มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ประมวลสาระรายวิชา

103 113 คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

เรียบเรียงโดย สายันต์ แก่นนาคำ
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี (พิมพ์ครั้งที่ 4)

คำนำ

(พิมพ์ครั้งที่ 4)

วิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เป็นวิชาหนึ่งในหมวดวิชาศึกษาทั่วไป โดยวัตถุประสงค์ของวิชาเพื่อให้นักศึกษามีความรอบรู้ ความเข้าใจ และมีความสามารถในการประยุกต์หลักการและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ สำหรับการทำความเข้าใจปัญหาพื้นฐานในชีวิตประจำวันและแก้ปัญหาได้ และที่สำคัญที่สุดคือสามารถสร้างกระบวนการคิดด้วยเหตุและผลได้

เอกสารฉบับนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนในรายวิชาดังกล่าว โดยแบ่งออกเป็น 4 ส่วนหลักเพื่อความสะดวกในกระบวนการเรียนการสอนจริงทั้งในและนอกชั้นเรียน ดังนี้

- ส่วนเนื้อหา คือ ส่วนที่รวบรวมบทสรุปสาระสำคัญของเนื้อหาในหัวข้อนั้นๆ
- ส่วนสำหรับบันทึก คือ ส่วนที่นักศึกษาสามารถบันทึกเนื้อหาเพิ่มเติมที่ได้รับฟังในชั้นเรียนจากผู้สอน
- ส่วนแบบฝึกทักษะ คือ ส่วนแบบฝึกหัดที่มีเนื้อที่ในเล่ม นักศึกษาสามารถแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบได้ภายในเล่มเดียวกัน
- ส่วนแบบฝึกทักษะเพิ่มเติม คือ ส่วนที่นักศึกษาสามารถฝึกทำแบบโจทย์ปัญหาสำหรับบทนั้นๆได้เพิ่มเติม และสามารถตรวจสอบคำตอบได้เองจากส่วนท้ายของบทที่มีการรวบรวมเอาคำตอบเอาไว้ให้

ทางผู้เรียบเรียงขอขอบคุณ คณาจารย์ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ อ.ดร.ธิดารัตน์ อารีรักษ์ และ ผศ.ดร.เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์ สำหรับความช่วยเหลือในกระบวนการเรียบเรียงต้นฉบับในครั้งแรก ซึ่งเป็นประโยชน์สำหรับนักศึกษาในการใช้เป็นแนวทางในการศึกษาและการค้นคว้าเพิ่มเติม

เอกสารประกอบการสอนนี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนางานวิชาการ ซึ่งเป็นประโยชน์โดยตรงต่อนักศึกษา จึงต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง มีการเพิ่มเติมตัวอย่างและโจทย์ปัญหา เพื่อให้ทันสมัยและได้งานวิชาการที่มีคุณค่าในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน สำหรับนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีทุกคน

อนึ่ง ผู้เรียบเรียงขออภัยในทุกข้อผิดพลาดที่อาจจะยังมีปรากฏภายในเล่ม

สายันต์ แก่นนาคำ

๑๐ เมษายน ๒๕๕๗

สารบัญ

สารบัญแผนภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1

ทบทวน (Reviews)

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนบทประยุกต์ของการใช้คณิตศาสตร์ในแขนงต่างๆ นั้น การมีพื้นฐานความเข้าใจในหลักการทางคณิตศาสตร์อย่างถูกต้องถือเป็นสิ่งที่สำคัญเป็นอย่างมาก ในบทแรกนี้ จักได้มีการรวบรวมเอาความรู้และหลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มานำเสนอ เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการประยุกต์ใช้ในบทถัดๆ ไป และก่อให้เกิดทักษะการคิดแบบมีตรรกะ ใช้เหตุ และผล ได้อย่างถูกต้อง

1.1 ระบบจำนวน และจำนวนจริง (Real Numbers)

❖ **จำนวนจริง คืออะไร ?**

ในโลกของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในสาขาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็น การวิเคราะห์ข้อมูล ระบบสมการกราฟ รวมถึงคณิตศาสตร์เชิงคำนวณต่างๆ ระบบตัวเลขที่เกี่ยวข้องส่วนใหญ่นั้นจะเป็นจำนวนที่รู้จักกันในนามของ "จำนวนจริง (Real Numbers)" ซึ่งสามารถให้คำจำกัดความโดยรวมได้ว่า เป็น จำนวนที่อยู่บนเส้นจำนวนจริง จำนวนจริงเหล่านี้มีคุณสมบัติเฉพาะตัวหลายประการ และสามารถแบ่งออกเป็นกลุ่มๆ ได้หลายประเภท เช่น จำนวนนับ (หรือจำนวนธรรมชาติ Natural Numbers), จำนวนเต็ม (Integers), ตรรกยะ (Rational Numbers) และอตรรกยะ (Irrational Numbers).

<u>จำนวนนับ</u> ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ...

<u>จำนวนเต็ม</u> ได้แก่ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... ซึ่งจะเห็นว่า ทุกจำนวนนับ เป็นจำนวนเต็ม

<u>จำนวนตรรกยะ</u> ได้แก่ จำนวนที่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $\frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{9}{5}, -\frac{7}{25}\ldots$ ซึ่งจะเห็นว่า ทุกๆ จำนวนเต็ม เป็นจำนวนตรรกยะ (เนื่องจากสามารถเขียนเป็นเศษส่วนที่มีส่วนเป็น 1 ได้เสมอ)

<u>จำนวนอตรรกยะ</u> ได้แก่ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

ซึ่งเมื่อเรานำประเภทของจำนวนจริงทั้งหลายตามที่ได้แจกแจงมานี้ มาเขียนเป็นแผนภาพ ก็จะได้ดังนี้

บันทึก

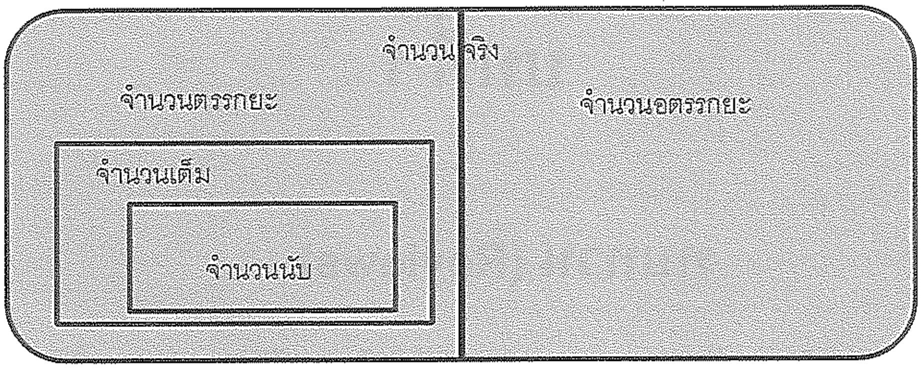
....

....

....

....

....



แผนภาพที่ 1 จำนวนจริงและส่วนต่าง ๆ ของจำนวนที่จัดอยู่ในจำนวนจริง

❖ คุณสมบัติเอกลักษณ์เบื้องต้นที่สำคัญของจำนวนจริง

กำหนดให้ x, y, a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. คุณสมบัติการสลับที่ของการบวกและการคูณ ตามลำดับดังนี้ $a + b = b + a$ และ $ab = ba$

   เช่น $2.5x + 3y = 3y + 2.5x$ และ $\frac{1}{8} \times \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \times \frac{1}{8}$

2. คุณสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวกและการคูณ ตามลำดับดังนี้

   $a + (b + c) = (a + b) + c$ และ $a(bc) = (ab)c$

   เช่น $(a + 3b) + 2c = a + (3b + 2c)$ และ $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x}{3} \cdot y\right) = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x}{3}\right) \cdot y$

3. คุณสมบัติการกระจาย ดังนี้ $a(b + c) = ab + ac$ หรือ (b + c)a = ba + ca

   เช่น $(x + 3y)2 = 2x + 6y$

4. เอกลักษณ์สำหรับการบวก คือ " 0 " และ เอกลักษณ์สำหรับการคูณ คือ " 1 " ตามลำดับดังนี้ $a + 0 = 0 + a = a$ และ $a(1) = 1(a) = a$

5. ตัวผกผันสำหรับการบวกของ a คือ $-a$ และตัวผกผันสำหรับการคูณของ a คือ $\frac{1}{a}$

6. คุณสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ เมื่อนิยามการหาค่าสัมบูรณ์ ดังนี้

   ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วย $|a|$ และนิยามโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

7. คุณสมบัติทางพีชคณิตอื่น ๆ ที่พบบ่อยของจำนวนจริง แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้ เมื่อกำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตารางที่ 1 ตารางแสดงการดำเนินการทางพีชคณิตเบื้องต้นที่สำคัญของจำนวนจริง

ลำดับที่	คุณสมบัติอื่นๆ และสูตรที่พบบ่อย	ลำดับที่	คุณสมบัติอื่นๆ และสูตรที่พบบ่อย
1	$a^n a^m = a^{n+m}$	14	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$
2	$(a^n)^m = a^{nm}$	15	$log_b\, b = 1,\ log_b\, 1 = 0$
3	$(ab)^n = a^n b^n$	16	$log_b\, b = x,\ b^{log_b x} = x$
4	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	17	$log_b(x^r) = r\, log_b\, x$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	18	$log_b(xy) = log_b\, x + log_b\, y$
6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	19	$log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b\, x - log_b\, y$
7	$a^0 = 1, a \neq 0$	20	$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	21	$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$
9	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n,\ \ a \neq 0$	22	$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$
10	$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$	23	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
11	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	24	$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$
12	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	25	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
13	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	26	$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

❖ ข้อเข้าใจผิดที่พบเห็นบ่อยครั้ง

ในตารางข้างล่างนี้ จะเป็นการรวบรวมเอารูปแบบ และข้อสังเกต(พร้อมด้วยคำอธิบาย)ที่สำคัญของการใช้พีชคณิตของจำนวนจริง

ตารางที่ 2 ข้อเข้าใจผิดที่พบบ่อยครั้งในการดำเนินการทางพีชคณิตของจำนวนจริง

ข้อสังเกต	คำอธิบายและรูปที่ถูกต้อง
$\frac{2}{0} \neq 0, \frac{2}{0} \neq 2$	การหารด้วยศูนย์นั้น ถือว่าไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์
$-3^2 \neq 9$	$-3^2 = -9, (-3)^2 = 9$
$(x^2)^3 \neq x^5$	$(x^2)^3 = x^2x^2x^2 = x^6$
$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$
$\frac{1}{x^2 + x^3} \neq x^{-2} + x^{-3}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกตข้างบนนี้
$\frac{a+bx}{a} \neq 1 + bx$	$\frac{a+bx}{a} = \frac{a}{a} + \frac{bx}{a} = 1 + \frac{bx}{a}$
$-a(x-1) \neq -ax - a$	$-a(x-1) = -ax + a$

$(x+a)^2 \neq x^2 + a^2$	$(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2ax + a^2$
$\sqrt{x^2+a^2} \neq x + a$	$5 = \sqrt{25} = \sqrt{3^2+4^2} \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{x+a} \neq \sqrt{x} + \sqrt{a}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกตข้างบนนี้
$(x+a)^n \neq x^n + a^n$ and $\sqrt[n]{x+a} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a}$	เหตุผลเดียวกันกับข้อสังเกต 3 ข้อข้างบนนี้
$2(x+1)^2 \neq (2x+2)^2$	$2(x+1)^2 = 2(x^2+2x+1) = 2x^2 + 4x + 2$ และ $(2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$
$\sqrt{-x^2+a^2} \neq -\sqrt{x^2+a^2}$	$\sqrt{-x^2+a^2} = (-x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.1.1</u> จงหาผลคูณของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $7(-4)$ = ...

2) $(-1)(-5)$ = ...

3) $(-3)\left[\frac{5}{2}\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$ = ...

4) $(-13)(-14)$ = ...

5) $\left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)$ = ...

6) $7(-2.25)$ = ...

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.1.2</u> จงหาผลหารของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\frac{-120}{-20}$ = ...

2) $\left(\frac{-1}{5}\right) \div \left(\frac{-2}{5}\right)$ = ...

3) $\left[\frac{5}{2} \div \left(-\frac{4}{3}\right)\right]$ = ...

4) $(-10) \div \left(\frac{-14}{5}\right)$ = ...

5) $\left(-\frac{2}{7}\right) \div \left(-\frac{14}{5}\right)$ = ...

6) $7 \div \left(1 \div \left(\frac{2}{7}\right)\right)$ = ...

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.1.3</u> จงหาผลของการดำเนินการเชิงพีชคณิตของเลขจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\frac{9(-4)}{-6-(-2)}$ = ...

2) $\frac{-3-(-4+1)}{-7-(-6)}$ = ...

3) $\frac{(-1)-[-(3-4)]}{-2}$ = ...

4) $\frac{-4[8-(-3+7)]}{-6[3-(-2)]-3(-3)}$ = ...

5) $\frac{2^2+4^2}{5^2-3^2}$ = ...

6) $\frac{(-1)^3(-2)^3}{6-[-1+(2-5)]^2}$ = ...

1.2 ห.ร.ม. (G.C.F) และ ค.ร.น. (L.C.M.)

ตัวหารร่วมที่มากที่สุด (หรือ ห.ร.ม.) หรือ ตัวประกอบค่ามากที่สุด ของจำนวนใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป หมายถึง จำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่สามารถหารจำนวนทั้งหมดเหล่านั้นได้ลงตัว

ในการหาค่าตัวประกอบร่วมค่ามากที่สุด หรือ ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) นั้น สามารถหาได้หลายวิธี อย่างไรก็ตาม ในเอกสารประกอบการสอนนี้ จักได้นำเอาวิธีการหาค่า ห.ร.ม. เพียงวิธีเดียวมานำเสนอ ซึ่งในขั้นแรกนี้ มาทำความรู้จักกับส่วนประกอบแต่ละส่วนก่อน ซึ่งสามารถเรียงตามลำดับได้แก่ ตัวประกอบ(Factor) , ตัวประกอบร่วม(Common Factor) และตัวประกอบร่วมที่มากที่สุด(Greatest Common Factor)

❖ "ตัวประกอบ (Factor)" คือ อะไร ?

ตัวประกอบ (Factor) คือ จำนวนที่เมื่อนำมาคูณกันแล้วได้จำนวนใหม่ขึ้นมา เช่น $2 \times 3 = 6$ เราจะได้ว่า 2 และ 3 เป็นตัวประกอบของ 6 ซึ่งในบางครั้ง เราต้องการตัวประกอบทุกตัวของเลขจำนวนหนึ่ง เช่น ตัวประกอบของ 12 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12 เนื่องจากว่า $2 \times 6 = 12,\ 4 \times 3 = 12,\ 1 \times 12 = 12$ ทั้งสิ้น

❖ "ตัวประกอบร่วม (Common Factor)" คือ อะไร ?

เมื่อเราสามารถหาตัวประกอบของจำนวนตั้งแต่ 2 จำนวนได้แล้ว เช่น พิจารณาการหาตัวประกอบของ 12 และ 30 ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1.2.1

ตัวประกอบ ของ 12 ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 12

ตัวประกอบ ของ 30 ได้แก่ 1, 2, 3, 5, 6, 10,15 และ 30

แล้วเราจะได้ว่า ตัวประกอบร่วม (Common Factor) ของ 12 และ 30 คือ ตัวประกอบทั้งหลาย ที่ปรากฏเป็นตัวประกอบของทั้ง 12 และ 30 ซึ่งก็ได้แก่ 1, 2, 3 และ 6

ตัวอย่างที่ 1.2.2 จงหาตัวประกอบร่วมของ 15, 30 และ 105

ตัวประกอบ ของ 15 ได้แก่ 1, 3, 5 และ 15

ตัวประกอบ ของ 30 ได้แก่ 1, 2, 3, 5, 6, 10,15 และ 30

ตัวประกอบ ของ 105 ได้แก่ 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 และ 105

จะเห็นว่า ตัวประกอบที่ปรากฏเป็นตัวประกอบของทั้ง 15, 30 และ 105 ได้แก่ 1, 3, 5 และ 15

นั่นคือ ตัวประกอบร่วมของ 15, 30 และ 105 คือ 1, 3, 5 และ 15 นั่นเอง

❖ "ตัวประกอบร่วมมากที่สุด (Greatest Common Factor)" คืออะไร ?

ตัวประกอบร่วมมากที่สุด (Greatest Common Factor) ของจำนวนตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป คือ ตัวประกอบร่วมของจำนวนเหล่านั้นที่มีค่ามากที่สุด เช่น จากตัวอย่างที่ 1.2.2 ข้างต้น จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมมากที่สุดของ 15, 30 และ 105 คือ 15 เพราะ ในบรรดาตัวประกอบร่วมทั้งหลาย ซึ่งมี 1, 3, 5 และ 15 นั้น 15 มีค่ามากที่สุด และ ซึ่งก็เป็นค่า ห.ร.ม. ด้วย

แบบฝึกทักษะที่ 1.2.1 จงแสดงวิธีการหาค่าตัวประกอบร่วมมากที่สุด หรือ ห.ร.ม. ของจำนวนต่างๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ห.ร.ม. ของ 9 และ 12 คือ

2) ห.ร.ม. ของ 6 และ 18 คือ

3) ห.ร.ม. ของ 24 และ 108 คือ

4) ห.ร.ม. ของ 56, 84 และ 140 คือ

5) ห.ร.ม. ของ 14, 49 และ 63 คือ

6) ห.ร.ม. ของ 27, 72 และ 81 คือ

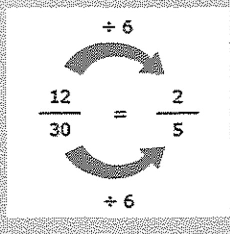
❖ "ตัวประกอบร่วมมากที่สุด (Greatest Common Factor)" มีประโยชน์อย่างไร ?

ตัวอย่างหนึ่งที่เป็นการใช้ประโยชน์ตัวประกอบร่วมมากที่สุด คือ การลดทอนเศษส่วน

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงลดทอนเศษส่วน $\frac{12}{30}$

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 1.2.1 เราสามารถหาได้ว่า ตัวประกอบค่ามากที่สุดของ12 และ 30 คือ 6 ดังนั้น จึงได้ว่าจำนวนที่มากที่สุดที่สามารถไปหารทั้ง 12 และ 30 ได้ลงตัวคือ 6 จึงสามารถลดทอนเศษส่วนดังกล่าวได้เป็น $\frac{2}{5}$



<u>ตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) (Least Common Multiple)</u> ของจำนวนใดๆ ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป หมายถึง จำนวนที่น้อยที่สุดที่จำนวนเหล่านั้นมาหารได้ลงตัว หรือจำนวนที่น้อยที่สุดที่มีจำนวนเหล่านั้นเป็นตัวประกอบ เช่นเดียวกันกับการหา ห.ร.ม. การหา ค.ร.น. นี้ มีวิธีการอยู่หลายวิธี แต่ในเอกสารประกอบการสอนนี้ จักได้นำเสนอแค่ 2 วิธี ซึ่งได้แก่ โดยการใช้ ห.ร.ม. และ โดยการพิจารณาจำนวนประกอบเฉพาะ(Prime Factor) ของแต่ละจำนวนที่ให้มานั้น

❖ การหา ตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) โดยการใช้ ห.ร.ม.

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ทราบวิธีการหา ห.ร.ม. มาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะทำการหาค่า ค.ร.น. โดยใช้ค่า ห.ร.ม. โดย ค.ร.น. ของจำนวน จำนวน a และจำนวน b หาได้จากการใช้ความสัมพันธ์นี้

$$\text{ค.ร.น.}(a,b) = \frac{(a \cdot b)}{\text{ห.ร.ม.}(a,b)} \tag{1.1}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.4 จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 30 โดยการใช้ ห.ร.ม.

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.2.3 เราสามารถหาได้แล้วว่า ห.ร.ม. ของ 12 และ 30 คือ 6 ดังนั้น ใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (1.1) จึงได้ว่า

$$\text{ค.ร.น.}(12,30) = \frac{(12 \cdot 30)}{\text{ห.ร.ม.}(12,30)} = \frac{360}{6} = 60$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 12 และ 30 คือ 60

❖ การหาตัวคูณร่วมน้อยที่สุด (ค.ร.น.) โดยการพิจารณาจำนวนประกอบเฉพาะ(Prime Factor)

จำนวนเฉพาะ (Prime Number) คือ จำนวนนับทั้งหลายที่มากกว่า 1 ที่มีตัวประกอบเพียง 2 ตัว คือ 1 และตัวของมันเอง เช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 และอื่นๆ เป็นจำนวนมาก และในคณิตศาสตร์ ก็เป็นที่ทราบกันว่า ทุกๆ จำนวนเต็มบวกที่ไม่ใช่ 1 จะสามารถเขียนกระจายออกเป็นตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ(ต่อไปจะเรียกสั้นๆ ว่า "ตัวประกอบเฉพาะ")ได้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น เช่น เราสามารถกระจาย 90 ออกเป็นผลคูณของตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะได้ดังนี้ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$ หมายความว่า 90 ได้จากการคูณกันของ 2 จำนวน 1 ตัว กับ 3 จำนวน 2 ตัว กับ 5 จำนวน 1 ตัว เราจะใช้แนวคิดนี้ในการหา ค.ร.น. โดยกระบวนการดังต่อไปนี้

1) แยกตัวประกอบเฉพาะของจำนวนทุกจำนวนที่ต้องการหา ค.ร.น.
2) เลือกตัวประกอบเฉพาะตัวที่**ซ้ำ**กันมาเพียง**ตัวเดียว**
3) เลือกตัวประกอบเฉพาะตัวที่**ไม่ซ้ำ**กันมา**ทุกตัว**
4) นำจำนวนที่เลือกมาจากข้อ 2 และ 3 มาคูณกันทั้งหมด เป็นค่าของ ค.ร.น.

ตัวอย่างที่ 1.2.5 จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 30 โดยการใช้ตัวประกอบเฉพาะ

วิธีทำ เราสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะของทั้ง 2 จำนวนได้โดย

$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$

$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$

ตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันได้แก่ 2 และ 3 (เพราะปรากฏอยู่ทั้งใน 12 และ 30) และตัวประกอบเฉพาะที่ไม่ซ้ำได้แก่ 2 และ 5 ดังนั้น เมื่อทำตามทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า ค.ร.น. (12, 30) คือ $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงหา ค.ร.น. ของ 10, 24 และ 30 โดยการใช้ตัวประกอบเฉพาะ

วิธีทำ เราสามารถแยกตัวประกอบเฉพาะของทั้ง 2 จำนวนได้โดย

$10 = 5 \times 2$

$24 = 2 \times 3 \times 2 \times 2$

$30 = 5 \times 2 \times 3$

ตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันได้แก่ 5, 2 และ 3 และตัวประกอบเฉพาะที่ไม่ซ้ำกันได้แก่ 2 ดังนั้น เมื่อทำตามทั้ง 4 ขั้นตอนข้างต้น จะได้ว่า ค.ร.น. (10, 24, 30) คือ $5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 120$

แบบฝึกทักษะที่ 1.2.2 จงใช้วิธีที่ถนัดในการหาค่า ค.ร.น. ของกลุ่มจำนวนแต่ละกลุ่มที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) ค.ร.น.ของ 3 และ 7 คือ

....
....
....

2) ค.ร.น.ของ 18 และ 28 คือ

....
....
....

3) ค.ร.น.ของ 32 และ 22 คือ

....
....
....

4) ค.ร.น.ของ 6, 14 และ 21 คือ

....
....
....

5) ค.ร.น.ของ 8, 12 และ 36 คือ

....
....
....
....

6) ค.ร.น.ของ 11, 21 และ 31 คือ

....
....
....
....

❖ ประโยชน์ของค่า ค.ร.น.

ที่ใช้กันบ่อยที่สุดได้แก่การหาผลบวก-ลบของเศษส่วน โดยการทำส่วนให้เท่ากัน

<u>**ตัวอย่างที่ 1.2.7**</u> จงหาค่าของ $\frac{3}{10}+\frac{7}{24}-\frac{1}{30}$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.2.6 เราทราบแล้วว่า ค.ร.น. ของ 10, 24 และ 30 คือ 120 ซึ่งเราพบกว่า 10 x 12 = 24 x 5 = 30 x 4 = 120 ดังนั้น จึงสามารถหาผลบวก-ลบของเศษส่วนดังกล่าวได้โดย

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{24}-\frac{1}{30}=\frac{3(12)+7(5)-1(4)}{120}=\frac{36+35-4}{120}=\frac{67}{120}$$

<u>**แบบฝึกทักษะที่ 1.2.3**</u> จงหาค่าของการบวก-ลบ เศษส่วนในข้อต่อไปนี้

1) $\frac{9}{17}+\frac{8}{6}=$..

2) $\frac{16}{19}+\frac{26}{3}=$..

3) $\frac{18}{16}+\frac{43}{14}=$..

4) $\frac{43}{8}+\frac{48}{5}=$..

5) $\frac{36}{24}+\frac{9}{11}=$..

6) $\frac{1}{7}+\frac{13}{17}=$..

7) $\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=$ ....

8) $\frac{11}{3}-\frac{15}{5}=$..

9) $\frac{23}{25}-\frac{21}{50}=$ ....

10) $\frac{4}{3}-\frac{1}{4}=$..

11) $\frac{19}{6}+\frac{17}{3}-\frac{35}{4}=$..
....

12) $\frac{9}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{34}=$..
....

13) $\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=$..
....

14) $\frac{(x+h)^2}{h}-\frac{x}{h}=$..
....

15) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}=$..
....
....
....

16) $\frac{x+1}{x^2+5x+6}+\frac{x+2}{x^2+4x+3}=$..
....
....
....

1.3 เลขฐาน (Number Systems)

ในชีวิตประจำวันทุกวันนี้ เราได้มีส่วนเกี่ยวข้องกับหลายสิ่งที่ต้องอาศัยหลักการของตัวเลขเริ่มต้นจากการนับสิ่งต่างๆ การพัฒนาการของมนุษย์และวิทยาศาสตร์ก่อเกิดระบบเลขฐานต่างๆ เริ่มตั้งแต่ที่เราคุ้นเคยและใช้กันมากคือเลขฐานสิบ และที่ใช้ในระบบการทำงานของคอมพิวเตอร์คือเลขฐานสอง นอกจากนี้ยังมีเลขฐานอื่นๆ เช่น ฐานแปด ฐานสิบหก เป็นต้น ในเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จะได้มีการนำเสนอเฉพาะสองฐานแรกเท่านั้นคือ เลขฐานสิบและเลขฐานสอง

❖ เลขฐานสิบ

ถือว่าเป็นเลขฐานที่เราใช้และพบกันมากที่สุดในชีวิตประจำวัน เลขฐานสิบนี้ประกอบไปด้วยตัวเลขสิบตัวคือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 ซึ่งเราจะใช้เลขทั้งสิบตัวนี้ประกอบกันขึ้นเป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง และจำแนกค่าต่างๆ ของแต่ละตัวเลขเหล่านั้น โดย "ค่าประจำตำแหน่ง" ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 3 ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสิบ

	หน้าจุดทศนิยม					หลังจุดทศนิยม				
หลักที่	n	$n-1$	$\cdots$	2	1	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
ค่าประจำตำแหน่ง	10^{n-1}	10^{n-2}	$\cdots$	10^1	10^0	10^{-1}	10^2	$\cdots$	10^{-m}	$\cdots$

ซึ่งจากตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งดังกล่าว เราสามารถเขียนจำนวนทุกจำนวนในเลขฐานสิบให้อยู่ในรูปของผลบวกของตัวเลขประจำตำแหน่งคูณกับค่าประจำตำแหน่งได้ ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

<u>**ตัวอย่างที่ 1.3.1**</u> จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเลขตำแหน่งคูณกับค่าประจำตำแหน่งของเลขนั้น

1) 365 $= (3 \times 10^2) + (6 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$

2) 4,021 $= (4 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (2 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$

3) 254.87 $= (2 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (4 \times 10^0) + (8 \times 10^{-1}) + (7 \times 10^{-2})$

4) 21.896 $= (2 \times 10^1) + (1 \times 10^0) + (8 \times 10^{-1}) + (9 \times 10^{-2}) + (6 \times 10^{-3})$

❖ เลขฐานสอง

เลขฐานสองนี้ใช้กันมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านของระบบประมวลผลของคอมพิวเตอร์ เลขฐานสองประกอบด้วยตัวเลข 2 ตัวคือ 0 และ 1 ดังนั้นการเขียนตัวเลขใดๆ ในระบบเลขฐานสองนี้ จะประกอบไปด้วยตัวเลขเพียง 2 ตัวคือ 0 และ 1 ตัวอย่างเช่น

1011_2 อ่านว่า หนึ่ง ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง

110011_2 อ่านว่า หนึ่ง หนึ่ง ศูนย์ ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง

10.011_2 อ่านว่า หนึ่ง ศูนย์ จุด ศูนย์ หนึ่ง หนึ่ง ฐานสอง

ซึ่งในการเขียนเลขฐานสองนั้น สามารถเขียนได้โดยอาศัยตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งดังแสดงข้างล่างนี้

ตารางที่ 4 ตารางแสดงค่าประจำตำแหน่งของเลขฐานสอง

	หน้าจุดทศนิยม					หลังจุดทศนิยม				
หลักที่	n	$n-1$	$\cdots$	2	1	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
ค่าประจำตำแหน่ง	2^{n-1}	2^{n-2}	$\cdots$	2^1	2^0	2^{-1}	2^2	$\cdots$	2^{-m}	$\cdots$

❖ การเปลี่ยนระบบเลขฐานสองเป็นระบบเลขฐานสิบ

ในการเปลี่ยนเลขจำนวนหนึ่งที่อยู่ในระบบเลขฐาน 2 ให้เป็นจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐาน 10 นั้น สามารถทำได้โดยง่าย โดยนำตัวเลขแต่ละตัวในจำนวนนั้น คูณเข้าด้วยค่าประจำตำแหน่ง
(ดังแสดงใน ตารางที่ 4) แล้วนำมาบวกกัน ดังตัวอย่างที่ 1.3.2

<u>**ตัวอย่างที่ 1.3.2**</u> จงเขียนจำนวนสองจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสิบ

ก) 10101_2 ข) 101.101_2

วิธีทำ

ก) $10101_2 = (1\times 2^4) + (0\times 2^3) + (1\times 2^2) + (0\times 2^1) + (1\times 2^0)$

$= 16 + 0 + 4 + 0 + 1$

$= 21$

ข) $101.101_2 = (1\times 2^2) + (0\times 2^1) + (1\times 2^0) + (1\times 2^{-1}) + (0\times 2^{-2}) + (1\times 2^{-3})$

$= 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125$

$= 5.625$

❖ การเปลี่ยนระบบเลขฐานสิบให้เป็นระบบเลขฐานสอง

สำหรับการเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบ ให้เป็นจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองนั้น สามารถทำได้ 2 แบบ ซึ่งขึ้นอยู่กับรูปแบบของจำนวนในเลขฐานสิบ ดังนี้

แบบที่ 1 ในกรณีที่จำนวนในเลขฐานสิบ เป็นจำนวนเต็ม สามารถทำได้โดยขั้นตอนดังนี้

- ให้นำเอา 2 ไปหารจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบนั้น ซึ่งในแต่ละครั้งของการหารจะเหลือเศษ ให้เขียนเศษนั้นไว้ทางขวามือ ทำอย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์
- จำนวนในระบบเลขฐานสองที่ได้ คือการเขียนเศษทั้งหลายที่เขียนไว้ทางขวามือของการหารในขั้นตอนแรก โดยเขียนจากล่างขึ้นบน ดังแสดงในตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.3.3 จงเขียน 21 และ 135 ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

วิธีทำ

2) 21	
2) 10	เศษ 1
2) 5	เศษ 0
2) 2	เศษ 1
2) 1	เศษ 0
0	เศษ 1

ดังนั้น 21 ในระบบเลขฐาน 2 คือ 10101_2

2) 135	
2) 67	เศษ 1
2) 33	เศษ 1
2) 16	เศษ 1
2) 8	เศษ 0
2) 4	เศษ 0
2) 2	เศษ 0
2) 1	เศษ 0
0	เศษ 1

ดังนั้น 135 ในระบบเลขฐาน 2 คือ 10000111_2

แบบที่ 2 กรณีที่จำนวนในเลขฐานสิบนั้น ประกอบด้วยเลขทศนิยม สามารถทำได้โดยขั้นตอนต่อไปนี้

- ให้แบ่งจำนวนนั้นออกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่อยู่ทางขวาของจุดทศนิยม และส่วนที่อยู่ทางซ้ายของจุดทศนิยม
- สำหรับส่วนที่อยู่ทางซ้ายของเลขทศนิยม ให้ดำเนินการดัง **แบบที่ 1** ข้างต้น
- สำหรับส่วนที่อยู่ทางขวาของจุดทศนิยมนั้น ให้นำ 2 มาคูณกับเลขหลังทศนิยมนั้น โดยในแต่ละครั้ง ให้เอาเลข**หลัง**ทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้มาตั้งใหม่ และนำการคูณด้วย 2 อีกครั้ง และนำเลข**หลัง**ทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้มาตั้งแล้วคูณด้วย 2 อย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งเลขหลังทศนิยมของผลคูณนั้นเป็นศูนย์ทุกตัว ซึ่ง จำนวนในเลขฐานสองที่ได้จะได้มาจาก ตัวเลขที่อยู่**หน้า**จุดทศนิยมของผลลัพธ์ที่ได้จากการคูณแต่ละครั้งดังกล่าวข้างต้น ดังตัวอย่าง

บันทึก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.4</u> จงเขียน 21.1875 ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

วิธีทำ

เราแยกจำนวนดังกล่าวออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนที่อยู่ทางซ้ายมือของจุดทศนิยมคือ 25 และส่วนที่อยู่ทางขวามือของจุดทศนิยมคือ 1875

จากตัวอย่างที่ 1.3.3 เราจะได้ว่า 21 สามารถเขียนในระบบเลขฐานสองได้คือ 10101_2

เราจะพยายามเขียน .1875 เป็นเลขในระบบเลขฐานสองได้โดย

$$\begin{array}{r} 0.1875 \times \\ 2 \\ \hline \mathbf{0}.3750 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 0.3750 \times \\ 2 \\ \hline \mathbf{0}.7500 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 0.7500 \times \\ 2 \\ \hline 1.5000 \end{array} \nearrow \begin{array}{r} 0.5000 \times \\ 2 \\ \hline 1.0000 \end{array}$$

ดังนั้น เราจะเขียนตัวเลขที่อยู่หน้าทศนิยมของผลลัพธ์ของการคูณแต่ละครั้งได้คือ 0011_2

นั่นคือ $0.1875 = .0011_2$

ดังนั้น เราจะเขียนรวมกันทั้งสองส่วนได้ดังนี้

$$21.1875 = 10101.0011_2$$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.3.1</u> จงเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสองในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสิบ

1) 110_2

2) 10101_2

3) 1101.01_2

4) 1010.111_2

5) 11111.111_2

6) 100011.100011_2

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.3.2</u> จงเปลี่ยนจำนวนที่อยู่ในระบบเลขฐานสิบในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบเลขฐานสอง

1) 15

2) 105

3) 154.125

4) 3651.625

5) 2248.03125

....

6) 50014.15625

....

1.4 เซต (Sets)

ในทางคณิตศาสตร์เราจะไม่นิยามคำว่า "เซต" แต่เราใช้คำว่าเซตในความหมายของคำว่า กลุ่ม หมู่ เหล่า กอง ฝูง หรือ ชุด เป็นต้น โดยเมื่อเรากล่าวถึงเซตของสิ่งใดๆ แล้ว เราจะสามารถบอกได้เสมอว่าในเซตนั้นมีอะไรบ้าง

❖ ข้อสังเกตและคุณสมบัติที่สำคัญของเซต

ได้แก่

- สิ่งที่บรรจุอยู่ในเซตหนึ่งๆ เราเรียกว่า "สมาชิก" ของเซตนั้น
- เราใช้สัญลักษณ์ "$\in$" แทนคำว่า "เป็นสมาชิกของ"
- เครื่องหมาย " $\{\ldots\}$ " แทน เซต
- การเขียนเซตเรามักจะใช้อักษรอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทน "เซต" และอักษรอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทน "สมาชิก" ของเซต ซึ่งการเขียน อาจเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิก หรือ แบบบอกเงื่อนไขก็ได้
- ลำดับการเรียงตัวของสมาชิก ถือว่าไม่สำคัญ
- เซตจำกัด(Finite sets) คือ เซตที่สามารถบอกได้แน่นอนว่ามีสมาชิกเป็นจำนวนเท่าใด เช่น $\{1, 2, 3, 4\}$
- เซตอนันต์ (Infinite sets) คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น เซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- เอกภพสัมพัทธ์ (Relative universe) คือ เซตที่กำหนดขอบเขตของสิ่งที่ต้องการศึกษาเขียนแทนด้วย U
- ขนาดของเซตจำกัด A เขียนแทนด้วย $|A|$ ให้หมายถึง จำนวนสมาชิกในเซต A
- สมาชิกที่ปรากฏขึ้นในเซตหนึ่งมากกว่า 1 ครั้ง ให้ถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดิมและนับจำนวนเป็น 1 เสมอ
- เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เรียกว่า "เซตว่าง" และใช้สัญลักษณ์ { } หรือ $\emptyset$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.4.1 จงเขียนเซตตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

A = {a โดยที่ a เป็นเดือน 3 เดือนแรกของปีหนึ่งๆ} จะได้ว่า A = {มกราคม, กุมภาพันธ์, มีนาคม}

B = {b โดยที่ b เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 0} จะได้ว่า B = {1, 2, 3, 4, ...}

C = {c โดยที่ c เป็นตัวประกอบของ 30} จะได้ว่า C = {1,2,3,5,6,10,15,30}

D = {d โดยที่ d เป็นเดือนที่มีจำนวนวันมากกว่า 31 วัน} จะได้ว่า D = { }

ซึ่งเราจะได้ว่า มกราคม ∈ A, $2 \in B$ และ $5 \in C$ เป็นต้น

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.1 จงเขียนเซตต่อไปนี้ ในรูปแบบการแจกแจงสมาชิก

1) เซตของอาหารที่ฉันชอบ = ...

2) เซตของเพื่อนสนิทของฉัน =..

3) เซตของจำนวนเต็มที่น้อยกว่า 6 =..

4) เซตของจำนวนเต็มลบที่เป็นเลขหลักเดียว =..

5) เซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ =..

❖ ตัวอย่างของเซตที่ควรทราบ

ตารางที่ 5 ตัวอย่างของเซตที่ควรทราบ

สัญลักษณ์	ความหมาย	เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น
I^+	เซตของจำนวนเต็มบวก	$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
I^-	เซตของจำนวนเต็มลบ	$\{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$
I หรือ $\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม	$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ	$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ นั่นคือ $\mathbb{N} \in I$
P	เซตของจำนวนเฉพาะที่เป็นบวก	$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ	
$\mathbb{Q}^c$	เซตของจำนวนอตรรกยะ	
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง	

ข้อสังเกต เซตบางประเภทไม่สามารถเขียนเป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.2 จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าข้อใดถูก และข้อใดผิด พร้อมทั้งแสดงเหตุผลด้วย

ข้อ	รูปแบบ	ถูก หรือ ผิด	คำอธิบาย
1	$2 \neq \{2\}$	....	....
2	$\{3\} = \{x \in I \mid x^2 = 9\}$	....	....
3	$\{2\} = \{x \in I \mid x^3 \leq 8\}$	....	....

4	$\{x \in I \mid x^3 \leq 8\}$ เป็นเซตอนันต์	....	....
5	$\{x \in I \mid x^2 < 0\} = \emptyset$	....	....
6	$\{x \in I^- \mid -5 < x < 0\}$ เป็นเซตอนันต์	....	....
7	$\{2,2,2,1,1,2\} = \{1,2\}$	....	....
8	$\{2,5,1,4,3\} = \{1,2,3,4,5\}$	....	....

❖ ความสัมพันธ์ของเซต และการกระทำกันระหว่างเซต

สับเซต (Subset) : เซต A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวในเซต A เป็นสมาชิกของเซต B และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \subset B$ (และ $A \not\subset B$ แทนเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B) เช่น จากตัวอย่างที่ 1.4.1 จะเห็นว่า $C \subset B$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ C เป็นสมาชิกของ B ด้วย

การเท่ากันของเซต : A = B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

เพาเวอร์เซต (Power set) : เพาเวอร์เซตของ A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของ A และ ถ้า A มีจำนวนสมาชิก n ตัว แล้วเพาเวอร์เซตของ A จะมีจำนวนสมาชิกทั้งหมด 2^n ตัว เราเขียน P(A) แทนเพาเวอร์เซตของ Aเช่น ถ้ากำหนดให้ A = {1,2,3 } แล้ว P(A)={{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}, ∅}

การยูเนียนกันของเซต (Union) : เซต A ยูเนียนเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่มาจากเซต A <u>หรือ</u> เซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ AUB และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$A \cup B = \{x$ โดยที่ $x \in A$ หรือ $x \in B\}$

การอินเตอร์เซคชันของเซต (Intersection) : เซต A อินเตอร์เซคเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่มาจากเซต A <u>และ</u>เซต B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$A \cap B = \{x$ โดยที่ $x \in A$ และ $x \in B\}$

ผลต่างระหว่างเซต (Difference) : ผลต่างของเซต A และเซต B คือ เซตใหม่ที่ประกอบไปด้วยสมาชิกทั้งหลายที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A-B และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$A - B = \{x$ โดยที่ $x \in A$ และ $x \notin B\}$

คอมพลีเมนต์ (Complement) : คอมพลีเมนต์ของเซต A คือ เซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกที่ไม่ได้อยู่ใน A แต่อยู่ในเอกภพสัมพัทธ์ U ใช้สัญลักษณ์คือ A^c และเขียนเป็นแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

$A^c = \{x$ โดยที่ $x \in U$ และ $x \notin A\}$

❖ การหาจำนวนสมาชิกของเซต

ในการหาจำนวนสมาชิกของเซตที่เกิดจากการกระทำกันระหว่าง 2 เซตขึ้นไปนั้น สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.2}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{1.3}$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \tag{1.4}$$

$$|A^c| = |U| - |A| \tag{1.5}$$

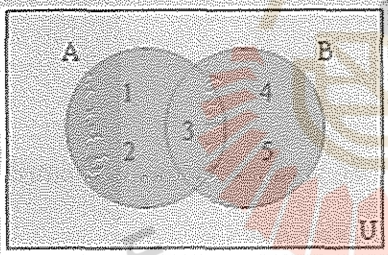
ข้อควรจำ ในตำราบางเล่ม จะใช้สัญลักษณ์ " $n(A)$ " แทนจำนวนสมาชิกของเซต A

ตัวอย่างที่ 1.4.2 กำหนดให้ A ={1, 2, 3} B= {3, 4, 5} และเอกภพสัมพัทธ์ U = {1, 2, 3, 4, 5}

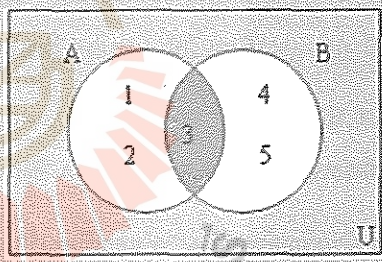
จงหา $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, และ A^c

วิธีทำ เราสามารถใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์(Venn-Euler diagram) แสดงได้ดังนี้

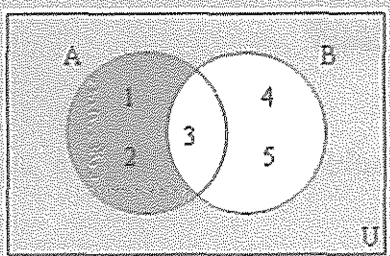
$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$



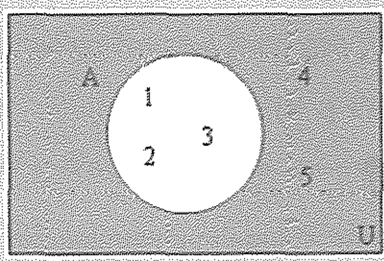
$A \cap B = \{3\}$



$A - B = \{1,2\}$



$A^c = \{4,5\}$

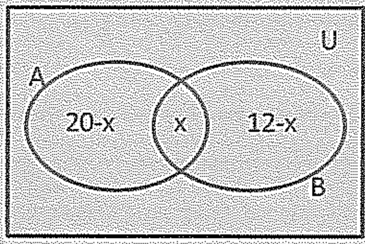


ตัวอย่างที่ 1.4.3 กำหนดให้ $|U| = 25$, $|A| = 20$, $|B| = 12$ และ $|(A \cup B)^c| = 4$

จงหา $|A \cap B|$

วิธีทำที่ 1

ให้ x เป็นจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ ดังแผนภาพทางขวามือนี้



เนื่องจากจำนวนสมาชิกทั้งหมดในเอกภพสัมพัทธ์ เท่ากับ 40

จึงได้ว่า $(20 - x) + x + (12 - x) = 25$

ดังนั้น $x = 11 = |A \cap B|$

วิธีทำที่ 2

จากโจทย์ $|(A \cup B)^c| = 4$ และ $|U| = 25$ จึงได้ว่า $|A \cup B| = 21$

ใช้สูตร (1.2) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

แทนค่า จะได้ว่า $21 = 20 + 12 - |A \cap B|$

$|A \cap B| = 11$

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.4 กำหนดให้ $U = \{-5, -4, -3, -2, 1, \ldots, 6, 7, 8\}$, $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า $4\}$ และ $B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่$\}$

1) จงเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ แสดงความสัมพันธ์ของเซตทั้ง 3 นี้

....

....

....

....

....

....

....

2) $|A \cup B|$ = ... และ $|A \cap B|$ = ...

แบบฝึกทักษะที่ 1.4.5 จากการสอบถามนักเรียนจำนวน 100 คน เกี่ยวกับการใช้เวลาว่าง พบว่า มี

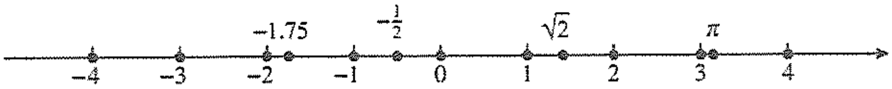
- 20 คน ที่ชอบทั้งเล่นกีฬาและเล่นดนตรีและดูภาพยนตร์
- 42 คน ที่ชอบเล่นดนตรีและชอบดูภาพยนตร์
- 38 คน ที่ชอบเล่นกีฬาและเล่นดนตรี
- 35 คน ที่ชอบเล่นกีฬาและดูภาพยนต์
- 62 คน ที่ชอบดูภาพยนด์
- 55 คน ที่ชอบเล่นดนตรี
- 48 คน ที่ชอบเล่นกีฬา

จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่ 1) ชอบกีฬาอย่างเดียว 2) ชอบดนตรีอย่างเดียว 3) ชอบดูภาพยนต์อย่างเดียว

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.4.6</u> นักเรียนห้องหนึ่งมี 48 คน ทำการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ และ ภาษาไทย ปรากฏผลดังนี้ มีนักเรียน สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ 20 คนสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษ 15 คน สอบผ่านวิชาภาษาไทย 25 คน สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว 10 คน สอบตกทั้ง 3 วิชา 3 คน จงหาว่า นักเรียนที่สอบได้ทั้งวิชาภาษาไทย และ ภาษาอังกฤษ มีกี่คน โดยวิธีการใช้แผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ และการพิจารณาใช้สูตร (1.2)-(1.5)

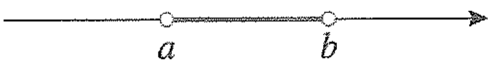
1.5 ช่วง (Intervals)

ในเรื่องแคลคูลัสซึ่งเป็นแขนงหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญเป็นอย่างมากในด้านของการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ มักจะเกี่ยวข้องกับเซตต่าง ๆ ของจำนวนจริง ซึ่งถูกอ้างถึงในนามของ "ช่วง" ที่ปรากฏอยู่บนเส้นจำนวน ซึ่งตัวอย่างของเส้นจำนวน ดูจากแผนภาพข้างล่างนี้



ตัวอย่างเช่น ถ้า $a < b$ แล้ว ;

- **"ช่วงเปิด"** จาก a ถึง b คือ ส่วนของเส้นจำนวนที่เริ่มจากจุด a ไปยังจุด b **ซึ่งไม่รวมจุดเริ่มต้น** (คือ a) และไม่**รวมจุดสิ้นสุด**(คือจุด b) ดังรูป



ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ และเซต ได้คือ $(a,b) = \{x\,|a < x < b\}$

- **"ช่วงปิด"** จาก a ถึง b คือ ส่วนของเส้นจำนวนที่เริ่มจากจุด a ไปยังจุด b ซึ่งรวมทั้งจุดเริ่มต้น (คือ a) และรวมจุดสิ้นสุด(คือจุด b) ดังรูป

ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ และเซต ได้คือ $(a,b) = \{x\,|a \le x \le b\}$

นอกจากนี้ ยังมีช่วงที่รวมจุดใดจุดหนึ่งเพียงจุดเดียว ซึ่งอาจเป็นจุดเริ่มต้น หรือ จุดสิ้นสุดก็ได้ ช่วงเหล่านี้ เรียกว่า "ช่วงครึ่งเปิด-ครึ่งปิด" ยิ่งไปกว่านั้น ช่วง ยังสามารถขยายไปยังถึงค่าอนันต์ในทิศทางใดทิศทางหนึ่งของเส้นจำนวน รูปแบบต่างๆ ของช่วงได้สรุปไว้ในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 6 ช่วงต่างๆ บนเส้นจำนวนจริง พร้อมสัญลักษณ์

ช่วง	เซต	บนเส้นจำนวน	ประเภท
(a,b)	$\{x\,|a < x < b\}$	a b	ช่วงเปิด
$[a,b]$	$\{x\,|a \le x \le b\}$	a b	ช่วงปิด
$[a,b)$	$\{x\,|a \le x < b\}$	a b	ช่วงครึ่งปิด-ครึ่งเปิด
$(a,b]$	$\{x\,|a < x \le b\}$	a b	ช่วงครึ่งเปิด-ครึ่งปิด
$(-\infty,b]$	$\{x\,|x \le b\}$	b	ช่วงปิด
$(-\infty,b)$	$\{x\,|x < b\}$	b	ช่วงเปิด
$[a,+\infty)$	$\{x\,|a \le x\}$	a	ช่วงปิด
$(a,+\infty)$	$\{x\,|a < x\}$	a	ช่วงเปิด
$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$		ช่วงเปิดและปิด

__ข้อสังเกต__ ช่วงต่างๆ ที่ปรากฏในตารางข้างบนนี้ ล้วนแล้วแต่เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริงทั้งสิ้น

__ตัวอย่างที่ 1.5.1__ สำหรับการกระทำกับของช่วงตั้งแต่ 2 ช่วงขึ้นไป เพื่อการเห็นภาพที่ชัดขึ้น มักจะพิจารณาช่วงในรูปของเซต(และกำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง) แทน ดังนี้

1) $(0,5) \cup (1,7) = \{x\,|0 < x < 5\} \cup \{x\,|1 < x < 7\} = \{x\,|0 < x < 7\} = (0,7)$

2) $(-\infty,1) \cap [0,+\infty) = \{x\,|x < 1\} \cap \{x\,|0 \le x\} = \{x\,|0 \le x < 1\} = [0,1)$

3) $(-\infty,0) \cap (0,+\infty) = \{x\,|x < 0\} \cap \{x\,|0 < x\} = \emptyset$

__แบบฝึกทักษะที่ 1.5.1__ จงพิจารณาการกระทำกันของช่วงแต่ละกลุ่มในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยการเขียนแทนในรูปของเซตและวาดภาพเส้นจำนวนประกอบด้วย

1) $[(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)] \cap (-3,3]$

....

....

....

2) $[(-10,0) \cap (-5,5)] \cap (0,+\infty)$

....

....

3) $[\mathbb{R} - (-\infty,-1)] \cap (100,102)$

....

....

....

4) $[(-\infty,-3) \cup (-2,-1)] \cap [(3,+\infty) \cup (1,2)]$

....

....

....

1.6 อสมการ (Inequalities) และการหาช่วงของผลเฉลย (Solutions Finding)

❖ ความหมายของอสมการ

อสมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงการไม่เท่ากันของสิ่ง 2 สิ่ง โดยมีเครื่องหมาย "มากกว่า $>$" "น้อยกว่า $<$" "น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\leq$" "มากกว่าหรือเท่ากับ $\geq$" หรือ เครื่องหมาย "ไม่เท่ากับ $\neq$" เช่น $3x + 1 \geq 5$ และตัวที่ไม่ทราบค่า x เราเรียกว่า "ตัวแปร"

อสมการมีอยู่หลายประเภท ทั้งแบบที่เป็นเชิงเส้น และไม่เป็นเชิงเส้น ตัวแปรเดียว หลายตัวแปร กำลังหนึ่ง หรือมากกว่า อย่างไรก็ตาม ในเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้ จักได้มีการนำเสนอเพียงบางรูปแบบของอสมการเท่านั้น

❖ คุณสมบัติที่สำคัญบางประการของระบบอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้วจะได้ว่า $a < c$

   เช่น $-6 < -1$ และ $-1 < 0$ แล้วจะได้ว่า $-6 < 0$

2. ถ้า $a < b$ แล้วจะได้ว่า $a + c < b + c$ และ $a - c < b - c$

   เช่น $-5 < 5$ แล้วจะได้ว่า $-5 + 1 < 5 + 1$ และ $-5 - 1 < 5 - 1$

3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้วจะได้ว่า $ac < bc$

   เช่น $-5 < 3$ แล้วจะได้ว่า $-5(2) < 3(2)$ ซึ่งในที่นี้ $c = 2$

4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้วจะได้ว่า $ac > bc$

   เช่น $-5 < 3$ แล้วจะได้ว่า $-5(-2) > 3(-2)$ ซึ่งในที่นี้ $c = -2$

5. ถ้า a, b เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือ เป็นจำนวนลบทั้งคู่ และ $a < b$ แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

เช่น $-5 < -3$ แล้วจะได้ว่า $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.6.1</u> จงพิจารณาหาผลลัพธ์ที่เกิดจากการดำเนินการที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

กำหนด	การดำเนินการ	ผลลัพธ์ที่ได้
$-5 < 3$	บวกเข้าด้วย 8 ทั้งสองข้าง	....
$-5 < 3$	ลบออกด้วย 4 ทั้งสองข้าง	....
$-5 < 3$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย 2	....
$-5 < 3$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย -2	....
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย 5	....
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย -5	....
$4 < 10$	คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย $-\frac{1}{2}$	....
$-4 < -1$	นำแต่ละข้างไปหาร 1	

❖ อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและการหาผลเฉลย

อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ อสมการที่มีตัวแปรเพียง 1 ตัว และมีกำลังสูงสุดเป็น 1 เท่านั้น เช่น $3x + 1 \geq -2x + 5$ หรือ $5x \neq -10x$ เป็นต้น

ในการหาผลเฉลยของอสมการนี้ คำตอบจะสามารถมีจำนวนอนันต์ ดังนั้น เวลาตอบ มักจะให้เป็นเซตหรือช่วงของผลเฉลย ลักษณะการแก้อสมการประเภทนี้ สามารถดูได้จากตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1.6.1</u> จงหาเซตหรือช่วงของคำตอบ ของอสมการ $3 + 7x \leq 2x - 9$

วิธีทำ

การดำเนินการ	ผลที่ได้
โจทย์กำหนด	$3 + 7x \leq 2x - 9$
บวกเข้าทั้งสองข้างด้วย -3	$7x \leq 2x - 12$
ลบออกทั้งสองข้างด้วย $2x$	$5x \leq -12$
คูณเข้าทั้งสองข้างด้วย $\frac{1}{5}$	$x \leq -\dfrac{12}{5}$

ดังนั้นช่วงของคำตอบของอสมการนี้คือ $(-\infty, -\frac{12}{5}]$

ข้อสังเกต การดำเนินการทางพีชคณิตดังแสดงในตัวอย่างที่1.6.2 นี้ จะให้ผลเช่นเดียวกับหลักการ "ย้ายข้าง" ที่นักศึกษาส่วนใหญ่เข้าใจกัน

<u>แบบฝึกทักษะที่ 1.6.2</u> จงพิจารณาหาช่วงหรือเซตของคำตอบของอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x - 2 \geq 13 - 2x$

2) $\sqrt{2}x + 10 \leq -3\sqrt{2}x + 20$

3) $2x + 3 < 1 - \frac{x}{2}$

4) $\frac{x}{2} + \frac{2}{5} > \frac{1}{10}$

5) $\frac{x}{2} + \frac{2}{5} \geq \frac{x}{10} - 2$

6) $\frac{2x}{5} + 7 > 13$

1.7 สมการ (Equations) และการหาผลเฉลย (Solution Finding)

❖ ความหมายของสมการ

สมการ หมายถึง การเท่ากัน สมการในวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย " = " แสดงการเท่ากันของทั้งสองข้างของเครื่องหมาย "เท่ากับ" ดังกล่าว สมการอาจมีความ "เป็นจริง" หรือไม่มีก็ได้ เช่น

- สมการที่เป็นจริง เช่น 10 - 1 = 9
- สมการที่ไม่เป็นจริง เช่น 19 / 8 = 4

ประโยคสัญลักษณ์ที่ไม่ใช่เครื่องหมาย " = " ถือว่าไม่เป็นสมการ และถ้าในสมการมีตัวไม่ทราบค่ารวมอยู่ด้วย เราเรียกตัวไม่ทราบค่านั้นว่า "ตัวแปร" หรือ "ตัวไม่ทราบค่า (Unknowns)" เช่น $2x + 5 = 10$ เราเรียก x ว่าเป็นตัวแปร

❖ สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่สามารถถูกจัดรูปได้ในรูปแบบ $Ax = B$ เมื่อ $A \neq 0$ และ B เป็นจำนวนจริงใดๆ และ x เป็นตัวแปรที่เราต้องการทราบค่า ตัวอย่างของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้แก่ ทุกข้อในแบบฝึกทักษะที่ 1.5.2

การหาผลเฉลยหรือการแก้สมการ หมายถึง การหาค่าของตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าที่ปรากฏอยู่ในสมการ และอาจมีจำนวนมากกว่า 1 ตัวก็ได้ ในกระบวนการแก้สมการนี้ อย่างง่ายที่สุดคือการจัดรูปให้ตัวแปรมารวมกันอยู่ฝั่งเดียวของสมการ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.1 จงหาค่าของ x ที่ทำให้แต่ละสมการต่อไปนี้เป็นจริง

วิธีทำ

1) $2x - 20 = 24$

$$2x = 24 + 20$$
$$2x = 44$$
$$x = \frac{44}{2}$$

ดังนั้น $x = 22$

2) $\frac{x+3}{2} = 3x$

$$x + 3 = 2(3x) = 6x$$
$$x + 3 - 6x = 0$$
$$(1-6)x + 3 = 0$$
$$-5x = -3$$

ดังนั้น $x = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

3) $3x - 5 = \frac{x}{2} - 1$

$$3x - 5 = \frac{x-2}{2}$$
$$2(3x-5) = x - 2$$
$$6x - 10 = x - 2$$
$$6x - x = -2 + 10$$
$$(6-1)x = 8$$
$$(5)x = 8$$

ดังนั้น $x = \frac{8}{5}$

แบบฝึกทักษะที่ 1.7.1 จงพิจารณาหาค่าของ x ที่ทำให้แต่ละสมการในข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

1) $x - 2 = 13 - 2x$

....

2) $\sqrt{2}x + 10 = -3\sqrt{2}x + 20$

....

3) $\frac{2+3x}{x} = 1$

....

4) $\frac{x}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

....

5) $\frac{x}{2}+\frac{2}{5}=\frac{x}{10}-2$

6) $\sqrt{3x}+7=10$

7) $\frac{2+x}{2x}+\frac{-3}{7}=1$

8) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{2x}{5}=-1$

❖ **สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร และการแก้**

สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร หมายถึง สมการที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots a_nx_n=b$ เมื่อ $a_1,a_2,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}-\{0\}$ และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ เช่น $3x+2y-z=5$

ในการแก้สมการประเภทนี้ คือ มี 1 สมการ แต่มีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว โดยทางคณิตศาสตร์เป็นที่ทราบกันดีว่า สมการรูปดังกล่าวนี้ สามารถมีผลเฉลยได้จำนวนนับไม่ถ้วน ดูตัวอย่างข้างล่างนี้

บันทึก

ตัวอย่างที่ 1.7.2 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2x - 20y = 2$

วิธีทำ สมการ $5x - 20y = 2$ มีความเทียบเท่ากับ สมการ $5x = 20y + 2$ (โดยการบวกเข้าด้วย $20y$ ทั้งสองข้างนั่นเอง) และยังเทียบเท่ากับ $x = \frac{20y+2}{5}$ ดังนั้น เราจะเห็นว่า เมื่อเรากำหนดค่า y ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ เราก็จะได้ค่าของ x ทันที แสดงว่า ค่า y สามารถเป็นจำนวนจริงตัวไหนก็ได้ ก็จะได้ค่าของ x ที่เป็นคู่ของมัน ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง ตัวอย่าง คือ เมื่อ $y = 1$ จะได้ $x = \frac{22}{5}$ และเมื่อ $y = 2$ จะได้ $x = \frac{42}{5}$ อย่างนี้ไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด จึงบอกได้ว่า จำนวนผลเฉลยของสมการนี้ มีจำนวนไม่จำกัดหรือเป็นจำนวนอนันต์ นั่นเอง

❖ ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร และการแก้

ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร หมายถึง กลุ่ม(ที่มีจำนวนจำกัด)ของสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร ตัวอย่างเช่น ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 4 สมการ และมีตัวแปรทั้งหมดเป็นจำนวน 6 ตัวแปร เขียนได้ ดังนี้

$$5x + 2y - 10z - w + 3u - 2v = 5 \tag{1.6}$$
$$x + y - 12z - w + u - 12v = 20 \tag{1.7}$$
$$-5x + 6y - z + 3u - 5v = -32 \tag{1.8}$$
$$2y - 10z - 3u - 22v = 25 \tag{1.9}$$

ซึ่งเราจะกล่าวว่า "ผลเฉลย" ของระบบสมการนั้น คือ กลุ่มของค่าของตัวแปร x, y, z, w, u, v ที่ทำให้แต่ละสมการข้างบนนี้ เป็นจริงพร้อมกัน และจะเรียกผลเฉลยชุดดังกล่าวว่า "เซตของผลเฉลย" ของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อเรามีระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรอยู่ระบบหนึ่ง เราจะได้อย่างใดอย่างหนึ่งในข้อต่อไปนี้เสมอ

1. ระบบสมการดังกล่าวไม่มีผลเฉลย หรือ
2. ระบบสมการดังกล่าวมีผลเฉลยเพียง 1 ชุดผลเฉลย (หรือมีเพียง 1 เซตของผลเฉลย) หรือ
3. ระบบสมการดังกล่าวมีจำนวนผลเฉลยที่นับไม่ถ้วน หรือมีจำนวนผลเฉลยเป็นอนันต์

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรนั้น สามารถทำได้หลายวิธี เช่น โดยวิธีกำจัดตัวแปร โดยการใช้การวาดกราฟ โดยปกติแล้ว 2 วิธีไม่เป็นที่สะดวกนักเมื่อเรามีระบบสมการที่ใหญ่ที่ประกอบด้วยหลายตัวแปรและหลายสมการ ดังนั้น เมื่อเรามีระบบสมการเชิงเส้นที่ใหญ่ขึ้น จำเป็นที่จะต้องใช้ความรู้ทางเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ ซึ่งบรรจุอยู่ในหัว 2.4 ไปในเอกสารนี้ ดังนั้น ในเบื้องต้นนี้ จักขอยกตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปรก่อน ซึ่งสามารถแสดงการหาผลเฉลยได้โดยง่าย ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.3 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ระบบสมการสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรข้างล่างนี้ เป็นจริง

$$2x + y = 2 \quad (1)$$
$$3x - y = 8 \quad (2)$$

วิธีทำ จากสมการ (1) เราจะได้ว่า $y = 2 - 2x$ (3)

นำค่า y ที่ได้ใน (3) ไปแทนใน (2) จะได้ $3x - (2 - 2x) = 8$ (4)

ทำหารแก้สมการ (4) เพื่อหาค่า x

$$3x - 2 + 2x = 8$$
$$(2+3)x = 8 + 2$$
$$5x = 10$$
$$x = \frac{10}{5} = 2 \quad (5)$$

นำค่า x ที่ได้ใน (5) ไปแทนใน (3) เพื่อหาค่า y $\quad y = 2 - 2x = 2 - 2(2) = -2$

ดังนั้น จึงได้ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวนี้คือ $(x, y) = (2, -2)$

เราสามารถหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นในตัวอย่าง 1.7.3 ได้ โดยใช้วิธีกำจัดตัวแปรที่ละตัว ได้เช่นกัน ดังตัวอย่างที่ 1.7.4

ตัวอย่างที่ 1.7.4 จงหาค่าของ x, y ที่ทำให้ระบบสมการสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรข้างล่างนี้ เป็นจริง

$$2x + y = 2 \quad (1)$$
$$3x - y = 8 \quad (2)$$

วิธีทำ นำสมการที่ (1) รวมเข้ากับสมการที่ (2) เพื่อกำจัดตัวแปร y จึงได้ทันทีว่า

$$(2x + 3x) + (y - y) = (2 + 8) \quad (3)$$
$$5x = 10$$

ดังนั้น

$$x = \frac{10}{5} = 2 \quad (4)$$

นำค่า x ที่ได้ใน (4) ไปแทนใน (2) เพื่อหาค่า y

$$3(2) - y = 8$$
$$-y = 8 - 3(2) = 2$$
$$y = -2$$

ดังนั้น จึงได้ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวนี้คือ $(x, y) = (2, -2)$

<u>**แบบฝึกทักษะที่ 1.7.2**</u> จงใช้วิธีการที่ถนัดในการหาค่าของ $x,\ y$ ที่ทำให้แต่ละระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรในข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1) $-x + 5y = -20$
$2x + y = 3$

2) $2x + 10y = 20$
$x - 2y = 13$

3) $\frac{2}{3}x + 5y = \frac{5}{3}$
$\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}y = \frac{1}{9}$

4) $2 = 20\frac{x}{y} - 15$
$\frac{y}{x} - 2 = 10$

5) $\frac{x}{2}+\frac{2}{5}=\frac{y}{10}-2$

$\sqrt{3}x+7y=10$

6) $2+x+\frac{-3}{7}=y$

$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{2y}{5}=-1$

7) $\sqrt{2x+5y}=3$

$-x-2y=1$

8) $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=\frac{y}{10}-2x+5$

$\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}=\frac{3y}{5}-1$

❖ ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ในเชิงกราฟ

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ใน 2 มิติ ในเชิงกราฟแล้ว คือ การหาจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้นที่อธิบายโดยสมการแต่ละสมการในระบบนั้น ดังนั้น จึงเกิดกรณีที่เป็นไปได้อยู่ 3 กรณี นั่นคือ เส้นตรง 2 เส้นนั้น

1. ขนานกัน นั่นคือ ไม่ตัดกัน หมายถึง ไม่มีผลเฉลย

   เช่น เส้นตรง $y = 2x + 1$ และเส้นตรง $y = 2x - 21$

2. ตัดกัน ซึ่งหมายถึง มีผลเฉลย 1 ชุดผลเฉลย

   เช่น เส้นตรง $y = 2x + 1$ และเส้นตรง $y = 3x - 7$

3. เป็นเส้นเดียวกัน หมายถึง มีผลเฉลยเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน

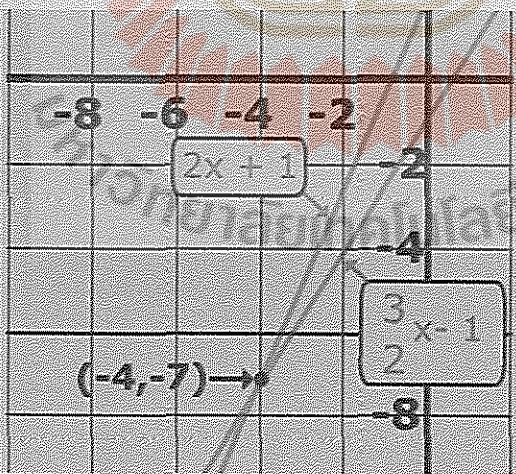
   เช่น เส้นตรง $y = 2x + 3$ และเส้นตรง $3y = 3x + 9$

<u>**ตัวอย่างที่ 1.7.5**</u> จงหาค่าพิกัด (x, y) ในระนาบ 2 มิติ ที่เป็นจุดตัดของเส้นตรง 2 เส้นที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งวาดกราฟแสดงจุดตัดนั้นด้วย

$$2x + 1 = y \quad (1)$$

$$2y = 3x - 2 \quad (2)$$

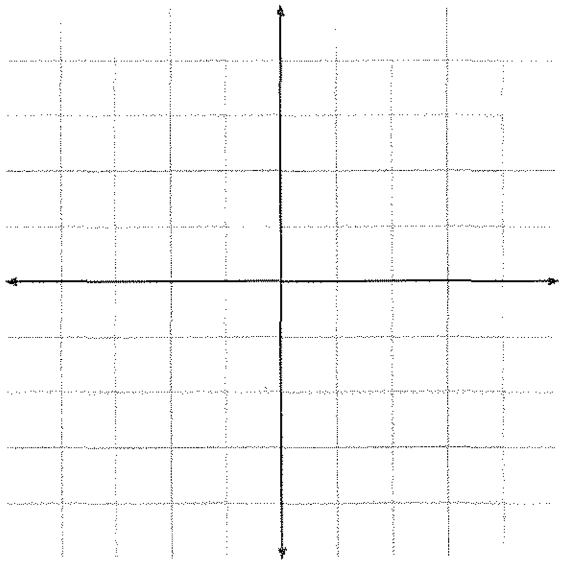
วิธีทำ โดยการใช้วิธีการหาผลเฉลยเหมือนในตัวอย่างที่ 1.7.3 หรือในตัวอย่างที่ 1.7.4 จะได้ผลเฉลยคือ $x = -4, y = -7$ ซึ่งเราสามารถเขียนกราฟของเส้นตรงทั้ง 2 เส้นนั้น พร้อมด้วยจุดตัดซึ่งเป็นผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าวได้ดังนี้ (โดยกำหนดให้แกน x คือแกนในแนวนอน และแกน y คือแกนในแนวตั้งในรูป)



<u>**แบบฝึกทักษะที่ 1.7.3**</u> โดยการแบ่งสเกลบนแกนที่เหมาะสม จงพิจารณาระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรแต่ละคู่ต่อไปนี้ว่ามีผลเฉลยหรือไม่ ถ้ามี ให้หาผลเฉลยนั้น และใช้การวาดกราฟ ในการยืนยันผลเฉลยนั้นด้วย

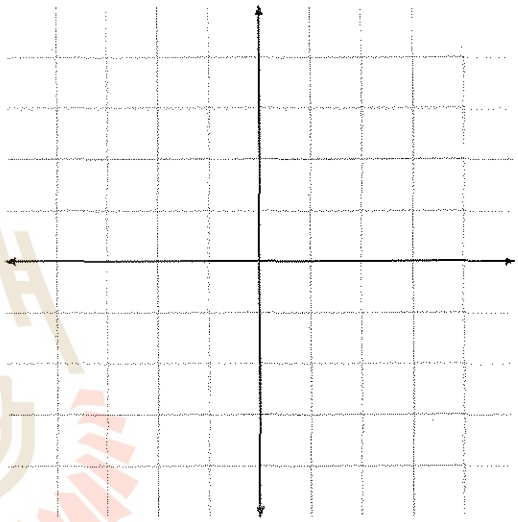
1) $2x - y + 1 = 0$

$4x - y - 1 = 0$



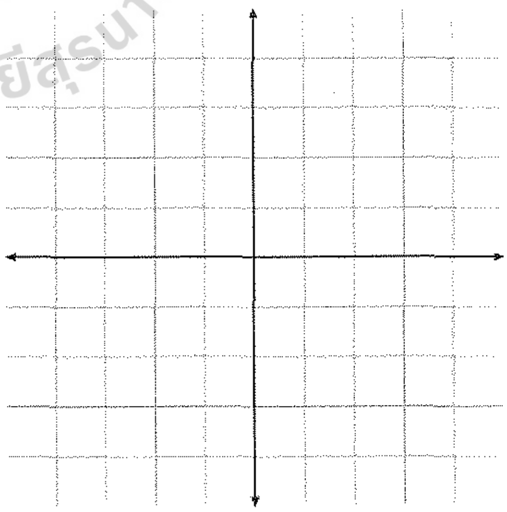
2) $x - 3y + 10 = 0$

$4x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$



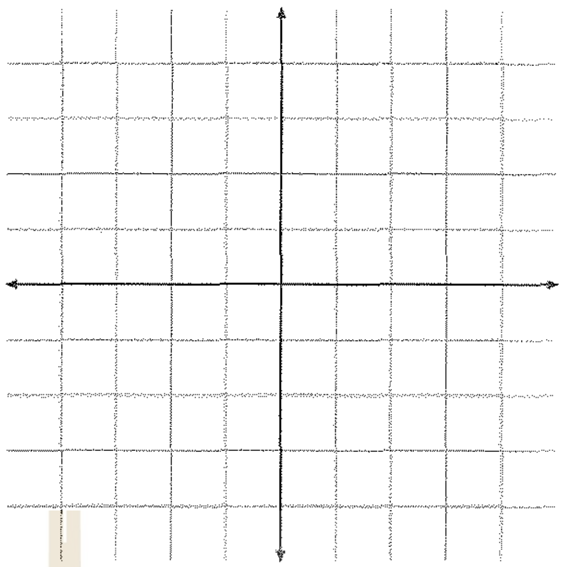
3) $5x - 10y = 2$

$x - y + 11 = 0$



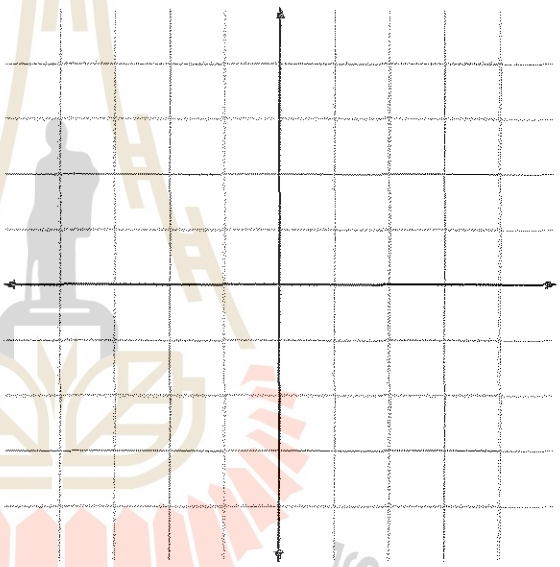
4) $x - 10 = y + 2$

$6x - 1 = y + 1$



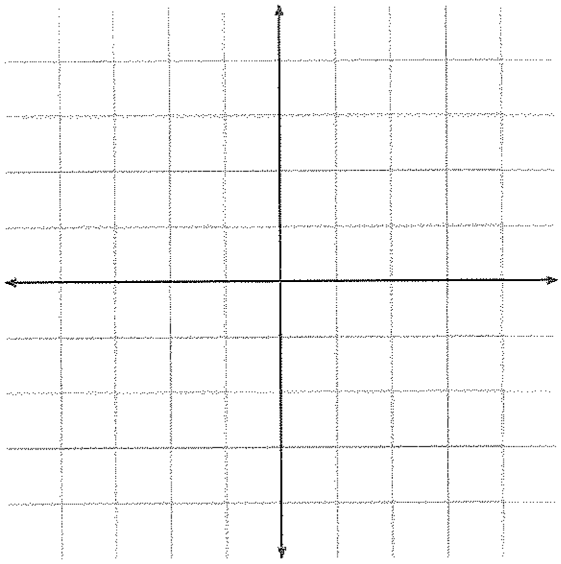
5) $4x - 1 = y + 5$

$x = y + 7$



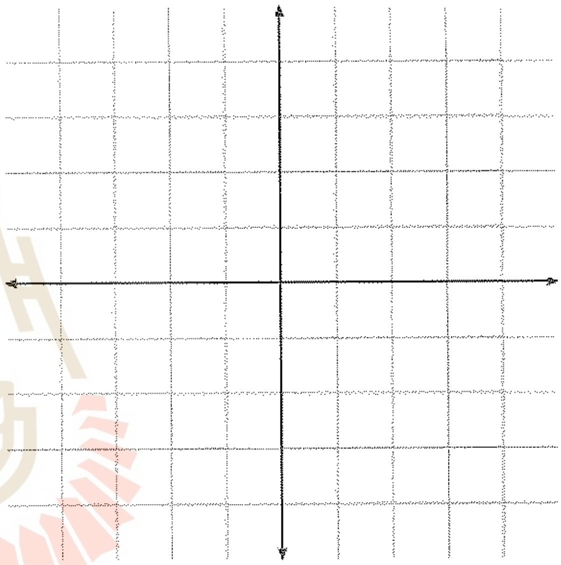
6) $3y - 10 = 8x + 20$

$6x - 11 = 3y + 1$



7) $x = y + 2$

$y = x + 5$



1.8 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปรมาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาในเรื่องของการนำกระบวนการแก้ระบบสมการดังกล่าวมาใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งการศึกษาเรื่องนี้ สิ่งที่นักศึกษาจะได้ศึกษาคือการเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือ การเปลี่ยนปัญหาจริงให้อยู่ในรูปของสมการ หรือระบบสมการทางคณิตศาสตร์ ต่อจากนั้น จะได้นำเอาวิธีการที่ศึกษาในหัวข้อที่แล้ว มาหาผลเฉลยของสมการหรือระบบสมการนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.7.6 จำนวน 2 จำนวน ซึ่งมีผลต่างเท่ากับ 6 และเมื่อรวมกันแล้วเท่ากับ 9 จงหาจำนวน 2 จำนวนนั้น

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนแรกคือ x และจำนวนที่สองคือ y และสมมติให้ x มากกว่า y

จากโจทย์ สองจำนวนมีผลต่างเท่ากับ 6 หมายถึง

$$x - y = 6 \qquad (1)$$

และสองจำนวนนี้รวมกันแล้วได้ 9 หมายถึง

$$x + y = 9 \qquad (2)$$

จากสมการที่ (2) เราจะได้ว่า $x = 9 - y$ และนำไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$(9 - y) - y = 6$$
$$-2y = 6 - 9$$
$$-2y = -3$$
$$y = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

นำค่า y ที่ได้ ไปแทนสมการที่ (1) เพื่อหาค่าของ x จะได้ว่า

$$x = 6 + y = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

ดังนั้น จำนวน 2 จำนวนนั้นคือ $\frac{3}{2}$ และ $\frac{15}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.7.7 ผลการแข่งขันกีฬาน้องใหม่ มทส. ปรากฏว่า วิชาติ ได้จำนวนเหรียญรวมมากกว่าดนัยอยู่ 4 เหรียญ และจำนวนเหรียญของทั้งคู่รวมกันได้ 28 เหรียญ จงหาว่า แต่ละคนได้เหรียญรวมคนละกี่เหรียญ

วิธีทำ กำหนดให้ x เป็นจำนวนเหรียญรวมที่วิชาติได้ และ

y เป็นจำนวนเหรียญรวมที่ดนัยได้ ในการแข่งกีฬาน้องใหม่ มทส ครั้งนี้

จากโจทย์ เราจะได้ว่า

$$x - y = 4 \qquad (1)$$

และ

$$x + y = 28 \qquad (2)$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยคือ $x = 16$ และ $y = 12$

นั่นคือ วิชาติได้เหรียญรวมทั้งหมด 16 เหรียญ และดนัยได้เหรียญรวมทั้งหมด 12 เหรียญ

ตัวอย่างที่ 1.7.8 ความยาวของสระว่ายน้ำรูป 4 เหลี่ยมผืนผ้าคิดเป็น 2 เท่าของความกว้าง และขอบสระมีความยาวทั้งหมดเป็น 120 จงหาความยาวและความกว้างของสระดังกล่าวนี้

วิธีทำ กำหนดให้ x เป็นความยาวของสระน้ำ และ

y เป็นความกว้างของสระน้ำ

จากโจทย์ เราจะได้ว่า

$$x = 2y \qquad (1)$$

และ

$$x + x + y + y = 120 \qquad (2)$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยคือ $x = 40$ และ $y = 20$

นั่นคือ สระน้ำนี้ มีความยาวเท่ากับ 40 หน่วย และยาวเป็น 20 หน่วย

แบบฝึกทักษะที่ 1.7.4 จงเปลี่ยนปัญหาต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร พร้อมทั้งหาผลเฉลยโดยวิธีที่ถนัด

1. ถ้าเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งยาวเป็น 278 เมตร และด้านยาวยาวมากกว่า 2 เท่าของด้านกว้างอยู่ 1 เมตร จงหาด้านกว้างและด้านยาวของสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้

....

....

....

....

