

# เอกสารคำสอน

## วิชา สภาพนำยิ่งยวด (105853 Superconductivity)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พวงรัตน์ ไพเราะ  
สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

# คำนำ

เอกสารคำสอนนี้ทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนการสอนวิชา สภาพนำยวดยิ่ง (105853 Superconductivity) ของสาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เนื้อหาของวิชาครอบคลุม สมบัติพื้นฐานของตัวนำยวดยิ่ง แบบจำลองของลอนดอน (London model) ทฤษฎีของกินซ์เบิร์ก-แลนเดา (Ginzburg-Landau theory of superconductivity) ทฤษฎีบีซีเอส (BCS theory) ตัวนำยวดยิ่งที่ไม่ใช่แบบดั้งเดิม (Unconventional superconductors) นักศึกษาที่เรียนวิชานี้ต้องผ่านการเรียนในวิชา ทฤษฎีควอนตัม 1 (105621 Quantum Theory I) และ ฟิสิกส์ของสารควบแน่น 1 (105751 Condensed Matter Physics I) ก่อน

พวงรัตน์ ไพเราะ

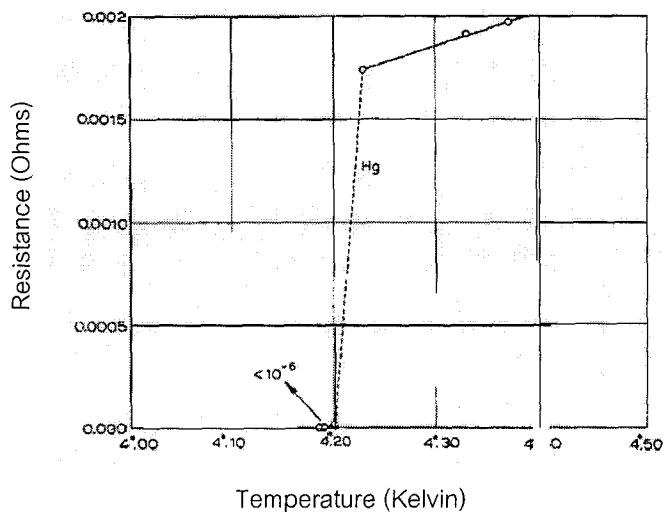
2549

# สารบัญ

	หน้าที่
บทที่ 1 สมบัติพื้นฐานของตัวนำยิ่งยวด	1
1.1 สมบัติบางประการของตัวนำยิ่งยวด	2
1.2 ทบทวนฟิสิกส์ทั่วไปบางส่วน	9
1.3 แบบฝึกหัด	9
บทที่ 2 สมการของลอนดอน	10
2.1 ผลของสมการลอนดอน	10
2.2 แบบฝึกหัด	16
บทที่ 3 ทฤษฎีของกินส์เบิร์กแลนเดา	18
3.1 ทฤษฎีการเปลี่ยนเฟสอันดับที่สองของแลนเดา	18
3.2 ทฤษฎีสภาพนำยิ่งยวดของกินส์เบิร์กแลนเดา	21
3.3 สมการกินส์เบิร์กแลนเดา	23
3.4 ผลของสมการกินส์เบิร์กแลนเดา	24
3.5 แบบฝึกหัด	32
บทที่ 4 ทฤษฎีบีซีเอส	34
4.1 ความไม่มีเสถียรภาพของสถานะปกติของอิเล็กตรอนในโลหะ เมื่อมีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน	34
4.2 ที่มาของอันตรกิริยาดึงดูด	36
4.3 สถานะพื้นและสถานะกระตุ้น	37
4.4 แบบฝึกหัด	43
บทที่ 5 ตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม	44
5.1 สมบัติของตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม	44
5.2 ค่าช่องว่างพลังงาน	47
บรรณานุกรม	48

# บทที่ 1 สมบัติพื้นฐานของตัวนำยวดยิ่ง

จุดเริ่มต้นของการศึกษาสภาพนำยิ่งยวด เกิดขึ้นในปี ค. ศ. 1911 โดยท่านคาเมอร์ลิงค์-โอนเนส (Heike Kamerlingh-Onnes) นักฟิสิกส์ทดลองชาวเนเธอร์แลนด์ ท่านได้ค้นพบสภาพความนำยิ่งยวดในปรอท โดยบังเอิญ ที่ว่าบังเอิญนั้นก็เพราะว่า กลุ่มทดลองของคาเมอร์ลิงค์-โอนเนส เป็นกลุ่มแรก ๆ ที่สามารถทำให้อากาศอีเลียมกลายเป็นของเหลวได้<sup>1</sup> ซึ่งความสามารถนี้ทำให้กลุ่มทดลองของท่านสามารถศึกษาฟิสิกส์ของสสารที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ได้ และท่านก็เลือกที่จะศึกษาค่าความต้านทานไฟฟ้าของโลหะที่อุณหภูมิต่ำ ๆ เพื่อดูว่า มีพฤติกรรมเป็นไปตามที่ทฤษฎีที่ทำนายไว้หรือไม่ โดยท่านเลือกปรอทมาศึกษา ก่อน และพบว่า ความต้านทานไม่ได้เป็นไปตามที่ทำนายไว้ คือแทนที่จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่ศูนย์เคลวิน ค่าความต้านทานกลับมีค่าลดลงฮวบฮาบ จนมีค่าที่เล็กมากไม่สามารถวัดได้ ณ อุณหภูมิประมาณ 4.2 เคลวิน (ดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 1) ซึ่งต่อมามีท่านก็สรุปได้ว่าที่อุณหภูมินี้ ปรอทได้มีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะของการเป็นโลหะธรรมดา กลายเป็นตัวนำยิ่งยวด (สถานะที่มีความต้านทานเป็นศูนย์) เราเรียกอุณหภูมินี้ว่า



จาก [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1913](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1913)

รูปที่ 1 รูปถ่าย เป็นรูปของท่านคาเมอร์ลิงค์-โอนเนส ผู้ค้นพบสภาพความนำยิ่งยวด ท่านได้รับรางวัลโนเบลจากการค้นพบที่สำคัญนี้ ในปี ค. ศ. 1913 (เพียงสองปีหลังจากการค้นพบ) รูปขวา เป็นรูปแสดงกราฟความต้านทานที่อุณหภูมิต่าง ๆ ของปรอท จะเห็นว่าความต้านทานมีค่าลดลงอย่างกะทันหันที่อุณหภูมิต่ำลงประมาณ 4.2 เคลวิน

อุณหภูมิกวิกฤติ การค้นพบสมบัตินี้ในปรอท ไม่เป็นที่เข้าใจจากพื้นฐานทางทฤษฎีที่มีอยู่ในขณะนั้น

ในสถานะปกติ ความต้านทานไฟฟ้าของโลหะเกิดจากการที่อิเล็กตรอนในโลหะวิ่งชนสิ่งต่าง ๆ เช่น ไอออนที่สั่นอยู่(โฟนอน) สิ่งเจือปน ความบกพร่องของผลึกโลหะ หรือแม้แต่ ชนกันเอง และเมื่ออุณหภูมิต่ำลง การชนกับบางอย่าง เช่น กับโฟนอน จะลดลง ทำให้โลหะมีความต้านทานลดลง จนเข้าสู่ค่าคงที่ค่าหนึ่งที่

<sup>1</sup> อีเลียมกลายเป็นของเหลว ซึ่งคือ อุณหภูมิประมาณ 4 เคลวิน

อุณหภูมิศูนย์เคลวิน ซึ่งค่าคงที่ค่านี้แปรผันกับปริมาณสิ่งเจือปน หรือความบกพร่อง<sup>2</sup>ของโลหะนั้น ๆ นั้นเอง แต่สำหรับปรอทในสภาพนำยิ่งยวดที่ฮาเมอร์ลิงก์-โอนเนสค้นพบ นั้น ไม่มีความต้านทานไฟฟ้าเลย ซึ่งก็หมายความว่า อิเล็กตรอนในสภาพนำยิ่งยวดนั้น วิ่งไปในตัวนำยิ่งยวดเหมือนกับว่าไม่ชนอะไรเลย ในรายวิชานี้ เราจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับฟิสิกส์ของสภาพนำยิ่งยวด สาเหตุของสภาพนำยิ่งยวดนี้ รวมทั้งผลและสมบัติอื่น ๆ ที่เกิดเนื่องจากสภาวะเช่นนี้ด้วย โดยที่ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานของตัวนำยิ่งยวดบางประการก่อน คือ การเป็นตัวนำที่สมบูรณ์แบบ (Perfect conductivity) การเป็นตัวต้านสนามแม่เหล็กที่สมบูรณ์แบบ (Perfect diamagnetism) ค่าสนามแม่เหล็กวิกฤติ (critical field, ซึ่งเป็นสมบัติที่แบ่งตัวนำยิ่งยวดออกเป็น 2 ประเภท) ค่าความจุความร้อนจำเพาะ (specific heat) การควอนไทซ์ของฟลักซ์แม่เหล็ก (flux quantization) ปรากฏการณ์โจเซฟสัน (Josephson effect)

## 1.1 สมบัติบางประการของตัวนำยิ่งยวด

### 1.1.1 การเป็นตัวนำที่สมบูรณ์แบบ (Perfect Conductivity)

สภาพต้านทานไฟฟ้า ( $\rho$ ) ของโลหะเกิดขึ้นเนื่องจาก อิเล็กตรอนซึ่งเป็นตัวนำกระแสไฟฟ้า วิ่งชนสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ภายในเนื้อโลหะนั้น กลไกการชนมีอยู่หลายประเภท สิ่งทีอิเล็กตรอนวิ่งชนโดยทั่วไป ก็ได้แก่ การสั่นของไอออนหรือโฟนอน สิ่งแปลกปลอมหรือความไม่สมบูรณ์ของผลึก และอิเล็กตรอนด้วยกันเอง ซึ่งการชนของอิเล็กตรอนกับสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ จะมีความเด่นไม่เท่ากัน ขึ้นกับช่วงของอุณหภูมิ กล่าวคือ ที่อุณหภูมิสูง ๆ ราวอุณหภูมิเดอบาย (Debye temperature,  $T_D$ )<sup>3</sup> หรือสูงกว่า อิเล็กตรอนจะมีโอกาสชนกับโฟนอนมากที่สุด ซึ่งการชนกับโฟนอนที่อุณหภูมิสูง ๆ นี้ เป็นผลให้สภาพต้านทานแปรตามอุณหภูมิมิลักษณะเป็นเชิงเส้น

$$\rho(T) = AT$$

โดยที่ A เป็นค่าคงที่ ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

ที่อุณหภูมิต่ำลงมา การชนกับสิ่งอื่น ๆ ก็เริ่มมีบทบาทมากขึ้น สภาพต้านทานที่เกิดจากกลไกการชนชนิดต่าง ๆ ขึ้นกับอุณหภูมิในลักษณะที่แตกต่างกันไป กล่าวคือ สภาพต้านทานที่เกิดจากการชนกับโฟนอน จะขึ้นกับอุณหภูมียกกำลังห้า การชนกับอิเล็กตรอนด้วยกันเองนั้น ทำให้สภาพต้านทานขึ้นกับอุณหภูมียกกำลังสอง และสภาพต้านทานที่เกิดจากการชนกับสิ่งแปลกปลอม และ/หรือความไม่สมบูรณ์ของผลึกนั้น ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ การขึ้นกับอุณหภูมิของสภาพต้านทานที่อุณหภูมิต่ำนี้ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\rho(T) = \rho_0 + aT^2 + bT^5$$

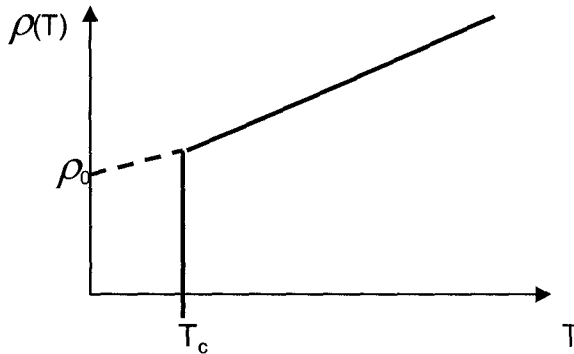
โดย  $\rho_0$ ,  $a$ ,  $b$  เป็นค่าคงที่ ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

สำหรับโลหะที่สามารถกลายเป็นตัวนำยิ่งยวดนั้น ค่าความต้านทานไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิดังแสดงให้เห็นในรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่าค่าความต้านทานมีค่าลดลงตามอุณหภูมิ จนถึงค่าอุณหภูมิต่ำหนึ่ง ความต้านทานจะมีค่าลดลงอย่างทันใด เรียกอุณหภูมินี้ว่า อุณหภูมิวิกฤติ  $T_c$  (critical temperature) เป็น

<sup>2</sup> ในความจริงแล้ว นอกจากอิเล็กตรอนจะวิ่งชนสิ่งเจือปน (และ ความไม่สมบูรณ์ของโลหะ) แล้ว ที่อุณหภูมิสูงกว่าศูนย์เคลวิน มันยังอาจวิ่งชนโฟนอน (phonon=การสั่นของไอออน เรียกว่า Electron-phonon scattering) และ วิ่งชนพวกเดียวกันเอง (electron-electron scattering) อีกด้วย

<sup>3</sup> โดยทั่วไปแล้วอุณหภูมิเดอบายของโลหะมีค่าอยู่ในระดับ  $10^2 - 10^3$  เคลวิน

อุณหภูมิที่โลหะมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะปกติ (Normal state) เป็นสถานะนำยิ่งยวด (Superconducting state) ค่าความต้านทานของโลหะในสถานะนำยิ่งยวดนี้แสดงให้เห็นว่า อิเล็กตรอนในสถานะดังกล่าวไม่มีการชนกับอะไรมากในเนื้อโลหะ แม้ว่าโลหะดังกล่าวจะมีสิ่งเจือปนหรือความไม่สมบูรณ์อยู่ก็ตาม ซึ่งถือว่าเป็นสิ่งที่น่าทึ่ง และก่อนหน้าที่จะมีการค้นพบตัวนำยิ่งยวด ไม่มีใครคาดคิดว่าปรากฏการณ์เช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ เราจะมาเรียนรู้ในบทต่อไปว่า เหตุใดในสถานะนำยิ่งยวด อิเล็กตรอนจึงไม่วิ่งชนกับอะไรมาก



**รูปที่ 2** แสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสภาพต้านทานของโลหะที่กลายเป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิวิกฤต ( $T_c$ ) ถ้าโลหะนี้ไม่กลายเป็นตัวนำยิ่งยวด สภาพต้านทานจะมีลักษณะตามเส้นประเมื่ออุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างของค่าอุณหภูมิวิกฤตของสารบางชนิด

สาร	อุณหภูมิวิกฤต (เคลวิน)
ปรอท (Hg)	4.2
อลูมิเนียม (Al)	1.2
ตะกั่ว (Pb)	7.2
แกลเลียม (Ga)	1.1
อินเดียม (In)	3.4
ดีบุก (Sn)	3.7
สังกะสี (Zn)	0.88
ไททาเนียม (Ti)	0.39
ไนโอเบียม (Nb)	9.5
ไนโอเบียม-ดีบุก ( $Nb_3Sn$ )	18
แลนทานัมแบเรียมคอปเปอร์ออกไซด์ (La-Ba-Cu-Oxide)	30
อิตเทรียมแบเรียมคอปเปอร์ออกไซด์ (Y-Ba-Cu-Oxide)	92
แทลเลียมแบเรียมคอปเปอร์ออกไซด์ (Tl-Ba-Cu-Oxide)	125
สทรอนเชียมรูทาเนต ( $Sr_2RuO_4$ )	1.5
แมกเนเซียมไดโบไรด์ ( $MgB_2$ )	39
สารประกอบพลูโนเนียม ( $PuCoGa_5$ )	18

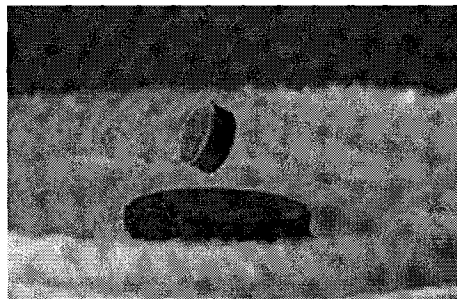
### 1.1.2 การเป็นตัวต้านสนามแม่เหล็กที่สมบูรณ์แบบ (Perfect Diamagnetism)

ความสามารถในการนำไฟฟ้าได้โดยไม่มี ความต้านทาน เป็นสมบัติที่เป็นที่รู้จักกันดีของตัวนำยิ่งยวด แต่ไม่ใช่สมบัติเฉพาะตัวของมัน เนื่องจากว่า สสารที่สามารถนำไฟฟ้าโดยไม่มี ความต้านทานนั้นไม่จำเป็นต้องเป็นตัวนำยิ่งยวดก็ได้ เช่น ทองแดงที่มีความบริสุทธิ์ ก็ สามารถนำไฟฟ้าได้โดยไม่มี ความต้านทาน สมบัติที่บ่งบอกความเป็นตัวนำยิ่งยวดโดยเฉพาะคือ ความสามารถในการเป็นตัวต้านสนามแม่เหล็กที่สมบูรณ์แบบ

ถ้าเราเริ่มต้นด้วยสมบัติความเป็นตัวต้านสนามแม่เหล็กที่สมบูรณ์แบบนี้ก่อน เราจะสามารถอธิบายการ ความสามารถในการเป็นตัวนำที่สมบูรณ์แบบได้ แต่ถ้าเราเริ่มต้นด้วย ความสามารถในการนำไฟฟ้าที่สมบูรณ์แบบก่อน เราจะไม่สามารถอธิบายการเป็นตัวต้านสนามแม่เหล็กที่สมบูรณ์แบบได้

กล่าวคือ เมื่อนำโลหะที่สามารถกลายเป็นตัวนำยิ่งยวดได้มาวางบนแท่งแม่เหล็กที่อุณหภูมิสูงกว่า อุณหภูมิวิกฤต โลหะดังกล่าวจะยอมให้สนามแม่เหล็กจากแท่งแม่เหล็กทะลุผ่านได้ แต่เมื่อลดอุณหภูมิลงจนต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต โลหะจะกลายเป็นตัวนำยิ่งยวด ถ้ามันเป็นเพียงตัวนำที่สมบูรณ์แบบเท่านั้น เราจะทำนายว่า สนามแม่เหล็กภายในเนื้อจะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด<sup>4</sup> แต่ในความเป็นจริงแล้ว มิได้เป็นเช่นนั้นเลย เมื่อ โลหะกลายเป็นตัวนำยิ่งยวด มันจะผลักสนามแม่เหล็กที่มีอยู่ออกจากภายในเนื้อของมัน โดยการสร้าง กระแสไฟฟ้าวิ่งในบริเวณผิวของมันขึ้นเอง ในลักษณะที่หักล้างพอดีกับสนามภายนอก

ความสามารถในการผลักสนามแม่เหล็กอย่างสมบูรณ์นี้ ถูกค้นพบโดยนักฟิสิกส์ชาวเยอรมันสองท่าน คือ Walter Meissner กับ Robert Ochsenfeld ในปี ค.ศ. 1933 เราจึงเรียกสมบัตินี้ อีกชื่อหนึ่งว่า ปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์ (Meissner and Ochsenfeld effect)



จาก <http://www.physics.ubc.ca/~supercon/research.html>

รูปที่ 3 แท่งแม่เหล็กลอยอยู่เหนือตัวนำยิ่งยวด

การที่ตัวนำยิ่งยวดผลักสนามแม่เหล็กออกนั้นเป็นสิ่งบ่งชี้ว่า ตัวนำยิ่งยวดเป็นสถานะใหม่ของโลหะ ซึ่งมีพลังงานต่ำกว่าโลหะที่อุณหภูมิเดียวกัน และสถานะใหม่นี้ถูกทำลายได้ โดยสนามแม่เหล็กวิกฤตค่าหนึ่ง ( $H_c$ ) ดังนั้นในทางเทอร์โมไดนามิกส์ สามารถสรุปได้ว่า ค่าความหนาแน่นพลังงาน (Helmholtz free energy

<sup>4</sup> ดูได้จากสมการ Maxwell's equation:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  โดยที่ ในตัวนำที่สมบูรณ์แบบนั้น สภาพต้านทาน,  $\rho = 0$  ซึ่งจะได้ว่า  $\vec{E} = \rho \vec{J} = 0 \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  หมายความว่า สนามแม่เหล็กไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา หรือ คือ สนามแม่เหล็กเคยเป็นเช่นไร ก็จะคงอยู่เช่นนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

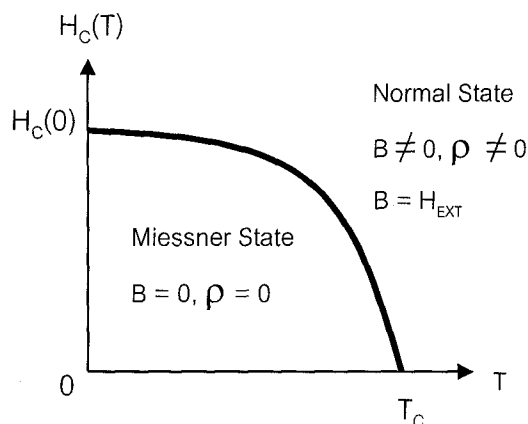
density) ของสถานะปกติที่เป็นโลหะ (Normal state) มีค่าสูงกว่าความหนาแน่นพลังงานของสถานะนำยิ่งยวด เป็นจำนวนเท่ากับขนาดของความหนาแน่นพลังงานของสนามแม่เหล็กขนาด  $H_C$  หรือ

$$f_N - f_S = \frac{H_C^2(T)}{8\pi}$$

โดย  $f_N, f_S$  คือความหนาแน่นพลังงานของโลหะปกติ และตัวนำยิ่งยวดตามลำดับ เทอมด้านขวาของสมการ คือความหนาแน่นพลังงานของสนามแม่เหล็กขนาด  $H_C$  นั่นเอง สังเกตว่าค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตนี้มีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงการแบ่งประเภทของตัวนำยิ่งยวดโดยลักษณะของค่าสนามวิกฤตของมัน

### 1.1.3 ค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นว่า นอกจากอุณหภูมิแล้ว สนามแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยิ่งยวดได้ด้วย เราแบ่งชนิดของตัวนำยิ่งยวดออกเป็น 2 ชนิด ตามลักษณะของค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตดังนี้ คือ ชนิดที่ 1 หรือ Type I Superconductors เป็นตัวนำยิ่งยวดที่มีค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตค่าเดียวซึ่งมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิดังแสดงในรูปที่ 4 จะเห็นได้ว่าตัวนำยิ่งยวดประเภทนี้ แสดงความสามารถในการผลึกสนามแม่เหล็กได้อย่างสมบูรณ์ (หรือที่เรียกว่า Miessner State) เมื่ออยู่ภายในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มต่ำกว่าค่าวิกฤต



รูปที่ 4 แสดง phase diagram ของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 เส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสนามวิกฤตที่อุณหภูมิต่างๆ จะเห็นว่าสนามวิกฤตมีค่าเป็นศูนย์ที่  $T_C$  (ไม่จำเป็นต้องใส่สนามแม่เหล็กในระบบก็อยู่ในสภาพปกติอยู่แล้ว)

เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก การเปลี่ยนแปลงจากสถานะปกติเป็นสถานะนำยิ่งยวดนั้นจะเกิดที่  $T_C$  และเป็นแบบที่เรียกว่า Second order phase transition แต่เมื่อมีสนามแม่เหล็ก การเปลี่ยนแปลงจากสถานะปกติเป็นสถานะนำยิ่งยวด จะเกิดขึ้นที่อุณหภูมิวิกฤตที่ต่ำลง หรืออีกนัยหนึ่งคือสภาพนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำลง หนึ่ง ๆ ถูกทำลายได้เมื่อใส่สนามแม่เหล็กที่มีค่าสูงกว่า ค่า  $H_C(T)$  ที่อุณหภูมินั้น ๆ ซึ่งค่าสนามแม่เหล็กนี้สัมพันธ์กับผลต่างระหว่างค่าพลังงานอิสระของทั้งสองสถานะในขณะที่ไม่ใส่สนามแม่เหล็กภายนอก ดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อที่แล้ว ในเชิงทดลอง เราพบว่า  $H_C(T)$  ขึ้นกับอุณหภูมิในลักษณะพาราโบลาดังนี้



$$H_C(T) = H_C(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \right]$$

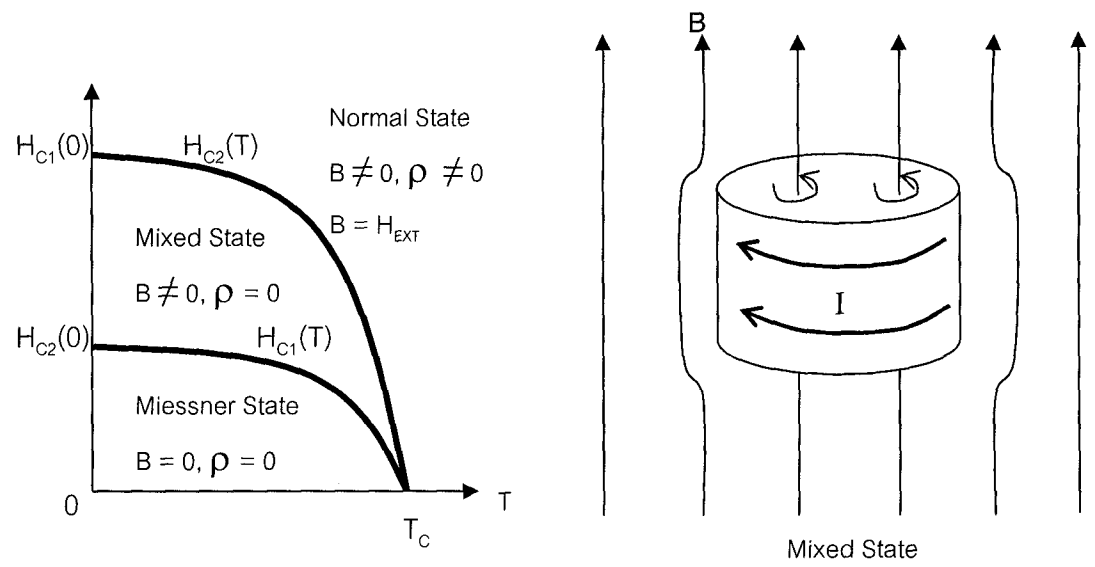
นอกจากนี้ การเปลี่ยนแปลงจากสถานะปกติเป็นสถานะนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กนั้นมีลักษณะที่เรียกว่า First order phase transition กล่าวคือ จะมีความร้อนแฝงมาเกี่ยวข้อง ณ จุดเปลี่ยนสถานะ

**1.1.4 ค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2**

ลักษณะใหม่ที่ต่างไปของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 หรือ Type II Superconductors คือ มีสถานะที่เรียกว่าสถานะผสม (Mixed State) เกิดขึ้น สถานะนี้แสดงปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ สนามแม่เหล็กในเนื้อของตัวนำยิ่งยวดไม่ได้ถูกผลักออกไปทั้งหมด แต่ถูกผลักออกบางส่วน แม้ว่าตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้ จะยังคงมีกระแสไฟฟ้าวิ่งอยู่ที่ผิวของตัวนำยิ่งยวด ซึ่งสร้างสนามแม่เหล็กต้านสนามภายนอก แต่ต้านไม่หมด เหมือนกับในตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 นอกจากนี้ ภายในเนื้อของมันก็มีกระแสวนซึ่งสร้างสนามแม่เหล็กในทิศทางเดียวกับสนามภายนอกด้วย โดยที่ฟลักซ์สนามแม่เหล็กในแต่ละกระแสวนนี้มีค่าเฉพาะค่าหนึ่งเท่านั้น เรียกว่า ค่าควอนตัมฟลักซ์แม่เหล็กพื้นฐาน (Elementary flux quantum)

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ Gauss-cm}^2$$

ในสถานะผสม สารมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวด (ในบริเวณที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก) และโลหะปกติ (ในบริเวณภายในกระแสวน) ร่วมกันอยู่ และยังคงสามารถนำไฟฟ้าได้โดยไม่มี ความต้านทาน



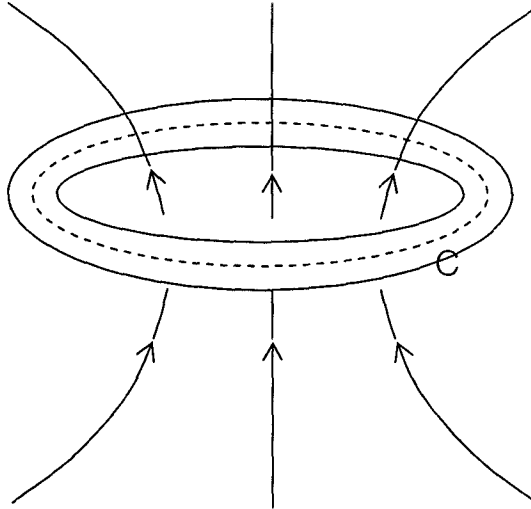
รูปที่ 5 รูปซ้ายแสดง phase diagram ของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 จะเห็นได้ว่า ตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้มีสถานะต่างกัน 3 สถานะ คือ สถานะไมซ์เนอร์ สถานะผสม และสถานะปกติ รูปขวาแสดงลักษณะของสถานะผสม

### 1.1.5 ควอนไทเซชันของฟลักซ์แม่เหล็ก

ค่าฟลักซ์แม่เหล็กภายในตัวนำยิ่งยวดรูปวงแหวนจะมีค่าควอนไทซ์

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = n\Phi_0$$

โดยที่  $S$  คือพื้นที่ที่เส้นโค้งประ  $C$  ปิด ดังในรูปที่ 6 (สังเกตว่าเส้นโค้งนี้เป็นเส้นสมมุติที่ต้องอยู่ในเนื้อหาของวงแหวนตัวนำยิ่งยวด) และ  $n$  คือเลขจำนวนเต็ม



รูปที่ 6 แสดงวงแหวนตัวนำยิ่งยวดที่มีสนามแม่เหล็กผ่านด้านใน ค่าฟลักซ์ภายในพื้นที่ที่ปิดด้วยเส้นประโค้ง  $C$  มีค่าควอนไทซ์

คำอธิบายของลอนดอนเกี่ยวกับสมบัตินี้ของตัวนำยิ่งยวดเป็นดังนี้ โดยทั่วไป กระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นโดยประจุ  $q$  ในสนามแม่เหล็ก มีค่าแปรผันตรงกับ โมเมนตัม  $m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}$  แต่เราทราบว่า ภายในเนื้อหาของตัวนำยิ่งยวดกระแสมีค่าเป็นศูนย์ (เนื่องจากกระแสวิ่งอยู่ที่ผิวเท่านั้น) ดังนั้น  $\mathbf{p} = \frac{q}{c}\mathbf{A}$  และ จากกฎการควอนไทซ์ของบอร์ (Bohr Quantization Rule) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} &= nh \\ &= \oint \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{q}{c} \oint (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q}{c} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{c} \Phi \\ \therefore \Phi &= n \left( \frac{hc}{q} \right) \end{aligned}$$

และเราทราบว่า ในตัวนำยิ่งยวด  $q = 2e$

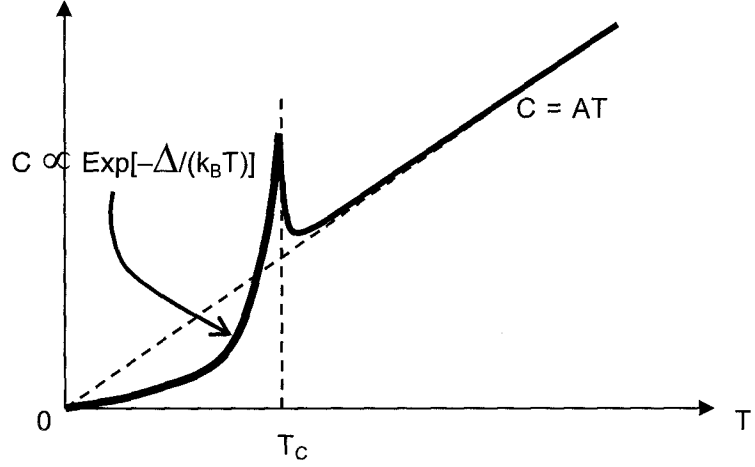
### 1.1.6 ความร้อนจำเพาะ

ความร้อนจำเพาะ (C) ในโลหะที่อุณหภูมิต่ำ ๆ เกิดจากสองส่วน คือ จากการสั่นของไอออน หรือ โฟนอน ซึ่งขึ้นกับอุณหภูมิกำลังสาม (T<sup>3</sup>) และจากอิเล็กตรอนซึ่งแปรผันตรงกับอุณหภูมิ (T) นั่นคือ

$$C(T) = AT + BT^3$$

โดยที่ A และ B คือค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับอิเล็กตรอนและโฟนอนตามลำดับ ดังนั้น ถ้าเราพล็อตกราฟระหว่าง C/T กับ T<sup>2</sup> เราจะได้กราฟเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ B และจุดตัดแกนตั้งเท่ากับ A

สำหรับโลหะที่กลายเป็นตัวนำยิ่งยวดนั้น ค่าความร้อนจำเพาะที่เกิดจากอิเล็กตรอนที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิกวิกฤต จะขึ้นกับอุณหภูมิในลักษณะเชิงเส้น เมื่ออุณหภูมิลดลง ความร้อนจำเพาะจะมีค่ากระโดดไม่ต่อเนื่องที่อุณหภูมิกวิกฤต และมีลักษณะเป็นเอกซ์โปเนนเชียลที่อุณหภูมิต่ำกว่า ซึ่งแสดงถึงการมีช่องว่างพลังงานในสเปกตรัมพลังงานของระบบ



รูปที่ 7 แสดงกราฟความร้อนจำเพาะจากอิเล็กตรอนของโลหะที่กลายเป็นตัวนำยิ่งยวดได้

### 1.1.7 ปรากฏการณ์โจเซฟสัน

เมื่อเรานำโลหะสองชิ้นมาต่อกัน จะไม่มีกระแสไหลผ่านรอยต่อเมื่อความต่างศักย์ตกคร่อมเป็นศูนย์ และความสัมพันธ์ระหว่างกระแสไฟฟ้ากับความต่างศักย์ตกคร่อม จะมีลักษณะเป็นไปตามกฎของโอห์ม แต่ถ้าเรานำตัวยิ่งยวดสองตัวมาต่อกัน เราจะพบว่ามีการไหลผ่านแม้ว่าไม่มีความต่างศักย์ตกคร่อม สมบัตินี้ของตัวนำยิ่งยวด ได้ถูกทำนายไว้โดย โจเซฟสัน (B. D. Josephson) ในปี ค. ศ. 1962 โดยโจเซฟสันแสดงให้เห็นว่า สิ่งที่ขัดกันให้กระแสไหลคือ ผลต่างของเฟสระหว่างตัวนำยิ่งยวดทั้งสองตัว

เราสามารถบรรยายตัวนำยิ่งยวดได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น ซึ่งมีทั้งขนาดและเฟส โดยที่ขนาดยกกำลังสองของฟังก์ชันคลื่นนี้ แปรผันตรงกับจำนวนอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวด ถ้าให้  $\psi_L = |\psi_L|e^{i\phi_L}$  คือฟังก์ชันคลื่นของตัวนำยิ่งยวดตัวที่อยู่ด้านซ้าย และ  $\psi_R = |\psi_R|e^{i\phi_R}$  คือฟังก์ชันคลื่นของตัวนำยิ่งยวดตัวที่อยู่ด้านขวา แม้เมื่อไม่มีความต่างศักย์ตกคร่อม จะมีการไหลผ่านรอยต่อ มีค่าเท่ากับ

$$I = I_0 \sin(\phi_R - \phi_L)$$

เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า dc Josephson Effect และเมื่อมีความต่างศักย์ตกคร่อมรอยต่อ จะมีการไหลที่มีลักษณะกวัดแกว่งขึ้นกับเวลาโดยที่ความถี่เชิงมุมของการกวัดแกว่งนี้มีค่าขึ้นกับความต่างศักย์ตกคร่อม นั่นคือ

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t + \varphi_R - \varphi_L\right)$$

ปรากฏการณ์นี้ เราเรียกว่า ac Josephson Effect และเนื่องจากว่า เราสามารถที่จะวัดค่าความถี่นี้ได้อย่างแม่นยำมาก เราสามารถใช้ปรากฏการณ์นี้มาใช้วัดอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่ของพลังค์กับประจุของอิเล็กตรอนได้อย่างแม่นยำ

## 1.2 ทบทวนฟิสิกส์ที่จำเป็นบางส่วน

สมการแมกซ์เวลล์ในหน่วยเกาเซียนคือ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

โดยที่  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi_E)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$  คือ Electric Displacement  $\vec{P}$  คือโพลาริเซชัน (ไดโพลโมเมนต์ต่อหน่วยปริมาตร)  $\chi_E$  คือ Electric susceptibility และ  $\epsilon$  คือค่าคงที่ไดอิเล็กตริก และในทำนองเดียวกัน  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = (1 + 4\pi\chi_H)\vec{H} = \mu\vec{H}$  คือ Magnetic Induction  $\vec{M}$  คือโพลาริเซชัน  $\chi_H$  คือ Magnetic susceptibility และ  $\mu$  คือ สภาพยอมแม่เหล็ก

สมการต่อเนื่องคือ  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  และสำหรับกรณีที่ระบบอยู่ในสถานะกึ่งคงตัวหรือคงตัว เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{นั่นคือ เราสามารถเขียนได้ว่า } \vec{j} = c\vec{\nabla} \times \vec{M}$$

## 1.3 แบบฝึกหัด

1. จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่างค่า Magnetic susceptibility ของตัวนำยิ่งยวดทั้งสองชนิดที่อุณหภูมิ  $T < T_c$
2. พิจารณาก่อนตัวนำยิ่งยวดอันหนึ่งที่มีรูปร่างกระบอกขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 0.1 มิลลิเมตร อยู่ ถ้ามีฟลักซ์แม่เหล็กจำนวน 7 เท่าของควอนตัมฟลักซ์แม่เหล็กพื้นฐานอยู่ภายในรูนี้ จงคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กที่ผ่านรูนี้
3. จงหาว่าที่อุณหภูมิประมาณเท่ากับเท่าใดที่ค่าความร้อนจำเพาะ (Heat capacity) ของตะกั่วในสถานะนำยิ่งยวดมีค่าเท่ากับค่าความร้อนจำเพาะในสถานะปกติ

## บทที่ 2 สมการของลอนดอน

F. London และ H. London เป็นนักฟิสิกส์ท่านแรก ๆ ที่พยายามอธิบายปรากฏการณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ไดนามิกส์ (Electrodynamics) ของตัวนำยิ่งยวด โดยอาศัยพื้นฐานความรู้ที่ได้มาจากการสังเกตผลการทดลองที่เกี่ยวข้อง ซึ่งก็ทำให้ได้สมการลอนดอนออกมา 2 สมการ สมการทั้งสองนี้ มีผลมาจากแนวคิดที่เรียกว่า Two-fluid model กล่าวคือ ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต อิเล็กตรอนอิสระในโลหะบางส่วนจะเริ่มควบแน่นและกลายเป็น อิเล็กตรอนนำยิ่งยวด (Superconducting electrons) ที่มีสมบัติต่างไปจากอิเล็กตรอนอิสระ และมีสมการที่จะบรรยายสมบัติของมันต่างไป (ซึ่งก็คือสมการลอนดอนนั่นเอง) เมื่ออุณหภูมิต่ำลงจำนวนอิเล็กตรอนอิสระก็จะกลายเป็นอิเล็กตรอนนำยิ่งยวดมากขึ้นจนที่ศูนย์เคลวิน อิเล็กตรอนอิสระทุกตัวจะควบแน่นกลายเป็นอิเล็กตรอนนำยิ่งยวดทั้งหมด

ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว สมการของลอนดอน เป็นสมการเชิงปรากฏการณ์ (Phenomenological equations) ที่ได้มาจากการพิจารณาลักษณะที่เกี่ยวข้องและสังเกตได้ ไม่ได้มาจากกฎพื้นฐานใด ๆ ทั้งสิ้น สมการลอนดอนทั้งสองสมการดังต่อไปนี้ บรรยายสมบัติทางแม่เหล็กไฟฟ้าของตัวนำยิ่งยวดได้ ดังนี้

$$\vec{e} = \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \vec{j}_s) \quad (1)$$

$$\vec{h} = -c \vec{\nabla} \times (\Lambda \vec{j}_s) \quad (2)$$

โดยที่  $\vec{e}$  และ  $\vec{h}$  คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเชิงจุลภาค (นั่นคือ  $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$ ,  $\vec{H} = \langle \vec{h} \rangle$  ค่าเฉลี่ยเชิงตำแหน่ง)  $\vec{j}_s$  คือค่ากระแสยิ่งยวด (Supercurrent) และ  $\Lambda = \frac{m^*}{n_s e^{*2}}$  เป็นพารามิเตอร์เชิงปรากฏการณ์ (Phenomenological parameter)  $n_s$ ,  $m^*$  และ  $e^*$  เป็นจำนวนอิเล็กตรอนยิ่งยวดต่อปริมาตร มวลและประจุของอนุภาคที่นำกระแสยิ่งยวด ซึ่งต่อมาจะเป็นที่ทราบกันว่า  $m^*$  และ  $e^*$  มีค่าเป็นสองเท่าของมวลและประจุของอิเล็กตรอน

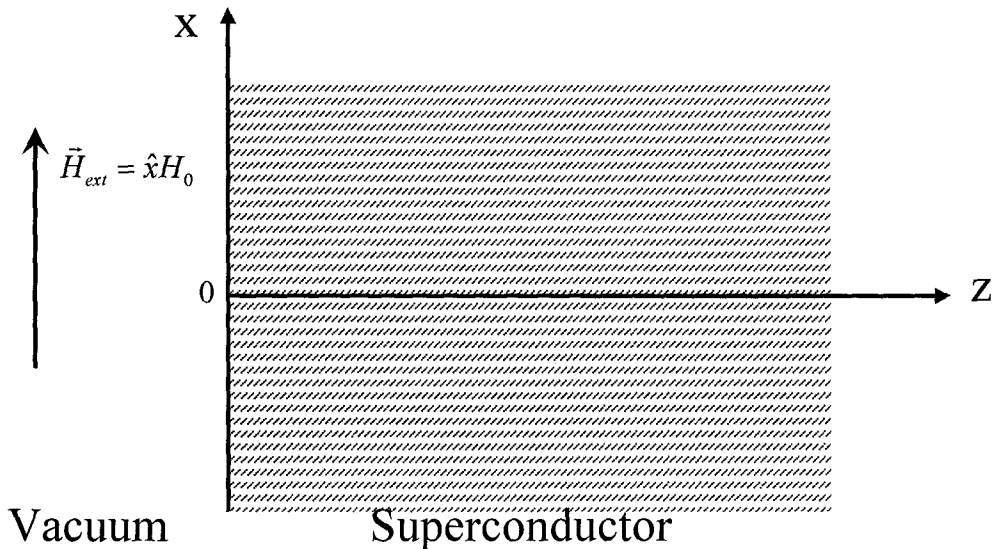
จะเห็นได้ว่า สมการแรกแสดงถึงความสามารถในการนำไฟฟ้าอย่างยิ่งยวด กล่าวคือ สนามไฟฟ้าไม่ใช่เพียงแต่รักษาความเร็วตามกฎของโอห์ม แต่ทำให้อิเล็กตรอนยิ่งยวดมีความเร่ง และสำหรับสมการที่สอง เมื่อนำมาใช้ร่วมกับสมการแมกซ์เวลล์  $\vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  จะได้สมการ  $\nabla^2 \vec{h} = \frac{\vec{h}}{\lambda^2}$  ซึ่งบรรยายถึงปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์ คือ บ่งบอกว่าสนามแม่เหล็กถูกกันออกจากเนื้อตัวนำยิ่งยวด โดยจะยอมให้สนามเข้าไปได้ลึกเป็นลักษณะฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล โดยระยะสำคัญที่ยอมให้สนามแม่เหล็กเข้าไปได้นั้น เรียกว่า ระยะทะลุทะลวง (Penetration depth)  $\lambda = c \sqrt{\frac{\Lambda}{4\pi}}$

### 2.1 ผลของสมการลอนดอน

#### 2.1.1 ปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์และระยะทะลุทะลวง

ในตอนนี้เราจะแสดงรายละเอียดการประยุกต์ใช้สมการลอนดอนสมการที่สองก่อน โดยจะใช้อธิบายการทะลุของสนามแม่เหล็กในเนื้อของตัวนำยิ่งยวด โดยเราจะพิจารณาลักษณะของระบบที่ง่ายที่สุดก่อน คือ ที่เรียกว่า Semi-infinite slab (ดูรูปที่ 1) คือให้ผิวของตัวนำยิ่งยวดอยู่ในระนาบ xy (ระนาบที่ตั้งฉากกับ

หน้ากระดาษ) และเนื้อของตัวนำยิ่งยวดอยู่ในบริเวณที่  $z > 0$  บริเวณที่  $z < 0$  เป็นสุญญากาศ ให้สนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเป็น  $\vec{H}_{ext} = \hat{x}H_0$  สมการลอนดอนสามารถนำมาใช้คำนวณหาว่า สนามแม่เหล็กในเนื้อของตัวนำยิ่งยวดมีลักษณะเช่นไรในเชิงปริมาณได้



รูปที่ 1 แสดงลักษณะของระบบที่พิจารณาในการศึกษาปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์โดยใช้สมการลอนดอน

เห็นได้ชัดว่า ระบบลักษณะเช่นนี้ ค่าสนามแม่เหล็กและกระแสไฟฟ้าจะมีค่าขึ้นกับ  $z$  เท่านั้น (เนื่องจากระบบมี Translational symmetry ในแนว  $x$  และ  $y$ ) นอกจากนี้แล้วเราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่สนามไฟฟ้ามีค่าไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา (Static case  $\frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = 0$ ) จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

เมื่อเราพิจารณาในเนื้อตัวนำยิ่งยวด จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}_s$$

ซึ่งเมื่อเราใช้สมการลอนดอนสมการที่สอง  $-\frac{\vec{h}}{\Lambda c} = \vec{\nabla} \times \vec{j}_s$  แทนค่าลงไป จะได้

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = -\frac{4\pi}{c^2 \Lambda} \vec{h}$$

จากนั้นใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h}$  ซึ่งพจน์แรกมีค่าเป็นศูนย์ เราจะได้สมการที่บรรยายค่าสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในตัวนำยิ่งยวดคือ

$$\nabla^2 \vec{h} = \frac{\vec{h}}{\lambda^2} \quad (3)$$

โดยที่  $\Lambda = \frac{m^*}{n_s e^{*2}} \equiv \frac{4\pi}{c^2} \lambda^2$  ตามลักษณะของระบบที่เรากำลังพิจารณา  $\vec{h}$  จะมีทิศทางเดียวกับ  $\vec{H}_{ext}$  คือขนาน

ไปกับผิวของตัวนำยิ่งยวดในทิศ  $+x$  แต่มีขนาดขึ้นกับ  $z$  เท่านั้น นั่นคือ

$$\vec{h}(z) = \hat{x} h(z)$$

ดังนั้น สำหรับกรณีที่เรากำลังพิจารณา สมการที่ (3) เราจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2h}{dz^2} = \frac{h}{\lambda^2}$$

