เฉลยงานในชั้นเรียน

สถิตยศาสตร์วิศวกรรม (Engineering Statics)

ประจำภาคการศึกษาที่ 3 / 2549

โดย... อาจารย์เชาวน์ หิรัญตียะกุล

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

Classwork # 1

จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น ที่มี 3 สมการ 3 ตัวแปร และหาค่า X, Y และ Z

$3X+5Y-3Z = 3$ .... (1)

$7X+4Y-2Z = 9$ ..... (2)

$3X-2Y+ Z = 2$ ..... (3)

วิธีทำ

- นำสมการที่ (3) คูณ 2 จะได้

$2(3X-2Y+Z) = 2(2)$

$6X-4Y+2Z = 4$ ..... (4)

- นำสมการที่ (2) บวก สมการที่ (4) จะได้

$(6X-4Y+2Z)+ (7X+4Y-2Z) =9+4$

$X = 1$

- นำ X=1 แทนใน สมการที่ (1) จะได้

$3(1) +5Y-3Z = 3$

$5Y-3Z = 3-3$

$Y = \frac{3Z}{5}$ ..... (5)

- นำสมการที่ (5) แทนใน สมการที่ (2) จะได้

$7(1) +4(\frac{3Z}{5}) -2Z = 9$

$Z = 5$

- นำ Z= 5 แทนใน สมการที่ (5) จะได้

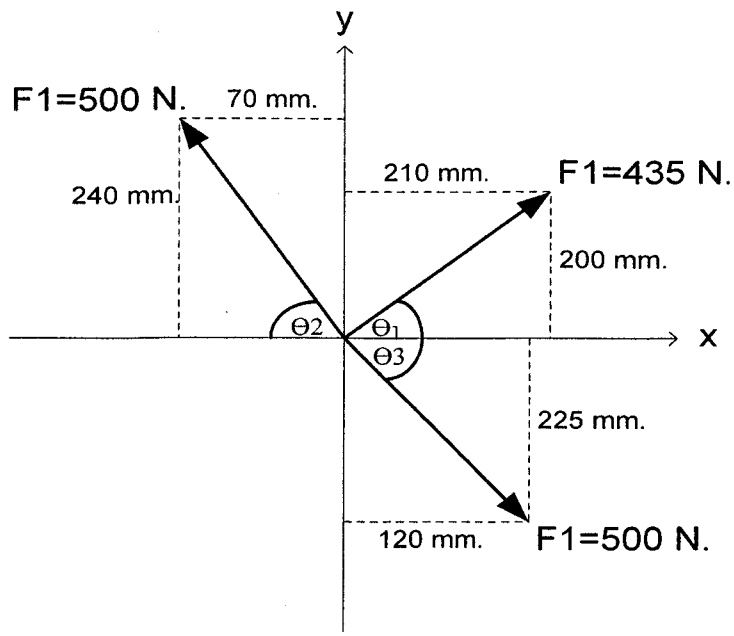
$Y = \frac{3(5)}{5}$

$Y = 3$

ดังนั้น ค่า **X = 1, Y = 3** และ **Z = 5**

Classwork # 2

จงหาเวกเตอร์ลัพธ์และมุมของเวกเตอร์ลัพธ์

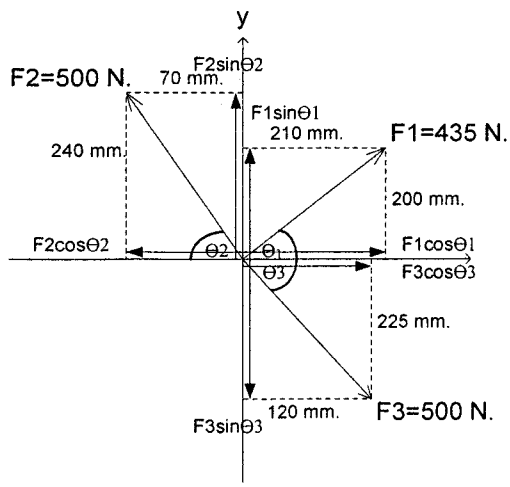


วิธีทำ

- หามุมที่กระทำกับแรง

$$\Theta_1 = \tan^{-1}(200/210) = 43.60^\circ$$
$$\Theta_2 = \tan^{-1}(240/70) = 73.73^\circ$$
$$\Theta_3 = \tan^{-1}(225/120) = 61.93^\circ$$

- แตกแรงเข้าตามแนวแกน



- รวมแรงในแนวแกน

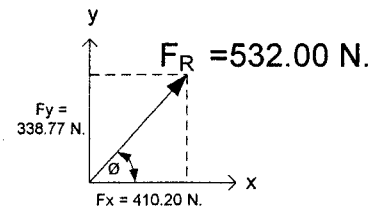
$$+\uparrow \sum Fy = F1\sin\Theta_1 + F2\sin\Theta_2 + F3\sin\Theta_3$$
$$Fy = 435\sin 43.60^\circ + 500\sin 73.73^\circ - 500\sin 61.93^\circ$$
$$Fy = 338.77 \text{ N.} \quad \text{.....\#}$$

$+\longrightarrow \sum Fx = F1\cos\Theta_1 + F2\cos\Theta_2 + F3\cos\Theta_3$

$Fx = 435\cos 43.60^\circ - 500\cos 73.73^\circ + 500\cos 61.93^\circ$

$Fx = 410.20$ N. .....#

- ดังนั้นจะได้



$F_R = \sqrt{Fy^2 + Fx^2}$

$= \sqrt{(338.77)^2 + (410.20)^2}$

$F_R = 532.00$ N.....#

$\emptyset = \tan^{-1}(Fy/Fx)$

$\emptyset = \tan^{-1}(338.77/410.20)$

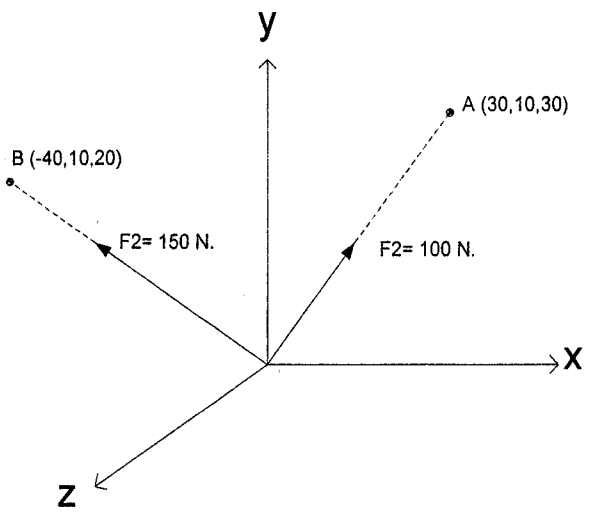
$\emptyset = 39.55^\circ$.....#

Classwork # 3

จงหา ก) หาเวกเตอร์แรงลัพธ์

ข) หาขนาดเวกเตอร์แรงลัพธ์

ค) หาทิศทางเวกเตอร์แรงลัพธ์



วิธีทำ

- จาก $\vec{F}_{OA} = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{\lambda}_{OA}$

$$\overrightarrow{OA} = 30\hat{i}+10\hat{j}+30k$$

$$\vec{\lambda}_{OA} = \sqrt{(30)^2+(10)^2+(30)^2} = \sqrt{1900}$$

$$\vec{F}_{OA} = (100)\cdot\frac{(30\hat{i}+10\hat{j}+30k)}{\sqrt{1900}} = 68.82\hat{i}+22.94\hat{j}+68.82k \text{-----} ☺$$

- จาก $\vec{F}_{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{\lambda}_{OB}$

$$\overrightarrow{OB} = -40\hat{i}+10\hat{j}+20k$$

$$\vec{\lambda}_{OB} = \sqrt{(-40)^2+(10)^2+(20)^2} = \sqrt{2100}$$

$$\vec{F}_{OB} = (150)\cdot\frac{(-40\hat{i}+10\hat{j}+20k)}{\sqrt{2100}} = -130\hat{i}+32.73\hat{j}+65.46k \text{-----} ☺$$

- ดังนั้น

$$\vec{F}_R = (68.82\hat{i}+22.94\hat{j}+68.82k)+(-130\hat{i}+32.73\hat{j}+65.46k)$$
$$= (-62.11\hat{i}+55.67\hat{j}+134.28k) \text{ N. ----------(ก.)}$$

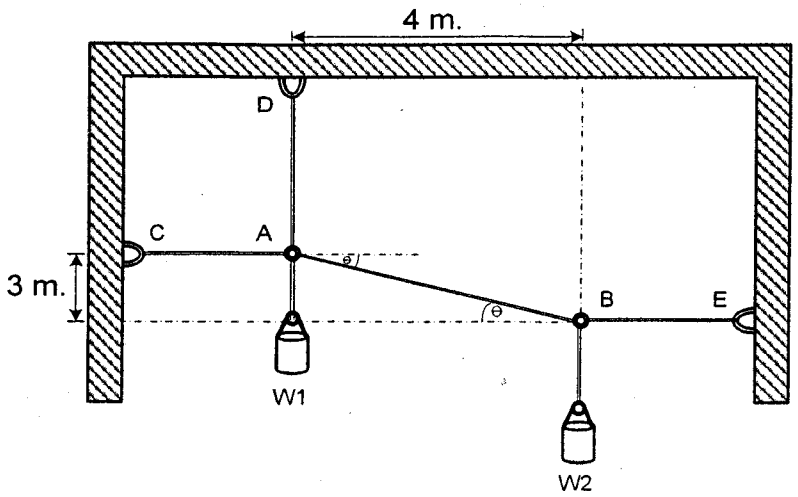
$$|\vec{F}_R| = \sqrt{(-62.11)^2+(55.67)^2+(134.28)^2}$$
$$= 158.07 \text{ N. ----------(ข.)}$$

$$\vec{\lambda}_{FR} = \frac{(-62.11\hat{i}+55.67\hat{j}+134.28k)}{\sqrt{(-62.11)^2+(55.67)^2+(134.28)^2}} = -0.39\hat{i}+0.35\hat{j}+0.85k \text{---(ค.)}$$

Classwork # 4

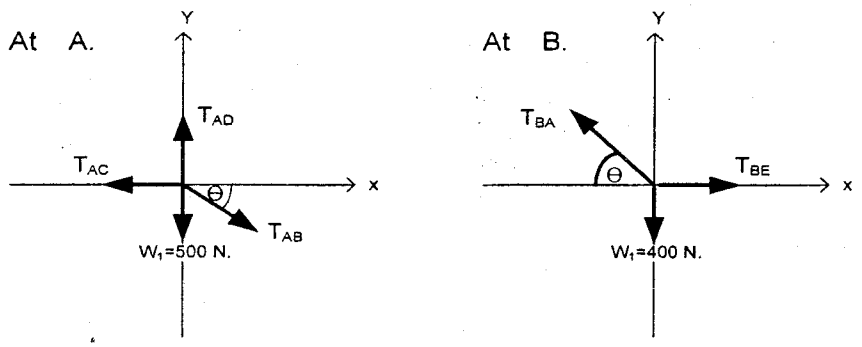
ก) หาแรงดึงเชือกแต่ละเส้น ถ้า W_1= 500 N. และ W_2= 400 N.

ข) ถ้าแรงดึงเชือกที่นำมาใช้รับแรงดึงสูงสุดได้ 1000 N. จงหา W_{2max} ที่นำมาแขวน แล้วเชือกในระบบไม่ขาด



วิธีทำ

FBD



● หามุม Θ ;

$$\Theta = \tan^{-1}(3/4) = 36.87^{\circ}$$

ที่จุด A

$$+\uparrow \sum Fy=0 \; ; \; T_{AD}-500-T_{AB}(\sin 36.87^{\circ}) = 0 \quad \text{----------(1)}$$

$$+\rightarrow \sum Fx=0 \; ; \; -T_{AC}+T_{AB}(\cos 36.87^{\circ}) = 0 \quad \text{----------(2)}$$

ที่จุด B

$$+\uparrow \sum Fy=0 \; ; \; T_{BA}(\sin 36.87^{\circ})-400 = 0 \quad \text{----------(3)}$$

$$+\rightarrow \sum Fx=0 \; ; \; T_{BE}-T_{BA}(\cos 36.87^{\circ}) = 0 \quad \text{---------- --(4)}$$

● ดังนั้น แก้สมการ 4 สมการ 4 ตัวแปร จะได้;

T_{AB} = 666.67 N. T_{BE} = 533.33 N.

T_{AD} = 900.00 N. T_{AC} = 533.33N. .....(ก)

● จากคำตอบในข้อ (ก.) จะเห็นได้ว่า T_{AD} เป็นเส้นเชือกที่สามารถรับแรงดึงได้มากที่สุด โจทย์กำหนดให้แรงดึงสูงสุดเป็น 1000 N. ดังนั้น ให้ $T_{AD,\,max} = 1000$ N.

