ดังนั้น ถ้า Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $\Delta y - dy$ จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ด้วย นั่นคือ ถ้าค่าของ Δx มีค่าน้อยมาก ๆ เราสามารถประมาณค่า Δy ได้ด้วย dy

เพราะฉะนั้น $\Delta y \approx dy$ เมื่อ Δx มีค่าน้อยมาก ๆ $(\Delta x \approx 0)$

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.2</u> กำหนดให้ $y = 2x^2 + x - 1$

จงหา dy และ Δy เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = dx = 0.1$

<u>วิธีทำ</u> จาก $y = f(x) = 2x^2 + x - 1$ และ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left(2(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 1\right) - \left(2x^2 + x - 1\right)\\ &= \left(2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1\right) - \left(2x^2 + x - 1\right)\\ &= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 1 - 2x^2 - x + 1\\ &= (4x+1)\Delta x + 2(\Delta x)^2\end{aligned}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$ จะได้ $\Delta y = (4(1)+1)0.1 + 2(0.1)^2 = 0.52$

จาก $dy = f'(x)dx$ ดังนั้น $dy = \dfrac{d}{dx}\left[2x^2 + x - 1\right]dx = (4x+1)dx$

แทนค่า $x = 1$ และ $\Delta x = 0.1$ จะได้ $dy = (4(1)+1)0.1 = 0.5$ □

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.3</u> จงเปรียบเทียบค่าของ Δy และ dy ถ้ากำหนดให้

$$y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 3$$

1.) x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.05

2.) x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.01

<u>วิธีทำ</u> 1.) จาก $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 3$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

และ $\Delta x = 2.05 - 2 = 0.05$

พิจารณา $f(2) = 2(2)^3 - (2)^2 + 2(2) + 3 = 19$

และ $f(2.05) = 2(2.05)^3 - (2.05)^2 + 2(2.05) + 3 = 20.12775$

ดังนั้น $\Delta y = f(2.05) - f(2) = 1.12775$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จาก

$$dy = f'(x)dx = \frac{d}{dx}\left[2x^3 - x^2 + 2x + 3\right]dx$$
$$= \left(6x^2 - 2x + 2\right)dx$$

แทนค่า $x = 2$ และ $dx = \Delta x = 0.05$ จะได้

$$dy = \left(6(2)^2 - 2(2) + 2\right)\left(0.05\right) = 1.1$$

ดังนั้น $\Delta y - dy = 1.12775 - 1.1 = 0.02775$

2.) จาก $\Delta x = 2.01 - 2 = 0.01$ และ

$$f(2.01) = 2(2.01)^3 - (2.01)^2 + 2(2.01) + 3 = 19.221102$$

ดังนั้น $\Delta y = f(2.01) - f(2) = 19.221102 - 19 = 0.221102$

และ $dy = \left(6(2)^2 - 2(2) + 2\right)\left(0.01\right) = 0.22$

ดังนั้น $\Delta y - dy = 0.221102 - 0.22 = 0.001102$

จากข้อ (1) และข้อ (2) เปรียบเทียบค่าของ Δy และ dy เราจะเห็นว่าเมื่อค่าของ Δx มีค่าน้อย ค่าของ Δy และ dy มีค่าใกล้เคียงกัน □

<u>**ตัวอย่างที่ 3.7.4**</u> จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[4]{17}$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(x) = x^{1/4}$ ดังนั้น $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{1/4}\right] = \frac{1}{4x^{3/4}}$

จากความสัมพันธ์ $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y \approx dy$

ดังนั้น $f(x + \Delta x) \approx dy + f(x) = f'(x)\Delta x + f(x)$

เราต้องการหา $\sqrt[4]{17} = f(17)$ เลือก $x = 16$ และ $\Delta x = 1$

ดังนั้น $f(16) = \sqrt[4]{16} = 2$ และ $f'(16) = \frac{1}{4(16)^{3/4}} = \frac{1}{32}$

จาก $f(x + \Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x)$

จะได้ $f(16 + 1) \approx f'(16)(1) + f(16) = \frac{1}{32} + 2 \approx 2.03125$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[4]{17} \approx 2.03125$ □

<u>สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์</u>

1) $dc = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

2) $d(ku) = kdu$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

3) $d(u+v) = du + dv$

4) $d(uv) = udv + vdu$

5) $du^n = nu^{n-1}du$

6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ ถ้า $v \neq 0$

7) $de^u = e^u du$

8) $da^u = a^u \ln a\, du$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ที่มากกว่าศูนย์

9) $d\ln u = \frac{1}{u}du$

10) $d\sin u = \cos u\, du$

11) $d\cos u = -\sin u\, du$

12) $d\tan u = \sec^2 u\, du$

<u>ตัวอย่างที่ 3.7.5</u> จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = e^{-3x}$

$$\begin{aligned} dy &= de^{-3x} \\ &= e^{-3x}d(-3x) \\ &= -3e^{-3x}dx \end{aligned}$$

2. $y = \cos(2x)$

$$\begin{aligned} dy &= d\cos(2x) \\ &= -\sin(2x)d\left(2x\right) \\ &= -2\sin(2x)dx \end{aligned}$$

3. $y=\sin^3(5x)$

$$\begin{aligned} dy &= d\sin^3(5x) \\ &= 3\sin^2(5x)d\left(\sin(5x)\right) \\ &= 3\sin^2(5x)\cos(5x)d(5x) \\ &= 15\sin^2(5x)\cos(5x)dx \end{aligned}$$

□

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัดที่ 3.4

1) จงหาดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1.1) $y = \sin(3x+4)$

(1.2) $y = \ln(\cos x)$

(1.3) $y = x + \sqrt[3]{x}$

(1.4) $y = 3^x + 1$

(1.5) $y = (\tan x + 1)^3$

(1.6) $y = \left(x^{10} + \sqrt{\sin 2x}\right)^2$

2) กำหนด $y = x^3 + 1$ จงหา dy เมื่อ

(2.1) $x = 1, \quad dx = 0.5$

(2.2) $x = -2, \quad dx = 0.75$

3) ถ้า $y = x^4 + 2x$ จงหาค่าของ dy และ Δy เมื่อ

(3.1) $x = 2$ และ $dx = \Delta x = 1$

(3.2) $x = 2$ และ $dx = \Delta x = 0.005$

4) จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ประมาณค่าของ

(4.1) $\sqrt{52}$

(4.2) $\sqrt[3]{26}$

(4.3) $\sqrt{35.9}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 4

ฟังก์ชันอดิศัยและหลักเกณฑ์โลปีตาล

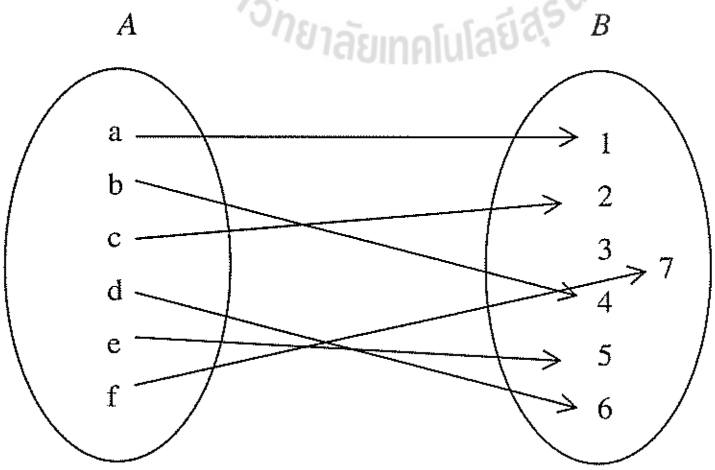
(Transcendental Functions and L'Hospital's Rule)

ฟังก์ชันอดิศัย คือ ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต ซึ่งในที่นี้เราจะพูดถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ก่อนอื่นจะขอทบทวนในเรื่องของฟังก์ชันผกผันก่อน

4.1 ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Functions)

เราจะกล่าวว่า $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B ถ้าสำหรับทุก ๆ สมาชิก $x \in A$ จะมีสมาชิก $y \in B$ เพียงสมาชิกเดียวที่ทำให้ $y = f(x)$ (ดูรูปที่ 4.1.1)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูปที่ 4.1.1

จากเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ สำหรับการมีฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f คือ ฟังก์ชัน f จะต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันทั่วถึง

<u>บทนิยามที่ 4.1.1</u>

ให้ $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชัน

(1) ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B** ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$

หรือจะเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า

ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

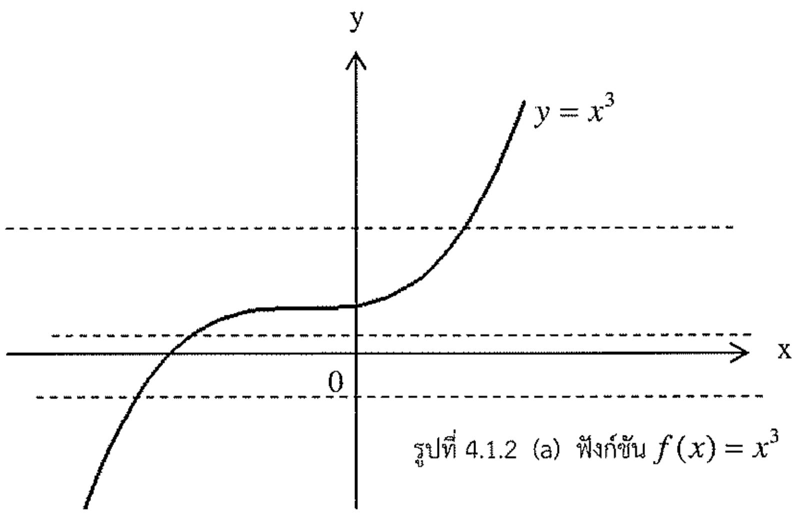
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

