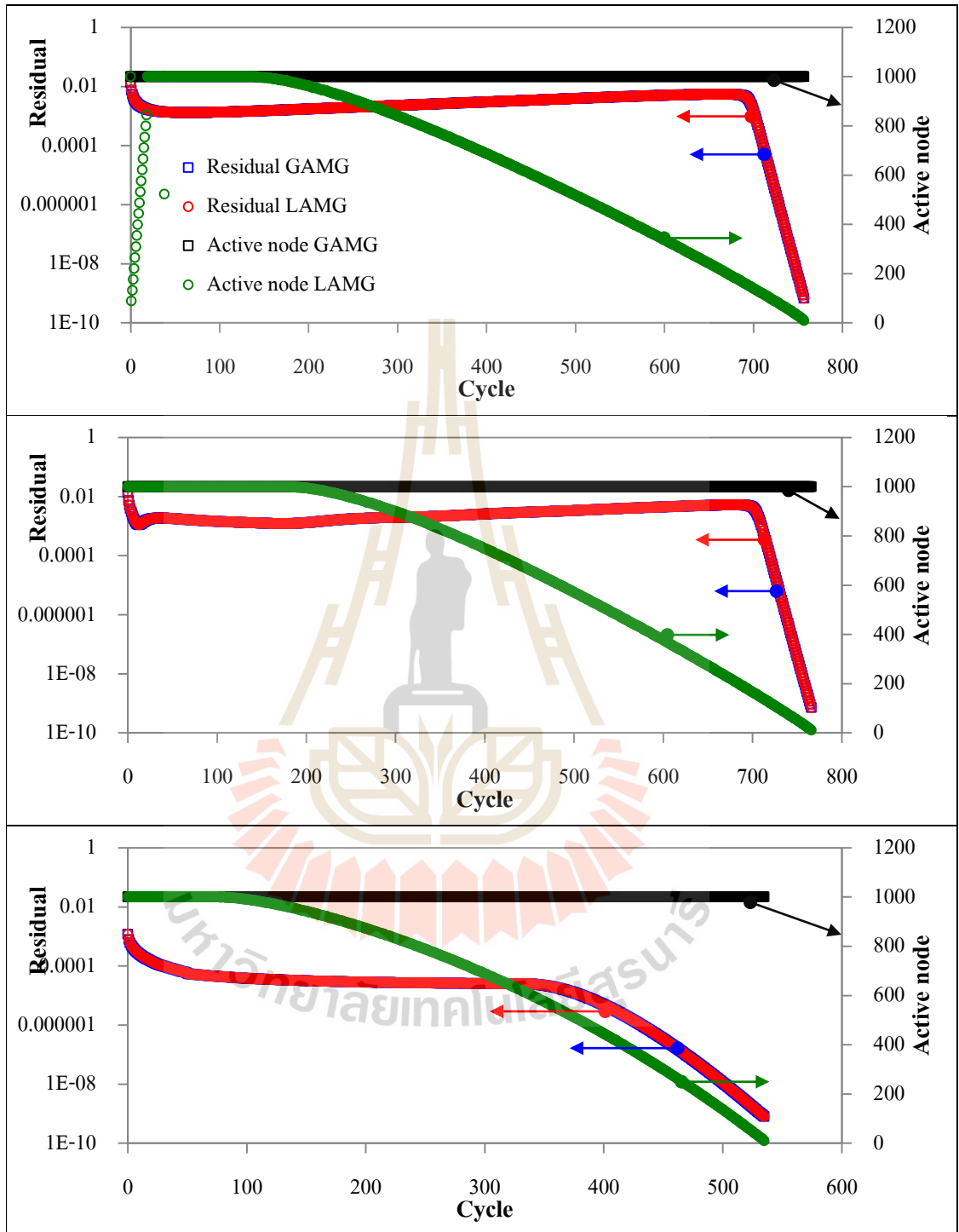
3.3.4 กรณีทดสอบ D

เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อน ผลเฉลยมีลักษณะเป็นเส้นตรงเทียง จากซ้ายมาขวา บริเวณด้านซ้ายโดเมนมีลักษณะเปลี่ยนแปลงค่านับพลันจากค่า 2 ไปค่า 1 รูปที่ 3.18 รอบที่ 200 ลักษณะฟังก์ชันความคลาดเคลื่อนอยู่ในโหมดความถี่สูง ขอบสองด้านแอมปริจูดความคลาดเคลื่อนอยู่ในระดับต่ำ รอบจำนวนที่ 500 ความคลาดเคลื่อนโหมดความถี่สูงอยู่บริเวณกลางโดเมน ลักษณะการลดลงของความคลาดเคลื่อนมาจากขอบทั้งสองด้านสอดคล้องกับพฤติกรรมลู่เข้าของกราฟผลการคำนวณ เริ่มปรากฏการลู่เข้าจากขอบทั้งสองด้าน จากนั้นจุดยอดของความคลาดเคลื่อนเลื่อนจากกลางโดเมนมายังขอบด้านซ้ายซึ่งเป็นบริเวณที่มีพฤติกรรมการเปลี่ยนค่า นับพลัน กรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ (รูปที่ 3.18ก) ซึ่งมีแอมปริจูดความคลาดเคลื่อนต่ำสุดก็มีลักษณะการปรับลดความคลาดเคลื่อนไปในทิศทางเดียวกับกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์และค่าเริ่มต้น ไซน์ และใช้รอบการคำนวณต่ำที่สุดเพียง 436 รอบ พิจารณาจุดต่อที่ใช้จำนวนแต่ละรอบที่สัมพันธ์กับเศษเหลือรูปที่ 3.19 กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ (รูปที่ 3.19 บน) และค่าเริ่มต้น ไซน์ (รูปที่ 3.19 กลาง) พฤติกรรม การลดลงของความคลาดเคลื่อนคล้ายกัน กล่าวคือความคลาดเคลื่อนลดลงอย่างรวดเร็วในรอบต้น จากนั้นความคลาดเคลื่อนมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามลำดับ กระทั่งรอบที่ 700 ความคลาดเคลื่อนลดลงอีกครั้งและลู่เข้าสู่ค่าตอบ พฤติกรรมนี้เกิดจากจุดยอดของความคลาดเคลื่อนเคลื่อนที่ชนกันทำให้เกิด การเสริมกัน อย่างไรก็ตามความคลาดเคลื่อนที่ปรากฏนี้เป็นโหมดความถี่สูง สามารถลดได้อย่างรวดเร็วดังปรากฏในรอบที่ 700 ขณะที่กรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ (รูปที่ 3.19 ล่าง) ความคลาดเคลื่อน โหมดโหมดความถี่สูงลดลงก่อนเคลื่อนที่ชนกันเหลือเพียงความคลาดเคลื่อนโหมดความถี่ต่ำ

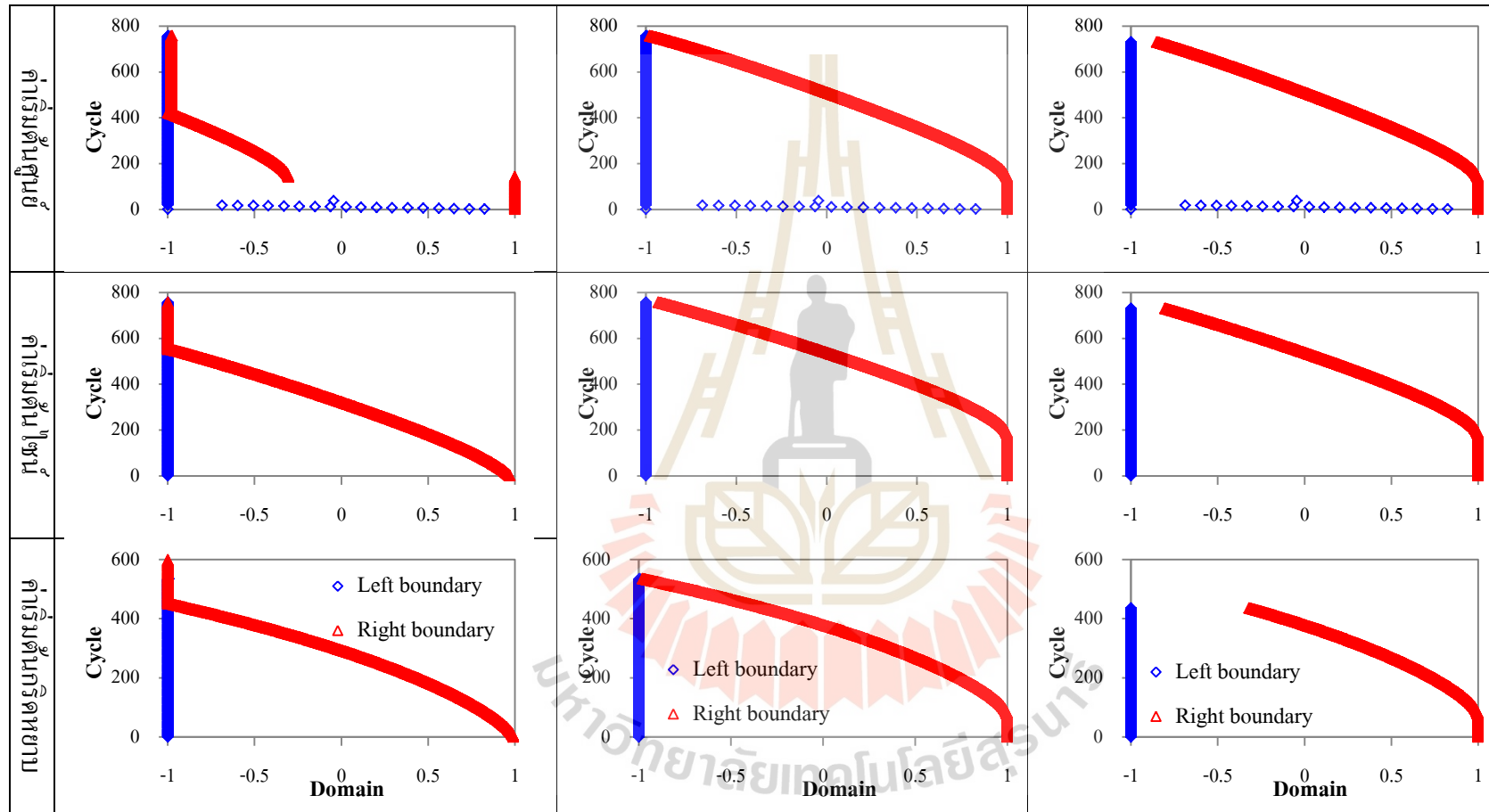
รูปที่ 3.20 แยกทีโพไซนปรับลดขนาดลงอย่างมีเสถียรภาพ ความไม่มีเสถียรภาพ เกิดขึ้นเล็กน้อยช่วงต้นของกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ แยกทีโพไซนคลุมทั้งโดเมนในรอบต้น จากนั้นขอบ ขวาแยกทีโพไซนเริ่มลดขนาดลง แสดงถึงการลู่เข้าของการคำนวณ กรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไข หยุด (รูปที่ 3.20ก) แยกทีโพไซนถูกปรับเป็นเมเชอร์ไซนทั้งโดเมนก่อนการคำนวณลู่เข้า ไม่เหลือพื้นที่ ที่ถูกคำนวณด้วยมัลติกริด การคำนวณไม่มีประสิทธิภาพทำให้ไม่ลู่เข้า กรณีเงื่อนไขขอบกับเงื่อนไข หยุดมีค่าเท่ากัน (รูปที่ 3.20ข) แยกทีโพไซนลดขนาดจนกระทั่งขอบทั้งสองบรรจบกัน ส่วนกรณี เงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด (รูปที่ 3.20ค) การคำนวณลู่เข้าก่อนที่ขอบทั้งสองจะบรรจบกัน การคำนวณด้วยวิธี LAMG สำหรับปัญหาไม่เชิงเส้น (รูปที่ 3.21) สามารถลดเวลาได้มากถึง 23% ใน กรณีใช้กริด 8000 จุดต่อ กรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบใช้รอบการคำนวณต่ำสุดเพียง 9080 รอบน้อยกว่า กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์และค่าเริ่มต้น ไซน์กว่าสี่เท่า เมื่อเทียบเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเดียวกัน มีรายละเอียดคัง แสดงในตารางที่ 3.4



