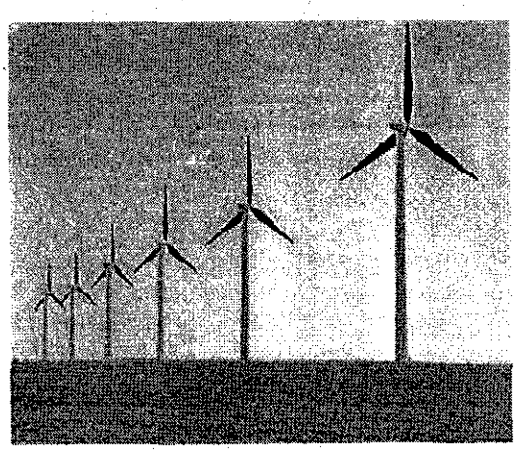
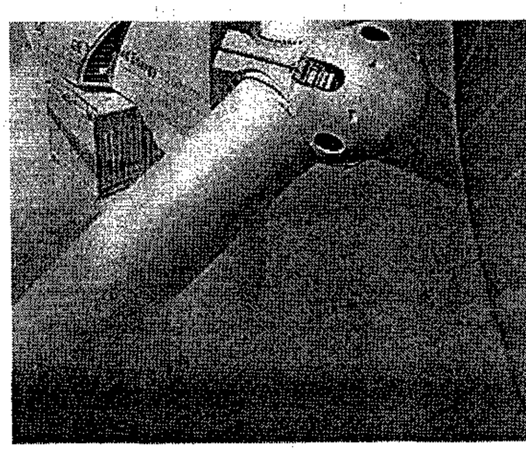
คู่มือการเรียน

วิชา

กลศาสตร์ของไหล

(การสร้างและการใช้สมการควบคุมในกลศาสตร์ของไหล)





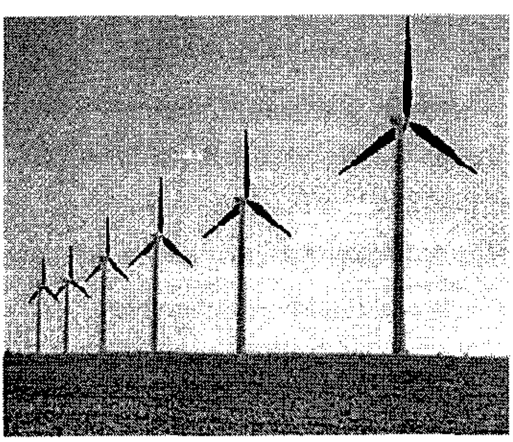
โดย รศ.ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

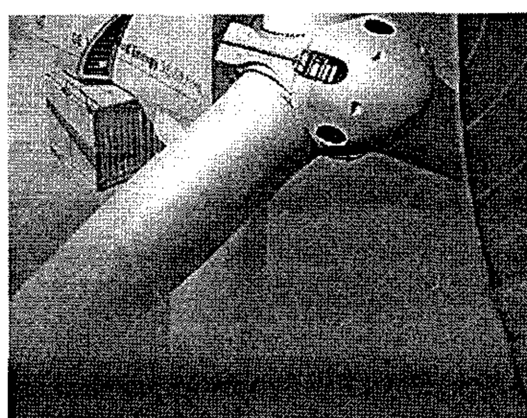
คู่มือการเรียน

วิชา

กลศาสตร์ของไหล

(การสร้างและการใช้สมการควบคุมในกลศาสตร์ของไหล)





โดย รศ.ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำอธิบายรายวิชา

การสร้างและการใช้สมการควบคุม

นำเสนอหัวข้อหลักและหัวข้อย่อยตามลำดับดังนี้

กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์

กฎอนุรักษ์มวลของสาร

กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

กฎอนุรักษ์พลังงาน

การสร้างสมการควบคุม

- -สมการควบคุมการอนุรักษ์มวล
- -สมการควบคุมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
- -สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม
- -สมการอนุรักษ์พลังงาน

ทฤษฎีการถ่ายเทเรโนลด์

อัตราการไหลของมวลเข้าออกผ่านพื้นที่

การวิเคราะห์การไหลโดยการใช้สมการควบคุม

- -สมการอนุรักษ์มวล
- -สมการอนุรักษ์พันธุมวล
- -สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

ระบบที่มีการเคลื่อนตัวของปริมาตรควบคุม

- -สมการอนุรักษ์มวลในระบบที่ปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่
- -สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในระบบที่ปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่
- -สมการอนุรักษ์โมเมตัมเชิงมุม
- -สมการอนุรักษ์พลังงาน

สมการเบอร์นูลลี

- -การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการบัญญัติ
- -การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการอินทีเกรตสมการโมเมนตัมเชิงเส้น
- -การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการลดรูปจากสมการพลังงาน
- -Hydraulic Grade Line, Energy Grade Line และ Bernoulli

การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

สมการควบคุมแบบอนุพันธ์

สรุป

การประเมินหลังการศึกษา

หลักการและแนวคิด

การสร้างและการใช้สมการควบคุม ถือเป็นพื้นฐานที่สำคัญที่สุดของการศึกษาเชิงทฤษฎีด้านกลศาสตร์ของไหล การนำเสนอในรูปของสื่อประสมที่นักศึกษาสามารถค้นหาคำสำคัญได้อย่างรวดเร็วทำให้สามารถเชื่อมโยงเนื้อหาในส่วนสำคัญเข้าด้วยกันได้อย่างมีประสิทธิผลต่อการเข้าใจเนื้อหาวิชา นอกจากนี้รูปภาพเคลื่อนไหวต่างๆ ยังช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการเรียนรู้เพิ่มเติมจากการอ่านตำราปกติอีกด้วย

วัตถุประสงค์

สื่อและเอกสารที่ได้จัดทำขึ้นนี้มีวัตถุประสงค์ให้นักศึกษาได้พัฒนาความเข้าใจและทักษะสำคัญดังนี้

1. เข้าใจกฎฟิสิกส์ที่ควบคุมการทำงานของของไหล
2. เข้าใจกรรมวิธีการปรับกฎฟิสิกส์ให้สอดคล้องกับการไหลของของไหล
3. เข้าใจวิธีสร้างสมการควบคุมจากกฎฟิสิกส์ที่ได้ปรับแล้ว
4. สามารถแก้ปัญหาอย่างง่ายทางกลศาสตร์ของไหลโดยใช้สมการควบคุม
5. สามารถแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลอย่างเป็นระบบ

บทที่ 3
การสร้างและการใช้สมการควบคุม

สมการที่สำคัญที่สุดในการศึกษาทฤษฎีของศาสตร์ใด ๆ ก็คือสมการควบคุม (governing equation) ซึ่งในวิชากลศาสตร์ของไหลนั้นจัดแบ่งสมการควบคุมออกเป็นสองรูปแบบใหญ่ ๆ คือรูปแบบอนุพันธ์ (differential) และรูปแบบปริพันธ์ (Integral) ในรูปแบบอนุพันธ์นั้นสมการควบคุมจะเป็นสมการอนุพันธ์แบบพาเชียล ซึ่งแสดงถึงการอนุรักษ์คุณสมบัติการไหล ณ จุดใด ๆ ในสนาม (field) ของพิกัด (coordinates) คำตอบที่ได้ (หากหาได้) จะเป็นคำตอบที่มีความละเอียดมาก เพราะจะได้คำตอบเป็นฟังก์ชันของพิกัด สำหรับสมการในรูปแบบปริพันธ์นั้นไม่ได้หมายความว่าจะเป็นสมการปริพันธ์ (ส่วนใหญ่แล้วจะเป็นสมการพีชคณิต) แต่ให้นัยว่าเป็นสมการที่ใช้ค่าเฉลี่ยของสนามในการสร้างสมการอนุรักษ์ต่าง ๆ (ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้ในเชิงหลักการหามาได้จากการทำการอินทีเกรต) ดังนั้นคำตอบที่ได้โดยวิธีนี้จึงหยาบกว่าคำตอบของสมการแบบอนุพันธ์ แต่คำตอบนี้มักคำนวณหาได้โดยง่าย แม้คำตอบจะไม่ถูกต้องมากนักแต่ก็ให้ประโยชน์มาก เพราะทำให้วิศวกรทราบแนวทางของการออกแบบ หรือแนวทางการศึกษาด้วยสมการแบบอนุพันธ์ หรือแนวทางในการทำการทดลองต่อไป

นักกลศาสตร์ของไหลรุ่นใหม่ในสมัยปัจจุบัน มักเข้าใจว่าสมการแบบอนุพันธ์เป็นวิธีเดียวในการแก้ปัญหาที่ยุ่งยาก โดยยกให้เป็นหน้าที่ของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่จะคำนวณคำตอบเชิงตัวเลขออกมาให้ (เพราะไม่สามารถหาคำตอบเชิงสัญลักษณ์ได้) โดยหาได้ตระหนักไม่ว่าตัวเลขเหล่านั้นบ่อยครั้งไร้ความหมาย และแม้หากมีความหมายก็ได้ข้อมูลที่จำกัดมากเพราะไม่สามารถแสดงให้เห็นถึงแนวทาง (trend) ในการออกแบบอุปกรณ์ได้ จากประสบการณ์ของผู้แต่ง สมการในรูปแบบปริพันธ์มีประโยชน์มากกว่าในรูปแบบอนุพันธ์ และแม้รูปแบบจะง่ายกว่าแต่การประยุกต์ใช้งานจะยากกว่าสมการแบบอนุพันธ์มาก เพราะวิศวกรผู้ใช้จะต้องมีประสบการณ์สูงและหรือมีความเข้าใจปัญหาเชิงกายภาพพอสมควรจึงจะทราบข้อจำกัดของการใช้งานของสมการเหล่านี้ รวมทั้งความสามารถในการตั้งสมมุติฐานประกอบการคำนวณอย่างเหมาะสมเพื่อหาคำตอบให้แก่สมการให้ได้ตลอดจนความสามารถจัดเจนในการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดจากการประมาณการเพื่อสร้างความชอบธรรมและความมั่นใจในผลลัพธ์ที่ได้ หากมีการประเมินและการใช้งานที่สอดคล้องและเหมาะสมต่อปัญหา คำตอบที่ได้จากสมการควบคุมแบบปริพันธ์ก็มีความถูกต้องใกล้เคียงกับคำตอบของสมการแบบอนุพันธ์ ทั้งนี้โดยใช้เวลาในการหาคำตอบน้อยกว่าวิธีอนุพันธ์มาก และคำตอบที่ได้ยังมีคุณประโยชน์มากกว่าอีกด้วย เพราะสามารถใช้วิเคราะห์หาแนวทางในการออกแบบได้ดีมาก โดยการพิจารณาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ ที่ปรากฏอยู่ในคำตอบ (ซึ่งตัวแปรเหล่านี้ไม่มีปรากฏในคำตอบเชิงตัวเลขของสมการควบคุมแบบอนุพันธ์)

สมการควบคุมนับว่าเป็นหัวใจในการศึกษากลศาสตร์ของไหลเชิงทฤษฎี เพราะการศึกษาในแนวนี้ก็คือการหาคำตอบให้แก่สมการควบคุมนั่นเอง จึงควรต้องให้ความสนใจกับบทนี้เป็นพิเศษเพราะเป็นรากฐานที่จะนำไปใช้ในการศึกษาของบทต่อ ๆ ไปทั้งหมด รวมถึงการศึกษาในขั้นที่สูงขึ้นไปด้วย (เช่นการศึกษาระบบสมการควบคุมแบบอนุพันธ์) ในบทนี้จะทำการสร้างสมการควบคุมแบบปริพันธ์ตามลำดับต่อไป

3.1 กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์
(Basic Laws of Physics)

สมการควบคุมที่จะสร้างขึ้นเพื่อศึกษากลศาสตร์ของไหลเชิงทฤษฎีนี้ สร้างขึ้นบนพื้นฐานของกฎต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ที่ได้รับการยอมรับกันโดยทั่วไปแล้ว กฎต่าง ๆ ที่สำคัญที่จะใช้มีดังนี้คือ

3.1.1 กฎอนุรักษ์มวลของสาร
(Conservation of Mass)

ในกรณีที่ไม่มีการทำปฏิกิริยาเคมีหรือปฏิกิริยานิวเคลียร์ มวลของสารก้อนหนึ่งย่อมคงที่ หรือ หากมีการทำปฏิกิริยาก็ย่อมมีอัตราการเปลี่ยนแปลงไป (อาจเพิ่มขึ้นหรือลดลงแล้วแต่กรณี) เท่ากับอัตราของปฏิกิริยาเคมีนั้น ๆ

3.1.2 กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
(Conservation of Linear Momentum)

โมเมนตัมของมวลก้อนหนึ่งย่อมคงที่อยู่เช่นนั้น (โมเมนตัมของก้อนมวลคือมวลคูณกับความเร็ว, $M\bar{V}$) จนกว่าจะมีแรงจากภายนอกมากระทำ ซึ่งในกรณีนี้อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเท่ากับแรงที่มากระทำนั้น

<u>คำขยายความ</u> ความจริงแล้วนี่คือกฎข้อที่สองของนิวตันที่เราได้ศึกษากันมาแต่ชั้นมัธยมแล้ว ($F = Ma$) แต่นำมาเรียบเรียงใหม่ให้กระชับและครอบคลุมมากยิ่งขึ้น กฎข้อนี้มีความสำคัญมากทั้งในกลศาสตร์ของแข็งและกลศาสตร์ของไหล และยุ่งยากต่อการตีความมาก (หากคิดอย่างลึกซึ้งไม่ใช่ท่องจำมาอย่างที่ผู้ศึกษาไทยโดยมากชอบทำกัน) ปรมาจารย์บางท่านกล่าวว่ากฎนี้เป็นกฎธรรมชาติที่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ในเชิงคณิตศาสตร์ (แต่สามารถพิสูจน์ได้โดยการทดลอง ภายใต้เงื่อนไขที่เข้าใจกัน)

<u>คำถามเฉพาะกิจ</u> จงให้คำนิยามของ “มวล” (mass) (โดยคำนิยามนั้นต้องไม่อิงกับคำนิยามอื่นที่กำกวม เช่น “น้ำหนัก” หรือ “แรงโน้มถ่วง” เป็นต้น) และในทำนองเดียวกัน “เวลา” (time) คืออะไร?

ข้อชวนคิดที่1) สิ่งที่เราคิดว่ารู้ดีที่สุดแล้วนั้น หากคิดให้ลึก ๆ แล้วไม่ใช่เรื่องง่าย ๆ เลย และน่าคิดว่าหากเราไม่ทราบว่ามวลและเวลาคืออะไร เราก็ไม่น่าจะรู้ว่าแรงคืออะไรด้วย เพราะแรงถูกนิยามด้วยมวลและความเร่ง (ซึ่งเป็นมิติของระยะทาง (space) หารด้วยเวลายกกำลังสอง)

ข้อชวนคิดที่2) มนุษย์เราคือก้อนมวลที่ปรากฏอยู่ในมิติของพื้นที่ ระยะทาง และ เวลา เราจึงไม่น่าจะรู้ด้วยว่าตัวเราคืออะไรแน่ ทั้งนี้ยังไม่ต้องเอ่ยถึงว่าความรู้สึกนึกคิดที่เรามีอยู่นี้คืออะไรและมีปฏิสัมพันธ์กับมิติทางกายภาพอย่างไร พระพุทธเจ้าได้บอกเรา (และท้าให้พิสูจน์) ว่าเราคือ “อนัตตา” (ความไม่ใช่ตัวตน) ซึ่งขณะนี้นักฟิสิกส์ยุคใหม่กำลังใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาแขนงวิชาใหม่ที่อาจเรียกว่า สัมปชัญญฟิสิกส์ (Perceptive Physics)

ข้อชวนคิดที่3) แต่แม้ว่าเราจะไม่รู้ว่าแรงคืออะไรกันแน่ เราก็สามารถบัญญัติคำนิยามให้อิงอยู่กับคำนิยามอื่นได้ และสามารถนำคำนิยามนั้นมาใช้ประโยชน์ได้ เช่นใช้ในการคำนวณเพื่อสร้างตึก หรือ สร้างรถยนต์

ได้ อุปมาดั่งว่าเราไม่รู้ว่าจะให้คำนิยามว่าน้ำคืออะไร (โดยไม่ต้องอิงอยู่กับคำนิยามของสิ่งอื่น) แต่ก็สามารถนำน้ำมาดื่มเพื่อเป็นประโยชน์ต่อการบำรุงชีวิตได้ฉะนั้น

3.1.3 กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม (Conservation of Angular Momentum)

อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมของมวลก้อนหนึ่งย่อมเท่ากับแรงบิด (torque) ที่มากระทำต่อก้อนมวลนั้น

หมายเหตุ

1) เป็นที่น่าสังเกตว่า ตำราส่วนใหญ่ไม่ใคร่ให้นิยามความแตกต่างของโมเมนต์และแรงบิด ผู้แต่งสังเกตว่าโดยทั่วไปแล้วมักนิยมเรียกกันว่า "โมเมนต์" หากเป็นกรณีของสถิตยศาสตร์ (คือไม่มีการเคลื่อนที่) แต่หากมีการหมุนมักนิยมใช้คำว่า "แรงบิด"

2) ตำราบางเล่มเรียกสมการนี้ว่าสมการอนุรักษ์โมเมนต์ของโมเมนตัม (moment of momentum)

3.1.4 กฎอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of Energy)

อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานภายในของก้อนมวลย่อมเท่ากับอัตราการถ่ายโอนความร้อนและงานจากสิ่งแวดล้อมเข้าสู่ก้อนมวล

คำขยายความ อัตราการถ่ายโอนพลังงาน "เข้าสู่" ก้อนมวลนี้เข้ามาในรูปของ งาน (work) และความร้อน (heat) เพราะพลังงานมีอยู่หลายรูปแบบและพลังงานย่อมเปลี่ยนไปมาระหว่างรูปแบบต่าง ๆ ได้ สิ่งที่สำคัญที่ควรคำนึงถึงคือเราให้การ "เข้าสู่" ระบบมีเครื่องหมายเป็นบวกโดยปริยาย ซึ่งนั่นหมายถึงการ "ออกจาก" ระบบจะมีเครื่องหมายลบโดยปริยาย ซึ่งหมายความว่าหากมีการถ่ายโอนพลังงานออกจากระบบ อัตราการ "เพิ่มขึ้น" ของพลังงานภายในของก้อนมวลก็จะเป็นลบซึ่งหมายความว่าเป็นอัตราการ "ลดลง" ของพลังงานภายในนั่นเอง ผู้ศึกษาควรทำความเข้าใจให้กระจ่างแจ้งในนัยของเครื่องหมายทางวิศวกรรมศาสตร์ เพราะในบางครั้งอาจทำให้เกิดความงุนงงได้มาก เช่น กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ (เทอร์โมไดนามิกส์) ซึ่งก็คือกฎอนุรักษ์พลังงานนั่นเอง กำหนดว่า

$$\Delta U = \delta Q - \delta W \tag{3.1}$$

ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า การเพิ่มขึ้นของพลังงานภายในของก้อนมวล ย่อมเท่ากับการถ่ายโอนความร้อนลบด้วยการถ่ายโอนงาน ซึ่งมีข้อสังเกตดังนี้

1. การเพิ่มขึ้นของพลังงานหากเป็นลบก็กลายเป็นการลดลงโดยปริยาย
2. พลังงานความร้อนนั้นโดยข้อตกลงทางเครื่องหมาย (ที่วิศวกรส่วนใหญ่เห็นชอบ) กำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นบวกเมื่อความร้อนวิ่งเข้าสู่ระบบ และให้เป็นลบเมื่อออกจากระบบ

3. สำหรับงานนั้นได้กำหนดให้มีเครื่องหมายตรงกันข้าม กล่าวคือให้เป็นบวกเมื่องานออกจากระบบ และเป็นลบเมื่อเข้าสู่ระบบ ดังนั้นจึงต้องมีเครื่องหมายลบตรงหน้าของงาน ทั้งนี้เพื่อให้ค่าตัวเลขสอดคล้องกับข้อเท็จจริงของกฎอนุรักษ์พลังงาน
4. ที่กำหนดให้ความร้อนเข้าเป็นบวกและงานออกเป็นบวกนั้นก็คงเป็นเพราะว่ามันบอกถึงการ "ได้มา" เพราะความร้อนเข้าระบบคือการ "ได้" และการ "ได้" งานก็คือการที่งานออกจากระบบ (มองในแง่ของวิศวกรที่ต้องการได้มาซึ่งงานที่ออกจากระบบ)

3.2 สมการควบคุม (The Governing Equations)

กฎอนุรักษ์ที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อที่แล้วเป็นกฎธรรมชาติที่ต้อง "บัญญัติ" ขึ้น และไม่สามารถสร้าง (derive) โดยกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์บนพื้นฐานของกฎธรรมชาติอื่น ๆ ได้ (อย่างน้อยที่สุดก็ในขณะนี้ ในอนาคตอาจมีนักวิทยาศาสตร์เอกที่สามารถสร้างสมการเหล่านี้หรือสมการที่ดีกว่านี้ได้จากพื้นฐานที่ลึกกว่านี้ก็เป็นได้) อย่างไรก็ดี กฎเหล่านี้เป็นกฎที่บัญญัติไว้โดยอิงอยู่กับ "มวลก้อนหนึ่ง" เสมอ และมวลก้อนนี้ก็ต้องมีมวลคงที่ด้วย ปรมาจารย์บางท่านให้ชื่อกระบวนที่มวลคงที่ว่า ระบบ (System) และให้ชื่อกระบวนที่มีมวลไม่คงที่ว่า ปริมาตรควบคุม (Control Volume) หรือ ปมค.

การศึกษากระบวนที่มีมวลคงที่นั้นผู้ศึกษา (หรือผู้สังเกตการณ์) จะต้อง "เกาะ" ไป (หรือนั่งไป) บนมวลที่คงตัวนั้น (กระทำในจินตนาการเท่านั้น ไม่ได้เกาะไปจริง ๆ) และประยุกต์กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์พร้อมกันไป ซึ่งก็สามารถทำได้โดยสะดวก แต่สำหรับการศึกษาของไหลผู้ศึกษาไม่อาจกระทำการ "เกาะ" ไปกับมวลได้โดยสะดวกเพราะมวลของไหลมีลักษณะการที่ไม่คงตัวโดยธรรมชาติเนื่องจากมีการแตกกระจายของมวลออกไปอย่างไม่หยุดยั้ง เช่น หากต้องการศึกษามวลของหยดหมึกที่หยดลงไปในกระแสน้ำที่กำลังไหลเชี่ยวกรากอยู่ จะเห็นว่าไม่สามารถจะเกาะไปกับหยดหมึกได้เพราะมันจะซึมอันตรธานหายไปกับกระแสน้ำในที่สุด แม้แต่ก้อนน้ำที่กำลังไหลไปนั้น เมื่อไปกระทบกับโขดหินก็จะมีการแยกตัวและแตกกระจายตัวเป็นมวลเล็กมวลน้อยมากมาย และถึงแม้ไม่ชนโขดหินโมเลกุลของน้ำก็วิ่งพล่านไปมาในเนื้อน้ำอยู่ตลอดเวลา ตัวอย่างการไหลในทางวิศวกรรมก็มีลักษณะเดียวกัน เช่น มวลของอากาศที่วิ่งผ่านปีกเครื่องบินจะถูกแยกตัวออกเป็นมวลด้านล่างกับด้านบนของปีก และกลับมารวมเป็นมวลเดียวกันอีกทางหางของปีกเป็นต้น ดังนั้นในการศึกษาทฤษฎีของไหลจึงมักนิยม "เฝ้าดู" มวลอยู่กับที่แทนการ "ติดตาม" มวลไปเหมือนอย่างในการศึกษาของแข็ง เราให้ชื่อระบบ "เฝ้าดู" นี้ว่า ระบบออยเลอร์เลียน (Eulerian System) และระบบ "ติดตาม" ว่า ระบบลากรานเจียน (Lagrangian System) ซึ่งตั้งเป็นเกียรติแก่สองนักวิทยาศาสตร์ชื่อ Euler และ Lagrange ตามลำดับ

เมื่อได้เลือกใช้ระบบ "เฝ้าดู" เพื่อความสะดวกในการศึกษาของไหลแล้ว ก็มีความจำเป็นที่จะต้องปรับแปลงกฎพื้นฐานดั้งเดิมทางฟิสิกส์ให้สอดคล้องด้วย ทั้งนี้เพราะกฎดั้งเดิมถูกกำหนดไว้บนพื้นฐานของการ "ติดตาม" การปรับแปลงนี้จะทำได้โดยกำหนด "กรอบ" ที่จะทำการเฝ้าดู ซึ่งเรียกว่า "ปริมาตรควบคุม" ขึ้นมา (หรือ เรียกสั้น ๆ ว่า ปมค. ภาษาอังกฤษเรียกว่า Control Volume หรือสั้น ๆ ว่า CV) ซึ่งของไหลสามารถที่จะไหลผ่านเข้าออกปริมาตรควบคุมนี้ได้

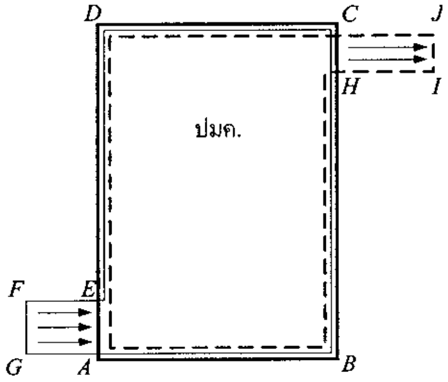
ในทางปฏิบัติปริมาตรควบคุมนี้อาจเป็นกระบอกสูบรถยนต์ที่เรากำลังวิเคราะห์ หรือ ตัวถังรถยนต์ทั้งคัน หรือ แม่น้ำ หรือ โรงงานที่กำลังปล่อยน้ำเสียลงแม่น้ำ หรือตัวแม่น้ำเอง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสิ่งที่เรากำลังศึกษา ปมค.อาจจะใหญ่คลุมโลกทั้งโลกก็ได้ หรืออาจจะเล็กขนาดอนุพันธ์ก็ได้ ในกรณีหลังนี้จะใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างสมการควบคุมแบบอนุพันธ์ พึงเข้าใจด้วยว่าของไหลอาจไหลเข้าและออกปมค.ในอัตราที่ไม่เท่ากันก็เป็นได้ และอาจมีทางไหลเข้าออกได้มากกว่าหนึ่งทาง ในกรณีที่อัตราการไหลเข้ามีค่าเท่ากับอัตราการไหลออก มวลในปมค. ก็จะมีค่าคงตัว (ไม่เปลี่ยนต่อเวลา) ซึ่งเราเรียกว่าระบบคงตัว (Steady state system)

ตำรากลศาสตร์ของไหลส่วนใหญ่นิยมใช้หลักการที่เรียกกันว่า ทฤษฎีการเคลื่อนตัวของเรโนลด์ (The Reynolds Transport Theorem) ในการแปลงกฎฟิสิกส์ในระบบติดตามให้เป็นกฎในระบบเฝ้าดู [7-14] ซึ่งจากประสบการณ์ของผู้แต่งเห็นว่าเป็นทฤษฎีที่ไม่มีความจำเป็นแต่ประการใด นอกจากนี้การใช้ทฤษฎีนี้ยังมีความยุ่งยากในทางคณิตศาสตร์และความยุ่งยากในการตีความมากพอสมควร แม้แต่ผู้ศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาในมหาวิทยาลัยชั้นนำในต่างประเทศยังสับสนได้บ่อย ๆ ไม่ต้องเอ่ยก็ได้ว่าผู้ศึกษาระดับปริญญาตรีในประเทศไทยจะสับสนต่อทฤษฎีนี้มากสักเพียงใด ผู้แต่งจึงได้คิดค้นวิธีการแปลงกฎอย่างง่าย ๆ ขึ้นมาเอง ด้วยการทำการ "บัญญัติ" กฎใหม่ขึ้นมาโดยอาศัย "วิศวกรญาณ" (Engineering Intuition) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็ตรงกับผลลัพธ์ของทฤษฎีการเคลื่อนตัวของเรโนลด์ทุกประการ และยังง่ายต่อการตีความอีกด้วย [15]

<u>ข้อชวนคิด</u> ใคร ๆ ก็สามารถมีสิทธิ์ที่จะบัญญัติกฎใด ๆ ขึ้นมาได้ทั้งนั้น ขึ้นอยู่กับว่าเมื่อบัญญัติมาแล้วสามารถพิสูจน์โดยทางการทดลองและหรือโดยทางคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ เช่น ท่านนิวตันบัญญัติกฎทั้งสามของท่านขึ้นมาก็โดยใช้ญาณ (intuition) ทั้งสิ้น แต่การทดลองก็พิสูจน์ให้เห็นจริงได้ จึงเป็นกฎที่ยอมรับกันโดยทั่วไป (ยกเว้นเมื่อมวลมีขนาดเล็กในระดับอนุภาค ต้องใช้กลศาสตร์ควอนตัมแทนกลศาสตร์นิวตัน)

ก่อนที่จะ "บัญญัติ" กฎใหม่ควรที่จะทำความเข้าใจกับ ปริมาตรควบคุม (ปมค.) สักเล็กน้อยก่อน หากพิจารณารูปข้างล่าง จะเห็นกรอบ $ABCD$ คือปมค. ที่กำลังพิจารณา โดยมี AE เป็นช่องทางที่ของไหลกำลังจะไหลเข้าปมค. และ CH คือช่องทางที่ของไหลกำลังจะไหลออกจากปมค. โดยมีขนาดของเวคเตอร์ความเร็วที่กำลังจะไหลเข้าและไหลออกดังปรากฏในรูป อนึ่งรูปทรงของปมค. ดังในรูปนี้กำหนดให้เป็นรูปทรงง่าย ๆ เพื่อความสะดวกในการพิจารณา แต่หลักการที่นำเสนอนี้ใช้ได้กับปมค. และการไหล ทุกรูปทรงและทุกรูปแบบ

ดังนั้นจะทำการ "บัญญัติ" กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์เสียใหม่ให้สอดคล้องกับลักษณะของปริมาตรควบคุมดังนี้



รูป 3.1

3.2.1 กฎอนุรักษ์มวล
(Conservation of mass)

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในปมค. ย่อมเท่ากับ**อัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค. ของมวล**

<u>คำขยายความ</u>

1) เป็นกฎที่ค่อนข้างง่ายต่อการเข้าใจและง่ายต่อการยอมรับว่าเป็นจริง คำว่า "อัตราสุทธิของการไหลเข้า" หมายความว่าเป็นอัตราการไหลเข้า "ลบ" ด้วยอัตราการไหลออก ตัวอย่างเช่น ถังน้ำใบหนึ่ง (ปริมาตรควบคุม) ทางด้านบนมีก๊อกน้ำปล่อยน้ำเข้ามาในอัตราหนึ่ง และที่ก้นถังมีน้ำรั่วออกในอีกอัตราหนึ่ง ดังนั้นตามกฎอนุรักษ์มวลที่ได้บัญญัตินี้ อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในถัง (ปมค.) ย่อมเท่ากับอัตราการไหลเข้าถังของน้ำจากก๊อกน้ำด้านบน ลบด้วยอัตราการไหลรั่วออกทางก้นถัง หากอัตราสุทธิของการไหลเข้าเป็นลบก็หมายความว่ามีการไหลออกมากกว่าการไหลเข้า ซึ่งตัวเลข (ที่ไม่คิดเครื่องหมาย) ก็คืออัตราสุทธิของการไหลออกนั่นเอง

2) กฎอนุรักษ์มวลในลักษณะนี้ได้มีปรากฏอยู่บ้างแล้วในตำราอุณหพลศาสตร์บางเล่ม เพียงแต่ยังไม่ได้มีการพิจารณาอย่างเป็นระบบ และจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปที่ใช้ได้ในทุกกรณี โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีของการอนุรักษ์โมเมนตัม (ในหัวข้อต่อไป)

3.2.2 กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น
(Conservation of linear momentum)

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมในปมค. ย่อมเท่ากับแรงที่กระทำต่อปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค.ของโมเมนตัม**

<u>คำขยายความ</u>

1) ครึ่งแรกของบัญญัตินี้ก็คือกฎข้อที่สองของนิวตันในระบบ "ติดตามมวล" เพราะ "โมเมนตัม (ของมวลในปมค.) เปลี่ยนไปด้วยแรงที่มากระทำ (ต่อ ปมค.) ในขณะเวลานั้น" แต่ในระบบ "เฝ้าดูอยู่กับที่" อาจมีการไหลเข้าออกของโมเมนตัมด้วย (ซึ่งเข้าออกพร้อมกับการไหลเข้าออกของมวล) ดังนั้นโมเมนตัมของมวลในปมค. จึงอาจเปลี่ยนไปได้เพราะปริมาณสุทธิของโมเมนตัมที่เข้าสู่ปมค. อีกโสดหนึ่งด้วย ความจริงข้อนี้จะเป็นจริงในกรณีของคุณสมบัติอื่น ๆ ด้วยเสมอ กล่าวคือสามารถกล่าวเป็นกลาง ๆ สำหรับปริมาณคุณสมบัติ ก ได้ว่า "อัตราการเปลี่ยนของ ก ในปมค. จะเกิดขึ้นเนื่องจากมีเหตุบางอย่างกระทำต่อปมค. (ตามกฎทางฟิสิกส์ในระบบติดตาม) ผนวกกับอัตราการไหลเข้าสุทธิของ ก ซึ่งเกิดจากการที่มวลผ่านเข้าออกปมค."

