ความน่าจะเป็น
Probability

ผศ.ดร.ประภาศรี อัศวกุล
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ประภาศรี อัศวกุล

ความน่าจะเป็น
Probability

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2539

พิมพ์ครั้งที่ 2 จำนวน 1,000 เล่ม พ.ศ. 2539

พิมพ์ครั้งที่ 3 จำนวน 400 เล่ม พ.ศ. 2541

ดำเนินการโดย ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำนำ

ในธรรมชาติรอบตัวเรา มีลักษณะพิเศษที่สังเกตได้คือ ความหลากหลาย ซึ่งอาจมองเห็นได้หรือมองเห็นไม่ได้ด้วยตาเปล่า อย่างไรก็ตามนักวิทยาศาสตร์พยายามอธิบายและทำความเข้าใจกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบที่มีความหลากหลาย แนวทางหนึ่งที่ใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์นั้นอาศัยทฤษฎีความน่าจะเป็น โดยพิจารณาปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นว่า เป็นผลจากพฤติกรรมของหน่วยย่อยต่าง ๆ ในธรรมชาติประกอบกัน

ตำรา "ความน่าจะเป็น" เล่มนี้ผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้น เพื่อใช้ในการเรียนการสอนวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งเป็นวิชาหนึ่งในหมวดวิชาวิทยาศาสตร์พื้นฐานของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ผู้เขียนได้ใช้ตำราต่างประเทศที่อ้างอิงถึงในบรรณานุกรมประกอบกับประสบการณ์การสอนเป็นแนวทางในการเรียบเรียงตำราเล่มนี้ เนื้อหาในเล่มเริ่มจากพื้นฐานและทฤษฎีของความน่าจะเป็น แล้วเริ่มแนะนำ "ตัวแปรสุ่ม" (random variables) ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ อันเป็นแนวคิดพื้นฐานที่สำคัญของการใช้สถิติในปัจจุบัน เนื้อหาที่ครอบคลุมต่อไป คือ ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มและค่าคาดหมาย ตัวแปรสุ่มหลายมิติ ซึ่งนักศึกษาควรทำความเข้าใจโดยใช้หลักการและคุณสมบัติของตัวแปรสุ่มสองมิติเป็นแนวทางและบทท้ายสุดจะครอบคลุมการแจกแจงที่สำคัญ ๆ

ผู้เขียนขอประกาศกิตติคุณปรมาจารย์ผู้แต่งตำราทุกท่านที่อ้างอิงถึงในบรรณานุกรมนี้ และขอขอบคุณ คุณวรรณา ปัตตะ ผู้พิมพ์ต้นฉบับของตำราเล่มนี้ได้อย่างดียิ่ง ตลอดจนคุณปราณี กระจ่างโพธิ์ คุณพิมพรรณ อนันต์ชลาลัย คุณปรีดา ชัยบำรุง และคุณจาริพร สุขเหลือ ที่ได้ช่วยกันแก้ไขต้นฉบับในการพิมพ์ครั้งนี้ด้วย

ประภาศรี อัศวกุล

18 ธันวาคม 2539

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

บทที่ 5 **การแจกแจงที่สำคัญแบบต่าง ๆ**

(Some Important Distributions)

1

ความน่าจะเป็น

Probability

1.1 ความรู้เบื้องต้น

ในทางวิชาการเราสร้างกฎเกณฑ์โดยอาศัยหลักตรรกะ ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อหามาตรวัดว่า "โอกาส" หรือความเป็นไปได้ที่เหตุการณ์หนึ่ง ๆ ที่เราสนใจศึกษาจะเกิดขึ้นมีมากน้อยเพียงใด เรากำกับโอกาสหรือความเป็นไปได้นี้ด้วยค่าตัวเลขค่าหนึ่งซึ่งเปรียบเสมือน "น้ำหนัก" ของเหตุการณ์ เราเรียกค่าตัวเลขนี้ว่า "ความน่าจะเป็น" (Probability) ของเหตุการณ์ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์จึงเป็นตัวสะท้อนที่ใช้คาดคะเนโอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ ในเบื้องต้นเราสรุปความหมายของความน่าจะเป็นไว้ดังนี้

1. ความน่าจะเป็น คือ จำนวนจริงจำนวนหนึ่งในช่วงจาก 0 ถึง 1 ซึ่งสะท้อนโอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์
2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าใกล้หนึ่ง หมายความว่า เหตุการณ์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นง่าย แต่ไม่ได้หมายความว่าจะต้องเกิดขึ้นอย่างแน่นอน
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าใกล้ศูนย์ หมายความว่า เหตุการณ์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นยาก แต่ไม่ได้หมายความว่าจะไม่เกิดขึ้นเลย
4. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์มีค่าใกล้ 0.5 หมายความว่า โอกาสที่เหตุการณ์นั้น ๆ จะเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นใกล้เคียงกัน
5. ความน่าจะเป็นซึ่งมีค่าในช่วง 0 ถึง 1 อาจเทียบเป็นค่าในช่วง 0 ถึง 100 หรือเป็นเปอร์เซนต์ ซึ่งใช้ในการพูดหรือการเขียนทั่ว ๆ ไป

แนวทางในการตีความหมายของความน่าจะเป็นที่กล่าวไว้ข้างต้นนี้ กระทำได้เมื่อเราทราบอยู่ก่อนแล้วว่าความน่าจะเป็นมีค่าเท่าใด แต่ปัญหาคือ เรามีหลักการอย่างใดในการพิจารณาหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ แนวทางหลัก ๆ มีอยู่ 3 วิธี กล่าวคือ

1. **วิธีเชิงบุคคล** (personal approach) เป็นวิธีที่ใช้ความคิดเห็นและประสบการณ์ของผู้ศึกษาประกอบกับข้อมูลที่มีอยู่ เพื่อคาดคะเนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ การหาความน่าจะเป็นโดยวิธีนี้จึงกระทำได้เสมอ แต่จุดอ่อนของวิธีนี้คือ ความแม่นยำและความถูกต้องจะมีมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับความสามารถของผู้ศึกษาประกอบกับความแม่นยำของข้อมูล

2. **วิธีความถี่สัมพัทธ์หรือวิธีเชิงประจักษ์** (relative frequency, empirical method) เป็นวิธีที่เราสังเกตเหตุการณ์หนึ่ง ๆ ที่เราสนใจศึกษา โดยทำการทดลองซ้ำหลาย ๆ ครั้ง แล้วบันทึกจำนวนครั้งหรือความถี่ที่เหตุการณ์ที่เราสนใจศึกษาเกิดขึ้น ให้ A เป็นเหตุการณ์ และให้ $P(A)$ เป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ดังนั้น เราสามารถ**ประมาณ** $P(A)$ โดย

$$P(A) \approx \frac{m_A}{n} \approx \frac{\text{จำนวนครั้งที่เหตุการณ์} A \text{ เกิดขึ้น}}{\text{จำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำ}}$$

(หมายถึง "ประมาณโดย)

ความน่าจะเป็นที่หาโดยวิธีนี้เป็นค่าโดยประมาณ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำ ดังนั้นสำหรับแต่ละค่าของ n ค่าประมาณของ $P(A)$ อาจแตกต่างกันออกไป แต่เมื่อการทดลองถูกกระทำซ้ำภายใต้สภาวะอันเดียวกันเป็นจำนวนครั้งมากขึ้น ๆ ค่าประมาณของ $P(A)$ ที่ได้จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อย การหาค่าของ $P(A)$ โดยวิธีนี้จึงควรให้ n มีค่าใหญ่พอ

3. **วิธีคลาสสิค** (classical approach) เป็นวิธีที่เราใช้สำหรับการทดลองที่เราทราบว่าผลลัพธ์ของการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเท่าใด และแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน (equally likely outcomes) ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หาได้โดย

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{\text{จำนวนของผลลัพธ์ที่เป็นเหตุการณ์ } A}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด}}$$

ข้อได้เปรียบของวิธีนี้คือ เราไม่ต้องทำการทดลองจริง ๆ เพียงแต่เราทราบว่า แต่ละผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของการทดลองมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน $P(A)$ คำนวณโดยวิธีนี้ไม่ใช่ค่าประมาณแต่สะท้อนให้เห็นชัดเจนว่า ความถี่ที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นมีเท่าใด

ตัวอย่าง 1.1 เมื่อเรือบรรทุกน้ำมันเกิดอุบัติเหตุทำน้ำมันรั่ว นักวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมต้องทำการคาดคะเนความน่าจะเป็นที่ "บริเวณน้ำมันรั่ว จะถูกเก็บกวาดหมด ก่อนที่สิ่งแวดล้อมบริเวณชายฝั่งจะถูกทำลาย" ข้อมูลที่ใช้ช่วยพิจารณามี ปริมาณของน้ำมันรั่ว กำลังลม และสภาพของน้ำในช่วงการเก็บกวาดน้ำมันรั่ว และระยะทางระหว่างชายฝั่งและบริเวณน้ำมันรั่ว นักวิทยาศาสตร์ใช้ความคิดเห็นและประสบการณ์ของตนเองประกอบกับข้อมูลดังกล่าวเพื่อหาความน่าจะเป็น วิธีนี้จึงเป็นวิธีเชิงบุคคล

ตัวอย่าง 1.2 วิศวกรไฟฟ้าทำการศึกษา "ช่วงเวลาที่มีการใช้ไฟฟ้าสูงสุด" และพบว่าใน 100 วัน ที่เลือกโดยการสุ่ม มี 80 วัน ที่ความต้องการใช้ไฟฟ้าสูงสุดอยู่ในช่วงเวลา 18.00 - 20.00 น. จึงสรุปว่า "ความน่าจะเป็น" ที่เหตุการณ์เช่นนี้จะเกิดขึ้นในวันต่อไปมีค่าประมาณ $\frac{80}{100} = .80$ วิธีนี้เป็นวิธีความถี่สัมพัทธ์

ตัวอย่าง 1.3 ปัญหาการกระจายของลูกบอล 3 ลูก ไปในเซล 3 เซล โดยให้ a, b, c แทนลูกบอล 3 ลูก ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด มีทั้งหมด 27 แบบ ดังแสดงในตาราง 1.1 เช่น

$\{a \mid bc \mid -\}$ หมายความว่า ในเซลที่ 1 มีลูกบอล a ในเซลที่ 2 มีลูกบอล b และ c และในเซลที่ 3 ไม่มีลูกบอล

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เซล ๆ หนึ่งถูกครอบครองโดยลูกบอลมากกว่า 1 ลูก และให้ B เป็นเหตุการณ์ที่แต่ละเซลถูกครอบครองโดยลูกบอลเพียง 1 ลูกเท่านั้น ถ้าเราทราบว่าผลลัพธ์ที่ 1 - 27 มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B คำนวณได้ดังนี้

เหตุการณ์ A ประกอบด้วยผลลัพธ์ที่ 1 - 21 (ในตาราง 1.1) มี 21 แบบ
เหตุการณ์ B ประกอบด้วยผลลัพธ์ที่ 22 - 27 (ในตาราง 1.1) มี 6 แบบ
จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดมี 27 แบบ

$$\therefore \quad P(A) = \frac{21}{27} = \frac{7}{9} \quad \text{และ} \quad P(B) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

ตาราง 1.1

1.	$\{abc \mid - \mid -\}$	10.	$\{a \mid bc \mid -\}$	19.	$\{- \mid a \mid bc\}$
2.	$\{- \mid abc \mid -\}$	11.	$\{b \mid a\ c \mid -\}$	20.	$\{- \mid b \mid a\ c\}$
3.	$\{- \mid - \mid abc\}$	12.	$\{c \mid ab \mid -\}$	21.	$\{- \mid c \mid ab\}$
4.	$\{ab \mid c \mid -\}$	13.	$\{a \mid - \mid bc\}$	22.	$\{a \mid b \mid c\}$
5.	$\{a\ c \mid b \mid -\}$	14.	$\{b \mid - \mid a\ c\}$	23.	$\{a \mid c \mid b\}$
6.	$\{bc \mid a \mid -\}$	15.	$\{c \mid - \mid ab\}$	24.	$\{b \mid a \mid c\}$
7.	$\{ab \mid - \mid c\}$	16.	$\{- \mid a\ b \mid c\}$	25.	$\{b \mid c \mid a\}$
8.	$\{a\ c \mid - \mid b\}$	17.	$\{- \mid a\ c \mid b\}$	26.	$\{c \mid a \mid b\}$
9.	$\{bc \mid - \mid a-\}$	18.	$\{- \mid bc \mid a\}$	27.	$\{c \mid b \mid a\}$

1.2 การทดลอง แซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์ (Experiment, Sample Spaces and Events)

ในการศึกษาความน่าจะเป็น เราจะพิจารณาการทดลอง(experiment) ที่เราไม่สามารถคาดคะเนผลลัพธ์ของการทดลองได้อย่างแน่นอน การทดลองชนิดนี้มีชื่อเรียกว่า การทดลองเชิงสุ่ม(random experiment) ซึ่งมีคุณลักษณะสำคัญ 2 ประการ คือ

1. เราสามารถพิจารณาได้ว่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของการทดลองจะเป็นเช่นใดได้บ้าง
2. เราสามารถทำการทดลองซ้ำภายใต้สภาวะและเงื่อนไขคงเดิม โดยที่เราไม่สามารถคาดคะเนผลลัพธ์ได้ด้วยความแน่นอนอีก

นิยาม 1.1 เราเรียกเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองเชิงสุ่มว่า **แซมเปิลสเปซ** (sample space) เรียกสมาชิกของแซมเปิลสเปซว่า **จุดตัวอย่าง**(sample point) และเรียกเซตย่อยของแซมเปิลสเปซว่า เหตุการณ์(event)

เราแบ่งชนิดของแซมเปิลสเปซโดยใช้สัญกรณ์ในเรื่องเซต กล่าวคือ

1. แซมเปิลสเปซแบบเต็มหน่วย(discrete sample space) คือ แซมเปิลสเปซที่เป็นเซตจำกัด(finite set) หรือเซตอนันต์แบบนับได้(countably infinite)
2. แซมเปิลสเปซแบบต่อเนื่อง(continuous sample space) คือ แซมเปิลสเปซที่เราไม่สามารถแจงนับผลลัพธ์ได้ หรือเป็นเซตที่นับไม่ได้(noncountable)

เราจะใช้อักษร E แทนการทดลองเชิงสุ่ม และ S แทนแซมเปิลสเปซของการทดลอง

ตัวอย่าง 1.3

1.3.1. E : โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง
ดูผลลัพธ์ว่าหงายหัว (H) หรือก้อย (T)

$S = \{H, T\}$

1.3.2. E : โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง แล้วสังเกตดูลำดับที่ด้านหัวและก้อยหงายขึ้น

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

1.3.3. E : โยนเหรียญเที่ยงตรง 3 ครั้ง แล้วสังเกตดูจำนวนครั้งที่ด้านหัวหงายขึ้น

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

1.3.4. E : ทอดลูกเต๋าคู่หนึ่ง แล้วสังเกตแต้มที่ลูกเต๋าทั้งคู่ออก
แทนแต้มของลูกเต๋าด้วยคู่อันดับ

$$
\begin{aligned}
S = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\
&(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\
&(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\
&(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\
&(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\
&(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}
\end{aligned}
$$

1.3.5. E : เมื่อประกอบประตูรถยนต์เสร็จ จะมีการตรวจตราที่แต่ละจุดเชื่อมโลหะและบันทึกจำนวนจุดเชื่อมโลหะที่ไม่สมบูรณ์

$S = \{0, 1, 2, \ldots, K\}$

[เมื่อ K = จำนวนจุดเชื่อมโลหะทั้งหมดของประตูรถยนต์]

1.3.6. E : การทดสอบดูอายุการทำงานของหลอดไฟฟ้า แล้วบันทึกเวลา (ชั่วโมง) เมื่อหลอดไฟฟ้าหมดสภาพ

$S = \{t \mid t \in R,\ t \geq 0\}$

1.3.7. E : ในการส่งยานอวกาศ มีระบบช่วยควบคุมคือ ระบบคอมพิวเตอร์หลัก (primary computer system) และระบบสำรองอีก 2 ระบบ (back up systems) ระบบทั้งสามทำงานอิสระแก่กัน ศึกษาความพร้อมปฏิบัติการของระบบทั้งสามในขณะส่งยานอวกาศขึ้น

ให้ y แทน "ปฏิบัติการ" และ n แทน "ไม่ปฏิบัติการ"

$S = \{yyy, yyn, yny, ynn, nyy, nyn, nny, nnn\}$

ความหมายของจุดตัวอย่าง เช่น yny หมายความว่า ระบบหลักปฏิบัติการ ระบบสำรองที่ 1 ไม่ปฏิบัติการ และระบบสำรองที่ 2 ปฏิบัติการ

1.3.8. E : การนับจำนวนอนุภาคที่สารกัมมันตภาพรังสีปล่อยออกมาในเวลา 1 นาที

$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$

1.3.9. E : การวางลูกบอล 3 ลูกที่แตกต่างกันในเซล 3 เซล

S ประกอบด้วยจุดตัวอย่าง 27 จุด ดังแสดงในตาราง 1.1

1.3.10. E : การวางลูกบอล 3 ลูกที่เหมือนกันในเซล 3 เซล

จากตาราง 1.1 จะเห็นว่า S ประกอบด้วย 10 จุดตัวอย่าง ดังแสดงในตาราง 1.2

ตาราง 1.2

1.	{*** | – | – }	6.	{* | * * | – }
2.	{ – | *** | – }	7.	{* | – | * * }
3.	{ – | – | *** }	8.	{ – | * * | * }
4.	{* * | * | – }	9.	{ – | * | * * }
5.	{* * | – | * }	10.	{* | * | * }

แซมเปิลสเปซในตัวอย่าง 1.3.1 - 1.3.5, 1.3.7, 1.3.9, 1.3.10 เป็นแบบเต็มหน่วยและเป็นเซตจำกัด นั่นคือแซมเปิลสเปซมีจุดตัวอย่างอยู่จำนวนจำกัด แซมเปลสเปซในตัวอย่าง 1.3.8 เป็นแบบเต็มหน่วยและเป็นเซตอนันต์แบบนับได้ ส่วนในตัวอย่าง 1.3.6 เป็นแบบต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 1.4 ใช้อักษร $A, B, C, \ldots$ แทนเหตุการณ์ของแซมเปิลสเปซ พิจารณาเหตุการณ์ของแซมเปิลสเปซ จากตัวอย่าง 1.3.1 - 1.3.10 โดยลำดับ พร้อมกับเขียนจุดตัวอย่างในเหตุการณ์

1.4.1 A : เหรียญหงายด้านหัว

$A = \{H\}$

1.4.2 A : เหรียญหงายด้านเดียวกัน

$A = \{HHH, TTT\}$

B : เหรียญหงายด้านหัวอย่างน้อยที่สุด 2 ครั้ง

$B = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

1.4.3 A : เหรียญหงายด้านหัว 2 ครั้ง

$A = \{2\}$

1.4.4 A : ผลบวกของแต้มเป็นเจ็ด

$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

1.4.5 A : จำนวนจุดเชื่อมโลหะที่ไม่สมบูรณ์มีไม่เกิน 5 จุด

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1.4.6 A : อายุของหลอดไฟฟ้าเกิน 1,000 ชั่วโมง

$A = \{ t \mid t > 1000 \}$

1.4.7 A : ระบบคอมพิวเตอร์หลักปฏิบัติการ $A = \{yyy, yyn, yny, ynn\}$

B : ระบบสำรองที่ 1 ปฏิบัติการ $B = \{yyy, yyn, nyy, nyn\}$

C : ระบบสำรองที่ 2 ปฏิบัติการ $C = \{yyy, yny, nyy, nny\}$

1.4.8. A : จำนวนอนุภาคเท่ากับสอง $A = \{2\}$

1.4.9 A : มีลูกบอล 1 ลูก ในแต่ละเซล

จากตาราง 1.1 จะเห็นได้ว่า A ประกอบด้วยผลลัพธ์ที่ 22 - 27

1.4.10 A : มีลูกบอล 1 ลูก ในแต่ละเซล

จากตาราง 1.2 จะเห็นได้ว่า A ประกอบด้วยผลลัพธ์ที่ 10

1.3 ความสัมพันธ์ในกลุ่มของเหตุการณ์ (Relations among Events)

ถ้า $A, B, C, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ของแซมเปิลสเปซ S เราสามารถพิจารณาเหตุการณ์ที่เกิดจากเหตุการณ์เหล่านี้ประกอบกัน โดยมีตัวเชื่อม "และ" "หรือ" ซึ่งแทนได้ด้วย "$\cap$" (intersect)" $\cup$" (union) ตามลำดับ

นิยาม 1.2

1.2.1 $A = B$ เมื่อ A และ B ต่างก็มีจุดตัวอย่างเหมือนกัน

1.2.2 $A = \phi$ (เซตว่าง) เมื่อไม่มีจุดตัวอย่างใดของ S ที่อยู่ในเหตุการณ์ A ได้ หรือ A เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นไม่ได้ในการทดลองซึ่งมี S เป็นแซมเปิลสเปซ

1.2.3 A' เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดตัวอย่างจาก S แต่ไม่ได้อยู่ใน A (เรียก A' ว่า complement ของ A)

1.2.4 $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ทั้งเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้น

1.2.5 $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่เหตุการณ์ A **หรือ** B เกิดขึ้น หรือทั้งสองเกิดขึ้น

1.2.6 A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive events)
เมื่อ $A \cap B = \phi$

1.2.7 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ เป็นลำดับของเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
เมื่อ $A_i \cap A_j = \phi$ สำหรับ $i \neq j$

1.2.8 $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ หมายความว่า แต่ละจุดตัวอย่างใน A อยู่ใน B นั่นคือ **ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เหตุการณ์ B ต้องเกิดขึ้น** ในกรณี $A \subseteq B$ เราอาจกล่าวถึง $B - A$ ซึ่งหมายถึง เหตุการณ์ที่ B เกิดขึ้น แต่ A ไม่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง 1.5

จากตัวอย่าง 1.4.2

เหรียญหงายด้านเดียวกัน "หรือ" หงายหัวอย่างน้อยที่สุด 2 ครั้ง แทนด้วย $A \cup B$

$$A \cup B = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT\}$$

จากตัวอย่าง 1.4.7

ระบบคอมพิวเตอร์หลัก "หรือ" ระบบสำรองที่ 1 ปฏิบัติการ แทนด้วย $A \cup B$

$$A \cup B = \{yyy, yyn, yny, ynn, nyy, nyn\}$$

ระบบคอมพิวเตอร์หลัก "และ" ระบบสำรองที่ 1 ปฏิบัติการ แทนด้วย $A \cap B$

$$A \cap B = \{yyy, yyn\}$$

ระบบคอมพิวเตอร์หลัก "หรือ" ระบบสำรองที่ 1 ปฏิบัติการ แต่ระบบสำรองที่ 2 ไม่ปฏิบัติการ แทนด้วย $(A \cup B) \cap C'$

$$(A \cup B) \cap C' = \{yyn, nyn, ynn\}$$

ถ้าให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่ระบบคอมพิวเตอร์หลักปฏิบัติการ และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ระบบหลักไม่ปฏิบัติการ ดังนั้น

A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

1.4 ความน่าจะเป็นเชิงคณิตศาสตร์

วิธีการหาความน่าจะเป็นที่กล่าวมาแล้ว ไม่ว่าจะเป็นวิธีเชิงประจักษ์โดยใช้ความถี่สัมพัทธ์ (empirical method) หรือวิธีคลาสสิค วิธีทั้งสองนี้ไม่สามารถใช้เป็นตัวกำหนดนิยามของความน่าจะเป็นได้อย่างชัดเจนและรัดกุม และไม่สามารถครอบคลุมในกรณีทั่วไปได้ ในหัวข้อนี้เราพิจารณานิยามของความน่าจะเป็นเชิงคณิตศาสตร์ โดยให้ความหมายในรูปของฟังก์ชันของเซต(set function) นั่นคือ โดเมน(domain)ของฟังก์ชันเป็นเซต และพิสัย หรือ เรนจ์ (range) ของฟังก์ชันเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง (ในที่นี้คือ ช่วงปิด $[0,1]$) ถ้า A เป็นเซตหนึ่งแทนเหตุการณ์ และเป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชันนี้ เราใช้สัญกรณ์ $P(A)$ แทนสมาชิกในพิสัยที่สมนัยกับเหตุการณ์ A

นิยาม 1.3 ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองอันหนึ่ง และ A เป็นเหตุการณ์ เราเรียก $P(A)$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A หรือความน่าจะเป็นของ A เมื่อฟังก์ชัน $P(\ )$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1.3.1 $0 \le P(A) \le 1$ สำหรับแต่ละเหตุหารณ์ A ของ S

1.3.2 $P(S) = 1$

1.3.3 สำหรับ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

1.3.4 สำหรับ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ซึ่งเป็นลำดับของเหตุการณ์ S ที่นับได้และเป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

นิยาม 1.4 ความถี่สัมพัทธ์ (Relative Frequency)

ให้ n เป็นจำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำ และ n_A เป็นจำนวนครั้งที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น เราเรียก $f_A = \dfrac{m_A}{n}$ ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A ซึ่งมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1.4.1 $0 \le f_A \le 1$

1.4.2 $f_A = 0$ ก็ต่อเมื่อ A ไม่เกิดขึ้นเลยในการทดลองซ้ำกันทั้ง n ครั้ง
และ $f_A = 1$ ก็ต่อเมื่อ A เกิดขึ้นทุกครั้งในการทดลองซ้ำทั้ง n ครั้ง

1.4.3 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B$$

การหาค่าของ f_A จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อย ในขณะที่จำนวนครั้งการทำทดลองซ้ำเพิ่มขึ้น เป็นผลสืบเนื่องมาจากความสม่ำเสมอ(regularity)ของการทดลอง นั่นคือ เราสามารถทำการทดลองซ้ำภายใต้สภาวะและเงื่อนไขคงเดิมได้ แนวคิดของความถี่สัมพัทธ์และแนวโน้มที่ความถี่สัมพัทธ์เข้าใกล้ค่าคงที่ จึงเป็นวิธีหนึ่งที่เราสามารถหาค่าของความน่าจะเป็น กล่าวคือ ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลอง E และ A เป็นเหตุการณ์ และถ้าความถี่สัมพัทธ์ f_A เข้าใกล้ค่า p_A ค่าหนึ่ง ในขณะที่จำนวนครั้งการทำทดลองซ้ำเพิ่มขึ้น ดังนั้น เรากำหนดให้ p_A เป็นความน่าจะเป็นของ A นั่นคือ

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m_A}{n} = P_A \qquad (1.1)$$

ในกรณีแซมเปิลสเปซของการทดลองเป็น**เซตจำกัด**

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

S มีจุดตัวอย่างทั้งหมด n จุด และกำหนดให้

$$p_i = P(E_i) \text{ เมื่อเหตุการณ์ } E_i = \{e_i\} \text{ และ } p_i \ge 0$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A กำหนดให้เป็น

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} p_i = \sum_{i \mid e_i \in A} P(E_i) \qquad (1.2)$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นของ A คือ ผลบวกของความน่าจะเป็นของแต่ละผลลัพธ์ในเหตุการณ์ A ที่กำหนดโดย (1.2) และคล้อยตามเงื่อนไขในนิยาม 1.3 ในทางปฏิบัติ ปัญหายังคงอยู่ที่วิธีการกำหนดความน่าจะเป็น สำหรับผลลัพธ์ e_i

ในกรณีแซมเปิลสเปซเป็น**เซตอนันต์แบบนับได้**

$$S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$$

เรากำหนดให้ $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$ และ

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

และกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ดังสมการ (1.2)

ในกรณีแซมเปิลสเปซเป็น**เซตจำกัด** โดยที่แต่ละผลลัพธ์หรือจุดตัวอย่างของแซมเปิลสเปซ **มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน** (equally likely outcomes) นั่นคือ

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n$$

ดังนั้น

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \qquad (1.3)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดของการทดลอง และ n_A เป็นจำนวนผลลัพธ์ที่อยู่ใน A

ตัวอย่าง 1.6 สมมติว่า ในตัวอย่าง 1.3.2 เหรียญไม่เที่ยงตรง ทำให้

$$\begin{aligned} S &= \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \\ &= \{e_1, e_2, \ldots, e_8\} \end{aligned}$$

โดยความน่าจะเป็นที่สมนัยกับแต่ละจุดตัวอย่างมีค่าดังนี้

$$p_1 = \frac{1}{27},\ p_2 = \frac{2}{27},\ p_3 = \frac{2}{27},\ p_4 = \frac{4}{27},\ p_5 = \frac{2}{27},\ p_6 = \frac{4}{27},\ p_7 = \frac{4}{27} \text{ และ } p_8 = \frac{8}{27}$$

เมื่อ $e_1 = HHH,\ e_2 = HHT, \ldots, e_8 = TTT$

ถ้า $A = \{HHH, TTT\}$ แล้ว

$$P(A) = p_1 + p_8 = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

แต่ถ้าเหรียญเที่ยงตรงแล้ว $p_1 = p_2 = \ldots = p_8 = \frac{1}{8}$ และ

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad (n = 8,\ n_A = 4)$$

ตัวอย่าง 1.7 ในตัวอย่าง 1.3.8 ถ้าเราทราบว่า

$$p_i = \frac{e^{-2}\, 2^{(i-1)}}{(i-1)!}, \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad \text{มิฉะนั้น } p_i = 0$$

นั่นคือ $p_i = P(\{i\})$ = ความน่าจะเป็นที่จำนวนอนุภาคเท่ากับ i

ถ้า $A = \{1, 2\}$ แล้ว

$$P(A) = p_1 + p_2 = e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} = 0.406$$

ตัวอย่าง 1.8 ในตัวอย่าง 1.3.4 ถ้า**ลูกเต๋าเที่ยงตรง** และ A เป็นเหตุการณ์ซึ่งผลบวกของแต้มเป็นเจ็ด แล้ว

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36}$$

เพราะว่า S มีจุดตัวอย่างทั้งหมด 36 จุด จากตัวอย่าง 1.3.4 และ A มีจุดตัวอย่างทั้งหมด 6 จุด จากตัวอย่าง 1.4.4

ตัวอย่าง 1.6 และ 1.8 เป็นกรณีการหาความน่าจะเป็นที่ง่าย ๆ เพราะว่า การนับจุดตัวอย่างของ S ทำได้โดยง่าย โดยทั่วไป เรามีวิธีการนับเพื่อช่วยในการนับจุดตัวอย่างซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ $A, B, C, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ของ S ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $A = \phi$ แล้ว $P(A) = 0$

พิสูจน์

$S = S \cup \phi$ และ S และ ϕ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน โดยนิยาม 1.3 ข้อ 1.3.3

$$P(S) = P(S) + P(\phi) \Rightarrow P(\phi) = 0$$

ทฤษฎีบท 1.2 $P(A') = 1 - P(A)$

พิสูจน์

$$S = A \cup A' \quad \text{และ} \quad P(S) = P(A) + P(A')$$

(เพราะว่า A และ A' เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน และโดยนิยาม 1.3 ข้อ 1.3.3)
แต่ $P(S) = 1$ (นิยาม 1.3 ข้อ 1.3.2) ดังนั้น

$$P(A') = 1 - P(A)$$

ทฤษฎีบท 1.3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

พิสูจน์

$A \cup B = A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A')$ และ $A,\ B \cap A'$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

$B = (A \cap B) \cup (B \cap A')$ และ $A \cap B,\ B \cap A'$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น

$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A')$ และ $P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A')$

$\therefore\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ทฤษฎีบท 1.4

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

พิสูจน์

เขียน $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ แล้วใช้ทฤษฎีบท 1.3

ทฤษฎีบท 1.5

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{k} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots A_k)$$

พิสูจน์ ทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \le P(B)$

พิสูจน์

ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $B = A \cup (A' \cap B)$ และ $A,\ A' \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ดังนั้น

$$P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$$

แต่ $P(A' \cap B) \ge 0$ ดังนั้น

$$P(A) \le P(B)$$

ตัวอย่าง 1.9 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน และทราบว่า $P(A) = 0.20$, $P(B) = 0.30$ ดังนั้น เราคำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $A',\ B',\ A \cup B,\ A \cap B,\ A' \cap B'$ ได้ดังนี้

1. $P(A') = 1 - P(A) = .80$
2. $P(B') = 1 - P(B) = .70$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .2 + .3 - 0 = .5$
4. $P(A \cap B) = 0$
5. $P(A' \cap B') = P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = .5$

ตัวอย่าง 1.10 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $P(A) = 0.20$, $P(B) = 0.30$ และ $P(A \cap B) = 0.10$ ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .2 + .3 - .1 = .4$$
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - .4 = .6$$

1.5 วิธีการนับ (Methods of Enumeration, Combinatorial Analysis)

ในหัวข้อนี้ เราศึกษาวิธีการนับซึ่งเป็นพื้นฐานส่วนหนึ่งของการวิเคราะห์เชิงวิธีจัดหมู่ (Combinatorial analysis) ประโยชน์ที่ได้รับคือ เรามีหลักการและแนวคิดในการนับจำนวนผลลัพธ์ของการทดลองหรือจำนวนจุดตัวอย่างในแซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์ของการทดลองเชิงสุ่ม

1.5.1 หลักการคูณ (Multiplication Principle)

ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ เป็นเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิก $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ตามลำดับ ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกสมาชิกทีละ 1 ตัว จาก $A_1, A_2, \ldots, A_k$ โดยเลือกจาก A_1 แล้วเลือกจาก $A_2 \ldots$ จนในที่สุดเลือกจาก A_k จะมีทั้งหมด

$$n_1 n_2 \ldots n_k \quad \text{วิธี}$$

ซึ่งเท่ากับผลคูณของจำนวนสมาชิกใน $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.11 ในการทดลอง $E_1, E_2, \ldots, E_k$ มีผลลัพธ์จำนวน $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ผลลัพธ์ โดยลำดับ ดังนั้น ในการทดลองเชิงประกอบ (compound experiment) $E_1 E_2 \ldots E_k$ มีจำนวนผลลัพธ์จำนวนทั้งหมด $n_1 n_2 \ldots n_k$ ผลลัพธ์

ตัวอย่าง 1.12 การวางลูกบอล r ลูกที่แตกต่างกันในกล่อง n กล่อง จะมีวิธีการวางทั้งหมด n^r วิธี เพราะว่าสำหรับลูกบอลแต่ละลูก เราสามารถเลือกวางในกล่องแต่ละกล่องได้ n วิธี มีลูกบอลทั้งหมด r ลูก โดยหลักการคูณ จึงมีทั้งหมด n^r วิธี

ตัวอย่าง 1.13 การแบ่งกลุ่มประชากรโดยแบ่งตามเพศ สถานภาพสมรส และอาชีพ จะได้ทั้งหมด $2.2.k$ กลุ่ม เมื่อ k คือจำนวนอาชีพ

ตัวอย่าง 1.14 ในการทดลองใช้ปุ๋ยเคมี 3 ชนิด บนแปลงทดลอง แต่ละชนิดมีความเข้มข้น r_1, r_2 และ r_3 ระดับ ตามลำดับ ดังนั้น จะมีจำนวนวิธีเลือกใช้ปุ๋ยเคมีทั้งหมด $r_1 r_2 r_3$ วิธี

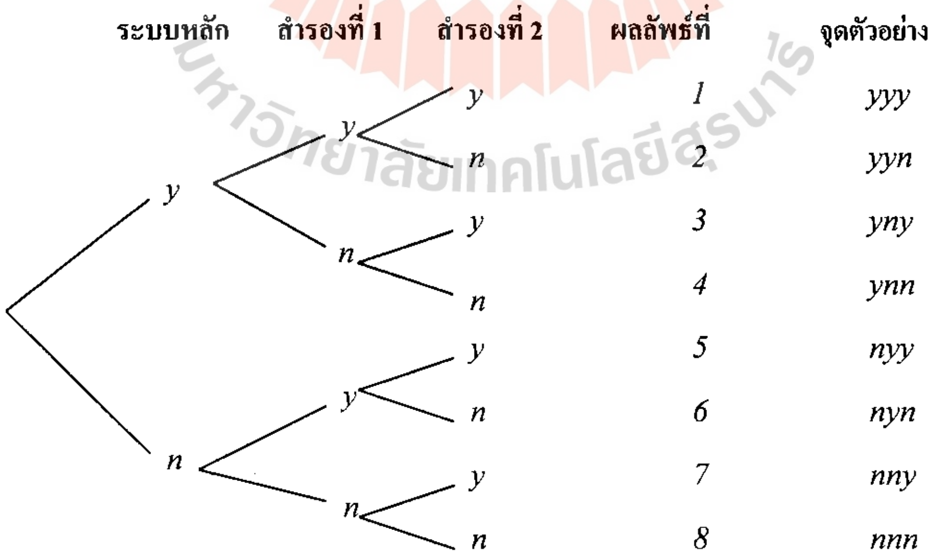
ตัวอย่าง 1.15 ถ้าโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน และทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก พร้อม ๆ กัน ให้ $S_1 = \{H, T\}$ และ $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญและการทอดลูกเต๋าโดยลำดับ ดังนั้นแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญและทอดลูกเต๋าพร้อม ๆ กัน มีจุดตัวอย่างทั้งหมด $= 2 \times 6 = 12$ จุดตัวอย่าง นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
S = \{ & (H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), \\
& (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6) \}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 1.16 ผลผลิตจากโรงงานแห่งหนึ่งได้รับการตรวจสอบคุณภาพ โดยเน้นลักษณะพิเศษ 4 ประการ ผู้ตรวจคนแรกให้ระดับคะแนน 4 ระดับ สำหรับลักษณะประการแรก ผู้ตรวจคนที่ 2 และ 3 ให้ระดับคะแนน 3 ระดับ สำหรับลักษณะประการที่ 2 และ 3 โดยลำดับ และผู้ตรวจคนสุดท้ายจะตรวจสอบลักษณะพิเศษประการสุดท้ายโดยให้ระดับคะแนน 2 ระดับ ผลผลิตที่ได้รับการตรวจตราแล้วจะมีแผ่นป้ายบันทึกระดับคะแนนติดอยู่ ดังนั้นจำนวนวิธีบอกระดับคะแนนของผลผลิตจะมีทั้งหมด $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$ วิธี

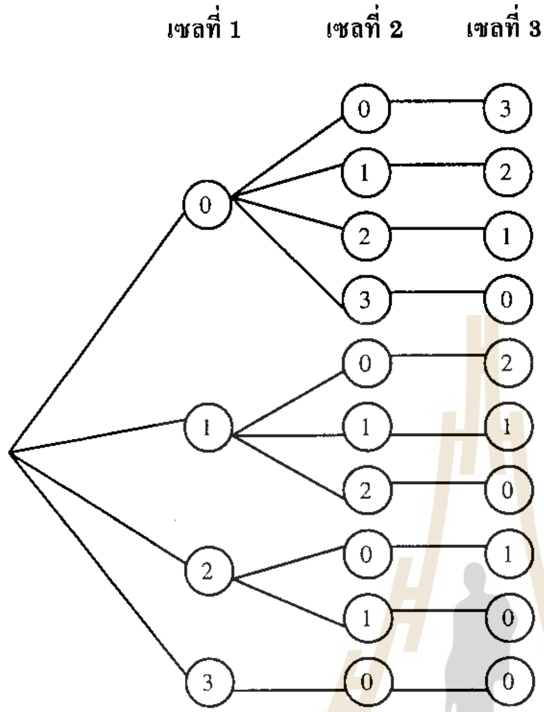
1.5.2 แผนภาพต้นไม้ (Tree Diagram)

เป็นวิธีการแสดงผลลัพธ์ของการทดลองหรือจุดตัวอย่างของแซมเปิลสเปซ ซึ่งมีจุดตัวอย่าง อยู่จำนวนไม่มากนัก เช่น ในตัวอย่าง 1.3.7 ความพร้อมปฏิบัติการของระบบคอมพิวเตอร์ทั้งสาม แสดงเป็นกรณีต่าง ๆ ตามแขนงในแผนภาพต้นไม้ในรูป 1.1



รูป 1.1

ในตัวอย่าง 1.3.10 จำนวนวิธีการวางลูกบอล 3 ลูกที่เหมือนกันในเซล 3 เซล สามารถแสดงเป็นกรณีได้ โดยใช้แผนภาพต้นไม้ดังรูป 1.2 ตัวเลขในวงกลมคือ "จำนวนลูกบอล" ในเซล



ผลลัพธ์ที่	จุดตัวอย่าง
1	(0, 0, 3)
2	(0, 1, 2)
3	(0, 2, 1)
4	(0, 3, 0)
5	(1, 0, 2)
6	(1, 1, 1)
7	(1, 2, 0)
8	(2, 0, 1)
9	(2, 1, 0)
10	(3, 0, 0)

รูป 1.2

1.5.3 ตัวอย่างอันดับ (Ordered Sample)

นิยาม 1.5 ถ้าเราเลือกของ r สิ่ง จากของ n สิ่ง' โดยคำนึงถึงอันดับการเลือก เรากล่าวว่า ของ r สิ่ง ที่ถูกเลือกมาเป็นตัวอย่างอันดับ (ordered sample) ขนาด r $(r \le n)$

นิยาม 1.6 **การชักสิ่งตัวอย่างแบบคืนที่** (sampling with replacement) คือการเลือกที่ถ้าของสิ่งหนึ่งถูกเลือกแล้ว จะถูกใส่กลับไปในกลุ่มตัวอย่างตามเดิมก่อนการเลือกครั้งถัดไป

ดังนั้น ถ้าเราเลือกตัวอย่างอันดับขนาด r จากของ n สิ่ง **แบบคืนที่** จะมีวิธีการเลือกทั้งหมด n^r วิธี (จากหลักการคูณ)

ตัวอย่าง 1.17 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 5 ครั้ง แต้มของลูกเต๋าจากครั้งที่ 1 - 5 เป็นตัวอย่างอันดับ ซึ่งมีทั้งหมด $6^5 = 7,776$ แบบ (นี่ก็คือ การชักสิ่งตัวอย่างแบบคืนที่ โดยเลือกตัวอย่างขนาด 5 จากเซตของตัวเลข $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

นิยาม 1.7 **การชักสิ่งตัวอย่างแบบไม่คืนที่** (Sampling without Replacement) คือ การเลือกที่ของที่ได้รับการเลือกแล้ว จะไม่ถูกวางกลับเข้าไปใหม่ในกลุ่มตัวอย่างที่เหลืออีกเลย

ดังนั้น ถ้าเราเลือกตัวอย่างอันดับขนาด r จากของ n สิ่งแบบไม่คืนที่ จะมีการเลือกทั้งหมด

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \text{วิธี}$$

เพราะว่าในอันดับที่ 1 เรามีตัวเลือกทั้งหมด n ตัว ในอันดับที่ 2 เรามีตัวเลือกเหลือ $n-1$ ตัว จนถึงอันดับที่ r เรามีตัวเลือกเหลือเพียง $n-r+1$ ตัว (เพราะว่าถูกเลือกออกไปแล้ว $r-1$ ตัว) โดยหลักการคูณจึงได้วิธีเลือกทั้งหมดดังกล่าว

สรุป

เลือก**ตัวอย่างอันดับ**ขนาด r จากของ n สิ่ง $(r \le n)$ โดยเลือก

1. แบบ**คืนที่** มีจำนวนวิธีทั้งหมด $= n^r$ วิธี (1.4)
2. แบบ**ไม่คืนที่** มีจำนวนวิธีทั้งหมด $= \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี 1.5)

1.5.4 วิธีเรียงสับเปลี่ยน และวิธีจัดหมู่ (Permutation and Combination)

นิยาม 1.8 วิธีเรียงสับเปลี่ยน คือ วิธีเรียงของโดยคำนึงถึงอันดับที่

นิยาม 1.9 วิธีจัดหมู่ คือ วิธีเลือกของโดยไม่คำนึงถึงอันดับที่

ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่จึงแตกต่างกันโดย "อันดับ" ถ้าปัญหาของเรา "อันดับ" การเลือกตัวอย่างมีความสำคัญ วิธีการเลือกตัวอย่างจะเป็นวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ซึ่งอาศัยหลักการคูณในการหาจำนวนวิธี แต่ถ้า "อันดับ" การเลือกตัวอย่างไม่มีผลต่อตัวปัญหา การเลือกตัวอย่างจะเป็นวิธีการจัดหมู่

ตัวอย่าง 1.18 amino acid ชนิดสำคัญ ๆ 20 ชนิด จะพบโดยทั่วไปใน peptides และ proteins Pentapeptide ประกอบด้วย amino acid 5 ชนิด คือ

alanine - valine - glycine - cysteine - tryptophan

จะมีคุณสมบัติแตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับอันดับการเรียงตัวของ amino acids ดังนั้น Pentapeptide แต่ละชนิดจึงเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ amino acids

ตัวอย่าง 1.19 โรงงานผลิตอะไหล่เครื่องจักร ส่งชิ้นส่วนที่ผลิตได้คราวละ 20 ชิ้น แต่ก่อนที่จะทำการส่งจะต้องมีการทดสอบความแกร่ง โดยเลือกตัวอย่างแบบสุ่มจากอะไหล่ทั้ง 20 ชิ้น มา 3 ชิ้น กลุ่มตัวอย่างที่เลือกมา 3 ชิ้น จึงเป็นวิธีจัดหมู่ 1 วิธี เพราะว่าเราไม่คำนึงถึงอันดับการเลือก เพียงแต่ให้ความสนใจว่า ในกลุ่มที่เลือกมา 3 ชิ้น จะมีอะไรบ้างเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.20 ถ้าเรามีอักษร 4 ตัว คือ a, b, c, d เลือกอักษรครั้งละ 2 ตัว **จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน** 12 วิธี คือ

$$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$$

จะเห็นได้ว่า ab และ ba เราถือว่าเป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน เพราะว่าอันดับหรือตำแหน่งของ a และ b แตกต่างกัน ในขณะที่ ac และ ab เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน เพราะว่ามีอักษรที่แตกต่างกัน 1 ตัว

แต่ถ้าดู**วิธีการจัดหมู่** โดยเลือกคราวละ 2 ตัว จะมีทั้งหมด 6 วิธีที่แตกต่างกัน คือ

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd$$

แต่ละวิธีแตกต่างกันเพราะว่า อักษรที่อยู่ในแต่ละกลุ่มต่างกัน

การหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน

ถ้าเราเลือกของ r สิ่ง จากของที่แตกต่างกัน n สิ่ง $(r \leq n)$ จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน (ที่แตกต่างกัน) ทั้งหมด

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{1.6}$$

โดยอาศัยหลักการคูณ จะได้สูตรข้างต้น

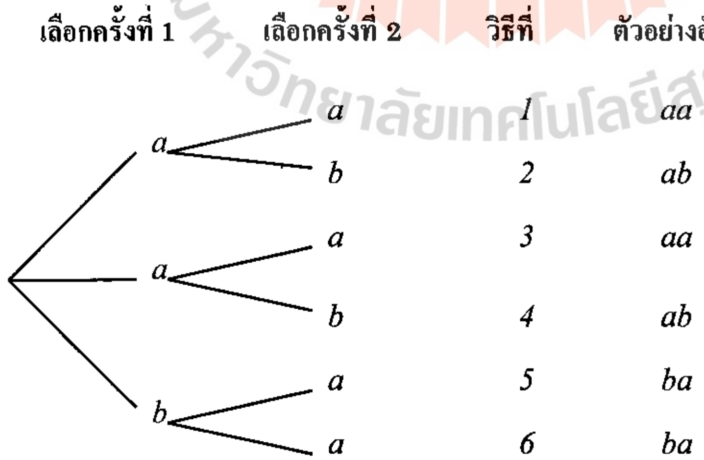
ข้อสังเกต

1. ในสมการ (1.6) จะใช้หาวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน เมื่อเราเลือกของคราวละ r สิ่ง จากของที่แตกต่างกัน n สิ่ง
2. P_r^n ในสมการ (1.6) คือ จำนวนวิธีเลือก**ตัวอย่างอันดับ**ขนาด r จาก**ของ** n **สิ่ง** โดยเลือกแบบไม่คืนที่ (ดังในสมการ (1.5))

ตัวอย่าง 1.21 ถ้าเรามีอักษร a, a, b และเลือก**ตัวอย่างอันดับ**คราวละ 2 ตัว โดยเลือกแบบไม่คืนที่ จะมีวิธีเลือกทั้งหมด $P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}$ วิธี นั่นคือ

$$aa, ab, aa, ab, ba, ba$$

เราสามารถแสดงการเลือกตัวอย่างอันดับโดยแผนภาพต้นไม้ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกัน นั่นคือ



รูป 1.3

ในตัวอย่าง 1.21 ถึงแม้ว่าอักษร a จะซ้ำกัน 2 ครั้ง แต่สิ่งที่เราสนใจหาคือ จำนวนของตัวอย่างอันดับขนาด 2 เลือกจากอักษร 3 ตัวนี้ ซึ่งสามารถใช้สูตรของ P_r^n หาได้ (โดยให้ $n = 3$ และ $r = 2$ ในที่นี้) เราไม่ได้ใช้สูตรนี้หาวิธีเรียงสับเปลี่ยนของอักษร a, a, b โดยเลือกคราวละ 2 ตัว ซึ่งแน่นอนที่สุดมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนอยู่ 3 วิธี คือ aa, ab, ba

ตัวอย่าง 1.22 ถ้าเรามีอักษร a, b, c, d โดยเลือกอักษรคราวละ 2 ตัว จะมีวิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12 \quad \text{วิธี}$$

ใช้สูตรของ P_r^n ได้โดยตรง เพราะว่าอักษรทั้ง 4 ตัวแตกต่างกันหมด วิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดที่ได้ คือ

$$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$$

ตัวอย่าง 1.23 จงหาจำนวนวิธีในการเรียงตัวของ amino acids 5 ชนิด คือ alanine, valine, glycine, cysteine, tryptophan เป็นลูกโซ่ pentapeptide การเรียงตัวขึ้นอยู่กับอันดับของ amino acid ในลูกโซ่ ดังนั้น จำนวน pentapeptide จะมีทั้งหมด

$$P_5^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{ชนิด}$$

ตัวอย่าง 1.24 แต่ละส่วน(segment) ของ RNA ประกอบด้วย amino acid ชนิดพิเศษซึ่งประกอบด้วยลูกโซ่ของ ribonucleotides 3 ตัว และแต่ละ ribonucleotide ในลูกโซ่นี้อาจจะเป็น

adenine (A) uracil (U) guanine (G) หรือ cytosine (C)

1. จำนวนวิธีเรียงตัวเป็นลูกโซ่ จะมีทั้งหมด (โดยหลักการคูณ)

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \quad \text{วิธี}$$

ที่เป็นไปได้ ในจำนวนนี้ย่อมมีการซ้ำกันของ ribonucleotide ในลูกโซ่ได้ เช่น AGA, UUC, CAA จำนวน 64 นี้ก็คือ การเลือกตัวอย่างอันดับขนาด 3 จากของ 4 สิ่งแบบคืนที่

2. ในจำนวน 64 นี้ มีกี่วิธีที่ให้ลูกโซ่ที่มี ribonucleotide ที่ซ้ำกัน

เราหาวิธีเรียงสับเปลี่ยน โดยเลือกคราวละ 3 จาก A, U, G, C ได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด $4 \times 3 \times 2 = 24$ วิธี และในแต่ละวิธีไม่มี ribonucleotide ที่ซ้ำกันอยู่ในลูกโซ่เลย ดังนั้น ที่เหลืออีก $64 - 24 = 40$ วิธี ย่อมมี ribonucleotide ที่ซ้ำกันอยู่ในลูกโซ่

การหาจำนวนวิธีจัดหมู่

สิ่งที่เราสนใจคือ การหาจำนวนวิธีจัดหมู่ เมื่อมีของที่แตกต่างกัน n สิ่ง และเราต้องจัดหมู่คราวละ r สิ่ง $(r \leq n)$

ให้ C เป็นจำนวนวิธีจัดหมู่ (ที่แตกต่างกัน) ในแต่ละวิธีจัดหมู่ที่ได้มา ซึ่งมีของที่แตกต่างกันอยู่ r สิ่ง ในของ r สิ่งนี้ ถ้าเรียงสับเปลี่ยนของทั้ง r สิ่ง ย่อมทำได้ $r!$ วิธี

ในเมื่อเรามีจำนวนวิธีจัดหมู่อยู่ C วิธี แต่ละวิธีมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน $r!$ วิธี ดังนั้น โดยหลักการคูณ เรามีวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด $C(r!)$ วิธี ซึ่งต้องเท่ากับ P_r^n นั่นคือ

$$C(r!) = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\therefore \quad C = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{หรือใช้สัญกรณ์ } C_r^n \quad \text{หรือ} \quad \binom{n}{r}$$

นั่นคือ

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{หรือ} \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.7}$$

ข้อสังเกต

1. ใช้ C_r^n หาจำนวนวิธีจัดหมู่ที่แตกต่างกัน เมื่อเราเลือกของคราวละ r สิ่ง **จากของที่แตกต่างกัน** n **สิ่ง**

2. ใช้ C_r^n หาจำนวนวิธีเลือกตัวอย่างขนาด r (โดยไม่คำนึงถึงอันดับ) จากเซตของ**สิ่งของ** n **สิ่ง** โดยเลือกแบบไม่คืนที่

3. ในที่นี้ เราใช้สัญกรณ์ $\binom{n}{r}$ เมื่อ n และ r เป็นจำนวนเต็มและ $0 \le r \le n$ แต่โดยทั่วไป $\binom{n}{r}$ นิยามสำหรับจำนวนจริง n และจำนวนบวก r ใด ๆ เช่น ใช้แทนสัมประสิทธิ์ของการกระจายแบบทวินาม (binomial coefficients) นั่นคือ

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$$

4. $$C_r^n = C_{n-r}^n \quad \text{หรือ} \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

และ $$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

5. ถ้า S เป็นเซตที่มีของที่แตกต่างกัน n สิ่ง แล้ว S มีเซตย่อย (ที่แตกต่างกัน) ทั้งหมดจำนวน 2^n เซตย่อย เพราะว่า

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

โดยที่

$\binom{n}{0}$ คือ จำนวนของเซตย่อยซึ่งมีของ 0 สิ่ง (ϕ = เซตว่าง)

$\binom{n}{1}$ คือ จำนวนของเซตย่อยซึ่งมีของ 1 สิ่ง

.

.

.

$\binom{n}{n}$ คือ จำนวนของเซตย่อยซึ่งมีของ n สิ่ง (เซต S นั่นเอง)

$\therefore$ ผลบวกของ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ คือ จำนวนของเซตย่อยทั้งหมดจาก ϕ ถึง S

$\therefore$ ผลบวกของ $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ คือ จำนวนของเซตย่อยทั้งหมดจาก ϕ ถึง S

ตัวอย่าง 1.25 ผลผลิต 100 ชิ้น มี 5% ซึ่งมีตำหนิ (defective) เลือกสุ่มกลุ่มตัวอย่างครั้งละ 10 ชิ้น โดยเลือกแบบไม่คืนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 ชิ้น ไม่มีผลผลิตที่มีตำหนิอยู่เลย

แซมเปิลสเปซในที่นี้คือ เซตของกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 ชิ้น ซึ่งแต่ละกลุ่มมีโอกาสได้รับเลือกเท่า ๆ กัน (equally likely outcomes) ดังนั้น จำนวนผลลัพธ์ในแซมเปิลสเปซคือ จำนวนวิธีเลือกตัวอย่างครั้งละ 10 ชิ้น ซึ่งหาโดยใช้

$$C_{10}^{100} \quad \text{หรือ} \quad \binom{100}{10}$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่กลุ่มตัวอย่างไม่มีตำหนิอยู่เลย ดังนั้น

จำนวนกลุ่มตัวอย่างใน A $= \binom{5}{0}\binom{95}{10}$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 0.58375$$

ในกรณีทั่วไป ถ้าเรามีของ N สิ่ง และในจำนวนนี้มี D สิ่งซึ่งมีลักษณะพิเศษ เลือกกลุ่มตัวอย่างจำนวน r สิ่ง แบบไม่คืนที่ ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่กลุ่มตัวอย่างจำนวน r สิ่ง มีของ k สิ่ง ซึ่งมีลักษณะพิเศษ ดังนั้น

จำนวนกลุ่มตัวอย่างใน A $= \binom{D}{k}\binom{N-D}{r-k}$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, \min(r, D)$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{r-k}}{\binom{N}{r}} \tag{1.8}$$

(หมายเหตุ : $\min(r, D)$ หมายถึงจำนวนที่น้อยกว่าระหว่าง r และ D)

การประยุกต์ใช้ C_r^n ในกรณีอื่น ๆ

กรณีที่ 1 ของ N สิ่ง แบ่งเป็น 2 กลุ่ม ที่แตกต่างกัน กลุ่มที่ 1 มีของ m สิ่งที่เหมือนกัน และกลุ่มที่ 2 มีของ $N-m$ สิ่งที่เหมือนกัน **จำนวนวิธีวางของ** N สิ่งนี้ ในห้อง N ห้อง โดยแต่ละห้องมีของ 1 สิ่ง คือ

$$C_m^N = \binom{N}{m} \tag{1.9}$$

เพราะว่า ของ m สิ่ง จากกลุ่มที่ 1 จะต้องถูกวางในห้อง m ห้อง จากห้องทั้งหมด N ห้อง และที่เหลืออีก $N-m$ สิ่ง จากกลุ่มที่ 2 ถูกวางในห้องที่เหลืออีก $N-m$ ห้อง

ดังนั้น ปัญหาคือ การหาวิธีจัดหมู่ห้อง m ห้อง จาก N ห้อง และที่เหลืออีก $N-m$ ห้อง ก็ถูกจัดกลุ่มไปในตัว

ตัวอย่าง 1.26 ของ 4 สิ่ง (H, H, T, T) สามารถวางเรียงในกล่อง 4 กล่อง (B_1, B_2, B_3, B_4) ได้ทั้งหมด

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad \text{วิธี}$$

ดังแสดงในรูป 1.4

	1	2	3	4	5	6
B_1	H	H	H	T	T	T
B_2	H	T	T	H	H	T
B_3	T	H	T	H	T	H
B_4	T	T	H	T	H	H

รูป 1.4

จะเห็นได้ว่า แนวคิดคือ เราเลือกแบ่งกลุ่มกล่อง 2 กล่อง จาก 4 กล่อง ซึ่งทำได้ 6 วิธีคือ

$$B_1B_2,\ B_1B_3,\ B_1B_4,\ B_2B_3,\ B_2B_4,\ B_3B_4$$

แล้วใส่ H, H ในกลุ่มเหล่านี้กล่องละ 1 ตัว ดังนั้น ที่เหลืออีก 2 กล่อง จากแต่ละวิธี เราใส่ T, T ในกล่องที่เหลือ กล่องละ 1 ตัว

กรณีที่ 2 วางของ m สิ่ง ที่เหมือนกันในห้อง n ห้อง จะทำได้จำนวนวิธีทั้งหมด

$$C_m^N = \binom{N}{m} \quad \text{เมื่อ} \quad N = m+n-1 \tag{1.10}$$

วิธีคิด เราให้ของ m สิ่ง ที่เหมือนกันอยู่ในกลุ่มที่ 1 และคิดว่าผนังกั้นห้องภายในซึ่งมีทั้งหมด $n-1$ ผนัง เป็นของที่เหมือนกันในกลุ่ม 2 แล้วใช้สูตรในสมการ (1.9)

(เช่น มีลูกบอล 4 ลูกเหมือนกัน เราให้เป็น b, b, b, b วางในห้อง 5 ห้อง
เราให้ w แทนผนังห้องภายใน ดังนั้น เรามี w, w, w, w โดยใช้สูตรในสมการ (1.9)
เราวางของ 8 สิ่ง คือ $b, b, b, b,\ w, w, w, w$ ในห้อง 8 ห้อง ห้องละ 1 สิ่ง
ได้ทั้งหมด C_4^8 วิธี วิธีหนึ่งที่เป็นไปได้ คือ

$$b\,b\,w\,w\,b\,w\,b\,w$$

ซึ่งเมื่อแปลความหมายออกมาในปัญหาเดิมของเรา คือ

มีลูกบอล 2 ลูก ในห้องที่ 1, ไม่มีลูกบอลในห้องที่ 2
มีลูกบอล 1 ลูก ในห้องที่ 3, มีลูกบอล 1 ลูก ในห้องที่ 4
และ ไม่มีลูกบอลในห้องที่ 5

นั่นคือ เรามองวิธีที่ปรากฏออกมานี้ โดยคิดว่า w แทนผนังกั้นห้องภายใน)

ตัวอย่าง 1.27 วางลูกบอล 3 ลูก ที่เหมือนกันในห้อง 3 ห้อง จะทำได้ทั้งหมด

$$C_3^{3+3+1} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \quad \text{วิธี}$$

นั่นคือ ให้ $m = 3$, $n = 3$ $\therefore N = 3+3-1 = 5$ แล้วแทนค่าในสูตรในสมการ (1.10) (เทียบกับตัวอย่าง 1.3.10 และรูป 1.2)

การใช้สูตร P_r^n และ C_r^n ในการสุ่มตัวอย่าง(Random Sampling)

1. ถ้าสุ่มกลุ่มตัวอย่างอันดับขนาด r สิ่ง จากของ n สิ่ง **แบบไม่คืนที่** แล้ว

   จำนวนวิธีสุ่มกลุ่มตัวอย่าง = P_r^n

2. ถ้าสุ่มกลุ่มตัวอย่างจำนวน r สิ่ง จากของ n สิ่ง โดยไม่คำนึงถึงอันดับและเป็นแบบไม่คืนที่แล้ว

   จำนวนวิธีสุ่มกลุ่มตัวอย่าง = C_r^n

ตัวอย่าง 5.18 กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง 8 ลูก สีขาว 3 ลูก และสีเขียว 9 ลูก ถ้าเลือกลูกบอลคราวละ 3 ลูก แบบไม่คืนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ลูกบอลทั้งสามลูกเป็นสีแดง 2. ลูกบอล 2 ลูกเป็นสีแดง และอีก 1 ลูกเป็นสีเขียว

วิธีทำ

จำนวนลูกบอลทั้งหมด = $8+3+9 = 20$ ลูก

จำนวนวิธีเลือกทั้งหมด = $C_3^{20} = N$

(เพราะว่า ไม่คำนึงถึงอันดับ และเลือกแบบไม่คืนที่) นั่นคือ แซมเปิลสเปซมีจุดตัวอย่างทั้งหมด N จุด แต่ละจุดตัวอย่างมีโอกาสถูกเลือกเท่า ๆ กัน

ให้ A เป็นเหตุการณ์ ที่ลูกบอลทั้งสามลูกเป็นสีแดง

$\therefore$ จำนวนจุดตัวอย่างที่อยู่ใน $A = n_A = C_3^8$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ ลูกบอล 2 ลูกเป็นสีแดง และ 1 ลูกเป็นสีเขียว

$\therefore$ จำนวนจุดตัวอย่างที่อยู่ใน $B = n_B = \left(C_2^8\right)\left(C_1^9\right)$

ดังนั้น $$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{C_3^8}{C_3^{20}} = \frac{14}{285}$$

และ $$P(B) = \frac{n_B}{N} = \frac{\left(C_2^8\right)\left(C_1^9\right)}{C_3^{20}} = \frac{21}{95}$$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหมือนกัน (Permutations of Like Objects)

ในกรณีที่เรามีของ n สิ่ง ประกอบด้วย n_1 สิ่งที่เหมือนกัน n_2 สิ่งที่เหมือนกันจนถึงกลุ่มที่ k ซึ่งมี n_k สิ่งที่เหมือนกัน $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ นั่นคือ ของ n สิ่ง แบ่งเป็น k กลุ่มที่แตกต่างกัน เราพิจารณาว่าจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งจะกระทำได้ทั้งหมดกี่วิธีที่แตกต่างกัน

ให้ N เป็นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน ในแต่ละวิธีที่ได้มานี้ ถ้าเราให้มีการเรียงสับเปลี่ยนในหมู่ของสิ่งของที่เหมือนกัน (เปรียบเสมือนว่าของในหมู่นี้แตกต่างกัน) โดยหลัก การคูณเราได้จำนวนวิธีทั้งหมด $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ แต่เรามีทั้งหมด N วิธี ดังนั้น ถ้าของทั้ง n สิ่ง แตกต่างกันหมด เราย่อมได้ว่า

$$N(n_1!\, n_2! \ldots n_k!) = P_n^n = n!$$

$$\therefore \quad N = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

หรือใช้สัญกรณ์

$$P^n_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

1.6 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข(Conditional Probability)

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่างๆ ที่เราได้พิจารณามาแล้วนั้น เป็นการเทียบโอกาสที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นกับผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแซมเปิลสเปซ S ในบางครั้งเราอยู่ในสถานการณ์ที่ทราบว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว แล้วเราต้องการพิจารณาว่าเหตุการณ์ B มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใดในสถานการณ์อันนี้ ดังนั้น ภายใต้สถานการณ์เช่นนี้ แซมเปิลสเปซตอนแรกถูกลดลงมาเป็นเหตุการณ์ A และเราพิจารณาว่า ภายใต้เงื่อนไขเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นของ B มีค่าเท่าใด เราเรียกความน่าจะเป็นนี้ว่า **ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข** เขียนเป็น $P(B \mid A)$ (probability of B, given A) พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ เพื่อดูแนวคิดของความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข

ตัวอย่าง 1.29 ประชากร 100 คน ใน 100 คนนี้ มี 40 คนเป็นนักศึกษา 20 คน ประกอบอาชีพแล้ว และมี 10 คนที่เป็นทั้งนักศึกษาและประกอบอาชีพแล้ว เลือกสุ่มคน 1 คน มาจากประชากรกลุ่มนี้

$\therefore$ แซมเปิลสเปซ S มีจุดตัวอย่างทั้งหมด 100 จุดตัวอย่าง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่คนได้รับเลือกเป็นนักศึกษา และ B เป็นเหตุการณ์ที่คนได้รับเลือกประกอบอาชีพแล้ว

$$\therefore \quad P(A) = \frac{40}{100} = .40 \ , \ P(B) = \frac{20}{100} = .20$$

และ

$$P(A \cap B) = \frac{10}{100} = .10$$

สถานการณ์ใหม่คือ ถ้าคนที่ได้รับเลือกเป็นนักศึกษา แล้วโอกาสที่คน ๆ นี้จะประกอบอาชีพด้วยเป็นเท่าใด ? นั่นคือ ถามว่า ถ้า A เกิดขึ้นแล้ว ความน่าจะเป็นของ B มีค่าเท่าใด ? ดังนั้น เราพิจารณาเฉพาะ 40 คน ที่เป็นนักศึกษา หรือแซมเปิลสเปซถูกลดลงมาเป็น A ซึ่งในเซตนี้มีอยู่ 10 คน เท่านั้น ที่ประกอบอาชีพแล้ว เราเขียนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้โดยใช้สัญกรณ์ $P(B \mid A)$

$$\therefore \quad P(B \mid A) = \frac{10}{40} = \frac{10/100}{40/100} = 0.25$$

นั่นคือ คิดเทียบความน่าจะเป็นของ $A \cap B$ กับความน่าจะเป็นของ A

$$\therefore \quad P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

ตัวอย่าง 6.2 เลือกตัวอย่างอันดับขนาด 2 ตัวอักษรจากอักษร 3 ตัว คือ a, a, b โดยเลือกแบบไม่คืนที่

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เลือกครั้งที่ 1 ได้ a

B เป็นเหตุการณ์ที่เลือกครั้งที่ 1 ได้ b

C เป็นเหตุการณ์ที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ a

D เป็นเหตุการณ์ที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ b

พิจารณาความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข

I. ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ a แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ a คือ $\frac{1}{2}$

นั่นคือ $P(C|A) = \frac{1}{2}$

ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ a แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ b คือ $\frac{1}{2}$

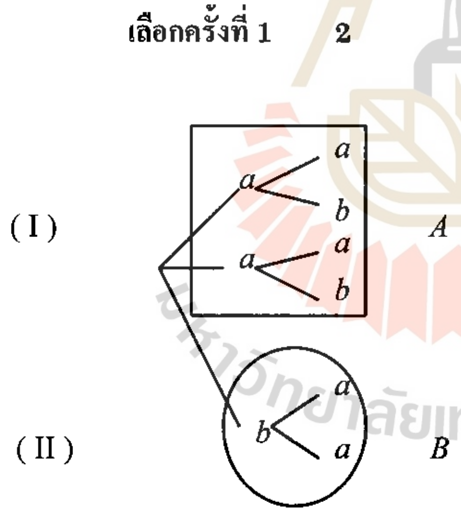
นั่นคือ $P(D|A) = \frac{1}{2}$

II. ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ b แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ a คือ 1

นั่นคือ $P(C|B) = 1$

ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ b แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ b คือ 0

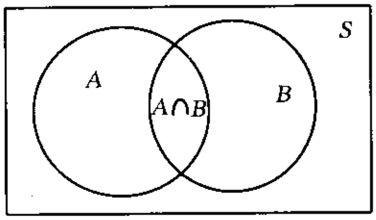
นั่นคือ $P(D|B) = 0$



ในกรณี (I) แซมเปิลสเปซที่ลดลงมาคือ A

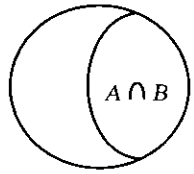
ในกรณี (II) แซมเปิลสเปซที่ลดลงมาคือ B

รูป 1.5



รูป 1.6 (a)

แซมเปิลสเปซ S



รูป 1.6 (b)

แซมเปิลสเปซที่ลดลงเป็น A

(reduced sample space)

รูป 1.6 (a) แสดงเหตุการณ์ A , B เทียบกับแซมเปิลสเปซ S

รูป 1.6 (b) แสดงสถานการณ์ที่บอกว่า เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เหตุการณ์ B สามารถเกิดในแซมเปิลสเปซที่ลดลงมาเป็น A จึงเป็น $A \cap B$

นิยาม 6.1 ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข (Conditional Probability)

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B กำหนดให้ว่า เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เขียนเป็น $P(B \mid A)$ คำนวณได้ดังนี้

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad (1.11)$$

เมื่อ $P(A) > 0$

1.6.1 การหาค่าของ $P(B \mid A)$

1. หาค่าของ $P(B \mid A)$ โดยตรง โดยเทียบกับแซมเปิลสเปซที่ลดลงมาเป็น A (รูป 1.6 (b))
2. หาค่าของ $P(B \cap A)$ และ $P(A)$ ก่อน โดยเทียบกับแซมเปิลสเปซ S อันแรก (รูป 1.6 (a))

ตัวอย่าง 1.30 กิ่งชำพันธุ์ไม้ดอกชนิดหนึ่งจำนวน 20 กิ่ง แบ่งตามลักษณะดังตารางข้างล่างนี้

	ออกดอกเร็ว (E)	ออกดอกช้า (L)	รวม
ดอกสีแดง (R)	8	5	13
ดอกสีขาว (W)	4	3	7
รวม	12	8	20

เลือกสุ่มกิ่งชำมา 1 กิ่ง ความน่าจะเป็นที่กิ่งชำให้ดอกสีแดงจะถูกเลือกคือ $P(R) = 13/20$ แต่ถ้าทราบว่า กิ่งชำที่ถูกเลือกเป็นชนิดออกดอกเร็วแล้ว นั่นคือ ในจำนวน 12 กิ่งชำที่ออกดอกเร็วมี 8 กิ่งที่ให้ดอกสีแดง ดังนั้น

$$P(R \mid E) = 8/12$$

ในทำนองเดียวกัน, $P(L) = 8/20$ และ $P(L \mid W) = 3/7$
ในตัวอย่างนี้ เราหาความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขโดยตรงจากตารางข้อมูลที่ให้มา

ตัวอย่าง 1.31 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูกพร้อม ๆ กัน เขียนแต้มที่ออกมาของลูกเต๋าทั้งคู่เป็น (d_1, d_2) โดยให้ d_1, d_2 แทนแต้มของลูกที่ 1 และ 2 ตามลำดับ จากตัวอย่าง 1.3.4 แซมเปิลสเปซ S มีทั้งหมด 36 จุดตัวอย่าง และแต่ละจุดตัวอย่างมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

ให้ A, B เป็นเหตุการณ์ดังนี้

$$A = \{(d_1, d_2) \mid d_1 + d_2 = 4\} \quad \text{และ} \quad B = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \le d_2\}$$

โดยการนับจุดตัวอย่างใน $A, B, A \cap B$ เทียบกับ S เราได้ว่า

$$P(A) = 3/36 \;,\; P(B) = 21/36 \quad \text{และ} \quad P(A \cap B) = 2/36$$

ดังนั้น

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 2/21 \quad \text{และ} \quad P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 2/3$$

ในตัวอย่างนี้ เราหาความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข โดยการนับจุดตัวอย่างเทียบกับ S

1.6.2 คุณสมบัติของความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข

ให้ A , B เป็นเหตุการณ์ของแซมเปิลสเปซ S และ $P(B) > 0$ ดังนั้น จากนิยาม 1.10 เราได้

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

และคุณสมบัติอื่น ๆ ที่ตามมามีดังนี้

1. $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$
2. $P(S \mid B) = 1$, $P(B \mid B) = 1$
3. ถ้า A_1 , A_2 , $A_3 \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันแล้ว

   3.1 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \ldots + P(A_k \mid B)$
   สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก k และ

   3.2 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \ldots$

คุณสมบัติ 1 และ 2 เห็นได้ชัดเจน เพราะว่า

$$0 \leq P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow 0 \leq P(A \mid B) \leq 1$$

และ

$$P(S \mid B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(B \mid B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

สำหรับคุณสมบัติ 3.2 เราทราบว่า

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap B]}{P(B)}$$

$$= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots]}{P(B)}$$

แต่ $A_1 \cap B,\ A_2 \cap B, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ดังนั้น

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots}{P(B)}$$

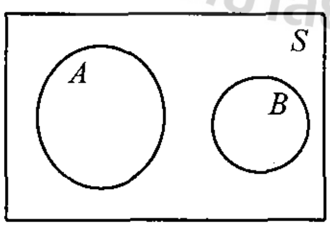
$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \ldots$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \ldots$$

สำหรับ 3.1 แสดงได้ในทำนองเดียวกับ 3.2

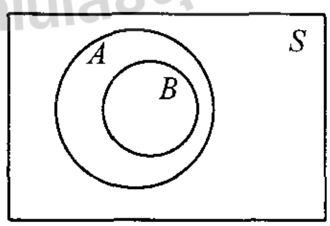
นอกจากนี้ เรายังได้ว่า ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน $(A \cap B = \phi)$ แล้ว $P(A \mid B) = 0$ และ $P(B \mid A) = 0$

