



รายงานการวิจัย

การวิเคราะห์และออกแบบหม้อแปลงจำหน่าย
เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก
(Analysis and Design of Distribution Transformer
to Reduce Core Loss)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว



รายงานการวิจัย

การวิเคราะห์และออกแบบหม้อแปลงจำหน่าย
เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก
(Analysis and Design of Distribution Transformer
to Reduce Core Loss)

คณะผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผู้ร่วมวิจัย

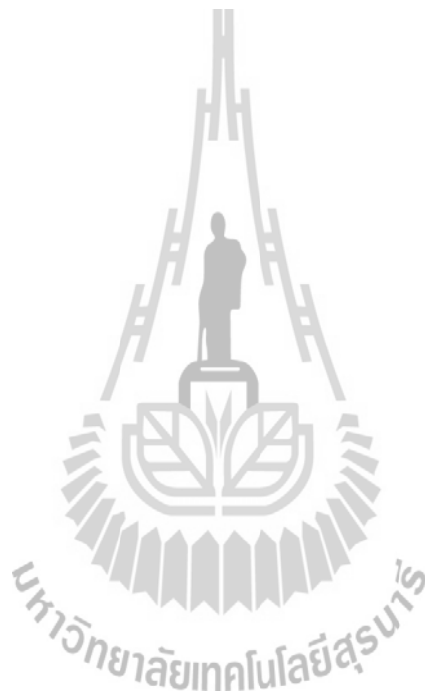
นายอริยศักดิ์ จิตธรรมสาร

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ พ.ศ. 2556

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีที่ได้สนับสนุนทุนวิจัยสำหรับโครงการนี้ โดยการวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2556



บทคัดย่อ

หม้อแปลงจำหน่ายเป็นอุปกรณ์ที่มีความจำเป็นในระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการใช้งาน สิ่งหนึ่งที่จะบอกถึงประสิทธิภาพของหม้อแปลงได้คือกำลังงานสูญเสีย ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงศึกษาและคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พร้อมทั้งออกแบบแกนเหล็กเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก โดยที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากขดลวดตัวนำไฟฟ้าแรงสูงของหม้อแปลงจำหน่ายที่แสดงอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยอาศัยการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กที่ซับซ้อนประกอบกับความรู้ในการแปลงโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM) เป็นเครื่องมือในการประมวลผลที่มีผลลัพธ์แสดงอยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตลอดทั้งภายในของหม้อแปลงจำหน่าย การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้ FEM ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB



ABSTRACT

Distribution transformer is an important device in electrical power system by acting to increase or decrease the voltage for suiting the application. One factor to relate the efficiency of the transformer is a loss. Therefore, this research is to study and calculate core loss of transformer. And design core to reduce core loss that cause by magnetic field. The mathematical model of magnetic fields caused by high voltage conductors of distribution transformer by using a set of second-order partial differential equations. The modification for complex magnetic field analysis and time-harmonic simulation are also utilized. Computer-based simulation utilizing the three-dimensional finite element method (3-D FEM) is exploited as a tool for visualizing magnetic fields distribution volume a distribution transformer. The computer simulation based on the use of the FEM has been developed in MATLAB programming environment.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ.....	ก
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ค
สารบัญ.....	ง
สารบัญรูป.....	ฉ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ข้อยกเว้นเบื้องต้น.....	2
1.4 ขอบเขตของการวิจัย.....	2
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย.....	2
1.6 การจัดรูปเล่มรายงานการวิจัย.....	3
บทที่ 2 การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	4
2.1 บทนำ.....	4
2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย.....	4
2.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	7
2.3.1 การออกแบบเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา.....	7
2.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์.....	13
2.3.3 การสร้างสมการเอลิเมนต์.....	15
2.3.4 การประกอบสมการเอลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ.....	28
2.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย.....	28
2.3.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ.....	28
2.4 การคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย.....	29
2.5 สรุป.....	30

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	31
3.1 บทนำ.....	31
3.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก.....	31
3.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด.....	31
3.2.2 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก.....	36
3.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ของหม้อแปลงจำหน่าย.....	40
3.4 สรุป.....	44
บทที่ 4 การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	45
4.1 บทนำ.....	45
4.2 การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย.....	45
4.3 ผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ถูกออกแบบ.....	51
4.4 สรุป.....	55
บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ.....	56
5.1 สรุป.....	56
5.2 ข้อเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต.....	57
บรรณานุกรม.....	58
ประวัติผู้วิจัย.....	61

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA.....	11
2.2 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ในแกนเหล็กในแบบ 2 มิติ.....	12
2.3 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ในแกนเหล็กในแบบ 3 มิติ.....	12
3.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชิ้นงาน.....	33
3.2 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย.....	33
3.3 แกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ.....	34
3.4 ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย.....	35
3.5 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย.....	36
3.6 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ.....	37
3.7 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	38
3.8 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่าย ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 2 มิติ.....	41
3.9 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่าย ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ.....	42
3.10 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง จำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ.....	42
3.11 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก (T) ของหม้อแปลงจำหน่าย ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ.....	43
3.12 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็ก (W) ของหม้อแปลงจำหน่าย ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ.....	43
4.1 ตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่างๆ ที่ใช้ในการออกแบบแกนเหล็ก.....	46
4.2 พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่ใช้พิจารณา.....	47
4.3 แผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็ก.....	50
4.4 ขนาดของแกนเหล็กหม้อแปลงที่ได้จากการออกแบบ (cm).....	51

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.5 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	52
4.6 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของ หม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	53
4.7 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของ หม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	53
4.8 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	54
4.9 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสีย (W) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	54



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย

หม้อแปลงไฟฟ้าเป็นอุปกรณ์ที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างระบบไฟฟ้าที่มีแรงดันไฟฟ้าต่างกัน โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการส่ง การจ่าย และการใช้พลังงานไฟฟ้า ดังนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจึงนับเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในบรรดาอุปกรณ์ไฟฟ้าทั้งหลาย การขัดข้องหรือการชำรุดเสียหายของหม้อแปลงไฟฟ้ามักมีผลกระทบต่อการใช้ไฟฟ้าเป็นเวลานาน ฉะนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจะต้องมีประสิทธิภาพที่ดี เพื่อให้ระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าเป็นระบบที่มีความเสถียร (stable) และมีความน่าเชื่อถือ (reliability) สิ่งหนึ่งที่จะบอกถึงประสิทธิภาพของหม้อแปลงได้คือกำลังงานสูญเสีย

การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในหม้อแปลงไฟฟ้า โดยปกติจะสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการอนุพันธ์หรือสมการอินทิกรัล เป็นไปได้ยากที่จะหาผลเฉลยแน่นอนตรง (exact solution) ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข อีกทั้งสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น จึงทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขสามารถทำได้อย่างรวดเร็วขึ้นมาก สำหรับวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) วิธีที่มีประสิทธิภาพสูงสุดและได้รับความนิยมแพร่หลายในปัจจุบันได้แก่วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (finite element method : FEM) โดยเฉพาะงานวิจัยนี้ซึ่งต้องอาศัยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติมาช่วยดำเนินการ

ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (FEM) เริ่มวิวัฒนาการมาตั้งแต่ต้นปี ค.ศ. 1950 ปัจจุบันเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมมาก เนื่องจากปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ ทำให้สามารถคำนวณงานต่าง ๆ ด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ในปัจจุบันได้มีการนำวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมแทบทุกสาขา ซึ่งระเบียบวิธีนี้จะจัดแบ่งพื้นที่ของปัญหาเป็นชิ้นส่วนย่อยที่ประกอบขึ้นจากโนด โดยเชื่อมต่อกันด้วยกริด สำหรับปัญหา 2 มิตินิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ (linear triangle) และสำหรับปัญหา 3 มิตินิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ (linear tetrahedral) เพื่อประมาณ โดเมนของปัญหาได้ ซึ่งข้อดีของระเบียบวิธีนี้คือสามารถหาผลเฉลยของระบบที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ นอกจากนี้ยังง่ายต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่อาจมีหลายลักษณะผสมกันอยู่ในระบบ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องนำ FEM มาใช้ในการดำเนินการ โดยงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อ

ลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติด้วยการพัฒนาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติขึ้นเอง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1) พัฒนาโปรแกรม FEM ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) พัฒนาโปรแกรม FEM 3 มิติ สำหรับคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก
- 3) ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่เกิดขึ้น

1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

- 1) ขดลวดตัวนำเป็นชิ้นงานเดียวกัน ไม่มีรอยต่อระหว่างชั้นของขดลวด
- 2) กำหนดให้ขดลวดตัวนำทั้งปฐมภูมิและทุติยภูมิแต่ละเฟรมมีค่ากระแสคงที่สม่ำเสมอ

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

- 1) พัฒนาโปรแกรม FEM สำหรับวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กเป็นทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ
- 3) ออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

- 1) ได้หลักการและแนวความคิดสำหรับการศึกษาค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) ได้โปรแกรมจำลองผลที่เกิดจากการพัฒนาโปรแกรม FEM ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้เข้ากับปัญหาจริงในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ตลอดจนสามารถนำไปใช้ประกอบประกอบการเรียนการสอนด้านสนามแม่เหล็ก

1.6 การจัดรูปเล่มรายงานการวิจัย

รายงานการวิจัยนี้ประกอบด้วย 5 บท ดังนี้

บทที่ 1 เป็นบทนำ กล่าวถึงความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์และเป้าหมายของงานวิจัย รวมทั้งขอบเขตของงานส่วนบทอื่น ๆ ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 2 มีเนื้อหาว่าด้วย การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิเลเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้อธิบายขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์อิเลเมนต์ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

บทที่ 3 อธิบายถึง โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย พร้อมผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิเลเมนต์แบบ 3 มิติ โดยกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่ประยุกต์ใช้ในการจำลองผลและ โครงสร้างของ โปรแกรมจำลองผล

บทที่ 4 กล่าวถึงการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พร้อมทั้งแสดงผลลัพธ์ของการคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายจากการออกแบบ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลทางกายภาพของหม้อแปลงจำหน่ายที่ออกแบบขึ้นว่าส่งผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอย่างไร

บทที่ 5 เป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method : FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) ดังเช่น สมการสนามแม่เหล็ก และสมการอุณหภูมि เป็นต้น และเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อน หรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ดี อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถรองรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ นอกจากนี้ยังสามารถจำลองผลระบบที่มีความแตกต่างกันทางด้านวัสดุได้ ซึ่งในงานวิจัยนี้คือ แกนเหล็ก ขดลวด และน้ำมันหม้อแปลง ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย และขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พร้อมทั้งประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวในหม้อแปลงจำหน่ายต่อไป

2.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

เมื่อมีกระแสไหลในขดลวดตัวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น และเมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวดที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็ก (B) จะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลางสามารถแสดงได้โดย

$$B = \mu H \tag{2.1}$$

เมื่อ μ คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ $\mu_0\mu_r$
 โดยที่ μ_0 คือ ความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
 μ_r คือ ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นกับวัสดุตัวกลาง
 H คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity)

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก B สามารถดำเนินการได้โดยเล็งไปคำนวณหาศักย์เชิง
 เวกเตอร์แม่เหล็ก A ก่อน เนื่องจากคำนวณได้ง่ายกว่า โดยที่สนามแม่เหล็ก B สามารถคำนวณได้
 ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A เท่านั้น

$$B = \nabla \times A \quad (2.2)$$

จากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) ที่กล่าวว่าสนามแม่เหล็กแปรผันตามเวลาจะเหนี่ยวนำ
 ให้เกิดสนามไฟฟ้า E ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.3)$$

แทนสมการที่ (2.2) ลงในสมการที่ (2.3) จะได้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A \quad (2.4)$$

และจากกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลา เมื่อสมมติให้ความ
 หนาแน่นของกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากแหล่งจ่ายมี
 ความถี่ต่ำ แสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times H = J_0 + J_e \quad (2.5)$$

เมื่อ J_0 คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ J_e คือ
 ความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) โดยที่

$$J_e = \sigma E \quad (2.6)$$

เมื่อ σ คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.4) จึงได้

$$J_e = -\sigma \frac{\partial}{\partial t} A \quad (2.7)$$

นำสมการที่ (2.1), (2.2) และ (2.7) แทนลงในสมการที่ (2.5) จะได้

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} A = J_0 \quad (2.8)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ A พบว่า $\nabla \cdot A = 0$ ประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ของเวกเตอร์คือ $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ ทำให้สามารถเขียนสมการของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กดังสมการที่ (2.9)

$$\nabla^2 A - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} A = -\mu J_0 \quad (2.9)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 2 มิติ ตามระนาบ xy ซึ่งแปรผันตามเวลา จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (2.10) โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation :PDE) อันดับสอง และเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 3 มิติ ตามระนาบ xyz ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (2.11) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (2.11)$$

ในกรณีปัญหาที่พิจารณาเป็นระบบที่แปลงจากโดเมนเวลาเป็น โดเมนความถี่ (time harmonic) โดยสามารถแทน A อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน $A = Ae^{j\omega t}$ (Christopoulos, 1995) ดังนั้น

$$\frac{\partial A}{\partial t} = j\omega A \quad (2.12)$$

เมื่อพิจารณาใน 2 มิติ แทนค่าสมการที่ (2.12) ลงในสมการที่ (2.10) และเมื่อพิจารณาใน 3 มิติ แทนค่าสมการที่ (2.12) ลงในสมการที่ (2.11) จึงได้สมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (2.14)$$

2.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของระบบหม้อแปลงจำหน่าย ดังแสดงในสมการที่ (2.13) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 2 มิติและสมการที่ (2.14) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิติ นั้นหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยาก ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

2.3.1 การออกแบบเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

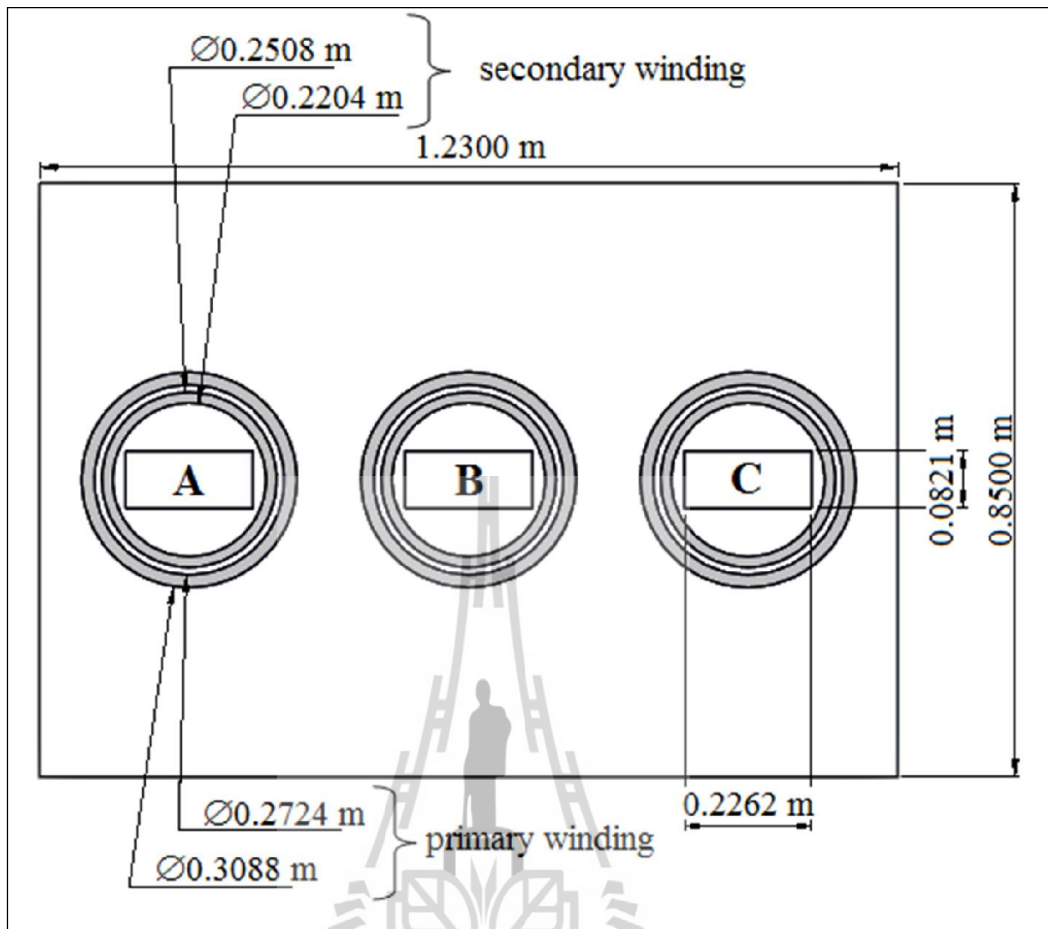
สำหรับงานวิจัยนี้ได้ศึกษาหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V มีการต่อแบบ Dy1 ซึ่งสามารถแสดงขนาดและพิกัดของหม้อแปลงจำหน่ายที่นำมาพิจารณาได้ดังรูปที่ 2.1 ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ศึกษาทั้งในรูปแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เพื่อให้เห็นการพิจารณาเอลิเมนต์ที่แตกต่างกันในแต่ละรูปแบบ โดยสิ่งที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แบบ 2 มิติ และแบบ 3 มิติ ที่เห็นได้ชัด คือ การจำลองผลสำหรับปัญหาที่รูปร่างมีความลึกหรือความหนา เช่น ในหม้อแปลงจำหน่ายจะสามารถแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กได้ทุกส่วนและทุกด้านของชิ้นงาน เป็นต้น การออกแบบกริดให้มีขนาดเล็กหรือใหญ่ขึ้น จะแปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่หรือปริมาตรที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

