การทำนายปัญหาการแพร่ 2 มิติ บนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุ่มและกริดแบบสามเหลี่ยม

นายยุทธนา กล้าศึก

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2555

PREDICTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS BASED ON FINITE VOLUME METHOD AND TRIANGULAR GRID

Yuttana Glasug

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Suranaree University of Technology

Academic Year 2012

การทำนายปัญหาการแพร่ 2 มิติ บนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

____

(ผศ. ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล)
ประธานกรรมการ

____

(ผศ. ดร.กีรติ สุลักษณ์)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

____

(ผศ. ดร.เผด็จ เผ่าละออ)
กรรมการ

____

(ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

____

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

ยุทธนา กล้าศึก : การทำนายปัญหาการแพร่ 2 มิติ บนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยม (PREDICTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS BASED ON FINITE VOLUME METHOD AND TRIANGULAR GRID) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กีรติ สุลักษณ์, 54 หน้า.

ปัญหาส่วนใหญ่ทางวิศวกรรมมักมีรูปทรงซับซ้อน จึงยากหรือเป็นไปไม่ได้ที่จะแก้ด้วยการใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขจึงเข้ามามีบทบาทสำคัญเพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์บนภาษา C++ สำหรับแก้ปัญหาการแพร่แบบคงตัว 2 มิติ ด้วยวิธีเชิงตัวเลข โปรแกรมถูกพัฒนาขึ้นบนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยม สมการควบคุมการแพร่แบบคงตัวในรูปอนุพันธ์อันดับสองถูกประมาณค่าโดยใช้วิธีผลต่างกลาง โปรแกรมได้รับการทดสอบความน่าเชื่อถือโดยนำไปประยุกต์แก้ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยม การนำความร้อนบนรูปทรงวงกลมกลวง การนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยม พร้อมทั้งเปรียบเทียบความถูกต้องกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลเฉลยอ้างอิงที่น่าเชื่อถือ จากนั้นนำไปประยุกต์แก้ปัญหาการนำความร้อนแผ่นบางรูปทรงซับซ้อน เพื่อประเมินศักยภาพทางโปรแกรมในการคำนวณกริดแบบสามเหลี่ยม

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล　　　　ลายมือชื่อนักศึกษา____________________

ปีการศึกษา 2555　　　　ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา______________

YUTTANA GLASUG : PREDICTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS BASED ON FINITE VOLUME METHOD AND TRIANGULAR GRID. THESSIS ADVISOR : ASST. PROF. KEERATI SULUKSNA ,Ph.D., 54 PP.

FINITE VOLUME METHOD/ DIFFUSION PROBLEMS/ TRIANGULAR GRID

Most engineering applications are typically constructed with complex shapes. This condition is known as a difficult or impossible thing to solve using an analytical method. Therefore, the numerical method is the possible way to resolve those problems. The paper is aimed to present the numerical method for solving two-dimension steady state diffusion problem. The in-house-software has been developed based on Finite Volume Method and Triangular Unstructured Grid with node center arrangement. The considered diffusion problem is governed by the second order PDE equation. It is discrete by central differencing scheme. A two-dimensional heat conduction problem with complex shape is used to assess the accuracy of the developed software. The predicted results showed that the developed software give the accurate results compare with the reference data.

School of Mechanical Engineering　　Student's Signature _______________

Academic Year 2012　　Advisor's Signature_______________

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์ทุกประการ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบุคคลต่าง ๆ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ และช่วยเหลืออย่างดียิ่ง ทั้งด้านวิชาการและด้านการดำเนินงานวิจัย ดังนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กีรติ สุลักษณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้ความรู้และคำปรึกษาแนะนำในการทำงานวิจัย รวมทั้งสละเวลาตรวจสอบแก้ไขให้วิทยานิพนธ์มีความถูกต้องสมบูรณ์ด้วยความกรุณาเสมอมา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้ความรู้ คำแนะนำด้านวิชาการในการทำวิจัยแก่ผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการดำเนินงานวิจัย

คุณณัฏฐา จันโส เพื่อนร่วมวิจัยและเพื่อนร่วมเรียนปริญญาโทที่ให้กำลังใจและคำปรึกษามาโดยตลอด

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้การสนับสนุนทุนการศึกษาและอุปกรณ์ในการทำวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้การเลี้ยงดูอบรมและส่งเสริมการศึกษาอย่างดี จนทำให้ผู้วิจัยประสบความสำเร็จในชีวิตตลอดมา

ยุทธนา กล้าศึก

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

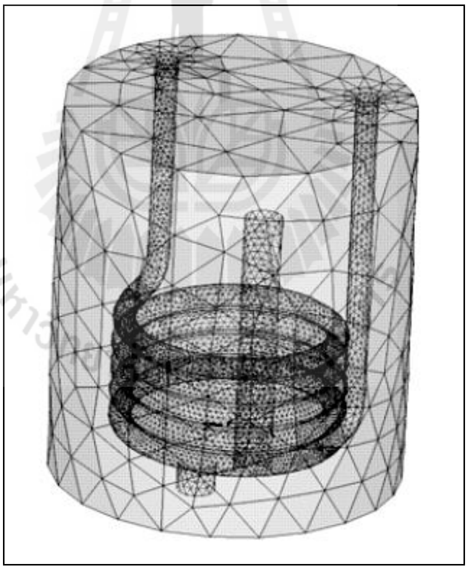
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

Γ	คือ	สัมประสิทธิ์การแพร่
ϕ	คือ	ตัวแปรที่สนใจ
S_{ϕ}	คือ	ซอส
$\overline{S}_{\phi}$	คือ	ค่าเฉลี่ยของซอสบนปริมาตรควบคุม
ΔV	คือ	ปริมาตรของเซลล์
ΔA	คือ	พื้นที่หน้าตัดของแต่ละด้านเซลล์
$\Delta \xi$	คือ	ระยะห่างระหว่างเซลล์ถึงเซลล์
$\hat{e}_{\eta}$	คือ	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยระหว่างมุมของเซลล์ถึงมุมของเซลล์
$\hat{e}_{\xi}$	คือ	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยระหว่างเซลล์ถึงเซลล์
n	คือ	เวคเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับพื้นที่ผิว
$\Delta \eta$	คือ	ขนาดของเวคเตอร์ $\hat{e}_{\eta}$
S_{u}	คือ	ซอสของการแพร่ที่เงื่อนไขขอบ
h	คือ	สัมประสิทธิ์การพาความร้อน
σ	คือ	สัมประสิทธิ์การแผ่รังสีความร้อน
D	คือ	สัมประสิทธิ์การแพร่ระหว่างเซลล์
SD	คือ	สัมประสิทธิ์การแพร่ระหว่างมุมของเซลล์ของพื้นที่หน้าตัด

บทที่ 1
บทนำ

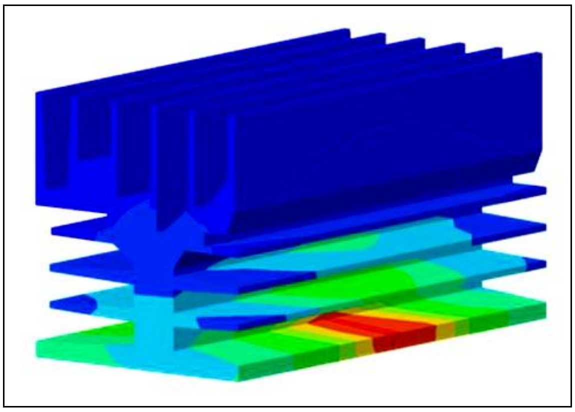
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันวิธีเชิงตัวเลขมีบทบาทต่อการออกแบบงานทางวิศวกรรมอย่างมาก เพราะสามารถนำไปประยุกต์ออกแบบและทำนายผลลัพธ์ที่จะเกิดขึ้นล่วงหน้า โดยไม่ต้องลองผิดลองถูก จึงช่วยลดต้นทุนและเวลา หลีกเลี่ยงการทดลองที่ไม่จำเป็นและที่สำคัญคือชิ้นงานที่ออกแบบมีความเหมาะสมด้านวิศวกรรมและเศรษฐศาสตร์ ตัวอย่างการนำวิธีเชิงตัวเลขไปประยุกต์ใช้งาน เช่นการจำลองการกระจายความร้อนในเครื่องทำน้ำอุ่นขนาดเล็ก เพื่อมาช่วยออกแบบหาจุดเหมาะสมของชุดทำความร้อนที่ใช้พลังงานคุ้มค่ามากที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 1.1 (สุนิติ และ ศุภฤกษ์, 2551)



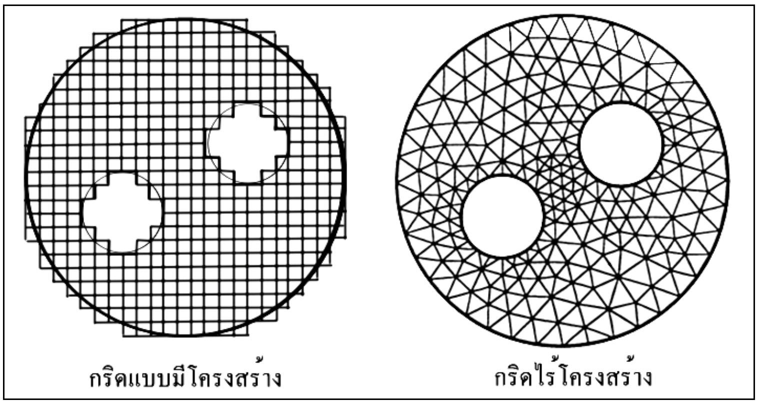
รูปที่ 1.1 แบบจำลองชุดทำความร้อนในเครื่องทำน้ำอุ่น

การทำนายการกระจายความร้อนบนครีบระบายความร้อนที่ติดอยู่กับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่ผลิตความร้อนออกมา ผลลัพธ์ที่ได้ช่วยให้ผู้ออกแบบสามารถประเมินความเหมาะสมของรูปร่างและจำนวนของครีบได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังแสดงในรูปที่ 1.2 (ปราโมทย์ และคณะ, 2552)



รูปที่ 1.2   การกระจายอุณหภูมิบนครีบระบายความร้อน

ปัญหาทางวิศวกรรมสามารถอธิบายได้ด้วยสมการควบคุม โดยทั่วไปการสร้างสมการควบคุมทำได้ไม่ยากนัก เมื่อเทียบกับการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ ความยากดังกล่าวนั้นมาจากความซับซ้อนของรูปทรงปัญหาที่แก้ ซึ่งมักพบโดยทั่วไปในทางวิศวกรรม หลักการสำคัญสำหรับวิธีเชิงตัวเลข คือการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นส่วนเล็กๆ ที่เรียกกันว่าเอลิเมนต์หรือเซลล์ เนื่องด้วยความซับซ้อนของรูปทรงปัญหาการแบ่งโดยใช้เซลล์แบบกริดโครงสร้าง (Structured grid) มักมีข้อจำกัดเพราะการสร้างกริดเข้ากับรูปทรงปัญหาทำได้ยากและมีโอกาสคลาดเคลื่อน ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (ซ้าย) ซึ่งจะส่งผลให้การแก้หาคำตอบของปัญหามีความคลาดเคลื่อน ดังนั้นการใช้กริดแบบไร้โครงสร้าง (Unstructured grid) ซึ่งให้ความสมบูรณ์การสร้างกริดเข้ากับรูปทรงของปัญหาจึงมีความเหมาะสมกว่า ดังแสดงในรูปที่ 1.3 (ขวา) จึงเป็นทางเลือกที่ช่วยในการแก้ปัญหาที่รูปทรงซับซ้อนมีประสิทธิภาพกว่า



รูปที่ 1.3   การสร้างกริดกับปัญหาทรงกลมมีรูกลวง 2 รู

จากข้อดีของกริดไร้โครงสร้างดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงได้นำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาการแพร่ในรูปของปัญหาการนำความร้อน ซึ่งเป็นปัญหาที่พบมากในทางวิศวกรรม เช่น การนำความร้อนบนเครื่องยนต์ การนำความร้อนบนอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งการแก้ปัญหาใช้วิธีการเชิงตัวเลขระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุมกริดไร้โครงสร้างแบบสามเหลี่ยมถูกนำมาใช้เพื่อจัดการกับความซับซ้อนของรูปทรงของปัญหา โปรแกรมคอมพิวเตอร์พัฒนาบนภาษา C++ และถูกนำไปทดสอบความถูกต้องกับปัญหาการนำความร้อนแบบคงตัว 2 มิติ แบบต่าง ๆ พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยอ้างอิงที่น่าเชื่อถือได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์แก้ปัญหาการแพร่แบบคงตัว 2 มิติ พบพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยม

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 พัฒนาโปรแกรมบนภาษา C++

1.3.2 ปัญหาที่พิจารณาเป็นการแพร่แบบคงตัว 2 มิติ จำนวน 5 ปัญหาคือ

1) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่
2) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ
3) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงกระบอกกลวง
4) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า
5) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงซับซ้อน (ปะเก็น)

1.3.3 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เฉพาะส่วนประมวลผล (Solver) โดยใช้วิธีเชิงตัวเลขแบบวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยม

1.4 สถานที่ทำงานวิจัย

ห้องปฏิบัติการพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (B38) ชั้น 1 อาคารวิจัย มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.5 เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัย

1.5.1 คอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล Intel® Centrino 2 CPU 2.53 GHz, RAM 4 GB จำนวน 1 เครื่อง

1.5.2 ซอฟต์แวร์ GAMBIT version 2.1.6 สำหรับสร้างกริด

1.5.3 ซอฟต์แวร์ FLUENT

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับแก้ปัญหาการแพร่แบบคงตัว 2 มิติ บนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมที่ใช้กริดแบบสามเหลี่ยม

1.7 การจัดทำรูปเล่มวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย 5 บท และ 1 ภาคผนวก ซึ่งมีรายละเอียดโดยย่อดังนี้

บทที่ 1 บทนำกล่าวถึงความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ และเป้าหมายของงานวิจัย ตลอดจนขอบเขต และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยนี้

บทที่ 2 วรรณกรรมและทฤษฎีพื้นฐานที่สัมพันธ์กับงานวิจัย

บทที่ 3 กล่าวถึงขั้นตอนการทำการวิจัย สมการควบคุมของปัญหาและการประยุกต์เข้ากับวิธีไฟไนต์โวลุม รวมทั้งการประยุกต์กริดแบบสามเหลี่ยมกับปัญหาการแพร่ 2 มิติ

บทที่ 4 ผลการทดสอบและผลการวิเคราะห์ปัญหาการแพร่ 2 มิติ ทั้ง 5 กรณี ได้แก่ ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่ การนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ การนำความร้อนบนรูปทรงกระบอกกลวง การนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่าและการนำความร้อนบนรูปทรงซับซ้อน(ปะเก็น)

บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะของการทำวิจัย

ภาคผนวก ก. บทความที่ได้รับการเผยแพร่ในงานประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย (ME-NETT) ครั้งที่ 25

บทที่ 2
วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไปอยู่ 3 แนวทางคือ วิธีเชิงวิเคราะห์ วิธีเชิงตัวเลข และทำการทำลอง ซึ่งจะแสดงรายละเอียดดังนี้

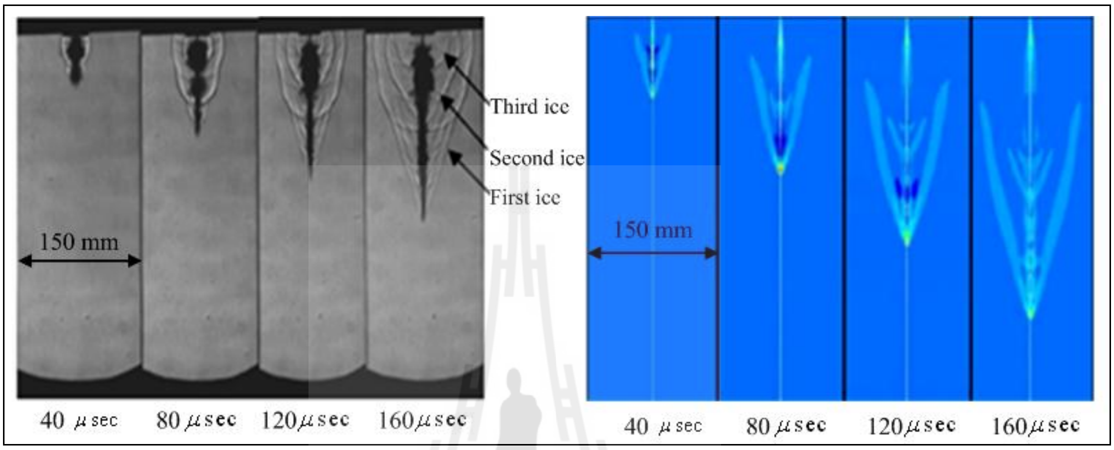
วิธีเชิงวิเคราะห์ เป็นวิธีแก้ปัญหาที่ใช้กฎเกณฑ์ทางแคลคูลัส ตรีโกณมิติ พีชคณิต และอื่น ๆ เข้ามาช่วยให้ได้ผลเฉลยของปัญหานั้น ผลเฉลยที่ได้เรียกว่า ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical solution) หรือผลเฉลยแม่นตรง (Exact Solution) เป็นค่าตัวเลขหรืออาจเป็นนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ก็ได้ เป็นผลเฉลยเชิงคุณภาพเพราะทำให้มองเห็นแนวโน้มผลเฉลยที่เกิดขึ้นได้โดยตรง ข้อด้อยของวิธีการนี้คือใช้ได้กับปัญหาที่ไม่ซับซ้อนเท่านั้น

วิธีเชิงตัวเลข เป็นการแก้สมปัญหาโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ อาศัยหลักการประมาณค่าเพื่อหาผลเฉลย ณ จุดที่สนใจ ดังนั้นวิธีเชิงตัวเลขจึงให้ผลลัพธ์เฉพาะจุดเท่านั้น ความแม่นยำของการคำนวณขึ้นอยู่กับจำนวนจุดและวิธีประมาณค่าเชิงตัวเลขที่ใช้ ผลเฉลยที่ได้เรียกว่าผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) เป็นผลเฉลยโดยประมาณ (Approximation solution) ซึ่งประกอบไปด้วยตัวเลขจำนวนหนึ่งที่ต้องอาศัยการแปรความอีกต่อหนึ่งเพื่อให้เห็นแนวโน้มที่เกิดขึ้น เช่น นำไปแสดงเป็นกราฟ คอนทัวร์ เวคเตอร์ เป็นต้น โดยปกติถือว่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์คือผลเฉลยที่ถูกต้อง ส่วนผลเฉลยเชิงตัวเลขเป็นผลเฉลยโดยประมาณหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือเป็นผลเฉลยที่มีค่าคาดเคลื่อนอยู่เสมอ คือค่าคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นตรง โดยทั่วไปหากสามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้แล้ว ก็ไม่มีความจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขแก้หาผลเฉลยอีก อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติปัญหาจริงที่พบส่วนมากมักมีความซับซ้อน เช่น การกระจายความร้อนบนฝาสูบเครื่องยนต์ เป็นต้น การใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ไม่สามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้ จึงนำวิธีเชิงตัวเลขมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาแทน

แนวทางที่สามคือ ทำการทดลอง โดยแนวทางนี้มีข้อดีคือได้ค่าข้อมูลที่สมจริงเพราะวัดจากตัวปัญหาจริง แต่ข้อด้อยคือใช้ไม่ได้กับทุกปัญหา ความน่าเชื่อถือของผลที่ได้ขึ้นอยู่กับความน่าเชื่อถือทางเครื่องมือและกระบวนการวัด นอกจากนี้ยังมีข้อจำกัดทางด้านอื่น ๆ เช่นขนาดของปัญหาที่เล็กหรือใหญ่มากเกินไปจนไม่สามารถทำการทดลองได้ ปัญหามีผลต่อการวัดหรือแม้แต่ปัญหาที่มีต้นทุนในการทดลองสูงเกินไป ดังนั้นการทำการทดลองจึงมักถูกใช้หลังจากได้ผลการออกแบบที่ได้จากวิธีเชิงวิเคราะห์หรือวิธีเชิงตัวเลข

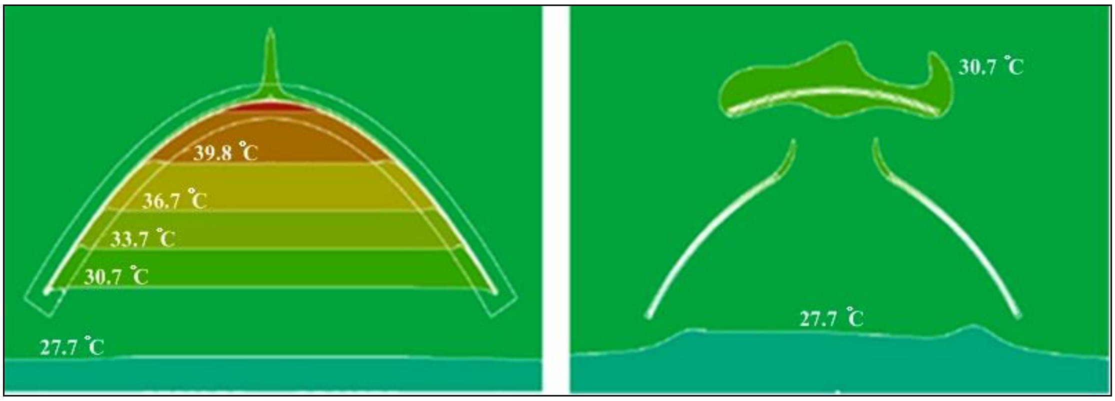
2.2 วรรณกรรมวิธีเชิงตัวเลข

ตัวอย่างการนำวิธีเชิงตัวเลขไปประยุกต์ใช้งานเพื่อศึกษาคุณลักษณะพื้นฐานของลำพุ่งเชื้อเพลิงความเร็วสูง การฉีดเชื้อเพลิงด้วยความเร็วสูง ๆ ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการเผาไหม้และลดมลภาวะที่เป็นพิษจากเครื่องยนต์ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 (วีรพันธ์ และคณะ, 2550)