จากสมการ (1) ; $T_{AD} - 500 - T_{AB}(\sin 36.87^{\circ}) = 0$

จะได้ ; $1000 - 500 - T_{AB}(\sin 36.87^{\circ}) = 0$

$$T_{AB} = 833.33 \text{ N.}$$

แทน $T_{AB} = 833.33$ N. ในสมการ(3) เพื่อ W_{2max}

$$W_{2max} = 833.33(\sin 36.87^{\circ})$$

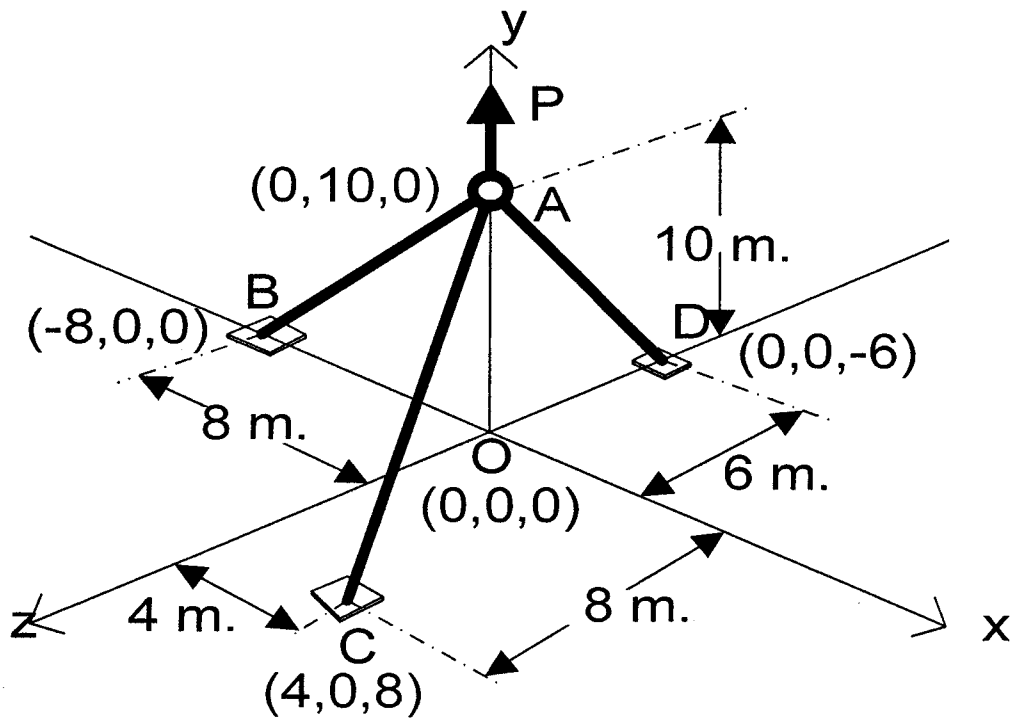
$$= 500.00 \text{ N.} \quad \text{.....(ข)}$$

Classwork # 5

เชือก 3 เส้น ถูกออกแรงดึงด้วยแรง P กระทำที่จุด A หากทราบแรงที่เส้นเชือก AB =300 N.

จงหา 1) แรง P

2) แรงที่เส้นเชือก AC และ AD



วิธีทำ

- จาก $\vec{T}_{AB} = T_{AB} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{(-8-0)\hat{i} + (0-10)\hat{j} + (0-0)k}{\sqrt{(-8-0)^2 + (0-10)^2 + (0-0)^2}} = \frac{-8\hat{i} - 10\hat{j} + 0k}{\sqrt{(164)}}$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{-8(T_{AB})\hat{i}}{\sqrt{(164)}} \frac{-10(T_{AB})\hat{j}}{\sqrt{(164)}} + \frac{0(T_{AB})k}{\sqrt{(164)}}$$

แทนใน $T_{AB} = 300$ N. สมการ จะได้ว่า ;

$$\vec{T}_{AB} = -\frac{8(300)}{\sqrt{(164)}}\hat{i} \frac{-10(300)}{\sqrt{(164)}}\hat{j} + \frac{0(300)}{\sqrt{(164)}}k$$

$$\vec{T}_{AB} = \frac{-2400}{\sqrt{(164)}}\hat{i} \frac{-3000}{\sqrt{(164)}}\hat{j} + \frac{0}{\sqrt{(164)}}k \qquad \text{.....(a)}$$

- จาก $\vec{T}_{AC} = T_{AC} \cdot \vec{\lambda}_{AC}$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{(4-0)\hat{i} + (0-10)\hat{j} + (8-0)k}{\sqrt{(4-0)^2 + (0-10)^2 + (8-0)^2}} = \frac{4\hat{i} - 10\hat{j} + 8k}{\sqrt{(180)}}$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{4(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}\hat{i} - \frac{10(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}\hat{j} + \frac{8(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}k \quad \text{.....(b)}$$

● จาก $\vec{T}_{AD} = T_{AD} \bullet \vec{\lambda}_{AD}$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{(0-0)\hat{i} + (0-10)\hat{j} + (-8-0)k}{\sqrt{(0-0)^2 + (0-10)^2 + (-6-0)^2}} = \frac{0\hat{i} - 10\hat{j} - 6k}{\sqrt{(136)}}$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{0(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}\hat{i} - \frac{10(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}\hat{j} - \frac{6k(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}k \quad \text{.....(c)}$$

● จาก $\vec{T}_{AP} = T_{AP} \bullet \vec{\lambda}_{AP} = P\hat{j}$ .....(d)

● ดังนั้น จาก (a) ถึง (d) สามารถแก้สมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร ;

$$T_{AB} = \frac{-2400}{\sqrt{(164)}}\hat{i} - \frac{3000}{\sqrt{(164)}}\hat{j} + \frac{0k}{\sqrt{(164)}} \quad \text{.....(a)}$$

$$T_{AC} = \frac{4(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}\hat{i} - \frac{10(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}\hat{j} + \frac{8(T_{AC})}{\sqrt{(180)}}k \quad \text{.....(b)}$$

$$T_{AD} = \frac{0(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}\hat{i} - \frac{10(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}\hat{j} - \frac{6k(T_{AD})}{\sqrt{(136)}}k \quad \text{.....(c)}$$

$$T_{AP} = P\hat{j} \quad \text{.....(d)}$$

จัดสมการได้ ;

$$\frac{4(T_{AC})}{\sqrt{(180)}} - \frac{2400}{\sqrt{(164)}} + \frac{0(T_{AD})}{\sqrt{(136)}} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

$$\frac{4(T_{AC})}{\sqrt{(180)}} - \frac{3000}{\sqrt{(164)}} - \frac{10(T_{AD})}{\sqrt{(136)}} + P = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$$\frac{8(T_{AC})}{\sqrt{(180)}} + \frac{0k}{\sqrt{(164)}} - \frac{6k(T_{AD})}{\sqrt{(136)}} = 0 \quad \rightarrow (3)$$

จะได้ ;

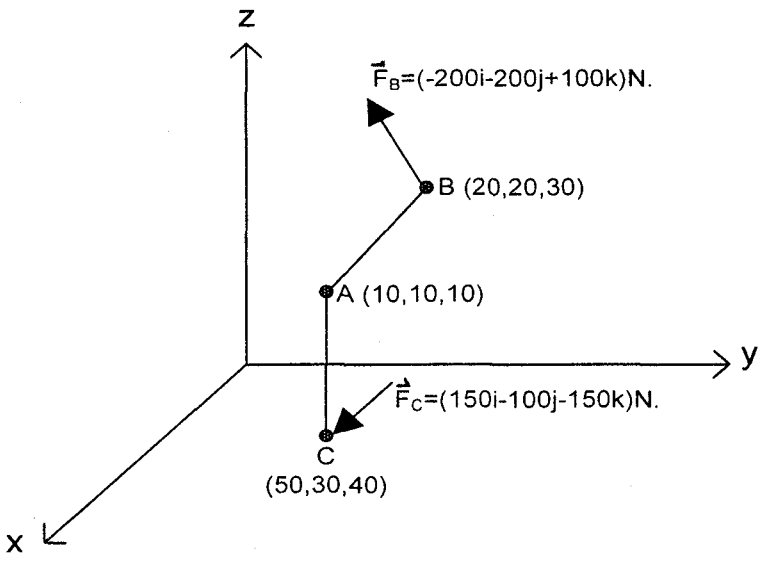
$T_{AC} = 628.59$ N.

$T_{AD} = 728.51$ N.

$P = 1327.48$ N. .....ANS.

Classwork#6

จงหาเวกเตอร์ความพยายามหมุนรอบ A เนื่องจากแรงกระทำที่ B และC



วิธีทำ

1) หาเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}_{AB}$ และ $\vec{r}_{AC}$

▶ $\vec{r}_{AB}=\overrightarrow{AB}= (20-10)\hat{i}+(20-10)\hat{j}+(30-10)k$

$= 10\hat{i} +10\hat{j} +20k$

▶ $\vec{r}_{AC}=\overrightarrow{AC}= (50-10)\hat{i}+(30-10)\hat{j}+(40-10)k$

$= 40\hat{i} +20\hat{j} +30k$

2) หาเวกเตอร์โมเมนต์ $\vec{M}_{AB}$ และ $\vec{M}_{AC}$

▶ $\vec{M}_{AB} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k & \hat{i} & \hat{j} \\ 10 & 10 & 20 & 10 & 10 \\ -200 & -200 & 100 & -200 & -200 \end{vmatrix}$$

$\vec{M}_{AB}= [(10)(100)-(20)(-200)]\hat{i}+[(-200)(20)-(10)(100)]\hat{j}$
$+[(-200)(10)-(10)(-200)]k$
$= [5000\hat{i} -5000\hat{j} +0k]$Nm.

▶ $\vec{M}_{AC} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k & \hat{i} & \hat{j} \\ 40 & 20 & 30 & 40 & 20 \\ 150 & -100 & -150 & 150 & -100 \end{vmatrix}$$

▶ M_{AC}= [(20)(−150)−(30)(−100)]î+[(150)(30)−(40)(−150)]ĵ
+[(−100)(40)−(20)(150)]k
= [0î +10500ĵ −7000k]Nm.

3) หาเวกเตอร์โมเมนต์ลัพธ์

$$\vec{M}^R_A = \sum M_A = (5000\hat{i} - 5000\hat{j} + 0k) + (0\hat{i} + 10500\hat{j} - 7000k)$$

$$= [5000\hat{i} + 5500\hat{j} - 7000k]\text{Nm.} \quad \ldots\ldots\ldots ☺$$

$$\left|\vec{M}^R_A\right| = \sqrt{(5000)^2+(5500)^2+(-7000)^2}$$

$$= 10210.29 \text{ Nm.} \quad \ldots\ldots\ldots ☺$$

$$\vec{\lambda}_M = \frac{5000\hat{i} + 5500\hat{j} - 7000k}{\sqrt{(5000)^2+(5500)^2+(-7000)^2}}$$

$$= 0.49\hat{i} + 0.54\hat{j} - 0.69k \quad \ldots\ldots\ldots ☺$$

Classwork # 7

จงหาโมเมนต์ลัพธ์รอบแกน AD ซึ่งเกิดจากแรง $\vec{F}_B$ และ $\vec{F}_C$

A (10, 10, 10) m.
B (20,-10, 30) m. $\vec{F}_B = (100i-200\,\hat{j}\,-200k)$ N.
C (-30, 20, 20) m. $\vec{F}_C = (150i+50\,\hat{j}\,+100k)$ N.
D (50, 75, 70) m.

วิธีทำ

1.หาเวกเตอร์ $\vec{r}_{AB}$ และ $\vec{r}_{AC}$

$$\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (20-10)\hat{i} +(-10-10)\hat{j} +(30-10)k$$
$$= 10\hat{i} -20\hat{j} +20k$$
$$\vec{r}_{AC} = \overrightarrow{AC} = (-30-10)\hat{i} +(20-10)\hat{j} +(20-10)k$$
$$= -40\hat{i} +10\hat{j} +10k$$

2. หา unit vector ที่ชี้ในแนวเวกเตอร์ AD

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{(50-10)\hat{i} +(75-10)\hat{j} +(70-10)k}{\sqrt{(50-10)^2 +(75-10)^2 +(70-10)^2}}$$

$$= \frac{40\hat{i} +65\hat{j} +60k}{\sqrt{9425}}$$

3. หาเวกเตอร์การหมุนรอบแกน AD ที่เกิดจากแรง F_B และ F_C

$$M_{AD,\vec{F}_B} = \vec{\lambda}_{AD} \cdot (\vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{40}{\sqrt{9425}} & \frac{65}{\sqrt{9425}} & \frac{60}{\sqrt{9425}} \\ 10 & -20 & 20 \\ 100 & -200 & -200 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{40}{\sqrt{9425}} & \frac{65}{\sqrt{9425}} \\ 10 & -20 \\ 100 & -200 \end{matrix}$$

$$= 5974.30 \text{ Nm.}$$

$$M_{AD,\vec{F}_C} = \vec{\lambda}_{AD} \cdot (\vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{40}{\sqrt{9425}} & \frac{65}{\sqrt{9425}} & \frac{60}{\sqrt{9425}} \\ -40 & 10 & 10 \\ 150 & 50 & 100 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{40}{\sqrt{9425}} & \frac{65}{\sqrt{9425}} \\ -40 & 10 \\ 150 & 50 \end{matrix}$$

$$= 1725.34 \text{ Nm.}$$

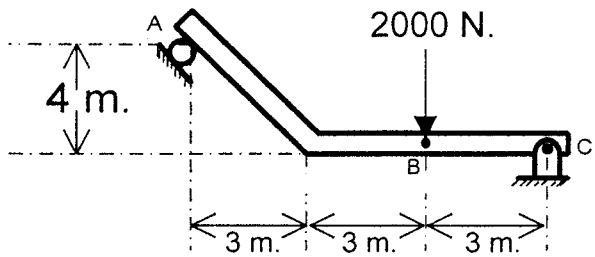
4. หาโมเมนต์ลัพธ์รอบแกน AD

$$M^R_{AD} = M_{AD,\vec{F}_B} + M_{AD,\vec{F}_C}$$

$$= 5974.30 + 1725.34 = 7699.64 \text{ Nm.}$$

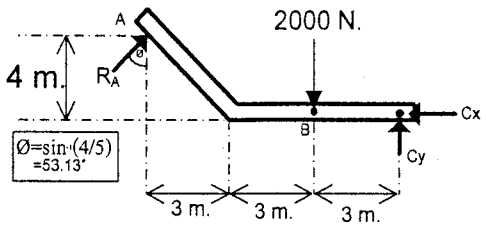
Classwork#8

จงหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B



วิธีทำ

1) เขียน Free Body Diagram



2) เขียนสมการสมดุลแรง

$+\rightarrow \sum F_x=0;\ (R_A)\sin 53.13^\circ - C_X = 0$ ....(1)

