เอกสารประกอบการสอน
103108 แคลคูลัสสำหรับวิทยาศาสตร์สุขภาพ
(Calculus for Health Science)

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เอกสารประกอบการสอน
103108 แคลคูลัสสำหรับวิทยาศาสตร์สุขภาพ
(Calculus for Health Science)

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

มนุษย์เป็นผู้สร้างคณิตศาสตร์
และเป็นผู้ใช้คณิตศาสตร์
เพื่ออธิบายและทำความเข้าใจ
ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ
อย่างเป็นระเบียบและเป็นระบบ

ประภาศรี อัศวกุล

103108 แคลคูลัสสำหรับวิทยาศาสตร์สุขภาพ (Calculus for Health Science) 2 (2-0-4)

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น แบบเชิงเส้น อันดับหนึ่ง อันดับสอง

ผู้สอน

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หัวข้อการสอน

1. เทคนิคการหาปริพันธ์
2. สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น
3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง
4. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน รายวิชา 103108 แคลคูลัสเพื่อวิทยาศาสตร์สุขภาพ (Calculus for Health Science) นี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาชั้นปีที่ 1 ในสาขาวิชาอาชีวอนามัยและความปลอดภัย และสาขาวิชาอนามัยสิ่งแวดล้อม หรือนักศึกษาในสาขาวิชาอื่น ๆ ใช้เป็นแนวทางในการศึกษาแนวคิดเบื้องต้นในการสร้างตัวแบบ (model) สำหรับศึกษาปัญหาในโลกธรรมชาติด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ โดยรายวิชานี้ ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งและอันดับสองเป็นหลัก ตามที่กำหนดในคำอธิบายของรายวิชา การศึกษารายวิชานี้ช่วยสร้างแนวคิดและกรอบความคิดสำหรับการใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบของตัวแบบที่เกี่ยวกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่ทำการศึกษา นักศึกษาที่สนใจสามารถศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมจากหนังสือเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์และการสืบค้นข้อมูล อย่างไรก็ตาม ความสำเร็จในการศึกษาแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อยู่ที่ "การลงมือและการแก้โจทย์ปัญหาด้วยตนเอง"

ประภาศรี อัศวกุล

ภาคการศึกษาที่ ๓/๒๕๕๕

สารบัญ

1. เทคนิคการหาปริพันธ์ (Techniques of Integration)

ในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาได้เรียนรู้แนวคิดของอนุพันธ์ (derivatives) และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง การประยุกต์อนุพันธ์ในการแก้ปัญหาค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุด ปัญหาอัตราสัมพัทธ์ (related rates) และการร่างกราฟ เป็นต้น และเรื่องสำคัญมากที่ศึกษาแคลคูลัส คือ ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์ (antiderivatives) และทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus)

1.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives)

เราเรียกฟังก์ชัน F ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับแต่ละใน I และถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง I แล้วสำหรับค่าคงตัว C ใด ๆ แล้ว $F+C$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ด้วย

ตัวอย่าง 1.1.1 แสดงปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

ฟังก์ชัน f	ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f
$f(x)=1$	$F(x)=x+C$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C$
$f(x)=\tan x$	$F(x)=\ln\lvert\sec x\rvert+C$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=e^{-5x}$	$F(x)=-\frac{1}{5}e^{5x}+C$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C$

□

แบบฝึกหัด 1.1 จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่กำหนดมาให้

ฟังก์ชัน f	ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f
$f(x)=0$	$F(x)=$
$f(x)=x^{-2}$	$F(x)=$
$f(x)=x^{4/3}$	$F(x)=$
$f(x)=\sqrt{x}$	$F(x)=$
$f(x)=x^{n}$ (เมื่อ n เป็นค่าคงตัวและ $n\neq -1$)	$F(x)=$
$f(x)=\sec^{2}x$	$F(x)=$
$f(x)=\sec x\tan x$	$F(x)=$
$f(x)=\csc^{2}x$	$F(x)=$
$f(x)=\csc x\cot x$	$F(x)=$
$f(t)=e^{3t}$	$F(t)=$
$f(t)=e^{kt}$ (เมื่อ k เป็นค่าคงตัว)	$F(t)=$
$f(t)=t^{-1}$	$F(t)=$
$f(u)=3u^{-1}$	$F(u)=$
$f(u)=2^{u}$	$F(u)=$
$f(u)=3^{u}$	$F(u)=$
$f(u)=\dfrac{1}{2u}$	$F(u)=$
$f(u)=2u^{2}-u$	$F(u)=$
$f(u)=\sin u+\cos u$	$F(u)=$
$f(u)=\sin u-e^{u}$	$F(u)=$
$f(x)=x-\dfrac{1}{x}+2$	$F(x)=$

1.2 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (Indefinite Integrals)

เราเรียกฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ว่า ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f โดยเขียน

$$F(x) = \int f(x)dx$$

ตัวอย่าง 1.2.1 จากตัวอย่าง 1.1.1 แทนปฏิยานุพันธ์ F ในรูปปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ฟังก์ชัน f	ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f
$f(x)=1$	$\int 1dx \ = \ x+C$
$f(x)=x$	$\int xdx \ = \ \frac{1}{2}x^2+C$
$f(x)=\sin x$	$\int \sin xdx \ = \ -\cos x+C$
$f(x)=\cos x$	$\int \cos xdx \ = \ \sin x+C$
$f(x)=\tan x$	$\int \tan xdx \ = \ \ln\lvert\sec x\rvert+C$
$f(x)=e^x$	$\int e^x dx \ = \ e^x+C$
$f(x)=e^{-5x}$	$\int e^{-5x}dx \ = \ -\frac{1}{5}e^{5x}+C$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx \ = \ \ln\lvert x\rvert+C$

□

จากหัวข้อ 1.1 และ 1.2 ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์หรือปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ดังนี้

$$\boxed{\int \frac{d}{dx} f(x)dx \ = f(x)+C}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. $\int 3dx =$ ....

2. $\int \left(3x^3 - x + 1\right) dx =$ ....

3. $\int x^{-1/3} dx =$ ....

4. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx =$ ....

5. $\int \frac{t^4 + 2t - 3}{t^2} dt =$ ....

6. $\int 2\cos\theta d\theta =$ ....

7. $\int \frac{\tan\theta + \sin\theta}{\cos\theta} d\theta =$ ....

8. $\int \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) du =$ ....

9. $\int -\sec u \tan u du =$ ....

10. $\int \frac{1}{5u} du =$ ....

11. $\int \left(1 - e^{-3x}\right) dx =$ ....

12. $\int \frac{1 - e^{-3x}}{e^x} dx =$ ....

1.3 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

1.3.1 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (ตอนที่ 1)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้วฟังก์ชัน g ซึ่งนิยามโดย

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

เมื่อ $a \le x \le b$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงและหารอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ

$$g'(x) = f(x)$$

หรือเขียนเป็น

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

1.3.2 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (ตอนที่ 2)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของฟังก์ชัน f

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามในรูปของปริพันธ์

(1) $g(x) = \int_0^x \sin t\,dt$

(2) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$

(3) $g(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (ตอนที่ 1)

(1) $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin t\,dt\right) = \sin x$

(2) $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt\right) = \sqrt{1-x^2}$

(3) $g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = \frac{1}{1+x^2}$

□

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

(1) $\int_{-2}^{1} (x^2-2)dx$

(2) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx$

(3) $\int_0^{\ln 3} e^x dx$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (ตอนที่ 2)

(1) $\int_{-2}^{1} (x^2-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{-2}^{1} = \left[\frac{1^3}{3}-2(1)\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}-2(-2)\right] = -3$

(2) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/3} = \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\cos 0\right) = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

(3) $\int_0^{\ln 3} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 3} = \left(e^{\ln 3}\right)-\left(e^0\right) = 3-1=2$

□

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามในรูปของปริพันธ์

(1) $g(x) = \int_0^x 2\tan t\,dt$

$g'(x) =$ ....

(2) $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$g'(x) =$ ....

(3) $g(u) = \int_{-1}^u \sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$

$g'(x) =$ ....

(4) $g(x) = \int_x^1 \sqrt{9-t^2}\,dt$

$g''(x) =$ ....

(5) $\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \sqrt{9-t^2}\,dt\right) =$ ....