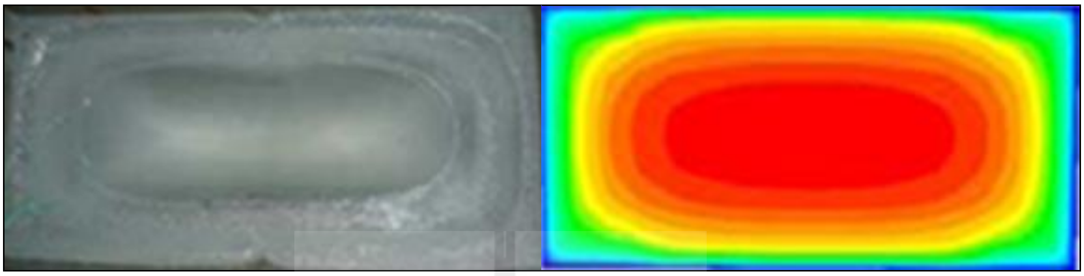
รูปที่ 2.1 การจำลองคุณลักษณะเบื้องต้นของลำพุ่งเชื้อเพลิงความเร็วสูง

การประยุกต์ใช้เพื่อศึกษาการไหลเวียนอากาศและการกระจายอุณหภูมิในโรงเรือนสตรอเบอร์รี่ เพื่อให้ได้รูปแบบโรงเรือนที่เหมาะสมกับการเจริญเติบโตของสตรอเบอร์รี่ โดยเปรียบเทียบอุณหภูมิโรงเรือนแบบเดิมและแบบใหม่ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 (ศิษฏ์ และคณะ, 2551)



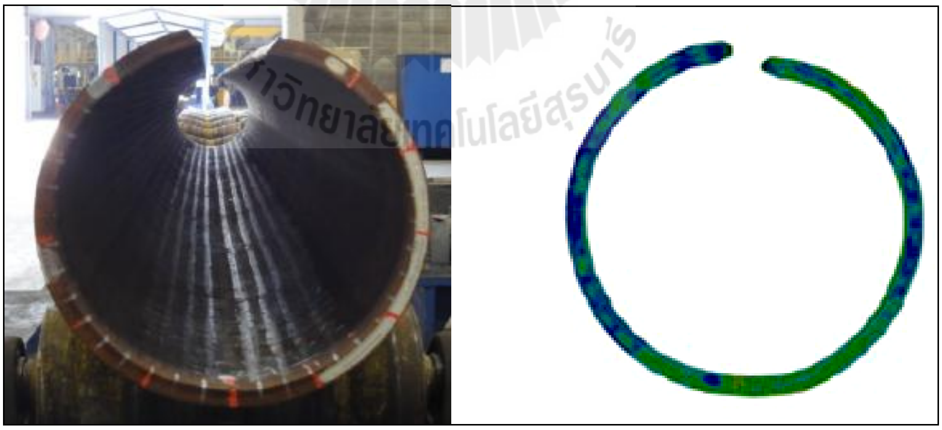
รูปที่ 2.2 การจำลองการกระจายตัวอุณหภูมิโรงเรือนแบบเดิม (ซ้าย) และแบบใหม่ (ขวา)

การนำประยุกต์ใช้เพื่อจำลองการขึ้นรูปน้ำแข็งก้อนก่อนนำผลการศึกษาที่ได้ไปปรับปรุงพัฒนากระบวนการผลิตน้ำแข็งในภาคอุตสาหกรรมให้มีคุณภาพดีขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.3 (ภานุวัฒน์ และ เกรียงไกร, 2551)



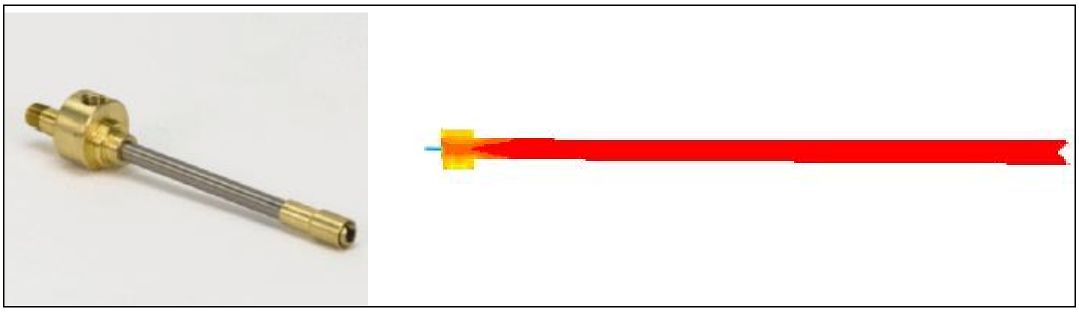
รูปที่ 2.3 การจำลองการขึ้นรูปน้ำแข็งก้อน

การนำวิธีเชิงตัวเลขไปประยุกต์ใช้งานเพื่อการหาพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของกระบวนการขึ้นรูปท่อของโรงงานอุตสาหกรรม โดยการศึกษาอิทธิพลของระยะห่างของดายน์และระยะกดของหัวกดต่อค่าความรีของท่อและความเค้นตกค้างในชิ้นงานท่อที่ขึ้นรูปแบบเจซีโอด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 มิติ ดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ศักรินทร์ และคณะ, 2554)



รูปที่ 2.4 การขึ้นรูปท่อจริงกับผลการจำลอง

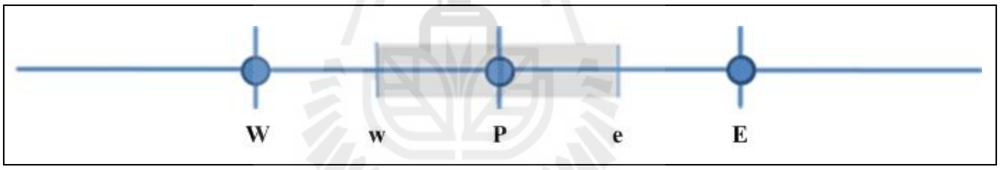
การนำวิธีเชิงตัวเลขไปศึกษาผลของความยาวท่อต่อการแยกอุณหภูมิในท่อวอร์เทกซ์ซึ่งเป็นอุปกรณ์ที่ใช้ในการสร้างอากาศเย็นและอากาศร้อน ซึ่งจะนำไปสู่การออกแบบท่อวอร์เทกซ์ให้มีประสิทธิภาพดียิ่งขึ้นกว่าเดิม ดังแสดงในรูปที่ 2.5 (อภิชาติ, 2554)



รูปที่ 2.5 ท่อวอร์เทกซ์กับผลการกระจายตัวของอุณหภูมิภายใน

2.3 แผนวิธีผลต่างกลาง

แผนวิธีที่ใช้ประมาณค่าภายในช่วงระหว่างจุด 2 จุด เห็นได้ว่าพจน์ที่ได้ประกอบด้วยค่าคุณสมบัติ ϕ ที่จุด P และจุดต่อข้างเคียง E และ W ส่วน e และ w เป็นตำแหน่งด้านของเซลล์ ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ตำแหน่งการเก็บค่าคุณสมบัติ ϕ

แต่เนื่องจาก ϕ ถูกเก็บค่าไว้ที่จุดกลางเซลล์ (จุด P, W และ E) ไม่ได้เก็บไว้ที่ด้านของเซลล์ ดังนั้นเพื่อให้ได้ค่า ϕ ที่ด้านของเซลล์ จึงต้องใช้การประมาณค่าเข้าช่วยนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของค่า ϕ ที่ด้านของเซลล์และจุดต่อเป็นดังนี้

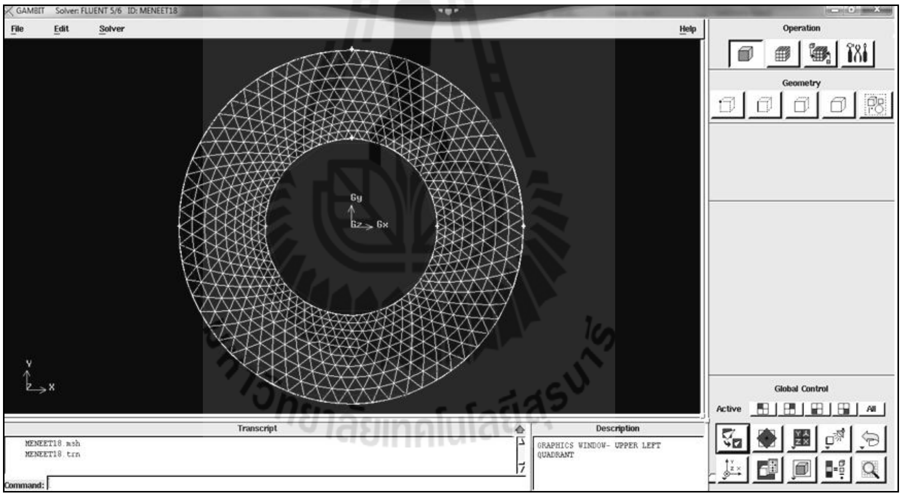
$$\phi_e = \frac{1}{\Delta L_{PE}}(\phi_P \cdot \Delta L_{eE} + \phi_E \cdot \Delta L_{Pe}) \tag{2.1}$$

$$\phi_w = \frac{1}{\Delta L_{PW}}(\phi_P \cdot \Delta L_{wW} + \phi_W \cdot \Delta L_{Pw}) \tag{2.2}$$

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

3.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาวิธีเชิงตัวเลข

โดยทั่วไปการพัฒนาโปรแกรมคำนวณเชิงตัวเลขมี 3 ส่วน คือ การประมวลผลก่อน(Pre-processor) การประมวลผล (Solver) และการประมวลผลหลัง (Post-processor) ซึ่งการประมวลผลก่อนคือการเตรียมข้อมูลให้กับโปรแกรมการคำนวณ ได้แก่ข้อมูลรูปทรงของปัญหา ข้อมูลกริด ข้อมูลคุณสมบัติของปัญหาและข้อมูลเงื่อนไขขอบ เป็นต้น ตัวอย่างโปรแกรมแสดงหน้าต่างของส่วนประมวลผลก่อนแสดงในรูปที่ 3.1

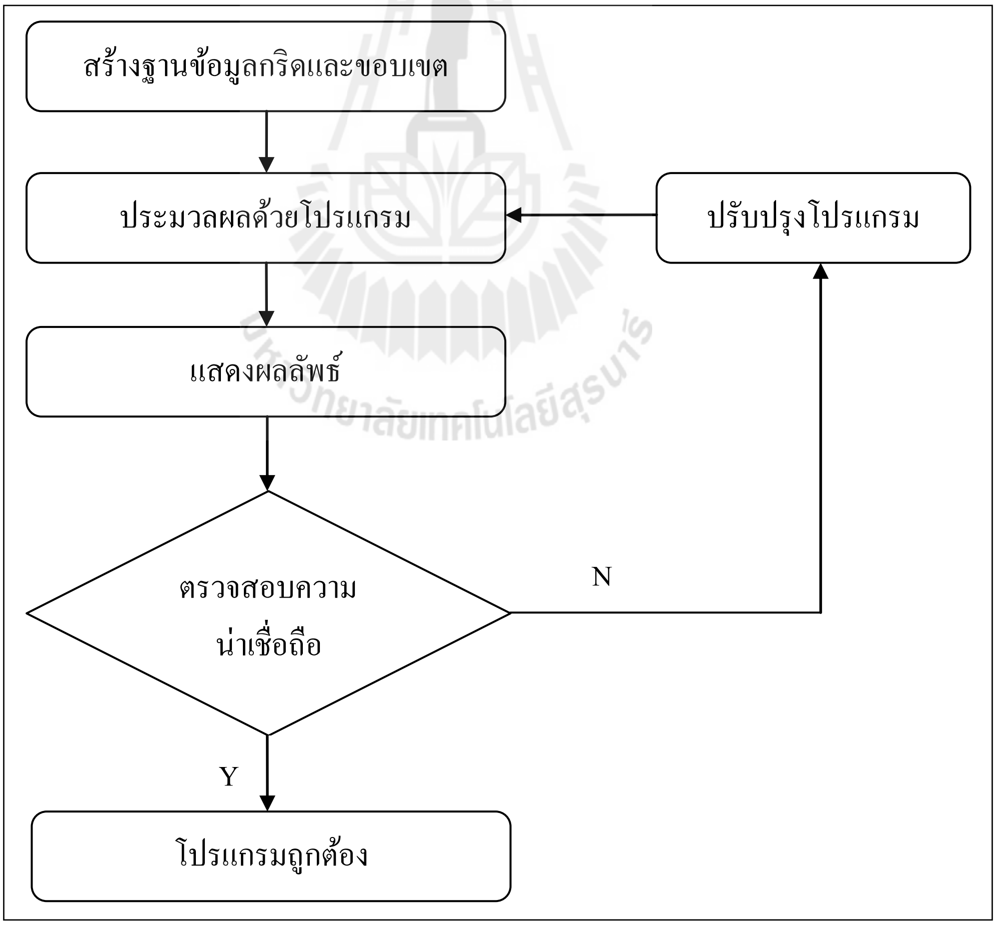


รูปที่ 3.1 ภาพหน้าต่างของโปรแกรมแกมบิท (Gambit)

การประมวลผล เป็นขั้นตอนการเลือกใช้รูปแบบดิสครีไทเซชันเพื่อแปลงสมการอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิต ในขั้นตอนการประมวลผลนี้จะต้องเลือกวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลขที่จะใช้รวมถึงขั้นตอนวิธีการคำนวณ ทั้งนี้เพื่อให้ได้ความแม่นยำและมีเสถียรภาพตามที่ต้องการ ด้วยวิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลข เช่น วิธีผลต่างกลาง(Central Differencing Scheme: CDS) วิธีผลต่างต้นลม (Upwind Differencing Scheme: UDS) วิธีผลต่างผสม (Hybrid Difference Scheme: HDS) เป็นต้น Ffp การประมวลผลหลัง เป็นขั้นตอนนำผลที่ได้จากขั้นตอนการคำนวณมาแสดงผลในรูปของกราฟิกต่าง ๆ เช่น แสดงรูปร่างของปัญหา กริด กราฟคอนทัวร์และกราฟพื้นผิว เป็นต้น

3.2 การพัฒนาส่วนการประมวลผล

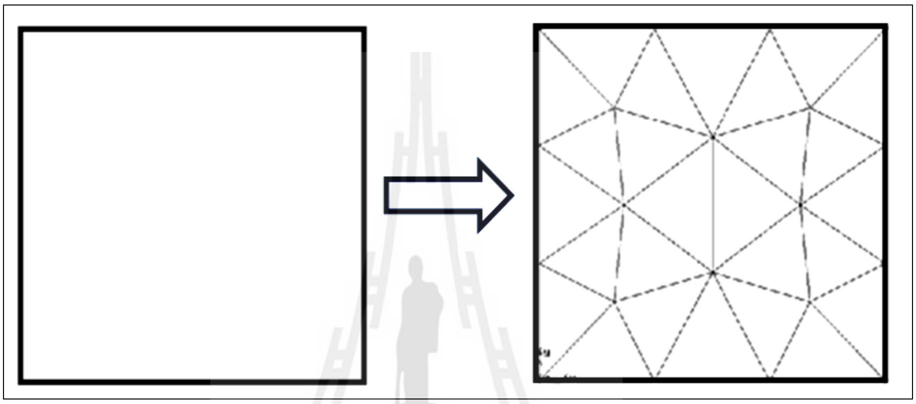
กระบวนการเริ่มจากการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป สร้างรูปทรงของปัญหาที่ต้องการเรียกว่า โดเมนปัญหา โดยสั่งให้โปรแกรมแบ่งโดเมนปัญหาออกเป็นส่วนเล็ก ๆ เป็นกริดแบบสามเหลี่ยม เมื่อโปรแกรมสร้างกริดที่เรียบร้อยแล้วก็จะสร้างข้อมูลของเซลล์และความสัมพันธ์ของแต่ละเซลล์ออกมาเป็นชุดข้อมูลตัวเลขชุดหนึ่ง ซึ่งเมื่อนำมาแปลความและจัดเรียงรูปแบบใหม่ให้เหมาะสมสำหรับโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถแบ่งเป็น 3 ส่วนคือ ส่วนแรกเป็นข้อมูลของจุดมุมเซลล์ ส่วนที่สองเป็นข้อมูลของความสัมพันธ์ของเซลล์ รวมทั้งความสัมพันธ์ของเซลล์ที่จำเป็นทั้งหมดและส่วนที่สามเป็นคุณสมบัติและเงื่อนไขขอบปัญหาที่ด้านต่าง ๆ ซึ่งเมื่อส่งผ่านชุดข้อมูลทั้ง 3 ส่วนเข้าสู่โปรแกรมแล้วที่พัฒนาก็จะได้ผลลัพธ์ของการคำนวณเป็นชุดข้อมูลการกระจายตัวบนรูปทรงของปัญหาโดยผลลัพธ์แสดงบนจุดพิกัด (x, y) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำไปตรวจสอบกับผลเฉลยอ้างอิงที่น่าเชื่อถือได้ และนำไปสู่กระบวนการปรับปรุงโปรแกรมให้ถูกต้อง ขั้นตอนดำเนินการวิจัยแสดงในรูปที่ 3.2



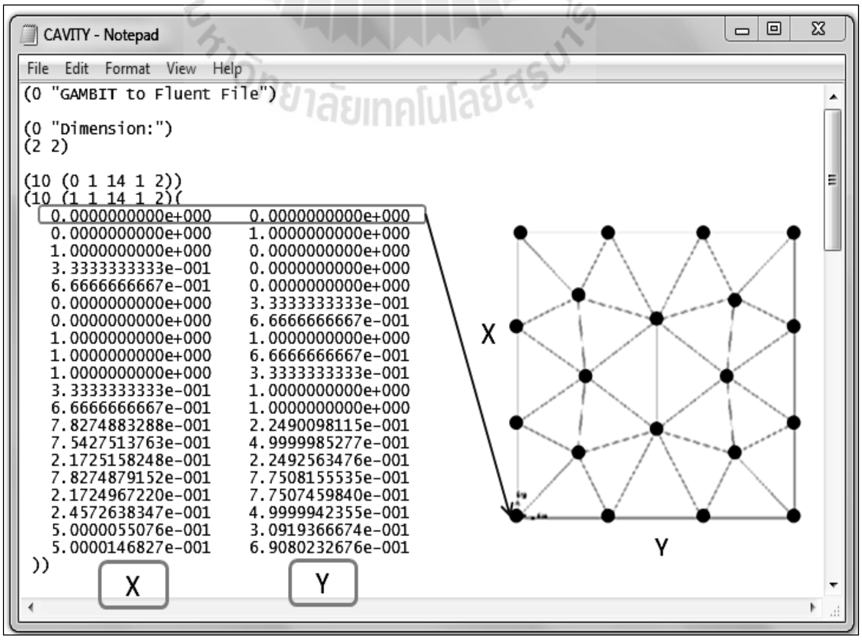
รูปที่ 3.2 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

3.3 การประมวลผลก่อน

เริ่มต้นโดยการสร้างรูปทรงของปัญหาที่จะใช้ทดสอบโดยใช้โปรแกรมแกมบิท (Gambit) จากนั้นสั่งให้ตัวโปรแกรมแกมบิทสร้างกริดแบบสามเหลี่ยมขึ้นมาโดยแบ่งรูปทรงของปัญหาเป็นเซลล์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.3 โปรแกรมแกมบิทให้ข้อมูลของจุดมุมของเซลล์ออกมาเป็นไฟล์นามสกุล msh ในรูปของตัวเลขฐานสิบ ดังแสดงในรูปที่ 3.4 และความสัมพันธ์ของแต่ละเซลล์นั้นเป็นเลขฐานสิบหก ดังแสดงในรูปที่ 3.6