$+\uparrow \sum F_y=0;\ (R_A)\cos 53.13^\circ + C_Y - 2000 = 0$ .....(2)

3) เขียนสมการสมดุลการหมุน

$+\circlearrowleft \sum M_C=0\ ;\ -(4)(R_A)\sin 53.13^\circ - (9)(R_A)\cos 53.13^\circ + (2000\times 3) = 0$

$R_A = \underline{697.67\ \text{N.}\ (\nearrow)}$ *

4) แทนค่า $R_A = 697.67$ N. ในสมการที่ (1) และ(2)

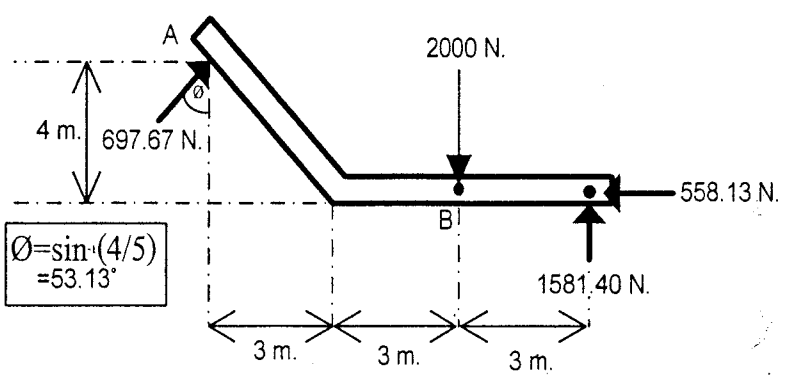
จากสมการที่ (1) ; $(697.67)\sin 53.13^\circ - C_X = 0$

$C_X = \underline{558.13\ \text{N.}\ (\rightarrow)}$ *

จากสมการที่ (2) ; $(697.67)\cos 53.13^\circ + C_Y - 2000 = 0$

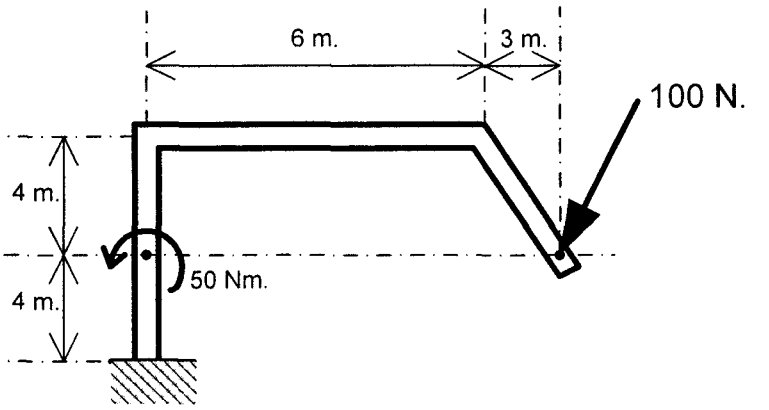
$C_Y = \underline{1581.40\ \text{N.}\ (\uparrow)}$ *

5) นำคำตอบที่ได้แทนใน Free Body Diagram



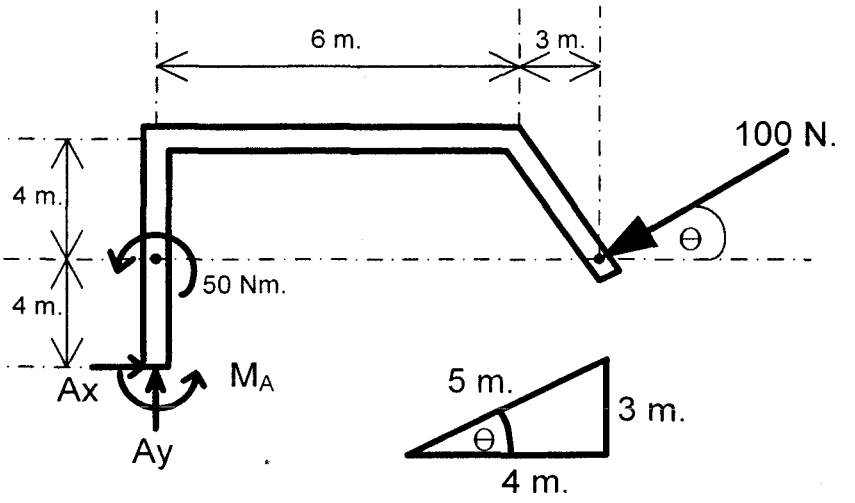
CLASSWORK#9

จงหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A



วิธีทำ

1. เขียน Free Body Diagram



2. เขียนสมการสมดุลแรง

$+\rightarrow \sum Fx = 0, \quad Ax - (100N)(4/5) = 0 \quad \ldots\ldots \textcircled{1}$

$+\uparrow \sum Fy = 0, \quad Ay - (100N)(3/5) = 0 \quad \ldots\ldots \textcircled{2}$

3. เขียนสมการสมดุลการหมุน

$+\circlearrowleft \sum M_A = 0, \; M_A + 50 + (100N)(4/5)(4\ m.) - (100N)(3/5)(9\ m.) = 0 \quad \ldots \textcircled{3}$

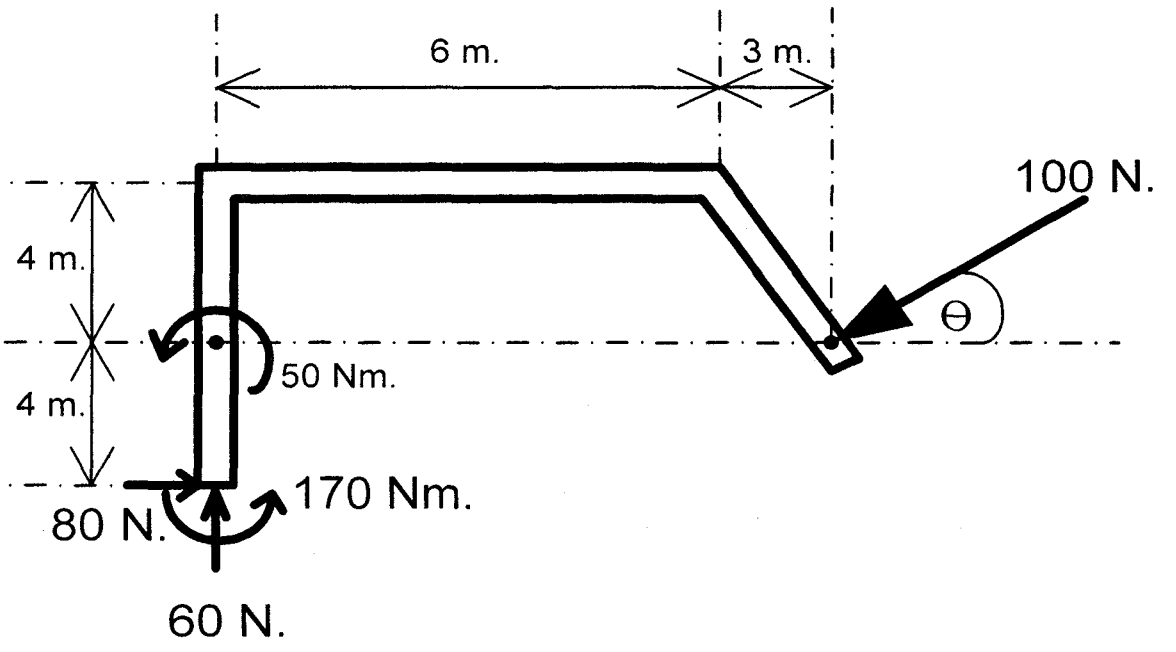
4. แก้สมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร จะได้

$A_X = 80$ N. ($\rightarrow$)

$A_y = 60$ N. ($\uparrow$)

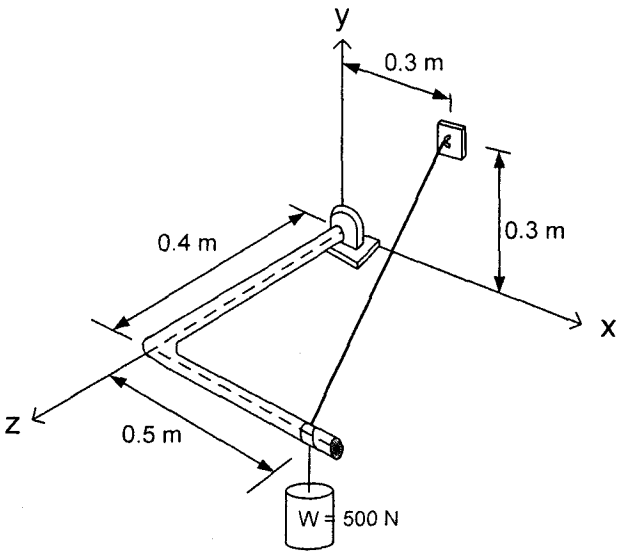
$M_A = 170$ Nm. ($\circlearrowleft$)

5. เขียนคำตอบที่ได้ใน Free Body Diagram



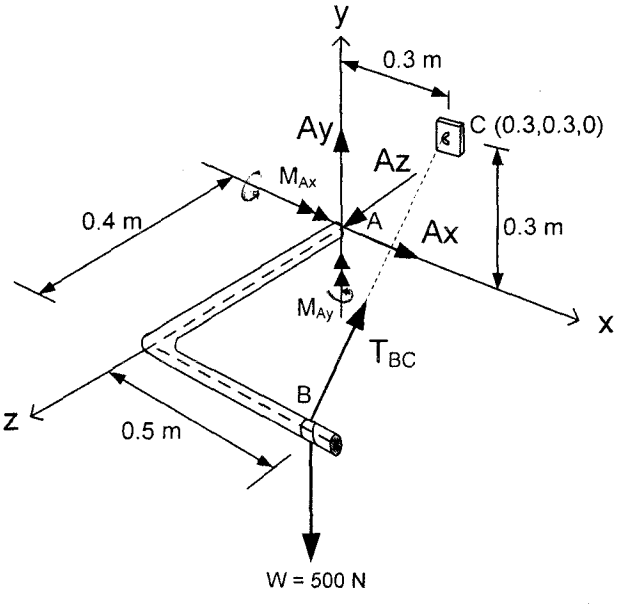
Classwork #11

จงหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และแรงดึงเชือก BC ถ้าชิ้นส่วน AB มีน้ำหนักน้อยมากจนไม่ต้องนำมาคิด



วิธีทำ

1.เขียน FBD



2.เขียนเวกเตอร์แรง

ที่จุด A ; $\vec{F}_A = \boldsymbol{Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}}$

เวกเตอร์น้ำหนัก; $\vec{W} = \boldsymbol{-500\,\hat{j}}$

เวกเตอร์แรงดึงเชือก BC ; $\vec{T}_{BC} = T_{BC}(\vec{\lambda}_{BC})$

$$\vec{\lambda}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(0.3-0.5)\hat{i}+(0.3-0)\hat{j}+(0-0.4)k}{\sqrt{(0.3-0.5)^2+(0.3-0)^2+(0-0.4)^2}}$$

$$= \frac{-0.2\hat{i}+0.3\hat{j}-0.4k}{\sqrt{0.29}}$$

$$\vec{T}_{BC} = \frac{-\boldsymbol{0.2\,T_{BC}}}{\sqrt{\boldsymbol{0.29}}}\hat{i} + \frac{\boldsymbol{0.3\,T_{BC}}}{\sqrt{\boldsymbol{0.29}}}\hat{j} - \frac{\boldsymbol{0.4\,T_{BC}}}{\sqrt{\boldsymbol{0.29}}}k$$

3.เขียนสมการสมดุลแรง

$$\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_A + \vec{W} + \vec{T}_{BC}$$

$$\sum \vec{F}x=0;\ Ax - \frac{0.2\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} = 0 \quad \text{.....①}$$

$$\sum \vec{F}y=0;\ Ay - 500 + \frac{0.3\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} = 0 \quad \text{.....②}$$

$$\sum \vec{F}y=0;\ Az - \frac{0.4\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} = 0 \quad \text{.....③}$$

4.เวกเตอร์โมเมนต์ที่เกิดขึ้นรอบ A

$\vec{M}_A$ ที่เกิดขึ้นจากแรงปฏิกิริยาที่ A ; $\vec{M}_A = \boldsymbol{M_{Ax}\,\hat{i} + M_{Ay}\hat{j}}$

$\vec{M}_A$ ที่เกิดขึ้นจากเวกเตอร์น้ำหนัก ; $\vec{M}_{A,\vec{W}} = \vec{r}_{AB} \times \vec{W}$

$$\vec{r}_{AB} = (0.5-0)\hat{i} + (0-0)\hat{j} + (0.4-0)\,k$$

$$\vec{M}_{A,\vec{W}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 0.5 & 0 & 0.4 \\ 0 & -500 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 0.5 & 0 \\ 0 & -500 \end{matrix} = \boldsymbol{200\hat{i} - 250k}$$