(2) ฟังก์ชัน f เรียกว่า **ฟังก์ชันทั่วถึง (onto function)** ถ้าโดเมนร่วมเกี่ยว (codomain) ของฟังก์ชัน f เท่ากับเรนจ์ของฟังก์ชัน f นั่นคือ

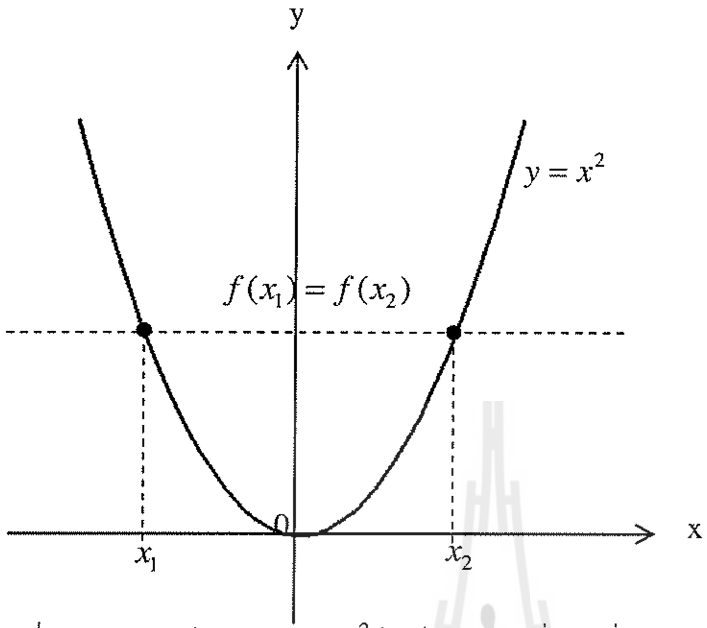
$$f(A) = B$$

หรือ $\forall b \in B, \quad \exists a \in A$ โดยที่ $f(a) = b$

ในการตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เราสามารถตรวจสอบโดยดูจากกราฟของฟังก์ชัน f นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ไม่มีเส้นแนวนอน (horizontal line) ที่ตัดกับกราฟของฟังก์ชัน f มากกว่าหนึ่งจุด (ดูรูปที่ 4.1.2 (a)-(b))



รูปที่ 4.1.2 (a) ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



รูปที่ 4.1.2 (b) ฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

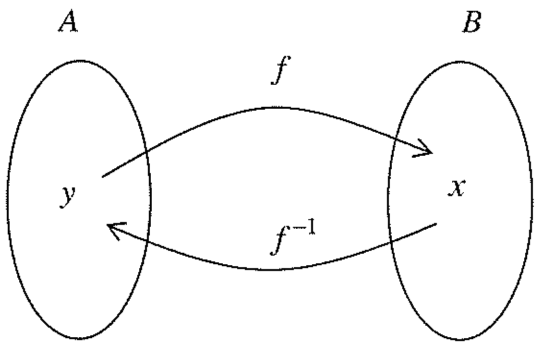
<u>บทนิยามที่ 4.1.2</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B แล้ว ฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} ซึ่งมี โดเมนเป็นเซต B และมีเรนจ์เป็นเซต A นิยามโดย

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \qquad .....(4.1.1)$$

สำหรับทุกๆ $x \in B$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทนิยาม 4.1.2 กล่าวว่า ถ้า f มีการส่ง y ไปยัง x แล้ว f^{-1} จะมีการส่ง x กลับมายัง y ดังรูป



รูปที่ 4.1.3

ข้อสังเกต โดเมนของ f^{-1} = เรนจ์ของ f

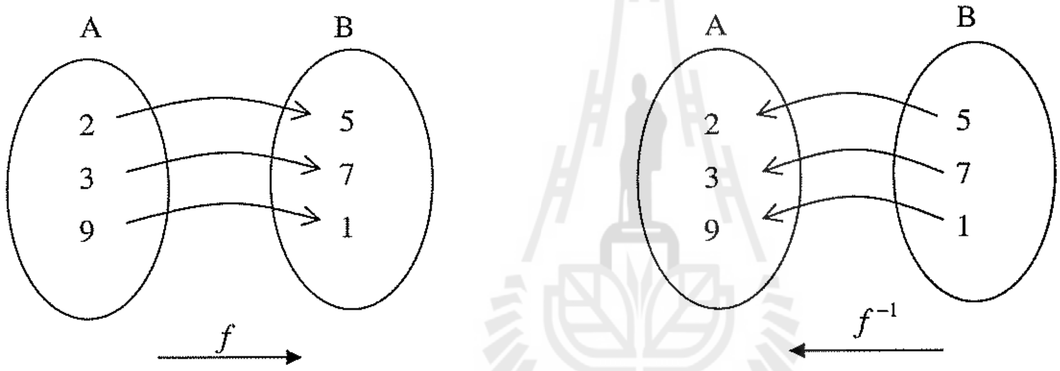
เรนจ์ของ f^{-1} = โดเมนของ f

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=x^3$ คือ $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{3}}$ เนื่องจาก ถ้า $y=x^{\frac{1}{3}}$ แล้ว

$$f(y)=f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=x$$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.1**</u> ถ้า $f(2)=5,\ f(3)=7,$ และ $f(9)=1$ แล้ว

$f^{-1}(5)=2,\ \ f^{-1}(7)=3,\ \ f^{-1}(1)=9$ (ดูรูปที่ 4.1.3) □



รูปที่ 4.1.3

<u>**ทฤษฎีบทที่ 4.1.3**</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงใดช่วงหนึ่ง และ $f'(x)>0$ หรือ $f'(x)<0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง สำหรับทุก ๆ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f แล้วฟังก์ชัน f จะมีฟังก์ชันผกผัน

ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด อย่างใดอย่างหนึ่งบนโดเมน แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ f จะมีฟังก์ชันผกผัน ดังนั้นเราสามารถตรวจสอบการมีฟังก์ชันผกผันของ f ได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 4.1.3

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.2**</u> กำหนด $f(x)=2x-1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f'(x)=2>0$ สำหรับทุก x บนเซตของจำนวนจริง
ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1}
ให้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x=f(y)=2y-1$
เพราะฉะนั้น $\dfrac{x+1}{2}=y=f^{-1}(x)$
ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=2x-1$ คือ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.3**</u> กำหนด $f(x)=x^3-1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(0,\infty)$ หรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f'(x)=3x^2>0$ สำหรับทุก $x\in(0,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จากทฤษฎีบทที่ 4.1.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1}
ให้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x=f(y)=y^3-1$
เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{x+1}=y=f^{-1}(x)$
ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=x^3-1$ คือ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.4**</u> กำหนด $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ เมื่อ $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ หรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

<u>วิธีทำ</u> จาก $f'(x)=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลด จากทฤษฎีบทที่ 4.1.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ f มีฟังก์ชันผกผัน เขียนแทนด้วย f^{-1}

ให้ $y=f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x=f(y)=\dfrac{2y+1}{y-1}$

เพราะฉะนั้น $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ ดังนั้นฟังก์ชันผกผันของ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ คือ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ □

ทฤษฎีบทที่ 4.1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1} แล้วฟังก์ชัน f และ f^{-1} มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$

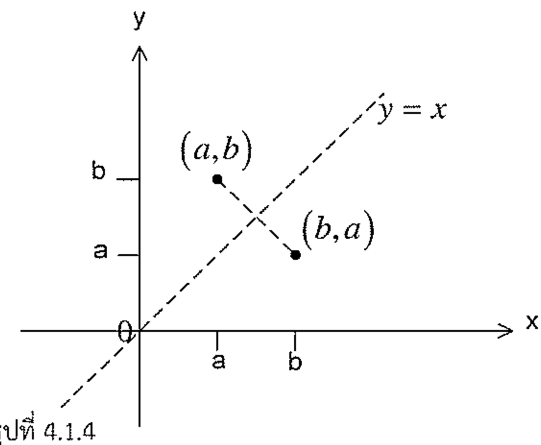
(2) $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ เมื่อ x อยู่บนโดเมนของฟังก์ชัน f

(3) $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ เมื่อ x อยู่บนโดเมนของฟังก์ชัน f^{-1}

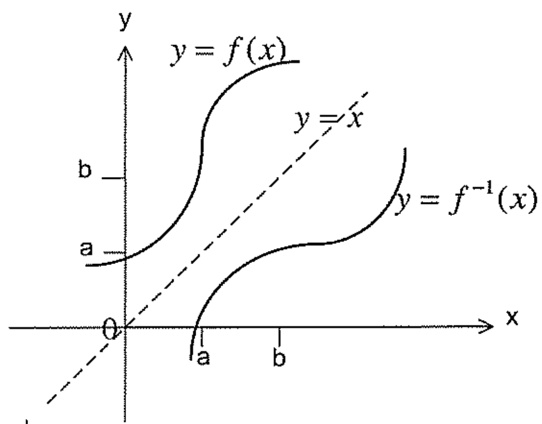
กราฟของฟังก์ชันผกผัน (Graphs of Inverse Functions)