(6) $\frac{d^2}{ds^2}\left(\int_1^s (2+\ln t)\,dt\right) =$ ....

(7) $g(x) = \int_0^{e^x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$g'(x) =$ ....

(8) $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$g'(x) =$ ....

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

(1) $\int_{0}^{\pi/3} \cos x dx =$ ....

(2) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \csc x \cot x dx =$ ....

(3) $\int_{0}^{\pi/6} \sec^2 \theta d\theta =$ ....

(4) $\int_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - 2x + 1\right) dx =$ ....

(5) $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x} - 2x + 1}{\sqrt{x}} dx =$ ....

(6) $\int_{0}^{1} (1 - 3x)^2 dx =$ ....

(7) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{2t} dt =$ ....

(8) $\int_{\ln 3}^{\ln 7} 5e^t dt =$ ....

3. จงบอกความหมายของปริพันธ์จำกัดเขตในรูปพื้นที่ เขียนรูปแสดงแล้วหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

(1) $\int_{-2}^{3} dx$ คือ พื้นที่ของ..

$\int_{-2}^{3} dx =$ ....

(2) $\int_{-2}^{3} 2dx$ คือ พื้นที่ของ..

$\int_{-2}^{3} 2dx =$ ....

(3) $\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$ คือ พื้นที่ของ..

$\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx =$ ....

(4) $\int_{-1}^{2} (5-2x)dx$ คือ พื้นที่ของ..

$\int_{-1}^{2} (5-2x)dx =$ ....

(5) $\int_{0}^{1} e^x dx$ คือ พื้นที่ของ..

$\int_{0}^{1} e^x dx =$ ....

เทคนิคการหาปริพันธ์ที่สำคัญและจำเป็นต้องเรียนรู้เพื่อช่วยศึกษารายวิชานี้ คือ เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร (change of variable) หรือการแทนค่า (substitution) และเทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (integration by parts)

1.4 เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร (Change of Variable) หรือการแทนค่า (Substitution)

ถ้าฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = F(g(x))+C$$

เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $u = g(x)$ ทำให้ได้ $du = g'(x)dx$ ดังนั้น

$$\int f\left(u\right)du = F(u)+C$$

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาค่าของ $\int\sqrt{3x+2}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x+2 \Rightarrow du = 3dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int\sqrt{3x+2}dx &= \int\sqrt{u}\,\frac{1}{3}du \\ &= \frac{1}{3}\int u^{1/2}du \\ &= \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{2}{9}u^{3/2}+C \\ &= \frac{2}{9}(3x+2)^{3/2}+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาค่าของ $\int (2-5x)^3\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2-5x \;\Rightarrow\; du = -5dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int (2-5x)^3\,dx &= -\frac{1}{5}\int u^3 du \\
&= -\frac{1}{5}\frac{u^4}{4} + C \\
&= -\frac{u^4}{20} + C \\
&= -\frac{1}{20}(2-5x)^4 + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาค่าของ $\int (2-5x)^3\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2-5x \;\Rightarrow\; du = -5dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int (2-5x)^3\,dx &= -\frac{1}{5}\int u^3 du \\
&= -\frac{1}{5}\frac{u^4}{4} + C \\
&= -\frac{u^4}{20} + C \\
&= -\frac{1}{20}(2-5x)^4 + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.4 จงหาค่าของ $\int \sin kx dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $k \neq 0$

วิธีทำ ให้ $u = kx \;\Rightarrow\; du = kdx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int \sin kx dx &= \frac{1}{k}\int \sin u du \\
&= -\frac{1}{k}\cos u + C \\
&= -\frac{1}{k}\cos kx + C
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.5 จงหาค่าของ $\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=1-x^3 \Rightarrow du=-3x^2dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}\,dx &= -\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{u}\,du \\ &= -\frac{1}{3}\int u^{1/3}du \\ &= -\frac{1}{3}\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C \\ &= -\frac{1}{4}u^{4/3}+C \\ &= -\frac{1}{4}(1-x^3)^{4/3}+C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.6 จงหาค่าของ $\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=1-x^3 \Rightarrow du=-3x^2dx$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1-x^3}\,dx &= -\frac{1}{3}\int \sqrt[3]{u}\,du \\ &= -\frac{1}{3}\int u^{1/3}du \\ &= -\frac{1}{3}\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}}+C \\ &= -\frac{1}{4}u^{4/3}+C \\ &= -\frac{1}{4}(1-x^3)^{4/3}+C\end{aligned}$$

□

สำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร วิธีที่สะดวกในการหาค่า คือ การเปลี่ยนช่วงของการหาปริพันธ์ในรูปของตัวแปรใหม่ นั่นคือ

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\left(u\right)du$$

$$\boxed{u = g(x)}$$

ตัวอย่าง 1.4.7 จงหาค่าของ $\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x-1 \Rightarrow du = 5dx$

$$x = 2 \Rightarrow u = 5(2)-1 = 9$$
$$x = 10 \Rightarrow u = 5(10)-1 = 49$$

$$\begin{aligned}\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}dx &= \int_9^{49} \frac{3}{\sqrt{u}}\frac{1}{5}du \\ &= \frac{3}{5}\int_9^{49} u^{-1/2}du \\ &= \frac{3}{5}\left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_9^{49} \\ &= \frac{6}{5}\left[(49)^{1/2}-(9)^{1/2}\right] \\ &= \frac{6}{5}(7-3) = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.4.8 จงหาค่าของ $\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2x)^3 \sin 2x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 1+\cos 2x \quad \Rightarrow \quad du =$ ....

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2x)^3 \sin 2x\,dx =$ ....

....

....

....

....

....

....

□

ตัวอย่าง 1.4.9 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{3} x\sin(x^2)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du =$ ....

$x = -2 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = 3 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{-2}^{3} x\sin(x^2)\,dx =$ ....

....

....

....

....

....

....

□

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาค่าของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

(1) $\int x(3-2x^2)^3\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

(2) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

(3) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

....

(4) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

....

(5) $\int \cos^3 5\theta \sin 5\theta \, d\theta$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

....

(6) $\int e^x \cos(2-3e^x)dx$

วิธีทำ ให้ $u=$ .... $\Rightarrow$ $du=$ ....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

(1) $\int_{0}^{\pi/3} \sin^4 3\theta \cos 3\theta \, d\theta$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{0}^{\pi/3} \sin^4 3\theta \cos 3\theta \, d\theta =$ ....

....

....

....

....

....

(2) $\int_{0}^{1} 3x(1+3x^2)^{1/2} dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = 1 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{0}^{1} 3x(1+3x^2)^{1/2} dx =$ ....

....

....

....

....

....

(3) $\int_0^4 \frac{x}{(x^2+9)^2}dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = 4 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_0^4 \frac{x}{(x^2+9)^2}dx =$ ....

....

....

....

....

....

(4) $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}dx =$ ....

....

....

....

....

....

(5) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{3e^{2x}}{(1+e^{2x})}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = \ln 3 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{3e^{2x}}{(1+e^{2x})} dx =$ ....

....

....

....

....

....

(6) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$x = e \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$x = e^2 \quad \Rightarrow \quad u =$ ....

$\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx =$ ....

....

....

....

....

....