2) จากบัญญัติ จะเห็นว่า โมเมนตัมอาจเปลี่ยนเพราะ มีแรงกระทำ และหรือ มีการไหลเข้าออกของมวล ดังนั้นแม้ไม่มีแรงกระทำเลย โมเมนตัมก็ยังอาจเปลี่ยนไปได้ (ซึ่งดูเหมือนขัดต่อกฎข้อที่สองของนิวตัน) แต่หากไม่มีการไหลเข้าออกของมวล (มวลคงที่) กฎนี้ก็กลายเป็นกฎข้อที่สองของนิวตัน (ในระบบติดตาม) อย่าง

สมบูรณ์ ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า กฎที่บัญญัติขึ้นใหม่นี้เป็นกฎข้อที่สองของนิวตันที่ครอบคลุมทุกระบบ ไม่ว่าจะเป็นระบบ “ติดตาม” หรือ ระบบ “เฝ้าดู” ก็ตาม

3) กฎนี้ (และกฎอื่นใดก็ตาม) บัญญัติไว้เฉพาะที่เวลา “ใด ๆ” เวลาหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นแรงก็คือแรงที่กระทำ ณ เวลานั้น ๆ และ อัตราการไหลเข้าออก ก็คืออัตรา ณ เวลานั้น ๆ ข้อสังเกตนี้ไม่ค่อยได้รับการพิจารณาสักเท่าใดในตำราทั้งหลาย แต่ในการวิเคราะห์หรือสร้างสมการควบคุม ประเด็นนี้อาจเป็นประเด็นที่ทำให้สับสนได้มากพอสมควร

4) หากเปรียบกับกฎอนุรักษ์มวล ได้หลีกเลี่ยงการใช้คำว่า “เพิ่มขึ้น” ในกรณีของโมเมนตัม เพราะโมเมนตัมเป็นคุณสมบัติของเวคเตอร์ ซึ่งบางครั้งการ “เพิ่มขึ้น” มีความหมายกำกวม เนื่องจากเวคเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทาง การเพิ่มขึ้นในทิศทางหนึ่งอาจเป็นการลดลงในอีกทิศทางหนึ่งก็เป็นได้

3.2.3 กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม (Conservation of angular momentum)

อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมในปมค. ย่อมเท่ากับแรงบิดที่กระทำต่อปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าของโมเมนตัมเชิงมุมที่เข้าสู่ปมค. ซึ่งมาพร้อมกับการไหลตัวของมวลที่ผ่านเข้าออกปมค.**

3.2.4 กฎอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy)

อัตราการเปลี่ยนของพลังงานในปมค. ย่อมเท่ากับอัตราการถ่ายโอนความร้อนและงานจากสิ่งแวดล้อมเข้าปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าของพลังงานที่เข้าสู่ปมค. ซึ่งมาพร้อมกับการไหลตัวของมวลที่ผ่านเข้าออกปมค.**

กล่าวโดยสรุปอีกครั้ง คำบัญญัติของกฎทางฟิสิกส์แบบใหม่นี้เป็นคำบัญญัติเดิมที่ใช้กับก้อนมวลก้อนหนึ่งในระบบติดตามนั่นเอง เพียงแต่คราวนี้มีการผนวกอัตราการไหลในขณะเวลานั้นๆ เข้ามาในสมการด้วย เพราะการไหลของมวลเข้าออกปมค.นั้น นอกจากมวลจะผ่านเข้าออกแล้ว สิ่งต่าง ๆ ที่ “เกาะ” มากับมวลก็ถูกส่งผ่านเข้าออกปมค.ด้วยโดยปริยาย ในอีกมุมมองหนึ่งสิ่งที่ได้บัญญัติเพิ่มเติมนี้จัดได้ว่าเป็น “เหตุอีกเหตุหนึ่ง” ที่ทำให้เกิด “ผล” (ซึ่งคือ “อัตราการเปลี่ยนแปลงของ...”) นอกเหนือจากเหตุดั้งเดิมที่ปรมาจารย์ก่อน ๆ ได้บัญญัติไว้แล้ว ซึ่งการบัญญัติเพิ่มเติมนี้นับว่า “พอฟังขึ้น” และสามารถพิสูจน์ได้ว่าถูกต้อง 100% โดยการใช้กรรมวิธีทางคณิตศาสตร์อันซับซ้อนและเข้าใจได้ยากของการถ่ายเทแบบเรโนลด์ซึ่งจะได้พิสูจน์ให้เห็นต่อไป

3.3 การสร้างสมการควบคุม

เมื่อได้บัญญัติกฎพื้นฐานต่างๆ และได้ทำความเข้าใจกับกฎเหล่านั้นดีแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการสร้างสมการควบคุมจากคำบัญญัติเหล่านี้เพื่อสามารถนำไปใช้เป็นต้นแบบในการคำนวณได้ต่อไป

3.3.1 สมการควบคุมการอนุรักษ์มวล

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในปมค. ย่อมเท่ากับอัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค.ของมวล

$$\frac{dM_{CV}}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \tag{3.2}$$

ซึ่งสมการนี้ไม่ต้องการคำอธิบายอะไรมากนักเพราะเป็นเพียงการแปลงคำจำกัดความข้างบนลงเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เท่านั้น

3.3.2 สมการควบคุมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมในปมค. ย่อมเท่ากับแรงที่กระทำต่อปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค.ของโมเมนตัม**

$$\frac{d(M\vec{V})_{CV}}{dt} = \vec{F}_{CV} + \dot{m}_{in}\vec{V}_{in} - \dot{m}_{out}\vec{V}_{out} \tag{3.3}$$

ซึ่งการไหลเข้ามาในปมค. ของโมเมนตัมนั้นแทนด้วยสัญลักษณ์ $\dot{m}_{in}\vec{V}_{in}$ โดยเวคเตอร์ความเร็วนั้นควรตีความในที่นี้ว่าเป็นโมเมนตัมต่อหน่วยมวล เมื่อคูณกับอัตราของมวลที่กำลังวิ่งเข้าปมค. จึงมีความหมายเป็นอัตราของโมเมนตัมที่กำลังวิ่งเข้าปมค. ส่วนการวิ่งออกจากปมค. $(\dot{m}_{out}\vec{V}_{out})$ ก็สามารถอธิบายได้ในทำนองเดียวกัน อนึ่ง การจับเอา $\dot{m}$ มาคูณกับ $\vec{V}$ ได้โดยตรงนั้นตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่ว่าการไหลเป็นแบบเอกภาพ (uniform flow) ที่ตรงช่องทางไหลเข้าออกนั้นใช้ปริมาณเฉลี่ยแบบปริพันธ์ (integral average) แต่หลักการที่บัญญัตินี้ใช้ได้กับทุกกรณีรวมทั้งในกรณีอนุพันธ์ เพียงแต่ต้องปรับสัญลักษณ์ทดแทนการไหลเข้าออกให้สอดคล้องกับลักษณะการไหลด้วยเท่านั้นเอง

สิ่งที่น่าสนใจ (และทำให้ผู้ศึกษาส่วนมากงุนงงและตั้งสมการเพื่อแก้ปัญหาผิดพลาด) คือประเด็นที่ว่าสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์ ซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง การบวกกันของพจน์ต่าง ๆ จะต้องบวกกันอย่างเวคเตอร์ในสามมิติ ไม่ใช่บวกกันโดยตรงอย่างพีชคณิต เพื่อไม่ต้องทำเช่นนั้น บ่อยครั้งเราจึงนิยมที่จะแตกสมการเวคเตอร์เป็นสามสมการพีชคณิตในทิศทางพื้นฐานที่เราใช้สร้างเวคเตอร์ ซึ่งหากเราใช้แกนพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) หรือพิกัดฉาก ก็จะสามารถเขียนสมการทั้งสามในแกน x, y และ z ได้ดังนี้

$$\frac{d(MV_x)_{CV}}{dt} = F_{xCV} + \dot{m}_{in}V_{xin} - \dot{m}_{out}V_{xout} \tag{3.4}$$

$$\frac{d(MV_y)_{CV}}{dt} = F_{y_{CV}} + \dot{m}_{in}V_{y_{in}} - \dot{m}_{out}V_{y_{out}} \tag{3.5}$$

$$\frac{d(MV_z)_{CV}}{dt} = F_{zCV} + \dot{m}_{in}V_{z\,in} - \dot{m}_{out}V_{z\,out} \tag{3.6}$$

ซึ่งจะเห็นว่ารูปแบบสมการเป็นรูปแบบเดิมเพียงแต่เปลี่ยนเวคเตอร์ $\vec{V}$ เป็นองค์ประกอบเวคเตอร์ทางแกน $x\,y\,z$ เท่านั้น แต่ต้องเข้าใจด้วยว่าองค์ประกอบเวคเตอร์ และแรงประกอบเหล่านี้ต้องมีเครื่องหมายบวกหรือลบแล้ว แต่ว่าทิศทางไปทางแกนบวกหรือแกนลบ กล่าวคือยังมีลักษณะเป็นเวคเตอร์อยู่แต่เป็นเวคเตอร์ที่มีทิศทางได้สองทิศทางเท่านั้น คือ ไม่ไปทางหนึ่งที่มีเครื่องหมายเป็นบวกก็ในทางตรงกันข้ามที่มีเครื่องหมายเป็นลบ เมื่อคำนวณหาค่าองค์ประกอบเวคเตอร์ทั้งสามได้แล้วจึงค่อยนำผลลัพธ์สุดท้ายมารวมกันเป็นเวคเตอร์อีกครั้งซึ่งเป็นคำตอบสุดท้าย

3.3.3 สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

อัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมเชิงมุมในปมค. ย่อมเท่ากับแรงบิดที่กระทำต่อปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าของโมเมนตัมเชิงมุมที่เข้าสู่ปมค.**

$$\frac{d(M\vec{h})_{CV}}{dt} = \vec{T} + \dot{m}_{in}\vec{h}_{in} - \dot{m}_{out}\vec{h}_{out} \tag{3.7}$$

เมื่อ $\vec{h}$ คือโมเมนตัมเชิงมุมต่อหน่วยมวลซึ่งมีคำนิยามคือ $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V}$ ซึ่งหมายความว่าในการหาค่านี้ต้องใช้รัศมีและความเร็วให้ตรงกับความหมายด้วย เช่น รัศมีตรงทางเข้าและทางออก และพึงสังเกตว่าสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์เช่นเดียวกับสมการโมเมนตัมเชิงเส้นซึ่งสามารถแตกออกเป็นสมการองค์ประกอบเวคเตอร์ได้หากต้องการ และควรสังเกตด้วยว่าคำนิยามของโมเมนตัมเชิงมุมนั้นเปรียบได้กับโมเมนต์ของโมเมนตัม ($\vec{V}$) ในบางครั้งตำราบางเล่มจึงนิยมเรียกสมการนี้ว่าสมการอนุรักษ์โมเมนของโมเมนตัม

3.3.4 สมการอนุรักษ์พลังงาน

อัตราการเปลี่ยนของพลังงานในปมค. ย่อมเท่ากับอัตราการถ่ายโอนความร้อนและงานจากสิ่งแวดล้อมเข้าปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าของพลังงานที่เข้าสู่ปมค.**

$$\frac{d(Me)_{CV}}{dt} = \dot{Q}_{CV} - \dot{W}_{CV} + \dot{m}_{in}e_{in} - \dot{m}_{out}e_{out} \tag{3.8}$$

ซึ่งสองพจน์แรกทางขวามือคือพจน์มาตรฐานของกฎอนุรักษ์พลังงาน และเป็นพจน์ของความร้อน และ งานเชิงกล ตามลำดับ ส่วนสองพจน์หลังนั้นคือ การไหลเข้าออกของพลังงานที่มาพร้อมกับการไหลของมวล

การไหลเข้าออกของมวล และ สิ่งที่เกาะมากับการไหลของมวลนั้น นิยมใช้ศัพท์เทคนิคว่า ฟลักซ์ (flux) เช่นการไหลของมวลผ่านพื้นที่จะเรียกว่า mass flux ของโมเมนตัมเรียกว่า momentum flux และ ของพลังงานเรียกว่า energy flux เป็นต้น ในบางครั้งคำนิยามของฟลักซ์นี้กำหนดให้เป็นอัตราการไหลต่อหน่วยพื้นที่ แต่บางครั้งก็เป็นเพียงอัตราการไหลเฉย ๆ

กล่าวโดยสรุปในภาพรวมแล้ว สมการควบคุมพื้นฐานทั้งหลายที่ได้สร้างขึ้นในหัวข้อนี้ สร้างขึ้นตามบัญญัติของกฎพื้นฐานทางฟิสิกส์ ซึ่งได้เปลี่ยนแนวคิดดั้งเดิมที่ว่า “มวลคงที่” เป็น “มวลของปริมาตรควบคุม” ซึ่งมีการถ่ายเทมวล โมเมนตัม และพลังงาน เข้าออกจากปริมาตรควบคุม (โดยฟลักซ์ที่วิ่งผ่านพื้นผิวควบคุม) ด้วย

3.4 ทฤษฎีการถ่ายเทเรโนลด์ (The Reynolds Transport Theorem)

(*หัวข้อนี้เป็นการสร้างความหลากหลายทางวิชาการ การไม่ศึกษาจะไม่ทำให้เสียความต่อเนื่องแต่ประการใด)

กรรมวิธีการสร้างสมการควบคุมโดยวิธีการบัญญัติกฎในหัวข้อ 3.3 นั้น เป็นการนำเสนออย่างง่ายที่ผู้แต่งได้คิดค้นขึ้น ตำราทางกลศาสตร์ของไหลส่วนใหญ่นิยมใช้กรรมวิธีการแปลงกระบวนมวลคงที่เป็นกระบวนปริมาตรควบคุมโดยการแปลงที่เรียกว่า Reynolds Transport Theorem (RTT) ซึ่งจะได้นำเสนอในหัวข้อนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ RTT จะเหมือนกับผลที่ได้จากกรรมวิธีการบัญญัติกฎทุกประการ

แม้กลศาสตร์ของไหลจะเป็นวิชาที่ค่อนข้างยากแต่กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์ที่ใช้ในการสร้างสมการควบคุมต่าง ๆ ยังคงเป็นกฎง่าย ๆ ที่คุ้นเคยกันดีอยู่แล้ว กฎเหล่านี้คือ

1. **กฎอนุรักษ์มวลของวัตถุ:** เมื่อปราศจากอิทธิพลของทฤษฎีสัมพัทธ์ มวลของวัตถุย่อมคงที่

$$\left(\frac{dM}{dt}=0\right) \tag{3.9}$$

2. **กฎข้อที่สองของนิวตัน:** อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของวัตถุย่อมเท่ากับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น

$$\left(\frac{d(M\vec{V})}{dt}=\vec{F}\right) \tag{3.10}$$

3. **กฎอนุรักษ์พลังงาน:** ในระบบปิด พลังงานย่อมไม่สูญหายหรือสามารถถูกสร้างขึ้นมาใหม่ได้

$$\left(\frac{dE}{dt}=0\right) \tag{3.11}$$

สำหรับระบบเปิด พลังงานของระบบอาจเปลี่ยนไปได้ด้วยการถ่ายเทพลังงานความร้อนและงานกับสิ่งแวดล้อม

$$\left(\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}\right) \tag{3.12}$$

กฎเกี่ยวกับการอนุรักษ์ต่าง ๆ เหล่านี้แม้จะดูเป็นกฎที่ง่าย ๆ แต่ก็มีความยุ่งยากอยู่หลายประการ ประการแรกต้องถือว่ากฎเหล่านี้เป็นกฎธรรมชาติ (natural laws) ที่จะต้องบัญญัติขึ้นมาเท่านั้น กล่าวคือไม่สามารถจะทำการสร้างกฎเหล่านี้ขึ้นมาได้โดยกรรมวิธีทางคณิตศาสตร์ใด ๆ เราต้องยอมรับโดยดุษฎีว่ากฎเหล่านี้ถูกต้องโดยไม่มีเงื่อนไข โชคดีที่ว่านับแต่กฎเหล่านี้ได้ถูกตั้งขึ้นมายังไม่ปรากฏว่ามีกฎใดที่ขัดต่อผลการทดลอง การคำนวณในทางปฏิบัติโดยใช้กฎเหล่านี้เป็นพื้นฐานก็ปรากฏว่ามีความถูกต้องและใช้งานให้เป็นประโยชน์ได้ทั้งนั้น (แต่กฎเหล่านี้ไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมบางอย่างในระดับอะตอมได้ เพราะไม่ได้คำนึงผลกระทบของควอนตัม)

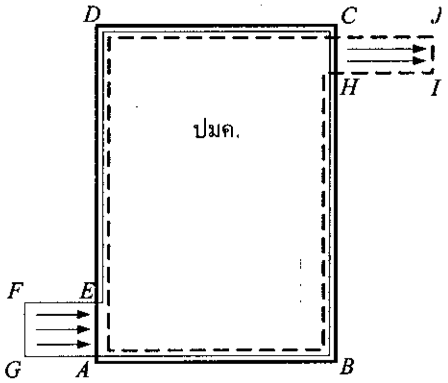
ความยุ่งยากประการที่สองคือ กฎเหล่านี้ถูกบัญญัติขึ้นมาบนพื้นฐานของระบบมวลสารที่เป็นก้อนเนื้อเดียวกัน เช่น ก้อนหินก้อนหนึ่ง หรือ ก้อนอากาศที่บรรจุอยู่ในภาชนะปิดอันหนึ่ง ดังนั้นการจะประยุกต์กฎเหล่านี้ต่อก้อนมวลจึงต้อง “ติดตาม” ก้อนมวลไปทุกหนทุกแห่งที่ก้อนมวลเคลื่อนที่ไป พร้อมกับประยุกต์ใช้กฎไปพร้อม ๆ กับการเคลื่อนที่ แต่การติดตามก้อนมวลของของไหลไปในทุกหนทุกแห่งกระทำได้ลำบากมาก เพราะก้อนมวลก้อนเดียวกันอาจอันตรธานหายสูญไปได้จากการซึมออกไปรอบ ๆ หรือ แตกกระจายออกไป เช่น หากต้องการศึกษาก้อนหมึกที่หยดลงไปในแม่น้ำ จะเห็นว่าก้อนหมึกจะอันตรธานซึมหายไปในกระแสน้ำอย่างรวดเร็ว หรือ ไม่ก็กระเด็นแตกตัวเมื่อวิ่งไปชนโขดหิน ด้วยเหตุนี้ก่อนที่จะนำเอากฎธรรมชาติเหล่านี้มาประยุกต์ใช้กับการไหลตัวของของไหลได้อย่างสะดวก จำเป็นที่จะต้องปรับแปลงกฎในระบบที่ต้องติดตามมวลไปทุกแห่งให้มาเป็นกฎของระบบที่เฝ้าดูมวลอยู่กับที่เสียก่อน ทฤษฎีการถ่ายเทเรโนลด์ (RTT) เป็นทฤษฎีเพื่อการปรับแปลงในเรื่องนี้โดยเฉพาะ

เนื้อหาที่แท้จริงของ RTT ก็คือ การแปลง “อัตราเปลี่ยนต่อเวลา” ของระบบที่มีมวลคงตัวมาเป็นอัตราเปลี่ยนต่อเวลาของระบบที่มีการไหลเข้าออกผ่านพื้นผิวควบคุม โดยเริ่มแรกทีเดียวจะต้องวิเคราะห์จากก้อนของไหลที่มีมวลคงที่เสียก่อน ซึ่งหากต้องการหาอัตราเปลี่ยนต่อเวลาของมวล (M) ก็จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\text{อัตราการเปลี่ยนต่อเวลาของมวล} = \frac{dM}{dt} \tag{3.13}$$

แต่การเปลี่ยนนี้เป็นการเปลี่ยนแบบมวลคงตัว กล่าวคือ หากกำหนดก้อนของไหลก้อนหนึ่งขึ้นมาก็จะต้อง “ติดตาม” การไหลตัวของก้อนนั้นไปตามแต่ก้อนของไหลจะไหลพาไป กรรมวิธีการศึกษาแบบนี้ เรียกว่า การศึกษาแบบ Lagrangian approach ซึ่งไม่เป็นที่นิยมในการศึกษาของไหล (แต่นิยมในการศึกษาการเคลื่อนตัวของของแข็ง) ในการศึกษาของไหลนั้นนิยมการศึกษาแบบ Eulerian approach (อ่านว่า ออยเลอเรียน) ด้วยการ “เฝ้าดู” การไหลตัวของของไหล (ซึ่งผู้สังเกตการณ์อาจจะอยู่กับที่หรือเคลื่อนที่แบบมีความเร็วสัมพัทธ์กับการไหลก็ได้ แต่ส่วนใหญ่แล้วผู้สังเกตการณ์มักจะอยู่กับที่) การเฝ้าดูของไหลนั้นจำเป็นจะต้องมีกรอบที่จะใช้ใน

การเฝ้าดู กรอบนี้ถูกเรียกว่าปริมาตรควบคุม หรือโดยย่อว่าปมค. (control volume หรือโดยย่อว่า CV) ซึ่งอาจเป็นกรอบที่ใหญ่มาก เช่น อาจเป็นบรรยากาศของโลกทั้งระบบ หรืออาจเล็กมาก เช่น การศึกษาการไหลตัวผ่านหัวเข็มปมค. อาจจะเล็กประมาณหัวเข็มนั่นเอง



รูป 3.2 โครงรูปปริมาตรควบคุมที่เฝ้าดูการไหล

หากพิจารณารูปข้างบน จะเห็นว่าเป็นแผนภาพที่จำลองการไหลตัวของมวลผ่านปมค. *ABCD* ที่มีรูปทรงสี่เหลี่ยม (จะเป็นทรงอะไรก็ได้ แต่เพื่อให้ง่ายในที่นี้ให้เป็นทรงสี่เหลี่ยม) ณ เวลา $t = t_1$ หากพิจารณาก้อนมวลที่ล้อมรอบด้วยเส้นทึบ *ABCDEFGA* (คือปมค. บวกกับติ่งทางด้านล่างซ้ายที่มวลของของไหลกำลังจะไหลเข้าไปยังปมค.) หากจะพยายาม “ติดตาม” ก้อนมวลก้อนนี้ไปตามแต่ก้อนมวลจะไหลพาไป เมื่อเวลา $t = t_2 > t_1$ สมมติว่ามวลของติ่ง *AEFG* ทางด้านล่างซ้ายไหลเข้าไปในปมค. จนหมดสิ้นพอดี และมวลนี้ไปดันมวลในปมค. บางส่วนให้ทะลักออกไปทางติ่งทางด้านบนขวา (*HIJC*) ดังนั้นที่เวลา t_2 มวลทั้งก้อนนี้จะถูกล้อมรอบด้วยเส้นประยาว *ABHIJCDEA* จะเห็นว่ามวลของของไหล ณ จุดเวลาสองจุดนี้ เป็นมวลก้อนเดียวกัน (แต่มวลของติ่งทางเข้าไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับมวลของติ่งทางออกเสมอไป ทั้งนี้เพราะอาจจะมีมวลสะสมอยู่ภายในปมค. เพิ่มมากขึ้นได้) หากให้คำนิยามค่ามวลต่าง ๆ ดังนี้

$M_{CV_{t_1}}$ = มวลภายในปมค. (*ABCD*) ที่เวลา t_1

$M_{CV_{t_2}}$ = มวลภายในปมค. (*ABCD*) ที่เวลา t_2

M_{CV_o} = มวลของติ่งตรงทางออก (*HIJC*) (ตัวห้อย *o* หมายถึง “out” หรือ ออก)

M_{CV_i} = มวลของติ่งตรงทางเข้า (*AEFG*) (ตัวห้อย *i* หมายถึง “in” หรือ เข้า)

M_{sys} = มวลของระบบที่เป็นก้อนเดียวกันตลอดเวลา

ก็จะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงมวลเสียใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta M_{sys}}{\Delta t} = \frac{M_{sys_{t2}} - M_{sys_{t1}}}{\Delta t} = \frac{(M_{CV_{t2}} + M_{CV_o}) - (M_{CV_{t1}} + M_{CV_i})}{\Delta t} \tag{3.14}$$

ซึ่งสามารถจัดกลุ่มพจน์เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\Delta M_{sys}}{\Delta t} = \frac{(M_{CV_{t2}} - M_{CV_{t1}})}{\Delta t} + \frac{M_{CV_o}}{\Delta t} - \frac{M_{CV_i}}{\Delta t} \tag{3.15}$$

จะเห็นว่าในวงเล็บแรกนั้นเป็นพจน์ที่เกี่ยวกับปมค. ส่วนพจน์ที่สองและสามเป็นพจน์เกี่ยวกับการไหลตัวออกและเข้าของของไหลผ่านพื้นที่ผิวของปมค. ซึ่งเรียกว่าพื้นผิวควบคุม หรือโดยย่อว่า พผค. (control surface หรือโดยย่อว่า C.S.) เมื่อ Δt มีค่าเล็กมากจนเข้าหาศูนย์ค่าต่าง ๆ จะกลายเป็นอนุพันธ์ ส่วนพจน์ที่สองและสามทางขวามือจะเป็นอัตราการไหลออกและเข้าของมวลผ่านพผค. ดังนี้

$$\frac{dM_{sys}}{dt} = \frac{dM_{CV}}{dt} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} \tag{3.16}$$

ซึ่งตามกฎอนุรักษ์มวลมีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะมวล (ของก้อนมวลอันเดียวกัน) ย่อมไม่เปลี่ยนแปลง

นั่นคือ $$\frac{dM_{sys}}{dt} = 0 \tag{3.17}$$

จะได้ว่า $$\frac{dM_{CV}}{dt} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0 \tag{3.18}$$

หรือ $$\frac{dM_{CV}}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \tag{3.19}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\frac{dM_{sys}}{dt}$ นั้นเท่ากับศูนย์ แต่ $\frac{dM_{CV}}{dt}$ ไม่เท่ากับศูนย์ แต่อาจเป็นได้ทั้งค่าบวก ค่าลบ หรือเป็นศูนย์ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ $\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$ ที่เข้าออกปมค.ผ่านพผค. สมการนี้เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับสามัญสำนึกมาก เพราะบ่งบอกว่า "อัตราการเพิ่มของมวลภายในปมค. คือ อัตราการไหลเข้ามาของมวลลบออกด้วยอัตราการไหลออกจากปมค."

