เอกสารประกอบการสอน

วิชา โครงสร้างของเลขเต็มหน่วย

Discrete Structure

(423202)

อาจารย์ สุภาพร บุญฤทธิ์

สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชา 423202 โครงสร้างของเลขเต็มหน่วย (Discrete Structure) เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นเอกสารประกอบการสอน สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จำนวน 4 หน่วยกิต ซึ่งมีคำอธิบายรายวิชาดังนี้

สังเขปทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ดีสครีต ครอบคลุมในเนื้อหาคือ ความรู้พื้นฐานทางตรรกศาสตร์ เซตและพีชคณิตแบบบูลลีน วิธีการพิสูจน์เบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ลำดับ การอุปนัยทางคณิตศาสตร์และการเวียนบังเกิด การนับ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ต้นไม้

อาจารย์ สุภาพร บุญฤทธิ์
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
4 เมษายน 2555

ประมวลการสอน

รหัสวิชา 423202 **ชื่อรายวิชา** โครงสร้างของเลขเต็มหน่วย (Discrete Structure)

หน่วยกิต 4 (4-0-8) คือ บรรยาย 4 ปฏิบัติ 0 และศึกษาด้วยตนเอง 8

สังกัด สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์, สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์, มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หมวดวิชา วิชาบังคับ (W)

การเรียน แบบ Lecture (C)

ผู้สอน อาจารย์สุภาพร บุญฤทธิ์

ห้องทำงาน: อาคารวิชาการ ชั้น 4 ห้อง B02

Contact: sbunrit@yahoo.com

เวลาสอน ตามตารางในระบบลงทะเบียนในแต่ละปีการศึกษา

คำอธิบายรายวิชา

สังเขปทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ดีสครีต ครอบคลุมในเนื้อหาคือ ความรู้พื้นฐานทางตรรกศาสตร์ เซต และพีชคณิตแบบบูลลีน วิธีการพิสูจน์เบื้องต้น ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ลำดับ การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ และการเวียนบังเกิด การนับ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ ต้นไม้

วัตถุประสงค์ในการเรียนการสอน

1. เพื่อให้ผู้เรียนตระหนักถึงประโยชน์ของหลักการทางคณิตศาสตร์ดีสครีตในการแก้ปัญหาเชิงประยุกต์
2. เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ดีสครีตเบื้องต้นที่จำเป็น และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ได้
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคิดในเชิงการให้เหตุผล โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ดีสครีตเป็นเครื่องมือ
4. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถนำหลักการทางคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นไปใช้ สำหรับการเรียนในวิชาต่อๆ ไปได้

แผนการเรียนการสอน

สัปดาห์ที่ 1	Lecture 1A	Course Agreements, Pre-Test
	Lecture 1B	Logic and Sets
สัปดาห์ที่ 2	Lecture 2A	Sets and Boolean Algebra
	Lecture 2B	Introduction to Proofs
สัปดาห์ที่ 3	Lecture 3A	Proofs
	Lecture 3B	Relations and functions
สัปดาห์ที่ 4	Lecture 4A	Sequence and Summation
	Lecture 4B	Induction
สัปดาห์ที่ 5	Lecture 5A	Recursion **Assignment #1**
	Lecture 5B	Review of Induction
สัปดาห์ที่ 6	Lecture 6A	Review of Recursion
	Lecture 6B	ทบทวนก่อนสอบกลางภาค
สัปดาห์ที่ 7	**สอบกลางภาค**	
สัปดาห์ที่ 8	Lecture 8A	Basic of Counting
	Lecture 8B	Basic of Counting
สัปดาห์ที่ 9	Lecture 9A	The Pigeonhole Principle **Assignment #2**
	Lecture 9B	Solutions of Homework and Quiz
สัปดาห์ที่ 10	Lecture 10A	Graph
	Lecture 10B	Graph **Assignment #3**

สัปดาห์ที่ 11	Lecture 11A	Trees
	Lecture 11B	Trees
สัปดาห์ที่ 12	Lecture 12A	Review Graph and Trees
	Lecture 12B	ทบทวนก่อนสอบปลายภาค
สัปดาห์ที่ 13	**สอบปลายภาค**	

การประเมินผล

Attendance	10%
Assignments	15% (งานเดี่ยว 2 ชิ้นๆ ละ 4%, งานกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน 1 ชิ้น 7%)
Random QUIZ	15% (ประมาณ 4 ครั้ง)
Midterm Exam	30%
Final Exam	30%
Total	**100%**

Text (ใช้อ้างอิงเป็นหลักในการสอน)

Kenneth H. Rosen, *Discrete mathematics and its applications.* 6th edition, Mc.GrawHill, 2007.

หนังสืออ่านประกอบ

1. สมพร สูตินันท์โอภาส, ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ คณิตศาสตร์ดีสครีต, Mc.GrawHill, 2539. (แปลและเรียบเรียงจาก Theory and Problems of Discrete Mathematics ของ Seymour Lipschutz).
2. วนิดา เหมะกุล, คณิตศาสตร์ดิสครีต, ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด, 2535.
3. โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ สอวน., คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับคอมพิวเตอร์, มูลนิธิ สอวน., 2548

จะเป็นวิศวกรที่เก่งก็ต้องรู้แคลคูลัส จะเป็นนักคอมพิวเตอร์ที่เจ๋งก็ต้องรู้คณิตศาสตร์ภินทนะ (ดีสครีต) แต่ถ้าจะเป็นวิศวกรคอมพิวเตอร์ที่มีฝีมือก็ต้องรู้..

สารบัญ

บทที่ 1
ตรรกศาสตร์เบื้องต้น (Introduction to Logic)

ตรรกศาสตร์ คือ ศาสตร์ที่กล่าวถึงหลักเกณฑ์การคิดหาเหตุผล

1.1 Propositional Logic (ตรรกะเชิงประพจน์)

=> ประพจน์ (Proposition) คือ ข้อความ (Statement) หรือประโยค (Sentence) ที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นทั้งสองอย่างไม่ได้

Ex. 1 ตัวอย่างประโยคที่เป็นประพจน์

1. กรุงเทพฯ เป็นเมืองหลวงของประเทศไทย
2. ม.เทคโนโลยีสุรนารี อยู่ในจังหวัดนครราชสีมา
3. $1 + 1 = 2$
4. $2 + 2 = 3$

Ex. 2 พิจารณาประโยคต่อไปนี้

1. ขณะนี้เป็นเวลาเท่าใด
2. อ่านหนังสือดีๆ นะ
3. $x + 1 = 2$
4. $x + y = z$

* ในข้อ 3 , 4 ถ้าแทนค่าตัวแปรจะเป็นประพจน์

=> เราใช้ตัวอักษรในการแทนประพจน์ (Propositional variable) อักษรที่นิยมใช้ เช่น p,q,r,s,...

=> ใช้ค่าความจริง (Truth value) ในการกำหนดค่าประพจน์ คือ เป็น T เมื่อเป็นจริง และเป็น F เมื่อเป็นเท็จ

นิยาม 1 ให้ p เป็นประพจน์ นิเสธของ p คือ $\neg p$ (หรือ $\overline{p}$) เป็นข้อความ “ไม่ใช่กรณีที่เป็น p”

Ex. 3 หานิเสธของประพจน์ที่ว่า “วันนี้เป็นวันศุกร์”

Sol. จากนิยาม 1 นิเสธของประพจน์ “วันนี้เป็นวันศุกร์” คือ “ไม่ใช่กรณีที่วันนี้เป็นวันศุกร์” ซึ่งเขียนง่ายๆ ได้ว่า “วันนี้ไม่ใช่วันศุกร์”

Ex. 4 หานิเสธของประพจน์ "ฝนตกอย่างน้อย (at least) 10 ลูกบาศก์นิ้วที่โคราชวันนี้"

Sol. นิเสธของประพจน์ คือ "ไม่ใช่กรณีที่ฝนตกอย่างน้อย 10 ลูกบาศก์นิ้วที่โคราชวันนี้" นั่นคือ "ฝนตกน้อยกว่า (less than) 10 ลูกบาศก์นิ้วที่โคราชวันนี้

ตารางค่าความจริงของนิเสธของประพจน์ (Negation of a proposition) คือ

p	$\neg p$
T	F
F	T

> **นิยาม 2** ให้ p และ q เป็นประพจน์ การเชื่อม p และ q (conjunction of p and q) คือ $p \wedge q$ เป็นประพจน์ "ทั้ง p และ q"

Ex. 5 หาการเชื่อมของประพจน์ p และ q เมื่อ p คือ "วันนี้วันศุกร์" q คือ "วันนี้ฝนตก"

Sol. การเชื่อมของประพจน์ p และ q คือ $p \wedge q$ ซึ่ง $p \wedge q$ เป็นประพจน์ "วันนี้วันศุกร์และวันนี้ฝนตก"

ตารางค่าความจริงของการเชื่อมสองประพจน์ (Conjunction of two proposition) คือ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

> **นิยาม 3** ให้ p และ q เป็นประพจน์ การเลือก p และ q (disjunction of p and q) คือ $p \vee q$ เป็นประพจน์ "p หรือ q"

Ex. 6 การเลือก (disjunction) ของประพจน์ p และ q ใน Ex. 5 คืออะไร

Sol. การเลือกของประพจน์ p และ q คือ $p \vee q$ ซึ่งคือประพจน์ "วันนี้วันศุกร์หรือวันนี้ฝนตก"

ตารางค่าความจริงของการเลือกสองประพจน์ (Disjunction of two proposition) คือ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

นิยาม 4 การเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง (exclusive or) ของ p และ q คือ $p \oplus q$

ตารางค่าความจริงของ exclusive or สองประพจน์คือ

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

นิยาม 5 ประโยคเงื่อนไข (conditional statement) $p \rightarrow q$ คือ ประพจน์ "ถ้า p แล้ว q"

ตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ คือ

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ex. 7 ตีความประโยค $p \rightarrow q$ เมื่อ p แทน "สุภาพรเรียนดีสคริตแมท" และ q แทน "สุภาพรจะได้งานที่ดี"

Sol. $p \rightarrow q$ คือ "ถ้าสุภาพรเรียนดีสครีตแมทแล้วสุภาพรจะได้งานที่ดี"

* มีกรณีไหนบ้างที่เป็นจริงที่เป็นไปได้ที่จะเกิดขึ้น ให้ใช้ตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ มาช่วยในการตีความ

นิยาม 6 ประโยคเงื่อนไข (biconditional statement) $p \leftrightarrow q$ คือ ประพจน์ "p ก็ต่อเมื่อ q"

ตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ คือ

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ex. 10 ให้ p คือ "จอยจะได้นั่งรถทัวร์" และ q คือ "จอยซื้อตัวรถทัวร์" แล้ว $p \leftrightarrow q$ คือ

Sol. "จอยจะได้นั่งรถทัวร์ก็ต่อเมื่อจอยซื้อตั๋วรถทัวร์"

< ลองตีความตามตารางค่าความจริง >

สรุปตารางค่าความจริง

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

1.2 ตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบ (Compound Proposition)

Ex. 11 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบ

$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

Sol. สร้างตารางค่าความจริงได้ดังนี้

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

Homework

1. จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$
2. จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$

1.3 Logic and Bit Operation (ตรรกะและการดำเนินการของบิต)

ตารางค่าความจริงของ Bit Operation OR , AND และ XOR

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

T -> 1 F-> 0

1.4 Propositional Equivalences (การสมมูลกันของประพจน์)

ตัวอย่างตารางค่าความจริงของ $\neg p \vee q$ และ $p \to q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

* สังเกตว่า $\neg p \vee q$ กับ $p \to q$ มีค่าความจริงที่ตรงกันในทุกกรณี ดังนั้น

$\neg p \vee q$ กับ $p \to q$ **สมมูลกันเชิงตรรกะ**

(logically equivalent)

เขียนแทนด้วย $\neg p \vee q \equiv p \to q$

ตารางสรุป Logical Equivalence ทั่วไป

Equivalence	Name
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identity laws
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Domination laws
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation laws
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	*** Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Negation laws

ตารางสรุป Logical Equivalence ที่เกี่ยวกับ Conditional Statements

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ **

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$

$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$

$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$

$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$

$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

ตารางสรุป Logical Equivalence ที่เกี่ยวกับ Biconditional Statements

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv \neg q \to \neg p \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q \equiv \neg p \leftrightarrow q$$

Ex. (Ex.6 in Text-p.26)

จงแสดงให้เห็นว่า $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

Sol. $\neg(p \to q)$ $\equiv \neg(\neg p \vee q)$ กฎการสมมูล

$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$ De Morgan's laws.

$\equiv p \wedge \neg q$ Double negative laws

Ex. (Ex.8 in Text-p.27)

จงแสดงให้เห็นว่า $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ เป็นสัจจนิรันดร์

> **Note:** สัจจนิรันดร์ คือ เป็นจริง (T) เสมอ

Sol. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ $\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

$\equiv \neg p \vee \neg q \vee (p \vee q)$

$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$

$\equiv T \vee T$

$\equiv T$

* Homework ทำความเข้าใจ Ex.7 in Text-p.26

บทที่ 2

เซต (Set)

2.1 นิยามของเซต

นิยาม 1 เซตคือการรวมเป็นกลุ่มของวัตถุแบบไม่เรียงลำดับ

นิยาม 2 วัตถุที่อยู่ในเซตเรียกว่า สมาชิก (element หรือ member)

ตัวอย่างของเซต

Ex. 1 เซตของสระในภาษาอังกฤษ

$V = \{a, e, i, o, u\}$

Ex. 2 เซตอของจำนวนเต็มคี่บวกที่น้อยกว่า 10

$O = \{1,3,5,7,9\}$

$= \{x \mid x$ เป็นจำนวนคี่บวกที่น้อยกว่า $10\}$

$= \{x \in \mathrm{Z}^{+} \mid x$ เป็นจำนวนคี่และ $x < 10\}$

เมื่อ $\mathrm{Z}^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$

Ex. 3 เซตอื่นๆ เช่น

$\mathrm{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ เป็นเซตของจำนวนนับ (Natural numbers)

$\mathrm{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม (Integers)

$Q = \{p/q \mid p \in \mathrm{Z} \wedge q \in \mathrm{Z} \wedge q \neq 0\}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ (Rational numbers)

R เป็นเซตของจำนวนจริง (Real numbers)

Ex. 4 ตัวอย่างเซตของเซต

เซตของ $\{\mathrm{N}, \mathrm{Z}, Q, R\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 4 โดยที่สมาชิกแต่ละตัวก็เป็นเซต

นิยาม 3 เซตสองเซตเท่ากันก็ต่อเมื่อมีสมาชิกเหมือนกัน นั่นคือ

$A = B \leftrightarrow \forall x\{x \mid x \in A \leftrightarrow x \in B\}$

Ex. 5 พิจารณาเซตต่อไปนี้

$\{1,3,5\}$

$\{3,5,1\}$

$\{1,3,3,3,5,5,5\}$

ทั้งสามเซตเป็นเซตที่เท่ากันเพราะมีสมาชิกเหมือนกัน

นิยาม 4 เซต A เป็นเซตย่อย (subset) ของเซต B $(A \subseteq B)$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของเซต B ด้วย นั่นคือ $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\{x \in A \rightarrow x \in B\}$

และ A เป็น subset แท้ (proper subset) ของ B เมื่อ เซต A เป็น subset ของ B แต่ $A \neq B$ เขียนแทนด้วย $A \subset B$

นั่นคือ A เป็น proper subset ของ B ถ้า

$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$

Ex. 6 ตัวอย่างของเซตย่อย (subset)

- เซตของจำนวนเต็มคี่บวกที่น้อยกว่า 10 เป็น subset ของเซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10
- เซตของจำนวนตรรกยะเป็น sebset ของ จำนวนจริง
- เซตของจำนวนนักศึกษาสาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ เป็น subset ของนักศึกษาในสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์
- เซตของประชาชนทั้งหมดในโคราชเป็น subset ของประชาชนทั้งหมดในโคราช (subset ตัวเอง)

ทฤษฎีที่ 1 สำหรับเซต S ใดๆ จะได้ว่า

(1) $\phi \subseteq S$

(2) $S \subseteq S$

นิยาม 5 ให้ S เป็นเซต ถ้าจำนวนสมาชิกใน S มี n ตัว ที่แตกต่างกัน เรียกเซต S ว่าเป็นเซตจำกัดที่มีขนาดเท่ากับ n ขนาดของ S เขียนแทนด้วย $|S|$

นิยาม 6 ให้ S เป็นเซต แล้ว power set ของ S คือ เซตของ subset ทั้งหมดของเซต S เขียนแทนด้วย $P(S)$

Ex. 7 ตัวอย่างขนาดเซต

- ถ้า A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกคี่ที่น้อยกว่า 10 จะได้ว่า $|A|=5$
- ถ้า S เป็นเซตของตัวอักษรในภาษาอังกฤษ จะได้ว่า $|S|=26$
- $|\phi|=0$

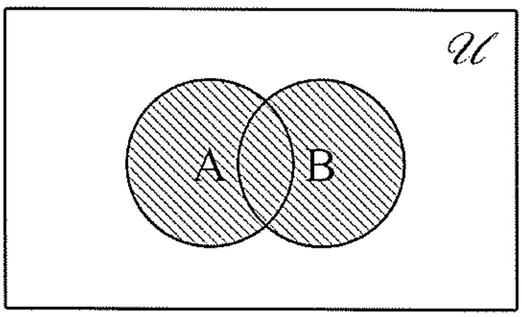
Ex. 8 จงหา power set ของเซต $\{0,1,2\}$

$$P(\{0,1,2\})=\{\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$$

2.2 การดำเนินการบนเซต (Set Operation)

นิยาม 7 ให้ A และ B เป็นเซต การ union ของเซต A และ B คือ $A\cup B$ ซึ่ง $A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

Venn diagram ของ $A\cup B$ คือ

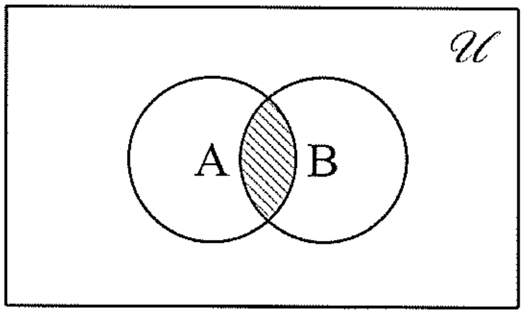


เมื่อ U เป็น Universal set (เซตของเอกภพสัมพัทธ์)

Ex. 9 การ union กันของเซต $\{1,3,5\}$ และ $\{1,2,3\}$ คือ $\{1,3,5\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3,5\}$

นิยาม 8 ให้ A และ B เป็นเซต การ intersection ของเซต A และ B คือ $A \cap B$ ซึ่ง
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Venn diagram ของ $A \cap B$ คือ
เมื่อ U เป็น Universal set (เซตของเอกภพสัมพัทธ์)



Ex. 10 การ intersection กันของเซต $\{1,3,5\}$ และ $\{1,2,3\}$ คือ $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$

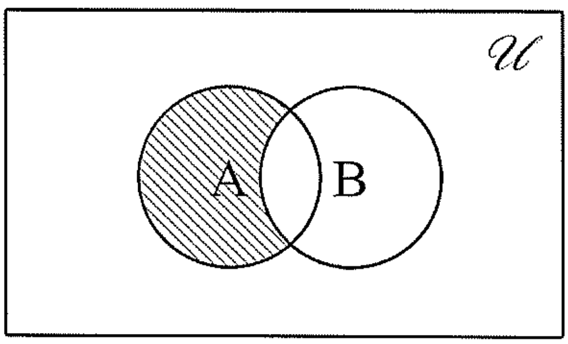
นิยาม 9 เซตสองเซตจะ disjoint กันถ้าการ intersection ของเซตนั้นเป็นเซตว่าง (empty set)

Ex. 11 ให้ $A = \{1,3,5,7,9\}$ และ $B = \{2,4,6,8,10\}$
$\because A \cap B = \phi$
$\therefore A$ และ B นั้น Disjoint กัน

นิยาม10 ให้ A และ B เป็นเซต , difference ของ A และ B คือ $A - B$ ซึ่ง
$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

ซึ่งอาจเรียก $A - B$ ว่า
Complement ของ B เมื่อเทียบกับ A

Venn diagram ของ $A - B$ คือ

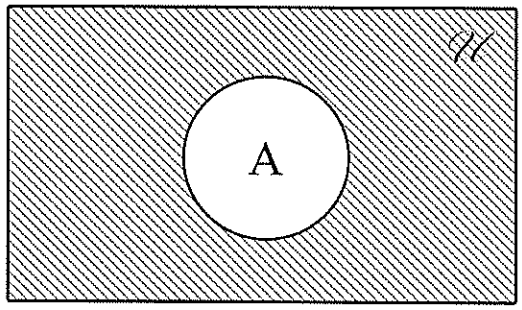


Ex. 12 Difference ของ $\{1,3,5\}$ และ $\{1,2,3\}$ คือ $\{1,3,5\} - \{1,2,3\} = \{5\}$
Difference ของ $\{1,2,3\}$ และ $\{1,3,5\}$ คือ $\{1,2,3\} - \{1,3,5\} = \{2\}$

นิยาม11 ให้ U เป็น Universal set แล้ว Complement ของ A คือ $\overline{A}$ ซึ่ง $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$	

ซึ่งอาจเขียน $\overline{A}$ เป็น $U - A$

Venn diagram ของ $\overline{A}$ คือ



Ex.13 ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 10 (เมื่อ Universal set คือ เซตของจำนวนเต็มบวก) จงหา $\overline{A}$