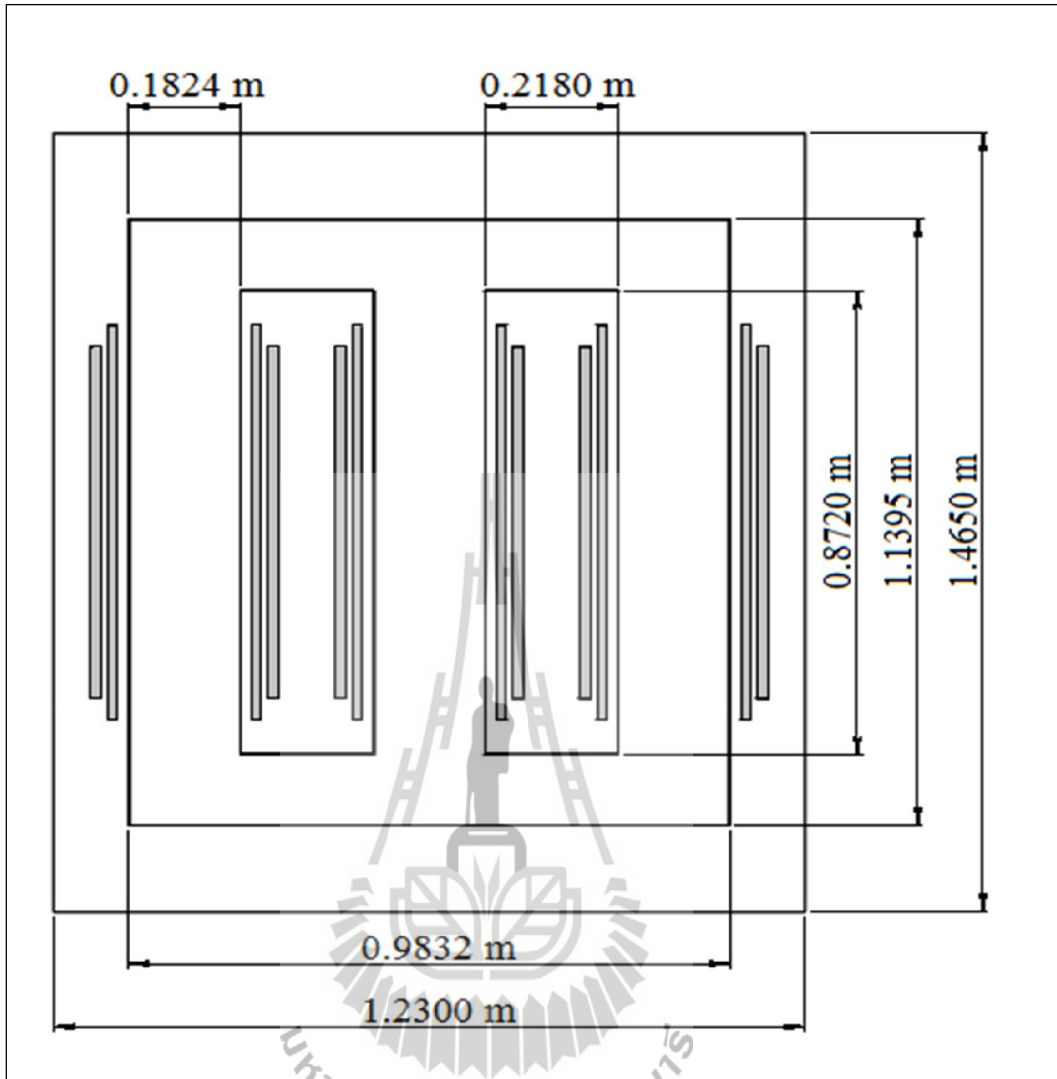
ขั้นตอนแรก เริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (triangular elements) สำหรับปัญหาในแบบ 2 มิติ โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผ่านการเชื่อมต่อกันระหว่างโหนดและอิลิเมนต์ต่าง ๆ การออกแบบกริดเป็นรูปอิลิเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้กล่องเครื่องมือที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB โดยจะมีจำนวน โหนดและอิลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 7,560 โหนดและ 15,025 อิลิเมนต์ ตามลำดับ การออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 2 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 2.2

สำหรับปัญหาในแบบ 3 มิติจะเริ่มจากการแบ่งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral elements) การออกแบบกริดเป็นอิลิเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรม Solid work โดยจะมีจำนวน โหนดและอิลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 24,107 โหนด และ 132,961 อิลิเมนต์ ตามลำดับ สำหรับการออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 2.3

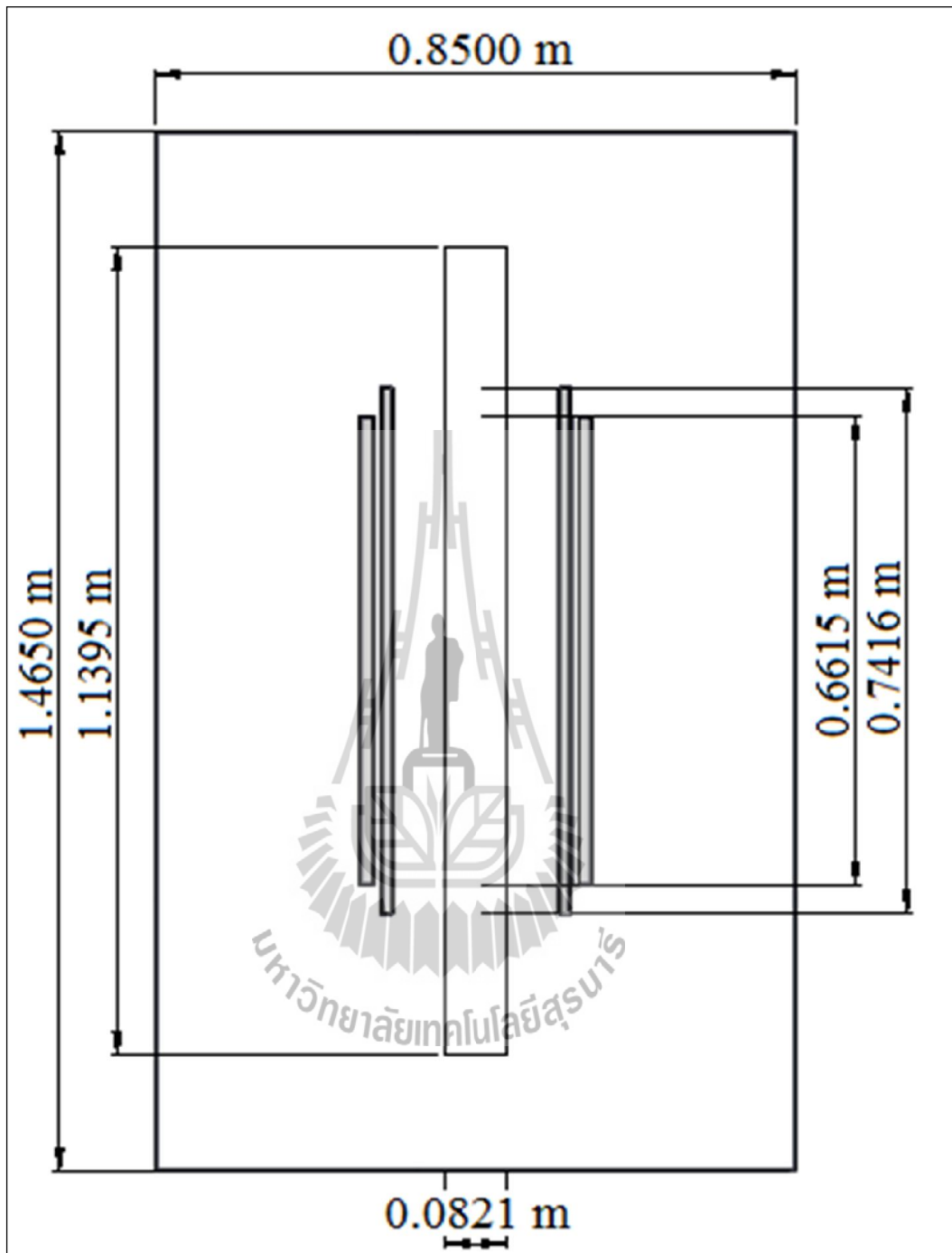




ก) ด้านบน
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

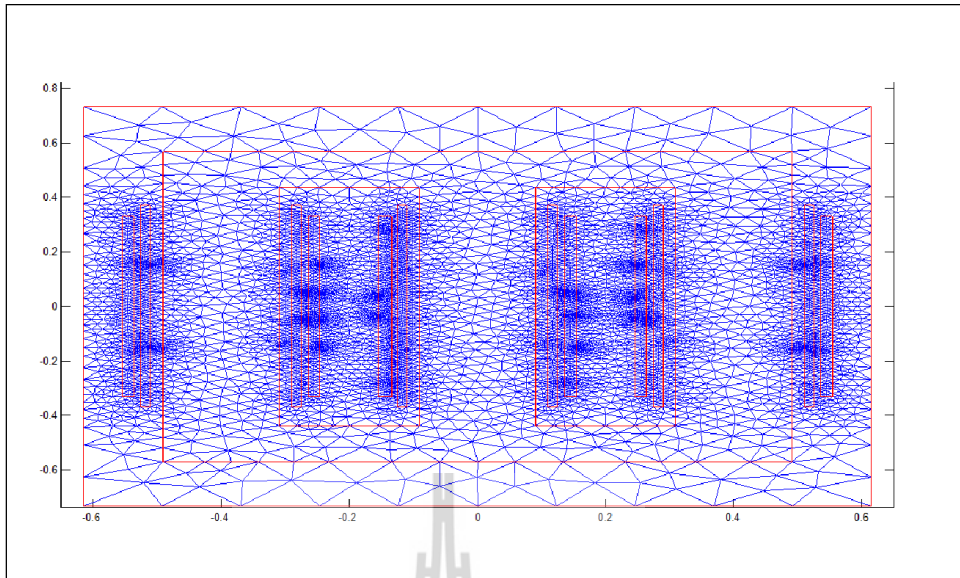


ข) ด้านหน้า

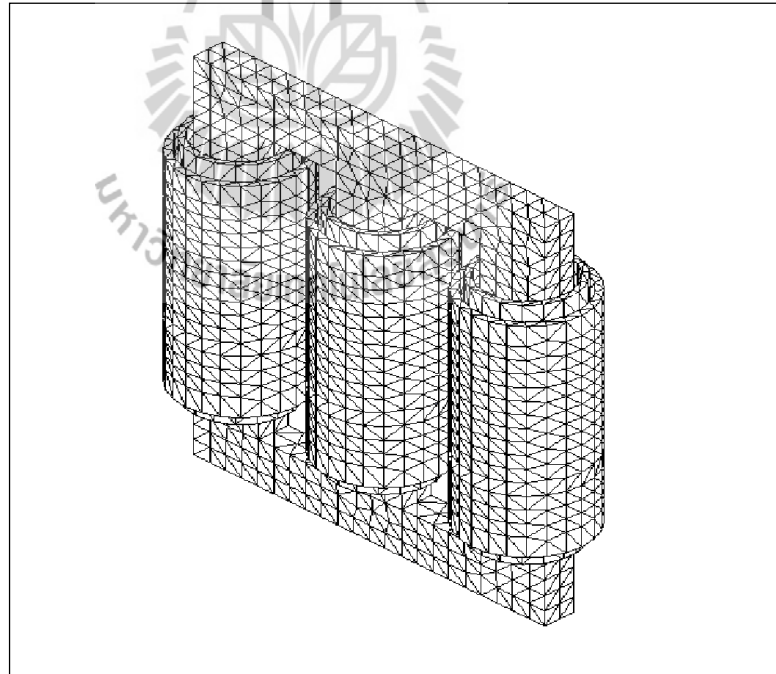


ก) ด้านข้าง

รูปที่ 2.1 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA



รูปที่ 2.2 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย
ในแกนเหล็กในแบบ 2 มิติ



รูปที่ 2.3 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย
ในแกนเหล็กในแบบ 3 มิติ

2.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์

จากการออกแบบอิลิเมนต์ในหัวข้อที่ 2.3.1 ที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ทำให้เห็นข้อแตกต่างของปัญหาใน 2 มิติและ 3 มิติ คือรูปแบบของอิลิเมนต์ที่มีรูปร่างที่แตกต่างกัน โดยรูปแบบของอิลิเมนต์ที่แตกต่างกันนี้นำมาซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ในหัวข้อนี้มีความแตกต่างกันด้วย ดังนั้นในขั้นตอนนี้จึงทำการแยกพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ออกเป็นแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงกระบวนการดำเนินงานในการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ที่ถูกต้องตามรูปร่างของอิลิเมนต์ที่เลือกใช้

- ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้เป็นการเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ (element interpolation function) โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงปัญหาสามเหลี่ยมหลักซึ่งจะได้

$$A(x, y) = A_i N_i + A_j N_j + A_k N_k \quad (2.15)$$

โดยที่ $N_n, n = i, j, k$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ $A_n, n = i, j, k$ คือผลลัพธ์ของค่าตัวแปรเชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด i, j, k ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad \text{เมื่อ } n = i, j, k \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

และ Δ_e คือ พื้นที่ของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

- ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

กรณีที่พิจารณาระบบเป็นแบบ 3 มิติ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (2.18)$$

โดยที่ $N_n, n = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ $A_n, n = 1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด 1, 2, 3, 4 ของอิลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.19)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\ b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\ b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\ c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\ c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\ c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
 d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
 d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
 d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
 \end{aligned}$$

และ V คือ ปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

2.3.3 การสร้างสมการอิลิเมนต์

- สมการอิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้อถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอิลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาสนามแม่เหล็กของระบบ 2 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.13) ที่แสดงก่อนหน้านี้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0$$

ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เพื่อหาระบบสมการเชิงเส้น โดยอาศัยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ในปัจจุบันการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถือเป็นวิธีที่ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกออกไปได้อีก เช่น วิธีของกาลเลอร์กิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหามาตรฐานใหญ่ การสร้างสมการของอิลิเมนต์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้ คือ การแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (2.13) จะไม่ก่อให้เกิดค่าเท่ากับศูนย์ หากแต่จะมีค่าเท่ากับ R แทนดังแสดงด้วยสมการที่ (2.21)

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (2.21)$$

ซึ่ง R เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา เศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่เที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเออร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988; Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function : W) แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของอิลิเมนต์ (Ω) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_n R d\Omega = 0, \quad n = ijk \quad (2.22)$$

สำหรับอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จุดที่ไม่ทราบค่ามี 3 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสาม ดังนั้นจึงต้องการ 3 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (2.22) จะต้องมีค่า $n = ijk$ และโดยปกติเราจะเลือก $W_n = N_n$ ซึ่งเรียกว่า บับ โน ฟ-กาลเออร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน R ด้วยสมการที่ (2.21) ลงในสมการที่ (2.22) จะได้

$$\int_{\Omega} N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) d\Omega = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n (j\sigma\omega\mathbf{A}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (N_n \mathbf{J}_0) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

พิจารณาการอินทิเกรตทีละพจน์ของสมการที่ (2.24) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{V}) d\Omega \quad (2.25)$$

ซึ่ง Γ คือ ขอบเขตของอีลิเมนต์ Ω เมื่อเปรียบเทียบกับพจน์แรกของสมการที่ (2.24) จะได้ว่า

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{j}$$

และเนื่องจาก \mathbf{n} คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลิเมนต์ Γ

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.24) เมื่อ $n = i, j, k$ จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega - \\ & \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega + \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (2.26) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอีลิเมนต์ Γ ที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณกระแสตลอดขอบนอกของอีลิเมนต์นั้น ๆ อนึ่ง อีลิเมนต์นั้น ๆ อาจวางตัวอยู่ภายในหรืออยู่ติดขอบนอกของพื้นที่ศึกษา ซึ่งในงานวิจัยนี้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก \mathbf{A} ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ (Salkic, 2005) แสดงดังสมการที่ (2.27) ดังนั้นสมการที่ (2.18) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (2.28) และเนื่องจากสมการที่ (2.28) มีทั้งหมด 3 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อีลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (2.29) ดังนี้

$$\mathbf{A}(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2.27)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

และจากสมการที่ (2.15) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก \mathbf{A} โดยประมาณในแต่อีลิเมนต์เป็น

$$A(x, y) = [N]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_{\Omega} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} \right) d\Omega [A]_{3 \times 1} + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega [A]_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.30)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{3 \times 3} \{A\}_{3 \times 1} = \{F\}_{3 \times 1} \quad (2.31)$$

เมทริกซ์ $[M]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [M]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega \quad (2.32)$$

จากสมการที่ (2.16) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (2.33)$$

จากสมการที่ (2.33) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า σ มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (2.32) จึงกลายเป็น

$$[M]_{3 \times 3} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (2.34)$$

สมการที่ (2.34) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (2.35) โดยที่ $N_i = L_1$ $N_j = L_2$ และ $N_k = L_3$ จะได้

$$\int_{\Delta_e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Delta_e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta_e \quad (2.35)$$

จากสมการที่ (2.35) สามารถพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี คือ $L_n = L_m$ และ $L_n \neq L_m$ ในกรณี $L_n = L_m$ จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ i ของรูปสามเหลี่ยมจะได้ $a=2$, $b=c=0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.35) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^2 d\Delta_e &= \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{4\Delta_e}{4!} = \frac{2\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $L_n \neq L_m$ จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ i และ j ของรูปสามเหลี่ยมจะได้ $a=b=1$, $c=0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.35) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^1 L_2^1 d\Delta_e &= \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{2\Delta_e}{4!} = \frac{\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ที่จุดต่ออื่นๆ ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้รับการพิจารณาในลักษณะนี้เช่นกัน ดังนั้นจากสมการที่ (2.34) จึงได้เมทริกซ์ $[M]_{3 \times 3}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.36) ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ $[M]_{3 \times 3}$ จะมีค่าขึ้นอยู่กับรูปร่างของอิลิเมนต์

$$[M]_{3 \times 3} = \frac{j\omega\sigma\Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

เมทริกซ์ $[K]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [K]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{1 \times 3} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \right) d\Omega \quad (2.37)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดั่งสมการที่ (2.33) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{2\Delta_e} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (2.38)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.38) ลงในสมการที่ (2.37) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{\mu} \int \left(\frac{b_n}{2\Delta_e} \frac{b_m}{2\Delta_e} + \frac{c_n}{2\Delta_e} \frac{c_m}{2\Delta_e} \right) dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (2.39) \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e^2} (b_n b_m + c_n c_m) \int dx dy \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} (b_n b_m + c_n c_m) \quad n, m = i, j, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \quad (2.40) \\ &\quad \text{Sym} \end{aligned}$$

โพลีเวกเตอร์: $\{F\}_{3 \times 1}$

$$\text{จาก } \{F\}_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (2.41)$$

หรือ

$$\{F\}_{3 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int N_n dx dy \quad n = i, j, k \quad (2.42)$$

สมการที่ (2.42) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (2.35) โดยที่ $N_i = L_1$, $N_j = L_2$ และ $N_k = L_3$ ซึ่งจะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ i ของรูปสามเหลี่ยมจึงได้ $a = 1$, $b = c = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (2.35) จะได้

$$\int_{\Delta_e} L_1^1 d\Delta_e = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2\Delta_e$$

$$= \frac{2\Delta_e}{3!} = \frac{\Delta_e}{3}$$

ซึ่งที่จุดต่อ j และ k ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้ลักษณะเช่นเดียวกันนี้ ดังนั้นจากสมการที่ (2.42) จึงได้โพลีเวกเตอร์แสดงได้ดังนี้

$$\{F\}_{3 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 \Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

- สมการอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การดำเนินการด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะกระทำการในลักษณะเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ซึ่งจะแตกต่างกันอย่างชัดเจนที่ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์โดยตั้งต้นจากสมการอนุพันธ์ย่อยของปัญหาสนามแม่เหล็กแบบ 3 มิติ ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.14) ที่แสดงก่อนหน้านี้นี้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (2.44)$$

สำหรับวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ ยังคงประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างด้วยวิธีกาลอ์คินเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติดังสมการที่ (2.22) แต่จะเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตรอบปริมาตรแทนดังแสดงด้วยสมการที่ (2.45)

$$\int_V W_n R dV = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.45)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติจะได้เศษตกค้าง R ดังสมการที่ (2.46)

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (2.46)$$

สำหรับอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า จุดที่ไม่รู้ค่ามี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่รู้ค่า นั้นหมายถึงในสมการที่ (2.45) จะต้องมีค่า $n = 1, 2, 3, 4$ และโดยปกติจะเลือก $W_n = N_n$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า R ด้วยสมการ (2.46) ลงในสมการที่ (2.45) จะได้

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) dV = 0 \quad (2.47)$$

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dV - \int_V N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) dV + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dV = 0 \quad (2.48)$$

พิจารณาการอินทิเกรตทีละพจน์ของสมการที่ (2.48) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เหมือนกับสมการที่ (2.25) ในแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (2.48) เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_{\Gamma} N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right) d\Gamma - \int_V \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV - \int_V N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) dV + \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV = 0 \quad (2.49)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (2.49) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลิเมนต์ Γ โดยค่าศักร์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก \mathbf{A} ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงตั้งสมการที่ (2.50) ดังนั้นสมการที่ (2.49) จึงลดรูปเหลือตั้งสมการที่ (2.51) และเนื่องจากสมการที่ (2.51) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนต์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ตั้งสมการที่ (2.52)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = 0 \quad , \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (2.50)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV + \int_V N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) dV = \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV \quad (2.51)$$

$$\int_V \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV + \int_V [N]_{4 \times 1} (j\omega\sigma\mathbf{A}) dV = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (2.52)$$

