รหัสโครงการ SUT1-103-42-12-13

รายงานการวิจัย

การใช้บีสปลายในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

Use of B-splines in Numerical Solution of PDEs

ได้รับเงินอุดหนุนการวิจัยจาก
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

รหัสโครงการ SUT-103-42-12-13

รายงานการวิจัย

การใช้บีสปลายในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

Use of B-splines in Numerical Solution of PDEs

คณะผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

รองศาสตราจารย์ ดร. ไพโรจน์ สัตยธรรม

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ได้รับเงินอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ พ.ศ. 2542

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว

กันยายน 2542

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ หัวหน้าสถานวิจัย สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ และผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ซึ่งได้ให้การสนับสนุนเงินทุนและสถานที่สำหรับการทำวิจัย และในท้ายที่สุด ผู้วิจัยขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ของสถาบันวิจัยและพัฒนาทุกท่าน ผู้ซึ่งให้ความช่วยเหลือเป็นอย่างดีในด้านการใช้เครื่องมือเพื่อการวิจัย

บทคัดย่อภาษาไทย

ในรายงานการวิจัยฉบับนี้ได้พิสูจน์ว่า อนุพันธ์อันดับที่สองที่จุด x_i ของสปลายอันดับที่สาม และผลต่างขั้นที่สองของฟังก์ชัน $u(x_i)$ ให้การประมาณค่า $u''(x_i)$ ในทิศทางตรงกันข้าม เมื่อมีการแบ่งช่วงออกเป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน โดยการใช้ผลลัพธ์นี้ เราได้ทำการพิสูจน์เพิ่มเติมว่า ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าทั้งสองข้างต้นสามารถประมาณค่าของ $u''(x_i)$ ได้ดีกว่าตัวประมาณค่าทั้งสองข้างต้น และมีการยกตัวอย่างประกอบด้วย

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ

For the uniform partition, we prove that the second derivative at the point x_i of the cubic spline (denoted by M_i) and the second central finite difference of the function $u(x_i)$ (denoted by $\delta^2 u(x_i)/h^2$) approximate $u''(x_i)$ on the opposite side. By using this property, we introduce the number C_i to be the average of M_i and $\delta^2 u(x_i)/h^2$ and we can conclude that C_i gives a better approximation to $u''(x_i)$. Finally, we use C_i in the numerical solution of second order PDEs. Numerical examples are given.

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย

เทคนิคของการใช้ cubic spline เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น ได้เริ่มมีการค้นคว้าอย่างจริงจังเมื่อไม่นานนี้เอง เหตุผลที่มีคนสนใจที่จะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีการนี้ก็เพราะว่า วิธีการดังกล่าวมีความได้เปรียบกว่าวิธีการ finite element ตรงที่ว่าระบบเมตริกซ์ที่เกิดจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดให้นั้นจะอยู่ในรูป tridiagonal เสมอ ซึ่งทำให้เราสามารถหา inverse เมตริกซ์ได้ง่าย จึงทำให้ประหยัดเวลาในการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ และผลที่ตามมาก็คือ ผลเฉลยโดยประมาณจะลู่เข้าสู่ผลเฉลยแม่นตรงได้รวดเร็วกว่าวิธี finite element มีผู้ศึกษาปัญหาดังกล่าวนี้บ้างเหมือนกัน เช่น Caldwell [1] แต่เขาได้ใช้ cubic spline เพียงอย่างเดียว ในงานวิจัยฉบับนี้ได้ใช้ทั้ง cubic spline และ second central finite difference ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยชิ้นนี้ก็คือ ต้องการสร้างขั้นตอนวิธี (algorithm) เพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองโดยใช้ cubic spline และ second central finite difference เป็นตัวประมาณค่า ต่อจากนั้นก็จะใช้ขั้นตอนวิธีที่หามาได้ทดลองใช้หาผลเฉลยของสมการพาราโบลิก

$$u_t = \frac{u_x}{2\pi} + \frac{u_{xx}}{4\pi^2(1+t)} \quad , \quad 0 \le x \le 1 \ , \ t \ge 0$$

แล้วเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับวิธีการดั้งเดิมที่มีอยู่แล้วคือ วิธี spline และวิธี finite difference เพื่อสังเกตความรวดเร็วของการลู่เข้าของผลเฉลย

