

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสีย  
ในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

นายอริยศักดิ์ จิตธรรมสาร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
ปีการศึกษา 2555

**DISTRIBUTION TRANSFORMER CORE DESIGN  
TO REDUCE CORE LOSS BY USING  
3-D FINITE ELEMENT METHOD**

**Ariyasak Jitthamasarn**

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the  
Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering  
Suranaree University of Technology  
Academic Year 2012**

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสีย  
ในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

(ผศ. ดร.อนันต์ อุ่นศิริไธย์)

ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.เผด็จ เผ่าละออ)

กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

(รศ. ดร.กิตติ อัครกิจมงคล)

กรรมการ

(ผศ. ดร.กীরติ สุตกษณ์)

กรรมการ

(ผศ. ดร.สุภกิจ รูปจันทร์)

กรรมการ

(ศ. ดร.ชูกิจ ลิ้มปีจ้านงค์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)

คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

อริยศักดิ์ จิตธรรมสาร : การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ (DISTRIBUTION TRANSFORMER CORE DESIGN TO REDUCE CORE LOSS BY USING 3-D FINITE ELEMENT METHOD) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ, 117 หน้า.

หม้อแปลงจำหน่ายเป็นอุปกรณ์ที่มีความจำเป็นในระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการใช้งาน สิ่งหนึ่งที่จะบอกถึงประสิทธิภาพของหม้อแปลงได้คือกำลังงานสูญเสีย ดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงศึกษาและคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พร้อมทั้งออกแบบแกนเหล็กเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก โดยที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากขดลวดตัวนำไฟฟ้าแรงสูงของหม้อแปลงจำหน่ายที่แสดงอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยอาศัยการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กที่ซับซ้อนประกอบกับความรู้ในการแปลงโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM) เป็นเครื่องมือในการประมวลผลที่มีผลลัพธ์แสดงอยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตลอดทั้งภายในของหม้อแปลงจำหน่าย วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ (FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมสูง ทั้งนี้เพราะสามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีความซับซ้อนในหลากหลายรูปแบบ ในปัจจุบัน FEM มีการประยุกต์ใช้งานทางด้านวิศวกรรมกันอย่างกว้างขวาง แม้แต่ปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กก็ได้ใช้ FEM ในการประมวลผลเพื่อหาคำตอบของการส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าที่แสดงอยู่ในรูปของสมการแมกซ์เวลล์ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้ FEM ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า  
ปีการศึกษา 2555

ลายมือชื่อนักศึกษา \_\_\_\_\_  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา \_\_\_\_\_

ARIYASAK JITTHAMMASARN : DISTRIBUTION TRANSFORMER  
CORE DESIGN TO REDUCE CORE LOSS BY USING 3-D FINITE  
ELEMENT METHOD. THESIS ADVISOR : ASST. PROF.  
PADEJ PAO-LA-OR, Ph.D., 117 PP.

DISTRIBUTION TRANSFORMER/MAGNETIC FIELD/CORE LOSS/CORE  
DESIGN/3-D FINITE ELEMENT METHOD

Distribution transformer is an important device in electrical power system by acting to increase or decrease the voltage for suiting the application. One factor to relate the efficiency of the transformer is a loss. Therefore, this thesis is to study and calculate core loss of transformer. And design core to reduce core loss that cause by magnetic field. The mathematical model of magnetic fields caused by high voltage conductors of distribution transformer by using a set of second-order partial differential equations. The modification for complex magnetic field analysis and time-harmonic simulation are also utilized. Computer-based simulation utilizing the three-dimensional finite element method (3-D FEM) is exploited as a tool for visualizing magnetic fields distribution volume a distribution transformer. Finite Element Method (FEM) is one among popular numerical methods that is able to handle problem complexity in various forms. Even for problems of magnetic field distribution, the FEM is able to estimate solutions of Maxwell's equations governing the power transmission systems. The computer simulation based on the use of the FEM has been developed in MATLAB programming environment.

School of Electrical Engineering

Academic Year 2012

Student's Signature \_\_\_\_\_

Advisor's Signature \_\_\_\_\_

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบุคคลและกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำช่วยเหลืออย่างดียิ่งทั้งในด้านวิชาการและด้านการดำเนินงานวิจัยจากบุคคล และกลุ่มบุคคลต่าง ๆ ได้แก่

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ ผู้ช่วยอธิการบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ และแนะแนวทางอันเป็นประโยชน์แก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด รวมถึงได้ช่วยตรวจทาน และแก้ไขรายงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้จนทำให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นรวมทั้งเป็นกำลังใจ นอกจากนี้ยังมีความเป็นกันเองแก่ผู้วิจัยและเป็นแบบอย่างที่ดีในการดำเนินชีวิตหลาย ๆ ด้าน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนันท์ อุ่นศิริไฉย หัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า และอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีทุกท่าน ที่ได้กรุณาให้คำปรึกษาและแนะนำความรู้ทางวิชาการอย่างดียิ่งมาโดยตลอดระยะเวลาที่ผู้วิจัยได้ศึกษา

ขอขอบคุณ คุณสุกัญญา ทัพศิริ คุณพีรวัฒน์ มีสุข และ คุณชวลิต ปัญญาอิสระ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือดูแล และเป็นกำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาและขอบคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง ๆ บัณฑิตศึกษาทุกท่าน ที่ให้กำลังใจในการทำวิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบคุณ คุณอภิญากุล หาญกุล ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ดูแล ห่วงใย และเป็นกำลังใจอย่างใกล้ชิดแก่ผู้วิจัยเสมอมา

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณอาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ให้ความรู้ทางด้านวิชาการทั้งในอดีตและปัจจุบัน และขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อสุภชัย จิตธรรมสาร คุณแม่อารมณี จิตธรรมสาร และครอบครัวที่ให้ความรัก กำลังใจ การอบรมเลี้ยงดู และดูแลส่งเสริมทางการศึกษาอย่างดีมาโดยตลอด จนทำให้ผู้วิจัยประสบความสำเร็จในชีวิตเรื่อยมา

อริยศักดิ์ จิตธรรมสาร

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย).....	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ).....	ข
กิตติกรรมประกาศ .....	ค
สารบัญ .....	ง
สารบัญตาราง .....	ช
สารบัญรูป.....	ซ
<b>บทที่</b>	
<b>1 บทนำ .....</b>	<b>1</b>
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์งานวิจัย.....	2
1.3 ข้อยกเว้นเบื้องต้น .....	2
1.4 ขอบเขตของงานวิจัย .....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ .....	2
1.6 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์ .....	3
<b>2 ปรัชญาบรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....</b>	<b>4</b>
2.1 บทนำ .....	4
2.2 ปรัชญาบรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	4
2.3 สรุป.....	8
<b>3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง .....</b>	<b>9</b>
3.1 บทนำ .....	9
3.2 สนามแม่เหล็ก.....	9
3.2.1 พื้นฐานสนามแม่เหล็ก .....	9
3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก.....	16
3.3 หม้อแปลงไฟฟ้า.....	18

## สารบัญ (ต่อ)

### หน้า

3.3.1 ชนิดของหม้อแปลงไฟฟ้า .....	18
3.3.2 ส่วนประกอบของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	20
3.3.3 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า.....	22
3.3.4 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟส .....	24
3.4 กำลังงานสูญเสียของหม้อแปลงไฟฟ้า .....	26
3.4.1 กำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก .....	26
3.4.2 กำลังงานสูญเสียในขดลวดตัวนำ .....	27
3.5 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ .....	27
3.5.1 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ .....	28
3.5.2 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	35
3.6 สรุป.....	40
<b>4 การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วย</b> <b>ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์.....</b>	<b>41</b>
4.1 บทนำ .....	41
4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย .....	41
4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ .....	44
4.3.1 การออกแบบอิลลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา.....	44
4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์.....	50
4.3.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ 2 มิติ .....	50
4.3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ 3 มิติ .....	51
4.3.3 การสร้างสมการอิลลิเมนต์ .....	52
4.3.3.1 สมการอิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ .....	52
4.3.3.2 สมการอิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	60
4.3.4 การประกอบสมการอิลลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ.....	65
4.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย.....	65
4.3.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ .....	65



## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.4	การคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย .....	66
4.5	สรุป.....	67
5	ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วย ระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ .....	68
5.1	บทนำ .....	68
5.2	โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 3 มิติ .....	68
5.2.1	โปรแกรมการสร้างกริด.....	68
5.2.2	โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก.....	73
5.3	ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ของหม้อแปลงจำหน่าย .....	77
5.4	สรุป.....	81
6	การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก.....	82
6.1	บทนำ .....	82
6.2	การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย.....	82
6.3	ผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ถูกออกแบบ .....	88
6.4	สรุป.....	92
7	สรุปและข้อเสนอแนะ .....	93
7.1	สรุป.....	93
7.2	ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต .....	94
	รายการอ้างอิง .....	95
	ภาคผนวก	
	ภาคผนวก ก. การคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบประมาณ .....	98
	ภาคผนวก ข. การเผยแพร่ผลงานในขณะศึกษา .....	101
	ประวัติผู้เขียน .....	117

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
3.1 ลักษณะข้อมูลของอิทธิพล.....	29
3.2 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด.....	30
3.3 ลักษณะข้อมูลของอิทธิพล.....	37
3.4 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด.....	37



## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
3.1	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก..... 13
3.2	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม..... 15
3.3	รูปหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส..... 18
3.4	แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส..... 21
3.5	แกนเหล็กหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟส..... 21
3.6	วงจรหม้อแปลงไฟฟ้า..... 22
3.7	วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า..... 23
3.8	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-เดลต้า ..... 24
3.9	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-สตาร์ ..... 24
3.10	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-สตาร์ ..... 25
3.11	การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-เดลต้า ..... 25
3.12	การต่อหม้อแปลงแบบ Dy1..... 26
3.13	การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์..... 28
3.14	รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อิลลิเมนต์ 4 โหนด..... 29
3.15	การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม..... 30
3.16	รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด เมื่อพิจารณาอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า..... 36
3.17	การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า..... 38
4.1	พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA..... 48
4.2	การแบ่งอิลลิเมนต์ของหม้อแปลงแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ในแกนเหล็กในแบบ 2 มิติ ..... 49
4.3	การแบ่งอิลลิเมนต์ของหม้อแปลงแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ในแกนเหล็กในแบบ 3 มิติ..... 49
5.1	การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชิ้นงาน ..... 70
5.2	ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 70

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.3	แกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ..... 71
5.4	ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 72
5.5	ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย ..... 73
5.6	แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ ..... 74
5.7	แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ..... 75
5.8	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไป ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 2 มิติ ..... 78
5.9	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลง จำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ ..... 79
5.10	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก (wb/m) ของหม้อแปลง จำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ ..... 79
5.11	การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก (T) ของหม้อแปลงจำหน่าย แบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ..... 80
5.12	การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็ก (W) ของหม้อแปลงจำหน่าย แบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ..... 80
6.1	ตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่างๆที่ใช้ในการออกแบบแกนเหล็ก..... 83
6.2	พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่ใช้พิจารณา ..... 84
6.3	แผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็ก ..... 87
6.4	ขนาดของแกนเหล็กหม้อแปลงที่ได้จากการออกแบบ (cm)..... 88
6.5	การแบ่งเอลิเมนต์ของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก..... 89

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.6	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ..... 90
6.7	การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ..... 90
6.8	การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ..... 91
6.9	การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสีย (W) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ..... 91

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

หม้อแปลงไฟฟ้าเป็นอุปกรณ์ที่ใช้เชื่อมโยงระหว่างระบบไฟฟ้าที่มีแรงดันไฟฟ้าต่างกัน โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการส่ง การจ่าย และการใช้พลังงานไฟฟ้า ดังนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจึงนับเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในบรรดาอุปกรณ์ไฟฟ้าทั้งหลายการขัดข้องหรือการชำรุดเสียหายของหม้อแปลงไฟฟ้า มักมีผลกระทบต่อการใช้ไฟฟ้าเป็นเวลานานจะนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจะต้องมีประสิทธิภาพที่ดี เพื่อให้ระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าเป็นระบบที่มีความเสถียร (stable) และมีความน่าเชื่อถือ (reliability) สิ่งหนึ่งที่บ่งบอกถึงประสิทธิภาพของหม้อแปลงได้คือกำลังงานสูญเสีย

การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในหม้อแปลงไฟฟ้า โดยปกติจะสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการอนุพันธ์ (differential equation) หรือสมการอินทิกรัล (integral equation) เป็นไปได้ยากที่จะหาผลเฉลยแน่นอนตรง (exact solution) ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข อีกทั้งสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น จึงทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว สำหรับวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation : PDE) วิธีที่มีประสิทธิภาพสูงสุดและได้รับความนิยมแพร่หลายในปัจจุบันได้แก่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method : FEM) โดยเฉพาะงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ซึ่งต้องอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติมาช่วยดำเนินการ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ FEM เริ่มวิวัฒนาการมาตั้งแต่ต้นปี ค.ศ. 1950 ปัจจุบันเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับนิยมนามาก เนื่องจากปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ ทำให้สามารถคำนวณงานต่าง ๆ ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ในปัจจุบันได้มีการนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมแทบทุกสาขา ซึ่งระเบียบวิธีนี้จะจัดแบ่งพื้นที่ของปัญหาเป็นชิ้นส่วนย่อยที่ประกอบขึ้นจากโนด โดยเชื่อมต่อกันด้วยกริด สำหรับปัญหา 2 มิตินิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ (linear triangle) และสำหรับปัญหา 3 มิตินิยมใช้ชิ้นส่วนย่อยที่เป็นรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ (linear tetrahedral) เพื่อประมาณโดเมนของปัญหาได้ ซึ่งข้อดีของระเบียบวิธีนี้คือ

สามารถหาผลเฉลยของระบบที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ นอกจากนี้ยังง่ายต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่อาจมีหลายลักษณะผสมกันอยู่ในระบบ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องนำวิธี FEM มาใช้ในการดำเนินการ โดยงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติด้วยการพัฒนาวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติขึ้นเอง

## 1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) พัฒนาโปรแกรม FEM ทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) พัฒนาโปรแกรม FEM 3 มิติ สำหรับคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก
- 3) ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่เกิดขึ้น

## 1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

- 1) ขดลวดตัวนำเป็นชิ้นงานเดียวกัน ไม่มีรอยต่อระหว่างชั้นของขดลวด
- 2) กำหนดให้ขดลวดตัวนำทั้งปฐมภูมิและทุติยภูมิแต่ละเฟสมีค่ากระแสคงที่สม่ำเสมอ

## 1.4 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) พัฒนาโปรแกรม FEM สำหรับวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กเป็นทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ
- 3) ออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้หลักการและแนวความคิดสำหรับการศึกษาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย
- 2) ได้โปรแกรมจำลองผลที่เกิดจากการพัฒนาโปรแกรม FEM ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้เข้ากับปัญหาจริงในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ตลอดจนสามารถนำไปใช้ประกอบประกอบการเรียนการสอนด้านสนามแม่เหล็ก

## 1.6 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย 7 บท และ 2 ภาคผนวก ดังนี้

**บทที่ 1** เป็นบทนำ กล่าวถึงความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์และเป้าหมายของงานวิจัย วิทยานิพนธ์ รวมทั้งขอบเขตของงานส่วนบทอื่น ๆ ประกอบด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

**บทที่ 2** กล่าวถึงการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ทราบถึงแนวทาง และระเบียบวิธีการดำเนินการวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยผลจากการสำรวจสืบค้นจะใช้เป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์ และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์

**บทที่ 3** นำเสนอทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยวิทยานิพนธ์ โดยเนื้อหาประกอบไปด้วย หัวข้อหลัก ๆ ได้แก่ สนามแม่เหล็ก หม้อแปลงจำหน่าย กำลังงานสูญเสียและระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ

**บทที่ 4** มีเนื้อหาว่าด้วย การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้อธิบายขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

**บทที่ 5** อธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย พร้อมผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ โดยกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่ประยุกต์ใช้ในการจำลองผลและโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผล

**บทที่ 6** กล่าวถึงการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พร้อมทั้งแสดงผลลัพธ์ของการคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายจากการออกแบบ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลทางกายภาพของหม้อแปลงจำหน่ายที่ออกแบบขึ้น ว่าส่งผลต่อกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอย่างไร

**บทที่ 7** เป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ พร้อมงานวิจัยที่จะดำเนินการต่อ ภาคผนวกประกอบด้วยเนื้อหา 2 ส่วน ได้แก่

**ภาคผนวก ก.** การคำนวณหาค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย โดยยกตัวอย่างการคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยวิธีแบบการประมาณค่า

**ภาคผนวก ข.** กล่าวถึงการรวบรวมผลงานที่ได้รับการเผยแพร่ของงานวิจัยวิทยานิพนธ์ ในขณะที่ดำเนินการศึกษา



## บทที่ 2

### ปรัทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 บทนำ

วัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยนี้คือ การพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายและค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก พร้อมทั้งศึกษาและออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่เกิดขึ้น ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งในการดำเนินการสำรวจปรัทัศน์วรรณกรรม และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ทราบถึงแนวทางการวิจัย ระเบียบวิธีที่เคยมีการใช้งานมาก่อน ผลการดำเนินงานข้อเสนอแนะต่าง ๆ จากคณะวิจัยตั้งแต่อดีตเป็นต้นมา โดยใช้ฐานข้อมูลที่เป็นแหล่งสะสมรายงานวิจัยและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้แก่ฐานข้อมูล IEEE IEE และ ScienceDirect เป็นต้น งานวิจัยดังกล่าวจะใช้เป็นแนวทางสำหรับประยุกต์ และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้

#### 2.2 ปรัทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การนำเสนอปรัทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากเรื่องการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายและค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก รวมถึงการออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่เกิดขึ้นตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน สามารถสรุปโดยย่อเป็นตารางได้ดังตารางที่ 2.1 ซึ่งสามารถจัดเรียงลำดับได้ตามปีของผลงานดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
1995	Pern and Yeh	ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสไฟฟ้าที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในขดลวดของหม้อแปลงไฟฟ้า อีกทั้งยังพิจารณาถึงการเชื่อมต่อขดลวดตัวนำแบบขนาน 2 แบบ ได้แก่ แบบที่ไม่มีกระแสไหลในตัวนำระหว่างชั้น และแบบที่มีการไหลในตัวนำระหว่างชั้น ว่ามีกำลังงานสูญเสียแตกต่างกันอย่างไร ด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ
1997	Li, Cui, Zhang, Cheng, Zhang and Zhao	ได้ศึกษาหม้อแปลงในบริเวณแผ่นยึดของแกนเหล็ก (tie plate) โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของกระแสไหลและขนาดของแผ่นยึดแกนเหล็กที่มีผลต่อสนามแม่เหล็ก, กำลังงานสูญเสียกระแสเอ็ดดี้และกำลังงานสูญเสียฮิสเตอร์ซิสที่บริเวณแผ่นยึดแกนเหล็ก ด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ
2000	Driesen, Deliege, Belmans, and Hameyer	ได้ดำเนินการศึกษาและจำลองผลของสนามแม่เหล็กและความร้อนของหม้อแปลงในสถานะจ่ายโหลดไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ในส่วนการคำนวณสนามแม่เหล็กจะพิจารณาโดยการแปลงจากโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ และส่วนของแบบจำลองของอุณหภูมิจะคำนึงถึงวัสดุที่ใช้เป็นฉนวนกั้นระหว่างขดลวดตัวนำโดยคำนวณทั้งสถานะคงตัวและสถานะชั่วคราว
2004	Myungjin, Myeongseob, Seungyong, Guesoo and Jikwang	ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของขดลวดตัวนำที่หุ้มฉนวนด้วยความหนาและมีจำนวนชั้นของขดลวดตัวนำที่แตกต่างกันเมื่อได้รับกระแสที่ขดลวดประกอบกับได้รับสนามแม่เหล็กจากภายนอก ที่ทำให้เกิด magnetization loss ด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
2005	Schmidt, Scoberl, and Hamberger	ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกำลังงานสูญเสียในบริเวณแกนเหล็ก ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติในการแก้ปัญหา
2006	Preis, Biro, Buchgraber, and Ticar	ได้ใช้วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์จำลองผลและศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กไฟฟ้ากับอุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า และปัจจัยที่มีผลต่ออุณหภูมิในหม้อแปลงไฟฟ้า
2008	Elise, Chaves and Camacho	ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสฟลักซ์ที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กในบริเวณแกนเหล็กและได้ทำการออกแบบช่องว่างอากาศระหว่างขดลวดตัวนำกับแกนเหล็กและระหว่างขดลวดแรงต่ำกับแรงสูงเพื่อให้ค่าสนามแม่เหล็กที่ลดลง โดยในส่วนของกรหาผลของสนามแม่เหล็กอันเนื่องมาจากกระแสที่ไหลในขดลวดนั้นทางทีมงานผู้วิจัยได้หาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ
2008	Rafajdus, Hrabovcova, Susota, and Vojenciak	ได้ออกแบบและวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในหม้อแปลงไฟฟ้าหนึ่งเฟสเพื่อตรวจสอบการกระจายตัวของความร้อนในวัสดุที่เป็นตัวนำยิ่งยวด
2008	Taheri, Gholami, and Taheri	ได้ศึกษาจุดอุณหภูมิร้อนของหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กและผลของสนามแม่เหล็กต่อกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นซึ่งอยู่ในรูปของความร้อน และได้ศึกษาการออกแบบขนาดของแกนเหล็กเพื่อลดจุดร้อนภายในหม้อแปลงด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติในการหาผลเฉลย

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

2009	Tsili, Amoiralis, Kladas, and Souflaris	ได้ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยหลักการระบายความร้อน ประสิทธิภาพการระบายความร้อนเป็นปัจจัยที่แสดงถึงอายุการใช้งานของหม้อแปลง ผู้วิจัยได้ใช้วิธีไฟไนท์อิเลคโตรนิคส์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ สำหรับคำนวณการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอุณหภูมิ รวมถึงจุดที่มีอุณหภูมิสูงสุดของหม้อแปลงไฟฟ้า
2010	Li, and Cheng	ได้ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิเลคโตรนิคส์แบบ 3 มิติ เพื่อคำนวณหาสนามแม่เหล็กและเส้นแรงแม่เหล็กบริเวณขดลวดของหม้อแปลง เมื่อเกิดการลัดวงจร และนำไปใช้ประโยชน์ในด้านอุตสาหกรรม

จะเห็นได้จากการสืบค้นปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่ได้สรุปผ่านมา สามารถช่วยให้ผู้ที่ดำเนินการศึกษาหรือพัฒนาเกี่ยวกับงานวิจัยนี้ พอมองภาพอย่างกว้าง ๆ ออกว่ามีคณะวิจัยใดที่ได้ศึกษาสิ่งใดไปแล้วบ้าง แต่ยังไม่สามารถแยกเป็นหมวดหมู่ตามวิธีการดำเนินการได้อย่างชัดเจน ดังนั้นในส่วนถัดไปนี้จึงได้ทำการเรียบเรียงและได้เลือกสรรงานวิจัยหลักๆ ที่สำคัญและมีความแตกต่างกันอย่างเด่นชัด จากผลงานที่ได้สรุปไว้ในตารางที่ 2.1 โดยจะได้กล่าวถึงหลักการและวิธีการดำเนินการวิจัยต่างๆ ที่ใช้วิเคราะห์และคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็ก รวมทั้งการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่เกิดขึ้น โดยจะกล่าวถึงโดยย่อดังนี้

เริ่มต้นจากงานวิจัยของ Taheri, Gholami and Taheri (2008) ได้ศึกษาจุดอุณหภูมิร้อน (hot spot temperature) ของหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กและผลของสนามแม่เหล็กต่อกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นซึ่งอยู่ในรูปของความร้อน และได้ศึกษาการออกแบบขนาดของแกนเหล็กเพื่อลดจุดร้อนภายในหม้อแปลงด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์อิเลคโตรนิคส์แบบ 3 มิติในการหาผลเฉลย งานวิจัยของ Tsili, Amoiralis, Kladas and Souflaris (2009) ได้ศึกษาและออกแบบหม้อแปลงไฟฟ้าโดยอาศัยหลักการระบายความร้อน ประสิทธิภาพการระบายความร้อนเป็นปัจจัยที่แสดงถึงอายุการใช้งานของหม้อแปลง ผู้วิจัยได้ใช้วิธีไฟไนท์อิเลคโตรนิคส์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สำหรับคำนวณการ

กระจายตัวของนามแม่เหล็กและการกระจายตัวของอนุกรมถึงจุดที่มีอนุกรมสูงสุดของหม้อแปลงไฟฟ้า

Li, Cui, Zhang, Cheng, Zhang and Zhao (1997) ได้ศึกษาหม้อแปลงจำหน่ายในบริเวณแผ่นยึดของแกนเหล็ก (tie plate) โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของกระแสไหลและขนาดของแผ่นยึดแกนเหล็กที่มีผลต่อสนามแม่เหล็ก, กำลังงานสูญเสียกระแสเอ็ดดี และกำลังงานสูญเสียฮิสเตอรีซิส ที่บริเวณแผ่นยึดแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ งานวิจัยของ Schmidt, Scobel, and Hamberger (2005) ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสที่มีผลต่อสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกำลังงานสูญเสียในบริเวณแกนเหล็กด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติในการแก้ปัญหา งานวิจัยของ Elise, Chaves and Camacho (2008) ได้ดำเนินการศึกษาความสัมพันธ์ของกระแสฟลักซ์ที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กในบริเวณแกนเหล็กและได้ทำการออกแบบช่องว่างอากาศระหว่างขดลวดตัวนำกับแกนเหล็กและระหว่างขดลวดแรงต่ำกับแรงสูงเพื่อให้ค่าสนามแม่เหล็กที่ลดลง โดยในส่วนของการทำงานผลของสนามแม่เหล็กอันเนื่องมาจากกระแสที่ไหลในขดลวดนั้นทางทีมงานผู้วิจัยได้หาผลเฉลยด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ

### 2.3 สรุป

บทที่ 2 นี้ ได้นำเสนอรายงานผลการสืบค้นวรรณกรรมและงานวิจัยย้อนหลังที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่จะดำเนินการ จากฐานข้อมูล IEEE IEE ScienceDirect และอื่น ๆ ซึ่งทำให้ทราบถึงแนวทางการวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระเบียบวิธีที่ผู้วิจัยอื่น ๆ ได้นำมาใช้ ผลการดำเนินงาน ข้อเสนอแนะต่าง ๆ จากคณະนักวิจัยตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน จากการสืบค้นปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ไม่เคยปรากฏงานวิจัยที่มุ่งเน้น การศึกษาและออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กอันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็กด้วยการพัฒนาวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ด้วยเหตุนี้งานวิจัยชิ้นนี้จึงพัฒนาขึ้นเพื่อศึกษาการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กด้วยวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

## บทที่ 3

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 3.1 บทนำ

การศึกษาและเข้าใจถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย นับว่ามีความสำคัญ และเป็นประโยชน์อย่างมากในการดำเนินงาน ทั้งนี้เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ และความเข้าใจในงานสำหรับนำไปเป็นแหล่งอ้างอิงในการดำเนินงานวิจัย ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบไปด้วย 4 หัวข้อหลัก ได้แก่ (1) สนามแม่เหล็ก (2) หม้อแปลงไฟฟ้า (3) กำลังงานสูญเสียของหม้อแปลงไฟฟ้า และ (4) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยจะกล่าวถึงเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์หรือถูกกล่าวอ้างถึงต่อการดำเนินงานวิจัย ทั้งนี้เพื่อให้เนื้อหา มีความกระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น

#### 3.2 สนามแม่เหล็ก

##### 3.2.1 พื้นฐานสำหรับสนามแม่เหล็ก (เผด็จ เผ่าละออ, 2549)

การบอกถึงปริมาณอย่างหนึ่งอย่างใดของสรรพสิ่งในธรรมชาติ อาจกระทำได้โดยการบอกถึงขนาดแต่เพียงอย่างเดียวซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงสเกลาร์ หรืออาจบอกทั้งขนาดและทิศทางควบคู่กันซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงเวกเตอร์ พื้นฐานสำคัญในการศึกษาสนามแม่เหล็กจะเริ่มต้นจากทฤษฎีของเวกเตอร์ โดยจะเริ่มต้นด้วยพีชคณิตของเวกเตอร์ ดังนี้

ถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ  $xyz$  จะเขียนเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  ภายในปริภูมิซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉากหรือพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) ได้ในลักษณะ

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \quad (3.1)$$

เมื่อ  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  และ  $\mathbf{k}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่ชี้ไปในทิศทางบวกของแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ตามลำดับ โดยมี  $A_x$ ,  $A_y$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากของ  $\mathbf{A}$  ในปริภูมิ

ถ้าให้  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{B}$  คือเวกเตอร์ แล้ว  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  คือการคูณกันแบบดอท (dot product) เรียกการคูณแบบนี้ว่า การคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (3.2)$$

เมื่อ  $\theta$  คือมุมระหว่างเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  กับ  $\mathbf{B}$  และ  $0 \leq \theta \leq \pi$

ส่วน  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  คือการคูณกันแบบครอส (cross product) เรียกการคูณแบบนี้ว่า การคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin\theta (\pm \mathbf{n}) \quad (3.3)$$

เมื่อ  $\mathbf{n}$  นิยามให้เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  และ  $\mathbf{B}$  โดยเครื่องหมาย  $\pm$  ใช้กำหนดทิศทางของผลคูณเวกเตอร์แบบครอส โดยถ้าเวกเตอร์  $\mathbf{A}$  หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม  $\theta$  เข้าหาเวกเตอร์  $\mathbf{B}$  จะกำหนดให้  $\mathbf{n}$  เป็นบวก ในทางตรงกันข้ามก็กำหนดให้เป็นลบ หรือยึดหลักการของสกรู โดยถ้าขันสกรูให้เคลื่อนที่เข้าไปในเนื้อวัตถุจะกำหนดให้  $\mathbf{n}$  เป็นบวก และถ้าคลายสกรูออกจากเนื้อวัตถุจะกำหนดให้เป็นลบ ซึ่งเทียบได้กับกฎมือขวานั้นเอง

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (3.4)$$

หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

เมื่อทราบวิธีคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ซึ่งเป็นพื้นฐานเบื้องต้นแล้ว จากนั้นจึงดำเนินการศึกษาถึงการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์และฟังก์ชันเวกเตอร์ (ชัยณรงค์ วิเศษศักดิ์วิชัย, 2545) ซึ่งจะกล่าวต่อไปดังนี้

ถ้าให้  $f$  เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ 3 ตัวแปร  $f(x,y,z)$  แล้ว ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (3.6)$$

และจากการกำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ที่เรียกว่าเดล (del :  $\nabla$ ) ดังนี้

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

ดังนั้นเมื่อนำ  $\nabla$  กระทำต่อฟังก์ชัน  $f$  จะได้  $\nabla f$  ซึ่งเรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชัน  $f$  โดยจะมีความหมายในลักษณะ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.8)$$

และถ้ากำหนดให้  $\mathbf{A}$  คือเวกเตอร์แล้ว  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  ซึ่งเป็นการคูณกันแบบดอท จะเรียกว่า ไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของ  $\mathbf{A}$  นิยามโดย

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

ส่วน  $\nabla \times \mathbf{A}$  ซึ่งเป็นการคูณกันแบบครอส จะเรียกว่าเคิร์ล (curl) ของ  $\mathbf{A}$  นิยามโดย

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.10)$$



หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลเป็นเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราสามารถใช้เคลดำเนินการสองครั้งเพื่อให้ได้อนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งเรียกว่าลาปลาเซียน (laplacian:  $\nabla^2$ ) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

ให้  $\mathbf{A}$  คือเวกเตอร์ จะได้ลาปลาเซียนของ  $\mathbf{A}$  คือ

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \mathbf{k} \quad (3.13)$$

เอกลักษณ์ของเวกเตอร์ที่สำคัญต่อการดำเนินการอนุพันธ์อันดับสองมีอยู่ 2 เอกลักษณ์ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.14) และ (3.15) ดังนี้คือ