และจากสมการที่ (2.18) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก \mathbf{A} โดยประมาณในแต่้อลิเมนต์เป็น

$$A(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนท์อิลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_V \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dV [A]_{4 \times 1} + \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 4} d\Omega [A]_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (2.53)$$

หรือเขียนสมการไฟไนท์อิลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1} = \{F\}_{4 \times 1} \quad (2.54)$$

เมทริกซ์ $[M]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [M]_{4 \times 4} = \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 4} dV \quad (2.55)$$

จากสมการที่ (2.19) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (2.56)$$

จากสมการที่ (2.56) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า σ มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (2.55) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4 \times 4} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy dz \quad n, m = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (2.57)$$

สมการที่ (2.57) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดังสมการที่ (2.58) โดยที่ $N_1 = L_1$ $N_2 = L_2$ $N_3 = L_3$ และ $N_4 = L_4$ จะได้

$$\int_v L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (2.58)$$

จากสมการที่ (2.57) สามารถแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคล้ายในทำนองเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (2.57) เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.58) จะได้

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{j\omega\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

เมทริกซ์ $[K]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [K]_{4 \times 4} = \int_V \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dV \quad (2.60)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดั่งสมการที่ (2.56) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V}, \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (2.61)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.61) ลงในสมการที่ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{4 \times 4} &= \frac{1}{\mu} \int \left(\frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (2.62) \\ &= \frac{1}{36\mu V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\ &= \frac{1}{36\mu V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ & & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ \text{Sym} & & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

โพลดเวกเตอร์: $\{F\}_{4 \times 1}$

$$\text{จาก} \quad \{F\}_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (2.64)$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดั่งสมการที่ (2.58) จะได้

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.3.4 การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นการนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 2.3.1 ทั้งในระบบ 2 มิติ และ 3 มิติ หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ ดังแสดงได้ดังนี้

$$[M + K]_{n \times n} \{A\}_{n \times 1} = \{F\}_{n \times 1} \quad (2.66)$$

2.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

สำหรับขั้นตอนการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตในงานวิจัยนี้จะมีการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ คือ บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเท่ากับศูนย์ ($A=0$)

2.3.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ที่สัมพันธ์กันต่อไปได้ โดยสนามแม่เหล็ก B สามารถคำนวณได้จากการเคิร์ลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ($B = \nabla \times A$) ดังแสดงด้วยสมการ (2.67) ดังนั้นเมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 2 มิติ ตามระนาบพิกัด xy เมื่อมีกระแสตามแนวแกน z จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y (B_y) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.68), (2.69) และ (2.70) ตามลำดับ

$$B = \nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k \quad (2.67)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k}{2\Delta_e} \quad (2.68)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left(\frac{b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k}{2\Delta_e} \right) \quad (2.69)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (2.70)$$

เมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 3 มิติ ตามระนาบพิกัด xyz เมื่อมีกระแสในแนวแกน x และ แนวแกน z จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y (B_y) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน z (B_z) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (2.71), (2.72), (2.73) และ (2.74) ตามลำดับ

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (2.71)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_4 A_4}{6V} - \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \quad (2.72)$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (2.73)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (2.74)$$

2.4 การคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงขึ้นอยู่กับขนาดสนามแม่เหล็ก B โดยจะไม่พิจารณาค่าความต้านทานของขดลวดและค่ารีแอกแตนซ์รั่วไหลซึ่งมีปริมาณน้อย โดยที่ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก (P_{core}) ประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ กำลังงานสูญเสียจากฮิสเตอรีซิส (P_h) และกำลังงานสูญเสียจากกระแสไหลวน (P_e) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.75), (2.76) และ (2.77) ตามลำดับ

$$P_{core} = P_e + P_h \quad (2.75)$$

$$P_h = \eta V f B_{\max}^n \quad (2.76)$$

โดยที่ η = ค่า coefficient steinmetz's มีค่าระหว่าง 275 - 500
 n = ค่าคงที่ steinmetz's มีค่าระหว่าง 1.0 - 3.0

$$P_e = K B_{\max}^2 f^2 t^2 V \quad (2.77)$$

โดยที่ K = ค่าคงที่ขึ้นอยู่กับค่าความต้านทานจำเพาะของแกนเหล็ก
 B_{\max} = ค่าความหนาแน่นสูงสุดของเส้นแรงแม่เหล็ก
 f = ความถี่ของแรงดันไฟฟ้า
 t = ความหนาของแผ่นเหล็ก
 V = ปริมาตรของแกนเหล็ก

2.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ประกอบกับคำนึงถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ทางไฟฟ้าของวัสดุที่แตกต่างกันในระบบ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาลอ์เคิน โดยการคำนวณสนามแม่เหล็กจะพิจารณาระบบที่แปลงจากโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ และการหาค่าพลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้นจะคำนวณลงไปในระดับของอิลิเมนต์รายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 3 ต่อไป

บทที่ 3

ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

3.1 บทนำ

การจำลองผลของงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ในการจำลองผลนั้นจะพิจารณาขณะที่หม้อแปลงอยู่ในสถานะไร้โหลดเนื่องจากพิจารณากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยที่หม้อแปลงที่ใช้ในการจำลองผลในบทที่ 3 นี้เป็นหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่มีได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ซึ่งค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่คำนวณได้นั้นจะมีผลมาจากค่าสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องศึกษาถึงการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ภายในหม้อแปลงจำหน่าย ในบทที่ 3 นี้จึงได้กล่าวถึงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจำลองผลและอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ซึ่งเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลักเพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา โดยโปรแกรมทั้งหมดถูกออกแบบให้ทำงานบนพื้นฐานการใช้งานของ MATLAB ที่พัฒนาขึ้น

3.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

การคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์สามารถดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนภายในโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ งานวิจัยนี้ได้ดำเนินการสร้างกริดด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อนำข้อมูลของโหนดและอิลิเมนต์มาพัฒนาต่อด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง โดยอธิบายถึงโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ได้ดังนี้

3.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด

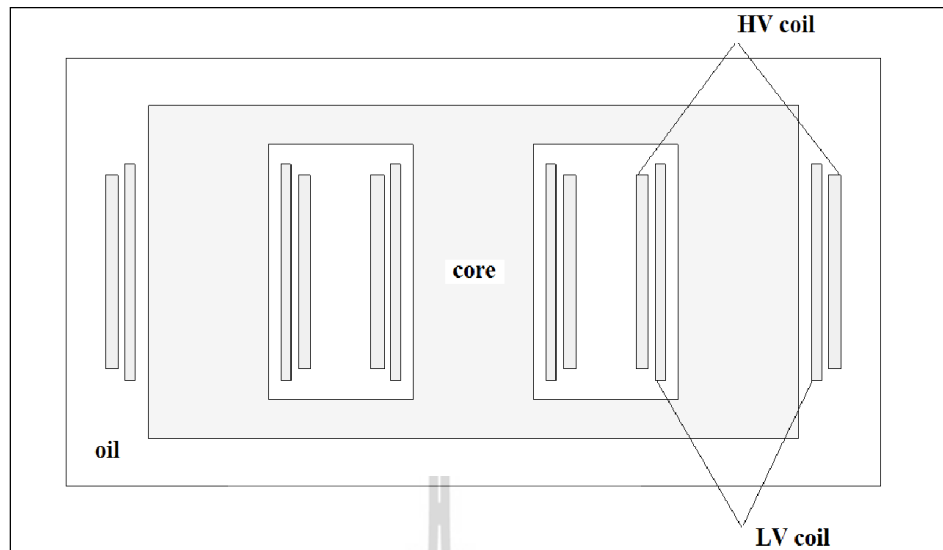
โปรแกรมการสร้างกริดในงานวิจัยนี้ สำหรับระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB ซึ่งสามารถสร้างกริดได้เฉพาะปัญหาแบบ 2 มิติ เท่านั้น ส่วนระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากโปรแกรม Solid work โดยสามารถเลือกความละเอียดของกริดให้เหมาะสมกับระบบได้ทั้งกริดแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ จากนั้นจึงนำข้อมูลของการ

สร้างกริดที่จำเป็นมาพัฒนาเป็น โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 2 มิติ ได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิกัดในแนวแกน x และ y ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขเอลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ส่วนข้อจำกัดของกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปนี้คือไม่สามารถระบุค่าเงื่อนไขขอบเขตให้กับระบบที่มีหลากหลายเนื้อวัสดุในชิ้นเดียวกันได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำประโยชน์ของกล่องเครื่องมือนี้มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดแต่เพียงเท่านั้น ส่วนข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 3 มิติ ได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิกัดในแนวแกน x y และ z ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขเอลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยในงานวิจัยนี้ได้นำโปรแกรม Solid work มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดเช่นเดียวกับกล่องเครื่องมือ PDETOOL เพียงเท่านั้น ส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ อันได้แก่ การสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ การสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต การแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยและการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการนั้น จะทำการพัฒนาด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองโดยผู้ทำการวิจัยเพื่อจำลองผลต่อไป

สำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ได้แก่ พื้นที่ที่เป็นขดลวดตัวนำ, แกนเหล็ก และพื้นที่ที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง โดยพื้นที่ขดลวดตัวนำประกอบไปด้วย

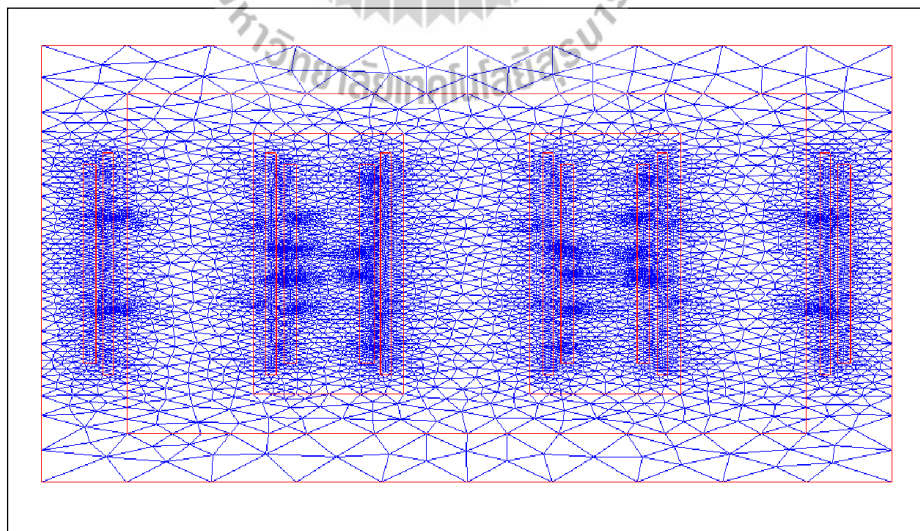
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส C
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส C

ในกล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายให้มีความกว้าง 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตรดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชั้นงาน

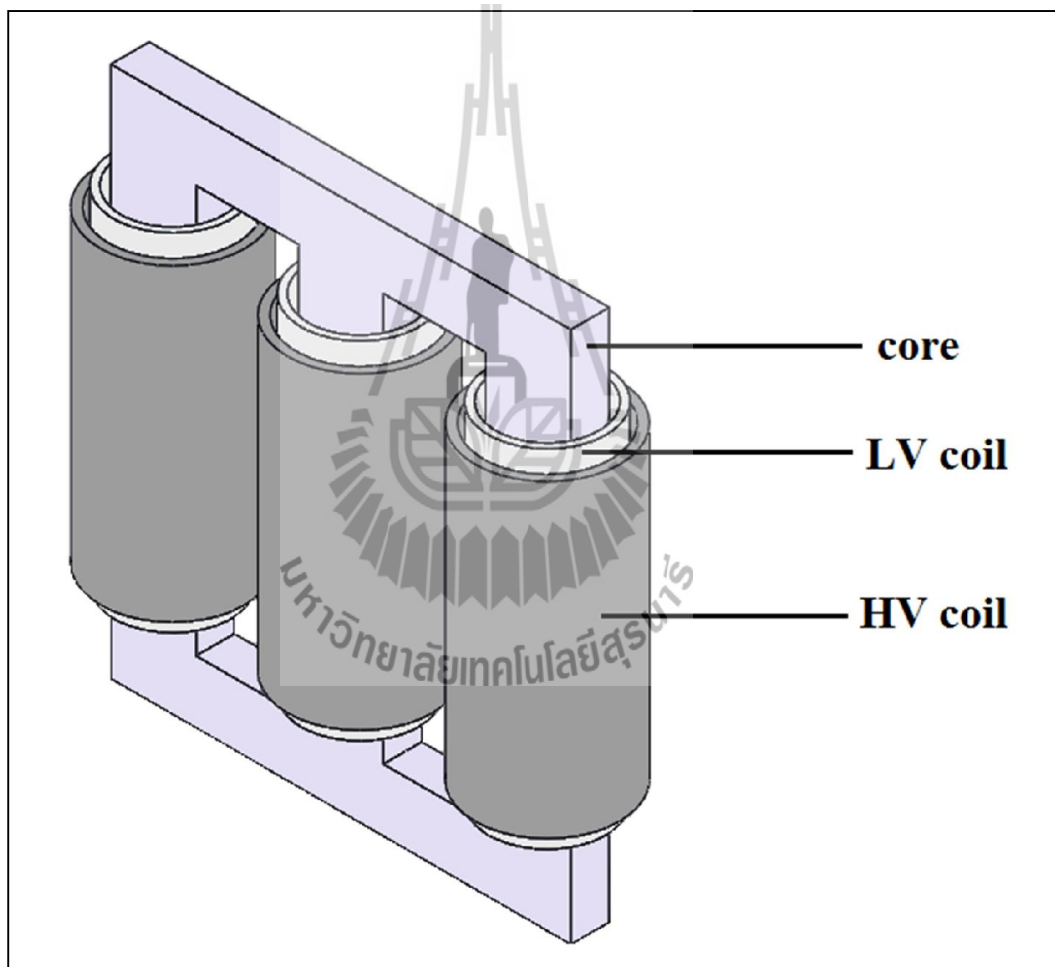
หลังจากแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายแล้ว จึงสั่งให้ PDETOOL สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในงานวิจัยนี้ได้ ดังรูปที่ 3.2



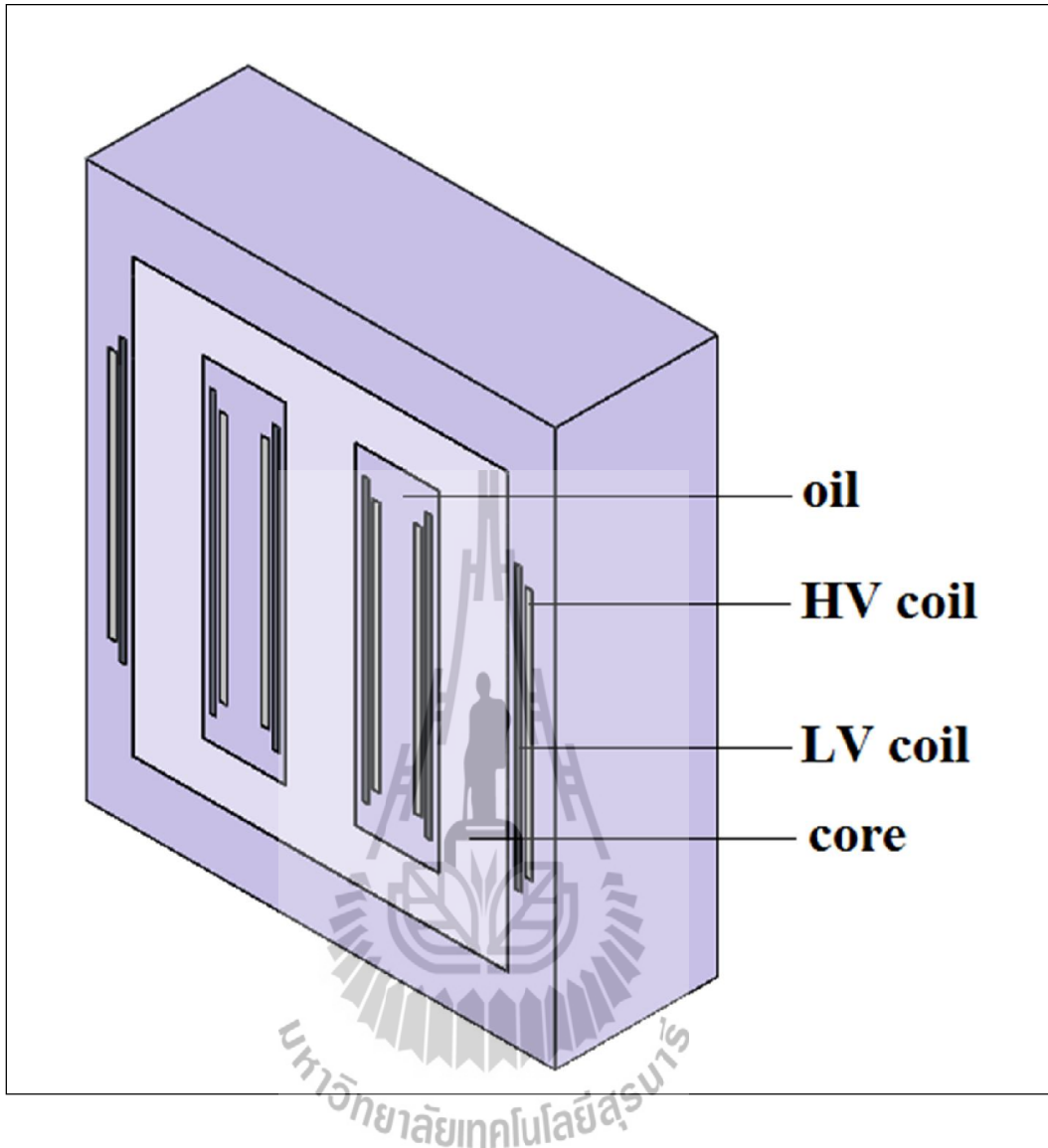
รูปที่ 3.2 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งปริมาตรที่ศึกษา ออกเป็นปริมาตรย่อย ๆ ได้แก่ ปริมาตรที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และปริมาตรที่เป็นน้ำมัน หม้อแปลง เหมือนกับการแบ่งพื้นที่ศึกษาของวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ในโปรแกรม Solid work ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดปริมาตรของปัญหา ให้มีความกว้าง 0.85 เมตร ยาว 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตร โดยในรูปที่ 3.3 จะแสดงเฉพาะ ส่วนที่เป็นแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่าย ในรูปที่ 3.4 จะแสดงภาพตัดขวาง บริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