$\vec{M}_A$ ที่เกิดขึ้นจากเวกเตอร์แรงดึง ; $\vec{M}_{A,\vec{T}_{BC}} = \vec{r}_{AB} \times \vec{T}_{BC}$

$$\vec{M}_{A,\vec{T}_{BC}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 0.5 & 0 & 0.4 \\ \frac{-0.2\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} & \frac{0.3\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} & \frac{-0.4\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 0.5 & 0 \\ \frac{-0.2\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} & \frac{0.3\ T_{BC}}{\sqrt{0.29}} \end{matrix}$$

$$= \boldsymbol{-0.223T_{BC}\,\hat{i} + 0.222\ T_{BC}\hat{j} + 0.278\ T_{BC}\,k}$$

5.เขียนสมการสมดุลโมเมนต์

$$\sum \vec{M}_A = 0 = M_A + M_{A,\vec{W}} + M_{A,\vec{T}_{BC}}$$

$$\sum \vec{M}_{Ax} = 0\ ;\ M_{Ax} + 200 - 0.223T_{BC} = 0 \quad \text{.....④}$$

$$\sum \vec{M}_{Ay} = 0\ ;\ M_{Ay} + 0.222\ T_{BC} = 0 \quad \text{.....⑤}$$

$$\sum \vec{M}_{Az} = 0\ ;\ -250 + 0.278\ T_{BC} = 0 \quad \text{.....⑥}$$

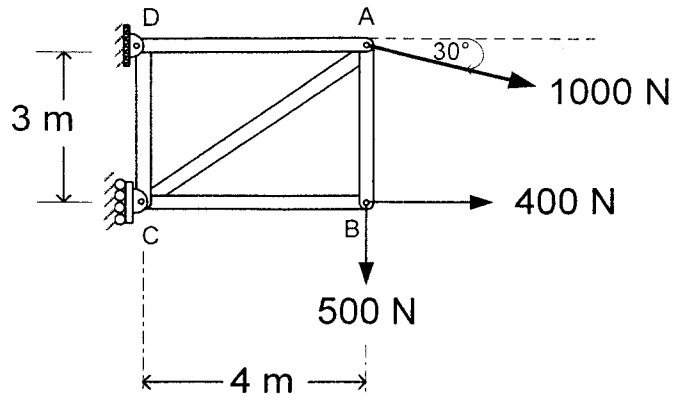
6.แก้สมการ 6 สมการ 6 ตัวแปรไม่ทราบค่า จะได้

$$Ax = 333.98\ N.$$
$$Ay = 0$$
$$Az = 667.97\ N.$$
$$M_{Ax} = -199.64\ N.$$
$$M_{Ay} = 0$$
$$T_{BC} = 899.28\ N.$$

สรุปคำตอบ

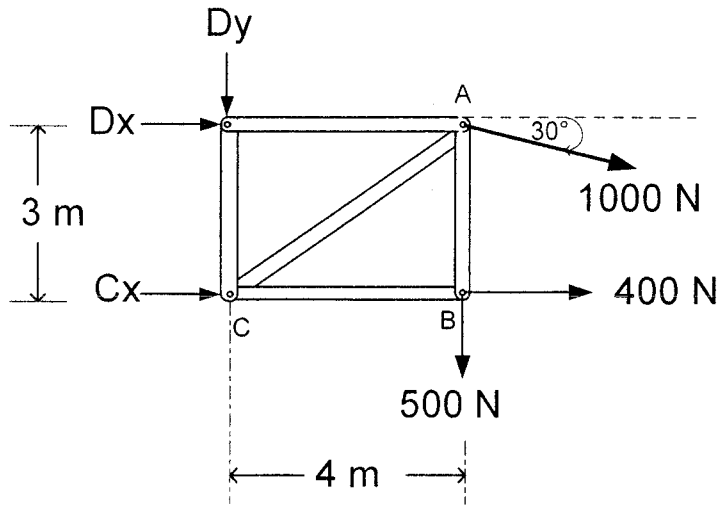
Classwork# 13

จงหาแรง และสถานะของแรงในแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง



วิธีทำ

1. วาด Free Body Diagram



2. พิจารณาสมการสมดุลแรงและสมการสมดุลโมเมนต์เพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ D และ C

$+\uparrow Fy=0;\ -Dy-500-(1000\sin 30°)=0$ .....(1)

$+\rightarrow Fx=0;\ Dx+Cx+400+(1000\cos 30°)=0$ .....(2)

$+\circlearrowleft M_D=0;\ Cx(3)-500(4)+400(3)-(1000\times 4\sin 30°)=0$.....(3)

จะได้

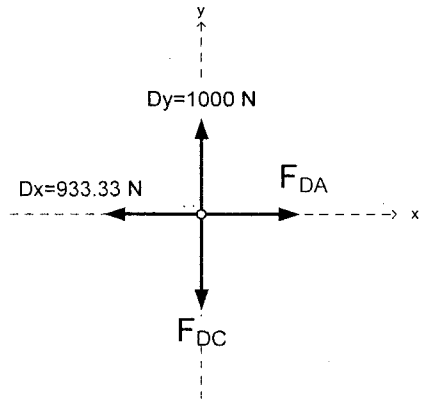
Dy= 1000 N (↑)

Dx= 2199.36 N (←)

Cx = 933.33 N (→)

3. หาแรงในแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง โดย Method of Joint

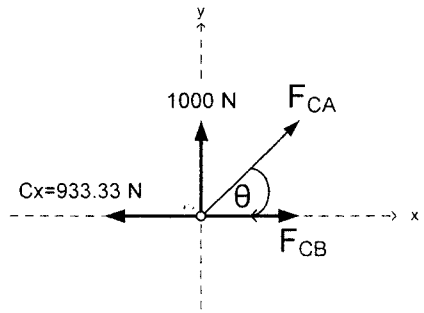
พิจารณาที่ Joint D.



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad F_{DA} = 933.33\ N\ (T)$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{DC} = 1000\ N\ (T)$

พิจารณาที่ Joint C.



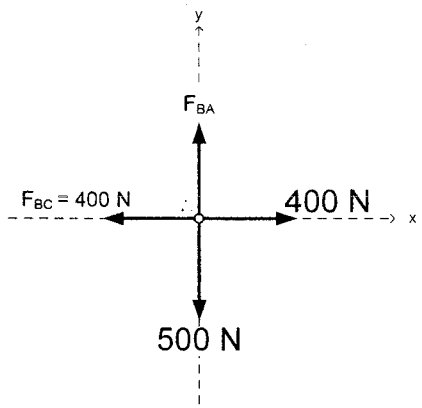
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad 933.33 + F_{CB} + F_{CA}\left(\frac{4}{5}\right) = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 1000 + F_{CA}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$F_{CA} = 1666.67\ N.\ (C)$

$F_{BC} = 400\ N\ (T)$

พิจารณาที่ Joint B.



$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{BA} = 500\ N\ (T)$

4. สรุปคำตอบ

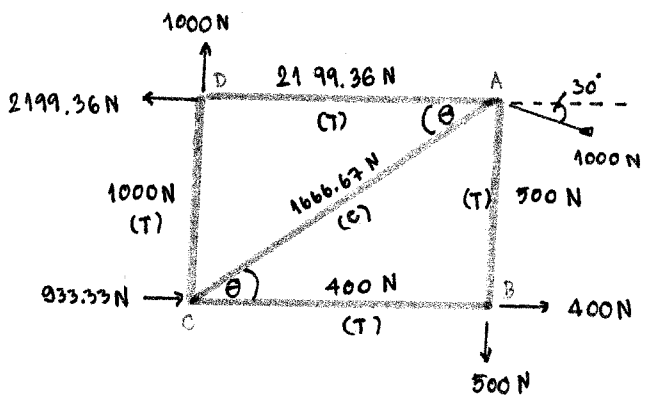
$F_{AB} = 500.00\ N\ (T)$

$F_{AD} = 2199.36\ N\ (T)$

$F_{AC} = 1666.67\ N\ (C)$

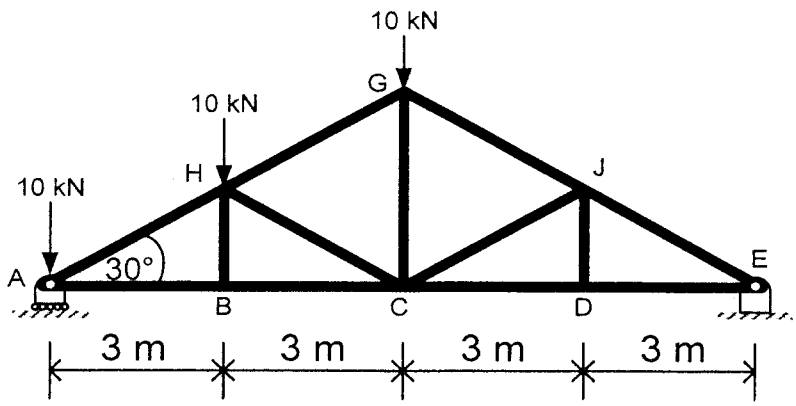
$F_{BC} = 400.00\ N\ (T)$

$F_{CD} = 1000.00\ N\ (T)$



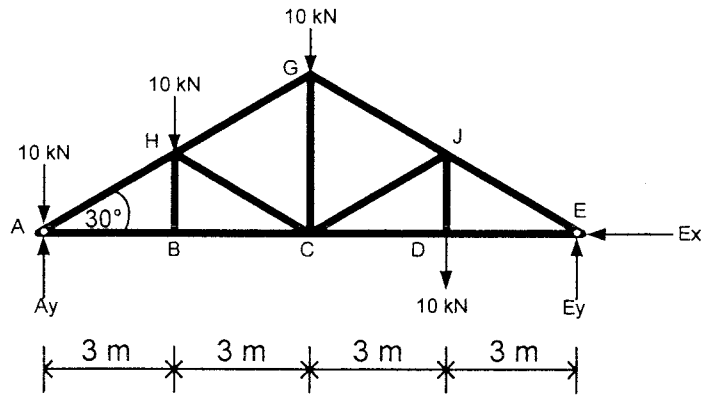
Classwork# 14

จงหาแรงและสถานะของแรงในชิ้นส่วน **HG HC และBC**



วิธีทำ

1.เขียน FBD



2.หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ

$+\rightarrow \Sigma Fx=0$; $Ex=0$

$+\uparrow \Sigma Fy=0$; $-10-10-10-10+Ey+Ay=0$

$+\circlearrowleft \Sigma M_E=0$; $-Ay(12)+10(12)+10(9)+10(6)+10(3)=0$

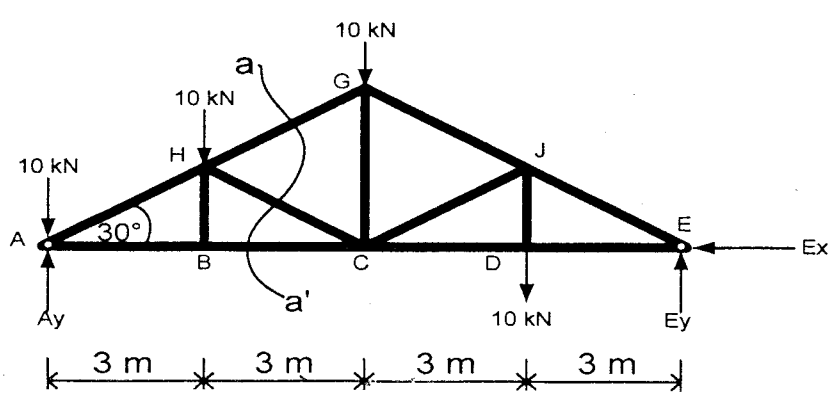
จะได้

$Ex=0$

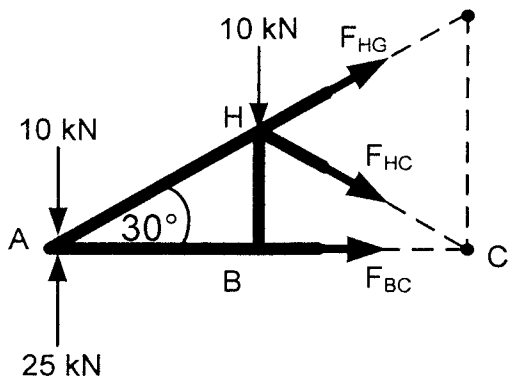
$Ey=15$ kN (↑)

$Ay=25$ kN (↑)

3.ตัด section ผ่านชิ้นส่วนที่ต้องการหา



4.เลือก section ที่ตัดมาพิจารณา เพื่อหาแรงในชิ้นส่วน HG HC และBC



☞พิจารณาสมดุลโมเมนต์

$+\circlearrowleft \Sigma Mc=0$; $-F_{HG}(3\tan 30°)(\cos 30°) -F_{HG}(3)(\sin 30°)+10(6)+10(3)-25(6)=0$...①