รูปที่ 3.18 การลู่เข้ากรณีทดสอบ D (ก)ค่าเริ่มต้นศูนย์ (ข)ค่าเริ่มต้น π (ค)ค่าเริ่มต้นกริดหยาบ



รูปที่ 3.19 จำนวนกริดที่ใช้คำนวณและการลดลงของเศษเหลือกรณีทดสอบ D
(บน) ค่าเริ่มต้นศูนย์ (กลาง) ค่าเริ่มต้นไซน์ (ล่าง) ค่าเริ่มต้นกริดหยาบ

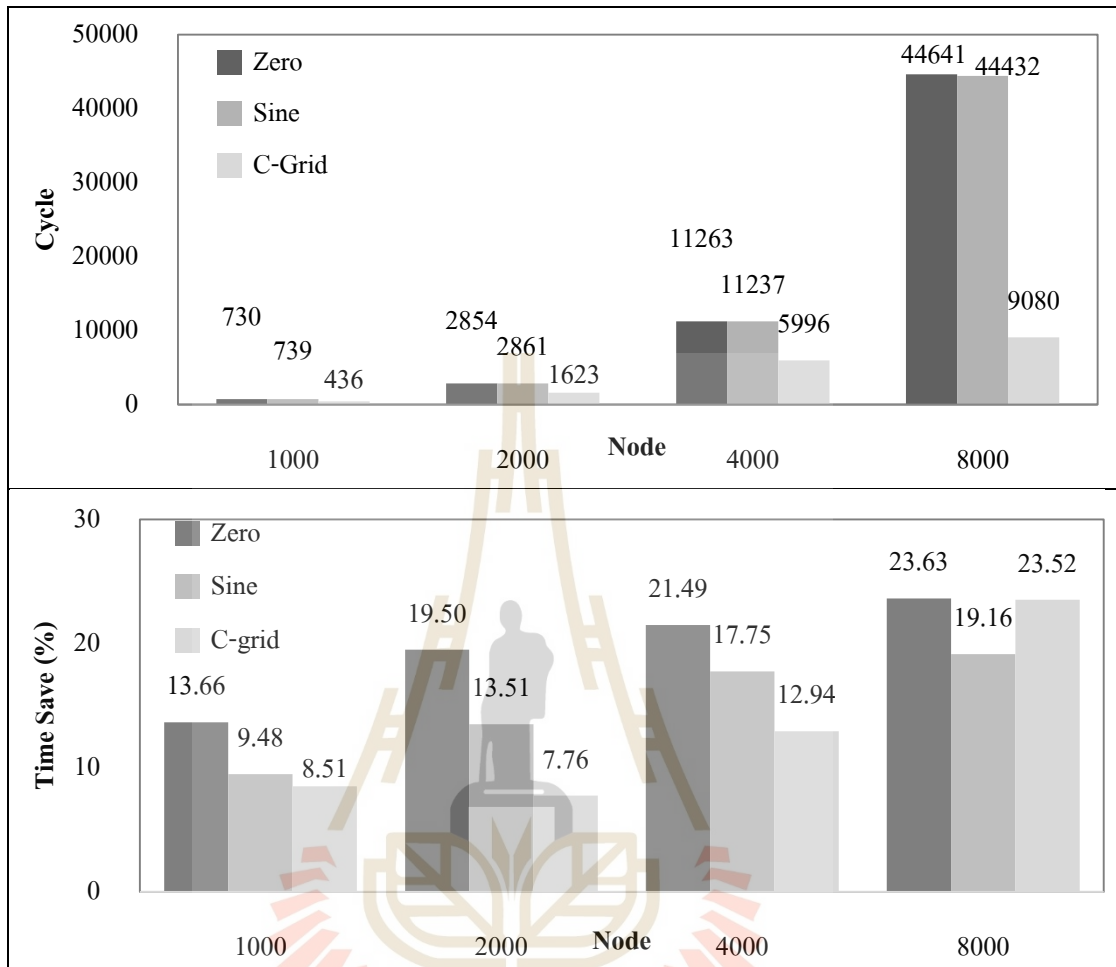


(ก) กรณีเงื่อนไขขอบมากกว่าเงื่อนไขหยุด

(ข) กรณีเงื่อนไขขอบเท่ากับเงื่อนไขหยุด

(ค) กรณีเงื่อนไขขอบน้อยกว่าเงื่อนไขหยุด

รูปที่ 3.20 การปรับปรุงเอกทิพโซนครณีทดสอบ D



รูปที่ 3.21 ผลการคำนวณวิธี LAMG กรณีทดสอบ D (บน) รอบการคำนวณ (ล่าง) เวลาที่ประหยัดได้

ตารางที่ 3.4 ผลเปรียบเทียบการคำนวณกรณีทดสอบ D

Zero initialization					
Node	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	730	2.27	730	1.96	13.66
2000	2854	14.82	2854	11.93	19.50
4000	11263	105.16	11263	82.56	21.49
8000	44641	788.16	44641	601.91	23.63
Sine initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	739	2.32	739	2.1	9.48
2000	2861	14.43	2861	12.48	13.51
4000	11237	105.42	11237	86.71	17.75
8000	44432	781.39	44432	631.67	19.16
Coarse-Grid initialization					
	GAMG		LAMG		Time Save (%)
	Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1000	436	1.41	436	1.29	8.51
2000	1623	8.25	1623	7.61	7.76
4000	5996	55.01	5996	47.89	12.94
8000	9080	161.46	9080	123.48	23.52

3.4 สรุปผลการจำลองปัญหา 1 มิติ

3.4.1 ผลของค่าเริ่มต้นต่อการคำนวณวิธี LAMG

การทดสอบค่าเริ่มต้นทั้งสามกรณี ได้แก่ ค่าเริ่มต้นศูนย์ ค่าเริ่มต้นไซน์ และค่าเริ่มต้นกริดหยาบ พบว่าการกำหนดค่าเริ่มต้นจากกริดหยาบเหมาะสมที่สุด เพราะให้ความคลาดเคลื่อนลดต่ำตั้งแต่รอบต้นของการคำนวณ ค่าเริ่มต้นไซน์ต้องกำหนดควบคู่กับเงื่อนไขขอบ δ_{BC} น้อย จึงจะให้เสถียรภาพในการคำนวณ ค่าเริ่มต้นศูนย์ให้ค่าความคลาดเคลื่อนต่ำ แต่ไม่สะท้อนการเข้าสู่ที่แท้จริง ด้วยเหตุที่ค่าขอบกระจายเข้าสู่ภายในโดเมนไม่ทันตั้งแต่รอบการคำนวณต้น ๆ จึงทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีขนาดเล็กบริเวณภายในโดเมน ก่อให้เกิดพฤติกรรมเมเซอร์โซนแบบชั่วคราว และกลับมาเป็นแอกทิฟโซนอีกครั้งเมื่อค่าขอบกระจายเข้ามาถึงภายใน

3.4.2 ผลของเงื่อนไขขอบชั่วคราวต่อการคำนวณวิธี LAMG

เงื่อนไขขอบชั่วคราวมีความสำคัญต่อการคำนวณด้วยวิธี LAMG เพราะเป็นเทคนิคเฉพาะบริเวณ เงื่อนไขขอบชั่วคราวค่ามากจะทำให้ได้แอกทิฟโซนขนาดเล็ก แต่ส่งผลให้การคำนวณขาดเสถียรภาพเพราะตำแหน่งขอบชั่วคราวมีการเลื่อนไปภายในโดเมน (รูปที่ 3.7ก) แอกทิฟโซนมีขนาดเล็กจะบรรจบจุดต่อไม่มาก การใช้มัลติกริดคำนวณจึงไม่เต็มประสิทธิภาพเพราะใช้ระดับกริด (level) ได้น้อย กรณีกำหนดเงื่อนไขขอบชั่วคราวค่าน้อยจะทำให้เกิดแอกทิฟโซนขนาดใหญ่ส่งผลต่อภาระการคำนวณและเวลาในการคำนวณที่เพิ่มขึ้น การคำนวณจะให้ผลใกล้เคียงกับวิธี GAMG แอกทิฟโซนที่ให้เสถียรภาพการคำนวณที่ดีจะต้องมีขนาดใหญ่ที่คลุมทั่วถึงบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงแล้วปรับเล็กลงโดยลำดับตามรอบการคำนวณตามผลทดสอบค่าเงื่อนไขแบบ $\delta_{BC} = \delta_{Criteria}$ เป็นค่าที่เหมาะสมต่อการใช้งาน

3.4.3 สรุปผลการจำลองปัญหา 1 มิติ

สมการปัญหาการไหลในชั้นซิดผิว 1 มิติทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ถูกนำมาทดสอบด้วยเงื่อนไขทดสอบทั้งดั่งแจกแจงไว้ข้างต้น วิธี LAMG ให้ผลการคำนวณถูกต้องเทียบเท่าวิธี GAMG พื้นที่ที่ถูกละคำนวณ (เมเซอร์โซน) ช่วยให้ประหยัดและช่วยลดเวลาในการคำนวณได้อย่างมาก