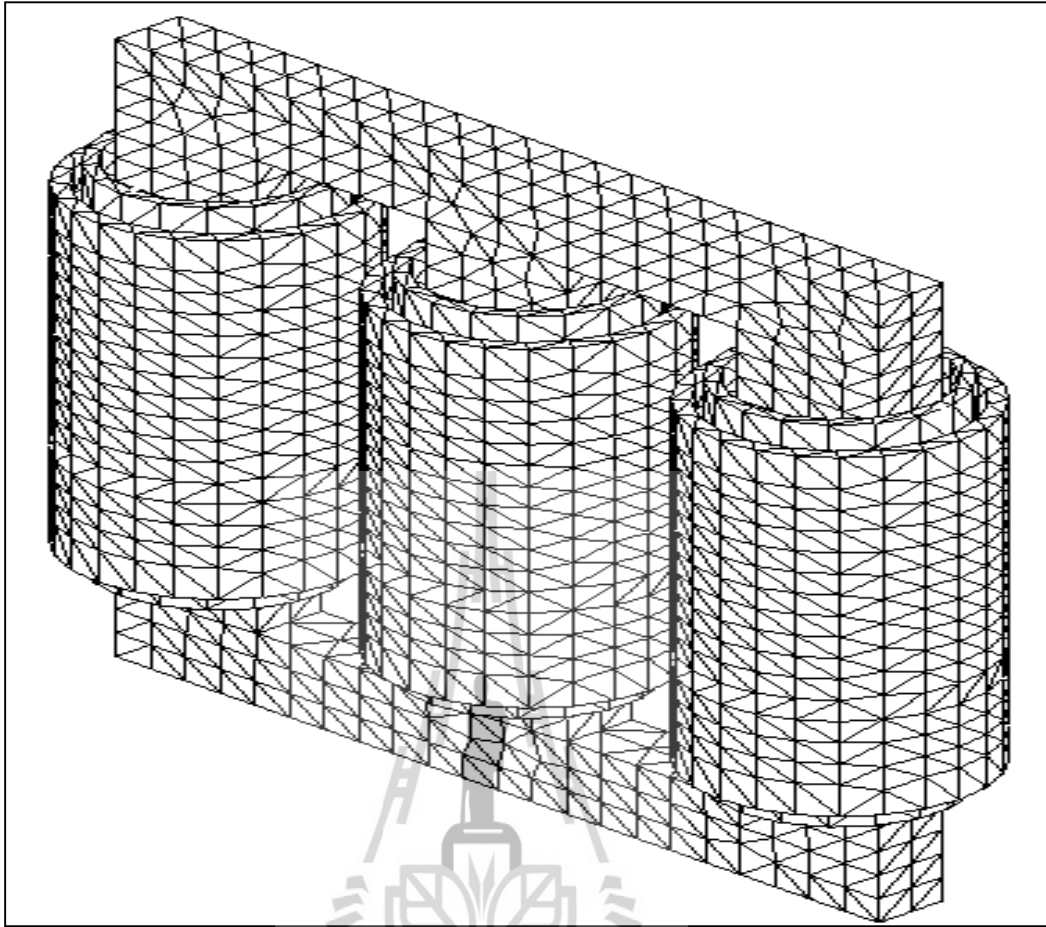


รูปที่ 3.3 แกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.4 ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

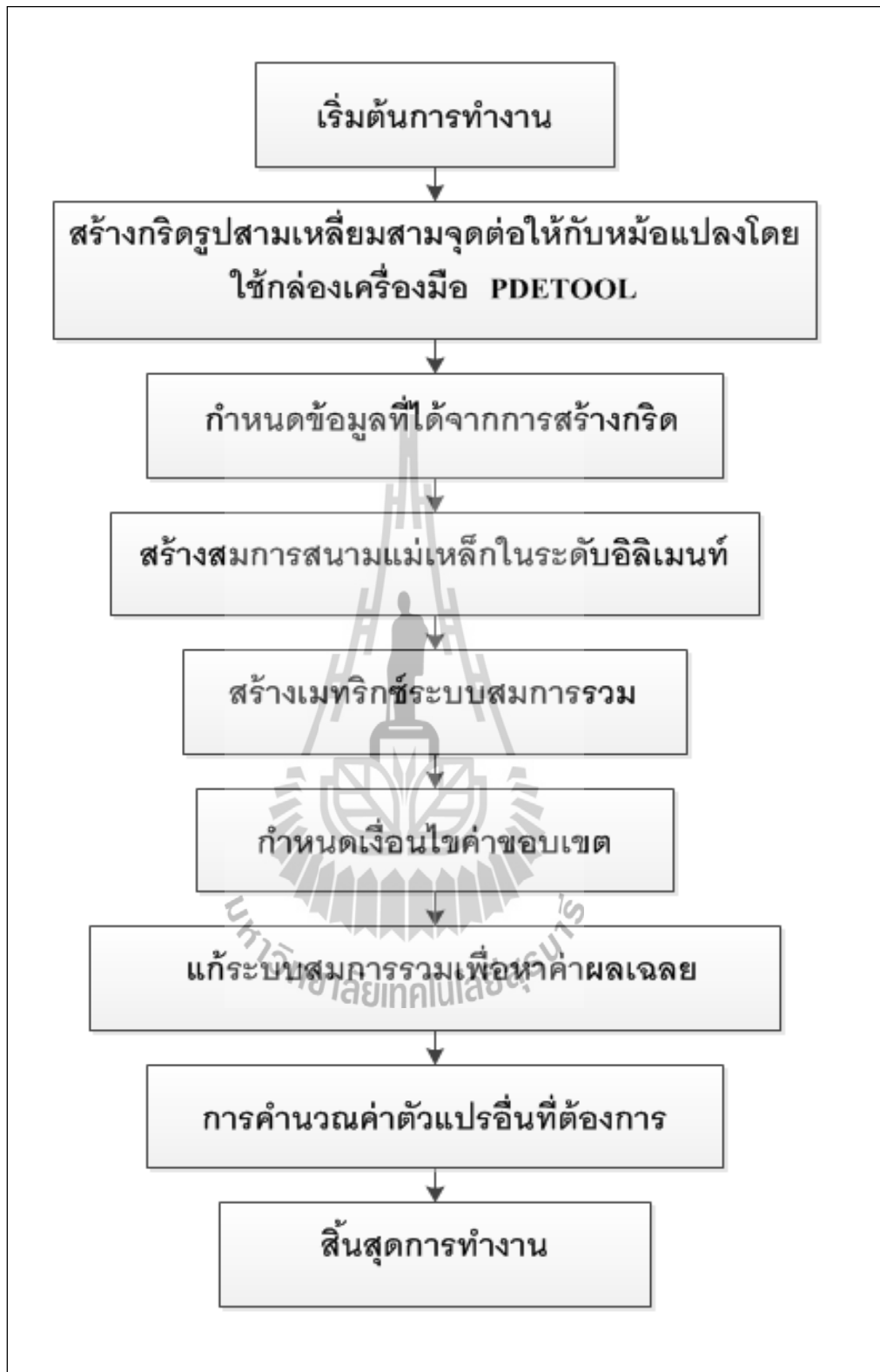
หลังจากแบ่งปริมาตรของปัญหาเป็นหมวดหมู่แล้ว จึงสั่งให้โปรแกรม Solid work สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดบริเวณรอบนอกของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ได้ดังรูปที่ 3.5



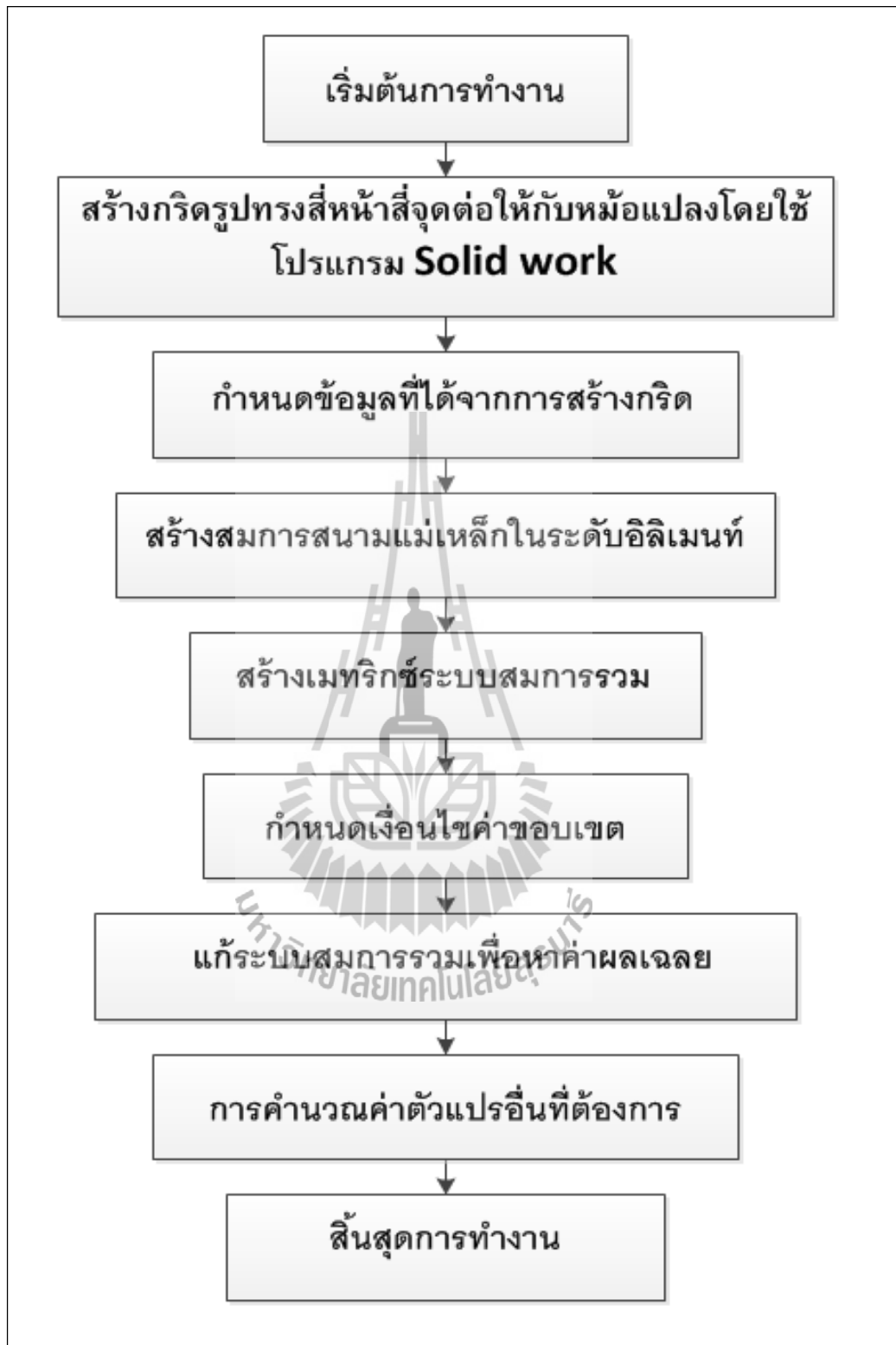
รูปที่ 3.5 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

3.2.2 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

ในขั้นตอนนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยข้อมูลที่จำเป็นในการประดิษฐ์โปรแกรมนั้นได้จากในหัวข้อ 3.2.1 ที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 3.6 และ รูปที่ 3.7 ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ



รูปที่ 3.7 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

จากแผนภูมิในรูปที่ 3.6 และรูปที่ 3.7 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลของระบบแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมและความแตกต่างระหว่างวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ อย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอน จะได้อธิบายถึงรายละเอียดหน้าที่ต่าง ๆ ของการดำเนินงานของระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ไปพร้อมๆ กันดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการกำหนดข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด : ขั้นตอนนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของ โหนดและอีลิเมนต์จากกล่องเครื่องมือ PDETOOL ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลประกอบด้วย จำนวนและตำแหน่งของ โหนด หมายเลขโหนดที่ประกอบขึ้นเป็นอีลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของอีลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของชิ้นงานในระบบ เป็นต้น สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของ โหนดและอีลิเมนต์จากโปรแกรม Solid work ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลจะได้เหมือนกับปัญหาแบบ 2 มิติ

ขั้นตอนการสร้างสมการสนามแม่เหล็กในระดับอีลิเมนต์ : ขั้นตอนนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมสามจุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติ ของทุก ๆ อีลิเมนต์ และสำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ ของทุก ๆ อีลิเมนต์ เนื่องจากภายในระบบมีชิ้นงานที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันอยู่ 3 ชนิด คือ แกนเหล็ก ขดลวดตัวนำและน้ำมันหม้อแปลง ซึ่งวัตถุทั้งสามมีค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าที่แตกต่างกันออกไปได้แก่ แกนเหล็กมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 2.08×10^6 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 3000 ส่วนขดลวดตัวนำมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 5.8×10^7 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 1 และน้ำมันหม้อแปลงมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 1.08 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 0.05 โดยการสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ของแต่ละอีลิเมนต์จะต้องคำนึงถึงค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าของวัตถุที่เกี่ยวข้องในแต่ละอีลิเมนต์นั้น ๆ ด้วย

ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม : ขั้นตอนนี้ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติโปรแกรมจะทำหน้าที่รวมสมการของอีลิเมนต์ย่อยเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ทั้งหมด n โหนดจะก่อให้เกิดเมทริกซ์ระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งสิ้น n สมการ

ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวม โดยงานวิจัยนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลง ทั้ง 4 ด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ ก็จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 3 มิติ คือค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจะต้องกำหนดทั้ง 6 ด้านให้มีค่าเท่ากับศูนย์

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย : ขั้นตอนนี้ ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โปรแกรมจะทำการแก้ระบบสมการรวมซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ประจำโหนดโดยการเลือกใช้ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ขั้นตอนการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการ : ขั้นตอนสุดท้ายนี้ จะนำค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ มาคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็ก โดยค่าสนามแม่เหล็กจะหาได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

3.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ โดยจะเน้นผลการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก แต่จะแสดงผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ เฉพาะค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก เพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างและความคล้ายคลึงกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เท่านั้น โดยทำการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ขนาด 400 kVA ในสภาวะไร้โหลดซึ่งจะแสดงดังนี้

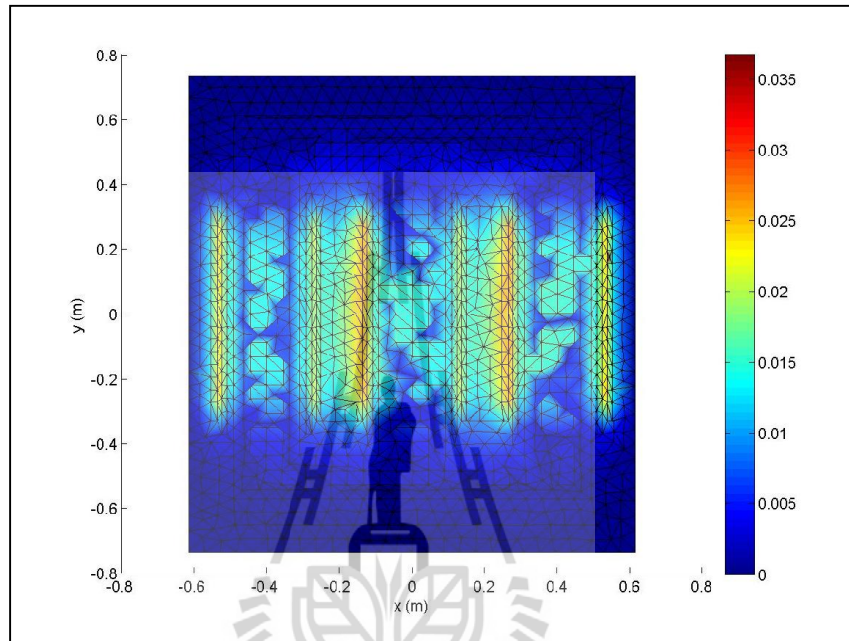
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.8

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.9

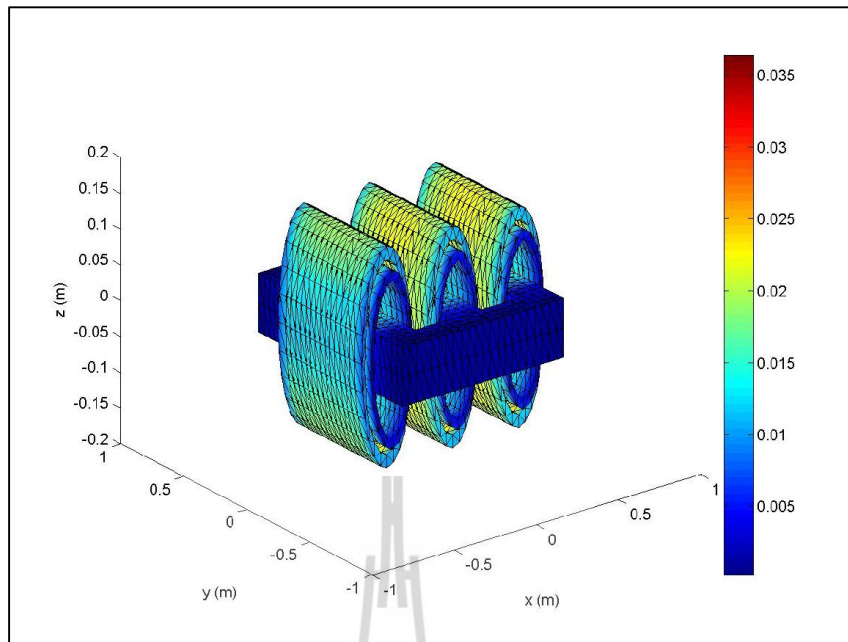
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.10

- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.11

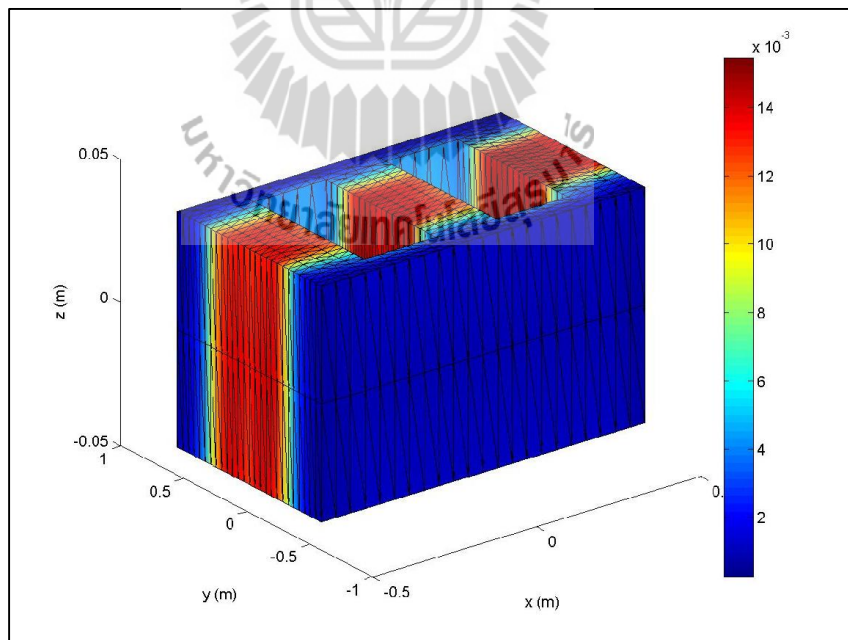
- การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.12