ซึ่งสมการอนุพันธ์อันดับสองนี้มีคำตอบทั่วไปคือ

$$h(z) = Ae^{-z/\lambda} + Be^{z/\lambda}$$

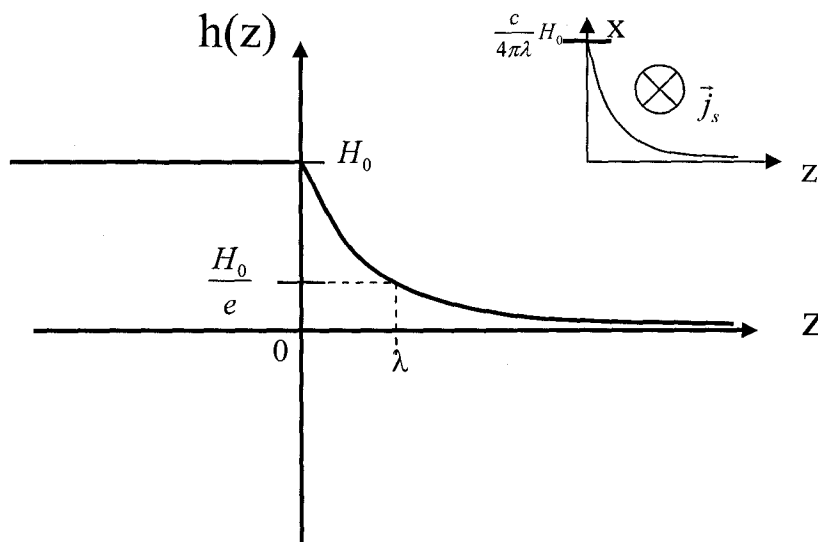
เนื่องจากค่าสนามแม่เหล็กไม่มีลักษณะที่เพิ่มขึ้นในเนื้อตัวนำยิ่งยวด ดังนั้น  $B = 0$  นั่นคือ คำตอบในกรณีที่เราพิจารณาจะเป็น  $h(z) = Ae^{-z/\lambda}$  โดยที่เราสามารถหาค่าคงที่ A ได้จากเงื่อนไขที่ผิว คือ ค่าสนามแม่เหล็กมีค่าต่อเนื่อง ดังนั้น  $h(z=0) = H_0$  ซึ่งจะทำให้ได้ว่า  $A = H_0$  นั่นคือ ค่าสนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำยิ่งยวด เขียนได้เป็น

$$h(z) = H_0e^{-z/\lambda}$$

หมายความว่า สนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าลดลง โดยที่มีระยะทะลุทะลวง (ระยะที่ค่าสนามแม่เหล็กมีค่าเหลือ  $1/e$  เท่าของค่าที่ผิว) เท่ากับ  $\lambda$

เราสามารถคำนวณหาค่ากระแสยิ่งยวดภายในได้จากสมการแมกซ์เวล  $\vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$  ซึ่งจะได้ว่า

$\vec{j}_s = -\hat{y} \frac{c}{4\pi\lambda} H_0 e^{-z/\lambda}$  ซึ่งเป็นกระแสที่สร้างสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำภายในในทิศตรงข้ามกับสนามภายนอก และมีค่าลดลงในลักษณะเดียวกับค่าของสนามแม่เหล็ก



รูปที่ 2 แสดงค่าสนามไฟฟ้าที่บริเวณต่าง ๆ ของระบบพิจารณา รูปเล็กด้านบนขวามือ แสดงค่ากระแสภายในเนื้อตัวนำยิ่งยวด

เราสามารถคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กในกรณีที่ตัวนำยิ่งยวดมีรูปร่างอื่นได้ด้วย แต่จะมีความยุ่งยากมากขึ้นกว่าในกรณีที่เราพิจารณาในที่นี้

ตารางที่ 1 แสดงค่า  $\lambda$  ของตัวนำยิ่งยวดบางตัว จากตารางจะเห็นได้ว่า  $\lambda$  มีค่าน้อย

สาร	$\lambda$ (อังสตรอม)
อลูมิเนียม (Al)	500
ไนโอเบียม (Nb)	400
ไนโอเบียม-ไททาเนียม (Nb-Ti)	600

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างของค่าระยะทะลุผ่านของสนามแม่เหล็กของสารบางชนิด

นอกจากนี้ จากสมการลอนดอนเราได้ว่าค่า  $\lambda$  มีความสัมพันธ์กับจำนวนอิเล็กตรอนยิ่งยวดเป็นดังนี้

$$\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi n_s e^{*2}}{m^*}$$

นั่นก็หมายความว่า เราสามารถวัดค่าจำนวนอิเล็กตรอนยิ่งยวดได้ โดยการทดลองวัด  $\lambda$

### 2.1.2 ความหนาแน่นพลังงานในแบบจำลองของลอนดอน

เราจะพิจารณาโลหะบริสุทธิ์ซึ่งกลายเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ และมีลักษณะของการกระจายพลังงานในแถบนำไฟฟ้าเป็นแบบพาราโบลา และอิเล็กตรอนที่อยู่ในแถบนี้มีมวล  $m$  ค่าพลังงานอิสระของโลหะในสนามแม่เหล็กสามารถเขียนได้เป็น

$$F = E_k + E_M + \int f_{s0} d\vec{r}$$

โดยที่  $f_{s0}$  คือ ค่าความหนาแน่นพลังงานของอิเล็กตรอนที่อยู่หนึ่งในสถานะนำยิ่งยวด (หรือ สถานะควบแน่น Condensed state)  $E_k$  คือ ค่าพลังงานจลน์ ซึ่งจะสัมพันธ์กับค่ากระแสนำยิ่งยวด และ  $E_M$  คือค่าพลังงานที่สัมพันธ์กับสนามแม่เหล็ก ถ้า  $\vec{v}(\vec{r})$  คือ ความเร็วลอยเลื่อนของอิเล็กตรอนที่ตำแหน่ง  $\vec{r}$  นั่นคือ ค่าพลังงานจลน์สามารถเขียนได้เป็น

$$E_k = \int d\vec{r} \frac{1}{2} m v^2 n_s$$

(อินทิเกรตบนปริมาตรของสาร สมการนี้ถูกต้องสำหรับในกรณีที่  $v$  เป็นค่าคงที่เท่านั้น แต่อย่างไรก็ดี โดยประมาณแล้ว สมการนี้ก็ยังสามารถใช้ได้ ในกรณีของเรา ถ้า  $\vec{v}(\vec{r})$  มีค่าเปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่งอย่างช้า ๆ)

และพลังงานที่มาจากสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากับ

$$E_M = \int d\vec{r} \frac{h^2}{8\pi}$$

เนื่องจากความเร็วลอยเลื่อนมีความสัมพันธ์กับค่าความหนาแน่นกระแสนำยิ่งยวด  $\vec{j}_s$  เป็น  $\vec{j}_s(\vec{r}) = n_s e \vec{v}(\vec{r})$  เราจึงสามารถเขียน พลังงานจลน์ในรูปของสนามแม่เหล็กได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 n_s &= \frac{1}{2} \frac{m}{n_s e^{*2}} (n_s e^* \vec{v}) \cdot (n_s e^* \vec{v}) = \frac{1}{2} \Lambda \vec{j}_s \cdot \vec{j}_s \quad \text{ใช้สมการแมกซ์เวลล์ } \vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_s \quad \text{จะได้} \\ &= \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{4\pi}{c^2} \lambda^2 \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \\ &= \frac{1}{8\pi} \lambda^2 (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า พลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากับ

$$F = \int d\vec{r} \left\{ f_{s0} + \frac{1}{8\pi} \left[ h^2 + \lambda^2 (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \right] \right\}$$



### 2.1.3 การคำนวณหาค่าพลังงานผิวในแบบจำลองลอนดอน

เราจะพิจารณากรณีของตัวนำยิ่งยวด Semi-infinite slab ที่อยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก  $\vec{H}_0$  ซึ่งในกรณีนี้ สถานะสมดุลของระบบในทางเทอร์โมไดนามิกส์ คือสถานะที่มีค่าพลังงานอิสระกิบส์  $G$  ต่ำที่สุด (ไม่ใช่พลังงานอิสระ  $F$ ) โดยที่

$$G = F - \int dV \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{h}}{4\pi}$$

ซึ่งในแบบจำลองของลอนดอนจะได้

$$G = \int d\vec{r} \left\{ f_{SO} + \frac{h^2}{8\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{h}}{4\pi} \right\}$$

ถ้ากำหนดให้ตัวนำยิ่งยวดนี้มีปริมาตร  $V$  ค่าพลังงานอิสระกิบส์ของเนื้อตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่ากับ

$$G_{\text{bulk}} = Vf_{SO}$$

(สังเกตว่าค่าพลังงานนี้เป็นค่าพลังงานภายใน"เนื้อ"เท่านั้น ซึ่งหมายความว่า ไม่คิดพลังงานจากสนามแม่เหล็ก จะมีก็แต่เฉพาะค่าพลังงานของความเป็นตัวนำยิ่งยวดเท่านั้น) ค่าพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวดใน

สนามแม่เหล็กจะมีค่าต่างไปจาก  $G_{\text{bulk}}$  เนื่องจากสนามแม่เหล็กสามารถทะลุเข้าไปในเนื้อได้บ้าง เท่ากับระยะ  $\lambda$  ดังนั้น พลังงานผิวอิสระ (Surface free energy) จะมีค่าเท่ากับ

$$G_{\text{surface}} = G - G_{\text{bulk}}$$

สำหรับระบบ Semi-infinite slab ที่เรากำลังพิจารณาอยู่ สนามแม่เหล็กภายในตัวนำยิ่งยวดมีค่า  $\vec{h} = \hat{x}H_0 e^{-z/\lambda}$  ดังนั้นค่าพลังงานผิวอิสระของระนาบผิว  $z = 0$  มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} G_{\text{surface}} &= \int dV \left\{ \frac{h^2}{8\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{h}}{4\pi} \right\} \\ &= \iint dx dy \int dz \left\{ \frac{h^2}{8\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{h}}{4\pi} \right\} \\ &= A \int_0^\infty dz \left\{ \frac{h^2}{8\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \frac{\vec{H}_0 \cdot \vec{h}}{4\pi} \right\} \end{aligned}$$

โดยที่  $A$  คือพื้นที่ผิวของระนาบ  $z = 0$  เมื่อแทนค่า  $\vec{h} = \hat{x}H_0 e^{-z/\lambda}$  ลงไปจะได้

$$G_{\text{surface}} = -A\lambda \frac{H_0^2}{8\pi} \quad \text{หรือ} \quad \frac{G_{\text{surface}}}{A} = -\lambda \frac{H_0^2}{8\pi}$$

สังเกตว่า พลังงานผิวอิสระมีค่าติดลบ ซึ่งหมายความว่า การที่ยอมให้สนามแม่เหล็กทะลุผ่านเข้าไปในเนื้อบ้าง

ทำให้ ระบบมีพลังงานต่ำลง นอกจากนี้แล้ว เราทราบว่า  $\frac{H_0^2}{8\pi}$  คือค่าความหนาแน่นพลังงานของสนามแม่เหล็ก

$\vec{H}_0$  ในสุญญากาศ จึงอาจจะไม่ใช่เรื่องแปลกที่เราได้ค่าพลังงานผิวต่อหน่วยพื้นที่มีขนาดเท่ากับ  $\frac{H_0^2}{8\pi} \times \lambda$

### 2.1.4 การอนุรักษ์และควอนไทซ์ของฟลักซอยด์

พิจารณาตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกระบอกกลวงที่มีฟลักซ์แม่เหล็กผ่านส่วนที่กลวง โดยใช้สมการแมกซ์เวลล์

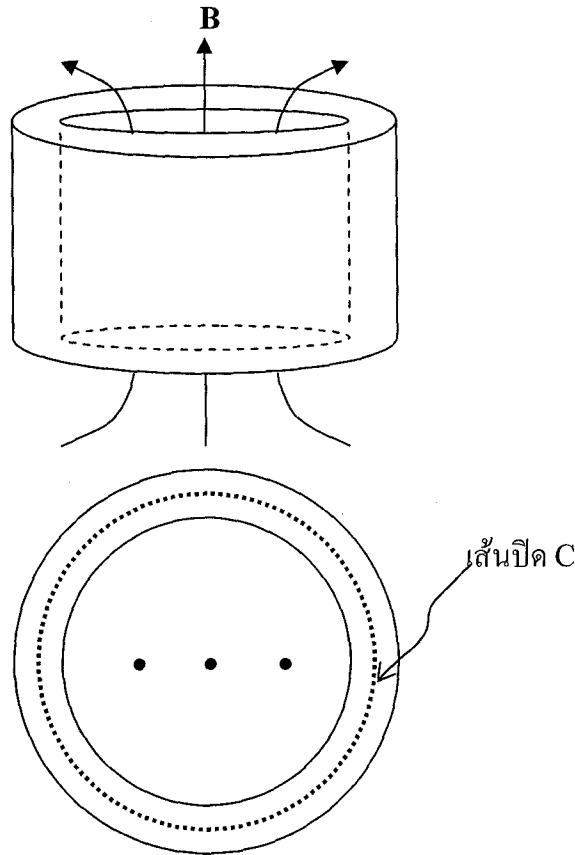
$\vec{\nabla} \times \vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0$  และอินทิเกรตตลอดสมการนี้บนพื้นผิว  $S$  ซึ่งปิดด้วยเส้นปิด  $C$  ดังในรูปที่ 3 จะได้ว่า

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{e}) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{h} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ ใช้ Stoke's Theorem จะได้}$$

$$\oint_C \vec{e} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{h} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ ใช้สมการลอนดอน } \vec{e} = \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \vec{j}_s) \text{ และจัดรูปได้}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \oint_C c \Lambda \vec{j}_s \cdot d\vec{l} + \int \vec{h} \cdot d\vec{S} \right) = 0$$

นิยาม ฟลักซอยด์ (Fluxoid)  $\Phi' = \int \vec{h} \cdot d\vec{S} + \oint_C c \Lambda \vec{j}_s \cdot d\vec{l}$  เราจะได้ว่า  $\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0$  นั่นคือ ฟลักซอยด์ภายในช่องกลวงของตัวนำยิ่งยวดใด ๆ มีค่าคงตัว ไม่เปลี่ยนแปลงไปกับเวลา ถ้า  $\vec{h}$  เกิดมีการเปลี่ยนแปลง  $\vec{j}_s$  จะเกิดการเปลี่ยนแปลงด้วย ในลักษณะที่ทำให้  $\Phi'$  ไม่มีการเปลี่ยนแปลง



รูปที่ 3 รูปบนแสดงตัวนำยิ่งยวดกลวงรูปทรงกระบอกที่มีสนามแม่เหล็กผ่านตรงส่วนที่กลวง รูปล่างแสดงภาคตัดขวางจากด้านบน

การคำนวณต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าฟลักซอยด์สัมพันธ์กับ Canonical momentum

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int \vec{h} \cdot d\vec{S} + \oint_C c \Lambda \vec{j}_s \cdot d\vec{l} \\ &= \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} + \oint_C c \Lambda \vec{j}_s \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_C (\vec{A} + c \Lambda \vec{j}_s) \cdot d\vec{l} \text{ แทนค่า } \Lambda \text{ ตามนิยาม และ } \vec{j}_s = n_s e^* \vec{v}_s \text{ จะได้} \end{aligned}$$

$$\Phi' = \frac{c}{e^*} \oint_C \left( \frac{e^*}{c} \vec{A} + m\vec{v}_s \right) \cdot d\vec{l}$$

เราทราบว่า อนุภาคในสนามแม่เหล็ก มีค่า Canonical momentum เท่ากับ

$$\vec{p}_s = m\vec{v}_s + \frac{e^*}{c} \vec{A}$$

จาก Bohr-Sommerfeld quantization rule เราได้ว่า  $\oint_C \vec{p}_s \cdot d\vec{l} = nh$  ซึ่งจากสมการที่เกี่ยวกับฟลักซ์ชอยด์ข้างต้น เราจะได้ว่า

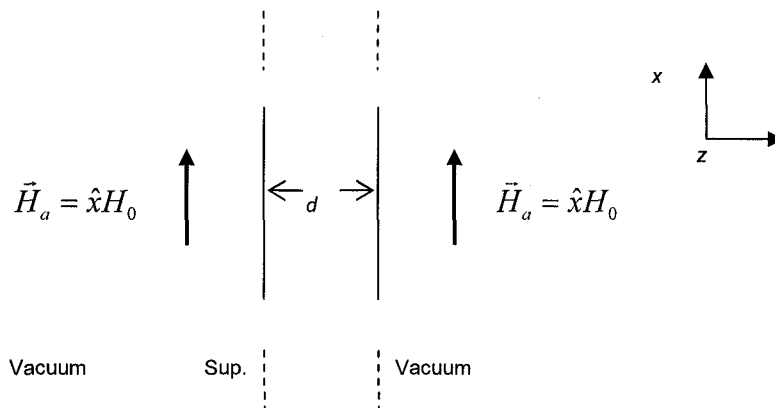
$$\Phi' = \frac{c}{e^*} \oint_C \vec{p}_s \cdot d\vec{l} = n \frac{hc}{e^*} \equiv n\Phi_0 \text{ โดยที่ } \Phi_0 = \frac{hc}{e^*} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ G-cm}^2 \text{ เรียกว่า ควอนตัมฟลักซ์ชอยด์}$$

(Fluxoid quantum)

แม้ว่าการคำนวณที่ผ่านมาทั้งหมดเกี่ยวกับฟลักซ์ชอยด์ เราได้ใช้ Semiclassical Bohr-Sommerfeld approximation กับสมการลอนดอน แต่สิ่งที่ได้มาเกี่ยวกับการควอนไทซ์ของฟลักซ์ชอยด์เป็นผลที่ถูกต้องเนื่องจากในการบรรยายสถานะของตัวนำยิ่งยวดนั้น เราสามารถใช้ฟังก์ชันคลื่นเพียงตัวเดียวแทนได้ ซึ่งก็หมายความว่า เฟสของฟังก์ชันคลื่นจะมีค่าเปลี่ยนไปเป็นจำนวนเท่าของ  $2\pi$

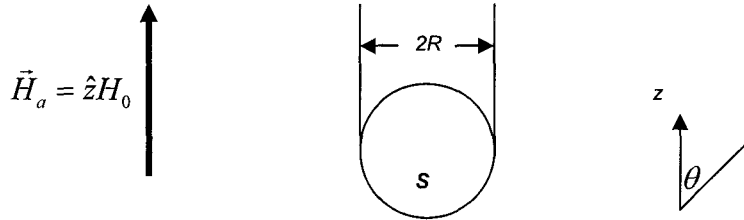
## 2.2 แบบฝึกหัด

1. พิจารณากรณีของแผ่นตัวนำยิ่งยวดหนา  $d$  ซึ่งยาวและเล็กเป็นระยะอนันต์ และวางในทิศทางขนานอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก  $\vec{H}_a$  ดังในรูปข้างล่าง (แกนต่าง ๆ นิยามตามในรูปนี้)



- 1.1 จงหาและพลอตค่าสนามแม่เหล็กที่บริเวณต่าง ๆ
- 1.2 ค่าสนามแม่เหล็กเฉลี่ยภายในตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่าใด
- 1.3 เราทราบว่า  $\vec{B} = \langle \vec{h} \rangle = \vec{H}_a + 4\pi\vec{M}$  จงหาค่า  $\vec{M}$  ในกรณีที่  $d \gg \lambda$  และ  $d \ll \lambda$
2. พิจารณาตัวนำยิ่งยวดรูปทรงกลมรัศมี  $R$  ในสนามแม่เหล็กภายนอก  $\vec{H}_a = H_a z$  ดังแสดงในรูปข้างล่าง
  - 2.1 ให้หาค่า Magnetic induction  $\vec{B}(r, \theta)$ .
  - 2.2 ค่ากระแสที่ผิวของตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่าใด

- 2.3 ค่าสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัส ( $H_\theta$ ) บนผิวตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่าใด และที่มุม  $\theta$  เท่ากับเท่าใดที่ให้ค่า  $H_\theta$  มากกว่าค่า  $H_a$  และค่าต่ำสุดของ  $H_a$  ที่ทำให้เกิด Intermediate state (ให้นักศึกษาอ่านเพิ่มเติมใน Tinkham เกี่ยวกับเรื่องนี้)



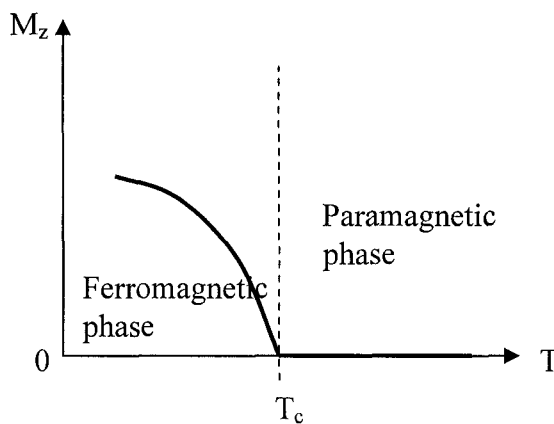
3. ให้แสดงการคำนวณอย่างละเอียดว่า ค่าพลังงานผิวอิสระต่อหน่วยพื้นที่ ในกรณีของ Semi-infinite slab ในสนามแม่เหล็กภายนอก  $H_a$  มีค่าเท่ากับ  $-H_a^2 \lambda / 8\pi$  โดยที่  $\lambda$  คือค่าความยาวทะลุผ่านของสนามแม่เหล็ก
4. คำนวณหาค่าพลังงานผิวในกรณีของแผ่นตัวนำยิ่งยวดหนา  $d$  และยาวเป็นระยะอนันต์ ซึ่งวางในทิศทางขนานอยู่ในสนามแม่เหล็กภายนอก  $H_a$  (ดูแบบฝึกหัดข้อ 1 ประกอบ)

## บทที่ 3 ทฤษฎีของกินส์เบิร์กแลนเดา

ทฤษฎีสภาพนำยิ่งยวดของกินส์เบิร์กแลนเดา (Ginzburg-Landau theory of superconductivity) เป็นทฤษฎีในเชิงปรากฏการณ์ ที่สามารถอธิบายสมบัติหลายอย่างของตัวนำยิ่งยวดได้เป็นอย่างดี ทฤษฎีนี้มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีการเปลี่ยนเฟสอันดับที่สองของแลนเดา (Landau theory of second order phase transition) ซึ่งระบบที่เปลี่ยนสถานะจากโลหะเป็นตัวนำยิ่งยวดนั้นมีการเปลี่ยนแปลงอันดับที่สอง ดังนั้นในตอนแรกนี้จะอธิบายเกี่ยวกับทฤษฎีการเปลี่ยนเฟสอันดับที่สองของแลนเดาก่อน แล้วจึงจะกล่าวถึงทฤษฎีสภาพนำยิ่งยวดของกินส์เบิร์ก-แลนเดา ในตอนถัดไป

### 3.1 ทฤษฎีการเปลี่ยนเฟสอันดับที่สองของแลนเดา

เพื่อทำความเข้าใจทฤษฎีนี้ เราจะพิจารณาระบบเฉพาะคือระบบผลึกเตตระโกนอล ที่กลายสถานะจากพาราแมกเนติกเป็นสถานะเฟอร์โรแมกเนติกได้ที่อุณหภูมิต่ำกว่าค่าวิกฤตค่าหนึ่ง โดยค่าโมเมนต์แม่เหล็กมีทิศอยู่ในแนวแกนซีของผลึก ในการทดลองวัดค่าของโมเมนต์แม่เหล็กของระบบดังกล่าวได้ โดยมีลักษณะเป็นไปดังแสดงในรูปที่ 1 สังเกตว่าค่าโมเมนต์แม่เหล็กเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิและมีค่าต่อเนื่อง กล่าวคือ โดยทั่วไปแล้วระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงเฟสอันดับที่สองนั้น สถานะของระบบมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องไปกับอุณหภูมิ แต่สมมาตรของระบบจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องที่อุณหภูมิกวิกฤต



รูปที่ 1 แสดงค่าโมเมนต์แม่เหล็กในแนวแกนซีของสารเฟอร์โรแมกเนท

ในกรณีนี้ สมมาตรของระบบในสถานะพาราแมกเนติก มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง (Invariant) ภายใต้การย้อนเวลา (Time reversal) นั่นคือ  $M_z = 0$  แต่กลับมีค่าเปลี่ยนแปลงภายใต้การย้อนเวลาในสถานะเฟอร์โรแมกเนติก คือ  $M_z \neq 0$  ดังนั้นสถานะและพลังงานของระบบ จึงถูกสันนิษฐานให้ขึ้นอยู่กับค่า  $M_z$  นี้