ถ้าจุด (a,b) เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f แล้ว $f(a)=b$ และจะได้ $f^{-1}(b)=a$ นั่นก็คือ จุด (b,a) เป็นจุดที่อยู่บนกราฟของ f^{-1}

เนื่องจาก จุด (b,a) จุดสะท้อนของจุด (a,b) เมื่อเทียบกับเส้นตรง $y=x$ (ดูรูปที่ 4.1.4) ดังนั้นเราสามารถเขียนกราฟของ f^{-1} ได้โดยการสะท้อนกราฟของ f เทียบกับเส้นตรง $y=x$ (ดูรูปที่ 4.1.5)



รูปที่ 4.1.4



รูปที่ 4.1.5

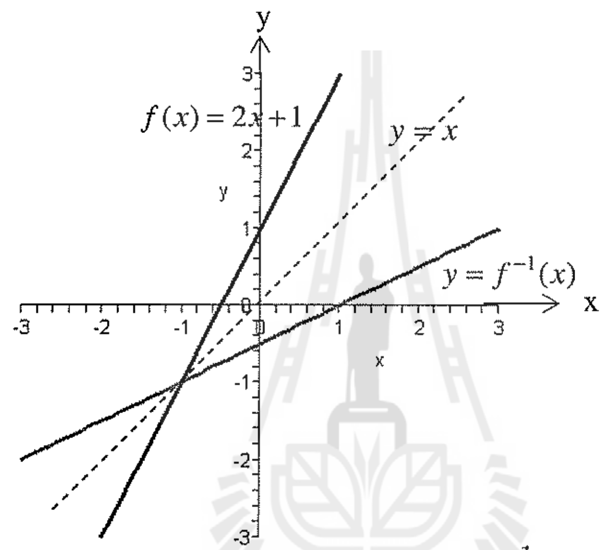
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>ตัวอย่างที่ 4.1.5</u> จงร่างกราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} บนระนาบพิกัดเดียวกัน เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ดังต่อไปนี้

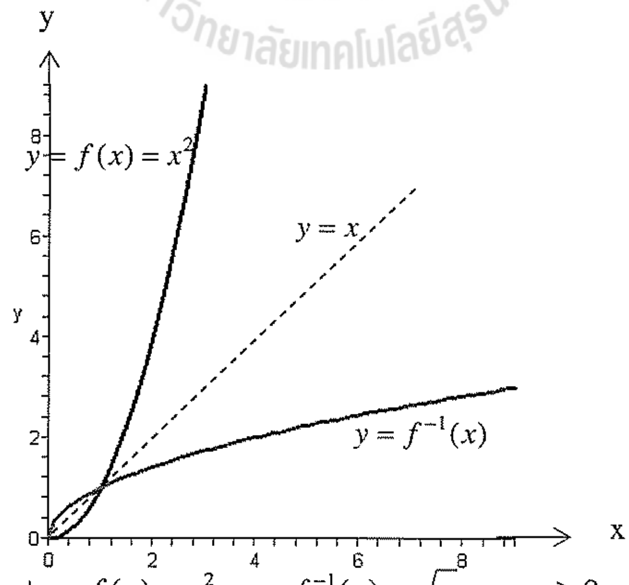
(1) $f(x) = 2x+1$

(2) $f(x) = x^2, \qquad x \geq 0$

<u>วิธีทำ</u> ในการร่างกราฟของ f^{-1} ในแต่ละข้อ เราจะพิจารณาโดยการสะท้อนกราฟของ f เทียบกับเส้นตรง $y = x$ กราฟของ f และ f^{-1} แสดงได้ดังต่อไปนี้ (ดูรูปที่ 4.1.6 (a)-(b))



รูปที่ 4.1.6 (a) กราฟของ $f(x) = 2x+1$ และ $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$



รูปที่ 4.1.6 (b) กราฟของ $f(x) = x^2$ และ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \qquad x \geq 0$

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน</u> (Derivatives of Inverse Functions)

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.1.5</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I ถ้า f มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1} แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของ f แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนของ f^{-1}

(2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนโดเมนของ f แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนโดเมนของ f^{-1}

(3) ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดบนโดเมนของ f แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันลดบนโดเมนของ f^{-1}

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้วจากทฤษฎีบทที่ 4.1.5 จะได้ว่า ฟังก์ชัน f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย และจากกราฟของฟังก์ชัน f^{-1} เกิดจากการสะท้อนกราฟกราฟของฟังก์ชัน f เทียบกับเส้นตรง $y = x$ ดังนั้น ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f มีความเรียบ ไม่มีมุมแหลมแล้วกราฟของฟังก์ชัน f^{-1} ก็จะเรียบ ไม่มีมุมแหลมด้วยเช่นเดียวกัน จากข้อสังเกตข้างต้น เราสามารถกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันได้ดังนี้

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ให้ $y = f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x = f(y)$ โดยการหาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้ว่า

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx} f(y) \quad \Rightarrow \quad 1 = f'(y)\frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{f'(y)}$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

<u>ทฤษฎีบท 4.1.6</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและหาอนุพันธ์ได้ โดยมี f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f และ $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$ แล้วฟังก์ชันผกผัน f^{-1} หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$$

....(4.1.2)

<u>พิสูจน์</u> จากนิยามของอนุพันธ์

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a}$$

ถ้าให้ $f(b) = a$ และ $y = f^{-1}(x)$ แล้ว $f^{-1}(a) = b$ และ $x = f(y)$
เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น f มีความต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.5 (1) จะได้ว่า f^{-1} มีความต่อเนื่อง ดังนั้นถ้า $x \to a$ แล้ว $f^{-1}(x) \to f^{-1}(a)$ นั่นคือ $y \to b$
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{y - b}{f(y) - f(b)} \\
&= \lim_{y \to b} \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}} \\
&= \frac{1}{\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(y) - f(b)}{y - b}} \\
&= \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}
\end{aligned}$$

□

หมายเหตุ $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{df^{-1}}{dx}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>**ตัวอย่างที่ 4.1.6**</u> จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง บน $\mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ คือ เซตของจำนวนจริง และจงหาค่าของ $\left(f^{-1}\right)'(10)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[x^3+x\right]=3x^2+1>0$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.1.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f^{-1}(10)=a$ ดังนั้น $10=f(a)=a^3+a$

เพราะฉะนั้น $a=2$ นั่นคือ $f^{-1}(10)=2$

จาก $\left(f^{-1}\right)'(10)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(10)\right)}$ .....(4.1.3)

และ $f'(x)=3x^2+1$

แทนค่า $f'(f^{-1}(10))=f'(2)=3(2)^2+1=13$ ลงในสมการ (4.1.3) จะได้

$$\left(f^{-1}\right)'(10)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(10)\right)}=\frac{1}{13}$$ □

<u>**ตัวอย่าง 4.1.7**</u> กำหนด $f(x)=\dfrac{4x^2}{x+1}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(0,\infty)$ และจงหา $\left(f^{-1}\right)'(2)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{4x^2+8x}{(x+1)^2}>0$ สำหรับทุก $x\in(0,\infty)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.3 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f^{-1}(2)=a$ ดังนั้น $2=f(a)=\dfrac{4a^2}{a+1}$ หรือ $4a^2-2a-2=0$

เพราะฉะนั้น $a=1$ นั่นคือ $f^{-1}(2)=1$

จาก $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$ .....(4.1.4)

แทนค่า $f'(f^{-1}(2))=f'(1)=\dfrac{4(1)^2+8(1)}{(1+1)^2}=3$ ลงในสมการ (4.1.4)

จะได้ $$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{3}$$ □

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หมายเหตุ จากสมการ (4.1.2) ในทฤษฎีบทที่ 4.1.6 เราสามารถเขียนเป็นสูตรได้ใหม่ ดังนี้

จาก $y = f^{-1}(x)$ ดังนั้น $x = f(y)$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x)$$

และ

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) = f'\left(f^{-1}(x)\right) \qquad .....(4.1.5)$$

แทนค่าที่ได้ในสมการ (4.1.5) ลงในสมการ (4.1.2) จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad .....(4.1.6)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัดที่ 4.1

1) จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่ ถ้าเป็นจงหาฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ด้วย พร้อมทั้งหาโดเมนและเรนจ์ของ f และ f^{-1}

(1.1) $f(x) = x-1$

(1.2) $f(x) = 2x-1$

(1.3) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(1.4) $f(x) = -\sqrt{x-1}$

(1.5) $f(x) = 1+\sqrt[3]{x}$

(1.6) $f(x) = (1-2x)^3$

(1.7) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(1.8) $f(x) = \dfrac{1-2x}{1+x}$

