# การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

**นายวัชพล โรจนรัตนางกูร**

**วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต**
**สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล**
**มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี**
**ปีการศึกษา 2551**

# DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOW IN A RECTANGULAR DUCT USING LATTICE BOLTZMANN METHOD

**Watchapon Rojanaratanangkule**

**Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering**

**Suranaree University of Technology**

**Academic Year 2008**

**การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า**
**โดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์**

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

______________________________
(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)
ประธานกรรมการ

______________________________
(รศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร)
กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

______________________________
(รศ. ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์)
กรรมการ

______________________________
(อ. ดร.กีรติ สุลักษณ์)
กรรมการ

| | |
|---|---|
| (ศ. ดร.ไพโรจน์ สัตยธรรม) | (รศ. น.อ. ดร.วรพจน์ ขำพิศ) |
| รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ | คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ |

วัชพล โรจนรัตนางกูร : การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (DIRECT NUMERICAL SIMULATION FOR TURBULENT FLOW IN A RECTANGULAR DUCT USING LATTICE BOLTZMANN METHOD) อาจารย์ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.เอกชัย จันทสาโร, 109 หน้า.

วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Lattice Boltzmann Method, LBM) เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการจำลองลักษณะการไหลของของไหล โดยหลักการ วิธีนี้จะใช้การเคลื่อนที่ (Streaming) และการชนกัน (Collision) ของอนุภาค (Particle) ตามหลักการของกฎอนุรักษ์มวลและกฎอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งวิธีนี้มีข้อได้เปรียบกว่าวิธีเชิงตัวเลขอื่น ๆ ที่ใช้ในการจำลองการไหลของของไหลตรงที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์ของวิธีนี้สามารถพัฒนาเพื่อทำการคำนวณแบบขนาน (Parallel Computing) ได้ค่อนข้างง่าย จึงทำให้ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณสำหรับการจำลองการไหลแบบปั่นป่วน และสามารถจัดการกับข้อมูลจำนวนมหาศาลได้ ซึ่งคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเพียงเครื่องเดียวจะใช้เวลานานในการคำนวณหรือในบางกรณีไม่สามารถคำนวณได้เลย งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและนำวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์มาใช้ในการจำลองการไหลแบบแบบปั่นป่วนที่ไม่สามารถอัดตัวได้ในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยจะเน้นที่การศึกษาถึงผลกระทบของค่า Aspect Ratio ที่มีต่อพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วน สำหรับการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนนั้น จะใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง (Direct Numerical Simulation, DNS) ส่วนโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นเขียนขึ้นด้วยภาษา Visual C++ และจะได้รับการตรวจสอบความถูกต้อง โดยการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง และผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนักศึกษา________________________

ปีการศึกษา 2551 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา__________________

WATCHAPON ROJANARATANANGKULE : DIRECT NUMERICAL SIMULATION FOR TURBULENT FLOW IN A RECTANGULAR DUCT USING LATTICE BOLTZMANN METHOD. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. EKACHAI JUNTASARO, Ph.D. 109 PP.

DNS/LBM/RECTANGULAR DUCT/TURBULENCE

Lattice Boltzmann method (LBM) is one of the numerical methods used to simulate the behavior of fluid flow. The concept of this method relies on the streaming and collision of particles with respect to the conservation laws of mass and momentum. LBM has some advantages compared to other numerical methods because the computer program of LBM can be readily developed for parallel computing, so that the computational time for the simulation of turbulent flow is reduced and the large data can be managed. If one personal computer is used, the computation is time-consuming or in some cases it cannot be computed. The objective of this research is to study and use the LBM for the simulation of incompressible turbulent flow in a rectangular duct by focusing on the effects of aspect ratio on turbulent flow. For turbulent flow, the direct numerical simulation (DNS) is employed. The computer program is developed on Visual C++ and validated by comparing the computed results with the analytical solution, experimental data and acceptable numerical solution.

School of Mechanical Engineering Student's Signature____________________

Academic Year 2008 Advisor's Signature____________________

# กิตติกรรมประกาศ


การศึกษาครั้งนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รศ. ดร.เอกชัย จันทสาโร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ความรู้ ความช่วยเหลือสนับสนุนเป็นอย่างดี ให้คำปรึกษาและชี้แนวทางในการทำวิจัย รวมทั้งเป็นกำลังใจและเป็นแบบอย่างที่ดีในการดำเนินชีวิตหลาย ๆ ด้านให้กับผู้วิจัยเสมอมา

ขอกราบขอบพระคุณ รศ. น.อ. ดร.วรพจน์ ขำพิศ คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ และ รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์ รองคณบดีฝ่ายวิชาการสำนักวิชาวิศกรรมศาสตร์ และหัวหน้าสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ที่ได้ให้ทั้งความรู้ในด้านวิชาการและให้โอกาสในการศึกษา

ขอกราบขอบพระคุณ รศ. ดร.ทวิช จิตรสมบูรณ์, ผศ. ดร.จิระพล ศรีเสริฐผล, อ. ดร. สมศักดิ์ ศิวดำรงพงศ์ และคณาจารย์ของสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่าน ที่ได้ให้ทั้งความรู้และมีส่วนช่วยผลักดันให้การวิจัยครั้งนี้ราบรื่นไปได้ด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ ดร.ศิโรจน์ ศิริทรัพย์ นักวิจัยที่ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กโทรนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ สำหรับคำแนะนำเกี่ยวกับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง รวมไปถึงได้ให้โปรแกรม NEKTAR มาใช้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้ในงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ อ. ดร.กีรติ สุลักษณ์ และ อ.เอกรงค์ สุขจิต สำหรับคำแนะนำเกี่ยวกับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ และขอขอบคุณ คุณเกียรติศักดิ์ เหงี่ยมสูงเนิน สำหรับคำแนะนำในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทำการคำนวณแบบขนาน

ขอขอบคุณ คุณอาภรณ์พรรณ ศรีอัครวิทยา และคุณทัศนีย์ ทิพย์สาคร ที่ได้ความช่วยเหลือด้านเอกสารต่าง ๆ และขอขอบคุณพี่น้องบัณฑิตศึกษาทุกท่าน ที่ให้คำปรึกษาด้านวิชาการและให้กำลังใจมาโดยตลอด

ขอขอบคุณศูนย์ไทยกริดแห่งชาติ และศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กโทรนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ ที่ได้ให้ความเอื้อเฟื้อเครื่องคลัสเตอร์คอมพิวเตอร์สำหรับการรันโปรแกรม

ขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านทั้งในอดีตและปัจจุบัน ที่ได้อบรมสั่งสอนให้ความรู้ และขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ที่ได้ให้การอบรมเลี้ยงดูและสนับสนุนด้านการศึกษาอย่างดีมาโดยตลอด

วัชพล โรจนรัตนางกูร

# สารบัญ

**หน้า**

# สารบัญ (ต่อ)

**หน้า**

# สารบัญ (ต่อ)

**หน้า**

# สารบัญตาราง

**ตารางที่** **หน้า**

# สารบัญรูป

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# สารบัญรูป (ต่อ)

**รูปที่** **หน้า**

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) เป็นการไหลประเภทหนึ่งซึ่งไม่สามารถคาดเดาถึงพฤติกรรมการไหลได้เนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงแบบสุ่มตลอดเวลา การไหลประเภทนี้เกิดขึ้นในธรรมชาติทั่ว ๆ ไป และในอุปกรณ์ต่าง ๆ ทางวิศวกรรม อาทิ ปั๊ม, คอมเพรสเซอร์ เป็นต้น การไหลแบบปั่นป่วนจะส่งผลกระทบหลายประการ เช่น การถ่ายเทความร้อนเพิ่มมากขึ้น, แรงที่กระทำมีค่าเพิ่มมากขึ้น เป็นต้น ดังนั้นจึงจำเป็นต้องศึกษาถึงพฤติกรรม และผลกระทบที่เกิดตามมาเมื่อเกิดการไหลแบบปั่นป่วนขึ้น โดยหลักการเราสามารถอธิบายพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนได้ด้วยสมการ Navier-Stokes แต่ในปัจจุบันยังไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับการไหลประเภทนี้ได้เนื่องจากความซับซ้อนของสมการ ดังนั้นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขจึงเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการอธิบายพฤติกรรมของการไหลประเภทนี้

สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD) นั้น ในปัจจุบันสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือ Continuum CFD และ Discrete CFD ซึ่งหลักการทำงานของวิธีประเภท Continuum CFD ประกอบด้วยสามขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำการกำหนดสมการที่ใช้สำหรับอธิบายพฤติกรรมของการไหลซึ่งจะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations, PDEs) เช่น สมการ Navier-Stokes เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 2 ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นให้เป็นสมการพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่าง ๆ เช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method), ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method), ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 3 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการพีชคณิตเหล่านั้น

อย่างไรก็ตาม วิธีประเภท Continuum CFD นั้นเมื่อแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิตแล้ว บางครั้งการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

รวมไปถึงการพัฒนาโปรแกรมเพื่อคำนวณแบบขนานอาจทำได้ยาก เนื่องจากตัวแปรนั้นจะถูกเก็บไว้ในรูปของเมตริกซ์และมีขนาดใหญ่เมื่อลักษณะของปัญหานั้นมีความซับซ้อน

วิธีประเภท Discrete CFD นั้นมีแนวคิดมาจากการเคลื่อนที่ (Streaming) และการชนกัน (Collision) ของอนุภาค (Particle) ตามหลักการของกฎอนุรักษ์มวลและกฎอนุรักษ์โมเมนตัม ซึ่งสมการเริ่มต้นของวิธีประเภทนี้จะอยู่ในรูปของสมการพีชคณิตอยู่แล้ว เช่น สมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Lattice Boltzmann Equation) เป็นต้น และค่าของตัวแปรที่ต้องการหาจากสมการประเภทนี้มีเพียงตัวเดียวคือค่า Single-Particle Probability Distribution Function ( $f_i$ ) ส่วนตัวแปรอื่น ๆ ได้แก่ ความเร็ว, ความหนาแน่น และความดันนั้นสามารถคำนวณหาได้จากค่า $f_i$ นี้ จึงทำให้การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการไหลด้วยวิธีประเภทนี้ง่ายกว่าวิธีประเภท Continuum CFD รวมไปถึงการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณแบบขนานทำได้ไม่ยากนักเนื่องจากตัวแปรที่ต้องมีการแลกเปลี่ยนค่านั้นมีเพียงตัวแปร $f_i$ เพียงตัวเดียว จึงทำให้วิธีประเภท Discrete CFD นั้นเริ่มได้รับความนิยมสำหรับการจำลองการไหลที่มีลักษณะซับซ้อนไม่ว่าจะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน, การไหลแบบหลายสถานะ (Multiphase Flow) หรือการไหลในวัสดุที่มีรูพรุน (Flow in Porous Media) เป็นต้น

ในส่วนของการจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ประเภทแรกจะทำการแก้สมการ Navier-Stokes เพื่อหาค่าความเร็วที่เวลาใด ๆ การจำลองเชิงตัวเลขแบบนี้ได้แก่การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง (Direct Numerical Simulation, DNS) ซึ่งเป็นการแก้สมการ Navier-Stokes โดยไม่ใช้แบบจำลองความปั่นป่วน (Turbulence Models) และ Large-Eddy Simulation (LES) ซึ่งเป็นการแก้สมการ Navier-Stokes โดยใช้แบบจำลองความปั่นป่วนช่วยในบางส่วนของโดเมน ส่วนอีกประเภทนั้นจะทำการแก้สมการที่เรียกว่า Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) เพื่อทำการหาค่าความเร็วเฉลี่ยซึ่งในการแก้สมการ RANS นั้นจะมีการใช้แบบจำลองความปั่นป่วน เช่น แบบจำลองความปั่นป่วน $k-\varepsilon$ เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ระเบียบวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Lattice Boltzmann Method, LBM) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ค่อนข้างใหม่สำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณและมีขั้นตอนในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ไม่ซับซ้อนมากนักเพื่อทำการศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะ (Aspect Ratio) ที่มีต่อพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า สำหรับการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนนั้นได้เลือกใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงเนื่องจากเป็นวิธีที่ได้รับการยอมรับว่าสามารถจำลองการไหลแบบปั่นป่วนได้ถูกต้องที่สุด รวมไปถึงยังสามารถตรวจสอบความถูกต้องของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ในการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนด้วย

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาและนำวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์มาใช้ในการจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนที่ไม่สามารถอัดตัวได้ในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะและค่าเลขเรย์โนลด์ที่มีต่อพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วน

## 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนที่ไม่สามารถอัดตัวได้ในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1 โดยกำหนดให้ค่าเลขเรย์โนลด์ซึ่งนิยามจากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงของท่อมีค่าเท่ากับ 205 และ 300 จากนั้นทำการเปลี่ยนค่าอัตราส่วนลักษณะให้มีค่ามากกว่า 1 อีกสองค่าเพื่อศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะที่มีต่อพฤติกรรมการไหล โดยใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงและวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ โดยค่าของตัวแปรต่าง ๆ จะปรากฏในหน่วยที่มีชื่อว่า Lattice Unit

## 1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า และเลือกใช้ระเบียบวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ค่อนข้างใหม่สำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ ดังนั้นเพื่อสร้างความน่าเชื่อถือของผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ จึงได้ทำการตรวจสอบผลการคำนวณที่ได้กับปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณโดยได้ทำการตรวจสอบกับทั้งปัญหาที่เป็นการไหลแบบราบเรียบและปัญหาที่เป็นการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ที่นำมาตรวจสอบนั้นอาจจะเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ หรือปัญหาที่มีข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หรือปัญหาที่มีผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ ทั้งนี้ปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ที่นิยมใช้มีดังนี้

1. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติ
2. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติ
3. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติ
4. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติ

5. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ
6. ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติ
7. ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ
8. ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติ
9. ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบพิกัดฉากสามมิติ

หลังจากทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์แล้ว จึงนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นลำดับต่อไป

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนที่ไม่สามารถอัดตัวได้ในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า

2. เข้าใจพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนภายในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าเมื่อมีการเปลี่ยนค่าอัตราส่วนลักษณะ

3. เข้าใจและสามารถใช้งานวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ได้

# บทที่ 2
# บริบทของการไหลแบบปั่นป่วน

การไหลแบบปั่นป่วนเป็นการไหลที่ยังไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้เนื่องจากความซับซ้อนของสมการควบคุมและความซับซ้อนของพฤติกรรม เนื้อหาในบทนี้จะไม่ลงรายละเอียดของการไหลแบบปั่นป่วนมากนัก โดยจะกล่าวถึงเฉพาะเนื้อหาในส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้เท่านั้น โดยในหัวข้อ 2.1 กล่าวถึงลักษณะของการไหลแบบปั่นป่วนรวมไปถึงสมการควบคุมและความเค้นของเรย์โนลด์, ในหัวข้อ 2.2 กล่าวถึงโครงสร้างที่เกิดจากการไหลแบบปั่นป่วนที่เรียกว่าการไหลรอง (Secondary Flow) และในหัวข้อ 2.3 กล่าวถึงการจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน และเน้นไปที่การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน

## 2.1 ลักษณะของการไหลแบบปั่นป่วน

โดยทั่วไปการไหลที่พบในชีวิตประจำวันและการไหลในอุปกรณ์ทางวิศวกรรมนั้นเป็นการไหลแบบปั่นป่วนแทบทั้งหมด ไม่ว่าจะเป็นปัญหาการไหลที่มีรูปร่างของปัญหาไม่ซับซ้อนมากนัก เช่น การไหลในท่อกลมหรือการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยม รวมไปถึงปัญหาการไหลที่มีรูปร่างของปัญหาซับซ้อน เช่น การไหลผ่านรถยนต์หรือการไหลผ่านปีกเครื่องบิน เป็นต้น การไหลแบบปั่นป่วนนั้นมีพฤติกรรมที่แตกต่างจากการไหลแบบราบเรียบอย่างสิ้นเชิง และยังไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่ออธิบายพฤติกรรมของการไหลประเภทนี้ได้ ซึ่งลักษณะหรือพฤติกรรมเด่นของการไหลแบบปั่นป่วนมีดังนี้ (Tennekes and Lumley, 1972)

1. การไหลแบบปั่นป่วนมีการเปลี่ยนแปลงแบบสุ่มตลอดเวลา พฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในข้อนี้เป็นพฤติกรรมที่เห็นได้เด่นชัดที่สุด ซึ่งจากพฤติกรรมข้อนี้เองทำให้การวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลแบบปั่นป่วนต้องทำในลักษณะของการหาค่าเฉลี่ยสำหรับตัวแปรต่าง ๆ เท่านั้น

2. การไหลแบบปั่นป่วนเป็นการไหลที่มีลักษณะแพร่กระจาย ซึ่งจากพฤติกรรมนี้ทำให้อัตราการถ่ายเทโมเมนตัม, อัตราการถ่ายเทความร้อน และอัตราการถ่ายเทมวลเพิ่มขึ้น รวมไปถึงช่วยเพิ่มความเร็วในการผสมของไหลหลายชนิดเข้าด้วยกันอีกด้วย

3. การไหลแบบปั่นป่วนเกิดขึ้นเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์สูงพอ โดยทั่วไปเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์ของการไหลสูงพอ ของไหลจะเปลี่ยนสถานะการไหลจากการไหลแบบราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนเนื่องจากการสูญเสียเสถียรภาพของการไหล ซึ่งค่าเลขเรย์โนลด์ที่ทำให้ของไหลเริ่มเปลี่ยนสถานะจากการไหลแบบราบเรียบไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะขึ้นอยู่กับรูปร่างของปัญหาที่พิจารณา และเรียกค่าเลขเรย์โนลด์ ณ ตำแหน่งนี้ว่า “ค่าเลขเรย์โนลด์วิกฤติ” (Critical Reynolds Number) โดยทั่วไปค่าเลขเรย์โนลด์วิกฤติสำหรับการไหลในท่ออยู่ที่ประมาณ 2300 ส่วนค่าเลขเรย์โนลด์วิกฤติสำหรับการไหลผ่านวัตถุอยู่ที่ประมาณ 500,000 (White, 2003)

4. การไหลแบบปั่นป่วนมีการเปลี่ยนแปลงการหมุนวนในสามมิติตลอดเวลา ซึ่งลักษณะการเคลื่อนที่ของความหมุนวนนี้ เป็นพฤติกรรมที่สำคัญในการอธิบายว่าการไหลนั้นเป็นการไหลแบบปั่นป่วนหรือไม่ เนื่องจากถ้าการไหลนั้นมีแค่การเปลี่ยนแปลงความเร็วในลักษณะสองมิติเพียงอย่างเดียว การไหลนั้นจะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลงการหมุนวนขึ้นและการไหลลักษณะนั้นจะไม่เป็นการไหลแบบปั่นป่วน

5. การไหลแบบปั่นป่วนมีการสูญเสียพลังงานอย่างสม่ำเสมอ การไหลแบบปั่นป่วนสูญเสียพลังงานเนื่องจากความหนืดของของไหล โดยจะทำการเปลี่ยนรูปพลังงานงานจลน์ที่ได้จากการไหลให้เป็นพลังงานภายในของของไหลเพื่อให้ของไหลสามารถเคลื่อนที่ได้ ดังนั้นการไหลแบบปั่นป่วนจึงต้องการพลังงานอย่างต่อเนื่องเพื่อป้องกันไม่ให้ความปั่นป่วนสลายตัว

6. การไหลแบบปั่นป่วนเป็นการไหลที่อยู่ในช่วงสารเนื้อต่อเนื่อง ในการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะมีขนาดของการหมุนวนอยู่หลายขนาด ซึ่งขนาดของการหมุนวนที่เล็กที่สุดนั้นจะใหญ่กว่าขนาดของโมเลกุล ดังนั้นพฤติกรรมต่าง ๆ ของการไหลแบบปั่นป่วนจึงเป็นไปตามสมการควบคุมของของไหล ซึ่งได้แก่สมการอนุรักษ์มวลและสมการอนุรักษ์โมเมนตัม

ในการอธิบายพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนสำหรับของไหลที่ไม่สามารถอัดตัวได้ สมการควบคุมประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวลและสมการ Navier-Stokes ซึ่งเขียนอยู่ในรูปเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (2\text{-}2)$$

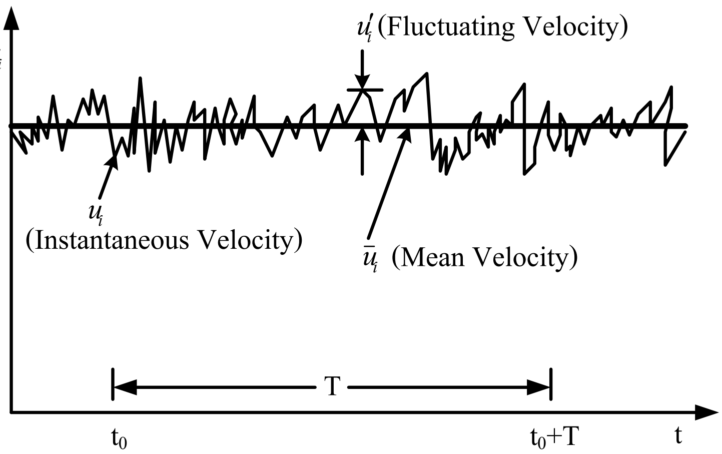
เมื่อ $u_i$ และ $p$ คือความเร็วและความดัน ณ เวลาใด ๆ ตามลำดับ, $\mu$ คือความหนืดพลวัต และ $\rho$ คือความหนาแน่น

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลแบบปั่นป่วนนั้น ส่วนใหญ่จะสนใจเฉพาะค่าเฉลี่ยของตัวแปรต่าง ๆ เท่านั้น ดังนั้น Reynolds (1894) จึงได้ทำการแยกความเร็ว ณ เวลาใด ๆ (Instantaneous Velocity) ออกเป็นสองส่วนคือส่วนของความเร็วเฉลี่ย (Mean Velocity) และส่วนของความเร็วปั่นป่วน (Fluctuating Velocity) ซึ่งเรียกว่าการแยกตัวประกอบของเรย์โนลด์ (Reynolds Decomposition) ดังนี้

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \tag{2-3}$$

เมื่อ $\bar{u}_i$ คือความเร็วเฉลี่ย และ $u_i'$ คือความเร็วปั่นป่วนและค่าเฉลี่ยของความเร็วปั่นป่วนจะต้องเท่ากับศูนย์

$$\overline{u_i'} = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} u_i'\, dt = 0 \tag{2-4}$$




รูปที่ 2.1 แสดงการแยกตัวประกอบของเรย์โนลด์ (Munson, Young & Okiishi, 2002)

จากนั้นทำการเปลี่ยนสมการ (2-1) และ (2-2) จากรูปสมการที่อยู่ในรูปของความเร็ว ณ เวลาใด ๆ ให้อยู่ในรูปของความเร็วเฉลี่ยได้ดังนี้

นำสมการ (2-3) ใส่ลงไปในสมการ (2-1) จะได้

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2-5}$$

ทำการหาค่าเฉลี่ยของสมการ (2-5) จะได้

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \text{ (เนื่องจาก } \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'} = 0 \text{)} \tag{2-6}$$

นำสมการ (2-6) ใส่ลงไปในสมการ (2-5) จะได้

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{2-7}$$

จากสมการ (2-6) และ (2-7) เห็นว่าทั้งความเร็วเฉลี่ยและความเร็วปั่นป่วนเป็นไปตามกฎอนุรักษ์มวล จากนั้นทำการหาสมการอนุรักษ์โมเมนตันที่อยู่ในรูปของความเร็วเฉลี่ยโดยนำสมการ (2-3) แทนลงไปในสมการ (2-2) และหาค่าเฉลี่ยจะได้

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2-8}$$

ซึ่งเทอม $\overline{u_i u_j}$ จะมีค่าเท่ากับ $\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u_i' u_j'}$ และจะได้สมการอนุรักษ์โมเมนตันที่อยู่ในรูปของความเร็วเฉลี่ยดังนี้

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \left(\bar{u}_i \bar{u}_j\right)}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho \left(\overline{u_i' u_j'}\right)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{2-9}$$

เรียกสมการ (2-9) ว่าสมการ Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) และสามารถเห็นได้ว่าสมการ RANS และสมการ Navier-Stokes นั้นมีความคล้ายคลึงกันยกเว้นตรงที่สมการ RANS นั้นมีเทอมเพิ่มขึ้นมาหนึ่งเทอมและเรียกเทอมนั้นว่าความเค้นของเรย์โนลด์ (Reynolds Stresses)

$$\tau_{ij} = -\rho\overline{u_i'u_j'} \tag{2-10}$$

ซึ่งความเค้นของเรย์โนลด์นั้นจะมีสมาชิกทั้งหมด 9 ตัว แต่เนื่องจากความเค้นของเรย์โนลด์นั้นเป็นเทนเซอร์ที่มีความสมมาตร ดังนั้นความเค้นของเรย์โนลด์จะเหลือทั้งหมด 6 ตัวโดยแบ่งเป็นความเค้นตั้งฉาก 3 ตัวและความเค้นเฉือนอีก 3 ตัว โดยเทอมความเค้นของเรย์โนลด์จะมีอิทธิพลต่อการไหลแบบปั่นป่วนค่อนข้างสูงเนื่องจากเป็นเทอมที่ช่วยให้การส่งผ่านโมเมนตัมของของไหลมีมากขึ้น ซึ่งในการไหลส่วนใหญ่ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์จะเป็นเทอมที่มีบทบาทสำคัญต่อการส่งผ่านโมเมนตันมากกว่าเทอมความเค้นตั้งฉากของเรย์โนลด์

จากการที่มีเทอมความเค้นของเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นมาจึงทำให้จำนวนตัวแปรในสมการ RANS นั้นมีมากกว่าจำนวนสมการ ดังนั้นในการแก้สมการ RANS นั้นจึงต้องใช้แบบจำลองความปั่นป่วนแบบต่าง ๆ มาช่วย อย่างไรก็ตามเนื่องจากงานวิจัยนี้ไม่ได้ทำการแก้สมการ RANS จึงไม่ขอลงรายละเอียดเกี่ยวกับแบบจำลองความปั่นป่วนและกระบวนการในการแก้สมการนี้

## 2.2 การไหลรอง

การไหลรอง (Secondary Flow) เป็นโครงสร้างที่มีลักษณะของการไหลหมุนวนโดยจะเกิดขึ้นในทิศทางที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหล โดยทั่วไปการไหลรองมีสองแบบคือการไหลรองแบบที่ 1 ของแพรนด์ทัล (Prandtl's First Kind of Secondary Flow) ซึ่งเกิดจากแรงหนีศูนย์กลางสำหรับการไหลในท่อโค้ง ซึ่งการไหลรองแบบนี้สามารถพบได้ทั้งในการไหลแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน โดยจะมีขนาดของความเร็วประมาณ 20-30% ของขนาดของความเร็วในทิศทางการไหล อย่างไรก็ตามเนื่องจากงานวิจัยนี้ไม่ได้สนใจการไหลรองแบบที่ 1 ดังนั้นจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดของการไหลรองชนิดนี้มากไปกว่านี้

สำหรับการไหลรองที่งานวิจัยนี้สนใจคือการไหลรองที่เรียกว่าการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (Prandtl's Second Kind of Secondary Flow) ซึ่งเกิดจากความเค้นของเรย์โนลด์ โดยการไหลรองประเภทนี้จะเกิดขึ้นในท่อที่มีหน้าตัดไม่ใช่วงกลมเท่านั้น และจะมีขนาดของความเร็วประมาณ 2-3% ของขนาดของความเร็วในทิศทางการไหลเท่านั้น ซึ่งผลกระทบจากการไหลรอง

ประเภทนี้คือทำให้แรงกระทำที่มุมผนังเพิ่มมากขึ้น เนื่องจากการไหลรองประเภทนี้จะช่วยส่งผ่านโมเมนตัมของของไหลไปที่มุมผนังมากขึ้น

การไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลนั้นไม่สามารถสร้างแบบจำลองความปั่นป่วนเพื่อที่จะจำลองพฤติกรรมได้ง่ายนัก เนื่องจากขนาดของความเร็วที่ค่อนข้างน้อยและความไม่เข้าใจถึงพฤติกรรมของการไหลรองประเภทนี้ สำหรับในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยม การไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลจะมีลักษณะเป็นการหมุนวน 8 ลูกไหลในทิศทางตรงกันข้ามกัน โดยสามารถใช้สมการของการหมุนวนในทิศทางการไหล (Streamwise Mean Vorticity Equation) เพื่ออธิบายถึงที่มาของการไหลรองได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}\frac{\partial \Omega_x}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \Omega_x}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \Omega_x}{\partial z}-\Omega_x\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\Omega_y\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}-\Omega_z\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial z}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\overline{w'w'}-\overline{v'v'}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\overline{v'w'}\\
&+\nu\left(\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \tag{2-10}
$$

เมื่อ $\Omega_x$ , $\Omega_y$ และ $\Omega_z$ คือการหมุนวนในทิศทางต่าง ๆ และมีค่าดังนี้

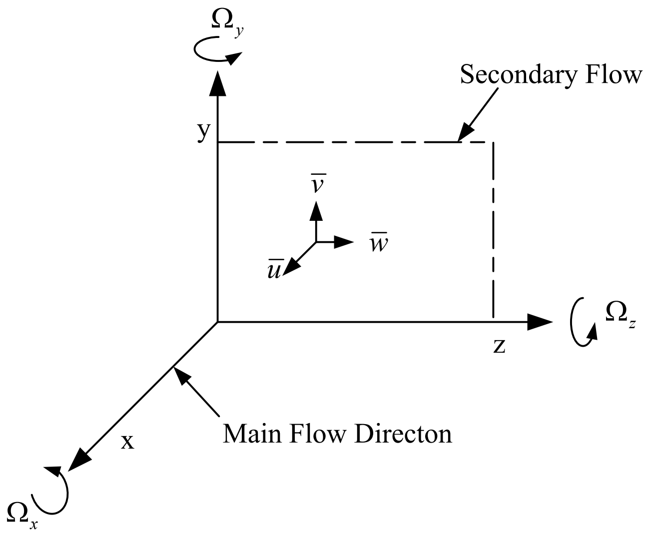
$$
\Omega_x=\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}-\frac{\partial \bar{w}}{\partial y},\ \Omega_y=\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}-\frac{\partial \bar{w}}{\partial x},\ \Omega_z=\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{2-11}
$$

และเมื่อพิจารณาการไหลเป็นการไหลแบบพัฒนาตัวเต็มที่ และไม่มีการหมุนวนในหน้าตัด y และ z สมการที่ (2-10) จะเหลือรูปสมการดังนี้

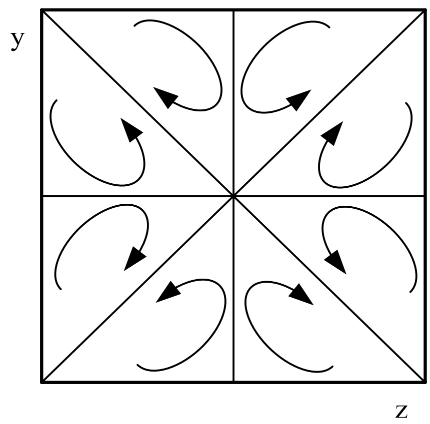
$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\bar{v}\frac{\partial \Omega_x}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \Omega_x}{\partial z}}_{\mathrm{A}_1}=\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\overline{w'w'}-\overline{v'v'}\right)}_{\mathrm{A}_2}\\
&\underbrace{-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\overline{v'w'}}_{\mathrm{A}_3}+\underbrace{\nu\left(\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial z^2}\right)}_{\mathrm{A}_4}
\end{aligned} \tag{2-12}
$$

เมื่อเทอม $A_1$ คือเทอมการพาของการหมุนวนในทิศทางการไหลอันเนื่องมาจากความเร็วเฉลี่ย, เทอม $A_2$ คือเทอมที่เกิดจากผลกระทบของความเค้นตั้งฉากของเรย์โนลด์, เทอม $A_3$ คือเทอมที่เกิดจากผลกระทบของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ และเทอม $A_4$ คือเทอมที่เกิดจากผลกระทบของความหนืด

จากการทดลองเกี่ยวกับการไหลในท่อที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยม Demuren and Rodi (1984) จึงสรุปได้ว่าเทอมที่มีอิทธิพลค่อนข้างสูงในการทำให้เกิดการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล คือเทอมความเค้นของเรย์โนลด์ทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน เนื่องจากในการทดลองพบว่าเทอมความเค้นของเรย์โนลด์นั้นมีขนาดมากกว่าเทอมความหนืดค่อนข้างสูง โดยที่เทอมความหนืดนั้นแทบจะไม่ส่งผลใด ๆ ต่อการทำให้เกิดการไหลรองชนิดนี้เลยยกเว้นบริเวณใกล้มุมผนังเท่านั้น




รูปที่ 2.2 แสดงพิกัดสำหรับการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า




รูปที่ 2.3 แสดงรูปการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส

## 2.3 การจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน

การจำลองเชิงตัวเลขสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนนั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทโดยประเภทแรกจะทำการแก้สมการ Navier-Stokes โดยตรงเพื่อหาค่าความเร็วที่เวลาใด ๆ จากนั้นจึงทำการหาค่าความเร็วเฉลี่ยและความเค้นของเรย์โนลด์ ซึ่งจากการแก้สมการ Navier-Stokes โดยตรงนั้นทำให้สามารถคำนวณหาค่าความเร็วได้ครบทั้งสามทิศทาง รวมไปถึงสามารถหาความเค้นของเรย์โนลด์ได้ครบทั้ง 6 ตัว และผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีความถูกต้องค่อนข้างสูง สำหรับการจำลองเชิงตัวเลขแบบนี้ได้แก่การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง (Direct Numerical Simulation, DNS) ซึ่งเป็นการแก้สมการ Navier-Stokes โดยไม่ใช้แบบจำลองความปั่นป่วน และ Large-Eddy Simulation (LES) ซึ่งเป็นการแก้สมการ Navier-Stokes โดยใช้แบบจำลองความปั่นป่วนช่วยจับสเกลความปั่นป่วนขนาดเล็ก ๆ ส่วนสเกลความปั่นป่วนขนาดใหญ่นั้นจะใช้ความละเอียดของกริดในการจับ ส่วนประเภทที่ 2 นั้นจะทำการแก้สมการ RANS เพื่อทำการหาค่าความเร็วเฉลี่ย แต่เนื่องจากสมการ RANS นั้นมีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการอันเนื่องมาจากเทอมความเค้นของเรย์โนลด์ ดังนั้นในการแก้สมการ RANS จึงจำเป็นที่จะต้องใช้แบบจำลองความปั่นป่วนต่าง ๆ เข้ามาช่วย เช่น แบบจำลองความปั่นป่วน $k-\varepsilon$ หรือแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\omega$ เป็นต้น การแก้สมการ RANS นั้นมีข้อดีคือจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณไม่สูงมากเมื่อเทียบกับ DNS หรือ LES ดังนั้นการนำสมการ RANS ไปใช้แก้ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนจึงให้ผลลัพธ์ที่เร็วกว่าและสามารถนำไปใช้กับการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้ แต่อย่างไรก็ตามผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการ RANS นั้นค่อนข้างแย่กว่าผลลัพธ์ที่ได้จาก DNS และ LES เนื่องจากแบบจำลองความปั่นป่วนใช้สำหรับสมการ RANS นั้นยังไม่มีประสิทธิภาพมากพอ

การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นเป็นเทคนิคที่ได้รับการยอมรับว่ามีความถูกต้องของผลลัพธ์มากที่สุดสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน และอาจถือได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นมีความถูกต้องเทียบเท่ากับผลที่ได้จากการทดลอง ดังนั้นจึงอาจถือได้ว่าการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นคือการทำการทดลองประการหนึ่งนั่นเอง อย่างไรก็ตามการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นมีข้อจำกัดตรงที่ไม่สามารถนำไปใช้กับการไหลที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวันหรือการไหลในงานทางวิศวกรรมได้เนื่องจากการไหลเหล่านั้นเป็นการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงทั้งสิ้น สาเหตุที่ไม่สามารถนำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปใช้จำลองการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้นั้นเนื่องจากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงจะต้องทำการจับตั้งแต่สเกลที่เล็กที่สุดของความปั่นป่วนไปจนถึงสเกลที่ใหญ่ที่สุดเพื่อที่ให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากที่สุด ซึ่งในการที่จะจับสเกลที่เล็กที่สุดให้ได้นั้นจำเป็นที่จะต้องกำหนดให้ระยะห่างระหว่างโนดที่ใช้ในการคำนวณเล็กเพียงพอ ดังนั้นจึงทำให้จำนวนจุดที่ใช้คำนวณสำหรับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นมีจำนวนมาก โดยจำนวนจุดทั้งหมดที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะแปรผันตามค่าเลขเรย์โนลด์ดังนี้ (Moin and Mahesh, 1998)

$$N \approx \mathrm{Re}_T^{9/4} \tag{2-13}$$

เมื่อ N คือจำนวนจุดทั้งหมดที่ควรใช้ในการคำนวณ และ $\mathrm{Re}_T$ คือเลขเรย์โนลด์ของความปั่นป่วนโดยคำนวณมาจากความเร็วปั่นป่วนและความยาวที่เป็นลักษณะเฉพาะของปัญหาการไหลนั้น (Characteristic Length Scale of Flow)

สำหรับสเกลที่ใหญ่ที่สุดของความปั่นป่วนนั้นจะเปลี่ยนไปตามรูปร่างของปัญหา ส่วนสเกลที่เล็กที่สุดของความปั่นป่วนคือสเกลที่เรียกว่าสเกลของ Kolmogorov ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/4} \tag{2-14}$$

เมื่อ $\eta$ คือสเกลของ Kolmogorov, $\nu$ คือความหนืดจลศาสตร์ และ $\varepsilon$ คืออัตราการสูญเสียพลังงานของความปั่นป่วน (Turbulent Dissipation Rate) สำหรับระยะห่างระหว่างโนดที่ใช้ในการคำนวณเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงมีความถูกต้องมากที่สุด จะแตกต่างกันไปตามระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ ยกตัวอย่างเช่น ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ผลต่างสืบเนื่องแบบตรงกลางที่มีความผิดพลาดอันดับสองควรใช้ระยะห่างระหว่างจุดเท่ากับ $0.26\eta$, ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้

ผลต่างสืบเนื่องแบบตรงกลางที่มีความผิดพลาดอันดับสี่ควรใช้ระยะห่างระหว่างจุดเท่ากับ $0.55\eta$ และระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ฟูเรียร์สเปกทรัล (Fourier Spectral) ควรใช้ระยะห่างระหว่างจุดเท่ากับ $1.5\eta$ เป็นต้น อย่างไรก็ตามไม่พบข้อแนะนำสำหรับระยะห่างระหว่างโนดที่ใช้ในการคำนวณในวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นใช้ทรัพยากรในการคำนวณแต่ละครั้งค่อนข้างมาก อีกทั้งยังไม่สามารถจำลองการไหลที่เกิดขึ้นจริงหรือการไหลในงานทางวิศวกรรมได้ ดังนั้นจึงมีคำถามที่ว่าการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นทำไปเพื่ออะไร

Moin and Mahesh (1998) ได้กล่าวไว้ว่าการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงคือเครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย และไม่ใช่ผลเฉลยแม่นตรงสำหรับสมการ Navier-Stokes จุดมุ่งหมายของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นไม่ใช่ทำเพื่อจำลองการไหลสำหรับการไหลในชีวิตจริง แต่ทำเพื่อศึกษาถึงลักษณะทางฟิสิกส์ของการไหลแบบปั่นป่วนให้เข้าใจยิ่งขึ้น เนื่องจากเราไม่สามารถมองเห็นโครงสร้างของความปั่นป่วนทั้งหมดได้จากการทดลอง และยังสามารถนำข้อมูลที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วนสำหรับสมการ RANS ได้อีกด้วย

การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงได้ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกโดย Orszag and Patterson (1972) โดยทำการจำลองปัญหาการไหลที่เรียกว่า Homogeneous Isotropic Turbulence (HIT) ซึ่งเป็นการไหลที่มีลักษณะ Homogeneous ทั้ง 3 ทิศทาง และใช้จำนวนจุดทั้งหมดในการคำนวณเท่ากับ $32^3$ จุดประสงค์ในการทำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงครั้งนั้นคือเพื่อแสดงให้เห็นว่าวิธีสเปกทรัล (Spectral Method) สามารถนำไปใช้จำลองการไหลแบบปั่นป่วนในสามมิติได้ อย่างไรก็ตามเนื่องจากประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในทศวรรษที่ 70 ยังไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอจึงยังไม่สามารถใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงกับปัญหาการไหลที่มีผนังได้

การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับปัญหาการไหลที่มีผนังนั้นได้เริ่มทำเป็นครั้งแรกโดย Kim, Moin, and Moser (1987) ที่ใช้วิธีสเปกทรัลทำการจำลองการไหลที่เรียกว่าการไหลในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในสามมิติ ซึ่งปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาการไหลที่มีลักษณะ Homogeneous อยู่ 2 ทิศทางคือในทิศทางการไหล (Streamwise Direction) และในทิศทางขวางการไหล (Spanwise Direction) โดยในสองทิศทางนี้จะใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำ ส่วนในทิศทางตั้งฉากกับการไหล (Normal Direction) นั้นเป็นผนังซึ่งมีลักษณะเป็น Non-Homogeneous นั่นเอง จุดประสงค์ของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับปัญหานี้ทำเพื่อศึกษาถึงลักษณะทางฟิสิกส์ของความปั่นป่วนบริเวณใกล้ผนัง ซึ่งในการคำนวณได้ใช้จำนวนจุดทั้งหมดเท่ากับ 192x129x160 ในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ และค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 3300 เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วที่จุดกึ่งกลางท่อและความสูงครึ่งหนึ่งของท่อ หรือค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 180 เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงครึ่งหนึ่งของท่อ

หลังจากนั้นการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงได้ถูกนำไปใช้งานกับปัญหาการไหลแบบอื่น ๆ อีกมากมายไม่ว่าจะเป็นการไหลชั้นชิดผิวบนแผ่นเรียบ (Spalart, 1988), การไหลที่มีการถ่ายเทความร้อน (Kasagi, Tomiya, and Kuroda, 1992) รวมไปถึงได้พัฒนาเทคนิคที่นำมาใช้กับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงเพื่อให้สามารถจำลองการไหลที่เป็น Non-Homogeneous ทั้ง 3 ทิศทางได้ ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการไหลผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลัง (Le, Moin, and Kim, 1997) เป็นต้น และได้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถนำไปใช้กับระบบกริดไร้โครงสร้าง (Unstructured Grid) เพื่อให้สามารถจำลองการไหลสำหรับปัญหาที่มีรูปทรงซับซ้อนได้ เช่น ปัญหาการไหลผ่านผนังลูกระนาด (Cherukat, Na, Hanratty, and McLaughlin, 1998) เป็นต้น อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าสามารถนำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ แต่ข้อจำกัดเกี่ยวกับค่าเลขเรย์โนลด์นั้นยังมีอยู่เนื่องจากคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันนั้นยังไม่มีประสิทธิภาพมากพอ

สำหรับการนำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปใช้กับท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมนั้น Gavrilakis (1992) ได้ทำการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นครั้งแรก โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องที่มีความผิดพลาดอันดับสอง ซึ่งในการคำนวณได้ใช้จำนวนจุดทั้งหมดเท่ากับ 1000x127x127 ในทิศทาง x, y, z ตามลำดับ และค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 4410 เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเฉลี่ยและความสูงของท่อ หรือค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 300 เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงของท่อ โดย Gavrilakis ได้ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้กับผลการทดลองในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยม และผลการคำนวณเชิงตัวเลขในช่องคู่ขนานของ Kim, Moin, and Moser (1987) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี จากนั้น Huser and Biringen (1993) ได้ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องแบบตรงกลางที่มีความผิดพลาดอันดับสี่เพื่อทำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 600 เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงของท่อ และใช้จำนวนจุดทั้งหมดเท่ากับ 96x100x100 โดยวัตถุประสงค์ของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงของ Huser and Biringen คือเพื่อศึกษาลักษณะทางฟิสิกส์ของความปั่นป่วนบริเวณมุมผนังและศึกษาที่มาของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลเนื่องจาก Gavrilakis ไม่ได้อธิบายไว้

อย่างไรก็ตามจากการสืบค้นข้อมูลงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่ายังไม่มีการการนำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปใช้กับท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเป็นงานวิจัยแรกที่นำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงไปใช้กับท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะ

# บทที่ 3
# ระเบียบวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ค่อนข้างใหม่สำหรับพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ และเริ่มได้รับความนิยมในการจำลองพฤติกรรมการไหลในปัญหาการไหลแบบต่าง ๆ ที่มีความซับซ้อน หลักการของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์นั้นอ้างอิงมาจากทฤษฎีจลนศาสตร์ (Kinetic Theory) และสมการโบลต์ซมันน์ (Boltzmann Equation) และเนื่องจากสมการโบลต์ซมันน์นั้นสามารถอธิบายพฤติกรรมการไหลในระดับไมโคร จึงทำให้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์สามารถจำลองพฤติกรรมการไหลได้ทั้งในระดับไมโครและในระดับแมคโคร และวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์มีจุดเด่นตรงที่ขั้นตอนในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไม่ซับซ้อนมากนัก รวมไปถึงสามารถพัฒนาเพื่อทำการคำนวณแบบขนานได้ค่อนข้างง่าย

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงที่มาและหลักการของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ในหัวข้อ 3.1, หัวข้อ 3.2 และ 3.3 นั้นกล่าวถึงแบบจำลองการชนสำหรับ Collision Operator ในสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์, หัวข้อ 3.4 กล่าวถึงหน่วยที่ใช้ในวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์, หัวข้อ 3.5 กล่าวถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ และในหัวข้อ 3.6 กล่าวถึงการนำวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ไปจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน

## 3.1 ที่มาของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Lattice Boltzmann Method, LBM) ได้ถูกพัฒนามาจากวิธี Lattice Gas Cellular Automata (LGCA) ซึ่ง Frisch, Hasslacher, and Pomeau (1986) ได้นำเสนอขึ้นเพื่อจำลองการไหลในสองมิติ โดยมีแนวคิดมาจากการเคลื่อนที่ (Streaming) และการชนกัน (Collision) ของอนุภาค (Particle) ตามหลักการของกฎอนุรักษ์มวลและกฎอนุรักษ์โมเมนตัม และได้กำหนดให้รูปทรงของโครงผลึกเป็นแบบหกเหลี่ยมที่มีลักษณะสมมาตร (Hexagonal Lattice) โดยที่แต่ละโนดของโครงผลึกนั้นมีอนุภาคอยู่หกตัว ซึ่งเราจะเรียกแบบจำลองนี้ว่า "แบบจำลอง FHP"

สำหรับวิธี LGCA นี้จะทำการกำหนดเซตของตัวแปรแบบ Boolean ไว้ที่แต่ละโนด เรียกว่า Occupation Numbers ( $n_i,\ i=1,...,6$ ) เพื่อที่จะบอกว่า ณ เวลาใด ๆ อนุภาคแต่ละตัวอยู่ที่โนดนั้นหรือไม่ ซึ่ง $n_i=0$ เมื่อไม่มีอนุภาค $i$ อยู่ที่โนดนั้น และ $n_i=1$ เมื่อมีอนุภาค $i$ อยู่ที่โนดนั้น สำหรับขั้นตอนการคำนวณในวิธีนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ ดังนี้

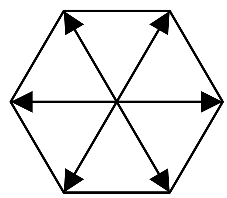
Streaming Step: อนุภาคแต่ละตัวจะเคลื่อนที่ไปยังโนดข้างเคียง โดยอนุภาคแต่ละตัวนั้นจะเคลื่อนที่ไปตามทิศทางของความเร็วของอนุภาคแต่ละตัว (Discrete Particle Velocities, $\vec{e}_i,\ i=1,...,6$ )

Collision Step: เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่มาชนกันจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางของความเร็ว ซึ่งจะต้องเป็นไปตามกฎของการชนกันตามแบบจำลองการชนที่ใช้ในวิธี LGCA

จากขั้นตอนการคำนวณทั้งสองของวิธี LGCA สามารถที่จะเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$n_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t,t+\Delta t\right)=n_i\left(\vec{x},t\right)+\Omega_i\left(\underline{n}\right) \tag{3-1}$$

เมื่อ $\Omega_i$ คือ Collision Operator, $\Delta t$ คือเวลาที่เพิ่มขึ้นในแต่ละรอบการคำนวณ และ $\underline{n}$ คือเซตของ Occupation Numbers



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลอง FHP LGCA

LGCA มีข้อดีคือการคำนวณในแต่ละรอบนั้นจะไม่มีข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากตัวเลขหลังจุดทศนิยมเลย (Round-off Error) เนื่องจาก Occupation Numbers นั้นมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น แต่มีข้อเสียบางประการเช่น (1) เกิด Statistical Noise ซึ่งถูกพบโดย Orszag and Yakhot (1986) และได้มีการแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนด้วยผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดย Succi, Santangelo, and Benzi (1988), (2) ไม่สามารถจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้, (3) d'Humières, Lallemand, and Frisch (1986) พบว่ามีข้อจำกัดเกี่ยวกับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อจำลองการไหลในสามมิติเนื่องจากจำนวนข้อมูลที่ถูกเก็บใน Collision Operator มีขนาดใหญ่เกินไป

จากข้อเสียที่กล่าวมาจึงทำให้วิธีนี้ไม่เป็นที่นิยมเท่าใดนัก เนื่องจากการไหลที่เกิดขึ้นจริงนั้นส่วนใหญ่เป็นการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงและเป็นการไหลในลักษณะสามมิติ

หลังจากที่ข้อเสียของวิธี LGCA เกี่ยวกับ Statistical Noise ถูกค้นพบได้ไม่นานวิธี LBM จึงได้ถูกคิดค้นขึ้นเพื่อแก้ไขปัญหาของข้อเสียนี้โดย McNamara and Zanetti (1988) ซึ่งได้ทำการเปลี่ยนตัวแปรจาก Occupation Numbers ($n_i$) ซึ่งเป็นค่าที่สมมุติขึ้นเป็นค่า Single-Particle Probability Distribution Function ($f_i$) ซึ่งเป็นค่าที่บอกถึงความน่าจะเป็นของตำแหน่งอนุภาคแต่ละตัวหลังจากการชนกันของอนุภาคโดยนำค่านี้มาจากตัวแปรที่ใช้ในสมการโบลต์ซมันน์ ส่วนแบบจำลองการชนที่ใช้กับ Collision Operator นั้นยังใช้แบบจำลองการชนลักษณะเดียวกับวิธี LGCA เราเรียกสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Lattice Boltzmann Equation, LBE) แบบนี้ว่า Nonlinear LBE ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right) = f_i\left(\vec{x},t\right)+\Omega_i\left(\underline{f}\right) \tag{3-2}$$

เมื่อ $\underline{f}$ คือเซตของค่า Distribution Function อย่างไรก็ตาม Nonlinear LBE ยังมีข้อเสียตรงที่ยังไม่สามารถนำไปใช้งานในสามมิติและไม่สามารถจำลองการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้

Higuera and Jimenez (1989) ได้ค้นพบวิธีที่จะลดจำนวนข้อมูลที่ถูกเก็บใน Collision Operator ด้วยสมมุติฐานที่ว่าค่า Distribution Function ($f_i$) อยู่ในสภาวะใกล้เคียงกับ Local Equilibrium ดังนั้นจึงได้สมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ ที่มีแบบจำลองการชนสำหรับ Collision Operator ใหม่ดังนี้

$$f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right) = f_i\left(\vec{x},t\right)+A_{ij}\left[f_i\left(\vec{x},t\right)-f_i^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right] \tag{3-3}$$

เมื่อ $f_i^{eq}$ คือค่า Equilibrium Distribution Function และ $A_{ij}$ คือ Scattering Matrix ซึ่งค่า Scattering Matrix นี้สามารถหาได้จากค่า Transition Matrix โดยที่ค่า Transition Matrix นั้นสามารถหาได้จากกฎการชนกันในวิธี LGCA และเรียกสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่มีแบบจำลองการชนในลักษณะนี้ว่า Quasi-Linear LBE ซึ่งจากการที่จำนวนตัวแปรใน Collision Operator มีขนาดลดลงจึงทำให้สามารถนำวิธีนี้ไปใช้งานในการจำลองการไหลในสามมิติได้

จากการที่ค่า Scattering Matrix และค่า Transition Matrix มีความสัมพันธ์กันในลักษณะของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงทำให้ Quasi-Linear LBE มีข้อจำกัดเหมือนกับวิธี LGCA ตรงที่ไม่สามารถจำลองการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้ ดังนั้น Higuera, Succi, and Benzi (1989) จึงได้เปลี่ยน

วิธีการหาค่า Scattering Matrix ใหม่ โดยใช้วิธีที่เรียกว่า Spectral Decomposition และจาก Scattering Matrix ที่ได้ใหม่นี้จึงทำให้วิธี LBM สามารถจำลองการไหลที่มีค่าเลขเรย์โนลด์สูงได้ เราเรียกสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่หาค่า Scattering Matrix โดยวิธีนี้ว่า Enhanced Collision LBE

แบบจำลองการชนสำหรับ Collision Operator ใน LBM ที่นิยมใช้ในปัจจุบันมีสองแบบคือ แบบจำลองที่เรียกว่าแบบจำลองการชน Single-Relaxation-Time (SRT) และแบบจำลองการชน Multiple-Relaxation-Time (MRT) สำหรับรายละเอียดของแบบจำลองการชนทั้งสองนั้นจะถูกนำเสนอในหัวข้อถัดไป

## 3.2 แบบจำลองการชน Single-Relaxation-Time

แบบจำลองการชน Single-Relaxation-Time (SRT) ที่ใช้ใน LBM คือแบบจำลองการชนที่ชื่อว่าแบบจำลองการชน Lattice BGK ซึ่งถูกคิดขึ้นมาเพื่อลดความยุ่งยากในการหาค่า Scattering Matrix โดยมีกลุ่มวิจัยสองกลุ่มคือกลุ่มของ S. Chen, H. Chen, Martinez, and Matthaeus (1991) และกลุ่มของ Qian, d'Humières, and Lallemand (1992) ที่ได้นำเสนอแนวคิดที่ว่า "เนื่องจากค่าความหนืดของของไหลใน Enhanced Collision LBE นั้นขึ้นอยู่กับค่า Eigen Value ที่ไม่เป็นศูนย์ของ Scattering Matrix เพียงอย่างเดียว" ดังนั้นจึงได้ทำการเปลี่ยนรูปของ Scattering Matrix ให้อยู่ในรูปของ Diagonal Matrix ดังนี้ $A_{ij} \to -\omega\delta_{ij}$ เมื่อ $\omega$ คือค่าที่เรียกว่า Inverse Relaxation Time to Local Equilibrium และเป็นค่าคงที่ที่มีค่าเท่ากันทุกตัวตลอดการคำนวณ จึงทำให้ Scattering Matrix เหลือเพียงแค่ตัวเดียว ซึ่งสามารถเขียนสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ได้ดังนี้

$$f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right) = f_i\left(\vec{x},t\right) - \frac{1}{\tau}\left[f_i\left(\vec{x},t\right) - f_i^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right] \;,\; i = 0,...,m-1 \qquad (3\text{-}4)$$

เมื่อ $\tau$ คือ Relaxation Time ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1/\omega$ และ $m$ คือจำนวนทิศทางความเร็วที่อนุภาคเคลื่อนที่ในแต่ละโนด เราเรียก LBE ตามสมการที่ (3-4) นี้ว่า Lattice BGK LBE หรือสมการ LBGK LBE ตามชื่อแบบจำลองการชน BGK ที่ Bhatnagar, Gross, and Krook (1954) ได้นำเสนอเพื่อใช้กับ Collision Operator ในสมการโบลต์ซมันน์ ซึ่งสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่ใช้แบบจำลองการชน Lattice BGK สำหรับ Collision Operator เป็นรูปสมการที่นิยมใช้มากที่สุดสำหรับวิธี LBM เนื่องจากรูปสมการนั้นอยู่ในรูปสมการพีชคณิตจึงทำให้การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำได้ง่าย

ขั้นตอนการคำนวณของ Lattice BGK LBE สามารถแบ่งได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ เหมือนกับวิธี LGCA คือ Streaming Step และ Collision Step ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{Collision Step:} \qquad \tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)=f_i\left(\vec{x},t\right)-\frac{1}{\tau}\left[f_i\left(\vec{x},t\right)-f_i^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right] \tag{3-5a}$$

$$\text{Streaming Step:} \qquad f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t,t+\Delta t\right)=\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right) \tag{3-5b}$$

เมื่อ $\tilde{f}_i$ คือค่า Distribution Function หลังจาก Collision Step

Qian, d'Humières, and Lallemand (1992) ได้ทำการแบ่งประเภทแบบจำลองความเร็วของอนุภาคที่ใช้กับวิธี LBM โดยใช้สัญลักษณ์ *DnQm* เมื่อ *n* คือจำนวนมิติที่ต้องการใช้ในการจำลองการไหล และ *m* คือจำนวนทิศทางของความเร็วที่อนุภาคเคลื่อนที่ในแต่ละโนด ซึ่งแบบจำลองความเร็วของอนุภาคที่นิยมใช้ในการจำลองการไหลใน 2 มิติ จะเป็นแบบจำลองความเร็วที่เรียกว่า D2Q9 ส่วนแบบจำลองความเร็วของอนุภาคที่นิยมใช้ในการจำลองการไหลใน 3 มิติ จะเป็นแบบจำลองความเร็วที่เรียกว่า D3Q15, D3Q19 หรือ D3Q27 ซึ่งแบบจำลองความเร็วที่กล่าวมาทั้งหมดนี้มีรูปทรงของโครงผลึกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสิ้น และสามารถหาค่า Equilibrium Distribution Function ได้จาก

$$f_i^{eq}=\rho w_i\left[1+\frac{3}{c^2}\vec{e}_i\cdot\vec{u}+\frac{9}{2c^4}\left(\vec{e}_i\cdot\vec{u}\right)^2-\frac{3}{2c^2}\vec{u}\cdot\vec{u}\right] \tag{3-6}$$

เมื่อ $c=\Delta x/\Delta t$ โดยทั่วไปแล้วการคำนวณใน LBM จะนิยมกำหนดให้ $\Delta x=\Delta t=1$, $\vec{u}$ คือความเร็วลัพธ์ของแต่ละโนดและอยู่ในรูปของ Lattice Unit, $\rho$ คือความหนาแน่นและอยู่ในรูปของ Lattice Unit โดยส่วนใหญ่แล้วการกำหนดค่าความหนาแน่นเริ่มต้นเพื่อคำนวณใน LBM จะกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 เพื่อความสะดวกในการเปลี่ยนหน่วยไปมาระหว่าง Lattice Unit กับ Physical Unit ส่วน $w_i$ คือค่า Weighting Factor ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกันขึ้นอยู่กับแบบจำลองความเร็วของอนุภาคที่ใช้

งานวิจัยนี้เลือกแบบจำลองความเร็ว D2Q9 มาใช้ในการจำลองการไหลในสองมิติและแบบจำลองความเร็ว D3Q19 มาใช้ในการจำลองการไหลในสามมิติ สำหรับกรณีแบบจำลองความเร็ว D2Q9 ค่า Discrete Particle Velocities และค่า Weighting Factor มีค่าดังนี้

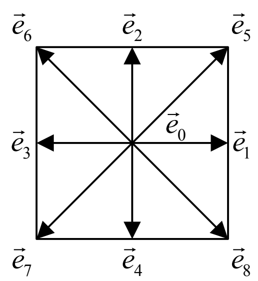
$$\vec{e}_i = c\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

$$w_i = \begin{cases} 4/9, & i = 0, \\ 1/9, & i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ 1/36, & i = 5,\ 6,\ 7,\ 8 \end{cases} \tag{3-8}$$

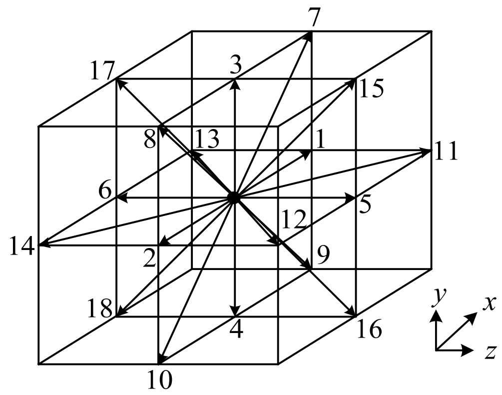
ส่วนในกรณีแบบจำลองความเร็ว D3Q19 จะมีค่า Discrete Particle Velocities และค่า Weighting Factor ดังนี้

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0,0) & i = 0 \\ c(\pm 1,\ 0,\ 0),\ c(0,\ \pm 1,\ 0),\ c(0,\ 0,\ \pm 1) & i = 1-6 \\ c(\pm 1,\ \pm 1,\ 0),\ c(\pm 1,\ 0,\ \pm 1),\ c(0,\ \pm 1,\ \pm 1) & i = 7-18 \end{cases} \tag{3-9}$$

$$w_i = \begin{cases} 1/3, & i = 0, \\ 1/18, & i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \\ 1/36, & i = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18 \end{cases} \tag{3-10}$$




รูปที่ 3.2 แสดงโครงผลึกของแบบจำลองความเร็ว D2Q9 LBM




รูปที่ 3.3 แสดงโครงผลึกของแบบจำลองความเร็ว D3Q19 LBM

สำหรับความหนาแน่นและโมเมนตัมที่อยู่ในรูปของ Lattice Unit นั้นสามารถหาได้จากกฎอนุรักษ์มวลและกฎอนุรักษ์โมเมนตัม ดังนี้

$$\rho = \sum_{i=0}^{m-1} f_i \tag{3-11}$$

$$\rho\,\vec{u} = \sum_{i=0}^{m-1} \vec{e}_i f_i \tag{3-12}$$

ความเร็วเสียง ( $c_s$ ) ในแบบจำลอง D2Q9 และ D3Q19 มีค่าเท่ากับ $c/\sqrt{3}$ และจาก Equation of State ของแก๊สในอุดมคติ เราสามารถหาความดันซึ่งอยู่ในรูปของ Lattice Unit ได้ดังนี้

$$P = \rho\, c_s^2 \tag{3-13}$$

และเราสามารถหาค่าความหนืดจลศาสตร์ซึ่งอยู่ในรูปของ Lattice Unit ได้ดังนี้

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2}\right) c_s^2 \Delta t \tag{3-14}$$

He and Luo (1997) ได้ทำการพิสูจน์ว่าสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่ใช้แบบจำลองการชน Lattice BGK เป็นรูปพีชคณิตของสมการโบลต์ซมันน์ที่ใช้แบบจำลองการชน BGK เพื่อเพิ่มความเข้าใจเกี่ยวกับ LBM ในการนำ LBM ไปใช้งานในการไหลที่มีอุณหภูมิเข้ามาเกี่ยวข้องและเพื่อพัฒนา LBM ไปใช้งานกับระบบกริดที่ไม่สม่ำเสมอได้

อย่างไรก็ตามแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK นั้นมีข้อบกพร่องเกี่ยวกับความมีเสถียรภาพในการคำนวณสำหรับปัญหาการไหลในบางกรณี ซึ่งโดยทั่วไปสามารถเพิ่มความมีเสถียรภาพในการคำนวณสำหรับ LBM ด้วยการเพิ่มจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณแต่จะส่งผลให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มตามไปด้วย ดังนั้นจึงได้ใช้แบบจำลองการชน MRT มาใช้สำหรับปัญหาการไหลในบางกรณี สำหรับรายละเอียดของแบบจำลองการชน MRT นั้นจะนำเสนอในหัวข้อถัดไป

## 3.3 แบบจำลองการชน Multiple-Relaxation-Time

แบบจำลองการชน Multiple-Relaxation-Time (MRT) นั้นได้ถูกนำเสนอเป็นครั้งแรกในช่วงเวลาไล่เลี่ยกับแบบจำลองการชน SRT โดย d’Humières (1992) ในชื่อสมการที่เรียกว่า “รูปทั่วไปของสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ (Generalized LBE)” แต่ไม่เป็นที่นิยมใช้เท่าใดนักจนกระทั่ง Lallemand and Luo (2000) ได้ทำการวิเคราะห์ Generalized LBE และพบว่าการใช้แบบจำลองการชนตามสมการนี้มีเสถียรภาพในการคำนวณมากกว่าการใช้แบบจำลองการชน SRT Lattice BGK

หลักการของแบบจำลองการชน MRT จะคล้ายกับแบบจำลองการชน SRT Lattice LBGK แต่ต่างกันตรงที่แบบจำลองการชน MRT นั้นจะพิจารณาการชนกันบน Moment Space แต่แบบจำลองการชน SRT Lattice LBGK นั้นจะพิจารณาการชนกันบน Velocity Space ซึ่งสมการโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่มีแบบจำลองการชน MRT เป็นดังนี้

$$\left|f\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right)\right\rangle = \left|f\left(\vec{x},t\right)\right\rangle - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\left[\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle - \left|r^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right\rangle\right] \;,\; i=0,...,m-1 \quad (3\text{-}15)$$

เมื่อ $\mathbf{M}$ คือ Transformation Matrix ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $m \times m$, $\mathbf{S}$ คือ Diagonal Relaxation Matrix ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $m \times m$, สัญลักษณ์ $|\;\rangle$ ใช้แทนเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times 1$ ดังนี้

$$\left|f\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right)\right\rangle = \left[f_0\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right),...,f_{m-1}\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right)\right]^{\mathsf{T}}, \quad (3\text{-}16a)$$

$$\left|f\left(\vec{x},t\right)\right\rangle=\left[f_0\left(\vec{x},t\right),...,f_{m-1}\left(\vec{x},t\right)\right]^{\mathsf{T}}, \tag{3-16b}$$

$$\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle=\left[r_0\left(\vec{x},t\right),...,r_{m-1}\left(\vec{x},t\right)\right]^{\mathsf{T}}, \tag{3-16c}$$

$$\left|r^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right\rangle=\left[r_0^{eq}\left(\vec{x},t\right),...,r_{m-1}^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right]^{\mathsf{T}} \tag{3-16d}$$

โดย $r_i$ และ $r_i^{eq}$ คือเซตของตัวแปรที่อยู่ใน Moment Space

สำหรับขั้นตอนการคำนวณของแบบจำลองการชน MRT นั้นเหมือนกับขั้นตอนการคำนวณของแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK ทุกประการ ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น Collision Step และ Streaming Step ดังนี้

Collision Step: $$\left|\tilde{f}\left(\vec{x},t+\Delta t\right)\right\rangle=\left|f\left(\vec{x},t\right)\right\rangle-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\left[\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle-\left|r^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right\rangle\right] \tag{3-17a}$$

Streaming Step: $$\left|f_i\left(\vec{x}+\vec{e}_i\Delta t,t+\Delta t\right)\right\rangle=\left|\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)\right\rangle \tag{3-17b}$$

ในส่วนของความหนาแน่น, โมเมนตัม และความดันนั้นสามารถหาได้ตามสมการที่ (3-11), (3-12) และ (3-13) ตามลำดับ

จะเห็นได้ว่าสมการของแบบจำลองการชน MRT นั้นมีความยุ่งยากมากกว่าสมการของแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK และเมื่อใช้แบบจำลองการชน MRT จะส่งผลให้หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้มีมากขึ้น ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้แบบจำลองการชน MRT เฉพาะในกรณีที่กำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกเท่านั้น โดยปัญหาการไหลที่ใช้แบบจำลองการชน MRT คือปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติ, ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติ และปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติ

เนื่องจากแบบจำลองการชน MRT ได้นำมาใช้เฉพาะการไหลในสองมิติเท่านั้น ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวเฉพาะรายละเอียดของแบบจำลองการชน MRT ที่ใช้กับแบบจำลองความเร็ว D2Q9

เท่านั้น สำหรับรายละเอียดของแบบจำลองการชน MRT สำหรับการไหลในสามมิติสามารถดูได้จากบทความของ d'Humières, Ginzburg, Krafczyk, Lallemand, and Luo (2002)

สำหรับกรณีของแบบจำลองความเร็ว D2Q9 นั้น Transformation Matrix มีค่าดังนี้

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

ในส่วนของ Diagonal Relaxation Matrix มีค่าดังนี้

$$\mathbf{S} \equiv diag\left(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9\right) \tag{3-19}$$

เมื่อ $s_1$ - $s_9$ คือ Relaxation Time และสามารถปรับค่าของแต่ละตัวได้เพื่อเพิ่มเสถียรภาพระหว่างการคำนวณสำหรับ LBM โดย Lallemand and Luo (2000) ได้แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองการชน MRT และแบบจำลองการชน SRT จะมีความหนืดจลศาสตร์เท่ากันเมื่อกำหนดให้

$$s_8 = s_9 = \frac{1}{\tau} \tag{3-20}$$

ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องหาความสัมพันธ์ระหว่างความหนืดและ Relaxation Time ใหม่ โดยสามารถคำนวณหาความหนืดเมื่อใช้แบบจำลองการชน MRT ได้ตามสมการ (3-14) และเมื่อกำหนดให้ Relaxation Time ทุกตัวมีค่าเท่ากับ $1/\tau$ แบบจำลองการชน MRT จะกลายเป็นแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK

โมเมนต์สำหรับแบบจำลองความเร็ว D2Q9 ซึ่งมีทั้งหมด 9 ตัวมีค่าดังต่อไปนี้ $r_0 = \rho$ คือความหนาแน่น (Density), $r_1 = e$ คือพลังงาน (Energy), $r_2 = \varepsilon$ คือกำลังสองของพลังงาน (Energy Square), $r_3 = j_x$ คือโมเมนตัมในแนวแกน x (x-Momentum), $r_4 = q_x$ คือฟลักซ์ของพลังงานใน

แนวแกน x (x-Energy Flux), $r_5 = j_y$ คือโมเมนตัมในแนวแกน y (y-Momentum), $r_6 = q_y$ คือฟลักซ์ของพลังงานในแนวแกน y (y-Energy Flux), $r_7 = p_{xx}$ คือ Stress Tensor ในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal Component of Stress Tensor), $r_8 = p_{xy}$ คือ Stress Tensor นอกแนวเส้นทแยงมุม (Off-Diagonal Component of Stress Tensor) โดยสามารถหาโมเมนต์เหล่านี้ได้จากการเปลี่ยนรูป Distribution Function บน Velocity Space โดยใช้ Transformation Matrix

$$\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle = \mathbf{M}\times\left|f\left(\vec{x},t\right)\right\rangle,\ \left|f\left(\vec{x},t\right)\right\rangle = \mathbf{M}^{-1}\times\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle \tag{3-21}$$

สำหรับค่าของโมเมนต์ที่อยู่ในสภาพสมดุล (Equilibrium Moment) มีดังนี้

$$r_0^{eq} = \rho \tag{3-22a}$$

$$r_1^{eq} = -2\rho + 3\left(j_x^2 + j_y^2\right) \tag{3-22b}$$

$$r_2^{eq} = \rho - 3\left(j_x^2 + j_y^2\right) \tag{3-22c}$$

$$r_3^{eq} = j_x = \rho u_x \tag{3-22d}$$

$$r_4^{eq} = -j_x \tag{3-22e}$$

$$r_5^{eq} = j_y = \rho u_y \tag{3-22f}$$

$$r_6^{eq} = -j_y \tag{3-22g}$$

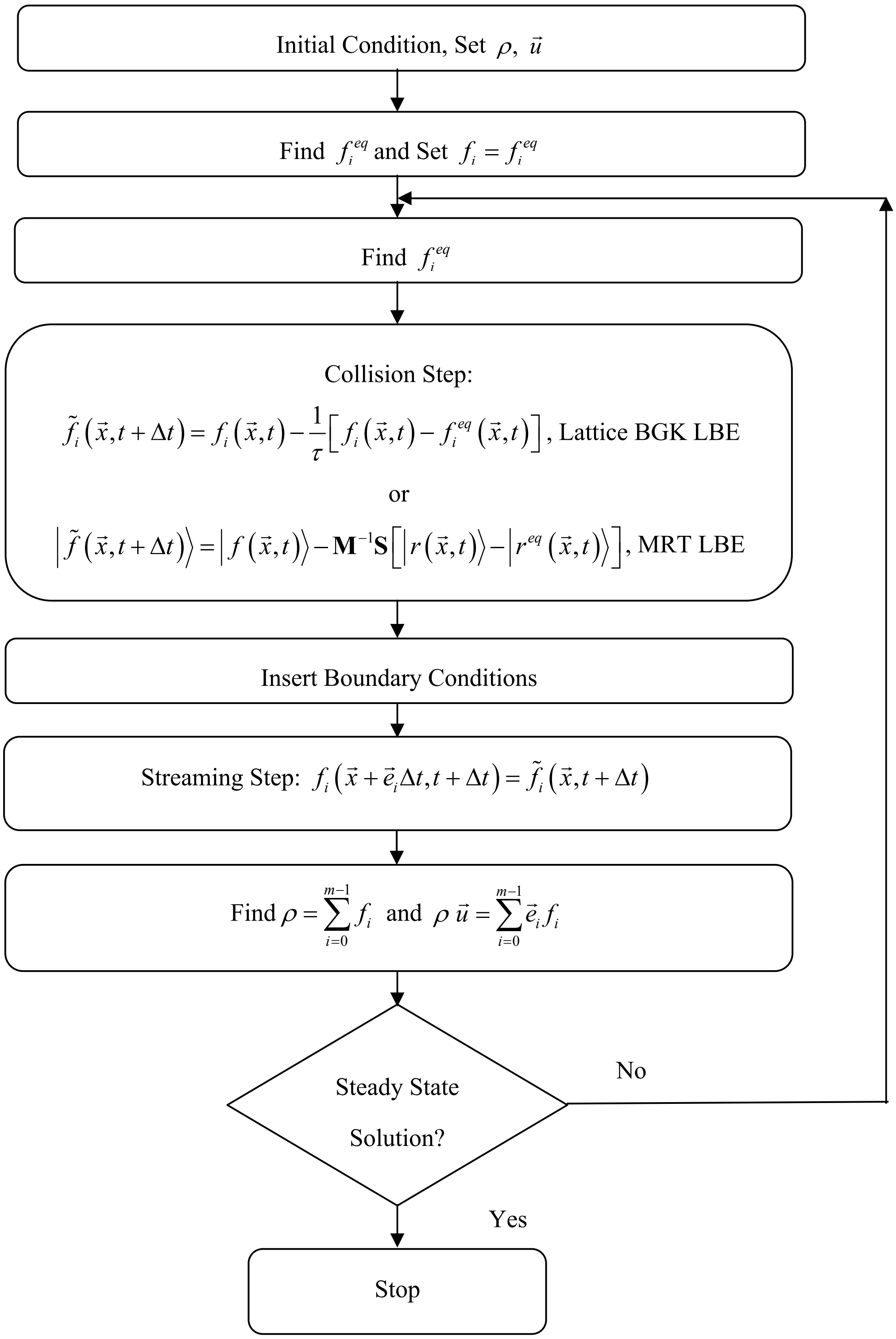
$$r_7^{eq} = j_x^2 - j_y^2 \tag{3-22h}$$

$$r_8^{eq} = j_x j_y \tag{3-22i}$$

เนื่องจาก Transformation Matrix และ Diagonal Relaxation Matrix เป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ ดังนั้นควรหาค่าของเมตริกซ์ $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$ ก่อนที่จะเข้าสู่ลูปหลักของการคำนวณ และสามารถเปลี่ยนรูปสมการ (3-17) จากสมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เป็นสมการพีชคณิตได้ ดังแสดงรายละเอียดไว้ในภาคผนวก ก. เพื่อลดเวลาในการคำนวณสำหรับแบบจำลองการชน MRT

สำหรับหน่วยในวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนั้น แบบจำลองการชน SRT Lattice BGK และแบบจำลองการชน MRT จะมีขั้นตอนในการเปลี่ยนหน่วยจาก Physical Unit มาเป็น Lattice Unit และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตผ่านค่า Distribution Function เหมือนกันทุกประการ เนื่องจากแบบจำลองการชน MRT นั้นจะพิจารณาเฉพาะการชนกันบน Moment Space เท่านั้น ส่วนขั้นตอนอื่น ๆ ในการคำนวณไม่ว่าจะเป็น Streaming Step, การคำนวณหาความหนาแน่น โมเมนตัม และความดัน รวมไปถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนั้นจะกระทำบน Velocity Space ทั้งหมด

สำหรับขั้นตอนการคำนวณของ LBM ทั้งแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK และแบบจำลองการชน MRT นั้นสามารถเขียนเป็น Flow Chart ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 3.4




รูปที่ 3.4 ขั้นตอนการคำนวณของ LBM

## 3.4 หน่วยในวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

สำหรับ LBM นั้นค่าของตัวแปรต่าง ๆ จะถูกทำให้อยู่ในหน่วยที่มีชื่อว่า Lattice Unit ทั้งแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK และแบบจำลองการชน MRT ซึ่ง Lattice Unit ก็คือการทำให้ตัวแปรไม่มีมิติ (Dimensionless Variable) โดยเทียบกับระยะห่างระหว่างโนด ( $\Delta x$ ), เวลาที่เพิ่มขึ้นในแต่ละรอบการคำนวณ ( $\Delta t$ ) และมวลของอนุภาค ( $\Delta m$ ) สำหรับวิธี LBM นั้นเราสามารถหา $\Delta x$ , $\Delta t$ และ $\Delta m$ ได้จาก

$$\Delta x = \frac{L^{real}}{N} \tag{3-23}$$

$$\Delta t = \frac{c_s}{c_s^{real}} \Delta x \tag{3-24}$$

$$\Delta m = \rho^{real} \Delta x^3 \tag{3-25}$$

และค่าตัวแปรต่าง ๆ สามารถทำให้อยู่ในรูปของ Lattice Unit ได้ดังนี้

$$\rho = \rho^{real} \frac{\Delta x^3}{\Delta m} \tag{3-26}$$

$$P = P^{real} \frac{\Delta x^2 \Delta t^2}{\Delta x \Delta m} \tag{3-27}$$

$$\vec{u} = \vec{u}^{real} \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3-28}$$

$$\nu = \nu^{real} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \tag{3-29}$$

เมื่อ $L$ คือความยาวของโดเมนที่พิจารณา, $N$ คือจำนวนโครงผลึก (Lattice) ที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนตัวแปรที่มีตัวยกคำว่า “real” เป็นตัวแปรที่อยู่ในรูปที่มีมิติตามหลักการทางฟิสิกส์

## 3.5 เงื่อนไขขอบเขต

การกำหนดเงื่อนไขที่ขอบสำหรับ LBM ทั้งแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK และแบบจำลองการชน MRT นั้นจะกำหนดผ่านค่า Distribution Function ( $f_i$ ) หลังจาก Collision Step หลังจากนั้นจึงคำนวณในส่วนของ Streaming Step ต่อไป ซึ่งการเลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตที่มีค่าความถูกต้องสูงและเหมาะสมกับสภาวะของปัญหาการไหลจริงจะทำให้ผลการคำนวณที่ได้มีความถูกต้องสูง สำหรับประเภทของเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ประกอบด้วย เงื่อนไขขอบเขตแบบผนังที่ไม่มีการเคลื่อนที่ (Stationary Wall Boundary Condition), เงื่อนไขขอบเขตแบบผนังที่มีการเคลื่อนที่ (Moving Wall Boundary Condition), เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออก (Inlet & Outlet Boundary Conditions) และเงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำ (Periodic Boundary Condition) รายละเอียดของเงื่อนไขขอบเขตแต่ละแบบมีดังต่อไปนี้

### 3.5.1 เงื่อนไขขอบเขตแบบผนังที่ไม่มีการเคลื่อนที่

เงื่อนไขขอบเขตแบบนี้เป็นการกำหนดให้ความเร็วที่ผนังเป็นศูนย์ ใน LBM นั้นเราสามารถหาค่า $f_i$ ที่ออกมาจากผนังได้จากหลักการที่ว่า เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่มาถึงผนัง อนุภาคนั้นจะสะท้อนกลับไปยัง Fluid Node ด้วยความเร็วที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของความเร็วที่อนุภาคเคลื่อนที่มายังผนัง ใน LBM เราเรียก Boundary Condition แบบนี้ว่า Bounce-Back Boundary Condition ดังแสดงในรูปที่ 3.5

$$\tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x},t+\Delta t)=\tilde{f}_i(\vec{x},t+\Delta t),\ \ \vec{e}_{\hat{i}}=-\vec{e}_i \tag{3-30}$$

อย่างไรก็ตาม Bounce-Back Boundary Condition มีข้อเสียตรงที่ความถูกต้องที่ได้มีค่าความถูกต้องเพียง First-Order Accuracy ดังนั้นจึงได้ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตามวิธีของ Yu, Mei, and Shyy (2003) ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบนี้จะทำให้มีค่าความถูกต้องมากขึ้นเป็น Second-Order Accuracy หลักการของวิธีนี้จะสมมุติให้มีผนังอยู่ระหว่าง Fluid Node และ Solid Node โดยระยะระหว่าง Fluid Node และผนังมีค่าเท่ากับ $\delta\,\Delta x$ เมื่อ $\delta=\left|x_f-x_w\right|/\left|x_f-x_b\right|,\ \ 0\le\delta\le1$ ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ในที่นี้กำหนดให้ $\delta=0.5$ ขั้นตอนการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตามวิธีของ Yu et al. (2003) สามารถทำได้ดังนี้

หาค่า $f_i$ ที่เข้าสู่ผนังจาก

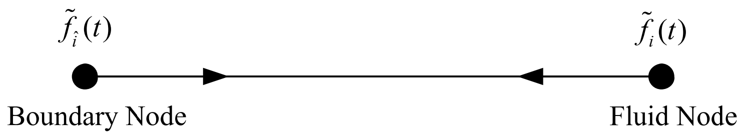
$$\tilde{f}_i(\vec{x}_w, t+\Delta t) = \tilde{f}_i(\vec{x}_f, t+\Delta t) + \delta\left[\tilde{f}_i(\vec{x}_b, t+\Delta t) - \tilde{f}_i(\vec{x}_f, t+\Delta t)\right] \tag{3-31}$$

ซึ่งค่า $\tilde{f}_i(\vec{x}_b, t+\Delta t)$ หาได้จากการประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation) จากนั้นใช้ Bounce-Back Boundary Condition ในการหา $f_i$ ที่ออกจากผนังดังนี้

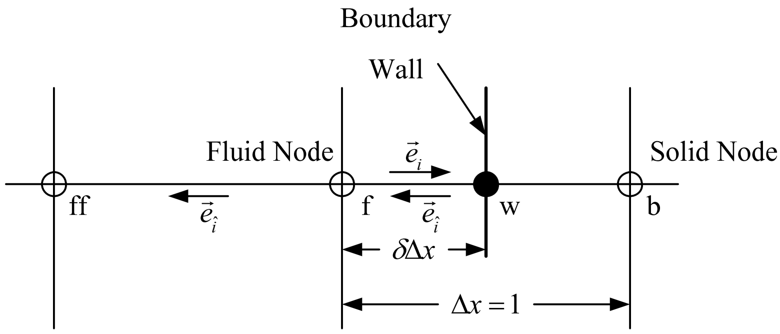
$$\tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x}_w, t+\Delta t) = \tilde{f}_i(\vec{x}_w, t+\Delta t) \tag{3-32}$$

หลังจาก Streaming Step ทำการหา $f_i$ ที่ Fluid Node ดังนี้

$$\tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x}_f, t+\Delta t) = \tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x}_w, t+\Delta t) + \frac{\delta}{1+\delta}\left[\tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x}_{ff}, t+\Delta t) - \tilde{f}_{\hat{i}}(\vec{x}_w, t+\Delta t)\right] \tag{3-33}$$




รูปที่ 3.5 แสดง Bounce-Back Boundary Condition




รูปที่ 3.6 แสดงเงื่อนไขขอบเขตของ Yu, Mei, and Shy (2003)

### 3.5.2 เงื่อนไขขอบเขตแบบผนังที่มีการเคลื่อนที่

Hou, Zou, Chen, Doolen, and Cogley (1995) ได้กำหนดให้ค่า Distribution Function ( $f_i$ ) ที่ผนังที่มีการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ Equilibrium Distribution Function ( $f_i^{eq}$ ) ที่ผนังที่มีการเคลื่อนที่เพื่อใช้จำลองการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติ

$$\tilde{f}_{i,wall} = f_{i,wall}^{eq} \tag{3-34}$$

### 3.5.3 เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออก

เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกจะทำให้เสถียรภาพในการคำนวณสำหรับ LBM ที่ใช้แบบจำลองการชน SRT Lattice BGK ลดลง ดังนั้นจึงได้เปลี่ยนมาใช้แบบจำลองการชน MRT แต่การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตยังคงกำหนดผ่านค่า Distribution Function ( $f_i$ ) เหมือนแบบจำลองการชน SRT Lattice BGK โดยการใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกจะใช้ในกรณีที่ทราบความเร็วหรือความดัน (หรือความหนาแน่น) ที่ทางเข้าและทางออก งานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกตามวิธีของ Zou and He (1997) สำหรับปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติ, ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติ และปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติ ซึ่งทุกปัญหาการไหลเป็นการไหลในสองมิติดังนั้นรายละเอียดของเงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกจะแสดงเฉพาะแบบจำลองความเร็ว D2Q9 เท่านั้น โดยทั่วไปจะกำหนดความเร็วที่ทางเข้าในแนวนอน $u_x = u_{in}$ และความเร็วที่ทางเข้าในแนวตั้งเท่ากับศูนย์ $u_y = 0$ และจากสมการที่ (3-11) และ (3-12) จะได้

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \tag{3-35}$$

$$u_x = u_{in} = f_1 + f_5 + f_8 - f_3 - f_6 - f_7 \tag{3-36}$$

$$u_y = 0 = f_2 + f_5 + f_6 - f_4 - f_7 - f_8 \tag{3-37}$$

หลังจาก Streaming Step แล้วเราจะทราบค่า $f_0, f_2, f_3, f_4, f_6, f_7$ ที่ทางเข้าและจากสมการ (3-35) และ (3-36) เราสามารถหาความหนาแน่นที่ทางเข้าได้ดังนี้

$$\rho = \rho_{in} = \frac{\left[f_0 + f_2 + f_4 + 2\left(f_3 + f_6 + f_7\right)\right]}{1 - u_{in}} \tag{3-38}$$

และจากแนวคิดเกี่ยวกับ Bounce-Back สำหรับอนุภาคส่วนที่เป็น Non-Equilibrium จะได้

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq} \tag{3-39}$$

จากสมการ (3-36), (3-37) และ (3-39) สามารถหาค่า $f_i$ ที่เหลือได้ดังนี้

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho_{in}u_x \tag{3-40}$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho_{in}u_x \tag{3-41}$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6}\rho_{in}u_x \tag{3-42}$$

สำหรับการกำหนดค่า $f_i$ ที่ทางออกนั้นสามารถทำได้ทำนองเดียวกับที่ทางเข้า เมื่อทราบค่าความเร็วที่ทางออกคือ $u_x = u_{out,x}$ และ $u_y = u_{out,y}$ ซึ่งหลังจาก Streaming Step แล้วเราจะทราบค่า $f_0, f_1, f_2, f_4, f_5, f_8$ ที่ทางออก และสามารถหาความหนาแน่นที่ทางออกและค่า $f_i$ ที่เหลือได้ดังนี้

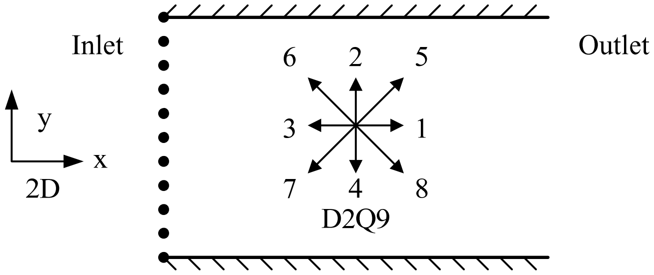
$$\rho = \rho_{out} = \frac{\left[f_0 + f_2 + f_4 + 2\left(f_1 + f_5 + f_8\right)\right]}{1 - u_{out,x}} \tag{3-43}$$

$$f_3 = f_1 - \frac{2}{3}\rho_{out}u_{out,x} \tag{3-44}$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) - \frac{1}{6}\rho_{out}u_{out,x} + \frac{1}{2}\rho_{out}u_{out,y} \tag{3-45}$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) - \frac{1}{6}\rho_{out}u_{out,x} - \frac{1}{2}\rho_{out}u_{out,y} \tag{3-46}$$

สำหรับปัญหาทางวิศวกรรมในบางครั้งอาจทราบค่าความดัน (หรือความหนาแน่น) ที่ทางเข้าและทางออกแต่ไม่ทราบค่าความเร็วในแนวนอนซึ่งสามารถทำได้โดยการย้ายข้างสมการที่ (3-38) และ (3-43) เพื่อหาค่าความเร็วในแนวนอน และทำการหาค่า $f_i$ จากสมการข้างต้น หรือในบางกรณีอาจจะไม่ทราบค่าใดเลยที่ทางออก โดยทั่วไปจะนิยมกำหนดให้ขอบเขตดังกล่าวไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าความเร็วในทิศทางที่ตั้งฉากกับขอบเขตนั้น (Zero Normal Gradient) ส่วนค่า $f_i$ ที่ทางออกนั้นได้ทำการประมาณค่านอกช่วงก่อนแล้วจึงหาค่าความหนาแน่นและค่า $f_i$ ที่เหลือจากสมการที่ (3-43), (3-44), (3-45) และ (3-46)




รูปที่ 3.7 แสดงเงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออก

### 3.5.4 เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำ

ปัญหาการไหลบางประเภทนั้นต้องการโดเมนในทิศทางการไหลที่ยาวมาก เนื่องจากต้องการให้ของไหลเข้าสู่สภาวะพัฒนาตัวเต็มที่ (Fully Developed Flow) ซึ่งการใช้โดเมนที่ยาวมาก ๆ จะส่งผลให้จำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มตามไปด้วย จึงได้ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำเพื่อลดความยาวของโดเมน ในงานวิจัยนี้ได้ใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำสำหรับปัญหาการไหลในระบบพิกัดฉากสามมิติทุกปัญหาการไหล สำหรับการกำหนดเงื่อนไขแบบวนซ้ำใน LBM สามารถทำได้โดยกำหนดให้ค่า $f_i$ ที่จุดสุดท้ายมีค่าเท่ากับค่า $f_i$ ที่จุดที่สองของโดเมน และค่า $f_i$ ที่จุดแรกมีค่าเท่ากับค่า $f_i$ ที่จุดต่อรองสุดท้ายของโดเมน

## 3.6 การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนด้วยวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

Chen, Wang, Shan, and Doolen (1992) ได้ตรวจสอบความสามารถของ LBM สำหรับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วน โดยนำ LBM ไปใช้กับปัญหาการไหลที่เรียกว่า Homogeneous Isotropic Turbulence (HIT) ซึ่งเป็นปัญหาการไหลที่นิยมใช้ในการตรวจสอบว่าระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีใดสามารถจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนได้ โดยได้ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จาก LBM กับวิธีที่นิยมใช้ในการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงที่ชื่อว่าวิธีสเปกทรัล (Spectral Method) โดยผลลัพธ์ที่ได้จาก LBM และวิธีสเปกทรัลนั้นสอดคล้องกันเป็นอย่างดี จึงสามารถเชื่อได้ว่า LBM สามารถจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนได้

Eggels (1996) ได้นำ LBM มาจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในสามมิติ ซึ่งเป็นปัญหาการไหลที่นิยมใช้เนื่องจากรูปทรงของปัญหานี้ไม่ซับซ้อนมากนัก ปัญหาการไหลลักษณะนี้จะมีทิศทาง Homogeneous อยู่ 2 ทิศทางคือในทิศทางการไหล (Streamwise Direction) และในทิศทางขวางการไหล (Spanwise Direction) ส่วนในทิศทางตั้งฉากกับการไหล (Normal Direction) นั้นจะมีลักษณะเป็น Non-Homogeneous โดย Eggels ได้ตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จาก LBM กับผลที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงของ Kim, Moin, and Moser (1987) ที่ใช้วิธิสเปกทรัล ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

อย่างไรก็ตามจากงานวิจัยที่ผ่านมา LBM ได้ถูกนำไปใช้จำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนเฉพาะปัญหาการไหล HIT (H. Yu, Girimaji, and Luo, 2005; Lee, D. Yu, and Girimaji, 2006; D. Yu, and Girimaji, 2006; Djenidi, 2006) และปัญหาการไหลในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งเท่านั้น (Amati, Succi, and Piva, 1997; Toschi, Amati, Succi, Benzi, and Piva, 1999; Lammers, Beronov, Volkert, Brenner, and Durst, 2006) ซึ่งปัญหาการไหลทั้งสองปัญหานั้นยังไม่ใช่ปัญหาการไหลที่เกิดขึ้นจริง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำ LBM ไปจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยม ซึ่งเป็นปัญหาการไหลที่พบได้จริงและมีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาการไหลข้างต้นเนื่องจากปัญหาการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมนั้นมีทิศทาง Homogeneous อยู่เพียงด้านเดียวเท่านั้น และยังมีโครงสร้างความปั่นป่วน (Turbulence Structure) บางตัวที่ซับซ้อนกว่า

เนื่องจากพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนนั้นมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ดังนั้นหลักการของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนคือทำการหาค่าความเร็วของของไหลที่เกิดขึ้นจริง หรือก็คือความเร็ว ณ เวลาใด ๆ ในช่วงเวลาหนึ่งเพื่อนำมาหาค่าความเร็วเฉลี่ยโดยไม่มีการ

ใช้แบบจำลองความปั่นป่วนใด ๆ เข้ามาช่วย และจากการที่ LBM เป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้จำลองการไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาอยู่แล้ว และเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์สูงพอที่การไหลเป็นการไหลแบบปั่นป่วน ค่าความเร็วที่ได้จาก LBM จะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ดังนั้นจึงสามารถนำ LBM ไปใช้จำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนได้เลย

เนื่องจากการใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำตามทิศทางการไหล (Streamwise Direction) นั้นจะทำให้ความดันมีค่าเท่ากันตลอดตามแนวการไหล จึงจำเป็นต้องให้ Forcing Term ที่มีค่าเท่ากับ Pressure Gradient เพื่อทำให้มีการไหลเกิดขึ้น จากนั้นจึงทำการแปลง Pressure Gradient ให้อยู่ในรูปของค่า Distribution Function ตามวิธีของ Lou (2000) ดังนี้

$$\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)=\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)+3w_i\frac{\vec{e}_i\cdot\vec{G}}{c^2}\Delta t \tag{3-47}$$

เมื่อ $\vec{G}=-\dfrac{dp}{dx}$ หรือ Pressure Gradient นั่นเอง

เพื่อทำให้การไหลใน LBM เปลี่ยนไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนได้เร็วขึ้น จึงได้ทำการรบกวนค่า Distribution Function ในช่วงเริ่มต้นของการคำนวณโดยทำหลังจากใส่ Forcing Term ดังนี้

$$\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)=\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right)+2\cdot A\cdot Rand()\cdot\tilde{f}_i\left(\vec{x},t+\Delta t\right) \tag{3-48}$$

เมื่อ *A* คือช่วงกว้างที่ต้องการให้ค่า Distribution Function เปลี่ยนไป ในที่นี้กำหนดให้เท่ากับ 25% และ *Rand()* คือค่าที่สุ่มออกมาในแต่ละครั้งของการคำนวณโดยมีค่าอยู่ในช่วง $-0.5\le Rand()\le 0.5$

เมื่อการไหลเริ่มเป็นการไหลแบบปั่นป่วนแล้วจึงเริ่มเก็บค่าความเร็วและความดันที่หน้าตัดหนึ่งในแนวตั้งฉากกับทิศทางการไหลจนกระทั่งการไหลเข้าสู่สภาวะคงตัวในเชิงสถิติ (Statistically Steady State) เพื่อนำมาหาค่าความเร็วเฉลี่ย (Mean Velocity), ความเร็วปั่นป่วน (Fluctuating Velocity) รวมไปถึงค่าความเค้นของเรย์โนลด์ (Reynolds Stresses) ดังนี้

$$\overline{u}_i=\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}u_i\,dt \tag{3-49}$$

เมื่อ $\overline{u}_i$ คือความเร็วเฉลี่ยในทิศทางต่าง ๆ $(u, v, w)$, $t_o$ คือเวลาที่เริ่มทำการหาค่าความเร็วเฉลี่ย, $T$ คือคาบเวลาที่ใช้ในการหาค่า Mean Velocity, $u_i$ คือความเร็ว ณ เวลาใด ๆ
สำหรับค่าความเร็วปั่นป่วนสามารถหาได้จาก

$$u_i' = u_i - \overline{u}_i \tag{3-50}$$

และสามารถหาค่าความเค้นของเรย์โนลด์ได้ดังนี้

$$\tau_{ij} = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} u_i' u_j' \, dt \tag{3-51}$$

# บทที่ 4
# การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น

เนื่องจากงานวิจัยนี้ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นโดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์เพื่อทำการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นจึงเป็นสิ่งที่สำคัญต่อความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งปัญหาการไหลที่ได้นำมาตรวจสอบนั้นเป็นปัญหาที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ โดยอาจจะเป็นปัญหาที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ หรือปัญหาที่มีข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หรือปัญหาที่มีผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขที่เป็นที่ยอมรับ โดยสามารถแบ่งประเภทของปัญหาการไหลที่นำมาตรวจสอบได้ดังนี้ (1) ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดฉากสองมิติ ในหัวข้อ 4.1-4.4, (2) ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดฉากสามมิติ ในหัวข้อ 4.5-4.6 และ (3) ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระบบพิกัดฉากสามมิติในหัวข้อ 4.7-4.9

## 4.1 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ปัญหาการไหลนี้เป็นหนึ่งในปัญหาที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้น รวมไปถึงนิยมใช้ตรวจสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขใหม่ ๆ เนื่องจากปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาที่มีรูปทรงและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตค่อนข้างง่าย เพราะเป็นผนังทั้งสี่ด้านและมีเพียงผนังด้านบนที่เคลื่อนที่ ซึ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาการไหลเป็นไปตามรูปที่ 4.1 สำหรับผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ U. Ghia, K. Ghia, and Shin (1982) โดยในการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 100, 400 และ 1000 โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วของผนังที่เคลื่อนที่และความสูงของโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัส และจำนวนจุดที่ใช้คำนวณทั้งสามกรณีเท่ากับ 130x130 โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็วแสดงในรูป 4.2, 4.3 และ 4.4

## 4.2 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาการไหลมาตรฐานที่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้เมื่อการไหลนั้นเข้าสู่ช่วงพัฒนาตัวเต็มที่จึงเป็นที่นิยมใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น ลักษณะรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.5 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 100 เพียงค่าเดียว เนื่องจากปัญหาการไหลนี้ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วไม่ได้เปลี่ยนแปลงตามค่าเลขเรย์โนลด์เมื่อการไหลเป็นการไหลแบบราบเรียบ โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้า (Bulk-Mean Velocity) และความสูงของช่องคู่ขนาน และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกบริเวณทางเข้าและทางออกของช่องคู่ขนาน ส่วนบริเวณที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 240x40 ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ สำหรับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์นั้นสามารถหาได้จาก White (2003) ตามสมการ (4-1)

$$u(y) = \frac{6U_b}{H^2}\left(Hy - y^2\right),\ \ 0 \le y \le H \qquad (4\text{-}1)$$

เมื่อ $u(y)$ คือผลเฉลยของความเร็วในแนวแกน x ที่ระยะความสูงใด ๆ, $U_b$ คือความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้า และ H คือความสูงของช่องคู่ขนาน ผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว u ตามแนวแกน y บริเวณทางออกของช่องคู่ขนานแสดงในรูป 4.6

## 4.3 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาการไหลที่เริ่มมีความซับซ้อนขึ้นเนื่องจากเกิดการไหลหมุนวนขึ้นบริเวณด้านหลังของขั้นบันไดจึงเหมาะที่จะนำมาใช้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ ซึ่งลักษณะของปัญหาเป็นไปตามรูป 4.7 ในการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 100 และ 389 ซึ่งค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้าและความสูงของท่อ โดยกำหนดให้ความเร็วที่ทางเข้ามีลักษณะเป็นความเร็วที่พัฒนาตัวเต็มที่ และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกบริเวณทางเข้าและทางออกของโดเมน ส่วนบริเวณที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 720x60 ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ สำหรับในกรณีที่เป็นการไหลแบบราบเรียบในท่อสองมิติสามารถหาความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้าได้ดังนี้

$$U_b = \frac{1}{H}\int_0^H u(y)dy = \frac{2}{3}U_c \tag{4-2}$$

เมื่อ $u(y)$ คือผลเฉลยของความเร็วในแนวแกน x ที่ระยะความสูงใด ๆ ตามสมการ (4-1), H คือความสูงของโดเมน และ $U_c$ คือความเร็วที่จุดกึ่งกลางของความเร็วที่ทางเข้า สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลการทดลองของ Armaly, Durst, Pereira, and Schonung (1983) โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว u ตามแนวแกน y ที่ระยะทางตามแนวแกน x ต่าง ๆ แสดงในรูป 4.8 และ 4.9

## 4.4 ปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาการไหลที่นำมาทดสอบเป็นปัญหาสุดท้ายสำหรับการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยลักษณะของปัญหาเป็นไปตามรูป 4.10 ในการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 144 โดยคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วที่จุดกึ่งกลางของความเร็วที่ทางเข้าและความสูงของสิ่งกีดขวาง และกำหนดให้ความเร็วที่ทางเข้ามีลักษณะเป็นความเร็วที่พัฒนาตัวเต็มที่ และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบทางเข้าและทางออกบริเวณทางเข้าและทางออกของช่องทางไหล ส่วนบริเวณที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 1080x60 ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ สำหรับผลลัพธ์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลการทดลองของ Tropea and Gackstatter (1985) โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว u ตามแนวแกน y ที่ระยะตามแนวแกน x ต่าง ๆ แสดงในรูป 4.11

## 4.5 ปัญหาการไหลแบบแบบราบเรียบในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ปัญหาการไหลนี้มีลักษณะทางฟิสิกส์ของการไหลคล้ายกับปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติเพียงแต่มีมิติในแนวแกน z เพิ่มขึ้นมา ปัญหาการไหลนี้ทำเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์สำหรับการไหลที่มีลักษณะเป็น 3 มิติ เนื่องจากรูปร่างของปัญหานั้นไม่ซับซ้อน โดยมีลักษณะรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.12 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 100 โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้าและ

ความสูงของช่องคู่ขนาน และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำในทิศทาง x และ z เพื่อลดความยาวของโดเมนในด้านนั้น ๆ และเพื่อลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนทิศทางที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 50x50x50 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ อย่างไรก็ตามเนื่องจากการใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำตามทิศทางการไหล (Streamwise Direction, x-Direction) นั้นจะทำให้ความดันมีค่าเท่ากันตลอดตามแนวการไหล จึงจำเป็นต้องให้ Forcing Term ที่มีค่าเท่ากับ Pressure Gradient เพื่อทำให้มีการไหลเกิดขึ้น สำหรับปัญหาการไหลนี้ Pressure Gradient มีค่าดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\rho\nu U_b}{H^2} \tag{4-3}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ตามสมการ (4-1) และผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว u ตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง z/H = 0.5 แสดงในรูป 4.13