พึงสังเกตว่า สมการอนุรักษ์มวลที่ได้จากการใช้ RTT ข้างบนนี้ เหมือนกับสมการที่ได้จากการบัญญัติในหัวข้อที่แล้วทุกประการ แต่ขั้นตอนที่ได้มาโดยกรรมวิธีนี้นั้นค่อนข้างยุ่งยาก และยากต่อการตีความพอสมควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อผู้ที่เคยพบเห็นสมการนี้เป็นครั้งแรก

เพื่อขยายผลให้สามารถนำสมการนี้ไปประยุกต์ใช้ได้ในกรณีอื่น ๆ กำหนดให้ β เป็นค่าคุณสมบัติใด ๆ ต่อหนึ่งหน่วยของมวล ซึ่งค่า β นี้เป็นคุณสมบัติที่เนื่องอยู่กับมวลและไหลไปพร้อมกับการไหลของมวล (เช่น พลังงานต่อหน่วยมวล เป็นต้น) ดังนั้น ที่ใดมีมวลที่นั้นย่อมมี β เกาะไปด้วยเสมอ และหากจะใช้ RTT ในการวิเคราะห์หาอัตราการเปลี่ยนของ β ของก้อนมวลทั้งก้อน ก็จะต้องดำเนินการตามขั้นตอนที่กระทำมาแล้วดังใน

การหาอัตราการเปลี่ยนของมวลทุกประการ เพียงแต่ว่าให้เอา β คูณเข้าไปกับมวลด้วยทุกครั้งที่มีมวล เพราะ β เป็นคุณสมบัติที่ "เกาะ" อยู่กับมวลตลอดเวลา หลังจากได้กระทำการดังกล่าวจะเขียนสมการการเคลื่อนตัวของ β ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีของมวลว่า

$$\frac{d(M\beta_{sys})}{dt} = \frac{d(M\beta_{CV})}{dt} + \dot{m}_{out}\beta_{out} - \dot{m}_{in}\beta_{in} \tag{3.20}$$

และหากให้คำนิยาม $M\beta \equiv B$ จะได้

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} + \dot{m}_{out}\beta_{out} - \dot{m}_{in}\beta_{in} \tag{3.21}$$

โดยกำหนดให้ $\dot{m}$ เป็นอัตราการไหลของมวลตรงช่องทางเข้าออก และหากมีช่องทางออก n ช่อง และมีช่องทางเข้า m ช่อง การสร้างสมการก็จะใช้วิธีเช่นเดิมทุกประการและรูปสมการก็จะเหมือนเดิมเพียงแต่จะมีพจน์ของการไหลผ่านพผค.มากเท่าจำนวนช่องทางเข้าทางออก ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{CV}}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\dot{m}_{out_i}\beta_{out_i} - \sum_{j=1}^{m}\dot{m}_{in_j}\beta_{in_j} \tag{3.22}$$

ค่า B นี้คือ ค่าทั้งหมดของ β ภายในปมค. ซึ่งในภาษาของเทอร์โมไดนามิกส์เรียก β ว่า "intensive property" และเรียก B ว่า "extensive property" ส่วนเทอม $\sum_{i=1}^{n}\dot{m}_{out_i}\beta_{out_i} - \sum_{j=1}^{m}\dot{m}_{in_j}\beta_{in_j}$ ก็คือการไหลออกสุทธิ (net flux outflow) นั่นเอง

หากลองพิจารณากฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น จะเห็นว่าในกรณีนี้ β ก็คือ โมเมนตัมต่อหน่วยมวล ซึ่งก็คือความเร็ว ($\vec{V}$) นั่นเอง สมมติว่ามีทางเข้าและทางออกอย่างละเพียงหนึ่งทาง ก็อาจเขียนอัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมของก้อนมวลตามกฎ RTT ได้ว่า

$$\frac{d(M\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})_{CV}}{dt} + \dot{m}_{out}\vec{V}_{out} - \dot{m}_{in}\vec{V}_{in} \tag{3.23}$$

ซึ่งต้องตีความพจน์ทางซ้ายมือว่าคืออัตราการเปลี่ยนของโมเมนตัมของก้อนมวล (ก้อนเดียวกับในระบบ "ติดตาม") ซึ่งตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (ซึ่งใช้ได้กับระบบของก้อนมวลก้อนเดียวกันเท่านั้น) ต้องเท่ากับแรง $\vec{F}$ ที่มากระทำต่อก้อนมวลหรือระบบ (system) ในขณะนั้น ดังนั้น

$$\frac{d(M\vec{V})_{sys}}{dt} = \frac{d(M\vec{V})_{CV}}{dt} + \dot{m}_{out}\vec{V}_{out} - \dot{m}_{in}\vec{V}_{in} = \vec{F} \tag{3.24}$$

จากนี้จะตัดพจน์ซ้ายมือสุดทิ้งไป (ใช้เป็นเพียงตัวเชื่อมระหว่างระบบมวลคงที่กับระบบปริมาตรควบคุม) และทำการย้ายข้างจัดพจน์ที่เหลือเสียใหม่ ดังนี้

$$\frac{d(M\vec{V})_{CV}}{dt} = \vec{F} + \dot{m}_{in}\vec{V}_{in} - \dot{m}_{out}\vec{V}_{out} \qquad (3.25)$$

ซึ่งจะเห็นว่าเหมือนกับสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นที่ได้มาจากการบัญญัติในหัวข้อบทก่อนทุกประการ การพิสูจน์การเหมือนกันของสองทฤษฎีบทในกรณีของโมเมนตัมเชิงมุม และพลังงานก็สามารถกระทำได้โดยกรรมวิธีเดียวกันทุกประการ

ก่อนจบหัวข้อนี้ น่าจะมาลองทบทวนดูว่าการ "เฝ้าดู" การไหลนั้นมีความหมายถูกต้องตามที่ได้ตั้งเป้าไว้อย่างไร (ตำรากลศาสตร์ของไหลส่วนใหญ่ไม่ใคร่จะให้ความกระจ่างในเรื่องนี้มากนัก) หากวิเคราะห์ดูอย่างละเอียดถี่ถ้วนจะเห็นว่าไม่ได้เฝ้าดูอยู่กับที่เฉย ๆ ดังที่ได้แถลงไว้ แต่ "ติดตาม" ก้อนของไหลไปด้วย แต่เป็นการติดตามแบบ "อนุพันธ์" กล่าวคือ มีการทำ derivative ต่อหน่วยเวลา dt หากอยู่กับที่จริงแล้วไซร้ dt จะต้องเป็นศูนย์ แต่ dt ในที่นี้ไม่เป็นศูนย์ เพียงแต่มีค่าใกล้ศูนย์เท่านั้น จึงสรุปได้ว่า แม้ dt จะน้อยเพียงไรก็ตามก็ยังต้องถือว่ามีค่าอยู่ จึงเท่ากับว่ามีการติดตามก้อนของไหลอยู่เป็นเวลา dt นั่นเอง แม้ตำราส่วนใหญ่จะไม่ใคร่ตีความในรายละเอียดเกี่ยวกับเรื่องนี้มากนักแต่ก็ยอมรับกันโดยปริยายว่าได้มีการติดตามก้อนของไหล โดยเรียกอนุพันธ์แบบนี้ว่า derivative following the mass (ชื่อเรียกอื่น ๆ ก็มี เช่น mass derivative, total derivative, substantial derivative) พร้อมนี้มักนิยมให้สัญลักษณ์ของอนุพันธ์เป็น D (ใหญ่) ไม่ใช่ d (เล็ก) เพื่อเป็นการเน้นว่าเป็นการหาอนุพันธ์แบบ "ติดตาม" มวลไป ซึ่งทำให้ผู้ศึกษาที่ใหม่ต่อวงการสับสนมาก เพราะตอนแรกก็บอกว่าเป็นการเฝ้าดูอยู่กับที่ แต่ตอนท้ายก็มาบอกว่าเป็นการหาอนุพันธ์ที่ติดตามมวลไป หากอธิบายเสียว่าเป็นการติดตามในระดับอนุพันธ์เท่านั้น (ไม่ได้ติดตามตลอดเวลา) ก็น่าจะช่วยให้สับสนน้อยลง เปรียบได้กับการเฝ้ามองดูม้าวิ่งอยู่กับที่ ขณะที่ม้าวิ่งผ่านมาก็กระโดดขึ้นหลังม้าเพื่อประเมินหาความเร็ว เสร็จแล้วก็กระโดดลงมายืนอยู่ ณ จุดเดิม ซึ่งในทางอนุพันธ์สามารถกระทำได้ เพราะขี่หลังม้าอยู่เพียงเวลา dt เท่านั้น (ซึ่ง dt เข้าหาศูนย์)

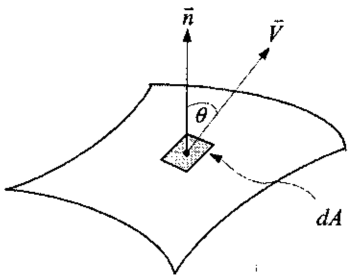
ส่วนวิธีการบัญญัติกฎใหม่นั้น ไม่ต้องการการตีความแต่ประการใด เพราะเป็นการเฝ้าดูอยู่กับที่อย่างแท้จริง ฟลักซ์ที่พุ่งเข้าปมค. เป็นฟลักซ์ที่พุ่งเข้า ณ จุดเฝ้าดูในขณะเวลาที่กำลังเฝ้าดูอยู่นั้น

3.5 อัตราการไหลของมวลเข้าออกผ่านพื้นที่

จวบกระทั่งบัดนี้ ได้สมมติว่าคุณสมบัติอันหนึ่งของของไหล เช่น $\vec{V}$ (ความเร็ว) หรือ ในกรณีทั่วไป คุณสมบัติใด ๆ เช่น β นั้นมีค่าคงตัวตลอดพื้นที่หน้าตัดของช่องทางเข้าออก ซึ่งเป็นการสมมติในการศึกษากลศาสตร์ของไหลเบื้องต้นในระดับที่ง่ายที่สุด ในขั้นที่ยากขึ้น (และละเอียดขึ้น) ในขั้นต่อไปจะไม่สมมติเช่นนั้น แต่จะให้คุณสมบัติ β สามารถมีค่าที่ไม่คงตัวทั้งในปริมาตรควบคุม (ปมค.) และบนพื้นผิวควบคุม (พผค.) การจะหาอัตราการไหลเข้าออกของ β ในคราวนี้จะต้องใช้กรรมวิธีทางแคลคูลัสเข้ามาช่วย ก่อนอื่นต้องเข้าใจเสียก่อนว่าการไหลตัวของมวลผ่านพผค.ที่มีพื้นที่ผิว S นั้นสามารถหาได้จากสมการ (ดูรูป 3.3 ประกอบ)

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{n} \cdot \vec{V} dA \tag{3.26}$$

เมื่อ $\vec{n}$ คือยูนิทเวคเตอร์ (unit vector) ที่ตั้งฉากกับอนุพันธ์ของพื้นที่ dA ซึ่งมีทิศทางพุ่งออกจากปมค. และ $\vec{V}$ คือเวคเตอร์ความเร็วของของไหลที่พุ่งออกจาก dA พจน์ $\vec{n} \cdot \vec{V} dA$ นั้น เป็นอัตราของปริมาตรการไหลซึ่งเกิดขึ้นจากเวคเตอร์ $\vec{V}$ พุ่งออกจากฐานของพื้นที่ dA ดังรูป



รูป 3.3 เวคเตอร์แสดงการไหลออกจากพื้นผิวควบคุม

ในกรณีทั่วไป เวคเตอร์ $\vec{V}$ อาจพุ่งออกไม่ตั้งฉากกับพื้นที่ dA จึงต้องมีการดอทเวคเตอร์ $\vec{V}$ เข้ากับยูนิทเวคเตอร์ $\vec{n}$ ซึ่งตั้งฉากอยู่กับพื้นที่ dA หากพิจารณาให้ดีแล้วจะเห็นว่านี่คือสมการที่อยู่เบื้องหลังสูตรที่ใช้ในการหาปริมาตรรูปทรงเอนต่าง ๆ ในวิชาเรขาคณิตระดับมัธยมนั่นเอง หากคูณพจน์นี้ทั้งพจน์ด้วยความหนาแน่น ρ ก็จะได้พจน์ใหม่เป็น $\rho \vec{n} \cdot \vec{V} dA$ ซึ่งก็คืออัตราการไหลของมวลผ่าน dA นั่นเอง หากจะหาอัตราของมวลที่ผ่านพื้นที่ S ต้องทำการอินทีเกรตตลอดพื้นที่ ดังในสมการข้างบน อนึ่งพจน์ $\int \rho \vec{n} \cdot \vec{V} dA$ คืออัตราการ "ไหลออก" สุทธิผ่านพผค. ดังนั้นหากต้องการอัตราการ "ไหลเข้า" สุทธิก็จำเป็นต้องใส่เครื่องหมายลบไว้หน้าพจน์

ในขั้นถัดไปต้องการหาอัตราการไหลของ β ผ่านพื้นที่บนพผค. ก็สามารถกระทำได้โดยง่ายโดยการคูณอัตราการไหลของมวลด้วย β ดังนี้

$$\dot{m}\beta = \int_S \rho \beta \vec{n} \cdot \vec{V} dA \tag{3.27}$$

โดยจะต้องตีความ β ทางซ้ายของสมการว่าเป็นค่าเฉลี่ยตลอดแนวพื้นที่ S ส่วน β ทางขวาเป็นค่าที่เปลี่ยนไปตามพิกัดของ A การใช้การอินทีเกรตนี้ทำให้ง่ายต่อการเขียนสมการมาก ทั้งนี้เพราะสามารถอินทีเกรตโดยรอบพผค.ของปมค. เพียงครั้งเดียวโดยไม่ต้องคอยพะวงว่าจะมีทางเข้าทางออกกี่ทางและตรงช่องไหนเป็นช่องทางออกหรือช่องไหนเป็นช่องทางเข้า เพราะการอินทีเกรตจะจัดการหาเครื่องหมายอันถูกต้องให้โดยอัตโนมัติ เช่น เมื่อ $\vec{V}$ กับ $\vec{n}$ ทำมุมกันน้อยกว่า 90 องศา การดอทกันของเวคเตอร์ทั้งสองก็จะเป็นบวก แสดงว่าตรงช่องทางนั้นเป็นช่องทางการไหลออกของของไหล (ขอเตือนความจำว่า $\vec{n}$ เป็นเวคเตอร์ที่พุ่งออกจากปมค.) ในทางตรงข้ามหากมุมใหญ่กว่า 90 องศา การดอทกันก็จะได้เครื่องหมายลบโดยอัตโนมัติซึ่งแสดงว่าเป็นช่องทางไหล

เข้าของของไหล ในขณะเดียวกันหากเป็นผิวโลหะตันการอินทีเกรตก็จะได้ค่าเป็นศูนย์โดยอัตโนมัติ (เพราะว่า $\vec{V} = 0$) เพราะฉะนั้นจึงสามารถเขียนพจน์ของฟลักซ์ได้เสียใหม่ว่า

$$\sum \dot{m}_{out}\beta_{out} - \sum \dot{m}_{in}\beta_{in} = \int_S \rho\beta\vec{n}\cdot\vec{V}dA \tag{3.28}$$

ซึ่งนับว่าเป็นการหาฟลักซ์สุทธิที่พุ่งออกจากปมค. (ผ่านพผค.) ในรูปทั่วไปอย่างสมบูรณ์แบบ และสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการควบคุมในรูปทั่วไปได้ต่อไป ทั้งในระบบที่บัญญัติกฎขึ้นมาเอง และในระบบ RTT ที่ได้เสนอในหัวข้อ 3.3)

3.6 การวิเคราะห์การไหลโดยการใช้สมการควบคุม (Flow Analyses by Using the Governing Equations)

จากนี้ไปจะได้ทำการวิเคราะห์การไหลในลักษณะต่าง ๆ โดยการประยุกต์ใช้สมการควบคุมต่าง ๆ ที่ได้สร้างขึ้นไว้ในหัวข้อก่อนๆ ก่อนที่จะนำสมการไปใช้นั้น ควรตระหนักเสียก่อนว่าการใช้งานจริงของอุปกรณ์ทั้งหลายในเชิงวิศวกรรมศาสตร์นั้น ส่วนใหญ่แล้วจะใช้งานที่จุดคงตัว (steady state) กล่าวคือ คุณสมบัติรวมของของไหลทั้งปริมาตรควบคุม (ปมค.) และ คุณสมบัติตรงทางเข้าทางออก ไม่มีการเปลี่ยนกับเวลา ดังนั้นสมการควบคุมทั้งหลายจะมีรูปแบบที่ง่ายขึ้นเพราะพจน์ในสมการที่เป็นอนุพันธ์กับเวลาย่อมมีค่าเท่ากับศูนย์ ตัวอย่างเช่น เครื่องบินเครื่องหนึ่งนั้น ส่วนใหญ่แล้วเครื่องยนต์จะทำงานอยู่ที่จุดทำงานจุดเดียวคือที่ความเร็วคงที่ค่าหนึ่งในขณะที่กำลังเดินทางข้ามทวีปหรือข้ามมหาสมุทร ดังนั้นจุดนี้จึงเป็นจุดคงตัว ส่วนในขณะร่อนลง หรือ เหิรขึ้นจากสนามบิน มีลักษณะไม่คงตัว เพราะต้องมีการเร่งหรือผ่อนกำลังเครื่องยนต์ตลอดช่วง ในช่วงนี้จึงเป็นช่วงไม่คงตัว (non-steady state) แต่ช่วงนี้จะเป็นช่วงสั้น ๆ เท่านั้น อุปกรณ์ทางวิศวกรรมส่วนใหญ่จะมีลักษณะเช่นนี้แทบทั้งนั้น กล่าวคือ ส่วนใหญ่ทำงานที่จุดคงตัวและมีจุดไม่คงตัวแทรกเข้ามาเป็นช่วงสั้น ๆ ดังนั้นการวิเคราะห์โดยมีสมมุติฐานว่าเป็นการวิเคราะห์อย่างคงตัวจึงไม่ได้เป็นข้อจำกัดแต่ประการใด

3.6.1 สมการอนุรักษ์มวล

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในปมค. ย่อมเท่ากับอัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค. ของมวล

สมการแบบไม่คงตัว : $$\frac{dM_{CV}}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} \tag{3.29}$$

สมการแบบคงตัว: $$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} \tag{3.30}$$

สมการนี้ค่อนข้างจะมีลักษณะกำปั้นทุบดินเพราะบอกว่าการเพิ่มขึ้นก็คือการเข้ามาลบด้วยการออกไป เช่น ประชากรในกรุงเทพมหานครเพิ่มขึ้นเท่ากับการเข้ามาของพลเมืองจากต่างจังหวัดลบด้วยจำนวนพลเมืองที่เดิน

ทางออกต่างจังหวัดเป็นต้น และในกรณีคงตัวก็ยิ่งเป็นการกำปั้นทุบดินมากยิ่งขึ้นเพราะบอกว่า การออกไปเท่ากับการเข้ามา (แต่เชื่อหรือไม่ว่าผู้ศึกษาเป็นจำนวนมากต้องสอบตกวิชากลศาสตร์ของไหล หรือได้คะแนนสอบต่ำเพราะสมการง่าย ๆ แบบกำปั้นทุบดินนี้สมการนี้)

หากเป็นการไหลแบบเอกลักษณ์ (uniform flow) ที่ไม่สามารถอัดตัวได้ (ρ = ค่าคงที่) กล่าวคือเป็นการไหลที่ความเร็วมีค่าค่าเดียวตลอดหน้าตัด (ซึ่งบางครั้งก็เรียกว่าการไหลแบบหนึ่งมิติ) และหากความเร็วตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดซึ่งเป็นพื้นที่หน้าตัดแบบระนาบตรง (plane surface) ก็จะได้ว่า

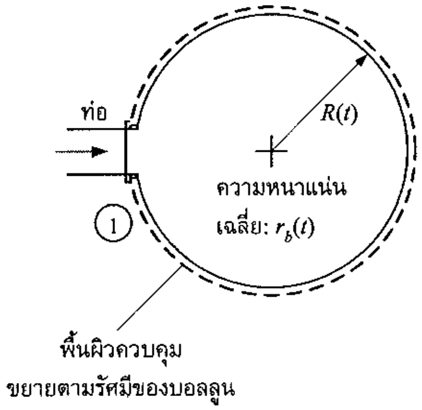
$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \rho V \int_A dA = \rho A V \tag{3.31}$$

ดังนั้นจากสมการอนุรักษ์มวล $\quad (\rho A V)_{in} = (\rho A V)_{out}$ (3.32)

หรือ $\quad \rho A V = \text{constant}$ (3.33)

ซึ่งถือว่าเป็นรูปแบบของสมการอนุรักษ์มวลอย่างง่ายที่สุด (แต่ก็มีประโยชน์สูงสุด) แต่ผู้ศึกษาพึงเข้าใจข้อจำกัดและสมมุติฐานต่าง ๆ ที่ใช้ในการสร้างสมการนี้ให้ดี มิฉะนั้นจะนำเอาไปใช้ในสถานการณ์ที่ไม่เหมาะสมได้

ตัวอย่าง 3.1 ลูกโป่งลูกหนึ่งกำลังถูกเติมด้วยของไหล (อากาศ) เข้าไปตรงช่องทางที่ 1 (ดังรูป) ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ A ความเร็ว V_1 และความหนาแน่น ρ_1 ความหนาแน่นเฉลี่ยภายในลูกโป่งคือ $\rho_b(t)$ จงหาสมการสำหรับอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลภายในลูกโป่งที่เวลาใด ๆ



รูป ต3.1

วิธีทำ

การไหลนี้เป็นการไหลแบบไม่คงตัว สมการอนุรักษ์มวลแบบไม่คงตัวเป็นสมการที่เหมาะสมในการใช้วิเคราะห์ ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{CV}\rho_b dV\!\!\!/\right) = -\int_{CS}\rho(\vec{V}\cdot\vec{n})\,dA \tag{3.34}$$

พจน์ทางขวาคืออัตราการไหลผ่านเข้าพผค.โดยรอบลูกโป่ง ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์ทุกจุดยกเว้นเฉพาะที่ทางเข้าเท่านั้น ดังนั้น ปริพันธ์ของพผค.นี้ จะเหลือแค่พจน์ที่เป็นลบพจน์เดียว ($\rho_1 A_1 V_1$) ดังนั้น

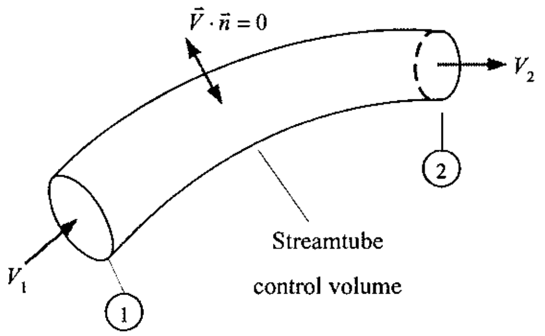
$$\frac{d}{dt}\left(\rho_b \frac{4}{3}\pi R(t)^3\right) = \rho_1 A_1 V_1 \tag{3.35}$$

หรือ

$$\frac{d}{dt}(\rho_a R^3) = \frac{3}{4\pi}\rho_1 A_1 V \tag{3.36}$$

ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ณ จุดนี้ทำได้เพียงแค่ตั้งสมการหนึ่งสมการเท่านั้น ข้อมูลที่มีอยู่ไม่สามารถจะแก้สมการได้เพราะมีตัวแปรสองตัว คือ ρ_b(t) กับ $R(t)$ แต่มีสมการเพียงสมการเดียว ***ตอบ***

หากพิจารณาการอนุรักษ์มวลสำหรับการไหลแบบคงตัวผ่านท่อที่มีหน้าตัดท่อไม่คงที่ ดังรูป



รูป 3.4 การไหลผ่านท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดไม่คงที่

จากสมการอนุรักษ์มวลสำหรับการไหลแบบคงตัว ที่ไม่สามารถอัดตัวได้แบบหนึ่งมิติ สามารถเขียนได้ว่า

$$\dot{m} = \rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constant} \tag{3.37}$$

ถ้าความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ (incompressible flow) ($\rho_1 = \rho_2$) ดังนั้น

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = \text{constant} \tag{3.38}$$

ซึ่งอาจเรียกว่าสมการ "อนุรักษ์ปริมาตรการไหล" (ซึ่งลีโอนาร์โด ดา วินชี นักธรรมชาติวิทยาชาวอิตาเลียนได้คิดค้นความสัมพันธ์นี้ไว้ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1500) สามารถเขียนสมการได้เสียใหม่เป็น

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 \tag{3.39}$$

ดังนั้นถ้าท่อทางที่มีพื้นที่หน้าตัดลดลง ($A_2 < A_1$) ความเร็วจะต้องเพิ่มขึ้นเสมอ ในทางตรงกันข้ามหากท่อทางมีพื้นที่หน้าตัดเพิ่มขึ้นความเร็วก็จะต้องลดลงเสมอ ทั้งนี้และทั้งนั้นก็เพื่อที่จะ "อนุรักษ์มวล" (หรืออนุรักษ์ปริมาตรแล้วแต่กรณี) ตรงนี้เป็น "วิศวกรญาณ" ที่ผู้ศึกษาทุกคนควรทำให้เกิดในมโนสำนึกอยู่เสมอ บ่อยครั้งที่การไหลเป็นการไหลที่ไม่มีท่อทางสวมอยู่ แต่ก็ยังสามารถจินตนาการให้เสมือนหนึ่งว่าเป็นการไหลที่มีท่อทางสวมได้โดยใช้เส้นแนวการไหล (streamline) แทนท่อทางดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าการไหลที่มีเส้นแนวการไหลตีบตัวลงจะทำให้ความเร็วสูงขึ้น (หรือในทางกลับกันการไหลที่เร็วขึ้นจะทำให้เส้นแนวการไหลตีบตัวลง)

สมการอนุรักษ์มวลนี้แม้จะเป็นสมการที่ง่ายที่สุดในกระบวนสมการควบคุมทั้งหมดแต่กลับมีความสำคัญมากกว่าสมการอนุรักษ์อื่นใดทั้งหมด เพราะการไหลใดที่ละเมิดกฎอนุรักษ์มวลย่อมจะเป็นการไหลที่ไม่สมจริงอย่างยิ่ง แต่การไหลที่ละเมิดกฎอื่น ๆ นั้น (ในการสร้างการไหลทางทฤษฎี) อาจยังมีความสมจริงในระดับหนึ่งได้ ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลจึงต้องนำสมการนี้ไปใช้เสมอ ไม่โดยตรงก็โดยอ้อม แต่ผู้ศึกษาที่ยังไม่มีความชำนาญในการแก้ปัญหามักจะมัววุ่นอยู่กับสมการหลักเฉพาะหน้า เช่น สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และ อนุรักษ์พลังงาน จนบางครั้งลืมนึกถึงสมการที่ง่ายที่สุดและสำคัญที่สุดนี้ ซึ่งมีผลพวงทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์ต่าง ๆ ได้สำเร็จ

3.6.2 สมการอนุรักษ์พันธุมวล (Conservation of Species Mass)

(*หัวข้อนี้เป็นการเสริมให้เกิดความหลากหลาย อาจข้ามไปโดยไม่ทำให้เสียความต่อเนื่อง)

สมการนี้มีความสำคัญต่อการศึกษาวิศวกรรมเคมี วิศวกรรมเครื่องกล วิศวกรรมสิ่งแวดล้อม เป็นอย่างมากจึงนำมาผนวกไว้ในที่นี้ ซึ่งมักไม่มีในตำรามาตรฐานทางกลศาสตร์ของไหลทั่วไป คำว่าพันธุมวลนั้นหมายความถึง ความหนาแน่นของมวลที่มีส่วนประกอบทางเคมีอันเดียวกัน เช่น ความหนาแน่นของอ๊อกซิเจนในอากาศของห้องห้องหนึ่ง ซึ่งหากไม่มีการเผาไหม้ก็จะมีปริมาณคงตัวอยู่อย่างนั้น แต่หากมีการเผาไหม้ (ทำปฏิกิริยาเคมี) ความหนาแน่นจะลดลง จากการสังเกตพฤติกรรมตามธรรมชาติจึงอาจนำมา "บัญญัติ" เป็นกฎการอนุรักษ์พันธุมวลได้ดังนี้

"อัตราการเพิ่มขึ้นของพันธุมวลในปริมาตรควบคุม ย่อมเท่ากับอัตราการเกิดขึ้นของพันธุมวลโดยปฏิกิริยาเคมี บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุมของพันธุมวล"

คำกล่าวนี้เป็นคำกล่าวสำหรับพันธุมวลใด ๆ เช่น ในอากาศมีพันธุมวลของออกซิเจนผสมอยู่กับพันธุมวลของไนโตรเจน (ในอัตราส่วนประมาณ 21 ต่อ 79 โดยปริมาตร) หากใช้อากาศไปในการเผาไหม้ มวลออกซิเจนจะลดลง (เพราะถูกใช้ไปในการเผาไหม้) แต่มวลของไนโตรเจนค่อนข้างคงเดิมเนื่องจากเป็นก๊าซเฉื่อย หากเขียนสมการอนุรักษ์มวลของอ๊อกซิเจน (ซึ่งเรียกให้ถูกต้องมากขึ้นได้ว่า สมการอนุรักษ์พันธุมวลของอ๊อกซิเจน) จะได้ว่า

$$\frac{dM_{O_2CV}}{dt} = \dot{m}_{O_2in} - \dot{m}_{O_2out} + m'''_{O_2} + \dot{m}_{O_{2diffin}} + \dot{m}_{O_{2diffout}} \tag{3.40}$$

ซึ่งจะเห็นว่าคล้ายกับสมการอนุรักษ์มวล ยกเว้นแต่เปลี่ยนมวลเป็นมวลของอ๊อกซิเจนเท่านั้น นอกจากนี้มีพจน์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงมวลของอ๊อกซิเจนด้วยปฏิกิริยาเคมี ซึ่งเป็นพจน์ที่มีความยุ่งยากในการคำนวณพอสมควรซึ่งเป็นกระบวนการทางวิชาเคมีกายภาพ (physical chemistry) ส่วนสองพจน์สุดท้ายเป็นฟลักซ์ของมวลที่เข้าสู่ปมค.ด้วยกรรมวิธีของการแพร่ (diffusion) ซึ่งเป็นกระบวนการในระดับโมเลกุล (กระบวนการนี้อาจจินตนาการได้จากการที่หยดหมึกแพร่และกระจายตัวไปในแก้วน้ำ ซึ่งเกิดขึ้นได้เพราะโมเลกุลของหยดหมึกและน้ำมีการเคลื่อนตัวอยู่ตลอดเวลา การแพร่นี้เป็นกระบวนการเดียวกันกับการทำให้เกิดแรงเฉือน และการส่งผ่านความร้อนแบบการนำความร้อน แต่เป็นคนละกระบวนการกับการไหล)

สามารถที่จะทำสมการอนุรักษ์พันธุมวลให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ด้วยการเปลี่ยนตัวห้อยของอ๊อกซิเจนเป็นพันธุ์ i^{th} ใด ๆ

$$\frac{dM_{iCV}}{dt} = \dot{m}_{i\,in} - \dot{m}_{i\,out} + m'''_i + \dot{m}_{i_{diffin}} + \dot{m}_{i_{diffout}} \tag{3.41}$$

วิธีการหนึ่งที่ทำให้สมการนี้ง่ายขึ้นทั้งในเชิงรูปแบบและการตีความ คือการใช้แนวคิด "เสี้ยวมวล" (mass fraction) โดยคำนิยามเสี้ยวมวลของพันธุมวล i^{th} คือความหนาแน่นของพันธุมวล i^{th} หารด้วยความหนาแน่นของมวลรวมทั้งหมด ดังนั้น

$$f_i = \frac{\rho_i}{\rho} \tag{3.42}$$

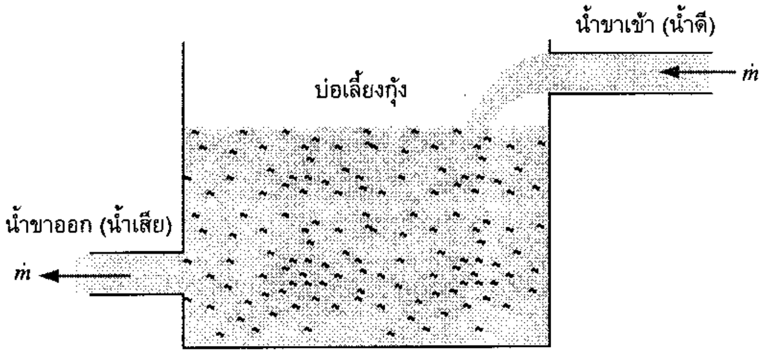
จึงอาจเขียนสมการพันธุมวลของพันธุ์ i^{th} เสียใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{d(f_i \rho V)_{CV}}{dt} = f_{i_{in}} \dot{m}_{in} - f_{i_{out}} \dot{m}_{out} + m'''_i + \dot{m}_{i_{diffin}} + \dot{m}_{i_{diffout}} \tag{3.43}$$

ทั้งนี้เพราะมวลรวมที่วิ่งเข้าออกปมค. นั้นมีสัดส่วนของ i^{th} เป็นจำนวนเท่ากับ f_i ตรงจุดนั้นเสมอ (ตามคำนิยาม) f_i จึงเป็นตัวแปรของพันธุมวล หากทราบ f_i ก็จะทราบปริมาณของพันธุมวลชนิดนั้น ๆ ได้

ตัวอย่าง 3.2 บ่อเลี้ยงกุ้งของชาวนากุ้งแถบจังหวัดเพชรบุรีบ่อหนึ่งมีสารที่ทำให้น้ำเน่าเจือปนอยู่จำนวนหนึ่งที่สามารถวัดเสี้ยวมวลได้ด้วยกรรมวิธีทางชีววิทยา หากมีปริมาณสารพิษมากเกินกำหนดกุ้งจะตายหมด จึงจำเป็นต้องถ่ายน้ำเสียออกด้วยอัตราอันหนึ่ง และส่งถ่ายน้ำดีเข้าด้วยอัตราที่เท่ากัน จงหาเวลาที่ต้องใช้ในการถ่ายเทน้ำดีเข้านาเพื่อทำให้น้ำในบ่อเลี้ยงกุ้งมีปริมาณสารพิษอยู่ในเกณฑ์ที่ต้องการ (ไม่ต้องคิดการแพร่ของโมเลกุล)

วิธีทำ



รูป ต3.2

คำนิยาม

ρ = ความหนาแน่นของน้ำ = ค่าคงที่

f_1 = เสี้ยวมวลสารพิษเริ่มต้น (ค่ามาก)

f_2 = เสี้ยวมวลสารพิษสุดท้ายที่ต้องการ (ค่าน้อย)

$\dot{m}$ = อัตราการถ่ายน้ำออกและเข้านากุ้ง

อาจเขียนสมการอนุรักษ์พันธุ์ของมวลสารพิษในนากุ้งได้ว่า

$$\frac{d(f\rho\forall)_{CV}}{dt} = f_{in}\dot{m}_{in} - f_{out}\dot{m}_{out} + m''' + \dot{m}_{\text{diff}-in} - \dot{m}_{\text{diff}-out} \tag{3.44}$$