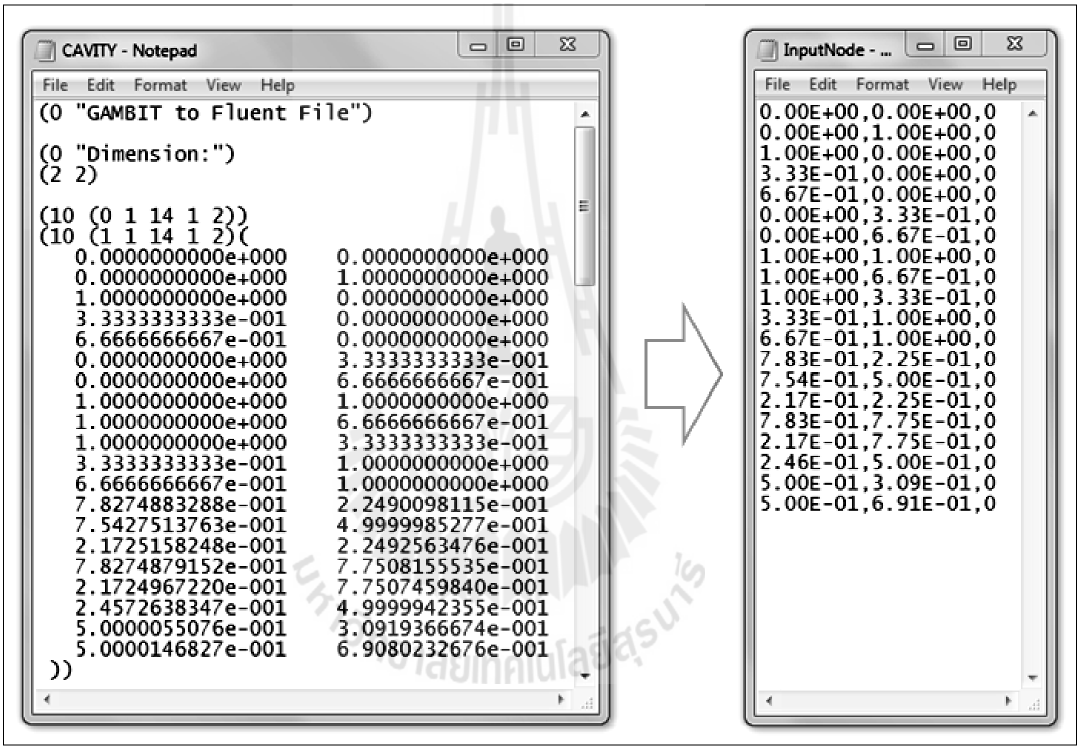


รูปที่ 3.3 การสร้างกริดของโปรแกรมแกมบิท

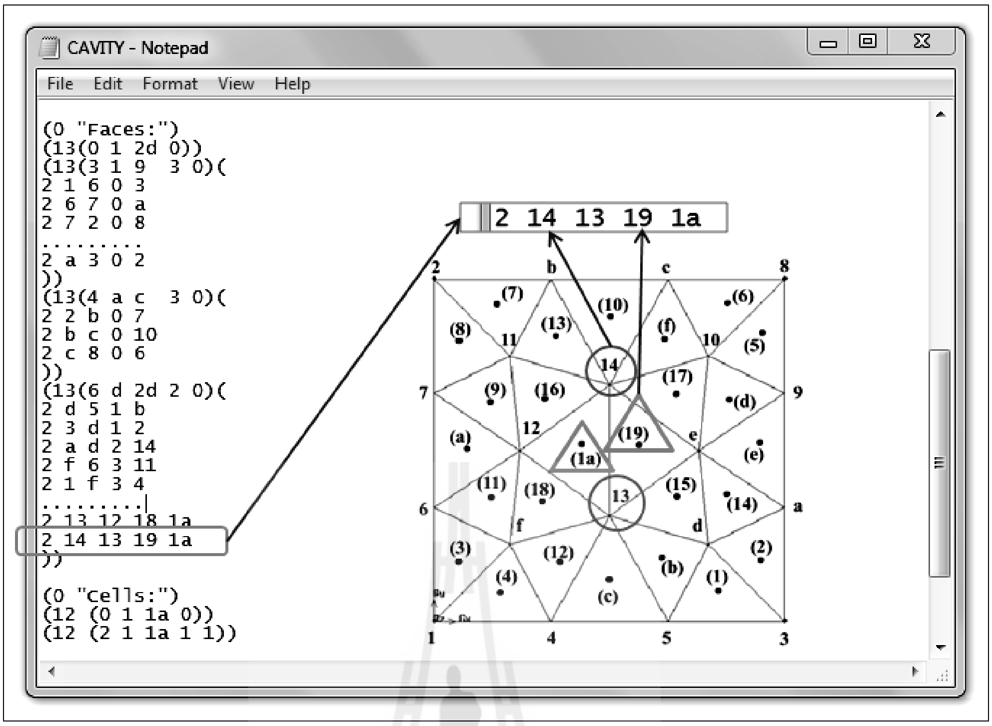


รูปที่ 3.4 ไฟล์ข้อมูลแกมบิทแสดงฐานข้อมูลของจุดมุมเซลล์ 2 มิติ

รูปที่ 3.4 แสดงข้อมูลของเซลล์มีจำนวน 2 คอลัมน์ เรียงลำดับจากบนลงล่างและตัวเลขเป็นเลขฐานสิบ ส่วนพิกัด (x, y, z) เรียงลำดับจากด้านซ้ายไปขวา โดยคอลัมน์แรกเป็นพิกัด x และคอลัมน์ที่สองเป็นพิกัด y เมื่อพิจารณาปัญหาแบบ 2 มิติ จึงทำให้พิกัด z ไม่ได้นำมาพิจารณาให้ค่าเป็นศูนย์ พิกัดนั้นเริ่มเรียงลำดับจุดพิกัดจากส่วนด้านนอกของปัญหาก่อนแล้ววนเข้าไปสู่ด้านในสุด จากนั้นทำการเปลี่ยนจุดมุมเซลล์ให้อยู่ในรูปของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมพัฒนาสามารถนำไปใช้ได้ ซึ่งข้อมูลจะเรียงลำดับตามจุดพิกัดส่วนพิกัด (x, y, z) จากด้านซ้ายไปขวา เมื่อครบค่าพิกัดจะเริ่มต้นบรรทัดใหม่ด้วยจุดพิกัดใหม่ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบดังแสดงในรูปที่ 3.5

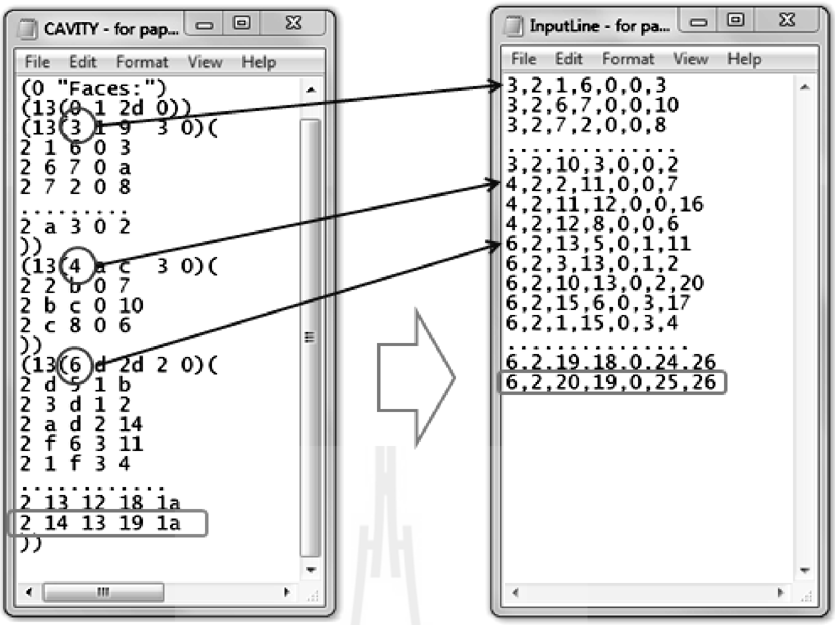


รูปที่ 3.5 ไฟล์ข้อมูลของจุดมุมของเซลล์



รูปที่ 3.6 ไฟล์ข้อมูลความสัมพันธ์ของเซลล์ 2 มิติ

รูปที่ 3.6 ไฟล์ข้อมูลความสัมพันธ์ของเซลล์จากโปรแกรมแกรมบิทจะเป็นเลขฐานสิบหก เรียงลำดับความสัมพันธ์จากซ้ายไปขวา จากความสัมพันธ์ของเซลล์สามารถนำไปสร้างไฟล์ข้อมูล ที่เป็นข้อมูลแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซลล์และจุดมุมของเซลล์ที่ใช้ในการสร้างด้านของเซลล์ ซึ่งบอกว่าเซลล์ที่สนใจอยู่ติดกับเซลล์อะไร พบว่ามีการจัดกลุ่มของข้อมูลเป็นบริเวณด้านขอบของปัญหาและด้านในของปัญหา โดยการเรียงลำดับของเซลล์จากน้อยบริเวณด้านขอบของปัญหาสู่เข้าสู่บริเวณสู่ด้านในมีจำนวน 7 คอลัมน์ โดยความหมายของความสัมพันธ์ของเซลล์ แสดงในรูปที่ 3.7



ไฟล์ข้อมูล	1	2	3	4	5	6	7
	ขอบเขต	มิติ	มุมของเซลล์ที่ 1	มุมของเซลล์ที่ 2	มุมของเซลล์ที่ 3	เลขของเซลล์ที่ 1	เลขของเซลล์ที่ 2
แกมบิท (เลขฐานสิบหก)	6	2	14	13	-	19	1a
การทำนายปัญหาการแพร่ (เลขฐานสิบ)	6	2	20	19	0	25	26

รูปที่ 3.7 ไฟล์ข้อมูลจุดมุมของเซลล์

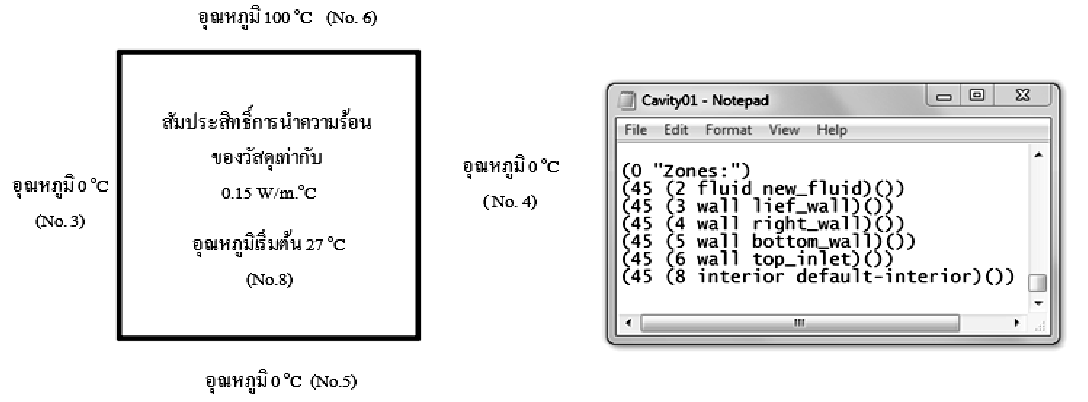
ลำดับที่ 1 หมายถึง หมายเลขกำกับขอบเขตของปัญหาเพื่อจัดความสัมพันธ์ของเงื่อนไขขอบเป็นชุดๆเพื่อใช้ในการแบ่งชุดเงื่อนไขขอบของปัญหา ซึ่งตัวเลขจะตั้งขึ้นโดยโปรแกรมที่สร้างกริด

ลำดับที่ 2 หมายถึง ตัวเลขบอกมิติของปัญหาที่คำนวณ หมายเลข 2 หมายถึงปัญหาบนรูปทรง 2 มิติ และหมายเลข 3 คือปัญหาบนรูปทรง 3 มิติ

ลำดับที่ 3, 4 และ 5 เป็นหมายเลขของจุดมุมของเซลล์ที่ใช้ในการสร้างด้านของเซลล์ (Face) ซึ่งปัญหาเป็นรูปทรง 2 มิติ จะให้หมายเลข 5 นั้นเป็นศูนย์

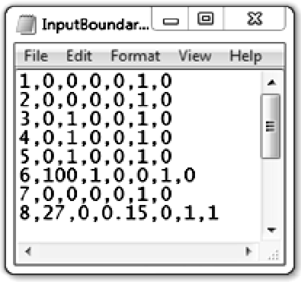
ลำดับที่ 6 และ 7 เป็นหมายเลขของเซลล์ที่อยู่ติดกันซ้ายขวาด้านของเซลล์

การสร้างไฟล์ข้อมูลเพื่อป้อนเงื่อนไขขอบให้กับโปรแกรมที่พัฒนานั้น ประกอบด้วยข้อมูลจำนวน 7 คอลัมน์ ดังแสดงในรูปที่ 3.8



การป้อนข้อมูลเงื่อนไขขอบเขตส่วนประมวลผล

ลำดับการป้อนข้อมูลเงื่อนไขขอบ						
1	2	3	4	5	6	7
ผนัง	อุณหภูมิ	ชนิดผนัง	สัมประสิทธิ์	ซอสพลังงาน	ความหนา	ตัวแปรขนาด
3	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1	0
6	100	1	0	0	1	0
8	27	0	0.15	0	1	1



รูปที่ 3.8 การป้อนข้อมูลเงื่อนไขขอบ

ลำดับที่ 1 หมายเลขกำกับขอบเขตของปัญหาเพื่อจัดความสัมพันธ์ของเงื่อนไขขอบเป็นชุด ๆ เพื่อใช้ในการแบ่งชุดเงื่อนไขขอบของปัญหา ซึ่งตัวเลขจะตั้งขึ้นโดยโปรแกรมสร้างกริด

ลำดับที่ 2 หมายถึง เป็นคุณสมบัติการแพร่หรือค่าอุณหภูมิที่ด้านเงื่อนไขขอบ

ลำดับที่ 3 หมายถึง หมายเลขกำกับประเภทหรือชนิดผนังของเงื่อนไขขอบเพื่อใช้ในการแบ่งชุดผนังของขอบในการคำนวณ (หมายเลข 1 เป็นผนังที่อุณหภูมิคงที่ หมายเลข 2 เป็นผนังที่มีซอสพลังงาน หมายเลข 3 เป็นผนังที่เป็นฉนวน หมายเลข 4 เป็นเงื่อนไขขอบแบบสมมาตร หมายเลข 5 เป็นผนังแบบการพา)

ลำดับที่ 4 หมายถึง สัมประสิทธิ์หรือค่าคงที่ของเงื่อนไขขอบ เช่น สัมประสิทธิ์การนำความร้อนและสัมประสิทธิ์การพาความร้อน เป็นต้น

ลำดับที่ 5 หมายถึง สัมประสิทธิ์ซอสพลังงาน

ลำดับที่ 6 หมายถึง ความหนาของปัญหา

ลำดับที่ 7 หมายถึง ตัวแปรขนาด เป็นค่าตัวแปรปรับย่อขนาดของรูปทรงปัญหาหรือหน่วย (ป้อนค่าตัวเลขเลข 1 หมายถึงหน่วยเมตรหรือไม่มีการปรับลดขนาด ตัวเลข 0.01 หมายถึงหน่วยเซ็นติเมตรหรือลดขนาดลง 100 เท่าและตัวเลข 0.001 หมายถึงหน่วยมิลลิเมตร)

3.4 การประมวลผล

ในส่วนการประมวลผลโปรแกรมถูกพัฒนาบนภาษา C++ การจะเขียนโปรแกรมนั้นต้องใช้ผลลัพธ์ที่เป็นสมการพีชคณิต โดยการแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งจะใช้วิธีไฟไนต์โวลุมเปลี่ยนจากสมการอนุพันธ์เป็นสมการพีชคณิต

3.4.1 วิธีไฟไนต์โวลุม

กระบวนการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิตนั้น เรียกว่ากระบวนการดิสครีไทเซชั่นโดยใช้วิธีไฟไนต์โวลุม หลักการคืออินทิเกรตสมการควบคุมตลอดปริมาตรควบคุม จากนั้นใช้แผนวิธีประมาณค่าเพื่อแปลงพจน์อนุพันธ์ให้เป็นพจน์ผลต่าง โดยปัญหาที่นำเสนอเป็นปัญหาการแพร่แบบคงตัว ซึ่งมีสมการควบคุมเป็นดังสมการที่ (3.1) ซึ่งในการแปลงการอินทิเกรตเชิงปริมาตรให้กลายเป็นการอินทิเกรตเชิงพื้นผิวอาศัยทฤษฎีไดเวอร์เจนต์เกาส์มาช่วยในการวิเคราะห์

3.4.2 วิธีไฟไนต์โวลุมกับปัญหาการแพร่

สมการควบคุมปัญหาการแพร่ในรูปทั่วไปเป็นดังนี้

$$div\left(\Gamma\ grad\ \phi\right)+S_{\phi}=0 \tag{3.1}$$

โดย Γ เป็นสัมประสิทธิ์การแพร่ ϕ เป็นตัวแปรที่สนใจและ S_{ϕ} เป็นซอส

ปัญหาดังกล่าวถูกแก้ด้วยวิธีไฟไนต์โวลุมโดยเริ่มจากการอินทิเกรตสมการควบคุมตลอดปริมาตรควบคุมได้เป็นดังนี้

$$\int_{\nabla V} div\left(\Gamma\ grad\ \phi\right)dV+\int_{\nabla V} S_{\phi}dV=0 \tag{3.2}$$

ซึ่งจะถูกเปลี่ยนเป็นการอินทิเกรตเชิงพื้นผิว dA โดยใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนต์ของเกาส์มาช่วยในการวิเคราะห์ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{Surface}\int_{Ai} n_i\cdot(\Gamma\ grad\ \phi)dA_i+\overline{S}_{\phi}\Delta V=0 \tag{3.3}$$

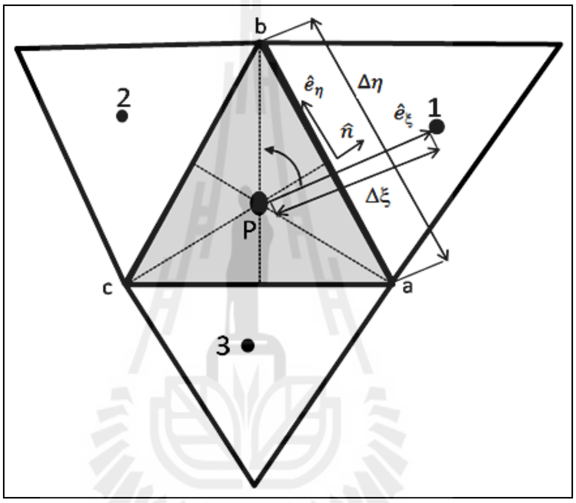
โดย $\overline{S}_{\phi}$ เป็นค่าเฉลี่ยของซอสบนปริมาตรควบคุมและ ΔV เป็นปริมาตรของเซลล์

3.4.3 การประยุกต์กริดแบบสามเหลี่ยมกับปัญหาการแพร่ 2 มิติ

กรณีกริดแบบสามเหลี่ยม จะมีจุดต่อเป็นจุดศูนย์กลางและมีด้านล้อมรอบเป็นรูปสามเหลี่ยม 3 ด้าน จึงได้สมการควบคุมดังนี้

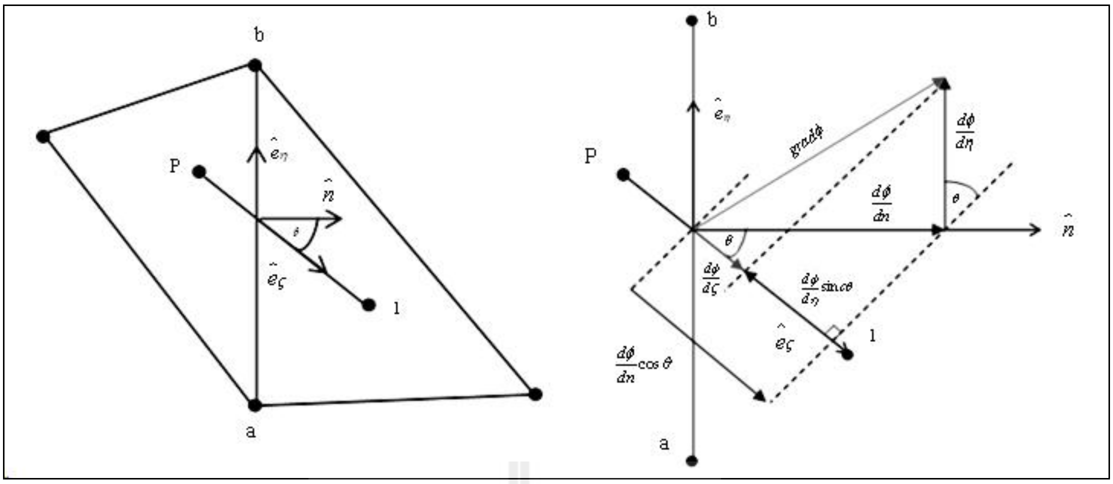
$$\sum_{i=1}^{3} n_i \cdot (\Gamma \; grad \; \phi)\Delta A_i + \overline{S}_{\phi}\Delta V = 0 \qquad (3.4)$$

รายละเอียดที่เกี่ยวกับกริดและการคำนวณแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 รายละเอียดของกริดแบบสามเหลี่ยม

พิจารณารูปที่ 3.9 เป็นกริดสามเหลี่ยมประกอบด้วย 3 ด้านเรียกว่าเซลล์ (ปริมาตรควบคุม) มุมของเซลล์มี 3 มุม เรียกว่า Vertex คือ จุด a, b และc ซึ่งถูกจัดวางลำดับในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้ได้เวคเตอร์ทิศทางในแนวตั้งฉาก (n) ในทิศทางพุ่งออกจากเซลล์ ซึ่งจะถูกใช้ในการคำนวณหาฟลักซ์ ซึ่งจุดโหนดสำหรับเก็บค่าตัวแปรต่างๆบนเซลล์ถูกสร้างที่จุด Centroid ของเซลล์แทนด้วยจุด P ส่วนเซลล์ข้างเคียงซึ่งอยู่ติดกับเซลล์ที่กำลังพิจารณานั้น ล้อมรอบด้วยเซลล์ทั้งหมด 3 เซลล์และระยะห่างระหว่างจุดโหนดของเซลล์ที่พิจารณาถึงเซลล์ข้างเคียงแทนด้วย $\Delta\xi$ ส่วนเวคเตอร์ $\hat{e}_\eta$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศขนานกับด้านของเซลล์ และ $\hat{e}\xi$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตามแนวเส้นเชื่อมจุดโหนด จากสมการที่ (3.4) พิจารณาเซลล์ P กับเซลล์ที่ 1 ซึ่งมีการไหลเข้าออกของฟลักซ์ผ่านด้านเซลล์ ab จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.10 รายละเอียดของเวคเตอร์บนพื้นที่หน้าตัด ab

จากรูปที่ 3.10 พบว่าค่าของเวคเตอร์ที่พิจารณา $n \cdot grad\ \phi = \partial\phi / \partial n$ และเวคเตอร์ประกอบมุม θ จะพบความสัมพันธ์ของระหว่างมุมและค่าเวคเตอร์ แสดงในสมการที่ (3.5) และสมการที่ (3.6) ซึ่งเมื่อพิจารณาขนาดของเวคเตอร์ในทิศทางจากจุด P ไปยังจุดที่ 1 จะได้ขนาดของค่า $\partial\phi / \partial\xi$ ดังแสดงในสมการที่ (3.7)

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} n \cdot \hat{e}_\xi = \frac{\partial\phi}{\partial n}\cos\theta \,; n \cdot \hat{e}_\xi = \cos\theta \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \hat{e}_\eta \cdot \hat{e}_\xi = -\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\sin e\theta \,; \hat{e}_\eta \cdot \hat{e}_\xi = -\sin e\theta \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial_\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial n}\cos\theta - \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\sin e\theta \tag{3.7}$$