2. คืนวันหนึ่ง ผู้จัดการโรงแรมราชสีมาฮาเฮได้เปิดห้องพักประเภทเดี่ยวให้ลูกค้าเช่าเป็นจำนวน 5 ห้อง และห้องคู่อีก 12 ห้อง ในราคารวม 3,900 บาท คืนต่อมา ผู้จัดการคนเดิมนี้ได้เปิดห้องเดี่ยวให้ลูกค้าเช่าเป็นจำนวน 9 ห้อง และห้องคู่อีก 10 ห้อง ในราคารวม 4,120 จงหาว่าราคาเช่าห้อง ของห้องแต่ละประเภท คือเท่าใด

....

....

....

....

....

3. ถ้าราคาตั๋วเข้าชมพิพิธภัณฑ์ผีเสื้อ มทส. สำหรับผู้ใหญ่เป็น 30 บาท และเด็ก 20 บาทต่อคน และในการจัดแสดงผีเสื้อครั้งหนึ่ง รายได้จากการขายตั๋วได้รวมกันเป็นเงิน 8,240 บาท และจำนวนตั๋วผู้ใหญ่ที่ขายไปรวมแล้ว คิดเป็น 2 เท่าของจำนวนตั๋วที่จำหน่ายให้กับเด็ก แล้ว จงหาว่า จำนวนตั๋วทั้งหมดที่จำหน่ายไป มีจำนวนเท่าใด

....

....

....

....

....

....

4. นายอุทิศ ได้เข้าร่วมการแข่งขันกีฬาน้องใหม่ มทส. ในประเภทกีฬาบาสเกตบอล และในการแข่งขันครั้งล่าสุด นายอุทิศสามารถทำแต้มได้ทั้งสิ้น 32 แต้ม โดยในนี้ ไม่มีประเภทชูต 3 แต้มเลย และเขาได้ทำการชูตทั้งหมดเป็นจำนวน 21 ครั้ง ซึ่งเป็นการชูตอยู่ 2 ประเภทคือ ประเภทปกติ (ครั้งละ 2 แต้มต่อครั้ง) และชูตลูกโทษ (ครั้งละ 1 แต้มต่อครั้ง) จงหาค่า นายอุทิศชูตลูกโทษไปทั้งหมดกี่ครั้ง

5. ถ้าเครื่องบินเล็กสามารถบินได้ระยะทาง 400 กิโลเมตร ใช้เวลาเท่ากับเวลาที่เครื่องบินลำใหญ่สามารถบินได้เป็นระยะทาง 1,000 กิโลเมตร และถ้า เครื่องบินลำใหญ่บินได้ด้วยความเร็วที่มากกว่าความเร็วของเครื่องบินลำเล็กอยู่ 300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง แล้ว จงหาความเร็วของเครื่องบินทั้งสองลำ (แนะ ระยะทาง เท่ากับ ความเร็วคูณด้วยเวลาที่ใช้)

6. นายคณิตขับรถด้วยความเร็วเฉลี่ยที่ 45 กิโลเมตรต่อชั่วโมงจากหมู่บ้าน ก. ไปถึงหมู่บ้าน ข. และขับต่อจากหมู่บ้าน ข. ไปยังหมู่บ้าน ค. ด้วยความเร็วเฉลี่ยที่ 49 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้าคณิตขับเป็นระยะทางรวมเท่ากับ 237 กิโลเมตรในเวลา 5 ชั่วโมง แล้ว จงหาระยะทางจากหมู่บ้าน ข. ไปยังหมู่บ้าน ค.

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exerciese)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย อสมการ และสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. จงหาคำตอบของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\frac{5}{8}(p-4)=2$
2. $p+\frac{1}{3}p=\frac{2}{3}$
3. $0.07x+9.95=12.47$
4. $-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
5. $\frac{x}{4}-\frac{3x}{2}=-\frac{1}{2}$
6. $2.4b+5.6=-11.2$
7. $4x+2=-28.4$
8. $\frac{1}{3}(x-9)=-1$
9. $\frac{2}{7}k-\frac{1}{14}k=-3$
10. $0.4(a+2)=2$
11. $\frac{1}{2}(x-2)=\frac{1}{2}$
12. $1.2c+2.6c=4.56$

2. จงหาช่วงของคำตอบของอสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $3 < -5\mathrm{n} + 2\mathrm{n}$

2) $6x + 2 + 6x < 14$

3) $-p - 4p > -10$

4) $18 \geq 5k + 4k$

5) $9 \geq -2m + 2 - 3$

6) $-3 - 6(4x + 6) > -111$

7) $6 - 4(6n + 7) \geq 122$

8) $-138 \geq -6(6b - 7)$

9) $167 < 6 + 7(2 - 7r)$

10) $5(6 + 3r) + 7 \geq 127$

11) $-8x + 2x - 16 < -5x + 7x$

12) $-1 - 6x - 6 > -11 - 7x$

13) $a - 6 \leq 15 + 8a$

14) $13 + 2v - 8 + 6 > -7 - v$

3. จากโจทย์ต่อไปนี้ จงหาผลเฉลย

3.1. จำนวนจำนวนหนึ่งเมื่อคูณเข้าด้วย 2 และนำไปรวมกับ 7 แล้วขะได้ผลลัพธ์คือ 93 ถามว่า จำนวนที่ว่านั้นคืออะไร

3.2. 5 เท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งลบออกด้วย 6 จะได้ค่าเท่ากับ 7 เท่าของตัวมันพอดี จำนวนที่ว่านี้คืออะไร

3.3. พิพัฒน์เป็นพนักงานเสริฟในร้างอาหารแห่งหนึ่งได้รับค่าจ้าง 5.75 ดอลล่าต่อชั่วโมง โดยมีทิปจากลูกค้าอีกด้วย ซึ่งโดยเฉลี่ยแล้วเขาจะได้ทิปเป็นเงิน 8.8 ดอลล่าต่อโต๊ะ ในแต่ละวันจงหาว่าถ้าวันหนึ่งเขาทำงาน 8 ชั่วโมงและได้เงินรวมเป็นจำนวนทั้งสิ้น 169.2 ดอลล่า แล้วจงหาว่าที่ร้านอาหารนี้มีกี่โต๊ะ

3.4. รถไฟสองขบวนออกจากสถานีพร้อมกัน ขบวนแรกไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 50 กม.ต่อชั่วโมง ส่วนอีกขบวนไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 55 กม.ต่อชั่วโมง จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าไหรรถไฟสองขบวนนี้จึงจะอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 315 กม.พอดี

3.5. ในฤดูอากาศอบอุ่นเราสามารถประมาณอุณหภูมิได้จากการนับจำนวนครั้งที่จิ้งหรีดร้องใน 1 นาที โดยที่อุณหภูมิจะลดลง 40 ฟาเรนไฮท์ จะเท่ากับ ¼ เท่าของจำนวนที่จิ้งหรีดร้องในหนึ่งนาที จงหาว่า

3.5.1 จิ้งหรีดจะร้องประมาณกี่ครั้งต่อนาที ถ้าพบว่าอุณหภูมิอยู่ที่ 90 องศาฟาเรนไฮท์

3.5.2 ถ้าจากการบันทึกพบว่าจิ้งหรีดร้อง 48 ครั้งในหนึ่งนาที แล้วอุณหภูมิควรเป็นกี่องศาฟาเรนไฮท์

3.6. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งเมื่อไปรวมกับจำนวนเต็มบวกที่อยู่ถัดไป (ตัวที่ 1) และตัวถัดไปอีก (ตัวที่ 2) แล้วจะมีค่าเท่ากับ 9 จำนวนเต็มบวกนี้คืออะไร

3.7. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านประกอบด้านแรกยาวเป็น 1/3 ของเส้นรอบรูปและด้านประกอบด้านที่ 2 ยาวเป็น 1/5 เท่าของเส้นรอบรูป และมีด้านประกอบด้วนที่ 3 ยาว 7 เมตร จงหาว่าความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมนี้ยาวเท่าไหร

3.8. เรือสำราญลำหนึ่งใช้เวลาในการแล่นทวนกระแสน้ำระยะทาว 360 กม.เป็น 1.5 เท่าของเวลาที่ใช้แล่นกลับตามกระแสน้ำ ถ้าเรือลำนี้แล่นที่ความเร็ว 15 กม.ต่อชั่วโมงในน้ำนิ่ง แล้วกระแสน้ำมีความเร็วเท่าใด

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

1.จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้

1.1) $y = -4x + 5$
$y = 3x - 9$

1.2) $y = -3x + 7$
$y = 2x - 3$

1.3) $x + 3y = 6$
$x - 3y = 6$

1.4) $y = x + 6$
$y = -2x$

1.5) $y = 4x - 3$
$y = -2x + 9$

1.6) $3x - 2y = 4$
$y = -2x + 5$

1.7) $3x - 2y = 6$
$x - y = 2$

1.8) $x + y = 4$
$2x + 2y = 10$

1.9) $3x+4y=10$
$-6x+3y=-9$

1.10) $7x+4y=-5$
$-2x+5y=26$

1.11) $2x+4y=-12$
$3x + 5y = -16$

1.12) $x+2y=5$
$2x+4y=1$

1.13) $7x - 2y=2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = \frac{1}{7}$

1.14) $6x+5y=28$
$7x + 2y = 2$

1.15) $3x-2y=1$
$9x-6y=3$

1.16) $3x+2y=1$
$4x-3y=26$

1.17) $3x-2y=4$
$12x -8y = 16$

1.18) $2x+4y=11$
$6x+2y=3$

2.ร้านเสือผ้าแห่งหนึ่งขายกางเกงยีนส์และเสื้อเชิ้ตในราคาที่แตกต่างกัน อนิรุตเป็นเด็กบ้านนอกเมื่อเก็บเงินได้จำนวนหนึ่งจึงได้ไปซื้อกางเกงยีนส์สองตัวและเสื้อยืดอีกหกตัวในราคารวมที่ 60 บาท สุทิวัสเป็นเด็กในเมืองเมื่อเก็บเงินได้จำนวนหนึ่งจึงได้ไปซื้อกางเกงยีนส์สี่ตัวเสื้อเชิ้ตสามตัวในราคารวมที่ 75 บาท

2.1 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่อธิบายสถานการณ์นี้ (กำหนดให้ x แทนราคาของกางเกงยีนส์และ y แทนราคาของเสื้อเชิต)

2.2 ในระบบพิกัด xy จงวาดกราฟของเส้นทั้งสอง

2.3 จงหาพิกัดของจุดตัดของเส้นทั้งสอง

2.4 จงให้ความหมายของจุดตัดดังกล่าวในบริบทนี้

3. อนิรุตต์ซื้อข้าวเปลือก 2 ถุง และข้าวสารอีก 3 ถุง ในราคารวมที่ 513 บาท วันต่อมา อนิรุตต์ไปซื้อข้าวเปลือกอีก 1 ถุง และข้าวสารอีก 2 ถุง ในราคารวม 309 บาท จงหาราคาข้าวเปลือกและข้าวสารต่อถุง

4. เรือลำหนึ่งล่องไปตามน้ำในคลองเป็นระยะทาง 24 กิโลเมตร ใช้เวลา 2 ชั่วโมง ส่วนขากลับล่องทวนน้ำใช้เวลา 4 ชั่วโมง จงหาความเร็วของเรือถ้าวิ่งในน้ำนิ่งและความเร็วของกระแสน้ำในคลอง

5. สุทิวัสต้องเดินทางเป็นระยะทาง 1,930 กิโลเมตร โดยรถยนต์และเครื่องบิน เขาเริ่มขับรถยนต์จากบ้านไปถึงสนามบินในอัตราเร็วเฉลี่ยที่ 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากนั้นเดินทางโดยเครื่องบินในอัตราเร็ว 350 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ใช้เวลาทั้งหมดรวมกัน 8 ชั่วโมง จงหาว่าเขาใช้เวลาเท่าไรในการขับรถยนต์จากบ้านมาสนามบิน

6. ตัวเลขสองหลักตัวเลขหนึ่งมีผลบวกของทั้งสองหลักเท่ากับ 7 และถ้าสลับตำแหน่งจะเป็นจำนวนที่มีค่ามากกว่าจำนวนเดิมอยู่ 9 ถามว่าเลขสองหลักนี้คือเลขอะไร

7. โรงเรียนมัธยมศึกษาสองแห่งคือ โรงเรียน A และโรงเรียน B ได้เดินทางมาชมนิทรรศการที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี โดยโรงเรียน A ได้เช่ารถตู้ 1 คัน และรถบัสอีก 6 คัน สำหรับนักเรียน 372 คน ส่วนโรงเรียน B ได้เช่ารถตู้ 4 คัน และรถบัสอีก 12 คัน สำหรับนักเรียน 780 คน จงหาว่ารถตู้หนึ่งคันจุได้กี่คนและรถบัสหนึ่งคันจุได้กี่คน

8. จากข้อที่แล้ว หลังจากกลับมาจากการไปชมนิทรรศการที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ก็ได้จัดการแสดงคอนเสิร์ตเพื่อระดมทุนสำหรับการไปนิทรรศการครั้งต่อไป ในการขายตั๋ววันแรกทางโรงเรียนได้ขายตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ไป 30 ใบ และตั๋วสำหรับเด็กอีก 90 ใบ ได้เงินรวมทั้งสิ้น 7,500 บาท และในวันที่สองขายตั๋วสำหรับผู้ใหญ่ได้ 80 ใบ และตั๋วสำหรับเด็ก 50 ใบ ได้เงินรวมทั้งสิ้น 6,700 บาท จงหาราคาตั๋วต่อใบของตั๋วแต่ละประเภท

9. ถ้าครึ่งหนึ่งของจำนวน ๆ หนึ่ง เป็นสามเท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่งและสี่เท่าของผลต่างของสองจำนวนนั้นเป็น *50* จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

10. ต้ามีเงิน x บาท และพลอยมีเงิน y บาท เงินของทั้งสองคนรวมกันเท่ากับ *1,000* บาท ถ้าต้าได้เงินเพิ่มมาอีก *100* บาทจะมีเงินเท่ากับพลอย จงหาว่าต้าและพลอยมีเงินคนละเท่าใด

11. แม่ค้าซื้อส้มสองชนิดมาขายรวมกันในกิโลกรัมละ *12.50* บาท โดยราคาซื้อของส้มชนิดที่หนึ่งกิโลกรัมละ *13.50* บาท และส้มชนิดที่สองกิโลกรัมละ *12* บาท แม่ค้าต้องผสมส้มทั้งสองชนิดในอัตราส่วนเท่าไหร่ที่จะขายส้มแล้วได้เงินเท่าทุน

12. ถ่านไม้สน และไม้โกงกางราคาถุงละ *18* บาท และ *27* บาท ตามลำดับ เอามาคละกันแล้วขายไปถุงละ *24* บาท ได้กำไร *20%* จงหาอัตราส่วนการผสม

13. เรือลำหนึ่งแล่นด้วยอัตราเร็ว *29.5* กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถึงท่าช้ากว่าปกติ *5* นาที แต่ถ้าแล่นด้วยอัตราเร็ว *30* กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถึงท่าช้ากว่าปกติ *2* นาที จงหาระยะทางที่เรือแล่น

14. วินัยนับจำนวนไก่และวัวที่เลี้ยงไว้ทั้งหมดเป็น 46 ตัว แต่นับขาของไก่และวัวได้ 100 ขา วินัยเลี้ยงไก่และวัวอย่างละกี่ตัว

15. เมื่อ 10 ปีก่อน แดงมีอายุเป็น 3 เท่าของอายุดำ แต่อีก 10 ปีข้างหน้า แดงจะมีอายุเป็น 2 เท่าของอายุดำ จงหาอายุของแดงและดำในปัจจุบัน

16. สมศรีมีเงิน 400 บาท ซื้อผ้าตัดเสื้อได้ 5 เมตร และผ้าตัดกระโปรงได้ 1.5 เมตร พอดี แต่ถ้าซื้อผ้าตัดเสื้อ 4 เมตร และผ้าตัดกระโปรง 1 เมตร จะเหลือเงิน 100 บาท จงหาว่าผ้าตัดเสื้อและผ้าตัดกระโปรงราคาเมตรละเท่าไร

17. ผู้ใหญ่ 4 คน กับเด็ก 3 คน ทำงานหนึ่งเสร็จในเวลา 4 ชั่วโมง และผู้ใหญ่ 9 คน กับเด็ก 2 คน ทำงานนี้เสร็จในเวลา 2 ชั่วโมง จงหาว่าผู้ใหญ่ทำงานได้เป็นกี่เท่าของเด็ก

แบบเฉลยแบบฝึกทักษะ (Answers)

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.1 ระบบจำนวน และจำนวนจริง</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.1

1) -28, 2) 5, 3) 10, 4) 182, 5) 4/5 6) -15.75

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.2

1) 6, 2) 1/2, 3) -15/8, 4) 25/7, 5) 5/49 6) 2

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.3

1) 9, 2) 0, 3) 1, 4) 16/21, 5) 5/4 6) -4/5

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.2 ห.ร.ม. และ ค.ร.น.</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.1

1) 3, 2) 6, 3) 12, 4) 28, 5) 7, 6) 9

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.2

1) 21, 2) 252, 3) 352, 4) 42, 5) 72, 6) 7161

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.3

1) $\frac{95}{51}$ 2) $\frac{542}{57}$ 3) $\frac{235}{56}$ 4) $\frac{599}{40}$ 5) $\frac{51}{22}$ 6) $\frac{108}{119}$

7) $\frac{3}{10}$ 8) $\frac{2}{3}$ 9) $\frac{1}{2}$ 10) $\frac{13}{12}$ 11) $\frac{1}{12}$ 12) $\frac{647}{340}$

13) $\frac{-h}{x^2+xh}$ 14) $\frac{x^2+(2h-1)x+h^2}{h}$ 15) $\frac{x^2+3x+1}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$ 16) $\frac{(x+1)^2+(x+2)^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.4 เซต</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.1

3) $\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, 4) $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$,

5) {อาทิตย์, จันทร์, อังคาร, พุธ, พฤหัสบดี, ศุกร์, เสาร์}

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.2

ข้อ	ถูก หรือ ผิด	คำอธิบาย
1	ถูก	2 เป็นจำนวน ส่วน $\{2\}$ เป็นเซต จึงไม่เท่ากัน
2	ผิด	$\{x \mid x^2 = 9\} = \{3,-3\} \neq \{3\}$
3	ผิด	$\{x \in I \mid x^3 \leq 8\} = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2\}$
4	ถูก	ดูคำอธิบายข้อ 3

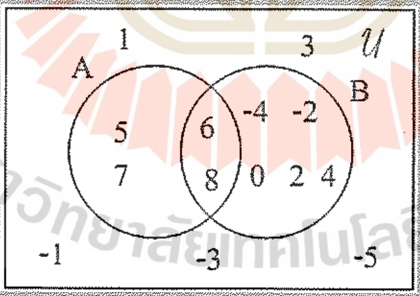
5	ถูก	สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $a^2 \geq 0$
6	ผิด	$\{x \in I^- \mid -5 < x < 0\} = \{-4,-3,-2,-1\}$ เป็นเซตจำกัด มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 4
7	ถูก	สมาชิกที่ปรากฏมากกว่าหนึ่งครั้งในเซต ถือว่าเป็นตัวเดียวกัน
8	ถูก	การเรียงตัวก่อน-หลังของสมาชิกในเซตถือว่าไม่สำคัญ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.3

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$
2) $A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$
3) $A \cap B = \{2,4\}$
4) $B \cup C = \{2,3,4,5,6,8\}$
5) $B - C = \{2,8\}$
6) $C - A = \{5,6\}$
7) $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,8\}$
8) $(A \cup B) \cap C = \{3,4,6\}$
9 $P(A \cap B) = P(\{1,4\}) = \{\{2\},\{4\},\{2,4\},\emptyset\}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.4

จากข้อมูลในโจทย์ จะได้ว่า $A = \{5,6,7,8\}, B = \{-4,-2,0,2,4,6,8\}$ จึงสามารถเขียนแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้



$|A \cup B| =$ ......9......... และ $|A \cap B| =$ ....2............

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.5

จำนวนนักเรียนที่ชอบเล่นกีฬาอย่างเดียว เท่ากับ 10 คน
จำนวนนักเรียนที่ชอบเล่นดนตรีอย่างเดียว เท่ากับ 10 คน
จำนวนนักเรียนที่ชอบดูภาพยนต์อย่างเดียว เท่ากับ 5 คน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.4.6

ตอบ 5

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.5</u>

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.5.1</u>

1) $(-3,-2) \cup (2,3]$ 2) { } 3) $(100,102)$ 4) $\emptyset$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 1.7</u>

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.1</u>

1) $x = 5$ 2) $x = \frac{5}{2\sqrt{2}}$ 3) $x = -1$ 4) $x = -\frac{3}{5}$

5) $x = -6$ 6) $x = 3$ 7) $x = \frac{14}{13}$ 8) $x = -\frac{30}{13}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.2</u>

1) $x = \frac{35}{11}, y = -\frac{37}{11}$ 2) $x = \frac{85}{7}, y = -\frac{3}{7}$ 3) $x = -\frac{5}{22}, y = \frac{4}{11}$

4) ไม่มีคำตอบ(เมื่อจัดรูปอาจได้คำตอบเป็น $x = 0, y = 0$ เมื่อแทนในสมการตั้งต้น

5) $x = \frac{79\sqrt{3}-2765}{611}, y = \frac{395\sqrt{3}+839}{611}$ 6) $x = -\frac{6}{7}, y = \frac{5}{7}$ 7) $x = -23, y = 11$

8) $x = \frac{22}{9}, y = \frac{100}{27}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.3</u>

1) $x = 1, y = 3$ 2) $x = 4/23, y = 78/23$

3) $x = -\frac{112}{5}, y = -57/5$ 4) $x = -2, y = -14$

5) $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{-22}{3}$ 6) $x = -21, y = -46$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.7.4</u>

1) สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาว 93 เมตร และกว้างเป็น 46 เมตร

2) ราคาเช่าห้องประเภทห้องเดี่ยวเท่ากับ 180 และประเภทคู่เป็น 250 บาท

3) จำนวนตั๋วที่ขายให้ผู้ใหญ่เท่ากับ 206 ใบ และจำนวนตั๋วที่ขายให้เด็กเท่ากับ 103 ใบ

4) นายอุทิศต้องชุดลูกโทษเป็นจำนวน 10 ครั้ง

5) เครื่องบินลำเล็กมีความเร็วเป็น 200 กม./ชม. และเครื่องบินลำใหญ่มีความเร็วเป็น 500 กม./ชม.

6) หมู่บ้าน ข. อยู่ห่างจากหมู่บ้าน ค. เป็นระยะทาง 147 กม.

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย อสมการ และสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1)

1. $7\frac{1}{5}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 36 4. $-\frac{1}{3}$ 5. $\frac{2}{5}$ 6. -7 7. -7.6
8. 12 9. -14 10. 3 11. 2 12. 12

2)

1. $n < -1$ 2. $n < 1$ 3. $p < 2$ 4. $k \leq 2$ 5. $m \geq -5$
6. $x < 3$ 7. $n \leq -6$ 8. $b \geq 5$ 9. $r < -3$ 10. $r \geq 6$
11. $x > -2$ 12. $x > -4$ 13. $x \geq -3$ 14. $v > -6$

3)

3.1) 43 3.2) -3 3.3) 14 3.4) 3 3.5.1) 200 3.5.2) 77 3.6) 2 3.7) 15 3.8) 3

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

1.1) (2,-3) 1.2) (2,1) 1.3) (6,0)
1.4) (-2,4) 1.5) (2,5) 1.6) (2,1)
1.7) (2,0) 1.8) No Solution 1.9) (2,1)
1.10) (-3,4) 1.11) (-2,-2) 1.12) No Solution
1.13) มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ 1.14) (-2,8) 1.15) มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์
1.16) $(\frac{7}{17}, -\frac{2}{17})$ 1.17) No Solution 1.18) $(-\frac{1}{2}, 3)$

3. ราคาข้าวเปลือกต่อถุงคือ *99* บาท ราคาข้าวสารต่อถุงคือ *105* บาท

4. ความเร็วของเรือในน้ำนิ่งคือ *9* กิโลเมตรต่อชั่วโมง และความเร็วของน้ำคือ *3* กิโลเมตรต่อชั่วโมง

5. รถยนต์ใช้เวลา *3* ชั่วโมง

6. 34

7. รถตู้จุได้ *18* คน และรถบัสจุได้ *59* คน

8. ตั๋วผู้ใหญ่ *4* บาท ตั๋วเด็ก *7* บาท

14. วินัยเลี้ยงไก่ไว้ *37* ตัว และเลี้ยงวัว *9* ตัว

15. ปัจจุบันแดงมีอายุ *70* ปี และดำมีอายุ *30* ปี

บทที่ 2

เมทริกซ์ (Matrices)

เมทริกซ์เป็นอีกหัวข้อหนึ่งที่นักศึกษาได้ทำความรู้จักมาแล้วในระดับมัธยมศึกษา เนื่องจากเมทริกซ์มีความสำคัญเป็นอย่างมากในการประยุกต์ใช้กับการแก้ระบบสมการหลายตัวแปร ซึ่งเป็นหนึ่งในหัวข้อในเอกสารฉบับนี้ จึงมีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการทบทวนในเนื้อหาของเมทริกซ์เช่นเดียวกัน

2.1 เมทริกซ์ และพีชคณิตเบื้องต้นบทเมทริกซ์ (Algebra on Matrices)

❖ เมทริกซ์ (Matrices)

ถ้าเรานำจำนวนมาเขียนเรียงเป็นแถว(Row) และหลัก(Column) อย่างมีระเบียบ คร่อมไว้ด้วยวงเล็บ $(\ )$ หรือวงเล็บใหญ่ $[\ ]$ ตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&8&0\\2&5&8\\2&7&10\end{pmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad D=[1]$$

เราเรียกสัญลักษณ์เหล่านี้ว่า **เมทริกซ์**

ข้อตกลง

1. จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์เราเรียกว่า **สมาชิกของเมทริกซ์** เช่น $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}$ เราเรียก 1, 0, -1, 2 ว่าเป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A

2. เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก เราเรียกว่า **เมทริกซ์มิติ** $m\times n$ **หรือ** $m\times n$ **เมทริกซ์** และเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

เช่น $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-3&4\end{pmatrix}$ แสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ที่มี 2 แถว 3 หลัก ดังนั้นเราเรียก B ว่า เมทริกซ์มิติ 2×3

3. การบอกตำแหน่งของสมาชิก เราจะบอกทั้งแถวและหลักที่สมาชิกตัวนั้นอยู่ ดังตัวอย่างเช่น

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc}\textbf{หลักที่ 1} & \textbf{หลักที่ 2} & \textbf{หลักที่ 3}\end{array} \\ \begin{array}{r}\textbf{แถวที่ 1} \longrightarrow \\ \textbf{แถวที่ 2} \longrightarrow\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}\end{array}$$

เราจะได้ว่า 1 เป็นสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 1 หลักที่ 1

7 เป็นสมาชิกในตำแหน่ง แถวที่ 2 หลักที่ 3 เป็นต้น

การระบุตำแหน่งของสมาชิกในเมทริกซ์นี้ โดยปกติแล้วเราจะใช้สัญลักษณ์ i และ j แทนแถวที่ และหลักที่ ตามลำดับ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดสมาชิก a_{52} จะได้ว่า สมาชิกตัวนี้ เป็นสมาชิกที่ปรากฏอยู่ในแถวที่ $i = 5$ และหลักที่ $j = 2$ ของเมทริกซ์นั้น

ตัวอย่างที่ 2.1.1 กำหนด $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 9 \\ -1 & 8 & 7 \\ -3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ จะได้ว่า

จะได้ว่า	เพราะ
1) A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 4×3	A มีจำนวนแถวเป็น 4 แถว และ 3 หลัก
2) สมาชิก a_{32} คือ 8	8 อยู่ที่ตำแหน่งแถวที่ 3 และหลักที่ 2
3) 10 มีค่า $j = 3$	10 อยู่ในหลักที่ 3 ซึ่งตำแหน่งหลักเราแทนด้วย j
4) -1 มีค่า $i = 3$	-1 อยู่ในแถวที่ 3 ซึ่งตำแหน่งของแถวเราแทนด้วย i

บันทึก

<u>บทนิยาม 2.1</u>

1) เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix) คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = [1], \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุม เป็น 1 เท่านั้น ส่วนสมาชิกตัวอื่นๆ เป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_1 = [1]$$

3) เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix) คือเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$\overline{0}_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{0}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{0}_{1\times1} = (0)$$

❖ การเท่ากันของเมทริกซ์

<u>บทนิยาม 2.2</u> เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และ
2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีค่าเท่ากัน

ข้อสังเกต : ถ้ามีสมาชิกในตำแหน่งใดที่ตรงกันมีค่าไม่เท่ากัน แม้แต่ตำแหน่งเดียว สรุปได้เลยว่า เมทริกซ์ทั้งสองไม่เท่ากัน

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.2</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

เราจะได้ว่า

1) ถ้า $A = B$ แล้ว $x = 1, y = 3$ และ $z = 6$

2) $A \neq C$ เพราะ สมาชิกในตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 2 ของทั้งสองเมทริกซ์ มีค่าไม่เท่ากัน

3) $A \neq D$ เพราะ เมทริกซ์ทั้งสอง มีมิติไม่เท่ากัน

การบวก และการลบของเมทริกซ์

เมทริกซ์ตั้งแต่ 2 เมทริกซ์ขึ้นไปจะนำมาบวกหรือลบกันได้นั้น มีเงื่อนไขอยู่ว่า เมทริกซ์เหล่านั้นจะต้อง**มีมิติที่เท่ากัน** วิธีการบวกหรือลบก็ให้นำสมาชิกในตำแหน่งที่ตรงกัน บวกหรือลบต่อกันโดยตรง นั่นคือ ถ้าเมทริกซ์ A และ B ต่างมีมิติเท่ากับ $m \times n$ แล้ว เราจะได้ว่า เมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B สามารถบวกลบกันได้โดยที่ผลบวกและผลลบมีค่าดังนี้คือ

ถ้า $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, และ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ แล้ว

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

และ

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.1.3</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหา $A + B$, $A - B$ และ $A + D$

วิธีทำ

1) $A + B = \begin{bmatrix} 1 + 10 & 3 + (-5) \\ 0 + (-2) & 6 + (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

2) $A - B = \begin{bmatrix} 1 - 10 & 3 - (-5) \\ 0 - (-2) & 6 - (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}$

3) เราไม่สามารถดำเนินการ $A + D$ ได้ เนื่องจาก ทั้งสองเมทริกซ์มีมิติที่แตกต่างกัน คือ A มีมิติเป็น 2×2 ในขณะที่ D มีมิติเป็น 3×2

❖ การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็น 0 และ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{จะได้ว่า} \quad cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

สมบัติที่สำคัญบางประการของเมทริกซ์

กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่มีขนาด $m \times n$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1) $A + B = B + A$
2) $c(A+B) = cA + cB$
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$
4) $A + \bar{0}_{m\times n} = \bar{0}_{m\times n} + A = A$

เมื่อ $\bar{0}_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$

5) $A + (-A) = \bar{0}_{m\times n}$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.1.4**</u> กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}10 & -5\\ -2 & -6\end{bmatrix}$ แล้วจงหา $2A$, $(-1)B$ และ $2A-1B$

วิธีทำ

1) $2A=\begin{bmatrix}2(1) & 2(3)\\ 2(0) & 2(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 12\end{bmatrix}$

2) $(-1)B=\begin{bmatrix}(-1)10 & (-1)(-5)\\ (-1)(-2) & (-1)(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

3) $2A-1B=2A+(-1)B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & 5\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 11\\ 2 & 18\end{bmatrix}$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.1.1</u> กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ จงหา

1) $2A - B$

2) $-B + \frac{1}{2}A$

3) $\sqrt{2}A$

4) จงหาเมทริกซ์ C โดยที่ $A + B - C = \overline{0}$ เมื่อ $\overline{0}$ คือ เมทริกซ์ศูนย์

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.1.2</u> จงหาค่าของ $x,\ y$ และ z ที่เป็นไปตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 0 & y \end{bmatrix}$

....

....

2) $\begin{bmatrix} -1 & 3x \\ -2 & y+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -15 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

....

....

....

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3x \\ 5 & y+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -15 \\ 5z & z \end{bmatrix}$

....

....

....

4) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \\ 3x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & -2 \\ 1 & 2x \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

5) $(-1)\begin{bmatrix} x & 2 \\ -1 & y \\ 3x & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} z & -2 \\ 1 & 2x \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

❖ การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์ใดๆ การนำเมทริกซ์ A มาคูณกับเมทริกซ์ B จะส่งผลเกิดขึ้นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่างต่อไปนี้

1. ไม่สามารถหาผลคูณได้
2. สามารถหาผลคูณได้

ปัญหาที่เราต้องทราบก็คือ ถ้าหาผลคูณได้ต้องมีเงื่อนไขอย่างไร และสมาชิกของเมทริกซ์ที่เป็นผลคูณจะหามาได้อย่างไร

บทนิยาม 2.3

กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}_{m\times p}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n}$

แล้วผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย AB กำหนดโดย

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \cdots + a_{mp}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

ข้อสังเกตที่สำคัญ

1) จากบทนิยามข้างบน เราจะเห็นว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times p$ และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $q \times n$ ผลคูณ AB จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $p = q$ และ AB จะมีมิติ $m \times n$

2) มิติของเมทริกซ์ตัวแรก (ด้านหน้า) จะเป็นอย่างไรก็ได้

3) มิติของเมทริกซ์ตัวที่นำมาคูณ จะต้องมีจำนวนแถวให้เท่ากันพอดีกับจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวแรก

4) การคูณเมทริกซ์นี้ สามารถท่องเป็นข้อความง่ายๆ ได้คือ "แถวตัวหน้า คูณหลักตัวหลัง แล้วรวมกัน"

สมบัติบางประการสำหรับการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่บวก ลบ และคูณกันได้ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $AI = IA = A$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์
2. $k(AB) = A(k)B = (AB)k$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $A(B+C) = AB + BC$
5. $(A+B)C = AC + BC$
6. $(kA)^n = k^n \cdot A^n$ เมื่อ $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ term}}$
7. AB อาจจะเท่าหรือไม่เท่ากับ BA ก็ได้

ตัวอย่างที่ 2.1.5 กำหนด $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$ จงหาผลลัพธ์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

ก.) AB

ข.) $(AB)C$

วิธีทำ

ก.) $AB = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(0)+2(1) & 1\left(\frac{1}{2}\right)+2(3)\\ -1(0)+3(1) & -1\left(\frac{1}{2}\right)+3(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & \frac{13}{2}\\ 3 & \frac{17}{2}\end{bmatrix}$

ข.) $(AB)C = \begin{bmatrix}2 & \frac{13}{2}\\ 3 & \frac{17}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2(4)+\frac{13}{2}(5)\\ 3(4)+\frac{17}{2}(5)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{91}{2}\\ \frac{109}{2}\end{bmatrix}$

แบบฝึกทักษะที่ 2.1.3 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -6\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

....

....

....

2. $\begin{bmatrix}6\\ -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 4\end{bmatrix}$

....

....

....

3. $\begin{bmatrix}-5 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

....

....

....

4. $\begin{bmatrix}-3 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -2\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

....

....

....

....

5. $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 & -5 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & -5v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5u & -v \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -4 & -y \\ -2x & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4x & 0 \\ 2y & -5 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.1.4</u> จงแก้ปัญหาต่อไปนี้โดยใช้ผลคูณเมทริกซ์

1. จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน หนึ่งในเมทริกซ์ที่มีบทบาทสำคัญที่รู้จักกันในนามของเมทริกซ์การหมุน Pauli ซึ่งเขียนได้โดย

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$ จงแสดงว่า $s^2 = I_2$ เมื่อ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

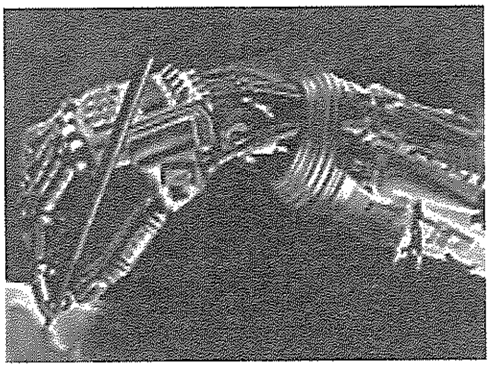
....

....

....

....

2. จากการศึกษาศึกษาการหมุนของแขนหุ่นยนต์(ในรูปข้างล่าง) จากตำแหน่ง $(x_0, y_0, 0)$ ไปในแนวราบเป็นมุม θ (โดยเคลื่อนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และยึดต้นแขนเป็นตำแหน่งหมุน, $(0,0,0)$) พบว่า สามารถกำหนดได้โดยการคูณกันระหว่างเมทริกซ์กำหนดขนาดมุม $\begin{bmatrix} \cos\theta^\circ & -\sin\theta^\circ & 0 \\ \sin\theta^\circ & \cos\theta^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และเมทริกซ์ตำแหน่งเริ่มต้น $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหาว่าถ้าแขนของหุ่นยนต์นี้ เริ่มหมุนจากตำแหน่งเริ่มต้นที่มีพิกัดเป็น $(2,4,0)$ และให้แขนของหุ่นยนต์หมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม 60° กับแนวเริ่มต้น จะไปตกที่ตำแหน่งที่พิกัดเป็นเท่าใด



....

....

....

....

....

....

....

....

2.2 ตัวกำหนด (Determinant)

ตัวกำหนดของเมทริกซ์ หรือ ดีเทอร์มิแนนต์ เป็นค่าตัวเลข ซึ่งจัดว่าเป็นคุณสมบัติอย่างหนึ่งของ**เมทริกซ์จัตุรัส**ก็ได้ ***สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้เสมอ***

สัญลักษณ์ของดีเทอร์มิแนนต์ คือ $\det A$ หรือ $|A|$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ ในที่นี้เราจะพิจารณาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1, 2×2 และ 3×3 ตามลำดับดังนี้

1. กำหนดให้ $A_1 = [a]$ จะได้ว่า $\det A_1 = a$ หรือจะกล่าวง่ายๆ คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว จะมีค่าเท่ากับสมาชิกตัวนั้น

2. กำหนดให้ $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ จะได้ว่า $\det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3. กำหนดให้ $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ จะได้ว่า

$$\det A_3 = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

ซึ่งการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3×3 นี้ จะหาได้โดยง่าย โดยขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่1 ให้นำหลักที่ 1 และที่ 2 ในเมทริกซ์นั้น มาเขียนต่อท้ายทางขวาของเมทริกซ์

ขั้นที่2 ลากเส้นแทยงลงจากมุมซ้ายของเมทริกซ์ลงมาทางมุมขวาให้แต่ละเส้นที่ลากผ่านสมาชิก 3 ตัว จะได้ทั้งหมด 3 เส้น

ขั้นที่3 ในแต่เส้นที่ลากในขั้นที่ 2 นั้น ให้นำสมาชิกที่อยู่บนเส้นเดียวกันมาคูณกัน ดังนั้นจะได้เป็นจำนวน 3 จำนวน(เพราะมี 3 เส้น) จากนั้น นำเอาจำนวนทั้งสามมารวมกัน สมมติว่าผลรวมดังกล่าวได้เป็นจำนวนจริง M

ขั้นที่4 ลากเส้นแทยงขึ้นจากมุมล่างซ้ายของเมทริกซ์ขึ้นไปทางมุมบนขวาให้เส้นแต่ละเส้นที่ลากผ่านสมาชิก 3 ตัว จะได้ทั้งหมด 3 เส้น

ขั้นที่5 ในแต่ละเส้นที่ลากในขั้นที่ 4 นั้น ให้นำสมาชิกที่อยู่บนเส้นเดียวกันมาคูณกัน ดังนั้น จะได้เป็นจำนวน 3 จำนวน(เพราะมี 3 เส้น) จากนั้น ให้นำเอาจำนวนทั้งสามดังกล่าว มารวมกัน สมมติว่าผลรวมดังกล่าวได้เป็นจำนวนจริง N

จากทั้ง 5 ขั้นตอน เราจะได้ว่า ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ดังกล่าว มีค่าเท่ากับ **M - N หรือ เขียนเป็นข้อความได้คือ** **<u>(ผลรวมคูณล่าง) - (ผลรวมคูณขึ้น)</u>** ดังในตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2.2.1</u> จงหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เมื่อดำเนินการตามขั้นที่ 1 จะได้ว่า

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{array}\right]\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{array}$$

และเมื่อดำเนินการตามขั้นที่ 2 ถึง 5 จะได้ดังแสดงข้างล่างนี้

$$\begin{array}{ccccc} & & -40 & 0 & 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \end{array}\right] & \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -4 & 0 \end{array} & & & \\ & & 15 & 0 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น ค่าดีเทอร์มิแนนท์ จึงเท่ากับ **(ผลรวมคูณล่าง) - (ผลรวมคูณขึ้น)**

$$\begin{aligned} &= (15+0+0)-(-14+0+0) \\ &= 15-(-14) \\ &= 15+14 \\ &= 29 \end{aligned}$$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.2.1</u> จงหาค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

2) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = ?$

4) $\begin{vmatrix} -6 & -6 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = ?$

5) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -5 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = ?$

6) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -5 & 5 & -6 \end{vmatrix} = ?$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = ?$

8) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = ?$

9) $\begin{vmatrix} -1 & -8 & 9 \\ 4 & 12 & -7 \\ -10 & 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$

10) $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -8 & 9 & -3 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = ?$

11) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & x & y \end{vmatrix} = ?$

12) จงพิจารณาว่าค่า x ที่ทำให้ เมทริกซ์ $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & x & 1 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ มีค่า ดีเทอร์มิแนนท์เป็น -4

2.3 เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

การศึกษาเรื่องการหาตัวผกผัน หรืออินเวอร์สของเมทริกซ์หนึ่งๆ นี้ ในทางคณิตศาสตร์จะมีอยู่หลายประเภท เช่น ตัวผักผันสำหรับการบวก หรือ ตัวผกผันสำหรับการคูณ ในหัวข้อนี้ ผู้เรียบเรียงให้ข้อตกลงว่า เมื่อใช้คำว่า "ตัวผกผัน" หรือ "อินเวอร์ส" จะให้หมายถึง ตัวผกผันสำหรับ**การคูณ**เท่านั้น

การศึกษาเรื่องการหาเมทริกซ์ผกผันนี้ เป็นเรื่องที่มีประโยชน์เป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะเมื่อเรานำเอาความรู้ทางด้านเมทริกซ์ ไปแก้ไขและหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีประกอบไปด้วยตัวแปรหลายตัว และหลายสมการ อย่างไรก็ตาม ในเอกสารชุดนี้ ผู้เรียบเรียงจักขอนำเสนอเฉพาะเมทริกซ์ที่มีมิติไม่เกิน 3 ซึ่งในขั้นแรกของการศึกษาในบทนี้ นักศึกษามาทำความรู้จักกับความหมายของเมทริกซ์ผกผันกันก่อน

❖ "เมทริกซ์ผกผัน" หรือ "อินเวอร์สของเมทริกซ์" คืออะไร

บทนิยาม 2.1 สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีมิติเป็น n เราจะเรียกเมทริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ เมื่อ I_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ n ว่า เมทริกซ์ผกผัน หรือ อินเวอร์สเมทริกซ์ของ A และในขณะเดียวกัน ก็จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์ผกผันของ B ด้วยเช่นกัน

ข้อสังเกต เพิ่มเติม

1) ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัสทุกตัว จะสามารถหาอินเวร์สได้

2) เมทริกซ์จัตุรัสที่หาอินเวอร์สได้ เราเรียกว่า "**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน**" (Non-singular Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีค่าตัวกำหนด**ไม่เท่ากับ** 0 และเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สไม่ได้ เราเรียกว่า "**เมทริกซ์เอกฐาน** (Singular Matrix)"

3) โดยทั่วไป อินเวอร์สของเมทริกซ์ A ใดๆ ที่หาอินเวอร์สได้ จะเขียนแทนด้วย A^{-1}

ตัวอย่างที่ 2.3.1 สำหรับเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า อินเวอร์สของเมทริกซ์ A นี้คือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

เพราะ $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

และ $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

สมบัติของอินเวอร์สการคูณ

ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. ถ้า $AB = I$ แล้ว $A = B^{-1}$ และ $B = A^{-1}$
3. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
4. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
5. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $\det A \neq 0$

6. ถ้า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det A = 0$
7. ถ้า $AX = B$ แล้วจะได้ $X = A^{-1}B$

❖ การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2

สำหรับเมทริกซ์ไม่เอกฐานที่มีขนาด 2×2 จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยง่าย ดังนี้

สำหรับ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ทันทีว่า อินเวอร์ส หรือเมทริกซ์ผกผันของ A คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

<u>ตัวอย่างที่ 2.3.2</u> กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} พร้อมตรวจสอบความถูกต้อง

วิธีทำ เราจะได้ว่า $det\,A = 1(4) - 3(2) = -2$

ดังนั้น เมื่อใช้สมการที่ (2.1) จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถตรวจสอบความถูกต้อง ได้ดังนี้

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

และ $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.3.1</u> จงหาเมทริกซ์ผกผัน(ถ้ามี)ของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มี่ขนาด 3×3

ในหัวข้อนี้ จะได้มีการนำเสนอวิธีการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีมิติเป็น 3 อยู่ 2 วิธี คือ

- วิธีการหาโดยใช้การแปลงแถวเบื้องต้น
- วิธีการหาโดยการใช้เมทริกซ์ผูกพันธ์ (Adjoint Matrix)

ในการนำเรื่องของการหาเมทริกซ์ผกผันไปประยุกต์ใช้ ที่สุดแล้วก็จะขึ้นกับความถนัดของแต่ละบุคคลว่าจะใช้วิธีการใด

วิธีการหาเมริกซ์ผกผันโดยการใช้การแปลงแถวเบื้องต้น

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐานที่มีมิติเป็น n การหาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยวิธีการใช้การแปลงแถวเบื้องต้น คือ การทำให้เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $[A \mid I_n]$ เมื่อ I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n โดยการดำเนินการเชิงแถว ให้อยู่ในรูป $[I_n \mid B]$ แล้วจะได้ว่า เมทริกซ์ B ที่ได้ จะเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A นั่นคือ $B = A^{-1}$ ซึ่งสามารถเขียนสรุปการดำเนินการทั้งหมดได้ดังภาพข้างล่างนี้

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid B] \text{ แล้วจะได้ว่า } B = A^{-1}$$

และในการดำเนินการตามแถวนี้ สามารถทำได้หลายวิธี ได้แก่

1. การสลับแถวระหว่างสองแถวใดๆ
2. การนำเอาจำนวนจริงที่เหมาะสม c ไปคูณกับแถวที่ต้องการเปลี่ยนทั้งแถว
3. การนำเอาแถวที่ต้องการเปลี่ยน **ลบด้วย** แถวอื่นแถวใดที่คูณกับค่าคงที่ เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยนแถวที่ 2 (เขียนแทนด้วย R_2) โดยการใช้แถวที่ 3 (เขียนแทนด้วย R_3) มาช่วย จะทำได้โดย การวางแถวที่ 2 ใหม่ ด้วยแถวที่เกิดจากการดำเนินการ $R_2 - aR_3$ โดยที่ a เป็นค่าคงที่ที่เหมาะสม

เพื่อเป็นการช่วยนักศึกษาให้เห็นภาพมากยิ่งขึ้น ตัวอย่างที่ **2.3.3** แสดงการใช้วิธีนี้ในการหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 ก่อน แล้วตัวอย่างที่ **2.3.4** จะแสดงการหากับเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 ต่อไป

บันทึก

ตัวอย่างที่ 2.3.3 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} โดยหารใช้วิธีการแปลงแถวเบื้องต้น

วิธีทำ

จะเห็นว่าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2 ดังนั้น เมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $\mathbf{2 \times 2}$ คือ $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ เราจะสามารถเริ่มกระบวนการแปลงแถวได้ โดยเริ่มเขียน

$$[A \mid I_n] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ขั้นแรก เราจะพยายามเปลี่ยนเลข 3 ให้กลายเป็นเลข 0 โดย **(แถวที่ 2) – 3X(แถวที่ 1)** ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้คือ $R_2 - 3R_1$ แล้วนำผลที่ได้ มาวางเป็นแถวที่ 2 ใหม่ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

แล้วกำจัดเลข 2 ได้โดย $\xrightarrow{R_1 - 2R_1}$ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$$= [I_n \mid B]$$

ซึ่งอยู่ในรูปที่ต้องการแล้ว

ดังนั้น เราจึงได้ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A คือ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

บันทึก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 2.3.4 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} โดยหารใช้วิธีการแปลงแถวเบื้องต้น

วิธีทำ

$$[A \mid I_n] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

R_2 สลับกับ R_3 $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

เอา (-1) คูณ R_2 และ R_3 ด้วย $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= \qquad [I_n \mid B]$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า เมทริกซ์ผกผันของ A คือ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

วิธีการหาเมริกซ์ผกผันโดยการใช้เมทริกซ์ผูกพันธ์ (Adjoint Matrix)

สำหรับเมทริกซ์ไม่เอกฐาน A ใดๆ จะสามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้โดยสมการ

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\,adj\,A \tag{2.2}$$

เมื่อ $adj\,A$ เรียกว่า เมทริกซ์ผูกพันธ์ (Adjoint Matrix) ของ A ซึ่งกระบวนการการหาเมทริกซ์ผูกพันธ์ นี้ประกอบด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>**ขั้นที่ 1**</u> หาเมทริกซ์ทรานสโพส์ของ A นั่นคือ การหาเมทริกซ์ A^T ตามบทนิยามที่ 2.5

<u>**บทนิยาม 2.5**</u> เมทริกซ์ทรานสโพสของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ คือเมทริกซ์ $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$ โดยที่ $a_{ij} = b_{ji}$

เช่น ถ้ากำหนดให้ $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix}$ แล้วจะได้ว่า $A^T = \begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

(หรือ เมทริกซ์ทรานสโพสคือการสลับระหว่างแถวกับหลัก นั่นเอง)

<u>**ขั้นที่ 2**</u> หาไมเนอร์ (Minor) ของสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ A^T ที่ได้ในขั้นที่ 1 โดย ถ้ากำหนดสมาชิก a_{ij} ใดๆ ของเมทริกซ์ A^T ค่าไมเนอร์ของสมาชิกตัวนี้ หาได้จาก การปิดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A^T แล้วหาค่าตัวกำหนด หรือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่เหลือ และเมื่อดำเนินการแบบนี้กับทุกสมาชิกใน A^T จะได้เมทริกซ์ใหม่ เรียกว่า **เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T** เขียนแทนด้วย $[m_{ij}]$

<u>**ขั้นที่ 3**</u> นำเอาค่าสมาชิกที่ได้แต่ละตัวของ **เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T** ที่ได้จากขั้นที่ 2 นั้น มาคูณกับค่าประจำตำแหน่ง ซึ่งแสดงได้ในเมทริกซ์ข้างล่างนี้

$$\begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ที่ได้จากกระบวนการนี้ จะเรียกว่า **เมทริกซ์โคแฟคเตอร์ของ A^T** ซึ่งจะนิยามว่าเป็น "**เมทริกซ์ผูกพันธ์ $adj\,A$ ของ A**" ที่ใช้ในสมการที่ (2.2) ข้างต้น

<u>**ขั้นที่ 4**</u> ทำการหาค่าตัวกำหนดด้วยวิธีการในหัวข้อ **2.2** แล้วนำค่าที่ได้จากขั้นที่ 3 ไปแทนในสมการที่ (2.2) เพื่อหาเมทริกซ์ผกผันต่อไป

การเรียงขั้นตอนในลักษณะแบบนี้ อาจจะดูเหมือนไม่เป็นไปตามหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วไป แต่อย่างไรก็ตาม ผลที่ได้คือสิ่งเดียวกัน และนักศึกษาสามารถทำความคุ้นเคยกับขั้นตอนเหล่านี้ได้ดียิ่งขึ้นจากตัวอย่างที่ **2.3.5** ข้างล่างนี้

บันทึก

....

....

....

ตัวอย่างที่ 2.3.5 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ โดยการใช้หลักการหาเมทริกซ์ผูกพันธ์

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เราจะได้ว่าเมทริกซ์ทรานสโพส์ของ A คือ

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 หาค่าไมเนอร์ของสมาชิกแต่ละตัวใน A^T ซึ่งดำเนินการได้ดังนี้

- ค่าไมเนอร์ของสมาชิกแถวที่ $i = 1$ และหลักที่ $j = 1$ คือการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ได้เหลือจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ออก นั่นก็คือเมทริกซ์ดังรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะเหลือเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนท์ เท่ากับ $1(3) - 5(2) = -7$ ดังนั้นค่าของ m_{11} คือ -7

- ค่าไมเนอร์ของสมาชิกแถวที่ $i = 1$ และหลักที่ $j = 2$ คือการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ได้เหลือจากการตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ออก นั่นก็คือเมทริกซ์ดังรูป

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น จะเหลือเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ซึ่งมีค่าตัวกำหนด หรือค่าดีเทอร์มิแนนท์ เท่ากับ $-2(3) - 0(2) = -6$ ดังนั้นค่าของ m_{12} คือ -6

ซึ่งเมื่อดำเนินแบบนี้กับทุก ๆ สมาชิกของ A^T แล้วจะได้ เมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T คือ

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 นำเมทริกซ์ไมเนอร์ของ A^T มาคูณเข้ากับค่าตำแหน่งของแต่ละตำแหน่ง จะได้ผลลัพธ์เมทริกซ์โคแฟคเตอร์ของ A^T ซึ่งก็คือ เมทริกซ์ผูกพัน $\boldsymbol{adj\,A}$ ดังแสดงข้างล่างนี้

$$adj\,A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 4 จากการใช้วิธีการหาค่าตัวกำหนดของ A ดังแสดงใน**หัวข้อที่ 2.2** เราจะได้ว่า $det\,A = 21$ ดังนั้น จากสมการที่ (2.2) จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\,adj\,A = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.3.2</u> จงหาเมทริกซ์ผกผัน(ถ้ามี)ของแต่ละเมทริกซ์ในข้อต่อไปนี้ โดยใช้ทั้ง 2 วิธี

1) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & -0.5 \\ 0.5 & 0.25 & -0.25 \\ -\frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -6 & 8 & 13 \\ 11 & 9 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 14 & -5 & 12 \\ 9 & -2 & 7 \\ 17 & -5 & 14 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2.4 การใช้เมทริกซ์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (Solving Linear Systems with Matrices)

ในหัวข้อที่ 1.7 นักศึกษาได้รู้จักกับสมการ และระบบสมการเชิงเส้น ทั้งชนิดตัวแปรเดียว และหลายตัวแปรมาแล้ว นอกจากนี้ ในหัวข้อนั้น เรายังได้ศึกษาวิธีการหาเซตของเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 2 ตัวแปร และ 2 สมการไปแล้ว

ในหัวข้อนี้ เราจะได้มีการนำเสนอวิธีการหาเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรและจำนวนสมการมากกว่า 2 โดยใช้เมทริกซ์ อย่างไรก็ตาม ในเอกสารนี้ จะนำเสนอแค่เพียงระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 3 ตัวแปร และ 3 สมการ ซึ่ง สำหรับระบบสมการที่มีขนาดใหญ่กว่านี้ ก็จะสามารถขยายแนวคิดและวิธีการหาผลเฉลยโดยการใช้เมทริกซ์แบบเดียวกันนี้ ไปแก้ได้เช่นกัน

การใช้เมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรนั้น ที่ได้รับความนิยมและรู้จักกันดีมีอยู่ 3 วิธีคือ

1. การใช้เมทริกซ์ผกผัน
2. การใช้วิธีของเกาซ์ (Gauss's Method)
3. การใช้กฎของเครเมอร์ (Cramer's Rule)

ซึ่งก่อนที่เราจะศึกษาการใช้แต่ละวิธีนั้น เรากำหนดระบบสมการเชิงเส้น (2.3) ข้างล่างนี้ เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= a \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= b \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= c \end{aligned} \tag{2.3}$$

เมื่อ สัมประสิทธิ์ทั้งหมดและค่าทางขวามือของสมการทั้งสามนั้น เป็นจำนวนจริงทั้งสิ้น และ จากระบบสมการ (2.3) ดังกล่าว เราจะเขียนระบบสมการนั้น ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$AX = B \tag{2.4}$$

โดย

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะเห็นว่า

A เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากสัมประสิทธิ์ของทุกตัวแปรในระบบ

X เป็นเมทริกซ์ของตัวไม่ทราบค่าทั้ง 3 ตัว

B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ที่ปรากฏอยู่ทางขวามือของสมการทั้ง 3 สมการในระบบสมการ (2.3)

❖ การใช้เมทริกซ์ผกผัน

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น (2.3) โดยใช้เมทริกซ์ผกผันนั้น ทำได้โดยยึดหลักการง่ายๆ ก็คือ จากสมการ (2.4) เราจะได้ทันทีว่าเมทริกซ์ผลเฉลย คือ

$$X = A^{-1}B \tag{2.5}$$

นั่นก็แสดงว่า สิ่งที่เราดำเนินการ มีอยู่ 2 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A (ซึ่งเราได้ศึกษาการหาเมทริกซ์ผกผันมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา)

ขั้นที่ 2 คือการนำเมทริกซ์ผกผันดังกล่าว มาคูณกับเมทริกซ์ค่าคงที่ B ก็จะได้เมทริกซ์ผลเฉลยดังสมการ (2.5) ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2.4.1</u> จงใช้เมทริกซ์ผกผัน ในการแก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad\quad &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

วิธีทำ

จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว เราจะได้ตามลำดับ ว่า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะให้เมทริกซ์ผลเฉลยคือ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 จากตัวอย่างที่ 2.3.5 เราได้มาแล้วว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 จึงสามารถหาเมทริกซ์ผลเฉลยได้ทันทีคือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7(1) + 6(0) - 10(2) \\ -14(1) + 3(0) - 5(2) \\ 7(1) + 0(0) + 7(2) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -27 \\ -24 \\ 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $x_1 = -\frac{27}{21}, x_2 = -\frac{24}{21}, x_3 = \frac{21}{21} = 1$, และสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดยง่าย โดยการแทนค่าที่ได้กลับไปในระบบสมการเริ่มต้น

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.4.1</u> จงใช้การหาเมทริกซ์ผกผัน(โดยเลือกใช้วิธีการหาเมทริกซ์ผกผันที่ถนัด) ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

1)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= 2 \\ 3x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

❖ การใช้วิธีของเกาซ์ (Gauss's Method)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น (2.3) โดยใช้วีธีของเกาซ์นี้ ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนหลักๆ คือ

ขั้นที่ 1 แปลงระบบสมการ (2.3) ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์แต่งเติม(Augmented Matrix) ดังแสดงในสมการ (2.6)

$$[A|B]:\ \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a \\ b_1 & b_2 & b_3 & b \\ c_1 & c_2 & c_3 & c \end{array}\right] \tag{2.6}$$

ขั้นที่ 2 เราจะใช้วิธีการแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ที่เราได้ศึกษากันไปแล้วในเรื่องของการหาเมทริกซ์ผกผัน ในการเปลี่ยนเมทริกซ์ในรูป (2.6) ดังกล่าว ให้อยู่ในรูปข้างล่างนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \tag{2.7}$$

โดยที่ $*$ จะเป็นจำนวนจริง ที่อาจจะเหมือนหรือแตกต่างกันไปก็ได้ ซึ่งความมุ่งหมายหลักของขั้นตอนนี้ ก็คือ การทำให้สมาชิก 3 ตำแหน่งล่างซ้ายของเมทริกซ์นั้น เป็น 0

ขั้นที่ 3 แปลงสมการที่ได้ในขั้นที่ 2 ในรูปสมการ (2.7) กลับไปอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นเหมือนเดิม แล้วแก้หาค่าของตัวแปรทีละตัว โดยเริ่มจากตัวแปรล่างสุด ขึ้นไป

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.2**</u> จงใช้วิธีของเกาซ์ ในการแก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 4x + 9y &= 8 \\ 8x + 6z &= -1 \\ 6y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> เราเขียนระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

<u>ขั้นที่ 2</u> ใช้การแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$R_2 \text{ สลับกับ } R_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 8 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_1} \text{ แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ใหม่} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & -18 & 6 & -17 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \text{ แล้วเขียนเป็น } R_3 \text{ใหม่} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right]$$

ตัวอย่างที่ 2.4.2 (ต่อ)

เราจะเห็นว่า เมทริกซ์ตัวสุดท้าย คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right]$$

อยู่ในรูปดังแสดงใน (2.7) แล้ว

ขั้นที่ 3 แปลงกลับไปอยู่ในรูประบบสมการเชิงเส้น แล้วแก้จากล่างขึ้นบน ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} 4x + 9y &= 8 \quad \ldots(1) \\ 6y + 6z &= -1 \quad \ldots(2) \\ 24z &= -20 \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3) เราได้ทันทีว่า

$$z = -\frac{20}{24} = -\frac{5}{6}$$

นำค่า z ที่ได้ แทนในสมการ (2) เพื่อหาค่า y จะได้เป็น $y = \frac{2}{3}$ แล้วนำค่า y ที่ได้ ไปแทนในสมการ (1) เพื่อหาค่า x จะได้ค่า คือ $x = \frac{1}{2}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{5}{6}$

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.2 จงใช้วิธีการของเกาซ์ ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้ แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้กับ **แบบฝึกทักษะที่ 2.4.1**

1) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) $x + 2y - z = 1$

$2x + y + 4z = 2$

$3x + 3y + 4z = 1$

ข้อสังเกต ในเรื่องนี้ การทำเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ที่มีสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งล่างทางซ้ายเป็นศูนย์หมด (เมทริกซ์ (2.7)) ก่อน แล้วค่อยแปลงกลับมาเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้น แล้วจึงหาผลเฉลยทีละตัว ดังแสดงในตัวอย่าง 2.4.2 นั้น นักศึกษาอาจจะสังเกตเห็นได้ว่า อีกทางหนึ่งที่สะดวก ก็คือ การแปลงเมทริกซ์แต่งเติมให้อยู่ในรูป

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & *_1 \\ 0 & 1 & 0 & *_2 \\ 0 & 0 & 1 & *_3 \end{array}\right] \qquad (2.8)$$

แล้วจะได้ทันทีว่า $*_1$, $*_2$,$*_3$ นั้น เป็นผลเฉลยที่ต้องการนั่นเอง

<u>**ตัวอย่างที่ 2.4.3**</u> จาก **ขั้นที่ 3** ของ**ตัวอย่างที่ 2.4.2** เราได้มาแล้วคือเมทริกซ์ในรูป

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right]$$

ในตัวอย่างนี้ เราจะแปลงเมทริกซ์นี้ต่อไปจนกระทั่งอยู่ในรูป (2.8)

$$\xrightarrow{R_2-\frac{1}{4}R_3} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_2 ใหม่

$$\xrightarrow{R_1-\frac{9}{6}R_2} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & -20 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_1 ใหม่

$(1/4)R_1$ แล้วเขียนเป็น R_1 ใหม่

$(1/6)R_2$ แล้วเขียนเป็น R_2 ใหม่

$(1/24)R_3$ แล้วเขียนเป็น R_3 ใหม่

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 \end{array}\right]$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{5}{6}$ ซึ่งเป็นคำตอบเดียวกันกับการดำเนินการในแบบก่อนหน้านี้ในตัวอย่าง 2.4.2

❖ การใช้กฎของเครเมอร์ (Cremer's rule)

ในหัวข้อที่ 2.2 เราได้รู้จักการหาค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 3 x 3 มาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะทำวิธีการนั้นมาช่วยในการหาค่าผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร โดยใช้กฎของเครเมอร์

ระบบสมการเชิงเส้นที่เขียนในรูป (2.3) จะทำให้ได้ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมทริกซ์ค่าคงที่ ตามลำดับคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ถ้า กำหนดให้ A_i แทน เมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการแทนหลักที่ i ในเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์คอลัมม์ B แล้วเราจะได้ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร (2.3) คือ

$$x_1 = \frac{det\, A_1}{det\, A}, \qquad x_2 = \frac{det\, A_2}{det\, A}, \quad x_3 = \frac{det\, A_3}{det\, A} \tag{2.9}$$

ดังนั้น เราจะสามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ 3 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 หาค่าตัวกำหนด หรือดีเทอร์มิแนนท์ ของเมทริกซ์ A นั่นคือหา $det\, A$

ขั้นที่ 2 สร้างเมทริกซ์ A_i การแทนหลักที่ i ในเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์คอลัมม์ B

นั่นคือ จะได้ว่า

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ c & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \\ c_1 & c & c_3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ c_1 & c_2 & c \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 3 หาค่า $det\, A_1$, $det\, A_2$ และ $det\, A_3$

ขั้นที่ 4 นำค่าที่ได้จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 3 ไปแทนหาค่าตัวไม่ทราบค่า x_1, x_2 และ x_3 ในสมการที่ (2.9)

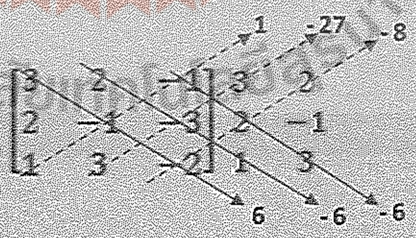
ตัวอย่างที่ 2.4.4 จงใช้กฎของเครเมอร์ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรนี้

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 13 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว เราจะได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเมทริกซ์ค่าคงที่ ตามลำดับคือ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 1 หาค่า $det\, A$



ตัวอย่างที่ 2.4.4 (ต่อ)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad det\,A &= (\text{ผลรวมคูณลง}) - (\text{ผลรวมคูณขึ้น}) \\ &= \big(6+(-6)+(-6)\big) - \big(1+(-27)+(-8)\big) \\ &= 28 \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 จะได้เมทริกซ์ A_1, A_2 และ A_3 ดังนี้

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 13 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต หลักที่ระบายสีนั้น เกิดจากการแทนหลักนั้นด้วยเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 ด้วยการใช้กระบวนการเดียวกันกับในขั้นตอนแรกในการหาค่าตัวกำหนดของ A_1, A_2 และ A_3 เราจะได้ค่าตัวกำหนด คือ $det\,A_1 = 28$, $det\,A_2 = -56$ และ $det\,A_3 = -84$

ขั้นที่ 4 นำค่าที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 และ 3 แทนในสมการ (2.8) จะได้ค่าของตัวไม่ทราบค่า ดังนี้

$$x_1 = \frac{det\,A_1}{det\,A} = \frac{28}{28} = 1,$$
$$x_2 = \frac{det\,A_2}{det\,A} = \frac{-56}{28} = -2,$$
$$x_3 = \frac{det\,A_3}{det\,A} = \frac{-84}{28} = -3$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.4.3 จงใช้กฎของเครเมอร์ ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้ แล้วตรวจสอบคำตอบที่ได้กับ **แบบฝึกทักษะที่ 2.4.1 และ แบบฝึกทักษะที่ 2.4.2**

1) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= 2 \\ 3x + 3y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

<u>**แบบฝึกทักษะที่ 2.4.4**</u> จงใช้วิธีการ**ที่ถนัดที่สุด** ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรต่อไปนี้

1) $5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 22$

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2$

$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 30$

2) $x + 2y - 3z = -20$
$3x + y + 2z = -1$
$2x - 2y + 3z = 14$

3) $2x + 3y - z = -7$

$x - 2y + z = -3$

$3x + y + 2z = -7$

2.5 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

ในหัวข้อที่ผ่านมา นักศึกษาได้รู้จักกับกระบวนการวิธีต่างๆ ที่เราสามารถใช้แก้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปรมาแล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะได้มาศึกษาความเชื่อมโยงระหว่างเรื่องของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร กับปัญหาจริงที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันของเรา ซึ่งจะประกอบด้วย 2 ขั้นตอนหลักๆ ก็คือ

- การเปลี่ยนปัญหาในโลกจริง ให้เป็นระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร
- การนำเอาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ศึกษามาในหัวข้อที่แล้ว มาแก้หาผลเฉลยในขั้นตอนแรก

และเราจะเห็นได้ว่า ภาระหลักของเราในหัวข้อนี้ก็คือขั้นตอนแรก ซึ่งการสร้างทักษะความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาจริง ให้อยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นนี้ไม่ได้เป็นเรื่องที่ยาก หากแต่ต้องอาศัยการสังเกตและฝึกฝนจากแบบฝึกหัดถึงจะเกิดมโนภาพ และความเข้าใจ

<u>**ตัวอย่างที่ 2.5.1 (ปัญหาเจ้าของบ้านเช่า)**</u> อัครเดชเป็นเจ้าของบ้านเช่า 3 หลัง แยกเป็นประเภทคือ มีบ้านประเภทหรูปานกลาง 1 หลัง บ้านประเภทหรูมาก 1 หลัง และบ้านประเภทหรูที่สุดอีก 1 หลัง เมื่อเดือนที่แล้ว อัครเดชได้มีการซ่อมแซมบำรุงบ้านทั้ง 3 หลัง โดยเสียค่าใช้จ่ายทั้งสิ้นเป็นเงิน 276,000 บาท ซึ่งแบ่งออกได้ดังนี้

1. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหรูปานกลาง คิดเป็น 10 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น
2. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหรูมาก คิดเป็น 20 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น

และ 3. ค่าใช้จ่ายในการซ่อมบำรุงบ้านประเภทหรูที่สุด คิดเป็น 30 % ของค่าเช่าบ้านหลังนั้น

ถ้ากำหนดให้ ค่าเช่าบ้านประเภทหรูที่สุดแพงเป็น 2 เท่าของค่าเช่าบ้านประเภทหรูปานกลาง และอัครเดชเก็บค่าเช่าบ้านในเดือนนั้นรวมกันทั้ง 3 หลังได้เป็นเงิน 1,240,000 บาท แล้วจงหาว่า ราคาเช่าบ้านของบ้านแต่ละหลัง เป็นเท่าไหร่ต่อเดือน

วิธีทำ

กำหนดตัวแปร คือ ให้

x แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหรูปานกลาง ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

y แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหรูมาก ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

z แทน ราคาเช่าบ้านประเภทหรูที่สุด ต่อเดือน หน่วยเป็นบาท

เนื่องจาก ในเดือนที่มีการซ่อมบำรุงบ้านนั้น อัครเดชเก็บค่าเช่ารวมกันทั้ง 3 หลังได้ 1,240,000 จึงได้ว่า

$$x + y + z = 1{,}240{,}000 \qquad (1)$$

ตัวอย่างที่ 2.5.1 (ต่อ)

และจากข้อมูลเรื่องค่าใช้จ่ายซ่อมบำรุงของบ้านแต่ละหลังเมื่อเทียบกับค่าเช่าของบ้านหลังนั้น เราจึงได้ว่า

$$0.1x + 0.2y + 0.3z = 276{,}000 \qquad (2)$$

เพราะว่าค่าซ่อมบำรุงของบ้านทั้ง 3 หลังรวมกันเป็น $276{,}000$

ต่อมา จากข้อความที่ว่า "ค่าเช่าบ้านประเภทหรูที่สุดแพงเป็น 2 เท่าของค่าเช่าบ้านประเภทหรูปานกลาง " เราจึงได้ว่า

$$z = 2x \qquad (3)$$

นั่นคือ ตอนนี้เราได้ ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบไปด้วย 3 สมการ และ 3 ตัวแปร ซึ่งเราจะสามารถทำการแก้หาผลเฉลยได้โดยวิธีใดก็ได้ตามที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่แล้ว แต่ในตัวอย่างนี้ เราจะสังเกตเห็นว่ามีวิธีที่ง่ายกว่า นั่นก็คือ การแทนค่า $z = 2x$ จากสมการที่ (3) ลงในสมการ (2) และ (1) ก็จะทำให้ระบบสมการใหม่ที่ได้ ประกอบด้วยตัวแปร 2 ตัว คือ x และ y เท่านั้น ซึ่งก็ง่ายต่อการหาผลเฉลย

ดังนั้น เราจะทำการแทนค่า $z = 2x$ จากสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2) และ (1) ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$0.1x + 0.2y + 0.3(2x) = 276{,}000 \qquad (4)$$

$$x + y + (2x) = 1{,}240{,}000 \qquad (5)$$

รวมพจน์ของตัวแปร x จะได้ว่า

$$0.7x + 0.2y = 276{,}000 \qquad (6)$$

$$3x + y = 1{,}240{,}000 \qquad (7)$$

จากสมการที่ (7) เราได้ $y = 1{,}2400{,}000 - 3x$ และนำไปแทนใน (6) จึงได้ว่า

$$0.7x + 0.2(1{,}240{,}000 - 3x) = 276{,}000$$

$$0.7x + 248{,}000 - 0.6x = 276{,}000$$

$$0.1x = 276{,}000 - 248{,}000$$

$$x = 280{,}000$$

นำค่า x ที่ได้ กลับไปแทนหาค่า y และ z จากสมการที่ (7) และ (3) ตามลำดับ

จะได้

$$y = 400{,}000 \text{ และ } z = 560{,}000$$

นั่นคือ ราคาเช่าของบ้านประเภทหรูปานกลาง คือ $280{,}000$ บาท ต่อเดือน

ราคาเช่าของบ้านประเภทหรูมาก คือ $400{,}000$ บาท ต่อเดือน

ตัวอย่างที่ 2.5.2 (ปัญหานักลงทุน) สืบเนื่องจากการทำธุระกิจบ้านเช่าได้กำไรดีเหลือเกิน ดังนั้น เมื่อต้นปีที่แล้ว อัครเดช จึงได้นำเงินที่เก็บสะสมมาเป็นจำนวน 25,000,000 บาท ให้กับพรประภา เพื่อนสนิทที่คบกันมาตั้งแต่สมัยเรียน ป.ตรี มทส. ให้ไปลงทุนกับบริษัทหลักทรัพย์แห่งหนึ่ง บริษัทนี้มีทางเลือกการลงทุนให้พรประภาอยู่ 3 ประเภท คือ การลงทุนกับโครงการร่ำรวย การลงทุนกับโครงการมั่งมี และการลงทุนกับโครงการเศรษฐีอายุน้อย ซึ่งแต่ละประเภทการลงทุนให้ค่าตอบแทนแตกต่างกันไป ดังนี้

1. การลงทุนกับโครงการร่ำรวย ให้ค่าตอบแทน 6 % บาท ต่อปี
2. การลงทุนกับโครงการมั่งมี ให้ค่าตอบแทน 7 % บาท ต่อปี
3. การลงทุนกับโครงการเศรษฐีอายุน้อย ให้ค่าตอบแทน 8 % บาท ต่อปี

ถ้ากำหนดให้ เมื่อสิ้นปีที่ผ่านมา พรประภาได้เงินตอบแทนทั้งหมดจากการลงทุนกับโครงการทั้งสามรวมกันเป็น 1,620,000 บาท และพรประภาใช้เงินลงทุนในโครงการมั่งมี มากกว่าเงินที่ใช้ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อยอยู่ 6,000,000 บาท แล้วจงหาว่า พรประภาได้ใช้เงินเป็นจำนวนเท่าใดในการลงทุนไปในแต่ละโครงการ

วิธีทำ

เนื่องจากโจทย์ถามหาจำนวนเงินที่ภัทรภรลงทุนไปในแต่ละโครงการ ดังนั้น เราจะกำหนดให้เป็นตัวแปร คือ

ให้ x แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการร่ำรวย

y แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการมั่งมี

z แทน จำนวนเงินที่ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อย

ขั้นต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไขที่โจทย์ให้มา แล้วเปลี่ยนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ เนื่องจาก เงินที่ใช้ลงทุนไปทั้ง 3 โครงการ เมื่อรวมกันแล้วจะต้องเป็นเงินที่พรประภาได้มาจากอัครเดช เมื่อตอนต้นปี นั่นคือ

$$x + y + z = 25,000,000 \qquad (1)$$

และจากเงื่อนไขการให้ค่าตอบแทนของแต่ละโครงการที่แสดงไว้ในข้อ 1 - 3 ข้างต้น เราจะได้ว่า

$$0.06x + 0.07y + 0.08z = 1,620,000 \qquad (2)$$

และเนื่องจาก พรประภาใช้เงินลงทุนในโครงการมั่งมี **มากกว่า**เงินที่ใช้ลงทุนในโครงการเศรษฐีอายุน้อยอยู่ 6,000,000 บาท จึงได้ว่า

$$y - z = 6,000,000 \qquad (3)$$

ซึ่งมาถึงตอนนี้ เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 3 ตัวแปร และ 3 สมการ ขั้นตอนต่อไปก็คือการเลือกใช้วิธีที่เหมาะสม(และถนัด) ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นนี้
และในตัวอย่างนี้ จะได้ใช้วิธีของเกาส์ (Guass's Method) ซึ่งแสดงไว้ในหัวข้อที่ 2.4 ในการหาผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 2.5.2 (ต่อ)

จากสมการที่ (1), (2) และ (3) เราสามารถสร้างเมทริกซ์แต่งเติมได้เป็น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25{,}000{,}000 \\ 0.06 & 0.07 & 0.08 & 1{,}620{,}000 \\ 0 & 1 & -1 & 6{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

เราจะเริ่มการดำเนินการแปลงเชิงแถวเบื้องต้น ตามลำดับดังนี้

$$\xrightarrow{R_2-0.06R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25{,}000{,}000 \\ 0 & 0.01 & 0.02 & 120{,}000 \\ 0 & 1 & -1 & 6{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_2 ใหม่

$$\xrightarrow{100R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 25{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 12{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & -1 & 6{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_2 ใหม่

$$\xrightarrow{R_1-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 12{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & -1 & 6{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_1 ใหม่

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 12{,}000{,}000 \\ 0 & 0 & -1 & -2{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_3 ใหม่

$$\xrightarrow{(-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 13{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 12{,}000{,}000 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_3 ใหม่

$$\xrightarrow{R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 2 & 12{,}000{,}000 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_1 ใหม่

$$\xrightarrow{R_2-2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 15{,}000{,}000 \\ 0 & 1 & 0 & 8{,}000{,}000 \\ 0 & 0 & 1 & 2{,}000{,}000 \end{array}\right]$$

แล้วเขียนเป็น R_2 ใหม่

ดังนั้น

$$x = 15{,}000{,}000$$
$$y = 8{,}000{,}000$$
$$z = 2{,}000{,}000$$

นั่นคือ จะสรุปได้ว่า

พรประภา ลงทุนไปกับโครงการร่ำรวย เป็นจำนวนเงิน 15,000,000 บาท

ลงทุนไปกับโครงการมั่งมี เป็นจำนวนเงิน 8,000,000 บาท

และ ลงทุนกับโครงการเศรษฐีอายุน้อย เป็นจำนวนเงิน 2,000,000 บาท

<u>แบบฝึกทักษะที่ 2.5.1</u> จงใช้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร พร้อมด้วยเลือกวิธีการแก้ที่เหมาะสม(หรือถนัด) ในการแก้หาผลเฉลยของปัญหาในชีวิตจริงต่อไปนี้

1) **<u>ปัญหานักลงทุนมือใหม่</u>** กำหนดให้อัตราดอกเบี้ยการลงทุนของบริษัทสุขสันต์หรรษาในแต่ละประเภทการลงทุน ซึ่งมีทั้งหมด 3 ประเภทคือ ประเภท 1 ปี, ประเภท 2 ปี และประเภท 3 ปี เป็นไปตามข้างล่างนี้

ประเภท (ปี)	1	2	3
อัตราดอกเบี้ย	3.4 %	5.0 %	6.0 %

อนุสรณ์เป็นนักธุรกิจมือใหม่ มีความประสงค์ที่จะลงทุนกับบริษัทนี้ และมีเงินที่จะใช้ลงทุนทั้งสิ้นเป็นจำนวน 15,000,000 บาท โดยอนุสรณ์ต้องการที่จะได้ผลตอบแทนในแต่ละปีจากการลงทุนทั้ง 3 ประเภท เป็นจำนวนเงินทั้งสิ้น 800,000 บาท ถ้า อนุสรณ์ต้องการที่ใช้เงินลงทุนในประเภท 2 ปี มากกว่าเงินที่จะลงทุนในประเภท 1 ปี อยู่ 1,000,000 บาท แล้วเงินที่เหลือ จะใช้ลงทุนกับการลงทุนในประเภท 3 ปี

จงหาว่า อนุสรณ์จะต้องลงทุนกับแต่ละประเภทการลงทุน เป็นจำนวนเงินเท่าใด

2) **ปัญหา น.ส. ดาว มหาลัย กับ สูตรปรุงอาหาร** ไก่ผัดไส้กรอกทรงเครื่อง เป็นอาหารเลิศรสประจำตระกูลของ น.ส. ดาว มหาลัย ที่มีส่วนประกอบหลักคือ ไก่, ไส้กรอก และข้าว มาวันหนึ่ง น.ส.ดาว จัดงานเลี้ยงฉลองการสำเร็จการศึกษาจากมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งในกรุงเทพฯ และต้องการที่จะทำไก่ผัดไส้กรอกทรงเครื่องนี้เลี้ยงแขกในงานในปริมาณที่มาก แต่ปัญหาคือ น.ส.ดาว มีงบประมาณในการซื้อส่วนประกอบของอาหารไม่มาก (เพราะพึ่งสำเร็จการศึกษา ยังไม่มีงานทำ) ซึ่งราคาวัตถุดิบจากตลาดประจำบ้านหนองใหญ่ พบว่า

เนื้อไก่ ราคา 600 บาท ต่อกิโลกรัม

ไส้กรอกหมู ราคา 300 บาท ต่อกิโลกรัม

และ ข้าว ราคา 100 บาท ต่อกิโลกรัม

ถ้า น.ส.ดาว มหาลัย ได้จ่ายเงินทั้งหมดในการซื้อวัตถุดิบเป็นจำนวน 4,200 โดยน้ำหนักรวมของวัตถุดิบทั้ง 3 ชนิดนี้คือ 13.5 กิโลกรัม และพบอีกด้วยว่า น.ส. ดาว ข้าวที่ น.ส.ดาว ซื้อ หนักเป็น 2 เท่าของไส้กรอกที่ซื้อ

จงหาว่า น.ส.ดาว ซื้อวัตถุดิบแต่ละประเภทเป็นกี่กิโลกรัม

....