## 4.6 ปัญหาการไหลแบบแบบราบเรียบในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ปัญหาการไหลนี้เป็นปัญหาการไหลแบบราบเรียบปัญหาสุดท้าย โดยมีลักษณะรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.14 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 100 โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดที่ทางเข้าและความสูงของท่อ และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำในทิศทาง x เพื่อลดความยาวของโดเมนและเพื่อลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนทิศทางที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 50x50x50 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ สำหรับปัญหาการไหลนี้ Pressure Gradient และผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มีค่าดังนี้ (White, 2006)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{6516\rho\nu U_b}{229H^2} \tag{4-4}$$

$$u(y,z) = \frac{4H^2}{\rho\nu\pi^3}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(i-1)/2}\left[1-\frac{\cosh(i\pi z/2H)}{\cosh(i\pi/2)}\right]\times\frac{\cos(i\pi y/2H)}{i^3} \tag{4-5}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ตามสมการ (4-5) และผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว u ตามแนวแกน y ที่ตำแหน่ง z/H = 0.5 แสดงในรูป 4.15

## 4.7 ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ปัญหาการไหลนี้นิยมนำมาตรวจสอบความถูกต้องของการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง เนื่องจากรูปร่างของปัญหานั้นไม่ซับซ้อน โดยมีลักษณะรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.12 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 120 ($\mathrm{Re}_{\tau} = \bar{u}_{\tau} H / 2\nu = 120$) โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเสียดทานเฉลี่ย (Mean Friction Velocity, $\bar{u}_{\tau}$) และความสูงครึ่งหนึ่งช่องคู่ขนาน และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำในทิศทาง x และ z เพื่อลดความยาวของโดเมนในด้านนั้นและเพื่อลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนทิศทางที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง ซึ่งจำนวนจุดที่ใช้คำนวณเท่ากับ 240x80x120 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ และมีระยะห่างระหว่างจุดในหน่วยของผนัง (Wall Unit) เท่ากับ 3 ($\Delta^{+} = \Delta u_{\tau} / \nu = 3$) สำหรับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะทำการคำนวณหา Pressure Gradient ผ่านทาง Skin Friction Coefficient ($C_f$) และ Hydraulic Radius ($R_H$) ดังนี้

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\rho \nu \bar{U}_b^2}{R_H} \cdot C_f \tag{4-6}$$

และสามารถคำนวณหา Skin Friction Coefficient ได้จาก Darcy Friction Factor (f) ดังนี้

$$C_f = \frac{f}{4} \tag{4-7}$$

สำหรับปัญหาการไหลนี้ค่า Darcy Friction Factor สามารถคำนวณได้จาก White (2006) ตามสมการ (4-8)

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2.0 \log_{10}\left(\mathrm{Re}_b \cdot f^{1/2}\right) - 1.19 \tag{4-8}$$

เมื่อ $\mathrm{Re}_b$ คือเลขเรย์โนลด์ซึ่งคำนวณจากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัด (Bulk-Mean Velocity) และ Hydraulic Diameter ซึ่งความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดและ Hydraulic Diameter มีนิยามดังนี้

$$\bar{U}_b = \frac{1}{H}\int_0^H \bar{u}(y)dy \tag{4-9}$$

$$D_H = \frac{4A}{P} \tag{4-10}$$

$$R_H = \frac{D_H}{2} \tag{4-11}$$

เมื่อ A คือพื้นที่หน้าตัดของปัญหา และ P คือเส้นรอบรูปเปียกของปัญหา สำหรับปัญหาการไหลนี้ ค่า Hydraulic Diameter จะเท่ากับความสูงของช่องคู่ขนาน โดยผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Eggels (1996) ที่ใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงและวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 120$ และผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Iwamoto, Suzuki, and Kasagi, (2002) ที่ใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงและวิธีสเปกทรัลที่ $\mathrm{Re}_\tau = 110$ และ $\mathrm{Re}_\tau = 150$ โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ แสดงในรูป 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ ในการแสดงผลลัพธ์สำหรับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนนั้นจะนิยมแสดงในรูปของตัวแปรที่ไม่มีหน่วยโดยใช้ความเร็วเสียดทานเฉลี่ยเป็นตัวหาร โดยสามารถหาความเร็วเสียดทานเฉลี่ยได้ดังนี้

$$\bar{u}_\tau = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}} \tag{4-12}$$

เมื่อ $\bar{\tau}_w$ คือความเค้นเฉือนที่ผนัง (Wall Shear Stress) มีค่าดังนี้

$$\bar{\tau}_w = \rho\nu \left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{y=0} \tag{4-13}$$

## 4.8 ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ปัญหาการไหลนี้จะเกิดโครงสร้างความปั่นป่วนที่เรียกว่าการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล และเนื่องจากรูปร่างของปัญหานี้มีลักษณะสมมาตร จึงมักนิยมนำปัญหาการไหลนี้มาจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนเพื่อศึกษาถึงลักษณะทางฟิสิกส์ของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล โดยรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.14 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 300 ( $\mathrm{Re}_\tau = \bar{u}_\tau H/\nu = 300$ ) โดยค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงท่อ หรือค่าเลขเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 4410 ( $\mathrm{Re}_b = \bar{U}_b D_H/\nu = 4410$ ) เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดและ Hydraulic Diameter โดยความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดสำหรับปัญหาการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมมีนิยามดังนี้

$$\bar{U}_b = \frac{1}{WH}\int_0^W \int_0^H \bar{u}(y,z)\,dydz \tag{4-14}$$

เมื่อ W คือความกว้างของท่อ และ H คือความสูงของท่อ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำในทิศทาง x เพื่อลดความยาวของโดเมน และเพื่อลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนทิศทางที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง สำหรับค่า Pressure Gradient, Skin Friction Coefficient และ Hydraulic Diameter สามารถคำนวณได้จากสมการ (4-6), (4-7) และ (4-10) ตามลำดับ ส่วนค่า Darcy Friction Factor สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนผ่านท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมสามารถหาได้จากการนำสมการสำหรับการหาค่า Darcy Friction Factor ในท่อที่มีหน้าตัดวงกลมมาทำการแก้ไขในส่วนที่เป็นเทอมของค่าเลขเรย์โนลด์ได้ดังนี้ (Jones, 1976)

$$\frac{1}{f^{1/2}} = 2.0\log_{10}\left(\mathrm{Re}^* \cdot f^{1/2}\right) - 0.8 \tag{4-15}$$

เมื่อ $\mathrm{Re}^*$ คือค่าเลขเรย์โนลด์ซึ่งได้ทำการปรับเปลี่ยนเพื่อให้สมการ (4-15) สามารถนำไปใช้กับท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมได้โดยมีค่าดังนี้

$$\mathrm{Re}^* = \phi^*\left(\frac{W}{H}\right)\mathrm{Re}_b \tag{4-16}$$

$$\phi^*\left(\frac{W}{H}\right)=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{H}{W}\right\}^2\left\{1-\frac{192H}{\pi^5 W}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\tanh\frac{(2n+1)\pi W}{2H} \tag{4-17}$$

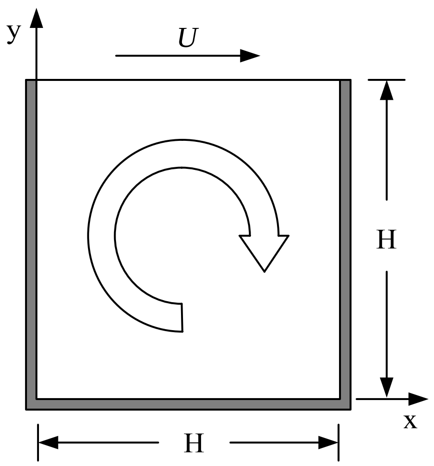
สำหรับในกรณีของท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัส $\mathrm{Re}^*=1.125\mathrm{Re}_b$ ในการตรวจสอบความถูกต้องได้เลือกใช้กริดจำนวนสองชุดเพื่อตรวจสอบความเป็นอิสระของกริด โดยกริดชุดแรกนั้นมีระยะห่างระหว่างจุดในหน่วยของผนัง (Wall Unit) เท่ากับ 3 ($\Delta^+=\Delta u_\tau/\nu=3$) โดยมีจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดเท่ากับ 300x100x100 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ ส่วนกริดชุดที่สองนั้นมีระยะห่างระหว่างจุดในหน่วยของผนัง (Wall Unit) เท่ากับ 1.5 ($\Delta^+=1.5$) โดยมีจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณทั้งหมดเท่ากับ 600x200x200 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขของ Gavrilakis (1992) ที่ใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงและวิธีผลต่างสืบเนื่องที่ $\mathrm{Re}_\tau=300$, ผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากโปรแกรมสำเร็จรูปที่ชื่อว่า Fluent โดยเลือกใช้ Large Eddy Simulation สำหรับการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนที่ $\mathrm{Re}_\tau=300$ และผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงจากโปรแกรมที่ชื่อว่า NEKTAR ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยศาสตราจารย์ George Karniadakis โดยใช้วิธีสเปกทรัลเอลิเมนต์ (Spectral Element) ที่ $\mathrm{Re}_\tau=300$ โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$, การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{v}$, การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{w}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ แสดงในรูป 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 และ 4.27 ตามลำดับ

## 4.9 ปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบพิกัดฉากสามมิติ

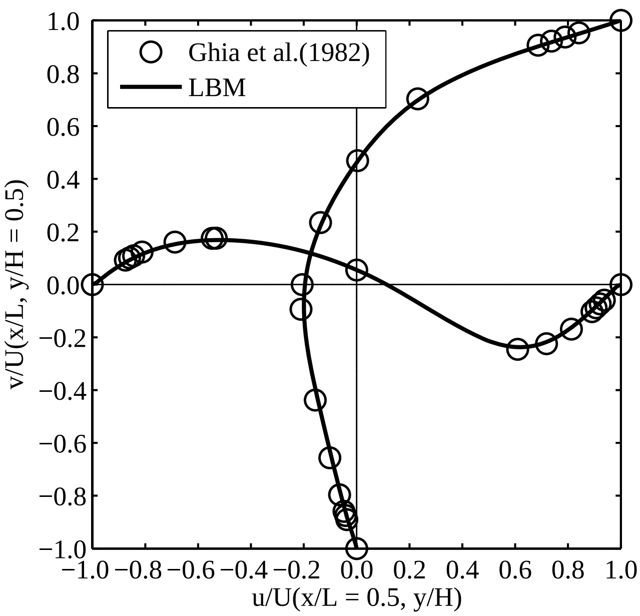
ปัญหานี้มีรูปร่างของปัญหาเป็นไปตามรูปที่ 4.28 สำหรับการตรวจสอบความถูกต้องนั้นได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าอัตราส่วนลักษณะ 2 ค่า โดยปัญหาการไหลแรกมีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 (AR1.0) ส่วนปัญหาการไหลที่สองทำที่ค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 2.0 (AR2.0) โดยค่าอัตราส่วนลักษณะมีนิยามดังนี้

$$AR = \frac{W}{H} \tag{4-18}$$

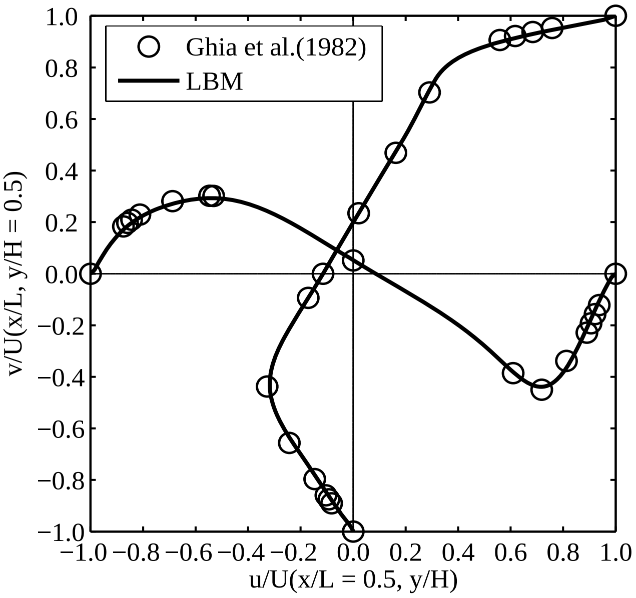
โดยแต่ละปัญหานั้นจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์มีค่าเท่ากับ 2800 ( $\mathrm{Re}_b = 2800$ ) เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดและ Hydraulic Diameter และใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบวนซ้ำในทิศทาง x เพื่อลดความยาวของโดเมนและลดจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ ส่วนทิศทางที่เหลือนั้นใช้เงื่อนไขขอบเขตแบบผนัง สำหรับค่า Pressure Gradient, Skin Friction Coefficient, Hydraulic Diameter และ Darcy Friction Factor สามารถคำนวณได้จากสมการ (4-6), (4-7), (4-10) และ (4-15) ตามลำดับ สำหรับจำนวนกริดที่ใช้ในการคำนวณนั้นมีระยะห่างระหว่างจุดในหน่วยของผนัง (Wall Unit) ประมาณ 3 ( $\Delta^+ \approx 3$ ) โดยมีจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณสำหรับกรณี AR1.0 เท่ากับ 420x70x70 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ และจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณสำหรับกรณี AR2.0 เท่ากับ 420x70x140 ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นนั้นได้นำไปตรวจสอบความถูกต้องกับผลการทดลองของ Li and Olsen (2006) ที่ทำการวัดใน Micro Channel โดยใช้เทคนิคที่เรียกว่า MicroPIV ที่ $\mathrm{Re}_b = 2853$ สำหรับกรณี AR1.0 และที่ $\mathrm{Re}_b = 2778$ สำหรับกรณี AR2.0 โดยผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ สำหรับกรณี AR1.0 แสดงในรูป 4.29, 4.30, 4.31 และ 4.32 ตามลำดับ ส่วนผลการเปรียบเทียบการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ สำหรับกรณี AR2.0 แสดงในรูป 4.33, 4.34, 4.35 และ 4.36 ตามลำดับ



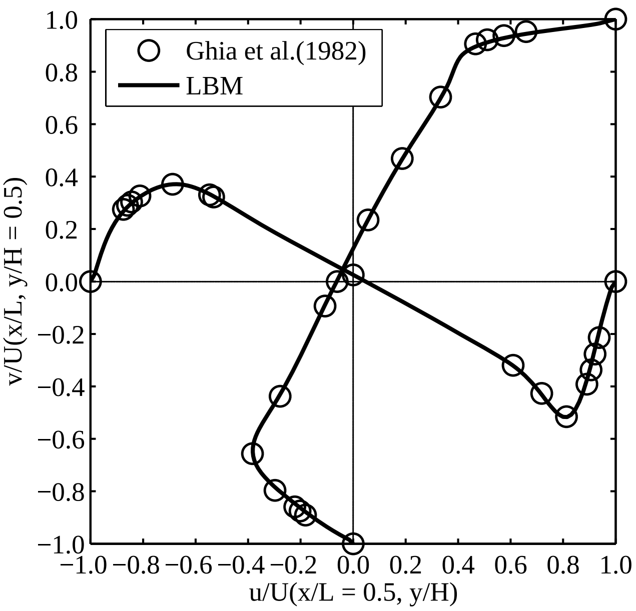

รูปที่ 4.1 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติ



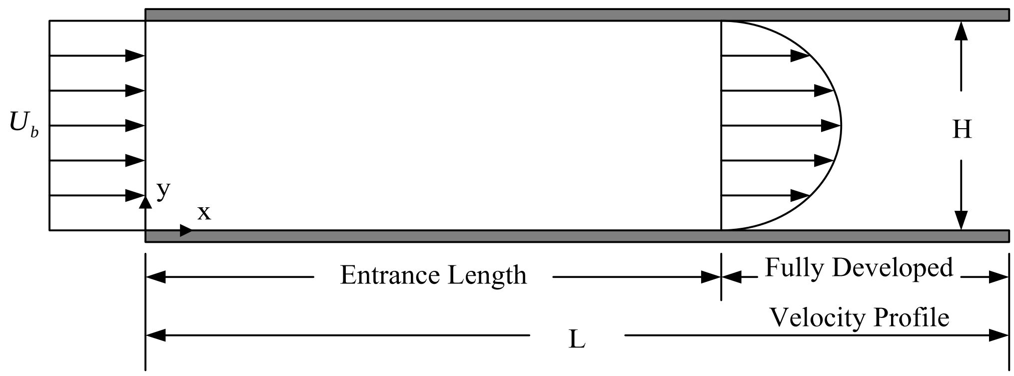

รูปที่ 4.2 การกระจายตัวของความเร็ว u และ v ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 100



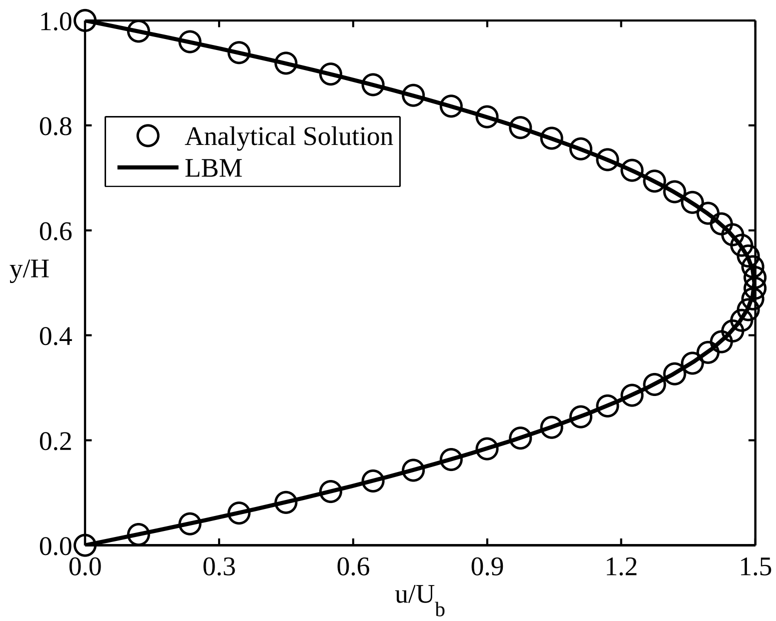

รูปที่ 4.3 การกระจายตัวของความเร็ว u และ v ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 400



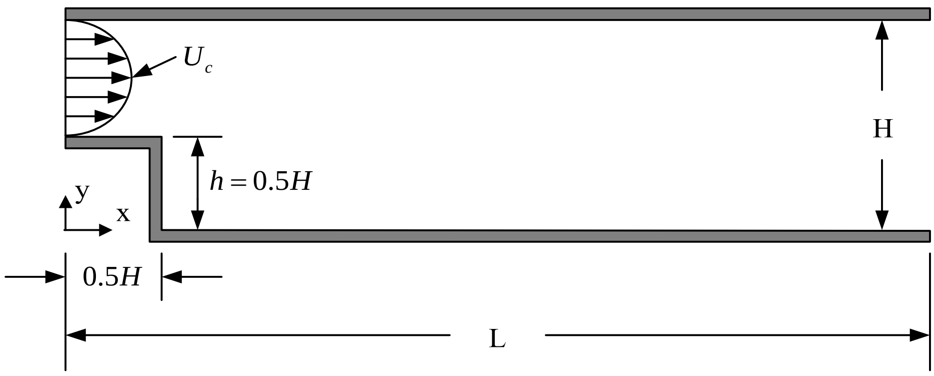

รูปที่ 4.4 การกระจายตัวของความเร็ว u และ v ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในโพรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 1000



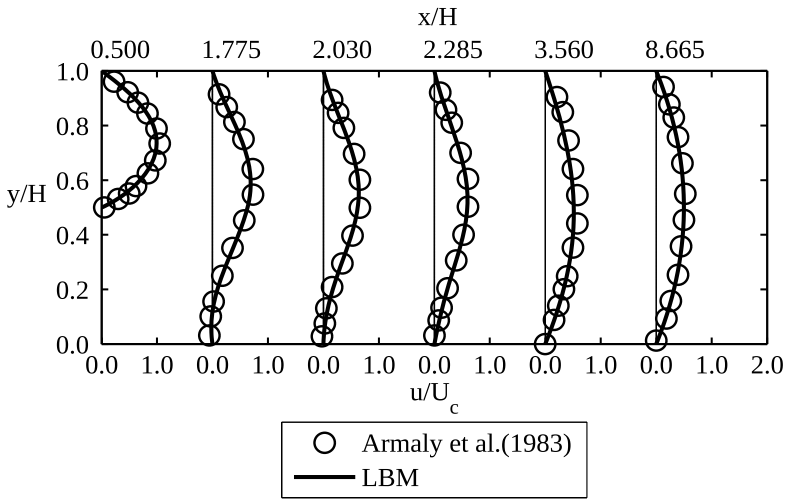

รูปที่ 4.5 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่ง ในระบบพิกัดฉากสองมิติ



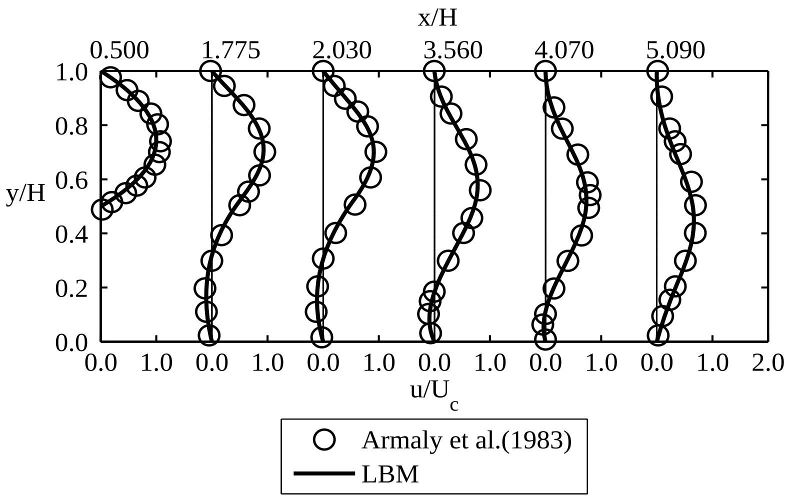

รูปที่ 4.6 การกระจายตัวของความเร็ว u ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในช่องคู่ขนาน ที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสองมิติบริเวณทางออกช่องคู่ขนานที่ Re = 100



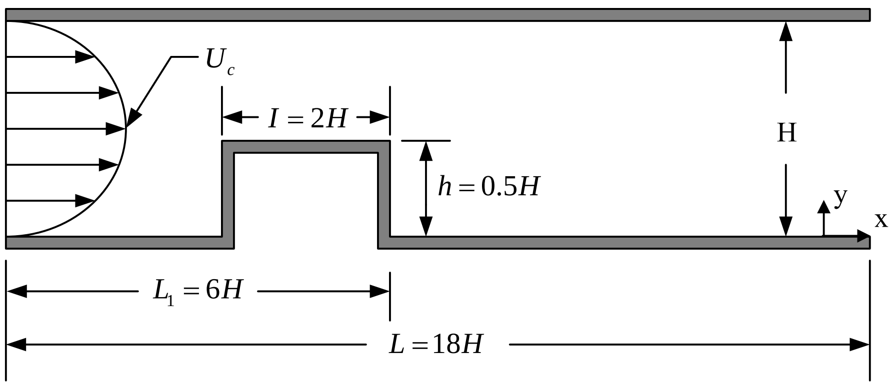

รูปที่ 4.7 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลัง ในระบบพิกัดฉากสองมิติ



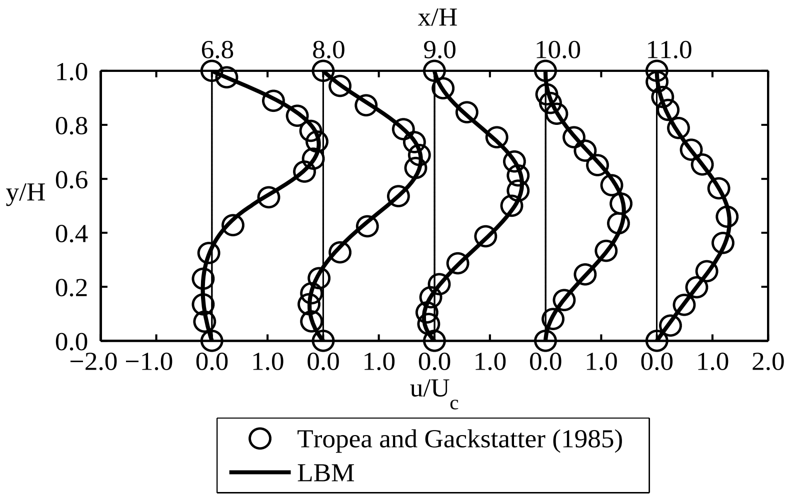

รูปที่ 4.8 การกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบ ผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 100



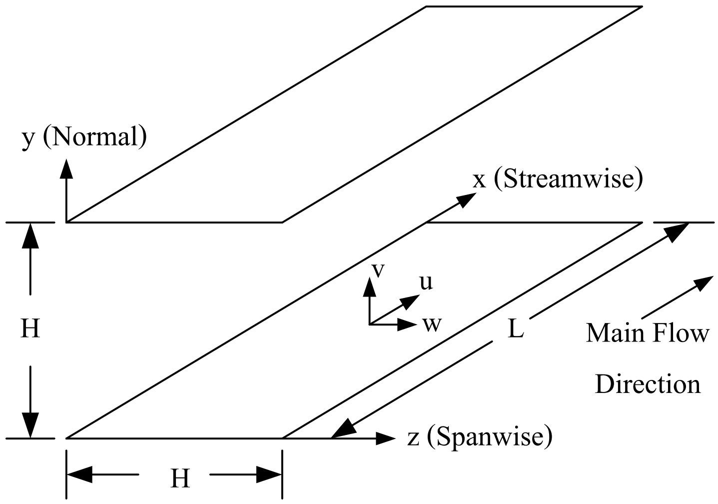

รูปที่ 4.9 การกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านโดเมนรูปขั้นบันไดกลับหลังในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 389



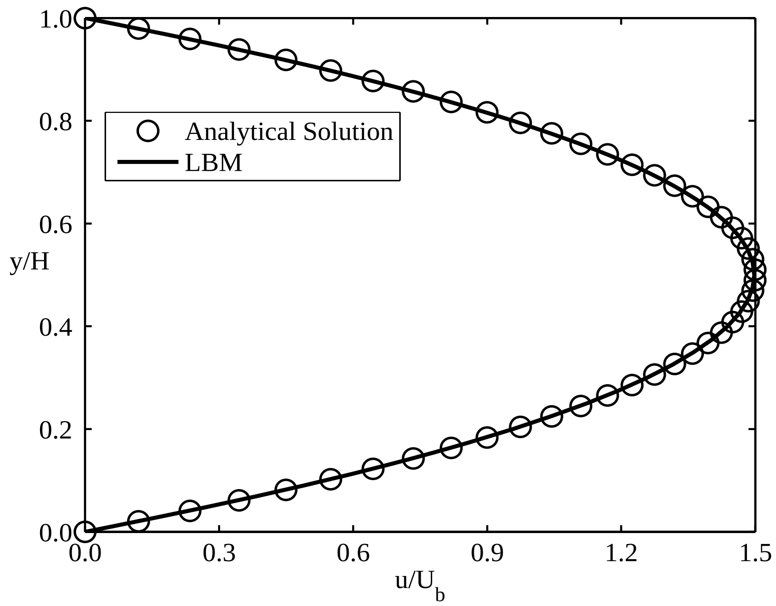

รูปที่ 4.10 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติ



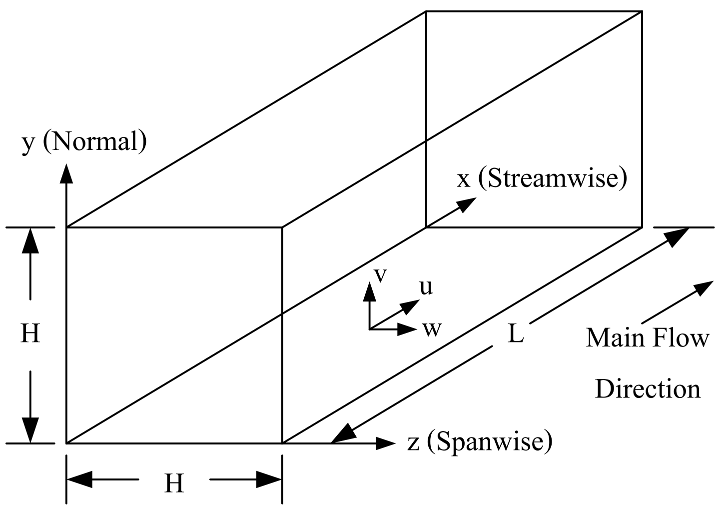

รูปที่ 4.11 การกระจายตัวของความเร็ว u ที่ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่านสิ่งกีดขวางรูปทรงสี่เหลี่ยมในช่องทางไหลในระบบพิกัดฉากสองมิติที่ Re = 144



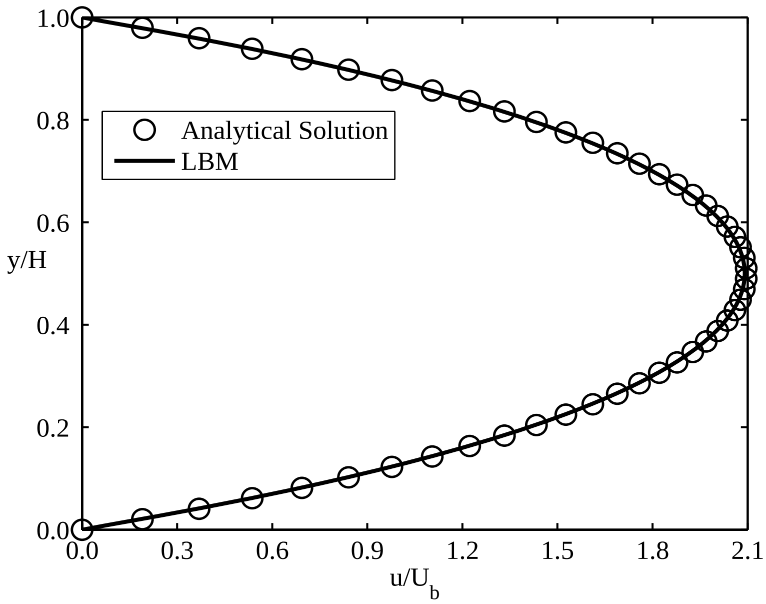

รูปที่ 4.12 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ



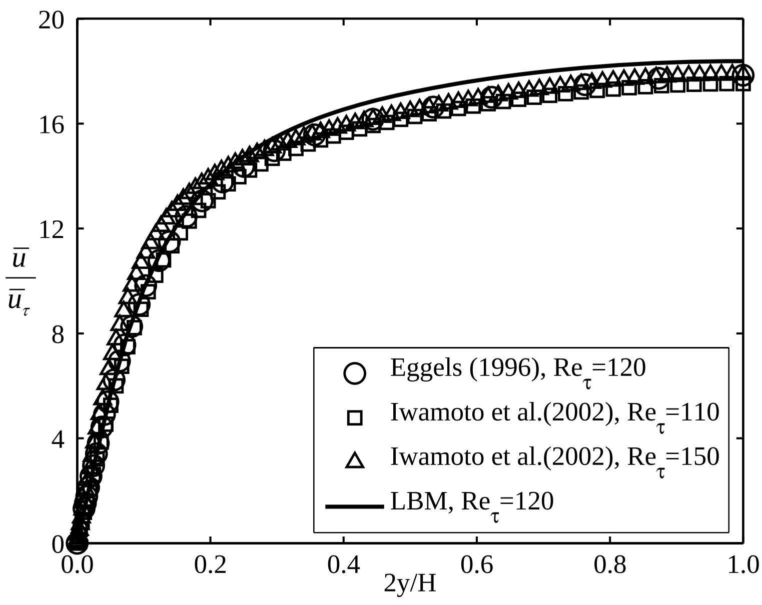

รูปที่ 4.13 การกระจายตัวของความเร็ว u ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง z/H = 0.5 ที่ Re = 100



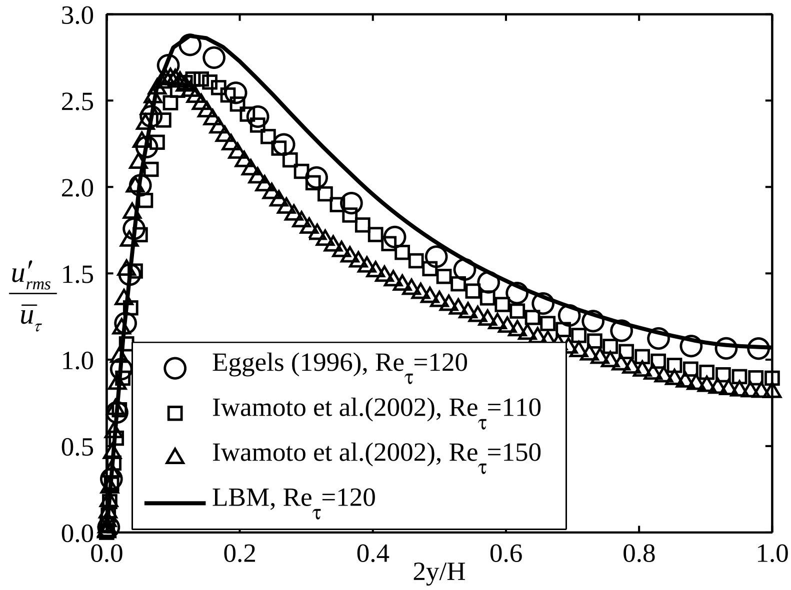

รูปที่ 4.14 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติ



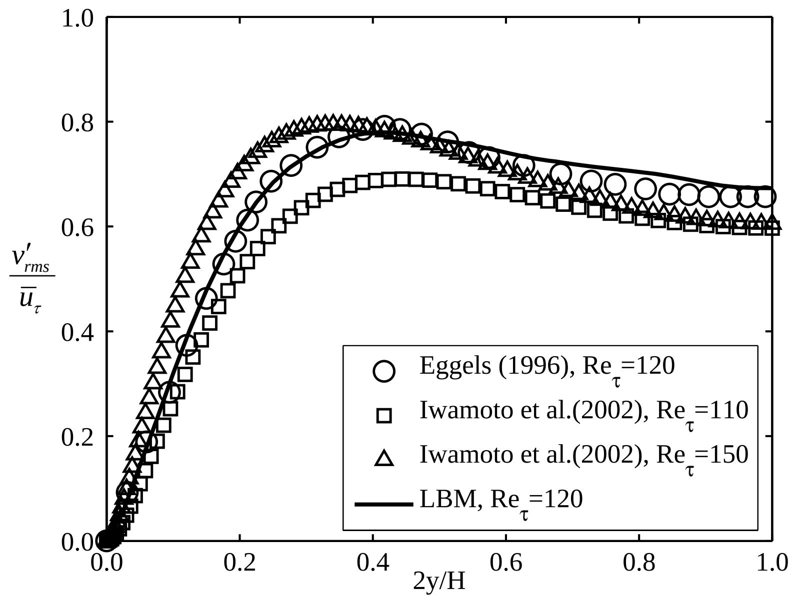

รูปที่ 4.15 การกระจายตัวของความเร็ว u ของปัญหาการไหลแบบราบเรียบในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง z/H = 0.5 ที่ Re = 100