จะได้ว่า $\overline{A} = \{1,2,3,\ldots,10\}$

2.3 การเท่ากันของเซต (Set Identities)

Identity	Name
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation laws
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan's laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$	Complement laws

Ex.14 จงพิสูจน์กฎของ De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ โดยใช้ กฎการเท่ากันของเซตและแสดงให้อยู่ในรูป **Set builder**

Sol. $\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$ จากนิยามของ Complement

$= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\}$ นิยามของการไม่เป็นสมาชิก

$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$ นิยามของ Intersection

$= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$ กฎของ De Morgan

$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$ นิยามของการไม่เป็นสมาชิก

$= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$ นิยามของ Complement

$= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$ นิยามของ Union

$= \overline{A} \cup \overline{B}$ การ Union จากรูปของ Set builder

Ex.15 ให้ A, B และ C เป็นเซต จงแสดงว่า

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

Sol. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$ กฎของ De Morgan

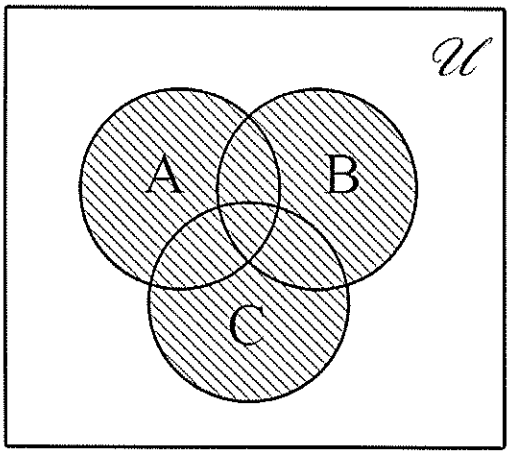
$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ กฎของ De Morgan

$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$ Commutative law ของ การ Intersection

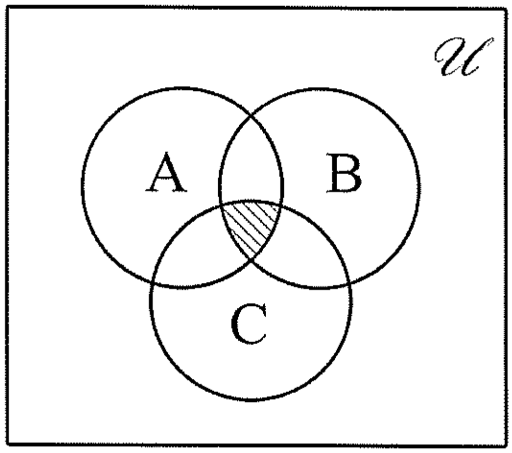
$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ Commutative law ของ การ Union

2.4 การ Unions และ การ Intersection แบบทั่วไป (Generalized Unions and Intersection)

Venn diagrams ของ $A \cup B \cup C$ และ $A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



$A \cap B \cap C$

นิยาม 12	การ Union กันของกลุ่มของเซต คือ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

นิยาม 13	การ Intersection กันของกลุ่มของเซต คือ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Ex.16 สมมุติ $A_i = \{1,2,3,\ldots,i\}$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots$

จะได้ว่า $A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{1,2\}$

$\ldots$

$A_i = \{1,2,3,\ldots,i\}$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\ldots,i\} = \{1,2,3,\ldots\} = Z^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1,2,3,\ldots,i\} = \{1\}$$

Homework: กำหนดให้ $A_i = \{i, i+1, i+2,\ldots\}$

จงหา $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

บทที่ 3

Boolean Algebra

Boolean algebra เป็นการดำเนินการและกฎต่างๆ ที่เอามาใช้งานกับ set ของ {0,1} ซึ่ง 0 หรือ 1 อาจจะเป็น input หรือ output ในวงจรของอุปกรณ์ electronic ต่างๆ เช่นเดียวกันกับวงจรใน computer

3.1 Boolean Functions

⇨ ให้ B = {0,1} , Boolean sum , Boolean product และ Boolean complement ของ element ของ B กำหนดให้ดังนี้คือ

Boolean sum :	1+1 = 1 , 1+0 = 1 , 0+1 = 1 , 0+0 = 0
Boolean product :	1•1 = 1 , 1•0 = 0 , 0•1 = 0 , 0•0 = 0
Boolean complement :	$\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$

Note : ค่าของ Boolean จะสัมพันธ์กับ logical operators คือ

$T \rightarrow 1$, $F \rightarrow 1$

Ex.1 จงหาค่าของ $1 \bullet 0 + \overline{(0+1)}$

Sol.
$$1 \bullet 0 + \overline{(0+1)} = 0 + \bar{1}$$
$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

Ex.2 จงแปลง $1 \bullet 0 + \overline{(0+1)} = 0$ ไปอยู่ในรูปของ logical equivalence.

Sol. แปลง $1 \rightarrow T$, $0 \rightarrow F$

$+ (\text{sum}) \rightarrow \vee$, $\bullet (\text{product}) \rightarrow \wedge$, $-$ (complement) $\rightarrow \neg$

$\therefore$ $1 \bullet 0 + \overline{(0+1)} = 0$ แปลงได้เป็น

$(T \wedge F) \vee \neg(T \vee F) \equiv F$

Ex.3 จงแปลง logical equivalence $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$ ไปเป็น Boolean algebra

Sol. $(1 \bullet 1) + \bar{0} = 1$

3.2 Boolean Expressions and Boolean Functions

⇨ ให้ B = {0,1} แล้ว $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in B \text{ for } 1 \le i \le n\}$ เป็นเซ็ตของ n-tuples ทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ 0 และ 1 ซึ่งเรียก x ว่า Boolean variable และฟังก์ชันจาก $B^n \to B$ นั้นเรียกว่า Boolean function of degree n.

Ex.4 Function F(x,y) = $x\bar{y}$ เป็น Boolean function of degree 2 ที่ F(1,1) = 0 , F(1,0) = 1 , F(0,1) = 0 และ F(0,0) = 0 ดังตาราง

x	y	$\bar{y}$	F(x,y)
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Ex.5 จงหาค่าของ Boolean function F(x,y,z) = xy + $\bar{z}$

Sol. ค่าของ Boolean function แสดงดังตาราง

x	y	z	xy	$\bar{z}$	F(x,y,z) = xy + $\bar{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

3.3 Identities of Boolean Algebra

Identities	Name
$\overline{\overline{x}} = x$	Law of the double complement
$x + x = x$ $x \bullet x = x$	Idempotent laws
$x + 0 = x$ $x \bullet 1 = x$	Identity laws
$x + 1 = 1$ $x \bullet 0 = 0$	Domination laws
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Commutative laws
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Associative laws
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Distributive laws
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$	De Morgan's laws
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Absorption laws
$x + \overline{x} = 1$	Unit Property
$x\overline{x} = 0$	Zero Property

Ex.6 จงแสดงให้เห็นว่า Distributive laws $x(y + z) = xy + xz$ เป็นจริง

Sol. แสดงโดยใช้ตารางแสดงค่าของ Boolean Function ได้คือ

x	y	z	y+z	xy	xz	x(y+z)	xy+xz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

จะเห็นว่าค่าของ Boolean Function F(x,y,z) = x(y+z) และ F(x,y,z) = xy+xz มีค่าเหมือนกันในทุกกรณี $\therefore x(y+z) = xy + xz$ เป็นจริง

Ex.7 จงพิสูจน์ว่า Absorption laws คือ $x(x+y) = x$ เป็นจริงโดยการนำ Identities อื่นๆ ของ Boolean Algebra มาช่วยในการพิสูจน์

Sol.	$x(x+y) = (x+0)(x+y)$	Identity laws
	$= x + 0 \bullet y$	Distributive laws
	$= x + y \bullet 0$	Commutative laws
	$= x+0$	Domination laws
	$= x$	Identity laws

Ex.8 จงพิสูจน์ว่า $xy + x\overline{y} = x$ โดยใช้ Identities ของ Boolean Algebra

Sol.	$xy + x\overline{y} = x(y+\overline{y})$	Distributive laws
	$= x \bullet 1$	Unit Property
	$= x$	Identity laws

Ex.9 จงพิสูจน์ว่า $x(\overline{x}+y) = xy$

Sol.	$x(\overline{x}+y) = x\overline{x} + xy$	Distributive laws
	$= 0 + xy$	Zero Property
	$= xy$	Identity laws

Ex.10 จงพิสูจน์ว่า $x + \overline{x}y = x + y$

Sol.	$x + \overline{x}y = (x+\overline{x})(x+y)$	Distributive laws
	$= 1 \bullet (x+y)$	Unit Property
	$= x + y$	Identity laws

3.4 Representing of Boolean Functions

Sum – of – Products Expansions (SOP)

หรืออาจจะเรียกว่า Disjunctive Normal From ของ Boolean Function เช่น

$$F(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z}$$

$$F(A,B) = \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} + AB + A\overline{B}$$

Products – of – Sums Expansions (POS)

หรืออาจจะเรียกว่า Conjunctive Normal From ของ Boolean Function เช่น

$$F(x,y,z) = (x+\overline{z})(\overline{y}+\overline{z})(x+y)(x+z)$$

$$F(A,B,C,D) = (A+\overline{B}+C)(A+\overline{C})(\overline{A}+C+D)$$

Ex.11 จงหา Sum – of – Products Expansions ของ $F(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$

Sol. 1 $F(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$

$= x\overline{z} + y\overline{z}$	Distributive laws
$= x1\overline{z} + 1y\overline{z}$	Identity laws
$= x(y+\overline{y})\overline{z} + (x+\overline{x})y\overline{z}$	Unit Property
$= xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$	Distributive laws
$= xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$	Idempotent laws

Sol. 2 สร้างตารางค่า Boolean Function ของ $F(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$ และเลือกแถวที่มีค่าเป็น 1

	x	y	z	x+y	$\overline{z}$	$(x+y)\overline{z}$
	1	1	1	1	0	0
$xy\overline{z}$ ←	1	1	0	1	1	1
	1	0	1	1	0	0
$x\overline{y}\overline{z}$ ←	1	0	0	1	1	1
	0	1	1	1	0	0
$\overline{x}y\overline{z}$ ←	0	1	0	1	1	1
	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	0

$\therefore$ SOP ของ $F(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$

Note : การหา Products – of – Sums ให้เป็น Self Study !!

บทที่ 4
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและการรวม

4.1 ความสัมพันธ์ (Relation)

ในชีวิตประจำวันของพวกเรานั้น มักจะพบข้อความที่แสดงถึงความสัมพันธ์กันอยู่เป็นประจำ เช่น บอกว่า สมชายเป็นพี่ชายของ สมศักดิ์ นั้นแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างคนสองคนนี้ คือ *"เป็นพี่ชายของ"* หรือข้อความว่า แมวสีเทาเป็นลูกของแมวสีขาว ความสัมพันธ์ระหว่างสัตว์ทั้งสองนี้ก็คือ *"เป็นลูกของ"* หรือสำหรับความสัมพันธ์ของระบบตัวเลข เช่น 3 น้อยกว่า 7 แสดงว่า 3 กับ 7 มีความสัมพันธ์ *"น้อยกว่า"*

นิยาม 1. ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B $(A\times B)$ คือเซตของคู่อันดับ (x,y) ทั้งหมด โดยที่ x เป็นสมาชิกของ A และ y เป็นสมาชิกของ B เราสามารถเขียน $A\times B$ โดยวิธีการกำหนดเงื่อนไขของสมาชิกได้ดังนี้ $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \wedge y\in B\}$

Ex.1 $A=\{a,b\}$ และ $B=\{1,2,3\}$ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เช่น

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1)(b,2),(b,3)\}$

$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)(3,a),(3,b)\}$

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

แต่ถ้า $A=\{a,b\}$ และ $B=\phi$ เราจะได้ว่า $A\times B=\phi$ และ $B\times A=\phi$ ดังนั้น

1. สำหรับเซต A ใดๆ $A\times\phi=\phi\times A=\phi$
2. สำหรับเซต A และ เซต B ใดๆ $A\times B\neq B\times A$ ยกเว้น $A=B$ หรือ $A\neq\phi$ หรือ $B\neq\phi$
3. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดจะได้ $n(A\times B)=n(A)\times n(B)$

นิยาม 2. R เป็นความสัมพันธ์จากเซต A ไปหาเซต B ก็ต่อเมื่อ R เป็นสับเซตของ $A\times B$ และเรียกความสัมพันธ์จากเซต A ไปเซต A ว่าความสัมพันธ์ในเซต A

นิยาม 3. กำหนดให้คู่อันดับ (x,y) อยู่ใน $A\times B$ แล้วการที่ x สัมพันธ์กับ y ด้วยความสัมพันธ์ R นั้นเขียนแทนด้วย xRy

Ex.2 กำหนดให้ $A=\{0,1,2\}$ และ $B=\{1,2,3\}$ ซึ่งสมาชิก x ของ A จะสัมพันธ์กับสมาชิก y ของ B ก็ต่อเมื่อ "x น้อยกว่า y" จงหาความสัมพันธ์ทั้งหมดดังกล่าว

วิธีทำ เนื่องจาก $A \times B = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

ให้ R แทนความสัมพันธ์ "x น้อยกว่า y" จะพบว่า

$0\,R\,1$, เพราะว่า $0 < 1$

$0\,R\,2$, เพราะว่า $0 < 2$

$0\,R\,3$, เพราะว่า $0 < 3$

$1\,R\,2$, เพราะว่า $1 < 2$

$1\,R\,3$, เพราะว่า $1 < 3$ และ

$2\,R\,3$ เพราะว่า $2 < 3$

ดังนั้นความสัมพันธ์ "x น้อยกว่า y" ทั้งหมดคือ

$\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

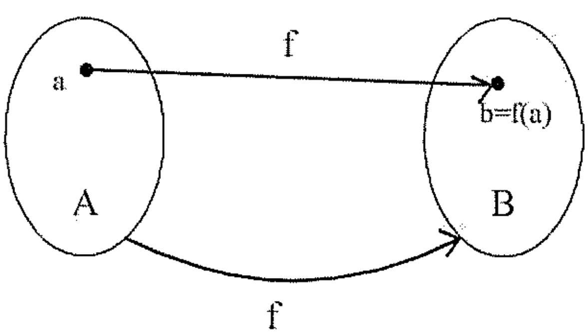
Ex 3. กำหนด $A=\{4,5,6\}$ และ $B=\{5,6,7,8\}$ จงหา

1. ความสัมพันธ์ "มากกว่า" จาก A ไป B
2. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" จาก A ไป B
3. ความสัมพันธ์ "เป็นครึ่งหนึ่ง" จาก A ไป B
4. ความสัมพันธ์ "เท่ากับ" จาก A ไป B

Note: Ex. อื่นๆ จะยกตัวอย่างใน class

4.2 ฟังก์ชัน (Function)

แสดง f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต B เขียนแทนด้วย $f: A \to B$



เมื่อ A เป็น Domain ของ f และ

B เป็น Co domain ของ f

a เป็นสมาชิกของเซต A และ

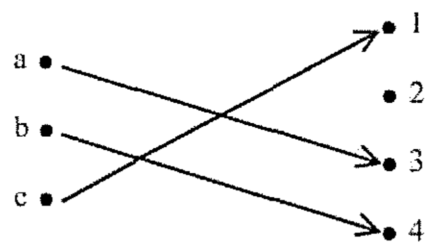
b เป็นสมาชิกของเซต B

และกำหนดให้ b มีค่าเท่ากับฟังก์ชันของ a

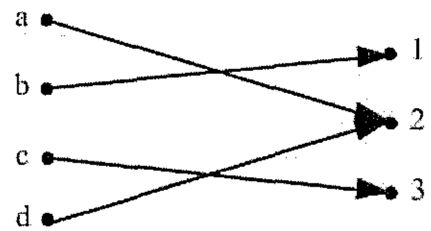
นั่นคือ $b = f(a)$

นิยาม 1 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง ฟังก์ชัน f จาก A ไป B เป็นการ**กำหนดสมาชิกที่แน่นอนของ B 1 ตัวให้กับแต่ละสมาชิกของ A** เขียน $f(a)=b$ ถ้า b เป็นสมาชิกหนึ่งเดียวของ B ที่กำหนดโดยฟังก์ชัน f ให้กับสมาชิกของ a ของเซต A

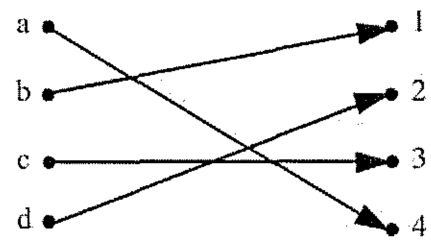
ตัวอย่างฟังก์ชันแบบต่าง ๆ



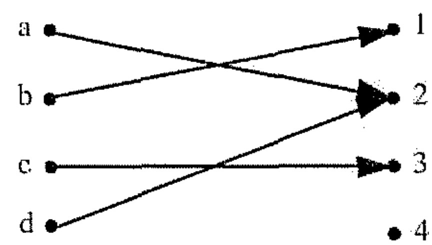
One – to – one,
Not onto



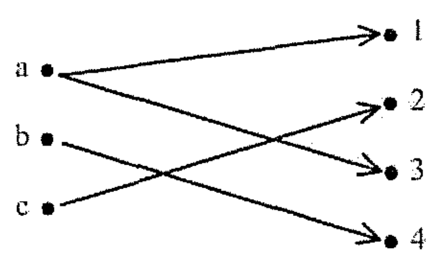
Onto,
Not one – to – one



One – to – one
And onto



ไม่เป็นทั้ง One – to – one
และ onto



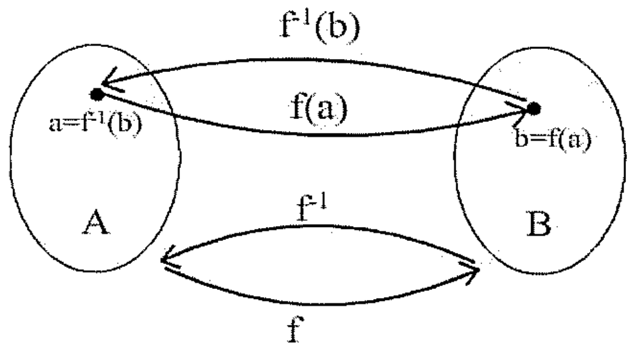
????????????? $f(a)=2$
$f(a)=3$

Ex.1 ฟังก์ชัน f จาก $\{a,b,c,d\}$ ไปยัง $1,2,3,4,5\}$ ที่ $f(a)=4, f(b)=5, f(c)=1$ และ $f(d)=3$ เป็น one-to-one function หรือไม่

Ex.2 ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ จาก $Z \to Z$ เป็น one-to-one function หรือไม่

Ex.3 ฟังก์ชัน $f(x)=x^2$ จาก $Z \to Z$ เป็น onto function หรือไม่

นิยาม 2 ให้ f เป็น One – to – one ฟังก์ชันจากเซต A ไป B ที่ $f(a)=b$ ฟังก์ชันผกผัน (Inverse function) ของ f คือ f^{-1} ซึ่ง $f^{-1}(b)=a$



แสดงฟังก์ชัน f^{-1} ซึ่งเป็น Inverse ของฟังก์ชัน f

Ex. 4 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\{a,b,c\} \to \{1,2,3\}$ ที่ $f(a)=2, f(b)=3, f(c)=1$ แล้ว f inverse ได้หรือ ไม่ ถ้าได้ inverse ของ f คืออะไร

Sol. $\because f$ เป็นฟังก์ชันแบบ One – to – one ฟังก์ชัน

$\therefore f$ inverse ได้ โดยที่

$f^{-1}(1)=c$

$f^{-1}(2)=a$

$f^{-1}(3)=b$

Note: Ex. อื่นๆ จะยกตัวอย่างใน class

4.3 ลำดับและการรวม (Sequences and Summations)

Sequences

เป็น Discrete structure ที่ใช้ในการแสดงลำดับของ list

Ex $1, 2, 3, 5, 8$ เป็น sequence ที่มี 5 terms

$1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ เป็น sequence เป็น infinite sequence

นิยาม 1 A geometric progression เป็น sequence ที่อยู่ในรูปของ

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$ โดยที่ initial term a และ common ratio r เป็นจำนวนจริง

Ex.1 ตัวอย่าง sequence ที่เป็น geometric progression

(1) Sequence $\{b_n\}$ ซึ่ง $b_n = (-1)^n$ $a = 1, r = -1$

(2) Sequence $\{c_n\}$ ซึ่ง $c_n = 2 \cdot 5^n$ $a = 2, r = 5$

(3) Sequence $\{d_n\}$ ซึ่ง $d_n = 6 \cdot (1/2)^n$ $a = 6, r = 1/2$

List ของ 5 เทอมแรกของแต่ละ sequence เมื่อ n เริ่มต้นจาก 0 คือ

$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots = 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$

$d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots = 6, 2, 2/3, 2/9, 2/27, \ldots$

Note: เทอมแรกของ sequence **มักจะเริ่มจาก 0 หรือ 1**

นิยาม 2 A arithmetic progression เป็น sequence ที่อยู่ในรูปของ

$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$

โดยที่ initial term a และ common difference r เป็นจำนวนจริง

Ex.2 ตัวอย่างของ arithmetic progression sequence

(1) Sequence $\{s_n\}$ ซึ่ง $s_n = -1 + 4n$ $a = -1, d = 4$

(2) Sequence $\{t_n\}$ ซึ่ง $t_n = 7 - 3n$ $a = 7, d = -3$

Ex.3 จงหา formulae ของ sequence ต่อไปนี้

(a) $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$

$a_n = 1/2^n$ เป็น Geometric progression โดยที่ $a = 1, r = 1/2$

(b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$a_n = 2n+1$ เป็น Arithmetic progression โดยที่ $a = 1$, $d = 2$