เมื่อจัดเรียงสมการที่ (3.7) ให้อยู่ในรูปเวคเตอร์ $n \cdot grad\ \phi = \partial\phi / \partial n$ ที่เป็นการไหลเข้าของฟลักซ์บนหน้าตัด ab แสดงในสมการที่ (3.8) ดังนี้

$$n \cdot grad\ \phi = \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial_\xi}\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\tan\theta \tag{3.8}$$

เมื่อใช้วิธีผลต่างกลางในการประมาณค่าการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์ในทิศทางเวคเตอร์ $\hat{e}_{\xi}$ และเวคเตอร์ทิศทาง $\hat{e}_{\eta}$ จะได้สมการที่ (3.9)

$$\frac{\partial \phi}{\partial_{\xi}} = \frac{\phi_1 - \phi_P}{\Delta \xi}, \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta} \tag{3.9}$$

เมื่อพิจารณาฟลักซ์บนด้าน ab คือ $n \cdot grad\ \phi\ \Delta A$ และนำสมการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์สมการที่ (3.9) แทนในสมการที่ (3.8) จะได้ผลลัพธ์เป็นสมการที่ (3.10) ด้านล่าง

$$n \cdot grad\ \phi\ \Delta A \left(\frac{\phi_1 - \phi_P}{\Delta \xi} \right) \frac{1}{\cos \theta} + \Delta A \left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta} \right) \tan \theta \tag{3.10}$$

แปลงสมการอยู่ในรูปของมุม ϕ ให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์โดยนำสมการที่ (3.5) และ (3.6) แทนในสมการที่ (3.11) จะได้สมการดังนี้

$$\begin{gathered} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{n \cdot \hat{e}_{\xi}} = \frac{n \cdot n}{n \cdot \hat{e}_{\xi}}, \tan \theta = \frac{\sin e\theta}{\cos \theta} = \frac{-(\hat{e}_{\xi} \cdot \hat{e}_{\eta})}{(n \cdot \hat{e}_{\xi})} \\ n \cdot grad\ \phi\ \Delta A = \Delta A \left(\frac{\phi_1 - \phi_P}{\Delta \xi} \right) \frac{n \cdot n}{n \cdot \hat{e}_{\xi}} - \Delta A \left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta} \right) \frac{(\hat{e}_{\xi} \cdot \hat{e}_{\eta})}{(n \cdot \hat{e}_{\xi})} \end{gathered} \tag{3.11}$$

ดังนั้นฟลักซ์การแพร่บนด้าน ab สามารถจัดรูป ได้ดังนี้

$$n \cdot (\Gamma\ grad\ \phi)\ \Delta A = \underbrace{\left(\frac{\Gamma}{\Delta \xi} \frac{n \cdot n}{n \cdot \hat{e}_{\xi}} \Delta A (\phi_1 - \phi_P) \right)}_{Direct\ gradient} + \underbrace{\left(-\Gamma \frac{\hat{e}_{\xi} \cdot e_{\eta}}{n \cdot \hat{e}_{\xi}} \Delta A \left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta} \right) \right)}_{Cross-diffusion} \tag{3.12}$$

$$n = \frac{\Delta Y}{\Delta A} \vec{i} - \frac{\Delta X}{\Delta A} \vec{j} = \frac{Y_b - Y_a}{\Delta \eta} \vec{i} - \frac{X_b - X_a}{\Delta \eta} \vec{j} \tag{3.13}$$

โดย ΔA เป็นพื้นที่หน้าตัดของแต่ละด้านของเซลล์ และ $\Delta \eta$ เป็นขนาดของเวคเตอร์ $\hat{e}_{\eta}$

$$\hat{e}_{\xi} = \frac{X_1 - X_P}{\Delta\xi}\vec{i} + \frac{Y_1 - Y_P}{\Delta\xi}\vec{j} \tag{3.14}$$

$$\hat{e}_{\eta} = \frac{X_b - X_a}{\Delta\eta}\vec{i} + \frac{Y_b - Y_a}{\Delta\eta}\vec{j} \tag{3.15}$$

สมการที่ (3.12) จัดให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$n \cdot (\Gamma \ grad \ \phi)\Delta A = D(\phi_1 - \phi_P) + SD \tag{3.16}$$

$$D = \frac{\Gamma}{\Delta\xi}\frac{n \cdot n}{n \cdot \hat{e}_{\xi}}\Delta A \tag{3.17}$$

$$SD = -\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi} \cdot \hat{e}_{\eta}}{n \cdot \hat{e}_{\xi}}\Delta A\left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta\eta}\right) \tag{3.18}$$

ดังนั้นเมื่อพิจารณาครบทั้ง 3 ด้านของเซลล์ได้เป็นดังนี้

$$\sum_{i=1}^{3}\left[D_i(\phi_i - \phi_P) + SD_i\right] + \overline{S}_{\phi}\Delta V = 0 \tag{3.19}$$

จากสมการที่ (3.19) เมื่อประยุกต์เข้ากับเซลล์จะได้สมการเชิงเส้นที่เขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็นดังนี้

$$a_p\phi_p = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3 + SD_1 + SD_2 + SD_3 + S_u \tag{3.20}$$

$$a_1 = \frac{\Gamma}{\Delta\xi_1}\frac{n_1 \cdot n_1}{n_1 \cdot \hat{e}_{\xi_1}}\Delta A_1 \tag{3.21}$$

$$a_2 = \frac{\Gamma}{\Delta\xi_2}\frac{n_2 \cdot n_2}{n_2 \cdot \hat{e}_{\xi_2}}\Delta A_2 \tag{3.22}$$

$$a_3 = \frac{\Gamma}{\Delta\xi_3}\frac{n_3 \cdot n_3}{n_3 \cdot \hat{e}_{\xi_3}}\Delta A_3 \tag{3.23}$$

$$SD_1 = -\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi_1} \cdot \hat{e}_{\eta_1}}{n_1 \cdot \hat{e}_{\xi_1}}\Delta A_1\left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta\eta_1}\right) \tag{3.24}$$

$$SD_2 = -\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi_2} \cdot \hat{e}_{\eta_2}}{n_2 \cdot \hat{e}_{\xi_2}}\Delta A_2\left(\frac{\phi_c - \phi_b}{\Delta\eta_2}\right) \tag{3.25}$$

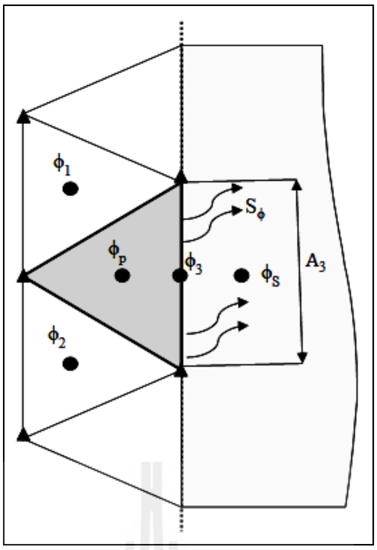
$$SD_3 = -\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi_3} \cdot \hat{e}_{\eta_3}}{n_3 \cdot \hat{e}_{\xi_3}}\Delta A_3\left(\frac{\phi_a - \phi_c}{\Delta\eta_3}\right) \tag{3.26}$$

$$a_p = a_1 + a_2 + a_3 - S_p \tag{3.27}$$

เมื่อประยุกต์กับทุกเซลล์จนครบ จะได้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนเซลล์ในโดเมนปัญหา ระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวจะถูกนำไปแก้หาคำตอบด้วยกระบวนการคำนวณซ้ำ

3.4.4 การประยุกต์เงื่อนไขขอบและซอส

เงื่อนไขขอบของการแพร่นั้นมีหลายแบบและมีความยุ่งยากในการกำหนดแตกต่างกันไป การกำหนดของเงื่อนไขขอบไม่เหมาะสมนำไปสู่การได้ผลลัพธ์ที่ผิดพลาดจากความเป็นจริง แต่การกำหนดเงื่อนไขขอบให้เหมาะสมนั้นจะต้องอาศัยความเข้าใจชนิดของเงื่อนไขขอบก่อนเป็นอันดับแรก ซึ่งในงานวิจัยได้พิจารณาเงื่อนไขขอบในหลายรูปแบบแสดงดังในรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 การพิจารณาเงื่อนไขขอบ

1) เงื่อนไขขอบแบบคงที่เป็นการกำหนดค่าตัวแปรตัวที่ขอบให้มีค่าคงที่ดังนี้

$$\phi_3 = constant = \phi_S \tag{3.28}$$

โดย ϕ_3 เป็นตัวแปรสนใจที่เงื่อนไขขอบ, ϕ_S เป็นค่าตัวแปรที่เงื่อนไขขอบ

2) เงื่อนไขขอบแบบแหล่งพลังงานคงที่เป็นการกำหนดตัวแปรแหล่งพลังงานที่ขอบมีค่าคงที่ดังนี้

$$S_u = constant = S_\phi \cdot A_3 \tag{3.29}$$

โดย S_ϕ เป็นตัวแปรแหล่งพลังงาน และ A_3 เป็นพื้นที่ผิวเซลล์ขอบเขต

3) เงื่อนไขขอบแบบฉนวนเป็นการกำหนดตัวแปรแหล่งพลังงานที่ขอบให้มีค่าเป็นศูนย์ดังสมการต่อไปนี้

$$S_u = S_\phi = 0 \tag{3.30}$$

โดย S_ϕ เป็นเป็นตัวแปรแหล่งพลังงาน

4) เงื่อนไขขอบแบบสมมาตรเป็นการกำหนดตัวแปรที่เซลล์มีค่าเท่ากับที่เงื่อนไขขอบดังสมการต่อไปนี้

$$\phi_3 = \phi_P \tag{3.31}$$

โดย ϕ_3 เป็นตัวแปรสนใจที่เงื่อนไขขอบ และ ϕ_P เป็นตัวแปรที่จุดต่อของเซลล์

5) เงื่อนไขขอบแบบการพาที่บริเวณพื้นผิวของเซลล์เป็นการกำหนดค่าตัวแปรที่สภาพแวดล้อมมีค่าคงที่ดังนี้

$$S_u = h \cdot A_3 \cdot \left(\phi_3 - \phi_S\right) \tag{3.32}$$

โดย ϕ_3 เป็นตัวแปรที่สนใจที่ผิวเงื่อนไขขอบ ϕ_S เป็นตัวแปรที่สภาพแวดล้อมเซลล์ A_3 เป็นพื้นที่ผิวเซลล์ที่ขอบ และ h เป็นสัมประสิทธิ์การพาของเงื่อนไขขอบ

6) แหล่งพลังงานภายในเซลล์คงที่เป็นการกำหนดตัวแปรแหล่งพลังงานที่เซลล์มีค่าคงที่ดังสมการต่อไปนี้

$$S_u = \overline{S}_\phi \cdot V \tag{3.33}$$

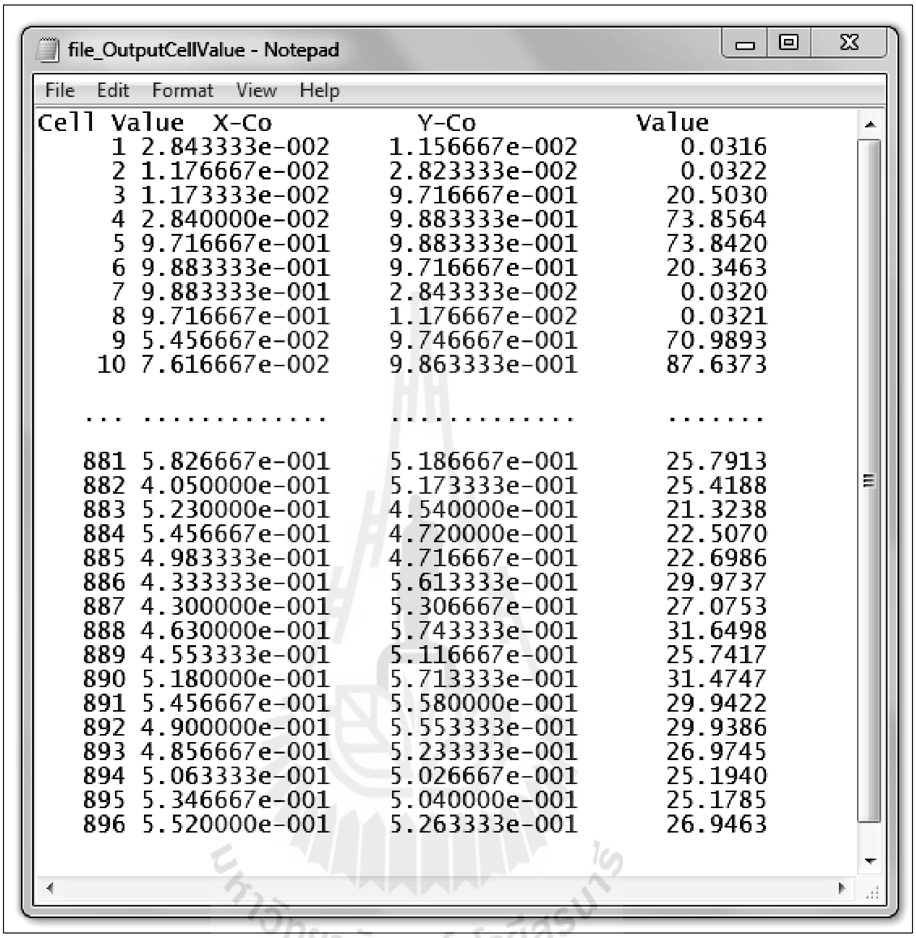
โดย $\overline{S}_\phi$ เป็นตัวแปรพลังงาน และ V เป็นปริมาตรของเซลล์

ในการคำนวณที่เงื่อนไขขอบนั้นอุณหภูมิที่สนใจและปริมาณการไหลของฟลักซ์ที่ผ่านเงื่อนไขขอบนั้นต่างเป็นค่าที่ไม่ทราบค่า ซึ่งสิ่งที่ทราบคืออุณหภูมิของเงื่อนไขขอบและสภาพแวดล้อมภายนอกนั้น ดังนั้นต้องใช้การประมาณค่าให้ถูกต้องที่ให้เงื่อนไขขอบให้เกิดความสมดุลของปริมาณการไหลของฟลักซ์จึงจะถูกต้อง

3.5 การประมวลผลหลัง

ส่วนแสดงผลการทำนายปัญหาการแพร่นั้นจะได้ผลออกมาเป็นค่าตัวเลขที่เป็นฐานข้อมูลสามารถนำไปใช้แสดงผลในรูปของกราฟคอนทัวร์ กราฟพื้นผิว ซึ่งในการทำวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาในส่วนของการประมวลผลเท่านั้น จึงได้ผลลัพธ์เป็นฐานข้อมูลการแพร่อยู่ในรูปของพิกัด (x, y) เช่น การแสดงผลลัพธ์การคำนวณของเซลล์ ซึ่งแสดงผลเป็น 4 คอลัมน์ ซึ่งคอลัมน์แรกจะเป็นตัวเลขกำกับของเซลล์ ส่วนคอลัมน์ที่สองและสามเป็นตำแหน่งของเซลล์เป็นพิกัด (x, y) โดยเป็นพิกัด x

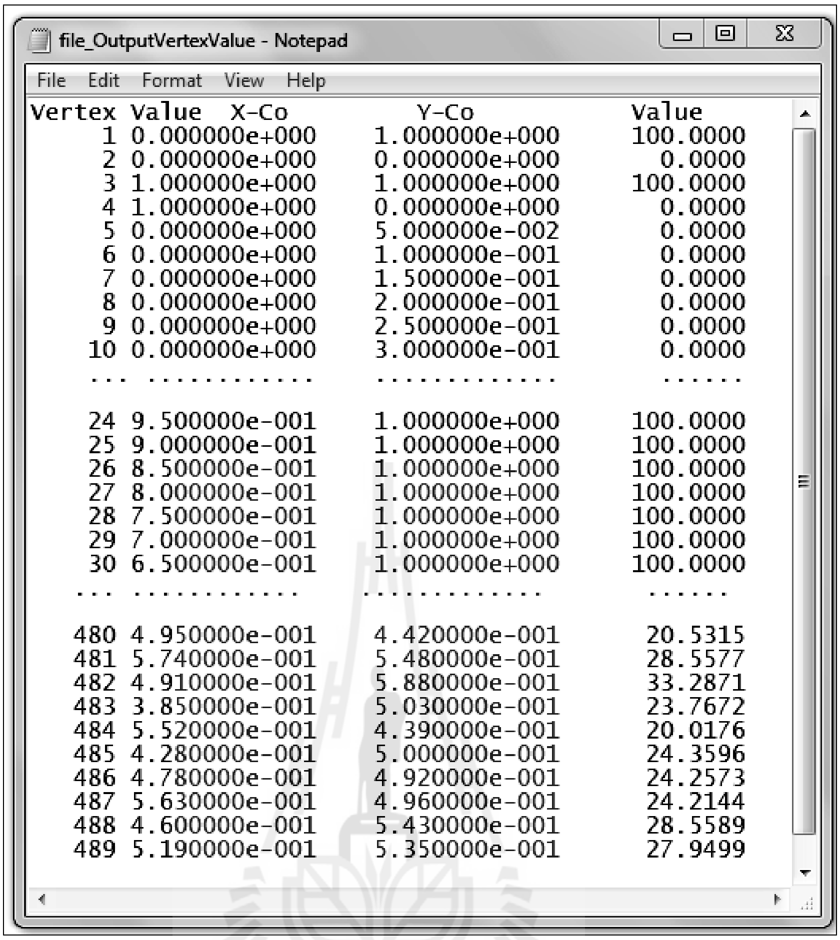
คอลัมน์ที่สองและคอลัมน์ที่สามเป็นพิกัด y ตามลำดับ ซึ่งคอลัมน์สุดท้ายเป็นค่าผลลัพธ์ของเซลล์ที่จุดพิกัด (x, y) นั้น ๆ แสดงในรูปที่ 3.12 ดังนี้



Cell Value	X-Co	Y-Co	Value
1	2.843333e-002	1.156667e-002	0.0316
2	1.176667e-002	2.823333e-002	0.0322
3	1.173333e-002	9.716667e-001	20.5030
4	2.840000e-002	9.883333e-001	73.8564
5	9.716667e-001	9.883333e-001	73.8420
6	9.883333e-001	9.716667e-001	20.3463
7	9.883333e-001	2.843333e-002	0.0320
8	9.716667e-001	1.176667e-002	0.0321
9	5.456667e-002	9.746667e-001	70.9893
10	7.616667e-002	9.863333e-001	87.6373
...	....	....	....
881	5.826667e-001	5.186667e-001	25.7913
882	4.050000e-001	5.173333e-001	25.4188
883	5.230000e-001	4.540000e-001	21.3238
884	5.456667e-001	4.720000e-001	22.5070
885	4.983333e-001	4.716667e-001	22.6986
886	4.333333e-001	5.613333e-001	29.9737
887	4.300000e-001	5.306667e-001	27.0753
888	4.630000e-001	5.743333e-001	31.6498
889	4.553333e-001	5.116667e-001	25.7417
890	5.180000e-001	5.713333e-001	31.4747
891	5.456667e-001	5.580000e-001	29.9422
892	4.900000e-001	5.553333e-001	29.9386
893	4.856667e-001	5.233333e-001	26.9745
894	5.063333e-001	5.026667e-001	25.1940
895	5.346667e-001	5.040000e-001	25.1785
896	5.520000e-001	5.263333e-001	26.9463

รูปที่ 3.12 ฐานข้อมูลผลลัพธ์ของเซลล์

ส่วนผลลัพธ์การคำนวณจุดมุมของเซลล์ ซึ่งแสดงผลเป็น 4 คอลัมน์ ซึ่งคอลัมน์แรกจะเป็นตัวเลขกำกับจุดมุมของเซลล์ ส่วนคอลัมน์ที่สองและสามจะเป็นพิกัดบอกตำแหน่งจุดมุมของเซลล์เป็นพิกัด (x, y) โดยแสดงพิกัด x ก่อนแล้วตามด้วยพิกัด y ตามลำดับ ซึ่งคอลัมน์ที่สี่เป็นค่าผลลัพธ์ที่จุดมุมของเซลล์ที่พิกัด (x, y) นั้น ๆ แสดงในรูปที่ 3.13 ดังนี้