1.5 เทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (Integration by Parts)

การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนโดยทั่วไปเป็นวิธีการหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน เช่น ปริพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\int xe^x dx,\quad \int x^2e^x dx,\quad \int x^3e^x dx,\quad \int e^x \sin x\,dx,\quad \int e^x \cos x\,dx$$
$$\int x\sin x\,dx,\quad \int x^2 \sin x\,dx,\quad \int x\cos x\,dx$$
$$\int \ln x\,dx,\quad \int \arctan x\,dx,\quad \int \arcsin x\,dx$$

เป็นต้น

แนวคิดของเทคนิคการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนได้มาจากกรณีที่ฟังก์ชัน u และ v เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และจากดิฟเฟอเรนเชียลของผลคูณของ u และ v

$$\begin{aligned} d(uv) &= u\,dv + v\,du \\ u\,dv &= d(uv) - v\,du \end{aligned}$$

หาปริพันธ์ได้

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

ดังนั้น

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (*)$$

สมการ (*) เป็นสูตรการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน การใช้สูตรนี้อยู่ที่การกำหนดว่า ให้ u และ dv ทางด้านซ้ายของสมการ (*) เป็นอะไร โดยที่ต้องทำให้ปริพันธ์ $\int vdu$ ทางด้านขวาของสมการ (*) หาค่าได้ง่าย

ตัวอย่าง 1.5.1 จงหาค่าของ $\int x e^x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x \;\Rightarrow\; du = dx$

$dv = e^x dx \;\Rightarrow\; \int dv = \int e^x dx \;\Rightarrow\; v = e^x$

แทนในสมการ (*) ได้

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.5.2 จงหาค่าของ $\int x\sin x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x \Rightarrow du = dx$

$$dv = \sin x\,dx \Rightarrow \int dv = \int \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$$

แทนในสมการ (*) ได้

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} &= \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหาค่าของ $\int x^2 e^x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$

$$dv = e^x dx \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

แทนในสมการ (*) ได้

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^x dx}_{dv} &= \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{2xdx}_{du} \\ &= x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}\end{aligned}$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนอีกครั้ง

จากตัวอย่าง 1.5.1 แทนค่าปริพันธ์ $\int x e^x\,dx$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + K\end{aligned}$$

เมื่อค่าคงตัว $K = -2C$

□

ตัวอย่าง 1.5.4 จงหาค่าของ $\int \ln x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}dx$

$dv = dx \;\Rightarrow\; \int dv = \int dx \;\Rightarrow\; v = x$

แทนในสมการ (*) ได้

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} &= \underbrace{(\ln x)}_{u}\,\underbrace{(x)}_{v} - \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่าง 1.5.5 จงหาค่าของ $\int e^x \sin x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x dx$

$dv = \sin x\,dx \;\Rightarrow\; \int dv = \int \sin x\,dx \;\Rightarrow\; v = -\cos x$

แทนในสมการ (*) ได้

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= -e^x\cos x - \int(-\cos x)e^x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{\text{หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนอีกครั้ง}}\end{aligned}$$

หาค่าของ $\int e^x \cos x\,dx$ โดยให้ $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ และ $dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

ทำให้ได้

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x\,dx &= -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ 2\int e^x \sin x\,dx &= -e^x\cos x + e^x\sin x \\ \int e^x \sin x\,dx &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C\end{aligned}$$

$\square$

ตัวอย่าง 1.5.6 จงหาค่าของ $\int_1^4 \sqrt{t}\ln t\,dt$

วิธีทำ ให้ $\quad u = \ln t \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{t}dt$

$$dv = \sqrt{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = \int t^{1/2}\,dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{3}t^{3/2}$$

หาปริพันธ์โดยการแยกส่วนได้

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \sqrt{t}\ln t\,dt &= \left[\ln t\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3}t^{3/2}\frac{1}{t}dt \\
&= \frac{2}{3}\Big[(\ln 4)(4^{3/2}) - (\ln 1)(1^{3/2})\Big] - \frac{2}{3}\int_1^4 t^{1/2}dt \\
&= \frac{2}{3}(8\ln 4) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^4 \\
&= \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{4}{9}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&= \frac{32}{3}\ln 2 - \frac{28}{9}
\end{aligned}$$

□

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาค่าของปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

(1) $\int xe^{2x}dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int xe^{2x}dx$ = ...

....

....

....

....

....

(2) $\int x \ln x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int x \ln x \, dx$ = ...

....

....

....

....

....

(3) $\int \arctan x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int \arctan x \, dx =$ ....

....

....

....

....

....

(4) $\int x \sin x \cos x \, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int x \sin x \cos x \, dx =$ ....

....

....

....

....

....

(5) $\int (\ln x)^2 \, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int (\ln x)^2 \, dx =$ ....

....

....

....

....

....

(6) $\int t \sec^2 t \, dt$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int t \sec^2 t \, dt =$ ....

....

....

....

....

....

2. จงหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_0^1 xe^{-x}\,dx =$ ....

....

....

....

....

....

....

(2) $\int_0^{\pi/2} \theta\cos 2\theta\, d\theta$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_0^{\pi/2} \theta\cos 2\theta\, d\theta =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $\int_0^4 \ln\sqrt{t}\, dt$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_0^4 \ln\sqrt{t}\, dt =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $\int_0^1 x\tan^{-1} x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_0^1 x\tan^{-1} x\, dx =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

(5) $\int_{0}^{1/2} \sin^{-1} x\,dx$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_{0}^{1/2} \sin^{-1} x\,dx =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

(6) $\int_{1}^{e} \cos(\ln t)\,dt$

วิธีทำ ให้ $u =$ .... $\Rightarrow$ $du =$ ....

$dv =$ .... $\Rightarrow$ $v =$ ....

$\int_{1}^{e} \cos(\ln t)\,dt =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

2. สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น (Introduction to Differential Equations)

2.1 ชีววิทยาและพลวัต (Biology and Dynamics)

การศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับนักศึกษาในแขนงวิชาทางด้านวิทยาศาสตร์ธรรมชาติควรพิจารณาถึงที่มาว่าเหตุใดจึงเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้และเพื่อการศึกษาวิเคราะห์อะไร พิจารณาประเด็นต่อไปนี้

- ชีววิทยาและพลวัต (Biology and Dynamics)
  ระบบของสิ่งมีชีวิตมีการเปลี่ยนแปลง มีพลวัต เช่น การเติบโต (growth) และ การขยายพันธุ์ (reproduction) เป็นต้น ชีววิทยาเป็นศาสตร์ที่ศึกษาและทำความเข้าใจกลไกของการเปลี่ยนแปลงและพลวัตของระบบของสิ่งมีชีวิต

- ศึกษาการเปลี่ยนแปลงและพลวัตโดยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ เพื่อบอกว่า "อะไร" เปลี่ยนแปลง ด้วย "อัตรา" เท่าใด และเปลี่ยนสู่ "สภาพใด"

- คณิตศาสตร์ประยุกต์ การใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาปัญหาหรือตอบคำถามทางวิทยาศาสตร์หรือศาสตร์อื่น ๆ

ปัญหาจากโลกธรรมชาติ

↓

สังเกต รวบรวมข้อมูล ประมวลคำถาม

↓

สร้างตัวแบบ (modeling)

↓

หาคำตอบ (methods of solution)

↓

การแปลความหมาย (Interpretation)

- ระบบพลวัตแบบเวลาต่อเนื่อง (continuous time dynamical systems) เป็นระบบที่แสดงค่าวัด (measurements) บนช่วงเวลาต่อเนื่องด้วย **"สมการเชิงอนุพันธ์"** ซึ่งแสดงกฎเกณฑ์ที่บ่งบอก "อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ" (instantaneous rate of change) ของเซตของค่าวัด เช่น

  "สมการเชิงอนุพันธ์" แสดงการเติบโตของประชากร โดยแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรเป็นฟังก์ชันของจำนวนของประชากร ณ ขณะใด ๆ

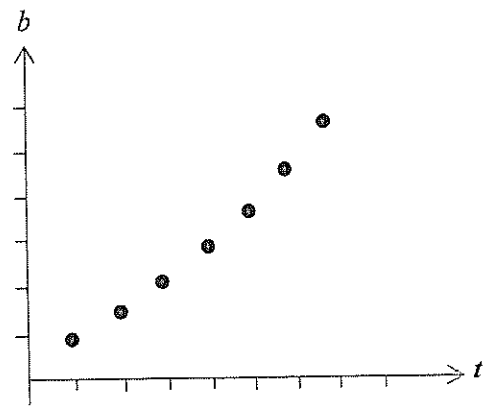
- ตัวแปร (variables) เป็นสัญลักษณ์ที่แทนค่าวัด **"ที่มีการเปลี่ยนแปลง"** ในช่วงของการทำการศึกษาหรือทำการทดลอง เช่น

  ศึกษาการเติบโตของแบคทีเรีย กำหนดตัวแปรในการศึกษานี้ คือ
  ตัวแปร t แทนเวลา และ b แทนปริมาณแบคทีเรีย

- พารามิเตอร์ (parameters) เป็นสัญลักษณ์ที่แทนค่าวัดหรือปริมาณ **"ที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง"** หรือให้เป็นค่าคงตัวในช่วงของการทำการศึกษาหรือทำการทดลอง เช่น ควบคุมอุณหภูมิให้คงตัวในช่วงการทดลองเพื่อศึกษาการเติบโตของแบคทีเรีย