และ ถ้า $B \subseteq A$ แล้ว $P(A \mid B) = 1$



รูป 1.7 (a)

$P(A|B) = 0$, $P(B|A) = 0$



รูป 1.7 (b)

$P(A|B) = 1$

1.6.3 กฎการคูณ (Multiplication Rule)

ให้ A, B เป็นเหตุการณ์ของแซมเปิลสเปซ S จากนิยาม 1.10 จะได้

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) \quad \text{เมื่อ} \quad P(B) > 0$$

และ

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \quad \text{เมื่อ} \quad P(A) > 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B)P(A|B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \end{aligned} \qquad (1.12)$$

สมการ(1.12) เป็นวิธีที่เราใช้หาความน่าจะเป็นของ $A \cap B$ หรือเหตุการณ์ A และ B เมื่อทราบความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข $P(B|A)$ และ $P(A|B)$ กรณีใดกรณีหนึ่ง เพราะว่าในการทดลองเชิงสุ่มบางกรณี ลักษณะธรรมชาติของการทดลอง ทำให้สามารถพิจารณาได้ว่า $P(B)$ และ $P(A|B)$ หรือ $P(A)$ และ $P(B|A)$ มีค่าเท่าใด ง่ายกว่าหา $P(A \cap B)$ โดยตรง

ตัวอย่าง 1.32 กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก และลูกบอลสีเขียว 7 ลูก เลือกลูกบอล 2 ลูกติดต่อกันโดยเลือกแบบไม่คืนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 1 ได้ลูกบอลสีแดง (A) และเลือกครั้งที่ 2 ได้ลูกบอลสีเขียว (B) เราสามารถพิจารณาได้โดยตรงว่า

$$P(A) = 3/10 \qquad \text{และ} \qquad P(B|A) = 7/9$$

ดังนั้น

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = (3/10)(7/9) = 7/30$$

หรือหา $P(A \cap B)$ โดยตรง โดยการนับจุดตัวอย่างใน $A \cap B$ เทียบกับจำนวนจุดตัวอย่างในแซมปิลสเปซ ในปัญหานี้การถามคำนึงถึงอันดับ $\therefore$ จำนวนจุดตัวอย่างในแซมเปิลสเปซมีทั้งหมด

$$P_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!} = 10 \times 9 = 90$$

และโดยหลักการคูณ จำนวนจุดตัวอย่างใน $A \cap B = \binom{3}{1}\binom{7}{1} = 21$ ดังนั้น

$$P(A \cap B) = 21/90 = 7/30$$

กฎการคูณในสมการ (1.12) สามารถขยายเป็นกรณีของเหตุการณ์ร่วมของ 3 เหตุการณ์ นั่นคือ

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C)$$

$$= P(A \cap B)\, P(C|A \cap B)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|A \cap B) \qquad (1.13)$$

ตัวอย่าง 1.33 เพิ่มเติมจากตัวอย่าง 1.32 โดยเลือกลูกบอล 3 ลูกติดต่อกัน และเลือกแบบไม่คืนที่ ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่เลือกครั้งที่ 3 ได้ลูกบอลสีแดง จงหา $P(A \cap B \cap C)$

เราสามารถพิจารณาได้โดยตรง เช่นเดียวกับตัวอย่าง 1.32 นั่นคือ

$$P(A) = 3/10 \;, \quad P(B|A) = 7/9 \quad \text{และ} \quad P(C|A \cap B) = 2/8$$

จากสมการ (1.13) เราได้ว่า

$$P(A \cap B \cap C) = (3/10)\,(7/9)\,(2/8) = 7/120$$

หรือคิดโดยการนับจุดตัวอย่างอันดับ เราได้ว่า

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{2}{1}}{P_3^{10}} = \frac{3 \times 7 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = 7/120$$

1.7 เหตุการณ์อิสระ (Independent Events)

ในบางครั้ง เราพบว่าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ไม่มีอิทธิพลแก่กัน ในลักษณะที่ว่าถ้าเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นแล้ว ไม่มีผลให้ความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนแปลงไปเลย จะเรียกเหตุการณ์คู่นี้ว่า **เหตุการณ์อิสระ** พิจารณาจากตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.34 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 2 ครั้ง เราได้แซมเปิลสเปซ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

แต่ละผลลัพธ์ใน S มีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/4

ให้ C = { ออกก้อยทั้งสองครั้ง } = $\{TT\}$

B = { ออกหัวครั้งแรก } = $\{HH, HT\}$

A = { ออกก้อยครั้งที่สอง } = $\{HT, TT\}$

ดังนั้น

$$P(A) = 1/2 \quad \text{และ} \quad P(A|C) = 1 \quad (\because C \subset A)$$

แสดงให้เห็นว่าการที่เหตุการณ์ C เกิดขึ้น มีผลต่อความน่าจะเป็นของ A ในอีกกรณีหนึ่งถ้าเราทราบว่า B เกิดขึ้นแล้ว

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

ดังนั้น การที่เหตุการณ์ B เกิดขึ้น ไม่มีผลต่อความน่าจะเป็นของ A เรากล่าวว่า A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ ซึ่งจากการพิจารณาโดยตรงก็สามารถบอกได้เช่นกัน เพราะว่าการที่เหรียญจะออกหัวหรือก้อยในครั้งที่ 1 หรือครั้งที่ 2 นั้น ไม่มีอิทธิพลต่อกันอยู่แล้ว

พิจารณาเหตุการณ์ A, B เมื่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์หนึ่ง ไม่ทำให้ความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนแปลง เรากล่าวในรูปความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขได้ดังนี้

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{เมื่อ} \quad P(A) > 0 \qquad (1.14)$$

หรือ

$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{เมื่อ} \quad P(B) > 0 \qquad (1.15)$$

จากกฎการคูณในสมการ (1.12) เราได้

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) = P(B)P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(A)P(B)$$

ซึ่งได้ผลเช่นเดียวกัน ไม่ว่า (1.14) หรือ (1.15) เป็นจริง สรุปได้ว่า

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B (นั่นคือ $A \cap B$) เท่ากับผลคูณของความน่าจะเป็นของ A และความน่าจะเป็นของ B เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ

นิยาม 1.11 เรากล่าวว่าเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็น **เหตุการณ์อิสระ** ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (1.16)$$

หมายเหตุ

1. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{เพราะว่า} \quad A \cap B = \phi$$

แต่ถ้าพยายามสรุปจากสมการ (1.16) ว่า ถ้า $P(A \cap B) = 0$ แล้ว $P(A) = 0$ หรือ $P(B) = 0$ นั้นย่อมผิดแน่นอน เช่น โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง $S = \{H, T\}$ ให้ $A = \{H\}$ และ $B = \{T\}$ ดังนั้น

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{แต่} \quad P(A) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{และ} \quad P(B) = \frac{1}{2} \neq 0$$

2. ถ้า $P(A) = 0$ หรือ $P(B) = 0$ นิยาม 1.11 ยังคงเป็นจริง

เพราะว่า $P(A)P(B) = 0$

และ $P(A \cap B) = 0$

เพราะว่า $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

$\Rightarrow$ $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ และ $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B) = 0$

ทฤษฎีบท 1.7 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ แล้ว

1. A และ B' เป็นเหตุการณ์อิสระ
2. A' และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ
3. A' และ B' เป็นเหตุการณ์อิสระ

พิสูจน์

1.
$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A)P(B' \mid A) \\ &= P(A)(1 - P(B \mid A)) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B') \end{aligned}$$

ข้อ 2 และ 3 พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 1.35 กล่องบรรจุลูกบอล 4 ลูก โดยเรียกว่า ลูกที่ 1, 2, 3, 4 เลือกสุ่มลูกบอล 1 ลูก จากกล่อง ให้ A, B, C เป็นเหตุการณ์ดังนี้

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{1, 4\}$$

ดังนั้น $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$ และ

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

ซึ่งหมายความว่า เหตุการณ์ A, B, C เป็นเหตุการณ์อิสระทีละคู่ (pairwise independence) แต่สำหรับเหตุการณ์ $A \cap B \cap C = \{1\}$ เราได้ว่า

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

นั่นคือ เหตุการณ์ A, B, C ทั้งสาม ขาดความอิสระแก่กัน แต่มีความอิสระ เมื่อพิจารณาเหตุการณ์เป็นคู่ ๆ

นิยาม 1.12 เหตุการณ์ A B C เป็นเหตุการณ์อิสระซึ่งกันและกัน (mutually independent) ก็ต่อเมื่อ เงื่อนไขทั้ง 2 ข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

นิยาม 1.13 เหตุการณ์ $A_1, A_2, \ldots, A_k$ จำนวน k เหตุการณ์ เป็นเหตุการณ์อิสระซึ่งกันและกัน ก็ต่อเมื่อ ความน่าจะเป็นของผลตัด (intersection) ของเหตุการณ์จำนวน 2 หรือ 3 หรือ k เหตุการณ์ใด ๆ ในทั้ง k เหตุการณ์นี้ เป็นผลคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ในผลตัด นั่นคือ สำหรับ $r = 2, 3, \ldots, k$

$$\begin{aligned} P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_r}\right) &= P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)P\left(A_{i_3}\right)\ldots P\left(A_{i_k}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{r} P\left(A_{i_j}\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

ตัวอย่าง 1.36 สมมติว่าแซมเปิลสเปซซึ่งประกอบด้วยผลลัพธ์ที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน สำหรับการทดลองอันหนึ่งเป็นดังนี้

$$S = \{(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$$

ให้

A_0 : เลขตัวที่ 1 เป็นศูนย์ $\quad B_1$: เลขตัวที่ 2 เป็นหนึ่ง

A_1 : เลขตัวที่ 1 เป็นหนึ่ง $\quad C_0$: เลขตัวที่ 3 เป็นศูนย์

B_0 : เลขตัวที่ 2 เป็นศูนย์ $\quad C_1$: เลขตัวที่ 3 เป็นหนึ่ง

ดังนั้น

$$P(A_0) = P(A_1) = P(B_0) = P(B_1) = P(C_0) = P(C_1) = 1/2$$

และ

$$P(A_i \cap B_j) = 1/4 = P(A_i)P(B_j) \qquad \text{สำหรับ } i = 0,1,\ j = 0,1$$
$$P(A_i \cap C_j) = 1/4 = P(A_i)P(C_j) \qquad \text{สำหรับ } i = 0,1,\ j = 0,1$$
$$P(B_i \cap C_j) = 1/4 = P(B_i)P(C_j) \qquad \text{สำหรับ } i = 0,1,\ j = 0,1$$

แต่

$$P(A_0 \cap B_0 \cap C_0) = P(\{(0,\ 0,\ 0)\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_0)P(B_0)P(C_0)$$
$$P(A_0 \cap B_0 \cap C_1) = P(\phi) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A_0)P(B_0)P(C_1)$$

และยังมีผลตัดของเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์อื่นๆ ที่ความน่าจะเป็นของผลตัดของเหตุการณ์ไม่เท่ากับผลคูณของความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ในผลตัด ดังนั้น สำหรับ A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1 เป็นเหตุการณ์ซึ่งมีความอิสระเป็นคู่ ๆ แต่ไม่เป็นเหตุการณ์อิสระซึ่งกันและกันดังในนิยาม 1.13

นิยาม 1.14 การทดลองอิสระ(Independent Experiments)

เรากล่าวว่า การทดลอง $T_1, T_2, \ldots, T_n$ มีความเป็นอิสระแก่กันหรือเป็นการทดลองอิสระ ถ้าผลที่เกิดขึ้นในการทดลองครั้งใดครั้งหนึ่ง ไม่ทำให้ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นในการทดลองครั้งอื่น ๆ เปลี่ยนแปลง และถ้าให้ A_i เป็นเหตุการณ์หนึ่งในการทดลอง T_i สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วจะได้

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \qquad (1.18)$$

ตัวอย่าง 1.37

1. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้ง แต่ละครั้งถือว่าเป็นการทดลองอิสระ ดังในนิยาม 1.14

2. กล่อง I มีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีเขียว 3 ลูก

กล่อง II มีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และลูกบอลสีเขียว 1 ลูก

กล่อง III มีลูกบอลสีแดง 1 ลูก และมีลูกบอลสีเขียว 3 ลูก

ให้ T_i เป็นการหยิบลูกบอล 1 ลูก จากกล่อง i เมื่อ $i = I, II, III$

∴ การทดลองทั้ง 3 ครั้ง เป็นการทดลองอิสระ

ให้ R แทนลูกบอลสีแดงที่หยิบขึ้นมาและ G แทนลูกบอลสีเขียวที่หยิบขึ้นมา ดังนั้น ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ต่าง ๆ มีค่าดังนี้ เป็นต้น

$$P(\{R, R, R\}) = (2/5)(2/3)(1/4)$$
$$P(\{G, R, G\}) = (3/5)(2/3)(3/4)$$
$$P(\{R, G, G\}) = (2/5)(1/3)(3/4)$$

1.8 ผลแบ่งกั้นและทฤษฎีบทของเบส์ (Partitions and Bayes' Theorem)

นิยาม 1.15 เรากล่าวว่า เหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็น **ผลแบ่งกั้นของแซมเปิลสเปซ** S เมื่อ

1. $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$

นั่นคือ เมื่อทำการทดลองจริง ๆ เหตุการณ์ B_i อันใดอันหนึ่งเท่านั้นที่เกิดขึ้น

ตัวอย่าง 1.38 คำฐานสอง(binary word) ประกอบด้วย 5 บิท (bits) b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 เมื่อ $b_i = 0, 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ ในการทดลองส่งสัญญาณในรูปคำฐานสองนี้ มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $2^5 = 32$ แบบ พิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้

$B_1 = \{(0,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$

$B_2 = \{(0,0,0,1,0),(0,0,0,1,1),(0,0,1,0,0),(0,0,1,0,1),(0,0,1,1,0),$
$(0,0,1,1,1)\}$

$B_3 = \{(0,1,0,0,0),(0,1,0,0,1),(0,1,0,1,0),(0,1,0,1,1),(0,1,1,0,0),$
$(0,1,1,0,1),(0,1,1,1,0),(0,1,1,1,1)\}$

$B_4 = \{(1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0),$
$(1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 1)\}$

$B_5 = \{(1,1,0,0,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,0),$
$(1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0)\}$

$B_6 = \{(1,1,1,1,1)\}$

ดังนั้น $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ เป็นผลแบ่งกั้นของแซมเปิลสเปซ เพราะว่า $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย หรือเป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้ และผลผนวก (union) ของ $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ เป็นผลลัพธ์ทั้ง 32 แบบของการทดลอง

ให้ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นผลแบ่งกั้นของแซมเปิลสเปซ S นั่นคือ

$$S = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k \quad \text{และ} \quad B_i \cap B_j = \phi \ , \quad i \neq j$$

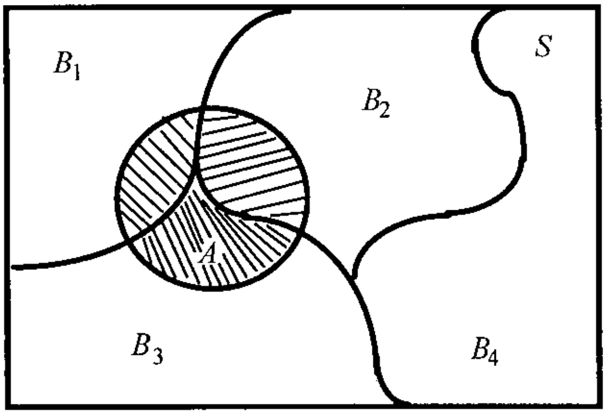
และให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของ S ดังนั้น A ถูกแบ่งกั้นเป็นเหตุการณ์ย่อย ๆ ที่ไม่เกิดร่วมกันโดยเขียนแสดง A ในรูปผลผนวกของเหตุการณ์ k เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันได้ดังนี้

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k) \tag{1.19}$$

เพราะว่า $A \cap B_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันเป็นคู่ ๆ (แสดงในรูป 1.8 ในกรณี $k = 4$) ดังนั้น

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k) \tag{1.20}$$

ในสมการ (1.19) อาจจะมีบางเซต $(A \cap B_i) = \phi$ หรือเป็นเซตว่างทั้งหมด แต่ไม่ทำให้มีผลอะไร เพราะว่า $P(\phi) = 0$ (ในรูป 1.8, $A \cap B_4 = \phi$) ผลจากสมการ (1.19) และสมการ (1.20) เขียนสรุปในทฤษฎีบทต่อไป



รูป 1.8

ทฤษฎีบท 1.8 ถ้า $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นผลแบ่งกั้นของ S และ $P(B_i) > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, k$ และถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของ S แล้ว

$$P(A) = P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2) + \ldots + P(B_k)\,P(A|B_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(B_i)\,P(A|B_i) \qquad (1.21)$$

เราเรียก P(A) ในรูปของ (1.21) ว่า **ความน่าจะเป็นรวม(total probability)** ของ A

ทฤษฎีบท 1.9 ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' Theorm)

ถ้า $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นผลแบ่งกั้นของ S และ $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ และถ้า A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของ S ดังนั้น สำหรับ $r = 1, 2, \ldots, k$

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{r=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \qquad (1.22)$$

พิสูจน์ ถ้า $P(A) > 0$ เราได้

$$P(B_r \mid A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} \qquad \text{สำหรับ} \quad r = 1, 2, \ldots, k$$

$$= \frac{P(B_r)P(A \mid B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

แทนค่า $P(B_r \cap A)$ โดยใช้สมการ(1.12) และแทนค่า $P(A)$ โดยใช้สมการ(1.21) ในทฤษฎีบท 1.8

หมายเหตุ

โดยทั่วไปเราเรียก $P(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ว่า ความน่าจะเป็นก่อน (prior probability) ของเหตุการณ์ B_i และเรียกความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข $P(B_r|A)$ ว่า ความน่าจะเป็นตอนหลัง (posterior probability) ของ B_r

ตัวอย่าง 1.39 หน่วยผลิต (1,2,3) 3 แห่ง ผลิตไมโครโพรเซสเซอร์ (microprocessor) ให้บริษัทหนึ่ง ทางบริษัทได้ทำสถิติข้อมูลของหน่วยผลิตทั้งสามไว้ดังนี้ เปอร์เซนต์ของไมโครโพรเซสเซอร์ที่มีตำหนิเทียบกับจำนวนที่แต่ละหน่วยผลิตส่งมา และเปอร์เซนต์ของผลผลิตจากแต่ละหน่วยเทียบกับจำนวนไมโครโปรเซสเซอร์ทั้งหมดที่ส่งมายังบริษัท แสดงในตารางข้างล่างนี้

หน่วยผลิต	เปอร์เซนต์ที่มีตำหนิ	เปอร์เซนต์ที่บริษัทได้รับ
1	2%	35%
2	1%	25%
3	3%	40%

ถ้าทางบริษัทมีการตรวจสอบคุณภาพของไมโครโพรเซสเซอร์ที่ส่งมาจากหน่วยผลิตทั้งสาม โดยเลือกสุ่มมา 1 ไมโครโพรเซสเซอร์ จากจำนวนทั้งหมดที่ได้รับ ถ้าพบว่าไมโครโพรเซสเซอร์ที่เลือกสุ่มมามีตำหนิแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่ไมโครโพรเซสเซอร์ ที่มีตำหนิเครื่องนี้ผลิตโดยหน่วยผลิต 3

ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่ไมโครโพรเซสเซอร์มีตำหนิ

B_i เป็นเหตุการณ์ที่ไมโครโพรเซสเซอร์ผลิตโดยหน่วยผลิต i $(i = 1, 2, 3)$

ดังนั้น เราต้องการทราบค่าของ $P(B_3 \mid D)$

$$P(D) = P(B_1)\,P(D \mid B_1) + P(B_2)\,P(D \mid B_2) + P(B_3)\,P(D \mid B_3)$$

$$= (35/100)\,(2/100) + (25/100)\,(1/100) + (40/100)\,(3/100)$$

$$= 215/10{,}000$$

จากทฤษฎีบทของเบส์ สมการ (1.22) เราได้ว่า

$$P(B_3 \mid D) = \frac{P(B_3)\,P(D \mid B_3)}{P(D)} = \frac{(40/100)\,(3/100)}{(215/10000)} = 120/215$$

แบบฝึกหัด 1.

1. ในการตรวจสอบคุณภาพขั้นสุดท้ายของบริษัทซึ่งผลิตเลนส์กล้องถ่ายรูป ได้มีการสุ่มตัวอย่างเลนส์มาทั้งหมด 50 ตัวอย่าง พบว่ามีเลนส์อันหนึ่งซึ่งมีรอยขูดขีดและรอยบิ่น มีเลนส์ 3 อันซึ่งมีเฉพาะรอยขูดขีดเท่านั้น และมีเลนส์ 2 อันซึ่งมีเฉพาะรอยบิ่นเท่านั้น กำหนดให้ A, B เป็นเหตุการณ์ต่อไปนี้

   A : เลนส์มีรอยบิ่น

   B : เลนส์มีรอยขูดขีด

   จงคำนวณหาความถี่สัมพัทธ์ของ $A, B, A \cup B$ และ $A \cap B$

2. จงเขียนแผนภาพของเวนน์ (Venn Diagram) ของเซตต่อไปนี้

   (a) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

   (b) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

   (c) ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว $A \subset B'$

   (d) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

3. ให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ เป็นยูนิเวอร์ซอลเซต (universal set) และให้เซตย่อยของ U คือ $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ และ $C = \{5, 6, 7\}$ จงหาจำนวนของสมาชิกในเซตต่อไปนี้

   (a) $A \cap B$

   (b) $A' \cup B$

   (c) $(A' \cap B')'$

   (d) $(A \cap (B \cap C))'$

   (e) $(A \cap (B \cup C))'$

4. การสำรวจความนิยมในการเลือกซื้อรถยนต์ระบบเกียร์อัตโนมัติ หรือรถยนต์ระบบเกียร์ธรรมดาจากลูกค้า 5 ราย ของบริษัทผู้แทนจำหน่ายรถยนต์แห่งหนึ่ง พบว่า

ถ้าความน่าจะเป็นที่อย่างมากที่สุดมีลูกค้าเพียง 1 ราย ที่ซื้อรถยนต์ระบบเกียร์อัตโนมัติเท่ากับ 0.087 แล้ว ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยที่สุดมีลูกค้า 2 ราย ซื้อรถยนต์ระบบเกียร์อัตโนมัติเท่ากับเท่าใด

5. จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองต่อไปนี้

(a) เลือกนักศึกษามา 1 คน จากนักศึกษา 100 คน เพื่อพิจารณาเกรดที่นักศึกษาได้ในวิชาภาษาอังกฤษ

(b) เลือกมะม่วงมา 1 ลูก จากผลผลิตที่จะส่งออกไปต่างประเทศ แล้วชั่งน้ำหนัก

(c) โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง แล้วสังเกตดูจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว

(d) โยนเหรียญ 3 อันพร้อม ๆ กัน แล้วดูผลลัพธ์ว่าแต่ละเหรียญหงายด้านใด

(e) นักศึกษาชีววิทยาสนใจศึกษานกชนิดหนึ่ง โดยบันทึกเพศและความยาวของปีกนกที่จับมาได้

6. จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองเชิงสุ่มต่อไปนี้ และพิจารณาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

(a) โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน A : เหรียญออกหัว

(b) ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก A : ลูกเต๋าออกแต้ม $3, 4, 5$ หรือ 6

(c) เลือกจุด ๆ หนึ่งในสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมียอดอยู่ที่ $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$
A : ผลบวกของพิกัด x และ y น้อยกว่าหรือเท่ากับ $3/4$

7. กล่องใบหนึ่งบรรจุพันธุ์ไม้ดอก 50 กิ่ง 25 กิ่งให้ดอกสีม่วง 15 กิ่งให้ดอกสีขาว และอีก 10 กิ่งให้ดอกสีเหลือง เลือกสุ่มพันธุ์ไม้มา 1 กิ่ง

(a) จงเขียนแซมเปิลสเปซโดยใช้สีของดอกเป็นเกณฑ์

(b) ถ้าเหตุการณ์ B : ให้ดอกสีเหลือง จงหา $P(B)$

8. มีลูกบอล 5 ลูกในกล่องใบหนึ่ง แต่ละลูกมีหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 ติดอยู่ เลือกลูกบอลครั้งละ 2 ลูกจากกล่อง โดยเลือกแบบแทนที่ไม่ได้ แล้วสังเกตตัวเลขที่อยู่บนลูกบอลทั้งสอง

(a) จงเขียนจุดตัวอย่างทั้ง 10 จุด ของแซมเปิลสเปซ

(b) ถ้าแต่ละจุดตัวอย่างมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/10

ให้ sum = ผลบวกของตัวเลขบนลูกบอลทั้งสอง

จงหาความน่าจะเป็นที่ (i) sum = 3 (ii) $6 \le sum \le 8$

9. แบ่งเส้นตรงซึ่งยาว L ออกเป็น 2 ส่วน จงหาความน่าจะเป็นที่ส่วนแบ่งส่วนที่ยาวกว่า อย่างน้อยที่สุดยาวเป็นสองเท่าของส่วนที่สั้นกว่า

10. ให้ช่วง $[-r, r]$ เป็นฐานของครึ่งวงกลม ถ้าเลือกจุด ๆ หนึ่งบนช่วงนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่ความยาวของเส้นตั้งฉากลากจากจุดนี้ไปยังครึ่งวงกลมจะมีความยาวน้อยกว่า $r/2$

11. ในการทดสอบความสามารถในการวิเคราะห์ โดยให้ผู้ทดสอบดูภาพ 2 ชุด ซึ่งจะปรากฏบนจอภาพ (monitor) ของคอมพิวเตอร์ เริ่มจับเวลาตั้งแต่ผู้ทดสอบเห็นภาพปรากฏบนจอ จนกระทั่งผู้ทดสอบตอบโดยกดแป้นพิมพ์ (keyboard) ของคอมพิวเตอร์ บันทึกเวลา (t_1, t_2) จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้ และเขียนเหตุการณ์ในรูปเซตย่อย เมื่อ $(t_1 + t_2)/2 \le .15$, $\max(t_1, t_2) \le .15$, $|t_1 - t_2| \le .06$ เขียนภาพประกอบเหตุการณ์เหล่านี้ด้วย

12. ในช่วงเวลา 24 ชั่วโมง คอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่งจะถูกใช้เพื่อประมวลผล ณ เวลา X และเลิกใช้ ณ เวลา $Y\,(Y \ge X)$ ให้หน่วยของ X และ Y เป็นชั่วโมง เริ่มจับเวลาตั้งแต่จุดแรกในช่วงเวลา 24 ชั่วโมง โดยนับเป็นจุดกำเนิด สังเกตค่าของ X,Y ในรูป (X,Y)

(a) จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

(b) จงเขียนกราฟแสดงเหตุการณ์ต่อไปนี้ในระนาบ $X - Y$

(i) เวลาของการใช้คอมพิวเตอร์ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ชั่วโมง

(ii) ใช้คอมพิวเตอร์ก่อนเวลา t_1 และเลิกใช้หลังเวลา t_2, $0 \le t_1 < t_2 \le 24$

(iii) เวลาของการใช้คอมพิวเตอร์ น้อยกว่า 20% ของช่วงเวลา 24 ชั่วโมง

13. Diodes จำนวนหนึ่ง ได้รับการตรวจสอบทีละหนึ่ง และทำเครื่องหมายว่า สภาพดี หรือ บกพร่อง การตรวจสอบกระทำต่อไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งพบว่า มี diodes 2 ตัวที่มีข้อบกพร่อง หรือได้ตรวจสอบไปแล้ว 5 ตัว จงเขียนแซมเปิลสเปซของการทดลองนี้

14. ผู้จัดการฝ่ายผลิตของโรงงานแห่งหนึ่ง ต้องการตรวจสอบคุณภาพของผลผลิตซึ่งผลิตสำเร็จรูป ซึ่งมีทั้งหมด 50 สิ่ง ผู้จัดการมีนโยบายว่า ถ้ามีผลผลิต 10% ที่มีตำหนิจะต้องปรับปรุงคุณภาพผลผลิตใหม่ทั้ง 50 สิ่ง วิธีที่ผู้จัดการทดสอบคือ เลือกสุ่มตัวอย่างมาครั้งละ 10 สิ่ง โดยเลือกแบบไม่คืนที่ และปรับปรุงคุณภาพใหม่ ถ้าพบว่ามีของมีตำหนิ 1 หรือ 2 สิ่ง กระบวนการทดสอบเช่นนี้เหมาะสมหรือไม่? ให้เหตุผล

15. บริษัทส่งสินค้าแห่งหนึ่งทำสัญญาส่งสินค้าจากเมือง W ไปยังเมือง Z แต่ไม่มีเส้นทางขนส่งโดยตรงระหว่างเมือง W และ Z แต่มีเส้นทางจากเมือง W ไปยังเมือง X 6 เส้นทาง และมีเส้นทาง 5 เส้นทางจากเมือง X ไปเมือง Z จงหาว่ามีเส้นทางทั้งหมดกี่เส้นทางเชื่อมต่อระหว่างเมือง W และ Z

16. จังหวัดหนึ่งมีรถยนต์ 1 ล้านคันที่รอการขึ้นทะเบียนรถยนต์ และป้ายทะเบียนรถยนต์ซึ่งประกอบด้วยสัญลักษณ์ 6 ตัว โดยที่ 3 ตัวแรกเป็นตัวอักษร และ 3 ตัวหลังเป็นตัวเลข โดยใช้วิธีนี้ลงทะเบียนรถยนต์และขึ้นป้ายทะเบียน จะเพียงพอกับจำนวนรถยนต์หรือไม่?

17. ผู้จัดการของโรงงานแห่งหนึ่งต้องการจัดคนเข้าทำงานในผลัดที่ 1 โดยที่มีพนักงานควบคุมทางด้านเทคนิค 15 คน พนักงานดูแลความเรียบร้อยทั่วไป 8 คน และอีก 4 คน เป็นพนักงานให้คำปรึกษา ถ้าในผลัดที่ 1 เขาต้องจัดให้มีพนักงานควบคุม 6 คน พนักงานดูแล 2 คน และพนักงานให้คำปรึกษา 1 คน ดังนั้น เขาจะมีวิธีจัดคนในผลัดที่ 1 ได้ทั้งหมดกี่วิธี

18. ผลผลิต 100 สิ่ง มี 20 สิ่ง ซึ่งทราบว่ามีข้อบกพร่อง สุ่มกลุ่มตัวอย่างจำนวน 4 สิ่ง โดยเลือกแบบไม่คืนที่ จงหาความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 4 สิ่ง จะมีผลผลิตที่มีข้อบกพร่องไม่เกินกว่า 2 สิ่ง

19. ในการตรวจตราสินค้าที่ส่งเข้ามาเป็นรุ่น ๆ รุ่นละ 300 หน่วย เลือกสุ่มตัวอย่างมา 10 หน่วย ถ้าในตัวอย่างที่เลือกมามีสินค้าที่มีข้อบกพร่องไม่เกินกว่า 1 หน่วย แล้วเรายอมรับสินค้าที่ส่งเข้ามาทั้งรุ่น มิฉะนั้น สินค้าจะถูกส่งกลับคืนไปยังผู้ผลิต ถ้าในแต่ละรุ่นมี p' เปอร์เซนต์ที่มีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นในการยอมรับสินค้าที่ส่งเข้ามาในรูปฟังก์ชันของ p'

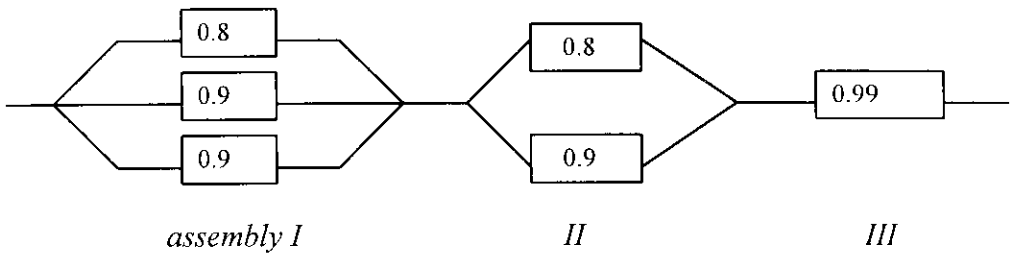
20. ในโรงงานพลาสติคแห่งหนึ่ง มีท่อส่งสารเคมี 12 ท่อ ส่งสารเคมีที่แตกต่างกัน 12 ชนิด ไปผสมในเครื่องผสม แต่ละท่อจะมีที่วัดความเร็วของการปล่อยสารเคมีไปยังเครื่องผสมอยู่ 5 ระดับ ในวันหนึ่งขณะที่มีการทดสอบเกี่ยวกับส่วนผสมชนิดต่าง ๆ ปรากฏว่า ส่วนผสมชนิดหนึ่งปล่อยแก๊สพิษออกมา แต่ไม่มีการบันทึกความเร็วในการปล่อยสารเคมีจากแต่ละท่อเอาไว้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์เช่นนี้อีก เมื่อมีการทดสอบเกี่ยวกับส่วนผสมชนิดต่างๆ อีก

21. ผู้สมัครงาน 8 คน ซึ่งมีทั้งชายและหญิง และแต่ละคนมีความสามารถเท่า ๆ กัน ผู้สมัครทั้ง 8 คน สมัครงานใน 2 ตำแหน่ง ซึ่งพนักงานบรรจุใน 2 ตำแหน่งนี้จะต้องทำงานร่วมกัน ดังนั้น บุคลิกภาพของพนักงานทั้งสองจะต้องไม่แตกต่างกันมากนัก เจ้าหน้าที่ฝ่ายบุคลากรจึงจัดให้มีการสอบและเปรียบเทียบคะแนนระหว่างผู้สมัครทั้ง 8 คน ดังนั้น จงหาจำนวนวิธีที่เจ้าหน้าที่ฝ่ายบุคลากร ต้องทำการเปรียบเทียบ เพื่อให้เกิดความยุติธรรมมากที่สุด

22. บริษัทแห่งหนึ่งเตรียมเปิดสาขาเพิ่มเติมอีก 5 สาขา โดยพิจารณาสถานที่ก่อสร้างไว้ทั้งหมด 10 แห่ง บริษัทจะมีทางเลือกทั้งหมดกี่วิธี

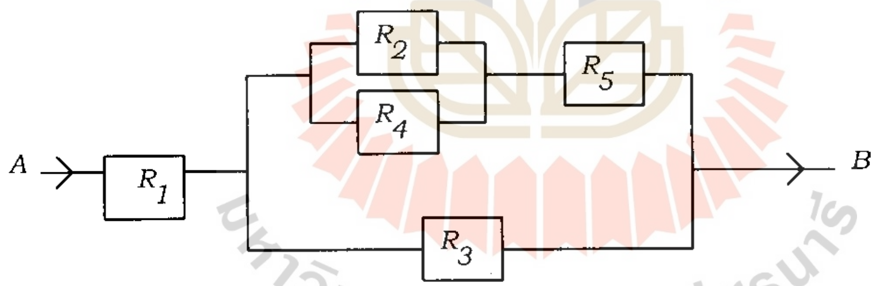
23. เครื่องซักผ้าจำนวนหนึ่งจะมีข้อบกพร่องดังนี้ คือ ความบกพร่องชนิดที่มีความสำคัญต่อการทำงานของเครื่องอย่างยิ่ง 5 ชนิด และความบกพร่องชนิดไม่สำคัญอีก 5 ชนิด จงหาจำนวนวิธีที่เครื่องซักผ้าจะมีความบกพร่องชนิดสำคัญ 1 ชนิด "และ" ชนิดไม่สำคัญ 1 ชนิด และจงหาจำนวนวิธีที่เครื่องซักผ้าจะมีความบกพร่องชนิดสำคัญ 2 ชนิด "และ" ชนิดไม่สำคัญ 2 ชนิด

24. พิจารณาแผนภาพของระบบอิเล็กทรอนิกส์ระบบหนึ่ง ซึ่งแสดงให้เห็นความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบของระบบจะปฏิบัติงานแบบปกติ จงหาความน่าจะเป็นที่ระบบทั้งระบบปฏิบัติงาน ถ้า assembly III และอย่างน้อยที่สุด component 1 ตัว ใน assembly I และ II จะต้องปฏิบัติงาน เพื่อให้ทั้งระบบปฏิบัติงาน โดยสมมติว่าแต่ละ assembly ปฏิบัติงานโดยอิสระแก่กัน และแต่ละ component ในแต่ละ assembly ปฏิบัติงานโดยอิสระแก่กันด้วย



25. ในข้อ 24. ถ้า component ใน assembly II มีความน่าจะเป็นในการปฏิบัติงานอย่างสมบูรณ์เปลี่ยนเป็น 0.9 (จากเดิม 0.99) จงพิจารณาว่าจะมีผลมากน้อยเพียงใดต่อความน่าจะเป็นที่ระบบทั้งระบบปฏิบัติงาน

26. พิจารณาการต่อแบบอนุกรมและแบบขนาน ดังแสดงในภาพ ค่าของ R_i $(i = 1,2,3,4,5)$ เป็นค่าของความเชื่อถือ (reliability) ของ components ทั้ง 5 นั่นคือ R_i = ความน่าจะเป็นที่ component i จะทำงานตามปกติ แต่ละ component ปฏิบัติงาน (และไม่ปฏิบัติงาน) ในลักษณะอิสระแก่กัน และระบบทั้งระบบจะไม่ปฏิบัติงาน เมื่อเส้นเชื่อมต่อจาก A ไปยัง B ขาดลง จงหาความน่าเชื่อถือหรือความน่าจะเป็นของระบบทั้งระบบปฏิบัติการได้ ในรูปของฟังก์ชันของ R_1 , R_2 , R_3 , R_4 และ R_5



27. เลือกลูกบอล 2 ลูก จากกล่องบรรจุลูกบอล m ลูก และติดหมายเลข 1 ถึง m ถ้าลูกบอลที่เลือกได้ลูกที่ 1 เป็นหมายเลข 1 เราจะเก็บเอาไว้ (หรือไม่ใส่กลับไปในกล่อง) มิฉะนั้นจะใส่ลูกบอลกลับไปในกล่องตามเดิม จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลที่เลือกได้ลูกที่สอง ติดหมายเลข 2

28. เลือกตัวเลข 2 ตัว จากตัวเลข 1 ถึง 9 โดยเลือกแบบแทนที่ไม่ได้ ถ้าผลบวกของตัวเลข 2 ตัวที่เลือกได้เป็น 7 จงหาความน่าจะเป็นที่ตัวเลขทั้งสองเป็นเลขคี่

29. ที่มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง มีนักศึกษาหญิง 40% 20% ของนักศึกษาชายและ 1% ของนักศึกษาหญิงมีความสูงเกิน 170 ซ.ม. ถ้าเลือกนักศึกษามา 1 คนโดยสุ่ม และพบว่านักศึกษาคนนี้สูงเกิน 170 ซ.ม. จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาผู้นี้เป็นนักศึกษาหญิง

30. ณ ศูนย์เครื่องจักรแห่งหนึ่ง มีเครื่องจักรอัตโนมัติ 4 แบบ ใช้สำหรับผลิตส่วนประกอบรถยนต์ จากสถิติที่ศูนย์เก็บรวบรวมไว้พบว่าผลผลิตของแต่ละเครื่องจักรเป็นไปตามตารางที่แสดงดังนี้ คือ

เครื่องจักร	เปอร์เซนต์การผลิต	เปอร์เซนต์ผลผลิตที่บกพร่อง
1	15	4
2	30	3
3	20	5
4	35	2

สมมติผลผลิตรุ่นปัจจุบันที่เก็บอยู่ในคลังสินค้าเป็นไปตามตารางที่แสดงไว้

(a) ถ้าผลผลิตถูกเลือกจากคลังสินค้ามา 1 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่ผลผลิตมีข้อบกพร่อง

(b) ถ้าผลผลิตที่ถูกเลือกมาและพบว่ามีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลผลิตชิ้นนี้ผลิตโดยเครื่องจักรแบบที่ 3

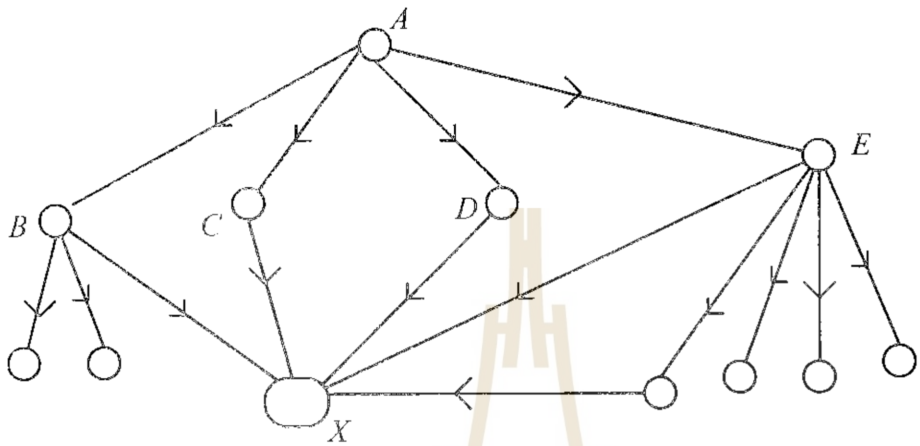
31. เลือกสุ่มจุด ๆ หนึ่ง จากจุดภายในวงกลม จงหาความน่าจะเป็นที่จุดที่เลือกมาได้นี้จะอยู่ใกล้จุดศูนย์กลางมากกว่าเส้นรอบวงกลม

32. สมมติว่ามีคน n คนในห้องหนึ่ง ถ้าทำบัญชีแสดงวันเกิดของคน n คนนี้ (โดยบันทึก เดือนที่เกิดและวันที่) จงหาความน่าจะเป็นที่มี 2 คนหรือมากกว่า 2 คนเกิดวันเดียวกัน สมมติว่ามี 365 วันใน 1 ปี และแต่ละวันมีโอกาสเป็นวันเกิดของคนใดคนหนึ่งเท่า ๆ กัน ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่คน 2 คนหรือมากกว่า 2 คน จะเกิดวันเดียวกัน จงหา $P(B)$ และ $P(B')$ สำหรับ

n = 10, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 40, 50 และ 60

33. ฝ่ายวิศวกรรมอุตสาหการของบริษัท ABC ทำการนิเทศก์งานของพนักงานเทคนิค 8 คน วิศวกรในฝ่ายนี้ต้องการไปนิเทศก์งานโดยลำดับที่ไปนิเทศก์พนักงานคนใดก่อนหลังจะเป็นวิธีสุ่ม จงหาจำนวนวิธีที่วิศวกรสามารถไปนิเทศก์งานพนักงานทั้ง 8 คนนี้

34. นักเดินทางโดยวิธีขอโดยสารฟรี เดินทางจากเมือง A โดยเลือกเส้นทางแบบสุ่ม ซึ่งจากรูปเห็นได้ว่า มีเส้นทาง 4 เส้นทาง จากเมือง A คือ AB, AC, AD และ AE และเมื่อถึงจุดเชื่อมต่อแต่ละจุด นักเดินทางผู้นี้ก็เลือกเส้นทางต่อไปโดยวิธีสุ่มอีก จงหาความน่าจะเป็นที่นักเดินทางจะเดินทางไปถึงเมือง X



35. ถ้าเลือกกลุ่มตัวอย่างจำนวน r สิ่ง จากของ N สิ่ง

(i) ถ้าเลือกโดยแทนที่ไม่ได้

จงแสดงว่า ความน่าจะเป็นที่ของ 1 สิ่ง ที่เฉพาะเจาะจงจะได้รับเลือก คือ

$$1 - \frac{N-r}{N} = \frac{r}{N}$$

(ii) ถ้าเลือกโดยแทนที่ได้

จงแสดงว่า ความน่าจะเป็นที่ของ 1 สิ่ง ที่เฉพาะเจาะจงจะได้รับเลือกอย่างน้อยที่สุด 1 ครั้ง คือ

$$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^r$$

36. รหัสคำผ่าน (password) ของระบบคอมพิวเตอร์เพื่อการสื่อสารข้อมูลและเครือข่ายของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ประกอบด้วยอักษรภาษาอังกฤษ 7 ตัว ตามด้วยตัวเลขอีก 1 ตัว

(a) มีรหัสคำผ่านที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่าใด

(b) จงหาจำนวนรหัสคำผ่านซึ่งประกอบด้วยอักษร a 3 ตัว อักษร b 2 ตัว อักษร c 2 ตัว และตัวสุดท้ายเป็นเลขคู่

(c) ถ้าท่าน "ลืม" รหัสคำผ่านของท่าน แต่พอจะจำได้ว่า รหัสคำผ่านมีลักษณะที่บรรยายไว้ใน ข้อ (b) จงหาความน่าจะเป็นที่ท่านสามารถทายรหัสคำผ่านได้ถูกต้องในการพยายามครั้งแรก

37. มีผู้เข้าแข่งขันยิงปืน 3 คน ให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่ผู้แข่งขัน i $(i = 1, 2, 3)$ ยิงถูกเป้า สมมติว่า A_1, A_2, A_3 เป็นเหตุการณ์อิสระแก่กันและให้ $P(A_1) = 0.7$, $P(A_2) = 0.9$, $P(A_3) = 0.8$ จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน 2 คน ยิงถูกเป้า (นั่นคือ ผู้ แข่งขันคนหนึ่งยิงพลาด)

38. กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง (R) 2 ลูก และสีขาว (W) 4 ลูก เลือกกลุ่มตัวอย่างจำนวน 5 ลูก ติดต่อกัน **โดยเลือกแบบไม่คืนที่** จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

(a) $WWRWR$
(b) $RWWWR$
(c) $WRWRW$
(d) ได้ลูกบอลสีขาว 3 ลูกในการเลือก 5 ครั้งติดต่อกัน

คำตอบแบบฝึกหัด 1

1. 0.06 0.08 0.12 0.02

3. (a) $\{4\}$ (b) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (c) $\{2, 3, 4, 5\}$
   (d) U (e) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

7. (a) $S = \{$ม่วง, ขาว, เหลือง$\}$ (b) 1/5

9. 2/3

11. $S = \{(t_1, t_2) \mid t_1 \geq 0$ และ $t_2 \geq 0\}$

15. 30 เส้นทาง 17. 560, 560 วิธี

19. P (ยอมรับ) $= \dfrac{\sum_{x=0}^{1} \binom{300p'}{x}\binom{300(1-p')}{10-x}}{\binom{300}{10}}$

21. เปรียบเทียบ 28 ครั้ง

27. $\left(\dfrac{1}{m-1}\right)\left(\dfrac{1}{m}\right) + \left(\dfrac{1}{m}\right)\left(\dfrac{m-1}{m}\right) = \dfrac{(m^2 - m + 1)}{m^2(m-1)}$

33. $8! = 40320$

2

ตัวแปรสุ่มและการแจกแจง

Random Variables and Their Distributions

ในการทดลองเชิงสุ่ม นักวิทยาศาสตร์ วิศวกร มักมีความสนใจเกี่ยวกับการวัดขนาดหรือปริมาณ เช่น จำนวนฟิวส์ใน 1 รุ่น ความหนาของเลนส์ ความต้านทานแรงกดของแผ่นคอนกรีต ความต้านทานการฉีกขาดของกระดาษ เลือกสุ่มตัวอย่างจากแผ่นคอนกรีตจำนวนหนึ่งเพื่อทดสอบความต้านทานแรงกดของมัน ในแต่ละครั้งเราวัดความต้านทานแรงกด แล้วบันทึกผลลัพธ์เป็นค่าตัวเลขค่าหนึ่ง ค่าตัวเลขที่เราบันทึกไว้แต่ละครั้งนั้น เราไม่สามารถทราบล่วงหน้าหรือคาดคะเนได้อย่างแน่นอน เพราะว่าเป็นผลลัพธ์จากการเลือกสุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นการทดลองเชิงสุ่ม อย่างไรก็ตาม เราสามารถแทนผลลัพธ์ด้วยค่าตัวเลข และมีการวัดความต้านทานแรงกดทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันของผลลัพธ์หรือตัวอย่างที่ถูกเลือกมาในกรณีนี้

ดังนั้นในกรณีที่การบรรยายผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ของการทดลองเชิงสุ่มมีความยุ่งยาก เราจะแทนผลลัพธ์ของการทดลองด้วยค่าตัวเลข (numerical outcome) โดยใช้หลักการหรือฟังก์ชันอันเดียวกันสำหรับแต่ละผลลัพธ์ในการทดลองอันเดียวกัน

2.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

นิยาม 2.1 ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลอง และ X เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดจำนวนจริง $X(e)$ เพียงหนึ่งจำนวนเท่านั้น สำหรับแต่ละผลลัพธ์ $e \in S$ เราเรียก $X(e)$ ว่า **ตัวแปรสุ่ม** ดังนั้น S เป็นโดเมนของ X และเขียน R_X แทนพิสัยของ X

ตัวอย่าง 2.1 การทดลองโดยโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง

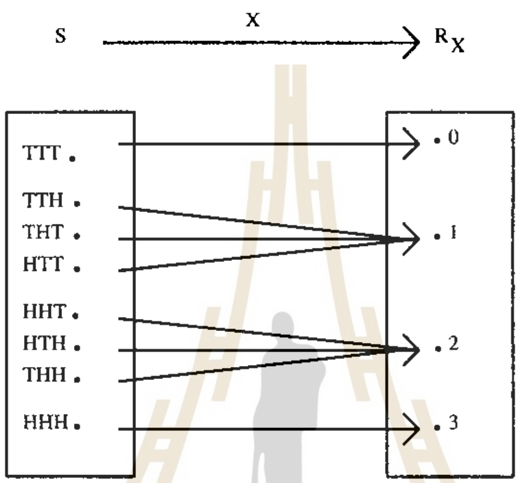
$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว ดังนั้น

$$X(HHH)=3,\ X(HHT)=2,\ X(HTH)=2,\ X(HTT)=1$$

$$X(THH)=2,\ X(THT)=1,\ X(TTH)=1,\ X(TTT)=0$$

พิสัยของ X เขียนแทนโดย $R_X = \left\{x \mid x = 0,1,2,3\right\}$ (ดูรูป 2.1)



รูป 2.1

โดยกฎเกณฑ์ของฟังก์ชัน X ซึ่งเป็นฟังก์ชันบนแซมเปิลสเปซ S ย่อมกำหนดค่าให้แต่ละผลลัพธ์ $e \in S$ เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น แต่ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันใน S อาจมีค่าของฟังก์ชันค่าเดียวกัน (เช่นในตัวอย่าง 2.1 $X(TTH)=X(THT)=X(HTT)$ ต่างก็เท่ากับหนึ่ง) หน้าที่ของตัวแปรสุ่ม X คือ กำหนดค่าจำนวนจริงให้ผลลัพธ์ใน S นั่นคือ

S เป็นโดเมนของ X และ พิสัยของ X คือ $R_X = \left\{X(e) \mid e \in S\right\}$

R_X เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนจริง กล่าวได้ว่า R_X **เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองเพียงแต่ R_X มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงเท่านั้น**

ในกรณีที่ผลลัพธ์ของการทดลองเป็นจำนวนจริงอยู่แล้ว เช่น

ถ้า $S = \{0,1,2,3,\ldots\}$ แล้วเราให้ $X(e) = e$ สำหรับแต่ละ $e \in S$

ถ้า $S = \{t \mid t \geq 0\}$ แล้วเราให้ $X(t) = t$ สำหรับแต่ละ $t \in S$

สิ่งที่เราสนใจต่อไปคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใน S และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ใน R_X ซึ่งสัมพันธ์กับ A เช่น ในตัวอย่าง 2.1 ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญออกหัว 1 ครั้ง และถ้าเป็นเหรียญเที่ยงตรง $P(A) = 3/8$ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว ดังนั้น $(X = 1)$ คือเหตุการณ์ใน R_X ที่แทนเหตุการณ์ A ใน S และเราย่อมได้ว่า

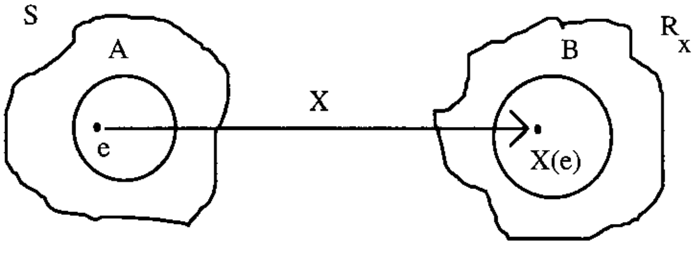
$$P_X(X = 1) = P(A) = 3/8$$

นิยาม 2.2 ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลอง และ X เป็นตัวแปรสุ่มนิยามบน S โดยมี R_X เป็นพิสัยของ X ถ้า A เป็นเหตุการณ์ของ S และ B เป็นเหตุการณ์ของ R_X ดังนั้น เรากล่าวว่า A และ B เป็นเหตุการณ์สมมูลย์(equivalent events) ถ้า

$$A = \{e \in S \mid X(e) \in B\} \tag{2.1}$$

กล่าวคือถ้าเหตุการณ์ A ของ S ประกอบด้วยจุดตัวอย่าง $e \in S$ ซึ่ง $X(e) \in B$ A และ B เป็นเหตุการณ์สมมูลย์ นั่นคือ เมื่อไรก็ตาม A เกิดขึ้น ก็คือ B เกิดขึ้น และเมื่อไรก็ตามที่ B เกิดขึ้น ก็คือ A เกิดขึ้น (ดูรูป 2.2 ประกอบ) ดังนั้น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A = ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B



รูป 2.2

นิยาม 2.3 ถ้า A เป็นเหตุการณ์ของ X และ B เป็นเหตุการณ์ใน R_X ของตัวแปรสุ่ม X ดังนั้น เรานิยามความน่าจะเป็นของ B ดังนี้

$$P_X(B) = P(A) \quad \text{เมื่อ} \quad A = \{e \in S \mid X(e) \in B\} \tag{2.2}$$

นิยาม 2.3 ทำให้เราหาความน่าจะเป็นสำหรับเหตุการณ์ใน R_X ในรูปความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใน S โดยใช้อักษร X ซึ่งแทนตัวแปรสุ่มเขียนกำกับความน่าจะเป็นสำหรับเหตุการณ์ใน R_X เช่น

$$P_X(X=1) = P(A) = 3/8, \qquad A = \{HTT,\ THT,\ TTH\}$$

เราจะกล่าวถึงความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใน R_X พิสัยของตัวแปรสุ่ม X โดยไม่เน้นคุณลักษณะของฟังชันก์ X เพียงแต่เน้นว่า X ทำหน้าที่แทนผลลัพธ์ของทดลองซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง ให้เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาการทดลองโยนลูกเต๋า 2 ลูก พร้อม ๆ กัน (ดังตัวอย่างในบทก่อน) เราให้ตัวแปรสุ่ม Y แทนผลบวกของแต้มของลูกเต๋าทั้งคู่ ดังนั้น พิสัยของ Y เขียนแทนโดย

$$R_Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

และถ้าลูกเต๋าทั้งคู่เที่ยงตรง เราได้ความน่าจะเป็น คือ

$$1/36,\ 2/36,\ 3/36,\ 4/36,\ 5/36,\ 6/36,\ 5/36,\ 4/36,\ 3/36,\ 2/36,\ 1/36$$

ตามลำดับ เช่น

$$P_Y(Y=2) = 1/36, \quad P_Y(Y=3) = 2/36, \quad P_Y(Y=12) = 1/36$$

ตาราง 2.1 แสดงเหตุการณ์ใน R_Y และเหตุการณ์ที่สมมูลย์กันในแซมเปิลสเปซ S พร้อมกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

เหตุการณ์ใน R_Y	เหตุการณ์ที่สมมูลย์กันใน S	ความน่าจะเป็น
Y = 2	{(1,1)}	1/36
Y = 3	{(1,2), (2,1)}	2/36
Y = 4	{(1,3), (2,2), (3,1)}	3/36
Y = 5	{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}	4/36
Y = 6	{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}	5/36
Y = 7	{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6/36
Y = 8	{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}	5/36
Y = 9	{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}	4/36
Y = 10	{(4,6), (5,5), (6,4)}	3/36
Y = 11	{(5,6), (6,5)}	2/36
Y = 12	{(6,6)}	1/36

ตาราง 2.1

พิจารณาเหตุการณ์ $(Y \le 4)$, $(5 < Y \le 7)$, $(Y \ge 11)$ ใน R_Y จะได้ว่า

$$P_Y(Y \le 4) = P_Y(Y=2) + P_Y(Y=3) + P_Y(Y=4) = 6/36$$

$$P_Y(5 < Y \le 7) = P_Y(Y=6) + P_Y(Y=7) = 11/36$$

$$P_Y(Y \ge 11) = P_Y(Y=11) + P_Y(Y=12) = 3/36$$

ตัวอย่าง 2.3 ในจำนวนนักศึกษา 200 คน มี 40 คนซึ่งเลือกเรียนวิศวกรรมไฟฟ้า มี 50 คนซึ่งเรียนวิศวกรรมเครื่องกล 30 คนซึ่งเรียนวิศวกรรมโทรคมนาคม และอีก 80 คนซึ่งเรียนเทคโนโลยีการผลิตพืช เลือกสุ่มนักศึกษามา 1 คน ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยกำหนดให้

$X=1$ เมื่อนักศึกษาวิศวกรรมไฟฟ้าได้รับเลือก

$X=2$ เมื่อนักศึกษาวิศวกรรมเครื่องกลได้รับเลือก

$X=3$ เมื่อนักศึกษาโทรคมนาคมได้รับเลือก

$X=4$ เมื่อนักศึกษาเทคโนโลยีการผลิตพืชได้รับเลือก

ดังนั้น

$$P_X(X=1)=40/200,\quad P_X(X=2)=50/200,$$

$$P_X(X=3)=30/200,\quad P_X(X=4)=80/200$$

2.2 ตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยและการแจกแจง (Discrete Random Variables and Their Distributions)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยมี R_X เป็นพิสัย ถ้าเราทราบว่าความน่าจะเป็น มีการแจกแจงสำหรับเซตย่อยต่าง ๆ A ของ R_X นั่นคือ เราสามารถคำนวณ $P_X(X \in A)$ ซึ่งเราจะกล่าวในลักษณะการแจกแจง (distribution) ของตัวแปรสุ่ม X หรือการแจกแจงของความน่าจะเป็นบนพิสัยของ X

นิยาม 2.4 ตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย (Discrete Random Variables)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม และ R_X เป็นพิสัยของ X เรากล่าวว่า X เป็น**ตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย** เมื่อ R_X เป็นเซตจำกัด (finite set) หรือเป็นเซตอนันต์แบบนับได้ (countably infinite set) และกล่าวว่า R_X เป็นแซมเปิลสเปซแบบเต็มหน่วย(discrete sample space) และ X มีการแจกแจงแบบเต็มหน่วย

เมื่อแซมเปิลสเปซ $S=\{e_1,e_2,e_3,\ldots\}$ เป็นแบบเต็มหน่วย เราได้กำหนดน้ำหนักหรือโอกาสที่แต่ละ $e_i \in S$ จะเกิดขึ้น ในรูปความน่าจะเป็นของ $\{e_i\}$ ดังนั้น ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย พิสัยของ X คือ

$$R_X=\{x_i \mid i=1,2,3,\ldots\}$$

เราสามารถกำหนด**น้ำหนัก**หรือ**ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์** $(X=x_i)$ สำหรับแต่ละ $x_i \in R_X$ ได้ในทำนองเดียวกัน

นิยาม 2.5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย เรากำหนดให้

$$p_X(x_i) = P_X(X = x_i) \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad x_i \in R_X \tag{2.3}$$

เมื่อ $p_X(x_i)$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $p_X(x_i) \geq 0$ สำหรับแต่ละ $x_i \in R_X$
2. $\sum_{x_i \in R_X} p_X(x_i) = 1$
3. $P_X(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i)$ เมื่อ $A \subseteq R_X$

เราเรียก $p_X(x_i)$ ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น(probability function** หรือ **probability density function)** เขียนย่อเป็น p.d.f. (ชื่ออื่น ๆ ของ $p_X(x_i)$ คือ probability mass function, frequency function, probability law of the random variable เป็นต้น) ในที่นี้ เราจะเรียก $p_X(x)$ โดยย่อว่า p.d.f.

ในกรณีที่ $x_i \notin R_X$ เราให้ $p_X(x_i) = 0$ ดังนั้น เราอาจกล่าวได้ว่าโดเมนของ p_X คือเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ถ้าเราไม่ได้ระบุชัดเจนว่า p_X มีนิยามบนเซตใด เราหมายความว่า p_X มีนิยามบน R_X และ **มีค่าเป็นศูนย์สำหรับค่าอื่น ๆ ที่ไม่เป็นสมาชิกของ** R_X

$$S \text{ (discrete)} \xrightarrow{X \text{ (discrete r.v.)}} R_X \text{ (discrete)}$$

$$S' = \{\, e_1,\ e_2,\ e_3 \ldots \} \longrightarrow R_X = \{\, x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots \}$$

$$\begin{array}{lccc|lccc}
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
prob. & p_1 & p_2 & p_3 & p.d.f. & p_X(x_1) & p_X(x_2) & p_X(x_3)
\end{array}$$

$p_1 = P(\{e_1\})$ $\qquad$ $p_X(x_1) = P_X(X = x_1) = p_1$

$p_2 = P(\{e_2\})$ $\qquad$ $p_X(x_2) = P_X(X = x_2) = p_2$

$p_3 = P(\{e_3\})$ $\qquad$ $p_X(x_3) = P_X(X = x_3) = p_3$

$\cdots$ $\qquad$ $\cdots$

รูป 2.3

ตัวอย่าง 2.4 จากตัวอย่าง 2.1 ถ้าเหรียญเที่ยงตรง และ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว ดังนั้น $R_X = \{0,1,2,3\}$ และ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย p.d.f. ของ X มีค่าดังนี้

$$p_X(0) = P_X(X=0) = 1/8$$

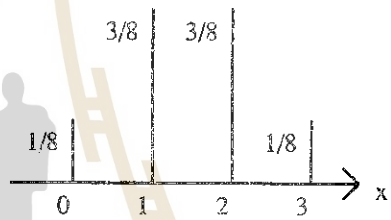
$$p_X(1) = P_X(X=1) = 3/8$$

$$p_X(2) = P_X(X=2) = 3/8$$

$$p_X(3) = P_X(X=3) = 1/8$$

และ $p_X(x) = 0$ สำหรับ $x_i \notin R_X$ การแสดง p.d.f. ของ X ทำได้ทั้งในแบบตาราง (tabular presentation) หรือแบบกราฟ (graphical presentation) ดังต่อไปนี้

X	$p_X(x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8



ตัวอย่าง 2.5 จากตัวอย่างการเลือกตัวอย่างขนาด n จากของ N สิ่ง แบบไม่คืนที่ โดยที่ในของ N สิ่ง มีของ D สิ่งซึ่งมีลักษณะพิเศษ (เช่น มีตำหนิ) ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนของที่มีลักษณะพิเศษ ในตัวอย่างขนาด n ดังนั้น p.d.f. ของ X คือ

$$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad \text{สำหรับ } x = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, D)$$

การแจกแจงของความน่าจะเป็นชนิดนี้เรียกว่า การแจกแจงแบบไฮเพอร์จีออเมตริก(hypergeometric distribution) เช่น ถ้า $N = 100$, $D = 5$ และ $n = 4$ แล้ว

$$p_X(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{95}{4-x}}{\binom{100}{4}} \quad \text{สำหรับ } x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ตัวอย่าง 2.6 Y เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นบนถนนในเวลา 1 สัปดาห์ และ Y มี p.d.f. กำหนดโดย

$$p_Y(y) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^y}{y!} \qquad \text{สำหรับ } y = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

การแจกแจงของความน่าจะเป็นชนิดนี้เรียกว่า การแจกแจงแบบปัวซอง(Poisson distribution) โดยมี λ เป็นค่าคงที่แทนค่าเฉลี่ยของจำนวนอุบัติเหตุต่อหนึ่งหน่วยเวลาในกรณีนี้

สำหรับเหตุการณ์ $(X = x)$ มีความน่าจะเป็นเท่ากับ $p_X(x)$ แต่ถ้าเราสนใจหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ในลักษณะอื่น ๆ เช่น $(X \le x)$, $(x_1 \le X \le x_2)$ หรือ $(X \ge x)$ ก็สามารถหาได้เช่นกัน (ดังในตัวอย่าง 2.2) กรณีที่เราสนใจพิจารณาในขณะนี้คือ $P_X(X \le x)$

ตัวอย่าง 2.7 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยโดยมี p.d.f. ดังนี้

$$p_X(x) = x/6 \quad \text{สำหรับ } x = 1, 2, 3$$

ดังนั้น

$$P_X(X \le 0) = 0$$
$$P_X(X \le 1) = p_X(1) = 1/6$$
$$P_X(X \le 3) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 1/6 + 2/6 + 3/6 = 1$$
$$P_X(X \le 3/2) = p_X(1) = 1/6$$
$$P_X(X \le 7/3) = p_X(1) + p_X(2) = 1/6 + 2/6 = 3/6$$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าเราให้

$$F_X(x) = P_X(X \le x)$$

แล้วฟังก์ชัน $F_X(x)$ มีนิยามสำหรับแต่ละจำนวนจริง x โดยมีลักษณะเป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่ลดลง(nondecreasing function) เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้น และฟังก์ชันมีความต่อเนื่องจากทางขวา(right-hand continuous) มีค่าต่ำสุดเป็นศูนย์และสูงสุดเป็นหนึ่ง กล่าวได้ว่า $F_X(x)$ ทำหน้าที่**รวมหรือสะสม**ค่าของความน่าจะเป็นของจุดต่าง ๆ ซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

นิยาม 2.6 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย โดยมี R_X เป็นพิสัยของ X และ

$$p_X(x) = P_X(X=x), \quad x \in R_X$$

เป็น p.d.f. ของ X สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ เรานิยาม

$$F_X(x) = P_X(X \le x) = \sum_{t \in A} p(t) \tag{2.4}$$

เมื่อ $A = \left\{ t \mid t \le x,\ t \in R_X \right\}$

เราเรียก $F_X(x)$ ว่า**ฟังก์ชันแจกแจง** (distribution function) หรือ**ฟังก์ชันแจกแจงสะสม** (cumulative distribution function, CDF) ของตัวแปรสุ่ม X แบบเต็มหน่วย คุณสมบัติของ $F_X(x)$ มีดังต่อไปนี้

1. $0 \le F_X(x) \le 1$
2. $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลดลง เพราะว่าสำหรับ $x_1 \le x_2$ เราได้ว่า

   $$\{x \mid x \le x_1\} \subseteq \{x \mid x \le x_2\} \Rightarrow P_X(X \le x_1) \le P_X(X \le x_2)$$

   ดังนั้น

   $$F_X(x_1) = P_X(X \le x_1) \le P_X(X \le x_2) = F_X(x_2)$$

3. ถ้า t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับค่าที่ใหญ่ที่สุดของสมาชิกใน R_X แล้ว $F_X(t) = 1$

   ถ้า t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่น้อยกว่าค่าที่ต่ำที่สุดของสมาชิกใน R_X แล้ว $F_X(t) = 0$

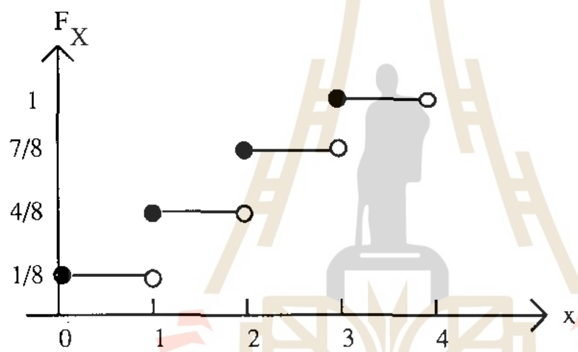
4. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย แล้ว $F_X(x)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันได(step function) โดยที่ความสูงของขั้นบันไดที่ $x \in R_X$ เท่ากับ $P_X(X = x)$

สรุปได้ว่า การแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X สามารถพิจารณาหรือบรรยายโดยใช้ฟังก์ชันแจกแจง $F_X(x)$ หรือ p.d.f. $p_X(x)$ โดยทั่วไปนิยมใช้ p.d.f. เพราะว่ามีความสะดวกในการใช้มากกว่า $F_X(x)$

ตัวอย่าง 2.8 ในกรณีของการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง ตัวแปรสุ่ม X มีเพียง 4 ค่า คือ 0, 1, 2, 3 และความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/8, 3/8, 3/8, 1/8 ตามลำดับ ดังนั้น ฟังก์ชันแจกแจงของ X มีค่าดังนี้

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \le x < 1 \\ 4/8, & 1 \le x < 2 \\ 7/8, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

กราฟของ $F_X(x)$ แสดงในรูป 2.4



รูป 2.4

ความสัมพันธ์ที่เห็นได้ชัดเจนระหว่าง $F_X(x)$ และ $p_X(x)$ อีกประการคือ

$$p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) \tag{2.5}$$

เมื่อ $x_{i-1},\ x_i \in R_X$ และผลที่ตามมาคือ สำหรับ $b \ge a$

$$P_X(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{2.6}$$

2.3 ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและการแจกแจง

(Continuous Random Variables and Their Distributions)

ในบางครั้งเราพบว่าตัวแปรสุ่มซึ่งแทนผลลัพธ์ของการทดลองมีค่าต่อเนื่อง เช่น X เป็นตัวแปรสุ่มแทนเวลาที่มีปริมาณการใช้ไฟฟ้าสูง เห็นได้ชัดว่า เราไม่สามารถจำกัดลงไปอย่างชัดเจนว่า ค่าที่เป็นไปได้ของ X มีทั้งหมดกี่ค่า หรือมีจำนวนอนันต์ค่าแต่นับได้ (countably infinite) เพราะว่า ตัวแปรสุ่ม X แทนเวลาซึ่งมีการวัดอย่างต่อเนื่อง และ X ย่อมเป็นค่าใดค่าหนึ่งก็ได้ เช่น ในช่วงเวลา 24 ชั่วโมง ดังนั้น $R_X = [0, 24]$ นอกจากนี้ก่อนขึ้นวันใหม่เราอาจจะตั้งคำถามว่า "**ความน่าจะเป็น**ที่ความต้องการใช้ไฟฟ้าสูงสุด ณ เวลา 20.04753 น." มีค่าเท่าใด ? คำตอบคือ เท่ากับศูนย์ เพราะว่าเป็นไปไม่ได้เลยที่ความต้องการใช้ไฟฟ้าสูงสุดจะเกิดขึ้น ณ เวลาดังกล่าว โดยไม่ช้าและเร็วไปกว่านี้และที่เวลานี้แน่นอน ทั้งนี้เพราะว่าลักษณะของตัวแปรสุ่มมีค่าต่อเนื่อง ไม่สามารถแยกจากกันเป็นจุดๆ ชัดเจนเหมือนกับค่าของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย ซึ่งสามารถบอก "ความน่าจะเป็น" หรือ "น้ำหนัก" ทีละจุดๆ ได้ สรุปคือ ลักษณะสำคัญ 2 ประการของตัวแปรสุ่มชนิดนี้คือ ค่าของตัวแปรสุ่มมีความต่อเนื่อง และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่มจะมีค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะเป็นศูนย์

นิยาม 2.7 ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variables)

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม และ R_X เป็นพิสัยของ X เรากล่าวว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เมื่อ R_X เป็นช่วงหนึ่งของจำนวนจริงหรือเป็นผลผนวก(union)ของช่วงของจำนวนจริง และความน่าจะเป็นที่ X จะเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$P_X(X = x) \quad = \quad 0$$

นิยาม 2.8 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ R_X เป็นพิสัยของ X เรากล่าวว่า $f_X(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) หรือเรียกโดยย่อว่า p.d.f. (ย่อมาจาก probability density function) ของ X เมื่อ $f_X(x)$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $f_X(x) \geq 0$ สำหรับแต่ละ $x \in R_X$

2. $\int_{R_X} f(x)dx = 1$

3. $f_X(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R_X หรือต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน R_X
(piecewise continuity)

4. $f_X(x) = 0$ สำหรับ $x \notin R_X$

5. $P_X(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a, b

จะเห็นได้ว่า p.d.f. ในกรณีตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยและแบบต่อเนื่องมีคุณสมบัติเหมือนกัน เพียงแต่วิธีการเท่านั้นที่แตกต่างกัน ทั้งนี้เพราะว่าเราสามารถหาความน่าจะเป็นหรือ "น้ำหนัก" ของแต่ละจุดใน R_X ได้ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเต็มหน่วย ดังการเปรียบเทียบต่อไปนี้

X (เต็มหน่วย)	X (ต่อเนื่อง)
$\sum_{x_i \in R_X} p_X(x_i) = 1$	$\int_{R_X} f_X(x)dx = 1$
$P_X(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_X(x_i)$	$P_X(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$

โดยทั่วไปเราจะไว้ในฐานที่เข้าใจว่า ถ้าไม่ได้ระบุค่าของ $f_X(x)$ เมื่อ $x \notin R_X$ นั่นคือ ค่าของ $f_X(x)$ เท่ากับศูนย์ สำหรับ $x \notin R_X$

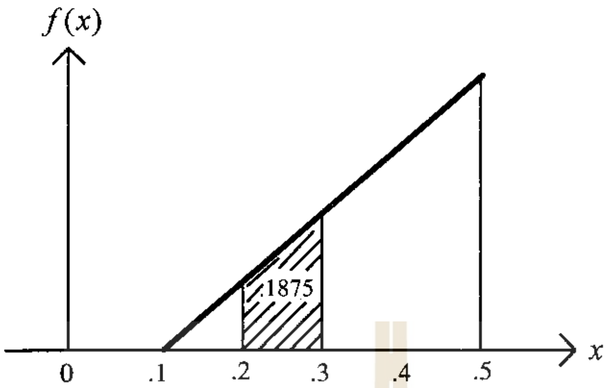
ตัวอย่าง 2.9 ระดับความเข้มข้นของตะกั่วในน้ำมันชนิดหนึ่งอยู่ในช่วง 0.1 ถึง 0.5 กรัมต่อลิตร จงหาความน่าจะเป็นที่น้ำมัน 1 ลิตร ที่เลือกมาโดยสุ่มจะมีระดับความเข้มข้นของตะกั่วในช่วง 0.2 ถึง 0.3 กรัม

