

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 บทนำ

การศึกษาและเข้าใจถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย นับว่ามีความสำคัญ และเป็นประโยชน์อย่างมากในการดำเนินงาน ทั้งนี้เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ และความเข้าใจในงานสำหรับนำไปเป็นแหล่งอ้างอิงในการดำเนินงานวิจัย ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบไปด้วย หัวข้อหลัก ได้แก่ (1) หม้อแปลงไฟออโซอิเล็กทริก (2) วงจรบัลลาสต์ไฟออโซอิเล็กทริก (3) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยจะกล่าวถึงเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์หรือถูกกล่าวอ้างถึงการดำเนินงานวิทยานิพนธ์นี้ ทั้งนี้เพื่อให้เนื้อหา มีความกระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น

3.2 หม้อแปลงไฟออโซอิเล็กทริก

แนวทางการคิดค้นก่อนกำเนิดหม้อแปลงไฟฟ้าชนิดไฟออโซอิเล็กทริกได้ถูกตีพิมพ์ครั้งแรกโดย Rosen Fish และ Rathenberg และได้ทำการจดสิทธิบัตรพร้อมอธิบายรายละเอียดไว้ในประเทศสหรัฐอเมริกาหมายเลขจดสิทธิบัตร US2,830,274 ในปี ค.ศ. 1954 หลังจากนั้น 50 ปีต่อมาเทคโนโลยีนี้กลายเป็นหนึ่งทางเลือกที่มีการนำมาใช้แทนหม้อแปลงชนิดขดลวดสนามแม่เหล็กมากที่สุดในการประยุกต์ใช้ในระบบไฟฟ้ากำลังในวงกว้าง หม้อแปลงชนิดไฟออโซอิเล็กทริกทำหน้าที่เปลี่ยนพลังงานไฟฟ้า (electrical energy) ให้เป็นพลังงานกลและเปลี่ยนพลังงานกลให้เป็นพลังงานไฟฟ้าเพราะฉะนั้นแล้ววัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการสร้างหม้อแปลงไฟออโซอิเล็กทริกต้องคัดเลือกคุณสมบัติที่มีความเหมาะสมเป็นพิเศษ โดยนิยมใช้วัสดุไฟออโซอิเล็กทริกเซรามิก (piezoelectric ceramic) ที่มีคุณสมบัติพิเศษ คือจะมีการคุณสมบัติเปลี่ยนแปลงก็ต่อเมื่อได้รับการสั่นสะเทือนตรงกับความถี่เรโซแนนซ์ โดยถ้ามีการออกแบบที่เหมาะสม ไฟออโซอิเล็กทริกเซรามิกจะมีคุณสมบัติสามารถแปลงแรงดันให้เป็นชนิด step up หรือ step down ของหม้อแปลงไฟออโซอิเล็กทริก (piezoelectric transformer : PT) ได้โดยไม่ใช้ขดลวด หรือวัสดุที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก

ในการคิดค้นออกแบบหม้อแปลงไฟออโซอิเล็กทริก การพัฒนาเทคโนโลยีนี้ยังไม่ประสบความสำเร็จในเชิงพาณิชย์ จนกระทั่งทศวรรษที่ 90 ในช่วงเวลานั้นมีการผลิตจากหลายบริษัท ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นบริษัทที่อยู่ในประเทศญี่ปุ่น โดยมีการแสดงผลงานการสร้างและการประยุกต์ใช้ร่วมกับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขนาดพกพา โดยมีคุณสมบัติที่ให้อัตราการขยายแรงดันสูง และได้รับ

สัญลักษณ์แสดงถึงอุปกรณ์ที่ไม่สร้างและแพร่กระจายของสนามแม่เหล็ก หรือเกิดน้อย (electromagnetic interference : EMI) แต่อย่างไรก็ตามการสร้างและพัฒนาในการนำมาประยุกต์ใช้นั้นก็ยังอยู่บนพื้นฐานการออกแบบด้วยโครงสร้างหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์ชนิด Rosen (Rosen type PT)

ในปัจจุบันนี้หม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย เช่น จอแสดงผลแบบ LCD ในคอมพิวเตอร์ โน้ตบุ๊กและอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์แบบพกพาได้หลายชนิด ในแต่ละปีหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์มีการซื้อและขายเฉลี่ยมากกว่า 20 ล้านชิ้น ตั้งแต่ปี ค.ศ. 2000 เป็นต้นมา และมีรายงานจากโรงงานผู้ผลิตหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์ในประเทศญี่ปุ่นว่ามีผลการดำเนินการเติบโตของสายการผลิตเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 10% ทุกปี เนื่องจากหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์มีความเสถียรภาพจึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับ LCD ของจอคอมพิวเตอร์และอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์อื่น ๆ แต่การสร้างหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์ต้องใช้เทคโนโลยีขั้นสูง (วัสดุวงจรอิเล็กทรอนิกส์สำหรับจ่ายกำลังไฟฟ้าขนาดและขั้นตอนการผลิต) จึงเป็นสิ่งที่กระตุ้นให้นักวิจัยจำนวนมากสนใจต้องการเผยแพร่เทคโนโลยีการสร้างและการนำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์แขนงอื่น ๆ ดังนั้นนี่คือโอกาสที่ทำให้เกิดการแข่งขันเชิงพาณิชย์ในการสร้างหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์อย่างมาก

ในปัจจุบันเทคโนโลยีในโรงงานอุตสาหกรรมมีแนวทางการพัฒนาไปใน 2 ทิศทางคือการลดต้นทุนการผลิตและเพิ่มมูลค่าของสินค้าที่ผลิตให้มีมูลค่ามากขึ้นกับแนวโน้มของวัสดุที่ใช้ทำไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์มีราคาลดลงและคาดว่าจะยังคงมีราคาลดลงอย่างต่อเนื่อง ดังนั้นเทคโนโลยีการผลิตและออกแบบหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์จึงกลายเป็นอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์

ในปัจจุบันเทคนิคเชิงพาณิชย์ของโรงงานอุตสาหกรรมมีแนวทางการดำเนินงานเพื่อความอยู่รอดไปใน 2 แนวทาง คือการลดต้นทุนของสินค้าและเพิ่มมูลค่าของสินค้าที่ผลิตซึ่งจะเห็นได้จากกรณีวิเคราะห์ราคาต้นทุนวัสดุที่จะนำมาใช้ในการผลิตไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์เซรามิกในตลาดการผลิตมีแนวโน้มของราคาที่ต่ำลง โดยคาดว่าจะยังคงลดต่ำลงอย่างต่อเนื่อง ดังนั้นการพัฒนาเทคโนโลยีการผลิตและออกแบบหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์จะกลายเป็นเทคโนโลยีใหม่ซึ่งน่าจะเป็นคู่แข่งที่จะมาแทนที่การสร้างหม้อแปลงไฟฟ้าชนิดขดลวดอย่างแน่นอน ทั้งในเรื่องของผลกระทบต่อด้านราคาต้นทุนและความเสถียรที่ครอบคลุมถึงพื้นที่ใช้ในการติดตั้งน้อย

เมื่อไม่นานมานี้มีผู้นำการทางการตลาดอิเล็กทรอนิกส์ รายงานการพัฒนาการเพิ่มมูลค่าของสินค้าโดยมีปัจจัยที่สำคัญอยู่ 2 กรณี คือการเพิ่มมูลค่าของสินค้าอิเล็กทรอนิกส์ด้วยการลดขนาดของหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์และการเพิ่มขนาดกำลังไฟฟ้าให้สูงขึ้น

ข้อดีของคุณสมบัติของหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์ที่เหมาะสมกับการนำมาประยุกต์ใช้ในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ คือมีอิมพีแดนซ์ด้านขาออกต่ำ มีความสามารถทนกำลังไฟฟ้าสูงและมีประสิทธิภาพสูงภายใต้สภาวะ step down ซึ่งในการออกแบบหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทรอนิกส์นั้นมีการ

ออกแบบเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ที่แตกต่างกันตามการใช้งาน แต่ยังคงอยู่ภายใต้แนวทางการคิดแบบดั้งเดิมของ Rosen ในปัจจุบันนี้มีการออกแบบไพเอโซอิเล็กทริกที่มีโครงสร้างหลายชนิดเช่นระบบการแพร่ในแนวรัศมี (radial type) ชื่อ ทรานโซเนอร์ (transoner) ซึ่งเคยถูกนำเสนอตีพิมพ์ผลงานถึงด้านเทคโนโลยีการออกแบบเพื่อเพิ่มความสามารถในการทนกำลังไฟฟ้าระดับสูงได้เป็นผลสำเร็จ โดยมีความสามารถทนกำลังไฟฟ้าได้มากกว่า 100 W ด้วยความเข้มข้นกำลังขนาด $30 - 40 \text{ W/cm}^2$

ในปัจจุบันมีการออกแบบพัฒนาหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกให้สามารถทนกำลังได้ 0.5 W และมีอัตราขยายมากกว่า 50 เท่า ซึ่งในอนาคตคาดว่าจะมีการออกแบบให้มีขนาดเล็กลงยิ่งไปกว่านี้อีกจนถึงระดับการประยุกต์ใช้งานในระบบทางกลไฟฟ้าขนาดเล็ก (มณฑกานต์ พิรศักดิ์โสภณ, 2553)

3.2.1 ประวัติความเป็นมาของหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริก

ตั้งแต่ที่มีการสร้างพร้อมกับพัฒนาหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกเซรามิกเป็นระยะเวลา 50 ปี ในครั้งแรกของการประดิษฐ์คิดค้นหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกจนเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายจากการจดสิทธิบัตรของ Rosen และคณะ ในวันที่ 4 มกราคม ค.ศ. 1954 และได้รับการอนุมัติในวันที่ 8 เมษายน ค.ศ. 1958 (Rosen et al., 1958) ตั้งแต่นั้นมามีการนำความคิดนี้ไปสร้างและประยุกต์ใช้หลังจากมีการนำไปประยุกต์ครั้งแรก ต่อมา เมื่อวันที่ 17 ตุลาคม ค.ศ. 1956 โดย Jaffe และ Dan จากบริษัท Clevite Company มีการจดสิทธิบัตรใบที่สองของการเกิดเทคโนโลยีหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกซึ่งได้รับการอนุมัติในวันที่ 24 มกราคม ค.ศ. 1961 (Jaffe and Don, 1961) ตั้งแต่นั้นมาเทคโนโลยีของการสร้างหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกก็เติบโตขึ้นอย่างต่อเนื่องเมื่อเร็ว ๆ นี้มีรายงานในธุรกิจประเมินการซื้อและขาย หม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริก จำนวน 25 - 30 ล้านตัว ในช่วง ค.ศ. 1990 - 2002 ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้กับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจะเห็นว่าการเจริญเติบโตของเทคโนโลยีการผลิตหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกคว่ามีความประสบความสำเร็จในการนำไปใช้แทนหม้อแปลงชนิดขดลวดตัวนำ

หม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกเป็นอุปกรณ์ทางด้านอิเล็กทรอนิกส์ที่สร้างจากเซรามิก เช่น Quartz, LithiumNiobate และ PZT (lead zirconate titanate) มีหลักการทำงานโดยอาศัยการสั่นสะเทือนเป็นตัวกลางในการส่งถ่ายพลังงาน โดยทางด้านอินพุตจะแปลงพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกลก่อนแล้วจะแปลงพลังงานกลกลับเป็นพลังงานไฟฟ้าอีกครั้งทางด้านเอาต์พุต โดยจะส่งถ่ายพลังงานทางกลในรูปการสั่น ซึ่งหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกมีคุณสมบัติที่สำคัญคือ ขนาดเล็ก น้ำหนักเบา ทำงานโดยไม่ใช้การเหนี่ยวนำของสนามแม่เหล็ก ประสิทธิภาพสูงและทำงานที่พิสัยความถี่สูง ช่วยลดการสิ้นเปลืองพลังงาน ทำให้ขนาดของวงจรที่นำมาใช้มีขนาดเล็กลง ไม่ก่อให้เกิดเสียงรบกวนในขณะทำงานและช่วยเพิ่มความปลอดภัยในการทำงานมากขึ้นเนื่องจากหม้อแปลง

ไพโซอิเล็กทริกจะไม่ทำให้เกิดควันหรือประกายไฟ ด้วยคุณสมบัติต่าง ๆ นี้จึงเหมาะที่จะนำมาพัฒนาเป็นแหล่งจ่ายไฟฟ้าให้กับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีขนาดเล็กและมีพื้นที่ใช้งานอยู่อย่างจำกัด ซึ่งหัวข้อต่อไปนี้จะอธิบายถึงโครงสร้างและการทำงานของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกที่ประยุกต์มาจากหลักการทำงานของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก ดังนี้คือ (มนทล นาวงษ์, 2546)

3.2.2 ไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

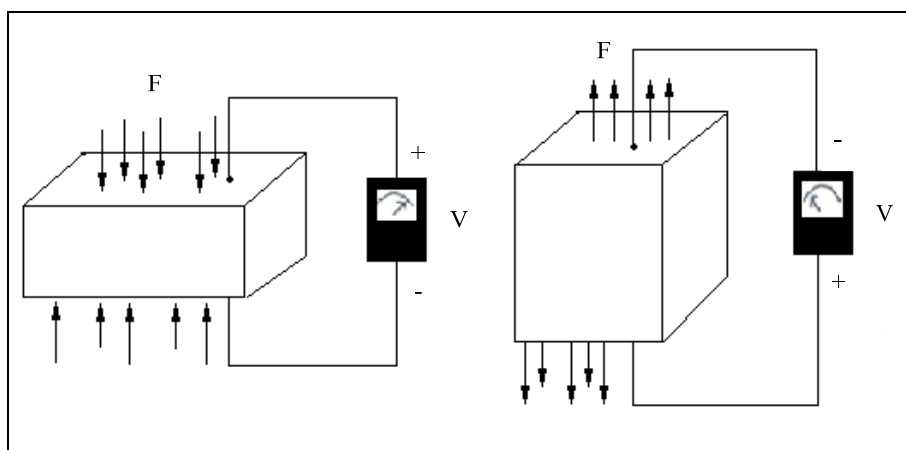
ปัจจุบันอุปกรณ์ทางด้านอิเล็กทรอนิกส์หลายชนิดที่ผลิตขึ้นมาโดยใช้วัสดุประเภทไพโซอิเล็กทริกเซรามิก เพราะการผลิตทำได้ง่าย ประสิทธิภาพสูง สามารถลดขนาด และน้ำหนักของอุปกรณ์ลงได้มาก ตัวอย่างอุปกรณ์ที่ผลิตจากสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิกได้แก่ รีซีฟเวอร์ (receivers) แอลซวาลเอเตอร์ (actuators) อัลตราโซนิคมอเตอร์ (ultrasonic motor) หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก (piezoelectric transformers) เป็นต้น