ตัวแปร	พารามิเตอร์
เวลา t ปริมาณแบคทีเรีย b	อุณหภูมิ $T = 25^\circ C$
เวลา t ปริมาณแบคทีเรีย b	อุณหภูมิ $T = 30^\circ C$

- กราฟ (graph) ใช้แสดงข้อมูลจากค่าวัดของตัวแปร เช่น ศึกษาการเติบโตของแบคทีเรีย



- มิติ (Dimensions) และหน่วย (units)

ปริมาณ (Quantities)	มิติ (Dimensions)	หน่วย (Units)
ความยาว	ความยาว	เมตร นิ้ว ไมครอน
ช่วงเวลา	เวลา	วินาที นาที ชั่วโมง
มวล	มวล	กรัม กิโลกรัม
พื้นที่	ความยาว^2	ตารางเมตร ตารางนิ้ว
ปริมาตร	ความยาว^3	ลิตร แกลลอน ลูกบาศก์เมตร
ความเร็ว	ความยาว/เวลา	เมตร/วินาที ไมล์/ชั่วโมง
ความเร่ง	ความยาว/เวลา^2	เมตร/วินาที^{2}
แรง	มวล x ความยาว/เวลา^2	นิวตัน

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

การสร้างสมการซึ่งแสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่ทำการศึกษา พิจารณาได้จากกรณีตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.1 สมมุติว่า ปริมาณน้ำ 1 μm^3 ผ่านเข้าสู่เซลล์ทุก ๆ วินาที ทำให้ปริมาตรเซลล์ขยายขึ้นด้วยอัตรา 1 $\mu m^3/s$ กำหนดตัวแปร t แทนเวลา (วินาที) และ V แทนปริมาตรเซลล์ (μm^3) ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\frac{dV}{dt} = 1$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้หรือการหาผลเฉลย (solution) ก็คือ การหาปริมาตรเซลล์ V ณ ขณะเวลา t ใด ๆ ซึ่งทำได้โดย

$$\int \frac{dV}{dt}\,dt = \int 1.0\,dt$$

$$V = t + C$$

ถ้า ณ เวลา $t = 0$ ปริมาตรเซลล์คือ 300 μm^3 แทนค่าหา C ได้

$$V(0) = 0 + C = 300 \quad \Rightarrow \quad C = 300$$

ดังนั้น $t = 0$ ปริมาตรเซลล์คือ 300 μm^3 แทนค่าหา C ได้

$$V = t + 300$$

นั่นคือ ปริมาตรเซลล์ ณ ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $V = t + 300 \quad \mu m^3$

□

รูปแบบของปัญหาในตัวอย่าง 2.2.1 เรียกว่า ปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$\frac{dV}{dt} = 1$$ สมการเชิงอนุพันธ์ : DE

$$V(0) = 300$$ เงื่อนไขเริ่มต้น : IC

ตัวอย่าง 2.2.2 สมมุติว่า ผลผลิตจากกระบวนการเคมีมีอัตราการเปลี่ยนแปลงเป็น e^{-t} moles/s กำหนดตัวแปร t แทนเวลา (หน่วย s) และ P แทนปริมาณผลผลิต (หน่วย moles) ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\frac{dP}{dt} = e^{-t}$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ การหาปริมาณผลผลิต P ณ ขณะเวลา t ใด ๆ ซึ่งทำได้โดย

$$\int \frac{dP}{dt}dt = \int e^{-t}\,dt$$

$$P = -e^{-t} + C$$

ถ้ารู้ปริมาณผลผลิต P ณ เวลาเริ่มต้น สามารถหาค่า C ได้

□

ตัวอย่าง 2.2.3 การเติบโตของประชากรแบคทีเรีย (bacteria population) มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรซึ่งแปรตาม จำนวนของประชากรแบคทีเรีย กำหนดตัวแปร t แทนเวลา และ b แทนจำนวนของประชากรแบคทีเรีย ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\frac{db}{dt} = kb$$

การแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ การหาจำนวนของประชากรแบคทีเรีย b ณ ขณะเวลา t ใด ๆ ซึ่งทำได้โดย เขียนสมการในรูป

$$\frac{db}{b} = kdt$$

แล้วหาปริพันธ์

$$\int \frac{1}{b}db = \int k\,dt$$

$$\ln|b| = kt + c$$

$$|b| = e^{(kt+c)}$$

$$b = e^c e^{kt}$$

$$b = Ce^{kt}$$

เมื่อค่าคงตัว $C = e^c$ ถ้ารู้จำนวนของประชากรแบคทีเรีย b ณ เวลาเริ่มต้น สามารถหาค่า C ได้

□

2.3 บทนิยามที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

2.3.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการของตัวแปรสถานะ (state variable) หรือ ฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) และอนุพันธ์ของตัวแปรสถานะ เช่น

$$\frac{dV}{dt} = 1$$

$$\frac{dP}{dt} = e^{-t}$$

$$\frac{db}{dt} = kb$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-2x}$$

2.3.2 อันดับ (Order)

อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ อันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์

2.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations: ODE) และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations: PDE)

ODE	อันดับ (order)
$\frac{dy}{dx} = x^2$	1
$\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$	1
$\frac{d^3y}{dt^3} - t\frac{dy}{dt} + (t^2 - 1)y = e^t$	3
$y' - y = e^{2t}$	1
$y'' + y' = \cos t$	2

PDE	อันดับ (order)
$\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v$	1
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$	2
$u_t = c^2 u_{xx}$	2

2.3.4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (Linear Ordinary Differential Equations)
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n คือ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น**อันดับหนึ่ง**มีรูปแบบ

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

และสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น**อันดับสอง**มีรูปแบบ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

แบบฝึกหัด 2

1. จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในข้อใดต่อไปนี้เป็นแบบเชิงเส้น

   (1) $y' + x^2 y = y^2$

   (2) $x^2 y' - y + x = 0$

   (3) $xy' = x - y$

   (4) $y y' = \sin x$

   (5) $1 + xy = y'$

   (6) $3y'' - y' + 3y = x$

   (7) $x\sin y + (y\cos x)y' = 0$

   (8) $y'' - 2xy' + y = 0$

   (9) $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$

   (10) $y'' + y' - 2y = \sin x$

2. จงหาส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสถานะ (state variable) ระหว่างเวลาที่ระบุในแต่ละข้อ

   (1) ปริมาณของสารเคมีที่ผลิตจากเวลา $t=5$ นาที และ $t=10$ นาที ถ้าปริมาณสารเคมี P นาที สอดคล้องตามสมการ

   $$\frac{dP}{dt} = \frac{5}{1+2t}$$

   โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0)=2.0$ moles

   (2) ปริมาณของสารเคมีที่ผลิตจากเวลา $t=5$ นาที และ $t=10$ นาที ถ้าปริมาณสารเคมี P นาที สอดคล้องตามสมการ

   $$\frac{dP}{dt} = 5e^{-2t}$$

   โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0)=2.0$ moles

   (3) จำนวนคนไข้ AIDS (acquired immune deficiency syndrome) จากปี ค.ศ. 2010 และ ค.ศ. 2012 ถ้าจำนวนคนไข้ A สอดคล้องตามสมการ

   $$\frac{dA}{dt} = 523.8(t-2006)^2$$

   โดยที่ $A(2006)=13400$ คน (หน่วย t เป็นปี)

3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือ

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

โดยที่ $a_1(x) \neq 0$ จัดรูปใหม่ได้

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)}$$

หรือเขียนในรูป

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

ซึ่งเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน (standard form) ในการหาผลเฉลยของสมการนี้

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

กรณี $p(x) = 0$ สมการอยู่ในรูป

$$y' = q(x)$$

แก้สมการหา y ได้

$$y = \int q(x)\,dx$$

กรณี $p(x) \neq 0$ สมการอยู่ในรูป

$$y' + p(x)y = q(x)$$

แก้สมการโดยหาตัวคูณสมการที่เรียกว่า

integrating factor (IF)

3.1 การแก้สมการกรณี $p(x) = 0$

สมการอยู่ในรูป

$$y' = q(x)$$

กรณีนี้เป็นกรณีที่ง่าย แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\int y'dx = \int q(x)\,dx$$

ได้

$$y = \int q(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 3.1.1 จงแก้สมการ $y' = \sin(2x)$

วิธีทำ แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\int y'dx = \int \sin(2x)\,dx$$

$$y = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

□

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น $\frac{dL}{dt} = 1000e^{0.5t}, \quad L(0) = 1000$

วิธีทำ แก้สมการหา L โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ t ได้

$$\int \frac{dL}{dt}dt = \int 1000e^{0.5t}\,dt$$

$$L = \frac{1000}{0.5}e^{0.5t} + C$$

$$L = 2000e^{0.5t} + C$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $L(0) = 1000$ แทนค่าหา C ได้

$$L(0) = 2000e^{0.5(0)} + C = 1000 \Rightarrow C = -1000$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$L = 2000e^{0.5t} - 1000$$

□

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) $y' = \sqrt[3]{1-x}$

วิธีทำ แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\int y'dx = \int \sqrt[3]{1-x}\,dx$$

$y =$ ....