เนื่องจากค่าของ  $M_z$  แก่ของอุณหภูมิกวิกฤตมีค่าน้อย เราจะสันนิษฐานว่าพลังงานอิสระของระบบสามารถเขียนได้ในรูปของอนุกรมกำลังของ  $M_z$

$$F = F_0 + \left( \frac{dF}{dM_z} \right)_0 M_z + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2F}{dM_z^2} \right)_0 M_z^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3F}{dM_z^3} \right)_0 M_z^3 + \dots$$

สังเกตว่า เทอมอนุพันธ์ของพลังงานอิสระเทียบกับ  $M_z$  ที่ค่า  $M_z$  เป็นศูนย์นั้น เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับ  $M_z$  แต่จะขึ้นกับตัวแปรอื่นได้ เช่น อุณหภูมิ ความดัน เป็นต้น

ในระบบผลึกเตตระโกนอล พลังงานอิสระมีค่าเท่ากันไม่ว่าทิศทางของ  $M_z$  จะชี้ไปในทิศ  $+z$  หรือ  $-z$  นั่นคือ

$$F(-M_z) = F(+M_z)$$

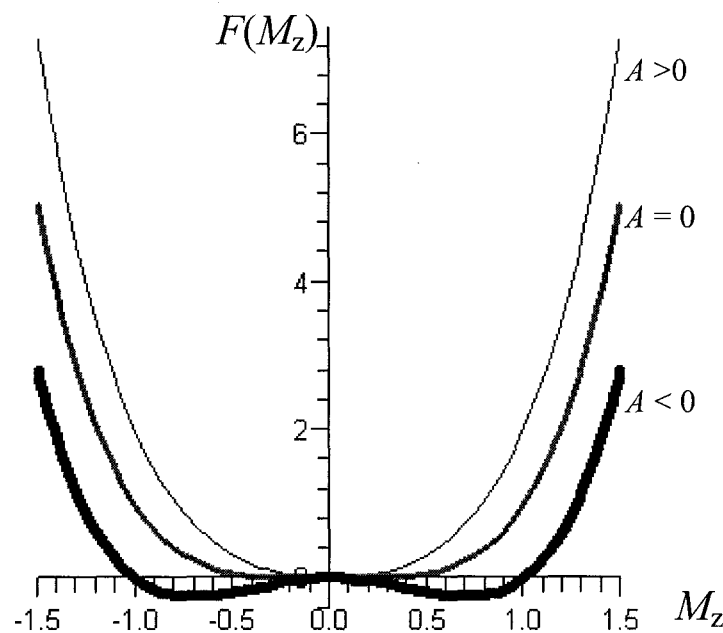
ดังนั้นเทอมที่ยกกำลังเลขคี่ของ  $M_z$  จึงต้องหายไป และเมื่อเราพิจารณาเฉพาะเมื่อค่าอุณหภูมิมียุ่ราว ๆ อุณหภูมิวิกฤต ซึ่งหมายความว่า  $M_z$  มีค่าน้อย ๆ ดังนั้นเราจึงไม่จำเป็นต้องเก็บเทอม  $M_z$  ที่มีกำลังมากกว่า 4

ถ้าเราให้  $A = \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2F}{dM_z^2} \right)_0$  และ  $\frac{1}{2}B = \frac{1}{4!} \left( \frac{d^4F}{dM_z^4} \right)_0$  เราจะเขียนพลังงานอิสระของระบบนี้ได้ใหม่ว่า

$$F = F_0 + AM_z^2 + \frac{1}{2}BM_z^4$$

โดยที่ค่าคงที่ B ต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ เพราะมีเช่นนั้นแล้วค่าพลังงานอิสระจะมีค่าต่ำสุดเมื่อ  $M_z = \pm\infty$  เท่านั้น (ซึ่งผิดธรรมชาติ) แต่สังเกตว่าค่าคงที่ A อาจมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้

ในกรณีของระบบที่เรากำลังพิจารณานี้ เราจะสันนิษฐานว่า A เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ และต่อไปนี้จะพิจารณา  $F(M_z)$  ที่ค่า A(T) ต่าง ๆ



รูปที่ 2 พล็อตระหว่างพลังงานอิสระกับค่าโมเมนต์แม่เหล็กที่ค่า A ต่าง ๆ

ค่าของโมเมนต์แม่เหล็ก  $M_z$  ของระบบที่สถานะสมดุล คือ ค่า  $M_z$  ที่ทำให้พลังงานอิสระมีค่าต่ำสุด จากกราฟในรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่า

1. ในกรณีที่  $A > 0$   $M_z = 0$  คือ ค่าที่ทำให้พลังงานอิสระมีค่าต่ำสุด ซึ่งหมายความว่าเมื่อ  $A > 0$  ระบบอยู่ในสถานะพาราแมกเนติก (Paramagnetic state) ในสภาวะสมดุล

2. ในกรณีที่  $A = 0$  ในสถานะสมดุลของระบบก็ยังคงเป็นพาราแมกเนติก กล่าวคือ  $M_z = 0$  เมื่อพลังงานอิสระมีค่าต่ำสุด
3. ในกรณีที่  $A < 0$   $\frac{\partial F}{\partial M_z} = 0$  มีคำตอบ 3 ค่า คือ  $M_z = 0$  ซึ่งที่จุดนี้ เราทราบว่า

$$\frac{\partial^2 F}{\partial M_z^2} = 2A < 0 \quad \text{ดังนั้น จุดนี้จึงเป็นจุด Local maximum และ อีก 2 คำตอบคือ}$$

$$M_z = \pm \sqrt{\frac{-A}{B}} \quad \text{ซึ่งที่ทั้งสองจุดนี้ } \frac{\partial^2 F}{\partial M_z^2} = -4A > 0 \quad \text{เป็นจุด Local minimum ดังนั้นจึงเป็นจุดที่}$$

ระบบอยู่ในสถานะคงตัว เรียกว่า สถานะเฟอร์โรแมกเนติก (เนื่องจากค่าโมเมนต์แม่เหล็กของระบบมีค่าไม่เป็นศูนย์)

จะเห็นได้ว่า การที่ค่า  $A$  มีการเปลี่ยนแปลงจากบวกเป็นลบนั้น ระบบจะมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะพาราแมกเนติกเป็นสถานะเฟอร์โรแมกเนติกได้ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง) ถ้าการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นการเปลี่ยนแปลงที่เกิดเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ โดยที่ระบบมีการเปลี่ยนแปลงสถานะที่อุณหภูมิวิกฤต  $T_c$  แสดงว่า  $A(T > T_c) > 0$ ,  $A(T_c) = 0$  และ  $A(T < T_c) < 0$

เรากระจาย  $A$  เป็นฟังก์ชันของ  $T - T_c$  ในลักษณะของอนุกรมเทเลอร์ โดยเก็บไว้เฉพาะเทอมแรก คือ  $A(T) = \alpha(T - T_c)$  โดยที่  $\alpha > 0$  เป็นค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

ในกรณีที่  $A < 0$  ค่าแมกนีโตเซชัน  $M_z = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{B}(T_c - T)}$  เมื่อ  $T < T_c$  สังเกตว่า  $M_z \propto \sqrt{T_c - T}$  เป็นการประมาณค่าโมเมนต์แม่เหล็กในเชิงปริมาณว่าขึ้นกับอุณหภูมิอย่างไร

ถ้าเรายอมให้ค่า  $M_z$  มีการเปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่งอย่างช้า ๆ ด้วย (เช่น มีการเปลี่ยนแปลงไม่ถี่พอให้เห็นในช่วงระยะ Lattice constant ของผลึก) เราจะเขียนค่าพลังงานอิสระของระบบได้เป็น

$$F = F_0 + \int d^3r \left\{ A(T) M_z^2(\vec{r}) + \frac{1}{2} B M_z^4(\vec{r}) + D_{\parallel} \left( \frac{dM_z}{dz} \right)^2 + D_{\perp} \left[ \left( \frac{dM_z}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dM_z}{dy} \right)^2 \right] \right\}$$

โดยที่  $D_{\parallel}, D_{\perp} > 0$  (สังเกตว่า พลังงานอิสระนี้เป็นของระบบเตตระโกนอล) ถ้าเราพิจารณากรณี

$M(\vec{r}) = M_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r})$  เทอมที่มี  $A(T)$  ในพลังงานอิสระจะมีค่าเท่ากับ  $\int d^3r A(T) M_z^2(\vec{r}) = A(T) M_0^2 \frac{1}{2} V$

หมายความว่าถ้าไม่มี gradient terms การเปลี่ยนแปลงเชิงตำแหน่งของค่าโมเมนต์แม่เหล็กในทุก ๆ wave vectors จะมี transition temperature เดียวกันหมด การที่  $D_{\parallel}, D_{\perp} > 0$  เป็นการรับประกันว่า การเปลี่ยนแปลงสถานะไปสู่สถานะที่ค่า  $M_z$  ที่เป็นเนื้อเดียวกันนั้นเกิดขึ้นได้

ที่เราได้พิจารณาข้างบนนี้เป็นกรณีเฉพาะของการเปลี่ยนแปลงสถานะอันดับที่สองหรือการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตามทฤษฎีของแลนเดา ในกรณีทั่ว ๆ ไป สถานะของระบบจะถูกระบุด้วยปริมาณอย่างหนึ่ง ซึ่งเราเรียกว่า Order parameter (เช่น ในกรณีที่เรากำลังพิจารณาข้างบนนี้ ก็คือ  $M_z$  นั่นเอง) ปริมาณที่จะเป็น Order parameter นั้นต้องมีสมบัติคือ มีค่าเป็นศูนย์เมื่ออุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต และมีค่าไม่เป็นศูนย์เมื่ออุณหภูมิต่ำกว่า และการที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ที่อุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตนั้นเกิดเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องของสมมาตรอย่างหนึ่งของระบบ แม้ว่าการเปลี่ยนแปลงของสถานะจะมีลักษณะต่อเนื่องก็ตาม

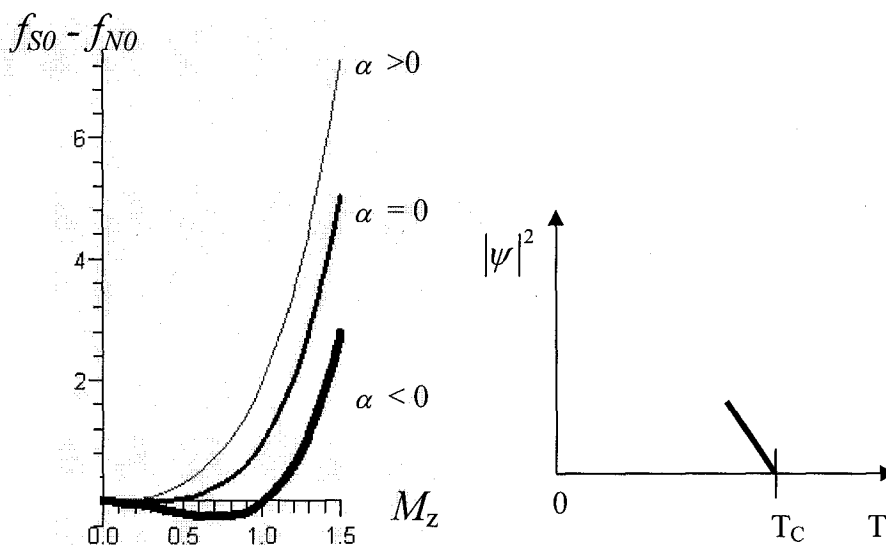
### 3.2 ทฤษฎีสภาพนำยิ่งยวดของกินส์เบิร์กแลนเดา

เมื่อไม่มีสนามแม่เหล็ก การเปลี่ยนแปลงสถานะจากโลหะเป็นตัวนำยิ่งยวดเป็นการเปลี่ยนแปลงเฟสอันดับที่สอง ซึ่งตามทฤษฎีของแลนเดา การเปลี่ยนแปลงสถานะในลักษณะนี้ จะมี Order parameter เป็นปริมาณที่กำหนดลักษณะของสถานะของระบบ โดยที่มันจะมีค่าเป็นศูนย์ใน disordered phase (เช่น พาราแมกเนติก) และมีค่าไม่เป็นศูนย์ใน ordered phase (เช่น เฟอร์โรแมกเนติก)

แลนเดาและกินส์เบิร์กใช้สัญลักษณ์  $\psi$  แทน Order parameter ของระบบที่เปลี่ยนสถานะเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ และก็นิยามว่า  $\psi$  มีความเป็น effective wave function อยู่ ซึ่งบรรยาย Superconducting electrons ดังนั้น  $\psi$  จึงเป็นปริมาณเชิงซ้อน คือมีทั้งขนาดและเฟส ค่าของ  $\psi$  ที่ถูกนอร์มัลไลซ์แล้ว จะถูกตีความว่า  $|\psi|^2$  มีค่าแทนจำนวน Superconducting electrons

พิจารณา uniform superconductor ในบริเวณที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก ให้  $\psi$  มีค่าไม่ขึ้นกับตำแหน่ง เนื่องจากพลังงานอิสระของระบบจะไม่ขึ้นอยู่กับเฟสของ  $\psi$  ดังนั้นพลังงานอิสระจะมีค่าขึ้นกับ  $\psi$  และที่อุณหภูมิใกล้ศูนย์จะมีวิฤต ค่าความหนาแน่นพลังงานอิสระสามารถเขียนได้ดังนี้

$$f_{s0} = f_{N0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \quad \text{โดยที่ } \alpha = \alpha'(T - T_c)$$



รูปที่ 3 พล็อตระหว่างพลังงานอิสระกับ  $|\psi|^2$  ที่ค่า  $\alpha$  ต่างๆ และพล็อตค่า  $|\psi|^2$  ที่

อุณหภูมิแถว ๆ อุณหภูมิวิฤต

ในกรณีนี้ที่  $\alpha < 0$  ( $T < T_c$ )

1. พลังงานอิสระมีค่าต่ำที่สุดเมื่อ  $|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta} = \frac{\alpha'(T_c - T)}{\beta}$

2. เมื่อแทนค่า Order parameter ลงในความหนาแน่นพลังงานอิสระ จะเห็นได้ว่า

$$f_{s0} = f_{N0} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta} \quad \text{ซึ่งในบทที่แล้ว เราเขียนความหนาแน่นพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวดว่า}$$



เท่ากับ  $f_{S0} = f_{N0} - \frac{H_C^2(T)}{8\pi}$  ดังนั้นจากทฤษฎีของกินส์เบิร์กแลนเดา เราสามารถเขียนพลังงาน  
 ความหนาแน่นของตัวนำยิ่งยวดในรูปของพารามิเตอร์ตามทฤษฎี ได้ว่าเท่ากับ  $\frac{H_C^2(T)}{8\pi} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\beta}$  นั่นคือ  
 ทฤษฎีนี้ทำนายว่า ค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าแปรตามอุณหภูมิในลักษณะเชิงเส้นที่อุณหภูมิ  
 วิกฤต ดังนี้  $\frac{H_C(T)}{\sqrt{8\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha'}{\sqrt{\beta}} |T - T_C|$

ต่อไปนี้จะพิจารณาตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กคงตัว ในกรณีนี้ การได้มาซึ่งค่าความหนาแน่น  
 พลังงานอิสระในกรณีนี้ เราจำเป็นต้องรวมเอาค่าพลังงานอิสระที่สืบเนื่องมาจากสนามแม่เหล็กและจากการ  
 ที่ Order parameter มีค่าเปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่งเข้ามาด้วย โดยที่เทอมของพลังงานอิสระที่เกิดจาก  
 gradient ของค่า Order parameter มีลักษณะเหมือนกับความหนาแน่นพลังงานจลน์ในกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่ง  
 เราจะเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้คือ  $\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi|^2$  โดยที่  $m^*$  เป็นค่าคงที่ตัวหนึ่ง นอกจากนี้ ยังมีค่าความ  
 หนาแน่นพลังงานที่เกี่ยวข้องกับอันตรกิริยาระหว่างสนามแม่เหล็กกับกระแสนอนุภาคที่อยู่ในเทอมของ  $-i\hbar\nabla\psi$   
 ด้วย ค่าความหนาแน่นพลังงานของระบบต้องมีความเป็น gauge invariant จึงต้องมีการแปร  
 $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e^*\vec{A}}{c}$  โดย  $\vec{A}$  คือเวกเตอร์โพเทนเชียล  $e^*$  คือ effective charge ของอนุภาคที่นำกระแส  
 ยิ่งยวด ดังนั้น จากที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด ความหนาแน่นพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก  
 สามารถเขียนได้ในรูป

$$f_{S0} = f_{N0} + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi}$$

ถ้าเรานิยาม  $\hat{p} = -i\hbar\nabla - \frac{e^*\vec{A}}{c}$  เราสามารถเขียนเทอมที่มีเกรเดียนต์ได้เป็น

$$\frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi \right|^2 = \frac{1}{2m^*} (\hat{p}\psi)^* \cdot (\hat{p}\psi) \sim n_s \left( \frac{1}{2} m v_s^2 \right)$$

มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้ Transformation ต่อไปนี้ของเวกเตอร์โพเทนเชียลกับ Order parameter ของตัวนำ  
 ยิ่งยวด

$$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\chi, \psi = \psi' e^{i\chi}; \chi = \frac{e^*}{\hbar c} k$$

เราเรียกฟอร์มของความหนาแน่นพลังงานอิสระนี้ว่ามี Gauge invariance กล่าวคือ ความหนาแน่นพลังงาน  
 อิสระอยู่ในฟอร์มเดียวกัน ไม่ว่าเวกเตอร์โพเทนเชียล หรือ Order parameter ของตัวนำยิ่งยวดจะเป็น  $\vec{A}$  หรือ  
 $\vec{A}'$   $\psi$  หรือ  $\psi'$

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงสมการกินส์เบิร์กแลนเดา เราจะมาพิจารณาพลังงานอิสระกิบส์ภายใต้ทฤษฎีของ  
 กินส์เบิร์กแลนเดาก่อน สถานะสมดุลของตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กคงตัวคือสถานะที่มีพลังงานอิสระกิบส์  
 ต่ำสุด โดยพลังงานอิสระกิบส์ คือ  $G = F - \int \frac{\vec{H} \cdot \vec{h}}{4\pi} dV$  และจากทฤษฎีกินส์เบิร์กแลนเดา เราสามารถหาค่า  
 สนามวิกฤตได้ดังนี้

พิจารณาตัวนำยิ่งยวดทรงกระบอกยาว (เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิด Intermediate state) ในสนามแม่เหล็กคงตัว  $\vec{H}$  ค่าพลังงานอิสระกิบส์มีค่าเท่ากับ

$$G = \int dV \left\{ f_{N0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |p\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} - \frac{\vec{h} \cdot \vec{H}}{4\pi} \right\}$$

ถ้าเราพิจารณาเฉพาะตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 เท่านั้น กล่าวคือชนิดที่ไม่มี Mixed state ดังนั้นเทอมที่เกรเดียนท์จะมีค่าเป็นศูนย์ ในสถานะปกติ  $\vec{h} = \vec{H}$  และ  $\psi = 0$  ดังนั้นพลังงานอิสระกิบส์ของสถานะปกติในสนามแม่เหล็กมีค่าเท่ากับ

$$G_{\text{Normal}} = V \left( f_{N0} - \frac{H^2}{8\pi} \right)$$

ในสถานะที่เป็นตัวนำยิ่งยวด  $\vec{h} = 0$  และ  $|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$  ดังนั้น พลังงานอิสระกิบส์ของสถานะนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็กจึงมีค่าเป็น

$$G_{\text{Sup}} = V \left( f_{N0} - \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta \alpha^2}{2 \beta^2} \right) = V \left( f_{N0} - \frac{\alpha^2}{2\beta} \right)$$

เมื่อสนามแม่เหล็กภายนอกมีค่าเท่ากับสนามวิกฤต  $H_c$  สถานะนำยิ่งยวดและสถานะปกติมีค่าพลังงานเท่ากัน

$$\text{พอดี } G_{\text{Normal}} = G_{\text{Sup}} \Rightarrow \frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$$

### 3.3 สมการกินส์เบิร์กแลนเดา

สมการกินส์เบิร์กแลนเดามี 2 สมการเป็นสมการที่ใช้สำหรับคำนวณหา Order parameter ของระบบตัวนำยิ่งยวดในสถานการณ์ต่าง ๆ สมการทั้งสองหาได้จาก การ Mimimize พลังงานอิสระ (ไม่ใช่ความหนาแน่นพลังงานอิสระ) ของตัวนำยิ่งยวดเทียบกับ  $\psi$  และ  $\vec{A}$  โดยที่เมื่อ Mimimize เทียบกับ  $\psi$  เราก็คจะได้สมการกินส์เบิร์กสมการแรก คือ (ในการ Mimimize นี้ เราจะพบว่า ต้องมีการเพิ่มค่าพลังงานอิสระที่ของผิวของตัวนำยิ่งยวดด้วย โดยพลังงานอิสระของผิวนี้ อยู่ในรูปของ  $\int dS A_s(\hat{n}) |\psi|^2$ )

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi = 0 \text{ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น } \frac{i\hbar}{2m} \hat{n} \cdot (\hat{p}\psi) + A_s(\hat{n}) \psi = 0 \text{ โดยที่ } \hat{n} \text{ คือ}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ผิวของตัวนำยิ่งยวด  $A_s(\hat{n})$  เป็นค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับผิว

และเมื่อ Mimimize เทียบกับ  $\vec{A}$  เราจะได้สมการกินส์เบิร์กสมการที่ 2 คือ

$$\vec{j} = \frac{e^*}{2m^*} (\psi^* \hat{p}\psi + c.c.)$$

สังเกตว่า สมการของกระแสนี้เหมือนกับที่เราได้จากกลศาสตร์ควอนตัม และมีความเป็น Gauge invariance เช่นเดียวกับความหนาแน่นพลังงานอิสระ

$$\text{เรามักจะใช้สมการกินส์เบิร์กแลนเดาทั้งสองร่วมกับสมการแมกซ์เวลล์ } \nabla \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \text{ และ } \nabla \cdot \vec{h} = 0$$

(ในกรณีที่สนามคงตัว) ในการหาค่า Order parameter ในกรณีที่มีความไม่เป็นเนื้อเดียวกันเกิดขึ้น เช่น เมื่อตัวนำยิ่งยวดอยู่ในสนามแม่เหล็กเป็นต้น

### 3.4 ผลของสมการกิ้นส์เบิร์กแลนเดา

ต่อไปนี้จะมาดูผลที่เราจะได้จากสมการกิ้นส์เบิร์กแลนเดา โดยจะพิจารณาผลที่ได้เหมือนกันกับสมการลอนดอนก่อน กล่าวคือ เราจะแสดงว่าผลที่สมการของลอนดอนอธิบายได้ สมการกิ้นส์เบิร์กแลนเดา ก็สามารถอธิบายได้เช่นเดียวกัน จากนั้นก็จะแสดงให้เห็นสิ่งที่สมการกิ้นส์เบิร์กแลนเดาสามารถทำนายได้มากกว่าสมการลอนดอน

#### 3.4.1 การควอนไทซ์ของฟลักซ์ลอยด์

เราเขียน Order parameter ในรูป  $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$  และพิจารณากรณีที่  $|\psi| \neq f(\vec{r})$  ตามสมการที่สองของกิ้นส์เบิร์กแลนเดาเราสามารถเขียนความหนาแน่นกระแสได้ในรูปของ  $|\psi|$  และ  $\varphi$  ดังนี้

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e^*}{m} |\psi|^2 \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)$$

เมื่อเทียบกับ  $\vec{j}(\vec{r}) = n_s e^* \vec{v}_s$  เราจะได้ว่า  $\vec{v}_s = \frac{1}{m} \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)$  เนื่องจากฟังก์ชันคลื่นของกิ้นส์เบิร์กแลนเดา มีข้อกำหนดว่าจะต้องมีค่าเดียว เมื่อเฟสเปลี่ยนไปเป็นจำนวนเต็มเท่าของ  $2\pi$  เรเดียน นั่นคือ

$$\oint \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = 2\pi n \quad \text{โดยที่ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

แทนค่าเกรเดียนท์ของเฟสในรูปของความเร็ว จะได้

$$\oint \left( \frac{m \vec{v}_s + \frac{e^* \vec{A}}{c}}{\hbar} \right) \cdot d\vec{l} = 2\pi n$$