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.15)$$

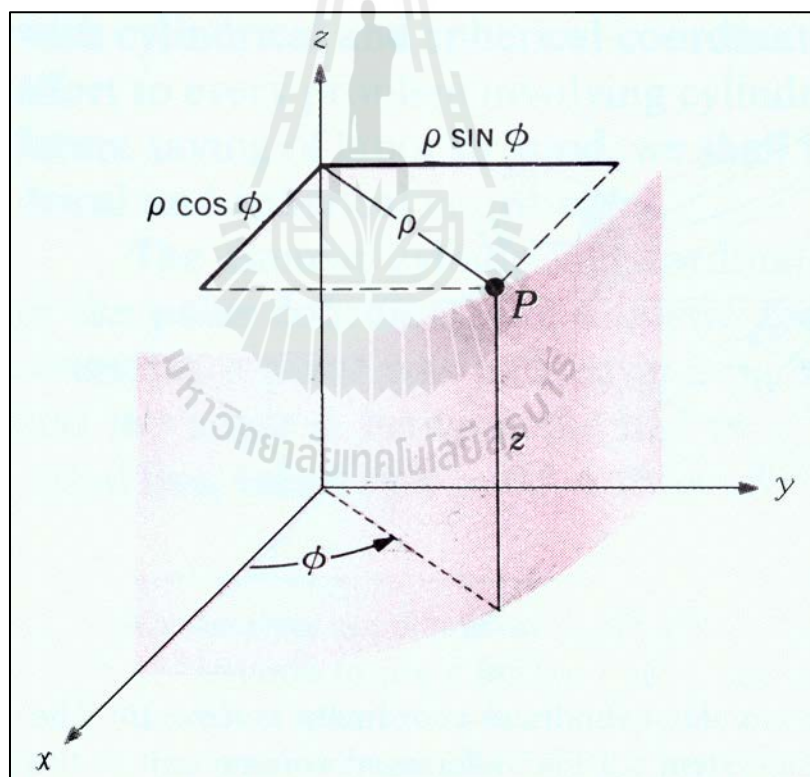
การแปลงระบบพิกัดที่มีพิกัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน (William, 1989) จากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.1 สามารถแสดงได้ โดย ถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉาก คือ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.16)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  และ  $\mathbf{a}_z$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_x$ ,  $A_y$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากซึ่งจะต้องถูกเปลี่ยนไปอยู่ในรูปส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอก โดยถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.17)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_\rho$ ,  $\mathbf{a}_\phi$  และ  $\mathbf{a}_z$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_\rho$ ,  $A_\phi$  และ  $A_z$  เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่า ณ จุด  $P(x,y,z)$  หรือ  $P(\rho,\phi,z)$  จะได้ว่า

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

จะเห็นว่าตัวแปร  $x, y, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $\rho, \phi, z$  และในทำนองเดียวกันจะ  
ได้ว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร  $\rho, \phi, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $x, y, z$

ในการเปลี่ยนจากระบบพิกัดหนึ่งไปเป็นอีกพิกัดหนึ่ง จะใช้หลักการคูณกันของ  
เวกเตอร์แบบดอท การเปลี่ยนพิกัดจากไปเป็นพิกัดทรงกระบอกจะต้องหาค่า  $A_\rho, A_\phi$  ที่อยู่ในเทอม  
ของ  $A_x, A_y$  โดยที่  $A_z = A_z$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

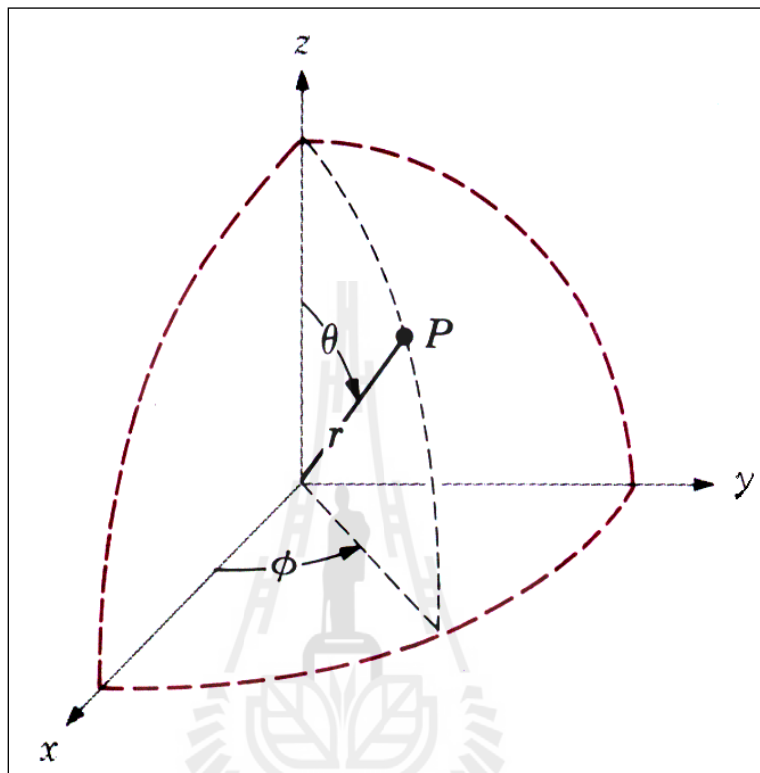
$$\begin{aligned} A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \\ A_\rho &= A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (3.19)$$

ส่วนการแปลงจากพิกัดจากไปเป็นพิกัดทรงกลม (spherical coordinate)  
ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.2 สามารถแสดงได้โดย ถ้าให้  $\mathbf{A}$  เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ภายในปริภูมิ ซึ่งแสดงอยู่ใน  
รูปของพิกัดทรงกลม คือ

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (3.20)$$

เมื่อ  $\mathbf{a}_r$  ,  $\mathbf{a}_\theta$  และ  $\mathbf{a}_\phi$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยมี  $A_r$ ,  $A_\theta$  และ  $A_\phi$  เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกลม



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า ณ จุด  $P(x,y,z)$  หรือ  $P(r,\theta,\phi)$  จะได้ว่า

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad , \quad y = r \sin\theta \sin\phi \quad , \quad z = r \cos\theta$$

จะเห็นว่าตัวแปร  $x, y, z$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $r, \theta, \phi$  และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad , \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร  $r, \theta, \phi$  อยู่ในเทอมของตัวแปร  $x, y, z$

การเปลี่ยนพิกัดจากไปเป็นพิกัดทรงกลม จะต้องหาค่า  $A_r, A_\theta, A_\phi$  ที่อยู่ในเทอมของ  $A_x, A_y, A_z$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_r &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r \\ A_r &= A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} A_\theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\theta \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta \\ A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi + A_z \sin \theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

เมื่อทราบทฤษฎีและคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่จำเป็นแล้ว ต่อไปจะได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (เจลิมพล น้ำค้าง, 2538) ซึ่งต้องอาศัยความรู้ของระบบเวกเตอร์จากข้างต้น

ประจุไฟฟ้า (electric charge) คือปริมาณของความเป็นไฟฟ้าที่สถิตอยู่ในสสารนั้นๆ ซึ่งแรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้าจะเรียกว่าแรงไฟฟ้า (electric force) และถ้าหากประจุไฟฟ้ามีการเคลื่อนที่ด้วย จะเกิดแรงที่เรียกว่าแรงแม่เหล็ก (magnetic force) ด้วยเหตุที่ทั้งแรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็กมีแหล่งกำเนิดเดียวกันคือประจุไฟฟ้า การจัดจำแนกกลุ่มของแรงจึงได้จัดให้ทั้งสองแรงนี้อยู่ในกลุ่มเดียวกันที่เรียกว่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) ทุกๆ ประจุในสสารจะมีความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field intensity) หรืออาจเรียกว่าสนามไฟฟ้า (electric field :  $\mathbf{E}$ ) อยู่ปริมาณหนึ่ง ที่เป็นตัวกำกับให้ประจุหนึ่งออกแรงกระทำต่อประจุหนึ่งด้วยแรงปริมาณหนึ่ง ส่วนความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density) หรืออาจเรียกว่าสนามแม่เหล็ก (magnetic field :  $\mathbf{B}$ ) จะเป็นตัวกำกับให้ออกแรงกระทำเฉพาะประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ ซึ่งสนามแม่เหล็กนี้เองที่เป็นรากฐานของกลไกในการผันแปลงพลังงานจากรูปแบบหนึ่ง

ไปสู่รูปแบบอื่น ๆ โดยใช้เป็นพื้นฐานสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในมอเตอร์ เครื่องกำเนิดไฟฟ้า และหม้อแปลง ซึ่งการผันแปลงพลังงานที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์เหล่านี้ จะประกอบด้วยกฎพื้นฐานอยู่ 4 กฎ (Chapman, 1998) คือ

- 1) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำจะเกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น
  - 2) เมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวด ที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ (พื้นฐานปรากฏการณ์หม้อแปลง)
  - 3) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงทางกลขึ้น (พื้นฐานปรากฏการณ์มอเตอร์)
  - 4) เมื่อเส้นลวดตัวนำเคลื่อนที่ผ่านสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้น (พื้นฐานปรากฏการณ์เครื่องกำเนิดไฟฟ้า)
- ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็กจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง สามารถแสดงได้โดย

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.24)$$

เมื่อ  $\mu$  คือความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ  $\mu_0\mu_r$  โดยที่  $\mu_0$  คือความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m และ  $\mu_r$  คือความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง ส่วน  $\mathbf{H}$  คือความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity) และจากการศึกษาคุณสมบัติของ  $\mathbf{B}$  พบว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.25)$$

ซึ่งสมการที่ (3.25) นี้คือกฎของเกาส์ (Gauss's law) ในรูปอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็ก โดยถ้านำไปประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ในสมการที่ (3.14) จะสรุปได้ว่าหากไดเวอเรนซ์ของ  $\mathbf{B}$  เท่ากับศูนย์แล้ว ย่อมมีอีกเวกเตอร์หนึ่งซึ่งเมื่อกระทำเคิร์ลแล้วได้ผลเป็นเวกเตอร์  $\mathbf{B}$  เวกเตอร์ใดที่กระทำเคิร์ลแล้วเท่ากับ  $\mathbf{B}$  จะเรียกว่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (magnetic vector potential:  $\mathbf{A}$ ) ดังนี้

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.26)$$

ดังนั้นเมื่อต้องการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก **B** จึงเลี่ยงโดยการไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** ก่อน ซึ่งสามารถคำนวณได้ง่ายกว่า โดยสนามแม่เหล็ก **B** สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** เท่านั้น

### 3.3 หม้อแปลงไฟฟ้า

เป็นอุปกรณ์ที่ใช้เปลี่ยนระดับแรงดันให้สูงขึ้นหรือต่ำลงตามต้องการ ภายในประกอบด้วยขดลวด 2 ชุดคือ ขดลวดปฐมภูมิ (primary winding) และ ขดลวดทุติยภูมิ (secondary winding) แต่สำหรับหม้อแปลงกำลัง (power transformer) ขนาดใหญ่บางตัวอาจมีขดลวดที่สามเพิ่มขึ้นคือ ขดลวดตติยภูมิ (tertiary winding) ซึ่งมีขนาดเล็กกว่าขดลวดปฐมภูมิและขดลวดทุติยภูมิ และแรงดันที่แปลงออกมาจะมีค่าต่ำกว่าขดลวดทุติยภูมิ รูปที่ 3.3 เป็นการแสดงหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส



รูปที่ 3.3 รูปหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส

#### 3.3.1 ชนิดของหม้อแปลงไฟฟ้า

หม้อแปลงไฟฟ้าถูกแบ่งออกเป็นชนิดต่างๆได้หลายวิธี เช่น แบ่งตามโครงสร้าง ได้แก่ ชนิดแกน (core type) และชนิดเปลือกกรอบ (shell type) หรือแบ่งตามตัวกลางที่ใช้ทำฉนวนและตัวระบายความร้อน ได้แก่ ก๊าซ SF<sub>6</sub> และน้ำมันหม้อแปลง สุดท้ายแบ่งตามกำลังไฟฟ้าที่จ่ายออกไปได้แก่ หม้อแปลงไฟฟ้าที่ขนาดมากกว่า 2500 kVA ขึ้นไปเรียกว่า หม้อแปลงไฟฟ้ากำลัง

(power transformer) ซึ่งจะอยู่ตามสถานีย่อยไฟฟ้า ส่วนหม้อแปลงไฟฟ้าที่มีขนาดตั้งแต่ 2500 kVA ลงมาจะเรียกว่าหม้อแปลงจำหน่าย (distribution transformer)

สำหรับหม้อแปลงจำหน่ายที่ใช้งานทั่วไปของการไฟฟ้าส่วนภูมิภาคแบ่งออกเป็น 2 ระบบ ได้แก่

- 1) ระบบ 1 เฟส 3 สาย มีใช้งาน 4 ขนาดคือ 10 kVA, 20 kVA, 30 kVA และ 50 kVA
- 2) ระบบ 3 เฟส 4 สาย มีหลายขนาดได้แก่ 30 kVA, 50 kVA, 100 kVA, 160 kVA, 250 kVA, 315 kVA, 400 kVA, 500 kVA, 1000 kVA, 1250 kVA, 1500 kVA และ 2500 KVA

การจำแนกหม้อแปลงตามขนาดกำลังไฟฟ้าที่ใช้งานมีดังนี้

- 1) ขนาดเล็กจนถึง 1 VA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับการเชื่อมต่อระหว่างสัญญาณในงานอิเล็กทรอนิกส์
- 2) ขนาด 1-1000 VA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานด้านเครื่องใช้ไฟฟ้าภายในบ้านขนาดเล็ก
- 3) ขนาด 1 kVA -1 MVA เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานจำหน่ายไฟฟ้าในโรงงาน สำนักงาน ที่พักอาศัย
- 4) ขนาดใหญ่ตั้งแต่ 1 MVA ขึ้นไป เป็นหม้อแปลงที่ใช้กับงานระบบไฟฟ้ากำลังในสถานีไฟฟ้าย่อย การผลิตและจ่ายไฟฟ้า

นอกจากนี้หม้อแปลงยังสามารถจำแนกชนิดตามจำนวนรอบของขดลวดได้ดังนี้

- 1) หม้อแปลงแรงเคลื่อนไฟฟ้าเพิ่ม (step-up) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบมากกว่าขดลวดปฐมภูมิ
- 2) หม้อแปลงแรงเคลื่อนไฟฟ้าลง (step-down) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบน้อยกว่าขดลวดปฐมภูมิ
- 3) หม้อแปลงที่มีแทปแยก (tap) ทำให้มีขนาดของแรงเคลื่อนไฟฟ้าได้หลายระดับ
- 4) หม้อแปลงที่ใช้สำหรับแยกวงจรไฟฟ้าออกจากกัน (isolating) ขดลวดทุติยภูมิจะมีจำนวนรอบเท่ากับขดลวดปฐมภูมิหรือมีแรงเคลื่อนไฟฟ้าเท่ากับทั้งสองด้าน



### 3.3.2 ส่วนประกอบของหม้อแปลงไฟฟ้า

หม้อแปลงแบ่งออกตามการใช้งานของระบบไฟฟ้ากำลังได้ 2 แบบคือ หม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส และหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟสแต่ละชนิดมีโครงสร้างสำคัญประกอบด้วย

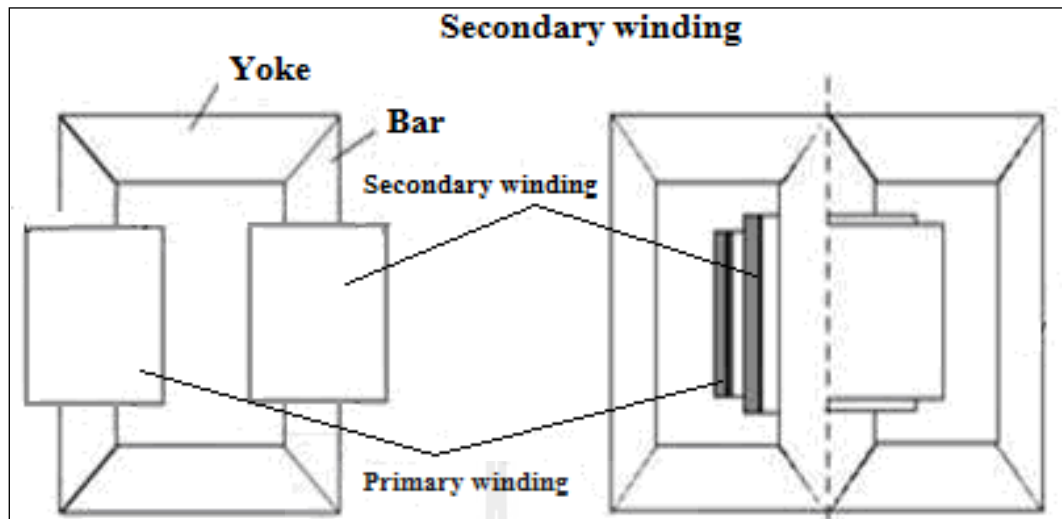
- 1) ขดลวดตัวนำปฐมภูมิ (primary winding) ทำหน้าที่รับแรงเคลื่อนไฟฟ้า
- 2) ขดลวดทุติยภูมิ (secondary winding) ทำหน้าที่จ่ายแรงเคลื่อนไฟฟ้า
- 3) แผ่นแกนเหล็ก (core) ทำหน้าที่เป็นทางเดินสนามแม่เหล็กและให้ขดลวดพันรอบแกนเหล็ก
- 4) ขั้วต่อสายไฟ (terminal) ทำหน้าที่เป็นจุดต่อสายไฟกับขดลวด
- 5) แผ่นป้าย (name plate) ทำหน้าที่บอกรายละเอียดประจำตัวหม้อแปลง
- 6) อุปกรณ์ระบายความร้อน (coolant) ทำหน้าที่ระบายความร้อนให้กับขดลวด เช่น อากาศ, พัดลม, น้ำมัน หรือใช้ทั้งพัดลมและน้ำมันช่วยระบายความร้อน เป็นต้น
- 7) โครง (frame) หรือตัวถังของหม้อแปลง (tank) ทำหน้าที่บรรจุขดลวด แกนเหล็กรวมทั้งการติดตั้งระบบระบายความร้อนให้กับหม้อแปลงขนาดใหญ่
- 8) สวิตช์และอุปกรณ์ควบคุม (switch controller) ทำหน้าที่ควบคุมการเปลี่ยนขนาดของแรงเคลื่อนไฟฟ้า และมีอุปกรณ์ป้องกันไฟฟ้าชนิดต่าง ๆ รวมอยู่ด้วย

วัสดุที่ใช้ทำขดลวดหม้อแปลงโดยทั่วไปทำมาจากสายทองแดงเคลือบน้ำยาฉนวน มีขนาดและลักษณะลวดเป็นทรงกลมหรือแบนขึ้นอยู่กับขนาดของหม้อแปลง ลวดเส้นใหญ่จะมีความสามารถในการจ่ายกระแสได้มากกว่าลวดเส้นเล็ก

หม้อแปลงขนาดใหญ่มักใช้ลวดถักแบบตีเกลียวเพื่อเพิ่มพื้นที่สายตัวนำให้มีทางเดินของกระแสไฟมากขึ้น สายตัวนำที่ใช้พันขดลวดบนแกนเหล็กทั้งขดลวดปฐมภูมิและขดลวดทุติยภูมิอาจมีแทปแยก (tap) เพื่อแบ่งขนาดแรงเคลื่อนไฟฟ้า (ในหม้อแปลงขนาดใหญ่จะใช้การเปลี่ยนแทปด้วยสวิตช์อัตโนมัติ)

#### แกนเหล็ก (core)

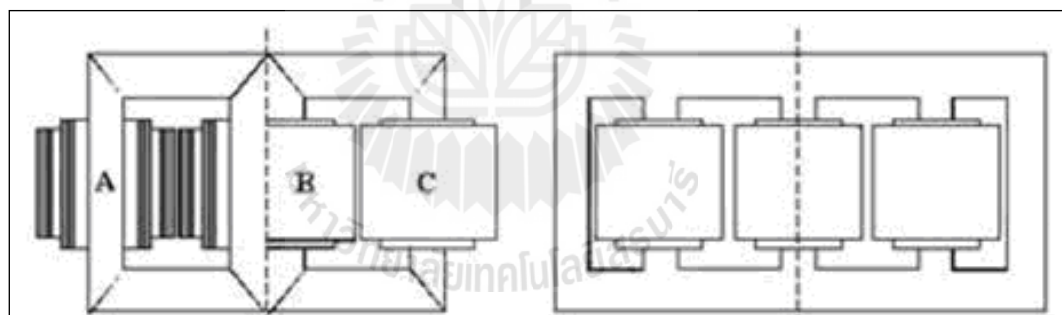
แผ่นเหล็กที่ใช้ทำหม้อแปลงจะมีลักษณะเป็นเหล็กแผ่นบางหลายแผ่นเรียงซ้อนประกอบขึ้นเป็นแกนเหล็กของหม้อแปลง ซึ่งมีด้วยกันหลายรูปแบบเช่น แกนเหล็กแบบ Core และแบบ Shell ดังแสดงแกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟสและ 3 เฟส ได้ดังรูปที่ 3.4 และ 3.5 ตามลำดับ



ก) แกนเหล็กแบบ Core

ข) แกนเหล็กแบบ Shell

รูปที่ 3.4 แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 1 เฟส



ก) แกนเหล็กแบบ Core

ข) แกนเหล็กแบบ Shell

รูปที่ 3.5 แกนเหล็กของหม้อแปลงไฟฟ้าชนิด 3 เฟส

#### ขดลวด (coil or winding)

หม้อแปลงมีขดลวด 2 ชุด คือขดลวดแรงสูง (primary coil) และขดลวดแรงต่ำ (secondary coil) ขดลวดแรงสูงจะรับแรงดันไฟฟ้าแรงสูงจากสายป้อนและเหนี่ยวนำกับขดลวดแรงต่ำเกิดแรงดันไฟฟ้าออกมาจากหม้อแปลง วัสดุที่ใช้เป็นทองแดงรีดอ่อนหุ้มฉนวนกระดาษหรือเคลือบสารฉนวน ลวดที่ใช้มีทั้งหน้าตัดกลมและสี่เหลี่ยมผืนผ้ารวมทั้งเป็นแผ่นบาง ๆ

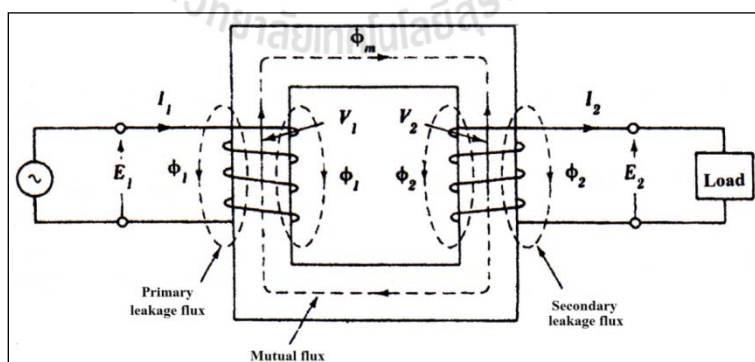
### ฉนวน (insulator)

เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดลวดลัดวงจรถึงกันได้ การพันขดลวดบนแกนเหล็ก จึงควรมี กระจกษาอบน้ำยาฉนวน คั่นระหว่างชั้นของขดลวดและคั่นแยกระหว่างขดลวด ปฐมภูมิกับทุติยภูมิ ด้วยในหม้อแปลงขนาดใหญ่มักใช้กระจกษาอบน้ำยาฉนวนพันรอบสายตัวนำก่อนพันเป็นขดลวด ลงบนแกนเหล็ก นอกจากนี้ ยังใช้น้ำมันชนิดที่เป็นฉนวนและระบายความร้อนให้กับขดลวดอีกด้วย น้ำมันหม้อแปลง มีหน้าที่คือ

- เป็นฉนวนไฟฟ้า โดยป้องกันกระแสไฟฟ้ากระโดดจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง ถ้าเทียบกับอากาศแล้ว น้ำมันหม้อแปลงจะทนแรงดันได้สูงกว่าหลายเท่า ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับคุณภาพของ น้ำมันหม้อแปลงนั้น ดังนั้นถ้าเราจุ่มตัวนำลงในน้ำมัน ก็จะสามารถวางไว้ใกล้กันได้โดยไม่ลัดวงจร
- เป็นที่ระบายความร้อน โดยที่น้ำมันเป็นของเหลวจึงสามารถเคลื่อนตัวมาถ่ายเท ความร้อนให้แก่อากาศรอบๆ หม้อแปลงได้ดี ทำให้ขดลวดและแกนเหล็กของหม้อแปลงระบาย ความร้อนได้ ทำให้ฉนวนที่พันหุ้มขดลวดทนต่อความร้อนสูงได้ และทำให้ฉนวนไม่ร้อนจัดเกินไป ช่วยยืดอายุการใช้งานของหม้อแปลงให้นานขึ้น

### 3.3.3 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า (มงคล ทองสงคราม, 2549)

วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้าเป็นวงจรที่มีสัญลักษณ์มาแทนส่วนประกอบของ หม้อแปลงไฟฟ้า เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาและการคำนวณค่าต่างๆในหม้อแปลงไฟฟ้านั้น ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 วงจรหม้อแปลงไฟฟ้า

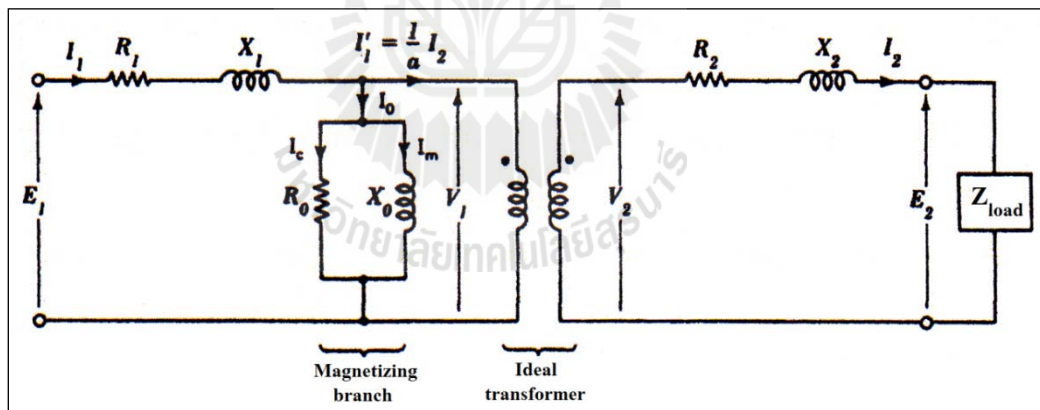
เมื่อฟลักซ์แม่เหล็กรั่วไหลที่ขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $\Phi_1, \Phi_2$  ในรูปที่ 3.6) เคลื่อนตัวครบวงรอบปิดจะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับ รีแอกแตนซ์ของขดลวดเหนี่ยวนำ ( $X_L$ ) ซึ่งเราเรียกว่าลิกเกจรีแอกแตนซ์ นอกจากนี้ที่ขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิยังมีความต้านทานอยู่จำนวนหนึ่งด้วย ดังนั้นขณะที่หม้อแปลงไฟฟ้าจ่ายโหลดจึงเกิดแรงดันตกคร่อม 2 ส่วน คือ

ที่ความต้านทานของขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $R_1$  และ  $R_2$ )

ที่ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดปฐมภูมิและทุติยภูมิ ( $X_1$  และ  $X_2$ )

- เมื่อ  $R_1$  คือ ความต้านทานของขดลวดปฐมภูมิ
- $R_2$  คือ ความต้านทานของขดลวดทุติยภูมิ
- $X_1$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดปฐมภูมิ
- $X_2$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของขดลวดทุติยภูมิ

ถ้านำค่าต่างๆทั้งขณะไม่มีโหลดและขณะจ่ายโหลดมาเขียนวงจรสมมูล จะได้ดังรูปที่ 3.7



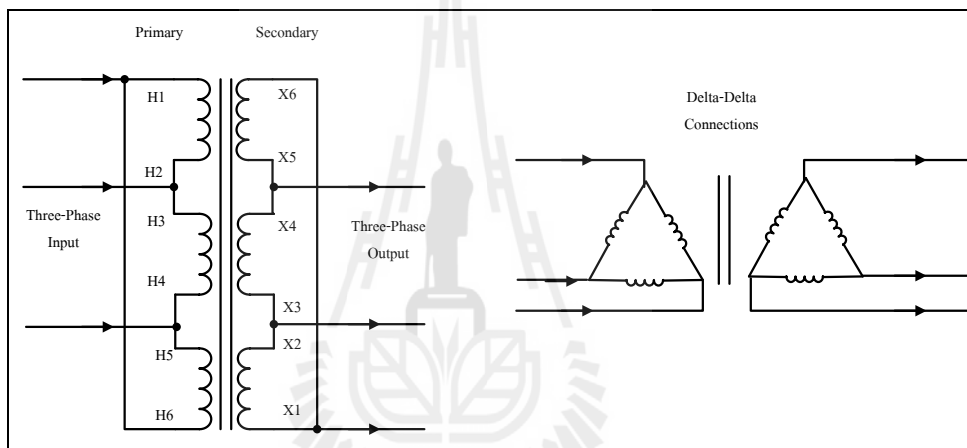
รูปที่ 3.7 วงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้า

- เมื่อ  $R_0$  คือ ความต้านทานของหม้อแปลงไฟฟ้าขณะไม่มีโหลด
- $X_0$  คือ ลิกเกจรีแอกแตนซ์ของหม้อแปลงไฟฟ้าขณะไม่มีโหลด

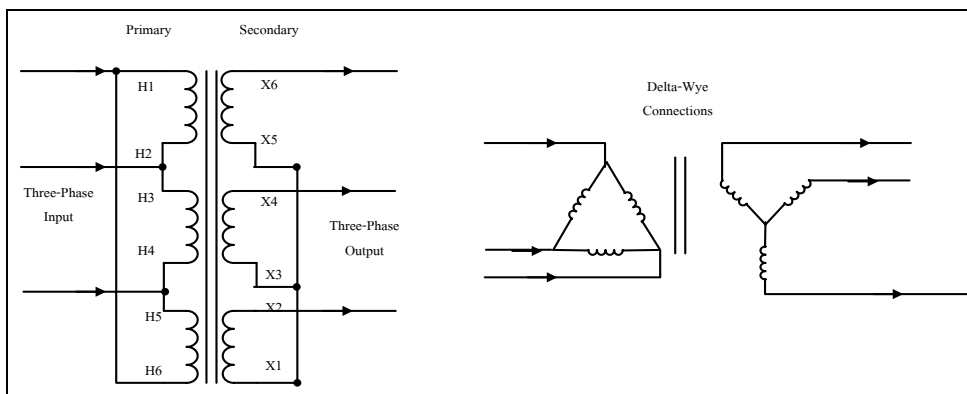
### 3.3.4 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟส

การที่จะนำหม้อแปลงไฟฟ้าไปใช้งานจะต้องทำการต่อขั้วหม้อแปลงไฟฟ้าให้ถูกต้อง แต่โดยทั่วไปบริษัทผู้ผลิตได้ทำการกำหนดขั้วของหม้อแปลงมาให้แล้ว การต่อหม้อแปลงไฟฟ้าแบบ 3 เฟสสามารถต่อได้ 4 แบบ ดังนี้

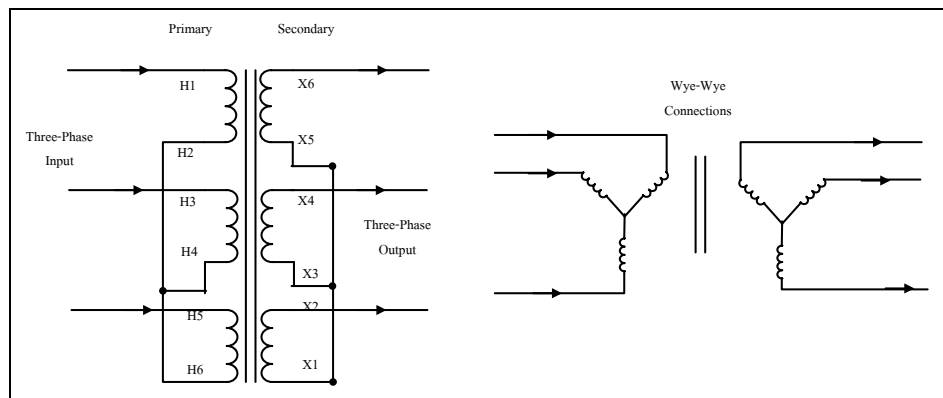
- แบบเดลต้า-เดลต้า (three-phase  $\Delta-\Delta$  connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.8
- แบบสตาร์-เดลต้า (three-phase Y- $\Delta$  connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.9
- แบบเดลต้า-สตาร์ (three-phase  $\Delta$ -Y connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.10
- แบบสตาร์-สตาร์ (three-phase Y-Y connections) แสดงลักษณะการต่อดังรูปที่ 3.11