วิธีทำ

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม แทนจำนวนกรัมของตะกั่วในน้ำมัน 1 ลิตร พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = 12.5x - 1.25, \quad 0.1 \leq x \leq 0.5$$

และ $f(x)$ เป็นศูนย์สำหรับ x ค่าอื่นๆ กราฟของ $f(x)$ แสดงในรูป 2.5 โดยจะทำหน้าที่เป็น p.d.f. ของ X



รูป 2.5

เราจะพิจารณาคุณสมบัติของ $f(x)$ ดังนี้

1. $f(x)$ มีความต่อเนื่อง และ $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0.1}^{0.5} (12.5x - 1.25)dx$

$$= \left[\frac{12.5x^2}{2} - 1.25x\right]_{0.1}^{0.5} = 1$$

$f(x)$ มีคุณสมบัติ 1 - 4 ในนิยาม 2.8 ดังนั้น

$$P(0.2 \leq X \leq 0.3) = \int_{0.2}^{0.3} f(x)dx$$

$$= \int_{0.2}^{0.3} (12.5x - 1.25)dx \quad = \left[\frac{12.5x^2}{2} - 1.25x\right]_{0.2}^{0.3}$$

$$= \left[\frac{12.5(.3)^2}{2} - 1.25(.3)\right] - \left[\frac{12.5(.2)^2}{2} - 1.25(.2)\right]$$

$$= 0.1875$$

[$P(0.2 \leq X \leq 0.3)$ คือ พื้นที่ของบริเวณที่แรเงาในรูป 2.5]

สิ่งที่น่าสนใจสำหรับ p.d.f. ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องก็คือ การที่ $f(x) \geq 0$ ทำให้เราได้ความหมายว่าในเชิงเรขาคณิตว่า

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \text{พื้นที่ของบริเวณระหว่างกราฟของ } f(x) \text{ และแกน } x$$

และระหว่างเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$

นอกจากนี้ยังเห็นได้ชัดจากนิยามของ p.d.f. ว่า

$$\int_{R_X} f(x)dx \;=\; 1$$

นั่นคือ พื้นที่ทั้งหมดของบริเวณใต้กราฟของ $f(x)$ เท่ากับหนึ่ง ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีของความน่าจะเป็น กล่าวคือ ความน่าจะเป็นของแซมเปิลสเปซเท่ากับหนึ่ง และอีกประการหนึ่งคือ การที่

$$P(X = a) \;=\; 0 \;\text{ และ }\; P(X = b) \;=\; 0$$

ทำให้เราได้ว่า

$$P(a \leq X \leq b) \;=\; P(a \leq X < b) \;=\; P(a < X \leq b) \;=\; P(a < X < b) \qquad (2.7)$$

พิจารณาจากตัวอย่าง 2.9 เราได้

$$\int_{0.1}^{0.5} f(x)dx \;=\; 1$$

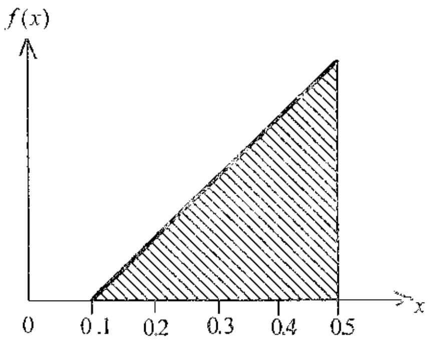
และ

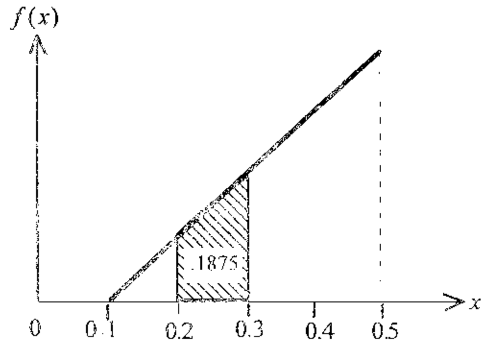
$$P(0.2 \leq X \leq 0.3) \;=\; \int_{0.2}^{0.3} f(x)dx \;=\; 0.1875$$

ดังนั้น

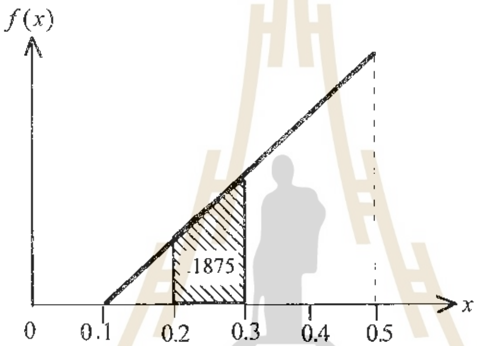
$$P(.2 \;\leq\; X \;<\; .3) \;=\; P(.2 \;<\; X \;\leq\; .3) \;=\; P(.2 \;<\; X \;<\; .3) \;=\; .1875$$

(ดูรูป 2.6 (a)-(c) ประกอบ)





(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (b) $P(.2 \le X \le .3) = .1875$



(c) $P(.2 < X < .3) = .1875$

รูป 2.6

ตัวอย่าง 2.10 ให้ X เป็นอายุการทำงานของหลอดไฟฟ้า $R_X = \{x \mid 0 \le x < \infty\}$ สมมติว่า p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{100}e^{-(x/100)}, \qquad x \in R_X$$

ดังนั้น $f(x) \ge 0$ และ

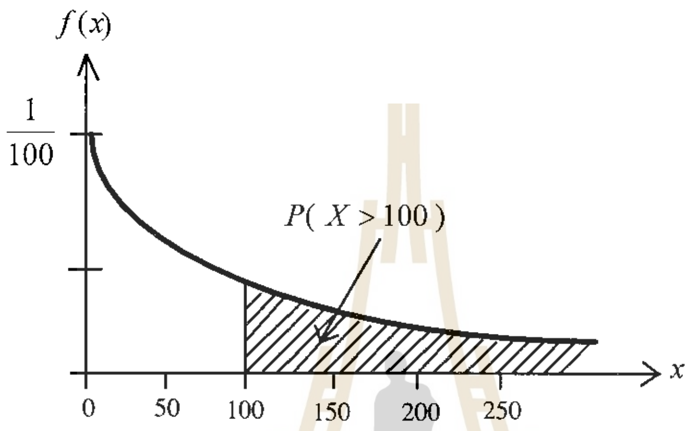
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{R_X} f(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{100}e^{-(x/100)}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{100}e^{-(x/100)}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{-x/100}\right]_0^b = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b/100} = 1$$

และความน่าจะเป็นที่อายุการใช้งานของหลอดไฟฟ้ามากกว่า 100 ชั่วโมง หาได้ดังนี้

$$P(X > 100) = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{100} e^{-(x/100)} dx = e^{-1} = 0.368$$

รูป 2.7 แสดงให้เห็นว่า $P(X > 100) = 0.368$ คือ พื้นที่ของบริเวณแรเงา



รูป 2.7

นิยาม 2.9 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ $f_X(x)$ เป็น p.d.f. ของ X เรานิยาม **ฟังก์ชันแจกแจง** (distribution function) ของ X ดังนี้ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

$$F_X(x) = P_X(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \tag{2.8}$$

ในเชิงเรขาคณิต ความน่าจะเป็นในกรณีนี้ คือ พื้นที่ของบริเวณใต้กราฟของ $f_X(x)$ ไปทางด้านซ้ายของ x จากทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส(Fundamental Theorem of Calculus) เรายังได้อีกว่า สำหรับค่าของ x ที่อนุพันธ์ของ $F_X(x)$ หาค่าได้

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x) \tag{2.9}$$

และ

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$$

$$= \int_a^b f_X(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a) \tag{2.10}$$

ตัวอย่าง 2.11 p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนระดับของตะกั่วในน้ำมัน 1 ลิตร คือ

$$f(x) \;=\; 12.5x - 1.25, \quad 0.1 \le x \le 0.5$$

เพราะว่า สำหรับ $x < 0.1$, $f(x) = 0$ และสำหรับ $x > 0.5$, $f(x) = 0$ ดังนั้น สำหรับ $.1 \le x \le .5$ เราได้ฟังก์ชันแจกแจงของ X ดังนี้คือ

$$F_X(x) \;=\; P_X(X \le x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int_{0.1}^{x} f(t)\,dt$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{0.1}^{x} (12.5t - 1.25)\,dt \;=\; \left[\frac{12.5t^2}{2} - 1.25t\right]_{0.1}^{x} \\ &= 6.25x - 1.25x + .0625 \end{aligned}$$

สรุปค่าของ $F(x)$ ได้ดังนี้

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0, & x < 0.1 \\ 6.25x^2 - 1.25x + .0625, & 0.1 \le x \le 0.5 \\ 1, & x > 0.5 \end{cases}$$

ความน่าจะเป็นที่น้ำมัน 1 ลิตร ที่เลือกโดยสุ่มจะมีระดับของตะกั่วระหว่าง .2 และ .3 กรัม คือ

$$P(.2 < X < .3) \;=\; P(.2 \le X \le .3) \;=\; F(.3) - F(.2)$$

แทนค่าได้

$$\begin{aligned} F(.3) &= 6.25(.3)^2 - 1.25(.3) + .0625 \;=\; .2500 \\ F(.2) &= 6.25(.2)^2 - 1.25(.2) + .0625 \;=\; .0625 \end{aligned}$$

ดังนั้น

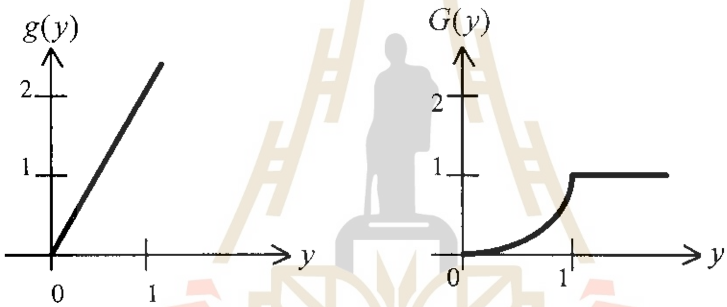
$$P(.2 < X < .3) \;=\; F(.3) - F(.2) \;=\; .2500 - .0625 \;=\; .1875$$

ตัวอย่าง 2.12 ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี p.d.f. $g(y) = 2y, \quad 0 < y < 1$ ดังนั้น ฟังก์ชันแจกแจงของ Y คือ

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \int_0^y 2t\,dt, & 0 \le y < 1 \\ 1, & 1 \le y \end{cases}$$

และ

$$P(1/2 \le Y \le 3/4) = G(3/4) - G(1/2) = (3/4)^2 - (1/2)^2 = 5/16$$
$$P(1/4 \le Y \le 2) = G(2) - G(1/4) = 1 - (1/4)^2 = 15/16$$



รูป 2.8

หมายเหตุ

1. ในกรณี p.d.f. ของ X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย จะเห็นว่าค่าของ $p_X(x)$ สูงสุดจะไม่เกินหนึ่งเพราะว่า $p_X(x) = P_X(X = x)$

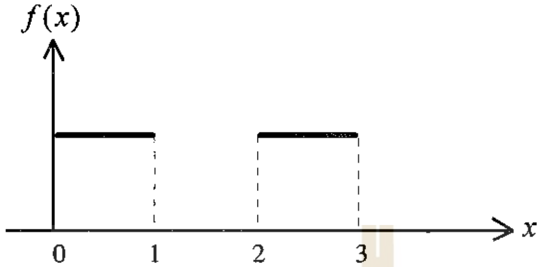
2. ในกรณี p.d.f. ของ X ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ค่าของ $f_X(x)$ ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต เพียงแต่บังคับว่า พื้นที่ระหว่างเส้นกราฟของ $f_X(x)$ และแกน x ต้องเป็นหนึ่ง

ในนิยาม 2.8 เรากล่าวว่า $f_X(x)$ อาจเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ พิจารณาตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.13 p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X กำหนดโดย

$$f(x) = 1/2$$

สำหรับ $0 < x < 1$ หรือ $2 < x < 3$



รูป 2.8

สามารถแสดงได้โดยง่ายว่า $f(x)$ มีคุณสมบัติของ p.d.f. ทุกประการ เพียงแต่ p.d.f. ในกรณีนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง ๆ มีจุด $x = 0, 1, 2, 3$ ที่ $f(x)$ ขาดความต่อเนื่อง (ดูรูป 2.8)

หมายเหตุ

ข้อควรระวังในกรณีของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องคือ การตีความหมายของเงื่อนไข

$$P_X(X = x_0) = 0$$

ซึ่งกล่าวว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่ม X เท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง โดยเฉพาะเท่ากับศูนย์นั้น ไม่ได้หมายความว่าเหตุการณ์ $(X = x_0)$ เป็นเซตว่าง หรือเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ใน R_X เพราะว่า

ถ้า $x_0 \in R_X$ แล้ว $A = \{x \mid x = x_0\} = \{x_0\} \neq \varnothing$

ดังนั้น

$$P_X(X = x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad (X = x_0) = \varnothing$$

แต่

$$A = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P_X(A) = 0$$

และโดยการวิเคราะห์คุณสมบัติของฟังก์ชันแจกแจงซึ่งมีความต่อเนื่องจากทางขวา เราจะได้ว่า

$$P_X(X = x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \left[F_X(x_0 + \delta) - F_X(x_0)\right] = 0$$

เช่นกัน

แบบฝึกหัด 2.

1. จงพิจารณาว่าตัวแปรสุ่มในแต่ละข้อย่อยต่อไปนี้ว่าเป็นแบบเต็มหน่วย(discrete) หรือแบบต่อเนื่อง (continuous)

(a) X : จำนวนครั้งที่ลูกเต๋าหงายแต้ม 2 หรือ 4 ในการทอดลูกเต๋า 50 ครั้ง

(b) T : เวลาของคอมพิวเตอร์ในการประมวลผลของงานวิจัยชิ้นหนึ่ง

(c) N : จำนวนครั้งที่โรงผลิตไฟฟ้าเกิดปัญหาขัดข้องทางด้านเทคนิคต่อเดือน

(d) M : จำนวนของสะเก็ดดาวตก (meteorites) ที่กระทบถูกดาวเทียมต่อวัน

2. การขยายพันธุ์ของผลไม้ชนิดหนึ่ง ทำโดยวิธีต่อกิ่งกับต้นที่มีรากแข็งแรง X เป็นจำนวนครั้งของการต่อกิ่งที่ประสบความสำเร็จใน 5 ครั้ง p.d.f. ของ X กำหนดโดยตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	.7	.2	.05	.03	.01	

(a) จงหา $p(5)$

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจง $F(x)$

(c) ใช้ F หาความน่าจะเป็นที่ประสบความสำเร็จอย่างมากที่สุด 3 ครั้ง และความน่าจะเป็นที่ประสบความสำเร็จอย่างน้อยที่สุด 2 ครั้ง

(d) ใช้ F เพื่อแสดงว่า ความน่าจะเป็นที่ประสบความสำเร็จอย่างแน่นอนที่สุด 3 ครั้ง คือ .03

3. ในการฝังระเบิดเพื่อระเบิดเอาหินอ่อน สว่านที่ใช้เจาะรูเพื่อฝังระเบิด จะต้องมีการเปลี่ยนอะไหล่ตัวเจาะอยู่บ่อยครั้ง ให้ X เป็นจำนวนรูเจาะเพื่อฝังระเบิดต่ออะไหล่ 1 ชิ้น p.d.f. ของ X กำหนดโดยตารางต่อไปนี้

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(x)$	.02	.03	.05	.2	.4	.2	.07	

(a) จงหา $p(8)$

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจง F

(c) ใช้ F หาความน่าจะเป็นที่อะไหล่ตัวเจาะที่เลือกสุ่มมา 1 ชิ้นจะสามารถใช้เจาะรูได้ตั้งแต่ 3 ถึง 5 รู

(d) จงหา$P(X \le 4)$ และ $P(X < 4)$ ความน่าจะเป็นในสองเหตุการณ์นี้มีค่าเท่ากันหรือไม่?

(e) จงหา F(-3) และF(10)

4. จากตัวอย่างการส่งยานอวกาศซึ่งควบคุมโดยระบบคอมพิวเตอร์ 3 ระบบ ซึ่งปฏิบัติการอิสระแก่กัน สมมติว่า ความน่าจะเป็นที่แต่ละระบบปฏิบัติการเป็น 0.9 ให้ X เป็นจำนวนของระบบคอมพิวเตอร์ที่ปฏิบัติการระหว่างส่งยานอวกาศ

(a) จงใช้แผนภาพต้นไม้ในรูป 5.1 หน้า 18 จงหา p.d.f. ของ X

(b) จะเห็นรูปแบบจาก p.d.f. ในข้อ (a) ว่า

$$p(x) = k(x)(.9)^x(.1)^{3-x}$$

เมื่อ $k(x)$ เป็นจำนวนวิธีตามแขนงของแผนภาพต้นไม้ที่ได้แต่ละค่าของ x จงเขียน $k(x)$ ในรูปของจำนวนระบบคอมพิวเตอร์ทั้งสามและจำนวนของระบบคอมพิวเตอร์ที่ปฏิบัติการ

(c) จงหาฟังก์ชันแจกแจง F

(d) ใช้ F หาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยที่สุดมีระบบคอมพิวเตอร์ 1 ระบบปฏิบัติการ

(e) ใช้ F หาความน่าจะเป็นที่อย่างมากที่สุดมีระบบคอมพิวเตอร์ 1 ระบบปฏิบัติการ

5. เป็นที่รู้กันว่าความน่าจะเป็นที่เราจะสามารถเข้าสู่ระบบ(log in) หรือเข้าไปใช้คอมพิวเตอร์จากเทอร์มินอล(remote terminal) ณ เวลาใด ๆ คือ 0.7 ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่พยายามเข้าสู่ระบบเพื่อใช้คอมพิวเตอร์

(a) จงหา 4 ค่าแรกของ p.d.f. ของ X

(b) จงหา $P(X = 4)$

6. ในข้อ 2 ถึงแม้เราจะไม่สามารถเขียนฟังก์ชันแจกแจงในลักษณะสูตรได้อย่างชัดเจน เราสามารถบรรยายฟังก์ชันแจกแจง F ในลักษณะดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ .70 & 0 \le x < 1 \\ .90 & 1 \le x < 2 \\ .95 & 2 \le x < 3 \\ .98 & 3 \le x < 4 \\ .99 & 4 \le x < 5 \\ 1.00 & x \ge 5 \end{cases}$$

(a) จงเขียนกราฟแสดง $F(x)$

(b) F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากทางด้านขวาหรือไม่?

(c) จงหา $\lim_{x \to \infty} F(x)$ และ $\lim_{x \to -\infty} F(x)$

(d) F เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลดลงหรือไม่ (nondecreasing function)

(e) ถ้า F เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง จุดที่ทำให้ F ไม่ต่อเนื่องมีกี่จุด และจงหา

$F(x_i) - F(x_{i-1})$ เมื่อ $x_{i-1},\ x_i \in R_X$

7. กล่องบรรจุลูกบอลสีขาว 6 ลูก ลูกบอลสีแดง 3 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 1 ลูก ให้ตัวแปรสุ่ม $X = 1$ ถ้าลูกบอลที่เลือกออกมาโดยสุ่มเป็นสีขาว และ $X = 5$ ถ้าลูกบอลที่เลือกได้เป็นสีแดง และ $X = 10$ ถ้าลูกบอลที่เลือกได้เป็นสีน้ำเงิน

(a) จงหา p.d.f. ของ X

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจงของ X

(c) จงเขียนกราฟแสดง p.d.f. และฟังก์ชันแจกแจง

8. สมมติว่า มีชิปหน่วยความจำ(memory chip) 2 ชิ้น ในทั้งหมด 8 ชิ้น ของคอมพิวเตอร์เครื่องหนึ่งมีข้อบกพร่อง เพื่อตรวจสอบหาชิปที่มีข้อบกพร่องทั้ง 2 ชิ้นนี้ ช่างซ่อมเลือกชิปออกจากคอมพิวเตอร์ ครั้งละ 2 ชิ้น และแทนใหม่ด้วยชิปซึ่งไม่มีข้อบกพร่องเลย ให้ X เท่ากับจำนวนของชิปที่มีข้อบกพร่องในตัวอย่างที่เลือกออกมาครั้งละ 2 ชิ้น

(a) จงหา p.d.f. ของ X

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจงของ X

(c) จงเขียนกราฟแสดง p.d.f. และฟังก์ชันแจกแจง

9. จงพิจารณาในแต่ละข้อย่อยต่อไปนี้ว่าค่าคงที่ c มีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ $p(x)$ คล้อยตามเงื่อนไขของการเป็น p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X

(a) $p(x) = x/c$, $x = 1, 2, 3, 4$

(b) $p(x) = cx$, $x = 1, 2, 3, 4, \ldots, 10$

(c) $p(x) = c(1/4)^x$, $x = 1, 2, 3, \ldots$

(d) $p(x) = c(x+1)^2$, $x = 0, 1, 2, 3$

(e) $p(x) = x/c$, $x = 1, 2, 3, \ldots, n$

10. ให้ Y เป็นผลบวกของแต้มของการทอดลูกเต๋า 2 ลูกในตัวอย่าง 2.2 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $(Y \le 1)$, $(Y \le 3)$, $(Y \le 7/2)$, $(1 < Y < 7/2)$ และหาฟังก์ชันแจกแจง F ของ Y แล้วเขียนกราฟแสดง F

11. ปัญหาเกี่ยวข้องกับความถี่สัมพัทธ์ ใช้โปรแกรมในการสร้างตัวเลขสุ่ม(random number) ซึ่งชุดหนึ่งจะประกอบด้วยเลข 3 ตัว ตัวเลขแต่ละชุดจะใช้ร่วมกับอักษรภาษาอังกฤษอีก 5 ตัว เพื่อใช้เป็น "รหัสคำผ่าน" สำหรับผู้ใช้งานในระบบเครือข่ายคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่ง พิจารณาเซตของตัวเลขทั้ง 50 ชุด หรือ ตัวเลขสุ่มทั้งหมด 150 ตัวเลขที่พิมพ์ออกมาคือ

1 6 9	9 3 8	5 0 6	7 5 7	5 9 4	6 5 6	4 4 4	8 0 9	3 2 1	5 4 5
7 3 2	1 4 6	7 1 3	4 4 8	8 6 1	6 1 2	8 8 1	7 8 2	2 0 9	7 5 2
5 7 1	7 0 1	8 5 2	9 2 4	7 6 6	6 3 3	6 9 6	0 2 3	6 0 1	7 8 9
1 3 7	0 9 8	5 3 4	8 2 6	6 4 2	7 5 0	8 2 7	6 8 9	9 7 9	0 0 0
9 3 3	4 5 1	9 4 5	4 6 4	8 7 6	8 6 6	2 3 6	6 1 7	4 1 8	9 8 8

ให้ X เป็นผลลัพธ์ที่ตัวเลขแต่ละตัวถูกพิมพ์ออกมา

(a) ถ้าตัวเลขเป็นตัวเลขสุ่มโดยแท้ จงหา p.d.f. ของ X และเขียนกราฟแสดง p.d.f. ของ X

(b) จากตัวเลขที่พิมพ์ออกมาทั้ง 150 ตัวเลข จงหาความถี่สัมพัทธ์ของตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(c) จงเขียนกราฟแสดงความถี่สัมพัทธ์ที่ได้จาก (b) บนกราฟอันเดียวกันกับกราฟของ p.d.f. ในข้อ (a)

(d) จากการสังเกตตัวเลขทั้ง 150 ตัว จงหาความถี่สะสมของตัวเลข

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

(e) จงหาฟังก์ชันแจกแจง F ของ X ในทางทฤษฎี และเทียบกับการแจกแจงที่ได้จากสังเกตผลที่ได้จริง ๆ จากตัวเลขทั้ง 150 ตัว เขียนกราฟแสดง F จากทฤษฎีและการแจกแจงจากการสังเกต (Empirical distribution) บนแผ่นกราฟอันเดียวกัน

12. ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f. $g(y) = cy^2,\ -1 < y < 1$

(a) จงพิจารณาว่า ค่าคงที่ c เท่ากับเท่าใด จึงจะทำให้ $g(y)$ คล้อยตามเงื่อนไขคุณสมบัติของ p.d.f.

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจง G ของ Y

(c) จงหา $P(0 < Y < 1)$, $P(0 < Y \le 3)$, $P(Y = 1/2)$, $P(-1 < Y \le 1/2)$ และ $P(-1 \le Y < 1/2)$

13. จงหาค่าของค่าคงที่ c ที่ทำให้แต่ละฟังก์ชันในข้อย่อยต่อไปนี้เป็น p.d.f.

(a) $f(x) = x^3/4, \quad 0 < x < c$

(b) $f(x) = (3/16)x^2, \quad -c < x < c$

(c) $f(x) = c/\sqrt{x}, \quad 0 < x < 1$ (ค่าของ $f(x)$ มีขอบเขตหรือไม่?)

(d) $f(x) = c/x^3, \quad 1 < x < \infty$

14. พิจารณา p.d.f. ต่อไปนี้

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \le x < 2 \\ k(x-4), & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) จงหาค่าของค่าคงที่ k ซึ่งทำให้ $f(x)$ เป็น p.d.f

(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจง F

15. จงเขียนกราฟของ p.d.f. ในแต่ละข้อย่อยพร้อมกับหาฟังก์ชันแจกแจง และเขียนกราฟแสดง

(a) $f(x) = (3/2)x^2, \quad -1 < x < 1$

(b) $f(x) = 1/2, \quad -1 < x < 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.

2. (a) .01

(b)

x	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	.7	.9	.95	.98	.99	1

(c) .98 ; .1

(d) .03

4. (a)

x	0	1	2	3
p(x)	$(.1)^3$	$3(.9)(.1)^2$	$3(.9)^2(.1)$	$(.9)^3$

(b) $k(x) = (3!)\, x!\,(3-x)!$

(c)

x	0	1	2	3
F(x)	.001	.028	.271	1.00

(d) .999

(e) .028

7. (a) $p(1) = 0.6,\ p(5) = 0.3,\ p(10) = 0.1$

(b) $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.6, & 1 \le x < 5 \\ 0.9, & 5 \le x < 10 \\ 1.0, & 10 \le x \end{cases}$$

9. (a) 10 ; (b) 1/55 ; (c) 3 ; (d) 1/30 ; (e) n (n+1)/2

13. (d) 2

15. (a) $F(x) = (x^3+1)/2, \quad -1 \le x < 1$

(b) $F(x) = (x+1)/2, \quad -1 \le x < 1$

(c) $$F(x) = \begin{cases} (x+1)^2/2, & -1 \le x < 0 \\ 1-(1-x)^2/2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

3

ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มและค่าคาดหมาย

Functions of One Random Variable and Expectation

ในบางปัญหา นอกจากเราจะต้องแทนผลลัพธ์ของการทดลองด้วยจำนวนจริงแล้ว เราอาจจะสนใจศึกษาพฤติกรรมของตัวแปรสุ่มในรูปของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มด้วย เช่น X เป็นตัวแปรสุ่มแทนความยาวเส้นผ่าศูนย์กลางของเส้นลวดทองแดง ถ้าสนใจดูพื้นที่ภาคตัดขวางของเส้นลวดซึ่งเป็นวงกลม เราให้ $Y = \pi\left(X/2\right)^2$ เป็นฟังก์ชันของ X ดังนั้น ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม เราย่อมได้ว่า Y ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มด้วย และถ้าทราบความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม X แล้วเราย่อมทราบความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม Y ด้วย

3.1 เหตุการณ์สมมูลย์ (Equivalent Events)

ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลอง X เป็นตัวแปรสุ่มนิยามบน S โดยกำหนดค่าสำหรับแต่ละ $e \in S$ เป็น

$$X(e) = x \text{ สำหรับ } x \in R_X$$

ซึ่งเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ให้

$$Y = H(X)$$

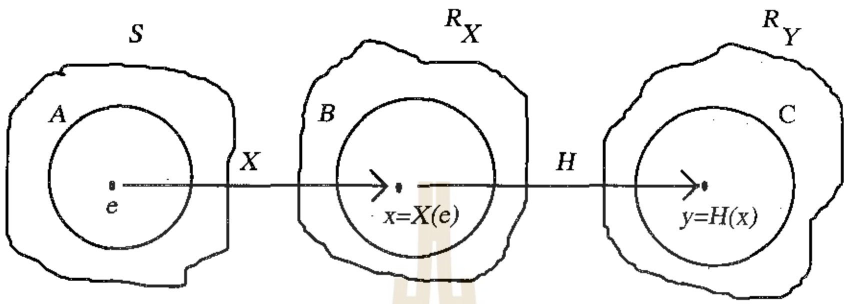
เป็นฟังก์ชันนิยามบน R_X โดยกำหนดค่าสำหรับแต่ละ $x \in R_X$ เป็น $y = H(x)$ และ $y \in R_Y$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ดังนั้น Y เป็นตัวแปรสุ่ม และ

$$y = H\big(X(e)\big)$$

ถ้า C เป็นเหตุการณ์ในพิสัยของ Y, R_Y และ B เป็นเหตุการณ์ใน R_X ดังนั้น B และ C เป็น**เหตุการณ์สมมูลย์** ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองเกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน นั่นคือ

$$B = \left\{ x \in R_X \,\middle|\, H(x) \in C \right\}$$

และถ้า A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S ซึ่งเป็นแซมเปิลสเปซตอนเริ่มต้น (original sample space) โดยที่ A และ B เป็นเหตุการณ์สมมูลย์ แล้ว A และ C เป็นเหตุการณ์สมมูลย์ (ดูรูป 3.1)



รูป 3.1

นิยาม 3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มนิยามบน S มีพิสัย R_X และถ้า H เป็นฟังก์ชันค่าจริงนิยามบน R_X โดยที่ $Y = H(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มมีพิสัยเป็น R_Y ดังนั้น สำหรับ C ซึ่งเป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน R_Y $\left(C \subseteq R_Y \right)$ เรานิยาม

$$P_Y(C) = P_X\left(\left\{ x \in R_X \,\middle|\, H(x) \in C \right\}\right) \tag{3.1}$$

ซึ่งสัมพันธ์กับความน่าจะเป็นใน S ซึ่งเป็นแซมเปิลสเปซตอนเริ่มต้น ดังนี้คือ

$$P_Y(C) = P\left(\left\{ e \in S \,\middle|\, H(X(e)) \in C \right\}\right)$$

ตัวอย่าง 3.1 ถ้า Y เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางของเส้นลวดทองแดง และถ้าเราทราบว่าเส้นผ่าศูนย์กลางของเส้นลวดมี p.d.f. กำหนดโดย

$$f_X(x) = 200, \qquad 1.000 \le x \le 1.005$$

สมมติว่า เราต้องการหา $P_Y\left(Y \le (1.01)\pi/4\right)$ พิจารณาเหตุการณ์ใน R_X ซึ่งสมมูลย์กับเหตุการณ์ $Y \le (1.01)\pi/4$ เพราะว่า

$$Y = \pi\,(X/2)^2$$

ดังนั้น

$$\pi\,(X/2)^2 \le 1.01\pi\ /4 \quad\Rightarrow\quad X^2 \le 1.01 \quad\Rightarrow\quad |X| \le \sqrt{1.01}$$

นั่นคือ

$$P_Y\left(Y \le (1.01)\pi/4\right) = P_X\left(|X| \le \sqrt{1.01}\,\right)$$

แต่เพราะว่า $f(x) = 0$ สำหรับ $x < 1.0$ ดังนั้น

$$P_X\left(|X| \le \sqrt{1.01}\,\right) = P\left(1.0 \le x \le \sqrt{1.01}\,\right) = \int_{1.0}^{\sqrt{1.01}} 200\,dx$$

$$= 200\left(\sqrt{1.01}-1\right) = .9975$$

$$\therefore\ P_Y\left(Y \le (1.01)\pi/4\right) = .9975$$

ตัวอย่าง 3.2 สมมติว่าจำนวนครั้งของโทรศัพท์ที่เรียกเข้ามาในมหาวิทยาลัยในช่วงเวลา t มี p.d.f. กำหนดโดย

$$p_X(x) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^x / x! \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงที่และเป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของโทรศัพท์ใน 1 หน่วยเวลา ถ้า

$$Y = 2X + 2$$

แล้วพิจารณาหาค่าของ $P_Y\left(Y \le 5\right)$

วิธีทำ

$$P_Y\left(Y \le 5\right) = P_X\left(2X+2 \le 5\right) = P_X\left(X \le 3/2\right)$$

$$= p_X(0) + p_X(1) = \left[e^{-\lambda t}(\lambda t)^0/0!\right] + \left[e^{-\lambda t}(\lambda t)^1/1!\right]$$

$$= e^{-\lambda t}\left[1 + \lambda t\right]$$

3.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย

(Functions of a Discrete Random Variable)

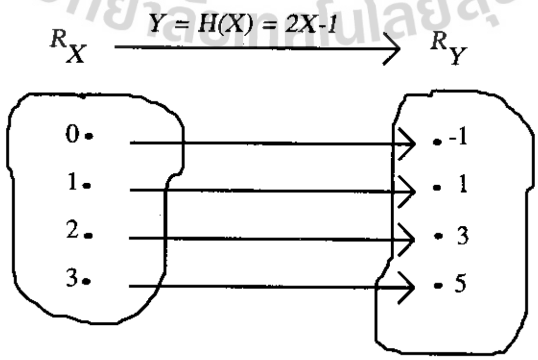
สมมติว่าทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย และให้ $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots$ เป็นค่าของ X ซึ่ง $H(x_{i_j}) = y_j$ สำหรับบางเซต $\Omega = \{ j \mid j = 1, 2, 3, \ldots, s \}$ ดังนั้น ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ Y หรือ p.d.f. ของ Y เขียนแทนโดย $p_Y(y_i)$ มีค่าดังนี้

$$p_Y(y_i) \;=\; P_Y(Y = y_i) \;=\; \sum_{j \in \Omega} p_X(x_{i_j}) \qquad (3.2)$$

นั่นคือ p.d.f ของ Y ที่จุด y_i เป็นผลบวกของ p.d.f. ของ X ที่จุดต่าง ๆ ของ X ที่สมนัยกับค่าของ $Y = y_i$

ตัวอย่าง 3.3 ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง โดยมีตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัว ค่าของ X คือ 0, 1, 2, 3 ซึ่งมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/8, 3/8, 3/8, 1/8 ตามลำดับ ถ้า $Y = 2X - 1$ แล้วค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ -1, 1, 3, 5 ดังแสดงในรูป 3.2 และ

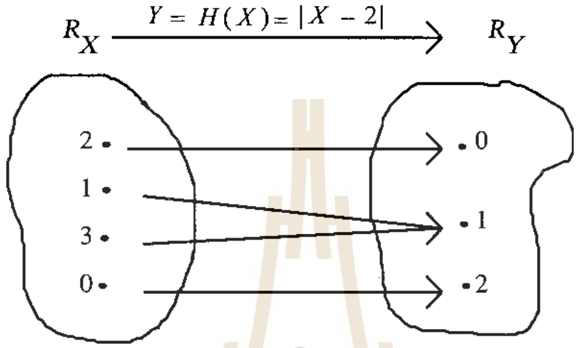
$$\begin{aligned}
p_Y(-1) &= p_X(0) = 1/8 \\
p_Y(1) &= p_X(1) = 3/8 \\
p_Y(3) &= p_X(2) = 3/8 \\
p_Y(5) &= p_X(3) = 1/8
\end{aligned}$$



รูป 3.2

ตัวอย่าง 3.4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มในตัวอย่าง 3.3 สมมติว่า $Y = |X-2|$ ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ Y คือ 0, 1, 2 ดังแสดงในรูป 3.3 และ

$$p_Y(0) = p_X(2) = 3/8$$
$$p_Y(1) = p_X(1) + p_X(3) = 4/8$$
$$p_Y(2) = p_X(0) = 1/8$$



รูป 3.3

ในกรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง แต่ Y เป็นแบบเต็มหน่วย การหา $p_Y(y_i)$ ทำได้ดังนี้

$$p_Y(y_i) = \int_B f_X(x)\,dx \qquad (3.3)$$

เมื่อเหตุการณ์ B เป็นเหตุการณ์ใน R_X ซึ่งสมมูลย์กับเหตุการณ์ $Y = y_i$ ใน R_Y

ตัวอย่าง 3.5 สมมติ X มี p.d.f. กำหนดโดย

$$f_X(x) = e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

ให้ $Y = 0$ สำหรับ $X \leq 1/\lambda$ และ $Y = 1$ สำหรับ $X > 1/\lambda$ ดังนั้น Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย มีค่า 0 หรือ 1 และหา p.d.f. ของ Y ได้ดังนี้ (ใช้สมการ (3.3))

$$p_Y(0) = \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^{1/\lambda} = 1 - e^{-1} \approx .6321$$

$$p_Y(1) = \int_{1/\lambda}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_{1/\lambda}^{\infty} = 0 + e^{-1} \approx .3679$$

3.3 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

(Functions of a Continuous Random Variable)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ f_X เป็น p.d.f. ของ X และ H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $Y = H(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง การหา p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม Y เขียนแทนโดย f_Y กระทำได้ดังนี้

1. หา $F_Y(y) = P_Y\big(Y \le y\big)$ โดยหาเหตุการณ์ B ใน R_X ซึ่งสมมูลย์กับเหตุการณ์ $\big(Y \le y\big)$ ใน R_Y
2. หาอนุพันธ์ของ $F_Y(y)$ เทียบกับ y ซึ่งจะได้ $f_Y(y)$
3. หาพิสัยของตัวแปรสุ่ม Y

[เหตุผลสำหรับ ข้อ 2. $F_Y(y) = \int_a^y f_Y(t)\,dt \Rightarrow \dfrac{d}{dy}F_Y(y) = f_Y(y)$]

ตัวอย่าง 3.6 สมมติว่า ตัวแปรสุ่ม X มี p.d.f. กำหนดโดย

$$f_X(x) = x/8, \qquad 0 \le x \le 4$$

ถ้า $Y = H(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ $H(X) = 2X + 8$ ดังนั้น p.d.f. ของ Y $f_Y(y)$ หาได้ดังนี้คือ

1. $F_Y(y) = P_Y\big(Y \le y\big) = P_X\big(2X + 8 \le y\big) = P_X\big(X \le (y-8)/2\big)$

$$= \int_0^{(y-8)/2} (x/8)\,dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^{(y-8)/2} = \frac{1}{64}\big(y^2 - 16y + 64\big)$$

2. $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y) = \dfrac{1}{32}y - \dfrac{1}{4}$

3. หา R_Y ถ้า $x = 0$ แล้ว $y = 8$ และ ถ้า $x = 4$ แล้ว $y = 16$ ดังนั้น

$$f_Y(y) = \frac{y}{32} - \frac{1}{4}, \qquad 8 \le y \le 16$$

ตัวอย่าง 3.7 พิจารณาตัวแปรสุ่ม X ดังในตัวอย่าง 3.6 และสมมติว่า

$$Y = H(X) = (X - 2)^2$$

ดังนั้น p.d.f. ของ Y หาได้ดังนี้

1. $$F_Y(y) = P_Y(Y \le y) = P_X\left((X-2)^2 \le y\right) = P_X\left(-\sqrt{y} \le X - 2 \le \sqrt{y}\right)$$
$$= P_X\left(2-\sqrt{y} \le X \le 2 + \sqrt{y}\right)$$
$$= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} \frac{x}{8}dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}}$$
$$= \frac{1}{16}\left[\left(4 + 4\sqrt{y}+y\right) - \left(4 - 4\sqrt{y} + y\right)\right] = \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

2. $$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

3. ถ้า $x=2$ แล้ว $y=0$ และ ถ้า $x=4$ แล้ว $y=4$ แต่จาก 2. เห็นได้ว่า $f_Y(y)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $y=0$ ดังนั้น

$$f_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}, \qquad 0 < y \le 4$$

หมายเหตุ

1. ในตัวอย่าง 3.6 เหตุการณ์ $(Y \le y)$ ใน R_Y สมมูลย์กับ $\left(X \le (y - 8)/2\right)$ ใน R_X และ H เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น

2. ในตัวอย่าง 3.7 เหตุการณ์ $(Y \le y)$ ใน R_Y สมมูลย์กับ$\left(2-\sqrt{y} \le X \le 2 + \sqrt{y}\right)$ ใน R_X เพราะว่า $R_X = [0, 4]$ แต่ H ไม่เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง โดยมี f_X เป็น p.d.f. ของ X และ $f_X(x) > 0$ สำหรับ $a < x < b$ และ $Y = H(X)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นหรือฟังก์ชันค่าลดลง(strictly increasing or strictly decreasing)ของตัวแปรสุ่ม X ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $Y = H(X)$ มี p.d.f. หาได้ดังนี้

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{3.4}$$

โดยที่ $x = H^{-1}(y)$ (เขียน x ในรูปฟังก์ชันผกผันของ H)

ถ้า H เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น แล้ว $f_Y(y) > 0$ สำหรับ $H(a) < y < H(b)$ และถ้า H เป็นฟังก์ชันค่าลดลง แล้ว $f_Y(y) > 0$ สำหรับ $H(b) < y < H(a)$

พิสูจน์ พิจารณากรณี H เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นเท่านั้น การพิสูจน์สำหรับกรณี H เป็นฟังก์ชันค่าลดลงจะคล้ายกัน

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P_Y\big(Y \le y\big) = P_X\big(H(X) \le y\big) \\
&= P_X\big(X \le H^{-1}(y)\big) \\
&= F_X\big(H^{-1}(y)\big) \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d\,F_X(x)}{dx}\,\frac{dx}{dy} \qquad \text{(โดยกฎลูกโซ่)} \\
&= f_X(x)\,\frac{dx}{dy}
\end{aligned}$$

เมื่อ $x = H^{-1}(y)$ และเพราะว่า H เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น ถ้า $a < x < b$ แล้ว $H(a) < y < H(b)$ ดังนั้น

$$f_Y(y) = f_X(x)\,\frac{dx}{dy}$$

เมื่อ $H(a) < y < H(b)$

ตัวอย่าง 3.8 ในตัวอย่าง 3.6

$$f_X(x) = x/8, \qquad 0 \le x \le 4$$

และ $H(x) = 2x + 8$ เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น จากสมการ (3.4)

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(\frac{y-8}{16}\right)\frac{1}{2}$$

เพราะว่า $y = H(x) = 2x+8 \quad \therefore\ x = (y-8)/2$ และ $H(0) = 8,\ H(4) = 16,$ ดังนั้น

$$f_Y(y) = \frac{y}{32} - \frac{1}{4}, \qquad 8 \le y \le 16$$

3.4 การคาดหมาย (Expectation)

แนวคิดซึ่งสำคัญมากในการสรุปรวบยอดลักษณะพิเศษของการแจกแจงของความน่าจะเป็น คือ การคาดหมายเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical expectation) หรือกล่าวโดยย่อ คือ **การคาดหมาย** พิจารณาตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.9 ในการเล่นเกมทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกหนึ่ง มีกฎการจ่ายเงินดังนี้

ถ้าเหตุการณ์ $A = \{1,2,3\}$ เกิดขึ้น จ่ายเงิน 1 บาท
ถ้าเหตุการณ์ $B = \{4,5\}$ เกิดขึ้น จ่ายเงิน 5 บาท
ถ้าเหตุการณ์ $C = \{6\}$ เกิดขึ้น จ่ายเงิน 35 บาท

ความน่าจะเป็นของ A, B, C คือ $P(A) = 3/6,\ P(B) = 2/6,\ P(C) = 1/6$ ถ้าเจ้าของเกมนี้ต้องการคิดว่า ในแต่ละเกมเขาควรจะคิดเงินผู้เล่นเกมละเท่าใด เจ้าของเกมมีแนวคิดดังนี้คือ

จากแนวคิดของความถี่สัมพัทธ์ ถ้าเล่นเกมนี้เป็นจำนวนครั้งซ้ำกันมากพอสมควร แล้วจากจำนวนครั้งทั้งหมดที่เล่น

ประมาณ 3 ใน 6 เขาต้องจ่ายเงิน 1 บาท
ประมาณ 2 ใน 6 เขาต้องจ่ายเงิน 5 บาท
ประมาณ 1 ใน 6 เขาต้องจ่ายเงิน 35 บาท

ดังนั้น เขาต้องจ่ายเงินโดยเฉลี่ยเกมละ = (1)(3/6) + (5)(2/6) + (35)(1/6) = 8 บาท

(หมายเหตุ 8 บาท เป็นอัตราการจ่ายเงิน**โดยเฉลี่ย** แต่จริง ๆ แล้ว ในแต่ละเกมเขาจ่ายเงิน 1 หรือ 5 หรือ 35 บาท)

ค่าเฉลี่ย 8 บาท ซึ่งคำนวณจากแนวคิดข้างต้น เป็นค่าเฉลี่ยที่มีน้ำหนักกำกับโดยความน่าจะเป็นหรือ "น้ำหนัก" 3/6, 2/6, 1/6 นั่นคือ

การจ่ายเงิน 1 บาท	ถูกกำกับโดย "น้ำหนัก" หรือความน่าจะเป็น 3/6
การจ่ายเงิน 5 บาท	ถูกกำกับโดย "น้ำหนัก" หรือความน่าจะเป็น 2/6
การจ่ายเงิน 35 บาท	ถูกกำกับโดย "น้ำหนัก" หรือความน่าจะเป็น 1/6

เราเรียก ค่าเฉลี่ยของการจ่ายเงิน ซึ่งคิดในลักษณะนี้ว่า **ค่าคาดหมายเชิงคณิตศาสตร์** หรือ **ค่าคาดหมาย** ของการจ่ายเงิน

ดังนั้น ถ้าเจ้าของเกมคิดค่าเล่นเกมครั้งละ 10 บาท โดยเฉลี่ยเขาได้กำไร 2 บาทต่อเกม แต่จากมุมมองของผู้เล่น ซึ่งต้องจ่ายเงินครั้งละ 10 บาท คิดว่าอย่างมากที่สุดเขาขาดทุนเกมละ 9 บาท แต่อาจได้กำไรถึงเกมละ 25 บาท

ถ้าเราเขียนวิธีทำในลักษณะของคณิตศาสตร์ของปัญหานี้ จะมีขั้นตอนดังนี้คือ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนแต้มของการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก ดังนั้น p.d.f. ของ X คือ

$$p_X(x) = 1/6, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

เขียนการจ่ายเงินในรูปฟังก์ชันของ X เป็น

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, 2, 3 \\ 5, & x = 4, 5 \\ 35, & x = 6 \end{cases}$$

ดังนั้น ค่าคาดหมายของการจ่ายเงินเท่ากับ

$$\sum_{x=1}^{6} H(x)p_X(x) = 1(1/6) + 1(1/6) + 1(1/6) + 5(1/6) + 5(1/6) + 35(1/6)$$

$$= 1(3/6) + 5(2/6) + 35(1/6) = 8$$

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะเห็นแนวคิดชัดเจนว่า ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มและ $H(X)$ เป็นฟังก์ชันของ X และถ้าเราต้องการ**หาค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมาย**ของ $H(X)$ เราต้องคำนึงถึงความน่าจะเป็นหรือน้ำหนักของตัวแปรสุ่ม X ด้วย ทั้งนี้เพราะว่า แต่ละค่าของ $H(x)$ ที่จะได้มาขึ้นอยู่กับค่าของ x และแต่ละค่าของ x ขึ้นอยู่กับความน่าจะเป็นหรือน้ำหนักของ x ว่ามีมากน้อยเพียงใด การหาค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหมายของ $H(X)$ จึงต้องถูกกำกับโดย p.d.f. ของ X เพราะว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ $H(X)$ ก็เป็นตัวแปรสุ่มด้วย ดังนั้นการที่เราจะได้ค่าของ X เพื่อคำนวณค่าของ $H(X)$ จึงมิใช่เป็นการคิดคำนวณหาค่าอย่างเดียว แต่ค่าเหล่านี้มี "โอกาส" หรือ "น้ำหนัก" หรือ "ความน่าจะเป็น" กำกับอยู่ในรูปของ p.d.f. ทุกค่า

นิยาม 3.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ $Y = H(X)$ เป็นฟังก์ชันของ X แล้วค่าคาดหมาย (expected value) ของ $H(X)$ มีนิยามดังนี้

$$E[H(X)] = \sum_{x_i \in R_X} H(x_i) p_X(x_i) \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบเต็มหน่วย} \qquad (3.5\text{ a})$$

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f_X(x)\, dx \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบต่อเนื่อง} \qquad (3.5\text{ b})$$

ในกรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เราจำกัดให้ $H(X)$ ในสมการ (3.5) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เพื่อให้ $Y = H(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องด้วย

หมายเหตุ

1. เราสามารถมองค่าคาดหมาย $E[H(X)]$ ว่าเป็น "ค่าเฉลี่ยน้ำหนัก" ของ $H(X)$ (weighted mean of $H(X)$) โดยที่น้ำหนักกำกับคือ p.d.f. ของ X นั่นเอง

2. เพราะว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม $\therefore$ $Y = H(X)$ เป็นตัวแปรสุ่มด้วย ดังนั้นถ้าเราหา p.d.f. ของ Y ก่อน แล้ว ค่าคาดหมายของ Y หาค่าได้ดังนี้คือ

$$E[Y] = \sum_{x_i \in R_Y} y_i\, p_Y(y_i) \qquad \text{สำหรับ } Y \text{ แบบเต็มหน่วย} \qquad (3.6\text{ a})$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy \qquad \text{สำหรับ } Y \text{ แบบต่อเนื่อง} \qquad (3.6\text{ b})$$

ตัวอย่าง 3.10 สมมติว่า X มี p.d.f. ดังนี้

$$p_X(x) = 1/3, \qquad x = -1, 0, 1$$

ถ้า $H(X) = X^2$ แล้วจากสมการ (3.5 a)

$$E[H(X)] = E[X^2] = (-1)^2(1/3) + (0)^2(1/3) + (1)^2(1/3) = 2/3$$

หรือหาโดยสมการ (3.6 a) เพราะว่า $Y = H(X) = X^2 \quad \therefore \; R_Y = \{0, 1\}$ และ

$$p_Y(0) = p_X(0) = 1/3$$

$$p_Y(1) = p_X(-1) + p_X(1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$$

ดังนั้น

$$E[Y] = \sum_{x_i \in R_Y} y_i \, p_Y(y_i) = (0)p(0) + (1)p(1) = (0)(1/3) + (1)(2/3) = 2/3$$

ทฤษฎีบท 3.2 ค่าคาดหมายเมื่อหาค่าได้ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. ถ้า c เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$E[c] = c$$

2. ถ้า c เป็นค่าคงที่ และ H เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$E[c\,H(X)] = c\,E[H(X)]$$

3. ถ้า c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่และ H_1 และ H_2 เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$E[c_1 H_1(X) + c_2 H_2(X)] = c_1 E[H_1(X)] + c_2 E[H_2(X)]$$

1, 2, 3 เป็นจริงทั้งกรณีตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยและแบบต่อเนื่อง

พิสูจน์ พิสูจน์สำหรับกรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย ให้ R_X เป็นพิสัยของ X

1. $E[c] = \sum_{x_i \in R_X} c\, p_X(x_i) = c \sum_{x_i \in R_X} p_X(x_i) = c(1) = c$

2. $E[c\, H(X)] = \sum_{x_i \in R_X} c\, H(x_i) p_X(x_i) = c \sum_{x_i \in R_X} H(x_i) p_X(x_i) = c\, E[H(X)]$

3. $$\begin{aligned} E[c_1 H_1(X) + c_2 H_2(X)] &= \sum_{x_i \in R_X} [c_1 H_1(x_i) + c_2 H_2(x_i)] p_X(x_i) \\ &= \sum_{x_i \in R_X} c_1 H_1(x_i) p_X(x_i) + \sum_{x_i \in R_X} c_2 H_2(x_i) p_X(x_i) \\ &= c_1 E[H_1(X)] + c_2 E[H_2(X)] \end{aligned}$$

คุณสมบัติข้อ 3 สามารถขยายไปเป็นกรณีทั่วไป คือ

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} c\, H_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i\, E[H_i(X)]$$

นั่นคือ การหาค่าคาดหมายมีคุณสมบัติเป็น**ตัวดำเนินการเชิงเส้น** (linear operator)

ตัวอย่าง 8.11 ให้ X มี p.d.f.

$$p_X(x) = x/10, \qquad x = 1, 2, 3, 4$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=1}^{4} x\,(x/10) \\ &= 1(1/10) + 2(2/10) + 3(3/10) + 4(4/10) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{x=1}^{4} x^2\,(x/10) \\ &= 1^2(1/10) + 2^2(2/10) + 3^2(3/10) + 4^2(4/10) = 10 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} E[X(5 - X)] &= E[5X - X^2] = 5E[X] - E[X^2] \\ &= 5(3) - 10 = 5 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.12 ให้ X มี p.d.f.

$$f_X(x) = xe^{-x}, \qquad 0 \le x < \infty$$

ให้ $H(X) = e^{tX}$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$\begin{aligned}
E[H(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx} xe^{-x} dx \\
&= \int_0^{\infty} xe^{-(1-t)x}\,dx = \left[-\frac{xe^{-(1-t)x}}{1-t} - \frac{e^{-(1-t)x}}{(1-t)^2} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{(1-t)^2}
\end{aligned}$$

เมื่อ $t < 1$

ตัวอย่าง 3.13 ให้ $H(X) = (X - b)^2$ เมื่อ b **ไม่เป็นฟังก์ชันของ** X และสมมติว่า $E\left[(X - b)^2\right]$ หาค่าได้ จงหาค่าของ b ซึ่งทำให้ $E\left[(X - b)^2\right]$ มีค่าต่ำสุด

วิธีทำ เราเขียน

$$\begin{aligned}
E\left[(X - b)^2\right] &= E\left[X^2 - 2bX + b\right] = E\left[X^2\right] - 2b\,E[X] + E\left[b^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2b\,E[X] + b^2
\end{aligned}$$

เพราะว่า $E\left[b^2\right] = b^2$ ดังนั้น

อนุพันธ์ของ $E\left[(X - b)^2\right]$ เทียบกับ b มีค่าเท่ากับ $-2E[X] + 2b$

ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อ $b = E[X]$ และ $b = E[X]$ เป็นค่าซึ่งทำให้ $E\left[(X - b)^2\right]$ มีค่าต่ำสุด

3.5 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน (The Mean and the Variance)

กรณีเฉพาะที่สำคัญ ๆ ของค่าคาดหมาย คือ

1. เมื่อ $H(X) = X$ เราเรียก

$$E[H(X)] = E[X]$$

ว่า **ค่าเฉลี่ย** (มัชฌิม หรือตัวกลาง) ของ X (mean of X) เขียนแทนโดยสัญลักษณ์

$$\mu = E[X] \tag{3.7}$$

ดังนั้น ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X คือ μ ซึ่งทำหน้าที่เป็นค่าเฉลี่ยของค่าของตัวแปรสุ่ม X โดยมี p.d.f. ของ X เป็นน้ำหนักกำกับอยู่ เปรียบเสมือนกับแต่ละจุดใน R_X มีลูกตุ้มน้ำหนัก $p_X(x)$ หรือ $f_X(x)$ ถ่วงอยู่ แล้วถามว่าจุดสมดุลย์ของระบบนี้อยู่ที่ใด คำตอบคือ อยู่ที่ μ

2. เมื่อ $H(X) = (X - \mu)^2$ เราเรียก

$$E[H(X)] = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

ว่า **ความแปรปรวน**ของ X (variance of X) เขียนแทนโดยสัญลักษณ์

$$\sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right] \tag{3.8}$$

หรือเขียน

$$\sigma^2 = V(X) \tag{3.9}$$

และเรียก

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E\left[(X - \mu)^2\right]} \tag{3.10}$$

ว่า **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**ของ X (standard deviation of X)

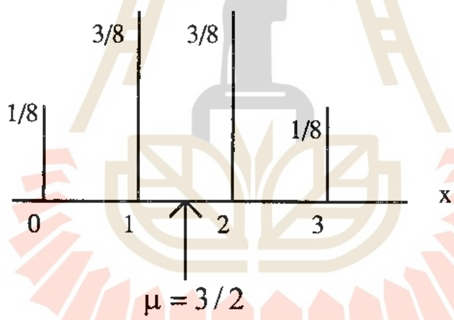
ค่า μ ทำหน้าที่วัด "แนวโน้มสู่ส่วนกลาง" (central tendency) ของตัวแปรสุ่ม X หรือวัดส่วนกลางของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X หน่วยของ μ จะเหมือนกับหน่วยของตัวแปร X

ส่วนค่า σ^2 ทำหน้าที่วัดการกระจายของความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กับสมาชิกใน R_X และหน่วยของ σ^2 จะเป็นหน่วยของตัวแปรสุ่ม X ยกกำลังสอง ในทำนองเดียวกับ σ^2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ เป็นค่าวัดการกระจายของความน่าจะเป็นเช่นกัน หรือเป็นค่าวัดการกระจายของจุดต่าง ๆ ใน R_X หน่วยของ σ จะเหมือนกับหน่วยของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 3.14 พิจารณาตัวอย่างการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง โดยที่ X แทนจำนวนครั้งที่เหรียญหงายหัว การแจกแจงความน่าจะเป็นแสดงในรูป 3.4 คำนวณหาค่าของ μ ดังนี้

$$\mu = \sum_{i=1}^{4} x_i \, p_X(x_i) = (0)(1/8)+(1)(3/8)+(2)(3/8)+(3)(1/8)$$
$$= 3/2$$

อาจพิจารณาค่าของ μ ได้โดยตรงจากรูป เนื่องจากรูป 3.4 มีสมมาตรตรงตำแหน่ง $\mu = \frac{3}{2}$ พอดี



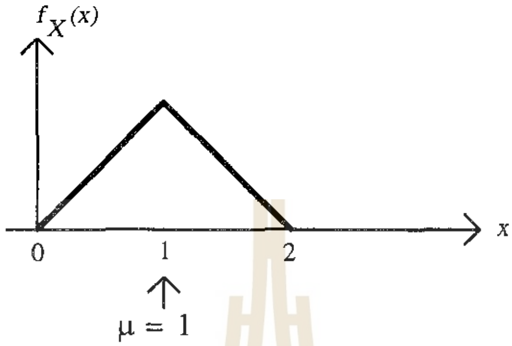
รูป 3.4

ตัวอย่าง 3.15 ตัวแปรสุ่ม X มี p.d.f.

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

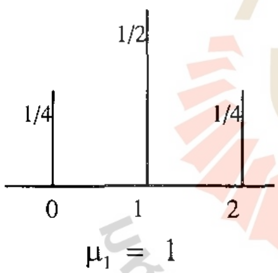
คำนวณหาค่าของ μ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x(x)\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} x(0)\,dx + \int_2^{\infty} x(0)\,dx \\
&= 1
\end{aligned}
$$

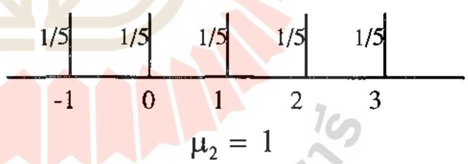


รูป 3.5

ตัวอย่าง 3.16 พิจารณารูป 3.6 (a) และรูป 3.6 (b) แสดงการแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม



รูป 3.6 (a)



รูป 3.6 (b)

ในรูป 3.6 (a) เราได้

$$\sigma_1^{\,2} = (0-1)^2(1/4) + (1-1)^2(1/2) + (2-1)^2(1/4) = 1/2$$

ในรูป 3.6 (b) เราได้

$$
\begin{aligned}
\sigma_2^{\,2} &= (-1-1)^2(1/5) + (0-1)^2(1/5) + (1-1)^2(1/5) + (2-1)^2(1/5) + (3-1)^2(1/5) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า ความแปรปรวนของการแจกแจงในรูป 3.6(b) เป็น 4 เท่าของความแปรปรวนในรูป 3.6(a) จากรูปทั้งสองเห็นได้ชัดว่า การกระจายของความน่าจะเป็นในรูป 3.6(b) มีมากกว่าในรูป 3.6(a)

การคำนวณหาค่าของ σ^2 อาจใช้สมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2\mu E[X] + E\left[\mu^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E\left[X^2\right] - \mu^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 \tag{3.11}$$

ซึ่งอาจจะสะดวกในการคำนวณในบางปัญหามากกว่าใช้สมการ (3.8) โดยตรง

ตัวอย่าง 3.17 จากตัวอย่างการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง (ตัวอย่าง 3.14) เราได้ $\mu = 3/2$ คำนวณหา σ^2 โดยสมการ (3.8) ได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= (0-3/2)^2(1/8) + (1-3/2)^2(3/8) + (2-3/2)^2(3/8) + (3-3/2)^2(1/8) \\
&= 3/4
\end{aligned}$$

หรือโดยสมการ (3.11)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left[X^2\right] - \mu^2 \\
&= \left[(0)^2(1/8) + (1)^2(3/8) + (2)^2(3/8) + (3)^2(1/8)\right] - (3/2)^2 \\
&= 3/4
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.18 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก ให้ X แทนแต้มที่ลูกเต๋าออก ดังนั้น X มี p.d.f.

$$p_X(x) = 1/6, \qquad x = 1,2,3,4,5,6$$

คำนวณหาค่าของ μ และ σ^2 ได้ดังนี้คือ

$$\mu = \sum_{x=1}^{6} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{6} x(1/6)$$
$$= (1/6)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7/2$$

$$\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \sum_{x=1}^{6} x^2 p_X(x) - \mu^2$$
$$= (1/6)\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) - (7/2)^2$$
$$= (91/6) - (49/4) = 35/12$$

ตัวอย่าง 3.19 จงเปรียบเทียบการกระจายของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และ Y เมื่อ X และ Y มี p.d.f. ดังนี้

$$p_X(x) = 1/3, \qquad x = -1,0,1$$
$$p_Y(y) = 1/3, \qquad y = -2,0,2$$

วิธีทำ

คำนวณหาค่าของ μ_X σ_X^2 และ σ_X ได้ดังนี้คือ

$$\mu_X = (-1)(1/3) + (0)(1/3) + (1)(1/3) = 0$$

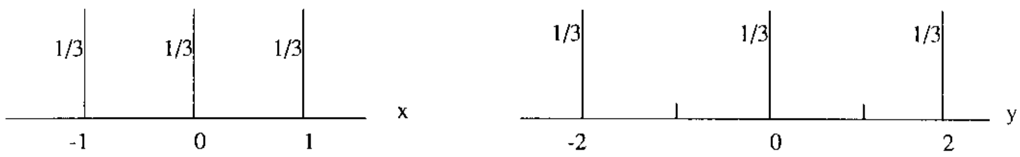
$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 = E\left[X^2\right] - 0$$
$$= (-1)^2(1/3) + (0)^2(1/3) + (1)^2(1/3) = 2/3$$

$$\sigma_X = \sqrt{2/3}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\mu_Y = 0, \quad \sigma_Y^2 = 8/3, \quad \sigma_Y = 2\sqrt{2/3}$$

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Y เป็นสองเท่าของ X ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ความน่าจะเป็นของ Y มีการกระจายมากกว่าของ X เป็นสองเท่า (ดูรูป 3.7)



$\sigma_X = \sqrt{2/3}$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Y = 2\sqrt{2/3}$

รูป 3.7

ตัวอย่าง 3.20 กำหนด p.d.f. ของ X เป็น

$$f_X(x) = 2e^{-2x} \qquad x \geq 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_0^\infty x\, f_X(x)dx = \int_0^\infty x\left(2e^{-2x}\right)dx \\
&= \left[-xe^{-2x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-2x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E\left[X^2\right] - \mu^2 \\
&= \int_0^\infty x^2\left(2e^{-2x}\right)dx - (1/2)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

และถ้า p.d.f. ของ X เป็น

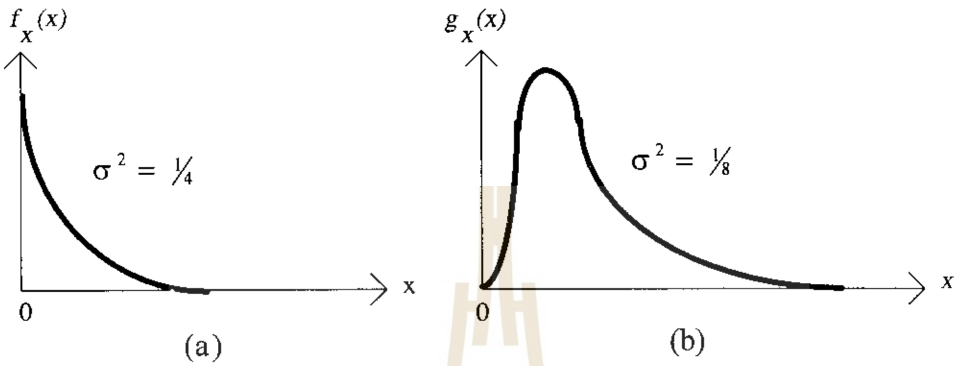
$$g_X(x) = 16xe^{-4x} \qquad x \geq 0$$

ดังนั้น

$$\mu = \int_0^\infty x\left(16xe^{-4x}\right)dx = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty x^2\left(16xe^{-4x}\right)dx - (1/2)^2 = \frac{1}{8}$$

จะเห็นได้ว่า μ มีค่าเท่ากันในทั้งสองกรณี แต่ความแปรปรวนของ $f_X(x)$ เป็นสองเท่าของ $g_X(x)$ หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $f_X(x)$ เป็น $\sqrt{2}$ เท่าของ $g_X(x)$ นั่นคือ ความน่าจะเป็นในรูป 3.8 (a) มีการกระจายมากกว่าในรูป 3.8 (b)



รูป 3.8

หมายเหตุ

การกล่าวถึง μ และ σ^2 เราอาจกล่าวถึงในลักษณะ

μ ของตัวแปรสุ่ม หรือ σ^2 ของตัวแปรสุ่ม

หรือ

μ ของการแจกแจง หรือ σ^2 ของการแจกแจง

และถ้ามีตัวแปรสุ่มมากกว่า 1 ตัว เรามักจะใช้ดรรชนีล่างควบคู่กับ μ และ σ^2 เช่น

$\mu_X,\ \sigma_X^2,\ \mu_Y,\ \sigma_Y^2$

เป็นต้น

3.6 โมเมนต์และโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน

(Moments and the Moment-Generating Function)

ค่าคาดหมายชนิดอื่นๆ นอกจากตัวกลางและความแปรปรวนที่เราใช้บอกลักษณะพิเศษ และศึกษาคุณสมบัติของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม คือ **โมเมนต์** (moments) ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ชนิดตามลักษณะการวัดระยะห่างของตัวแปรสุ่มกับจุดกำเนิด หรือระหว่างตัวแปรสุ่มกับค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม

1. โมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับ (k th order moment) ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ μ'_k มีนิยามดังนี้

$$\mu'_k = E\left[X^k\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.12}$$

ดังนั้น

$$\mu'_k = \sum_{x_i \in R_X} x_i^{\,k} p_X(x_i), \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบเต็มหน่วย} \tag{3.12 a}$$

และ

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)\,dx, \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบต่อเนื่อง} \tag{3.12 b}$$

2. โมเมนต์สู่ส่วนกลางอันดับ k (k th order central moment) ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ μ_k มีนิยามดังนี้

$$\mu_k = E\left[(X-\mu)^k\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

ดังนั้น

$$\mu_k = \sum_{x_i \in R_X} (x_i - \mu)^k p_X(x_i) \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบเต็มหน่วย} \tag{3.13 a}$$

และ

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f_X(x)\,dx \qquad \text{สำหรับ } X \text{ แบบต่อเนื่อง} \qquad (3.13 \text{ b}$$

จะเห็นได้ว่า

$$\mu = \mu'_1 \qquad \text{และ} \qquad \sigma^2 = \mu_2$$

เราอาจใช้ฟังก์ชันพิเศษในการหาโมเมนต์อันดับต่าง ๆ ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มฟังก์ชันพิเศษนี้ มีชื่อเรียกว่า **โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน** (the moment-generating function)

นิยาม 3.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน สำหรับตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนโดย $M_X(t)$ คือ ค่าคาดหมายของ e^{tX} นั่นคือ

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] \tag{3.14}$$

ดังนั้น

$$M_X(t) = \sum_{x_i \in R_X} e^{tx_i} p_X(x_i) \quad \text{สำหรับ } X \text{ แบบเต็มหน่วย} \tag{3.14 a}$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx \quad \text{สำหรับ } X \text{ แบบต่อเนื่อง} \tag{3.14 b}$$

เมื่อค่าคาดหมายเหล่านี้หาค่าได้หรือมีค่าจำกัด (finite value) สำหรับจำนวนจริง t ใด ๆ ในบางช่วงเปิด $(-h, h)$

ทฤษฎีบทต่อไป แสดงการใช้ $M_X(t)$ หาโมเมนต์อันดับต่าง ๆ รอบจุดกำเนิด

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $M_X(t)$ เป็นโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันสำหรับตัวแปรสุ่ม X ดังนั้น

$$\left.\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\right|_{t=0} = E\left[X^k\right] = \mu'_k \tag{3.15}$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า การที่ $M_X(t)$ หาค่าได้สำหรับ $-h < t < h$ ทำให้อนุพันธ์ของ $M_X(t)$ เทียบกับ t อันดับต่าง ๆ หาค่าได้ที่ $t = 0$ และได้ว่า เราสามารถสลับอันดับระหว่างการหาอนุพันธ์และการหาค่าคาดหมายได้ดังนี้คือ

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \frac{d}{dt} E\left[e^{tX}\right] = E\left[\frac{d}{dt} e^{tX}\right] = E\left[Xe^{tX}\right]$$

ดังนั้น

$$\frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \;=\; E\left[X^k e^{tX}\right] \tag{3.16}$$

โดยแทนค่า $t = 0$ ใน (3.16) เราได้

$$\left.\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\right|_{t=0} \;=\; E\left[X^k\right] \;=\; \mu'_k$$

สมการ (3.15) ใช้ได้ดีสำหรับการหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับต้น ๆ เช่น $k = 1, 2, 3$

อีกแนวทางหนึ่งในการหา μ'_k คือ เขียน e^{tX} ในรูปอนุกรมกำลังใน t นั่นคือ

$$e^{tX} \;=\; 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k X^k}{k!} + \ldots$$

โดยการหาค่าคาดหมาย เราได้

$$M_X(t) \;=\; E\left[e^{tX}\right] \;=\; 1 + E[X]t + E\left[X^2\right]\frac{t^2}{2!} + \ldots + E\left[X^k\right]\frac{t^k}{k!} + \ldots$$

ดังนั้น

$$M_X(t) \;=\; 1 + \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + \mu'_k \frac{t^k}{k!} + \ldots \tag{3.17}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเมื่อเขียน $M_X(t)$ ในรูปอนุกรมกำลังใน t สัมประสิทธิ์ของพจน์ $\frac{t^k}{k!}$ ใน (3.17) คือ โมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับ k โดยสรุปเรามี 2 แนวทางในการใช้ $M_X(t)$ หา μ'_k

<u>แนวทางที่ 1</u>

1. หา $M_X(t)$ ของการแจกแจงที่กำหนดมาโดยเฉพาะสำหรับ X
2. หา $\mu'_k \;=\; \left.\frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\right|_{t=0}$

<u>แนวทางที่ 2</u>

1. หา $M_X(t)$ ของการแจกแจงที่กำหนดมาโดยเฉพาะสำหรับ X

2. กระจาย $M_X(t)$ ในรูปอนุกรมกำลังใน t จะได้สัมประสิทธิ์ของ $\frac{t^k}{k!}$ เป็น μ'_k

คุณสมบัติของโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันมีประโยชน์ในการหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับต่าง ๆ แต่คุณสมบัติที่สำคัญที่สุดคือ เมื่อ $M_X(t)$ หาค่าได้จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และเป็นตัวตัดสินการแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มได้อย่างแน่นอนว่ามีรูปแบบอย่างใด กล่าวในอีกนัยหนึ่งคือ ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y มีโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันเหมือนกันแล้ว X และ Y มีการแจกแจงของความน่าจะเป็นเหมือนกัน (การพิสูจน์ของคุณสมบัติข้อนี้อาศัยทฤษฎีในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งค่อนข้างจะยุ่งยากมาก) เราสามารถอธิบายคุณสมบัติข้อนี้ โดยพิจารณาจากกรณีของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย X ซึ่งมี $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$ ถ้า $M_X(t)$ หาค่าได้แล้วเขียน

$$M_X(t) = \sum_{x_i \in R_X} e^{t x_i} p_X(x_i) = p_X(x_1)e^{t x_1} + p_X(x_2)e^{t x_2} + \dots \qquad (3.18)$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ $e^{t x_i}$ คือ $p_X(x_i) = P_X(X = x_i)$ นั่นคือ ถ้าเราเขียน $M_X(t)$ สำหรับตัวแปรสุ่ม X ในรูปของสมการ (3.18) เราย่อมพิจารณา p.d.f. ของ X ได้ โดยดูจากสัมประสิทธิ์ของ $e^{t x_i}$

ตัวอย่าง 3.21 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี p.d.f.

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x (1 - p)^{n-x} \\ &= \left(pe^t + (1-p)\right)^n \end{aligned}$$

[ใช้สูตรการกระจายทวินาม $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$]

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = n\left(pe^t + (1-p)\right)^{n-1}\left(pe^t\right)$$
$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = n(n-1)\left(pe^t + (1-p)\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + (1-p)\right)^{n-1}\left(pe^t\right)$$

ดังนั้น

$$\mu'_1 = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = np$$

$$\mu'_2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} = n(n-1)p^2 + np$$

$\therefore \quad \mu = \mu'_1 = np$ และ $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = np(1-p)$

ซึ่งถ้าหา μ และ σ^2 โดยตรงสำหรับการแจกแจงในกรณีนี้ จะยากกว่าการหาโดยใช้โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.22 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี p.d.f.