แต่เนื่องจากไม่มีปฏิกิริยาเคมี และไม่คิดการแพร่ (diffusion) จึงให้พจน์แรกเหล่านี้เป็นศูนย์ และเนื่องจากการสูบน้ำออกมีอัตราเท่ากับการปล่อยน้ำดีเข้าดังนั้น $\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$ ส่วนทางซ้ายมือนั้นความหนาแน่นของไหลและปริมาตรมีค่าคงที่ ซึ่งอาจนำออกจากปริพันธ์ได้ และเขียนสมการได้เป็น

$$\rho\forall \frac{df}{dt} = \dot{m}(f_{in} - f_{out}) \tag{3.45}$$

ถึงขั้นนี้ดูเหมือนว่าการคำนวณจะไม่สามารถดำเนินต่อไปได้ จึงต้องใช้วิศวกรญาณ (วิศะวะกะระญาณ หรือ engineering intuition) ในการสร้างสมมุติฐานเพื่อปรับรูปสมการให้สามารถถูกแก้ เพื่อให้ได้คำตอบเชิงประมาณการอันเป็นประโยชน์ หากสมมติว่านากุ้งทั้งแปลงมีปริมาณสารพิษแบบเอกลักษณ์ (uniform) กล่าวคือทั้งภายในปริมาตรควบคุมและตรงทางออกมีความเข้มข้นสารพิษอันเดียวกัน ส่วนตรงช่องทางเข้าเป็นน้ำบริสุทธิ์ที่ไม่มีปริมาณสารพิษเลย สมการก็จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$\rho\forall \frac{df}{dt} = -\dot{m}f_{out} = -\dot{m}f \tag{3.46}$$

(การสมมติเช่นนี้พอฟังขึ้น เพราะเป็นการเฉลี่ยความเข้มข้นสารพิษภายในบ่อทั้งหมดให้มีค่าเดียวกัน)

ซึ่งสามารถย้ายข้างและแยกตัวแปรได้

$$\frac{df}{f} = \frac{-\dot{m}}{\rho\forall} dt \tag{3.47}$$

เนื่องจากทางขวาเป็นค่าคงตัว และทางซ้ายเป็นค่าตัวแปรเดียว จึงสามารถอินทีเกรตออกได้โดยง่าย

$$\int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{f} = \ln\frac{f_2}{f_1} = \int_{t=0}^{t=T} \frac{-\dot{m}}{\rho\forall} dt = \frac{-\dot{m}}{\rho\forall} T \tag{3.48}$$

ดังนั้นเวลาที่ใช้ในการนี้จึงคือ

$$T = \frac{-\rho\forall}{\dot{m}} \ln\frac{f_2}{f_1} = \frac{\rho\forall}{\dot{m}} \ln\frac{f_1}{f_2} \tag{3.49}$$

ตอบ

คำวิจารณ์โจทย์

1) วิศวกรญาณช่วยให้วิศวกรแก้ปัญหาที่ดูเหมือนยากให้กลายเป็นง่ายได้ วิศวกรจึงควรต้องหมั่นสั่งสมญาณนี้ให้มากขึ้นเรื่อย ๆ

2) การสมมติให้ปริมาตรทั้งก้อนมีความเข้มข้นหรือมีคุณสมบัติเดียวกันนี้มีที่ใช้มากในการวิเคราะห์ปัญหาการเผาไหม้ในเครื่องยนต์แก๊สเทอร์ไบน์ เรียกกันว่าเป็น ห้องเผาไหม้ที่กวนดี (well-stirred reactor) ซึ่งช่วยให้เครื่องยนต์ที่มีความยุ่งยากอย่างยิ่งนี้ได้รับการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วด้วยการชี้นำของการศึกษาทางทฤษฎี

3.6.3 สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

เป็นสมการที่ใช้ในการคำนวณหาแรงที่กระทำต่อปมค. เสียเป็นส่วนใหญ่ หากปมค. มีทางเข้าทางออกทางเดียว จะเขียนสมการได้ดังสมการ (3.3) คือ

$$\frac{d(M\bar{V})_{CV}}{dt} = \bar{F}_{CV} + \dot{m}_{in}\bar{V}_{in} - \dot{m}_{out}\bar{V}_{out}$$

เนื่องจากสมมติให้เป็นการไหลแบบคงตัว (steady state) ดังนั้นพจน์ทางซ้ายมือเป็นศูนย์ จึงเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{F}_{CV} = \dot{m}_{out}\bar{V}_{out} - \dot{m}_{in}\bar{V}_{in} \tag{3.50}$$

แต่เนื่องจากเป็นการไหลแบบคงตัวที่มีทางเข้าออกทางเดียว ดังนั้นจากสมการอนุรักษ์มวล $\dot{m}_{in}$ จึงเท่ากับ $\dot{m}_{out}$ เพื่อความสะดวกกำหนดให้ค่าทั้งสองเท่ากับ $\dot{m}$ จึงเขียนสมการได้ใหม่ดังนี้

$$\bar{F}_{CV} = \dot{m}(\bar{V}_{out} - \bar{V}_{in}) \tag{3.51}$$

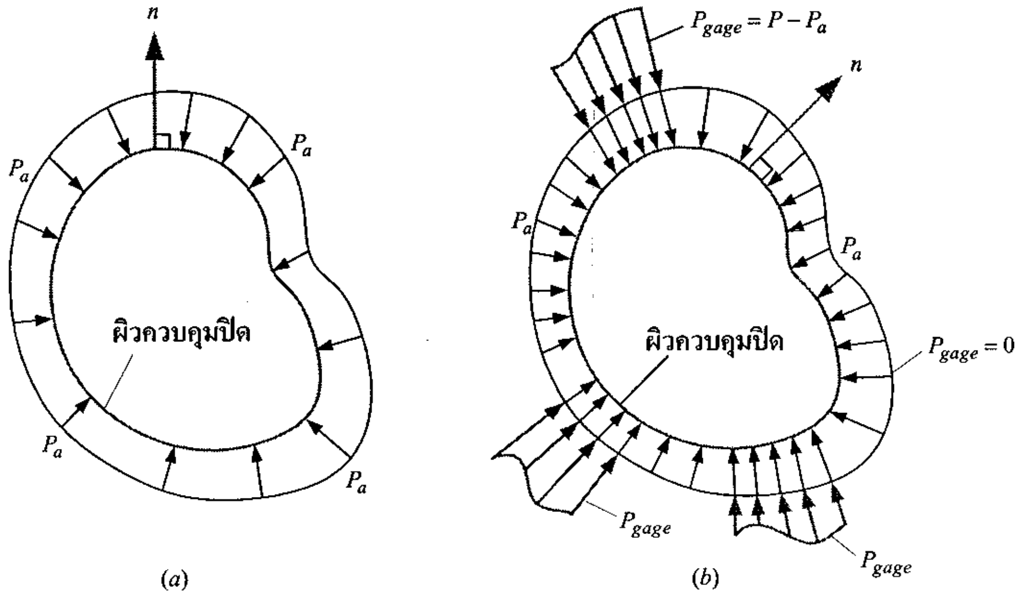
สมการนี้นับว่าอยู่ในรูปแบบที่ง่าย ๆ แต่นับว่ามีประโยชน์มาก ทั้งในแง่ของการให้ความหมายและในแง่ของการประยุกต์ใช้งาน เนื่องจากว่ามีรูปแบบที่ไม่หยาบและก็ไม่ละเอียดจนเกินไป ซึ่งอาจตีความหมายสมการนี้ได้ว่าแรงที่กระทำ "ต่อ" ปมค. นั้น ในกรณีที่ไม่มีการเปลี่ยนโมเมนตัมภายในปมค. จะมีผลทำให้เกิดอัตราส่งออกสุทธิของโมเมนตัมจากปมค. (ซึ่งอาจตีความได้ในรายละเอียดต่อไปว่าแรงไปเพิ่มโมเมนตัมให้กับของไหลในปมค.ทำให้มีการไหลออกสุทธิของโมเมนตัมจากปมค.) ถึงตรงนี้ขอแนะนำให้ผู้ศึกษากลับไปทบทวนดูว่าเราได้ปรับแปลงกฎข้อที่สองของนิวตันอย่างไรจึงได้ผลพวงมาเป็นเช่นนี้ อนึ่ง ควรจำรูปแบบของสมการนี้ให้ได้ เพราะเป็นสมการพื้นฐานที่นำไปใช้งานมากที่สุด แต่ควรจำบนพื้นฐานของความเข้าใจ

ในการพิจารณาแรงนั้น ได้เน้นคำว่า "ต่อ ปมค." ก็เพราะว่าบางครั้งอาจเกิดความสับสนได้ง่ายว่าแรงนี้เป็นแรงอะไร จึงขอเน้นว่า โดยกฎข้อที่สองของนิวตัน แรงนี้เป็นแรงที่สิ่งแวดล้อมของปมค.กระทำ "ต่อ"ปมค. (ซึ่งโดยกฎข้อที่สามจะเท่ากับแรงที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อมแต่กระทำในทิศทางตรงกันข้าม) และปมค.ในที่นี้อาจถือเสมือนหนึ่งเป็นโครงลอยตัว (free body diagram) ที่คุ้นเคยกันดีจากการศึกษากลศาสตร์ของแข็งก็ได้

ต่อไปจะได้พิจารณาแรงที่กระทำต่อปมค.นี้ว่ามีลักษณะใดบ้าง ก่อนอื่นต้องย้ำอีกครั้งว่าสมการนี้เป็นสมการเวคเตอร์ แรงที่กระทำต่อปมค.ก็เป็นเวคเตอร์ซึ่งอาจเป็นเวคเตอร์ในสามมิติก็เป็นได้ แรงสำคัญที่กระทำมีสามประเภทคือ 1) แรงจากความดันของของไหล 2) แรงจากความเสียดทาน และ 3) แรงจากความโน้มถ่วง จึงอาจเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\bar{F}_{CV} = \bar{F}_P + \bar{F}_f + \bar{F}_g \tag{3.52}$$

ในการศึกษาเบื้องต้น (ยกเว้นในการวิเคราะห์การไหลในท่อทาง) ที่ไม่มีความสูงเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยจะตัดแรงเสียดทาน และแรงโน้มถ่วงออก ส่วนแรงอันเนื่องจากความดันนั้นบางครั้งก็พิจารณา แต่บางครั้งก็ไม่พิจารณา สำหรับกรณีที่ปมค.เปิดออกสู่บรรยากาศทั้งหมด แรงอันเนื่องจากความดันจะเป็นศูนย์ (ซึ่งจะพิสูจน์ให้เห็นจริงต่อไป) แต่หากเปิดสู่บรรยากาศเพียงบางส่วน และส่วนอื่น ๆ มีแรงดันที่แตกต่างไปจากแรงดันบรรยากาศก็จะต้องพิจารณาแรงจากแรงดันด้วย (อย่าประมาทขนาดของแรงดันบรรยากาศ เพราะได้พิสูจน์ให้เห็นในบทที่ 2 แล้วว่าแรงดันบรรยากาศอาจเป็นแรงที่มีขนาดใหญ่มากแม้กระทำต่อพื้นที่เล็ก ๆ เช่น ฝ่ามือของมนุษย์)



รูป 3.5 แรงดันที่กระทำอยู่รอบพื้นผิวควบคุม

จากรูปข้างบนนี้ รูป (*a*) แสดงให้เห็นว่ามีความดันขนาดคงที่กระทำอยู่โดยรอบพื้นที่ผิวของปมค. (หรือ พผค.) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ว่าแรงลัพธ์เท่ากับศูนย์ ส่วนรูป (*b*) ความดันที่กระทำส่วนใหญ่มีค่าคงตัวยกเว้นที่พื้นที่เล็ก ๆ สามจุดที่ความดันสูงกว่าบริเวณรอบ ๆ ดังนั้นในกรณีนี้จึงกล่าวได้ว่า

ความดันโดยรอบพผค. = ความดันคงที่โดยรอบ + ความดันในส่วนที่เกิน (หรือขาด) ไปจากความดันคงที่

แรงที่กระทำต่อพผค. คือแรงลัพท์ที่ได้จากการรวมแรงย่อยอันเกิดจากความดันคูณกับพื้นที่โดยรอบ ดังนี้

$$\vec{F}_P = \oint_{CS} P(-\vec{n})dA \qquad (3.53)$$

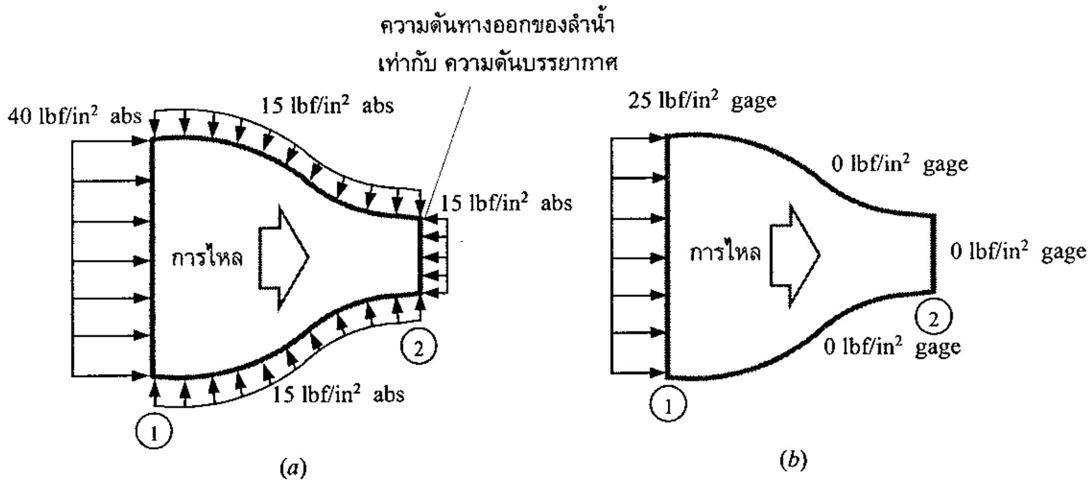
คงยังไม่ลืมว่า $\vec{n}$ คือยูนิทเวคเตอร์ที่ตั้งฉากและพุ่งออกจากพื้นที่ dA และเครื่องหมายลบข้างหน้าเป็นการทำให้เวคเตอร์พุ่งเข้าหาพื้นที่ตามคำนิยามของความดัน และในการอินทีเกรตนั้นสามารถแยกความดันออกเป็นความ

ดันคงที่กับความดันในส่วนที่เกิน (หรือขาด) การอินทีเกรตในส่วนความดันคงที่รอบพผค.นั้นได้ค่าเป็นศูนย์ ส่วนในส่วนที่ขาดหรือเกินนั้นก็ได้ค่าตามที่มันควรจะเป็น การได้ค่าเป็นศูนย์ในส่วนแรกนั้นเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\vec{F}_{P_a} = P_a \oint_{CS} (-\vec{n}) dA = 0 \tag{3.54}$$

ซึ่งก็คือการอินทีเกรตแรงดันบรรยากาศโดยรอบรูป (*a*) นั่นเอง การอินทีเกรตโดยรอบพผค.ของพจน์นี้นั้นสามารถพิสูจน์ได้ว่ามีค่าเป็นศูนย์โดยกรรมวิธีทางแคลคูลัส (แต่ก็สามารถใช้กรรมวิธีทางเรขาคณิตเบื้องต้นพิสูจน์เอาได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้แคลคูลัส (ดูโจทย์แบบฝึกหัด)) ดังนั้นแรงลัพท์ที่ได้จึงมาจากแรงดันในส่วนที่เกินมาหรือขาดไปเท่านั้น สำหรับในกรณีที่ความดันโดยรอบเป็นค่าคงที่ก็ให้ตัดแรงอันเนื่องจากความดันทิ้งไปได้เลย

ตัวอย่าง 3.3 Nozzle อันหนึ่งมีความดันสัมบูรณ์ตรงด้านหน้าเท่ากับ 40 $\mathrm{lbf/in^2}$ (ที่หน้าตัดที่ 1) และความดันบรรยากาศเท่ากับ 15 $\mathrm{lbf/in^2}$ กระทำที่หน้าตัดที่ 2 และที่ส่วนรอบนอกที่เหลือทั้งหมด ดังแสดงในรูป (*a*) จงคำนวณหาแรงสุทธิ ถ้า $D_1 = 3$ in และ $D_2 = 1$ in



รูป ต3.3

วิธีทำ

เมื่อนำความดันสัมบูรณ์ของพื้นผิวทั้งหมดลบออกด้วยความดันบรรยากาศ (15 $\mathrm{lbf/in^2}$) (ซึ่งสามารถกระทำได้โดยไม่ทำให้ผลลัพท์เปลี่ยนแปลงเนื่องจากเป็นการลบออกด้วยค่าศูนย์) จะทำให้ความดันรอบนอกหัวฉีดและที่หน้าตัดที่ 2 มีค่าเป็น 0 และที่หน้าตัดที่ 1 มีค่าเป็น 25 $\mathrm{lbf/in^2}$ ดังในรูป (*b*) ดังนั้น แรงดันสุทธิจะคำนวณได้จากหน้าตัดที่ 1 เท่านั้น

$$F = P_g\left(-\vec{n}\right)_1 A_1 = (25\,\text{lbf/in}^2)\frac{\pi}{4}(3\text{ in})^2\vec{i} = 177\vec{i}\text{ lbf}$$ ***ตอบ***

ตัวอย่าง 3.4 ท่องออันหนึ่งถูกยึดติดอยู่กับแท่นในการไหลแบบคงตัว (steady) ซึ่งการไหลเข้าออกเป็นแบบเอกลักษณ์ (uniform flow) (ρ, A, V มีค่าคงที่ตลอดหน้าตัด) จงหาแรงที่กระทำต่อแท่นยึด

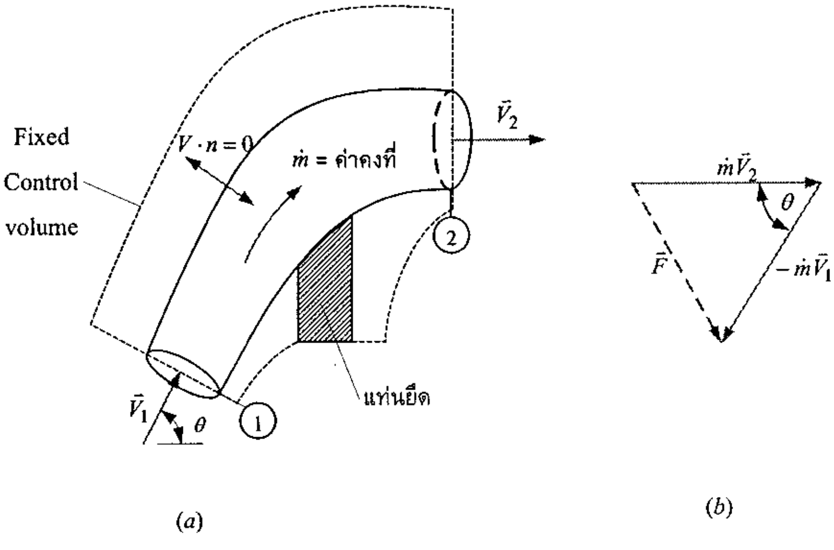
หลักการทำ

1) ขั้นตอนสำคัญก่อนทำการแก้ปัญหาคือการสร้างปมค.ที่เหมาะสม การสร้างปมค.ที่เหมาะสมจะทำให้การแก้ปัญหาง่าย แต่การสร้างนี้ไม่มีหลักเกณฑ์ตายตัว ขึ้นอยู่กับความชำนาญของผู้วิเคราะห์ปัญหา ในกรณีนี้จะใช้ปมค.ดังแสดงด้วยเส้นประในรูป ซึ่งจะเห็นว่าตัดผ่านแท่นยึดในแนวราบ และตัดผ่านทางเข้าทางออกโดยทำมุมตั้งฉากกับแนวการไหลในท่อ การทำเช่นนี้จะทำให้หาอัตราการไหลง่าย หากทำการตัดท่อแบบเฉียง ๆ จะทำให้การหาอัตราการไหลเข้าออกปมค.ยุ่งยากขึ้นโดยไม่จำเป็น

2) โจทย์ทำนองนี้เป็นพื้นฐานสำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่เกี่ยวเนื่องกับ "แรง" ในกลศาสตร์ของไหล ผู้ศึกษาควรทำความเข้าใจให้ดี

3) การถามหา "แรง" นั้นแทบจะเป็นการอัตโนมัติว่าต้องเริ่มต้นด้วยการตั้งสมการอนุรักษ์โมเมนตัม เพราะเป็นสมการเดียวที่มีพจน์ของแรงปรากฏอยู่ จากนั้นก็พยายามตั้งสมการอื่น ๆ เพื่อกำหนดค่าตัวแปรตัวอื่น ๆ ที่ปรากฏอยู่ในสมการให้ได้

วิธีทำ



รูป ต3.4

จากสมการโมเมนตัมเชิงเส้นแบบคงตัว

$$\sum \vec{F} = \dot{m}_2\vec{V}_2 - \dot{m}_1\vec{V}_1 = (\rho_2 A_2 V_2)\vec{V}_2 - (\rho_1 A_1 V)\vec{V}_1 \quad (3.55)$$

ซึ่งหากใช้สมการอนุรักษ์มวลแบบคงตัวเข้าร่วมด้วยคือ

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \text{constant} = \dot{m} \quad (3.56)$$

จะทำให้สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (3.57)$$

ตอบ

วิจารณ์โจทย์

1) คำตอบก็คือสมการอนุรักษ์โมเมนตัมนั่นเอง และสามารถสร้างให้เห็นความสัมพันธ์ได้ด้วยเวคเตอร์ดังรูป แรงนี้เป็นแรงที่สิ่งแวดล้อมกระทำ "ต่อ" ปมค. ซึ่งโดยกฎข้อที่สามของนิวตันย่อมเท่ากับแรงที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อมแต่มีทิศทางตรงกันข้าม ในทางปฏิบัติเรามักต้องการทราบแรงที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อม (ซึ่งคือแท่นยึดในที่นี้)

2) แรงที่ของไหลกระทำ "ต่อสิ่งแวดล้อม"ในลักษณะนี้คือ แรงที่ทำให้เครื่องบินลอยตัวและเคลื่อนไปข้างหน้าได้ แรงที่ผลักใบเรือและทำให้เรือใบแล่นไปข้างหน้าได้ แรงที่ผลักปีกกังหันลมให้หมุน ฯลฯ

ตัวอย่าง 3.5 ตามที่แสดงในรูป ต3.5 (*a*) ปีกโค้งถูกยึดอยู่กับที่ ลำน้ำมีพื้นที่หน้าตัด A ไหลผ่านออกไปเป็นมุม θ โดยที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของความเร็ว การไหลของลำน้ำเป็นไปอย่างสม่ำเสมอ ความดันทุก ๆ ทุกแห่งของลำน้ำคือ P_a หากไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนปีกโค้ง (ก) ให้หาองค์ประกอบของแรงในแนวแกน x (F_x) และแรงในแนวแกน y (F_y) ที่กระทำต่อแท่นยึดปีกโค้ง (ข) ให้หาความสัมพันธ์ของแรง F และมุม ϕ (ซึ่งเป็นมุมระหว่าง F กับแนวระดับ) โดยให้หาความสัมพันธ์ในนามของ θ พร้อมทั้งวาดกราฟความสัมพันธ์เหล่านั้นกับ θ

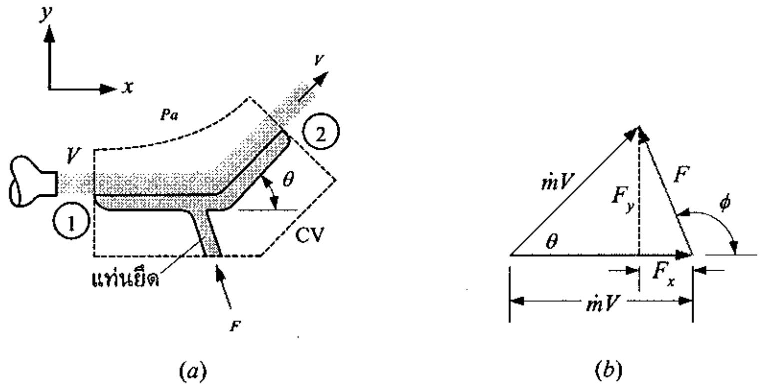
หลักการทำ

หลักการของโจทย์ข้อนี้คล้ายกับข้อ 3.4 มาก กล่าวคือปีกส่งแรงไปทำให้ลำนำเปลี่ยนโมเมนตัม (ด้วยการเลี้ยวตัว) ดังนั้นลำน้ำจึงส่งแรงปฏิกิริยากลับมาสู่ปีกในขนาดเท่ากันแต่ในทิศทางตรงกันข้าม จึงจำเป็นต้องใช้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมหาแรงที่ปีกกระทำต่อปมค.ของลำน้ำเป็นอันดับแรก

วิธีทำ

<u>ส่วน (ก)</u> ปริมาตรควบคุมที่ถูกเลือก ดังรูป (*a*) ตัดผ่านทางเข้าและทางออกของลำน้ำ และยังได้ตัดผ่านแท่นยึดปีก จึงทำให้เห็นแรง F ที่แท่นยึดกระทำต่อปีก การสร้างปมค.ดังนี้ทำให้ไม่ต้องพิจารณาแรงเสียดทานที่ลำน้ำ

กระทำต่อผิวปีกที่สัมผัสอยู่กับลำน้ำ แต่หากสร้างปมค.ที่โดยให้มีพผค.ด้านล่างสัมผัสอยู่กับผิวของปีกที่เปียกน้ำอยู่จะทำให้การวิเคราะห์ยุ่งยากลำบากมาก เพราะจะต้องทำการคำนวณหาแรงดันและแรงเสียดทานที่น้ำกระทำต่อผิวปีกจึงจะสามารถหาแรงลัพธ์ได้



รูป ต3.5

โดยที่ในความดันบรรยากาศที่สม่ำเสมอโดยรอบพผค.นั้น แรงลัพธ์ของความดันต่อปมค.ย่อมมีค่าเป็นศูนย์ หากไม่คิดน้ำหนักของของไหล และน้ำหนักของปีก จะสามารถเขียนสมการโมเมนตัมเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\bar{F} = \dot{m}_2\bar{V}_2 - \dot{m}_1\bar{V}_1 \tag{3.58}$$

การไหลของลำน้ำถือได้ว่าเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว (incompressible flow) และเนื่องจากหน้าตัดลำน้ำคงที่ดังนั้นจากสมการอนุรักษ์มวล

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = \rho AV \tag{3.59}$$

จะสรุปได้ว่าไม่มีการเปลี่ยนความเร็วดังนั้น

$$V_1 = V_2 = V \tag{3.60}$$

ซึ่งทำให้สามารถหาองค์ประกอบของแรงจากสมการ (3.58) ได้ดังนี้

$$F_x = \dot{m}V(\cos\theta - 1) \qquad F_y = \dot{m}V\sin\theta \tag{3.61}$$

ซึ่งทำให้สามารถสร้างแผนภูมิแสดงเวคเตอร์ของแรงได้เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดังปรากฏในรูป (*b*)

ตอบ

<u>ส่วน (ข)</u> ขนาดของแรงลัพท์สามารถหาได้จากส่วน (ก) คือ

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = \dot{m}V\left[\sin^2\theta + (\cos\theta - 1)^2\right]^{1/2} = 2\dot{m}V\sin\frac{\theta}{2} \tag{3.62}$$

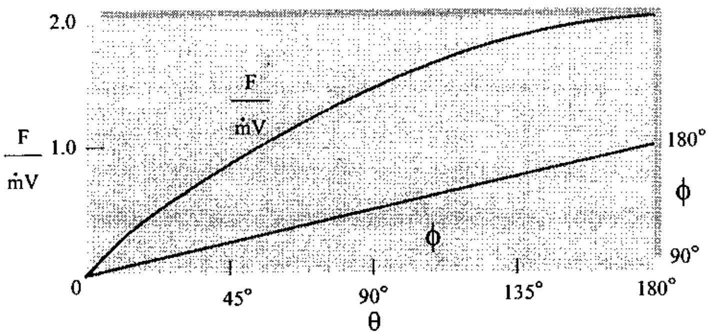
จากเรขาคณิตของรูป (b) สามารถเขียนได้ว่า

$$\phi = 180^\circ - \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์โดยเรขาคณิตได้ว่า

$$\phi = 90^\circ + \frac{\theta}{2} \tag{3.63}$$

และเมื่อนำเอาขนาดของแรง $\left(F/\dot{m}\bar{V} = 2\sin(\theta/2)\right)$ และค่ามุมเวคเตอร์แรง $\left(90 + \dfrac{\theta}{2}\right)$ มาพลอตจะได้เส้นกราฟดังในรูป ต3.5c



รูป ต3.5c

ตอบ

วิจารณ์โจทย์

1. พิจารณาจากรูปข้างบน มีกรณีสองกรณีพิเศษที่น่าสนใจ

1.1. จะเห็นจากกราฟได้ว่า แรงลัพท์สูงสุดเกิดขึ้นที่ $\theta = 180$ องศา ซึ่งหมายความว่า ลำน้ำถูกทำให้เลี้ยวไปรอบ ๆ ปีก และพุ่งย้อนกลับในทิศทางที่ตรงกันข้าม

1.2. หากการเลี้ยวเกิดขึ้นเพียงเล็กน้อย ($\theta < 10$ องศา, $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx 0$) สามารถประมาณการได้ว่า $F \approx \dot{m}V\theta$ และ $\phi \approx 90^\circ$ ซึ่งหมายความว่าแรงที่ได้มีลักษณะเป็นแรงยก (หรือแรงกดแล้วแต่ทิศทางของ θ) เพราะมุมที่แรงกระทำ (ϕ) ตั้งฉากกับพื้น และขนาดของแรงแปรผันโดยตรงกับมุมที่ปีกเบี่ยงเบนไป (θ) หลักการสร้างแรงโดยการเปลี่ยนมุมการไหลนี้เป็นหลักการพื้นฐานที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลายมาก เช่น ปีกเครื่องบิน กังหันก๊าซ กังหันไอน้ำ กังหันลม ใบพัดเรือ ว่าว เป็นต้น ส่วนการไหลที่มุมเลี้ยวตัวมีค่า

มาก ๆ ก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้มากเช่นกัน เช่น กังหันแบบอิมพัลซ์ (Impulse turbine) ซึ่งจะได้ศึกษาในรายละเอียดต่อไป การใช้ของไหลช่วยผลักเครื่องบินให้พุ่งขึ้นจากดาดฟ้าของเรือบรรทุกเครื่องบิน กังหันลมแบบ Sovinious เป็นต้น

2. การสร้างปมค. (หรือ free body diagram) นั้นอาจสร้างได้หลายรูปแบบในปัญหาเดียวกัน เช่น จะรวมเอาเนื้อโลหะเข้าเป็นส่วนหนึ่งของปมค.ด้วยหรือว่าจะไม่เอาเป็นต้น ในประเด็นนี้ไม่อาจให้คำแนะนำได้อย่างกระจ่างและอย่างเป็นระบบเพราะขึ้นอยู่กับลักษณะปัญหา ซึ่งวิศวกรจะต้องตัดสินใจว่าจะเลือกปมค.เช่นใด ทั้งนี้การเลือกขึ้นอยู่ประสบการณ์ของวิศวกรด้วย การเลือกปมค.ที่เหมาะสมจะทำให้การแก้ปัญหาง่าย แต่หากเลือกไม่เหมาะสมอาจทำให้การแก้ปัญหายุ่งยากเกินเหตุ แต่ท้ายสุดก็ได้คำตอบเดียวกัน

ระบบที่มีการเคลื่อนตัวของปริมาตรควบคุม (Moving Control Volume)

ที่ผ่านมาได้ทำการวิเคราะห์ระบบที่นิ่งอยู่กับที่โดยมีมวลไหลเข้าออกปริมาตรควบคุม แต่ในหลายกรณีปริมาตรควบคุมมีการเคลื่อนที่ไปด้วย เช่น ในกรณีของรถยนต์ เครื่องบิน ปั๊มน้ำ ปีกกังหันเทอร์ไบน์ เป็นต้น ในกรณีนี้ต้องพิจารณาว่าการเคลื่อนตัวนั้นเป็นหนึ่งในสองประเภทใดคือ