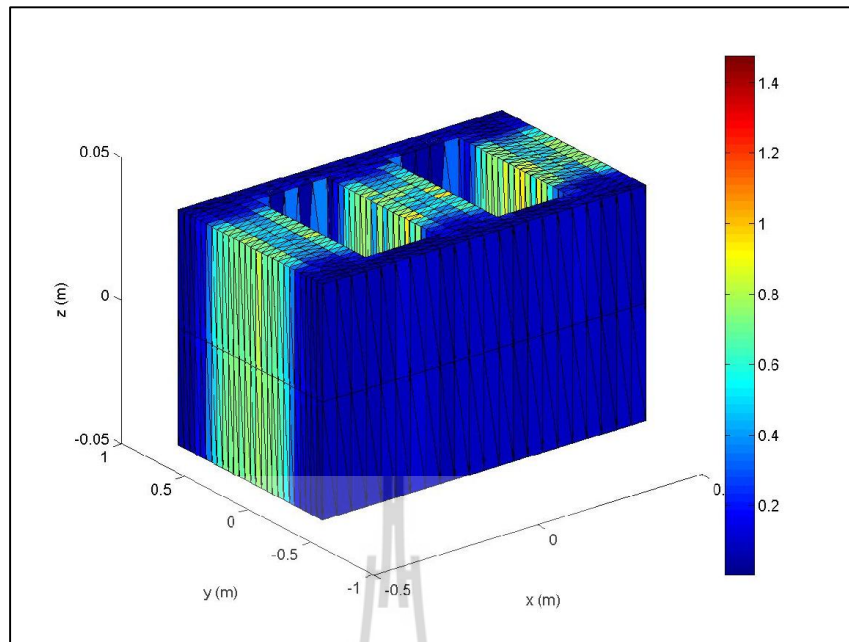
รูปที่ 3.8 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 2 มิติ



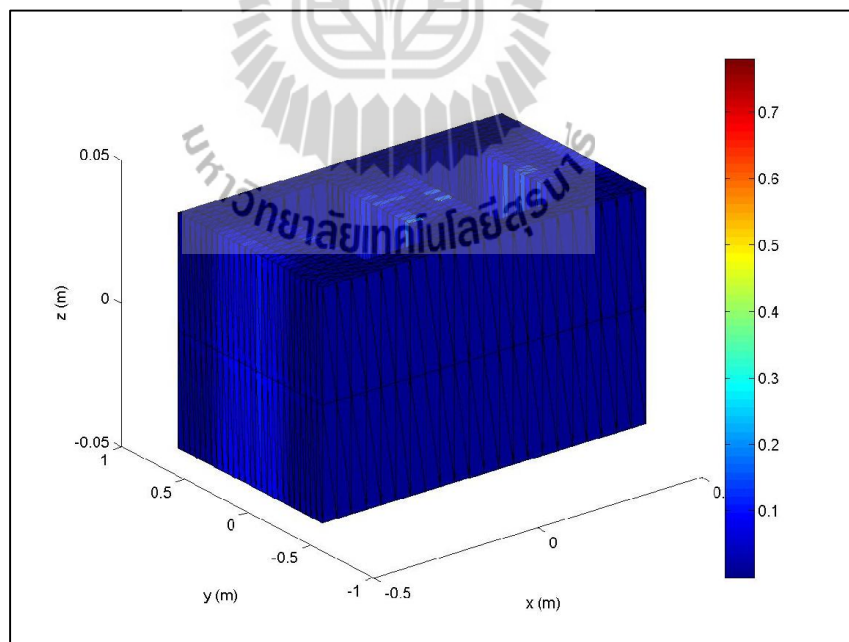
รูปที่ 3.9 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.10 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง
จำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.11 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (T) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.12 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียบริเวณแกนเหล็ก (W) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณาพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แสดงในรูปที่ 3.8, 3.9 และ 3.10 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลง และผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3.10 โดยที่บริเวณแกนเหล็กนั้นจะมีการกระจายตัวของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กที่สม่ำเสมอและมีความสมมาตร ซึ่งพิจารณาได้จากความสม่ำเสมอของสีบริเวณแกนเหล็ก ส่วนในรูปที่ 3.11 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่แสดงในรูปที่ 3.12 จะพบว่าบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบนั้นก็จะมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่สูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน อันเป็นผลมาจากค่าสนามแม่เหล็กบริเวณดังกล่าวมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่น โดยมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กตลอดทั้งปริมาตรมีค่าเท่ากับ 1,120 W

3.4 สรุป

บทที่ 3 เป็นการอธิบายโปรแกรมจำลองผลพร้อมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงาน สูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA แบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ในสภาวะไร้อโหลด ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB โดยเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลัก เพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา ซึ่งโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติและ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังรูปที่ 3.6 และ 3.7 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงกว่าบริเวณอื่น ๆ ส่งผลให้บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่มีขดลวดล้อมรอบอยู่ ถูกเหนี่ยวนำโดยขดลวดตัวนำ ทำให้มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นตาม ซึ่งทำให้สนามแม่เหล็กบริเวณนั้นมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นของแกนเหล็กเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูง ดังนั้นกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบก็จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน

บทที่ 3

ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

3.1 บทนำ

การจำลองผลของงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ในการจำลองผลนั้นจะพิจารณาขณะที่หม้อแปลงอยู่ในสถานะไร้โหลดเนื่องจากพิจารณากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยที่หม้อแปลงที่ใช้ในการจำลองผลในบทที่ 3 นี้เป็นหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่มีได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ซึ่งค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่คำนวณได้นั้นจะมีผลมาจากค่าสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องศึกษาถึงการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ภายในหม้อแปลงจำหน่าย ในบทที่ 3 นี้จึงได้กล่าวถึงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจำลองผลและอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ซึ่งเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลักเพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา โดยโปรแกรมทั้งหมดถูกออกแบบให้ทำงานบนพื้นฐานการใช้งานของ MATLAB ที่พัฒนาขึ้น

3.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

การคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์สามารถดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนภายในโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ งานวิจัยนี้ได้ดำเนินการสร้างกริดด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อนำข้อมูลของโหนดและอิลิเมนต์มาพัฒนาต่อด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง โดยอธิบายถึงโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ได้ดังนี้

3.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด

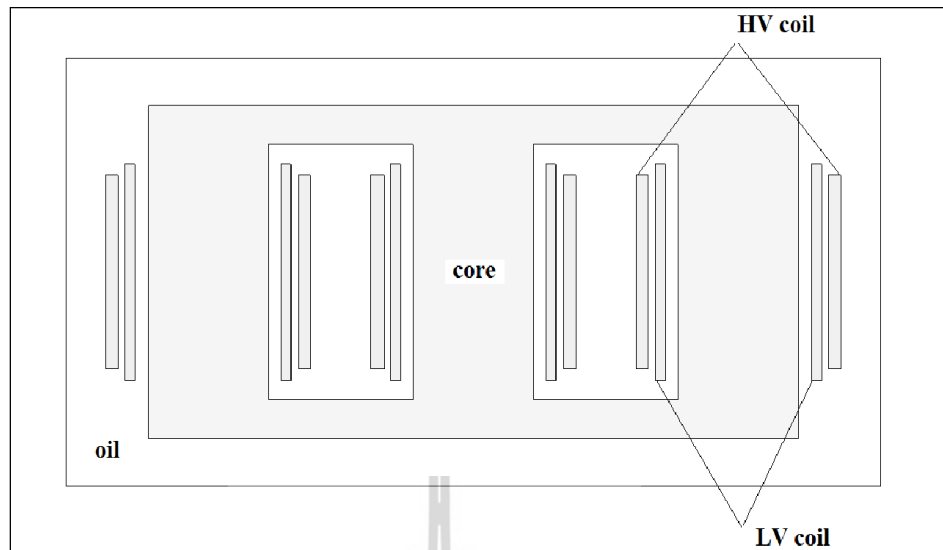
โปรแกรมการสร้างกริดในงานวิจัยนี้ สำหรับระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB ซึ่งสามารถสร้างกริดได้เฉพาะปัญหาแบบ 2 มิติ เท่านั้น ส่วนระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากโปรแกรม Solid work โดยสามารถเลือกความละเอียดของกริดให้เหมาะสมกับระบบได้ทั้งกริดแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ จากนั้นจึงนำข้อมูลของการ

สร้างกริดที่จำเป็นมาพัฒนาเป็น โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 2 มิติ ได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิกัดในแนวแกน x และ y ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขเอลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ส่วนข้อจำกัดของกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปนี้คือไม่สามารถระบุค่าเงื่อนไขขอบเขตให้กับระบบที่มีหลากหลายเนื้อวัสดุในชิ้นเดียวกันได้ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำประโยชน์ของกล่องเครื่องมือนี้มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดแต่เพียงเท่านั้น ส่วนข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 3 มิติ ได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิกัดในแนวแกน x y และ z ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขเอลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยในงานวิจัยนี้ได้นำโปรแกรม Solid work มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดเช่นเดียวกับกล่องเครื่องมือ PDETOOL เพียงเท่านั้น ส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ อันได้แก่ การสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ การสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต การแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยและการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการนั้น จะทำการพัฒนาด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองโดยผู้ทำการวิจัยเพื่อจำลองผลต่อไป

สำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ได้แก่ พื้นที่ที่เป็นขดลวดตัวนำ, แกนเหล็ก และพื้นที่ที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง โดยพื้นที่ขดลวดตัวนำประกอบไปด้วย

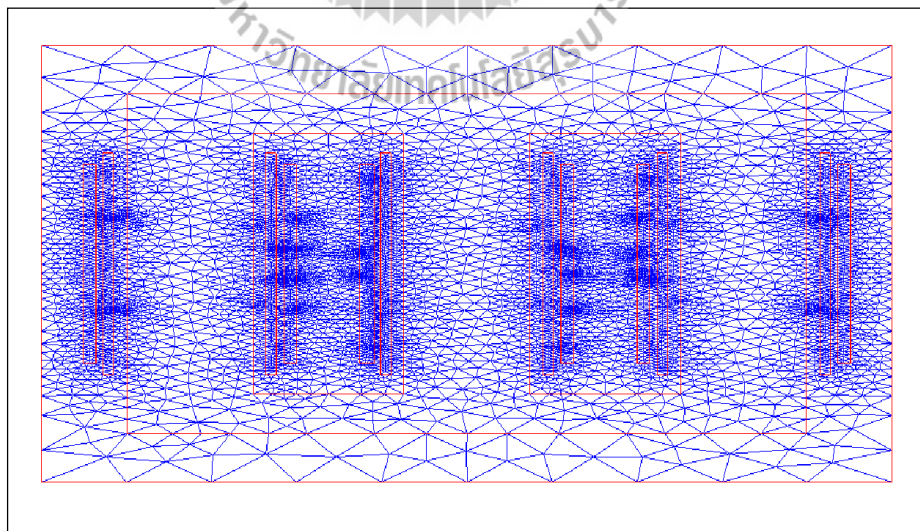
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส C
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส C

ในกล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายให้มีความกว้าง 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตรดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชั้นงาน

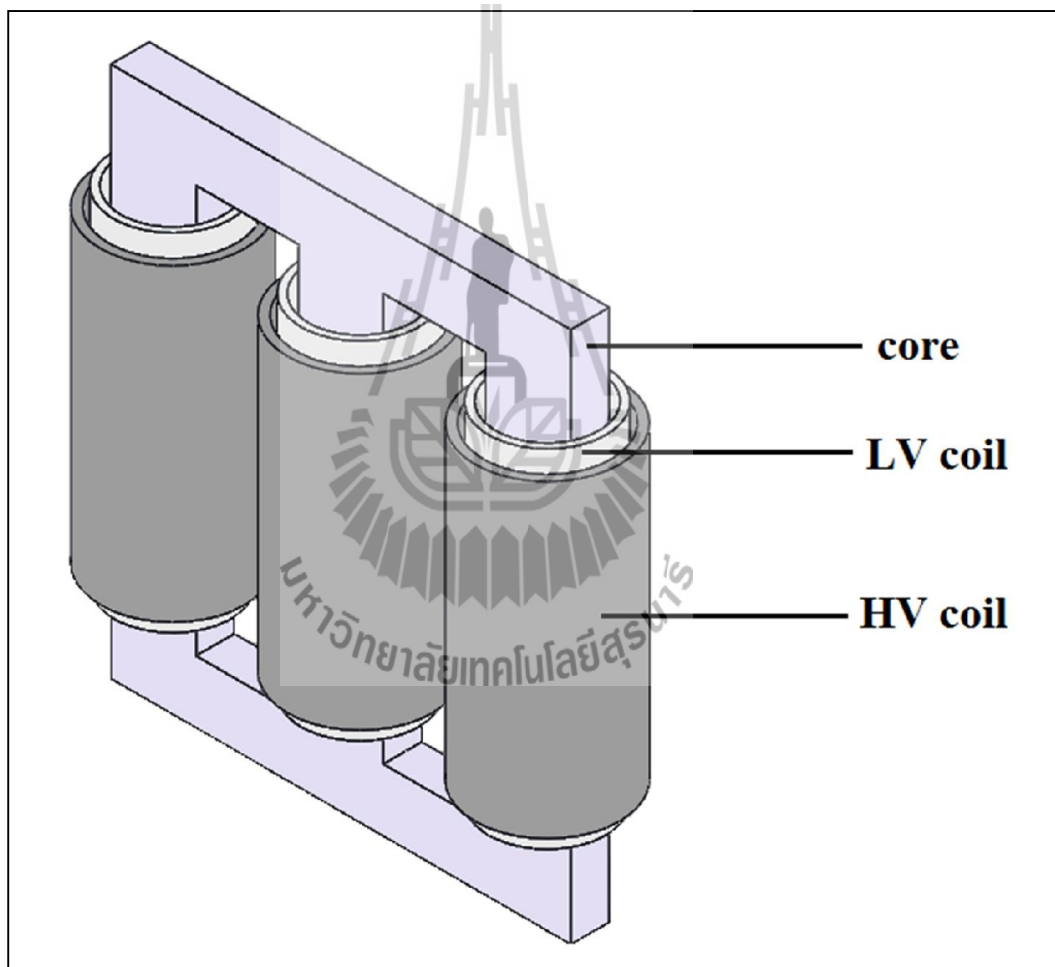
หลังจากแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายแล้ว จึงสั่งให้ PDETOOL สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในงานวิจัยนี้ได้ ดังรูปที่ 3.2



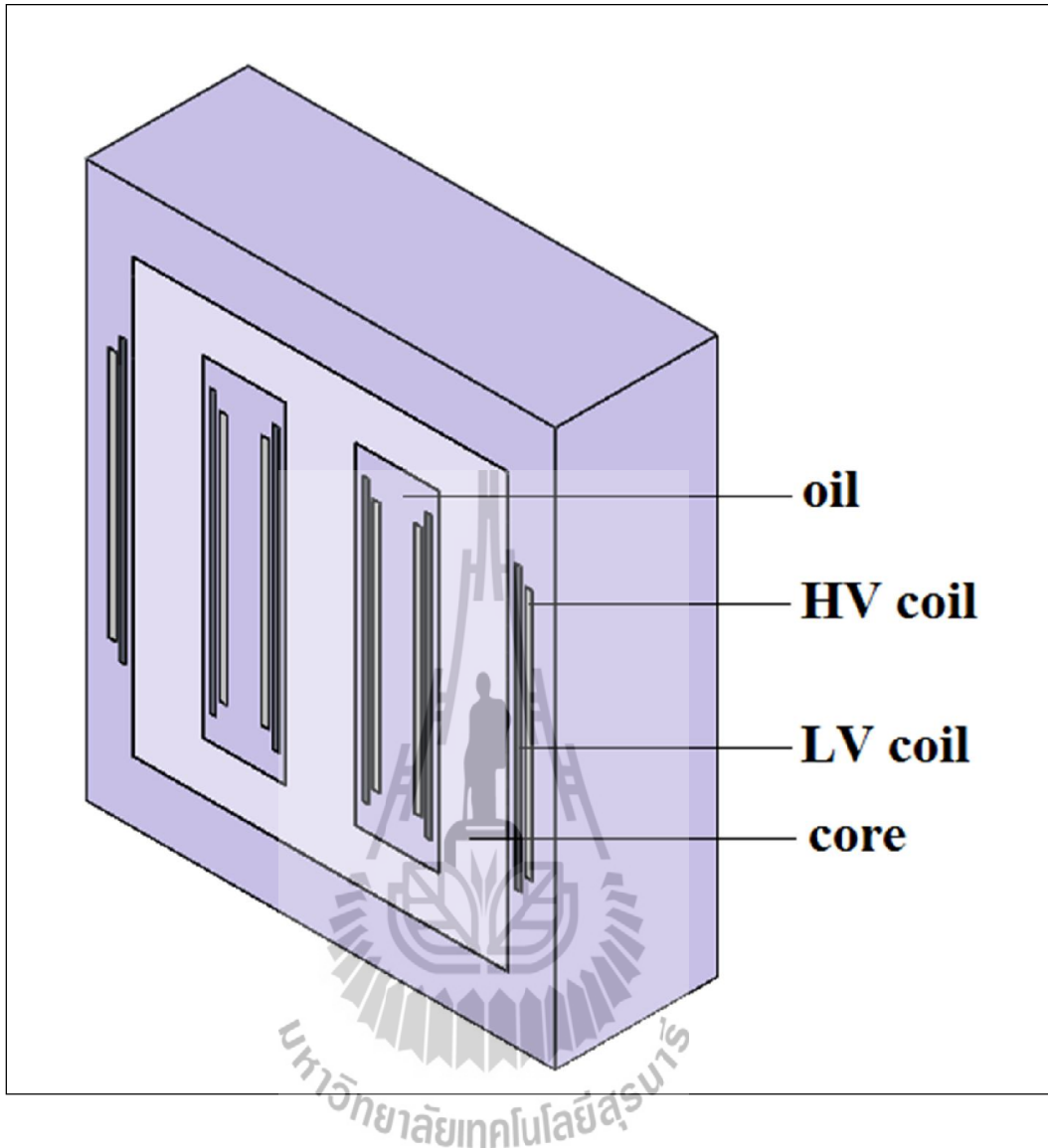
รูปที่ 3.2 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งปริมาตรที่ศึกษา ออกเป็นปริมาตรย่อย ๆ ได้แก่ ปริมาตรที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และปริมาตรที่เป็นน้ำมัน หม้อแปลง เหมือนกับการแบ่งพื้นที่ศึกษาของวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ในโปรแกรม Solid work ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดปริมาตรของปัญหา ให้มีความกว้าง 0.85 เมตร ยาว 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตร โดยในรูปที่ 3.3 จะแสดงเฉพาะ ส่วนที่เป็นแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่าย ในรูปที่ 3.4 จะแสดงภาพตัดขวาง บริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