บทที่ 4

เทคนิคเฉพาะบริเวณสำหรับปัญหา 2 มิติ

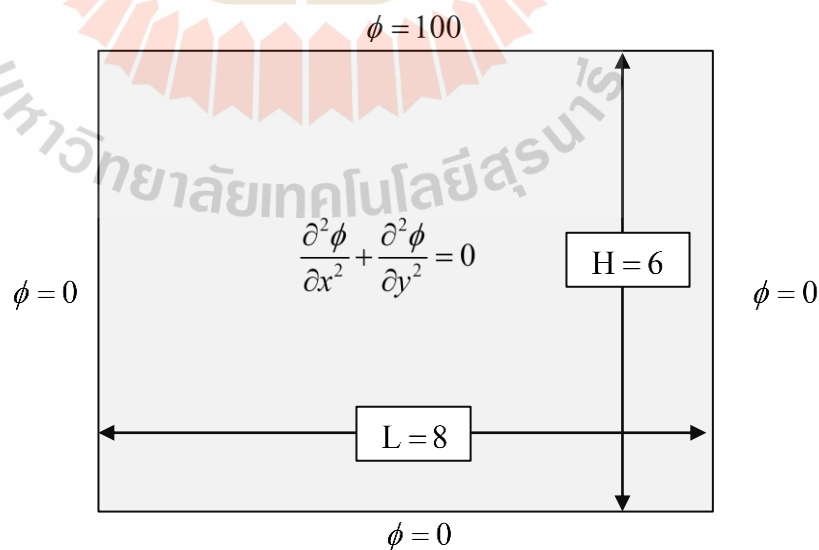
ความสำเร็จของวิธี LAMG ที่พัฒนาขึ้นในการแก้ปัญหา 1 มิติที่แสดงในบทที่ 3 ถูกนำมาประยุกต์แก้ปัญหา 2 มิติ บนในรูปแบบสมการลาปลาซ

4.1 การจำลองปัญหา

หัวข้อนี้นำเสนอการทดสอบนำวิธี LAMG ไปประยุกต์แก้ปัญหาแบบ 2 มิติแบบคงตัวในรูปแบบสมการลาปลาซ บนโดเมนสี่เหลี่ยมขนาด $\Omega = (0,8) \times (0,6)$ ซึ่งสมการอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสอง และกำหนดเงื่อนไขขอบดังสมการ (4-1) แสดงด้วยรูปที่ 4.1

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-1)$$

$$\phi(0, y) = 0 \quad \phi(8, y) = 0 \quad \phi(x, 0) = 0 \quad \text{และ} \quad \phi(x, 6) = 100$$



รูปที่ 4.1 ปัญหาลาปลาซ 2 มิติ

สมการลาปลาซ (4-1) สามารถแก้หาผลเฉลยแน่นอนตรงได้ดังสมการ (4-2)

$$\phi(x, y) = 25 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_k \pi x) \sinh(\lambda_k \pi y)}{\lambda_k \pi \sinh(\lambda_k \pi)} \quad (4-2)$$

เมื่อ $\lambda_k = (2k+1)$ พจน์อนุพันธ์อันดับสองประมาณค่าโดยใช้วิธีผลต่างกลางบนกริดสม่ำเสมอ สามารถเขียนในรูปสมการพีชคณิตที่ใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขได้ดังนี้

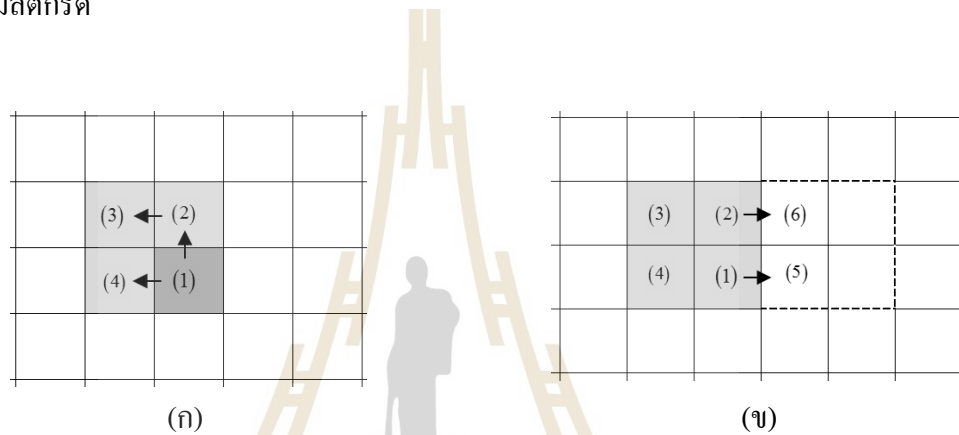
$$\left(\frac{4}{h^2}\right)\phi_{i,j} - \left(\frac{1}{h^2}\right)\phi_{i+1,j} - \left(\frac{1}{h^2}\right)\phi_{i-1,j} - \left(\frac{1}{h^2}\right)\phi_{i,j+1} - \left(\frac{1}{h^2}\right)\phi_{i,j-1} = 0 \quad (4-3)$$

กริดทดสอบใช้กริดสองชุด คือ 80×60 และ 400×300 จุดต่อ กริดชุด 80×60 ใช้สำหรับศึกษา การปรับปรุงพื้นที่ของแอกทิฟโซน ส่วนกริดชุด 400×300 เพื่อศึกษาผลการคำนวณและการปรับปรุงพื้นที่เมื่อระบบสมการใหญ่ขึ้น กำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นศูนย์ เงื่อนไขขอบชั่วคราวและ เงื่อนไขหยุดการคำนวณของทั้งสองชุดกริด กำหนดไว้เท่ากันที่ $\delta_{BC} = \delta_{Criteria} = 1.0 \times 10^{-7}$

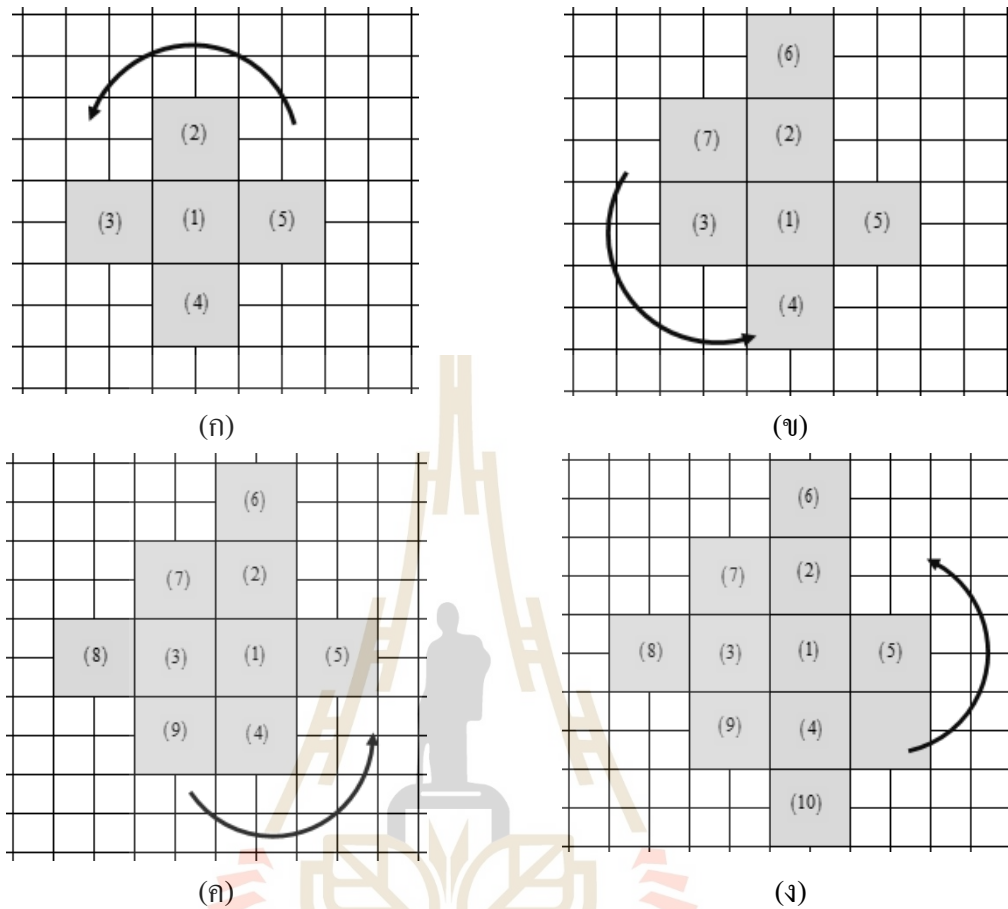
4.2 แอกทิฟโซนสำหรับปัญหา 2 มิติ

หลักการของวิธี LAMG ที่พัฒนาขึ้นจะค้นหาจุดที่มีความคลาดเคลื่อนสูงในโดเมนและ จำแนกเป็นสองส่วนคือแอกทิฟโซนและเมเชอร์โซน โดยใช้เงื่อนไขการลู่เข้าได้แก่ เศษเหลือและ ร้อยละความคลาดเคลื่อนเป็นเกณฑ์ในการจำแนก เช่นเดียวกับปัญหา 1 มิติ แอกทิฟโซนคือส่วนที่มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าค่าเกณฑ์เงื่อนไขขอบที่ได้กำหนด ส่วนเมเชอร์โซนคือส่วนที่ โดยแอกทิฟ โซนเท่านั้นที่จะถูกนำไปคำนวณด้วยอัลติกริด ส่วนเมเชอร์โซนจะถูกละการคำนวณไว้ การคำนวณทั้งโดเมนจะเกิดขึ้นเพื่อหาแอกทิฟโซนใหม่ในทุกรอบการคำนวณ แอกทิฟโซนจะถูก กำหนดไปพร้อมกับการกำหนดกริดหยาบ ลำดับการรวมกริดละเอียดเป็นกริดหยาบแสดงใน รูปที่ 4.2 โดยเริ่มจากกริดหมายเลข 1 ซึ่งเป็นจุดต่อที่มีความคลาดเคลื่อนสูงสุด รวมกับจุดต่อ หมายเลข 2 ที่อยู่ติดกัน จากนั้นค้นหาจุดต่อหมายเลข 4 และ 3 ที่อยู่ติดกันและติดกับจุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับ รวมกันเข้าเป็นกริดหยาบ จากนั้นนำคู่กริดละเอียดหมายเลข 1 และ 2 (รูป 4.2ข) ไป ค้นหากริดละเอียดที่อยู่ติดกันอีกสองจุด (หมายเลข 5 และ 6) เพื่อใช้เป็นกริดเริ่มต้นในการสร้างกริด หยาบที่อยู่ติดกันต่อไป การสร้างกริดหยาบจะวนไปรอบ ๆ ในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 4.3 จนกว่าจะถึงขอบแต่ละด้านของโดเมน กริดละเอียดที่ถูกรวมเป็นกริดหยาบมีความสอดคล้องกับ วิธีการรวมกริดที่แสดงในสมการ (2-20) สำหรับวิธี LAMG การเลือกกริดหยาบสำหรับแอกทิฟโซน จะพิจารณาไปพร้อมกับค่าความคลาดเคลื่อน โดยทุกกริดหยาบจะประกอบไปด้วยกริดละเอียด 4 จุด