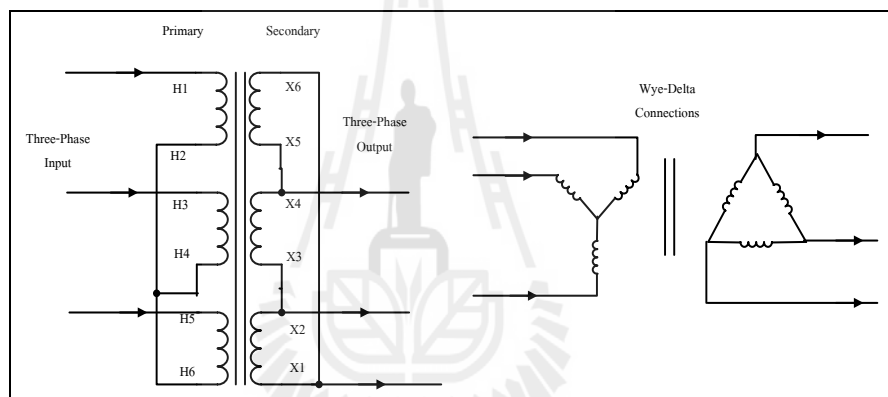
รูปที่ 3.8 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-เดลต้า



รูปที่ 3.9 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบเดลต้า-สตาร์

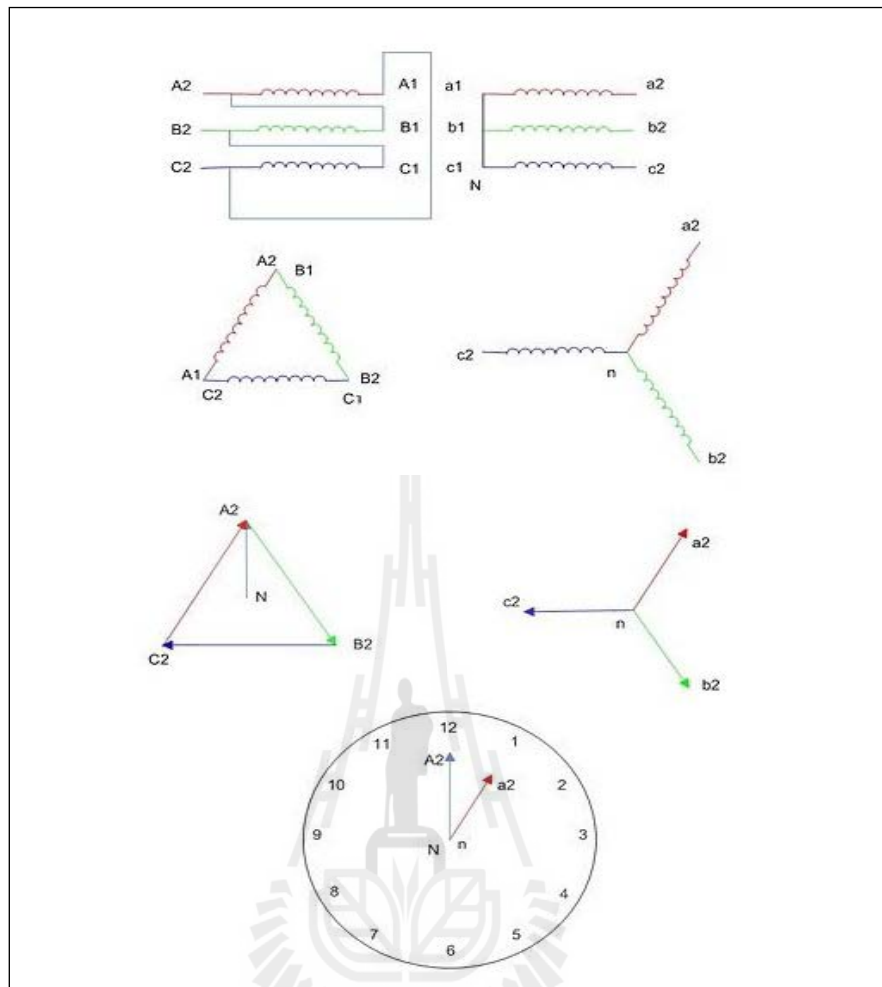


รูปที่ 3.10 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-สตาร์



รูปที่ 3.11 การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟส แบบสตาร์-เดลต้า

การต่อหม้อแปลงไฟฟ้า 3 เฟสที่ใช้ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นแบบเดลต้า-สตาร์ ที่ด้านทุติยภูมิของหม้อแปลงเลื่อนเฟสไป  $30^\circ$  หรือเรียกว่าแบบ Dy1 ซึ่งมีรายละเอียดดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การต่อหม้อแปลงแบบ Dy1

### 3.4 กำลังงานสูญเสียของหม้อแปลงไฟฟ้า

หม้อแปลงไฟฟ้า นับได้ว่าเป็นเครื่องกลไฟฟ้าที่มีการสูญเสียน้อยที่สุด เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับ เครื่องกลไฟฟ้าชนิดอื่น เช่น มอเตอร์ หรือเครื่องกำเนิดไฟฟ้า เพราะว่าหม้อแปลงไฟฟ้าไม่มีส่วนประกอบ ใด ๆ ที่เคลื่อนที่ได้ ดังนั้นจึงไม่มีการสูญเสียเนื่องจากความฝืดและแรงต้านจากลม ดังนั้นจึงมีการสูญเสียเพียง สองส่วนเท่านั้น

#### 3.4.1 กำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก (iron loss or core loss)

กำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กจะมีค่าคงที่ตลอดเวลาไม่ว่าโหลดจะเปลี่ยนแปลงอย่างไร โดยที่กำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กจะประกอบด้วยกำลังงานสูญเสีย 2 ชนิด คือ กำลังงานสูญเสียเนื่องจากฮิสเทอรีซิส (hysteresis loss) และกำลังงานสูญเสียเนื่องจากกระแสไหลวนในแกนเหล็ก (eddy current loss) ทั้งนี้เนื่องจากเส้นแรงแม่เหล็กกรรมมีค่าคงที่ตลอดเวลา ทุกสภาวะ

โหลด ดังนั้นการสูญเสียชนิดนี้มีค่าคงที่แม้ว่าโหลดจะมีการเปลี่ยนแปลงและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กจะสามารถหาได้โดยการทดสอบสภาวะเปิดวงจร

#### - การสูญเสียเนื่องจากฮิสเทอรีซิส (hysteresis loss)

เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสไฟฟ้าสลับมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางการเคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลา ดังนั้นเส้นแรงแม่เหล็กจึงกลับขั้วไปมาตลอดเวลา การกลับทิศทางของเส้นแรงแม่เหล็กนี้ จะต้องใช้พลังงาน ส่วนหนึ่งเพื่อเอาชนะความฝืดของโมเลกุล พลังงานที่ใช้ไปก็คือพลังงานสูญเสียในรูปของพลังงานความร้อน จึงเรียกการสูญเสียนี้ว่า ฮิสเทอรีซิส

#### - การสูญเสียเนื่องจากกระแสไฟฟ้าไหลวน (eddy current loss)

เกิดขึ้นเนื่องจากกระแสไฟฟ้าสลับมีการเปลี่ยนแปลงขนาด และทิศทางการเคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลา ดังนั้นเส้นแรงแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจึงเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางตลอดเวลา ด้วยการเปลี่ยนแปลงเส้นแรงแม่เหล็กดังกล่าว จะทำให้เกิดการเหนี่ยวนำแรงดันไฟฟ้าตามกฎของไมเคิลฟาราเดย์ เนื่องจากแกนเหล็กนั้นเป็นตัวนำชนิดหนึ่ง และในแกนเหล็กนั้นจะเป็นวงจรปิด และมีความต้านทานอยู่ด้วย จึงทำให้เกิดกระแสไหลวนขึ้นในแกนเหล็ก

### 3.4.2 กำลังงานสูญเสียในขดลวดตัวนำ (copper loss)

กำลังงานสูญเสียในขดลวดตัวนำหรือขดลวดทองแดง เกิดขึ้นเนื่องจากความต้านทานของขดลวดทั้งด้านปฐมภูมิและทุติยภูมิของหม้อแปลงไฟฟ้า ขณะที่หม้อแปลงไฟฟ้าทำงานภาวะไม่มีโหลด จะมีกระแสไหลผ่านขดลวดปฐมภูมิเพียงเล็กน้อย ดังนั้นกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นก็จะมีปริมาณเพียงเล็กน้อย แต่เมื่อต่อโหลดกับขดลวดทุติยภูมิจะมีกระแสไหลผ่านโหลด และกระแสไฟฟ้าในขดลวดปฐมภูมิจะมีปริมาณเพิ่มขึ้น ดังนั้นกำลังงานสูญเสียจึงมีค่ามากขึ้น จึงอาจกล่าวได้ว่ากำลังงานสูญเสียในขดลวดตัวนำของหม้อแปลงไฟฟ้านั้นจะเปลี่ยนแปลงไปตามค่ากระแสไฟฟ้าของโหลดหรือขนาดโหลด และสูญเสียในรูปของความร้อน การสูญเสียในขดลวดตัวนำจะสามารถหาได้โดยการทดสอบสภาวะลัดวงจร

## 3.5 ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์

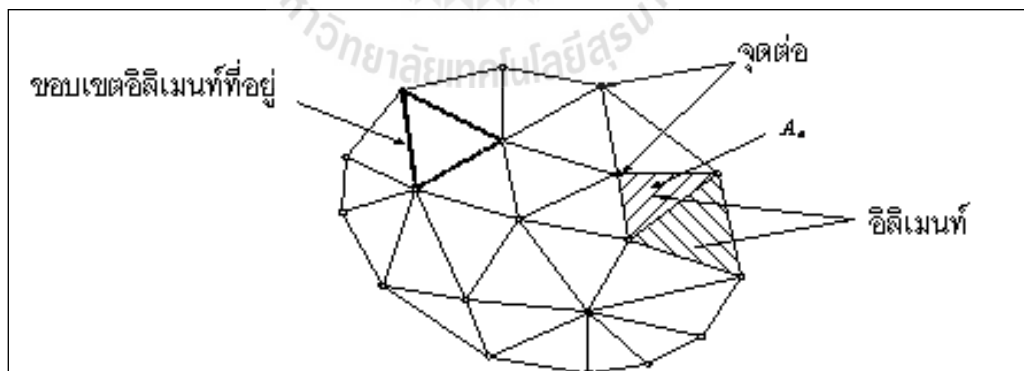
ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้คำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) โดยการแบ่งรูปร่างขอบเขตของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ แล้วสร้างสมการของแต่ละอิลลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ และอิลลิเมนต์ต่าง ๆ จะเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่คำนวณหาค่าผลเฉลย สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์ในงานวิจัยนี้จะดำเนินการคำนวณทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ



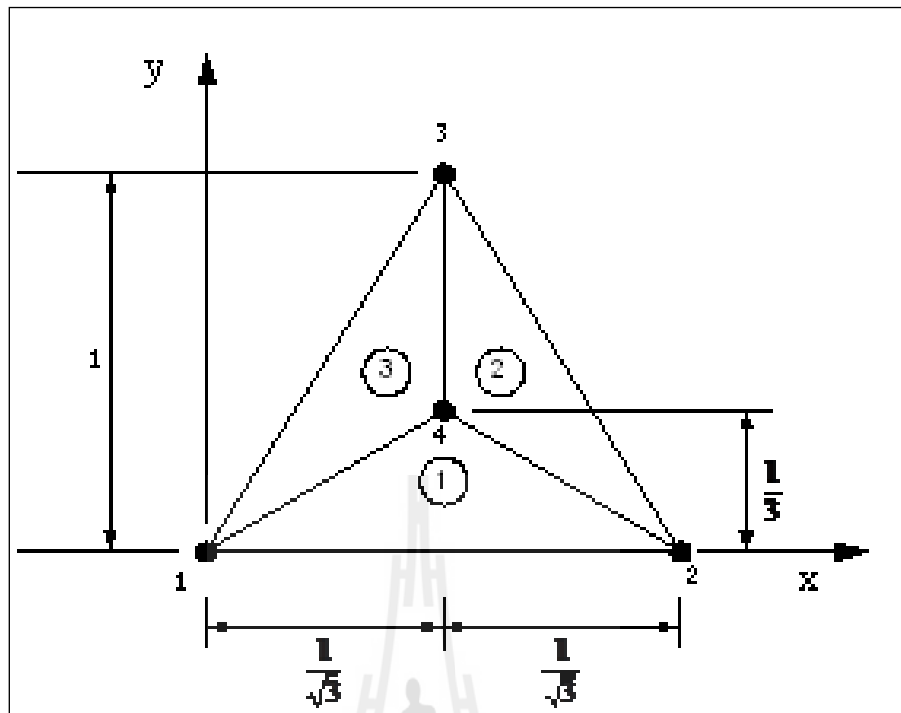
### 3.5.1 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ (เผด็จ เผ่าละออ, 2549)

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ คือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหา ออกเป็นพื้นที่หลาย ๆ ส่วนที่เรียกว่าอิลลิเมนต์ โดยที่การกระจัด และแรงภายในของแต่ละ อิลลิเมนต์ ณ จุดที่อิลลิเมนต์ต่อกันจะต้องเข้ากันได้และสมดุล ซึ่งอิลลิเมนต์ต่าง ๆ นี้ จะขึ้นอยู่กับความละเอียดของแต่ละงานว่าต้องการรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากเท่าใด ซึ่ง ถ้าพิจารณาแบบ 2 มิติอาจอยู่ในรูปลักษณะของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ โดยค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ที่จะคำนวณออกมานั้นจะมีความแม่นยำขึ้นอยู่กับขนาด และ จำนวนของอิลลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา นั้น ซึ่งขั้นตอน โดยทั่วไปของวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2542) โดยมีรายละเอียด ดังนี้ คือ

1. แบ่งอิลลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ (discretization) แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบ ปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละอิลลิเมนต์จะมีพื้นที่  $A_e$  ดังแสดงใน รูปที่ 3.13 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งอิลลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 2 มิติ (ระนาบ  $xy$ ) โดยใช้ อิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งประกอบไปด้วย โหนด (nodes) อิลลิเมนต์ (elements) และ ขอบเขตของอิลลิเมนต์ที่อยู่ภายใน (interelement boundaries) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้าง โปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อิลลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของ ปัญหาที่ประกอบด้วยอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด 3 อิลลิเมนต์ 4 โหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.13 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์



รูปที่ 3.14 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อิลลิเมนต์ 4 โหนด

ข้อมูลเบื้องต้นสำหรับ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอิลลิเมนต์ และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละโหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.14 พร้อมทั้งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.1 ลักษณะข้อมูลของอิลลิเมนต์

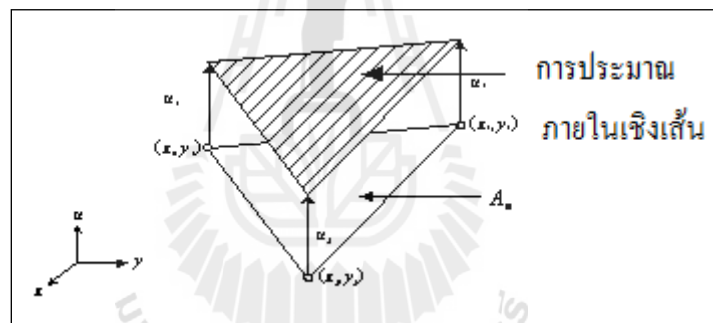
หมายเลขอิลลิเมนต์	หมายเลขโหนด		
	โหนด $i$	โหนด $j$	โหนด $k$
1	1	2	4
2	4	2	3
3	1	4	3

หมายเหตุ : โหนด  $i$   $j$  และ  $k$  คือหมายเลขของโหนดที่  $i$   $j$  และ  $k$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตารางที่ 3.2 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด

หมายเลขโหนด	พิกัดแกน $x$	พิกัดแกน $y$
1	0	0
2	$2/\sqrt{3}$	0
3	$1/\sqrt{3}$	1
4	$1/\sqrt{3}$	$1/3$

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ (element interpolation function) อย่างในกรณีอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจะประกอบด้วย 3 โหนดที่มีตัวห้อย  $ij$  และ  $k$  ซึ่งวางในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.15 (Bickford, 1994) ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอิลลิเมนต์แบบเชิงเส้น (linear representation)



รูปที่ 3.15 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ตำแหน่งของโหนด  $(x_n, y_n)$   $n = ij$  และ  $k$  เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า  $u_n$  โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์  $u_e(x, y)$  เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \quad (3.27)$$

โดยที่  $\alpha, \beta, \gamma$  เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโหนดทั้งสามดังนี้

$$\begin{aligned}
 u_e(x_i, y_i) &= \alpha + \beta x_i + \gamma y_i \\
 u_e(x_j, y_j) &= \alpha + \beta x_j + \gamma y_j \\
 u_e(x_k, y_k) &= \alpha + \beta x_k + \gamma y_k
 \end{aligned}$$

นำค่า  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสามข้างต้น แทนค่ากลับไปในสมการที่ (3.27) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y) = u_i N_i + u_j N_j + u_k N_k \quad (3.28)$$

ซึ่ง  $N_n$ ,  $n = i, j, k$  คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2A_e} \quad (3.29)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_k - x_j \\
 a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_i - x_k \\
 a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_j - x_i
 \end{aligned}$$

และ  $A_e$  คือ พื้นที่ของแต่ละอิลลิเมนต์ ซึ่ง  $2A_e$  หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = x_j(y_k - y_i) + x_i(y_j - y_k) + x_k(y_i - y_j) \quad (3.30)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมานี้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

3. สร้างสมการของอีลิเมนต์ (element formulation) ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ซึ่งขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ อย่างเช่นกรณีสมการของอีลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้ยกมาเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.15 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{bmatrix}_e \quad (3.31)$$

ซึ่งเขียนโดยย่อได้ว่า  $[K]_e [u]_e = [F]_e$  โดย  $[u]_e$  คือ เมทริกซ์ตัวไม่ทราบค่าที่ โหนด และตัวห้อย  $e$  แสดงให้ทราบว่า เป็นเมทริกซ์ระดับอีลิเมนต์ ซึ่งสมการของอีลิเมนต์ดังกล่าว จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นมาให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ การสร้างสมการของอีลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (3.31) สามารถทำได้โดย

- วิธีการโดยตรง (direct approach) วิธีนี้สามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่เข้าใจได้ง่าย ๆ อย่างเช่น ปัญหาต่าง ๆ ในรูปทรง 1 มิติ เท่านั้น ซึ่งไม่สามารถขยายเปลี่ยนแปลงเพื่อนำไปใช้กับปัญหาใน 2 หรือ 3 มิติโดยทั่วไปได้

- วิธีการแปรผัน (variational approach) หลักการสำคัญของวิธีการนี้คือ จำเป็นจะต้องทำการหาหรือสร้างฟังก์ชัน ซึ่งเมื่อทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นแล้ว จะเป็นผลให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่กำลังสนใจอยู่ อย่างไรก็ตามวิธีการแปรผันเป็นวิธีการดั้งเดิมที่ใช้กันในช่วงต้น ๆ ของการพัฒนาวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทางด้านโครงสร้าง และยังมีจุดอ่อนอีกคือ จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ ซึ่งปัญหาหลาย ๆ ชนิดในทางปฏิบัติสามารถสร้างสมการอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันนั้นได้

- วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) วิธีนี้จะใช้วิธีการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้อง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับปัญหาโดยทั่ว ๆ ไป และถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน

4. นำสมการของแต่ละอิลลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน (assembly) เป็นสมการรวมของระบบจากขั้นตอนที่ 1 หากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  โหนด จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ โดยแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} \quad (3.32)$$

หรือเขียนโดยย่อได้ดังนี้  $[K]_{\text{sys}} [u]_{\text{sys}} = [f]_{\text{sys}}$  จากสมการที่ (3.32) เมทริกซ์  $[K]_{\text{sys}}$  จะมีคุณสมบัติของความเป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ  $[K]_{\text{sys}} = [K]_{\text{sys}}^T$  และมีคุณสมบัติของการจับกลุ่มกันของค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์บริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็นแถบ (Banded matrix) จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวนโหนดเป็นจำนวนมากเพื่อที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่เที่ยงตรง โดยสามารถพัฒนาให้เก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ไว้ในหน่วยความจำเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น

การนำสมการย่อยของแต่ละอิลลิเมนต์มาประกอบกันเข้าเป็นสมการรวมของระบบจำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งหลักการที่จะกล่าวนี้ เป็นหลักการที่ง่าย สามารถทำได้โดยสะดวก เหมาะกับรูปร่างของปัญหาที่มีอิลลิเมนต์ย่อยจำนวนมาก ๆ และหลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในการพัฒนาคอมพิวเตอร์โปรแกรมด้วย โดยสามารถทำความเข้าใจได้จากตัวอย่างรูปร่างของปัญหาดังรูปที่ 3.14 กล่าวคือจะทำการสร้างสมการรวมของระบบซึ่งประกอบด้วย 3 อิลลิเมนต์ 4 โหนด โดยจะแสดงการรวมของเมทริกซ์  $[K]_{\text{sys}}$  เพื่อเป็นตัวอย่าง

วิธีการนี้ทำได้โดยเขียนสมการของอิลลิเมนต์ต่าง ๆ พร้อมทั้งกำกับหมายเลขของโหนดทางแฉกบนและแฉกตั้งของแต่ละอิลลิเมนต์ให้ถูกต้อง โดยจากรูปที่ 3.14  $[K]_e$  ของอิลลิเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 2 และ 4 ส่วน  $[K]_e$  ของอิลลิเมนต์ที่ 2 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 2 3 และ 4 และ  $[K]_e$  ของอิลลิเมนต์ที่ 3 ซึ่งเป็นอิลลิเมนต์สุดท้ายประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 3 และ 4 โดยสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$[K]_{e1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.33)$$

$$[K]_{e2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.34)$$

$$[K]_{e3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \\ g_2 & h_2 & i_2 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.35)$$

เมื่อมีหมายเลขกำกับทั้งทางแฉวนอนและแถวตั้งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมทริกซ์ของทุกอิลลิเมนต์แล้ว จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวม  $[K]_{sys}$  เช่น ค่าสัมประสิทธิ์  $b_3$  ซึ่งอยู่ในแฉวนอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของอิลลิเมนต์ย่อยที่ 1 จะไปปรากฏอยู่ในแฉวนอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ เป็นต้น

$$[K]_{sys} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 + g_1 & b_1 & h_1 & c_1 + i_1 \\ a_2 & b_2 + d_1 & e_1 & c_2 + f_1 \\ g_2 & d_2 & e_2 + h_2 & f_2 + i_2 \\ a_3 + g_3 & b_3 + d_3 & e_3 + h_3 & c_3 + f_3 + i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.36)$$

5. ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ที่สอดคล้องกับปัญหาลงในสมการรวมของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่โหนด

6. คำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ต้องการต่อไป เมื่อทราบค่าผลลัพธ์ที่โหนดต่าง ๆ แล้วสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์นี้ต่อไปได้

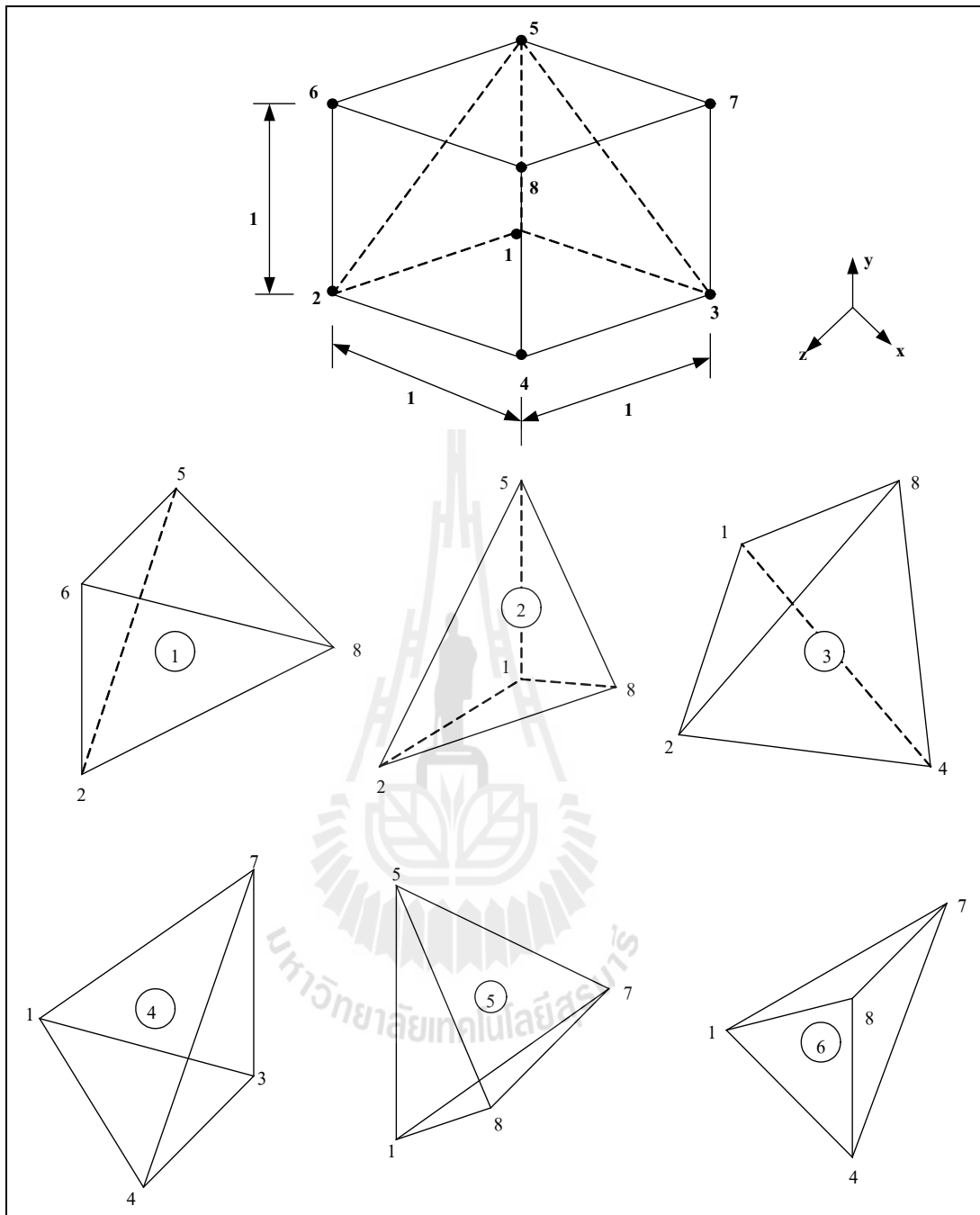
จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอน จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์เป็นวิธีที่มีแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีส่วนที่สำคัญที่สุดคือการสร้างสมการของอิลลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำหนด และในขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้จะนำไปพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณต่อไป

### 3.5.2 ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ (อาานนท์ อิศรมงคลรักษ์, 2552)

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติจะดำเนินการคล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ ที่กล่าวมาข้างต้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติก็ยังคงประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอนเช่นกัน โดยมีรายละเอียดดังนี้ คือ

1. แบ่งอิลลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละอิลลิเมนต์จะมีความเป็นปริมาตร ดังแสดงในรูปที่ 3.16 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งอิลลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 3 มิติ (ระนาบ  $xyz$ ) โดยใช้อิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อิลลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าทั้งหมด 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด ซึ่งข้อมูลเบื้องต้นสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอิลลิเมนต์และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละโหนด ซึ่งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ





รูปที่ 3.16 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด  
เมื่อพิจารณาอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

ตารางที่ 3.3 ลักษณะข้อมูลของอิทธิเมนต์

หมายเลข อิทธิเมนต์	หมายเลข โหนด			
	โหนด $i$	โหนด $j$	โหนด $k$	โหนด $l$
1	2	8	5	6
2	1	2	8	5
3	1	2	4	8
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

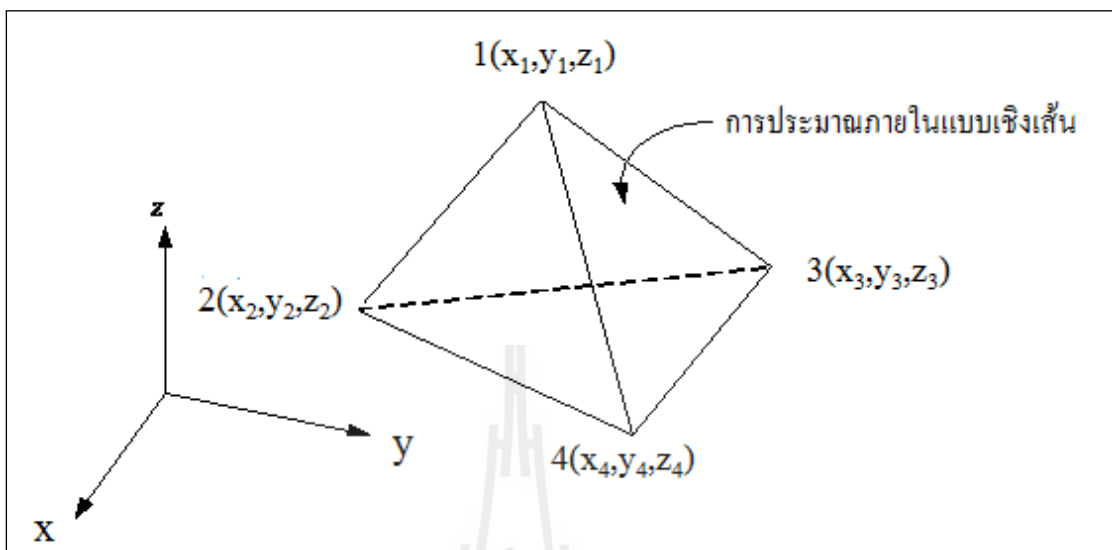
ตารางที่ 3.4 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโหนด

หมายเลขโหนด	พิกัดแกน $x$	พิกัดแกน $y$	พิกัดแกน $z$
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0
4	1	0	1
5	0	1	0
6	0	1	1
7	1	1	0
8	1	1	1

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิทธิเมนต์ อย่างในกรณีอิทธิเมนต์รูปทรงสี่หน้าจะประกอบด้วย 4 โหนดที่มีตัวห้อย 1 2 3 และ 4 ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอิทธิเมนต์แบบเชิงเส้นดังแสดงในรูป 3.17 ตำแหน่งของโหนด  $(x_n, y_n, z_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า  $u_n$  โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิทธิเมนต์  $u_e(x, y, z)$  เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y, z) = \alpha + \beta x + \gamma y + \lambda z \quad (3.37)$$

โดยที่  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\lambda$  เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโหนดทั้งสี่ดังนี้



รูปที่ 3.17 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

$$\begin{aligned}
 u_e(x_1, y_1, z_1) &= \alpha + \beta x_1 + \gamma y_1 + \lambda z_1 & 1 & & 1 \\
 u_e(x_2, y_2, z_2) &= \alpha + \beta x_2 + \gamma y_2 + \lambda z_2 & 2 & & 2 \\
 u_e(x_3, y_3, z_3) &= \alpha + \beta x_3 + \gamma y_3 + \lambda z_3 & 3 & & 3 \\
 u_e(x_4, y_4, z_4) &= \alpha + \beta x_4 + \gamma y_4 + \lambda z_4 & 4 & & 4
 \end{aligned}$$

นำค่า  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$   $\lambda$  ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสี่ข้างต้น แทนค่ากลับลงไปในสมการที่ (3.37) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y, z) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 + u_4 N_4 \quad (3.38)$$

ซึ่ง  $N_n, n = 1, 2, 3, 4$  คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad (3.39)$$

โดยที่

$$a_1 = x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3)$$

$$a_2 = x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4)$$

$$a_3 = x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2)$$

$$a_4 = x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3)$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

และ  $V$  คือปริมาตรของแต่ละอิลลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมา  
มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

สำหรับในขั้นตอนที่ 3-6 จะดำเนินการในทำนองเดียวกันกับวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์  
แบบ 2 มิติที่กล่าวมาแล้วข้างต้นทุกประการ