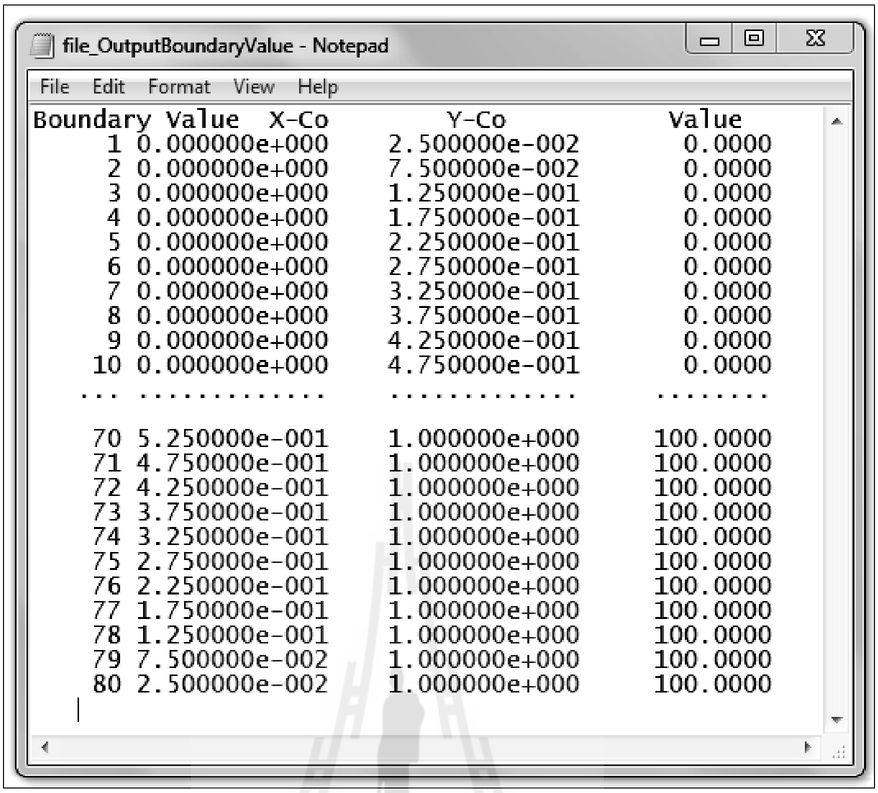
file_OutputVertexValue - Notepad

File Edit Format View Help

Vertex	Value X-Co	Y-Co	Value
1	0.000000e+000	1.000000e+000	100.0000
2	0.000000e+000	0.000000e+000	0.0000
3	1.000000e+000	1.000000e+000	100.0000
4	1.000000e+000	0.000000e+000	0.0000
5	0.000000e+000	5.000000e-002	0.0000
6	0.000000e+000	1.000000e-001	0.0000
7	0.000000e+000	1.500000e-001	0.0000
8	0.000000e+000	2.000000e-001	0.0000
9	0.000000e+000	2.500000e-001	0.0000
10	0.000000e+000	3.000000e-001	0.0000
...	....	....	......
24	9.500000e-001	1.000000e+000	100.0000
25	9.000000e-001	1.000000e+000	100.0000
26	8.500000e-001	1.000000e+000	100.0000
27	8.000000e-001	1.000000e+000	100.0000
28	7.500000e-001	1.000000e+000	100.0000
29	7.000000e-001	1.000000e+000	100.0000
30	6.500000e-001	1.000000e+000	100.0000
...	....	....	......
480	4.950000e-001	4.420000e-001	20.5315
481	5.740000e-001	5.480000e-001	28.5577
482	4.910000e-001	5.880000e-001	33.2871
483	3.850000e-001	5.030000e-001	23.7672
484	5.520000e-001	4.390000e-001	20.0176
485	4.280000e-001	5.000000e-001	24.3596
486	4.780000e-001	4.920000e-001	24.2573
487	5.630000e-001	4.960000e-001	24.2144
488	4.600000e-001	5.430000e-001	28.5589
489	5.190000e-001	5.350000e-001	27.9499

รูปที่ 3.13 ฐานข้อมูลผลลัพธ์ของจุดมุมของเซลล์

ผลลัพธ์การคำนวณของเงื่อนไขขอบ ซึ่งแสดงผลเป็น 4 คอลัมน์ ซึ่งคอลัมน์แรกจะเป็นตัวเลขกำกับเงื่อนไขขอบ ส่วนคอลัมน์ที่สองและสามจะเป็นพิกัดบอกตำแหน่งของเงื่อนไขขอบเป็นพิกัด (x, y) โดยแสดงพิกัด x แล้วตามด้วยพิกัด y ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3.14 ดังนี้


file_OutputBoundaryValue - Notepad

File Edit Format View Help

Boundary	Value X-Co	Y-Co	Value
1	0.000000e+000	2.500000e-002	0.0000
2	0.000000e+000	7.500000e-002	0.0000
3	0.000000e+000	1.250000e-001	0.0000
4	0.000000e+000	1.750000e-001	0.0000
5	0.000000e+000	2.250000e-001	0.0000
6	0.000000e+000	2.750000e-001	0.0000
7	0.000000e+000	3.250000e-001	0.0000
8	0.000000e+000	3.750000e-001	0.0000
9	0.000000e+000	4.250000e-001	0.0000
10	0.000000e+000	4.750000e-001	0.0000
...	....	....	....
70	5.250000e-001	1.000000e+000	100.0000
71	4.750000e-001	1.000000e+000	100.0000
72	4.250000e-001	1.000000e+000	100.0000
73	3.750000e-001	1.000000e+000	100.0000
74	3.250000e-001	1.000000e+000	100.0000
75	2.750000e-001	1.000000e+000	100.0000
76	2.250000e-001	1.000000e+000	100.0000
77	1.750000e-001	1.000000e+000	100.0000
78	1.250000e-001	1.000000e+000	100.0000
79	7.500000e-002	1.000000e+000	100.0000
80	2.500000e-002	1.000000e+000	100.0000

รูปที่ 3.14 ฐานข้อมูลผลลัพธ์ของเงื่อนไขขอบ

การแสดงผลลัพธ์อื่น ๆ ยังมีอีกหลายอย่าง ซึ่งเป็นการแสดงค่าความสัมพันธ์ของตัวแปร และค่าคงที่ต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณ บางส่วนเพื่อประโยชน์ในการตรวจสอบขั้นตอนการประมวลผลต่อไป

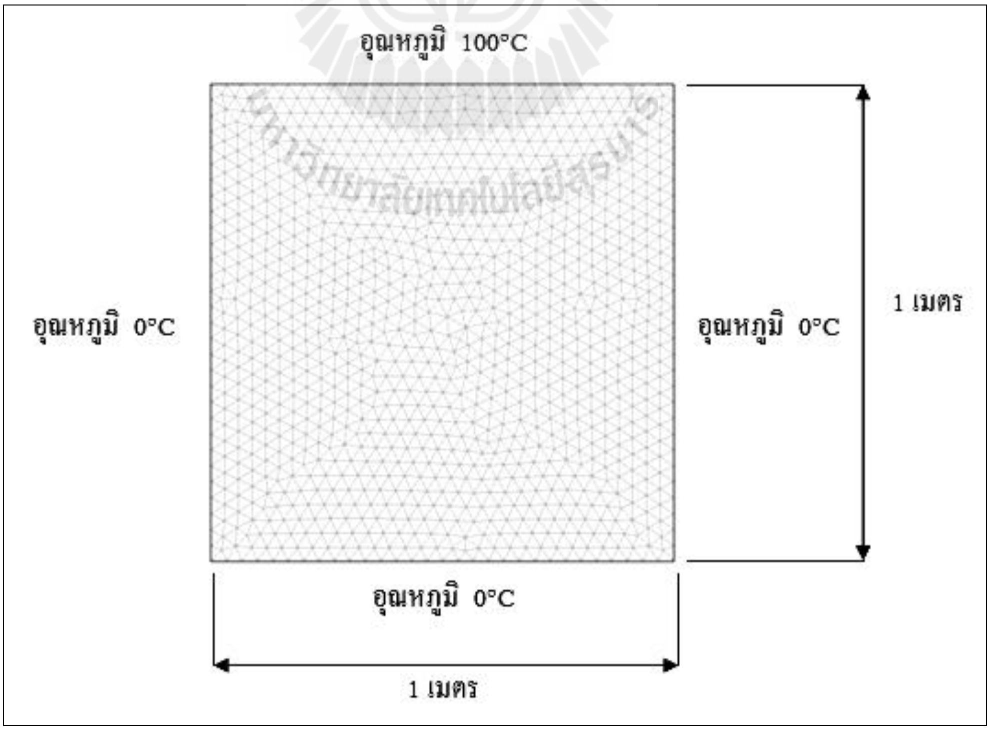
บทที่ 4
ผลการทดสอบและอภิปรายผล

กรณีทดสอบในการทำวิจัยมีทั้งหมด 5 กรณีดังนี้

1) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่
2) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ
3) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงกระบอกกลวง
4) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า
5) ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงซับซ้อน (ปะเก็น)

4.1 ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่

ปัญหาเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยม 2 มิติขนาดความกว้าง 1 เมตร และยาว 1 เมตร โดยที่ขอบด้านบนมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100 $^\circ C$ และขอบที่เหลืออีกสามด้านมีอุณหภูมิคงที่ค่าเท่ากับ 0 $^\circ C$ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 กำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุเท่ากับ 0.15 W/m $\cdot ^\circ K$



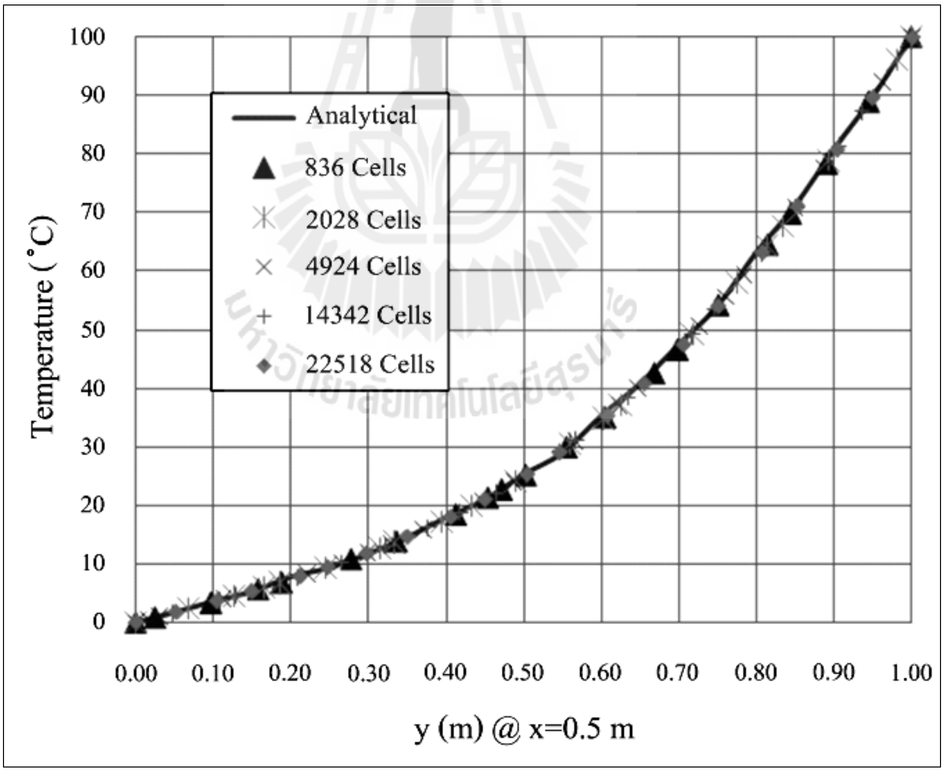
รูปที่ 4.1 ปัญหาทดสอบรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่

ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมดังกล่าวสามารถแก้ปัญหาหาค่าผลเฉลยแม่นตรงได้โดยใช้วิธีแยกตัวแปร (Separation of variables) ซึ่งให้ผลเฉลยแม่นตรงดังนี้

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi y)\sin(n\pi x) \tag{4.1}$$

$$A_n = 200\frac{1-(-1)^n}{n\pi\sinh(n\pi)} \tag{4.2}$$

เมื่อทำการทดสอบโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่จำนวนเซลล์เท่ากับ 836, 2028, 4924, 14342 และ 22518 เซลล์ บนแนวเส้นตรง y ที่ x=0.5 เมตร ดังแสดงเป็นกราฟในรูปที่ 4.2 พบว่าค่าที่ได้สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างดี

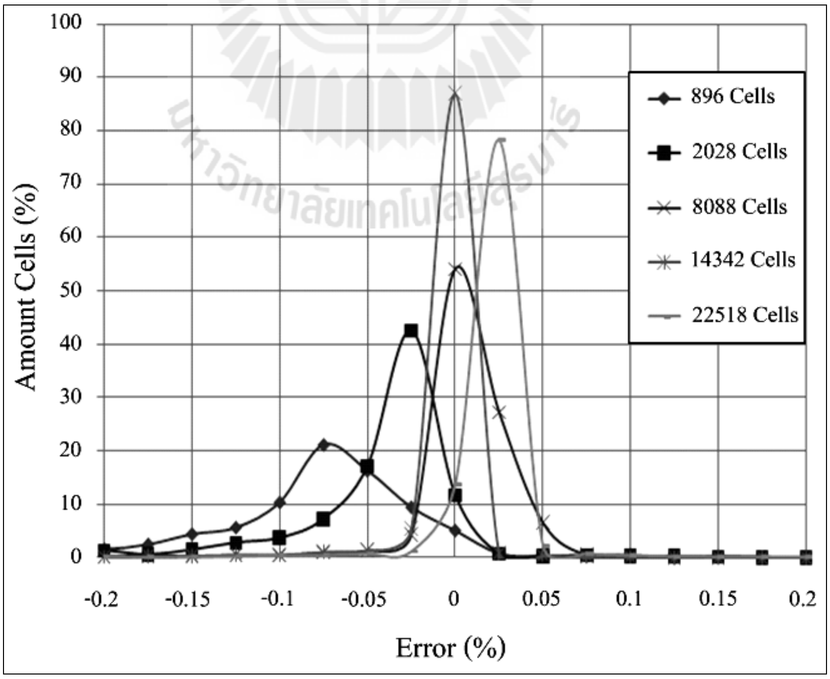


รูปที่ 4.2 เปรียบเทียบอุณหภูมิตามแนวแกน y ที่ x = 0.5 เมตร

เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณของโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นกราฟแจกแจงความถี่หรือฮิสโทแกรม (Histogram) ค่าความผิดพลาดเป็นเปอร์เซ็นต์แบบเซลล์ต่อเซลล์แสดงในกราฟรูปที่ 4.3 นั้นสามารถอธิบายนิยามเป็นดังนี้

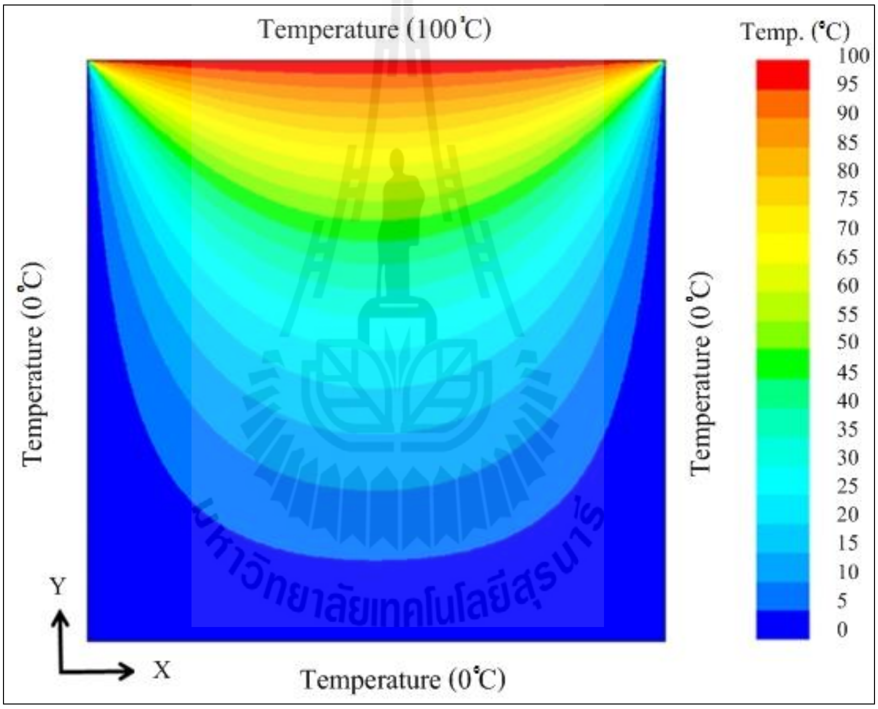
$$\text{เปอร์เซ็นต์ค่าผิดพลาด} = \left(\frac{\text{ผลการคำนวณของโปรแกรม} - \text{ผลเฉลยแม่นตรง}}{\text{ผลเฉลยแม่นตรง}} \right) \times 100$$

ซึ่งผลการคำนวณของโปรแกรมมีค่ามากกว่าผลเฉลยแม่นตรงจะเป็นค่าบวก ในทางตรงข้ามผลการคำนวณของโปรแกรมมีค่าน้อยกว่าจะมีค่าเป็นลบ เมื่อค่าที่ได้ทับซ้อนกันพอดีจะมีค่าเป็นศูนย์ซึ่งเป็นค่าที่ดีที่สุด ส่วนค่าในแนวแกนตั้งของกราฟในรูปที่ 4.3 นั้นจะเป็นการแสดงจำนวนความถี่ของกลุ่มข้อมูลที่มีค่าเท่ากันในช่วงหนึ่ง ๆ แต่ในที่นี้จะคิดในรูปของค่าเปอร์เซ็นต์ เช่น ผลแจกแจงความถี่ออกมาว่ากราฟแกนนอนมีกลุ่มเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.1% และแกนตั้งมีจำนวนเซลล์เท่ากับ 9% จากจำนวนเซลล์ทั้งหมดของปัญหา 1000 เซลล์ หมายความว่ากลุ่มเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดเท่ากับ 0.1% จะมีจำนวนเซลล์ที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันเท่ากับ 90 เซลล์จากทั้งหมด 1000 เซลล์



รูปที่ 4.3 เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดของรูปทรงสี่เหลี่ยมเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่

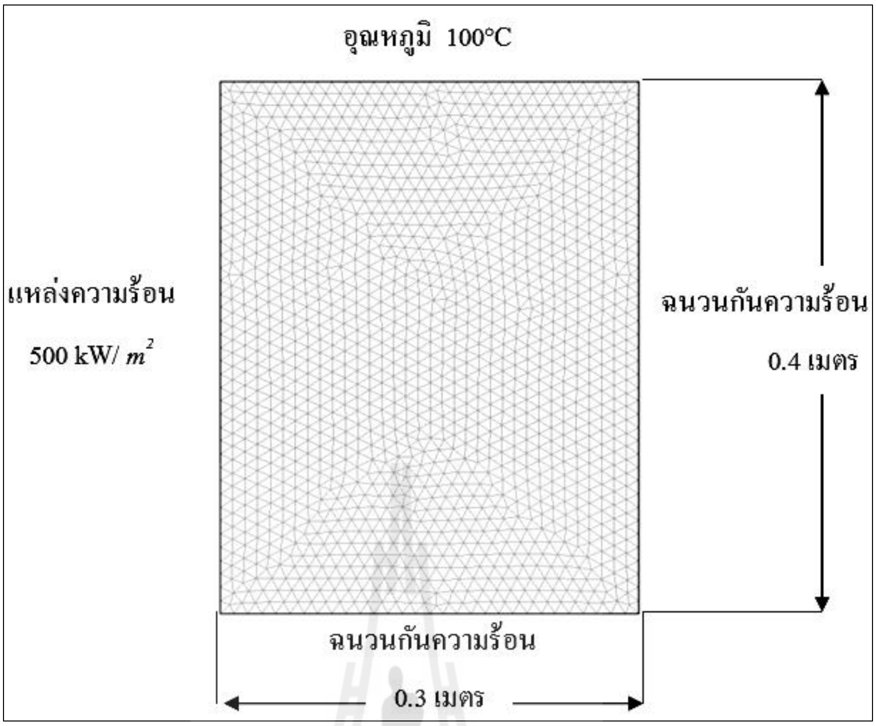
เมื่อพิจารณากราฟรูปที่ 4.3 พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนเซลล์มากขึ้นทำให้ผลการคำนวณมีค่าเข้าใกล้ค่าผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น แต่เมื่อจำนวนเซลล์ถึงระดับหนึ่งจะทำให้ค่ามีการเบี่ยงเบนออก ซึ่งเป็นผลมาจากความเสถียรภาพของโปรแกรมที่แกว่งตัวเมื่อมีปริมาณการคำนวณที่มากขึ้นตามปริมาณเซลล์ ดังนั้นในการเปรียบเทียบการทดสอบโปรแกรมในกรณีปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่ในช่วงเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาด -0.2% ถึง 0.1% ที่ 14342 เซลล์ให้ผลดีที่สุดเป็นเซลล์อ้างอิงของปัญหาพบว่าที่ด้านบนของปัญหามีอุณหภูมิสูงสุดเท่ากับ $100^{\circ}C$ และแพร่กระจายไปบริเวณขอบทั้งสามด้านที่อุณหภูมิต่ำสุดเท่ากับ $0^{\circ}C$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 การกระจายตัวอุณหภูมิรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่ของ 14342 เซลล์

4.2 ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ

ปัญหามีรูปทรงสี่เหลี่ยม 2 มิติ กว้าง 0.3 เมตร และยาว 0.4 เมตร ขอบด้านบนมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ $100^{\circ}C$ และขอบด้านซ้ายอยู่ติดกับพลังงานความร้อนขนาด 500 kW/m^2 ส่วนขอบด้านที่เหลือหุ้มฉนวน ดังแสดงในรูปที่ 4.5 กำหนดค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุเท่ากับ 1000 W/m$\cdot^{\circ}K$



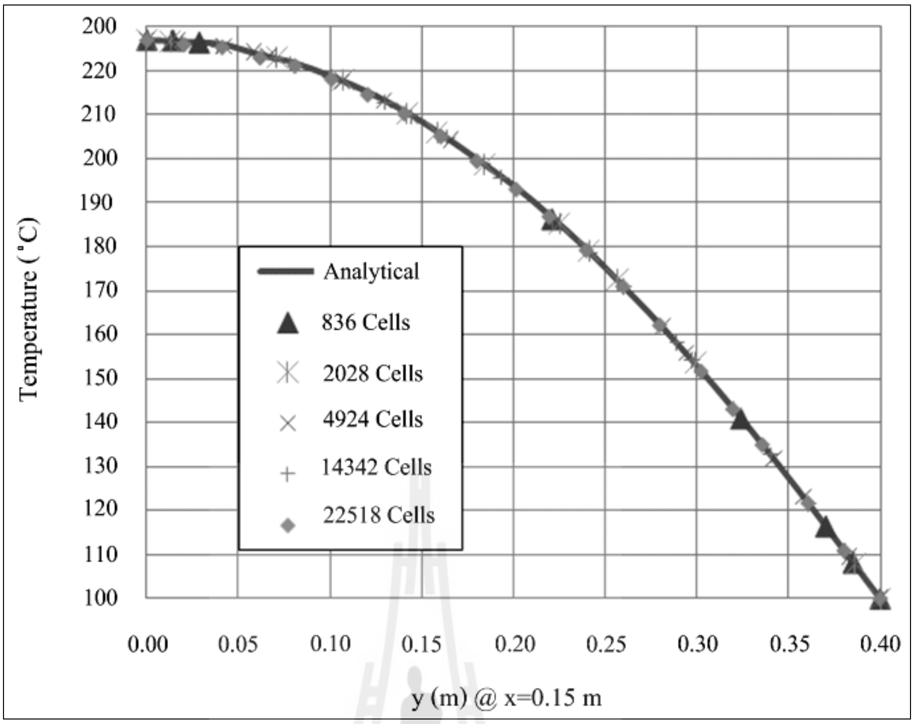
รูปที่ 4.5 ปัญหาทดสอบรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรง ดังนี้