....

....

....

....

(2) $y' = e^{-0.5x}$

วิธีทำ แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\int y'dx = \int e^{-0.5x}\,dx$$

$y =$ ....

....

....

....

....

(3) $(1-e^{t})y' = e^{t}$

วิธีทำ จัดสมการในรูปมาตรฐานได้ ....

....

....

....

....

....

(4) $x^2y' = x^3+1$

วิธีทำ จัดสมการในรูปมาตรฐานได้ ....

....

....

....

....

....

....

(5) $\frac{1}{t}y' = \ln(3t)$

วิธีทำ จัดสมการในรูปมาตรฐานได้ ....

....

....

....

....

....

....

(6) $x^{-2}y' = e^x$

วิธีทำ จัดสมการในรูปมาตรฐานได้ ....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

(1) $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{5}{1+2t}, \quad P(0)=0$

วิธีทำ แก้สมการหา P โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ t ได้

....

....

....

....

....

....

(2) $\dfrac{dL}{dt} = 500e^{-0.2t}, \quad L(0)=500$

วิธีทำ แก้สมการหา L โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ t ได้

....

....

....

....

....

....

(3) $(\cos x)y' = \sin x, \quad y(0)=2$

วิธีทำ จัดสมการในรูปมาตรฐานได้ ....

....

....

....

....

....

....

(4) $\dfrac{dS}{dt} = t^3 - 2t^2 + 1, \quad S(0) = 1$

วิธีทำ แก้สมการหา S โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ t ได้

....

....

....

....

....

....

(5) $\dfrac{dy}{dt} = 1 + \sin t, \quad y(0) = -3$

วิธีทำ แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ t ได้

....

....

....

....

....

(6) $x y' = -y, \quad x > 0, \quad y(4) = 2$

วิธีทำ จากสมการที่กำหนดมา $x\dfrac{dy}{dx} = -y$ เขียนสมการในรูป

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

แก้สมการหา y โดยการหาปริพันธ์ได้

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

....

....

....

....

....

3.2 การแก้สมการกรณี $p(x) \neq 0$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน คือ

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (*)$$

(รูปมาตรฐาน : สัมประสิทธิ์ของพจน์อนุพันธ์เป็น 1)

การแก้สมการ (*) ให้ $u = \int p(x)dx$ ได้ $\frac{du}{dx} = p(x)$ และให้ $I(x) = e^u$ หาอนุพันธ์ได้

$$\frac{d}{dx}I(x) = e^u \frac{du}{dx} = I(x)p(x)$$

คูณสมการ (*) ด้วย $I(x)$ ได้

$$I(x)y' + I(x)p(x)y = I(x)q(x) \qquad (**)$$

ด้านซ้ายของสมการ (**) คือ อนุพันธ์ของผลคูณของ $I(x)$ และ y

$$\frac{d}{dx}\left[I(x)y\right] = I(x)q(x) \qquad (***)$$

หาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$I(x)y = \int I(x)q(x)\,dx$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (*) คือ

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)\,dx\right]$$

เรียก $I(x)$ ว่า integrating factor (ย่อเป็น IF) ของสมการ (*) นั่นคือ IF ของสมการ (*) คือ

$$\boxed{I(x) = e^{\left(\int p(x)dx\right)}}$$

หรือเขียน

$$\boxed{I(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right)}$$

ตัวอย่าง 3.2.1 จงแก้สมการ $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$$I(x) = e^{\left(\int 3dx\right)} = e^{3x}$$

คูณสมการด้วย IF ได้

$$e^{3x}y' + e^{3x}3y = e^{3x}2xe^{-3x}$$

ด้านซ้ายเป็นอนุพันธ์ของผลคูณของ e^{3x} และ y ทำให้ได้

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}y\right) = 2x$$

หาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{3x}y\right)dx = \int 2x\,dx$$

$$e^{3x}y = x^2 + C$$

$$y = e^{-3x}\left(x^2 + C\right)$$

□

ตัวอย่าง 3.2.2 จงแก้สมการ $y' + 3x^2y = 6x^2$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$$I(x) = e^{\left(\int 3x^2dx\right)} = e^{x^3}$$

คูณสมการด้วย IF ได้

$$e^{x^3}y' + e^{x^3}3x^2y = e^{x^3}6x^2$$

ด้านซ้ายเป็นอนุพันธ์ของผลคูณของ e^{x^3} และ y ทำให้ได้

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}y\right) = 6x^2e^{x^3}$$

หาปริพันธ์เทียบกับ x ได้

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}dx$$

$$e^{x^3}y = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2y' + xy = 1, \qquad x > 0, \quad y(1) = 2$$

วิธีทำ จัดสมการเป็นรูปมาตรฐานได้

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

หา IF ของสมการได้

$$I(x) = e^{\left(\int \frac{1}{x}dx\right)} = e^{(\ln|x|)} = e^{(\ln x)} = x \qquad (x > 0)$$

คูณสมการด้วย IF ได้

$$xy' + y = \frac{1}{x}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy) &= \int \frac{1}{x} \\ xy &= \ln|x| + C \\ y &= \frac{\ln x + C}{x} \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 2$ แทนค่าได้

$$y(1) = \frac{\ln 1 + C}{1} = 2 \Rightarrow C = 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นคือ $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$

□

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดมาเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

(1) $\dfrac{dx}{dt} = t$ มีผลเฉลยเป็น $x(t) = 1+\dfrac{t^2}{2}$

วิธีทำ

....

....

....

(2) $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{k}{1+t}$ มีผลเฉลยเป็น $w(t) = k\ln(1+t) + 3$

วิธีทำ

....

....

....

(3) $\dfrac{dz}{dx} = 2\sqrt{z}$ มีผลเฉลยเป็น $z(x) = (x+2)^2$

วิธีทำ

....

....

....

(4) $\dfrac{dy}{dt} = 2y$ มีผลเฉลยเป็น $y(t) = 4e^{2t}$

วิธีทำ

....

....

....

2. จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) $y' - 3y = e^x$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $y' - 2xy = x$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $y' + (\cos t)\,y = \cos t$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$I(t) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $xy' + y = x\cos x$

วิธีทำ จัดสมการเป็นรูปมาตรฐานได้ ....

หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(5) $xy' + 2y = e^{x^2}$

วิธีทำ

(6) $\dfrac{dy}{d\theta} - y\tan\theta = 1, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

วิธีทำ

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

(1) $y' + y = x + e^x, \quad y(0) = 0$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นแบบเชิงเส้นอันดับหนึ่งรูปมาตรฐาน หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $xy' - 3y = x^2, \quad x > 0, \quad y(1) = 0$

วิธีทำ จัดสมการเป็นรูปมาตรฐานได้ ....

หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $(1+x^2)y' + 2xy = 3\sqrt{x}, \qquad y(0)=2$

วิธีทำ จัดสมการเป็นรูปมาตรฐานได้ ....