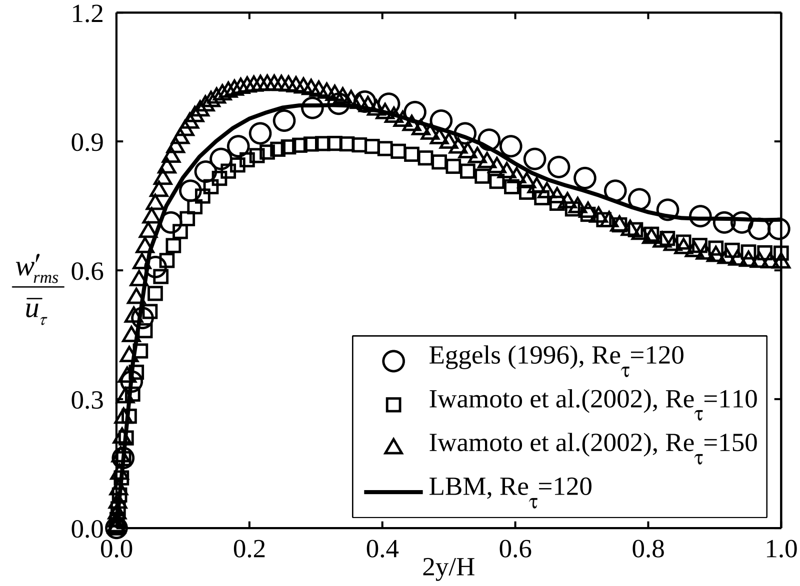

รูปที่ 4.16 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_{\tau} = 120$



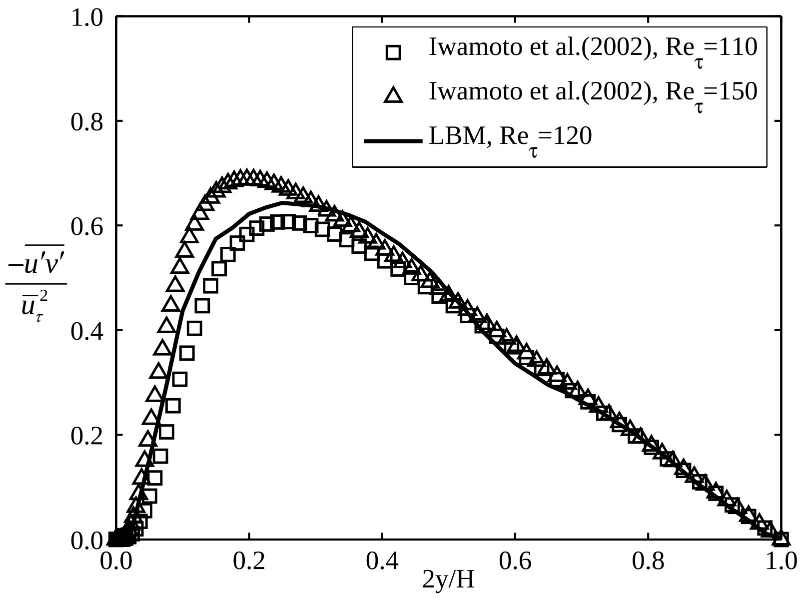

รูปที่ 4.17 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 120$



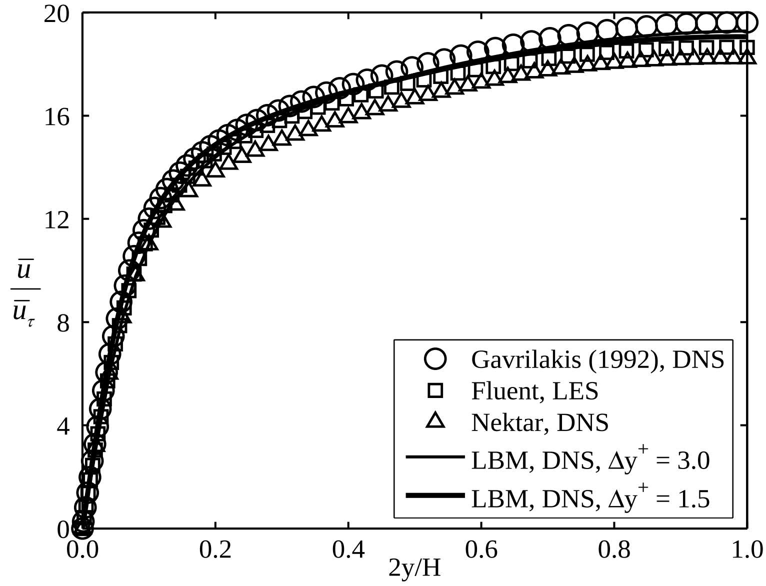

รูปที่ 4.18 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 120$



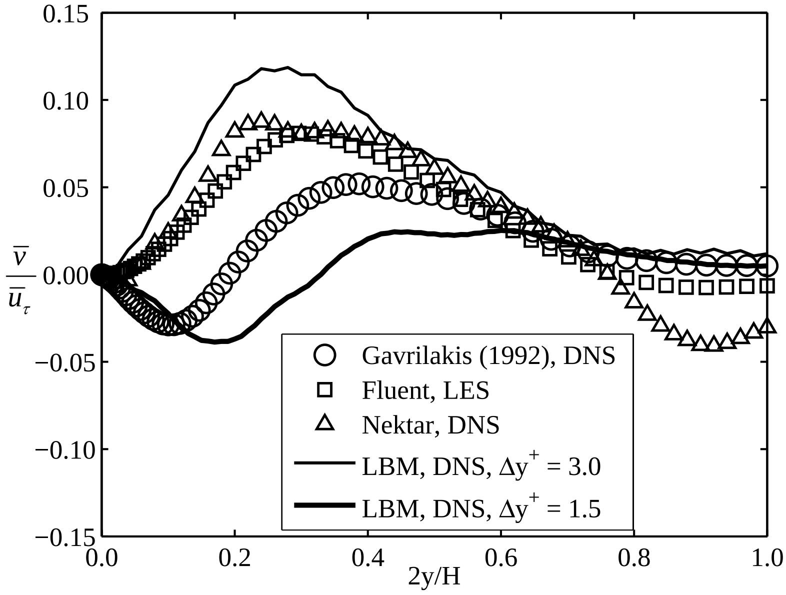

รูปที่ 4.19 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 120$



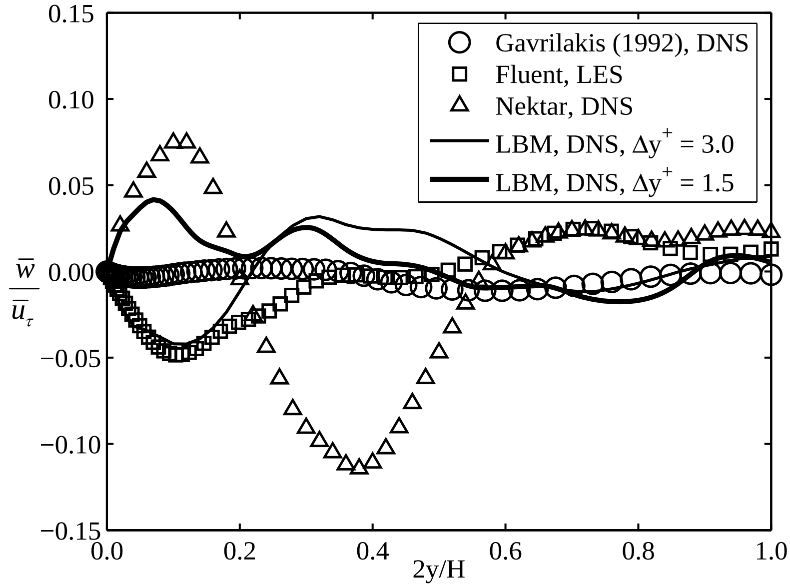

รูปที่ 4.20 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระนาบคู่ขนานที่หยุดนิ่งในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 120$



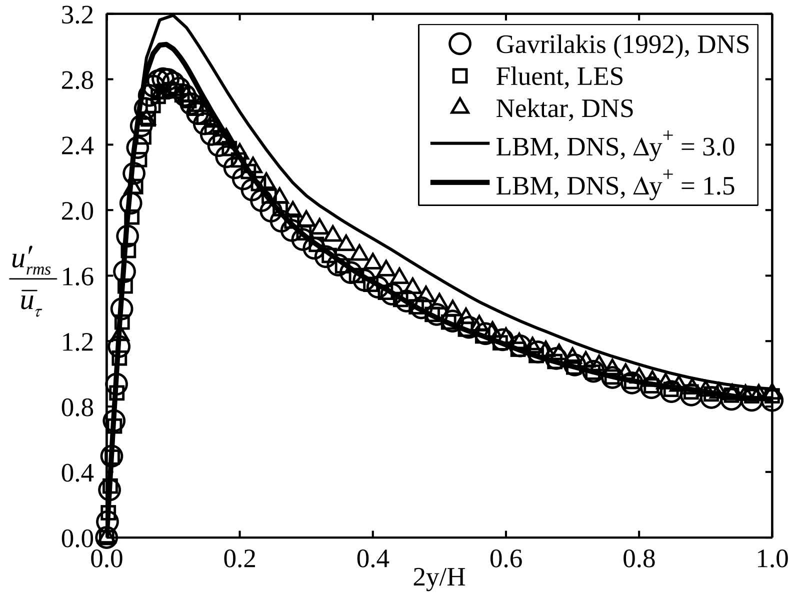

รูปที่ 4.21 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



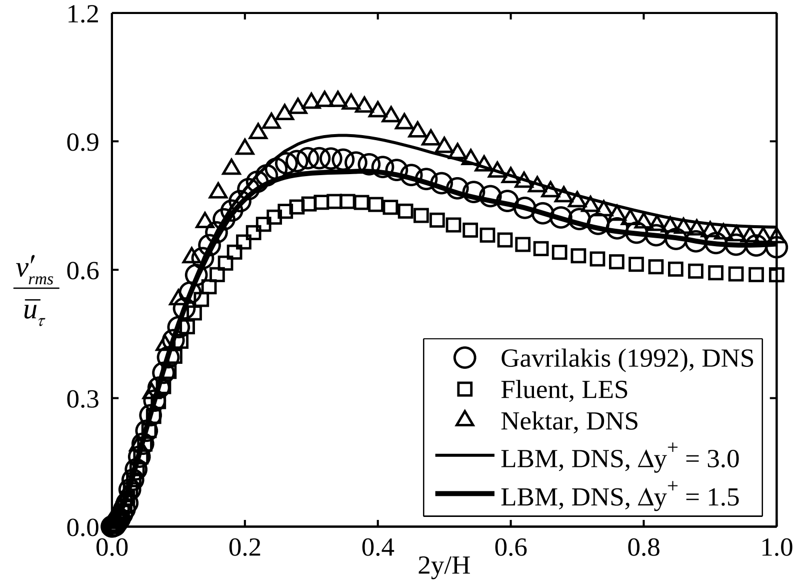

รูปที่ 4.22 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{v}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



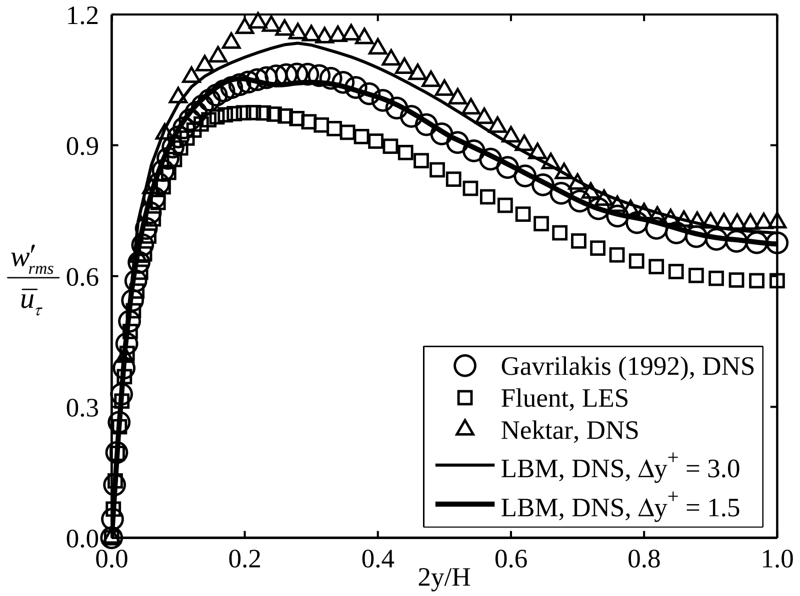

รูปที่ 4.23 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{w}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



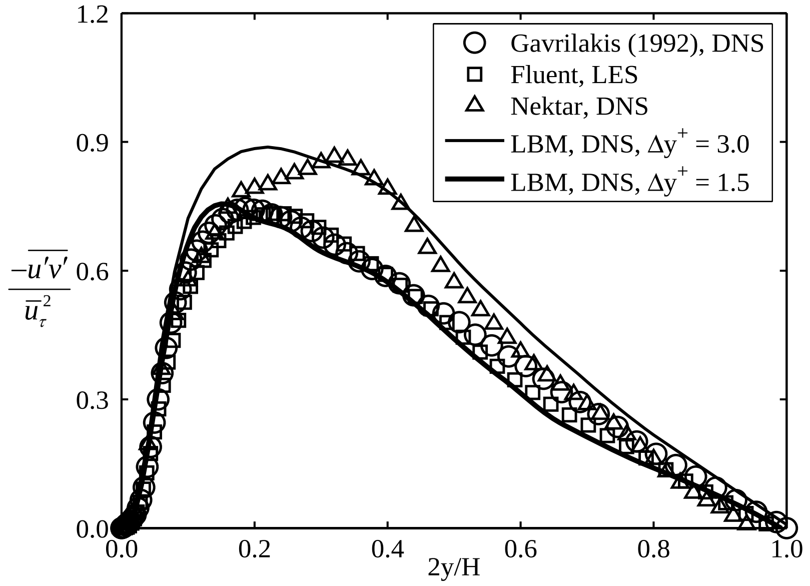

รูปที่ 4.24 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



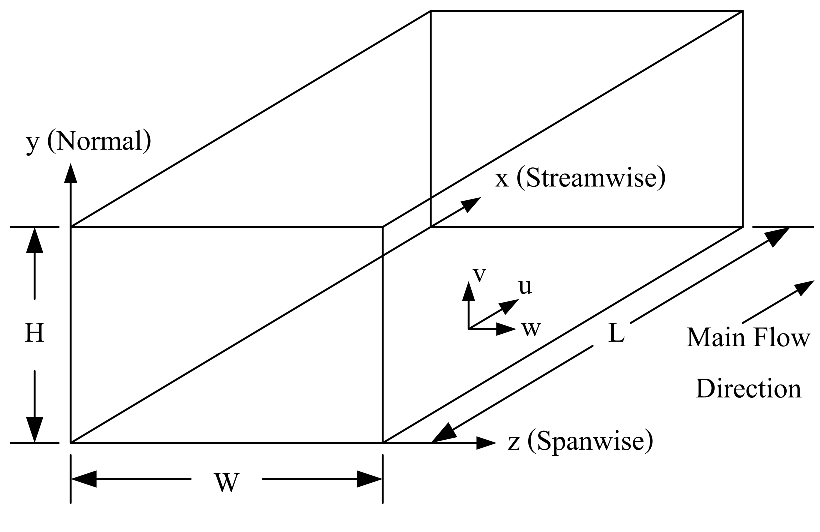

รูปที่ 4.25 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



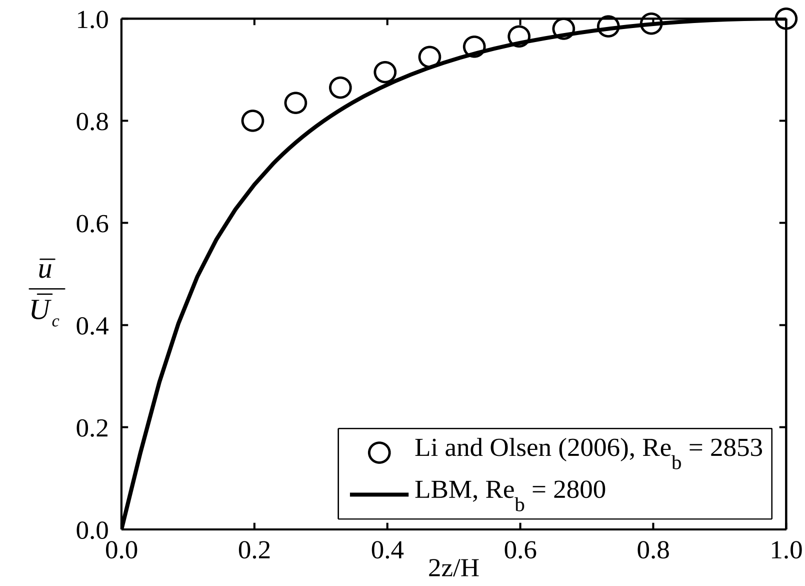

รูปที่ 4.26 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



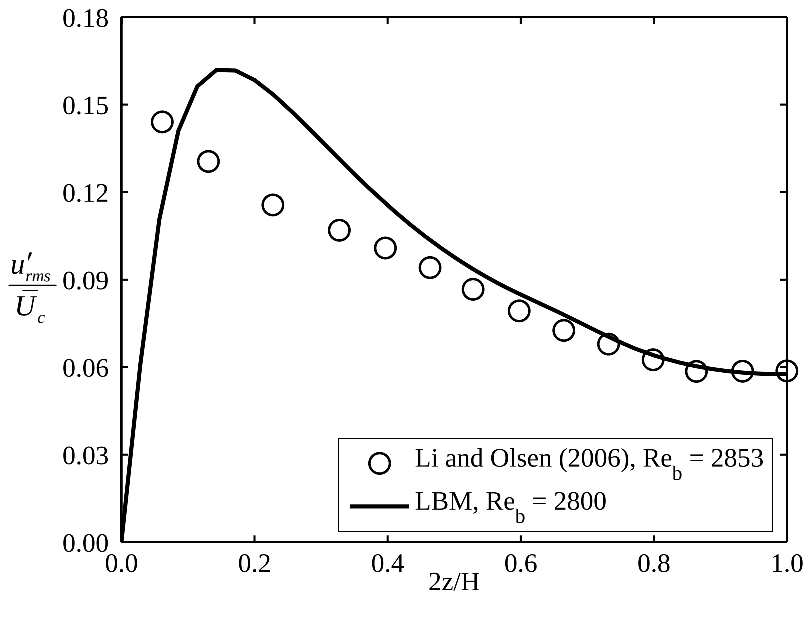

รูปที่ 4.27 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$



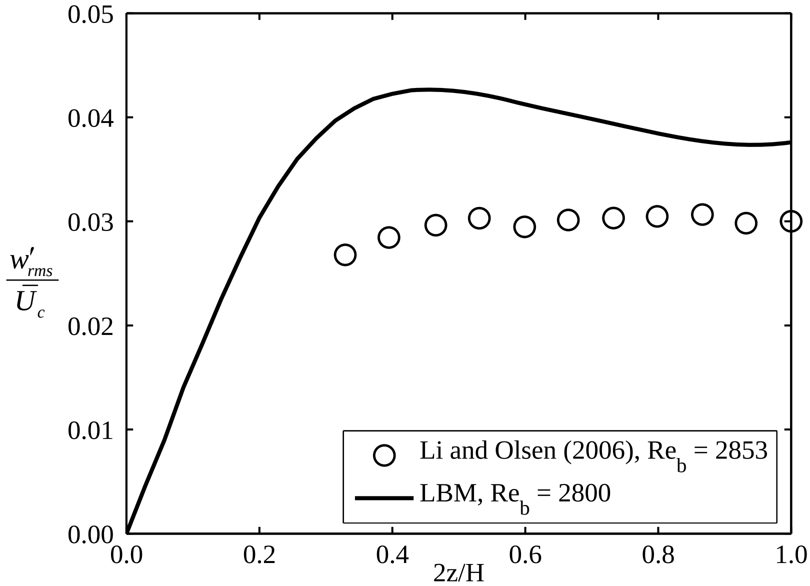

รูปที่ 4.28 แสดงรูปทรงของปัญหาการไหลในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าในระบบพิกัดฉากสามมิติ



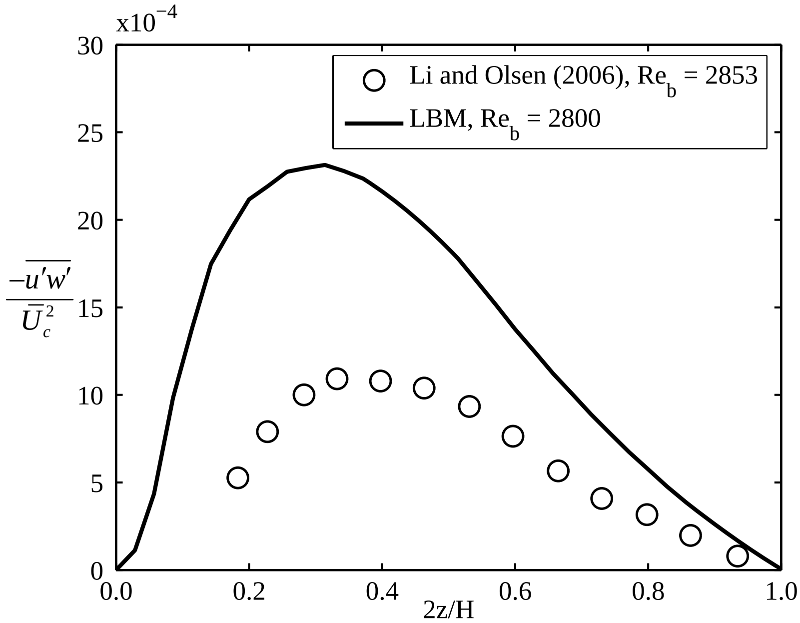

รูปที่ 4.29 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



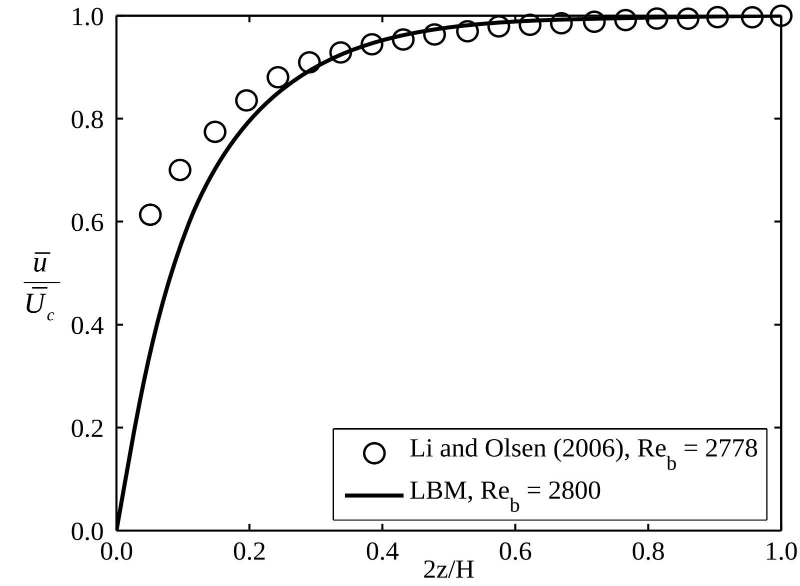

รูปที่ 4.30 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



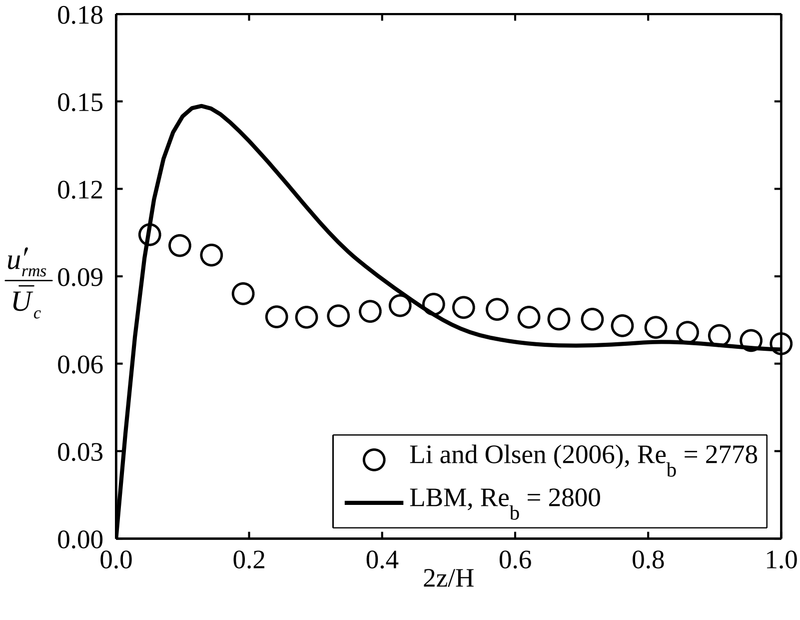

รูปที่ 4.31 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



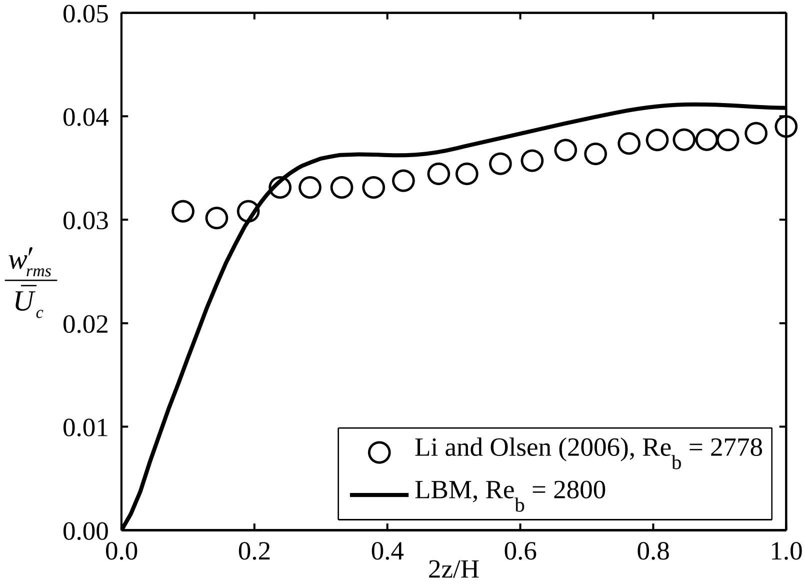

รูปที่ 4.32 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



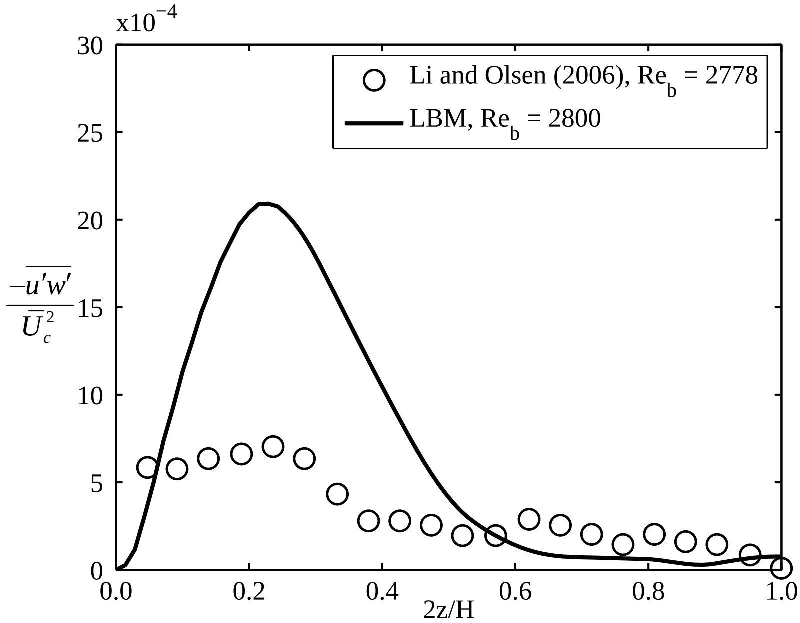

รูปที่ 4.33 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 2.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 4.34 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 2.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 4.35 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 2.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 4.36 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 2.0 ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$

# บทที่ 5
# พฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยศึกษาถึงผลกระทบของตัวแปรที่มีอิทธิพลต่อการไหลในท่อหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองตัวคือ ค่าเลขเรย์โนลด์และค่าอัตราส่วนลักษณะ โดยในหัวข้อ 5.1 ทำการศึกษาถึงผลกระทบของค่าเลขเรย์โนลด์ที่มีผลต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนเมื่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากัน และในหัวข้อ 5.2 ทำการศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะที่มีผลต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนเมื่อมีค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากัน

## 5.1 ผลกระทบของค่าเลขเรย์โนลด์ที่มีผลต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในการศึกษาผลกระทบของค่าเลขเรย์โนลด์ ได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 2 ค่า คือ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และ 205 เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์นั้นคำนวณจากความเร็วเสียดทานเฉลี่ยและความสูงท่อ โดยได้เลือกจำลองการไหลในท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 (AR = 1.0) ในการคำนวณได้ทำการกำหนดระยะห่างระหว่างจุดที่ใช้ในการคำนวณในหน่วยของผนังให้มีความใกล้เคียงกัน โดยในกรณีของ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ มีระยะห่างระหว่างจุด $\Delta^+ = 3$ สำหรับในกรณีของ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ นั้นมีระยะห่างระหว่างจุด $\Delta^+ \approx 3$

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง เห็นได้ว่าค่าเลขเรย์โนลด์ส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนไม่ว่าจะเป็นความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ รวมไปถึงส่งผลต่อลักษณะของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลอีกด้วย ในรูปที่ 5.1-5.5 แสดงความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ตลอดแนวแกน y โดยที่ระยะ 2y/H = 0.0 คือผนังด้านล่างและระยะ 2y/H = 1.0 คือจุดกึ่งกลางของท่อ

รูปที่ 5.1 แสดงความเร็ว $\bar{u}$ เห็นได้ว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นส่งผลให้ความเร็ว $\bar{u}$ ตั้งแต่ตำแหน่ง 2y/H < 0.4 มีความเร็วเพิ่มขึ้น ส่วนลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ สำหรับตำแหน่ง 2y/H > 0.4 ขึ้นไปนั้น ค่าเลขเรย์โนลด์แทบไม่มีอิทธิพลกับความเร็วบริเวณนั้นเลย

รูปที่ 5.2 แสดงความเร็ว $\bar{v}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้น ขนาดของความเร็ว $\bar{v}$ มีค่าลดลง และค่าเลขเรย์โนลด์ยังส่งผลให้ตำแหน่งที่ความเร็ว $\bar{v}$ มีค่ามากที่สุดเลื่อนเข้าใกล้ผนังมากขึ้น

รูปที่ 5.3 แสดงความเร็ว $\bar{w}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าทั้งขนาดและลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{w}$ ทั้งสองค่าเลขเรย์โนลด์นั้นมีความใกล้เคียงกัน โดยมีความแตกต่างกันแค่เพียงตำแหน่งที่ความเร็ว $\bar{w}$ มีค่ามากที่สุดเลื่อนเข้าใกล้บริเวณผนังมากขึ้นเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้น

รูปที่ 5.4 แสดงความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ เมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นจุดที่ความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ มีค่าสูงสุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้บริเวณผนังมากขึ้น โดยเลื่อนจากบริเวณ 2y/H ≈ 0.2 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ไปยังตำแหน่ง 2y/H ≈ 0.1 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และค่าสูงสุดของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ นั้นมีขนาดใกล้เคียงกันทั้งสองค่าเลขเรย์โนลด์

รูปที่ 5.5 และ 5.6 แสดงความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ และ $w'_{rms}$ ตามลำดับ โดยพฤติกรรมของความเร็วปั่นป่วนสองตัวนี้มีลักษณะคล้ายคลึงกัน คือเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้น จุดที่ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ และ $w'_{rms}$ มีค่าสูงสุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้บริเวณผนังมากขึ้น และยังทำให้ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ และ $w'_{rms}$ บริเวณผนังมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย อย่างไรก็ตามค่าเลขเรย์โนลด์นั้นแทบไม่ส่งผลต่อลักษณะการกระจายตัวในบริเวณตรงกลางท่อสำหรับความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ และ $w'_{rms}$ เลย

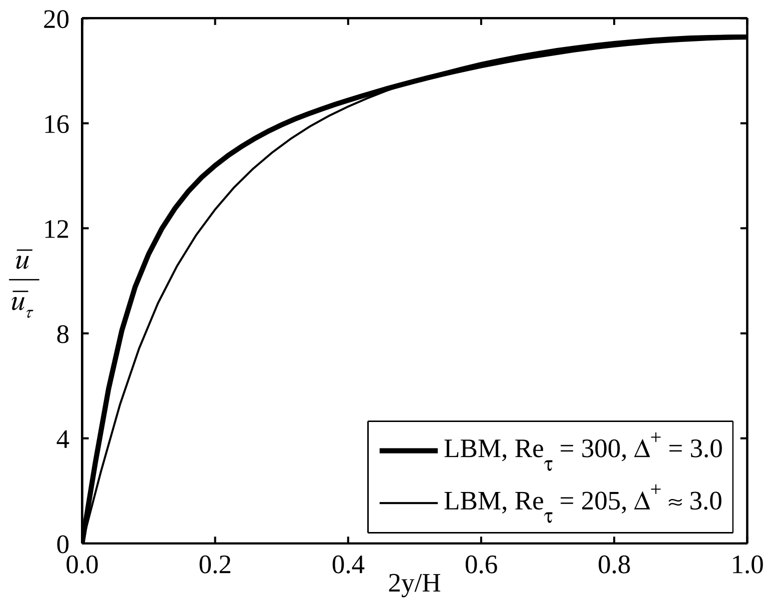
รูปที่ 5.7 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ โดยพฤติกรรมของ $\overline{u'v'}$ นั้นคล้ายกับพฤติกรรมของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ คือเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นจุดที่ค่าความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ มีค่าสูงสุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้บริเวณผนังมากขึ้น โดยเลื่อนจากบริเวณ 2y/H ≈ 0.3 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ไปยังตำแหน่ง 2y/H ≈ 0.2 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 300$