### 3.6 สรุป

บทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย อันได้แก่ สนามแม่เหล็ก หม้อแปลงไฟฟ้า กำลังงานสูญเสียของหม้อแปลงและระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยได้กล่าวเฉพาะส่วนที่จะนำมาใช้หรือส่วนที่จะถูกกล่าวอ้างถึงในบทต่อ ๆ ไป ทั้งนี้ เพื่อเป็นประโยชน์และเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้แก่ผู้ดำเนินงานวิจัย



## บทที่ 4

### การคำนวณสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 4.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method : FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation : PDE) ดังเช่น สมการสนามแม่เหล็ก และสมการอุณหภูมि เป็นต้น และเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อน หรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ดี อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถรองรับการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ นอกจากนี้ยังสามารถจำลองผลระบบที่มีความแตกต่างกันทางด้านวัสดุได้ ซึ่งในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้คือ แกนเหล็ก ขดลวด และน้ำมันหม้อแปลง ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย และขั้นตอนการจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พร้อมทั้งประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวในหม้อแปลงจำหน่ายต่อไป

#### 4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

เมื่อมีกระแสไหลในขดลวดตัวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น และเมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวดที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็ก ( $B$ ) จะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลางสามารถแสดงได้โดย

$$B = \mu H \tag{4.1}$$

- เมื่อ  $\mu$  คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ  $\mu_0\mu_r$   
 โดยที่  $\mu_0$  คือ ความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$   
 $\mu_r$  คือ ความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นกับวัสดุตัวกลาง  
 $H$  คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity)

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถดำเนินการได้โดยเลี้ยงไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  ก่อน เนื่องจากคำนวณได้ง่ายกว่า โดยที่สนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  เท่านั้น

$$B = \nabla \times A \quad (4.2)$$

จากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) ที่กล่าวว่าสนามแม่เหล็กแปรผันตามเวลาจะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้า  $E$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.3)$$

แทนสมการที่ (4.2) ลงในสมการที่ (4.3) จะได้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times A \quad (4.4)$$

และจากกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลา เมื่อสมมติให้ความหนาแน่นของกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์เนื่องจากแหล่งจ่ายมีความถี่ต่ำ แสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times H = J_0 + J_e \quad (4.5)$$

เมื่อ  $J_0$  คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ  $J_e$  คือความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) โดยที่

$$J_e = \sigma E \quad (4.6)$$

เมื่อ  $\sigma$  คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.4) จึงได้

$$J_e = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (4.7)$$

นำสมการที่ (4.1), (4.2) และ (4.7) แทนลงในสมการที่ (4.5) จะได้

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = J_0 \quad (4.8)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ  $A$  พบว่า  $\nabla \cdot A = 0$  ประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ของเวกเตอร์คือ  $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$  ทำให้สามารถเขียนสมการของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กดังสมการที่ (4.9)

$$\nabla^2 A - \mu \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu J_0 \quad (4.9)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 2 มิติ ตามระนาบ  $xy$  ซึ่งแปรผันตามเวลา จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (4.10) โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation :PDE) อันดับสอง และเมื่อพิจารณาหม้อแปลงจำหน่ายใน 3 มิติ ตามระนาบ  $xyz$  ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (4.11) คือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (4.10)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) + J_0 = 0 \quad (4.11)$$

ในกรณีปัญหาที่พิจารณาเป็นระบบที่แปลงจากโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ (time harmonic) โดยสามารถแทน A อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน  $A = Ae^{j\omega t}$  (Christopoulos, 1995) ดังนั้น

$$\frac{\partial A}{\partial t} = j\omega A \quad (4.12)$$

เมื่อพิจารณาใน 2 มิติ แทนค่าสมการที่ (4.12) ลงในสมการที่ (4.10) และเมื่อพิจารณาใน 3 มิติ แทนค่าสมการที่ (4.12) ลงในสมการที่ (4.11) จึงได้สมการเป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0 \quad (4.14)$$

### 4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของระบบหม้อแปลงจำหน่าย ดังแสดงในสมการที่ (4.13) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 2 มิติและสมการที่ (4.14) สำหรับปัญหาในรูปแบบ 3 มิตินั้นหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยาก ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

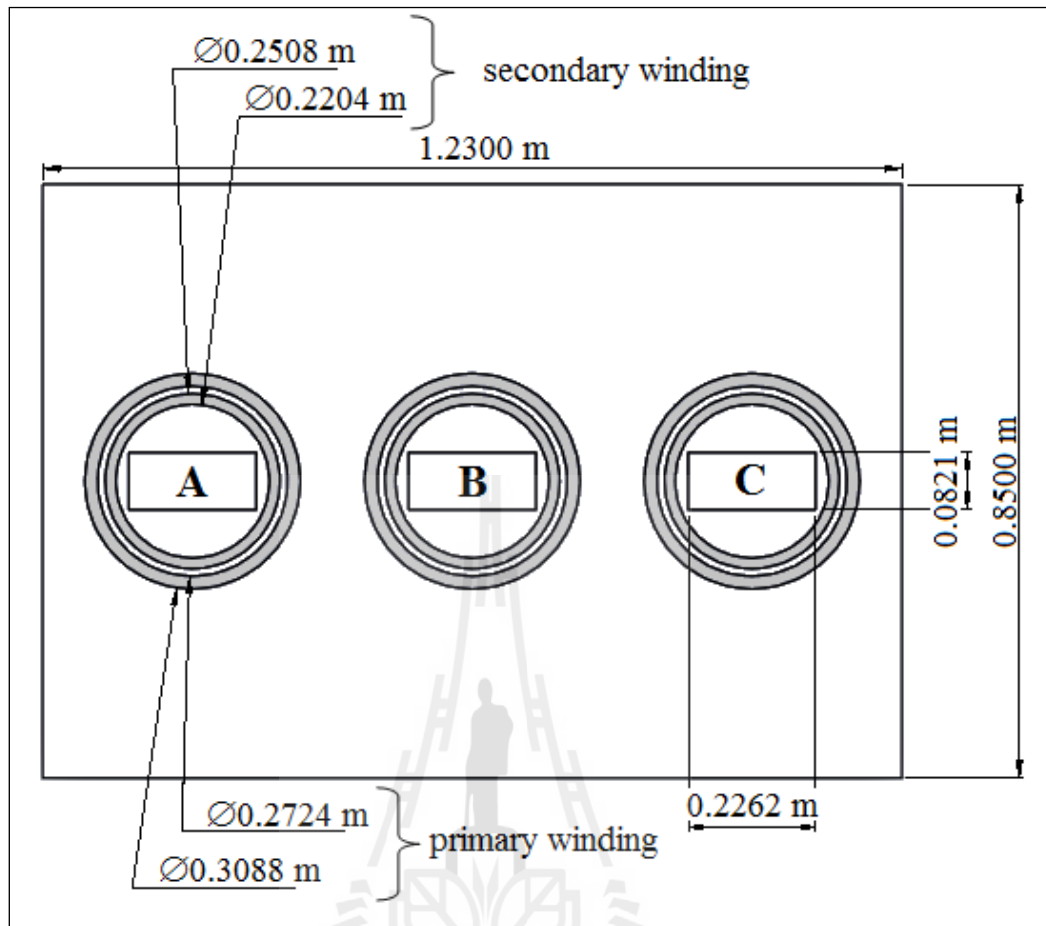
#### 4.3.1 การออกแบบเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

สำหรับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V มีการต่อแบบ Dy1 ซึ่งสามารถแสดงขนาดและพิกัดของหม้อแปลงจำหน่ายที่นำมาพิจารณาได้ดังรูปที่ 4.1 ซึ่งงานวิจัยนี้ได้ศึกษาทั้งในรูปแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เพื่อให้เห็นการพิจารณาเอลิเมนต์ที่แตกต่างกันในแต่ละรูปแบบ โดยสิ่งที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนระหว่างระเบียบวิธีไฟ

ในทอิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ และแบบ 3 มิติ ที่เห็นได้ชัด คือ การจำลองผลสำหรับปัญหาที่รูปร่างมีความลึกหรือความหนา เช่น ในหม้อแปลงจำหน่ายจะสามารถแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กได้ทุกส่วนและทุกด้านของชิ้นงาน เป็นต้น การออกแบบกริดให้มีขนาดเล็กหรือใหญ่ นั้น จะแปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่หรือปริมาตรที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

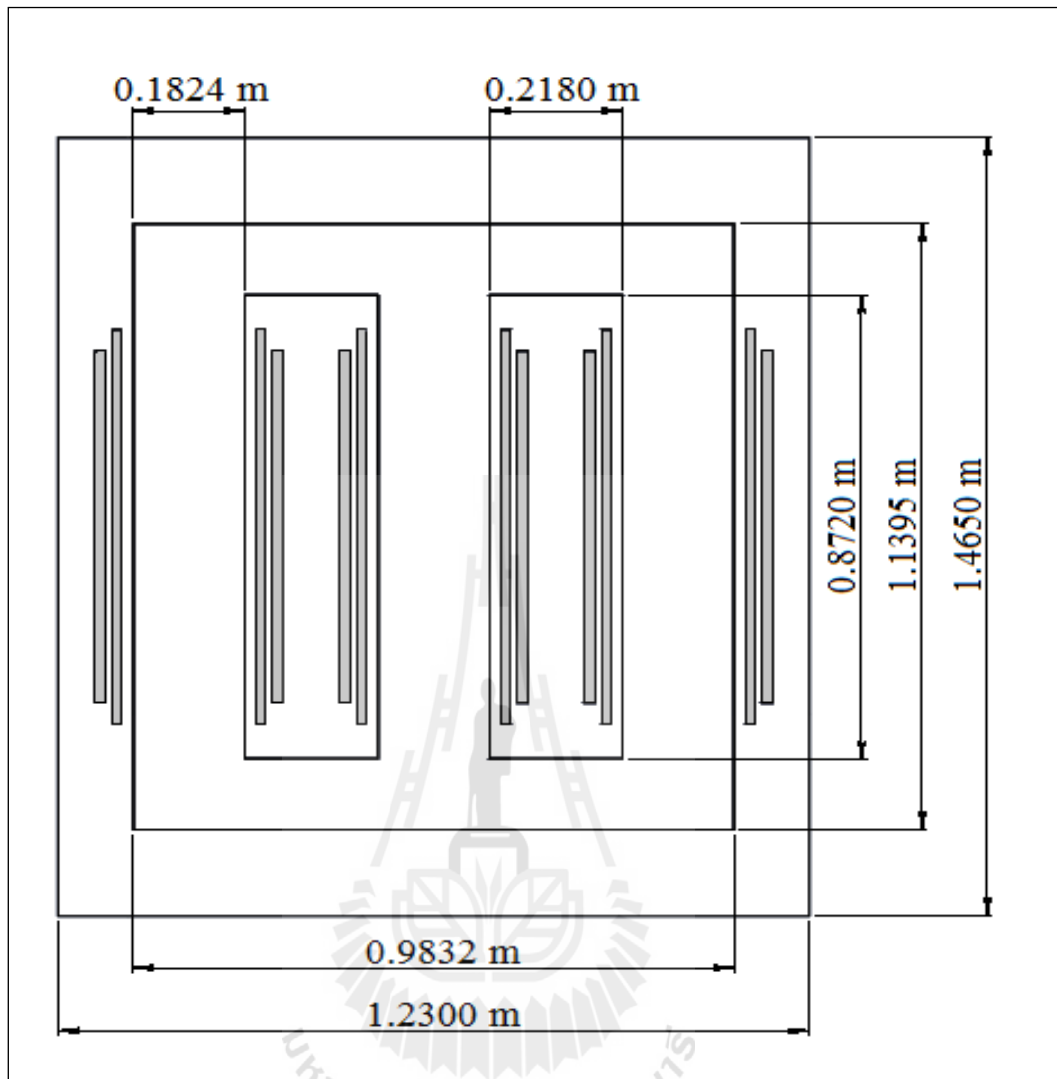
ขั้นตอนแรก เริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม (triangular elements) สำหรับปัญหาในแบบ 2 มิติ โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผ่านการเชื่อมต่อกันระหว่างโหนดและอิลลิเมนต์ต่าง ๆ การออกแบบกริดเป็นรูปอิลลิเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้กล่องเครื่องมือที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB โดยจะมีจำนวนโหนดและอิลลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 7,560 โหนดและ 15,025 อิลลิเมนต์ ตามลำดับ การออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 2 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.2

สำหรับปัญหาในแบบ 3 มิติจะเริ่มจากการแบ่งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่ายออกเป็นอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral elements) การออกแบบกริดเป็นอิลลิเมนต์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรม Solid work โดยจะมีจำนวนโหนดและอิลลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่ายเป็น 24,107 โหนด และ 132,961 อิลลิเมนต์ ตามลำดับ สำหรับการออกแบบกริดของปัญหาในแบบ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.3

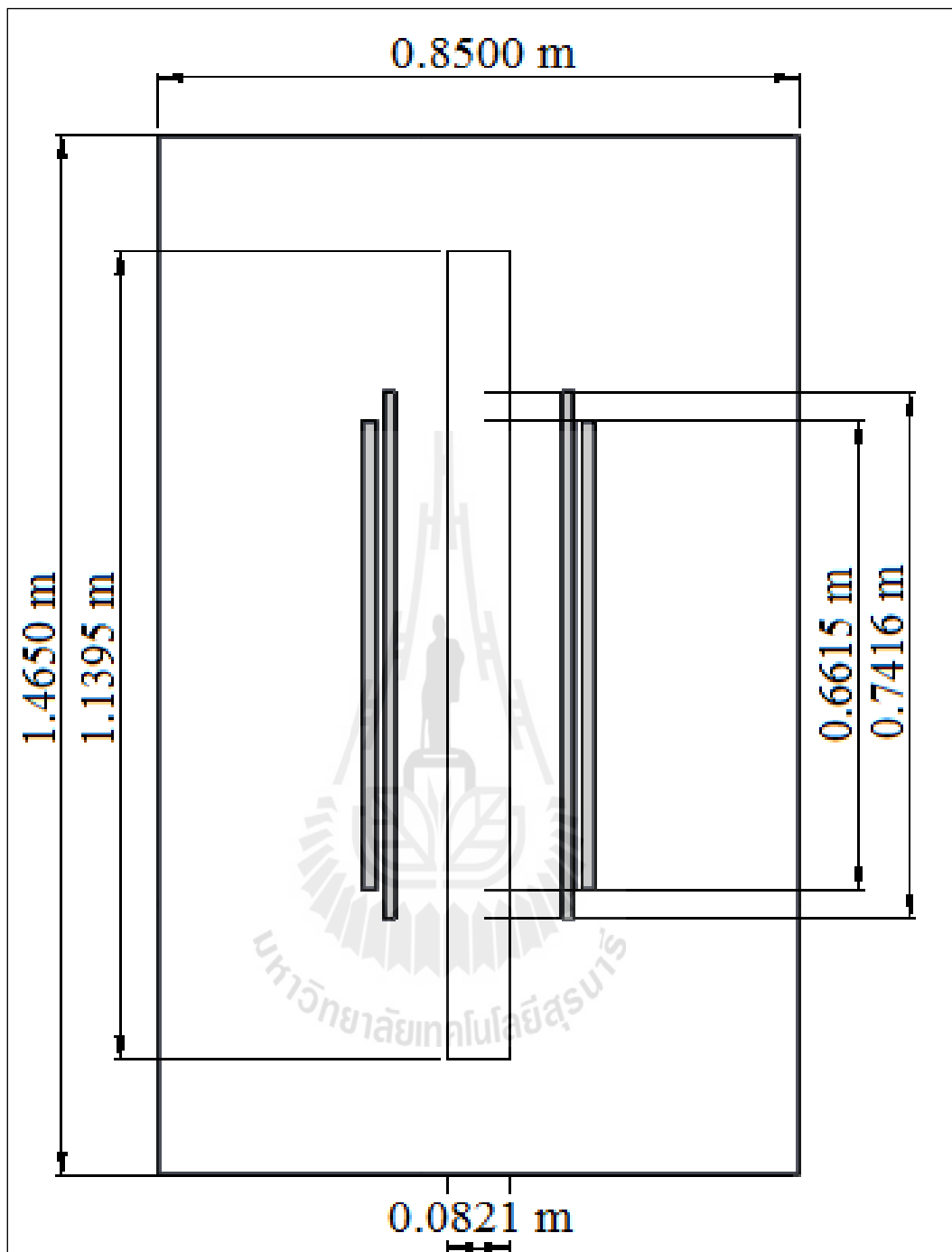


ก) ด้านบน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

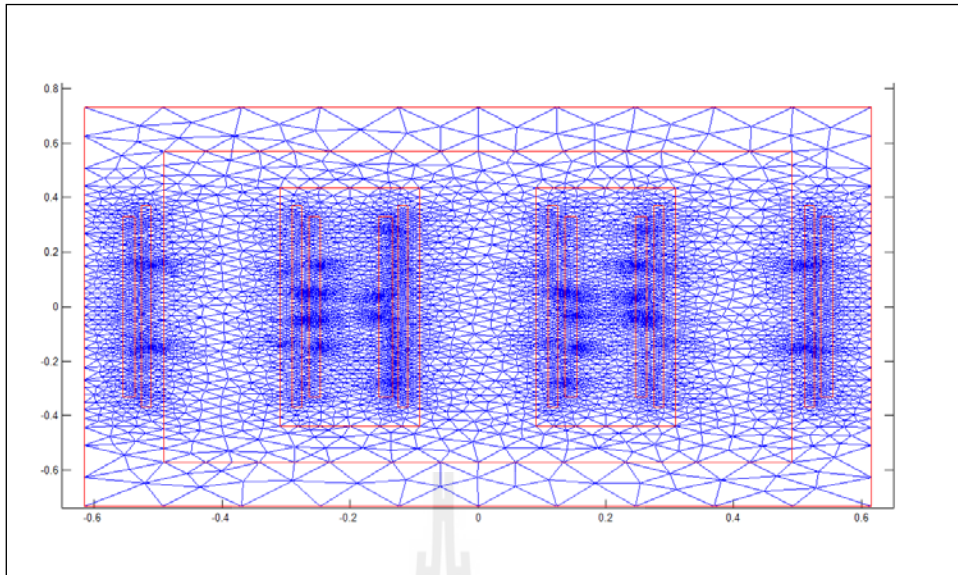


ข) ด้านหน้า

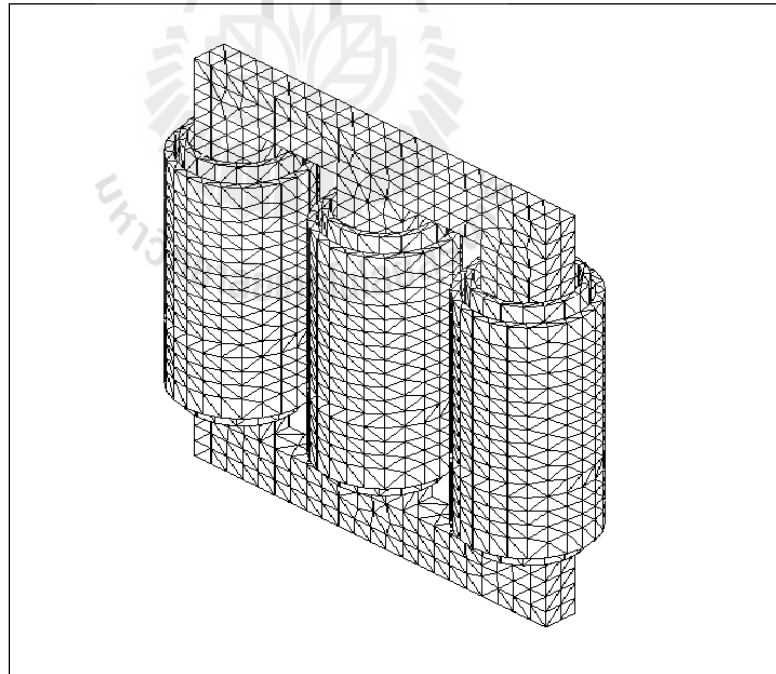


ก) ด้านข้าง

รูปที่ 4.1 พิกัดและขนาดของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไป  
ที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 4.2 การแบ่งอิลลิเมนต์ของหม้อแปลงแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้น  
การลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ในแบบ 2 มิติ



รูปที่ 4.3 การแบ่งอิลลิเมนต์ของหม้อแปลงแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้น  
การลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ในแบบ 2 มิติ

### 4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์

จากการออกแบบอิลลิเมนต์ในหัวข้อที่ 4.3.1 ที่ได้กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ทำให้เห็นข้อแตกต่างของปัญหาใน 2 มิติและ 3 มิติ คือรูปแบบของอิลลิเมนต์ที่มีรูปร่างที่แตกต่างกัน โดยรูปแบบของอิลลิเมนต์ที่ต่างกันนี้นำมาซึ่งการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ในหัวข้อนี้มีความแตกต่างกันด้วย ดังนั้นในขั้นตอนนี้จึงทำการแยกพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ออกเป็นแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงกระบวนการดำเนินงานในการเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ที่ถูกต้องตามรูปร่างของอิลลิเมนต์ที่เลือกใช้

#### 4.3.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้เป็นการเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ (element interpolation function) โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ในที่นี้จะกล่าวถึงปัญหาสามเหลี่ยมหลักซึ่งจะได้

$$A(x, y) = A_i N_i + A_j N_j + A_k N_k \quad (4.15)$$

โดยที่  $N_n, n = i, j, k$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ และ  $A_n, n = i, j, k$  คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด  $i, j, k$  ของอิลลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad \text{เมื่อ } n = i, j, k \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

และ  $\Delta_e$  คือ พื้นที่ของแต่ละอิลลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\Delta_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (4.17)$$

#### 4.3.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ

กรณีที่พิจารณาระบบเป็นแบบ 3 มิติ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (4.18)$$

โดยที่  $N_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ และ  $A_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  คือผลลัพธ์ของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละโหนด  $1, 2, 3, 4$  ของอิลลิเมนต์ ซึ่งในกรณีอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อจะได้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.19)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\ b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\ b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\ c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\ c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\ c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
 d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
 d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
 d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
 \end{aligned}$$

และ  $V$  คือ ปริมาตรของแต่ละโวลูเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

### 4.3.3 การสร้างสมการโวลูเมนต์

#### 4.3.3.1 สมการโวลูเมนต์แบบ 2 มิติ

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์โวลูเมนต์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของโวลูเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาสนามแม่เหล็กของระบบ 2 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.13) ที่แสดงก่อนหน้านี้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - j\sigma\omega A + J_0 = 0$$

ประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลูเมนต์เพื่อหาระบบสมการเชิงเส้น โดยอาศัยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals) ในปัจจุบันการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถือเป็นวิธีที่ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกออกไปได้อีก เช่น วิธีของกาลเลอร์กิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหาขนาดใหญ่ การสร้างสมการของโวลูเมนต์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้ คือ การแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (4.13) จะไม่ก่อให้เกิดค่าเท่ากับศูนย์ หากแต่จะมีค่าเท่ากับ  $R$  แทนดังแสดงด้วยสมการที่ (4.21)

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega \mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (4.21)$$

ซึ่ง  $R$  เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา เศษตกค้าง  $R$  ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่เที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเออร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988; Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง  $R$  ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function :  $W$ ) แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของอิลลิเมนต์ ( $\Omega$ ) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_n R d\Omega = 0, \quad n = i j k \quad (4.22)$$

สำหรับอิลลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม จุดที่ไม่ทราบค่ามี 3 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสาม ดังนั้นจึงต้องการ 3 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (4.22) จะต้องมีค่า  $n = I j k$  และโดยปกติเราจะเลือก  $W_n = N_n$  ซึ่งเรียกว่า บับ โนฟ-กาลเออร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน  $R$  ด้วยสมการที่ (4.21) ลงในสมการที่ (4.22) จะได้

$$\int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - j\sigma\omega \mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) d\Omega = 0 \quad (4.23)$$

$$\int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n (j\sigma\omega \mathbf{A}) d\Omega + \int_{\Omega} (N_n \mathbf{J}_0) d\Omega = 0 \quad (4.24)$$

พิจารณาการอินทิเกรตที่ละพจน์ของสมการที่ (4.24) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่ละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{V}) d\Omega \quad (4.25)$$

ซึ่ง  $\Gamma$  คือ ขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Omega$  เมื่อเปรียบเทียบกับพจน์แรกของสมการที่ (4.24) จะได้ว่า

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{j}$$

และเนื่องจาก  $\mathbf{n}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลิเมนต์  $\Gamma$

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.24) เมื่อ  $n = i, j, k$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega - \\ & \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega + \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.26) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอีลีเมนต์  $\Gamma$  ที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณกระแสตลอดขอบนอกของอีลีเมนต์นั้น ๆ หนึ่ง อีลีเมนต์นั้น ๆ อาจวางตัวอยู่ภายในหรืออยู่ติดขอบนอกของพื้นที่ศึกษา ซึ่งในงานวิจัยนี้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ (Salkic, 2005) แสดงดังสมการที่ (4.27) ดังนั้นสมการที่ (4.18) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (4.28) และเนื่องจากสมการที่ (4.28) มีทั้งหมด 3 สมการ เราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อีลีเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.29) ดังนี้

$$\mathbf{A}(x, y) = 0 \quad , \quad (x, y) \in \Gamma \quad (4.27)$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x \mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y \mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Omega} N_n \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x \mu} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y \mu} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} (j\omega\sigma\mathbf{A}) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \end{aligned} \quad (4.29)$$

และจากสมการที่ (4.15) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  โดยประมาณในแต่อีลีเมนต์เป็น

$$A(x, y) = [N]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 3} [A]_{3 \times 1}$$

และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงกลายเป็น

$$\int_{\Omega} \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x \mu} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 3} y + \left[ \frac{\partial N}{\partial y \mu} \right]_{3 \times 1} \frac{1}{y} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 3} \right) d\Omega [A]_{3 \times 1} + \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega [A]_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.30)$$

หรือเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{3 \times 3} \{A\}_{3 \times 1} = \{F\}_{3 \times 1} \quad (4.31)$$

เมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [M]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} j\omega\sigma [N]_{1 \times 3} d\Omega \quad (4.32)$$

จากสมการที่ (4.16) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.33)$$

จากสมการที่ (4.33) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า  $\sigma$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.32) จึงกลายเป็น

$$[M]_{3 \times 3} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.34)$$

สมการที่ (4.34) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (4.35) โดยที่  $N_i = L_1$   $N_j = L_2$  และ  $N_k = L_3$  จะได้

$$\int_{\Delta_e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Delta_e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta_e \quad (4.35)$$

จากสมการที่ (4.35) สามารถพิจารณาแยกเป็น 2 กรณี คือ  $L_n = L_m$  และ  $L_n \neq L_m$  ในกรณี  $L_n = L_m$  จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  ของรูปสามเหลี่ยมจะได้  $a = 2$ ,  $b = c = 0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.35) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^2 d\Delta_e &= \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{4\Delta_e}{4!} = \frac{2\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ในกรณีที่  $L_n \neq L_m$  จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  และ  $j$  ของรูปสามเหลี่ยมจะได้  $a = b = 1$ ,  $c = 0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.35) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^1 L_2^1 d\Delta_e &= \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{2\Delta_e}{4!} = \frac{\Delta_e}{12} \end{aligned}$$

ที่จุดต่ออื่นๆ ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้รับการพิจารณาในลักษณะนี้เช่นกัน ดังนั้นจากสมการที่ (4.34) จึงได้เมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$  ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.36) ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์  $[M]_{3 \times 3}$  จะมีค่าขึ้นอยู่กับรูปร่างของอิลลิเมนต์

$$[M]_{3 \times 3} = \frac{j\omega \Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

เมทริกซ์  $[K]_{3 \times 3}$

$$\text{จาก } [K]_{3 \times 3} = \int_{\Omega} \left( \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}_{1 \times 3} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 3} \right) d\Omega \quad (4.37)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดั่งสมการที่ (4.33) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{2\Delta_e} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{2\Delta_e} \quad n = i, j, k \quad (4.38)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.38) ลงในสมการที่ (4.37) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{b_n}{2\Delta_e} \frac{b_m}{2\Delta_e} + \frac{c_n}{2\Delta_e} \frac{c_m}{2\Delta_e} \right) dx dy \quad n, m = i, j, k \quad (4.39) \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e^2} (b_n b_m + c_n c_m) \int dx dy \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} (b_n b_m + c_n c_m) \quad n, m = i, j, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K]_{3 \times 3} &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ & & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \quad (4.40) \\ &\quad \text{Sym} \end{aligned}$$

โพลีโนเมียล:  $\{F\}_{3 \times 1}$

$$\text{จาก } \{F\}_{3 \times 1} = \int_{\Omega} [N]_{3 \times 1} \mathbf{J}_0 d\Omega \quad (4.41)$$

หรือ

$$\{F\}_{3 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int N_n dx dy \quad n = i, j, k \quad (4.42)$$

สมการที่ (4.42) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ดังสมการที่ (4.35) โดยที่  $N_i = L_1$ ,  $N_j = L_2$  และ  $N_k = L_3$  ซึ่งจะขอยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่  $i$  ของรูปสามเหลี่ยมจึงได้  $a = 1$ ,  $b = c = 0$  ดังนั้นจากสมการที่ (4.35) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_e} L_1^1 d\Delta_e &= \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2\Delta_e \\ &= \frac{2\Delta_e}{3!} = \frac{\Delta_e}{3} \end{aligned}$$

ซึ่งที่จุดต่อ  $j$  และ  $k$  ของรูปสามเหลี่ยมก็ได้ลักษณะเช่นเดียวกันนี้ ดังนั้นจากสมการที่ (4.42) จึงได้โพลีโนเมียลแสดงได้ดังนี้

$$\{F\}_{3 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 \Delta_e}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$



### 4.3.3.2 สมการอิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การดำเนินการด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะกระทำการในลักษณะเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ซึ่งจะแตกต่างกันอย่างชัดเจนที่ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์โดยตั้งต้นจากสมการอนุพันธ์ย่อยของปัญหาสนามแม่เหล็กแบบ 3 มิติ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.14) ที่แสดงก่อนหน้านี้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (4.44)$$

สำหรับวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 3 มิติ ยังคงประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเสขตกค้างด้วยวิธีกาลเลอร์กินเช่นเดียวกันกับแบบ 2 มิติดังสมการที่ (4.22) แต่จะเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตรอบปริมาตรแทนดังแสดงด้วยสมการที่ (4.45)

$$\int_V W_n R dV = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.45)$$

โดยเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติจะได้เสขตกค้าง  $R$  ดังสมการที่ (4.46)

$$R = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \quad (4.46)$$

สำหรับอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า จุดที่ไม่รู้ค่ามี 4 จุดซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่รู้ค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (4.45) จะต้องมีค่า  $n = 1, 2, 3, 4$  และโดยปกติจะเลือก  $W_n = N_n$  ดังนั้นเมื่อแทนค่า  $R$  ด้วยสมการ (4.46) ลงในสมการที่ (4.45) จะได้

$$\int_V N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - j\sigma\omega\mathbf{A} + \mathbf{J}_0 \right) dV = 0 \quad (4.47)$$

$$\int_V N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dV - \int_V N_n (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dV = 0 \quad (4.48)$$

พิจารณาการอินทิเกรตที่ละพจน์ของสมการที่ (4.48) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่ละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เหมือนกับสมการที่ (4.25) ในแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (4.48) เมื่อ  $n = 1, 2, 3, 4$  จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\int_{\Gamma} N_n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right) d\Gamma - \int_V \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV - \int_V N_n (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV + \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV = 0 \quad (4.49)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.49) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลลิเมนต์  $\Gamma$  โดยค่าศักร์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  ที่บริเวณขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงดังสมการที่ (4.50) ดังนั้นสมการที่ (4.49) จึงลดรูปเหลือดังสมการที่ (4.51) และเนื่องจากสมการที่ (4.51) มีทั้งหมด 4 สมการ เราสามารถเขียนสมการโพเทนเชียลลิเมนต์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.52)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = 0 \quad , \quad (x, y, z) \in \Gamma \quad (4.50)$$

$$\int_V \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dV + \int_V N_n (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV = \int_V N_n \mathbf{J}_0 dV \quad (4.51)$$

$$\int_V \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \left[ \frac{\partial N}{\partial \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} + \left[ \frac{\partial N}{\partial \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{z} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial} \right) dV + \int_V [N]_{4 \times 1} (j\omega \sigma \mathbf{A}) dV = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (4.52)$$