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!}$$

จากการเขียนฟังก์ชันเอกซ์โปเนนท์เชียลในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ เราได้ว่า

$$M_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$\therefore \quad M_X(t)$ หาค่าได้สำหรับจำนวนจริง t ใด ๆ และ

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 3.21 เราสามารถหา μ และ σ^2 ได้ง่ายกว่าการหาโดยตรง นั่นคือ

$$\mu'_1 = \lambda, \qquad \mu'_2 = \lambda^2 + \lambda$$

ดังนั้น

$$\mu = \lambda, \qquad \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = \lambda$$

ตัวอย่าง 3.23 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี p.d.f.

$$f_X(x) = xe^{-x}, \qquad 0 \le x < \infty$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} x e^{-x} dx = \int_0^\infty x e^{-(1-t)x} dx \\ &= \left[\frac{-xe^{-(1-t)x}}{1-t} - \frac{e^{-(1-t)x}}{(1-t)^2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{(1-t)^2}, \qquad t < 1 \end{aligned}$$

และ

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = \frac{2}{(1-t)^3}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$$

โดยการแทนค่า $t = 0$ เราได้

$$\mu'_1 = 2, \quad \mu'_2 = 6$$

ดังนั้น $\mu = \mu'_1 = 2$ และ $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = 6 - 2^2 = 2$

ตัวอย่าง 3.24 ให้โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ Y นิยามโดย

$$M_Y(t) = (1/15)e^t + (2/15)e^{2t} + (3/15)e^{3t} + (4/15)e^{4t} + (5/15)e^{5t}$$

โดยใช้สมการ (3.18) เราได้

$$p_Y(1) = \text{สัมประสิทธิ์ของ } e^t$$
$$p_Y(2) = \text{สัมประสิทธิ์ของ } e^{2t}$$

เป็นต้น ดังนั้น

$$p_Y(y) = y/15, \qquad y = 1, 2, 3, 4, 5$$

ตัวอย่าง 3.25 ให้โมเมนต์รอบจุดกำเนิดของ X กำหนดโดย

$$E\left[X^k\right] = 0.8, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

จากสมการ (3.17)

$$M_X(t) = M_X(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu'_k \frac{t^k}{k!} \qquad \left(M_X(0) = 1\right)$$

$$\therefore \quad M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (0.8)\frac{t^k}{k!} = 1 + (0.8)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$
$$= 0.2 + (0.8)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$
$$= 0.2e^{0t} + 0.8e^{1t}$$

ดังนั้นจากสมการ (3.18) เราได้ $p_X(0) = 0.2$ และ $p_X(1) = 0.8$

ตัวอย่าง 3.26 สมมติว่าตัวแปรสุ่ม X มีโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน

$$M_X(t) = (1/15)\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^{t} + e^{2t}\right)$$

สำหรับจำนวนจริง t ใด ๆ

เราจะเขียน $M_X(t)$ ในรูปอนุกรมกำลังใน t เพื่อหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิด μ'_k โดยการเขียน ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนท์เชียลในรูปอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับแต่ละพจน์ คือ e^{-2t}, e^{-t}, e^{t}, และ e^{2t} แล้วรวมพจน์กำลังต่างๆ ของ t เราได้ $M_X(t)$ ในรูปอนุกรมกำลังใน t หรืออนุกรมเทย์เลอร์ใน t ดังนี้คือ

$$M_X(t) = 1 + \frac{2(1+4)}{5}\left(\frac{t^2}{2!}\right) + \frac{2(1+16)}{5}\left(\frac{t^4}{4!}\right) + \ldots + \frac{2\left(1+2^k\right)}{5}\left(\frac{t^k}{k!}\right) + \ldots$$

สำหรับ $k = 2, 4, 6, \ldots$ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ $\left(\frac{t^k}{k!}\right)$ เป็นศูนย์ เมื่อ k เป็นเลขคี่ ดังนั้น

$$\mu'_k = E\left[X^k\right] = \begin{cases} 0, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ \dfrac{2\left(1+2^k\right)}{5}, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

โดยเฉพาะเราได้ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = \dfrac{2\left(1+2^2\right)}{5} - \mu^2 = 2$

แบบฝึกหัด 3.

1. ในโรงงานผลิตรถยนต์แห่งหนึ่ง ใช้หุ่นยนต์ทำหน้าที่หมุนน็อตของชิ้นส่วนอันหนึ่ง โดยที่หุ่นยนต์จะต้องหมุนน็อตให้แน่นในตำแหน่งทั้งหมด 10 ตำแหน่ง ทางโรงงานทำการศึกษาประสิทธิภาพการทำงานของหุ่นยนต์พบว่า ถ้าให้ X เป็นจำนวนน็อตที่หุ่นยนต์ไม่ได้หมุนให้แน่นเต็มที่ แล้ว

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.6, & x = 0 \\ 0.3, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \end{cases}$$

ถ้า $Y = 20X^2$ เป็นฟังก์ชันแทนผลกระทบจากการทำงานของหุ่นยนต์ แล้ว

(a) จงหา $p_Y(y)$ (b) จงหา $E[Y]$ และ $V(Y)$

2. ถ้าตัวแปรสุ่ม X แทนปริมาณของแมกนีเซียมในโลหะผสม และ X มี p.d.f.

$$f_X(x) = x/18, \quad 0 \le x \le 16$$

ผลกำไรที่ได้รับจากโลหะผสมนี้คือ $Y = 10 + 2X$

(a) จงหา p.d.f. ของ Y (b) จงหาค่าคาดหมายของผลกำไร

3. ผู้ผลิตโทรทัศน์สีรายหนึ่ง เสนอระยะเวลาประกันคุณภาพ 1 ปีแก่ลูกค้า โดยที่ถ้าหลอดภาพเสียจะเปลี่ยนอันใหม่ให้ภายในระยะเวลาประกัน ผู้ผลิตคาดประมาณเวลาที่หลอดภาพของโทรทัศน์จะเสีย คือ T ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่ม มี p.d.f.

$$f_T(t) = \frac{1}{4}e^{-t/4}, \quad t > 0$$

(a) จงหาว่า ผู้ผลิตจะต้องบริการเปลี่ยนหลอดภาพ เป็นเปอร์เซ็นต์เท่าใด ?

(b) ถ้าผู้ผลิตได้กำไร 2,000 บาทต่อเครื่อง และค่าเปลี่ยนหลอดภาพคือ 2,000 บาทต่อเครื่อง จงหาค่าคาดหมายของกำไรที่จะได้รับในธุรกิจนี้

4. บริษัทก่อสร้างต้องการเสนอราคาสำหรับโครงการอันหนึ่ง ให้ X เป็นจำนวนวันที่บริษัทต้องใช้วางแผนงานให้สำเร็จ X มี p.d.f. ดังนี้

$$p_X(x) \;=\; \begin{cases} 0.1, & x = 10 \\ 0.3, & x = 11 \\ 0.4, & x = 12 \\ 0.1. & x = 13 \end{cases}$$

ผลกำไรของบริษัทฯ คือ $Y = 2000(12 - X)$

(a) จงหา p.d.f. ของ Y

(b) จงหา $E[X]$, $V(X)$, $E[Y]$ และ $V(Y)$

5. สมมติว่า p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X แบบต่อเนื่อง คือ

$$f_X(x) \;=\; 2xe^{-x^2}, \qquad x \ge 0$$

จงหา p.d.f. ของ $Z = X^2$

6. เลือกสุ่มลูกบอล 3 ลูก โดยเลือกแบบคืนที่ไม่ได้จากกล่องใบหนึ่ง ซึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 5 ลูก และลูกบอลสีน้ำเงิน 4 ลูก ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนของลูกบอลสีแดงในจำนวนลูกบอล 3 ลูกที่เลือกมาได้ จงหา $E[X]$

7. มีการจับสลากรางวัล 12,006 รางวัล จากสลากทั้งหมด 3,000,000 ฉบับ ขายฉบับละ 50 บาทในทุก ๆ สัปดาห์ ในจำนวน 12,006 รางวัลนี้

12,000 รางวัล	จ่ายเงินรางวัลละ	2,500	บาท
4 รางวัล	จ่ายเงินรางวัลละ	1,000,000	บาท
1 รางวัล	จ่ายเงิน	5,000,000	บาท
1 รางวัล	จ่ายเงิน	20,000,000	บาท

ถ้าท่านซื้อสลากนี้สัปดาห์ละ 1 ฉบับ จงคาดหมายว่าท่านจะได้รางวัลสัปดาห์ละเท่าใด ?

8. ถ้าเราเลือกตัวเลข 1 ตัว โดยสุ่มจากจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก ถ้าจ่ายเงินรางวัลเท่ากับส่วนกลับของตัวเลขที่ถูกเลือกออกมา จงเขียนค่าคาดหมายของการจ่ายเงินในรูปของฟังก์ชันของ n และหาค่าคาดหมายเมื่อ n = 5 จงประมาณค่าคาดหมายนี้เมื่อ n = 100 โดยใช้อินทิกรัล

9. ให้ p.d.f. ของ X นิยามโดย

$$p_X(x) = 6 \big/ \left(\pi^2 x^2\right), \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

จงแสดงว่า $E[X]$ หาค่าไม่ได้ในกรณีนี้

10. กำหนดราคาของน้ำมันตามเปอร์เซนต์ของสารที่เติมลงไป ถ้า A เป็นตัวแปรสุ่มแทนเปอร์เซนต์ของสารที่เติมลงไปในน้ำมัน $(0 \le A \le 1)$ และถ้า A ต่ำกว่า 0.70 น้ำมันที่ขายเป็นเกรดต่ำและขายลิตรละ 9.2 บาท และถ้า A สูงกว่าหรือเท่ากับ 0.70 น้ำมันเป็นเกรดสูงและขายลิตรละ 9.8 บาท จงหาค่าคาดหมายของรายได้ของน้ำมันต่อลิตร เมื่อ

$$f_A(a) = 1, \quad 0 \le a \le 1$$

11. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงต่อไปนี้

(a) $p(x) = 1/5, \quad x = 5, 10, 15, 20, 25$

(b) $p(x) = 1, \quad x = 5$

(c) $p(x) = \dfrac{3!}{x!(3-x)!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \left(\dfrac{3}{4}\right)^{3-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3$

12. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจง ซึ่งมีฟังก์ชันแจกแจงดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ 1/4, & 10 \le x < 15 \\ 3/4, & 15 \le x < 20 \\ 1, & 20 \le x \end{cases}$$

13. กำหนดให้ $E[X+4]=10$ และ $E\left[(X+4)^2\right]=116$ จงหาค่าของ

(a) μ

(b) σ^2

(c) $V(X+4)$

(หมายเหตุ : $V(H(X))=E\left[\ \left(H(X)-E[H(X)]\right)^2\right]$)

14. ให้ μ และ σ^2 เป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ตามลำดับ จงพิจารณาว่า $E[(X-\mu)/\sigma\ ]$ และ $E\left[(X-\mu)^2/\sigma^2\ \right]$ มีค่าเท่าใด

15. X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย ซึ่งมี p.d.f.

$$p_X(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad x=1,2,3$$

(a) จงหาค่าของ k

(b) จงหา μ และ σ^2 ของ X

(c) จงหาฟังก์ชันแจกแจง $F_X(x)$

16. T เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี p.d.f.

$$f_T(t) = kt^2, \qquad -1\le t<0$$

(a) จงหาค่าของ k

(b) จงหา μ และ σ^2 ของ T

(c) จงหาฟังก์ชันแจกแจง $F_T(t)$

17. อสมการเชอบีเชฟ (Chebyshev's Inequality): ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม (แบบเต็มหน่วยหรือแบบต่อเนื่อง) โดยมีค่าเฉลี่ย μ และมีความแปรปรวน σ^2 และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว เราจะได้ว่า

$$P_X\left(|X-\mu|\ge k\sigma\right) \le \frac{1}{k^2}$$

จงใช้อสมการนี้สำหรับปัญหาต่อไปนี้ :
ผู้จัดการบริษัทรับใบสั่งจากลูกค้ารายหนึ่ง ผู้จัดการไม่ทราบการแจกแจงของความน่าจะเป็นของเวลาในการทำงานตามใบสั่งให้สำเร็จ แต่จากประสบการณ์ที่ผ่านมาเขาทราบว่า ค่าเฉลี่ยคือ 14 วัน และความแปรปรวนคือ 2 (วัน)^2 จงหาช่วงเวลาที่ทำให้ความน่าจะเป็นในการทำงานตามใบสั่งให้สำเร็จในช่วงเวลานี้เท่ากับ 0.75

18. จงแสดงว่า p.d.f. ของผลบวกของแต้มในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก (ลูกเต๋าเที่ยงตรง) เขียนได้ในรูป

$$p_X(x) = \begin{cases} (x_i - 1)/36, & x_i = 2,3,\ldots,6 \\ (13 - x_i)/36, & x_i = 7,8,\ldots,12 \end{cases}$$

แล้วหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มที่แทนผลบวกของแต้มของลูกเต๋าทั้งสอง

19. X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f.

$$f_X(x) = \frac{2x}{9}, \qquad 0 < x < 3$$

(a) จงหาฟังก์ชันแจกแจงของ X

(b) จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

(c) จงหา μ_3'

(d) จงหาค่าของ k ซึ่งทำให้ $P_X(X \geq k) = P_X(X \leq k)$

20. ผู้ทำการค้าขายรถยนต์ใช้แล้วพบว่า เขาขายรถยนต์ได้ 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 คันในแต่ละสัปดาห์ด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน X คือ จำนวนรถยนต์

(a) จงหาโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X

(b) ใช้โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันหา $E[X]$ และ $V(X)$

21. ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ $M_X(t) = e^{4.6(e^t - 1)}$ แล้วจงหา

(a) $E[X]$ (b) $V(X)$

22. จงหาโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X ถ้า p.d.f. ของ X คือ

$$p_X(x) = (1/2)(2/3)^x, \qquad x = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

23. ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$M_X(t) = \frac{2}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{3t}$$

จงหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนและ p.d.f. ของ X

24. ถ้าความเข้มข้นของตัวทำปฏิกิริยาในกระบวนทางเคมีเป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี p.d.f.

$$f_R(r) = 6r(1-r), \qquad 0 \le r \le 1$$

ผลกำไรที่ได้จากผลขั้นสุดท้ายคือ $Y = 1 + 3R$ จงหาค่าคาดหมายของ Y และหา p.d.f. ของ Y

25. X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยซึ่งมีการแจกแจง

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \\ 1/4, & x = 1 \\ 1/8, & x = 2 \\ 1/8, & x = 3 \end{cases}$$

(a) จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X จากโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน

(b) ถ้า $Y = (X-2)^2$ จงหาฟังก์ชันแจกแจงของ Y

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.

1. (a)

y	0	20	80
$p_Y(y)$	0.6	0.3	0.1

(b) $E[Y] = 14$ $V(Y) = 564$

3. (a) 0.221 (b) 1,558 บาท

5. $f_Z(z) = e^{-z}, \quad z \geq 0$

7. -30.33 บาท

11. (a) 15, 50 (b) 5, 0 (c) 3/4, 9/16

15. (a) k = 8/7 (b) 11/7, 26/49

(c) $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 8/14, & 1 \leq x < 2 \\ 12/14, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

17. $k = 2, \quad \left[14 - 2\sqrt{2}, 14 + 2\sqrt{2}\right]$

19. (a) $$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/9, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

(b) 2 , 1/2

(c) 27/5

(d) $k = 3/\sqrt{2}$

4

ตัวแปรสุ่มหลายมิติ

Multidimensional Random Variables

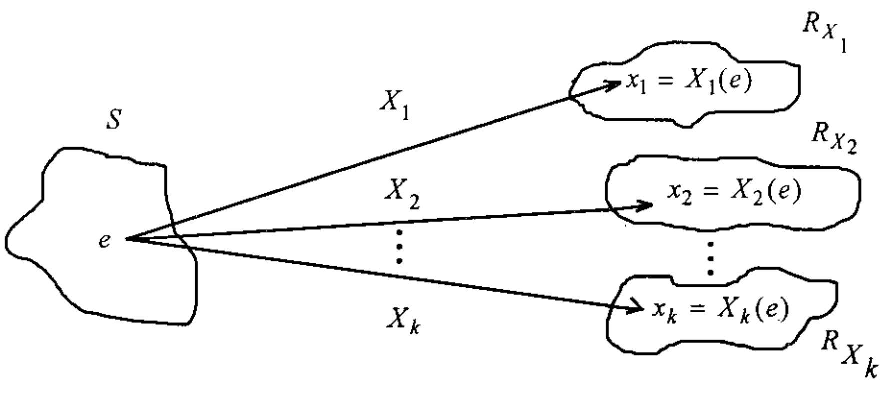
ในบทนี้เราพิจารณาการใช้ตัวแปรสุ่มมากกว่า 1 ตัว แทนผลลัพธ์ของการทดลองโดยเฉพาะกรณีของตัวแปรสุ่ม 2 ตัว

นิยาม 4.1 ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลอง และ $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ เป็นฟังก์ชันนิยามบน S โดยที่ค่าของ $X_1(e), X_2(e), \ldots, X_k(e)$ เป็นจำนวนจริงสำหรับแต่ละ $e \in S$ เราเรียก $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ว่าตัวแปรสุ่ม k มิติ หรือเวกเตอร์ตัวแปรสุ่ม k มิติ (k-dimensional random vector)

เราเรียก $R_{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k}$ ซึ่งเป็นของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ว่าพิสัยของ ($X_1, X_2, \ldots, X_k$)

$$R_{X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) | x_1 \in R_{X_1}, x_2 \in R_{X_2}, \ldots, x_k \in R_{X_k} \right\}$$

ในกรณี $k = 2$ เซต $R_{X_1 \times X_2}$ คือ เซตย่อยของ R^2 หรือบริเวณในระนาบ และในกรณี $k = 3$ เซต $R_{X_1 \times X_2 \times X_3}$ คือ เซตย่อยของ R^3



รูป 4.1 ตัวแปรสุ่ม k มิติ

4.1 การแจกแจงร่วมของตัวแปรสุ่ม 2 มิติ

(Joint Distribution for Two Dimensional Random Variables)

ใน กรณี $k = 2$ เราเขียน $\left(X_1, X_2\right)$ หรือ (X, Y) แทนตัวแปรสุ่ม 2 มิติ (two-dimensional random variables)

ถ้าค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ (X, Y) หรือ พิสัยของ (X, Y) เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์แบบนับได้ แล้ว (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ **แบบเต็มหน่วย** และถ้าพิสัยของ (X, Y) เป็นเซตแบบนับไม่ได้ นั่นคือ ค่าของ X หรือค่าของ Y มีความต่อเนื่อง แล้ว (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ **แบบต่อเนื่อง**

ในที่นี้เราพิจารณากรณีที่ ทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มชนิดเดียวกัน นั่นคือ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยทั้งคู่ หรือ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องทั้งคู่

ตัวอย่าง 4.1

1. ให้ (X, Y) แทนแต้มของลูกเต๋า 2 ลูก ดังนั้น

$$R_X = \{1, 2, \ldots, 6\} \text{ และ } R_Y = \{1, 2, \ldots, 6\}$$

ทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยและพิสัยของ (X, Y) คือ

$$R_{X \times Y} = \{(x, y) : x \in R_X \text{ และ } y \in R_Y \}$$

ซึ่งมีจุดตัวอย่างอยู่ทั้งหมด 36 จุดตัวอย่าง $\therefore (X, Y)$ เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบเต็มหน่วย

2. สำหรับช่วงอายุ 20 - 29 ปี ระดับแคลเซียลและคลอเรสเตอรอลในเลือดที่นับว่าปลอดภัยคือ 8.5 - 10.5 มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร และ 102 - 240 มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร ตามลำดับ ให้ X และ Y แทนระดับของแคลเซียลและระดับคลอเลสเตอรอล ดังนั้น

$$8.5 \le X \le 10.5 \text{ และ } 102 \le Y \le 240$$

และ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่อง

นิยาม 4.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของสองตัวแปร (Bivariate Probability Function)

1. กรณีเต็มหน่วย สำหรับแต่ละค่า (x, y)ของ (X, Y) เราให้

$$p(x, y) = P(X = x \text{ และ } Y = y) \tag{4.1}$$

เมื่อ $p(x, y) \geq 0$ สำหรับแต่ละ (x, y) ใน $R_{X \times Y}$ และ

$$\sum_x \sum_y p(x, y) = 1 \tag{4.2}$$

เราเรียก $p(x, y)$ ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม(joint p.d.f.)**

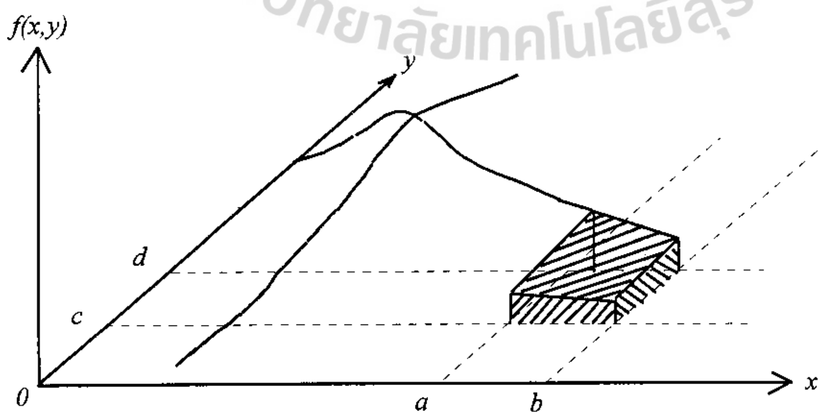
2. กรณีต่อเนื่อง ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่องในตัวแปรสุ่มทั้งสอง โดยมี R เป็นพิสัย ดังนั้น f เป็น **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม** ของ (X, Y) เมื่อ

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad (x, y) \in R,$$

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy = 1 \tag{4.3}$$

$$P(a \leq X \leq b \text{ และ } c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dxdy \tag{4.4}$$

ในกรณีของตัวแปรสุ่มตัวเดียวแบบต่อเนื่อง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์คือพื้นที่ ส่วนในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์คือปริมาตร (ดูรูป 4.2 ประกอบ)



รูป 4.2 $P(a \leq X \leq b, c \leq y \leq d)$ คือ ปริมาตรของส่วนที่แรเงา

หมายเหตุ

ในทำนองเดียวกับ p.d.f. ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องตัวเดียว $f(x,y)$ ไม่ได้แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ และ $f(x,y) = 0$ สำหรับ $(x,y) \notin R$ จะละไว้ในฐานที่เข้าใจเสมอ และสมการ (4.4) อาจเขียนเป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \tag{4.5}$$

ตัวอย่าง 4.2 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มีทั้งหมด 36 แบบ ซึ่งแต่ละแบบมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1/36 ในที่นี้ เราให้ X แทนแต้มที่น้อยกว่า และ Y แทนแต้มที่สูงกว่า เช่น

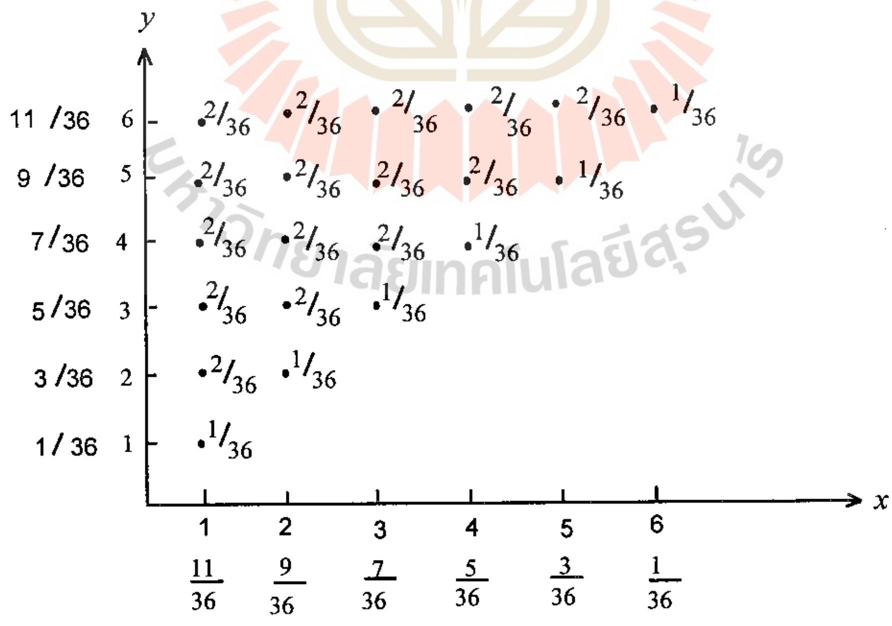
ถ้าแต้มที่ออกคือ (3,2) แล้ว $X = 2,\ Y = 3$

ถ้าแต้มที่ออกคือ (2,3) แล้ว $X = 2,\ Y = 3$

ถ้าแต้มที่ออกคือ (4,4) แล้ว $X = Y = 4$

เราได้ joint p.d.f. ของ (X,Y) ดังนี้

$$p(x,y) = \begin{cases} 2/36 & 1 \le x < y \le 6 \\ 1/36 & 1 \le x = y \le 6 \end{cases}$$



รูป 4.3 แสดงจุดตัวอย่าง (X,Y) และ joint p.d.f. ของ (X,Y)

ตัวอย่าง 4.3 ในโรงงานผลิตรถยนต์แห่งหนึ่ง ใช้หุ่นยนต์ทำงาน 2 ชนิด ชนิดแรก คือ เชื่อมจุดต่อ 2 จุด ชนิดที่สอง คือ หมุนน็อตให้แน่นใน 3 ตำแหน่ง ให้ X แทนจำนวนจุดเชื่อมต่อที่มีตำหนิ และ Y แทน จำนวนน็อตที่ไม่ได้หมุนให้แน่น ทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย ดังนั้น (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบเต็มหน่วย โดยมี joint p.d.f. แสดงในตาราง 4.1 จะเห็นได้ว่า

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} p(x,y) = .840 + .030 + .020 + \ldots + .001 = 1$$

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	.840	.030	.020	.010
1	.060	.010	.008	.002
2	.010	.005	.004	.001

ตาราง 4.1 joint p.d.f. ของ (X,Y)

ความน่าจะเป็นที่หุ่นยนต์ทำงานไม่บกพร่องเลย คือ $P(X=0$ และ $Y=0)$ ซึ่ง

$$P(X=0 \text{ และ } Y=0) = p(0,0) = .840$$

ความน่าจะเป็นที่หุ่นยนต์ทำงานบกพร่อง 1 ครั้ง คือ

$$P(X=1 \text{ และ } Y=0) + P(X=0 \text{ และ } Y=1) = p(1,0) + p(0,1)$$

$$= .060 + .030 = .090$$

ความน่าจะเป็นที่หุ่นยนต์หมุนน็อตทั้ง 3 ตำแหน่งได้แน่นเต็มที่ คือ $P(Y=0)$ นั่นคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม Y เท่านั้น นั่นคือ เราต้องรวมค่าของ $p(x,0)$ สำหรับ $x = 0, 1, 2$ ผลที่ได้ คือ

$$P(Y=0)=\sum_{x=0}^{2} p(x,0)=p(0,0)+p(1,0)+p(2,0)$$

$$=.840+.060+.010=.91$$

ตัวอย่าง 4.4 ในตัวอย่าง 4.1 (b) พิสัยของ (X,Y) คือ บริเวณของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีมุมทั้งสี่อยู่ที่ (8.5, 120), (8.5, 240), (10.5, 120) และ (10.5 , 240) สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X,Y) คือ

$$f(x,y)=c \text{ สำหรับ } 8.5\le x\le 10.5,\ 120\le y\le 240$$

ดังนั้น c ต้องเป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้

$$\int_{120}^{240}\int_{8.5}^{10.5} c\,dx\,dy = 1 \qquad \text{(จากสมการ (4.3))}$$

$$c\int_{120}^{240}(10.5-8.5)\,dy = 1$$

$$2c(240-120) = 1$$

ดังนั้น $c = 1/240$

รูป 4.4 แสดงให้เห็นว่า $c = 1/240$ เป็นความสูงของรูปกล่องสี่เหลี่ยมซึ่งมีฐานของกล่องในระนาบ xy โดยที่ฐานของกล่อง คือ พิสัยของ (X,Y) หรือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$8.5\le x\le 10.5 \text{ และ } 120\le y\le 240$$

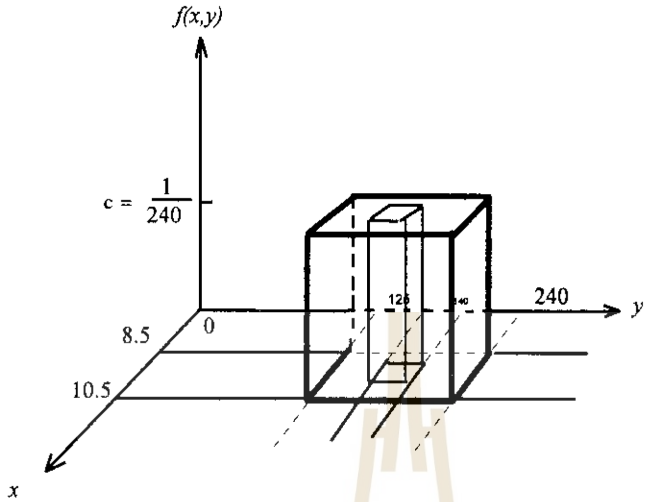
และปริมาตรของกล่องเท่ากับ 1 ส่วนความน่าจะเป็นที่ชายผู้หนึ่งจะมีระดับแคลเซียมในเลือดอยู่ในช่วง 9-10 มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร และระดับคลอเลสเตอรอลอยู่ในช่วง 125 - 140 มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร คือ

$$P(9\le X\le 10, 125\le Y\le 140)=\int_{125}^{140}\int_{9}^{10}(1/240)\,dx\,dy$$

$$=(1/240)\int_{125}^{140}(10-9)\,dy$$

$$=15/240$$

ซึ่งคือ ปริมาตรของกล่องสี่เหลี่ยมที่แรเงาในรูป 4.4



รูป 4.4

ในตัวอย่าง 4.3 เราคำนวณหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y ที่ค่าใดค่าหนึ่งโดยเฉพาะ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ เราหา p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม Y นั่นเอง ดังนั้นในกรณีของตัวแปรสุ่มแบบ 2 มิติฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่สัมพันธ์กับตัวแปร 2 มิติ มี joint p.d.f. ของตัวแปรสุ่มทั้งสองและฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรแต่ละตัว หรือ p.d.f. ของแต่ละตัวแปร ซึ่งเราจะเรียกว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัล(marginal p.d.f.)**

4.2 การแจกแจงมาร์จินัล (Marginal Distributions)

เราได้พิจารณาการแจกแจงร่วมในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ โดยพิจารณา joint p.d.f. ของ (X,Y) ในที่นี้เราสนใจศึกษาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแต่ละตัวหรือส่วนประกอบ(components)ในเวกเตอร์ของตัวแปรสุ่ม โดยเฉพาะในกรณี 2 มิติ ส่วนในกรณีมากกว่าสองมิติ นิยามจะคล้ายกัน

นิยาม 4.3 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ เราเรียก ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของแต่ละตัวแปรสุ่ม (X, Y) ว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัล (marginal probability function) หรือ marginal p.d.f. ซึ่งมีนิยามดังนี้

1. กรณีเต็มหน่วย

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัล ของ X เขียนแทนโดย $p_X(x)$ นิยามโดย

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y) \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad x \in R_X \tag{4.6}$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัลของ Y เขียนแทนโดย $p_Y(y)$ นิยามโดย

$$p_Y(y) = \sum_x p(x, y) \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad y \in R_Y \tag{4.7}$$

2. กรณีต่อเนื่อง

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัล ของ X เขียนแทนโดย $f_X(x)$ นิยามโดย

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad x \in R_X \tag{4.8}$$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัลของ Y เขียนแทนโดย $f_Y(y)$ นิยามโดย

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \quad \text{สำหรับแต่ละ} \quad y \in R_Y \tag{4.9}$$

ดังนั้น p_X, p_Y เป็น p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X และ Y แต่ละตัวตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน สำหรับ f_X, f_Y

ตัวอย่าง 4.5 ในรูป 4.3 ของตัวอย่าง 4.2 ค่าตัวเลขซึ่งแสดงอยู่ใต้แกน x และข้างแกน y คือ marginal p.d.f. ของ X และ Y ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าในรูป 4.3 marginal p.d.f. ของ x ได้จากการบวก joint p.d.f. ของ (X, Y) ในแต่ละคอลัมน์ และ marginal p.d.f. ของ Y ได้จากการบวก joint p.d.f. ของ (X, Y) ในแต่ละแถว เช่น

$$p_X(1) = \sum_y p(1, y) = \sum_{y=1}^{6} p(1, y) = 11/36 \qquad \text{(คอลัมน์ที่ 1)}$$

$$p_Y(3) = \sum_x p(x, 3) = \sum_{x=1}^{3} p(x, 3) = 5/36 \qquad \text{(แถวที่ 3)}$$

ตัวอย่าง 4.6 ในตาราง 4.1 ของตัวอย่าง 4.3 เราสามารถหาค่าของ marginal p.d.f. ของ X โดยบวก joint p.d.f. ในแต่ละแถว และหาค่าของ marginal p.d.f. ของ Y โดยบวก joint p.d.f. ในแต่ละคอลัมน์ เช่น

$$p_X(0) = \sum_y p(0, y) = \sum_{y=0}^{3} p(0, y) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) + p(0,3)$$

$$= .840 + .030 + .020 + .010 = .900$$

$$p_Y(2) = \sum_x p(x, 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x, 2) = p(0,2) + p(1,2) + p(2,2)$$

$$= .020 + .008 + .004 = .032$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	$p_X(x)$
0	.840	.030	.020	.010	.900
1	.060	.010	.008	.002	.080
2	.010	.005	.004	.001	.020
$p_Y(y)$	.910	.045	.032	.013	1.000

ตาราง 4.2 marginal p.d.f. ของ X และ Y

ตัวอย่าง 4.7 จากตัวอย่าง 4.4 X แทนระดับแคลเซียมในเลือด และ Y แทนระดับคลอเลสเตอรอล ในเลือด ของคน ๆ หนึ่ง joint p.d.f. ของ (X, Y) คือ

$$f(x, y) = \frac{1}{240}, \quad 8.5 \le x \le 10.5, \quad 120 \le y \le 240$$

marginal p.d.f. ของ X และ Y หาได้ดังนี้

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{240} dy = \int_{120}^{240} \frac{1}{240} dy = 1/2, \quad 8.5 \le x \le 10.5$$

และ

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{240} dx = \int_{8.5}^{10.5} \frac{1}{240} dx = 2/240, \quad 120 \le y \le 240$$

ถ้าเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่คนๆหนึ่งจะมีระดับคอลเรสเตอรอลในเลือดอยู่ในช่วง 150-200 เราสามารถใช้ joint p.d.f. หรือใช้ marginal p.d.f. ของ Y หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ได้ นั่นคือ

$$P(150 \le Y \le 200) = \int_{8.5}^{10.5} \int_{150}^{200} \frac{1}{240} dy\, dx = 100/240$$

หรือ

$$P(150 \le Y \le 200) = \int_{150}^{200} \frac{2}{240} dy = 100/240$$

ตัวอย่าง 4.8 กำหนดให้ joint p.d.f. ของ (X, Y) มีค่าดังนี้

$$p(x, y) = (x + y)/21, \quad x = 1, 2, 3, \quad y = 1, 2$$

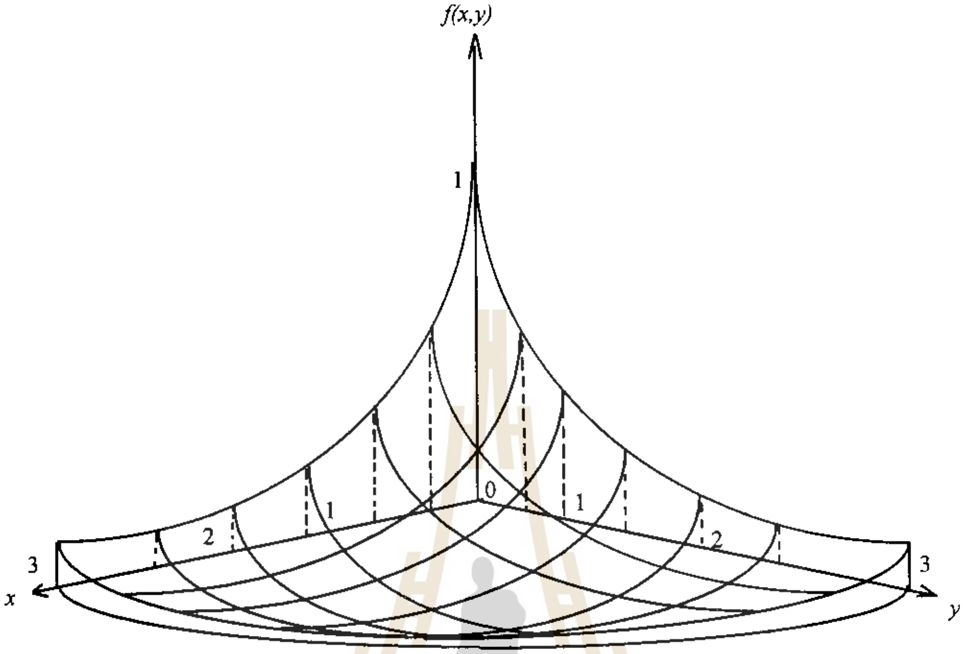
ดังนั้น marginal p.d.f. ของ X

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_y p(x, y) = \sum_{y=1}^{2} (x + y)/21 \\ &= (x+1)/21 + (x+2)/21 = (2x+3)/21, \quad x = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

และ marginal p.d.f. ของ Y

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_x p(x, y) = \sum_{x=1}^{3} (x + y)/21 \\ &= (6 + 3y)/21, \quad y = 1, 2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.9 ให้ (X, Y) มี joint p.d.f. $f(x, y) = e^{-x-y}$, $0 < x < \infty$ และ $0 < y < \infty$ กราฟของ $z = f(x, y)$ แสดงในรูป 4.5 สำหรับบริเวณ $x^2 + y^2 \leq 9$



รูป 4.5

ให้ $A = \{(x, y) | 0 < x < \infty, 0 < y < x/3\}$ ดังนั้น

$$P(A) = \int_0^{\infty} \int_0^{x/3} e^{-x-y}\, dy\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \left[-e^{-y}\right]_{y=0}^{y=x/3} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - e^{-4x/3}\right] dx = \left[-e^{-x} + \frac{3}{4} e^{-4x/3}\right]_0^{\infty}$$

$$= 1/4$$

marginal p.d.f. ของ X

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-x-y}\, dy = e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$

marginal p.d.f. ของ Y

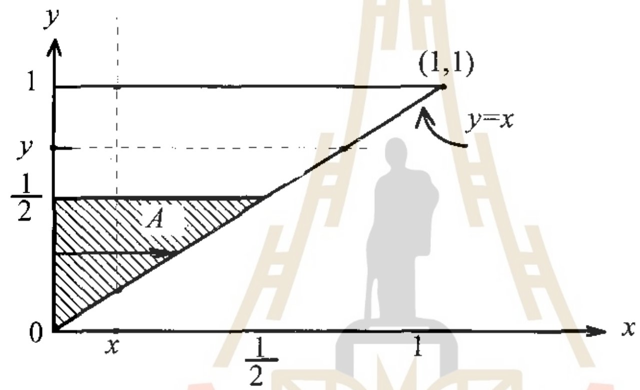
$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-x-y}\, dx = e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = e^{-y}, \quad 0 < y < \infty$$

ตัวอย่าง 4.10 ให้ (X, Y) มี joint p.d.f. $f(x, y) = 2$ สำหรับ $0 \le x \le y \le 1$ นั่นคือพิสัยของ (X, Y) คือ $R = \{(x, y)\ 0 \le x \le y \le 1\}$ บริเวณของรูปสามเหลี่ยมแสดงในรูป 4.6

ให้ $A = \{(x, y) | 0 \le x \le y,\ 0 \le y \le 1/2\}$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\ 0 \le X \le Y \text{ และ } 0 \le Y \le 1/2\ ) \\
&= \int_0^{1/2} \int_0^{y} 2\, dx\, dy = \int_0^{1/2} 2\, y\, dy = 1/4
\end{aligned}
$$

บริเวณแรเงาในรูป 4.6 คือบริเวณของการอินทิเกรต ซึ่งเป็นเซตย่อยของ R และ $P(A)$ ก็คือปริมาตรเหนือบริเวณแรเงาและใต้พื้นผิว $z = 2$



รูป 4.6

marginal p.d.f. ของ X และ Y คือ

$$f_X(x) = \int_x^1 2\, dy = 2(1 - x) \qquad \text{สำหรับ } 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\, dx = 2y \qquad \text{สำหรับ } 0 \le y \le 1$$

ในรูป 4.6 เราแสดงช่วงการอินทิเกรตเพื่อหา marginal p.d.f. ของ X และ Y ช่วงการอินทิเกรตเพื่อหา $f_X(x)$ คือ เริ่มจาก $y = x$ ถึง $y = 1$ และช่วงการอินทิเกรตเพื่อหา $f_Y(y)$ เริ่มจาก $x = 0$ ถึง $x = y$

สำหรับตัวแปรสุ่ม 2 มิติ (X, Y) ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของแต่ละตัวแปร X, Y สามารถคำนวณได้จาก marginal p.d.f. ของ (X, Y) ดังนี้

1. กรณีเต็มหน่วย

$$E[X] = \mu_X = \sum_x x\, p_X(x) = \sum_x \sum_y x\, p(x,y) \tag{4.10}$$

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_x (x-\mu_X)^2 p_X(x)$$

$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_X)^2 p(x,y)$$

$$= \sum_x x^2 p_X(x) - \mu_X^2 \tag{4.11}$$

$$= \sum_x \sum_y x^2 p(x,y) - \mu_X^2 \tag{4.12}$$

และ

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_y y\, p_Y(y) = \sum_y \sum_x y\, p(x,y) \tag{4.13}$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_y (y-\mu_Y)^2\, p_Y(y)$$

$$= \sum_y \sum_x (y-\mu_Y)^2\, p(x,y)$$

$$= \sum_y y^2\, p_Y(y) - \mu_Y^2 \tag{4.14}$$

$$= \sum_y \sum_x y^2\, p(x,y) - \mu_Y^2 \tag{4.15}$$

สมการ (4.10)-(4.15) แสดงให้เห็นว่า เราสามารถหา ค่าคาดหมาย และความแปรปรวนได้โดยตรงจาก marginal p.d.f. หรือจาก joint p.d.f. แต่ในกรณีต่อเนื่อง ถ้า marginal p.d.f. ของ X และ Y หาไว้แล้ว การคำนวณหาค่าคาดหมายหรือความแปรปรวนจะง่ายกว่าการใช้ joint p.d.f.

2. กรณีต่อเนื่อง

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dy\,dx \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} V(X) = \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 f_x(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \mu_X^2 && (4.17) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)\,dy\,dx - \mu_X^2 && (4.18) \end{aligned}$$

และ

$$E[Y] = \mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} V(Y) = \sigma_Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_Y)^2 f_Y(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu_Y)^2 f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy - \mu_Y^2 && (4.20) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)\,dx\,dy - \mu_Y^2 && (4.21) \end{aligned}$$

สมการ (4.16)-(4.21) แสดงการหาค่าคาดหมาย ความแปรปรวน ซึ่งคำนวณได้จากทั้ง marginal p.d.f. และ joint p.d.f.

ตัวอย่าง 4.1 ในรูป 4.3 ของตัวอย่าง 4.2 แสดง marginal p.d.f. ของ X, Y ดังนั้น

$$E[X] = \mu_X = \sum_{x=1}^{6} x\, p_X(x) = 1\cdot\frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + 3\cdot\frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 5\cdot\frac{3}{36} + 6\cdot\frac{1}{36} = 91/36$$

และ

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x=1}^{6} x^2\, p_X(x) - \mu_X^2 \qquad \text{(จากสมการ 4.11)}$$

$$= \left[1^2\cdot\frac{11}{36} + 2^2\cdot\frac{9}{36} + 3^2\cdot\frac{7}{36} + 4^2\cdot\frac{5}{36} + 5^2\cdot\frac{3}{36} + 6^2\cdot\frac{1}{36}\right] - \left(\frac{91}{36}\right)^2$$

$$= 2915/1296$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการหาค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของ Y

ตัวอย่าง 4.12 ในตัวอย่าง 4.9 เราคำนวณ marginal p.d.f. ของ X, Y ไว้ ซึ่งมีค่าดังนี้

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty \text{ และ } f_Y(y) = e^{-y}, \; 0 < y < \infty$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} E[X] = \mu_X &= \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \int_0^\infty x e^{-x}\, dx \qquad \text{(จากสมการ 4.16)} \\ &= \left[-x e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right) dx \\ &= 0 - \left[e^{-x}\right]_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) = \sigma_X^2 &= \int_0^\infty x^2 f_X(x)\, dx - \mu_X^2 \qquad \text{(จากสมการ 4.17)} \\ &= \int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx - 1^2 \\ &= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (2x)\left(-e^{-x}\right) dx - 1 \\ &= 0 + 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการคำนวณหาค่าคาดหมาย และความแปรปรวนของ Y จะเห็นได้ว่า เราคำนวณโดยใช้ marginal p.d.f. ซึ่งจะง่ายกว่าการคำนวณโดยใช้ joint p.d.f. ซึ่งจะต้องหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น

นิยาม 4.4 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ ซึ่งมี joint p.d.f. เป็น $p(x, y)$ สำหรับ (X, Y) แบบเต็มหน่วย และ $f(x, y)$ สำหรับ (X, Y) แบบต่อเนื่อง ให้ $H(X, Y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ (X, Y) ดังนั้น $H(X, Y)$ เป็นตัวแปรสุ่ม และค่าคาดหมายของ $H(X, Y)$ เมื่อหาค่าได้ มีนิยามดังนี้

1. กรณีเต็มหน่วย

$$E\left[H(X, Y)\right] = \sum_x \sum_y H(x, y)\, p(x, y) \tag{4.22}$$

2. กรณีต่อเนื่อง

$$E\left[H(X, Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy \tag{4.23}$$

ซึ่งในกรณีนี้ เราพิจารณาเฉพาะ $H(X, Y)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ (X, Y)

ตัวอย่าง 4.13 joint p.d.f. ของ (X,Y) และ marginal p.d.f. ของ X และ Y ของตัวอย่าง 4.6 แสดงอยู่ในตาราง 4.2 ดังนั้น เราสามารถหา $E[X]$, $E[Y]$, $E[X+Y]$และ $E[XY]$ ได้ดังนี้

$$E[X] = \sum_{x=0}^{2} x\, p_X(x) = 0(.900) + 1(.080) + 2(.020) = .120$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{3} y\, p_Y(y) = 0(.910) + 1(.045) + 2(.032) + 3(.013)$$

$$= .148$$

หรืออาจจะหา $E[X]$ และ $E[Y]$ โดยใช้ joint p.d.f. ซึ่งการคำนวณจะยาวกว่า

$$E[X+Y] = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} (x+y)\, p(x,y) \qquad \text{(จากสมการ 4.22)}$$

$$= (0+0)(.840) + (0+1)(.030) + (0+2)(.020) + \ldots + (2+3)(.001)$$

$$= .268$$

$$E[XY] = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{3} xy\, p(x,y) \qquad \text{(จากสมการ 4.22)}$$

$$= (0.0)(.840) + (0.1)(.030) + (0.2)(.020) + \ldots + (2.3)(.001) = .064$$

จะเห็นได้ว่า $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ ซึ่งเป็นผลอันเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2 ข้อ 3

ความหมายของ $E[X+Y]$ ในตัวอย่างนี้คือ ค่าเฉลี่ยของความบกพร่องในการทำงานทั้งสองชนิดของหุ่นยนต์

ตัวอย่าง 4.14 ในตัวอย่าง 4.7 (X,Y) แทนระดับแคลเซียมและระดับของคลอเรสเตอรอลในเลือดตามลำดับ joint p.d.f. ของ (X,Y) คือ

$$f(x,y) = 1/240, \quad 8.5 \le x \le 10.5, \quad 120 \le y \le 240$$

และ marginal p.d.f. คือ

$$f_X(x) = 1/2, \quad 8.5 \le x \le 10.5 \quad \text{และ} \quad f_Y(y) = 2/240, \quad 120 \le y \le 240$$

ดังนั้น

$$E[X] = \int_{8.5}^{10.5} x\left(\tfrac{1}{2}\right)dx = \left[x^2/4\right]_{8.5}^{10.5} = 9.5 \quad \text{มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร}$$

$$E[Y] = \int_{120}^{240} y(2/240)\,dy = \left[y^2/240\right]_{120}^{240} = 180 \quad \text{มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร}$$

$$E[XY] = \int_{120}^{240}\int_{8.5}^{10.5} xy(1/240)\,dx\,dy = (1/240)\int_{120}^{240} y\left[x^2/2\right]_{8.5}^{10.5} dy$$

$$= (1/240)\int_{120}^{240} 19y\,dy = (19/240)\left[y^2/2\right]_{120}^{240} = 1710$$

4.3 การแจกแจงภายใต้เงื่อนไข (Conditional Distributions)

ในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ เราอาจจะสนใจศึกษาการแจกแจงของตัวแปรตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดให้ตัวแปรอีกตัวมีค่าเฉพาะที่ค่าใดค่าหนึ่ง นั่นคือ เราต้องการหาการแจกแจงของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ หรือหาการแจกแจงของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ การแจกแจงชนิดนี้เรียกว่า **การแจกแจงภายใต้เงื่อนไข** พิจารณาแนวคิดจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.15 พิจารณาตัวแปรสุ่ม (X, Y) เมื่อ X แทนความดันภายใน และ Y แทนความดันภายนอกเครื่องบิน สมมติว่าเราสนใจศึกษาความดันภายในเมื่อความดันภายนอก $y = 30$ สิ่งที่เราต้องทำความเข้าใจมี 3 ประการดังนี้

1. ถึงแม้ว่าความดันภายนอกจะคงที่ แต่ความดันภายในยังคงมีการเปลี่ยนแปลงได้ ดังนั้น เราสามารถพิจารณาตัวแปรสุ่ม X เมื่อกำหนดให้ $Y = 30$ หรือเขียนแทนโดย $X|Y = 30$

2. เพราะว่า $X|Y = 30$ โดยตัวมันเองก็เป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $X|Y = 30$ ย่อมมีการแจกแจงของความน่าจะเป็นกำกับอยู่ ดังนั้น เราสามารถพิจารณา p.d.f. ของ $X|Y = 30$ ซึ่งเราเรียกว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข** (conditional probability function) หรือ conditional p.d.f. เขียนแทนโดย $f_{X|30}$ หรือ $f_{X|Y=30}$

3. ในเมื่อความดันภายในมีการเปลี่ยนแปลง ถึงแม้ว่าความดันภายนอกจะคงที่ ดังนั้น เราสามารถศึกษาค่าเฉลี่ยของความดันภายในเมื่อความดันภายนอกเป็น 30 นั่นคือ พิจารณาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม $X|Y = 30$ หรือค่าคาดหมายของ $X|Y = 30$ เขียนแทนโดย $E\left[X|Y = 30\right]$

สัญกรณ์

โดยทั่วไป เราเขียน conditional p.d.f. ของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ โดยใช้สัญกรณ์

$p_{X|y}$ ในกรณีเต็มหน่วย และ $f_{X|y}$ ในกรณีต่อเนื่อง

เพื่อความเข้าใจในการนิยาม conditional p.d.f. เราพิจารณากรณี (X,Y) เป็นแบบเต็มหน่วย ให้

A_1 เป็นเหตุการณ์ $X = x$ และ A_2 เป็นเหตุการณ์ $Y = y$

ดังนั้น จากนิยามความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข เราได้ว่า

$$P\left(A_1 | A_2\right) = \frac{P\left(A_1 \cap A_2\right)}{P\left(A_2\right)}$$

หรือ $$P\left(X = x | Y = y\right) = \frac{P(X = x \text{ และ } Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

นั่นคือ ในกรณี (X,Y) เป็นแบบเต็มหน่วย ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ มีค่าเท่ากับ สัดส่วนของ joint p.d.f. ของ (X,Y) เทียบกับ marginal p.d.f. ของ Y ข้อสังเกตุนี้ทำให้เราได้นิยามต่อไปนี้

นิยาม 4.5 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข(Conditional p.d.f.)

ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ นิยามฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขดังนี้

1. กรณีเต็มหน่วย ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ เขียนแทนโดย $p_{X|y}(x)$ คือ

$$p_{X|y}(x) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \qquad \text{เมื่อ} \quad p_Y(y) > 0 \tag{4.24}$$

และ ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ เขียนแทนโดย $p_{Y|x}(y)$ คือ

$$p_{Y|x}(y) = \frac{p(x, y)}{p_X(x)} \qquad \text{เมื่อ} \quad p_X(x) > 0 \tag{4.25}$$

2. กรณีต่อเนื่อง ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข คือ

$$f_{X|y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad \text{เมื่อ} \quad f_Y(y) > 0 \tag{4.26}$$

และ

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \qquad \text{เมื่อ} \quad f_X(x) > 0 \tag{4.27}$$

ตัวอยาง 4.16 ให้ (X, Y) มี joint p.d.f. กำหนดโดย

$$p(x, y) = (x + y)/21, \quad x = 1, 2, 3, y = 1, 2$$

ในตัวอย่าง 4.8 เราได้แสดงว่า

$$p_X(x) = (2x + 3)/21, \quad x = 1, 2, 3$$

และ

$$p_Y(y) = (3y + 6)/21, \quad y = 1, 2$$

ดังนั้น conditional p.d.f. ของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ หาได้โดย

$$p_{X|y}(x) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{(x + y)/21}{(3y + 6)/21} = \frac{x + y}{3y + 6}$$

สำหรับ $x = 1, 2, 3$ เมื่อกำหนดให้ $y = 1$ หรือ 2 เช่น

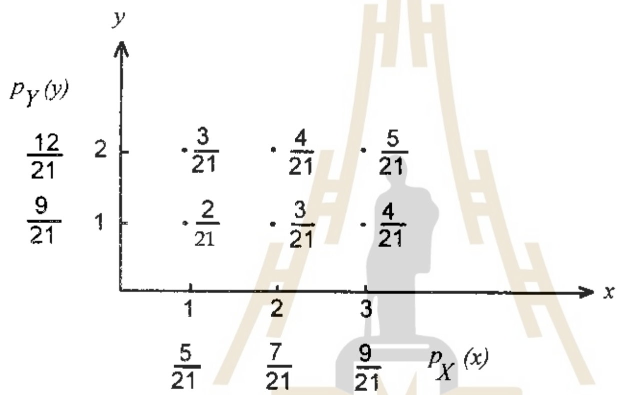
$$P(X = 2 | Y = 2) = p_{X|2}(2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ในทำนองเดียวกัน conditionl p.d.f. ของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ คือ

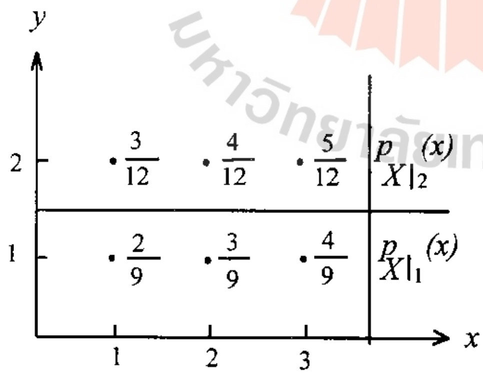
$$p_{Y|x}(y) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{x+y}{2x+3}$$

สำหรับ $y = 1,2$ เมื่อกำหนดให้ $x = 1,2$ หรือ 3

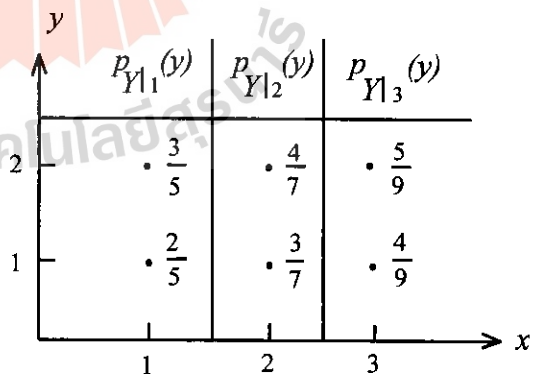
รูป 4.7 (a) แสดง joint p.d.f. และ marginal p.d.f. ของ X และ Y ส่วนรูป 4.7 (b) และ4.7 (c) แสดง conditional p.d.f. $p_{X|y}(x)$ และ $p_{Y|x}(y)$ ตามลำดับ



รูป 4.7 (a)



รูป 4.7 (b)

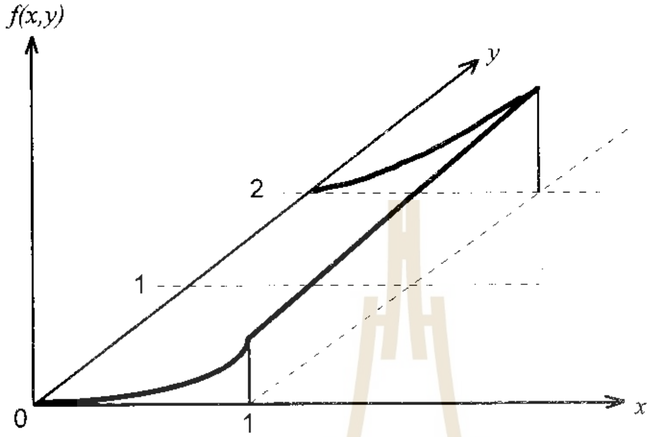


รูป 4.7 (c)

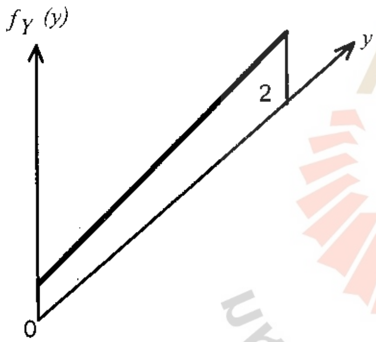
ตัวอย่าง 4.17 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี joint p.d.f.

$$f(x,y) \;=\; x^2 + (xy)/3 \quad , \quad 0 < x \le 1 \;,\quad 0 \le y \le 2$$

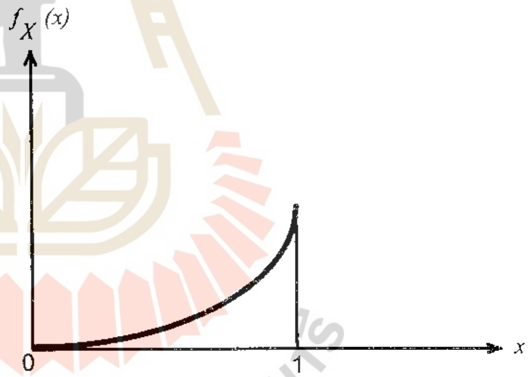
กราฟของ $f(x,y)$ แสดงในรูป 4.8 (a)



รูป 4.8 (a)



รูป 4.8 (b)



รูป 4.8 (c)

marginal p.d.f. หาได้ดังนี้

$$f_X(x) \;=\; \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy \;=\; 2x^2 + \frac{2}{3}x \,,\quad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) \;=\; \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx \;=\; \frac{1}{3} + \frac{y}{6}\,,\quad 0 \le y \le 2$$

กราฟของ marginal p.d.f. แสดงในรูป 4.8 (b) และ 4.8 (c) conditional p.d.f. หาได้ดังนี้

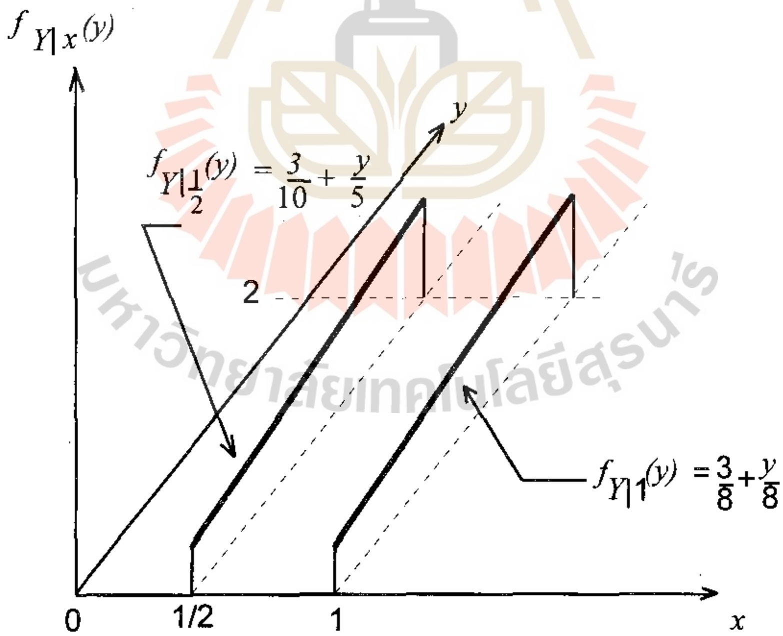
$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2}\frac{(x+y/3)}{(x+1/3)} \quad , \quad 0 \le y \le 2,\ 0 < x \le 1$$

และ

$$f_{X|y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x(3x+y)}{1+y/2} \quad , \quad 0 < x \le 1,\ 0 \le y \le 2$$

สำหรับแต่ละค่าของ x, $0 < x \le 1$ เราได้ว่า $f_{Y|x}(y)$ มีค่าจำนวนอนันต์ค่า เช่น $x = \frac{1}{2}$ และ $x = 1$ เราได้

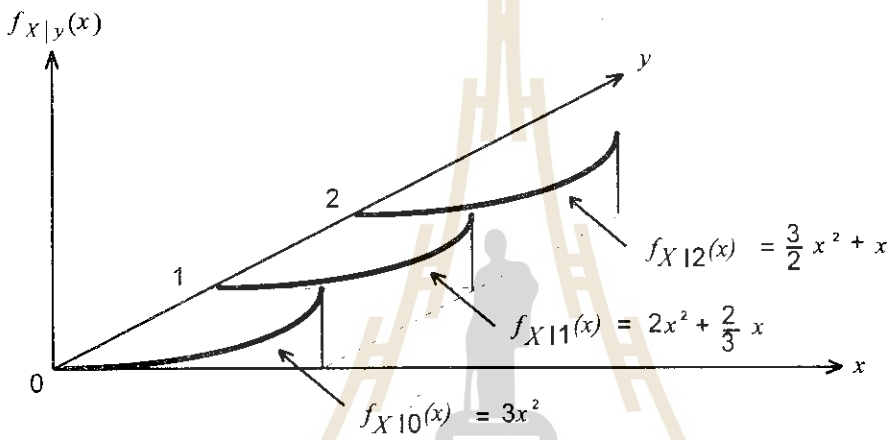
$$\left.\begin{aligned} f_{Y|\frac{1}{2}}(y) &= \frac{3}{10} + \frac{y}{5},\ 0 \le y \le 2 \\ f_{Y|1}(y) &= \frac{3}{8} + \frac{y}{8},\ 0 \le y \le 2 \end{aligned}\right\}$$ กราฟของ $f_{Y|\frac{1}{2}}(y)$ และ $f_{Y|1}(y)$ แสดงในรูป 4.9(a)



รูป 4.9 (a)

ในทำนองเดียวกัน สำหรับแต่ละค่าของ y, $0 \le y \le 2$ เราได้ว่า $f_{X|y}(x)$ มีค่าจำนวนอนันต์ค่า เช่น $y = 0$, $y = 1$ และ $y = 2$ เราได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} f_{X|0}(x) &= 3x^2, \qquad 0 < x \le 1 \\ f_{X|1}(x) &= 2x^2 + \frac{2}{3}x,\ 0 < x \le 1 \\ f_{X|2}(x) &= \frac{3x^2}{2} + x,\ 0 < x \le 1 \end{aligned}\right\}$$ กราฟของ $f_{X|0}(x)$, $f_{X|1}(x)$ และ $f_{X|2}(x)$ แสดงในรูป4.9 (b)



รูป 4.9 (b)

สิ่งสำคัญที่ต้องกล่าวไว้คือ ไม่ว่าจะเป็น conditional p.d.f. ของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ หรือ conditional p.d.f. ของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ ทั้งคู่ต่างก็มีคุณสมบัติเป็น p.d.f. ทุกประการ เช่น ในกรณี (X, Y) แบบเต็มหน่วย

จากนิยามของ $p_{X|y}(x)$ และ $p_{Y|x}(y)$ เราได้ว่า

$$0 \le p_{X|y}(x) \qquad \text{และ} \qquad 0 \le p_{Y|x}(y)$$

และ

$$\sum_x p_{X|y}(x) = \sum_x \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p_Y(y)}{p_Y(y)} = 1$$

$$\sum_y p_{Y|x}(y) = \sum_y \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_X(x)}{p_X(x)} = 1$$

และเราใช้ conditional p.d.f. ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังนี้

$$P(a \le X \le b | Y = y) = \sum_{\{x : a \le x \le b\}} p_{X|y}(x)$$

$$P(c \le Y \le d | X = x) = \sum_{\{y : c \le y \le d\}} p_{Y|x}(y)$$

รวมทั้งการคำนวณหาค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไข (conditional expected value)

ตัวอย่าง 4.19 ในตัวอย่าง 4.16 เราได้ $p_{X|y}(x) = \frac{x+y}{3y+6}$ สำหรับ $x = 1, 2, 3$ เมื่อ $y = 1$ หรือ 2 ดังนั้น

$$P(0 \le X \le 2 | Y = 3) = \sum_{\{x : 0 \le x \le 2\}} p_{X|3}(x)$$

$$= \frac{1+3}{3(3)+6} + \frac{2+3}{3(3)+6} = \frac{9}{15}$$

ตัวอย่าง 4.20 ในตัวอย่าง 4.15 joint p.d.f. ของ (X, Y) เมื่อ X แทนความดันภายใน และ Y แทนความดันภายนอกเครื่องบิน กำหนดโดย

$$f(x, y) = c / x \quad , \quad 27 \le y \le x \le 33$$

เมื่อ $c = 1/(6 - 27 \log 33/27)$ เราสามารถแสดงได้ว่า

$$f_X(x) = c(1 - 27/x), \quad 27 \le x \le 33$$

และ

$$f_Y(y) = c(\log 33 - \log y), \quad 27 \le y \le 33$$

conditional p.d.f. ของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ คือ

$$f_{X|y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{c / x}{c(\log 33 - \log y)}$$

$$= \frac{1}{x(\log 33 - \log y)} \quad , \quad y \le x \le 33$$

ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นที่ความดันภายในสูงกว่า 32 เมื่อความดันภายนอกเท่ากับ 30 เราให้ $y = 30$ ใน $f_{X|y}(x)$ แล้วอินทิเกรต $f_{X|y}(x)$ บนช่วงของค่าของ x ที่สูงกว่า 32 นั่นคือ

$$P(X > 32|Y = 30) = \int_{32}^{33} f_{X|30}(x)\,dx$$

$$= \int_{32}^{33} \frac{1}{x(\log 33 - \log 30)}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\log 33 - \log 30}\right]_{32}^{33} = 0.32$$

4.4 การคาดหมายภายใต้เงื่อนไข (Conditional Expectations)

ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบเต็มหน่วย แล้วการคาดหมายภายใต้เงื่อนไขในกรณีของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน หาค่าได้ดังต่อไปนี้

$$E[X|y] = \mu_{X|y} = \sum_x x\, p_{X|y}(x) \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} V(X|y) = \sigma^2_{X|y} &= E\left[\left(X - \mu_{X|y}\right)^2 | y\right] \\ &= \sum_x \left(x - \mu_{X|y}\right)^2 p_{X|y}(x) \\ &= E\left[X^2|y\right] - \left(\mu_{X|y}\right)^2 \\ &= \sum_x x^2\, p_{X|y}(x) - \left(\mu_{X|y}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.29}$$

และ

$$E[Y|x] = \mu_{Y|x} = \sum_{y} y\, p_{Y|x}(y) \tag{4.30}$$

$$V(Y|x) = \sigma^2_{Y|x} = E\left[\left(Y - \mu_{Y|x}\right)^2 | x\right]$$

$$= \sum_{y} \left(y - \mu_{Y|x}\right)^2 p_{Y|x}(y)$$

$$= E\left[Y^2 | x\right] - \left(\mu_{Y|x}\right)^2$$

$$= \sum_{y} y^2\, p_{Y|x}(y) - \left(\mu_{Y|x}\right)^2 \tag{4.31}$$

สมการ (4.29) และ (4.31) เป็นสูตรสำหรับคำนวณหาความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไข

ในทำนองเดียวกัน ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่อง แล้วการคาดหมายภายใต้เงื่อนไขหาค่าได้โดยการแทน $\sum$ ในสมการ (4.28) (4.29) (4.30) และ (4.31) ด้วยการอินทิเกรต นั่นคือ

$$E[X|y] = \mu_{X|y} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|y}(x)\, dx \tag{4.32}$$

$$V(X|y) = \sigma^2_{X|y} = E\left[\left(X - \mu_{X|y}\right)^2 | y\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_{X|y}\right)^2 f_{X|y}(x)\, dx$$

$$= E\left[X^2 | y\right] - \left(\mu_{X|y}\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X|y}(x)\, dx - \left(\mu_{X|y}\right)^2 \tag{4.33}$$

และ

$$E[Y|x] = \mu_{Y|x} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|x}(y)\, dy \tag{4.34}$$

$$V(Y|x) = \sigma^2_{Y|x} = E\left[\left(Y - \mu_{Y|x}\right)^2 | x\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \mu_{Y|x}\right)^2 f_{Y|x}(y)\, dy$$

$$= E\left[Y^2 | x\right] - \left(\mu_{Y|x}\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{Y|x}(y)\, dy - \left(\mu_{Y|x}\right)^2 \tag{4.35}$$

หมายเหตุ

ทุกครั้งที่เรากำหนดค่าของ $Y = y$ มาแต่ละค่า เราจะได้ค่าของ $E[X|y]$ ซึ่งขึ้นอยู่กับ y ค่านี้ นั่นคือ เรามีจำนวนค่าของ $E[X|y]$ เท่ากับจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่ม Y ในทำนองเดียวกันกับ $V(X|y), E[Y|x]$ และ $V(Y|x)$ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

$$E[X|y], \quad V(X|y) \qquad \text{เป็นฟังก์ชันของ } \quad y$$

และ

$$E[Y|x], \quad V(Y|x) \qquad \text{เป็นฟังก์ชันของ } \quad x$$

ตัวอย่าง 4.21 จากตัวอย่าง 4.16 เราคำนวณหา $\mu_{Y|x}$ และ $\sigma^2_{Y|x}$ เมื่อ $x = 3$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mu_{Y|3} &= E[Y|X=3] = \sum_y y\, p_{Y|3}(y) = \sum_{y=1}^{2} y\left(\frac{3+y}{9}\right) \\
&= 1\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{14}{9} \\
\sigma^2_{Y|3} &= E\left[\left(Y-\mu_{Y|3}\right)^2 \middle| X=3\right] = E\left[Y^2 | X = 3\right] - \left(\mu_{Y|3}\right)^2 \\
&= \sum_{y=1}^{2} y^2\, p_{Y|3}(y) - \left(\mu_{Y|3}\right)^2 \\
&= (1)^2\left(\frac{4}{9}\right) + (2)^2\left(\frac{5}{9}\right) - \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{20}{81}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.22 จากตัวอย่าง 4.17 เราได้ว่า

$$f_{Y|x}(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+\ y/3}{x+\ 1/3}\right) \qquad 0 \le y \le 2$$

เมื่อ $0 \le x \le 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
E[Y|x] &= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|x}(y)\, dy \\
&= \int_0^2 y \frac{1}{2}\left(\frac{x+\ y/3}{x+\ 1/3}\right) dy \\
&= \frac{1}{2(x+1/3)}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{9}\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{9x+\ 4}{9x+\ 3}
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า $E[Y|x]$ เป็นฟังก์ชันของ x เช่น เมื่อกำหนดค่าของ x เป็น $1/2$ และ 1 เราได้ว่า $E[Y|1/2] = 17/15$ และ $E[Y|1] = 13/12$

กราฟของ conditional p.d.f. $f_{Y|1/2}(y)$ และ $f_{Y|1}(y)$ แสดงในรูป 4.9 (a) โดยมีค่าคาดหมายที่สมนัยกับ conditional p.d.f. ทั้งสอง คือ $E[Y|1/2]$ และ $E[Y|1]$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 4.23 จากตัวอย่าง 4.20 เราทราบว่า joint p.d.f. ของ (X, Y)

$$f(x, y) = c/x \quad , \quad 27 \le y \le x \le 33$$

เมื่อ $c = 1/\left(6 - 27\log 33/27\right)$ และ

$$f_{X|y}(x) = \frac{1}{x(\log 33 - \log y)} \quad , \quad y \le x \le 33$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = 30$ คือ $E[X|Y=30]$ ซึ่งตัวแปรสุ่ม X เมื่อ $Y = 30$ มี p.d.f. กำหนดโดย

$$f_{X|30}(x) = \frac{3}{x(\log 33 - \log 30)} \quad , \quad 30 \le x \le 33$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad E[X|Y=30] &= \int x\, f_{X|30}(x)\,dx \\
&= \int_{30}^{33} x \frac{1}{x(\log 33 - \log 30)}\,dx \\
&= \frac{3}{\log 33 - \log 30} \quad \approx \quad 31.48
\end{aligned}$$

ความหมายของ $E[X|Y = 30] \approx 31.48$ ก็คือ เมื่อความดันภายนอกเป็น 30 ค่าเฉลี่ยของความดันภายในคือ 31.48 นิ้ว(barometric pressure)

นิยาม 4.6 ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ

1. เราเรียก กราฟของ $E\left[X|y\right]$ หรือค่าเฉลี่ยของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ ว่า **เส้นโค้งความถดถอยของ** X **บน** Y (regression curve of X on Y)

2. เราเรียก กราฟของ $E\left[Y|x\right]$ หรือค่าเฉลี่ยของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ ว่า **เส้นโค้งความถดถอยของ** Y **บน** X (regression curve of Y on X)

ตัวอย่าง 4.24 จากตัวอย่าง 4.17 (X,Y) มี joint p.d.f. กำหนดโดย

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3} \qquad 0 < x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