....

....

3) **ปัญหาการโฆษณา** บริษัทการตลาดแห่งหนึ่ง มีความประสงค์จะลงโฆษณากับสื่อ โดยมีงบประมาณทั้งหมด 30,000 บาท ต่อเดือนโดยที่ อัตราค่าโฆษณาทางทีวี คิดเป็นชุดละ 1,000 บาท อัตราค่าโฆษณาทางวิทยุ คิดเป็นชุดละ 200 บาท และทางหนังสือพิมพ์คิดเป็นชุดละ 500 บาท ต่อเดือน ถ้าบริษัทนี้ต้องการที่จะลงโฆษณาเป็นจำนวนทั้งสิ้น 60 ชุดใน 1 เดือน และต้องการที่ให้จำนวนชุดของการลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวนเท่ากับจำนวนชุดของการลงโฆษณาทางทีวีรวมกับทางหนังสือพิมพ์พอดี

จงหาว่า บริษัทนี้ จะต้องลงโฆษณาในสื่อแต่ละประเภท เป็นจำนวนกี่ชุดในแต่ละเดือน

4) **<u>ปัญหาการโฆษณา (ต่อ)</u>** จากข้อ 3 ปรากฏว่าในเดือนหน้านี้ บริษัทดังกล่าวได้ลดงบประมาณการโฆษณาจาก 30,000 บาท เป็น 25,000 บาท จงหาว่า จะต้องทำการโฆษณาในสื่อแต่ละประเภท เป็นจำนวนกี่ชุด (ถ้าเงื่อนไขที่เหลือนั้น เหมือนกับข้อที่ 3 ทุกประการ)

5) **<u>ปัญหาการจำหน่ายตั๋วเข้าชมกีฬา</u>** ในการแข่งกีฬาครั้งหนึ่งเมื่อไม่นานมานี้ สนามกีฬากลางมีที่นั่งทั้งหมด 49,000 ที่นั่ง โดยแบ่งเป็น 3 ระดับคือ ที่นั่งระดับล่าง ระดับกลาง และระดับบนสุด โดยแต่ละระดับจะมีราคาตั๋วที่แตกต่างกัน คือ

ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับล่าง คิดเป็น 35 บาท ต่อ หนึ่งที่นั่ง

ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับกลาง คิดเป็น 30 บาท ต่อ หนึ่งที่นั่ง

และ ราคาตั๋วสำหรับที่นั่งระดับบนสุด คิดเป็น 25 บาท ต่อ หนึ่งที่นั่ง

โดยจำนวนที่นั่งในระดับในระดับล่าง และระดับกลาง เมื่อรวมกันแล้ว จะเท่ากับจำนวนที่นั่งในระดับบนสุด เมื่อมีการจำหน่ายตั๋วเข้าชมกีฬาครั้งหนึ่ง ผลปรากฏว่าตั๋วขายหมดพอดี และได้รายได้ทั้งหมดเป็นเงิน 1,419,500 บาท จงหาว่า จำนวนที่นั่งในแต่ละระดับนั้น มีจำนวนเท่าใด

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -7 & 5 \end{bmatrix}$, และ $C = \begin{bmatrix} 17 & 5 & 10 \\ 11 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

จงหา

1. $A + B$
2. $A + C$
3. $C - A$
4. $A - C$
5. $3A$
6. $-2B$
7. $0.5C$
8. $2A + 3C$
9. $B + C$
10. $-C - A$
11. $-2B + 5C$
12. $3A - 4C$

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

จงหา

1. $A + B$
2. $B + C$
3. $3X + V$
4. $3B - C$
5. AB
6. BA
7. BC
8. CB
9. A^2
10. B^2
11. B^3
12. AV
13. AX
14. BX
15. VX

3. จงใช้การหาเมตริกผกผันเพื่อหาผลเฉลยในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 4 \\ -26 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} -35 \\ -8 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} 6 \\ 22 \end{bmatrix}$

6. $3X = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 21 & -27 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 25 & 13 \\ 13 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$

8. $\begin{bmatrix} 20 & -3 \\ 15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} K$

9. $Y - \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -40 & -40 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 28 & 0 & -20 \\ 7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -21 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 9 \end{bmatrix} X$

13. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 13 \\ 21 & 0 & -36 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. จงหาผลคูณของเมทริกต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 5 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & -5 \\ 5 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \\ -5 & 4 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 & 5 \\ -1 & -5 & -4 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

5. จงใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (ด้วยการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น) สำหรับกาหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1) $-6r+5s+2t=-11$
$-2r+s+4t=-9$
$4r-5s+t=-4$

2) $-6x-2y+2z=-8$
$3x-2y-4z=8$
$6x-2y-6z=-18$

3) $5x-4y+2z=21$
$-x-5y+6z=-24$
$-x-4y+5z=-21$

4) $6r-s+3t=-9$
$5r+5s-5t=20$
$3r-s+4t=-5$

5) $-3a-b-3c=-8$
$-5a+3b+6c=-4$
$-6a-4b+c=-20$

6) $-5x+3y+6z=4$
$-3x+y+5z=-5$
$-4x+2y+z=13$

7) $3a-3b+4c=-23$
$a+2b-3c=25$
$4a-b+c=25$

8) $-6x-2y-z=-17$
$5x+y-6z=19$
$-4x-6y-6z=-20$

เฉลยแบบฝึกทักษะ (Answers)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.1 เมทริกซ์และพีชคณิตเบื้องต้นบนเมทริกซ์

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.1

1) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -17 & -4 & 7 \\ -10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -3/2 & -3 & 3/2 \\ -19/2 & -1 & 5/2 \\ -10 & -3/2 & -2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.2

1) $x = 1, y = 6$ 2) $x = -5, y = -12$ 3) $x = -5, y = -5, z = 1$

4) $x = -2, y = 5, z = 7$ 5) $x = 4, y = 15, z = 9/2$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.3

1) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -27 & 12 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} -30 & 24 \\ 15 & -12 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -13 & -19 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 10 & -16 \\ 18 & -24 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} -14 & -3 \\ -19 & 22 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -15 & 5 \\ 18 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 8) ไม่สามารถทำการคูณกันได้ 9) $\begin{bmatrix} 2 & 22 \\ 33 & 6 \\ -24 & -60 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix}$ 11) $\begin{bmatrix} -10u & -32v \end{bmatrix}$ 12) $\begin{bmatrix} 16x - 2y^2 & 5y \\ 8x^2 - 8y & 20 \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1.4

2) จะตกที่พิกัด $(-0.1232, 0.1866, 0)$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.2 ตัวกำหนดของเมทริกซ์

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.2.1

1) -12	2) -24	3) 39	4) -103
5) -161	6) -51	7) 200	8) 139
9) 647	10) -800	11) 0	12) $x = -2$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.3 เมทริกซ์ผกผัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.3.1

1) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์

2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 3) $-\frac{1}{21}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$

4) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์

5) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

7) ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผันได้ เพราะเมทริกซ์นี้มีค่าตัวกำหนดเป็นศูนย์

8) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.3.2

1) $\begin{bmatrix} -\frac{8}{57} & \frac{32}{19} & -\frac{20}{57} \\ \frac{22}{19} & -\frac{36}{19} & -\frac{2}{19} \\ \frac{50}{57} & -\frac{48}{19} & -\frac{46}{57} \end{bmatrix}$ 2) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -9 & 11 & 19 \\ 12 & -14 & -22 \end{bmatrix}$ 3) $\frac{1}{828}\begin{bmatrix} 3 & 31 & 101 \\ -21 & 59 & -155 \\ 78 & -22 & 142 \end{bmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & -11 \\ -7 & -8 & 10 \\ -11 & -15 & 17 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{22} & \frac{7}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{22} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{22} \end{pmatrix}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.4 การใช้เมทริกซ์ในการหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้น</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.4.1 - 3

1) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$ 2) $x = 7,\ y = -4,\ z = -2$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.4.4

1) $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$ 2) $x = -2,\ y = -3,\ z = 4$

3) $x = -3.5, y = 0.5, z = 1.5$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 2.5 เมทริกซ์และสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรในชีวิตประจำวัน</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.5.1

1) อนุสรณ์จะต้อง ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์หรรษาประเภท 1 ปี เป็นจำนวนเงิน 2,500,000 บาท
ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์หรรษาประเภท 2 ปี เป็นจำนวนเงิน 3,500,000 บาท
ลงทุนกับบริษัทสุขสันต์หรรษาประเภท 3 ปี เป็นจำนวนเงิน 9,000,000 บาท

2) น.ส.ดาว ได้ซื้อไก่มาเป็นปริมาณ 4.5 กิโลกรัม
ได้ซื้อไส้กรอกมาเป็นปริมาณ 3 กิโลกรัม
ได้ซื้อข้าวมาเป็นปริมาณ 6 กิโลกรัม

3) บริษัทนี้จะต้องลงโฆษณาทางทีวี เป็นจำนวน 18 ชุด
ลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวน 30 ชุด
ลงโฆษณาทางหนังสือพิมพ์ เป็นจำนวน 12 ชุด

4) บริษัทนี้จะต้องลงโฆษณาทางทีวี เป็นจำนวน 8 ชุด
ลงโฆษณาทางวิทยุ เป็นจำนวน 30 ชุด
ลงโฆษณาทางหนังสือพิมพ์ เป็นจำนวน 22 ชุด

5) มีจำนวนที่นั่งระดับล่างทั้งหมด 14,400 ที่นั่ง
มีจำนวนที่นั่งระดับกลางทั้งหมด 10,100 ที่นั่ง
มีจำนวนที่นั่งระดับบนสุดทั้งหมด 24,500 ที่นั่ง

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

ข้อ 1)

1. ไม่สามารถดำเนินการได้
2. $\begin{bmatrix} 32 & 15 & 19 \\ 9 & -9 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 13 & 3 & -4 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -13 & -3 & 4 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 45 & 30 & 27 \\ -6 & -18 & 9 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 14 & -10 \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 8.5 & 2.5 & 5 \\ 5.5 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 81 & 35 & 48 \\ 29 & -21 & 3 \end{bmatrix}$
9. ไม่สามารถดำเนินการได้
10. $\begin{bmatrix} -32 & -15 & -19 \\ -9 & 9 & 2 \end{bmatrix}$
11. ไม่สามารถดำเนินการได้
12. $\begin{bmatrix} -23 & 10 & -13 \\ -50 & -6 & 13 \end{bmatrix}$

ข้อ 2)

1. ไม่สามารถดำเนินการได้
2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3x+3 \\ 3y-1 \\ 3z+2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} -1 & 15 & 19 \\ 2 & 2 & 11 \end{bmatrix}$
6. ไม่สามารถดำเนินการได้
7. $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \\ 8 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
8. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$
9. ไม่สามารถดำเนินการได้
10. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 8 & -1 & 2 \\ -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} -7 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 23 \\ 16 & 14 & -3 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 15 \\ 14 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} 2x+3y+6z \\ 4x+z \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} x+2x \\ 3x+y-z \\ -2x+2y+3z \end{bmatrix}$
15. ไม่สามารถดำเนินการได้

ข้อ 3)

1. $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -3 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -11 \\ -7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$

11. มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์

12. $\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 9 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -3 & 9 & -9 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

ข้อ 4)

1. $\begin{bmatrix} 39 \\ 23 \\ 12 \\ -42 \\ 32 \end{bmatrix}$

2. ไม่สามารถดำเนินการได้

3. $\begin{bmatrix} 0 & 30 & -6 & 3 & 27 \\ 35 & 30 & -44 & 32 & 30 \\ -1 & 29 & 3 & 4 & 21 \\ 34 & -1 & -29 & 30 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 19 & -18 & 6 \\ -30 & 32 & -32 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -10 & -8 & -24 & -10 \\ -28 & 8 & -8 & -28 \\ 5 & -7 & 9 & 5 \\ -30 & 15 & -5 & -30 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -4 & -10 & -8 & -2 \\ -10 & -25 & -20 & -5 \\ 6 & 15 & 12 & 3 \\ 4 & 10 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 7 & -15 & 2 & 16 & 6 \\ -5 & -9 & -4 & -41 & 36 \\ -7 & 15 & -2 & -16 & -6 \\ 11 & 17 & 30 & -7 & 2 \end{bmatrix}$

8. ไม่สามารถดำเนินการได้

9. ไม่สามารถดำเนินการได้

10. ไม่สามารถดำเนินการได้

ข้อ 5)

1. $4, 3, -1$
2. มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์
3. $5, -1, -4$
4. $-1, 6, 1$
5. $2, 2, 0$
6. $-2, 4, -3$
7. มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์
8. $2, 3, -1$

บทที่ 3

เกี่ยวกับความสัมพันธ์ (Relations) และฟังก์ชันเบื้องต้น (Functions)

มนุษย์ได้มีการนำเอาการสร้างความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน มาใช้เพื่อที่จะอธิบายการเปลี่ยนไปของสิ่งๆหนึ่ง ที่ขึ้นกับปัจจัยหรือสิ่งอื่นๆในธรรมชาติ หรือปัญหาจริงทางด้านวิศวกรรม ดังนั้น การเข้าใจในหลักการของความสัมพันธ์ของสิ่งเหล่านั้นโดยรวม จึงมีความสำคัญในการแก้ไขปัญหาต่างๆ ที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน และถึงแม้ว่า นักศึกษาจะพอรู้จักความสัมพันธ์และฟังก์ชันมาบ้างแล้วในระดับมัธยม ในบทนี้ จะได้นำเสนออีกครั้ง เพื่อความเข้าใจที่ถูกต้อง และสามารถนำไปใช้ได้จริงในบทประยุกต์

3.1 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันขั้นแนะนำ (Introduction to Relations and Functions)

ในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับฟังก์ชัน ซึ่งมีความจำเป็นต้องใช้มาก โดยจะมีความรู้อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

❖ คู่อันดับ (Ordered Pairs)

คู่อันดับ คือ สมาชิกที่เขียนอยู่ในรูป (a, b) โดยที่ a, b เป็นสมาชิกของเซต อาจเป็นเซตเดียวกันหรือต่างกันก็ได้ เช่น คู่อันดับ (a, b)

เรียก a ว่า เป็นสมาชิกตัวหน้า (First Element) หรือพิกัด x

b ว่า เป็นสมาชิกตัวหลัง (Second Element) หรือพิกัด y

คุณสมบัติของคู่อันดับ

$(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $(a = c)$ และ $(b = d)$

$(a,b) \neq (b,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$

❖ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesion Product)

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และ B คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และมีสมาชิกตัวหลังเป็นของ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ อ่านว่า A คูณ B หรือ A cross B

บทนิยาม 3.1 ถ้า A, B เป็นเซตใดๆ แล้ว $A \times B$ จะได้เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$
$A \times B = \{(a,b) / a \in A$ และ $b \in B\}$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 กำหนดให้ $A = \{1,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

จงหา $A \times B,\quad B \times A,\quad A \times A,\quad B \times B$

วิธีทำ $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$

$B \times A = \{(a,1),(a,3),(b,1),(b,3),(c,1),(c,3)\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

$B \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$

ข้อสังเกต $A \times B \neq B \times A$ เสมอ ยกเว้น

1. $A = B$
2. A หรือ $B = \emptyset$

คุณสมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

1. ไม่มีคุณสมบัติการสลับที่
   $A \times B \neq B \times A$
   แต่ $n(A \times B) = n(B \times A)$
   เมื่อ n คือจำนวนสมาชิกของเซต ซึ่งในเรื่องของเซตในเอกสารฉบับนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $|\quad|$
2. คุณสมบัติการกระจาย
   $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
   $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
   $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \times D)$

ตัวอย่างที่ 3.1.2 กำหนดให้ $A = \{a,b\}, B = \{0\}$ และ $C = \{7,8\}$

จงหา 1. $A \times B \times C$

2. $C \times A \times B$

วิธีทำ 1. $A \times B \times C = \{(a,0,7),(a,0,8),(b,0,7)(b,0,8)\}$

2. $C \times A \times B = \{(7,a,0),(7,b,0),(8,a,0)(8,b,0)\}$

บันทึก

....

....

....

....

....

❖ ความสัมพันธ์ (Relations)

ความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต B หมายถึง เซตของคู่อันดับ (a, b) ที่มีคู่ลำดับตัวหน้ามาจากเซต A และคู่ลำดับตัวหลังมาจากเซต B

บทนิยาม 3.2 r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซต $A \times B$ เขียนแทนด้วย $r \subset A \times B$

ตัวอย่างที่ 3.1.3 กำหนดให้ $A = \{2,3,9\}$ และ $B = \{a, b\}$

จงเขียนความสัมพันธ์จาก A ไป B มา 5 ความสัมพันธ์

วิธีทำ จะได้ตัวอย่างความสัมพันธ์จาก A ไป B 5 ความสัมพันธ์ คือ

$r_1 = \{(2, a)\}$

$r_2 = \{(2, b), (9, b)\}$

$r_3 = \{(2, a), (3, a), (3, b)\}$

$r_4 = \{(2, a), (2, b), (3, a), (9, a)\}$

$r_5 = \{(2, b), (3, a), (3, b), (9, a), (9, b)\}$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{1,2,3,4\}$

จงหาเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(a, b)/a \in A, b \in B, a < b\}$
2. $r_2 = \{(a, b)/a \in A, b \in B, a > b\}$

วิธีทำ จะได้

$A \times B =$
$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

1. r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ $a < b$

ดังนั้น $r_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

2. r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยที่ $a > b$

ดังนั้น $r_2 = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

บทนิยาม 3.3 ความสัมพันธ์บน A $(Relation\ on\ A)$ หมายถึง ลำดับ (a,b)โดยที่ $a \in A$ และ $b \in A$

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times A$

r เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset B \times B$

<u>ตัวอย่างที่ 3.1.5</u> กำหนดให้ $A = \{5,9,13,17\}$

จงหาความสัมพันธ์บน A ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(x,y) \in A \times A / x + y, < 19\}$
2. $r_2 = \{(x,y) \in A \times A / x = y\}$

วิธีทำ จะได้

$A \times A$
$= \{(5,5),(5,9),(5,13),(5,17),(9,5),(9,9),(9,13),(9,17),(13,5),(13,9),(13,13),$
$(13,17),(17,5),(17,9),(17,13),(17,17)\}$

1. r_1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A โดยที่ $x + y < 19$

เช่น คู่อันดับ $(5,5)$ จะได้ $5 + 5 < 19$

ดังนั้น $r_1 = \{(5,5),(5,9),(5,13),(9,5),(9,9),(13,5)\}$

2. r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A โดยที่ $x = y$

ดังนั้น $r_2 = \{(5,5),(9,9),(13,13),(17,17)\}$

❖ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ถ้ากำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.4 โดเมน ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับใน r

เขียนแทนด้วย $D_r = \{x / (x,y) \in r\}$

เรนจ์ ของความสัมพันธ์ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับใน r

เขียนแทนด้วย $R_r = \{y / (x,y) \in r\}$

บันทึก

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 3.1.6 กำหนดให้ $r = \{(-1,1),(0,4),(3,3)\}$ จงหาโดเมน D_r และเรนจ์ R_r ของความสัมพันธ์นี้

วิธีทำ จะได้ D_r คือเซตของสมาชิกตัวหน้า

ดังนั้น $D_r = \{-1,0,3\}$

R_r คือเซตของสมาชิกตัวหลัง

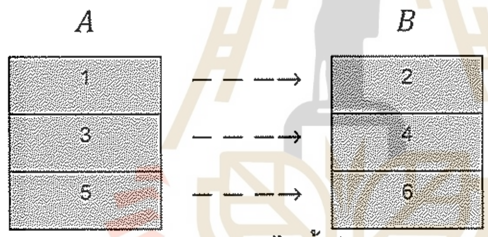
ดังนั้น $R_r = \{1,4,3\}$

❖ ฟังก์ชัน (Functions)

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์อีกรูปแบบหนึ่งของคู่ลำดับใด ๆ ที่สมาชิกตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน กำหนดให้ r_1 และ r_2 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

$$r_1 = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$
$$r_2 = \{(1,2),(1,3),(4,5)\}$$

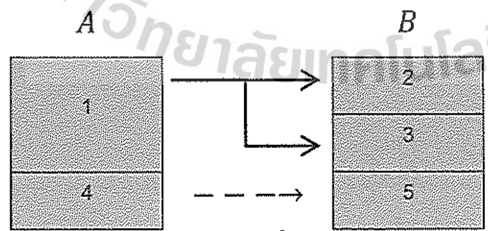
จากความสัมพันธ์ r_1 เขียนแผนภูมิจาก A ไปยัง B ได้



จะเห็นว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจับคู่ไม่ซ้ำกัน

ดังนั้น r_1 **<u>เป็น</u>**ฟังก์ชัน

จากความสัมพันธ์ r_2 เขียนแผนภูมิจาก A ไปยัง B ได้



จะเห็นว่าสมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับจับคู่ซ้ำกัน คือ $(1,2),(1,3)$

ดังนั้น r_2 **<u>ไม่เป็น</u>**ฟังก์ชัน

บทนิยาม 3.5 ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ในสองคู่ลำดับใดๆ ที่สมาชิกตัวหน้าต้องไม่ซ้ำกัน หรือถ้าสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน $(a,b) \in f$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชัน เมื่อ $b = c$

"ใช้สัญลักษณ์ f, g, h แทนความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน"

ตัวอย่างที่ 3.1.7 ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน เช่น

$$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$$
$$f_2 = \{(x,y)/y = x^2+1\}$$
$$f_3 = \{(x,y)/y = |2x+1|\}$$
$$f_4 = \{(x,y)/x = \sqrt{y}\}$$

❖ การตรวจสอบความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ทำได้หลายกรณี เช่น

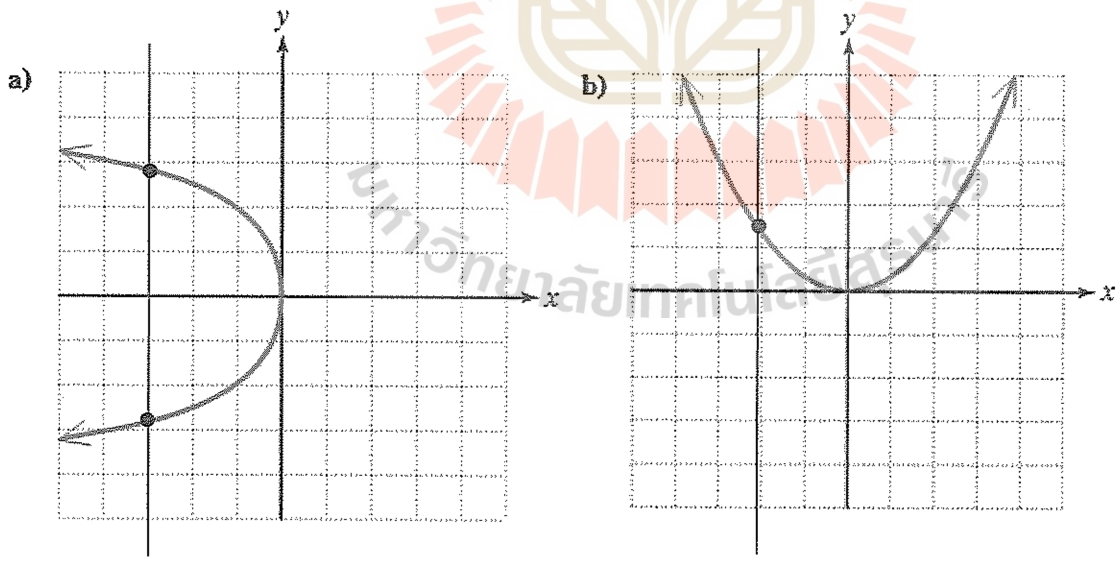
กรณีที่ 1 ใช้วิธีเขียนกราฟ

ถ้าเราสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ โดยกระทำดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของความสัมพันธ์

ขั้นที่ 2 ลากเส้นตรงขนานกับแกน y ตัดกับกราฟของความสัมพันธ์นั้น ถ้าตัด 1 ชุด จะได้ความสัมพันธ์ นั้นเป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเส้นใดเส้นหนึ่งตัดกราฟนั้นเกิน 1 จุด ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

กราฟของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน อาทิเช่น



แผนภาพที่ 2 แผนภาพแสดงการทดสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ด้วยการเขียนกราฟ โดยที่ ความสัมพันธ์ในกราฟ a) ไม่เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ในกราฟ b) เป็นฟังก์ชัน

กรณีที่ 2 ใช้วิธีสุ่ม โดยการแทนค่า x, y

โดยที่ ถ้าสุ่มค่า x มา 1 ค่า ถ้าให้ค่า y เกิน 1 ค่า จะไม่เป็นฟังก์ชัน กรณีความสัมพันธ์เป็นแบบเงื่อนไข เช่น

$$f = \{(x,y)|y = x^2\}$$

ถ้า $(x,y) \in f$ ให้ $y = f(x)$ คือ y เป็นค่าของ f ที่ x

นั่นคือ $f = \{(x,y)|y = f(x)$ และ $(x,y) = (x, f(x))\}$

จะได้ $y = f(x) = x^2$ จะได้ค่าของ y ขึ้นอยู่กับค่าของ x

ถ้าเราสุ่มแทน $x = -1$ จะได้ $y = f(-1) = 1$

$x = 0$ จะได้ $y = f(0) = 0$

$x = 1$ จะได้ $y = f(1) = 1$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.1.8 กำหนดให้ $y^2 + 7 = x$ จงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ จาก $y^2 + 7 = x$

หรือ $y^2 = x - 7$

สุ่มแทน $x = 8$ จะได้ $y^2 = 8 - 7$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

จะเห็นว่าเมื่อแทน $x = 8$ แล้วได้ค่า y สองค่า คือ 1 และ -1

เขียนเป็นคู่ลำดับได้ คือ $(8,1), (8,-1)$

ดังนั้น $y^2 + 7 = x$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3.1.9 กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 1$

จงหาค่าของ $f(4), f(t), f(k+1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^2 - 1$

จะได้ $f(4) = 2(4^2) - 1 = 31$

$f(t) = 2t^2 - 1$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2(k+1)^2 - 1 \\ &= 2(k^2 + 2k + 1) - 1 \\ &= 2k^2 + 4k + 2 - 1 \\ &= 2k^2 + 4k + 1 \end{aligned}$$

บทนิยาม 3.6 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ได้ต้องมีเงื่อนไข คือ

$$D_f = A \text{ และ } R_f \subset B$$

ใช้สัญลักษณ์ $f : A \to B$

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.1 จงพิจารณาและหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับ**ความสัมพันธ์** ต่อไปนี้

1) กำหนดให้เซต $A = \{1,2,3, \ldots \ldots, 14\}$ และ R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A ที่กำหนดโดย $R = \{(x, y): 3x - y = 0,$ เมื่อ $x, y \in A\}$ จงเขียนเซตของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ R นี้

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) กำหนดให้ความสัมพันธ์ R โดย $R = \{(x, y) | y = x + 5, x, y \in N\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ R นี้ออกมาในรูปของเซตแบบแจกแจงสมาชิก พร้อมระบุโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้ด้วย

....

....

....

....

....

....

3) กำหนดให้ $A = \{1,2,3,5\}$ และ $B = \{4,6,9\}$ และนิยามความสัมพันธ์ R จาก A ไป B โดย $R = \{(x, y) \mid$ ความต่างของค่า x และค่า y เป็นเลขคี่ เมื่อ $x \in A, y \in B\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ R ในแบบแจกแจงสมาชิก

....

....

....

....

4) ให้ $A = \{x, y, z\}$ และ $B = \{1,2\}$ จงหาจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จาก A ไปยัง B

....

....

....

....

....

....

5) ให้ R เป็นความสัมพันธ์ที่นิยามบนเซตของจำนวนเต็ม Z โดยนิยามเป็น $R = \{(a, b): a, b \in Z, a - b$ เป็นเลขจำนวนเต็ม$\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ R นี้

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.2 จงพิจารณาและหาคำตอบของปัญหาเกี่ยวกับ**ฟังก์ชัน** ต่อไปนี้

1) จงพิจารณาความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่ และอย่างไร(ยกเหตุผลประกอบ)

(i) $\{(2,1),(5,1),(8,1),(11,1),(14,1),(17,1)\}$

(ii) $\{(2,1),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5),(12,6),(14,7)\}$

(iii) $\{(1,3),(1,5),(2,5)\}$

....

....

....

....

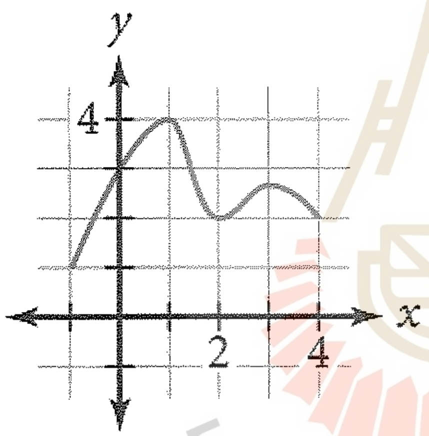
....

....

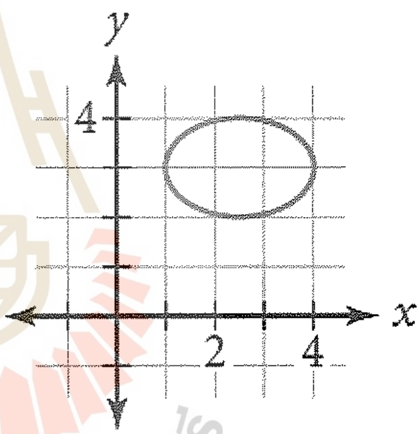
....

2) กราฟในข้อใด เป็นฟังก์ชัน และเพราะอะไร

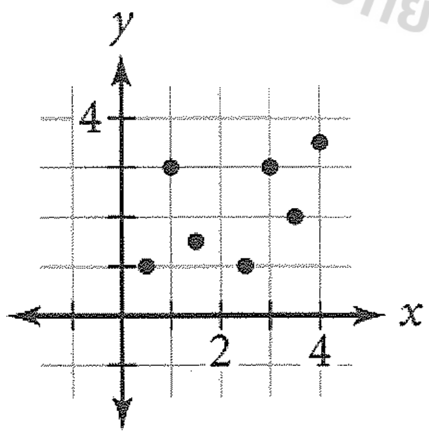
ก.



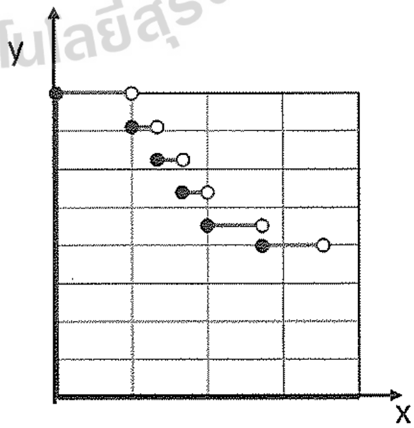
ข.



ค.



ง.



3) จงหาเรนจ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1) $f(x) = 2 - 3x, x \in R, x > 0.$

3.2) $f(x) = x^2 + 2,\ \ x$ เป็นจำนวนจริง

3.3) $f(x) = x, x$ เป็นจำนวนจริง

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะที่ 3.1.3 จงหาค่าของฟังก์ชัน ในแต่ละจุดบนโดเมนที่กำหนดให้ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. ถ้า $h(t) = |t + 2| + 3$ แล้ว $h(6) =$ ....

2. ถ้า $g(a) = 3^{3a-2}$ แล้ว $g(1) =$ ....

3. ถ้า $w(t) = -2t + 1$ แล้ว $w(4) =$ ....

4. ถ้า $g(x) = 3x - 3$ แล้ว $g(-6) =$ ....

5. ถ้า $h(n) = -2n^2 + 4;$ แล้ว $h(4) =$ ....

6. ถ้า $h(t) = -2 . 5^{-t-1};$ แล้ว $h(-2) =$ ....

7. ถ้า $f(x) = (x^2 - 3);$ แล้ว $f(-8)$ = ...

8. ถ้า $p(a) = -4^{3a};$ แล้ว $p(-1)$ = ...

9. ถ้า $p(t) = 4t - 5;$ แล้ว $p(t - 2)$ = ...

10. ถ้า $g(a) = 4a;$ แล้ว $g(2a)$ = ...

11. ถ้า $w(n) = 4n + 2;$ แล้ว $w(3n)$ = ...

12. ถ้า $w(a) = a + 3;$ แล้ว $w(a + 4)$ = ...

13. ถ้า $h(x) = 4x - 2;$ แล้ว $h(x + 2)$ = ...

14. ถ้า $k(a) = -4^{3a+2};$ แล้ว $k(a - 2)$ = ...

....

15. ถ้า $g(n) = n^3 - 5n^2$; แล้ว $g(-4n)$ = ...

....

16. ถ้า $f(n) = n^2 - 2n$; แล้ว $f(n^2)$ = ...

....

17. ถ้า $p(a) = a^3 - 5$; แล้ว $p(x-4)$ = ...

....

18. ถ้า $h(t) = 2 \,.\, 3^{t+3}$; แล้ว $h(4+t)$ =..

....

3.2 พีชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน (Algebra on Functions)

ในเรื่องของระบบจำนวน และจำนวนจริง เวลาเราเอ่ยถึงพีชคณิตของจำนวน เราจะหมายถึงการศึกษาการเอาจำนวนต่าง ๆมาบวก หาผลต่าง คูณ หาร กัน ในเรื่องของฟังก์ชันก็เช่นเดียวกัน ในหัวข้อนี้ เราจะมาศึกษาการกระทำกันทางพีชคณิตของฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชัน ขึ้นไป แล้วทำให้เกิดฟังก์ชันใหม่

บทนิยาม 3.7 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น D_f และ D_g ตามลำดับ ผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชัน f และ g เขียนแทนด้วย $f+g, f-g, f \,.\, g$ และ $\frac{f}{g}$ ตามลำดับโดยกำหนดค่าฟังก์ชันได้ดังนี้

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0$

หมายเหตุ โดเมนของ $f+g,\ f-g,\ f \,.\, g$ คือ $D_f \cap D_g$

ส่วนโดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g$ ยกเว้น $g(x) = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.1</u> กำหนดให้ $f = \{(1,3), (4,5)\}$

และ $g = \{(1,6), (7,0)\}$

จงหาโดเมนของ $f+g$

วิธีทำ เนื่องจาก $D_f = \{1,4\}$ และ $D_g = \{1,7\}$

ดังนั้น โดเมนของ $f+g$ คือ $D_f \cap D_g = \{1\}$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 กำหนดให้ $f(x) = 5x + 3$

และ $g(x) = (x - 2)$

จงหา 1. $(f + g)(x)$ 2. $(f - g)(4)$

3. $(f \cdot g)(3)$ 4. $(\frac{f}{g})(1)$

วิธีทำ 1. จาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (5x + 3) + (x - 2)$

$= 6x + 1$

2. จาก $(f - g)(4) = f(x) - g(x) = (5x + 3) - (x - 2)$

ดังนั้น $(f - g)(4) = (5(4) + 3) - (4 - 2) = 21$

(แทน x ใน $f(x)$ และ $g(x)$ ด้วย 4)

3. จาก $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (5x + 3)(x - 2)$

ดังนั้น $(f \cdot g)(3) = (5(3) + 3)(3 - 2) = 18$

(แทน x ใน $f(x)$ และ $g(x)$ ด้วย 3)

4. จาก $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5x+3}{x-2}$

ดังนั้น $(\frac{f}{g})(1) = \frac{5(1)+3}{1-2} = -8$ (แทน x ใน $f(x)$ และ $g(x)$ ด้วย 1)

บันทึก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

<u>ตัวอย่างที่ 3.2.3</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 4x - 5$

และ $g(x) = x + 3$

จงหาค่า 1. $(f + g)(x)$ 2. $(f - g)(x)$

3. $(f \cdot x)(x)$ 4. $(\frac{f}{g})(x)$ พร้อมทั้งหาโดเมน

วิธีทำ 1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (x^2 + 4x - 5) + (x + 3)$$
$$= x^2 + 5x - 2$$

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x^2 + 4x - 5) - (x + 3)$$
$$= x^2 + 3x - 8$$

3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$= (x^2 + 4x - 5)(x + 3)$$
$$= x^3 + 7x^2 + 7x - 15$$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{x^2+4x-5}{x+3}$ เมื่อ $x \neq -3$

จะได้โดเมนของ f และ g คือ $D_f = D_g = R$

ดังนั้น โดเมนของ $(f + g), (f - g), (f . g)$ คือ $D_f \cap D_g = R$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ หาจาก $D_f \cap D_g, g(x) \neq 0$

จาก $g(x) = x + 3$

นั่นคือ $x + 3 \neq 0, x \neq -3$

ดังนั้น โดเมนของ $f(x)$ คือ $R - \{-3\}$

บันทึก

....

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะที่ 3.2 จงหาค่าการดำเนินการทางพีชคณิตของฟังก์ชัน ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

$g(x) = x - 1$

จงหาค่า 1.1) $(f+g)(x)$ 1.2) $(f-g)(x)$

1.3) $(f \cdot g)(x)$ 1.4) $(\frac{f}{g})(x)$

2) กำหนดให้ $f(x) = x - 1$

$g(x) = 5x^2 + x$

$h(x) = \sqrt{5-x}$

จงหาค่าของการดำเนินการต่อไปนี้

2.1) $(f+g)(x)$ 2.2) $(g-f)(x)$ 2.3) $(f \cdot h)(x)$

3.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Functions)

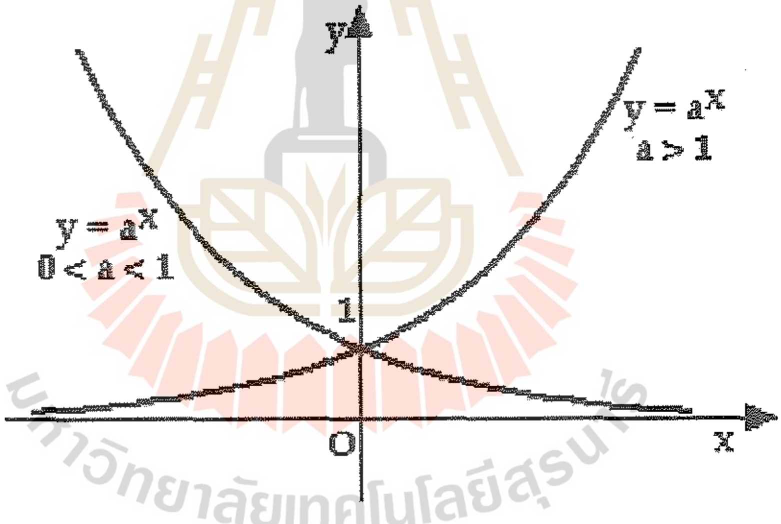
❖ กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

บทนิยาม 3.8 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = a^x$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ และไม่เท่ากับ 1
เรียก a ว่า "ฐาน" และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และเรียกว่า "เลขชี้กำลัง"

ข้อสังเกต

1. ถึงแม้ว่าเราจะสามารถคำนวณหาค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังเมื่อเลขฐานเป็นจำนวนที่น้อยกว่าศูนย์ (อย่างเช่น $(-4)^3$) เราก็จะนิยามฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้ในกรณีที่ฐานเป็นเลขที่มากกว่าศูนย์เท่านั้น
2. จะเห็นได้ชัดว่า โดเมนของฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้ คือ เซตของจำนวนจริง เนื่องจาก ค่าของ x สามารถเป็นจำนวนจริงตัวใดก็ได้ และเรนจ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง คือ จำนวนจริงบวกทั้งหลาย เพราะว่า $a^x > 0$ เสมอสำหรับทุกจำนวนจริง x และ $a > 0$

กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เมื่อจำแนกตามค่าของฐาน สามารถเขียนได้ในรูปทั่วไป ดังนี้



แผนภาพที่ 3 กราฟแสดงตัวอย่างของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จำแนกตามช่วงของค่าของฐาน a ของฟังก์ชัน

จะเห็นว่า

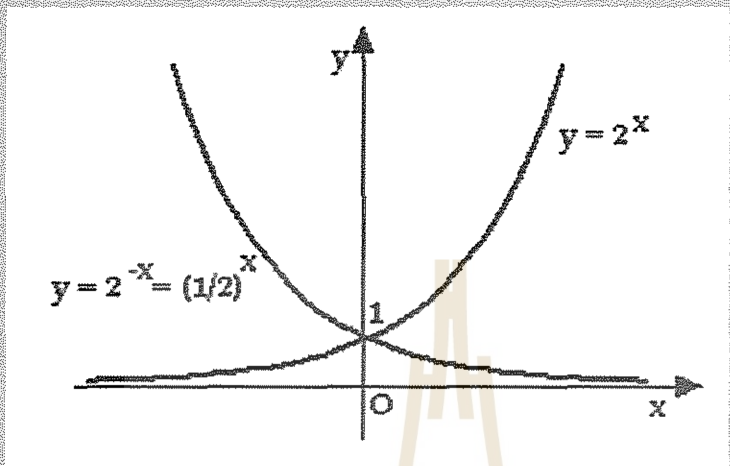
- เนื่องจาก $a^0 = 1$ จึงได้ว่า กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะผ่านจุดพิกัด $(0,1)$ บนแกน y
- ถ้า $a > 1$ แล้ว กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะมีค่าสูงขึ้น หรือ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = a^x$ นี้ จะมีค่าลดลง หรือ เป็นฟังก์ชันลด

การเขียนกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง สามารถทำได้โดยง่ายโดยการเขียนตารางค่าของโดเมน แล้วสังเกตแนวโน้มเทียบกับกราฟรูปทั่วไปของฟังก์ชันดังแสดงใน แผนภาพที่ 3

ตัวอย่างที่ 3.3.1 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ ในกราฟเดียวกัน

วิธีทำ

จะได้กราฟคือ

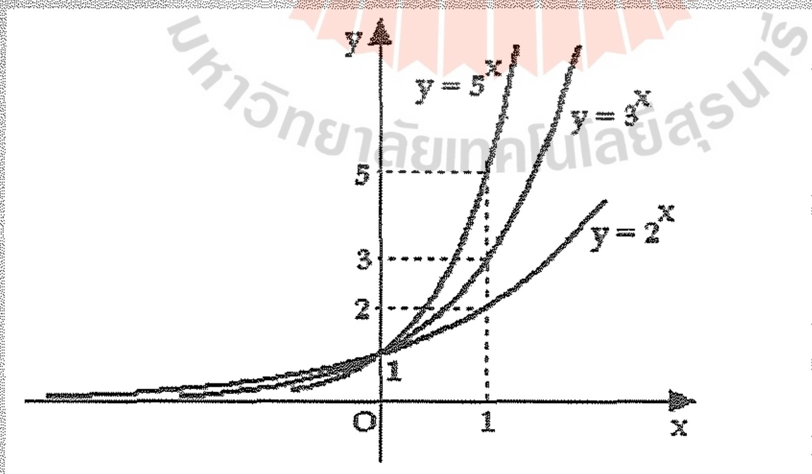


แผนภาพที่ 4 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$ และ $y = 2^{-x}$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.1

ตัวอย่างที่ 3.3.2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x, y = 3^x$ และ $y = 5^x$ ในกราฟเดียวกัน

วิธีทำ

จะได้กราฟคือ



แผนภาพที่ 5 กราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x, y = 3^x$ และ $y = 5^x$ สำหรับตัวอย่างที่ 3.3.2

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.1 จงวาดกราฟของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) $y = 2^{x+4}$

(b) $y = 2^{x-4}$

(c) $y = -2^{x}$

(d) $y = -2^{-x}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.2 จงวาดกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $y = 2^{-x}, y = 3^{-x}$ และ $y = 4^{-x}$ ในกราฟเดียวกัน

❖ คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ใน ตารางที่ 1 เราได้นำเสนอคุณสมบัติของเลขชี้กำลังไปแล้ว และเพื่อความสะดวกในการศึกษาในหัวข้อนี้ เราจะได้นำมากล่าวอีกรอบ ดังนี้

กำหนดให้ a, b, m และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ

ตารางที่ 7 คุณสมบัติสำคัญของเลขชี้กำลัง

ลำดับที่	คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง	ลำดับที่	คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง
1	$a^n a^m = a^{n+m}$	8	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
2	$(a^n)^m = a^{nm}$	9	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n,\ a \neq 0$
3	$(ab)^n = a^n b^n$	10	$a^{\frac{n}{m}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$
4	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	11	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
5	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$	12	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = \frac{1}{a^{m-n}}$	13	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
7	$a^0 = 1, a \neq 0$	14	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ \ b \neq 0$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.3.3**</u> จงใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง ในการทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(a) $4^{x+6}.8^{2-x}$ (b) $\frac{27^{2x-3}}{9^{x-4}}$ (c) $(2x)^3.(4^{2-x})^4$

วิธีทำ

(a) $4^{x+6}.8^{2-x} = (2^2)^{x+6}.(2^3)^{2-x} = 2^{2(x+6)}.2^{3(2-x)}$

$= 2^{2x+12}.2^{6-3x} = 2^{(2x+12)+(6-3x)} = 2^{-x+18}$

(b) $\frac{27^{2x-3}}{9^{x-4}} = \frac{(3^3)^{2x-3}}{(3^3)^{x-4}} = \frac{3^{6x-9}}{3^{2x-8}} = 3^{(6x-9)-(2x-8)} = 3^{4x-1}.$

(c) $(2^x)^3.(4^{2-x})^4 = 2^{3x}.4^{8-4x} = 2^{3x}.(2^2)^{8-4x}$

$= 2^{3x}.2^{16-8x} = 2^{-5x+16}.$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.3 จงจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย(คำตอบต้องไม่ประกอบด้วยกำลังที่เป็นลบ) และหาค่า ถ้าหาได้

1) $-2^4 + (-2)^4$

....

....

....

2) $(-x^2)(-x^4)$

....

....

....

3) $-(252x^2y^{-1}z^{-255})^0$

4) $(ab^2)(-7a^2bc)(5c)$

5) $-2(2^4-3^2)^2$

6) $\frac{4^{-2}+2^{-4}}{32^{-1}}$

7) $\frac{(-2)^4-2^2}{-2^2}$

8) $-1^2+1^2-(-1)^2-1$

9) $6^a\cdot 6^b\cdot 6^c$

10) $\left(\frac{2^{-2}x^{-2}}{x^3}\right)^{-2}\left(\frac{xy}{2^{-2}}\right)^{-3}$

❖ สมการเลขชี้กำลัง และการแก้โดยไม่ใช้ลอกาลิทึม

ในหัวข้อนี้ เราจะได้มาทำความรู้จักกับสมการที่ประกอบด้วยพจน์ที่มีเลขชี้กำลัง การแก้สมการลักษณะอย่างนี้นอกจากจะใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลังที่แสดงไว้ในหัวข้อที่แล้ว ในบางลักษณะของโจทย์ เรามีความจำเป็นที่จะต้องนำความรู้ทางด้านลอกาลิทึมเข้ามาช่วย ซึ่งจะเป็นในหัวข้อถัดไป ดังนั้น ในลำดับแรกของการแก้สมการที่มีพจน์เลขชี้กำลังในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเฉพาะส่วนที่สามารถแก้ได้โดยการใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลังโดยลำพัง(โดยไม่ต้องใช้คุณสมบัติของลอกาลิทึม) ซึ่งกระบวนการหลักมี 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 พยายามทำให้ "ฐาน" ของทั้ง 2 ข้างของสมการเท่ากัน

ขั้นที่ 2 พิจารณาว่า ฐาน ที่ได้มาจากขั้นที่ 1 นั้น สอดคล้องกับทฤษฎีบทที่ 3.1 (ดูข้างล่าง) หรือไม่ ถ้าสอดคล้อง ก็สามารถจับเอาตัวเลขชี้กำลังมาเท่ากัน แล้วแก้สมการหาค่าตัวแปรได้เลย

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0 และไม่เท่ากับ 1 และ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2^5 = 2^{2x-1}$

วิธีทำ

เราจะเห็นว่า ทั้ง 2 ข้างของสมการนี้ มีฐานเหมือนกัน คือ 2 และโดยใช้ทฤษฎีบทที่ 3.1 เราจะได้ทันทีว่า เลขชี้กำลังของทั้ง 2 ข้างนั้น ต้องเท่ากัน นั่นคือ

$$5 = 2x - 1$$
$$6 = 2x$$
$$3 = x$$

ดังนั้น ค่าของ x ที่ทำให้ $2^5 = 2^{2x-1}$ คือ $x = 3$

ตัวอย่างที่ 3.3.5 จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2^{6x^2} = 4^{5x+2}$

วิธีทำ

เนื่องจาก ฐาน ของทั้งสองข้าง ยังไม่เท่ากัน เราจึงจำเป็นที่จะต้องทำให้ฐานเท่ากันก่อน จะได้ว่า

$2^{6x^2} = (2^2)^{5x+2}$ จากนั้น ทำการนำเอาตัวชี้กำลังมาเท่ากัน แล้วแก้สมการหาค่าของ x ได้ดังนี้

$$6x^2 = 10x + 4$$
$$6x^2 - 10x - 4 = 10$$
$$2(3x^2 - 5x - 2) = 0$$
$$2(3x + 1)(x - 2) = 0$$

ดังนั้น จะได้ค่าที่ต้องการคือ $x = -\frac{1}{3}$ หรือ $x = 2$

บันทึก

<u>**ตัวอย่างที่ 3.3.6**</u> จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $9^{n-1} = (1/3)^{4n-1}$

วิธีทำ

ขั้นแรก เราจะพยายามปรับ "ฐาน" ของทั้งสองข้างนั้นให้เท่ากัน ได้ดังนี้

$$9^{n-1} = (1/3)^{4n-1}$$
$$(3^2)^{n-1} = (3^{-1})4^{n-1}$$
$$3^{2n-2} = 3^{-4n+1}$$

เมื่อ ฐาน เท่ากันแล้ว เราจะนำเอาตัวชี้กำลังมาจับให้เท่ากัน ได้ดังนี้

$$2n - 2 = -4n + 1$$
$$6n = 3$$
$$n = 1/2$$

ดังนั้น จะได้ค่าที่ต้องการคือ $n = 1/2$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.4 จงใช้คุณสมบัติของเลขชี้กำลัง มาแก้สมการต่อไปนี้

1) $4^{2x+3} = 1$

....

....

....

2) $5^{3-2x} = 5^{-x}$

....

....

....

3) $3^{1-2x} = 243$

....

....

....

....

....

....

4) $3^{2a} = 3^{-a}$

....

....

....

....

....

....

5) $4^{3x-2} = 1$

....

....

....

....

....

....

....

6) $4^{2p} = 4^{-2p-1}$

....

....

....

....

....

....

....

7) $6^{-2a} = 6^{2-3a}$

8) $2^{2x+2} = 2^{3x}$

9) $6^{-2x}(6^{-x}) = \frac{1}{216}$

10) $2^{x}\left(\frac{1}{32}\right) = 32$

11) $2^{-3p}(2^{2p}) = 2^{2p}$

12) $\frac{81^{3n+2}}{243^{-n}} = 3^{4}$

13) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3x+2}(216^{3x}) = \frac{1}{216}$

14) $243^{k+2}(9^{2k-1}) = 9$

3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Functions)

❖ นิยาม และความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

บทนิยาม 3.9 เราจะเรียกจำนวนจริง y ว่าเป็น ลอการิทึมของ x ฐาน a ก็ต่อเมื่อ $x = a^y$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ และเขียนแทนด้วย $y = log_a x$

ข้อตกลง

1. เมื่อไหร่ที่เขียนฟังก์ชันลอการิทึมที่ไม่ระบุฐาน ให้หมายถึง ฐานนั้นคือ 10 เช่น $log\, x = log_{10} x$
2. ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ หมายถึง ที่มีฐานเป็นค่า e $(= 2.71818 \ldots)$ เขียนแทนด้วย $ln\, x = log_e x$

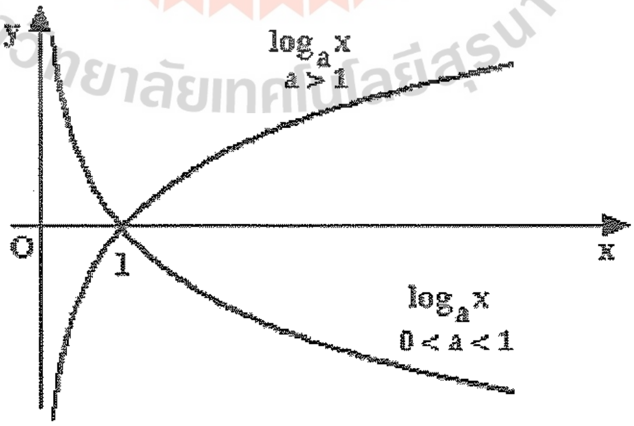
จากนิยามข้างต้น เราจะเห็นว่า แท้ที่จริงแล้ว ตัวฟังก์ชันลอการิทึมนี้ ก็คือตัวผกผันการคูณของฟังก์ชันเลขชี้กำลังของหัวข้อที่แล้วนั่นเอง

ดังนั้น เราจะสามารถให้ความหมายของฟังก์ชันลอกาลิทึมในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้เสมอ ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

ตารางที่ 8 ตารางแสดงตัวอย่างความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลัง กับฟังก์ชันลอการิทึม

สมการในรูปเลขยกกำลัง	สมการในรูปลอการิทึม
$x = a^y$	$y = log_a x$
$125 = 5^3$	$3 = log_5 125$
$81 = 3^4$	$4 = log_3 81$
$64 = 2^5$	$5 = log_2 64$

และเราสามารถวาดกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมได้ในรูปทั่วไปที่ขึ้นอยู่กับค่าของ a ได้ดังนี้



แผนภาพที่ 6 กราฟในรูปทั่วไปของฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.1 จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างสมการรูปเลขยกกำลัง และสมการลอการิทึม ในแต่ละข้อต่อไปนี้

ข้อ	รูปลอการิทึม	รูปเลขกำลัง
1)	……………………………………	$6^2 = 36$
2)	$log_{289} 17 = \frac{1}{2}$	……………………………………
3)	……………………………………	$14^{-2} = \frac{1}{196}$
4)	……………………………………	$3^4 = 81$
5)	$log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	……………………………………
6)	$log_{12} 144 = 2$	……………………………………
7)	……………………………………	$9^{-2} = \frac{1}{81}$
8)	……………………………………	$\left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$
9)	$log_u \frac{15}{16} = v$	……………………………………
10)	$log_v u = 4$	……………………………………

❖ คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม มีดังแสดงใน ตารางที่ 9 เมื่อกำหนด x, y, r, q, b เป็นจำนวนจริง และ $b \neq 1$

ตารางที่ 9 ตารางแสดงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม

ลำดับที่	คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม
1	$log_b b = 1$
2	$log_b 1 = 0$
3	$log_b(x^r) = r\, log_b x$

4	$log_{b^q} x = \frac{1}{q} log_b x$
5	$log_b(xy) = log_b x + log_b y$
6	$log_b \left(\frac{x}{y}\right) = log_b x - log_b y$
7	$ln\, b = log_e b$
8	$b^{log_b x} = x$
9	$log_b x = \dfrac{log\, x}{log\, a}$

<u>**ตัวอย่างที่ 3.4.1**</u> ตัวอย่างของการใช้คุณสมบัติของลอการิทึม

1. $log(6.11) = log\, 6 + log 11$
2. $log(\frac{6}{11})^5 = 5\, log\, 6 - 5\, log\, 11$
3. $log(3.2^3) = log\, 3 + 3\, log\, 2$
4. $log_b(xy) = log_b x + log_b y$
5. $log \frac{x}{y^6} = log\, x - 6\, log\, y$
6. $log_4 64 = 3$
7. $log_3 \frac{1}{243} = -5$
8. $log_{343} 7 = \frac{1}{3}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.2 จงใช้คุณสมบัติของลอการิทึม ในการกระจายรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $log(5 \cdot 3)$ = ...

2) $log \frac{2^4}{5}$ = ...

3) $log(\frac{6}{5})^6$ = ...

4) $log(a \cdot b)^2$ = ...

5) $log \frac{u^4}{v}$ = ...

6) $\log \frac{x}{y^5}$ = ...

7) $\log \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$ = ...

8) $\log x \cdot y \cdot z^2$ = ...

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.3 จงใช้คุณสมบัติของลอการิทึม หาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\log_2 16$ = ...

2) $\log_3 27$ = ...

3) $\log_5 25$ = ...

4) $\log_{64} 4$ = ...

5) $\log_6 \frac{1}{216}$ = ...

6) $12^{\log_{12} 144}$ = ...

7) $5^{\log_5 17}$ = ...

8) $x^{\log_x 72}$ = ...

9) $\log_{\frac{1}{11}}\left(\frac{1}{121}\right)$ = ...

10) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ = ...

11) $\log_{225} 15$ = ...

12) $\log_2(-8)$ = ...

13) $\log_9(-81)$ = ...

❖ สมการฟังก์ชันลอการิทึม และการแก้

ในการแก้สมการที่อยู่ในรูปลอการิทึมนั้น โดยปกติเราสามารถทำได้โดยการเขียนให้อยู่ในรูปเลขยกกำลังก่อน แล้วค่อยใช้เทคนิคและกระบวนการการแก้หาผลเฉลยที่เราศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา

สังเกตจากตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.4.2 จงหาค่า x ที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

(a) $log_2 x = 7$ (b) $log_x 8 = 3$ (c) $log_{16} 8 = x$

และ (d) $log_2(log_5 x) = 2$

วิธีทำ

(a) เราสามารถเขียน $log_2 x = 7$ ให้อยู่ในรูปยกกำลังได้คือ $2^7 = x$

ดังนั้น $x = 64$

(b) เราสามารถเขียน $log_x 8 = 3$ ให้อยู่ในรูปยกกำลังได้คือ $x^3 = 8 = 2^3$

ดังนั้น $x = 2$

(c) ดำเนินการเช่นเดียวกับ (a) หรือ (b), จะได้ว่า $16^x = 8$

ดังนั้น $(2^4)^x = 2^3$ จึงได้ $2^{4x} = 2^3$ และทำให้ได้ว่า $4x = 3$

ดังนั้น คำตอบคือ $x = 3/4$

(d) จากที่เราทราบมาแล้วว่า $log_a B = C$ นี้ เป็นสิ่งเดียวกันกับ $B = a^c$ และเมื่อ $a = 2, B = log_5 x$ และ $C = 2,$ จะได้ว่า $log_5 x = 2^2 = 4$ จากนั้น ดำเนินการแบบเดียวกันนี้อีกครั้ง จะได้ว่า $x = 5^4 = 625$

ตัวอย่างที่ 3.4.3 จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) จงหาค่า $e^{3\,ln2} \cdot e^{2ln3}$

(b) จงเขียน $2ln4 - ln8 - ln5$ ให้เป็นพจน์เดียว

(c) จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $ln(4x - 3) = 7\ For\ x$

วิธีทำ

(a) เราใช้คุณสมบัติ $e^{lnx} = x$ จึงได้ว่า

$$e^{3ln2} \cdot e^{2ln3} = e^{ln2^3} \cdot e^{ln3^2} = e^{ln8} . e^{ln9} = 8 \cdot 9 = 72$$

(b) เราใช้คุณสมบัติ $n\,ln\,x = ln\,x^n$ and $ln\,x - ln\,y = ln(x/y)$ จึงได้ว่า

$$2\,ln\,4 - ln8 - ln5 = ln4^2 - ln8 - ln5 = (ln16 - ln8) - ln5$$
$$= ln(16/8) - ln5 = ln2 - ln5 = ln(2/5)$$

(c) เราจะทำการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ e^x ทั้ง 2 ข้างของสมการ จึงได้ว่า

$$ln(4x - 3) = 7$$
$$e^{ln(4x-3)} = e^7$$
$$4x - 3 = e^7$$

ดังนั้น $x = \frac{e^7+3}{4}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.4.4 จงหาเซตคำตอบของตัวไม่ทราบค่า ทำให้ สมการแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริง

1) $log(n+9) = log\,4n$

2) $log -5x = log(10-3x)$

3) $log(-3m-1) = log(-4m-6)$

4) $log\,a = log(4a-9)$

5) $-4\,log_3 -9m = -4$

6) $7log_9(x+8) = 7$

7) $-8 + log_9(m+1) = -8$

8) $-2\,log_8(a+1) = -8$

9) $log_2(a^2 - 6a) = log_2(10 + 3a)$

10) $log_{15}(x^2 + 13) = log_{15}(-9x - 1)$

11) $log_{19}(x^2 + 17) = log_{19}(8x + 2)$

12) $log_{12}(m^2 + 73) = log_{12}(17m + 3)$

13) $log\, x - log\, 6 = log\, 15$

14) $log\, 7 + log\, x = 2$

3.5 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Functions)

ฟังก์ชันชนิดต่อไปที่เราจะทำการศึกษาคือ ฟังก์ชันพหุนาม โดยฟังก์ชันพหุนามนั้น อาจอยู่ในรูปของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว หรือหลายตัวก็ได้ แต่ในเอกสารนี้ จะได้มีการนำเสนอเฉพาะพหุนามที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 3.10 ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้วจะได้

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ เมื่อ $n \epsilon I^+ \cup \{0\}$ และ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n\epsilon} \in R$

และ ค่าของ n ที่มากที่สุดในพหุนามหนึ่งๆ นั้น จะเรียกว่า "ระดับขั้น (Degree)" ของพหุนามนั้น

ข้อสังเกต

- ถ้า $n = 0$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามคงตัว เช่น $P(x) = 5$
- ถ้า $n = 1$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามเชิงเส้น ที่มีระดับขั้นเป็น 1 เช่น $P(x) = 2x + 3$
- ถ้า $n = 2$ แล้ว $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง ที่มีระดับขั้นเป็น 2 เช่น $P(x) = 3x^2 - x + 3$

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.1</u> ตัวอย่างของพหุนาม ได้แก่

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นคือ 2
2. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นคือ 3
3. $h(x) = 5x^6 - 4x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 10$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นคือ 6

<u>ตัวอย่างที่ 3.5.2</u> ตัวอย่างของนิพจน์ที่ไม่เป็นพหุนาม ได้แก่

1. $f(x) = \frac{3x^5}{1+x^2} + 2x\sqrt{x+2} - 7$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะ มีกำลังที่ไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์
2. $g(x) = 2x^3 - 5x^{\frac{1}{5}} + 2x - 1$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะ มีกำลังที่ไม่ใช่เลขจำนวนเต็มบวก หรือศูนย์
3. $h(x) = 5x^6 - 4x^5 + \frac{3x^4 - x^3}{1-x} + 2x^2 - x + 10$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมีพจน์ที่เป็นเศษส่วน

แบบฝึกทักษะที่ 3.5.1 จงพิจารณาว่า แต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อใดเป็นพหุนาม ข้อใดไม่เป็น เพราะอะไร และถ้าเป็นให้ระบุระดับขั้นของพหุนามนั้นด้วย

(a) $f(x) = 4x^2 + 2$ ....

(b) $f(x) = 3x^2 - 2x + \sqrt{x}$ ....

(c) $f(x) = 12 - 4x^5 + 3x^2$ ....

(d) $f(x) = sin\,x + 1$ ....

(e) $f(x) = 3x^2 - 2/x$ ....

(f) $f(x) = 3x^{11} - 2x^{12}$ ....

แบบฝึกทักษะที่ 3.5.2 จงยกตัวอย่างพหุนามตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. พหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 1 ....
2. พหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 2 ....
3. พหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 3 ....
4. พหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 4 ....

3.6 สมการพหุนาม และการหาราก (Solving Polynomial Equations)

❖ สมการพหุนาม

บทนิยาม 3.11 ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์พหุนามแล้ว สมการพหุนามก็คือ $P(x) = 0$

เช่น $3x + 3 = 0$

$2x^2 - x + 3 = 0$

$4x^4 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$

$3x^2 + 2ix^2 + 5x - 9i = 0$

❖ การแก้สมการพหุนาม

ในการหาผลเฉลยหรือเซตของคำตอบของสมการพหุนามหนึ่ง ๆ นั้น มีเรื่องที่เกี่ยวข้องอยู่หลายเรื่อง เราจะทำการศึกษาทีละเรื่อง และจากนั้น ค่อยศึกษาการนำไปเกี่ยวโยงกับกระบวนการหาผลเฉลยของสมการพหุนาม

1. การหารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ เป็นวิธีการหาผลของการหารที่รวดเร็วและง่ายกว่าการหารยาว ซึ่งต้องนำมาใช้ในการแก้สมการพหุนาม การหารสังเคราะห์ต้องหารผลลัพธ์ของผลหารของ $P(x)$ ด้วย $x - c$ การตั้งหารสังเคราะห์ทำได้โดย

บรรทัดที่ 1 เขียนสัมประสิทธิ์ของ $P(x)$ ที่เรียงกำลังจากมากไปน้อย ถ้ากำลังกระโดด อย่าลืม สัมประสิทธิ์ของกำลังที่หายไปก็คือเลข 0

บรรทัดที่ 3 ได้จากบรรทัดที่ 1 + บรรทัดที่ 2 โดยเริ่มจากทางซ้ายมือสุดด้วยการดึงตัวเลขบรรทัดที่ 1 ลงมา (หรือบรรทัดที่ 2 จากซ้ายสุด เป็น 0 บวกกับบรรทัดที่ 1 นั้นเอง)

บรรทัดที่ 2 แต่ละตัวเกิดจากการคูณจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของบรรทัดที่ 3 ด้วยค่า c

ผลหาร ที่ได้ดูจากบรรทัดที่ 3 ซึ่งตัวเลขขวาสุดเป็นเศษของการหารและตัวเลขจากซ้ายไปขวาเป็นสัมประสิทธิ์ของผลหารโดยกำลังลดลง 1 จากตัวตั้งหรือ $P(x)$

ตัวอย่างที่ 3.6.1 จงหาผลหาร $(x^4 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x + 1)$

วิธีทำ

ในที่นี้ เราจะได้ $c = -1$ และสามารถทำการหารสังเคราะห์ได้ ดังนี้

-1	1	0	3	-2	1
		↓	↓	↓	↓
		-1	1	-4	6
	1	-1	4	-6	7

ผลลัพธ์ คือ $1x^3 - 1x^2 + 4x - 6$ เศษ 7

2. ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

ทฤษฎีบท 3.2 : ถ้า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามและ $c \in R$ ถ้า $P(x) \div (x - c)$ แล้วเศษจะเท่ากับ $P(c)$

ตัวอย่างที่ 3.6.2 จงหาเศษที่เกิดจาก $(x^4 + 3x^2 - 2x + 1) \div (x + 1)$

วิธีทำ

เมื่อเทียบกับรูปที่ปรากฏในทฤษฎีบท 3.2 จะได้ $P(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$

$x - c = x + 1 = x - (-1)$ ดังนั้น $c = -1$

จะได้เศษ $= P(c) = P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^2 - 2(1) + 1$

$= 1 + 3 + 2 + 1 = 7$

ดังนั้น เศษที่ได้จากการหารพหุนามดังกล่าว จึงเท่ากับ 7

3. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

ทฤษฎีบท 3.3 : ถ้า $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ข้อสังเกต ทฤษฎีนี้ดัดแปลงมาจาก ท.บ.เศษเหลือ นั่นคือ $x - c$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แสดงว่า $x - c$ หาร $P(x)$ ลงตัว ซึ่งหารลงตัวก็จะได้เศษ $= 0$ ซึ่งเศษ $= P(c)$ จึงได้บทสรุปว่า $P(c) = 0$

ตัวอย่างที่ 3.6.3 จงพิจารณาว่า $(2x+1)$ เป็นตัวประกอบของ $4x^3+4x^2-11x-6$ หรือไม่

วิธีทำ เมื่อเทียบกับทฤษฎีบท 3.3 จะได้ $P(x) = 4x^3+4x^2-11x-6$

$x-c = 2x+1 = x-\left(-\frac{1}{2}\right)$ ดังนั้น $c=-\frac{1}{2}$

ทดสอบโดยการหา $P(c)$ ซึ่ง $P\left(c=-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-11\left(-\frac{1}{2}\right)-6$

$$= -\frac{1}{2}+1+\frac{11}{2}-6$$

$$= \frac{-1+2+11-12}{2}$$

ดังนั้น $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

แสดงว่า $(2x+1)$ เป็นตัวประกอบของ $4x^3+4x^2-11x-6$

หลังจากที่ได้ทำความรู้จักกับส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการการหาผลเฉลยของพหุนามแล้ว ในการหาผลเฉลยของพหุนามหนึ่ง ๆ นั้น สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ ดังนี้

ขั้นที่ 1 จัดสมการให้อยู่ในรูป $P(x) = 0$ โดยที่

1.1 ขวามือเป็นศูนย์

1.2 ถ้ามีตัวแปร x ยกกำลังลบ ให้เปลี่ยนเป็นกำลังบวก ถ้ามีรากต้องถอดรากออกให้ถูกต้อง

1.3 ทุกพจน์ต้องมีส่วนเป็นหนึ่ง ถ้ามีบางพจน์ที่ส่วนยังไม่เป็นหนึ่งก็ใช้ ค.ร.น.ของส่วนคูณตลอด

1.4 เรียงพจน์ของตัวแปร x จากกำลังสูงสุดไปยังกำลังต่ำสุดและสัมประสิทธิ์ของพจน์ของตัวแปร x กำลังสูงสุดต้องเป็นบวก

ขั้นที่ 2 นำเอา $P(x)$ มาจับคู่ ดึงตัวร่วมหรือแยกตัวประกอบ ด้วยทฤษฎีแยกตัวประกอบร่วมกับการหารสังเคราะห์จนได้ผลหารมีตัวแปร x ยกกำลังสอง $(ax^2+bx+c, a, b,\ c \in R, a \neq 0)$ เราก็จะสามารถแยกตัวประกอบกำลังสองได้เองตามที่ได้เคยได้ศึกษามาแล้ว

ขั้นที่ 3 หาค่าตัวแปร x ได้จากการสรุปแต่ละตัวประกอบเท่ากับศูนย์ ในกรณีที่ตัวแปร x กำลังสอง (ax^2+bx+c) ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ก็สามารถหาค่า x ได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (3.1)$$

ในขั้นที่ 2 นั้น ถือว่าเป็นขั้นที่ยาก เพราะหลักการการแยกตัวประกอบโดยใช้ความรู้ทางการหารสังเคราะห์ หรือทฤษฎีบทเศษเหลือ หรือ การใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบของพหุนามระดับขั้นสูง ๆ นั้นไม่ใช่เรื่องง่ายนัก อย่างไรก็ตาม ในเอกสารนี้ จะได้มีการนำเสนอพหุนามที่มีระดับขั้นมากสุดคือ 3 ซึ่งถ้าสมการพหุนามนั้นจะมีคำตอบ(ซึ่งรากอาจเป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้) โดยส่วนใหญ่แล้ว เราจะสามารถแยกตัวประกอบได้โดยอาศัยคุณสมบัติดังต่อไปนี้

ตารางที่ 10 ตารางสูตรและเอกลักษณ์เกี่ยวกับการแยกตัวประกอบพหุนามที่มีระดับขั้นไม่เกิน 3

ลำดับที่	คุณสมบัติที่เป็นประโยชน์
1	$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
2	$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$
3	$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$
4	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
5	$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$
6	$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
7	$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

อย่างไรก็ตาม ในโจทย์บางข้อ ก่อนที่จะสามารถใช้คุณสมบัติเหล่านี้ เรายังจะต้องอาศัยทักษะการจัดกลุ่ม สังเกตพจน์ และอื่นๆ ในการเปลี่ยนรูปของพหุนามก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

บันทึก

<u>**ตัวอย่างที่ 3.6.5**</u> จงหาผลเฉลยของสมการพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x^2 - 36 = 0$
2. $4x^2 + 25 = 0$
3. $x^2 + 3x - 10 = 0$
4. $x^2 - 4x + 1 = 0$

วิธีทำ

1. $x^2 - 36 = 0$

   $(x-6)(x+6) = 0$

   ดังนั้น $x = 6, -6$

2. $4x^2 + 25 = 0$

   $(2x)^2 - (5i)^2 = 0$ (i เป็นจำนวนเชิงซ้อน และมีคุณสมบัติว่า $i^2 = -1$)

   ดังนั้น $x = \frac{5}{2}i, -\frac{5}{2}\ i$

3. $x^2 + 9x - 10 = 0$

   $(x-1)(x+10) = 0$

   ดังนั้น $x = 1, -10$

4. $x^2 - 4x + 1 = 0$

   แยกตัวประกอบไม่ได้ ฉะนั้น หา x โดยใช้สูตร (3.1) เทียบกับ

   $ax^2 + bx + c = 0$ ได้ $a = 1,\ \ b = -4,\ \ c = 1$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\
&= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x = 2 \pm \sqrt{3}$

บันทึก

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะที่ 3.6.1 จงใช้วิธีที่ถนัด (แยกตัวประกอบ หรือใช้สูตร (3.1)) ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามระดับขั้น 2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2x^2 + x - 3 = 0$

2) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

3) $x^2 - 7x + 6 = 0$

4) $x^2 - x - 20 = 0$

5) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

6) $x^2 - x - 12 = 0$

7) $3x^2 + 6x - 9 = 0$

8) $2x^2 - 36 = x$

9) $k^2 - 31 - 2k = -6 - 3k^2 - 2k$

10) $8n^2 + 4n - 16 = -n^2$

แบบฝึกทักษะที่ 3.6.2 จงใช้การหารสังเคราะห์ ในการหารากที่เหลือของสมการพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดรากรากหนึ่งของแต่ละข้อมาให้ ดังนี้

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = 1$

2) $x^3 - 7x - 6 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -2$

3) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -1$

4) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = -4$

5) $x^3 - 17x^2 + 54x - 8 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = 4$

6) $54x^3 - 39x^2 - 26x + 16 = 0$

เมื่อรากหนึ่งของสมการพหุนามนี้ คือ $x = \frac{1}{2}$

3.7 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

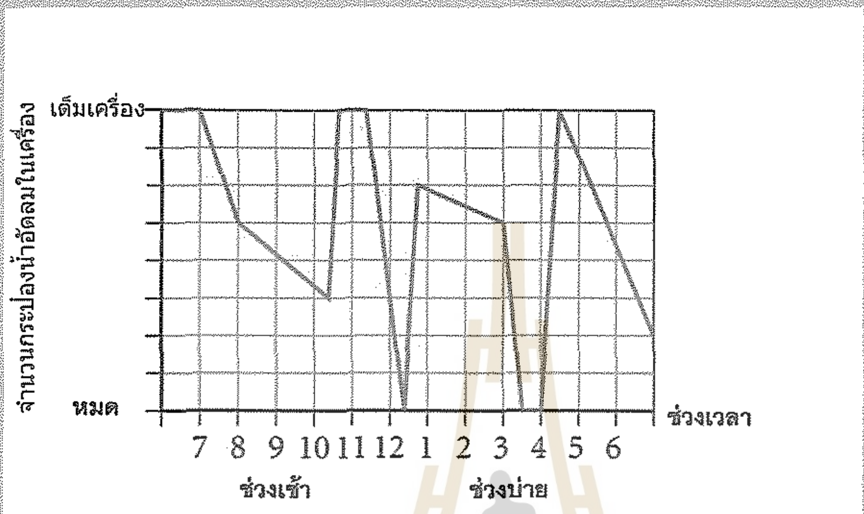
ในหัวข้อสุดท้ายของบทที่ 3 นี้ เราจะได้ศึกษาและทำความรู้จักกับปัญหาต่าง ๆ ที่อยู่รอบ ๆตัวเราในชีวิตประจำวัน ที่สามารถสร้าง อธิบาย และหาคำตอบได้โดยใช้ความรู้ทางฟังก์ชัน ตลอดจนประเภทของฟังก์ชันที่เราได้รู้จักมาแล้ว ไม่ว่าจะเป็น ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันพหุนาม และสมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันเหล่านี้

ขั้นตอนในการศึกษาปัญหาในบทนี้ ก็จะประกอบด้วย 2 ส่วน เช่นเคย คือ

1. ขั้นตอนการเขียนปัญหาเหล่านั้น ให้อยู่ในรูปที่อธิบายได้ด้วยฟังก์ชันแบบที่เหมาะสม
2. ทำการหาผลเฉลยของข้อ 1 ด้วยวิธีการที่ถนัด และเหมาะสม เราจะศึกษาโดยการฝึกทำตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

บันทึก

ตัวอย่างที่ 3.7.1 นักเรียน ณ โรงเรียนแห่งหนึ่งในอเมริกาได้ยื่นร้องเรียนต่อหน่วยสวัสดิการประจำมหาวิทยาลัยบ่อยๆ ว่าเครื่องขายน้ำผลไม้ที่ประจำอยู่ ณ อาคารเรียนรวมนั้น ขายหมดบ่อยครั้งในแต่ละวัน จนหน่วยสวัสดิการได้มาทำการตรวจสอบและเก็บข้อมูล ผลปรากฏว่า ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ที่มีเหลือในเครื่อง กับช่วงเวลาในละวัน สามารถแสดงได้ใน แผนภาพที่ 7 นี้"



แผนภาพที่ 7 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ในเครื่องขาย กับช่วงเวลาใน 1 วัน สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.1"

จากแผนภาพนี้ จงตอบคำถามต่อไปนี้ "

1. ช่วงเวลาใดบ้าง ที่มีการซื้อน้ำผลไม้จากตู้นี้มากที่สุด เพราะอะไร"

ตอบ ช่วงเวลา 11.00-12.00น. และช่วงเวลา บ่าย 3 โมง ถึงบ่าย 4 โมง เพราะจำนวนกระป๋องน้ำผลไม้ลดลงอย่างรวดเร็วใน 2 ช่วงเวลานี้"

2. ช่วงเวลาใด ที่ได้มีการบรรจุน้ำผลไม้กระป๋อง เข้าไปเพิ่มในเครื่อง"

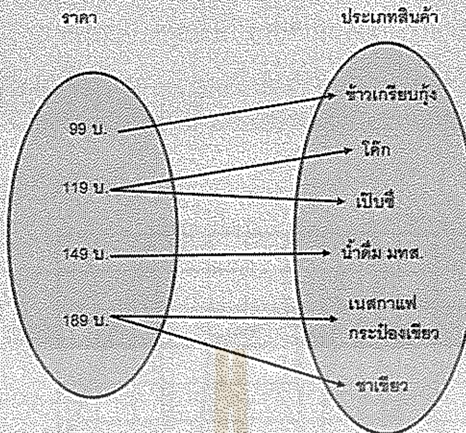
ตอบ มี 3 ช่วง คือ ช่วง 10.00-11.00น., 12.00-13.00น. และช่วง ประมาณบ่าย 4 โมงตรง"

3. ช่วงเวลาใด ที่เครื่องไม่มีน้ำผลไม้บรรจุอยู่เลย"

ตอบ ช่วงประมาณ 15.30-16.00 น. "

4. นักศึกษาคิดว่า หน่วยสวัสดิการควรมีการเติมบรรจุน้ำผลไม้เข้าในเครื่องนี้ ในช่วงเวลาใดบ้าง ถึงจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ ☐

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.2</u> จากการสำรวจราคาสินค้าของร้านค้าต่างๆ ที่อยู่ภายใน มทส. พบว่า ราคาโดยเฉลี่ยของสินค้า แสดงได้ในแผนภาพที่ 8



แผนภาพที่ 8 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาเฉลี่ย กับสินค้า สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.2

จากข้อมูลดังแผนภาพนี้ ถามว่า

1. โดเมนของความสัมพันธ์นี้ คือ

ตอบ โดเมน คือ $\{99$ บ., 119บ., 149บ., 189บ.$\}$

2. เรนจ์ของความสัมพันธ์นี้ คือ

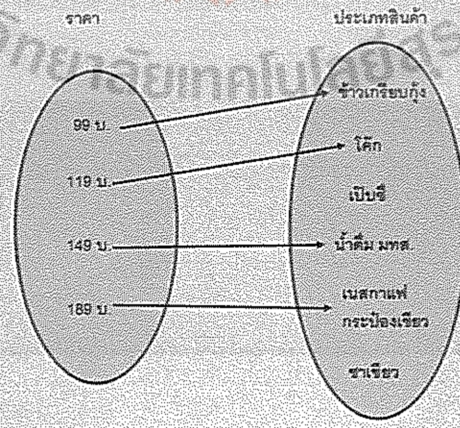
ตอบ เรนจ์ คือ {ข้าวเกรียบกุ้ง, โค้ก, เป๊บซี่, น้ำดื่ม มทส., เนสกาแฟกระป๋องเขียว, ชาเขียว}

3. ความสัมพันธ์นี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะอะไร

ตอบ ความสัมพันธ์นี้ ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ มีสมาชิกในเรนจ์มากกว่า 1 ตัว ที่สัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนตัวเดียวกัน เช่น โค้ก และเป๊บซี่ ใช้สมาชิกในโดเมนตัวเดียวกันคือ 119 บ.