(1.9) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

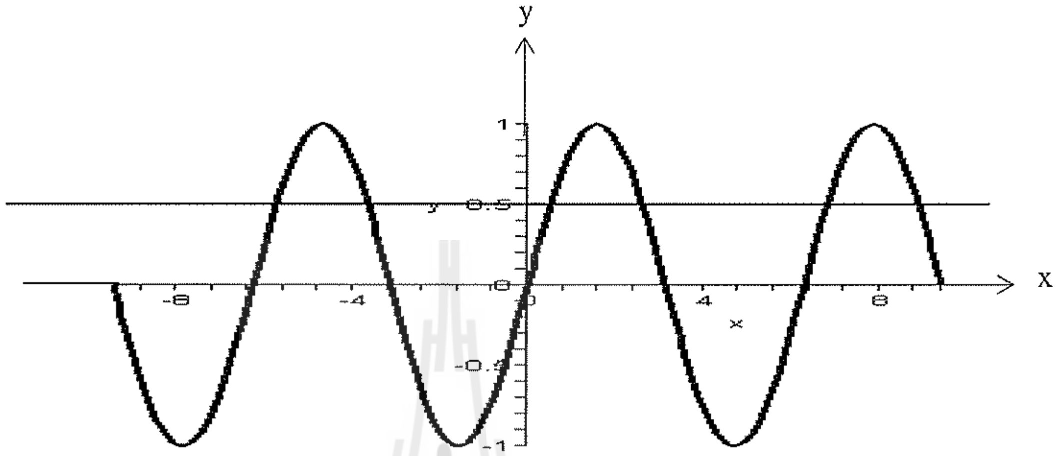
2) กำหนด $f(x) = x^3 + x$ จงหา $f^{-1}(2)$

3) กำหนด $f(x) = 1+2x^3$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และจงหา $\left(f^{-1}\right)'(3)$

4) กำหนด $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และจงหา $\left(f^{-1}\right)'(-2)$

4.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (The Inverse Trigonometric Functions)

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \sin x$ (ดูรูปที่ 4.2.1)



รูปที่ 4.2.1 กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin x, \quad -\infty < x < \infty$

เราจะเห็นว่า ฟังก์ชัน $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นฟังก์ชันไม่มีฟังก์ชันผกผัน แต่อย่างไรก็ตาม เราก็สามารถที่จะนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ได้ โดยการที่เราจำกัดโดเมนของฟังก์ชัน $y = \sin x$ โดยให้ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ เราจะเห็นว่า ฟังก์ชัน $y = \sin x$ ใหม่ที่เกิดขึ้นจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดูรูปที่ 4.2.2) ดังนั้นเราสามารถนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ได้ดังนี้

$y = \sin^{-1} x$ (หรือ $y = \arcsin x$) ก็ต่อเมื่อ $\sin y = x$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กไซน์**

โดเมนของ $\sin^{-1}$ คือ $[-1,1]$ และ เรนจ์ของ $\sin^{-1}$ คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

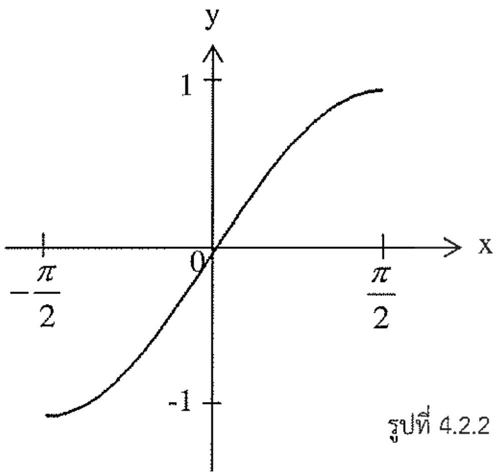
ซึ่งเรียกว่า **ค่าหลัก (principle value)** ของ $\sin^{-1}$

จาก $y = \sin^{-1} x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $y = \sin x$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.1.4 (2)-(3) จะได้

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in [-1,1] \qquad .....(4.2.1)$$

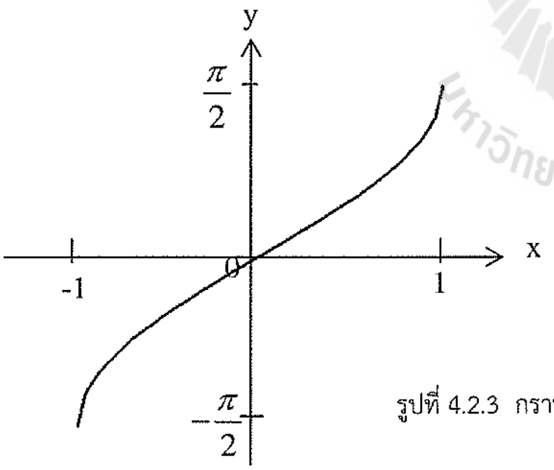
และ

$$\sin^{-1}(\sin x) = x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad .....(4.2.2)$$



รูปที่ 4.2.2 กราฟของ $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin^{-1} x$ แสดงดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 4.2.3 กราฟของ $y = \sin^{-1} x, \quad -1 \le x \le 1$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงหาค่าของ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ เราจะต้องหามุม θ ที่อยู่ในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ที่ทำให้ $\sin\theta=\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ และ $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้น $\theta=\frac{\pi}{6}$ นั่นคือ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

□

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงหาค่าของ $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

วิธีทำ เราจะต้องหามุม θ ที่อยู่ในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ที่ทำให้ $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้น $\theta=-\frac{\pi}{4}$

นั่นคือ $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{\pi}{4}$ □

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงหาค่าของ $\sin\left(\sin^{-1}(0.7)\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $0.7\in[-1,1]$ ดังนั้น โดยสมการที่ 4.2.1 จะได้ $\sin\left(\sin^{-1}(0.7)\right)=0.7$ □

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงหาค่าของ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{4\pi}{5}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้นใช้สมการที่ 4.2.2 ไม่ได้

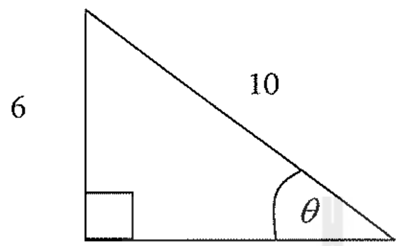
พิจารณา $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}$ ดังนั้น

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\pi}{5}$ เพราะว่า $\frac{\pi}{5}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.5</u> จงหาค่าของ $\cos\left(\sin^{-1}0.6\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta=\sin^{-1}0.6$ ดังนั้น $\sin\theta=0.6=\dfrac{6}{10}$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 4.2.4

$$\sqrt{(10)^2-(6)^2}=\sqrt{64}=8$$

จาก $\sin\theta=\dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม }\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}=\dfrac{6}{10}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ว่าความยาวของด้านประชิดมุม θ มีความยาวเท่ากับ 8

เพราะฉะนั้น $\cos(\sin^{-1}0.6)=\cos\theta=\dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม }\theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}=\dfrac{8}{10}=0.8$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.6</u> จงหาค่าของ $\sin\left(2\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta=\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ โดยที่ $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

เนื่องจาก $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ดังนั้น $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\sin\left(2\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)&=\sin(2\theta)\\&=2\sin\theta\cos\theta\\&=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\\&=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$ □

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u> $y = \sin^{-1} x$

เนื่องจาก ฟังก์ชันไซน์สามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin^{-1} x$ เมื่อ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ก็สามารถหาอนุพันธ์ได้เช่นกัน

การหาอนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1} x$ ทำได้ดังนี้

ให้ $y = \sin^{-1} x$ ดังนั้น $\sin y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ทั้งสองข้าง

จะได้ $$\frac{d}{dx}[\sin y] = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \quad \cos y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos y \ge 0$ จะได้ว่า $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

ฉะนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 1$$

นั่นคือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{เมื่อ } -1 < x < 1}$$

และ ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.7</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.) $f(x)=\sin^{-1}(4x)$

2.) $f(x)=\sin^{-1}(\cos 2x)$

<u>วิธีทำ</u> (1) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(4x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}[4x]=\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$

(2) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(\cos 2x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\cos 2x)^2}}\cdot\dfrac{d}{dx}(\cos 2x)$

$$=\frac{-2\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos^2(2x)}} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.8</u> กำหนด $y=\left(\sin^{-1}(2x)\right)^3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> ใช้กฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=3\left(\sin^{-1}(2x)\right)^2\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(2x)\right)$$

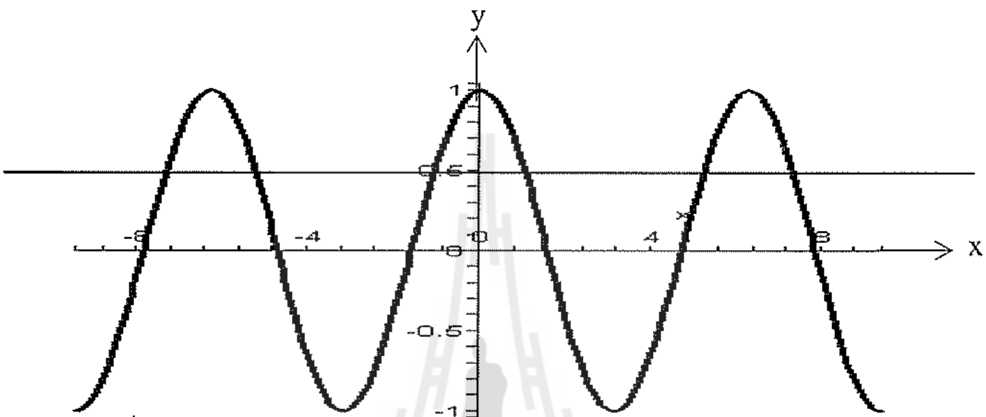
$$=3\left(\sin^{-1}(2x)\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\frac{d}{dx}(2x)$$

$$=\frac{6\left(\sin^{-1}(2x)\right)^2}{\sqrt{1-4x^2}} \qquad \square$$

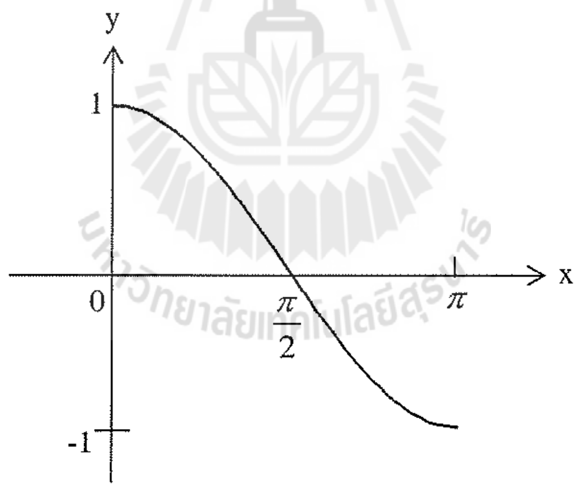
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์ (The Arccosine Function)

ในการนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ เราจะพิจารณาเช่นเดียวกับการนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ นั่นคือเราจะจำกัดโดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ให้อยู่ในช่วง $[0,\pi]$ (ดูรูปที่ 4.2.6) ซึ่งฟังก์ชันโคไซน์ใหม่ที่ได้ ก็จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและมีฟังก์ชันผกผัน



รูปที่ 4.2.5 กราฟของ $y=\cos x,\quad -\infty<x<\infty$



รูปที่ 4.2.6 กราฟของ $y=\cos x,\quad 0<x<\pi$

เรานิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

$y=\cos^{-1}x$ (หรือ $y=\arccos x$) ก็ต่อเมื่อ $\cos y = x$ และ $0\le y\le\pi$

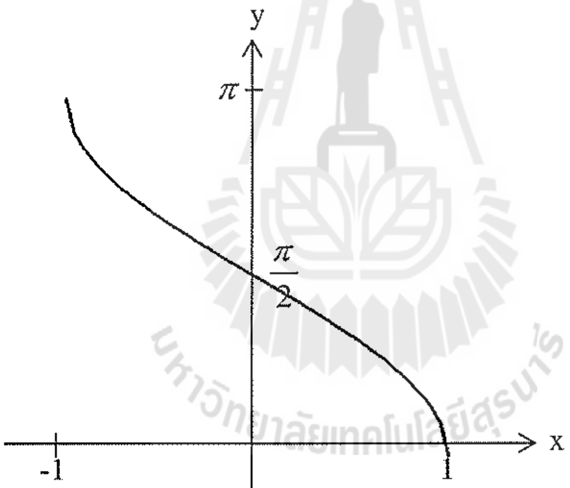
เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์**
โดเมนของ $\cos^{-1}$ คือ $[-1,1]$ และเรนจ์ของ $\cos^{-1}$ คือ $[0,\pi]$ ซึ่งเรียกว่าค่าหลักของ $\cos^{-1}$
จาก $y=\cos^{-1}x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $y=\cos x$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.1.4 (2)-(3) จะได้

$$\cos(\cos^{-1}x)=x \qquad \text{สำหรับทุก } x\in[-1,1] \qquad .....(4.2.3)$$

และ

$$\cos^{-1}(\cos x)=x \qquad \text{สำหรับทุก } x\in[0,\pi] \qquad .....(4.2.4)$$

กราฟของ $y=\cos^{-1}x$ แสดงดังรูป



รูปที่ 4.2.7 กราฟของ $y=\cos^{-1}x, \quad -1\le x\le 1$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.2.9**</u> จงหาค่าของ $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

<u>วิธีทำ</u> จะต้องหามุม $\theta\in[0,\pi]$ ที่ทำให้ $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\dfrac{\pi}{4}\in[0,\pi]$ ดังนั้น $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ นั่นคือ $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.10</u> จงหาค่าของ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u> จะต้องหามุม $\theta \in [0,\pi]$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจาก $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{5\pi}{6} \in [0,\pi]$ ดังนั้น $\theta = \frac{5\pi}{6}$ นั่นคือ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.11</u> จงหาค่าของ $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ดังนั้น $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

จาก $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{\pi}{4} \in [0,\pi]$ ดังนั้น $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ □

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u> $y = \cos^{-1} x$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \cos^{-1} x$ สามารถทำได้ ในทำนองเดียวกับการหาอนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1} x$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{สำหรับ } -1 < x < 1}$$

และถ้า $u = u(x)$ และสามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} u\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 4.2.12 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x)=\cos^{-1}\left(x^3\right)$
2. $f(x)=\cos^{-1}\left(\sin\left(x^2\right)\right)$

วิธีทำ

(1)

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\left(x^3\right)\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^3$$

$$=\frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

(2)

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}\left(\sin\left(x^2\right)\right)\right]=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin(x^2)\right)^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\sin(x^2)\right]$$

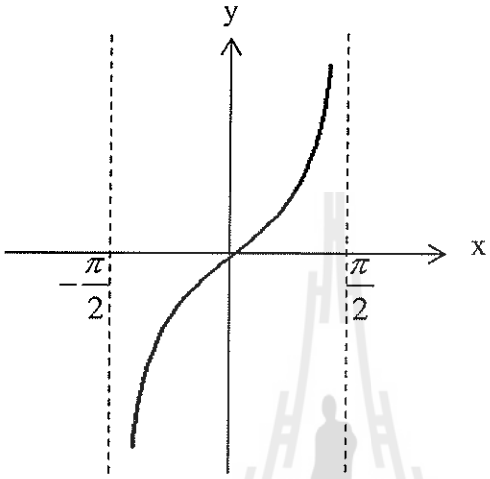
$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin(x^2)\right)^2}}\cdot\left(\cos(x^2)\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\right)$$

$$=-\frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\left(\sin(x^2)\right)^2}}$$ □

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์ (The Arctangent Function)

พิจารณาฟังก์ชัน $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



รูปที่ 4.2.8 กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นเราสามารถนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ได้ดังนี้

$y = \tan^{-1} x$ (หรือ $y = \arctan x$) ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เราเรียก ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์**

โดเมนของ $\tan^{-1}$ คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์ของ $\tan^{-1}$ คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

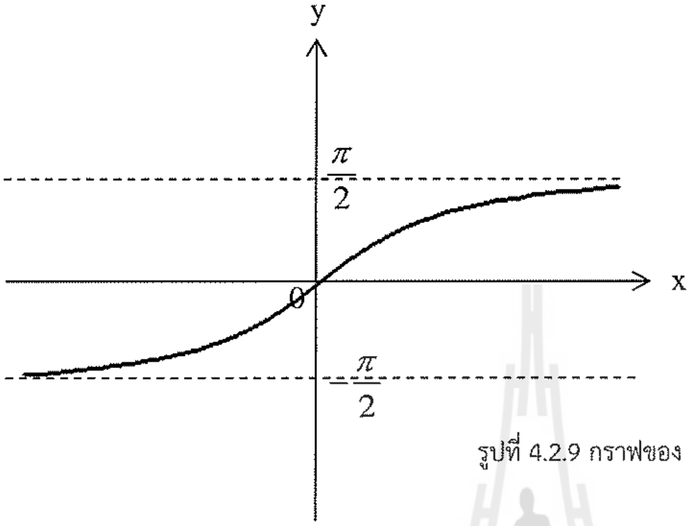
จาก $y = \tan^{-1} x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน $y = \tan x$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 4.1.4 (2)-(3) จะได้

$$\tan(\tan^{-1} x) = x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in (-\infty, \infty) \qquad .....(4.2.5)$$

และ

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \qquad \text{สำหรับทุก } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad .....(4.2.6)$$

กราฟของฟังก์ชัน $y = \tan^{-1} x$ แสดงดังรูป



รูปที่ 4.2.9 กราฟของ $y = \tan^{-1} x$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.2.13**</u> จงหาค่าของ $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ดังนั้นใช้สมการที่ 4.2.6 ไม่ได้

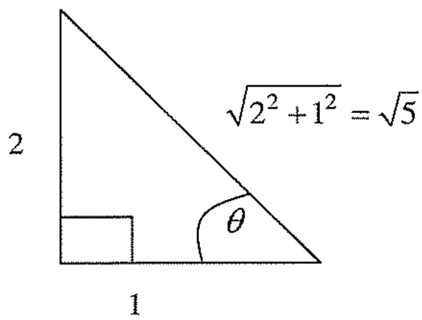
พิจารณา $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ดังนั้น $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$ เพราะว่า $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.2.14**</u> จงหาค่าของ $\cos\left(\tan^{-1} 2\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \tan^{-1} 2$ ดังนั้น $\tan\theta = 2 = \frac{2}{1}$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก



จาก $\tan\theta = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } \theta} = \dfrac{2}{1}$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทของปีทาโกรัส จะได้ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $\cos\left(\tan^{-1} 2\right) = \cos\theta = \dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ □

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u> $y = \tan^{-1} x$

เนื่องจากฟังก์ชันแทนเจนต์หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น ฟังก์ชันอาร์กแทนเจนต์ก็หาอนุพันธ์ได้เช่นกัน เราหาอนุพันธ์ของ $y = \tan^{-1} x$ โดยใช้การหาอนุพันธ์โดยปริยาย

จาก $y = \tan^{-1} x$ ดังนั้น $\tan y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx}[\tan y] = \frac{dx}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2 y}$

จาก $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x\right] = \frac{1}{1+x^2}}$$

ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} u\right] = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}}$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.15</u> จงหาอนุพันธ์ของ $\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ เมื่อ $a \neq 0$