3.2.3 หลักการทำงานของสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

ไพโซอิเล็กทริกเซรามิก คือสารเซรามิกที่มีคุณสมบัติสำคัญอยู่สองอย่างซึ่งจะประกอบด้วย คุณสมบัติอย่างแรกสามารถเปลี่ยนรูปพลังงานจากพลังงานทางกลเป็นพลังงานทางไฟฟ้า เมื่อมีการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุที่เป็นสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิก ทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมวัตถุนั้นและคุณสมบัติอย่างที่สองคือสามารถเปลี่ยนรูปจากพลังงานทางไฟฟ้าเป็นพลังงานทางกล โดยเมื่อมีแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมวัตถุที่เป็นสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิก แล้วทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างวัตถุ

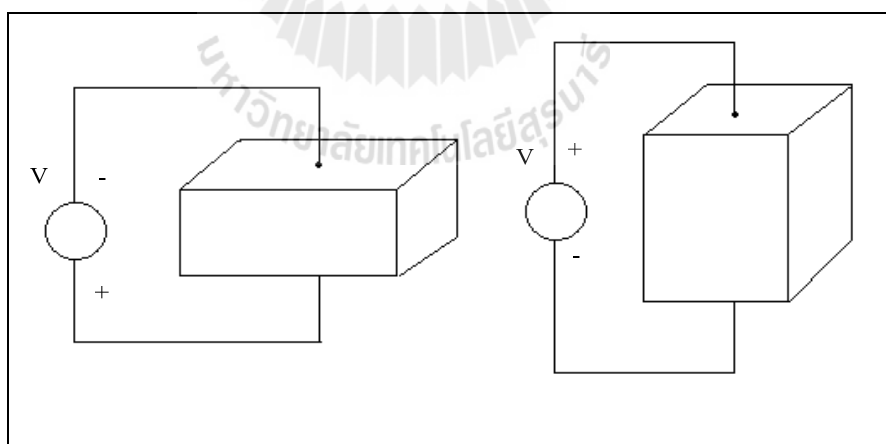
ดังนั้นคุณสมบัติในการทำงานของสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิกจะประกอบด้วย คุณสมบัติทางกลและคุณสมบัติทางไฟฟ้า โดยคุณสมบัติทางกลของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก ประกอบด้วยความเค้น (stress : T) ความเครียด (strain : S) และคุณสมบัติทางไฟฟ้าของสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิก ประกอบด้วย สนามไฟฟ้า (electric : E) โพลาริเซชัน (polarization : P) การทำงานสองลักษณะดังกล่าวสามารถอธิบายโดยละเอียดได้ดังนี้คือ

1. การทำงานของไพโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ (piezoelectric transducers, direct effect) คือเมื่อมีแรงกระทำกับวัตถุที่เป็นไพโซอิเล็กทริกเซรามิกในลักษณะของแรงดึงหรือแรงกดแล้วมีผลทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุนั้น ซึ่งทิศทางของแรงดันไฟฟ้าแปรตามลักษณะการกดหรือการดึง ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ตัวอย่างการทำงานลักษณะนี้ได้แก่อุปกรณ์วัดค่าปริมาณต่าง ๆ เช่น วัดความดันอากาศ วัดความเครียดภายในชิ้นส่วนของวัสดุ เป็นต้น



รูปที่ 3.1 การทำงานของไพโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์

2. การทำงานของไพโซอิเล็กทริกแอกชูเอเตอร์ (piezoelectric actuators, inverse effect) คือวัสดุที่เป็นสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิกที่มีลักษณะการยืดหรือหดได้เมื่อมีการป้อนแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุนั้น ถ้ามีการป้อนแรงดันไฟฟ้าที่มีความถี่แบบสลับขั้วต่อเนื่องก็จะทำให้วัตถุนั้นเกิดการสั่นได้ ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ตัวอย่างการทำงานลักษณะนี้ได้แก่หัวพิมพ์ของเครื่องพิมพ์ชนิดพ่นหมึก (inkjet printer) เป็นต้น

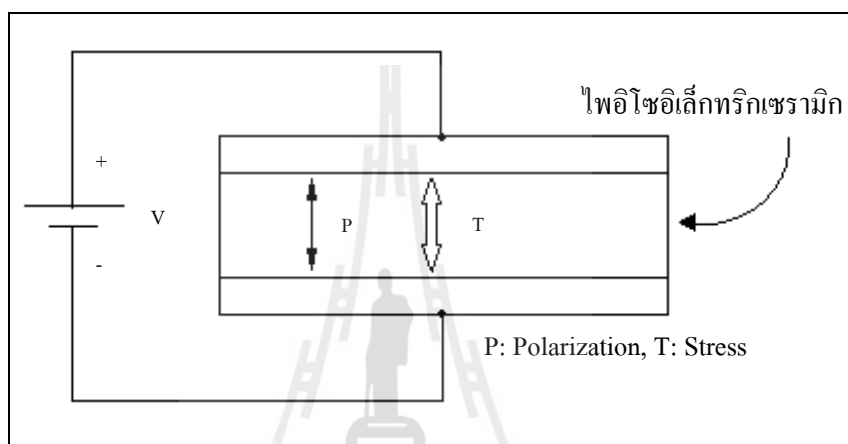


รูปที่ 3.2 การทำงานของไพโซอิเล็กทริกแอกชูเอเตอร์

3.2.4 ลักษณะการทำงานของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

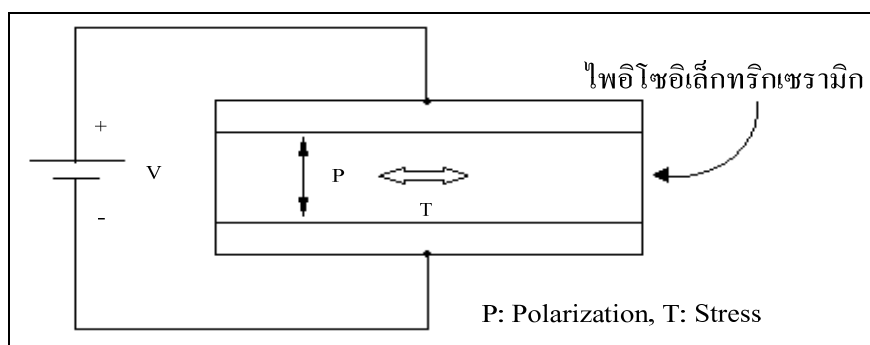
ไพโซอิเล็กทริกเซรามิกมีลักษณะการทำงานอยู่สองลักษณะการทำงานด้วยกัน คือการทำงานในลักษณะของ longitudinal mode และ transverse mode

1. การทำงานในลักษณะของ longitudinal mode เมื่อมีแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุที่เป็นไพโซอิเล็กทริกเซรามิก แล้วทำให้วัตถุนั้นเกิดการยืดหรือหดในแนวทิศทางเดียวกับแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุนั้น ดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ลักษณะการทำงานของ longitudinal mode ของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

2. การทำงานในลักษณะของ transverse mode เมื่อมีแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุที่เป็นไพโซอิเล็กทริกเซรามิก แล้วทำให้วัตถุนั้นเกิดการยืดหรือหดในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางของแรงดันไฟฟ้าที่ขั้วของวัตถุนั้น ดังแสดงในรูปที่ 3.4

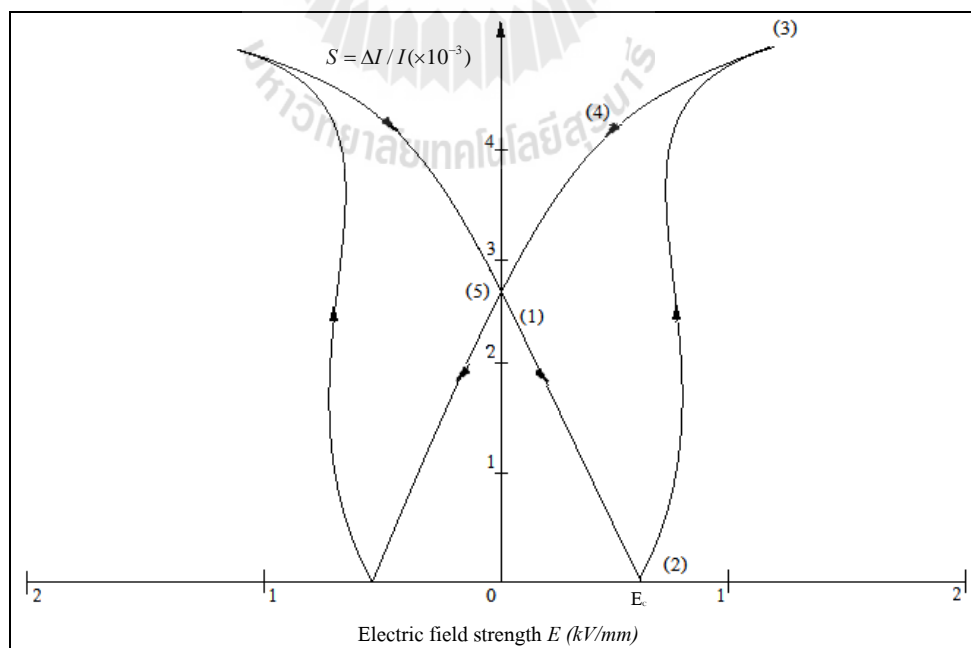


รูปที่ 3.4 ลักษณะการทำงานของ transverse mode ของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

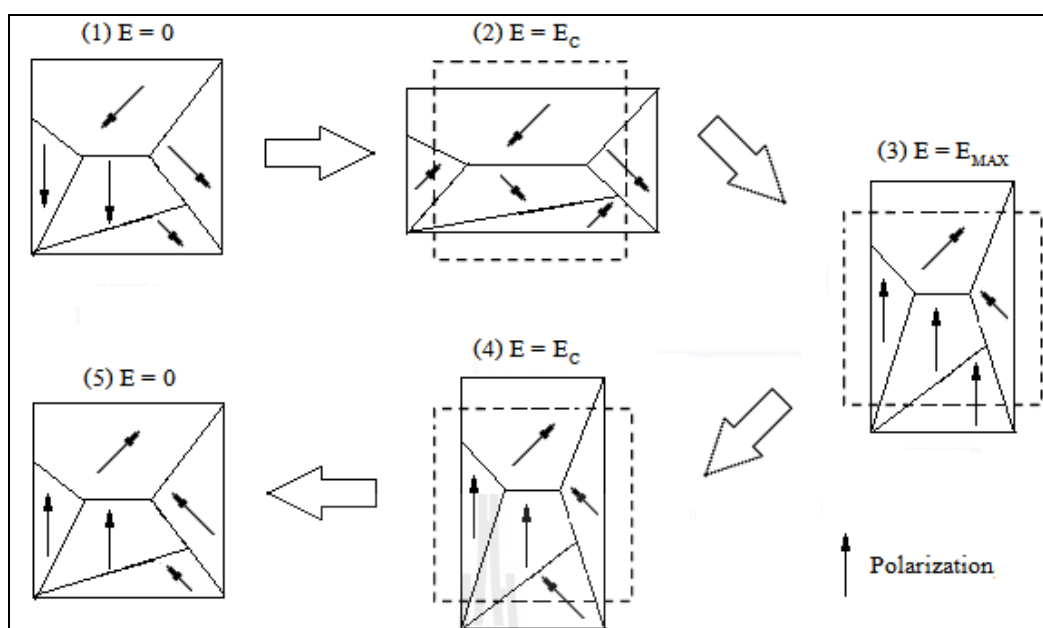
3.2.5 คุณสมบัติทางไฟฟ้าและทางกลของไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิก

ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกก่อนจะนำมาใช้งาน ต้องถูกนำไปให้ได้รับแรงดันไฟฟ้าตรงแรงดันสูง (poling) เพื่อให้โดเมนภายในของไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกเกิดการเรียงตัว (polarization) ในทิศทางของสนามไฟฟ้า (E) และทำให้ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกเกิดการยึดตัวตามทิศทางของสนามไฟฟ้า เมื่อเสร็จสิ้นการ poling ($E = 0$) ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกเกิดการหดตัว แต่จะไม่กลับมามีตำแหน่งเดิมก่อนการ poling ดังแสดงที่ตำแหน่ง (1) ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 (1)

เมื่อนำไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกมาใช้งาน เช่น ให้สนามไฟฟ้าในทิศทางตรงข้ามกับการ poling โดเมนภายในก็จะหดตัวลงเมื่อสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ โดเมนก็จะหดตัวลงจนกระทั่งเมื่อ $E = E_c$ ดังแสดงที่ตำแหน่ง (2) ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 (2) ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกก็ไม่สามารถหดตัวได้อีก แต่เมื่อสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นอีกโดเมนภายในก็จะกลับทิศทางทำให้ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกยึดตัวเพราะ โดเมนภายในมีทิศทางตามทิศทางของสนามไฟฟ้า เมื่อ $E = E_{max}$ ดังแสดงที่ตำแหน่ง (3) ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 (3) ไพโอโซอิเล็กทริกไม่สามารถยึดตัวได้มากกว่านี้แล้วเมื่อสนามไฟฟ้าลดลง ไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิกก็จะหดตัวลงตามลำดับ ดังแสดงที่ตำแหน่ง (4) ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 (4) ดังนั้นที่ตำแหน่งสุดท้าย ดังแสดงที่ตำแหน่ง (5) ในรูปที่ 3.5 และรูปที่ 3.6 (5) $E = 0$ ทิศทางของ โดเมนจะกลับทิศทางของ โดเมนเดิม เมื่อเปรียบเทียบกับสภาวะเริ่มต้นตำแหน่ง