1) ระบบเฉื่อย (inertial system) คือระบบที่ไม่มีความเร่งของโครงอ้างอิง (frame of reference)
2) ระบบไม่เฉื่อย (non-inertial system) คือระบบที่มีความเร่งของโครงอ้างอิง

พึงเข้าใจว่ากฎพื้นฐานทางฟิสิกส์เป็นกฎที่สร้างขึ้นโดยสมมุติฐานของระบบเฉื่อย ดังนั้นหากโครงอ้างอิงเป็นระบบเฉื่อยกฎพื้นฐานทางฟิสิกส์ต่าง ๆ ที่ได้บัญญัติไว้แล้วก็ไม่มีการเปลี่ยนแปลง ความเร็วที่ใช้ในการคำนวณอาจเป็นความเร็วสัมพัทธ์หรือความเร็วสัมบูรณ์ก็ได้ แต่ในระบบไม่เฉื่อยต้องใช้ความเร็วสัมบูรณ์เท่านั้นในการคำนวณที่เกี่ยวกับแรง หากต้องการใช้ความเร็วสัมพัทธ์ต้องคิดแรงอันเนื่องจากความเร่งของโครงอ้างอิงด้วย จากนี้ไปจะทำการสร้างสมการควบคุมในรูปของโครงอ้างอิงที่มีการเคลื่อนที่

➤ สมการอนุรักษ์มวลในระบบที่ปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่

สมการนี้ไม่เกี่ยวกับแรงหรือความเร่ง แต่เป็นเรื่องของการวิ่งเข้าออกของมวลเท่านั้น จึงดูเหมือนว่าอาจใช้ความเร็วสัมพัทธ์หรือสัมบูรณ์ก็ได้ ปัญหาที่ต้องถามคือจะใช้ความเร็วสัมบูรณ์หรือความเร็วสัมพัทธ์ หรือใช้ได้ทั้งสองกรณี หากลองพิจารณากรณีของการใช้ความเร็วสัมบูรณ์ สมมติว่าในวันที่ไม่มีลม (อากาศนิ่งอยู่กับที่) และเราขับมอเตอร์ไซค์ไปบนถนนด้วยความเร็วอันหนึ่ง โดยจินตนาการว่ามีกรอบของปริมาตรควบคุม (ปมค.) ครอบรถและตัวเราไว้ด้วย จากประสบการณ์เราจะรู้สึกได้ว่ามีลมเข้าปะทะหน้า ยิ่งขับเร็วมาก ลมก็ปะทะหน้าแรงมากเป็นสัดส่วนกัน ในอีกการทดลอง หากเป็นช่วงสงกรานต์ที่มีการฉีดน้ำด้วยปืนฉีดน้ำเข้ามาทางด้านท้ายรถ หากรถอยู่กับที่ก็คงเปียกน้ำ แต่ถ้ารถวิ่งด้วยความเร็วสูงกว่าลำน้ำก็คงไม่เปียก เพราะลำน้ำจะตามรถไม่ทัน การทดลองเชิงจินตนาการ (thought experiment) ง่าย ๆ ในสองกรณีนี้ให้ข้อสรุปว่า ไม่อาจใช้ความเร็ว

สัมบูรณ์ของของไหลในการคำนวณการไหลของมวลเข้าสู่และออกจากปมค.ได้ เพราะหากกระทำดังกล่าวก็จะทำให้ได้อัตรามวลเข้า (และความเร็ว) เป็นศูนย์ (และไม่มีลมมาปะทะหน้า) หรือ จะทำให้มีน้ำเปียกจากการฉีดน้ำเสมอไม่ว่ารถจะวิ่งเร็วสักเท่าใดก็ตาม ดังนั้นจึงสรุปว่าต้องใช้ความเร็วสัมพัทธ์ในการคำนวณ "เสมอ" ซึ่งหากความเร็วสัมบูรณ์ของของไหลคือ $(\vec{V})$ จะสามารถคำนวณหาความเร็วสัมพัทธ์ได้จาก

$$\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_{fr} \tag{3.64}$$

เมื่อ $\vec{V}_r$ คือความเร็วสัมพัทธ์ของของไหลและ $\vec{V}_{fr}$ คือความเร็วสัมบูรณ์ของโครงอ้างอิง ดังนั้นหากใช้ความเร็วสัมพัทธ์ในการคำนวณหาอัตราการไหลผ่านพื้นที่ (mass flux) จะได้สมการดังนี้

$$\dot{m} = \rho A V_m \tag{3.65}$$

โดย V_m นี้คือองค์ประกอบความเร็วสัมพัทธ์ในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ A

โดยสรุป การคำนวณอัตราที่มวลผ่านเข้าออกปมค.นั้น ต้องใช้ความเร็วสัมพัทธ์เสมอ ไม่อาจใช้ความเร็วสัมบูรณ์ของของไหลได้ (แต่แน่นอนว่าในกรณีที่โครงอ้างอิงไม่มีความเร็ว ความเร็วทั้งสองก็คือสิ่งเดียวกัน)

➤ สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในระบบที่ปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่

กฎข้อที่สองของนิวตันเป็นกฎที่บัญญัติไว้สำหรับความเร็วสัมบูรณ์เท่านั้น ดังนั้นจึงควรใช้ความเร็วสัมบูรณ์ในการคำนวณ แต่หากเป็นกรณีที่โครงอ้างอิงเป็นระบบเฉื่อย (inertial system) กล่าวคือ เป็นโครงที่ไม่มีความเร่ง อาจใช้ความเร็วสัมพัทธ์ในการคำนวณก็ได้แล้วแต่ว่าอันไหนจะทำให้การคำนวณง่ายกว่ากัน หากพิจารณาสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในระบบคงตัว

$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_{out} - \vec{V}_{in}) \tag{3.66}$$

แรงทางซ้ายมือของสมการ คือ แรงสัมบูรณ์ ส่วนอัตราไหลของมวล $\dot{m}$ นั้นต้องคำนวณจากความเร็วสัมพัทธ์เท่านั้น ส่วนความเร็ว $\vec{V}_{out}, \vec{V}_{in}$ อาจใช้เป็นความเร็วสัมพัทธ์หรือความเร็วสัมบูรณ์ก็ได้ (ในกรณีของโครงอ้างอิงแบบเฉื่อย) หากใช้ความเร็วสัมพัทธ์สมการก็จะกลายเป็น

$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{V}_{r\,out} - \vec{V}_{r\,in}) \tag{3.67}$$

ซึ่งหากแทนค่าด้วยสมการความสัมพันธ์อาจจัดสมการได้เป็น

$$\vec{F} = \dot{m}[(\vec{V}_{out} - \vec{V}_{fr}) - (\vec{V}_{in} - \vec{V}_{fr})] = \dot{m}(\vec{V}_{out} - \vec{V}_{in}) \tag{3.68}$$

ดังนั้นจะเห็นว่าแรงที่ได้มีค่าเท่ากันไม่ว่าจะใช้ความเร็วสัมพัทธ์หรือความเร็วสัมบูรณ์ในการคำนวณความเร็วในกรณีนี้ แต่หากโครงอ้างอิงเป็นแบบไม่เฉื่อย (non-inertial) จะต้องใช้ความเร็วสัมบูรณ์จึงจะได้ค่าที่ถูกต้อง หรือหากต้องการใช้ความเร็วสัมพัทธ์ก็ต้องมีแรงอันเนื่องจากความเร่งของโครงด้วยดังสมการ

$$\bar{F} = \frac{d(M\bar{V})}{dt} = \frac{d(M(\bar{V}_r + \bar{V}_{fr})}{dt} = \frac{d(M\bar{V}_r)}{dt} + \frac{d(M\bar{V}_{fr})}{dt} \equiv \frac{d(M\bar{V}_r)}{dt} + \bar{F}_{fr} \tag{3.69}$$

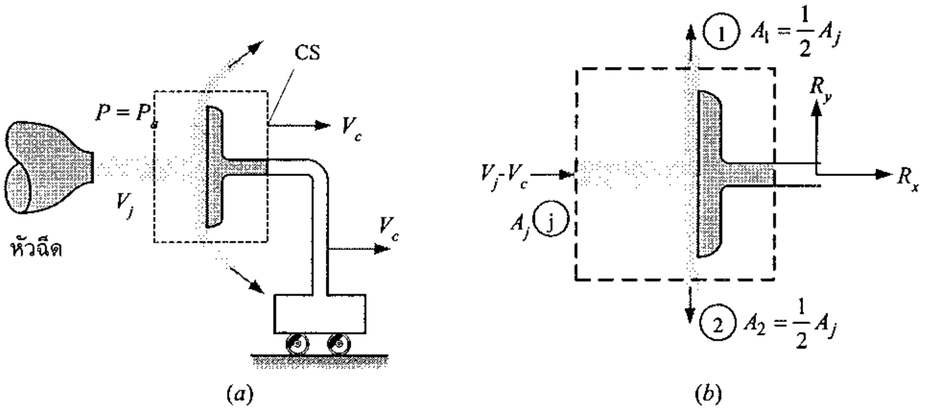
ตัวอย่าง 3.6 ความเร็วลำน้ำ V_j ปะทะในแนวตั้งฉากกับแผ่นเรียบที่กำลังเคลื่อนที่ไปทางขวามือด้วยความเร็ว V_c ดังแสดงในรูป จงหาแรงที่เกิดขึ้นจากการทำให้แผ่นเรียบนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ถ้าความหนาแน่นของลำน้ำเท่ากับ 1,000 kg/m^3 พื้นที่หน้าตัดลำน้ำเท่ากับ 3 cm^2 และ V_j และ V_c เท่ากับ 20 และ 15 m/s ตามลำดับ ไม่คิดน้ำหนักของลำน้ำและแผ่นเรียบ และสมมติให้เป็นการไหลแบบสม่ำเสมอที่ลำน้ำแยกตัวออกขึ้นบนและลงล่างในปริมาณอย่างละเท่า ๆ กันเมื่อกระทบแผ่นเรียบ ดังรูป

หลักการทำ

1) ปมค.มีการเคลื่อนตัวด้วยความเร็วคงที่ จึงต้องใช้ความเร็วสัมพัทธ์ในการคำนวณอัตราไหลมวล เนื่องจากเป็นการเคลื่อนที่แบบเฉื่อยดังนั้นในการคำนวณโมเมนตัมจะใช้ความเร็วสัมพัทธ์หรือความเร็วสัมบูรณ์ก็ได้ ในกรณีเช่นนี้การใช้ความเร็วสัมพัทธ์จะทำให้ง่ายกว่าการใช้ความเร็วสัมบูรณ์มาก ทั้งนี้เพราะผู้สังเกตุการณ์ที่เคลื่อนไปพร้อมกับปมค.จะเห็นลำน้ำพุ่งออกจากปมค.ในแนวแกน y เท่านั้น แต่หากใช้ความเร็วสัมบูรณ์จะเห็นลำน้ำพุ่งออกเป็นมุมโค้งซึ่งทำให้ยากต่อการคำนวณ

2) สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณมีเพียงสองสมการคือ สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ซึ่งเป็นสมการที่เกี่ยวกับแรงที่โจทย์ถาม และสมการอนุรักษ์มวลซึ่งมักจะต้องเข้ามาเกี่ยวข้องในทุกปัญหาเป็นปกติอยู่แล้ว

วิธีทำ



รูป ต3.6

ปริมาตรควบคุมในรูป (*b*) รวมแผ่นเรียบ ซึ่งจะได้แรงปฏิกิริยาที่ต้องการ R_x และ R_y ปมค.นี้เคลื่อนที่ไปพร้อมกับแผ่นเรียบด้วยอัตราเร็ว V_c ดังแสดงในรูป (*a*) เนื่องจากเป็นการไหลแบบคงตัวที่มีทางออกสองทางแต่มีทางเข้าหนึ่งทาง จากสมการอนุรักษ์มวลจะได้

$$\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} \tag{3.70}$$

หรือ $$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 = \rho_j A_j (V_j - V_c) \tag{3.71}$$

เนื่องจากน้ำเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้ $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j$ และจากที่กำหนดว่าน้ำพุ่งออกเป็นสองสายที่เท่ากันจะได้ว่า $A_1 = A_2 = \dfrac{1}{2} A_j$ ดังนั้นสมการจะลดรูปเหลือ

$$V_1 + V_2 = 2(V_j - V_c) \tag{3.72}$$

เนื่องจากลำน้ำที่แตกออกไปมีความสมมาตรกัน ทำให้สรุปได้ว่า $V_1 = V_2$ จากสมการที่ (3.72) จะได้

$$V_1 = V_2 = V_j - V_c = 20 - 15 = 5 \text{ m/s} \tag{3.73}$$

(โปรดตระหนักว่าความเร็วในที่นี้เป็น “ขนาด” ของความเร็วเท่านั้น ยังไม่ได้คำนึงถึง “ทิศทาง” ของความเร็ว) สำหรับแรง R_x และ R_y สามารถคำนวณหาได้จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทั้งสองแนวแกน ซึ่งในแนวแกน x จะได้

$$\sum F_x = R_x = \sum \dot{m}_{out} V_{x,out} - \sum \dot{m}_{in} V_{x,in} = \dot{m}_1 u_1 + \dot{m}_2 u_2 - \dot{m}_j u_j \tag{3.74}$$

โดยที่ u เป็นองค์ประกอบความเร็วสัมพัทธ์ในทางแกน x และเนื่องจากความเร็วสัมพัทธ์ตรงทางออกเป็นความเร็วที่อยู่ในทิศ y เท่านั้น ดังนั้น $u_1 = u_2 = 0$ และ $u_j = V_j - V_c = 5$ m/s และจากสมการอนุรักษ์มวลซึ่งเขียนได้ว่า

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \tfrac{1}{2}\dot{m}_j = \tfrac{1}{2}\rho_j A_j (V_j - V_c) \tag{3.75}$$

ดังนั้นสมการที่ (3.74) จะกลายเป็น

$$R_x = -\dot{m}_j u_j = -\rho_j A_j (V_j - V_c)(V_j - V_c) \tag{3.76}$$

$R_x = -(1{,}000 \text{ kg/m}^3)(0.0003 \text{ m}^2)(5 \text{ m/s})^2 = -7.5 \text{ (kg·m)/s}^2 = -7.5 \text{ N}$ ***ตอบ***

เครื่องหมายลบที่ได้หมายความว่าแรงปฏิกิริยานี้มีทิศทางไปทางซ้ายมือ

สำหรับแรงในแนวแกน y จะสามารถหาได้จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมทางแกน y ซึ่งจะได้เป็น

$$F_y = R_y = \sum \dot{m}_{out} V_{y,out} - \sum \dot{m}_{in} V_{y,in} = \dot{m}_1 V_1 + \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_j V_j \tag{3.77}$$

โดย $V_1 = V_1,\ V_2 = -V_2,\ V_j = 0$ ดังนั้น
(โปรดสังเกตว่า V คือองค์ประกอบของเวคเตอร์ในทางแกน y ซึ่งอาจมีค่าบวกหรือลบก็ได้ ส่วน V คือขนาดของเวคเตอร์ซึ่งมีค่าบวกเสมอ)

$$R_y = \dot{m}_1 (V_1) + \dot{m}_2 (-V_2) = \tfrac{1}{2} \dot{m}_j (V_1 - V_2) \tag{3.78}$$

แต่เนื่องจาก $V_1 = V_2$ นั่นหมายความว่า $R_y = 0$ ซึ่งสามารถคาดเดาได้จากความสมมาตรของลำน้ำที่แตกออก สิ่งที่น่าสนใจอีกสองประการคือ ในประการแรก ความเร็วสัมพัทธ์ที่หน้าตัดที่ 1 เท่ากับ 5 m/s มีทิศทางขึ้นบน จากสมการ (3.73) เนื่องจากการเคลื่อนเป็น V_c = 15 m/s ไปทางขวา ดังนั้นจะได้ความเร็วสัมบูรณ์ V_1 = $15\vec{i} + 5\vec{j}$ m/s หรือ 15.8 m/s ที่มุม 18.4 องศา ขึ้นบน ซึ่งจะเห็นว่าขนาดของความเร็วสัมบูรณ์ของลำน้ำจะเปลี่ยนไป (จากเดิม 20 m/s) เมื่อกระทบกับแผ่นเรียบ ในประการที่สอง ขนาดของ R_x จะไม่เปลี่ยนแปลงแม้ว่าลำน้ำจะวิ่งออกตามแนวอื่น ๆ (ที่ไม่ใช่ y) ของแผ่นเรียบด้วยก็ตาม ทั้งนี้เป็นเพราะว่าแผ่นเรียบตั้งฉากกับแกน x จึงทำให้โมเมนตัมสัมพัทธ์ตรงทางออกของแผ่นเรียบในแนวแกน x จะยังคงเป็น 0 เสมอ ดังนั้นจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงแรงที่คำนวณได้จากสมการ (3.74)

3.6.4 สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

จากบัญญัติของกฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมที่ได้กระทำไว้แล้วอาจแปลงมาเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{d(M\vec{H})_{CV}}{dt} = \vec{T}_{CV} + \dot{m}_{in} \vec{H}_{in} - \dot{m}_{out} \vec{H}_{out} \tag{3.79}$$

หากพิจารณาเฉพาะปัญหาที่คงตัวและให้มีทางเข้าทางออกทางเดียว สมการก็จะลดรูปเหลือเพียง

$$\vec{T}_{CV} = \dot{m}(\vec{H}_{out} - \vec{H}_{in}) \tag{3.80}$$

ซึ่งอาจเปรียบเทียบและเห็นได้ว่ามีรูปแบบคล้ายกับสมการโมเมนตัมเชิงเส้น

$$\vec{F}_{CV} = \dot{m}(\vec{V}_{out} - \vec{V}_{in}) \tag{3.81}$$

สำหรับการใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมนั้นมีความยุ่งยากมากกว่าการใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น เพื่อป้องกันความสับสนจึงขอนำเสนอเป็นลำดับข้อดังนี้

1) อัตราไหลมวลต้องคำนวณจากความเร็วสัมพัทธ์เท่านั้น

2) หากการเคลื่อนตัวไปกับปมค.เป็นการเคลื่อนแบบเฉื่อยก็อาจใช้ความเร็วสัมบูรณ์หรือความเร็วสัมพัทธ์ในการคำนวณโมเมนตัมเชิงมุมก็ได้

3) แต่หากเป็นการเคลื่อนตัวแบบหมุนรอบแกน ต้องถือว่าเป็นการเคลื่อนตัวแบบ "ไม่เฉื่อย" เพราะมีความเร่ง "เชิงมุม" อยู่ด้วย

4) ในกรณีของข้อ 3 หากต้องการใช้ความเร็วสัมพัทธ์จะต้องมีการบวก $\vec{F}_{fr}$ ซึ่งมีอยู่ด้วยกันสองชนิดสำหรับโครงที่มีการหมุนตัวคือ แรงหนีศูนย์ (centrifugal force) และแรงคอริโอริส (coriolis force)

5) เนื่องจากความยุ่งยากของการเพิ่มแรงต่าง ๆ ในข้อ 4 จึงมักนิยมใช้ความเร็วสัมบูรณ์ ในการคำนวณหาโมเมนตัมเชิงมุมของระบบปมค.ที่มีการหมุนตัว

6) แต่ในบางครั้งเช่น ในการคำนวณเชิงตัวเลขโดยคอมพิวเตอร์ นิยมใช้ระบบหมุนของปมค. (และความเร็วสัมพัทธ์) เพราะทำให้ง่ายกว่าเนื่องจากเส้นกริดของการคำนวณจะคงที่ในมุมมองของผู้สังเกตการณ์ที่หมุนไปกับปมค. หากใช้ระบบสัมบูรณ์จะเกิดความยุ่งยากมากของเส้นกริดการคำนวณมาก

โดยสรุป หากใช้ระบบความเร็วสัมบูรณ์ ค่า $\dot{m}$ ต้องคำนวณจากความเร็วสัมพัทธ์เท่านั้น ส่วนค่า $\vec{H} = \vec{R} \times \vec{V}$ ต้องคำนวณจากความเร็วสัมบูรณ์ สมการนี้จะเหมาะสำหรับการคำนวณในระบบที่มีการหมุนตัว หรือมีการเบี่ยงเบนตัวของการไหล ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นได้จากตัวอย่างการคำนวณ

ตัวอย่าง 3.7 จากรูปภาพประกอบซึ่งมองจากมุมมองด้านบน (top view) แสดงให้เห็นแขนของเครื่องรดน้ำสนามหญ้า แขนของเครื่องรดน้ำหมุนรอบจุด O ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ ω ของไหลกำลังเคลื่อนเข้าไปในแขนของเครื่องรดน้ำที่จุดหมุน O ด้วยอัตราปริมาตร $2Q$ และของไหลนี้เป็นของไหลที่ไม่มีการอัดตัว ในการหมุนตัวของแขนน้ำเกิดการหน่วงของแรงบิดขึ้นที่จุด O จากแรงเสียดทานที่เกิดจากฝาประกับเพลา (bearing) มีขนาด $-2T_O k$ (ให้เครื่องหมายลบเพื่อบ่งว่าเป็นทิศทางตรงกันข้ามกับแรงที่กระทำต่อฝาประกับเพลา — ตามกฎข้อที่สามของนิวตัน) ให้หาสมการความสัมพันธ์ของความเร็วในการหมุนกับตัวแปรต่าง ๆ ในระบบ

หลักการทำ

1) โจทย์ข้อนี้อาจดูเหมือนไม่ค่อยมีความสำคัญ แต่ความจริงแล้วหลักการเดียวกันนี้นำไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ชั้นสูงทางวิศวกรรมมากมาย เช่น กังหันในลักษณะต่าง ๆ รวมทั้งกังหันก๊าซเทอร์ไบน์ของเครื่องยนต์ไอพ่น

2) ประเด็นสำคัญที่ทำให้สับสนได้ง่ายคือ จะใช้โครงอ้างอิงความเร็วที่หยุดนิ่ง ส่วนการคำนวณอัตราไหลมวลต้องใช้ระบบความเร็วสัมพัทธ์ของปมค.ที่หมุนตัว (ผู้สังเกตการณ์หมุนไปกับปมค.)

3) เนื่องจากเกิดการสมมาตรของปัญหาทางด้านล่างกับด้านบน เพื่อให้ง่ายขึ้นควรแก้ปัญหาเพียงครึ่งด้านบนเท่านั้น ซึ่งมีแรงบิดกระทำครึ่งหนึ่ง (คือ T_O) ซึ่งเกิดจากอัตราไหลครึ่งหนึ่ง (คือ Q)

4) ความเร็วของน้ำที่เข้ามาในท่อทาง คือ $V_O\vec{k}$ (ตั้งฉากกับหน้ากระดาษ) ซึ่งโดยคำนิยาม $V_O = Q/A_{\text{pipe}}$ (คิดเพียงครึ่งหนึ่งสำหรับ 1 แขน) ซึ่งตามกฎอนุรักษ์มวลต้องเป็นความเร็วสัมพัทธ์ตรงทางออกด้วย

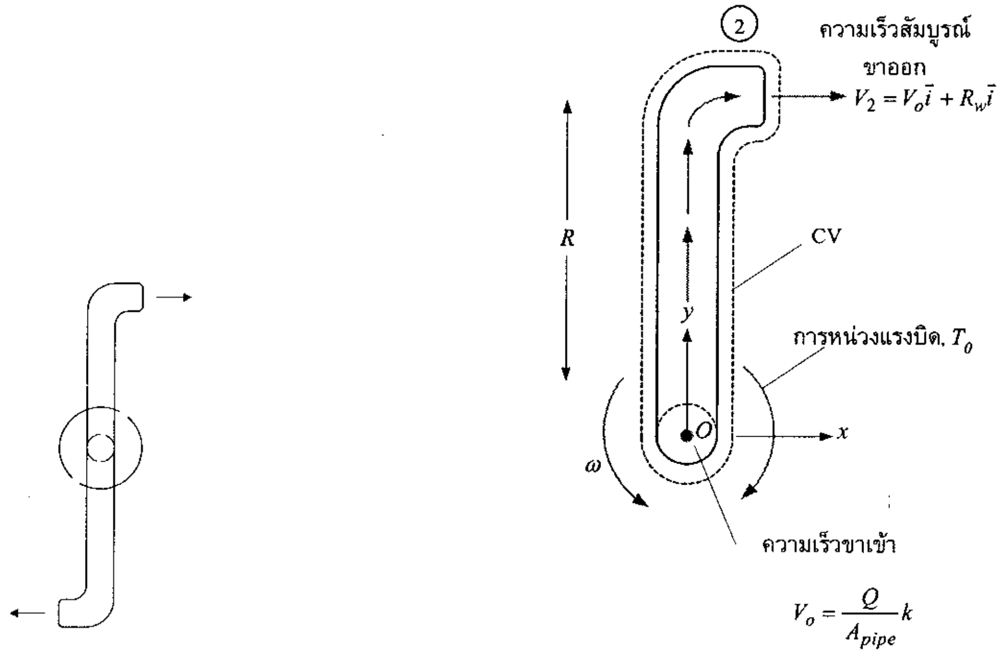
5) จากรูปข้างล่าง ถ้า V_2 เป็นความเร็วสมบูรณ์ตรงทางออกเทียบกับโครงอ้างอิง (ที่หยุดนิ่ง) ดังนั้น ความเร็วสัมบูรณ์ขาออกที่หน้าตัด 2 คือ

$$\vec{V}_2 = V_0\vec{i} - R\omega\vec{i} \tag{3.82}$$

ซึ่งสามารถตีความได้ว่า ความเร็วสัมบูรณ์ ($\vec{V}_2$) มีค่าเท่ากับ ความเร็วสัมพัทธ์ ($V_0\vec{i}$) บวกกับความเร็วปมค. ($-R\omega\vec{i}$) ซึ่งขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ต้องเท่ากับ V_O เนื่องจากถูกกำหนดโดยการอนุรักษ์มวล และความเร็วสัมพัทธ์ที่มองเห็นโดยผู้สังเกตการณ์ที่กำลังเคลื่อนตัวไปกับปมค.ต้องมีทิศทางพุ่งออกไปทางขวามือ (ทิศ $\vec{i}$) ส่วนความเร็วปมค.มีขนาด $R\omega$ และมีทิศทาง $-\vec{i}$ เนื่องจากกำลังหมุนทวนเข็มนาฬิกาและแขนกำลังอยู่ในแนวแกน y

6) โจทย์ถามหา ω ซึ่งติดอยู่ในสมการ (3.82) ซึ่งเป็นความเร็วสัมบูรณ์ ดังนั้นจึงน่าใช้ความสัมพันธ์นี้แทนค่าในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมเป็นหลักการในการแก้ปัญหา

วิธีทำ



ภาพของเครื่องรดน้ำเมื่อมองจากด้านบน

รูป ต3.7

จากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม หากกำหนดให้ 1 คือทางเข้าที่จุด O และ 2 คือทางออกตรงปลายท่อด้านบน จะได้สมการเป็น

$$\sum \vec{M}_o = -T_o\vec{k} = (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2)\dot{m}_{out} - (\vec{r}_1 \times \vec{V})\dot{m}_{in} \tag{3.83}$$

พจน์ต่าง ๆ ในสมการข้างบนสามารถหาได้คือ

$$\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 = R\vec{j} \times (V_0 - R\omega)\vec{i} = (R^2\omega - RV_0)\vec{k} \tag{3.84}$$

ซึ่งเกิดขึ้นได้เพราะรัศมีตรงทางออกมีขนาด R และมีทิศทาง $\vec{j}$ ประกอบกับกฎทางคณิตศาสตร์ที่ให้ $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

$$\vec{r}_1 \times \vec{V}_1 = 0\vec{j} \times V_0\vec{k} = 0 \tag{3.85}$$

จากสมการความต่อเนื่อง, $\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in} = \rho Q$
จากสมการ (3.83) จึงกลายเป็น

$$-T_o\vec{k} = \rho Q(R^2\omega - RV_0)\vec{k} \tag{3.86}$$

หรือ $$\omega = \frac{V_o}{R} - \frac{T_o}{\rho Q R^2} \tag{3.87}$$

ตอบ

วิจารณ์โจทย์

ผลลัพธ์ที่ได้ค่อนข้างน่าฉงน เพราะหากแม้ไม่มีการหน่วงด้วยแรงบิด T_O จากฝาประกับเพลาเลยแม้แต่น้อย อัตรารอบของการหมุนก็จะถูกจำกัดอยู่ที่ค่า V_O/R เท่านั้น (ไม่พุ่งสู่ค่าอนันต์)

3.6.5 สมการอนุรักษ์พลังงาน

หากกำหนดให้ e เป็นพลังงานต่อหน่วยมวลของของไหลจะเขียนสมการพลังงานตามที่ได้บัญญัติไว้แล้วได้ดังนี้

$$\frac{d(Me)_{CV}}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum \dot{m}_{in}e_{in} - \sum \dot{m}_{out}e_{out} \tag{3.88}$$

ซึ่งสามารถตีความได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงาน (ต่อเวลา) ของก้อนมวลภายในปมค.นั้นอาจเปลี่ยนไปได้ด้วยสาเหตุสามประการคือ

1) มีการถ่ายเทความร้อนกับสิ่งแวดล้อม $(\dot{Q})$
2) มีการถ่ายเทงานกับสิ่งแวดล้อม $(\dot{W})$ และ
3) มีการถ่ายเทพลังงานกับสิ่งแวดล้อมโดยผ่านกระบวนการถ่ายเทมวลเข้าออกปมค.
   $(\dot{m}_{in}e_{in} - \dot{m}_{out}e_{out})$ ในกรณีการไหลแบบคงตัวและทางเข้าออกทางเดียว สมการจะลดรูปเป็น

$$\dot{Q}-\dot{W}=\dot{m}(e_{out}-e_{in}) \tag{3.89}$$

หากเอา $\dot{m}$ หารตลอดจะได้สมการในรูปของพลังงานต่อหน่วยมวล

$$q-w=e_{out}-e_{in} \tag{3.90}$$

โดยพลังงานต่อหน่วยมวล (e) นั้นสามารถแจงออกได้เป็นองค์ประกอบสามประการคือ 1) พลังงานความร้อนหรือพลังงานภายใน 2) พลังงานจลน์ และ 3) พลังงานศักย์ ดังนั้น

$$e=u+\frac{v^2}{2}+gh \tag{3.91}$$

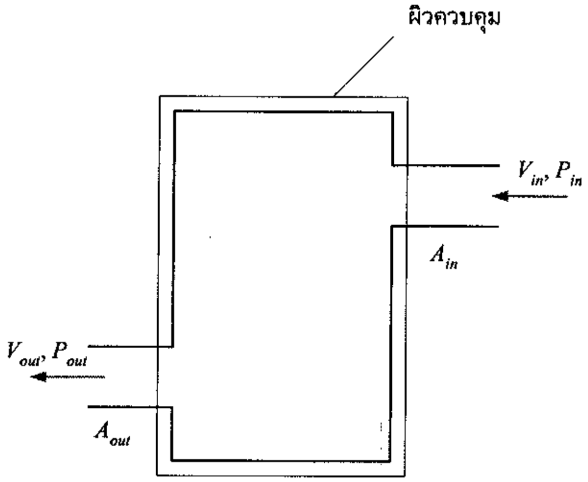
พจน์ q เป็นการถ่ายโอนความร้อนระหว่างปมค.กับสิ่งแวดล้อม ซึ่งมีอยู่สามรูปแบบคือการนำ การพา และการแผ่รังสีความร้อน แต่ในการศึกษาแบบปริพันธ์ (integral approach) มักไม่แจงรายละเอียด แต่หากมีการคิดการถ่ายเทความร้อนก็มักจะเป็นการถ่ายเทความร้อนในลักษณะของภาพรวมของทั้งสามกรณี พจน์ w เป็นงานต่อหน่วยมวลซึ่งจะมีได้สามรูปแบบคือ 1) งานอันเนื่องจากเพลา 2) งานอันเนื่องจากความฝืด และ 3) งานอันเนื่องจากการไหล ดังนั้น

$$w=w_s+w_{fr}+w_{fl} \tag{3.92}$$

w_s หรืองานจากเพลา (shaft work) คืองานที่ออกจากหรือเข้ามาในปมค. โดยที่มีเพลาของเครื่องจักรทะลุผ่านพื้นผิวควบคุม (Control surface) เพื่อให้งานแก่ปมค.หรือนำงานออกจากปมค.แล้วแต่กรณี, w_{fr} คืองานเนื่องจากความฝืด (friction work) งานนี้จึงมักจะเป็นงานที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อมซึ่งยังผลให้ปมค.มีพลังงานลดลง, ส่วน w_{fl} เป็นงานอันเนื่องจากการไหลเข้าออกปมค. จึงมักนิยมเรียกกันว่า งานการไหล (flow work)

w_s นั้นบางครั้งเราทราบค่าแต่บางครั้งก็เป็นสิ่งที่ต้องคำนวณหา ส่วน w_{fr} เป็นงานที่กระทำเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน ดังนั้นจึงเป็นงานที่สูญเสียไปในรูปของความร้อน กล่าวคือพลังงานกล (พลังงานจลน์ และหรือความดัน) จะมีค่าลดลง (สูญเสียไป) แต่พลังงานภายใน (ความร้อน) มีค่าสูงขึ้น ความร้อนที่สูงขึ้นนี้ในทางปฏิบัติส่วนหนึ่งจะส่งถ่ายความร้อนให้กับสิ่งแวดล้อม (ที่เย็นกว่าปมค.) และอีกส่วนก็เก็บสะสมอยู่ในเนื้อของไหล ตำราส่วนใหญ่มักจะกล่าวทำนองเดียวกันว่างานส่วนนี้คืองานที่สูญเสียไป (loss work) ซึ่งหากพิจารณาจากกฎข้อที่หนึ่งและข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์แล้วจะเห็นว่างานนี้ไม่ได้สูญเสียไปทั้งหมด เพราะความร้อนที่เพิ่มขึ้นจากการสูญเสียพลังงานกลนั้น บางส่วนอาจจะนำกลับคืนมาเป็นพลังงานกลได้โดยนำไปเดินเครื่องยนต์ความร้อน (heat engine) แต่แน่นอนว่านำกลับมาใช้ประโยชน์ไม่ได้ทั้งหมด ส่วนที่นำกลับมาไม่ได้ (เพราะข้อจำกัดของกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์) จึงจะเป็นงานสูญเสียที่แท้จริง

ส่วน w_{fl} นั้นเป็นกำลังงานที่เกิดจากความดันและความเร็ว ดังจะพิจารณาจากรูปประกอบข้างล่าง



รูป 3.6 การทำงานของการไหลเพื่อผ่านเข้าออกปมค.