<u>วิธีทำ</u>

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a}\right] = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right)$$

$$= \frac{a^2}{a}\cdot\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) = \frac{a}{a^2+x^2} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.16</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \tan^{-1}(\cot x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(\cot x)\right] = \frac{1}{1+\cot^2 x}\cdot\frac{d}{dx}[\cot x]$$

$$= \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot^2 x} = \frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = -1 \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.2.17</u> จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = \frac{1}{x}$ ดังนั้น เมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ $u \to +\infty$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u\to +\infty} \tan^{-1} u = \frac{\pi}{2}$ (ดูรูปที่ 4.2.9) $\square$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ฟังก์ชันอาร์กเซแคนต์ อาร์กโคเซแคนต์ และอาร์กโคแทนเจนต์

สำหรับฟังก์ชันผกผันของ ฟังก์ชันเซแคนต์ ฟังก์ชันโคเซแคนต์ และโคแทนเจนต์ จะใช้น้อยกว่าฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งในที่นี้เราจะสรุปฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือไว้ดังต่อไปนี้

(1) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์ นิยามดังนี้

$y = \sec^{-1} x$ (หรือ $y = \operatorname{arcsec} x$) ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$ และ $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\lvert x\rvert \geq 1$

เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กเซแคนต์**

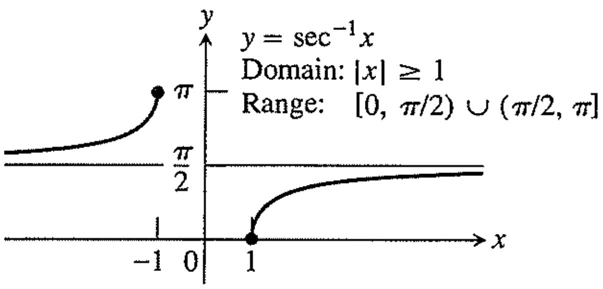
(2) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์ นิยามดังนี้

$y = \csc^{-1} x$ (หรือ $y = \operatorname{arccsc} x$) ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$ และ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lvert x\rvert \geq 1$

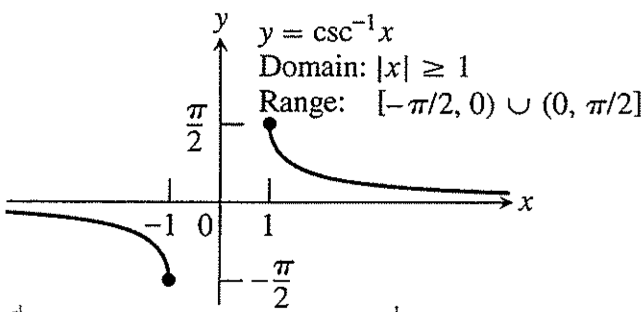
เราเรียกฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคเซแคนต์**

(3) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ นิยามดังนี้

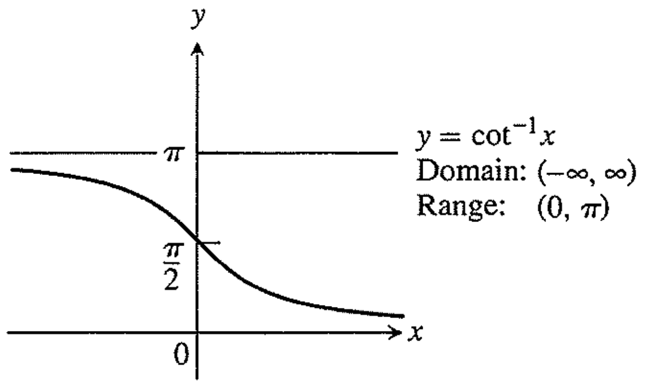
$y = \cot^{-1} x$ (หรือ $y = \operatorname{arccot} x$) ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ และ $y \in (0, \pi)$, $x \in (-\infty, \infty)$



รูปที่ 4.2.10 (a) กราฟของ $y = \sec^{-1} x$



รูปที่ 4.2.10 (b) กราฟของ $y = \csc^{-1} x$



รูปที่ 4.2.10 (c) กราฟของ $y=\cot^{-1}x$

ที่มา: (1998, Thomas, Finney and weir)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน</u> $y=\sec^{-1}x$, $y=\csc^{-1}x$ และ $y=\cot^{-1}x$

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

และถ้า $u=u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u\right)=\dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dx}$, $|u|>1$

(5) $\dfrac{d}{dx}\left(\csc^{-1}u\right)=\dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\cdot\dfrac{du}{dx}$, $|u|>1$

(6) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1}u\right)=\dfrac{-1}{1+u^2}\cdot\dfrac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 4.2.18 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{\cot^{-1}x}$

วิธีทำ ใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ จะได้

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\cot^{-1}x}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\cot^{-1}x}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\cot^{-1}x}}\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\cot^{-1}x}} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.2.19 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)=\sec^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ เมื่อ $x>1$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\left|\sqrt{x}\right|\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}\right)}\cdot\frac{d\sqrt{x}}{dx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}} \qquad \square$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัดที่ 4.2

1) จงหาค่าต่อไปนี้

(1.1) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ (1.2) $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{5\pi}{7}\right)$

(1.3) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{12\pi}{7}\right)$ (1.4) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{23\pi}{6}\right)$

2) จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้วิธีสามเหลี่ยมมุมฉาก

(2.1) $\sin\left(\cos^{-1}x\right)$ (2.2) $\tan\left(\cos^{-1}x\right)$

(2.3) $\csc\left(\tan^{-1}x\right)$ (2.4) $\sin\left(\tan^{-1}x\right)$

(2.5) $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$ (2.6) $\sin\left(\sec^{-1}x\right)$

3) จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(3.1) $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}x\right)$ (3.2) $y=\cos^{-1}\left(2x+1\right)$

(3.3) $y=\tan^{-1}\left(x^2\right)$ (3.4) $y=\sec^{-1}\left(x^7\right)$

(3.5) $y=\cot^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ (3.6) $y=\left(\tan x\right)^{-1}$

(3.7) $y=\dfrac{1}{\tan^{-1}x}$ (3.8) $y=\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(3.9) $y=\sec^{-1}x+\csc^{-1}x$ (3.10) $y=\left(x+1\right)^3\left(\tan^{-1}\left(x^2\right)\right)$

(3.11) $y=\left(2+\sin^{-1}\left(3x\right)\right)^3$ (3.12) $y=\left(\sin^{-1}\left(2x\right)+\tan^{-1}\left(x^2\right)\right)^{3/2}$

(3.13) $y=\tan^{-1}\left(\sin\left(5x\right)\right)$ (3.14) $y=x^3\sec^{-1}\left(3x\right)$

(3.15) $y=x\cot^{-1}\left(x^2+x+2\right)$ (3.16) $y=\tan^{-1}\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

4) กำหนดให้สมการต่อไปนี้นิยาม y เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

(4.1) $x^3+x\tan^{-1}y=\sin x$ (4.2) $\sin^{-1}\left(xy\right)=\cos^{-1}\left(x-y\right)$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

5) จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับกราฟของเส้นโค้งต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

(5.1) $y=\sin^{-1}x,\qquad x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5.2) $y=\tan^{-1}(2x),\qquad x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

4.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม (Exponential and Logarithm Functions)

ฟังชันเลขชี้กำลัง

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a^x \qquad .....(4.3.1)$$

เมื่อ $a > 0$ เราเรียก a ว่า ฐาน (base) ของ f และ x เป็นตัวแปร เราเรียก x ว่า เลขชี้กำลัง (exponent)

เรานิยามค่าของ a^x ดังต่อไปนี้

(1) ถ้า $x = 0$ แล้ว $a^0 = 1$

(2) ถ้า $x = n$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ term}}$

(3) ถ้า $x = -n$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(4) ถ้า $x = \dfrac{m}{n}$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ แล้ว $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(5) ถ้า x เป็นจำนวน**อตรรกยะ** แล้วประมาณค่าของ x ด้วยจำนวนตรรกยะ r และ
นิยาม $a^x = \lim\limits_{r \to x} a^r$

จากข้อ (1) ถึงข้อ (5) จะเห็นว่า ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง **นิยามบนเซตของจำนวนจริงทั้งหมด**

กฎของเลขชี้กำลัง

ถ้า $a > 0,\ b > 0$ และ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

(1) $a^0 = 1$

(2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

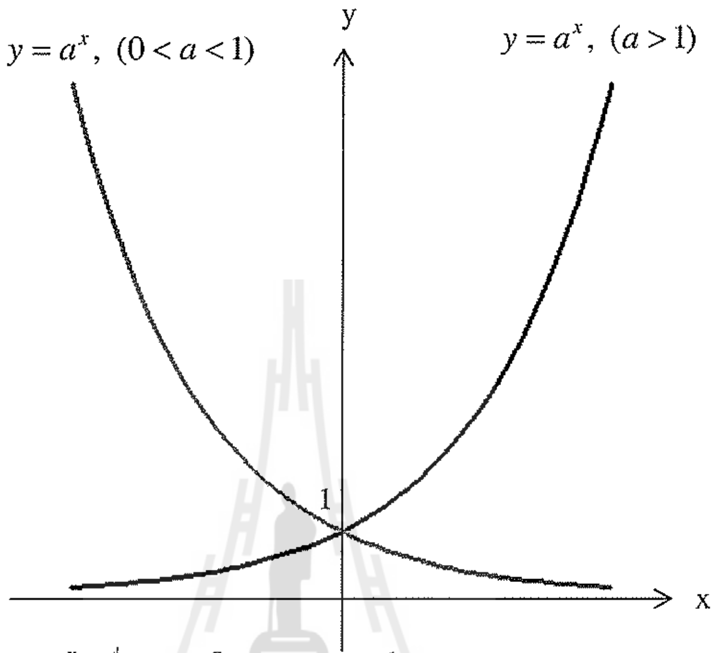
(4) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