ซึ่งเมื่อจัดรูปแล้วจะได้ว่า

$$\Phi' \equiv \frac{c}{e^*} \oint m \vec{v}_s \cdot d\vec{l} + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = n \frac{\hbar c}{e^*} = n \Phi_0$$

โดยที่  $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e^*} = 2.07 \times 10^{-7} \text{ Gauss-cm}^2$  ซึ่งเป็นค่าฟลักซ์พื้นฐาน  $\Phi'$  เป็นปริมาณที่เราเรียกว่าฟลักซ์ลอยด์ ถ้าเส้นปิดที่เราอินทิเกรตอยู่ในบริเวณที่ไม่มีกระแส ( $\vec{v}_s$  เป็นศูนย์) เราจะได้ว่าฟลักซ์มีค่าควอนไทซ์

#### 3.4.2 ระยะทะลุทะลวงของสนามแม่เหล็ก

พิจารณากระแสในรูป  $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e^*}{m} |\psi|^2 \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)$  ในการประมาณของลอนดอนนั้น ขนาดของ Order parameter มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่ง และใช้  $n_s = |\psi|^2$  ซึ่งถูกแปลความหมายว่าเป็นจำนวนของอนุภาคที่นำกระแasyิ่งยวด (หรือต่อมารู้จักกันในนามของจำนวนคูคูเปอร์ หรือ Cooper pairs) ต่อหน่วยปริมาตร เมื่อเคิร์ลสมการของความหนาแน่นกระแสข้างต้น จะได้

$$\nabla \times \vec{j}(\vec{r}) = -\frac{e^*}{mc} n_s \nabla \times \vec{A} = -\frac{c}{4\pi} \frac{4\pi e^* n_s}{mc^2} \vec{h} = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{h}$$

โดยที่ค่าคงที่  $\lambda_L$  คือค่าระยะทะลุทะลวงลอนดอน (London penetration depth) เมื่อเรานำค่าความหนาแน่นกระแสที่แทนลงในสมการแมกซ์เวล  $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{h}$  เราก็จะได้สมการที่อธิบายปรากฏการณ์ไมซ์เนอร์ เช่นเดียวกับที่เราได้จากสมการลอนดอนคือ

$$\nabla^2 \bar{h} = \frac{1}{\lambda_L^2} \bar{h}$$

นั่นคือ  $\lambda_L$  เป็นระยะที่บ่งบอกว่าสนามแม่เหล็กภายนอกสามารถทะลุเข้าไปในตัวนำยิ่งยวดได้  
ต่อไปนี่ เราจะกล่าวถึงผลของสมการกินส์เบิร์กซึ่งสมการลอนดอนอธิบายไม่ได้ อย่างน้อย 2 อย่าง

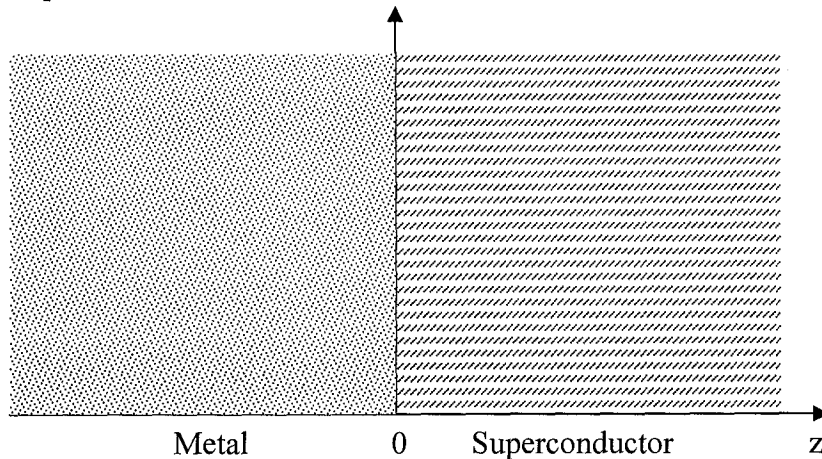
### 3.4.3 ความยาวโคฮีเรนซ์

เมื่อเราพิจารณาระบบรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวดในบริเวณที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก โดยให้ระบบนี้มีเงื่อนไขที่รอยต่อคือ  $\psi = 0$  ที่รอยต่อ อย่างน้อยที่สุด เราคาดว่าขนาดของ  $\psi$  จะมีขนาดเปลี่ยนแปลงไปกับตำแหน่ง แต่เรายังไม่ทราบว่าเฟสจะมีค่าขึ้นกับตำแหน่งหรือไม่ ดังนั้น ก่อนที่เราจะใช้สมการกินส์เบิร์กแลนดา เราจะพิจารณาค่าเฟสที่จะทำให้พลังงานอิสระมีค่าต่ำสุดก่อนว่า จะเป็นเช่นไร

ค่าพลังงานอิสระของตัวนำยิ่งยวดในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กเป็นศูนย์ มีค่าเป็น

$$F_S = \int dV \left\{ f_{N0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla |\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*} |\psi|^2 (\nabla \phi)^2 \right\}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ในลักษณะที่พลังงานอิสระขึ้นกับเฟสนั้น ค่าพลังงานอิสระจะมีค่าต่ำสุด เมื่อ  $\nabla \phi = 0$  ซึ่งหมายความว่า เฟสจะมีคงตัวไม่ขึ้นกับตำแหน่ง และเนื่องจากว่าไม่ว่าฟังก์ชันคลื่นจะมีค่าเฟสเท่าใดก็ตาม ตราบใดที่  $|\tilde{\psi}| = |\psi|$  พลังงานอิสระจะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะเลือกเอาฟังก์ชันคลื่นที่มีค่าเฟสเป็นศูนย์ หรือ เลือกให้  $\psi$  เป็นจำนวนจริง



รูปที่ 4 ระบบรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวด

ในการศึกษาระบบดังกล่าว เราจะใช้สมการ

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi = 0$$

ร่วมกับ เงื่อนไขที่รอยต่อ

$$\psi = 0$$

และ เงื่อนไขในเนื้อของตัวนำยิ่งยวด

$$\psi \rightarrow \psi_\infty = \sqrt{\frac{-\alpha}{\beta}} \text{ เมื่อ } z \rightarrow +\infty$$

ถ้าเราเขียน  $\psi(z) = f(z)\psi_\infty$  เราจะได้เงื่อนไขทั้งสองเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(z=0) = 0 \text{ และ } f(z=\infty) = 1$$

และจากสมการกินส์เบิร์กแลนเดาข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0$$

หรือในรูปของ  $f$

$$-\frac{\hbar^2\psi_\infty}{2m} \frac{d^2f}{dz^2} + \alpha\psi_\infty f + \beta\psi_\infty^3 f^3 = 0$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \frac{d^2f}{dz^2} - f + f^3 = 0$$

นิยาม  $\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}$  โดย  $\xi(T)$  มีหน่วยเป็นความยาว เรียกว่า Ginzburg-Landau coherence length ซึ่งจะ

เห็นได้ว่า  $\xi(T) \propto (T_c - T)^{-\frac{1}{2}}$

สมการอนุพันธ์ข้างต้น ที่มีเงื่อนไขดังที่ได้กล่าวแล้วนั้น สามารถแก้ได้ และมีคำตอบเป็น

$$f(z) = \tanh\left(\frac{z}{\xi\sqrt{2}}\right)$$

สังเกตว่าเมื่อ  $f(z=\xi) \approx 0.60886$

ความยาวโคฮีเรนซ์นี้ เป็นระยะที่ Order parameter ของตัวนำยิ่งยวดมีค่าเพิ่มขึ้นจากศูนย์จนมีขนาดประมาณ 60 เปอร์เซ็นต์ของขนาดของ Order parameter ในเนื้อ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ Order parameter ของตัวนำยิ่งยวดจะถูกกดให้มีค่าเป็นศูนย์ที่ผิว และที่ระยะที่วัดจากผิวประมาณเท่ากับความยาวโคฮีเรนซ์ Order parameter จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนเกือบค่าเท่ากับค่าของ Order parameter ในเนื้อ

สังเกตว่า เมื่อพิจารณาผลคูณของสนามแม่เหล็กวิกฤตกับความยาวโคฮีเรนซ์และความยาวทะลุทะลวงแม่เหล็กแล้ว เราจะได้ว่า

$$H_c \xi \lambda_L = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}}$$

ซึ่งไม่ขึ้นกับว่าตัวนำยิ่งยวดจะเป็นสารอะไร

ต่อไปนี้ เราจะพิจารณาพลังงานผิวต่อหน่วยพื้นที่ในกรณีของผิวรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวด พลังงานผิวอิสระต่อหน่วยพื้นที่มีค่าเท่ากับ (ไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก)

$$F_{\text{surface}} \equiv \frac{H_c^2}{8\pi} \delta = \int_0^\infty dz (f - f_{\text{bulk}})$$

โดยที่  $f = f_{N0} + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi)^2$  และ  $f_{\text{bulk}} = f_{N0} - \frac{H_c^2}{8\pi}$

เมื่อแทนค่าและจัดรูปแล้วจะได้  $\delta = \frac{4\sqrt{2}}{3}\xi = 1.89\xi$  ซึ่งพลังงานผิวอิสระมีค่าเป็นบวกต่างจากในกรณีค่าพลังงานผิวของตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก การเปรียบเทียบค่าความยาวทะลุทะลวงแม่เหล็กกับความยาว

โคฮีเรนซ์ของตัวนำยิ่งยวดแต่ละตัวสามารถทำให้เราแยกแยะได้ว่า ตัวนำยิ่งยวดตัวนั้น ๆ เป็นชนิดที่ 1 หรือชนิดที่ 2 ได้

พิจารณาระบบรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก  $H_C$  จากสมการกินส์เบิร์กแลนเดาและเงื่อนไข

$$\psi = 0, h = H_C \text{ for } z \rightarrow -\infty \text{ กับ}$$

$$\psi = \psi_\infty, h = 0 \text{ for } z \rightarrow +\infty$$

เราสามารถนำคำตอบที่ได้มาคำนวณหาค่าพลังงานผิวอิสระของระบบได้โดยแยกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่  $\lambda \gg \xi$  และกรณีที่  $\lambda \ll \xi$  ซึ่งปรากฏว่าเราจะได้ค่าพลังงานผิวอิสระมีค่าเท่ากับ  $F_{\text{surface}} = \frac{H_C^2}{8\pi} \delta$  โดยที่

$$\delta = \begin{cases} 1.89\xi, \lambda \ll \xi \\ -1.104\lambda, \lambda \gg \xi \end{cases}$$

นิยามพารามิเตอร์ตัวใหม่  $\kappa \equiv \frac{\lambda}{\xi}$  เรียกว่ากินส์เบิร์กแลนเดาพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

เนื่องจากทั้ง  $\lambda$  และ  $\xi$  มีค่าขึ้นกับ  $(T_C - T)^{-1/2}$  ทั้งคู่

สังเกตว่า  $\kappa \ll 1$  พลังงานผิวอิสระจะมีค่าเป็นบวก ซึ่งหมายความว่า เป็นระบบที่ไม่ชอบที่จะมีรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวดเมื่ออยู่ในสนามแม่เหล็ก ดังนั้นตัวนำยิ่งยวดประเภทนี้จึงเป็นชนิดที่ 1 คือ จะไม่มีสถานะผสม แต่ถ้า  $\kappa \gg 1$  พลังงานผิวอิสระจะมีค่าเป็นลบ ซึ่งหมายความว่า เป็นระบบที่ชอบมีรอยต่อระหว่างโลหะกับตัวนำยิ่งยวดเมื่อในสนามแม่เหล็ก จึงเป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 ซึ่งมีสถานะผสม

เมื่อศึกษาในรายละเอียดต่อไป จะพบว่า  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$  เป็นค่าที่แบ่งระหว่างการมีค่าพลังงานผิวอิสระเป็นบวกกับลบ และตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 และ 2

### 3.4.4 กระแสโจเซฟสัน

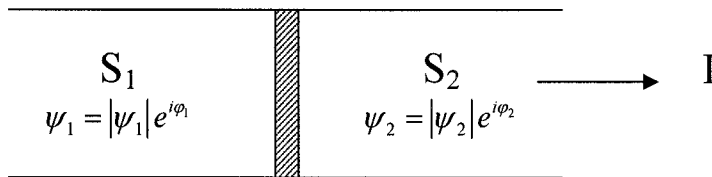
ต่อไปนี้จะบรรยายปรากฏการณ์ดีซีโจเซฟสัน โดยใช้ทฤษฎีกินส์เบิร์กแลนเดา ปรากฏการณ์นี้คือเมื่อนำตัวนำยิ่งยวด 2 ตัวมาต่อกัน แม้ว่าจะไม่มีความต่างศักย์ตกคร่อมรอยต่อ ก็ยังจะมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านรอยต่อ โดยที่ค่ากระแสที่ไหลมีค่าเท่ากับ  $I = I_0 \sin \gamma$  โดยที่  $\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l}$  ซึ่งเป็นผลต่างเฟสที่

Gauge invariant ต่อไปนี้จะใช้ทฤษฎีกินส์เบิร์กแลนเดาเพื่อพิสูจน์และศึกษาปรากฏการณ์นี้

เนื่องจากตัวนำยิ่งยวดตัวที่ 1 และ 2 ต่อกันอยู่โดยมีชั้นบาง ๆ ของฉนวนหรือวัสดุอื่นกั้นอยู่ ตัวนำยิ่งยวดทั้งสองจะมีอันตรกิริยาระหว่างกัน ตามทฤษฎีของกินส์เบิร์กแลนเดา เราสนใจกรณีที่ขนาดของ  $\psi_1$  และ  $\psi_2$  มีค่าน้อย ๆ เราสามารถเขียนอันตรกิริยาระหว่างตัวนำยิ่งยวดทั้งสองได้เป็น (เก็บไว้เฉพาะเทอมที่มีค่าใหญ่ที่สุด)

$$F_{\text{int}} = B_s \int dS (\psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2)$$

โดยที่อินทิเกรตบนพื้นที่ที่ตัวนำยิ่งยวดทั้งสองมีอันตรกิริยาต่อกัน หรือพื้นที่ของรอยต่อนั้นเอง อย่างไรก็ตามอันตรกิริยานี้ไม่ถูกต้องนัก เนื่องจากไม่มีความเป็น Gauge invariance เราสามารถเขียนอันตรกิริยาที่ถูกต้องซึ่งเป็น Gauge invariant ได้เป็น



รูปที่ 5 ระบบรอยต่อโจเซฟสัน

$$F_{\text{int}} = B_S \int dS \left( \psi_1 \psi_2^* e^{i \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)} + \psi_1^* \psi_2 e^{-i \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)} \right)$$

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบได้ว่าอันตรกิริยานี้มีค่าไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การเปลี่ยนแปลงต่อไปนี้

$$\varphi_1 = \varphi_1' + \frac{e^* k_1}{\hbar c}, \varphi_2 = \varphi_2' + \frac{e^* k_2}{\hbar c} \text{ และ } \vec{A} = \vec{A}' + \nabla k \text{ โดยที่ } k \text{ เป็นฟังก์ชันใด ๆ}$$

ระบบรอยต่อในสภาวะสมดุลหาได้จาก การ Minimize พลังงานอิสระรวมของระบบเทียบกับ  $\psi_1$  และ  $\psi_2$  และสำหรับระบบที่เราสนใจนี้ เราจะสนใจเฉพาะ ค่าพลังงานอิสระที่ขึ้นกับพื้นที่ผิวของรอยต่อเท่านั้น (เนื่องจากเทอมที่ขึ้นกับปริมาตร หลังจาก Minimize แล้ว เราจะได้สมการกินส์เบิร์กแลนเดาสมการแรกเหมือนที่เคยได้) เมื่อเราได้พลังงานอิสระรวมของผิวรอยต่อแล้วทำ variation เทียบกับ  $\psi_1^*$  เราจะได้ว่า

$$\delta F_{\text{surface}} = \int ds \left\{ \frac{i\hbar}{2m} (\hat{n} \cdot p) \psi_1 + A_S \psi_1 + B_S \psi_2 e^{-i \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)} \right\} \delta \psi_1^*$$

นั่นคือ ในสภาวะสมดุล  $\delta F_{\text{surface}}$  นี้จะมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้ได้ว่า

$$(\hat{n} \cdot p) \psi_1 = \frac{i2mA_S}{\hbar} \psi_1 + \frac{i2mB_S}{\hbar} \psi_2 e^{-i \left( \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)}$$

ดังนั้น ค่าความหนาแน่นกระแสที่ไหลออกจากตัวนำยิ่งยวดตัวที่ 1 ที่ผิวของรอยต่อจึงมีค่าเป็น

$$j_x = \frac{1}{2} \frac{e^*}{m} (\psi_1^* p_x \psi_1 + c.c.)$$

ซึ่งเมื่อแทนค่าที่ได้จากการ Minimize จะได้ว่า

$$j_x = j_0 \sin \gamma$$

$$\text{โดยที่ } j_0 = \frac{2e^* B_S}{\hbar} |\psi_1| |\psi_2| \text{ และ } \gamma = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

สังเกตว่า

$$j_0 \cdot \frac{\hbar}{2e^*} = -j_0 \cdot \frac{\Phi_0}{2\pi c} = 2B_S |\psi_1| |\psi_2|$$

ดังนั้นเราสามารถเขียน พลังงานอิสระของอันตรกิริยาระหว่างตัวนำยิ่งยวดทั้งสองตัว ได้เป็น

$$F_{\text{int}} = -\frac{\Phi_0 j_0}{2\pi c} \int dS \cos \gamma$$

ในกรณีที่  $\gamma$  มีค่าคงตัวทั่วทั้งผิวรอยต่อ เราจะได้ว่า

$$F_{im} = -\frac{\Phi_0 j_0 S}{2\pi c} \cos \gamma = -\frac{\Phi_0 I_0}{2\pi c} \cos \gamma$$

ต่อไปนี้จะแสดงการคำนวณเพื่อหาค่ามุมเฟส  $\gamma$  เรานิยามแกนและจุดอ้างอิงต่าง ๆ ตามรูปที่ 6 โดยให้มีสนามแม่เหล็กผ่านในแนว  $z$  นั่นก็คือ  $h_x = h_y = 0$  และเนื่องจาก  $\nabla \cdot \vec{h} = 0$  ดังนั้น  $\frac{\partial h_z}{\partial z} = 0$  หรือ  $h_z = h_z(x, y)$  นั่นเอง เราจะเลือกให้เวกเตอร์โพเทนเชียลเป็นดังนี้

$$A_x(x, y) = -\int_0^y h_z(x, \eta) d\eta, \quad A_y = A_z = 0$$

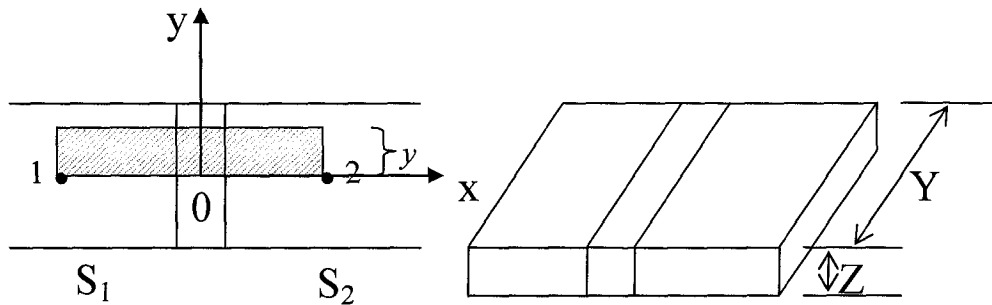
ดังนั้น

$$\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_0^y dx \int_0^y d\eta h_z(x, \eta)$$

กำหนดให้  $\Phi(y)$  เป็นฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านบริเวณที่แรเงา (ตามรูปที่ 6) จุดที่ 1 และ 2 เป็นจุดที่อยู่ลึกเข้าไปมาก ๆ (มากกว่าระยะทะลุทะลวงแม่เหล็ก) ดังนั้น เราจะเขียนได้ว่า

$$\gamma = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi\Phi(y)}{\Phi_0}, \quad \Phi(y) = \int_0^y d\eta \int_1^2 dx h_z(x, \eta)$$

เนื่องจาก  $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{e^*}{m} |\psi|^2 \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)$  จะเห็นได้ว่า เราจะได้ว่า ในเนื้อของตัวนำยิ่งยวดนั้น (ลึกเข้าไปกว่า 2 - 3 เท่าของระยะทะลุทะลวงแม่เหล็ก)  $\vec{j} = 0$  และ สำหรับค่า  $\vec{A}$  ที่เราเลือกนั้น  $\vec{A} = 0$  ด้วย ดังนั้นเราจะได้ว่า  $\nabla \varphi = 0$  นั่นคือ  $\varphi$  จะมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับตำแหน่ง



รูปที่ 6 แกน ขนาดและตำแหน่งอ้างอิงของระบบรอยต่อโจเซฟสัน

ต่อไปนี้จะคำนวณหาค่ากระแสโจเซฟสันของรอยต่อในสนามแม่เหล็กคงตัว ในความเป็นจริงแล้ว กระแสโจเซฟสันที่เกิดขึ้น จะมีผลต่อค่าสนามแม่เหล็กรวมด้วย แต่เราจะไม่สนใจผลของการสกรีนนี้ในการคำนวณนี้ นั่นคือ เราจะคิดว่าค่าสนามไฟฟ้าลัพธ์ในบริเวณที่ไม่ใช่ตัวนำยิ่งยวดมีค่าเท่ากับค่าสนามภายนอกที่เราใส่เข้าไป คือ  $h_z = H_0$  และในตัวนำยิ่งยวดสนามจะมีค่าลดลงตามสมการของลอนดอน รูปที่ 7 แสดงพล็อตของค่าสนามที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของรอยต่อ เราให้  $d$  คือความหนาของชั้นระหว่างตัวนำยิ่งยวด

$$\text{เราจะได้ว่า } \Phi(y) = \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dx h_z(x) = (d + 2\lambda) H_0 y \quad \text{และความหนาแน่นกระแสโจเซฟสันมีค่า}$$

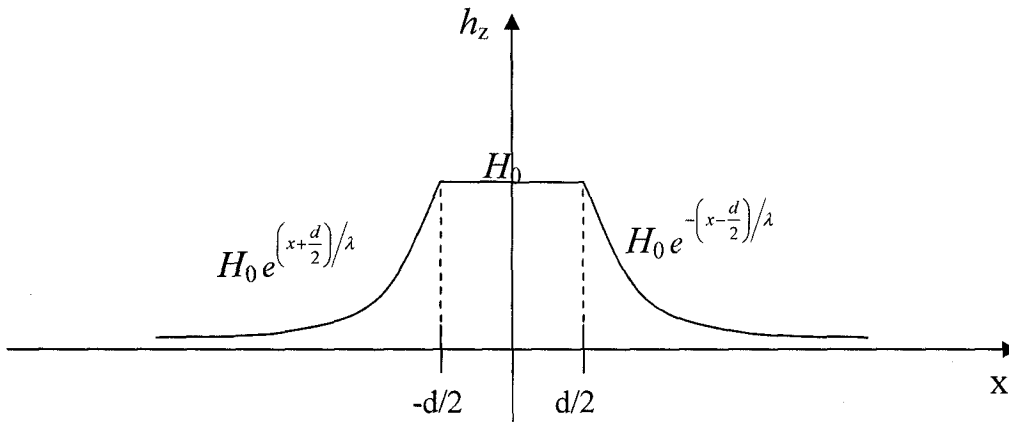
เท่ากับ



$$j_x(y) = j_0 \sin(\gamma_0 + \kappa y)$$

โดยที่  $\gamma_0 = \varphi_1 - \varphi_2$  และ  $\kappa = \frac{2\pi}{\Phi_0}(d + 2\lambda)H_0$  จากค่าความหนาแน่นกระแสนี้ เรานำไปคำนวณหาค่ากระแสไฟฟ้าได้

$$I = Z \int_{-\frac{Y}{2}}^{\frac{Y}{2}} j_0 \sin(\gamma_0 + \kappa y) dy = j_0 Y Z \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \sin \gamma_0$$