ตรงทางเข้าปมค.มีความเร็ว V_{in} ความดัน P_{in} พื้นที่การไหลเข้าปมค.เป็น A_{in} ส่วนตรงทางออกก็เหมือนกันทุกประการเว้นแต่ใช้ตัวห้อยล่างเป็น *out* ในการสร้างปมค.นั้นพื้นผิวควบคุมของปมค. (พผค.) จะตัดผ่านช่องทางเข้าและช่องทางออกด้วยเสมอ ดังนั้นตรงช่องทั้งสองนี้จะมีงานกระทำ $W = \vec{F} \cdot \vec{V}$ (ซึ่งเป็นคำนิยามมาตรฐานของงานในทางกลศาสตร์) แต่ $\vec{F}$ ในที่นี้คือแรงดันคูณกับพื้นที่ และหากพื้นที่ตั้งฉากกับความเร็ว แรงก็จะขนานกับความเร็วด้วย ทำให้การดอทกันของเวคเตอร์กระทำได้โดยง่าย (นี่เป็นการย้ำว่าการเลือกรูปแบบของปมค.นั้นมีความสำคัญ เช่น หากเลือกพผค.ที่ทำมุมกับแนวการไหลก็จะทำให้การดอทเวคเตอร์กระทำได้ลำบากมากขึ้นโดยไม่จำเป็น)

ในการพิจารณางานการไหลนี้ ที่ตรงช่องทางเข้า ความดัน (และแรง) กระทำตั้งฉากและพุ่งเข้าหาพื้นที่หน้าตัด (ตามคำนิยามของแรงดัน) ซึ่งเป็นทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์ความเร็ว ดังนั้น การดอทกันทำให้ได้เครื่องหมายบวก ส่วนตรงช่องทางออกความดันด้านนอกกระทำตั้งฉากและพุ่งเข้าหาหน้าตัด ในขณะที่ความเร็วพุ่งออก ดังนั้นการดอทกันย่อมได้เครื่องหมายลบ ดังนั้นงานที่ได้จึงเป็น

$$W_{fl} = (PA\vec{n})_{in} \cdot \vec{V}_{in} + (PA\vec{n})_{out} \cdot \vec{V}_{out} = (PAV)_{in} - (PAV)_{out} \tag{3.93}$$

ในการคำนวณหางานนั้นสิ่งที่ต้องเป็นกังวลและตรวจสอบเสมอคือเรื่องของเครื่องหมาย (ว่าจะเป็นบวกหรือลบ) พิจารณาตรงทางเข้าเห็นว่าสิ่งแวดล้อมจะต้องทำงานต่อปมค.เพื่อที่จะดันของไหลเข้ามาในปมค.ให้ได้ ดังนั้นงานนี้ต้องมีเครื่องหมายเป็นบวกเพราะเป็นงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำ "ต่อ" ระบบ ซึ่งเครื่องหมายที่ได้จากการคำนวณก็เป็นการถูกต้องแล้ว ส่วนงานตรงทางออกนั้นมวลในปมค.ต้องทำงานเพื่อเอาชนะแรงต้านของสิ่งแวดล้อมภายนอก งานที่ทำจึงเป็นงานที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อมภายนอก จึงต้องมีเครื่องหมายเป็นลบ ซึ่งจากสมการข้างบนนี้ก็นับว่าเป็นการได้เครื่องหมายที่ถูกต้องแล้ว คำว่า "ถูกต้องแล้ว" ในนัยนี้หมายถึงในนัยของกฎการอนุรักษ์พลังงาน กล่าวคือ งานที่กระทำต่อปมค.ต้องเป็นบวกเพราะเป็นการเพิ่มพลังงานให้แก่ปมค. ส่วนงานที่ปมค.กระทำต่อสิ่งแวดล้อมต้องเป็นลบเพราะปมค.ต้องออกแรงกระทำ ซึ่งทำให้พลังงานของปมค.ลดลง แต่เนื่อง

จาก "กฎของสังคม" กำหนดให้เครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามเพราะสังคมต้องการให้งานออกจากระบบ (งานที่กระทำโดยปมค.ต่อสิ่งแวดล้อม) เป็นบวกเนื่องจากมุ่งเน้นในแนวคิดที่ว่าเป็น "งานที่ได้" ดังนั้นกฎของสังคมจึงสวนทางกับกฎของฟิสิกส์ ในทางปฏิบัติจึงยอมใช้กติกาของสังคม และให้กำหนดเครื่องหมายในการสนทนาเป็นตามแบบสังคม โดยให้นำเอาเครื่องหมายลบไปดักไว้ข้างหน้าพจน์ของงานในสมการอนุรักษ์พลังงานเพื่อแปลงกฎของสังคมให้สอดคล้องกับกฎของฟิสิกส์ ดังนั้นในนัยนี้เครื่องหมายของงานการไหลที่หาได้ในสมการข้างบนนั้น "ผิด" (กฎสังคม) จึงต้องทำการกลับเครื่องหมายเสียใหม่เป็น

$$W_{fl} = (PAV)_{out} - (PAV)_{in} \tag{3.94}$$

และจากคำนิยาม $W = \dot{m}w$ และ $\dot{m} = (\rho AV) = (\rho AV)_{in} = (\rho AV)_{out}$ สำหรับกรณีการไหลแบบคงตัว จะทำให้ได้งานการไหลในหน่วย "ต่อหน่วยมวล" เป็น

$$w_{fl} = \left(\frac{PAV}{\rho AV}\right)_{out} - \left(\frac{PAV}{\rho AV}\right)_{in} = \left(\frac{P}{\rho}\right)_{out} - \left(\frac{P}{\rho}\right)_{in} \tag{3.95}$$

ดังนั้น เมื่อนำงานการไหลใส่กลับเข้าไปในสมการเดิมและให้คำนิยามของพลังงานต่อหน่วยมวลว่า $e = u + \frac{v^2}{2} + gh$ พร้อมทั้งจัดสมการเสียใหม่จะได้

$$q - (w_s + w_{fr}) = \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh\right)_{out} - \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh\right)_{in} \qquad 3.96)$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปรทางอุณหพลศาสตร์สามตัว คือ P, ρ, u จะเกิดขึ้นร่วมกันเสมอ ดังนั้นเพื่อความสะดวกและกระชับในการประมวลค่าจึงมักนิยมรวมตัวแปรสามตัวนี้เข้าด้วยกันและเรียกว่าเอนทาลปี (enthalpy) โดยให้คำนิยามดังนี้

$$h = u + \frac{P}{\rho} \tag{3.97}$$

ซึ่งจะทำให้ได้สมการพลังงานในรูปแบบที่กะทัดรัดขึ้นคือ

$$q - (w_s + w_{fr}) = \left(h + \frac{v^2}{2} + gh\right)_{out} - \left(h + \frac{v^2}{2} + gh\right)_{in} \tag{3.98}$$

และความจริงแล้วจุด *out* และจุด *in* อาจเป็นสองจุดใด ๆ ในระบบก็ได้โดยมักนิยมให้จุดต้นการไหลเป็นจุด *in* และจุดปลายการไหลเป็นจุด *out* จึงนิยมให้ตัวห้อยเป็นค่า 1, 2 และหากไม่มีงานเพลา และไม่พิจารณาความฝืดก็อาจเขียนสมการได้ว่า

$$q + \left(h + \frac{v^2}{2} + gh \right)_1 = \left(h + \frac{v^2}{2} + gh \right)_2 \tag{3.99}$$

ซึ่งถ้าเป็นระบบที่ไม่มีการส่งผ่านความร้อน (adiabatic process) ก็จะลดรูปลงเป็น

$$\left(h + \frac{v^2}{2} + gh \right)_1 = \left(h + \frac{v^2}{2} + gh \right)_2 \tag{3.100}$$

ซึ่งจะใช้สมการในรูปแบบใดของสมการต่าง ๆ ข้างบนนี้ในการคำนวณใช้งานจริงนั้นก็สุดแล้วลักษณะเฉพาะของปัญหาที่กำลังพิจารณา ส่วนค่าเอนทาลปีนั้นสามารถหาได้ในสองกรณีคือ

1) หากสามารถสมมติให้ของไหลเป็นก๊าซอุดมคติ (ideal gas) ค่าเอนทาลปีนี้ก็สามารถเขียนในนามของอุณหภูมิได้คือ $h = \int C_P dT$ ซึ่งอาจคำนวณได้หากทราบ C_P ในนามของอุณหภูมิ หรืออาจเปิดหาเอาจากตารางอุณหพลศาสตร์

2) หากสมมติเป็นก๊าซสมบูรณ์ (perfect gas) ซึ่งหมายถึง C_P มีค่าคงตัว ก็จะหาค่าเอนทาลปีได้คือ $h = C_P T$

สมการที่นำไปใช้งานนั้นหากใช้ในปัญหาที่ไม่เกี่ยวข้องกับความร้อนมักจะนิยมตัดค่า q และ u ออกจากสมการ ทั้งนี้เพราะ q จะเท่ากับศูนย์และ u จะมีค่าคงตัว จึงไม่มีผลอันใดที่จะตัดออก ดังนั้น

$$w_s + w_{fr} + \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh \right)_{out} = \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh \right)_{in} \tag{3.101}$$

หรือ $$\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh \right)_1 = \left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh \right)_2 + w_s + w_{fr} \tag{3.102}$$

โดยในรูปนี้ w_{fr} มักจะมีค่าเป็นบวกเสมอเนื่องจากมักจะเป็นงานที่สูญเสียจากระบบเข้าสู่สิ่งแวดล้อมภายนอก ส่วน w_s เป็นบวกเมื่อเป็นงานที่ออกจากระบบ (เช่น เทอร์ไบน์) และเป็นลบถ้าเป็นงานที่ให้แก่ระบบ (เช่น ปั๊ม) ในการใช้งานบางอย่างก็อาจไม่คำนึงถึงงานอันเนื่องจากแรงเสียดทานก็เป็นได้

การประยุกต์ที่สำคัญอันหนึ่งของสมการนี้คือการสูบส่งน้ำหรือของไหลอื่น (เช่น น้ำมัน) ผ่านท่อทาง ในการนี้มักนิยมเขียนสมการให้อยู่ในรูปของ “สูงหัว” (head) ซึ่งทำได้โดยการนำค่า g หารตลอดสมการข้างบน ซึ่งจะทำให้ทุกพจน์มีหน่วยเป็นความสูง

$$\left(\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h \right)_1 = \left(\frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h \right)_2 + h_s + h_{fr} \tag{3.103}$$

การใช้สูงหัวในการคำนวณช่วยให้ตีความได้สะดวก เพราะวิศวกรมักคำนึงว่าน้ำที่จะสูบนั้นจะต้องสูบขึ้นที่สูงสักเท่าใด หรือ พลังงานศักย์ของน้ำในเขื่อนที่จะนำมาเป็นประโยชน์ในการหมุนเทอร์ไบน์นั้นมีความสูงสักเท่าใด

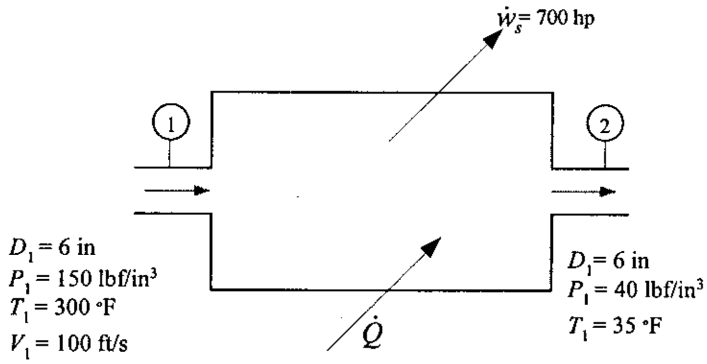
ตัวอย่าง 3.8 อากาศ ($R = 1715$, $C_p = 6003$ ft·lbf/slug·°R) ไหลด้วยอัตราการไหลคงที่ ดังแสดงในรูป โดยไหลผ่านกังหันเทอร์ไบน์ซึ่งกันหันได้ให้งานออกมา 700 hp สำหรับเงื่อนไขที่กำหนดให้กับช่องทางเข้าและทางออก ได้แสดงดังรูป ให้หา (ก) ความเร็วที่ท่อทางออก V_2 และ (ข) ความร้อนที่ต้องถ่ายเทเข้าสู่ระบบ $\dot{Q}$ ในหน่วย Btu/h

หลักการทำ

1) จากสิ่งที่กำหนดให้น่าจะพอมองออกว่าสามารถใช้สมการอนุรักษ์มวลหาความเร็วตรงทางออกได้ เพราะมวลตรงช่องทางเข้าต้องเท่ากับมวลตรงช่องทางออก แต่คงต้องใช้สมการสภาวะ (equation of state) จากอุณหพลศาสตร์เข้ามาช่วยกำหนดความหนาแน่นด้วย

2) เมื่อทราบความเร็ว (และพลังงานจลน์) ตรงทางเข้าออก ก็น่าจะใช้สมการพลังงานคำนวณหาปริมาณความร้อนสุทธิที่ต้องการได้ (ความร้อนนี้ในทางปฏิบัติอาจได้มากจากการเผาไหม้)

วิธีทำ



รูป ต3.8

<u>ส่วน (ก)</u> จากสมการอนุรักษ์มวล

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2$$

หากทราบความหนาแน่นของอากาศที่ทางเข้าและทางออกจากสมการสภาวะ (equation of state) ก็จะสามารถหา V_2 ได้โดยง่าย

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{150(144)}{1715(460+300)} = 0.0166\,\text{slug/ft}^3$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{40(144)}{1715(460+35)} = 0.00679\,\text{slug/ft}^3$$

ซึ่งเมื่อแทนค่าเข้าไปในสมการอนุรักษ์มวลข้างบนก็ได้ค่า

$V_2 = 244 \quad \text{ft/s}$ ***ตอบ***

<u>ส่วน (ข)</u> เมื่อทราบค่าพลังงานจลน์ตรงทางเข้าออกแล้ว ทราบอัตราไหลมวล และทราบความสูงตรงทางเข้าออกก็สามารคำนวณหาปริมาณความร้อนที่ต้องการได้โดยตรงจากสมการพลังงานที่เขียนในรูป

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m}\left\{\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)\right\}$$

โดยการสมมติให้เป็นก๊าซสมบูรณ์ ($h = C_P T$) จะทราบค่าของพจน์ทุกตัวในสมการนี้ ซึ่งทำให้หาค่าของ $\dot{Q}$ ได้เพียงแต่ต้องทำให้หน่วยของพจน์ต่าง ๆ เท่ากันเท่านั้นเอง จากการแทนค่าตัวเลขจะได้

$\dot{Q} = -125{,}000\ \text{ft}\cdot\text{lbf/s}$ ซึ่งอาจเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของหน่วยใด ๆ ต่อไปก็ได้ตามแต่ประสงค์ เครื่องหมายลบที่ได้แสดงว่าเป็นความร้อนที่ต้องถ่ายออกจากปมค. ***ตอบ***

วิจารณ์โจทย์

1) โจทย์นี้ไม่ได้วิเคราะห์รายละเอียดของการไหลผ่านปีกกังหันเทอร์ไบน์เลย แต่วิเคราะห์ตัวแปรในเชิงปริพันธ์เท่านั้น นับว่าเป็นการรู้ความต้องการของระบบทั้งระบบอย่างคร่าว ๆ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในบางประการ เช่นทำให้ทราบว่าจะต้องถ่ายโอนความร้อนให้กับสิ่งแวดล้อมเท่าใด ซึ่งจะทำให้ทราบว่าจะต้องเตรียมอุปกรณ์ดับความร้อนอย่างไร เช่นปล่อยสู่บรรยากาศเฉย ๆ หรือ ต้องใช้หอคอยดับความร้อนช่วยเป็นต้น (cooling tower)

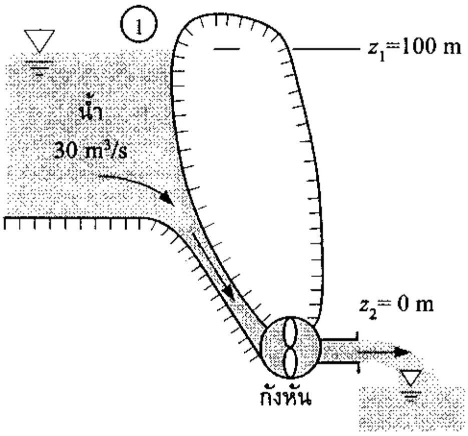
2) เพื่อให้ได้งาน 700 hp วิศวกรจะต้องออกแบบกังหันเทอร์ไบน์ในรายละเอียดเพื่อดูดซับพลังงานให้ได้ตามกำหนด ซึ่งการไหลของของไหลผ่านปีกกังหันเทอร์ไบน์นั้นเป็นการไหลที่ยุ่งยากซับซ้อนมาก ต้องใช้ความรู้ทางกลศาสตร์ของไหลชั้นสูงมาช่วย แต่หลักการทำงานขั้นพื้นฐานจริง ๆ ก็ไม่ได้แตกต่างไปจากการใช้กฎอนุรักษ์โมเมนตัมดังที่ได้ศึกษาไว้แล้ว

ตัวอย่าง 3.9 โรงไฟฟ้าพลังน้ำแห่งหนึ่งผลิตกระแสไฟฟ้าจากน้ำที่กักเก็บไว้ในเขื่อน โดยได้ออกแบบให้มีอัตราไหลผ่านระบบเท่ากับ 30 m^3/s และปล่อยน้ำทิ้งออกสู่บรรยากาศด้วยความเร็ว 2 m/s ประเมินได้ว่าการสูญเสียเนื่องจากความฝืด (สูงหัวสูญเสีย หรือ head loss) มีค่า 20 m จงประมาณหากำลังงานที่กังหันเทอร์ไบน์จะผลิตได้จากระบบนี้

หลักการทำ

1) ระบบนี้ไม่เกี่ยวข้องกับความร้อน พลังงานที่เกี่ยวข้องเป็นพลังงานกลทั้งสิ้น และควรใช้สมการในรูปของ "สูงหัว"
2) การคำนวณในลักษณะนี้ต้องตั้งจุดสองจุด คือจุดต้นน้ำและจุดปลายน้ำ ซึ่งหากมีระบบเก็บน้ำขนาดใหญ่ (reservoir) มาเกี่ยวข้องด้วยมักนิยมให้ผิวของระบบเป็นจุดต้นและหรือปลายน้ำ แทนที่จะเอาจุดตรงใกล้ปากทางเข้าของเทอร์ไบน์ (หรือ ปั๊ม) ที่เป็นดังนี้เพราะทำให้ง่ายเนื่องจากสามารถสมมติให้ความเร็วผิวน้ำมีค่าเป็นศูนย์ได้ (เนื่องจากมีขนาดใหญ่) และยังสามารถวัดหาความสูงของผิวน้ำได้โดยง่ายอีกด้วย
3) ทราบพลังงานต้นทาง (100 m, 0 m/s) พลังงานปลายทาง (0 m และ 2 m/s) ทราบอัตราไหล และสูงหัวสูญเสีย จะสามารถแทนค่าในสมการพลังงาน (กล) ได้ทันที เพื่อหาค่างานที่ผลิตได้ เพียงแต่ต้องแทนค่าหน่วยต่าง ๆ ให้ถูกต้องเท่านั้นเอง

วิธีทำ



รูป ต3.9

ที่จุด 1 $V_1 \approx 0, P_1 = P_{atm}$, และ z_1 = 100 m ที่จุด 2 เป็นทางออกของน้ำที่ผ่านจากกังหัน สมการพลังงานของการไหลแบบคงตัว กลายเป็น

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_t+h_f \tag{3.104}$$

$$\frac{P_a}{\gamma}+\frac{(0)^2}{2(9.81)}+100\,\mathrm{m}=\frac{P_a}{\gamma}+\frac{(2.0\ \mathrm{m/s^2})}{2(9.81\ \mathrm{m/s^2})}+0\,\mathrm{m}+h_t+20\,\mathrm{m}$$

พจน์ของความดันหักล้างกันหมด ดังนั้นจะหาสูงหัวกังหันได้

$h_t = 100 - 20 - 0.2 \approx 79.8$ m

ซึ่งจะเห็นได้ว่าการสูญเสียสูงหัวความเร็ว (dynamic head) มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับการสูญเสียจากความฝืด (0.2 เทียบกับ 20) ดังนั้นกังหันมีประสิทธิภาพในการดูดซับงานจากพลังงานศักย์ (สูงหัว) ของน้ำที่ 79.8% (จากระดับของสูงหัวน้ำ 100 m) กำลังทั้งหมดที่ผลิตได้อาจหาค่าได้จากสมการความสัมพันธ์กับอัตราการไหลของน้ำดังนี้

$$\mathrm{P} = \dot{m}w_s = (\rho Q)(gh_t) = (998\ \mathrm{kg/m^3})(30\ \mathrm{m^3/s})(9.81\ \mathrm{m/s^2})(79.8\ \mathrm{m})$$

$$= 23.4\times10^6\ \mathrm{kg{\cdot}m^2/s^3} = 23.4\times10^6\ \mathrm{N{\cdot}m/s} = 23.4\ \mathrm{MW}$$ ***ตอบ***

วิจารณ์โจทย์

1) การขับเคลื่อนเครื่องกำเนิดไฟฟ้าโดยกังหัน จะมีการสูญเสียอีกประมาณ 15% ดังนั้นกำลังสุทธิที่ผลิตขึ้นมาโดยโรงไฟฟ้าพลังน้ำจะอยู่ที่ประมาณ 20 MW

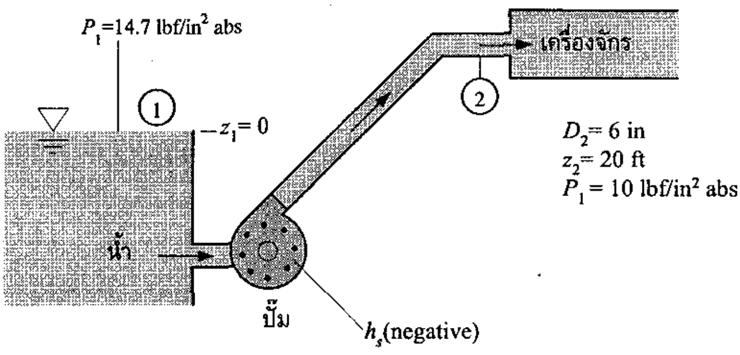
2) สมการสุดท้ายนี้ควรต้องจำให้ได้เพราะในการคำนวณเบื้องต้นได้งานออกมาในหน่วยของสูงหัว แต่สุดท้ายต้องปรับให้อยู่ในหน่วยของกำลังงาน ด้วยการคูณกลับด้วย $\dot{m}g$ เพราะว่าเราได้หารด้วยในตอนแรกเพื่อเปลี่ยนจากรูปของพลังงานให้มาเป็นสูงหัว ในตอนท้ายจึงตอนคูณกลับคืนเท่านั้นเอง

ตัวอย่าง 3.10 ปั๊มน้ำ ดังรูป ส่งน้ำ (62.4 lbf/ft^3) ที่อัตรา 3 ft^3/s ไปยังเครื่องยนต์ที่หน้าตัด 2 ซึ่งอยู่สูงจากแหล่งน้ำ 20 ft ท่อขนาด 3 in และความดันที่ 10 lbf/in^2 การสูญเสียระหว่างจุดที่ 1 และ 2 มีค่า $h_f = KV_2^2/(2g)$ โดยที่ $K \approx 7.5$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการสูญเสีย จงหาแรงม้าที่ต้องให้แก่ปั๊มเพื่อให้ทำงานที่กำหนดได้ ถ้าประสิทธิภาพของปั๊มอยู่ที่ 80%

หลักการทำ

1) การทำงานของอุปกรณ์ในกรณีตรงกันข้ามกับตัวอย่างที่แล้ว เพราะในตัวอย่างที่แล้วได้งานจากระบบ (เทอร์ไบน์) ในคราวนี้ต้องใส่งานเข้าระบบ (ปั๊ม) ซึ่งต้องมีค่าเป็นลบ (ตามข้อกำหนดของสังคม)
2) จุดเริ่มต้นการคำนวณในปัญหาลักษณะนี้ควรอยู่ที่ผิวน้ำ หากใช้จุดเริ่มต้นเป็นที่ตรงทางเข้าของปั๊มจะทำให้การคำนวณยุ่งยากมากขึ้น (ผู้ศึกษาอาจลองทำปัญหานี้โดยใช้กรณีหลังดู) ในกรณีที่แหล่งเก็บน้ำมีขนาดใหญ่มาก จะอนุมานให้ $V_1 \approx 0$ (ซึ่งเกิดความคลาดเคลื่อนน้อยมาก)
3) ใช้สมการพลังงาน (กล) กับ สมการอนุรักษ์มวล เป็นหลักในการหาคำตอบ

วิธีทำ



รูป ต3.10

หากพิจารณาสมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_s+h_f$$

จะเห็นว่ารู้ค่าทุกค่ายกเว้น V_2 เพราะหากทราบ V_2 ก็จะทราบ h_f ด้วยโดยปริยาย

สามารถคำนวณหา V_2 จากสมการอัตราการไหลและขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางท่อที่ให้มา

$$V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{3\,\text{ft}^3/\text{s}}{(\pi/4)\left(\frac{3}{12}\,\text{ft}\right)^2}=61.1\ \text{ft/s}$$

สมการพลังงานของการไหลแบบคงตัว กลายเป็น

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_s+h_f \tag{3.105}$$

เมื่อ $V_1\approx 0, z_1=0,$ และ $h_f=KV_2^2/(2g)$ อาจจะหาสูงหัวปั๊มได้จาก

$$h_s=\frac{P_1-P_2}{\gamma}-z_2-(1+K)\left(\frac{V_2^2}{2g}\right) \tag{3.106}$$

$$h_s=\frac{(14.7-10.1)(144)\,\text{lbf/ft}^2}{62.4\,\text{lbf/ft}^3}-20\text{ft}-(1.0+7.5)\frac{(61.1\,\text{ft/s})^2}{2(32.2\,\text{ft/s}^2)}$$

$$=11-20-497=-506\ \text{ft}$$

สูงหัวปั๊มที่ได้มีค่าเป็นลบ เนื่องจากเป็นงานที่กระทำต่อของไหล (กำหนดเครื่องหมายตามกฎของสังคม) กำลังของปั๊มที่จะต้องใช้ส่งน้ำขึ้นไปคำนวณได้จาก

$$\mathbf{P} = \dot{m}w_s = (\rho Q)(gh_s) = (1.94\ \text{slug/ft}^3)(3.0\ \text{ft}^3\text{/s})(32.2\ \text{ft/s}^2)(-507\ \text{ft}) = -94{,}900\ \text{ft}\cdot\text{lbf/s}$$

หรือ
$$\text{hp} = \frac{94{,}900\text{ft}\cdot\text{lbf/s}}{550\text{ft}\cdot\text{lbf}/(\text{s}\cdot\text{hp})} \approx 173\,\text{hp}$$

ถ้าปั๊มมีประสิทธิภาพ 80% กำลังงานที่ต้องป้อนให้กับปั๊มมีค่าเท่ากับ

$$\mathbf{P}_{input} = \frac{\mathbf{P}}{efficiency} = \frac{173\,\text{hp}}{0.8} \approx 216\,\text{hp}$$ ***ตอบ***

3.7 สมการเบอร์นูลลี (Bernoulli's Equation)

ชื่อของสมการตั้งให้เป็นเกียรติยศแก่ท่าน Daniel Bernoulli วิศวกรชาวสวิส (คศ. 1700–1782) ซึ่งเป็นผู้สร้างสมการนี้ขึ้นเป็นคนแรก สมการนี้มีบทบาทมากในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลเบื้องต้น แต่ตำราส่วนใหญ่มักไม่ได้กำหนดบทบาทและสถานภาพของสมการนี้ให้เป็นที่แน่ชัด ในที่นี้จะพยายามกำหนดบทบาทและสถานะให้เด่นชัดยิ่งขึ้น เพื่อผู้ศึกษาจะได้มีความมั่นใจในการใช้สมการนี้ว่าจะใช้ที่ไหน เมื่อไร และอย่างไร

การสร้างสมการเบอร์นูลลี สามารถกระทำได้อย่างน้อยสามกรรมวิธีด้วยกัน คือ

1) โดยการบัญญัติขึ้นมาเป็นกฎธรรมชาติอย่างหนึ่ง
2) โดยการอินทีเกรตสมการโมเมนตัมเชิงเส้นไปบนเส้นแนวการไหล และ
3) โดยการลดรูปสมการอนุรักษ์พลังงาน