(5) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

(6) $\left(ab\right)^x = a^x b^x$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

กราฟแสดงฟังก์ชันเลขชี้กำลัง



รูปที่ 4.3.1 กราฟของ $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$

จากรูปที่ 4.3.1 เราจะเห็นว่า ถ้า $a > 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แต่ถ้า $0 < a < 1$ ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

จากกราฟ เราสามารถสรุปสมบัติของฟังก์ชัน $y = a^x$ ได้ดังนี้

(1) ฟังก์ชันจะผ่านจุด $(0,1)$ เนื่องจาก $a^0 = 1$ สำหรับทุก ๆ $a > 0$

(2) $y = a^x > 0$ สำหรับทุก ๆ $a > 0$ และ ทุกจำนวนจริง x

(3) โดเมนของฟังก์ชัน $y = a^x$ คือ $(-\infty, \infty)$ และเรนจ์คือ $(0, \infty)$

(4) ฟังก์ชัน $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(5) ถ้า $a > 1$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ และ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \infty$

(6) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^{-x}+2\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(3^{-x}+2) &= \lim_{x\to+\infty}3^{-x}+\lim_{x\to+\infty}2 \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\lim_{x\to+\infty}2 \\
&= 0+2=2
\end{aligned}$$

$\square$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=a^x$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$

ให้ $f(x)=a^x$, $a>0$ และ $a\neq 1$ ดังนั้นโดยบทนิยามของอนุพันธ์จะได้

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to0}\frac{a^x a^h-a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} \\
&= a^x\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h} \qquad .....(4.3.2)
\end{aligned}$$

คำถาม $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^h-1}{h}=?$

ถ้าวิเคราะห์ค่าของ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^h-1}{h}$ โดยวิธีการคำนวณ ด้วยการเลือก $a=2$ และ $a=3$

h	$\dfrac{2^h-1}{h}$	$\dfrac{3^h-1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผลที่ได้คือ

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\approx 0.69 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h}\approx 1.10$$

ดังนั้น น่าจะมีค่าของ a ค่าหนึ่งระหว่าง 2 และ 3 ซึ่งทำให้ $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=1$

โดยทั่วไป นิยมแทนเลขจำนวนนี้ด้วยสัญลักษณ์ e

<u>บทนิยามที่ 4.3.1</u> ให้ e เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

หมายเหตุ $e\approx 2.718281828459045...$

ถ้า $f(x)=e^x$ แทน $a=e$ ในสมการ (4.3.2) จะได้

$$f'(x)=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

นั่นคือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x=e^x}$$

ถ้า $u=u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้วโดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

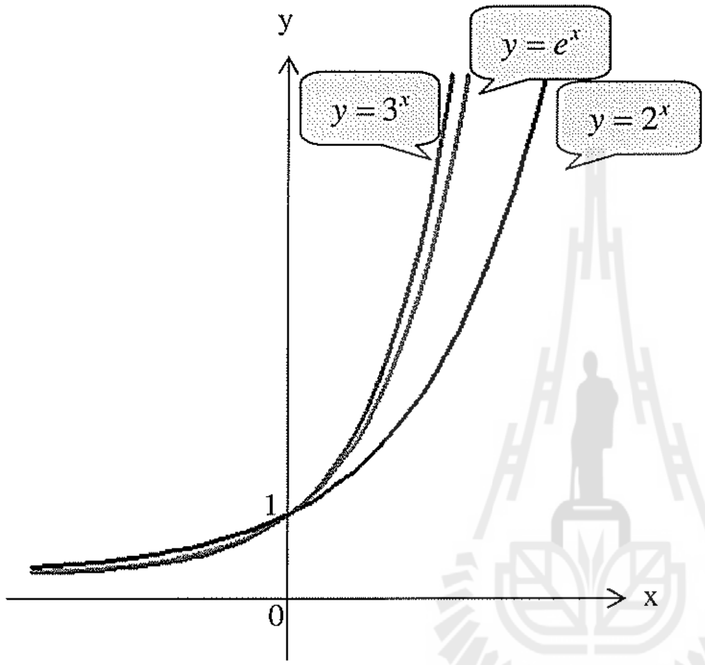
$$\boxed{\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}}$$

<u>**สมบัติของฟังก์ชันกำลังฐาน e**</u>

1) ค่าของ $e^x>0$ สำหรับทุกค่าของ x
2) $f(x)=e^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้น และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
3) $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$
4) $\lim_{x\to +\infty}e^x=\infty$ และ $\lim_{x\to -\infty}e^x=0$

5) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

6) ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u \dfrac{du}{dx}$



รูปที่ 4.3.2 กราฟของ $y = 2^x$, $y = e^x$ และ $y = 3^x$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.2**</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = 2x^3e^x$

(2) $y = xe^{\cos x}$

(3) $y = e^{e^{-\sin x}}$

<u>วิธีทำ</u> (1) จาก $y = 2x^3e^x$ ดังนั้น ใช้กฎผลคูณหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[2x^3e^x\right] = 2\left(x^3e^x + 3x^2e^x\right) = 2x^2e^x(x+3) \qquad \square$$

(2) จาก $y = xe^{\cos x}$ ดังนั้น ใช้กฎผลคูณ และกฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[xe^{\cos x}\right]=\left(xe^{\cos x}(-\sin x)+e^{\cos x}\right)=e^{\cos x}\left(1-x\sin x\right) \qquad \square$$

(3) จาก $y=e^{e^{-\sin x}}$ ใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[e^{e^{-\sin x}}\right]=e^{e^{-\sin x}}\left(\frac{d}{dx}\left[e^{-\sin x}\right]\right)=e^{e^{-\sin x}}\left(e^{-\sin x}\left(-\cos x\right)\right)$$

$$=-\cos x\left[e^{\left(e^{-\sin x}-\sin x\right)}\right] \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)\cdot\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}}$$

$$=\frac{1-0}{1+0}=1 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงหา $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}\cos x$

วิธีทำ จาก $-1\le\cos x\le 1$ และ $\dfrac{-1}{e^{2x}}\le\dfrac{\cos x}{e^{2x}}\le\dfrac{1}{e^{2x}}$

ดังนั้น $-\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^x\le\dfrac{\cos x}{e^{2x}}\le\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^x$

เนื่องจาก $0<\dfrac{1}{e^2}<1$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}-\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^x=0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{e^2}\right)^x=0$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบทแซนวิช จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-2x}\cos x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{e^{2x}}=0$ $\square$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm Functions)

จากฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันผกผัน ซึ่งเราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน** a

บทนิยามที่ 4.3.2 ถ้า $a>0$ และ $a\neq 1$ แล้ว ฟังก์ชัน $y=\log_a x$ เรียกว่า ฟังก์ชันลอการิทึมของ x ฐาน a ซึ่งฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันนี้ก็คือ $y=a^x$ ดังนั้น

$$\boxed{y=\log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x=a^y \quad (a>0,\quad a\neq 1)}$$

โดเมนของฟังก์ชัน $y=\log_a x$ คือ เซตของจำนวนจริงบวก
เรนจ์ของฟังก์ชัน $y=\log_a x$ คือ เซตของจำนวนจริง

จากนิยามค่าของฟังก์ชัน $\log_a x$ ก็คือ เลขชี้กำลังของ**ฐาน** a ตัวอย่างเช่น

$$\log_2 8=3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3=8$$
$$\log_3 1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^0=1$$
$$\log_{10} 0.0001=-4 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{-4}=0.0001$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ และ $f^{-1}(x)=\log_a x$ เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันและกัน ดังนั้นจะได้ว่า

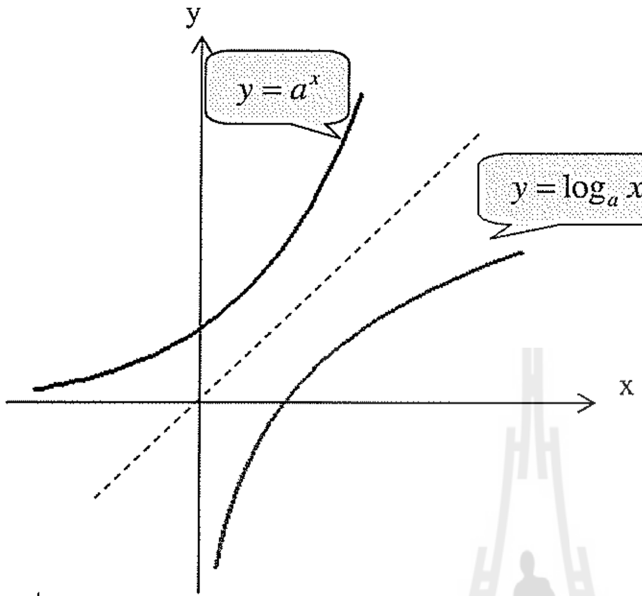
$$f\left(f^{-1}(x)\right)=a^{\log_a x}=x \qquad \text{สำหรับ}\textbf{จำนวนจริงบวก}\ x \text{ ใด ๆ} \qquad .....(4.3.1)$$