หา IF ของสมการได้

$I(x) =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $t^2\dfrac{dy}{dt} + 2ty = \cos t, \qquad y(\pi)=0$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง

(Second Order Linear Ordinary Differential Equations)

4.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

จำนวนเชิงซ้อน z คือจำนวนในรูป

$$z = x + iy$$

เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง และ $i^2 = -1$ โดยเรียก x ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z และเรียก y ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z

ตัวอย่างของจำนวนเชิงซ้อน เช่น

$$4+3i, \quad \sqrt{2}-i, \quad -1+i, \quad \frac{1}{2}-5i, \quad -3i, \quad i, \quad -i, \quad 5i$$

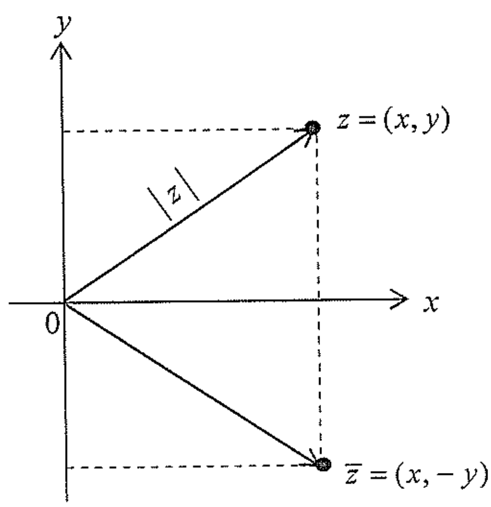
สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ใด ๆ

- สามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน z ด้วยจุด (x, y) ในระนาบหรือเวกเตอร์ (x, y)
- ขนาด (modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน z คือ

  $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- สังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน z คือ

  $$\overline{z} = x - iy$$



ตัวอย่าง 4.1.1

(1) $z = 4+3i,\quad |z| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5,\quad \overline{z} = 4-3i$

(2) $z = \sqrt{2}-i,\quad |z| = \sqrt{\sqrt{2}^2+(-1)^2} = \sqrt{3},\quad \overline{z} = \sqrt{2}+i$

(3) $z = -3i,\quad |z| = 3,\quad \overline{z} = 3i$

(4) $z = 5i,\quad |z| = 5,\quad \overline{z} = -5i$

(5) $z = -8,\quad |z| = 8,\quad \overline{z} = -8$

□

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = x_1+iy_1$ และ $z_2 = x_2+iy_2$ ใด ๆ

- การบวก

$$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

- การลบ

$$z_1 - z_2 = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$$

- การคูณ

$$z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2) + i\,(x_1y_2+y_1x_2)$$

- การหาร

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{1}{|z_2|^2}\,z_1\overline{z_2}$$

ตัวอย่าง 4.1.2 ให้ $z_1 = -4+3i$ และ $z_2 = 5-2i$

(1) $z_1+z_2 = (-4+5)+i(3-2) = -1+i$

(2) $z_1-z_2 = (-4-5)+i(3-(-2)) = -9+5i$

(3) $z_1\,z_2 = (-4+3i)(5-2i)) = -20 + 8i + 15i - 6i^2 = -14 + 23i$

(4) $z_1\,\overline{z_1} = (-4+3i)(-4-3i) = 16 + 12i - 12i - 9i^2 = 25$

(5) $z_2\,\overline{z_2} = (5-2i)(5+2i) = 25 + 10i - 10i - 4i^2 = 29$

(6) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-4+3i}{5-2i} = \dfrac{(-4+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \dfrac{1}{29}(-26+7i) = -\dfrac{26}{29} + \dfrac{7}{29}i$

□

การแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ในรูปเชิงขั้วและเอ็กซ์โปเนลเชียล
(Polar and Exponential Representation)

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ใด ๆ ให้

r = ระยะจากจุดกำเนิด O ไปยังจุด $z = (x, y)$

θ = มุมที่ oz ทำมุมกับแกน x ทางบวก

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

ดังนั้น

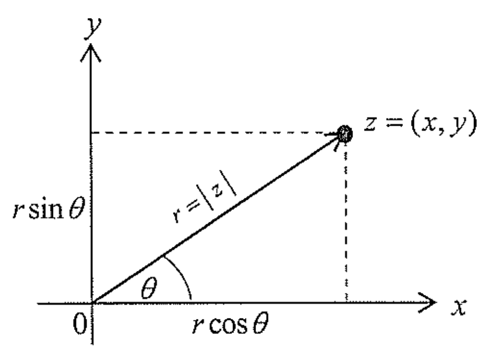
$x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

ทำให้แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ในรูปเชิงขั้วได้ดังนี้

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

จากสูตรออยเลอร์ (Euler's formula) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ทำให้แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ในรูปเอ็กซ์โปเนลเชียลได้ดังนี้

$$z = re^{i\theta}$$



ตัวอย่าง 4.1.3 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ในรูปเชิงขั้วและเอ็กซ์โปเนนเชียล

(1) $z = -1 + i$ (2) $z = \sqrt{3} + i$

วิธีทำ (1)

$$z = -1 + i$$

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

ดังนั้น

$$z = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

(2)

$$z = \sqrt{3} + i$$

$$r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

ดังนั้น

$$z = \sqrt{3} + i = \sqrt{10}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{10}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

□

จากสูตรออยเลอร์ (Euler's formula) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ผลที่ตามมาคือ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ใด ๆ ได้

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาค่าของ e^z สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

(1) $z = 3 + 2i$ (2) $z = i\pi$

วิธีทำ (1)

$$z = 3 + 2i$$

$$e^z = e^{3+2i} = e^3 e^{2i} = e^3(\cos 2 + i\sin 2)$$

(2)

$$z = i\pi$$

$$e^z = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

□

สรุป การแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ใด ๆ มีดังนี้

- เชิงฉาก

$$z = x + iy$$

- จุดในระนาบหรือเวกเตอร์

$$z = (x, y)$$

- เชิงขั้ว

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- เชิงเอ็กซ์โปเนนเชียล

$$z = re^{i\theta} = e^{\ln r}e^{i\theta} = e^{(\ln r + i\theta)}$$

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงคำนวณค่าต่อไปนี้

(1) $|1-2i|$, $|2i|$, $|\sqrt{5}+2i|$, $|-5-i|$, $|-3+4i|$, $|-\sqrt{5}i|$, $|-\sqrt{5}|$

(2) $\dfrac{3+4i}{7-i}$, $\dfrac{2}{-1-i}$, $\dfrac{1-i}{1+i}$, $\dfrac{-2-i}{-3+4i}$, $\dfrac{2i}{1-3i}$

(3) $\overline{-2i}$, $\overline{3i}$, $\overline{\sqrt{2}i}$, $\overline{5+i}$, $\overline{-1+3i}$, $\overline{-1-\sqrt{3}i}$, $z+\overline{z}$, $z-\overline{z}$

(4) $(1-3i)(2+i)$, $(2+3i)(-3+5i)$, $(-2-6i)(-4+3i)$

(5) $(1-3i)(1+3i)$, $(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)$, $(\sqrt{5}-6i)(\sqrt{5}+6i)$, $(x+iy)(x-iy)$

(6) $2-3i+1+i$, $(-3-3i)-(2+5i)$, $(-4-3i)-(-2+5i)$

2. จงแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้วและเอ็กซ์โปเนนเชียล

(1) $z = \sqrt{3}+\sqrt{3}i$

(2) $z = -5-5i$

(3) $z = -2+2i$

(4) $z = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(5) $z = 1+\sqrt{3}\,i$

(6) $z = 1-\sqrt{3}i$

3. จงคำนวณค่าต่อไปนี้ โดยใช้สูตรออยเลอร์ $e^{it} = \cos t + i\sin t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(1) e^{2-3i}, e^{2+3i}

(2) $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(3) $e^{\ln 5-2i}$, $e^{\ln 5+2i}$

(4) $e^{-2+\frac{\pi}{2}i}$, $e^{-2-\frac{\pi}{2}i}$

(5) $e^{2\pi i}$, $e^{-2\pi i}$

(6) $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองแบบเอกพันธ์และสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

4.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง

จากหัวข้อ 2.3.4 รูปทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง คือ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

จัดเป็นรูปมาตรฐานได้

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{b(x)}{a_2(x)}$$

หรือ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (*)$$

ถ้า $r(x)=0$ เรียกสมการ (*) ว่า สมการเอกพันธ์ (homogeneous equation) กรณีที่จะศึกษาคือ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นค่าคงตัว โดยกล่าวว่า สมการมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว (constant coefficients)

ตัวอย่าง 4.2.1 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(1) $y'' - 4y' + 2y = x^2$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง ไม่เอกพันธ์ สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(2) $y'' - 4y' + 2y = 0$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง เอกพันธ์ สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(3) $x^2y'' - 4xy' + 3y = 0$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง เอกพันธ์

(4) $y'' + 5y' - 9y = e^{4x}$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง ไม่เอกพันธ์ สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