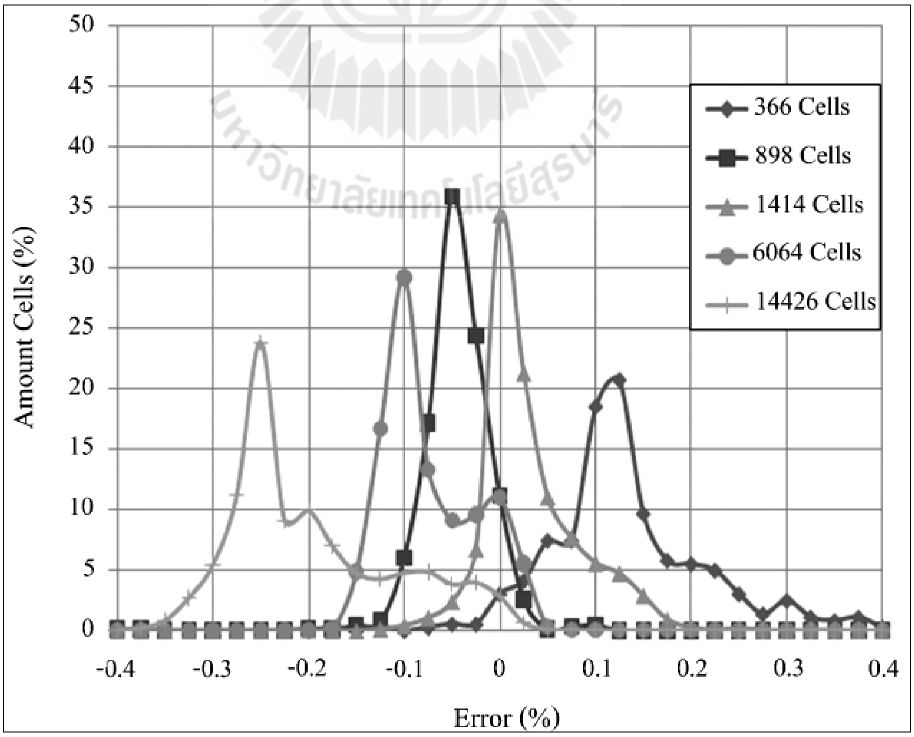
$$T(x,y) = \frac{2q}{kH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(a_n H)\cos(a_n y)\cosh(a_n x)}{a_n{}^2 s\,\mathrm{inh}(a_n L)} + T \tag{4.3}$$

เมื่อ $a_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2H}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

เมื่อทำการทดสอบโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่จำนวนเซลล์เท่ากับ 366, 898, 1414, 6064 และ 14426 เซลล์ บนแนวเส้นตรง y ที่ x = 0.15 เมตร พบว่าค่าที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันดี ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.6



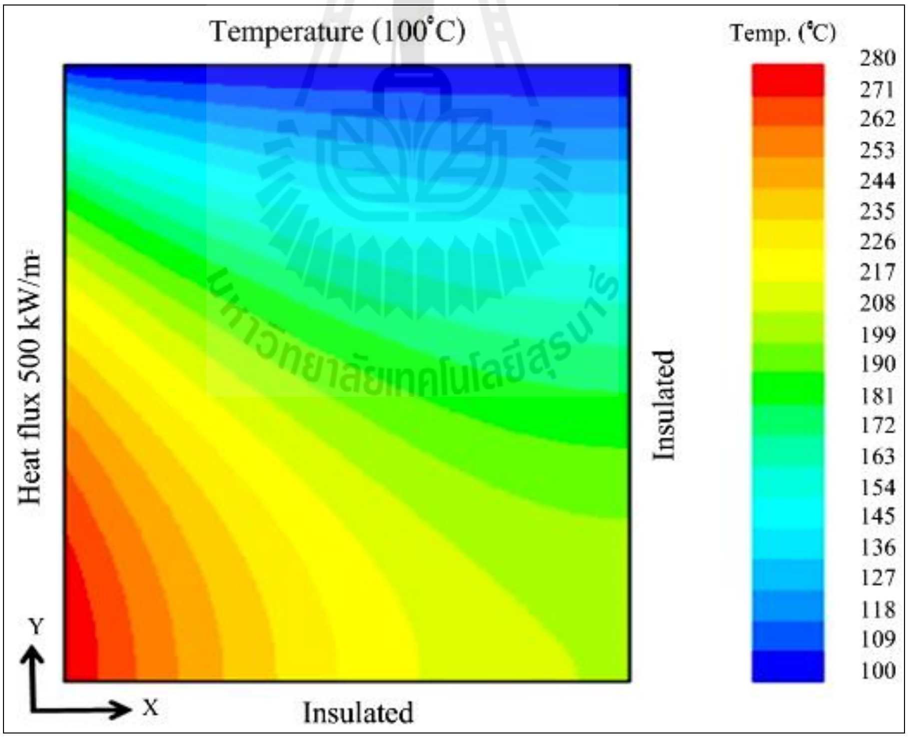
รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบอุณหภูมิตามแนวแกน y ที่ x = 0.15 เมตร



รูปที่ 4.7 เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดของรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบหลายแบบ

เมื่อพิจารณากราฟในรูปที่ 4.7 พบว่าในแต่ละเซลล์ที่ทดสอบเมื่อเพิ่มจำนวนเซลล์มากขึ้นทำให้ค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้น ส่วนการแกว่งตัวของผลการคำนวณมากขึ้นเมื่อมีปริมาณเซลล์มากเนื่องด้วยปริมาณการคำนวณมากตาม ซึ่งผลออกมาเหมือนกับกรณีปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่ เมื่อสังเกตกราฟพบว่าค่าของกลุ่มข้อมูลสูงสุดประมาณ 37% ที่ -0.5% และการกระจายตัวของกลุ่มข้อมูลมีความกว้างเพราะเงื่อนไขขอบแบบอุณหภูมิไม่คงที่ จึงทำให้ผลการคำนวณบริเวณขอบนั้นมีค่าความคลาดเคลื่อนได้

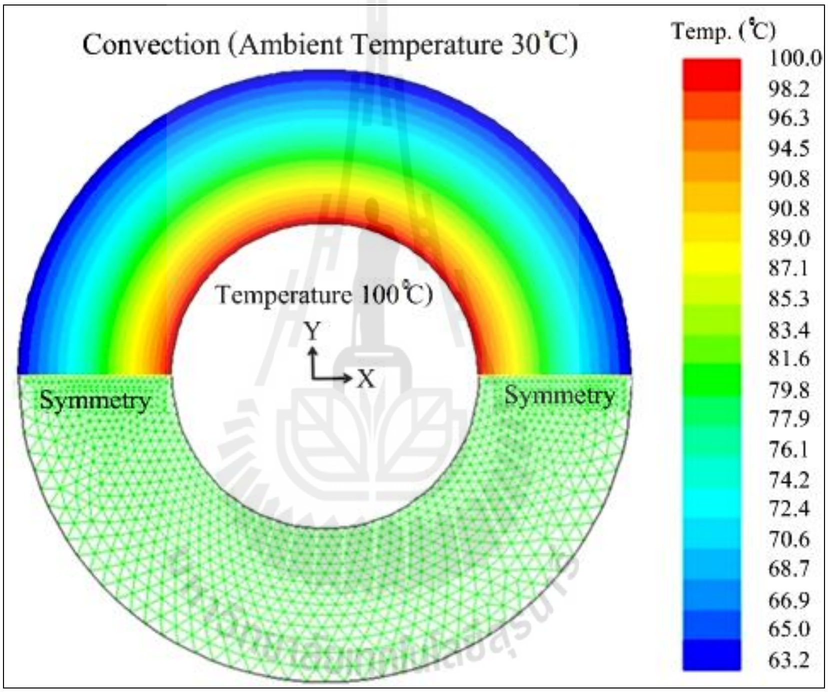
การเปรียบเทียบผลการทดสอบโปรแกรมปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบหลายแบบพบว่ากราฟช่วงเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาด -0.4% ถึง 0.4% ที่ 1414 เซลล์ให้ผลดีที่สุดจึงเป็นเซลล์อ้างอิงของปัญหาและแสดงผลการกระจายตัวของอุณหภูมิดังในรูปที่ 4.8 ซึ่งอุณหภูมิตรงบริเวณมุมด้านล่างของรูปทรงสี่เหลี่ยมมีอุณหภูมิสูงสุดที่ $280^\circ C$ เพราะฝั่งด้านซ้ายอยู่ติดกับพลังงานความร้อน รวมทั้งด้านล่างเป็นฉนวนกันความร้อนจึงทำให้บริเวณนี้สะสมความร้อนมากที่สุด ส่วนอุณหภูมิต่ำสุดที่ $100^\circ C$ บริเวณขอบด้านบน



รูปที่ 4.8 การกระจายตัวอุณหภูมิของรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบที่ 1414 เซลล์

4.3 ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงกระบอกกลวง

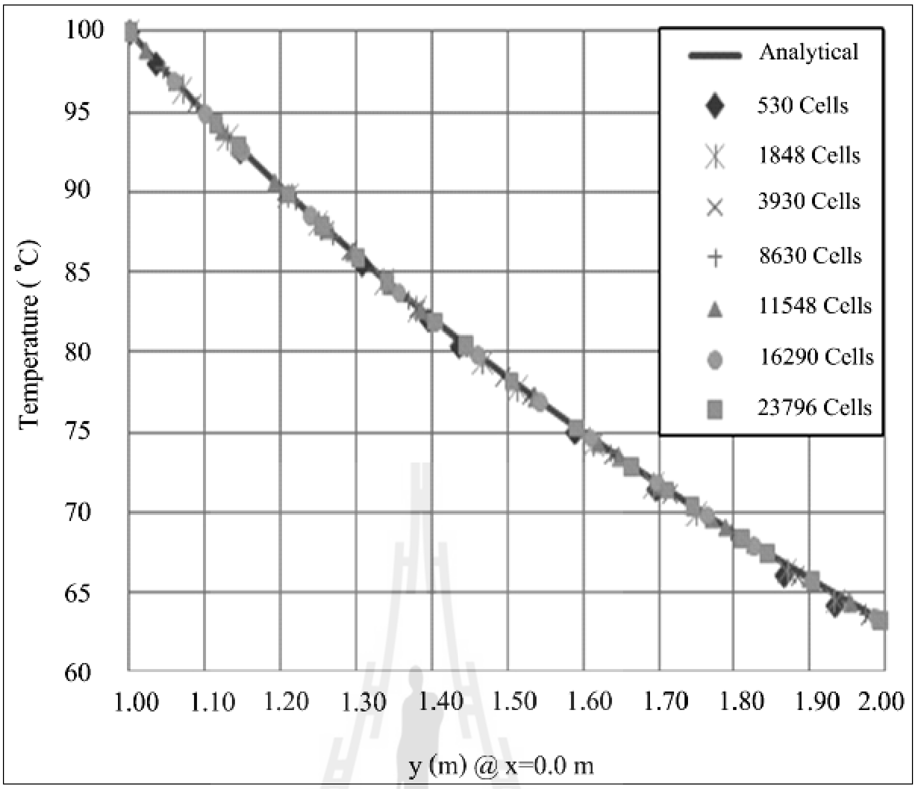
ปัญหาการนำความร้อนรูปทรงกระบอกกลวง 2 มิติ ขนาดหน้าตัด รัศมีภายนอกเท่ากับ 2 เมตร และรัศมีภายในเท่ากับ 1 เมตร โดยที่เงื่อนไขขอบบริเวณผิวภายในอุณหภูมิคงที่เท่ากับ $100^{\circ}C$ และผิวภายนอกเป็นอากาศมีอุณหภูมิเท่ากับ $30^{\circ}C$ ซึ่งในการพิจารณานั้นจะคำนวณในลักษณะครึ่งซีกบนเนื่องด้วยรูปทรงและเงื่อนไขขอบนั้นมีความสมมาตรกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.9 กำหนดสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 12 W/m^2 และสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุเท่ากับ 15 W/m$\cdot^{\circ}K$



รูปที่ 4.9 การกระจายตัวอุณหภูมิและรูปทรงของปัญหากระบอกกลวง

ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรง ดังนี้

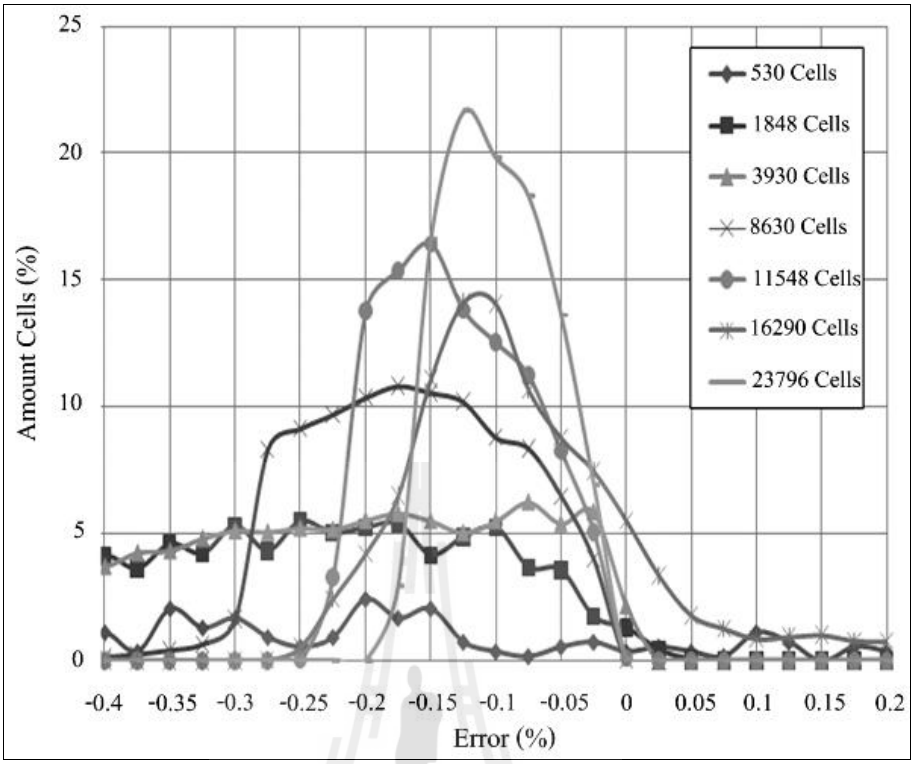
$$T(r) = T_{in} - \frac{hR_{out}(T_{in} - T_{amb})In\left(\frac{r}{R_{in}}\right)}{k + hR_{out}In\left(\frac{R_{out}}{R_{in}}\right)}; r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.4}$$



รูปที่ 4.10 เปรียบเทียบอุณหภูมิตามแนวแกน y ที่ x = 0.0 เมตร

เมื่อพิจารณากราฟในรูปที่ 4.10 โดยนำผลการทดสอบโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่จำนวนเซลล์เท่ากับ 530, 1848, 3930, 8630, 11548, 16290 และ 23796 เซลล์ บนเส้นตรงแนวตั้งแกน y ที่รัศมี 1.00 m จนถึง 2.00 m ที่กึ่งกลาง x = 0.0 m พบว่าค่าที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันดีกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งบริเวณขอบอุณหภูมิต่ำสุดจะมีการเบี่ยงเบนของผลการคำนวณห่างจากผลเฉลยแม่นตรงเมื่อมีจำนวนเซลล์น้อย

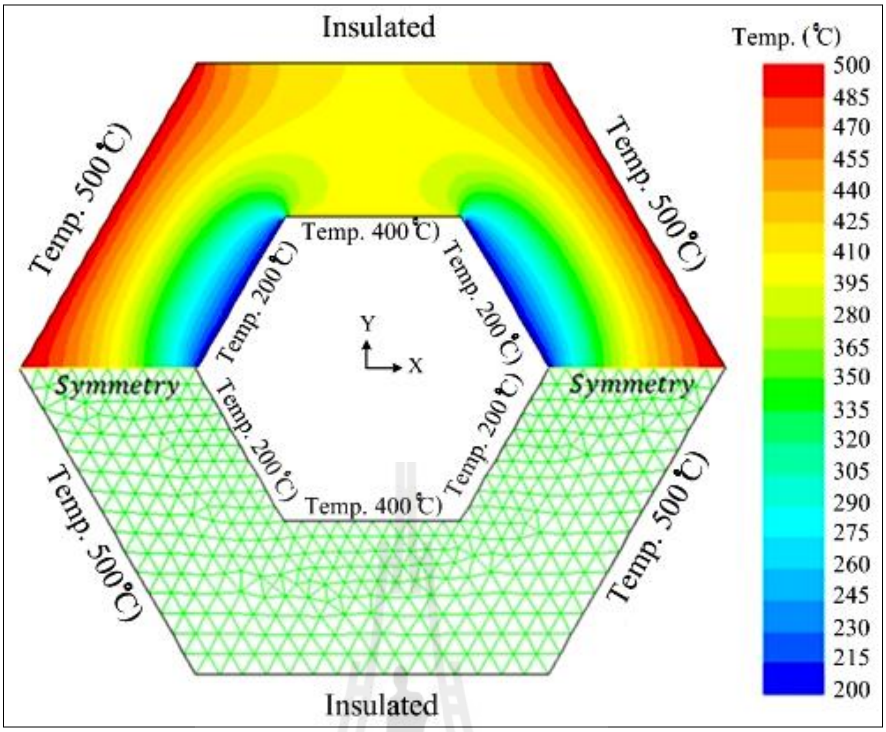
เมื่อพิจารณากราฟเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดในช่วง -0.4% ถึง 0.2% ดังแสดงในรูปที่ 4.11 พบว่าจำนวนเซลล์ควรจะมีค่ามากกว่า 8630 เซลล์ขึ้นไปจึงจะให้เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดที่ดีและการกระจายตัวของเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดไม่ได้ยู่ค่าที่ 0% อันเนื่องมาจากเป็นเงื่อนไขขอบการพาความร้อนซึ่งให้ผลการคำนวณของโปรแกรมบริเวณนั้นมีค่าน้อยกว่าผลเฉลยแม่นตรง จึงทำให้การเปรียบเทียบผลการคำนวณเบ้ด้านซ้าย (ด้านลบ)



รูปที่ 4.11 เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดของรูปทรงกระบอกกลวง

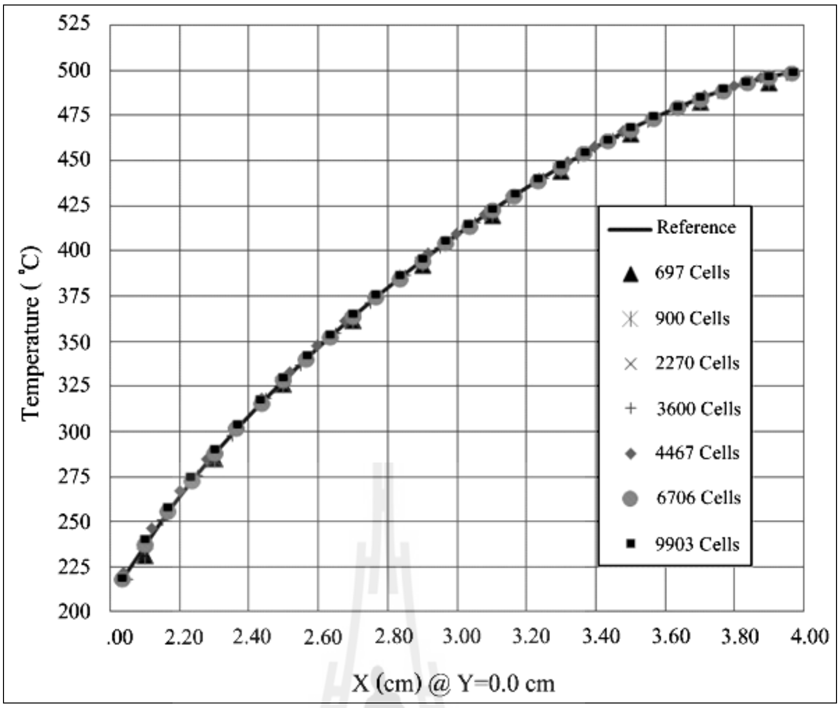
4.4 ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า

ปัญหาบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า 2 มิติ มีขนาดหน้าตัดด้านภายนอกหกด้านที่ยาวด้านละ 4 เซนติเมตร และด้านภายในยาวเท่ากัน 2 เซนติเมตร โดยที่เงื่อนไขขอบบริเวณขอบด้านภายนอกส่วนบนสุดและล่างสุดเป็นฉนวนและด้านภายนอกที่เหลืออีกสี่ด้านอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 500 $^\circ C$ ส่วนบริเวณขอบภายในด้านบนสุดและล่างสุดอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 400 $^\circ C$ และขอบภายในด้านที่เหลืออีกสี่ด้านอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 200 $^\circ C$ กำหนดสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุเท่ากับ 50 W/m $\cdot^\circ K$ ซึ่งในการพิจารณานั้นจะคำนวณในลักษณะครึ่งซีกบนเนื่องด้วยรูปทรงและเงื่อนไขขอบนั้นมีความสมมาตรกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.12 ซึ่งการกระจายตัวของอุณหภูมิของปัญหาบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่าดังรูปมีค่าอุณหภูมิสูงที่สุด 500 $^\circ C$ ตรงบริเวณขอบนอกทั้งสองด้านและกระจายตัวลดระดับอุณหภูมิไปยังบริเวณที่อุณหภูมิต่ำสุด 200 $^\circ C$ ตรงขอบด้านในทั้งสอง ส่วนด้านบนและล่างที่เป็นฉนวนจะรักษาค่าอุณหภูมิให้สมดุล