และจากการคำนวณในตัวอย่าง 4.22 เราได้

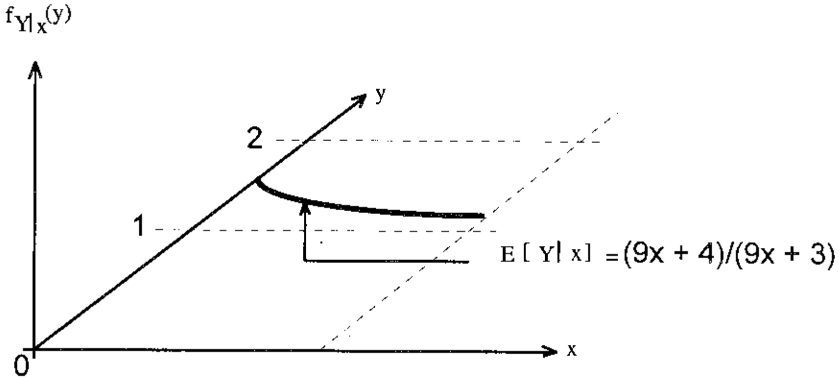
$$E\left[Y|x\right] = \frac{9x+4}{9x+3} \qquad \text{เมื่อกำหนดให้} \quad 0 < x \le 1$$

ในทำนองเดียวกัน เราคำนวณ $E\left[X|y\right]$ ได้โดย

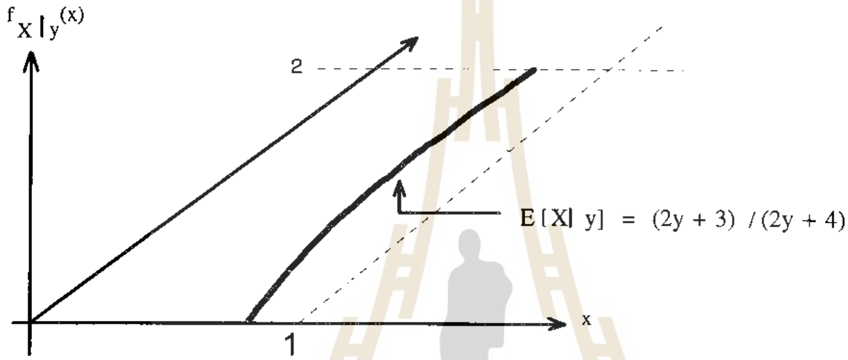
$$E\left[X|y\right] = \int_0^1 x\left(\frac{3x^2 + xy}{1 + y/2}\right)dx$$

$$= \frac{2y+3}{2y+4} \qquad \text{เมื่อกำหนดให้} \quad 0 \le y \le 2$$

เส้นโค้งความถดถอย หรือกราฟของ $E\left[Y|x\right]$ และ $E\left[X|y\right]$ ในระนาบ xy แสดงในรูป 4.10 (a) และ 4.10 (b) ตามลำดับ



รูป 4.10 (a) เส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X



รูป 4.10 (b) เส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y

ตัวอย่าง4.25 จากตัวอย่าง 4.20 conditional p.d.f. ของ X เมื่อกำหนดให้ $Y = y$ เมื่อ X แทนความดันภายใน และ Y แทนความดันภายนอกเครื่องบิน กำหนดโดย

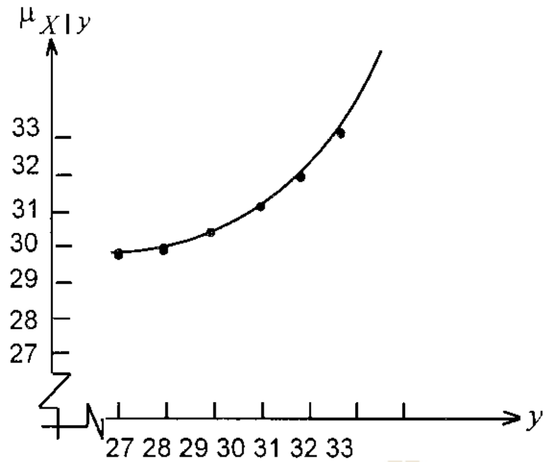
$$f_{X|y}(x) = \frac{1}{x(\log 33 - \log y)}, \quad y \le x \le 33$$

ดังนั้น สมการของเส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y กำหนดโดย

$$E[X|y] = \mu_{X|y} = \int_y^{33} x \frac{1}{x(\log 33 - \log y)} dx$$

$$= \int_y^{33} \frac{1}{\log 33 - \log y} dx$$

$$= \frac{33 - y}{\log 33 - \log y}$$



y	$\mu_{X\|y}$
27	29.90
28	30.43
29	30.95
30	31.47
31	31.98
32	32.50
32.5	32.74

รูป 4.11 (a) แสดงกราฟของ $E\left[X\middle|y\right]$ หรือ $\mu_{X|y}$ ซึ่งเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น

conditional p.d.f. ของ Y เมื่อกำหนดให้ $X = x$ คือ

$$f_{Y|x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$

$$= \frac{c/x}{c(1-27/x)}$$

$$= \frac{1}{x-27}, \quad 27 \le y \le x$$

ดังนั้น สมการของเส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X กำหนดโดย

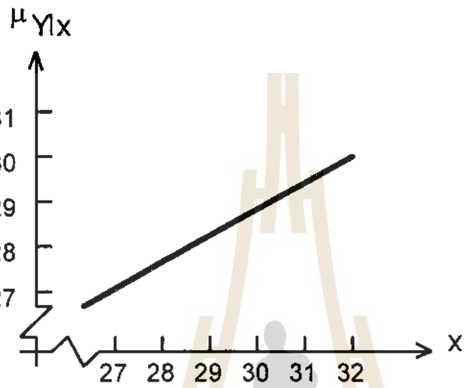
$$E\left[Y\middle|x\right] = \mu_{Y|x} = \int_{27}^{x} y\frac{1}{x-27}\,dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2(x-27)}\right]_{y=27}^{y=x}$$

$$= \frac{x^2-27^2}{2(x-27)} = \frac{1}{2}(x+27)$$

ซึ่งเห็นได้ว่า เส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X เป็นเส้นตรง แสดงในรูป 4.11(b) สมการของเส้นโค้งความถดถอย ใช้หาค่าเฉลี่ยของ X เมื่อกำหนดค่าของ Y มาให้ และในทางกลับกันด้วย เช่น ค่าเฉลี่ยของ Y หรือความดันภายนอก เมื่อกำหนดให้ความดันภายในเป็น 29 คือ $\mu_{Y|x=29}$ แทนค่าได้

$$\mu_{Y|29} \;=\; (1/2)(29+27) \;=\; 28 \text{ นิ้ว}$$



รูป 4.7 (b) แสดงกราฟของ $E\left[Y|x\right]$ หรือ $\mu_{Y|x}$

4.5 ความเป็นอิสระของตัวแปรสุ่ม(Independence of Random Variables)

ความเป็นอิสระของตัวแปรสุ่มเป็นลักษณะพิเศษที่มีประโยชน์ และสำคัญอย่างยิ่งสำหรับสถิติ ในบทที่ 1 เราศึกษากรณีของเหตุการณ์อิสระของแซมเปิลสเปซ สำหรับหัวข้อนี้เราศึกษาแนวคิดสำหรับตัวแปรสุ่มหลายตัวที่มีความเป็นอิสระ เช่น ในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ (X,Y) เมื่อค่าของตัวแปรสุ่ม X ไม่มีอิทธิพลต่อค่าของตัวแปรสุ่ม Y และในทางกลับกันด้วย ในสถานการณ์เช่นนี้เรากล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีความเป็นอิสระ

เพื่อหาแนวทางสำหรับนิยามลักษณะพิเศษนี้ เราพิจารณากรณี (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบเต็มหน่วย โดยให้

A_1 เป็นเหตุการณ์ $X = x$ และ A_2 เป็นเหตุการณ์ $Y = y$

ดังนั้น ความคิดที่ว่าตัวแปรสุ่ม X และ Y มีความเป็นอิสระ ควรมีความหมายว่า เหตุการณ์ A_1 และ A_2 เป็นเหตุการณ์อิสระ จากบทที่ 1 เราได้ว่า

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

แทน A_1 และ A_2 ได้

$$P(X = x \text{ และ } Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

หรือ

$$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

การวิเคราะห์เช่นนี้ ทำให้เห็นว่า ในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบเต็มหน่วย เมื่อตัวแปรสุ่มมีความเป็นอิสระ จะทำให้ได้ว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) เท่ากับผลคูณของ marginal p.d.f. ของ X และ Y ซึ่งนำไปสู่พื้นฐานในการนิยามความเป็นอิสระของตัวแปรสุ่มทั้งในกรณีเต็มหน่วยและต่อเนื่อง

นิยาม 4.7 ความเป็นอิสระของตัวแปรสุ่ม

1. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบเต็มหน่วย โดยมี $p(x, y)$ เป็น joint p.d.f. และมี $p_X(x)$ และ $p_Y(y)$ เป็น marginal p.d.f. ของ X และ Y ตามลำดับ แล้วเรากล่าวว่า X และ Y มีความเป็นอิสระ ก็ต่อเมื่อ

$$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

สำหรับ แต่ละ (x, y) ในพิสัยของ (X, Y)

2. ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่อง โดยมี $f(x, y)$ เป็น joint p.d.f. และมี $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ เป็น marginal p.d.f. ของ X และ Y ตามลำดับ แล้ว เรากล่าวว่า X และ Y มีความเป็นอิสระ ก็ต่อเมื่อ

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

ในบทที่ 1 เมื่อเราศึกษาเหตุการณ์ A_1 และ A_2 ซึ่งเป็นเหตุการณ์อิสระ เราทราบว่า เมื่อเหตุการณ์ A_1 เกิดขึ้น จะไม่มีอิทธิพลต่อความน่าจะเป็นของ A_2 และในทางกลับกันด้วย นั่นคือ

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2) \text{ และ } P(A_1 | A_2) = P(A_1)$$

ในที่นี้ผลจากนิยาม 4.7 และ conditional p.d.f. จะทำให้เราได้ผลในลักษณะเช่นเดียวกัน ดังในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1

1. ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบเต็มหน่วย ดังนั้น X และ Y มีความเป็นอิสระก็ต่อเมื่อ

$$p_{Y|x}(y) = p_Y(y) \tag{4.38}$$

และ

$$p_{X|y}(x) = p_X(x) \tag{4.39}$$

สำหรับแต่ละ (x, y) ในพิสัยของ (X, Y)

2. ให้ (X, Y) เป็นตัวแปร 2 มิติ แบบต่อเนื่อง ดังนั้น X และ Y มีความเป็นอิสระก็ต่อเมื่อ

$$f_{Y|x}(x) = f_Y(y) \tag{4.40}$$

และ

$$f_{X|y}(x) = f_X(x) \tag{4.41}$$

สำหรับแต่ละ (x, y) ในพิสัยของ (X, Y)

พิสูจน์ พิจารณาเฉพาะกรณี (X, Y) แบบเต็มหน่วย จากนิยาม 4.7 X และ Y มีความเป็นอิสระก็ต่อเมื่อ

$$p(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

สำหรับแต่ละ (x, y) ในพิสัยของ (X, Y) ดังนั้น ถ้า $p_X(x) > 0$ เราได้

$$\frac{p(x, y)}{p_X(x)} = p_Y(y)$$

และถ้า $p_Y(y) > 0$ เราได้

$$\frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

นั่นคือ

$$p_{Y|x}(y) = p_Y(y) \quad \text{และ} \quad p_{X|y}(x) = p_X(x)$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี (X,Y) แบบต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 4.26

(a) จากตัวอย่าง 4.2 X แทนแต้มที่น้อยกว่า และ Y แทนแต้มที่สูงกว่าของลูกเต๋า พิจารณา joint p.d.f. และ marginal p.d.f. จากรูป 4.3 เราได้

$$p(1,1) = 1/36 \neq p_X(1)\,p_Y(1) = (11/36)(1/36) = (11/36^2)$$

ดังนั้น X และ Y **ไม่มี** ความเป็นอิสระ

(b) จากตัวอย่าง 4.3 การทำงานของหุ่นยนต์ โดยมี X แทนจำนวนจุดเชื่อมต่อที่มีตำหนิ และ Y แทนจำนวนน็อตที่ไม่ได้หมุนให้แน่น ต่อรถยนต์ 1 คัน พิจารณา joint p.d.f. และ marginal p.d.f. จากตาราง 4.1 และ ตาราง 4.2 เราได้

$$p(0,0) = .840 \neq p_X(0)\,p_Y(0) = (.9)(.91) = .891$$

ดังนั้น X และ Y **ไม่มี**ความเป็นอิสระ

(c) จากตัวอย่าง 4.4 และตัวอย่าง 4.7 X แทนระดับของแคลเซียมในเลือด และ Y แทนระดับคลอเลสเตอรอลในเลือดของคน ๆ หนึ่ง เราได้ว่า

$$f(x,y) = 1/240 = f_X(x)\,f_Y(y) = (1/2)(2/240)$$

สำหรับแต่ละ (x,y) ซึ่ง $8.5 \le x \le 10.5$ และ $120 \le y \le 240$ ดังนั้น X และ Y มีความเป็นอิสระ ผลสรุปอันนี้เป็นผลสืบเนื่องมาจากการที่ X,Y มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ ซึ่งอาจจะฟังดูไม่สมเหตุสมผลทางการแพทย์ มิฉะนั้น เราจะต้องใช้ p.d.f. ใหม่ เพื่อบรรยายพฤติกรรมของตัวแปรสุ่ม (X,Y) ในปัญหานี้

(d) จากตัวอย่าง 4.15 และตัวอย่าง 4.20 X แทนความดันภายใน และ Y แทนความดันภายนอกเครื่องบิน เราได้ว่า

$$f(x, y) = c/x \neq f_X(x)f_Y(y) = c(1 - 27/x)c(\log 33 - \log y)$$

ดังนั้น X และ Y **ไม่มี**ความเป็นอิสระ

(e) ตาราง 4.3 แสดง joint p.d.f. และ marginal p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X และ Y เมื่อ X แทนผลผลิตที่มีตำหนิผลิตโดยเครื่องจักรหมายเลข 1 และ Y แทนผลผลิตที่มีตำหนิผลิตโดยเครื่องจักรหมายเลข 2

y \ x	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	0.02	0.03	0.04	0.01	0.1
1	0.06	0.09	0.12	0.03	0.3
2	0.10	0.15	0.04	0.05	0.5
3	0.02	0.03	0.04	0.01	0.1
$p_X(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1	1

ตาราง 4.3

จากตาราง 4.3 เราได้ว่า $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ สำหรับ $x = 0, 1, 2, 3$ และ $y = 0, 1, 2, 3$ ดังนั้น X และ Y มีความเป็นอิสระ

4.6 ความแปรปรวนร่วมและสหสัมพันธ์ (Covariance and Correlation)

ความเป็นอิสระเป็นลักษณะหนึ่งที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม X และ Y โดยพิจารณาจาก joint p.d.f. และ marginal p.d.f. ในหัวข้อนี้เราศึกษาวิธีการวัด "ระดับของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม" สองวิธีโดยพิจารณาจากค่าของ ความแปรปรวนร่วม (covariance) และค่าของสัมประสิทธิสหสัมพันธ์ (correlation coefficient)

เราให้ μ_X, μ_Y, σ_X^2 และ σ_Y^2 แทนค่าเฉลี่ยของ X, Y ความแปรปรวนของ X, Y ตามลำดับ

นิยาม 4.8 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ **ความแปรปรวนร่วม** เขียนแทนโดย $Cov(X,Y)$ หรือ σ_{XY} มีนิยามดังนี้

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \tag{4.42}$$

และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ เขียนแทนโดย ρ_{XY} มีนิยามดังนี้

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{4.43}$$

หมายเหตุ

1. ค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ เป็นค่าซึ่งไม่มีหน่วย ใช้วัดความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรสุ่ม X และ Y

2. ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นไปในลักษณะที่ว่า เมื่อใดที่ตัวแปรสุ่ม X มีค่าน้อย สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม Y ที่มีค่าน้อยด้วย และตัวแปรสุ่ม X มีค่าใหญ่สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม Y ที่มีค่าใหญ่ด้วย จะได้ว่า $(X-\mu_X)$ และ $(Y-\mu_Y)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน ทำให้ผลคูณ $(X-\mu_X)$ $(Y-\mu_Y)$ ค่าเป็นบวก ดังนั้น $Cov(X,Y)$ มีค่าเป็นบวก และในทางตรงกันข้าม เมื่อใดที่ ตัวแปรสุ่ม X มีค่าน้อย สัมพันธ์กับตัวแปรสุ่ม Y ที่มีค่าใหญ่ และในทางกลับกันด้วย จะได้ว่า $(X-\mu_X)$ และ $(Y-\mu_Y)$ มีเครื่องหมายต่างกัน ทำให้ผลคูณของ $(X-\mu_X)$ และ $(Y-\mu_Y)$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น $Cov(X,Y)$ มีค่าเป็นลบ ในลักษณะเช่นนี้ $Cov(X,Y)$ เป็นค่าวัดหรือบอกแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงของค่าของ X เทียบกับค่าของ Y หรือค่าของ Y เทียบ กับค่าของ X

ในสมการ (4.42) ถ้าเราคูณ $(X-\mu_X)$ $(Y-\mu_Y)$ ก่อนการหาค่าคาดหมายเราจะได้สูตรสำหรับคำนวณความแปรปรวนร่วม ดังนี้คือ

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{4.44}$$

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ ถ้า X และ Y มีความเป็นอิสระแล้ว

$$E[XY] = E[X]E[Y] \tag{4.45}$$

พิสูจน์ พิจารณากรณี (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง การพิสูจน์ในกรณีเต็มหน่วยจะคล้ายกัน ถ้า X และ Y มีความเป็นอิสระ

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, y\, f_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy\right] \\ &= E[X]E[Y] \end{aligned}$$

ผลที่ตามของทฤษฎีบทนี้คือ ถ้า X และ Y **มีความเป็นอิสระ** แล้วจากสมการ (4.44) และสมการ (4.43) เราได้ว่า

$$Cov(X,Y) = 0 \quad \text{และ} \quad \rho_{XY} = 0$$

แต่ในทางกลับกันของข้อความนี้ไม่เป็นจริง นั่นคือ ถ้าความแปรปรวนร่วมเป็นศูนย์ ไม่ได้หมายความว่า ตัวแปรสุ่มมีความเป็นอิสระ เพียงแต่กล่าวว่าตัวแปรสุ่ม X และ Y **ไม่มีสหสัมพันธ์** (uncorrelated)

ทฤษฎีบท 4.3 สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ_{XY} สำหรับตัวแปรสุ่ม X และ Y ใด ๆ มีค่าอยู่ในช่วง $[-1,1]$ นั่นคือ $-1 \le \rho_{XY} \le 1$

พิสูจน์ พิจารณา Q ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรจริง t นิยามโดย

$$\begin{aligned} Q(t) &= E\left[\left((X-\mu_X)+t(Y-\mu_Y)\right)^2\right] \\ &= E\left[(X-\mu_X)^2\right] + 2t\,E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] + t^2 E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] \end{aligned}$$

เพราะว่า $\left((X-\mu_X)+t(Y-\mu_Y)\right)^2 \ge 0 \quad \therefore \; Q(t) \ge 0$

ดังนั้น ดิสคริมิแนนต์ (discriminant) ของ $Q(t) \leq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\left\{2\,E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]\right\}^2 - 4\,E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]E\left[(X-\mu_X)^2\right] \leq 0$$

(เขียน $Q(t) = at^2 + bt + c$ กราฟของ $Q(t)$ แสดงในรูป 4.12
ดิสคริมิแนนต์ของ $Q(t) = b^2 - 4ac$)

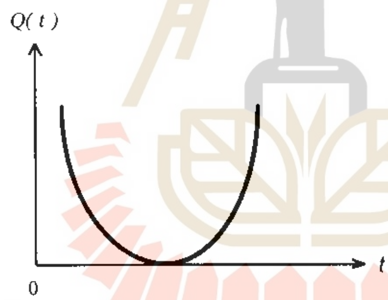
นั่นคือ

$$4\left[Cov(X,Y)\right]^2 - 4\,V(Y)V(X) \leq 0$$

หรือ

$$\frac{\left[Cov(X,Y)\right]^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$$

ดังนั้น $\rho_{XY}^2 \leq 1$ หรือ $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$



รูป 4.12

ทฤษฎีบทต่อไป แสดงให้เห็นว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ ใช้วัดความสัมพันธ์เชิงเส้น ระหว่างตัวแปรสุ่มได้อย่างไร นั่นคือ

1. ถ้า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างตัวแปรสุ่ม แล้ว ρ_{XY} มีค่าเป็น 1 หรือ -1

2. ถ้า $\rho_{XY} = 1$ หรือ -1 แล้ว X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยมี ρ_{XY} เป็นสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ดังนั้น

$$\left|\rho_{XY}\right| = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } Y = a + bX$$

สำหรับบางจำนวนจริง a และ $b \neq 0$

พิสูจน์ จะพิสูจน์ว่า ถ้า $\left|\rho_{XY}\right| = 1$ แล้ว X และ Y คล้อยตามสมการเส้นตรง ส่วนบทกลับจะเว้นไว้ เพราะว่า การพิสูจน์จะตรงไปตรงมา ดังนั้น เราสมมติว่า $\left|\rho_{XY}\right| = 1$ แล้วย้อนขั้นตอนการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 4.3 โดยแทนอสมการด้วยสมการในแต่ละขั้นตอนจนกระทั่งเราได้ว่า

$$E\left[(W + tZ)^2\right] = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad W = X - \mu_X \text{ และ } Z = Y - \mu_Y$$

การที่ตัวแปรสุ่ม $(W + tZ)^2$ ซึ่งมีค่าไม่เป็นลบ มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ ย่อมหมายความว่า ตัวแปรสุ่ม $(W + tZ)^2$ ต้องเป็นศูนย์ และมีความน่าจะเป็นเท่ากับหนึ่ง นั่นคือ

$$P\left((W + tZ)^2 = 0\right) = 1$$

หรือ

$$P\left((W + tZ) = 0\right) = 1$$

$$\therefore \quad P(W = -tZ) = 1$$

เมื่อแทน $W = X - \mu_X$ และ $Z = Y - \mu_Y$ เราได้

$$P\left(X - \mu_X = -t(Y - \mu_Y)\right) = 1$$

เพราะว่า t, μ_X, μ_Y เป็นค่าคงที่และเป็นจำนวนจริง เราสามารถเขียนสมการ

$$X - \mu_X = -t(Y - \mu_Y)$$

ในรูป $Y = a + bX$ โดยให้

$$a = -\mu_X - t\mu_Y \quad \text{และ} \quad b = -1/t\,(t \neq 0)$$

ดังนั้น

$$P(Y = a + bX) = 1$$

ซึ่งมีความหมายว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จุดใดๆ ก็ตามที่ไม่อยู่บนเส้นตรง $Y = a + bX$ เป็นศูนย์ นั่นคือ ตัวแปรสุ่ม X และ Y ต้องคล้อยตามสมการเส้นตรง

$$Y = a + bX$$

หรือกล่าวว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

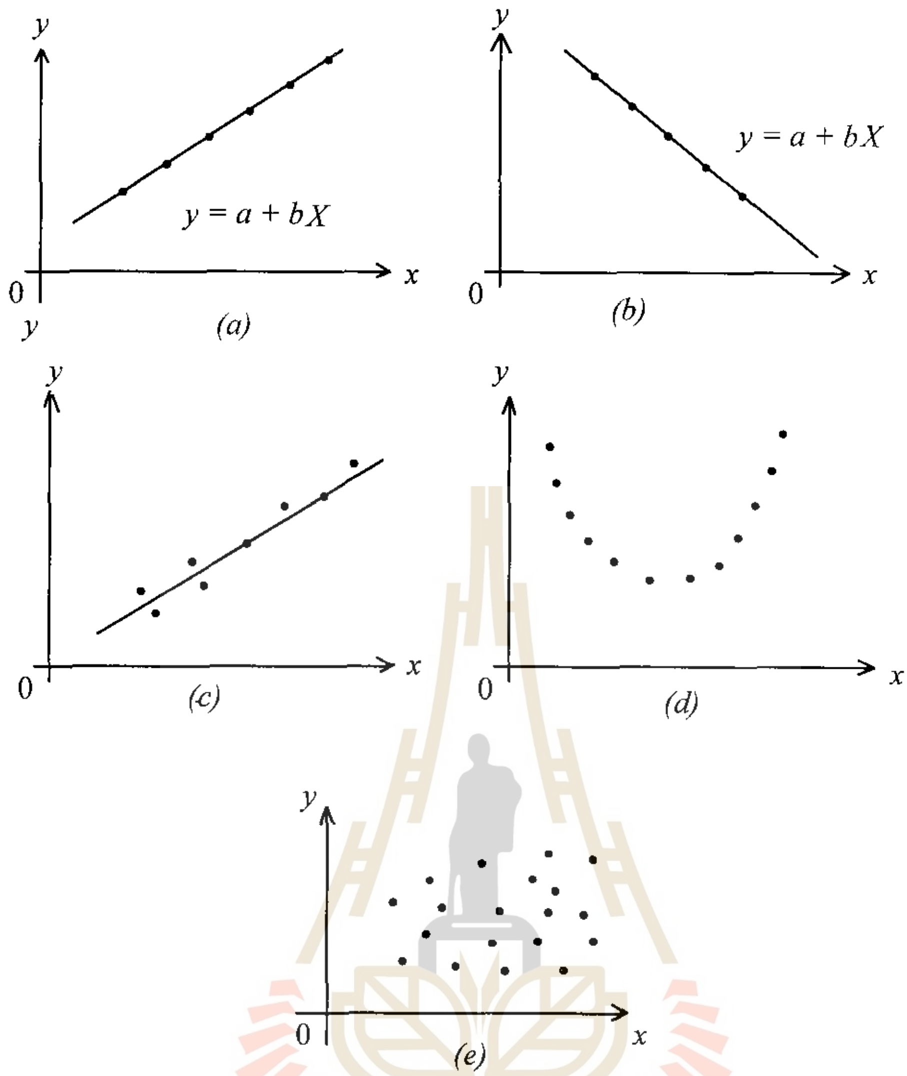
หมายเหตุ

1. ถ้า $\rho_{XY} = 1$ แล้ว เรากล่าวว่า X และ Y **มีสหสัมพันธ์เชิงบวก** (perfect positive correlation) นั่นคือ โดยที่ $b > 0$ ซึ่งมีความหมายว่า ค่าของ X และ Y เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกัน หรือ X มีค่าน้อย Y มีค่าน้อยด้วย และ X มีค่าใหญ่ Y มีค่าใหญ่ด้วย

2. ถ้า $\rho_{XY} = -1$ แล้วเรากล่าวว่า X และ Y **มีสหสัมพันธ์เชิงลบ** (perfect negative correlation) นั่นคือ $Y = a + bX$ โดยที่ $b < 0$ ซึ่งมีความหมายว่า ค่าของ X และ Y เปลี่ยนแปลงไปในทิศทางตรงกันข้ามกัน หรือ X มีค่าน้อย Y มีค่าใหญ่ และ X มีค่าใหญ่แต่ Y มีค่าน้อย อย่างไรก็ตาม ค่าของ ρ_{XY} จะไม่ได้เท่ากับ 1 หรือ - 1 พอดี การตีความหมาย ความสัมพันธ์ของ X และ Y เพียงแต่ ρ_{XY} มีค่าใกล้ 1 หรือ - 1 เราสามารถบอกได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y มีแนวโน้มเป็นเชิงเส้น

3. ในกรณี $\rho_{XY} = 0$ เรากล่าวว่า X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์ แต่ไม่ได้หมายความว่า X และ Y ไม่มีความสัมพันธ์กันเลย การที่ $\rho_{XY} = 0$ นั้น เพียงแต่ชี้ให้เห็นว่า ถ้า X และ Y มีความสัมพันธ์แล้ว ความสัมพันธ์ระหว่าง X และ Y ไม่เป็นเชิงเส้น

4. รูป 4.13 (a) - (e) แสดงจุด (x, y) ต่าง ๆ ในพิสัยของ (X, Y) ในระนาบ xy



รูป 4.13 (a)-(e)

(a) สหสัมพันธ์เชิงบวก : $\rho = 1$, $Y = a + bX$, $b > 0$ จุด (x, y) อยู่บนเส้นตรง ซึ่งมีความชันเป็นบวก

(b) สหสัมพันธ์เชิงลบ : $\rho = -1, Y = a + bX$, $b < 0$ จุด (x, y) อยู่บนเส้นตรง ซึ่งมีความชันเป็นลบ

(c) ρ มีค่าใกล้ 1 : จุด (x, y) อยู่ในแนวที่เกือบเป็นเส้นตรง

(d) $\rho = 0$: X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์ แนวของจุด (x, y) แสดงให้เห็นว่า X และ Y มีความสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้น

(e) $\rho = 0$: X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์ จุด (x, y) อยู่อย่างกระจัดกระจาย

ตัวอย่าง 4.27 จากตัวอย่างการทำงานของหุ่นยนต์ เราต้องการหาสหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนจำนวนจุดเชื่อมต่อที่มีตำหนิ และตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งแทนจำนวนน็อตที่ไม่ได้หมุนให้แน่น ในการประกอบรถยนต์แต่ละคัน เราใช้ตาราง 4.2 คำนวณหา $E\left[X^2\right]$ และ $E\left[Y^2\right]$ ดังนี้

$$E\left[X^2\right] = 0^2(.90) + 1^2(.08) + 2^2(.02) = .16$$

$$E\left[Y^2\right] = 0^2(.910) + 1^2(.045) + 2^2(.032) = .29$$

ในตัวอย่าง 4.13 เราได้คำนวณ $E[X] = .12$ และ $E[Y] = .148$ นั่นคือ $\mu_X = .12$ และ $\mu_Y = .148$ ดังนั้น

$$V(X) = \sigma_X{}^2 = E\left[X^2\right] - (\mu_X)^2 = .16 - (.12)^2 = .146$$

$$V(Y) = \sigma_Y{}^2 = E\left[Y^2\right] - (\mu_Y)^2 = .29 - (.148)^2 = .268$$

และในตัวอย่าง 4.13 เราได้คำนวณ $E[XY] = .064$ ดังนั้น จากสมการ (4.44)

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = .064 - (.12)(.148) = .046$$

และจากสมการ (4.43)

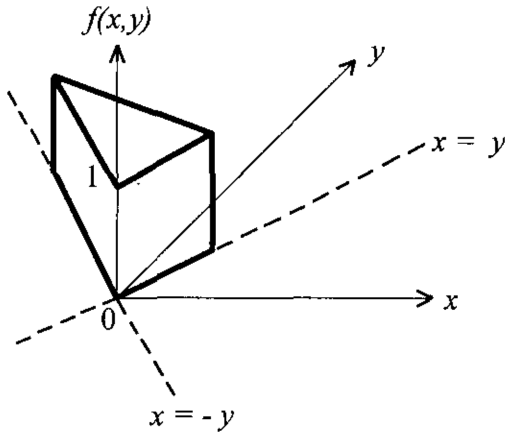
$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \approx .23$$

ค่าของ $\rho_{XY} \approx .23$ ซึ่งไม่ใกล้หนึ่ง ทำให้เราคาดการณ์ได้ว่า ค่าของตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่สังเกตได้ จะไม่แสดงความสัมพันธ์แบบเชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.28 ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี joint p.d.f.

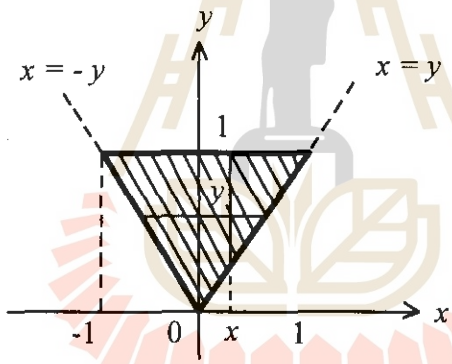
$$f(x, y) = 1 \text{ สำหรับ } -y < x < y,\ 0 < y < 1$$

กราฟของ $f(x, y)$ แสดงในรูป 4.14 (a)



รูป 4.14 (a)

บริเวณสามเหลี่ยมที่แรเงาในรูป 4.14 (b) คือ พิสัยของ (X, Y) พร้อมกับแสดงช่วงของการอินทิเกรตเพื่อหา marginal p.d.f. ของ X และ Y



รูป 4.14 (b)

สำหรับ $-1 < x < 0$, $f(x) = \int_{-x}^{1} (1)\,dy = 1 - x$

สำหรับ $0 < y < 1$, $f_Y(y) = \int_{-y}^{y} (1)\,dy = 2y$

จะเห็นได้ว่า $f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ $\therefore$ X และ Y ไม่มีความเป็นอิสระ

เพื่อคำนวณหา $Cov(X,Y)$ เราคำนวณหา $E[X]$, $E[Y]$ และ $E[XY]$

$$E[X] = \int_0^1 x(1-x)dx + \int_{-1}^0 x(1+x)dx = 0$$

$$E[Y] = \int_0^1 y(2y)dy = \frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_{-y}^{y} xy(1)\,dx\,dy = 0$$

ดังนั้น

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0 - 0\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

และ $\rho_{XY} = 0$

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบท 4.2 ไม่จริง และ $\rho_{XY} = 0$ หมายความว่า X และ Y ไม่มีสหสัมพันธ์ ถึงแม้ว่า X และ Y จะไม่มีความเป็นอิสระ

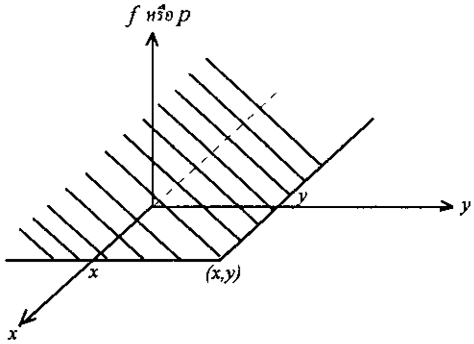
4.7 ฟังก์ชันแจกแจงของตัวแปรสุ่ม 2 มิติ

(The Distribution Function for Two- Dimensional Random Variables)

F เป็นฟังก์ชันแจกแจงของตัวแปรสุ่ม (X,Y) โดยกำหนดให้

$$F(X,Y) = P(X \le x \text{ และ } Y \le y) \tag{4.46}$$

ซึ่งคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ซึ่งแทนด้วยบริเวณแรเงาในรูป 4.15 บริเวณแรเงาอยู่ในระนาบ xy



รูป 4.15

ถ้า (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบเต็มหน่วย แล้ว

$$F(x,y) = \sum_{t_1=-\infty}^{y} \sum_{t_2=-\infty}^{x} p(t_1,t_2) \tag{4.47}$$

และถ้า (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่อง แล้ว

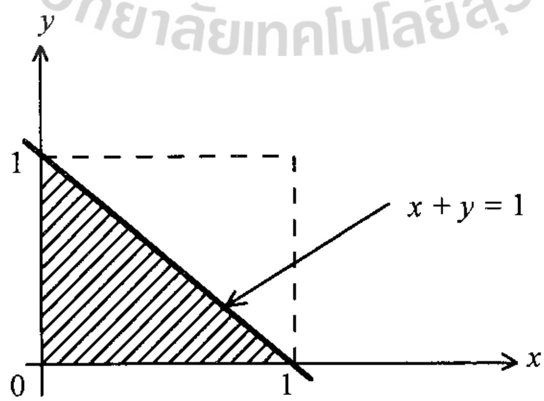
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{4.48}$$

$F(x,y)$ นิยามสำหรับจุด (x,y) ใด ๆ ในระนาบ ดังนั้น ในการคำนวณหา $F(x,y)$ เราจะต้องรอบคอบ เพื่อพิจารณาบริเวณของการอินทิเกรตในกรณีต่อเนื่อง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.29 ตัวแปรสุ่ม (x,y) แบบต่อเนื่อง มี joint p.d.f. ดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & x>0, \quad y>0, \quad x+y<1 \\ 0 & \text{สำหรับจุด } (x,y) \text{ อื่น ๆ} \end{cases}$$

พิสัยของ (X,Y) เป็นบริเวณของสามเหลี่ยมในระนาบ xy ที่แรเงาในรูป 4.16 พิจารณาการหา $F(x,y)$ สำหรับแต่ละจุด (x,y) ในแต่ละบริเวณในระนาบ xy ซึ่งเราแบ่งเป็นกรณีต่างๆ ดังต่อไปนี้



รูป 4.16

สำหรับแต่ละจุด (x, y) ในระนาบ

(a) เมื่อ $x \le 0,\ F(x, y) = 0$

(b) เมื่อ $y \le 0,\ F(x, y) = 0$

(c) เมื่อ $0 < x < 1$ และ $0 < y < 1 - x$

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^x 24 t_1 t_2 \, dt_1 \, dt_2 = 6x^2 y^2$$

(d) เมื่อ $0 < x < 1$ และ $1 - x \le y \le 1$

$$F(x, y) = \int_0^{1-x} \int_0^x 24 t_1 t_2 \, dt_1 \, dt_2 + \int_{1-x}^y \int_0^{1-t_2} 24 t_1 t_2 \, dt_1 \, dt_2$$

$$= 6y^2 - 8y^3 + 3y^4 + 6(1 - x)^2 (x^2 - 1) + 8(1 - x)^3 - 3(1 - x)^4$$

(e) เมื่อ $0 < x < 1$ และ $y > 1$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^{1-t_1} 24 t_1 t_2 \, dt_2 \, dt_1 = 6x^2 - 8x^3 + 3x^4$$

(f) เมื่อ $0 \le y \le 1$ และ $x \ge 1$

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^{1-t_2} 24 t_1 t_2 \, dt_1 \, dt_2$$

$$= 6y^2 - 8y^3 + 3y^4$$

(g) เมื่อ $x \ge 1$ และ $y \ge 1$

$$F(x, y) = 1$$

คุณสมบัติของฟังก์ชันแจกแจง จะคล้ายกันกับกรณีของฟังก์ชันแจกแจงของตัวแปรสุ่มตัวเดียว โดยเฉพาะเมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เราได้ว่า ถ้าอนุพันธ์ของ F หาค่าได้ แล้ว

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y) = \text{joint p.d.f. ของ } (X, Y)$$

4.8 การแปลงของตัวแปรหลายตัวแปร (Transformation of Variables)

ในบทที่ 3 เราศึกษาการหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นหรือ p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มตัวเดียว ในที่นี้เราจะศึกษาวิธีการหา p.d.f. ของตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม 2 มิติ

ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ และให้ $Z = H(X, Y)$ เพราะว่าทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม ดังนั้น Z เป็นตัวแปรสุ่มด้วย โดยมี R_Z เป็นพิสัย วิธีการหา p.d.f. ของ Z ค่อนข้างจะยากกว่าในกรณีของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มตัวเดียว อย่างไรก็ตาม เมื่อ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบเต็มหน่วย กระบวนการหา p.d.f. ของ Z จะตรงไปตรงมา ถ้า X และ Y มีค่าจำนวนไม่มากนัก พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.30 ถ้า X แทนจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิ ซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรหมายเลข 1 ในเวลา 1 ชั่วโมง และ Y แทนจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรหมายเลข 2 ในเวลา 1 ชั่วโมงเดียวกัน joint p.d.f. ของ (X, Y) และ marginal p.d.f. ของ X และ Y แสดงในตาราง 4.4 (เช่นเดียวกันกับตาราง 4.3 ในตัวอย่าง 4.26 (e)) สมมติว่า

$$Z = H(X, Y) = 2x + y$$

ดังนั้น

$$R_Z = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

เพราะว่า $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $R_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

ต่อไปพิจารณาหา p.d.f. ของ Z สำหรับแต่ละค่าของ Z ใน R_Z เช่น

$$P(Z = 0) = p_Z(0), \quad Z = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } X = 0 \text{ และ } Y = 0$$
$$\therefore \quad p_Z(0) = p(0,0) = .02$$

$$P(Z = 1) = p_Z(1), \quad Z = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } X = 0 \text{ และ } Y = 1$$
$$\therefore \quad p_Z(1) = p(0,1) = .06$$

$$p(Z = 2) = p_Z(2), \; Z = 2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } X = 0 \text{ และ } Y = 2 \text{ หรือ } X = 1, \; Y = 0$$

ดังนั้น

$$p_Z(2) = p(0,2) + p(1,0) = .10 + .03 \qquad \therefore \quad p_Z(2) = .13$$

พิจารณาในทำนองเดียวกัน เราจะได้ตารางค่า p.d.f. ของ Z ดังนี้

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_Z(z_i)$	.02	.06	.03	.11	.19	.15	.21	.07	.05	.01

y \ x	0	1	2	3	$p_Y(y)$
0	0.02	0.03	0.04	0.01	0.1
1	0.06	0.09	0.12	0.03	0.3
2	0.10	0.15	0.20	0.05	0.5
3	0.02	0.03	0.04	0.01	0.1
$p_X(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1	1

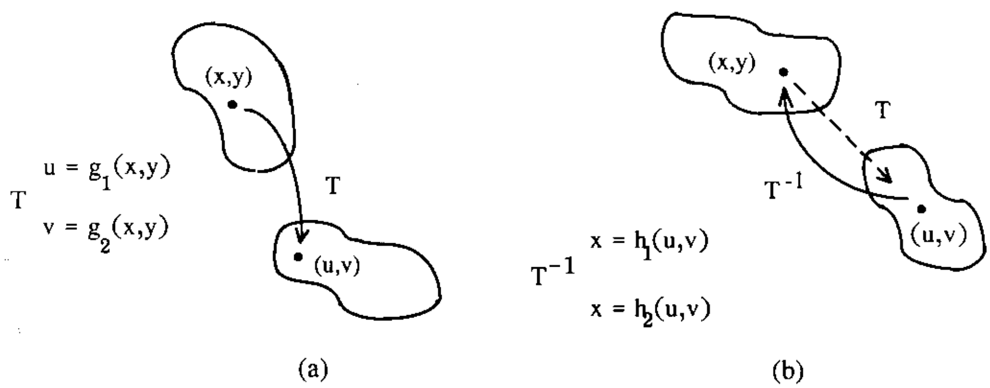
ตาราง 4.4

ในกรณี (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ $H(X, Y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $Z = H(X, Y)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง วิธีการหา p.d.f. ของ Z เราอาศัยกระบวนการการแปลงของตัวแปร (transformation of variables) ดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

พิจารณาในระนาบ xy และให้ u และ v เป็นตัวแปร ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ x และ y นั่นคือ

$$u = g_1(x, y) \quad \text{และ} \quad v = g_2(x, y) \tag{4.49}$$

เราเรียกฟังก์ชันทั้งสองนี้ว่า **การแปลง (transformation)** ซึ่งเขียนแทนด้วย T โดย T ทำหน้าที่ **"ส่ง" (map)** จุด (x, y) ในระนาบ xy ไปยังจุด (u, v) ในระนาบ uv ดังแสดงในรูป 4.15 (a)



รูป 4.15

สมมติว่า g_1 และ g_2 ต่างก็มีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x และ y ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จาโคเบียนของ T (Jacobian of T) เขียนแทนด้วย J_T คือ ค่าของตัวกำหนดต่อไปนี้

$$J_T = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{4.50}$$

พิจารณาหาค่า J_T จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.31 พิจารณาการแปลง T จากระนาบ xy ไปยังระนาบ uv ซึ่งกำหนดโดย

$$u = g_1(x, y) = (3y - x)/6$$

$$v = g_2(x, y) = x/3$$

จาโคเบียนของ T คือ

$$J_T = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/6 & 1/2 \\ 1/3 & 0 \end{vmatrix} = (-1/6)(0) - (1/2)(1/3) = -1/6$$

ถ้าการแปลง T เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to- one) แล้ว T เป็นการแปลงที่ผกผันได้ (invertible) เขียนแทนการแปลงผกผันของ T ด้วย T^{-1} นั่นคือ ถ้า T ส่งจุด (x, y) ไปยัง (u, v) แล้ว T^{-1} ส่งจุด (u, v) ไปยังจุด (x, y) ดังรูป 4.15 (b)

นิยาม T^{-1} โดยสมการต่อไปนี้

$$x = h_1(u, v) \quad \text{และ} \quad y = h_2(u, v) \tag{4.51}$$

เมื่อ h_1 และ h_2 มีอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น จาโคเบียนของ T^{-1} คือ

$$J_{T^{-1}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{4.52}$$

เราจะใช้ $J_{T^{-1}}$ สำหรับการหา p.d.f. ของ ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม 2 มิติแบบต่อเนื่อง

สมมติว่า เรามีตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y โดยทราบว่า joint p.d.f. ของ (X,Y) คือ $f(x,y)$ ให้ U และ V เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ X และ Y เราต้องการหา joint p.d.f. ของ (U,V) โดยอาศัยรูปแบบของ $f(x,y)$ วิธีการมีดังต่อไปนี้

กำหนดให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง มี joint p.d.f. = $f(x,y)$

1. ให้ $U = g_1(X,Y)$ และ $V = g_2(X,Y)$
   เมื่อ g_1 และ g_2 นิยามการแปลง T แบบหนึ่งต่อหนึ่ง

2. ให้ $X = h_1(U,V)$ และ $Y = h_2(U,V)$
   เมื่อ h_1 และ h_2 มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

3. คำนวณหา $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

4. joint p.d.f. ของ (U,V) เขียนแทนด้วย $l(u,v)$ หาได้ดังนี้คือ

$$l(u,v) = f\left(h_1(u,v), h_2(u,v)\right)|J| \tag{4.53}$$

5. marginal p.d.f. ของ U และ V หาได้ดังนี้

$$l_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} l(u,v)\,dv \tag{4.54}$$

$$l_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} l(u,v)\,du \tag{4.55}$$

ตัวอย่าง 4.31 สมมติว่า ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีความเป็นอิสระ และมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนช่วง (0, 2) และ (0, 3) ตามลำดับ joint p.d.f. ของ (X,Y) คือ

$$f(x,y) = 1/6, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3$$

ให้ $U = X - Y$ และ $V = X + Y$ พิจารณาหา joint p.d.f. ของ (U,V) ดังนี้

ให้ T เป็นการแปลงจากระนาบ xy ไปยังระนาบ uv โดยมีสมการกำหนดการแปลง T ดังนี้

$$T:\begin{cases} U = X - Y \\ V = X + Y \end{cases} \tag{4.56}$$

จะเห็นได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น เพราะว่า ทั้ง U และ V เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ X และ Y จากพีชคณิตเชิงเส้นเราทราบว่า การแปลงเชิงเส้นเป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อไรก็ตามที่ตัวกำหนดของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของการแปลงไม่เป็นศูนย์ ในที่นี้

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (1)(-1) = 2 \neq 0$$

ดังนั้น T เป็นการแปลงแบบผกผันได้ การแปลงผกผันของ T หรือ T^{-1} หาได้โดยการแก้สมการ (4.56) เพื่อหา X,Y ในรูปของ U,V ซึ่งจะได้

$$T^{-1}:\begin{cases} X = (U+V)/2 \\ Y = (V-U)/2 \end{cases} \tag{457}$$

และคำนวณหาจาโคเบียนของ T^{-1}

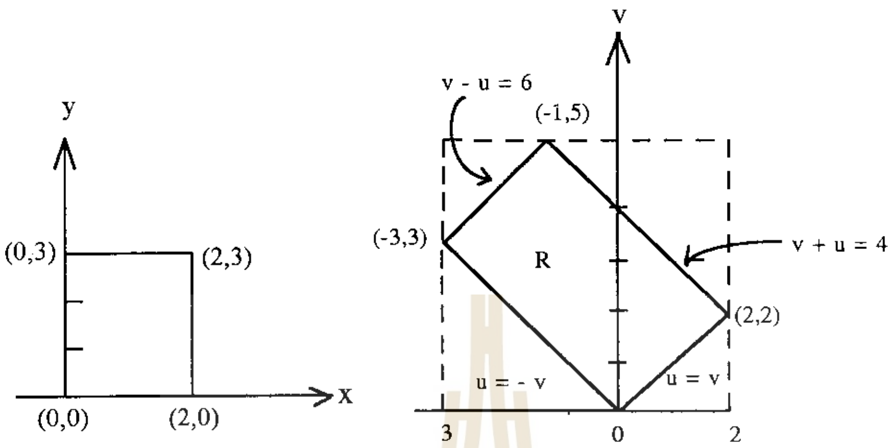
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = (1/2)(1/2) - (-1/2)(1/2)$$

$$\therefore \quad J = 1/2$$

จากสมการ (4.53)

$$l(u,v) = f\left((u+v)/2, (u-v)/2\right)|J| = (1/6)\,(1/2) = 1/12$$

ต่อไปเราจะพิจารณาหาพิสัยของ (U,V) เพราะว่า $0 < x < 2$ และ $0 < y < 3$ ดังนั้น พิสัยของ (X,Y) คือ บริเวณในสี่เหลี่ยมผืนผ้าแสดงในรูป 4.16 (a)



(a) ระนาบ xy (b) ระนาบ uv

รูป 4.16

เพราะว่า $U = X - Y$ และ $V = X + Y$ ดังนั้น $-3 < U < 2$ และ $0 < V < 5$ และจุด (u,v) ต้องสอดคล้องตามอสมการ

$$0 < u + v < 2 \text{ และ } 0 < (v - u)/2 < 3$$

นั่นคือ

$$0 < u + v < 4 \text{ และ } 0 < v - u < 6$$

ซึ่งจะได้ว่า จุด (u,v) ที่คล้อยตามอสมการคู่นี้คือ จุด (u,v) ภายในบริเวณ R แสดงในรูป 4.16 (b) ดังนั้น joint p.d.f. ของ (U,V) คือ

$$l(u,v) = 1/12 \text{ สำหรับ } (u,v) \in R$$

และสามารถแสดงได้ว่า $l(u,v)$ มีคุณสมบัติของ joint p.d.f. ทุกประการ

ตัวอย่าง 4.32 พิจารณาตัวแปรสุ่ม แบบต่อเนื่อง (X,Y) ซึ่งมี joint p.d.f.

$$f(x,y) = 4e^{-2(x+y)} \quad x > 0, \quad y > 0$$

ถ้า $U = X/Y$ แล้วเราพิจารณา p.d.f. ของ U โดยเราจะต้องเลือกฟังก์ชันของ X และ Y อีกหนึ่งฟังก์ชัน ในที่นี้เราเลือก $V = X+Y$ ดังนั้น เราได้การแปลง T จากระนาบ xy ไปยังระนาบ uv กำหนดโดยสมการ

$$T:\begin{cases} U = X/Y \\ V = X+Y \end{cases}$$

จะเห็นได้ว่า $u = x/y > 0$ และ $v = x+y > 0$ เพราะว่า $x > 0$ และ $y > 0$ พิจารณาในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 4.31 เราจะได้ว่า T เป็นการแปลงแบบผกผันได้ และโดยการแก้สมการหา X และ Y ในรูปของ U และ V เราได้ว่า

$$T^{-1}:\begin{cases} X = UV/(1+U) \\ Y = V/(1+U) \end{cases}$$

นั่นคือ $x = uv/(1+u)$ และ $y = v/(1+u)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v}{(1+u)^2} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{(1+u)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-v}{(1+u)^2} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{(1+u)}$$

และ จาโคเบียนของ T^{-1} มีค่าดังนี้

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{v}{(1+u)^3} + \frac{uv}{(1+u)^3} = \frac{v}{(1+u)^2}$$

จากสมการ (4.53)

$$\begin{aligned} l(u,v) &= f\left(uv/(1+u), v/(1+u)\right)\,|J| \\ &= 4e^{-2[uv/(1+u)+v/(1+u)]}(v/(1+u)^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad l(u,v) = 4e^{-2v}(v/(1+u)^2)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติเป็น joint p.d.f. ของ (U,V) แต่ในปัญหานี้ เราต้องการหา p.d.f. ของ U เราเพียงแต่ใช้ V ปีนฟังก์ชันเสริมเพื่อหา joint p.d.f. ของ (U,V) ก่อน แล้วใช้ joint p.d.f. ของ (U,V) หา marginal p.d.f. ของ U ซึ่งก็คือ p.d.f. ของ U นั่นเอง

$$
\begin{aligned}
l_U(u) &= \int_0^\infty l(u,v)\,dv = \int_0^\infty 4e^{-2v}\left(v/(1+u)^2\right)dv \\
&= \frac{1}{(1+u)^2}\int_0^\infty 4v e^{-2v}\,dv \\
&= \frac{1}{(1+u)^2}(1) = \frac{1}{(1+u)^2} \qquad \text{สำหรับ } u > 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น p.d.f. ของ U คือ $l_U(u) = 1/(1+u)^2$ เมื่อ $u = x/y$ และ $u > 0$

4.9 การแจกแจงร่วมของตัวแปรสุ่มมากกว่า 2 มิติ

เราจะกล่าวโดยย่อสำหรับหัวข้อนี้ เนื่องจากในกรณีของตัวแปรสุ่มมากกว่า 2 มิติ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ นิยามต่าง ๆ จากกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ สามารถขยายมาครอบคลุมในกรณีนี้ได้

1. กรณี $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย

(a) joint p.d.f. ของ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ นิยามโดย

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

สำหรับจุด $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในพิสัยของ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ โดยที่คุณสมบัติของ $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเหมือนกับคุณสมบัติของ joint p.d.f. ในนิยาม 4.2

(b) marginal p.d.f. ของ X_k สำหรับ $1 \le k \le n$ หาได้โดยการบวกค่าของ $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในตัวแปร x_i ทั้งหมด ยกเว้น x_k นั่นคือ

$$p_{X_k}(x_k) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

สำหรับแต่ละ $x_k \in R_{X_k}$

(c) joint marginal p.d.f. ของ X_j และ X_k สำหรับ $1 \le j, k \le n$ หาได้โดยการบวกค่าของ $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ในตัวแปร x_i ทั้งหมด ยกเว้น x_j และ x_k นั่นคือ

$$p_{X_j X_k}(x_j, x_k) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \cdots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

สำหรับแต่ละ $x_j \in R_{X_j}$ และ $x_k \in R_{X_k}$ ในทำนองเดียวกันสำหรับการหา joint marginal p.d.f. ของตัวแปรสุ่มมากกว่า 2 ตัวแปร

(d) ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความเป็นอิสระซึ่งกันและกัน (mutually independent) ก็ต่อเมื่อ

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \ldots p_{X_n}(x_n)$$

สำหรับแต่ละ $x_1 \in R_{X1}, x_2 \in R_{X2}, \ldots, x_n \in R_{Xn}$

(e) ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มตัวใดตัวหนึ่ง เช่น X_1 หาได้ในทำนองเดียวกันกับ กรณีของตัวแปรสุ่ม 2 มิติ นั่นคือ

$$E[X_1] = \mu_1 = \sum_{x_1} x_1 \, p_{X_1}(x_1)$$

$$= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} x_1 p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$E\left[(X_1 - \mu_1)^2\right] = \sigma_1^{\,2} = \sum_{x_1} (x_1 - \mu_1)^2 \, p_{X1}(x_1)$$

$$= \sum_{x_1} x_1^{\,2} \, p_{X1}(x_1) - (\mu_1)^2$$

$$= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} x_1^{\,2} \, p(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (\mu_1)^2$$

2. กรณี $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ในที่นี้เราพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ทั้ง n ตัวแปรเป็นแบบต่อเนื่องทั้งหมด สมมติว่า $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ มี joint p.d.f. เป็น $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ซึ่งมีคุณสมบัติเหมือนในกรณี 2 มิติ ในนิยาม 4.2 นั่นคือ

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = 1$

3. $P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \ldots, a_n \leq X_n \leq b_n)$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

สำหรับ marginal p.d.f. ของ X_k หรือ joint marginal p.d.f. ของตัวแปรมากกว่า 1 ตัวแปร วิธีการหาจะคล้ายในกรณีแบบเต็มหน่วย เพียงแต่แทนการบวกในกรณีเต็มหน่วยด้วยการอินทิเกรต เช่น

marginal p.d.f. ของ X_k หาได้โดยการอินทิเกรต $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เทียบกับตัวแปร x_i ทั้งหมดยกเว้น x_k นั่นคือ เราได้ อินทิกรัล $n-1$ ชั้น ดังนี้

$$f_{X_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \ldots dx_n$$

สำหรับนิยามอื่น ๆ จะเป็นไปในทำนองเดียวกัน

สิ่งที่เราจะกล่าวเพิ่มเติมคือ ในกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ เราสามารถเขียนภาพประกอบคำอธิบายได้ หรือสามารถให้ความหมายในเชิงเรขาคณิตได้ สำหรับกรณีตัวแปรสุ่ม n มิติ เราไม่สามารถเขียนภาพเชิงเรขาคณิตประกอบคำอธิบายได้ อย่างไรก็ตามmarginal p.d.f. ของแต่ละตัวแปรสุ่มเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวหรือเป็นลักษณะมิติเดียว รวมทั้งconditional p.d.f. ของตัวแปรสุ่มตัวใดตัวหนึ่ง เมื่อกำหนดค่าของตัวแปรสุ่มที่เหลืออีก $(n-1)$ ตัวแปรมาให้ ก็มีลักษณะมิติเดียวด้วย

ตัวอย่าง เช่น

conditional p.d.f. ของ X_1 เมื่อกำหนดให้ $X_2 = x_2, X_3 = x_3, \ldots, X_n = x_n$ เขียนแทนด้วย $f_{X_1|x_2, x_3, \ldots x_n}(x_1)$ หาค่าได้ดังนี้คือ

$$f_{X1|x_2, x_3, \ldots, x_n}(x_1) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1}$$

นั่นคือ เป็นสัดส่วนของ joint p.d.f ของ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เทียบกับ marginal joint p.d.f. ของ X_2, X_3 และ X_n ในขณะที่ค่าคาดหมายของ X_1 เมื่อกำหนดค่า $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ มาให้คือ

$$E[X_1 | x_2, x_3, \ldots, x_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\, f_{X_1|x_2, x_3, \ldots, x_n}(x_1)\, dx_1$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ทั้งหมด $n-1$ ตัวแปร เราไม่สามารถให้ความหมายเชิงเรขาคณิตหรือเขียนกราฟแสดงได้ อย่างไรก็ตามเราเรียกกราฟลักษณะนี้ว่า "กราฟสมมุติฐาน" (hypothetical graph) และเรียกกราฟสมมุติฐานของ $E[X_1 | x_2, x_3, \ldots, x_n]$ ว่า **เส้นโค้งความถดถอย** ของ X_1 บน $(X_2, X_3, \ldots, X_n)$

ในกรณีทั่วไป ถ้า $Y = H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันตัวแปรสุ่ม n ตัวแปร แล้วค่าคาดหมายของ Y เมื่อหาค่าได้คือ

$$E[Y] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

เมื่อ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นแบบเต็มหน่วย และ

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

เมื่อ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เป็นแบบต่อเนื่อง และ H เป็นฟังก์ช่นต่อเนื่อง สำหรับกรณีเฉพาะต่าง ๆ ค่าคาดหมายเมื่อหาค่าได้ มีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

1. ถ้า $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_k$ แล้ว

$$E\left[H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \right] = E\left[X_k \right] = \mu_k$$

มีชื่อเรียกว่าค่าเฉลี่ยของ X_k สำหรับ $1 \leq k \leq n$

2. $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_k - \mu_k)^2$ แล้ว

$$E\left[H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \right] = E\left[(X_k - \mu_k)^2 \right] = \sigma_k{}^2 = V(X_k)$$

มีชื่อเรียกว่า ความแปรปรวนของ X_k สำหรับ $1 \leq k \leq n$

3. $H(X_1, X_2, \ldots, X_k) = (X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)$ สำหรับ $j \neq k$ แล้ว

$$\begin{aligned} E\left[H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \right] &= E\left[(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)\right] \\ &= Cov\left(X_j, X_k\right) \\ &= \sigma_{jk} \end{aligned}$$

มีชื่อเรียกว่า ความแปรปรวนร่วมของ X_j และ X_k, $1 \leq j, k \leq n$ และ

$$\begin{aligned} \rho_{jk} &= \frac{Cov\left(X_j, X_k\right)}{\sqrt{V\left(X_j\right)}\sqrt{V\left(X_k\right)}} \\ &= \frac{\sigma_{jk}}{\sigma_j \sigma_k} \end{aligned}$$

มีชื่อเรียกว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X_j และ X_k ซึ่งความหมายของค่า ๆ นี้ เหมือนกันกับกรณีตัวแปรสุ่ม 2 มิติ ที่ได้อธิบายไว้แล้ว

ค่าคาดหมายเหล่านี้สามารถคำนวณโดยอาศัย joint p.d.f. ของ $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ หรือโดยอาศัย marginal p.d.f. หรือ joint marginal p.d.f. ของตัวแปรสุ่มที่เกี่ยวข้องอยู่ในฟังก์ชัน $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ เท่านั้น เช่น

$$Y = H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 / X_2$$

เราคำนวณหา $E[Y]$ โดย

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} Y f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

หรือ $$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Y f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1\, dx_2$$

ตัวอย่าง 4.33 นักศึกษาจำนวน 200 คน สอบวิชาแคลคูลัสได้ผลดังนี้คือ

เกรด	A	B	C	D	F
จำนวน น.ศ.	40	60	70	20	10

เลือกสุ่มตัวอย่าง 25 คนโดยเลือกแบบไม่คืนที่ จากนักศึกษาทั้ง 200 คน ดังนั้น เรามีกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด $\binom{200}{25}$ กลุ่ม ที่เป็นไปได้ โดยที่แต่ละกลุ่มตัวอย่างมีโอกาสได้รับเลือกเท่า ๆ กัน นั่นคือ แต่ละกลุ่มตัวอย่างมีความน่าจะเป็นเท่ากับ

$$1/\binom{200}{25}$$

ที่จะได้รับเลือก ถ้าในกลุ่มตัวอย่าง 25 คน ที่ได้รับการเลือกมา เราให้ X_1, X_2, X_3 และ X_4 เป็นจำนวนนักศึกษาที่ได้เกรด A, B, C และ D ตามลำดับ ดังนั้น $25 - X_1 - X_2 - X_3 - X_4$ เป็นจำนวนนักศึกษาที่ได้เกรด F พิสัยของตัวแปรสุ่ม (X_1, X_2, X_3, X_4) ประกอบด้วยจุด (x_1, x_2, x_3, x_4) ซึ่ง x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นจำนวนเต็มและไม่เป็นค่าลบ และ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 25$$

และ joint p.d.f. ของ (X_1, X_2, X_3, X_4) คือ

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\binom{40}{x_1}\binom{60}{x_2}\binom{70}{x_3}\binom{20}{x_4}\binom{10}{25-x_1-x_2-x_3-x_4}}{\binom{200}{25}}$$

สำหรับ (x_1, x_2, x_3, x_4) ในพิสัย

โดยไม่ต้องทำการบวก joint p.d.f. เราสามารถหา marginal p.d.f. ของแต่ละตัวแปรสุ่มได้โดยตรงในปัญหานี้ เช่น

$$p_{X_3}(x_3) = \binom{70}{x_3}\binom{130}{25-x_3}\Big/\binom{200}{25}, \qquad x_3 = 0, 1, 2, \ldots, 25$$

และ joint marginal p.d.f ของ X_1 และ X_2 คือ

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{\binom{40}{x_1}\binom{60}{x_2}\binom{100}{25-x_1-x_2}}{\binom{200}{25}}, \quad x_1 + x_2 = 0, 1, 2, \ldots, 25$$

$p_{X_3}(x_3)$ มีชื่อเรียกว่า การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริก (hypergeometric p.d.f.) และ $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ และ $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ มีชื่อเรียกว่า การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกสองตัวแปร และหลายตัวแปร (bivariate and multivariate hypergeometric p.d.f.) ตามลำดับ นอกจากนี้

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)p_{X_3}(x_3)p_{X_4}(x_4)$$

ดังนั้น X_1, X_2, X_3, X_4 ไม่มีความเป็นอิสระ

4.10 ผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรสุ่ม (Linear Combinations of Random Variables)

ในจำนวนฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ฟังก์ชันที่มีความสำคัญในการนำไปใช้ คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ นั่นคือ

$$Y = H(X_1, X_2, \ldots X_n) = a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

เมื่อ a_j เป็นค่าคงที่และเป็นจำนวนจริง สำหรับ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เราเรียกผลบวกนี้ว่า ผลบวกเชิงเส้นของ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เมื่อ $a_0 = 0$ และ $a_1 = a_2 \ldots = a_n = 1$ เราได้

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

ตัวอย่าง 4.34 ตัวต้านทาน (resistors) 4 ตัว ต่อในลักษณะอนุกรมดังรูป 4.17 ความต้านทานของตัวต้านทานแต่ละตัวเป็นตัวแปรสุ่ม เราให้ Y แทนความต้านทานของการต่อแบบอนุกรมนี้ ดังนั้น

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

รูป 4.17

ตัวอย่าง 4.35 ตัวอย่างขนาด 10 ถูกเลือกสุ่มจากกระบวนการผลิตเพลาขนาดเล็กสำหรับพัดลมไฟฟ้า และวัดเส้นผ่าศูนย์กลางของแต่ละตัวอย่าง โดยให้ X_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ เป็นความยาวของเส้น ผ่าศูนย์กลาง พิจารณา

$$\overline{X} = \frac{1}{10}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{10})$$

ค่าของ $\overline{X} = \frac{1}{10} X_1 + \frac{1}{10} X_2 + \ldots + \frac{1}{10} X_{10}$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ โดยมี $a_0 = 0$ และ $a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = \frac{1}{10}$ $\overline{X}$ มีชื่อเรียกว่า **"ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง "** (sample mean)

พิจารณาการหาค่าของค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรสุ่ม เราเริ่มจากกรณีนี้

$$Y = X_1 + X_2 \tag{4.58}$$

ค่าเฉลี่ยของ Y คำนวณได้ดังนี้คือ

$$\mu_Y = E[Y] = E[X_1] + E[X_2] = \mu_1 + \mu_2 \tag{4.59}$$

สำหรับความแปรปรวนของ Y คำนวณได้ดังนี้ คือ

$$\begin{aligned} V(Y) &= E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] = E\left[Y^2\right] - (E[Y])^2 \\ &= E\left[(X_1 + X_2)^2\right] - (E[X_1 + X_2])^2 \\ &= E\left[X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2\right] - (E[X_1] + E[X_2])^2 \\ &= E\left[X_1^2\right] + 2E[X_1X_2] + E\left[X_2^2\right] - (E[X_1])^2 \\ &\quad - 2E[X_1]E[X_2] - (E[X_2])^2 \\ &= \left\{E\left[X_1^2\right] - (E[X_1])^2\right\} + \left\{E\left[X_2^2\right] - (E[X_2])^2\right\} \\ &\quad + 2\left\{E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]\right\} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$$

หรือ

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} \tag{4.60}$$

ผลที่ได้จากกรณี $Y = X_1 + X_2$ สามารถขยายไปยังกรณีทั่วไปคือ

$$Y = a_0 + a_1 X + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n \tag{4.61}$$

ดังต่อไปนี้

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i]$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \qquad (4.62)$$

เมื่อ $E[X_i] = \mu_i$ และ

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j \, Cov(X_i, X_j) \qquad (4.63)$$

หรือ

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j \sigma_{ij}$$

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความเป็นอิสระ แล้ว $Cov(X_i, X_j) = 0$ และผลที่ตามมาคือ

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) \qquad (4.64)$$

หรือ

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \ldots + a_n^2 \sigma_n^2$$

ตัวอย่าง 4.36 ในตัวอย่าง 4.34 $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ เป็นความต้านทานของการต่อแบบอนุกรม เมื่อ $X_1, \ldots, X_4$ แทนความต้านทานของตัวต้านทานแต่ละตัว ซึ่งถูกเลือกมาแบบสุ่มสำหรับการต่อแบบอนุกรมนี้ เราจะสมมติว่า X_1, X_2, X_3 และ X_4 มีความเป็นอิสระ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ Y และความแปรปรวนของ Y หาได้จากสมการ (4.62) และ (4.64) นั่นคือ

$$E[Y] = \mu_Y = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$$

และ

$$V[Y] = \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2$$

จะเห็นได้ว่า เราคำนวณหา μ_Y และ σ_Y^2 โดยไม่ต้องทราบ p.d.f. ของ Y เพียงแต่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X_1, X_2, X_3 และ X_4 เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.37 ในตัวอย่าง 4.35 สมมติว่า $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ มีความเป็นอิสระ (เนื่องมาจากการเลือกแบบสุ่ม) และการแจกแจงของแต่ละตัวแปรสุ่ม X_i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ เหมือนกัน ดังแสดงในรูป 4.18 กราฟของ p.d.f. ของแต่ละ X_i เหมือนกัน และในตัวอย่าง 4.35 เราพิจารณา "ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง"

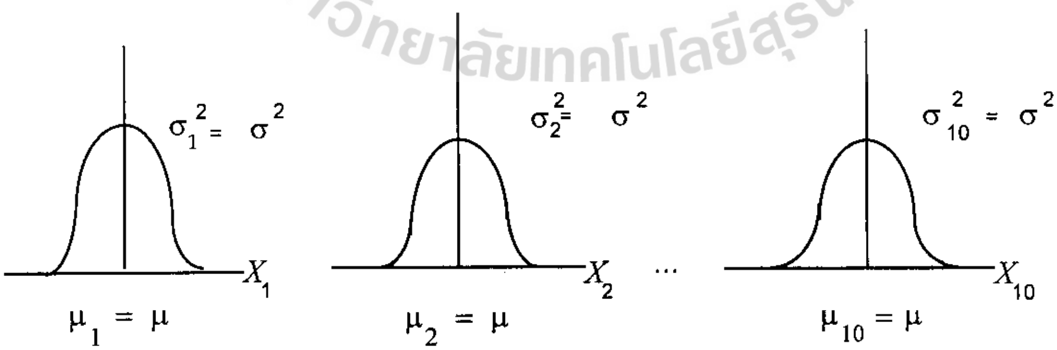
$$\overline{X} = \frac{1}{10} X_1 + \frac{1}{10} X_2 + \ldots + \frac{1}{10} X_{10}$$

ดังนั้นจากสมการ (4.62) และ (4.64) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left[\overline{X}\right] &= \mu_{\overline{X}} = \frac{1}{10} E\left[X_1\right] + \frac{1}{10} E\left[X_2\right] + \ldots + \frac{1}{10} E\left[X_{10}\right] \\ &= \frac{1}{10}\mu + \frac{1}{10}\mu + \ldots + \frac{1}{10}\mu \\ &= \mu \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} V\left(\overline{X}\right) &= \sigma_{\overline{X}}^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 V\left(X_1\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 V\left(X_2\right) + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^2 V\left(X_{10}\right) \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{10} \end{aligned}$$



รูป 4.18 $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ มีการแจกแจงเหมือนกัน

แบบฝึกหัด 4

1. ผู้ผลิตตู้เย็นรายหนึ่งต้องการตรวจสภาพของตู้เย็นจำนวน 50 เครื่อง ก่อนส่งไปยังลูกค้า เขาตรวจสอบคุณภาพใน 2 ลักษณะ คือ 1. จำนวนรอยขูดขีดของสภาพข้างนอก 2. ความบกพร่องของเครื่องกลไกการทำงาน ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนความบกพร่องที่พบในลักษณะที่ 1 และ 2 ตามลำดับ โดยที่ตารางข้างล่างแสดงการแจกแจงร่วมของ X และ Y

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	11/50	4/50	2/50	1/50	1/50	1/50
1	8/50	3/50	2/50	1/50	1/50	
2	4/50	3/50	2/50	1/50		
3	3/50	1/50				
4	1/50					

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(b) จงหา การแจกแจงของความบกพร่องของเครื่องกลไก เมื่อกำหนดให้ว่า สภาพข้างนอกของตู้เย็นไม่มีรอยขูดขีดเลย

(c) จงหาการแจกแจงของจำนวนรอยขูดขีดของสภาพข้างนอก เมื่อกำหนดให้ว่าเครื่องกลไกของตู้เย็นทำงานสมบูรณ์แบบ

2. ผู้จัดการหน่วยสินค้าคงคลังของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้ทำสถิติความต้องการของลูกค้าใน 100 วันที่ผ่านมา ให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนของใบสั่งสินค้าที่ได้รับต่อวัน และให้ตัวแปรสุ่ม Y แทนจำนวนหน่วยของสินค้าต่อใบสั่ง การแจกแจงของ X และ Y ตามสถิติที่ผู้จัดการรวบรวมไว้เป็นไปตามตารางข้างล่างนี้

X \ Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10/100	6/100	3/100	2/100	1/100	1/100	1/100	1/100	1/100
2	8/100	5/100	3/100	2/100	1/100	1/100	1/100		
3	8/100	5/100	2/100	1/100	1/100				
4	7/100	4/100	2/100	1/100	1/100				
5	6/100	3/100	1/100	1/100					
6	5/100	3/100	1/100	1/100					

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(b) จงหา conditional p.d.f. ของ Y เมื่อกำหนดค่าของ X ให้

3. ให้ X_1 และ X_2 เป็นคะแนนของการสอบเพื่อวัดเชาวปัญญาและความชอบในอาชีพ p.d.f. ของ (X_1, X_2) กำหนดโดย

$$f(x_1, x_2) = k/1000, \quad 0 \le x_1 \le 100, \quad 0 \le x_2 \le 10$$

(a) จงหาค่าคงที่ k ที่เหมาะสม

(b) จงหา marginal p.d.f. ของ X_1 และ X_2

(c) จงหาฟังก์ชันแจกแจง $F(x_1, x_2)$ โดยเขียนแสดงเท่านั้นไม่ต้องคำนวณ

4. เมื่อวัดความตึงผิว (surface tension) และวัดความเป็นกรดของสารเคมีชนิดหนึ่ง และแทนค่าที่วัดได้ด้วยตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 ตามลำดับ โดยที่ ความตึงผิวมีค่าวัดอยู่ในช่วง $0 \le X_1 \le 2$ และความเป็นกรดมีค่าวัดอยู่ในช่วง $2 \le X_2 \le 4$ p.d.f. ของ (X_1, X_2) กำหนดโดย

$$f(x_1, x_2) = k(6 - x_1 - x_2), \quad 0 \le x_1 \le 2, \; 2 \le x_2 \le 4$$

(a) จงหาค่าคงที่ k ที่เหมาะสม

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่ $X_1 < 1, X_2 < 3$

(c) จงหาความน่าจะเป็นที่ $X_1 + X_2 \le 4$

(d) จงหาความน่าจะเป็นที่ $X_1 < 1.5$

(e) จงหา marginal p.d.f. ของ X_1 และ X_2

5. กำหนดให้ p.d.f. ของ (W, X, Y, X) เป็น

$$f(w, x, y, z) = 16\,wxyz\,, \; 0 \le w \le 1, \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$$

และ $0 \le z \le 1$

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่ $W \le 2/3$ และ $Y \le 1/2$

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่ $X \le 1/2$ และ $Z \le 1/4$

(c) จงหา marginal p.d.f. ของ W

6. สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) คือ

$$f(x, y) = (1/8)(6 - x - y), \quad 0 \le x \le 2, \quad 2 \le y \le 4$$

จงหา conditional p.d.f. $f_{X|y}(x)$ และ $f_{Y|x}(y)$

7. พิจารณาจากข้อมูลที่ให้ไว้ในข้อ 2. จงหาค่าคาดหมายของจำนวนหน่วยของสินค้าต่อใบสั่ง เมื่อกำหนดให้ว่า มีใบสั่งสินค้าเข้ามา 3 ใบต่อวัน

8. พิจารณาการแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย (X_1, X_2) เมื่อ X_1 แทนจำนวนของการสั่ง แอสไพริน(aspirin) ในเดือนสิงหาคม และ X_2 แทนจำนวนของการสั่งแอสไพรินในเดือนกันยายน ของร้านขายยาแห่งหนึ่ง joint p.d.f. ของ (X_1, X_2) แสดงในตารางข้างล่างนี้

X_2 \ X_1	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X_1 และ X_2

(b) จงหาค่าคาดหมายของการขายในเดือนกันยายน เมื่อทราบว่า ยอดขายในเดือนสิงหาคมเป็น 51, 52, 53, 54 หรือ 55 ตามลำดับ

9. สมมติว่า X_1 และ X_2 เป็นรหัสของระดับคะแนนในการสอบวัดเชาว์ปัญญา จากข้อสอบ 2 ฉบับ joint p.d.f. ของ (X_1, X_2) กำหนดโดย

$$f(x_1, x_2) = 6x_1^2 x_2, \quad 0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 1$$

จงหาค่าคาดหมายของระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 2 เมื่อทราบระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 1 และในทางกลับกัน จงหาค่าคาดหมายของระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 1 เมื่อทราบระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 2

10. กำหนดให้ $f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2 e^{-\left(x_1^2 + x_2^2\right)}$, $0 \le x_1 < \infty$ และ $0 \le x_2 < \infty$

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X_1 และ X_2

(b) จงหา conditional p.d.f. ของ X_1 และ X_2

(c) จงหาสูตรสำหรับการหาค่าคาดหมายภายใต้เงื่อนไขของ X_1 และ X_2

11. จากตาราง 4.2 ในตัวอย่าง 4.6 จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(a) ความน่าจะเป็นที่มีจุดเชื่อมต่ออย่างน้อยที่สุด 2 จุดเท่านั้น ที่มีตำหนิ และมีน็อตเพียง 1 ตัว ที่ไม่ได้หมุนให้แน่นเต็มที่

(b) ความน่าจะเป็นที่มีจุดเชื่อมต่ออย่างน้อยที่สุด 1 จุด ที่มีข้อบกพร้องและอย่างน้อยที่สุดมีน็อต 1 ตัว ที่ไม่ได้หมุนให้แน่นเต็มที่

(c) ความน่าจะเป็นที่อย่างมากที่สุดมีจุดเชื่อมต่อ 1 จุด ที่มีข้อบกพร่อง

(d) ความน่าจะเป็นที่อย่างมากที่สุดมีน็อต 2 ตัวที่ไม่ได้หมุนให้แน่นเต็มที่

12. ในห้องปฏิบัติการแห่งหนึ่ง นักวิทยาศาสตร์ต้องใช้ที่วัดอุณหภูมิ 4 อัน ตรงรอยเชื่อมต่อ 4 ตำแหน่งของอุปกรณ์ชิ้นใหญ่ที่ใช้ในการทดลอง นักวิทยาศาสตร์เลือกที่วัดทั้ง 4 จากกล่อง ซึ่งมีที่วัดอยู่ทั้งหมด 7 อัน โดยไม่ทราบว่าในจำนวน 7 อันนี้ มีอยู่ 3 อันที่วัดอุณหภูมิได้ไม่เที่ยงตรงนักให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนของที่วัดอุณหภูมิที่มีข้อบกพร่อง และ Y แทนจำนวนที่วัดอุณหภูมิที่วัดได้เที่ยงตรง ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ 0, 1, 2, 3 และค่าที่เป็นไปได้ของ Y คือ 0, 1, 2, 3, 4 ให้ joint p.d.f. ของ (X, Y) ดังแสดงในตารางข้างล่างนี้

x/y	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	1/35
1	0	0	0	12/35	0
2	0	0	18/35	0	0
3	0	4/35	0	0	0

(a) ค่าของ joint p.d.f. ที่แสดงในตาราง สามารถคำนวณได้โดยตรง จงแสดงวิธีการคำนวณหาค่าของ joint p.d.f. ของ (X, Y)

(b) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(c) จงพิจารณาว่า X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่โดยใช้เหตุผล และแสดงให้เห็นจริงโดยคณิตศาสตร์

13. สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) กำหนดโดย

$$p(x, y) = 1/n^2 \quad x = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \text{และ} \quad y = 1, 2, 3, \ldots, n$$

(a) จงแสดงว่า $p(x, y)$ มีคุณสมบัติเป็น p.d.f.