$+\rightarrow \Sigma Fx=0$; $F_{HC} \sin 60° +(-20)\cos 30° + F_{BC} =0$ .....②

$+\uparrow \Sigma Fy=0$; $-10-10+25-F_{HC}\cos 60° + (-20)\sin 30° =0$ .....③

☞จะได้ $F_{HG} = -20.00$ kN

$F_{HC} = -10.00$ kN

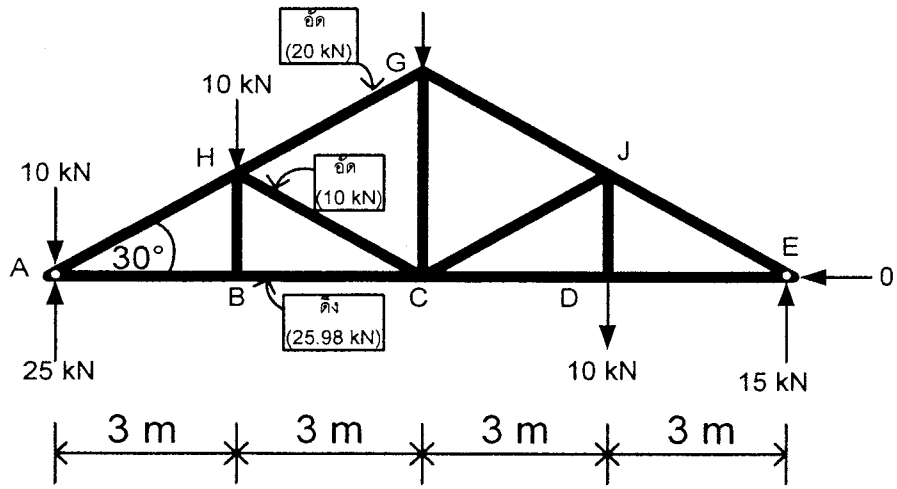
$F_{BC} = +25.98$ kN

5. สรุปคำตอบ

$F_{HG} = 20.00$ kN (C)

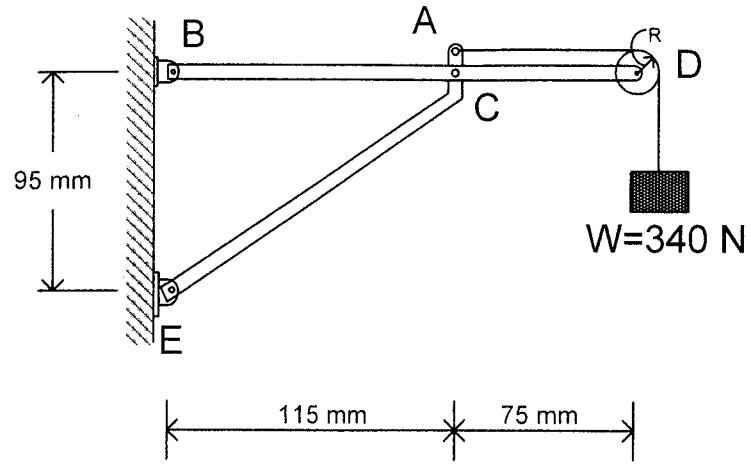
$F_{HC} = 10.00$ kN (C)

$F_{BC} = 25.98$ kN (T)



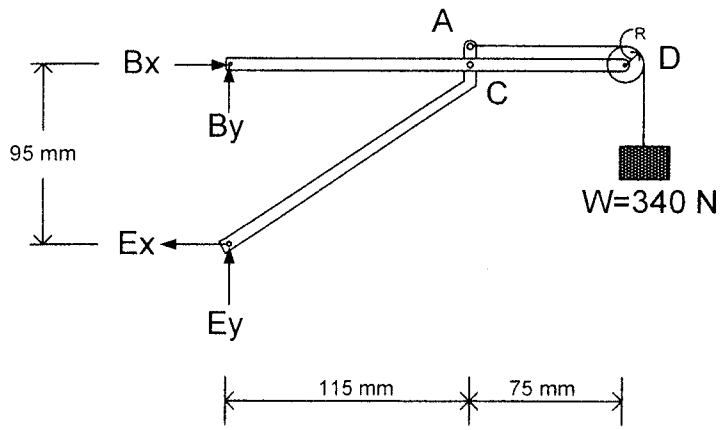
Classwork # 15

รัศมีรอก เท่ากับ **31 mm.** จงหาแรงในชิ้นส่วน **ACE**

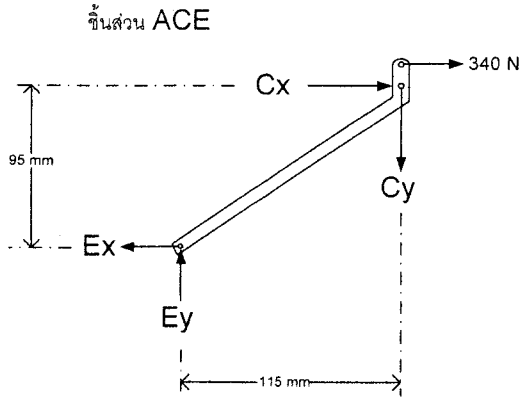


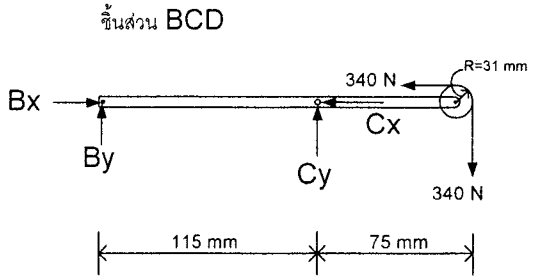
วิธีทำ

1. เขียน FBD



2.จาก FBD พบว่าไม่สามารถหาแรงปฏิกิริยาได้ จึงต้องแยกพิจารณาโครงสร้างออกเป็น 2 ชิ้นส่วน เนื่องจากจุด C ถูกเชื่อมต่อด้วยหมุด จึงแยกชิ้นส่วนได้เป็น ACE และ BAD





3.พิจารณาสมการสมดุล

☞ชิ้นส่วน ACE;

$+\rightarrow \Sigma F_x=0;\ -Ex+Cx+340=0$ .....①

$+\uparrow\ \Sigma F_y=0;\ Ey-Cy=0$ ..... ②

$+\circlearrowleft \Sigma M_E=0;\ -Cy(115)-Cx(95)-340(126)=0$.....③

☞ชิ้นส่วน BCD;

$+\rightarrow \Sigma Fx=0;\ Bx-Cx-340=0$ .....④

$+\uparrow\ \Sigma Fy=0;\ By+Cy-340=0$ ..... ⑤

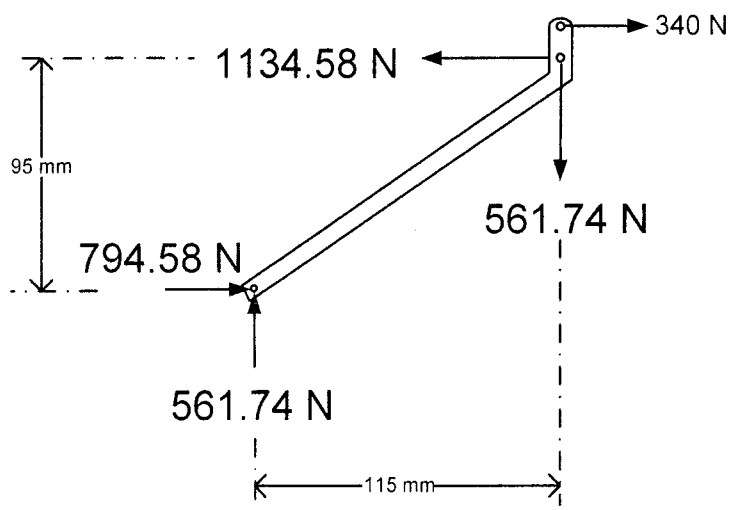
$+\circlearrowleft \Sigma M_B=0;\ Cy(115)-340(221)+340(31)=0$.....⑥

จะได้

Bx = -794.58 N , Cx = -1134.58 N , Ex = -794.58 N
By = -221.74 N , Cy = 561.74 N , Ey = 561.74 N

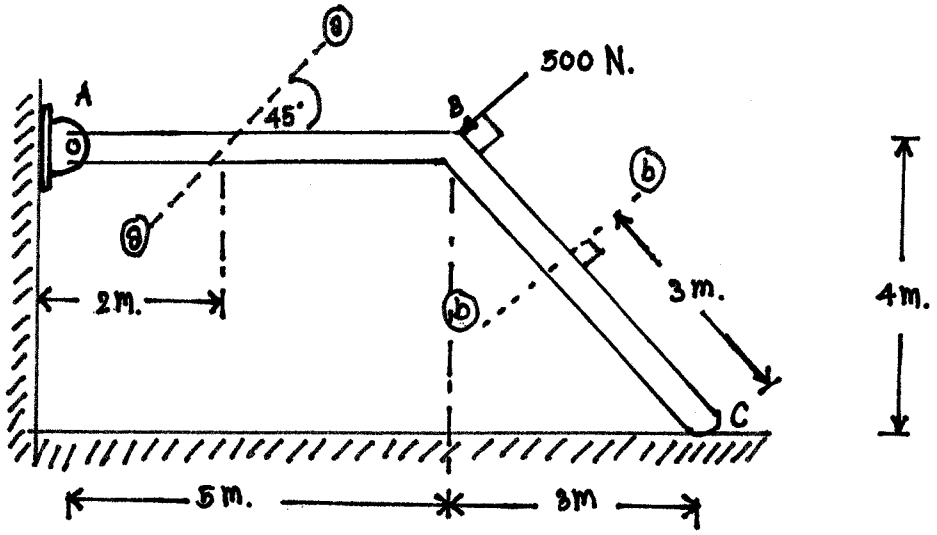
4.สรุปคำตอบ

ชิ้นส่วน ACE



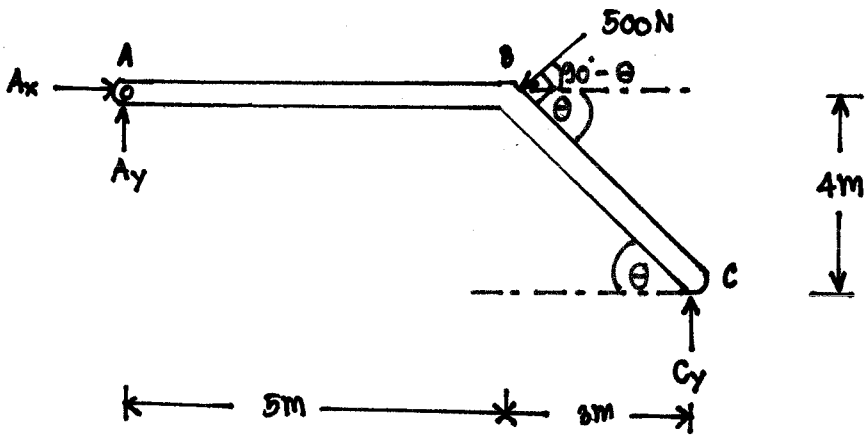
Classwork # 16.

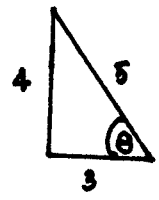
จงหาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ที่หน้าตัด ⓐ และ ⓑ



วิธีทำ

1) เขียน FBD.





$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\theta = 53.13^\circ$

$\therefore 90^\circ - 53.13^\circ = 36.87^\circ$

2) พิจารณาสมการสมดุล.

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0;\ C_y(8) - 500(5\sin 36.87^\circ) = 0$ ——— ①

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\ A_x - 500\cos 36.87^\circ = 0$ ——— ②

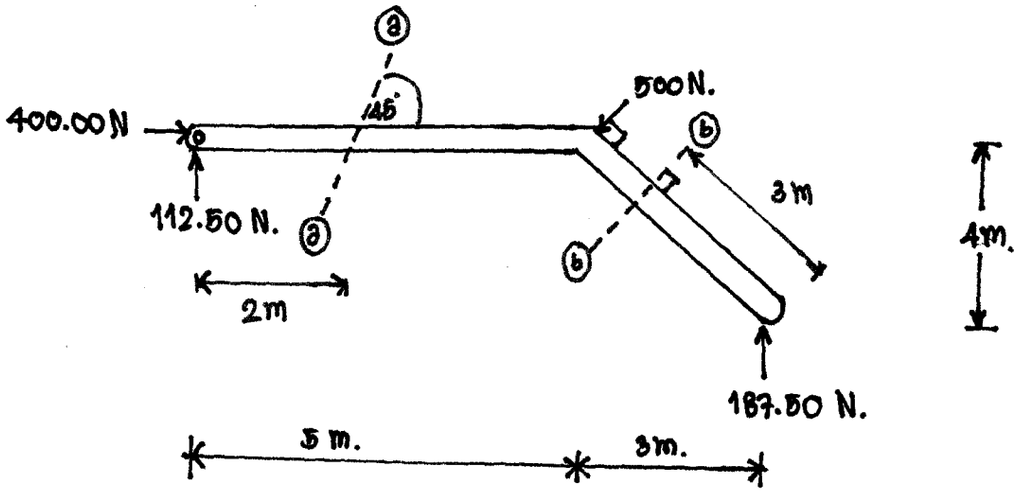
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ A_y - 500\sin 36.87^\circ + C_y = 0$ ——— ③

จะได้ $C_y = 187.50$ N. (↑)

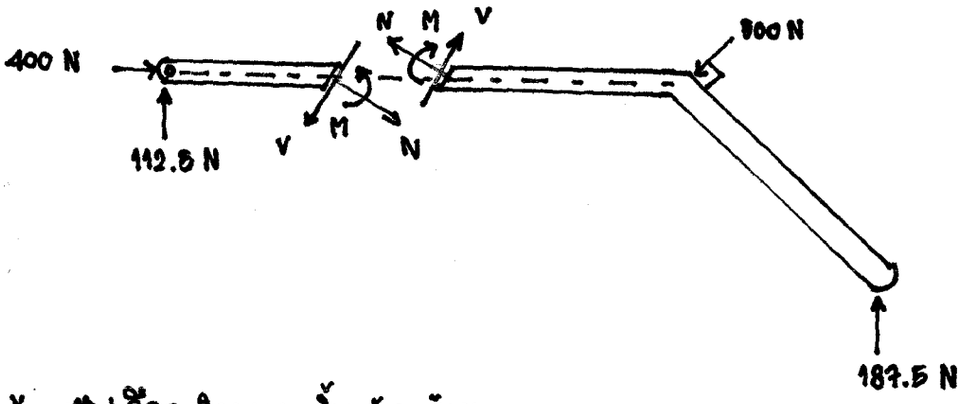
$A_x = 400.00$ N (→)