การสร้างกริดของแอททิฟโซนใช้หลักวนทวนเข็มนาฬิกาจากข้างในออกมาข้างนอกจนขยายถึงขอบหรือถึงจุดที่มีค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าค่าเงื่อนไขขอบ แอททิฟโซนจึงเป็นพื้นที่ต่อเนื่องกัน เนื่องจากการสร้างแอททิฟโซนได้จากการค้นหาจุดที่มีความคลาดเคลื่อนสูงสุด แล้วสร้างพื้นที่ที่รอบจุดดังกล่าว ดังนั้นแต่ละรอบการคำนวณจึงมีแอททิฟโซนพื้นที่เดียว อย่างไรก็ตามแม้จะพบว่าไม่มีบริเวณอื่นที่มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดแต่จะยังไม่ถูกนำมาสร้างเป็นแอททิฟโซนโดยทันที โดยทั่วไปความคลาดเคลื่อนสูงที่อยู่นอกแอททิฟโซนจะลดขนาดลงได้ระหว่างรอบการวนซ้ำโดยไม่ต้องใช้มัดติกริด



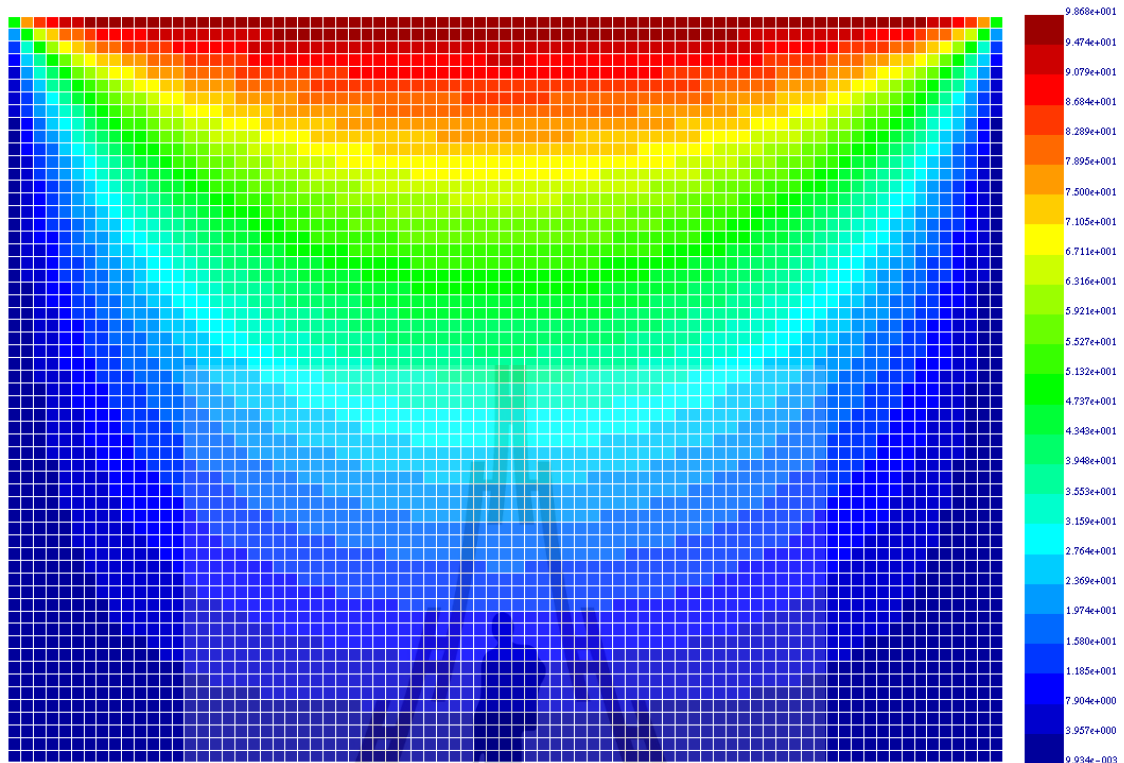
รูปที่ 4.2 ลำดับการรวมกริดละเอียดเป็นกริดหยาบ



รูปที่ 4.3 ลำดับการสร้างกริดหยานมีลักษณะทวนเข็มนาฬิกา

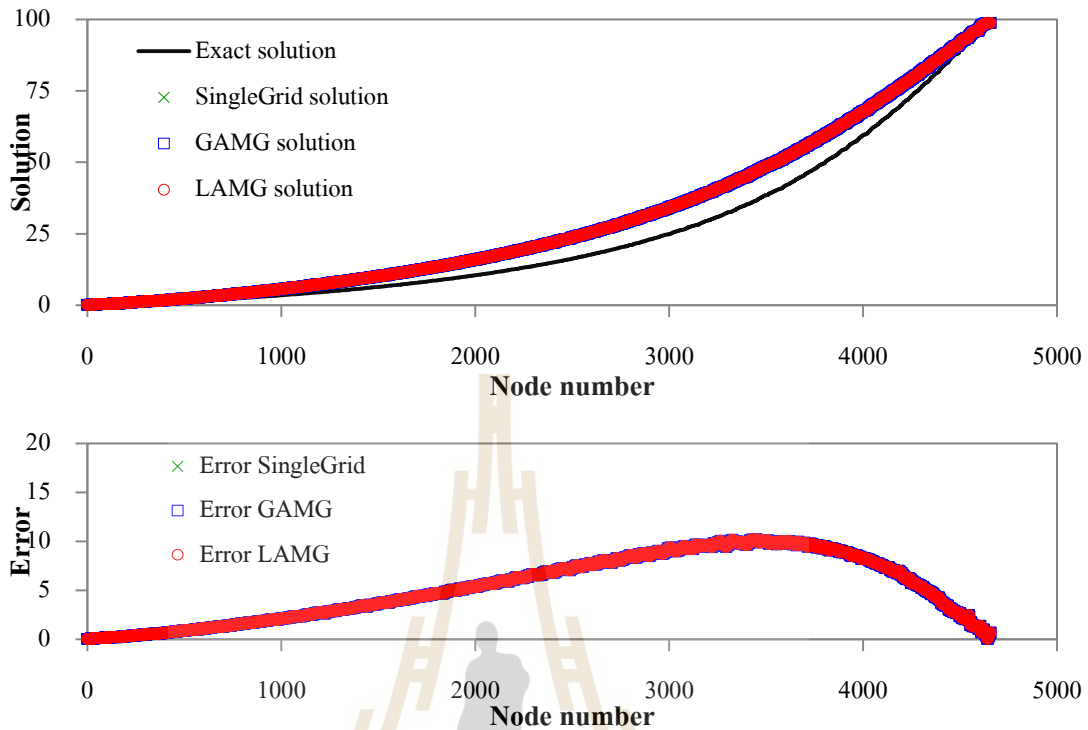
4.3 การสอบเทียบความถูกต้องของวิธี LAMG

ผลการจำลองปัญหาสมการลาปลาซในสมการที่ (4-1) ด้วยกริดขนาด 80×60 บนเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ขอบบนมีค่าหนึ่งร้อยและขอบที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์ แสดงดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขปัญหาการแพร่ 2 มิติ

ความถูกต้องของผลคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขถูกสอบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในสมการ (4-2) แสดงดังรูปที่ 4.5 การเปรียบเทียบใช้ตำแหน่งพิกัด (x, y) ซึ่งเป็นตำแหน่งจุดต่อบนโดเมน โดยเทียบพิกัดตำแหน่งเดียวกัน การสอบเทียบใช้ผลจากการคำนวณแบบกริดเชิงเดี่ยวร่วมเทียบกัน วิธี LAMG และวิธี GAMG ด้วย (รูปที่ 4.5 บน) ผลคำนวณวิธีเชิงตัวเลขทั้งสามวิธีให้ผลการคำนวณสอดคล้องกัน และมีแนวโน้มสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง ความคลาดเคลื่อนมีค่ามากบริเวณกลางโดเมน ซึ่งเป็นบริเวณมีความผันแปรข้อมูลสูงและได้รับอิทธิพลจากเงื่อนไขขอบทุกด้าน ประกอบกับการใช้จำนวนกริดน้อยทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมาก อย่างไรก็ตามจากภาพแสดงให้เห็นว่า วิธี LAMG ให้ผลการคำนวณที่ลู่เข้าสู่คำตอบได้แม่นยำเทียบเท่ากับวิธี GAMG และผลวิธีกริดเชิงเดี่ยวก็ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่สอดคล้องกัน นั่นแสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นเป็นพฤติกรรมอันมีผลจากการใช้จำนวนกริดไม่เหมาะสมไม่ได้เกิดจากวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีปัญหา และค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้จะลดลงไปเมื่อกำหนดด้วยกริดที่ละเอียดสูงขึ้น



รูปที่ 4.5 สอบเทียบความแม่นยำกรณีปัญหา 2 มิติด้วยขนาด 80×60 กริด
(บน) ผลคำนวณวิธีเชิงตัวเลขเทียบกับค่าแม่นยำตรง
(ล่าง) ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณเชิงตัวเลข

4.4 ผลการจำลองและอภิปรายผล

การตรวจสอบการลู่เข้าพิจารณาจากอัตราการลดลงของเศษเหลือ (2-7) โดยเทียบกับเศษเหลือของการคำนวณในรอบแรกในรูปของยูคลิดนอร์ม (2-9) ดังนั้นการตรวจสอบการลู่เข้าเป็นไปตามความสัมพันธ์ดังสมการ (4-4)

$$\frac{\|r^{(m)}\|_2}{\|r^{(1)}\|_2} \leq \delta_{Criteria} \quad (4-4)$$

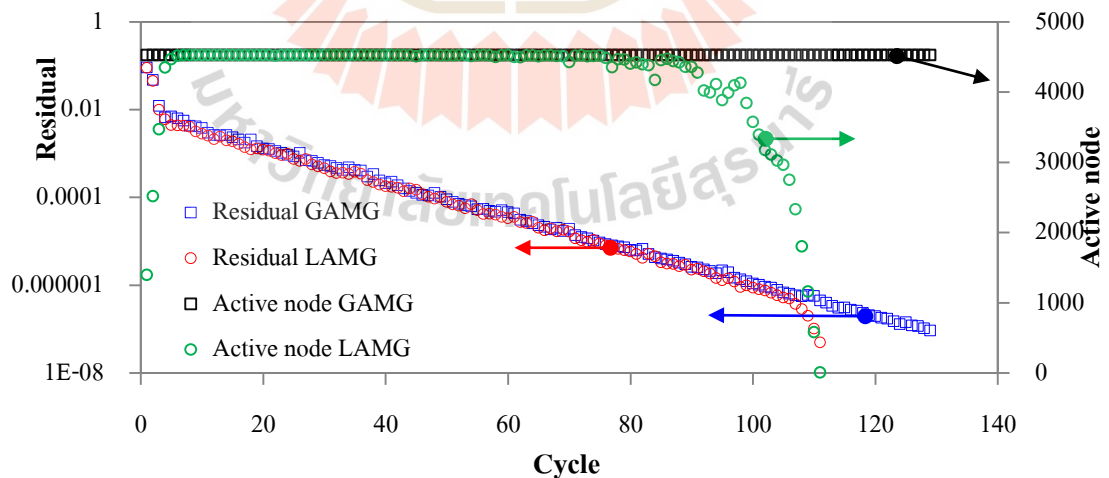
เมื่อ $\|r^{(m)}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i^{(m)})^2}$ คือยูคลิดนอร์ม และ $r^{(m)}$ หมายถึงเศษเหลือในรอบการคำนวณที่ (m) ดังนั้นจุดต่อที่ถูกกำหนดให้เป็นเอกทิพโชนจะต้องมีอัตราส่วนของเศษเหลือเป็นไปตามสมการ (4-5)

$$\frac{|r_i|}{\|r^{(1)}\|_2} > \delta_{BC} \quad (4-5)$$

เมื่อ $\|r^{(1)}\|_2$ ก้อนอร์มของเศษเหลือที่ได้จากการคำนวณในรอบที่หนึ่ง การศึกษาผลกระทบค่าเริ่มต้นพิจารณาการกำหนดค่าเริ่มต้นใน 2 กรณีคือ กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์และกรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบ ได้ผลดังนี้