(b) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(c) จงพิจารณาว่า X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่

14. โดยทั่วไปข้อผิดพลาด 2 แบบ ที่ผู้เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์มักจะประสบ คือ ข้อผิดพลาดไวยากรณ์(syntax error) และ ตรรกะ(logic) ให้ X แทนจำนวนของข้อผิดพลาดไวยากรณ์ และ Y แทนจำนวนข้อผิดพลาดตรรกะ สำหรับการเขียนโปรแกรมในภาษา BASIC เป็นครั้งแรก สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) เป็นไปตามตารางข้างล่างนี้

x \ y	0	1	2	3
0	.400	.100	.020	.005
1	.300	.040	.010	.004
2	.040	.010	.009	.003
3	.009	.008	.007	.003
4	.008	.007	.005	.002
5	.005	.002	.002	.001

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่โปรแกรมอันหนึ่งที่เลือกมาโดยสุ่มจะไม่มีข้อผิดพลาดทั้งสองชนิดนี้

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่โปรแกรมอันหนึ่งที่เลือกมาโดยสุ่ม จะมีข้อผิดพลาดไวยากรณ์ **อย่างน้อยที่สุด**เพียงหนึ่ง และ**อย่างมากที่สุด**มีข้อผิดพลาดตรรกะเพียงหนึ่ง

(c) จงหา maginal p.d.f. สำหรับ X และ Y

(d) จงหาความน่าจะเป็นที่โปรแกรมอันหนึ่งที่เลือกมาโดยสุ่มจะมีข้อผิดพลาดไวยากรณ์ **อย่างน้อยที่สุด 2 แห่ง**

(e) จงหาความน่าจะเป็นที่โปรแกรมอันหนึ่งที่เลือกมาโดยสุ่ม จะมีข้อผิดพลาดตรรกะ **1 หรือ 2 แห่ง**

(f) X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่

15. จากตัวอย่าง 4.20

(a) จงใช้ joint p.d.f. คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ความดันภายในจะสูงกว่า 30 ในขณะที่ความดันภายนอกจะต่ำกว่า 32

(b) จงใช้ marginal p.d.f. ของ X หา $P(X \le 28)$

(c) จงใช้ marginal p.d.f. ของ Y หา $P(Y > 30)$

16. ให้ X แทนอุณหภูมิ ($°C$) และ Y แทนเวลา (นาที) ที่ใช้ในการอุ่นเครื่องยนต์เพื่อพร้อมที่จะเคลื่อนที่ สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) กำหนดโดย

$$f(x, y) = k(4x + 2y + 1),\ 0 \le x \le 40 \text{ และ } 0 \le y \le 2$$

(a) จงคำนวณหาค่าคงที่ k ที่เหมาะสม

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่ในเช้าวันหนึ่งที่เราเลือกโดยสุ่ม อุณหภูมิจะต้องสูงกว่า $20°C$ และใช้เวลานานกว่า 1 นาที ในการอุ่นเครื่องยนต์

(c) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(d) จงหาความน่าจะเป็นที่ในเช้าวันหนึ่งที่เราเลือกโดยสุ่ม เราจะต้องใช้เวลานานกว่า 1 นาที ในการอุ่นเครื่องยนต์

(e) จงหาความน่าจะเป็นที่ในเช้าวันหนึ่งที่เราเลือกโดยสุ่ม อุณหภูมิจะต้องสูงกว่า $20\ °C$

(f) X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่ ? อธิบายโดยคณิตศาสตร์

17. วิศวกรทำการศึกษาการจราจรที่สี่แยกหนึ่ง โดยเริ่มสังเกตจากเวลา 5.30 น. ให้ X แทนเวลาที่รถคันแรกวิ่งผ่านสี่แยกนี้ในทิศเหนือ - ใต้ และ Y แทนเวลาที่รถคันแรกวิ่งผ่านสี่แยกนี้ในทิศตะวันออก - ตะวันตก การวัดเวลาเทียบเป็นเศษส่วนในหนึ่งชั่วโมงหลังเวลา 5.30 น.

สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) กำหนดโดย

$$f(x, y) = 1/x \quad 0 < y < x < 1$$

(a) จงแสดงว่า $f(x, y)$ มีคุณสมบัติเป็น p.d.f. ของ (X, Y)

(b) จงหา $P(X \le .5$ และ $Y \le .25)$

(c) จงหา $P(X > .5$ และ $Y > .25)$

(d) จงหา $P(X \ge .5$ และ $Y \ge .5)$

(e) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(f) จงหา $P(X \le .5)$ และ $P(Y \le .25)$

(g) X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่ ? อธิบาย

18. สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) คือ

$$f(x, y) = x^3 y^2 / 16, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2$$

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(b) X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่?

(c) จงหา $P(X \le 1)$

(d) ถ้าเราทราบว่า $Y = 1$ จงหา $P(X \le 1)$ โดยไม่ต้องทำการคำนวณ

19. ที่วัดอุณหภูมิ 4 อัน ถูกเลือกโดยสุ่มจากกล่องซึ่งมีที่วัด 3 อันที่มีข้อบกพร่อง และอีก 4 อันที่วัดอุณหภูมิได้อย่างเที่ยงตรง ให้ X เป็นจำนวนที่วัดอุณหภูมิที่มีความบกพร่อง และ Y เป็นจำนวนที่วัดอุณหภูมิที่วัดได้อย่างเที่ยงตรง joint p.d.f. ของ (X, Y) เป็นไปตารางที่ให้ไว้ในแบบฝึกหัดข้อ 12.

(a) จากสถานการณ์ที่ให้ไว้ในแบบฝึกหัดข้อ 2. $Cov(X, Y)$ ควรจะมีค่าเป็นบวกหรือลบ

(b) จงหา $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ และ $Cov(X, Y)$

20. จากแบบฝึกหัดข้อ 14. X เป็นจำนวนของข้อผิดพลาดไวยากรณ์และ Y เป็นจำนวนของข้อผิดพลาดตรรกะ ของโปรแกรมภาษา BASIC ที่ใช้ลองประมวลผลเป็นครั้งแรก joint p.d.f. ของ (X, Y) เป็นไปตามตารางในแบบฝึกหัดข้อ 14.

(a) X และ Y ไม่มีความเป็นอิสระ ผลอันนี้สะท้อนให้เห็นในค่าของความแปรปรวนร่วมหรือไม่?

(b) จงหา $E[X], E[Y], E[XY]$ และ $Cov(X,Y)$ จงให้ความหมายเชิงกายภาพของ $Cov(X,Y)$

(c) จงหา $E[X+Y]$ และบอกความหมายของค่าคาดหมายนี้ด้วย

21. พิจารณาตัวแปรสุ่ม (X,Y) ในแบบฝึกหัดข้อ 13. จงหาค่าของ $Cov(X,Y)$ โดย**ไม่ต้อง**คำนวณอะไรเพิ่มเติมอีกเลย

22. X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแทนความดันภายในและความดันภายนอกเครื่องบินตามลำดับ มี joint p.d.f. กำหนดโดย

$$f(x,y) = c/x, \qquad 27 \le y \le x \le 33$$

เมื่อ $c = 1/(6 - 27\log 33/27)$

(a) จงหา $E[X],\ E[Y], E[XY]$ และ $Cov(X,Y)$

(b) จงหา $E[X-Y]$

23. X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแทนอุณหภูมิและเวลาสำหรับการอุ่นเครื่องของรถยนต์เพื่อความพร้อมในการขับเคลื่อน (แบบฝึกหัดข้อ 16.) มี joint p.d.f. กำหนดโดย

$$f(x,y) = (1/6640)(4x+2y+1),\ 0 \le x \le 40,\ 0 \le y \le 2$$

(a) โดยใช้เหตุผลเชิงกายภาพ พิจารณาว่า ค่าของ $Cov(X,Y)$ ควรเป็นบวกหรือลบ

(b) จงหา $E[X], E[Y], E[XY]$ และ $Cov(X,Y)$

24. จงหาความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม ในแบบฝึกหัดข้อ 18.

25. สภาพของเศรษฐกิจทั่วโลก ทำให้ราคาของน้ำมันดิบสูงขึ้น ให้ X เป็นราคาของน้ำมันดิบต่อบาเรลที่บริษัทของเรือบรรทุกน้ำมันต้องจ่าย และให้ Y เป็นราคาของน้ำมันดิบต่อบาเรลที่โรงกลั่นน้ำมันต้องจ่ายให้บริษัทของเรือบรรทุกน้ำมัน สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X,Y) คือ

$$f(x, y) = 1/200, \qquad 20 < x < y < 40$$

(a) จงหา marginal p.d.f. ของ X และ Y

(b) โดยใช้เหตุผลเชิงกายภาพ พิจารณาว่าค่าของ $Cov(X, Y)$ ควรเป็นบวกหรือลบ

(c) จงหา $E[X], E[Y], E[XY]$ และ $Cov(X, Y)$

(d) จงหา $E[X - Y]$ และให้ความหมายของค่าคาดหมายนี้ในทางปฏิบัติ (หน่วยของ X และ Y เป็น ดอลล่าร์)

26. จงแสดงว่า $Cov(X, Y) = E[X]E[Y]$

(**แนะนำ** : โดยใช้นิยามของ $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ กระจายผลคูณของ $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$ ออกมา แล้วใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคุณสมบัติของค่าคาดหมายในบทที่ 3)

27. จงแสดงว่า ถ้า $X = Y$ แล้ว $Cov(X, Y) = V(X) = V(Y)$

28. ให้ joint p.d.f. ของ (X, Y) กำหนดโดย

$$f(x, y) = \frac{1}{2(e-1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), \qquad 1 \le x \le e,\ 1 \le y \le e$$

(a) จงแสดงว่า $\int_1^e \int_1^e f(x, y)\,dx\,dy = 1$

(b) จงหา $E[X], E[Y]$ และ $E[XY]$

(c) X และ Y มีความเป็นอิสระหรือไม่? โดยใช้ผลจากข้อ (b) และทฤษฎีบท 4.2

29. จากแบบฝึกหัดข้อ 12.

(a) จากความหมายของตัวแปรสุ่มในสถานการณ์ที่กำหนดให้ จงพิจารณาว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ρ_{XY} ควรเป็นบวกหรือลบ ? ρ_{XY} ควรเป็น $+1$ หรือ -1 อธิบาย

(b) จงหา $E[X^2]$ และ $E[Y^2]$ ใช้ผลจากแบบฝึกหัดข้อ 19. หา ρ_{XY}

30. จากแบบฝึกหัดข้อ 17.

(a) จงหา $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ และ $Cov(X,Y)$

(b) จงหา $E\left[X^2\right]$, $E\left[Y^2\right]$, $V(X)$, $V(Y)$ และ ρ_{XY}

(c) จงพิจารณาจากค่าของ ρ_{XY} ว่า กราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง Y และ X จะมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงมากน้อยเพียงใด

31. สมมติว่า $Y = a + bX$, $b \neq 0$

(a) จงแสดงว่า $Cov(X,Y) = bV(X)$

(แนะนำ : $Cov(X,Y) = E\left[X(a+bX)\right] - E[X]E\left[(a+bX)\right]$)

(b) จงแสดงว่า $V(Y) = b^2 V(X)$

(c) จงหา ρ_{XY}

(d) จงให้เหตุผลว่า $\rho_{XY} = 1$ ถ้า b ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรง $Y = a + bX$ มีค่าเป็นบวก และ $\rho_{XY} = -1$ ถ้า b มีค่าเป็นลบ

32. จงหาความแปรปรวนร่วมของ X และ Y ในแบบฝึกหัดข้อ 18.

33. จากตัวอย่าง 4.25

(a) จงหาค่าคาดหมายของ X เมื่อ $y = 31$

(b) จงหาค่าคาดหมายของ Y เมื่อ $x = 30$

34. จากตัวอย่าง 4.14

(a) จงหา $f_{X|y}$ จะเห็นได้ว่า $f_{X|y} = f_X$ จงให้เหตุผลเชิงกายภาพว่าเพราะเหตุใด p.d.f. ทั้งสองนี้จึงเท่ากัน

(b) จงหา $f_{Y|x}$ $f_{Y|x} = f_Y$ หรือไม่ ?

(c) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y และเส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X เส้นโค้งเหล่านี้เป็นเส้นตรงหรือไม่ ?

35. ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี joint p.d.f. กำหนดโดย

$$f(x,y) = 2/(n(n+1)), \qquad 1 \le y \le x \le n$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

(a) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y กราฟเป็นเส้นตรงหรือไม่ ?

(b) สมมติว่า $n = 10$ จงหาค่าเฉลี่ยของ X เมื่อ $y = 4$

(c) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X กราฟ เป็นเส้นตรงหรือไม่ ?

(d) สมมติว่า $n = 10$ จงหาค่าเฉลี่ยของ Y เมื่อ $x = 4$

36. พิจารณาตัวแปรสุ่ม (X,Y) ในแบบบฝึกหัดข้อ 17.

(a) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y กราฟเป็นเส้นตรงหรือไม่ ?

(b) จงหาค่าเฉลี่ยของ X เมื่อ $y = .5$

(c) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ Y บน X กราฟเป็นเส้นตรงหรือไม่ ?

(d) จงหาค่าเฉลี่ยของ Y เมื่อ $x = .75$

37. พิจารณาการแปลงเชิงเส้น T นิยามโดยสมการต่อไปนี้

$$T:\begin{cases} u = 2x + y \\ v = x + 3y \end{cases}$$

(a) จงพิจารณาว่า T เป็นการแปลงแบบผกผันได้หรือไม่? ถ้า T เป็นแบบผกผันได้ จงหาสมการที่นิยาม T^{-1}

(b) จงหา จาโคเบียน (Jacobian) ของ T^{-1}

38. สมมติว่า X และ Y มีความเป็นอิสระ และมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนช่วง (0,1) และ (0,2) ตามลำดับ จงหา joint p.d.f. ของ (U,V) เมื่อ U,V นิยามโดยสมการในแบบฝึกหัดข้อ 37.

39. สมมติว่า X และ Y มีความเป็นอิสระและมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนช่วง (0, 2) และ (0, 3) ตามลำดับ

(a) ให้ $U = XY$ จงหา p.d.f. ของ U

(b) ให้ $U = X/Y$ จงหา p.d.f. ของ U

40. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีความเป็นอิสระ

(a) จงแสดงว่า $E[X|Y] = E[X]$ และ $E[Y|X] = E[Y]$

(b) จงแสดงว่า $E[h(X)g(Y)] = E[h(X)]E[g(Y)]$

ดังนั้น ถ้าให้ $h(X) = X - \mu_X$ และ $g(Y) = Y - \mu_Y$ จงแสดงว่า

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = 0$$

นั่นคือ $Cov(X,Y) = 0$

41. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี $f(x,y)$ เป็น joint p.d.f. ให้ $U = X + Y$ จงแสดงว่า p.d.f. ของ $X + Y$ มีค่าดังนี้

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v, v)\,dv$$

แนะนำ นิยามการแปลง T โดยให้

$$u = g_1(x, y) = x + y$$
$$v = g_2(x + y) = y$$

หา joint p.d.f. ของ (U,V) แล้วอินทิเกรต joint p.d.f. เพื่อหา marginal p.d.f. ของ U

42. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี $f(x,y)$ เป็น joint p.d.f. ให้ $U = XY$ จงแสดงว่า p.d.f. ของ XY มีค่าดังนี้

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u/v, v)\,|1/v|\,dv$$

แนะนำ $u = g_1(x,y) = xy$ และ $v = y$

43. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี $f(x, y)$ เป็น joint p.d.f. ให้ $U = X/Y$ จงแสดงว่า p.d.f ของ X/Y มีค่าดังนี้

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(uv, v)|v|\,dv$$

แนะนำ $u = g_1(x, y) = x/y$ และ $v = y$

คำตอบแบบฝึกหัด 4

1.(a) x	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	27/50	11/50	6/50	3/50	2/50	1/50
y	0	1	2	3	4	
$p_Y(y)$	20/50	15/50	10/50	4/50	1/50	
2.(b) y	0	1	2	3	4	
$p_{Y\|0}(y)$	11/27	8/27	4/27	3/37	1/27	
x	0	1	2	3	4	5
$p_{X\|0}(x)$	11/20	4/20	2/20	1/20	1/20	1/20

3. (a) $k = 1$

   (b) $f_{X_1}(x_1) = 1/100, \quad 0 \le x_1 \le 100$

   $f_{X_2}(x_2) = 1/10, \quad 0 \le x_2 \le 10$

5. (a) 1/9 (b) 1/64 (c) $f(w) = 2w, \quad 0 \le w \le 1$

7. 33/8

9. $E[X_1|x_2] = 3/4, \; E[X_2|x_1] = 2/3$

11. (a) .005 (b) .03 (c) .98 (d) .045

13. (b) $p_X(x) = p_Y(y) = 1/n, \quad x, y = 1, 2, 3, \ldots, n$ (c) มีความเป็นอิสระ

15. (a) .707 (b) .031 (c) .24217

17. (b) .423 (c) .577 (d) .153

(e) $f_X(x) = 1, \quad 0 < x < 1$ และ $f_Y(y) = -\log y, \quad 0 < y < 1$

(f) .5 , .597 (g) ไม่มี

19. (a) เป็นลบ (b) 60/35 , 80/35 , 120/35 , - $600/35^2$

21. ศูนย์

25. (b) เป็นบวก (c) 26.67 , 33.3 , 900 , 11.09 (d) 6.66

29. (a) เป็นลบ , -1 (b) 120/35 , 200/35 , -1

33. (a) 31.99 (b) 28.5

35. (a) $\mu_{X|y} = \sum_{x=y}^{n} x \frac{1}{n-y+1} = \frac{n+y}{2}$; เป็นเส้นตรง

(b) 7

(c) $\mu_{Y|x} = \sum_{y=1}^{x} y/x = \frac{x+1}{2}$; เป็นเส้นตรง

(d) 5/2

37. (a) เป็นแบบผกผันได้ , $x = (3u-v)/5, \; y = (2v-u)/5$

(b) 1/5

5

การแจกแจงที่สำคัญแบบต่างๆ

Some Important Distributions

ในบทต่างๆ ที่ผ่านมา เราศึกษาคุณสมบัติต่างๆ ที่ตัวแปรสุ่มใดๆจะต้องมีร่วมกัน สำหรับบทนี้ เราจะเลือกพิจารณาตัวแปรสุ่มในกรณีเฉพาะที่มีความสำคัญในการประยุกต์ในปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ การวิจัยการดำเนินการและสถิติเป็นต้น เราแบ่งการพิจารณาเป็น 2 ส่วน ดังนี้

ส่วนที่ 1 ศึกษาการแจกแจงที่สำคัญ ๆ ของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย ได้แก่ การแจกแจงแบบทวินาม (binomial distribution) การแจกแจงแบบเรขาคณิต (geometric distribution) การแจกแจงแบบพาสคาล (Pascal distribution) การแจกแจงแบบทวินามเชิงนิเสธ (negative binomial distribution) การแจกแจงทั้ง 4 แบบนี้ มีพื้นฐานอยู่บนการทดลองที่เรียกว่า การทดลองแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli trials) ตลอดจนศึกษาการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริก (hypergeometric distribution) และการแจกแจงแบบปัวซอง (Poisson distribution)

ส่วนที่ 2 ศึกษาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ได้แก่ การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (uniform distribution) การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนท์เชียล (exponential distribution) การแจกแจงแบบแกมมา (gamma distribution) การแจกแจงแบบไวบูล (Weibull distribution) และที่สำคัญที่สุด คือ การแจกแจงแบบปกติ (normal distribution)

สัญกรณ์ที่เราจะใช้ในกรณีที่มีตัวแปรสุ่ม X เพียงตัวแปรเดียว คือ

เขียน $p(x)$ แทน $p_X(x)$ ในกรณีแบบเต็มหน่วย

เขียน $f(x)$ แทน $f_X(x)$ ในกรณีแบบต่อเนื่อง

เขียน $F(x)$ แทน $F_X(x)$ สำหรับฟังก์ชันแจกแจงในทั้งสองกรณี

ในกรณีที่มีตัวแปรสุ่มมากกว่าหนึ่งตัวแปร อาจจะจำเป็นใช้สัญลักษณ์ของตัวแปรสุ่มกำกับเพื่อไม่ให้เกิดความคลุมเครือ

5.1 การแจกแจงที่สำคัญ ๆ ของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย

5.1.1 การทดลองแบบเบอร์นูลลี (Bernoulli Trials)

การทดลองแบบเบอร์นูลลีเป็นการทดลองเชิงสุ่มซึ่งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพียง 2 แบบเท่านั้น โดยทั่วไปเราเรียกผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 แบบนี้ว่า

ความสำเร็จ (success) และ **ความไม่สำเร็จ** (failure)

เราให้

ความน่าจะเป็นของ**ความสำเร็จ** $= p$

ดังนั้น

ความน่าจะเป็นของ**ความไม่สำเร็จ** $= 1-p = q$

(นั่นคือ $p+q = 1$) เราให้ X เป็นตัวแปรสุ่มของการทดลองแบบเบอร์นูลลี โดยกำหนดให้

$X = 1$ แทน**ความสำเร็จ** และ $X = 0$ แทน**ความไม่สำเร็จ**

นั่นคือ เราแทน "ความสำเร็จ" และ "ความไม่สำเร็จ" ด้วยตัวเลข 1 และ 0 ตามลำดับ สำหรับ p.d.f. ของ X สามารถเขียนได้ในรูป

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0,1 \tag{5.1}$$

และเรากล่าวว่า X **มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี**

ค่าคาดหมาย หรือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{1} x\,p^x(1-p)^{1-x}$$

$$= (0)(1-p)+(1)(p) = p \tag{5.2}$$

และความแปรปรวนของ X คือ

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= V(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] \\
&= \sum_{x=0}^{1}(x-p)^2\, p^x(1-p) \\
&= p^2(1-p)+(1-p)^2 p \\
&= p(1-p)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

นอกจากนี้ เราสามารถแสดงได้ว่า โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$M_X(t) = (1-p)+pe^t = q+pe^t \tag{5.4}$$

ถ้าเราทำการทดลองแบบเบอร์นูลลีชนิดเดียวกัน ซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง โดยที่

1. การทดลองในแต่ละครั้งเป็นอิสระแก่กัน
2. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งมีค่าคงเดิม นั่นคือ เท่ากับ p

เราเรียกกระบวนการนี้ว่า **กระบวนการเบอร์นูลลี (Bernoulli process)**

พิจารณากระบวนการเบอร์นูลลี ซึ่งประกอบด้วยการทดลองแบบเบอร์นูลลีกระทำซ้ำกัน n ครั้ง โดยให้ X_i เป็นตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลีของการทดลองครั้งที่ i ดังนั้น สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ เราได้ว่า

X_i มีค่าเป็น 0 หรือ 1 โดยมี p.d.f. ของ X_i กำหนดโดยสมการ (5.1)

นั่นคือ

$$p_{X_i}(x_i) = p(x_i) = \begin{cases} p, & x_i = 1 \\ 1-p, & x_i = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\mu_{x_i} = \mu = p \tag{5.6}$$

$$V(X_i) = \sigma^2_{X_i} = \sigma^2 = p(1-p) \tag{5.7}$$

และ

$$M_{X_i}(t) = q+pe^t \tag{5.8}$$

โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า การทดลองในแต่ละครั้งเป็นอิสระแก่กัน ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ มีความเป็นอิสระแก่กัน ผลที่ตามมาคือ joint p.d.f. ของ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ คือ

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$$

เพราะว่า

$$p(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \qquad (x_i = 0, 1 \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

ดังนั้น

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}\,(1-p)^{1-x_i} \tag{5.9}$$

เช่น

$$p(1, 1, \dots, 1) = p^n, \qquad p(1, 0, 1, 0, \dots, 0) = p^2(1-p)^{n-2}$$
$$p(0, 0, \dots, 0) = (1-p)^n, \qquad p(0, 0, 1, 1, 0, \dots, 0) = p^2(1-p)^{n-2}$$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 5.1

(a) กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง 10 ลูก และลูกบอลสีขาว 20 ลูก เลือกสุ่มลูกบอลมา 5 ลูก โดยเลือกครั้งละ 1 ลูก และเลือกแบบคืนที่ ถ้าเราให้ **การเลือกลูกบอลสีแดงได้เป็นความสำเร็จ** และถ้าการเลือกลูกบอลแต่ละครั้งมีความเป็นอิสระแก่กัน เราจะได้ว่า การเลือกลูกบอลแต่ละครั้งเป็นการทดลองแบบเบอร์นูลลี 1 ครั้ง โดยมี

$$p = P\,(\text{ความสำเร็จ}) = 10/30 = 1/3$$

และการเลือกลูกบอล 5 ครั้ง เป็นกระบวนการเบอร์นูลลี

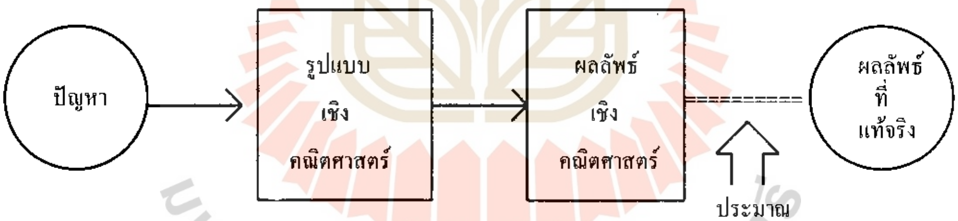
(b) ในการเพาะพันธุ์โดยใช้เมล็ดของมะม่วงพันธุ์หนึ่ง เราทราบว่า ความน่าจะเป็นที่การเพาะพันธุ์จะได้ผลสำเร็จเท่ากับ 0.8 สำหรับเมล็ดแต่ละเมล็ด ถ้าเราใช้เมล็ดทั้งหมด 10 เมล็ดในแปลงทดลอง และการที่แต่ละเมล็ดจะเจริญงอกงามเป็นอิสระแก่กันแล้ว กระบวนการนี้เป็นกระบวนการเบอร์นูลลี โดยมี $p = 0.8,\ n = 10$

(c) ในกระบวนการผลิตอันหนึ่ง ผลผลิตโดยเครื่องจักรเครื่องหนึ่งจะถูกจำแนกเป็นผลผลิตที่มีคุณภาพดี หรือมีข้อบกพร่อง (defect) ถ้าผลผลิต 1,000 ชิ้น ผลิตโดยเครื่องจักรเครื่องนี้ได้รับการตรวจสอบ แล้วเราสามารถพิจารณาปัญหาในรูปแบบต่อไปนี้

1. การตรวจสอบผลผลิตแต่ละชิ้นเป็นการทดลองเบอร์นูลลี 1 ครั้ง เพราะว่าผลของการตรวจสอบกำหนดไว้เพียง 2 แบบเท่านั้น โดยที่เราเรียก "**มีข้อบกพร่อง**" ว่า ความสำเร็จ และเรียก "**คุณภาพดี**" ว่า ความไม่สำเร็จ

2. การตรวจสอบผลผลิต 1,000 ชิ้น ผลิตโดยเครื่องจักรเครื่องเดียวกันนี้เป็นกระบวนการเบอร์นูลลี ถ้าเรามีสมมุติฐานว่า ประสิทธิภาพของเครื่องจักรมีความสม่ำเสมอ นั่นคือ ประสิทธิภาพของเครื่องจักรในการผลิตของที่มีคุณภาพดีในการผลิตแต่ละครั้งไม่แตกต่างกัน และโอกาสที่เครื่องจักรจะผลิตของที่มีข้อบกพร่องจะไม่มากขึ้นหรือน้อยลง

ดังนั้น กระบวนการผลิตนี้เป็นกระบวนการเบอร์นูลลี ประกอบด้วยการทดลองแบบเบอร์นูลลี 1,000 ครั้ง จะต้องตระหนักว่า ในการวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบนี้ เราไม่คำนึงถึง การสึกหรอของเครื่องจักร การปรับเครื่องจักรระหว่างการผลิต ความยากในการวัดคุมเครื่องจักรเหล่านี้ เป็นต้น อาจกล่าวว่า การวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้รูปแบบข้างต้นนี้ค่อนข้าง "ห่างไกล" จากสภาพความเป็นจริง แต่เราสามารถสร้างรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ววิเคราะห์ผลออกมาได้ โดยผลที่ได้มานี้อาจกล่าวได้ว่าเป็นผลลัพธ์ที่คาดประมาณผลลัพธ์ที่ควรจะได้จากสภาพที่แท้จริงของปัญหา และสะท้อนให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่แท้จริงมีแนวโน้มเป็นเช่นใด

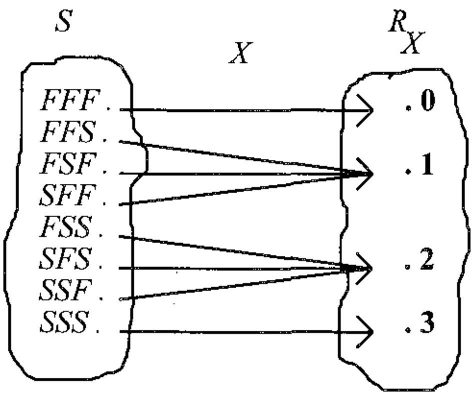


รูป 5.1

ตัวอย่าง 5.2 สมมติว่า การทดลองอันหนึ่งประกอบด้วย การทดลองเบอร์นูลลี 3 ครั้ง และความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งเท่ากับ p ให้ $X = X_1 + X_2 + X_3$ เมื่อ X_1, X_2, X_3 เป็นตัวแปรสุ่มเบอร์นูลลีในแต่ละครั้ง ดังนั้น

$$x_i = 0 \text{ หรือ } 1 \text{ สำหรับ } i = 1, 2, 3$$

และเพราะว่า $x = x_1 + x_2 + x_3$ ดังนั้น พิสัยของ X คือ $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ ดังแสดงในรูป 5.2 (S แทน **ความสำเร็จ** และ F แทน **ความไม่สำเร็จ**)



รูป 5.2

การคำนวณหา p.d.f. ของ X ทำได้ดังนี้คือ $(q = 1-p)$

$$p(0) = P(\{FFF\}) = q.q.q. = q^3$$

$$p(1) = P(\{FFS\}) + P(\{FSF\}) + P(\{SFF\})$$

$$= q^2p + q^2p + q^2p = 3q^2p$$

$$p(2) = P(\{FSS\}) + P(\{SFS\}) + P(\{SSF\})$$

$$= q\,p^2 + q\,p^2 + q\,p^2 = 3q\,p^2$$

$$p(3) = P(\{SSS\}) = p.p.p. = p^3$$

สถานการณ์ในตัวอย่าง 5.2 เช่น โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง **ให้การออกก้อยเป็นความสำเร็จ** และการออกหัว เป็นความไม่สำเร็จ ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม X ในตัวอย่าง 5.2 ก็คือ จำนวนครั้งที่เหรียญออกก้อยในสถานการณ์นี้นั่นเอง และถ้าเป็นเหรียญเที่ยงตรง แล้ว $p = 1/2$ และ p.d.f. ของ X มีค่าดังนี้ $(q = 1-p = 1/2)$

x	0	1	2	3
p(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

ซึ่งมีผลเหมือนกับวิธีการหาความน่าจะเป็นโดยตรงจากแซมเปิลสเปซในบทที่ 1 เพียงแต่ ในที่นี้ เรามองการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เป็นกระบวนการเบอร์นูลลี

5.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม (Binomial Distribution)

ถ้าให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งของความสำเร็จในกระบวนการเบอร์นูลลี ซึ่งประกอบด้วยการทดลองแบบเบอร์นูลลี n ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งเท่ากับ p $(0 \le p \le 1)$ แล้วเราสามารถพิจารณาหา p.d.f. ของ X ได้ดังนี้

ให้

$$p(x) = P(\{\text{ความสำเร็จ } X \text{ ครั้งในการทดลอง } n \text{ ครั้ง}\})$$

เมื่อ $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น จำนวนครั้งของความไม่สำเร็จคือ $n - x$ โดยใช้สูตรของการจัดหมู่เราได้ว่า จำนวนวิธีของการวางตำแหน่ง x ตำแหน่ง สำหรับความสำเร็จ x ครั้ง ในการทดลอง n ครั้ง คือ

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

เพราะว่าการทดลองทั้ง n ครั้ง เป็นอิสระแก่กัน และความน่าจะเป็นของความสำเร็จและความน่าจะเป็นของความไม่สำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งเท่ากับ p และ $q = 1 - p$ ตามลำดับ ดังนั้น ความน่าจะเป็น**ของแต่ละวิธี**ที่ได้ความสำเร็จ X ครั้ง ในการทดลอง n ครัง เท่ากับ

$$p^x (1-p)^{n-x}$$

และเพราะว่า แต่ละวิธีในจำนวน $\binom{n}{x}$ วิธีเหล่านี้ ต่างก็เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้ ดังนั้น ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ x ครั้ง ในการทดลอง n ครั้ง ย่อมเท่ากับผลบวกของความน่าจะเป็นของแต่ละวิธีในจำนวน $\binom{n}{x}$ วิธีเหล่านี้ นั่นคือ

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{5.10}$$

เราเรียกความน่าจะเป็นเหล่านี้ว่า **ความน่าจะเป็นแบบทวินาม** และเรากล่าวว่าตัวแปรสุ่ม X มี**การแจกแจงแบบทวินาม** หรือเขียนเป็น $b(n, p)$ นอกจากนี้ เราเรียกค่าคงที่ n และ p ว่า **พารามิเตอร์ (parameter) ของการแจกแจงแบบทวินาม** เมื่อ n เป็นจำนวนครั้งของการทดลองแบบเบอร์นูลลี และ p เป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง เช่น กล่าวว่า X เป็น $b(15, 1/3)$ มีความหมายว่า X เป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จในการทดลองแบบเบอร์นูลลี 15 ครั้ง โดยที่ความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้งเท่ากับ 1/3

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม

ค่าเฉลี่ยของ X ซึ่งเป็น $b(n, p)$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= 0 + np\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$

ให้ $y = x-1$ ดังนั้น

$$E[X] = np\sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y}$$

$$= np\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y q^{n-1-y}$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np$$

ดังนั้น

$$E[X] = \mu = np \tag{5.11}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถคำนวณหาความแปรปรวนได้ดังนี้

$$V(X) = E[X^2] - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} - (np)^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!(n-2-y)!} p^y q^{n-2-y} - (np)^2$$

$$= np + n(n-1)p^2(1) - (np)^2 = np(1-p)$$

ดังนั้น

$$V(X) = \sigma^2 = np(1-p) = npq \tag{5.12}$$

วิธีที่คำนวณได้ง่ายกว่านี้ คือให้ $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ เมื่อ X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบเบอร์นูลลี โดยมี $\mu_i = p$ และ $\sigma_i^2 = p(1-p)$ จากสมการ (5.6) และ (5.7) ตามลำดับ เพราะว่า X เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่ม X_i ซึ่งมีความเป็นอิสระ ดังนั้น

$$E[X] = p + p + \ldots + p = np$$

และ

$$V(X) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = n(1-p)$$

โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของการแจกแจงแบบทวินาม สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{xt}\right] = \sum_{x=0}^{n} e^{xt} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(pe^t\right)^x q^{n-x} \\ &= \left(pe^t + q\right)^n \end{aligned} \tag{5.13}$$

เราสามารถคำนวณ μ และ σ^2 จาก $M_X(t)$ ได้ง่ายกว่าการหา μ และ σ^2 โดยตรง นั่นคือ

$$\frac{d}{dt} M_X(t) = n\left(pe^t + q\right)^{n-1}\left(pe^t\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = n(n-1)\left(pe^t + q\right)^{n-2}\left(pe^t\right)^2 + n\left(pe^t + q\right)\left(pe^t\right)$$

ดังนั้น

$$E[X] = \mu = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = np$$

และ

$$\begin{aligned} V(X) = \sigma^2 &= E\left[X^2\right] - \mu^2 \\ &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} - (np)^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3 ถ้าตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าเที่ยงตรงออกแต้ม 4 ในการทอดลูกเต๋าทั้งหมด 5 ครั้ง แล้ว X เป็น $b(5, 1/6)$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \binom{5}{x}(1/6)^x (5/6)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 5$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าออกแต้ม 4 สองครั้ง และออกแต้มอื่นๆ ที่ไม่ใช่ 4 อีกสามครั้ง คือ $p(2)$ ซึ่งหาค่าได้โดย

$$p(2) = \binom{5}{2}(1/6)^2 (5/6)^3$$

ค่าเฉลี่ยของการออกแต้ม 4 ในการทอดลูกเต๋า 5 ครั้ง คือ

$$E[X] = np = 5(1/6) = 5/6 \text{ ครั้ง}$$

และความแปรปรวน คือ

$$V(X) = np(1-p) = 5(1/6)(5/6) = 25/36 \text{ (ครั้ง)}^2$$

ตัวอย่าง 5.4 จากตัวอย่าง 5.1 (b) ถ้าตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนเมล็ดมะม่วงที่เพาะพันธุ์ได้สำเร็จในจำนวนทั้งหมด 10 เมล็ด แล้ว X เป็น $b(10, 0.8)$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \binom{10}{x}(0.8)^x (0.2)^{10-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

ถ้าเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่เมล็ดเพาะพันธุ์ได้สำเร็จอย่างมากที่สุด 8 เมล็ด นั่นคือ คำนวณหา $P(X \le 8)$ ได้ดังนี้ คือ

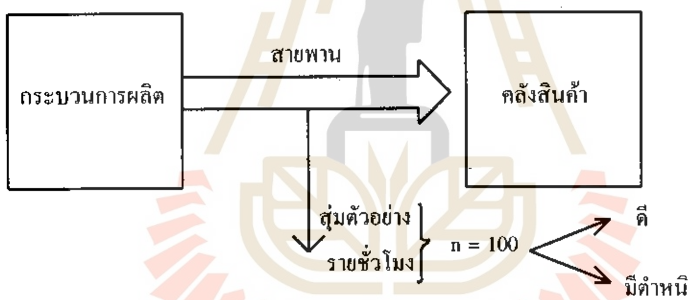
$$\begin{aligned} P(X \le 8) &= 1 - P(X > 8) \\ &= 1 - \{P(X = 9) + P(X = 10)\} \\ &= 1 - p(9) - p(10) \\ &= 1 - 10(0.8)^9(0.2) - (0.8)^{10} \\ &= 0.6242 \end{aligned}$$

อันที่จริง $P(X \le 8)$ ก็คือ $F(8)$ เมื่อ F เป็นฟังก์ชันแจกแจงของ X

ตัวอย่าง 5.5 กระบวนการผลิตซึ่งแทนด้วยรูป 5.3 มีผลผลิตจำนวน 1000 หน่วยต่อวัน โดยเฉลี่ยมีผลผลิตที่มีตำหนิ 1% และค่าค่านี้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงเท่าที่ได้บันทึกสถิติมา ในทุกๆ ชั่วโมงกลุ่มตัวอย่าง 100 หน่วย ถูกเลือกสุ่มมาจากสายพาน(conveyor) ดังแสดงในรูป 5.3 และมีการตรวจสอบลักษณะพิเศษหลายๆประการ อย่างไรก็ตามผู้ตรวจสอบแบ่งลักษณะที่ตรวจพบจากผลผลิตเป็นสองลักษณะใหญ่ๆ คือ ดี หรือ มีตำหนิ ถ้าเราพิจารณาว่า การสุ่มตัวอย่างขนาด $n = 100$ เป็นการทดลองแบบเบอร์นูลลี 100 ครั้ง โดยมี $p = .01$ ซึ่งคือความน่าจะเป็นที่ผลผลิตแต่ละหน่วยมีตำหนิ ดังนั้น

ถ้าเราให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิในกลุ่มตัวอย่างหน่วย 100 แล้ว X มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมี $n = 100$ และ $p = .01$ หรือ X เป็น $b(100, 0.01)$ และ มี p.d.f. กำหนดโดย

$$p(x) = \binom{100}{x}(.01)^x(.99)^{100-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, 100$$



รูป 5.3

สมมติว่า ผู้ตรวจสอบจะสั่งให้หยุดกระบวนผลิต ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีผลผลิตที่มีตำหนิมากกว่า 2 หน่วย ดังนั้น เราคำนวณ $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$

$$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{100}{x}(.01)^x(.99)^{100-x}$$
$$= (.99)^{100} + (100)(.01)^1(.99)^{99} + 4950(.01)^2(.99)^{98}$$

$$\therefore \quad P(X \le 2) \approx .92$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผู้ตรวจสอบจะหยุดกระบวนผลิต มีค่าเท่ากับ $1-.92 = .08$ สำหรับค่าเฉลี่ยของจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิ และความแปรปรวน คือ

$$E[X] = \mu = n\,p = 100(.01) = 1$$
$$V(X) = \sigma^2 = n\,p(1-p) = 100(.01)(.99) = .99$$

ฟังก์ชันแจกแจงแบบทวินาม(The Cumulative Binomial Distribution)

ถ้า X เป็น $b(n,p)$ แล้ว ฟังก์ชันแจกแจงแบบทวินาม คือ

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{5.14}$$

เมื่อ $[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดและน้อยกว่าหรือเท่ากับ x สำหรับตารางค่าของ $F(x)$ สำหรับค่าเฉพาะบางค่าของ n และ p แสดงในตาราง 1. ในภาคผนวกของบทนี้

ตัวอย่าง 5.5 ให้ X เป็นจำนวนของสัญญาณเรดาร์ ซึ่งบอกตำแหน่งได้อย่างแม่นตรงในช่วงเวลา 30 นาที จากจำนวนสัญญาณเรดาร์ทั้งหมดที่ได้รับ 1 สัญญาณ สมติว่า X มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมี $n = 10$ และ $p = 1/2$ หรือ X เป็น $b(10, 1/2)$ จงคำนวณหาความน่าจะเป็นที่อย่างมากที่สุดมี 7 สัญญาณ ซึ่งบอกตำแหน่งได้อย่างแม่นตรง นั่นคือ คำนวณหา $P(X \le 7)$ หรือ $F(7)$

$$P(X \le 7) = \sum_{x=0}^{7} \binom{10}{x} (1/2)^x (1/2)^{10-x}$$

ซึ่งสามารถอ่านค่านี้ ได้จากตาราง 1. ในภาคผนวก โดยพิจารณาจากกลุ่มของ $n = 10$ ตรงคอลัมน์ตำแหน่งเลข 0.5 และตรงแถวตำแหน่งเลข 7 ซึ่งอ่านได้ว่า

$$P(X \le 7) = F(7) = .9453$$

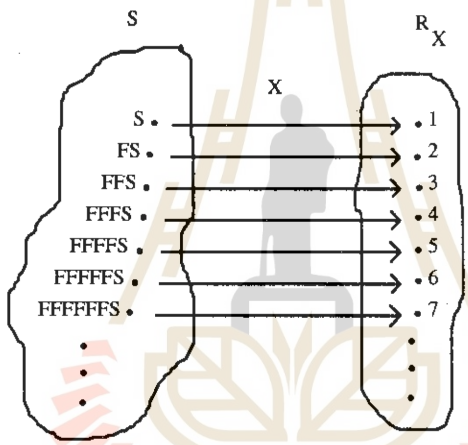
ในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้ตาราง 1. คำนวณความน่าจะเป็นของเหตุการณ์แบบอื่น ๆ เช่น

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 7) &= P(X \le 7) - P(X < 2) \\ &= P(X \le 7) - P(X \le 1) \\ &= F(7) - F(1) \\ &= .9453 - .0107 \\ &= .9346 \end{aligned}$$

5.1.3 การแจกแจงแบบเรขาคณิต (The Geometric Distribution)

การแจกแจงแบบเรขาคณิตเป็นการแจกแจงอีกชนิดหนึ่ง ที่สัมพันธ์กับการทดลองแบบเบอร์นูลลี เพียงแต่จำนวนครั้งของการทำทดลองซ้ำ ไม่ได้กำหนดเป็นค่าคงที่แน่นอน ตัวแปรสุ่ม X ในสถานการณ์อันนี้ คือ **จำนวนครั้งของการทดลองจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เป็นความสำเร็จครั้งแรก** แซมเปิลสเปซและพิสัยของ X แสดงในรูป 5.4 พิสัยของ X คือ $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.15)$$



รูป 5.4 แซมเปิลสเปซและพิสัยของ X

เราสามารถแสดงได้โดยง่ายว่า (5.15) มีคุณสมบัติเป็น p.d.f. คือ

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p\left(\frac{1}{1-q}\right) = 1$$

และ

$$p(x) \geq 0 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } x$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเรขาคณิต

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเรขาคณิตสามารถคำนวณได้ดังนี้ คือ

$$\mu = E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p\, q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1}$$

หรือ

$$\mu = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^{x} = p \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{1}{p}$$

$$\mu = 1/p \tag{5.16}$$

และ

$$\sigma^2 = V(X) = E[X^2] - \mu^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p\, q^{x-1} - (1/p)^2$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1} - (1/p)^2$$

$$\sigma^2 = q/p^2 \tag{5.17}$$

โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน คือ

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \sum_{x=1}^{\infty} e^{xt}\, p\, q^{x-1}$$

$$= p\, e^{t} \sum_{x=1}^{\infty} \left(q\, e^{t}\right)^{x-1}$$

$$\therefore \quad M_X(t) = \frac{p\, e^{t}}{1 - q\, e^{t}} \tag{5.18}$$

หมายเหตุ $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots = \frac{1}{1-r}$ สำหรับ $|r| < 1$

ตัวอย่าง 5.6 การทดลองอันหนึ่งถูกกระทำซ้ำจนกระทั่งได้ผลสำเร็จ การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระแก่กัน ค่าใช้จ่ายในการทำการทดลองแต่ละครั้งคือ 25,000 บาท และถ้าผลของทดลองไม่เป็นผลสำเร็จ ต้องเสียค่าใช้จ่ายเพิ่มเติมอีก 5,000 บาท ในการเตรียมการทดลองครั้งต่อไป ผู้ทำการทดลองต้องการพิจารณา**ค่าเฉลี่ยของค่าใช้จ่าย**ในโครงการนี้ ถ้าให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ทำการทดลองซ้ำจนกว่าจะได้ผลสำเร็จเป็นครั้งแรก ดังนั้น ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายในการทำการทดลอง X ครั้ง คือ

$$\begin{aligned} C(X) &= 25000\,X + 5000\,(X-1) \qquad\qquad X = 1, 2, 3, \ldots \\ &= (30000)\,X + (-5000) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยของ $C(X)$ คือ ค่าคาดหมายของ$C(X)$ หรือ $E[C(X)]$

$$\begin{aligned} E[C(X)] &= E[30000\,X - 5000] \\ &= 30000\,E[X] - 5000 \\ &= 30000\,(1/p) - 5000 \end{aligned}$$

ถ้าความน่าจะเป็นที่การทดลองเป็นผลสำเร็จในแต่ละครั้ง คือ 0.25 แล้ว

$$E[C(X)] = 30000/.25 - 5000 = 115{,}000$$

สมมติว่าผู้ทำการทดลองมีเงินสำหรับค่าใช้จ่ายสูงสุด เท่ากับ 500,000 บาท และต้องการหาความน่าจะเป็นที่ค่าใช้จ่ายในการทำการทดลองจะสูงกว่าเงินจำนวนนี้ นั่นคือ

$$\begin{aligned} P(C(X) > 500{,}000) &= P\,(30000\,X - 5000 > 500{,}000) \\ &= P\,(X > 505{,}000/30{,}000) \\ &= P\,(X > 16.833) \\ &= 1 - P\,(X \le 16) \\ &= 1 - \sum_{x=1}^{16} (.25)(.75)^{x-1} \\ &\approx .01 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ค่าใช้จ่ายในการทดลองจะมากกว่า 500,000 บาท มีค่าประมาณ .01 นั่นคือ ผู้ทำการทดลองมีความเสี่ยงประมาณ .01 ที่จะต้องเสียค่าใช้จ่ายมากกว่า 500,000 บาท โดยไม่ประสบความสำเร็จในการทดลองแม้แต่ครั้งเดียวเลย

ข้อสังเกตของการแจกแจงแบบเรขาคณิต คือ จำนวนครั้งของการทดลองเป็นตัวแปร ส่วนจำนวนครั้งของความสำเร็จเป็นค่าคงที่เท่ากับหนึ่ง แตกต่างจากการแจกแจงแบบทวินาม ซึ่งจำนวนครั้งการทดลองเป็นจำนวนคงที่ ส่วนจำนวนครั้งของความสำเร็จเป็นตัวแปร การแจกแจงแบบเรขาคณิตมีคุณสมบัติที่สำคัญๆ กล่าวสรุปได้ดังนี้คือ

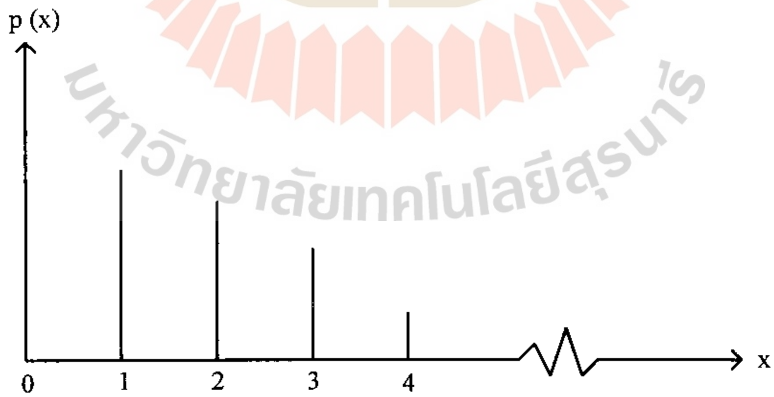
1. การแจกแจงแบบเรขาคณิต หรือ p.d.f. ของ X เป็นฟังก์ชันค่าลดลง นั่นคือ

$$p(x) < p(x-1) \qquad \text{สำหรับ } x = 2, 3, 4, \ldots \quad \text{(ดูรูป 5.5)}$$

2. การแจกแจงแบบเรขาคณิตมีคุณสมบัติที่เรียกว่า "ไม่มีความจำ" (memoryless) กล่าวคือ

$$P(X > x+s \mid X > s) = P(X > x) \tag{5.19}$$

ซึ่งเป็น**การแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยเพียงชนิดเดียว** ซึ่งมีคุณสมบัตินี้



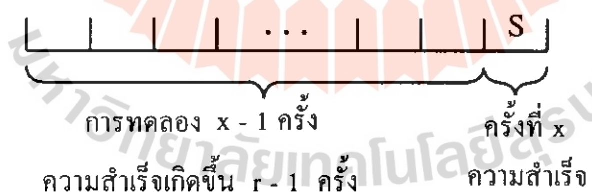
รูป 5.5

5.1.4 การแจกแจงแบบพาสคาล (The Pascal Distribution)

การแจกแจงแบบพาสคาลเป็นการแจกแจงซึ่งมีพื้นฐานอยู่บนการทดลองแบบเบอร์นูลลีเช่นกัน และเป็นส่วนขยายของการแจกแจงแบบเรขาคณิต นั่นคือ ในกรณีนี้ **ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนครั้งของการทดลองเพื่อให้ได้ความสำเร็จ r ครั้ง** การแจกแจงของ X หรือ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, r+2, \ldots \tag{5.20}$$

ค่าของ $p^r q^{x-r}$ คือความน่าจะเป็นของ**วิธีหนึ่ง**ในแซมเปิลสเปซ ที่ได้ความสำเร็จ r ครั้ง และความไม่สำเร็จ $x-r$ ครั้ง ส่วนจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะได้ผลลัพธ์ดังนี้ พิจารณาได้โดยง่าย กล่าวคือ การที่จะได้ความสำเร็จ r ครั้ง ในการทดลอง x ครั้ง โดยมีความสำเร็จเกิดขึ้นในการทดลองครั้งที่ x หรือครั้งท้ายสุดนั้น หมายความว่า จะต้องมีความสำเร็จเกิดขึ้นมาแล้วจำนวน $r-1$ ครั้ง ในจำนวนการทดลอง $x-1$ ครั้ง ก่อนที่จะถึงการทดลองครั้งที่ x จำนวนวิธีทั้งหมดที่คล้อยตามเงื่อนไขนี้ก็คือการจัดวางตำแหน่งความสำเร็จ $r-1$ ครั้ง ในการทดลอง $x-1$ ครั้ง ซึ่งได้ $\binom{x-1}{r-1}$ **วิธีนั่นเอง** ดังนั้น การแจกแจงของ x จึงมีรูปแบบดังในสมการ (5.20)



ถ้า $r = 1$ แล้ว X มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต

ถ้า $r = 2$ แล้ว X แทนจำนวนครั้งของการทดลองเพื่อให้ได้ความสำเร็จ 2 ครั้ง

ตัวอย่างของจุดตัวอย่างในแซมเปิลสเปซในกรณี $r = 2$ และค่าที่สมนัยกันของตัวแปรสุ่ม X ในพิสัยของ X แสดงในรูป 5.6 (S = ความสำเร็จ, F = ความไม่สำเร็จ)

แซมเปิลสเปซ	R_X
SS	$x = 2$
$SFS,\ FSS$	$x = 3$
$SFFS,\ FSFS,\ FFSS$	$x = 4$
$SFFFS,\ FSFFS,\ FFSFS,\ FFFSS$	$x = 5$

รูป 5.6 การแจกแจงแบบพาสคาลด้วย $r = 2$

ในทำนองเดียวกันกับการแจกแจงแบบเรขาคณิต การแจกแจงแบบพาสคาลมีจำนวนครั้งของการทดลองเป็นตัวแปร และ r ซึ่งเป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จเป็นค่าคงที่ ค่าคงที่ r และ p ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทดลองแต่ละครั้ง ทำหน้าที่เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบพาสคาล

ในกรณีที่ r ไม่ได้จำกัดว่าต้องเป็นจำนวนเต็มบวกเป็นเพียงค่าบวกใดๆ และ $0 < p < 1$ การแจกแจงในสมการ (5.20) มีชื่อเรียกว่า **การแจกแจงแบบทวินามเชิงนิเสธ** (the negative binomial distribution)

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบพาสคาล

ถ้า X มีการแจกแจงแบบพาสคาล ดังในสมการ (5.20) แล้ว ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X มีค่าดังนี้

$$\mu = E[X] = r/p \tag{5.21}$$

$$\sigma^2 = V(X) = rq/p^2 \tag{5.22}$$

และ

$$M_X(t) = E\left[e^{Xt}\right] = \left(\frac{p\,e^t}{1-q\,e^t}\right)^r \tag{5.23}$$

ตัวอย่าง 5.7 เงื่อนไขในการคัดเลือกนักบาสเกตบอลในรอบแรกของโรงเรียนแห่งหนึ่ง คือ ผู้สมัครต้องโยนลูกลงห่วงในเขตโทษได้ 3 ครั้ง ภายใน 5 ครั้ง นักเรียนคนหนึ่งสมัครเข้ารับการคัดเลือก สมมติว่า ความน่าจะเป็นที่นักเรียนผู้นี้โยนลูกลงห่วงในเขตโทษได้คือ 0.6 และมีค่าคงที่ในการโยนแต่ละครั้ง และสมมติว่า ผลลัพธ์ในการโยนแต่ละครั้งไม่มีอิทธิพลต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนผู้นี้จะได้รับการคัดเลือก

วิธีทำ

ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการโยนลูกในเขตโทษจนกว่าลูกจะลงห่วงได้ครบ 3 ครั้ง ดังนั้น พิสัยของ X คือ $R_X = \{3,4,5,6,\ldots\}$ และ X มีการแจกแจงแบบพาสคาล โดยมี $r = 3$ และ $p = 0.6$ จากสมการ (5.20) การแจกแจงหรือ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \binom{x-1}{2}(0.6)^3(0.4)^{x-3} \qquad x = 3, 4, 5, 6, \ldots$$

ในที่นี้ เราต้องคำนวณหา $P(X \le 5)$ ซึ่งเท่ากับ $P(X = 3, 4, 5)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} P(X \le 5) &= p(3) + p(4) + p(5) \\ &= \binom{2}{2}(0.6)^3(0.4)^0 + \binom{3}{2}(0.6)^3(0.4)^1 + \binom{4}{2}(0.6)^3(0.4)^2 \\ &= 0.6636 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่นักเรียนผู้นี้จะได้รับการคัดเลือกในรอบแรก คือ 0.6636 นอกจากนี้ เรายังสามารถบอกได้ว่า ค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งที่นักเรียนผู้นี้ต้องโยนลูกในเขตโทษเพื่อให้โยนลงห่วงได้สำเร็จ 3 ครั้ง คือ

$$\mu = r/p = 3/.6 = 5 \quad \text{ครั้ง}$$

5.1.5 การแจกแจงแบบพหุนาม (The Multinomial Distribution)

ตัวแปรสุ่มหลายมิติที่มีความสำคัญและมีประโยชน์ มีการแจกแจงชนิดที่เรียกว่า การแจกแจงแบบพหุนาม สมมติว่า การทดลองอันหนึ่งมีแซมเปิลสเปซ S ซึ่งสามารถแบ่งเป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้ k เหตุการณ์ คือ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ทำการทดลองนี้ซ้ำกัน n ครัง การทดลองในแต่ละครั้งเป็นอิสระแก่กัน โดยที่ $p_i = P(B_i)$ มีค่าคงที่ในการทดลองแต่ละครั้ง สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, k$ ถ้า $k = 2$ สถานการณ์นี้คือ กระบวนการเบอร์นูลลี ให้ตัวแปรสุ่ม X_i แทนจำนวนครั้งที่เหตุการณ์ B_i เกิดขึ้น ดังนั้น เวกเตอร์ของตัวแปรสุ่ม $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ มีการแจกแจงดังนี้คือ

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left(\frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}\right) p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \qquad (5.24)$$

สำหรับ $x_1 = 0, 1, 2, \ldots;\quad x_2 = 0, 1, 2, \ldots;\quad x_k = 0, 1, 2, \ldots$ และ $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

หมายเหตุ ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_k$ ไม่มีความเป็นอิสระ เพราะว่าสำหรับจำนวน n ครั้งใดๆ ที่ทำการทดลองซ้ำ เราต้องได้ $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

สำหรับค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของแต่ละ X_i คือ

$$\mu_i = E[X_i] = n\,p_i \qquad (5.25)$$

และ

$$\sigma_i^2 = V(X_i) = n\,p_i(1 - p_i) \qquad (5.26)$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, k$

ตัวอย่าง 5.8 ในโรงงานผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่ง ในแต่ละขั้นตอนต้องใช้แรงงานเป็นจำนวนมาก สถิติที่ทางโรงงานเก็บรวบรวมไว้คือ ในการตรวจสอบคุณภาพครั้งสุดท้ายของเสื้อผ้าสำเร็จรูป พบว่ามี 85% ซึ่งมีคุณภาพดี 10% มีข้อบกพร่องซึ่งแก้ไขได้ และอีก 5% มีข้อบกพร่องแต่แก้ไขไม่ได้ สถิติเหล่านี้มีค่าคงเดิมตลอดเวลา กลุ่มตัวอย่างเสื้อผ้า 20 ตัว ถูกเลือกสุ่มมา และถ้าเราให้

X_1 = จำนวนเสื้อสำเร็จรูปที่มีคุณภาพดี

X_2 = จำนวนเสื้อสำเร็จรูปมีข้อบกพร่องที่แก้ไขได้

X_3 = จำนวนเสื้อสำเร็จรูปมีข้อบกพร่องที่แก้ไขไม่ได้

ดังนั้น $X_1 + X_2 + X_3 = 20$ และ (X_1, X_2, X_3) มีการแจกแจงแบบพหุนามโดยที่

$$p(x_1, x_2, , x_3) = \left(\frac{20!}{x_1!\, x_2!\, x_3!}\right)(0.85)^{x\,1}\ (0.10)^{x\,2}\ (0.05)^{x\,3}$$

สมมติว่า เราต้องการคำนวณค่าของฟังก์ชันความน่าจะเป็นสำหรับ $x_1 = 18,\ x_2 = 2$ และ $x_3 = 0\ (x_1 + x_2 + x_3 = 20)$ แทนค่าเหล่านี้ได้

$$\begin{aligned} p(18, 2, 0) &= \frac{20!}{(18)!\,(2)!\,0!}\ (.85)^{18}\,(.10)^2\,(.05)^0 \\ &= 190\,(.85)^{18}\,(.01) \\ &\approx .105 \end{aligned}$$

5.1.6 การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริก (The Hypergeometric Distribution)

ในบทที่ 1 เราได้แสดงตัวอย่างที่เกี่ยวกับการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริก ในที่นี้เราพิจารณาในรายละเอียดและการใช้การแจกแจงชนิดนี้ พิจารณาเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกทั้งหมด N สมาชิก ในจำนวนนี้มีสมาชิกอยู่ D จำนวน $(D \le N)$ ซึ่งมีลักษณะพิเศษหรือลักษณะที่เราสนใจศึกษา ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา เช่น

- ผลผลิต N สิ่ง มี D สิ่งที่มีข้อบกพร่อง และ $N - D$ สิ่งที่มีคุณภาพดี
- นักเรียน N คน มีอยู่ D คนที่ถนัดมือซ้าย และ $N - D$ คนที่ถนัดมือขวา

เลือกสุ่มกลุ่มตัวอย่างขนาด n จากเซตนี้โดยเลือกแบบไม่คืนที่ ตัวแปรสุ่มที่เราสนใจศึกษา คือ X ซึ่งแทนจำนวนสมาชิกที่มาจากสมาชิกจำนวน D สมาชิกที่มีลักษณะพิเศษ ดังนั้น การแจกแจงหรือ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \min(n, D) \tag{5.27}$$

min (n, D) หมายถึง จำนวนที่น้อยกว่าระหว่าง n และ D

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริก

ค่าเฉลี่ยคือ

$$\mu = E[X] = n\left(\frac{D}{N}\right) \tag{5.28}$$

และความแปรปรวนคือ

$$\sigma^2 = V(X) = n\left(\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{5.29}$$

ตัวอย่าง 5.9 จำนวนสิ่งของ 1,000 สิ่ง มี 100 สิ่งที่มีตำหนิ และอีก 900 สิ่งที่มีคุณภาพดี กลุ่มตัวอย่างขนาด 20 สิ่ง ถูกเลือกสุ่มแบบไม่คืนที่ จากของจำนวน 1,000 สิ่งนี้ ความน่าจะเป็นที่กลุ่มตัวอย่างมีของ 2 สิ่งหรือน้อยกว่า ที่มีตำหนิ คือ

$$P(X \le 2) = P(X = 0,1,2) = p(0)+p(1)+p(2)$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{2}\binom{100}{x}\binom{900}{20-x}}{\binom{1000}{20}}$$

$$= \frac{\binom{100}{0}\binom{900}{20}+\binom{100}{1}\binom{900}{19}+\binom{100}{2}\binom{900}{18}}{\binom{1000}{20}}$$

$$= .6772$$

ตัวอย่าง 5.10 ในแผนกตรวจสอบคุณภาพของผลผลิตของโรงงานแห่งหนึ่ง ได้รับผลผลิตรุ่นละ 100 หน่วย วิธีที่แผนกใช้ในการตรวจสอบคุณภาพ คือ โดยการสุ่มกลุ่มตัวอย่างขนาด 10 หน่วย โดยเลือกแบบไม่คืนที่ และยอมรับของทั้งรุ่น ถ้าในกลุ่มตัวอย่างขนาด 10 หน่วย ไม่มีผลผลิตที่มีข้อบกพร่องมากกว่า 1 หน่วย สมมติว่าของทั้งรุ่นมี $100p'\%$ ที่มีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นที่แผนกตรวจสอบยอมรับของทั้งรุ่น

วิธีทำ ให้ เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิใน 100 หน่วย ดังนั้น

$$P(\text{ยอมรับทั้งรุ่น}) = P(X \le 1) = P(X = 0,1) = p(0) + p(1)$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{1} \binom{100p'}{x} \binom{100(1-p')}{10-x}}{\binom{100}{10}}$$

$$= \frac{\binom{100\,p'}{0} \binom{100\,(1-p')}{10} + \binom{100\,p'}{1} \binom{100\,(1-p')}{9}}{\binom{100}{10}}$$

เห็นได้ชัดว่า ความน่าจะเป็นที่ยอมรับของทั้งรุ่นเป็นฟังก์ชันของคุณภาพของรุ่นหรือ p' เช่น ถ้า $p' = 0.05$ แล้ว

$$P(\text{ยอมรับทั้งรุ่น}) = \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10} + \binom{5}{1}\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} = 0.923$$

การประมาณการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกด้วยการแจกแจงแบบทวินาม

การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกและแบบทวินาม มีความสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด เมื่อมองในแง่ของการสุ่มตัวอย่าง โดยเทียบว่า การเลือกตัวอย่าง 1 หน่วย คือ การทดลอง 1 ครั้ง และความน่าจะเป็นของการมีลักษณะพิเศษ คือ ความน่าจะเป็นของความสำเร็จ ความแตกต่างของการแจกแจงทั้งสองจึงเกิดขึ้นจากวิธีการสุ่มตัวอย่าง โดยที่การแจกแจงแบบทวินามสัมพันธ์กับการสุ่มตัวอย่างโดยเลือกแบบคืนที่ เพื่อให้การทดลองแต่ละครั้งมีความเป็นอิสระแก่กัน และความน่าจะเป็นของความสำเร็จมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงในการทดลองจากครั้งหนึ่งไปยังอีกครั้งหนึ่ง ในขณะที่การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกสัมพันธ์กับการสุ่มตัวอย่างโดยเลือกแบบแค็นไม่ที่ จึงทำให้การทดลองแต่ละครั้งขาดความเป็นอิสระ และความน่าจะเป็นของความสำเร็จในการทอลองครั้งที่ k มีค่าขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของการทดลองในครั้งที่ผ่านมาแล้ว

อย่างไรก็ตามเราสามารถประมาณการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกด้วยการแจกแจงแบบทวินาม ในกรณีที่ D และ $N-D$ มีค่าใหญ่เมื่อเทียบกับ n หรือขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ทั้งนี้เพราะว่าความน่าจะเป็นของความสำเร็จจะไม่เปลี่ยนแปลงมากจากการทดลองครั้งหนึ่งไปยังครั้งต่อไป ซึ่งจะมีค่าใกล้กับ $\dfrac{D}{N}$ เราสามารถพิจารณาการประมาณนี้ โดยการเขียนสมการ (5.27) ในรูป

$$p(x) = \frac{\left[\dfrac{D!}{x!\,(D-x)!}\right]\left[\dfrac{(N-D)!}{(n-x)!\,(N-D-n+x)!}\right]}{\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}}$$

$$= \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,\frac{[D(D-1)..(D-x+1)][(N-D)(N-D-1)..(N-D-n+x+1)]}{N(N-1)..(N-n+1)}$$

$$\approx \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

เมื่อ $p = D/N$ และ $q = 1-p = (N-D)/N$ การประมาณนี้เป็นไปได้เพราะว่าในสมการสำหรับ $p(x)$ ทางด้านขวามือมีตัวประกอบในรูป $(D-r_1)/(N-r_2)$ อยู่ทั้งหมด x ตัว และมีตัวประกอบในรูป $(N-D-r_3)/(N-r_4)$ อยู่ทั้งหมด $n-x$ ตัว โดยที่จำนวนเต็ม r_1, r_2, r_3 และ r_4 มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับจำนวนเต็ม D และ $N-D$ (เพราะว่า n มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ D และ $N-D$) จึงทำให้ได้ว่า

$$\frac{(D-r_1)}{(N-r_2)} \text{ มีค่าใกล้ } p \quad \text{และ} \quad \frac{(N-D-r_3)}{(N-r_4)} \text{ มีค่าใกล้ } q = 1-p$$

ดังนั้น **การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกประมาณได้ด้วย** $b(n, p)$

ในตัวอย่าง 5.9 เราสามารถประมาณด้วยการแจกแจงแบบทวินาม $b(n, p)$ โดยให้ $n = 20$ และ $p = 100/1000 = 0.1$ ดังนั้น

$$P(X \le 2) \approx \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} (0.1)^x (0.9)^{20-x} = 0.6769$$

ซึ่งใกล้เคียงกับค่าที่หาได้โดยการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมทริกโดยตรง การประมาณเช่นนี้ใช้ได้ดีเมื่อ $n/N < 0.1$

5.1.7 การแจกแจงแบบปัวซอง (The Poisson Distribution)

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยที่มีประโยชน์มากอันหนึ่ง คือ การแจกแจงแบบปัวซอง การแจกแจงชนิดนี้เกิดขึ้นจากความสนใจในการนับจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงต่อเนื่องช่วงหนึ่งที่กำหนดมาให้ ช่วงต่อเนื่องในที่นี้ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา เช่น การนับจำนวนสัญญาณโทรศัพท์ที่เข้ามายังตู้สลับสายโทรศัพท์ระหว่างเวลา 9.00-12.00 น. จำนวนรอยขีดบนเส้นลวดยาว 100 เมตร จำนวนลูกค้าที่เข้ามาในห้างสรรพสินค้าระหว่างเวลา 12.00-14.00 น. เป็นต้น

นิยาม 5.1 การทดลองเชิงสุ่มเพื่อนับจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงต่อเนื่องช่วงหนึ่งที่กำหนดมาให้ มีชื่อเรียกว่า **กระบวนการปัวซอง(Poisson process)** เมื่อมีค่าคงที่ $\lambda > 0$ เป็นพารามีเตอร์ และเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. จำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงใด ๆ ที่ไม่คาบเกี่ยวกัน **มีความเป็นอิสระแก่กัน**
2. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกิดขึ้น 1 ครั้ง ในช่วงเล็กๆ ขนาด h **มีค่าประมาณ** λh
3. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกิดขึ้น 2 ครั้ง หรือมากกว่า ในช่วงขนาดเล็กมากๆ **มีค่าเป็นศูนย์**

สมมติว่า การทดลองเชิงสุ่มอันหนึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขทั้ง 3 ประการของกระบวนการปัวซอง ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงขนาดหนึ่งหน่วย ดังนั้น พิสัยของ X คือ $R_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ และการแจกแจงของ X หรือ $P(X = x)$ เมื่อ $x \in R_X$ จะพิจารณาได้โดยการประมาณตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. แบ่งช่วงหนึ่งหน่วยนี้ออกเป็นช่วงย่อย n ช่วง แต่ละช่วงย่อยมีขนาดเท่า ๆ กัน คือ $1/n$

2. ถ้า n ในขั้นที่ 1. มีค่าใหญ่ เมื่อเทียบกับ x แล้ว เราจะประมาณความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จขึ้น x ครั้ง ในช่วงหนึ่งหน่วย ด้วยการหาความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จ 1 ครั้ง ในแต่ละ x ช่วงย่อยในจำนวน n ช่วงย่อยนี้ และ

3. ความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกิดขึ้น 1 ครั้ง ในช่วงย่อยใดๆ ขนาด $1/n$ มีค่าประมาณ $\lambda(1/n)$ (โดยเงื่อนไขข้อ 2.) และความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกิดขึ้น 2 ครั้งหรือมากกว่า มีค่าเป็นศูนย์ (โดยเงื่อนไขข้อ 3.)