และจากสมการที่ (4.18) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  โดยประมาณในแต่้อลติเมนต์เป็น

$$A(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\partial A}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \left[ \frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนท์ออลติเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_V \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{y} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{z} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} \right) dV [A]_{4 \times 1} + \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega \sigma [N]_{1 \times 4} d\Omega [A]_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (4.53)$$

หรือเขียนสมการไฟไนท์ออลติเมนต์สำหรับแต่ละออลติเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการได้ดังนี้

$$[M + K]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1} = \{F\}_{4 \times 1} \quad (4.54)$$

เมทริกซ์  $[M]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [M]_{4 \times 4} = \int_V [N]_{4 \times 1} j\omega [N]_{1 \times 4} dV \quad (4.55)$$

จากสมการที่ (4.19) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V}(a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad \text{เมื่อ } n = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (4.56)$$

จากสมการที่ (4.56) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า  $\sigma$  มีค่าคงที่ ดังนั้นสมการที่ (4.55) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4 \times 4} = j\omega\sigma \int N_n N_m dx dy dz \quad n, m = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (4.57)$$

สมการที่ (4.57) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดังสมการที่ (4.58) โดยที่  $N_1 = L_1$   $N_2 = L_2$   $N_3 = L_3$  และ  $N_4 = L_4$  จะได้

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (4.58)$$

จากสมการที่ (4.57) สามารถแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณีคล้ายในทำนองเดียวกันกับแบบ 2 มิติ ดังนั้นจากสมการที่ (4.57) เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (4.58) จะได้

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{j\omega V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

เมทริกซ์  $[K]_{4 \times 4}$

$$\text{จาก } [K]_{4 \times 4} = \int_V \left( \left[ \frac{\partial N}{\partial x \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{x} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial y \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{y} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} + \left[ \frac{\partial N}{\partial z \mu} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{z} \left[ \frac{\partial N}{\partial} \right]_{1 \times 4} \right) dV \quad (4.60)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดั่งสมการที่ (4.56) จึงได้

$$\frac{\partial N_n}{\partial x} = \frac{b_n}{6V}, \quad \frac{\partial N_n}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_n}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.61)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.61) ลงในสมการที่ (4.60) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{4 \times 4} &= \frac{1}{\mu} \int \left( \frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.62) \\ &= \frac{1}{36\mu V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\ &= \frac{1}{36\mu V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ & & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ \text{Sym} & & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

โหลดเวกเตอร์:  $\{F\}_{4 \times 1}$

$$\text{จาก} \quad \{F\}_{4 \times 1} = \int_V [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dV \quad (4.64)$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบในการประมาณการอินทิเกรตตลอดปริมาตรดั่งสมการที่ (4.58) จะได้

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

#### 4.3.4 การประกอบสมการอิลลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นการนำสมการของแต่ละอิลลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 ทั้งในระบบ 2 มิติ และ 3 มิติ หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  จุดต่อ จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ ดังแสดงได้ดังนี้

$$[M + K]_{n \times n} \{A\}_{n \times 1} = \{F\}_{n \times 1} \quad (4.66)$$

#### 4.3.5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาค่าผลเฉลย

สำหรับขั้นตอนการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะมีกำหนดเงื่อนไขค่าขอบ คือ บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจำหน่ายมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเท่ากับศูนย์ ( $A=0$ )

#### 4.3.6 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $A$  ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าต่างๆ ที่สัมพันธ์กันต่อไปได้ โดยสนามแม่เหล็ก  $B$  สามารถคำนวณได้จากการเคิร์ลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ( $B = \nabla \times A$ ) ดังแสดงด้วยสมการ (4.67) ดังนั้นเมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 2 มิติ ตามระนาบพิกัด  $xy$  เมื่อมีกระแสตามแนวแกน  $z$  จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $x$  ( $B_x$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน  $y$  ( $B_y$ ) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.68), (4.69) และ (4.70) ตามลำดับ

$$B = \nabla \times A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) k \quad (4.67)$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k}{2\Delta_e} \quad (4.68)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left( \frac{b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k}{2\Delta_e} \right) \quad (4.69)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (4.70)$$

เมื่อพิจารณาหม้อแปลงใน 3 มิติ ตามระนาบพิกัด xyz เมื่อมีกระแสในแนวแกน x และ แนวแกน z จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x ( $B_x$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y ( $B_y$ ) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน z ( $B_z$ ) รวมทั้งค่าสนามแม่เหล็กรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.71), (4.72), (4.73) และ (4.74) ตามลำดับ

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (4.71)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_4 A_4}{6V} - \frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \quad (4.72)$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (4.73)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (4.74)$$

#### 4.4 การคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงขึ้นอยู่กับขนาดสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  โดยจะไม่พิจารณาค่าความต้านทานของขดลวดและค่ารีแอกแตนซ์รั่วไหลซึ่งมีปริมาณน้อย โดยที่ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ( $P_{core}$ ) ประกอบไปด้วย 2 ส่วน คือ กำลังงานสูญเสียจากฮีสเทอรีซิส ( $P_h$ ) และกำลังงานสูญเสียจากกระแสไหลวน ( $P_e$ ) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (4.75), (4.76) และ (4.77) ตามลำดับ

$$P_{core} = P_e + P_h \quad (4.75)$$

$$P_h = \eta V f B_{\max}^n \quad (4.76)$$

โดยที่  $\eta$  = ค่า coefficient steinmetz's มีค่าระหว่าง 275 - 500  
 $n$  = ค่าคงที่ steinmetz's มีค่าระหว่าง 1.0 - 3.0

$$P_e = K B_{\max}^2 f^2 t^2 V \quad (4.77)$$

โดยที่  $K$  = ค่าคงที่ขึ้นอยู่กับค่าความต้านทานจำเพาะของแกนเหล็ก  
 $B_{\max}$  = ค่าความหนาแน่นสูงสุดของเส้นแรงแม่เหล็ก  
 $f$  = ความถี่ของแรงดันไฟฟ้า  
 $t$  = ความหนาของแผ่นเหล็ก  
 $V$  = ปริมาตรของแกนเหล็ก

#### 4.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ประกอบกับคำนึงถึงคุณสมบัติต่าง ๆ ทางไฟฟ้าของวัสดุที่แตกต่างกันในระบบ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คิน โดยการคำนวณสนามแม่เหล็กจะพิจารณาระบบที่แปลงจากโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ และการหาค่าพลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้นจะคำนวณลงไปในระดับของอิลลิเมนต์รายละเอียดต่าง ๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์อิลลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 5 และบทที่ 6 ต่อไป



## บทที่ 5

### ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลง จำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

#### 5.1 บทนำ

การจำลองผลของงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย ในการจำลองผลนั้นจะพิจารณาขณะที่หม้อแปลงอยู่ในสถานะไร้โหลดเนื่องจากพิจารณากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยที่หม้อแปลงที่ใช้ในการจำลองผลในบทที่ 5 นี้เป็นหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่มีได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสีย ซึ่งค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่คำนวณได้นั้นจะมีผลมาจากค่าสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องศึกษาถึงการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็ก ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ภายในหม้อแปลงจำหน่าย ในบทที่ 5 นี้จึงได้กล่าวถึงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการจำลองผลและอธิบายถึง โปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ซึ่งเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลักเพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา โดยโปรแกรมทั้งหมดถูกออกแบบให้ทำงานบนพื้นฐานการใช้งานของ MATLAB ที่พัฒนาขึ้น

#### 5.2 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 3 มิติ

การคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถดำเนินการคำนวณตามขั้นตอนภายในโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้ งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ดำเนินการสร้างกริดด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อนำข้อมูลของโหนดและเอลิเมนต์มาพัฒนาต่อด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเอง โดยอธิบายถึงโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ ได้ดังนี้

##### 5.2.1 โปรแกรมการสร้างกริด

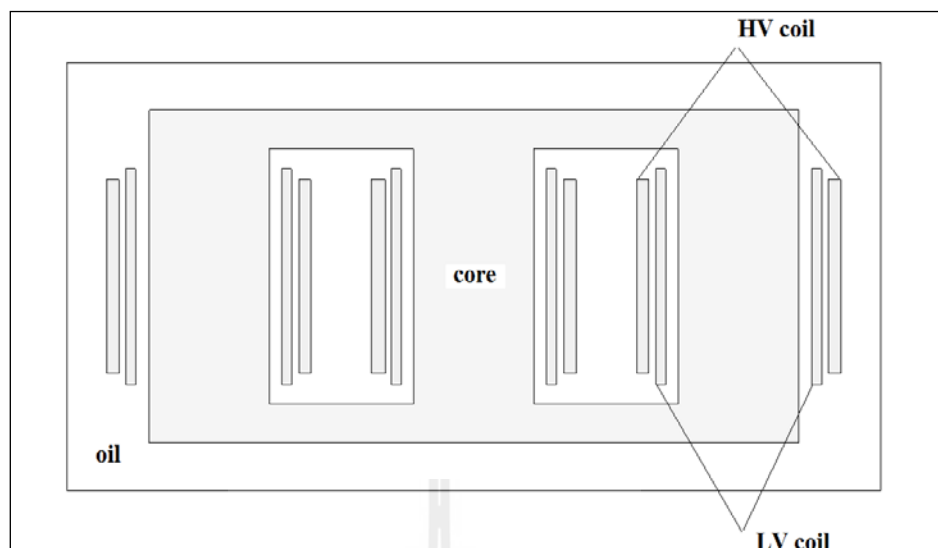
โปรแกรมการสร้างกริดในงานวิจัยนี้ สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปที่ชื่อว่า PDETOOL ของโปรแกรม MATLAB ซึ่งสามารถสร้างกริดได้เฉพาะปัญหาแบบ 2 มิติ เท่านั้น ส่วนระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ จะใช้การสร้างกริดจากโปรแกรม Solid work โดยสามารถเลือกความละเอียดของกริดให้เหมาะสมกับระบบได้ทั้งกริดแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ จากนั้นจึงนำข้อมูลของการ

สร้างกริดที่จำเป็นมาพัฒนาเป็นโปรแกรมไฟในอิลลิเมนต์ต่อไป ข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 2 มิติได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิคัดในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขอิลลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ส่วนข้อจำกัดของกล่องเครื่องมือสำเร็จรูปนี้คือไม่สามารถระบุค่าเงื่อนไขขอบเขตให้กับระบบที่มีหลากหลายเนื้อวัสดุในชิ้นเดียวกันได้ ดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงได้นำประโยชน์ของกล่องเครื่องมือนี้มาเพื่อช่วยในการสร้างกริด แต่เพียงเท่านั้น ส่วนข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริดแบบ 3 มิติได้แก่ ข้อมูลบอกระยะพิคัดในแนวแกน  $x$   $y$  และ  $z$  ข้อมูลบอกหมายเลขโหนด ข้อมูลบอกหมายเลขอิลลิเมนต์ ข้อมูลบอกหมายเลขที่แบ่งชนิดของวัสดุในระบบ และข้อมูลบอกหมายเลขของขอบเขตชิ้นงานเพื่อกำหนดเงื่อนไขขอบเขต โดยในงานวิจัยนี้ได้้นำโปรแกรม Solidworks มาเพื่อช่วยในการสร้างกริดเช่นเดียวกับกล่องเครื่องมือ PDETOOL เพียงเท่านั้น ส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟในอิลลิเมนต์อื่น ๆ อันได้แก่ การสร้างสมการของแต่ละอิลลิเมนต์ การสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต การแก้สมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยและการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการนั้น จะทำการพัฒนาด้วยโปรแกรม MATLAB ที่ประดิษฐ์ขึ้นเองโดยผู้ทำการวิจัยเพื่อจำลองผลต่อไป

สำหรับวิธีไฟในอิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ได้แก่ พื้นที่ที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และพื้นที่ที่เป็นน้ำมันหม้อแปลง โดยพื้นที่ขดลวดตัวนำประกอบไปด้วย

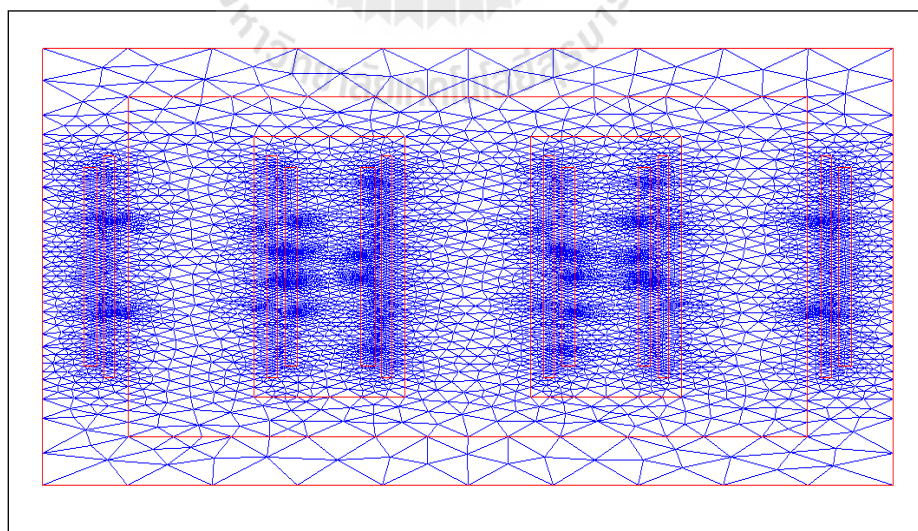
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงสูง เฟส C
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส A
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส B
- ขดลวดตัวนำด้านแรงต่ำ เฟส C

ในกล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายให้มีความกว้าง 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตรดังแสดงในรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1 การแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายตามลักษณะความแตกต่างของชิ้นงาน

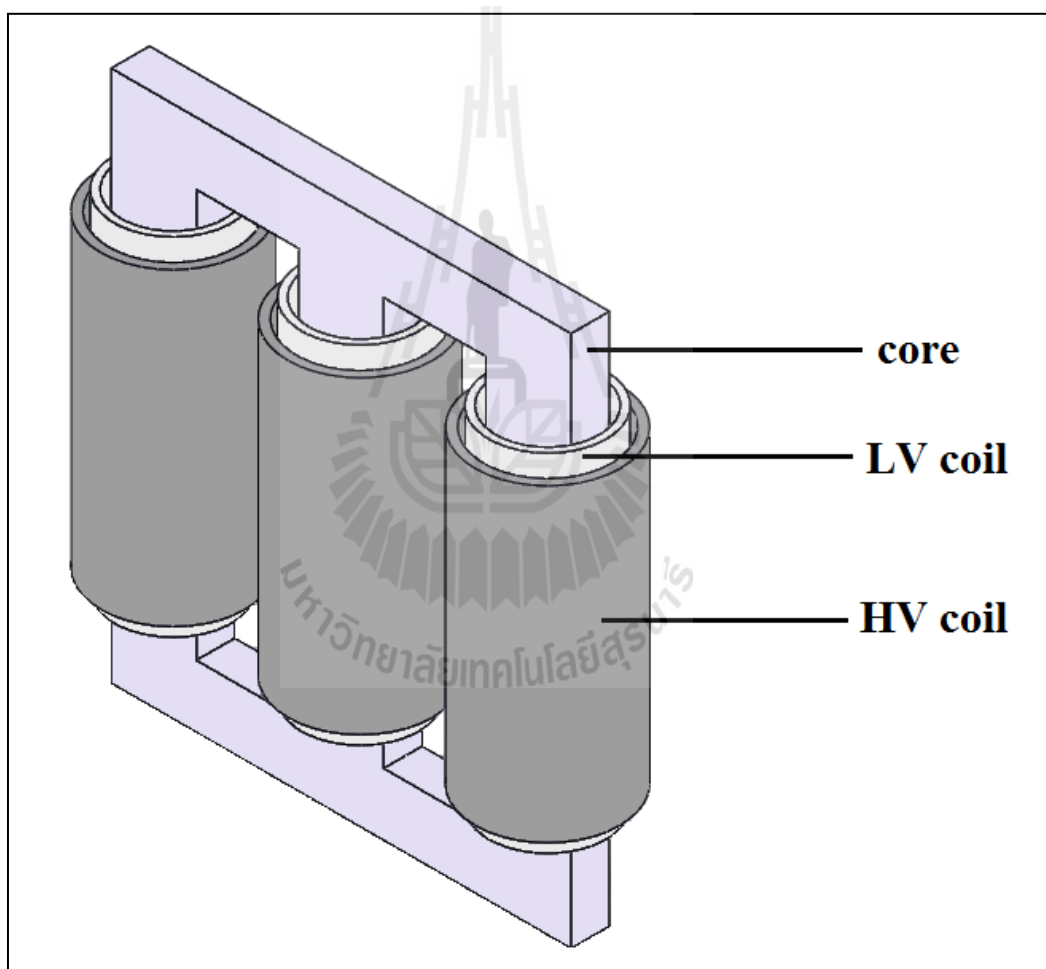
หลังจากแบ่งพื้นที่ของปัญหาหม้อแปลงจำหน่ายแล้ว จึงสั่งให้ PDETOOL สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้ดังรูปที่ 5.2



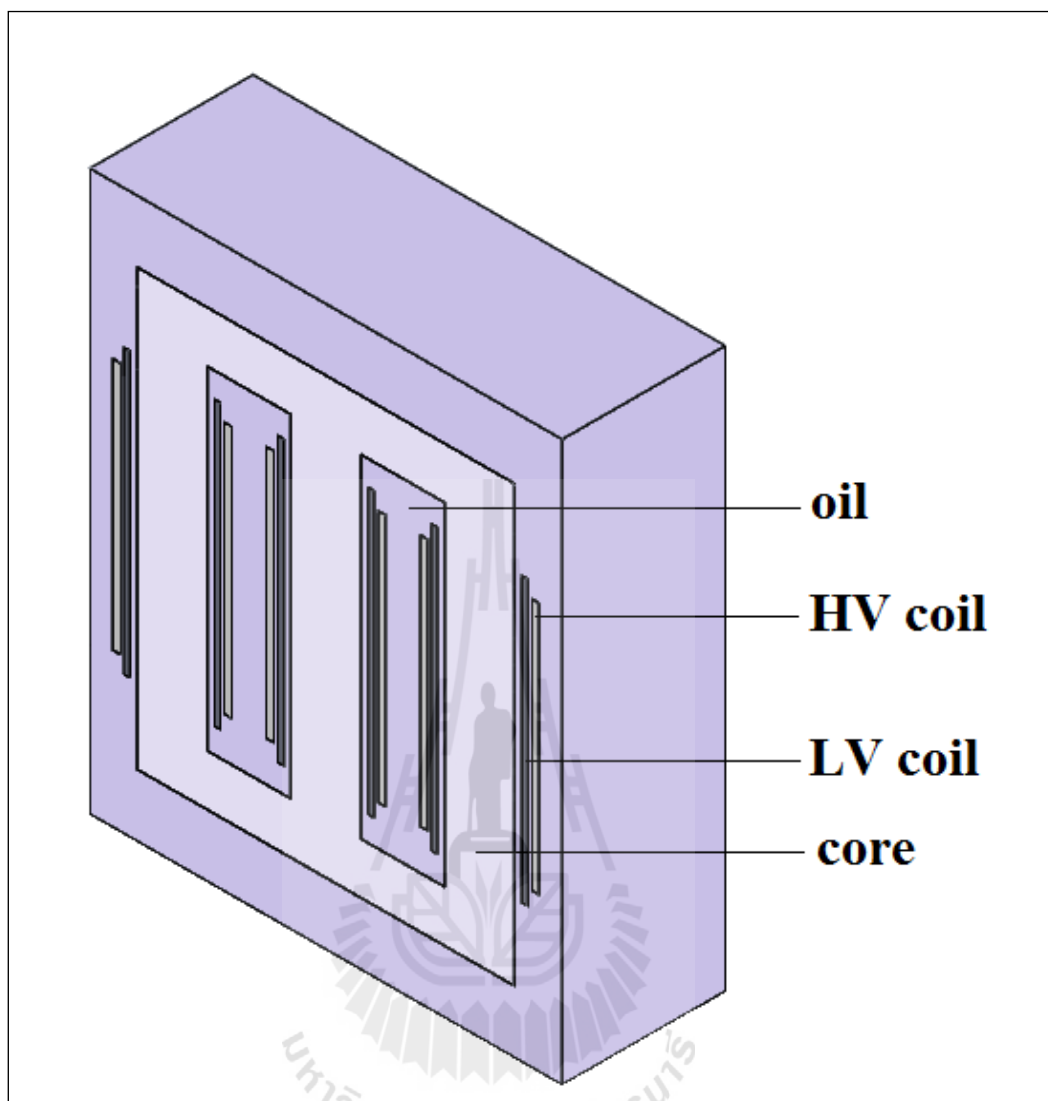
รูปที่ 5.2 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 2 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับวิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์แบบ 3 มิติ ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งปริมาตรที่ศึกษา ออกเป็นปริมาตรย่อย ๆ ได้แก่ ปริมาตรที่เป็นขดลวดตัวนำ , แกนเหล็ก และปริมาตรที่เป็นน้ำมัน หม้อแปลง เหมือนกับการแบ่งพื้นที่ศึกษาของวิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์แบบ 2 มิติ

ในโปรแกรม Solid work ที่ใช้ในการสร้างกริดนั้น ได้กำหนดปริมาตรของปัญหา ให้มีความกว้าง 0.85 เมตร ยาว 1.23 เมตร และความสูง 1.465 เมตร โดยในรูปที่ 5.3 จะแสดงเฉพาะ ส่วนที่เป็นแกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่าย ในรูปที่ 5.4 จะแสดงภาพตัดขวาง บริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

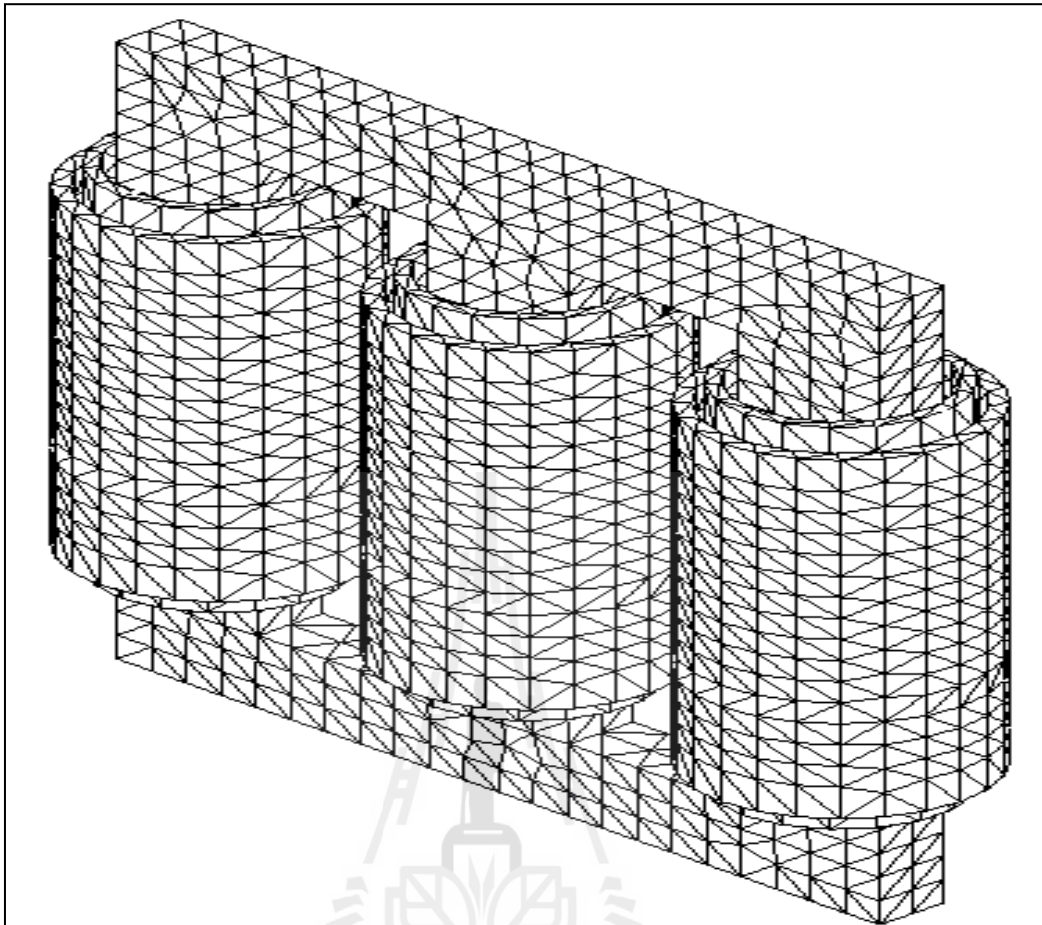


รูปที่ 5.3 แกนเหล็กและขดลวดตัวนำของหม้อแปลงจำหน่ายแบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.4 ภาพตัดขวางบริเวณตรงกลางตามแนวแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

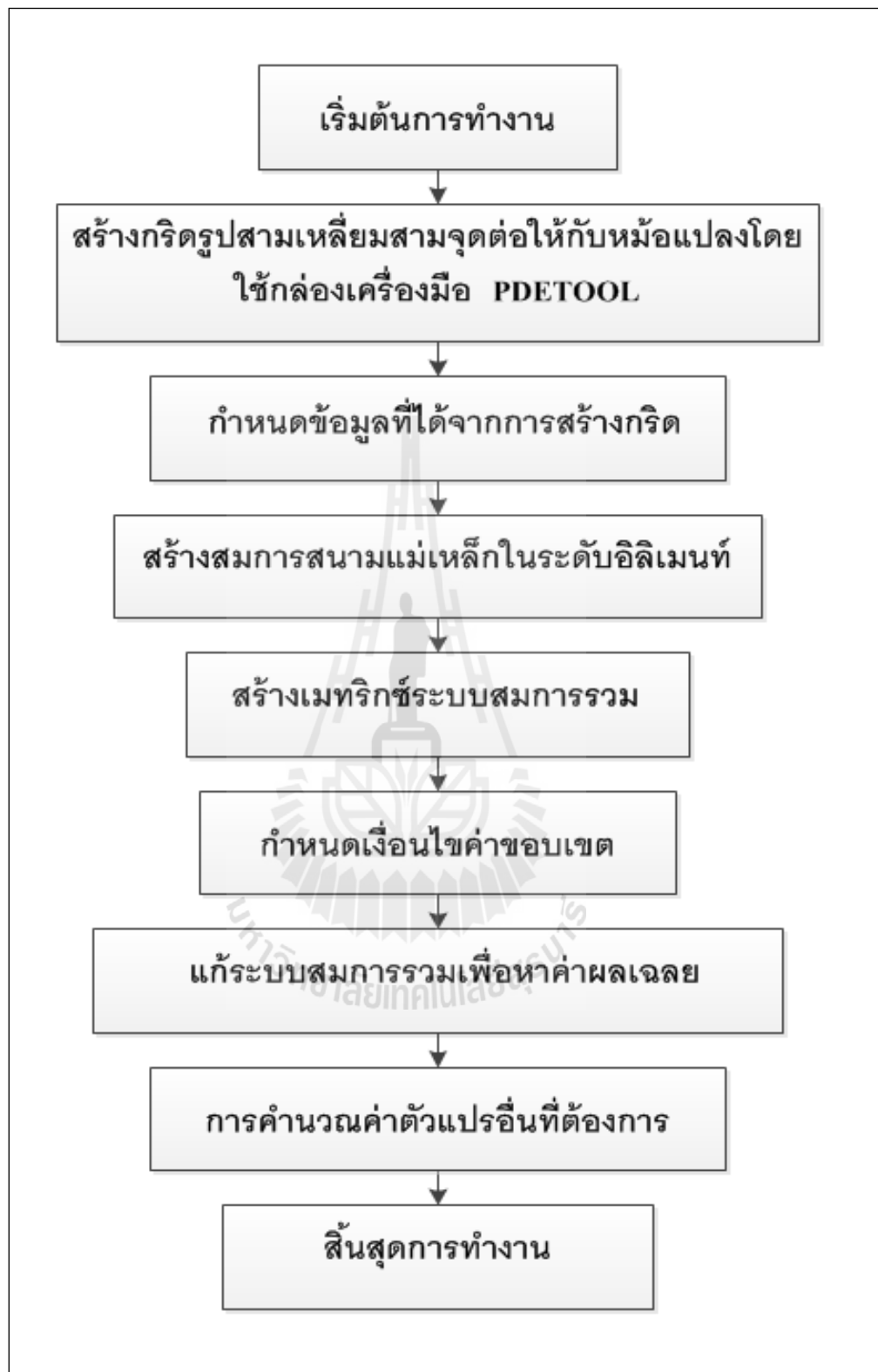
หลังจากแบ่งปริมาตรของปัญหาเป็นหมวดหมู่แล้ว จึงสั่งให้โปรแกรม Solid work สร้างกริดให้โดยอัตโนมัติ โดยเลือกกริดแบบทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งสามารถแสดงภาพการสร้างกริดบริเวณรอบนอกของปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายขนาด 400 kVA ได้ดังรูปที่ 5.5



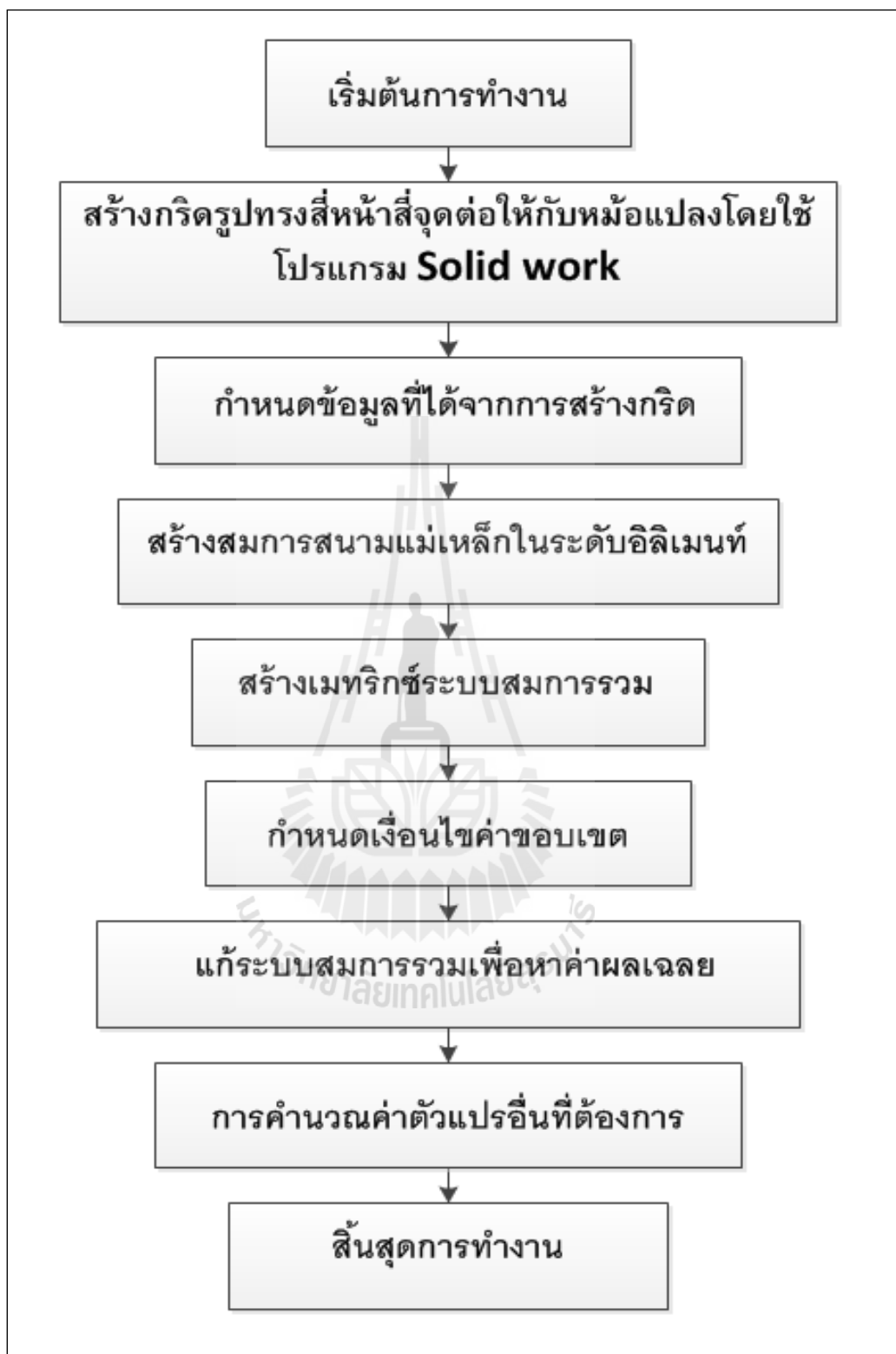
รูปที่ 5.5 ลักษณะการสร้างกริดแบบ 3 มิติของหม้อแปลงจำหน่าย