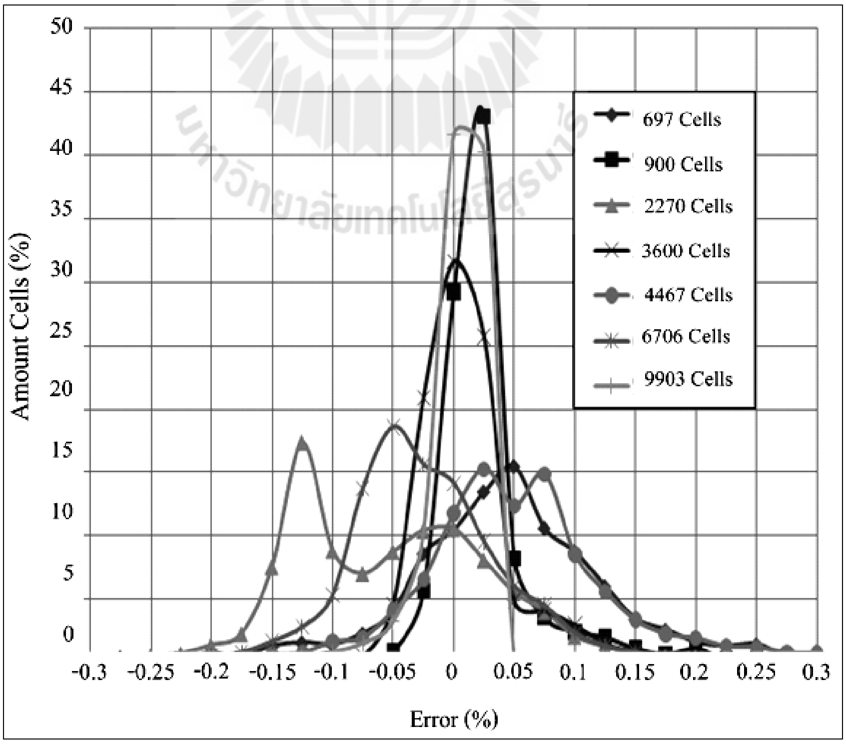


รูปที่ 4.12 การกระจายตัวอุณหภูมิของรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่า

ปัญหานี้ได้ทำการทดสอบโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลเฉลยของโปรแกรมสำเร็จรูปที่จำนวนเซลล์เท่ากับ 697, 900, 2270, 3600, 4467, 6706 และ 9903 เซลล์ บนเส้นตรงขอบสมมาตรแนวแกน x ที่ y = 0.0 cm พบว่าค่าที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันดีกับค่าผลเฉลยอ้างอิง ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.13 และการเปรียบเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดช่วง -0.3% ถึง 0.3% ในกราฟรูปที่ 4.14 พบว่าการกระจายตัวที่ตกคล่อมเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดอยู่ที่ 0% อันเนื่องมาจากจากเงื่อนไขขอบนั้นมีค่าอุณหภูมิคงที่ ส่วนการกระจายตัวของเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดนั้นมีน้อยแม้จำนวนเซลล์ไม่ได้มาก เป็นผลอันเนื่องจากการสร้างกริดแบบสามเหลี่ยมเข้ากับรูปทรงหกเหลี่ยมได้ดีและกริดละเอียดตรงบริเวณช่วงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูงขอบด้านในหกเหลี่ยมด้านเท่า



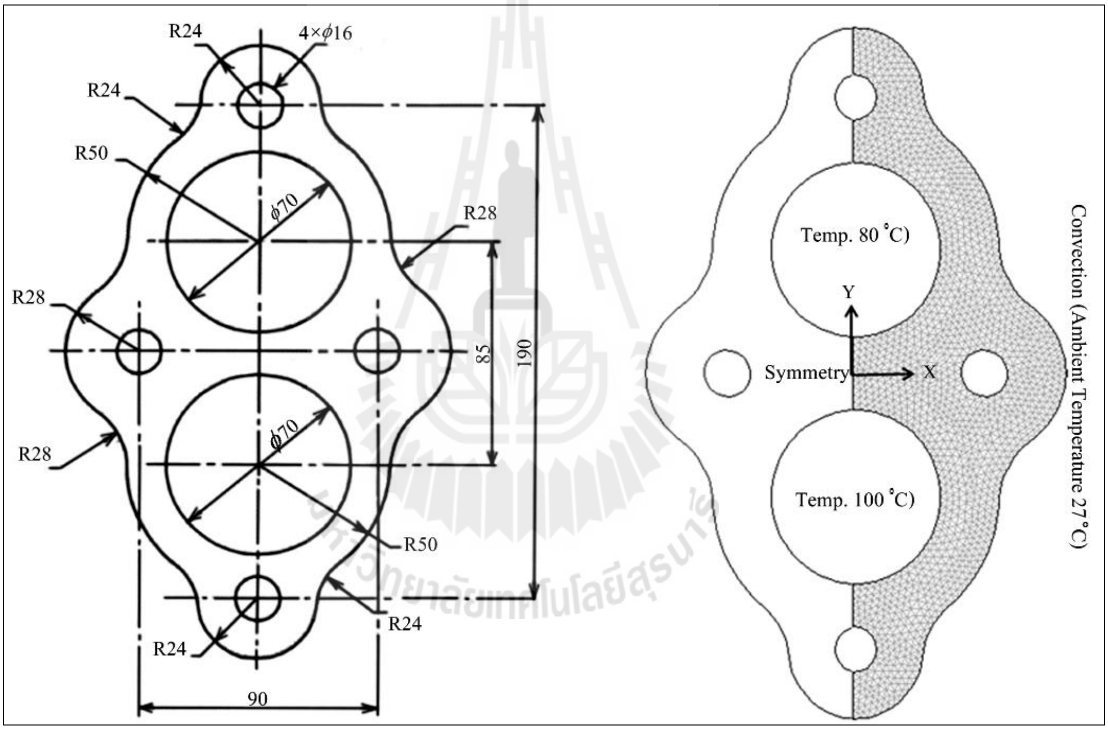
รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบอุณหภูมิตามแนวแกน x ที่ y = 0.0 เซนติเมตร



รูปที่ 4.14 เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่าเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป

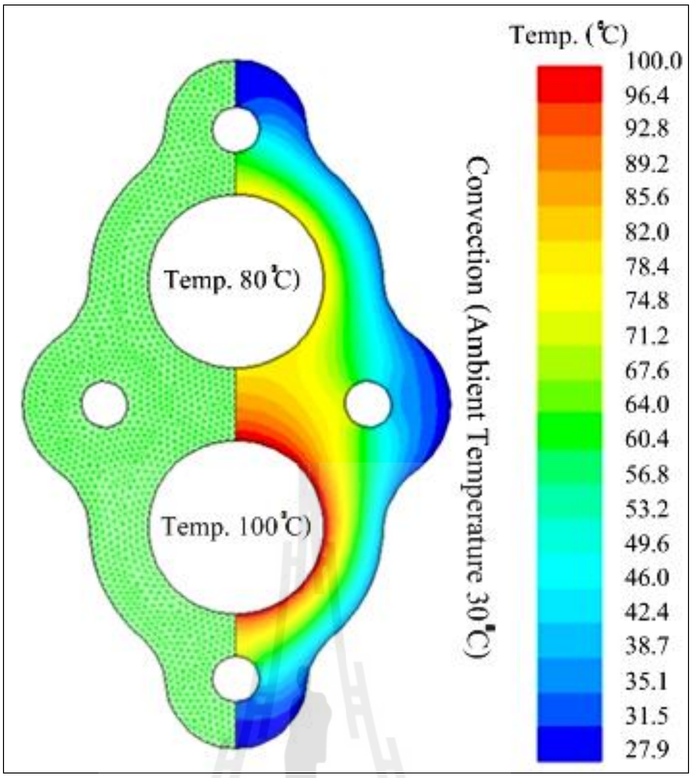
4.5 ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงซับซ้อน (ปะเก็น)

ปัญหาการนำความร้อนบนปะเก็นที่มีรูปทรงสมมาตรกันซ้ายและขวา แสดงในรูปที่ 4.15 (หน่วยมิลลิเมตร) ทำให้สามารถพิจารณาเพียงครึ่งซีก โดยมีเงื่อนไขขอบตรงบริเวณรูกลวงภายในทั้งสองรูที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 70 มิลลิเมตร ที่รูกลวงด้านบนอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 80 $^{\circ}C$ และรูกลวงด้านล่างอุณหภูมิคงที่เท่ากับ 100 $^{\circ}C$ ส่วนรูกลวงภายในวงกลมสี่รูที่เส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 16 มิลิเมตร นั้นเป็นฉนวนหุ้มและผิวบริเวณโดยรอบด้านนอกของปะเก็นเป็นอากาศที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 27 $^{\circ}C$ และสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเท่ากับ 12 W/m^2 กำหนดสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุเท่ากับ 0.05 W/m$\cdot^{\circ}K$



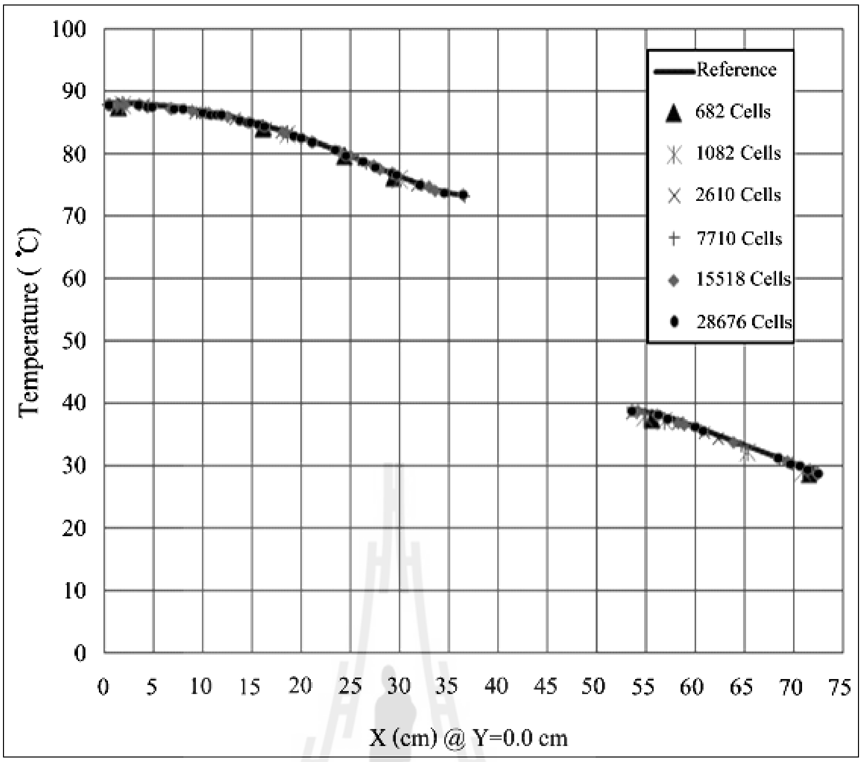
รูปที่ 4.15 ลักษณะของรูปทรงปะเก็นที่พิจารณา

ผลการคำนวณของโปรแกรมดังแสดงในรูปที่ 4.16 พบว่ามีการกระจายตัวของอุณหภูมิมีค่าสูงที่สุด 100 $^{\circ}C$ ตรงบริเวณรอบขอบของรูวงกลมใหญ่ด้านล่าง ส่วนตรงบริเวณขอบรอบรูวงกลมใหญ่ด้านบนมีค่าอุณหภูมิที่ 80 $^{\circ}C$ และบริเวณอุณหภูมิต่ำสุด 27.9 $^{\circ}C$ ตรงบริเวณขอบด้านนอกเมื่อเปรียบเทียบขอบรอบนอกจะสูงกว่าอุณหภูมิของอากาศเท่ากับ 0.9 $^{\circ}C$ ซึ่งลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิสูงจากขอบรูกลวงด้านในทั้งสองรูกระจายไปยังอุณหภูมิต่ำกว่าคือบริเวณขอบด้านนอก

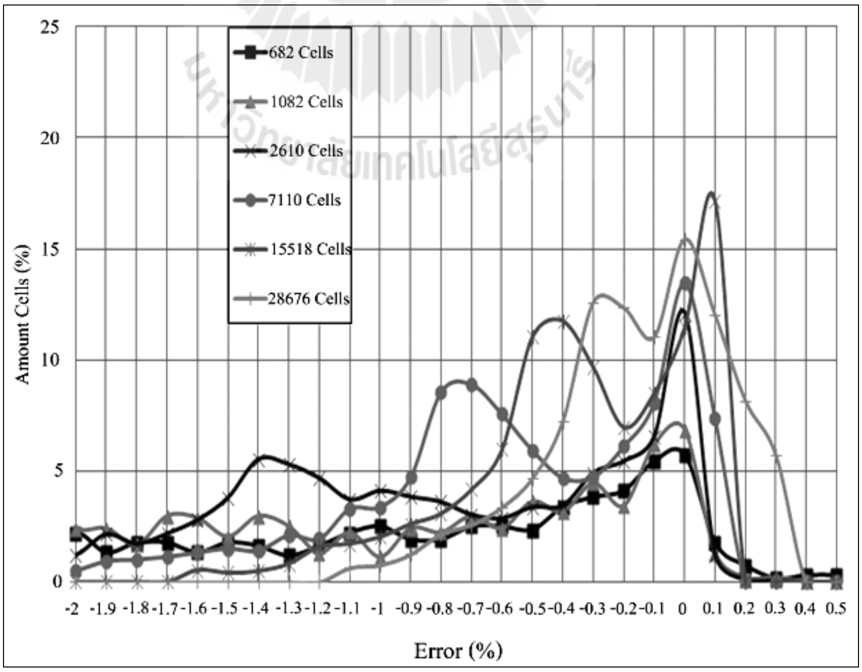


รูปที่ 4.16 การกระจายตัวอุณหภูมิของรูปทรงปะเก็น

เมื่อพิจารณาผลของโปรแกรมเปรียบเทียบกับผลการคำนวณโปรแกรมสำเร็จรูปที่จำนวนเซลล์เท่ากับ 682, 1082, 2610, 7110, 15518 และ 28676 เซลล์ บนเส้นตรงแนวนอนแกนบวก x ที่ y = 0.0 mm พบว่าค่าที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันดีกับค่าผลเฉลยอ้างอิง ดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.17 และกราฟเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดช่วง -2.0% ถึง 0.5% ดังแสดงในรูปที่ 4.18 พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนเซลล์มากขึ้น ผลที่ได้มีค่าที่ดีขึ้นจากจำนวนของเซลล์ในแนวแกนตั้งเพิ่มจาก 6% ไปถึง 21% ที่ 28676 เซลล์ เรียงตามลำดับและผลที่ได้เบ้ซ้ายไปทางด้านลบเช่นเดียวกับกรณีรูปทรงกระบอกกลวงอันเนื่องมาจากเป็นเงื่อนไขขอบการพาความร้อนเหมือนกัน



รูปที่ 4.17 เปรียบเทียบอุณหภูมิตามแนวแกนบวก x ที่ y = 0.0 มิลลิเมตร



รูปที่ 4.18 เปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดรูปทรงปะเก็นเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การพัฒนาโปรแกรมการทำนายปัญหาการแพร่ 2 มิติ บนพื้นฐานวิธีไฟไนต์โวลุมและกริดแบบสามเหลี่ยมนั้นได้ทำการทดสอบกับปัญหาการนำความร้อน 5 กรณี ได้แก่ ปัญหาการนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมกับเงื่อนไขขอบอุณหภูมิคงที่ การนำความร้อนบนรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบหลายแบบ การนำความร้อนบนรูปทรงกระบอกกลวง การนำความร้อนบนรูปทรงหกเหลี่ยมด้านเท่าและการนำความร้อนบนรูปทรงซับซ้อน (ปะเก็น) เมื่อเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรงและผลการคำนวณเชิงตัวเลขของโปรแกรมสำเร็จรูปกับผลการคำนวณของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นนั้นให้ผลที่มีความสอดคล้องกันดี รวมทั้งผลการกระจายตัวของความร้อนที่ใกล้เคียงความจริง ซึ่งมีค่าเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดอยู่ในช่วง $\pm 0.5\%$ ซึ่งเมื่อพิจารณาเปอร์เซ็นค่าความผิดพลาดนั้น บริเวณที่มีเปอร์เซ็นต์ค่าความผิดพลาดสูงคือบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความร้อนสูง สามารถปรับปรุงโดยการเพิ่มจำนวนเซลล์ ส่วนบริเวณเงื่อนไขขอบของปัญหา เช่น ฉนวนกันความร้อน แหล่งความร้อน และการพาความร้อนมีเปอร์เซ็นค่าความผิดพลาดสูงอันเนื่องจากการคำนวณประมาณการไหลเข้าออกของฟลักซ์ความร้อนที่เงื่อนไขขอบนั้นมีความคลาดเคลื่อนต้องปรับปรุงด้วยวิธีการประมาณค่า

ผลลัพธ์เปรียบเทียบของกรณีทดสอบโปรแกรมด้วยปัญหาการนำความร้อนทั้ง 5 กรณีนั้น สรุปได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนานั้นสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่มีรูปทรงซับซ้อนได้และให้ค่าความถูกต้องในระดับที่ดี

5.1 ข้อเสนอแนะ

การพัฒนาโปรแกรมการทำนายการแพร่ 2 มิติ แบบกริดสามเหลี่ยมนั้นสามารถนำหลักการและทฤษฎีงานวิจัยไปประยุกต์กับกริดหลายแบบได้ เช่น กริดแบบสี่เหลี่ยม กริดแบบหกเหลี่ยม และกริดแบบแปดเหลียม ทั้งนี้ยังสามารถพัฒนาก้าวไปสู่รูปทรง 3 มิติ เพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความจริงยิ่งขึ้น

รายการอ้างอิง

สุนิติ เกิดหนุนวงศ์ และ ศุภฤกษ์ ศิริเวทิน (2551). **ปรับปรุงประสิทธิภาพทางความร้อนของชุดทำความร้อนในเครื่องทำน้ำอุ่นขนาดเล็กแบบไฟฟ้า (CST011)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22 (ME-NETT 22)

วีระพันธ์ สีหานาม, วุฒิชัย สิทธิวงษ์, กุลเชษฐ์ เพียรทอง และ อนิรุตต์ มัทธุจักร (2550). **การจำลองคุณลักษณะเบื้องต้นของลำพุ่งเชื้อเพลิงความเร็วสูง (CST45)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 21 (ME-NETT 21)

ศิษฏ์ นวลศิริโกมล, วิโรจน์ ลิ่มตระการ และ จิตติ์พร เครือเนตร (2551). **การศึกษาการไหลเวียนและการกระจายอุณหภูมิในโรงเรือนสตรอเบอร์รี่ (CST032)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22 (ME-NETT 22)

ภานุวัฒน์ เนือยทอง และ เกรียงไกร อัศวมาศบันลือ (2551). **การจำลองการขึ้นรูปน้ำแข็งแบบสามมิติโดยวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CST005)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 22 (ME-NETT 22)

ศักรินทร์ ไวยกูล, มนต์ศักดิ์ พิมสาร และ จำลอง ปราบแก้ว (2554). **อิทธิพลของระยะห่างของดายน์และระยะกดในกระบวนการขึ้นรูปท่อแบบเจซีโอ (CST010)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 25 (ME-NETT 25)

อภิชาต แจ้งบำรุง (2554). **การศึกษาผลของความยาวท่อต่อการแยกอุณหภูมิในท่อวอร์เทกซ์โดยพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (CST045)**, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 25 (ME-NETT 25)

ปราโมทย์ เดชะอำไพ (2545). **ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม**, พิมพ์ครั้งที่ 1. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ (2551). **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม**, พิมพ์ครั้งที่ 6. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ .

ปราโมทย์ เดชะอำไพ, วิโรจน์ ลิ่มตระการ, เสฏฐวรรธ สุจริตภัตสกุลม และ ยศกร ประทุมวัลย์ (2552). **การประยุกต์ใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วย Solidworks Simulation**, พิมพ์ครั้งที่ 1, ซีเอ็ดยูเคชั่น

ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2544). **เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ : 2 มิติ, 3 มิติ**, พิมพ์ครั้งที่ 1. สำนักพิมพ์วงตะวัน

ยุทธนา ลีลาศวัฒนกุล (2547). **เริ่มต้นการเขียนโปรแกรมด้วยภาษา C++**, พิมพ์ครั้งที่ 3, สำนักพิมพ์ไทยเจริญการพิมพ์

Versteeg, H. K., and Malalasekera, W. (2007). **An Introduction to Computational Fluid Dynamic : The Finite Volume Method**, 2nd edition, Pearson Prentice Hall, New York. (pp. 304-342).

Minkowycz, W. J., Sparrow, E. M., and Murthy, J. Y. (2006). **Handbook of Numerical Heat Transfer**, 2nd edition, John Wiley & Sons, INC.

Patanker, S. V., (1980). **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, Hermisphere Publishing Corporation.

Segerlind, L. J. (1984). **Applied Finite Element Analysis**, 2nd edition, John Wiley & Sons, INC.

Chung, T. J., (2002). **Computational fluid dynamics**, Cambridge University Press.

Joel, H. F., and Milovan, P. (2004). **Computational Methods for Fluid Dynamics**, 3ed edition, Springer.

Yunus, A. C. (2006). **Heat and Mass Transfer : A Practical Approach**, 3ed edition (SI Units), Mc Graw Hill.