4. จงเปลี่ยนแปลงข้อมูลในแผนภาพนี้ เพื่อที่จะทำให้ความสัมพันธ์ใหม่ที่ได้ เป็นฟังก์ชัน

ตอบ วิธีที่สามารถทำได้วิธีหนึ่งคือ



ตัวอย่างที่ 3.7.3 จากการศึกษาการเพิ่มจำนวนประชากรของกบในอ่าง 3 แสน มทส. ผลปรากฏว่า มีอัตราเพิ่มสูงขึ้นคิดเป็น 12 % ต่อปี จงหาจำนวนประชากรของกบในอ่าง 3 แสนนี้ในอีก 5 ปีข้างหน้า ถ้า ณ วันนี้ มีจำนวนกบทั้งหมด 100 ตัว

วิธีทำ

อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรกบ ปีละ 12 % หมายถึง ในแต่ละปี จะมีจำนวนกบเป็นจำนวน 1.22 เท่าของจำนวนในปีก่อนหน้า เพื่อให้ดูง่ายขึ้น เราจะเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

ตารางที่ 11 จำนวนการเพิ่มขึ้นของประชากรกบในสระ 3 แสน มทส. ในแต่ละปี สำหรับตัวอย่างที่ 3.7.3

สิ้นปีที่	จำนวนประชากรกบ
0 (เริ่มนับ)	100
1	$100 + 100(0.22) = 100(1.22) = 100(1.22)^1$
2	$100(1.22) + 100(1.22)(0.22) = 100(1.22)(1.22)$ $= 100(1.22)^2$
3	$100(1.22)^2 + 100(1.22)^2(0.22) = 100(1.22)^3$
4	$100(1.22)^3 + 100(1.22)^3(0.22) = 100(1.22)^4$
5	$100(1.22)^4 + 100(1.22)^4(0.22) = 100(1.22)^5 = 270$

นั่นคือ จะเห็นว่า ถ้าเราให้ x แทนจำนวนปี เราจะได้ว่า

จำนวนประชากรกบเมื่อสิ้นปีที่ x คือ $100(1.22)^x$

❖ การเพิ่มของจำนวนประชากร

จากตัวอย่างนี้ เราจะสามารถขยายแนวคิดไปถึงสูตรที่สามารถหาจำนวนสิ่งต่าง ๆ ที่มีอัตราการเพิ่มในหนึ่งช่วงเวลาเป็นอัตราคงที่ ซึ่งทำได้โดยใช้สูตรที่เขียนในรูป**ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** ได้ดังแสดงข้างล่างนี้

$$\text{จำนวนของสิ่งเมื่อสิ้นช่วงเวลาที่ } x = \left(\text{จำนวนเริ่มต้น}\right) \cdot \left(1 + \text{อัตราการเพิ่ม}(\%)\right)^x \qquad (3.2)$$

ตัวอย่างที่ 3.7.4 นายมีรัก รักดี นักศึกษาสาขาเทคโนโลยีชีวภาพ มทส. ได้ถูกส่งตัวไปร่วมฝึกประสบการณ์การทำแลบกับบริษัทชั้นนำแห่งหนึ่งในกรุงเทพ นายมีรักได้รับมอบหมายให้ทำการเพาะเชื้อแบคทีเรียชนิดหนึ่ง และศึกษาการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียชนิดนี้ แล้วต้องรายงานต่อหัวหน้าจากการศึกษาวัดจำนวนแบคทีเรียมาระยะหนึ่ง นายมีรักพบว่า จำนวนประชากรของแบคทีเรียชนิดนี้มีอัตราการเพิ่มขึ้นคือ 80 % ในทุกๆ ชั่วโมง ถ้าเริ่มเพาะด้วยจำนวนแบคทีเรียทั้งหมด 10 ตัวในวันนี้ นายมีรัก ได้รับมอบหมายให้ทำนายจำนวนแบคทีเรียเมื่อสิ้นวันที่ 7 นับจากวันนี้

วิธีทำ

จากโจทย์ เราได้ว่า

1. จำนวนประชากรของแบคทีเรียเริ่มต้น คือ 10 ตัว
2. อัตราการการเพิ่ม คือ 80 % ต่อ 1 ชั่วโมง

จากสูตรการคำนวณหาอัตราการเพิ่มของประชากร (3.2) จะได้ว่า

$$\text{จำนวนของแบคทีเรียเมื่อสิ้นช่วงเวลาที่ } x = (\text{จำนวนเริ่มต้น}) \cdot (1 + \text{อัตราการเพิ่ม})^x$$

สมมติว่า เมื่อสิ้นชั่วโมงที่ 5 แทนค่าจะได้ว่า

$$\text{จำนวนของสิ่งเมื่อสิ้นช่วงเวลาที่ } 5 = (10) \cdot (1.8)^5$$

ใน 7 วันมีทั้งหมด 168 ชั่วโมง ดังนั้น เมื่อสิ้นชั่วโมงที่ 168 แบคทีเรียจะมีจำนวนทั้งสิ้น

$$\text{จำนวนของแบคทีเรียเมื่อสิ้นช่วงเวลาที่ } 168 = (10) \cdot (1.8)^{168} = 7.687 \times 10^{43}$$

ดังนั้น นายมีรักจึงรายงานต่อหัวหน้าว่า ในอีก 7 วันข้างหน้า จะแบคทีเรียจะมีจำนวนทั้งสิ้น 7.687×10^{43} ตัว

หมายเหตุ ซึ่งเมื่อครบ 7 วันแล้ว สิ่งที่นายมีรักทำนายไว้ ก็เป็นจริง และหัวหน้าแผนกก็พึงพอใจเป็นอย่างมากเลยตัดสินใจจองนายมีรัก เพื่อเข้าทำงานในบริษัททันทีที่สำเร็จการศึกษา และนายมีรักก็ให้รู้สึกดีใจเป็นอย่างยิ่ง ที่ตั้งใจเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน เมื่อคราอยู่ชั้นปี 1 มทส. เพราะเราไม่รู้ว่า ไม่แน่ สิ่งที่คิดว่าจะไม่ได้ใช้ วันหนึ่งกลับอาจเป็นสิ่งที่ตัดสินชะตาอนาคตของเรา ก็เป็นได้ ☺

❖ จุดคุ้มทุน

ในการทำการธุรกิจการค้า เราทราบเสมอว่าหมวดเงินที่เกี่ยวข้องมีอยู่ 3 ส่วน ได้แก่ เงินที่เราใช้จ่ายลงทุนทั้งหมด (ในที่นี้เขียนแทนด้วย "C"), รายได้ทั้งหมดที่ได้จากการจำหน่ายสินค้านั้นๆ (ในที่นี้เขียนแทนด้วย "R") และผลกำไร ซึ่งก็คือผลต่างของเงิน 2 หมวดแรก (ในที่นี้เขียนแทนด้วย " P ") และเนื่องจาก ทั้ง 3 หมวดนี้ จะขึ้นอยู่กับปริมาณหรือจำนวนของสินค้าทั้งสิ้น ดังนั้น ถ้าเรากำหนดให้ x แทนจำนวนสินค้า เราจะสามารถเขียนได้เป็นสมการ

$$P(x) = R(x) - C(x) \qquad (3.3)$$

เมื่อไหร่ก็ตามก็เราสามารถมีค่า $R(x)$ เท่ากับค่า $C(x)$ เราถือว่า ณ ตำแหน่งนี้ ไม่มีกำไร และไม่ขาดทุน เราเรียกสถานการณ์เช่นนี้ว่า **"จุดคุ้มทุน"** ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปัญหาจุดคุ้มทุนนี้ โดยการใช้ความรู้ทางสมการพหุนามและการแก้ ดังแสดงในตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.5</u> ถ้าในการทำการค้าหนึ่ง พบว่า ฟังก์ชันรายจ่ายสามารถเขียนได้คือ $C(x) = 500 + 90x$ บาท และฟังก์ชันรายได้ $R(x) = 150x - x^2$ บาท เมื่อ x คือจำนวนสินค้า จงหาว่า จะต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เจ้าของการค้านี้ ถึงจะคืนทุนได้ หรือหาจุดคุ้มทุน นั่นเอง

วิธีทำ

เราทราบมาแล้วว่า จุดคุ้มทุน เกิดจาก $C(x) = R(x)$

ดังนั้น จึงได้ว่า $500 + 90x = 150x - x^2$

$$x^2 - 60x + 500 = 0$$

$$(x-10)(x-50) = 0$$

นั่นคือ $x = 50,\ x = 10$ และแทนค่ากลับจะได้ค่า $C(50) = 5000, C(10) = 1400$

ดังนั้น เจ้าของการค้าต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวน 50 หรือ 10 ชิ้น ถึงจะทำให้เงินลงทุน กับเงินรายได้ เท่ากันพอดี หรือตอบเป็นจุดได้เป็น (50,5000) และจุด (10,1400)

❖ สมดุลการตลาด

การสมดุลของการตลาดทั่วไป เราจะได้ว่า <u>"จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย (Supply)"</u> **เท่ากับ** <u>"จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ (Demand)"</u> ซึ่ง แต่ละประเภทมักจะเขียนเป็นฟังก์ชันในรูปของราคา (p) และ จำนวนสินค้า (q) ดังนั้น การหาสมดุลการตลาด จะสามารถทำได้ดังแสดงในตัวอย่างนี้

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.6</u> ถ้ากำหนดฟังก์ชัน Demand เป็น $p^2 + 2q = 1600$ และฟังก์ชัน Supply เป็น $200 - p^2 + 2q = 0$ แล้วจงหาจุดสมดุลการตลาด

วิธีทำ จุดสมดุลการตลาดเกิดขึ้นเมื่อ

<u>"จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย(Supply)"</u> **เท่ากับ** <u>"จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ(Demand)"</u>

จากโจทย์เราได้ว่า จำนวนสินค้าที่ต้องการขาย(Supply) : $q = -\frac{1}{2}p^2 + 800$ ....(1)

จำนวนสินค้าที่ต้องการซื้อ(Demand) : $q = \frac{1}{2}p^2 - 100$ ....(2)

ให้สมการที่ (1) เท่ากับ สมการที่ (2)

จึงได้ว่า $-\frac{1}{2}p^2 + 800 = \frac{1}{2}p^2 - 100 \Rightarrow p^2 - 900 = 0$

$\Rightarrow p = 30, -30$ เลือก 30 เพราะ ราคา ต้องเป็นบวกเสมอ

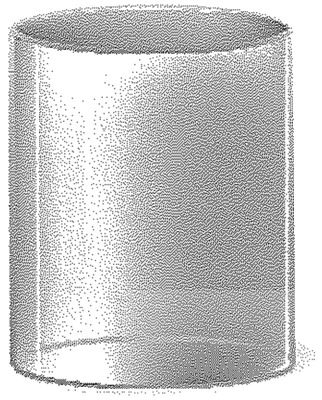
แล้วแทนค่ากลับไปเพื่อหาค่า q จึงได้ค่า $q = 350$

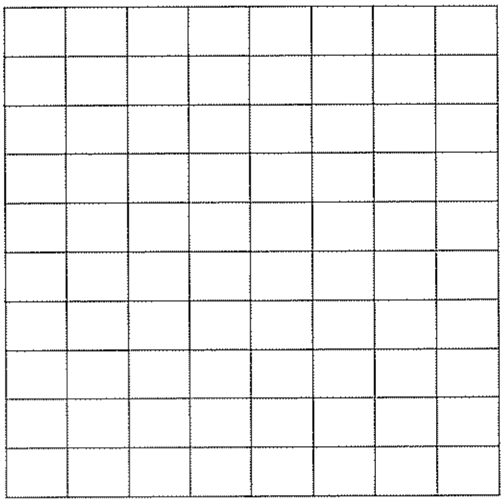
ดังนั้นจะต้องผลิตสินค้าเพื่อขายเป็นจำนวน 350 ชิ้น และขายในราคาชิ้นละ 30 บาท การตลาดถึงจะสมดุล

แบบฝึกทักษะที่ 3.7 จงใช้ความรู้ในบทที่ 3 ในการหาคำตอบของปัญหาในชีวิตประจำวันต่อไปนี้

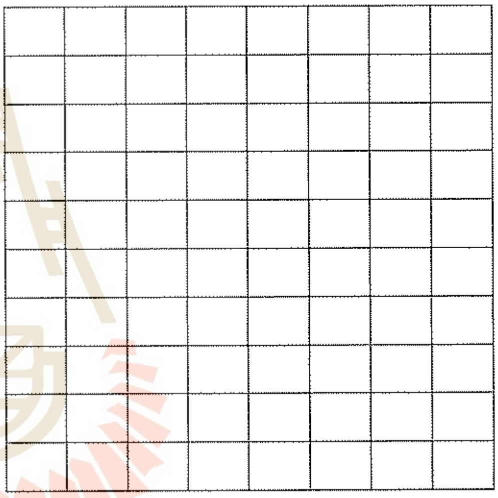
1. จากรูปในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงจินตนาการว่า นักศึกษา กำลังรินน้ำใส่ภาชนะในข้อนั้นๆ ด้วยอัตราคงที่ แล้วเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง เวลา(Time) กับความสูง(Height) ของระดับน้ำในภาชนะนั้น

(a)

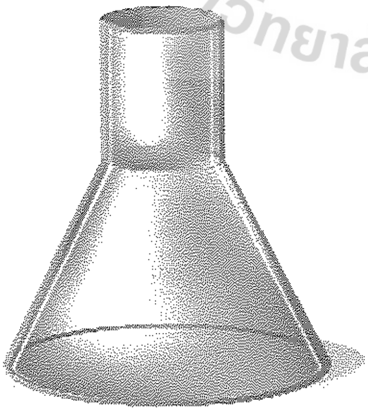


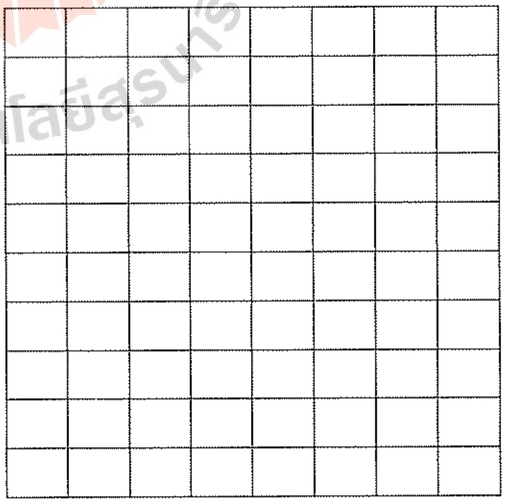


(b)



(c)



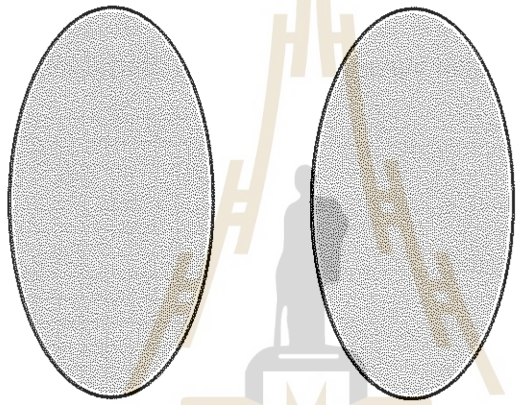


2. โรงภาพยนต์แห่งหนึ่งในจังหวัดนครราชสีมา จำหน่ายเครื่องดื่มตามปริมาณ และความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเครื่องดื่ม (หน่วยเป็นมิลลิลิตร มล.) กับราคา แสดงใน ตารางที่ 12 จงใช้ข้อมูลนี้ ตอบคำถามในละข้อต่อไปนี้

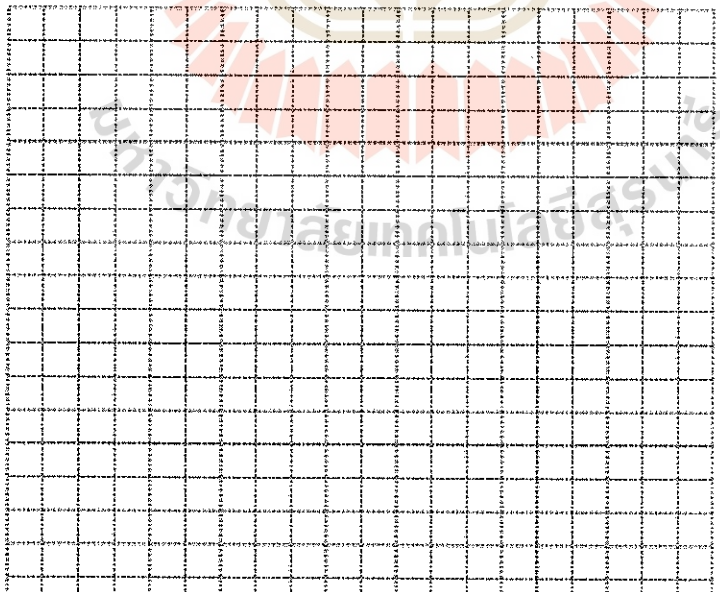
ตารางที่ 12 ตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างราคาเครื่องดื่ม และปริมาณ สำหรับแบบฝึกทักษะประจำบทที่ 3 หัวข้อ 3.7 ข้อ 2

ปริมาณของเครื่องดื่ม (มล.)	ราคา (บาท)
120	99
160	119
240	149
480	189

2.1) จงเขียนแผนภาพในลักษณะของ แผนภาพที่ 8 เพื่อแสดงความสัมพันธ์นี้



2.2) จงเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์นี้



2.3) จงเขียนโดเมน และเรนจ์ ของความสัมพันธ์นี้

2.4) ความสัมพันธ์นี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะอะไร

2.5) เราสามารถใช้ข้อมูลนี้ ทำนายราคาของเครื่องดื่มที่มีขนาด 560 มล. ได้หรือไม่ อย่างไร

3. จงพยายามนึกภาพในแต่ละสถานการณ์ต่อไปนี้ แล้วทำการกำหนดตัวแปร ระบุหน้าที่ว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม แล้วเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์

3.1) ระยะทางที่รถวิ่งไปได้หลังเหยียบเบรค จนกระทั่งรถหยุดนิ่งสนิท เมื่อเทียบกับความเร็วของรถก่อนที่จะเหยียบเบรค

3.2) อุณหภูมิเฉลี่ยของแก้วที่ใส่น้ำแข็งเต็มแก้ว แล้วปล่อยให้วางอยู่บนโต๊ะเป็นเวลานาน

3.3) ระดับความสูงจากพื้นของนักศึกษา เมื่อนักศึกษานั่งบนชิงช้าสวรรค์เป็นเวลา 3 รอบ

4. นายสายันต์ ได้ริเริ่มทำธุระกิจปรับปรุงภาพเก่า แล้วนำมาตกแต่ง และทำสำเนาขายใหม่ โดยในการปรับปรุงภาพ 1 ภาพนั้น นายสายันต์ จะต้องใช้เงินจำนวน 155 บาท ในการทำการตกแต่งใหม่ และต้องใช้เงินอีก 15 บาท ในการจัดทำสำเนา 1 ชุด และเขาได้วางแผนไว้ว่า จะขายในราคาชุดละ 27 บาท

4.1) จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเงินที่ต้องจ่ายในการจัดทำปรับปรุงภาพ 1 ภาพ กับ จำนวนชุดสำเนาเป็นจำนวน x ชุด

4.2) วาดกราฟที่ได้ในข้อ 4.1) แล้ววาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเงินที่เขาจะได้ กับ จำนวนชุดของภาพที่ทำสำเนามา

4.3) สายันต์ต้องขายสำเนาภาพเป็นจำนวนกี่ชุดเป็นอย่างน้อย เขาถึงจะสามารถคืนทุน และเริ่มทำกำไร

4.4) ถ้าเขาทำสำเนามาทั้งหมด 8 ชุด แล้วขายหมด จงหาว่า เขาขาดทุนหรือได้กำไรอยู่กี่บาท

5. สิ่งมีชีวิตที่หายากชนิดหนึ่ง อาศัยอยู่ก้นลึกของทะเล และมีชีวิตยืนยาวมาก จากการสำรวจพบว่า ณ วันนี้ จำนวนของสิ่งมีชีวิตชนิดนี้คือ 821 ตัว และเพิ่มประชากรขึ้นด้วยอัตราคิดเป็น 2 % ต่อเดือน จงหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตทะเลลึกชนิดนี้ เมื่อสิ้นปีที่ 10

6. ถ้าธาตุชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิตคือ 25 ปี และหลังจาก x ปี ธาตุนี้จะเหลือปริมาณเป็นจำนวนทั้งสิ้น $A(t)$ กรัม ที่นิยามเป็น

$$A(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$$

จงหาว่าธาตุนี้มีปริมาณเริ่มต้นกี่กรัม และปริมาณที่เหลืออยู่ หลังจากปีที่ 80

7. ถ้าจำนวนประชากรในแมกซิโกในปี 2523 เป็น 67.38 ล้านคน จงหาว่า เมื่อสิ้นปี 2563 แมกซิโก จะมีประชากรเท่าใด เมื่อกำหนดให้ จำนวนประชากรในปีที่ t มีจำนวนเป็น $P(t) = 67.38e^{0.02567t}$

8. จากสมการแสดงการเพิ่มขึ้นของประชากรในแมกซิโกในข้อ 7. จงหาว่า ถัดจากปี 2553 ไปกี่ปี ประชากรแมกซิโกจะมีจำนวนเป็นเท่าตัว

9. จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 3.7.5 จงเขียนสมการกำไร และหาว่า ต้องผลิตและจำหน่ายสินค้านี้ เป็นจำนวนเท่าใด ถึงจะได้กำไรสูงสุด และได้กำไรสูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด

10. ถ้ากำหนดฟังก์ชัน Demand เป็น $p^2 + 4q = 1600, 550 - p^2 + 2q = 0$

และฟังก์ชัน Supply เป็น $550 - p^2 + 2q = 0$ แล้วจงหาจุดสมดุลการตลาด

11. ถ้าในการทำการค้าหนึ่ง พบว่า ฟังก์ชันรายจ่ายสามารถเขียนได้คือ

$C(x) = 1600 + 1500x$ บาท และฟังก์ชันรายได้ $R(x) = 1600x - x^2$ บาท เมื่อ x คือจำนวนสินค้า จงหาว่าจะต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด เจ้าของการค้านี้ ถึงจะคืนทุนได้ หรือหาจุดคุ้มทุน นั่นเอง

12. วิธีหนึ่งที่สามารถใช้ในการวัดความสามารถในการจดจดและเข้าใจเนื้อหาของนักเรียนหลังจากได้เรียนวิชาหนึ่ง ๆ ไปแล้ว คือ การสอบวัดนักเรียนเหล่านั้นทุกๆ ช่วงเวลาใด ช่วงเวลาหนึ่ง หลังจากที่วิชานั้นจบลงแล้ว และผลของการสอบวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันของนักเรียนคนหนึ่งในเดือนหลังที่จากเรียนจบวิชานี้แล้ว สามารถประมาณค่าได้โดยสมการ

$$S(t) = 85 - 25\,log(t + 1)$$

เมื่อ $S(t)$ คือคะแนนที่นักเรียนได้ในเดือน นั้นๆ จงหาว่า

ก. นักเรียนคนนี้ได้คะแนนเท่าใดในเดือนแรก

ข. นักเรียนคนนนี้ได้คะแนนเท่าใดหลังจาก 2 เดือน

ค. นักเรียนคนนี้ได้คะแนนเท่าใดหลังจากปิดคอร์ดแล้วเป็นเวลา 1 ปี

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย พีชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน

1)	$k(x) = -x + 1$	จงหา	$k(-10)$
2)	$p(x) = 3x$	จงหา	$p(-6)$
3)	$g(n) = n^3 + 3$	จงหา	$g(8)$
4)	$g(x) = x^3 + 5x$	จงหา	$g(5)$
5)	$h(n) = n^3 + 3n^2$	จงหา	$h(-5)$
6)	$w(a) = -a^2 + 5a$	จงหา	$w(7)$
7)	$p(a) = a^3 - 4a$	จงหา	$p(-6)$
8)	$h(n) = \frac{4}{3}n + \frac{8}{5}$	จงหา	$h(-1)$
9)	$f(x) = -1 + \frac{1}{4}x$	จงหา	$f(\frac{4}{3})$
10)	$h(n) = n^3 + 6n$	จงหา	$h(4)$
11)	$h(x) = -x^2 - 3$	จงหา	$h(-1)$
12)	$h(x) = -x^2 - x$	จงหา	$h(10)$
13)	$h(t) = t^2 - 4.4$	จงหา	$h(-7.8)$
14)	$h(a) = -2 - \frac{1}{4}a$	จงหา	$h(-\frac{4}{5})$

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1. จงเขียนสิ่งต่อไปนี้ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

(a) $\log_3 x = 9$

(b) $\log_2 8 = x$

(c) $\log_3 27 = x$

(d) $\log_4 x = 3$

(e) $\log_2 y = 5$

(f) $\log_5 y = 2$

2. จงเขียนสิ่งต่อไปนี้ในรูปของฟังก์ชันลอการิทึม

(a) $y = 3^4$

(b) $27 = 3^x$

(c) $m = 4^2$

(d) $y = 3^4$

(e) $32 = x^5$

(f) $64 = 4^x$

3. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

(a) $\log_3 x = 4$

(b) $\log_m 81 = 4$

(c) $\log_x 1000 = 3$

(d) $\log_2 \frac{x}{2} = 5$

(e) $\log_3 y = 5$

(f) $\log_2 4x = 5$

4. จงทำ (กระจาย) ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(a) $\log_x xy - \log_2 x^2$

(b) $\log_2 \frac{8x^2}{y} + \log_2 2xy$

(c) $\log_3 9xy^2 - \log_2 2xy$

(d) $\log_4 (xy)^3 - \log_4 xy$

(e) $\log_3 9x^4 - \log_3 (3x)^2$

5. จงแก้สมการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a) $2\log_b 4 + \log_b 5 - \log_b 10 = \log_b x$

(b) $\log_b 30 - \log_b 5^2 = \log_b x$

(c) $\log_b 8 + \log_b x^2 = \log_b x$

(d) $\log_b (x+2) - \log_b 4 = \log_b 3x$

(e) $\log_b (x-1) + \log_b 3 = \log_b x$

6. จงแก้สมการต่อไปนี้ (ใช้เครื่องคำนวณถ้าจำเป็น)

1. $3^x = 14$
2. $5e^x = 22$
3. $7(10)^{3x-1} = 5$
4. $2e^{3x-5} = 7$
5. $\frac{15}{1+e^{2x+1}} = 4$
6. $200(1.02)^{3t} = 1000$
7. $x^2e^2 + 5xe^x - 6e^x = 0$
8. $\ln(4x-5) = 0$
9. $3 - \log_2(x-1) = 0$
10. $\log(x^2 - 3x) = 1$
11. $\log_3(2x+3) = 4$
12. $\log_3 x + \log_3(x+6) = 3$
13. $1 + \log(3x-1) = \log(2x+1)$
14. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$
15. $\ln(\ln x) = 3$
16. $\log(3x-10) = 2 + \log(x-2)$

7. จงใช้คุณสมบัติทางฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เพื่อทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้ อยู่ในรูปอย่างง่าย

1.) $(x^{-3})^2$ 2.) $-2x^{-5}$

3.) $\left(\frac{p^{-1}}{9q^3}\right)^2$ 4.) $\frac{5^0x^{-4}}{x^2}$

6.) $\frac{18u^0z^{-4}}{16u^{-2}z^2}$ 7.) $\frac{3^4x^{-4}}{3x^2}$

9.) $3x^2(-2x^3)$ 10.) $(-2x^2y)^3(-3xy^3)^2$

12.) $2y(-3x^2)(xy^3)$ 13.) $(-5xyz^2)^3$

15.) $(y^4)^{-2}$ 16.) $6^0(3^{-4})$

18.) $(u^2z^{-4})^{-3}$ 19.) $\left(\frac{x^2}{x^{-3}y^{-2}}\right)^{-1}$

8. จงแก้สมการด้านล่างนี้ โดยไม่ต้องใช้การเทคฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย

1.) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3x}\cdot 36^{3x} = 36^{-2x-3}$ 2.) $\frac{4}{2^{1-p}} = 1$

3.) $64^{m+3}\cdot 4^{-m-2} = 8$ 4.) $243^{2n-1} = 27^{3n+2}$

5.) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2r-2}}{27} = \left(\frac{1}{81}\right)^{2r-2}$ 6.) $2^{-3x-1}\cdot 2^5 = 32$

7.) $9\cdot 3^{-2b-3} = 3^{-b}$ 8.) $3^{-2a}\cdot 3^{-2a} = 1$

9.) $\frac{4^{3v+2}}{4^{2v-1}} = 4^{v+1}$ 10.) $125\cdot 25^{-2x} = 1$

ส่วนที่ 3 ว่าด้วย พหุนาม

1. จงกระจายแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $2x(x^2)(-4x)(+3)$
2. $4x-2(x-3)$
3. $-2x^2(-3x^2)^3$
4. $(x^2+4x)-(x^3-3x^2)-(2x^2+x)$
5. $xy(x^2-4x+3)$
6. $2x-3(x^2-5x+6)+5x^2$
7. $(x-4)^2$
8. $(x-5)(x^2-5x+25)$

9. $(x-1)(x^2-2x+1)$
10. $(3x+7)(3x-7)$
11. $(x+8y)(3x+y)$
12. $(3x+y)(3x-y)$
13. $2x(x^2+3x)-x(2x^2-4)+3x(x^2-5x+2)$

2. จงหาสิ่งต่อไปนี้

2.1 สำหรับพหุนามในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาพหุนามที่เหลือ เมื่อกำหนดตัวประกอบหนึ่งมาให้ดังตาราง

พหุนาม	รากหนึ่งของพหุนามนี้
1. $x^3-6x^2+11x-6$	$x-1$
2. x^3-7x-6	$x+2$
3. $2x^3+7x^2+7x+2$	$x+1$
4. $3x^3+7x^2\pm 22x-8$	$x+4$

2.2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามในแต่ละข้อด้านล่างนี้

$(a)\ x^3-6x^2+11x-6$ $(c)\ 2x^3+5x^2-3x$

$(b)\ x^3-7x-6$ $(d)\ x^3+6x^2+12x+8$

2.3 จงหาผลเฉลยของสมการพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2+5x+6=0$
2. $x^2-x-12=0$
3. $a^2-9a+18=0$
4. $t^2+2t-19=0$
5. $x^2+15x+30=-6$
6. $d^2+10d=-16$
7. $2x^2+6x+4=0$
8. $3a^2-12a=15$
9. $c^2-6c+9=0$
10. $5x^2-14x+8=0$
11. $h^2-7=9$
12. $7t^2-15\mathrm{t}+5=4$
13. $d^2+10\mathrm{d}+18=-7$
14. $4x^2-46=13$
15. $x^3-3x^2+\mathrm{x}+2=0$

16. $5x^3 + 23x^2 + 10x - 8 = 0$
17. $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$
18. $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$
19. $x^3 + 5x^2 - 4x + 20 = 0$

3. จรวดโมเดลอันหนึ่งถูกยิงขึ้นไปบนฟ้าจากพื้นดินและความสูงของจรวดโมเดลอันนี้วัดจากระดับยิงที่พื้น(มีหน่วยเป็นเมตร)สามารถอธิบายได้ดวยสมการ $h = -16t^2 + 160t$ เมื่อ t เป็นเวลาที่มีหน่วยเป็นวินาที จงหาว่า

3.1) จงหาระดับความสูงของจรวดเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที (256 เมตร)

3.2) จรวดต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะเดินทางไปถึงจุดที่มีสูงจากพื้นเป็นระยะทาง 384 เมตร (หลังจากผ่านไป 4 และ 6 วินาที)

3.3) จรวดจะตกลงถึงพื้นเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด (หลังจากผ่านไป 10 วินาที)

4. พื้นที่เกษตรแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีด้านยาวที่สั้นกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 กิโลเมตร และมีพื้นที่ทั้งหมดเป็น 104 ตารางกิโลเมตร จงหาว่า ที่ดินเกษตรแปลงนี้กว้างและยาวกี่กิโลเมตร (กว้าง 8 และยาว 13 กิโลเมตร)

5. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีฐานที่ยาวเป็น 4 เท่าของความสูง และมีพื้นที่เป็น 48 ตารางเมตร สามเหลี่ยมรูปนี้มีฐานกว้างและมีความสูงยาวเท่าใด (มีความยาวฐานเป็น 12 เมตร และสูงเป็น 8 เมตร)

เฉลยแบบฝึกทักษะ (Answers)

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.1 ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.1

1) $D_R = \{1,2,3,4\},\ R_R = \{3,6,9,12\}$ 2) $D_R = \{1,2,3\},\ R_R = \{6,7,8\}$

3) $R = \{(1,4),(1,6),(2,9),(3,4),(3,6),(5,4),(5,6)\}$

4) 2^6

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.2

1) ความสัมพันธ์ (i)เป็นฟังก์ชัน, ความสัมพันธ์ (ii) เป็นฟังก์ชัน และความสัมพันธ์ (iii) ไม่เป็นฟังก์ชัน

2) กราฟในข้อ ข. เพียงข้อเดียวที่ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเมื่อลากเส้นตรงที่ขนานกับแกน y แล้ว เส้นนั้นจะตัดกราฟมากกว่า 1 จุด

3.1) $R_f = (-\infty, 2)$, 3.2) $R_f = [2, \infty)$ 3.3) $R_f =$ จำนวนจริงทั้งหมด

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.1.3

1) 11 2) 3 3) -7 4) -21 5) -28 6) -2.5 7) 88 8) -1/64 9) 4t-13

10) 8a 11) 12n+2 12) a+7 13) 4x+4 14) -4^{3a-4} 15) $-64n^3 - 80n^2$

16) $n^4 - 2n^2$ 17) $x^3 - 12x^2 + 48x - 96$ 18) $2 \cdot 3^{7+t}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.2 พีชคณิตของฟังก์ชัน</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.2

1.1) $x + \sqrt{x-2}$ 1.2) $2 - x + \sqrt{x-2}$

1.3) $x - 1 + (\sqrt{x-2})(x-1)$ 1.4) $\frac{1+\sqrt{x-2}}{x-1}$ เมื่อ $x \neq 1$

ดังนั้น โดเมนของ $f+g,\ f-g,\ f.g$ คือ

$D_f \cap D_g = [2,\infty) \cap (-\infty,+\infty) = [2,\infty)$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ หาจาก $D_f \cap D_g . g(x) \neq 0$

จาก $g(x) = x - 1$ นั่นคือ $x - 1 \neq 0, x \neq 1$

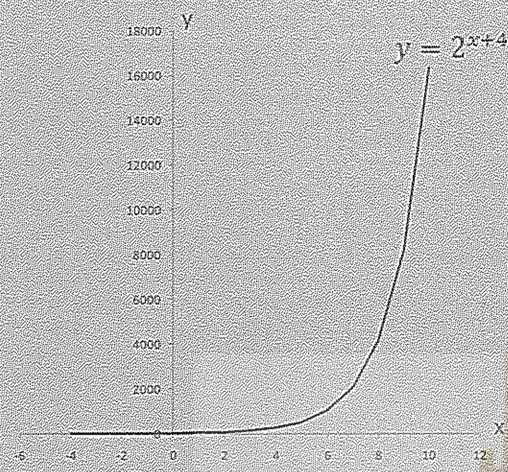
ดังนั้น โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $[2,\infty)$ และ $x = 1$ ไม่อยู่ในช่วงนี้

2.1) $5x^2 + 2x - 1$ 2.2) $5x^2 + 1$ 2.3) $(x-1)(\sqrt{5-x})$

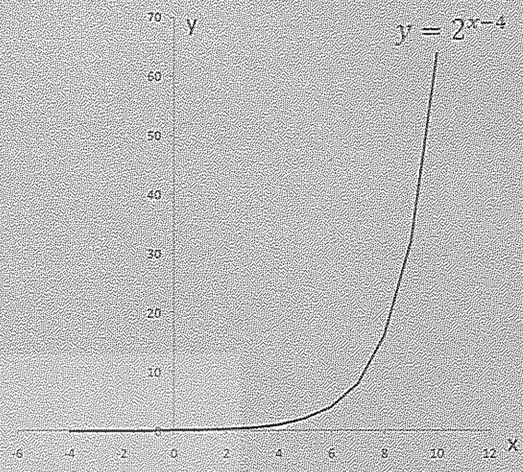
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.3

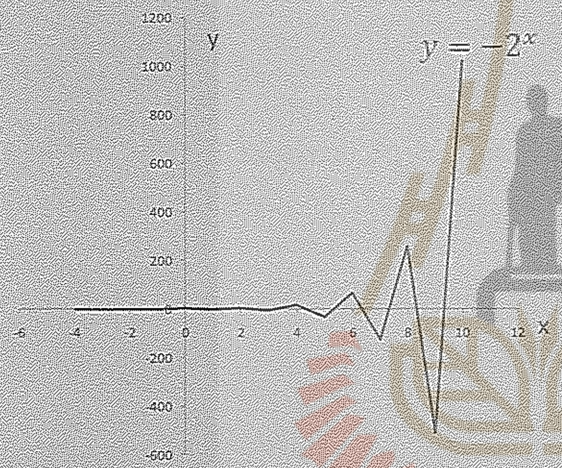
(a) $y = 2^{x+4}$



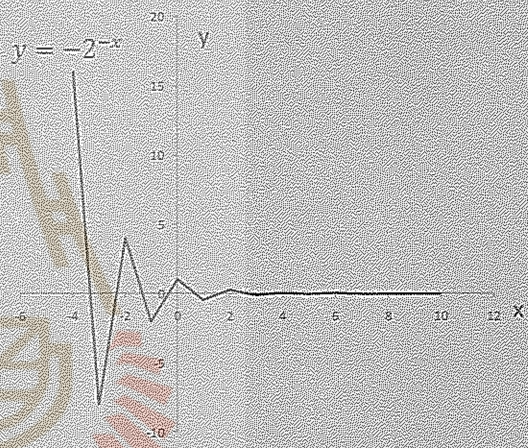
(b) $y = 2^{x-4}$



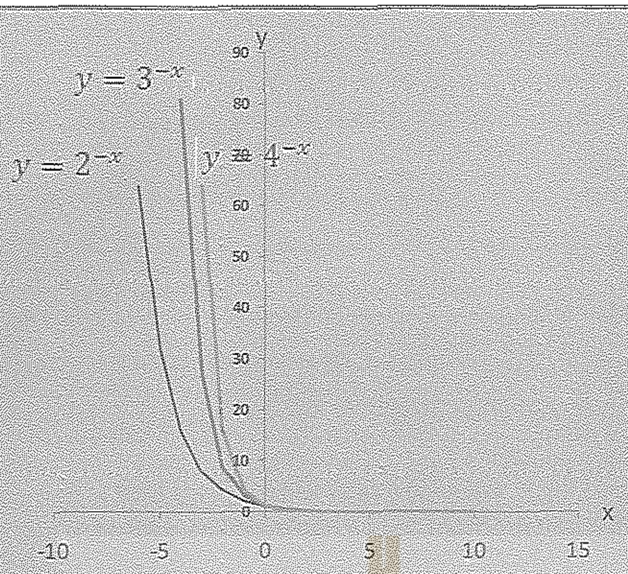
(c) $y = -2^{x}$



(d) $y = -2^{-x}$



แบบฝึกทักษะที่ 3.3.2



แบบฝึกทักษะที่ 3.3.3

1) 0 2) $(-x^6)$ 3) -1 4) $-35a^3b^3c^2$ 5) - 98

6) 4 7) -3 8) -2 9) 6^{a+b+c} 10) $\frac{x^7}{4y^3}$

แบบฝึกทักษะที่ 3.3.4

1) - 3/2 2) 3 3) -2 4) 0 5) 2/3

6) -1/4 7) 2 8) 2 9) 1 10) 10

11) 0 12) - 4/17 13) - 1/6 14) - 2/3

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.4 ฟังก์ชันลอการิทึม</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.1

ข้อ	รูปลอการิทึม	รูปเลขกำลัง
1)	$log_6 36 = 2$	$6^2 = 36$
2)	$log_{289} 17 = \frac{1}{2}$	$289^{\frac{1}{2}} = 17$
3)	$log_{14} \frac{1}{196} = -2$	$14^{-2} = \frac{1}{196}$
4)	$log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
5)	$log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	$64^{\frac{1}{2}} = 8$
6)	$log_{12} 144 = 2$	$12^2 = 144$
7)	$log_9 \frac{1}{81} = -2$	$9^{-2} = \frac{1}{81}$

8)	$log_{\frac{1}{12}}\frac{1}{144}=2$	$\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{144}$
9)	$log_u\frac{15}{16}=v$	$u^v=\frac{15}{16}$
10)	$log_v u=4$	$v^4=u$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.2

1) $log(5\cdot 3) \quad = \quad log\,5+log3$
2) $log\frac{2^4}{5} \quad = \quad 4log\,2-log\,5$
3) $log(\frac{6}{5})^6 \quad = \quad 6log\,6-6\,log\,5$
4) $log(a\cdot b)^2 \quad = \quad 2\,log\,a+2\,log\,b$
5) $log\frac{u^4}{v} \quad = \quad 4\,log\,u-log\,v$
6) $log\frac{x}{y^5} \quad = \quad log\,x-5\,log\,y$
7) $log\sqrt[3]{x\cdot y\cdot z} \quad = \quad \frac{log\,x}{3}+\frac{log\,y}{3}+\frac{log\,z}{3}$
8) $log\,x\cdot y\cdot z^2 \quad = \quad log\,x+log\,y+2log\,z$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.3

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1/3

5) -3 6) 144 7) 17 8) 72

9) 2 10) -2 11) 1/2 12) ไม่นิยาม 13) ไม่นิยาม

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.4.4

1) $\{3\}$ 2) $\{-5\}$ 3) $\{-5\}$ 4) $\{3\}$ 5) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ 6) $\{1\}$ 7) $\{0\}$

8) $\{4095\}$ 9) $\{-1,10\}$ 10) $\{-7,-2\}$ 11) $\{5,3\}$ 12) $\{7,10\}$ 13) $\{90\}$ 14) $\left\{\frac{100}{7}\right\}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.5 ฟังก์ชันพหุนาม</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.5.1

(a) $f(x)=4x^2+2$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 2
(b) $f(x)=3x^3-2x+\sqrt{x}$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ $\sqrt{x}$
(c) $f(x)=12-4x^5+3x^2$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 5
(d) $f(x)=sin\,x+1$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ $sin\,x$
(e) $f(x)=3x^{12}-2/x$ ไม่เป็นพหุนามเพราะมีพจน์ $2/x$
(f) $f(x)=3x^{11}-2x^{12}$ เป็นพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 12

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.5.2

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 1 เช่น $f(x) = x$, $f(x) = 6x - 5$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 2 เช่น $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 - 5$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 3 เช่น $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $f(x) = x^3 - 2$

ตัวอย่างของพหุนามที่มีระดับขั้นเป็น 4 เช่น $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$, $f(x) = x^4 - x - 5.$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.6 สมการพหุนาม และการหาราก</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.6.1

1) $\{1, -1.5\}$ 2) $\left\{\frac{7\pm\sqrt{29}}{10}\right\}$ 3) $\{1,6\}$ 4) $\{5, -4\}$

5) $\left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$ 6) $\{-3,4\}$ 7) $\{-3,1\}$ 8) $\left\{\frac{9}{2}, -4\right\}$

9) $\left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$ 10) $\left\{\frac{-2\pm2\sqrt{37}}{9}\right\}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.6.2

1) $(x-1)(x^2-5x+6)$ 2) $(x+2)(x^2-2x-3)$

3) $(x+1)(2x^2+5x+2)$ 4) $(x+4)(3x^2-5x-2)$

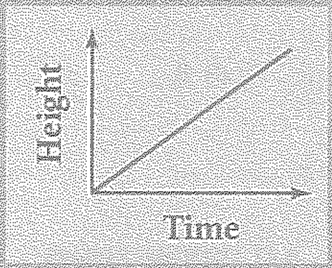
5) $(x-4)(x^2-13x+2)$ 6) เซตของคำตอบทั้งหมดคือ $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right\}$

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 3.7 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอกาลิทึม และสมการพหุนามในชีวิตประจำวัน</u>

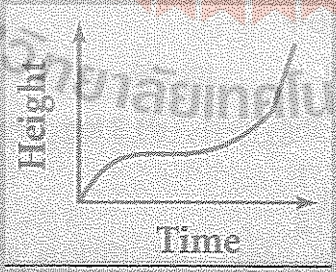
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3.7

1)

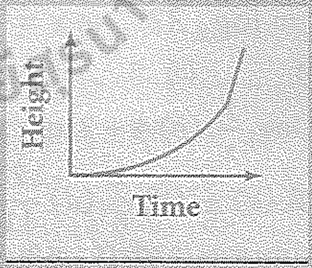
(a)



(b)



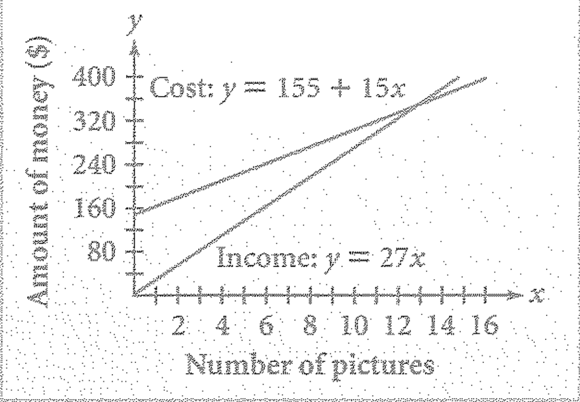
(c)



ข้อ 2) และ 3) ติดตามในชั้นเรียน

4.1) $y = 155 + 15x$ เมื่อ y แทนจำนวนเงิน และ x แทนจำนวนสำเนา

4.2) - ติดตามในชั้นเรียน -



ศัพท์น่ารู้

Cost : ค่าใช้จ่าย

Number of pictures : จำนวนสำเนาภาพ

Income : รายได้

Amount of money : จำนวนเงิน

หมายเหตุ ($) ในที่นี้จะหมายถึงหน่วยเงิน "บาท"

5) จะมีจำนวนประชากรเท่ากับ $1.716 \cdot 10^{13}$ 6) ธาตุนี้จะเหลืออยู่ประมาณ 1.088 กรัม

7) 188.13 ล้านคน 8) เมื่อสิ้นปีที่ 27

9) ต้องผลิตและจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวน 30 ชิ้น ถึงจะได้กำไรสูงสุดคือ 2,200 บาท

10) $p = 30, q = 175$ 11) ได้จุดคุ้มทุน 2 จุดคือ (20,313600) และ (80,121600)

12) ก) 85 คะแนน ข) 73.1 คะแนน และ ค) 57.2 คะแนน

เฉลยแบบฝึกหัดเพิ่มเติมท้ายบท

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย พีชคณิตพื้นฐานของฟังก์ชัน

1) 11 2) -18 3) 67 4) 150 5) -50 6) -14
7) -192 8) 4/15 9) -13/16 10) 88 11) -4 12) -110
13) 56.44 14) -9/5

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

1. (a) $x = 3^9$ (b) $8 = 2^x$ (c) $27 = 3^x$ (d) $x = 4^3$
(e) $y = 2^5$ (f) $y = 5^2$

2. (a) $4 = \log_3 y$ (b) $x = \log_3 27$ (c) $2 = \log_4 m$ (d) $5 = \log_3 y$
(e) $5 = \log_x 32$ (f) $x = \log_4 64$

3. (a) 81 (b) 3 (c) 10 (d) 64 (e) 234 (f) 8

4. $(a)\ \log_2 \frac{y}{x}, (b)\ 4 + 3\log_2 x, (c)\ \log_3 y - 1, (d)\ 2\log_4(xy)$

5. $(a)\ 8, (b)\ \frac{6}{5}, (c)\ \frac{1}{8}, (d)\ \frac{2}{11}, (e)\ 1\frac{1}{2}$

6) 6.1) ประมาณ 2.40217 6.2) ประมาณ 1.4816 6.3) ประมาณ 0.28462 6.4) ประมาณ 2.08425
6.5) ประมาณ -0.0058 6.6) ประมาณ 27.0913 6.7) -6 , 1 6.8) 1.5 6.9) 9
6.10) 5 , -2 6.11) 39 6.12) 3 6.13) 11/28 6.14) 3 , -2 6.15) e^{e^3} 6.16) ไม่มีคำตอบ

7)

1.) $\frac{1}{x^6}$ 2.) $\frac{-2}{x^5}$

3.) $\frac{1}{64p^2q^6}$ 4.) $\frac{1}{x^6}$ 5.) $\frac{n^3}{m^6}$

6.) $\frac{9u^2}{8z^6}$ 7.) $\frac{27}{x^6}$ 6.) $\frac{x^3}{8}$
9.) $-6x^5$ 10.) $-72x^8y^9$ 11.) $-64x^3y^6$
12.) $-6x^3y^4$ 13.) $-125x^3y^3z^6$ 14.) y^4
15.) $\frac{1}{y^8}$ 16.) $\frac{1}{81}$ 17.) 3125
18.) $\frac{z^{12}}{u^6}$ 19.) $\frac{1}{x^5y^2}$ 20.) 1

8.

1. –6/13 2. -1 3. –11/4 4. 11 5. 9/10
6. –1/3 7. (-1) 8. 0 9. ไม่มีคำตอบ 10. -3/4

ส่วนที่ 3 ว่าด้วย พหุนาม

1)

1) $-24x^4$ 2) $2x+6$ 3) $54x^8$ 4) $-x^3+2x^2+3x$ 5) x^3y-4x^2y+3xy
6) $2x^2+17x-18$ 7) $x^2-8x+16$ 8) x^3-125 9) x^3-3x^2+3x-1
10) $9x^2-49$ 11) $3x^2+25xy+8y^2$ 12) $9x^2-y^2$ 13) $3x^3-9x^2+10x$

2.1)

1. $(x-1)(x^2-5x+6)$, 2. $(x+2)(x^2-2x-)$,
3. $(x+1)(2x^2+5x+2)$ 4. $(x+4)(3x^2-5x-2)$

2.2)

$(a)\ (3x-2)(x+1)(x-3)$ $(b)\ (x-2)(x^2-2x+2)$
$(c)\ x(2x-1)(x+3)$ $(d)\ (x-1)(x^2+x-2)$
$(e)\ (x+2)^3$

2.3)

1. $x=-2,\ 3$ 10. $x=\frac{4}{5},\ 2$
2. $x=-3,\ 4$ 11. $h=-4,\ 4$
3. $a=3,\ 6$ 12. $t=\frac{1}{7},\ 2$
4. $t=-6,\ 4$ 13. $d=-5$
5. $x=-3,\ -12$ 14. $x=-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$
6. $d=-8,\ -2$ 15. $2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
7. $x=-2,\ -1$ 16. $\frac{2}{5}, -1, -4$
8. $a=5,\ -1$ 17. $3,\ 2$
9. $c=3$ 18. 1
19. $2, -2, -5$

3.1) 256 เมตร 3.2) หลังจากผ่านไป 4 และ 6 วินาที
3.3) หลังจากผ่านไป 10 วินาที 4. กว้าง 8 และยาว 13 กิโลเมตร
5. มีความยาวฐานเป็น 12 เมตร และสูงเป็น 8 เมตร

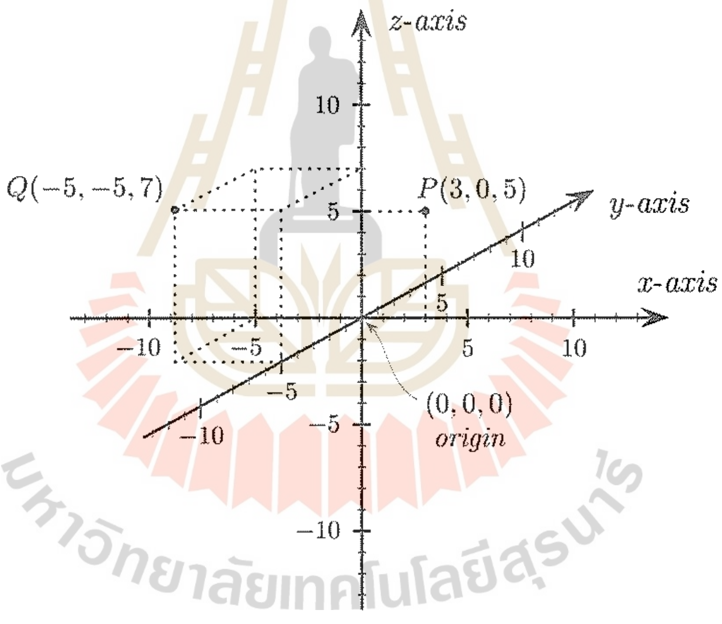
บทที่ 4

รูปทรง (Shapes) และภาคตัดกรวย(Conic Sections)

ระบบพิกัด และภาคตัดกรวย มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการจำลองสิ่งต่าง ๆด้วยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้อยู่ในภาพที่สามารถระบุตำแหน่งต่าง ๆของสิ่งนั้น หรือส่วนประกอบของสิ่งนั้นได้ด้วยความหมายทางคณิตศาสตร์ การศึกษาในหัวข้อนี้ จึงจะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาในการประยุกต์ในหัวข้อต่อ ๆ ไปเป็นอย่างยิ่ง

4.1 ระบบพิกัดใน 3 มิติ (Co-ordinates in 3 Dimensions)

ในการเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษา เราได้คุ้นเคยกันอย่างดีกับระบบพิกัดแนวฉาก (Rectangular Coordinate System) คือประกอบด้วย แกน x แกน y และแกน z ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 9**

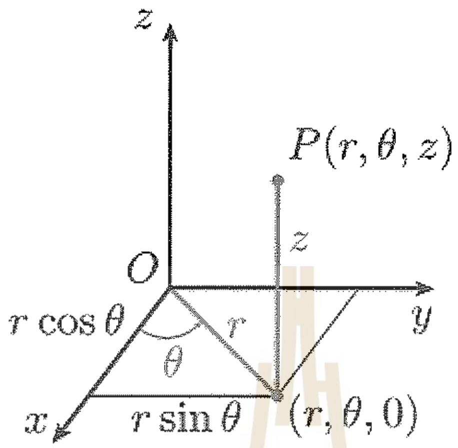


แผนภาพที่ 9 ระบบพิกัดแนวฉาก (Rectangular Coordinate System)

ในหัวข้อนี้ เราจะได้ทำความรู้จักกับระบบพิกัดแบบอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากนี้ ซึ่งระบบพิกัดอื่น ๆเหล่านี้มีประโยชน์เป็นอย่างยิ่งในการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์กับปัญหาทางธรรมชาติอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในส่วนที่ไปเกี่ยวของกับศาสตร์ใกล้เคียง อาทิ ฟิสิกส์ และวิศวกรรมทุกแขนง อันเนื่องมาจากว่า กฎทางฟิสิกส์ต่าง ๆ จะเกี่ยวข้องกับสิ่งต่าง ๆ ที่มีรูปทรงต่างกันไป และรูปทรงเหล่านั้นก็ไม่เป็นการสะดวกเสมอไปที่จะอธิบายในระบบพิกัดแนวฉากอย่างที่พวกเราคุ้นเคยกันดี ดังนั้น ในบทนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดใหม่อีก 2 ระบบใน 3 มิติ ตลอดจนความสัมพันธ์ของทั้ง 3 ระบบนี้อีกด้วย

❖ ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System)

ในระบบพิกัดนี้ จุด P ใน 3 มิติ จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพิกัด (r, θ, z) เมื่อแต่ละตำแหน่งของพิกัดนี้ แสดงได้ใน **แผนภาพที่ 10**



แผนภาพที่ 10 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate System)

ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทรงกระบอก กับระบบพิกัดแนวฉาก สามารถแสดงได้ ดังนี้

1. การเปลี่ยนพิกัดในระบบ**พิกัดทรงกระบอก** ไปเป็นพิกัดในระบบ**พิกัดแนวฉาก** ทำได้โดยใช้สูตร

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (4.1)$$
$$z = z$$

2. และเราสามารถเปลี่ยนจุดพิกัดในระบบพิกัด**แนวฉาก** ไปเป็นพิกัดในระบบ**พิกัดทรงกระบอก**ได้โดยใช้ความสัมพันธ์

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (4.2)$$
$$z = z$$

ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงหาพิกัดของจุด $(6, -\frac{\pi}{4}, 2)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ในระบบพิกัดแนวฉาก

วิธีทำ

รูปทั่วไปของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกคือ (r, θ, z) ดังนั้น เทียบกับจุดที่โจทย์กำหนดให้ เราจะได้ทันทีว่า $r = 6,\ \theta = -\frac{\pi}{4},\ z = 2$

จากสูตร (4.1) เราได้ทันทีว่า

$$x = r\cos\theta = 6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = 6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

และ $z = 2$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 2)$ ในระบบพิกัดแนวฉาก

ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาพิกัดของจุด $(2\sqrt{3},\ -2,\ 6)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดแนวฉาก ในระบบพิกัดทรงกระบอก

วิธีทำ

จากสูตร (4.2) เราได้ทันทีว่า

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4(3) + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = 6$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(4, -\frac{\pi}{6}, 6)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

❖ ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate System)

ในระบบพิกัดนี้ จุด P ใน 3 มิติ จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพิกัด $(\rho, \theta, \emptyset)$ เมื่อแต่ละตำแหน่งของพิกัดนี้ แสดงได้ใน **แผนภาพที่ 11**

บันทึก

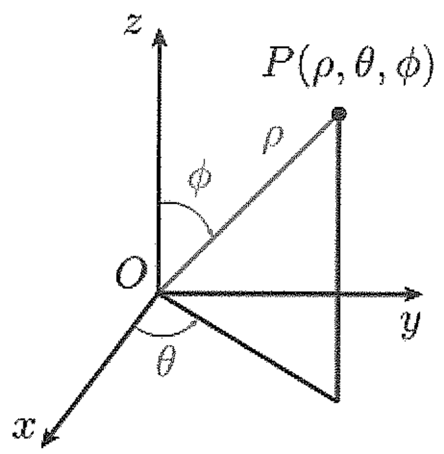
....

....

....

....

....



แผนภาพที่ 11 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinate System)

ข้อสังเกต

- ρ คือ ระยะทางจากจุด O ถึงจุด P
- θ คือ มุมระหว่างแกน z ทางบวก กับส่วนของเส้นตรง OP
- $\rho \geq 0$ และ $0 \leq \emptyset \leq \pi$

และเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดในระบบพิกัดทรงกลมนี้ กับระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดแนวฉากได้ ดังนี้

1. สามารถเปลี่ยนพิกัดจากระบบพิกัดทรงกลม ไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดทรงกระบอกได้ โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin \emptyset \\ \theta &= \theta \\ z &= \rho \cos \emptyset \end{aligned} \tag{4.3}$$

2. สามารถเปลี่ยนพิกัดจากระบบพิกัดทรงกลม ไปเป็นพิกัดในระบบพิกัดแนวฉากได้ โดยใช้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \emptyset \cdot \cos \theta \\ y &= \rho \cos \emptyset \cdot \cos \theta \\ z &= \rho \cos \emptyset \end{aligned} \tag{4.4}$$

3. และจากระบบพิกัดทรงกระบอก/แนวฉาก ไปยังระบบพิกัดทรงกลม ได้ โดย

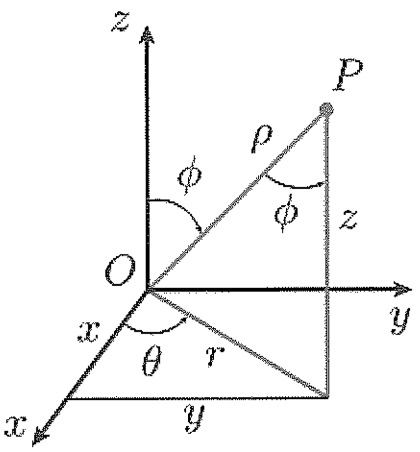
$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \tan \emptyset = \frac{r}{z}$$

หรือ

$$\cos \emptyset = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4.5}$$

แผนภาพที่ 12 แสดงความสัมพันธ์ของทั้ง 3 ระบบพิกัด



แผนภาพที่ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดแนวฉาก ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างที่ 4.1.3 จงหาพิกัดของจุด $(2, 2, 4\sqrt{2})$ ที่อยู่ในระบบพิกัดแนวฉาก ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

จากสูตร (4.5) เราได้ทันทีว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\emptyset = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(2\sqrt{10}, \frac{\pi}{4}, \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right))$ ในระบบพิกัดทรงกลม

ตัวอย่างที่ 4.1.4 จงหาพิกัดของจุด $(2, \frac{2\pi}{3}, -2)$ ที่อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

จากสูตร (4.5) เราได้ทันทีว่า

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{4}$$

$$\emptyset = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \emptyset = \frac{3\pi}{4}$$

ดังนั้น จุดดังกล่าวมีพิกัดเป็น $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ ในระบบพิกัดทรงกลม

แบบฝึกทักษะที่ 4.1 จงหาพิกัดของจุดที่กำหนดให้ ในระบบพิกัดใหม่ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จุด $\left(12, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{9}\right)$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัดแนวฉาก

2) จุด $\left(18, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัดทรงกระบอก

3) จุด $\left(1, \frac{3\pi}{2}, 2\right)$ จากระบบพิกัดทรงกระบอก ไประบบพิกัดแนวฉาก

4) จุด $\left(4, -\frac{\pi}{3}, 5\right)$ จากระบบพิกัดทรงกระบอก ไประบบพิกัดแนวฉาก

5) จุด $(3,3,-2)$ จากระบบพิกัดแนวฉาก ไประบบพิกัดทรงกระบอก

6) จุด $\left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัดแนวฉาก

7) จุด $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ จากระบบพิกัดทรงกลม ไประบบพิกัดแนวฉาก

....

8) จุด $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ จากระบบพิกัดแนวฉาก ไประบบพิกัดทรงกลม

....

9) สมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ จากระบบพิกัดทรงกระบอก ไประบบพิกัดทรงกลม

....

10) สมการ $x^2 + 2y^2 = 2y$ จากระบบพิกัดทรงกระบอก ไประบบพิกัดทรงกลม

....

4.2 พื้นที่ (Areas) และปริมาตร (Volumes)

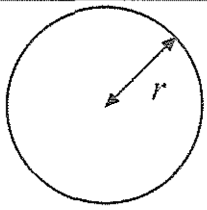
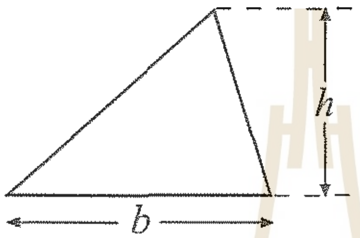
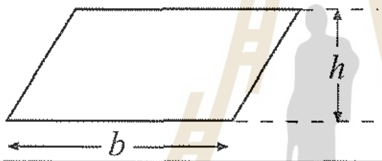
รูปทรงในปัญหาจริงที่พบเห็นนั้น บ่อยครั้งที่เราจะสามารถแบ่งส่วนย่อยๆ ของรูปทรงนั้น ให้อยู่ในลักษณะของส่วนประกอบของรูปทรงเล็กๆ ที่เป็นรูปทรงที่เราคุ้นเคยกันดี ไม่ว่าจะเป็น วงกลม ทรงกลม สามเหลี่ยม ปิรมิตร และอื่นๆ ดังนั้น จึงเป็นสิ่งสำคัญที่เราจะต้องทำความเข้าใจรูปทรงมาตรฐานเล็กๆ เหล่านี้ เพื่อการศึกษารูปทรงที่ใหญ่ขึ้น มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นนั้น มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะเป็นการรวบรวมเอาสูตรคำนวณหาพื้นที่ และปริมาตร ของรูปทรงมาตรฐานต่างๆ ที่นักศึกษาได้เคยศึกษามาแล้วตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาเลยทีเดียว

❖ พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นต่าง ๆ ใน 2 มิติ

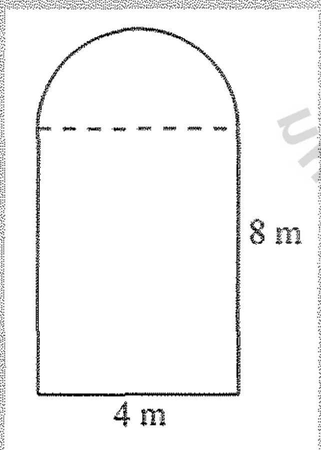
เราสามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่ของบริเวณใน 2 มิติ ได้ ดังแสดงใน **ตารางที่ 13**

ตารางที่ 13 สูตรการหาพื้นที่สำหรับบริเวณรูปมาตรฐานที่พบบ่อย

ชื่อ	รูปประกอบ	สูตรการหาพื้นที่
วงกลม		πr^2
สามเหลี่ยม		$\frac{1}{2}bh$
สี่เหลี่ยมด้านขนาน		bh

ข้อควรระวัง ความสูง h ที่ใช้ จะต้องตั้งฉากกับฐาน b เสมอ

__ตัวอย่างที่ 4.2.1__ จงหาพื้นที่ของบริเวณดังแสดงในรูปข้างล่างนี้



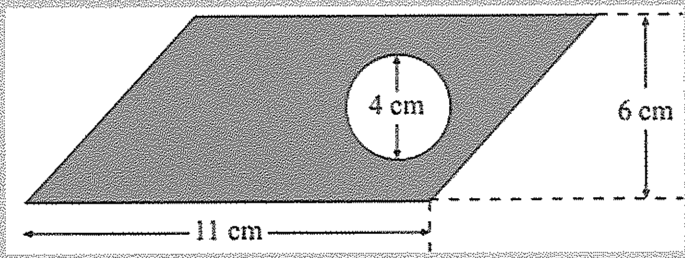
วิธีทำ

เราจะเห็นได้ว่า รูปทรงนี้ เกิดจากการประกอบกันของ 2 รูปทรงย่อย คือ รูปครึ่งวงกลม(ส่วนบน) และรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(ส่วนล่าง) ดังนั้น พื้นที่ทั้งหมดของรูปทรงนี้ ก็จะเป็นผลรวมของรูปทรงย่อยทั้ง 2 นั้น

1. พื้นที่ของ ครึ่งวงกลม เท่ากับ $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 6.2831$
2. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เท่ากับ $4 \times 8 = 32$

ดังนั้น พ.ท. ของรูปนี้ เท่ากับ 32 + 6.2831 $= 39.3$ ตร.ม.

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา ดังแสดงในรูปข้างล่างนี้



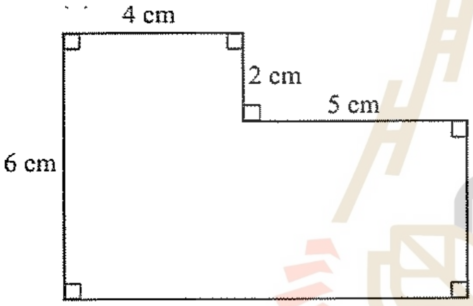
วิธีทำ

จะเห็นว่า พื้นที่ที่แรเงานั้น เกิดจากการเอาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด ลบด้วย พื้นที่ของวงกลมที่บรรจุอยู่ในสี่เหลี่ยมนั้น

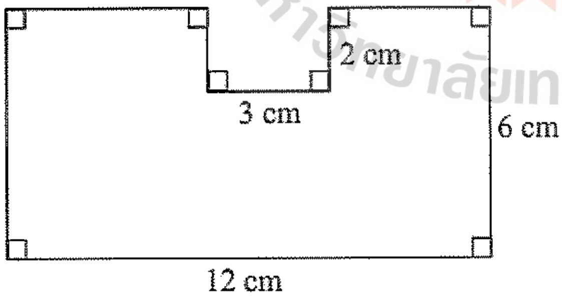
ดังนั้น จึงได้ว่า พท. ที่ต้องการเท่ากับ $(11 \times 6) - (\pi \times 2^2) = 66 - 12.5663 = 53.4$ ตร.ซม.

แบบฝึกทักษะที่ 4.2.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นต่าง ๆ พร้อมด้วยเงื่อนไข ดังแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

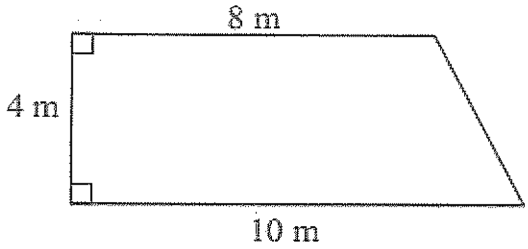
1)



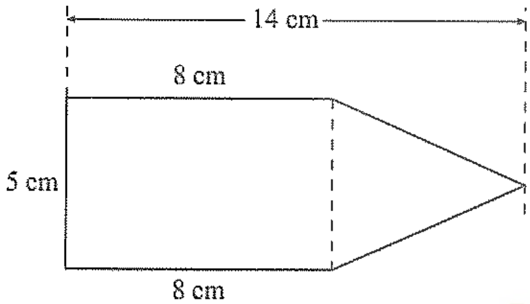
2)



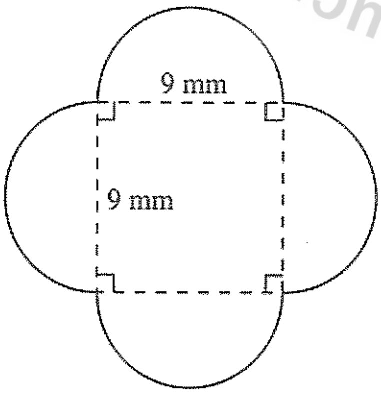
3)



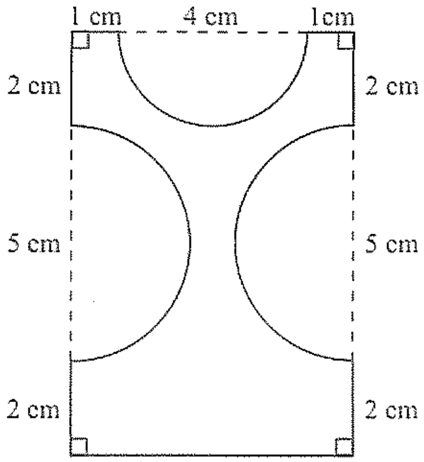
4)



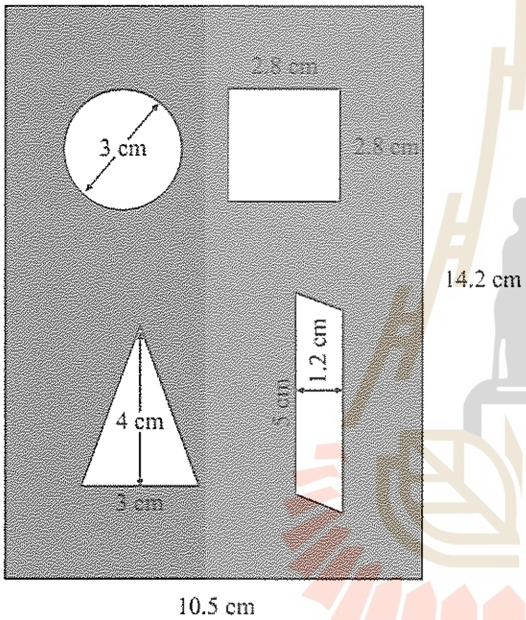
5)



6)



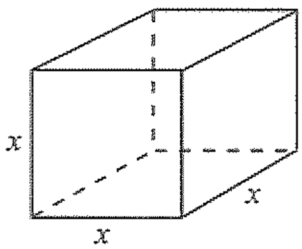
7)

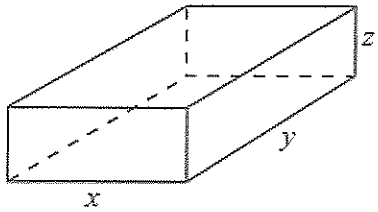
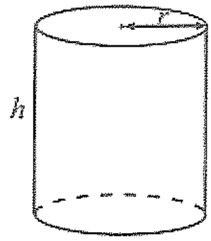
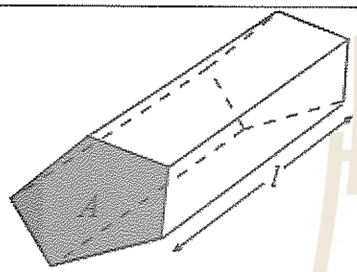


ปริมาตร และพื้นที่ผิวของรูปทรงใน 3 มิติ

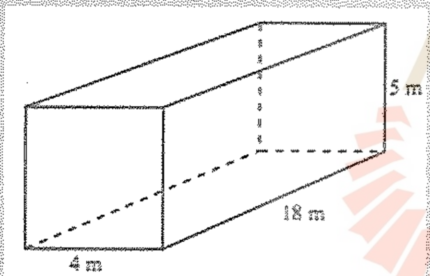
เราสามารถสรุปสูตรการหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปทรงใน 3 มิติ ได้ ดังแสดงใน **ตารางที่ 14**

ตารางที่ 14 ตารางสรุปสูตรการหาพื้นที่ผิว และปริมาตรของรูปทรงใน 3 มิติ

ชื่อ	รูปประกอบ	สูตรการหา	
		พื้นที่ผิว	ปริมาตร
ลูกบาศก์		$6x^2$	x^3

กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า		$2xy + 2xz + 2yz$	xyz
ทรงกระบอก		พท.ผิวด้านข้าง คือ $2\pi rh$ พท.ฝาแต่ละข้าง คือ πr^2 ดังนั้น พท.ทั้งหมด คือ $2\pi rh + 2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
ปริซึมฐาน 5 เหลี่ยม		-	(พท. A)$\cdot l$

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงในรูปข้างล่างนี้



วิธีทำ

1. พท. ผิว ประกอบด้วย พท. สี่เหลี่ยม 2 ด้าน (หน้า และหลัง) และ พท. สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้านข้าง จำนวน 4 ด้าน

ดังนั้น พท. ผิว เท่ากับ

$$2(4 \times 5) + 4(18 \times 5) = 364 \quad \text{ต.ร.ม.}$$

2. ปริมาตร เท่ากับ (กว้าง)×(ยาว)×(สูง) $= (4) \times (18) \times (5) = 360$ ลบ.ม.

บันทึก

....

....

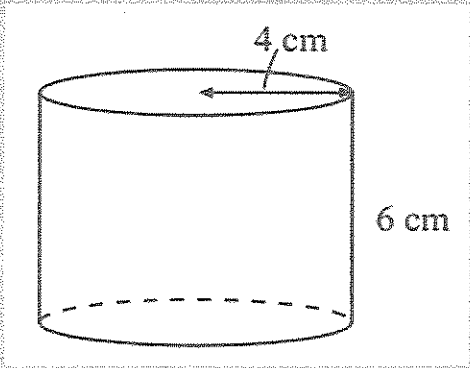
....

....

....

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงในรูปข้างล่างนี้

วิธีทำ



1. ปริมาตรของรูปทรงกระบอกเท่ากับ $\pi r^2 h$ แทนค่าจะได้ว่า

ปริมาตร $= \pi \times 4^2 \times 6$

$= 301.5928$ ลบ. ซม.

2. พื้นที่ผิวประกอบด้วย 2 ส่วนคือ พื้นที่ผิวรอบข้าง ซึ่งเท่ากับ $2\pi rh$ และพื้นที่ของฝาปิดทั้งด้านล่างและด้านบน ด้านละ πr^2 ตร.ซม.

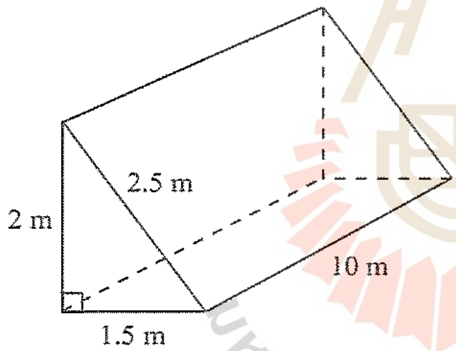
ดังนั้น พื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปทรงกระบอกนี้ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= (2 \times \pi \times 4 \times 6) + (2 \times \pi \times 4^2)$

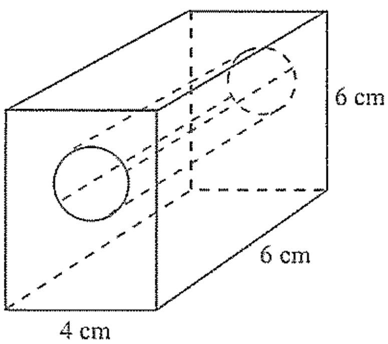
$= 251.3274$ ตร.ซม.

แบบฝึกทักษะที่ 4.2.2 จงปริมาตร และ/หรือ พื้นที่ผิวของรูปทรงในแต่ละข้อต่อไปนี้

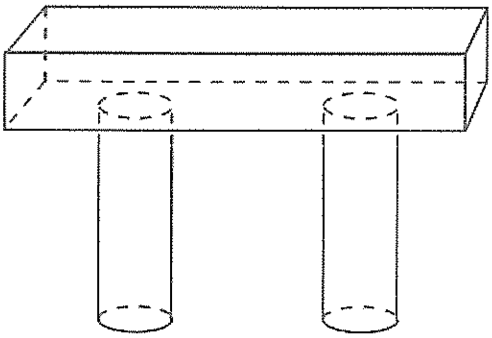
1) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร



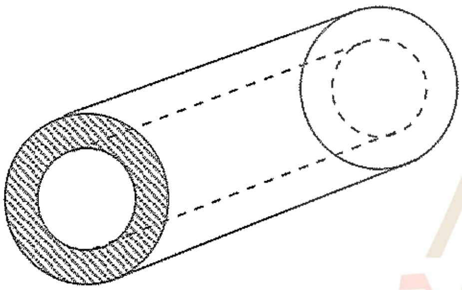
2) หาปริมาตร เมื่อกำหนดรัศมีของช่องวงกลมเท่ากับ 2 ซม.



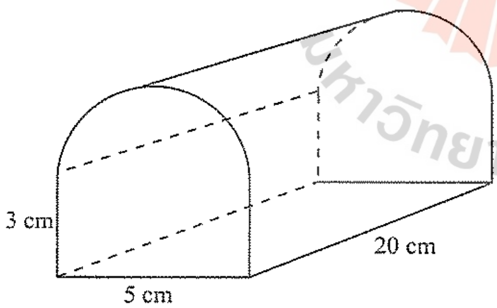
3) หาปริมาตร เมื่อกำหนด รูปทรง 4 เหลี่ยมผืนผ้าที่อยู่ด้านบน มีความกว้าง ยาว และสูงเป็น 0.5 ม., 3 ม. และ 0.4 ม. ตามลำดับ และเสาทั้งสองข้าง มีรัศมี 0.4 ม. สูง 2 เมตร



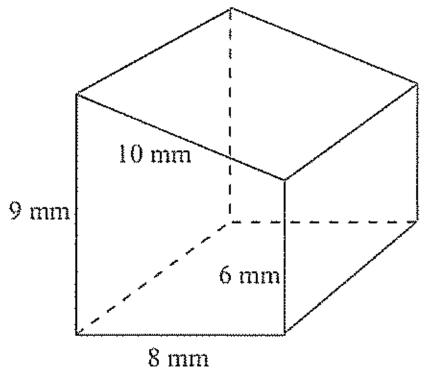
4) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร เมื่อกำหนดให้ความยาวของท่อนี้เท่ากับ 50 ซม. รัศมีของวงนอกสุดเท่ากับ 30 ซม. และรัศมีของวงในเท่ากับ 20 ซม.