### 5.2.2 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก

ในขั้นตอนนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาเพื่อจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ โดยข้อมูลที่จำเป็นในการประดิษฐ์โปรแกรมนั้นได้จากในหัวข้อ 5.2.1 ที่อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 5.6 และ รูปที่ 5.7 ตามลำดับ



รูปที่ 5.6 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติ



รูปที่ 5.7 แผนภูมิการดำเนินงานของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ



จากแผนภูมิในรูปที่ 5.6 และรูปที่ 5.7 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลของระบบแบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมและความแตกต่างระหว่างวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ อย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอน จะได้อธิบายถึงรายละเอียดหน้าที่ต่าง ๆ ของการดำเนินงานของระเบียบวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ไปพร้อมๆ กันดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการกำหนดข้อมูลที่ได้จากการสร้างกริด : ขั้นตอนนี้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของโหนดและอิลลิเมนต์จากกล่องเครื่องมือ PDETOOL ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลประกอบด้วย จำนวนและตำแหน่งของโหนด หมายเลขโหนดที่ประกอบขึ้นเป็นอิลลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของอิลลิเมนต์ จำนวนและหมายเลขของชิ้นงานในระบบ เป็นต้น สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ จะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของโหนดและอิลลิเมนต์จากโปรแกรม Solid work ซึ่งรายละเอียดของข้อมูลจะได้เหมือนกับปัญหาแบบ 2 มิติ

ขั้นตอนการสร้างสมการสนามแม่เหล็กในระดับอิลลิเมนต์ : ขั้นตอนนี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอิลลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมสามจุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติ ของทุก ๆ อิลลิเมนต์ และสำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ โปรแกรมจะสร้างสมการอิลลิเมนต์เมทริกซ์ในรูปแบบของรูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อเมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 3 มิติ ของทุก ๆ อิลลิเมนต์ เนื่องจากภายในระบบมีชิ้นงานที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันอยู่ 3 ชนิด คือ แกนเหล็ก ขดลวดตัวนำและน้ำมันหม้อแปลง ซึ่งวัตถุทั้งสามมีค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าที่แตกต่างกันออกไปได้แก่ แกนเหล็กมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $2.08 \times 10^6$  s/m ค่าความซาบซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 3000 ส่วนขดลวดตัวนำมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ  $5.8 \times 10^7$  s/m ค่าความซาบซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 1 และน้ำมันหม้อแปลงมีค่าความนำไฟฟ้า ( $\sigma$ ) เท่ากับ 1.08 s/m ค่าความซาบซึมได้ทางแม่เหล็กสัมพัทธ์ ( $\mu_r$ ) เท่ากับ 0.05 โดยการสร้างสมการอิลลิเมนต์เมทริกซ์ของแต่ละอิลลิเมนต์จะต้องคำนึงถึงค่าคุณสมบัติทางแม่เหล็กและทางไฟฟ้าของวัตถุที่เกี่ยวข้องในแต่ละอิลลิเมนต์นั้น ๆ ด้วย

ขั้นตอนการสร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม : ขั้นตอนนี้ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติโปรแกรมจะทำหน้าที่รวมสมการของอิลลิเมนต์ย่อยเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 3.6 ของบทที่ 3 ซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ทั้งหมด  $n$  โหนดจะก่อให้เกิดเมทริกซ์ระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการทั้งสิ้น  $n$  สมการ

ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขต : ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวม โดยงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลง ทั้ง 4 ด้านมีค่าเท่ากับศูนย์ สำหรับปัญหาแบบ 3 มิติ ก็จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตแบบ 3 มิติ คือค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขอบตัวถังของหม้อแปลงจะต้องกำหนดทั้ง 6 ด้านให้มีค่าเท่ากับศูนย์

ขั้นตอนการแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย : ขั้นตอนนี้ ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โปรแกรมจะทำการแก้ระบบสมการรวมซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเพื่อหาค่าผลเฉลยของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ประจำโหนดโดยการเลือกใช้ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ขั้นตอนการคำนวณตัวแปรอื่นที่ต้องการ : ขั้นตอนสุดท้ายนี้ จะนำค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งปัญหาแบบ 2 มิติและ 3 มิติ มาคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็ก โดยค่าสนามแม่เหล็กจะหาได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

### 5.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

สำหรับหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ โดยจะเน้นผลการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก แต่จะแสดงผลการจำลองด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ เฉพาะค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก เพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างและความคล้ายคลึงกันระหว่างระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ และ 3 มิติ เท่านั้น โดยทำการจำลองการกระจายค่าสนามแม่เหล็กในหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ขนาด 400 kVA ในสภาวะไร้โหลดซึ่งจะแสดงดังนี้

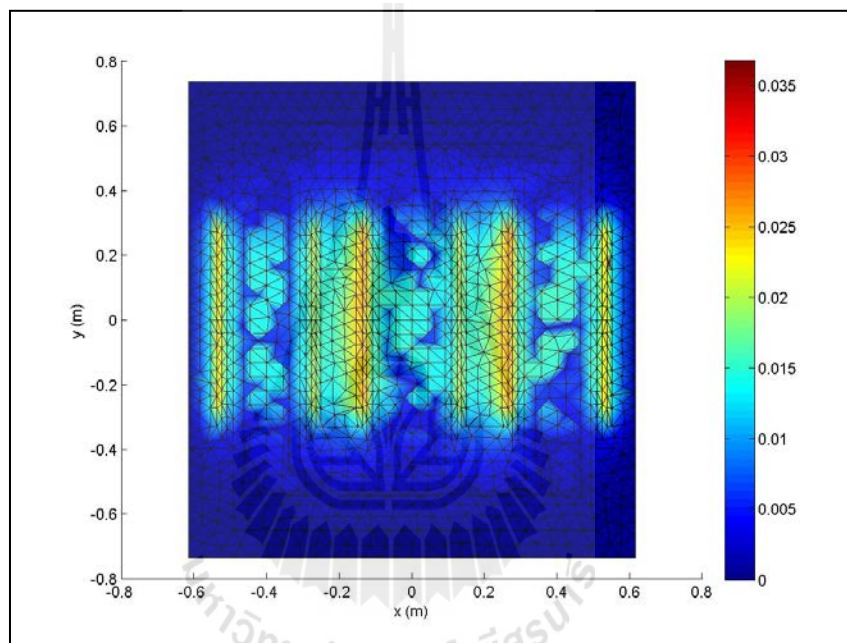
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 2 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.8

- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.9

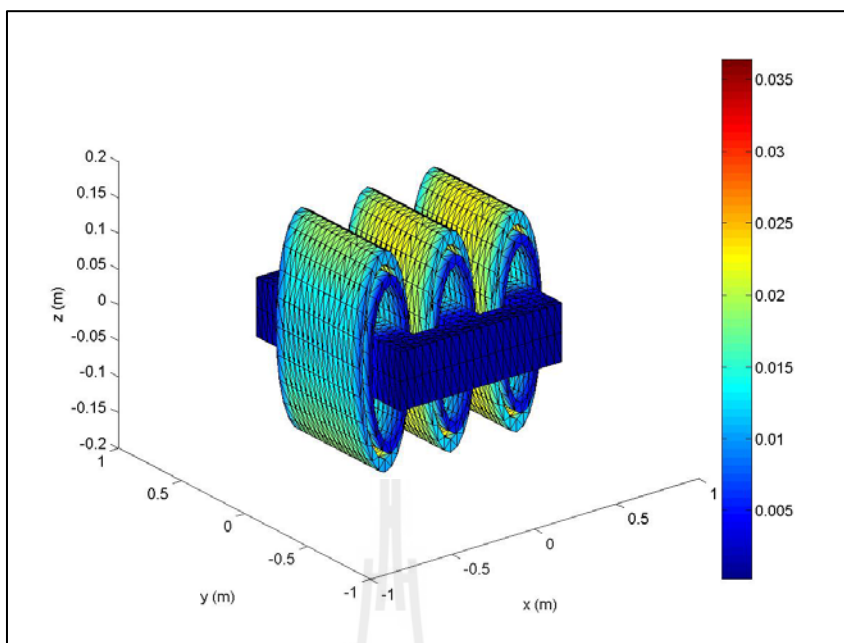
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.10

- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.11

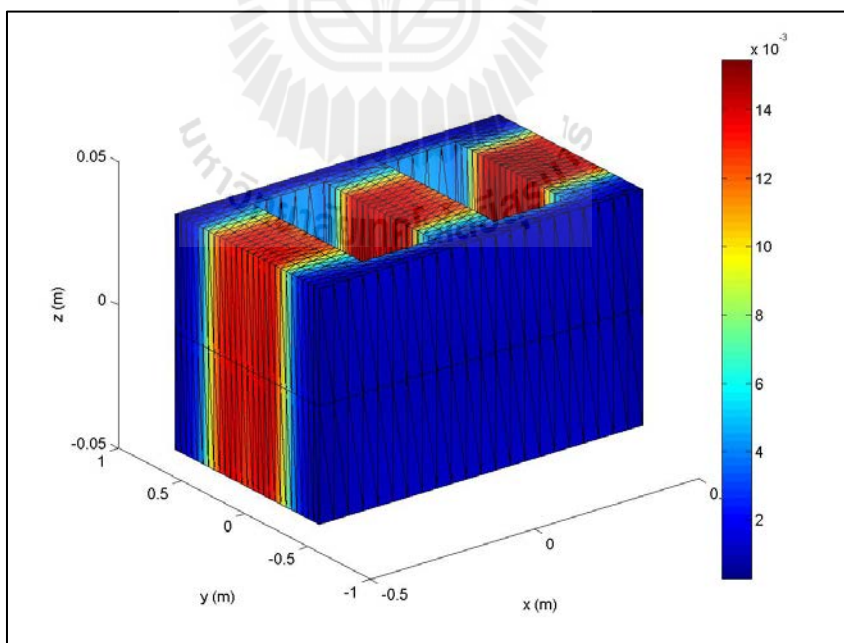
- การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ แสดงได้ด้วยรูปที่ 5.12



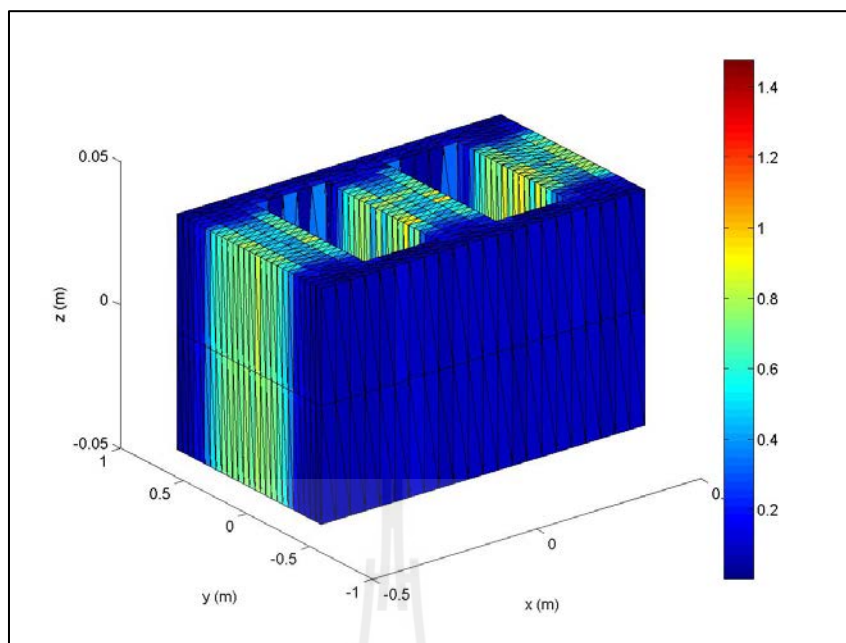
รูปที่ 5.8 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 2 มิติ



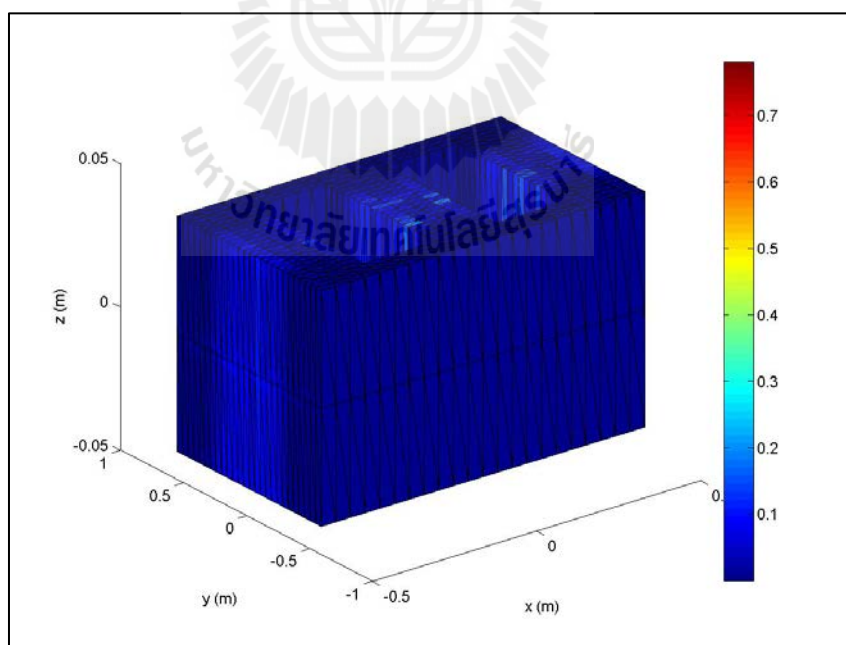
รูปที่ 5.9 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.10 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (wb/m) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.11 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กบริเวณแกนเหล็ก (T) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ



รูปที่ 5.12 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียบริเวณแกนเหล็ก (W) ของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แบบ 3 มิติ

จากผลการจำลองเมื่อพิจารณาพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แสดงในรูปที่ 5.8, 5.9 และ 5.10 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลง และผลของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจากขดลวดจะเหนี่ยวนำให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แกนเหล็กมีค่าสูงขึ้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 5.10 โดยที่บริเวณแกนเหล็กนั้นจะมีการกระจายตัวของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กที่สม่ำเสมอและมีความสมมาตร ซึ่งพิจารณาได้จากความสม่ำเสมอของสีบริเวณแกนเหล็ก ส่วนในรูปที่ 5.11 เป็นการแสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็ก ซึ่งจะพบว่าลักษณะของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ โดยมีความสอดคล้องกับค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก และเมื่อพิจารณาการกระจายตัวของค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่แสดงในรูปที่ 5.12 จะพบว่าบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบนั้นก็จะมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่สูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน อันเป็นผลมาจากค่าสนามแม่เหล็กบริเวณดังกล่าวมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นซึ่งสอดคล้องกับที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 โดยมีค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กตลอดทั้งปริมาตรมีค่าเท่ากับ 1,120 W

#### 5.4 สรุป

บทที่ 5 เป็นการอธิบายโปรแกรมจำลองผลพร้อมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA แบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ในสภาวะไร้อโหลด ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB โดยเน้นแบบ 3 มิติเป็นหลัก เพื่อให้เห็นผลเฉลยโดยละเอียดของปัญหา ซึ่งโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กแบบ 2 มิติและ 3 มิติ สามารถแสดงได้ด้วยแผนภูมิจริงรูปที่ 5.6 และ 5.7 ตามลำดับ จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลง จะมีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงกว่าบริเวณอื่น ๆ ส่งผลให้บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่มีขดลวดล้อมรอบอยู่ ถูกเหนี่ยวนำโดยขดลวดตัวนำ ทำให้มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นตาม ซึ่งทำให้สนามแม่เหล็กบริเวณนั้นมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นของแกนเหล็กเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูง ดังนั้นกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบก็จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นเช่นกัน

## บทที่ 6

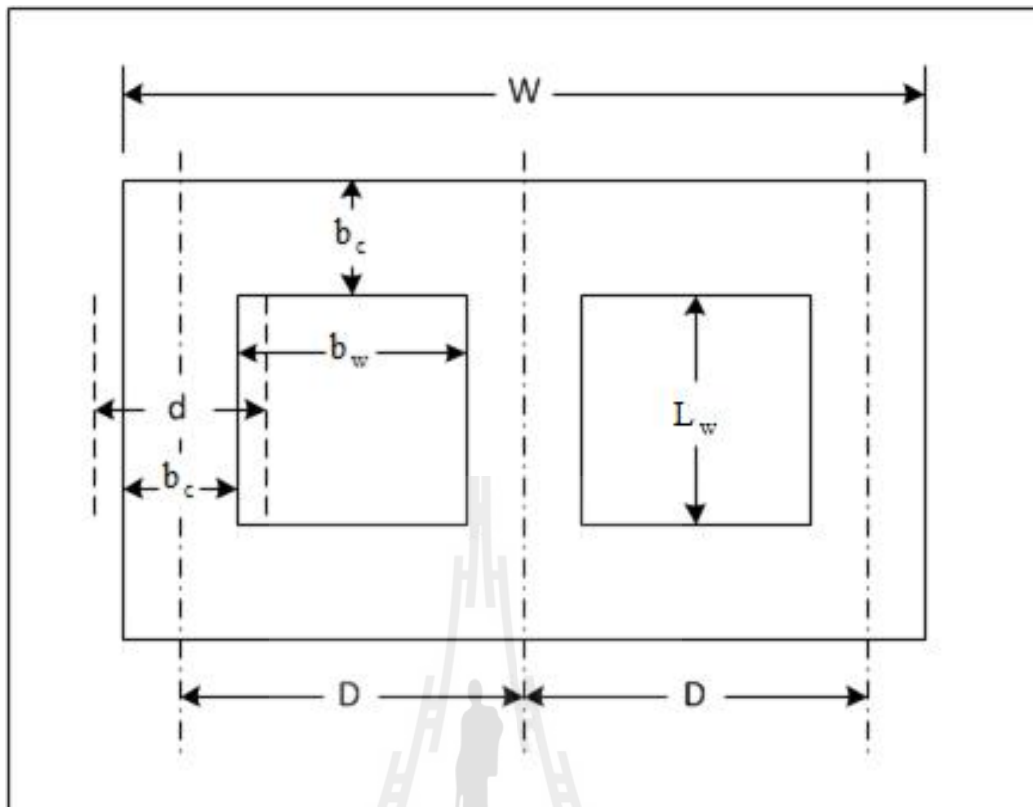
### การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

#### 6.1 บทนำ

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายในบทที่ 6 นี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อลดกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กให้น้อยลงกว่าเมื่อใช้แกนเหล็กแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยที่แกนเหล็กที่ใช้ออกแบบนั้นยังมีลักษณะคุณสมบัติของวัสดุเท่ากับแกนเหล็กแบบเดิมทุกประการ โดยที่จะพิจารณาถึงพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กและอัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กเป็นหลัก อีกทั้งการออกแบบนี้จะอาศัยการจำลองผลทางไฟฟ้า เพื่อแสดงถึงผลการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่เกิดขึ้น พร้อมทั้งอภิปรายผลที่ได้เปรียบเทียบกับแกนเหล็กที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

#### 6.2 การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย

การออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟสขนาด 400 kVA เพื่อลดกำลังงานสูญเสียที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กให้น้อยลงกว่าเมื่อใช้แกนเหล็กแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก จะพิจารณาโดยใช้อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กเป็นข้อกำหนดในการออกแบบ ประกอบกับพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้ ดังได้แสดงรายละเอียดตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่าง ๆ ในแกนเหล็กของหม้อแปลงไว้ในรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 ตัวแปรที่สื่อถึงขนาดต่างๆที่ใช้ในการออกแบบแกนเหล็ก

จากรูปที่ 6.1 อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็กนั้น สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (6.1) ดังนี้

$$a = \frac{L_w}{b_w} \quad (6.1)$$

เมื่อ  $a$  คือ อัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก ในที่นี้จะพิจารณาที่ค่าระหว่าง 0.25 ถึง 4

$L_w$  คือ ความสูงของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก

$b_w$  คือ ความกว้างของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก

การออกแบบแกนเหล็กนั้นจำเป็นต้องรู้ค่าพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก ( $A_s$ ) ซึ่งสามารถคำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังสมการที่ (6.2) ได้ดังนี้



$$E_t = 4.44 f B_m A_c \quad (6.2)$$

โดยที่

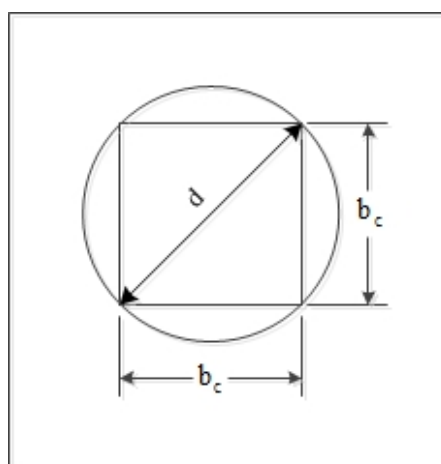
$$E_t = K \sqrt{kVA_{1\phi}} \quad (6.3)$$

นำสมการที่ (6.3) แทนลงในสมการที่ (6.2) จะได้

$$A_c = \frac{K \sqrt{kVA_{1\phi}}}{4.44 f B_m} \quad (6.4)$$

- เมื่อ  $A_c$  คือ พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก  
 $K$  คือ ค่าคงที่ของหม้อแปลง  
 $f$  คือ ค่าความถี่ของกระแสไฟฟ้า (Hz)  
 $B_m$  คือ ค่าความหนาแน่นสูงสุดของเส้นแรงแม่เหล็ก  
 $kVA$  คือ ค่าของกำลังไฟฟ้าปรากฏ

ในการออกแบบนี้จะพิจารณาพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กเป็นแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังแสดง  
 ในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 พื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่ใช้พิจารณา

และเมื่อพิจารณาถึงรูปร่างของแกนเหล็กที่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสนั้น ก็จะสามารถหาค่าพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็ก ( $A_c$ ) และความกว้างของแกนเหล็ก ( $b_c$ ) โดยสามารถคำนวณจากสมการที่ (6.5) และสมการที่ (6.6) ตามลำดับ

$$A_c = b_c^2 \quad (6.5)$$

$$b_c = \sqrt{\frac{d^2}{2}} \quad (6.6)$$

สมการที่ (6.1) และสมการที่ (6.5) จะสามารถคำนวณหาขนาดของแกนเหล็กในส่วนอื่น ๆ ที่แสดงในรูปที่ 6.1 โดยเริ่มจากการพิจารณาพื้นที่ของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก ( $A_w$ ) ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$A_w = \frac{kVA_{3\phi}}{3.33 f B_m \delta k_w A_c} \quad (6.7)$$

เมื่อ  $\delta$  คือ ความหนาแน่นกระแสเฉลี่ยของขดลวดปฐมภูมิ

และเมื่อพิจารณารูปที่ 6.1 จะเห็นได้ว่า

$$A_w = L_w \cdot b_w \quad (6.8)$$

นำสมการที่ (6.1) แทนลงในสมการที่ (6.8) จะได้

$$A_w = a \cdot b_w \cdot b_w \quad (6.9)$$

เมื่อพิจารณาสมการที่ 6.7 และสมการที่ 6.9 ร่วมกันแล้ว จึงสามารถหาค่าความกว้างของช่องว่างระหว่างแกนเหล็กได้ดังนี้

$$b_w = \sqrt{\frac{A_w}{a}} \quad (6.10)$$

โดยที่  $A_w$  ได้จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (6.7)

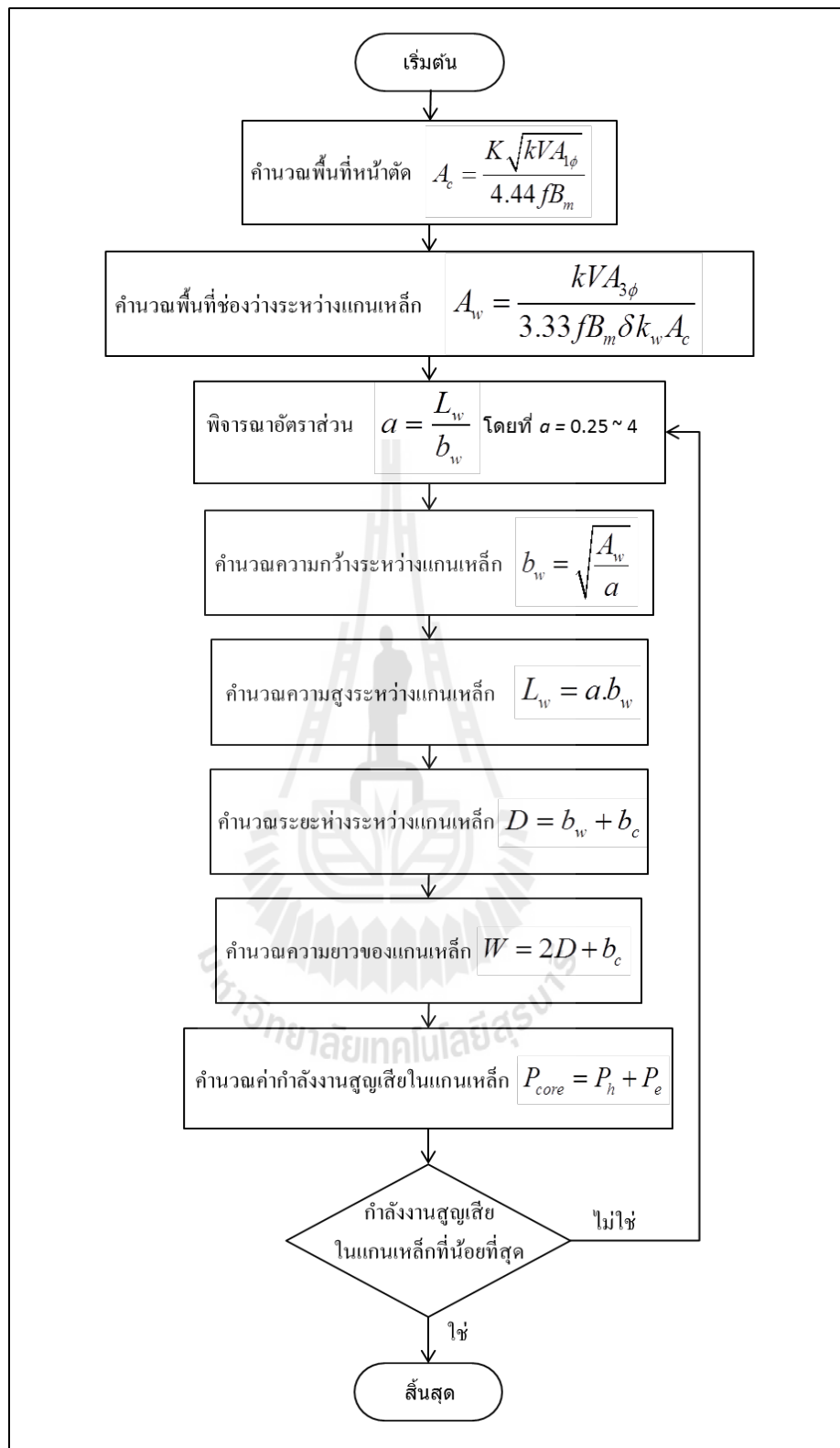
นำสมการที่ (6.10) แทนค่ากลับไปในสมการที่ (6.1) ก็จะสามารถหาความสูงของช่องว่างระหว่างแกนเหล็กได้ดังสมการที่ (6.11) และขนาดส่วนอื่น ๆ ของแกนเหล็กที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.1 นั้นสามารถคำนวณได้จากสมการที่ (6.12) และสมการที่ (6.13) ตามลำดับ

$$L_w = a.b_w \quad (6.11)$$

$$D = b_w + b_c \quad (6.12)$$

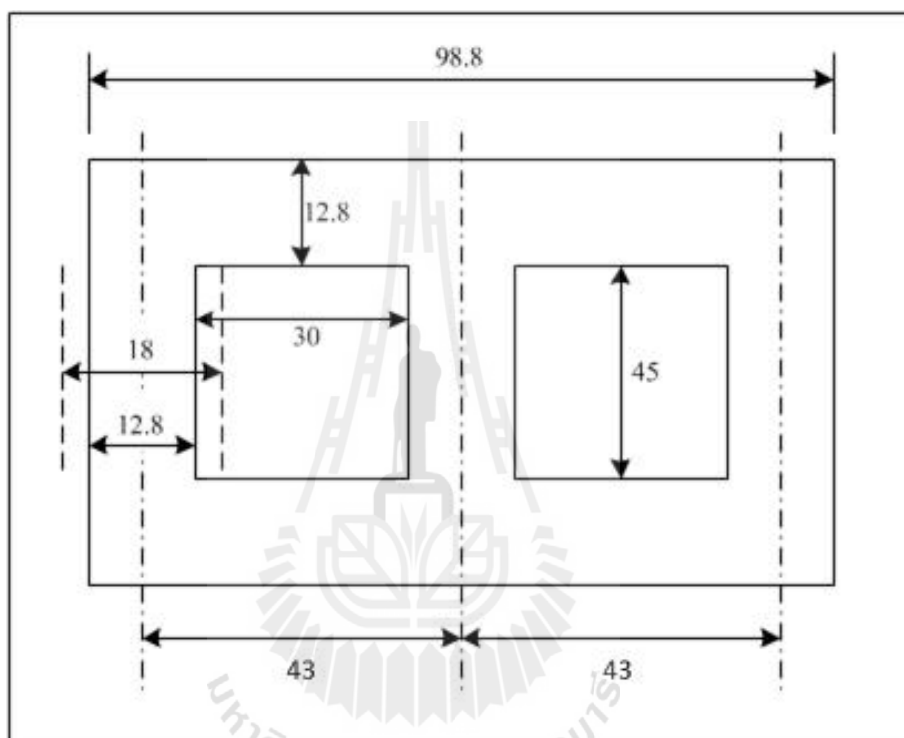
$$W = 2D + b_c \quad (6.13)$$





รูปที่ 6.3 แผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็ก

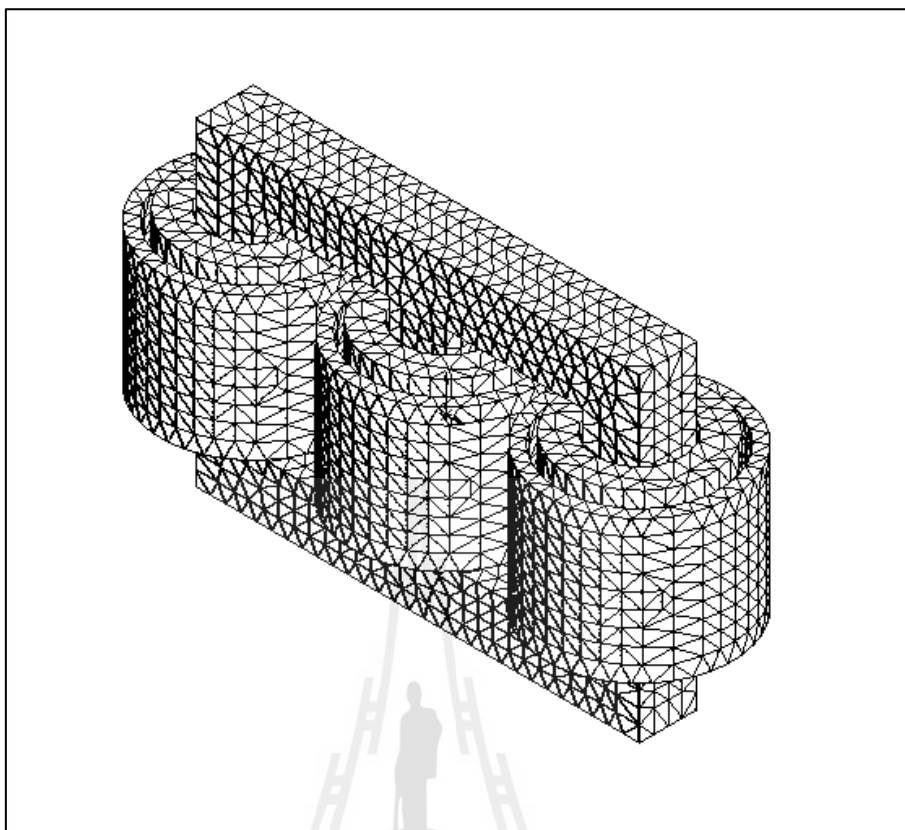
รูปที่ 6.3 เป็นการแสดงแผนภูมิการคำนวณเพื่อออกแบบแกนเหล็กที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อทำการคำนวณและพิจารณาแล้วพบว่าอัตราส่วนของช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก ( $a$ ) มีค่าเท่ากับ 1.5 ความกว้างของแกนเหล็ก ( $b_c$ ) มีค่าเท่ากับ 12.8 cm ความกว้างและความสูงของระยะห่างระหว่างแกนเหล็ก ( $b_w, L_w$ ) มีค่าเท่ากับ 30 cm และ 45 cm ตามลำดับ โดยที่ขนาดของแกนเหล็กในส่วนอื่น ๆ นั้นได้แสดงรายละเอียดการออกแบบที่สมบูรณ์ไว้ดังแสดงในรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 ขนาดของแกนเหล็กหม้อแปลงที่ได้จากการออกแบบ (cm)