จากขั้นตอน 1, 2 และ 3 เราสรุปได้ว่า ในแต่ละช่วงย่อย ความสำเร็จเกิดขึ้น 1 ครั้งด้วยความน่าจะเป็นมีค่าประมาณ $\lambda(1/n)$ ทำให้เราพิจารณาได้ว่า การเกิดขึ้นหรือไม่เกิดขึ้นของความสำเร็จในแต่ละช่วงย่อย เป็นการทดลอง แบบเบอร์นูลลี 1 ครั้งได้ และโดยเงื่อนไขข้อ 1. ทำให้เราได้กระบวนการเบอร์นูลลีซึ่งประกอบด้วยการทดลองแบบเบอร์นูลลี n ครั้ง โดยมีความน่าจะเป็นของความสำเร็จเกิดขึ้นในแต่ละครั้งด้วยค่าประมาณ $\lambda(1/n)$ ดังนั้น

$P(X = x)$ ประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบทวินาม $b(n, \lambda/n)$

นั่นคือ

$$P(X = x) \approx \frac{n!}{x!(n-x)!} (\lambda/n)^x (1-\lambda/n)^{n-x}$$

เพื่อให้การประมาณนี้มีค่าใกล้เคียง $P(X = x)$ มาก เราเลือก n ให้มีค่าใหญ่ยิ่งขึ้น และถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตแล้ว ผลที่ได้รับคือ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\right] \frac{\lambda^x}{x!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

โดยการตรึงค่าของ x เราได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\right] = \lim_{n \to \infty} \left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]$$

$$= 1$$

เพราะว่า

$$\lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad \text{และ} \quad \lim_{n \to \infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = P(X = x)$$

นิยาม 5.2 เรากล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปัวซอง ถ้า p.d.f. ของ X อยู่ในรูป

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.30}$$

สำหรับ $\lambda > 0$

เราสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่า $p(x)$ มีคุณสมบัติของ p.d.f. กล่าวคือ $p(x) \geq 0$ และ

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

และเพื่อพิจารณาความหมายของพารามีเตอร์ λ ในสมการ (5.30) เราคำนวณหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซอง

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวซอง

ค่าเฉลี่ยคือ

$$\mu = E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

เพราะว่า $0.p(0) = 0$ และ $x/x! = 1/(x-1)!$ เมื่อ $x > 0$ และถ้าเราให้ $k = x - 1$ แล้ว

$$E[X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

ดังนั้น พารามีเตอร์ของการแจกแจงปัวซอง λ คือ **ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงปัวซอง** หรือ **ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม** X นั่นเอง

สำหรับความแปรปรวนนั้น คำนวณโดยเริ่มจากหา $E[X(X-1)]$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$

เพราะว่า $(0)(0-1)\,p(0) = 0$, $(1)(1-1)\,p(1) = 0$ และ $x(x-1)/x! = 1/(x-2)!$ ถ้าเราให้ $k = x-2$ แล้ว

$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+2}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

เพราะว่า $E[X(X-1)] = E\left[X^2\right] - E[X]$ และ

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \mu^2 = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

นั่นคือ สำหรับการแจกแจงแบบปัวซอง

$$\mu = \sigma^2 = \lambda \tag{5.31}$$

โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน คือ

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\left(\lambda e^t\right)}$$

$$= e^{\lambda e^t - \lambda} = \mathrm{e}^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

ดังนั้น

$$M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} \tag{5.32}$$

หมายเหตุ

1. การแจกแจงแบบปัวซอง ซึ่งเขียน p.d.f. ในรูป

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ค่าคงที่ λ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจง และในขณะเดียวกันทำหน้าที่เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จ ที่เกิดขึ้นในช่วงต่อเนื่องช่วงหนึ่งในปัญหาที่พิจารณา เพียงแต่เราคิดเทียบขนาดของช่วงเป็นหนึ่งหน่วยเพื่อความสะดวกในการหาสูตรสำหรับ $p(x)$

2. ถ้ากำหนดจำนวนครั้งของความสำเร็จเกิดขึ้นด้วยอัตราเฉลี่ย λ ครั้งต่อหนึ่งหน่วย แล้วค่าคาดหมายหรือค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จเกิดหนึ่งในช่วงขนาด s คือ λs เช่น

- จำนวนครั้งของสัญญาณโทรศัพท์ที่เข้ามายังตู้สลับสาย มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยอัตราเฉลี่ย 3 ครั้งต่อนาที ดังนั้น

ค่าเฉลี่ยของจำนวนสัญญาณโทรศัพท์ในเวลา 5 นาที คือ (3) (5) = 15

- หรือถ้าจำนวนครั้งของสัญญาณโทรศัพท์เข้ามาด้วยอัตราเฉลี่ย 22 ครั้งใน 5 นาที แล้ว

ค่าเฉลี่ยของจำนวนสัญญาณต่อนาที คือ $\lambda = 22/5 = 4.4$

ดังนั้น ถ้า X เป็นจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงขนาด s ด้วยอัตราเฉลี่ย λ ครั้งต่อหนึ่งหน่วย แล้วการแจกแจงแบบปัวซองของ X คือ

$$p(x) = \frac{(\lambda s)^x e^{-\lambda s}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.33)$$

และในกรณีนี้ เราได้

$$\mu = \sigma^2 = \lambda s$$

และโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน คือ

$$M_X(t) = e^{\lambda s(e^t - 1)}$$

3. ฟังก์ชันแจกแจงแบบปัวซอง (the cumulative Posison distribution) คือ

$$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \tag{5.34}$$

ตารางค่าของ $F(x)$ แสดงในตาราง 2. ในภาคผนวกของท้ายบทนี้ โดยเลือกเฉพาะบางค่าของ λs

ตัวอย่าง 5.11 รอยตำหนิบนเทปชนิดหนึ่งจะเกิดขึ้นโดยเฉลี่ย 1 รอยต่อความยาว 1200 ฟุต ถ้าการแจกแจงของจำนวนรอยตำหนิเป็นแบบปัวซอง จงหาการแจกแจงของจำนวนรอยตำหนิบนเทปความยาว 4800 ฟุต

ค่าเฉลี่ยของจำนวนรอยตำหนิบนเทปความยาว 4800 ฟุต = 4

ดังนั้น การแจกแจงแบบปัวซองในปัญหานี้คือ

$$p(x) = \frac{e^{-4} 4^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อ ตัวแปรสุ่ม X คือ จำนวนรอยตำหนิบนเทปยาว 4800 ฟุต และ

$$P(X = 0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = e^{-4} = 0.018$$

ซึ่งเป็นค่าที่อ่านจากตาราง 2.

ตัวอย่าง 5.12 จำนวนสัญญาณโทรศัพท์ที่เข้ามายังตู้สลับสายของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง โดยเฉลี่ยแล้วมี 2 ครั้ง ในทุก ๆ 3 นาที ถ้าการแจกแจงของจำนวนสัญญาณโทรศัพท์เป็นแบบปัวซอง แล้วจงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนสัญญาณโทรศัพท์เข้ามา 5 ครั้ง หรือมากกว่า ในช่วงเวลา 9 นาที

วิธีทำ

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนสัญญาณโทรศัพท์ในช่วงเวลา 9 นาที จากข้อมูลที่กำหนดมาให้ เราได้ว่า โดยเฉลี่ยแล้วมีสัญญาณโทรศัพท์เข้ามา 6 ครั้งใน 9 นาที นั่นคือ $E[X] = 6$ ดังนั้น p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \frac{e^{-6}\, 6^x}{x\,!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

และ

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-6}\, 6^x}{x\,!} = 1 - 0.285 = 0.715$$

(ค่าของ $P(X \leq 4)$ ดูจากตาราง 2. ตรงแนวตั้ง $\lambda s = 6$ และแถวที่ $[t] = 4$)

ตัวอย่าง 5.13 การนับจำนวนเม็ดเลือดขาวของคนมีสุขภาพดี โดยเฉลี่ยแล้วลงได้ต่ำถึง 6,000 ต่อเลือด 1 ลูกบาศก์มิลลิเมตร ถ้านำเลือดปริมาณ 0.001 ลูกบาศก์มิลลิเมตร มาตรวจสอบเพื่อดูสภาพการขาดเม็ดเลือดขาว และให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนเม็ดเลือดขาวที่นับได้ และมีการแจกแจงแบบปัวซองแล้ว จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนเม็ดเลือดขาวของคนมีสุขภาพดี และถ้าพบว่าเลือดที่นำมาตรวจมีเม็ดเลือดขาวอย่างมากที่สุดเพียง 2 แล้ว เราสามารถหาเหตุผลสนับสนุนได้หรือไม่ว่า เลือดมีสภาพขาดเม็ดเลือดขาว

วิธีทำ

ในสถานการณ์ของปัญหานี้ ช่วงที่กำหนดมาให้ คือ ปริมาณของเลือด 0.001 มม.^{3} และค่าเฉลี่ยของจำนวนเม็ดเลือดขาวใน 1 มม.^{3} คือ 6,000 สำหรับผู้ที่มีสุขภาพดี ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของจำนวนเม็ดเลือดขาวในเลือดปริมาณ 0.001 มม.^{3} คือ (6000) (.001) = 6 นั่นคือ สำหรับคนที่มีสุขภาพดีโดยเฉลี่ยแล้วมีจำนวนเม็ดเลือดขาวเท่ากับ 6 ดังนั้น $E[X] = 6$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$p(x) = \frac{e^{-6}\, 6^x}{x\,!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

เพื่อตอบคำถามที่สอง เราคำนวณความน่าจะเป็นที่จะพบจำนวนเม็ดเลือดขาวอย่างมากที่สุดเพียง 2 สำหรับคนที่มีสุขภาพดีว่ามีค่าเท่าใด

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} p(x) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-6}\, 6^x}{x\,!} = 0.0061$$

(ค่าของ $P(X \leq 2)$ ดูจากตาราง 2. ตรงคอลัมน์ $\lambda s = 6$ และ แถวที่ $[t] = 2$)

สำหรับค่าที่คำนวณมาได้นี้ ไม่มีกฎเกณฑ์ใดที่บอกว่าความน่าจะเป็นมีค่าในระดับใดจึงเรียกว่า **น้อย** หรือ **มาก** การตอบคำถามข้อที่สองนี้ จึงขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของเราเองว่า จะพิจารณาค่าของความน่าจะเป็น 0.061 นี้อยู่ในระดับใด ถ้าเราพิจารณาว่ามีค่าน้อย นั่นคือ โอกาสที่จะพบจำนวนเม็ดเลือดขาวอย่างมากที่สุดเพียง 2 สำหรับคนที่มีสุขภาพดีเกิดขึ้นได้ยากมาก แต่เหตุการณ์นี้ได้เกิดขึ้นแล้วตามสถานการณ์ที่กำหนดมาให้ จึงสรุปได้ว่า เลือดที่นำมาตรวจมีสภาพขาดเม็ดเลือดขาว

การประมาณการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง

ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบทวินาม $b(n,p)$ ถ้า n มีค่าใหญ่พอหรือเข้าใกล้อนันต์ และ p มีค่าน้อยหรือเข้าใกล้ศูนย์ โดยที่ค่าของ np มีค่าคงที่เท่ากับ $k > 0$ ดังนั้น

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{e^{-k} k^x}{x!}$$

ให้ $np = k$ หรือ $p = k/n$ แทนค่า p ด้วย k/n เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= \binom{n}{x} (k/n)^x (1-k/n)^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{k^x}{n^x} \frac{(1-k/n)^n}{(1-k/n)^x} \\
&= \frac{k^x}{n!} \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n\,n\,n\ldots n} \frac{(1-k/n)^n}{(1-k/n)^x} \\
&= \frac{k^x}{n!} (1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) \frac{(1-k/n)^n}{(1-k/n)^x}
\end{aligned}$$

ให้ $n \to \infty$ เราได้ว่า

$$P(X = x) \approx \frac{k^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{(1)(1-1/n)(1-2/n)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{(1-k/n)^x} (1-k/n)^n$$

เพราะว่า

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1)(1-1/n)(1-2/n)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{(1-k/n)^x} = 1 \quad \text{และ} \quad \lim_{n \to \infty} (1-k/n)^n = e^{-k}$$

ดังนั้น

$$P(X = x) \approx \frac{e^{-k}\, k^x}{x!}$$

นั่นคือ X เป็น $b(n, p)$ ซึ่งประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง เมื่อ n มีค่าใหญ่ และ p มีค่าน้อย โดยที่ $n\,p$ มีค่าคงที่เท่ากับ k ซึ่งทำหน้าที่เป็นพารามีเตอร์ของการแจกแจงแบบปัวซอง การประมาณนี้ใช้ได้ดีเมื่อ $n \geq 20$ และ $p \leq .05$ และใช้ได้ดีมาก เมื่อ $n \geq 100$ และ $np \leq 10$ เนื่องจากเราใช้การแจกแจงแบบปัวซองในการประมาณเมื่อ n มีค่าใหญ่และ p มีค่าน้อย จึงเรียกการแจกแจงแบบปัวซองในการประมาณนี้ว่า **การแจกแจงของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นยาก**

ตัวอย่าง 5.14 ความน่าจะเป็นที่หมุดอันหนึ่งบนปีกเครื่องบินใหม่จะมีข้อบกพร่อง คือ 0.001 ถ้าบนปีกเครื่องบินมีหมุดอยู่ทั้งหมด 4000 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่มีจำนวนหมุดไม่เกิน 6 ตัวบนปีกเครื่องบิน ที่มีข้อบกพร่อง

วิธีทำ

ให้ X เป็นจำนวนหมุดบนปีกเครื่องบิน ที่มีข้อบกพร่อง ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบทวินาม ด้วยพารามีเตอร์ $n = 4000$ และ $p = .001$ และ

$$P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} \binom{4000}{x} (.001)^x (.999)^{4000-x}$$

เพราะว่า $n = 4000 > 100$ และ $np = (4000)(.001) = 4 < 10$ เราจึงสามารถประมาณด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง โดยมีพารามีเตอร์หรือค่าเฉลี่ยของจำนวนหมุดบนปีกเครื่องบิน ที่มีข้อบกพร่องเท่ากับ 4 นั่นคือ

$$P(X \leq 6) \approx \sum_{x=0}^{6} \frac{e^{-4}\, 4^x}{x!} = .889$$

(ดูจากตาราง 2. ตรงคอลัมน์ $\lambda s = 4$ และตรงแถวที่ $[t] = 6$)

แบบฝึกหัด 5.1

1. กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง 7 ลูก และลูกบอลสีขาว 11 ลูก หยิบลูกบอลมา 1 ลูกจากกล่องโดยสุ่มให้ $X = 1$ ถ้าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีแดง และ $X = 0$ ถ้าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีขาว จงหา p.d.f. ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X

2. ถ้าในข้อ 1. ให้ $X = 1$ ถ้าลูกบอลสีแดงถูกหยิบขึ้นมา และ $X = -1$ ถ้าลูกบอลที่หยิบขึ้นมาเป็นสีขาว จงหา p.d.f. ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X

3. การทดลองเชิงสุ่มอันหนึ่งประกอบด้วยการทดลองแบบเบอร์นูลลี 4 ครั้ง ด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จเท่ากับ p ในแต่ละครั้ง ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งของความสำเร็จ จงหาค่า ของ p.d.f. ของ X

4. มีการวางแผนงานสำหรับโครงการอวกาศไปยังดวงจันทร์ทั้งหมด 6 แผนงาน โดยที่แต่ละแผน งานมีความเป็นอิสระแก่กัน และคาดว่าจะประสบความสำเร็จในแต่ละแผนงานด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ .95 จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยที่สุด 5 โครงการที่วางแผนเอาไว้จะประสบความสำเร็จ

5. สมมติว่าเราเลือกจุด 2000 จุด อย่างอิสระแก่กันและเลือกโดยสุ่มจากสี่เหลี่ยมจตุรัส $S = \{(x, y): 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$ ให้ W เป็นจำนวนจุดที่เลือกได้ และอยู่ใน $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$
   (a) จงหาการแจกแจงของ W
   (b) จงหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ W

6. กระบวนการผลิตทรานซิสเตอร์ทำการผลิตโดยเฉลี่ยแล้วมี 2% ที่มีตำหนิในทุก ๆ สองชั่วโมง กลุ่มตัวอย่างจำนวน 50 เครื่องถูกเลือกสุ่มมาเพื่อตรวจสอบคุณภาพ ถ้าในกลุ่มตัวอย่าง ที่เลือกมามีทรานซิสเตอร์มากกว่า 2 เครื่อง ที่มีตำหนิ แล้วกระบวนการผลิตจะหยุดการผลิต จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้

7. กล่องบรรจุลูกบอลสีแดง 10 ลูก และสีขาว 15 ลูก กลุ่มตัวอย่างจำนวน 8 ลูกถูกเลือกมา โดยหยิบลูกบอลทีละลูกจนครบ 8 ลูก ให้ X เป็นจำนวนของลูกบอลสีแดงในกลุ่มตัวอย่าง จงคำนวณหา $P(X = 2)$

(a) โดยเลือกแบบคืนที่ (b) โดยเลือกแบบไม่คืนที่

8. ข้อสอบปรนัยจำนวน 12 ข้อ ในแต่ละข้อมี 4 ตัวเลือก และมีข้อที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว สมมติว่านักศึกษาใช้วิธีการเดาในแต่ละข้อ ให้ X เป็นจำนวนข้อที่ตอบได้ถูกต้อง

(a) จงหาการแจกแจงของ X (b) จงหาค่าของ $E[X]$ และ $V(X)$

(c) จงหา (i) $P(X \leq 4)$ และ (ii) $P(X \geq 6)$

9. สมมติว่าเราทำการทดลองชนิดเดียวกันซ้ำกัน 5 ครั้ง แต่ละครั้งมีความเป็นอิสระแก่กันและความน่าจะเป็นของความสำเร็จในแต่ละครั้งคือ p จงหาความน่าจะเป็นที่ความไม่สำเร็จเกิดขึ้นเป็นครั้งแรกในการทดลองครั้งที่ 5 จงหาค่าของ p ในเชิงคณิตศาสตร์ที่จะทำให้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้มีค่าสูงสุด

10. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเรขาคณิต โดยใช้โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน

11. ผู้จัดการฝ่ายบุคลากรสัมภาษณ์ผู้สมัครงานที่มีศักยภาพ เพื่อบรรจุในตำแหน่งที่ว่างอยู่ 2 ตำแหน่ง ความน่าจะเป็นที่ผู้สมัครงานมีคุณสมบัติและมีความสามารถตามที่ฝ่ายบุคลากรกำหนดไว้และได้รับการบรรจุตำแหน่ง คือ 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้จัดการต้องสัมภาษณ์ผู้สมัครงานเพียง 4 คนเท่านั้น และจงหาความน่าจะเป็นที่มีผู้จัดการต้องสัมภาษณ์ผู้สมัครงานน้อยกว่า 4 คน

12. ความน่าจะเป็นที่การทดลองประสบความสำเร็จ คือ .80 ถ้าทำการทดลองซ้ำจนกระทั่งประสบความสำเร็จ 5 ครั้ง จงหาค่าคาดหมายของจำนวนครั้งที่ต้องทำการทดลอง และหาค่าของความแปรปรวน

13. บริษัท ก. ข. ค. ได้รับใบสั่งสินค้าชนิดหนึ่งด้วยความน่าจะเป็น .4, .3 และ .3 ตามลำดับ สมมติมีการสั่งสินค้าชนิดนี้เข้ามา 3 ครั้ง ซึ่งมีความเป็นอิสระแก่กัน จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทใดบริษัทหนึ่งได้รับใบสั่งสินค้าทั้ง 3 ครั้ง

14. หลอดภาพโทรทัศน์สี 25 หลอดในแต่ละรุ่นต้องได้รับการตรวจสอบตามข้อกำหนดของการควบคุมคุณภาพให้ได้มาตรฐาน กระบวนการตรวจสอบทำโดยเลือกสุ่มหลอดภาพมา 5 หลอด โดยเลือกแบบคืนที่ไม่ได้ แล้วนำมาตรวจสอบ ถ้าในกลุ่มตัวอย่างของหลอดภาพมีไม่เกินกว่า 2 หลอด ที่มีข้อบกพร่องแล้วถือว่าหลอดภาพทั้งรุ่นได้ผ่านการตรวจสอบตามมาตฐาน มิฉะนั้น ถือว่าหลอดภาพทั้งรุ่นไม่ได้รับการยอมรับในการตรวจสอบคุณภาพ สมมติว่ามีหลอดภาพอยู่ 4 หลอดที่มีตำหนิในรุ่นที่นำมาตรวจสอบ

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดภาพทั้งรุ่นได้รับการยอมรับในการตรวจสอบคุณภาพ

(b) จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดภาพทั้งรุ่นได้รับการยอมรับในการตรวจสอบคุณภาพ โดยคำนวณจากการแจกแจงแบบทวินามด้วย $p = \dfrac{4}{25}$

15. จำนวนรถยนต์ที่ผ่านสี่แยกหนึ่งโดยเฉลี่ยมี 25 คันต่อชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่มีรถยนต์ผ่านสี่แยกน้อยกว่า 10 คันในช่วงเวลา 1 ชั่วโมง สมมติว่า จำนวนรถยนต์ที่ผ่านสี่แยกมีการแจกแจงแบบปัวซอง

16. จำนวนเม็ดเลือดแดงที่ส่องเห็นจากกล้องจุลทรรศน์มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ย 4 จงหาความน่าจะเป็นที่เราสามารถส่องเห็นเม็ดเลือดแดงมากกว่า 5 เซลจากกล้องจุลทรรศน์

17. สมมติว่า X เป็นจำนวนอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นในโรงงานอุตสาหกรรมในเวลาหนึ่งปี และ X มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย 3 ครั้ง ถ้าเงินประกันภัยที่จ่ายให้สำหรับอุบัติเหตุแต่ละครั้งคือ 50,000 บาท จงคำนวณดูว่าบริษัทประกันภัยควรจะสำรองเงินไว้เท่าใด เพื่อให้เกิดความมั่นใจ 95% ในการครอบคลุมจำนวนอุบัติเหตุที่จะเกิดขึ้นในโรงงานภายในเวลา 1 ปี

18. โรงงานปฏิกรณ์ปรมาณูปล่อยก๊าซที่ตรวจพบว่ามีสารกัมมันตภาพรังสีโดยเฉลี่ยแล้ว 2 ครั้งต่อเดือน ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ตรวจพบว่ามีสารกัมมันตภาพรังสีในก๊าซที่ปล่อยออกมา จงหาความน่าจะเป็นที่ $X \leq 4$ ในช่วงเวลา 1 เดือน จงหาค่าคาดหมายของ X ในช่วงเวลา 4 เดือน ถ้าพบว่ามีสารกัมมันตภาพรังสีในก๊าซที่ปล่อยออกมาจากโรงงาน 12 ครั้ง หรือมากกว่า 12 ครั้ง ในระยะเวลา 3 เดือน แล้วจงหาเหตุผลสนับสนุนว่า รายงานที่อ้างว่ามีก๊าซที่ตรวจพบว่ามีสารกัมมันตภาพรังสี โดยเฉลี่ยแล้ว 2 ครั้งต่อเดือน อาจจะมีข้อผิดพลาดไม่ตรงกับสภาพความเป็นจริง

คำตอบของแบบฝึกหัด 5.1

1. $(7/18)^x (11/18)^{1-x}$, $x = 0, 1$; 7/18, 77/324

2. $f(1) = 7/18$, $f(-1) = 11/18$; -4/18; 308/324

3.

x	0	1	2	3	4
p(x)	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)^2$	p^4

5. (a) $b(2000, \pi/4)$ (b) 1570.80, 337.10, 18.36

6. $P(X > 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{50}{x} (.02)^x (.98)^{50-x} \approx 0.078$

7. (a) 0.2090 (b) 0.2082

8. (a) $b(12, 1/4)$ (b) 3, 9/4 (c) 0.8424, 0.0544

9. $p = 0.8$

11. $P(X < 4) = 0.896$

13. 0.118

14. (a) $P(X \le 2) \approx 0.98$ (b) ประมาณโดยการแจกแจงแบบทวินาม $P(X \le 2) \approx 0.97$

15. $P(X < 10) = (1.3888 \times 10^{-11}) \sum_{x=0}^{9} (25)^x / x!$

16. $P(X > 5) \approx 0.215$

17. 300,000 บาท

5.2 การแจกแจงที่สำคัญ ๆ ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

5.2.1 การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (The Uniform Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ ถ้า p.d.f. ของ X มีค่าเป็นค่าคงที่ โดยเฉพาะเมื่อพิสัยของ X คือช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$f(x) = \frac{1}{(b - a)}, \quad a \le x \le b \tag{5.35}$$

โดยทั่วไป เรากล่าวว่า X เป็น $U(a,b)$ สำหรับ p.d.f. ของ X นั้น มีค่าเป็นส่วนกลับของความยาวช่วง $\left[a,b\right]$ เนื่องจาก p.d.f. ของ X ต้องคล้อยตามเงื่อนไข

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

ดังนั้น ถ้า $f(x) = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ และ $x \in \left[a,b\right]$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b k\,dx = k(b-a) = 1$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{(b-a)}$$

สำหรับฟังก์ชันแจกแจงของ X เราได้ว่า สำหรับ $a \le x \le b$

$$F(x) = P(X \le x) = P(a \le X \le x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

นั่นคือ

$$P(a \le X \le x) \text{ สำหรับ } a \le x \le b$$

เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความยาวของช่วง $[a, x]$ และเราสามารถสรุปค่าของ $F(x)$ ได้ดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x-a)}{(b-a)}, & a \le x < b \\ 1, & b \le x \end{cases}$$

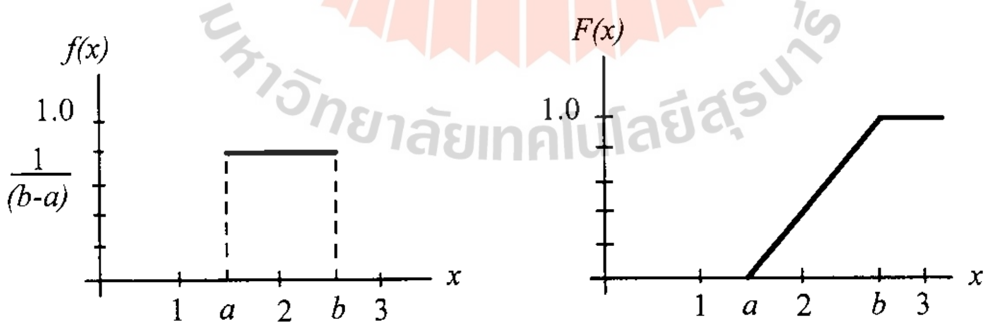
กราฟของ $f(x)$ และ $F(x)$ แสดงในรูป 5.7

หมายเหตุ

1. เราสามารถเปรียบเทียบ ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ กับผลลัพธ์ใดๆ ของการทดลองเชิงสุ่มที่มีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน ในลักษณะที่ว่าสำหรับช่วงย่อย $[c,d]$ ใดๆ เมื่อ $a \le c < d \le a$ ความน่าจะเป็นของ $(c \le X \le d)$ มีค่าเท่ากันสำหรับแต่ละช่วงย่อยซึ่งยาวเท่ากัน

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d \frac{1}{(b-a)}\,dx = \frac{(d-c)}{(b-a)}$$

2. การกล่าวว่า เราเลือกจุด ๆ หนึ่งโดยสุ่มใส่ช่วง $[a,b]$ มีความหมายว่า จุดที่เลือกได้แทนได้ด้วยตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนช่วง $[a,b]$



รูป 5.7

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ คือ

$$\mu = E[X] = \int_a^b \frac{x}{(b-a)}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$$

$$\mu = \frac{b+a}{2} \tag{5.36}$$

และ

$$\sigma^2 = V(X) = E[X]^2 - \mu^2$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{(b-a)}dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{5.37}$$

สำหรับโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน $M_X(t)$ หาค่าได้ดังนี้คือ

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_a^b \frac{e^{tx}}{(b-a)}dx = \left[\frac{e^{tx}}{t(b-a)}\right]_a^b$$

$$M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \quad \text{สำหรับ} \quad t \neq 0 \tag{5.38}$$

และ

$$M_X(t) = 1 \quad \text{สำหรับ} \quad t = 0$$

ตัวอย่าง 5.15 เลือกจุด ๆ หนึ่งโดยสุ่มในช่วง $[0,10]$ สมมติว่าเราต้องการหาความน่าจะเป็นที่จุด ๆ นี้อยู่ระหว่าง 3/2 และ 7/2 p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$f(x) = 1/10 \quad , \quad 0 \le x \le 10$$

และ

$$P(3/2 \le X \le 7/2) = \frac{7/2-3/2}{10} = \frac{2}{10}$$

ตัวอย่าง 5.16 เลขทศนิยมในรูป NN.N ถูกปัดเศษ (rounding) เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งมีค่าใกล้ที่สุด โดยใช้หลักการที่ว่า ถ้าส่วนที่เป็นเลขทศนิยม < .5 เราตัดค่านี้ทิ้งไป และถ้าส่วนที่เลขทศนิยมมีค่าใหญ่กว่า .5 เราปัดเศษ .5 เป็น 1 เช่น 32.4 ปัดเศษเป็น 32 และ 32.6 ปัดเศษเป็น 33 เป็นต้น แต่ถ้าส่วนที่เป็นเลขทศนิยมเป็น .5 เราตัดสินวิธีการปัดเศษด้วยการโดยเหรียญ ให้ X แทนค่าผิดพลาดในการปัดเศษ โดยที่ X มีนิยามเป็นผลต่างระหว่างตัวเลขก่อนการปัดเศษและตัวเลขหลังการปัดเศษ ดังนั้น พิสัยของ X คือ ช่วง $[-0.5, 0.5]$ และโดยทั่วไปค่าผิดพลาดของการปัดเศษ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ นั่นคือ X เป็น $U(-0.5, 0.5)$ โดยมี p.d.f. เป็น

$$f(x) = \frac{1}{(0.5-(-0.5))} = 1, \qquad -0.5 \le x \le 0.5$$

การแจกแจงแบบสม่ำเสมอที่นับว่ามีประโยชน์ในการสร้างตัวเลขสุ่ม (random numbers) คือ $U(0,1)$ โดยทั่วไปใช้อักษร U แทนตัวแปรสุ่มในกรณี $U(0,1)$ จากสมการ (5.36) และ (5.37) เราทราบว่า $E[U] = 1/2$ และ $V(U) = 1/12$ ถ้า $U_1, U_2, \ldots, U_k$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มแบบ $U(0,1)$ และมีความเป็นอิสระแก่กัน แล้วเราเรียก $U_1, U_2, \ldots, U_k$ ว่า ตัวเลขสุ่ม

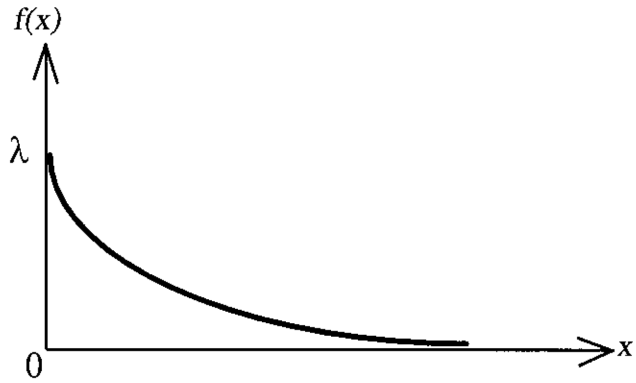
5.2.2 การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล (The Exponential Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล เมื่อ p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0 \tag{5.38}$$

เมื่อ λ เป็นพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นค่าคงที่ค่าจริงและเป็นค่าบวก กราฟของ $f(x)$ แสดงในรูป 5.8 $f(x)$ มีคุณสมบัติของ p.d.f. เพราะว่า $f(x) \ge 0$ และ

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 1$$

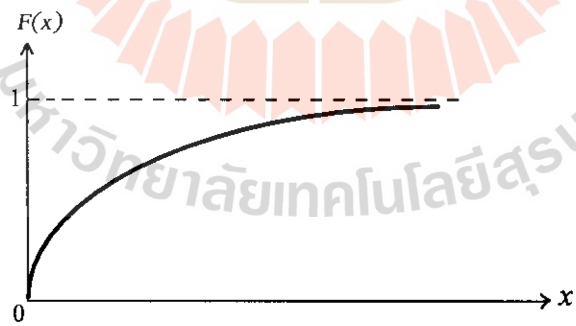


รูป 5.8

ฟังก์ชันแจกแจง F หาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (5.38) ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 && \text{สำหรับ} \quad x < 0 \\
F(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\, dt \\
&= 1 - e^{-\lambda x} && \text{สำหรับ} \quad x \geq 0
\end{aligned}
\qquad (5.39)
$$

กราฟของ $F(x)$ แสดงในรูป 5.9



รูป 5.9

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลและการแจกแจงแบบปัวซอง

ความเข้าใจในความสัมพันธ์ของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลและการแจกแจงแบบปัวซองจะช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถพิจารณาว่า การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลควรใช้ในสถานการณ์ใดจึงจะเหมาะสม

จากการศึกษากระบวนการปัวซอง สิ่งที่เราสนใจสังเกตคือ จำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงหนึ่ง ๆ สมมติว่าเป็นช่วงเวลา $[o,t]$ เราได้ว่าการแจกแจงแบบปัวซองของ X คือ

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2 \tag{5.40}$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเราเรียกว่า พารามีเตอร์ของการแจกแจง ทำหน้าที่เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งหน่วย จากสมการ (5.40) เราหาค่าของ $p(0)$ ซึ่งคือความน่าจะเป็นที่ไม่มีความสำเร็จเกิดขึ้นเลยในช่วงเวลา $[0,t]$

$$p(0) = e^{-\lambda t} \tag{5.41}$$

ความหมายที่น่าสนใจของ $p(0) = e^{-\lambda t}$ อีกความหมายหนึ่ง คือ ความน่าจะเป็นที่ช่วงเวลาที่รอการเกิดขึ้นของความสำเร็จครั้งแรกนานกว่า t ดังนั้น ถ้าเราสนใจสังเกตช่วงเวลารอดังกล่าวนี้ เรากำหนดให้ T เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งแทนช่วงเวลารอการเกิดขึ้นของความสำเร็จครั้งแรก จากความหมายอันหลังของ $p(0)$ จึงทำให้เราได้ว่า

$$p(0) = P(T > t) = e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \tag{5.42}$$

นั่นคือ ถ้าเราให้ t เป็นตัวแปร และพิจารณา ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม T แล้วเราได้ว่า

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \tag{5.43}$$

และเพราะว่า $f(t) = \dfrac{d}{dt}F(t)$ ดังนั้น การแจกแจง หรือ p.d.f. ของ T คือ

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0 \tag{5.44}$$

ซึ่งเห็นได้ชัดเจนว่า การแจกแจงของ T ก็คือ การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลดังในสมการ (5.38) เราจึงกล่าวโดยสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลและแบบปัวซองมีลักษณะดังนี้คือ

ถ้า จำนวนครั้งการเกิดขึ้นของความสำเร็จมีการแจกแจงแบบปัวซอง ดังในสมการ (5.40)
แล้ว ช่วงเวลารอการเกิดขึ้นของความสำเร็จมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ดังในสมการ(5.44)

เช่น ถ้าจำนวนครั้งของการสั่งสินค้าที่บริษัทหนึ่งได้รับในแต่ละสัปดาห์มีการแจกแจงแบบปัวซองแล้ว ระยะเวลาระหว่างการสั่งสินค้าครั้งหนึ่งและครั้งถัดไป มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล **โดยมีตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งเป็นแบบเต็มหน่วย และตัวแปรสุ่มแทนระยะเวลาเป็นแบบต่อเนื่อง**

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

ค่าเฉลี่ยคือ

$$\begin{aligned}\mu = E[X] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned} \tag{5.45}$$

และความแปรปรวนคือ

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx - (1/\lambda)^2 \\ &= \Big[-x^2e^{-\lambda x}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx - (1/\lambda)^2 = 1/\lambda^2\end{aligned} \tag{5.46}$$

สมการ (5.45) แสดงให้เราเห็นวา **ถ้า** λ **เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงขนาดหนึ่งหน่วย** แล้ว $1/\lambda$ **เป็นค่าเฉลี่ยของเวลารอสำหรับการเกิดขึ้นของความสำเร็จครั้งแรก** ในการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

สำหรับโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันหาค่าได้ดังนี้คือ

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-(1-t/\lambda)\lambda x} \, dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(1-t/\lambda)\lambda x}}{(1-t/\lambda)} \right]_0^\infty$$

$$= \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1} \qquad \text{เมื่อ} \quad t < \lambda \tag{5.47}$$

ตัวอย่าง 5.17 ถ้า X มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยค่าเฉลี่ยเท่ากับ 100 นั่นคือ $E[X] = 100 = 1/\lambda$ ดังนั้น $\lambda = 1/100$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-x/100} \qquad 0 \le x < \infty$$

และ

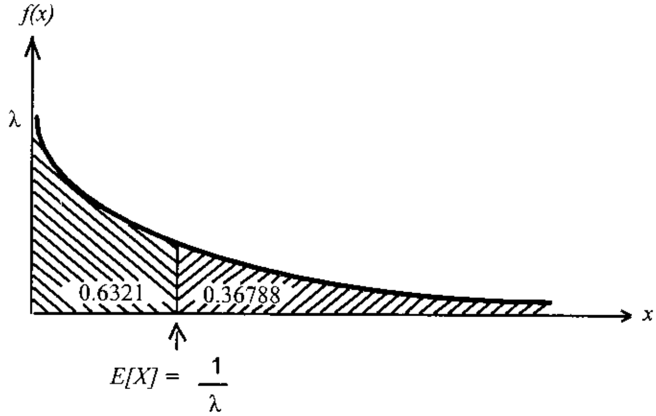
$$P(X < 90) = \int_0^{90} \frac{1}{100} e^{-x/100} \, dx = 1 - e^{-90/100} = 0.593$$

ตัวอย่าง 5.18 อายุการใช้งานของส่วนประกอบอิเล็กทรอนิกส์ชิ้นหนึ่ง มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยอัตราของเหตุขัดข้อง 10^{-5} ครั้งต่อชั่วโมง นั่นคือ $\lambda = 10^{-5}$ ดังนั้น $E[X]$ หรือค่าเฉลี่ยของเวลาจนกระทั่งเกิดเหตุขัดข้องคือ $1/\lambda = 10^5$ ชั่วโมง สมมติว่าเราต้องการคำนวณความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบอิเล็กทรอนิกจะมีเหตุขัดข้องในการทำงานก่อนอายุเฉลี่ย เราได้

$$P(X \le 1/\lambda) = \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{1/\lambda} = 1 - e^{-1}$$

$$\therefore \quad P(X \le 1/\lambda) = .63212$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ 63.212 เปอร์เซ็นต์ของส่วนประกอบอิเล็กทรอนิกส์จะเกิดเหตุขัดข้องในการทำงานก่อนเวลา 10^5 ชั่วโมง รูป 5.10 แสดงกราฟของ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ เมื่อ $\lambda = 10^5$ และสำหรับ $x \ge 0$ พื้นที่แรเงาใต้กราฟของ $f(x)$ ทางด้านซ้ายและด้านขวาแทน $P(X \le 1/\lambda)$ และ $P(X > 1/\lambda)$ ตามลำดับ



รูป 5.10

ตัวอย่าง 5.19 จำนวนของลูกค้าที่เข้ามาในร้านขายของแห่งหนึ่ง มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยอัตราเฉลี่ย 20 คนต่อชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่เจ้าของร้านต้องรอลูกค้ารายแรกนานกว่า 5 นาที

วิธีทำ

ให้ X แทนเวลารอ (นาที) จนกระทั่งลูกค้ารายแรกเข้ามา จากข้อมูลที่กำหนดมา เราทราบว่า $\lambda = 20/60 = 1/3$ นั่นคือ จำนวนลูกค้าที่เข้ามาโดยเฉลี่ยคือ 1/3 คนต่อนาที ดังนั้น p.d.f. ของ X เป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียล คือ

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-(1/3)x} \qquad 0 \le x < \infty$$

และ

$$P(X > 5) = \int_5^\infty \frac{1}{3}e^{-(1/3)x}\,dx = e^{-5/3} = 0.189$$

ตัวอย่าง 5.20 สมมติว่า ผู้จัดการของโรงงานแห่งหนึ่งต้องตัดสินใจเลือกกระบวนการผลิตสำหรับส่วนประกอบของเครื่องจักรชนิดหนึ่ง มีกระบวนการผลิตที่ให้เลือก 2 กระบวนการคือ A และ B โดยที่ค่าใช้จ่ายในการผลิตต่อหน่วย คือ C บาท และ kC บาท $(k > 1)$ สำหรับ A และ B ตามลำดับ อายุการใช้งานของส่วนประกอบมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยอัตราของการเกิดเหตุขัดข้อง 1/200 ครั้งต่อชั่วโมง และ 1/300 ครั้งต่อชั่วโมง สำหรับ A และ B ตามลำดับ ดังนั้น อายุเฉลี่ยการใช้งานคือ 200 ชั่วโมง และ 300 ชั่วโมง สำหรับกระบวนการทั้งสองตามลำดับ ตามข้อบังคับการควบคุมมาตรฐานผลผลิต ผู้ผลิตจะถูกปรับ k บาท ถ้าอายุการใช้งานของส่วนประกอบน้อยกว่า 400 ชั่วโมง จงพิจารณาว่าผู้จัดการควรจะเลือกกระบวนการผลิต A หรือ B

วิธีทำ

ให้ X แทนอายุการใช้งาน หรือ เวลาการใช้งานจนเกิดเหตุขัดข้องของส่วนประกอบแต่ละหน่วย ดังนั้น ค่าใช้จ่ายในการผลิตของส่วนประกอบจาก A และ B เขียนแทนด้วย C_A และ C_B มีค่าดังนี้คือ

$$C_A = \begin{cases} C, & X \geq 400 \\ C + K, & X < 400 \end{cases}$$

$$C_B = \begin{cases} kC, & X \geq 400 \\ kC + K, & X < 400 \end{cases}$$

สำหรับ p.d.f. ของ X จากกระบวนการผลิต A และ B คือ

$$f_A(x) = \frac{1}{200} e^{-(1/200)x} \qquad 0 \leq x < \infty$$

และ

$$f_B(x) = \frac{1}{300} e^{-(1/300)x} \qquad 0 \leq x < \infty$$

ดังนั้น ค่าคาดหมายหรือค่าใช้จ่ายเฉลี่ยของส่วนประกอบผลิตจาก A และ B คำนวณได้ดังนี้คือ

$$E[C_A] = (C+K)\int_0^{400} \frac{1}{200} e^{-(1/200)x}\,dx + C\int_{400}^{\infty} \frac{1}{200} e^{-(1/200)x}\,dx$$

$$= (C+K)\Big[-e^{-(1/200)x}\Big]_0^{400} + C\Big[-e^{-(1/200)x}\Big]_{400}^{\infty}$$

$$= (C+K)\Big[1-e^{-2}\Big] + C\Big[e^{-2}\Big] = C + K(1-e^{-2})$$

และ

$$E[C_B] = (kC+K)\int_0^{400} \frac{1}{300} e^{-(1/300)x}\,dx + kC\int_{400}^{\infty} \frac{1}{300} e^{-(1/300)x}\,dx$$

$$= (kC+K)\Big[-e^{-(1/300)x}\Big]_0^{400} + kC\Big[-e^{-(1/300)x}\Big]_{400}^{\infty}$$

$$= (kC+K)\Big[1-e^{-4/3}\Big] + kC\Big[-e^{-4/3}\Big]$$

$$= kC + K\left(1-e^{-4/3}\right)$$

พิจารณาสัดส่วน $E[C_A]/E[C_B]$ เราได้ว่าสัดส่วนนี้มีค่ามากกว่า 1 เมื่อ

$$k < 1 - (K/C)\left(e^{-2} - e^{-4/3}\right)$$

ดังนั้น ผู้จัดการโรงงานมีแนวโน้มที่จะเลือก กระบวนการผลิต B

ตัวอย่าง 5.21 สมมติว่าอายุการใช้งานของหลอดวิทยุชนิดหนึ่ง มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยอายุเฉลี่ยเท่ากับ 500 ชั่วโมง ถ้า X แทนอายุการใช้งานของหลอดวิทยุ แล้ว $E[X] = 500$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{500} e^{-x/500} \qquad 0 \le x < \infty$$

ความน่าจะเป็นที่หลอดวิทยุใช้งานได้นานกว่า x ชั่วโมง คือ

$$P(X > x) = \int_x^\infty \frac{1}{500} e^{-t/500}\, dt = e^{-x/500}$$

สมมติว่า หลอดวิทยุใช้งานมาได้นานถึง 300 ชั่วโมงแล้ว จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดวิทยุจะใช้งานได้เพิ่มขึ้นอีก 600 ชั่วโมง นั่นคือ คำนวณหาความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{aligned} P(X > 900 \mid X > 300) &= \frac{P((X > 900) \cap (X > 300))}{P(X > 300)} \\ &= \frac{P(X > 900)}{P(X > 300)} \\ &= \frac{e^{-900/500}}{e^{-300/500}} = e^{-6/5} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า ความน่าจะเป็นภายใต้เงื่อนไขนี้ มีค่าเท่ากับ $P(X > 600) = e^{-6/5}$ นั่นเอง ซึ่งหมายความว่า เมื่อหลอดวิทยุใช้งานมาได้นานกว่า 300 ชั่วโมง แล้วความน่าจะเป็นที่จะใช้งานได้อีก 600 ชั่วโมงต่อไป มีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นที่หลอดวิทยุใช้งานได้นาน 600 ชั่วโมง นับจากเริ่มแรก คุณสมบัติอันนี้ทำให้เราสามารถกล่าวได้ว่า ถ้าอายุเฉลี่ยการใช้งานของหลอดวิทยุชนิดนี้มีค่าคงที่แล้ว หลอดเก่าใช้งานได้ดีเท่าๆ กับหลอดใหม่ นั่นคือ ไม่มีความจำเป็นอะไรที่เราจะต้องแทนหลอดที่ทำงานได้ดีอยู่แล้วด้วยหลอดใหม่ แน่นอนที่สุดคุณสมบัติอันนี้ค้านกับสถานการณ์จริงๆ เพราะว่าหลอดวิทยุส่วนใหญ่ย่อมมีอายุเฉลี่ยการใช้งานไม่คงที่ หรือจำนวนครั้งของการเกิดเหตุขัดข้องมีอัตราเฉลี่ยสูงขึ้น ดังนั้น การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลอาจจะไม่ใช่รูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาอายุการใช้งาน

คุณสมบัติการขาดความจำ (Memoryless) ของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

จากตัวอย่าง 5.21 เราเห็นคุณสมบัติที่น่าสนใจของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งเป็นการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องเพียงชนิดเดียวที่มีคุณสมบัติอันนี้ เราเรียกคุณสมบัตินี้ว่า "**คุณสมบัติการขาดความจำ**" นั่นคือ

$$P\left(X > x+s \mid X > x\right) = \frac{P(X > x+s)}{P(X > x)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+s)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda s}$$

ทำให้ได้ว่า

$$P\left(X > x+s \mid X > x\right) = P(X > s) \tag{5.48}$$

คำอธิบายของคุณสมบัติในสมการ (5.48) นี้พิจารณาได้จากตอนท้ายของตัวอย่าง 5.21 พร้อมกับข้อคิดว่า ในสถานการณ์จริง ๆ คุณสมบัตินี้อาจจะค้านกับสภาพความเป็นจริง

5.2.3 การแจกแจงแบบแกมมา(The Gamma Distribution)

ฟังก์ชันที่ใช้ในการนิยามการแจกแจงแบบแกมมาคือ **ฟังก์ชันแกมมา** ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx \quad \text{สำหรับจำนวนจริง} \quad n > 0 \tag{5.49}$$

เราสามารถแสดงได้ว่า เมื่อ $n > 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^{k} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

หาค่าได้ โดยการอินทิเกรตสมการ (5.49) ทีละส่วน เราได้ความสัมพันธ์ที่เรียกว่า ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recursive relationship) คือ

$$\Gamma(n) \;=\; (n-1)\,\Gamma(n-1) \qquad (5.50)$$

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\Gamma(n) \;=\; (n-1)! \qquad (5.51)$$

เพราะว่า $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$ ดังนั้น $0! = 1$ จึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชันแกมมาเป็นรูปทั่วไปของแฟคตอเรียล

นิยามของการแจกแจงแบบแกมมา

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบแกมมา เมื่อ p.d.f. ของ X อยู่ในรูป

$$f(x) \;=\; \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} \qquad x > 0 \qquad (5.52)$$

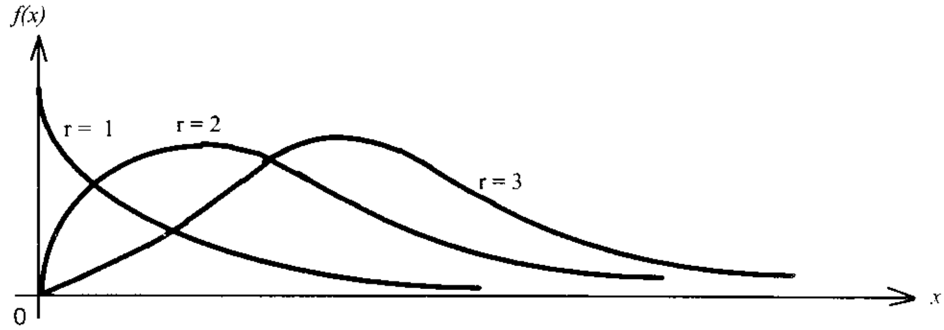
เมื่อ $r > 0$ และ $\lambda > 0$ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจง โดยเรียก r ว่า พารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter) และเรียก λ ว่า พารามิเตอร์สัดส่วน (scale parameter) รูป 511 แสดงกราฟ ของการแจกแจงแบบแกมมา สำหรับ $\lambda = 1$ และสำหรับ $r = 1, 2, 3$ $f(x)$ ในสมการ (5.52) มีคุณสมบัติเป็น p.d.f. กล่าวคือ

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{สำหรับแต่ละ } x > 0$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\; \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty y^{r-1} e^{-y}\,dy \;=\; \frac{1}{\Gamma(r)}\;\Gamma(r) \;=\; 1$$



รูป 5.11

ความสัมพันธ์ของการแจกแจงแบบแกมมาและแบบเอกซ์โปเนนเชียล

ถ้าเราให้ $r = 1$ ในสมการ (5.52) แล้วการแจกแจงแบบแกมมาเหมือนกับการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ผลที่ได้นี้สามารถอธิบายได้โดยให้ตัวแปรสุ่ม X เป็นผลบวกของตัวแปรสุ่มที่มีความเป็นอิสระแก่กัน r ตัวแปร และแต่ละตัวแปรมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล โดยต่างก็มี λ เป็นพารามีเตอร์ เราจะได้ว่า X มีการแจกแจงแบบแกมมาด้วยพารามีเตอร์ r และ λ นั่นคือ ถ้า

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r \tag{5.53}$$

เมื่อ p.d.f ของ $X_j,\ j = 1, 2, \dots, r$ คือ

$$f(x_j) = \lambda e^{-\lambda x_j} \qquad x_j \geq 0$$

และแต่ละ X_j มีความเป็นอิสระแก่กัน แล้ว X มีการแจกแจงแบบแกมมาดังในสมการ (5.52) ดังนั้น เมื่อ $r = 1$ เราจึงได้ว่า $X = X_1$ มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

หมายเหตุ การหาการแจกแจงของผลบวกของตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีความเป็นอิสระแก่กัน ดังเช่นในสมการ (5.53) สามารถทำได้โดยการหาผลการประสาน (convolution) ของ p.d.f. ของแต่ละ X_j

ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบแกมมาและแบบเอกซ์โปเนนเชียล ที่น่าสนใจคือ เราได้พิจารณามาแล้วว่า ในกระบวนการปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย λ เวลารอจนกระทั่งความสำเร็จครั้งแรกเกิดขึ้นมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล พิจารณาตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนเวลารอจนกระทั่งความสำเร็จ <u>**ครั้งที่** r</u> เกิดขึ้น และสำหรับ $x > 0$ เราได้

$$f(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - P(\text{ มีความสำเร็จเกิดขึ้นน้อยกว่า } r \text{ ครั้งในช่วง } [0, x]\ )$$

เพราะว่าจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วง $[0, x]$ มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยค่าเฉลี่ย λx ฉะนั้น

$$P\ (\text{ มีความสำเร็จเกิดขึ้นน้อยกว่า } r \text{ ครั้งในช่วง } [0, x]\ ) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$$

ผลที่ตามมาคือ

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!} \qquad (5.54)$$

เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ดังนั้น p.d.f. ของ X คือ อนุพันธ์ของ $F(x)$ เมื่ออนุพันธ์หาค่าได้ นั่นคือ สำหรับ $x > 0$

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lambda e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{k(\lambda x)^{k-1}\lambda}{k!} - \frac{(\lambda x)^k \lambda}{k!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \left[\lambda - \frac{\lambda (\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} \right]$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \qquad (5.55)$$

ซึ่งเห็นได้ว่า การแจกแจงในสมการ(5.54) เป็นกรณีหนึ่งของการแจกแจงแบบแกมมาในสมการ (5.52) เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก กล่าวโดยสรุปได้ว่า ในกระบวนการปัวซอง เวลารอจนกระทั่งความสำเร็จ**ครั้งที่** r เกิดขึ้น มีการแจกแจงแบบแกมมา โดยมี r เป็นพารามีเตอร์ และ λ เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่งหน่วย โดยเฉพาะเมื่อ $r = 1$ เราได้ว่า การแจกแจงแบบแกมมา ก็คือ การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลนั่นเอง

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบแกมมา

เราเริ่มจากการหาโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของการแจกแจงแบบแกมมา

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(r)}\int_0^\infty (\lambda x)^{r-1}e^{-(1-t/\lambda)\lambda x}\,dx$$

โดยแทนค่า $y = (1-t/\lambda)(\lambda x)$ เมื่อ $t < \lambda$ ในอินทิกรัล ทำให้ได้ว่า

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-t/\lambda)^r\,\Gamma(r)}\int_0^\infty y^{r-1}e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{(1-t/\lambda)^r\,\Gamma(r)}\,.\,\Gamma(r) = \frac{1}{(1-t/\lambda)^r}$$

ดังนั้น

$$M_X(t) = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-r} \quad \text{สำหรับ } t < \lambda \tag{5.56}$$

และผลที่ตามมาคือ

$$\mu = E[X] = r/\lambda \tag{5.57}$$

$$\sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2 \tag{5.58}$$

สำหรับฟังก์ชันแจกแจงแบบแกมมาคือ

$$F(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - \int_x^\infty \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda t)^{r-1}e^{-\lambda t}\,dt \qquad \text{เมื่อ } x > 0 \tag{5.59}$$

และ

$$F(x) = 0 \quad \text{เมื่อ } x \le 0$$

ถ้า r เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วเราทราบมาแล้วว่า การแจกแจงแกมมาในกรณีนี้ คือ การแจกแจงของตัวแปรสุ่ม ซึ่งแทนเวลารอจนกระทั่งความสำเร็จครั้งที่ r เกิดขึ้นในกระบวนการปัวซอง ดังนั้น โดยการอินทิเกรตสมการ (5.59) ด้วยเทคนิคการอินทิเกรตทีละส่วน เราได้ผลดังนี้คือ

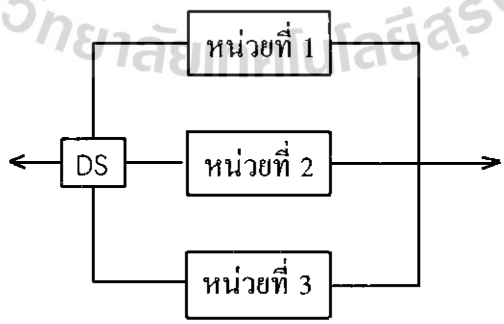
$$F(x) \;=\; 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^k}{k!} \;, \qquad x > 0 \tag{5.60}$$

แน่นอนที่สุด เราได้ผลเหมือนกับสมการ (5.54) ดังนั้น เราสามารถใช้ตารางค่าของฟังก์ชันแจกแจงแบบปัวซองหาค่าฟังก์ชันแจกแจงแบบแกมมาได้ ในกรณีที่ r เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 5.22 ระบบปฏิบัติการพร้อมหน่วยสำรอง (a standby redundant system) ประกอบด้วยหน่วยที่ 1, 2, 3 และสวิทช์ปฏิบัติการ (decision switch (DS)) ดังรูป 5.12 ในการปฏิบัติการจะเริ่มต้นด้วย หน่วยที่ 1 ทำงาน ในขณะที่ หน่วยที่ 2 และ 3 เตรียมรออยู่ เพื่อปฏิบัติการ เมื่อหน่วยที่ 1 เกิดเหตุขัดข้องหรือล้มเหลว สวิทช์ DS ทำหน้าที่สลับให้หน่วยที่ 2 ปฏิบัติการทันที จนกระทั่ง หน่วยที่ 2 เกิดเหตุขัดข้อง สวิทช์ DS ก็จะสลับให้หน่วยที่ 3 ปฏิบัติการ สมมติว่า สวิทช์ DS ทำหน้าที่ได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้น ถ้าเราให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนอายุการปฏิบัติการของระบบๆ นี้ แล้ว X สามารถแทนได้ด้วยผลบวกของอายุการปฏิบัติการของหน่วยที่ 1, 2 , 3 ดังนี้

$$X \;=\; X_1 + X_2 + X_3$$

ถ้าอายุการปฏิบัติการของ Unit 1, 2 , 3 เป็นอิสระแก่กัน และต่างก็มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล นั่นคือ



รูป 5.12

สำหรับแต่ละ X_j , $j = 1,2,3$ p.d.f. ของ X_j อยู่ในรูป

$$f_j(x_j) = (1/100)e^{-x_j/100} \qquad x_j \geq 0$$

แล้วจากสมการ(5.53) เราทราบว่า $X = X_1 + X_2 + X_3$ มีการแจกแจงแบบแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ $r = 3$ และ $\lambda = (1/100) = .01$ ดังนั้น p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{.01}{2!}(.01x)^2 e^{-.01x} \qquad x > 0$$

เราแทนความน่าจะเป็นที่ระบบสามารถปฏิบัติการได้อย่างน้อยที่สุด x ชั่วโมง ด้วย $R(x)$ และเรียก $R(x)$ ว่า **ฟังก์ชันความน่าเชื่อถือ (reliability function)** สามารถพิจารณาค่าของ $R(x)$ ได้ดังนี้คือ

$$R(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

เนื่องจาก $r = 3$ เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น เราคำนวณหา $F(x)$ โดยใช้สมการ (5.60) ได้ นั่นคือ

$$R(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-.01x}(.01x)^k}{k!}$$

$$= e^{-.01x}\left[1 + (.01x) + (.01x)^2/2\right]$$

ตัวอย่าง 5.23 สมมติว่า จำนวนลูกค้าที่เข้ามายังร้านค้าแห่งหนึ่งด้วยอัตราเฉลี่ย 30 คนต่อชั่วโมง และคล้อยตามเงื่อนไขของกระบวนการปัวซอง ดังนั้น ถ้าหน่วยเวลาเป็นนาที แล้ว $\lambda = 30/60 = 1/2$ จงหาความน่าจะเป็นที่เจ้าของร้านต้องรอนานกว่า 5 นาที ก่อนที่ลูกค้า 2 คนแรกจะเข้ามา

วิธีทำ

ให้ X แทนเวลารอ (นาที) จนกระทั่งลูกค้าคนที่ 2 เข้ามา ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ $r = 2$ และ $\lambda = 1/2 = 0.5$ ในที่นี้เราต้องการคำนวณ $P(X > 5)$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5)$$

ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 5.22 เพราะว่า $r = 2$ เป็นจำนวนเต็มบวก เราสามารถคำนวณ $F(5)$ จากสมการ (5.60) โดยแทนค่า $x = 5$, $r = 2$ และ $\lambda = 5$

$$\therefore \quad P(X > 5) = \sum_{k=0}^{1} \frac{e^{-(0.5)(5)}\left[(0.5)(5)\right]^k}{k!}$$

$$= e^{-2.5}\left[1 + 2.5\right] = 3.5\,e^{-2.5}$$

หรือ คำนวณโดยตรงด้วยการอินทิเกรต p.d.f. ของ X ดังนี้

$$P(X > 5) = \int_5^{\infty} \frac{0.5}{\Gamma(2)}(0.5x)^{2-1} e^{-0.5x}\,dx$$

$$= \int_5^{\infty} \frac{1}{4}\,x\,e^{-0.5x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[(-2)x\,e^{-0.5x} - 4\,e^{-0.5x}\right]_5^{\infty}$$

$$= 3.5\,\mathrm{e}^{-2.5} \approx 0.287$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X คือ $\mu = r/\lambda = 4$ และ $\sigma^2 = r/\lambda^2 = 8$ นั่นคือ เวลารอสำหรับลูกค้า 2 คนแรกโดยเฉลี่ย คือ 4 นาที

5.2.4 การแจกแจงแบบไวบูล (The Weibull Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบไวบูล เมื่อ p.d.f. ของ X อยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] \qquad x \geq \gamma \tag{5.61}$$

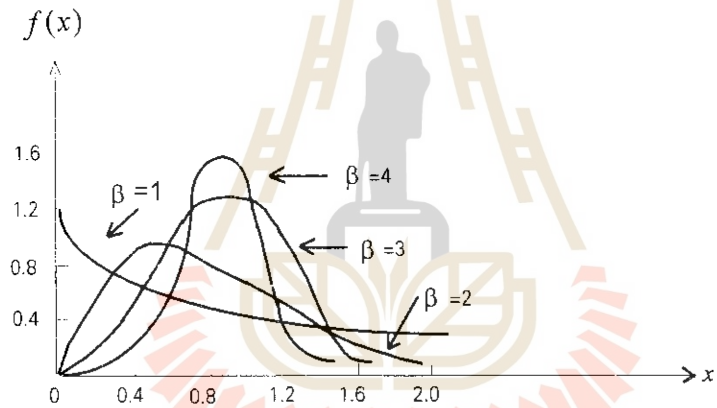
เมื่อ $\gamma\ (-\infty < \gamma < \infty)$ เป็นพารามิเตอร์ตำแหน่ง (location parameter) $\delta = 0$ เป็นพารามิเตอร์สัดส่วน (scale parameter) และ $\beta > 0$ เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (shape parameter)

การแจกแจงแบบไวบูลมีการประยุกต์อย่างกว้างขวางในปรากฏการณ์เชิงสุ่ม เพราะว่าการแจกแจงชนิดนี้ ใช้ในการประมาณได้อย่างดีสำหรับกฎของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มหลายตัวแปร การประยุกต์ที่สำคัญอันหนึ่งของการแจกแจงแบบไวบูลคือ รูปแบบของอายุการทำงานของส่วนประกอบไฟฟ้าและเครื่องกล และอายุการทำงานของระบบ เราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดการประยุกต์ในที่นี้

รูป 5.13 แสดงกราฟของ $f(x)$ ในสมการ (5.61) สำหรับบางค่าของพารามีเตอร์ คือ $\gamma = 0, \delta = 1$ และ $\beta = 1,2,3,4$ โดยการเลือกค่าของพารามีเตอร์ให้เหมาะสม สำหรับการแจกแจงแบบไวบูล การแจกแจงชนิดนี้สามารถประมาณปรากฏการณ์ที่สังเกตได้ เป็นจำนวนมาก

หมายเหตุ

เมื่อ $\gamma = 0$ และ $\beta = 1$ การแจกแจงแบบไวบูลลดรูปมาเป็นการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วย $\lambda = 1/\delta$



รูป 5.13

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบไวบูล

ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบไวบูลสามารถคำนวณได้ดังนี้คือ

$$E[X] = \int_{\gamma}^{\infty} x \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] dx$$

ให้ $y = \left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}$

$$\Rightarrow \quad x = \delta\, y^{1/\beta} + \gamma \quad \text{และ} \quad dx = \frac{\delta}{\beta}\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{1-\beta} dy$$

แทนค่าในอินทิกรัล เราได้

$$E[X] = \int_0^{\infty} \left(\delta\, y^{1/\beta} + \gamma\right) e^{-y}\, dy$$

$$= \gamma \int_0^{\infty} e^{-y}\, dy + \delta \int_0^{\infty} y^{[(1+1/\beta)-1]} e^{-y}\, dy$$

$$= \gamma\,(1) + \delta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

ดังนั้น

$$E[X] = \gamma + \delta\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{5.62}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

$$V(X) = \delta^2 \left\{ \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \right\} \tag{5.63}$$

และฟังก์ชันแจกแจงแบบไวบูลคือ

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] \qquad x \geq \gamma \tag{5.64}$$

เราได้กล่าวไปแล้วว่า การประยุกต์ที่สำคัญของการแจกแจงแบบไวบูล คือ การศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับ อายุการทำงานของส่วนประกอบหรือระบบ โดยสังเกตพฤติกรรมของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งแทนเวลาปฏิบัติการของส่วนประกอบหรือของระบบจนกระทั่งเกิดเหตุขัดข้อง และไม่สามารถปฏิบัติการได้อีกต่อไป พฤติกรรมเช่นนี้เรียกว่า ความเชื่อถือ(reliability) โดยมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องในการศึกษา อยู่ 3 ฟังก์ชันคือ

1. ฟังก์ชันความหนาแน่นการล้มเหลว (failure density function) หรือ p.d.f ของ X แทนด้วย f
2. ฟังก์ชันความเชื่อถือ (reliability function) แทนด้วย R
3. อัตราการล้มเหลวการแจกแจง (failure or hazard rate of the distribution) แทนด้วย ρ

X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และพิสัยของ X คือ ช่วง $(0,\infty)$ p.d.f. ของ X ในกรณีนี้เรียกว่า ความหนาแน่นการล้มเหลว (failure density) สำหรับนิยามของ R คือ ความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบจะไม่เกิดเหตุขัดข้องหรือล้มเหลวในการปฏิบัติการก่อนเวลา t นั่นคือ

$$R(t) = 1 - P(X < t) = 1 - \int_0^t f(x)\,dx$$

$$= 1 - F(t)$$

เมื่อ F คือฟังก์ชันแจกแจงของ X

สำหรับนิยามของ ρ พิจารณาบนช่วง $[t, t+\Delta t]$

$$\rho(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le X \le t+\Delta t \mid t \le X)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \le X \le t+\Delta t)}{P(t \le X)} \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\text{ความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุขัดข้องในช่วง}[t, t+\Delta t] \cdot \frac{1}{\Delta t}}{\text{ความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุขัดข้องในช่วง}[t, \infty]} \right] \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันทั้ง 3 สามารถแสดงได้ว่าเป็นดังต่อไปนี้

1. $\rho(t) = f(t)/R(t)$
2. $R(t) = \exp\left[-\int_0^t \rho(x)\,dx\right]$
3. $f(t) = \rho(t)R(t)$

ฟังก์ชัน $\rho(t)$ แบบหนึ่งที่ใช้อย่างกว้างขวางคือ

$$\rho(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \qquad t > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

จากความสัมพันธ์ในข้อ 1 , 2 , 3 ทำให้ได้ว่า

$$R(t) = \exp\left[-\alpha\ t^{\beta}\right]$$

และ

$$f(t) = \alpha\,\beta\,t^{\beta-1}\exp\left[-\alpha\ t^{\beta}\right]$$

รูปแบบของความหนาแน่นการล้มเหลว f เป็นกรณีหนึ่งของการแจกแจงแบบไวบูล โดยมี α และ β เป็นพารามีเตอร์ และ $\gamma = 0$ ในสมการ (5.61)

ตัวอย่าง 5.24 อายุการทำงานของส่วนประกอบอิเล็คทรอนิกส์ชนิดหนึ่งมีการแจกแจงแบบไวบูล ด้วยพารามีเตอร์ $\gamma = 0, \beta = \frac{1}{2}$ และ $\delta = 100$ สัดส่วนที่คาดว่าจะทำงานได้อย่างน้อยที่สุด 400 ชั่วโมง คือ

$$P(X \geq 400) = 1 - P(X < 400) = 1 - F(400)$$

แทนค่า $F(x)$ จากสมการ (5.64) ดังนั้น

$$P(X \geq 400) = \exp\left[-\sqrt{400/100}\,\right] = .1353$$

และจากสมการ (5.62) อายุการทำงานโดยเฉลี่ยคือ

$$E[X] = 0 + 100\,\Gamma(3) = 100(2!) = 200 \quad \text{ชั่วโมง}$$

5.2.5 การแจกแจงแบบปกติ (The Normal Distribution)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงที่มีความสำคัญยิ่งสำหรับทฤษฎีทางสถิติและวิธีทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูล บทบาทที่สำคัญของการแจกแจงชนิดนี้จะเห็นได้ในทฤษฎีบทลิมิตสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) ในปี ค.ศ. 1733 De Moivre ค้นพบการแจกแจงแบบปกติในรูปของลิมิตของการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อจำนวนครั้งของการทดลองเพิ่มขึ้นเป็นอนันต์ หลังจากนั้นอีกราวครึ่งศตวรรษลาปลาซ(Laplace) และเกาส์(Gauss) ต่างก็ค้นพบการแจกแจงปกติในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการดาราศาสตร์ การแจกแจงแบบปกติมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่ง คือ การแจกแจงแบบเกาส์ (Gaussian Distribution)

ในหัวข้อนี้ เราเริ่มด้วยการให้นิยามของ p.d.f สำหรับการแจกแจงแบบปกติ และแสดงว่ามีคุณสมบัติของ p.d.f ตลอดจนแสดงให้เห็นการใช้พารามีเตอร์ μ และ σ^2 ในสูตรของ p.d.f. ของการแจกแจงชนิดนี้ว่า พารามีเตอร์ทั้งสองเป็นค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปกติตามลำดับ

นิยามของการแจกแจงแบบปกติ

เรากล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติ ถ้า p.d.f. ของ X มีนิยามดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty \tag{5.65}$$

เมื่อ μ และ σ เป็นพารามีเตอร์ซึ่ง $-\infty < \mu < \infty$ และ $0 < \sigma < \infty$ (สัญลักษณ์ $\exp[u]$ หมายถึง e^u) เราเขียนโดยย่อว่า

$$X \text{ เป็น } N(\mu, \sigma^2) \tag{5.66}$$

เห็นได้ชัดว่า $f(x) > 0$ พิจารณาค่าของอินทิกรัล

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

โดยแทนค่า $Z = (x-\mu)/\sigma$ ใน I เราได้ว่า

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

เนื่องจาก $I > 0$ ดังนั้นถ้าเราแสดงว่า $I^2 = 1$ แล้ว $I = 1$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right]$$

หรือ

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right]dxdy$$

โดยให้ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (แทนในรูปพิกัดเชิงขั้ว) เราได้ว่า

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2/2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} 1\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi = 1$$

ดังนั้น $I = 1$ นั่นคือ เราได้แสดงว่า $f(x)$ มีคุณสมบัติของ p.d.f. ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

โมเมนต์เจนเจอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2\left(\mu+\sigma^2 t\right)x+\mu^2\right]\right\}dx$$

เขียนกำลังของ exp ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2-2\left(\mu+\sigma^2 t\right)x+\mu^2 = \left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2$$

ดังนั้น

$$M_X(t) = \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-\left(\mu+\sigma^2 t\right)\right]^2\right\}dx$$

จะเห็นได้ว่า ตัวถูกอินทิเกรตในอินทิกรัลอันหลังมีรูปแบบเป็น p.d.f. ของการแจกแจงแบบปกติ ในสมการ (5.65) โดยแทน μ ด้วย $\mu+\sigma^2 t$ เพราะว่าการอินทิเกรต p.d.f. ของการแจกแจงแบบปกติได้ค่าเท่ากับ 1 สำหรับจำนวนจริงใด ๆ μ โดยเฉพาะเมื่อ μ มีค่าเป็น $\mu+\sigma^2 t$ ดังนั้นผลที่ได้คือ

$$M_X(t) = \exp\left(\frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \qquad (5.67)$$

คำนวณหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของ $M_X(t)$ เราได้ว่า

$$M'_X(t) = \left(\mu + \sigma^2 t\right) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

และ

$$M''_X(t) = \left[\left(\mu + \sigma^2 t\right)^2 + \sigma^2\right] \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