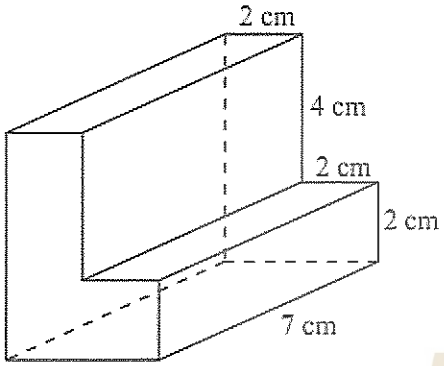
5) หาพื้นที่ผิว และปริมาตร เมื่อกำหนดให้ส่วนบนของรูปทรงโค้งเป็นรูปครึ่งวงกลมพอดี



6) ถ้ากำหนดให้ปริมาตรของรูปทรง 3 มิตินี้ เท่ากับ 756 ลบ.มม. จงหาความยาวของรูปทรงนี้ พร้อมหาพื้นที่ผิวด้วย

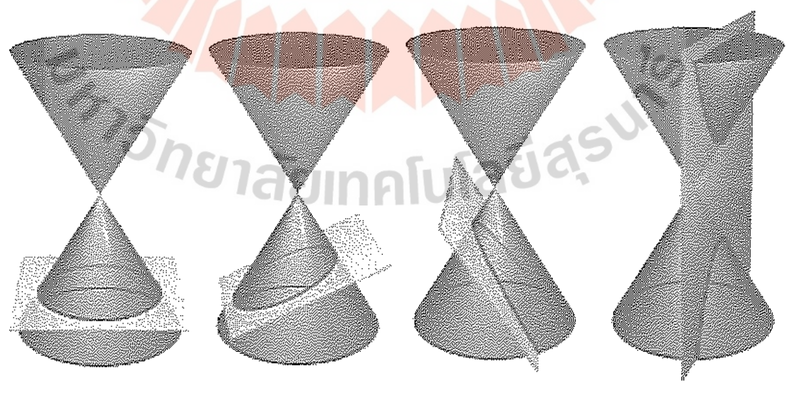


7) หาปริมาตร และพื้นที่ผิว



4.3 ภาคตัดกรวย (Conic Sections)

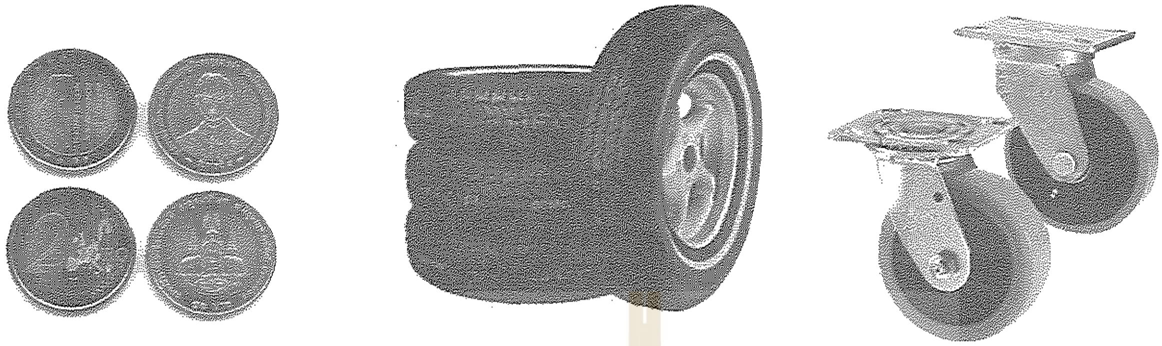
ในระดับชั้นมัธยมศึกษา เราได้ทำความรู้จักมาบ้างแล้วในเรื่องของภาคตัดกรวย ในหัวข้อนี้ เราจะนำเสนอเนื้อหาอีกครั้ง เพื่อเป็นการทบทวน และฝึกฝนการเชื่อมโยมระหว่างหลักการ และบริบทของหัวข้อในชีวิตประจำวันที่เราพบเห็นได้ ในส่วนของภาคตัดกรวยนี้ จะมีทั้งหมด 4 หัวข้อย่อย ได้แก่ วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเปอร์โบลา ซึ่งหน้าตาของแต่ละรูปนี้ จะเกิดจากการตัดกรวยด้วยแผ่นระนาบในลักษณะต่างๆ ดังแสดงในแผนภาพที่ 13



แผนภาพที่ 13 การตัดทรงกรวยด้วยระนาบ จะทำให้เกิดรอยตัดที่เป็นวงกลม หรือวงรี หรือพาราโบลา หรือ ไฮเปอร์โบลา

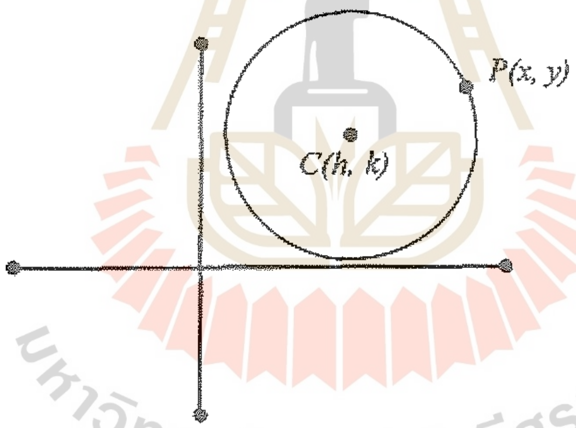
❖ วงกลม (Circles)

ในทางคณิตศาสตร์ ถือว่าวงกลมเป็นเส้นโค้งที่สมบูรณ์ เครื่องใช้ต่างๆ ของเรามักมีลักษณะเป็นวงกลม เช่น ขันตักน้ำ หน้าปัดนาฬิกา จานข้าว ถาด กระโถน เงินเหรียญ แก้วน้ำ ดังตัวอย่างแสดงในแผนภาพที่ 14



แผนภาพที่ 14 ตัวอย่างของสิ่งของที่มีลักษณะเป็นวงกลม ที่เราสามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน

บทนิยาม 4.1 วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่เสมอ เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม ระยะทางคงที่เรียกว่า รัศมี (r) สมการทรงกลม



แผนภาพที่ 15 วงกลมใน 2 มิติที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ใดๆ

ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมีเท่ากับ r สมการทรงกลม คือ

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.6}$$

ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และรัศมีเท่ากับ r จะได้สมการของวงกลม คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{4.7}$$

สมการทรงกลมในรูปทั่วไปคือ คือ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \tag{4.8}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงเขียนสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางเป็น $(5,-2)$ และรัศมียาว 4

วิธีทำ จากสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) และรัศมีเท่ากับ r คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

แทนค่า (h,k) ด้วย $(5,-2)$ และ $r=4$ จึงได้ว่า

$$(x-5)^2+(y-(-2))^2=4^2$$
$$(x-5)^2+(y+2)^2=4^2$$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น

$$x^2+y^2+6x-2y=26$$

วิธีทำ

ขั้นแรก เราจะจัดให้กลุ่มตัวแปรเดียวกัน มาอยู่ใกล้ๆ กันเสียก่อน จะได้ว่า

$$x^2+6x+y^2-2y=26$$

จากนั้น ในแต่ละกลุ่มตัวแปร เราจะบวกเข้าทั้ง 2 ข้างของสมการ ด้วย $\left(\frac{\text{สปส.พจน์กำลังหนึ่ง}}{2}\right)^2$

$$x^2+6x+\underline{9}+y^2-2y+\underline{1}=26+\underline{9}+\underline{1}$$
$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=36$$

จัดรูปใหม่ ได้ $$(x+3)^2+(y-1)^2=6^2$$

เมื่อเทียบกับรูปในสมการ (4.7) จะได้ทันทีว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้คือ $(-3,1)$ และมีรัศมียาว 6 หน่วย

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.1 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี ของวงกลมที่มีสมการแสดงดังในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x^2+y^2=49$

....
....
....
....

2) $(x+10)^2+(y-3)^2=138$

....
....
....
....

3) $(x+7)^2+(y+8)^2=64$

....
....
....

4) $(x+5)^2+(y-10)^2=9$

....
....
....

5) $364 + 28y + y^2 + x^2 = -26x$

....

6) $x^2 + y^2 + 24x + 10y + 160 = 0$

....

7) $-6x = -x^2 + 32y - 264 - y^2$

....

8) $-6x + x^2 = 97 + 10y - y^2$

....

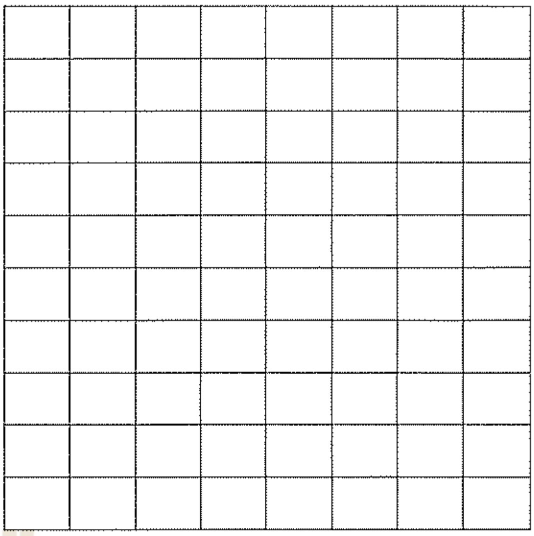
แบบฝึกทักษะที่ 4.3.2 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมี พร้อมวาดรูปประกอบ ของวงกลมที่มีสมการแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $(x+1)^2+(y+2)^2=25$

2) $(x+3)^2+(y-3)^3=8$

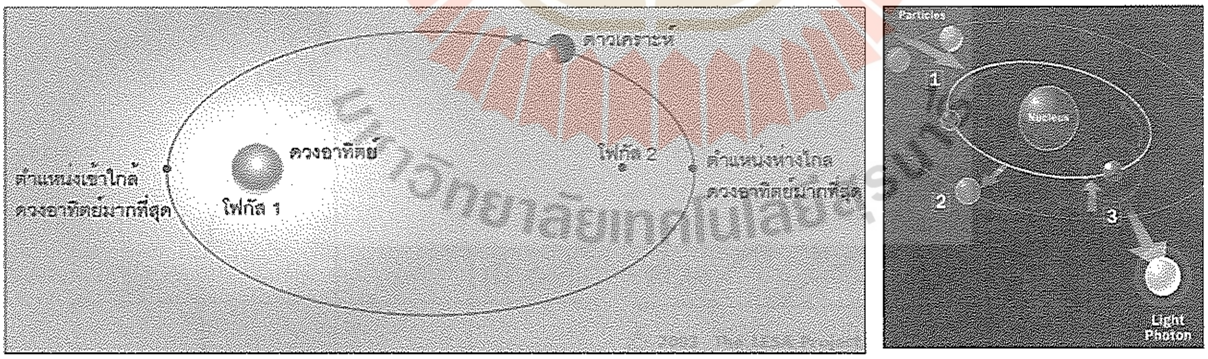
3) $x^2+y^2-6y=0$

4) $6y + y^2 = 8x - x^2 - 24$



❖ วงรี (Ellipses)

การค้นพบการมีอยู่ของวงรีที่สำคัญนั้น มีอยู่หลายปรากฏการณ์ อาทิ ในทางดาราศาสตร์ พบว่าทางเดินของโลกและดาวเคราะห์ต่าง ๆ ที่เดินรอบดวงอาทิตย์ต่างก็ล้วนมีเส้นทางเป็นรูปวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสของวงรีแต่ละวง ดวงจันทร์ซึ่งเป็นดาวบริวารของดาวเคราะห์ก็เดิน ทางรอบดาวเคราะห์เป็นวงรี แม้ดาวเทียมที่มนุษย์ประดิษฐ์ขึ้นก็หมุนรอบโลก เป็นวงรี (ดังแสดงในแผนภาพที่ 16(ซ้าย)) นอกจากนี้ นักวิทยาศาสตร์ยังได้พบว่าแม้แต่ในอะตอมของธาตุต่าง ๆ เช่น อิเล็กตรอนก็เดินทางเป็นวงรีรอบนิวเคลียสของอะตอมนั้นๆ (ดังแสดงในแผนภาพที่ 16 (ขวา))



แผนภาพที่ 16 (ซ้าย) การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ล้อมรอบดวงอาทิตย์ และ (ขวา) การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนรอบนิวเคลียส

บทนิยาม 4.2 วงรี คือเซตของจุดทั้งหลายบนระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดในเซตนี้ไปยังจุดคงที่ 2 จุดมีค่าคงตัวเสมอ

- จุดคงที่ 2 จุดนั้น เรียกว่า จุดโฟกัส
- จุดที่เส้นตรงซึ่งลากผ่านจุดโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี เรียกว่า จุดยอดของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง เรียกว่า แกนเอก ของวงรี (ความยาวแกนเอก เราใช้สัญลักษณ์ คือ $2a$)
- จุดที่แบ่งครึ่งแกนเอกของวงรี เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายอยู่บนวงรีทั้งสองด้าน เรียกว่า แกนโท ของวงรี (ความยาวแกนโท เราใช้สัญลักษณ์ คือ $2b$)
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดโฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนวงรี เรียกว่า เลตัสเรกตัมของวงรี

ข้อควรจำ ผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าเท่ากับ $2a$ เสมอ และนั่นคือความยาวของแกนเอกของวงรี

- สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสทั้ง 2 อยู่บนแกน x นั่นคือจุดโฟกัสมีพิกัดเป็น $(\pm c, 0)$ และพิกัดจุดยอดเป็น $(\pm a, 0)$ คือ

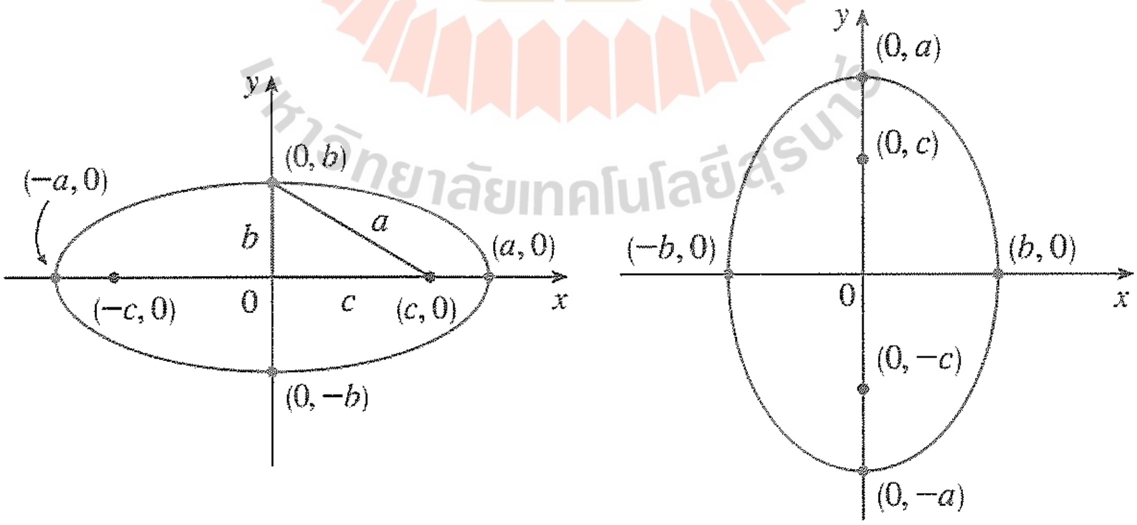
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.9)$$

ดูแผนภาพที่ 17 (ซ้าย)ประกอบ

- สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสทั้ง 2 อยู่บนแกน y นั่นคือจุดโฟกัสมีพิกัดเป็น$(0, \pm c)$ และพิกัดจุดยอดเป็น $(0, \pm a)$ คือ

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (4.10)$$

ดู **แผนภาพที่ 17** (ขวา) ประกอบ



แผนภาพที่ 17 วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0)$ ภาพซ้าย จุดโฟกัส $(\pm c, 0)$ อยู่บนแกน x , ภาพขวา จุดโฟกัส $(0, \pm c)$ อยู่บนแกน y

สมการ วงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด

หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x-h$ และแทน y ด้วย $y-k$ จากนั้น ใช้ความสัมพันธ์

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (4.11)$$

ข้อสังเกต เราจะเห็นว่า วงกลม ที่เราศึกษาในหัวข้อที่แล้ว ก็คือกรณีพิเศษหนึ่งของวงรี เมื่อค่าของ a เท่ากับค่าของ b นั่นเอง

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.3**</u> จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และจุดตัดบนแกน x และแกน y ของวงรี ที่มีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

วิธีทำ เราเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ คือ $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

เห็นได้ชัดว่า จุดศูนย์กลางของวงรีนี้คือ $(0,0)$

หาจุดตัดบนแกนต่างๆ ได้โดย

จาก $a=4,\ b=3$ เราจะได้ว่า จุดตัดบนแกน x คือ $(4,0)$ และ $(-4,0)$ และจุดตัดบนแกน y คือ $(0,3)$ และ $(0,-3)$ จากนั้น เราจะหาจุดโฟกัส โดยการค่า c ก่อน ด้วยความสัมพันธ์ $b^2=a^2-c^2$

จะได้ว่า $3^2=4^2-c^2$

จึงได้ว่า $c^2=7$ ดังนั้น $c=\sqrt{7}$

จุดโฟกัส คือจุด $(\sqrt{7},0)$ และจุด $(-\sqrt{7},0)$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.4**</u> จงหาสมการวงรี ที่มีจุดโฟกัสทั้งสองเป็น $(2,-2),(4,-2)$ และมีพิกัดจุดยอดเป็น $(1,-2),(5,-2)$

วิธีทำ

จากโจทย์ เราจะได้ความยาวของแกนเอก คือระยะทางระหว่างจุดยอด $(1,-2)$ และจุดยอด $(5,-2)$ ซึ่งจะได้เป็นระยะทางเท่ากับ 4 หน่วย นั่นคือ $2a=4$ จึงทำให้ได้ค่า $a=2$ และระยะทางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 2 ก็จะได้ว่า $2c=2$ นั่นคือ $c=1$

จากสูตร (4.11) จึงทำให้เราได้ว่า

$b^2=a^2-c^2=3$

และจากที่จุดศูนย์กลางของวงรี คือจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง ซึ่งเราสามารถหาได้คือ $(3,-2)$ ดังนั้น เราก็นำค่าต่างๆ ไปแทนในสมการมาตรฐานของวงรี คือสมการที่ (4.9) จึงได้ว่า

สมการที่ต้องการคือ $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.3 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส จุดศูนย์กลาง ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท ของวงรี ที่มีสมการดังแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{169}=1$

2) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

3) $\frac{x^2}{95}+\frac{y^2}{30}=1$

4) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{64}=1$

5) $\frac{x^2}{64}+\frac{(y-6)^2}{121}=1$

6) $\frac{(x+5)^2}{81}+\frac{(y-1)^2}{144}=1$

7) $\frac{(x-3)^2}{49}+\frac{(y-9)^2}{4}=1$

8) $\frac{(x)^2}{64}+\frac{(y-8)^2}{9}=1$

9) $\frac{(x)^2}{4}+\frac{(y)^2}{9}=1$

10) $\frac{(x)^2}{49}+y^2=1$

11) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$

12) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$

13) $\frac{(x)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

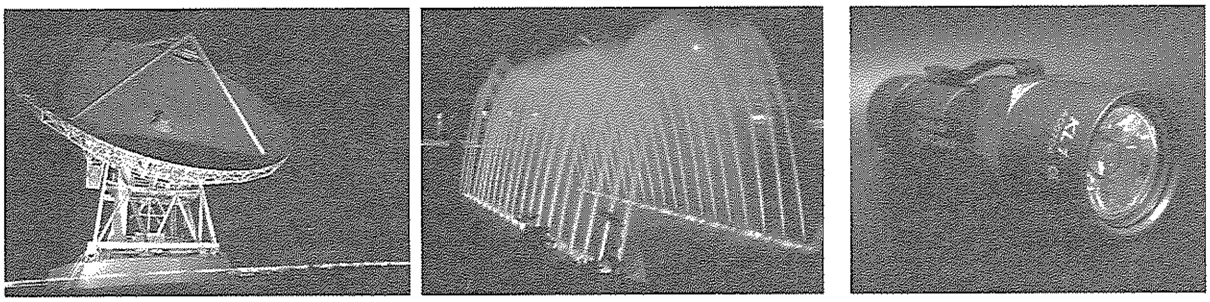
14) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y)^2}{49}=1$

15) $\frac{(x)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

16) $(x+5)^2+\frac{(y)^2}{49}=1$

❖ พาราโบลา (Parabolas)

เราจะสังเกตเห็นการมีอยู่จริงของพาราโบลาในชีวิตประจำวันได้จากหลายตัวอย่าง อาทิ เทคโนโลยีการสื่อสารดาวเทียมประกอบด้วยจานรับสัญญาณ ตัวจานรับสัญญาณมีผิวโค้ง เพื่อรับสัญญาณที่ส่งตรงมาจากดาวเทียม และสะท้อนรวมกันที่จุดรับสัญญาณ เพื่อให้มีสัญญาณที่แรงขึ้น น้ำพุที่มนุษย์ประดิษฐ์ขึ้น เป็นเส้นโค้งพาราโบลา หรือเมื่อเราใช้ไฟฉายส่องเดินทาง สังเกตว่ามีกระจกสะท้อนแสงเพื่อรวมลำแสงให้พุ่งเป็นลำตรง โดยหลักการตามกฎการสะท้อนของแสง ดังแสดงใน แผนภาพที่ 18



แผนภาพที่ 18 จานดาวเทียม น้ำพุ และไฟฉาย ตัวอย่างของการมีอยู่ของพาราโบลา

บทนิยาม 4.3 พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งในเซตดังกล่าวจะอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเท่ากับอยู่ห่างจากเส้นคงที่เส้นหนึ่งเสมอ

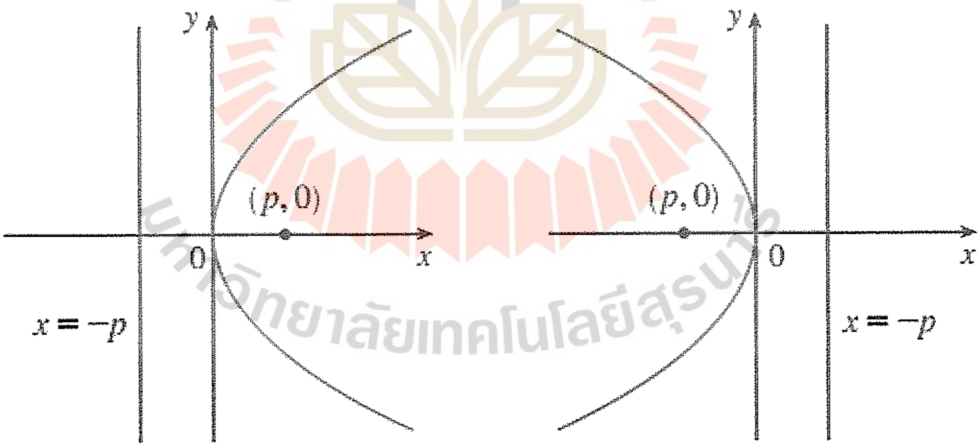
- จุดคงที่ เรียกว่า จุดโฟกัส
- เส้นคงที่ เรียกว่า เส้นไดเรกตริกซ์
- เส้นที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนของพาราโบลา
- จุดที่เกิดจากพาราโบลาตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า จุดยอด

สมการรูปมาตรฐาน และลักษณะของกราฟพาราโบลาประเภทต่าง ๆ สามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเภทหลัก ๆ ดังนี้

- พาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน x และมีเส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกน y จะมีสมการเป็น

$$y^2 = 4px \tag{4.12}$$

โดยลักษณะของกราฟของพาราโบลาประเภทนี้ จะขึ้นกับค่าของ p ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 19**

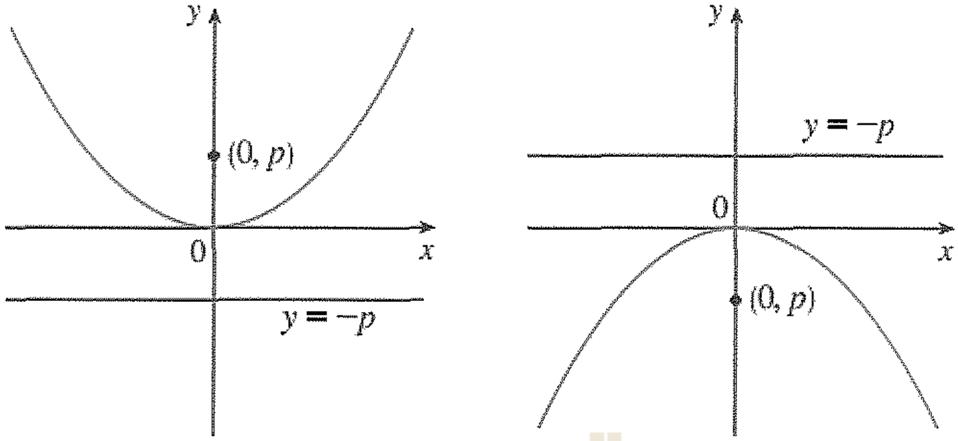


แผนภาพที่ 19 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดขวา" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาเปิดซ้าย" (ภาพขวา)

- พาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสอยู่บนแกน y และมีเส้นไดเรกตริกซ์ขนานกับแกน x จะมีสมการเป็น

$$x^2 = 4py \tag{4.13}$$

โดยลักษณะของกราฟของพาราโบลาประเภทนี้ จะขึ้นกับค่าของ p ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 20**



แผนภาพที่ 20 กราฟพาราโบลาเมื่อค่า $p > 0$ เรียกว่า "พาราโบลาหงาย" (ภาพซ้าย) และเมื่อ $p < 0$ เรียกว่า "พาราโบลาคว่ำ" (ภาพขวา)

ข้อสังเกต สัญลักษณ์ที่ใช้แทนค่าของจุดโฟกัส ในตำราบางเล่มอาจใช้ c ให้ถือว่าเป็นสิ่งเดียวกันกับสัญลักษณ์ p ที่ใช้ในเอกสารนี้

- สมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k) หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x - h$ และแทน y ด้วย $y - k$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.5**</u> จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาที่มีสมการเป็น

$$y - 5 = \frac{1}{12}(x-2)^2$$

วิธีทำ

เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการที่โจทย์ให้มา ให้อยู่ในรูปสมการพาราโบลาได้เป็น

$$(x-2)^2 = 12(y-5) = 4(3)(y-5)$$

ซึ่งเมื่อเทียบสมการนี้ กับรูปมาตรฐาน (สมการ (4.13)) เห็นได้ชัดว่า จุดยอดของพาราโบลานี้ คือ $(2,5)$ และ $p = 3$

ดังนั้น การหาจุดโฟกัสก็ไม่ใช่เรื่องยาก เราได้ค่า p มากกว่าศูนย์แล้ว ดังนั้น พาราโบลานี้ เป็นพาราโบลาหงาย ดังนั้น จุดโฟกัสต้องอยู่ถัดจากจุดยอดขึ้นไปทางบวกเป็นระยะทาง 3 หน่วยบนแกนของพาราโบลา จึงได้จุดโฟกัสคือ $(2,8)$ และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ ก็ต้องอยู่ถัดจากจุดยอดลงมาตามแนวแกนของพาราโบลาเป็นระยะทาง 3 หน่วยเช่นกัน จึงได้สมการเส้นไดเรกตริกซ์คือ $y = 2.$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.6**</u> จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาที่มีสมการเป็น

$$y = 3 - 6x - x^2$$

วิธีทำ

เราสังเกตเห็นได้ทันทีว่า สมการนี้เป็นสมการพาราโบลา เพราะกำลังของตัวแปรหนึ่งตัวใน 2 ตัวนั้นเป็น 2 และอีกตัวมีกำลังเป็น 1 ดังนั้น เพื่อเป็นการระบุค่าต่างๆ ที่โจทย์ถามถึง เรามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนรูปสมการที่โจทย์ให้มานั้น ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของพาราโบลา จากนั้นเราจะทราบค่า ณ ตำแหน่งต่างๆ ของสมการทันที

จาก $y = 3 - 6x - x^2$ เราจะบวกเข้าทั้ง 2 ข้างด้วย $\left(\frac{\text{สปส.พจน์กำลังหนึ่ง}}{2}\right)^2$ ในที่นี้คือ 9

จึงได้ $\quad y - 3 - \underline{9} = -1(x^2 + 6x + \underline{9})$

ดังนั้น $\quad y - 12 = -1(x+3)^2$

และ $\quad (x+3)^2 = -1(y-12)$

นั่นคือ $\quad (x+3)^2 = 4\left(\frac{-1}{4}\right)(y-12)$

เราจึงสามารถเทียบกับรูปมาตรฐานได้แล้ว จะได้จุดยอดคือ $(-3, 12)$ และค่า $p = -1/4$ ซึ่งน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้น ได้เป็นพาราโบลาแบบคว่ำ ซึ่งจะทำให้จุดโฟกัดอยู่บนแกนของพาราโบลาถัดลงมาจากจุดยอด เป็นระยะ 1/4 หน่วย นั่นคือจะตกที่พิกัด $\left(-3, 12 - \frac{1}{4}\right) = \left(-3, \frac{47}{4}\right)$ และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ก็จะอยู่ถัดจากจุดยอดขึ้นไปเป็นระยะทาง 1/4 หน่วยเช่นกัน ดังนั้นจะได้สมการเส้นนั้นคือ $y = 12 + \frac{1}{4} = \frac{49}{4}$

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.4 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการเส้นไดเรกตริกซ์ และวาดกราฟของพาราโบลา ที่มีสมการดังแสดงในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $x^2 = 4y$

2) $y^2 + 12x = 0$

3) $(y-1)^2 = 16(x-2)$

4) $(x+2)^2 = -20(y-1)$

5) $x^2 + 6x - 20y + 49 = 0$

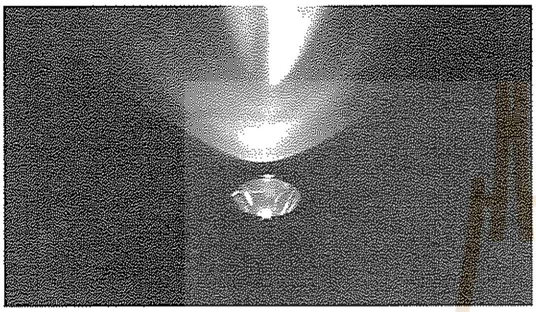
6) $y^2 - 4y - 12x - 20 = 0$

7) $y^2 + 8y + 3x + 19 = 0$

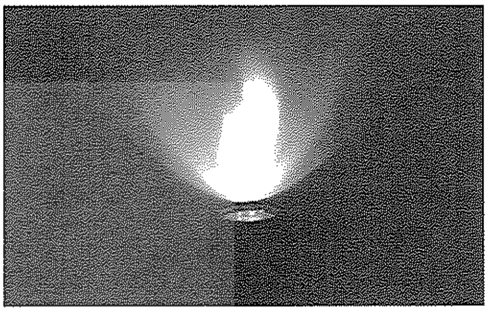
8) $x^2 + 10x + 5y + 30 = 0$

❖ ไฮเปอร์โบลา (Hyperbolas)

ภาคตัดกรวยนั้นได้มีความสำคัญต่อดาราศาสตร์ โดย วงโคจรของวัตถุสองชิ้นซึ่งมีแรงดึงดูดกระทำต่อกันตามกฎของนิวตัน นั้นจะมีรูปร่างเป็นภาคตัดกรวย หากจุดศูนย์กลางมวล (Center of mass) ร่วมของทั้งสองวัตถุนั้นอยู่นิ่ง หากทั้งสองนั้นถูกดึงดูดอยู่ด้วยกัน ทางเดินของทั้งสองนั้นจะเป็นรูปวงรี หากวัตถุทั้งสองวิ่งออกจากกัน ทางเดินจะเป็นรูปพาราโบลา หรือ ไฮเปอร์โบลา นอกจากนี้ การฉายของแสงจากไฟฉายที่เอียงมุมต่างกัน ก็จะสามารถให้ภาพรอยฉายที่อาจเป็น พาราโบลา หรือไฮเปอร์โบลาได้ ดังแสดงในแผนภาพที่ 21



รอยฉายที่เป็นรูปไฮเปอร์โบลา



รอยฉายที่เป็นรูปพาราโบลา

แผนภาพที่ 21 การฉายของลำแสงจากไฟฉาย ที่เอียงมุมแตกต่างกันกับแผ่นฉากรับ

บทนิยาม 4.4 ไฮเปอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหลายบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ

- จุดคงที่ 2 จุดนั้น เรียกว่า จุดโฟกัส
- เส้นที่ลากผ่านจุดโฟกัสทั้ง 2 เรียกว่า แกนตามขวางของไฮเปอร์โบลา
- จุดที่เกิดจากการตัดของไฮเปอร์โบลากับแกนของไฮเปอร์โบลา เรียกว่า จุดยอด
- ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอด จะยาวเป็น $2a$ หน่วย
- แกนสังยุคคือส่วนของเส้นตรงที่ลากตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางยาว $2b$ หน่วย

ข้อควรจำ ในการเขียนกราฟไฮเปอร์โบลานั้น เมื่อทราบค่าของ a และ b แล้ว การเขียนกรอบสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสองของไฮเปอร์โบลาเป็นจุดกึ่งกลางด้านหนึ่ง(ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 22**) แล้วลากเส้นทะแยงมุมของกรอบสี่เหลี่ยมนี้ก่อนนั้น จะทำให้การวาดกราฟง่ายขึ้น

บันทึก

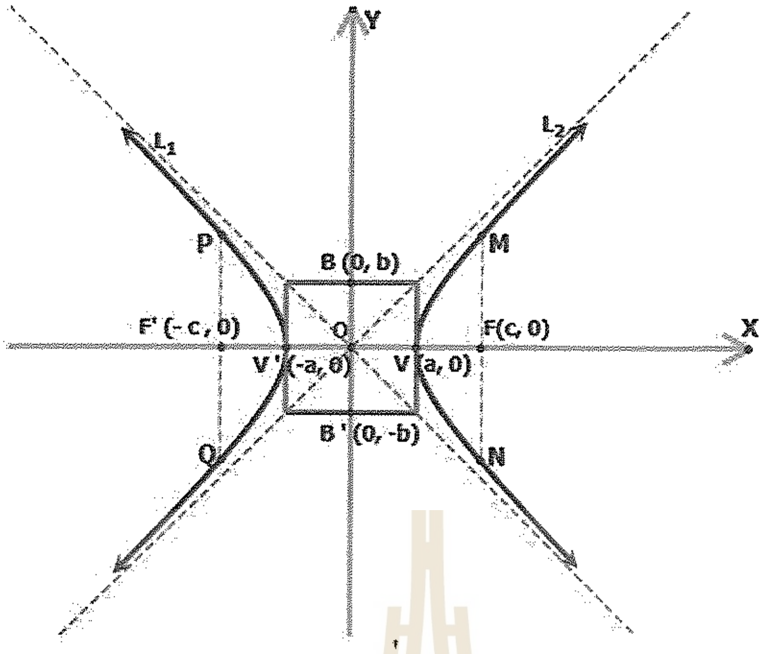
....

....

....

....

....

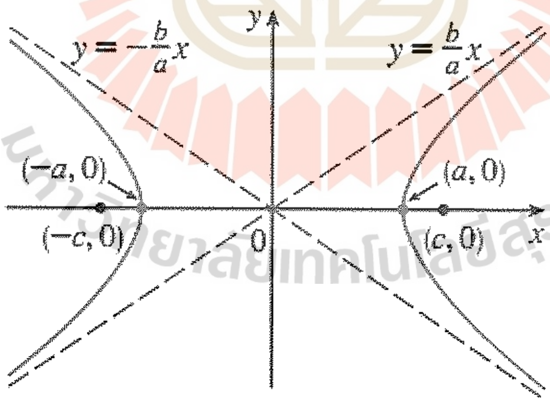


แผนภาพที่ 22 การเขียนกรอบสี่เหลี่ยมตรงกลางของไฮเปอร์โบลา ช่วยให้การเขียนกราฟไฮเปอร์โบลาทำได้สะดวกมากยิ่งขึ้น

- ไฮเปอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(\pm c,0)$ และจุดยอดคือ $(\pm a,0)$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{4.14}$$

และลักษณะของกราฟคือดังแสดงใน **แผนภาพที่ 23**

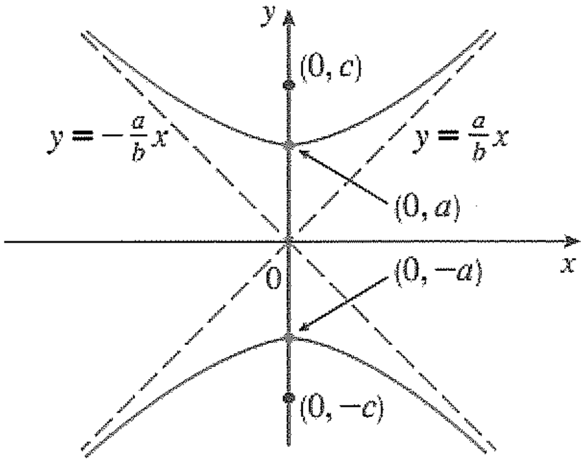


แผนภาพที่ 23 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน x เรียกไฮเปอร์โบลาประเภทนี้ว่า "ไฮเปอร์โบลาเปิดซ้าย-ขวา"

- ไฮเปอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(0,\pm c)$ และจุดยอดคือ $(0,\pm a)$ จะมีสมการเป็น

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \tag{4.15}$$

และลักษณะของกราฟคือดังแสดงใน **แผนภาพที่ 24**



แผนภาพที่ 24 ไฮเปอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน y เรียกไฮเปอร์โบลาประเภทนี้ว่า "ไฮเปอร์โบลาเปิดบน-ล่าง"

- สมการไฮเปอร์โบลา ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) หลักพิจารณาเช่นเดียวกับวงกลม คือ แทน x ด้วย $x - h$ และแทน y ด้วย $y - k$ และใช้ความสัมพันธ์

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{4.16}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.7 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส ของไฮเปอร์โบลาที่มีสมการเป็น

$9y^2 - 16x^2 = 144$

วิธีทำ

เหมือนกับทุกข้อที่ผ่านมา ก่อนที่เราจะสามารถระบุค่าต่างๆ ตามที่โจทย์ถามถึงได้ เราจะต้องจัดรูปสมการที่โจทย์ให้มานั้น ให้อยู่ในรูปมาตรฐานของไฮเปอร์โบลา (สมการ (4.14) หรือ (4.15) เสียก่อน)

จาก $9y^2 - 16x^2 = 144$

เราจะพยายามทำให้ทางขวามือของสมการนี้เป็น 1 ดังนั้น เราจะหารทั้งสมการด้วย 144

$\frac{9y^2}{144} - \frac{16x^2}{144} = \frac{144}{144}$ จึงได้สมการใหม่คือ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ หรือ $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$ ซึ่งเราก็จะสามารถระบุค่าของ a และ b ได้แล้ว คือ $a = 4$ และ $b = 3$ และเนื่องจากค่า สปส. ของพจน์ y^2 นั้นเป็นบวก จึงทำให้เรานึกภาพได้ว่า ไฮเปอร์โบลานี้จะมีลักษณะในทำนองเดียวกันกับที่แสดงใน**แผนภาพที่ 24** ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และจุดยอดที่ $(0, \pm 4)$

และจุดโฟกัส เราจะหาได้จากการทราบของค่า c โดยการใช้สูตร (4.16) จะได้ว่า $c = 5$ จึงได้จุดโฟกัสคือ $(0, \pm 5)$

<u>ตัวอย่างที่ 4.3.8</u> จงหาจุดยอด จุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส และวาดภาพไฮเปอร์โบลาที่มีสมการเป็น $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

วิธีทำ

เราจะพยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐานของไฮเปอร์โบลา ได้ดังนี้

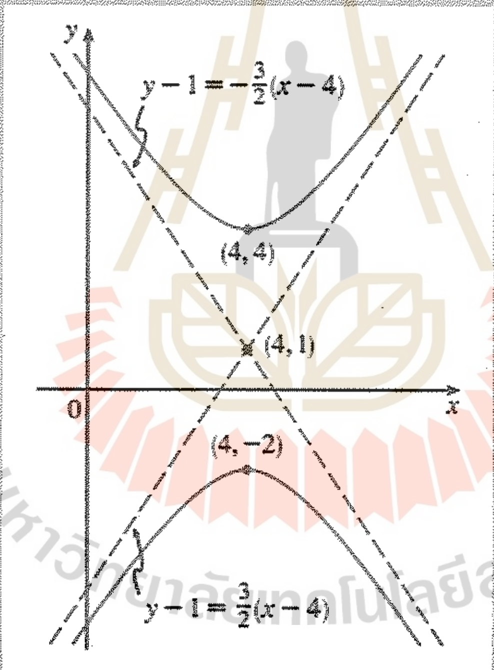
$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางของไฮเปอร์โบลานี้คือ จุด $(4, 1)$ และ จะได้ว่า $a^2 = 9, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = 13$ นั่นคือ $c = \pm\sqrt{13}$ จึงทำให้เราสามารถระบุจุดโฟกัสได้คือจุด $(4, 1 - \sqrt{13})$ และจุด $(4, 1 + \sqrt{13})$ และจุดยอดคือ $(4,4)$ และ $(4, -2)$และได้กราฟ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 25



แผนภาพที่ 25 ไฮเปอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\mathbf{9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0}$

สำหรับตัวอย่างที่ 4.3.8

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.5 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และระบุด้วยว่าเป็นไฮเปอร์โบลาแบบ หงาย-คว่ำ หรือ เปิดบน-ล่าง

1) $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{4}=1$

2) $\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{81}=1$

3) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

4) $\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{36}=1$

5) $\frac{(x+2)^2}{169}-\frac{(y+8)^2}{4}=1$

6) $\frac{(y+8)^2}{36}-\frac{(x+2)^2}{25}=1$

7) $\frac{x^2}{20}-\frac{(y+1)^2}{10}=1$

8) $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

แบบฝึกทักษะที่ 4.3.6 จงหาจุดยอด จุดโฟกัส และวาดกราฟของไฮเปอร์โบลา ตามสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$

2) $4y^2 - x^2 - 4 = 0$

3) $9x^2 + 18x - 16y^2 - 32y - 151 = 0$

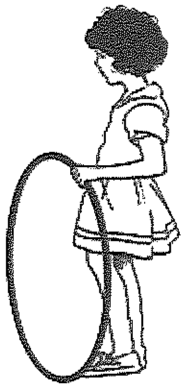
4) $y^2 - 4x^2 + 20y - 8x + 92 = 0$

4.4 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

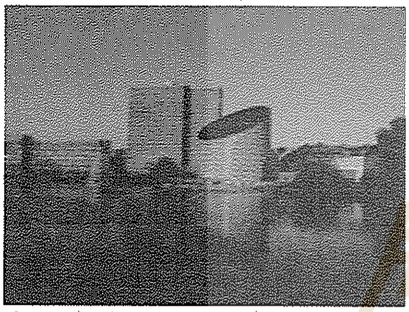
ในหัวข้อนี้ ในเบื้องต้น จะได้มีการยกตัวอย่าง(เพิ่มเติม)เกี่ยวกับการปรากฏอยู่จริงของรูปใดรูปหนึ่งของภาคตัดกรวยในสิ่งแวดล้อมรอบๆ ตัวเรา หลังจากนั้น จะได้นำเสนอปัญหาที่เกี่ยวข้องที่เราสามารถพบได้ในชีวิตประจำวันเช่นเดียวกัน และในตอนท้าย จะได้มีการตั้งโจทย์คำถาม เพื่อให้ผู้อ่านได้ฝึกทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้ทางด้านภาคตัดกรวย ในการแก้ไขปัญหาต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งในโจทย์แต่ละข้อ นักศึกษาจะได้เห็นตัวอย่างอื่นๆของการมีอยู่จริงของภาคตัดกรวยเพิ่มเติมอีกด้วย

วงรี

ถึงแม้จะไม่เป็นการง่ายที่จะสังเกตเห็นได้รอบ ๆ ตัวเรา อย่างวงกลม วงรีนั้นก็ถือได้ว่าพบได้ไม่ยากนักเช่นกัน ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่า รูปทรงที่เป็นวงกลมนั้น ก็เป็นเพียงวงรีประเภทหนึ่ง ซึ่งถ้าเกิดมองในมุมที่เหมาะสม ก็สามารถมองให้เป็นวงรีได้เช่นกัน (ดังแสดงใน แผนภาพที่ 26)



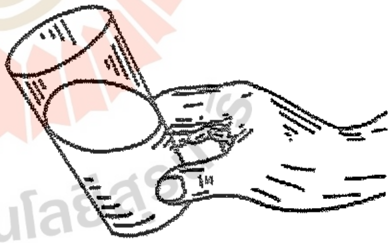
แผนภาพที่ 26 วงกลมสามารถมองให้เป็นวงรีได้ ในมุมที่เหมาะสม



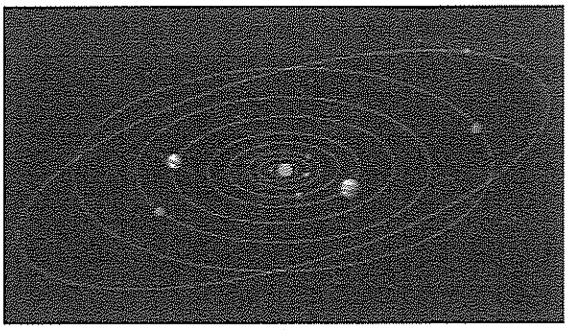
แผนภาพที่ 27 การตัดแนวขวางเอียงของทรงกระบอกใด ๆ ด้วยระนาบ จะให้รอยตัดและภาพตัดแนวขวางเป็นรูปวงรีเสมอ

ภาพตัดขวางเอียงของทรงกระบอกใด ๆ จะให้ภาพตัดเป็นรูปวงรีเสมอ ดังตัวอย่างในแผนภาพที่ 27 ซึ่งเป็นอาคารในย่าน Tycho Brahe Planetarium เมือง Copenhagen ประเทศสวีเดน

เมื่อเราเองแก้วน้ำดังแสดงในแผนภาพที่ 28 พื้นผิวที่ได้จะเป็นรูปวงรี และการตัดไส้กรอกในแนวเอียงในลักษณะแบบนี้ ก็มักจะทำกันเพื่อให้ได้พื้นที่ปริมาณที่มากขึ้น



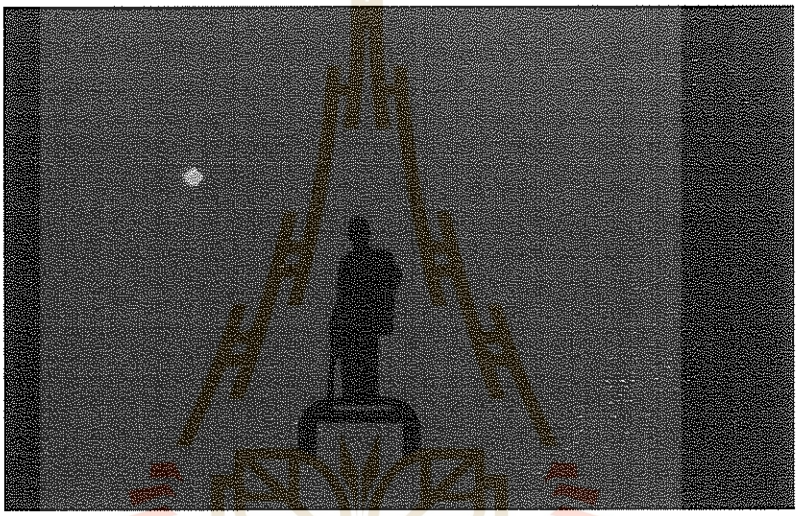
แผนภาพที่ 28 เมื่อเองแก้วน้ำ พื้นผิวของน้ำในแก้วจะเป็นรูปวงรี



แผนภาพที่ 29 ดาวเคราะห์ทั้งหลาย โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี

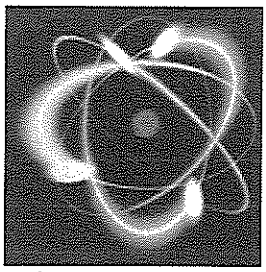
ในตำราดาราศาสตร์ของกรีกโบราณ ได้มีความเข้าใจว่า ดาวเคราะห์ต่างๆ นั้น หมุนรอบโลกที่อยู่นิ่งเป็นรูปวงกลม จนกระทั่งในศตวรรษที่14 Johannes Kepler ได้ทำการค้นพบว่า ดาวเคราะห์แต่ละดวงนั้นเคลื่อนที่โคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นรูปวงรี และดวงอาทิตย์ก็อยู่ ณ ตำแหน่งของจุดโฟกัสหนึ่ง ของแต่ละวงโคจรของดาวเคราะห์แต่ละดวงนั้น ดังแสดงในแผนภาพที่ 29

การโคจรรอบโลกของดวงจันทร์ และรวมถึงดาวเทียมต่างๆ ก็เป็นวงรีด้วยเช่นกัน



แผนภาพที่ 30 ดาวหาง Halley ใช้เวลา 76 ปี ในการโคจรรอบดวงอาทิตย์

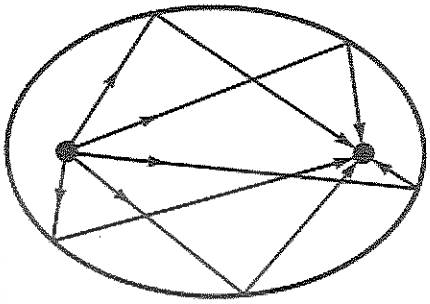
Edmund Halley ได้สังเกตเห็นดาวนี้ครั้งแรกในปี 1682 และได้ทำนายการโคจรมาตำแหน่งเดิมของดาวหางนี้ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งเขาทำนายไว้ว่าจะโคจรกลับมาในปี 1759 และถึงแม้ว่า ตัวเขาเองจะไม่มีอายุยืนถึงตอนที่ดาวหางนี้โคจรกลับมาอีกครั้ง ชาวโลกก็ได้ยกย่องในคำทำนาย และให้เกียรติเขาโดยการตั้งชื่อดาวหางนี้เป็นชื่อเดียวกับเขา นั่นคือ " Halley " ดังแสดงในแผนภาพที่ 30



แผนภาพที่ 31 การโคจรของอิเล็กตรอนล้อมรอบนิวเคลียส

ด้วยการสังเกตด้วยเครื่องมือที่เหมาะสม เราจะเห็นว่า อิเล็กตรอนนั้น โคจรเป็นรูปที่มีความใกล้เคียงกับวงรีมากล้อมรอบนิวเคลียส ดังแสดงในแผนภาพที่ 31

วงรีมีคุณสมบัติพิเศษอีกประการหนึ่งที่ใช้ในการสะท้อนของแสงและคลื่นเสียง นั่นคือ แสงหรือสัญญาณใดก็ตามที่พุ่งออกจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งภายในวงรี แล้วไปสะท้อนกับขอบของวงรี แล้วจะไปตกที่จุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรีเสมอ (ดังแสดงในแผนภาพที่ 32) และหลักการนี้ก็ถูกนำไปใช้ในการรักษานิ่วในไตที่เรียกว่าวิธี Lithotripsy โดยการนำคนไข้ไปนอนลงบนถังน้ำรูปวงรี โดยให้ตำแหน่งของไตอยู่ตรงจุดโฟกัสจุดหนึ่งของถังน้ำรูปวงรีนั้น จากนั้นทำการปล่อยคลื่นช็อกพลังงานสูงจากจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่ง จะทำให้คลื่นช็อกนั้นพุ่งไปยังนิ่วไตและสามารถบนนิ่วดังกล่าวได้

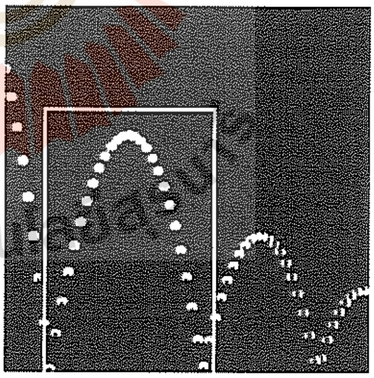


แผนภาพที่ 32 การสะท้อนของลำแสงที่พุ่งจากจุดโฟกัสจุดหนึ่งกับผนังของวงรี แล้วไปตำที่จุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรีนั้น

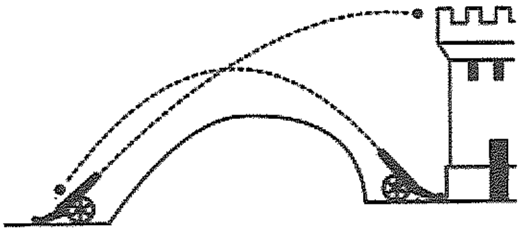
พาราโบลา

ตัวอย่างของพาราโบลาที่เป็นที่รู้จักมากที่สุดตัวอย่างหนึ่งคือการเคลื่อนที่ของลูกบอลในลักษณะดังแสดงใน

แผนภาพที่ 33 ซึ่งแรงเสียดทานของอากาศและแรงโน้มถ่วงจะมีผลต่อแนวการเคลื่อนที่ของลูกบอลให้บิดเบือนไปจากรูปพาราโบลาอยู่บ้าง แต่โดยทั่วไปแล้ว ยังเป็นที่ยอมรับว่า แนวการเคลื่อนที่ของลูกบอลดังกล่าว ยังคงรักษาแนวความเป็นพาราโบลาได้อย่างดีทีเดียว

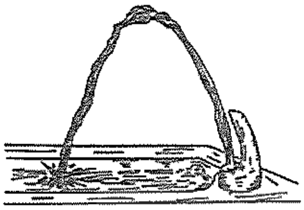


แผนภาพที่ 33 การเคลื่อนที่ของลูกบอล ที่มีแนวการเคลื่อนที่เป็นแบบพาราโบลา



แผนภาพที่ 34 พาราโบลายังสามารถแทนการเคลื่อนที่ของลูกปืนใหญ่ ซึ่งค้นพบโดย Galileo ในศตวรรษที่ 17

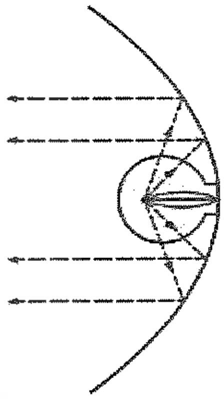
ในศตวรรษที่ 17 Galileo ได้ค้นพบการคำนวณแนวทางการเคลื่อนที่ของลูกปืนใหญ่ ที่ขึ้นกับมุมของการยิงเป็นที่สำเร็จ ดังแสดงในแผนภาพที่ 34



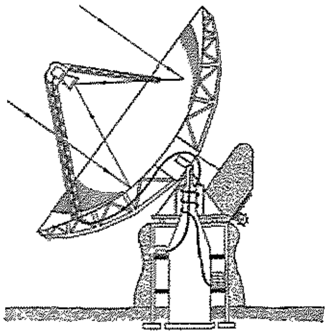
แผนภาพที่ 35 แนวการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของน้ำจากก๊อก จะเคลื่อนเป็นแนวพาราโบลา

ตัวอย่างหนึ่งที่เห็นกันค่อนข้างบ่อยก็คือ แนวทางการเคลื่อนที่ของน้ำจากก๊อกน้ำ(ดังแสดงในแผนภาพที่ 35) แต่ละโมเลกุลของน้ำ จะเคลื่อนที่เป็นแนวเดียวกันเป็นแนวพาราโบลา น้ำตกชื่อดังที่โรงแรม Bellagio ในเมือง Las Vegas ก็เป็นไปตามแนวพาราโบลาลักษณะนี้เช่นเดียวกัน

เส้นโค้งรูปพาราโบลามีลักษณะที่พิเศษและน่าสนใจอยู่หลายประการ เช่น เมื่อแสงถูกปล่อยออกจากแหล่งกำหนดที่อยู่ตรงจุดโฟกัสของกระจกโค้งรูปพาราโบลา(ดูแผนภาพที่ 36 ประกอบ) แล้วลำแสงเหล่านั้น จะสะท้อนออกมาเป็นเส้นเป็นเส้นตรงที่ขนานซึ่งกันและกัน



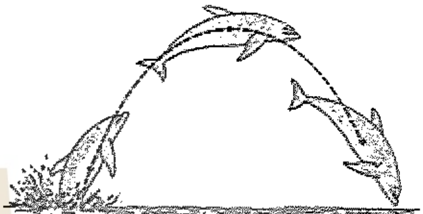
แผนภาพที่ 36 เมื่อแสงออกจากแหล่งกำหนดไปตกบนกระจกโค้งรูปพาราโบลา ก็จะสะท้อนเป็นเส้นตรงที่ขนานซึ่งกันละกัน



แผนภาพที่ 37 การรับสัญญาณวิทยุของจานดาวเทียมที่มีรูปทรงเป็นแบบพาราโบลา

จากดาวเทียมโทรทัศน์ก็ใช้หลักการสะท้อนแสงและสัญญาณ และหลักการตรงกันข้าม คือการรับสัญญาณคลื่นวิทยุจากอวกาศอย่างที่ใช้ใน antennas โดยที่ เมื่อลำแสงวิ่งมาชนกับแผ่นดาวเทียม แล้วสะท้อนไปที่ตำแหน่งของจุดโฟกัสของดาวเทียมนั้น (ดังแสดงในแผนภาพที่ 37) และเครื่องมือในลักษณะแบบนี้ที่มีขนาดใหญ่ที่สุดคือ Subaru Telescope ตั้งอยู่ที่ยอดเขา Mauna Kea บนเกาะ Hawaii ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 8.2 เมตร

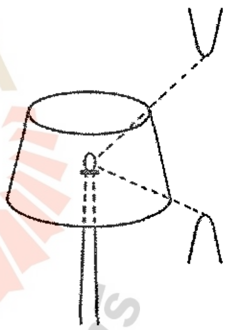
เมื่อลูกเบสบอลถูกตีขึ้นไปในอากาศ ลูกบอลนี้จะเคลื่อนที่ไปเป็นแนวโค้งพาราโบลา เช่นเดียวกับจุดศูนย์ถ่วงของโลมาเมื่อโลมากระโดดขึ้นไปในอากาศ แนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์ถ่วงนี้ จะเป็นแนวพาราโบลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 38



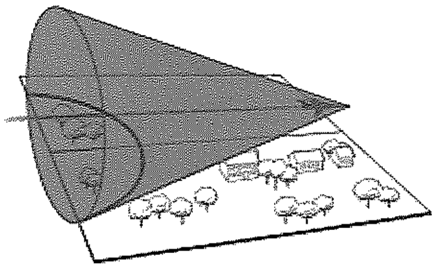
แผนภาพที่ 38 แนวการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์ถ่วงของโลมา จะเป็นแนวพาราโบลา

<u>ไฮเปอร์โบลา</u>

ถ้าเรานำเอาดินสอที่มีภาคตัดขวางเป็นเหลี่ยมๆมาเหลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 39(ซ้าย) เราจะสังเกตเห็นส่วนของไฮเปอร์โบลาปรากฏอยู่ตรงรอยขอบการเหลา เช่เดียวกันกับเวลาที่เราเอาโคมไฟที่มีลักษณะดังแสดงในแผนภาพที่ 39(ขวา) ไปตั้งไว้ใกล้ผนังห้อง แสงที่ออกจากโคมไฟไปกระทบกับผนังห้อง ก็จะมีลักษณะเป็นไฮเปอร์โบลาเช่นเดียวกัน

แผนภาพที่ 39 การเหลาดินสอที่เป็นเหลี่ยม จะทำให้เกิดรอยเป็นครึ่งไฮเปอร์โบลา และโคมไฟที่วางใกล้ผนังห้อง ลำแสงจะกระทบกับผนังเป็นรูปไฮเปอร์โบลา



แผนภาพที่ 40 รอยตัดของคลื่นโซนิคที่เกิดจากเครื่องบินที่บินด้วยความเร็วสูง กับระนาบพื้นที่ จะเป็นรูปไฮเปอร์โบลา(ครึ่งซีก)

คลื่นโซนิคบูมที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของเครื่องบินเจตไปในอากาศด้วยความเร็วสูง จะอยู่ในรูปโคน และรอยตัดของโคนนี้กับพื้นดินราบ จะให้รอยตัดที่เป็นรูปส่วนหนึ่งของไฮเปอร์โบลา ดังแสดงในแผนภาพที่ 40 ซึ่งจะส่งผลคือ ผู้ที่อยู่ ณ. ตำแหน่งต่างๆของเส้นรอยตัดนี้จะได้ยินเสียงเครื่องบินพร้อมกัน

เมื่อเราทำการหมุนเส้นโค้งรูปไฮเปอร์โบลารอบแกนของไฮเปอร์โบลานั้น ก็จะเกิดพื้นผิวที่เรียกว่า Hyperboloid และการออกแบบในลักษณะนี้ก็สามารถพบได้เช่น ที่หอทำความเย็นของโรงงาน Steam Power (ดังแสดงในแผนภาพที่ 41) และยังเป็นแบบเดียวกันกับ James S. McDonnell Planetarium ในศูนย์วิทยาศาสตร์ St. Louis อีกด้วย

แผนภาพที่ 41 หอทำความเย็นที่ออกแบบเป็นรูป Hyperboloid

แบบฝึกทักษะที่ 4.4 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับภาคตัดกรวย แก้ปัญหาที่สามารถพบได้ในชีวิตประจำวัน ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) อุโมงค์ลอดภูเขาที่เป็นรูปครึ่งวงรีแห่งหนึ่ง มีความสูงเป็น 10 ฟุต (" ft ") และกว้างเป็น 40 ฟุต (ดังแสดงในแผนภาพที่ 42) ถ้ามีรถบรรทุกคนหนึ่งที่มีขนาดกว้าง 10 ฟุต และสูง 9 ฟุต จะต้องใช้เส้นทางนี้ จงพิจารณาว่า รถบรรทุกคันนี้จะสามารถวิ่งผ่านเข้าไปในอุโมงค์นี้ได้หรือไม่ เพราะอะไร

....

....

....

....

....

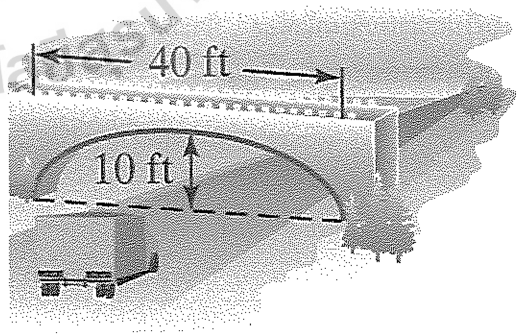
....

....

....

....

....



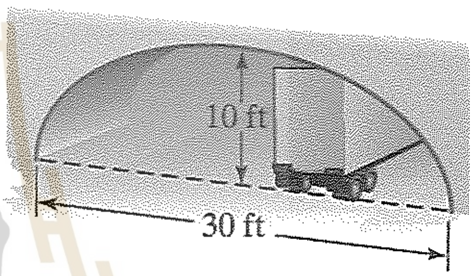
แผนภาพที่ 42 อุโมงค์รูปครึ่งวงรี และรถบรรทุก รูปประกอบสำหรับแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 1

....

....

....

2) จงพิจารณาว่า รถบรรทุกคนหนึ่ง ที่มีความกว้างเป็น 8 ฟุต และสูงเป็น 7 ฟุต จะสามารถวิ่งผ่านเข้าไปในอุโมงค์รูปครึ่งวงรี ดังแสดงในแผนภาพที่ 43 ได้หรือไม่

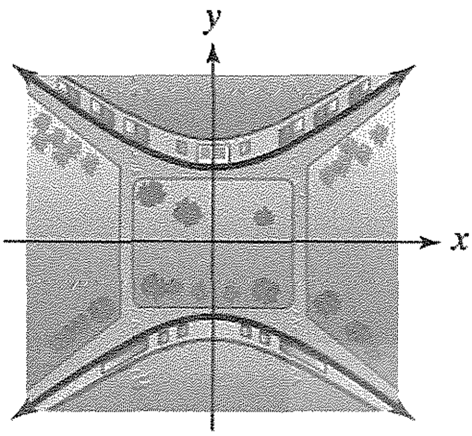


แผนภาพที่ 43 อุโมงค์รูปครึ่งวงรี และรถบรรทุก รูปประกอบสำหรับแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 2

3) เสียงที่เกิดจากการระเบิดแห่งหนึ่ง ได้รับการวัดจากไมค์โครโฟน 2 ตัว ที่วางห่างกันเป็นระยะ 4 ไมล์ ไมค์โครโฟน M_1 ได้รับเสียงนั้นเป็นเวลา 4 วินาที ก่อน ไมค์โครโฟน M_2 ถ้ากำหนดความเร็วของเสียงในอากาศเป็น 1,100 ฟุต/วินาที จงหาตำแหน่งที่เป็นไปได้ของแหล่งระเบิดนี้ เมื่อเทียบกับตำแหน่งของไมค์โครโฟนทั้งสองนี้ (1 ไมล์ เท่ากับ 5,280 ฟุต)

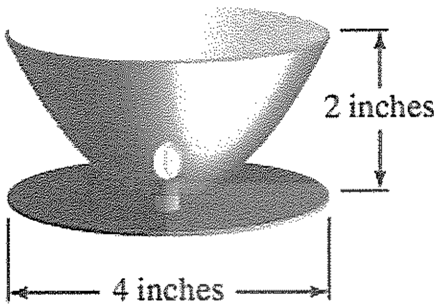
4) จากข้อ 3) จงพิจารณาในกรณีที่ไมค์โครโฟนสองตัวนั้น อยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 3 ไมล์

5) สถาปนิกคนหนึ่ง ต้องการที่จะออกแบบและวางตำแหน่งของบ้าน 2 หลัง ให้มีลักษณะเหมือนกับไฮเปอร์โบลา ที่สามารถอธิบายได้โดยสมการ $625y^2 - 400x^2 = 250,000$ ดังแสดงในแผนภาพที่ 44 จงหาว่า จุดที่ใกล้กันที่สุดของบ้านสองหลังนี้ อยู่ห่างกันเท่าใด



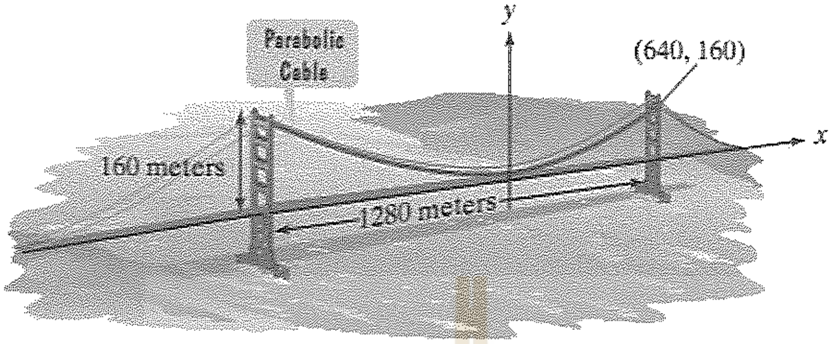
แผนภาพที่ 44 ตำแหน่งละลักษณะของบ้านทั้ง 2 หลัง
ภาพประกอบแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 5

6) นายอุทิศ เป็นบัณฑิตใหม่จากสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มทส. ได้สมัครเข้าทำงานกับบริษัทผลิตโคมไฟชื่อดังแห่งหนึ่ง ในช่วงของทดลองงานนั้น นายอุทิศได้รับมอบหมายให้ออกแบบโคมไฟที่ล้อมรอบด้วยกระจกที่เป็นรูปพาราโบลาดังแสดงในแผนภาพที่ 45 และอุทิศต้องตอบคำถามอยู่ 2 อย่างคือ สมการของรูปทรงพาราโบลานี้คืออะไร และหลอดไฟควรอยู่ ณ ตำแหน่งไหนของโคมไฟเมื่อเทียบกับจุดยอดของพาราโบลานี้ (หน่วยความยาว "incehes" หมายถึง "นิ้ว")



แผนภาพที่ 45 โคมไฟที่ประกอบด้วยกระจกโค้งรูปพาราโบลา ภาพประกอบแบบฝึกทักษะที่ 4.1 ข้อ 6

7) หอคอยทั้งสองของสะพาน Golden Gate ที่เชื่อมระหว่างเมือง San Francisco และเมือง Marin Conty อยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 1,280 เมตร และสูงเป็น 160 เมตรจากพื้นถนน สายเคเบิลที่เชื่อมระหว่างสองหอคอยนี้ ลอยตัวเป็นรูปพาราโบลา (ดังแสดงในแผนภาพที่ 46) และจุดกึ่งกลางของสายเคเบิลนั้นแตะกับพื้นถนนพอดี จงหาความสูงของสายเคเบิลจากพื้นถนน ณ จุดที่ห่างหอคอยไปเป็นระยะทาง 200 เมตร



แผนภาพที่ 46 สะพาน Golden Gate ที่เชื่อมระหว่างเมือง San Francisco และเมือง Marin Conty

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. จงพิจารณาว่า สมการแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการของภาคตัดกรวยประเภทใด

$4x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$

$16x^2 - 12y^2 + 5y - 3 = 0$

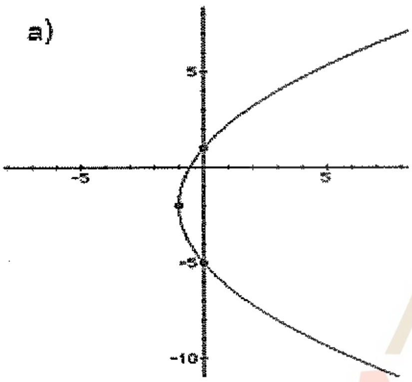
$7y^2 - 5x - 11y = 0$

$6x^2 + 3x - 10y = 0$

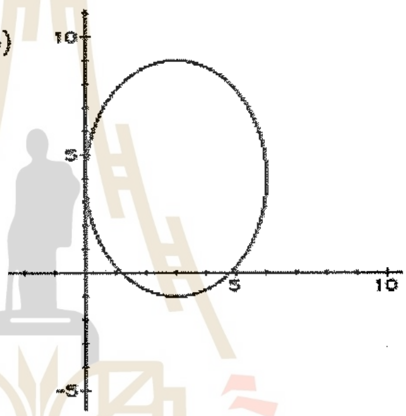
$8x^2 + 8y^2 + 3x - 6y - 13 = 0$

2. จากภาพภาคตัดกรวยในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงเขียนสมการของกราฟดังกล่าว

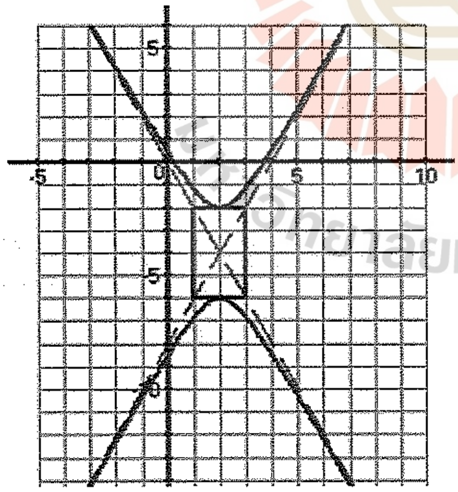
a)



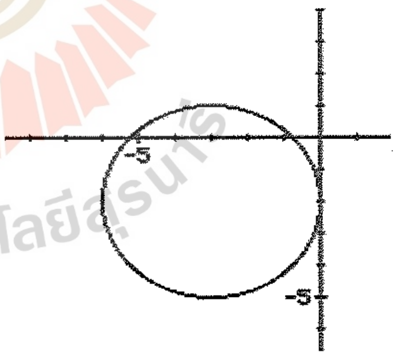
b)



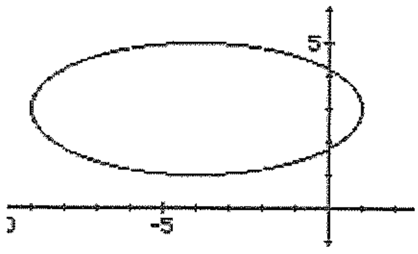
c)



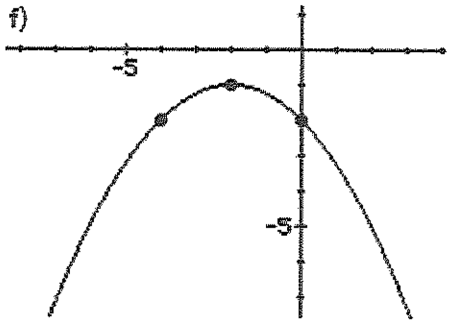
d)



e)



f)



3. แต่ละสมการด้านล้างนี้ จงจัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการของภาคตัดกรวยแต่ละประเภท

a) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$

c) $x^2 - 4x - 2y - 6 = 0$

d) $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$

e) $3x^2 + 24x + 2y + 54 = 0$

f) $16x^2 - 9y^2 - 32x + 36y + 124 = 0$

g) $4x^2 + 25y^2 - 24x + 200y + 336 = 0$

h) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

i) $64x^2 + 9y^2 - 384x - 36y + 468 = 0$

4. จงหาค่าของ A ที่ทำให้สมการ Ax2 + 3y2 + Dx + Ey + F = 0 เป็นสมการของ;

a. วงกลม　　b. วงรี　　c. พาราโบลา　　d. ไฮเพอร์โบลา

5. จงหาค่าของ C ที่ทำให้สมการ 8x2 = Cy2 – 6x + Ey + F เป็นสมการของ;

a. วงกลม　　b. วงรี　　c. พาราโบลา　　d. ไฮเพอร์โบลา

6. จงหาค่าของ A ที่ทำให้สมการ Ax2 + 23x + 5y – 19 = 0 เป็นสมการของ;

a. วงกลม　　b. วงรี　　c. พาราโบลา　　d. ไฮเพอร์โบลา

7. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงสร้างสมการของรูปพาราโบลาที่กำหนด

7.1 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอด (0,0) และจุดโฟกัส (0,2)

7.2 พาราโบลารูปหนึ่งจุดยอดอยู่ที่ (1,0) และไดเรกตริกซ์ X = -5

7.3 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัส (-4,0) และไดเรกตริกซ์ X = 2

7.4 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัส (3,6) และจุดยอด (3,2)

7.5 พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอด (0,0) มีแกนเป็นแกน x ผ่านจุด (1,-4)

7.6 พาราโบลารูปหนึ่งมีแกนในแนวและตั้งผ่านจุด (-2,3), (0,3), and (1,9)

7.7 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 2, 0)$ และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$

7.8 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 5)$ และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ $(0, \pm 13)$

7.9 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (0,2), (0,6)และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ (0, 0), (0, 8)

7.10 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (0, -1), (8, -1), และจุดยอดทั้งสองจุดอยู่ที่ (0, 0), (0, 8)

7.11 สมการวงรี มีจุดกึ่งกลางอยู่ที่ (2, 2) มีจุดโฟกัส (0, 2) และจุดยอด (5, 2)

7.12 สมการวงรี มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 0, 2)$ และผ่านจุด (2, 1)

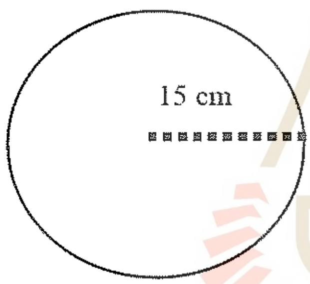
7.13 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 3)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 1)$

7.14 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(\pm 6, 0)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(\pm 4, 0)$

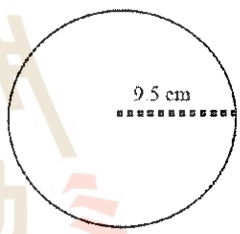
7.15 สมการไฮเพอร์โบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (1, 3) และ (7, 3) มีจุดยอดอยู่ที่ (2, 3) และ (6, 3)

8. จงหาพื้นที่ในแต่ละข้อต่อไปนี้

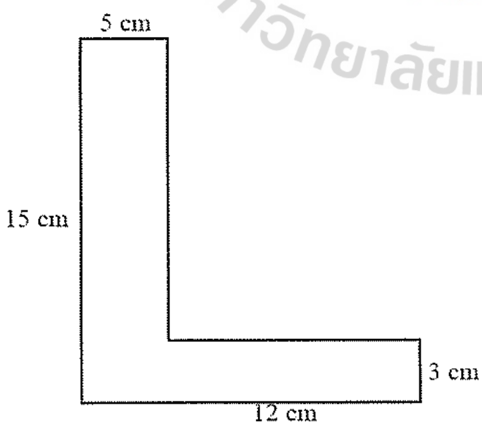
1.



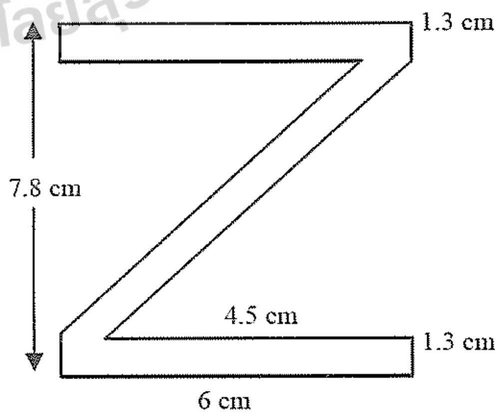
2.



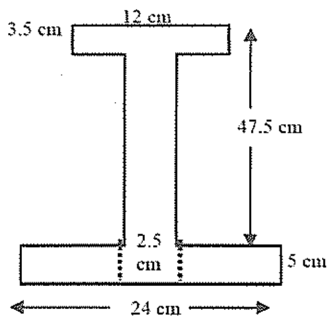
3.



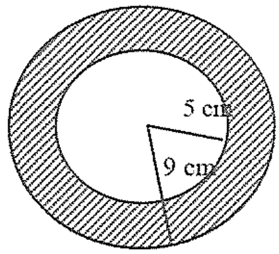
4.



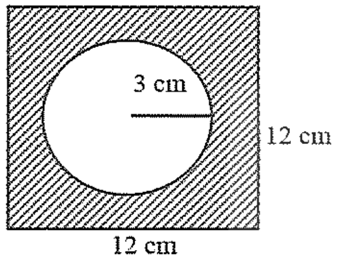
5.



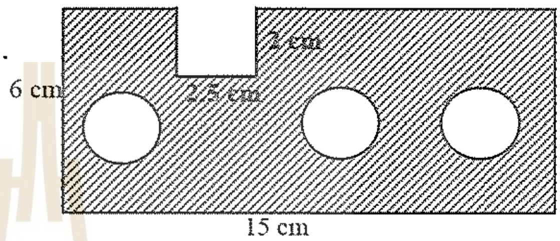
6.



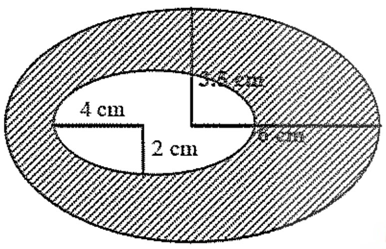
7.



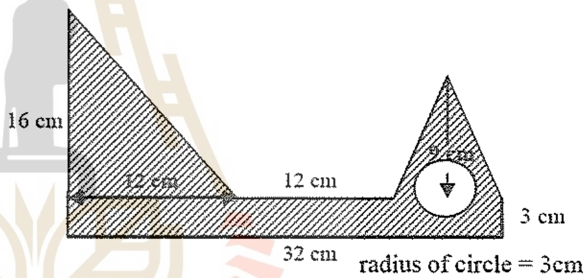
8.



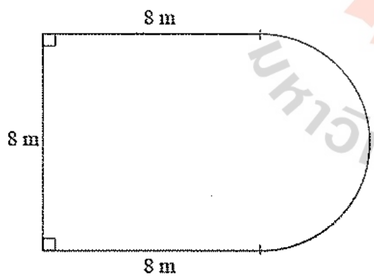
9.



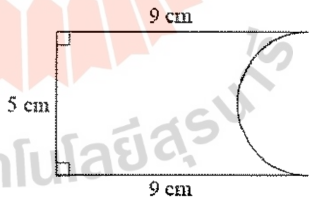
10.



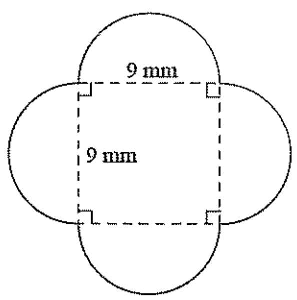
11.



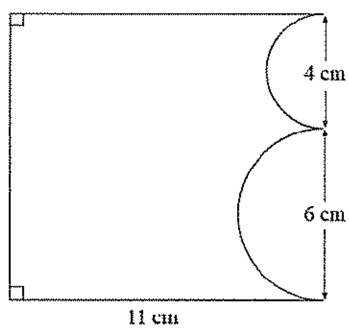
12.



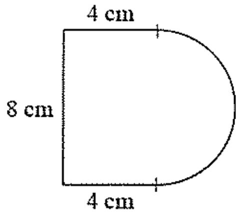
13.



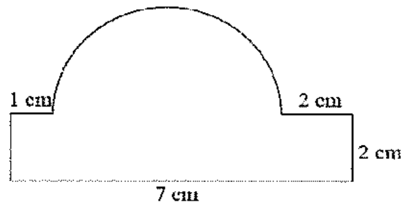
14.



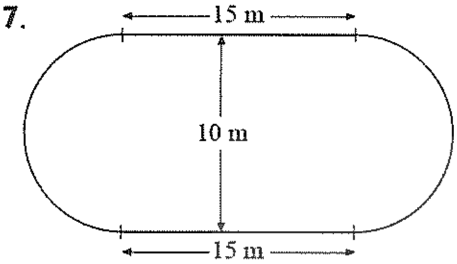
15.



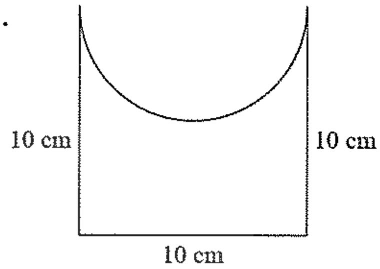
16.



17.

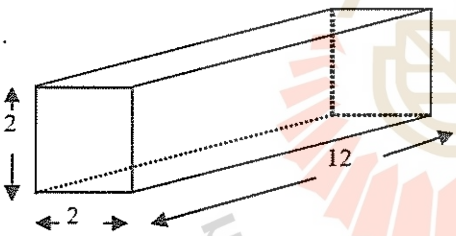


18.