Ex.4 จงหาเทอมถัดไปเรื่อยๆ ของ sequence

$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ?$

Ex.5 ลองพยายามหา formulae ของ sequence

$5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, \ldots$

(จะสังเกตว่าทุกพจน์ห่างกัน 6)

$a_n = 5 + 6(n-1)$

$= 6n - 1 \quad ; n = 1,2,3,\ldots$

Summations

กำหนดให้ Sequence $\{a_n\}$ คือ $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ เราสามารถเขียน $\sum_{j=m}^{n} a_j$ หรือ $\sum_{j=m}^{n} a_j$ หรือ $\sum_{m \le j \le n} a_j$ แทนการเขียน $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$

Ex.6 จงแสดงผลบวกของ 100 เทอมแรกของ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = 1/n$, $n = 1,2,3,\ldots$

Lower limit ของ index = 1

Upper limit ของ index = 100

นั่นคือ ผลบวกคือ $\sum_{j=1}^{100} 1/j$

Ex.7 จงหาค่าของ $\sum_{j=1}^{5} j^2$

Sol. $\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

$= 55$

Theorem ถ้า a และ r เป็นจำนวนจริง และ $r \neq 0$ แล้ว

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & ; r \neq 1 \\ (n+1) & ; r = 1 \end{cases}$$

Ex.8 ตัวอย่างของ double summation จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i+2i+3i)$$
$$= \sum_{i=1}^{4} 6i$$
$$= 6+12+18+24 = 60$$

Summation Formulae ที่ใช้บ่อย ๆ

Sum	**Closed Form**
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \quad ; \quad (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1}-a}{r-1} \quad ; r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad ; \quad \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} \quad ; \quad \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Ex.9 จงหาค่าของ $\sum_{k=50}^{100} k^2$

Note: $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$

$\therefore \quad \sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$

ซึ่ง $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6}$$
$$= 338{,}350 - 40{,}425$$
$$= 297{,}925$$

Note: เพิ่มเติมเกี่ยวกับ bit string, bit operations และ floor and ceiling function

Bit string เป็น sequence ของ bit 0 หรือ bit ที่สูงกว่า ซึ่งขนาดของมัน คือ จำนวน bit ใน string นั้น (Ex. 101010011 เป็น bit string ที่ขนาด = 9)

4.4 Bitwise OR, AND และ XOR

Ex.1 จงหา bitwise OR, AND และ XOR ของ bit strings 01 1011 0110 และ 11 0001 1101

01 1011 0110	
11 0001 1101	
11 1011 1111	*bitwise OR*
01 0001 0100	*bitwise AND*
10 1010 1011	*bitwise XOR*

Bit string กับ Set

Ex.2 bit string ของเซต $\{1,3,5,7,9\}$ เมื่อ universal set คือ $\{1,2,3,\ldots,10\}$ คือ 10 1010 1010
Complement ของเซตนี้คือ 01 0101 0101 ซึ่งเป็น bit string ของเซต $\{2,4,6,8,10\}$

Ex.3 จงหา union และ intersection ของ bit string ของเซต $\{1,2,3,4,5\}$ และ $\{1,3,5,7,9\}$
Bit string ของ $\{1,2,3,4,5\}$ คือ 11 1110 0000
Bit string ของ $\{1,3,5,7,9\}$ คือ 10 1010 1010

Bit string จากการ union คือ

$$11\ 1110\ \ 0000 \vee 10\ \ 1010\ \ 1010 = 11\ \ 1110\ \ 1010$$

Bit string จากการ intersection คือ

$$11\ 1110\ \ 0000 \wedge 10\ \ 1010\ \ 1010 = 10\ \ 1010\ \ 0000$$

$\therefore$ union คือการ OR , intersection คือ การ AND

4.5 Floor function และ Ceiling function

$\lfloor x \rfloor$: จำนวนเต็มที่มากที่สุด (largest) ซึ่งน้อยกว่าหรือ เท่ากับ x

$\lceil x \rceil$: จำนวนเต็มที่น้อยที่สุด (smallest) ซึ่งมากกว่าหรือ เท่ากับ x

Ex.4 $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$, $\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1$ $\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1$, $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$

$\lfloor 3.1 \rfloor = 3$, $\lceil 3.1 \rceil = 4$ $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lceil 7 \rceil = 7$

คุณสมบัติของ floor และ ceiling function ที่น่าสนใจ (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม)

(1a) $\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow n \le x \le n+1$

(1b) $\lceil x \rceil = n \leftrightarrow n-1 < x \le n$

(1c) $\lfloor x \rfloor = n \leftrightarrow x-1 < n \le x$

(1d) $\lceil x \rceil = n \leftrightarrow x \le n \le x+1$

(2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

บทที่ 5
การพิสูจน์เบื้องต้น (Introduction to Proofs)

5.1 การพิสูจน์แบบตรง (Direct Proof)

การพิสูจน์แบบตรง ของประโยคเงื่อนไข $p \rightarrow q$ ทำได้โดย
สมมุติ (Assume) ว่า p เป็นจริง แล้วแสดงให้เห็นว่า q เป็นจริงด้วย

นิยาม 1 จำนวนเต็ม n เป็นจำนวนคู่ ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = 2k$ และ
จำนวนเต็ม n เป็นจำนวนคี่ ถ้ามีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = 2k+1$

Ex. 1 ใช้ direct proof ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่"

จากทฤษฎีตีความได้ว่า $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ เมื่อ
$P(n)$ คือ "n เป็นจำนวนเต็มคี่"
$Q(n)$ คือ "n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่"

ในการพิสูจน์แบบ Direct proof จะต้องสมมุติว่า $P(n)$ เป็นจริง แล้วจะต้องแสดงให้เห็นว่า $Q(n)$ ต้องเป็นจริงด้วย

Sol. สมมุติว่า $P(n)$ เป็นจริง นั่นคือ สมมุตว่า n เป็นจำนวนเต็มคี่
ดังนั้น จากนิยามของจำนวนเต็มคี่ (นิยาม 1) จะได้ว่า

$n = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

(เราต้องการแสดงให้เห็นว่า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่)

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

เมื่อ l เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น จากนิยามของจำนวนเต็มคี่ (นิยาม 1) เราสรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ นั่นคือ เราได้พิสูจน์แล้วว่า "ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่"

---#

Ex. 2 ใช้ direct proof ในการพิสูจน์ว่า ถ้า m และ n เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (prefect square) แล้ว mn ก็เป็น perfect square

> **Note:** นิยามของ perfect square คือ
> จำนวนเต็ม a เป็น perfect square ถ้ามีจำนวนเต็ม b ที่ทำให้ $a = b^2$

Sol. สมมุติว่าทั้ง m และ n เป็น perfect square

จากนิยามของ Perfect square จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม s ที่ทำให้ $m = s^2$ และมีจำนวนเต็ม t ที่ ทำให้ $n = t^2$

(เราต้องการแสดงให้เห็นว่า mn เป็น Perfect square)

$$mn = s^2t^2$$
$$= (st)^2$$

จากนิยามของ Perfect square เราสรุปได้ว่า mn เป็น Perfect square

นั่นคือ เราได้พิสูจน์แล้วว่า ถ้าทั้ง m และ n เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (Prefect square) แล้ว mn ก็เป็น Perfect square

---#

5.2 การพิสูจน์แบบแย้งกลับ (Proofs by Contraposition)

การพิสูจน์แบบ Contraposition ของประโยคเงื่อนไข $p \rightarrow q$ ทำได้โดยการแสดงให้เห็นว่า เงื่อนไขแย้งกลับ $\neg q \rightarrow \neg p$ เป็นจริง (มาจากกฎการสมมูล)

Ex. 3 จงพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม และ $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่

Sol. ให้ $P(n)$ คือ "$3n+2$ เป็นจำนวนคี่"

$Q(n)$ คือ "n เป็นจำนวนคี่"

(1) ทดลองใช้ direct proof ในการพิสูจน์

นั่นคือ จะต้องพิสูจน์ว่า $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$

จากนิยาม 1 ถ้า $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$3n+2 = 2k+1$$
$$3n+1 = 2k \qquad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$
$$3n = 2k-1$$

*** Fail ในการที่จะหาหนทางสรุปว่า n เป็นจำนวนคี่ ***

(2) ถ้าใช้การพิสูจน์แบบ Contraposition จะต้องพิสูจน์ว่า
$\forall n(\neg Q(n) \to \neg P(n))$ เมื่อ
$\neg Q(n)$ คือ "n เป็นจำนวนคู่"
$\neg P(n)$ คือ "$3n+2$ เป็นจำนวนคู่"

จากนิยาม 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$n = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า $n = 2k$ ลงใน $3n+2$ จะได้

$$\begin{aligned} 3n+2 &= 3(2k)+2 \\ &= 6k+2 \\ &= 2(3k+1) = 2l \end{aligned}$$

เมื่อ l เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น สามารถสรุปได้ว่า $3n+2$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่า $\forall n(\neg Q(n) \to \neg P(n))$ เป็นจริง

นั่นคือ ได้พิสูจน์แล้วว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม และ $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่

---#

5.3 การพิสูจน์แบบขัดแย้ง (Proofs by Contradiction)

การพิสูจนแบบ Contradiction ของประโยค p ทำได้โดยการสมมุติให้ $\neg p$ เป็นจริง แล้วแสดงให้เห็นว่าเป็นไปไม่ได้ (เกิดการขัดแย้งที่จะเป็น $\neg p$)

การพิสูจน์แบบ Contradiction ของประโยคเงื่อนไข $p \to q$ ทำได้โดยการสมมุติให้ p เป็นจริง และ $\neg q$ เป็นจริง แล้วแสดงให้เห็นว่าเป็นไปไม่ได้ (เกิดการขัดแย้ง)

Ex. 4 จงแสดงให้เห็นว่า ใน 22 วันต้องมีอย่างน้อย 4 วันที่ตกอยู่ในวันเดียวกัน (วันในที่นี้หมายถึงวันในหนึ่งสัปดาห์ นั่นคือ วันอาทิตย์ – วันจันทร์)

Sol. ให้ p แทน ใน 22 วันต้องมีอย่างน้อย (at least) 4 วันที่ตกอยู่ในวันเดียวกัน
ดังนั้น $\neg p$ คือ ใน 22 วันต้องมีอย่างมาก (at most) แค่ 3 วันที่ตกอยู่ในวันเดียวกัน

จะเห็นได้ว่า $\neg p$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ มีวันทั้งหมด 22 วัน และในหนึ่งสัปดาห์มี 7 วัน ถ้ามีอย่างมาก (at most) แค่ 3 วันที่ตกอยู่ในวันเดียวกันจะรวมกันได้ 21 วัน ดังนั้นจึงเกิดการขัดแย้ง

นั่นคือ $\neg p$ เป็นไปไม่ได้ (เป็นเท็จ) ดังนั้น p จึงเป็นจริง

---#

Ex. 5 ใช้การพิสูจน์แบบ Contradiction ในการพิสูจน์ว่า "ถ้า $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่"

Sol. สมมุติให้ $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ และ n ไม่เป็นจำนวนคี่ (สมมุติให้ p เป็นจริง และ $\neg q$ เป็นจริง)

นั่นคือ n เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น $n = 2k$ (จากนิยามของจำนวนคู่)

จะได้ว่า $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ แต่ในตอนต้นเราสมมุติให้ $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ จึงเกิดการขัดแย้ง ดังนั้น n เป็นจำนวนคู่ไม่ได้

นั่นคือ เราได้พิสูจน์แล้วว่า "ถ้า $3n+2$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่"

---#

นิยาม 2 จำนวนจริง r เป็นจำนวนตรรกยะ (rational) ถ้ามีจำนวนเต็ม p และ q เมื่อ $q \neq 0$ ที่ทำให้ $r = p/q$ และจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนอตรรกยะ

* Homework: อ่าน Ex. 10 in Text-p.80
ให้พิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะโดยใช้การพิสูจน์แบบ Contradiction

จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม n:

"n เป็นจำนวนคี่**ก็ต่อเมื่อ** $5n+3$ เป็นจำนวนคู่"

Hint: การพิสูจน์ $p \leftrightarrow q$ ให้แยกเป็น

(a) $p \to q$

(b) $q \to p$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 1

Logic

1. จงแสดงให้เห็นว่า $p \rightarrow (q \vee r)$ สมมูลกับ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ โดยใช้กฎการสมมูล

2. จงนำกฎการสมมูลที่ว่า $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ และ $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$ มาใช้ในการเขียนประพจน์ต่อไปนี้ใหม่โดยไม่ให้มีการดำเนินการ $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$ เหลืออยู่เลย
   (a). $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
   (b). $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

3. จงแสดงให้เห็นว่า $\sim [r \vee (q \wedge (\sim r \rightarrow \sim p))] \equiv \sim r \wedge (p \vee \sim q)$ โดยใช้
   (a). ตารางค่าความจริง
   (b). กฎการสมมูล

4. จงแสดงให้เห็นว่า $(q \wedge (p \rightarrow \sim q)) \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์ (tautology) โดยใช้
   (a). ตารางค่าความจริง
   (b). กฎการสมมูล

Sets

1. กำหนดให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{b, \{c\}\}$ แต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด
   (a). $A = \{a, b, c\}$
   (b). $|P(B)| = 2$
   (c). $\phi \in P(B)$
   (d). $B \subseteq A$
   (e). $\{c\} \subseteq B$
   (f). $\{b, c\} \in P(A)$
   (g). $\{b, \{c\}\} \in P(B)$
   (h). $\{\{\{c\}\}\} \subseteq P(B)$

2. กำหนดให้ $S = \{\phi, a, \{a\}\}$ จงหาว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมาชิกของเซต S หรือเป็นสับเซตของเซต S หรือเป็นทั้งสองอย่าง
   (a). $\{a\}$
   (b). $\{\{a\}\}$
   (c). ϕ
   (d). $\{\{\phi\}, a\}$
   (e). $\{\phi\}$
   (f). $\{\phi, a\}$

3. กำหนดให้ Universal Set คือ $U = \{1, 2, \ldots, 9\}$, A คือเซตของผลคูณของสอง (multiples of 2), B คือเซตของผลคูณของสาม (multiples of 3) และ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ จงหาเซตของ $C - (B - A)$

4. กำหนดให้ $A=\{a, c, e, h, k\}$ และ $B=\{a,b,d,e,h,i,k,l\}$ และ $C=\{a,c,e,i,m\}$ จงหาในแต่ละข้อต่อไปนี้
   (a). $A\cap B$
   (b). $A\cap B\cap C$
   (c). $A\cup B$
   (d). $A\cup B\cup C$
   (e). $A-B$
   (f). $A-(B-C)$

5. กำหนดให้ Universal set คือ set ของจำนวนจริง R และให้ $A=\{x\in R \mid 0<x\le 2\}$ และ $B=\{x\in R \mid 1\le x<4\}$ จงหาในแต่ละข้อต่อไปนี้
   (a). $A\cup B$
   (b). $A\cap B$
   (c). $\overline{A}$
   (d). $\overline{B}$
   (e). $\overline{A}\cap\overline{B}$
   (f). $\overline{A}\cup\overline{B}$
   (g). $\overline{A\cap B}$
   (h). $\overline{A\cup B}$

6. จงใช้ De Morgan's law จากกฎการเท่ากันของเซต (set identities) ในการแสดงให้เห็นว่า $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ โดยเขียนในรูปของ set builder

7. จงใช้กฎการเท่ากันของเซต (set identities) ในการแสดงให้เห็นว่า $A-(A-B)=A\cap B$ (Hint. $A-B=A\cap\overline{B}$)

8. จงวาด Venn Diagram จากการประกอบกันของเซตต่อไปนี้
   (a). $A\cap(B-C)$
   (b). $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$
   (c). $(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$
   (d). $(A-B)\cup(A-C)\cup(B-C)$

9. จงหา $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ของแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก
   (a). $A_i=\{i, i+1, i+1,\ldots\}$
   (b). $A_i=\{0, i\}$
   (c). $A_i=(0, i)$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง x ที่ $0<x<i$

10. จงหา $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ของแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก
    (a). $A_i=\{-i, -i+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, i-1, i\}$
    (b). $A_i=\{-i, i\}$
    (c). $A_i=[-i, i]$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง x ที่ $0\le x\le i$

Boolean Algebra

1. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้
   a. $(1\cdot 1)+(\overline{0\cdot 1}+0)$
   b. $(\overline{1}\cdot\overline{0})+(1\cdot\overline{0})$

2. จงแปลง boolean function ในแต่ละข้อต่อไปนี้ไปอยู่ในรูปของ logical equivalence
   a. $(1\cdot 1)+(\overline{0\cdot 1}+0)=1$
   b. $(\overline{1}\cdot\overline{0})+(1\cdot\overline{0})=1$

3. จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ boolean function ในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้ตารางแสดงค่าของ Boolean function
   a. $x\overline{y}+(\overline{xyz})$
   b. $\overline{y}(xz+\overline{x}\overline{z})$

4. จงแสดงให้เห็นว่า $x\overline{y}+y\overline{z}+\overline{x}z=\overline{x}y+\overline{y}z+x\overline{z}$ โดยใช้ตารางแสดงค่าของ Boolean function

5. จงพิสูจน์ว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง โดยใช้ Identities ต่างๆ ของ Boolean Algebra
   a. $a+(\overline{a}\cdot b)=a+b$
   b. $a\cdot(\overline{a}+b)=a\cdot b$
   c. $(x+y)(\overline{x}\cdot\overline{y})=0$
   d. $(x+y)+(\overline{x}\cdot\overline{y})=1$

6. จงหา Sum-of-Products Expansions ของ $F(x,y,z)=(x+z)y$ โดยใช้
   a. Identities ต่างๆ ของ Boolean algebra
   b. ตารางแสดงค่าของ Boolean function

7. จงหา Sum-of-Products Expansions ของ $F(x,y,z)=\overline{z}+\overline{x}z$ โดยใช้
   a. Identities ต่างๆ ของ Boolean algebra
   b. ตารางแสดงค่าของ Boolean function

Functions

1. จงหาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้จากเซตของ $\{a, b, c, d\}$ ไปยังตัวมันเองเป็น One-to-one function และเป็น Onto function หรือไม่
   (a). $f(a)=b,\quad f(b)=a,\quad f(c)=c,\quad f(d)=d$
   (b). $f(a)=b,\quad f(b)=b,\quad f(c)=d,\quad f(d)=c$

(c). $f(a)=d, \quad f(b)=a, \quad f(c)=c, \quad f(d)=d$

2. จงหาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้จาก Z ไป Z เป็น One-to-one functionและเป็น Onto function หรือไม่

   (a). $f(n)=n-1$

   (b). $f(n)=n^2+1$

   (c). $f(n)=n^3$

   (d). $f(n)=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

3. ให้ f ฟังก์ชันต่อไปนี้จาก R ไป R ซึ่งกำหนดว่า $f(x)=x^2$ จงหา

   (a). $f^{-1}(\{1\})$

   (b). $f^{-1}(\{x \mid 0<x<1\})$

   (c). $f^{-1}(\{x \mid x>4\})$

4. ให้ $g(x)=\lfloor x \rfloor$ เป็นฟังก์ชัน จาก R ไป Z จงหา

   (a). $g^{-1}(\{0\})$

   (b). $g^{-1}(\{-1,0,1\})$

   (c). $g^{-1}(\{x \mid 0<x<1\})$

5. จงหาค่าจาก floor function และ ceiling function ต่อไปนี้

(a). $\lfloor 1.1 \rfloor$	(e). $\lceil 2.99 \rceil$	(i). $\left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil$	(m). $\lceil 3 \rceil$
(b). $\lceil 1.1 \rceil$	(f). $\lceil -2.99 \rceil$	(j). $\left\lfloor \frac{7}{8} \right\rfloor$	(n). $\lfloor -1 \rfloor$
(c). $\lfloor -0.1 \rfloor$	(g). $\left\lfloor \frac{1}{2}+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \right\rfloor$	(k). $\left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil$	(o). $\left\lfloor \frac{1}{2}+\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil \right\rfloor$
(d). $\lceil -0.1 \rceil$	(h). $\left\lceil \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor+\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil+\frac{1}{2} \right\rceil$	(l). $\left\lfloor -\frac{7}{8} \right\rfloor$	(p). $\left\lfloor \frac{1}{2}\cdot\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor \right\rfloor$

Sequences and Summations

1. จงหาเทอมที่ a_0, a_1, a_2 และ a_3 ของลำดับ $\{a_n\}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ a_n คือ

(a).	$2^n + 1$	(b).	$(n+1)^{n+1}$
(c).	$\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$	(d).	$2^n + (-2)^n$

2. จงหา formulae ของลำดับต่อไปนี้
   - (a). 15, 20, 25, 30, 35, …
   - (b). 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, …
   - (c). 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, …

3. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้
   - (a). $\sum_{j=0}^{4} (-2)^j$
   - (b). $\sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j)$
   - (c). $\sum_{j=2}^{8} 2 \cdot (-3)^j$
   - (d). $\sum_{j=0}^{8} (2 \cdot 3^j + 3 \cdot 2^j)$
   - (e). $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (i + j)$
   - (f). $\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} (3i + 2j)$

4. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้โดยนำ Summation Formulae มาใช้
   - (a). $\sum_{k=100}^{200} k$
   - (b). $\sum_{k=99}^{200} k^3$

Introduction to Proofs

1. จงใช้การพิสูจน์แบบตรง (direct proof) ในการแสดงให้เห็นว่าผลบวกของจำนวนเต็มคู่สองตัวใดๆ เป็นจำนวนเต็มคู่

2. จงพิสูจน์ว่าถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว n จะเป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $7n+4$ เป็นจำนวนคู่

3. จงใช้การพิสูจน์แบบขัดแย้ง (contradiction) ในการพิสูจน์ทฤษฎีที่ว่า "ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $x+y$ เป็นจำนวนเต็มคู่"

4. จงใช้การพิสูจน์แบบขัดแย้ง (contradiction) ในการพิสูจน์ว่า ผลบวกของจำนวนอตรรกยะกับจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

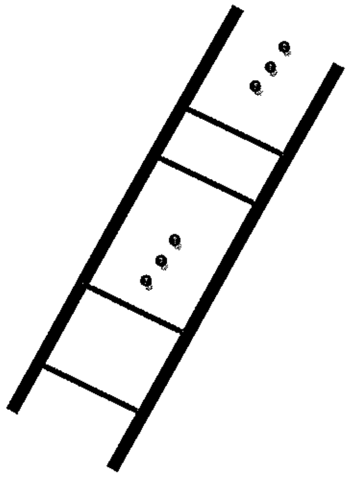
5. จงพิสูจน์ว่าถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $3n+2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว n เป็นจำนวนคู่โดย
   (a). ใช้การพิสูจน์แบบแย้งกลับ (contraposition)
   (b). ใช้การพิสูจน์แบบขัดแย้ง (contradiction)

6. จงพิสูจน์ว่า มีคนอย่างน้อย 4 คนใน 40 คนที่เกิดในเดือนเดียวกัน

บทที่ 6
การอุปนัยทางคณิตศาสตร์และการเวียนบังเกิด

6.1 การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

เป็นเทคนิคการพิสูจน์ที่ใช้กันมากในวิทยาการคอมพิวเตอร์/วิศวคอมพิวเตอร์ เพื่อการตรวจสอบผลลัพธ์ของข้อกล่าวอ้าง ซึ่งขบวนการ (Process) ที่กล่าวอ้างนั้นเกิดขึ้นซ้ำ ๆ และมีรูปแบบที่ทำให้เกิดขึ้นได้ไม่สิ้นสุด เช่น การปีนบันได



เรารู้ได้แน่นอนว่า

1. เราสามารถปีนขั้นแรก(ชั้นที่ 1) ได้แน่นอน
2. ถ้าปีนไปถึงขั้นที่ k แล้ว เราสามารถปีนขั้นถัดไป(k+1) ได้เรื่อย ๆ

Ex.1 มีคนอ้างว่า เงินตั้งแต่ 4 บาทขึ้นไปสามารถเกิดจากการรวมกันของเหรียญ 2 บาท และเหรียญ 5 บาท ได้ทุกจำนวน

จากข้อกล่าวอ้าง จะพบว่า

1. เราสามารถสร้างเงิน 4 บาท ได้แน่นอนจากเหรียญ 2 บาท 2 เหรียญ
2. ในการสร้างจากเงิน kบาท ไป $k+1$ บาท ทำได้โดย
   - ถ้า ณ เงิน k บาท ไม่มีเหรียญ 5 บาทอยู่เลย, สร้างเงิน $k+1$ บาทได้โดยการแทนเหรียญ 2 บาท 2 เหรียญในเงิน k บาท ด้วยเหรียญ 5 บาทอย่างน้อย 1 เหรียญ, เพื่อสร้างเงิน k+1 บาท
   - ถ้า ณ เงิน k บาท มีเหรียญ 5 บาท อย่างน้อย 1 เหรียญ, สร้าง $k+1$บาทได้โดยการแทนเหรียญ 5 บาท 1 เหรียญใน k บาท ด้วยเหรียญ 2 บาท 3 เหรียญ เพื่อสร้าง $k+1$ บาท

จำนวนเงิน (บาท)	เหรียญที่ใช้
4	$\underline{2+2}$
5	5
6	$\underline{2+2}+2$
7	5+2
8	$\underline{2+2}+2+2$
9	$5+\underline{2+2}$
10	$[\underline{2+2+2}+2+2]$
11	$5+\underline{2+2}+2$
12	[2+2+2+2+2+2]
13	$5+\underline{2+2+2+2}$
14	$2+2+2+\ \underline{2+2+2+2}$
15	$\underline{5}\ +\ \underline{2+2+2+2+2}$
16	2+2+2
17	5+2+… …
18	

6.2 การพิสูจน์แบบอุปนัย (Induction Proof)

ให้ $P(n)$เป็นข้อกล่าวอ้างใด ๆ ในการพิสูจน์ (แสดงให้เห็นว่า) $P(n)$เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก สามารถทำได้ใน 2 ขั้นตอนคือ

> **Basis Step:** การตรวจสอบว่า P (ตัวแรก) เป็นจริง
>
> **Inductive Step:** แสดงให้เห็นว่าประโยคเงื่อนไข
>
> $P(k)\quad P(k+1)$เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก k

Ex.2 จงแสดงว่า (จงพิสูจน์ว่า) ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$1+2+3+\ldots+n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$ ด้วย induction proof

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n)$ คือ $1+2+3+\ldots+n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$เมื่อ $n \in z^{+}$

<u>Basis Step</u> ตรวจสอบว่า $P($ตัวแรก$)$ เป็นจริงหรือไม่

นั่นคือตรวจสอบว่า $P(1)$ เป็นจริงหรือไม่

จาก$P(n)$พบว่า $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1$

ซึ่ง$1 = 1$ เป็นจริง

$\therefore P($ตัวแรก$)$เป็นจริง

<u>Inductive Step</u> *<ต้องแสดงให้เห็นว่า$P(k) \rightarrow P(k+1)$เป็นจริง >*

สมมุติว่า$P(k)$เป็นจริง นั่นคือ

สมมุติว่า $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ เป็นจริง

แล้วเราต้องแสดงให้เห็นว่า $p(k+1)$เป็นจริง

นั่นคือ$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ซึ่ง $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$เป็นจริงจากการสมมุติก่อนหน้านี้

พิจารณา ณ ว่า $p(k+1)$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2)}{2}$$

$$= \frac{k^2+3k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\therefore$ โดย Induction Proof เราสามารถสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง

นั่นคือ $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in z^+$

Ex.3 ใช้ induction proof ในการพิสูจน์ว่า

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - 1, \forall n \geq 0$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ *P (n)* คือ $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n - 1, \forall n \geq 0$

<u>Basic Step</u>: ตรวจสอบ *P (ตัวแรก)* นั่นคือ

$$P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

ซึ่ง $2^0 = 1$

$\therefore P(0)$ เป็นจริง

<u>Inductive Step</u> : < ต้องแสดงให้เห็นว่า $P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง >

สมมุติว่า *P (k)* เป็นจริง นั่นคือ

สมมุติว่า $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ เป็นจริง

เราต้องแสดงให้เห็นว่า $p(k+1)$ เป็นจริงนั่นคือ นั่นคือ $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k \quad = 2^{(k+1)+1} - 1$ $= 2^{k+2} - 1$

พิจารณา ณ $P(k+1)$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1}$$

$$= 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1$$

$$= 2.2^{k+1} - 1$$

$$= 2^1.2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1+1} - 1$$

$$= 2^{k+2} - 1$$

ดังนั้นโดย Induction proof เราสรุปได้ว่า P (n) เป็นจริง

นั่นคือ $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} \quad \forall n \geq 0$ เป็นจริง

Ex.4 จงหา formular ของผลบวก (sum) ของ จำนวนเต็มบวกคี่ n ตัวแรก (first npositive odd integer) แล้วพิสูจน์โดย inductionproof ว่า formular นั้นถูกต้อง

หา formular

$1 + 3 + 5 + \cdots + ? = ?, n \geq 1$

$n = 1$

$n = 2$

formular คือ

$1, \overset{2}{+3}, \overset{2}{+5}, \ldots, 2n - 1 = \ ?$

$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = \ ?$

$n = 1 \quad ; \quad 1 = 1 = 1^2$

$n = 2 \quad ; \quad 1 + 3 = 4 = 2^2$

$n = 3 \quad ; \quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$n = 4 \quad ; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$n = n \qquad n^2$

ใช้ induction proof ในการพิสูจน์ว่า formular ที่ได้ถูกต้อง (เป็นจริง)

<u>พิสูจน์</u> ให้ P (n) แทน $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = \quad n^2, n \geq 1$

<u>Basis Step</u>: ตรวจสอบ P (ตัวแรก)

$P(1) = (2 \times 1) - 1 = 1^2$

$1 = 1$

$\therefore \quad P(1)$เป็นจริง

<u>Inductive Step</u> : สมมุติว่า *P (k)* เป็นจริง นั่นคือ

สมมุติว่า $1+3+5+\cdots+(2k+1)= \quad k^2$ เป็นจริง

เราต้องแสดงให้เห็นว่า $p(k+1)$เป็นจริงนั่นคือ $1+3+5+\cdots+(2k+1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$ $1+3+5+\cdots+(2k+1)+2(k+1) \quad =(k+1)^2$

ซึ่ง $1+3+5+\cdots+(2k+1)+2(k+1) \quad = \quad k^2+(2k+1)$

$$P(k)=k^2= \quad k^2+2k+1$$
$$= \quad (k+1)(k+1)$$
$$= \quad (k+1)^2$$

ดังนั้นโดย induction proof เราสรุปได้ว่า P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $1+3+5+\cdots+(2n-1)= \quad n^2, n\geq \mathbf{1}$ เป็นจริง

6.3 Recurrence Relation (ความสัมพันธ์เวียนเกิด)

ในการเขียน Sequence ของจำนวนเต็มบวกคี่ n ตัวแรก เราอาจเขียนได้ในแบบต่าง ๆ คือ

1. $1, 3, 5, 7 \ldots \quad , \quad n\geq 1$
2. $a_n=2n-1 \quad , \quad n\geq 1$
3. ใช้ recurrence Relation

$a_n \; = \; a_{n-1}+2 \;\; , n\geq 1 \;\; \leftarrow recurrence\ \ relation$ $a_n \; = \; 1 \;\; \leftarrow initial\ Conditon$

ลองแทนค่า n ใน recurrence relation จะได้

$a_1=1$ จากinitial condition

$a_2 = a_{2-1}+2 \quad = a_1+2 \quad = \quad 1+2 \quad = \quad 3$

$a_3 = a_{3-1}+2 \quad = a_2+2 \quad = \quad 3+2 \quad = \quad 5$

สังเกตว่าแต่ละเทอมที่พิจารณาจะมีความสัมพันธ์กับเทอมที่มีมาก่อนหน้า

Ex.1 จงหา 5 เทอมแรกของSequenceซึ่งกำหนดโดย recurrence relation คือ

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

$$b_n = 1 \quad \leftarrow initial\ Conditon$$

$$b_0 = 3$$

หา b_2ซึ่ง

$$b_2 = b_{2-1} + b_{2-2} = b_1 + b_0 = 3 + 1 = 4$$

$$b_3 = b_2 + b_1 = 4 + 3 = 7$$

$$b_4 = b_3 + b_2 = 7 + 4 = 11$$

∴5 เทอมแรกของ Sequence คือ$1, 3, 5, 7, 11$

Ex.2 จงเขียน $n!$ ในรูปของ recurrence relation

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 \qquad = 2 \times 1!$

$3! = 3 \times 2 \times 1 \qquad = 3 \times 2!$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad = 4 \times 3!$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \qquad = 5 \times 4!$

⋮

$n! = n(n-1)!$

∴Recurrence relation ของ $n!$ คือ

$n! = n(n-1)! \quad , n \geq 1$

$0! = 1$

ในการเขียน recurrence relationนั้นอาจเขียนได้มากกว่า 1 แบบ เช่น

$$S_n = 3S_{n-1} - 1 \quad , \quad n \geq 1$$

$$S_n = 3S_n \quad , \quad n \geq 0$$

recurrence relation ที่เหมือนกัน แต่ initial condition ต่างกัน ก็จะได้ Sequence ที่ต่างกัน เช่น

$$a_n = 3a_{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$
$$a_1 = 2$$

$$b_n = 3b_{n-1} \quad , \quad n \geq 2$$
$$b_1 = 1$$

$a_2 = 3a_1 = 3 \times 2 = 6 \quad b_2 = 3b_1 = 3 \times 1 = 3$

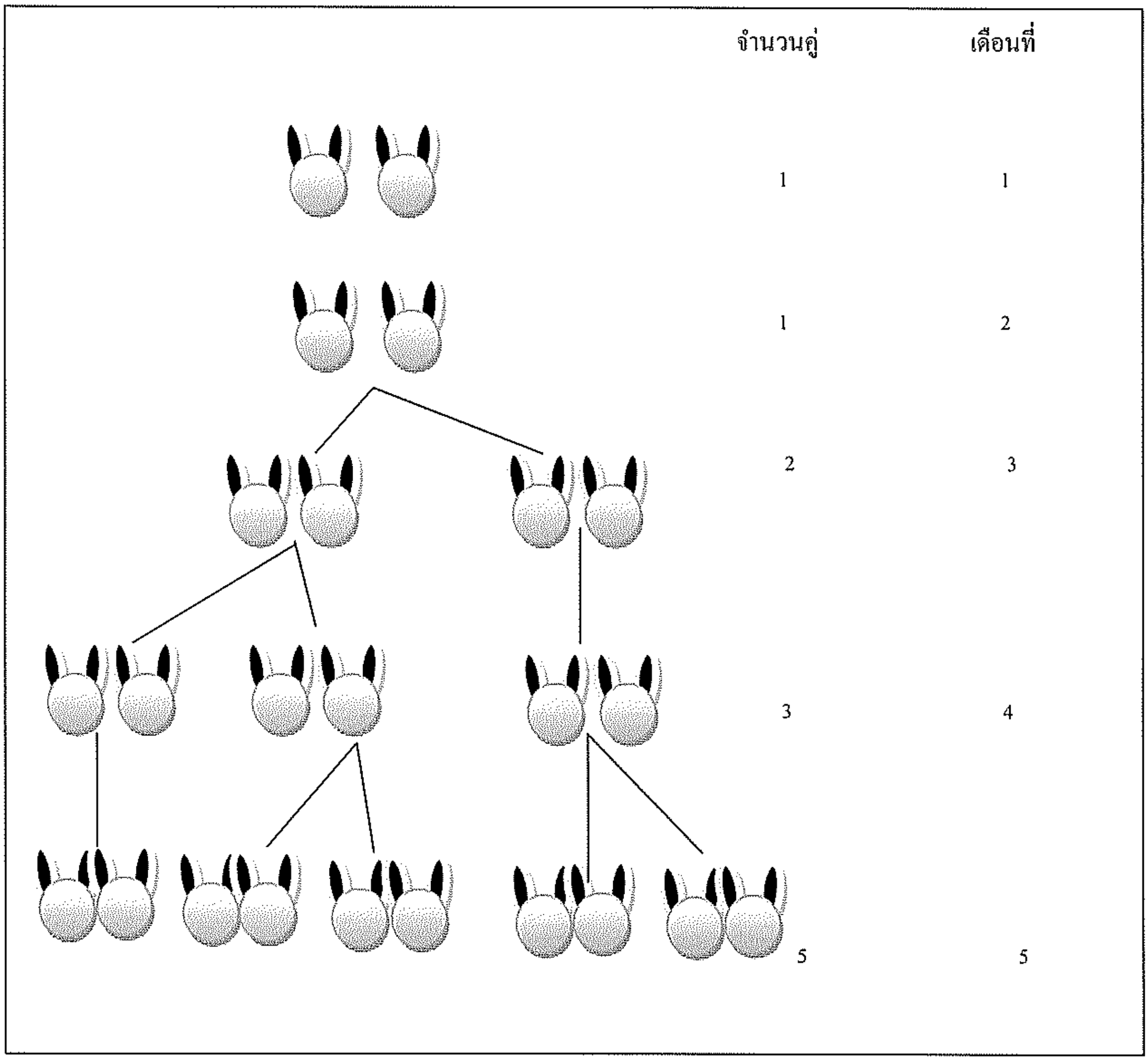
∴initial conditionสำคัญ

Fibonacci Number

มีกระต่ายอยู่ 1 คู่ (ตัวผู้กับตัวเมีย) เกิดตอนต้นปีและสมมุติว่า

1. หลัง 2 เดือนจะมีลูกเพิ่ม 1 คู่ (ตัวผู้กับตัวเมีย)
2. ทุกตัวไม่มีการตาย

ในแต่ละเดือน ๆ จะมีกระต่ายทั้งหมดกี่คู่

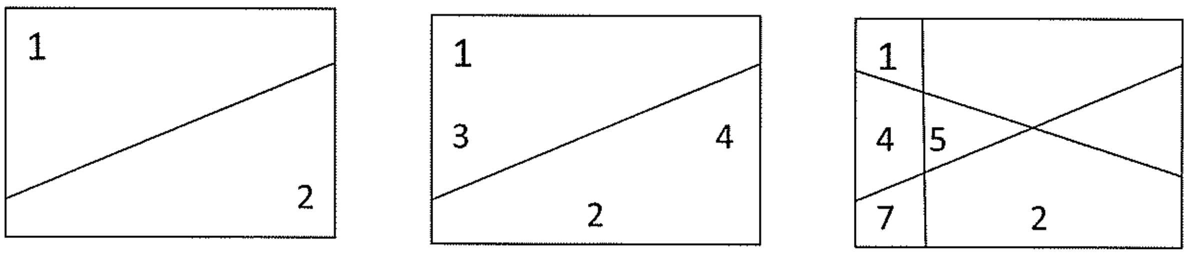


Sequence คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

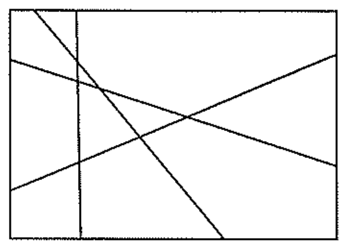
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$
$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$

เป็น Recurrence relation ของ Fibonacci number

ลากเส้นตรง n เส้น โดยกำหนดว่าทุก ๆ 2 เส้นจะต้องตัดกัน และไม่มี 3 เส้นตัดกันที่จุดเดียวกัน แล้วเส้นตรงทั้ง n เส้นแบ่งพื้นที่ออกเป็นกี่บริเวณ



$$n = 1n = 2n = 3$$
$$r = 2r = 4r = 7$$



$$n = 3n = 3$$
$$r = 16r = 11$$

Recurrence relation คือ

$$r_n = r_{n-1} + n, \quad n \geq 2$$
$$r_1 = 2$$

การหา Recurrence relation เมื่อกำหนด formular ของ Sequence มาให้

Ex.1 จงหา recurrence relationของ sequence

$a_n = 6n \quad , n \geq 1$

Sequence นี้คือ 6, 12, 18,

วิธีทำ จาก formular จะได้ว่า

$a_k = 6k$ ... ①

$a_k = 6(k-1) = 6k-6$ ...②

①-② $a_k - a_{k-1} = 6k - (6k-6)$

$a_k - a_{k-1} = 6$

$a_k = a_{k-1} + 6$

∴Recurrence relation คือ

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = a_{k-1} + 6 \qquad , \; k \geq 2 \\ a_1 = 6 \end{array}}$$

Ex.2 จงหา recurrence relation ของ sequence

$a_n = 10^n \quad , n \geq 1$

Sequence นี้คือ10, 100, 1000,...

วิธีทำ จาก formular จะได้ว่า

$a_k = 10^k$ ...①

$a_{k-1} = 10^{k-1}$ ...②

①÷② $\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{10^k}{10^{k-1}} = \dfrac{10^k}{10^k . 10^{-1}} = \dfrac{1}{10^{-1}} = 10^1 = 10$

$\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = 10$

$a_k = 10a_{k-1}$

∴Recurrence relation คือ

$$\boxed{\begin{array}{l} a_k = 10a_{k-1} \qquad , \; k \geq 2 \\ a_1 = 10 \end{array}}$$

Ex.3 จงหา formular ในเทอมที่ n ของ sequence

1, 4, 7, 10, … $n \ge 0$ $3n+1$

แล้วหา recurrence relation จาก formular ที่ได้

Formular คือ $a_k = a_{k-1} + 3$, $k \ge 1$

$a_0 = 1$

Ex.4 จงหา formular ในเทอมที่ n ของsequence

0, 1, 3, 7 … , … $n \ge 0$

แล้วหา Recurrence relation จากformular ที่ได้

Formular คือ $2^n - 1$, $n \ge 0$

Recurrence relation คือ

$a_k = 2a_{k-1} + 1$, $k \ge 1$

$a_0 = 0$

Ex.5 จงหา formular ของเทอมที่ n ของsequence

2, 6, 10, 14, 18, … เมื่อ$n \ge 1$แล้วหา recurrence relation ของsequence นี้จาก formular ที่ได้

วิธีทำ หา formular ของเทอมที่ nเมื่อ$n \ge 1$

4 4 4 4

$2, 6, 10, 14, 18, \ldots$

Formular คือ$4n - 2$ ซึ่ง$n = 1 \to 2$

$n = 2 \to 6$

$n = 3 \to 10$

$\vdots$ $\vdots$

หา Recurrence relation

จาก formular ที่ได้คือ $a_n = 4n - 2, n \ge 1$

จะได้ $a_k = 4k - 2$ …①

$a_{k-1} = 4(k-1) - 2 = 4k - 6$ …②

①-② : $a_k - a_{k-1} = 4k - 2 - 4k + 6 = 4$

$\therefore a_k = a_{k-1} + 4$ 2, 6, 10,...