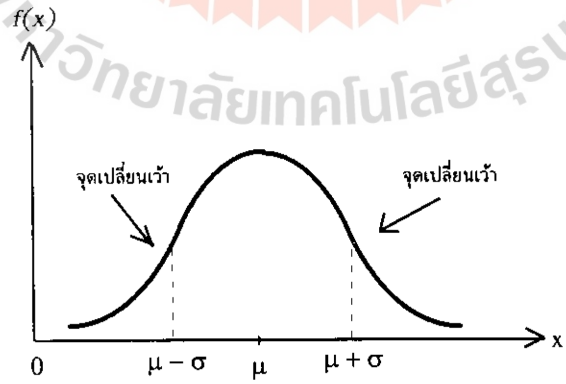
ดังนั้น ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปกติคำนวณได้ดังนี้คือ

$$E[X] = M'_X(0) = \mu \tag{5.68}$$

$$V(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = M''_X(0) - \mu^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2 \tag{5.69}$$

นั่นคือ พารามีเตอร์ μ และ σ^2 ที่ปรากฏอยู่ในสูตรของ p.d.f. สำหรับการแจกแจงแบบปกติ คือ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนตามลำดับ รูป 5.14 แสดงกราฟของ p.d.f. สำหรับการแจกแจงแบบปกติ ลักษณะกราฟเป็นรูประฆัง มีจุดกึ่งกลางตรงตำแหน่ง μ หรือมีสมมาตรเทียบกับเส้นตรง $x = \mu$ จุดเปลี่ยนเว้าบนกราฟเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง $\mu \pm \sigma$



รูป 5.14 การแจกแจงแบบปกติ

สรุปคุณสมบัติของการแจกแจงแบบปกติได้ดังนี้

ถ้า $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$ แล้ว

1. $f(x) \geq 0$ และ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (คุณสมบัติของ p.d.f)

2. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

3. $f[(x+\mu)] = f[-(x-\mu)]$ นั่นคือ $f(x)$ มีความสมมาตรเทียบกับ μ

4. ค่าสูงสุดของ f เกิดขึ้นที่ $x = \mu$

5. จุดเปลี่ยนเว้าของ f เกิดขึ้นที่ $x = \mu \pm \sigma$

ตัวอย่าง 5.25 ถ้า p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left[-\frac{(x+7)^2}{32}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

แล้ว X เป็น $N(-7,16)$ นั่นคือ X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = -7$ ความแปรปรวน $\sigma^2 = 16$ และโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน คือ $M_X(t) = \exp\left(-7t + 8t^2\right)$

ตัวอย่าง 5.26 ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ

$$M_X(t) = \exp\left(5t + 12t^2\right)$$

แล้ว X เป็น $N(5,24)$ และ p.d.f. ของ X คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{48\pi}} \exp\left[-\frac{(x-5)^2}{48}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

ฟังก์ชันแจกแจงแบบปกติ

ฟังก์ชันแจกแจงแบบปกติ F คือ

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] du \tag{5.70}$$

การคำนวณของอินทิกรัล ทำโดยการหาปฏิยานุพันธ์ไม่ได้ ต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข (numerical methods) ซึ่งทำโดยการประมาณค่าของอินทิกรัล และยังต้องคำนวณสำหรับค่าของพารามีเตอร์ μ และ σ^2 บางค่าโดยเฉพาะอีกด้วย อย่างไรก็ตามการเปลี่ยนตัวแปรโดยให้

$$z = (x-\mu)/\sigma \tag{5.71}$$

จะทำให้การคำนวณค่าของอินทิกรัลเป็นอิสระจาก μ และ σ นั่นคือ

$$F(x) = P(X \le x) = \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le (x-\mu)/\sigma\right)$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลของสมการ (5.70) ด้วยการแทนค่า

$$\mathrm{z} = (\mathrm{x}-\mu)/\sigma$$

ทำให้เราได้ว่า

$$F(x) = P\left(Z \le (x-\mu)/\sigma\right) = \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \phi(z)\, dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{5.72}$$

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (The Standard Normal Distribution)

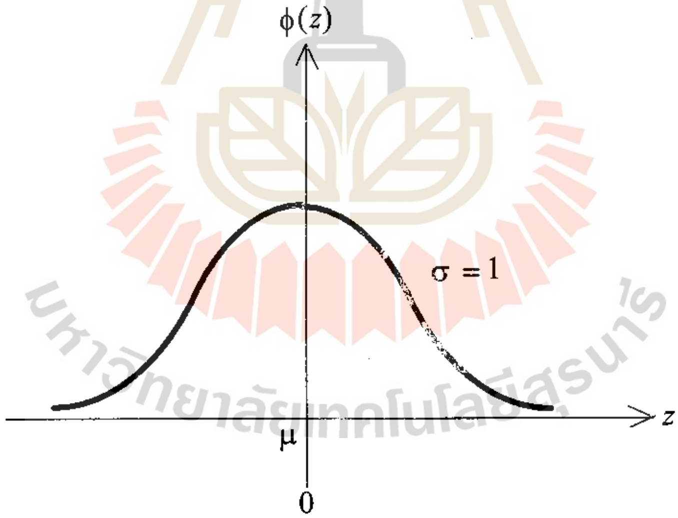
p.d.f. ของตัวแปรสุ่ม Z ในสมการ (5.72) ในรูป

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty \tag{5.73}$$

คือ การแจกแจงแบบปกติ ด้วย ค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และความแปรปรวน $\sigma^2 = 1$ นั่นคือ

$$Z \text{ เป็น } N(0,1)$$

เราเรียกตัวแปรสุ่ม Z ว่า **ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน** (standard normal random variable) และมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน กราฟของ p.d.f. ของ $N(0,1)$ หรือ $\phi(z)$ แสดงในรูป 5.15 จะเห็นได้ว่า กราฟมีสมมาตรเทียบกับแกนดิ่ง เนื่องจาก $\mu = 0$ และค่าสูงสุดของ $\phi(z)$ คือ $\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$



รูป 5.15 การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

สรุปได้ว่า ถ้า X เป็น $N(\mu, \sigma^2)$ แล้ว $Z = (X-\mu)/\sigma$ เป็น $N(0,1)$ และฟังก์ชันแจกแจงของ Z คือ

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \qquad (5.74)$$

และค่าของ $\Phi(z)$ แสดงในตาราง 3. ในภาคผนวกท้ายบทนี้ ซึ่งทำให้เกิดความสะดวกในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เมื่อตัวแปรสุ่มที่กำหนดมาเป็น $N(\mu, \sigma^2)$ เราเปลี่ยนตัวแปรสุ่มปกติให้เป็น $N(0,1)$ เสียก่อนแล้วจึงค่อยหาความน่าจะเป็นในรูปของตัวแปรสุ่ม $N(0,1)$ เช่น

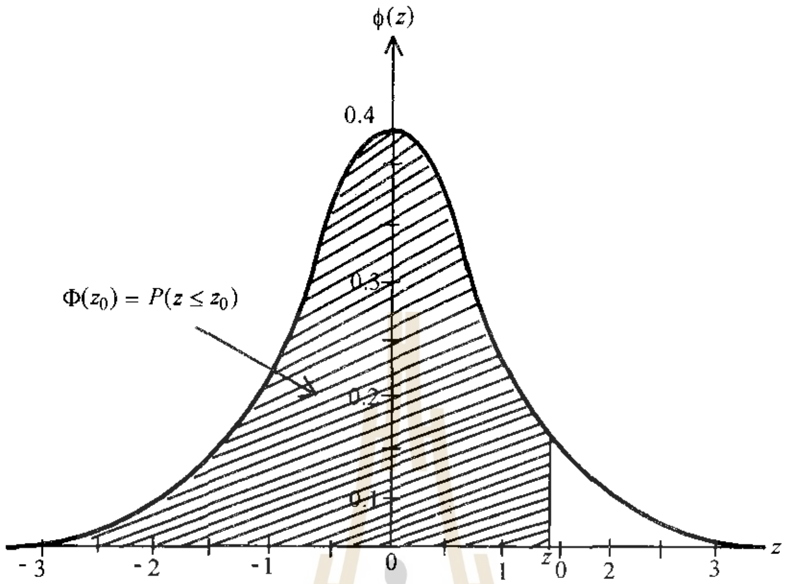
กำหนดให้ X เป็น $N(100,4)$ และต้องการหา $P(X \le 104)$ ขั้นตอนการคำนวณมีดังนี้

1. X เป็น $N(100,4) \Rightarrow \mu = 100$ และ $\sigma^2 = 4$
2. ให้ $Z = (X-\mu)/\sigma \Rightarrow Z = (X-100)/2$
3. $X \le 104 \Rightarrow Z = \dfrac{X-100}{2} \le \dfrac{104-100}{2} = 2$
4. $P(X \le 104) = P(Z \le 2) = \Phi(2)$
5. เปิดตารางดูค่าของ $\Phi(2)$ ได้ $\Phi(2) = 0.9772$
6. $P(X \le 104) = 0.9772$

ในการหาค่าของ $\Phi(z)$ บางครั้ง เราอาจจะต้องใช้ความสมมาตรของกราฟของ $\Phi(z)$ ช่วยเพื่อคำนวณหาค่าของ $\Phi(z)$ นอกเหนือไปจากที่กำหนดไว้ในตาราง 3. นั่นคือ

$$\Phi(-z_0) = 1 - \Phi(z_0) \qquad \text{สำหรับแต่ละจำนวนจริง } z_0$$

รูป 5.16 แสดงพื้นที่ของบริเวณแรเงาซึ่งเท่ากับ $\Phi(z_0)$



รูป 5.16

ตัวอย่าง 5.27 ถ้า X เป็น $N(100, 4)$ แล้ว จงหา $P(100 \le X \le 104)$

วิธีทำ

$$X \text{ เป็น } N(100,4) \Rightarrow \mu = 100 \text{ และ } \sigma^2 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

ดังนั้น

$$P(100 \le X \le 104) = P\left(\frac{100-100}{2} \le \frac{X-100}{2} \le \frac{104-100}{2}\right)$$

$$= P(0 \le Z \le 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(0)$$

$$= 0.9772 - 0.5000$$

$$= 0.4772$$

ตัวอย่าง 5.28 ถ้า X เป็น $N(25,36)$ จงหาค่าคงที่ c ซึ่งทำให้

$$P(|X-25| \le c) = 0.9544$$

วิธีทำ

$$X \text{ เป็น } N(25,36) \Rightarrow \mu = 25 \text{ และ } \sigma = 6$$

สิ่งที่เราต้องการคือ

$$P\left(\frac{-c}{6} \le \frac{X-25}{6} \le \frac{c}{6}\right) = 0.9544$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(c/6) - [1 - \Phi(c/6)] = 0.9544$$

$$\Phi(c/6) = (1+0.9544)/2 = 0.9972$$

เพราะว่า $\Phi(2) = 0.9772 \Rightarrow c/6 = 2 \Rightarrow c = 12$ ดังนั้น

$$P(-2(6) \le X - 25 \le 2(6)) = P(-2 \le Z \le 2)$$

เมื่อ $Z = (X-25)/6$ นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่ X ตกอยู่ในช่วงสองหน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X วัดจากค่าเฉลี่ยของ X เท่ากับ ความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน Z ตกอยู่ในช่วงสองหน่วยวัดจากศูนย์

หมายเหตุ

ในการเปลี่ยนตัวแปร $Z = (X-\mu)/\sigma$ ตัวแปร Z วัดระยะห่างของ X จากค่าเฉลี่ย μ ในหน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ดังเช่นในตัวอย่างข้างต้น

ตัวอย่าง 5.29 ความทนทานต่อการฉีกขาด(หน่วยเป็นนิวตัน) ของเนื้อผ้าสังเคราะห์แทนด้วยตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ $N(800,144)$ สำหรับผู้ซื้อซึ่งต้องการให้เนื้อผ้ามีความทนทานอย่างน้อยที่สุด 772 นิวตัน ตัวอย่างของเนื้อผ้าถูกเลือกสุ่มมาทดสอบ เราต้องการทราบ $P(X \ge 772)$

วิธีทำ

$$X \text{ เป็น } N(800,144) \quad \Rightarrow \quad \mu = 800 \quad \sigma = 12$$

คำนวณ $P(X < 772)$ ดังนี้

$$P(X < 772) = P\left(\frac{X-800}{12} < \frac{772-800}{12}\right) = P(Z < -2.33)$$

$$= \Phi(-2.33) = .01$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เราต้องการทราบคือ $P(X \geq 772) = 1 - .01 = .99$

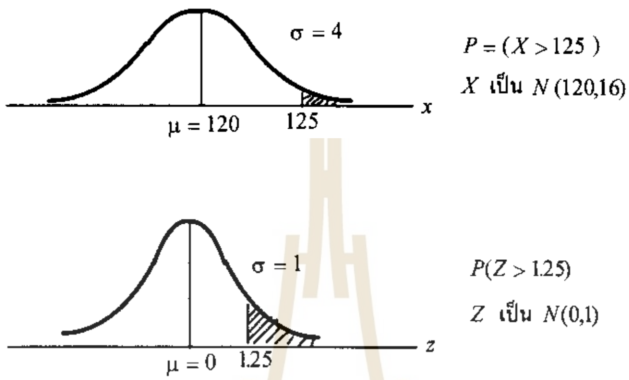
รูป 5.17 แสดง ความน่าจะเป็นที่คำนวณจากทั้งตัวแปรสุ่ม X และ Z

รูป 5.17

ตัวอย่าง 5.30 เวลาที่ใช้ในการซ่อมเครื่องยกของในแผนกบรรจุอาหารกระป๋องแห่งหนึ่ง คือ X นาที จากการศึกษาแสดงให้เห็นว่า เราสามารถประมาณฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X ด้วย $N(120,16)$ ดังแสดงในรูป 5.18 ถ้ากระบวนการบรรจุอาหารต้องหยุดลงเป็นเวลานานกว่า 125 นาที อุปกรณ์เครื่องใช้ทุกชิ้นต้องได้รับการทำความสะอาด และเกิดการสูญเสียอาหารที่อยู่ในระหว่างการบรรจุอีกปริมาณหนึ่ง คิดค่าสูญเสียจำนวนนี้รวมกับค่าทำความสะอาดที่เกิดขึ้น เนื่องจากกระบวนการบรรจุต้องหยุดลงเป็นเงินทั้งหมด 10,000 บาท เพื่อคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์นี้ เราคำนวณตามขั้นตอนต่อไปนี้

$$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-120}{4}\right) = P(Z > 1.25) = 1 - \Phi(1.25)$$

$$= 1 - .8944 = .1056$$



รูป 5.18

ฉะนั้นเมื่อเกิดเหตุการณ์ที่กระบวนการบรรจุอาหารต้องหยุดลง ค่าเฉลี่ยของค่าใช้จ่ายทั้งหมดคือ

$$E[C] = \left(10000 + C_{R_1}\right)P(X > 125) + \left(C_{R_1}\right)P(X \le 125)$$

$$= \left(10000 + C_{R_1}\right)(.1056) + \left(C_{R_1}\right)(.8944)$$

$$= C_{R_1} + 1056$$

เมื่อ C คือ ค่าใช้จ่ายทั้งหมด และ C_{R_1} คือ ค่าใช้จ่ายในการซ่อมเครื่องยกของ สมมติว่าเวลาเฉลี่ยที่ใช้ในการซ่อมแซม สามารถลดลงมาเป็น 115 นาที จากเดิม 120 นาที โดยการเพิ่มพนักงานดูแลและซ่อมแซมในแผนกนี้ แต่ค่าใช้จ่ายในการซ่อมแซมจะเพิ่มขึ้นเป็น $C_{R_2}\left(C_{R_2} > C_{R_1}\right)$ อย่างไรก็ตาม

$$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-115}{4}\right) = P(Z > 2.5)$$

$$= 1 - \Phi(2.5)$$

$$= 1 - .9938 = .0062$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของค่าใช้จ่ายทั้งหมดอันใหม่ คือ

$$E[C] = (10000 + C_{R_2})(.0062) + (C_{R_2})(.9938)$$

$$= C_{R_2} + 62$$

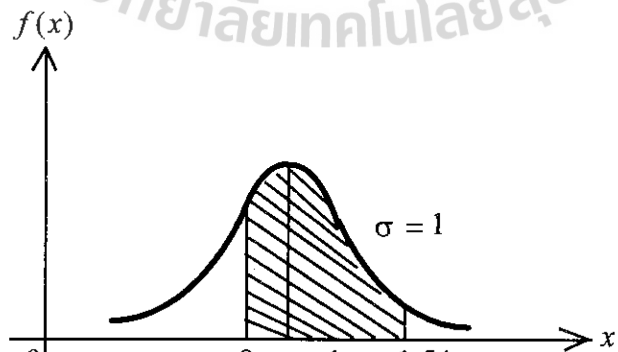
สรุปได้ว่า แผนกนี้ควรจ้างพนักงานดูแลและซ่อมแซมเพิ่มขึ้น ถ้า

$$C_{R_2} + 62 < C_{R_1} + 1056$$

หรือ

$$(C_{R_2} - C_{R_1}) < 994 \text{ บาท}$$

ตัวอย่าง 5.31 สิ่งหนึ่งที่ทำให้เกิดมลพิษในอากาศคือ ไฮโดรคาร์บอนที่ปล่อยออกมาจากระบบท่อไอเสียของรถยนต์ ให้ X เป็นปริมาณ (กรัม) ของไฮโดรคาร์บอนต่อคันต่อไมล์ สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 1 กรัม และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.25 กรัม จงหาความน่าจะเป็นที่รถยนต์ที่ถูกเลือกโดยสุ่ม จะปล่อยไฮโดรคาร์บอนจากระบบท่อไอเสียในปริมาณระหว่าง 0.9 ถึง 1.54 กรัมต่อระยะทาง 1 ไมล์ ความน่าจะเป็นที่เราต้องการหาแทนด้วยพื้นที่ของบริเวณแรเงาในรูป 5.19



รูป 5.19 $P(0.9 \le X \le 1.54)$

วิธีทำ

X มี $\mu = 1$ และ $\sigma = 0.25$ ดังนั้น คำนวณโดยใช้ Z แบบ $N(0,1)$

$$P(0.9 \le X \le 1.54) = P\left(\frac{0.9-1}{0.25} \le \frac{X-1}{0.25} - \le \frac{1.54-1}{0.25}\right)$$

$$= P(-.4 \le Z \le 2.16)$$

$$= \Phi(2.16) - \Phi(-.4)$$

$$= .9846 - .3446 = .64$$

ถ้าเราแปลความหมายของความน่าจะเป็นนี้ในรูปของเปอร์เซนต์ แล้วเรากล่าวได้ว่า 64% ของรถยนต์ที่ขับเคลื่อนอยู่ ปล่อยสารไฮโดรคาร์บอนในปริมาณ 0.9 ถึง 1.54 กรัมต่อระยะทาง 1 ไมล์

ตัวอย่าง 5.32 ให้ X แทนปริมาณรังสีที่ซึมซับเข้าไปในร่างกายของแต่ละคน ก่อนที่จะถึงขีดอันตรายขั้นเสียชีวิต สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 500 เรินต์เกน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 150 เรินต์เกน จงหาระดับของปริมาณรังสีสำหรับผู้ที่ทำงานเกี่ยวข้องกับรังสีจำนวน 5% ที่จะรอดชีวิต

วิธีทำ

เราต้องการทราบจุด x_0 แสดงในรูป 5.20 ในเชิงของความน่าจะเป็นเราต้องการหาจุด x_0 ซึ่งทำให้

$$P(X \ge x_0) = .05$$

X มี $\mu = 500$ และ $\sigma = 150$ ดังนั้น คำนวณโดยใช้ Z แบบ $N(0,1)$

$$P(X \ge x_0) = P\left(\frac{X-500}{150} \ge \frac{x_0-500}{150}\right)$$

$$= P\left(Z \ge \frac{x_0-500}{150}\right) = .05$$

นั่นคือ $(x_0 - 500)/150$ เป็นจุดบนเส้นโค้งปกติมาตรฐานโดยมีพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งไปทางขวาของจุดนี้ 5% และไปทางซ้าย 95%

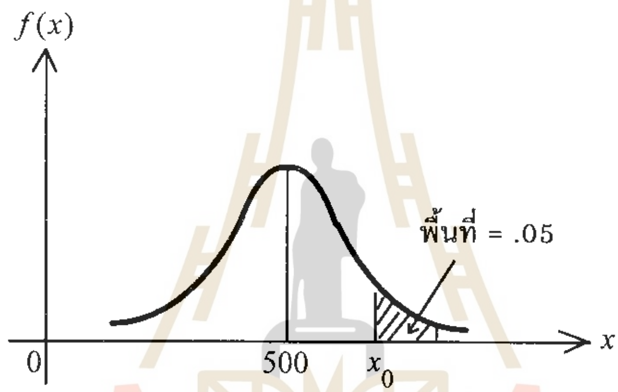
ให้ $z_0 = \dfrac{x_0 - 500}{150}$ ดังนั้น เราต้องการหา z_0 ซึ่งทำให้

$$P(Z \le z_0) = .95 \quad \text{หรือ} \quad \Phi(z_0) = .95$$

จากตาราง 3. เราได้ว่า $\Phi(z_0) = 1.645$ ฉะนั้น

$$\frac{x_0 - 500}{150} = 1.645 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 150(1.645) + 500 = 746.75$$

นั่นคือ มีผู้รอดชีวิตเพียง 5% ถ้าปริมาณรังสีที่ซึมซับเข้าไปในร่างกายเกินกว่า 746.75 เรินต์เกน



รูป 5.20 $P(X \ge x_0) = .05$

ในกรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบปกติ $N(\mu, \sigma^2)$ ช่วงสมมาตรหรือเหตุการณ์ และความน่าจะเป็นที่ได้ใช้อยู่บ่อยๆ มีดังต่อไปนี้

$$\left.\begin{aligned}
P(\mu - 1.00\sigma \le X \le \mu + 1.00\sigma) &= .6826 \\
P(\mu - 1.645\sigma \le X \le \mu + 1.645\sigma) &= .90 \\
P(\mu - 1.96\sigma \le X \le \mu + 1.96\sigma) &= .95 \\
P(\mu - 2.57\sigma \le X \le \mu + 2.57\sigma) &= .99 \\
P(\mu - 3.00\sigma \le X \le \mu + 3.00\sigma) &= .9978
\end{aligned}\right\} \qquad (5.75)$$

ความน่าจะเป็นเหล่านี้ อาจจะกล่าวในรูปเปอร์เซนต์ โดยเฉพาะในการสุ่มตัวอย่างของประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ความน่าจะเป็นในสมการแรกหมายความว่า 68% ของค่าของ X จะอยู่ในช่วง 1 หน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดจากค่าเฉลี่ย หรือในสมการที่สาม 95% ของค่าของ X จะอยู่ในช่วง 1.96 หน่วย หรือประมาณ 2 หน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานวัดจากค่าเฉลี่ย เป็นต้น

อสมการเชอบีเชฟ (Chebyshev's Inequality)

กฎเกณฑ์ที่จะกล่าวต่อไปแตกต่างจากกรณีของตัวแปรสุ่มแบบปกติที่เราแสดงช่วงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะอยู่ รวมทั้งความน่าจะเป็นที่ X ตกอยู่ในช่วงเหล่านี้ ในกรณีนี้ X เป็น**ตัวแปรสุ่มใดๆ** และไม่จำเป็นต้องเป็นแบบต่อเนื่อง กล่าวคือ

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ด้วยค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ดังนั้นสำหรับจำนวนจริงบวกใด ๆ k

$$P\left(|X - \mu| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \qquad (5.76)$$

เราเรียกอสมการนี้ว่า **อสมการเชอบีเชฟ**

พิสูจน์

เราแสดงการพิสูจน์ในกรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ด้วยค่าเฉลี่ย μ และความ แปรปรวน σ^2

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

ให้ $k > 0,\ c = k^2\sigma^2$ แล้วเขียน

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{x} - \mu)^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu - \sqrt{c}} (x - \mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu - \sqrt{c}}^{\mu + \sqrt{c}} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

$$+ \int_{\mu + \sqrt{c}}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

เพราะว่า $(x-\mu)^2 f(x) \geq 0$ ดังนั้น

$$\int_{\mu-\sqrt{c}}^{\mu+\sqrt{c}} (x-\mu)^2 f(x)\,dx \geq 0$$

และ

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-\sqrt{c}} (x-\mu)^2 f(x)\,dx + \int_{\mu+\sqrt{c}}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

แต่ $(x-\mu)^2 \geq c$ ก็ต่อเมื่อ $|x-\mu| \geq \sqrt{c}$ ดังนั้น

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-\sqrt{c}} c\, f(x)\,dx + \int_{\mu+\sqrt{c}}^{\infty} c\, f(x)\,dx$$

ในรูปของความน่าจะเป็น เราได้ว่า

$$\sigma^2 \geq c\,P\left(X \leq \mu - \sqrt{c}\right) + c\,P\left(X \geq \mu + \sqrt{c}\right)$$

$$\sigma^2 \geq c\left\{P\left(X-\mu \leq -\sqrt{c}\right) + P\left(X-\mu \geq \sqrt{c}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad P\left(X-\mu \leq -\sqrt{c}\right) + P\left(X-\mu \geq \sqrt{c}\right) \leq \sigma^2/c$$

$$\Rightarrow \quad P\left(-\sqrt{c} \leq X-\mu \leq \sqrt{c}\right) \geq 1-\sigma^2/c$$

เพราะว่า $c = k^2\sigma^2$ และ k เป็นจำนวนจริงบวก ผลที่ตามมา คือ $\sqrt{c} = k\sigma$ ดังนั้น

$$P\left(-k\sigma \leq X-\mu \leq k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

หรือ

$$P\left(|X-\mu| \leq k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

เพราะว่า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า

$$P\left(|X-\mu| < k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

ในกรณี X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย การพิสูจน์จะคล้ายกัน เพียงแต่แทนการหาค่าอินทิกรัลด้วยการหาผลบวก

ประโยชน์ของอสมการเชอบีเชฟ คือ เราไม่ต้องรู้ p.d.f. หรือการแจกแจงของ X ว่าเป็นอย่างใด แต่สามารถใช้อสมการนี้หาขอบเขตของความน่าจะเป็นที่ค่าของ X จะอยู่ในช่วง k หน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากค่าเฉลี่ย

ตัวอย่าง 5.33 เราสามารถวัดความหนืดของของไหล โดยวิธีการปล่อยลูกบอลลงไปในหลอดเทียบมาตรฐาน(calibrated tube) ซึ่งบรรจุของไหลที่ต้องการทราบความหนืด แล้วจับเวลาที่ลูกบอลตกลงมาเป็นระยะทางที่กำหนดไว้ แทนเวลาดังกล่าวนี้ด้วยตัวแปรสุ่ม X สมมติว่า X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 20 วินาที และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.5 วินาที

เราสามารถใช้สมการ(5.75)ได้ เพราะว่า X เป็นตัวแปรสุ่มปกติด้วย $\mu = 20$ และ $\sigma = 0.5$ ดังนั้น เราทราบว่าประมาณ 95% ของค่า X ที่สังเกตได้ มีค่าอยู่ในช่วง 1 วินาที (หรือ 2 หน่วยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน)จากค่าเฉลี่ยของ X นั่นคือ X มีค่าอยู่ระหว่าง 19 และ 21 ด้วยความน่าจะเป็น .95

$$P(19 \le X \le 21) \approx .95$$

ถ้าเราใช้อสมการเชอบีเชฟ ซึ่งใช้ได้กับตัวแปรสุ่มใดๆ โดยไม่ต้องทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้น เพียงแต่เราทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มก็พอ ดังนั้น เราให้ $k = 2$ ในอสมการ (5.76) ผลที่ตามมา คือ

$$P\left(|X - 20| < 2(5)\right) \ge 1 - \frac{1}{2^2} = 0.75$$

หรือ

$$P(19 < X < 21) \ge 0.75$$

นั่นคือ อสมการเชอบีเชฟ สามารถบอกได้เพียงขอบเขตของความน่าจะเป็น นั่นคือ อย่างน้อยที่สุด 75% ของค่า X ที่วัดได้จะมีค่าอยู่ในช่วง 1 วินาทีจากค่าเฉลี่ยของ X ดังนั้น ในกรณีที่เราทราบชัดเจนว่า X มีการแจกแจงแบบปกติ ควรใช้สมการใน(5.75) เพื่อให้ได้ความน่าจะเป็นที่มีค่าชัดเจนกว่าการใช้อสมการเชอบีเชฟ

ตัวอย่าง 5.34 ข้อมูลเกี่ยวกับความปลอดภัยในโรงงานอุตสาหกรรมถูกบันทึกไว้ในรูปจำนวนชั่วโมงทำงานโดยไม่มีอุบัติเหตุร้ายแรงเกิดขึ้น เราแทนจำนวนชั่วโมงดังกล่าวนี้ด้วย M จากข้อมูลที่บันทึกไว้เราทราบว่าค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ M คือ 2 ล้านชั่วโมง และ 0.1 ล้านชั่วโมง ตามลำดับ มีอุบัติเหตุร้ายแรงเกิดขึ้นเมื่อไม่นานมานี้ในโรงงาน จะเป็นได้หรือไม่ที่อุบัติเหตุร้ายแรงจะเกิดขึ้นอีกภายใน 1.6 ล้านชั่วโมงข้างหน้า

วิธีทำ

เพื่อตอบคำถามนี้ เราคำนวณ $P(M \le 1.6)$ ในที่นี้เราไม่มีข้อมูลเกี่ยวกับการแจกแจงของ M ดังนั้น วิธีที่เป็นไปได้สำหรับการหา $P(M \le 1.6)$ คือ หาขอบเขตของความน่าจะเป็นนี้โดยใช้อสมการเชอบีเชฟ เพราะว่า M มี $\mu = 2$ และ $\sigma = .1$ โดยให้ $k = 4$ ในอสมการ (5.76) เราได้ว่า

$$P(1.6 < M < 2.4) \ge 1 - \frac{1}{16} = .9375$$

นั่นคือ

$$P(M \le 1.6) + P(M \ge 2.4) \le 1 - .9375 = .0625$$

แต่มีความเป็นไปได้ที่ $M \ge 2.4$ ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า

$$P(M \le 1.6) < .0625$$

ค่าตัวเลขที่ได้คือ ขอบเขตของความน่าจะเป็นที่เราสามารถบอกได้โดยใช้อสมการเชอบีเชฟ กล่าวคือ โอกาสที่อุบัติเหตุร้ายแรงจะเกิดขึ้นภายใน 1.6 ล้านชั่วโมงทำงานข้างหน้า มีอย่างมากที่สุดเพียง 6.25% หรือไม่เกิน 6.25% และถ้าเราทราบว่าการแจกแจงของ M มีสมมาตร แล้วเราสามารถบอกได้ชัดเจนและใกล้เคียงมากยิ่งขึ้นอีกว่า

$$P(M \le 1.6) < .0625/2 = .03125$$

การประมาณการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปกติ

เราได้ใช้การแจกแจงแบบปัวซองในการประมาณการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ n มีค่าใหญ่ ในที่นี้เราสามารถใช้การแจกแจงแบบปกติด้วยจุดประสงค์อันเดียวกัน มีความพิเศษตรงที่เราใช้การแจกแจงแบบต่อเนื่องประมาณการแจกแจงแบบเต็มหน่วย เพื่อให้เห็นแนวคิดนี้ชัดเจนยิ่งขึ้น เรา พิจารณาตัวแปรสุ่มแบบทวินาม ด้วยความน่าจะเป็นของความสำเร็จ 0.4 และสำหรับค่า n ต่างๆ กัน

รูป 5.21(a) - (d) แสดงกราฟของ $b(n, 0.4)$ สำหรับ $n = 5, 10, 5$ และ 20 ตามลำดับ ลักษณะการแสดงเราใช้กราฟแท่ง โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้างหนึ่งหน่วย และสูงเท่ากับค่าของ p.d.f. ของแต่ละค่าของ x $(x = 0, 1, 2, \ldots, n)$ แสดงการแจกแจง

จากรูปทั้ง 4 จะเห็นได้ว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นถึง 20 เราเห็นเส้นขอบของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีลักษณะคล้ายแนวเส้นโค้งรูประฆังของการแจกแจงแบบปกติ หรือเรียกสั้นๆว่า **เส้นโค้งปกติ** กราฟของการแจกแจงทวินามเหล่านี้ชี้ให้เราเห็นว่าเมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น การแจกแจงแบบทวินามซึ่งมีกราฟแสดงด้วยจำนวนสี่เหลี่ยมผืนผ้ามากยิ่งขึ้น โดยพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเหล่านี้สามารถประมาณได้ด้วยพื้นที่ของบริเวณใต้เส้นโค้งปกติ สำหรับตัวแปรสุ่มปกติที่เราจะเลือกใช้ในการประมาณนี้ เราเลือกตัวแปรสุ่มปกติที่มีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่ากันกับของตัวแปรสุ่มแบบ ทวินามที่เราจะประมาณ

หมายเหตุ

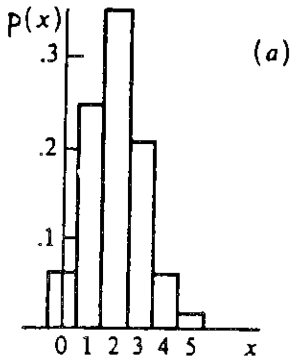
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วยซึ่งมีการแจกแจงเป็น $p(x)$ การคำนวณหาความน่าจะเป็นของ A ในเชิงเรขาคณิต คือ การหาผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 1 หน่วย และสูงเท่ากับค่าของ p.d.f. สำหรับแต่ละ x ใน A นั่นคือ

$$P(A) = \sum_{x \in A} p(x) = \sum_{x \in A} (p(x))(1)$$

เมื่อ $(p(x))(1)$ = พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าสูง $p(x)$ และกว้าง 1 หน่วย

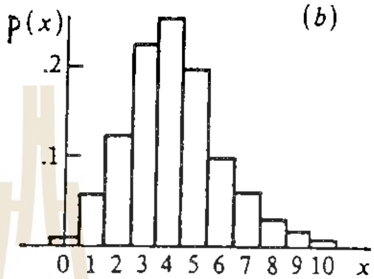
n = 5, p = .4

x	p(x)
0	.0778
1	.2592
2	.3456
3	.2304
4	.0768
5	.0102



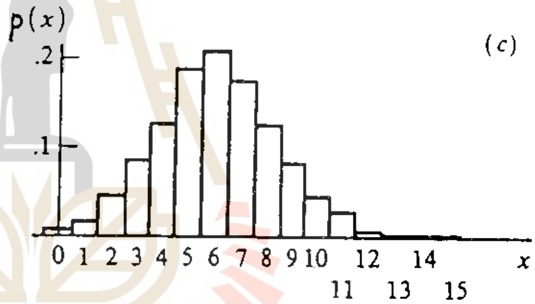
n = 10, p = .4

x	p(x)
0	.0060
1	.0404
2	.1209
3	.2150
4	.2508
5	.2007
6	.1114
7	.0425
8	.0106
9	.0016
10	.0001



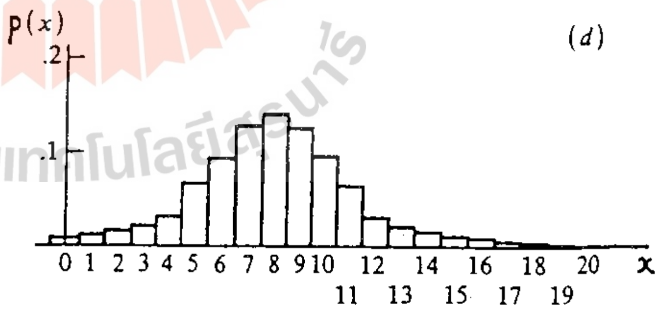
n = 15, p = .4

x	p(x)	x	p(x)
0	.0005	8	.1181
1	.0047	9	.0612
2	.0219	10	.0245
3	.0634	11	.0074
4	.1268	12	.0016
5	.1859	13	.0003
6	.2066	14	~ 0
7	.1771	15	~ 0



n = 20, p = .4

x	p(x)	x	p(x)
0	~ 0	11	.0710
1	.0005	12	.0355
2	.0031	13	.0145
3	.0124	14	.0049
4	.0350	15	.0013
5	.0746	16	.0003
6	.1244	17	~ 0
7	.1659	18	~ 0
8	.1797	19	~ 0
9	.1597	20	~ 0
10	.1172		



รูป 5.21 การแจกแจงแบบทวินาม

(a) n = 5 , p = .4 (b) n = 10 , p = .4 (c) n = 15 , p = .4 (d) n = 20 , p = .4

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้า X เป็นตัวแปรแบบทวินามด้วยพารามีเตอร์ n และ p แล้วสำหรับ n ที่มีค่าใหญ่ X สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย np และความแปรปรวน $np(1-p)$

การพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้มีพื้นฐานอยู่บนทฤษฎีบทลิมิตสู่ส่วนกลาง ทฤษฎีบท5.1 ไม่กล่าวอย่างชัดเจนว่า n ควรมีค่าใหญ่ขนาดใด ในเชิงคณิตศาสตร์เมื่อกล่าวว่า n มีค่าใหญ่ มีความหมายว่า n เข้าใกล้อนันต์ แต่ในทางปฏิบัติการประมาณนี้ใช้ได้ดีสำหรับ $p \le .5$ และ $np > 5$ หรือ $p > .5$ และ $n(1-p) > 5$

ตัวอย่าง 5.35 มีการศึกษาค้นคว้าความเกี่ยวโยงระหว่างการสูบบุหรี่ระหว่างตั้งครรภ์และความพิการแรกเกิดของเด็ก ในจำนวนหญิงมีครรภ์ที่ทำการศึกษา มี 40 ที่สูบบุหรี่ และ 60% ที่ไม่สูบบุหรี่ เมื่อทารกคลอดออกมา ปรากฏว่ามี 20 คน ที่แสดงให้เห็นลักษณะความพิการแรกเกิด ให้ X แทนจำนวนของเด็กที่มีมารดาสูบบุหรี่ระหว่างตั้งครรภ์ ถ้าการสูบบุหรี่ระหว่างตั้งครรภ์และความพิการแรกเกิดไม่มีความสัมพันธ์กัน แล้ว X มีการแจกแจงแบบทวินาม ด้วยพารามีเตอร์ $n = 20$ และ $p = .4$ จงหาความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยที่สุดเด็ก 12 คนในจำนวน 20 คนนี้ มีมารดาสูบบุหรี่ระหว่างตั้งครรภ์

วิธีทำ

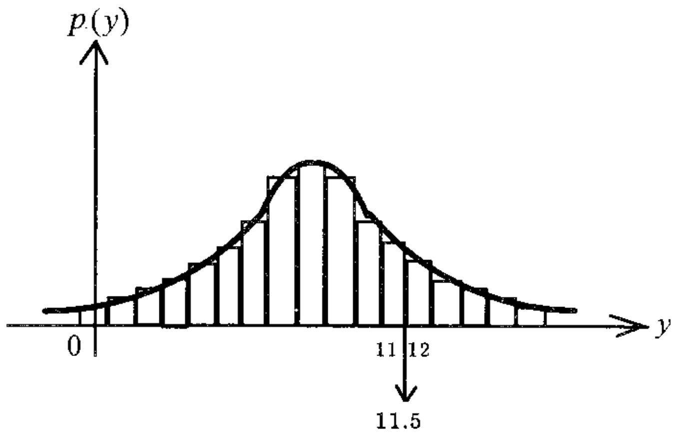
ในที่นี้เราต้องการหา $P(X \ge 12)$ บนสมมุติฐานที่ว่า X มีการแจกแจงแบบทวินามด้วย $n = 20$ และ $p = .4$ ถ้าคำนวณโดยตรง จากตาราง 1 เราได้ว่า ความน่าจะเป็นนี้คือ 0.0565 เพราะว่า $p = .4 \le .5$ และ $np = 20(.4) = 8 > 5$ การประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติควรจะให้ค่าที่ใกล้กับ 0.0565 นั่นคือ เราประมาณด้วยตัวแปรสุ่ม Y ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วย

ค่าเฉลี่ยเท่ากับ $np = 20(.4) = 8$

และ

ความแปรปรวนเท่ากับ $np(1-p) = 20(.4)(.6) = 4.8$

ความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.0565 ก็คือ ผลบวกของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีศูนย์กลางที่ $x = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$ และ 20 กว้างหนึ่งหน่วย และสูงเท่ากับค่าของ p.d.f. แบบทวินามที่แต่ละค่าของ x เหล่านี้ ดังแสดงในรูป 5.22



รูป 5.22

$$P(X \geq 12) = \text{พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแรเงา}$$
$$\approx \text{พื้นที่ใต้เส้นโค้งจาก } 11.5 \text{ เป็นต้นไป}$$

ค่าประมาณของความน่าจะเป็นนี้คือ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติทางขวาของจุด $y = 11.5$ เป็นต้นไป นั่นคือ

$$P(X \geq 12) \approx P(Y \geq 11.5)$$

ค่า 0.5 นี้คือ " ตัวปรับครึ่งหน่วย " สำหรับความต่อเนื่อง และลบค่านี้ออกจาก 12 ในการประมาณ มิฉะนั้น พื้นที่ครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมผืนผ้าศูนย์กลางที่ 12 จะถูกตัดทิ้งไป ทำให้ความผิดพลาดในการประมาณเพิ่มขึ้น

สำหรับการหา $P(Y \geq 11.5)$ ก็ทำได้ตามปกติ คือ

$$P(Y \geq 11.5) = P\left(\frac{Y-8}{\sqrt{48}} \geq \frac{11.5-8}{\sqrt{48}}\right)$$
$$= P(Z \geq 1.59)$$
$$= 1 - \Phi(1.59)$$
$$= 1 - .9441 = .0559$$

ดังนั้น

$$P(X \geq 12) \approx .0559$$

ในปัญหานี้ ถึงแม้ว่า $n = 20$ มีค่าไม่ใหญ่มาก แต่ค่าประมาณที่ได้ก็นับว่าใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงของความน่าจะเป็นแบบทวินาม แน่นอนที่สุดในทางปฏิบัติ ถ้าเราสามารถหาค่าของความน่าจะเป็นได้จากตาราง เราย่อมไม่ใช้วิธีการประมาณ

ข้อสังเกต

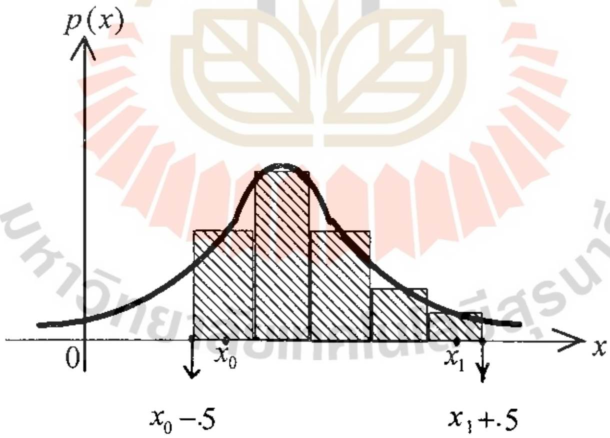
ในการประมาณการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงปกติ เรามี 0.5 เป็นตัวปรับครึ่งหน่วย เพื่อลดความผิดพลาดในการประมาณ กล่าวคือ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินามซึ่งประมาณด้วย Y ตัวแปรสุ่มแบบปกติแล้ว

$$P(X \geq x_0) \approx P(Y \geq x_0 - .5)$$

$$P(X \leq x_1) \approx P(Y \leq x_1 + .5)$$

$$P(x_0 \leq X \leq x_1) \approx P(x_0 - .5 \leq Y \leq x_1 + .5)$$

(ดูรูป 5.23 ประกอบ)



รูป 5.23

ตัวอย่าง 5.36 ในการสุ่มตัวอย่างจากกระบวนการผลิตซึ่งมีผลผลิต 20% ที่มีตำหนิ เลือกสุ่มกลุ่มตัวอย่างจำนวน 100 หน่วยมาทุก ๆ ชั่วโมง เพื่อตรวจสอบในการควบคุมคุณภาพ ให้ X แทนจำนวนผลผลิตที่มีตำหนิในกลุ่มตัวอย่าง ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบทวินามด้วย $n = 100$ และ $p = .2$ จงประมาณ $P(X \le 15)$ ด้วยการแจกแจงแบบปกติ

วิธีทำ

เพราะว่า

$$p = .2 \le .5 \quad \text{และ} \quad np = 100(.2) = 20 > 5$$

ดังนั้น เราประมาณด้วยตัวแปรสุ่ม Y แบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย $np = 20$ และความแปรปรวน $np(1-p) = 100(.2)(.8) = 16$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} P(X \le 15) &\approx P(Y \le 15.5) \\ &= P\left(\frac{Y-20}{\sqrt{16}} \le \frac{Y-20}{\sqrt{16}}\right) \\ &= P(Z \le -1.25) \\ &= \Phi(-1.25) \\ &= .1056 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad P(X \le 15) \approx .1056$$

คุณสมบัติการถ่ายทอด (Reproductive Property) ของการแจกแจง

ในบทก่อนเราได้กล่าวถึง ตัวแปรสุ่ม Y ในรูปผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เราทราบว่า ถ้า

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n \tag{5.77}$$

แล้ว

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] \tag{5.78}$$

และถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **มีความเป็นอิสระแก่กัน** แล้ว

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, V(X_i) \tag{5.79}$$

และเราสามารถแสดงได้อีกว่า โมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ Y ในกรณีนี้คือ

$$M_Y(t) = e^{a_0 t} \left[M_{X_1}(a_1 t) \, M_{X_2}(a_2 t) \ldots M_{X_n}(a_n t) \right] \tag{5.80}$$

ในที่นี้ เราสนใจพิจารณาว่า ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความเป็นอิสระแก่กันและต่างก็มีการแจกแจงชนิดเดียวกัน แล้วสำหรับตัวแปรสุ่ม Y ในรูป

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{5.81}$$

จะมีการแจกแจงชนิดเดียวกันกับแต่ละตัวแปรสุ่ม X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ หรือไม่ และถ้ามีการแจกแจงชนิดเดียวกัน เรากล่าวว่า การแจกแจงชนิดนี้มีคุณสมบัติการถ่ายทอด

1. กรณีการแจกแจงแบบปัวซอง

ถ้า $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีความเป็นอิสระแก่กันและแต่ละ X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยพารามีเตอร์ c_i แล้ว $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีการแจกแจงแบบปัวซองด้วยพารามีเตอร์ $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ เพราะว่าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของแต่ละ X_i คือ

$$M_{X_i}(t) = \exp\left[c_i \left(e^t - 1 \right) \right]$$

เมื่อ $\exp(x) = e^x$ และเพราะว่า $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีความเป็นอิสระ ดังนั้นจากสมการ(5.80) เราได้ว่า

$$M_Y(t) = \exp\left[(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \left(e^t - 1 \right) \right]$$

ซึ่งก็คือ รูปแบบของโมเมนต์เจนเนอร์เรทฟังก์ชันของการแจกแจงแบบปัวซอง โดยมี $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ เป็นพารามีเตอร์ นั่นคือ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบปัวซองด้วยพารามีเตอร์ $c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ ดังนั้น การแจกแจงแบบปัวซองมีคุณสมบัติการถ่ายทอด

2. กรณีการแจกแจงแบบปกติ

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความเป็นอิสระแก่กัน และแต่ละ X_i มีการแจกแจงแบบปกติ นั่นคือ X_i เป็น $N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ_Y และความแปรปรวน σ_Y^2 ซึ่งมีค่าดังนี้

$$\mu_Y = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \quad \text{และ} \quad \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

เพราะว่าแต่ละ X_i เป็น $N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ และ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีความเป็นอิสระแก่กัน ดังนั้น จากสมการ (5.78) (5.79) และ (5.80) เราได้ว่า

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_Y^2$$

และ

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t) \\ &= \left[\exp\left(\mu_1 t + \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right)\right]\left[\exp\left(\mu_2 t + \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right)\right] \ldots \left[\exp\left(\mu_n t + \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$M_Y(t) = \exp\left[(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)t + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2\right)\frac{t^2}{2}\right]$$

ซึ่งก็คือโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มปกติด้วยค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนดังนี้

$$\mu_Y = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n \quad \text{และ} \quad \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

นั่นคือ Y เป็นตัวแปรสุ่มปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ_Y และความแปรปรวน σ_Y^2 การแจกแจงแบบปกติจึงมีคุณสมบัติการถ่ายทอด

ตัวอย่าง 5.37 รูป 5.24 แสดงส่วนประกอบหรือแอซเซมบลี(assembly) อันหนึ่ง ซึ่งมีส่วนประกอบ X_1, X_2 และ X_3 เชื่อมต่อกัน คุณสมบัติของ X_1, X_2, X_3 คือ

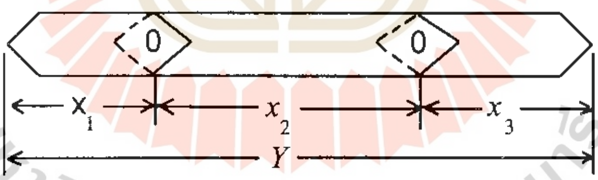
$$X_1 \text{ เป็น } N(12,.02)\,;\ X_2 \text{ เป็น } N(24,.03) \text{ และ } X_3 \text{ เป็น } N(18,.04)$$

(หน่วยเป็นเซนติเมตร) เนื่องจากส่วนประกอบทั้งสามผลิตโดยเครื่องจักรต่างชนิดกัน เราจึงสมมติได้ว่า X_1, X_2 และ X_3 มีความเป็นอิสระแก่กัน และสมมติว่าเราต้องการคำนวณ

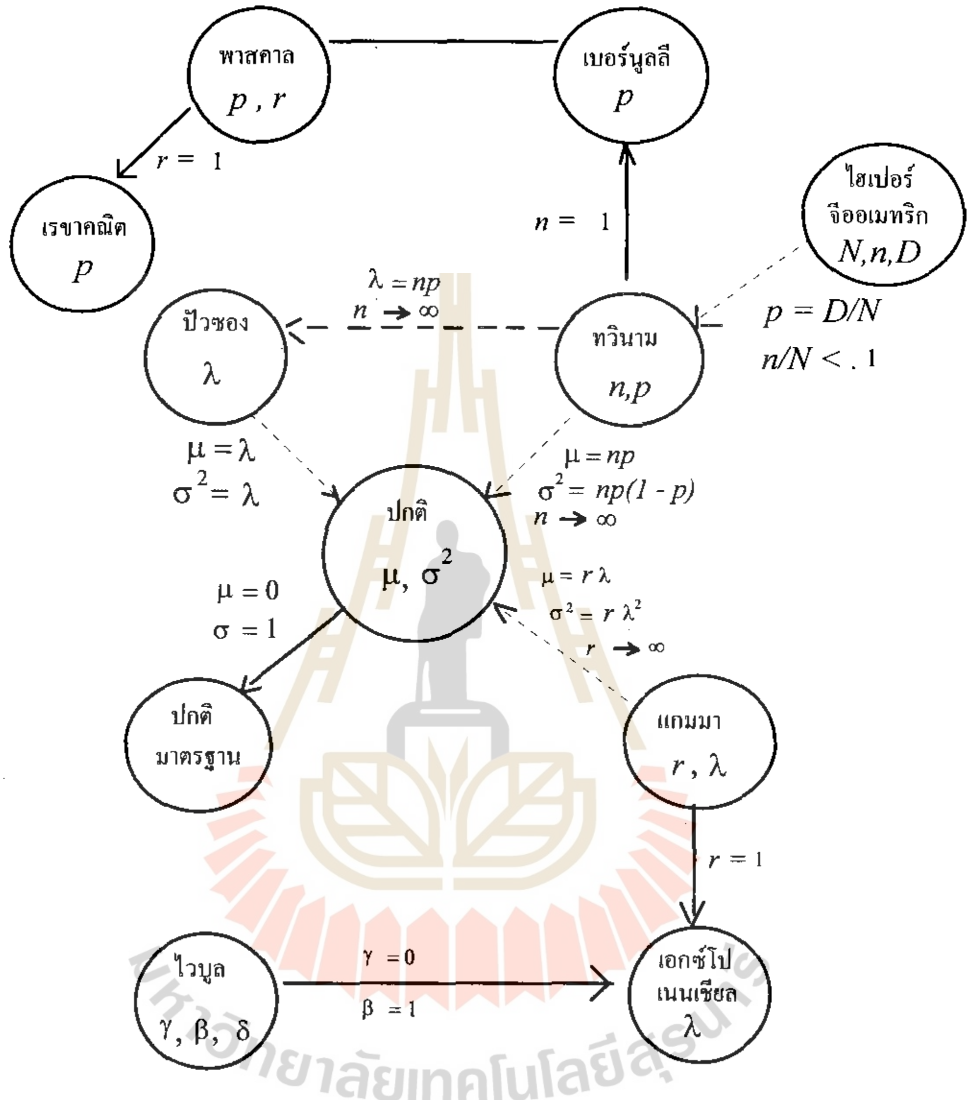
$$P(53.8 \le Y \le 54.2) \text{ เมื่อ } Y = X_1 + X_2 + X_3$$

เราทราบว่า Y มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu_Y = 12 + 24 + 18 = 54$ และความแปรปรวน $\sigma_Y{}^2 = .02 + .03 + .04 = .09$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(53.8 \le Y \le 54.2) &= P\left(\frac{53.8 - 54}{.3} \le Z \le \frac{54.2 - 54}{.3}\right) \\ &= P(-2/3 \le Z \le 2/3) \\ &= \Phi(.67) - \Phi(-.67) = .498 \end{aligned}$$



รูป 5.24



รูป 5.25 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบต่าง ๆ

แบบฝึกหัด 5.2

1. เลือกจุด ๆ หนึ่งโดยสุ่มจากช่วง $[0,4]$ จงหาความน่าจะเป็นที่จุดที่เลือกได้อยู่

   (a) ระหว่าง 1/2 และ 7/4 (b) ระหว่าง 7/4 และ 13/4

2. ราคาของสินค้าชนิดหนึ่งมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[30,39]$ บาท จงหาความน่าจะเป็นที่ราคาสินค้า

   (a) ต่ำกว่า 34 บาท (b) อยู่ระหว่าง 34 และ 37 บาท

3. ตัวแปรสุ่ม X เป็น $U(0,2)$ จงหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม $Y = 5+2X$

4. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และมีสมมาตรเทียบกับศูนย์ด้วยความแปรปรวนเท่ากับ 1 จงหาค่าของ a และ b หรือหาช่วง $[a,b]$ ซึ่งเป็นพิสัยของ X

5. ให้ X เป็น $U(0,1)$ และให้ $Y = a+(b-a)X$

   (a) จงหาฟังก์ชันแจกแจงของ Y (แนะ $P\big((a+(b-a)X) \le y\big)$)

   (b) Y มีการแจกแจงแบบใด

6. p.d.f. ของ X คือ $f(x) = (3/2)x^2$ สำหรับ $-1 < x < 1$

   จงแสดงว่า $Y = \left(X^3+1\right)/2$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ $U(0,1)$

7. โทรทัศน์สีเครื่องใหม่มีประกันเป็นระยะเวลา 1 ปี ด้วยอายุเฉลี่ยการใช้งานเท่ากับ 3 ปี อายุการใช้งานมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล บริษัทตัวแทนจำหน่ายมีกำไรสำหรับการขายโทรทัศน์เครื่องใหม่เป็นเงิน 1,000 บาทต่อเครื่อง แต่ต้องจ่ายค่าอะไหล่และค่าแรงในการซ่อมเป็นเงิน 250 บาทต่อเครื่อง จงหาค่าคาดหมายของกำไรต่อเครื่อง และ จงหาว่ามีสักกี่เปอร์เซนต์ของโทรทัศน์เครื่องใหม่ที่จะมีอายุการใช้งานน้อยกว่า 6 เดือน

8. จงพิจารณาว่า มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลกรณีใด ที่คล้อยตามเงื่อนไข

$$P(X \le 3) = \frac{3}{4} \quad P(X \le 4)$$

   ถ้ามี จงหาค่าของพารามีเตอร์ λ

9. พิจารณากระบวนการผลิต I และ II ราคาผลิตต่อหน่วยคือ C และ $3\,C$ สำหรับ I และ II ตามลำดับ ผลผลิตมีอายุการใช้งานซึ่งมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยอัตราเฉลี่ยของความล้มเหลวในการทำงาน 1/25 ครั้งต่อชั่วโมง และ 1/35 ครั้งต่อชั่วโมง สำหรับผลผลิตจาก I และ II ตามลำดับ ถ้าผลผลิตเกิดเหตุล้มเหลวในการทำงานก่อน 15 ชั่วโมง แล้วค่าใช้จ่ายในการเปลี่ยนและติดตั้งอันใหม่คือ Z บาท **จงพิจารณาว่าเราควรเลือกกระบวนการผลิตชนิดใด**

10. ให้ p.d.f. ของ X เป็น $f(x) = (1/2)\,e^{-x/2}$, $0 \le x < \infty$

(a) จงหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X

(b) จงหาค่าของ $P(X > 3)$

(c) จงหาค่าของ $P\left(X > 5 \middle| X > 2\right)$

11. จงหา p.d.f. ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ X ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X กำหนดโดยสมการต่อไปนี้

(a) $M_X(t) = \dfrac{1}{1-3t}$, $t < \dfrac{1}{3}$ (b) $M_X(t) = \dfrac{3}{3-t}$, $t < 3$

12. จำนวนสัญญาณโทรศัพท์ที่เข้ามายังตู้สลับสายโทรศัพท์ มีการแจกแจงแบบปัวซอง ด้วยค่าเฉลี่ยทุก ๆ 2 ครั้ง ใน 3 นาที ให้ X เป็นเวลารอจนกระทั่งมีสัญญาณโทรศัพท์อันแรกเข้ามาหลัง 10.00 น.

(a) จงหา p.d.f. ของ X

(b) จงหา $P(X > 2)$

13. อายุการใช้งานของทรานซิสเตอร์มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ด้วยค่าเฉลี่ย 20,000 ชั่วโมง ถ้าทรานซินเตอร์ใช้งานมาได้นานถึง 20,000 ชั่วโมง แล้วจงหาความน่าจะเป็นที่ทรานซิสเตอร์จะเกิดเหตุบกพร่องใช้งานไม่ได้เมื่อถึง 30,000 ชั่วโมง

14. ฉากอลูมิเนียม กว้าง 2 เมตร มีรอยตำหนิจำนวน 3 รอยโดยเฉลี่ยใน 1 ม้วน ซึ่งยาว 100 เมตร

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่ในช่วงความยาว 40 เมตร จะไม่มีตำหนิเลย

(b) ใช้สมมติฐานอะไรในการหาความน่าจะเป็นในข้อ (a)

15. จำนวนสัญญาณโทรศัพท์เข้ามายังตู้สลับสายโทรศัพท์ด้วยอัตราเฉลี่ย 2/3 ครั้งต่อนาที มีลักษณะเป็นกระบวนการปัวซองให้ X เป็นเวลารอจนกระทั่งสัญญาณครั้งที่ 10 เข้ามา

(a) จงหา p.d.f. ของ X

(b) จงหาโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชัน ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

16. ถ้า X มีการแจกแจงแบบแกมมาด้วย $\lambda = 1/4$ และ $r = 2$ แล้ว จงหา $P(X < 5)$

17. อายุการใช้งานของระบบอิเล็กทรอนิก คือ $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ ผลบวกของอายุการใช้งานของส่วนประกอบทั้ง 4 ส่วนประกอบทั้ง 4 มีความเป็นอิสระแก่กัน และต่างก็มีอายุการใช้งานแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยอายุเฉลี่ยการใช้งาน 4 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่ระบบอิเล็กทรอนิกจะใช้งานได้อย่างน้อยที่สุด 24 ชั่วโมง

18. เส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาเหล็กกล้ามีการแจกแจงแบบไวบูลด้วย พารามีเตอร์ $\gamma = 1.0$ $\beta = 2$ และ $\delta = .5$ จงหาความน่าจะเป็นที่เพลาเหล็กกล้าที่ถูกเลือกมาโดยสุ่ม จะมีเส้นผ่าศูนย์กลางยาวไม่เกิน 1.5 นิ้ว

19. อายุการใช้งานของระบบคอมพิวเตอร์ขนาดเล็กระบบหนึ่งมีการแจกแจงแบบไวบูล ด้วยพารามีตอร์ $\gamma = 0$ $\beta = 1/4$ และ $\delta = 200$

(a) จงหาว่ากี่เปอร์เซนต์ของระบบจะใช้งานได้นานถึง 1000 ชั่วโมง

(b) จงหาค่าเฉลี่ยของอายุการใช้งาน

20. ถ้า Z เป็น $N(0,1)$ จงหาค่าของ

(a) $P(0.53 < Z \le 2.06)$ (b) $P(-0.79 \le Z < 1.52)$

(c) $P(-2.63 < Z \le -0.51)$ (d) $P(Z > -1.77)$

(e) $P(Z > 2.89)$ (f) $P(|Z| < 1.96)$

(g) $P(|Z| < 1)$ (h) $P(|Z| < 2)$

(i) $P(|Z| < 3)$

21. ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย 6 และความแปรปรวน 25 จงหา

(a) $P(6 \le X \le 12)$ (b) $P(0 \le X \le 8)$

(c) $P(-2 < X \le 0)$ (d) $P(X > 21)$

(e) $P\left(|X-6| < 5\right)$ (f) $P\left(|X-6| < 10\right)$

(g) $P\left(|X-6| < 15\right)$

22. ถ้า Z เป็น $N(0,1)$ จงหาค่าของ c ซึ่ง

(a) $P\left(|Z| \ge c\right) = 0.05$ (b) $P\left(|Z| \le c\right) = 0.90$

(c) $P(Z > c) = 0.05$

23. ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ $M_X(t) = \exp(-6t + 32t^2)$ จงหา

(a) $P(-4 \le X < 16)$ (b) $P(-10 < X \le 0)$

24. ถ้า X เป็น $N(650, 625)$ จงหา

(a) $P(600 \le X < 660)$

(b) จงหาค่าคงที่ $c > 0$ ซึ่งทำให้ $P\left(|X-650| \le c\right) = 0.9544$

25. ถ้าโมเมนต์เจนเนอเรทฟังก์ชันของ X คือ $M_X(t) = \exp(166t + 200t^2)$ จงหา

(a) ค่าเฉลี่ยของ X (b) ความแปรปรวนของ X

(c) $P(170 < X < 200)$ (d) $P(148 \le X \le 172)$

26. ถ้า X เป็น $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ จงแสดงว่า $Y = aX + b$ เป็น $N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$ เมื่อ $a \ne 0$
(แนะ หาฟังก์ชันแจกแจง $P(Y \le y)$ ของ Y และแทนค่า $w = ax + b$ ในอินทิกรัล)

27. ผู้สมัครงานของบริษัทแห่งหนึ่งต้องสอบข้อเขียนด้วยคะแนนผ่าน 500 คะแนน ถ้าคะแนนสอบมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 485 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 30 จงคาดว่ามีผู้สอบผ่านกี่เปอร์เซนต์

28. ถ้า pH ของผลิตภัณฑ์มีค่าสูงกว่า 7.20 หรือต่ำกว่า 6.80 ผู้จัดการโรงงานจะสั่งให้หยุดกระบวนผลิตเพื่อปรับและควบคุมค่าของ pH ค่า pH ของผลิตภัณฑ์มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = 0.10$ จงหาค่าของความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(a) มีการปรับค่า pH เมื่อกระบวนการผลิตดำเนินไปตามที่กำหนดไว้ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 7.0$

(b) มีการปรับค่า pH เมื่อกระบวนการผลิตเบี่ยงเบนออกไปจากที่กำหนดไว้เล็กน้อย ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 7.05$

(c) ไม่สามารถปรับกระบวนการผลิตได้ เพราะว่า กระบวนการผลิตให้ผลิตภัณฑ์ที่มีความเป็นด่างมากเกินไป ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 7.25$

(d) ไม่สามารถปรับกระบวนการผลิตได้ เพราะว่ากระบวนการผลิตให้ผลิตภัณฑ์ที่มีความเป็นกรดมากเกินไป ด้วยค่าเฉลี่ย $\mu = 6.75$

29. ถ้า X เป็น $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ จงเปรียบเทียบ $P\left(|X-\mu| < 3\sigma\right)$ ซึ่งมีค่าประมาณ 0.99 กับการใช้อสมการเชบีเชฟ

30. ผลผลิตทั้งหมดที่ได้จากกระบวนการผลิตมี 8 เปอร์เซนต์ที่มีข้อบกพร่อง กลุ่มตัวอย่างจำนวน 200 หน่วย ถูกเลือกสุ่มมาทุกวัน และนับจำนวนตัวอย่างที่มีข้อบกพร่อง ให้ X แทนจำนวนตัวอย่างที่มีข้อบกพร่อง จงใช้การแจกแจงแบบปกติประมาณการแจกแจงแบบทวินาม และหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

(a) $P(X \le 16)$ (b) $P(X = 15)$

(c) $P(12 \le X \le 20)$ (d) $P(X = 14)$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.2

1. (a) 5/16 (b) 6/16

3. $f_Y(y) = 1/4,\ 5 < y < 9$

5. (a) $f_Y(y) = (y-a)/(b-a),\ a \le y \le b$ (b) $U(a,b)$

7. $P(X \leq 1/2) = 1 - e^{-1/6}$ (X มีหน่วยเป็นปี)

9. $C_I = C, \ x > 15$ $\qquad$ $C_{II} = 3C, \ x > 15$

$\quad = C + Z, \ x \leq 5$ $\qquad$ $= 3C + Z, \ x \leq 15$

$$E[C_I] = Ce^{-3/5} + (C+Z)\left[1 - e^{-3/5}\right] \approx C + (.4512)Z$$

$$E[C_{II}] = 3Ce^{-3/7} + (3C+Z)\left[1 - e^{-3/7}\right] \approx 3C + (.3486)Z$$

เลือกกระบวนการผลิต I ถ้า $C > (0.0513)\,Z$

11. (a) $(1/3)\,e^{-x/3}, \ 0 \leq x < \infty$ $\qquad$ (b) $3\,e^{-3x}, \ 0 \leq x < \infty$

12. (a) $(2/3)\,e^{-2x/3}, \ 0 \leq x < \infty$ $\qquad$ (b) $e^{-4/3}, \ 0 \leq x < \infty$

14. (a) $e^{-1.2}$

15. (a) $\dfrac{(2/3)^{10} x^9}{\Gamma(10)} e^{-2x/3}, \ 0 \leq x$ $\qquad$ (b) $(1 - 3t/2)^{-10}, \ t < 2/3; \ 15; \ 45/2$

16. $1 - (9/4)\,e^{-5/4}$

18. $1 - e^{-1} \approx 0.63$

19. (a) ≈ 0.22 $\qquad$ (b) 4800

20. (a) 0.2784 $\qquad$ (b) 0.7209 $\qquad$ (c) 0.3007

(d) 0.9616 $\qquad$ (e) 0.0019 $\qquad$ (f) 0.95

(g) 0.6826 $\qquad$ (h) 0.9544 $\qquad$ (i) 0.9974

22. (a) 1.96 $\qquad$ (b) 1.645 $\qquad$ (c) 1.645

24. (a) 0.6326 $\qquad$ (b) 50

25. (a) 166 $\qquad$ (b) 400 $\qquad$ (c) 0.3761 $\qquad$ (d) 0.4338

27. 30.85%

28. (a) 0.0455 $\qquad$ (b) 0.0730 $\qquad$ (c) 0.30854 $\qquad$ (d) 0.30854

30. (a) 0.552 $\qquad$ (b) 0.058 $\qquad$ (c) 0.702 $\qquad$ (d) 0.09

ตาราง **1.** Cumulative binomial distribution

$$P(X \le t) = \sum_{x}^{[t]} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

n	t	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
5	0	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0312	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.7361	0.3758	0.2440	0.1493	0.0464	0.0107	0.0017	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9298	0.6778	0.5256	0.3828	0.1673	0.0547	0.0123	0.0016	0.0001	0.0000
	3	0.9872	0.8791	0.7759	0.6496	0.3823	0.1719	0.0548	0.0106	0.0009	0.0000
	4	0.9984	0.9672	0.9219	0.8497	0.6331	0.3770	0.1662	0.0474	0.0064	0.0002
	5	0.9999	0.9936	0.9803	0.9527	0.8338	0.6230	0.3669	0.1503	0.0328	0.0016
	6	1.0000	0.9991	0.9965	0.9894	0.9452	0.8281	0.6177	0.3504	0.1209	0.0128
	7	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9877	0.9453	0.8327	0.6172	0.3222	0.0702
	8	1.0900	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9893	0.9536	0.8507	0.6242	0.2639
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9940	0.9718	0.8926	0.6513
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
15	0	0.2059	0.0352	0.0134	0.0047	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.5490	0.1671	0.0802	0.0353	0.0052	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8159	0.3980	0.2361	0.1268	0.0271	0.0037	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9444	0.6482	0.4613	0.2969	0.0905	0.0176	0.0019	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.9873	0.8358	0.6865	0.5155	0.2173	0.0592	0.0094	0.0007	0.0000	0.0000
	5	0.9978	0.9389	0.8516	0.7216	0.4032	0.1509	0.0338	0.0037	0.0001	0.0000
	6	0.9997	0.9819	0.9434	0.8689	0.6098	0.3036	0.0951	0.0152	0.0008	0.0000
	7	1.0000	0.9958	0.9827	0.9500	0.7869	0.5000	0.2131	0.0500	0.0042	0.0000
	8	1.0000	0.9992	0.9958	0.9848	0.9050	0.6964	0.3902	0.1311	0.0181	0.0003
	9	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9662	0.8491	0.5968	0.2784	0.0611	0.0023
	10	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9907	0.9408	0.7827	0.4845	0.1642	0.0127
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9824	0.9095	0.7031	0.3518	0.0556
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9963	0.9729	0.8732	0.6020	0.1841
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9948	0.9647	0.8329	0.4510
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9953	0.9648	0.7941
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.1216	0.0115	0.0032	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3917	0.0692	0.0243	0.0076	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6769	0.2061	0.0913	0.0355	0.0036	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.8670	0.4114	0.2252	0.1071	0.0160	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9568	0.6296	0.4148	0.2375	0.0510	0.0059	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.9887	0.8042	0.6172	0.4164	0.1256	0.0207	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.9976	0.9133	0.7858	0.6080	0.2500	0.0577	0.0065	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.9996	0.9679	0.8982	0.7723	0.4159	0.1316	0.0210	0.0013	0.0000	0.0000
	8	0.9999	0.9900	0.9591	0.8867	0.5956	0.2517	0.0565	0.0051	0.0001	0.0000
	9	1.0000	0.9974	0.9861	0.9520	0.7553	0.4119	0.1275	0.0171	0.0006	0.0000
	10	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.8725	0.5881	0.2447	0.0480	0.0026	0.0000
	11	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9435	0.7483	0.4044	0.1133	0.0100	0.0001
	12	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9790	0.8684	0.5841	0.2277	0.0321	0.0004
	13	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9935	0.9423	0.7500	0.3920	0.0867	0.0024
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9984	0.9793	0.8744	0.5836	0.1958	0.0113
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9941	0.9490	0.7625	0.3704	0.0432
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9987	0.9840	0.8929	0.5886	0.1330
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9964	0.9645	0.7939	0.3231
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9924	0.9308	0.6083
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9885	0.8784
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

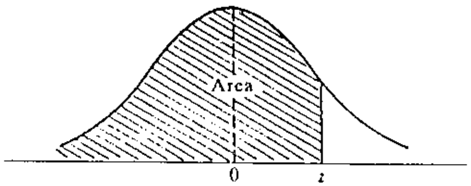
ตาราง 2. Cumulative Poisson distribution

$$F(t) = P(X \le t) = \sum_{x \le t} e^{-\lambda s} (\lambda s)^x / x!$$

[t]	.50	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
	λs									
0	.607	.368	.135	.050	.018	.007	.002	.001	.000	.000
1	.910	.736	.406	.199	.092	.040	.017	.007	.003	.001
2	.986	.920	.677	.423	.238	.125	.062	.030	.014	.006
3	.998	.981	.857	.647	.433	.265	.151	.082	.042	.021
4	1.000	.996	.947	.815	.629	.440	.285	.173	.100	.055
5	1.000	.999	.983	.916	.785	.616	.446	.301	.191	.116
6	1.000	1.000	.995	.966	.889	.762	.606	.450	.313	.207
7	1.000	1.000	.999	.988	.949	.867	.744	.599	.453	.324
8	1.000	1.000	1.000	.996	.979	.932	.847	.729	.593	.456
9	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.968	.916	.830	.717	.587
10	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.957	.901	.816	.706
11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.980	.947	.888	.803
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.991	.973	.936	.876
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.987	.966	.926
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.983	.959
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.992	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

[t]	10.0	11.0	12.0	13.0	14.0	15.0
	λs					
2	.003	.001	.001	.000	.000	.000
3	.010	.005	.002	.001	.000	.000
4	.029	.015	.008	.004	.002	.001
5	.067	.038	.020	.011	.006	.003
6	.130	.079	.046	.026	.014	.008
7	.220	.143	.090	.054	.032	.018
8	.333	.232	.155	.100	.062	.037
9	.458	.341	.242	.166	.109	.070
10	.583	.460	.347	.252	.176	.118
11	.697	.579	.462	.353	.260	.185
12	.792	.689	.576	.463	.358	.268
13	.864	.781	.682	.573	.464	.363
14	.917	.854	.772	.675	.570	.466
15	.951	.907	.844	.764	.669	.568
16	.973	.944	.899	.835	.756	.664
17	.986	.968	.937	.890	.827	.749
18	.993	.982	.963	.930	.883	.819
19	.997	.991	.979	.957	.923	.875
20	.998	.995	.988	.975	.952	.917
21	.999	.998	.994	.986	.971	.947
22	1.000	.999	.997	.992	.983	.967
23	1.000	1.000	.999	.996	.991	.981
24	1.000	1.000	.999	.998	.995	.989
25	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.994
26	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997
27	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ตาราง 3. Cumulative standard normal distribution $\Phi(z) = P(Z \le z)$



$\Phi(z) = P(Z \le z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

บรรณานุกรม

1. Hines, William W., Montgomery, Douglas C., "*Probability and Statistics in Engineering and Management Science.*", 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1990.

2. Hogg, Robert V., Ledolter, Johannes, "*Applied Statistics for Engineers and Physical Scientists*", 2nd ed., Maxwell Macmillan International, New York, 1992.

3. Hogg, Robert V., Tanis, Elliot A., "*Probability and Statiscal Inference*", 2nd ed., Macmillan Publishing Co., Inc., New York, 1983.

4. Milton, J.S., Arnold, Jesse C., "*Introduction to Probablity and Statistics Principles and Applications for Engineering and the Computing Sciences*", 3rd ed., McGraw-Hill, Inc., 1995.

5. Papoulis, Athanasios, "*Probability & Statistics*", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.