และ

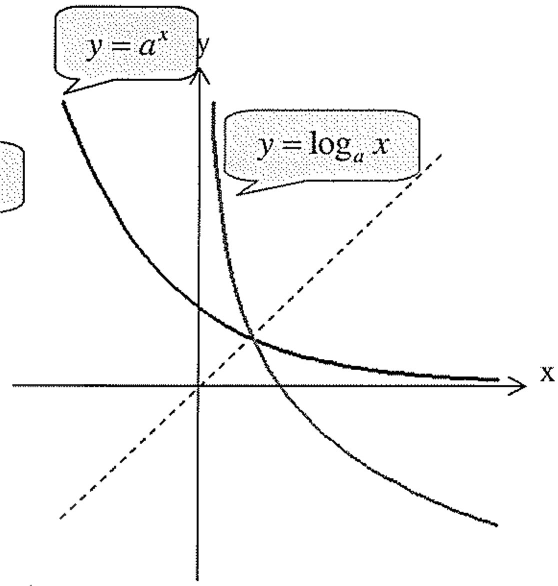
$$f^{-1}\left(f(x)\right)=\log_a a^x=x \qquad \text{สำหรับ}\textbf{จำนวนจริง}\ x \text{ ใด ๆ} \qquad .....(4.3.2)$$

กราฟของฟังก์ชัน $y=\log_a x$ เมื่อ $a>0,\ a\neq 1$

เนื่องจากฟังก์ชัน $y=\log_a x$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $y=a^x$ ดังนั้นกราฟของ $y=\log_a x$ ได้จากการสะท้อนกราฟของ $y=a^x$ เทียบกับเส้นตรง $y=x$ ดังแสดงในรูปที่ 4.3.3(a)-(b)



รูปที่ 4.3.3 (a) กราฟของ $y = \log_a x$ และ $y = a^x$ เมื่อ $a > 1$



รูปที่ 4.3.3 (b) กราฟของ $y = \log_a x$ และ $y = a^x$ เมื่อ $0 < a < 1$

สมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันลอการิทึม (Laws of Logarithms)

ถ้า $a > 0, b > 0, a \neq 1,$ และ $b \neq 1$ แล้ว

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

(4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(5) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

(6) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

(7) ถ้า $a > 1$ แล้ว $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ และ $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$ (ดูรูปที่ 4.3.3 (a))

(8) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ และ $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$ (ดูรูปที่ 4.3.3 (b))

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.5**</u> จงหาค่าของ

1) $\log_2 10+\log_2 12-\log_2 15$ 2) $\log_{a^2} a^3$ 3) $3^{\log_9 4}$

<u>วิธีทำ</u> (1)

$$\log_2 10+\log_2 12-\log_2 15=\log_2\left(\frac{10\times 12}{15}\right)$$
$$=\log_2 2^3$$
$$=3\log_2 2=3$$

(2) $$\log_{a^2} a^3=\frac{\log_b a^3}{\log_b a^2}=\frac{3\log_b a}{2\log_b a}=\frac{3}{2}$$

(3) $$3^{\log_9 4}=3^{\log_{3^2} 2^2}=3^{\frac{2}{2}\log_3 2}=3^{\log_3 2}=2$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.6**</u> จงหาค่าของ x จากสมการ $2^{\log_2(x^2+5x)}=6$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $2^{\log_2(x^2+5x)}=6$ จะได้

$$x^2+5x=6$$
$$x^2+5x-6=0$$
$$(x+6)(x-1)=0$$

ดังนั้น $x=1,\ -6$ □

<u>**ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ และฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ**</u>

(The Natural Logarithm and Exponential Functions)

ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ คือ ฟังก์ชันลอการิทึมฐาน e นิยมเขียนแทนด้วย $\ln$ หรือ $\log_e$ นั่นคือ

$$\boxed{y=\ln x \quad \Leftrightarrow \quad x=e^y \quad (\text{หรือ } x=\exp(y))}$$

และ $\ln\left(e^x\right)=x$ สำหรับ $x\in(-\infty,\infty)$

$e^{\ln x}=x$ สำหรับ $x\in(0,\infty)$

หมายเหตุ เราเรียก ฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ ว่า **ฟังก์ชันเลขชี้กำลังธรรมชาติ**

เนื่องจาก ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x) = e^x$ หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผันก็ย่อมหาอนุพันธ์ได้เช่นกัน เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ ได้ดังนี้

ให้ $y = \ln x$ ดังนั้น $e^y = x$ หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x ได้

$$\frac{d}{dx}\left[e^y\right] = \frac{dx}{dx} \quad \Rightarrow \quad e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{เมื่อ} \quad x > 0}$$

ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}}$$

__ตัวอย่างที่ 4.3.7__ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \ln(\sin x)$ (2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

__วิธีทำ__ (1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \ln(\sin x) = \ln(\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sin x) = \ln(\sin\dfrac{\pi}{2}) = \ln 1 = 0$

เพราะว่า ฟังก์ชันลอการิทึมฐานธรรมชาติ และฟังก์ชันไซน์ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(2) ให้ $u = \dfrac{1}{x}$ ดังนั้นเมื่อ $x \to 0^+$ จะได้ว่า $u \to +\infty$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty} \ln u = +\infty$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.3.8</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)=e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left[e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\right]=e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\frac{d}{dx}\left[x^3-2x^2+4x+1\right]$$
$$=e^{\left(x^3-2x^2+4x+1\right)}\left(3x^2-4x+4\right) \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.3.9</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)=\sqrt{1+e^{4x}}$

<u>วิธีทำ</u>

$$f'\left(x\right)=\frac{d}{dx}\left[\sqrt{1+e^{4x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{1+e^{4x}}}\frac{d}{dx}\left[1+e^{4x}\right]$$
$$=\frac{4e^{4x}}{2\sqrt{1+e^{4x}}}=\frac{2e^{4x}}{\sqrt{1+e^{4x}}} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 4.3.10</u> จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f\left(x\right)=\ln\left|x\right|$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(x)=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

ดังนั้น

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\ln x, & x>0\\ \dfrac{d}{dx}\ln(-x), & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{1}{-x}.(-1), & x<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x\neq 0$ $\square$

จากตัวอย่างที่ 4.3.10 เราสามารถสรุป ได้ดังนี้

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}, \qquad x\neq 0}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

และถ้า $u = u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.11 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt[3]{\ln(1-\cos x)}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{\ln(1-\cos x)}\right] = \frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}\left[\ln(1-\cos x)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{(1-\cos x)}\cdot\frac{d}{dx}[1-\cos x] \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln(1-\cos x)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\sin x}{(1-\cos x)} \\
&= \frac{\sin x}{3(1-\cos x)\left(\ln(1-\cos x)\right)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$
□

ตัวอย่างที่ 4.3.12 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y = \ln(1+e^x)$ (2) $y = e^{(e^x)}$ (3) $y = e^{3x}\ln x$

วิธีทำ (1) จาก $y = \ln(1+e^x)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\ln(1+e^x)\right] = \frac{1}{1+e^x}\cdot\frac{d}{dx}\left[1+e^x\right] = \frac{e^x}{1+e^x}$$

(2) จาก $y = e^{(e^x)}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{(e^x)}\right] = e^{(e^x)}\cdot\frac{d}{dx}e^x = e^{(e^x)}\cdot e^x = e^{e^x+x}$

(3) จาก $y = e^{3x}\ln x$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{3x}\ln x\right] = e^{3x}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\left(3e^{3x}\right) = \frac{e^{3x}}{x} + 3e^{3x}\ln x$$

□

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

จาก $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ และ $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ ดังนั้น โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln a^x}\right)$$

$$= e^{\ln a^x}\frac{d}{dx}\left(\ln a^x\right) = a^x\frac{d}{dx}\left(x\ln a\right) = a^x \ln a$$

ดังนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a} \qquad \text{เมื่อ } a>0 \text{ และ } a \neq 1$$

และถ้า $u = u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

และเราสามารถหาอนุพันธ์ของ $y = \log_a x$ เมื่อ $a>0,\ a\neq 1$ ได้ดังนี้

ให้ $y = \log_a x$ แล้ว $a^y = x$ ดังนั้นหาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx}a^y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a^y \ln a \frac{dy}{dx} = 1$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x\ln a}$

เพราะฉะนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x\ln a}} \qquad \text{เมื่อ } a>0 \text{ และ } a\neq 1$$

และถ้า $u = u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log_a u\right)=\frac{1}{u\ln a}\cdot\frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.13 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $y=xe^x-x$ (2) $y=5^{2x+1}$ (3) $y=\log_a\left(5x+3\right)$

วิธีทำ (1) จาก $y=xe^x-x$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left[xe^x-x\right]=\left(xe^x+e^x\right)-1$

(2) จาก $y=5^{2x+1}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[5^{2x+1}\right]=5^{2x+1}\ln 5\cdot\frac{d}{dx}\left[2x+1\right]=2\left(5^{2x+1}\ln 5\right)$$

(3) จาก $y=\log_a\left(5x+3\right)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\log_a\left(5x+3\right)\right]=\frac{1}{(5x+3)\ln a}\cdot\frac{d}{dx}\left[5x+3\right]$$

$$=\frac{5}{(5x+3)\ln a}$$

□

ตัวอย่างที่ 4.3.14 กำหนด $y=\log_5\left(\sqrt{2x}\right)$ เมื่อ $x>0$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_5\left(\sqrt{2x}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x}\ln 5}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x}\ln 5}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$=\frac{1}{2x\ln 5}$$

□