ดังนั้น

Recurrence relation คือ

$a_k = a_{k-1} + 4 \quad , \quad k \geq 2$

$a_1 = 2$

แบบฝึกหัด ชุดที่ 2

Induction Proof (ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียด)

1. จงใช้วิธีการพิสูจน์แบบอุปนัย (induction proof) ในการพิสูจน์ว่า

$$1+4+7+10+\cdots+(3n-2) \quad = \quad \frac{n(3n-1)}{2} \quad ,n \geq 1$$

2. จงใช้วิธีการพิสูจน์แบบอุปนัย (induction proof) ในการพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad \frac{n}{n+1} \qquad \text{เมื่อ} \quad n \geq 1$$

3. จงใช้วิธีการพิสูจน์แบบอุปนัย (induction proof) ในการพิสูจน์ว่า

$$1+3+9+27+\cdots+3^n \quad = \quad \frac{3^{n+1}-1}{2} \quad ,n \geq 0$$

4. จงใช้วิธีการพิสูจน์แบบอุปนัย (induction proof) ในการพิสูจน์ว่า

$$1.2^0+2.2^1+3.2^2+4.2^3+\cdots+n.2^{n-1} \quad = \quad (n-1).2^n+1 \quad ,n \geq 1$$

5. จงหา formular ของผลบวกของจำนวนเต็มบวกคู่ n ตัวแรก แล้วพิสูจน์ด้วย induction proof ว่า formular นั้นถูกต้อง

Recurrence Relation (ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียด)

1. จงแสดงให้เห็นว่า sequence $2, 3, 4, 5, \cdots, 2+n \quad , n \geq 0$ สอดคล้องกับ recurrence relation คือ

$$t_k \quad = \quad 2t_{k-1}-2t_{k-2} \quad , k \geq 2$$

2. จงหา recurrence relation ของ sequence

$$a_n \quad = \quad 4n-2 \quad ,n \geq 1$$

3. จงหา formular ในเทอมที่ n ของ sequence ในแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วหา recurrence relation จาก formular ที่ได้

   (a). $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ เมื่อ $n \geq 1$

   (b). $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ เมื่อ $n \geq 2$

   (c). $5, 8, 11, 14, \ldots$ เมื่อ $n \geq 1$

   (d). $1, 5, 25, 125, \ldots$ เมื่อ $n \geq 0$

บทที่ 7
หลักการนับเบื้องต้น (Basic of Counting)

7.1 หลักการนับเบื้องต้น

เรามักจะคุ้นเคยกับการนับจำนวนวิธีของการทำงานบางอย่าง หรือจำนวนวิธีที่เหตุการณ์บางอย่างจะเกิดขึ้นตัวอย่างเช่น จำนวนวิธีที่จะจัดเรียงสิ่งของเพื่อตกแต่งสถานที่ จำนวนวิธีที่จะจัดคนกลุ่มหนึ่งเข้าพัก จำนวนวิธีที่จะจัดการแข่งขันของทีมนักกีฬา เป็นต้น หลักการนับเบื้องต้นจะช่วยให้การนับจำนวนวิธีของเหตุการณ์ต่าง ๆ ทำได้ง่ายและสะดวกรวดเร็วขึ้น หลักการนับเบื้องต้นจะประกอบด้วยหลักการคูณและหลักการบวกดังต่อไปนี้

หลักการคูณ

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

Ex 7.1 คนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยชาย 3 คน และหญิง 4 คน
จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกตัวแทน 2 คน โดยที่เป็นชาย 1 คน และเป็นหญิง 1 คน

วิธีทำ สมมติชาย 3 คน คือ ช1, ช2, ช3
และหญิง 4 คน คือ ญ1, ญ2, ญ3, ญ4
จะเห็นว่ามีวิธีเลือกตัวแทนทั้งหมด 12 วิธี คือ

(ช1, ญ1), (ช1, ญ2), (ช1, ญ3), (ช1, ญ4),
(ช1, ญ1), (ช2, ญ2), (ช2, ญ3), (ช2, ญ4),
(ช3, ญ1), (ช3, ญ2), (ช3, ญ3), (ช3, ญ4)

ข้อสังเกต ในการเลือกตัวแทน 2 คน โดยที่เป็นชาย 1 คน และหญิง 1 คน อาจคิดแบบผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตดังนี้

ให้ $A =$ {ช1, ช2, ช3}
และ $B =$ {ญ1, ญ2, ญ3, ญ4}
จะได้ $A \times B =$ { (ช1, ญ1), (ช1, ญ2), (ช1, ญ3), (ช1, ญ4),
(ช1, ญ1), (ช2, ญ2), (ช2, ญ3), (ช2, ญ4),
(ช3, ญ1), (ช3, ญ2), (ช3, ญ3), (ช3, ญ4)}

จำนวนวิธีในการเลือกตัวแทน 2 คนที่เป็นชาย 1 คน และหญิง 1 คน ก็คือจำนวนสมาชิกของ$A \times B$

ซึ่งเท่า $4 \cdot 3 = 12$ วิธี

หรืออาจคิดได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

มีวิธีเลือกชาย 1 ได้ 3 วิธี และในแต่ละวิธีเลือกหญิง 1 คน ได้อีก 4 วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีเลือกตัวแทนทั้งหมดเท่ากับ $4 \cdot 3 = 12$ วิธี

จากตัวอย่าง 7.1 เราสามารถสรุปหลักการคูณได้ดังนี้

กฎข้อ 1 ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยการทำงาน 2 ชนิด โดยที่งานชนิดที่หนึ่งทำได้ n_1 วิธี และแต่ละวิธีในการทำงานชนิดที่หนึ่งมีวิธีทำงานงานชนิดที่สองได้ n_2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดของการทำงานนี้เท่ากับ $n_1 \; n_2$ วิธี

Ex 7.2 เรือโดยสารจากท่าช้างไปจังหวัดนนทบุรีมีทั้งหมด 20 ลำ จำนวนวิธีที่ชายคนหนึ่งจะเดินทางโดยเรือจากท่าช้างไปจังหวัดนนทบุรี และเดินทางกลับจากจังหวัดนนทบุรีมาที่ท่าช้างโดยที่ขากลับนั่งเรือคนละลำกับขาไป มีกี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่าจำนวนวิธีที่จะเดินทางจากท่าช้างไปยังจังหวัดนนทบุรีเท่ากับ 20 วิธี
และจำนวนวิธีที่จะเดินทางจากจังหวัดนนทบุรีมายังท่าช้างเท่ากับ 19 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเดินทางไปและกลับ เท่ากับ $20 \times 19 = 380$ วิธี

Ex 7.3 จงหาจำนวนวิธีในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ พร้อมกับทอดลูกเต๋า 1 ลูก

วิธีทำ ผลจากการโยนเหรียญ 1 เหรียญมี 2 วิธีคือ เกิดหน้า หัว ก้อย
ผลจากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก มี 6 วิธี คือ เกิดแต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6
ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2 \times 6 = 12$ วิธี

ข้อสังเกต ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก เป็นการกระทำที่เกิดขึ้นต่อเนื่องกันซึ่งจะทำอย่าง ใดก่อนหรือหลังจะมีจำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดเท่ากัน

อาศัยแนวคิดเช่นเดียวกับข้างต้นขยายไปสู่การนับจำนวนวิธีทั้งหมดของการทำงานที่ประกอบด้วยการทำงาน k อย่าง ได้ดังต่อไปนี้

กฎข้อ 2 ถ้าทำงานอย่างแรกมีวิธีทำได้ n_1 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกมีวิธีการทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างที่สองมีวิธีการทำงานอย่างที่สามได้ n_3 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างที่ $(k-1)$ มีวิธีการทำงานอย่างที่ k ได้ n_k วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่างเท่ากับ
$n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ วิธี

Ex 7.4 สถานีรถไฟแห่งหนึ่งมีชานชลาจอดรถไฟได้ทั้งหมด 7 ชานชลา ถ้ามีรถไฟเข้าจอด 4 ขบวน
จะมีวิธีจัดรถไฟให้เข้าจอดในชานชลาได้กี่วิธี

วิธีทำ รถไฟขบวนที่ 1 เลือกจอดได้ 7 วิธี
รถไฟขบวนที่ 2 เลือกจอดได้ 6 วิธี
(เพราะรถไฟขบวนที่ 1 จอดไปแล้ว 1 ชานชลาจึงเหลือเพียง 6 ชานชลา)
รถไฟขบวนที่ 3 เลือกจอดได้ 5 วิธี
(เพราะรถไฟขบวนที่ 1 และ 2 จอดไปแล้ว 2 ชานชลาจึงเหลือเพียง 5 ชานชลา)
รถไฟขบวนที่ 1 เลือกจอดได้ 1 วิธี
(เพราะรถไฟขบวนที่ 1 3 เลือกจอดไปแล้ว 3 ชานชลาจึงเหลือเพียง 1 ชานชลา)
ดังนั้น รถไฟทั้ง 1 ขบวนจะเข้าจอดได้ 7 X 6 X 5 X 4 = 840 วิธี

Ex 7.5 จำนวนเต็มคี่บวกสามหลักมีกี่จำนวนโดยที่แต่ละหลักมีตัวเลขไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ ตัวเลขในหลักทั้งสามต่างก็เป็นสมาชิกของเซต {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

หลักร้อย หลักสิบ หลักหน่วย

ตัวเลขในหลักหน่วยเลือกได้ 5 วิธี (คือ 1, 3, 5, 7, 9)
ตัวเลขในหลักร้อยเลือกได้ 8 วิธี (ต้องไม่ใช่ 0 และไม่ซ้ำกับตัวเลขในหลักหน่วย)
ตัวเลขในหลักสิบเลือกได้ 8 วิธี (ไม่ซ้ำกับตัวเลขในหลักหน่วยและหลักร้อย)
ดังนั้น จำนวนเต็มคี่บวกสามหลักที่ต้องการมีทั้งสิ้น 5 X 8 X 8 = 320 วิธี

หลักการบวก

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

Ex 7.6 โรงเรียนแห่งหนึ่งมีครูคณิตศาสตร์ชาย 3 คนและหญิง 4 คน โดยในจำนวนนี้มีครูสองคนเป็นสามีภรรยากัน ซึ่งจะไปประชุมที่ต่างจังหวัดพร้อมกันเท่านั้น
โรงเรียนแห่งนี้จะส่งครู 2 คน ที่เป็นชายหนึ่งคนและหญิงหนึ่งคนไปประชุมต่างจังหวัดได้กี่วิธี

วิธีทำ การที่ครูสองคนจะไปประชุมที่ต่างจังหวัดแบ่งเป็น 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ครูสองคนที่**เป็น**สามีภรรยากันไปประชุมได้ 1 วิธี

วิธีที่ 2 ครูสองคนที่**ไม่เป็น**สามีภรรยากันไปประชุมได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีส่งครูไปประชุมที่ต่างจังหวัด เท่ากับ 1+6 = 7 วิธี

กฎข้อ 3 ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยวิธีการทำงาน 2 วิธี แต่ละวิธีของการทำงานไม่เกิดซ้ำซ้อนกันงานอย่างแรกทำได้ n_1 วิธี และงานอย่างที่สองทำได้ n_2 วิธี จำนวนวิธีที่จะทำงานนี้เท่ากับ

$n_1 + n_2$ วิธี

Ex 7.7 จำนวนเต็มบวกสามหลักมีกี่จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว และแต่ละหลักมีตัวเลขไม่ซ้ำกัน

วิธีทำ จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5 ลงตัว แบ่งเป็นจำนวนเต็มที่ลงท้ายด้วย 0 และจำนวนเต็มที่ลงท้ายด้วย 5

วิธีที่ 1 ตัวเลขในหลักหน่วยเป็น 0 มี 1 วิธี

ตัวเลขในหลักร้อยเลือกได้ 9 วิธี (คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

ตัวเลขในหลักสิบเลือกได้ 8 วิธี (ไม่ซ้ำกับหลักหน่วยและหลักร้อย)

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกสามหลักที่ลงท้ายด้วย 0 มี 1 X 9 X 8 = 72 วิธี

วิธีที่ 2 ตัวเลขในหลักหน่วยเป็น 5 มี 1 วิธี

ตัวเลขในหลักร้อยเลือกได้ 8 วิธี (ไม่ใช่เลข 0 และเลข 5)

ตัวเลขในหลักสิบเลือกได้ 8 วิธี (ไม่ซ้ำกับหลักหน่วยและหลักร้อย)

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกสามหลักที่ลงท้ายด้วย 0 มี 1 X 8 X 8 = 64 วิธี

เพราะฉะนั้น จำนวนเต็มสามหลักที่ต้องการมีทั้งหมด 72 + 64 = 136 จำนวน

จากตัวอย่างข้างต้น สรุปหลักการบวกในรูปทั่วไปดังนี้

กฎข้อ 4 ถ้าการทำงานอย่างหนึ่งประกอบด้วยวิธีการทำงาน k วิธี แต่ละวิธีของการทำงานไม่เกิดซ้ำซ้อนกัน

วิธีที่ 1 มีวิธีการทำงาน n_1 วิธี

วิธีที่ 2 มีวิธีการทำงาน n_2 วิธี

วิธีที่ k มีวิธีการทำงาน n_k วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

Ex 7.8 นายสง่ามีเพื่อน 4 คน ซึ่งเขาอาจจะเชิญเพื่อนมาทานอาหารด้วยกันหนึ่งคนหรือหลายคนก็ได้

เขามีวิธีเชิญเพื่อนทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ วิธีที่ 1 เขาเชิญเพื่อนหนึ่งคน มี 4 วิธี

วิธีที่ 2 เขาเชิญเพื่อนสองคน มี 6 วิธี

วิธีที่ 3 เขาเชิญเพื่อนสามคน มี 4 วิธี

วิธีที่ 4 เขาเชิญเพื่อนสี่คน มี 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่นายสง่าจะเชิญเพื่อนเท่ากับ 4 + 6 + 4 + 1 = 15 วิธี

7.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยน

บางครั้งเราต้องการทราบจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการจัดเรียงอันดับของสิ่งของ ดังตัวอย่างในการนำอักษร 3 ตัวคือ A, B และ C มาจัดเรียงใหม่ได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด 6 วิธีดังนี้

ABC	BAC	CAB
ACB	BAC	CBA

การจัดเรียงข้างต้นมีแนวคิดดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 จะเป็นอักษร A, B หรือ C ก็ได้มีวิธีจัดได้ 3 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เหลืออักษรที่จะนำมาจัดเรียงเพียง 2 ตัวจึงจัดได้ 2 วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เหลืออักษรเพียง 1 ตัวจึงจัดได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 3 X 2 X 1 = 6 วิธี

การเรียงอันดับของตัวอักษร เช่นนี้เรียกว่า **วิธีสับเปลี่ยน**

แฟคทอเรียล

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก **แฟคทอเรียล** n เขียนแทนด้วย $n!$ โดยที่

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= (n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต 1. กำหนดให้ 0! = 1 ดังนั้น สำหรับจำนวนเต็มบวก n,

$$n! = n(n-1)!$$

เช่น $1! = 1 \cdot 0! = 1$

$2! = 2 \cdot 1! = 2$

$3! = 3 \cdot 2! = 6$

$4! = 4 \cdot 3! = 24$

$5! = 5 \cdot 4! = 120$

2. ถ้า r เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $1 \leq r \leq n$ แล้ว

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

เป็นการเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรงหรือเส้นโค้งโดยที่ปลายทั้งสองข้างไม่บรรจบกัน

ก. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมด และต้องการนำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวเส้นตรง ทั้ง n สิ่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน หาได้ดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 ตำแหน่งที่ 3 ... ตำแหน่งที่ n

ตำแหน่งที่ 1 จะวางของสิ่งในใน n สิ่งก็ได้ มีวิธีจัดวางได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 สำหรับแต่ละวิธีที่วางของในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีวางของในตำแหน่งที่ 2 ได้ $(n-1)$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 สำหรับแต่ละวิธีวางของในตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 2 จะมีวิธีวางของในตำแหน่งที่ 3 ได้

$(n-2)$ วิธี

⋮

ตำแหน่งที่ n เหลือของอยู่สิ่งเดียวจึงมีวิธีวางของได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของทั้ง n สิ่งเท่ากับ $n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$ วิธี

Ex 7.9 นำตัวอักษรจากคำว่า STAND มาจัดเรียงเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมาย ได้ทั้งหมดกี่คำ

วิธีทำ การจัดเรียงตัวอักษรให้ได้คำใหม่เป็นการสลับอักษรโดยถืออันดับเป็นสำคัญ และมีตัวอักษร 5 ตัวต่างกัน

ดังนั้น สร้างคำได้ทั้งหมด 5! = 120 คำ

วิธีทำ การจัดคน 7 คน ยืนเรียงแถว จะมีวิธีจัดที่ต่างกันทั้งหมด 7! = 5040 วิธี

ดังนั้น จะได้ภาพที่ต่างกันทั้งหมด 5040 ภาพ

ในทำนองเดียวกัน ถ้ามีของอยู่ n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมด ต้องการนำมาจัดอันดับทีละ r สิ่ง โดยที่ $1 \leq r \leq n$ ตำแหน่งที่จะจัดเรียงจึงมีเพียง r ตำแหน่ง

ตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 ตำแหน่งที่ 3 ⋯ ตำแหน่งที่ r

ตำแหน่งที่ 1 มีวิธีวางของได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 มีวิธีวางของได้ $n + 1$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 มีวิธีวางของได้ $n + 2$ วิธี

⋮

ตำแหน่งที่ r มีวิธีวางของได้ $n - (r - 1) = n - r - 1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดอันดับของ r สิ่งเท่ากับ $n(n-1)\cdots(\mathrm{n}-\mathrm{r}-1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

กฎข้อ 5 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดแบบเชิงเส้นโดยจัดทีละ r สิ่ง

เขียนแทนด้วย $P_{n,r}$ หาได้จาก

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

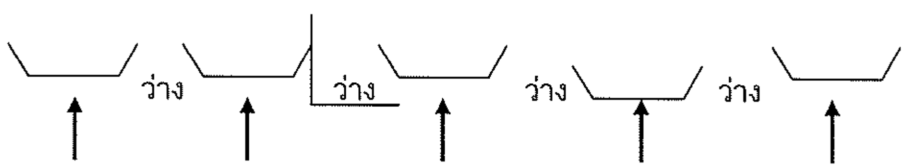
ข้อสังเกต $P_{n,r} = n!$

Ex 7.10 มีเก้าอี้ 7 ตัวเรียงกันเป็นแนวเส้นตรง มีคน 3 คน คือ ใหญ่, กลาง และเล็ก จงหาจำนวนวิธีจัดเหล่านี้นั่งเก้าอี้โดยที่

(1) คนทั้งสามนั่งไม่ติดกันเลย

(2) คนทั้งสามนั่งติดกันเสมอ

วิธีทำ (1) เนื่องจากคนทั้งสามไม่นั่งติดกันเลย ดังนั้นวางเก้าอี้ว่าง 4 ตัวก่อน และหลังจากนั้นให้คนทั้งสามนั่งแทรกระหว่างเก้าอี้ว่างดังรูป



มีที่ให้คนทั้งสามนั่งแทรกได้ 5 ที่แต่มีคนเพียง 3 คน

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคน 3 คนนั่งเก้าอี้ได้ $P_{5,3} = 60$ วิธี

(2) เนื่องจากคนทั้งสามต้องนั่งติดกันเสมอ ดังนั้นนับรวมเป็น 1 และนำมาแทรกระหว่างเก้าอี้ว่าง

ซึ่งทำได้ $P_{5,1}$ วิธี

คนทั้งสามนั่งสลับกันตามตำแหน่งได้ 3! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคน 3 คนนั่งเก้าอี้ได้ $3! \times P_{5,1} = 30$ วิธี

Ex 7.11 จัดคน 5 คนยืนเรียงแถวถ่ายรูปทีละกี่คนก็ได้ จะได้ภาพกี่แบบ

วิธีทำ จัดคน 1 คน ถ่ายรูปได้ $P_{5,1}$ วิธี

จัดคน 2 คน ถ่ายรูปได้ $P_{5,2}$ วิธี

จัดคน 3 คน ถ่ายรูปได้ $P_{5,3}$ วิธี

จัดคน 4 คน ถ่ายรูปได้ $P_{5,4}$ วิธี

จัดคน 5 คน ถ่ายรูปได้ $P_{5,5}$ วิธี

ดังนั้น จะได้ภาพที่แตกต่างกัน $P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4} + P_{5,5} = 325$ แบบ

Ex 7.12 มีหนังสือต่างกันทั้งหมด 6 เล่ม ในจำนวนนี้มีหนังสือปกสีแดง 3 เล่ม จงหาจำนวนวิธีจัดหนังสือทั้ง 6 เล่ม บนชั้นโดยที่หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือปกสีแดง

วิธีทำ

หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือปกสีแดง จัดได้ $P_{3,2}$ วิธี

หนังสือตรงกลางมีทั้งหมด 4 เล่ม จัดวางได้ 4! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือ 6 เล่มบนชั้นเท่ากับ $4! \times P_{3,2} = 144$ วิธี