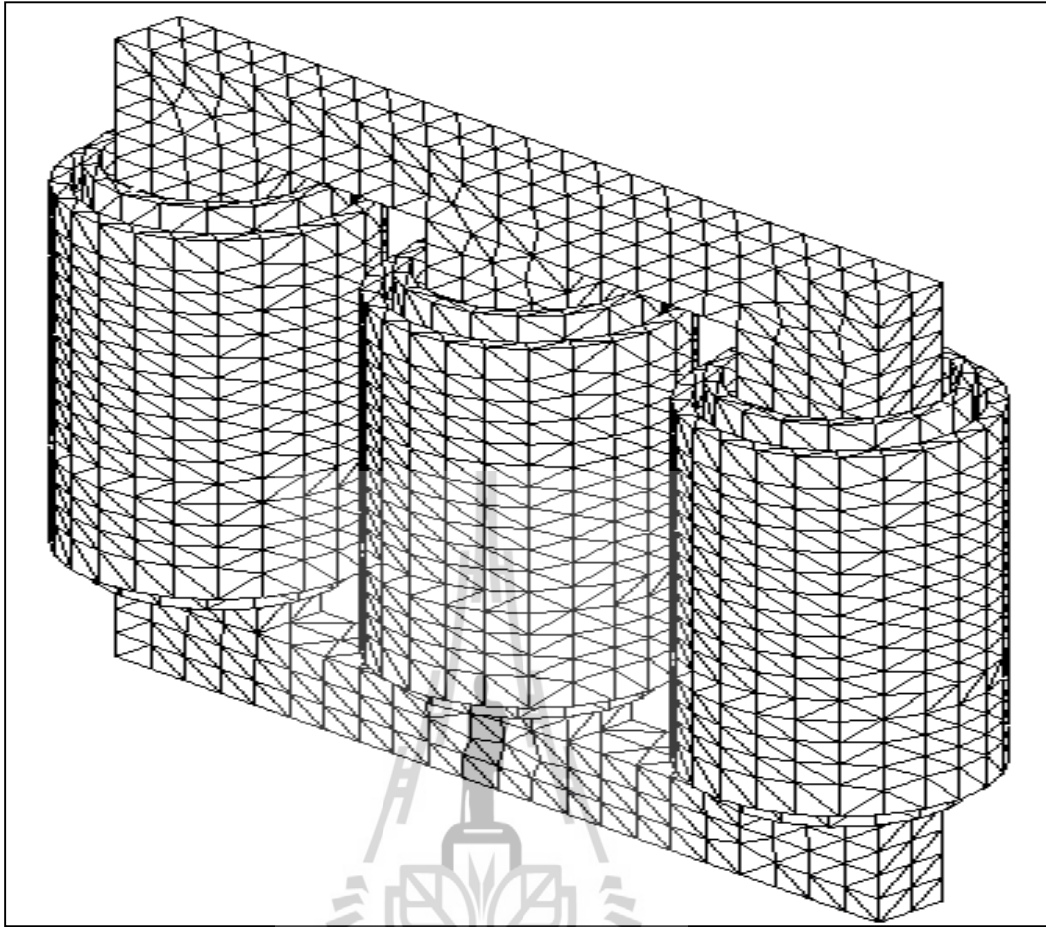


รูปที่ 3.3 แกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.4 ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

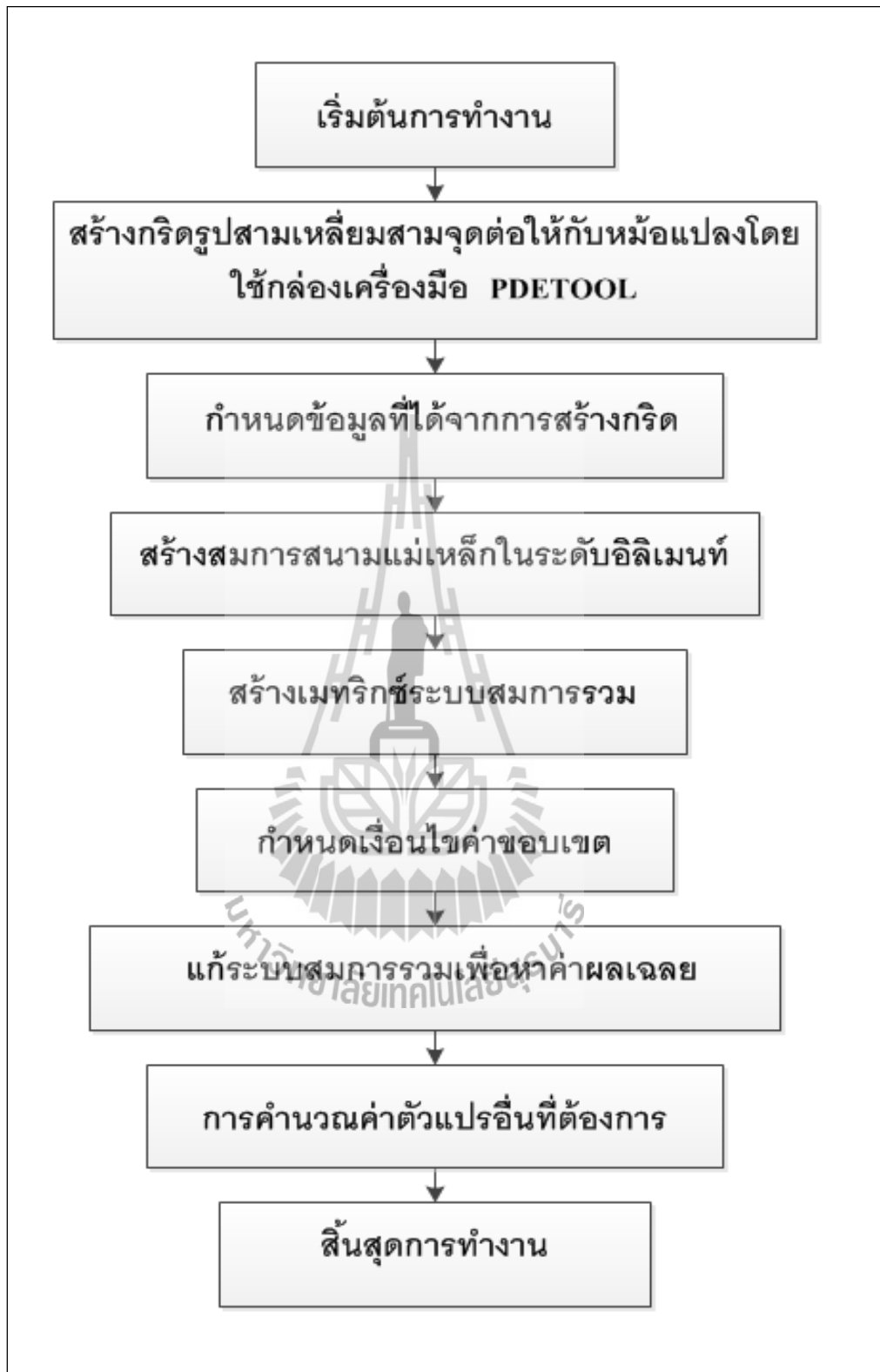
หลังจากแบ่งปริมาตรของปัญหาเป็นหมวดหมู่แล้ว จึงสั่งให้โปรแกรม Solid work สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดบริเวณรอบนอกของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ได้ดังรูปที่ 3.5



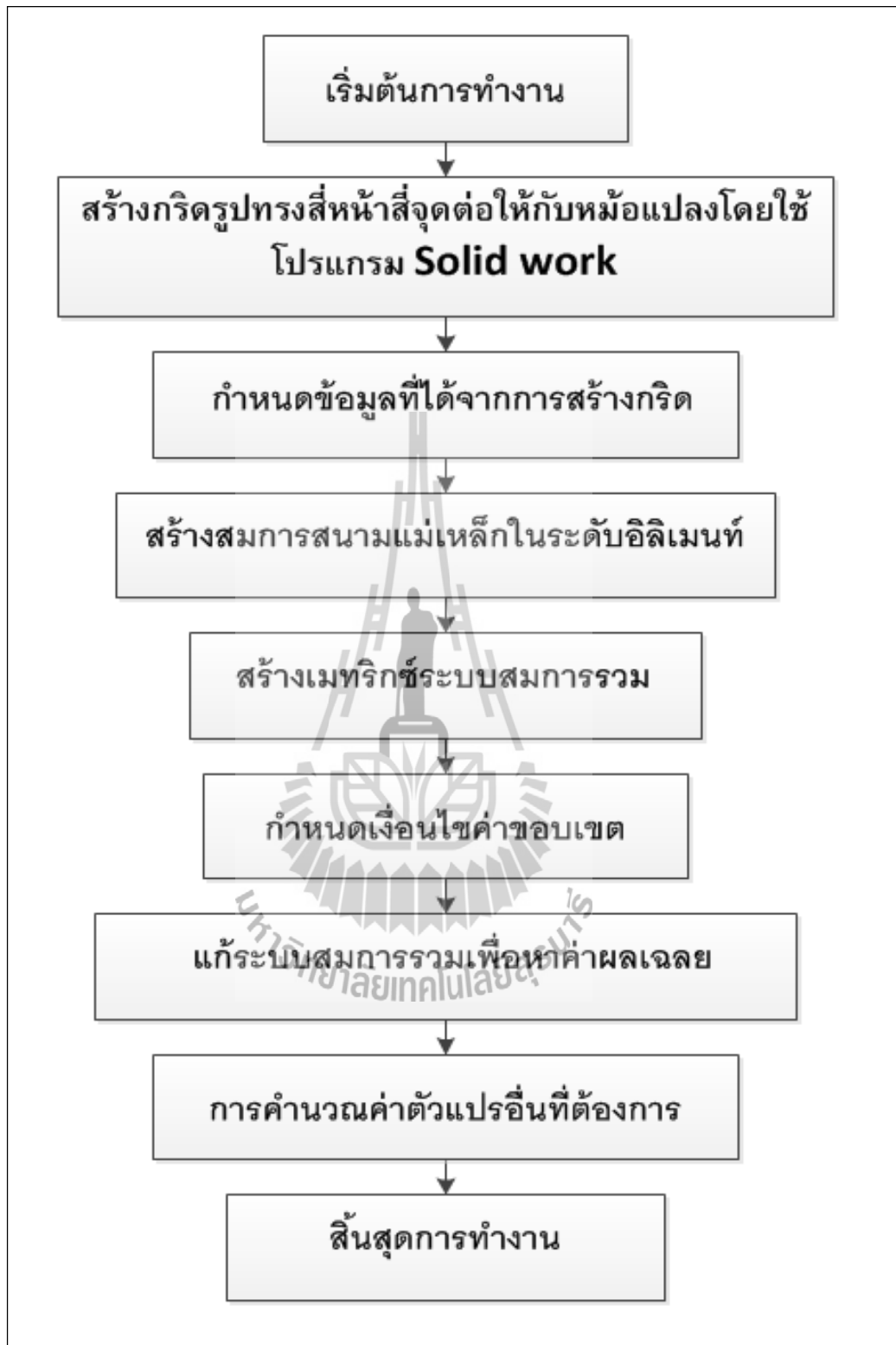
รูปที่ 3.5 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

3.2.2 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

ในขั้นตอนนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยข้อมูลที่จำเป็นในการประดิษฐ์โปรแกรมนั้นได้จากในหัวข้อ 3.2.1 ที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 3.6 และ รูปที่ 3.7 ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ



รูปที่ 3.7 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

จากแผนภูมิในรูปที่ 3.6 และรูปที่ 3.7 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลของระบบแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมและความแตกต่างระหว่างวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ อย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอน จะได้อธิบายถึงรายละเอียดหน้าที่ต่าง ๆ ของการดำเนินงานของระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ไปพร้อมๆ กันดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการกำหนดข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด : ขั้นตอนนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของ โหนดและอีลิเมนต์จากกล่องเครื่องมือ PDETOOL ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลประกอบด้วย จำนวนและตำแหน่งของ โหนด หมายเลขโหนดที่ประกอบขึ้นเป็นอีลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของอีลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของชิ้นงานในระบบ เป็นต้น สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของ โหนดและอีลิเมนต์จากโปรแกรม Solid work ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลจะได้เหมือนกับปัญหาแบบ 2 มิติ

ขั้นตอนการสร้างสมการสนามแม่เหล็กในระดับอีลิเมนต์ : ขั้นตอนนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมสามจุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติ ของทุก ๆ อีลิเมนต์ และสำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ ของทุก ๆ อีลิเมนต์ เนื่องจากภายในระบบมีชิ้นงานที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันอยู่ 3 ชนิด คือ แกนเหล็ก ขดลวดตัวนำและน้ำมันหม้อแปลง ซึ่งวัตถุทั้งสามมีค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าที่แตกต่างกันออกไปได้แก่ แกนเหล็กมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 2.08×10^6 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 3000 ส่วนขดลวดตัวนำมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 5.8×10^7 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 1 และน้ำมันหม้อแปลงมีค่าความนำไฟฟ้า (σ) เท่ากับ 1.08 s/m ค่าความซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ (μ_r) เท่ากับ 0.05 โดยการสร้างสมการอีลิเมนต์เมทริกซ์ของแต่ละอีลิเมนต์จะต้องคำนึงถึงค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าของวัตถุที่เกี่ยวข้องในแต่ละอีลิเมนต์นั้น ๆ ด้วย

ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม : ขั้นตอนนี้ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติโปรแกรมจะทำหน้าที่รวมสมการของอีลิเมนต์ย่อยเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ทั้งหมด n โหนดจะก่อให้เกิดเมทริกซ์ระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งสิ้น n สมการ

ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวม โดยงานวิจัยนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงทั้ง 4 ด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ ก็จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 3 มิติ คือค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจะต้องกำหนดทั้ง 6 ด้านให้มีค่าเท่ากับศูนย์

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย : ขั้นตอนนี้ ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โปรแกรมจะทำการแก้ระบบสมการรวมซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ประจำโหนดโดยการเลือกใช้ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ขั้นตอนการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการ : ขั้นตอนสุดท้ายนี้ จะนำค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ มาคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็ก โดยค่าสนามแม่เหล็กจะหาได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

3.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ โดยจะเน้นผลการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก แต่จะแสดงผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ เฉพาะค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก เพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างและความคล้ายคลึงกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เท่านั้น โดยทำการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ขนาด 400 kVA ในสภาวะไร้โหลดซึ่งจะแสดงดังนี้

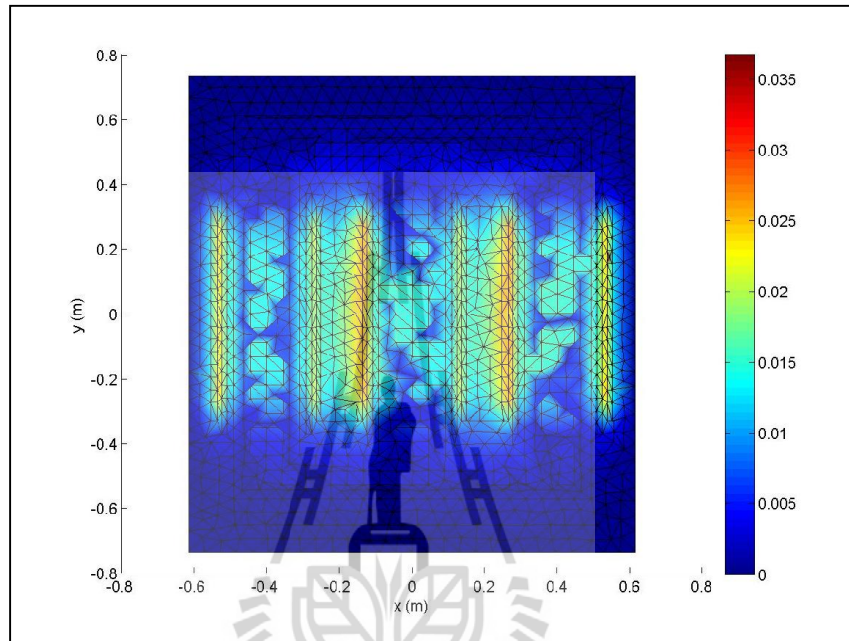
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.8

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.9

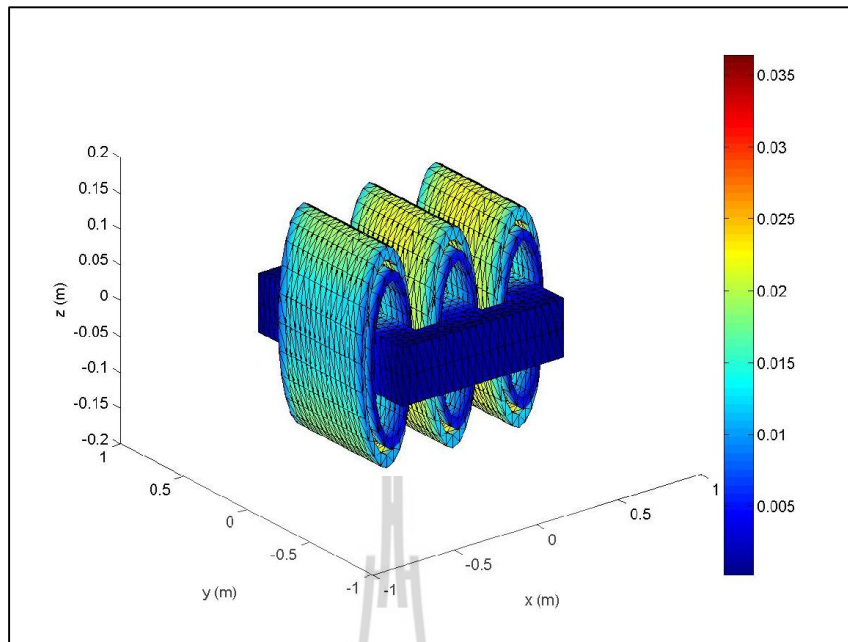
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.10

- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.11

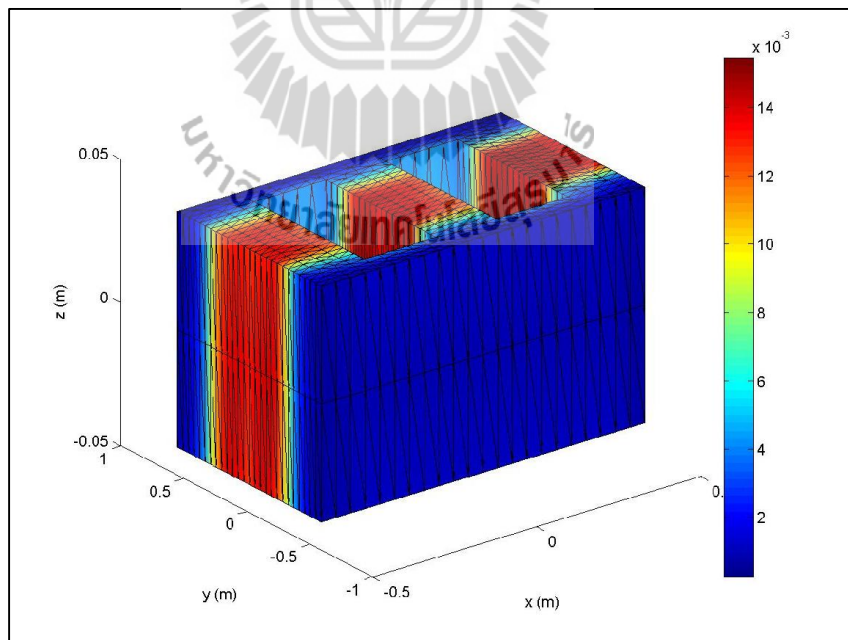
- การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 3.12



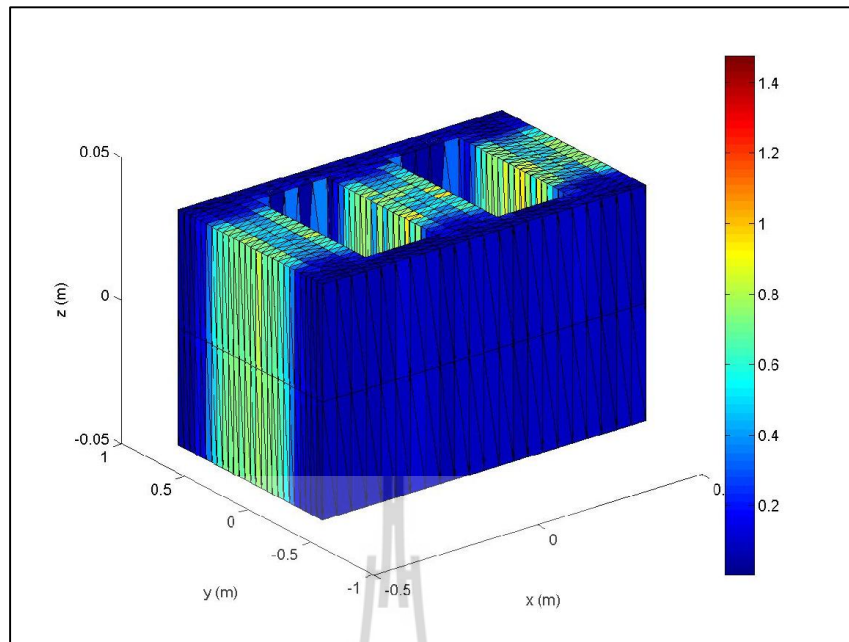
รูปที่ 3.8 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 2 มิติ