$A_y = 112.50$ N (↑)

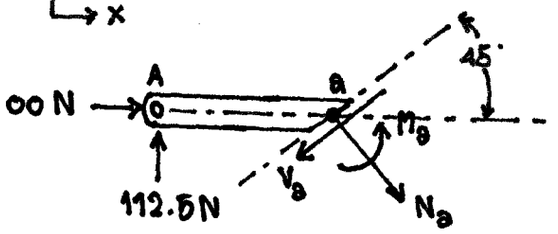
3) นำ แรงปฏิกิริยาแทนลงใน FBD



4) หาแรงภายใน ชิ้นส่วน ABC ที่หน้าตัด a



y
↑ เลือกพิจารณาชิ้นด้านซ้าย ;
→ x



$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_a = 0;$ $M_a - 112.5(2) = 0$ ——— (1)

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ $N\cos 45^\circ - V\cos 45^\circ + 400 = 0$ ——— (2)

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $-N\sin 45^\circ - V\sin 45^\circ + 112.5 = 0$ ——— (3)

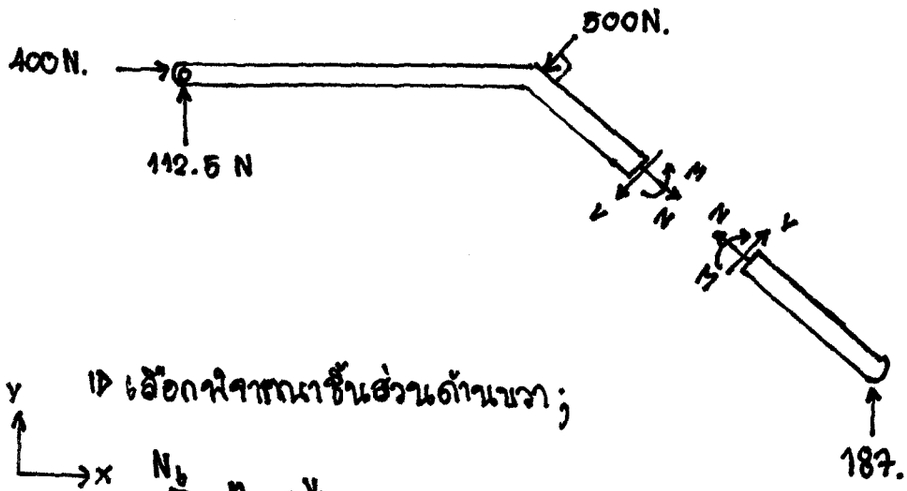
แก้สมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร ได้ คำตอบ ดังนี้

$M_a = +225.0$ N.m

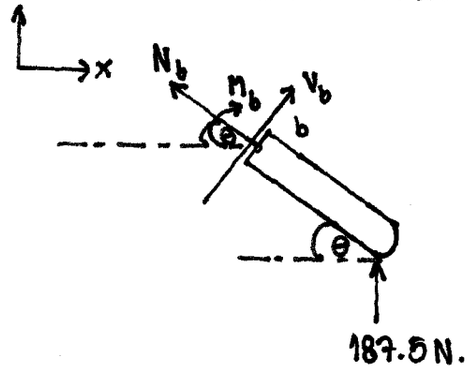
$V_a = 362.39$ N.

$N_a = -203.29$ N.

ข) หาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ที่หน้าตัด (b)



1) เลือกพิจารณาชิ้นส่วนด้านขวา ;



$(+\circlearrowleft) \Sigma M_b = 0$; $187.5(3\cos 53.13^\circ) - M_b = 0$ ——— (1)

$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0$; $V_b \cos 36.87^\circ - N_b \cos 53.13^\circ = 0$ ——— (2)

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$; $187.5 + V_b \sin 36.87^\circ + N_b \sin 53.13^\circ = 0$ ——— (3)

แก้สมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร ได้ผลลัพธ์

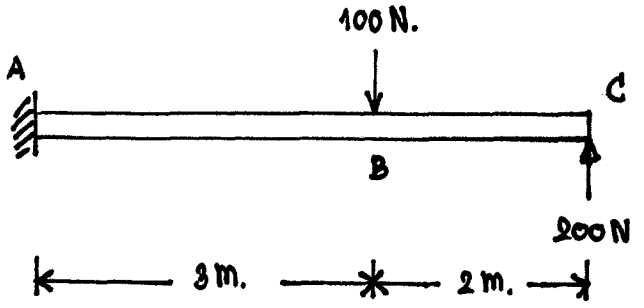
$M_b = +337.5$ N.m

$N_b = -150.0$ N.

$V_b = -112.5$ N.

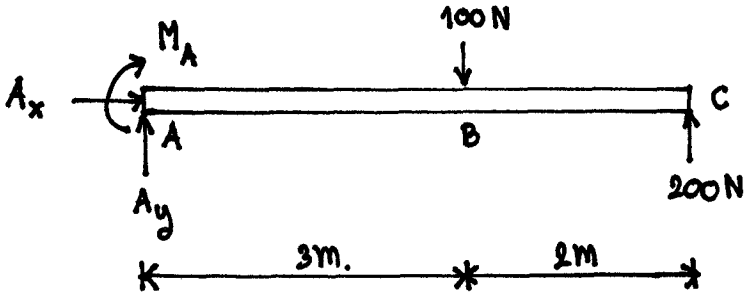
Classwork # 17

จงเขียนสมการของแรงภายใน คาน ABC และวาด Shear diagram & Bending Moment diagram.



วิธีทำ

1) เขียน FBD



2) หาแรงปฏิกิริยาที่ A

- พิจารณาสมการสมดุล

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ A_y + 200 - 100 = 0$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\ A_x = 0$

$\curvearrowleft +\Sigma M_A = 0;\ -M_A + 200(5) - 100(3) = 0$

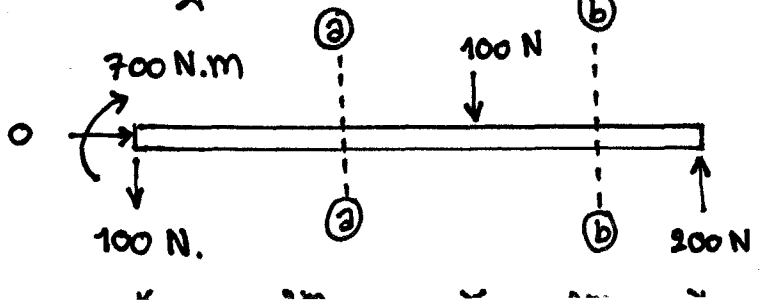
แก้สมการ จะได้

$A_x = 0$

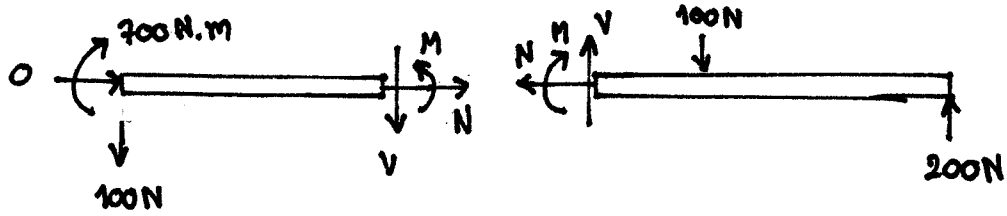
$A_y = 100$ N. ($\downarrow$)

$M_A = 700$ N.m. ($\circlearrowleft$)

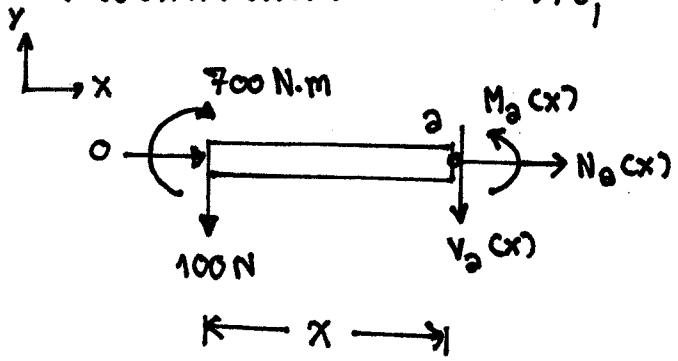
3) หาแรงปฏิกิริยาภายใน FBD



4) หาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ที่หน้าตัด ⓐ



ⅱ) เลือกพิจารณาชิ้นส่วนด้านซ้าย; $0 < x < 3$



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\ N_a(x) = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ -V - 100 = 0$

$\circlearrowleft_+ \Sigma M_a = 0;\ M_a(x) - 700 + 100(x) = 0$

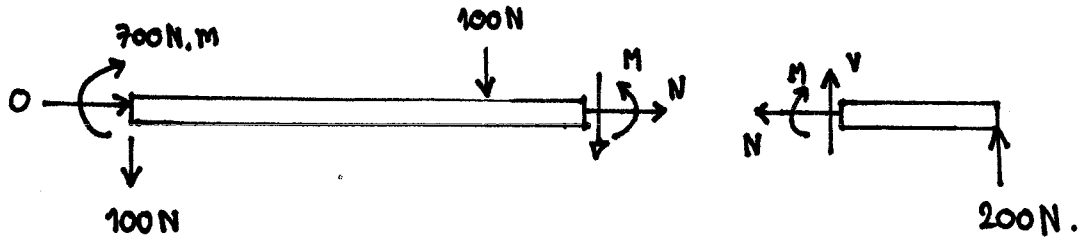
จะได้

$N_a(x) = 0$

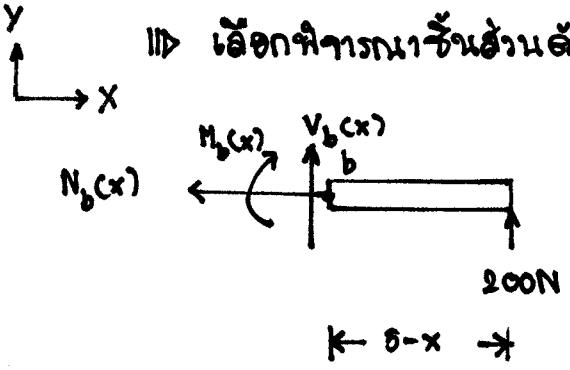
$V_a(x) = -100$ N.

$M_a(x) = (700 - 100x)$ N.m

5) หาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ที่หน้าตัด ⓑ



ⅱ) เลือกพิจารณาชิ้นส่วนด้านขวา; $3 < x < 5$



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\ N_b(x) = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_b(x) + 200 = 0$

$\circlearrowleft_+ \Sigma M_b = 0;\ -M_b(x) + 200(5 - x) = 0$

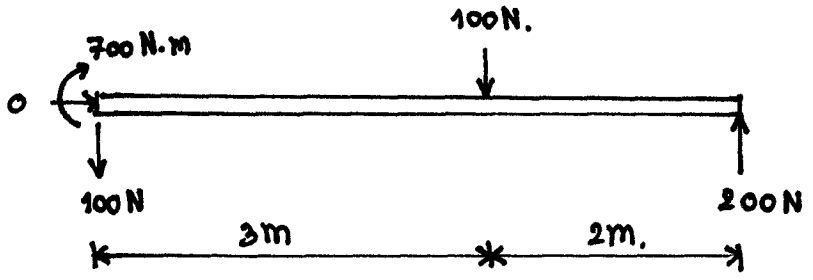
จะได้

$N_b(x) = 0$

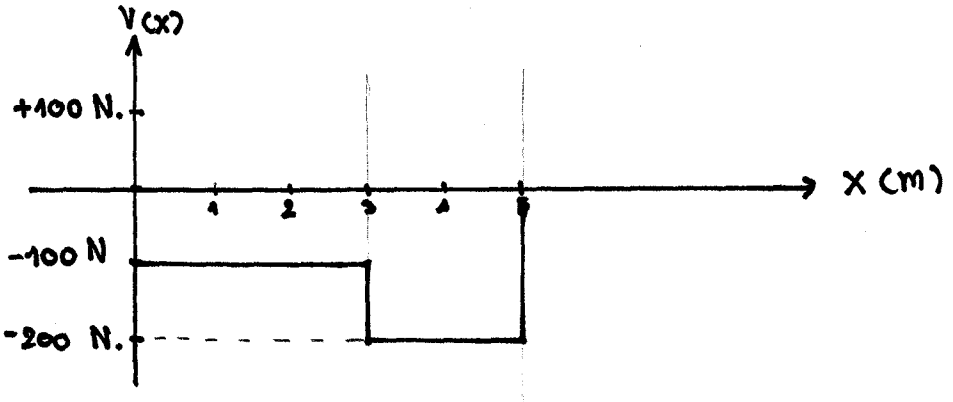
$V_b(x) = -200$ N.

$M_b(x) = (1000 - 200x)$ N.m.

6) เขียน Shear diagram & Bending Moment diagram ของชิ้นส่วน ABC.