ข. วิธีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมด มีจำนวนวิธีจัดเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นเท่ากับ $n!$ วิธี

สมมติให้ของ n สิ่งมี n_1 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1 มี n_2 สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2 ... และ มี n_k สิ่งเหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะน้อยลงไปคือในจำนวน$n!$ วิธีจะรวมวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่แตกต่างกัน $n_1!$ วิธี สำหรับสิ่งของเหมือนกันของกลุ่มที่ 1 และ $n_2!$ วิธี สำหรับสิ่งของเหมือนกันของกลุ่มที่ 2 ... และ $n_k!$ วิธี สำหรับสิ่งของเหมือนกันของกลุ่มที่ k ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่สามารถเห็นความแตกต่างได้เท่ากับ

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \quad \text{วิธี}$$

Ex 7.12 มีลูกบอลขนาดเดียวกัน 9 ลูก เป็นสีแดง 5 ลูก และสีดำ 4 ลูก จะเรียงลูกบอลเป็นแนวตรงได้กี่วิธี

โดยที่

(1) ลูกบอลที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวมีสีเดียวกัน

(2) ลูกบอลที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวมีสีต่างกัน

วิธีทำ (1) ลูกบอลที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวจะเป็นสีแดงหรือสีดำก็ได้

<u>วิธีที่ 1</u> ถ้าลูกบอลหัวแถวและท้ายแถวเป็นสีแดง จะมีลูกบอลเหลือ 7 ลูก ที่เป็นสีแดง 3 ลูก และสีดำ 4 ลูก

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{7!}{3!4!} = 35$ วิธี

<u>วิธีที่ 2</u> ถ้าลูกบอลหัวแถวและท้ายแถวเป็นสีดำ จะมีลูกบอลเหลือ 7 ลูก ที่เป็นสีแดง 5 ลูก และสีดำ 2 ลูก

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{7!}{5!2!} = 21$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงลูกบอลทั้ง 9 ลูกเป็นแนวตรงได้ 35 + 21 = 56 วิธี

(2) เรียงลูกบอลทั้ง 9 ลูกที่เป็นสีแดง 5 ลูก และสีดำ 4 ลูกในแนวตรง

จำนวนเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{9!}{5!4!} = 126$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนโดยที่หัวแถวและท้ายแถวมีสีต่างกัน

= จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด – จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนในข้อ (1)

= 126 – 56 = 70 วิธี

Ex 7.13 ชายขี้เมาคนหนึ่งสามารถก้าวไปข้างหน้าหรือข้างหลังก็ได้ ถ้าเขาเดินทั้งหมด 15 ก้าว

เขาจะมีวิธีการเดินกี่วิธีเมื่อเดินครบ 15 ก้าวแล้วเขาอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปข้างหน้า 7 ก้าว

วิธีทำ สมมติเขาเดินไปข้าหน้า x ก้าว และเดินไปข้างหลัง y ก้าว

ดังนั้น $x + y = 15$ และ $x - y = 7$

เพราะฉะนั้น $x = 11$ และ $y = 4$

นั้นคือ เขาเดินไปข้างหน้า 11 ก้าว และถอยหลัง 4 ก้าว

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่เขาจะเดินได้เท่ากับ $\frac{15!}{11!4!} = 1365$ วิธี

7.3 วิธีจัดหมู่

สมมติว่าต้องการเลือกตัวแทนนักเรียน 2 คน จากผู้สมัคร 3 คน ซึ่งเหมือนกันกับการหาจำนวนสับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว ของเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว

สมมติว่ามีเซต $A = \{a, b, c\}$ สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัวมีทั้งหมด 3 สับเซต คือ $\{a, b\}$,
$\{a, c\}$ และ $\{b, c\}$ ทำนองเดียวกันในการเลือกตัวแทนนักเรียน 2 คนจากผู้สมัคร 3 คนจะมีวิธีเลือกทั้งหมด 3 วิธี วิธีหาสับเซตหรือวิธีเลือกตัวแทนนักเรียนดังกล่าว เรียกว่า **วิธีจัดหมู่**

สังเกตว่าสับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัวของเซต A ข้างต้น อันดับของตัวอักษรในสับเซตไม่มีความสำคัญเพราะว่าเซตสองเซตเท่ากันก็ต่อเมื่อมีสมาชิกชุดเดียวกัน ดังนั้นวิธีจัดหมู่จะไม่คำนึงถึงอันดับของสิ่งของขณะที่การเรียงสับเปลี่ยนจะคำนึงถึงอันดับของสิ่งของ

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 2 ตัวจากอักษรทั้งหมด 3 ตัว มี $P_{3,2} = 6$ วิธี

จำนวนวิธีจัดหมู่อักษร 2 ตัว จากอักษรทั้งหมด 3 ตัว มี 3 วิธี

วิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

ก. วิธีเลือกสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของที่ต่างกันทั้งหมด n สิ่ง เมื่อ $0 \le r \le n$
สมมติว่ามีสิ่งของ n สิ่งแตกต่างกัน จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของคราวละ r สิ่ง เมื่อ $r \le n$ คือ

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ให้ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีที่จะเลือกของ r สิ่งจากของ n สิ่ง

หมายเหตุ $\binom{n}{r}$ **อ่านว่า "n เลือก r"**

ในการเลือกสิ่งของ r สิ่งจากสิ่งของ n สิ่งไม่สนใจว่าของทั้ง r สิ่งนั้นเรียงกันอยู่อย่างไร จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ

$$C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ข้อสังเกต 1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ และ $\binom{n}{1} = n$

2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3. $\binom{n}{r} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$

Ex 7.14 สมศรีต้องการเชิญเพื่อนสนิทซึ่งมี 10 คนมารับประทานอาหารด้วยกัน 6 คน ถ้าใน 10 คนนี้ มี 2 คน เป็นพี่น้องกันจะเชิญมาต้องเชิญทั้งคู่ สมศรีจะมีวิธีเชิญเพื่อนได้กี่วิธี

วิธีทำ ถ้าสมศรีเชิญ 2 คน พี่น้องมาด้วยจะเชิญเพื่อนคนอื่นได้เพียง 4 คนจาก 8 คน

จำนวนวิธีเชิญเพื่อนเท่ากับ $\binom{8}{4} = 70$ วิธี

แต่ถ้าสมศรีไม่เชิญพี่น้อง 2 คนนั้นมาด้วยจะต้องเชิญเพื่อน 6 คน จาก 8 คน

จำนวนวิธีเชิญเพื่อนเท่ากับ $\binom{8}{6} = 28$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเชิญเพื่อนทั้งหมดเท่ากับ 70 + 28 = 98 วิธี

Ex 7.15 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 5 ลูก และสีเขียว 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 3 ลูก มีกี่วิธีที่จะได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อยหนึ่งลูก

วิธีทำ จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีขาว 1 ลูก และสีอื่น 2 ลูก เท่ากับ $\binom{4}{2}\binom{8}{2} = 112$ วิธี

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีขาว 2 ลูก และสีอื่น 1 ลูก เท่ากับ $\binom{4}{2}\binom{8}{2} = 48$ วิธี

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีขาว 3 ลูก เท่ากับ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลตามต้องการเท่ากับ 112 + 48 + 4 = 164 วิธี

ข้อสังเกต จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 3 ลูกให้ได้สีขาวอย่างน้อยหนึ่งลูกเท่ากับ

จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่อง – จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 3 ลูก ได้สีอื่นที่ไม่ใช่สีขาว

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบลูกบอลตามต้องการ $= \binom{12}{3} - \binom{8}{3}$

$$= 220 - 56$$
$$= 164 \text{ วิธี}$$

ข. วิธีแบ่งสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งออกเป็น k กลุ่มโดยที่แต่ละกลุ่มมีสิ่งของไม่เท่ากัน

ถ้ามีตัวอักษร 3 ตัว a, b และ c ต้องการแบ่งเป็น 2 กลุ่ม โดยที่กลุ่มแรกมีอักษร 2 ตัว และกลุ่มที่สองมีอักษร 1 ตัว ทำได้ 3 วิธีคือ

$\{a, b\}$ และ $\{c\}$

$\{a, c\}$ และ $\{b\}$

$\{b, c\}$ และ $\{a\}$

แนวคิดในการนับจำนวนวิธีคือเลือกตัวอักษร 2 ตัว เป็นกลุ่มแรกก่อนจะได้ว่าตัวอักษรที่เหลือจะเป็นตัวอักษรในกลุ่มที่สอง จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\binom{3}{2}$ = 3 วิธี

ข้อสังเกต ในการแบ่งตัวอักษร 3 ตัวออกเป็นสองกลุ่มอาจสลับเป็นเลือกตัวอักษร 1 ตัว เป็นกลุ่มแรกและตัวอักษรที่เหลือเป็นกลุ่มที่สอง

จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\binom{3}{1}$ = 3 วิธี

ถ้ามีสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่ง ต้องการแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ n_1 และ n_2 ตามลำดับ โดยที่ $n_1 \neq n_2$

และ $n_1 + n_2 = n$

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\binom{n}{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!}$

ถ้ามีสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่งต้องการแบ่งเป็น 3 กลุ่ม ๆ ละ n_1 และ n_2 ตามลำดับ โดยที่ $n_1 \neq n_2 \neq$

n_3 และ $n_1 + n_2 + n_3 = n$

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \quad \text{วิธี}$$

ตัวอย่าง 5.20 จะแบ่งนักเรียน 12 คน ออกเป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 5 คน และ 7 คน ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีแบ่งนักเรียนเท่ากับ $= \frac{12!}{5!7!} = 792$ วิธี

ตัวอย่าง 5.21 จะแบ่งคน 10 คนเข้าพักในห้อง 3 ห้อง โดยที่แต่ละห้องพักได้ 2 คน, 3 คน และ 5 คน ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนวิธีแบ่งคนเท่ากับ $= \frac{10!}{2!3!5!} = 2520$ วิธี

อาศัยแนวคิดข้างต้นขยายไปสู่กรณีทั่วไปได้ดังนี้

กฎข้อ 8 แบ่งสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่งออกเป็น k กลุ่ม ๆ ละ $n_1, n_2, \ldots, n_k$ โดยที่ $n_1 \neq n_2 \neq \cdots$

$= n_k$ และ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

ค. วิธีแบ่งสิ่งของแตกต่างกัน n สิ่งออกเป็น k กลุ่มโดยที่แต่ละกลุ่มมีจำนวนสิ่งของเท่ากัน

ถ้ามีตัวอักษร 4 ตัว a, b, c และ d ต้องการแบ่งเป็น 2 กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มมีอักษร 2 ตัว ถ้าเลือกตัวอักษร 2 ตัว เป็นกลุ่มแรกจะเหลือตัวอักษรอีก 2 ตัวเป็นกลุ่มที่สอง จะมีจำนนวนวิธีเท่ากับ $\binom{4}{2}$ = 6 วิธี ดังนี้

<u>กลุ่มที่ 1</u>	<u>กลุ่มที่ 2</u>
$\{a,b\}$	$\{c,d\}$
$\{a,c\}$	$\{b,d\}$
$\{a,d\}$	$\{b,c\}$
$\{b,c\}$	$\{a,d\}$
$\{b,d\}$	$\{a,c\}$
$\{c,d\}$	$\{a,b\}$

สังเกตว่ากลุ่มของตัวอักษรในกลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 แต่ละชุดจะสลับกัน 2! วิธี (สลับที่ระหว่างกลุ่ม 2 กลุ่ม) ทำให้มีวิธีแบ่งกลุ่มซ้ำกันอยู่ 2! วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{4!}{(2!)^2 2!} = \frac{6}{2!} = 3$ วิธี

ในทำนองเดียวกันแบ่งสิ่งของ n สิ่งออกเป็น k กลุ่ม ๆ ละ r สิ่งเท่าๆ กัน
จำนวนวิธีการแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{n!}{(r!)^k k!}$ วิธี

Ex 7.16 จงหาวิธีแบ่งดินสอสี 12 แท่งออกเป็น 3 กอง ๆ ละเท่า ๆ กัน

จำนวนวิธีแบ่งดินสอสีเท่ากับ $\frac{12!}{(4!)^3 3!} = 5775$ วิธี

Ex 7.17 จงหาจำนวนวิธีจัดคน 6 คน ถ่ายรูปเป็น 2 แถว ๆ ละ 3 คน โดยที่คนที่อยู่แนวหน้านั่งเก้าอี้ และคนที่อยู่แถวหลังยืนเรียงแถว

วิธีทำ แบ่งคน 6 คน เป็นสองกลุ่ม ๆ ละ 3 คน

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ $\frac{6!}{(3!)^2 2!}$ วิธี

จัดคน 3 คนนั่งเรียงแถวได้ 3! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนถ่ายรูปเท่ากับ $\frac{6!}{(3!)^2 2!} \times 3! \times 3! \times 2! = 720$ วิธี

แบบฝึกหัด ชุดที่ 3

1. กำหนดเซตของ S ={a, b, c, d}

(a). จำนวนรูปแบบทั้งหมดที่ได้จากการเรียงสับเปลี่ยนสมาชิก 3 ตัว (3-permutations) ของ S มีกี่แบบ และจงแจกแจงรูปแบบทั้งหมดดังกล่าว

(b). จำนวนรูปแบบทั้งหมดที่ได้จากการจัดหมู่สมาชิก 3 ตัว (3-combinations) ของ S มีกี่แบบ และจงแจกแจงรูปแบบทั้งหมดดังกล่าว

2. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

(a). P6,3

(b). P8,5

(c). P8,8

(d). C5,1

(e). C8,4

(f). C12,6

3. จงหาจำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนรถยนต์ที่แตกต่างกันในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าป้ายทะเบียนมีรูปแบบคือ 2 ตัวหน้าเป็นอักษรภาษาไทยและ 4 ตัวหลังเป็นตัวเลข

(a). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ทั้งตัวอักษรและตัวเลขสามารถซ้ำกันได้

(b). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ไม่มีตัวอักษรซ้ำกันแต่มีตัวเลขซ้ำกันได้

(c). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวอักษรซ้ำกันได้แต่ตัวเลขไม่มีซ้ำกัน

(d). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ไม่มีทั้งตัวอักษรและตัวเลขที่ซ้ำกัน

(e). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวเลขทุกตัวเป็น 9 โดยที่ตัวอักษรเป็นอะไรก็ได้และ สามารถมีอักษรซ้ำกันได้

(f). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวเลขทุกตัวเหมือนกัน โดยที่ตัวอักษรเป็นอะไรก็ได้ และสามารถมีซ้ำกันได้

(g). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวอักษรเป็นตัวเดียวกันแต่ตัวเลขเป็นอะไรก็ได้และ สามารถมีตัวเลขซ้ำกันได้

(h). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวอักษรเป็นตัวเดียวกันและตัวเลขก็เป็นตัวเดียวกัน

(i). จำนวนของแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมดที่ตัวเลขต้องเรียงต่อกันตามลำดับจากน้อยไปมากและ ตัวอักษรสามารถมีซ้ำกันได้ (เช่น กก1234, สฮ6789)

4. จงหาจำนวนคำศัพท์ภาษาอังกฤษความยาว 10 ตัวอักษรที่ในคำศัพท์มีตัวอักษรซ้ำได้ ต่อไปนี้

(a). เป็นคำศัพท์ที่ขึ้นต้นด้วย V และลงท้ายด้วย C

(b). เป็นคำศัพท์ที่ขึ้นต้นด้วย V หรือลงท้ายด้วย C

5. มี bit strings ความยาวแปดทั้งหมดกี่แบบที่สองบิตแรกเป็น 00 หรือบิตสุดท้ายเป็น 1

6. สนามกีฬามีประตูเข้าออก 6 ประตู ชายคนหนึ่งจะเลือกเข้าออกจากสนามกีฬาได้กี่วิธีถ้า

(a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(b). เข้าประตูใดจะออกประตูนั้นไม่ได้

(c). เข้าประตูใดต้องออกประตูนั้น

7. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก จากตัวเลข 0 – 9 และเป็นจำนวนคู่ จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้า

(a). ใช้เลขซ้ำกันได้

(b). ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้

8. จำนวนคี่ระหว่าง 3000 ถึง 8000 มีกี่จำนวนโดยที่แต่ละหลักมีตัวเลขต่างกัน

9. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายสินค้า 5 ชนิด ถ้าตู้โชว์หน้าร้านแสดงสินค้าได้เพียง 3 ชนิด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ ร้านค้าแห่งนี้จะแสดงสินค้าได้

10. บริษัทหนึ่งมีตำแหน่งว่างอยู่ 5 ตำแหน่งที่แตกต่างกัน เป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 3 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่ง เฉพาะหญิง 2 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้สมัครงาน 10 คน เป็นชาย 6 คน หญิง 4 คน จะมีกี่วิธีในการเลือกคนเข้า ทำงานทั้ง 5 ตำแหน่งนี้

11. ครอบครัวหนึ่งประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูกอีก 3 คน ต้องการเข้าแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีการ ยืนที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี เมื่อ

(a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(b). พ่อและแม่ยืนติดกัน

(c). พ่อและแม่แยกกัน

(d). ลูกทั้ง 3 คนยืนแยกกันหมด

12. มีหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ฟิสิกส์ 3 เล่ม และเคมี 2 เล่ม โดยที่หนังสือทุกเล่มแตกต่างกันทั้งหมด ถ้า ต้องการจักเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้น จะทำได้กี่วิธี เมื่อ

(a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(b). หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่ติดกันหมด

(c). หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่แยกกันหมด

(d). วิชาเดียวกันต้องอยู่ติดกัน

13. มีรถสีแดง 3 คัน สีฟ้า 2 คัน และสีขาว 2 คัน ซึ่งรถทุกคันแตกต่างกันทั้งหมด ถ้าต้องการจอดรถทั้งหมด เรียงเป็นแถวยาว จะมีวิธีการจอดกี่วิธี เมื่อ

    (a). รถคันที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวเป็นสีเดียวกัน

    (b). รถคันที่อยู่หัวแถวและท้ายแถวเป็นคนละสีกัน

14. ต้องการสลับอักษรในคำว่า FOOTBALL จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธีถ้า

    (a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

    (b). ต้องขึ้นต้นด้วย L

    (c). ต้องขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ

15. ต้องการสลับอักษรทั้งหมดในคำว่า MISSISSIPPI จะสลับได้กี่วิธี เมื่อ

    (a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

    (b). อักษรที่ซ้ำกันอยู่ติดกันหมด

    (c). ต้องขึ้นต้นด้วย S แต่ลงท้ายด้วย P

    (d). ต้องลงท้ายด้วยพยัญชนะ

16. มีกี่วิธีที่จะโยนลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้งโดยให้ออกเลข 1 หนึ่งครั้ง เลข 5 สามครั้งและเลข 6 สองครั้ง

17. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่จะขึ้นหน้า 1 เพียงสองครั้ง

18. จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกนักเรียน 9 คน จากนักเรียนทั้งหมด 15 คนที่ประกอบด้วยนักเรียนชายสิบคน นักเรียนหญิง 5 คน โดยกลุ่มนักเรียนที่เลือกมาต้องมีนักเรียนหญิง 3 คน

19. มีข้อสอบ 10 ข้อ ให้เลือกทำ 8 ข้อ ถ้านาย ก สอบวิชานี้ นาย ก จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

    (a). จะเลือกทำข้อใดก็ได้

    (b). ต้องทำ 3 ข้อแรก

    (c). ต้องทำอย่างน้อย 4 ข้อจาก 5 ข้อแรก

20. มีคน 10 คน มีห้อง 2 ห้อง ห้องหนึ่งเป็นห้องแอร์ ส่วนอีกห้องเป็นห้องพัดลม แต่ละห้องพักได้ 5 คน จะจัด คนทั้งสิบเข้าพักในห้องได้กี่วิธี ถ้ามี 3 คนไม่นอนห้องพัดลม และมี 1 คนไม่นอนห้องแอร์

21. ต้องการเลือกกรรมการ 6 คน จากผู้หญิง 20 คน และผู้ชาย 17 คน จะเลือกได้กี่วิธีถ้า

(a). ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

(b). ในทีมต้องมีผู้หญิง 3 คน และผู้ชาย 3 คน

(c). ในทีมกรรมการต้องเป็นผู้หญิงทั้งหมดหรือผู้ชายทั้งหมด

(d). ในทีมกรรมการต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 2 คน

22. อาจารย์มีปากกาอยู่ 30 ด้ามที่แตกต่างกันทั้งหมด ประกอบด้วย ปากกาสีแดง 10 ด้าม ปากกาสีน้ำเงิน 15 ด้าม และปากกาสีเขียว 5 ด้าม จงตอบคำถามต่อไปนี้

    (a). มีกี่วิธีในการเอาปากกาที่อาจารย์มีทั้งหมดมาจัดเรียงบนโต๊ะ

    (b). มีกี่วิธีที่อาจารย์จะหยิบปากกามา 12 ด้ามมาจัดเรียงบนโต๊ะ

    (c). มีกี่วิธีที่อาจารย์จะหยิบปากกามา 10 ด้ามเพื่อแจกให้กับนักศึกษา

    (d). มีกี่วิธีที่อาจารย์จะหยิบปากกาสีแดงมา 4 ด้ามเพื่อแจกให้กับนักศึกษา

    (e). มีกี่วิธีที่อาจารย์จะหยิบปากกาสีน้ำเงิน 3 ด้ามเพื่อแจกให้กับนักศึกษาที่ได้คะแนนสูงอันดับ หนึ่ง อันดับสองและอันดับสาม (ถ้าแต่ละอันดับมีเพียงหนึ่งคน)