รูปที่ 5.8 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ เห็นได้ว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นจุดที่ค่าความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ มีค่าสูงสุดได้เลื่อนเข้าไปใกล้บริเวณผนังมากขึ้นและมีค่ามากขึ้นอีกด้วย โดยเลื่อนจากบริเวณ 2y/H ≈ 0.31 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ไปยังตำแหน่ง 2y/H ≈ 0.13 สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ อย่างไรก็ตามพบว่าที่ตำแหน่งตั้งแต่ 2y/H > 0.5 ขึ้นไป ค่าเลขเรย์โนลด์แทบไม่ส่งผลต่อขนาดและลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ เลย

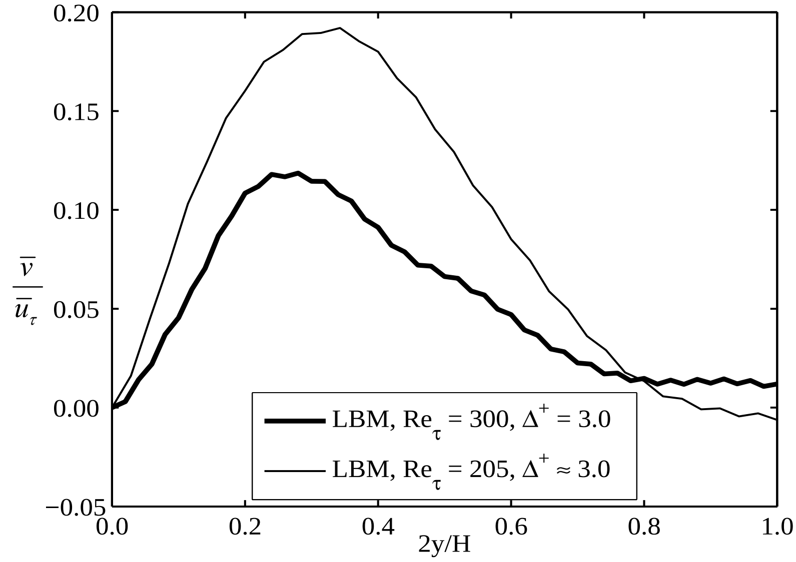
รูปที่ 5.9 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ พบว่าทั้งลักษณะการกระจายตัวและขนาดของ $\overline{v'w'}$ ไม่มีความแตกต่างกันมากนักทั้งสองค่าเลขเรย์โนลด์ โดยพบว่ากรณี $\mathrm{Re}_\tau = 300$ มีขนาดของเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ มากกว่ากรณี $\mathrm{Re}_\tau = 205$ เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

รูปที่ 5.10(b) และ 5.11(b) แสดงเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ตามลำดับ เห็นได้ว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นขนาดของการหมุนวนก็มีความรุนแรงเพิ่มขึ้นตามไปด้วย โดยขนาดของการหมุนวนเพิ่มขึ้นจาก $2.8\text{x}10^{-4}$ สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ไปเป็น $3.0\text{x}10^{-4}$ สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ โดยขนาดของการหมุนวนในแนวแกน x สามารถคำนวณได้จากสมการ (2-11) นอกจากนั้นค่าเลขเรย์โนลด์ยังส่งผลให้จุดศูนย์กลางของการหมุนวนได้ขยับเข้าใกล้บริเวณมุมของผนังมากขึ้น โดยสังเกตได้จากจุดศูนย์กลางของการหมุนวนตัวล่างสุดทางด้านซ้ายมือเลื่อนจากตำแหน่ง (0.622, 0.292) สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 205$ ไปยังตำแหน่ง (0.478, 0.206) สำหรับ $\mathrm{Re}_\tau = 300$

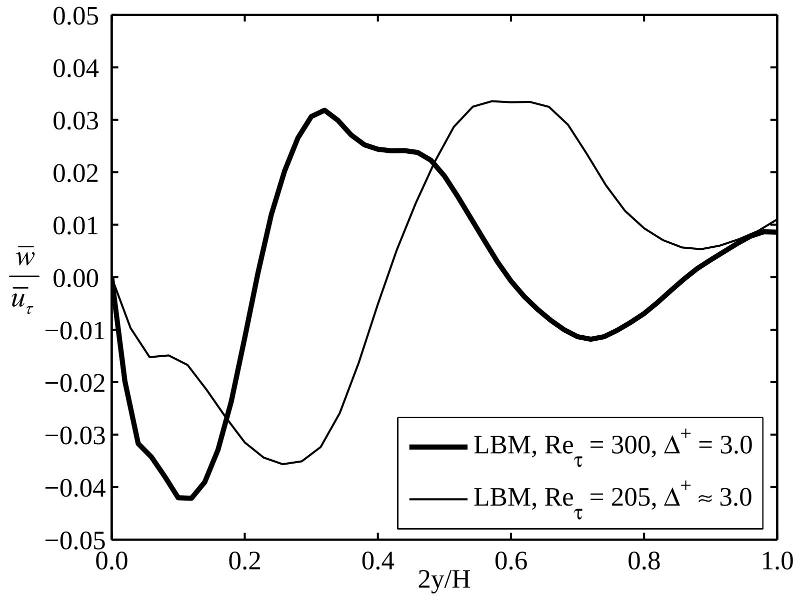
สรุปได้ว่า ค่าเลขเรย์โนลด์นั้นส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนบริเวณผนังของท่อโดยสามารถสังเกตได้ว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นค่าความเร็วเฉลี่ย (ยกเว้นความเร็วเฉลี่ย $\bar{v}$ ), ค่าความเร็วปั่นป่วน และค่าความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์บริเวณผนังจะเพิ่มขึ้นตามไปด้วย อย่างไรก็ตามค่าเลขเรย์โนลด์นั้นแทบไม่ส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนบริเวณตรงกลางท่อเลย



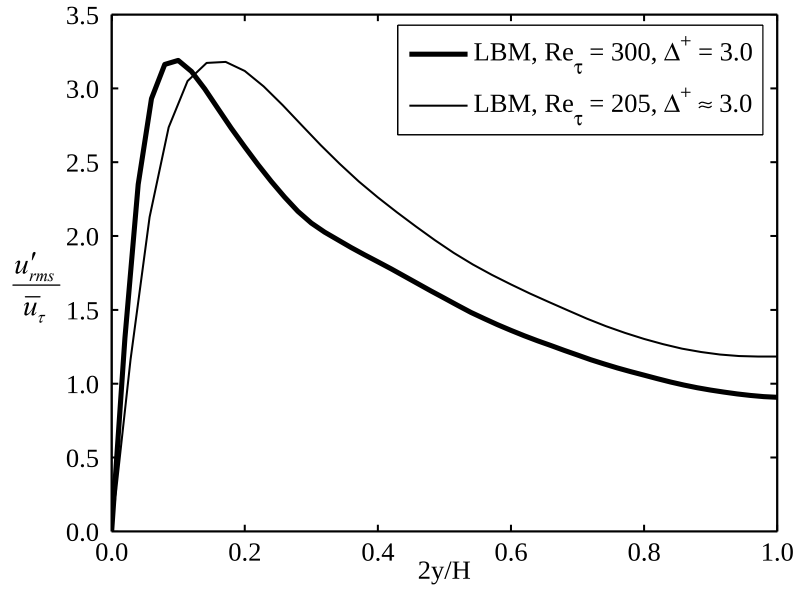

รูปที่ 5.1 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และ 205



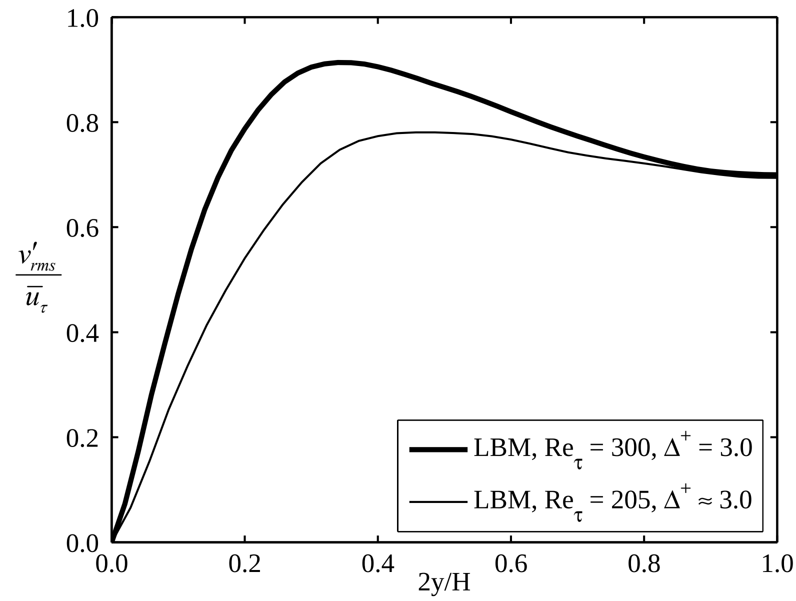

รูปที่ 5.2 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{v}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205



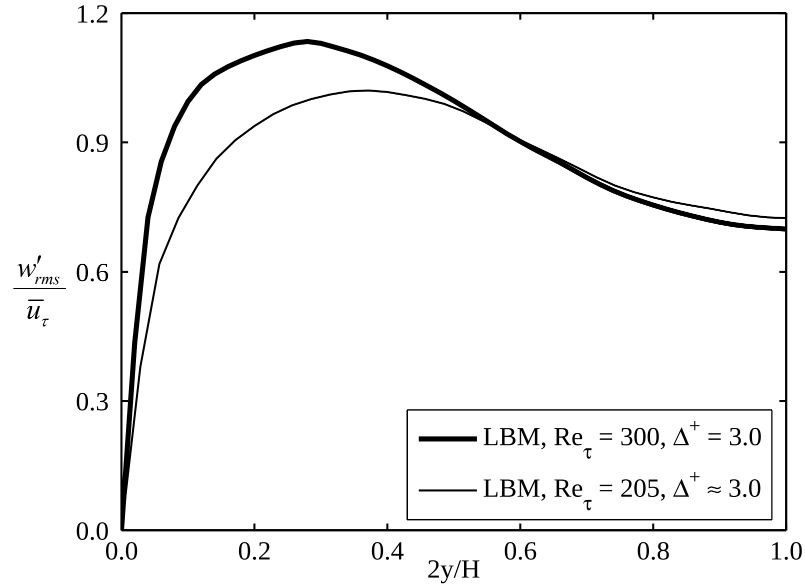

รูปที่ 5.3 การกระจายตัวของความเร็ว $\bar{w}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205



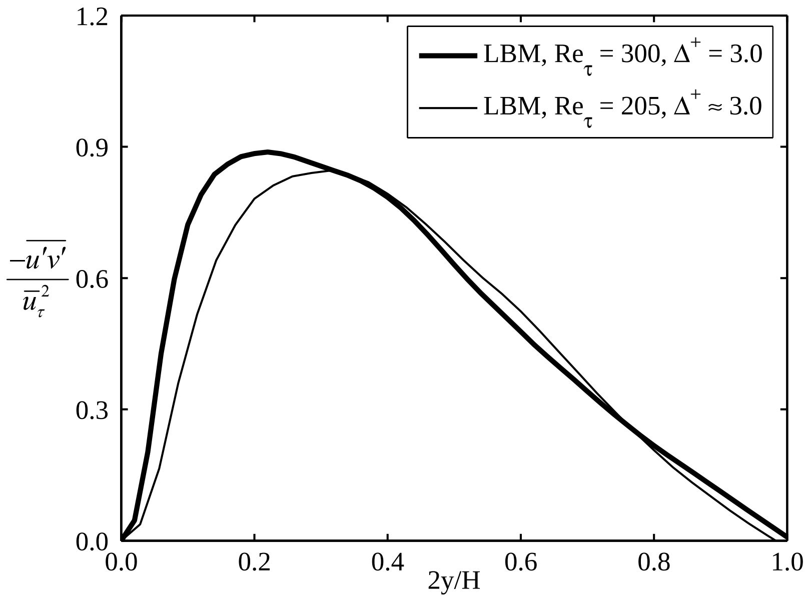

รูปที่ 5.4 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และ 205



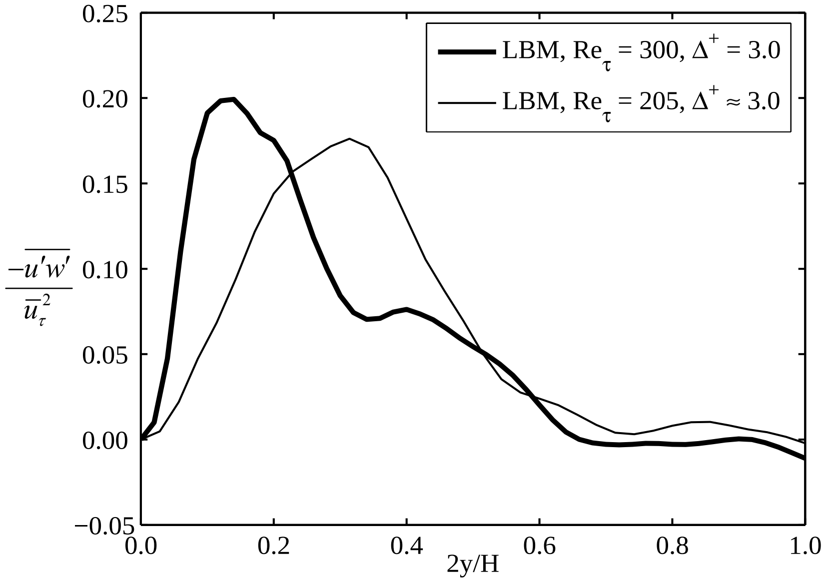

รูปที่ 5.5 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$ และ 205



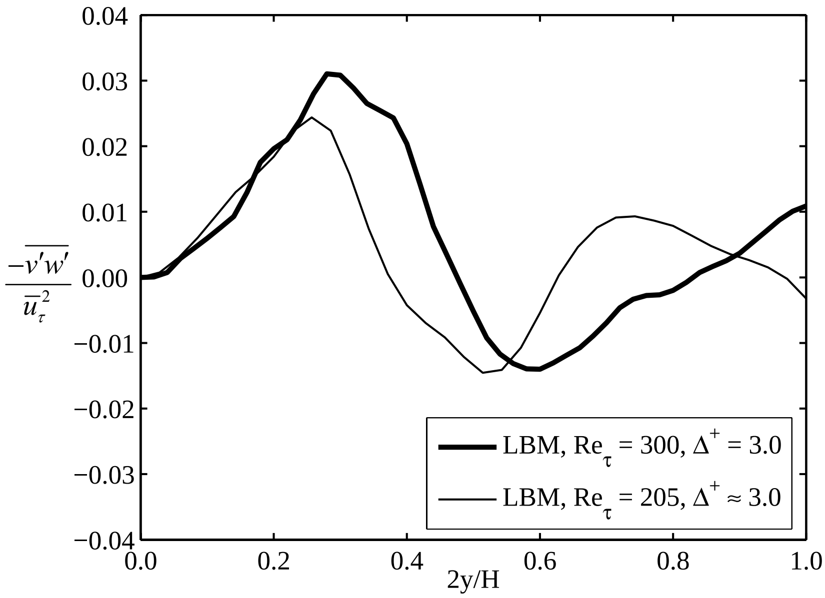

รูปที่ 5.6 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205



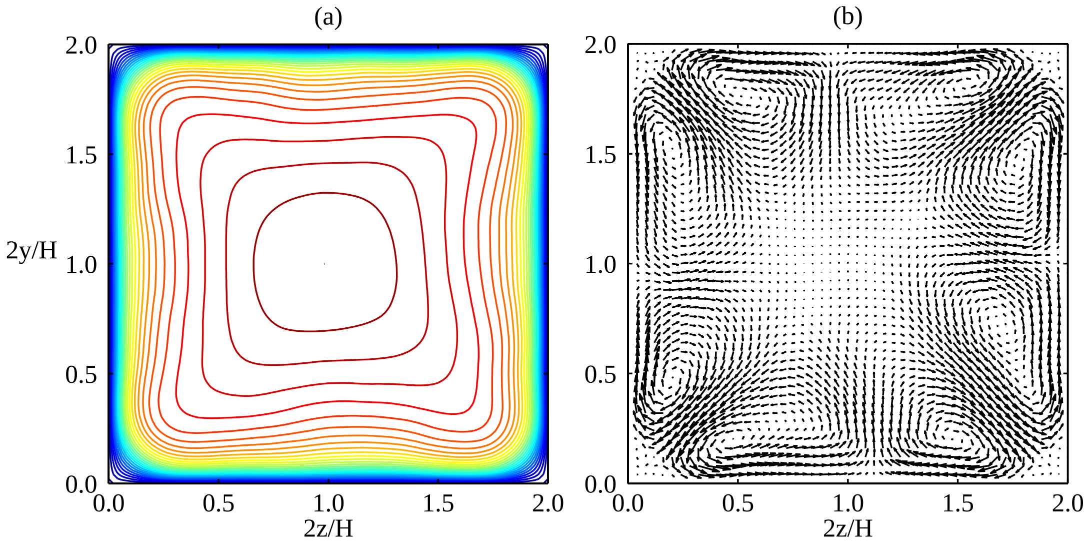

รูปที่ 5.7 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205



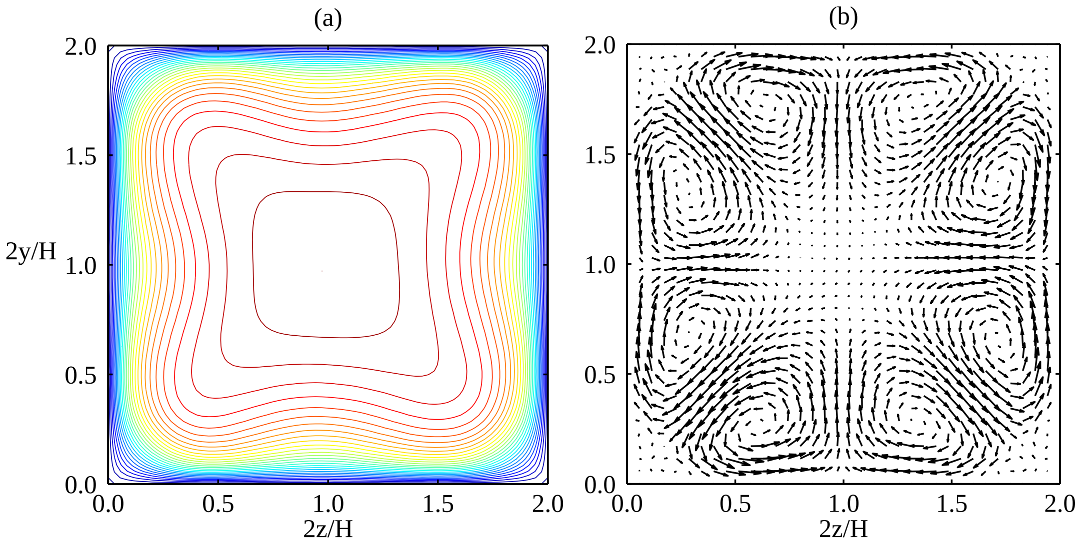

รูปที่ 5.8 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205




รูปที่ 5.9 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $Re_\tau = 300$ และ 205




รูปที่ 5.10 คอนทัวร์ของความเร็ว $\bar{u}$ (a) และเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (b) ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 300$




รูปที่ 5.11 คอนทัวร์ของความเร็ว $\bar{u}$ (a) และเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (b) ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_\tau = 205$

## 5.2 ผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะที่มีผลต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในการศึกษาผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะ ได้ทำการจำลองการไหลในท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะ 3 ค่าดังนี้ (1) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 (AR1.0), (2) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.5 (AR1.5) และ (3) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 2.0 (AR2.0) โดยได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ $Re_\tau = 205$ หรือ $Re_b = 2800$ เมื่อคำนวณค่าเลขเรย์โนลด์จากความเร็วเฉลี่ยตลอดหน้าตัดและ Hydraulic Diameter ในการคำนวณได้ทำการกำหนดระยะห่างระหว่างจุดที่ใช้ในการคำนวณในหน่วยของผนังให้มีความใกล้เคียงกัน โดยใช้ระยะห่างระหว่างจุด $\Delta^+ \approx 3$

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง เห็นได้ว่าค่าอัตราส่วนลักษณะส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนไม่ว่าจะเป็นความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ รวมไปถึงส่งผลต่อลักษณะของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลอีกด้วย โดยในรูปที่ 5.8-5.16 แสดงความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ตลอดแนวแกน y โดยที่ระยะ 2y/H = 0.0 คือผนังด้านล่างและระยะ 2y/H = 1.0 คือจุดกึ่งกลางของท่อ โดยในการศึกษาพฤติกรรมตลอดแนวแกน y นั้นได้ทำการเปรียบเทียบกับผลการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงของ Kuroda, Kasagi, and Hirata (1989) ที่จำลองพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งที่ค่าเลขเรย์โนลด์เท่ากับ 2890 ซึ่งปัญหาการไหลนี้ถือได้ว่ามีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับอนันต์ ($AR = \infty$) ส่วนในรูปที่ 5.17-5.25 แสดงความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ตลอดแนวแกน z โดยที่ระยะ 2z/H = 0.0 คือผนังด้านซ้ายและระยะ 2z/H = 1.0 คือจุดกึ่งกลางของท่อ

รูปที่ 5.12 แสดงความเร็ว $\bar{u}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ตั้งแต่ตำแหน่ง 2y/H > 0.3 นั้นจะมีลักษณะลู่เข้าหาความเร็ว $\bar{u}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่ง สำหรับลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ ตั้งแต่ตำแหน่ง 2y/H < 0.3 มีลักษณะที่เหมือนกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ

รูปที่ 5.13 แสดงความเร็ว $\bar{v}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นขนาดของความเร็ว $\bar{v}$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อีกทั้งยังทำให้ตำแหน่งที่ความเร็ว $\bar{v}$ มีค่ามากที่สุดเลื่อนเข้าใกล้ผนังจากตำแหน่ง 2y/H = 0.328 สำหรับ AR1.0 ไปยังตำแหน่ง 2y/H = 0.256 สำหรับ AR2.0 อย่างไรก็ตามเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{v}$ นั้นมีลักษณะเหมือนฟันปลา ซึ่งสันนิษฐานว่าเป็นเพราะจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณในทิศทาง y มีจำนวนน้อยเกินไปจึงส่งผลให้ความเร็ว $\bar{v}$ มีลักษณะเป็นเช่นนั้น

รูปที่ 5.14 แสดงความเร็ว $\overline{w}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น ขนาดของความเร็ว $\overline{w}$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\overline{w}$ นั้นมีลักษณะที่คล้ายกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ

รูปที่ 5.15 แสดงความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ จะมีค่าลดลงและลู่เข้าหาผลของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่ง โดยค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ได้ลดลงจาก $u'_{rms}/\overline{u}_{\tau} = 3.180$ ไปยัง 3.068 และ 2.977 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ อย่างไรก็ตามค่าอัตราส่วนลักษณะจะส่งผลต่อลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ เฉพาะบริเวณใกล้ผนังเท่านั้น โดยไม่ส่งผลกระทบต่อลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ตั้งแต่ตำแหน่ง $2y/H \approx 0.3$ ขึ้นไป

รูปที่ 5.16 แสดงความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ตลอดแนวแกน y โดยลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ตลอดทั้งแนวแกน y มีค่าลดลงและลู่เข้าหาความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น โดยค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ได้ลดลงจาก $v'_{rms}/\overline{u}_{\tau} =$ 0.781 ไปยัง 0.766 และ 0.712 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ

รูปที่ 5.17 แสดงความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ตลอดแนวแกน y โดยลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ในช่วง $0.06 < 2y/H < 0.61$ มีค่าลดลงและที่ลู่เข้าหาความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่งเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น โดยค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ได้ลดลงจาก $w'_{rms}/\overline{u}_{\tau} =$ 1.020 ไปยัง 0.944 และ 0.894 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ

รูปที่ 5.18 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ตลอดแนวแกน y เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นเพิ่มขึ้น ค่าที่มากที่สุดของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ จะมีค่าลดลงและลู่เข้าหาผลของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของการไหลแบบปั่นป่วนในช่องคู่ขนานที่หยุดนิ่ง โดยค่าที่มากที่สุดของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ได้ลดลงจาก $-\overline{u'v'}/\overline{u}_{\tau}^2 = 0.846$ ไปยัง 0.789 และ 0.669 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ

รูปที่ 5.19 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ตลอดแนวแกน y โดยลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะมีลักษณะที่คล้ายกัน แต่ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของ AR1.0 นั้นมีขนาดมากที่สุด รองลงมาคือ AR1.5 และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของ AR2.0 นั้นมีขนาดน้อยที่สุด และมีค่าเป็นลบด้วยในบางบริเวณ

รูปที่ 5.20 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ตลอดแนวแกน y โดยลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ มีลักษณะคล้ายกับ Sine Wave และเห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น ขนาดความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ จะมีค่าลดลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ศูนย์

รูปที่ 5.21 แสดงความเร็ว $\bar{u}$ ตลอดแนวแกน z เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{u}$ บริเวณตรงกลางท่อมีลักษณะที่แบนราบมากขึ้น และความเร็ว $\bar{u}$ ในช่วง 0.1 < 2z/H < 0.4 มีค่าเพิ่มขึ้น

รูปที่ 5.22 แสดงความเร็ว $\bar{v}$ ตลอดแนวแกน z ซึ่งสามารถสังเกตได้ว่าความเร็ว $\bar{v}$ ตลอดแนวแกน z นั้นมีลักษณะการกระจายตัวและขนาดใกล้เคียงกับความเร็ว $\bar{w}$ ตลอดแนวแกน y ในกรณีที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 และเห็นได้ว่าค่าอัตราส่วนลักษณะนั้นไม่ส่งผลกระทบที่ชัดเจนต่อขนาดของความเร็ว $\bar{v}$ ส่วนลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{v}$ นั้นมีรูปแบบที่ใกล้เคียงกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ

รูปที่ 5.23 แสดงความเร็ว $\bar{w}$ ตลอดแนวแกน z เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น ขนาดของความเร็ว $\bar{w}$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและยังทำให้ตำแหน่งที่ความเร็ว $\bar{w}$ มีค่ามากที่สุดเลื่อนเข้าใกล้ผนังจากตำแหน่ง 2z/H = 0.328 สำหรับ AR1.0 ไปยังตำแหน่ง 2y/H = 0.208 สำหรับ AR2.0 และเห็นได้ว่าความเร็ว $\bar{w}$ ตลอดแนวแกน z นั้นมีลักษณะการกระจายตัวและขนาดใกล้เคียงกับความเร็ว $\bar{v}$ ตลอดแนวแกน y ในกรณีที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 อย่างไรก็ตามเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว $\bar{w}$ นั้นมีลักษณะเหมือนฟันปลา ซึ่งสันนิษฐานว่าเป็นเพราะจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณในทิศทาง z มีจำนวนน้อยเกินไปจึงส่งผลให้ความเร็ว $\bar{w}$ มีลักษณะเป็นเช่นนั้น

รูปที่ 5.24 แสดงความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ตลอดแนวแกน z เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ จะมีค่าลดลงและตำแหน่งที่ความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ มีค่ามากที่สุดได้เลื่อนเข้าใกล้ผนังมากขึ้น โดยค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ได้ลดลงจาก $u'_{rms}/\bar{u}_\tau = 3.116$ ไปยัง 2.995 และ 2.748 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ และเห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นยังส่งผลต่อลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ บริเวณกลางท่อให้มีลักษณะแบนราบมากขึ้นอีกด้วย

รูปที่ 5.25 แสดงความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ตลอดแนวแกน z ซึ่งพบว่าขนาดของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ นั้นมีค่าลดลงและตำแหน่งที่ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ มีค่ามากที่สุดได้เลื่อนเข้าใกล้ผนังมากขึ้นเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น โดยค่าที่มากที่สุดของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ได้ลดลงจาก $v'_{rms}/\bar{u}_\tau = 1.004$ ไปยัง 0.957 และ 0.789 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0

ตามลำดับ และพบว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ บริเวณกลางท่อมีลักษณะที่แบนราบมากขึ้นอีกด้วย

รูปที่ 5.26 แสดงความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ตลอดแนวแกน z ซึ่งพบว่าขนาดของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ นั้นมีค่าลดลงในบริเวณใกล้ผนังเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น และพบว่าลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ มีลักษณะแบนราบมากขึ้นบริเวณกลางท่อเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามพบว่าในกรณี AR2.0 นั้นพบว่าลักษณะการกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ พยายามที่จะรักษาระดับความเร็วบริเวณกลางท่อให้มีค่าใกล้เคียงกับกรณีอื่น ๆ

รูปที่ 5.27 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ตลอดแนวแกน z พบว่าลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ มีลักษณะที่ใกล้เคียงกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ และพบว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น ตำแหน่งที่ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ มีค่ามากที่สุดได้เลื่อนเข้าใกล้ผนังมากขึ้นและมีขนาดมากขึ้น นอกจากนั้นค่าอัตราส่วนลักษณะยังส่งผลให้ลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ บริเวณกลางท่อมีลักษณะแบนราบมากขึ้นอีกด้วยเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น

รูปที่ 5.28 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ตลอดแนวแกน z เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นเพิ่มขึ้น ค่าที่มากที่สุดของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ จะมีค่าลดลงและตำแหน่งที่ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ มีค่ามากที่สุดได้เลื่อนเข้าใกล้ผนังมากขึ้น โดยค่าที่มากที่สุดของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ได้ลดลงจาก $-\overline{u'w'}/\overline{u}_\tau^2 = 0.858$ ไปยัง 0.776 และ 0.717 สำหรับ AR = 1.0, AR = 1.5 และ AR = 2.0 ตามลำดับ นอกจากนั้นยังพบว่าเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ บริเวณกลางท่อจะมีลักษณะแบนราบมากขึ้น

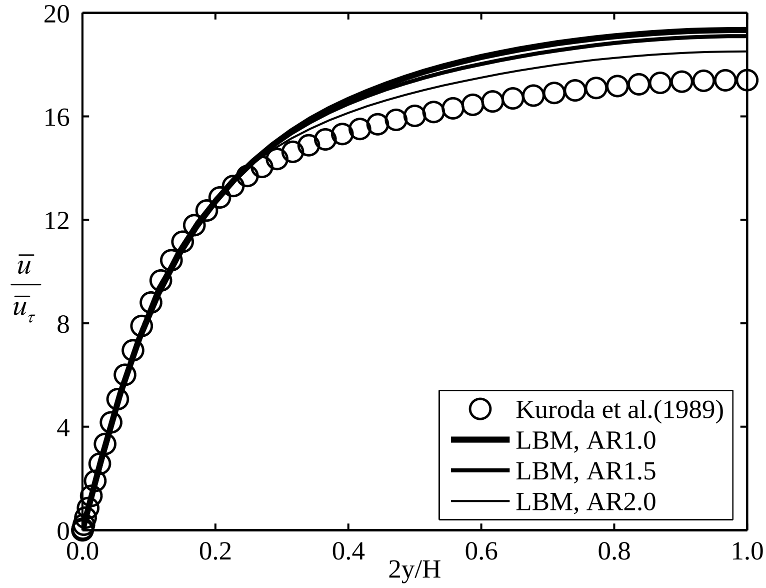
รูปที่ 5.29 แสดงความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ตลอดแนวแกน z ซึ่งพบว่าขนาดของ $\overline{v'w'}$ นั้นแทบไม่มีความแตกต่างกันเลยทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ สำหรับในส่วนของลักษณะการกระจายตัวนั้นไม่สามารถอธิบายถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะได้อย่างชัดเจนนัก เนื่องจากลักษณะการกระจายตัวของกรณี AR1.0 และ AR1.5 นั้นมีลักษณะที่คล้ายกันแต่แตกต่างจากกรณีของ AR2.0 อย่างเห็นได้ชัด

รูปที่ 5.30(b), 5.31(b) และ 5.32(b) แสดงเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลสำหรับกรณี AR1.0, AR1.5 และ AR2.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$ ตามลำดับ เห็นได้ว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นขนาดของการหมุนวนได้เปลี่ยนแปลงตามไปด้วย โดยในกรณี AR1.0 พบว่าขนาดของการหมุนวนนั้นมีขนาดที่ใกล้เคียงกันทั้ง 8 ลูก แต่เมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นกลับพบว่าขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านบนหรือผนังด้านล่างของท่อมีความรุนแรง

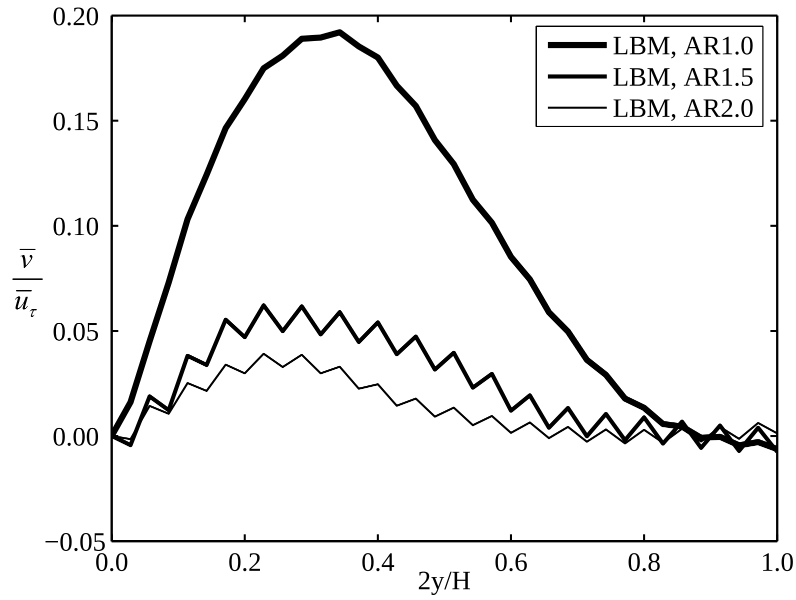
น้อยกว่าตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านซ้ายหรือผนังด้านขวา โดยในกรณี AR1.0 ขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านล่างซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.622, 0.292) มีขนาดเท่ากับ $2.8 \times 10^{-4}$ ส่วนขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านซ้ายซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.287, 0.696) มีขนาดเท่ากับ $2.7 \times 10^{-4}$ ในกรณี AR1.5 ขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านล่างซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.866, 0.280) มีขนาดเท่ากับ $1.7 \times 10^{-4}$ ส่วนขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านซ้ายซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.410, 0.682) มีขนาดเท่ากับ $3.3 \times 10^{-4}$ และในกรณี AR2.0 ขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านล่างซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.972, 0.348) มีขนาดเท่ากับ $1.8 \times 10^{-4}$ ส่วนขนาดของการหมุนวนตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านซ้ายซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่ง (0.349, 0.745) มีขนาดเท่ากับ $3.4 \times 10^{-4}$ ซึ่งจากการที่ลักษณะการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลเป็นเช่นนี้ได้ส่งผลให้ลักษณะการกระจายตัวของค่าต่าง ๆ ในแนวแกน z มีลักษณะที่แบนราบกว่าลักษณะการกระจายตัวในแนวแกน y