Shear diagram



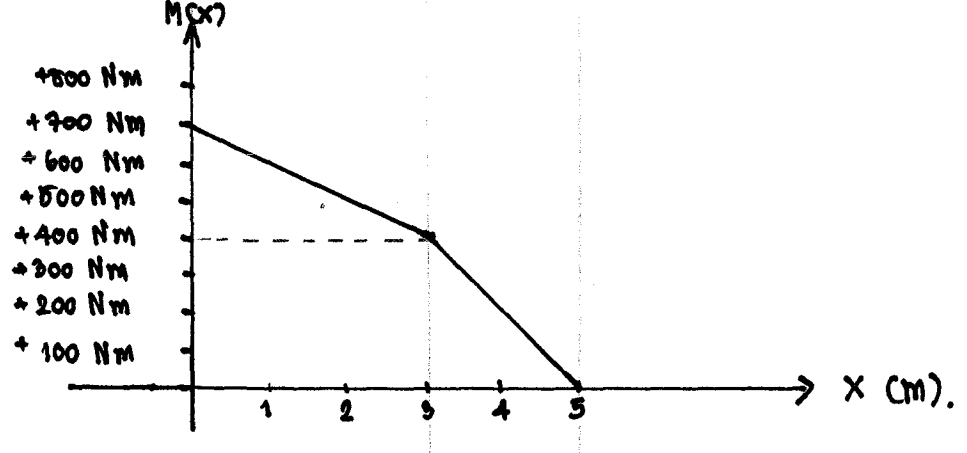
$0 < x < 3\,m$

$V_a(x) = -100\ N.$

$3m < x < 5m$

$V_b(x) = -200\ N.$

Bending Moment diagram



$0 < x < 3\,m$

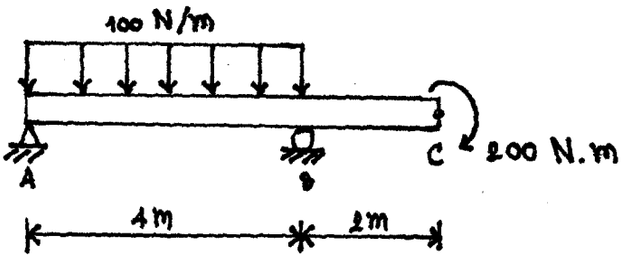
$M_a(x) = (700 - 100x)\ N.m$

$3m < x < 5m$

$M_b(x) = (1000 - 200x)\ N.m.$

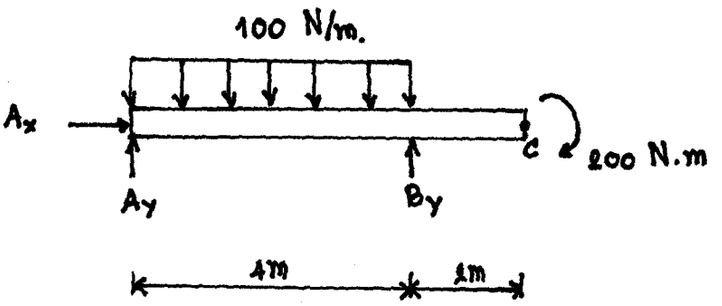
Classwork #18.

จงเขียนสมการของแรงภายในคาน ABC และวาด shear diagram & Bending Moment diagram.



วิธีทำ

1) เขียน FBD



2) หาแรงปฏิกิริยา

ⓐ พิจารณาสมการสมดุล

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0;$ $\quad B_y(4) - 100(4)(2) - 200 = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad A_y + B_y - 100(4) = 0$

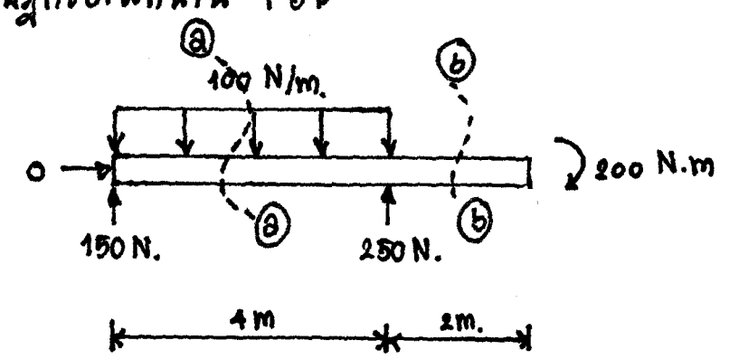
$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $\quad A_x = 0$

สามารถแก้สมการได้ $\quad A_x = 0$

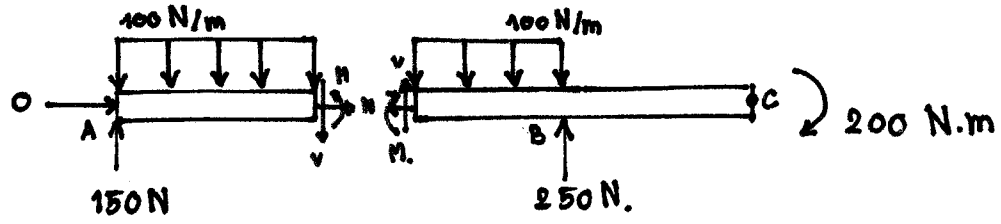
$A_y = 150$ N. (↑)

$B_y = 250$ N. (↑)

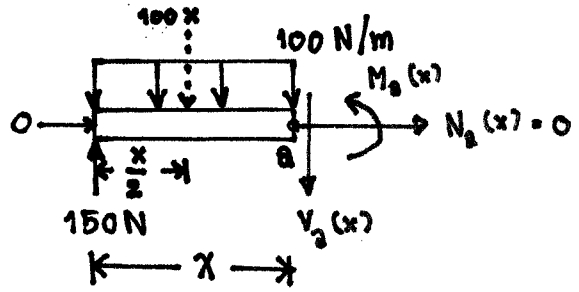
3) นำแรงปฏิกิริยามาเขียน FBD



4) หาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ; ช่วง AB ที่ $0 < x < 4$ m



II) เลือกชิ้นส่วนด้านซ้าย พิจารณา.



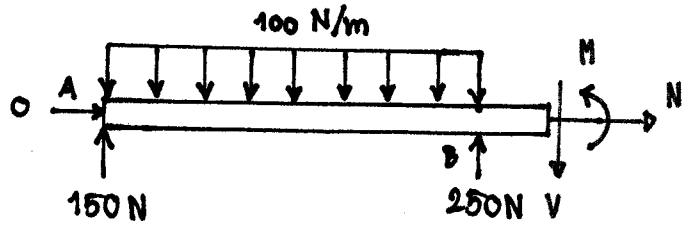
$\curvearrowleft + \sum M_a = 0$; $M_a(x) + 100x\left(\frac{x}{2}\right) - 150x = 0$

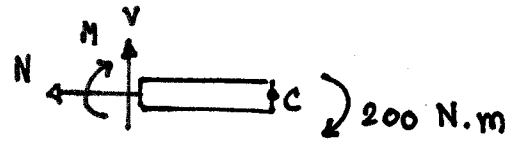
$M_a(x) = -50x^2 + 150x$ N.

$+\uparrow \sum F_y = 0$; $-V_{a(x)} - 100(x) - 150 = 0$

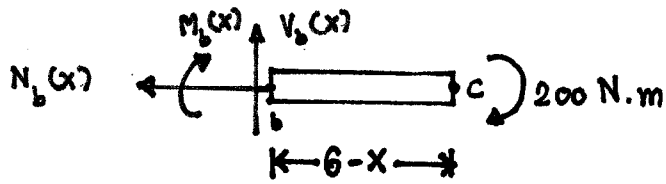
$V_a(x) = -100x + 150$. N.m

5) หาแรงภายในชิ้นส่วน ABC ; ช่วง BC ที่ $4 < x < 6$ m.





II) เลือกชิ้นส่วนด้านขวา พิจารณา



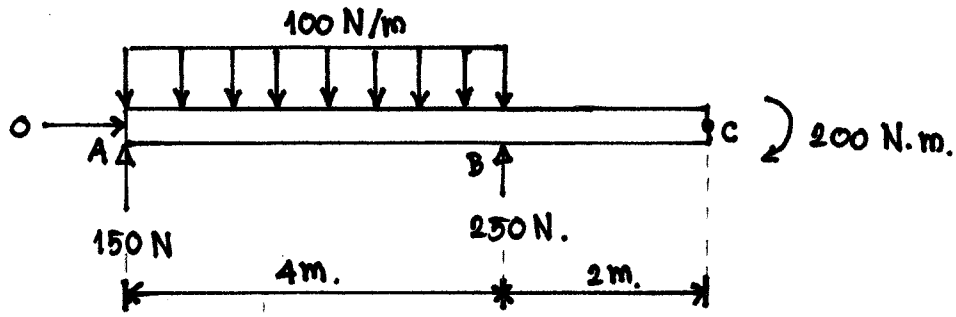
$\curvearrowright + \sum M_b = 0$; $-M_b(x) - 200 = 0$

$M_b(x) = -200$ N.

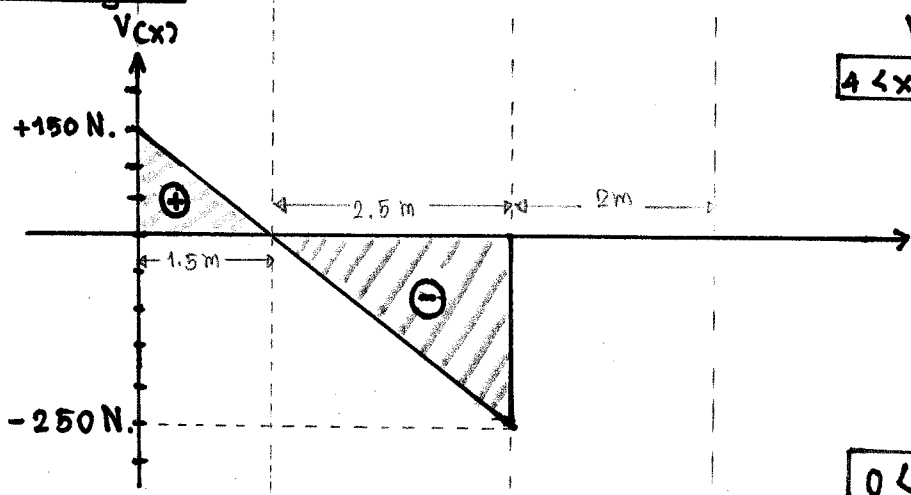
$+\uparrow \sum F_y = 0$; $V_b(x) = 0$

$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0$; $N_b(x) = 0$

6) เขียน Shear diagram & Bending Moment diagram.



ID Shear diagram



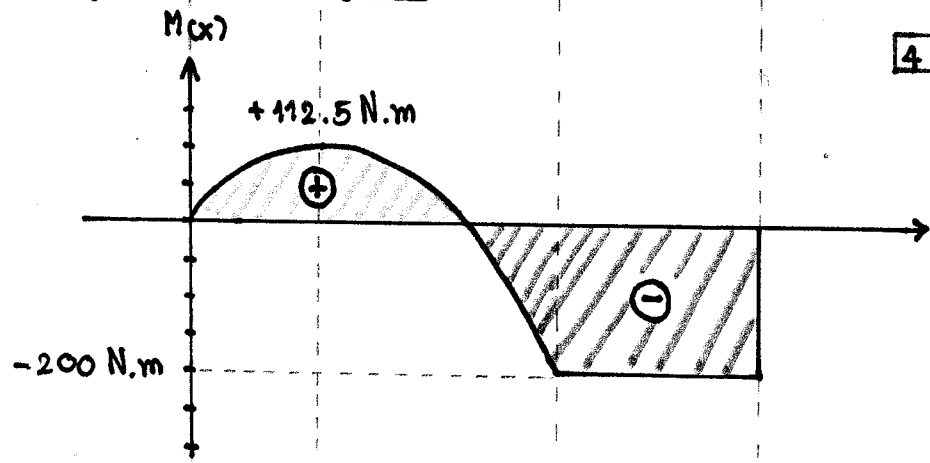
$\boxed{0 < x < 4\,m.}$

$V_a(x) = -100x + 150$ N.