23. ถ้าในสาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์มีนักศึกษา 40 คน ประกอบด้วยปีสอง 8 คน, ปีสาม 12 คนและปีสี่ 20 คนจงตอบคำถามข้อต่อไปนี้

    (a). มีกี่วิธีในการจัดให้นักศึกษาทั้งหมดยืนเข้าแถวหนึ่งแถว

    (b). มีกี่วิธีในการจัดให้นักศึกษาทั้งหมดยืนเข้าแถวหนึ่งแถวโดยให้ปีสองอยู่ทางซ้าย ปีสามอยู่ตรง กลางและปีสี่อยู่ทางขวา

    (c). มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการนักศึกษา 7 คน

    (d). มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการนักศึกษา 7 คนโดยต้องมีปีสอง 3 คน และปีสาม 4 คน

    (e). มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการนักศึกษามา 7 คนและเลือกตำแหน่งประธาน รองประธาน และ เลขาจาก 7 คนนั้น

24. จะแบ่งสุนัข 10 ตัว ออกไปขัง 3 กรง กรงละ 5 ตัว 3 ตัว และ 2 ตัวได้กี่วิธี

25. ต้องการจัดคน 5 คน เข้าพักในโรงแรมซึ่งมีห้องว่าง 2 ห้อง ห้องหนึ่งพักได้ 2 คน อีกห้องพักได้ 3 คน จะจัด ได้แตกต่างกันกี่วิธี

26. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 12 เล่ม นำไปแจกให้ ก, ข และ ค จะแจกได้กี่วิธีถ้า

    (a). ทุกคนได้หนังสือคนละเท่าๆกัน

    (b). นาย ก ได้ 2 เล่ม นาย ข ได้ 4 เล่ม และนาย ค ได้ 6 เล่ม

27. จงหาจำนวนวิธีในการแขวนเสื้อที่แตกต่างกัน 15 ตัวลงในราวแขวนผ้า 3 ราวๆ ละ 5 ตัว

28. ตู้เซฟในธนาคารแห่งหนึ่งเป็นแบบให้ลูกค้าสามารถเลือกตั้ง code ได้เอง 3 codes ที่แตกต่างกันจากตัว เลขที่ปุ่มของตู้ซึ่งมีเพียง 1,2,3,4,5,6 โดยแต่ละ code ต้องยาว 4 digits และแต่ละ digit ไม่สามารถมีเลข ซ้ำกันได้ แล้วกลุ่มของ code 3 codes ที่ลูกค้าเลือกตั้งเองสามารถมีได้ทั้งหมดกี่แบบ (กี่กลุ่ม)

29. ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีแดง 12 ข้าง และสีเขียว 12 ข้าง ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้าออกมามืดๆ เพื่อให้ได้สีเดียวกัน แล้ว ต้องหยิบถุงเท้าออกมาอย่างน้อยกี่ข้างถึงจะมั่นใจได้ว่าได้ 2 ข้างที่สีเดียวกันแน่ๆ

30. ถ้าต้องการเพิ่มยอดขายในงาน Com Mart โดยให้ลูกค้าที่มียอดซื้อสูงได้สิทธิ์จับฉลาก เลือก computer notebook หนึ่งเครื่อง จากยี่ห้อ Acer, Compaq, IBW และ Fujitsu ร้านค้าร้านนี้จะต้องมีลูกค้าที่มียอดซื้อสูงอย่างน้อยกี่คนถึงจะมั่นใจได้ว่ามี computer notebook จากยี่ห้อเดียวกันอย่างน้อยห้า เครื่องถูกแจกออกไป

31. โรงงานผลิต Hard disk จะมี serial number เพื่อติดลงบน Hard disk แต่ละตัวที่ผลิต ถ้า serial number ถูกตั้งให้มีรูปแบบเช่น C117, E076, หรือ Z920 (หนึ่งตัวอักษรตามด้วยเลขสามตัวที่มีซ้ำกันได้) จงแสดง ให้เห็นว่าถ้าโรงงานผลิต Hard disk ออกมา 60,000 ชิ้น จะต้องมีอย่างน้อยสามชิ้นที่มี serial number เหมือนกัน

32. จากข้อก่อนหน้า ถ้าไม่ต้องการให้ Hard disk แต่ละตัวที่ผลิตมี serial number ซ้ำกันเลย โรงงานจะผลิต Hard disk ได้อย่างมากกี่

บทที่ 8

Graph and Tree

8.1 Graphs and Graph Models

กราฟแบบไม่มีทิศทาง (Undirected Graphs)

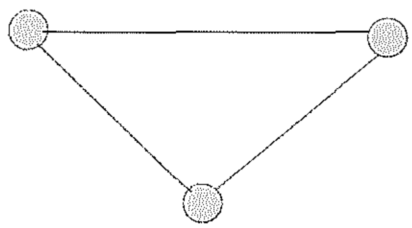
- A *simple* graph (V,E) consists of vertices, V, and edges, E, connecting distinct elements of V.

  - no arrows

  - no loops

  - can't have multiple edges joining vertices

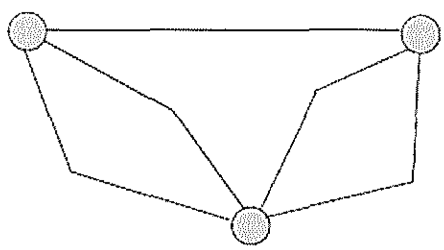
Example:



- A *multigraph* allows multiple edges for two vertices

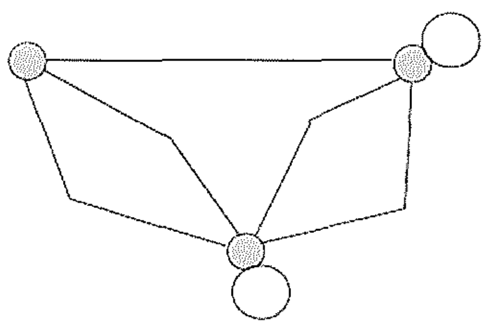
  - redundancy in networks

Example:



- A *pseudograph* is a multigraph which permits loops.

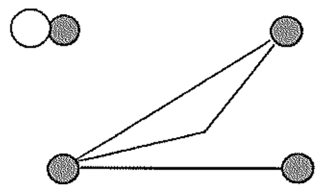
Example:



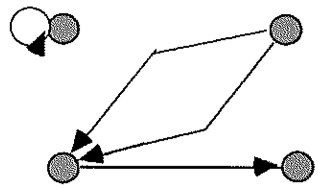
กราฟแบบมีทิศทาง (Directed Graphs)

- Directed graph (V, E) - single directed edges between vertices
- Directed multigraph - multiple directed edges between vertices

Example:



A pseudograph



A directed multigraph

8.2 Graph Terminology and Special Types of Graphs

Undirected Graph

Definition: Two vertices *u*, *v* in *V* are *adjacent* or *neighbors* if there is an edge e between *u* and *v*.

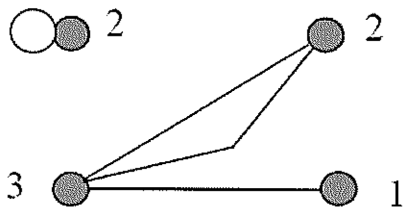
The edge e *connects* *u* and *v*.

The vertices *u* and *v* are endpoints of e.

Definition: The *degree* of a vertex *v*, denoted deg(*v*), is the number of edges for which it is an endpoint.

A loop contributes twice in an undirected graph.

Example:



- If deg(v) = 0, v is called *isolated.*
- If deg(v) = 1, v is called *pendant.*

The Handshaking Theorem:

Let $G = (V, E)$. Then

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Each edge represents contributes twice to the degree count of all vertices.

Example:

If a graph has 5 vertices, can each vertex have degree 3? 4?

- The sum is 3•5 = 15 which is an odd number. Not possible.
- The sum is 20 = 2 | E | and 20/2 = 10. May be possible.

Theorem: A graph has an even number of vertices of odd degree.

Proof:

Let V1 = vertices of odd degree

V2= vertices of even degree

The sum must be even. But

- odd times odd = odd
- odd times even = even
- even times even = even
- even plus odd = odd

It doesn't matter whether V2 has odd or even cardinality.

V1 cannot have odd cardinality.

Example:

It is not possible to have a graph with 3 vertices each of which has degree 1.

Directed Graph

Definition: Let *<u, v>* be an edge in *G*. Then *u* is an *initial vertex* and is *adjacent to v* and *v* is a *terminal vertex* and is *adjacent from u.*

Definition: The *in degree* of a vertex *v*, denoted deg-(*v*) is the number of edges which terminate at *v*. Similarly, the *out degree* of *v*, denoted deg+(*v*), is the number of edges which initiate at *v*.

Theorem:

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

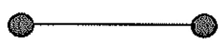
Special Simple Graphs

- Complete graphs - Kn: the simple graph with
  - n vertices
  - exactly one edge between every pair of distinct vertices.

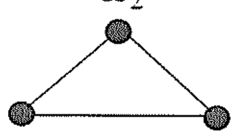
Maximum redundancy in local area networks and processor connection in parallel machines.

Example:

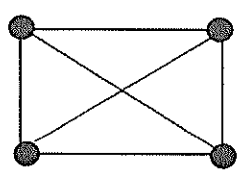
K_1



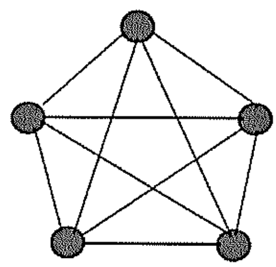
K_2



K_3



K_4

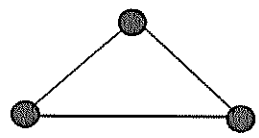


K_5

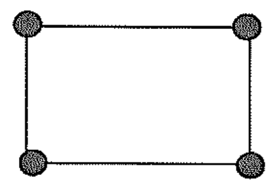
Note: K5 is important because it is the simplest nonplanar graph: It cannot be drawn in a plane with nonintersecting edges.

- Cycles:

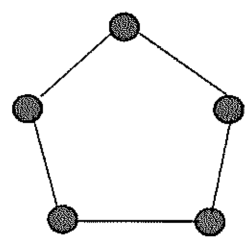
Cn is an n vertex graph which is a cycle. Local area networks are sometimes configured this way called *Ring* networks.



C_3



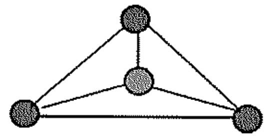
C_4



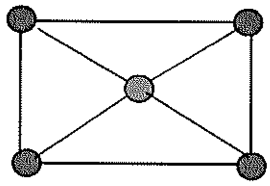
C_5

- Wheels:

Add one additional vertex to the cycle Cn and add an edge from each vertex to the new vertex to produce Wn. Provides redundancy in local area networks.



W_3



W_4

Bipartite Graphs

Definition: A simple graph *G* is *bipartite* if *V* can be partitioned into two disjoint subsets *V1* and *V2* such that every edge connects a vertex in *V1* and a vertex in *V2.*
Note: There are no edges which connect vertices in *V1* or in *V2.*

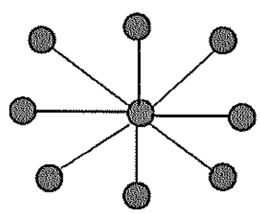
A bipartite graph is *complete* if there is an edge from every vertex in *V1* to every vertex in *V2*, denoted *Km,n* where *m* = | *V1* | and *n* = | *V2* |.

Examples:

• Suppose bigamy is permitted but not same sex marriages and males are in V1 and females in V2 and an edge represents a marriage. If every male is married to every female then the graph is complete.

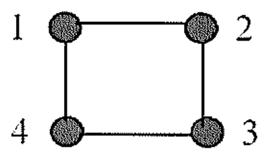
• Supplier, warehouse transportation models are bipartite and an edge indicates that a given supplier sends inventory to a given warehouse.

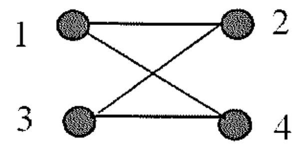
• A Star network is a *K1,n* bipartite graph.



$K_{1,8}$

• Ck for k even is a bipartite graph: even numbered vertices in *V1*, odd numbered in *V2.*

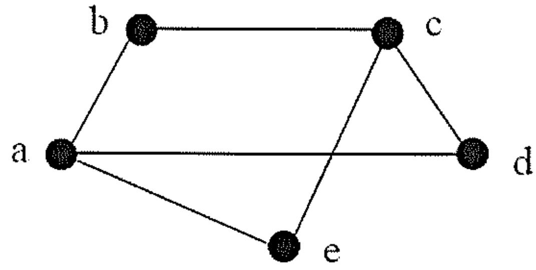




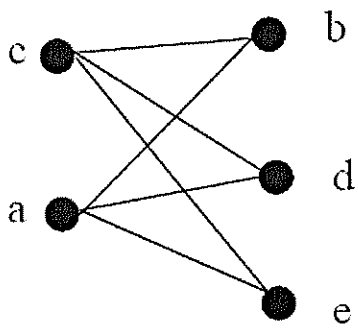
• Is the following graph bipartite?

If *a* is in *V1* then *e*, *c* and *b* must be in *V1* (why?).

Then *c* is in *V1* and there is no inconsistency.



We rearrange the graph as follows:



8.3 Representing Graphs and Graph Isomorphism

We wish to be able to determine when two graphs are identical except perhaps for the labeling of the vertices.

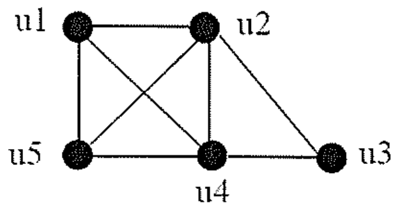
We derive some alternate representations which are extensions of connection matrices we have seen before.

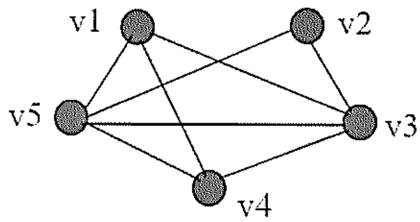
Adjacency Matrices

Aij = 1 if there is an edge from vertex i to vertex j

= 0 else

In pseudographs, *Aij* = number of edges from vertex i to vertex j.





$$G1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

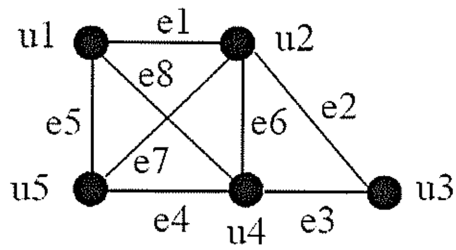
Incidence Matrices

Aij = 1 if edge j is incident with vertex i

= 0 else

Note: this method requires labeling of edges. Only 2 1's per column.

Examples:



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8.4 More on Graph and Exercises

- **Walks, Paths and Circuits**

Let G be a graph and v and w be the vertices in G

A walk from v to w is a finite alternating sequence of adjacent vertices and edges of G. A walk has the form

$$v_0\, e_1\, v_1\, e_2 \ldots v_{n-1}\, e_n\, v_n$$

where $v_0 = v$, $v_n = w$ and v_{i-1} and v_i are the end points of e

A path – a walk which no repeated edge (all e_i are distinct).

A simple path – a path which no repeated vertex (therefore, all e_i are distinct and all v_j are also distinct)

A closed walk – a walk that starts and ends at the same vertex.

A circuit – a closed walk which no repeated edge (all e_i are distinct).

A simple circuit – a circuit which no repeated vertex except the first and last. (all e_i are distinct and all v_j are distinct except that $v_0 = v_n$)

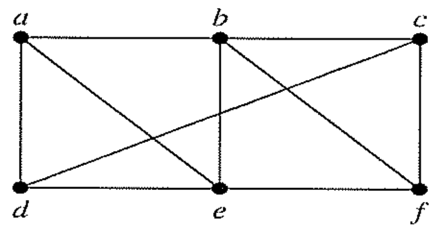
Summarized Table

	Repeated Edge?	**Repeated Vertex?**	**Start and End at Same Vertex?**
Walk	allowed	allowed	allowed
Path	no	allowed	allowed
Simple path	no	no	no
Closed walk	allowed	allowed	yes
Circuit	no	allowed	yes
Simple circuit	no	First and last only	yes

Note: Circuit is a path which is closed.

Simple circuit is a simple path which is closed.

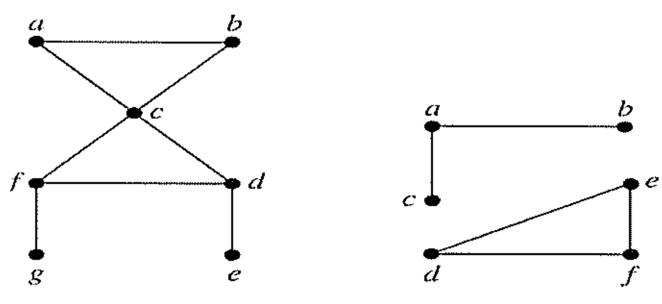
Example: Consider the following graph



- *a, d, c, f, e* is a path of length 4 and it's also a simple path because {*a, d*}, {*d, c*}, { *c, f* }, and { *f, e*} are all distinct edges.
- *b, c, f, e, b* is a path of length 4, not a simple path. But it is a circuit (first and last vertex are the same).
- *a, b, e, d, a, b* is just a walk of length 5, not a path (edge {a, b} is repeated), not a simple path. Therefore, it cannot a circuit and a simple circuit.

- **Connected**

The graph *G* is connected if, and only if, given any two vertices *v* and *w* in *G*, there is a path from *v* to *w* (there is a path between every pair if distinct vertices).

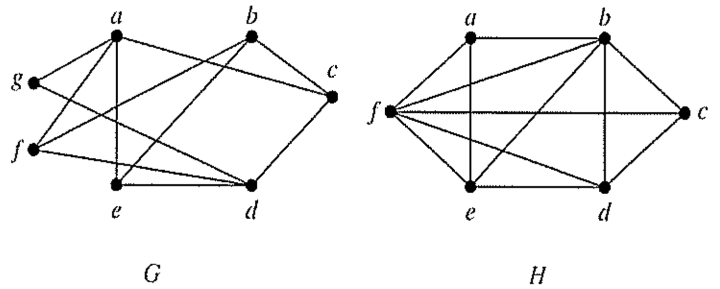


G_1 $\qquad$ G_2

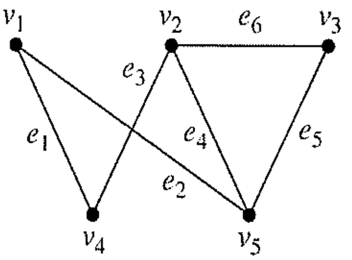
G_1 is connected but G_2 is not.