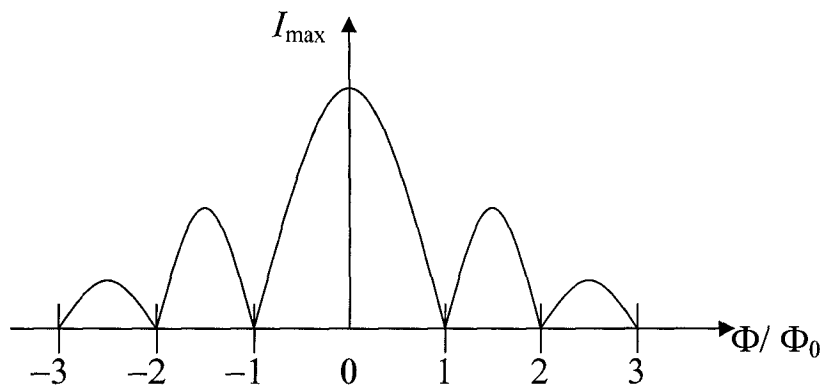


รูปที่ 7 สนามแม่เหล็กที่บริเวณต่าง ๆ ของระบบรอยต่อโจเซฟสัน

เนื่องจาก  $\gamma_0$  เป็นพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงได้ตามค่ากระแสที่ใส่เข้าไป เราจะได้ว่าขนาดของค่ากระแสโจเซฟสันสูงสุดมีค่าแปรผันตามค่าฟลักซ์แม่เหล็กภายนอกดังนี้

$$I_{\max} = j_0 Y Z \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|$$

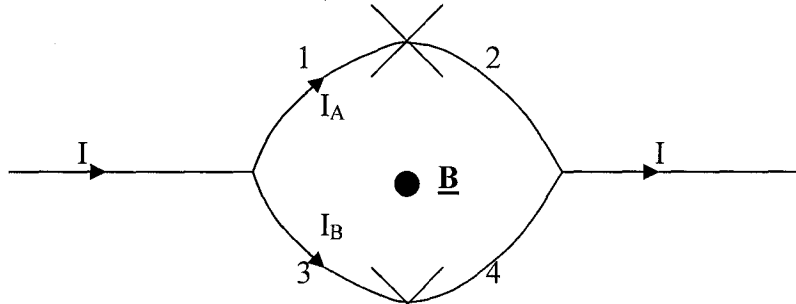
ซึ่งพล็อตเป็นกราฟได้ดังแสดงในรูปที่ 8 รูปร่างของพล็อตดังกล่าวเกิดเนื่องมาจากการที่  $j_x(y)$  มีค่าต่างกันในค่า  $y$  ต่างกันและมีการแทรกแซงกันเมื่อถูกอินทิเกรต คล้ายคลึงกับแบบการแทรกสอดและเลี้ยวเบนในเรื่องของแสง



รูปที่ 8 พล็อตของกระแสโจเซฟสันเป็นฟังก์ชันกับฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านรอยต่อ

ตัวอย่างการประยุกต์รอยต่อโจเซฟสันก็ได้แก่ อุปกรณ์ที่เรียกว่า SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Devices) ซึ่งประกอบด้วยรอยต่อโจเซฟสัน 2 รอยต่อ SQUID เป็นอุปกรณ์ที่นำมาใช้ในการวัดค่าสนามแม่เหล็กที่มีค่าต่ำมาก ๆ

ต่อไปนี้จะแสดงการคำนวณค่ากระแสสูงสุดที่ผ่าน SQUID รูปที่ 9 แสดงระบบ SQUID ที่ประกอบด้วยรอยต่อโจเซฟสันที่เหมือนกันทุกประการ 2 รอยต่อ



รูปที่ 9 ไดอะแกรมของ SQUID ในสนามแม่เหล็ก  $\underline{B}$  ซึ่งพุ่งออกจากระนาบสัญลักษณ์  $\times$  แสดงถึงรอยต่อโจเซฟสัน

กระแสรวมมีค่าเท่ากับ

$$I = I_A + I_B = I_0 \sin \gamma_A + I_0 \sin \gamma_B = 2I_0 \sin\left(\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma_A - \gamma_B}{2}\right)$$

โดยที่  $\gamma_A = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_2^1 \vec{A} \cdot d\vec{l}$  และ  $\gamma_B = \varphi_3 - \varphi_4 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_4^3 \vec{A} \cdot d\vec{l}$  จากความหนาแน่นกระแสของกินส์เบิร์กแลน

เดา  $\vec{j}(\vec{r}) = C \left( \hbar \nabla \varphi - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right)$  ซึ่งเราทราบว่าภายในเนื้อของตัวนำยิ่งยวด กระแสนี้มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

โดยทั่วไปแล้ว เราจะได้ว่า  $\nabla \varphi = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \vec{A}$  ซึ่งหมายความว่า  $\varphi_2 - \varphi_4 = \int_4^2 \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_4^2 \vec{A} \cdot d\vec{l}$  ;

$\varphi_1 - \varphi_3 = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_3^1 \vec{A} \cdot d\vec{l}$  ดังนั้น

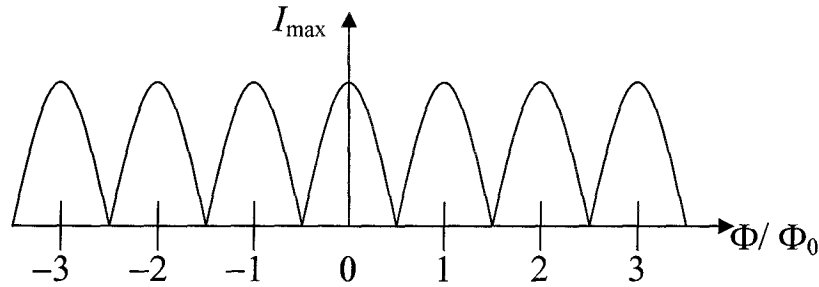
$$\begin{aligned} \gamma_A - \gamma_B &= \varphi_1 - \varphi_3 - (\varphi_2 - \varphi_4) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_2^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_4^3 \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_3^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_4^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_2^1 \vec{A} \cdot d\vec{l} - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_4^3 \vec{A} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \end{aligned}$$

โดยที่  $\Phi$  คือค่าฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงของ SQUID ค่ากระแสสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อ  $\left| \sin\left(\frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}\right) \right| = 1$  ดังนั้นเรา

ได้ว่า

$$I_{\max} = 2I_0 \left| \cos\left(\pi \Phi / \Phi_0\right) \right|$$

ซึ่งมีลักษณะกราฟดังแสดงในรูปที่ 10



รูปที่ 10 พล็อตของกระแสโจเซฟสันเป็นฟังก์ชันกับฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงจรรควิด

### 3.5 แบบฝึกหัด

1. ความร้อนจำเพาะของระบบที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสลำดับที่สอง: กำหนดให้ เอนโทรปีมีค่าเป็น  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$  โดยที่  $F$  คือ พลังงานอิสระ (Helmholtz's free energy) (ตัวอย่างเช่น ในกรณีของระบบเฟอร์โรแมกเนติกที่มีโครงสร้างผลึกเป็นเตตระโกนอล ค่าพลังงานอิสระดังกล่าวในทฤษฎีของกินส์เบิร์ก คือ  $F(T) = F_0(T) + A(T)M_z^2 + BM_z^4$ , โดยที่  $F_0(T)$  คือ ค่าพลังงานอิสระของระบบในสถานะพาราแมกเนติก  $A(T) = \alpha(T - T_c)$  ที่อุณหภูมิแถว ๆ  $T_c$ ,  $B$  เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวกและไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ,  $M_z$  คือค่าแมกนีไทเซชันในทิศทาง  $z$  และ  $T$  คืออุณหภูมิ). และให้ค่าความร้อนจำเพาะมีค่าเท่ากับ  $C_v = T \frac{\partial S}{\partial T}$ . จงแสดงให้เห็นว่าค่าความร้อนจำเพาะของระบบในสถานะเฟอร์โรแมกเนติกมีค่าสูงกว่าในสถานะพาราแมกเนติก กล่าวคือ  $(C_v)_{\text{ferro}} = (C_v)_{\text{para}} + \Delta C$ . โดยให้หาค่า  $\Delta C$  ในรูปของ  $\alpha, B$  และ  $T_c$  ที่  $T = T_c$ .

2. จงแสดงให้เห็นว่า  $f_{S0} = f_{N0} + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{e^* \vec{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi}$  gauge invariant ภายใต้ transformation ต่อไปนี้

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}k,$$

$$\psi = \psi' e^{ix}, \chi = \frac{e^* k}{\hbar c}.$$

3. จงแสดงให้เห็นว่า  $\vec{j} = \frac{e^*}{2m^*} (\psi^* \hat{p} \psi + c.c.)$  gauge invariant ภายใต้ transformation ต่อไปนี้

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}k,$$

$$\psi = \psi' e^{ix}, \chi = \frac{e^* k}{\hbar c}.$$

และจากสมการกินส์เบิร์กและแลนเดาทั้งสอง จงแสดงให้เห็นด้วยว่า  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ .

4. จงแสดงให้เห็นว่า  $-\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} \frac{d^2 f}{dz^2} - f + f^3 = 0$  โดยมีเงื่อนไข  $f(z=0) = 0$  และ  $f(z=\infty) = 1$  มี

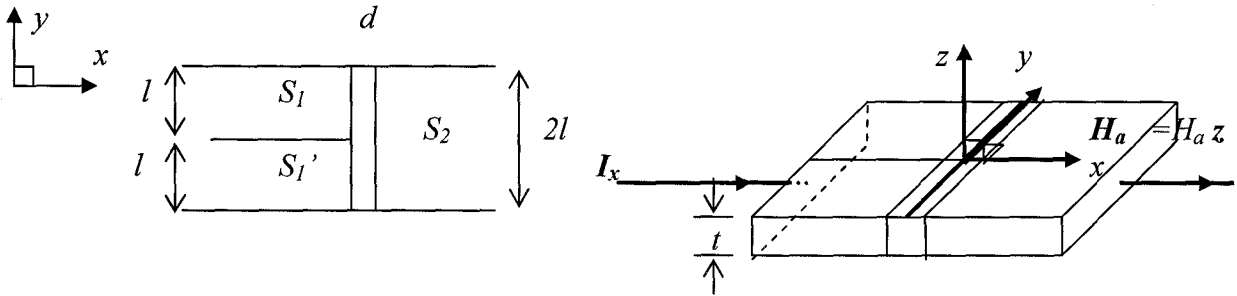
$$\text{คำตอบเป็น } f(z) = \tanh\left(\frac{z}{\xi\sqrt{2}}\right) \text{ โดยที่ } \xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}$$

5. จงแสดงให้เห็นว่า  $\Phi(y) = \int_0^y d\eta \int_{-\infty}^{\infty} dx h_z(x) = (d + 2\lambda) H_0 y$  และกระแสโจเซฟสันมีค่าเท่ากับ

$$I = Z \int_{-\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}} j_0 \sin(\gamma_0 + \kappa y) dy = j_0 Y Z \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \sin \gamma_0$$

6. จงคำนวณหาค่ากระแสสูงสุดของ SQUID ที่ประกอบด้วยรอยต่อโจเซฟสัน 2 รอยต่อที่ไม่เหมือนกัน

7. พิจารณารอยต่อโจเซฟสันในสนามแม่เหล็กภายนอก  $H_a$  ซึ่งมีลักษณะดังในรูปข้างล่างนี้



$S_1$  และ  $S_1'$  มีค่าทะลุทะลวงแม่เหล็กเท่ากับ  $\lambda_1$  แต่  $S_2$  มีค่าทะลุทะลวงแม่เหล็กเท่ากับ  $\lambda_2$ . ให้ค่าฟังก์ชันคลื่นของตัวนำยิ่งยวด  $S_1, S_1', S_2$  เป็น  $\psi_1, -\psi_1$ , และ  $\psi_2$  ตามลำดับ

7.1 เริ่มต้นจากความหนาแน่นกระแสโจเซฟสัน

$$j_x(y) = j_0 \sin(\gamma_0 + \kappa y)$$

โดยที่  $\gamma_0$  คือค่าความต่างเฟสระหว่างตัวนำยิ่งยวดซึ่งในกรณีนี้จะขึ้นกับตำแหน่งในแนวแกน  $y$ ,  $\kappa$  คือ  $2\pi H_a(d + \lambda_1 + \lambda_2)/\Phi_0$  และ  $j_0$  คือค่าคงที่ ให้หาว่าค่ากระแสโจเซฟสันที่ผ่านรอยต่อมีค่าเท่ากับเท่าใด โดยเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านรอยต่อ ( $\Phi$ ) และพารามิเตอร์ตัวอื่นที่เกี่ยวข้อง

7.2 ค่ากระแสโจเซฟสันสูงสุดเป็นฟังก์ชันอย่างไรกับ  $\Phi/\Phi_0$  โดยให้พล็อตกราฟด้วย

## บทที่ 4 ทฤษฎีบีซีเอส

ต่อไปนี้จะทำความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ซึ่งเป็นทฤษฎีในระดับจุลภาค ที่ใช้อธิบายฟิสิกส์ของตัวนำยิ่งยวด ทฤษฎีนี้เป็นทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้อธิบายสมบัติทั้งหมดของตัวนำยิ่งยวด เป็นทฤษฎีที่กล่าวถึงการที่สถานะพื้นของอิเล็กตรอนในโลหะไม่ใช่สถานะที่มีเสถียรภาพอีกต่อไป เมื่อเกิดมีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนด้วยกัน โดยแรงนี้ตามทฤษฎีบีซีเอสเกิดจากการมีโฟนอน (Phonons) สถานะใหม่ที่มีเสถียรภาพกว่าเป็นสถานะที่อิเล็กตรอนทุกตัวจับกันเป็นคู่ และมีเฟสเดียวกันหมด

### 4.1 ความไม่มีเสถียรภาพของสถานะปกติของอิเล็กตรอนในโลหะเมื่อมีแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอน

สถานะพื้นของอิเล็กตรอนแก๊สอิสระ คือ สถานะที่ระดับพลังงานที่มีเวกเตอร์คลื่น  $\vec{k}$  และพลังงาน  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  มีอิเล็กตรอนอยู่ระดับละ 2 ตัว ตั้งแต่ระดับที่มีพลังงานเป็นศูนย์ จนถึงระดับพลังงานเฟอร์มี  $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$  ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า เมื่อมีอันตรกิริยาดึงดูดไม่ว่าอันตรกิริยานี้จะมีค่าน้อยเพียงใด สถานะพื้นของอิเล็กตรอนแก๊สอิสระนี้จะไม่เสถียรอีกต่อไป

พิจารณาอิเล็กตรอน 2 ตัวที่มีตำแหน่งอยู่ที่  $\vec{r}_1$  และ  $\vec{r}_2$  โดยอิเล็กตรอนตัวอื่น ๆ ที่เหลืออยู่ในสถานะพื้นของอิเล็กตรอนแก๊สอิสระ ผลเพียงอย่างเดียวของอิเล็กตรอนที่อยู่ในสถานะพื้นนี้ก็คือ การที่ห้ามไม่ให้อิเล็กตรอนทั้งสองตัวมาอยู่ในระดับพลังงานที่มี  $|\vec{k}| < k_F$  ตามกฎการกีดกันของเพาลี ให้  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  แทนฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนทั้งสองตัว และในตอนนี้เราจะพิจารณากรณีที่จุดศูนย์กลางมวลของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวนี้อยู่หนึ่ง เราจะได้ว่า  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  เราเขียนฟังก์ชันคลื่นนี้ในรูปของอนุกรมของคลื่นระนาบได้เป็น

$$\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \quad (1)$$

โดยที่  $g(\vec{k})$  คืออัมพลิจูดความน่าจะเป็นที่จะพบว่ามีอิเล็กตรอนหนึ่งตัวอยู่ที่สถานะที่มีโมเมนตัม  $\hbar\vec{k}$  และอีกหนึ่งตัวที่สถานะ  $-\hbar\vec{k}$  และเนื่องจากว่าสถานะที่มี  $|\vec{k}| < k_F$  ถูกเติมจนเต็มแล้ว เราจะได้ว่า

$$g(\vec{k}) = 0 \quad \text{เมื่อ } |\vec{k}| < k_F \quad (2)$$

สมการชโรดิงเงอร์ของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวนี้เขียนได้เป็น

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right\} \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left( E + 2 \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right) \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3)$$

โดยที่  $E$  เป็นพลังงานของคู่อิเล็กตรอนเทียบกับพลังงานที่ระดับเฟอร์มีของทั้งคู่ นำสมการที่ (1) มาแทนในสมการที่ (3) เราจะได้สมการสำหรับ  $g(\vec{k})$  คือ

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} g(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') V_{\vec{k}\vec{k}'} = (E + 2E_F) g(\vec{k}) \quad (4)$$

โดยที่  $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{1}{L^3} \int d\vec{r} V(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}}$  ซึ่งเป็นส่วนประกอบเมตริกซ์ของอันตรกิริยาระหว่างสถานะ  $\vec{k}$  กับ  $\vec{k}'$

เมื่อ  $E > 2E_F$   $g(\bar{k})$  จะมีลักษณะเป็นสเปกตรัมที่ต่อเนื่อง ซึ่งบรรยายการเปลี่ยนสถานะของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวจาก  $(\bar{k}, -\bar{k})$  ไปยัง  $(\bar{k}', -\bar{k}')$  โดยมีค่าพลังงานเท่าเดิม (สังเกตว่าทั้งคู่เป็นสถานะที่แผ่ออกไปได้) แต่ในกรณีที่อันตรกิริยาเป็นแบบดึงดูด สถานะที่เกิดขึ้นอาจเป็นสถานะที่ถูกกักกัน (Bound states) ที่มี  $E < 2E_F$  ได้ ซึ่งเราสามารถแสดงให้เห็นได้จากการคำนวณต่อไปนี้

เราจะพิจารณากรณีง่าย ๆ ของอันตรกิริยาดึงดูด กล่าวคือ กรณีที่

$$V_{\bar{k}\bar{k}'} = \begin{cases} -\frac{v}{L^3} & \text{for } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D, \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

อันตรกิริยานี้มีค่าคงที่ในช่วงพลังงาน  $\hbar\omega_D$  (พลังงานเดอบาย) เหนือระดับเฟอร์มี โดยทั่วไปแล้ว พลังงานเฟอร์มีมีค่าประมาณ  $1 \text{ eV} \sim 10000 \text{ K}$  ซึ่งมีค่ามากกว่าพลังงานเดอบายมาก (มีค่าประมาณ  $100 \text{ K}$ ) ดังนั้นช่วงพลังงาน  $(E_F, E_F + \hbar\omega_D)$  จึงเป็นช่วงที่เล็กมากเหนือระดับเฟอร์มี เมื่อแทนค่าสมการที่ (5) ลงใน (4) และจัดรูป เราจะได้ว่า

$$-\frac{v}{L^3} \sum_{\bar{k}'} g(\bar{k}') = \left( -\frac{\hbar^2 k^2}{m} + E + 2E_F \right) g(\bar{k}) \quad (6)$$

โดยที่อนุกรมมีเฉพาะช่วงที่  $k_F < k < k_F + k_D$  เท่านั้น แต่

$$C = -\frac{v}{L^3} \sum_{\bar{k}'} g(\bar{k}') \quad (7)$$

โดย  $C$  เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$g(\bar{k}') = \frac{C}{-\frac{\hbar^2 k'^2}{m} + E + 2E_F}$$

แทนค่าลงในสมการที่ (7) จะได้ว่า

$$1 = \frac{v}{L^3} \sum_{\bar{k}'} \frac{1}{\frac{\hbar^2 k'^2}{m} - E - 2E_F} \quad (8)$$

$$\text{กำหนดให้ } \xi' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} - E_F \quad (9)$$

เปลี่ยนอนุกรมให้เป็นอินทิเกรตของพลังงานในสมการที่ (8) จะได้ว่า

$$1 = v \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi' N(\xi') \frac{1}{2\xi' - E} \quad (10)$$

โดยที่  $N(\xi')$  คือความหนาแน่นสถานะ และในช่วงพลังงานที่เราอินทิเกรตนั้น ค่าความหนาแน่นสถานะมีค่าเกือบคงที่ เราสามารถประมาณ  $N(\xi') = N(0)$  (ความหนาแน่นสถานะที่ระดับเฟอร์มี)

$$1 = vN(0) \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi' \frac{1}{2\xi' - E} = \frac{1}{2} N(0) v \ln \left( \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E} \right) \quad (11)$$

และถ้าเราพิจารณาในลิมิตที่อันตรกิริยามีค่าอ่อน คือ  $N(0)v \ll 1$  จากสมการที่ (11) เราจะได้

$$E = -\frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/N(0)v} - 1} \approx -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)v} \quad (12)$$

หมายความว่า ในกรณีที่มีอันตรกิริยาดังดูดนั้น อิเล็กตรอน 2 ตัวสามารถอยู่ในสถานะที่ถูกกักกันได้ ซึ่งสถานะนี้มีพลังงานน้อยกว่าระดับเฟอร์มี ผลที่เราได้นี้ขัดแย้งกับหลักการกีดกันของเพาลี หรือ โดยสรุปแล้ว สิ่งที่เกิดขึ้นก็คือ ถ้าเราเริ่มจากอิเล็กตรอนแก๊สอิสระในสถานะพื้น แล้วให้มีอันตรกิริยาดังดูด อิเล็กตรอนจะเริ่มจับคู่กันแล้วให้พลังงานออกมาสู่ภายนอก ทำให้สถานะพื้นปกติกลายเป็นสถานะที่ไม่เสถียรอีกต่อไป

ต่อไปนี้เป็นข้อสังเกตเกี่ยวกับสถานะที่ถูกกักกันที่เกิดขึ้น

1. สถานะนี้เกิดขึ้นไม่ว่าขนาดของอันตรกิริยาดังดูดจะเล็กแค่ไหนก็ตาม
2. สถานะนี้เกิดขึ้นเมื่อมี "ทะเลเฟอร์มี" เท่านั้น
3. ค่าพลังงานของสถานะนี้  $E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)v}$  ไม่สามารถถูกเขียนในรูปของการกระจายของ  $v$  ได้
4. คู่อิเล็กตรอนที่เกิดขึ้นในกรณีที่เราสงเกตใจนั้นจะอยู่ในสถานะซิงเกิลท (Singlet state) เนื่องจากเราเลือกให้ฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันสมมาตร คือ  $g(\vec{k}) = g(-\vec{k})$  (เนื่องจากอันตรกิริยาดังดูดที่เราใช้นั้นมีค่าไม่ขึ้นกับทิศทางของโมเมนตัมของอิเล็กตรอน)
5. ฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนทั้งสองตัว  $\psi(\vec{r})$  มีค่าไม่ขึ้นกับทิศทางของ  $\vec{r}$  เราจะเรียกสถานะของคู่อิเล็กตรอนนี้ว่าเป็นสมมาตรเอส (s-symmetry)
6. ถ้าอันตรกิริยาดังดูดมีความซับซ้อนขึ้น เราสามารถเขียน  $g(\vec{k})$  ในรูปของอนุกรมของฮาร์มอนิกทรงกลม (Spherical harmonics) คือ  $g(\vec{k}) = \sum_{lm} C_{lm}(k) Y_{lm}(\hat{k})$

#### 4.2 ที่มาของอันตรกิริยาดังดูด

อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนโดยผ่านโฟนอนมีค่าติดลบได้ ให้  $V_{\vec{k}\vec{k}'}$  คือเมตริกซ์ของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนในสถานะเริ่มต้นกับสถานะสุดท้าย โดยที่สถานะเริ่มต้น  $|i\rangle$  อิเล็กตรอนทั้งสองตัวอยู่ในสถานะคลื่นระนาบ โดยที่มีโมเมนตัมเท่ากับ  $\hbar\vec{k}$  กับ  $-\hbar\vec{k}$  และสถานะสุดท้าย  $|f\rangle$  อยู่ในสถานะที่มีโมเมนตัมเท่ากับ  $\hbar\vec{k}'$  กับ  $-\hbar\vec{k}'$   $V_{\vec{k}\vec{k}'}$  ประกอบด้วย 2 เทอม คือ อันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโดยตรงซึ่งมาจากแรงผลัคลูกอมบ์กับอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนโดยทางอ้อมที่เกิดผ่านโฟนอน