4.4.1 กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์

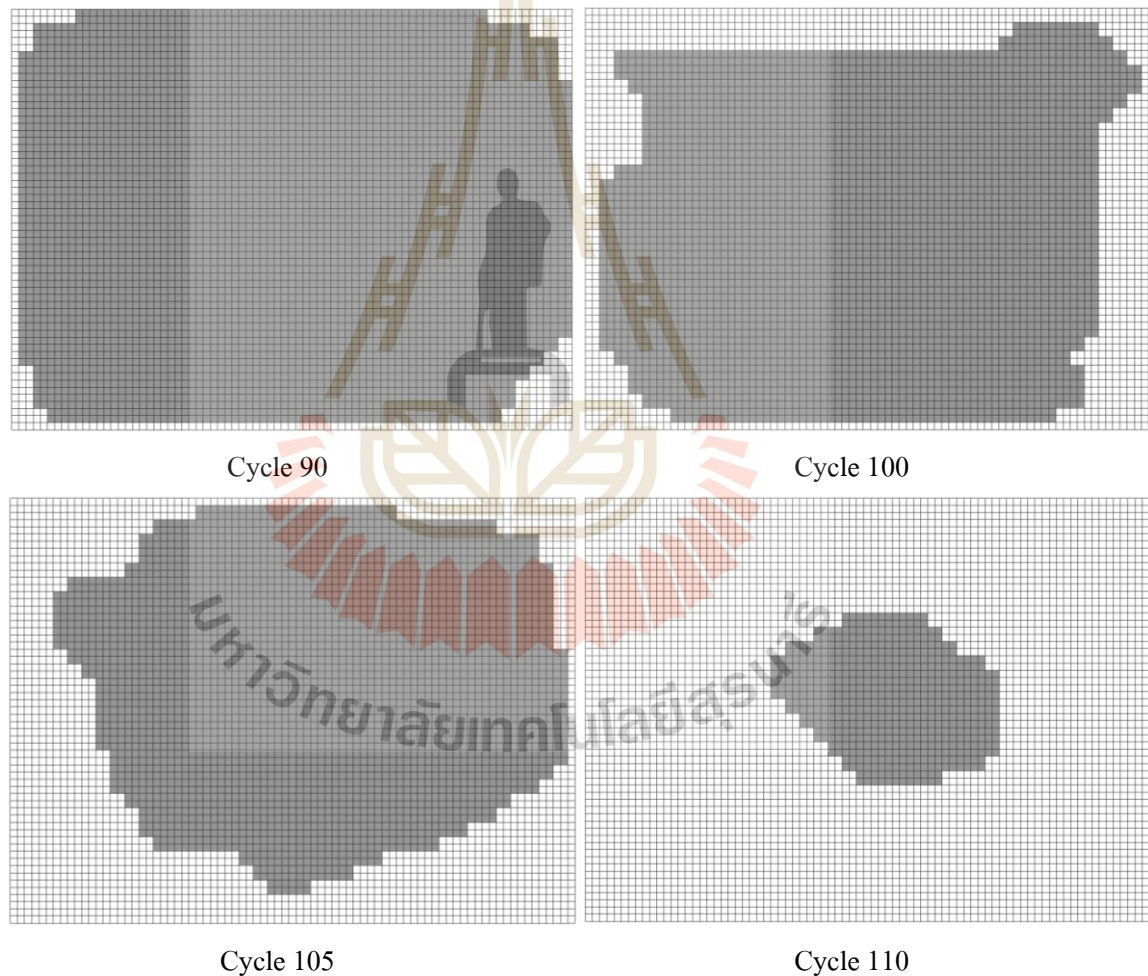
พิจารณาการลดลงของเศษเหลือและจำนวนกริดที่ใช้ในการคำนวณแต่ละรอบแสดงดังรูปที่ 4.6 แกน x แทนจำนวนรอบการคำนวณ แกน y แทนค่าเศษเหลือสูงสุด แสดงผลบนแกนล็อกกาลีทึม และจำนวนจุดต่อที่ใช้ในแอกทีฟโซน ข้อมูลเปรียบเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธี LAMG กับวิธี GAMG การลดลงของเศษเหลือพบว่า วิธี LAMG และ GAMG ให้พฤติกรรม การลดลงของเศษเหลือสอดคล้องและได้ค่าใกล้เคียงกัน พิจารณาจำนวนกริดที่ใช้ในการคำนวณพบว่า ในรอบต้นของการคำนวณถึงรอบที่ 90 วิธี LAMG คำนวณด้วยกริดคลุมเกือบทั้งโดเมน (เป็นแอกทีฟโซนเกือบทั้งหมด) แอกทีฟโซนเริ่มมีการปรับขนาดเล็กลงหลังรอบการคำนวณที่ 90 และลดลงอย่างรวดเร็วจนกระทั่งเข้าสู่ค่าตอบ



รูปที่ 4.6 จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์บนกริดขนาด 80×60 กริด

พิจารณาขนาดแอกทีฟโซนในระหว่างการคำนวณที่กำลังเข้าสู่ (รูปที่ 4.7) เมเซอร์โซนแทนด้วยบริเวณพื้นสีขาว แอกทีฟโซนคือส่วนที่แรเงา พบว่าขนาดแอกทีฟโซนคลุมเกือบทั้ง

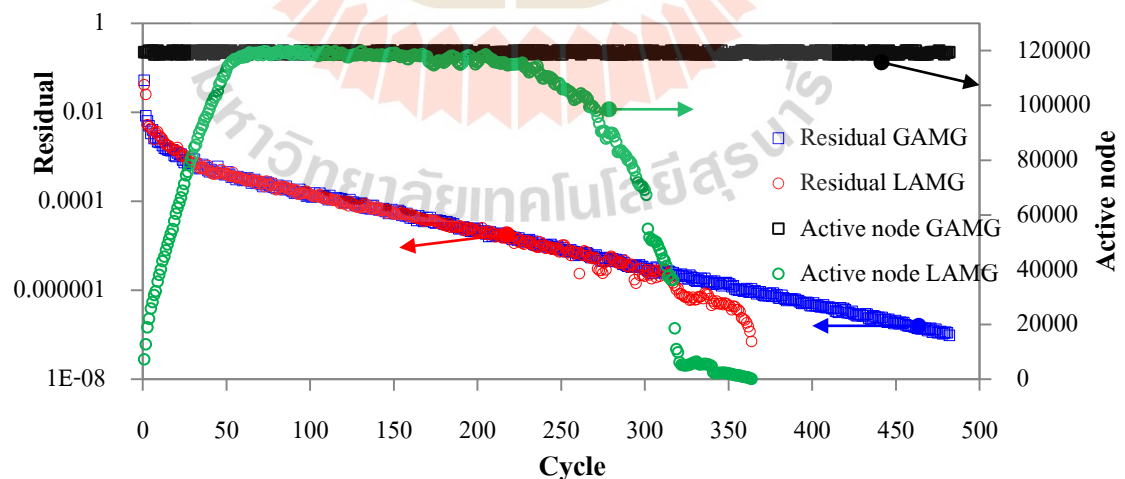
โดเมนในช่วงรอบต้นของการคำนวณและลดขนาดอย่างรวดเร็วในช่วงรอบการคำนวณช่วงท้าย การปรับปรุงเริ่มจากขอบทั้งสี่ด้านค่อย ๆ ลดขนาดเข้ามายังบริเวณตรงกลาง จนกระทั่งลู่เข้าโดยใช้ การคำนวณ 111 รอบ ลักษณะการปรับปรุงพื้นที่แอกทีฟโซนนี้ไม่สอดคล้องเท่าที่ควรกับลักษณะ พฤติกรรมของผลเฉลยในรูปที่ 4.4 กล่าวคือบริเวณขอบด้านบนผลเฉลยมีค่าสูง ($\phi = 100$) และลด ลำดับลงมายังขอบอื่น โดยรอบซึ่งมีค่าขอบเป็นศูนย์ แต่ลักษณะการปรับปรุงแอกทีฟโซนกลับไม่ สอดรับกับฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงดังกล่าว เพื่อหาเหตุผลถึงพฤติกรรมการปรับแอกทีฟโซนที่ เกิดขึ้น จึงต้องพิจารณาผลการคำนวณบนกริดละเอียดเพิ่มเติม