ขอบเขตของการวิจัย

ในงานวิจัยชิ้นนี้กำหนดขอบเขตไว้ว่า จะเปรียบเทียบความเร็วในการลู่เข้าของผลเฉลยของวิธีการที่เสนอในงานวิจัยกับวิธี spline และวิธี finite difference เท่านั้น

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

ผลของการวิจัยทำให้เรามีขั้นตอนวิธีใหม่ ๆ ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่รวดเร็วขึ้นกว่าเดิม ซึ่งช่วยประหยัดเวลาในการทำงาน และสามารถนำเข้าไปผนวกในโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อช่วยในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์ได้

บทที่ 2
เนื้อเรื่อง

วิธีดำเนินการวิจัย

สำหรับวิธีดำเนินการวิจัย เริ่มต้นจากการรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยด้วยวิธีการใช้ spline ต่อจากนั้นก็ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาและสร้างขั้นตอนวิธีขึ้นมา เมื่อสร้างขั้นตอนวิธีสำเร็จแล้วก็ได้นำไปทดลองใช้หาผลเฉลยของสมการเชิง-อนุพันธ์ย่อย โดยได้ทำการเปรียบเทียบกับวิธีการดั้งเดิมที่มีอยู่แล้วด้วย

ผลของการวิจัย

ได้สร้างขั้นตอนวิธีสำหรับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยใช้ spline และ second central finite difference สำเร็จลงโดยขั้นตอนวิธีที่สร้างขึ้นมาคือ

$$u_i^{n+1} = P_i + Q_i\, m_i^{n+1} + R_i\left(M_i^{n+1} + \frac{\delta^2 u_i^{n+1}}{h^2}\right)$$

ด้วยขั้นตอนวิธีใหม่นี้ ได้ทำการคำนวณเปรียบเทียบกับวิธีการดั้งเดิมคือ วิธีการ spline และวิธี finite difference พบว่าวิธีการใหม่ให้ผลการลู่เข้าของผลเฉลยได้รวดเร็วกว่าวิธีการดั้งเดิมทั้งสอง ดูรายละเอียดที่หน้า 9, 10, 11 ของภาคผนวก

บทที่ 3
ข้อวิจารณ์

ขั้นตอนวิธีใหม่ที่ได้สร้างขึ้นมานี้ ใช้ได้ผลดีกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เป็นเชิงเส้น แต่สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้วขั้นตอนวิธีใหม่นี้ยังให้ผลลัพธ์ที่ไม่น่าพอใจ ซึ่งยังคงต้องการปรับปรุงอีกต่อไป

บทที่ 4
สรุปและข้อเสนอแนะ

กล่าวโดยสรุปแล้วงานวิจัยฉบับนี้ได้เสนอขั้นตอนวิธีใหม่สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีความรวดเร็วกว่าวิธีการซึ่งมีอยู่แล้ว ส่วนข้อเสนอแนะนั้นยังไม่มีในขณะนี้

บรรณานุกรม

[1] Caldwell, J., (1996). Use of Cubic Spline in the Numerical Solution of a Model Nonlinear PDE. SEA Bull. Math. Vol 20. No. 3. P 39-46.

[2] Günther Nürnberger, (1989). Approximation by Spline Functions. Springer Verlag : Berlin.

[3] Rubin, S.G. and R.A. Graves, (1975). Cubic Spline Approximation for Problem in Fluid Mechanics. NASA TR R-436. Washington D.C.

[4] Wong P. and R. Kahawita, (1983). Numerical Integration of Partial Differential Equations using Cubic Spline. Int. J. Computer Math. P. 27.

ภาคผนวก

Use of Cubic Splines and the Second Central Finite Difference in Numerical Solution of PDEs.