(5) $y'' + y' = \cos t$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง ไม่เอกพันธ์ สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

□

4.2.2 ทฤษฎีบทและแนวคิดที่เกี่ยวข้อง

- **ผลบวกเชิงเส้น** (linear combination)

  ถ้าสมการเอกพันธ์

  $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

  มี y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลย แล้วผลบวกเชิงเส้น $c_1y_1 + c_2y_2$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยของสมการด้วย และเรียกผลเฉลยนี้ว่า ผลเฉลยทั่วไป (general solution)

- **การมีอยู่ของผลเฉลยและความเป็นหนึ่งเดียวเท่านั้น**

  (Existence and uniqueness of solution)

  ถ้า $p(x)$, $q(x)$ และ $r(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ x_0 เป็นจุดหนึ่งในช่วง I แล้วปัญหาค่าเริ่มต้น

  $$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$
  $$y(x_0) = a, \quad y'(x_0) = b$$

  มีผลเฉลยบนช่วง I และเป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องตามเงื่อนไขเริ่มต้น

- **ความเป็นอิสระเชิงเส้นและไม่เป็นอิสระเชิงเส้น**

  (Linear independence and linear dependence)

  ฟังก์ชัน f และ g นิยามบนช่วง I ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly dependent) ถ้ามีค่าคงตัว c ซึ่ง

  $$g(x) = cf(x)$$

  หรือ

  $$\frac{g(x)}{f(x)} = c$$

  มิฉะนั้นกล่าวว่า ฟังก์ชัน f และ g เป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent)

  (linearly dependent : ld)

  (linearly independent : li)

- **ทฤษฎีบท**

ให้ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

บนช่วง I ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์นี้ คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 4.2.2 จงเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

(1) สมการ

$$y'' + y = 0$$

มี $y_1 = \cos x$ และ $y_2 = \sin x$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้ คือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(2) สมการ

$$y'' - y' - 2y = 0$$

มี $y_1 = e^{-x}$ และ $y_2 = e^{2x}$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้ คือ

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

(3) สมการ

$$y'' = 0$$

มี $y_1 = 1$ และ $y_2 = x$ เป็นผลเฉลย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้ คือ

$$y = c_1 + c_2x$$

□

ตัวอย่าง 4.2.3 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f และ g เป็นอิสระเชิงเส้น หรือ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

$f(x)$	$g(x)$	ld	li
$4x$	$-5x$	✓	
-2	$3x$		✓
$2x$	x^2		✓
e^x	e^{2x}		✓
e^x	e^{-x}		✓
e^x	$3e^x$	✓	
e^{-x}	xe^{-x}		✓
$\sin x$	$x\sin x$		✓
$\sin 2x$	$\cos 3x$		✓
$\cos 2x$	$3\cos 2x$	✓	
$\tan x$	$\sin x$		✓
$\ln x$	$\ln\left(x^2\right)$	✓	

□

4.2.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น ส.ป.ส. ค่าคงตัว

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

ให้ $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (*) แทนในสมการ (*) ได้

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

ผลที่ตามมา คือ

$$am^2 + bm + c = 0 \qquad (**)$$

ดังนั้น $y = e^{mx}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (*) เมื่อ m เป็นรากของสมการกำลังสอง (**) สมการ (**) มีชื่อเรียกว่า สมการช่วย (auxiliary equation) หรือ สมการแคแรคเทอริสติก (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (*)

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น ส.ป.ส. ค่าคงตัว จึงเชื่อมโยงกับการหาผลเฉลยหรือการหารากของสมการช่วย (**) ซึ่งมี 2 ค่า คือ

$$m_1,\ m_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (***)$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น ส.ป.ส. ค่าคงตัว สมการ (*) จึงขึ้นอยู่กับรากของ (***) ซึ่งมี 3 กรณีดังนี้

- **กรณีที่ 1** m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำ

  ผลเฉลยของสมการ (*) คือ

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

  ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (*) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

  เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 4.2.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 3y' + 2y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

นั่นคือ $(m-1)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1, 2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

ตัวอย่าง 4.2.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 5y' - 9y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 + 5m - 9 = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $m = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-(-36)}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

เมื่อ $m_1 = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ และ $m_2 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ และ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 + m - 6 = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $m = -3,\ 2$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ หาอนุพันธ์ผลเฉลยได้

$$y' = -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น แทนค่าได้

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad (1)$$
$$y'(0) = -3c_1 + 2c_2 = 0 \qquad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $c_1 = \dfrac{2}{5}$ และ $c_2 = \dfrac{3}{5}$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$y = \frac{2}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{2x}$$

□

- **กรณีที่ 2** m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงซ้ำ

  นั่นคือ $m_1 = m_2 = m$ ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ (*) ที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$y_1 = e^{mx} \quad \text{และ} \quad y_2 = xe^{mx}$$

  ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ (*) คือ

$$y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$$

  เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $4y'' + 12y' + 9y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$4m^2 + 12m + 9 = 0$$

นั่นคือ $(2m+3)(2m+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

รากของสมการช่วยมีค่าซ้ำ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = c_1e^{-3x/2} + c_2xe^{-3x/2}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

ตัวอย่าง 4.2.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 4y' + 4y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

นั่นคือ $(m-2)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2, 2$

รากของสมการช่วยมีค่าซ้ำ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

- **กรณีที่ 3** m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงเชิงซ้อน

รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่สังยุค นั่นคือ

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{และ} \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ (*) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

จัดรูปผลเฉลยนี้ โดยใช้สูตรออยเลอร์ได้

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= c_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}\left[(c_1+c_2)\cos\beta x + i(c_1-c_2)\sin\beta x\right] \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $C_1 = c_1 + c_2$ และ $C_2 = i(c_1 - c_2)$ ผลเฉลยที่ได้นี้เป็นผลเฉลยทั้งหมดของสมการเอกพันธ์ (*) ในกรณีรากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยผลเฉลยเป็นค่าจริงเมื่อค่าคงตัว C_1 และ C_2 เป็นค่าจริง

โดยสรุปสำหรับกรณีที่ 3 เมื่อรากของสมการช่วย $am^2 + bm + c = 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปคู่สังยุค

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{และ} \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $ay'' + by' + cy = 0$ คือ

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$

ตัวอย่าง 4.2.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 6y' + 13y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 - 6m + 13 = 0$$

รากของสมการช่วยคือ

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

ตัวอย่าง 4.2.10 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

วิธีทำ สมการช่วย คือ

$$m^2 + 4m + 5 = 0$$

รากของสมการช่วยคือ

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$$

หาอนุพันธ์ผลเฉลยได้

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น แทนค่าได้

$$y(0) = C_1 = 1 \qquad (1)$$
$$y'(0) = -2C_1 + C_2 = -2 \qquad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $C_1 = 1$ และ $C_2 = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ $y = e^{-2x} \cos x$

□

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงแก้สมการกำลังสองในข้อต่อไปนี้

(1) $2m^2 + 3m + 1 = 0$

(2) $m^2 = 2m - 1$

(3) $2m^2 + 2m + 3 = 0$

(4) $m^2 + 6m = 0$

(5) $m^2 + 5m = 9$

(6) $m^2 = 1$

(7) $3m^2 = -5$

(8) $6m^2 = m + 2$

(9) $\sqrt{2}\, m^2 + 3m = 0$

(10) $m^2 + 2m + 3 = 0$

(11) $m^2 + 8m + 17 = 0$

(12) $3m^2 - \sqrt{3}\, m + 1 = 0$

2. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการในข้อต่อไปนี้

(1) $y'' - 2y' - 3y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(2) $y'' + 5y' + 6y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(3) $y'' + y' - 12y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(4) $4y'' + 4y' + y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(5) $4y'' - y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(6) $2y'' + y' = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(7) $9y'' - 30y' + 25y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(8) $y'' - 4y' + 13y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(9) $y'' - 4y' + y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(10) $\frac{d^2P}{dt^2} = -5P$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(11) $\frac{d^2S}{dt^2} = S$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(12) $2\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(13) $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

(14) $2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นในข้อต่อไปนี้

(1) $y'' + y' - 12y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 1$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(5) $\dfrac{d^2S}{dt^2} + 4\dfrac{dS}{dt} + 3S = 0, \quad S(0) = \dfrac{1}{2}, \quad S'(0) = -2$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(6) $y'' + 4y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(7) $y'' + 4y = 0, \quad y(\pi/6) = 1, \quad y'(\pi/6) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(8) $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบในข้อต่อไปนี้