Yunus, A. C., and John, M. C. **Fluid Mechanics : Fundamentals and Applications**, International edition, Mc Graw Hill.

Dennis, G. Z., and Michael, R. C. **Advanced Engineering Mathematics**, 2nd edition, Jones and Bartlett Publishers Cannada.

Erwin K. **Advanced Engineering Mathematics**, 9th edition. John Wiley & Sons, INC.

ภาคผนวก ก

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

รายชื่อบทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างการศึกษา

Yuttana, G., Thara, A., and Keerati, S., (2011). **Prediction of Two-Dimensional Diffusion Problems Based on Finite Volume Method and Triangular Unstructured Grid**. The 25th Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand, October 19-21, Krabi, Thailand.

ME-NETT 25
The 25th Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand

CST04

The 25th Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand
October 19 – 21, 2011, Krabi

PREDICTION OF TWO-DIMENSIONAL DIFFUSION PROBLEMS BASED ON FINITE VOLUME METHOD AND TRIANGULAR UNSTRUCTURED GRID

Yuttana glasug[1,*], Thara Angskun[2] and Keerati Suluksna[1]

[1]School of Mechanical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology
[2]School of Information Technology, Institute of Social Technology, Suranaree University of Technology
111 University Avenue , Suranare, Muang , Nakorn Ratchasima 30000, Thailand
Tel: 044 224 410, Fax: 044 224 613, *E-mail: glasug_yuttana@hotmail.com

Abstract

In engineering applications, the problem geometries are usually found by constructing with complex shapes. Under a condition, it is seems to be an impossible things to solve using analytical methods. As a result, the use of numerical method is a possible way to overcome those problems. This paper presents the numerical method for solving the two-dimensions steady state diffusion. A computer program has been developed based on the finite volume method and triangular unstructured grid arrangement. The considered diffusion problems are governed by the second order PDE equation. They are discreted by using the central differencing scheme. A two-dimensional heat conduction with complex shape have been investigated to assess the reliability of the computer program. The predicted shows that the developed computer program gives a good result compare with the reference data.

Keywords: Numerical methods, Diffusion problem, Finite Volume Method, Triangular Unstructured Grid.

1. Introduction

In general, the engineering applications are combined with the complex geometries. This condition is difficult or impossible to solve by using an analytical method. To overcome this problem, the numerical method is employed to solve for an approximation solution rather than those of exact solution. Concept of the numerical method starts from dividing the domain to the finite number of the control volumes (cells). Due to the complex shape of the geometry, however, the use of unstructured mesh is more efficient than the use of structured mash as shown in Fig.1. As a result, the unstructured mash is usually found as a widely use in numerical strategy and will be adopted in the present work.

This paper presents a development of the computer code for predicting of steady two-dimensions diffusion problems. The numerical methodology adopted here is based on finite volume discretization and triangular unstructured grid. This is because the computer program will be extended for CFD development process in the future. The central differencing scheme is used to discrete the governing equation. Four validation problems are used to assess the computer code.

Fig.1 Unstructured mesh for complex geometry.

2. Numerical Methodology

2.1 Discretization Technique

In general, the governing equation[1] for the diffusion problem can be written in the general form as follows.

$$\operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi)+S_{\phi}=0 \quad (1)$$

Where Γ denotes the diffusion coefficient, ϕ is the attentive variable and S_{ϕ} is the source term. Based on the concept of the finite volume method, this governing equation will be integrated over the control volume as follows.

$$\int_{CV} \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \phi) dV + \int_{CV} S_{\phi} dV = 0 \quad (2)$$

To determine the diffusion flux throughout the control volume, one can determine on the surface integral rather than volume integral as follows.

$$\sum_{i}^{surface} \int_{\Delta A_i} \hat{n}_i . (\Gamma \operatorname{grad} \phi) dA_i + S_{\phi} \Delta V = 0 \quad (3)$$

It should be note that the use of surface integral gives a more efficient than those of the volume integral because it is convenient to determine the flux through the cell faces.

2.2 Unstructured Mesh Technique

The mashing technique adopted here is the so-celled triangular unstructured grid. This mash type consists of three cell faces. After employing such meshing into Eq.(3), the equation can be written as follows.

$$\sum_{i}^{3} \hat{n}_i . (\Gamma \operatorname{grad} \phi) \Delta A_i + S_{\phi} \Delta V = 0 \quad (4)$$

Where ΔA is the cell area of face and ΔV is the cell volume.

Fig.2 shows the relation between the center node and the neighbor nodes. It can be seen that the relation of those nodes are combined by the unit vectors in normal and tangent directions. The control volume consists of three vertices *a*, *b* and *c*. it should be noted that those three vertices must be ordered to provide the counterclockwise with respect to the center node. This is necessary to preserve a unique direction of all surface vectors and in this case the outward direction of all unit normal vectors $\hat{n}$ is attained.

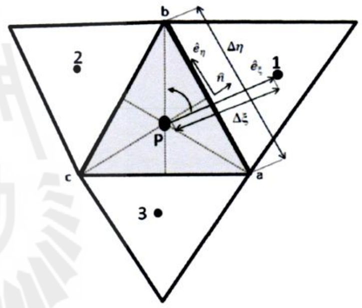


Fig.2 Detail of grid information

The diffusive flux through face *ab* can be approximated by using the numerical differencing scheme. In the present work, such approximation has been derived in form of the direct gradient term and the cross-diffusion term as follows.

$$(\Gamma \operatorname{grad} \phi) \Delta A = \underbrace{\left(\frac{\Gamma}{\Delta \xi} \frac{\hat{n}.\hat{n}}{\hat{n}.\hat{e}_{\xi}} \Delta A (\phi_1 - \phi_P) \right)}_{\text{the direct gradient team}} + \underbrace{\left(-\Gamma \frac{\hat{e}_{\xi}.\hat{e}_{\eta}}{\hat{n}.\hat{e}_{\xi}} \Delta A \left(\frac{\phi_b - \phi_a}{\Delta \eta} \right) \right)}_{\text{the cross-diffusion team}} \quad (5)$$

ME-NETT 25
The 25th Conference of the Mechanical Engineering Network of Thailand

Where

$$\hat{n}=\frac{\Delta y}{\Delta A}\vec{i}-\frac{\Delta x}{\Delta A}\vec{j}=\frac{y_b-y_a}{\Delta\eta}\vec{i}-\frac{x_b-x_a}{\Delta\eta}\vec{j}$$

$$\hat{e}_\xi=\frac{x_1-x_P}{\Delta\xi}\vec{i}+\frac{y_1-y_P}{\Delta\xi}\vec{j}\text{, and }\hat{e}_\eta=\frac{x_b-x_a}{\Delta\eta}\vec{i}+\frac{y_b-y_a}{\Delta\eta}\vec{j}$$

Eq.(5) can be rearranged as follows:

$$\hat{n}\,.(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi)\Delta A=D(\phi_1-\phi_P)+S \qquad (6)$$

Where D is the diffusion coefficient from the direct gradient term and S is the cross-diffusion term which will be treated as the source term.

Substitution the Eq.(6) into Eq.(4), thus

$$\sum_i^3[D_i(\phi_i-\phi_P)+S_i]+S_\phi\Delta V=0 \qquad (7)$$

It can be seen that Eq.(7) is expressed in the form of liner algebraic equation. The index i represents the running number of the cell faces. After applying Eq.(7) to all faces, the equation can be written as follows:

$$a_P\phi_P=a_1\phi_1+a_2\phi_2+a_3\phi_3+S_1+S_2+S_3+S_\phi V \qquad (8)$$

Where

$$a_1=\frac{\Gamma}{\Delta\xi_1}\frac{\hat{n}_1.\hat{n}_1}{\hat{n}_1.\hat{e}_{\xi_1}}\Delta A_1\,,\quad a_2=\frac{\Gamma}{\Delta\xi_2}\frac{\hat{n}_2.\hat{n}_2}{\hat{n}_2.\hat{e}_{\xi_2}}\Delta A_2$$

$$a_3=\frac{\Gamma}{\Delta\xi_3}\frac{\hat{n}_3.\hat{n}_3}{\hat{n}_3.\hat{e}_{\xi_3}}\Delta A_3\,,\quad S_1=-\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi 1}.\hat{e}_{\eta 1}}{\hat{n}_1.\hat{e}_{\xi 1}}\Delta A_1\left(\frac{\phi_b-\phi_a}{\Delta\eta_1}\right)$$

$$S_2=-\Gamma\frac{\hat{e}_{\xi 2}.\hat{e}_{\eta 2}}{\hat{n}_2.\hat{e}_{\xi 2}}\Delta A_2\left(\frac{\phi_c-\phi_b}{\Delta\eta_2}\right),$$

$$S_3=-\Gamma\frac{\vec{e}_{\xi 3}.\vec{e}_{\eta 3}}{\vec{n}_3.\vec{e}_{\xi 3}}\Delta A_3\left(\frac{\phi_a-\phi_c}{\Delta\eta_3}\right),$$

and $a_P=a_1+a_2+a_3$

Eq.(8) will be applied to all nodes in the domain and then has been solved by Gauss-Seidel relaxation method iteratively.

3. Code Validations

3.1 Case A: Square plate with Constant Boundary Values

A two dimensional square plate with a size of 1x1 m^2 is taken to use as the first problem for assessing an efficiency of the developed code in calculating based on the simple triangular mesh. The boundary conditions of the top side of the square plate is maintained with temperature of 100°C and the rest sides are subjected to the temperature of 0°C as illustrated in Fig.3. The plate made from material with a specified thermal conductivity (k) of 50 W/m°C.

An analytical solution[2] for this problem can be calculated from a following expression.

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(n\pi y)\sin(n\pi x)$$

and $A_n=200\frac{1-(-1)^n}{n\pi\sinh(n\pi)}$;n=1,2,3,..

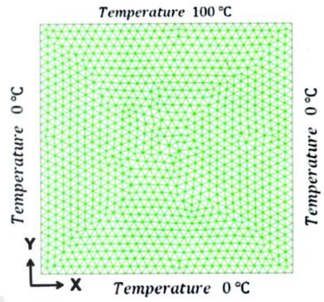


Fig.3 Boundary condition and grid configuration

The numerical prediction is performed on five grid sets with the grid number of 836, 2028, 4924, 14342, and 22518 cells in order to find out the grid independent set. Comparison of the temperature results along the midline x=0.5 m are shown in Fig.4. It can be seen that the predicted results give a very well agree with the analytical solutions.

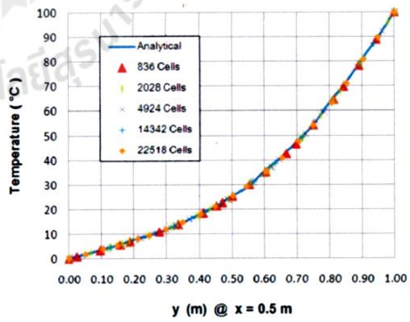


Fig.4 Comparison of temperature for Case A

Fig.5 shows the distribution of the error. It can be seen that the errors are distributed within the range from -0.2% to 0.075%. With the lower density of meshing, the errors trend to shift left to the negative zone but the distribution of the errors trend to spread out. Fig.6 displays the contours of the temperature. It can be seen that the high temperature is produced in the upper zone and then cool down in the lower zone.

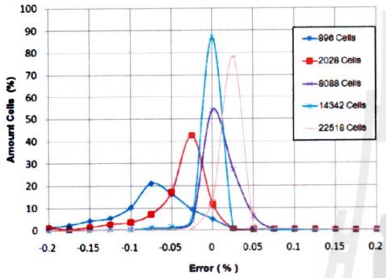


Fig.5 Error distribution of Case A

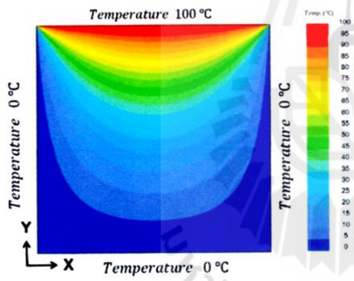


Fig.6 Contours of temperature distribution

3.2 Case B: Square Plate with Various Boundary Type

This validated case is constructed with a rectangular plate with the size of 0.3x0.4 m^2. This case is set for assessing an efficiency of the developed code on the several of boundary conditions. In this case, the top side of the plate is fixed with a constant temperature (T) of 100°C. The left side is subjected a constant heat flux of q=500 kW/m^2. The rest two sides of the plate are set with the condition of insulating as illustrated in Fig.7. The plate made from material with a specified thermal conductivity (k) of 1000 W/m°C.

An analytical solution for this problem can be calculated from a following formulation.

$$T(x,y)= f(x,y)\frac{2q}{kH}+T$$

Where $f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(a_n H)\cos(a_n y)\cosh(a_n x)}{a_n^2\sinh(a_n L)}$

and $a_n=\frac{(2n-1)\pi}{2H}$;n=1,2,3,..

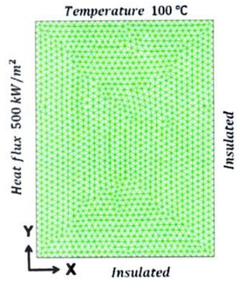


Fig.7 Boundary condition for Case B

Five grid sets of 366, 898, 1414, 6064, and 14426 cells numbers are used to check for the grid independent. Comparison of the temperature results along the midline x=0.15 m are shown in Fig.8. It can be seen that the predicted results give good agreement compared with the exact solutions.

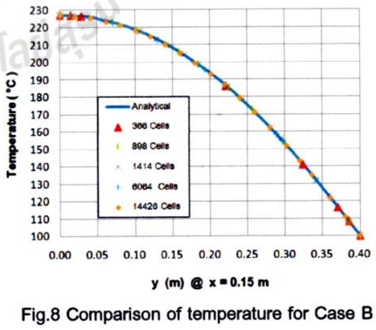


Fig.8 Comparison of temperature for Case B

The error distribution of case B is shown in Fig.9. It can be seen that they are distributed within the range from -0.4% to 0.4%. The lowest density meshing gives positive zone distribution with a more spread out than the finer ones. The temperature distribution is depicted in Fig.10. It can be observed that the high temperature is condensed at the bottom left corner of the plate with the maximum temperature of 280°C. This is because the heat flux on the left side transfers the heat energy inside the plate. The heat energy is protected (no heat lose) by the insulating walls and then distributed to the upper zone.

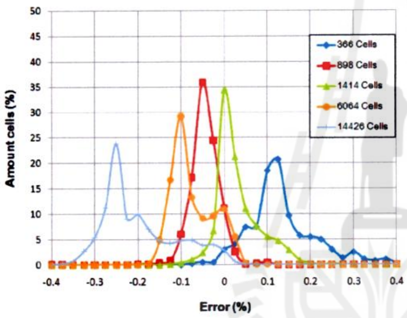


Fig.9 Error distribution of Case B

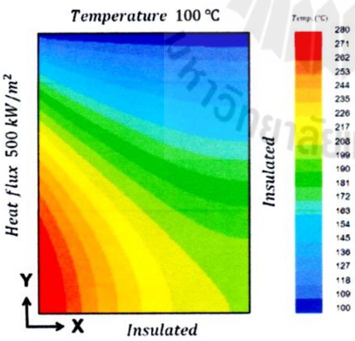


Fig.10 Contour of temperature for Case B

3.3 Case C: Diffusion in a Circular Hollow

The diffusion in a circular hollow problem is set for validating the computer code in calculating on the complex geometry. This problem is look like two dimensional donut with the inner (R_{in}) and outer (R_{out}) radius of 1 and 2 m, respectively. The inner boundary of the hollow is maintained to a constant temperature of 100°C. The outer boundary is subjected to an ambient temperature of 30°C with the heat transfer coefficient (h) of 12 W/m^2. Due to a symmetrical hollow as shown in Fig.11, a haft domain consideration is sufficiently in the process of numerical prediction. As a result, the symmetry plane will be defined with the condition of insulation because no heat transfers across those symmetry planes. In this present, the hollow made from material with a constant thermal conductivity (k) of 15 W/m°C.

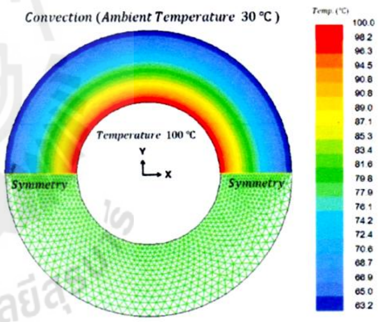


Fig.11 Domain/boundary condition for Case C

The analytical solution[3] of this problem can be calculated from the following equation.

$$T(r)= T_{in}-\frac{f(r)}{C}\ ; r=\sqrt{x^2+y^2}$$

where $f(r)=hR_{out}(T_{in}-T_{amb})\ln(\frac{r}{R_{in}})$

and $C=k+hR_{out}\ln(\frac{R_{out}}{R_{in}})$

The grid independent checking of this case is performed based on seven grid test sets corresponding to the cells number of 530, 1848, 3930, 8630, 11548, 16290, and 23796 respectively. Comparison of the temperature along the section line of x=0 m is shown in Fig. 12. It can be seen that the predicted results are satisfactorily with the analytical results. The temperature distribution has a maximum value of 100°C at the inner surface and then reduces to reach a minimum value of 63.2 at the outer surface of the hollow. The temperature contours are illustrated in Fig.11 and the distribution of the errors of each grid sets are displayed in Fig.13.

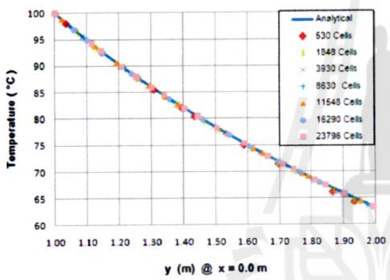


Fig.12 Comparison of temperature for Case C

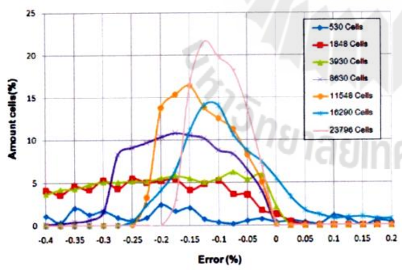


Fig.13 Error distribution of Case C

3.4 Case D: Diffusion in a Hexagonal Shape

The last test case in the present work is the diffusion in a hexagonal shape. Dimension and boundary conditions of the considered case are described in Fig.14. The domain of computation here is reduced to a haft part of the hexagonal due to the symmetry shape. The outer top boundary is set with the condition of insulation while the rest boundaries are specified with the several constants of the temperature. The thermal conductivity (k) of the hexagonal is set to 50 W/m°C.

This problem has been performed on seven grid sets of 697, 900, 2270, 3600, 4467, 6706, and 9903 cell numbers. The distribution of temperature is displayed in Fig.14. It can be seen that the maximum temperature is distributed in the left and right outer zones due to an attachment to the high temperature boundaries. The distributions of the errors are illustrated in Fig.15. It can be seen that the distribution are within the range of -0.3% to 0.3%. The lower density meshing seems to give the negative distributions with a more spread out than the finer ones.

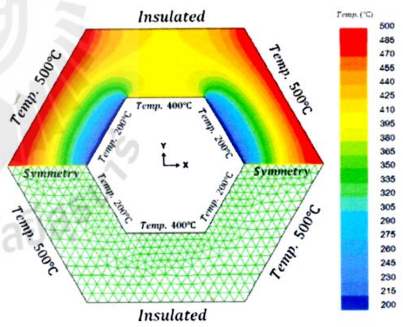


Fig.14 Domain/boundary conditions for Case D

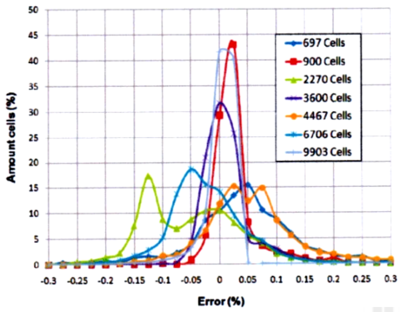


Fig.15 Error distribution of Case D

4. Conclusions

This research work presents the numerical methodology for predicting the two-dimensional diffusion problems. The computer code is developed based on finite volume method and the triangular unstructured meshing is implemented. Four test cases of the diffusion problems are investigated to assess the accuracy in predicting of the developed computer code. The results shown that the developed computer code gives the satisfactory results compare with the analytical solutions.

5. Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge School of Mechanical Engineering, Suranaree University of Technology and National Metal and Material Technology Center (MTEC) for supporting this research work.

6. References

[1] Versteeg, H.K and Malalasekera, W. (2007). An Introduction to Computational Fluid Dynamic : The Finite Volume Method, 2nd edition, Pearson Prentice Hall, New York. pp. 304-342

[2] Dennis, G. Zill and Michael, R. Cullen(2000). Advanced Engineering Mathematics, 2nd edition, Jones and Bartlett. Pp 704-708

[3] Yunus, A. Cengel,(2006). Heat and Mass Transfer : A Practical Approach, 3ed edition (SI Units), Mc Graw Hill. pp.62-108

ประวัติผู้เขียน

นายยุทธนา กล้าศึก เกิดเมื่อวันที่ 30 ตุลาคม พ.ศ. 2525 เริ่มเข้าศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพเครื่องกล ภาควิชาเครื่องกล คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ สำเร็จการศึกษาเมื่อปี พ.ศ. 2543 และศึกษาต่อเนื่องในระดับปริญญาตรีวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ สำเร็จการศึกษาเมื่อปี พ.ศ. 2547 ภายหลังสำเร็จการศึกษาได้เข้าทำงานกับบริษัทฮาลล่าไคลเมทคอนโทรล จำกัด บริษัทแคนนาดอล จำกัด และซีเกทเทคโนโลยี จำกัด ตามลำดับ จากการทำงานเป็นวิศวกรในโรงงานอุตสาหกรรมมาเป็นเวลา 4 ปี เกิดแรงจูงใจที่จะต่อยอดความรู้ในสายวิศวกรรมเครื่องกลให้มากขึ้นกว่าเดิม จึงได้ตัดสินใจเรียนต่อในระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ในปี พ.ศ. 2552