งานวิจัยฉบับนี้ได้รับอนุมัติให้ตีพิมพ์ในวารสาร
Journal of Interdisciplinary Mathematics เรียบร้อยแล้ว
ขณะนี้อยู่ระหว่างดำเนินการจัดพิมพ์

Use of cubic splines and the second central finite differences in numerical solution of PDEs*

P. Sattayatham

School of Mathematics
Suranaree University of Technology
Nakhon Ratchasima, 30000
Thailand

Abstract

For the uniform partition, we prove that the second derivative at the point x_i of the cubic spline(denoted by M_i) and the second central finite difference of the function $u(x_i)$ $\left(\text{denoted by } \delta^2 u(x_i)/h^2\right)$ approximate $u''(x_i)$ on the opposite side. By using this property, we introduce the number C_i to be the average of M_i and $\delta^2 u(x_i)/h^2$ and we can conclude that C_i gives a better approximation to $u''(x_i)$. Finally, we use C_i in the numerical solution of second order PDEs. Numerical examples are given.

1 Introduction

For the cubic spline $S_p(x)$ of a function $u(x)$, we denoted the first derivative of $S_p(x)$ at the point x_i by m_i and the second derivative by M_i. If the mesh is uniform and $u(x)$ is smooth enough, it can be shown that the cubic spline approximation is the fourth-order accurate for m_i and the second-order accurate for M_i.(See [1])

We also use the second central finite difference $\dfrac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$ of $u(x)$ at the point x_i to approximate $u''(x_i)$. The accuracy of this approximation is $O\left(h^2\right)$. In summary, M_i and $\dfrac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$ are second-order accurate for $u''(x_i)$.

In this paper, we let

$$C_i = \left(\frac{\delta^2 u(x_i)}{h^2} + M_i\right)/2,$$

and we shall prove that C_i gives a better approximation to $u''(x_i)$ than M_i or $\dfrac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$. More precisely, we can show that C_i is the third-order accurate for $u''(x_i)$. Furthermore, we shall use this new estimator C_i in the numerical solution of PDEs.

*Research supported by Suranaree University of Technology, Thailand.

The governing matrices obtained are tridiagonal or pentadiagonal which can be solved by the sweep method (see [3]). It is easy to do and in a low cost.

Finally, we will give a numerical example which verified that our numerical method is more effective than only use of cubic spline method or second central difference method.

2 Cubic spline functions and the property of M_i and $\frac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$ approximate $u''(x_i)$on the opposite sides

Let the uniform partition of interval $[a,b]$ be Δ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$

and denote $h = x_i - x_{i-1} > 0, i = 1,2,\cdots,k$. Let $u(x)$ be a function which is defined and has second order continuous derivative on $[a,b]$. We denote the value $u(x_i)$ by u_i. Let $S_p(x)$ be the cubic spline of function $u(x)$ on the grid Δ. Denote $M_i = S_p''(x_i)$ and $m_i = S_p'(x_i)$. We have

$$\begin{aligned} S_p(x) = {} & M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + (u_{i-1} - \frac{M_{i-1}h^2}{6})\frac{(x_i - x)}{h} \\ & + \left(u_i - \frac{M_i h^2}{6}\right)\frac{(x - x_{i-1})}{h}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

The Theorem 3.18, 3.24. 3.30 in [4] proved the existence and uniqueness for the Complete splines, Periodic splines and Natural splines. Using equation (1) and the continuity relations of the function $S_p(x)$ at the node points $x_i, i = 1,\cdots,k-1$, we get the following cubic spline relations.[see [4], lemma 3.33]

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{h^2}, \tag{2}$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(u_{i+1} - u_{i-1})}{h}, \tag{3}$$

$$m_i = \frac{h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \tag{4}$$

$$m_i = -\frac{h}{3}M_i - \frac{h}{6}M_{i+1} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \tag{5}$$

$$M_i = \frac{2}{h}m_{i-1} + \frac{4}{h}m_i - 6\frac{u_i - u_{i-1}}{h^2}, \tag{6}$$

$$M_i = -\frac{4}{h}m_i - \frac{2}{h}m_{i+1} + 6\frac{u_{i+1} - u_i}{h^2}. \tag{7}$$

We shall consider three cases of boundary conditions. In the first case, if $S_p(x)$ is a complete spline, i.e., $S_p'(x_0) = u'(x_0)$ and $S_p'(x_k) = u'(x_k)$ are known, then one can obtain the following boundary conditions by evaluating the first derivative of $S_p(x)$ from equation (1) at point $x = x_0$ and $x = x_k$.

$$\begin{aligned} 4M_0 + 2M_1 &= \frac{12}{h}\left(\frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - u'(x_0)\right) \\ 2M_{k-1} + 4M_k &= \frac{12}{h}\left(u'(x_k) - \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{h}\right). \end{aligned}$$