อันตรกิริยาโดยตรงเขียนแทนด้วย

$$\begin{aligned} \langle i | H_{\text{direct}} | f \rangle &= \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} U_C(\vec{r}_1-\vec{r}_2) e^{-i\vec{k}'\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \\ &= \int d^3r d^3R U_C(\vec{r}_1-\vec{r}_2) e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}}, \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ และ } \vec{R} = \frac{(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{2} \\ &= V \int d^3r U_C(\vec{r}_1-\vec{r}_2) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = VU_q \end{aligned}$$

โดยที่  $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$

อันตรกิริยาโดยทางอ้อมเขียนได้เป็น

$$\langle i | H_{\text{indirect}} | f \rangle = \sum_n \langle i | H_{\text{e-ph}} | n \rangle \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_f - E_n} + \frac{1}{E_i - E_n} \right) \langle n | H_{\text{e-ph}} | f \rangle$$

โดยที่  $E_i = 2\xi_k, E_f = 2\xi_{k'}$

อนุกรมเป็นผลรวมของทุกสถานะชั้นกลาง และ  $H_{\text{e-ph}}$  เป็นอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟตอน

$$\langle i | H_{\text{indirect}} | f \rangle = \frac{|\omega_q|^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega - \omega_q} + \frac{1}{\omega + \omega_q} \right)$$

โดยที่  $\hbar\omega_q = \xi_{k'} - \xi_k$  ดังนั้นผลรวมของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองตัวมีค่าเป็น

$$\langle i | H_{\text{total}} | f \rangle = VU_q + \frac{2|\omega_q|^2}{\hbar} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_q^2} \quad (13)$$

เมื่อ  $\omega < \omega_q$  เทอมที่สองจะมีค่าติดลบ ดังนั้น ถ้า  $U_q$  มีค่าไม่ใหญ่จนเกินไป  $\langle i | H_{\text{total}} | f \rangle$  มีค่าติดลบได้

### 4.3 สถานะพื้นและสถานะกระตุ้น

เมื่อเราได้ทราบแล้วว่าอิเล็กตรอนมีแนวโน้มที่จะจับคู่กันได้ เราจะเขียนฟังก์ชันของสถานะพื้นของตัวนำยิ่งยวด (เป็น Trial wave function) ของอิเล็กตรอน N ตัว ดังนี้

$$\phi_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \dots \phi(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)$$

สถานะที่บรรยายด้วย  $\phi_N$  นี้ เป็นสถานะที่อิเล็กตรอนทุกตัวจับคู่กัน โดยแต่ละคู่มีฟังก์ชันคลื่นเหมือนกันคือ  $\phi$  สังเกตว่า  $\phi_N$  ยังไม่ใช่ฟังก์ชันคลื่นที่ถูกต้องนัก เนื่องจากเรายังไม่ได้รวมเอาส่วนที่บอกสปินเข้ามาด้วย เราจะเลือกให้อิเล็กตรอนที่มาจับคู่กันมีสปินตรงข้ามกัน ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นที่ถูกต้องเขียนได้เป็น

$$\phi_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = A \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \dots \phi(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N) (1\uparrow)(2\downarrow) \dots (N-1, \uparrow)(N \downarrow)$$

A เป็นโอเปอเรเตอร์ที่บ่งบอกว่า  $\phi_N$  เป็น antisymmetric function ตามสมบัติของอิเล็กตรอนซึ่งเป็นเฟอร์มิออน เราเขียนฟังก์ชัน  $\phi$  ในรูปของอนุกรมของคลื่นระนาบ

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} g_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

ดังนั้น

$$\phi_N = \sum_{\vec{k}} \dots \sum_{\vec{k}_{N/2}} g_{\vec{k}_1} \dots g_{\vec{k}_{N/2}} A e^{i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \dots e^{i\vec{k}_{N/2} \cdot (\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)} (1\uparrow)(2\downarrow) \dots (N-1, \uparrow)(N \downarrow)$$

ส่วนที่เป็น  $A e^{i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \dots e^{i\vec{k}_{N/2} \cdot (\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)} (1\uparrow)(2\downarrow) \dots (N-1, \uparrow)(N \downarrow)$  บ่งบอกว่าระบบนี้เป็นระบบที่มีอิเล็กตรอน 1 ตัว อยู่ในสถานะ  $(\vec{k}_1 \uparrow)$  1 ตัวอยู่ในสถานะ  $(-\vec{k}_1 \downarrow)$  1 ตัวอยู่ในสถานะ  $(\vec{k}_2 \uparrow)$  ไปเรื่อย ๆ และดังที่ได้กล่าวแล้ว A เป็นสัญลักษณ์ที่บ่งบอกว่า สถานะของระบบเป็น antisymmetric ซึ่งสามารถเขียนได้เป็นดีเทอร์มิแนนต์สเลเตอร์ของสถานะ  $(\vec{k}_1 \uparrow)(-\vec{k}_1 \downarrow)(\vec{k}_2 \uparrow)(-\vec{k}_2 \downarrow) \dots (\vec{k}_{N/2} \uparrow)(-\vec{k}_{N/2} \downarrow)$  เราจะเขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์สเลเตอร์นี้ด้วยวิธีการเขียนของวิกเนอร์-จอร์แดน (คือ เขียนอยู่ในรูปของโอเปอเรเตอร์สร้างและทำลายที่มีสมบัติเฉพาะ) นั่นคือ

$$a_{\vec{k}_1 \uparrow}^\dagger a_{-\vec{k}_1 \downarrow}^\dagger \dots a_{\vec{k}_{N/2} \uparrow}^\dagger a_{-\vec{k}_{N/2} \downarrow}^\dagger |0\rangle$$

โดยที่  $|0\rangle$  คือสถานะว่างเปล่า (สถานะที่ไม่มีอิเล็กตรอนอยู่เลย)  $a_{\vec{k}\alpha}^\dagger$  เป็นโอเปอเรเตอร์ที่สร้างสถานะที่มีอิเล็กตรอน 1 ตัวซึ่งอยู่ในสถานะที่มีโมเมนตัมและสปินเป็น  $(\vec{k}\alpha)$  และ  $a_{\vec{k}\alpha}$  เป็นโอเปอเรเตอร์ที่ทำลายสถานะ  $(\vec{k}\alpha)$   $a_{\vec{k}\alpha}$  มีสมบัติคือ

$$a_{\vec{k}\alpha} |0\rangle = 0$$

และสมบัติทุกอย่างของ  $A e^{i\vec{k}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \dots e^{i\vec{k}_{N/2} \cdot (\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_N)} (1\uparrow)(2\downarrow) \dots (N-1, \uparrow)(N \downarrow)$  สามารถเขียนในรูปของสัญลักษณ์วิกเนอร์-จอร์แดนได้เนื่องจากโอเปอเรเตอร์ดังกล่าวมีสมบัติดังนี้

$$a_{\vec{k}\alpha}^\dagger a_{\vec{l}\beta}^\dagger + a_{\vec{l}\beta}^\dagger a_{\vec{k}\alpha}^\dagger = 0$$

$$a_{\vec{k}\alpha}^\dagger a_{\vec{l}\beta} + a_{\vec{l}\beta} a_{\vec{k}\alpha}^\dagger = \delta_{kl} \delta_{\alpha\beta}$$

$$a_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{l}\beta} + a_{\vec{l}\beta} a_{\vec{k}\alpha} = 0$$

ซึ่งเราจะเขียน  $\phi_N$  ได้เป็น



$$\phi_N = \sum_k \dots \sum g_{k_1} \dots g_{k_{N/2}} a_{k_1 \uparrow}^\dagger a_{-k_1 \uparrow}^\dagger \dots a_{k_{N/2} \uparrow}^\dagger a_{-k_{N/2} \uparrow}^\dagger |0\rangle \quad (14)$$

$\phi_N$  นี้ไม่ใช่สถานะที่เราสามารถจะจัดการทางคณิตศาสตร์ได้ง่ายเท่าใดนัก ต่อไปนี้เราจะพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งแทน ซึ่งเราจะแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันนี้มีสมบัติเหมือนกับ  $\phi_N$  แต่สามารถจัดการกับมันในเชิงคณิตศาสตร์ได้ง่ายกว่า พิจารณา

$$\tilde{\phi} = C \prod_k (1 + g_k a_{k \uparrow}^\dagger a_{-k \uparrow}^\dagger) |0\rangle$$

โดยที่ผลคูณนั้นคูณทุกสถานะ  $\vec{k}$  ส่วน C เป็นค่าคงที่ที่เราจะได้มาจากการนอร์มอไลซ์ฟังก์ชันนี้ สังเกตว่าแต่ละเทอมที่คูณกันใน  $\prod_k$  นั้น สลับที่กันได้

จะเห็นได้ว่า  $\tilde{\phi}$  เป็นฟังก์ชันที่เป็นผลบวกกันของระบบที่มีจำนวนอิเล็กตรอน 0, 2, 4, 6 ... ดังนั้น  $\phi_N$  เป็นส่วนหนึ่งของ  $\tilde{\phi}$  จากนั้นเราจะเขียน  $\tilde{\phi}$  เป็น

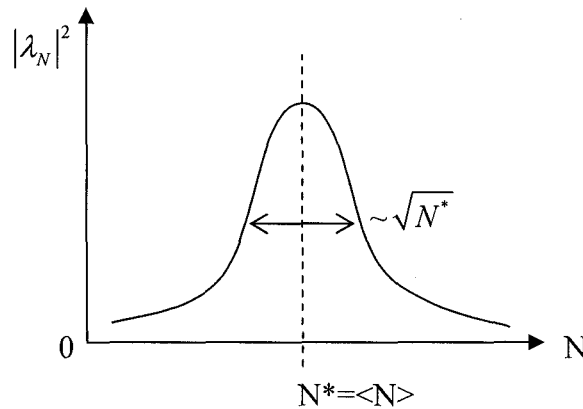
$$\tilde{\phi} = \prod_k (u_k + v_k a_{k \uparrow}^\dagger a_{-k \uparrow}^\dagger) |0\rangle \quad (15)$$

โดยที่  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$  ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จะทำให้  $\tilde{\phi}$  นอร์มอไลซ์

สำหรับกรณีที่ N มีค่าใหญ่มาก ๆ เราสามารถทำการคำนวณสมบัติทางฟิสิกส์ทุกอย่างของ  $\phi_N$  จาก  $\tilde{\phi}$  ได้ ซึ่งต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าเป็นจริง เราจะเขียน  $\tilde{\phi}$  ในรูป

$$\tilde{\phi} = \sum_N \lambda_N \phi_N$$

โดยที่  $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$  ในกรณีที่ N มีค่าใหญ่มาก ๆ  $|\lambda_N|^2$  จะมีลักษณะขึ้นกับ N ดังในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดง  $|\lambda_N|^2$  ว่าขึ้นกับ N ในลักษณะของเกาส์เซียนซึ่งมีจุดสูงสุดอยู่ที่  $N^*$  ซึ่งเป็นค่าที่สมดุลง่ายจะมีความกว้างประมาณ  $\sqrt{N^*}$

เราสามารถหาค่า N ที่  $|\lambda_N|^2$  มีค่าสูงสุดได้ซึ่งคือ

$$N^* = \langle N \rangle = 2 \sum_k |v_k|^2 = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} 2 |v_k|^2$$

โดยที่  $\Omega$  คือปริมาตรของระบบ และในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาความกว้างของกราฟ  $|\lambda_N|^2$  ซึ่งมีค่าเท่ากับค่ารากที่สองเฉลี่ยของจำนวนได้

$$\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} = \sqrt{4 \sum_k |v_k|^2 |u_k|^2} = \sqrt{\frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} 4 |u_k|^2 |v_k|^2}$$

จะเห็นได้ว่า  $\langle N \rangle$  แปรผันตรงกับปริมาตร  $\Omega$  ส่วน  $\sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}$  แปรผันตรงกับ  $\sqrt{\Omega}$  ดังนั้นความผันแปรสัมพัทธ์ของค่า  $N$  จึงมีค่าแปรผันตรงกับ

$$\sqrt{\frac{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sim \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}}$$

ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อ  $\langle N \rangle$  มีค่ามาก

เนื่องจากค่า  $\sqrt{N^*}$  มีค่ามากกว่า 1 มาก ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของค่า  $|\lambda_N|^2$  จึงน้อยมากเมื่อ  $N$  มีค่าต่างไปจาก  $\langle N \rangle$  เพียง 1 หรือ 2 เท่านั้น นั่นคือ

$$\lambda_{N+p} \approx \lambda_N \text{ เมื่อ } p \ll \sqrt{N^*}$$

จากนี้ไปเราจะคำนวณค่าเฉลี่ยของโอเปอเรเตอร์  $F$  จาก  $\tilde{\phi}$  โดยทั่วไปแล้ว

$$\langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle = \sum_{N, N'} \lambda_N^* \lambda_{N'} \langle \phi_N | F | \phi_{N'} \rangle$$

ถ้าโอเปอเรเตอร์  $F$  อนุรักษ์จำนวนอนุภาค นั่นคือ  $F | \phi_N \rangle \propto | \phi_N \rangle$  เราจะได้ว่า

$$\langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle = \sum_N |\lambda_N|^2 \langle \phi_N | F | \phi_N \rangle$$

โดยทั่วไปแล้ว  $\langle \phi_N | F | \phi_N \rangle$  เป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ไปกับค่า  $N$  ดังนั้นจากสมบัติของ  $|\lambda_N|^2$  ที่ว่ามีค่าสูงสุดที่  $N^*$  และ  $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$  จะทำให้ได้ว่า

$$\langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle \approx \langle \phi_{N^*} | F | \phi_{N^*} \rangle$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้าโอเปอเรเตอร์  $F$  เมื่อกระทำต่อ  $\phi_N$  แล้วให้สถานะที่มีอนุภาค  $N+p$  ตัว เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi} | F | \tilde{\phi} \rangle &= \sum_{N, N'} \lambda_N^* \lambda_{N'} \langle \phi_N | F | \phi_{N'} \rangle \\ &= \sum_{N'} \lambda_{N'+p}^* \lambda_{N'} \langle \phi_{N'+p} | F | \phi_{N'} \rangle \\ &\approx \sum_N |\lambda_N|^2 \langle \phi_{N+p} | F | \phi_N \rangle \\ &\approx \langle \phi_{N+p} | F | \phi_N \rangle \end{aligned}$$

ซึ่งหมายความว่า ไม่ว่าโอเปอเรเตอร์  $F$  จะเป็นอย่างไร เราสามารถคำนวณค่าเฉลี่ยของมันได้โดยใช้ฟังก์ชัน  $\tilde{\phi}$  ซึ่งจะให้ข้อมูลกับเราเหมือนกับฟังก์ชัน  $\phi_N$

ต่อไปนี้จะแสดงการคำนวณค่าพลังงานของสถานะพื้นของตัวนำยิ่งยวด กำหนดให้  $H$  คือแฮมมิลโตเนียนของระบบ เราจะใช้หลักการการผันแปร (Variational principle) มาใช้ในการคำนวณค่าพลังงานดังกล่าว เนื่องจากเราจะทำการคำนวณโดยใช้  $\tilde{\phi}$  แทน  $\phi_N$  ซึ่ง  $\tilde{\phi}$  เป็นฟังก์ชันคลื่นที่มีค่าจำนวนอนุภาคไม่คงตัว ดังนั้นจากหลักดังกล่าว เราจะทำการ minimize ปริมาณต่อไปนี้คือ

$$\langle \tilde{\phi} | H | \tilde{\phi} \rangle - E_F \langle \tilde{\phi} | N | \tilde{\phi} \rangle$$

โดยที่  $N$  คือจำนวนอนุภาค และ  $E_F$  เป็นตัวคูณลากรางจ์ ซึ่งเป็นค่าพลังงานเฟอร์มี  $H - E_F N$  ประกอบด้วย 2 เทอมคือ พลังงานจลน์

$$H_0 = \sum_{k\alpha} \xi_k a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} \quad \text{โดยที่ } \xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \quad (16)$$

และพลังงานศักย์ที่บรรยายการกระเจิงของอิเล็กตรอน 2 ตัวจาก  $(\bar{k}\alpha)(\bar{k}'\beta) \rightarrow (\bar{k} + \bar{q}, \alpha)(\bar{k}' - \bar{q}, \beta)$

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{k, k', q, \alpha, \beta} V(\bar{k} + \bar{q}, \bar{k}' - \bar{q} | \bar{k}, \bar{k}') a_{k+q, \alpha}^\dagger a_{k'-q, \beta}^\dagger a_{k', \beta} a_{k, \alpha} \quad (17)$$

สังเกตว่าอันตรกิริยานี้อนุรักษ์โมเมนตัมและสปิน เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\langle \tilde{\phi} | H_0 | \tilde{\phi} \rangle = \sum_{k\alpha} \xi_k |v_k|^2$$

สำหรับพลังงานศักย์นั้น ประกอบด้วยอันตรกิริยาที่ทำให้เกิดการกระเจิงใน 3 ลักษณะ คือ  $V(\bar{k}, \bar{k}' | \bar{k}, \bar{k}')$  (การกระเจิงที่ไม่เปลี่ยนสถานะ)  $V(\bar{k}, \bar{k}' | \bar{k}', \bar{k})$  (การกระเจิงที่มีการแลกเปลี่ยนสถานะกัน) และ  $V(\bar{l}, -\bar{l} | \bar{k}, -\bar{k}') \equiv V_{kl}$  (การกระเจิงที่มีการเปลี่ยนสถานะจาก  $(\bar{k} \uparrow, -\bar{k} \downarrow)$  เป็น  $(\bar{l} \uparrow, -\bar{l} \downarrow)$ ) อันตรกิริยาที่ทำให้เกิดการกระเจิงใน 2 ลักษณะแรกนั้นมีปรากฏอยู่ในระบบอิเล็กตรอนในโลหะอยู่แล้ว ซึ่งสามารถนำไปเขียนรวมไว้ในเทอม  $\xi_k$  ได้ เราจึงจะไม่พิจารณาในกรณีของอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวด ในที่นี้เราจะพิจารณาเฉพาะอันตรกิริยาที่ทำให้เกิดการกระเจิงในลักษณะสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นเราจะเขียน

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{k, l, \alpha, \beta} V_{kl} a_{l\alpha}^\dagger a_{-l\beta}^\dagger a_{-k\beta} a_{k\alpha} \quad (18)$$

ซึ่งเมื่อเราคำนวณหาค่าเฉลี่ยของ  $H_{\text{int}}$  สำหรับฟังก์ชันคลื่น  $\tilde{\phi}$  เราจะได้  $\langle \tilde{\phi} | H_{\text{int}} | \tilde{\phi} \rangle = \sum_{\substack{kl \\ k \neq l}} V_{kl} v_l^* u_l v_k u_k^*$  นั่นคือ

$$\langle \tilde{\phi} | H - E_F N | \tilde{\phi} \rangle = 2 \sum_k \xi_k |v_k|^2 + \sum_{\substack{kl \\ k \neq l}} V_{kl} v_l^* u_l v_k u_k^* \quad (19)$$

ต่อไปนี้จะทำการ Minimize  $\langle \tilde{\phi} | H - E_F N | \tilde{\phi} \rangle$  เนื่องจาก  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$  เราจะเขียน  $u_k = \sin \theta_k$  และ  $v_k = \cos \theta_k$  ซึ่งทำให้เราได้

$$\langle \tilde{\phi} | H - E_F N | \tilde{\phi} \rangle = 2 \sum_k \xi_k \cos \theta_k + \frac{1}{4} \sum_{\substack{kl \\ k \neq l}} V_{kl} \sin 2\theta_l \sin 2\theta_k$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ย่อย  $\langle \tilde{\phi} | H - E_F N | \tilde{\phi} \rangle$  เทียบกับ  $\theta_k$  และนิยาม

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_l V_{kl} u_l v_l \quad (20)$$

$$\text{และ } \varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \quad (21)$$

$$\text{เราจะได้ว่า } \sin 2\theta_k = 2u_k v_k = \frac{\Delta_k}{\varepsilon_k} \quad (22)$$

$$\text{และ } \cos 2\theta_k = -|u_k|^2 + |v_k|^2 = -\frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \quad (23)$$

เราเลือกเครื่องหมายลบในสมการที่ (23) เพื่อที่ว่า เมื่อ  $\xi_k$  มีค่าบวกและมีขนาดมาก ๆ  $u_k = 1, v_k = 0$  ซึ่งจะทำให้จำนวนของอิเล็กตรอน  $\langle N \rangle = 2 \sum_k |v_k|^2$  มีค่าลู่เข้า

เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (22) และ (23) แล้ว เราจะได้ว่า

$$\Delta_k = -\sum_l V_{kl} \frac{\Delta_l}{2\varepsilon_l} = -\sum_l V_{kl} \frac{\Delta_l}{2\sqrt{\xi_l^2 + \Delta_l^2}} \quad (24)$$

สังเกตว่า สมการที่ (24) นี้เป็นสมการ Self-consistent โดยมี  $\Delta_k = 0$  เป็นคำตอบหนึ่ง คำตอบนี้ทำให้เราได้ว่า

$$\varepsilon_k = |\xi_k| \text{ และ } -|u_k|^2 + |v_k|^2 = \mp 1$$

(โดยที่เครื่องหมายข้างบนสำหรับ  $\xi_k > 0$  และเครื่องหมายล่างสำหรับ  $\xi_k < 0$ ) และ

$$u_k v_k = 0$$

หมายความว่า

$$v_k = \begin{cases} 1, & \xi_k < 0 \\ 0, & \xi_k > 0 \end{cases}$$

กล่าวคือ คำตอบนี้เป็นคำตอบของระบบอิเล็กตรอนในโลหะธรรมดา นั่นเอง ซึ่งมีฟังก์ชันคลื่นเป็น

$$\tilde{\phi} = \prod_{k < k_F} a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\uparrow}^\dagger |0\rangle \text{ ดังที่ควรจะเป็น}$$

นอกจากคำตอบนี้แล้ว สมการที่ (24) ก็ยังมีคำตอบอื่น ๆ ได้อีก ในกรณีของทฤษฎีบีซีเอส นั้น เลือกให้อันตรกิริยา  $V_{kl}$  มีค่าเป็น

$$V_{kl} = \begin{cases} -V & \text{if } |\xi_k|, |\xi_l| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

โดยที่  $V$  มีค่าเป็นบวก ค่า  $\Delta_k$  ในกรณีนี้จะไม่ขึ้นกับโมเมนตัม

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta & \text{for } |\xi_k| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

และจาก (24) เราเปลี่ยนอนุกรมให้เป็นอินทิเกรตแล้วทำการอินทิเกรตเราจะได้คำตอบในกรณีนี้คือ

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1/N(0)v)} = -2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)v} \quad (27)$$

สมการที่ (27) นี้ใช้การประมาณ  $N(0)v \ll 1$  หรือที่เรียกว่า Weak coupling limit

จากนี้ไปเราก็สามารถคำนวณหาค่าพลังงานของสถานะพื้นของระบบได้ คือ

$$E_{0,\text{sup}} = E_{0,\text{metal}} - L^3 \left( \frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \right) = E_{0,\text{metal}} - N \left( \frac{3}{8} \frac{\Delta^2}{E_F} \right) \quad (28)$$

สำหรับค่าพลังงานของสถานะนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิมากกว่าศูนย์เคลวินนั้น เราสามารถหาได้จากการประมาณสนามเฉลี่ย และการจัดรูปแฮมิลโตเนียนใหม่ โดยต้องนิยามโอเปอเรเตอร์สร้างและทำลายอนุภาคในสถานะกระตุ้น  $(\gamma_{k1}^\dagger, \gamma_{k0})$  ขึ้นมา โดยที่โอเปอเรเตอร์นี้มีความสัมพันธ์กับโอเปอเรเตอร์สร้างและทำลายอิเล็กตรอนที่เราถืออยู่เดิมดังนี้

$$a_{k\uparrow} = u_k \gamma_{k0} + v_k \gamma_{k1}^\dagger \quad (29)$$

$$a_{-k\downarrow}^\dagger = -v_k^* \gamma_{k0} + u_k \gamma_{k1}^\dagger \quad (30)$$