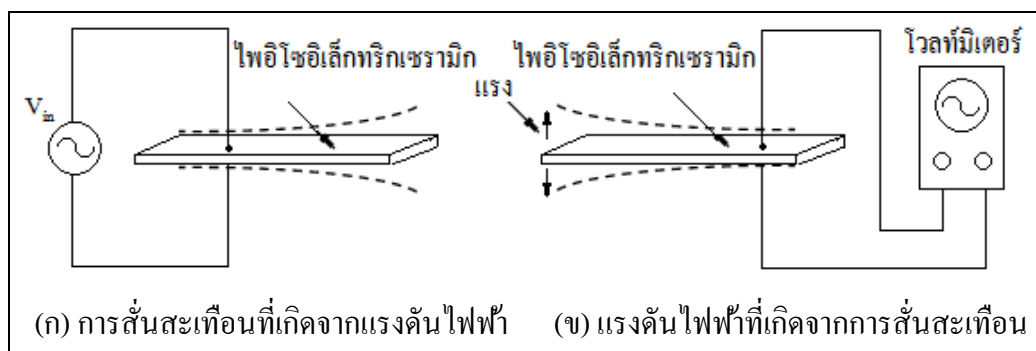
รูปที่ 3.5 คุณสมบัติทางไฟฟ้าและทางกลของไพโอโซอิเล็กทริกเซรามิก



รูปที่ 3.6 ลักษณะการยึดหดของวัสดุที่เป็นสารไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

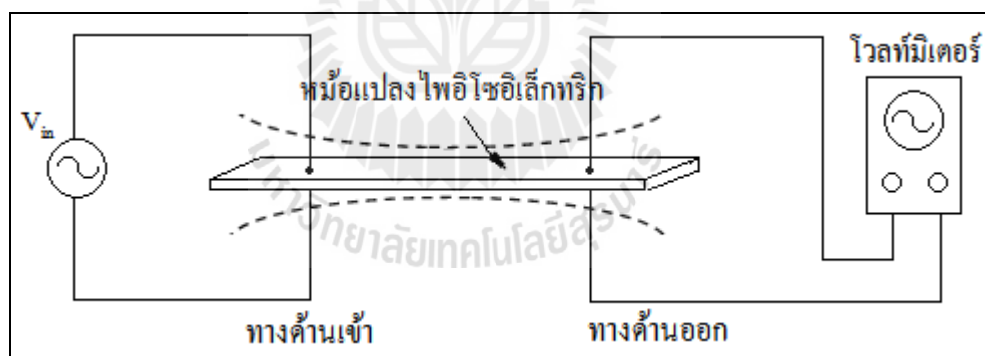
3.2.6 การทำงานของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก

หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก คือการนำหลักการทำงานของไพโซอิเล็กทริกเซรามิกมาประยุกต์ใช้งานเป็นหม้อแปลงโดยอาศัยการสันสะเทือนทางกลศาสตร์เป็นตัวกลางในการส่งถ่ายพลังงานซึ่งแบ่งการทำงานออกเป็นสองส่วนด้วยกันคือส่วนของไพโซอิเล็กทริกเซรามิกที่มีการสันสะเทือนเนื่องจากมีแรงดันไฟฟ้า (ไพโซอิเล็กทริกแอกชูเอเตอร์, piezoelectric actuators) เรียกว่าส่วนทางด้านขาเข้า ส่วนนี้เปรียบเสมือนการทำงานของมอเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 3.7 (ก) และส่วนของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก ที่เกิดแรงดันไฟฟ้าเนื่องจากการสันสะเทือน (ไพโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์, piezoelectric transducers) เรียกว่าส่วนทางด้านขาออกส่วนนี้เปรียบเสมือนกับการทำงานของเจนเนอเรเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 3.7 (ข)



รูปที่ 3.7 การทำงานของไพโซอิเล็กทริก

หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกจะใช้หลักการการทำงานของไพโซอิเล็กทริกเซรามิกมาประยุกต์ใช้งานเป็นหม้อแปลงที่มีการส่งถ่ายพลังงาน โดยอาศัยการสั้นสะเทือนของเซรามิกเป็นตัวกลาง เมื่อป้อนแรงดันไฟฟ้าที่มีความถี่ที่ทางด้านเข้าจะทำให้สารเซรามิกภายในเกิดการสั้นสะเทือนมีผลทำให้สารเซรามิกทางด้านออกเกิดแรงดันไฟฟ้า ดังแสดงหลักการทำงานในรูปที่ 3.8

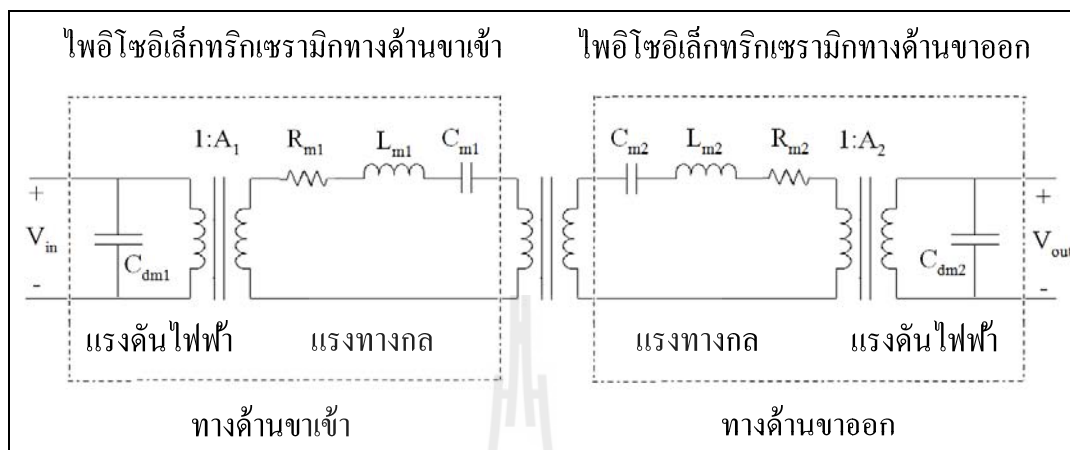


รูปที่ 3.8 หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกที่มีการประยุกต์มาจากการทำงานของไพโซอิเล็กทริกเซรามิก

3.2.7 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก

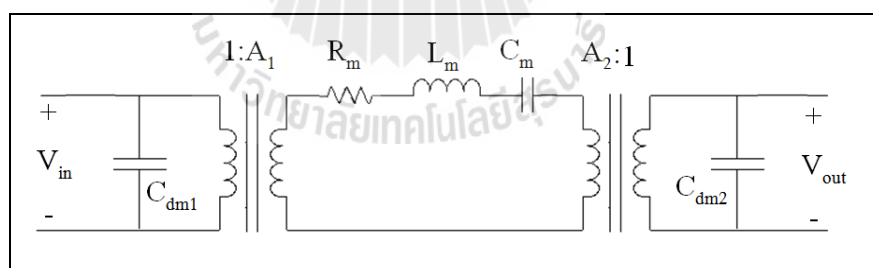
วงจรสมมูลของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก สามารถอธิบายได้จากการนำลักษณะการทำงานของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกทางด้านขาเข้าและลักษณะการทำงานของหม้อแปลง

โพธิโซอิเล็กทรอนิกส์ทางด้านขาออก ทั้งสองส่วนมารวมเข้าด้วยกัน โดยส่วนแรกจะเป็นส่วนของการสั้นสะท้อนเนื่องจากมีแรงดันไฟฟ้าตกคร่อมเป็นส่วนของทางด้านขาเข้า และส่วนของแรงดันไฟฟ้า



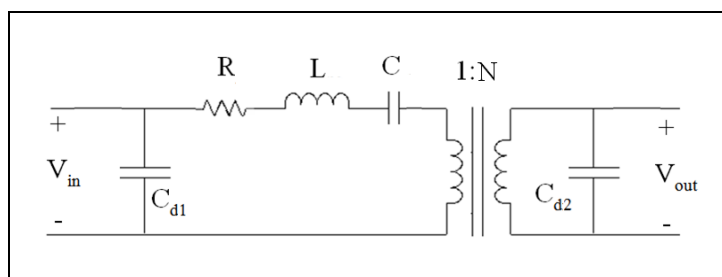
รูปที่ 3.9 วงจรสมมูลของหม้อแปลงโพธิโซอิเล็กทรอนิกส์จากการรวมทั้งสองส่วน

เมื่อถ่ายโอนข้อมูลของ L_{m2} , C_{m2} , และ R_{m2} ไปทางด้านโพธิโซอิเล็กทรอนิกส์ทางด้านขาเข้าและทำการรวมค่าของ L , R , C จะได้วงจรสมมูลใหม่ดังแสดงในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 การพัฒนางจรสมมูลของหม้อแปลงโพธิโซอิเล็กทรอนิกส์

เมื่อถ่ายโอนข้อมูลของ L_m , C_m , และ R_m ไปทางด้านขาเข้าและรวมผลของหม้อแปลงภายในก็จะได้วงจรสมมูลใหม่ตามรูปที่ 3.11

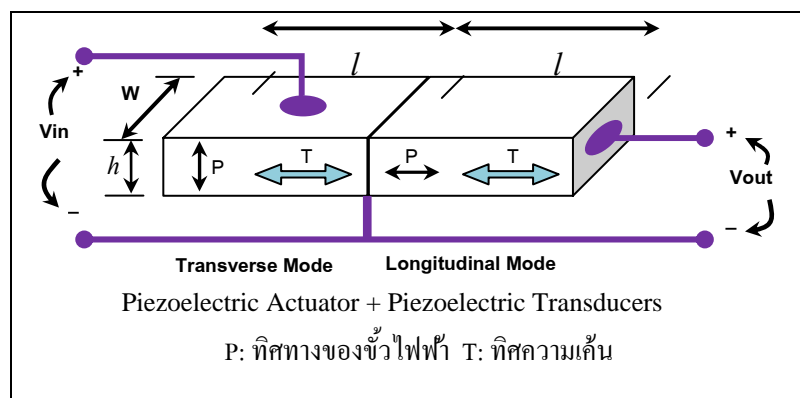


รูปที่ 3.11 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริก

3.2.8 ชนิดของหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริก

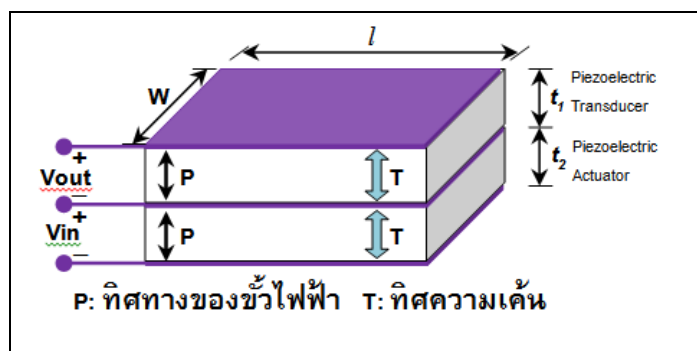
หม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริก คือการประยุกต์ใช้งานของไพเอโซเซรามิก ที่มีการทำงานเป็นสองแบบด้วยกันคือทางด้านขาเข้าจะทำงานในโหมดของไพเอโซอิเล็กทริก แอควอลเอเตอร์และทางด้านขาออกจะทำงานในโหมดของไพเอโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ โดยมีโครงสร้างแบบต่าง ๆ ตามลักษณะการนำไปใช้งาน แบ่งโครงสร้างหลัก ๆ ออกเป็น 3 แบบด้วยกัน

1. หม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกชนิด โรเซน (rosen type) มีการทำงานในลักษณะของ transverse mode โดยทำหน้าที่เป็นไพเอโซอิเล็กทริกแอควอลเอเตอร์ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาเข้า และมีการทำงานในลักษณะของ longitudinal mode โดยทำหน้าที่เป็นไพเอโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาออก เมื่อมีแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาเข้าจะเกิดการสั่นสะเทือนของสารไพเอโซอิเล็กทริกในทิศทางของความหนา ส่งผลให้เกิดการสั่นสะเทือนของสารไพเอโซอิเล็กทริกในทิศทางของความยาวทางด้านขาออกจะเกิดการสั่นสะเทือนในทิศทางของความยาวด้วยจึงทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาออก การทำงานของหม้อแปลงไพเอโซอิเล็กทริกชนิดนี้มีอัตราส่วนของแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาเข้าต่อแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาออกที่สูงจึงเหมาะที่จะนำไปใช้ในงานแรงดันไฟฟ้าสูง เช่น เป็นแหล่งจ่ายกำลังไฟฟ้าสำหรับหลอดแอลซีดี (liquid crystal display : LCD) ที่ใช้งานในหน้าจอโน้ตบุ๊ก ดังแสดงในรูปที่ 3.12



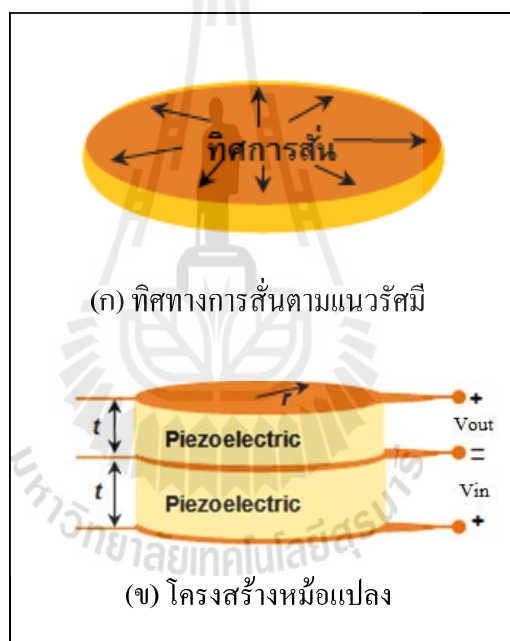
รูปที่ 3.12 โครงสร้างของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกชนิดโรเซน (Lin และคณะ, 2000)

2. หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกชนิดโหมดการสั่นตามความหนา (thickness vibration mode) มีการทำงานในลักษณะของ longitudinal mode โดยทำหน้าที่เป็นไพโซอิเล็กทริกแอกชูเอเตอร์ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาเข้า และมีการทำงานในลักษณะของ longitudinal mode โดยทำหน้าที่เป็นไพโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาออก เมื่อมีแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาเข้าจะเกิดการสั่นสะเทือนและเปลี่ยนรูปร่างของสารไพโซอิเล็กทริกในทิศทางของความหนา ส่งผลทำให้ทางด้านขาออกเกิดการสั่นสะเทือนของสารไพโซอิเล็กทริกในทิศทางของความหนาด้วย และส่งผลให้เกิดแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาออก การทำงานของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกชนิดนี้มีแรงดันไฟฟ้าทางด้านออกต่ำ จึงเหมาะที่จะนำไปใช้ในงานที่ต้องการแรงดันไฟฟ้าต่ำ เช่น ตัวแปลงแรงดัน (adapter) เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 หม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกชนิดโหมดการสั่นตามความหนา

3. หม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกชนิดโหมดการสั่นตามแนวรัศมี (radial vibration mode) มีการทำงานในลักษณะของ transverse mode โดยทำหน้าที่เป็นไฟอโซอิเล็กทริก แอคชวลเอเตอร์ ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาเข้า และมีการทำงานในลักษณะของ transverse mode โดยทำหน้าที่เป็นไฟอโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ทางด้านแรงดันไฟฟ้าขาออก เมื่อมีแรงดันไฟฟ้า ทางด้านขาเข้าเกิดการสั่นสะเทือนของสารไฟอโซอิเล็กทริกในทิศทางของความหนาตรงจุด ศูนย์กลางของวงกลมทำให้เกิดการสั่นสะเทือนและเปลี่ยนรูปร่างไปในทิศทางของรัศมี ทำให้ใน ส่วนของทางด้านขาออกเกิดการสั่นสะเทือนและเปลี่ยนรูปร่างไปในทิศทางของรัศมีด้วย การทำงาน ของหม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกชนิดนี้มีการนำไปกับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์กำลังสูง เช่น บัลลาสต์ (ballast) และ ตัวแปลงแรงดัน (adapter) เป็นต้น โดยมีโครงสร้างดังรูป 3.14



รูปที่ 3.14 โครงสร้างหม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกชนิดโหมดการสั่นตามแนวรัศมี

ตารางที่ 3.1 แสดงการเปรียบเทียบลักษณะเฉพาะของหม้อแปลงไฟฟ้าทั้งแบบแม่เหล็กไฟฟ้า และ แบบเซรามิก

	ลักษณะเฉพาะ (characteristics)	หม้อแปลง แม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic transformers)	หม้อแปลง เซรามิก (piezoelectric transformers)
โครงสร้าง (structure)	วัสดุ (materials)	ลวดเหล็กและแท่ง แม่เหล็ก	ไพอีโซอิเล็กทริก เซรามิก
	ขนาด – น้ำหนัก	ใหญ่ –หนัก	เล็ก –เบา
	การประกอบ (mounting)	ง่าย	เฉพาะในจุดที่ปราศจาก การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง
การทำงาน (performance)	ค่าเปรียบเทียบความต่างศักย์ (voltage step – up ratio)	ปานกลาง – สูง	สูงมาก
	กระแสขาออก (output current)	มาก	น้อย
	ความเป็นฉนวนไฟฟ้า ระหว่างส่วนป้อน และจ่ายพลังงาน	ดี	ดีมาก
	ประสิทธิภาพ	มากกว่า 80%	มากกว่า 95%
	ความถี่ของความต่างศักย์ ที่ให้	กว้าง	แคบ
	การรบกวนของคลื่น แม่เหล็ก (magnetic noise)	สูง	ไม่มี
	การติดไฟ (combustibility)	อาจติดไฟได้	ไม่ติดไฟ

3.3 วงจรบัลลาสต์ไฟโซอิเล็กทริก

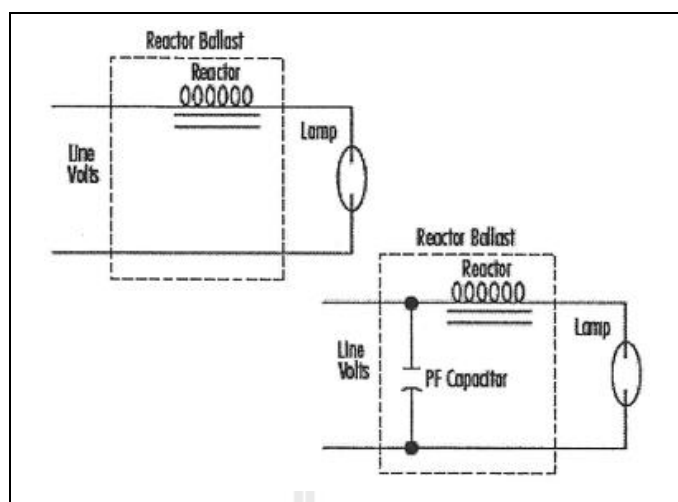
หม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกมีช่วงการทำงานในกรณีที่แคบ ดังนั้นการออกแบบวงจรขับจึงขึ้นอยู่กับชนิดของโหลด ภายใต้สภาวะนี้ จึงทำให้การทำงานมีประสิทธิภาพสูงขึ้น ในทางปฏิบัติการออกแบบวงจรขับหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริก ต้องออกแบบให้มีความถี่สูงกว่าความถี่ธรรมชาติเล็กน้อย ซึ่งมีหลักการและเหตุผลในการเลือกวงจรการขับหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกอยู่ 2 กรณี คือ กรณีแรก ประสิทธิภาพสูงสุดจะเกิดที่ความถี่ที่สูงกว่าความถี่ธรรมชาติเล็กน้อย และกรณีที่สอง การออกแบบควบคุมจะขึ้นอยู่กับประเภทของโหลด ซึ่งจะเห็นว่า การออกแบบควบคุมการขับเคลื่อนของ หม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริก มีการออกแบบที่ง่ายกว่าการใช้หม้อแปลงชนิดขดลวดตัวนำที่ใช้งานอยู่ในปัจจุบัน (ต้องออกแบบให้ทำงานที่ความถี่ธรรมชาติ)

ความสัมพันธ์ของความถี่และโหลดสามารถประเมินได้อย่างง่าย ๆ โดยการทดลองและพล็อตกราฟระหว่างแรงดันไฟฟ้าทางด้านขาออก (output voltage) กับความถี่ (frequency) ในขณะที่มีโหลดด้านขาออกที่แตกต่างกัน ประสิทธิภาพของหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกขึ้นอยู่กับ 2 ส่วน คือ อัตราส่วนการขยาย และความถี่ซึ่งประสิทธิภาพของหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกนั้นจะขึ้นอยู่กับความถี่ที่ใช้ในการควบคุม ความไม่เสถียรของโหลด และความไม่เสถียรของแรงดันที่เป็นอินพุตของหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริก ดังนั้นการสร้างความเชื่อมั่นว่าหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกทำงานได้เสถียรขึ้น มีปัจจัยที่สำคัญคือวงจรที่ใช้ขับเคลื่อนไฟฟ้ให้กับหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกที่มีการออกแบบที่ถูกต้อง และมีความสามารถปรับเปลี่ยนไปตามการเปลี่ยนแปลงของแรงดัน ในการออกแบบวงจรควบคุมให้มีขนาดเล็ก และคงทนโดยการใช้อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์โดยใช้วงจรรวม (IC) เป็นสิ่งที่ซับซ้อนและมีกลุ่มวิจัยหลายแห่งพยายามที่จะออกแบบเพื่อนำมาประยุกต์ใช้กับการขับเคลื่อนให้หม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริก

การออกแบบวงจรขับหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริกมีการพัฒนาหลัก ๆ อยู่ 2 แนวทาง จากงานการตีพิมพ์เผยแพร่เทคนิคการออกแบบตลอดระยะเวลา 10 ปีที่ผ่านมา ซึ่งประสบผลสำเร็จในเชิงพาณิชย์ คือ การใช้วงจรขับแบบคอนเวอร์เตอร์ที่ความถี่ปฏิบัติการและการใช้วงจรรวมเพื่อให้มีขนาดเล็ก สำหรับการประยุกต์ใช้ขับเคลื่อนของหม้อแปลงไฟโซอิเล็กทริก

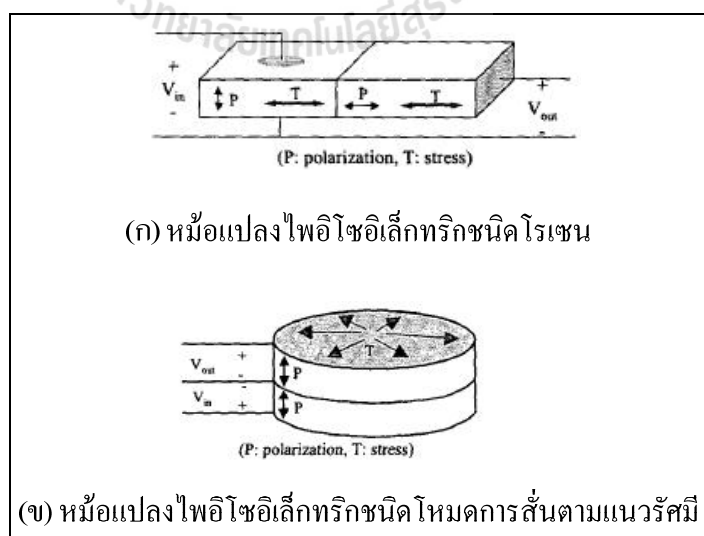
บัลลาสต์ (ballast) เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญต่อการทำงานของวงจรหลอดไฟฟ้แสดงในรูปที่ 3.15 ซึ่งใช้งานกันในอาคารสำนักงาน ตลอดจนที่พักอาศัยอย่างแพร่หลายเพื่อให้การทำงานของหลอดมีเสถียรภาพหลอดประจุก้าจะทำงานร่วมกับบัลลาสต์หรือตัวรักษาเสถียรภาพ หน้าที่หลักของบัลลาสต์ คือ ช่วยจำกัดกระแสที่ไหลผ่านหลอดให้มีค่าเท่ากับค่าพิกัด บัลลาสต์ที่ใช้ควรจะมีประสิทธิภาพที่ดีการสูญเสียต่ำ ไม่มีผลต่ออายุการใช้งานของหลอด และช่วยรักษาเสถียรภาพในการทำงานของหลอดในช่วงแรงดันเปลี่ยนแปลงประมาณ $\pm 10\%$ จากพิกัดบัลลาสต์มีหลายชนิด ดังนี้

- **บัลลาสต์ชนิดตัวต้านทาน (resistor ballast)** ใช้ตัวต้านทานสำหรับจำกัดกระแส เป็นบัลลาสต์ที่มีประสิทธิภาพต่ำ เกิดการสูญเสียในรูปความร้อนสูง
- **โช้กหรือบัลลาสต์ชนิดขดลวดเหนี่ยวนำ (choke หรือ inductor ballast)** เป็นบัลลาสต์ที่ใช้ งานกันอย่างแพร่หลาย กำลังงานสูญเสียในขดลวดมีค่าต่ำกว่าแบบความต้านทาน อย่างไรก็ตาม กำลังสูญเสียประมาณ 80% ของทั้งวงจรเกิดขึ้นที่บัลลาสต์นี้
- **บัลลาสต์ชนิดตัวเก็บประจุ (capacitor ballast)** ตัวเก็บประจุไม่เหมาะที่จะนำมาใช้ทำ บัลลาสต์ที่แหล่งจ่ายไฟ 50 Hz เนื่องจากผลของการคายประจุทำให้เกิดกระแสกระชากในช่วงเวลา สั้น ๆ ทำให้เกิดการกระพริบของหลอด สำหรับกรณีที่หลอดทำงานที่ความถี่สูง กระแสจะเกิดการ เปลี่ยนแปลงไม่มากนัก ตัวเก็บประจุอาจจะถูกนำมาใช้งานได้
- **บัลลาสต์ชนิดโช้กต่ออนุกรมกับตัวเก็บประจุ (series choke-capacitor ballast)** ถึงแม้ว่า ตัวเก็บประจุไม่สามารถจะนำมาใช้เป็นบัลลาสต์ได้ที่แหล่งจ่ายไฟความถี่ 50 Hz แต่วงจรอนุกรม ของตัวเก็บประจุและโช้ก โดยที่ค่ารีแอคแตนซ์ของตัวเก็บประจุมีค่าประมาณ 2 เท่าของค่ารีแอค แแตนซ์ของโช้กจะทำให้รูปคลื่นแรงดันเป็นที่น่าสนใจ และช่วยเพิ่มอายุการทำงานให้กับหลอดไฟฟ้า ด้วยอย่างไรก็ตาม ผลจากการใช้บัลลาสต์แบบนี้จะทำให้ตัวประกอบกำลังของวงจรจะมี ค่าประมาณ 0.7 นำหน้า
- **บัลลาสต์ชนิดหม้อแปลง (transformer ballast)** โดยปกติแรงดัน (20 โวลต์) ไม่เพียง พอที่จะใช้ในการจุดหลอด หม้อแปลงสามารถนำมาใช้แปลงแรงดันที่จ่ายให้กับหลอดให้มีค่าสูงขึ้น ถึงค่าที่เหมาะสม นอกจากนี้ค่ารีแอคแตนซ์รั่วไหล (leakage reactance) ของหม้อแปลงยังทำหน้าที่ เหมือน โช้กบัลลาสต์อีกด้วย