In the second case, if $S_p(x)$ is a natural spline, i.e., $S_p''(x_0) = S_p''(x_k) = 0$, the boundary conditions are:

$$\begin{aligned} M_0 &= S_p''(x_0) = 0 \\ M_k &= S_p''(x_k) = 0. \end{aligned}$$

In the third case, if $S_p(x)$ is a periodic spline, i.e., $S_p^{(j)}(x_0) = S_p^{(j)}(x_k)$, $j = 0, 1, 2$, then $S_p(x)$ can be extended to $(-\infty, +\infty)$ with periodic $b - a$. Therefore, by setting $x_{k+1} = x_1 + (b - a)$, equation (2) also holds for $i = k$. Since $S_p''(x_k) = S_p''(x_0)$ and $S_p''(x_{k+1}) = S_p''(x_1)$, the boundary conditions are

$$\begin{aligned} M_k &= M_0 \\ M_1 + M_{k-1} + 4M_k &= \frac{12(u_1 - u_0 + u_{k-1} - u_k)}{h}. \end{aligned}$$

Lemma 1 *Consider the tridiagonal system of equations:*

$$b_i M_{i-1} + a_i M_i + c_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k$$

Suppose $b_0 = c_k = 0$, $b_i \geq 0$, $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ *and there is a constant* K, *such that*

$$a_i - b_i - c_i \geq K^{-1} > 0, \quad \textit{for} \;\; i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

Then

$$\max_{0 \leq i \leq k} |M_i| \leq K \max_{0 \leq i \leq k} |d_i|. \tag{8}$$

Proof. Since

$$b_i \geq 0, \;\; c_i \geq 0, \;\; a_i - b_i - c_i > 0$$

We get $a_i > 0$, $i = 1, \cdots, k$. Let $i_0 \in \{0, 1, 2, \cdots, k\}$ be an integer such that

$$|M_{i_0}| = \max_{0 \leq i \leq k} |M_i|,$$

then

$$
\begin{aligned}
K^{-1}|M_{i_0}| &\le (a_{i_0} - b_{i_0} - c_{i_0})|M_{i_0}| \\
&\le a_{i_0}|M_{i_0}| - b_{i_0}|M_{i_0-1}| - c_{i_0}|M_{i_0+1}| \\
&= |a_{i_0}M_{i_0}| - |b_{i_0}M_{i_0-1}| - |c_{i_0}M_{i_0+1}| \\
&\le |a_{i_0}M_{i_0} - b_{i_0}M_{i_0-1} + c_{i_0}M_{i_0-1}| \\
&= |d_{i_0}| \le \max_{0\le i\le k}|d_i|.
\end{aligned}
$$

Therefore

$$\max_{0\le i\le k}|M_i| \le K\max_{0\le i\le k}|d_i|. \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 *Let $u(x) \in C^5[a,b]$ and $S_p(x)$ be a cubic complete spline of $u(x)$. Then*

$$M_i = u''(x_i) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) - O(h^3) \tag{9}$$

where $M_i = S_p(x_i)$. $(i = 0, 1, \cdots, k.)$

Proof. Setting

$$y_i = M_i - u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, k$$

then by (2) and boundary conditions of the complete spline of $u(x)$, one can get

$$
\begin{cases}
4y_0 + 2y_1 = d_0 \\
y_{i-1} + 4y_i + y_{i-1} = d_i, \qquad i = 1, \cdots, k-1 \\
2y_{k-1} + 4y_k = d_k
\end{cases}
$$

where

$$d_0 = \frac{12}{h}\left(\frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} - u'(x_0)\right) - (4u''(x_0) + 2u''(x_1)) + \frac{h^2}{12}(4u^{(4)}(x_0) + 2u^{(4)}(x_1))$$

$$d_i = \frac{6\delta^2 u(x_i)}{h^2} - (u''(x_{i-1}) - 4u''(x_i) + u''(x_{i-1})) + \frac{h^2}{12}\left(u^{(4)}(x_{i-1}) + 4u^{(4)}(x_i) + u^{(4)}(x_{i-1})\right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

$$d_k = \frac{12}{h}\left(u'(x_k) - \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{h}\right) - (2u''(x_{k-1}) + 4u''(x_k)) - \frac{h^2}{12}\left(4u^{(4)}(x_{k-1}) + 2u^{(4)}(x_k)\right).$$