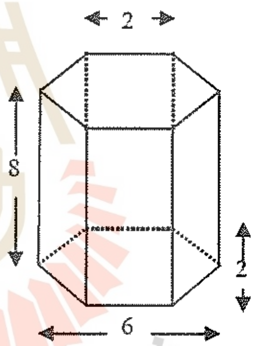


9. จงหาปริมาตรในแต่ละข้อต่อไปนี้

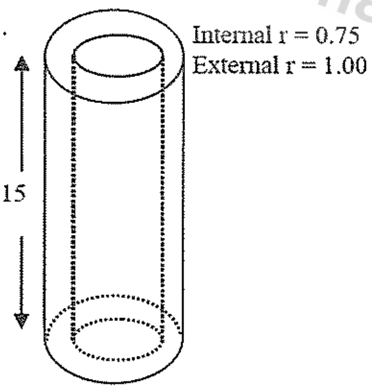
1.



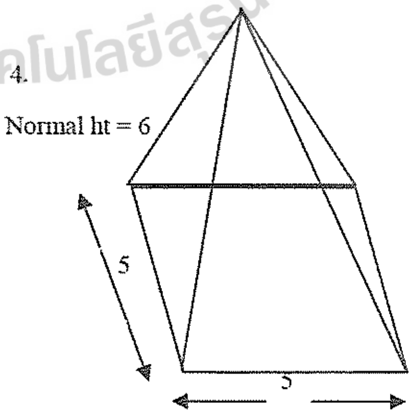
2.



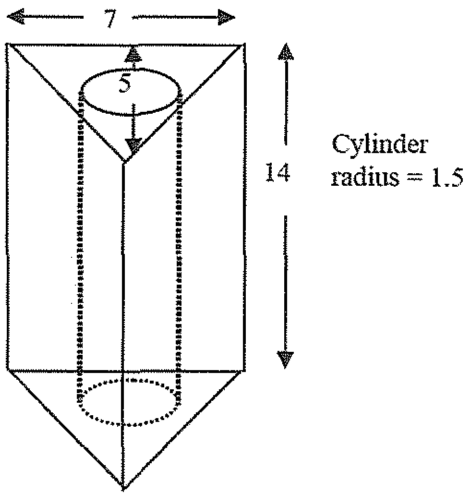
3.



4.



5.



เฉลยแบบฝึกทักษะ (Additional Exercises)

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.1 ระบบพิกัด และกราฟพื้นฐาน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.1

1) $(-2.902,\ 2.902, 11.276)$ 2) $(9\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 9)$ 3) $(0, -1,2)$

4) $(2, -2\sqrt{3}, 5)$ 5) $(3\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}, -2)$ 6) $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

7) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ 8) $(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$

9) $r^2 + z^2 = 1\ , \rho = 1$ 10) $r = 2\,sin\,\theta\ , \rho\,sin\,\emptyset = 2\,sin\,\theta$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.2 พื้นที่ และปริมาตร

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.2.1

1) 44 ตร.ซม. 2) 68.6 ตร.ซม. 3) 36 ตร.ม. 4) 55 ตร.ซม. 5) 208.17 ตร.มม.

6) 25.8675 ตร. ซม. 7) 122.195 ตร.ซม.

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.2.2

1) 15 ลบ.ม. 2) 68.6 ลบ.ซม. 3) 2.61 ลบ.ม.

4) พท.ผิวเท่ากับ 18,849.56 ตร.ซม. และปริมาตรเท่ากับ 78,539.82 ลบ.ซม.

5) พท.ผิว เท่ากับ 319.63 ตร.ซม. และปริมาตร เท่ากับ 496.35 ลบ.ซม.

6) รูปทรงนี้ยาว 12 มม. และ มีพื้นที่ผิวเป็น 527.28 ตารางมิลลิเมตร

7) พท.ผิว เท่ากับ 172 ตร.ซม. และ ปริมาตรเท่ากับ 112 ลบ.ซม.

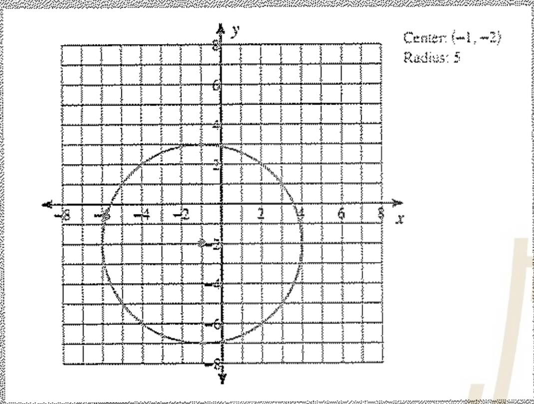
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.3 ภาคตัดกรวย

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.1

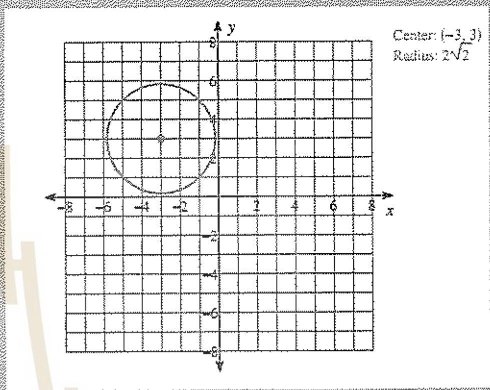
1) จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$ รัศมี เท่ากับ 7
2) จุดศูนย์กลาง คือ $(-10,3)$ รัศมี เท่ากับ $\sqrt{138}$
3) จุดศูนย์กลาง คือ $(-7,-8)$ รัศมี เท่ากับ 8
4) จุดศูนย์กลาง คือ $(-5,10)$ รัศมี เท่ากับ 3
5) จุดศูนย์กลาง คือ $(-13,-14)$ รัศมี เท่ากับ 1
6) จุดศูนย์กลาง คือ $(-12,-5)$ รัศมี เท่ากับ 3
7) จุดศูนย์กลาง คือ $(3,16)$ รัศมี เท่ากับ 1
8) จุดศูนย์กลาง คือ $(3,5)$ รัศมี เท่ากับ $\sqrt{131}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.2

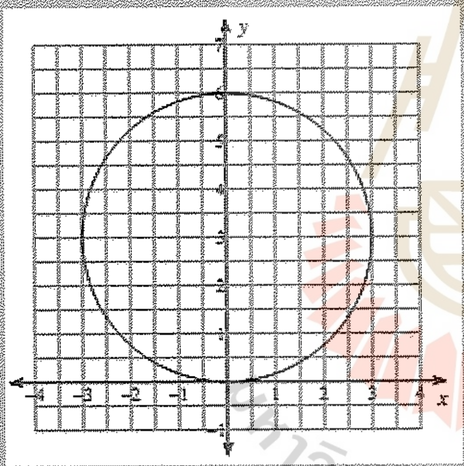
1)



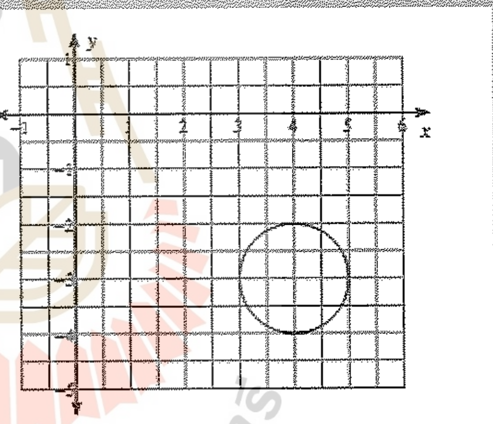
2)



3)



4)



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.3

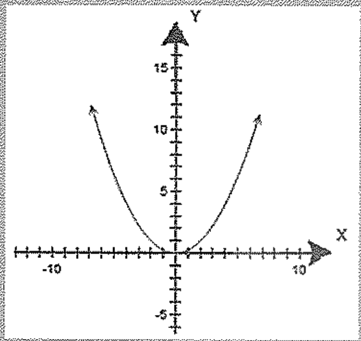
ข้อ	จุดศูนย์กลาง	จุดยอด	จุดโฟกัส	ความยาวแกนเอก	ความยาวแกนโท
1	$(0,0)$	$(0,13),(0,-13)$	$(0,2\sqrt{30}),(0,-2\sqrt{30})$	26 units	14 units
2	$(0,0)$	$(6,0),(-6,0)$	$(2\sqrt{5},0),(-2\sqrt{5},0)$	12 units	8 units
3	$(0,0)$	$(\sqrt{95},0),(-\sqrt{95},0)$	$(\sqrt{65},0),(-\sqrt{65},0)$	$2\sqrt{95}$ units	$2\sqrt{30}$ units
4	$(0,0)$	$(13,0),(-13,0)$	$(\sqrt{105},0),(-\sqrt{105},0)$	26 units	16 units
5	$(0,6)$	$(0,17),(0,-5)$	$(0,6+\sqrt{57})$, $(0,6-\sqrt{57})$	22 units	16 units
6	$(-5,1)$	$(-5,13),(-5,-11)$	$(-5,1+3\sqrt{7})$, $(-5,1-3\sqrt{7})$	24 units	18 units

7	$(3,9)$	$(10,9),(-4,9)$	$(3+3\sqrt{5},9),$ $(3-3\sqrt{5},9)$	14 units	4 units
8	$(0,8)$	$(8,8),(-8,8)$	$(\sqrt{55},8),(-\sqrt{55},8)$	16 units	6 units

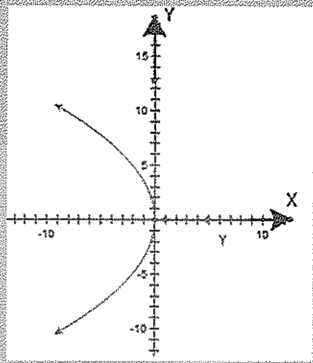
ศัพท์น่ารู้ unit : หน่วย

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.4

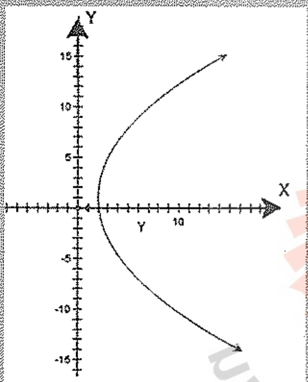
1) จุดยอดคือ (0, 0) จุดโฟกัสคือ (0, 1) สมการไดเรกตริกซ์คือ y = -1



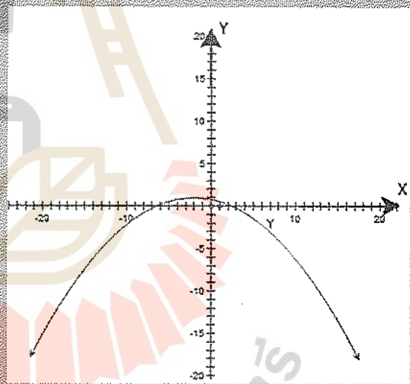
2) จุดยอดคือ (0, 0) จุดโฟกัสคือ (-3, 0) สมการไดเรกตริกซ์คือ x = 3



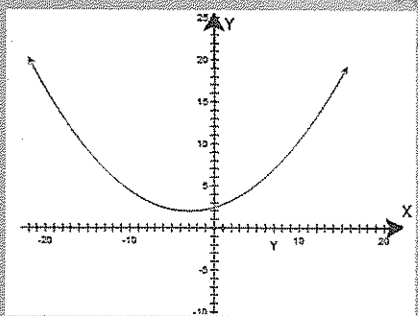
3) จุดยอดคือ (2, 1) จุดโฟกัสคือ (6, 1) สมการไดเรกตริกซ์คือ x = -2



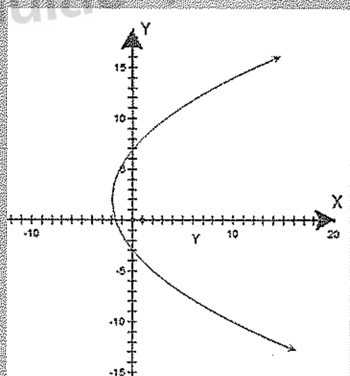
4) จุดยอดคือ (-2, 1) จุดโฟกัสคือ (-2, -4) สมการไดเรกตริกซ์คือ y = 6



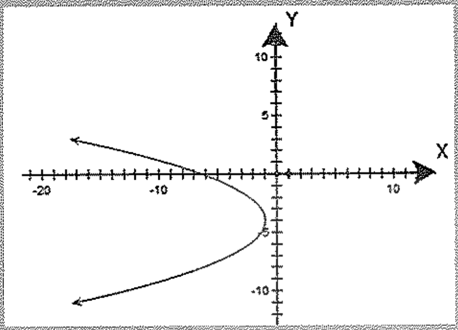
5) จุดยอดคือ (-3, 2) จุดโฟกัสคือ (-3, 7) สมการไดเรกตริกซ์คือ y = -3



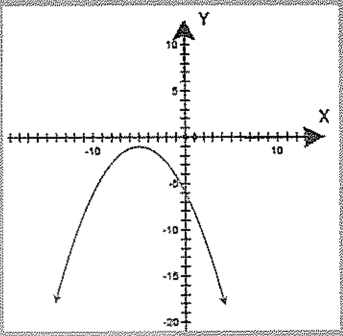
6) จุดยอดคือ (-2, 2) จุดโฟกัสคือ (1, 2) สมการไดเรกตริกซ์คือ x = -5



7) จุดยอดคือ (-1, -4) จุดโฟกัสคือ $(-1-\frac{3}{4}, -4)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ x = -1/4



8) จุดยอดคือ (-5, -1) จุดโฟกัสคือ (-5, -9/4) สมการไดเรกตริกซ์คือ y = -1/4



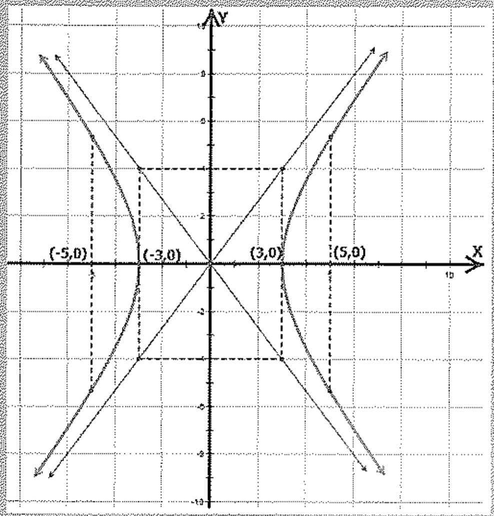
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.5

ข้อ	จุดยอด	จุดโฟกัส	ประเภท
1	$(9,0),(-9,0)$	$(\sqrt{85},0),(-\sqrt{85},0)$	Opens left/right
2	$(11,0),(-11,0)$	$(\sqrt{202},0),(-\sqrt{202},0)$	Opens left/right
3	$(0,5),(0,-5)$	$(0,\sqrt{41}),(0,-\sqrt{41})$	Opens up/down
4	$(11,0),(-11,0)$	$(\sqrt{157},0),(-\sqrt{157},0)$	Opens left/right
5	$(11,-8),(-15,-8)$	$(-2+\sqrt{173},-8)$, $(-2-\sqrt{173},-8)$	Opens left/right
6	$(-2,-2),(-2,-14)$	$(-2,-8+\sqrt{61}),(-2,-8-\sqrt{61})$	Opens up/down
7	$(2\sqrt{5},-1),(-2\sqrt{5},-1)$	$(\sqrt{30},-1),(-\sqrt{30},-1)$	Opens left/right
8	$(5,-1),(1,-1)$	$(3+\sqrt{13},-1),(3-\sqrt{13},-1)$	Opens left/right

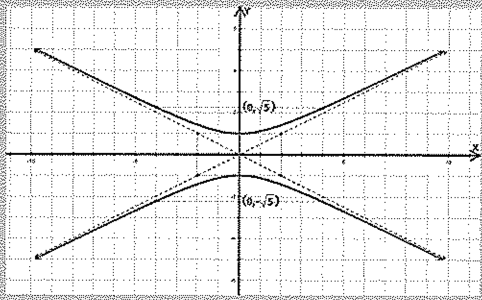
ศัพท์น่ารู้ Opens left/right : *เปิดซ้าย-ขวา*, Opens up/down : *หงาย-คว่ำ*

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.3.6

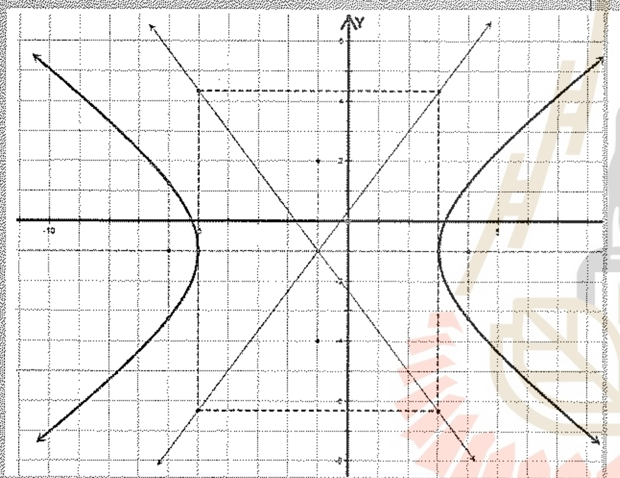
1)



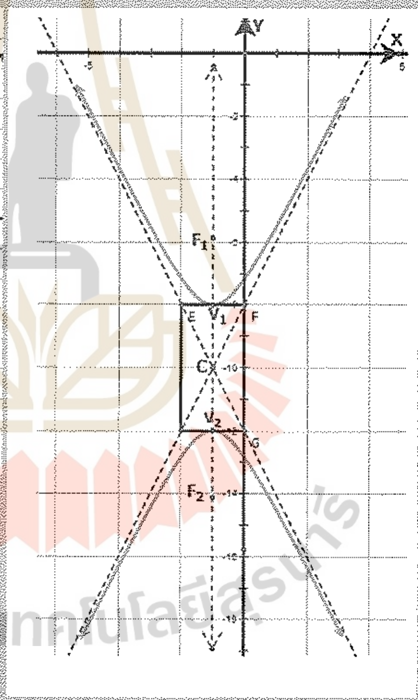
2)



3)



4)



<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 4.4 กราฟ พื้นที่ ปริมาตร และภาคตัดกรวย ในชีวิตประจำวัน</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.4

1) รถบรรทุกคนนั้น จะสามารถวิ่งเข้าไปในอุโมงค์ได้

3) ตำแหน่งของแหล่งระเบิดที่เป็นไปได้ คือ ตำแหน่งใด ๆบนไฮเปอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{4{,}840{,}000} - \frac{y^2}{23{,}038{,}400} = 1$

6) สมการของพาราโบลานี้คือ $x^2 = 2y$ และหลอดไฟควรอยู่ ณ ตำแหน่ง $(0, \frac{1}{2})$ เมื่อเทียบกับจุดยอด

เฉลยแบบฝึกทักษะท้ายบท

1. a) วงรี b) วงกลม
   c) ไฮเพอร์โบลา d) พาราโบลา
   e) พาราโบลา f) วงรี

2.

a) $x+1=\frac{1}{9}(y+2)^2$

$y^2-9x+4y-5=0$

b) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{25}$

$25x^2+9y^2-150x-72y+144=0$

c) $\frac{(y+4)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{1}=1$

$4x^2-y^2-16x-8y+4=0$

d) $(x+3)^2+(y+2)^2=9$

$x^2+y^2+6x+4y+4=0$

e) $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

$4x^2+25y^2+33x-150y+189=0$

f) $y+1=\frac{-1}{4}(x+2)^2$

$x^2+4x+4y+8=0$

3.

a) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$

b) $x^2+(y+5)^2=34$

c) $\frac{1}{2}(x-2)^2=(y+5)$

d) $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$

e) $\frac{-3}{2}(x+4)^2=(y+3)$

f) $\frac{(y-2)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{9}=1$

g) $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{4}=1$

h) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

i) $\frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

4. a. A = 3 b. A > 0 c. A = 0 d. A < 0

5. a. C = −8 b. C < 0 c. C = 0 d. C > 0

6. a. none b. none c. $A \neq 0$ d. none

7)

7.1 $x^2 = -8y$ 7.2 $y^2 = 24(x-1)$ 7.3 $y^2 = -12(x+1)$

7.4 $(x-3)^2 = 16(y-2)$ 7.5 $y^2 = 16x$

7.6 $2x^2 + 4x - y + 3 = 0$ 7.7 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

7.8 $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ 7.9 $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

7.10 $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ 7.11 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

7.12 $\frac{2x^2}{9+\sqrt{17}} + \frac{2y^2}{1+\sqrt{17}} = 1$ 7.13 $y^2 - \frac{1}{16}x^2 = 1$

7.14 $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{20}y^2 = 1$ 7.15 $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$

8)

1. 706.9 cm^2 2. 283.5 cm^2
3. 96 cm^2 4. 23.4 cm^2
5. 272 cm^2 6. 175.9 cm^2
7. 115 cm^2 8. 63.8 cm^2
9. 40.8 cm^2 10. 181.7 cm^2

9)

1. 48 cm^3
2. 64 cm^3
3. 20.63 cm^3
4. 50 cm^3
5. 146 cm^3

บทที่ 5

การจัดสรรทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น

(Introduction to Money Mangement)

ในการดำเนินชีวิตของเราในแต่วันนั้น เป็นเรื่องที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ที่เราจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องเงินๆทองๆ ไม่ว่าจะเป็นในระดับเล็ก เช่น การซื้อ-ขายสินค้าตามท้องตลาด หรือขนาดใหญ่ เช่น การลงทุนประกอบธุระกิจ และไม่ว่าจะเป็นเงินที่ขึ้นกับช่วงเวลาระยะสั้น หรือเงินที่จะต้องมีการวางแผนล่วงหน้าเพราะขึ้นกับช่วงเวลาที่ยาวขึ้น ก็ล้วนแล้วแต่ต้องการการจัดการที่ประสิทธิภาพ เพื่อประโยชน์ หรือผลตอบแทนที่สูงสุด ดังนั้น ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเรื่องที่เกี่ยวกับการบริหารจัดการทรัพยากรณ์ทางการเงินที่ควรทราบมาไว้ให้นักศึกษาได้ทำความรู้จัก การมีความรู้เบื้องต้นในการจัดสรรทรัพทยากรเงินนี้ จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการวางแผนอนาคตทางการเงินของนักศึกษาเอง

5.1 ดอกเบี้ยคงต้น (Simple Interest)

ดอกเบี้ยคงต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่คิดจากเงิน**ต้นที่คงที่**(หมายถึงไม่มีการฝากเพิ่ม หรือถอนออกเลย) ตลอดระยะเวลาที่คิดดอกเบี้ยนั้นๆ

สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาดอกเบี้ยคงต้น

$$I_s = rtP \tag{5.1}$$

สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาเงินรวมสำหรับดอกเบี้ยคงต้น

$$S = P + I_s = P + rtP = P(1 + rt) \tag{5.2}$$

เมื่อ P หมายถึง เงินต้น หรือมูลค่าปัจจุบัน

I_s หมายถึง ดอกเบี้ยคงต้น (หน่วยเป็นหน่วยสกุลเงิน)

t หมายถึง จำนวนงวด (หน่วยอาจเป็น วัน เดือน ปี)

r หมายถึง อัตราดอกเบี้ยคงต้น **ต่อ 1 งวด**

S หมายถึง เงินรวม หรือเงินทั้งหมดที่จะเกิดขึ้นหลังจากช่วงเวลา t งวด หรือมูลค่าอนาคต

ตัวอย่างที่ 5.1.1 ทองมีให้วารุณียืมเงินไปจำนวน 70 บาท เป็นเวลา 1 เดือน และคิดดอกเบี้ยแบบคงต้นที่อัตรา 5 % ต่อเดือน จงหาว่า พอสิ้นเดือนเดือนนั้น วารุณีจะต้องคืนเงินทองมีเป็นจำนวนเท่าใด

วิธีทำ เราทราบค่าเงินต้นคือ 70 บาท เวลาคือ 1 เดือน และอัตราดอกเบี้ยคงต้นต่อเดือนคือ 5 % = 0.05

แทนค่าหาจำนวนเงินที่เป็นดอกเบี้ยคงต้นคือ $I_s = rtP = (0.05)(1)(70) = 3.50$ บาท

ดังนั้น วารุณีจะต้องคืนเงินทองมีเป็นจำนวนเท่ากับ เงินต้นที่ยืมมา + เงินดอกเบี้ย $= 70+3.50 = 73.50$ บาท

ตัวอย่างที่ 5.1.2 นายมีสุขกู้เงินเพื่อนมา 200 บาท เป็นเวลา 4 ปี มาแล้ว โดยที่เพื่อนคิดดอกเบี้ยแบบคงตัวในอัตรา 15 % ต่อปี อยากทราบว่า

ก. นายมีสุขต้องจ่ายดอกเบี้ยให้เพื่อนเป็นเงินเท่าไร

ข. นายมีสุขจะต้องใช้หนี้เพื่อนทั้งเงินต้นและดอกเบี้ยเป็นเงินเท่าไร

วิธีทำ ก. จากสูตรดอกเบี้ยแบบคงต้น

$$I_s = rtP$$

จากโจทย์จะได้ค่า $P = 200$ บาท , $t = 4$ ปี

และ $r = 15\ \% = \frac{15}{100}$

ดังนั้นแทนค่า จะได้ $I_s = rtP = \left(\frac{15}{100}\right) \times 4 \times 200 = 120$

ดังนั้นดอกเบี้ยที่นายมีสุขจะต้องจ่ายเท่ากับ 120 บาท

ข. เมื่อรวมต้นและดอกจะได้ $S = P + I_s$

$= 200 + 120$

$= 320$ บาท

นายมีสุขจะต้องจ่ายเงินคืนให้เพื่อนทั้งหมดเท่ากับ 320 บาท

แบบฝึกทักษะที่ 5.1 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการคำนวณดอกเบี้ยคงต้น ในการแก้โจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) นายคณิตกู้เงินจากสหกรณ์แห่งหนึ่งเป็นจำนวน 360,000 บาท เป็นเวลา 5 เดือน พอครบกำหนดเวลา นายคณิตต้องจ่ายดอกเบี้ยเป็นจำนวน 7,200 บาท อยากทราบว่าสหกรณ์แห่งนั้นคิดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้เท่าไร

....

....

....

....

....

....

2) ลุงจอห์น ชาวไร่ กู้เงินจากธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงิน 500,000 บาท โดยธนาคารคิดดอกเบี้ย 6.5 % ต่อปี เมื่อเวลาผ่านไประยะเวลาหนึ่ง ลุงจอห์นไปตรวจสอบดูที่ธนาคาร ปรากฏว่าธนาคารแจ้งว่าเป็นหนี้ธนาคารจำนวน 598,000 บาท อยากทราบว่าลุงจอห์นกู้เงินมาเป็นระยะเวลานานเท่าไร

3) จงคำนวณหาเงินต้นที่กู้มา เมื่อจำนวนดอกเบี้ยที่จ่ายคือ 20,000 บาท โดยที่เจ้าหนี้คิดอัตราดอกเบี้ย 14 % ต่อปี และระยะเวลาในการกู้คือ 4 เดือน

4) ธนาคารแห่งหนึ่งให้ดอกเบี้ยเงินฝาก 5% ต่อปี ถ้านำเงิน 35,000 บาท ไปฝากธนาคารแห่งนี้เป็นเวลา 9 เดือน จงหาดอกเบี้ยและเงินรวมที่จะได้รับ

5) ถ้ากู้เงิน 25,000 บาท เป็นเวลา 30 เดือน ต้องเสียดอกเบี้ย 2,500 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยสำหรับการกู้เงินครั้งนี้

6) ถ้าต้องการใช้เงินจำนวน 18,000 บาท ในอีก 16 เดือนข้างหน้า จึงนำเงินไปปล่อยกู้คิดดอกเบี้ย 15% ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่จะต้องนำไปปล่อยกู้

7) ถ้าอัตราดอกเบี้ยเท่ากับ 0.5% ต่อปี จะต้องฝากเงิน 50,000 บาท เป็นระยะเวลาเท่าใดจึงจะได้ดอกเบี้ย 5,000 บาท

....

....

....

....

....

5.2 ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)

ดอกเบี้ยทบต้น หมายถึง ดอกเบี้ยที่มีการนำเอาดอกเบี้ยที่ได้รับในช่วงเวลาหนึ่งมารวมกับเงินต้น เพื่อเป็นเงินต้นของการคิดดอกเบี้ยในระยะเวลาถัดไป (ในกรณีนี้ เงินต้นก็ยังเป็นเงินต้นคงที่ ไม่ฝากเพิ่ม และไม่ถอนออก)

นั่นคือ ถ้าเราสมมติให้ว่า ถ้าจำนวนเงิน 5,000 บาท ถูกฝากให้กับธนาคารแห่งหนึ่ง ที่มีระบบการคำนวณดอกเบี้ยเป็นประเภททบต้นในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี เราจะสามารถคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดที่จะได้ เมื่อสิ้นปีแต่ละปีได้ดังนี้

ทบทวน ดอกเบี้ยที่ได้ = จำนวนเงิน × อัตราดอกเบี้ย(%)

เมื่อสิ้นปีที่ 1 เงินรวมที่จะได้ทั้งหมด = เงินต้น + ดอกเบี้ยที่ได้

= 5,000 + 5,000(0.06)

= 5,000(1+0.06) .... ดึงตัวร่วมคือ 5,000

= 5,000(1.06)

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 1 เราจะเห็นว่า เงินรวมของเราจะมีค่าเป็น 5,000(1.06) บาท และเงินจำนวนนี้ จะถือว่าเป็นเงินต้นสำหรับการคำนวณดอกเบี้ยในปีต่อไป ดังนี้

เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมที่จะได้ทั้งหมด = เงินต้น + ดอกเบี้ยที่ได้

= 5,000(1.06) + 5,000(1.06)(0.06)

= 5,000(1.06)(1+0.06) .... ดึงตัวร่วมคือ 5,000(1.06)

= $5{,}000(1.06)^2$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เราจะเห็นว่า เงินรวมของเราจะมีค่าเป็น $5{,}000(1.06)^2$ บาท และเงินจำนวนนี้ จะถือว่าเป็นเงินต้นสำหรับการคำนวณดอกเบี้ยในปีต่อไป

และเมื่อเราดำเนินการการคำนวณในลักษณะนี้ไปเรื่อยๆ เราจะสามารถหาจำนวนเงินที่ได้(S_n) หลังจากฝากเงินจำนวน P เป็นระยะเวลา n ปี(หรือเมื่อสิ้นปีที่ n) ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น i ต่อปี คือ $S_n = P(1+i)^n$

และ เราสามารถขยายแนวคิดนี้ไปถึงกรณีทั่วไป หรือกรณีที่รอบของการคิดดอกนั้น ไม่ใช่ 1 ปี แต่ให้นับเป็น "งวด" แทน และอัตราดอกเบี้ยนั้น ไม่ใช่ต่อ 1 ปี แต่เป็นต่อ "งวด" ดังนั้น จะได้ว่า

$$S_n = P(1+i)^n \qquad (5.3)$$

และ จะได้สูตรที่ใช้ในการคำนวณหาดอกเบี้ยทบต้น คือ

$$I_c = P((1+i)^n - 1) \tag{5.4}$$

เมื่อ P หมายถึง เงินต้น หรือมูลค่าปัจจุบัน

I_c หมายถึง ดอกเบี้ยทบต้น

i หมายถึง อัตราดอกเบี้ย**ต่องวด**

n หมายถึง จำนวน**งวด**

S_n หมายถึง เงินรวม หรือมูลค่าอนาคต เมื่อสิ้นงวดที่ n

ตัวอย่างที่ 5.2.1 นายหมั่นเพียรฝากเงินไว้ที่ธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงิน 200,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 8 % ต่อปี โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ทุก ๆ 4 เดือน ถ้าหากนายหมั่นเพียรฝากเงินไว้เป็นเวลา 10 ปีแล้ว โดยที่ไม่ได้ถอนเงินเลย อยากทราบว่า

ก. นายหมั่นเพียรจะมีเงินในบัญชีเท่าไร

ข. นายหมั่นเพียรได้รับดอกเบี้ยจำนวนเท่าไร

วิธีทำ ก. จากสูตร $S = P(1+i)^n$

โจทย์กำหนดให้ $P = 200{,}000$ บาท

และอัตรดอกเบี้ยต่องวดคือ $i = 0.08 \times \left(\frac{4}{12}\right) = 0.027$

และจำนวนงวด $n = \left(\frac{4}{12}\right) \times 10 = 30$

แทนค่า $S = 200{,}000\ (1 + 0.027)^{30}$

ดังนั้นเงินในบัญชี $= 444{,}778$ บาท

ข. สูตร $I_c = P((1+i)^n - 1) = S - P$

$= 444{,}778 - 200{,}000 = 244{,}778$

ได้รับดอกเบี้ยเท่ากับ $244{,}778$ บาท

ตัวอย่างที่ 5.2.2 น.ส.พัชราพร นำเงินจำนวน 100,000 บาท ไปฝากกับธนาคารแห่งหนึ่ง ที่เสนอดอกเบี้ยแบบทบต้นที่ 10% และคิดดอกเบี้ยให้**ทุกวัน**ใน 1 ปี จงคำนวณหาเงินอนาคตที่พัชราพรจะได้ทั้งหมดหลังจากนี้เป็นเวลา 30 ปี

วิธีทำ จากโจทย์ ค่าที่เราได้คือ $P = 100{,}000$, อัตราดอกเบี้ยต่องวด $i = \frac{0.1}{365}$ (เพราะคิดดอกเบี้ยทุกวันในหนึ่งปี) และจำนวนงวด $n = 365 \times 30$ งวด

แทนค่าในสมการ (5.5) จะได้เงินรวมในอนาคตหลังจาก 30 ปีคือ

$$S_{30} = 100{,}000\left(1 + \frac{0.1}{365}\right)^{365\times30} = 2{,}007{,}728.579 \text{ บาท}$$

แบบฝึกทักษะที่ 5.2 จงใช้ความรู้เกี่ยวกับการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น ในการแก้โจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) นางสาวเรียบร้อยฝากเงิน 10,000 บาท ไว้กับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งธนาคารแห่งนี้ได้ให้ดอกเบี้ยในอัตรา 12 % ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยปีละ 3 ครั้งแบบทบต้น ถ้านางสาวเรียบร้อยฝากเงินไว้ครบ 5 ปี จะได้รับเงินคืนจำนวนเท่าใด และจำนวนดอกเบี้ยที่จะได้รับเท่าใด

2) เอกชาติกู้เงินธนาคารเพื่อซื้อบ้านเป็นจำนวนเงิน 300,000 บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ย ร้อยละ 15 ต่อปี ถ้ากู้เป็นเวลา 2 ปี ถ้าคิดดอกเบี้ยทบต้น จะเสียค่าดอกเบี้ยเท่าใด

3) ถ้าฝากเงินจำนวน 50,000 บาท เป็นเวลา 1 ปี กับธนาคารที่ให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี จงหาดอกเบี้ยและเงินรวมที่ได้รับ ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 2 ครั้ง

4) จงหามูลค่าปัจจุบันของเงิน 30,000 บาท ที่ฝากธนาคารเป็นเวลา 6 เดือน ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยที่ทบต้นทุก ๆ 3 เดือน

5) ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี ทบต้นปีละ 3 ครั้ง จะต้องฝากเงินเท่าใดจึงจะได้ดอกเบี้ย 3,550 บาท ในระยะเวลา 2 ปี

....

....

....

....

....

6) ถ้าต้องการกู้เงินจำนวน 15,000 บาท เป็นเวลา 2 ปี โดยที่ธนาคารแห่งที่หนึ่งคิดดอกเบี้ย 14 % ต่อปี ทบต้นปีละ 2 ครั้ง ส่วนธนาคารแห่งที่สองคิดดอกเบี้ย 13.75 % ต่อปี ทบต้นปีละ 12 ครั้ง ควรจะเลือกกู้เงินจากธนาคารใด และดอกเบี้ยที่ต้องจ่ายให้ธนาคารทั้งสองต่างกันเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

7) ยายแหลมทอง ได้นำเงินจำนวน 1,320 ดอลล่าห์ และได้ดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตราร้อยละ 6 และปรับให้ 4 ครั้งต่อปี จงหาว่า ยายแหลมจะได้เงินสะสมรวมจากการฝากในครั้งนี้เป็นจำนวนเท่าใด เมื่อครบ 8 ปี

....

....

....

....

....

....

....

8) ถ้านักศึกษาจะวางแผนการออมทรัพท์กับบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งให้ผลตอบแทนเป็นดอกเบี้ยคิดเป็น 10 % แบบทบต้นและคิดทบต้นให้ทุก ๆวัน ถ้านักศึกษาหวังจากการลงทุนนี้ว่า ใน 30 ปีข้างหน้า นักศึกษาหวังที่จะได้รับดอกเบี้ย(ไม่รวมเงินต้น) เป็นจำนวนทั้งสิ้น 1,000,000 บาท จงหาว่า นักศึกษาจะต้องใช้เงินเป็นจำนวนเท่าไร ในการเปิดบัญชีครั้งแรก

....

....

....

....

....

....

....

....

5.3 เงินปี (Annuities)

ใน 2 หัวข้อที่ผ่านมา เราจะสังเกตเห็นว่า เป็นการวางแผนการจัดการทางเงินที่มีการฝากด้วยเงินต้นที่เป็นจำนวนคงที่ หรือในระหว่างช่วงเวลาหนึ่ง ๆนั้น ไม่มีการฝากเพิ่ม หรือเบิกออกเลย ในหัวข้อนี้ เราจะมาทำความรู้จักกับกรณีที่เกิดมีการฝากเงินอย่างต่อเนื่อง ด้วยจำนวนที่เท่ากัน ในความห่างของระยะเวลาเท่ากัน เช่น กรณีที่เราก็ชำระเงินผ่านที่เรากู้มาจากธนาคารทุก ๆปลายเดือน ด้วยจำนวนเงินที่เท่ากัน การจัดการทางการเงินในลักษณะแบบนี้ รู้จักกันในรูปแบบของการจัดการเงินประเภท "เงินปี (Annuity) "

เงินปีหรือค่ารายงวด หมายถึง เงินจำนวนเท่า ๆ กัน ที่จ่ายเป็นงวดตามช่วงเวลาที่เท่ากัน เช่น เงินปันผล ดอกเบี้ยพันธบัตร การจ่ายเบี้ยประกันชีวิต เป็นต้น

เงินปีแบ่งออกเป็นสองประเภทใหญ่ ๆคือ

1. Ordinary Annuity (เงินงวด) ซึ่งจะเป็นจำนวนเงินที่ได้รับสิ้นปีเท่า ๆกันในแต่ละปี ในระยะเวลาที่กำหนด
2. Annuity Due (เงินงวด) ซึ่งจะเป็นจำนวนเงินที่ได้รับต้นปีเท่ากันในแต่ละปี ในระยะเวลาที่กำหนด

ซึ่งในที่นี้จะขอกล่าวถึงประเภทแรกนั่นคือ Ordinary Annuity

มูลค่าอนาคตสำหรับ Ordinary Annuity (S) ตัวอย่างเช่น การฝากเงินกับธนาคารในทุก ๆเดือน ๆละเท่า ๆกันโดยหวังที่จะได้รับเงินก้อนใหญ่เมื่อครบกำหนดการฝากในอนาคต เงินก้อนที่จะเกิดขึ้นสำหรับการฝากนี้เรียกว่าเป็น "มูลค่าอนาคน" นั่นเอง และสามารถคำนวณได้จากความสำพันธ์

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5.5}$$

มูลค่าปัจจุบันสำหรับ Ordinary Annuity (P) ตัวอย่างเช่น การกู้ยืมเงินก้อนจากธนาคารซึ่งเราจะต้องทำการส่งงวดคืนตามจำนวนงวดที่ตกลงกัน การชำระในแต่ละงวดนั้นจะเปลี่ยนไปตามมูลค่าของมันในปัจจุบันจนสามารถสร้างเป็นอนุกรมได้คือ

$$P = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{5.6}$$

เมื่อ R หมายถึง เงินงวดหรือเงินที่มีการจ่ายในแต่ละงวด

P หมายถึง มูลค่าปัจจุบันของเงินปี

i หมายถึง อัตราดอกเบี้ย**ต่องวด**

n หมายถึง จำนวน**งวด**

S หมายถึง มูลค่าอนาคตของเงินปี

เงื่อนไขและข้อตกลง : ในเอกสารนี้ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดจำนวนครั้งของการปรับดอกเบี้ยใน 1 ปี ให้ถือว่า มีค่าเท่ากับจำนวนงวดใน 1 ปี หรือให้เข้าใจว่า มีการปรับดอกเบี้ยให้ทุกงวด

ตัวอย่างที่ 5.3.1 อนันต์ ฝากเงินเดือนละ 500 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 18 หลังจากนี้ เขาจะมีเงินเท่าใด ถ้ากำหนดให้ดอกเบี้ยทบต้นคิดเป็น 5 เปอร์เซนต์ต่อปี และคิดปรับให้ทุกเดือน

วิธีทำ

จากโจทย์ เราได้ค่าต่างๆคือ $R = 500$ และ 1 ปีมี 12 งวด (คือฝากทุกเดือน) ดังนั้น 18 ปี ก็จะได้จำนวนงวดเท่ากับ $n = 18 \times 12 = 216$ งวด หาอัตราดอกเบี้ยต่องวด

โดย จากโจทย์ 12 เดือน ได้ดอกร้อยละ 5 ดังนั้น ถ้า 1 เดือน(หรือ 1 งวด) ก็จะได้ดอก เป็นร้อยละ $\frac{5}{12}$

แทนค่า $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$

$$= 500\frac{\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{216}-1}{0.05/12}$$

$$= 173{,}177.202$$

ดังนั้น อนันต์ จะได้เงินเป็นจำนวนทั้งสิ้น 173,177.202 บาท

ตัวอย่างที่ 5.3.2 มานัดต์มีเงินก้อนอยู่จำนวนหนึ่ง ต้องการที่จะลงทุนกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง เพื่อที่จะได้เงินคืนทั้งต้นและดอกในทุกๆ 6 เดือน ในจำนวนงวดละ 1,500 ดอลล่า ติดต่อกันเป็นเวลา 2 ปี ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยที่ร้อยละ 8 ต่อปี และคิดแบบทบต้นให้ในทุกๆ 6 เดือนแล้ว จงหาว่า มานัดต์จะต้องนำเงินก้อนไปลงทุนเป็นจำนวนเงินเท่าใด

วิธีทำ

จากโจทย์ ได้ว่า 1 งวดนั้นคิดเป็น 6 เดือน

เงินงวด (R) = 1,500

อัตราดอกเบี้ยต่องวด (i) = 0.08/2

จำนวนงวด (n) = 4

ดังนั้น จากสมการความสัมพันธ์ (5.6) จึงได้ว่า

$$P = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$= 1{,}500\left[\frac{1-(1+0.04)^{-4}}{0.04}\right]$$

$$= 5{,}444.84$$

ดังนั้น มานัดต์จะต้องนำเงินจำนวน 5,444.84 ดอลล่าห์ไปลงทุนจึงจะได้เงินงวดคืนตามจำนวนดังกล่าว

แบบฝึกทักษะที่ 5.3 จงใช้ความรู้ทางการจัดการเงินปี ในการตอบคำถามในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) นายสายันต์ ฝากเงินกับธนาคารเดือนละ 100 ดอลล่าห์ จงคำนวณหาว่า หลังจาก 10 ปี นายสายันต์ จะมีเงินซื้อรถเก๋งราคาประมาณ 16,900 ดอลล่าห์หรือไม่ ถ้ากำหนดว่า ธนาคารแห่งนี้ ให้ดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 6.5 ต่อปี และคิดปรับแบบทบต้นให้ทุกๆเดือน

....

....

....

....

....

....

2) จงหาค่าปัจจุบันของเงินที่จ่ายเข้ากองทุนแห่งหนึ่ง ครั้งละ 2,000 บาท ทุกๆ 6 เดือน เป็นระยะเวลา 10 ปี ด้วยดอกเบี้ยรายปีคิดเป็น 6 % คิดแบบทบต้นให้ทุกๆ 6 เดือน

....

....

....

....

....

....

....

3) สามี-ภรรยาคู่หนึ่ง ได้ตัดสินใจฝากเงินเป็นจำนวน 400 บาททุกๆสิ้นเดือน เข้ากับบัญชีประเภทที่ให้ดอกเบี้ยประเภททบต้นที่อัตรา 5 % และคิดดอกให้ทุกๆเดือน จงหาว่า หลังจากนสิ้นปีที่สาม เงินในบัญชีนี้จะเป็นเท่าใด

....

....

....

....

....

....

4) ผู้ปกครองของ น.ส. เรยา ต้องการที่จะสะสมเงิน(เพื่อการศึกษาของเรยาเอง)ให้ได้เป็นจำนวนทั้งสิ้น 100,000 บาท ในเวลา 15 ปี ถ้าประเภทที่จะฝากด้วยนี้ ให้ดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตรา 4.5 % และคิดให้ทุกๆ 6 เดือน จงหาว่า เพื่อให้ได้ยอดเงินสะสมในเวลาดังกล่าว ผู้ปกครองของ น.ส.เรยา ต้องฝากเดือนเงินเข้าบัญชีทุกๆ 6 เดือน ในจำนวนต่องวดเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

5) ถ้าฝากเงินทุก ๆ เดือน เดือนละ 15,000 บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ย 0.5% ต่อปี จงหาเงินรวมทั้งหมดที่จะได้รับหลังจากฝากเงินไปแล้ว 5 เดือน

6) พนักงานคนหนึ่งถูกหักเงินเดือน เดือนละ 2,000 บาท เพื่อเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพ โดยให้ดอกเบี้ย 1% ต่อปี เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี พนักงานคนนี้จะได้รับเงินคืนเท่าใด

7) โทรทัศน์เครื่องหนึ่งมีโปรโมชั่นผ่อน 6 เดือน เดือนละ 5,000 บาท คิดดอกเบี้ย 0.1% ต่อปี จงหาราคาเงินสดของโทรทัศน์เครื่องนี้

8) กู้เงินเพื่อซื้อบ้านราคา 2,500,000 บาท จะต้องผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 20 ปี ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ย 4% ต่อปี จงหาจำนวนเงินที่ต้องผ่อนชำระในแต่ละเดือน

5.4 การคิดภาษีเบื้องต้น (Introduction to Taxes)

หน้าที่หนึ่งของคนไทยที่มีรายได้ทั้งหลาย คือการเสียภาษี ซึ่งแต่ละประเภทของภาษีก็ขึ้นกับสถานการณ์ของบุคคลนั้นๆ แต่ประเภทหนึ่งที่ประชากรส่วนใหญ่ของประเทศต้องเสียคือ *ภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา* ซึ่งตามประมวลรัษฎากรนั้น ถือเป็นภาษีทางตรงประเภทหนึ่งที่สำคัญมากเพราะเป็นแหล่งรายได้สำคัญของรัฐบาล และเป็นเครื่องมือสำคัญของรัฐบาลในการกระจายรายได้

ภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาก็คือ ภาษีเงินได้ที่เก็บจากบุคคลธรรมดานั่นเอง บุคคลธรรมดา ผู้มีเงินได้ไม่ว่าประเภทใดชนิดใด ถ้าไม่มีกฎหมายยกเว้นให้แล้วมักอยู่ในข่ายต้องเสียภาษีนี้ด้วย

ในการคำนวณภาษีประเภทบุคคลธรรมดานั้น มีรายละเอียดค่อนข้างเยอะ อาจจะมีการเปลี่ยนแปลงไปตามนโยบายของรัฐบาลชุดนั้นๆ ดังนั้น วัตถุประสงค์ของหัวข้อนี้ จึงไม่ได้เน้นให้นักศึกษาได้เข้าใจทุกเงื่อนไข ทุกกรณีของการจัดเก็บภาษีประเภทนี้ แต่จะเป็นการยกตัวอย่างกรณีที่พบบ่อย ประกอบกับหลักการหลักๆการคำนวณภาษีนั้น ดังนั้น หลังจากศึกษาในหัวข้อนี้แล้ว จะสามารถคำนวณภาษี และทราบหมวดหมู่คร่าวๆของส่วนต่างๆที่เกี่ยวข้อง

วิธีการคำนวณภาษีเงินได้บุคคลธรรมดาอย่างคร่าว ๆ

1. คำนวณเงินได้พึงประเมินตลอดปีภาษี
2. หักเงินได้ที่ได้รับยกเว้น
   (1) เงินสะสมกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ (ส่วนที่เกิน 10,000 บาท แต่ไม่เกิน 490,000 บาท และส่วนนี้ต้องไม่เกินร้อยละ 15 ของค่าจ้าง)
   (2) เงินสะสมกองทุนบำเหน็จบำนาญข้าราชการ (กบข.) เฉพาะส่วนที่ไม่เกิน 500,000 บาท
   (3) เงินสะสมกองทุนสงเคราะห์ครูโรงเรียนเอกชน เฉพาะส่วนที่ไม่เกิน 500,000 บาท
   (4) อื่น ๆ
3. หักค่าใช้จ่ายร้อยละ 40 ของข้อ 2. แต่ไม่เกิน 60,000 บาท
4. หักลดหย่อน
   (1) ผู้มีเงินได้ 30,000 บาท
   (2) คู่สมรส 30,000 บาท กรณีคู่สมรสไม่มีเงินได้
   (3) บุตรที่มีอายุไม่ถึง 20 ปี หรือมีอายุไม่เกิน 25 ปี แต่ยังศึกษาในระดับอุดมศึกษา
      - กรณีบุตรไม่ได้ศึกษาหรือศึกษาอยู่ในต่างประเทศหักลดหย่อนได้คนละ 15,000 บาท
      - กรณีบุตรศึกษาอยู่ในประเทศหักลดหย่อนได้คนละ 17,000 บาท
   (4) บิดามารดาอายุตั้งแต่ 60 ปีขึ้นไป หักลดหย่อนได้คนละ 30,000 บาท
   (5) เบี้ยประกันชีวิตตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท
   (6) เงินสะสมกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ (ส่วนที่ไม่เกิน 10,000 บาท)
   (7) ดอกเบี้ยเงินกู้เพื่อซื้อที่อยู่อาศัยตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท
   (8) อื่น ๆ

5. เงินได้พึงประเมินจากข้อ 1. เมื่อหักค่าต่าง ๆ จากข้อ 2 – 4 แล้ว จะเรียกว่า **"เงินได้สุทธิ"** ซึ่งจะนำมาคำนวณภาษีตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 15 ตารางอัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา

เงินได้สุทธิ (บาท)	อัตราภาษีร้อยละ
0 – 150,000	0
150,001 – 500,000	10
500,001 – 1,000,000	20
1,000,001 – 4,000,000	30
4,000,001 ขึ้นไป	37

แบบฝึกทักษะที่ 5.4 จงใช้ความรู้เรื่องภาษีรายได้บุคคลธรรมดา ในการหาคำตอบของโจทย์ในแต่ละข้อ ต่อไปนี้

1) ถ้าอานนท์ได้เงินเดือน เดือนละ 25,000 บาท เขาได้จ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 2,200 บาท จ่ายเบี้ยประกันเดือนละ 1,500 บาท จงหาว่าอานนท์จะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

2) ถ้ากิตติได้เงินเดือน เดือนละ 65,000 บาท เขาจ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 2,500 บาท จ่ายเบี้ยประกันปีละ 15,000 บาท และจ่ายดอกเบี้ยบ้านปีละ 10,000 บาท จงหาว่ากิตติจะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

3) ถ้าอำนาจได้เงินเดือน เดือนละ 12,000 บาท เขาจ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 500 บาท จงหาว่ากิตติจะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

4) ถ้ากอบกิจได้เงินเดือน เดือนละ 55,000 บาท เขาจ่ายเงินเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพเดือนละ 5,500 บาท จ่ายเบี้ยประกันปีละ 15,000 บาท จ่ายดอกเบี้ยบ้านปีละ 20,000 บาท เขาแต่งงานแล้วโดยที่ภรรยาไม่มีเงินได้ และมีลูก 2 คน กำลังเรียนอยู่ในชั้นมัธยมต้นทั้งคู่ และเขายังได้อุปการะพ่อแม่ซึ่งอายุเกิน 60 ปี จงหาว่ากอบกิจจะต้องจ่ายภาษีเท่าใด

5.5 ต้นทุน (Costs) รายได้ (Revenues) และผลตอบแทน (Profits)

❖ ฟังก์ชันต้นทุน(Cost Functions) ฟังก์ชันรายได้(Revenue Functions) และฟังก์ชันกำไร(Profit Functions)

ในการทำธุระกิจมากมายหลายประเภทนั้น ส่วนใหญ่แล้ว เราสามารถที่จะจำลองรายจ่ายทั้งหมด รายรับทั้งหมด ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับปัจจัยต่าง ๆ และโดยทั่วไป ที่พบมากที่สุด ดูเหมือนจะเป็นการสร้างแบบจำลองฟังก์ชันต้นทุน(C) ฟังก์ชันรายได้(R) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่เป็นจำนวนของสินค้า(x) และสามารถที่จะนิยามฟังก์ชันกำไรได้อย่างง่าย ดังนี้

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{5.7}$$

ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.1</u> ในการค้าขายสินค้าประเภทหนึ่งพบว่า สามารถรับซื้อสินค้ามาขายได้ในราคาชิ้นละ 6.50 บาท และสามารถขายได้ในราคาชิ้นละ 7.20 บาท จงหาฟังก์ชันกำไร

วิธีทำ

จากโจทย์ สินค้า 1 ชิ้น ต้องใช้เงินจำนวน 6.50 บาท ในการซื้อมา ดังนั้น สินค้า x ชิ้น ต้องใช้เงิน $(6.5)x$ บาทซื้อมา และ

สินค้า 1 ชิ้น ขายได้เงิน 7.20 บาท ดังนั้น ขายสินค้า x ชิ้น จะต้องได้เงินทั้งสิ้น $(7.20)x$ บาท ดังนั้น กำไรทั้งหมดที่จะได้จากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น คือ

$$P(x) = (7.20)x - (6.5)x$$

และนี่คือ ฟังก์ชันกำไร ที่ขึ้นกับจำนวนสินค้า (x)

ข้อตกลง ในเอกสารนี้ เราจะสมมติว่า จำนวนสินค้าที่ลงทุนซื้อ หรือผลิตทั้งหมด กับจำนวนสินค้าที่ขายได้ทั้งหมด มีจำนวนเท่ากัน หรือ ซื้อหรือผลิตมาเท่าไหร่ ขายได้หมด

❖ จุดคุ้มทุน (Break Even Point)

จุดคุ้มทัน (Break Even Point) หมายถึง จุดหรือระดับของรายได้จากการขายสินค้าหรือบริการ ที่เท่ากับต้นทุนที่ธุรกิจได้จ่ายออกไป หรือจุดหรือระดับของรายได้ที่ธุรกิจ "เท่าทุน" โดยส่วนที่เลยจุดหรือระดับของรายได้ดังกล่าวคือผลกำไรที่ธุรกิจจะได้ นั่นคือ จุดที่

$$R(x) = C(x) \tag{5.8}$$

ตัวอย่างที่ 5.5.2 นางสาวสมปอง เป็นบัณฑิตใหม่จาก มทส. ได้เข้าทำงานกับบริษัทผลิตวิทยุแห่งหนึ่ง ในช่วงทดลองงานนั้น เนื่องจากหัวหน้างานของนางสาวสมปอง ได้เห็นจากใบแสดงผลการเรียนของนางสาวสมปองว่า ได้ลงวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันไปแล้วเมื่อครั้งอยู่ปีหนึ่ง และได้ศึกษาเรื่องการหาฟังก์ชันกำไรมาแล้ว จึงได้มอบหมายให้นางสาวสมปอง หาจุดคุ้มทุนของการผลิตสินค้าของบริษัท เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆดังต่อไปนี้

- ค่าใช้จ่ายรวมในกระบวนการผลิตทั้งหมด คือ 200,000 บาท บวกด้วย ค่าตรวจสอบสินค้าซึ่งคิดเป็นตามจำนวนสินค้า ชิ้นละ 10 บาท
- สินค้าสามารถขายได้ในราคาชิ้นละ 50 บาท

เมื่อทำการคำนวณแล้ว นางสาวสมปอง รายงานต่อหัวหน้าอย่างมั่นใจว่า บริษัท จะได้ทุนคืนเมื่อจำหน่ายสินค้าได้เป็นจำนวน 5,000 ชิ้นพอดี จงพิจารณาว่า นางสาวสมปองได้สร้างชื่อ "เสีย" หรือ ชื่อ" เสียง" ให้กับ มทส. ของเรา

วิธีทำ

จากโจทย์ เราจะได้ว่า ค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า จำนวน x ชิ้น รวมทุกขั้นตอนแล้วเท่ากับ $C(x) = 200{,}000 + 10x$ บาท และรายได้จากการจำหน่ายสินค้าจำนวน x ชิ้น เท่ากับ $R(x) = 50x$

ดังนั้น จะสามารถหาจุดคุ้มทุนได้ คือ

$$R(x) = C(x)$$
$$50x = 200{,}000 + 10x$$

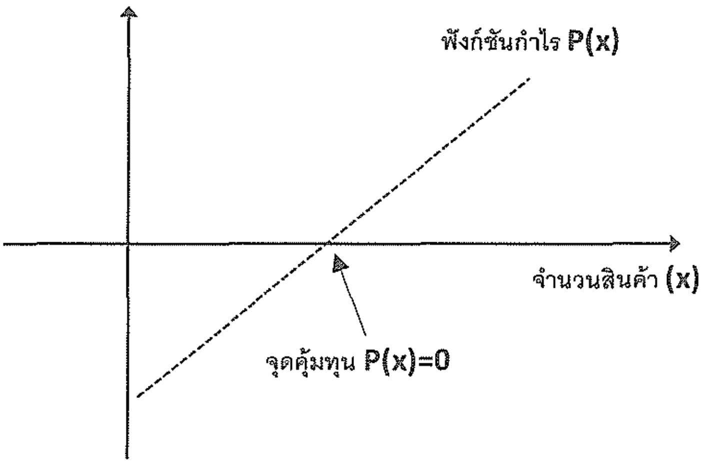
จึงได้ว่า $x = 5{,}000$ ชิ้น

ดังนั้น นางสาวสมปอง สามารถรักษาชื่อเสียงมหาวิทยาลัยของเราไว้ได้อย่างน่าภาคภูมิใจ ☺

❖ ผลตอบแทนสูงสุด(Maximum Profits)

มาถึงตอนนี้แล้ว เราจะสังเกตเห็นว่า ทั้งฟังก์ชันต้นทุน ฟังก์ชันรายได้ และฟังก์ชันกำไรนั้น ล้วนแล้วแต่ขึ้นกับจำนวนสินค้าที่ผลิต ถึงแม้ว่าที่ผ่านมา เราจะสังเกตเห็นว่าฟังก์ชันทั้งสามจะยังคงเป็นประเภทเชิงเส้น(คือกำลังสูงสุดเป็น 1) ซึ่งในกรณีแบบนี้ เราจะเห็นว่า กำไรของเรา จะแปรผันตรงกับจำนวนสินค้าที่ขายได้ หรือ ยิ่งขายมาก ยิ่งได้กำไรมาก ดังนั้น โดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันกำไรจึงสามารถเขียนได้เป็นกราฟ ดังแสดงในแผนภาพที่ 47

แต่ในความเป็นจริงแล้ว ฟังก์ชันทั้งสามประเภทนี้ มักอยู่ในรูปที่ไม่เป็นเชิงเส้น (คือ เส้นกราฟจะเป็นเส้นโค้งที่มีส่วนนูน และส่วนเว้า) ดังนั้น การหาว่า จะต้องจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะสร้างผลตอบแทนได้สูงสุด จึงเป็นสิ่งที่สำคัญ



แผนภาพที่ 47 ความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างกำไร และจำนวนสินค้า

โดยทั่วไปแล้ว ผลตอบแทนสูงสุด หรือกำไรสูงสุด ของการค้าขายหนึ่งๆ สามารถหาได้จากการแก้สมการ

$$\frac{d\,P(x)}{dx} = 0 \tag{5.9}$$

เมื่อ x คือ จำนวนสินค้า และ

P คือ ฟังก์ชันกำไร ที่ขึ้นกับจำนวนสินค้า x

หมายเหตุเพิ่มเติม ในทางคณิตศาสตร์ สมการ (5.9) สามารถให้ได้ทั้งค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุด ดังนั้น ตามหลักแล้ว จะต้องมีการทดสอบต่ออีกว่า ค่า x ที่ได้จากกระบวนการแก้สมการ(5.9) นั้น ให้ค่าอะไรกันแน่ โดยการใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง แต่ในหัวข้อนี้ ขอนำเสนอตัวอย่างเฉพาะกรณีที่ให้ค่าสูงสุดเท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.3</u> ถ้ากำหนดให้ ค่าใช้จ่ายในการผลิตรองเท้าจำนวน x คู่ คือ $-1{,}000 + 2x^2$ บาท และรายได้ทั้งหมดที่ได้จากการขายรองเท้าจำนวน x คู่ คือ $200x + 30$ บาท ถ้าสมมติว่า รองเท้าผลิตมาเท่าไหร่ ก็ขายได้หมด จงหาว่า จะต้องผลิตรองเท้าเป็นจำนวนกี่คู่ จึงจะได้ผลตอบแทนหรือกำไรสูงสุด

วิธีทำ

เราจะได้ ฟังก์ชันกำไร คือ ผลต่างของฟังก์ชัน รายได้ และฟังก์ชันรายจ่าย นั่นคือ

$$P(x) = (200x + 30) - (-1{,}000 + 2x^2)$$
$$P(x) = -2x^2 + 1{,}200x + 30$$

หากำไรสูงสุดได้จาก การแก้สมการ $P'(x) = -4x + 1{,}200 = 0$

จึงได้ว่า $x = 300$ ดังนั้น จะต้องผลิตรองเท้าเป็นจำนวน 300 คู่ จึงจะได้กำไรสูงสุด

และได้กำไรเป็นเงินทั้งสิ้น $P(x = 300) = -2(300)^2 + 1{,}200(300) + 30$

$$= 180{,}030 \text{ บาท}$$

แบบฝึกทักษะที่ 5.5.1 ถ้าบริษัทแห่งหนึ่งพบว่า สินค้าจำนวน x หน่วย(หน่วยละ 100 บาท) มีค่าใช้จ่าย คิดเป็นฟังก์ชัน ได้คือ $(14 + 3x) \times 1000$ บาท และรายได้ที่ได้จากการจำหน่ายสินค้าจำนวน x หน่วย(หน่วยละ 100 บาท) สามารถเขียนเป็นฟังก์ชัน ได้คือ $(19x + 3x^2) \times 1000$ จงหา

ก. เขียนฟังก์ชันกำไร

ข. หาจุดคุ้มทุน

ค. บริษัทจะต้องจำหน่ายสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะได้กำไรสูงสุด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

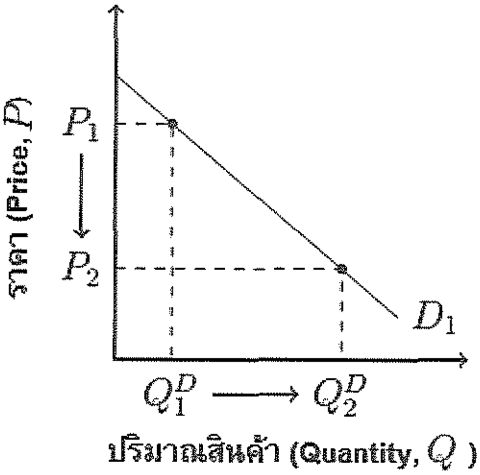
....

....

❖ อุปสงค์ *(Demand)* และ อุปทาน *(Supply)*

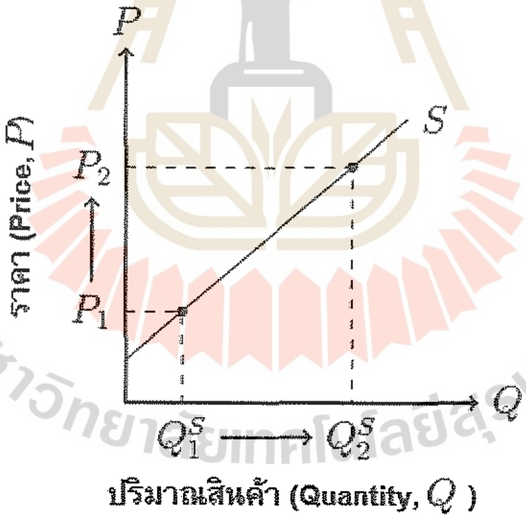
ที่ผ่านมา เราสมมุติมาตลอดว่า สินค้าผลิตมาเท่าไหร่ ก็สามารถขายได้หมด แต่ในความเป็นจริงแล้วเหตุการณ์ไม่ได้เป็นจริงอย่างนั้นเสมอไป ในการกำหนดราคาสินค้าของบริษัทหนึ่งๆ จะต้องมีการศึกษาความต้องการของผู้บริโภคเสียก่อน แน่นอนว่า ถ้ากำหนดราคาสินค้าสูงเกินไป จำนวนผู้ซื้อก็จะต้องน้อยลง และถ้าราคาสินค้าต่ำเกินไป จำนวนผู้ซื้อก็จะมากขึ้น จนไม่สามารถผลิตสินค้าได้ทัน ดังนั้น บริษัทนั้น จะต้องพิจารณาความต้องการที่จะซื้อของผู้บริโภคเสียก่อน ซึ่งในหัวข้อนี้ จะเกี่ยวข้องกับ อุปสงค์ และอุปทาน ดังนี้

อุปสงค์ (Demand, D) หมายถึง ปริมาณสินค้าและบริการชนิดใดชนิดหนึ่งที่มีผู้ต้องการซื้อ ณ ระดับราคาต่างๆ ของสินค้าชนิดนั้นภายในระยะเวลาใดเวลาหนึ่ง โดยสมมุติให้ปัจจัยอื่นๆ ที่กำหนดอุปสงค์คงที่ ความต้องการในที่นี้ต้องมีอำนาจซื้อ(purchasing power หรือ ability to pay)ด้วย ถ้าบุคคลใดบุคคลหนึ่งมีแต่ความต้องการในตัวสินค้าโดยไม่มีเงินที่จะจ่ายซื้อ เราเรียกความต้องการลักษณะนั้นว่า"ความต้องการ (want)" ไม่ใช่ "อุปสงค์ (demand)" และอุปสงค์นี้ก็มีกฎที่เป็นธรรมชาติของพฤติกรรมของมนุษย์ นั่นคือ "ปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อในขณะใดขณะหนึ่งจะมีความสัมพันธ์ในทางตรงกันข้ามกับราคาสินค้าชนิดนั้น" เราเรียกกฎนี้ว่า "กฎของอุปสงค์ (Law of Demand)" ดังแสดงใน **แผนภาพที่ 48**



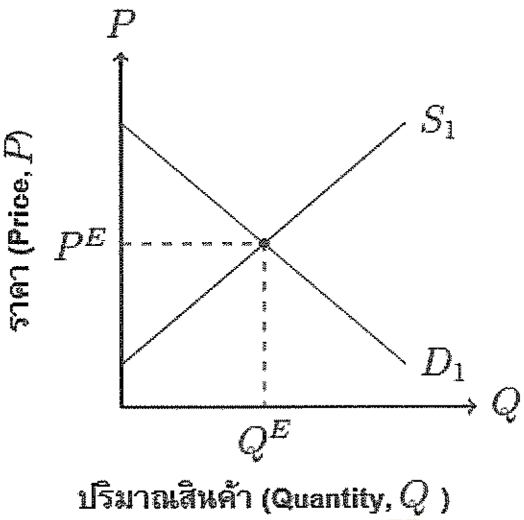
แผนภาพที่ 48 กฎของอุปสงค์ (Law of Demand) :เมื่อราคาลดลง ความต้องการสินค้าจะเพิ่มขึ้น

อุปทาน (Supply, S) หมายถึง ปริมาณสินค้าและบริการชนิดใดชนิดหนึ่งที่ผู้ผลิตเต็มใจนำออกเสนอขายในตลาดภายในระยะเวลาหนึ่ง ณ ระดับราคาต่างๆ กันของสินค้าและบริการนั้น โดยสมมติให้ปัจจัยอื่นๆ ที่กำหนดอุปทานคงที่ และมีกฎอยู่ว่า "ปริมาณสินค้าที่ผู้ผลิตเต็มใจจะนำออกขายในระยะเวลาหนึ่งขึ้นอยู่กับราคาสินค้านั้นๆ ในทิศทางเดียวกัน" เรียกว่า กฎของอุปทาน (Law of Supply) กล่าวคือ เมื่อราคาสินค้าสูงขึ้นปริมาณอุปทานจะเพิ่มขึ้น เนื่องจากผู้ผลิตมีความต้องการที่จะเสนอขายมากขึ้น เพราะคาดการณ์ว่าจะได้กำไรสูงขึ้น ในทางกลับกัน เมื่อราคาสินค้าลดลงปริมาณอุปทานจะน้อยลง เนื่องจากคาดการณ์ว่ากำไรที่ได้จะลดลง ดังแสดงใน**แผนภาพที่ 49**



แผนภาพที่ 49 กฎของอุปทาน (Law of Supply) :เมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้น ความต้องการที่จะผลิตสินค้าก็เพิ่มขึ้น

ดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium) โดยทั่วไปแล้ว ในการตลาด เมื่ออุปสงค์และอุปทานไม่เท่ากัน จะมีการปรับตัวจนกระทั่งเกิดสมดุลหรืออุปสงค์เท่ากับอุปทาน ดุลยภาพจะไม่เปลี่ยนแปลงตราบเท่าที่ปัจจัยที่กำหนดอุปสงค์และอุปทานไม่เปลี่ยนแปลง ราคาสินค้า ณ จุดที่อุปสงค์เท่ากับอุปทานเรียกว่า "ราคาดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium Price)" ปริมาณสินค้า ณ จุดนั้นเรียกว่า "ปริมาณดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium Quantity)" และเรียกจุดดังกล่าวว่า "ดุลยภาพตลาด (Market Equilibrium)" ดังแสดงใน**แผนภาพที่** 50



แผนภาพที่ 50 ดุลยภาพตลาด :ราคาดุลยภาพตลาด (P^E) เท่ากับ ปริมาณดุลยภาพตลาด (Q^E)

สรุปโดยรวมสิ่งที่ควรทราบเกี่ยวกับอุปสงค์ อุปทาน และดุลยภาพการตลาด

1. อุปสงค์ (Demad) หมายถึง จำนวนสินค้าและบริการที่ผู้บริโภคต้องการซื้อในขณะใด ขณะหนึ่ง โดยผู้บริโภคเต็มใจจะซื้อและมีความสามารถซื้อได้ ณ ระดับราคาที่ต่างกัน

2. อุปสงค์ประกอบด้วย ความต้องการ เต็มใจซื้อ และความสามารถที่จะจ่ายซื้อ

3. อุปสงค์เปลี่ยนแปลงได้เพราะ 1. ราคาสินค้าและบริการชนิดนั้นๆ 2. ระดับรายได้ของผู้บริโภค 3. รสนิยม ของผู้บริโภค 4. ราคาสินค้าอื่นๆ (สินค้าที่ลักษณะเดียวกันและทดแทน กันได้) 5. จำนวนผู้บริโภค 6. ฤดูกาล 7. ความเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ 8. การโฆษณา 9. การคาดคะเนเกี่ยวกับราคาสินค้า

4. อุปสงค์หรือความต้องการซื้อจะมีมากขึ้นเมื่อ ราคาของสินค้าหรือบริการลดลง

5. อุปสงค์หรือความต้องการซื้อจะลดน้อยลงเมื่อ สินค้าหรือบริการราคาสูงขึ้น

6. อุปสงค์แบ่ง 2 ประเภทคือ 1. อุปสงค์ส่วนบุคคล 2. อุปสงค์ตลาด

7. สินค้าที่ใช้ประกอบกันซึ่งมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของอุปสงค์ เช่น รถยนต์กับน้ำมัน กาแฟกับครีมเทียม อุปกรณ์ไฟฟ้ากับค่ากระแสไฟฟ้า ฯลฯ

8. อุปสงค์ส่วนบุคคล หมายถึง อุปสงค์ของผู้ซื้อคนใดคนหนึ่งโดยแสดง ให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างราคา ของสินค้าชนิดหนึ่งกับปริมาณของสินค้าชนิดนั้น

9. อุปสงค์ตลาด หมายถึง ผลรวมของปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคแต่ละคนต้องการจะซื้อ ณ ราคานั้น

10. อุปทาน (Suppy) หมายถึง ความต้องการเสนอขายสินค้าและบริการอย่างใดอย่างหนึ่ง ณ ระดับราคาต่างๆกัน ในช่วงเวลาใดช่วงเวลาหนึ่ง

11. กฎของอุปทาน เมื่อราคาสินค้าและบริการสูงขึ้น ผู้ผลิตหรือผู้ขายจะผลิตหรือนำสินค้าและ บริการออกมา ขายจำนวนมากขึ้น แต่เมื่อราคาสินค้าและบริการลดลง ผู้ผลิตหรือผู้ขายจะผลิตหรือนำสินค้าและบริการออกมาขายจำนวนน้อยลง (ปัจจัยอื่นคงที่)

12. ราคาดุลยภาพ หมายถึง ราคาที่ทำให้ปริมาณสินค้าและบริการที่ผู้บริโภคต้องการซื้อเท่ากับปริมาณสินค้า และบริการที่ผู้ผลิตหรือผู้ขายยินดีที่จะขาย

13. "ราคาดุลยภาพ " ถูกกำหนดขึ้นโดย ระบบตลาด ซึ่งจะมีเพียงราคาเดียวเท่านั้น
14. ปริมาณที่มีการซื้อขาย ณ ระดับราคาดุลยภาพ คือ ปริมาณดุลยภาพ
15. ราคาสินค้าจะถูกกำหนดขึ้นโดย อุปสงค์และอุปทานของตลาดสินค้า

<u>**ตัวอย่างที่ 5.5.4**</u> กำหนดให้ อุปสงค์ และอุปทาน เขียนในรูปของฟังก์ชันของราคา(หน่วยเป็นบาท) ดังต่อไปนี้

$$S = 2p + 3$$
$$D = -p + 12$$

จงหาราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพ

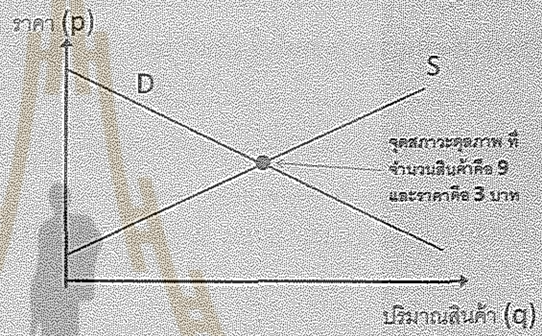
วิธีทำ

เนื่องจากสภาวะดุลยภาพ เกิดขึ้นเมื่อ อุปสงค์ เท่ากับ อุปทาน ดังนั้น จึงได้ว่า

$$S = D$$
$$2p + 3 = -p + 12$$

นั่นคือ ราคา ที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพคือ $p = 3$ บาท

ราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพนี้ เรียกว่า **"ราคาดุลยภาพ"**



แผนภาพที่ 51 การหาราคาดุลยภาพ ประจำตัวอย่างที่ 5.5.4

ซึ่งเมื่อนำค่าราคาดุลยภาพนี้ กลับไปแทนในฟังก์ชันทั้งสอง ก็จะทำให้ได้ว่า ปริมาณสินค้าที่ผู้ผลิตประสงค์จะผลิตเพื่อจำหน่าย จะเท่ากับปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคประสงค์จะซื้อ คือ 9 หน่วย ดังแสดงในแผนภาพที่ 51

แบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 จงใช้ความรู้ทางด้านต้นทุน รายได้ และผลตอบแทนสูงสุด ในการหาคำตอบของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) ถ้าในการผลิตสินค้าประเภทหนึ่ง ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกนั้น ต้องใช้ค่าใช้จ่ายแบบเหมา(ไม่ขึ้นกับจำนวนสินค้าที่จะผลิต) คือ 100 ดอลล่าห์ และขั้นตอนที่สองนั้น จะต้องเสียค่าใช้จ่ายในการผลิตสินค้า 1 ชิ้น เป็นเงิน 2.00 ดอลล่าห์ และตอนจำหน่าย สินค้านี้ 1 ชิ้น จำหน่ายได้ในราคา 2.50 ดอลล่าห์ จงหา

ก. ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

ข. ฟังก์ชันรายได้ในการสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

ค. ฟังก์ชันกำไรจากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

....

ง. จะต้องขายสินค้าเป็นจำนวนกี่ชิ้น ถึงจะถึงจุดคุ้มทุนพอดี

....

....

2) จากข้อมูลในข้อหนึ่ง ในเวลาต่อมา เนื่องจากการผลิตสินค้าประเภทนี้ มีในปริมาณที่มาก ดังนั้น ในขั้นตอนที่สองของการผลิตนั้น จึงได้กำหนดให้มีส่วนลดให้ ด้วยส่วนลด**เฉลี่ย**สำหรับการผลิตสินค้า x ชิ้น คิดเป็น $2 - 0.01x$ บาทต่อชิ้น(ลดเฉพาะในขั้นตอนที่สอง) และตอนจำหน่าย สินค้านี้ 1 ชิ้น จำหน่ายได้ในราคา 2.50 ดอลล่าห์ จงหา

ก. ฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

ข. ฟังก์ชันรายได้ในการสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

ค. ฟังก์ชันกำไรจากการขายสินค้านี้ เป็นจำนวน x ชิ้น

....

....

....

....

....

....

....

....

ง. จะต้องขายสินค้าเป็นจำนวนกี่ชิ้น ถึงจะถึงจุดคุ้มทุนพอดี

....

....

....

....

....

....

....

....

3) ถ้าการผลิตสินค้าประเภทหนึ่ง มีค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องอยู่ 2 ส่วน คือ

- ส่วนเหมา คิดเป็น 1000 ดอลล่าห์ (ไม่ว่าจะผลิตสินค้านี้เป็นจำนวนเท่าใดก็ตาม)
- ส่วนเฉลี่ย คือ สำหรับการผลิตสินค้าจำนวน x ชิ้น จะเสียค่าใช้จ่ายส่วนนี้ คิดเป็น $500 - 0.4x$ดอลล่าห์ต่อชิ้น จะต้องมีการตั้งราคาสินค้าเป็นกี่ดอลล่าห์ต่อชิ้น จึงจะทำให้จุดคุ้มทุนอยู่ที่ 800 ชิ้น

....

....

....

....

....

....

....

4) กำหนดให้ อุปสงค์ และอุปทาน เขียนในรูปของฟังก์ชันของราคา(หน่วยเป็นบาท) ดังต่อไปนี้

$$S = 0.04p + 8$$
$$D = -0.02p + 17$$

จงหาราคาที่ทำให้เกิดสภาวะดุลยภาพ

....

....

....

....

....

5) กำหนดให้

- ผู้ผลิตจะผลิตสินค้าเป็นจำนวนทั้งสิ้น 1,000 ชิ้น ถ้าราคาขายอยู่ที่ 20 ดอลล่าห์ต่อชิ้น และจะผลิตสินค้าเป็นจำนวน 1,500 ชิ้น ถ้าราคาขายอยู่ที่ 25 ดอลล่าห์ต่อชิ้น
- ผู้บริโภคยินดีซื้อสินค้าจำนวน 1,500 ชิ้น ถ้าราคาอยู่ที่ 20 ดอลล่าห์ต่อชิ้น แต่ปริมาณที่ต้องการซื้อจะลดลงร้อยละ 10 ถ้าราคาสินค้าเพิ่มขึ้นร้อยละ 5
- ทั้งฟังก์ชันอุปสงค์ และฟังก์ชันอุปทาน ดังกล่าว เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

จงพิจารณาหาฟังก์ชันอุปสงค์ ฟังก์ชันอุปทาน และจุดดุลยภาพ

....

....

....

....

....

....

....

....

6) จากข้อมูลแสดงในตารางที่ 16 ข้างล่างนี้ แต่ละชุดแสดงข้อมูลที่ต่างกัน ชุดหนึ่งคืออุปสงค์ และอีกชุดคืออุปทาน จงพิจารณาว่า

ตารางที่ 16 ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้า และราคา สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 6 (กำหนดราคาสินค้าหน่วยเป็นดอลล่าห์)

ปริมาณสินค้า (q)	22	15	35	45
ราคา A (p)	8	10	14	18
ราคา B (p)	16	14	10	6

ก. ข้อมูลชุดใด เป็นฟังก์ชันอุปสงค์ และข้อมูลชุดใดเป็นฟังก์ชันอุปทาน พร้อมแสดงเหตุผล

....

....

....

....

....