$\boxed{4 < x < 6\,m.}$

$V_b(x) = 0$

ID Bending Moment diagram



$\boxed{0 < x < 4\,m}$

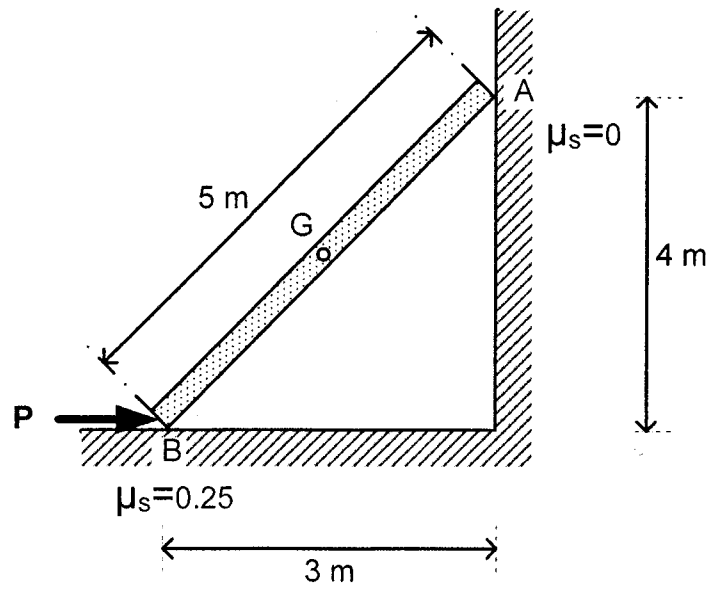
$M_a(x) = -50x^2 + 150x$ N.m

$\boxed{4 < x < 6\,m}$

$M_b(x) = -200$ N.m

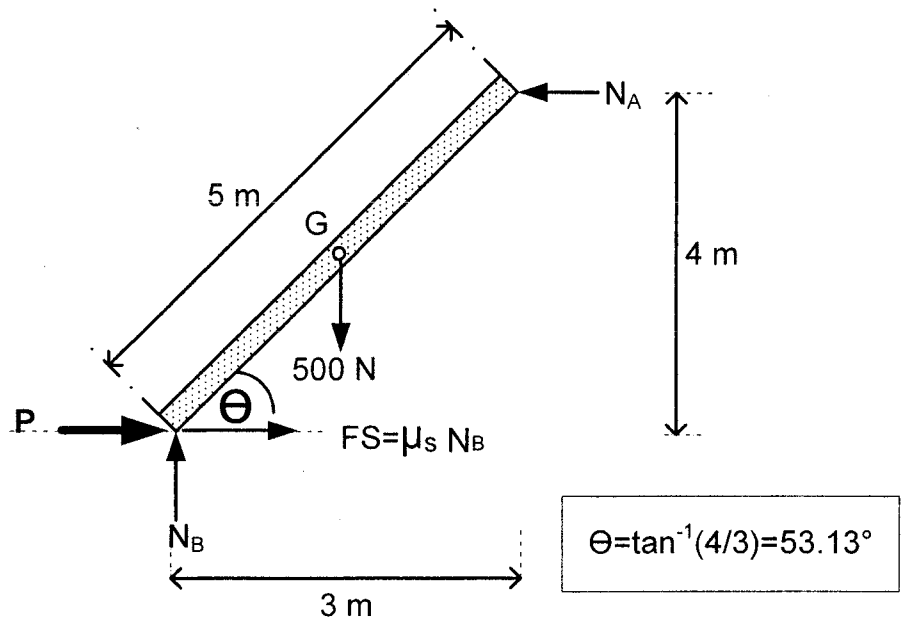
Classwork # 19

จงหา **P** ที่ทำให้ท่อนไม้เริ่มขยับเลื่อนลง เมื่อกำหนด ท่อนไม้หนัก **500 N**



วิธีทำ

1.เขียน FBD



2.เขียนสมการสมดุล

$+\rightarrow \Sigma F_x=0$; $-N_A+P+(0.25N_B)=0$ ……①

$+\uparrow \Sigma F_y=0$; $N_B-500=0$ ……②

$+\circlearrowleft \Sigma M_B=0$; $-(2.5\cos 53.13)(500)+(4)N_A=0$ ……③

3.แก้สมการหาค่าตัวแปร

N_A= 187.50 N

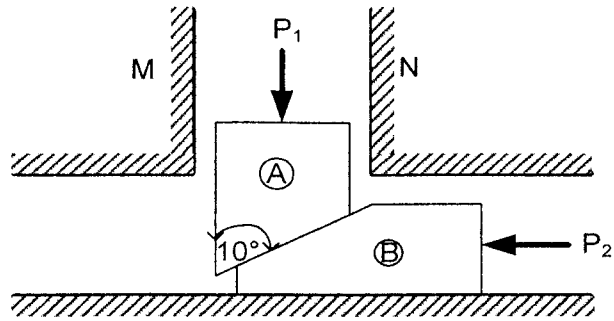
N_B= 500.00 N

P = 62.50 N

✌ ✌ สรุปคำตอบ เมื่อออกแรง 62.50 N ท่อนไม้จะเริ่มขยับเลื่อนลง ✌ ✌

Classwork#20

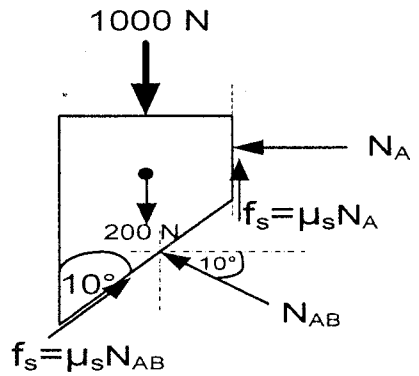
กล่อง A หนัก 200 N. กล่อง B หนัก 500 N. และ $\mu s = 0.25$ ทุกพื้นผิวสัมผัส ที่กล่อง A มีแรง P_1 =1000 N กระทำดังรูป จงหาว่าต้องออกแรง P2 เท่าไหร่ จึงจะทำให้กล่อง A เริ่มขยับลง



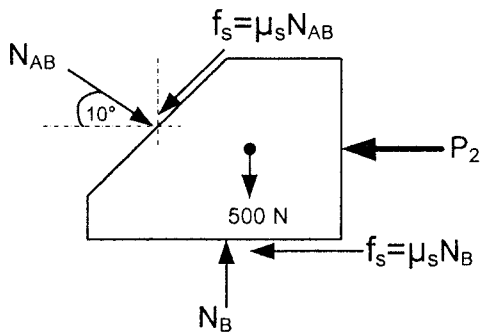
<u>วิธีทำ</u>

<u>FBD</u> เมื่อกล่อง A ขยับลง

พิจารณากล่อง A:



พิจารณากล่อง B:



พิจารณาสมการสมดุลของกล่อง A:

$+\rightarrow \Sigma Fx=0;\ -N_A-N_{AB}\cos 10^\circ + 0.25\cos 10^\circ = 0$ .....①

$+\uparrow \Sigma Fy=0;\ 0.25N_A+N_{AB}\sin 10^\circ+0.25N_{AB}\cos 10^\circ -1000-200 = 0$ .....②

พิจารณาสมการสมดุลของกล่อง B:

$+\rightarrow \Sigma Fx=0;\ -0.25N_{AB}\sin 10^\circ +N_{AB}\cos 10^\circ -0.25N_B -P_2 = 0$ .....③

$+\uparrow \Sigma Fy=0;\ -N_{AB}\sin 10^\circ -0.25N_{AB}\cos 10^\circ +N_B-500 = 0$ .....④

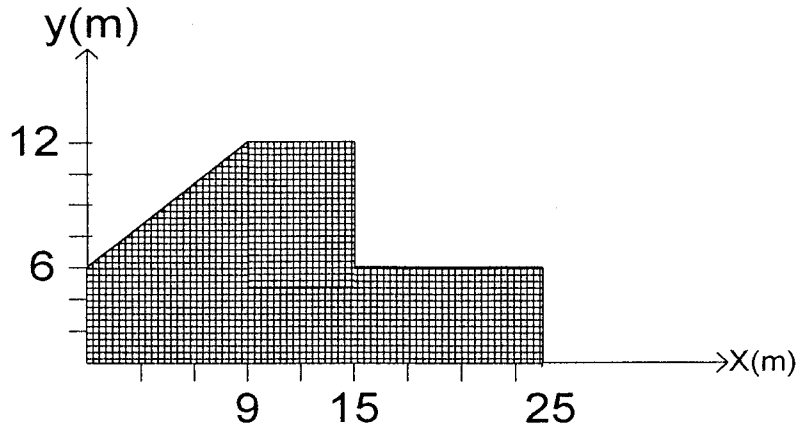
แก้สมการ 4 สมการ 4 ตัวแปรไม่ทราบค่า

N_A= -6122.86 N ;N_{AB}= 6504.02 N ;N_B=3230.72 N ;P_2 = 5315.18 N

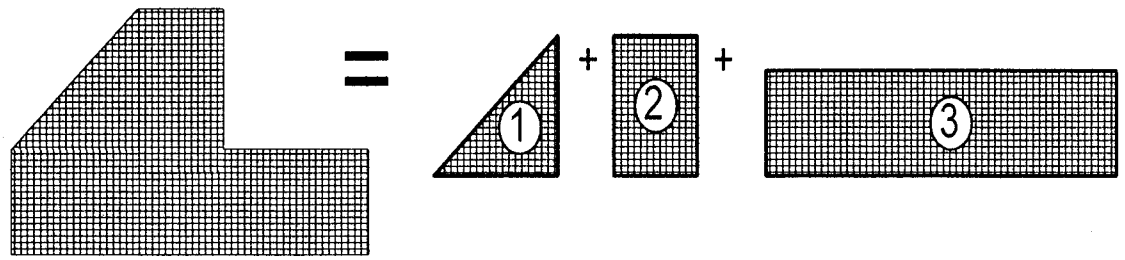
✌ ✌ .....<u>สรุปคำตอบ</u> **ต้องออกแรง** $P_2 = 5315.18\ N$ **กล่อง A จึงเริ่มขยับลง** ..... ✌ ✌

Classwork#21

จงหาจุดศูนย์กลางของพื้นที่



วิธีทำ



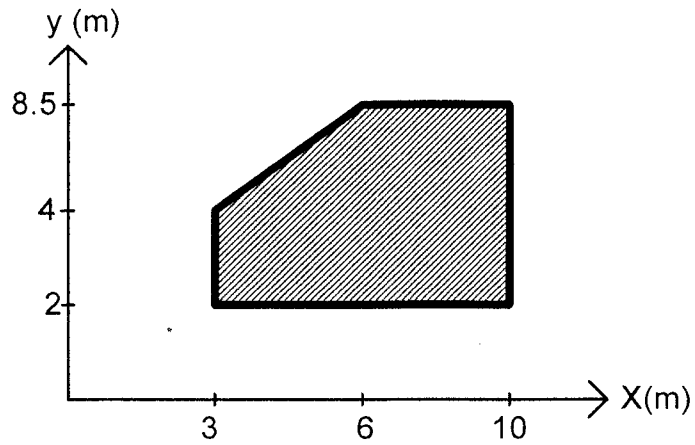
ลำดับ,i	พื้นที่,A_i (m^2)	$\bar{x}_i$ (m)	$\bar{y}_i$ (m)	$\bar{x}_iA_i$ (m^3)	$\bar{y}_iA_i$ (m^3)
1	½(9)(6)=27	6	8	162	216
2	(6)(6)=36	12	9	432	324
3	(25)(6)=150	12.5	3	1875	450
	Σ = 213			Σ = 2469	Σ = 990

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(\bar{x}_iA_i)}{\Sigma A_i} = \frac{2469}{213} = 11.591 \text{ m} \quad \text{.....} \Leftarrow$$

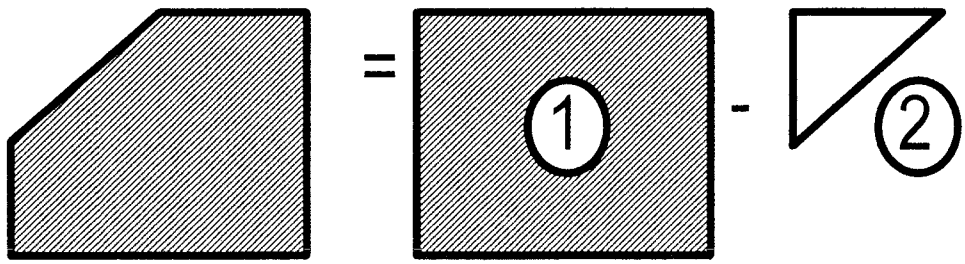
$$\bar{y} = \frac{\Sigma(\bar{y}_iA_i)}{\Sigma A_i} = \frac{990}{213} = 4.648 \text{ m} \quad \text{.....} \Leftarrow$$

Classwork#22

จงหา Iy ของพื้นที่ พร้อมหาพิกัดของจุดศูนย์กลางของพื้นที่



วิธีทำ



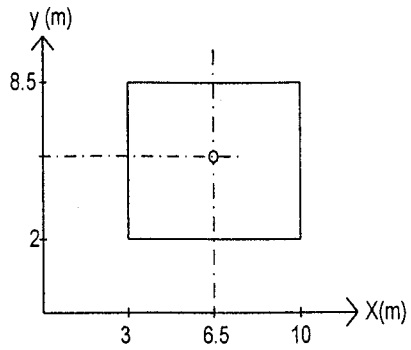
◎หาพิกัดของจุดศูนย์กลางของพื้นที่;

ลำดับ,i	พื้นที่,A_i (m^2)	$\bar{x}_i$ (m)	$\bar{y}_i$ (m)	$\bar{x}_iA_i$ (m^3)	$\bar{y}_iA_i$ (m^3)
1 ⊕	(7)(6.5)=45.5	6.5	5.25	⊕295.75	⊕238.875
2 ⊖	½(4.5)(3)=6.75	4	7	⊖ 27	⊖47.25
	Σ = 38.75			Σ = 268.75	Σ = 191.625

$$\bar{x} = \frac{\Sigma(\bar{x}_iA_i)}{\Sigma A_i} = \frac{268.75}{38.75} = 6.935 \text{ m} \quad \text{.....} \Leftarrow$$

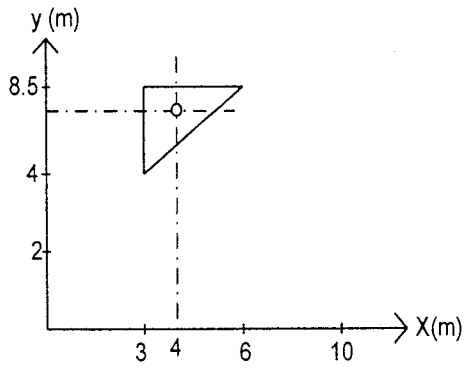
$$\bar{y} = \frac{\Sigma(\bar{y}_iA_i)}{\Sigma A_i} = \frac{191.625}{38.75} = 4.945 \text{ m} \quad \text{.....} \Leftarrow$$

◎หา Iy ของพื้นที่



$$Iy_1' = (1/12)(6.5)(7)^3 = 185.792\ m^4$$

$$Iy_1 = 185.792 + (45.5)(6.5^2) = 2108.167\ m^4$$



$$Iy_2' = (1/36)(4.5)(3)^3 = 3.375\ m^4$$

$$Iy_2 = 3.375 + (6.75)(4^2) = 111.375\ m^4$$

$Iy_{,รวม} = Iy_1 - Iy_2$

$= 2108.167 - 111.375$

$= 1996.792\ m^4$ .....⇦