Apply Taylor Theorem to the function $u(x)$, $u''(x)$, $u^{(4)}(x)$ around the point x_i, $i = 0, 1, \cdots, k$, we obtain

$$d_0 = O\left(h^3\right), \quad d_k = O\left(h^3\right), \quad d_i = O\left(h^4\right), \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

We take $K = 1/2$, then the assumptions of lemma satisfy. So

$$|y_i| \le \max_{0\le j\le k} |y_j| \le 1/2 \max_{0\le j\le k} |d_j|, \quad i = 0, 1, \cdots, k.$$

We obtain

$$M_i = u''(x_i) - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + O\left(h^3\right). \qquad \blacksquare$$

By using (9) and the following relation

$$\frac{\delta^2 u(x_i)}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i) + O\left(h^4\right),$$

we can conclude that $\dfrac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$ and M_i approximate $u''(x_i)$ on the opposite side. If we use the average of M_i and $\dfrac{\delta^2 u(x_i)}{h^2}$:

$$C_i = \frac{M_i + \delta^2 u(x_i)/h^2}{2} \tag{10}$$

to approximate $u''(x_i)$, then the accuracy is the third-order. This is more accurate than M_i and $\delta^2 u(x_i)/h^2$.

Remark 1 *Similarly, for periodic spline and natural spline , we can prove that C_i is the fourth order accurate for $u''(x_i)$.*

3 Application to solution of PDEs

For the general second order parabolic equations:

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}) \tag{11}$$

We have

$$(u_t)_i = f\left(u_i, m_i, \left(M_i + \delta^2 u_i/h^2\right)/2\right) \tag{12}$$

where u_i is an approximate solution, $m_i = S_p'(x_i)$, $M_i = S_p''(x_i)$, $\dfrac{\delta^2 u_i}{h^2} = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$.

Let a time grid sizes be Δt and space grid sizes be h. We get the standard finite difference equations:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = (1-\theta) f_i^n + \theta f_i^{n+1} \tag{13}$$

$\theta = 0$ gives an explicit scheme, $\theta = 1$ gives a full implicit scheme and $\theta = 0.5$ gives the Crank-Nichoson scheme.

Equation (13) can be rewritten in the form

$$u_i^{n+1} = P_i + Q_i m_i^{n+1} + R_i \left(M_i^{n+1} + \frac{\delta^2 u_i^{n+1}}{h^2} \right) \tag{14}$$

By (2) , (4) and (5) , we can reduce (14) to the following equations:

$$E_i u_{i-2}^{n+1} + D_i u_{i-1}^{n+1} + A_i u_i^{n+1} + B_i u_{i+1}^{n+1} + C_i u_{i+2}^{n+1} = G_i, \qquad i = 2, 3, \cdots, k-2 \tag{15}$$

with explicit expressions for the coefficients A_i, B_i, C_i, D_i, E_i and G_i.

This is the pentagonal matrix , we solve u_i^{n+1}, $i = 0, 1, \cdots, k$ using sweep method $(See[3], P207)$. Substitute u_i^{n+1}, $i = 0, 1, 2, \cdots, k$ into (2) , (3) and its boundary conditions, we can get M_i^{n+1}, m_i^{n+1} by solving two tridiagonal matrices using sweep method.

4 Numerical example

Example 3 *Consider the parabolic equation*

$$u_t = \frac{u_x}{2\pi} + \frac{u_{xx}}{4\pi^2(1+t)}, \qquad 0 \le x \le 1, \ \ t \ge 0 \tag{16.a}$$

with initial and boundary values

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{16.b}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = \sin t / (1+t), \quad t \ge 0. \tag{16.c}$$

The exact solution of this problem is

$$u(x, t) = \sin(2\pi x + t) / (1+t).$$

Discretise the time derivative term in the usual finite difference fashion, we get

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = (1-\theta) \left(\frac{m_i^n}{2\pi} + \frac{1}{8\pi^2(1+t_n)} (M_i^n + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}) \right)$$
$$+ \theta (\frac{m_i^{n+1}}{2\pi} + \frac{1}{8\pi^2(1+t_{n+1})} (M_i^{n+1} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}))$$