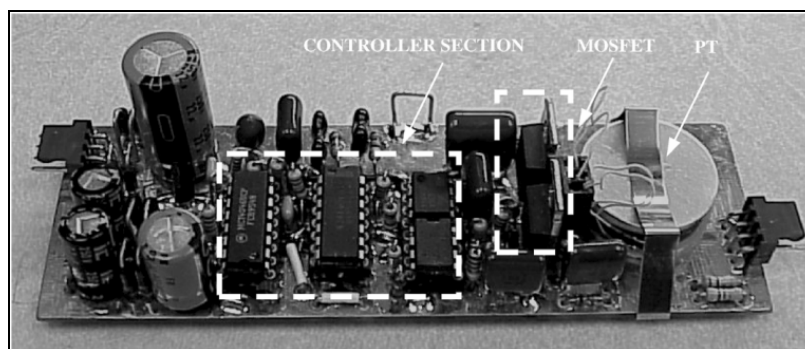


รูปที่ 3.15 วงจรบัลลาสต์ชนิดขดลวดเหนี่ยวนำ

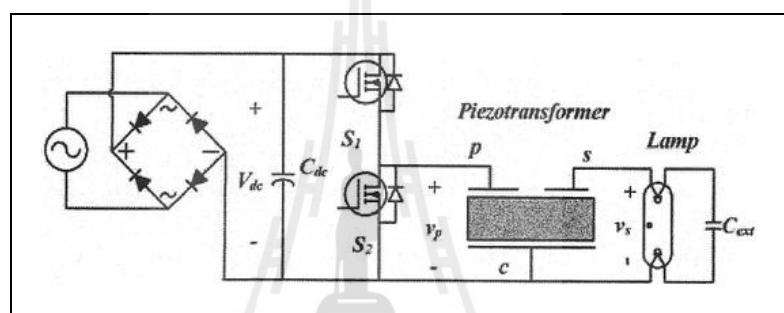
บัลลาสต์ไฟโซอิเล็คทริกนี้มีส่วนประกอบที่สำคัญ คือ หม้อแปลงไฟโซอิเล็คทริก (piezoelectric transformer : PZT) หน้าที่ย้ายแรงดันไฟฟ้าที่ความถี่สูง มีขนาดเล็กและน้ำหนักเบา กว่าบัลลาสต์แกนเหล็กมาก และช่วยลดองค์ประกอบของวงจรบัลลาสต์อิเล็กทรอนิกส์เพื่อใช้งาน กับหลอดฟลูออเรสเซนต์ 35 W ใช้ไฟ 120 V ความถี่ 60 Hz ซึ่งพัฒนาโดยนักวิจัยจากอเมริกา มีขนาดประมาณเหรียญ 10 บาท ดังแสดงในรูปที่ 3.16 และแสดงชุดวงจรบัลลาสต์ไฟโซอิเล็คทริก ดังรูปที่ 3.17 ประกอบกับแสดงวงจรบัลลาสต์ไฟโซอิเล็คทริกได้ดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.16 โครงสร้างของหม้อแปลงไฟโซอิเล็คทริกทำหน้าที่แทนบัลลาสต์

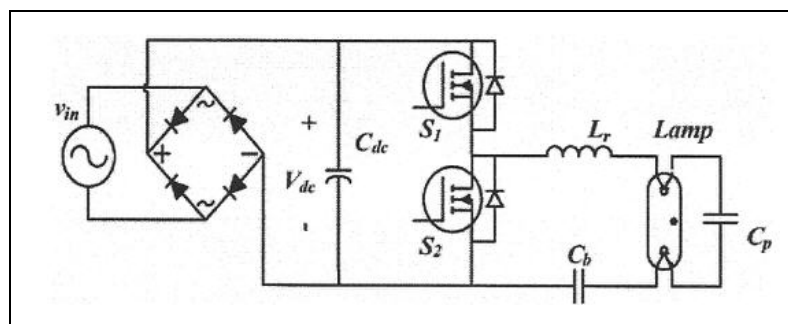


รูปที่ 3.17 ชุดวงจรบัลลาสต์ไพโซโซลิดทรอนิก (Eric, 2005)



รูปที่ 3.18 วงจรบัลลาสต์ไพโซโซลิดทรอนิก [Sung et.al., 2005]

บัลลาสต์อิเล็กทรอนิกส์มีหน้าที่ควบคุมกระแสไฟฟ้าที่ผ่านเข้าไปในขั้วหลอดให้มีค่าเหมาะสม สม่่าเสมอตามแต่ละประเภท และขนาดของหลอด โดยที่บัลลาสต์อิเล็กทรอนิกส์จะสร้างความถี่สูง (10 - 120 kHz) จ่ายให้กับหลอดฟลูออเรสเซนต์ ซึ่งหลอดฟลูออเรสเซนต์จะตอบสนองความถี่สูงได้ดีกว่าความถี่ 50 Hz ที่ใช้อยู่ตามบ้าน เป็นผลให้สามารถประหยัดพลังงานไฟฟ้าได้ไม่น้อยกว่า 30% และยังมีอายุการใช้งานของหลอดได้นานกว่า เมื่อเทียบกับการใช้บัลลาสต์ชนิดขดลวด โดยแสดงวงจรบัลลาสต์อิเล็กทรอนิกส์ได้ดังรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 วงจรบัลลาสต์อิเล็กทรอนิกส์

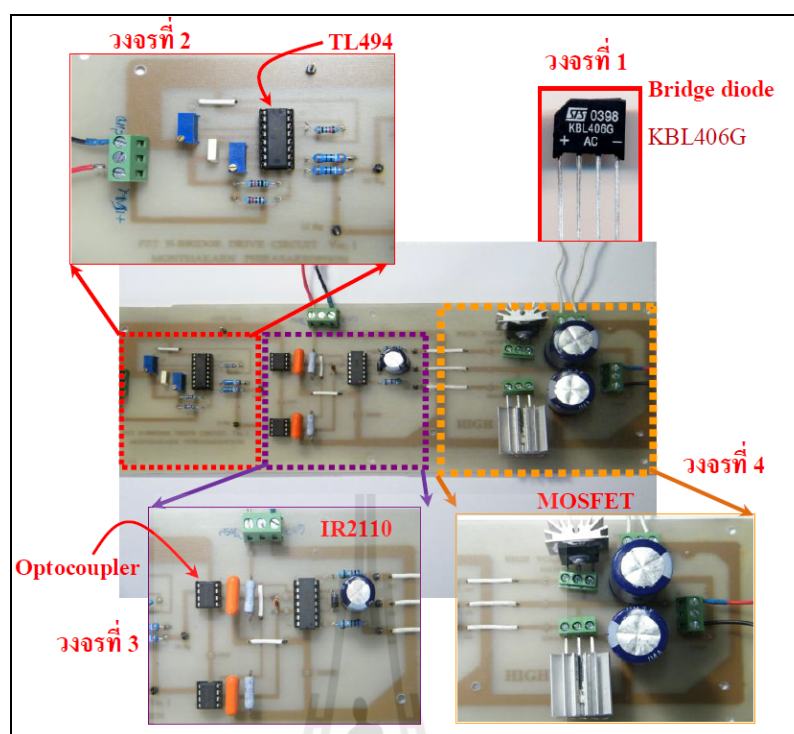
ซึ่งในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้ทดลองสร้างวงจรบัลลาสต์ไฟโซอิเล็คทริกสำหรับขับหลอดฟลูออเรสเซนต์ 36 W ดังแสดงในรูปที่ 3.20 โดยสามารถแบ่งได้เป็น 4 ส่วน ตามหน้าที่การทำงานดังนี้

ส่วนที่ 1 จะเป็นวงจรสำหรับแปลงแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับให้เป็นแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง (bridge rectifier) โดยแหล่งจ่ายไฟจะเป็นไฟบ้านปกติ

ส่วนที่ 2 เป็นวงจรควบคุมความถี่ (boost regulator) และ duty cycle ทำหน้าที่สร้างความถี่การทำงานให้วงจรอินเวอร์เตอร์แบบฮาร์ฟบริดจ์ (half bridge inverter) ซึ่งสามารถปรับความถี่ (3 – 200 kHz) ให้ตรงกับความถี่ธรรมชาติของหม้อแปลงไฟโซอิเล็คทริกที่ใช้ในงานวิทยานิพนธ์นี้

ส่วนที่ 3 ภาควิธีควบคุมแรงดันไฟฟ้าที่ใช้ขับมอสเฟต ทำหน้าที่ควบคุมแรงดันไฟฟ้าสำหรับมอสเฟตให้คงที่ในขณะที่ขับโหลด

ส่วนที่ 4 เป็นวงจรอินเวอร์เตอร์แบบฮาร์ฟบริดจ์ โดยในงานวิจัยนี้เลือกใช้มอสเฟต 2 ตัว ทำหน้าที่แปลงแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง ให้เป็นแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับความถี่สูงให้กับหม้อแปลงไฟโซอิเล็คทริกสำหรับขับหลอด (มณฑกานต์ พิรศักดิ์โสภณ, 2553)



รูปที่ 3.20 วงจรบัลลาสต์ไฟโซอิเล็คทริกสำหรับหลอดฟลูออเรสเซนต์

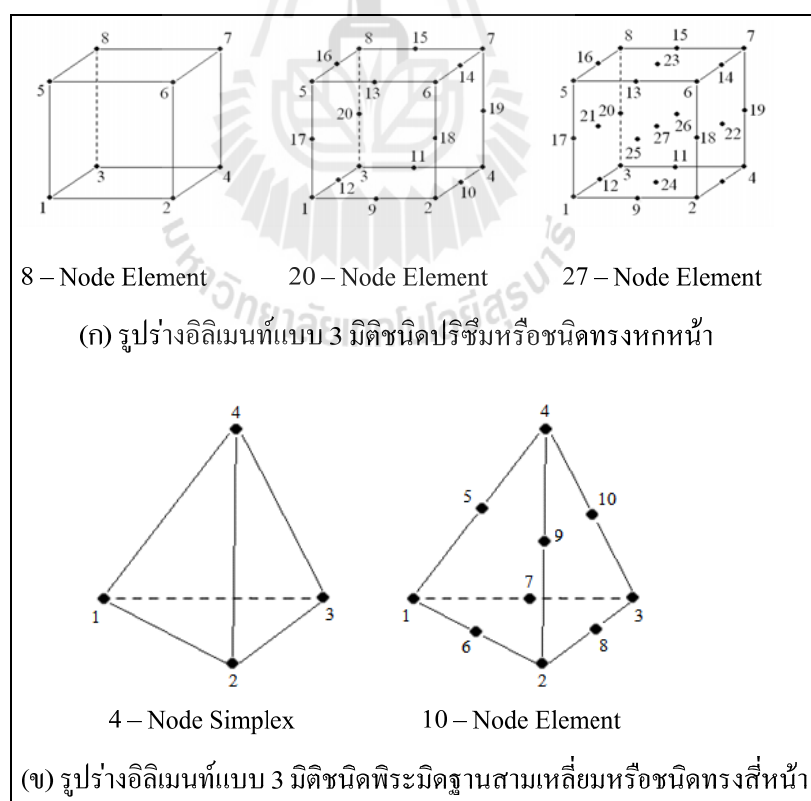
3.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (finite element method : FEM) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้คำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) โดยการแบ่งรูปร่างขอบเขตของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ แล้วสร้างสมการของแต่ละอิลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ และอิลิเมนต์ต่าง ๆ จะเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อ ซึ่งเป็นตำแหน่งที่คำนวณหาค่าผลเฉลย สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ในงานวิจัยนี้จะดำเนินการคำนวณในแบบ 3 มิติ

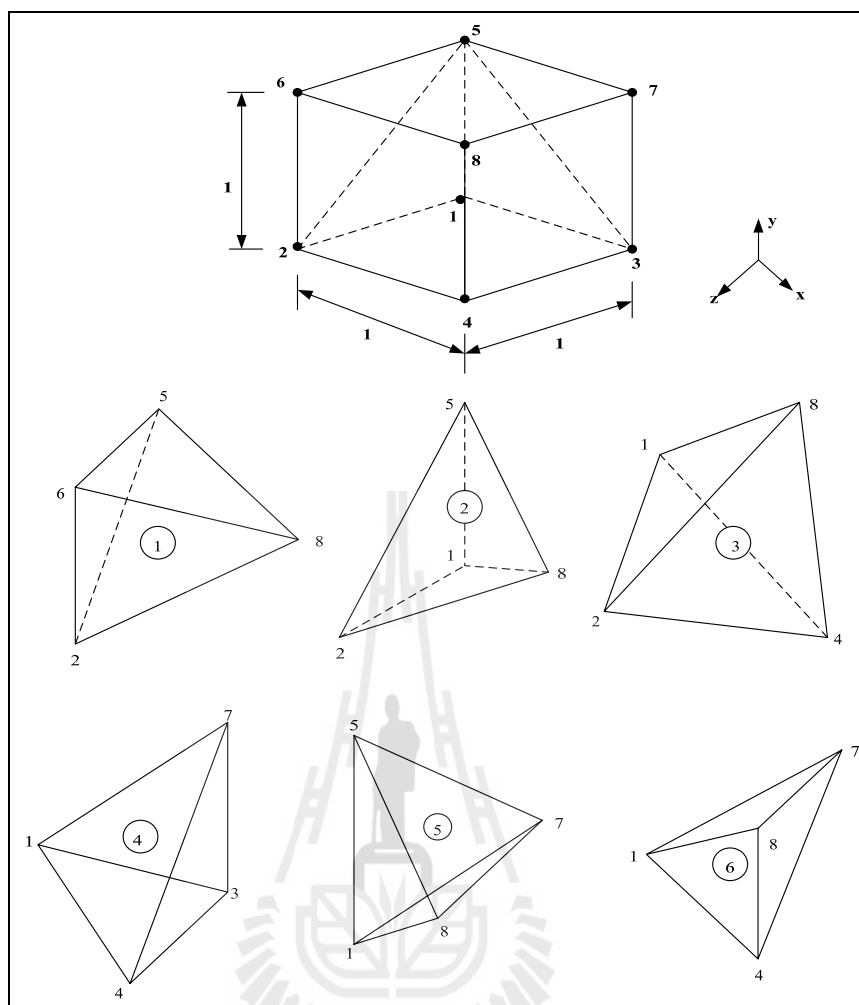
หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นหลาย ๆ ส่วนที่เรียกว่าอิลิเมนต์ โดยที่การกระจัด และแรงภายในของแต่ละอิลิเมนต์ ณ จุดที่อิลิเมนต์ต่อโยงกันจะต้องเข้ากันได้และสมดุล ซึ่งอิลิเมนต์ต่าง ๆ นี้ จะขึ้นอยู่กับความละเอียดของแต่ละงานว่าต้องการรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากเท่าใด ซึ่งถ้าพิจารณาแบบ 3 มิติ อาจอยู่ในรูปลักษณะของพีระมิดฐานสามเหลี่ยมที่เรียกว่ารูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) ดังนั้นค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ที่จะคำนวณออกมานั้นจะมีความแม่นยำขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของอิลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาานั้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2542) โดยมีรายละเอียดดังนี้ คือ