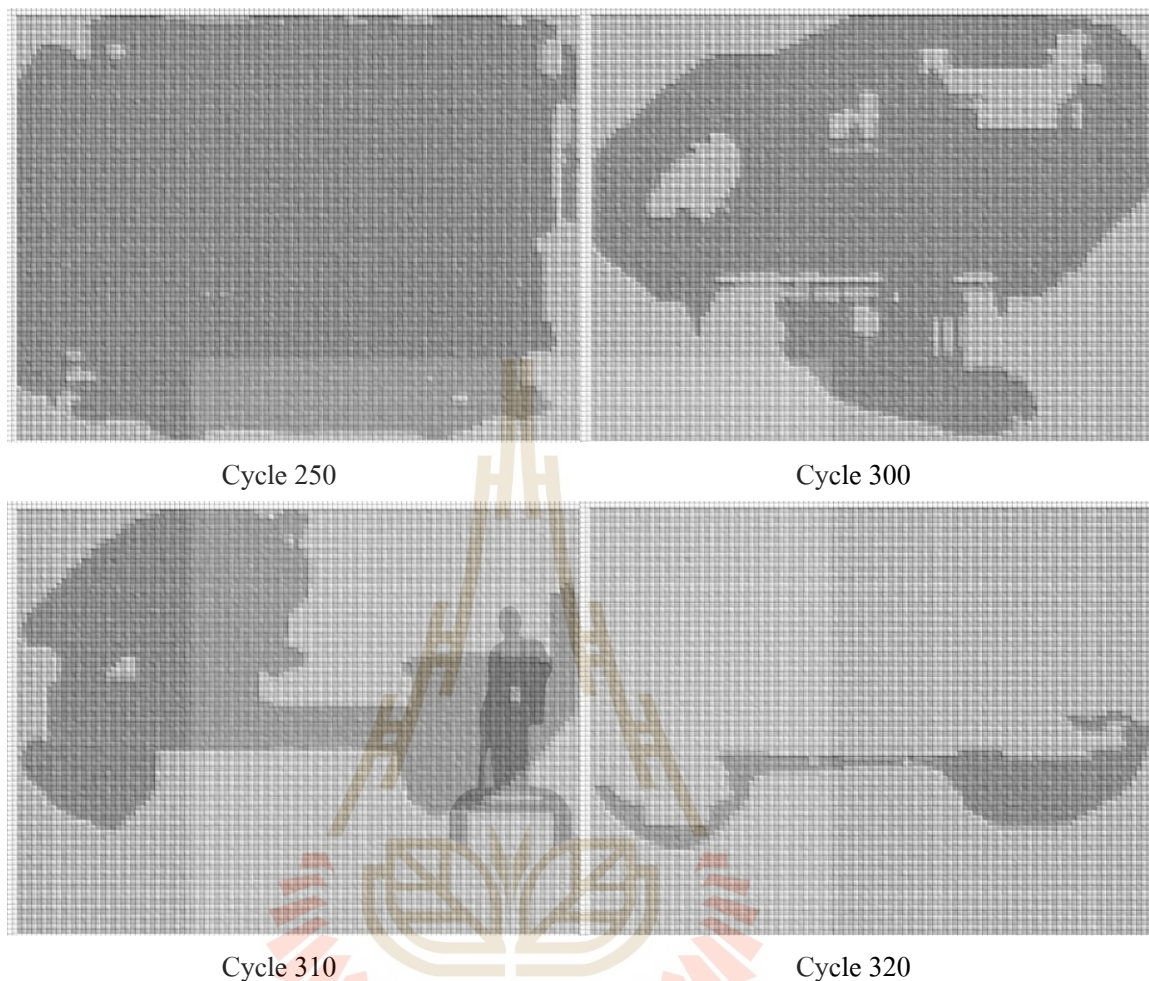
รูปที่ 4.7 ลำดับการปรับปรุงแอกทีฟโซนกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์บนโดเมนขนาด 80×60 กริด

การทดสอบถูกนำไปคำนวณบนกริดที่ละเอียดขึ้นขนาด 400×300 จุดบนเงื่อนไข การคำนวณเดียวกัน เพื่อศึกษาการปรับปรุงพื้นที่แอกทีฟโซน เมื่อระบบสมการใหญ่ขึ้น การจำลอง ได้ผลแสดงดังรูปที่ 4.8 ข้อมูลเปรียบเทียบกันระหว่างวิธี LAMG และวิธี GAMG ในรอบต้นวิธี

LAMG ใช้จำนวนจุดต่อต่ำ มีแอกทีฟโชนขนาดเล็ก เนื่องจากเป็นข้อดีของวิธีการคำนวณที่ กำหนดค่าเริ่มต้นด้วยศูนย์ ทำให้แอกทีฟโชนที่ตรวจพบไม่สะท้อนการลู่เข้าของการคำนวณที่แท้จริง เมื่อรอบการคำนวณเพิ่มขึ้นแอกทีฟโชนเพิ่มขนาดโดยลำดับกระทั่งใช้จุดต่อเท่ากับวิธี GAMG เมื่อถึง รอบการคำนวณที่ 250 จำนวนจุดต่อที่ใช้คำนวณลดลง แอกทีฟโชนลดขนาดลงโดยลำดับกระทั่ง ลู่เข้าโดยใช้การคำนวณ 364 รอบ ซึ่งน้อยกว่าวิธี GAMG ที่ใช้ 482 รอบ พิจารณาการลดลงของ เศษเหลือ พบว่าทั้งสองวิธีลดลงในอัตราเดียวกัน เมื่อถึงรอบการคำนวณที่ 250 วิธี LAMG เริ่มให้ การลดลงของค่าเศษเหลือ ที่เร็วกว่าวิธี GAMG สาเหตุมาจากมีการปรับลดขนาดแอกทีฟโชนใน การคำนวณ ดังจะเห็นจากจำนวนกริดที่ใช้หลังรอบการคำนวณที่ 250 ลดลงอย่างรวดเร็ว ส่งผลให้วิธี LAMG ใช้รอบการคำนวณที่น้อยกว่าวิธี GAMG พิจารณาพฤติกรรมกรรมการปรับปรุงแอกทีฟโชนแสดง ดังรูปที่ 4.9 พื้นที่สีเข้มแทนแอกทีฟโชนและส่วนที่เหลืองเป็นเมเชอร์โชน การปรับปรุงแอกทีฟโชน เริ่มจากขอบทั้งสี่ด้านเข้าสู่บริเวณกลางโดเมน บนโดเมนที่ใช้กริดละเอียดขึ้น (400×300) ทำให้เห็น ได้ชัดเจนว่าการปรับปรุงพื้นที่แอกทีฟโชนเป็นไปอย่างไม่มีแบบแผนไร้ทิศทางที่แน่นอน และเป็น ที่น่าสังเกตว่าแอกทีฟโชนนอกจากจะเป็นพื้นที่เดียวกันแล้วยังพบว่ามีบางบริเวณเป็นช่องว่างของ พื้นที่เมเชอร์โชนอีกด้วย ขอบชั่วคราวของแอกทีฟโชนจึงมีรูปร่างที่ปรับตามสภาพค่าเศษเหลือที่ สูงกว่าเงื่อนไขกำหนดที่ตรวจจับได้ แสดงถึงความยืดหยุ่นของวิธี LAMG ในการกำหนด แอกทีฟโชน



รูปที่ 4.8 จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนกริดขนาด 400×300 กริด