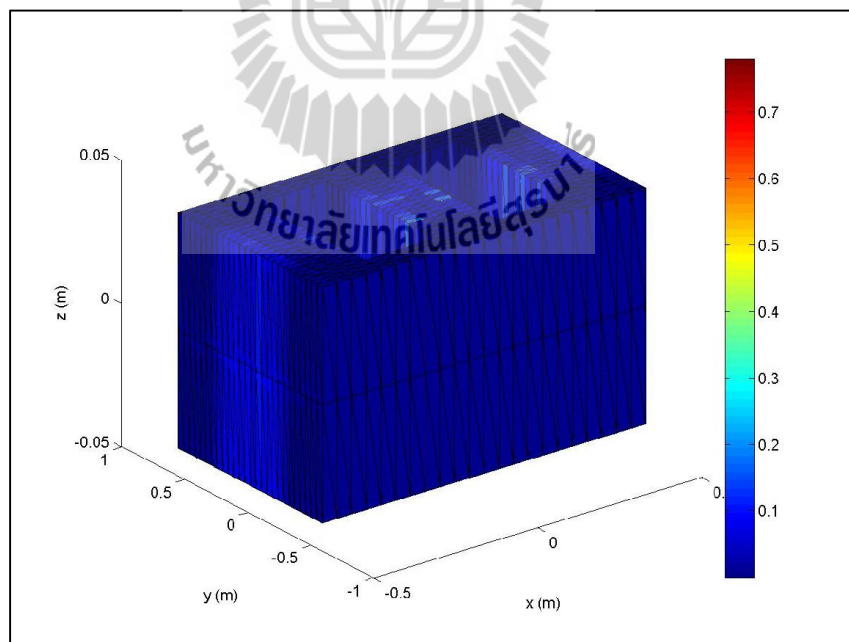
รูปที่ 3.9 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.10 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (Wb/m) ของหม้อแปลง
จำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.11 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (T) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ



รูปที่ 3.12 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียบริเวณแกนเหล็ก (W) ของหม้อแปลงจำหน่าย
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบ 3 มิติ

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณาพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แสดงในรูปที่ 3.8, 3.9 และ 3.10 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลง และผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 3.10 โดยที่บริเวณแกนเหล็กนั้นจะมีการกระจายตัวของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กที่สม่ำเสมอและมีความสมมาตร ซึ่งพิจารณาได้จากความสม่ำเสมอของสีบริเวณแกนเหล็ก ส่วนในรูปที่ 3.11 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่แสดงในรูปที่ 3.12 จะพบว่าบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบนั้นก็จะมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่สูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน อันเป็นผลมาจากค่าสนามแม่เหล็กบริเวณดังกล่าวมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่น โดยมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กตลอดทั้งปริมาตรมีค่าเท่ากับ 1,120 W

3.4 สรุป

บทที่ 3 เป็นการอธิบายโปรแกรมจำลองผลพร้อมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงาน สูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA แบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ในสภาวะไร้อโหลด ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB โดยเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลัก เพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา ซึ่งโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติและ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิดังรูปที่ 3.6 และ 3.7 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงกว่าบริเวณอื่น ๆ ส่งผลให้บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่มีขดลวดล้อมรอบอยู่ ถูกเหนี่ยวนำโดยขดลวดตัวนำ ทำให้มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นตาม ซึ่งทำให้สนามแม่เหล็กบริเวณนั้นมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นของแกนเหล็กเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูง ดังนั้นกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบก็จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน

บทที่ 4

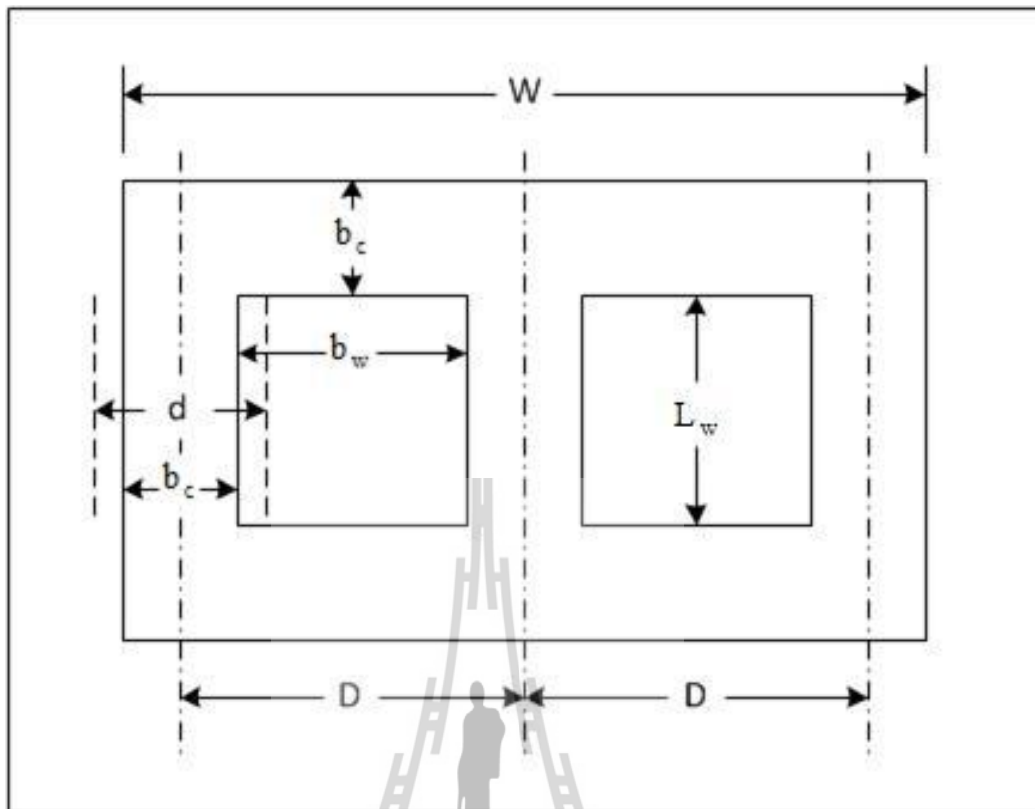
การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

4.1 บทนำ

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายในบทที่ 4 นี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อลดกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กให้น้อยลงกว่าเมื่อใช้แกนเหล็กแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยที่แกนเหล็กที่ใช้ออกแบบนั้นยังมีลักษณะคุณสมบัติของวัสดุเท่ากับแกนเหล็กแบบเดิมทุกประการ โดยที่จะพิจารณาถึงพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กและอัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กเป็นหลัก อีกทั้งการออกแบบนี้จะอาศัยการจำลองผลทางไฟฟ้า เพื่อแสดงถึงผลการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่เกิดขึ้น พร้อมทั้งอภิปรายผลที่ได้เปรียบเทียบกับแกนเหล็กที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

4.2 การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟสขนาด 400 kVA เพื่อลดกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กให้น้อยลงกว่าเมื่อใช้แกนเหล็กแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก จะพิจารณาโดยใช้อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กเป็นข้อกำหนดในการออกแบบ ประกอบกับพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้ ดังได้แสดงรายละเอียดตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่าง ๆ ในแกนเหล็กของหม้อแปลงไว้ในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่างๆ ที่ใช้ในการออกแบบแกนเหล็ก

จากรูปที่ 4.1 อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กนั้น สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.1) ดังนี้

$$a = \frac{L_w}{b_w} \quad (4.1)$$

เมื่อ a คือ อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก ในที่นี้จะพิจารณาที่ค่าระหว่าง 0.25 ถึง 4

L_w คือ ความสูงของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก

b_w คือ ความกว้างของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก

การออกแบบแกนเหล็กนั้นจำเป็นต้องรู้ค่าพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก (A_s) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังสมการที่ (4.2) ได้ดังนี้

$$E_t = 4.44 f B_m A_c \quad (4.2)$$

โดยที่

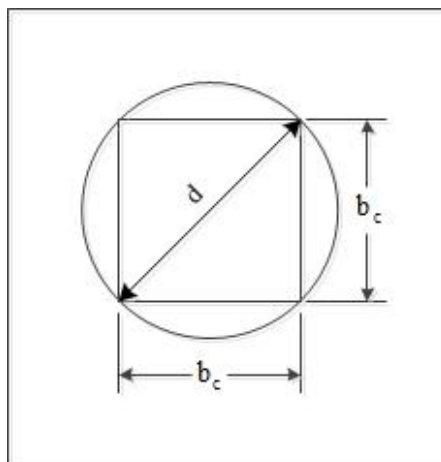
$$E_t = K \sqrt{kVA_{1\phi}} \quad (4.3)$$

นำสมการที่ (4.3) แทนลงในสมการที่ (4.2) จะได้

$$A_c = \frac{K \sqrt{kVA_{1\phi}}}{4.44 f B_m} \quad (4.4)$$

เมื่อ A_c คือ พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก
 K คือ ค่าคงที่ของหม้อแปลง
 f คือ ค่าความถี่ของกระแสไฟฟ้า (Hz)
 B_m คือ ค่าความหนาแน่นสูงสุดของเส้นแรงแม่เหล็ก
 kVA คือ ค่าของกำลังไฟฟ้าปรากฏ

ในการออกแบบนี้จะพิจารณาพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กเป็นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังแสดง
 ในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่ใช้พิจารณา

และเมื่อพิจารณาถึงรูปร่างของแกนเหล็กที่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น ก็จะสามารถหาค่าพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก (A_c) และความกว้างของแกนเหล็ก (b_c) โดยสามารถคำนวณจากสมการที่ (4.5) และสมการที่ (4.6) ตามลำดับ

$$A_c = b_c^2 \quad (4.5)$$

$$b_c = \sqrt{\frac{d^2}{2}} \quad (4.6)$$

สมการที่ (4.1) และสมการที่ (4.5) จะสามารถคำนวณหาขนาดของแกนเหล็กในส่วนอื่น ๆ ที่แสดงในรูปที่ 4.1 โดยเริ่มจากการพิจารณาพื้นที่ของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก (A_w) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$A_w = \frac{kVA_{3\phi}}{3.33 f B_m \delta k_w A_c} \quad (4.7)$$

เมื่อ δ คือ ความหนาแน่นกระแสเฉลี่ยของขดลวดปฐมภูมิ

และเมื่อพิจารณารูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่า

$$A_w = L_w \cdot b_w \quad (4.8)$$

นำสมการที่ (4.1) แทนลงในสมการที่ (4.8) จะได้

$$A_w = a \cdot b_w \cdot b_w \quad (4.9)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ (4.7) และสมการที่ (4.9) ร่วมกันแล้ว จึงสามารถหาค่าความกว้างของช่องว่างระหว่างแกนเหล็กได้ดังนี้

$$b_w = \sqrt{\frac{A_w}{a}} \quad (4.10)$$

โดยที่ A_w ได้จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (4.7)

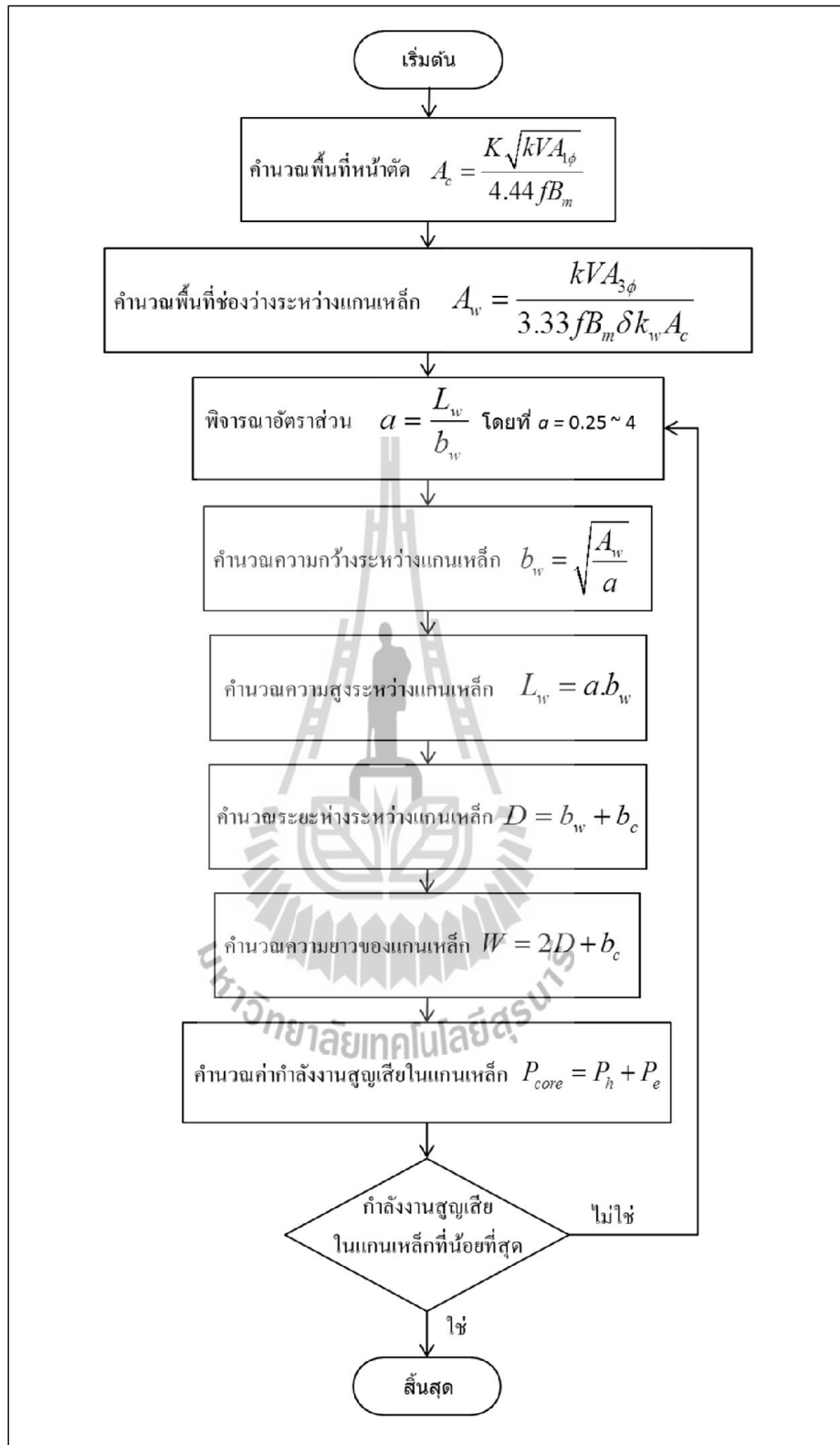
นำสมการที่ (4.10) แทนค่ากลับไปในสมการที่ (4.1) ก็จะสามารถหาความสูงของช่องว่างระหว่างแกนเหล็กได้ดังสมการที่ (4.11) และขนาดส่วนอื่น ๆ ของแกนเหล็กที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1 นั้นสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (4.12) และสมการที่ (4.13) ตามลำดับ

$$L_w = a.b_w \quad (4.11)$$

$$D = b_w + b_c \quad (4.12)$$

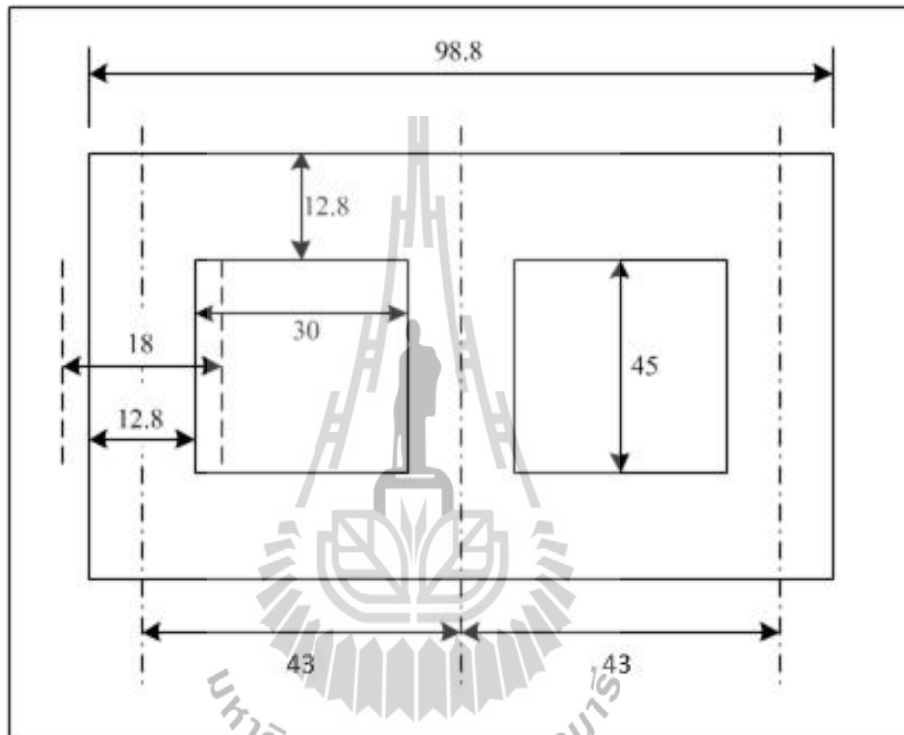
$$W = 2D + b_c \quad (4.13)$$





รูปที่ 4.3 แผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็ก

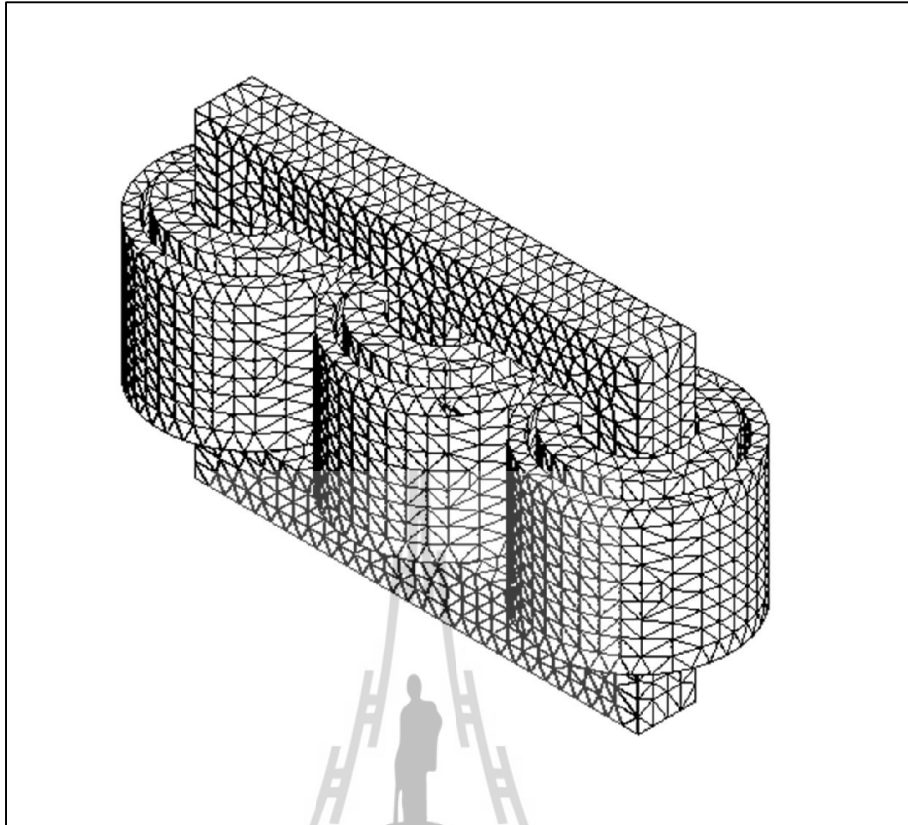
รูปที่ 4.3 เป็นการแสดงแผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็กที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อทำการคำนวณและพิจารณาแล้วพบว่าอัตราส่วนของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก (a) มีค่าเท่ากับ 1.5 ความกว้างของแกนเหล็ก (b_c) มีค่าเท่ากับ 12.8 cm ความกว้างและความสูงของระยะห่างระหว่างแกนเหล็ก (b_w, L_w) มีค่าเท่ากับ 30 cm และ 45 cm ตามลำดับ โดยที่ขนาดของแกนเหล็กในส่วนอื่น ๆ นั้นได้แสดงรายละเอียดการออกแบบที่สมบูรณ์ไว้ดังแสดงในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 ขนาดของแกนเหล็กหม้อแปลงที่ได้จากการออกแบบ (cm)