1. แบ่งอิเลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ การแบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นอิเลิเมนต์ย่อย ๆ (discretization) โดยแต่ละอิเลิเมนต์จะมีความเป็นปริมาตร ซึ่งสำหรับการแบ่งอิเลิเมนต์นั้นสามารถทำได้หลายรูปแบบ เช่น รูปแบบทรงหกหน้าหรือรูปแบบพีระมิดฐานสามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 3.21 และสำหรับในรูปที่ 3.22 นั้นจะเป็นรูปที่แสดงการแบ่งอิเลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 3 มิติ (ระนาบ xyz) โดยใช้อิเลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า ซึ่งประกอบไปด้วยจุดต่อ (nodes) อิเลิเมนต์ (elements) และขอบเขตของอิเลิเมนต์ที่อยู่ภายใน (interelement boundaries) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้าง โปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อิเลิเมนต์ จึงยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยอิเลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าทั้งหมด 6 อิเลิเมนต์ 8 จุดต่อ ซึ่งข้อมูลเบื้องต้นสำหรับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอิเลิเมนต์และหมายเลขของจุดต่อ พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละจุดต่อซึ่งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ



รูปที่ 3.21 แสดงรูปร่างอิเลิเมนต์แบบ 3 มิติในชนิดต่าง ๆ



รูปที่ 3.22 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อีลิเมนต์ 8 จุดต่อ เมื่อพิจารณาอีลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

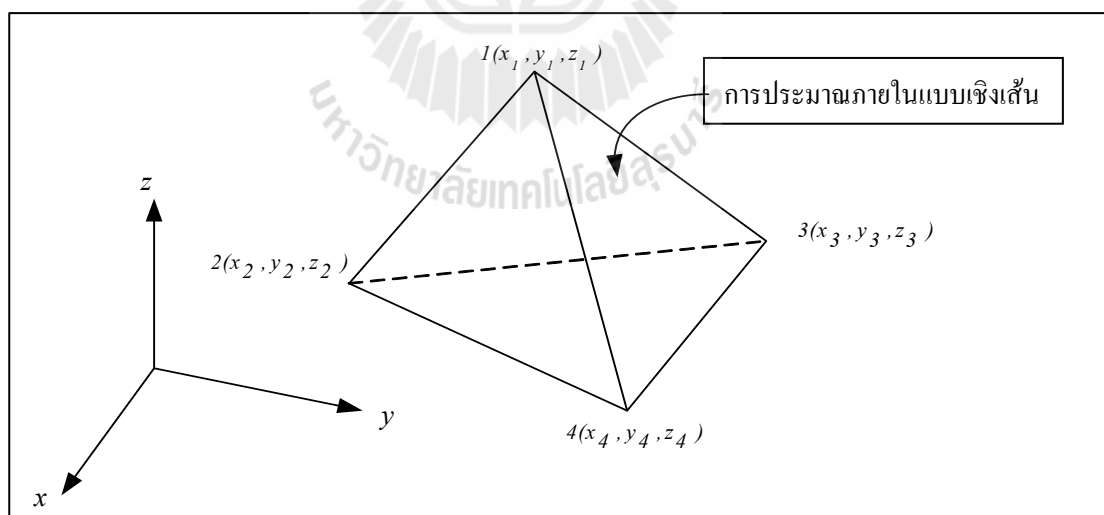
ตารางที่ 3.2 ลักษณะข้อมูลของอีลิเมนต์

หมายเลข อีลิเมนต์	หมายเลขจุดต่อ			
	จุดต่อ i	จุดต่อ j	จุดต่อ k	จุดต่อ l
1	2	8	5	6
2	1	2	8	5
3	1	2	4	8
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

ตารางที่ 3.3 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งจุดต่อ

หมายเลขจุดต่อ	พิกัดแกน x	พิกัดแกน y	พิกัดแกน z
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0
4	1	0	1
5	0	1	0
6	0	1	1
7	1	1	0
8	1	1	1

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ (element interpolation function) อย่างในกรณีอีลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าจะประกอบด้วย 4 จุดต่อที่มีตัวห้อย 1, 2, 3 และ 4 ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอีลิเมนต์แบบเชิงเส้นดังแสดงในรูป 3.23 (Bickford, 1994) ซึ่งเป็นการประมาณภายในอีลิเมนต์แบบเชิงเส้น (linear representation)



รูปที่ 3.23 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอีลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

ตำแหน่งของจุดต่อ (x_n, y_n, z_n) , $n = 1, 2, 3, 4$ เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า u_n โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนต์ $u_e(x, y, z)$ เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y, z) = \alpha + \beta x + \gamma y + \lambda z \quad (3.1)$$

โดยที่ $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากจุดต่อทั้งสี่ดังนี้

$$\begin{aligned} u_e(x_1, y_1, z_1) &= u_1 = \alpha + \beta x_1 + \gamma y_1 + \lambda z_1 \\ u_e(x_2, y_2, z_2) &= u_2 = \alpha + \beta x_2 + \gamma y_2 + \lambda z_2 \\ u_e(x_3, y_3, z_3) &= u_3 = \alpha + \beta x_3 + \gamma y_3 + \lambda z_3 \\ u_e(x_4, y_4, z_4) &= u_4 = \alpha + \beta x_4 + \gamma y_4 + \lambda z_4 \end{aligned}$$

นำค่า $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสี่ข้างต้น แทนค่ากลับไปในสมการที่ (3.1) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y, z) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \quad (3.2)$$

ซึ่ง N_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad (3.3)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \end{aligned}$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

และ V คือปริมาตรของแต่ละอิลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมา
มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

3. สร้างสมการของอิลิเมนต์ ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ซึ่งขั้นตอนนี้
ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ อย่างเช่นกรณีสมการของอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า
ได้ยกมาเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.23 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_l \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \\ f_l \end{bmatrix}_e \quad (3.5)$$

ซึ่งเขียนโดยย่อได้ว่า $[K]_e [u]_e = [f]_e$ โดย $[u]_e$ คือ เมทริกซ์ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ และตัวห้อย e แสดงให้ทราบว่า เป็นเมทริกซ์ระดับอิลิเมนต์ ซึ่งสมการของอิลิเมนต์ดังกล่าว จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นมาให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ การสร้างสมการของอิลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (3.5) สามารถทำได้โดย

วิธีการโดยตรง (direct approach) วิธีนี้สามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่เข้าใจได้ง่าย ๆ อย่างเช่น ปัญหาต่าง ๆ ในรูปทรง 1 มิติ เท่านั้น ซึ่งไม่สามารถขยายเปลี่ยนแปลงเพื่อนำไปใช้กับปัญหาใน 2 หรือ 3 มิติโดยทั่วไปได้

วิธีการแปรผัน (variational approach) หลักการสำคัญของวิธีการนี้คือ จำเป็นจะต้องทำการหาหรือสร้างฟังก์ชัน ซึ่งเมื่อทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นแล้ว จะเป็นผลให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่กำลังสนใจอยู่ อย่างไรก็ตามวิธีการแปรผันเป็นวิธีการดั้งเดิมที่ใช้กันในช่วงต้น ๆ ของการพัฒนาวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทางด้านโครงสร้าง และยังมีจุดอ่อนอีกคือ จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ ซึ่งปัญหาหลาย ๆ ชนิดในทางปฏิบัติสามารถสร้างสมการอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันนั้นได้

วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) วิธีนี้จะใช้วิธีการสร้างสมการไฟไนต์อิลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้อง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์อิลิเมนต์สำหรับปัญหาโดยทั่ว ๆ ไป และถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน

4. นำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบจากขั้นตอนที่ 1 หากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ โดยแสดงได้ดังนี้

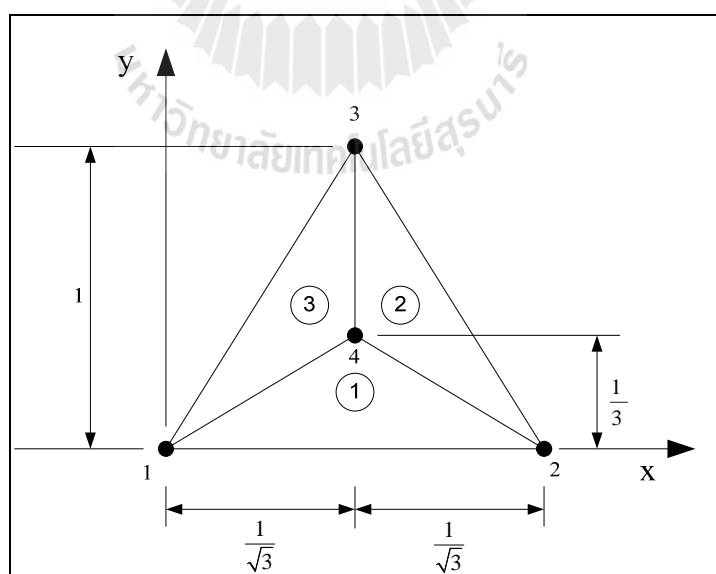
$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} \quad (3.6)$$

หรือเขียนโดยย่อได้ดังนี้ $[K]_{\text{sys}} [u]_{\text{sys}} = [f]_{\text{sys}}$ จากสมการที่ (3.6) เมทริกซ์ $[K]_{\text{sys}}$ จะมีคุณสมบัติของความเป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ $[K]_{\text{sys}} = [K]_{\text{sys}}^T$ และมีคุณสมบัติของการจับกลุ่มกันของค่า

ที่ไม่เท่ากับศูนย์บริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็นแถบ (banded matrix) จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวนจุดต่อเป็นจำนวนมากเพื่อที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่เที่ยงตรง โดยสามารถพัฒนาให้เก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ไว้ในหน่วยความจำเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น

การนำสมการย่อยของแต่ละอิเลเมนต์มาประกอบกันเข้าเป็นสมการรวมของระบบ จำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งหลักการที่จะกล่าวนี้ เป็นหลักการที่ง่าย สามารถทำได้โดยสะดวก เหมาะกับรูปร่างของปัญหาที่มีอิเลเมนต์ย่อยจำนวนมาก ๆ และหลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในการพัฒนาคอมพิวเตอร์โปรแกรมด้วย โดยสามารถทำความเข้าใจได้จากตัวอย่างรูปร่างของปัญหา 2 มิติอย่างง่ายดังรูปที่ 3.27 กล่าวคือจะทำการสร้างสมการรวมของระบบซึ่งประกอบด้วย 3 อิเลเมนต์ 4 จุดต่อ โดยจะแสดงการรวมของเมทริกซ์ $[K]_{sys}$ เพื่อเป็นตัวอย่าง

วิธีการนี้ทำได้โดยเขียนสมการของอิเลเมนต์ต่าง ๆ พร้อมทั้งกำกับหมายเลขของจุดต่อทางแฉกนอนและแฉกตั้งของแต่ละอิเลเมนต์ให้ถูกต้อง โดยจากรูปที่ 3.24 $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1, 2 และ 4 ส่วน $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 2 ประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 2, 3 และ 4 และ $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 3 ซึ่งเป็นอิเลเมนต์สุดท้ายประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 1, 3 และ 4 โดยสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้



รูปที่ 3.24 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อิเลเมนต์ 4 จุดต่อ

$$[K]_{e1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.7)$$

$$[K]_{e2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.8)$$

$$[K]_{e3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \\ g_2 & h_2 & i_2 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.9)$$

เมื่อมีหมายเลขกำกับทั้งทางแถวบนและแถวตั้งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมทริกซ์ใน ทุกอิลิเมนต์แล้ว จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวม $[K]_{sys}$ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ b_3 ซึ่งอยู่ในแถวบนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของอิลิเมนต์ย่อยที่ 1 จะไปปรากฏอยู่ในแถว บนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ เป็นต้น

$$[K]_{sys} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 + g_1 & b_1 & h_1 & c_1 + i_1 \\ a_2 & b_2 + d_1 & e_1 & c_2 + f_1 \\ g_2 & d_2 & e_2 + h_2 & f_2 + i_2 \\ a_3 + g_3 & b_3 + d_3 & e_3 + h_3 & c_3 + f_3 + i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.10)$$

5. ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่สอดคล้องกับปัญหาลงในสมการรวม ของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ

6. คำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ต้องการต่อไป เมื่อทราบค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ แล้วสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์นี้ต่อไปได้

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอน จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีที่มีแบบแผนเป็น ขั้นตอน โดยมีส่วนที่สำคัญที่สุดคือการสร้างสมการของอิลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ให้สอดคล้อง

กับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำหนด และในขั้นตอนที่ 6 ขั้นตอนนี้จะนำไปพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณต่อไป

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย อันได้แก่ หม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทริก ที่ได้กล่าวถึงลักษณะชนิดต่าง ๆ และหลักการทำงานของหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทริก วงจรบัลลาสต์ไฟโอโซอิเล็กทริก ที่ว่าด้วยหลักการทำงานพร้อมกับวิธีการประยุกต์ใช้และระเบียบวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ที่อธิบายถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ โดยได้กล่าวเฉพาะส่วนที่จะนำมาใช้หรือส่วนที่จะถูกกล่าวอ้างถึงในบทต่อ ๆ ไปทั้งนี้เพื่อเป็นประโยชน์และเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้แก่ผู้ดำเนินงานวิจัย



บทที่ 4

การคำนวณศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลของหม้อแปลง ไฟโอโซอิเล็กทริกด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

4.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method : FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) ดังเช่น สมการสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และสมการการกระจายของอุณหภูมิ เป็นต้น ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อนหรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถรองรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ นอกจากนี้ในบางระบบที่มีบริเวณที่ต้องการวิเคราะห์มีพื้นที่ขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับปัญหาของระบบที่เป็นพื้นที่ขนาดใหญ่ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็สามารถแบ่งกริดขนาดเล็กหรือใหญ่ ที่สามารถเชื่อมความสัมพันธ์ของ 2 บริเวณที่มีขนาดแตกต่างกันได้อย่างครอบคลุมและอิสระอย่างเช่น งานวิจัยนี้ที่พิจารณาาค่าศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลที่ปรากฏขึ้นรอบตัวหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทริก ซึ่งพื้นที่บริเวณดังกล่าวมีลักษณะที่โค้งมนแต่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็สามารถตีกริดรูปทรงสี่หน้าสำหรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติให้มีขนาดเล็กเหมาะสมเพื่อการวิเคราะห์ภายในบริเวณดังกล่าวให้ได้ค่าผลเฉลยที่มีความแม่นยำได้ ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็สามารถตีกริดให้มีขนาดใหญ่เพื่อลดปริมาณของกริดของบริเวณที่ไม่จำเป็นเพื่อช่วยย่นระยะเวลาในการหาผลเฉลยแต่ยังสามารถรักษาความแม่นยำของผลเฉลยได้เช่นกัน ซึ่งการดำเนินการแบบนี้จะก่อให้เกิดจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในระบบที่ศึกษามีจำนวนไม่มาก และสามารถคำนวณหาผลเฉลย ณ บริเวณที่ต้องการได้อย่างรวดเร็ว รวมทั้งยังสามารถจำลองผลระบบที่มีความแตกต่างกันทางด้านวัสดุได้ ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทริกและขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมทั้งประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลที่กระจายตัวรอบหม้อแปลงไฟโอโซอิเล็กทริกต่อไป

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกแบบ 3 มิติ

การทำงานของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก ซึ่งเป็นการทำงานในลักษณะของไพโซอิเล็กทริกแอกชวลเอเตอร์ที่มีการเปลี่ยนจากพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกล (inverse effect) และมีการทำงานในลักษณะของไพโซอิเล็กทริกทรานสดิวเซอร์ที่มีเปลี่ยนจากพลังงานกลเป็นไฟฟ้า (direct effect) เพราะฉะนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริกจะปรากฏในรูปแบบของสมการความสัมพันธ์ระหว่างทางไฟฟ้าและทางกล โดยจะประกอบไปด้วยพารามิเตอร์ทางไฟฟ้าและทางกล ได้แก่ ความเค้น (stress tensor : \mathbf{T}) ความเครียด (strain tensor : \mathbf{S}) สนามไฟฟ้า (electric field : \mathbf{E}) และความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (electric displacement : \mathbf{D}) สามารถแสดงด้วยสมการความสัมพันธ์ดังนี้ (Joo, Lee, and Jung, 2001)

$$\mathbf{T} = c^E \mathbf{S} - e^T \mathbf{E} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{D} = e \mathbf{S} + \epsilon^E \mathbf{E} \quad (4.2)$$

เมื่อ ϵ^E คือ เมตริกซ์สภาพยอมทางไฟฟ้าเมื่อความเครียดคงที่ (dielectric permittivity tensor at constant strain) มีค่าเท่ากับ $\epsilon_0 \epsilon_r$

ϵ_0 คือ สภาพยอมทางไฟฟ้าของสุญญากาศ (permittivity of free space) มีค่าเท่ากับ $8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

ϵ_r คือ สภาพยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นกับวัสดุตัวกลาง

c^E คือ เมตริกซ์ค่าคงที่เมื่อสนามไฟฟ้าคงที่ (elastic stiffness tensor at constant electric)

e คือ เมตริกซ์ค่าคงที่ความเค้นของไพโซอิเล็กทริก (piezoelectric stress tensor)

ในการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้า \mathbf{E} สามารถดำเนินการได้โดยเลี้ยงไปคำนวณหาศักย์ไฟฟ้า Φ ก่อน โดยที่ค่าสนามไฟฟ้า \mathbf{E} สามารถคำนวณได้ด้วยเกรเดียนต์ (gradient) ศักย์ไฟฟ้า Φ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (4.3)$$

การคำนวณหาความเครียด \mathbf{S} สามารถกระทำได้โดยผ่านการกระจัดเชิงกล \mathbf{u} แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.4)$$

โดยที่ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$

จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน (Newton's law) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นมวลของวัสดุ (mass density) และจากการศึกษาคุณสมบัติจากกฎของเกาส์ (Gauss's law) ในรูปอนุพันธ์ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า โดยที่การกระจายประจุเชิงไฟฟ้าเป็นศูนย์ พบว่า

$$(\nabla \cdot \mathbf{D}) = 0 \quad (4.6)$$

แล้วนำสมการที่ (4.5) แทนลงในสมการที่ (4.1) แล้วนำสมการที่ (4.6) แทนลงในสมการที่ (4.2) จะได้

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (c^E \mathbf{S} - e^T \mathbf{E}) \quad (4.7)$$

$$0 = \nabla \cdot (e\mathbf{S} + \varepsilon^s \mathbf{E}) \quad (4.8)$$

นำสมการที่ (4.3) และ (4.4) แทนลงในสมการที่ (4.7) และ (4.8) จะได้

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (c^E B\mathbf{u} + e^T \nabla \Phi) \quad (4.9)$$

$$0 = \nabla \cdot (eB\mathbf{u} - \varepsilon^s \nabla \Phi) \quad (4.10)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริก ซึ่งจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) อันดับสอง สามารถแสดงได้ด้วยสมการที่ (4.11) และ (4.12) ดังนี้

$$c^E (\nabla \cdot B\mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + e^T (\nabla \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad (4.11)$$

$$e(\nabla \cdot B\mathbf{u}) - \varepsilon^s (\nabla \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad (4.12)$$

ในกรณีปัญหาที่พิจารณามีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีเพียงความถี่เดียว (time harmonic) โดยสามารถแทน \mathbf{u} อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbf{u} = ue^{j\omega t}$ ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u} \quad (4.13)$$

ซึ่ง ω คือความถี่เชิงมุมเมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (4.13) จึงได้สมการเป็น

$$c^E (\nabla \cdot B\mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} + e^T (\nabla \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad (4.14)$$

$$e(\nabla \cdot B\mathbf{u}) - \varepsilon^s (\nabla \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad (4.15)$$

การหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ของสมการอนุพันธ์ย่อย อันดับที่สองที่ปรากฏในสมการที่ (4.14) และ (4.15) ซึ่งมีความยากและซับซ้อนอย่างมากในการแก้ปัญหา ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าผลเฉลย โดยประมาณซึ่งเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสูงสุดสำหรับการแก้สมการอนุพันธ์ย่อย

4.3 การคำนวณศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

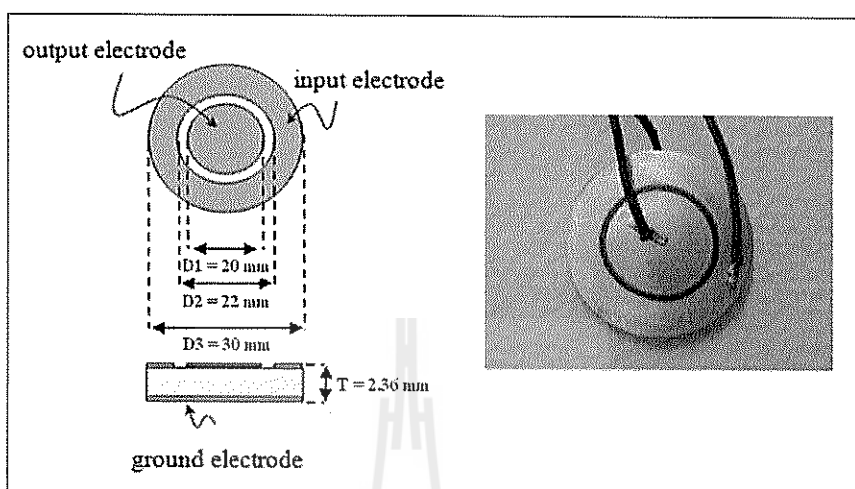
สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลของหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคังแสดงในสมการที่ (4.14) และ (4.15) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิติ นั้นหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยากเพราะด้วยเหตุที่ติดอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยขนาด 3 มิติ ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

4.3.1 การออกแบบเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

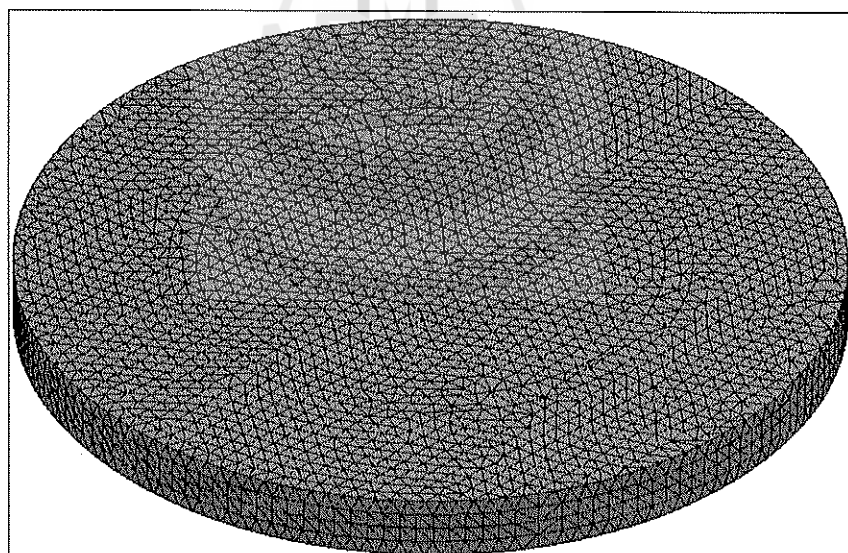
งานวิจัยนี้ได้พิจารณาหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคังวงแหวนแบน (circular ring) ซึ่งเป็นชนิดโหมคการสั้นตามแนวรัศมี โดยมีลักษณะเป็นวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 30 มิลลิเมตร มีความหนา 2.36 มิลลิเมตร ด้านบนของหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคังจะท้าวอิลิกทรินคังตามลายวงแหวนแบ่งออกเป็น 2 ชั้น โดยชั้นรอบนอกจะทำหน้าที่เป็นขั้วอิลิกทรินคังเข้าและชั้นรอบในเป็นขั้วอิลิกทรินคังออกมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 มิลลิเมตร โดยมีช่องว่างระหว่างชั้น 1 มิลลิเมตรและด้านล่างจะท้าวอิลิกทรินคังเต็มหน้าวงกลม ซึ่งทำหน้าที่เป็นขั้วอิลิกทรินคังกราวด์ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ศึกษาในรูปแบบ 3 มิติ เพื่อให้เห็นการออกแบบเอลิเมนต์ในที่ต่าง ๆ กันของหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคัง การจำลองผลสำหรับปัญหาที่รูปร่างมีความลึกหรือความหนา การออกแบบกริดให้มีขนาดเล็กหรือใหญ่นั้นจะแปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่ที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิติ นั้น ขั้นตอนแรกจะเริ่มจากการแบ่งปริมาตรของหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคังออกเป็นเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ (tetrahedral elements) โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพท์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผ่านการเชื่อมต่อกันระหว่างจุดต่อและเอลิเมนต์ต่าง ๆ การออกแบบกริดของหม้อแปลงไฟโอโซอิลิกทรินคังเป็นรูปเอลิเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่ชื่อว่า Solidworks โดยเมื่อกำหนดความละเอียดของกริดสูงสุดจะมีจำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์ที่ใช้ภายในระบบอยู่เป็นจำนวน 11,607 จุดต่อและ 55,406 เอลิเมนต์ ตามลำดับ ตัวอย่างการออกแบบกริดของปัญหาในรูปแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.2 โดยจะแสดงให้เห็นถึงความละเอียดในการออกแบบกริด