Then

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (1-\theta)\,\Delta t\left(\frac{m_i^n}{2\pi} + \frac{1}{8\pi^2(1+n\Delta t)}(M_i^n + \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2})\right)$$
$$+\theta\Delta t(\frac{m_i^{n+1}}{2\pi} + \frac{1}{8\pi^2(1+(n+1)\,\Delta t)}(M_i^{n+1} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}))$$

Compare the last equation with equation (15), then P_i, Q_i and R_i are determined

$$P_i = u_i^n + (1-\theta)\,\Delta t\left(\frac{m_i^n}{2\pi} + \frac{1}{8\pi^2(1+n\Delta t)}(M_i^n + \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2})\right),$$
$$Q_i = \frac{\theta\Delta t}{2\pi},$$
$$R_i = \frac{\theta\Delta t}{(1+(n+1)\,\Delta t)8\pi^2}.$$

Since the solution is a periodic function in the variable x on $[0,1]$, then we can extend $u(x)$ to $(-\infty,+\infty)$, i.e., the system of equations of (16) can be extended to $i = 1,2,\cdots,k$ by setting $u_{-2} = u_{k-2}$, $u_{-1} = u_{k-1}$, $u_{k+1} = u_1$, $u_{k+2} = u_2$ and using the boundary condition $u_0^n = u_k^n = \sin(n\Delta t)/(1+n\Delta t)$. The system of equations will be solved. We use periodic spline while we compute M_i and m_i. The computed results are compared with exact soluations as in the Table 1.

The computed results which is obtained by using our method, the spline method, and the finite difference method are compared in Table2 and Table 3.

Table 1 Comparison of approximate solutions with exact solutions of equation (16) when $h = 0.25$, $h = 0.125$

t	x	Approximate solution ($h = 0.25$)	Approximate solution ($h = 0.125$)	Exact solution
0.05	0.00	0.04760	0.04760	0.04760
	0.25	0.94978	0.95092	0.95119
	0.50	-0.04557	-0.04795	-0.04760
	0.75	-0.95105	-0.95101	-0.95119
	1.00	0.04760	0.04760	0.04760
0.10	0.00	0.09076	0.09076	0.09076
	0.25	0.90206	0.90404	0.90454
	0.50	-0.08683	-0.09137	-0.09076
	0.75	-0.90443	-0.90404	-0.90454
	1.00	0.09076	0.09076	0.09076
0.15	0.00	0.12995	0.12995	0.12995
	0.25	0.85652	0.85908	0.85980
	0.50	-0.12425	-0.13077	-0.12995
	0.75	-0.85990	-0.85904	-0.85980
	1.00	0.12995	0.12995	0.12995
0.20	0.00	0.16556	0.16556	0.16556
	0.25	0.81290	0.81582	0.81672
	0.50	-0.15823	-0.16655	-0.16558
	0.75	-0.81719	-0.81579	-0.81679
	1.00	0.16556	0.16556	0.16556
0.25	0.00	0.19792	0.19792	0.19792
	0.25	0.77100	0.77406	0.77513
	0.50	-0.18910	-0.19903	-0.19792
	0.75	-0.77610	-0.77406	-0.77512
	1.00	0.19792	0.19792	0.19792

Table 2 Comparison of absolute error of the solution of equation (16) among the three methods

$(h = 0.25,\ \Delta t = 0.05)$

n	x	Present method	Spline method	Finite difference method
1	0.25	2.4951E-03	1.2627E-02	7.6369E-03
	0.50	1.7465E-04	1.7466E-04	1.7465E-04
	0.75	1.2074E-03	1.2340E-03	8.9247E-03
2	0.25	4.5886E-03	2.3486E-02	1.4504E-02
	0.50	6.0088E-04	1.6246E-03	4.2289E-04
	0.75	1.9758E-03	2.0491E-03	1.6735E-03
3	0.25	6.3263E-03	3.2750E-02	2.0671E-02
	0.50	1.1934E-03	3.9881E-03	1.6661E-03
	0.75	2.3955E-03	2.7871E-02	2.3573E-02
4	0.25	7.7488E-03	4.0580E-02	7.6369E-02
	0.50	1.8891E-03	6.9993E-03	1.7465E-03
	0.75	2.5362E-03	3.3801E-02	8.9247E-03
5	0.25	8.8923E-03	4.7126E-02	3.1126E-02
	0.50	2.6407E-03	1.0460E-02	5.6873E-03
	0.75	2.4529E-03	3.8528E-02	7.1950E-02