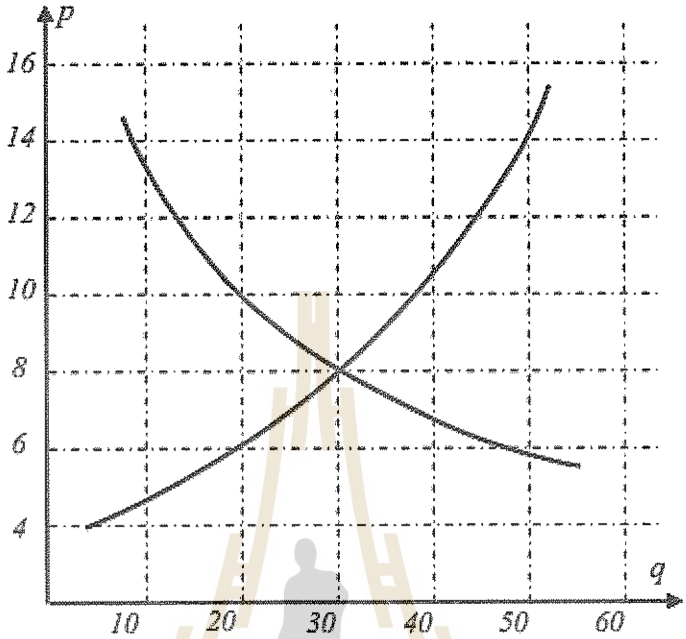
ข. เมื่อราคาเป็น 10 ดอลล่าห์ ผู้บริโภค ต้องการที่จะซื้อสินค้าเป็นจำนวนเท่าใด

....

ค. เมื่อราคาเป็น 10 ดอลล่าห์ ผู้ผลิต ต้องการที่จะผลิตสินค้า เป็นจำนวนเท่าใด

....

7) แผนภาพที่ 52 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์ และอุปทานของสินค้าชนิดหนึ่ง จงหา



แผนภาพที่ 52 ความสัมพันธ์ระหว่างอุปสงค์ และอุปทาน ของสินค้าชนิดหนึ่ง สำหรับแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2 ข้อ 7

ก. จุดดุลยภาพ คือจุดใด ....

ข. ความต้องการซื้อ และความต้องการขาย เป็นลักษณะอย่างไร เมื่อสินค้าราคา 6 ดอลล่าห์ และราคานี้ควรเพิ่มสูงขึ้นอีก หรือลดลง เพราะอะไร

....

....

....

ค. ในลักษณะเดียวกันกับข้อ ข. แต่ ณ. ราคาที่ 10 ดอลล่าห์

....

....

....

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

ส่วนที่ 1 ว่าด้วย ดอกเบี้ยและเงินปีเบื้องต้น

ดอกเบี้ยคงต้น

1. จากสถานการณ์ต่อไปนี้ จงกำหนด มูลค่าเริ่มต้น(P) อัตราอกเบี้ย(r) และจำนวนงวด(t)

   1.1 วันเฉลิมได้ยืมเงินเป็นจำนวน 15,000 บาท เพื่อที่จะจ่ายค่าเทอม และยืมมาแล้วเป็นเวลา 3 ปี ด้วยอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี

   1.2 ลำยองใฝ่ฝันว่าจะงานบวชให้วันเฉลิมหลังจากเรียนจบโดยใช้งบทั้งหมดประมาณ 20,000 บาท จึงได้ไปกู้ธนาคารมาในอัตราดอกเบี้ยแบบคงต้นที่ 15% ต่อปี และกำหนดใช้คืนในอีก 5 ปีข้างหน้า

2. จงหา เงินดอกเบี้ย(I) และมูลค่าอนาคต(S) ของเงินกู้แต่ละประเภทต่อไปนี้

   2.1 เงินกู้ 2,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี เป็นเวลา 3 ปี

   2.2 เงินกู้ 18,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 12.5 ต่อปี เป็นเวลา 6 เดือน

   2.3 เงินกู้ 5,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อเดือน เป็นเวลา 3 ปี

   2.4 เงินกู้ 16,000 บาท ที่ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ต่อปี เป็นเวลา 36 เดือน

3. จงคำนวณหาอัตราดอกเบี้ยแบบคงต้น(I)และจำนวนเงินที่ต้องใช้คืน(S)ของเงินกู้แต่ละประเภทต่อไปนี้

   3.1 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 10% ต่อปี เป็นเวลา 3 ปี 6 เดือน

   3.2 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 8% ต่อปี เป็นเวลา 18 เดือน

   3.3 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 12% ต่อปี เป็นเวลา 2 ปี 9 เดือน

   3.4 เงินกู้ 3,000 บาท ที่ดอกเบี้ย 8.5% ต่อปี เป็นเวลา 36 เดือน

4. ถ้าต้องเงินมูลค่า $750 ด้วยดอกเบี้ยแบบคงต้นในอัตรา 4.5% ต่อปี เป็นเวลา 5 ปี จะต้องนำเงินไปฝากเป็นจำนวนเท่าใด

5. จะต้องใช้เวลานานเท่าไร สำหรับการฝากเงินจำนวน 8,300 บาท ถึงจะได้เงินรวมทั้งสิ้น 3,087.60 บาท เมื่อมีการคิดดอกแบบคงต้นในอัตรา 6.2% ต่อปี

6. สันติได้รับมรดกจำนวน 245,000 บาท เขาจะต้องลงทุนเงินจำนวนนี้ในอัตราดอกเบี้ยเท่าไรถึงจะได้กำไรเป็นจำนวนเงิน 27,500 บาท ในทุก ๆ 18 เดือน

7. พีรสวัสดิ์ต้องการเงินจำนวน 15,000 บาท ในอีก 10 ปีข้างหน้า จงหาว่า ที่อัตราดอกเบี้ยแบบคงต้น 5% ต่อปี พีรสวัสดิ์จะต้องนำเงินเท่าไรไปเริ่มฝาก ณ วันนี้

8. ญาณิกาได้กู้เงินมาซื้อเครื่องสำอางชุดใหม่เป็นจำนวน 600 บาท ซึ่งเงินกู้นี้มีเวลา 2 ปี ในการใช้คืนและคิดดอกเบี้ยแบบคงต้นที่อัตรา 6% ต่อปี ถ้าญาณิกาต้องใช้คืนเป็นรายเดือนในช่วง 2 ปีนี้ เขาจะต้องใช้คืนเดือนละเท่าไร

9. จงหามูลค่าเริ่มต้นของเงิน 3,348 บาท ในเวลา 6 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 6.2% ต่อปี

10. จะต้องใช้เวลานานเท่าไรถึงจะทำให้เงิน 4,500 บาท มีมูลค่าเป็น 798.75 บาท ถ้าคิดดอกเบี้ยในอัตรา 7.1% ต่อปี

11. ในอัตราดอกเบี้ยเท่าไรที่จะทำให้เงินลงทุน 875 บาท ได้เงินดอกเป็นจำนวน 73.5 บาท ในเวลา 18 เดือน

12. จะต้องนำเงินไปฝากเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 1,800 บาท ในเวลา 2 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี

13. จะต้องนำเงินไปฝากเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 8,000 บาท ในเวลา 7 เดือน ที่อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

14. บ้านหลังหนึ่งราคา 120,000 บาท ถูกซื้อด้วยเงินมัดจำจำนวน 30,000 บาท เงินส่วนต่างจะถูกจ่ายเป็นงวด ๆ โดยมีค่างวดในอัตรา 7% ต่อปี เป็นเวลา 5 ปี

14.1 จงหาเงินดอกเบี้ยที่เกิดขึ้น

14.2 เงินที่ต้องจ่ายในแต่ละงวด

15. จงพิจารณาว่าถ้าต้องการยืมเงิน 15,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน ควรจะยืมจากธนาคารใด จากข้อมูลต่อไปนี้

- ธนาคารไทยพานัดคิดดอกเบี้ยที่ 5% ต่อปี โดยให้เวลา 3 ปี
- ธนาคารกสิกรเธอคิดดอกเบี้ยที่ 4% ต่อปี โดยให้เวลา 4 ปี

ดอกเบี้ยทบต้น

1. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหามูลค่าอนาคตและดอกเบี้ยที่เกิดขึ้นจากการคิดแบบทบต้น

1.1 เงินต้น 600 บาท เป็นเวลา 8 ปี อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี คิดทบต้นทุกเดือน

1.2 เงินต้น 1,000 บาท เป็นเวลา 5 ปี อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี คิดทบต้นทุกวัน

1.3 เงินต้น 750 บาท เป็นเวลา 12 เดือน อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี คิดทบต้นทุกสัปดาห์

1.4 เงินต้น 3,000 บาท เป็นเวลา 4 ปี อัตราดอกเบี้ย 9% ต่อปี คิดทบต้นสี่ครั้งต่อปี

2. ควรจะต้องนำเงินไปลงทุนเป็นจำนวนเท่าไรถึงจะได้เงินรวมเป็น 10,000 รูเปียห์(สกุลเงินประเทศอินโดนีเซีย) ถ้าคิดดอกแบบทบต้น ที่อัตรา 8% ต่อปี และคิดดอกทุก ๆ 6 เดือน เป็นเวลา 6 ปี

3. ต้องการที่จะลงทุนโดยมีเงินลงทุน 4,000 เปโซ(สกุลเงินประเทศฟิลิปปินส์) และมีทางเลือกการลงทุนอยู่สองประเภท คือ ทางเลือกที่หนึ่งให้ดอกเบี้ย 10% ต่อปี โดยคิดที่สิ้นปี ทางเลือกที่สองให้ดอกเบี้ย 9.75% ต่อปี โดยคิดทุก ๆ เดือน เป็นเวลา 1 ปี ถามว่าทางเลือกใดจะให้กำไรสูงกว่า

4. นางสาวพอลล่าได้ลงทุนเงินจำนวน 5,000 ริงกิต(สกุลเงินประเทศมาเลเซีย) ในอัตราดอกแบบทบต้น ที่อัตราดอก 6.2% ต่อปี คิดให้ทุก ๆ สิ้นเดือน จงหาว่าหลังจาก 5 ปี นางสาวพอลล่าจะมีเงินรวมเท่าไร

5. จะต้องลงทุนด้วยเงินจำนวนเท่าไรจึงจะได้เงินรวมเป็นจำนวน 13,000 ดอลลาร์สิงคโปร์ ในเวลา 5 ปี ที่ดอกแบบทบต้น 12% ต่อปี โดยคิดทุก ๆ 3 เดือน

6. จะต้องคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตราเท่าไร เมื่อต้องคิดดอกให้ทุก ๆ 3 เดือน เป็นเวลา 5 ปี จึงจะทำให้เงิน 3,000 ดอลลาร์บรูไน เพิ่มเป็นเงิน 3,500 ดอลลาร์บรูไน

7. นักลงทุนผู้หนึ่งได้ลงทุน 10,000 เรียล(สกุลเงินประเทศกัมพูชา) กับกองทุนที่ให้ดอก 8.5% ต่อปี คิดให้ปีละ 4 ครั้ง หลังจาก 3 ปี เขาจะได้รับเงินคืนเป็นจำนวนเท่าไร

8. บิดาของอนิรุตต์ได้ฝากเงินจำนวน 500 กีบ(สกุลเงินประเทศสาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว) ในวันที่อนิรุตต์เกิด ถ้าธนาคารคิดดอกแบบทบต้นและในวันเกิดครบรอบ 21 ปีของอนิรุตต์ พบว่ามีเงินในบัญชีทั้งหมด 1,326.65 กีบ จงหาอัตราดอกเบี้ยของการฝากดังกล่าว

9. ถ้าต้องการลงทุนเงินจำนวน 5,000 จ๊าด(สกุลเงินประเทศเมียนมาร์) ที่อัตราดอก 9% ต่อปี จงหาว่าต้องลงทุนนานเท่าไรจึงจะทำให้เงินเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า เมื่อคิดดอกให้ทุก ๆ 6 เดือน

10. จะต้องฝากเงินเป็นจำนวนเท่าใดจึงจะได้เงินทั้งหมด 6,000 ด่ง(สกุลเงินประเทศเวียดนาม) ในเวลา 6 เดือน ถ้าธนาคารคิดดอกแบบทบต้นที่ 5% ต่อปี คิดให้ทุกเดือน

เงินปี

1. สำหรับสถานการณ์แต่ละข้อต่อไปนี้ จงหามูลค่าปัจจุบัน

   1.1) ส่งเงินงวดเดือนละ 2000 บาท เป็นเวลา 5 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยปีละ 6% และคิดแบบทบต้นให้ทุกๆเดือน

   1.2) ส่งเงินงวด 5500 บาท ทุกๆ 4 เดือน เป็นเวลา 6 ปีครึ่ง ที่อัตราดอกเบี้ย 5.6% ต่อปี คิดแบบทบต้นให้ทุกๆงวด

   1.3) ส่งเงินงวด 150 บาท ทุกๆเดือน เป็นเวลา 3 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยปีละ 8% และคิดแบบทบต้นให้ทุกๆ 6 เดือน

   1.4) อภินัชต้องการที่จะนำเงินก้อนมาลงทุนและต้องการที่จะได้เงินคืนเป็นงวดๆ งวดละเดือนและเดือนละ 100 บาท ต่อเนื่องไปเป็นเวลา 5 ปี ถ้ามีการคิดดอกเบี้ยที่อัตรา 7.5% ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นเดือน แล้วจงหาว่า อภินัชจะต้องนำเงินเท่าไหร่มาลงทุนในเริ่มต้น

2. จากสถานการณ์ต่อไปนี้ จงหาว่า แต่ละงวด จะต้องนำเงินมาเกี่ยวข้อง งวดละเท่าไหร่

   2.1) ยืมเงินก้อนมาจำนวน 25000 บาท มีกำหนดส่งเป็นงวดๆละเดือนเป็นเวลา 4 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 5.25% ต่อปี

   2.2) นายทหารคนหนึ่งได้รับเงินก้อนหลังเกษียณอายุราชการจำนวน 325,000 และมีบริษัทการเงินแห่งหนึ่งเสนอต่อเขาว่า ถ้านำเงินก้อนนี้มาลงทุนร่วม บริษัทนี้จะจ่ายเงินคืนให้ทุกๆเดือน เป็นเวลาถึง 15 ปี ที่อัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นรายเดือนที่ 8% ต่อปี จงหาว่า บริษัทนี้จะต้องจ่ายเงินให้กับนายทหารคนนี้ในจำนวนเดือนละเท่าไหร่

   2.3) วีรพงษ์เป็นทนายประจำตระกูลใหญ่แห่งหนึ่งที่เมื่อเจ้าบ้านถึงแก่กรรมแล้ว ได้มอบหมายให้วีรพงษ์นำเงินมรดกจำนวน 28,000 ดอลล่าห์ จ่ายให้กับบุตรคนโตเพื่อใช้ในการศึกษาเล่าเรียนในทุกๆเดือน เป็นจำนวน 4 ปี ที่อัตราดอกเบี้ย 0.625% ต่อเดือน จงหาว่า วีรพงษ์จะต้องจ่ายให้กับบุตรคนดังกล่าว เดือนละเท่าไหร่

3. สามีภรรยาคู่หนึ่งต้องการที่จะสะสมเงินไว้ให้ลูกชายได้ใช้ศึกษาต่อในระดับมหาวิทยาลัยโดยเขาทั้งคู่ต้องการที่จะลงทุนกับกองทุนเงินปีกองทุนหนึ่งที่เมื่อถึงเวลาแล้วกองทุนนี้จะสามารถจ่ายให้ลูกชายของเขาได้ในนอัตรา 1000 บาทต่อเดือนเป็นเวลา 4 ปี จงหามูลค่าปัจจุบันของเงินปีนี้ ถ้าคิดดอกเบี้ยที่ 8% ต่อปี

4. จตุพัฒน์ได้กู้เงินจำนวน 20000 บาท เพื่อซื้อรถยนต์และต้องการที่จะส่งงวดรายเดือนเป็นเวลา 4 ปี ที่อัตรดอกเบี้ย 10.5%/ปี เขาจะต้องจ่ายงวดละเท่าไร

5. สุเทพได้วางแผนไว้ว่า เมื่อตนเกษียญในอีก 20 ปีข้างหน้าอยากได้เงินก้อนเป็นจำนวน 300,000 บาท จึงได้ตัดสินใจนำเงินไปฝากไว้กับกองทุนสำหรับผู้เกษียญ และกองทุนนี้ได้คิดดอกเบี้ยให้กับสุเทพในอัตรา 5% ต่อปีและคิดให้ทุกๆเดือน จงหาว่า ด้วยเงื่อนไขเหล่านี้ สุเทพจะต้องนำเงินไปฝากเข้ากองทุนนี้ในทุกๆสิ้นเดือน เป็นครั้งละเท่าไหร่

6. จงหามูลค่าอนาคตของเงิน 1200 บาทที่ฝากเข้ากองทุนๆหนึ่งเป็นประจำทุกๆสิ้นปี เป็นเวลา 15 ปีอย่างต่อเนื่องไม่ขาด โดยกองทุนนี้ได้ให้ดอกเบี้ยในอัตราร้อยละ 7 ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นปี

7. อนุสาเป็นผู้จัดการบริษัทแห่งหนึ่ง และตั้งกองทุนออมให้กับพนักงานในสำนักงาน โดยกองทุนนี้มีระยะเวลา 5 ปี หลังจากสอบถามพนักงานแล้วพบว่า พนักงานมีกำลังจ่ายในอัตราครั้งละ 3000 ดอลล่าห์และปีละ 4 ครั้ง ในการติดดอกเบี้ยนั้น อนุสาเสนอการให้ดอกเบี้ยในอัตรา 8% ต่อปี และคิดให้ปีละ 4 ครั้ง จงหาว่า พนักงานหนึ่งคน จะได้รับเงินคืนเมื่อสิ้นปีที่ 5 เป็นจำนวนเท่าใด

8. วิเชียรเป็นพนักงานคนหนึ่งในบริษัทของอนุสา(จากข้อ 7.) หลังจากลงทุนในกองทุนกับอนุสาแล้ว พบว่า ตนเองยังตงมีเงินเหลือเก็บอยู่บ้าง จึงได้นำเงินจำนวน 500 ดอลล่าห์ไปฝากไว้กับกองทุนอีกกองทุนหนึ่งในทุกๆ เดือน เขาวางแผนไว้ว่าจะลงทุนกับกองทุนนี้เป็นเวลา 10 ปี ในอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปี คิดแบบทบต้นให้ทุกๆ สิ้นเดือน จงหาว่า เมื่อสิ้นปีที่ 10 แล้ว วิเชียรจะได้เงินก้อนกลับคืนมาเท่าไหร่ในการลงทุนกับกองทุนนี้
9. อยู่มาวันหนึ่งอนุสาพบว่า ในอีก 5 ปีข้างหน้า บริษิทของตนต้องซื้อเครื่องพิมพ์เอกสารเครื่องใหม่ให้กับบริษัท จากการคาดคะเนพบว่า เครื่องพิมพ์เอกสารเครื่องหนึ่งในอีก 5 ปีข้างหน้านั้นจะมีราคาประมาณ 33,000 บาท อนุสาจึงได้นำเงินจำนวนหนึ่งไปฝากกับธนาคารในประเภทฝากประจำ โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ 8 ต่อปีและคิดให้ทุกๆสิ้นเดือน จงหาว่า ด้วยความจำเป็นเหล่านี้ อนุสาจะต้องนำเงินไปฝากคิดเป็นเดือนละเท่าไหร่ จึงจะสามารถมีเงินก้อนเพื่อซื้อเครื่องพิมพ์เอกสารใหม่ได้ในอีก 5 ปีข้างหน้า
10. อิศรานำเงินไปฝากไว้กับกองทุนเพื่อหวังจะได้เงินก้อนกลับคืนเมื่อถึงเวลาอันสมควร เค้าฝากกับกองทุนนี้เป็นจำนวน 150 โครเนอร์ ในทุกๆสิ้นเดือน ติดต่อกันเป็นเวลา 5 ปี ถ้ากองทุนนี้คิดดอกเบี้ยให้ในอัตราร้อยละ 7 ต่อปี และคิดทบต้นให้ทุกๆสิ้นเดือน แล้ว จงหาว่า เมื่อครบกำหนดเวลา อิศราจะได้เงินก้อนคืนเป็นจำนวนเท่าไหร่

<u>ส่วนที่ 2 ว่าด้วย กลไกทางการตลาดเบื้องต้น</u>

1. จากสถานการณ์จำลองแต่ละข้อต่อไปนี้ จงอธิบายผลกระทบที่จะเกิดต่อ อุปสงค์ อุปทาน ราคาดุลภาพ และปริมาณดุลยภาพ

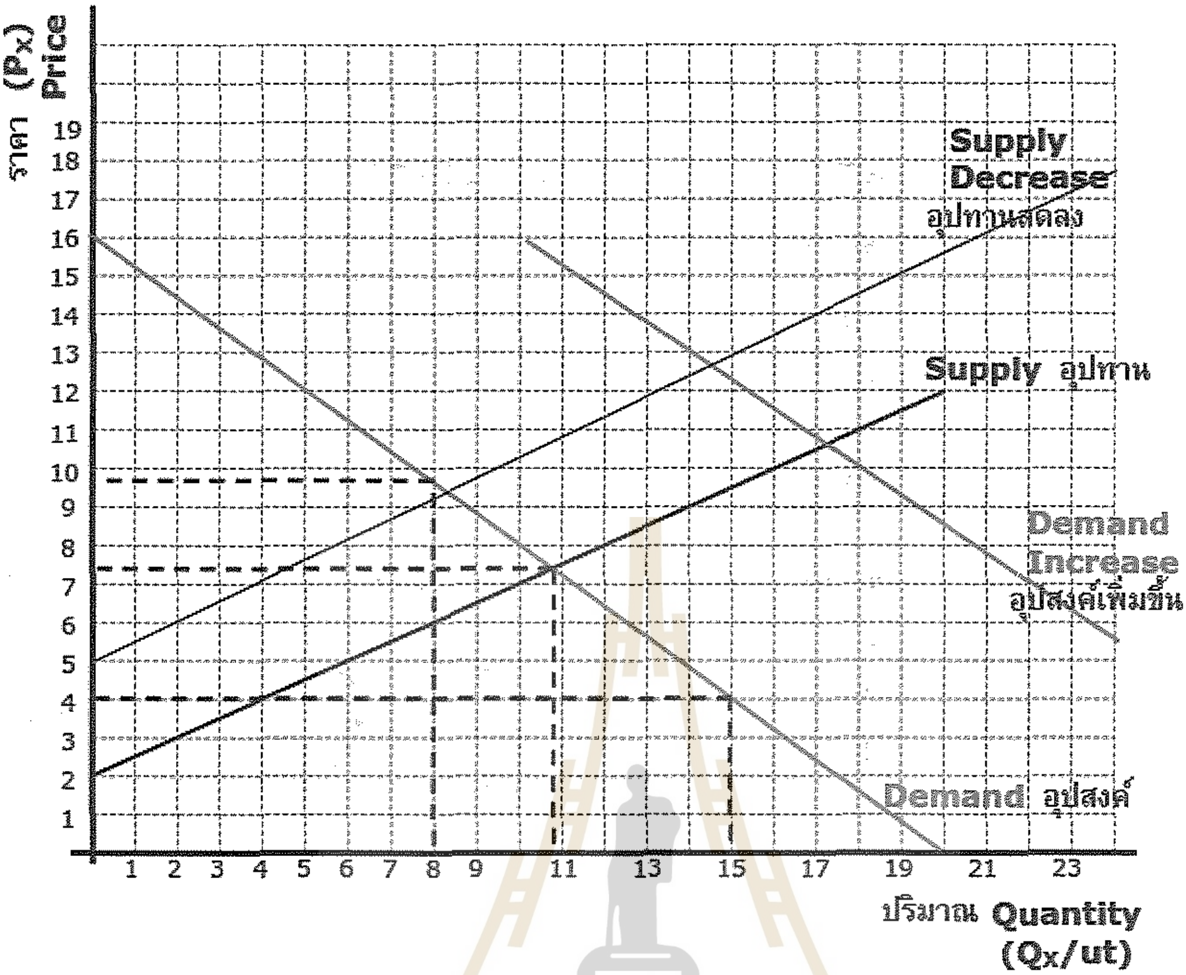
   1.1 สมมติมีข่าวออกมาว่า ชอคโกแลตเป็นสาเหตุของโรคมะเร็งร้ายแรง จะเกิดอะไรขึ้นกับบริษัทผู้ค้าชอคโกแลต

   1.2 สมมติบริษัท ก. และ ข. เป็นบริษัทที่ผลิตสินค้าชนิดเดียวกัน ถ้าเกิดมาวันหนึ่ง บริษัท ก. เกิดขึ้นราคาสินค้าของตนเอง แล้วอะไรจะเกิดขึ้นกับบริษัท ข.

   1.3 ในตลาดการค้าของชอคโกแลต สมมติว่าราคาน้ำตาลซึ่งเป็นผลผลิตหลัก เพิ่มสูงขึ้น แล้วจะเกิดอะไรขึ้นกับกลไกการตลาดของชอคโกแลต

   1.4 และในตลาดการค้าของชอคโกแลตอีกอีกเช่นกัน ถ้ามาวันหนึ่ง บริษัทผู้ผลิตได้นำเข้าเครื่องบรรจุสินค้าที่สามารถบรรจุสินค้าได้ดีกว่าและเร็วกว่าเครื่องเดิมเป็นอย่างยิ่ง แล้วอะไรจะเกิดขึ้น

2. จากกราฟด้านล่าง มีข้อสรุปโดยรวมได้ว่า เมื่อผู้ผลิตขึ้นราคาสินค้า $ 1 จะทำให้ผู้บริโภคลดการซื้อสินค้าลงไปประมาณ 1.25 หน่วย จงตอบคำถามดังต่อไปนี้



2.1 จงหาฟังก์ชันของจำนวนสินค้า (Q) ที่ผู้บริโภคต้องการซื้อ ให้อยู่ในรูปของราคา (P)

2.2 จากข้อ 2.1 จงเขียนสมการที่แสดงราคา ในรูปของปริมาณ

2.3 เมื่อสินค้าราคา $ 4 จงหาว่าปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคต้องการซื้อนั้น มีจำนวนเท่าใด

2.4 ราคาสูงสุดที่ผู้ซื้อยินดีซื้อสินค้าในจำนวน 8 หน่วย คือเท่าใด

2.5 จงหาสมการของเส้นอุปทาน

2.6 ถ้าดูจากกราฟด้านบน จงคำนวณหาราคาดุลยภาพ

2.7 ถ้าดูจากกราฟด้านบน จงคำนวณหาปริมาณดุลยภาพ

2.8 ถ้าคำนวณจากสมการ ณ จุดสมดุลการตลาด จะได้ราคาดุลยภาพและปริมาณดุลยภาพเป็นเท่าใด

2.9 จากกราฟ จะเกิดอะไรขึ้นถ้ามีการเพิ่มขึ้นของอุปสงค์

2.10 จากกราฟ จะเกิดอะไรขึ้นถ้ามีการเพิ่มขึ้นของอุปทาน

เฉลยแบบฝึกทักษะบทที่ 5 การจัดสรรทรัพยากรทางการเงินขั้นต้น

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.1 ดอกเบี้ยคงต้น</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.1

1) สหกรณ์คิดดอกเบี้ยร้อยละ 4.8 ต่อปี
2) ลุงจอห์นกู้เงินมาแล้วเป็นเวลาประมาณ 3 ปี
3) เงินที่กู้มามีจำนวนประมาณ 428,572 บาท
4) ดอกเบี้ยเท่ากับ 1,312.5 บาท และเงินรวมเท่ากับ 36,312.5 บาท
5) อัตราเงินกู้เท่ากับร้อยละ 4 ต่อปี
6) จะต้องนำเงินจำนวน 15,000 บาท ไปปล่อยกู้
7) เป็นระยะเวลา 20 ปี

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.2 ดอกเบี้ยทบต้น</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.2

1) จำนวนเงินที่ได้รับคืนคือ 18,009 บาท และจำนวนดอกเบี้ยเท่ากับ 8,009 บาท
2) ใน 2 ปี เอกชาติจะต้องเสียดอกเบี้ย รวมทั้งสิ้น 96,750 บาท
3) จะได้เงินรวม เป็นจำนวนทั้งสิ้น 60,755.32 บาท
4) มูลค่าปัจจุบันเท่ากับ 28,277.88 บาท
5) จะต้องฝากเงินเป็นจำนวน 28,138.33 บาท
6) ดอกเบี้ยรวมที่จะได้รับจากธนาคารแรกจะเท่ากับ 4661.94 บาท
   และดอกเบี้ยรวมที่จะได้รับจากธนาคารแห่งที่สองจะเท่ากับ 4717.11 บาท
7) ยายแหลมจะได้เงินสะสมรวมทั้งหมดเท่ากับ 2,125.63 ดอลล่าห์ โดยในนี้เป็นดอกเบี้ยทั้งหมด 805.63 ดอลล่าห์
8) นักศึกษาจะต้องเปิดบัญชีด้วยเงินเป็นจำนวนทั้งสิ้น 52,418.36 บาท

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.3 เงินปี</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.3

1) - ติดตามในชั้นเรียน -
2) มูลค่าปัจจุบันของการสะสมนี้ใน 10 ปีข้างหน้าคือ 29,755 บาท
3) เมื่อสิ้น 3 ปี สามี-ภรรยาคู่นี้จะมีเงินในบัญชีเป็นจำนวนทั้งสิ้น 15,501.33 บาท
4) ผู้ปกครองของ น.ส.เรยา ต้องฝากเข้าบัญชีเป็นจำนวน 2,369.93 บาท ทุกๆ 6 เดือน
5) เงินทั้งหมดที่จะได้ คือ 75,062.53 บาท
6) จะได้รับเงินคืน เป็นจำนวน 122,998.1 บาท
7) ราคาเงินสดของทีวีเครื่องนี้ คือ 30,006.25 บาท
8) จะต้องผ่อนเดือนละ 15,149.51 บาท

<u>เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.4 ภาษี</u>

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.4

1) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 15,600 บาท
2) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 54,000 บาท
3) ไม่ต้องเสียภาษี
4) ต้องเสียภาษี เป็นจำนวน 19,500 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 5.5 ต้นทุน รายได้ และผลตอบแทนสูงสุด

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.5.1

ก. - ติดตามในชั้นเรียน -

ข. - ติดตามในชั้นเรียน -

ค. - ติดตามในชั้นเรียน -

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.5.2

1) ก. $C(x) = 100 + 2x$ ข. $R(x) = 2.5x$ ค. $P(x) = -100 + 0.5x$

ง. จะต้องขายเป็นจำนวน $x = 200$ ชิ้น

2) ก. $C(x) = 100 + 2x - 0.01x^2$ ข. $R(x) = 2.5x$ ค. $P(x) = -100 + 0.5x + 0.01x^2$

ง. จะต้องขายเป็นจำนวน $x = 78$ ชิ้น

3) ควรตั้งราคาสินค้านี้ไว้ที่ ชิ้นละ 1.475 ดอลล่าห์

4) ราคาดุลยภาพ คือ 250 บาท

5) ฟังก์ชันอุปสงค์คือ $D(q) = \frac{-1}{150}q + 30$ ฟังก์ชันอุปทานคือ $S(q) = 0.1q + 10$

และราคาดุลยภาพ คือ 28.75 บาท

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท

<u>ส่วนที่ 1 ว่าด้วย ดอกเบี้ยและเงินปีเบื้องต้น</u>

ดอกเบี้ยคงต้น

2.

2.1 I=480 , S=2,480   2.2 I=1,125 , S=19,125   2.3 I=2,700 , S=7,700   2.4 I=3,840 , S=19,840

3.

3.1 I=1,050 , S=4,050   3.2 I=360 , S=3,360   3.3 I=990 , S=3,990   3.4 I=765 , S=3,765

4. P=$333.33   5. ต้องฝากเงินเป็นเวลา 6 ปี   6. จะต้องลงทุนในอัตราดอกเบี้ย 7.5% ต่อปี

7. 10,000 บาท   8. เดือนละ 28 บาท   9. ใช้เวลาทั้งสิ้น 2 ปี 6 เดือน

11. 6.5% ต่อปี   12. 7,729.47 บาท โดยประมาณ   14. 14.1 94,500 บาท   14.2 1,025 บาท

15. ธนาคารไทยพานัดคุมกว่า

ดอกเบี้ยทบต้น

1.

1.1 S=1,135.47 บาท , I=535.47 บาท   1.2 S=1,821.94 บาท , I=821.94 บาท

1.3 S=796.35 บาท , I=46.35 บาท   1.4 S=4,282.86 บาท , I=1,282.86 บาท

2. P=6,245.97 รูเปียห์   3. ทางเลือกที่สอง โดยได้เงินรวมทั้งสิ้น 4,407.91 เปโซ

4. 6,811.69 ริงกิต   5. ควรเริ่มต้นด้วยเงินจำนวน 7,197.78 ดอลลาร์สิงคโปร์

6. 3.096% ต่อปี   7. 12,870.19 เรียล

8. 4.8% ต่อปี   9. 7.9 ปี โดยประมาณ   10. P=5,852.163 ด่ง

เงินปี

1.

1.1) R = 2,000, i = 0.06/12, n=60 ดังนั้น P = 103,451.12

1.2) R = 5,500, i = 0.056/4, n = 26 ดังนั้น P = 119,174.41

1.3) R = 150x6, i = 0.08/2, n = 3x2 ดังนั้น P = 4,717.92

1.4) R = 100, i = 0.075/12, n = 60 ดังนั้น P = 4,990.53

2.

2.1) P = 25000, i = 0.0525/12, n = 48 ดังนั้น R = 578.57

2.2) P = 325,000, i = 0.08/12, n = 180 ดังนั้น R = 3105.87

2.3) P = 28,000, i = 0.00625, n = 48 ดังนั้น R = 677.01

3. R = 1000, i = 0.08/12, n=48 ดังนั้น P = 40961.91

4. P = 20000, i = 0.105/12, n=48 ดังนั้น R = 512.07

5. S = 300,000, i = 0.005/12, n = 12x20 ดังนั้น R = 729.87

6. R = 1,200, i = 0.07, n = 15 ดังนั้น S = 30,154.83

7. R = 3,000, i = 0.08/12, n = 5x4 ดังนั้น S = 72,892.11

8. R = 500, i = 0.07/12, n = 10x12 ดังนั้น S = 86,542.40

9. S = 33,000, i = 0.08/12, n = 12x5 ดังนั้น R = 449.12

10. เมื่อฝากครบ 5 ปีแล้ว อิศราจะได้เงินก้อนคืนเป็นจำนวน 10,738.98 โครเนอร์

ส่วนที่ 2 ว่าด้วย กลไกทางการตลาดเบื้องต้น

1)

1.1 ตอบ อุปสงค์จะลดลง (เส้นกราฟอุปสงค์จะเลื่อนไปทางซ้าย) ทำให้ ราคาดุลยภาพลดลง และปริมาณดุลยภาพลดลงด้วย

1.2 ตอบ อุปสงค์ของบริษัท ข. จะเพิ่มขึ้น (เส้นกราฟอุปสงค์ของบริษัท ข. จะเลื่อนไปทางขวา) ส่งผลให้ ราคาดุลภาพเพิ่มขึ้น พร้อมๆกับปริมาณดุลยภาพด้วยเช่นกัน

1.3 ตอบ อุปทานจะลดลง (เส้นกราฟอุปทานจะเลื่อนไปทางซ้าย) ยังผลให้ ราคาดุลภาพเพิ่มขึ้นแต่ปริมาณดุลยภาพลดลง

1.4 ตอบ อุปทานจะเพิ่มขึ้น (เส้นกราฟอุปทานจะเลื่อนไปทางขวา) ยังผลให้ ราคาดุลยภาพลดลงในขณะที่ปริมาณดุลยภาพเพิ่มขึ้น

2)

2.1) $Q = 20 - 1.25P$ 2.2) $P = 16 - 0.8Q$ 2.3) 15 หน่วย

2.4) $ 9.60 2.5) $P = 2 + 0.5Q$ หรือ $Q = -4 + 2P$

2.6)ประมาณ $ 7.40 2.7)ประมาณ 10.8 หน่วย

2.8) ประมาณ $ 7.385 และ 10.769 หน่วย ตามลำดับ

2.9) การเพิ่มขึ้นของอุปสงค์ จะทำให้ทั้งปริมาณดุลยภาพและราคาดุลยภาพสูงขึ้น (ดูจากเส้นกราฟ "อุปสงค์เพิ่มขึ้น")

2.10) การเพิ่มขึ้นของอุปทาน จะทำให้ราคาดุลยภาพสูงขึ้น แต่ปริมาณดุลยภาพลดลง (ดูจากเส้นกราฟ "อุปทานลดลง")

บทที่ 6

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

ในธุรกิจรูปแบบต่างๆ เรามักจะให้ความสำคัญกับผลตอบแทนที่ได้จากการลงทุนหนึ่งๆ เสมอ โดย ยิ่งกำไรมาก ก็ยิ่งดี หาแต่ว่า การประกอบธุระกิจหนึ่งๆ นั้น จำเป็นที่จะต้องมีการลงทุนกับปัจจัยหลายอย่าง อาทิ วัตถุดิบ แรงงาน พื้นที่จัดเก็บ และเงื่อนไขประกอบอื่นๆ ที่สำคัญ จึงทำให้เป็นการยากที่จะพิจารณาว่า ต้องใช้ลงทุนกับปัจจัยและองค์ประกอบส่วนไหน ในอัตราส่วนเท่าไหร่ จึงจะทำให้เกิดกำไรสูงสุด หรือต้องจัดการกับทรัพยากรเหล่านั้น แบบใด ถึงจะประหยัดสูงสุด ในส่วนของการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาที่ประกอบด้วยเงื่อนไขหลายอย่างนั้น สามารถจัดการได้ โดยการใช้กำหนดการเชิงเส้นมาช่วย

ในบทนี้ เราจะได้ทำการศึกษาการนำเอากำหนดการเชิงเส้นมาอธิบายปัญหาระบบหนึ่ง แล้วขั้นต่อไปคือการศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของระบบกำหนดการเชิงเส้นนั้น

6.1 กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programing)

ตัวอย่างเหตุการณ์ที่เราสามารถใช้กำหนดการเชิงเส้นมาช่วยแก้ได้ อาทิ ถ้านักศึกษาคนหนึ่ง มีความจำเป็นที่จะต้องทำงานควบคู่กับการเรียนด้วย เนื่องจากทางบ้านมีฐานะยากจน และไม่มีความประสงค์จะกู้ยืมกองทุน กยศ. นักศึกษาคนนี้จึงจำเป็นที่จะต้องทำงาน 2 ประเภท และงานทั้งสองประเภทนี้ให้ค่าตอบแทนที่แตกต่างกัน คือ งานส่งพิซซ่ามีอัตราจ้างเท่ากับ 25 บาทต่อชั่วโมง และงานผู้ช่วยคุมห้องคอมพิวเตอร์จ่ายในอัตรา 38 บาทต่อชั่วโมง ถ้านักศึกษาคนนี้ สามารถทำงานได้แค่ 30 ชม. ต่อสัปดาห์ และต้องสร้างรายได้อย่างน้อย 1,250 บาทต่อสัปดาห์ จึงจะสามารถอยู่ได้ คำถามคือ นักศึกษาคนนี้จะต้องทำงานในงานแต่ละประเภทเป็นจำนวนกี่ชั่วโมงในหนึ่งสัปดาห์ จึงจะสามารถสร้างรายได้ได้ตามที่ต้องการ

ปัญหาลักษณะแบบนี้ มักพบบ่อยๆ ซึ่งก่อนที่เราจะสามารถนำความรู้ทางกำหนดการเชิงเส้นมาแก้ได้ เรามีความจำเป็นที่จะต้องทราบองค์ประกอบสำคัญพื้นฐานเสียก่อน นั่นคือ การมีความเข้าใจในหลักการเขียนกราฟแสดงสมการ และอสมการเชิงเส้น เช่น เราจะสามารถวาดกราฟของอสมการเชิงเส้น $ax + by \leq c$ หรือ $ax + by \geq c$ เพื่อหาพื้นที่ที่แสดงความเป็นไปได้ของผลเฉลยทั้งหมด ได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

1. วาดเส้นกราฟขอบเขตคือ $ax + by = c$ ซึ่งเส้นตรงนี้ จะแบ่งพื้นที่ระนาบ ออกเป็นสองฝ่าย ซ้าย และ ขวา หรือ บน และ ล่าง

2. สุ่มจุดพิกัดขึ้นมา 1 จุดจากฝั่งใดฝั่งหนึ่งของเส้นดังกล่าว แล้วลองนำไปแทนค่าในอสมการเริ่มต้น $ax + by \leq c$ หรือ $ax + by \geq c$

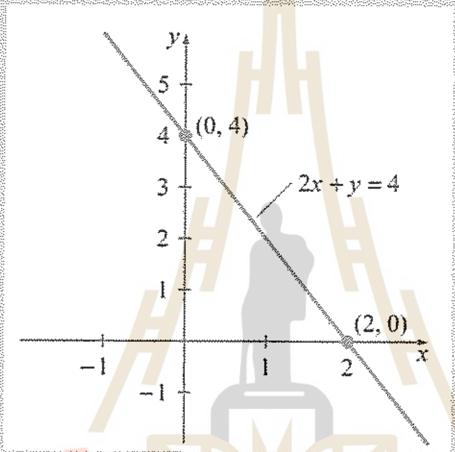
3. ถ้าจุดที่เลือกมานั้น ทำให้อสมการที่ทดสอบเป็นจริง จะได้ทันทีว่า จุดทุกจุดที่อยู่ฝั่งเดียวกันกับจุดดังกล่าวนั้น เป็น "ผลเฉลย" ของอสมการดังกล่าว และให้แรเงาพื้นที่ตรงไหนเพื่อบ่งบอกชัดเจน เรียกพื้นที่ดังกล่าวที่แรเงานั้นว่า "พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ (Possible Soloution Area)"

<u>ตัวอย่างที่ 6.1.1</u> จงวาดกราฟและระบายพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของอสมการ

$2x + y \leq 4$

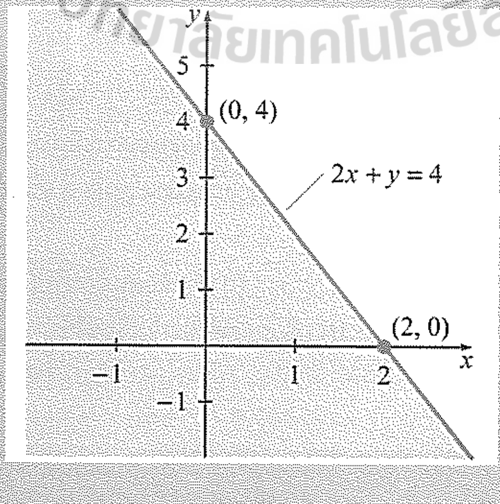
วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เราจะพยายามวาดกราฟเส้นตรง $2x + y = 4$ ก่อน ได้โดยง่าย ดังนี้



ขั้นที่ 2 เราจะสมมติจุดที่อยู่ทางซ้ายมือของเส้นมา 1 จุด ในที่นี้ให้เป็นจุดที่ชัดที่สุดคือจุดกำเนิด (0,0) แล้วแทนในอสมการเริ่มต้น จะได้ว่า $2(0) + 0 = 0$ ซึ่งให้ค่าที่น้อยกว่า 4 ดังนั้น จุด (0,0) นี้ ทำให้อสมการนั้นเป็นจริง

ขั้นที่ 3 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า จุดต่างๆ ที่อยู่ฝั่งเดียวกันกับจุด (0,0) นั้น ทำให้อสมการเป็นจริงเช่นเดียวกัน จึงทำให้สามารถระบายพื้นที่ "ที่ผลเฉลยเป็นไปได้" ดังรูปข้างล่างนี้



หลักการพิจารณาพื้นที่ของผลเฉลย

1. พื้นที่ผลเฉลยของอสมการ $y \geq mx + c$ จะเป็นพื้นที่ที่อยู่**เหนือ**เส้นตรง $y = mx + c$ และรวมถึงจุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นตรง $y = mx + c$ นั้นด้วย

2. พื้นที่ผลเฉลยของอสมการ $y \leq mx + c$ จะเป็นพื้นที่ที่อยู่**ข้างล่าง**เส้นตรง $y = mx + c$ และรวมถึงจุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นตรง $y = mx + c$ นั้นด้วย

ตัวอย่างที่ 6.1.2 จงวาดกราฟและระบายพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของระบบอสมการ

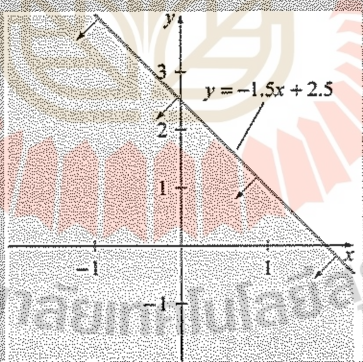
$$3x + 2y \leq 5$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

วิธีทำ

เพื่อความสะดวก ขั้นแรก เราจะพยายามเขียนอสมการแรกนั้น ให้อยู่ในรูปที่มีแต่ตัวแปร y อยู่ทางซ้ายมือก่อน ซึ่งทำได้ดังนี้

$$3x + 2y \leq 5$$
$$2y \leq -3x + 5$$
$$y \leq -3/2\,x + 5/2$$
$$y \leq -1.5\,x + 2.5$$

ซึ่งเราจะสามารถหาพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของอสมการนี้ดังรูปภาพข้างล่างนี้

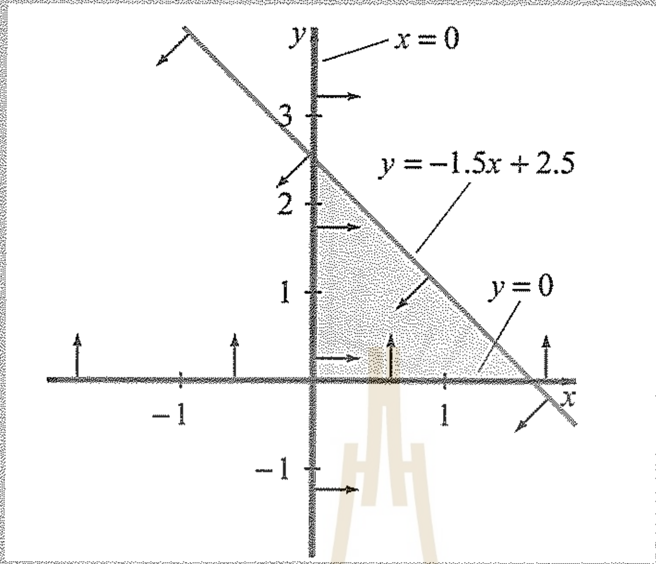


ขั้นต่อมา เราจำเป็นที่จะต้องพิจารณาพื้นที่ของผลเฉลยของอสมการอีก 2 อสมการที่เหลือ คือ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ ซึ่งเราจะได้พื้นที่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 เงื่อนไข จะต้องเป็นพื้นที่ ที่

1. อยู่ข้างล่างของเส้นตรง $y = -1.5\,x + 2.5$
2. อยู่ทางขวามือของแกน y (หรือ เส้นตรง $x = 0$) เพื่อสอดคล้องกับเงื่อนไข $x \geq 0$
3. อยู่เหนือแกน x (หรือ เส้นตรง $y = 0$) เพื่อสอดคล้องกับเงื่อนไข $y \geq 0$

ตัวอย่างที่ 6.1.2 (ต่อ)

จากทั้ง 3 ข้อนี้ จะทำให้เราสามารถระบุพื้นที่ดังกล่าว ได้ดังรูปภาพข้างล่างนี้



จะเห็นว่า ภาพที่แสดงพื้นที่ของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 6.1.2 นั้น เราสามารถลากเส้นที่ปิดล้อมพื้นที่ดังกล่าวได้ ซึ่ง ถ้าเราจะเรียกพื้นที่ที่สามารถทำแบบนี้ได้ว่า "พื้นที่ผลเฉลยที่มีขอบเขต" และสำหรับพื้นที่ของผลเฉลยที่เราไม่สามารถลากเส้นปิดล้อมได้จะเรียกว่า "พื้นที่ผลเฉลยไม่มีขอบเขต"

ตัวอย่างที่ 6.1.3 จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ของระบบอสมการดังต่อไปนี้

$$4x + y \geq 4$$
$$-x + y \geq 1$$

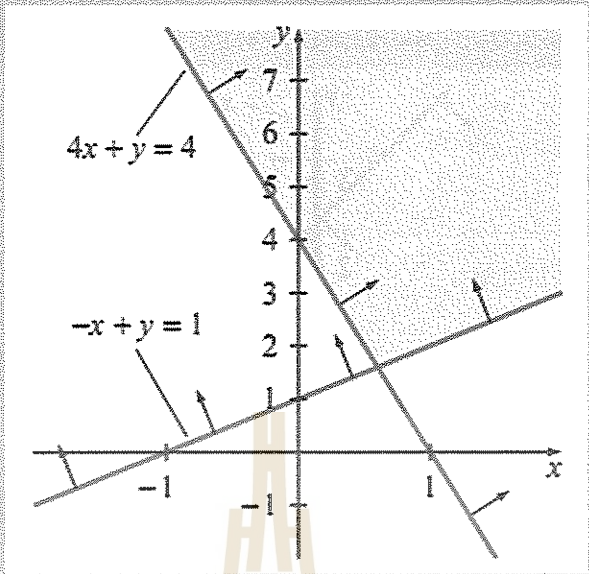
วิธีทำ

ก่อนอื่น เราจะลากเส้นตรง $4x + y = 4$ นี้ก่อน แล้วลองหยิบจุด $(0,0)$ ที่อยู่ทางด้านล่างของเส้นตรงนี้ (ดูรูปประกอบ) มาทดสอบเงื่อนไข ซึ่งได้ว่า $4(0) + (0)$ ซึ่งจะให้ผลคือน้อยกว่า 4 แต่ที่เราตามหาอยู่ตอนนี้คือพื้นที่ตรงกันข้ามที่ทำให้อสมการนั้น มากกว่า 4 จึงสรุปได้ว่า พื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง นั้นคือพื้นที่ของผลเฉลยของอสมการแรก

ต่อมาเราจะพิจารณาหาพื้นที่ผลเฉลยที่สอดคล้องกับอสมการ $-x + y \geq 1$ โดยการลากเส้นตรง $-x + y = 1$ ก่อน แล้วพิจารณาในทำนองเดียวกันกับขั้นตอนแรก ก็จะได้ว่าพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง $-x + y = 1$ เป็นพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้

จากนั้น เราจะสามารถระบุพื้นที่ที่สอดคล้องกับทั้ง 2 อสมการได้โดยง่าย ดังแสดงในภาพข้างล่าง

ตัวอย่างที่ 6.1.3 (ต่อ)



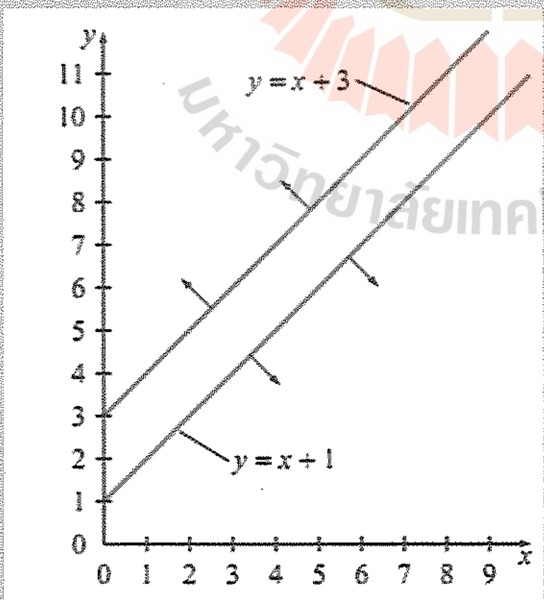
ข้อสังเกต 1. พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่ได้จากตัวอย่าง 6.1.3 นั้น **ไม่มีขอบเขต**

2. ระบบอสมการ ไม่จำเป็นจะต้องมีผลเฉลยเสมอไป ดังแสดงในตัวอย่างที่ 6.1.4

ตัวอย่างที่ 6.1.4 จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ผลเฉลยของระบบอสมการดังต่อไปนี้

$$-2x + 2y \geq 6 \quad \text{และ} \quad -x + y \leq 1$$

วิธีทำ เมื่อเราใช้หลักการพิจารณา เหมือนในตัวอย่างที่ผ่านมานี้ เราจะได้ดังภาพข้างล่างนี้ ซึ่ง



1. พื้นที่ที่สอดคล้องกับ $-2x + 2y \geq 6$ คือพื้นที่ที่อยู่เหนือเส้นตรง $y = x + 3$ ดังรูป แต่

2. พื้นที่ที่สอดคล้องกับ$-x + y \leq 1$ คือพื้นที่ที่อยู่ด้านล่างของเส้นตรง $y = x + 1$ และ

3. เนื่องจากทั้งเส้นตรงทั้งสองเส้นมีความชันเท่ากัน คือ 1 เราจึงมั่นใจได้ว่า ทั้งสองเส้นนี้จะขนานกันไปตลอด **ไม่ตัดกัน** จึงสรุปได้ว่า

เราระบบอสมการนี้ **ไม่มี**ผลเฉลย

<u>แบบฝึกทักษะที่ 6.1.1</u> จงวาดกราฟแสดงพื้นที่ของผลเฉลยของระบบอสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\begin{aligned} 2x + y &\leq 6 \\ -x + y &\leq 0 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x + y &\leq 5 \\ -5x + 5y &\leq 6 \\ y &\geq 2 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 5 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$

4) $4x_1 + 2x_2 \leq 10$

$2x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0,\ x_1 \leq 6$

....

....

....

....

....

....

....

....

5) $2x - 3y \leq 5$

$x + 3y \leq 11$

$4x + y \leq 15$

$x \geq 0, y \geq 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

6) $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$6x_1 + 6x_2 \leq 36$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0,\ x_1 \leq 4$

....

....

....

....

....

....

....

...

....

....

6.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยการเขียนกราฟ (Finding the Optimal Value by Graphing)

ในการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบที่ประกอบด้วยเงื่อนไข ที่อธิบายโดยอสมการหลายอสมการที่ประกอบขึ้นเป็นกำหนดการเชิงเส้นนั้น สามารถทำได้หลายวิธี ในเอกสารฉบับนี้ จะได้นำเอา 2 วิธีหลักๆ มานำเสนอ อันได้แก่ วิธีหาผลเฉลยด้วยการเขียนกราฟ และการใช้ตารางซิมเพล็กซ์ (Simplex Table) สำหรับหัวข้อ 6.2 นี้ จะเป็นการสาธิตวิธีการหาผลเฉลยของระบบอสมการกำหนดการเชิงเส้น โดยการใช้การเขียนกราฟ

ปัญหากำหนดการเชิงเส้นหนึ่งๆ โดยทั่วไปจะประกอบด้วย 2 ส่วนคือ ส่วนที่เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย และส่วนเงื่อนไข การพิจารณากำหนดส่วน 2 ส่วนนี้ จะได้มาจากปัญหาจริงในขณะนั้น ที่เราพยายามใช้กำหนดการเชิงเส้นอธิบายอยู่ อาทิ ในหัวข้อที่แล้ว เราได้พูดถึงนักศึกษาคนหนึ่งที่มีความจำเป็นที่จะต้องทำงาน 2 ประเภท ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขใหม่ คือ นักศึกษาคนนั้นได้ค่าจ้างค่าส่งพิซซ่าเป็น 105 บาท/ชม., ได้ค่าจ้างค่าคุมห้องคอมพิวเตอร์อีก 80 บาท/ชม. และนักศึกษาคนนี้ มีสามารถทำงานได้แค่ 30 ชม. ต่อสัปดาห์ และต้องทำให้ได้อย่างน้อย 2,520 บาท ต่อหนึ่งสัปดาห์ จึงจะสามารถอยู่ได้

ถ้าเรากำหนดตัวแปร โดยให้ p แทนจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคนนี้ทำงานส่งพิซซ่า ใน 1 สัปดาห์

c แทนจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคนนี้ทำงานที่ห้องคอมพิวเตอร์ ใน 1 สัปดาห์

ด้วยเงื่อนไขต่างๆ เราจะได้ว่า

- นักศึกษาคนนี้ทำงานได้แค่ไม่เกิน 30 ชม. ต่อสัปดาห์ หมายถึง

$$p + c \leq 30 \qquad \text{.......................(1)}$$

- ผลตอบแทนที่ได้จากการทำงานทั้ง 2 ประเภท ต้องมากกว่า 2,520 ต่อสัปดาห์ หมายถึง

$$80c + 105p \geq 2{,}520 \qquad \text{.................... (2)}$$

- เนื่องจากทั้งสองตัวแปรที่กำหนดขึ้นนั้น แทนจำนวน ชม. จึงต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ หมายถึง

$$p \leq 0 \quad \text{และ} \quad c \leq 0 \qquad \text{.......................(3)}$$

จากกรณีนี้ เราสามารถสร้างระบบกำหนดการเชิงเส้นเพื่อที่จะหาว่า ;

1. นักศึกษาคนนี้ สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด ในหนึ่งสัปดาห์

   ซึ่งเราจะสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

   $$\text{จำนวนเงินทั้งหมด} = 80c + 105p$$

   และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น

2. นักศึกษาคนนี้ จะต้องทำงานอย่างน้อย กี่ชั่วโมง ใน หนึ่งสัปดาห์

   ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

   $$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = p + c$$

   และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น เช่นกัน

หรือ 3. นักศึกษาคนนี้ จะสามารถทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ได้อย่างมาก กี่ชั่วโมง

   ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

   $$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = c$$

และ ถูกกำหนดขอบเขตโดยเงื่อนไขทั้ง (1), (2) และ (3) ข้างต้น เช่นกัน

ซึ่งถึงแม้ว่า ทั้ง 3 ปัญหานี้ จะมีระบบอสมการเงื่อนไข (1), (2) และ (3) เหมือนกัน แต่สมการเป้าหมายจะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับเราจะตอบคำถามอะไร อย่างไรก็ตาม คำตอบของแต่ละสมการเป้าหมายนั้น จะอยู่ภายในขอบเขตบริเวณพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้(ที่เราศึกษาและรู้จักมาแล้วในหัวข้อที่ 6.1) ดังนั้น วิธีหนึ่งที่เราจะสามารถตรวจสอบได้ว่าจุดใดในบริเวณนี้ เป็นผลเฉลยที่เราต้องการ ก็คือ การนำจุดทั้งหมดที่อยู่ในบริเวณนั้น มาแทนค่าในสมการเป้าหมายแล้วเปรียบเทียบผล ซึ่งเราจะเห็นว่า ในทางปฏิบัติแล้ว เราไม่สามารถนำจุดทั้งหมด ที่มีอยู่เป็นจำนวนมาก มาตรวจสอบได้หมด ดังนั้น เราจะใช้ทฤษฎีหลักๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ มาช่วย ดังนี้

ทฤษฎีบท 6.2.1

1. ถ้าผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นหนึ่งๆ หาได้ ผลเฉลยนั้น จะปรากฏที่จุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้
2. ถ้าผลเฉลยนั้นปรากฏอยู่เป็นจุดมุมที่เชื่อมด้วยเส้นตรง แล้วจะได้ว่า จุดต่างๆ ที่อยู่บนเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดนั้น ก็จะเป็นผลเฉลยด้วยเช่นกัน
3. กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่มีขอบเขต จะสามารถหาผลเฉลยได้เสมอ
4. กำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่ไม่มีขอบเขต อาจจะมีผลเฉลย หรือไม่มีก็ได้

จึงทำให้การหาผลเฉลยของระบบกำหนดการเชิงเส้นหนึ่ง โดยวิธีกราฟนั้น สามารถทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 วาดกราฟเพื่อหาพื้นที่ผลเฉลยที่เป็นไปได้

ขั้นที่ 2 หาจุดต่างๆ ที่อยู่เป็นจุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่ได้มาจากขั้นที่ 1

ทบทวน การหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง 2 เส้น หาได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ที่เราศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ 1.7 และ 1.8

ขั้นที่ 3 ถ้าพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยที่หาได้จากขั้นที่ 1 นั้น มีขอบเขต จะได้ว่า ค่าที่เหมาะสมที่สุด(ซึ่งอาจเป็นค่ามากสุด หรือค่าน้อยสุด แล้วแต่กรณีและเหตุการณ์ของปัญหาจริง) ที่กำลังหาอยู่นี้ จะเป็นจุดมุมหนึ่ง จุดมุมใด ที่หาได้จากขั้นที่ 2

ขั้นที่ 4 ถ้าพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยที่หาได้จากขั้นที่ 1 ไม่มีขอบเขต การหาค่าเหมาะสมที่สุด อาจจะต้องพิจารณาเป็นกรณีๆ ไป ซึ่งอาจจะให้เฉพาะค่าต่ำสุด แต่ไม่ให้ค่าสูงสุด หรือทางกลับกัน ก็อาจเป็นได้

และถ้าเรานำขั้นตอนเหล่านี้ มาหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นในกรณีของนักศึกษาคนที่เราพูดถึงมานี้ เราจะได้ดังนี้

เราสามารถหาพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังรูป

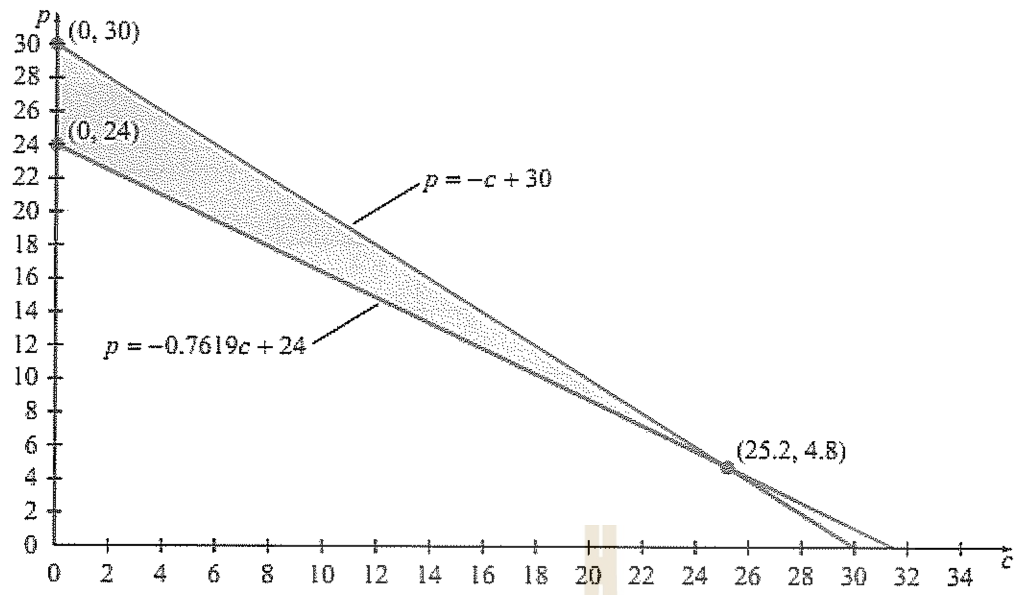
บันทึก

....

....

....

....



แผนภาพที่ 53 พื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลยของตัวอย่างกรณีของนักศึกษาที่ต้องทำงาน 2 ประเภท

จาก แผนภาพที่ 53 เราจะได้ว่า บริเวณของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้นั้นมีจุดมุมทั้งหมด 3 จุด คือ (0,24), (0,30) และจุด (25.2, 4.8) และขั้นต่อไป เราจะนำจุดมุมเหล่านี้ มาทดสอบกับสมการเป้าหมายในแต่ละข้อ

1. นักศึกษาคนนี้ สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวนเท่าใด ในหนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราจะสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนเงินทั้งหมด} = 80c + 105p$$

ตารางที่ 17 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่าง ๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมฯ (c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า (p)	ค่าจ้างที่ได้รับ (บาท) $= 80c + 105p$
0	24	2,520
0	30	3,150
25.2	4.8	2,520

จาก ตารางที่ 17 จะเห็นได้ชัดเจนว่า ณ ตำแหน่งจุด (0,30) ค่าจ้างที่ได้รับนั้น มีจำนวนสูงสุด เราจึงสามารถตอบคำถามข้อแรกข้อนี้ได้แล้วว่า นักศึกษาคนนี้สามารถทำเงินได้สูงสุดเป็นจำนวน 3,150 บาท ต่อสัปดาห์ โดยการทำงานส่งพิซซ่า 30 ชม. อย่างเดียว และไม่ทำงานในห้องคอมเลย

2. นักศึกษาคนนี้ จะต้องทำงานอย่างน้อย กี่ชั่วโมง ใน หนึ่งสัปดาห์

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

$$\text{จำนวนชั่วโมงทั้งหมด} = p + c$$

ตารางที่ 18 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่าง ๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมฯ (c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า (p)	จำนวน ชม. รวมที่ทำงาน $= c + p$
0	24	240
0	30	300
25.2	4.8	300

จาก ตารางที่ 18 จะเห็นได้ชัดว่า ที่จุด (0,24) ให้ค่าจำนวน ชม. ที่นักศึกษาคนนี้ต้องทำงานน้อยสุด ดังนั้น เราจึงสามารถตอบคำถามข้อที่สองนี้ได้แล้วว่า นักศึกษาคนนี้ ต้องทำงานอย่างน้อย 24 ชม. ต่อสัปดาห์ โดยทำงานส่งพิซซ่าประเภทเดียว ไม่ต้องทำในห้องคอมเลย ก็จะยังสามารถทำรายได้ ได้ตามเป้าหมายกำหนด

3. นักศึกษาคนนี้ จะสามารถทำงานในห้องคอมพิวเตอร์ได้สูงสุด กี่ชั่วโมง

ซึ่งเราสามารถสร้าง สมการเป้าหมาย ได้คือ

จำนวนชั่วโมงทั้งหมด $= c$

ตารางที่ 19 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่าง ๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอมฯ (c)	จำนวน ชม. ที่ทำงานส่งพิซซ่า (p)	จำนวน ชม. ที่ทำงานในห้องคอม $= c$
0	24	0
0	30	0
25.2	4.8	25.2

จาก ตารางที่ 19 จะเห็นได้ชัดว่า นักศึกษาคนนี้ ต้องทำงานในห้องคอมได้มากสุดคือ 25.2 ชม. ซึ่งนักศึกษาคนนี้ จะยังคงต้องทำงานส่งพิซซ่าอีก 4.8 ชม. ถึงจะสามารถสร้างรายได้ตามที่กำหนดได้

ข้อตกลง สมการเป้าหมาย ต่อไป เราจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ P

บันทึก

....

....

....

....

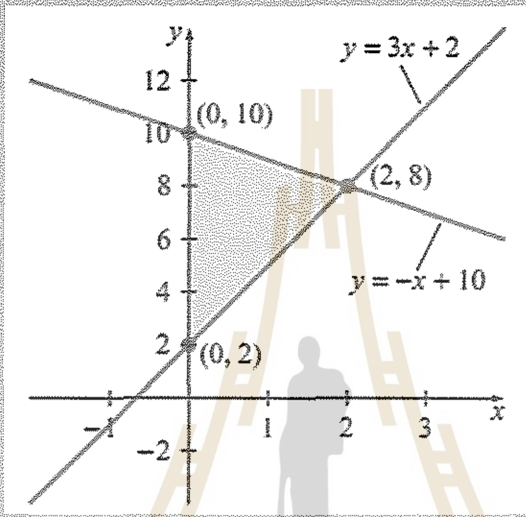
....

ตัวอย่างที่ 6.2.1 จงหาค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ ของสมการเป้าหมายที่กำหนดโดย

$$P = 6x + 2y$$

ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้
$$\begin{cases} -3x + y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำ ด้วยการใช้เทคนิคที่ได้ศึกษาไปแล้วในหัวข้อที่ 6.1 เราจะสามารถวาดกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 54



แผนภาพที่ 54 กราฟแสดงพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.1

เราจะสามารถระบุตำแหน่งของจุดมุมได้ คือ จุด (0,2), (0,10) และจุด (2,8) ต่อไปเราจะพิจารณาแต่ละจุดมุม ว่าจะให้ค่าสมการเป้าหมาย เป็นค่าอะไรกันบ้าง

ตารางที่ 20 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่าง ๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าสูงสุด สำหรับตัวอย่างที่ 6.2.1

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
x	y	$P = 6x + 2y$
0	2	4
0	10	20
2	8	28

จากตารางที่ 20 จะได้ว่าค่า P มีค่ามากสุดเท่ากับ 28 ซึ่งเกิดจากค่า $x = 2$ และค่า $y = 8$

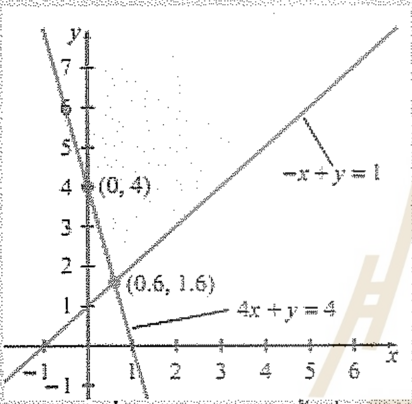
ตัวอย่างที่ 6.2.1 ได้แสดงการหาค่าเหมาะสมที่สุด สำหรับปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ แบบมีขอบเขต ในตัวอย่างต่อไปนี้ จะเป็นลักษณะของปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ แบบ**ไม่มีขอบเขต**

ตัวอย่างที่ 6.2.2 จงหาพิจารณาหาค่าต่ำสุดของกำหนดการเชิงเส้นที่มีสมการเป้าหมายคือ

$$P = 2x + 5y$$

ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้
$$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ -x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

วิธีทำ ด้วยการใช้เทคนิคที่ได้ศึกษาไปแล้วในหัวข้อที่ 6.1 เราจะสามารถวาดกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ ดังแสดงใน แผนภาพที่ 55



แผนภาพที่ 55 กราฟแสดงพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ ประจำตัวอย่างที่ 6.2.2

เห็นได้อย่างชัดเจนว่า พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้นั้น ไม่มีขอบเขต อย่างไรก็ตามเราก็ยังจะสามารถหาค่าต่ำสุดของปัญหานี้ได้ เนื่องจากเราจะสังเกตเห็นว่าจุดมุม 2 จุดคือ (0.6,1.6) และ (0,4) นั้น อยู่ทางด้านล่างของบริเวณพื้นที่ของเฉลยที่เป็นไปได้ (ในขณะที่เราจะไม่สามารถหาค่าสูงสุดได้เพราะบริเวณดังกล่าวนี้ มีเนื้อที่ขึ้นไปข้างบนอย่างไม่มีที่สิ้นสุด) ดังนั้น เราจะนำทั้ง 2 จุดนี้ มาทดสอบหาค่าของสมการเป้าหมาย ดังแสดงได้ใน ตารางที่ 21

ตารางที่ 21 ตารางแสดงการเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย ด้วยตำแหน่งจุดมุมต่างๆ ในพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ เพื่อหาค่าต่ำสุด สำหรับตัวอย่างที่ 6.2.2

จุดมุม		สมการเป้าหมาย
x	y	$P = 2x + 5y$
0.6	1.6	9.2
0	4	20

จากตารางที่ 21 จะได้ว่าค่า P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 9.2 ซึ่งเกิดจากค่า $x = 0.6$ และค่า $y = 1.6$

<u>แบบฝึกทักษะที่ 6.2</u> จงพิจารณากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ แล้วหาผลเฉลยโดยใช้การวาดกราฟ

1) จงหาค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 9x + 7y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 2x + y \le 40 \\ x + 3y \le 30 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

2) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + 5y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 6 \\ -2x + 4y \le 8 \\ x + y \ge 1 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

3) จากข้อมูลในข้อ 2 จงหาว่าค่าสูงสุดของฟังก์ชันเป้าหมายเท่ากับเท่าใด และ ณ ตำแหน่งใด

4) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + 4y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + 2y \geq 10 \\ 3x + y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

5) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = -5x + 3y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} 6x + y \geq 6 \\ -2x + y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

6) ปัญหาค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + 1.25y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq 130 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \leq 170 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

6.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์เบื้องต้น (Finding the Optimal Value by Complex Table)

ในหัวข้อ 6.2 เราได้ศึกษามาแล้วในเรื่องของการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นโดยวิธีเขียนเป็นกราฟและทดสอบจุดมุม นักศึกษาจะสังเกตเห็นว่า เราจะสามารถเขียนกราฟของระบบในระนาบ 2 มิติได้นั้น ระบบนั้นจะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรอิสระไม่เกิน 2 ตัว (โดยปกติคือ x และ y) อย่างไรก็ตาม ในโลกของความเป็นจริงนั้น ระบบกำหนดการเชิงเส้นหนึ่ง อาจจะประกอบด้วยจำนวนตัวแปรอิสระหลายสิบ หรือแม้กระทั่งเป็นร้อยตัว ดังนั้น วิธีหนึ่งที่นอกเหนือจากการเขียนกราฟที่ได้รับความนิยมในการแก้ไขปัญหากำหนดการเชิงเส้นนั้น คือการใช้ตารางซิมเพล็กซ์

ในกระบวนการการใช้ตารางซิมเพล็กนั้น มีอยู่หลายรูปแบบ ซึ่งการเลือกใช้รูปแบบจัดการแต่ละรูปแบบนั้น จะขึ้นอยู่กับลักษณะของกำหนดการเชิงเส้น ในบรรดารูปแบบต่างๆ ในหัวข้อนี้ จะได้นำเสนอเพียงแค่รูปแบบเดียว คือ กำหนดการเชิงเส้นที่เรียกว่า "ปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน (Standard Maximize Problem)" ซึ่งสามารถให้คำจำกัดความได้ดังนี้

นิยาม 6.3.1 ปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน (Standard Maximize Problem) คือ ปัญหาที่ให้หาค่าสูงสุดของสมการเป้าหมายและมีระบบอสมการเงื่อนไขที่อยู่ในรูป "น้อยกว่า" หรือ "น้อยกว่า หรือเท่ากับ"

ซึ่งมีขั้นตอนการใช้ดังนี้

สมมติว่าเรามีกำหนดการเชิงเส้นคือ จงหาค่าสูงสุดของสมการเป้าหมาย

$$P = 70x + 50y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้ $\begin{cases} 4x + 3y \leq 240 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

ข้อสังเกต เราจะเห็นว่ากำหนดการเชิงเส้นนี้เป็นปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน(เราไม่สนใจเงื่อนไข $x \geq 0$ และ $y \geq 0$)

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนอสมการเป็นสมการ โดยการใช้ตัวแปรส่วนขาด (Slack variable) s_1, s_2 ซึ่งทำได้ดังนี้

$4x + 3y \leq 240$ เขียนเป็นสมการได้ว่า $4x + 3y + s_1 = 240$ หรือ

$$4x + 3y + s_1 + 0s_2 = 240 \quad \text{.................(1)}$$

$2x + y \leq 100$ เขียนเป็นสมการได้ว่า $2x + y + s_2 = 100$ หรือ

$$2x + y + 0s_1 + s_2 = 100 \quad \text{............... (2)}$$

และเขียนสมการเป้าหมายใหม่ ให้ประกอบไปด้วยตัวแปรส่วนขาดทั้ง 2 ตัวแปร ได้ว่า

$$-70x - 50y + 0s_1 + 0s_2 + P = \quad \text{............(3)}$$

ขั้นที่ 2 สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น โดยการนำสัมประสิทธิ์ของสมการ (1) (2) และ (3) ที่เขียนไปในขั้นที่ 1 นั้น มาเขียนในตารางซิมเพล็กเริ่มต้น ได้ดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 3 ระบุ **หลักสำคัญ** โดยเลือกจากบรรทัดสุดท้ายของตาราง โดยเลือกหลักที่มีจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งในที่นี้เราจะเห็นว่า ในบรรทัดสุดท้ายนั้น ค่า -70 คือค่าที่น้อยที่สุด ดังนั้น เราจะได้หลักสำคัญ คือหลักที่ระบายสีข้างล่างนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 4 ระบุ **แถวสำคัญ** คือการพิจารณาจากอัตราส่วนของค่าในช่อง "ค่าทางขวามือ" ของตาราง ในแต่ละแถว กับค่าที่อยู่ในหลักสำคัญ ที่เลือกมาได้ในขั้นที่ 4 แล้วเลือกเอาแถวที่ให้ค่าอัตราส่วนดังกล่าวนี้ มีค่า น้อยที่สุด

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตรส่วน
s_1	4	3	1	0	0	240	$\frac{240}{4}=60$
s_2	2	1	0	1	0	100	$\frac{100}{2}=50$
	-70	-50	0	0	1	0	

จากตารางข้างบน เราจะเห็นว่า ค่าอัตราส่วนที่น้อยที่สุดคือ 50 ดังนั้น เราจึงได้ตำแหน่งแถวสำคัญ คือ แถวที่ระบายสีดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 5 ระบุ **สมาชิกสำคัญ** โดย สมาชิกสำคัญนี้ คือ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งหลักสำคัญ และแถวสำคัญ และจากตารางข้างบนนี้ เราจะได้สมาชิกสำคัญคือ 2

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	2	1	0	1	0	100
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 6 หารสมาชิกในแถวสำคัญทั้งหมดด้วยสมาชิกสำคัญ เพื่อจะให้ตำแหน่งของสมาชิกสำคัญที่มีอยู่นี้ มีค่าเป็น 1 จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	4	3	1	0	0	240
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	-70	-50	0	0	1	0

ขั้นที่ 7 ใช้กระบวนการการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น ในการพยายามทำให้สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในแถวสำคัญนั้น เป็น 0 ยกเว้นค่า ณ ตำแหน่งสมาชิกสำคัญ ซึ่ง ณ เวลานี้ มีค่าเป็น 1 แล้ว

ซึ่ง ในที่นี้ เราจะดำเนินการโดย $R_1 - 4R_2$ แล้วเขียนเป็น R_1 ตัวใหม่ และ

$R_3 + 70R_2$ แล้วเขียนเป็น R_3 ตัวใหม่ จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	0	-15	0	35	1	3500

ขั้นที่ 8 ย้อนกลับไปเริ่มทำขั้นที่ 3 ใหม่ จนกระทั่ง ในบรรทัดสุดท้ายของตารางท้ายสุดนั้น ไม่บรรจุค่าที่เป็นลบเลย ซึ่งตอนนี้ เรามีค่า -15 อยู่ เราจึงจะดำเนินการตามขั้นที่ 3 อีกรอบ จึงได้ว่า

หลักสำคัญคือ

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50
	0	-15	0	35	1	3500

แถวสำคัญคือ

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	0	1	1	-2	0	40	$40 \div 1 = 40$
s_2	1	1/2	0	1/2	0	50	$50 \div \left(\frac{1}{2}\right) = 100$
	0	-15	0	35	1	3500	

ดังนั้น สมาชิกสำคัญ คือ สมาชิกที่อยู่แถวและหลักสำคัญ นั่นคือ 1

ต่อไป เราจะดำเนินการโดย $R_2 - \frac{1}{2}R_1$ แล้วเขียนเป็น R_2 ตัวใหม่ และ

$R_3 + 15R_1$ แล้วเขียนเป็น R_3 ตัวใหม่ จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	0	1	1	-2	0	40
s_2	1	0	-1/2	3/2	0	30
	0	0	15	5	1	4100

เราจะเห็นว่า ตารางที่ได้มาล่าสุดนี้ ในบรรทัดล่างสุด ไม่มีค่าที่เป็นลบอยู่เลย ดังนั้น เราจึงสามารถอยู่กระบวนการได้ และเราจะสามารถสรุปคำตอบได้คือ ค่า P ที่มากสุดคือ 4100 และเกิดเมื่อ $x = 30$ และ $y = 40$

บันทึก

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.3.1 จงใช้ตารางซิมเพล็กซ์ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐานต่อไปนี้

กำหนด สมการเป้าหมาย

$$P = 4x + 3y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้
$$\begin{cases} 3x + 2y \le 12 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนอสมการเป็นสมการ โดยการใช้ตัวแปรส่วนขาด (Slack variable) s_1, s_2 ซึ่งทำได้ดังนี้

$3x + 2y + s_1 + 0s_2 = 12$
$x + y + 0s_1 + 1s_2 = 5$
$P = 4x + 3y$

ขั้นที่ 2 สร้างตารางซิมเพล็กซ์เริ่มต้น

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	3	2	1	0	0	12
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ขั้นที่ 3 ระบุหลักสำคัญ (คือหลักที่มีจำนวนที่น้อยที่สุดในบรรทัดสุดท้าย)

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	3	2	1	0	0	12
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ตัวอย่างที่ 6.3.1(ต่อ)

ขั้นที่ 4 ระบุแถวสำคัญ (คือแถวที่มีอัตราส่วนของค่าในช่องขวาสุดกับค่าในหลักสำคัญ น้อยสุด)

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	3	2	1	0	0	12	$12/3 = 4$
s_2	1	1	0	1	0	5	$5/1 = 5$
	-4	-3	0	0	1	0	

ขั้นที่ 5 ระบุสมาชิกสำคัญ คือ 3

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ	ทดสอบอัตราส่วน
s_1	3	2	1	0	0	12	$12/3 = 4$
s_2	1	1	0	1	0	5	$5/1 = 5$
	-4	-3	0	0	1	0	

ขั้นที่ 6 หารทั้งแถวสำคัญ ด้วยสมาชิกสำคัญ จะได้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	2/3	1/3	0	0	4
s_2	1	1	0	1	0	5
	-4	-3	0	0	1	0

ตัวอย่างที่ 6.3.1(ต่อ)

ขั้นที่ 7 ใช้กระบวนการการดำเนินการเชิงแถวเบื้องต้น ในการพยายามทำให้สมาชิกทุกตัวที่อยู่ในแถวสำคัญนั้น เป็น 0 ยกเว้นค่า ณ ตำแหน่งสมาชิกสำคัญ ซึ่ง ณ เวลานี้ มีค่าเป็น 1 แล้ว

จะดำเนินการโดย $R_2 - R_1$ แล้วเขียนเป็น R_2 ตัวใหม่ และ

$R_3 + 4R_1$ แล้วเขียนเป็น R_3 ตัวใหม่ จึงได้ว่า

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	2/3	1/3	0	0	4
s_2	0	1/3	-1/3	1	0	1
	0	-1/3	4/3	0	1	16

ขั้นที่ 8 จากตารางล่าสุดนี้ จะเห็นว่า ในบรรทัดสุดท้าย มีค่าที่เป็นลบอยู่ จึงจะต้องดำเนินการตั้งแต่ขั้นตอนที่ 3 ถึงขั้นที่ 7 อีกรอบ จนกระทั่งได้ตารางรอบสอง ดังนี้

ตัวแปร	x	y	s_1	s_2	P	ค่าทางขวามือ
s_1	1	0	1	-2	0	2
s_2	0	1	-1	3	0	3
	0	0	1	1	1	17

ซึ่งตารางใหม่ที่ได้มาจากการทำรอบสองนี้ ในบรรทัดสุดท้าย ไม่มีค่าติดลบเลย จึงสามารถหยุดกระบวนการ และสรุปคำตอบได้คือ ค่า P ที่มากสุดคือ 17 และเกิดเมื่อ $x = 2$ และ $y = 3$

ข้อสังเกต 1. ในการหาค่าต่ำสุดของ P เราสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนเป็นการหาค่า**สูงสุด**ของ $-P$ แทน เพื่อที่จะสามารถใช้กระบวนการที่เราทำมานี้ เช่น ถ้าโจทย์ให้หา**ค่าต่ำ**สุดของสมการเป้าหมาย $C = -x + 3y$ ก็จะสามารถทำได้โดยการหาค่า**สูงสุด**ของสมการเป้าหมาย $P = -C = x - 3y$

2. ถ้าเงื่อนไขที่ให้มาบางข้อเป็นแบบ **"มากกว่า หรือเท่ากับ"** ให้นำ (-1) คูณตลอด เพื่อเป็น **"น้อยกว่าหรือเท่ากับ"** ซึ่งก็จะกลายเป็นเงื่อนไขของปัญหาค่าสูงสุดมาตรฐาน และสามารถแก้ได้ด้วยวิธีที่เราได้ศึกษากันไปแล้วเช่นกัน

แบบฝึกทักษะที่ 6.3 จงพิจารณากำหนดการเชิงเส้นต่อไปนี้ แล้วใช้ตารางซิมเพล็กซ์ในการหาผลเฉลย

1) ค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย คือ $P = 3x + 4y$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้
$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2) ค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย คือ $P = -2x + y$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้ $\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3) ค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย $P = 2x + y$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้ $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

4) ปัญหาค่าต่ำสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

$$P = 2x + y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ 3x + y \geq 15 \\ x \leq 8, y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

5) ปัญหาค่าสูงสุด เมื่อกำหนดสมการเป้าหมาย

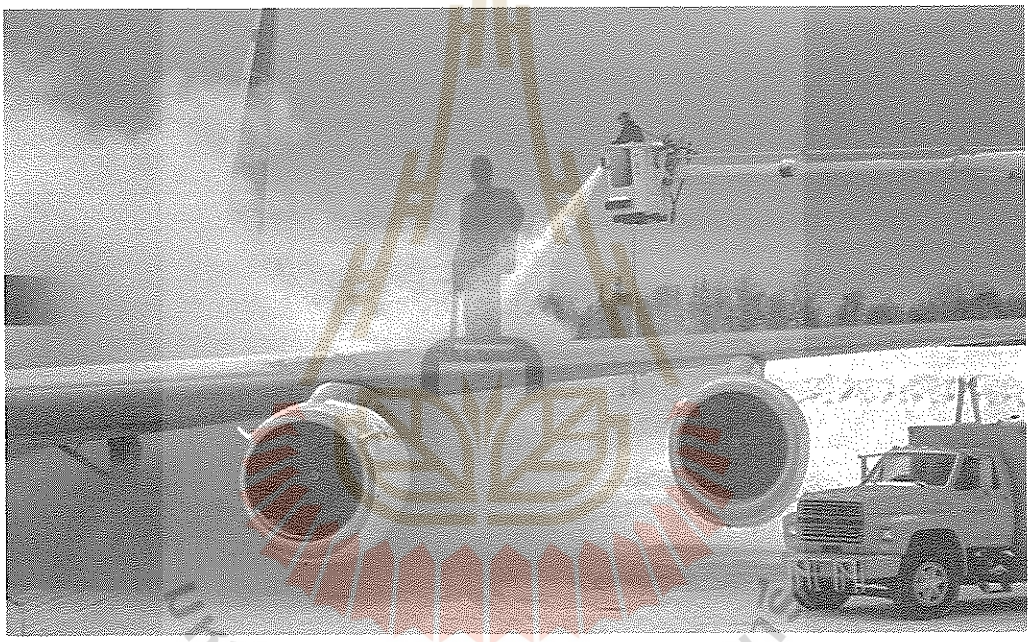
$$P = 2x + y$$

และ ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ 3x + y \geq 15 \\ x \leq 8, y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

6.4 บทประยุกต์ในชีวิตประจำวัน (Applications in Daily Life)

เมื่อคราที่พายุโหมกระหน่ำจู่โจมสนามบิน Chicago's O'Hare นั้น ส่งผลให้มีการปิดสนามบินอย่างกระทันหัน และเนื่องจาก ทางสายการบินอเมริกันได้ใช้กำหนดการเชิงเส้นในการควบคุม และวางแผนการเข้า-ออกของเที่ยวบิน การจองโรงแรม การจัดสรรคิวของพนักงานประจำเครื่องบิน และรวมถึงการจัดสรรทรัพยากรเชื้อเพลง ดังนั้น กำหนดการเชิงเส้นจึงมีบทบาทเป็นอย่างมากโดยเฉพาะอย่างยิ่งในสถานการณ์กระทันหันแบบนี้ ในการณ์นี้ ท่านประธานกลุ่มเทคโนโลยีการตัดสินใจ ของสายการบินอเมริกัน ได้ให้ความคิดเห็นต่อกำหนดการเชิงเส้นว่า *"การหาผลเฉลยให้กับกำหนดการเชิงเส้นในเวลาที่รวดเร็วนั้น มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง ถ้าเราประสบกับปัญหาในลักษณะแบบนี้ แล้วจะเห็นว่า เที่ยวบินหลายเที่ยวบินต้องถูกยกเลิก ซึ่งนั่นก็หมายถึงว่า เรามีผู้โดยสารและเครื่องบิน กระจัดกระจายตามที่ต่างๆ โดยไม่เป็นไปตามแผน ดังนั้น สิ่งที่เราจำเป็นอย่างเร่งด่วนคือวิธีการที่จะสามารถควบคุมและนำระบบดำเนินการทั้งหลาย ให้กลับเข้าสู่สภาวะปกติให้เร็วที่สุด"* และกำหนดการเชิงเส้น ก็เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและเชื่อถือในการจัดการกับสถานการณ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงของเงื่อนไขรอบข้าง ได้อย่างมีประสิทธิภาพ



แผนภาพที่ 56 พายุหิมะและลมฝน มีผลอย่างมากในการคมนาคมขนส่งทางอากาศ และกำหนดการเชิงเส้นได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในการจัดการกับสถานการณ์ในลักษณะแบบนี้

หลังจากที่เราได้ศึกษาการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นมาแล้ว ทั้งด้วยวิธีการเขียนกราฟ และวิธีการใช้ตารางซิมเพล็กซ์ ในบทนี้ เราจะได้มาศึกษาการนำกระบวนกำหนดการเชิงเส้น ไปแก้ไขปัญหาที่เราสามารถพบได้ในหลายๆ บริบท โดย ภาระงานหลักของเราในหัวข้อนี้ ก็คือ การพยายามสร้างกำหนดการเชิงเส้นจากตัวปัญหาจริงที่มีการระบุสมการเป้าหมาย และเงื่อนไขประกอบ หลังจากนั้น เราจะเลือกใช้เทคนิคที่จะนำมาหาผลเฉลย การศึกษาแต่ละตัวอย่างต่อไปนี้ จะเป็นการเพิ่มทักษะการมองและตีความโจทย์ปัญหาจริง ให้อยู่ในรูปกำหนดการเชิงเส้น

โดยกระบวนการโดยรวมแล้ว ประกอบด้วย

ขั้นที่ 1 การกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้อง มีหลักการคือ เราจะกำหนดตัวแปรให้เป็นจำนวนหรือปริมาณของสิ่งที่โจทย์ถามถึง ซึ่งโดยปกติแล้วอาจมีมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ตัวแปร

ขั้นที่ 2 เขียนสมการเป้าหมาย โดยพิจารณาจากโจทย์ว่า โจทย์ถามหาอะไรและเกี่ยวข้องกับจำนวนหรือปริมาณของสิ่งที่เรากำหนดให้เป็นตัวแปรแล้วในขั้นที่ 1 อย่างไร

ขั้นที่ 3 เขียนเงื่อนไขทั้งหมดในรูปอสมการ โดยพิจารณาจากข้อความในโจทย์และความเชื่อมโยงกับตัวแปรที่เรากำหนดขึ้นในขั้นที่ 1

ขั้นที่ 4 มาถึงขั้นนี้แล้ว เราจะได้กำหนดการเชิงเส้นออกมา 1 ชุด ซึ่งประกอบด้วย สมการเป้าหมาย 1 สมการ และอสมการเงื่อนไข ดังนั้น ต่อไปที่เหลืออยู่ คือการเลือกเอาวิธีที่เหมาะสม ที่เราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ 6.2 และ 6.3 มาแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นนี้

ตัวอย่างทั้งหลายต่อไปนี้ จะทำให้นักศึกษาได้มีความเข้าใจในกระบวนการทั้ง 4 ได้ดียิ่งขึ้น

บันทึก

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 6.4.1 บริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซ มีความต้องการที่จะซื้อสินค้าเป็นจำนวนทั้งสิ้น 3,600 ชิ้น ซึ่งนั้นจำนวนนี้ จะต้องประกอบด้วยสินค้า 2 ประเภท คือ ประเภท ก. และประเภท ข. จากการสำรวจคุณสมบัติของสินค้าทั้งสองประเภทนี้พบว่า

- สินค้าประเภท ก. ต้องใช้พื้นที่ในคลังสินค้าเพื่อจัดเก็บเป็นจำนวน 3 ตารางฟุต และมีราคา 9 บาทต่อสินค้า1 ชิ้น และเมื่อจำหน่ายต่อแล้ว จะได้กำไร 3 บาท ต่อ 1 ชิ้น
- สินค้าประเภท ข. ต้องใช้พื้นที่ในคลังสินค้าเพื่อจัดเก็บเป็นจำนวน 1 ตารางฟุต และมีราคา 13 บาทต่อสินค้า1 ชิ้น และเมื่อจำหน่ายต่อแล้ว จะได้กำไร 4 บาท ต่อ 1 ชิ้น

ถ้าบริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซนี้ มีงบประมาณทั้งหมดคือ 39,000 บาท และมีปริมาณพื้นที่จัดเก็บสินค้าอยู่ทั้งสิ้น 6000 ตารางฟุต แล้ว จงหาว่าจะต้องซื้อสินค้าแต่ละประเภทเป็นจำนวนเท่าใด จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ และส่งผลให้ได้กำไรสุทธิสูงสุด

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 กำหนดตัวแปร

เนื่องจากโจทย์ถามหาจำนวนสินค้าแต่ละประเภท ซึ่งมีอยู่ 2 ประเภท ดังนั้น เราจะกำหนดตัวแปรได้คือ ให้

x แทน จำนวนสินค้าประเภท ก.