3.7.1 การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการบัญญัติ

วิธีแรกนี้เป็นกรรมวิธีที่ผู้แต่งไม่เคยพบที่ใดมาก่อน แต่ผู้แต่งเห็นว่าเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด เพราะใช้บัญญัติเอาโดยวิศวกรญาณ (engineering intuition) จึงขอนำเสนอไว้ ณ ที่นี้ (ถูกผิดประการใดโปรดช่วยกันวิจารณ์ต่อไป) อาจเริ่มต้นแนวคิดที่การวิเคราะห์กระบวนการที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal process) เช่น การไหลของน้ำหรืออากาศที่ความเร็วและอุณหภูมิต่ำ (ซึ่งเป็นการไหลส่วนใหญ่ทางวิศวกรรม) จึงพิจารณาได้ว่ากระบวนการนี้เป็นกระบวนการที่มีพลังงานความร้อนคงตัว เพราะพลังงานความร้อนขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น และหากตระหนักว่าพลังงานมวลรวมของก้อนวัตถุนั้นสามารถแบ่งออกเป็นสองประเภทใหญ่ ๆ คือพลังความร้อน (thermal energy) และพลังงานกล (mechanical energy) ดังนั้นโดยกฎอนุรักษ์พลังงานเมื่อพลังงานความ

ร้อนมีค่าคงตัว พลังงานกลของกระบวนการย่อมต้องอนุรักษ์ (คือมีค่าคงที่ตลอดกระบวนการ) ดังนั้น จึงอาจบัญญัติเป็นกฎธรรมชาติ (และอาจ เรียกว่า "กฎการอนุรักษ์พลังงานกล") ได้ดังนี้

"ในกรณีที่การไหลเป็นระบบอุณหภูมิคงตัว พลังงานกลของระบบย่อมอนุรักษ์"

แต่พลังงานกลมีอยู่สามรูปแบบคือ 1) พลังงานที่อยู่ในรูปของความดัน (pressure) 2) พลังงานที่อยู่ในรูปของพลังงานจลน์ (kinetic energy) และ 3) พลังงานในรูปของแรงโน้มถ่วงหรืออีกนัยหนึ่งพลังงานศักย์ (potential energy) ผลรวมของพลังงานกลทั้งสามรูปแบบนี้จะต้องมีค่าคงตัวตลอดกระบวนการ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$P + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g h = C \tag{3.107}$$

พึงสังเกตว่าความดันนั้นจัดเป็นพลังงานรูปหนึ่ง และอาจอนุโลมจัดเป็นพลังงานศักย์ได้เพราะจากประสบการณ์เราเห็นว่าสิ่งใดที่มีแรงดันก็มีศักยภาพในการทำงานเสมอ เช่น แรงดันในกระบอกสูบรถยนต์ที่สามารถดันลูกสูบให้เคลื่อนตัวและนำไปต่อกลไกการทำงานให้รถยนต์เคลื่อนตัวได้ในที่สุด แต่หากมองอย่างละเอียดถึงระดับโมเลกุลจะเห็นว่าแรงดันนั้นแท้จริงแล้วเป็นเพียงปลายเหตุ ต้นเหตุอยู่ที่โมเมนตัม (ความเร็วหรืออีกนัยหนึ่งพลังงานจลน์) ของโมเลกุลที่วิ่งเข้าชนพื้นที่ผิวของภาชนะที่บรรจุของไหล การวิ่งชนแล้วสะท้อนกลับเป็นการเปลี่ยนโมเมนตัมจึงต้องมีแรงกระทำต่อผนังตามกฎข้อที่สองของนิวตัน แรงกระทำที่ผนังต่อหน่วยพื้นที่ก็คือความดันนั่นเอง (ดูคำอธิบายเกี่ยวกับแรงดันในบทที่ 2)

ได้ยอมรับการสมมติฐานตั้งแต่แรกแล้วว่าไม่มีการเปลี่ยนอุณหภูมิ ซึ่งบ่งบอกโดยอ้อมว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นด้วย เพราะความหนาแน่นของของไหลที่ความเร็วต่ำกว่าเสียงมาก ๆ นั้น (ซึ่งของไหลส่วนใหญ่จะเป็นเช่นนี้) จะเปลี่ยนเมื่อมีการเปลี่ยนอุณหภูมิเท่านั้น (เนื่องจากความดันเปลี่ยนไม่มาก ดังที่ได้พิสูจน์ไว้แล้วในบทที่ 1) ดังนั้นในชั้นนี้จะสมมติว่าความหนาแน่นคงตัว หากเอาความหนาแน่น ρ และค่าความเร่งโน้มถ่วง g หารตลอด ($\rho g = \gamma$) และคิดระหว่างจุดสองจุดที่กระบวนการเปลี่ยนแปลงไป (คือจุดสองจุดใด ๆ ที่เราเฝ้าดูการไหลอยู่) จะได้รูปแบบสมการดังนี้

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 \tag{3.108}$$

ซึ่งเป็นรูปแบบของสมการเบอร์นูลลีที่มีหน่วยเป็นสูงหัว (head) อย่าลืมว่าสมการในรูปแบบนี้สามารถประยุกต์ใช้ได้ ณ สองจุด "ใด ๆ " ซึ่งอาจจะเป็นระหว่างจุดหนึ่งกับจุดสาม หรือจุดสองกับจุดสามก็ได้

ตำรากลศาสตร์ของไหลเบื้องต้นบางเล่มนำสมการเบอร์นูลลีไปใช้วิเคราะห์ปัญหาอย่างกว้างขวางโดยไม่มีการอ้างถึงที่มาและข้อจำกัด ซึ่งนับว่าไม่เหมาะสมอย่างยิ่ง ในที่นี้เราได้แนวทางว่าแท้จริงแล้วสมการนี้ก็คือสมการอนุรักษ์พลังงาน (กล) ของกระบวนการนั่นเอง ดังนั้นกระบวนการที่สามารถนำสมการนี้ไปใช้ได้ต้องมีสมมติฐานคือ 1) ไม่มีการส่งผ่านความร้อน (heat transfer) ทั้งโดยตรงและโดยอ้อม และ 2) จะต้องไม่มีงานส่งผ่าน (work transfer) เข้าออกด้วย (เพราะงานย่อมเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานกลและพลังงานความร้อนได้เสมอ)

คำว่า "โดยอ้อม" มีนัยสำคัญที่ละเอียดอ่อนและยากต่อการคำนึงอยู่ประการหนึ่งคือ ในกรณีที่มีความฝืด (friction) เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย (ผ่านกระบวนการของความหนืด) สมการเบอร์นูลลีก็ไม่อาจใช้ได้เพราะความฝืดทำหน้าที่เปลี่ยนพลังงานกลเป็นพลังงานความร้อน และความร้อนนี้ส่วนหนึ่งจะถูกถ่ายเทออกให้แก่สิ่งแวดล้อม อย่างไรก็ดีแม้ข้อจำกัดต่าง ๆ จะไม่ถูกต้องตามข้อกำหนดทุกประการ ก็ยังสามารถนำสมการเบอร์นูลลีไปประยุกต์ใช้ได้หากผู้ใช้มีความชำนาญและตระหนักว่าค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอยู่ในปริมาณที่ยอมรับได้ ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของวิศวกรผู้ใช้สมการ

3.7.2 การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการอินทีเกรตสมการโมเมนตัมเชิงเส้น

ในการสร้างสมการเบอร์นูลลีแบบที่สอง สร้างโดยการอินทีเกรตสมการโมเมนตัมเชิงเส้น (ที่ไม่คิดความฝืด) ไปบนเส้นแนวการไหล (streamline) ซึ่งการอินทีเกรตนี้ต้องคำนึงด้วยว่าสมการโมเมนตัมเป็นสมการเวคเตอร์ จึงต้องทำการดอทเวคเตอร์เข้ากับเวคเตอร์ของระยะทางการเคลื่อนที่เสียก่อนเพื่อทำให้เป็นปริมาณสเกลาร์ ก่อนที่จะทำการอินทีเกรตต่อไป ดังนี้

$$\int \frac{d(M\bar{V})}{dt} \cdot d\bar{S} = \int \bar{F} \cdot d\bar{S} \tag{3.109}$$

แต่การอินทีเกรตนี้มีความยุ่งยากซับซ้อนพอสมควรเพราะก่อนอื่นต้องสร้างสมการโมเมนตัมเชิงเส้นในรูปของสมการอนุพันธ์ (differential equation) ให้ได้เสียก่อน ซึ่งการสร้างสมการในรูปแบบอนุพันธ์ไม่อยู่ในกรอบของกลศาสตร์ของไหลเบื้องต้นของบทเรียนนี้ จึงจะไม่นำมาแจงรายละเอียด ณ ที่นี้ ผู้ศึกษาที่สนใจอาจหาอ่านได้จากตำราทางกลศาตร์ของไหลระดับกลางทั่วไป

การตีความสมการเบอร์นูลลีที่สร้างขึ้นโดยวิธีนี้ค่อนข้างยุ่งยาก แต่หากพิจารณาให้ดีก็จะเห็นว่าทางขวามือเป็นงานอันเนื่องจากแรงที่กระทำไปเป็นระยะทาง ds (ซึ่งได้รับการอินทีเกรตตลอดแนวแล้ว) และแรงนี้เป็นแรงอันเนื่องมาจากแรงดันและแรงโน้มถ่วง (โดยไม่มีแรงเสียดทานเพราะไม่คิดความฝืด) งานที่ได้จึงเปลี่ยนรูปและสะสมอยู่ในรูปของพลังงานศักย์อันเนื่องจากแรงดันและแรงโน้มถ่วงตามลำดับ (เพราะได้สมมติว่าไม่มีความฝืด) ส่วนทางด้านซ้ายมือ หากย้ายอนุพันธ์ของเวลาไปหารอนุพันธ์ของระยะทางก็จะได้ความเร็ว จึงสามารถเขียนสมการเสียใหม่ได้ว่า

$$\int \frac{d(M\bar{V})}{dt} \cdot d\bar{S} = \int (d(M\bar{V})) \cdot \bar{V} \tag{3.110}$$

ซึ่งเมื่อมวล M มีค่าคงตัวก็สามารถดึงออกจากเครื่องหมายอินทีเกรตแล้วอินทีเกรตได้ค่าออกมาเป็น $\frac{MV^2}{2}$ ซึ่งก็คือพลังงานจลน์นั่นเอง เมื่อรวมทั้งสามพจน์เข้าด้วยกันก็จะได้สมการเบอร์นูลลีและสามารถจะตีความได้ในทำนองเดียวกันกับวิธีแรก

เป็นที่น่าสนใจว่าวิธีนี้แม้จะมีความยุ่งยากในเชิงคณิตศาสตร์และมีความยุ่งยากในการตีความ แต่กลับเป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากที่สุดในตำรากลศาสตร์ของไหลที่แพร่หลายกันอยู่ในอารยประเทศ

3.7.3 การสร้างสมการเบอร์นูลลีโดยการลดรูปจากสมการพลังงาน

การสร้างแบบที่สามเป็นการลดรูปสมการอนุรักษ์พลังงานแบบเต็มรูปแบบลงมา ซึ่งสมการพลังงานเต็มรูปแบบสามารถเขียนได้ดังนี้

$$q - w_s - w_{fr} = \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh\right)_{out} - \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gh\right)_{in}$$

หากเป็นระบบที่อุณหภูมิคงที่ (ดังนั้น $u_1 = u_2$) และไม่มีงาน ($w_s = 0$) ไม่มีแรงเสียดทาน ($w_{fr} = 0$) ดังนั้น

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_2 \qquad (3.111)$$

จากมุมมองนี้ก็จะไปพ้องกับการสร้างโดยวิธีบัญญัติ (วิธีแรก) ว่าสมการเบอร์นูลลีเป็นสมการอนุรักษ์พลังงานกลที่มีข้อจำกัดเชิงอุดมคติดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

การตีความในกรณีที่หนึ่งและสามได้ข้อสรุปว่าสมการเบอร์นูลลีเป็นสมการอนุรักษ์พลังงานกล และมีข้อจำกัดที่เหมือนกันคือ

1) ไม่นับความฝืด
2) ไม่มีการส่งผ่านความร้อน
3) ไม่มีงานเข้าหรือออกจากระบบ

ส่วนในการสร้างสมการตามกรณีที่สองนั้นไม่ค่อยกระจ่างแต่ก็พออนุโลมให้เป็นสมการอนุรักษ์พลังงานกลได้เช่นเดียวกันส่วนข้อจำกัดในกรณีที่สองนั้นผู้แต่งตำราส่วนใหญ่มักจะอ้างกันลอย ๆ โดยไม่มีเหตุผลที่แน่ชัด เช่นว่าห้ามไม่ให้มีการส่งผ่านความร้อน ทั้งที่สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นที่ถูกอินทีเกรตตั้งแต่เริ่มต้นนั้นเป็นสมการในรูปทั่วไปที่อาจมีการส่งผ่านความร้อนด้วยก็ได้ (เนื่องจากเป็นสมการของแรง ไม่ได้มีข้อจำกัดเรื่องความร้อน)

ประเด็นปัญหาอีกประเด็นหนึ่งที่ตำราส่วนใหญ่มักไม่ให้ความสนใจคือประเด็นปัญหาทางด้านสถานะภาพของสมการเบอร์นูลลี หากตีความว่าเป็นสมการอนุรักษ์พลังงานก็จะไม่มีปัญหาใด เพราะสมการจะมีศักดิ์ศรีเป็นสมการควบคุมหลักเทียบเท่ากับสมการอนุรักษ์มวลและอนุรักษ์โมเมนตัม แต่หากตีความว่าเป็นสมการที่ได้มาจากการอินทีเกรตโมเมนตัมไปบนเส้นแนวการไหล (ดังที่ตำราส่วนใหญ่นิยมกระทำกัน) ในทัศนะของผู้แต่งจะมีความยุ่งยากในการกำหนดสถานะพอสมควร เพราะในการแก้ปัญหาใด ๆ นั้นจะต้องมีจำนวนสมการอิสระเท่ากับจำนวนตัวแปรอิสระ คำถามคือ สมการเบอร์นูลลีที่ได้จากการอินทีเกรตสมการโมเมนตัมนี้เป็นสมการที่เป็นอิสระจากสมการโมเมนตัมหรือไม่ (ดูท่าว่าจะไม่ เพราะไม่ได้ข้อมูลอะไรใหม่ อุปมาดังการเอาสมการพีชคณิตสองสมการบวกกันแล้วได้สมการที่สาม สมการที่สามนี้ไม่ใช่สมการอิสระที่จะใช้แก้ปัญหาพีชคณิตในสามตัวแปรได้)

แต่ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลก็มีการใช้สมการโมเมนตัมร่วมกับสมการเบอร์นูลลีโดยทั้งคู่ต่างก็เป็นสมการควบคุมหลัก

ในความเห็นของผู้แต่ง ควรตีความสมการเบอร์นูลลีเป็นสมการอนุรักษ์พลังงาน (กล) แต่เพียงอย่างเดียว หากมีการถ่ายเทความร้อนและหรือมีงานเข้ามาเกี่ยวข้องก็ให้ใช้สมการอนุรักษ์พลังงานอย่างเต็มรูปแบบแทนสมการเบอร์นูลลี หากตีความดังนี้ผู้ใช้จะมีความมั่นใจมากขึ้นว่าสมการที่ใช้มีความเป็นอิสระแก่กัน

จากประสบการณ์ของผู้แต่ง สมการเบอร์นูลลีมักจะถูกใช้เป็นสมการ "หลัก" เพื่อหาความดัน แต่ในบางครั้งก็ใช้หาความเร็วหรือสูงหัว (head) ด้วย ซึ่งก็ไม่ใช่เรื่องแปลกอะไรเพราะจะเห็นว่าตัวแปรสามตัวในสมการก็คือ ความดัน ความเร็ว และสูงหัว แต่ในปัญหาลักษณะอื่น ๆ อาจใช้เป็นสมการ "รอง" รวม ๆ กับสมการอื่นเพื่อ "ปิดปัญหา" (closure) โดยมีหน้าที่ในการทำให้สมการอิสระมีจำนวนเท่ากับตัวแปรอิสระ ทั้งนี้โดยใช้ร่วมกับสมการอนุรักษ์มวลและอนุรักษ์โมเมนตัมในลักษณะที่เกี่ยวพันกัน (coupled)

แม้ตำราทั้งหลายจะไม่ได้ตระหนักในสถานะของสมการเบอร์นูลลีนัก แต่ผู้แต่งก็ไม่เคยพบว่ามีการใช้สมการเบอร์นูลลีร่วมกับสมการพลังงาน ซึ่งก็เป็นไปตามที่ได้ทำความกระจ่างไว้แต่ต้นแล้วว่า สมการพลังงานนั้นเป็นสมการเดียวกันกับสมการเบอร์นูลลีแต่มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากกว่า การที่จะให้โจทย์ปัญหาต้องถูกกำหนดด้วยสมการเดียวกันที่สมบูรณ์มากกกว่าและที่สมบูรณ์น้อยกว่าพร้อม ๆ กันเป็นสิ่งที่ไม่พึงกระทำ อุปมาเช่น หากบอกว่า นาย ก. เป็นคนที่มีขยันมาก และก็เป็นคนที่ขยันน้อย (ขี้เกียจ) พร้อม ๆ กัน จะเห็นว่าเป็นสิ่งที่ขัดแย้งกันอยู่ในตัวเอง จึงไม่อาจกำหนดลักษณะที่แท้จริงของนาย ก.ได้

สำหรับการวิเคราะห์เชิงวิศวกรรมของสมการนี้นั้นอาจวิเคราะห์ได้ว่า ที่สูงหัวเท่ากันหากความเร็วสูงขึ้นความดันต้องลดลง และในทางตรงกันข้ามหากความเร็วต่ำลงความดันต้องสูงขึ้น **หลักการนี้นับว่าเป็นหลักการที่สำคัญที่สุดอันหนึ่งในวิชากลศาสตร์ของไหล** ซึ่งเป็นจริง (ในเชิงคุณภาพ) เสมอแม้ในการไหลที่มีความฝืด (เพียงแต่ความถูกต้องเชิงปริมาณจะลดลง) ดังนั้นหากมีท่อท่อหนึ่งที่มีการลดหน้าตัดท่อลงจนเป็นคอคอดแล้วก็เพิ่มหน้าตัดท่อขึ้น (ท่อลู่เข้าบานออก) ซึ่งมักนิยมเรียกกันว่าท่อเวนทูรี (Venturi nozzle) หากมีการไหลของน้ำผ่านท่อนี้ ในการไหลที่ลู่เข้าความเร็วจะเพิ่มขึ้น (ตามหลักการของการอนุรักษ์มวล) ซึ่งทำให้ความดันลดลง (ตามหลักการของเบอร์นูลลี) ซึ่งเท่ากับว่ามีความดันช่วยส่งท้ายการไหลอยู่ (เรียกว่าความดันช่วยเหลือหรือ favorable pressure gradient) ส่วนในการไหลในช่วงบานออกหลักการจะเป็นตรงกันข้าม กล่าวคือความเร็วจะลดลง ความดันจะเพิ่มขึ้น ซึ่งทำให้เกิดความดันต่อต้าน (adverse pressure gradient) ความดันต่อต้านนี้หากสูงมากพอจะทำให้การไหลมีการหมุนวนกลับทางได้ ซึ่งมักเป็นสิ่งที่ไม่พึงประสงค์ในการออกแบบอุปกรณ์ทางวิศวกรรมส่วนใหญ่ (แต่ในบางอุปกรณ์กลับเป็นสิ่งที่พึงประสงค์) หลักการเบอร์นูลลีนี้อาจใช้อธิบายว่าเพราะเหตุใดจึงเกิดแรงยกตัวที่กระทำต่อปีกเครื่องบินได้ แต่ต้องจินตนาการให้เส้นแนวการไหล (streamline) ทำหน้าที่เสมือนผนังท่อที่มีการลู่เข้าหรือบานออกได้

จึงเห็นได้ว่าสมการเบอร์นูลลีนั้นนอกจากจะมีประโยชน์โดยตรงในการใช้คำนวณแล้ว ยังมีประโยชน์โดยอ้อมที่ช่วยให้ความกระจ่าง (เชิงคุณภาพ) ต่อการตีความปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทางกลศาสตร์ของไหลได้อีกมากมาย แต่การใช้สมการนี้ในการคำนวณและหรือช่วยในการตีความนั้นต้องมีความระมัดระวังสักหน่อย เพราะข้อจำกัดของสมการนี้มีมากพอสมควร

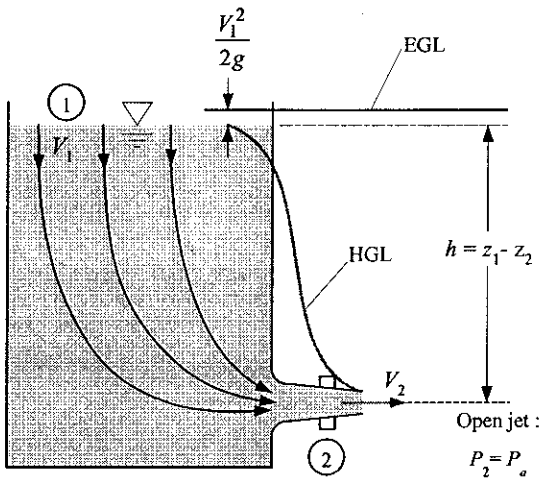
ตัวอย่าง 3.11 ให้หาความเร็วของน้ำที่หัวฉีด (V_2) เป็นฟังก์ชันของความสูงถังน้ำ h ดังแสดงในรูป สมมติว่าการไหลเป็นแบบคงตัว และปราศจากแรงเสียดทาน

หลักการทำ

1) การไหลนี้โดยแท้จริงแล้วมีความยุ่งยากซับซ้อนมากทีเดียว เพราะการไหลมีการเลี้ยวตัวมาก อาจมีการไหลวนย้อนกลับทางด้วยก็เป็นได้ โดยทั่วไปแล้วต้องเป็นการไหลแบบ 3 มิติ แต่ในที่นี้จะสมมติให้เป็นการไหลอย่างง่ายที่สุด กล่าวคือเป็นการไหลคงตัวแบบ 1 มิติที่ไม่มีความหนืด

2) เป็นการถ่ายเปลี่ยนรูปพลังงานศักย์ (ความสูง) จากจุด 1 มาเป็นพลังงานจลน์ที่ปลายท่อ (จุด 2) ไม่มีแรง งาน ความร้อน ความฝืด เข้ามาเกี่ยวข้อง จึงน่าจะใช้สมการเบอร์นูลลีเป็นสมการหลักในการคำนวณ

วิธีทำ



รูป ต3.11

สมการของเบอร์นูลลี :
$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2 \tag{3.112}$$

แต่ด้วยเหตุที่ว่า ทั้งหน้าตัด 1 และ 2 มีความดันเท่ากับบรรยากาศเพราะเปิดออกสู่บรรยากาศ จึงหักล้างกันหมดไป ที่เหลือคือ

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh \tag{3.113}$$

ซึ่งหากตั้งสมมุติฐานว่าถังมีขนาดใหญ่กว่าท่อมากก็อาจตัด V_1 ทิ้งไปได้และจะสามารถหาค่า V_2 ได้ทันที แต่หากไม่ต้องการใช้สมมติฐานนั้นก็จำเป็นต้องหาอีกสมการหนึ่งมา "ปิด" ระบบตัวแปร สมการนั้นคือ สมการอนุรักษ์มวลนั่นเอง

สมการอนุรักษ์มวล : $$A_1V_1 = A_2V_2 \tag{3.114}$$

โดยการใช้สมการอนุรักษ์มวลในสมการเบอร์นูลลี ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$V_2^2 = \frac{2gh}{1 - A_2^2/A_1^2} \tag{3.115}$$

ตอบ

พื้นที่หน้าตัดของปลายหัวฉีด จะมีค่าน้อยกว่าพื้นที่หน้าตัดของถังเก็บมาก ดังนั้นอัตราส่วนระหว่างพื้นที่หน้าตัดดังกล่าว จึงมีค่าน้อยกว่า 1 มาก จึงสามารถตัดทิ้งได้ ดังนั้น

$$V^2 \approx (2gh)^{1/2} \tag{3.116}$$

ตอบ

วิจารณ์โจทย์

1) สูตรความเร็วที่หาได้ในโจทย์ตัวอย่างนี้ ได้ถูกค้นพบโดย Evangelista Torricelli ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1644 ซึ่งสามารถเขียนได้เสียใหม่ว่า $\frac{\rho V^2}{2} = \rho gh$ ซึ่งมีความหมายว่า พลังงานศักย์ของน้ำที่ผิวน้ำ (ρgh) ถูกเปลี่ยนรูปมาเป็นพลังงานจลน์ $\left(\frac{\rho V^2}{2}\right)$ ที่จุด 2 จนหมดสิ้นอย่างสมบูรณ์ แต่ในทางเป็นจริงนั้นการไหลจะถูกหน่วงด้วยความฝืดด้วย ทำให้ความเร็วที่วัดได้จริงมีค่าน้อยกว่านี้

2) ในทางปฏิบัติวิศวกรนิยมคงรูปสมการทางทฤษฎีไว้แต่ใส่ค่าสัมประสิทธิ์การไหล (discharge coefficient, C_d) เข้าไปในสมการ ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = C_d(2gh)^{1/2} \tag{3.117}$$

โดยสัมประสิทธิ์การไหลมีค่าน้อยกว่าหนึ่งเสมอ และส่วนใหญ่มีค่าประมาณ 0.6 – 1.0 โดยเป็นฟังก์ชันของภาวะการไหลและรูปร่างของหัวฉีด

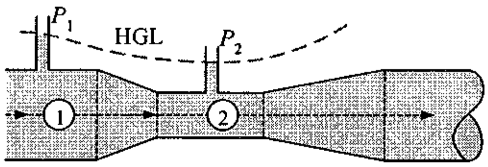
3) ความสัมพันธ์ที่ได้นี้จะเห็นว่ามีค่าเดียวกันกับการปล่อยให้วัตถุตกลงมาจากที่สูง h

4) จะเห็นว่าในการแก้ปัญหานี้ได้ใช้สมการอนุรักษ์มวลและสมการเบอร์นูลลี (อนุรักษ์พลังงานกล) แต่ไม่ได้ใช้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมเลย ทั้งนี้เพราะปัญหาไม่ได้เกี่ยวกับแรง การจะใช้สมการอะไรในการวิเคราะห์

ปัญหาและใช้ในรูปแบบใดนั้น เป็นความชำนาญที่วิศวกรพึงสร้างให้เกิดขึ้นอยู่ในวิศวกรญาณของตนอยู่ตลอดเวลา

ตัวอย่าง 3.12 ท่อที่มีคอคอด (เรียกว่า venturi tube) จะทำให้ความเร็วเพิ่มขึ้นและความดันลดลงตรงคอคอด (ดังที่บริเวณหน้าตัดที่ 2 ของรูป) อาจใช้ความแตกต่างของความดันระหว่างจุด 1 และ 2 เพื่อวัดหาอัตราการไหลได้ จงหาความสัมพันธ์ดังกล่าว

วิธีทำ



รูป ต3.12

สมการของเบอร์นูลลี: $$\frac{P_1}{\rho}+\frac{1}{2}V_1^2+gz_1=\frac{P_2}{\rho}+\frac{1}{2}V_2^2+gz_2 \tag{3.118}$$

เนื่องจากท่อวางอยู่ในแนวระนาบดังนั้น $z_1 = z_2$ จึงสามารถหา V_2 ได้ดังนี้

$$V_2^2 - V_1^2 = \frac{2\Delta P}{\rho} \qquad \text{, เมื่อ} \quad \Delta P = P_1 - P_2 \tag{3.119}$$

หากใช้สมการอนุรักษ์มวลสำหรับของไหลที่ไม่อัดตัว, $A_1V_1 = A_2V_2$ หรือ

$$V_1 = \beta^2 V_2{}^2 \qquad \beta = \frac{D_2}{D_1} \tag{3.120}$$

รวมสมการ (3.119) และ (3.120) เข้าด้วยกัน จะได้สูตรความเร็วตรงคอคอดดังนี้

$$V_2 = \left[\frac{2\Delta P}{\rho(1-\beta^4)}\right]^{1/2} \tag{3.121}$$

ซึ่งหากต้องการหาอัตราไหลมวลก็อาจใช้คำนิยามเขียนได้เป็น

$$\dot{m} = \rho A_2 V_2 = A_2\left(\frac{2\rho\,\Delta P}{1-\beta^4}\right)^{1/2} \tag{3.122}$$

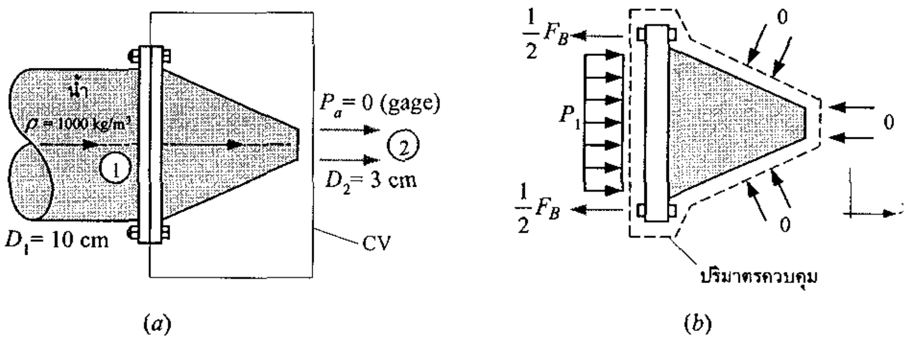
แต่นี่คืออัตราไหลมวลอุดมคติที่ไร้แรงเสียดทาน ในทางปฏิบัตินั้น $\dot{m}_{\text{actual}} = C_d \dot{m}_{\text{ideal}}$ เมื่อ C_d คือสัมประสิทธิ์การไหลที่มีค่าน้อยกว่า 1.0 ซึ่งหามาได้จากการทดลองวัดอัตราการไหลจริง

ตัวอย่าง 3.13 ท่อฉีดน้ำดับเพลิงมีเส้นผ่านศูนย์กลางท่อ 10 cm ที่ปลายท่อมีหัวฉีดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 cm น้ำไหลผ่านหัวฉีดออกสู่บรรยากาศ ด้วยอัตรา 1.5 m^3/min หากไม่คิดแรงเสียดทาน ให้หาแรงที่กระทำต่อน็อตยึดหน้าแปลนระหว่างหัวฉีดกับท่อ

หลักการทำ

ควรตั้งสมการหลักที่จะใช้หาตัวแปรให้ได้เสียก่อน ในที่นี้โจทย์ถามหาแรง จึงควรตระหนักโดยทันทีว่าสมการหลักในการนี้ควรเป็นสมการโมเมนตัม (เพราะเป็นสมการควบคุมเพียงสมการเดียวที่มีพจน์ของแรงอยู่ด้วย) จากนั้นทำการสร้างปริมาตรควบคุมรอบหัวฉีดโดยให้พผค.ตัดผ่านหน้าแปลนและหัวน็อตดังในรูป จึงต้องมีแรงยึดหัวน็อตและแรงดันปรากฏอยู่เพื่อทำให้ปริมาตรควบคุมอยู่ในสมดุลสถิตย์ ดังรูป จากรูปจะเห็นว่าได้ใช้ความดันเกจ (gage pressure) ทั้งนี้เพื่อความง่ายในการคำนวณดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทก่อน (สามารถตัดความดันบรรยากาศโดยรอบออกไปได้) ดังนั้นความดันโดยรอบพผค.จึงเป็นศูนย์ยกเว้นตรงช่องทางเข้าที่มีความดันเป็น P_1 (ซึ่งยังไม่ทราบค่า)

วิธีทำ



รูป ต3.13

สามารถเขียนสมการโมเมนตัมเชิงเส้น (สมการหลักของปัญหานี้) ได้ว่า

$$\Sigma\vec{F}_x = \dot{m}(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \tag{3.123}$$

จากปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปเห็นได้ว่า $\Sigma F_x = -F_B + P_1A_1$ ดังนั้น

$$-F_B + P_1A_1 = \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{3.124}$$