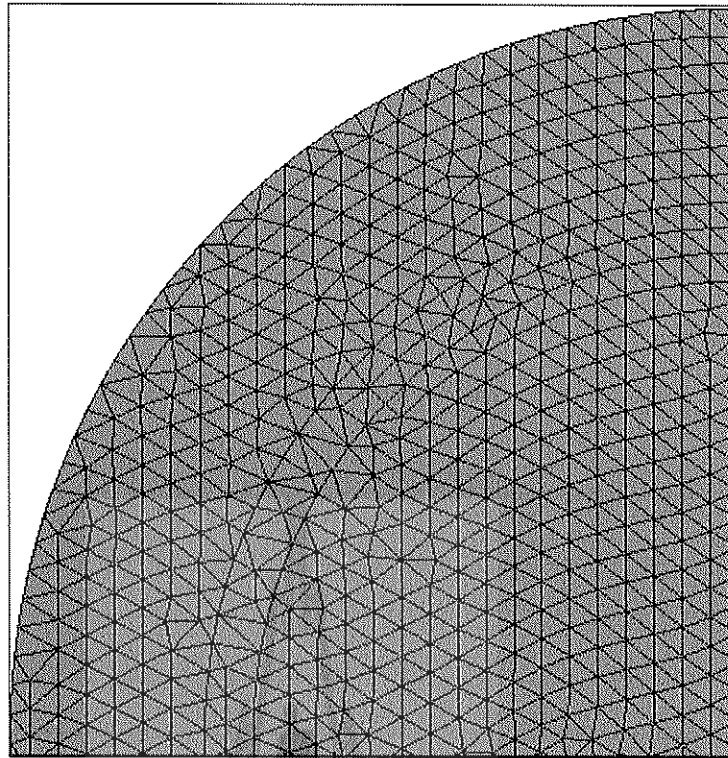
และในรูปที่ 4.3 จะแสดงภาพการขยายการแบ่งอิลิเมนต์ของหม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกเพื่อให้เห็นถึงการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่ออย่างชัดเจนยิ่งขึ้น



รูปที่ 4.1 หม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกชนิดวงแหวนแบน



รูปที่ 4.2 การแบ่งอิลิเมนต์และจุดต่อของหม้อแปลงไฟอโซอิเล็กทริกแบบ 3 มิติ



รูปที่ 4.3 ภาพการขยายการแบ่งอิลิเมนต์และการเชื่อมต่อของอิลิเมนต์ต่าง ๆ

4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การออกแบบอิลิเมนต์นั้นสามารถออกแบบได้หลายรูปแบบ โดยรูปแบบของอิลิเมนต์ที่แตกต่างกันนี้นำมาซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ที่แตกต่างกันไป ดังนั้นในหัวข้อนี้ได้ทำการพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ในรูปแบบทรงสี่หน้าสี่จุดต่อและแสดงให้เห็นถึงกระบวนการดำเนินงานในการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ที่ถูกต้องตามรูปร่างของอิลิเมนต์ที่เลือกใช้

ขั้นตอนนี้เป็นทางเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างของศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลจากหม้อแปลงไฟโอโซอิล็กทริกจะได้

$$A(x, y, z) = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3 + A_4N_4 \quad (4.16)$$

สมการที่ (4.16) คือฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) ของรูปแบบทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ โดยที่ N_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ A_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือ ผลลัพธ์แต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ในแต่ละอิลิเมนต์ โดย

$$N_n = \frac{1}{6V}(a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.17)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

และ V คือปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

4.3.3 การสร้างสมการอติเมนท์

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อติเมนท์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอติเมนท์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาของระบบ 3 มิติ ทางระเบียบวิธีไฟไนต์อติเมนท์จะต้องจัดสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังแสดงในสมการที่ (4.14) และ (4.15) ก่อนที่จะเข้าสู่การสร้างสมการของอติเมนท์ดังต่อไปนี้ (Yong and Cho, 1994)

$$\begin{bmatrix} (K+M)_{11} & (K+M)_{12} \\ (K+M)_{21} & (K+M)_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

โดยที่ $[U]$ และ $[\Phi]$ คือ ค่าการกระจัดเชิงกลและค่าศักย์ไฟฟ้าซึ่งเป็นตัวที่ไม่ทราบค่าในแต่ละจุดต่อ ซึ่งสมการที่ (4.19) นี้ สามารถเขียนขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกแยกย่อยออกไปได้อีกเช่น ใช้วิธีของกาลเลอร์กิน (Galerkin) ซึ่งเมตริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหามิติสูงอย่างเช่นปัญหาในงานวิจัยนี้

การสร้างสมการของอติเมนท์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้คือ หากแทนผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (4.14) และ (4.15) จะไม่ได้ค่าเท่ากับศูนย์ แต่จะมีค่าเท่ากับ R ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.20) และ (4.21)

$$c^E (\nabla \cdot Bu) + \rho \omega^2 u + e^T (\nabla \cdot \nabla \Phi) = R \quad (4.20)$$

$$e (\nabla \cdot Bu) - \varepsilon^s (\nabla \cdot \nabla \Phi) = R \quad (4.21)$$

ซึ่ง R เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณ ซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา เศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าเที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเออร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988); (Kim, Kwon, and Park, 1999) วิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function : W) แล้วอินทิเกรตรอบปริมาตรและกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_v W_n R dv = 0 \quad , n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.22)$$

งานวิจัยนี้เลือกกริดรูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในการคำนวณ ดังนั้นจุดที่ไม่ทราบค่าจะมี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั้นหมายถึงในสมการที่ (4.19) จะต้องมีค่า $n = 1, 2, 3, 4$ และโดยปกติจะเลือก $W_n = N_n$ (Lerch, 1990) ซึ่งเรียกว่า บับโนฟ - กาลเออร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทนค่า R ด้วยสมการ (4.20) และ (4.21) ลงในสมการที่ (4.22) จะได้

$$\int_v \nabla \cdot N_n (c^E Bu) dv + \int_v N_n (\rho \omega^2 u) dv + \int_v \nabla \cdot N_n (e^T \nabla \Phi) dv = 0 \quad (4.23)$$

$$\int_v \nabla \cdot N_n (e Bu) dv - \int_v \nabla \cdot N_n (\epsilon^s \nabla \Phi) dv = 0 \quad (4.24)$$

และจากสมการที่ (4.3) เขียนในรูปใหม่จะได้ (Safari, and Akdogan, 2008)

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -[\nabla N_1 \quad \nabla N_2 \quad \dots \quad \nabla N_n] \Phi \quad (4.25)$$

เมื่อ n คือ จำนวนจุดต่อที่อยู่ในอิติเม้นท์และจากสมการที่ (4.25) สามารถเขียนเป็น

$$\mathbf{E} = -[B_\Phi] \Phi \quad (4.26)$$

$$\text{โดยที่ } [B_\phi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\text{และ } \frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad (4.30)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการที่ (4.31) ได้ดังนี้

$$[B_\phi] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad (4.31)$$

และจากสมการที่ (4.4) สามารถเขียนในรูปใหม่แสดงได้ดังนี้

$$S = [B]u = [B_u]U \quad (4.32)$$

$$\text{โดยที่ } [B_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ และแทนสมการที่ (4.28) (4.29) และ (4.30) ในสมการที่ (4.33) ได้ดังนี้

$$[B_u] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (4.34)$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ (4.23) และ (4.24) จะได้

$$\int_V \frac{1}{36V^2} [B_u]^T [c^E] [B_u] U dv + \int_V \rho \omega^2 [N]^T [N] U dv + \int_V \frac{1}{36V^2} [B_u]^T [e^r] [B_\phi] \Phi dv = 0 \quad (4.35)$$

$$\int_V \frac{1}{36V^2} [B_\phi]^T [e] [B_u] U dv - \int_V \frac{1}{36V^2} [B_\phi]^T [e^s] [B_\phi] \Phi dv = 0 \quad (4.36)$$

โดยเมื่อดำเนินการอินทิเกรตสมบรูณ์แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้ (Yong, 1993)

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] - \omega^2 [M] & [K_{u\Phi}] \\ [K_{u\Phi}]^T & [K_{\Phi\Phi}] \end{bmatrix}_{16 \times 16} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix}_{16 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{16 \times 1} \quad (4.37)$$

โดยที่

$$[K_{uu}]_{12 \times 12} = \frac{1}{36V^2} [B_u]^T [c^E] [B_u] \int_V dv = \frac{1}{36V} [B_u]^T [c^E] [B_u] \quad (4.38)$$

$$[K_{u\Phi}]_{12 \times 4} = \frac{1}{36V^2} [B_u]^T [e]^T [B_\Phi] \int_V dv = \frac{1}{36V} [B_u]^T [e]^T [B_\Phi] \quad (4.39)$$

$$[K_{\Phi\Phi}]_{4 \times 4} = \frac{1}{36V^2} [B_\Phi]^T [-\varepsilon^s] [B_\Phi] \int_V dv = \frac{1}{36V} [B_\Phi]^T [-\varepsilon^s] [B_\Phi] \quad (4.40)$$

$$[M]_{12 \times 12} = \int_V (-\rho) [N]^T [N] dv \quad (4.41)$$

จากสมการที่ (4.41) ถ้ากำหนดให้ ρ เป็นค่าคงที่ภายในแต่ละอิลิเมนต์จะได้

$$[M]_{12 \times 12} = (-\rho) \int_V \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \vdots \\ N_{12} \end{bmatrix}_{12 \times 1} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{12}]_{1 \times 12} dv$$

$$[M]_{12 \times 12} = (-\rho) \int_V \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & \dots & N_1 N_{12} \\ N_2 N_1 & N_2^2 & N_2 N_3 & \dots & N_2 N_{12} \\ N_3 N_1 & N_3 N_2 & N_3^2 & \dots & N_3 N_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{12} N_1 & N_{12} N_2 & N_{12} N_3 & \dots & N_{12}^2 \end{bmatrix}_{12 \times 12} dv \quad (4.42)$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอด ปริมาตรดังสมการที่ (4.43) เพราะเนื่องจาก $N_1 = L_1$, $N_2 = L_2$, $N_3 = L_3, \dots, N_{12} = L_{12}$ จะได้

$$\int_v L_1^a L_2^b L_3^c, \dots, L_{12}^l dv = \frac{a!b!c!, \dots, l!}{(a+b+c, \dots, +l+3)!} 6V \quad (4.43)$$

จากสมการที่ (4.42) สามารถพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี คือ $L_n = L_m$ และ $L_n \neq L_m$ ในกรณี $L_n = L_m$ จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 ของรูปทรงสี่หน้าจะได้ $a = 2$ และนอกนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการที่ (4.43) จะได้

$$\begin{aligned} \int_v L_1^2 dv &= \frac{2!0!0!, \dots, 0!}{(2+0+0, \dots, +0+3)!} 6V \\ &= \frac{12V}{5!} = \frac{2V}{20} \end{aligned} \quad (4.44)$$

ในกรณีที่ $L_n \neq L_m$ จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 และ 2 ของรูปทรงสี่หน้าจะได้ $a = b = 1$ และนอกนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจากสมการที่ (4.43) จะได้

$$\begin{aligned} \int_v L_1^1 L_2^1 dv &= \frac{1!1!0!, \dots, 0!}{(1+1+0, \dots, +0+3)!} 6V \\ &= \frac{6V}{5!} = \frac{V}{20} \end{aligned} \quad (4.45)$$

ที่จุดต่ออื่น ๆ ของรูปทรงสี่หน้าก็พิจารณาในลักษณะเช่นเดียวกัน ดังนั้นจากสมการที่ (4.42) จะได้

$$[M]_{12 \times 12} = \frac{(-\rho)V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & . & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (4.46)$$

4.3.4 การประกอบสมการอิลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นกรนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น $4n$ สมการ ดังนั้นจึงได้สมการรวมสำหรับการจำลองผลค่าของศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลของงานวิทยานิพนธ์นี้ในรูปสมการเชิงเส้นคือ

$$\begin{bmatrix} [K_{mm}] - \omega^2[M] & [K_{m\phi}] \\ [K_{m\phi}]^T & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix}_{4n \times 4n} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix}_{4n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4n \times 1} \quad (4.47)$$

- เมื่อ K, M คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของระบบรวม
 U คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าที่ไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ
 Φ คือ ค่าการกระจัดเชิงกลที่ไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ

4.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

สำหรับขั้นตอนการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะมีทั้งหมดอยู่ 2 บริเวณที่กำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต คือ ศักย์ไฟฟ้าบริเวณขั้วอิเล็กโทรดขาเข้าและศักย์ไฟฟ้าบริเวณขั้วอิเล็กโทรดของกราวด์ โดยค่าศักย์ไฟฟ้าที่บริเวณดังกล่าวและค่าคงที่วัสดุต่าง ๆ ของหม้อแปลงไพโซอิเล็กทริก รุ่น PZT - 840 สามารถสรุปเป็นตารางที่ 4.1 ดังนี้ (Buchanan, and Peddieson, 1989); (Henderson, 2002)

ตารางที่ 4.1 พารามิเตอร์ของหม้อแปลงไฟอิลิกทรอกที่ใช้ในการจำลองผล

พารามิเตอร์	ค่า
ศักย์ไฟฟ้าบริเวณขั้วอิเล็กโทรดขาเข้า	50 V
ศักย์ไฟฟ้าบริเวณขั้วอิเล็กโทรดของกราวด์	0 V
เมตริกซ์ค่าคงที่เมื่อสนามไฟฟ้าคงที่ (c^E)	$\begin{bmatrix} 13.9 & 7.78 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13.9 & 7.43 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.06 \end{bmatrix} \times 10^{10} N/m^2$
เมตริกซ์สภาพยอมทางไฟฟ้าเมื่อความเครียดคงที่ (ϵ')	$\begin{bmatrix} 13.05 & 0 & 0 \\ 0 & 13.05 & 0 \\ 0 & 0 & 11.51 \end{bmatrix} \times 10^{-9} F/m^2$
เมตริกซ์ค่าคงที่ความเค้นของไฟอิลิกทรอก (e)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12.7 & 0 & 0 \\ -5.2 & -5.2 & 15.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} C/m^2$
สภาพยอมทางไฟฟ้าของสูญญากาศ (ϵ_0)	$8.854 \times 10^{-12} F/m$
ความหนาแน่นมวลของวัสดุ (ρ)	$7600 Kg/m^3$

หลังจากประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบเขตให้กับระบบแล้ว ก็ดำเนินการหาค่าศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกล ณ จุดต่อต่าง ๆ ของระบบสมการเชิงเส้นต่อไป

4.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหม้อแปลงไฟอิลิกทรอกสำหรับคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกลซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ในแบบ 3 มิติเพื่อคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าและการกระจัดเชิงกล ได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาลเลอร์กิน โดยรายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อีลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 6 ต่อไป