และ y แทน จำนวนสินค้าประเภท ข.

ขั้นที่ 2 กำหนดสมการเป้าหมาย

เนื่องจากโจทย์ถามถึงกำไรสูงสุดที่เกิดจากการขายต่อสินค้าทั้ง 2 ประเภทนี้ และ จากเงื่อนไขที่ให้มา คือ สินค้า ก. ให้กำไร 3 บาท/ชิ้น และสินค้า ข. ให้กำไร 4 บาท/ชิ้น จึงได้ว่า

กำไรสุทธิ $=$ 3(จำนวนสินค้า ก.) + 4(จำนวนสินค้า ข.)

นั่นคือ ถ้าเรากำหนดให้ P แทนสมการเป้าหมาย จะได้ว่า

$$P = 3x + 4y$$

ขั้นที่ 3 กำหนดเงื่อนไข

จะสังเกตเห็นว่า เรามีเงื่อนไขข้อจำกัดอยู่ 3 อย่างคือ จำนวนชิ้นที่จะซื้อทั้งหมด (คือ 3,600 ชิ้น) ปริมาณพื้นที่ในการจัดเก็บ(คือ 6,000 ตารางฟุต) และงบประมาณทั้งหมดที่จะใช้ซื้อสินค้า(คือ 39,000 บาท) ดังนั้น เราเขียนเงื่อนไขในรูปของอสมการได้ ดังนี้

- เงื่อนไขของพื้นที่จัดเก็บ ซึ่งมีพื้นที่จัดเก็บทั้งหมดคือ 6,000 ตารางฟุต
  จากโจทย์กำหนด พื้นที่ที่ต้องใช้ในการจัดเก็บสินค้าประเภท ก. 1 ชิ้น คือ 3 ตารางฟุต และพื้นที่ที่ต้องใช้ในการจัดเก็บสินค้าประเภท ข. 1 ชิ้น คือ 1 ตารางฟุต

จึงได้ว่า 3(จำนวนสินค้า ก.) + 1(จำนวนสินค้า ข.) $\leq$ จำนวนพื้นที่ที่มีให้ทั้งหมด

นั่นคือ $3x + y \leq 6,000$

ตัวอย่างที่ 6.4.1 (ต่อ)

- เงื่อนไขของงบประมาณที่มีให้ นั่นคือ 39,000 บาท

จากโจทย์ สินค้าประเภท ก. 1 ชิ้นต้องซื้อเป็นราคา 9 บาท และสินค้าประเภท ข. 1 ชิ้น ต้องซื้อเป็นเงิน 13 บาท ดังนั้น จะได้ว่า

9(จำนวนสินค้า ก.) + 13(จำนวนสินค้า ข.) $\leq$ งบประมาณที่สามารถใช้ในการซื้อได้

นั่นคือ $$9x + 13y \leq 39{,}000$$

- เงื่อนไขจำนวนชิ้นทั้งหมดที่ต้องการซื้อ

จากโจทย์บริษัทยิ่งใหญ่ไฮโซต้องการซื้อสินค้าเป็นจำนวนรวมทั้งสิ้น 3,600 ชิ้น

ดังนั้น (จำนวนสินค้า ก.) + (จำนวนสินค้า ข.) $\leq$ 3,600

นั่นคือ $$x + y \leq 3{,}600$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก จำนวนสิ่งของต้องเป็นบวกเสมอ ดังนั้นเราจะได้เพิ่มอีกว่า

$$x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

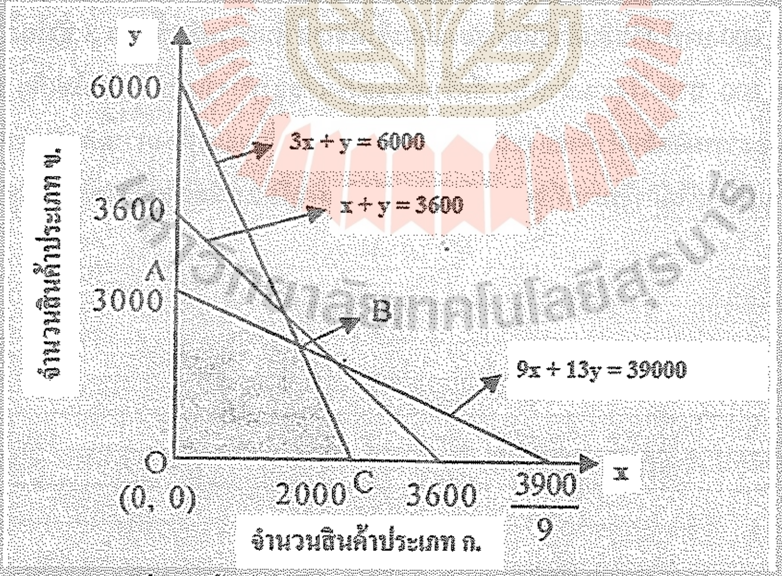
ขั้นที่ 4 เขียนกำหนดการเชิงเส้นที่ได้ และเลือกวิธีมาแก้

จากทั้ง 3 ขั้น เราจะเขียนเป็นกำหนดการเชิงเส้นคือ

สมการเป้าหมาย $P = 3x + 4y$

ด้วยเงื่อนไขดังต่อไปนี้ $$\begin{cases} 3x + y \leq 6{,}000 \\ 9x + 13y \leq 39{,}000 \\ x + y \leq 3{,}600 \\ y \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

ซึ่งเราจะสามารถเขียนกราฟเพื่อระบุพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ คือ



แผนภาพที่ 57 พื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ สำหรับตัวอย่างที่ 6.4.1

ตัวอย่างที่ 6.4.1 (ต่อ) จาก แผนภาพที่ 57 เราจะใดพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ พื้นที่มีจุด A, B, C, O เป็นจุดมุม หลังจากทำการแก้สมการเชิงเส้น 2 ตัวแรก เพื่อหาจุดตัดของเส้นตรงแต่ละคู่ จะได้พิกัดของแต่ละจุดคือ A(0,3000), B(1300,2100), C(2000,0) และ O(0,0)

จากนี้เราจะทำการนำจุดมุมเหล่านี้มาทดสอบกับสมการเป้าหมาย ดังแสดงใน ตารางที่ 22

ตารางที่ 22 ตารางทดสอบจุดมุมของพื้นที่ของผลเฉลยที่เป็นไปได้ กับสมการเป้าหมาย ประจำตัวอย่างที่ 6.4.1

จุดมุม		ค่าของสมการเป้าหมาย
x	y	$P = 3x + 4y$
0	3,000	12,000
1300	2100	12,300
2000	0	6,000
0	0	0

ดังนั้น เราจะได้ทันทีว่า ค่ากำไรสุทธิสูงสุดที่บริษัทนี้สามารถได้รับคือ 12,300 บาท ซึ่งเกิดจากการจัดซื้อสินค้าประเภท ก. เป็นจำนวน 1,300 ชิ้น และสินค้าประเภท ข. เป็นจำนวน 2,100 ชิ้น

แบบฝึกทักษะที่ 6.4 จงพิจารณาปัญหาต่อไปนี้ แล้วใช้ความรู้ในเรื่องกำหนดการเชิงเส้นมาหาผลเฉลยในแต่ละข้อ

1) บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด สินค้าชนิดแรกแต่ละชิ้นใช้เวลาในการผลิตขั้นต้น 4 ชั่วโมง ขั้นที่สอง 4 ชั่วโมง และขายได้กำไรชิ้นละ 600 บาท ส่วนสินค้าชนิดที่สองแต่ละชิ้นใช้เวลาในการผลิตขั้นต้น 3 ชั่วโมง ขั้นที่สอง 2 ชั่วโมง และขายได้กำไรชิ้นละ 800 บาท โรงงานสำหรับผลิตขั้นต้นและขั้นที่สองทำงานสัปดาห์ละไม่เกิน 120 และ 60 ชั่วโมง ตามลำดับ ถ้าบริษัทต้องการผลิตสินค้าทั้งสองชนิดให้ขายได้กำไรมากที่สุดและต้องการผลิตสินค้าชนิดแรกให้ได้อย่างน้อยสัปดาห์ละ 10 ชิ้น เพื่อให้ได้กำไรมากที่สุด บริษัทควรผลิตสินค้าทั้ง 2 ชนิดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใด

2) นายปีเตอร์ ได้เข้ามาในเมืองไทยเพื่อทำธุรกิจขายข้าวและข้าวสาลี โดยแต่ละครั้ง เขามีเงินลงทุนทั้งหมด 1,500 บาท ราคาข้าว 1 กระสอบที่เขาต้องซื้อคือ 180 บาท และราคาข้าวสาลี 1 กระสอบคือ 120 บาท และในร้านของเขา มีพื้นที่ทั้งหมดในการจัดเก็บสินค้าทั้ง 2 ประเภทนี้ทั้งสิ้น 10 กระสอบเท่านั้น และถ้าเมื่อพิจารณาการขายต่อของสินค้าสองประเภทนี้แล้วปรากฏว่า

- เขาจะได้กำไรจากการขายข้าวเป็นเงิน 11 บาท ต่อ 1 กระสอบ
- เขาจะได้กำไรจากการขายข้าวสาลีเป็นเงิน 8 บาท ต่อ 1 กระสอบ

แล้ว นายปีเตอร์จะต้องลงทุนกับข้าวและข้าวสาลีเป็นจำนวนกี่กระสอบในการลงทุนแต่ละครั้ง ถึงจะได้กำไรสูงสุด

3) ศูนย์บรรณสาร มทส. จะต้องมีการผลิตตำราประกอบการเรียนการสอนใน 2 รายวิชาพื้นฐานที่นักศึกษาปี 1 มทส. ส่วนใหญ่ จะต้องเรียน คือ วิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน และวิชาแคลคูลัส โดยจะต้องใช้เครื่องผลิตเอกสารต่อกัน 2 เครื่อง คือ เครือง ก. และเครื่อง ข. และในการผลิตหนังสือใน 1 วัน พบว่า

- หนังสือวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันนั้น ต้องใช้เครื่อง ก. เป็นจำนวน 3 ชม. และเครื่อง ข. อีกจำนวน 2 ชั่วโมง
- หนังสือวิชาแคลคูลัส ต้องใช้เครื่อง ก. เป็นจำนวน 3 ชม. และเครื่อง ข. อีกจำนวน 3 ชั่วโมง

แต่ทว่าเครื่อง ก. สามารถใช้งานติดต่อกันได้เพียง 18 ชม. และเครื่อง ข. สามารถใช้งานติดต่อกันได้เพียง 14 ชม. เท่านั้น ถ้าหลังจากจำหน่ายหนังสือทั้ง 2 ประเภท(เพื่อที่จะนำรายได้ไปใช้จ่ายในกิจกรรมส่งเสริมการเรียนการสอนของนักศึกษา มทส.) แล้ว พบว่า กำไรที่ได้จากการจำหน่ายหนังสือคณิตศาตร์ในชีวิตประจำวันนั้นเท่ากับ 30 บาท/เล่ม และหนังสือแคลคูลัสให้กำไรเป็น 40 บาท/เล่ม แล้วจงหาว่า ศูนย์บรรณสาร ควรที่จะพิมพ์หนังสือแต่ละประเภทเป็นจำนวนเท่าใด ถึงจะได้กำไรสูงสุด

4) นายวิศวะ เก่งเลข เป็นนักศึกษาสำนักวิชาวิทยาศาสตร์ชั้นปีที่ 4 ได้ออกไปเข้ารับการฝึกงานในโครงการสหกิจศึกษา ณ โรงงานผลิตสารเคมีที่มีชื่อเสียงแห่งหนึ่งในกรุงเทพมหานคร ด้วยเนื่องจากที่นายวิศวะเป็นนักศึกษาจากมหาวิทยาลัยที่มีชื่อเสียงทางด้านคุณภาพการเรียนการสอนติดอันดับต้น ๆ ของประเทศ นายวิศวะจึงได้รับหน้าที่ดูแลหน่วยผลิตสารเคมี ซึ่งจะทำการผลิตสารเคมีอยู่ 2 ประเภท คือประเภท ก. และประเภท ข. และในการผลิตสารเคมีแต่ละอย่างนั้น พบว่า

- สารประเภท ก. จะต้องใช้สารประกอบ α เป็นจำนวน 2 หน่วยตวง และสารประกอบ β เป็นจำนวน 1 หน่วยตวง
- สารประเภท ข. จะต้องใช้สารประกอบ α เป็นจำนวน 1 หน่วยตวง และสารประกอบ β เป็นจำนวน 2 หน่วยตวง

และจากการสำรวจวัตถุดิบที่มี พบว่า ในโรงงานมีสารประกอบ α อยู่ทั้งหมด 800 หน่วยตวง และมีสารประกอบ β ทั้งหมดอยู่ 1,000 หน่วยตวง

และเมื่อจำหน่ายสารเคมีแต่ละประเภทปรากฏว่า กำไรที่จะได้จากการจำหน่ายสารเคมี ก. คือ 30 บาท/หน่วยตวง และสารเคมี ข. ให้กำไรเป็น 20 บาท/หน่วยตวง ด้วยเงื่อนไขทั้งหมดนี้ นายวิศวะจะจัดการผลิตสารเคมีแต่ละประเภทนี้ด้วยจำนวนกี่หน่วยตวง จึงจะสามารถทำให้บริษัทนี้ ได้กำไรสูงสุด

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติมท้ายบท (Additional Exercises)

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่าของฟังก์ชันเป้าหมายเมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ (โดยใช้วิธีเขียนกราฟเพื่อระบุพื้นที่ที่เป็นไปได้ของผลเฉลย)

1) สมการเป้าหมาย

$P = 3000x + 2800y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$120x + 100y \leq 18000$
$x \geq 50$
$y \geq 60$

2) สมการเป้าหมาย

$P = 90{,}000x + 30{,}000y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$200x + 50y \leq 2200$
$x + y \leq 20$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

3) สมการเป้าหมาย

$P = 55x + 85y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$x + y \leq 18$
$20x + 40y \leq 600$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

4) สมการเป้าหมาย

$P = 50x + 80y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$x + 2y \leq 32$
$3x + 4y \leq 84$
$x \geq 0$
$0 \leq y \leq 12$

5) สมการเป้าหมาย

$P = 10x + 15y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$1/2x + y \leq 20$
$2x + y \leq 60$
$x + 4y \leq 60$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

6) สมการเป้าหมาย

$P = 3x + 4y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 8$

7) สมการเป้าหมาย

$P = 5x + 6y$

อสมการเงื่อนไข คือ

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 5$
$3x + 4y \geq 18$

8) สมการเป้าหมาย

$P = 60a + 50b$

อสมการเงื่อนไข คือ

$10a + b \leq 4000$

$a + 3b \leq 1500$

$5a + 2b \leq 2300$

$a \geq 0$

2. มีพื้นที่จอดรถ 600 ตารางเมตร รถยนต์ 1 คัน จงหาว่าควรจะรับจอดรถยนต์กี่คันและรถบัสกี่คันจึงจะได้ค่าจอดรถสูงสุด (รถยนต์ 50 คัน รถบัส 10 คัน)

3. บริษัทเครื่องหนังแห่งหนึ่งต้องการที่จะผลิตเพื่อจำหน่ายเข็มขัดและกระเป๋าสตางค์ จากการสำรวจตลาดพบว่า เข็มขัด 1 เส้น จะได้กำไร 18 บาท ในขณะที่กระเป๋าสตางค์ 1 ใบ จะได้กำไร 12 บาท สำหรับกระบวนการผลิตนั้นพบว่าสินค้าทั้งสองต้องผ่านสองกระบวนการคือ การตัด และการเย็บ ซึ่งพบว่าเข็มขัดจะใช้เวลา 2 ชั่วโมงในการตัด และใช้ 6 ชั่วโมงในการเย็บ ส่วนกระเป๋าสตางค์จะใช้เวลา 3 ชั่วโมงในการตัด และใช้ 3 ชั่วโมงในการเย็บ โดยที่ในหนึ่งสัปดาห์เครื่องตัดจะทำงานได้เพียง 12 ชั่วโมง และเครื่องเย็บจะทำงานได้เพียง 18 ชั่วโมง จงหาอัตราส่วนของจำนวนสินค้าแต่ละประเภทที่ต้องผลิตจึงจะได้กำไรสูงสุด (กระเป๋าสตางค์/เข็มขัด = 2)

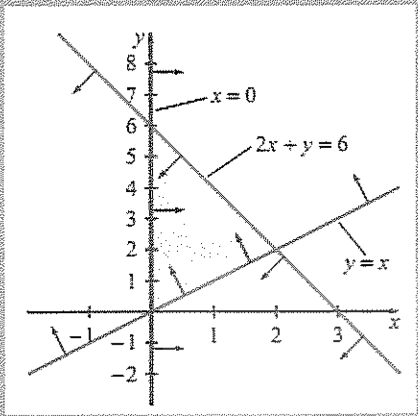
4. บริษัทผลิตของเล่นแห่งหนึ่งต้องการที่จะผลิตของเล่นใน โรงงาน A และ โรงงาน B โดยที่โรงงาน A จะเป็นการผลิตรถบรรทุกและรถดับเพลิงรวมกันอย่างน้อง 1,000 คัน ส่วนโรงงาน B จะเป็นการผลิตรถบรรทุกและรถดับเพลิงรวมกันอย่างน้อง 800 คัน โรงงาน A สามารถผลิตรถบรรทุกได้ 10 คัน/ชั่วโมง และผลิตรถดับเพลิงได้ 5 คัน/ชั่วโมง และโรงงาน B สามารถผลิตรถบรรทุกได้ 5 คัน/ชั่วโมง และผลิตรถดับเพลิงได้ 15 คัน/ชั่วโมง ค่าใช้จ่ายในการผลิตรถบรรทุกต่อชั่วโมงคือ $30 และค่าใช้จ่ายในการผลิตรถดับเพลิงต่อชั่วโมงคือ $35 จงหาจำนวนชั่วโมงที่ควรใช้ในการผลิตของเล่นแต่ละประเภทเพื่อให้ประหยัดค่าใช้จ่ายที่สุด และหาค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด (รถบรรทุกใช้ 88 ชั่วโมง รถดับเพลิงใช้ 24 ชั่วโมง และค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด = $3480)

เฉลยแบบฝึกทักษะ (Answers)

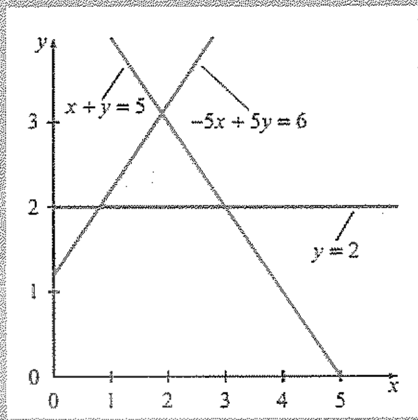
เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.1 กำหนดการเชิงเส้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.1

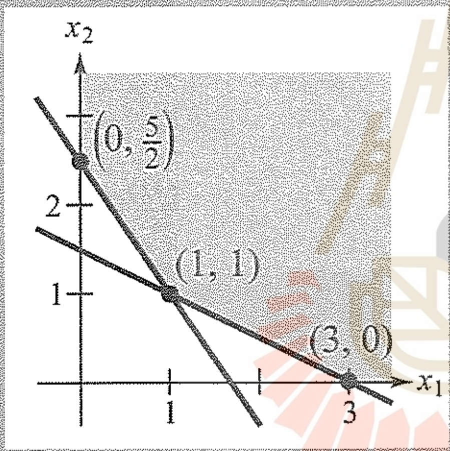
1)



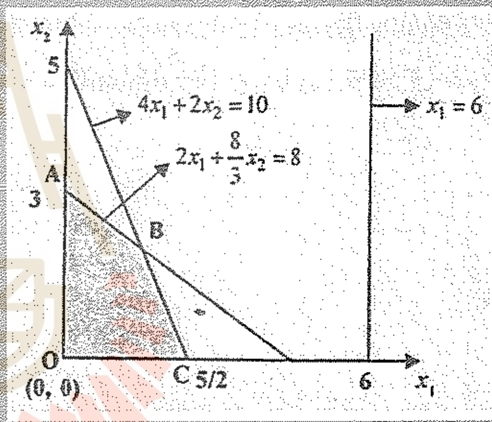
2)



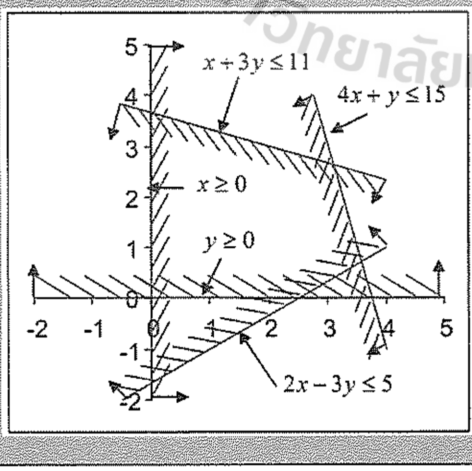
3)



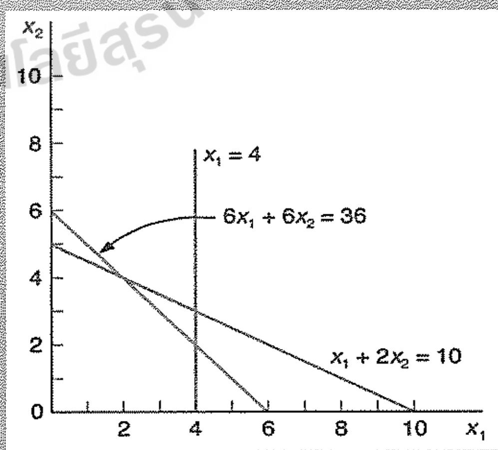
4)



5)



6)



เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.2 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีการเขียนกราฟ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.2

1) ค่าสูงสุด $P(18,4) = 190$ 2) ค่าต่ำสุด $P(1,0) = 2$ 3) ค่าสูงสุด $P(0.5,2.25) = 12.25$

4) ค่าต่ำสุดคือค่าที่ได้จากจุดทุกจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด (2,4) ไปยังจุด (10,0)

5) ค่าต่ำสุด $P(0.625,2.25) = 13.65$ 6) ค่าสูงสุด $P(260,0) = 520$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.3 การหาค่าเหมาะสมที่สุดโดยวิธีซิมเพล็กซ์เบื้องต้น

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.3

1) ค่าสูงสุด $P(0,4) = 16$ 2) ค่าต่ำสุด $P(4,0) = -8$ 3) ค่าสูงสุด $P(1,3) = 5$

4) ค่าต่ำสุด $P(\frac{5}{2},\frac{15}{2}) = 25/2$ 5) ค่าสูงสุด $P(8,12) = 28$

เฉลยแบบฝึกทักษะประจำหัวข้อที่ 6.4 กำหนดการเชิงเส้น ในชีวิตประจำวัน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6.4

1) x เป็นจำนวนสินค้าชนิดแรกที่ผลิตต่อสัปดาห์
   y เป็นจำนวนสินค้าชนิดที่สองที่ผลิตต่อสัปดาห์
   P ที่มากที่สุดคือ เมื่อ x = 12 และ y = 24

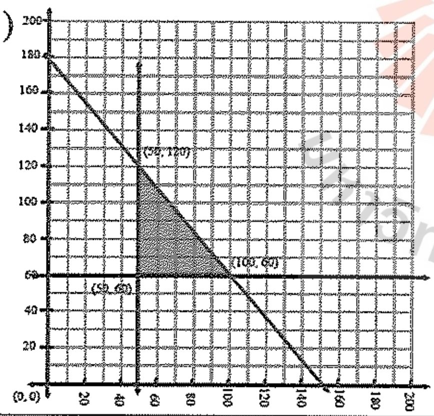
2) นายปีเตอร์จะต้องลงทุนกับข้าวและข้าวสาลีเป็นจำนวนอย่างละ 5 ถุง ถึงจะได้กำไรสูงสุด

3) ควรพิมพ์หนังสือวิชาคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันเป็นจำนวน 4 เล่ม และหนังสือแคลคูลัสอีก 2 เล่ม

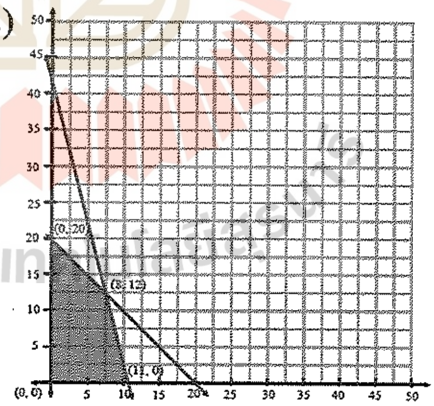
4) นายวิศวะจะจัดการผลิตสารเคมีแต่ละประเภท ก. เป็นจำนวน 200 หน่วยตวงและประเภท ข. เป็นจำนวน 400 หน่วยตวง

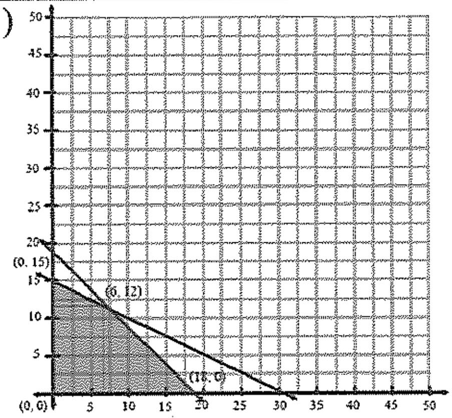
เฉลยแบบฝึกทักษะท้ายบท

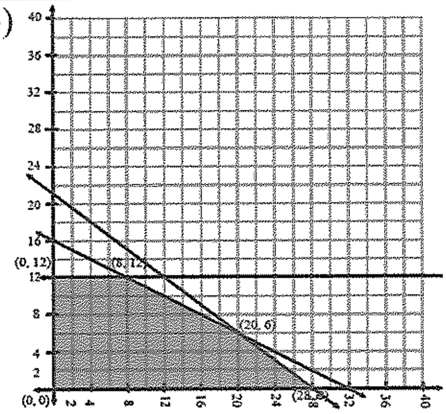
1)

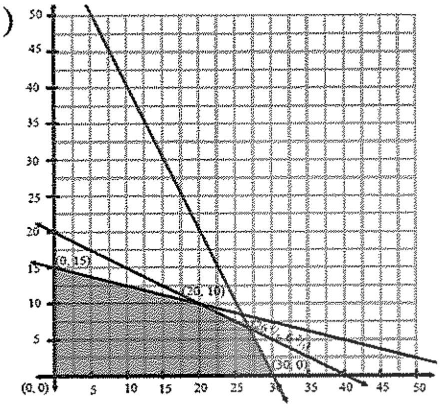


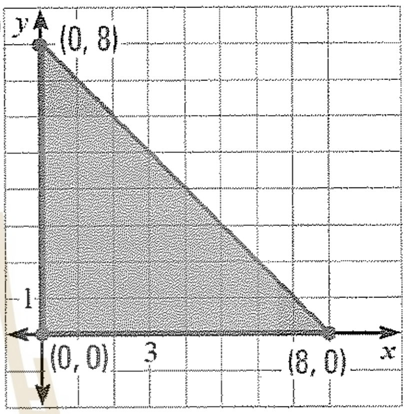
2)

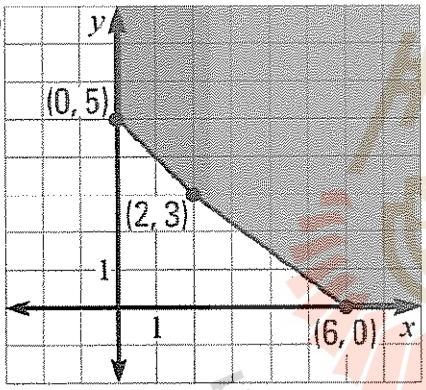


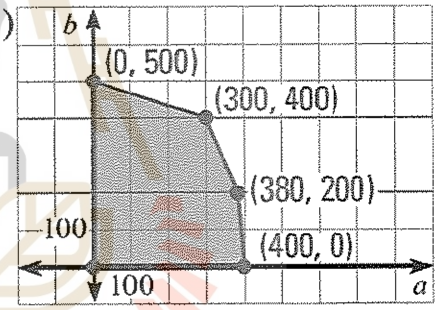
3)


4)


5)


6)


7)


8)


2. รถยนต์ 50 คัน รถบัส 10 คัน

3. กระเป๋าสตางค์/เข็มขัด = 2

4. รถบรรทุกใช้ 88 ชั่วโมง รถดับเพลิงใช้ 24 ชั่วโมง และค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุด = $3480

บทที่ 7

นานาสาระ ปกิณกะคณิตศาสตร์

(Some Interesting Stuff about Mathematics)

นักศึกษาบางคนอาจจะยังไม่คุ้นเคยกับคำว่า "ปกิณกะ" ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ปกิณกะ หมายถึง เบ็ดเตล็ด, กระจาย, ระคนกัน, คละกัน, มักใช้ประกอบหน้าศัพท์อื่น เช่น ปกิณกคดี หมายถึง เรื่องต่างๆ และนี่ ก็คือวัตถุประสงค์หลักของบทสุดท้ายของเอกสารชุดนี้

ในบทนี้ จะได้มีการนำเอาสิ่งต่างๆ จากหลายมุมมองของธรรมชาติความเป็นคณิตศาสตร์มานำเสนอ เพื่อให้ผู้อ่านได้รู้จัก ชวนคิด ฝึกฝน และทราบว่า จริงๆแล้ว คณิตศาสตร์มีความน่าฉงน น่าทึ่ง และน่าสนใจ อยู่อีกหลายต่อหลายส่วน

7.1 บิดาแห่งคณิตศาสตร์แขนงต่าง ๆ (Important Mathematicians)

นักคณิตศาสตร์ที่สำคัญของโลก นับตั้งแต่สมัยโบราณมาจนถึงปัจจุบันนั้น มีมากมายหลายท่าน แต่ในหัวข้อนี้จะได้นำเสนอประวัติ และผลงาน(โดยย่อ)ของเฉพาะที่ผู้เรียบเรียงเชื่อว่านักศึกษาจะพอได้ยินชื่ออยู่เสมอเวลาศึกษาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตดร์

❖ ปีทาโกรัส (Pythagoras)

ประมาณ 572 - 500 ก่อนคริสต์ศักราช

ประวัติ

ปีทาโกรัสเป็นชาวกรีก เกิดที่เกาะซามอสใกล้กับเอเชียไมเนอร์ เนื่องจากทรราช Polycrates ท่านจำต้องออกจากเกาะซามอส กล่าวกันว่าท่านเคยศึกษาที่อียิปต์และ เป็นศิษย์ของทาลิส ปีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักปีทาโกเรียน ที่เมือง Crotona ซึ่งอยู่ทางตอนใต้ของ ประเทศอิตาลี ปีทาโกรัสคิดว่าปริมาณต่าง ๆ ในธรรมชาติสามารถเขียนในรูปเศษส่วนของ จำนวนนับ จนมีคำขวัญของสำนักว่า "ทุกสิ่งคือจำนวนนับ" เมื่อมีการค้นพบจำนวนอตรรกยะขึ้น ทำให้ปีทาโกรัสและศิษย์ทั้งหลายเสียขวัญและกำลังใจ

แผนภาพที่ 58 ปีทากรัส(Pythagoras) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

เมื่อทางราชการขับไล่เพราะกล่าวหาว่า สำนักปีทาโกเรียนเป็นสถาบันศักดินา สำนักปีทาโกเรียนก็สูญสลายไป

ผลงาน

เราไม่ทราบแน่ชัดว่าผลงานชิ้นใดเป็นของปีทาโกรัส ชิ้นใดเป็นของลูกศิษย์ จึงกล่าวรวม ๆ ว่าเป็นของสำนักปีทาโกเรียน ซึ่งมีดังนี้ :-

1. จำนวนคู่และจำนวนคี่
2. ค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างเศษส่วนกับทฤษฎีของดนตรี
3. จำนวนเชิงรูปเหลี่ยม เช่น จำนวนเชิงสามเหลี่ยม , จำนวนเชิงจตุรัส
4. จำนวนอตรรกยะ
5. พีชคณิตเชิงเรขาคณิต
6. พิสูจน์ทฤษฎีบทปีทาโกรัส

❖ ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria)

แผนภาพที่ 59 ยุคลิดแห่งอะเล็กซานเดรีย (Euclid of Alexandria) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

ประมาณ 450 - 3800 ก่อนคริสต์ศักราช

ประวัติ

ยุคลิดเป็นชาวกรีก ศึกษาที่สถาบันของ Plato ที่กรุงเอเธนส์ ท่านได้รับการ แต่งตั้งเป็นศาสตราจารย์และหัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์คนแรกที่มหาวิทยาลัยอะ เล็กซานเดรีย ซึ่งเป็นมหาวิทยาลัยแห่งแรกในโลก ตั้งขึ้นประมาณ 300 ปีก่อนคริสต์ศักราช

ผลงาน

ผลงานชิ้นสำคัญของยุคลิดคือการเขียนตำราทางคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ ผลงานที่ยังคงอยู่ในปัจจุบัน 5 ชิ้น คือ Division of Figures , Data , Phaenomena , Opticและ Elements Elements ประกอบด้วยหนังสือ 13 เล่ม และทฤษฎีบท 465 ทฤษฎีบท เป็นต้น แบบของตำราคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีนิรนัย (Deduction) เนื้อหาส่วนใหญ่จะเกี่ยวกับเรขาคณิต แบบยุคลิด แต่ก็มีเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ ด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีจำนวน

❖ ปิแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat)

ประมาณ ค.ศ. 1601-1665

แผนภาพที่ 60 ปิแยร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre de Fermat) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

ประวัติ

แฟร์มาต์เกิดใกล้เมือง Toulouse ประเทศฝรั่งเศส ในปี 1601 และถึง แก่กรรมที่เมือง Castres ในปี 1665 บิดาเป็นพ่อค้าเครื่องหนัง ในวัยเด็กศึกษาอยู่ กับบ้าน แฟร์มาต์มีอาชีพเป็นนักกฎหมาย เมื่ออายุ 30 ปี ได้รับการแต่งตั้งให้เป็นที่ ปรึกษากฎหมายอขององค์การบริหารส่อนท้องถิ่นของเมือง Toulouse ท่านได้ใช้ เวลาว่างศึกษาค้นคว้าคณิตศาสตร์ เป็นสื่อกลางในการติดต่อกับนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงในสมัยนั้น มีส่วนในการพัฒนาคณิตศาสตร์ในหลายสาขา นับได้ว่าเป็น นักคณิตศาสตร์สมัครเล่นที่มีชื่อเสียงที่สุด

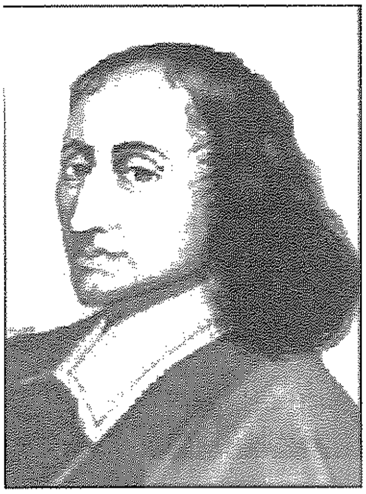
ผลงาน

1. ริเริ่มพัฒนาเรขาคณิตวิเคราะห์ ในระยะเวลาใกล้กันกับเดส์การ์ตส์
2. ริเริ่มวิธีหาเส้นสัมผัสเส้นโค้ง หาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน
3. ริเริ่มพัฒนาทฤษฎีความน่าจะเป็น ร่วมกับปาสกาล
4. พัฒนาทฤษฎีบทต่าง ในทฤษฎีจำนวน เช่น

Fermat's two square theorem : ทุกจำนวนเฉพาะในรูป $4n + 1$ สามารถเขียน ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มยกกำลังสองได้คู่หนึ่งและคู่เดียวเท่านั้น

Fermat's theorem : ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะและ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำได้ว่า p หาร $n^p - n$ ลงตัว

❖ แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal)



แผนภาพที่ 61 แบลส ปาสกาล (Blaise Pascal) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

ประมาณ ค.ศ. 1623-1662

ประวัติ

ปาสกาลเกิดที่เมือง Chermont มณฑล Auvergne ประเทศฝรั่งเศส เมื่อวันที่ 16 มิถุนายน ค.ศ. 1623 บิดาเป็นนักคณิตศาสตร์และผู้พิพากษา ปาสกาล มีความเป็นอัจฉริยะทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่เด็ก

อายุ 12 ปี ท่านได้พัฒนาเรขาคณิต เบื้องต้นด้วยตนเอง

อายุ 14 ปี ท่านได้เข้าร่วมประชุมกับนักคณิตศาสตร์ฝรั่งเศส

อายุ 16 ปี ท่านได้พัฒนาทฤษฎีบทที่สำคัญในวิชาเราขาคณิตโพรเจคตีฟ

และเมื่ออายุ 19 ปี ท่านได้พัฒนาเครื่องคิดเลข ภายหลังจากที่ท่านประสบอุบัติเหตุที่ Neuilly ท่านหันความสนใจไปทางศาสนา และปรัชญา ไม่เช่นนั้นท่านคงเป็นนักคณิตศาสตร์ ที่รุ่งโรจน์ที่สุดคนหนึ่ง

ผลงาน

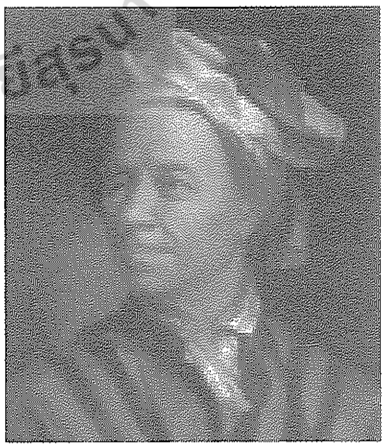
1. งานเขียน Essay pour les coniques (1640) ซึ่งสรุปทฤษฎีบท เกี่ยวกับเรขาคณิตโพรเจกตีฟ ที่ท่านได้พัฒนามาแล้วเมื่ออายุได้ 16 ปี
2. งานเขียน Traite du traingle arithmetique (1665) ซึ่งเกี่ยวกับ "Chinese triangle" หรือในอดีตนิยมเรียกว่า "Pascal triangle" เพราะคิดว่า Pascal เป็นผู้คิดเป็นคนแรก แต่ที่แท้จริงได้มีชาวจีนพัฒนามาก่อนแล้ว
3. วิเริ่มพัฒนาทฤษฎีความน่าจะเป็นในปี ค.ศ. 1654 ร่วมกับ Fermat โดยใช้วิธีที่แตกต่างกัน
4. ศึกษาเส้นโค้ง Cycloid

❖ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler)

ประมาณ ค.ศ.1707 - 1783

ประวัติ

เป็น นักคณิตศาสตร์ และ นักฟิสิกส์ ชาวสวิส เขาได้ชื่อว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ยิ่งใหญ่ที่สุดคนหนึ่งเท่าที่เคยมี เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ เป็นคนแรกที่ใช้คำว่า " ฟังก์ชัน " (ตามคำนิยามของ ไลบ์นิซ ใน ค.ศ. 1694) ในการบรรยายถึงความสัมพันธ์ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร เช่น y = F(x) เขายังได้ชื่อว่าเป็นคนแรกที่ประยุกต์ แคลคูลัส เข้าไปยังวิชาฟิสิกส์ ออยเลอร์เกิดและโตในเมือง บาเซิล เขาเป็นเด็กที่มีความเป็นอัจริยะทางคณิตศาสตร์



แผนภาพที่ 62 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์คนสำคัญคนหนึ่งของโลก

เขาเป็นศาสตราจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ เซนต์ปีเตอร์สเบิร์ก และต่อมาก็สอนที่ เบอร์ลิน และได้ย้อนกลับไปยังเซนต์ปีเตอร์สเบิร์กอีกครั้ง เขาเป็นนักคณิตศาสตร์มีผลงานมากมายที่สุดคนหนึ่ง ผลงานทั้งหมดของเขารวบรวมได้ถึง 75 เล่ม ผลงานของเขามีอิทธิพลอย่างมากต่อผลงานทางคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 18 เขาต้องสูญเสียการมองเห็น และตาบอดสนิทตลอด 17 ปีสุดท้ายในชีวิตของเขา ซึ่งในช่วงนี้เองที่เขาสามารถผลิตผลงานได้ถึงเกือบครึ่งหนึ่งของผลงานทั้ง หมดของเขา และนอกจากนี้ ดาวเคราะห์น้อย 2002 ออยเลอร์ ได้ถูกตั้งชื่อเพื่อเป็นเกียรติแก่เขา

7.2 คณิตศาสตร์ในธรรมชาติ (Mathematics in Nature)

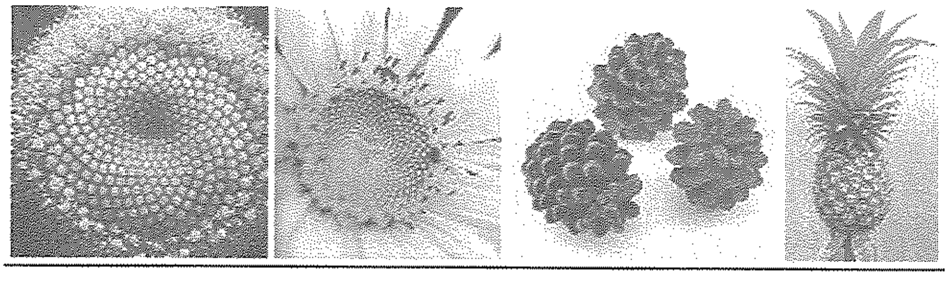
❖ ฟิโบนักชีกับธรรมชาติ

ลีโอนาโด ฟิโบนักชี (Leonado Fibonacci) เป็นนักคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงอีกท่านหนึ่ง ท่านมีชีวิตอยู่ในประเทศอิตาลีในช่วงปี ค.ศ. 1170 -1240 และเป็นผู้คิดค้นลำดับที่มีเอกลักษณ์เฉพาะตัวลำดับหนึ่ง ที่รู้จักกันในนามของ "ลำดับฟิโบนักชี" ลำดับนี้เริ่มต้น 3 เทอมแรกด้วย 1, 2 และ 3 จากนั้น จะได้ว่า เทอมที่ n จะเป็นผลบวกของสองเทอมก่อนหน้านั้น ดังนั้น จะได้ลำดับคือ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... และเป็นที่น่าอัศจรรย์ ที่เมื่อเราสังเกตดีๆ แล้ว จะพบว่า ลำดับนี้ปรากฏอยู่ในธรรมชาติรอบๆตัวเราอย่างมากมาย

แผนภาพที่ 63 ลีโอนาโด ฟิโบนักชี (Leonado Fibonacci) นักคณิตศาสตร์ ผู้คิดค้นลำดับฟิโบนักชี

จากธรรมชาติที่สร้างตัวเองหรือขยายขนาด ขยายการเจริญเติบโตรวมถึงการแพร่พันธุ์ตามธรรมชาติด้วยตัวเลขฟิโบนักชี การเจริญเติบโตของต้นไม้ หรือของสิ่งต่าง ๆ หลายอย่างจึงเป็นไปตามธรรมชาติ นอกจากต้นไม้แล้ว ยังมีดอกไม้ ดังตัวอย่าง เช่น

การจัดวางเมล็ดของดอกทานตะวัน หรือดอกเดซี่ ซึ่งมีการจัดวางเมล็ดเป็นแบบวนก้นหอย นอกจากดอกทานตะวันแล้วก็ยังมีโคนของสน และตาสับปะรถ ดังแสดงในแผนภาพที่ 64

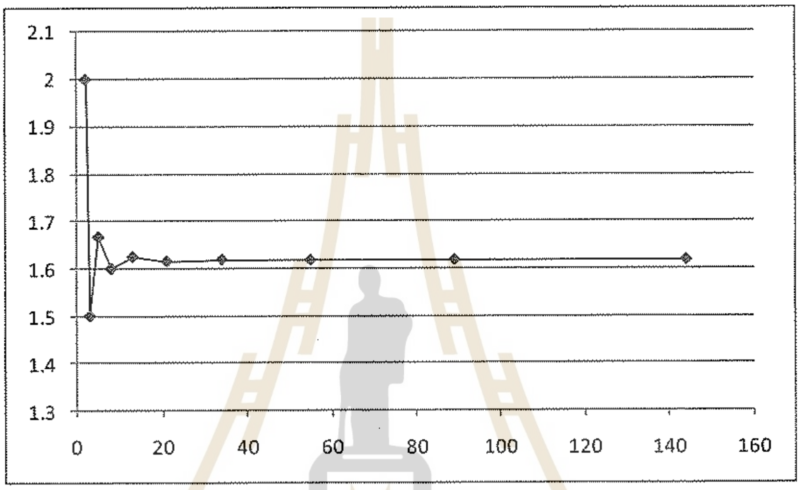


แผนภาพที่ 64 ตัวอย่างการปรากฏจริงของลำดับฟิโบนักชีในธรรมชาติ

❖ ตัวเลขทองคำ (Golden Number)

ตัวเลขลำดับฟิโบนักชี(สร้างโดยใช้รูปภาพสี่เหลี่ยมฟิโบนักชี) เป็นที่รู้จักกันดี และเป็นตัวเลขที่ธรรมชาติสร้างขึ้น ดังนั้น สัดส่วนตัวเลขระหว่างสองตัวเลขที่ติดกันจึงเป็นสัดส่วนทางธรรมชาติ และเราจะเห็นว่า สัดส่วนตัวเลขนี้มีความน่าสนใจไม่น้อย

จากลำดับฟิโบนักชี 1 1 2 3 5 8 13 21 ถ้าจัดตัวเลขสองตัวชิดกันหารกัน จะได้อัตราส่วน 1/1 = 1 2/1= 2 3/2 = 1.5 5/3 = 1.666...... 8/5 = 1.6 13/8 = 1.625 21/13 = 1.61538 .... และถ้าเราเขียนกราฟอัตราส่วนนี้ จะได้รูปกราฟที่เข้าใกล้ 1.6 (ดังแสดงในแผนภาพที่ 65) ค่าตัวเลขที่ได้เมื่อให้จำนวนฟิโบนักชีมีค่ามากขึ้น ค่าจะได้ประมาณ 1.61804 เราเรียกตัวเลขนี้ว่า **ตัวเลขทองคำ** (Golden Number)



แผนภาพที่ 65 กราฟแสดงการลู่เข้าค่าตัวเลจทองคำ 1.61804 ซึ่งเกิดจากอัตราส่วนของค่า 2 ค่าที่ติดกันในลำดับฟิโบนักชี

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอัตรส่วนระหว่างด้านยาวกับด้านกว้างมีค่าเป็น 1.618 นั้น จะเรียกว่า สี่เหลี่ยมทองคำ ซึ่งรูปสี่เหลี่ยมทองคำนี้ มักถูกนำมาใช้ในงานศิลปะ เริ่มตั้งแต่สมัยกรีก และโรมันในสมัยศตวรรษที่ 20 เลยทีเดียว ดังตัวอย่างที่เป็นที่รู้จัก ได้แก่ โครงสร้างของวิหารพาทินอน ภาพคนชรา และภาพโมนา ลิซ่า ของลีโอนาโด ดาวินชี (ดังแสดงในภาพแผนภาพที่ 66)

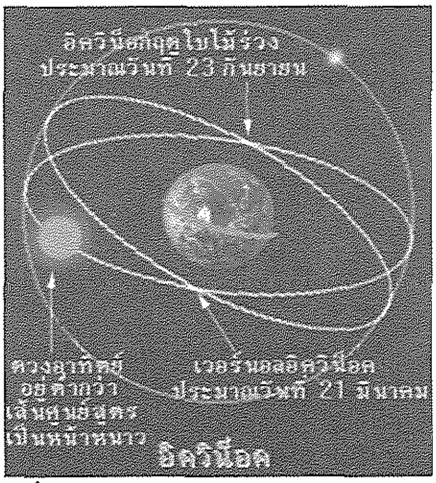
แผนภาพที่ 66 ซ้าย) วิหารพาทินอน วิหารเก่าแก่ของกรีกที่กรุงเอเธนส์ และขวา)ภาพคนชรา ของ ลีโอนาโด ดาวินชี

❖ จินตนาการแบบสามมิติ

ถึงแม้ว่าจะให้โลกเป็นจุดศูนย์กลาง ผู้สังเกตหรือเราอยู่บนพื้นโลกเฝ้ามองทรงกลมท้องฟ้า การหมุนของโลกและการเคลื่อนที่ของโลกรอบดวงอาทิตย์ ทำให้เห็นสิ่งต่าง ๆ บนทรงกลมท้องฟ้าแตกต่างออกไป การคำนวณจึงต้องเริ่มจากจุดศูนย์กลางของโลก และจินตนาการแบบสามมิติ

จากที่ทราบกันดีว่าโลกหมุมรอบดวงอาทิตย์ โดยแกนหมุนรอบตัวเองของโลกเอียง $23\frac{1}{2}$ องศา ดังนั้นเส้นทางที่ผู้สังเกตอยู่บนโลกมองดวงอาทิตย์จึงเห็นเสมืองดวงอาทิตย์เคลื่อนที่ผ่านทรงกลมท้องฟ้า แนวเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์เคลื่อนผ่านทรงกลมท้องฟ้าเรียกว่าสุริยะวิถี (Ecliptic) ซึ่งเคลื่อนที่ผ่านกลุ่มดาว 12 กลุ่ม (จักรราศี) สิ่งที่น่าสังเกตคือ ทุกประเทศรู้จักกับจักรราศี (Zocliac) และมีการเรียกชื่อกลุ่มดาวจักรราศีที่คล้ายคลึงกันมาตั้งแต่โบราณ

เนื่องจากแกนหมุนของโลกเอียงทำมุม $23\frac{1}{2}$ องศา กับแนวแกนการหมุนรอบดวงอาทิตย์ ดังนั้นแนวเส้นศูนย์สูตรโลกบนทรงกลมท้องฟ้าจึงตัดกับแนวเส้นสุริยวิถีสองจุด จุดตัดนี้เรียกว่าอิควิน็อก (Equinox) เป็นจุดตัดที่ทำให้กลางวันและกลางคืนเท่ากันจุดตัดอิควิน็อกแรกเกิดขึ้นราววันที่ 21 มีนาคม ซึ่งถือว่าเป็นวันที่กลางวันและกลางคืนยาวเท่ากัน โดยจะต้องคิดที่แนวศูนย์สูตร์โลก จุดตัดอีกจุดหนึ่งคือราววันที่ 23 กันยายน



แผนภาพที่ 67 อิควิน็อก (Equinox) : แนวเส้นศูนย์สูตรโลกบนทรงกลมท้องฟ้าตัดกับแนวเส้นสุริยวิถีสองจุด

สำหรับประเทศไทยหากคิดที่กรุงเทพซึ่งอยู่ที่เส้นรุ้งประมาณ 10 องศา แนวแกนของประเทศไทยตัดเส้นสุริยะวิถีประมาณวันที่ 13 เมษายน ซึ่งเราถือว่าเป็นวันสงกรานต์ หรือเป็นวันขึ้นปีใหม่ของไทย

สังเกตว่าโลกหมุนในแนวทิศตามกฎมือขวา ขณะเดียวกับดาวอาทิตย์เคลื่อนที่ตามทรงกลมท้องฟ้าในทิศทางเดียวกันด้วย

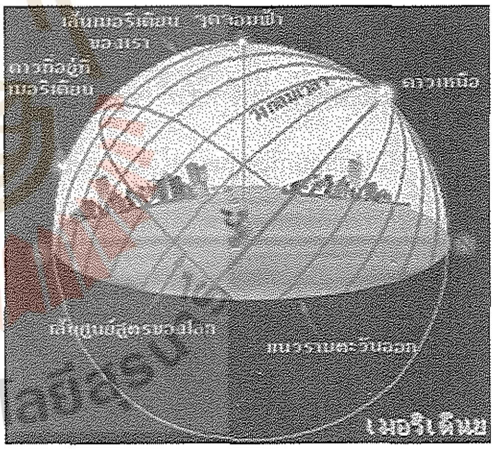
หลายคนที่มีโอกาสเดินทางไปต่างประเทศ เช่น อเมริกา อังกฤษ หรือประเทศในแถบเอเชียอย่างญี่ปุ่น ต่างก็ต้องปรับเวลาให้ตรงกับประเทศนั้น ๆ นั้นเป็นเพราะทุกขณะ เวลาบนพื้นโลกไม่เท่ากัน

❖ เวลากับจุดสังเกตบนพื้นโลก

หากเรายืนอยู่ที่หนึ่งที่ใดบนพื้นโลก เช่นกรุงเทพมหานครที่เส้นละติจูดประมาณ 12 องศา เราจะเห็นดาวเหนือทางทิศเหนือสูงประมาณ 12 องศา แกนการหมุนของโลกหมุนตามแนวทิศดาวเหนือ หากเรายืนตัวตรง จุดกลางศรีษะเราชี้ขึ้นกลางฟ้าตั้งฉากกับพื้นดินเราเรียกว่าจุดจอมฟ้า (Zenith) ถ้าเราอยู่ที่โล้งแจ้งมองไปรอบ ๆ ตัวจะเห็นเส้นขอบฟ้าที่เป็นจุดตัดระหว่างพื้นกับท้องฟ้ารอบตัวเรา และถ้าจินตนาการในรูปแบบสามมิติเราจะเห็นว่า แนวหมุนของโลกทำให้มีเส้นศูนย์สูตรโลก การสังเกตดาวบนท้องฟ้าจึงมีการเห็นที่แตกต่างกันเมื่ออยู่บนพื้นโลกที่ตำแหน่งต่างกัน

สิ่งที่น่าสนใจและเป็นสิ่งสำคัญคือ แนวที่ลากจากทิศเหนือไปทิศใต้ผ่านทรงกลมท้องฟ้าผ่านจุดจอมฟ้า เราจะเรียกว่าเส้นเมอริเดียนของคุณ (your meridian)

แนวทิศเหนือใต้บนทรงกลมท้องฟ้าเป็นจุดอ้างอิงที่สำคัญเกี่ยวกับเวลา โดยเราถือว่าถ้าดวงอาทิตย์อยู่ในแนวเส้นนี้ บนท้องฟ้าเราจะถือว่าเป็นเวลา 12:00 น. และการนับเวลาในระบบโซลาร์นี้ใช้ระบบอ้างอิงกับเส้นเมอริเดียนของคุณ การแบ่งเส้นแนวตามแนวเหนือใต้ไปทางทิศตะวันออกและตะวันตกบนทรงกลมนี้ เกิดทำให้มีมุมของเวลาเกิดขึ้น พระอาทิตย์อยู่ที่มุมของเวลาที่ใดก็เทียบกับจุดอ้างอิงของเมอริเดียนได้



แผนภาพที่ 68 เส้นเมอริเดียนของคุณ (your meridian)

7.3 รู้ไว้ใช่ว่า (Some More of Cool Facts)

❖ เกี่ยวกับเครื่องหมาย $\int$

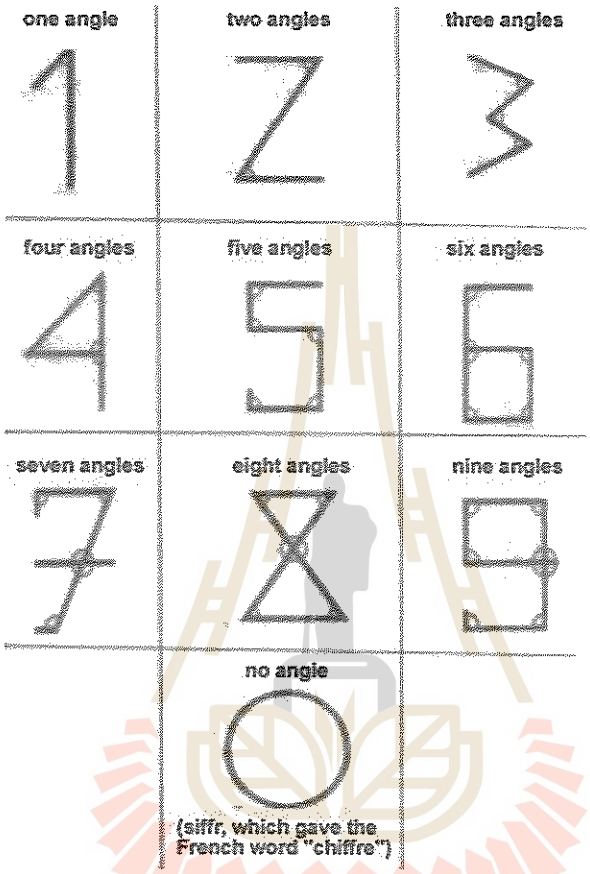
1. เครื่องหมายนี้ มีชื่อว่า "อินทริกรัล" ในทางคณิตศาสตร์

2. ผู้ที่ใช้เป็นคนแรกคือ Gottfried Wilhelm von Leibniz นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน เมื่อช่วงปลายศตรวรรตที่ 17

3. เครื่องหมายนี้ ถูกออกแบบให้คล้ายอักษรตัว ' S ' ซึ่งย่อมาจากคำว่า Sums ที่หมายถึง ผลรวม เพราะการอินทริกรัลคือลิมิตของผลรวม

❖ เกี่ยวกับเลขอารบิกที่เราใช้กันทุกวัน

นักศึกษาทราบหรือไม่ว่า ต้นกำเนิดของเลขอารบิคนี้ แต่ละตัวนั้น ถูกออกแบบ ให้เป็นจำนวนมุมที่เกิดจากการเขียนเลขตัวนั้นๆ ดังแสดงในแผนภาพที่ 69



แผนภาพที่ 69 การเขียนเลขอารบิก ที่เกิดจากการนับมุมของเลขตัวนั้นๆ

เกี่ยวกับ π

1. π เป็นจำนวนอตรรกยะ หมายถึง ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนจริง 2 จำนวนได้ แต่เรามักจะเขียน $\pi = \frac{22}{7}$ ซึ่งจริงๆแล้ว ค่า $\frac{22}{7}$ เป็นแค่ค่าประมาณ ไม่ใช่ค่าแม่นตรง

2. ค่าประมาณอีกค่าหนึ่งที่มีความแม่นยำสูงมากคือ $\frac{104348}{33215}$ ซึ่งมีความแม่นยำสูงถึง 0.00000001056%

3. สำหรับ 100 หลักแรกของค่าของ π คือ 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 ...

❖ เกี่ยวกับจำนวนและการคูณของจำนวน

1. จำนวนต่อไปนี้ เป็นผลรวมของการนำเอาเลขเดี่ยวแต่ละตัว ยกกำลัง 3

153, 370, 371, และ 407

2. เมื่อนำเอา 111,111,111 คูณด้วย 111,111,111 จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 12,345,678,987,654,321

3. การคูณกันและเรียงตัวกันเป็นแบบแผนของจำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1, 2, 8, และ 9 ดังแสดงในแผนภาพที่ 70

9 x 2 = 18
99 x 2 = 198
999 x 2 = 1998
9999 x 2 = 19998
99999 x 2 = 199998
999999 x 2 = 1999998
9999999 x 2 = 19999998
99999999 x 2 = 199999998
999999999 x 2 = 1999999998

แผนภาพที่ 70 การเรียงตัวกันเป็นแบบแผนของผลคูณของจำนวนที่ประกอบด้วย 1, 2, 8 และ 9

4. การนำเอาจำนวน 12345679 ไปคูณกับบางจำนวน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่ที่สวยงาม ดังแสดงในแผนภาพที่ 71

12345679 x 09 = 111111111
12345679 x 18 = 222222222
12345679 x 27 = 333333333
12345679 x 36 = 444444444
12345679 x 45 = 555555555
12345679 x 54 = 666666666
12345679 x 63 = 777777777
12345679 x 72 = 888888888
12345679 x 81 = 999999999

แผนภาพที่ 71 การนำเอาจำนวน 12345679 ไปคูณกับบางจำนวน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนที่ที่สวยงาม

5. การนำเอาจำนวนที่ประกอบด้วยเลขเดี่ยวที่เป็นเลข 1 ล้วนๆ มาคูณกัน ก็ให้ค่าผลลัพธ์ที่น่าทึ่งเช่นกัน ดังแสดงในแผนภาพที่ 72

$$
\begin{gathered}
1 \times 1 = 1 \\
11 \times 11 = 121 \\
111 \times 111 = 12321 \\
1111 \times 1111 = 1234321 \\
11111 \times 11111 = 123454321 \\
111111 \times 111111 = 12345654321 \\
1111111 \times 1111111 = 1234567654321 \\
11111111 \times 11111111 = 123456787654321 \\
111111111 \times 111111111 = 12345678987654321
\end{gathered}
$$

แผนภาพที่ 72 การคณกันของจำนวนที่ประกอบด้วยเลข 1 ล้วนๆ ก็ให้ค่าที่น่าสนใจ

6. การคูรกันของเลขจำนวนอื่นๆ ในรูปแบบอีกบางรูปแบบ ก็ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจอีกด้วย อาทิ ดังแสดงในแผนภาพที่ 73

$$
\begin{gathered}
1 \times 9 + 2 = 11 \\
12 \times 9 + 3 = 111 \\
123 \times 9 + 4 = 1111 \\
1234 \times 9 + 5 = 11111 \\
12345 \times 9 + 6 = 111111 \\
123456 \times 9 + 7 = 1111111 \\
1234567 \times 9 + 8 = 11111111 \\
12345678 \times 9 + 9 = 111111111 \\
123456789 \times 9 + 10 = 1111111111
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
1 \times 8 + 1 = 9 \\
12 \times 8 + 2 = 98 \\
123 \times 8 + 3 = 987 \\
1234 \times 8 + 4 = 9876 \\
12345 \times 8 + 5 = 98765 \\
123456 \times 8 + 6 = 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 = 9876543 \\
12345678 \times 8 + 8 = 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 = 987654321
\end{gathered}
$$

แผนภาพที่ 73 การคูณกันของบางจำนวน ก็ให้ผลลัพธ์ที่น่าสนใจ

7.4 สนุกกับปริศนาน่าคิด (Have Fun with This)

นักศึกษาคงพอจะได้ทราบ และทดลองทำโจทย์ปริศนาทางคณิตศาสตร์มาบ้างแล้วในระดับมัธยมศึกษา ในหัวข้อนี้ ผู้เรียบเรียงมีวัตถุประสงค์หลัก คือ เพื่อให้นักศึกษาได้ลองทดสอบความสามารถในการคิดวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ กับปริศนาต่างๆที่ได้นำมาเสนอนี้

ปริศนาที่ 1: จริงไหมหน่อ

1. ให้เขียนตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากกว่า 0 และน้อยกว่า 10 เป็นจำนวน 3 ตัวเรียงกัน โดยที่ ตัวเลขตัวแรกทางซ้ายมือ ให้มีค่ามากสุด และตัวที่สองน้อยกว่าตัวแรก และตัวที่สามทางขวาสุดให้มีค่าน้อยสุด
2. หลังจากนั้นจัดเรียงสลับกัน ให้ตัวเลขที่น้อยที่สุดที่เคยอยู่ทางขวามือ มาอยู่ทางซ้ายมือสุด
3. นำเอาจำนวนที่เขียนในข้อ 1 มาลบด้วยจำนวนที่เขียนในข้อ 2
4. นำผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 3 มาเขียนสลับเรียงกันใหม่ โดยทำเหมือนกระบวนการขั้นที่ 2
5. นำเอาผลลัพธ์ในข้อ 3 และจำนวนที่เรียงใหม่แล้วในข้อ 4 มารวมกัน แล้วจะได้คำตอบเป็น 1089 เสมอ จริงไหมหน่อ

ทดสอบ

ทำตามขั้นที่ 1 ลองเขียนเลข 5 3 2

ทำตามขั้นที่ 2 เขียนสลับกันได้ 2 3 5

ทำตามขั้นที่ 3 นำทั้งสองจำนวนมาลบกัน ได้ 532 - 235 = 297

ทำตามขั้นที่ 4 คือเอาผลลัพธ์ที่ได้มาเขียนเรียงใหม่ ได้ 792

ทำตามขั้นที่ 5 คือ เอาจำนวนในข้อ 4 และข้อ 5 มารวมกัน ได้ 297 + 792 = 1089 ☺

☺ คราวนี้ ให้นักศึกษาลองสุ่มตัวเลขทำเองดูนะครับ ☺

ปริศนาที่ 2: ถ้าเราจะแบ่งจำนวน 110 ออกเป็นผลบวกของสองจำนวน โดยที่จำนวนหนึ่งในนั้น มีค่าเป็น 150 % ของอีกจำนวน จงหาว่าจำนวนสองจำนวนนั้น คืออะไรบ้าง ?

ปริศนาที่ 3: พรทิพย์ทำข้อสอบ 20 ข้อ โดยการให้คะแนน สามารถแบ่งได้ คือ ถ้าพรทิพย์ทำถูก จะได้ข้อละ 10 คะแนน และถ้าทำผิด จะถูกหัดข้อละ 5 คะแนน ถ้าผลการสอบของพรทิพย์ปรากฏว่า ได้คะแนนรวม 125 คะแนน จงหาว่า พรทิพย์ทำผิดกี่ข้อ?

ปริศนาที่ 4: เมื่อสมชาย ถูกถามว่าวันเกิดเขาคือวันไหน เขาตอบว่า "ผมอายุครบ 25 ปี เมื่อวานซืนนี่เอง และปีหน้านี้ ผมจะอายุครบ 27 ปีแล้วครับ" ถามว่า สมชายเกิดวันที่เท่าไหร่ เดือนอะไร และเขาถูกถามวันที่เท่าไหร่ เดือนอะไร?

ปริศนาที่ 5: ให้เลขศูนย์มา 5 ตัว จงใช้ตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์อะไรก็ได้ ให้ได้คำตอบเป็น 120

ปริศนาที่ 6: กำหนดให้ลำดับเป็น 01, 1011, 111021, 31101211, จงหาว่าตัวถัดไป คืออะไร?

ปริศนาที่ 7: สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ตัวไหน ที่เวลาใส่เข้าไประหว่างตัวเลข 5 และ 9 แล้วได้ผลลัพธ์ที่มีค่ามากกว่า 5 และน้อยกว่า 9

ปริศนาที่ 8: จงเติมตัวเลข 0 ถึง 9 (ยกเว้น 4 และ 7) เพื่อให้สมการข้างล่างนี้ เป็นจริง (ตัวเลขเดียวถูกใช้ได้แค่ตำแหน่งเดียว) 7 _ _ * 4 _ = _ _ _ _ _ (กำหนดให้ * แทนการดำเนินการการคูณของจำนวนจริง)

ปริศนาที่ 9: ถ้าเขียนตัวอักษรเป็นสมการ ดังนี้ I F * A T = FIAT แล้วจงหาว่า อักษรแต่ละตัวควรแทนด้วยตัวเลขเดี่ยวตัวไหนใน 0 ถึง 9 จึงจะทำให้สมการข้างบนเป็นจริง (กำหนดให้ * แทนการดำเนินการการคูณของจำนวนจริง)

ปริศนาที่ 9: จำนวนถัดไปนี้ คือจำนวนอะไร 18, 46, 94, 63, 52, ... ?

ปริศนาที่ 11: ตัวอักษรตัวถัดไป คืออะไร O, T, T, F, F, S, S, E, ...?

ปริศนาที่ 12: จำนวนเฉพาะที่ติดกันสามจำนวนใด ที่ให้ผลรวมเป็น 220

************** ☺ ขอให้นักศึกษาทุกคน ประสบความสำเร็จในการเรียนวิชานี้ โดยถ้วนหน้ากันนะครับ ☺ *********

บรรณานุกรม

C. Paramasivan and T.Subramanian, *Financial Management*, **1985**, New Age International (P) Limited, Faculty of Commerce, New Delhi.

D. Burzynsky, *Wede Ellis, Elementary Algebra*, **1989**, Saunders College Publishing.

J. A. Murtha and E.R. Willard. *Linear Algebra and Geometry*, **1969**.,Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York.

N. J. Pullman. *Matrix Theory and its Applications,* **1976**. Marcel Dekker. Inc. New York.

R.E. Larson and B.H. Edwards. *Elementary Linear Algebra*, **1988**. D.C.Heath and Company, Lexington, Massachusetts Toronto.

R. J. Elliott, and P. E Kopp,., *Mathematics of Financial Markets*, **1998**, Springer-Verlag, New York.

V. Horne J. C *Financial Management and Policy* **,1989,** Englewood Cliff, N.J Prentice Hall Inc;

Z. Jia Dai, M. Warmer, T. Lam, *High School Mathematics Extensions*, **2008**, Wikibooks Contributor.

กมล เอกไทยเจริญ . **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 (สาระเพิ่มเติม).** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, (ม.ป.ป.)

คณิต มงคลพิทักษ์สุข *Math E-Book*, เผยแพร่ทางอินเตอร์เนท http://math.reads.it , 2548

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. **คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่2.** กรุงเทพฯ: พ.ศ. พัฒนา, (ม.ป.ป.)

นพพร แย้มแสง, ทรงศักดิ์ ด่านพานิช. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.2 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : แม็ค, 2554.

สุพจน์ ภิญโญภัสสร คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-6) ชั้น ม.4 เล่ม 1 :สื่อเสริมสาระพื้นฐาน

สุพจน์ ภิญโญภัสสรสิริ. คณิตศาสตร์ ม.2 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : หจก.สามลดา, 2554

โชคชัย สิริหาญอุดม. แบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ ม.2 เล่ม 1 สาระการเรียนรู้พื้นฐาน. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2553.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, กระทรวงศึกษาธิการ . หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว, 2553.

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน , กระทรวงศึกษาธิการ . ตัวชี้วัดและสาระแกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย, 2551.

ดัชนี (Index)