More Exercises

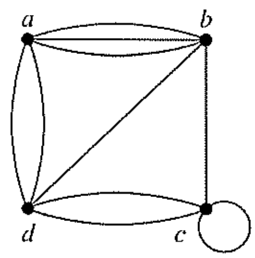
Ex. 1 กราฟ G และ H เป็นกราฟแบบสองกลุ่ม (bipartite graphs) หรือไม่



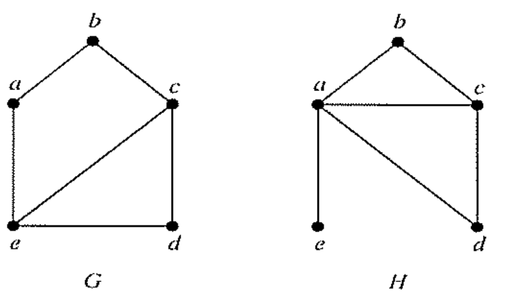
Ex. 2 จงเขียนเมททริกซ์ประชิด (adjacency matrix) และเมททริกซ์ตกกระทบ (incidence matrix) ของกราฟที่ให้มา



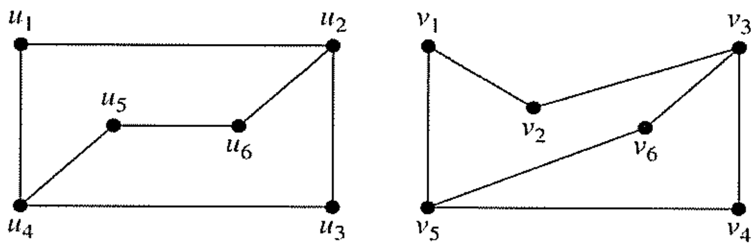
Ex. 3 จงเขียนเมททริกซ์ประชิด (adjacency matrix) ของกราฟที่ให้มา



Ex. 4 กราฟ G และ H ที่ให้มาเป็นกราฟที่ถอดแบบกัน (isomorphism) หรือไม่



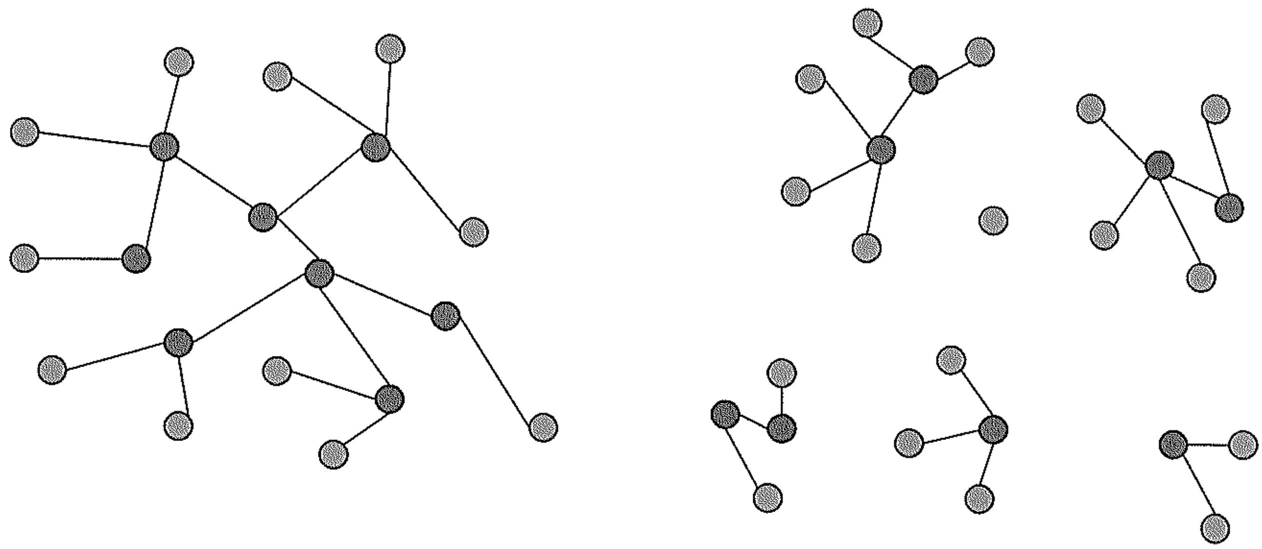
Ex. 5 กราฟ G และ H ที่ให้มาเป็นกราฟที่ถอดแบบกัน (isomorphism) หรือไม่



G *H*

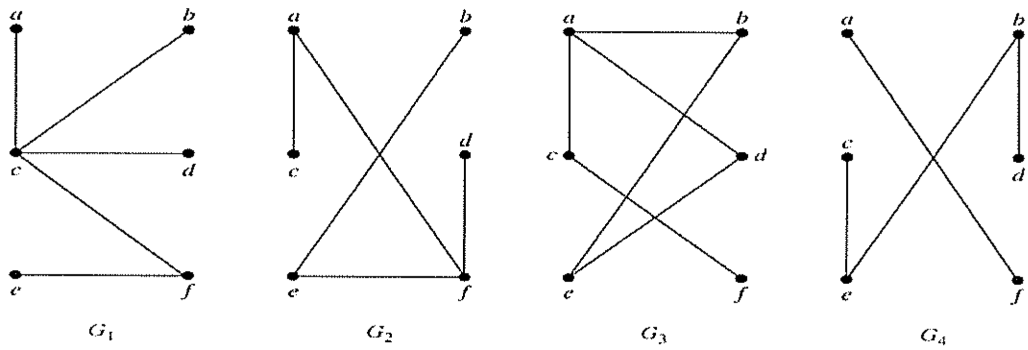
9.5 Tree

- A *tree* is a connected undirected graph that contains no simple circuits.
  - There is a unique simple path between any two of its nodes (vertices).
- A (not-necessarily-connected) undirected graph without simple circuits is called a *forest*.



Tree Forest

Ex 1. Which graphs in G_1, G_2, G_3, and G_4 are trees and are not trees.

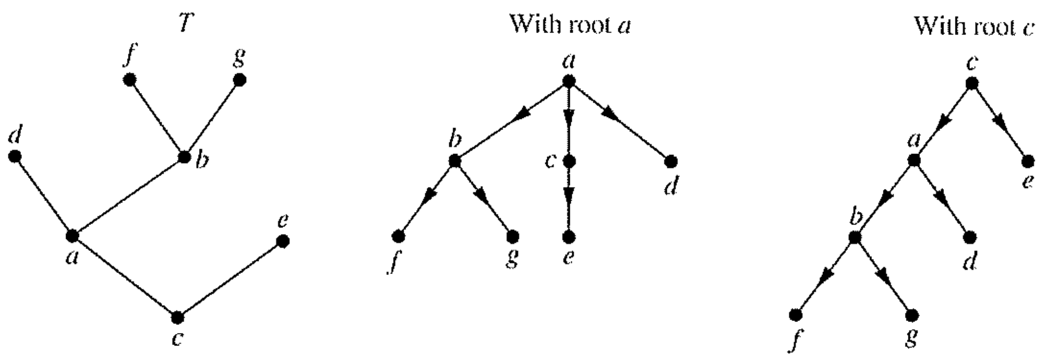


Ans. G_3 and G_4 are not trees.

Terms about trees:

- A *leaf* node in a tree or forest is any pendant or isolated vertex. An *internal* node is any non-leaf node.
- A *rooted tree* is a tree in which one node has been designated the *root.*
  - Every edge is directed away from the root.

Ex 2. Rooted trees



Ex 3. All leaves node of tree T are *d, e, f, k, i ,l ,m*

All internal nodes are *c, b, a, g, h, i*

แบบฝึกหัด ชุดที่ 4

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม: Counting, Graphs and Trees

Counting

1. บริษัทมี PC ยี่ห้อ IBW อยู่ 6 เครื่อง ยี่ห้อ Dell 10 เครื่อง และยี่ห้อ HP 12 เครื่อง จงหา
   - (a). ถ้าต้องการเอาเครื่องทั้งหมดไปจัดวางใน office ให้เป็นแถว 1 แถวสามารถทำได้กี่วิธี *(Ans. 28!)*
   - (b). ถ้าต้องการเอาเครื่อง 8 เครื่องมาแจกให้กับพนักงาน สามารถทำได้กี่วิธี *(Ans. C(28, 8))*
   - (c). มีกี่วิธีถ้าเครื่อง 8 เครื่องที่เอามาแจกเป็น Dell ทั้งหมดหรือ HP ทั้งหมด *(Ans. C(10, 8)+C(12, 8))*
   - (d). ถ้าจะเอาเครื่องยี่ห้อ IBW แจกให้กับผู้จัดการ 3 คนคือ Jack, Joe และ Jan สามารถทำได้กี่วิธี *(Ans. P(6, 3) ซึ่งคำตอบจะเท่ากับการคิดอีกแบบคือ C(6, 3)X P(3,3))*
   - (e). ในการแจกเครื่องทั้งหมดให้กับพนักงาน ต้องแจกไปอย่างน้อยกี่เครื่องถึงจะมั่นใจได้ว่าเครื่องที่แจกไปมียี่ห้อ Dell อย่างน้อยหนึ่งเครื่อง

Note: เวลาตอบในการสอบให้หาคำตอบในรูปของการแทนค่าสูตรหรือทำเป็นรูปแบบอย่างง่ายมาด้วยถ้าตัวเลขไม่ซับซ้อนมาก (อย่างน้อยต้องตอบในรูปของการแทนค่าสูตร) เช่น ของข้อ (b)

$$C(28,8) = \frac{28!}{20!8!}$$

ของข้อ (c) ควรตอบเป็น

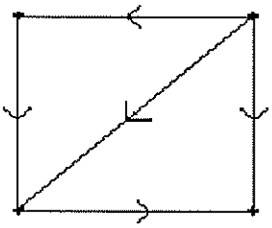
$$C(10,8) + C(12,8) = \frac{10!}{2!8!} + \frac{12!}{4!8!} = \frac{10 \times 9}{2} + \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 5 + (11 \times 9 \times 5)$$

Graphs

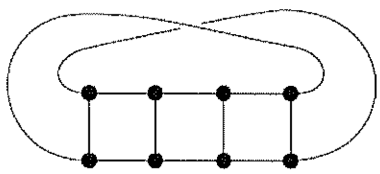
1. จงเขียนเมทริกซ์ประชิด (adjacency matrix) ของกราฟ C_6
2. จงเขียนเมทริกซ์ตกกระทบ (adjacency matrix) ของกราฟ W_7
3. กราฟ K_6 มีจำนวนจุดยอด (vertices) และจำนวนด้าน (edges) เป็นเท่าไร

4. ถ้าจะวาดกราฟอย่างง่าย (simple graph) ซึ่งมีจุดยอด (vertices) 7 จุด โดยมีจำนวน degree ของแต่ละจุดเป็น 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5 สามารถวาดได้อะไรหรือไม่ เพราะอะไร

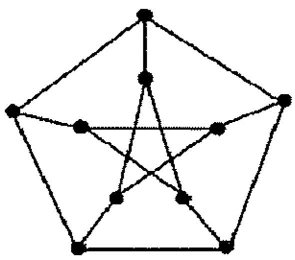
5. จงหาดีกรีภายใน (in degree) และดีกรีภายนอก (out degree) ของแต่ละจุดยอด (vertex) ของกราฟแบบมีทิศทาง (digraph) ที่ให้มาด้านล่าง แล้วตรวจสอบว่าผลบวกของ in degree ทั้งหมด และผลบวกของ out degree ทั้งหมดที่ได้เท่ากันหรือไม่



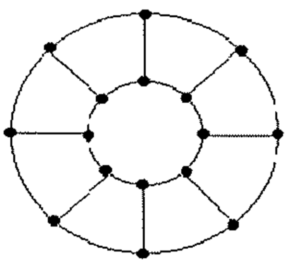
6. กราฟที่ให้มาต่อไปนี้เป็นกราฟที่แบ่งได้เป็น 2 ส่วน (Bipartite Graph) หรือไม่



(a)

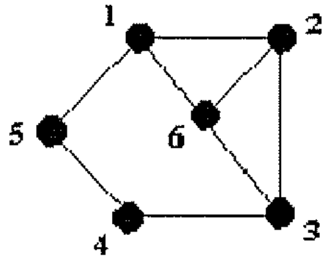


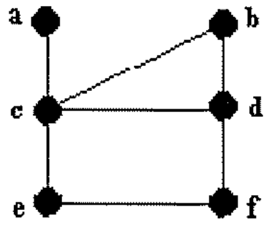
(b)



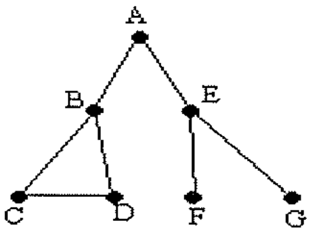
(c)

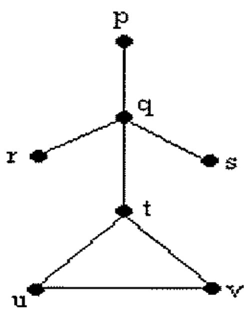
7. Graph ที่ให้มาเป็นกราฟถอดแบบกัน (Isomorphism) หรือไม่



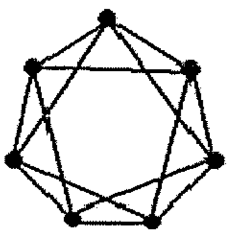
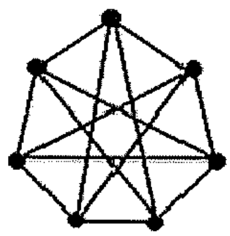


8. Graph ที่ให้มาเป็นกราฟถอดแบบกัน (Isomorphism) หรือไม่

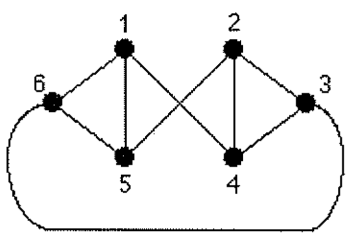


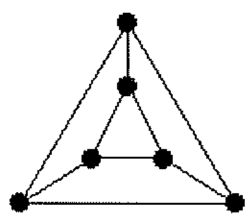


9. Graph ที่ให้มาเป็นกราฟถอดแบบกัน (Isomorphism) หรือไม่

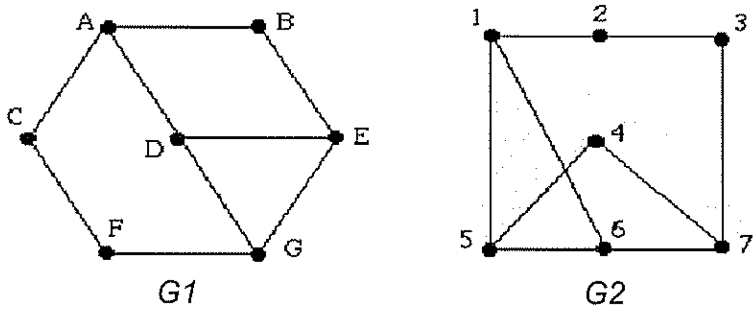



10. Graph ที่ให้มาเป็นกราฟถอดแบบกัน (Isomorphism) หรือไม่





Note: ตัวอย่างแนวการเขียนตอบว่ากราฟสองกราฟเป็นกราฟถอดแบบ (isomorphism) กันหรือไม่ จากตัวอย่างใน Quiz#4 ข้อ 3 กราฟสองกราฟที่ให้มาเป็นกราฟที่ถอดแบบกัน (isomorphism) หรือไม่



(1). ตรวจสอบในเบื้องต้น:

- จำนวน vertices ของกราฟ G1 และ G2 เท่ากัน คือ 7 จุด
- จำนวน edges ของกราฟ G1 และ G2 เท่ากัน คือ 9 ด้าน
- Degree ของแต่ละ vertex ของ G1 คือ 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2 (ควรเขียนเรียงจากมากไปน้อย) และ Degree ของแต่ละ vertex ของ G2 คือ 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2 ซึ่งเหมือนกัน

(2). หาฟังก์ชันของการ map:

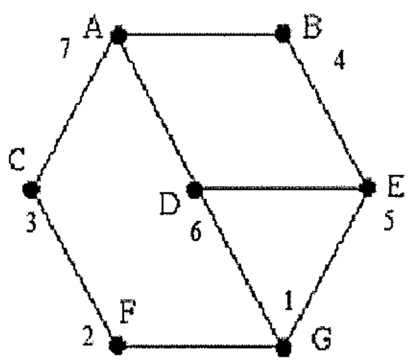
เมื่อตรวจสอบเบื้องต้นแล้วทุกอย่างเหมือนกัน ต้องหาฟังก์ชันของการ map ต่อ (ขั้นตอนนี้ไม่ต้องแสดงวิธีการหาก็ได้ อาจารย์ต้องการแค่ผลจากการ map ที่เขียนให้เห็นออกมาชัดเจน)

จากกราฟ G1 และ G2 ฟังก์ชันของการ map ที่ได้ คือ

A-7, B-4, C-3, D-6, E-5, F-2, G-1

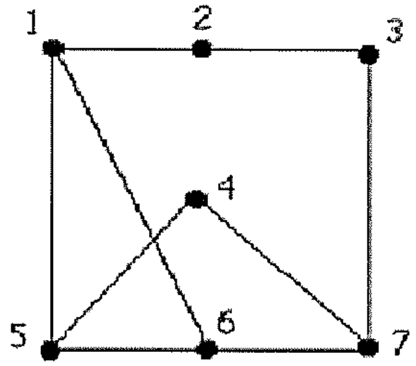
(3). ตรวจสอบว่าฟังก์ชันของการ map ถูกต้องหรือไม่ :

จากฟังก์ชันการ map ถ้าตรวจสอบด้วยการ map จากกราฟ G1 ไปหา G2 (ดังกราฟ G1*)



G1*

	1-G	2-F	3-C	4-B	5-E	6-D	7-A
1-G	0	1	0	0	1	1	0
2-F	1	0	1	0	0	0	0
3-C	0	1	0	0	0	0	1
4-B	0	0	0	0	1	0	1
5-E	1	0	0	1	0	1	0
6-D	1	0	0	0	1	0	1
7-A	0	0	1	1	0	1	0



G2

Adjacency matrix ของ G1*

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	0	1	1	0
2	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	1	0	1
5	1	0	0	1	0	1	0
6	1	0	0	0	1	0	1
7	0	0	1	1	0	1	0

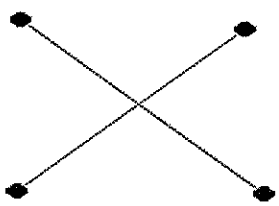
Adjacency matrix ของ G2

จะเห็นว่า Adjacency matrix ที่ได้จากการ map กราฟ G1 ไปหา G2 (ผลที่ได้คือกราฟ G1*) นั้นเหมือนกันกับ Adjacency matrix ของกราฟ G2 ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า กราฟ G1 และ G2 เป็นกราฟที่ isomorphism กัน

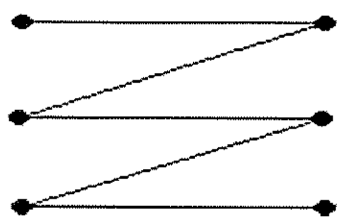
*** ในการ map นั้นจะ map จากกราฟ G2 ไปหา G1 ก็ได้เช่นเดียวแต่ adjacency matrix ของกราฟที่ได้จากการ map (สมมุติคือกราฟ G2*) ต้องเปรียบเทียบกับ adjacency matrix ของกราฟ G1 ***

Trees

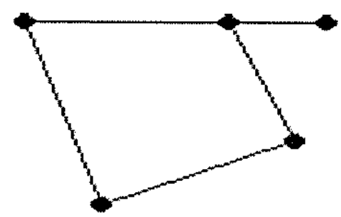
1. graph ที่ให้มาข้อใดเป็น tree



(a)

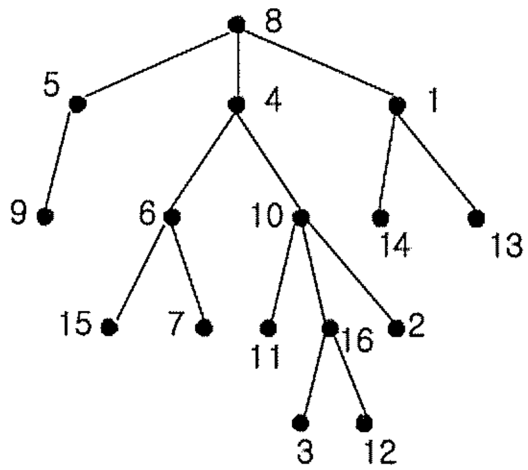


(b)



(c)

2. จาก Tree ที่ให้มาจงหา



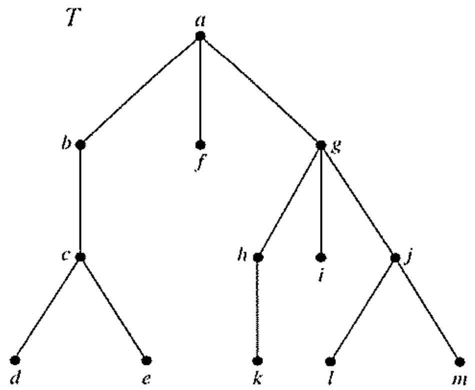
(a). โหนดภายใน (internal vertices) ทั้งหมดของ tree นี้

(b). โหนดใบ (leaves vertices) ทั้งหมดของ tree นี้

(c). ระดับ (level) ของโหนด 2 เป็นเท่าไร

(d). ความสูง (height) ของ tree นี้เป็นเท่าไหร

(e). Tree นี้เป็น tree แบบสามภาค (3-ary tree) หรือไม่

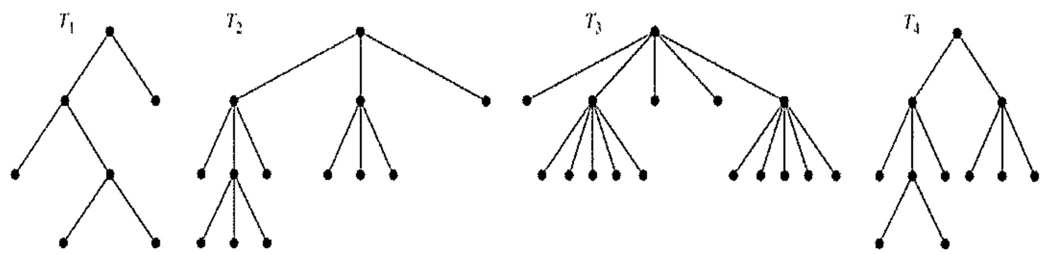


n-ary trees

- A rooted tree is called n-ary if every vertex has no more than n children.
  - It is called *full* if every internal (non-leaf) vertex has *exactly* n children.
- A 2-ary tree is called a *binary tree*.
  - These are handy for describing sequences of yes-no decisions.

    Example: Comparisons in binary search algorithm.

Ex 4. n-ary trees



Some Tree Definitions and Theorems

- Any tree with n nodes (vertices) has $e = n-1$ edges.
  - **Proof:** Consider removing leaves.
- A full m-ary tree with i internal nodes has $n=mi+1$ nodes, and $\ell=(m-1)i+1$ leaves.
  - **Proof:** There are mi children of internal nodes, plus the root. And, $\ell = n-i$ $= (m-1)i+1$. □

- Thus, when m is known and the tree is full, we can compute all four of the values e, i, n, and ℓ, given any one of them.

- The *level* of a node is the length of the simple path from the root to the node.
  - The *height* of a tree is maximum node level.
  - A rooted m-ary tree with height h is called *balanced* if all leaves are at levels h or h-1.
- There are at most mh leaves in an m-ary tree of height h.
- An m-ary tree with ℓ leaves has height $h \geq \lceil \log m\ell \rceil$. If m is full and balanced then $h = \lceil \log m\ell \rceil$.

Ex 5. Consider a tree below.

What is the level of node m?

What is the level of node h?

What is the *height* of a tree below?

Is it a *3-ary tree*? Is it a *full 3-ary tree*?

List all its leaves nodes. List all its internal nodes.