แฮมิลโตเนียนซึ่งเขียนในรูปของโอเปอเรเตอร์ใหม่นี้เป็นดังนี้

$$H_{\text{BCS}} = \sum_k E_k (\gamma_{k0}^\dagger \gamma_{k0} + \gamma_{k1}^\dagger \gamma_{k1}) + \sum_k \left( \xi_k - E_k + \Delta_k \langle a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger \rangle^* \right)$$

อนุภาคในสถานะกระตุ้นเป็น Quasiparticle ที่เป็นผลรวมของอิเล็กตรอนกับโฮล มีสมบัติเป็นเฟอร์มิออน และมี

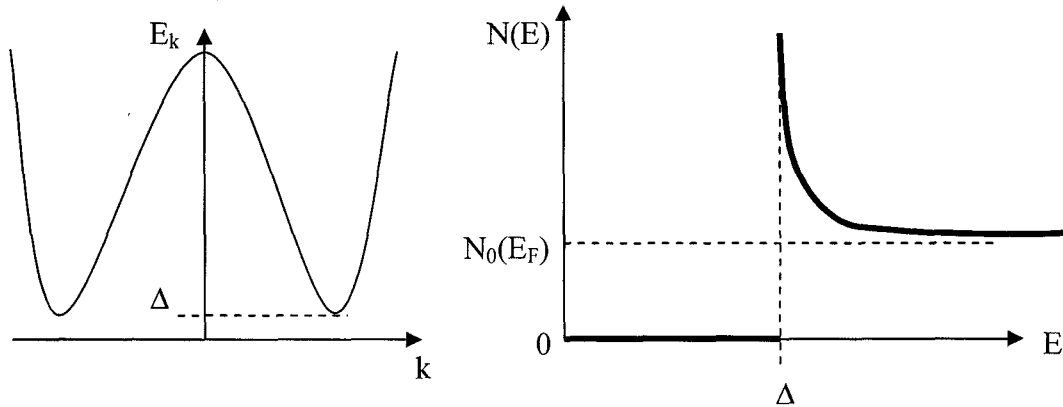
พลังงานเท่ากับ  $\varepsilon_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}$

สังเกตว่า  $\Delta_k$  มีหน่วยเป็นพลังงาน และเราเรียกว่าช่องว่างพลังงาน เนื่องจากเป็นช่วงพลังงานที่ไม่มีสถานะอยู่

ความหนาแน่นสถานะของสถานะกระตุ้นมีค่าเป็น

$$N(E) = \begin{cases} 0 & , E < \Delta \\ N_0(E_F) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} & , E > \Delta \end{cases}$$

โดยที่  $N_0(E_F)$  คือความหนาแน่นสถานะของโลหะที่ระดับเฟอร์มี ความหนาแน่นสถานะของตัวนำยิ่งยวดมีลักษณะเป็นดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงสเปกตรัมพลังงาน (ซ้าย) และความหนาแน่นพลังงานของตัวนำยิ่งยวด (ขวา)

จาก  $\Delta^* = V \sum_{k'} \langle a_{k'\uparrow}^\dagger a_{-k'\downarrow}^\dagger \rangle^* = V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}^* \langle 1 - \gamma_{k0}^\dagger \gamma_{k0} - \gamma_{k1}^\dagger \gamma_{k1} \rangle$  เราจะได้  $\Delta$  สำหรับทฤษฎีบีซีเอส ที่อุณหภูมิมากกว่าศูนย์เคลวินเป็น

$$\Delta_k = - \sum_l V_{kl} \frac{\Delta_l}{2\epsilon_l} \tanh\left(\frac{\beta\epsilon_l}{2}\right) \tag{31}$$

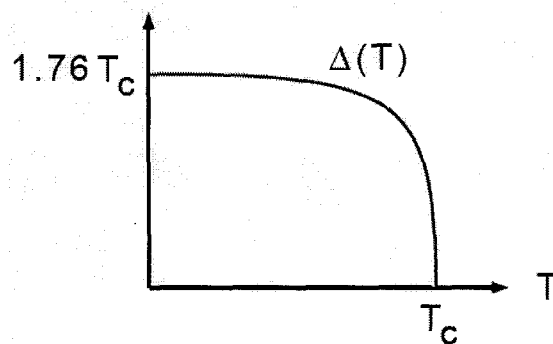
ซึ่งตามทฤษฎีของบีซีเอส เราจะได้ว่า

$$\frac{\Delta(T=0)}{k_B T_C} = \pi e^{-\gamma} \approx 1.76 \tag{32}$$

โดยที่  $\gamma$  คือเลขออยเลอร์ และสำหรับที่ อุณหภูมิใกล้ค่าวิกฤต เราจะได้ว่า

$$\Delta \approx \pi \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} k_B T_C \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^{1/2} \tag{33}$$

โดยที่  $\zeta(n)$  คือฟังก์ชันรีมานน์-เซตา



รูปที่ 3 กราฟแสดงค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดในทฤษฎีบีซีเอสที่อุณหภูมิต่าง ๆ

#### 4.4 แบบฝึกหัด

1. จงแสดงถึงการได้มาซึ่งสมการต่อไปนี้ (4), (10) และ (12)
2. จงคำนวณหาระยะเฉลี่ยกำลังสองของอิเล็กตรอนทั้งสองตัวที่ถูกนำมาอยู่กับ “ทะเลเฟอร์มี” และมีอันตรกิริยาดังชุด
3. จงแสดงให้เห็นว่า  $(1 + g_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\uparrow}^\dagger)(1 + g_l a_{l\uparrow}^\dagger a_{-l\uparrow}^\dagger) = (1 + g_l a_{l\uparrow}^\dagger a_{-l\uparrow}^\dagger)(1 + g_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\uparrow}^\dagger)$
4. จงแสดงให้เห็นว่า  $|\tilde{\phi}\rangle = \prod_k (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\uparrow}^\dagger) |0\rangle$  โดยที่  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$  เป็นสถานะที่นอร์มอลไลซ์
5. จงแสดงให้เห็นว่า  $\langle N \rangle = 2 \sum_k |v_k|^2$
6. จงแสดงให้เห็นว่า  $\langle \tilde{\phi} | H_{\text{int}} | \tilde{\phi} \rangle = \sum_{\substack{kl \\ k \neq l}} V_{kl} v_l^* u_l v_k u_k^*$
7. จงคำนวณหาการกระจายตัวของจำนวนของอิเล็กตรอนที่โมเมนตัมต่าง ๆ โดยคำนวณจาก  $\langle \tilde{\phi} | n_{k\sigma} | \tilde{\phi} \rangle$
8. นิยามอัมพลิจูดการควบแน่น  $F_k \equiv \langle \phi_{N+2} | a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\uparrow}^\dagger | \phi_N \rangle$  จงคำนวณหาอัมพลิจูดการควบแน่นนี้ในทฤษฎีของบีซีเอส
9. ให้นักศึกษาทำการคำนวณหาค่าพลังงานของสถานะกระตุ้น
10. ให้นักศึกษาพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีบีซีเอสกับทฤษฎีของกินส์เบิร์กแลนเดา

## บทที่ 5 ตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม

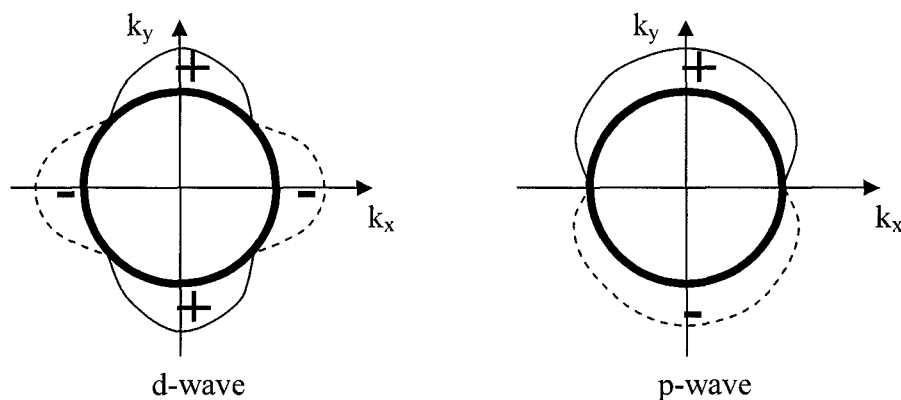
ตัวนำยิ่งยวดที่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอสนั้นมีลักษณะคือ พลังงานศักย์ดึงดูดระหว่างคู่อิเล็กตรอนนั้นมาจากอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน พลังงานสถานะพื้นของตัวนำยิ่งยวดประกอบด้วยคู่อิเล็กตรอนที่มีสปินรวมเป็นศูนย์ และค่าช่องว่างพลังงาน  $\Delta$  มีค่าคงตัว หรือที่เราเรียกว่ามีสมมาตรแบบทรงกลมหรือเอสเวฟ (หรืออย่างน้อยที่สุดก็คือมีสมมาตรเท่ากับสมมาตรของผลึก)

ตัวนำยิ่งยวดที่มีลักษณะต่างไปจากข้างต้นนี้ เราเรียกว่าตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม (Unconventional superconductors) ซึ่งมีความซับซ้อนมากขึ้น และบางพวกมีอุณหภูมิวิกฤตสูง ในบทนี้เราจะแนะนำสมบัติบางอย่างของตัวนำยิ่งยวดแบบนี้

### 5.1 สมบัติของตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม

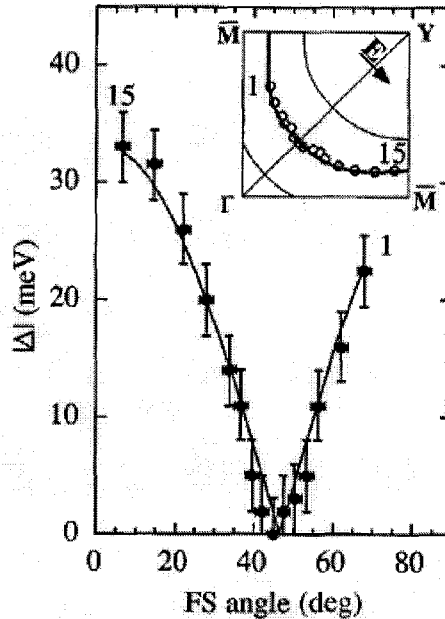
เมื่อเราพูดถึงตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมนั้น เรามักหมายถึงตัวนำยิ่งยวดที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. พลังงานช่องว่างพลังงานมีสมมาตรน้อยกว่าสมมาตรของผลึก มักมีค่าเป็นฟังก์ชันของทิศทางของโมเมนตัม และอาจมีค่าเป็นศูนย์ได้ที่บางจุดบนผิวเฟอร์มี (เรียกว่าจุดบัพ) ตัวอย่างเช่น ตัวนำยิ่งยวดประเภทที่มีระนาบคอปเปอร์ออกไซด์เป็นส่วนประกอบ ตัวนำยิ่งยวดประเภทนี้มีค่าอุณหภูมิวิกฤตสูงคือ สูงกว่าอุณหภูมิของไนโตรเจนเหลว (77 เคลวิน) สารประกอบพวกนี้มีโครงสร้างผลึกเป็นแบบเตตระโกนอล หรือ ออโทรอมบิก มีการนำไฟฟ้าในแนวระนาบเอปิตอกว่าในแนวแกนซีมาก และจากหลักฐานทางการทดลองหลายชิ้นพบว่า ตัวนำยิ่งยวดเหล่านี้มีช่องว่างพลังงานเป็นแบบดีเวฟ (ดูรูปที่ 1)
2. สปินของคู่อิเล็กตรอนคูเปอร์ในสถานะนำยิ่งยวดอาจไม่ได้อยู่ในสถานะซิงเกิลตได้ เช่น สารประกอบสทรอนเชียมรูทีเนต ( $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$ ) ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตเท่ากับ 1.5 เคลวิน มีสถานะสปินของคู่อิเล็กตรอนคูเปอร์เป็นแบบทริปเปท
3. เป็นที่เชื่อกันว่า อันตรกิริยาที่อยู่เบื้องหลังการจับคู่กันของอิเล็กตรอนในสถานะนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิมนั้นไม่ใช่จากโฟนอน เช่น อาจเป็น Resonating valence bonds หรือ Spin fluctuation ก็ได้



รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างของสมมาตรของช่องว่างพลังงาน 2 แบบ เส้นวงกลมแทนผิวเฟอร์มีใน 2 มิติ

เราทราบว่าสารประกอบบางพวกมีสมบัติเป็นตัวนำยิ่งยวดแบบไม่ดั้งเดิม โดยเห็นได้จากหลักฐานทางการทดลองหลายอย่าง เช่น จากการทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานที่จุดต่าง ๆ บนผิวเฟอร์มีของ  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$  โดยใช้ Angle-resolved photoemission พบว่าขนาดของช่องว่างพลังงานมีค่าสูงสุดในแนวแกนเอและบี และมีค่าเป็นศูนย์ในแนวเอียง 45 กับ 135 องศากับแกนเอ ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 แสดงการทดลองวัดค่าช่องว่างพลังงานโดย Angle-resolved photoemission ของ  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$  (นำมาจาก H. Ding et. al., 1996, Angle-resolved photoemission study of the superconducting gap anisotropy in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ , Physical Review B, 54, R9678.)

นอกจากนี้แล้วก็ยังมี การทดลองรอยต่อโจเซฟสัน ที่แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันช่องว่างพลังงานมีการเปลี่ยนเฟสไป  $\pi$  ด้วย (การทดลองรอยต่อโจเซฟสัน เป็นการทดลองที่สามารถวัดการเปลี่ยนแปลงของเฟสของฟังก์ชันช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดได้) ในการทดลองนี้ (ดูรูปที่ 3) ได้ทำการวัดค่ากระแสโจเซฟสันสูงสุดเป็นฟังก์ชันกับค่าสนามแม่เหล็กที่ผ่านรอยต่อมุม ระหว่าง YBCO กับตะกั่วซึ่งมีฟังก์ชันช่องว่างพลังงานเป็นแบบเอสเวฟ ถ้าฟังก์ชันช่องว่างพลังงานของ YBCO เป็นแบบเอสเวฟ หรือเป็นแบบที่ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายของฟังก์ชันช่องว่างพลังงาน เราจะได้ว่า ค่ากระแสโจเซฟสันสูงสุดจะมีค่าขึ้นกับฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านรอยต่อ ( $\Phi$ ) เป็นดังนี้

$$I_c(\Phi) = j_0 A \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|$$

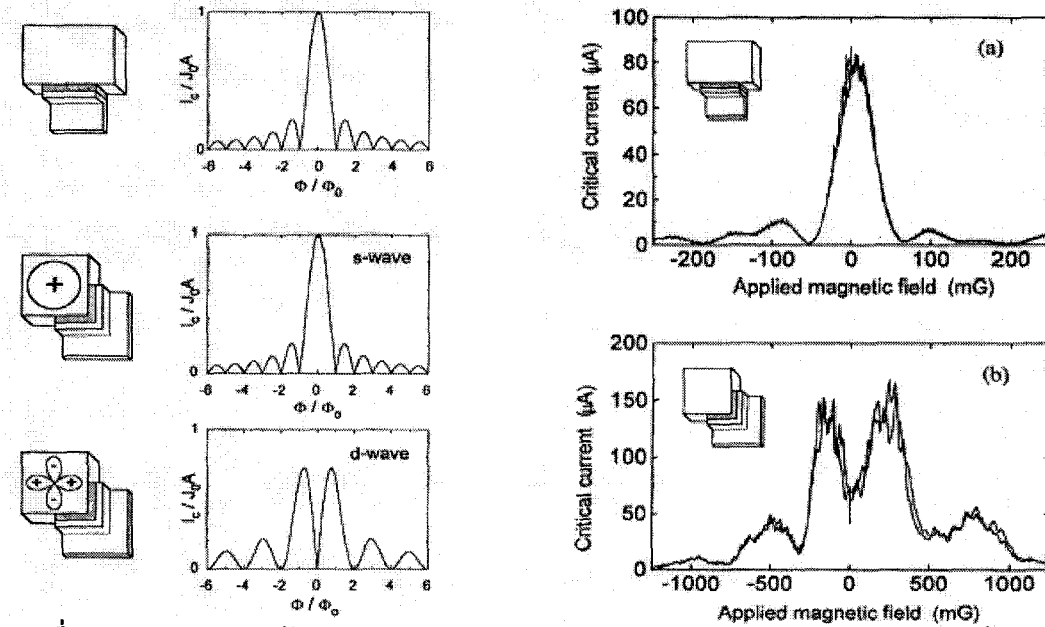
แต่ถ้า YBCO มีฟังก์ชันช่องว่างพลังงานในแบบที่มีค่าเปลี่ยนจากบวกไปลบได้ขึ้นกับทิศทางของโมเมนต์ เช่น แบบดีเวฟ ค่ากระแสโจเซฟสันสูงสุดจะเป็นดังนี้ (ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า พื้นที่ของรอยต่อที่สัมผัสส่วนที่มีฟังก์ชันช่องว่างพลังงานมีค่าเป็นบวกเท่ากับส่วนที่มีค่าเป็นลบ)

$$I_c(\Phi) = j_0 A \left| \frac{\sin^2(\pi\Phi/2\Phi_0)}{\pi\Phi/2\Phi_0} \right|$$

ซึ่งผลการทดลองที่ได้ นั้น สนับสนุนข้อเท็จจริงที่ว่า YBCO มีฟังก์ชันช่องว่างพลังงานเป็นแบบดีเวฟ (ดูรูปที่ 3)

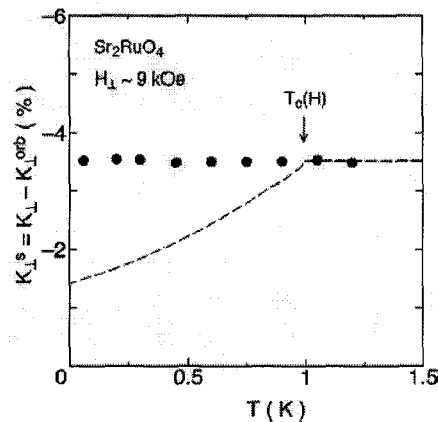


นอกจากนี้แล้วยังมีการทดลองอื่น ๆ อีกที่แสดงว่าตัวนำยิ่งยวดเซรามิกที่มีระนาบคอปเปอร์ออกไซด์เป็นส่วนประกอบนั้น มีฟังก์ชันช่องว่างพลังงานเป็นแบบดีเวฟ เช่น การทดลอง Tricrystal โดย Tsuei กับ Kirtley เป็นต้น



รูปที่ 3 แสดงการทดลองวัด Fraunhofer diffraction pattern ของรอยต่อมุมระหว่าง YBCO กับ Pb รูปซ้ายเป็นกราฟจากการคำนวณ รูปขวาเป็นผลจากการทดลอง(นำมาจาก D. A. Wollman et. al., 1995, Evidence for dx<sub>2</sub>-y<sub>2</sub> pairing from the magnetic field modulation of YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub>-Pb Josephson junctions, Physical Review Letters, 74, 797.)

ในกรณีของตัวนำยิ่งยวดที่มีคู่อิเล็กตรอนคูเปอร์เป็นแบบสปินทริปเปิลท เช่น Sr<sub>2</sub>RuO<sub>4</sub> ซึ่งมีอุณหภูมิวิกฤตประมาณเท่ากับ 1.5 เคลวิน เราสามารถเห็นได้จาก การทดลองวัดค่า NMR Knight shift ได้ กล่าวคือ สำหรับตัวนำยิ่งยวดที่มีสปินซิงเกิลท ค่า NMR Knight shift จะมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิน้อยกว่าอุณหภูมิวิกฤต แต่ถ้ามีสปินเป็นแบบทริปเปิลท ค่า NMR Knight shift จะมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงเลย รูปที่ 4 แสดงผลการทดลองวัดค่า Knight shift ของ Sr<sub>2</sub>RuO<sub>4</sub>



รูปที่ 4 แสดงการทดลองวัด NMR Knight shift ของ Sr<sub>2</sub>RuO<sub>4</sub> เส้นประแสดงกรณีที่สปินเป็นแบบซิงเกิลท (นำมาจาก K. Ishida et.al., 2001, Ru NMR probe of spin susceptibility in the superconducting state of Sr<sub>2</sub>RuO<sub>4</sub>, Physical Review B, 63, R060507.)

## 5.2 ค่าช่องว่างพลังงาน

จากฮามิลโตเนียน

$$H = \sum_{k\alpha} \xi_k a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{k,l,\alpha,\beta} V_{kl} a_{l\alpha}^\dagger a_{-l\beta}^\dagger a_{-k\beta} a_{k\alpha}$$

หากเรายังไม่ได้บังคับอย่างทฤษฎีบีซีเอส ว่า  $V_{kl}$  ต้องมีค่าคงตัว เราจะได้ค่าฟังก์ชันของช่องว่างพลังงานในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\Delta_k = \sum_l V_{kl} \langle a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \rangle$$

เราจะเห็นได้ว่า ค่าฟังก์ชันช่องว่างพลังงานขึ้นกับโมเมนตัมของคู่อิเล็กตรอนได้ และขึ้นอยู่กับว่า  $V_{kl}$  มีลักษณะเช่นไร ตามปกติแล้วเรามักเขียน  $V_{kl}$  อยู่ในรูปของผลบวกของฟังก์ชันฮาร์โมนิกทรงกลม ซึ่งแต่ละเทอมของฟังก์ชันนี้จะกำหนดค่าโมเมนตัมเชิงมุม สำหรับในกรณีของทฤษฎีบีซีเอส  $V_{kl}$  เป็นค่าคงที่ก็หมายความว่าโมเมนตัมเชิงมุมของฟังก์ชันช่องว่างพลังงานมีค่าเป็นศูนย์ หรือเรียกว่าแบบเอสเวฟ ซึ่งในกรณีนี้ บ่งบอกว่ามีความน่าจะเป็นสูงที่จะพบคู่อิเล็กตรอนคูเปอร์อยู่ใกล้กันได้ ซึ่งจะตรงกันข้ามกับกรณีที่ฟังก์ชันช่องว่างพลังงานมีโมเมนตัมเชิงมุมมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งเราเรียกระบบแบบนี้ว่าเป็นระบบ Correlated electrons systems

	ตัวนำยิ่งยวดแบบบีซีเอส	แบบมีเส้นบัพ	แบบมีจุดบัพ
ความหนาแน่นพลังงาน	มีช่องว่างพลังงาน	$\sim E$ ที่พลังงานต่ำ	$\sim E^2$ ที่พลังงานต่ำ
ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในสถานะปกติ	$\sim e^{-\Delta/k_B T}$	$\sim T$ ที่อุณหภูมิต่ำ	$\sim T^2$ ที่อุณหภูมิต่ำ
ความร้อนจำเพาะ	$\sim e^{-\Delta/k_B T}$	$\sim T^2$ ที่อุณหภูมิต่ำ	$\sim T^3$ ที่อุณหภูมิต่ำ

ตารางที่ 1 แสดงสมบัติทางฟิสิกส์บางประการของตัวนำยิ่งยวด 3 ประเภท

ฟังก์ชันช่องว่างพลังงานในแบบไม่ดั้งเดิมนั้นมักจะมียุคอยู่ด้วย และชนิดของบัพนี้ก็มีหลายแบบ เช่น เส้นบัพอย่างในแบบดีเวฟ หรือ จุดบัพอย่างในแบบพีเวฟ ซึ่งชนิดของบัพที่ต่างกันไปก็จะทำให้ตัวนำยิ่งยวดมีสมบัติทางฟิสิกส์ต่างไปด้วยดังแสดงในตารางที่ 1

ตัวนำยิ่งยวดเป็นระบบที่มีความน่าสนใจและมีการประยุกต์ใช้ในทางเทคโนโลยีมากมาย เราสามารถศึกษาระบบเหล่านี้ได้ในแง่มุมต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับความสนใจของเรา

## บรรณานุกรม

1. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd Edition , McGraw-Hill, New York, 2004.
2. J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Revised Edition, Perseus Books Group, USA, 1999.
3. P. G. De Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, 2nd Revised Edition, Perseus Books Group, USA, 1999.
4. J. R. Waldram, *Superconductivity of Metals and Cuprates*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1996.
5. J. F. Annett, *Superconductivity Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, UK, 2004.