4.3 ผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ถูกออกแบบ

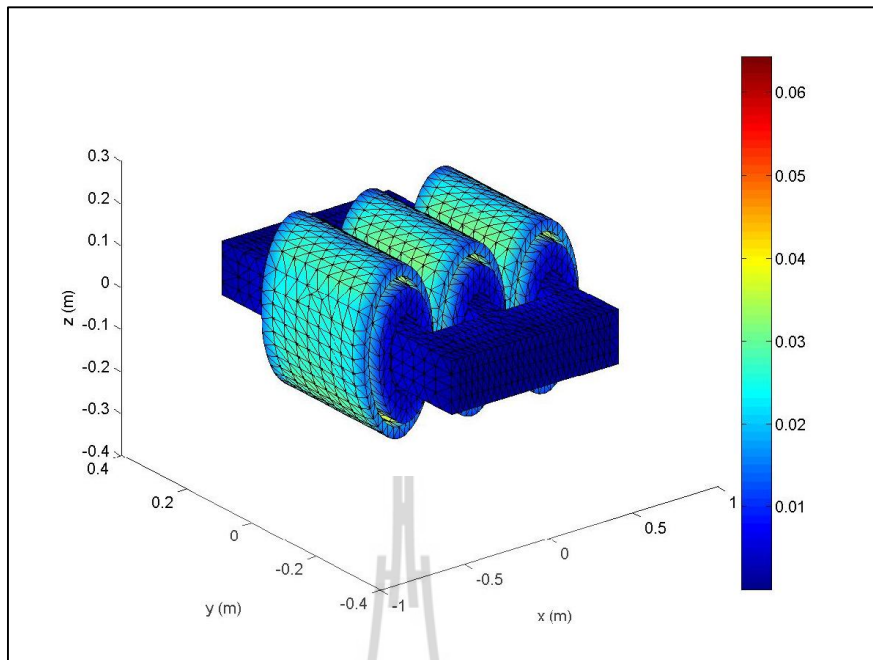
เมื่อทำการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงในหัวข้อที่ผ่านมาข้างต้นเรียบร้อยแล้ว ก็จะนำกระบวนการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 2 และบทที่ 3 มาใช้ในการจำลองผลอีกครั้ง ซึ่งในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติเท่านั้น โดยเริ่มจากการสร้างกริดของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ซึ่งประกอบด้วยจำนวน โหนดและเอลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่าย เป็น 20,200 โหนด และ 108,971 เอลิเมนต์ ตามลำดับ ดังแสดงได้ในรูปที่ 4.5



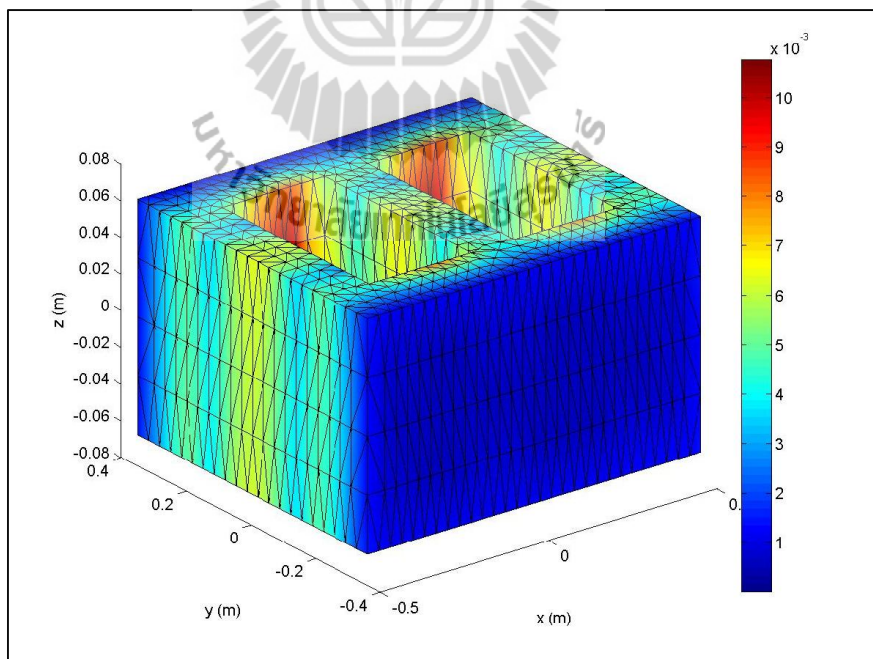
รูปที่ 4.5 การแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงเมื่อพิจารณา
การลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

ในส่วนของผลการจำลองการกระจายตัวของค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถแสดงรายละเอียดได้ดังต่อไปนี้

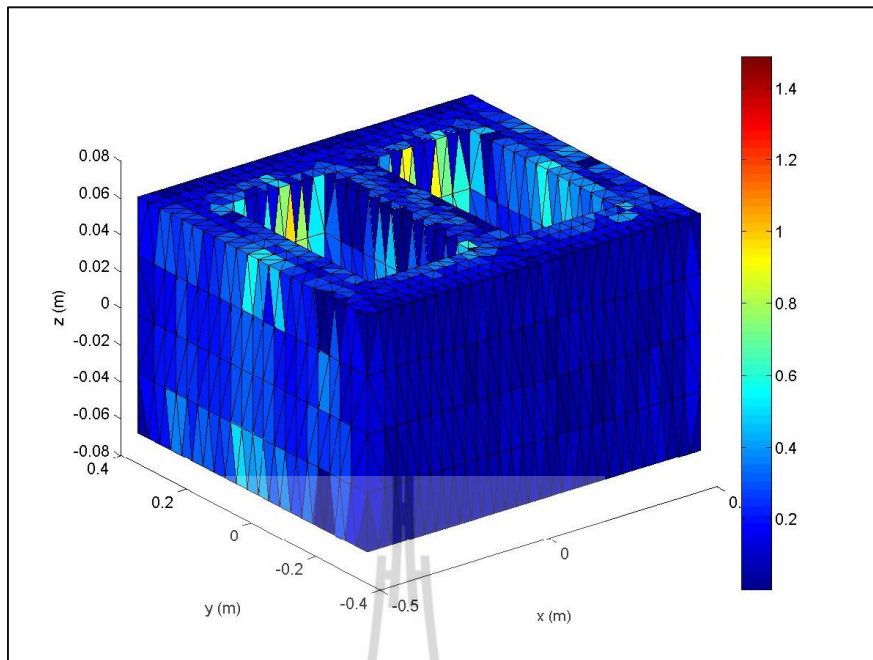
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 4.6
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 4.7
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 4.8
- การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 4.9



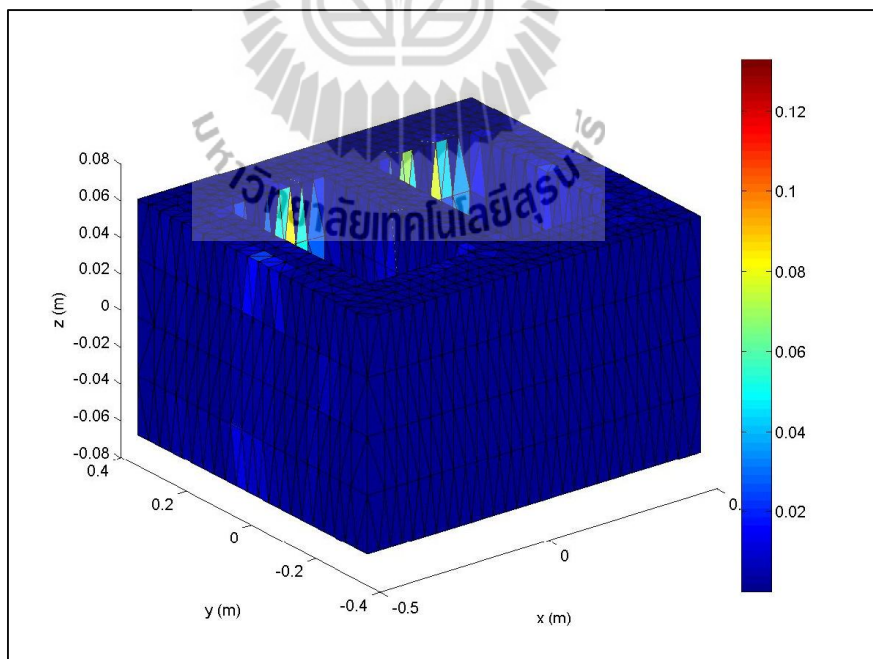
รูปที่ 4.6 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 4.7 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 4.8 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 4.9 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสีย (W) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณาพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่พิจารณาการลดกำลังงานสูญเสีย ที่แสดงในรูปที่ 4.6, 4.7 และ 4.8 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงในลักษณะเช่นเดียวกับผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 3

ส่วนผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายทั้งแบบที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 3 ประกอบกับผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กดังแสดงด้วยรูปที่ 4.9 หากพิจารณาผลลัพธ์ในเชิงภาพแล้วสิ่งที่พบได้คือค่อนข้างใกล้เคียงกัน แต่เมื่อพิจารณาในค่าของตัวเลขที่โปรแกรมได้คำนวณออกมานั้นจะพบถึงความแตกต่างกันอย่างชัดเจน ซึ่งโปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่ได้พัฒนาขึ้นนั้น ได้คำนวณค่าของกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กตลอดทั้งปริมาตรมีค่าเท่ากับ 1,120 W และในส่วนของหม้อแปลงที่ได้ออกแบบโดยพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียแล้วนั้นมีค่าตลอดทั้งปริมาตรเท่ากับ 670 W ซึ่งจะเห็นได้ว่าหม้อแปลงที่เน้นพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 % ทั้งนี้เป็นผลมาจากการออกแบบนั้นเน้นทำให้ปริมาตรของแกนเหล็กลดลงส่งผลให้ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลดลงด้วยเช่นกัน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยหลาย ๆ บทความที่มีกล่าวถึงกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

4.4 สรุป

บทที่ 4 เป็นการอธิบายถึงการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA เพื่อเน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กโดยพิจารณาจากพื้นที่หน้าตัดที่เป็นไปได้และอัตราส่วนระหว่างช่องว่างของแกนเหล็ก ผลที่ได้จากการออกแบบนั้นจะทำให้ปริมาตรรวมของแกนเหล็กมีขนาดลดลงจากเดิม ซึ่งขนาดของแกนเหล็กที่ได้ออกแบบสำเร็จแสดงได้ดังรูปที่ 4.4 และเมื่อจำลองผลด้วยโปรแกรมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลง เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้น จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า หม้อแปลงที่เน้นพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 %

บทที่ 5

สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุป

งานวิจัยนี้ ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยและการจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA เพื่อนำเสนอวิธีการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยพิจารณาจากขนาดพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้และอัตราส่วนระหว่างช่องว่างของแกนเหล็ก โดยในการจำลองผลพิจารณาในขณะที่หม้อแปลงอยู่ในสภาวะไร้โหลด การจำลองผลใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB ที่พัฒนาขึ้นเอง พร้อมตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมให้เป็นที่น่าเชื่อถือ

ในบทที่ 2 เป็นขั้นตอนการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองและอธิบายถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้เลือกใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตค่างของกาลเลอร์คิน ส่วนในบทที่ 3 เป็นการอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงความคล้ายคลึงและความแตกต่างของวิธีการคำนวณทั้ง 2 แบบ โดยได้เน้นการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก พร้อมนำเสนอผลการจำลองการกระจายตัวสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาหม้อแปลงแบบทั่วไปที่มีได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยกระบวนการสร้างกริดแบบ 2 มิติได้เลือกใช้กล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่อยู่ในโปรแกรม MATLAB และการสร้างกริดแบบ 3 มิติได้เลือกใช้โปรแกรม Solid work และในบทที่ 4 ได้อธิบายถึงขั้นตอนการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยพิจารณาจากขนาดพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้และอัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก พร้อมนำเสนอผลการจำลองการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ได้พิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่มีผลกระทบมาจากสนามแม่เหล็ก เมื่อพิจารณาหม้อแปลงอยู่ในสภาวะไร้โหลดด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ จากการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พบว่าหม้อแปลงที่เน้นพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 %

5.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต

1. คำนวณความร้อนที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย อันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก
2. ออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายโดยพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ควบคู่กับการพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในขดลวด เพื่อให้ได้กำลังงานสูญเสียในหม้อแปลงน้อยที่สุด



บรรณานุกรม

- ปราโมทย์ เคะชะอำไพ. (2547). ไฟฟ้าในต้อลิเมนต์ในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เคะชะอำไพ. (2549). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เผด็จ เผ่าละออ. (2548). การออกแบบแนวใหม่ขงมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการสันเสทือนโดยวิธีไฟฟ้ในต้อลิเมนต์. วิทยานิพนธ์คุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- พีรวัจน์ มีสุข. (2554). การคำนวณอุณหภูมิขงหม้อแปลงจำหน่ายในสภาวะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผลต่ออายุการใช้งานขงฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟฟ้ในต้อลิเมนต์แบบ 3 มิติ. วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- อานนท์ อิศรมงคลรักษ์. (2552). การออกแบบอุปกรณ์กำบังสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีผลต่อผู้ปฏิบัติงานที่ทำงานได้สายส่งกำลังไฟฟ้าด้วยวิธีไฟฟ้ในต้อลิเมนต์แบบ 3 มิติ. วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- Babaie, H., and Farahani, F. F. (2010). Analysis of Thermal Behavior of High Frequency Transformers Using Finite Element Method. **J.Electromagnetic Analysis & Application**, 2, 627-632.
- Christopoulos, C. (1995). The Transmission-Line Modeling Method: TLM, **IEEE Press, USA**.
- Dasgupta, I. (2002). Design of Transformers, **McGraw Hill, New Delhi**.
- Demerdash, N. A., and Gillott, D. H. (1974). A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials. **IEEE Transactions on Magnetics**, 74, 682-685.
- Fu, W. N. (1999). **Electromagnetic field analysis of induction motors by finite element method and its application to phantom loading**. Ph.D. Dissertation, Hong Kong Polytechnic University, China.
- Hernandez, C., and Arjona, M. A. (2007). Design of distribution transformers based on a knowledge-based system and 2D finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**. 43: 659-665.

- Hwang, C. C., Tang, P. H., and Jiang Y. H. (2005). Thermal analysis of high-frequency transformers using finite elements coupled with temperature rise method. **IEEE Proceedings Electric Power Applications**. 4: 832-836.
- Kim, B. T., Kwon, B. I., and Park, S. C. (1999). Reduction of electromagnetic force harmonics in asynchronous traction motor by adapting the rotor slot number. **IEEE Transactions on Magnetics**. 35 (5): 3742-3744.
- Kulkarni, S. V., and Khaparde, S. A. (2004). Transformer Engineering Design and Practice, **Marcel Dekker, Inc, USA**.
- Mittle, V. N., and Mittle, A. (1996). Design of electrical machines. **Standard Publishers**.
- Pao-la-or, P., Kulworawanichpong, T., Sujitjorn, S., and Peaiyoung, S. (2006). Distributions of flux and electromagnetic force in induction motors: A finite element approach. **WSEAS Transactions on Systems**, 5(3), 617-624.
- Preis, K., Biro, O., Buchgraber, G., and Ticar, L. (2006). Thermal-electromagnetic coupling in the finite-element simulation of power transformers. **IEEE Transactions on Magnetics**, 42(4), 999-1002.
- Preston, T. W., Reece, A. B. J., & Sangha, P. S. (1988). Induction motor analysis by time stepping techniques. **IEEE Transactions on Magnetics**, 24(1), 471-474.
- Sadiku, M. N. O., and Peterson, A. F. (1990). A comparison of numerical methods for computing electromagnetic fields. **Southeastcon'90 proceeding**, IEEE. 42-47.
- Samesima, M. I., Wilson, R. J., and Araujo, S. C. N. (1995). Analysis of transformer loss of life driving nonlinear industrial loads by the finite elements approach. **Thirtieth IAS Annual Meeting**, IEEE. 2175-2179.
- Smolka, J., Ingham, D. B., Elliott, L., and Nowak, A. J. (2007). Enhanced numerical model of performance of an encapsulated three-phase transformer in laboratory environment. **Applied Thermal Engineering**. 27 , 156-166.
- Taheri, Sh., Vahedi, A., Gholami, A., and Taheri, H. (2008). Estimation of Hot Spot Temperature in Distribution Transformer Considering Core Design Using. **IEEE International Conference on Power and Energy**. 1403-1413.

- Tsili, M. A., Amoiralis, E. I., Kladas, A. G., and Souflaris, A. T. (2009). Hybrid Numerical-Analytical Technique for Power Transformer Thermal Modeling. **IEEE Transactions on Magnetics**. 45(3): 1408 – 1411.
- Vecchio, R. D., Poulin, B., Feghali, P. T., and Ahuja, R. (2001). Transformer design principles with applications to core-form power transformers. **Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam**.



ประวัติผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ เป็นอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชา วิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี สำเร็จการศึกษาในระดับปริญญาตรี ปริญญาโท และปริญญาเอก จากสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ดำเนินงานวิจัยด้าน Applied FEM for Electromagnetic Field, for Electrical Machine, and for Heat Transfer แล ะ Applied AI มีผลงานวิจัยตีพิมพ์ระดับชาติและนานาชาติมากกว่า 40 เรื่อง จดสิทธิบัตร 1 ผลงาน และ ลิขสิทธิ์โปรแกรม 3 ผลงาน

นายอริยศักดิ์ จิตธรรมสาร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตร บัณฑิต (วิศวกรรม ไฟฟ้า) ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมาใน ปี พ.ศ. 2550 ภายหลังจากสำเร็จการศึกษาได้เข้าศึกษาต่อระดับบัณฑิตศึกษาหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร มหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี โดยได้เป็นผู้ช่วยสอนปฏิบัติการ ของสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จำนวน 4 รายวิชา ได้แก่ ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้ามูลฐาน ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้า 2 ปฏิบัติการ การแปลงผันพลังงานกลไฟฟ้า และปฏิบัติการวงจรอิเล็กทรอนิกส์ ทั้งนี้มีความสนใจในด้านการ วิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและการประยุกต์ใช้ FEM ในงานระบบไฟฟ้ากำลัง