### 6.3 ผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ถูกออกแบบ

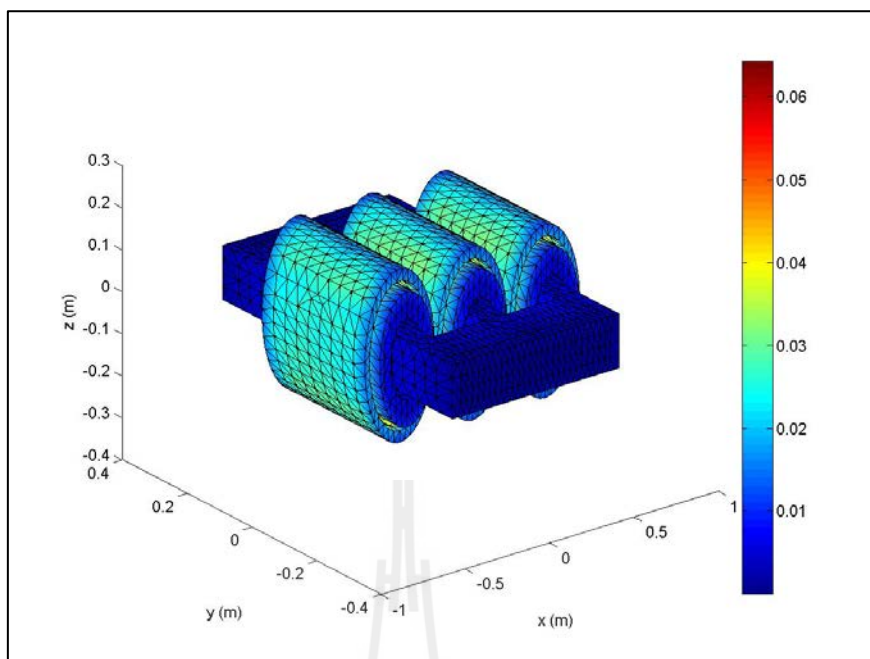
เมื่อทำการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงในหัวข้อที่ผ่านมาข้างต้นเรียบร้อยแล้ว ก็จะนำกระบวนการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 และบทที่ 4 มาใช้ในการจำลองผลอีกครั้ง ซึ่งในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติเท่านั้น โดยเริ่มจากการสร้างกริดของหม้อแปลงเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ซึ่งประกอบด้วยจำนวน โหนดและอิเลิเมนต์ที่ใช้ภายในหม้อแปลงจำหน่าย เป็น 20,200 โหนด และ 108,971 อิเลิเมนต์ ตามลำดับ ดังแสดงได้ในรูปที่ 6.5



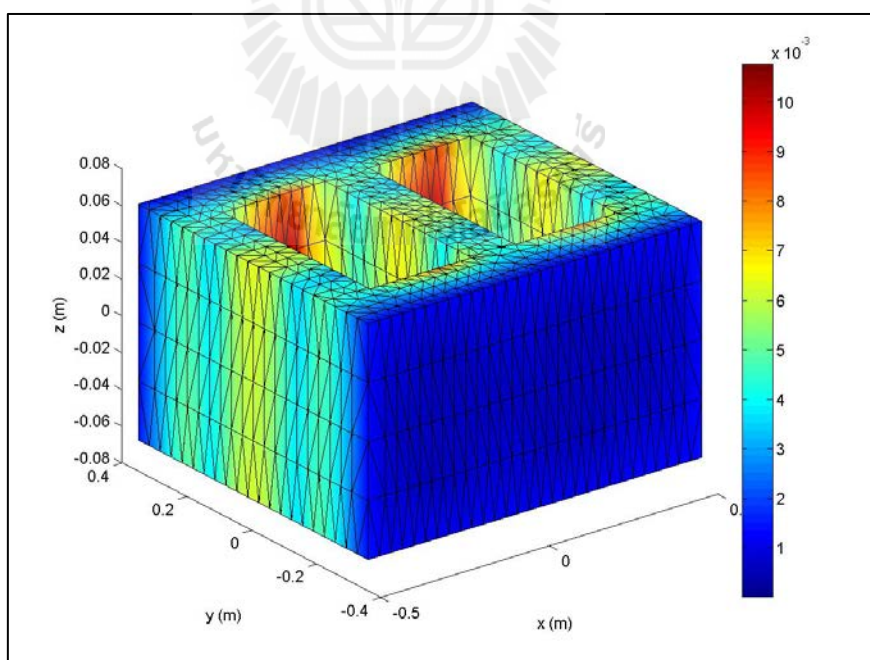
รูปที่ 6.5 การแบ่งอิลลิเมนต์ของหม้อแปลงเมื่อพิจารณา  
การลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

ในส่วนของผลการจำลองการกระจายตัวของค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถแสดงรายละเอียดได้ดังต่อไปนี้

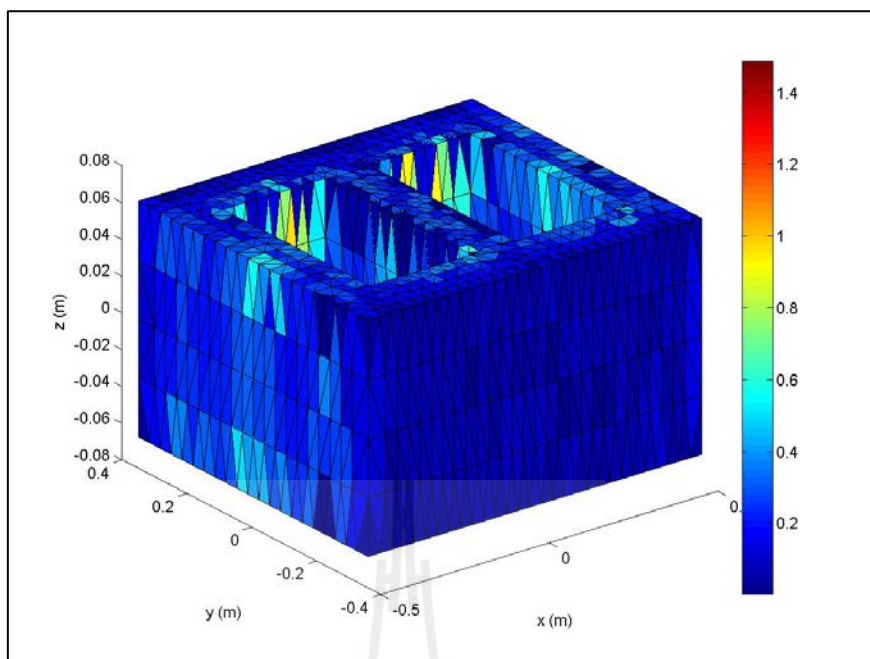
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.6
- การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.7
- การกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.8
- การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสียที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก แสดงได้ด้วยรูปที่ 6.9



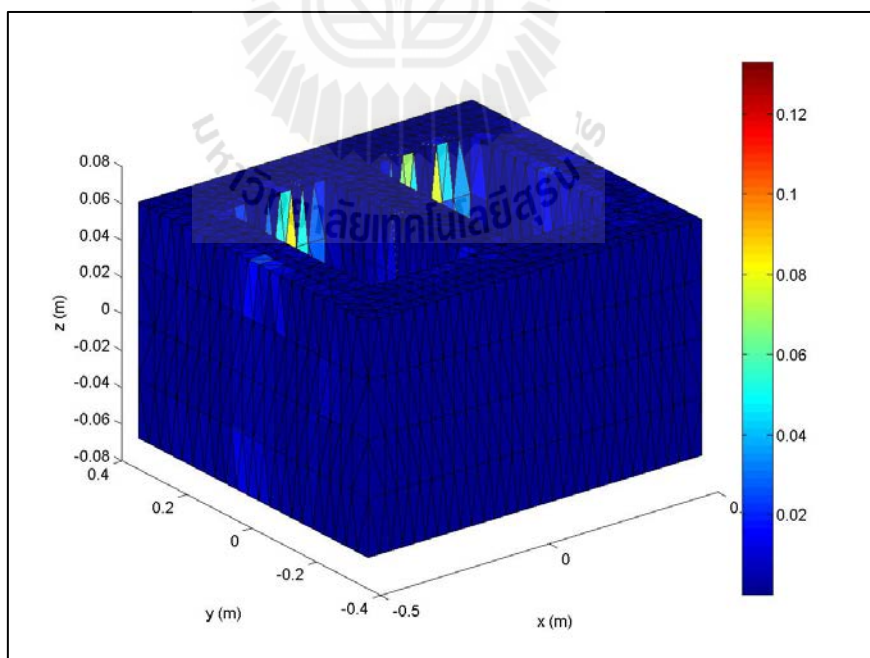
รูปที่ 6.6 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณขดลวดของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 6.7 การกระจายตัวของสัจย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 6.8 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย  
เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



รูปที่ 6.9 การกระจายตัวของกำลังงานสูญเสีย (W) ที่บริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย  
เมื่อพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก



จากผลการจำลองเมื่อพิจารณาพบว่า ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและค่าสนามแม่เหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่พิจารณารลดกำลังงานสูญเสีย ที่แสดงในรูปที่ 6.6, 6.7 และ 6.8 นั้นจะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลงในลักษณะเช่นเดียวกับผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายแบบทั่วไปที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 5

ส่วนผลการจำลองกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายทั้งแบบที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่ 5 ประกอบกับผลการจำลองของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณารลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กดังแสดงด้วยรูปที่ 6.9 หากพิจารณาผลลัพธ์ในเชิงภาพแล้วสิ่งที่พบได้คือค่อนข้างใกล้เคียงกัน แต่เมื่อพิจารณาในค่าของตัวเลขที่โปรแกรมได้คำนวณออกมานั้นจะพบถึงความแตกต่างกันอย่างชัดเจน ซึ่งโปรแกรมจำลองผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่ได้พัฒนาขึ้นนั้น ได้คำนวณค่าของกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ยังมิได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กตลอดทั้งปริมาตรมีค่าเท่ากับ 1,120 W และในส่วนของหม้อแปลงที่ได้ออกแบบโดยพิจารณารลดกำลังงานสูญเสียแล้วนั้นมีค่าตลอดทั้งปริมาตรเท่ากับ 670 W ซึ่งจะเห็นได้ว่าหม้อแปลงที่เน้นพิจารณารลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 % ทั้งนี้เป็นผลมาจากการออกแบบนั้นเน้นทำให้ปริมาตรของแกนเหล็กลดลงส่งผลให้ค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลดลงด้วยเช่นกัน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยหลาย ๆ บทความที่มีการกล่าวถึงกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก

#### 6.4 สรุป

บทที่ 6 เป็นการอธิบายถึงการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA เพื่อเน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กโดยพิจารณาจากพื้นที่หน้าตัดที่เป็นไปได้และอัตราส่วนระหว่างช่องว่างของแกนเหล็ก ผลที่ได้จากการออกแบบนั้นจะทำให้ปริมาตรรวมของแกนเหล็กมีขนาดลดลงจากเดิม ซึ่งขนาดของแกนเหล็กที่ได้ออกแบบสำเร็จแสดงได้ดังรูปที่ 6.4 และเมื่อจำลองผลด้วยโปรแกรมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลง เมื่อพิจารณารลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้น จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า หม้อแปลงที่เน้นพิจารณารลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 %

## บทที่ 7

### สรุปและข้อเสนอแนะ

#### 7.1 สรุป

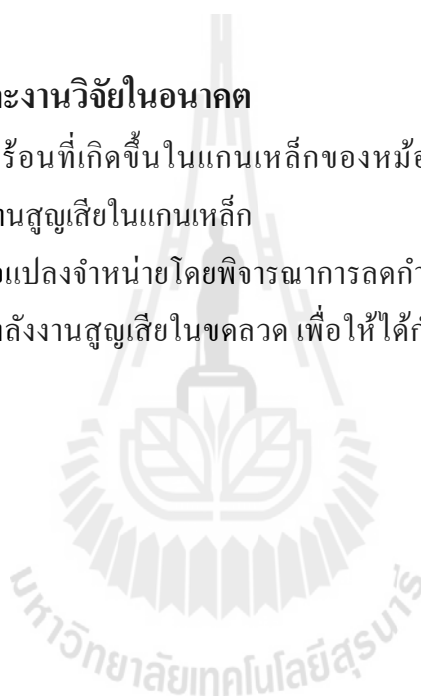
งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยและการจำลองผลค่าสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟสขนาด 400 kVA เพื่อนำเสนอวิธีการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยพิจารณาจากขนาดพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้และอัตราส่วนระหว่างช่องว่างของแกนเหล็ก โดยในการจำลองผลพิจารณาในขณะที่หม้อแปลงอยู่ในสถานะไร้โหลด การจำลองผลใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติด้วยโปรแกรม MATLAB ที่พัฒนาขึ้นเอง พร้อมตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมให้เป็นที่น่าเชื่อถือ

การสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 ซึ่งถือเป็นรากฐานที่สำคัญในการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ ทั้งนี้เพื่อเป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์และพัฒนาต่อยอดองค์ความรู้ในงานวิจัย ส่วนในบทที่ 3 ศึกษาทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย ทั้งเรื่องสนามแม่เหล็ก หม้อแปลงไฟฟ้า ทฤษฎีกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กและระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ ต่างได้ถูกนำมาใช้เป็นพื้นฐานความรู้และความเข้าใจในการดำเนินงานวิจัย ส่วนการดำเนินงานในบทที่ 4 เป็นขั้นตอนการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กซึ่งอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองและอธิบายถึงขั้นตอนต่าง ๆ ในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ทั้งแบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยได้เลือกใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาลเลอร์กิน ส่วนในบทที่ 5 เป็นการอธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ เพื่อให้เห็นถึงความคล้ายคลึงและความแตกต่างของวิธีการคำนวณทั้ง 2 แบบ โดยได้เน้นการจำลองแบบ 3 มิติเป็นหลัก พร้อมนำเสนอผลการจำลองการกระจายตัวสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเมื่อพิจารณาหม้อแปลงแบบทั่วไปที่ได้เน้นการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยได้ทำการเปรียบเทียบผลเฉลยของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติและ 3 มิติ โดยกระบวนการสร้างกริดแบบ 2 มิติได้เลือกใช้กล่องเครื่องมือ PDETOOL ที่อยู่ในโปรแกรม MATLAB และการสร้างกริดแบบ 3 มิติได้เลือกใช้โปรแกรม

Solid works และในบทที่ 6 ได้อธิบายถึงขั้นตอนการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก โดยพิจารณาจากขนาดพื้นที่หน้าตัดของแกนเหล็กที่เป็นไปได้ และอัตราส่วนช่องว่างระหว่างแกนเหล็ก พร้อมนำเสนอผลการจำลองการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายที่ได้พิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กที่มีผลกระทบมาจากสนามแม่เหล็ก เมื่อพิจารณาหม้อแปลงอยู่ในสถานะไร้โหลดด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ จากการออกแบบแกนเหล็กของหม้อแปลงเพื่อลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก พบว่า หม้อแปลงที่เน้นพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กนั้น สามารถลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กลงได้ถึง 40.18 %

## 7.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต

1. คำนวณความร้อนที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่าย อันเป็นผลมาจากสนามแม่เหล็กและกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก
2. ออกแบบหม้อแปลงจำหน่ายโดยพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก ควบคู่กับการพิจารณาการลดกำลังงานสูญเสียในขดลวด เพื่อให้ได้กำลังงานสูญเสียในหม้อแปลงน้อยที่สุด



## รายการอ้างอิง

- เฉลิมพล น้ำค้าง. (2538). **ทฤษฎีสานาไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.
- ไชยชาญ หินเกิด. (2537). **เครื่องกลไฟฟ้า 1** (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2547). **ไฟไนต์อิลิเมนต์ในงานวิศวกรรม** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2549). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม** (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- เผด็จ เผ่าละออ. (2548). **การออกแบบแนวใหม่ขงมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการสั่นสะเทือนโดยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์**. วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- นายพิรวัฒน์ มีสุข. (2554). **การคำนวณอุณหภูมิของหม้อแปลงจำหน่ายในสถานะจ่ายโหลดไม่สมดุลที่มีผลต่ออายุการใช้งานของฉนวนหม้อแปลงด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ** วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- มงคล ทองสงคราม. (2536). **สนามแม่เหล็กไฟฟ้า** (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ : รามาการพิมพ์
- มงคล ทองสงคราม. (2549). **หม้อแปลงไฟฟ้า** (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ : รามาการพิมพ์
- อานนท์ อิศรมงคลรักษ์. (2552). **การออกแบบอุปกรณ์กำลังสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีผลต่อผู้ปฏิบัติงานที่ทำงานได้สายส่งกำลังไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ**. วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- Babaie, H., and Farahani, F. F. (2010). Analysis of Thermal Behavior of High Frequency Transformers Using Finite Element Method. **J.Electromagnetic Analysis & Application**,2010,2,627-632
- Christopoulos, C. (1995). **The Transmission-Line Modeling Method: TLM**, IEEE Press, USA
- Dasgupta, I. (2002). **Design of Transformers**. New Delhi:Tata McGraw Hill.
- Demerdash, N. A., and Gillott, D. H. (1974). A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials. **IEEE Transactions on Magnetics**, 74, 682-685.

- Electrical, B. H.,(2003). **Transformers** (2nd ed.). New Delhi: Tata McGraw-Hill
- Fu, W. N. (1999). **Electromagnetic field analysis of induction motors by finite element method and its application to phantom loading**. Ph.D. Dissertation, Hong Kong Polytechnic University, China.
- Hernandez, C., and Arjona, M. A. (2007). Design of distribution transformers based on a knowledge-based system and 2D finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design** 43 , 659-665
- Hwang, C. C., Tang, P. H., and Jiang Y. H. (2005). Thermal analysis of high-frequency transformers using finite elements coupled with temperature rise method. **IEE Proceedings Electric Power Applications**, vol.4 832 - 836
- Kulkarni, S. V., Khaparde, S. A. (2004). **Transformer Engineering Design and Practice**.,USA:Marcel Dekker, Inc.
- Kim, B. T., Kwon, B. I., and Park, S. C. (1999). Reduction of electromagnetic force harmonics in asynchronous traction motor by adapting the rotor slot number. **IEEE Transactions on Magnetics**. 35 (5): 3742-3744.
- Mittle, V. N., and Mittle, A. (1996). **Design of electrical machines**. Standard Publishers.
- Pao-la-or, P., Kulworawanichpong, T., Sujitjorn, S., and Peaiyoung, S. (2006). Distributions of flux and electromagnetic force in induction motors: A finite element approach. **WSEAS Transactions on Systems**, 5(3), 617-624.
- Preis, K., Biro, O., Buchgraber, G., and Ticar, L. (2006). Thermal-electromagnetic coupling in the finite-element simulation of power transformers. **IEEE Transactions on Magnetics**. 42(4): 999 – 1002
- Preston, T. W., Reece, A. B. J., & Sangha, P. S. (1988). Induction motor analysis by time stepping techniques. **IEEE Transactions on Magnetics**, 24(1), 471-474.
- Rafajdus, P., Hrabovcova, V., Susota, M., and Vojeneiak, M. (2008). Design of superconducting traction transformer and its thermal analysis. **Electrical Machines, 2008. ICEM 2008. 18th International Conference** , 1-6

- Rao, N. N., (1994). **Elements of Engineering Electromagnetics** (4 th ed). New Jersey:Prentice hall.
- Sadiku, M. N. O., and Peterson, A. F. (1990). A comparison of numerical methods for computing electromagnetic fields. **Southeastcon'90 proceeding**, IEEE. 42-47.
- Samesima, M. I., Wilson, R. J., and Araujo, S. C. N.(1995). Analysis of transformer loss of life driving nonlinear industrial loads by the finite elements approach. **Industry Applications Conference, 1995. Thirtieth IAS Annual Meeting, IAS '95., Conference Record of the 1995 IEEE**. vol.3 2175 - 2179
- Saraiva, E., Chaves, M. L. R., and Camacho, J. R. (2008). Three-Phase Transformer Representation Using FEMM, and a Methodology for Air Gap Calculation. **Electrical Machines, 2008. ICEM 2008. 18th International Conference**. 1-6
- Smolka, J., Ingham, D. B., Elliott, L., and Nowak, A. J. (2007). Enhanced numerical model of performance of an encapsulated three-phase transformer in laboratory environment. **Applied Thermal Engineering**. 27 , 156-166
- Taheri, Sh., Vahedi, A., Gholami, A., and Taheri, H. (2008). Estimation of Hot Spot Temperature in Distribution Transformer Considering Core Design Using. **PECON 2008. 2<sup>nd</sup> IEEE International Conference on Power and Energy**. 1403 – 1413
- Tsili, M. A., Amoiralis, E. I., Kladas, A. G., and Souflaris, A. T. (2009). Hybrid Numerical-Analytical Technique for Power Transformer Thermal Modeling. **IEEE Transactions on Magnetics**. 45(3): 1408 – 1411
- Vecchio, R. D., Poulin, B., Feghali, P. T., and Ahuja, R. (2001). **Transformer design principles : with applications to core-form power transformers**. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers.



ภาคผนวก ก

การคำนวณค่ากำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กแบบประมาณ

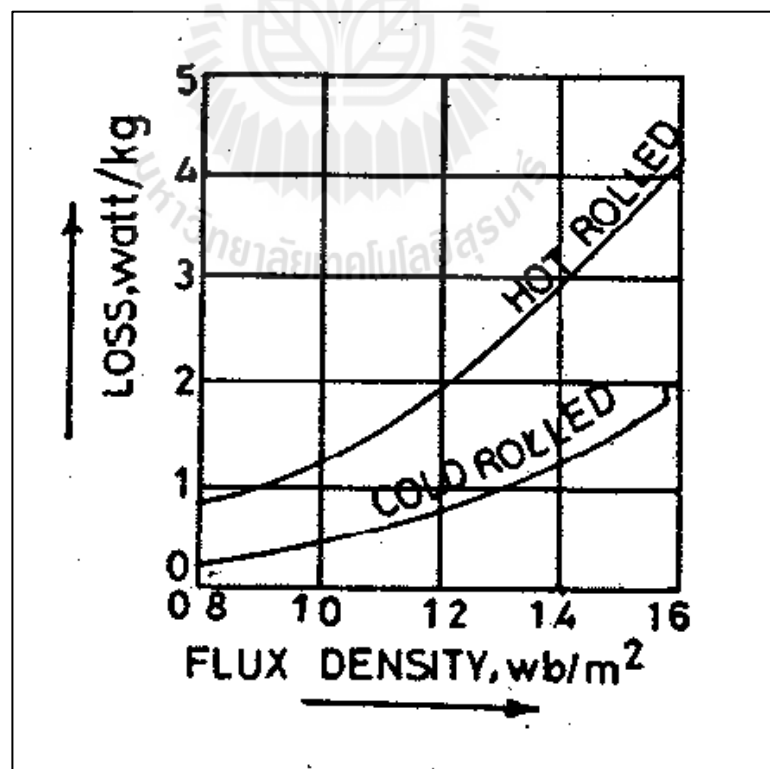
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สำหรับการคำนวณกำลังงานสูญเสียในแกนเหล็กของหม้อแปลงจำหน่ายนั้น สามารถคำนวณโดยประมาณได้ดังสมการที่ (ก.1)

$$W_c = W_T \times k_L \quad (\text{ก.1})$$

โดยที่  $W_C$  คือ กำลังงานสูญเสียในแกนเหล็ก  
 $W_T$  คือ น้ำหนักรวมของแกนเหล็ก  
 $k_L$  คือ ค่าคงที่กำลังงานสูญเสียจำเพาะของแกนเหล็ก

จากสมการข้างต้น จึงจำเป็นต้องรู้ถึงค่ากำลังงานสูญเสียจำเพาะของแกนเหล็ก ( $k_L$ ) ซึ่งเราสามารถหาค่าได้จากกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลังงานสูญเสียจำเพาะและค่า  $B_{max}$  ของเหล็กที่นำมาทำเป็นแกนเหล็กของหม้อแปลง กราฟความสัมพันธ์ดังกล่าวสามารถพิจารณาได้จากรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่ากำลังงานสูญเสียจำเพาะและค่า  $B_{max}$



การคำนวณน้ำหนักรวมของแกนเหล็ก สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (ก.2)

$$W_T = V_T \times k_w \quad (\text{ก.2})$$

โดยที่  $V_T$  คือ ปริมาตรรวมของแกนเหล็ก  
 $k_w$  คือ ค่าความหนาแน่นจำเพาะของแกนเหล็ก

ในงานวิจัยนี้ได้พิจารณาแกนเหล็กชนิด cold rolled grain oriented silicon steel (CRGOS) ซึ่งมีค่าความหนาแน่นจำเพาะของเหล็กเท่ากับ  $7.55 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$



The logo of Sakon Nakhon Rajabhat University is a circular emblem. At the top, it features a stylized tower or spire. Below this, a silhouette of a person stands on a platform. The central part of the logo contains a book with its pages fanning out. The entire emblem is surrounded by a decorative border. The text 'มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี' is written in a circular path around the bottom of the emblem.

ภาคผนวก ข

บทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

## รายชื่อบทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างการศึกษา

Pao-la-or, P., Jitthammasarn, A., and Attakitmongkol, K. (2010) Electric Field Distribution Resulting from Different Phase Arrangements of a Delta Configuration Power Transmission Line. วารสารวิชาการ ม.อบ. ปีที่ 12 ฉบับที่ 1 มกราคม – เมษายน 2553 (หน้า 35-40)

Jitthammasarn, A., Attakitmongkol, K., and Pao-la-or, P. (2011). Analysis of Magnetic Field Using 3-D Finite Element Method for Distribution Transformer. **The 4<sup>th</sup> Annual PSU Phuket Research**, November 2011.



## Electric Field Distribution Resulting from Different Phase Arrangements of a Delta Configuration Power Transmission Line

Padej Pao-la-or<sup>a</sup>, Ariyasak Jitthamasarn, and Kitit Attakitmongkol

School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology  
Nakhonratchasima 30000 Thailand

### Abstract

This paper proposes a mathematical model of electric fields caused by high voltage conductors of electric power transmission systems by using a set of second-order partial differential equations. This study has considered the effect of conductor phase arrangement on electric fields emitted around a delta configuration double-circuit high voltage transmission line. Six typical-used phase arrangements for 345-kV delta configuration double-circuit transmission lines are investigated. Computer-based simulation utilizing the two dimensional finite element method in the time harmonic mode, instructed in MATLAB programming environment with graphical representation for electric field strength has been evaluated. The simulation results show that the phase arrangement is one among key factors to influence the electric field distribution around the transmission line.

**Keywords:** Phase Arrangements, Delta Configuration, Electric Fields, Finite Element Method (FEM), Transmission Line

### 1. Introduction

Different phase arrangements of a delta configuration results in electric field distribution that may cause some serious harm to electronic equipment or living things. From literature, basic electromagnetic theory (Olsen *et al.*, 1988) or image theory (Li and Yougang, 1998) are widely used for electric field calculation in high voltage power transmission lines. Even the study by Electric Power Research Institute (1975), the basic electromagnetic theory was employed to analyze electric field strength resulting from orientation of conductor phase arrangements. So far, there is no report on electric field calculation in this scope by using Finite Element Method (FEM).

The FEM is one of the most popular numerical methods used for computer simulation. The key advantage of the FEM over other numerical methods in engineering applications is the ability to handle nonlinear, time-dependent and circular geometry

problems. Therefore, this method is suitable for solving the problem involving electric field effects around the transmission line caused by circular cross-section of high voltage conductors.

In this paper, 345-kV, delta configuration double-circuit, high-voltage power transmission lines are studied with six different phase arrangements. Computer-based simulation utilizing the two dimensional finite element method in the time harmonic mode, instructed in MATLAB programming environment with graphical representation for electric field strength has been evaluated.

### 2. Modeling of Electric Fields Involving Electric Power Transmission Lines

A mathematical model of electric fields ( $E$ ) radiating around a transmission line is usually expressed in the wave equation (Helmholtz's equation) as Eq.(1) (Chari and Salon, 2000; Weiner, 2001) derived from Faraday's law.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

..., where  $\epsilon$  is the dielectric permittivity of media,  $\mu$  and  $\sigma$  are the magnetic permeability and the conductivity of conductors, respectively.

This paper has considered the system governing by using the time harmonic mode and representing the electric field in complex form,  $\mathbf{E} = Ee^{j\omega t}$  (Christopoulos, 1995), therefore,

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j\omega E \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E$$

..., where  $\omega$  is the angular frequency.

From Eq.(1), by substituting the complex electric field, Eq.(1) can be transformed to an alternative form as follows.

$$\nabla^2 E - j\omega\sigma\mu E + \omega^2\epsilon\mu E = 0$$

When considering the problem of two dimensions in Cartesian coordinate  $(x,y)$ , hence

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial y} \right) - (j\omega\sigma - \omega^2\epsilon)E = 0 \quad (2)$$

Analytically, there is no simple exact solution of the above equation. Therefore, in this paper the FEM is chosen to be a potential tool for finding approximate electric field solutions for the PDE described in Eq.(2) (Pao-la-or *et al.*, 2006).

### 3. System Description with the FEM

#### 3.1 Discretization

This paper determines a three-bundled, delta configuration double-circuit, 345-kV power transmission line. Figure 1 shows the power transmission line with the superbundle arrangement type by Electric Power Research Institute (1975). Figure 2 displays the domain of study discretizing by using linear triangular elements.

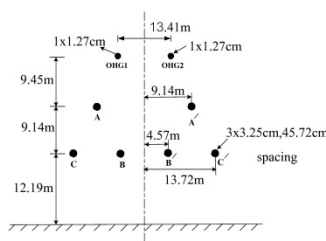


Figure 1. 345-kV delta configuration double-circuit power transmission line with superbundle arrangement

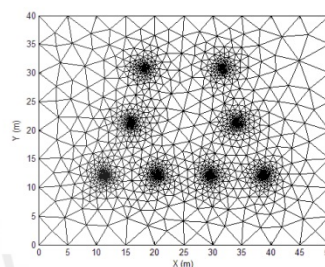


Figure 2. Discretization of the system given in Figure 1

#### 3.2 Finite Element Formulation

An equation governing each element is derived from the Maxwell's equations directly by using Galerkin approach, which is the particular weighted residual method for which the weighting functions are the same as the shape functions (Preston *et al.*, 1988; Kim *et al.*, 1999). According to the method, the electric field is expressed as follows.

$$E(x,y) = E_i N_i + E_j N_j + E_k N_k \quad (3)$$

..., where  $N_n$ ,  $n = i, j, k$  is the element shape function and the  $E_n$ ,  $n = i, j, k$  is the approximation of the electric field at each node  $(i, j, k)$  of the elements, which is

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e} \tag{4}$$

..., where  $\Delta_e$  is the area of the triangular element and,

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i. \end{aligned}$$

The method of the weighted residue with Galerkin approach is then applied to the differential equation, Eq.(2), where the integrations are performed over the element domain  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial E}{\partial y} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n (j\omega\sigma - \omega^2 \epsilon) E d\Omega = 0 \tag{5}$$

... or in the compact matrix form

$$[M + K]\{E\} = 0 \tag{6}$$

..., where

$$\begin{aligned} M &= (j\omega\sigma - \omega^2 \epsilon) \int_{\Omega} N_n N_n d\Omega \\ &= \frac{(j\omega\sigma - \omega^2 \epsilon) \Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4\mu\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For one element containing 3 nodes, the expression of the FEM approximation is a 3x3 matrix. With the account of all elements in the system of  $n$  nodes, the system equation is sizable as the  $n \times n$  matrix.