(1) $y'' + 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi/2) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 3$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0, \qquad y(-1) = 1, \qquad y(1) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y(\pi/2) = 1$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองแบบไม่เอกพันธุ์และสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad (*)$$

$r(x) \neq 0$ สมการเอกพันธุ์ที่คู่ขนานกับสมการนี้ คือ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (**)$$

4.3.1 **ทฤษฎีบท** ผลเฉลยทั่วไปของสมการแบบไม่เอกพันธุ์ (*) คือ

$$y = y_h + y_p$$

เมื่อ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ (*) และ

y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (**)

พิสูจน์ เพราะว่า y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (**) ดังนั้น

$$y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h = 0 \qquad (1)$$

เพราะว่า y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ (*) ดังนั้น

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x) \qquad (2)$$

สมการ (1) บวกกับสมการ (2) ได้

$$(y_h'' + y_p'') + p(x)(y_h' + y_p') + q(x)(y_h + y_p) = 0 + r(x)$$
$$(y_h + y_p)'' + p(x)(y_h + y_p)' + q(x)(y_h + y_p) = r(x)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $y = y_h + y_p$ สอดคล้องตามสมการไม่เอกพันธุ์ (*)

นั่นคือ $y = y_h + y_p$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการแบบไม่เอกพันธุ์ (*)

□

4.3.2 การหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์ (*)

ในกรณีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์อยู่ในรูป

$$y'' + by' + cy = r(x)$$

หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์นี้ โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficients) ซึ่งใช้วิธีกำหนด y_p ที่สอดคล้องกับลักษณะของฟังก์ชัน $r(x)$ ดังที่สรุปในตาราง

$r(x)$	y_p
ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ae^{mx}	ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง Ae^{mx}
ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n $p_n(x)$	ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n $q_n(x)$
ฟังก์ชันโคไซน์หรือไซน $a\cos(kx) + b\sin(kx)$	ฟังก์ชันโคไซน์หรือไซน $A\cos(kx) + B\sin(kx)$
$e^{mx}p_n(x)$	$e^{mx}q_n(x)$
$e^{mx}\left[a\cos(kx) + b\sin(kx)\right]$	$e^{mx}\left[A\cos(kx) + B\sin(kx)\right]$
$p_n(x)\cos(kx) + r_n(x)\sin(kx)$	$q_n(x)\cos(kx) + s_n(x)\sin(kx)$
$e^{mx}\left[p_n(x)\cos(kx) + r_n(x)\sin(kx)\right]$	$e^{mx}\left[q_n(x)\cos(kx) + s_n(x)\sin(kx)\right]$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 3y' + 2y = e^x$

วิธีทำ

หา y_h สมการช่วย คือ $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2, -1$

นั่นคือ $y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$

หา y_p เพราะว่า $r(x) = e^x$ ฉะนั้นให้ $y_p = Ae^x$ หาอนุพันธ์ได้

$$y_p' = Ae^x, \quad y_p'' = Ae^x$$

แทน y_p, y_p' และ y_p'' ในสมการไม่เอกพันธุ์ได้

$$Ae^x + 3Ae^x + 2Ae^x = e^x$$
$$6Ae^x = e^x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ e^x ได้ $6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}$ ทำให้ได้ $y_p = \frac{1}{6}e^x$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{6}e^x$$

□

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 5y' + 6y = 2x$

วิธีทำ

หา y_h สมการช่วย คือ $m^2 + 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = -3, -2$

นั่นคือ $y_h = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x}$

หา y_p เพราะว่า $r(x) = 2x$ ฉะนั้นให้ $y_p = Ax + B$ หาอนุพันธ์ได้

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

แทน y_p, y_p' และ y_p'' ในสมการไม่เอกพันธุ์ได้

$$0 + 5A + 6(Ax+B) = 2x$$
$$5A + 6B + 6Ax = 2x$$

เทียบสัมประสิทธิ์

ส.ป.ส. 1 : $5A + 6B = 0$ (1)

ส.ป.ส. x : $6A = 2$ (2)

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $A = \frac{1}{2}$ และ $B = -\frac{5}{18}$ ทำให้ได้ $y_p = \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}$$

□

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 2y' + y = e^x$

วิธีทำ

หา y_h สมการช่วย คือ

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

รากของสมการช่วยเป็นรากซ้ำ คือ $m = -1, -1$ ทำให้ได้

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

หา y_p เพราะว่า $r(x) = e^x$ ฉะนั้นให้

$$y_p = Ae^x$$

แต่ถ้ากำหนด y_p เช่นนี้ หรือให้ $y_p = Axe^x$ แล้ว y_p และ y_h ไม่มีความเป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นให้

$$y_p = Ax^2e^x$$

หาอนุพันธ์ได้

$$y_p' = 2xAe^x + Ax^2e^x, \quad y_p'' = (2+2x)Ae^x + (2x+x^2)Ae^x$$

นั่นคือ

$$y_p' = (2x+x^2)Ae^x, \quad y_p'' = (2+4x+x^2)Ae^x$$

แทนในสมการไม่เอกพันธุ์ได้

$$(2+4x+x^2)Ae^x - 2(2x+x^2)Ae^x + Ax^2e^x = e^x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ e^x ได้

$$(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2)A = 1$$

นั่นคือ $A = \dfrac{1}{2}$ ทำให้ได้ $y_p = \dfrac{1}{2}x^2e^x$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$$

□

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 3y' + 2y = 10\cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

วิธีทำ

หา y_h สมการช่วย คือ $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2, -1$

$$y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$$

หา y_p เพราะว่า $r(x) = 10\cos 2x$ ฉะนั้นให้

$$y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$$

หาอนุพันธ์ได้

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \quad y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

แทนในสมการไม่เอกพันธุ์ได้

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 3(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 2(A\cos 2x + B\sin 2x) = 10\cos 2x$$

เทียบสัมประสิทธิ์

ส.ป.ส. $\cos 2x$: $-4A + 6B + 2A = 10 \Rightarrow -2A + 6B = 10$ (1)

ส.ป.ส. $\sin 2x$: $-4B - 6A + 2B = 10 \Rightarrow -6A - 2B = 0$ (2)

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $A = -\frac{1}{2}$ และ $B = \frac{3}{2}$ ทำให้ได้

$$y_p = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow y' = -2c_1e^{-2x} - c_2e^{-x} + \sin 2x + 3\cos 2x$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น แทนค่าได้

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$y'(0) = -2c_1 - c_2 + 3 = 0 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 3 \quad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) ได้ $c_1 = \frac{3}{2}$ และ $c_2 = 0$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ $y = \frac{3}{2}e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x$

□

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในข้อต่อไปนี้

(1) $y'' - 4y' + 3y = 5$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

(2) $y'' + 5y' - 9y = x^2$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

(3) $y'' + 5y' - 9y = \cos 2x$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $y'' + 5y' - 9y = e^{4x}$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(5) $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

(6) $y'' + 6y' + 9y = 4\cos 2x + 6\sin 2x$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นในข้อต่อไปนี้

(1) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-2x}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(2) $\dfrac{d^2S}{dt^2} + 4\dfrac{dS}{dt} + 3S = e^{-3t}, \qquad S(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad \left.\dfrac{dS}{dt}\right|_{t=0} = -2$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(3) $y'' + y' - 12y = 4e^{2x}, \qquad y(0) = 7, \qquad y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4) $y'' + 3y' + 2y = 10\cos 2x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(5) $y'' + y' - 12y = 4e^{2x}, \qquad y(0) = 7, \qquad y'(0) = 0$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3x}, \qquad y(0) = 2, \qquad y(\pi / 2) = 0$$

วิธีทำ สมการช่วย คือ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

บรรณานุกรม

ประภาศรี อัศวกุล, **แคลคูลัส 1**, พิมพ์ครั้งที่ 8, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี, พ.ศ. 2551

Adler, F. R., **Modeling the Dynamics of Life, Calculus and Probability for Life Scientists**, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2005

Schulz, E., **Differential Equations**, พิมพ์ครั้งที่ 3, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี, พ.ศ. 2542

Stewart, J., **Calculus Single Variable**, 5th Edition, International Edition, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2003