สรุปได้ว่า ค่าอัตราส่วนลักษณะนั้นส่งผลกระทบต่อพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนค่อนข้างชัดเจนทั้งในแนวแกน y และแนวแกน z โดยในแนวแกน y พบว่าค่าอัตราส่วนลักษณะส่งผลให้ขนาดของความเร็ว $\bar{u}$, ความเร็ว $\bar{v}$, ความเร็ว $\bar{w}$, ความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ มีขนาดลดลงเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นและไม่ส่งผลถึงลักษณะการกระจายตัวของค่าเหล่านี้มากนักในบริเวณตรงกลางท่อ

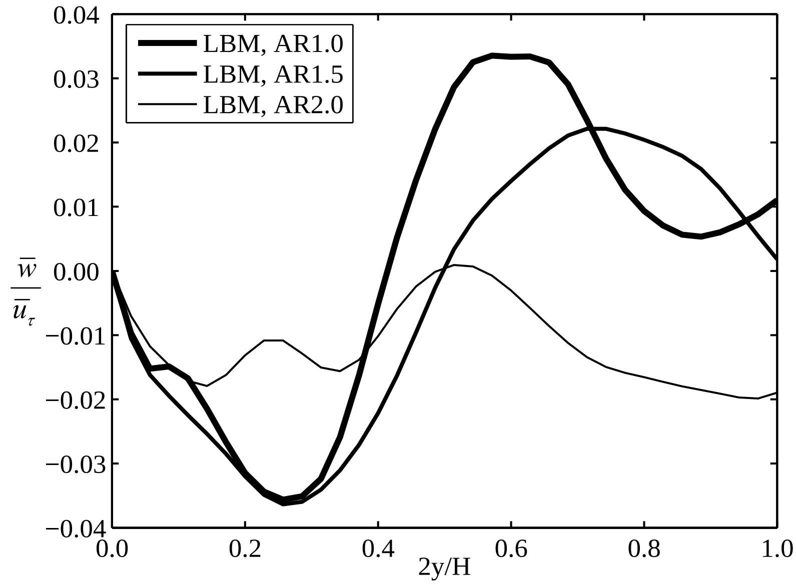
ส่วนในแนวแกน z นั้นพบว่าค่าอัตราส่วนลักษณะนอกจากจะทำให้ขนาดของความเร็ว $\bar{u}$, ความเร็ว $\bar{w}$, ความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ มีขนาดเปลี่ยนไปยังส่งผลให้ลักษณะการกระจายตัวมีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะอีกด้วย โดยลักษณะการกระจายตัวของทั้งความเร็ว $\bar{u}$, ความเร็ว $\bar{w}$, ความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$, ความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$, ความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ มีแนวโน้มที่จะมีลักษณะแบนราบมากขึ้นเรื่อย ๆ ในบริเวณตรงกลางท่อเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น อย่างไรก็ตามในส่วนของความเร็ว $\bar{v}$ และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ไม่สามารถสรุปถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะได้ชัดเจนนัก โดยพบว่าขนาดของความเร็ว $\bar{v}$ และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ไม่แตกต่างกันมากนักทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ อีกทั้งยังมีลักษณะการกระจายตัวที่คล้ายกันอีกด้วย



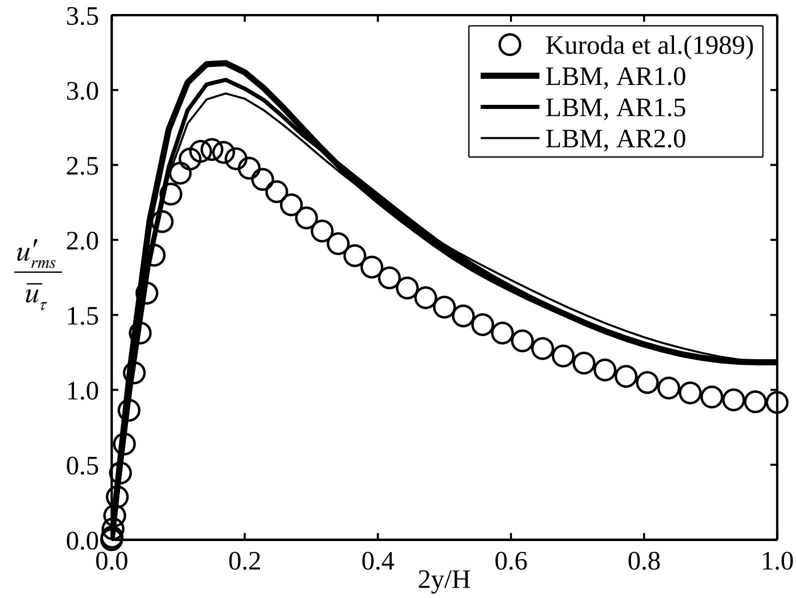

รูปที่ 5.12 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



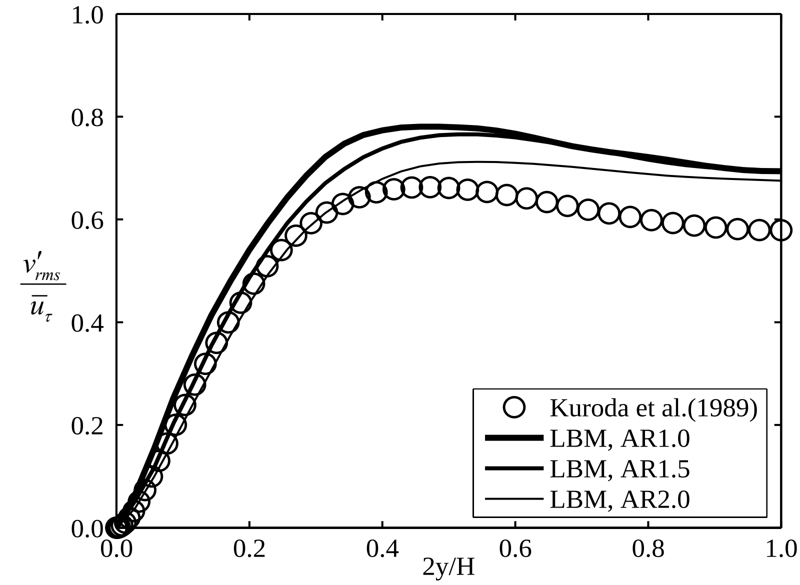

รูปที่ 5.13 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{v}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



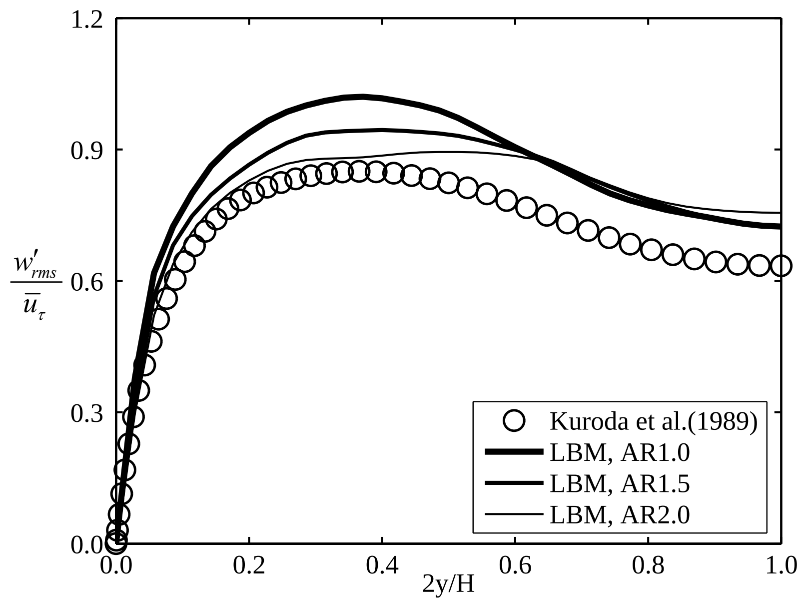

รูปที่ 5.14 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{w}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



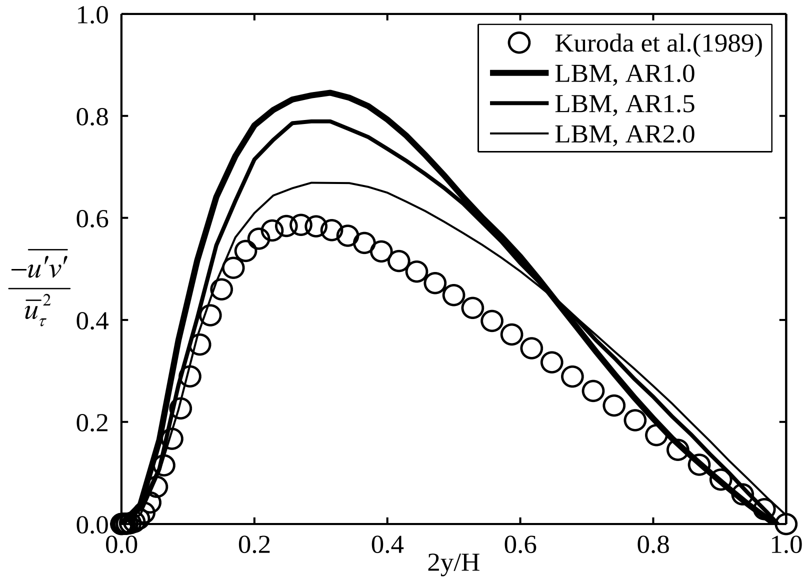

รูปที่ 5.15 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



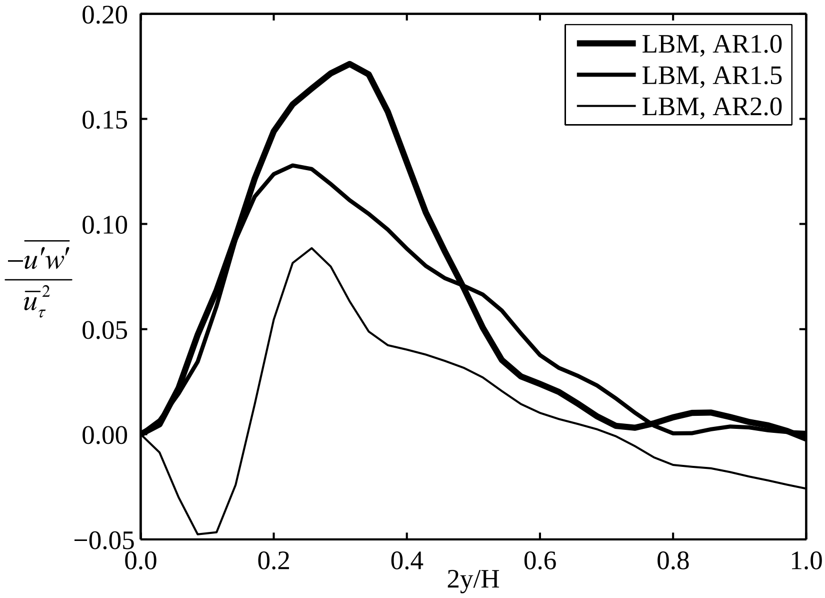

รูปที่ 5.16 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



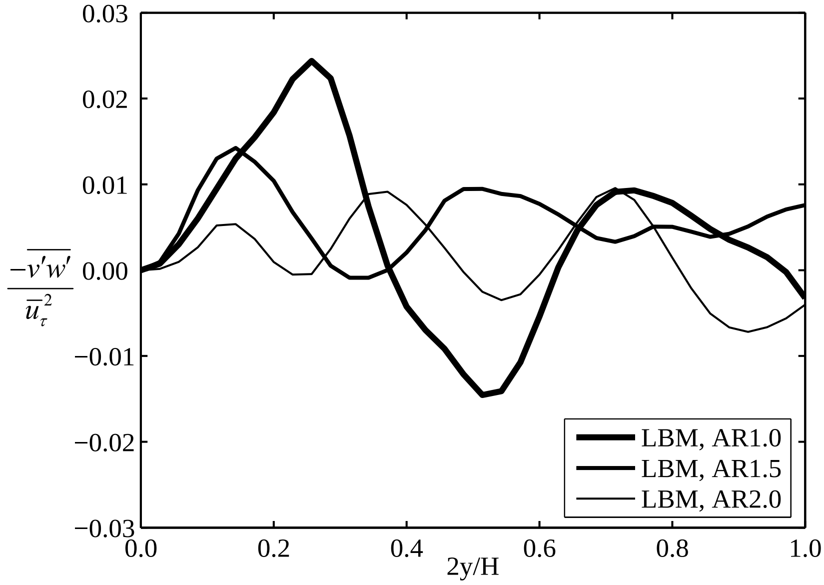

รูปที่ 5.17 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



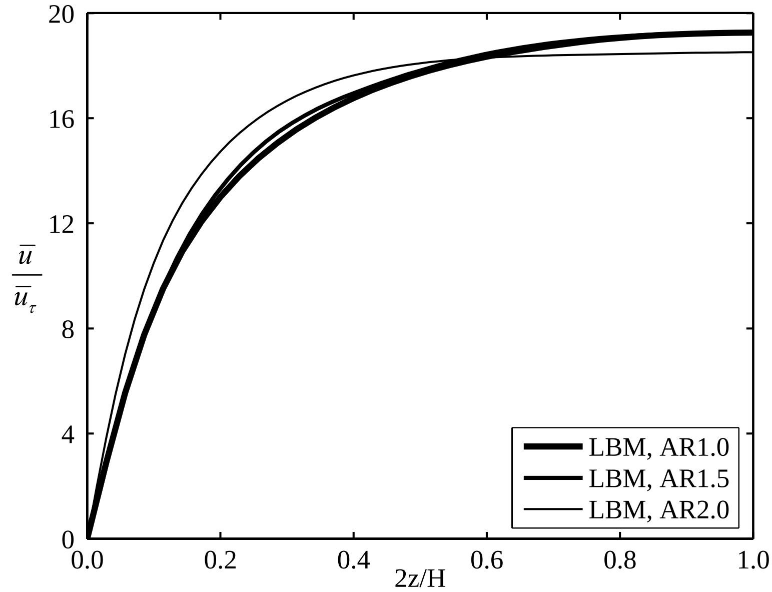

รูปที่ 5.18 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



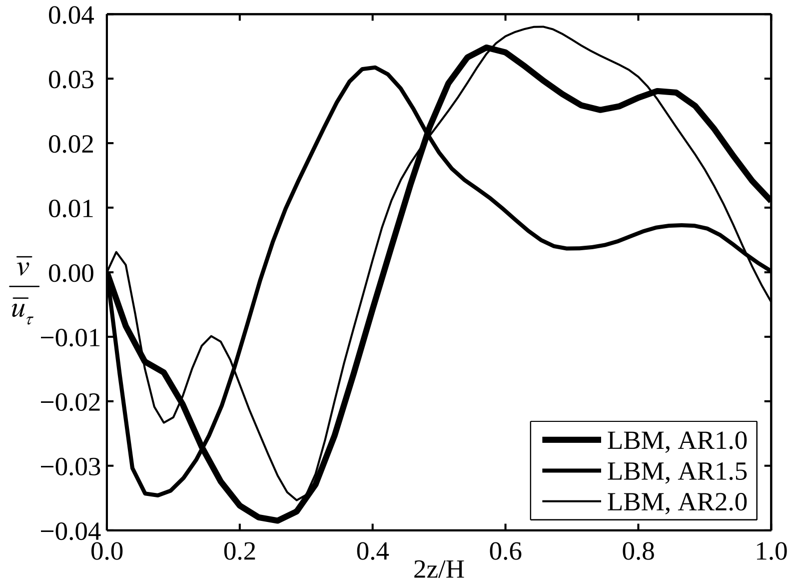

รูปที่ 5.19 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



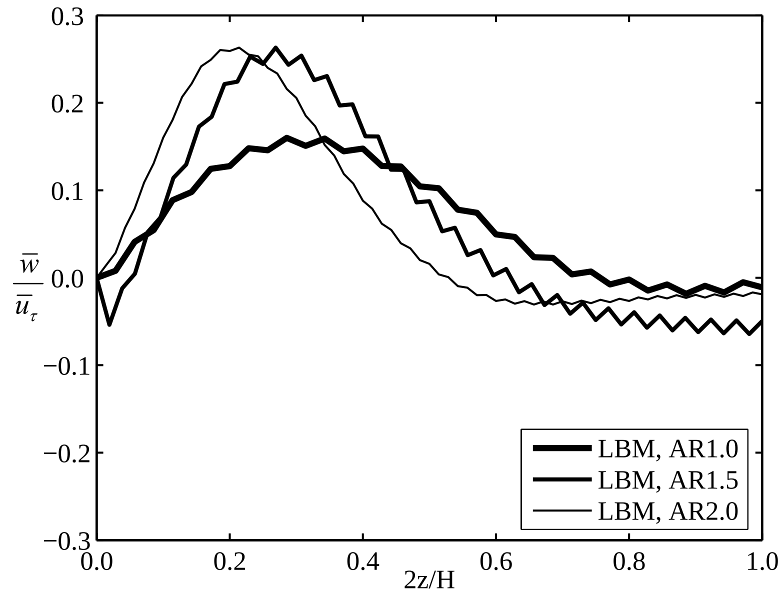

รูปที่ 5.20 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2z/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



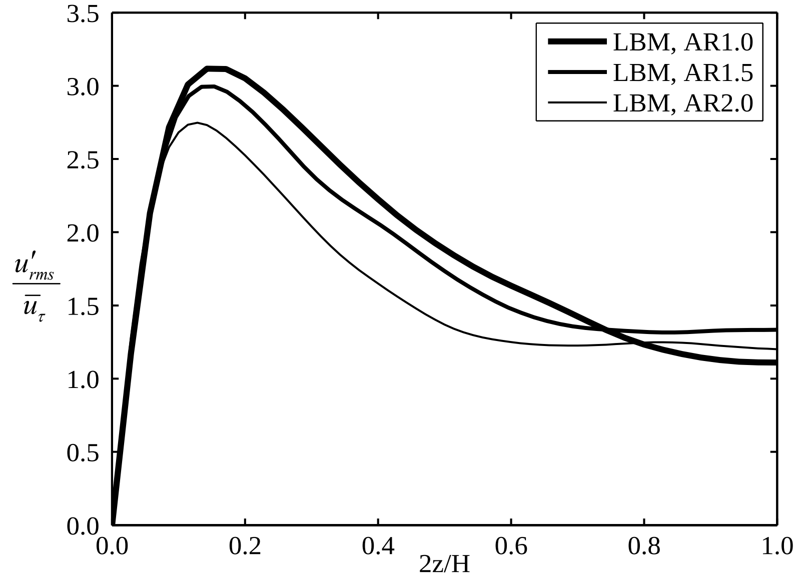

รูปที่ 5.21 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{u}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



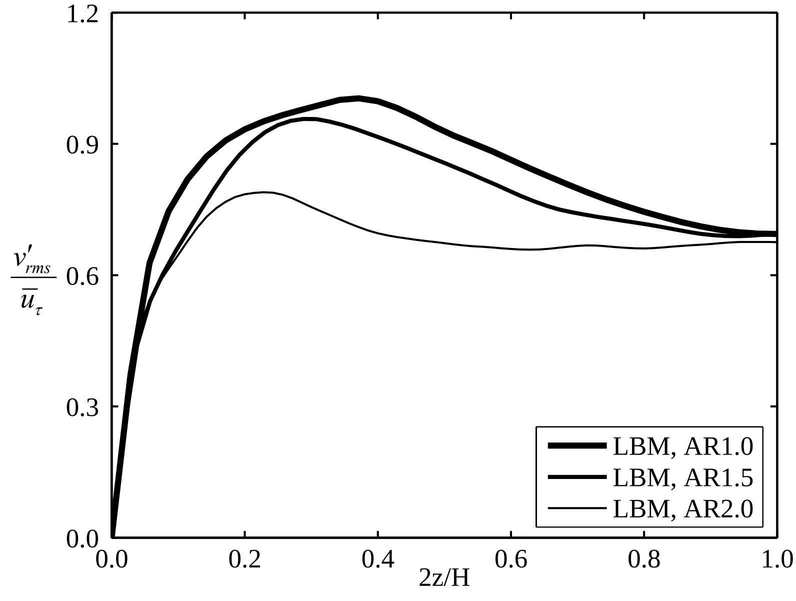

รูปที่ 5.22 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{v}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



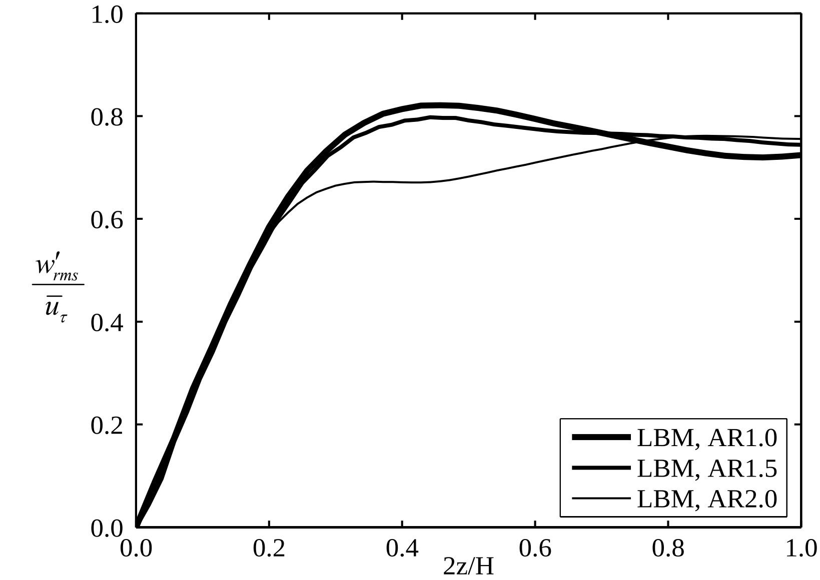

รูปที่ 5.23 การกระจายตัวของความเร็ว $\overline{w}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



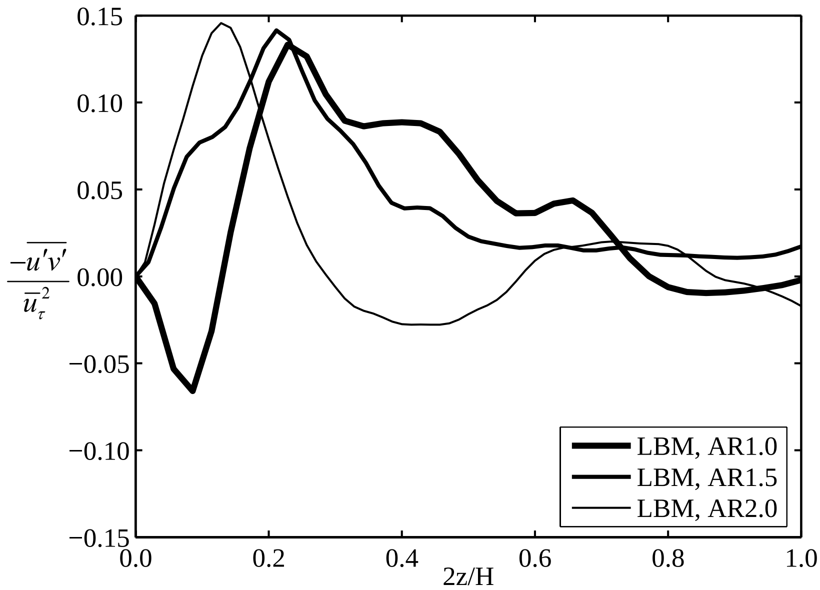

รูปที่ 5.24 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $u'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



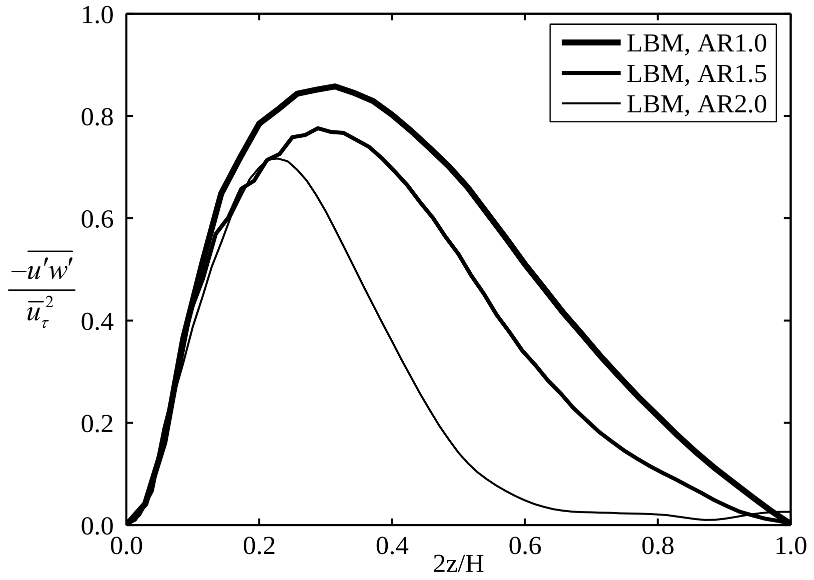

รูปที่ 5.25 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $v'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



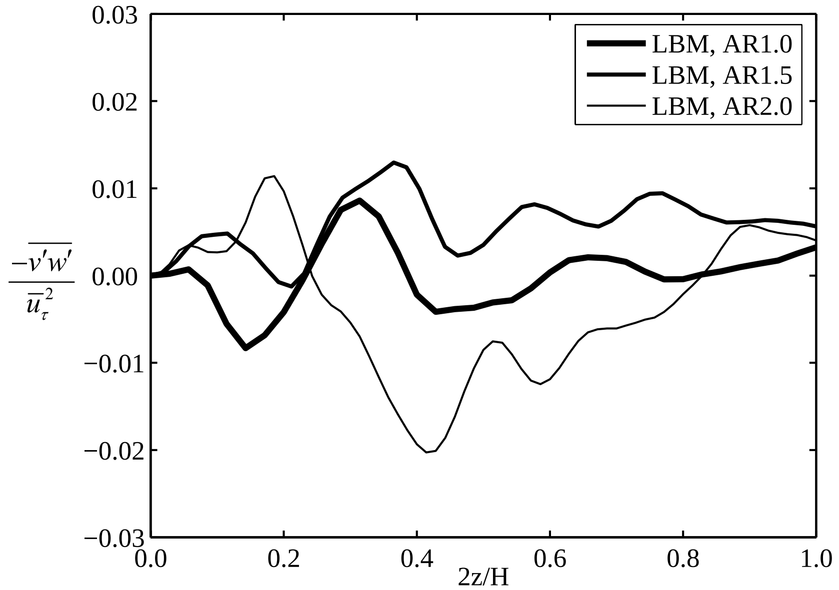

รูปที่ 5.26 การกระจายตัวของความเร็วปั่นป่วน $w'_{rms}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



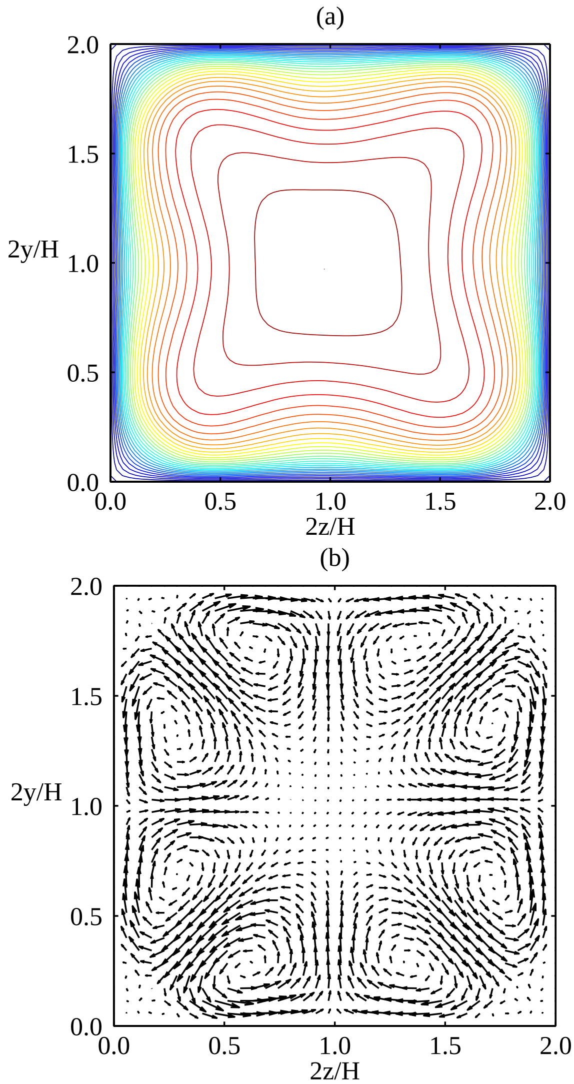

รูปที่ 5.27 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'v'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



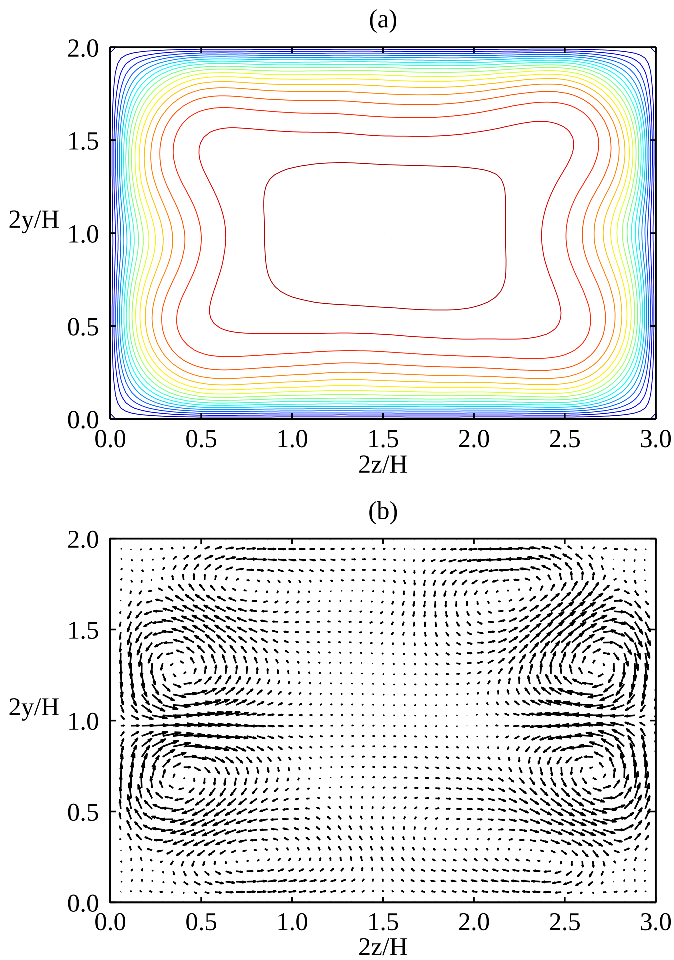

รูปที่ 5.28 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{u'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$



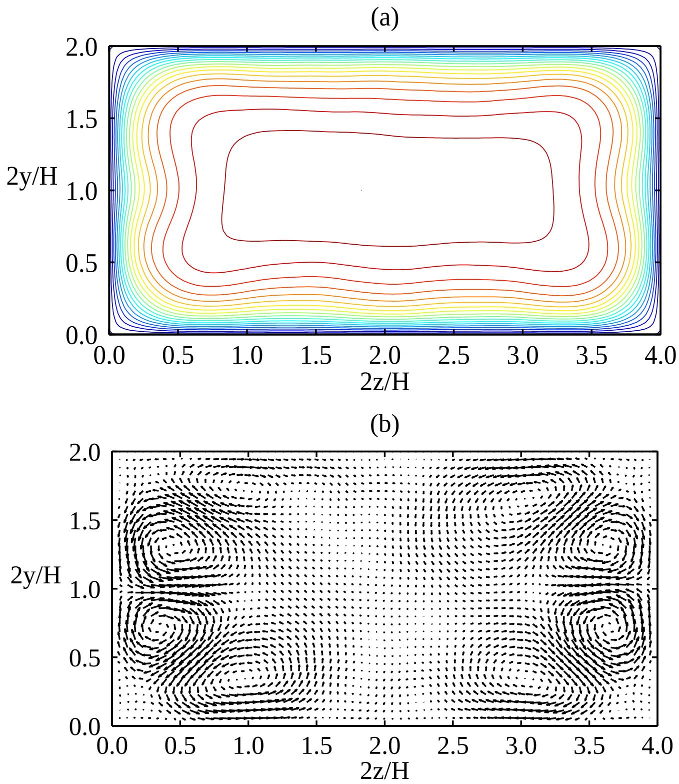

รูปที่ 5.29 การกระจายตัวของความเค้นของเรย์โนลด์ $\overline{v'w'}$ ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ค่าอัตราส่วนลักษณะต่าง ๆ ที่ตำแหน่ง 2y/H = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 5.30 คอนทัวร์ของความเร็ว $\overline{u}$ (a) และเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (b) ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 5.31 คอนทัวร์ของความเร็ว $\bar{u}$ (a) และเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (b) ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.5 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$




รูปที่ 5.32 คอนทัวร์ของความเร็ว $\bar{u}$ (a) และเวคเตอร์ความเร็วของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัล (b) ของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่า AR = 1.0 ที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$

# บทที่ 6
# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงผลการวิจัยโดยสรุปและข้อเสนอแนะสำหรับการดำเนินงานวิจัยต่อไป โดยในหัวข้อ 6.1 เป็นการสรุปเนื้อหาของงานวิจัยที่นำเสนอในบทที่ผ่านมา ส่วนในหัวข้อ 6.2 กล่าวถึงข้อเสนอแนะในการทำวิจัยต่อไปเพื่อปรับปรุงและพัฒนาให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นโดยวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์มีประสิทธิภาพที่สูงขึ้นในการศึกษาพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนโดยใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรง

## 6.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อศึกษาถึงผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะและค่าเลขเรย์โนลด์ โดยได้เลือกใช้การจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงซึ่งถือว่าเป็นเทคนิคที่มีความถูกต้องมากที่สุดในการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนมาใช้ สำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขนั้นได้เลือกใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ซึ่งเป็นวิธีที่ค่อนข้างใหม่ และสามารถพัฒนาเพื่อทำการคำนวณแบบขนานได้ค่อนข้างง่าย ซึ่งในการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้น การคำนวณแบบขนานมีความสำคัญค่อนข้างมากเนื่องจากจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณนั้นมีค่อนข้างมากและแทบจะไม่สามารถจำลองการไหลบนคอมพิวเตอร์เครื่องเดียวได้

เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเอง ดังนั้นการตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จึงเป็นสิ่งที่สำคัญต่อความน่าเชื่อถือของผลลัพธ์ที่ได้ โดยปัญหาที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องนั้นมีทั้งปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดฉากสองมิติ, ปัญหาการไหลแบบราบเรียบในระบบพิกัดฉากสามมิติ และปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในระบบพิกัดฉากสามมิติ ซึ่งจากการตรวจสอบความถูกต้องพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกพัฒนาขึ้นมีความน่าเชื่อถือ และสามารถนำผลลัพธ์นั้นไปวิเคราะห์ถึงพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในท่อที่มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้

สำหรับการศึกษาถึงผลกระทบของค่าเลขเรย์โนลด์ ได้ทำการจำลองการไหลที่ค่าเลขเรย์โนลด์ 2 ค่า คือ $Re_\tau = 300$ และ 205 ในท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0 ซึ่งจากผลการจำลองเชิงตัวเลขที่ได้พบว่า ค่าเลขเรย์โนลด์ส่งผลให้ขนาดของความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วนและความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์บริเวณใกล้ผนังมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์มากขึ้นแต่ค่าเลข

เรย์โนลด์นั้นไม่ส่งกระทบต่อลักษณะการกระจายตัวของความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ นอกจากนั้นยังพบว่าเมื่อค่าเลขเรย์โนลด์เพิ่มขึ้นนั้นยังส่งผลให้ขนาดของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลมีความรุนแรงมากขึ้นและจุดศูนย์กลางของการหมุนวนนั้นได้ขยับเข้าใกล้บริเวณมุมผนังมากขึ้น

ในการศึกษาผลกระทบของค่าอัตราส่วนลักษณะ ได้ทำการจำลองการไหลในท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะ 3 ค่าดังนี้ (1) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.0, (2) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 1.5 และ (3) ท่อที่มีค่าอัตราส่วนลักษณะเท่ากับ 2.0 (AR2.0) โดยได้ทำการจำลองการไหลที่ $\mathrm{Re}_b = 2800$ ซึ่งจากผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้พบว่าค่าอัตราส่วนลักษณะส่งผลให้ขนาดของความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์ในแนวแกน y และในแนวแกน z มีขนาดที่เปลี่ยนไปจากเดิมเมื่อท่อมีค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้น แต่ค่าอัตราส่วนลักษณะส่งผลให้ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วเฉลี่ย, ความเร็วปั่นป่วน และความเค้นเฉือนของเรย์โนลด์มีแนวโน้มที่จะมีลักษณะแบนราบมากขึ้นเรื่อย ๆ ในบริเวณตรงกลางท่อเฉพาะในแนวแกน z เท่านั้น สำหรับในแนวแกน y พบว่าลักษณะการกระจายตัวของค่าเหล่านี้มีลักษณะคล้ายกันทั้งสามค่าอัตราส่วนลักษณะ นอกจากนั้นยังพบว่าเมื่อค่าอัตราส่วนลักษณะเพิ่มขึ้นขนาดของการไหลรองแบบที่ 2 ของแพรนด์ทัลตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านบนหรือผนังด้านล่างของท่อมีความรุนแรงน้อยกว่าตัวที่อยู่ติดกับผนังด้านซ้ายหรือผนังด้านขวา

## 6.2 ข้อเสนอแนะ

จากการที่ได้พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์พบว่า วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์นั้นมีข้อดีคืออัลกอริทึมของวิธีนี้ไม่ซับซ้อนมากนักจึงทำให้การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำได้ง่ายทั้งในการคำนวณแบบเครื่องเดียวและในการคำนวณแบบขนาน อย่างไรก็ตามพบว่าวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์นั้นมีข้อเสียคือในการคำนวณด้วยวิธีนี้มีความจำเป็นต้องใช้หน่วยความจำในการคำนวณค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับวิธีอื่น ๆ เนื่องจากจำนวนตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณนั้นมีมาก และในการจำลองการไหลในสามมิติด้วยวิธีนี้ในปัจจุบันสามารถเลือกใช้ได้แค่ระบบกริดแบบสม่ำเสมอเท่านั้นรวมไปถึงระยะห่างระหว่างจุดต้องมีระยะเท่ากันตลอดทุกทิศทางในการคำนวณ เนื่องจากระบบกริดแบบไม่สม่ำเสมอรวมไปถึงระบบกริดแบบไร้โครงสร้างสำหรับวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ให้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องน้อยกว่าระบบกริดแบบสม่ำเสมอรวมไปถึงมีเสถียรภาพในการคำนวณค่อนข้างต่ำอีกด้วย และจากข้อจำกัดข้อนี้จึงจำเป็นต้องใช้จำนวนจุดในการคำนวณค่อนข้างมากซึ่งก็ส่งผลให้จำนวนหน่วยความจำที่ต้องการใช้นั้นมากขึ้นไปอีก

จากข้อจำกัดเกี่ยวกับระบบกริดที่สามารถใช้ได้, จำนวนหน่วยความจำที่ต้องการใช้ในการคำนวณ รวมไปถึงเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีนั้นมีจำนวนจำกัด ได้ส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงนั้นมีความถูกต้องน้อยกว่าที่ควรจะเป็นเนื่องจากจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณในบางส่วนของโดเมนนั้นมีจำนวนน้อยเกินไป ดังนั้นควรพัฒนาวิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ให้สามารถใช้งานได้กับระบบกริดแบบไม่สม่ำเสมอรวมไปถึงระบบกริดแบบไร้โครงสร้างที่มีความถูกต้องและเสถียรภาพในการคำนวณเท่ากับหรือใกล้เคียงกับระบบกริดแบบสม่ำเสมอ

# รายการอ้างอิง


Amati, G., Succi, S., and Piva R. (1997). Massively parallel lattice-Boltzmann simulation of turbulent channel flow. **International Journal of Modern Physics C**. 8(4): 869–878.

Armaly, B. F., Durst, J., Pereira, J. C. F., and Schonung, B. (1983). Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Journal of Fluid Mechanics**. 127: 473-496.

Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M. (1954). A model for collision processes in gases, I. small amplitude processes in charged and neutral one-component system. **Physical Review**. 94(3): 511-525.

Bradshaw, P. (1987). Turbulent secondary flows. **Annual Review of Fluid Mechanics**. 19: 53-74.

Chen, S., Chen, H., Martinez, D., and Matthaeus, W. (1991). Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics. **Physical Review Letters**. 67(27): 3776-3779.

Chen, S., and Doolen, G. D. (1998). Lattice Boltzmann method for fluid flows. **Annual Review of Fluid Mechanics**. 30: 329-364.

Chen, S., Wang, Z., Shan, X., and Doolen, G. D. (1992). Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions. **Journal of Statistical Physics**. 68: 379–400.

Cherukat, P., Na, Y., Hanratty, T. J., and McLaughlin, J .B. (1998). Direct numerical simulation of a fully developed turbulent flow over a wavy wall. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**. 11(2): 109-134.

Djenidi, L. (2006). Lattice-Boltzmann simulation of grid-generated turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**. 552: 13-35.

Demuren, A. O., and Rodi, W. (1984). Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. **Journal of Fluid Mechanics**. 140: 189-222.

d'Humières, D. (1992) Generalized lattice Boltzmann equations, In **Rarefied gas dynamics: theory and simulations, edited by Shizgal, B. D., Weaver. D.P. (Progress in astronautics and aeronautics)**.159: 450-458.

d'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., and Luo, L.–S. (2002) Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**. 360: 437-451.

d'Humières, D., Lallemand, P., and Frisch, U. (1986). Lattice gas models for 3D hydrodynamics. **Europhysics Letters**. 2: 291-297.

Eggels, J. G. M. (1996). Direct and large-eddy simulation of turbulent fluid flow using the lattice-Boltzmann scheme. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 17: 307-323.

Frisch, U., Hasslacher, B., and Pomeau, Y. (1986). Lattice gas automata for the Navier-Stokes equations. **Physical Review Letters**. 56(14): 1505-1508.

Gavrilakis, S. (1992). Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. **Journal of Fluid Mechanics**. 244: 101-129.

Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T. (1982). High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**. 48: 387-411.

He, X., and Luo, L. –S. (1997). Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. **Physical Review E**. 56(6): 6811-6817.

Higuera, F., and Jimenez, J. (1989). Boltzmann approach to lattice gas simulations. **Europhysics Letters**. 9: 663-668.

Higuera, F., Succi, S., and Benzi, R. (1989). Lattice gas dynamics with enhanced collisions. **Europhysics Letters**. 9: 345-349.

Hou, S., Zou, Q., Chen, S., Doolen, G., and Cogley, A. C. (1995). Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. **Journal of Computational Physics**. 118: 329-347.

Huser, A., and Biringen, S. (1993). Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. **Journal of Fluid Mechanics**. 257: 65-95.

Iwamoto, K., Suzuki, Y., and Kasagi, N. (2002). Reynolds number effect on wall turbulence: toward toward effective feedback control. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. 23: 678-689.

Jones, O. C. (1976). An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular ducts. **Journal of Fluids Engineering**. 98: 173-181.

Kasagi, N., Tomiya, Y. and Kuroda, A (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. **Journal of Heat Transfer**. 114(3): 598-606.

Kim, J., Moin, P., and Moser, R. (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**. 177: 133-166.

Kuroda, A., Kasagi, N., and Hirata, M. (1989). A direct numerical simulation of the fully developed turbulent channel flow. In **Proceedings of International Symposium on Computational Fluid Dynamics** (pp 1174-1179). Nagoya.

Lallemand, P., and Luo, L.–S. (2000). Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability. **Physical Review E**. 61(6): 6546-6562.

Lammers, P., Beronov, K. N., Volkert, R., Brenner, G., and Durst, F. (2006). Lattice BGK direct numerical simulation of fully developed turbulence in incompressible plane channel flow. **Computers and Fluids**. 35: 1137-1153.

Le, H., Moin, P. and Kim, J. (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. **Journal of Fluid Mechanics**. 330: 349-374.

Lee, K., Yu, D., and Girimaji, S. S. (2006). Lattice Boltzmann DNS of decaying compressible isotropic turbulence with temperature fluctuations. **International Journal of Computational Fluid Dynamics**. 20(6): 401-413.

Li, H., and Olsen, M. G. (2006). Aspect ratio effects on turbulent and transitional flow in rectangular microchannels as measured with microPIV. **Journal of Fluids Engineering**. 128: 305-315.

Lou, L.–S. (2000). Theory of the lattice Boltzmann method: lattice Boltzmann models for nonideal gases. **Physical Review E**. 62(4): 4982-4996.

Moin, P., and Mahesh. K. (1998). Direct numerical simulation: A tool in turbulence research. **Annual Review of Fluid Mechanics**. 30: 539-578.

Mathieu, J., and Scott, J. (2000). **An Introduction to Turbulent Flow**. Cambridge: Cambridge University Press.

McNamara, G., and Zanetti, G. (1988). Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata. **Physical Review Letters**. 61(20): 2332-2335.

Orszag, S. A, and Patterson, G. S. (1972). Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. **Physical Review Letters**. 28(2): 76-79.

Orszag, S. A, and Yakhot, V. (1986). Reynolds number scaling of cellular automaton hydrodynamics. **Physical Review Letters**. 56(16): 1691-1693.

Pope, S. B. (2000). **Turbulent Flows**. Cambridge: Cambridge University Press.

Qian, Y. H., d'Humières, D., and Lallemand, P. (1992). Lattice BGK models for the Navier-Stokes equation. **Europhysics Letters**. 17(6): 479-484.

Reynolds, O. (1894). On the dynamic theory of incompressible viscous flows and the determination of the criterion. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A**. 186:123-161

Spalart, P. R. (1988). Direct numerical simulation of a turbulent boundary layer up to $R_\theta = 1410$. **Journal of Fluid Mechanics**. 187: 61-98.

Succi, S. (2001). **The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond**. Oxford University Press.

Succi, S., Santangelo, P., and Benzi, R. (1988). High resolution lattice gas simulation of two-dimensional lattice gas turbulence. **Physical Review Letters**. 60(26): 2738-2740.

Sukop, M. C., and Thorn, D. T., Jr. (2005). **Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers**. Springer.

Tennekes, H., and Lumley. J. L. (1972). **A First Course in Turbulence**. Cambridge: MIT Press.

Toschi, F., Amati, G., Succi, S., Benzi, R., and Piva R. (1999). Intermittency and structure functions in channel flow turbulence. **Physical Review Letters**. 82(25): 5044–5047.

Tropea, C. D., and Gackstatter, R. (1985). The flow over two dimensional surface-mounted obstacles at low Reynolds numbers. **Journal of Fluids Engineering**. 107: 489-494.

White, F. M. (2003). **Fluid Mechanics** (5th ed.). Singapore: McGraw-Hill.

White, F. M. (2006). **Viscous Fluid Flow** (3rd ed.). Singapore: McGraw-Hill.

Yu, D. (2002). **Viscous flow computations with the lattice Boltzmann equation method**. Ph.D. Dissertation, University of Florida, Florida.

Yu, D., and Girimaji, S. S. (2006). Direct numerical simulations of homogeneous turbulence subject to periodic shear. **Journal of Fluid Mechanics**. 566: 117-151.

Yu, D., Mei, R., Luo, L.–S., and Shyy, W. (2003). Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation. **Progress in Aerospace Sciences**. 39: 329-367.

Yu, D., Mei, R., and Shyy, W. (2003). A unified boundary treatment in lattice Boltzmann method. **41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit: AIAA 2003-0953**. Reno, Nevada, January 6-9.

Yu, H. (2004). **Lattice Boltzmann equation simulations of turbulence, mixing, and combustion**. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, Texas.

Yu, H., Girimaji, S. S., and Luo, L. –S. (2005). DNS and LES of decaying isotropic turbulence with and without frame rotation using lattice Boltzmann method. **Journal of Computational Physics**. 209(2): 599-616.

Zou, Q., and He, X. (1997). On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. **Physics of Fluids**. 9(6): 1591-1598.

# ภาคผนวก ก

# การเพิ่มความเร็วในการคำนวณสำหรับแบบจำลองการชน MRT

เนื่องจากแบบจำลองการชน MRT นั้นมีรูปสมการอยู่ในรูปเมตริกซ์และการคำนวณของสมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์นั้นจะยุ่งยากกว่าสมการที่อยู่ในรูปพีชคณิต อย่างไรก็ตามเนื่องจาก Transformation Matrix และ Diagonal Relaxation Matrix นั้นเป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ สามารถเปลี่ยนรูปสมการ (3-17) จากสมการที่อยู่ในรูปเมตริกซ์เป็นสมการพีชคณิตได้ ดังนี้

1. หาค่าของเมตริกซ์ $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}$ ก่อนที่จะเข้าสู่ลูปหลักของการคำนวณ ดังนี้

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & -c_3 & -c_6 & c_8 & -c_9 & 0 & 0 & c_{14} & 0 \\ c_1 & -c_3 & -c_6 & 0 & 0 & c_{11} & -c_{12} & -c_{14} & 0 \\ c_1 & -c_3 & -c_6 & -c_8 & c_9 & 0 & 0 & c_{14} & 0 \\ c_1 & -c_3 & -c_6 & 0 & 0 & -c_{11} & c_{12} & -c_{14} & 0 \\ c_1 & c_4 & c_7 & c_8 & c_{10} & c_{11} & c_{13} & 0 & c_{15} \\ c_1 & c_4 & c_7 & -c_8 & -c_{10} & c_{11} & c_{13} & 0 & -c_{15} \\ c_1 & c_4 & c_7 & -c_8 & -c_{10} & -c_{11} & -c_{13} & 0 & c_{15} \\ c_1 & c_4 & c_7 & c_8 & c_{10} & -c_{11} & -c_{13} & 0 & -c_{15} \end{bmatrix} \qquad (\text{ก-1})$$

เมื่อ $c_1 = \frac{s_1}{9};\ c_2 = \frac{s_2}{9};\ c_3 = \frac{s_2}{36};\ c_4 = \frac{s_2}{18};\ c_5 = \frac{s_3}{9};\ c_6 = \frac{s_3}{18};\ c_7 = \frac{s_3}{36};\ c_8 = \frac{s_4}{6};\ c_9 = \frac{s_5}{6}$
$c_{10} = \frac{s_5}{12};\ c_{11} = \frac{s_6}{6};\ c_{12} = \frac{s_7}{6};\ c_{13} = \frac{s_7}{12};\ c_{14} = \frac{s_8}{4};\ c_{15} = \frac{s_9}{4}$

2. ทำการหา Collision Operator ที่อยู่ในรูปพีชคณิต
จาก Collision Operator ของแบบจำลองการชน MRT

$$\left|\bar{\Omega}\right\rangle = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\left[\left|r\left(\vec{x},t\right)\right\rangle - \left|r^{eq}\left(\vec{x},t\right)\right\rangle\right] \qquad (\text{ก-2})$$

เมื่อ $\left|\bar{\Omega}\right\rangle = \left[\bar{\Omega}_0,\ldots,\bar{\Omega}_8\right]^{\mathsf{T}}$ และสามารถหาค่า $\bar{\Omega}_i$ ได้ดังนี้

$$\bar{\Omega}_0 = c_1 r_0^{(1)} - c_2 r_1^{(1)} + c_5 r_2^{(1)} \tag{ก-3a}$$

$$\bar{\Omega}_1 = c_1 r_0^{(1)} - c_3 r_1^{(1)} - c_6 r_2^{(1)} + c_8 r_3^{(1)} - c_9 r_4^{(1)} + c_{14} r_7^{(1)} \tag{ก-3b}$$

$$\bar{\Omega}_2 = c_1 r_0^{(1)} - c_3 r_1^{(1)} - c_6 r_2^{(1)} + c_{11} r_5^{(1)} - c_{12} r_6^{(1)} - c_{14} r_7^{(1)} \tag{ก-3c}$$

$$\bar{\Omega}_3 = c_1 r_0^{(1)} - c_3 r_1^{(1)} - c_6 r_2^{(1)} - c_8 r_3^{(1)} + c_9 r_4^{(1)} + c_{14} r_7^{(1)} \tag{ก-3d}$$

$$\bar{\Omega}_4 = c_1 r_0^{(1)} - c_3 r_1^{(1)} - c_6 r_2^{(1)} - c_{11} r_5^{(1)} + c_{12} r_6^{(1)} - c_{14} r_7^{(1)} \tag{ก-3e}$$

$$\bar{\Omega}_5 = c_1 r_0^{(1)} + c_4 r_1^{(1)} + c_7 r_2^{(1)} + c_8 r_3^{(1)} + c_{10} r_4^{(1)} + c_{11} r_5^{(1)} + c_{13} r_6^{(1)} + c_{15} r_8^{(1)} \tag{ก-3f}$$

$$\bar{\Omega}_6 = c_1 r_0^{(1)} + c_4 r_1^{(1)} + c_7 r_2^{(1)} - c_8 r_3^{(1)} - c_{10} r_4^{(1)} + c_{11} r_5^{(1)} + c_{13} r_6^{(1)} - c_{15} r_8^{(1)} \tag{ก-3g}$$

$$\bar{\Omega}_7 = c_1 r_0^{(1)} + c_4 r_1^{(1)} + c_7 r_2^{(1)} - c_8 r_3^{(1)} - c_{10} r_4^{(1)} - c_{11} r_5^{(1)} - c_{13} r_6^{(1)} + c_{15} r_8^{(1)} \tag{ก-3h}$$

$$\bar{\Omega}_8 = c_1 r_0^{(1)} + c_4 r_1^{(1)} + c_7 r_2^{(1)} + c_8 r_3^{(1)} + c_{10} r_4^{(1)} - c_{11} r_5^{(1)} - c_{13} r_6^{(1)} - c_{15} r_8^{(1)} \tag{ก-3i}$$

เมื่อ $r_i^{(1)} = r_i - r_i^{eq}$ จากนั้นทำการหาค่า $r_i$ จากสมการ (3-21) ดังนี้

$$r_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \tag{ก-4a}$$

$$r_1 = -4 f_0 - f_1 - f_2 - f_3 - f_4 + 2\left( f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \right) \tag{ก-4b}$$

$$r_2 = 4 f_0 - 2\left( f_1 - f_2 - f_3 - f_4 \right) + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \tag{ก-4c}$$

$$r_3 = f_1 - f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8 \tag{ก-4d}$$

$$r_4 = -2f_1 + 2f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8 \quad (ก\text{-}4e)$$

$$r_5 = f_2 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8 \quad (ก\text{-}4f)$$

$$r_6 = -2f_2 + 2f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8 \quad (ก\text{-}4g)$$

$$r_7 = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 \quad (ก\text{-}4h)$$

$$r_8 = f_5 - f_6 + f_7 - f_8 \quad (ก\text{-}4i)$$

ให้ $a_1 = c_1 r_0^{(1)};\ a_2 = c_2 r_1^{(1)};\ a_3 = c_5 r_2^{(1)};\ a_4 = c_3 r_1^{(1)};\ a_5 = c_6 r_2^{(1)};\ a_6 = c_8 r_3^{(1)};\ a_7 = c_9 r_4^{(1)}$
$a_8 = c_{14} r_7^{(1)};\ a_9 = c_{11} r_5^{(1)};\ a_{10} = c_{12} r_6^{(1)};\ a_{11} = c_4 r_1^{(1)};\ a_{12} = c_7 r_2^{(1)};\ a_{13} = c_{10} r_4^{(1)};\ a_{14} = c_{11} r_5^{(1)}$
$a_{15} = c_{13} r_6^{(1)};\ a_{16} = c_{15} r_8^{(1)}$

จะได้ Collision Operator ในรูปอย่างง่ายสำหรับการเขียนคอมพิวเตอร์โปรแกรมดังนี้

$$\bar{\Omega}_0 = a_1 - a_2 + a_3 \quad (ก\text{-}5a)$$

$$\bar{\Omega}_1 = a_1 - a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 \quad (ก\text{-}5b)$$

$$\bar{\Omega}_2 = a_1 - a_4 - a_5 + a_9 - a_{10} - a_8 \quad (ก\text{-}5c)$$

$$\bar{\Omega}_3 = a_1 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7 + a_8 \quad (ก\text{-}5d)$$

$$\bar{\Omega}_4 = a_1 - a_4 - a_5 - a_9 + a_{10} - a_8 \quad (ก\text{-}5e)$$

$$\bar{\Omega}_5 = a_1 + a_{11} + a_{12} + a_6 + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \quad (ก\text{-}5f)$$

$$\bar{\Omega}_6 = a_1 + a_{11} + a_{12} - a_6 - a_{13} + a_{14} + a_{15} - a_{16} \tag{ก-5g}$$

$$\bar{\Omega}_7 = a_1 + a_{11} + a_{12} - a_6 - a_{13} - a_{14} - a_{15} + a_{16} \tag{ก-5h}$$

$$\bar{\Omega}_8 = a_1 + a_{11} + a_{12} + a_6 + a_{13} - a_{14} - a_{15} - a_{16} \tag{ก-5i}$$

และสามารถเขียนสมการสำหรับแบบจำลองการชน MRT ใหม่ได้ดังนี้

$$f_i\left(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t\right) = f_i\left(\vec{x}, t\right) - \bar{\Omega}_i, \;\; i = 0, \ldots, m-1 \tag{ก-6}$$

และสามารถเขียนขั้นตอนการคำนวณของแบบจำลองการชน MRT ใหม่ได้ดังนี้

Collision Step: $\tilde{f}_i\left(\vec{x}, t + \Delta t\right) = f_i\left(\vec{x}, t\right) - \bar{\Omega}_i$ (ก-7a)

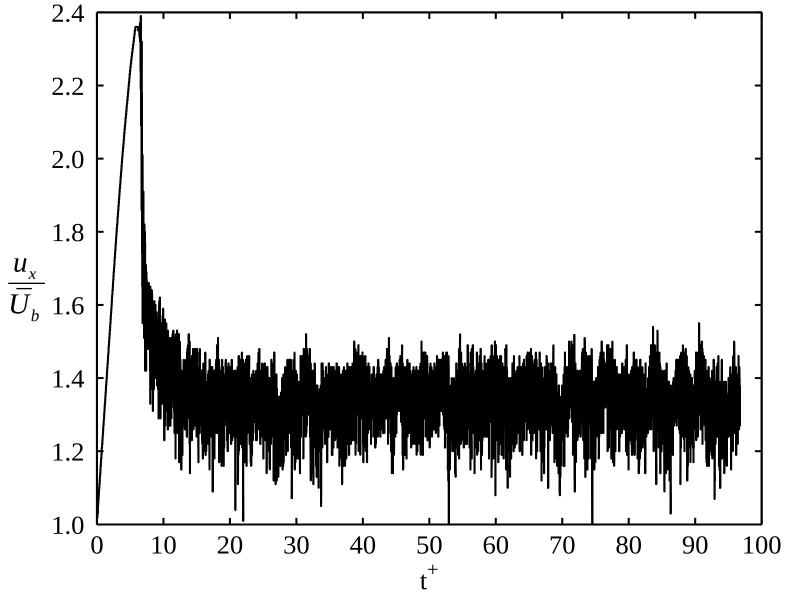
Streaming Step: $f_i\left(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t\right) = \tilde{f}_i\left(\vec{x}, t + \Delta t\right)$ (ก-7b)

# ภาคผนวก ข

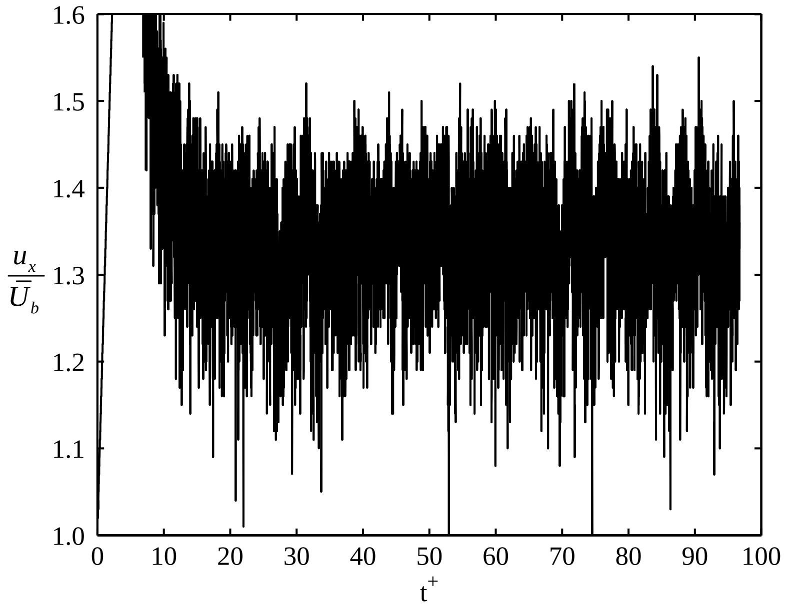
# สรุปรายละเอียดของการจำลองการไหลเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนที่ใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ในงานวิจัยนี้

ในการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนโดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์นั้น ในช่วงเริ่มต้นของการคำนวณในทุกกรณี (ยกเว้นกรณีทดสอบกับ Gavrilakis (1992) ที่คำนวณบนกริดละเอียด) ได้ทำการรบกวนค่า Distribution Function เพื่อให้การไหลในการจำลองการไหลเปลี่ยนไปเป็นการไหลแบบปั่นป่วนได้เร็วขึ้น สำหรับกรณีทดสอบกับ Gavrilakis (1992) ที่คำนวณบนกริดละเอียดนั้นได้นำค่า Distribution Function ของกรณีทดสอบเดียวกันแต่คำนวณบนกริดหยาบมาใช้เป็นค่าเริ่มต้น หลังจากการไหลเริ่มเป็นการไหลแบบปั่นป่วนแล้วจึงเริ่มเก็บค่าความเร็วและความดัน ณ เวลานั้น ๆ เพื่อนำมาหาค่าเฉลี่ยต่าง ๆ โดยการเก็บค่านั้นไปจนกระทั่งการไหลเข้าสู่สภาวะคงตัวในเชิงสถิติ และได้ทำการเก็บทุก ๆ 100 รอบของการคำนวณ (ยกเว้นกรณีทดสอบกับ Gavrilakis (1992) ที่คำนวณบนกริดละเอียดที่เก็บทุก ๆ 500 รอบของการคำนวณ)

รูปที่ ข.1 และ ข.2 แสดงตัวอย่างของความเร็วที่แปรเปลี่ยนกับเวลา โดยได้เลือกความเร็ว $u_x$ ของกรณีทดสอบกับ Gavrilakis (1992) ที่คำนวณบนกริดหยาบมาแสดง จะเห็นได้ว่าเมื่อคำนวณ $t^+ \approx 15\,(t^+ = tu_\tau / D_H)$ การไหลได้เริ่มเป็นการไหลแบบปั่นป่วนจึงได้เริ่มเก็บค่า ณ เวลานี้สำหรับในกรณีนี้ ส่วนในกรณีอื่น ๆ นั้นก็ได้ทำแบบเดียวกัน (ยกเว้นกรณีทดสอบกับ Gavrilakis (1992) ที่คำนวณบนกริดละเอียดเนื่องจากในกรณีนี้ค่าเริ่มต้นที่นำมาใช้เป็นลักษณะของการไหลแบบปั่นป่วนอยู่แล้วจึงสามารถเริ่มเก็บค่าเพื่อนำไปหาค่าเฉลี่ยได้เลย) สำหรับรายละเอียดต่าง ๆ สำหรับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงโดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์ในงานวิจัยนี้ได้สรุปไว้ในตารางที่ ข.1




รูปที่ ข.1 แสดงตัวอย่างของความเร็ว $u_x$ ณ จุด ๆ หนึ่งที่ตำแหน่ง 2x/H = 6.0, 2y/H = 2z/H = 1.0




รูปที่ ข.2 แสดงตัวอย่างของความเร็ว $u_x$ ณ จุด ๆ หนึ่งที่ตำแหน่ง 2x/H = 6.0, 2y/H = 2z/H = 1.0 (ขยายจากรูปที่ ข.1)

ตารางที่ ข.1 สรุปรายละเอียดสำหรับการจำลองเชิงตัวเลขโดยตรงโดยใช้วิธีโครงผลึกโบลต์ซมันน์

| | Channel Flow | Gavrilakis (1992) (Coarse Grid) | Gavrilakis (1992) (Fine Grid) | AR1.0 | AR1.5 | AR2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Method | LBM (DNS) | LBM (DNS) | LBM (DNS) | LBM (DNS) | LBM (DNS) | LBM (DNS) |
| Geometry | Flow in Plane Channel (AR = ∞) | Flow in Square Duct (AR = 1.0) | Flow in Square Duct (AR = 1.0) | Flow in Square Duct (AR = 1.0) | Flow in Rectangular Duct (AR = 1.5) | Flow in Rectangular Duct (AR = 2.0) |
| $\mathrm{Re}_b = \bar{U}_b D_H / \nu$ | 3600 | 4410 | 4410 | 2800 | 2800 | 2800 |
| Domain Size (x, y, z) | 3HxHx1.5H | 3HxHxH | 3HxHxH | 6HxHxH | 6HxHx1.5H | 6HxHx2H |
| Number of Grid Points | 240x80x120 $\approx 2.3\text{x}10^6$ | 300x100x100 $= 3.0\text{x}10^6$ | 600x200x200 $= 24\text{x}10^6$ | 420x70x70 $\approx 2.1\text{x}10^6$ | 420x70x10 $\approx 3.1\text{x}10^6$ | 420x70x140 $\approx 4.1\text{x}10^6$ |
| Grid Spacing | $\Delta^+ = 3.0$ | $\Delta^+ = 3.0$ | $\Delta^+ = 1.5$ | $\Delta^+ \approx 3.0$ | $\Delta^+ \approx 3.0$ | $\Delta^+ \approx 3.0$ |
| Time Period | $t^+_{tot} = 55.08$ | $t^+_{tot} = 77.40$ | $t^+_{tot} = 42.16$ | $t^+_{tot} = 75.81$ | $t^+_{tot} = 77.23$ | $t^+_{tot} = 75.97$ |
| Memory (Gb) | 4.01 | 5.22 | 41.80 | 3.58 | 5.38 | 7.17 |

Note: $\Delta^+ = \Delta x^+ = \Delta y^+ = \Delta z^+$

$\Delta x^+ = \Delta x \cdot u_\tau / \nu$

# ภาคผนวก ค

# บทความที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

## รายชื่อบทความที่ได้รับการเผยแพร่ในระหว่างการศึกษา

**Rojanaratanangkule, W**., Dechaumphai, P., Juntasaro, V., and Juntasaro E. (2008). **Direct numerical simulation of turbulent flow in a plane channel using lattice Boltzmann method**. *The 9th National Graduate Research Conference*. 14-15 March 2008, Chonburi, Thailand.

**Rojanaratanangkule, W**., Dechaumphai, P., Juntasaro, V., and Juntasaro E. (2008). **Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct using lattice Boltzmann method**. *The 12th Annual Symposium on Computational Science and Engineering*. 27-29 March 2008, Ubon Rajathanee, Thailand.

**Rojanaratanangkule, W**., Dechaumphai, P., Juntasaro, V., and Juntasaro E. (2008). **Direct numerical simulation of turbulent flow in a square microduct using lattice Boltzmann method**. *The 5th International Conference on Mesoscopic Methods in Engineering and Science.* 16-20 June 2008, Amsterdam, the Netherlands.

# ประวัติผู้เขียน

นายวัชพล โรจนรัตนางกูร เกิดเมื่อวันที่ 27 ธันวาคม พ.ศ. 2526 ที่จังหวัดแม่ฮ่องสอน เริ่มการศึกษาระดับประถมศึกษาที่จังหวัดแม่ฮ่องสอน สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ที่โรงเรียนสุโขทัยวิทยาคม จังหวัดสุโขทัย สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ใน ปี พ.ศ. 2544 จากนั้นได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) ณ สถาบันเดิม โดยได้รับทุนการศึกษาสำหรับผู้มีศักยภาพเข้าศึกษาระดับบัณฑิตศึกษาจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ระหว่างศึกษาระดับปริญญาโท ได้เป็นผู้สอนปฏิบัติการของสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล จำนวน 4 รายวิชา ดังนี้ (1) Engineering Graphics (2) Mechanical Engineering Laboratory (3) Manufacturing Engineering Laboratory (4) MATLAB for Mechanical Engineering เป็นเวลา 3 ปี และได้นำเสนอผลงานวิชาการในการประชุมทั้งในระดับประเทศและในระดับนานาชาติจำนวน 3 บทความ โดยมีรายละเอียดปรากฏดังภาคผนวก ค.