Table 3 Comparison of absolute error of the solution of equation (16) among the three methods
($h = 0.125,\ \Delta t = 0.05$)

n	x	Present method	Spline method	Finite difference method
1	0.125	3.50730E-06	1.79472E-03	1.80725E-03
	0.250	2.73174E-04	2.68540E-03	2.14244E-03
	0.375	4.47084E-04	2.08827E-03	1.19818E-03
	0.500	3.46293E-04	2.48730E-04	4.44426E-04
	0.625	4.86487E-05	1.72927E-03	1.82950E-03
	0.750	2.92247E-04	2.71366E-03	2.13556E-03
	0.875	3.87934E-04	2.01056E-03	1.23619E-03
2	0.125	4.21575E-05	3.56637E-03	3.51569E-03
	0.250	5.10294E-04	4.98226E-03	3.96793E-03
	0.375	8.13541E-04	3.69675E-03	2.08835E-03
	0.500	6.17004E-04	2.10361E-04	1.02796E-03
	0.625	6.76292E-05	3.39430E-03	3.54073E-03
	0.750	5.44711E-04	5.03303E-03	3.97541E-03
	0.875	6.48742E-04	3.48937E-03	2.18784E-03
3	0.125	1.19321E-04	5.26965E-03	5.12125E-03
	0.250	7.18670E-04	6.94655E-03	5.51081E-03
	0.375	1.11429E-03	4.90019E-03	2.71284E-03
	0.500	8.26952E-04	5.68687E-05	1.72211E-03
	0.625	6.31682E-05	4.98562E-03	5.13786E-03
	0.750	7.55763E-04	6.99080E-03	5.55194E-03
	0.875	8.19801E-04	4.57332E-03	2.90969E-03
4	0.125	2.16301E-04	6.88037E-03	6.62257E-03
	0.250	9.03240E-04	8.61843E-03	6.79992E-03
	0.375	1.36128E-03	5.76131E-03	3.10741E-03
	0.500	9.87441E-04	5.06790E-04	2.50321E-03
	0.625	4.16011E-05	6.49228E-03	6.62433E-03
	0.750	9.28020E-04	8.62829E-03	6.89400E-03
	0.875	9.26540E-04	5.35609E-03	3.44437E-03
5	0.125	3.25223E-04	8.38594E-03	8.01992E-03
	0.250	1.06737E-03	1.00293E-02	7.85977E-03
	0.375	1.56399E-03	6.33179E-03	3.30248E-03
	0.500	1.10751E-03	1.10087E-03	3.35136E-03
	0.625	8.34895E-06	7.90624E-03	8.00326E-03
	0.750	1.06566E-03	9.98579E-03	8.02707E-03
	0.875	9.86732E-04	5.90472E-03	3.82559E-03

References

[1] S.G. Rubin and R.A. Graves, Cubic spline approximation for problem in fluid mechanics, NASA TR R-436, Washington, D.C., 1975.

[2] J. Caldwell, Use of cubic splines in the numerical solution of a model nonlinear PDE, SEA Bull. Math., Vol.20, No.3(1996) , 39-46.

[3] Eugene V. Shikin and Alexander I. Plis, Handbook on splines for the user, CRC Press, 1995.

[4] Günther Nürnberger, Approximation by spline Functions, Springer Verlag, 1989.

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ	นายไพโรจน์ สัตยธรรม		
เกิดวันที่	12 เมษายน 2494	ที่	จังหวัดฉะเชิงเทรา
วุฒิการศึกษา	ศศ.บ. (คณิตศาสตร์)	2517	มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
	วท.ม. (คณิตศาสตร์)	2519	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
	วท.ด. (คณิตศาสตร์)	2528	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มีผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์แล้ว 8 เรื่อง และกำลังรอตีพิมพ์อีก 4 เรื่อง

งานวิจัยที่สนใจคือ Optimal Control และ Mathematics in Finance

สถานที่ติดต่อคือ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
จังหวัดนครราชสีมา