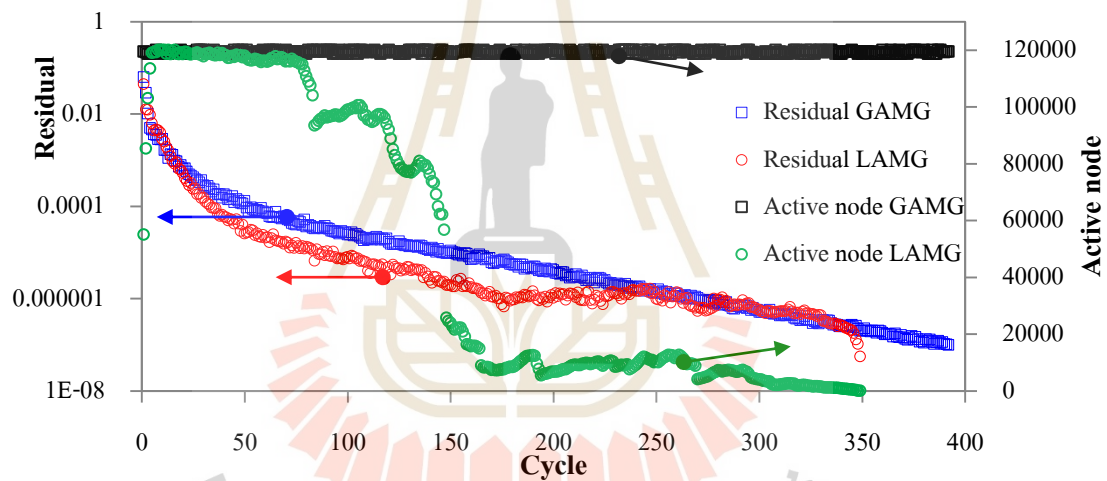


รูปที่ 4.9 ลำดับการปรับปรุงเอกทึพโซนครณีค่าเริ่มต้นศูนย์บนโดเมนขนาด 400×300 กริด

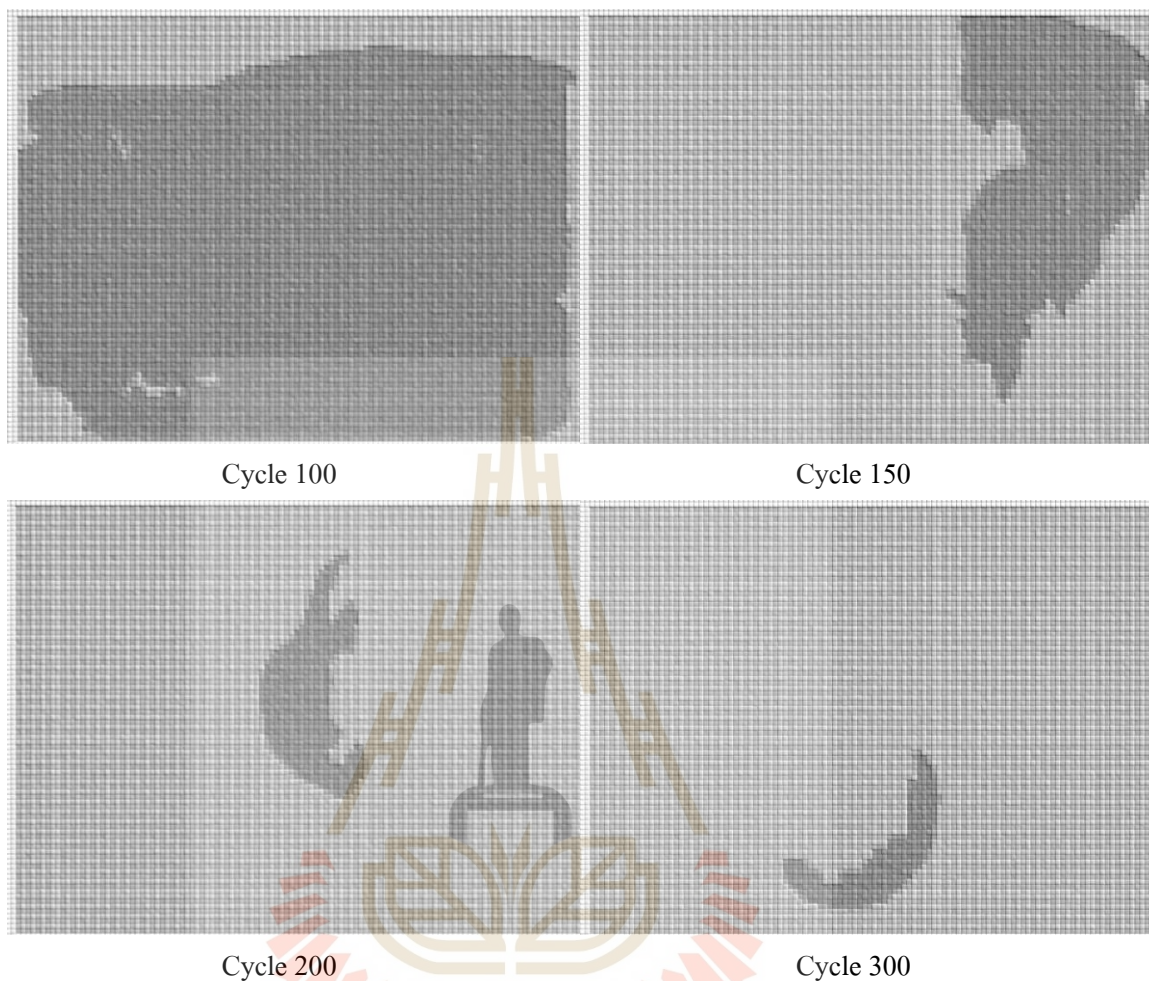
4.4.2 กรณีค่าเริ่มต้นกริดหาย

การคำนวณใช้ค่าที่ได้จากการคำนวณบนกริดหายขนาด 8×6 กริด แล้วส่งข้อมูลมายังกริดละเอียด ซึ่งเป็นหลักการเดียวกับที่ใช้บนกรณีปัญหา 1 มิติ ผลการจำลองบนกริดขนาด 400×300 กริดแสดงดังรูปที่ 4.10 วิธี LAMG ใช้กริดทั้งโดเมนจนกระทั่งรอบการคำนวณที่ 80 กริดที่ใช้คำนวณเริ่มปรับตัวลดลงโดยลำดับระหว่างรอบการคำนวณที่ 150 ถึง 350 วิธี LAMG ใช้กริดคำนวณในระดับต่ำแต่ยังไม่สามารถเข้าสู่คำตอบได้แสดงให้เห็นถึงการขนาดเสถียรภาพของเอกทึพโซน อย่างไรก็ตามวิธี LAMG ลู่เข้าที่ 349 ซึ่งน้อยกว่าวิธี GAMG ที่ใช้การคำนวณ 392 รอบ เมื่อพิจารณาอัตราการลดลงของเศษเหลือพบว่าวิธี LAMG มีอัตราการลดลงที่สอดคล้องกันโดยวิธี LAMG มีอัตราการลดลงเร็วกว่าวิธี GAMG เล็กน้อย ขณะที่เมื่อพิจารณาพฤติกรรมการปรับปรุงเอกทึพโซนดังแสดงในรูปที่ 4.11 พบว่าการปรับปรุงเอกทึพโซนก่อนการลู่เข้ายังคงมีลักษณะที่

ไม่มีแบบแผนเช่นเดียวกับกรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ นอกจากนี้ยังพบว่าลักษณะการปรับปรุงแอกทีฟโซนเป็นลักษณะการปรับปรุงที่ไม่มีเสถียรภาพ แม้ว่าการคำนวณใช้ค่าเริ่มต้นจากกริดหายที่เป็นวิธีที่ให้เสถียรภาพแอกทีฟโซนสูงในกรณีปัญหา 1 มิติ ดังจะเห็นว่าแอกทีฟโซนบนการคำนวณรอบที่ 200 ไม่อยู่บนแอกทีฟโซนในรอบที่ 150 ขณะเดียวกันแอกทีฟโซนบนรอบที่ 300 ก็ไม่อยู่บนแอกทีฟโซนในรอบที่ 200 เช่นเดียวกัน ลักษณะเช่นนี้แสดงให้เห็นว่าการปรับปรุงแอกทีฟโซนแม้ลดลงโดยลำดับแต่จะไม่อยู่ในบริเวณเดิมซึ่งแสดงถึงเมเซอร์โซนไม่สะท้อนการลู่เข้าที่แท้จริง กรณีเช่นนี้เกิดจากเศษเหลือที่อยู่ในโหมดความถี่ต่ำและเข้าใกล้เงื่อนไขลู่เข้าประกอบกับลักษณะปัญหาที่มีรูปสมการสมมาตรทำให้ทิศทางการลู่เข้าไว้ทิศทาง การคำนวณทั้งโดเมนทำให้เกิดการกระเพื่อมของค่าเศษเหลือที่เข้าใกล้เงื่อนไขขอบชั่วคราวทำให้แอกทีฟโซนปรับตัวมีลักษณะที่ขาดเสถียรภาพดังกล่าว



รูปที่ 4.10 จำนวนกริดที่ใช้และการลดลงของเศษเหลือกรณีค่าเริ่มต้นกริดหายบนกริดขนาด 400×300 กริด



รูปที่ 4.11 ลำดับการปรับปรุงแอททิฟโซนกรณิก้าเริ่มต้นกริดหยาบบนโดเมนขนาด 400×300 กริด

ผลเปรียบเทียบการคำนวณด้วยวิธี LAMG และ GAMG ของเงื่อนไขเริ่มต้นค่าศูนย์ และเงื่อนไขเริ่มต้นกริดหยาบแสดงในตารางที่ 4.1 ในรูปแบบจำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณและเวลาที่การคำนวณประหยัดได้ พบว่า วิธี LAMG ใช้จำนวนรอบการคำนวณและเวลาน้อยกว่าวิธี GAMG ทุกกรณี กรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ บนโดเมนขนาด 80×60 (4800 จุดต่อ) และขนาด 400×300 (120000 จุดต่อ) วิธี LAMG ใช้รอบการคำนวณน้อยกว่าวิธี GAMG 18 รอบและ 118 รอบตามลำดับ และประหยัดเวลาได้ 16.82% และ 35.11% ตามลำดับ กรณีค่าเริ่มต้นกริดหยาบพบว่าใช้รอบคำนวณน้อยกว่ากรณีค่าเริ่มต้นศูนย์ ขณะเดียวกันวิธี LAMG ยังประหยัดเวลาการคำนวณกว่าวิธี GAMG ได้มากถึง 23.29% และ 39.98% ในกรณีใช้กริด 80×60 (4800 จุดต่อ) และขนาด 400×300 (120000 จุดต่อ) ตามลำดับ

ตารางที่ 4.1 ผลเปรียบเทียบการคำนวณระหว่างวิธี LAMG และวิธี GAMG

Zero initialization						
No	Node	GAMG		LAMG		Time save (%)
		Cycle	Time(second)	Cycle	Time(second)	
1	80×60 (4800)	129	1.07	111	0.89	16.82
2	400×300 (120000)	482	116.41	364	107.98	35.11
Coarse-grid initialization						
3	80×60 (4800)	85	0.73	69	0.56	23.29
4	400×300 (120000)	392	135.62	349	81.4	39.98

4.5 วิเคราะห์และสรุปผลการจำลองปัญหา 2 มิติ

การปรับปรุงแอกทิฟ โชนบนปัญหา 2 มิติที่แสดงข้างต้นมีความแตกต่างจากการปรับปรุงพื้นที่บนปัญหาแบบ 1 มิติที่แสดงในบทที่ 3 กล่าวคือแอกทิฟ โชนบนปัญหา 2 มิติมีลักษณะไม่มีแบบแผน คาดการณ์ขนาดและการเคลื่อนตัวของพื้นที่ไม่ได้ ส่วนปัญหา 1 มิติ การปรับปรุงแอกทิฟ โชนจะเคลื่อนไปยังพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลงสูง ปัญหา 2 มิติที่ใช้ทดสอบ (สมการที่ 4-1) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง เมื่อกระจายเป็นระบบสมการพีชคณิตแล้วได้เมทริกซ์ที่มีความสมมาตร แต่ปัญหา 1 มิติแสดงในบทที่ 3 พบว่าทั้ง 4 กรณีทดสอบมีรูปแบบเมทริกซ์ที่ไม่สมมาตร ดังนั้นเพื่อศึกษาผลของรูปแบบระบบสมการต่อการปรับปรุงแอกทิฟ โชน จึงได้กำหนดปัญหาฮอโมจีเนียสแบบ 1 มิติ ที่มีเงื่อนไขขอบเป็นศูนย์ขึ้นมาทดสอบ ดังสมการต่อไปนี้

$$a_{i,i+1}\phi_{i+1} + a_{i,i}\phi_i + a_{i,i-1}\phi_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4-6)$$

$$\phi_0 = \phi_{n+1} = 0$$

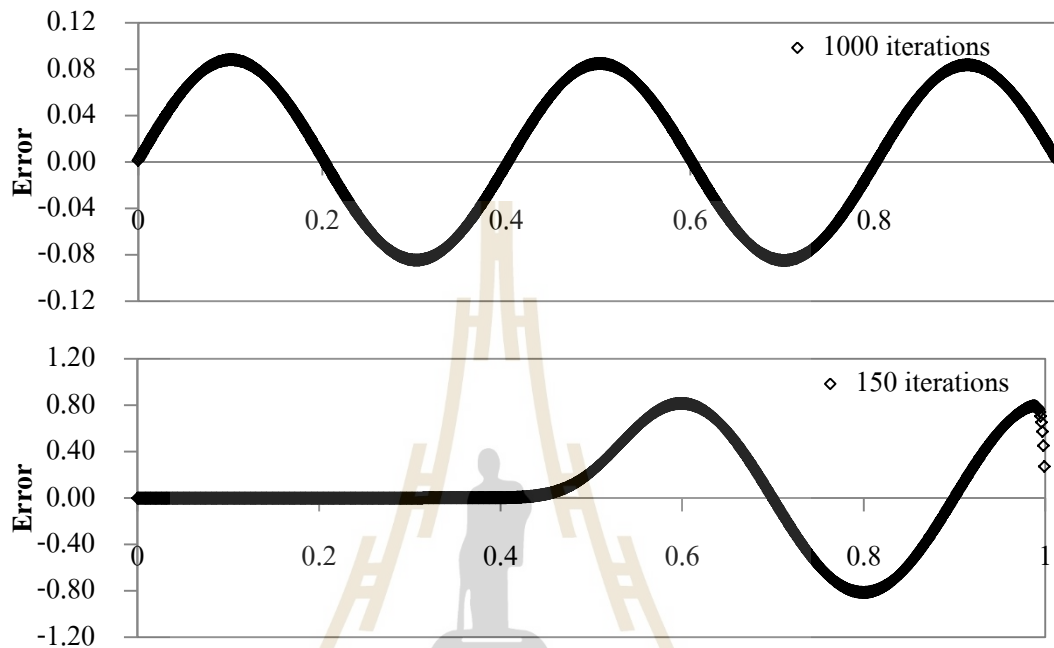
กรณีปัญหาแบบสมมาตร กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1.0 \text{ และ } a_{i,i} = |a_{i,i+1}| + |a_{i,i-1}| \quad (4-7)$$

ส่วนกรณีปัญหาแบบไม่สมมาตร กำหนดค่าสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$a_{i,i+1} = -1.2, \quad a_{i,i-1} = -1.0 \text{ และ } a_{i,i} = |a_{i,i+1}| + |a_{i,i-1}| \quad (4-8)$$

ใช้ฟังก์ชันไซน์แอมปริจูดเท่ากับหนึ่งเป็นค่าเริ่มต้น กรณีทดสอบทั้งสองนี้ มีค่าตอบสุดท้ายเหมือนกันคือเท่ากับศูนย์ ผลการคำนวณเปรียบเทียบทั้ง 2 กรณี แสดงดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบการลดของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างปัญหาแบบสมมาตรและไม่สมมาตร
ปัญหาสมมาตร(บน) ปัญหาไม่สมมาตร(ล่าง)