หรือ $$F_B = P_1A_1 - \dot{m}(V_2 - V_1) \tag{3.125}$$

(ผู้วิเคราะห์เป็นผู้กำหนดว่าจะให้ F_B ที่ยังไม่รู้ค่านี้มีทิศทางไปทางใด โดยจะให้ไปทางใดก็ได้คำตอบสุดท้ายที่ได้ต้องมีค่าเท่ากันเสมอ)

จากสมการ (3.125) จะเห็นว่าสามารถหาค่า $\dot{m}, V_2, V_1$ ได้โดยง่ายจากคำนิยามของอัตราการไหล $Q = AV$ $\dot{m} = \rho Q$ โดย $Q = 1.5$ m^3/min หรือ 0.025 m^3/s ดังนั้น

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.025\ \text{m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0.03\ \text{m})^2} = 35.4\ \text{m/s} \quad V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.025\ \text{m}^3/\text{s}}{(\pi/4)(0.1\ \text{m})^2} = 3.2\ \text{m/s}$$

จึงเหลือเพียงค่า P_1 ค่าเดียวที่ต้องการรู้ ก็จะทำให้หาค่าแรงได้ ซึ่งอาจหาได้จากสมการเบอร์นูลลี

$$P_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) \tag{3.126}$$

เนื่องจากปลายท่อเปิดออกสู่บรรยากาศและใช้ความดันเกจ ดังนั้น $P_2 = P_a = 0$ ดังนั้น สมการที่ (3.126) จะได้

$$P_1 = \tfrac{1}{2}(1{,}000\ \text{kg/m}^3)[(35.4^2 - 3.2^2)\ \text{m}^2/\text{s}^2]$$

$$= 620{,}000\ \text{kg/(m}\cdot\text{s}^2) = 620{,}000\ \text{Pa gage}$$

แทนค่าตัวเลขทั้งหมดลงในสมการ (3.125) จะได้

$$\dot{m} = \rho Q = (1{,}000\ \text{kg/m}^3)(0.025\ \text{m}^3/\text{s}) = 25\ \text{kg/s}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}D_1^2 = \frac{\pi}{4}(0.1\ \text{m})^2 = 0.00785\ \text{m}^2$$

$$F_B = (620{,}000\ \text{N/m}^2)(0.00785\ \text{m}^2) - (25\ \text{kg/s})[(35.4 - 3.2)\ \text{m/s}]$$

$$= 4872\ \text{N} - 805\ (\text{kg}\cdot\text{m})/\text{s}^2 = 4{,}067\ \text{N}\ (915\ \text{lbf})$$ **ตอบ**

วิจารณ์โจทย์

จากโจทย์นี้ได้ให้แนวคิดว่าทำไมจึงต้องใช้พนักงานดับเพลิงจำนวนหลายคนในการจับยึดท่อหัวฉีดเมื่อมีการฉีดน้ำดับเพลิง (เมื่อเปิดเต็มที่) และจากวิธีการทำโจทย์จะเห็นว่าการทำโจทย์อย่างเป็นระบบจะช่วยทำให้ไม่ไขว้เขว จากการทำตัวอย่างมาทั้งหมดจะสังเกตเห็นได้อยู่อย่างหนึ่งว่า อาจจะใช้หรือไม่ใช้สมการบางสมการในโจทย์บางประเภท แต่สำหรับสมการอนุรักษ์มวลจะถูกนำมาใช้เสมอในทุกปัญหา ดังนั้นในการวิเคราะห์ใด ๆ ไม่ควรลืมสมการควบคุมหลักที่ง่ายที่สุดนี้

3.8 Hydraulic Grade Line, Energy Grade Line และ Bernoulli Head

คำศัพท์ทั้งสามนี้เป็นคำศัพท์ที่ใช้กันบ่อยในแวดวงวิศวกร ทั้งนี้เพื่อความกระชับในการสนทนา คำทั้งสามนี้มีนิยามความหมายดังนี้

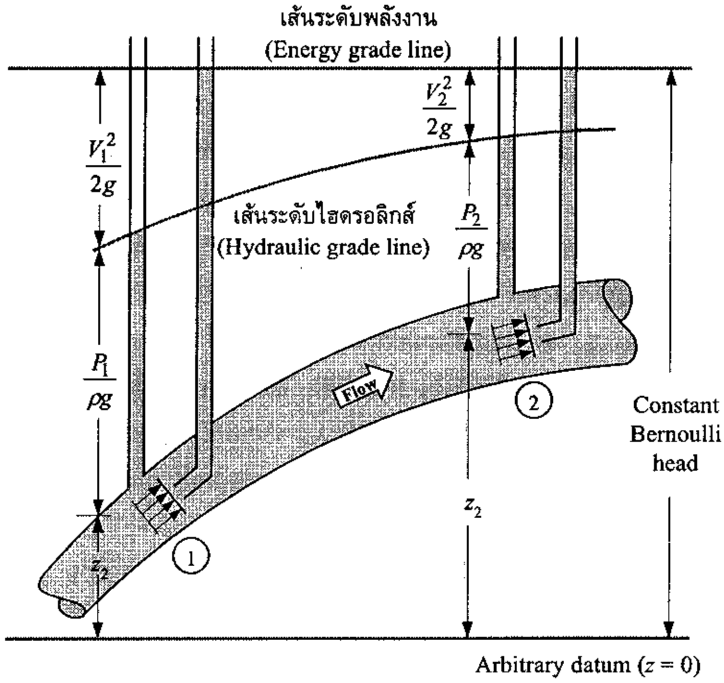
Hydraulic Grade Line (HGL) คือค่าตัวเลข $\frac{P}{\gamma}+h$ ซึ่งเป็นกลุ่มของพจน์ในสมการอนุรักษ์พลังงาน (หรือสมการเบอร์นูลลี) อาจกล่าวได้ว่าเป็นพลังงานศักย์ของของไหล

Energy Grade Line (EGL) คือค่าตัวเลข $\frac{P}{\gamma}+h+\frac{V^2}{2g}$ ซึ่งก็คือค่า HGL บวกด้วยสูงหัวความเร็ว (dynamic head) หรืออีกนัยหนึ่งก็คือพลังงานรวมของระบบนั่นเอง

Bernoulli Head คือค่าตัวเลข $\frac{P}{\gamma}+h+\frac{V^2}{2g}$ ซึ่งก็คือค่าเดียวกันกับ EGL แต่ในบางครั้งนิยมเรียกกันว่า Bernoulli head แล้วแต่ความนิยมของแต่ละคน บางท่านก็เรียกว่า Bernoulli constant (B) จึงอาจเขียนสมการเบอร์นูลลีได้ว่า

$B_1 = B_2$ หรือ $EGL_1 = EGL2$

ซึ่งอาจแสดงหลักการของคำนิยามให้กระจ่างได้มากขึ้นดังรูปข้างล่าง



รูป 3.7

จากรูปจะเห็นว่าสำหรับการไหลในท่อนั้นแม้ความเร็วจะมากขึ้นหรือลดลงจากการที่ท่อเรียวขึ้นหรือบานออกก็ตาม หากไม่มีการสูญเสียเนื่องจากความฝืดเสียแล้ว เส้นแนว EGL ย่อมสูงคงที่ แต่ HGL อาจสูงขึ้นหรือต่ำลงก็ได้กล่าวคือ หากความเร็วในท่อสูงขึ้น HGL ต้องต่ำลง (แม้ว่าท่อจะสูงขึ้นก็ตาม) และในทางกลับกันก็เป็นจริง แต่สำหรับการไหลที่คิดการสูญเสียเนื่องจากความฝืดด้วยนั้น EGL ต้องลดต่ำลงเสมอ ส่วน HGL อาจสูงขึ้นหรือต่ำลงก็ได้แล้วแต่สถานการณ์

ท้ายสุด ตำราบางเล่มเรียกสมการพลังงาน (กล) ที่มีพจน์ของงานและการสูญเสียรวมอยู่ในสมการด้วยว่า "สมการเบอร์นูลลีที่ปรับแปลง" (modified Bernoulli equation) ซึ่งผู้แต่งไม่เห็นด้วยเป็นอย่างยิ่ง เพราะเท่ากับว่ายกให้สมการเบอร์นูลลี (ซึ่งมีสถานะคลุมเครือ) มีสถานะสูงกว่าสมการอนุรักษ์พลังงาน หากต้องการตั้งชื่อทำนองนี้ควรเรียกสมการพลังงานว่า สมการพลังงานกล และเรียกสมการเบอร์นูลลีว่า "สมการพลังงานปรับแปลง" (modified mechanical energy equation) หรือ "สมการพลังงานกลเฉพาะกิจ" (particular mechanical energy equation)

3.9 การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ*

(* หัวข้อนี้เป็นหัวข้อเสริม ซึ่งอาจข้ามไปได้โดยไม่เสียความต่อเนื่อง)

จะเห็นว่าวิชากลศาสตร์ของไหลเป็นวิชาที่ค่อนข้างยาก เนื่องจากมีสมการควบคุมมาก คือมีทั้งสมการอนุรักษ์มวล อนุรักษ์พันธุมวล อนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น (ซึ่งอาจแตกออกเป็นสามสมการในทางแกน x y z) สม

การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม (ซึ่งก็อาจแตกออกเป็นสามสมการเช่นกัน) และสมการอนุรักษ์พลังงาน (ซึ่งอาจอยู่ในรูปของสมการเบอร์นูลลี) ในขณะที่วิชาอื่น ๆ ที่ว่ายากนั้นมีสมการอยู่ไม่กี่สมการเท่านั้น เช่น เทอร์โมไดนามิกส์ก็มีเพียงกฎข้อที่หนึ่ง (สมการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งเป็นสมการสเกลาร์) และกฎข้อที่สอง (สมการความสัมพันธ์ของเอนทรอปี) ส่วนกลศาสตร์วิศวกรรม 1 ก็มีเพียง สมการ $\sum F = 0, \sum M = 0$ กลศาสตร์วิศวกรรม 2 ก็มีสมการ $F = ma$ ในขณะที่กลศาสตร์วัสดุก็มีเพียง $\sigma = E\varepsilon$ และไฟฟ้าก็มี $E = IR$

การที่มีหลักการและสมการที่หลากหลายนี้ อาจทำให้ผู้วิเคราะห์สับสนได้ง่าย ดังนั้นการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลจึงควรต้องทำเป็นระบบพอสมควร ซึ่งจะทำให้ผู้ศึกษาไม่หลงทางมากนัก ผู้แต่งได้พยายามสังเกตและวางแนวทางในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลอย่างเป็นระบบ โดยไม่ขอยืนยันว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุดหรือเป็นวิธีที่เป็นระบบวิธีเดียว แต่อย่างน้อยผู้ศึกษาก็น่าจะได้ใช้เป็นหลักเบื้องต้น ซึ่งอาจจะนำไปปรุงแต่งให้ดีและเหมาะสมเฉพาะตนมากยิ่งขึ้นได้ นอกจากนี้ยังอาจนำเอาหลักการไปใช้ในการแก้ปัญหาในวิชาอื่นด้วยก็ได้ หลักการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบนี้ได้นำเสนอไว้พอสังเขปแล้วในการทำตัวอย่างที่ผ่านมา

การแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบควรทำเป็นขั้นตอนดังนี้

1. วิเคราะห์และลำดับออกมาเป็นเชิงคณิตศาสตร์ว่าโจทย์ถามอะไร และกำหนดให้อะไรมาบ้าง
2. วิเคราะห์ว่าต้องการหาตัวแปรหลักใด เพราะในกลศาสตร์ของไหลมีทั้งตัวแปรหลักและตัวแปรรอง

- ตัวแปรหลัก เช่น F, V, Temperature, Torque, P, ρ (ในกรณีของการไหลแบบอัดตัวได้)

- ตัวแปรรอง เช่น กำลังงาน (Power) ความเร็วรอบ (ω) อัตราการไหลมวล ($\dot{m}$) อัตราการไหลปริมาตร (Q) ความสูงของระดับมาโนมิเตอร์ เป็นต้น

บ่อยครั้งที่โจทย์ถามหาตัวแปรรอง ทำให้ผู้วิเคราะห์ไม่สามารถตั้งสมการหลักได้ เพราะไม่ทราบว่าต้องคำนวณหาตัวแปรหลักใดเพื่อนำไปสู่การหาตัวแปรรองที่โจทย์ถามได้ เช่น โจทย์อาจถามหาอัตราการไหลปริมาตร (Q) จึงอาจเริ่มต้นด้วยคำนิยามว่า $Q = AV$ แต่ A อาจเป็นพื้นที่ที่ทราบค่าแล้ว ดังนั้นแท้จริงแล้วโจทย์ถาม (โดยอ้อม) หา V ซึ่งนับเป็นตัวแปรหลักของระบบ

3. วิเคราะห์ว่าจะหาคำตอบให้ตัวแปรหลักโดยใช้สมการอะไรเป็นหลัก ผู้แต่งนิยมที่จะกำหนดสมการเป็นสามระดับคือ

3.1 สมการควบคุม (equation) เช่น สมการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม เบอร์นูลลี พลังงาน

***3.2* ความสัมพันธ์** (relation) เช่น สมการสถานะ (equation of state), $P = \rho g Q H$, $F = PA$, $\dot{m} = \rho A V$, $h = C_P \Delta T$

3.3 คำนิยาม (definition) เช่น $\rho \equiv \dfrac{1}{v}$, $V \equiv \dfrac{ds}{dt}$, $\text{S.G.} \equiv \dfrac{\rho}{\rho_{\text{water}}}$ เป็นต้น

จะเห็นว่าตัวแปรหลักนั้นเกี่ยวเนื่องอยู่กับสมการควบคุม ส่วนตัวแปรรองนั้นเกี่ยวเนื่องอยู่กับสมการความสัมพันธ์และสมการคำนิยาม ดังนั้นเมื่อทราบตัวแปรหลักของปัญหาแล้วก็จะสามารถตั้งสมการหลักที่จะใช้เป็นฐานในการแก้ปัญหาได้ต่อไป (ซึ่งสมการนี้ควรต้องเป็นสมการควบคุม)

สมการในระดับสมการควบคุมนั้นค่อนข้างจัดง่ายเพราะจะนับเฉพาะสมการควบคุมเท่านั้น แต่บางครั้งอาจจัดได้ลำบากกว่าอะไรอยู่ในระดับความสัมพันธ์และอะไรอยู่ในระดับคำนิยาม ซึ่งก็ไม่ได้ทำให้เกิดความยุ่งยาก

อะไร การแบ่งระดับก็เพียงเพื่อทำให้เกิดความเป็นระเบียบของการจัดหมวดหมู่เพิ่มขึ้นเท่านั้น ส่วนใหญ่แล้วสมการความสัมพันธ์และสมการคำนิยามนั้นเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรหลักและตัวแปรรอง หรือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรรองด้วยกันเอง

สมการควบคุมที่จะใช้เป็นบันไดขั้นแรกในการแก้ปัญหานี้ จะต้องมีค่าตัวแปรหลักที่โจทย์ถาม (โดยตรงหรือโดยอ้อม) ติดอยู่ด้วยเสมอ

4.วิเคราะห์ต่อไปว่าสมการหลักนั้นจบลงในตัวเองได้หรือไม่ การจบลงในตัวเองหมายความว่าสมการนั้นมีตัวแปรเพียงตัวเดียว (คือตัวแปรที่กำลังแสวงหาคำตอบ) ส่วนตัวแปรตัวอื่น ๆ สามารถกำหนดค่าตัวเลขได้หมดจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ หากสมการจบในตัวเองได้ก็จะได้คำตอบทันที แต่ส่วนใหญ่แล้วมักจะไม่เป็นเช่นนั้น กล่าวคือ ในสมการนั้นมีตัวแปรตัวอื่น ๆ ที่ยังไม่ทราบค่าปนอยู่ด้วย ซึ่งตัวแปร “อื่น ๆ ” นี้อาจเป็นตัวแปรหลักและหรือตัวแปรรองก็ได้

5. ดังนั้นจึงต้องถามต่อไปว่า จะสามารถสร้างสมการอื่น ๆ เพื่อหาค่าตัวแปรอื่นที่ไม่ทราบค่าเหล่านั้นได้หรือไม่ และอย่างไร ทั้งนี้โดยการใช้สมการอื่น ๆ ทั้งสามระดับที่ได้กล่าวไปแล้ว หากมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจากสมการหลักในขั้นแรกอีกสามตัว ก็ควรต้องสร้างสมการอื่น ๆ เพื่อหาค่าตัวแปรเหล่านั้นเพิ่ม (ในขั้นที่สอง) อีกสามสมการ และในการสร้างสมการในขั้นที่สองนี้ก็ต้องถามต่อไปว่า สมการในขั้นที่สองนี้สามารถกำหนดค่าตัวเลขให้กับตัวแปรในขั้นที่ 2 ได้หมดไหม หากกำหนดไม่ได้หมดก็มีทางเป็นไปได้ว่าสมการหลักในขั้นที่ 1 ที่ได้สร้างไว้อาจไม่เหมาะสม ต้องเลือกสมการหลักใหม่ แต่ก็มีความเป็นไปได้ว่าสมการในขั้นที่สองมีแววว่าจะกำหนดค่าให้กับตัวแปรได้ แต่ก็ยังติดค่าตัวแปรบางตัวในสมการในขั้นที่สอง จึงต้องหาสมการในขั้นที่สามเพื่อมากำหนดค่าตัวแปรในขั้นที่สองอีกต่อไป ทำเป็นขั้นตอนไปดังนี้จนกว่าจะกำหนดค่าตัวแปรได้ทั้งหมด ปัญหาการกำหนดตัวแปรเป็นขั้น ๆ นี้เรียกกันว่าปัญหา closure problem ซึ่งหมายความว่าจะปิด (close) ระบบสมการได้อย่างไร การปิดระบบสมการหมายความว่า จะต้องมีจำนวนสมการอิสระ (independent equation) เท่ากับจำนวนตัวแปร

3.10 สมการควบคุมแบบอนุพันธ์ (Differential Governing Equation)

การศึกษาวิเคราะห์ของไหลที่ผ่านมาเป็นการวิเคราะห์แบบภาพรวมที่เรียกกันว่าแบบปริพันธ์ ซึ่งนับว่าสามารถหาคำตอบอย่างถูกต้องสมบูรณ์ให้กับสมการควบคุมแบบประมาณการ ในการวิเคราะห์อีกระบบหนึ่งคือการวิเคราะห์ที่ละเอียดมากซึ่งตั้งต้นด้วยสมการควบคุมแบบอนุพันธ์ ระบบสมการนี้เป็นระบบสมการที่ยุ่งยากซับซ้อนมาก ซึ่งส่วนใหญ่ไม่สามารถจะหาคำตอบได้ จึงต้องใช้กรรมวิธีประมาณการเชิงตัวเลขและโดยการช่วยเหลือของคอมพิวเตอร์ ดังนั้นในการวิเคราะห์ระบบนี้จึงเป็นการหาคำตอบเชิงประมาณการให้กับระบบสมการที่มีความถูกต้องสูง จึงเห็นได้ว่าการศึกษาแบบระบบปริพันธ์และแบบอนุพันธ์นั้นมีข้อเด่นและข้อด้อยต่างกัน ซึ่งจะได้สรุปเป็นการเปรียบเทียบต่อไป

การวิเคราะห์ในระบบอนุพันธ์เริ่มต้นด้วยการสร้างสมการควบคุม ซึ่งสามารถสร้างได้ด้วยทฤษฎีและหลักการพื้นฐานทางฟิสิกส์เช่นเดียวกับการสร้างสมการควบคุมในระบบปริพันธ์ทุกประการ กล่าวคือ กฎอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน เพียงแต่ในคราวนี้ประยุกต์กฎต่างๆ เหล่านี้บนปริมาตรควบคุมแบบอนุพันธ์ ซึ่งมี

ขนาดเล็กมากจนกลายเป็นจุดจุดหนึ่งบนระบบพิกัดเท่านั้น สมการเหล่านี้สามารถประยุกต์ใช้ได้กับ"จุดใด ๆ"ในสนามของพิกัด แต่เป็นสมการอนุพันธ์แบบพาเชียลไม่เชิงเส้นที่มีความเกี่ยวพันกัน (coupled non-linear partial differential equations) จึงมีความยุ่งยากมากในเชิงคณิตศาสตร์

บทเรียนนี้ไม่ประสงค์จะศึกษาสมการระบบอนุพันธ์ในรายละเอียด ในที่นี้จึงจะเพียงให้หลักการและแนวคิดต่อผู้ศึกษาเท่านั้น เพื่อให้เกิดแนวคิดจะได้ทำการสร้างสมการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น ซึ่งนับว่าเป็นสมการที่สำคัญในระบบนี้ เริ่มต้นจากการประยุกต์กฎข้อที่สองของนิวตัน (ที่ได้บัญญัติเพิ่มเติมไว้แล้วเกี่ยวกับการไหลตัวเข้าออกของโมเมนตัมผ่านพื้นผิวควบคุม)

"อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมในปมค. ย่อมเท่ากับแรงที่กระทำต่อปมค. **บวกกับอัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค.ของโมเมนตัม"**

$$\frac{\partial(M\vec{V})_{CV}}{\partial t} = \vec{F}_{CV} - \oint_{c.s} \rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dA \tag{3.127}$$

ซึ่งคือสมการ (3.3) ของระบบปริพันธ์นั่นเอง เพียงแต่ได้ปรับแปลงพจน์อัตราสุทธิของการไหลเข้าปมค.ให้อยู่ในรูปของอินทีกราลรอบพผค. เท่านั้นเอง และนี้คือผลประโยชน์สำคัญของการบัญญัติกฎข้อที่สองของนิวตันเพิ่มเติม มิฉะนั้นจะต้องพิสูจน์ที่มาของพจน์นี้ด้วยทฤษฎีถ่ายเทของเรโนลด์ที่ยุ่งยากพอสมควร

สมมติว่าระบบพิกัดที่กำลังศึกษาเป็นระบบพิกัดฉาก (rectangle coordinates system) ดังนั้นปริมาตรควบคุมขนาดอนุพันธ์ คือ $dxdydz$ และมวล M ในปริมาตรนี้ย่อมคือ $\rho dxdydz$ ดังนั้น

$$\left[\frac{\partial(\rho\vec{V})_{CV}}{\partial t}\right]dxdydz + \oint_{c.s} \rho\vec{V}\vec{V}\cdot\vec{n}dA = \vec{F}_{CV} \tag{3.128}$$

โดยการใช้ Divergence theorem (ซึ่งบางครั้งเรียกว่า Gauss' Theorem) จากการศึกษาแคลคูลัสเชิงเวคเตอร์จะสามารถแปลงพจน์ที่สองทางซ้ายมือจากการอินทีเกรตบนพผค.ให้เป็นการอินทีเกรตตลอดปมค.ได้ ดังนั้น

$$\left[\frac{\partial(\rho\vec{V})_{CV}}{\partial t}\right]dxdydz + \left[\int_{CV} \vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V}\vec{V}dxdydz\right] = \vec{F}_{CV} \tag{3.129}$$

แต่การอินทีเกรตนี้เป็นการอินทีเกรตบนปมค.ที่มีขนาดเป็นอนุพันธ์อยู่แล้วจึงไม่จำเป็นต้องทำการอินทีเกรต กล่าวคือสามารถตัดเครื่องหมายอินทีเกรตทิ้งได้เลย (การอินทีเกรตคือการนำสิ่งเล็กๆ ขนาดอนุพันธ์มารวมกัน หากมีเพียงหน่วยเดียวก็ไม่ต้องนำไปรวมกับจำนวนใด) ดังนั้นหากหารตลอดด้วย $dxdydz$ และตัดตัวห้อย CV ออกเสียก็จะได้สมการ

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V}\vec{V}=\frac{\vec{F}}{dxdydz} \tag{3.130}$$

ซึ่งหากเขียนแรงที่กระทำต่อปมค.ทางขวามือ อย่างครบถ้วนก็จะได้สมการควบคุมอนุพันธ์ที่ต้องการ แรงนี้ประกอบด้วยแรงสองประเภท คือ

1) แรงที่กระทำต่อมวลในปมค. ซึ่งได้แก่แรงโน้มถ่วง
2) แรงที่กระทำต่อผิวปมค. ซึ่งแยกย่อยออกเป็น
   2.1 แรงตั้งฉาก ได้แก่ แรงดัน
   2.2 แรงขนาน ได้แก่แรงเฉือน

แรงโน้มถ่วงเป็นแรงทางกลศาสตร์ แรงดันเป็นแรงทางเทอร์โมไดนามิคส์ ส่วนแรงเฉือนอาจกล่าวได้ว่าเป็นแรงผสมผสานระหว่างกลศาสตร์กับคีนาแมติกส์ เพราะเกี่ยวโยงกับการบิดตัวทางรูปทรงของของไหล แรงเฉือนนับว่ามีความยุ่งยากในการกำหนดมากที่สุด โดยทั่วไปจะสมมติให้ของไหลเป็นของไหลแบบนิวโตเนียน ซึ่งหากเป็นการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ก็จะมีรูปแบบของความสัมพันธ์เป็น

$$\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

ซึ่งจัดว่าเป็นสมการความสัมพันธ์ในรูปเทนเซอร์ (tensor) ที่อาจเปลี่ยนตัวห้อยเป็นคู่ x, y, z ใดๆ ก็ได้ หลังจากนำความสัมพันธ์และคำนิยามต่างๆ แทนเข้าไปในสมการต้นแบบ จะได้สมการในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V}\vec{V}=-\vec{\nabla}P+\mu\nabla^2\vec{V}+\rho\vec{g} \tag{3.131}$$

ซึ่งนิยมเรียกกันว่าสมการนาเวียร์-สโตค (Navier-Stroke equations) แบบอัดตัวไม่ได้ เมื่อผนวกกับสมการอนุรักษ์มวลก็จะเป็นระบบสมการที่สามารถใช้วิเคราะห์การไหลแบบอนุพันธ์ได้ ซึ่งสมการอนุรักษ์มวลในระบบนี้สามารถสร้างได้โดยง่าย และได้รูปสมการเป็น

$$\oint_{CS}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}dA=0 \tag{3.132}$$

และหากทำการแปลงเป็นอินทีเกรตตลอดปมค. โดยใช้ Divergence Theorem ก็จะได้รูปแบบสมการอนุพันธ์เป็น

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0 \tag{3.133}$$

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วการหาผลเฉลยให้กับระบบสมการอนุพันธ์นี้มีความยุ่งยากมากที่สุด จนถึงกับได้รับการขนานนามจากนักฟิสิกส์ว่าเป็น The great unsolved problem in Physics (ดูอารัมภบท)

แต่นับตั้งแต่ประมาณปี ค.ศ. 1965 เป็นต้นมาได้เกิดวิทยาการแขนงใหม่ขึ้นในโลก คือ แขนงวิชากลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics หรือโดยย่อว่า CFD) ซึ่งกำเนิดขึ้นพร้อมกับการแพร่หลายของคอมพิวเตอร์ในวงการวิทยาศาสตร์และอุตสาหกรรม แขนงวิชานี้เป็นการนำเอาวิธีเชิงตัวเลขมาหาผลเฉลยให้กับสมการนาเวียร์สโตค เช่น โดยระบบ Finite Difference, ระบบ Finite Volume และระบบ Finite Element เป็นต้นเช่นเดียวกับระบบคอมพิวเตอร์ CFD ได้เจริญรุดหน้าอย่างรวดเร็ว ภายในเวลาเพียงประมาณ 20 ปี ก็นับได้ว่ามีความสมบูรณ์ถึงขีดสุด แต่ CFD มีข้อจำกัดอันสำคัญคือ คำตอบที่ได้เป็นคำตอบเชิงตัวเลขที่ไม่ได้ให้ความหมายในเชิงคุณภาพสักเท่าใดนัก อาจเปรียบได้กับยักษ์ที่มีกำลังมากแต่ไม่ค่อยมีความฉลาดสักเท่าใดนัก

ผู้แต่งนับว่าเป็นผู้มีโอกาสดีที่ได้ทำงานวิจัยกลศาสตร์ของไหลมาอย่างหลากหลายทั้งทางด้านทฤษฎี ด้านการคำนวณ ด้านการทดลอง และด้านการออกแบบ มาเป็นระยะเวลาประมาณ 20 ปี [ดูตัวอย่างงานวิจัยใน 5-6,15-29] จากการได้สัมผัสงานทุกด้านมาพอสมควรผู้แต่งมีความเห็นว่าวิศวกรควรใช้การวิเคราะห์ด้วยสมการเชิงปริพันธ์เป็นแกนนำในการออกแบบ โดยใช้การคำนวณเชิงตัวเลขแบบ CFD เพื่อเป็นการเสริมแต่งการออกแบบในรายละเอียด และหากจำเป็นอาจต้องทำการทดลองหุ่นจำลองหรือเครื่องต้นแบบด้วย ในการออกแบบเชิงวิศวกรรมนั้นหากสามารถทำการวิเคราะห์ได้ครบทุกรูปแบบดังกล่าวจะนับว่าเป็นการทำงานด้านวิศวกรรมศาสตร์ที่สมบูรณ์ครบถ้วนและน่าเชื่อถือยิ่ง แต่ด้วยเงื่อนไขต่างๆ เช่น เวลา และงบประมาณ วิศวกรอาจไม่สามารถทำการวิเคราะห์ได้ครบถ้วนทุกรูปแบบ (แม้หากมีความสามารถที่จะกระทำได้ก็ตาม)

เป็นที่น่าวิตกว่าปัจจุบันนี้วิศวกรกลศาสตร์ของไหลเป็นจำนวนมากขาดทักษะการวิเคราะห์เชิงปริพันธ์และการทดลอง แต่มีทักษะทางด้าน CFD ค่อนข้างสูง จึงน่าเป็นห่วงว่าวิศวกรในอนาคตจะเต็มไปด้วย"ยักษ์"ที่มีแต่กำลังเป็นหลัก เพราะการวิเคราะห์โดย CFD นั้นไม่ต้องการ"สมอง"เท่าใดนักเมื่อเทียบกับการวิเคราะห์เชิงทฤษฎี

3.11 สรุป

เนื้อหาในบทเรียนนี้นับว่าเป็นพื้นฐานทางทฤษฎีที่สำคัญที่สุดในการวิเคราะห์การไหลของของไหล ผู้ศึกษาพึงทำความเข้าใจอีกครั้งว่า เราได้ใช้กฎพื้นฐานทางฟิสิกส์ในการสร้างสมการควบคุมต่างๆ เพียงแต่ได้ปรับแปลงกฎพื้นฐานเล็กน้อยเพื่อให้สอดคล้องกับธรรมชาติของของไหล ในการวิเคราะห์ปัญหาใดๆ จะต้องใช้สมการควบคุมเสมอโดยอาจใช้เพียงบางสมการหรืออาจใช้ทุกสมการ สุดแล้วแต่สภาพของปัญหา บ่อยครั้งที่ต้องลดรูปสมการลงด้วยสมมติฐานต่างๆ เพื่อให้ง่ายต่อการหาผลเฉลย ในบทต่อๆ ไปจะได้นำเอาทฤษฎีเหล่านี้ไปประยุกต์เพื่อวิเคราะห์และออกแบบอุปกรณ์การไหลในเชิงวิศวกรรมศาสตร์ต่อไป ผู้ศึกษาพึงหมั่นสังเกตและสั่งสมประสบการณ์เพื่อใช้สมการควบคุมให้เหมาะสมต่อปัญหา อันจะนำมาซึ่งผลเฉลยที่ถูกต้องและเหมาะสม อนึ่งการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบที่ได้นำเสนอไว้ในบทนี้นับว่ามีความสำคัญยิ่ง ปัญหาที่ดูเหมือนยากๆ จะสามารถถูกแก้ได้โดยง่ายหากทำเป็นขั้นตอนอย่างเป็นระบบตามที่ได้เสนอไว้