### 3.3 Boundary Conditions and Simulation Parameters

In this paper, 345-kV, delta configuration double-circuit, high-voltage power transmission lines are studied with six types of phase-sequence orientation (Electric Power Research Institute, 1975) as shown in Table 1. The boundary conditions applied here are that to set zero electric fields at the ground level and the OHGW. In addition, the boundary condition of conductor surface in 345-kV power lines are assigned as given by Iyyuni and Sebo (1990) and Pin-anong (2002). This simulation uses the system frequency of 50 Hz. The power lines are bared conductors of Aluminum Conductor Steel Reinforced (ACSR), having the conductivity ( $\sigma$ ) =  $0.8 \times 10^7$  S/m, the relative permeability ( $\mu_r$ ) = 300, the relative permittivity ( $\epsilon_r$ ) = 3.5. It notes that the free space permeability ( $\mu_0$ ) is  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m, and the free space permittivity ( $\epsilon_0$ ) is  $8.854 \times 10^{-12}$  F/m (Hayt and Buck, 2006).

Table 1. Six types of phase arrangements

A A'	A C'	A A'
C B B' C'	C B B' A'	C B C' B'
type 1	type 2	type 3
A C'	A B'	A G
C B A' B'	C B A' C'	C B G G
type 4	type 5	type 6

### 4. Results and Discussion

This paper employs MATLAB programming to simulate electric field distribution for six phase-sequence orientations. Electric field simulated for each type can be depicted in Figures 3 to 8.

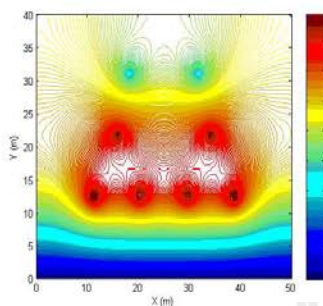


Figure 3. Electric field contour (kV/m) for type 1

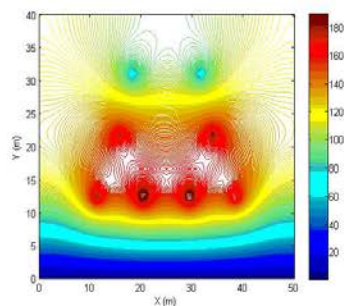


Figure 6. Electric field contour (kV/m) for type 4

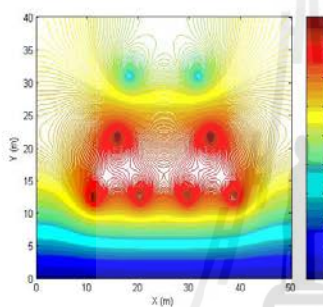


Figure 4. Electric field contour (kV/m) for type 2

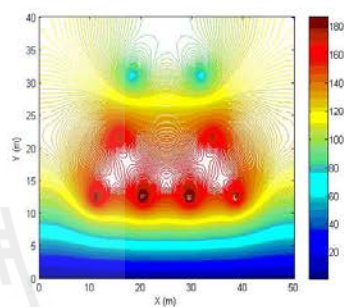


Figure 7. Electric field contour (kV/m) for type 5

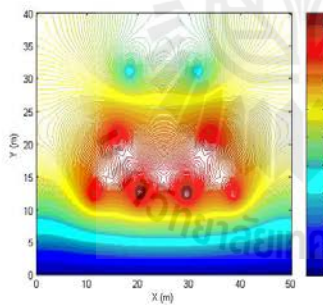


Figure 5. Electric field contour (kV/m) for type 3

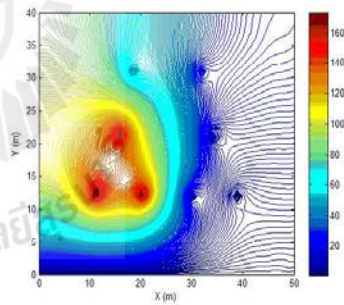


Figure 8. Electric field contour (kV/m) for type 6

From the simulated results, the orientation type has the key effect on electric field distribution around the power transmission line. By observing the electric field strength at a specified height level above the ground with 50-m horizontal span, type 1, 2, 3 and 5 are symmetric in electric field distribution along the vertical axis. Type 4 and 6 are asymmetric due to unbalanced phase arrangement, especially type 6 with all the ground wires located on the right hand side.

When consider at some selected positions for more detail, symmetry in electric field distribution can be clearly explained. Figure 9 and Figure 10 show the electric field plot at the height of 1 m above the highest conductor position. They confirm that type 1, 2, 3 and 5 are symmetric while type 4 and 6 are asymmetric as concluded by Electric Power Research Institute (1975).

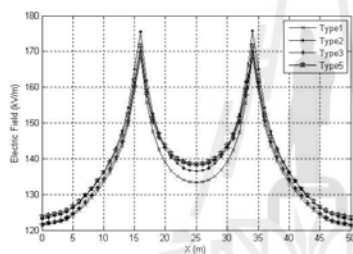


Figure 9. Electric fields of the symmetric

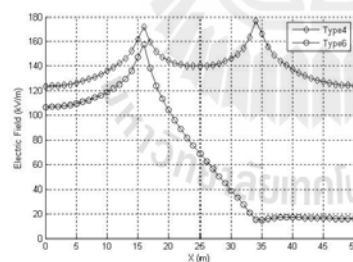


Figure 10. Electric fields of the asymmetric arrangement

## 5. Conclusion

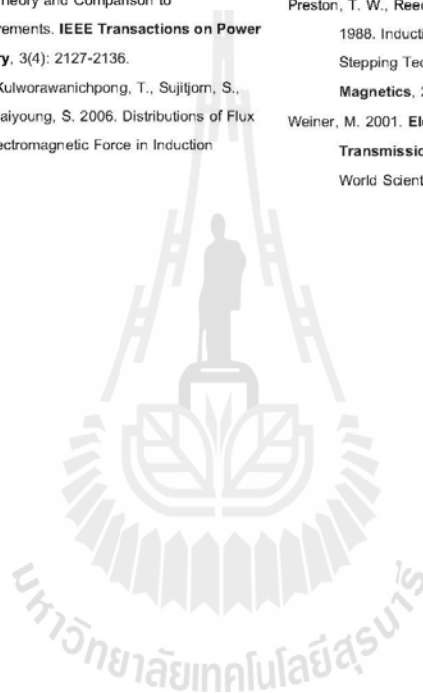
This paper has studied electric field distribution resulting from six typical phase arrangements. 345-kV, delta configuration double-circuit, three-bundled power transmission lines are investigated. FEM developed by using MATLAB programming is employed. As a result, phase arrangement is one of key factors to influence electric field distribution in electric power transmission lines. With the arrangement of type 1, 2, 3 and 5, the electric field distribution is symmetric, while the left two arrangements (type 4 and 6) give asymmetric field distribution.

## References

- Chari, M. V. K., and Salon, S. J. 2000. **Numerical Methods in Electromagnetism**. USA: Academic Press.
- Christopoulos, C. 1995. **The Transmission-Line Modeling Method TLM**. IEEE Press, USA.
- Electric Power Research Institute. 1975. **Transmission-Line Reference Book 345 kV and Above**. USA: Fred Weidner & Son Printers.
- Hayt, Jr. W. H., and Buck, J. A. 2006. **Engineering Electromagnetics**. 7<sup>th</sup> ed. McGraw-Hill, Singapore.
- Ilyuni, G. B., and Sebo, S. A. 1990. "Study of Transmission Line Magnetic Fields". Proceedings of the Twenty-Second Annual North American, **IEEE Power Symposium**, p. 222-231.
- Kim, B. T., Kwon, B. I., and Park, S.C. 1999. "Reduction of Electromagnetic Force Harmonics in Asynchronous Traction Motor by Adapting the Rotor Slot Number". **IEEE Transactions on Magnetics**, 35(5): 3742-3744.



- Li, L., and Yougang, G. 1998. "Analysis of Magnetic Field Environment near High Voltage Transmission Lines". **Proceedings of the International Conferences on Communication Technology**, p. S26-05-1 - S26-05-5.
- Olsen, R. G., Deno, D., Baishiki, R. S., Abbot, J. R., Conti, R., Frazier, M., Jaffa, K., Niles, G. B., Stewart, J. R., Wong, R., and Zavadil, R. M. 1988. Magnetic Fields from Electric Power Lines Theory and Comparison to Measurements. **IEEE Transactions on Power Delivery**, 3(4): 2127-2136.
- Pao-la-or, P., Kulworawanichpong, T., Sujitjorn, S., and Pealyoung, S. 2006. Distributions of Flux and Electromagnetic Force in Induction Motors: A Finite Element Approach. **WSEAS Transactions on Systems**, 5(3): 617-624.
- Pin-anong, P. 2002. **The Electromagnetic Field Effects Analysis which Interfere to Environment near the Overhead Transmission Lines and Case Study of Effects Reduction**, [M.Eng. thesis]. School of Electrical Engineering, Department of Electrical Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand.
- Preston, T. W., Reece, A. B. J., and Sangha, P. S. 1988. Induction Motor Analysis by Time-Stepping Techniques. **IEEE Transactions on Magnetics**, 24(1): 471-474.
- Weiner, M. 2001. **Electromagnetic Analysis Using Transmission Line Variables**. Singapore: World Scientific Publishing.



**การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ  
สำหรับหม้อแปลงจำหน่าย  
Analysis of Magnetic Field Using 3-D Finite Element Method  
for Distribution Transformer**

อริยศักดิ์ จิตธรรมสาร, กิตติ อัดถกิจมงคล และเผด็จ เผ่าละออ\*  
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
padej@sut.ac.th

**บทคัดย่อ**

การตรวจสอบและบำรุงรักษาหม้อแปลงจำหน่ายคือหน้าที่ที่สำคัญในแต่ละวันของวิศวกรไฟฟ้ากำลัง บทความนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากขดลวดตัวนำไฟฟ้าแรงสูงของหม้อแปลงจำหน่ายที่แสดงอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง โดยอาศัยการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กที่ซับซ้อนประกอบกับความรู้ในการแปลงโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM) เป็นเครื่องมือในการประมวลผลที่มีผลลัพธ์แสดงอยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตลอดทั้งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่าย วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมสูงทั้งนี้เพราะสามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีความซับซ้อนในหลากหลายรูปแบบ ในปัจจุบัน FEM มีการประยุกต์ใช้งานทางด้านวิศวกรรมกันอย่างกว้างขวาง แม้แต่ปัญหาการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กก็ได้ใช้ FEM ในการประมวลผลเพื่อหาคำตอบของการส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าที่แสดงอยู่ในรูปของสมการแมกซ์เวลล์ การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้ FEM ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB

คำสำคัญ: หม้อแปลงจำหน่าย, สนามแม่เหล็ก, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ, การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์

**Abstract**

Monitoring and maintenance of distribution transformers are main functions of power engineers in their daily schedule. This paper proposes a set of mathematical model of magnetic fields caused by high voltage conductors of distribution transformer by using a set of second-order partial differential equations. The modification for complex magnetic field analysis and time-harmonic simulation are also utilized. Computer-based simulation utilizing the three-dimensional finite element method (3-D FEM) is exploited as a tool for visualizing magnetic fields distribution volume a distribution transformer. Finite Element Method (FEM) is one among popular numerical methods that is able to handle problem complexity in various forms. At present, the FEM has been widely applied in most engineering fields. Even for problems of magnetic field distribution, the FEM is able to estimate solutions of Maxwell's equations governing the power transmission systems. The computer simulation based on the use of the FEM has been developed in MATLAB programming environment.

Keywords: Distribution Transformer, Magnetic Field, 3-D Finite Element Method, Computer Simulation

## 1. บทนำ

หม้อแปลงไฟฟ้า (transformer) เป็นอุปกรณ์ไฟฟ้าที่ใช้สำหรับแปลงพลังงานไฟฟ้าสลับจากวงจรหนึ่งไปยังอีกวงจรหนึ่งโดยวิธีทางจอร์แม่มเหล็ก ซึ่งไม่มีจุดต่อไฟฟ้าถึงกันและไม่มีชิ้นส่วนทางกลเคลื่อนที่ โดยจะทำหน้าที่เพิ่มหรือลดแรงดันไฟฟ้าให้เหมาะสมกับการส่ง การจ่าย และการใช้พลังงานไฟฟ้า ดังนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจึงนับเป็นอุปกรณ์ที่สำคัญอย่างหนึ่งในบรรดาอุปกรณ์ไฟฟ้าทั้งหลาย การขัดข้องหรือการชำรุดเสียหายของหม้อแปลงไฟฟ้า มักมีผลกระทบต่อการใช้ไฟฟ้าเป็นเวลานาน ฉะนั้นหม้อแปลงไฟฟ้าจะต้องมีประสิทธิภาพที่ดีเพื่อให้ระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าเป็นระบบที่มีความเสถียรและมีความน่าเชื่อถือ สิ่งหนึ่งที่จะบอกถึงประสิทธิภาพของหม้อแปลงได้คือการกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (magnetic field) ที่มีผลต่อกำลังงานสูญเสียในหม้อแปลงไฟฟ้า โดยปกติจะสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการอนุพันธ์ ซึ่งเป็นไปได้ยากที่จะหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) ได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข อีกทั้งสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น จึงทำให้การคำนวณเชิงตัวเลขสามารถทำได้อย่างรวดเร็ว สำหรับวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการที่อยู่บนรูปอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) วิธีที่มีประสิทธิภาพสูงสุดและได้รับความนิยมแพร่หลายในปัจจุบันได้แก่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method: FEM) โดยเฉพาะงานวิจัยนี้ซึ่งต้องอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM)

ในปัจจุบันได้มีการนำ FEM มาประยุกต์ใช้กับงานทางด้านวิศวกรรมแทบทุกสาขา เนื่องจากสามารถหาผลเฉลยได้แม้กระทั่งปัญหาที่ไม่เป็นเชิงเส้น และปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นการพิจารณาสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตลอดทั้งปริมาตรของหม้อแปลงที่อาศัยการแปลงโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ (time-harmonic) และลักษณะรูปร่างและโครงสร้างหรือชิ้นส่วนต่างๆ ที่ซับซ้อนของหม้อแปลง จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องนำ 3-D FEM มาใช้ดำเนินการ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเกิดขึ้นเพื่อศึกษาสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตลอดทั้งปริมาตรของหม้อแปลงจำหน่าย

(distribution transformer) ซึ่งในการจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้ FEM ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB โดยพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติ พร้อมแสดงผลทางกราฟิกของค่าสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นตลอดทั้งปริมาตรหม้อแปลง

## 2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก

เมื่อมีกระแสไหลในขดลวดตัวนำทำให้เกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น และเมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวด ที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็ก ( $\mathbf{B}$ ) จะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง สามารถแสดงได้โดย

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1)$$

เมื่อ  $\mu$  คือความซบซึ่มได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ  $\mu_0 \mu_r$

$\mu_0$  คือความซบซึ่มได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

$\mu_r$  คือความซบซึ่มได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นกับวัสดุตัวกลาง

$\mathbf{H}$  คือความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity)

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  สามารถดำเนินการได้โดยแปลงไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (magnetic vector potential)  $\mathbf{A}$  ก่อน เนื่องจากคำนวณได้ง่ายกว่า โดยที่สนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}$  สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก  $\mathbf{A}$  เท่านั้น

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2)$$

จากกฎของฟาราเดย์ที่กล่าวว่าสนามแม่เหล็กแปรผันตามเวลาจะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้า  $\mathbf{E}$  ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3) \quad \text{สมการของศักย์เวกเตอร์เชิงแม่เหล็กตั้งสมการที่ (9)}$$

แทนสมการที่ (2) ลงในสมการที่ (3) จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

และจากกฎของแอมแปร์ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลา เมื่อสมมติให้ความหนาแน่นของกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์ [1-2] เนื่องจากแหล่งจ่ายมีความถี่ต่ำ แสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e \quad (5)$$

เมื่อ  $\mathbf{J}_0$  คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ  $\mathbf{J}_e$  คือความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) โดยที่

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (6)$$

เมื่อ  $\sigma$  คือสภาพนำไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (4) จึงได้

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7)$$

นำสมการที่ (1), (2) และ (7) แทนลงในสมการที่ (5) จะได้

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_0 \quad (8)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ  $\mathbf{A}$  พบว่า  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  ประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ของเวกเตอร์ดังแสดงคือ  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  ทำให้สามารถเขียน

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}_0 = 0 \quad (9)$$

งานวิจัยนี้ได้พิจารณาการแปลงโดเมนเวลาเป็นโดเมนความถี่ (time-harmonic) โดยสามารถแทน  $\mathbf{A}$  อยู่ในรูปแบบเชิงซ้อน (complex form),  $\mathbf{A} = A e^{j\omega t}$  [3] ดังนั้น

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = j\omega \mathbf{A}$$

ซึ่ง  $\omega$  คือความถี่เชิงมุม และเมื่อพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 3 มิติในระนาบ  $(x, y, z)$  จึงได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j\sigma \omega A + J_0 = 0 \quad (10)$$

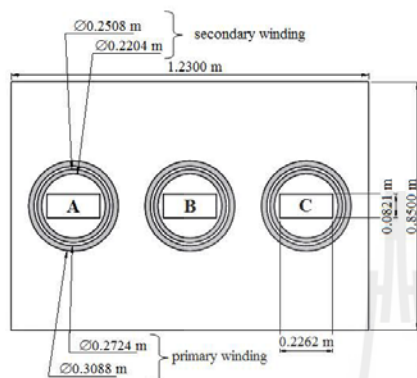
การหาผลเฉลยแน่นอนตรงของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองที่ปรากฏในสมการที่ (10) มีความยากและซับซ้อนอย่างมากในการแก้ปัญหา ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้ 3-D FEM ในการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณซึ่งเป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในการแก้สมการอนุพันธ์ย่อย [4]

### 3. ไฟฟ้าที่อิลิเมนต์แบบ 3 มิติ สำหรับหม้อแปลงไฟฟ้า

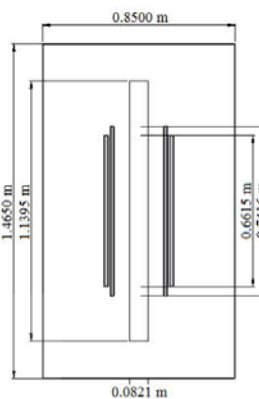
#### 3.1 อิลิเมนต์ของระบบศึกษา

งานวิจัยนี้ได้พิจารณาหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟส ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V โดยมีขดของหม้อแปลงในแต่ละมุมมองสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 1 และได้ทำการแบ่งปริมาตรย่อยของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Solidworks ดังแสดงด้วยรูปที่ 2 โดยสมบัติลักษณะการกระจายของผลลัพท์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใดๆ บนอิลิเมนต์ที่เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งมีจำนวนจุดต่อ

และอิลิเมนต์เท่ากับ 24,107 จุด และ 132,961 อิลิเมนต์ตามลำดับ

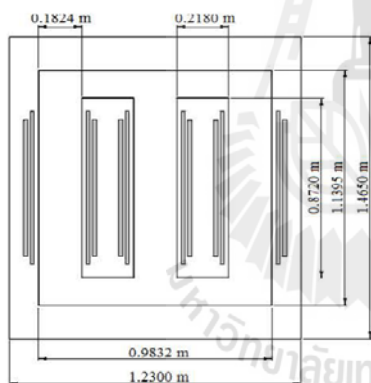


ก) มุมมองด้านบน

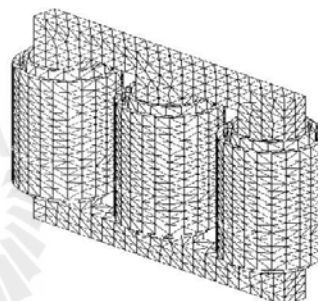


ค) มุมมองด้านข้าง

รูปที่ 1 มิติของหม้อแปลงจำหน่ายที่พิจารณา



ข) มุมมองด้านหน้า



รูปที่ 2 การแบ่งปริมาตรของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์แบบ 3 มิติ

### 3.2 การสร้างสมการของอิลิเมนต์

การสร้างสมการของแต่ละอิลิเมนต์ได้ประยุกต์ใช้วิธีการดั่งน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) ของกาเลอร์กิน (Galerkin) ซึ่งวิธีนี้ฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) จะมีค่าเท่ากับฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) [5-6] โดยคีย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่คิดใดๆ สามารถแสดงได้เป็น

$$A(x, y, z) = A_1N_1 + A_2N_2 + A_3N_3 + A_4N_4 \quad (11)$$

โดยที่  $N_i, i = 1, 2, 3, 4$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนต์ และ  $A_i, i = 1, 2, 3, 4$  คือผลลัพธ์ของฟังก์ชันเชิงวงกตอร์มที่สี่ในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของอิลิเมนต์ ซึ่ง

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (12)$$

และ  $V$  คือปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าของแต่ละอิลิเมนต์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (13)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) \\ a_2 &= x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4) \\ a_3 &= x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2) \\ a_4 &= x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\ b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\ b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\ b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_3 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\ c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\ c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\ c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\ d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\ d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\ d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาลเลอร์กินสามารถดำเนินการได้โดยตรงจากสมการที่ (10) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยที่กล่าวไว้ในข้างต้น แล้วอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของอิลิเมนต์ ( $\Omega$ ) และกำหนดผลลัพธ์ที่ได้ให้มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} N_n \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_n (j \sigma \omega A) d\Omega + \int_{\Omega} (N_n J_o) d\Omega = 0$$

โดยเมื่อดำเนินการอินทิเกรตสมบูรณ์แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งแสดงอยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[M + K]\{A\} = \{F\} \quad (14)$$

โดยที่

$$[M] = j \omega \int_{\Omega} N_n N_n d\Omega = \frac{j \omega \omega V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

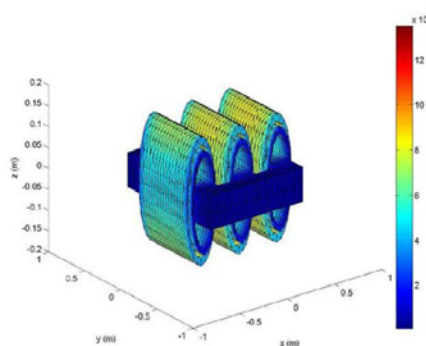
$$[K] = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{36 \mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 + d_3 d_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 + d_3 d_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ b_4 b_1 + c_4 c_1 + d_4 d_1 & b_4 b_2 + c_4 c_2 + d_4 d_2 & b_4 b_3 + c_4 c_3 + d_4 d_3 & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = J_o \int_{\Omega} N_n d\Omega = \frac{J_o V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

จากนั้นนำสมการของแต่ละอิลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน (assembly) เป็นสมการรวมของระบบ โดยหากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย  $n$  จุดต่อ ก็จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น  $n$  สมการ

### 3.3 เงื่อนไขขอบเขตและพารามิเตอร์ที่ใช้ในการจำลอง

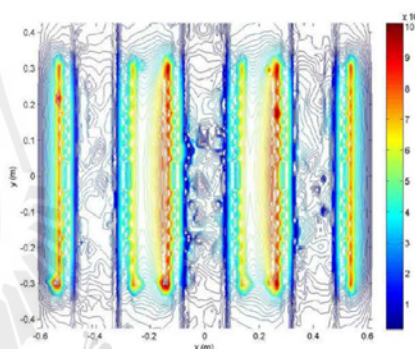
งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษามอเตอร์ที่ใช้งานการจำลอง สมดุล ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V, 50 Hz โดยได้ กำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ของค่าศักย์ เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่บริเวณตัวถังของน้ำมันหม้อแปลงให้มี ค่าเป็นศูนย์ [7] และแกนเหล็กที่อยู่ภายในหม้อแปลงจำหน่าย ที่ได้ทำการศึกษานั้นผลิตจาก Cold Rolled Silicon Steel [8] ซึ่งมี สภาพนำทางไฟฟ้า ( $\sigma$ ) =  $2.08 \times 10^6$  S/m และค่าความ ซาบซึมสัมพัทธ์ทางแม่เหล็ก ( $\mu_r$ ) = 3000 โดยความซาบซึม ทางแม่เหล็กของอากาศ ( $\mu_0$ ) =  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m และความหนาแน่นของกระแสภายนอก,  $J_o = (n \cdot I) / a$  เมื่อ  $n$  คือ จำนวนรอบการพันของขดลวดต่อเฟส และ  $a$  คือ พื้นที่หน้าตัดของขดลวด



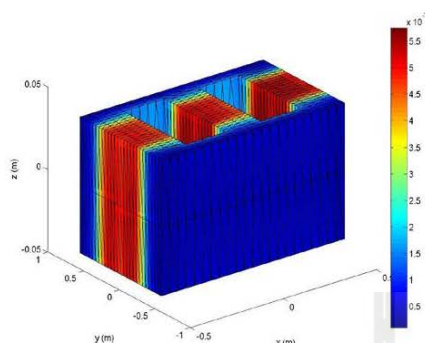
รูปที่ 3 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ของขดลวดหม้อแปลง

### 4. ผลการจำลองและอภิปรายผล

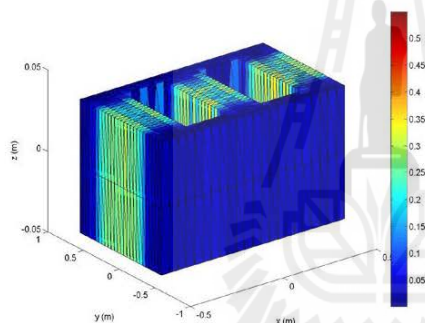
การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ใช้ MATLAB ในการพัฒนาโปรแกรม 3-D FEM สำหรับคำนวณการกระจายตัวของค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและค่าสนามแม่เหล็ก พร้อมแสดงผลทางกราฟิกของค่าทั้งสองที่เกิดขึ้น โดยรูปที่ 3 เป็นการแสดงผลการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของขดลวดหม้อแปลงทั้ง 3 เฟส ส่วนรูปที่ 4 เป็นการนำเอารูปที่ 3 มาตัดแสดงเป็นแบบพื้นทีหน้าตัด โดยเลือกแสดงบริเวณตรงกลางของหม้อแปลง และรูปที่ 5 และ 6 เป็นการแสดงผลการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็ก เฉพาะในส่วนของแกนเหล็ก ตามลำดับ โดยค่าสนามแม่เหล็กสามารถคำนวณได้จากผลการเคิร์ลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ปรากฏ



รูปที่ 4 การกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) ของขดลวดตลอดพื้นที่หน้าตัดของหม้อแปลง



รูปที่ 5 การกระจายตัวของคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (wb/m) เฉพาะในส่วนของแกนเหล็กหม้อแปลง



รูปที่ 6 การกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก (T) เฉพาะในส่วนของแกนเหล็กหม้อแปลง

จากผลการจำลองที่ปรากฏพบว่า ค่าคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่แสดงในรูปที่ 3 และ 4 นั้น จะมีค่าสูงในบริเวณที่เป็นขดลวดตัวนำของหม้อแปลง โดยเฉพาะในรูปที่ 4 จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าบริเวณขดลวดตัวนำนั้นจะมีค่าสูงมากซึ่งพิจารณาได้จากสีของเส้นคอนทัวร์ อีกทั้งยังสังเกตเห็นว่าบริเวณที่เป็นแกนเหล็กของหม้อแปลงนั้นจะมีค่าสูงกว่าส่วนที่เป็นน้ำมันหม้อแปลงซึ่งมีค่าน้อยมาก ทั้งนี้เนื่องจากคุณสมบัติของน้ำมันหม้อแปลงที่มีความเป็นฉนวนสูง และเมื่อพิจารณาผลลัพธ์ของรูปที่ 5 และ 6 ซึ่งเป็นการจำลองผลเฉพาะในส่วน

ของแกนเหล็กหม้อแปลงเท่านั้น พบว่าลักษณะของคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กมีการกระจายตัวที่สม่ำเสมอในบริเวณที่มีขดลวดพันรอบ (limb) แต่ในบริเวณที่ไม่มีขดลวด (yoke) นั้นจะมีค่าน้อยมาก จึงส่งผลให้สนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในแกนเหล็กนั้นมีค่าสูงบริเวณที่มีขดลวดตัวนำล้อมรอบ และลักษณะของคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนแกนเหล็กนั้นจะมีความสมมาตร ทั้งนี้เนื่องจากในงานวิจัยนี้ ได้ทำการจำลองผลหม้อแปลงแบบ 3 เฟสสมดุล

5. สรุป

บทความนี้ได้ศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กตลอดทั้งปริมาณของหม้อแปลงจำหน่าย 3 เฟสสมดุล ขนาด 400 kVA, 22 kV/400 V, 50 Hz การจำลองผลด้วยคอมพิวเตอร์ได้ประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB จากผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองผลพบว่า บริเวณขดลวดตัวนำของหม้อแปลงที่ได้รับกระแสจากแหล่งจ่ายไฟภายนอกจะมีค่าคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงกว่าบริเวณอื่นๆ และบริเวณแกนเหล็กของหม้อแปลงที่มีขดลวดล้อมรอบอยู่ก็จะถูกเหนี่ยวนำโดยขดลวดตัวนำ ทำให้มีค่าคิกซ์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสูงขึ้นตาม ดังนั้นสนามแม่เหล็กบริเวณนี้ก็จะมีความสูงกว่าบริเวณบนแกนเหล็กโดยมีการกระจายตัวแบบสมมาตร

เอกสารอ้างอิง

- [1] Demerdash, N. A., & Gillott, D. H. (1974). A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 74, 682-685.
- [2] Fu, W. N. (1999). *Electromagnetic field analysis of induction motors by finite element method and its application to phantom loading*. Ph.D. Dissertation, Hong Kong Polytechnic University, China.
- [3] Christopoulos, C. (1995). *The transmission - line modeling method: TLM*. USA: IEEE Press.



- [4] Pao-la-or, P., Kulworawanichpong, T., Sujitjorn, S., & Peaiyoung, S. (2006). Distributions of flux and electromagnetic force in induction motors: A finite element approach. *WSEAS Transactions on Systems*, 5(3), 617-624.
- [5] Preston, T. W., Reece, A. B. J., & Sangha, P. S. (1988). Induction motor analysis by time stepping techniques. *IEEE Transactions on Magnetics*, 24(1), 471-474.
- [6] Kim, B. T., Kwon, B. I., & Park, S. C. (1999). Reduction of electromagnetic force harmonics in asynchronous traction motor by adapting the rotor slot number. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(5), 3742-3744.
- [7] Kulkarni, S. V., & Khaparde, S. A. (2004). *Transformer engineering design and practice*. USA: Marcel Dekker, Inc.
- [8] Mittle, V. N., & Mittle, A. (1996). *Design of electrical machines*. Standard Publishers.

## ประวัติผู้เขียน

นายอริยศักดิ์ จิตธรรมสาร เกิดเมื่อวันที่ 20 กรกฎาคม พ.ศ. 2528 เกิดที่อำเภอเมือง จังหวัดชลบุรี สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนชลราษฎรอำรุง จังหวัดชลบุรี เมื่อปี พ.ศ. 2547 ได้เข้าศึกษาต่อระดับปริญญาตรี ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมไฟฟ้า) ในปี พ.ศ. 2551 หลังจากสำเร็จการศึกษาได้ เข้าศึกษาต่อระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีในปีเดียวกัน โดยขณะศึกษาได้ปฏิบัติงานเป็นผู้ช่วยสอนปฏิบัติการของสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จำนวน 6 รายวิชา ได้แก่ (1) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้ามูลฐาน (2) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้า 1 (3) ปฏิบัติการวิศวกรรมไฟฟ้า 2 (4) ปฏิบัติการการแปลงผันพลังงานกลไฟฟ้า (5) ปฏิบัติการวงจรอิเล็กทรอนิกส์ และ (6) ปฏิบัติการเครื่องจักรกลไฟฟ้า 2 ทั้งนี้มีความสนใจในด้านการวิเคราะห์ระบบไฟฟ้ากำลัง สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟในทอพลิเมนต์ในงานระบบไฟฟ้ากำลัง

ระหว่างศึกษาในระดับปริญญาโท ได้มีผลงานวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่โดยมีปรากฏดังภาคผนวก ข.