จะสังเกตเห็นว่าลักษณะการปรับลดลงของความคลาดเคลื่อนทั้ง 2 กรณีมีความแตกต่างอย่างชัดเจน กรณีปัญหาแบบสมมาตรความคลาดเคลื่อนลดลงแบบสม่ำเสมอพร้อมกันทั้งโดเมน (รูปที่ 4.12 บน) ซึ่งเทียบเคียงกับปัญหาสมมาตรในสมการที่ (4-1) การลดลงของความคลาดเคลื่อนแบบสม่ำเสมอลักษณะนี้ยากแก่การกำหนดพื้นที่แอกทีฟโซน เพราะพื้นที่แอกทีฟโซนคลุมพื้นที่ทั้งหมดไว้และความคลาดเคลื่อนจะลดลงพร้อมกันทั้งโดเมน พฤติกรรมเช่นนี้สอดคล้องกับการปรับปรุงแอกทีฟโซนของปัญหา 2 มิติที่น่าเสนอไป ซึ่งพบว่าแอกทีฟโซนปรับตัวได้ช้าในช่วงต้น เมื่อค่าคลาดเคลื่อนลดลงพฤติกรรมปรับพื้นที่แอกทีฟโซนเป็นไปอย่างไรทิศทางและขาดเสถียรภาพ ทำให้ลู่อเข้าได้ช้ากว่าที่ควรจะเป็น ขณะที่ปัญหาแบบไม่สมมาตรซึ่งเทียบเคียงกับกรณีทดสอบทั้ง 4 กรณีในบทที่ 3 พบว่าการลดลงของความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นทีละส่วน (ดูรูปที่ 4.12 ล่าง) โดยเริ่มลดลงจากด้านที่มีค่าสัมประสิทธิ์มากกว่า (ในกรณีทดสอบนี้ลดลงจากซ้ายไปขวา) ลักษณะปัญหาที่ไม่สมมาตรเช่นนี้ส่งผลกระทบต่อเทคนิคการคำนวณเฉพาะบริเวณของวิธี LAMG กล่าวคือบริเวณที่ความคลาดเคลื่อนลดลงก่อนจะเป็นเมเซอร์โซน ทำให้การลดแอกทีฟโซนเป็นไปอย่างมีเสถียรภาพ

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

จากกรณีทดสอบที่กำหนดขึ้น ทั้งกรณีปัญหาแบบ 1 มิติและ 2 มิติ เพื่อทดสอบอัลกอริทึมของการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข ที่ใช้หลักการคำนวณแบบเฉพาะบริเวณ สามารถสรุปได้ดังนี้

5.1 บทสรุปเทคนิคการคำนวณมัลติกริดแบบเฉพาะบริเวณ

เทคนิคการคำนวณมัลติกริดเฉพาะบริเวณ LAMG ที่พัฒนาขึ้น การคำนวณจะเกิดขึ้นเฉพาะบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าเกณฑ์กำหนดเรียกว่า แอ็กทีฟโซน เกณฑ์ความคลาดเคลื่อนที่ใช้กำหนดแอ็กทีฟโซนเรียกว่าเงื่อนไขขอบชั่วคราว ประกอบด้วยค่าเศษเหลือและค่าร้อยละความคลาดเคลื่อน ส่วนบริเวณนอกเหนือจากแอ็กทีฟโซนจะไม่ถูกคำนวณด้วยมัลติกริด โดยถือว่าเป็นบริเวณที่ลู่เข้าแล้ว การคำนวณด้วยวิธี LAMG นี้สามารถใช้ค่าเริ่มต้นใด ๆ ได้ โดยไม่ส่งผลกระทบต่อความถูกต้องของคำตอบ การกำหนดค่าเริ่มต้นโดยใช้ค่าประมาณจากกริดหยาบทำให้การคำนวณมีประสิทธิภาพที่สุดและใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด ความมีประสิทธิภาพของการคำนวณดูได้จากขนาดแอ็กทีฟโซนที่ลดลง โดยลำดับ ประสิทธิภาพของแอ็กทีฟโซนขึ้นอยู่กับข้อกำหนดค่าเงื่อนไขขอบชั่วคราว การตั้งค่าเงื่อนไขขอบชั่วคราวไว้สูงจะให้ประสิทธิภาพของขอบพื้นที่แอ็กทีฟโซนต่ำ ขณะที่ค่าเงื่อนไขขอบชั่วคราวค่าน้อยเกินไปการปรับปรุงพื้นที่แอ็กทีฟโซนจะทำได้ช้าและเปลืองการคำนวณโดยไม่จำเป็น เงื่อนไขขอบชั่วคราวที่เหมาะสมควรมีค่าไม่มากกว่าเงื่อนไขหยุดการคำนวณ (ค่าความคลาดเคลื่อนหรือความแม่นยำที่ผู้คำนวณต้องการ) วิธี LAMG ใช้ได้ผลดีกับปัญหาที่ไม่สมมาตร การลู่เข้าในแต่ละบริเวณจะไม่พร้อมกัน กรณีปัญหาสมมาตรการคำนวณด้วยวิธี LAMG จะให้ประสิทธิภาพไม่ดีขึ้น เนื่องจากพฤติกรรมของการลู่เข้าเป็นลักษณะสม่ำเสมอทั้งโดเมน อย่างไรก็ตามแม้กรณีปัญหาแบบสมมาตรวิธี LAMG ก็ยังสามารถช่วยให้การคำนวณประหยัดขึ้นได้เช่นกัน การประหยัดการคำนวณที่เกิดขึ้นให้ประโยชน์ในแง่การลดเวลาการคำนวณลง

5.2 ข้อเสนอแนะ

เทคนิคการคำนวณเฉพาะบริเวณ LAMG ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ออกแบบให้มีความยืดหยุ่นสำหรับประยุกต์เข้ากับเทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขใด ๆ ที่ใช้การคำนวณแบบมัลติกริดหรือแบบกริดเชิงเดี่ยวที่ใช้การคำนวณทั้งโดเมนเพื่อลดเวลาการคำนวณ วิธี LAMG เหมาะสำหรับปัญหาที่มีรูปสมการพีชคณิตไม่สมมาตร ซึ่งมีข้อเสนอแนะสำหรับการพัฒนาต่อดังนี้

- ปรับปรุงอัลกอริทึมให้สามารถค้นหาเอกทิพโซนได้มากกว่า 1 บริเวณ
- พัฒนาเงื่อนไขการตรวจสอบการลู่เข้า เพื่อใช้สำหรับการกำหนดเอกทิพโซนให้แม่นยำขึ้น ให้เมชอร์โซนสะท้อนการลู่เข้าที่แท้จริง
- ปรับใช้วิธี LAMG กับเทคนิคมัลติกริดอื่นที่มีประสิทธิภาพสูงเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพให้ดียิ่งขึ้น

รายการอ้างอิง

- Berger, M. (1982), Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations, Ph.D. Thesis, Stanford.
- Brandt, A. (1977), Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems, *Mathematics of Computation*, vol. 31, no. 138, pp. 333-390.
- Brezina, M., Falout, R., MacLachlan, S., Manteuffel, T., McCormick, S. and Ruge, J. (2005), Adaptive Smoothed Aggregation (α SA) Multigrid, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 47, no. 2, pp. 317-346.
- Briggs, W. L., Henson, V. E. and McCormick, S. F. (2000), A multigrid tutorial, 2nd ed., vol. 72, California: SIAM.
- Briggs, W. L. (1987) A multigrid tutorial. Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Falgout, R. D. (2006), An Introduction to Algebraic Multigrid, *Computing in Science and Engineering*, vol. 6, UCRL-JRNL-220851.
- Fedorenko, P. (1962) A relaxation method for solving elliptic difference equations. *USSR Comput Math Math Phys* 1(4):1092–1096
- Gee, M. W., Hu, J. J. and Tuminaro, R. S. (2009), A New Smoothed Aggregation Multigrid Method for Anisotropic Problems, *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 16, pp. 19-37.
- Hackbusch, W. (1994) Iterative solution of large space systems of equations, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 95, New York: Springer-Verlage.
- Haberman, R. (2004) *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4th ed., New Jersey: Pearson, ISBN: 0-13-065243-1.
- Hoffman, J. D. (2001), *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2nd ed., New York: Marcel Dekker, ISBN: 0-8247-0443-6.
- Kelley, C. T. (1995), *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM.
- Kincaid, D. and Cheney, W. (2002), *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, 3rd ed., California: Books/Cole, ISBN: 0-534-38905-8.

- Kreuzig, E. (2011) *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed., John Wiley & Sons, ISBN: 978-0-470-64613-7.
- Lee B., McCormick S. F., Philip, B. and Quinlan, D. J. (2004), *Asynchronous Fast Adaptive Composite-Grid Methods for Elliptic Problems: Theoretical Foundations*, in *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 42, No.1, pp. 130-152.
- Lee B., McCormick S. F., Philip, B. and Quinlan, D. J. (2003), *Asynchronous Fast Adaptive Composite-Grid Methods: Numerical Results*, in *Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 25, No.2, pp. 682-699.
- Levuque, R. J. (2007), *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*, Philadelphia: SIAM, ISBN: 978-0-898-716-29-0.
- McCormick, S. (1984), *Fast Adaptive Composite Grid (FAC) Method: Theory for the Variational Case*, *Computing Supplementum*, val 5, Springer-Verlag, pp. 115-121.
- McCormick, S. and Thomas, J. (1986), *The Fast Adaptive Composite Grid (FAC) Method for Elliptic Equations*, in *Mathematics of Computation*, vol. 46, no. 174, pp. 439-456.
- Moukalled, F., Mangani, L. and Darwish, M. (2016), *The finite volume method in computational fluid dynamics*, *Fluid Mechanic and Its Applications*, vol. 113, Switzerland: Springer international publishing, pp. 343-349.
- Poussin, F. V. (1968), *An accelerated relaxation algorithm for iterative solution of elliptic equations*. *SIAM J Numer Anal* 5:340–351.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* 2nd ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, United State, ISBN: 978-0-89871-534-7.
- Shiralashetti, S. C., Kantli, M. H. and Deshi, A. B. (2016), *New Wavelet Based Full-Approximation Scheme for the Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*, *Alexandria Engineering Journal*, vol. 55, pp. 2797-2804.
- Trottenberg, U., Oosterlee C. W., and Schuller, A. (2001), "Multigrid," in *A Harcourt Science and Technology Company*, Headquarters: Academic Press, pp. 413-528.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2nd ed., England: Pearson Education Limited, pp. 229-242.

ประวัติผู้เขียน

นายกัมพล อรนนท์ ภูมิลำเนาอยู่ที่ อ.เลิงนกทา จ.ยโสธร สำเร็จการศึกษาระดับประถมศึกษาชั้นปีที่ 1 - 6 ที่โรงเรียนบ้านห้วย ระดับมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 1 - 6 ที่โรงเรียนเลิงนกทา อ.เลิงนกทา จังหวัดยโสธร สำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาตรี วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมอากาศยาน เกียรตินิยมอันดับ 1 ในปีการศึกษา 2553 จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโท วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ในปีการศึกษา 2556 จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี หัวข้องานวิจัย การทำนายพฤติกรรมสตอลดีเลย์ที่มุมปะทะสูงของใบพัดกังหันลมด้วยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ

