มนุษย์เป็นผู้สร้างคณิตศาสตร์
และเป็นผู้ใช้คณิตศาสตร์
เพื่ออธิบายและทำความเข้าใจ
ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ
อย่างเป็นระเบียบและเป็นระบบ

ประภาศรี อัศวกุล

บทที่ 7

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

(Solution of System of Linear Equations)

7.1 ระบบสมการเชิงเส้น (System of linear equations)

ระบบสมการเชิงเส้น n สมการของตัวไม่ทราบค่า (unknowns) n ตัว $x_1, x_2, \ldots, x_n$ คือ ระบบในลักษณะ

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1j}x_j & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + \cdots + & a_{ij}x_j & + \cdots + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \cdots + & a_{nj}x_j & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{7.1.1}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ของตัวไม่ทราบค่าทุกตัว และค่าทางด้านขวามือของสมการเป็นค่าคงตัว การหาผลเฉลยของระบบสมการ (7.1.1) คือการหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ซึ่งสอดคล้องกับระบบนี้นั่นเอง การเขียนระบบสมการ (7.1.1) สามารถใช้สัญกรณ์ของเมทริกซ์และเวกเตอร์ โดยให้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ดังนั้นระบบสมการ (7.1.1) ในรูปสมการเมทริกซ์ คือ

$$Ax = b \tag{7.1.2}$$

ในการศึกษาของบทนี้ จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ผลเฉลยของระบบสมการ (7.1.1) หรือ (7.1.2) มีอยู่จริง (exists) และมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น(unique) ซึ่งผลเฉลยที่กล่าวถึงนี้ ถ้าเขียนในรูปเมทริกซ์ คือ

$$x = A^{-1}b \tag{7.1.3}$$

เมื่อ A^{-1} เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A จึงกล่าวได้ว่าการหาผลเฉลย x ก็คือการหา A^{-1} นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่โครงสร้างของเมทริกซ์ A มีลักษณะพิเศษ สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการได้โดยสะดวก ดังที่แสดงในกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) นั่นคือ ระบบสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{7.1.4}$$

ผลเฉลยคือ

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

เช่น ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad\quad &= 4 \\ -2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยคือ

$$x_1 = \frac{4}{3} \quad \text{และ} \quad x_2 = -\frac{5}{2}$$

กรณีที่ 2 A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) นั่นคือ ระบบสมการเชิงเส้นอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \cdots & \vdots \\ & & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & \bigcirc & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{7.1.5}$$

หาผลเฉลยได้ดังนี้

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j\right), \quad i = n-1,\ n-2,\ \ldots,1$$

การหาผลเฉลยเริ่มจากตัวท้ายสุด x_n ใช้ค่าที่ได้นี้หาค่าของ x_{n-1} แล้วหาค่าของ x_{n-2} จากค่า x_n และ x_{n-1} ดำเนินการต่อไปในทำนองเดียวกัน จนกระทั่งได้ x_1 การหาผลเฉลยในกรณีนี้ จึงเรียกว่า การแทนค่าย้อนหลัง (backward substitution) เช่น ระบบสมการ

$$3x_1 + 2x_2 = 5$$
$$-x_2 = 7$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยคือ

$$x_2 = \frac{7}{-1} = -7$$
$$x_1 = \frac{1}{3}(5-2x_2) = \frac{1}{3}(5-2(-7)) = \frac{19}{3}$$

ขั้นตอนวิธี 7.1.1 การแทนค่าย้อนหลัง

ข้อมูลเข้า : $A,\ b,\ n$

$x_n = b_n / a_{nn}$

for $i = n-1,\ n-2, \ldots, 1$ **do**

$s = b_i$

for $j = i+1,\ i+2, \ldots, n$ **do**

$s = s - a_{ij}\, x_j$

end

$x_i = s / a_{ii}$

end

ผลลัพธ์ : $x_n,\ x_{n-1}, \ldots, x_2,\ x_1$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) นั่นคือ ระบบสมการอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ \vdots & \ddots & & \bigcirc & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (7.1.6)$$

หาผลเฉลย $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ได้ โดยการแทนค่าข้างหน้า (forward substitution) ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{11}x_1\right) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j\right) \end{aligned}$$

โดยทั่ว ๆ ไป การหาผลเฉลยของระบบสมการ (7.1.1) หรือ (7.1.2) โดยมีเงื่อนไขว่า ผลเฉลยมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น ในวิชาวิธีเชิงตัวเลข แบ่งเป็นวิธีหลัก ๆ 2 วิธี คือ

7.1.1 วิธีโดยตรง (Direct methods)

วิธีโดยตรงสำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1j}x_j & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +\cdots+ & a_{ij}x_j & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{nj}x_j & +\cdots+ & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$Ax = b$$

เป็นวิธีการหาผลเฉลยโดยใช้การดำเนินการ (operations) เป็นจำนวนจำกัดครั้ง และผลเฉลยที่ได้ เป็นผลเฉลยที่แท้จริงคือ

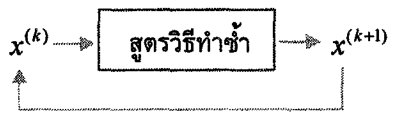
$$x = A^{-1}b$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า วิธีโดยตรงเทียบได้กับการหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} นั่นเอง ตัวอย่างของวิธีนี้ ที่ผู้ศึกษามีประสบการณ์มาแล้ว คือ วิธีโดยหลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule) ซึ่งต้องมีการคำนวณค่าของตัวกำหนด(determinant) จึงทำให้ไม่เหมาะสม ในกรณีระบบสมการมีขนาดใหญ่ อีกวิธีหนึ่งที่ผู้ศึกษาต้องได้เคยใช้ ซึ่งเป็นวิธีพื้นฐาน คือการกำจัดตัวไม่ทราบค่าออกจากสมการทีละตัว โดยการหาตัวคูณกับสมการหนึ่ง แล้วรวมกับอีกสมการหนึ่ง วิธีโดยตรงที่จะศึกษาในหัวข้อ 7.2 ซึ่งเรียกว่า วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination) ก็มีหลักการเช่นเดียวกันนี้ อีกวิธีที่ใช้ในงานคำนวณคือ วิธีเกรเดียนต์สังยุค (conjugate gradient method) ข้อดีของวิธีโดยตรงคือ การได้ผลเฉลยที่แท้จริง และเมื่อเป็นวิธีโดยตรงก็ทำให้สามารถคำนวณ flops ได้ชัดเจน โดยทั่วไป flops ของวิธีโดยตรง จะแปรตาม n^3 หรือในวิชานี้เขียนแทนด้วย $O(n^3)$ ถ้า n มีค่าใหญ่ flops ย่อมมีค่าสูงมาก ซึ่งเป็นข้อด้อยของวิธีโดยตรง ในกรณีที่ A เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเลขศูนย์เป็นจำนวนมาก หรือที่เรียกว่า เมทริกซ์มากเลขศูนย์ (sparse matrix) ซึ่งมักจะเป็นระบบที่ได้จากปัญหาการหาผลเฉลย

เชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย วิธีกำจัดแบบเกาส์ไม่เหมาะสมสำหรับเมทริกซ์แบบนี้ เพราะว่าจะแปลงให้เมทริกซ์ ซึ่งมีสมาชิกในตำแหน่งที่เป็นศูนย์ อาจแปลงเป็นเลขอื่น จนอาจเปลี่ยนสภาพกลายเป็นเมทริกซ์หนาแน่น (dense matrix) ได้ นักศึกษาที่สนใจหัวข้อนี้อาจจะสืบค้นเพิ่มเติมในแขนงวิชา พีชคณิตเชิงเส้นเชิงตัวเลข (numerical linear algebra) ซึ่งจะมีรายละเอียดเพิ่มเติมสำหรับงานวิจัยที่พยายามจะลด flops ให้ต่ำกว่า $O(n^3)$ โดยในปี ค.ศ. 1969 Volcker Strassen ได้สร้างวิธีโดยตรงเพื่อลดเลขชี้กำลังจาก 3 เป็น $3\log_2(7)$ แต่ก็เห็นผลว่า เหนือกว่าวิธีพื้นฐานเมื่อค่า n ต้องใหญ่มาก กล่าวได้ว่า การวิจัยและพัฒนาในการสร้างวิธีโดยตรงยังคงเปิดและท้าทาย ให้ผู้ศึกษาพัฒนาวิธีที่เหนือกว่า $O(n^3)$ และมีความเสถียร (stability)

7.1.2 วิธีทำซ้ำ (Iterative methods)

วิธีทำซ้ำสำหรบการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น เป็นวิธีการประมาณค่าของผลเฉลย โดยสร้างลำดับของเวกเตอร์ $\left\{x^{(k)}\right\}$ เมื่อ k เป็นรอบที่คำนวณ และ $x^{(0)}$ เป็นเวกเตอร์เริ่มต้นที่ต้องกำหนดให้ และต้องการให้ $x^{(k)}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริง เช่นเดียวกับวิธีทำซ้ำสำหรับหารากของสมการไม่เชิงเส้น



เป้าหมายหลักของวิธีทำซ้ำที่ต้องกล่าวถึงคือ ต้องการลด flops $O(n^3)$ ในวิธีโดยตรงซึ่งอาจจะเป็นไปได้ยากสำหรับเมทริกซ์ A ทั่ว ๆ ไป การคำนวณหลักที่ต้องมีในวิธีทำซ้ำในแต่ละรอบคือ การหาผลคูณ Ax เมื่อ x เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ซึ่ง flops ที่ต้องใช้คือ $O(n^2)$ แต่ถ้าเมทริกซ์ A มีลักษณะเฉพาะ เช่น เมทริกซ์มากเลขศูนย์ (sparse matrix) ที่ได้จากปัญหาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยการแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นโดเมนเชิงวิยุต (discretized domain) flops ในการหาผลคูณ Ax สำหรับกรณีนี้จะลดลงเหลือ $O(kn)$ เมื่อ k เป็นจำนวนสมาชิกที่ไม่ศูนย์ในแต่ละแถว อย่างไรก็ตาม flops ของวิธีทำซ้ำอย่างมากที่สุดต้องไม่เกิน $O(n^3)$ ประเด็นที่เหลือคือ การลู่เข้าหาผลเฉลยที่แท้จริงซึ่งจะแสดงให้เห็นในหัวข้อ 7.3 ว่า ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ที่ช่วยให้วิธีทำซ้ำลู่เข้า คือ เมทริกซ์ทแยงมุมเด่นชัด (diagonally dominant matrix)

7.2 วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination)

หลักการพื้นฐานของวิธีกำจัดแบบเกาส์ สำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1j}x_j & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +\cdots+ & a_{ij}x_j & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{nj}x_j & +\cdots+ & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
\tag{7.2.1}
$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$Ax = b \tag{7.2.2}$$

คือการแปลงสมการ (7.2.1) หรือ (7.2.2) เป็น

$$Ux = b^{*} \tag{7.2.3}$$

เมื่อ U เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน และ b^{*} เป็นเวกเตอร์ใหม่ที่เป็นผลจากการแปลง ทำให้หาค่าของผลเฉลย x จากสมการ (7.2.3) ทำได้ง่าย โดยการแทนค่าย้อนหลัง

การแปลงเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน U นั้น กระทำได้อย่างเป็นระบบ โดยเปลี่ยนสมาชิกใต้แนวทแยงมุมของ A ในแต่ละแถวให้เป็นศูนย์ ด้วยการหาตัวคูณที่เหมาะสม แล้วบวกกับแถวที่อยู่ถัดลงมา เรียกกระบวนการนี้ว่า **การกำจัดข้างหน้า (forward elimination)** ดังนั้น วิธีกำจัดแบบเกาส์เป็นกระบวนการกำจัดข้างหน้าเมทริกซ์ A แล้วตามด้วยหาผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนหลัง

$$\boxed{Ax = b} \xrightarrow[\text{การกำจัดข้างหน้า}]{} \boxed{Ux = b^{*}} \xrightarrow[\text{การแทนค่าย้อนหลัง}]{} \boxed{\text{ผลเฉลย } x}$$

แผนภาพที่ 7.2.1 วิธีกำจัดแบบเกาส์

การกำจัดข้างหน้าสามารถดำเนินการได้อย่างเป็นระบบ โดยการดำเนินการแบบแถว ซึ่งผู้ศึกษาอาจมีประสบการณ์มาแล้ว ในที่นี้ต้องการจัดระบบสำหรับวิธีกำจัดแบบเกาส์ จึงกล่างสรุปการดำเนินการแบบแถว ซึ่งมี 3 แบบไว้ดังนี้

7.2.1 การดำเนินการแบบแถว (Row operations)

ให้ R_i และ R_j เป็นแถวที่ i และ j ของเมทริกซ์ใด ๆ และ c เป็นค่าคงตัว การดำเนินการแบบแถวมี 3 แบบ คือ

1. การสลับแถว เขียนแทนในรูป

   $R_i \leftrightarrow R_j$ หมายถึง แถว i สลับกับแถว j

2. การคูณด้วยค่าคงตัว เขียนแทนในรูป

   cR_i หมายถึง คูณแถว i ด้วยค่าคงตัว c

3. การเอาตัวคูณของแถวหนึ่งบวก (หรือลบ) กับอีกแถวหนึ่ง เขียนแทนในรูป

   $R_j + cR_i \rightarrow R_j$ หมายถึง บวกกับแถว j ด้วยแถว i คูณด้วยค่าคงตัว c

   $R_j - cR_i \rightarrow R_j$ หมายถึง ลบจากแถว j ด้วยแถว i คูณด้วยค่าคงตัว c

   R_i เป็นแถวหลัก (pivotal row) และ R_j ถูกแทนใหม่

ตัวอย่างที่ 7.2.1

1. การสลับแถว

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.การคูณด้วยค่าคงตัว

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. การเอาตัวคูณของแถวหนึ่งบวก (หรือลบ) กับอีกแถวหนึ่ง

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

□

กระบวนการแปลงเมทริกซ์ ให้เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน โดยการดำเนินการแบบแถว กระทำเป็นระบบ ดังแผนภาพที่ 7.2.2 ซึ่งแสดงในกรณีเมทริกซ์ A ขนาด 4×4

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 - c_1R_1 \\ R_3 - c_2R_1 \\ R_4 - c_3R_1 \end{array}$$

R_1 เป็นแถวหลัก

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - c_4R_2 \\ R_4 - c_5R_2 \end{array}$$

R_2 เป็นแถวหลัก

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 - c_6R_3 \end{array}$$

R_3 เป็นแถวหลัก

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \\ 0 & 0 & 0 & \times^3 \end{bmatrix} = U$$

แผนภาพที่ 7.2.2

การหาผลเฉลยของระบบสมการ (7.2.1) โดยวิธีกำจัดแบบเกาส์ จัดเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) $\left[A \mid b\right]$

2. ดำเนินการแบบแถวกับ $\left[A \mid b\right]$ จนกระทั่งเมทริกซ์ A แปลงเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน U

$$\left[A \mid b\right] \rightarrow \left[U \mid b^*\right]$$

3. หาผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนหลังจากระบบสมการ

$$Ux = b^*$$

ตัวอย่างที่ 7.2.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 3 \\ 2w - x - y + 2z &= 12 \\ w + 3x - 2y - z &= -9 \\ -w - x + y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

วิธีทำ 1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[A \mid b\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 17 \end{array}\right]$$

2. ดำเนินการแบบแถวกับเมทริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 17 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 20 \end{array}\right] \quad R_3 + \frac{2}{3}R_2$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 20 \end{array}\right] \quad R_4 + \frac{2}{5}R_3$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{84}{5} \end{array}\right] = \left[\, U \,\middle|\, b^* \right]$$

3. หาผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนหลัง

$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{21}{5}z & = & \frac{84}{5} & \Rightarrow & z & = & 4 \\ -5y - 2z & = & -8 & \Rightarrow & y & = & 0 \\ -3x - 3y + 0 & = & 6 & \Rightarrow & x & = & -2 \\ w + x + y + z & = & 3 & \Rightarrow & w & = & 1 \end{array}$$

ดังนั้น ผลเฉลยคือ $w = 1,\quad x = -2,\quad y = 0,\quad z = 4$ □

7.2.2 การคำนวณตัวคูณของแถวหลัก

สมมุติว่า วิธีกำจัดแบบเกาส์แปลงเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ จากระบบสมการเชิงเส้น (7.2.1) ดำเนินการจนถึงรอบที่ k และมี R_k เป็นแถวหลัก เรียกสมาชิก α_{kk} ของแถว R_k ว่า ตัวหลัก (pivot) ดังนั้น ถ้า $\alpha_{kk} \neq 0$ แล้ว ตัวคูณกับแถว R_k แล้วลบจากแถวที่ $k+1,\ldots,n$ คือ

$$l_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{kk}}, \quad i = k+1,\ldots,n \tag{7.2.4}$$

เมื่อ α_{ik} เป็นสมาชิกในคอลัมน์ที่ k ต่อจากนั้น ดำเนินการ

$$R_i - l_{ik}R_k \rightarrow R_i, \quad i = k+1,\ldots,n \tag{7.2.5}$$

ผลที่ได้คือ สมาชิกทุกตัวในคอลัมน์ที่ k ตั้งแต่แถวที่ $k+1,\ldots,n$ เป็นศูนย์หมด ดังแสดงในแผนภาพที่ 7.2.3

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \alpha_{kk} & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \alpha_{kk} & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \end{bmatrix}$$

R_k เป็นแถวหลัก และ α_{kk} เป็นตัวหลัก

แผนภาพที่ 7.2.3

ในขั้นตอนวิธี 7.2.1 ซึ่งเป็นการกำจัดข้างหน้า จะแปลงเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ในสมการ (7.2.2) โดยมีสมมุติฐานที่ว่า A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ หรือที่เรียกว่า เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) และตัวหลัก α_{kk} ของแถวหลัก R_k ไม่เป็นศูนย์ ผลที่ได้คือ เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน U และเวกเตอร์ b^* ในสมการ (7.2.3) โดยขั้นตอนวิธี 7.2.1 จะทำการบันทึกเมทริกซ์ U ลงบนเมทริกซ์ A และบันทึกเวกเตอร์ b^* ลงบนเวกเตอร์ b ซึ่งเป็นข้อมูลเข้าในตอนเริ่มต้น ดังแสดงในแผนภาพที่ 7.2.4

ข้อมูลเข้า ผลลัพธ์

แผนภาพที่ 7.2.4

ขั้นตอนวิธี 7.2.1 การกำจัดข้างหน้า (Forward Elimination)

ข้อมูลเข้า : $A,\ b,\ n$

for $k = 1, 2, \ldots, n-1$ **do**

  for $i = k+1,\ k+2, \ldots, n$ **do**

    $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$

    for $j = k+1,\ k+2, \ldots, n$ **do**

      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$

    end

    $b_i = b_i - l_{ik}\, b_k$

  end

end

ผลลัพธ์ : $U,\ b^*$

หมายเหตุ ในปัญหาทั่ว ๆ ไป ระบบสมการ $Ax = b$ อาจมีหรือไม่มีผลเฉลย ซึ่งเมื่อดำเนินการกำจัดข้างหน้ากับเมทริกซ์แต่งเติมแล้ว สามารถสรุปผลจากแถวสุดท้ายของเมทริกซ์แต่งเติม ในรูปต่อไปนี้

1. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}^* & b_n^* \end{array}\right]$

นั่นคือ สมการที่ n ซึ่งสมนัยกับแถวนี้คือ

$$a_{nn}^* \, x_n = b_n^*$$

หมายความว่า ระบบสมการ $Ax = b$ มีผลเฉลยและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น หรือ A เป็นเมทริกซ์ที่มีตัวผกผัน

2. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & b_n^* \end{array}\right]$ โดยที่ $b_n^* \neq 0$

นั่นคือ สมการที่ n ซึ่งสมนัยกับแถวนี้คือ

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_n^*$$

แสดงว่า ระบบสมการ $Ax = b$ ไม่มีผลเฉลย

3. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

นั่นคือ สมการที่ n ซึ่งสมนัยกับแถวนี้คือ

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

แสดงว่า ระบบสมการ $Ax = b$ มีผลเฉลยจำนวนอนันต์

ตัวอย่างที่ 7.2.3 จงแสดงว่าระบบสมการต่อไปนี้ ไม่มีผลเฉลย

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 1 \\
x + z &= 2 \\
2x + y + 3z &= -3
\end{aligned}
$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเดิมแล้วดำเนินการกำจัดข้างหน้า

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]
$$

แถวที่ 3 แสดงว่า

$$0x + 0y + 0z = -6$$

นั่นคือ ระบบสมการที่กำหนดมาให้ไม่มีผลเฉลย □

ตัวอย่างที่ 7.2.4 จงแสดงว่าระบบสมการต่อไปนี้ มีผลเฉลยจำนวนอนันต์

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 1 \\
x \quad + z &= 2 \\
2x + y + 3z &= 3
\end{aligned}
$$

วิธีทำ เขียนเมทริกซ์แต่งเติมแล้วดำเนินการกำจัดข้างหน้า

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

หาผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนหลังได้

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \\
-y - z &= 1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 - z \\
x + y + 2z &= 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - z
\end{aligned}
$$

ทำให้สามารถกำหนด z เป็นค่าอิสระ นั่นคือเป็นจำนวนจริง t ใด ๆ ผลเฉลยที่ได้จึงอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
x &= 2 - t \\
y &= -1 - t \\
z &= t
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดมาให้มีผลเฉลยจำนวนอนันต์ □

7.2.3 การหาตัวหลัก (Pivoting)

ในการกำจัดข้างหน้า เมื่อดำเนินการจนถึง α_{kk} เป็นตัวหลักในแถว R_k ถ้าหากว่า α_{kk} เป็นศูนย์ แล้วการคำนวณตัวคูณจากสมการ (7.2.4)

$$l_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{kk}}, \quad i = k+1, \ldots, n$$

เมื่อ α_{ik} เป็นสมาชิกในคอลัมน์ที่ k ย่อมกระทำไม่ได้ ถึงแม้ว่า α_{kk} จะไม่เป็นศูนย์ แต่ถ้า α_{kk} มีขนาดน้อยมาก ในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ย่อมทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงได้ ดังนั้น ควรหาตัวหลักในคอลัมน์ที่ k จากแถวที่ $k+1$ ถึงแถวสุดท้าย โดยตัวหลักใหม่ต้องมีค่าสัมบูรณ์สูงสุด ทำให้ได้เงื่อนไขเพิ่มเติมในการกำจัดข้างหน้าว่า ตัวหลักต้องสอดคล้องตามเงื่อนไข

$$m_k = \max\{\, |\alpha_{ik}|, \; i = k, \; k+1, \ldots, n \} \qquad (7.2.6)$$

เรียกการหาตัวหลักเช่นนี้ว่า **การหาตัวหลักบางส่วน (partial pivoting)** เพื่อให้เห็นภาพชัดเจน สมมุติว่าค่าสูงสุดใน (7.2.6) อยู่ที่แถว j ดังนั้น เพื่อให้โครงสร้างท้ายสุดที่ได้จากการกำจัดข้างหน้า ยังคงเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน จึงมีการสลับแถว j กับแถว k แล้วดำเนินการกำจัดข้างหน้า ดังแสดงในแผนภาพที่ 7.2.5

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{\alpha_{kk}} & \times_k & \times_k & \times_k \\ 0 & \boxed{\times} & \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{\alpha_{jk}} & \times_j & \times_j & \times_j \\ 0 & \boxed{\times} & \times & \times & \times \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha_{jk}} & \boxed{\times_j} & \boxed{\times_j} & \boxed{\times_j} \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \alpha_{kk} & \times_k & \times_k & \times_k \\ 0 & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \alpha_{jk} & \times_j & \times_j & \times_j \\ 0 & \boxed{0} & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \\ 0 & \boxed{0} & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \\ 0 & \boxed{0} & \tilde{\times} & \tilde{\times} & \tilde{\times} \end{bmatrix}$$

การหาตัวหลัก	การสลับแถว	การกำจัดข้างหน้า
α_{jk} เป็นตัวหลัก	$R_k \leftrightarrow R_j$	

แผนภาพที่ 7.2.5

การหาตัวหลักบางส่วน พิจารณาเฉพาะสมาชิกที่อยู่ในคอลัมน์ที่ k ตามเงื่อนไข (7.2.6) ยังมีการหาตัวหลักอีกแบบคือ การหาตัวหลักเต็มอัตรา (complete pivoting) ซึ่งหาตัวหลักที่มีค่าสัมบูรณ์สูงสุดในบล็อก (block) จากแถว k ถึง n และคอลัมน์ k ถึง n นั่นคือ ตัวหลักต้องสอดคล้องตามเงื่อนไข

$$M_k = \max\left\{ |\alpha_{ij}|, \quad i,j = k,\, k+1, \ldots, n \right\} \tag{7.2.7}$$

เช่นเดียวกับการหาตัวหลักบางส่วน เพื่อให้ได้โครงสร้างของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบนในตอนท้าย เมื่อได้ตัวหลักแล้ว ก็ให้สลับแถวและคอลัมน์ของตัวหลักที่ได้นี้ ไปที่ตำแหน่งตัวหลักในแนวทแยงมุมตามเดิม

ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาเฉพาะวิธีกำจัดแบบเกาส์ด้วยการหาตัวหลักบางส่วน สำหรับวิธีกำจัดแบบเกาส์ด้วยการหาตัวหลักเต็มอัตรานั้นที่กล่าวถึงนี้ เพื่อให้ผู้ศึกษามีพื้นฐานความเข้าใจ และมีทางเลือกในงานคำนวณขั้นสูง

ตัวอย่างที่ 7.2.5 จงใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์ด้วยการหาตัวหลักบางส่วน หาผลเฉลยของ

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 13 \\ x + y + z &= 6 \\ 2x \quad\quad + z &= 5 \end{aligned}$$

วิธีทำ 1. เขียนเมทริกซ์แต่งเติม หาตัวหลักบางส่วน แล้วดำเนินการกำจัดข้างหน้า

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & 2 & 3 & 13 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ \boxed{0} & 1 & 1/2 & 7/2 \\ \boxed{0} & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

หาตัวหลัก ตำแหน่ง 31 $\qquad R_1 \leftrightarrow R_3 \qquad$ กำจัดข้างหน้า

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 7/2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 13 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & \boxed{0} & -1 & -3 \end{array}\right]$$

หาตัวหลัก ตำแหน่ง 32 $\qquad R_2 \leftrightarrow R_3 \qquad$ กำจัดข้างหน้า

2. หาผลเฉลยโดยการแทนค่าย้อนหลังได้

$$\begin{array}{rcl} -z &=& -3 \;\Rightarrow\; z = 3 \\ 2y + 3z &=& 13 \;\Rightarrow\; y = 2 \\ 2x \quad + z &=& 5 \;\Rightarrow\; x = 1 \end{array}$$

□

7.2.4 การแยกตัวประกอบ LU (LU Factorization)

เมื่อวิเคราะห์การกำจัดข้างหน้าในวิธีกำจัดแบบเกาส์ สำหรับหาผลเฉลยของสมการ $Ax = b$ หรือการหา A^{-1} แล้วในทางทฤษฎีพีชคณิตเชิงเส้นคือ การคูณทางซ้ายของเมทริกซ์ A ด้วยเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง L_k ตามลำดับดังนี้

$$L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1 A = U \tag{7.2.8}$$

เมื่อ U เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน ให้ $L = \left(L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1\right)^{-1}$ ซึ่งยังคงเป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง และมีสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็น 1 ทั้งหมด หรือเรียก L ว่า เมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมหนึ่งหน่วย (unit lower triangular matrix) ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= \left(L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_2 L_1\right)^{-1} U \\ &= L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} U \\ &= LU \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

จึงกล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่า วิธีกำจัดแบบเกาส์คือ การแยกตัวประกอบเมทริกซ์เป็นผลคูณของเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างและเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมบน หรือเรียกสั้น ๆ ว่า การแยกตัวประกอบ LU

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

แผนภาพที่ 7.2.6 แสดงขั้นตอนในสมการ (7.2.8) สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด 4×4 ในแต่ละขั้นของการคูณทางซ้ายด้วย L_1, L_2 และ L_3 ตามลำดับ เทียบได้กับการกำจัดข้างหน้าในแต่ละรอบนั่นเอง

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{L_1A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{L_2L_1A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \end{bmatrix}} \rightarrow \underset{L_3L_2L_1A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times^1 & \times^1 & \times^1 \\ 0 & 0 & \times^2 & \times^2 \\ 0 & 0 & 0 & \times^3 \end{bmatrix}}$$

แผนภาพที่ 7.2.6

สิ่งที่ต้องวิเคราะห์คือ เมทริกซ์ L_k ในสมการ (7.2.8) เป็นเช่นใด ให้ X_k เป็นเวกเตอร์ในคอลัมน์ที่ k ของเมทริกซ์เมื่อดำเนินการมาจนถึงรอบที่ k ดังนั้น L_k ต้องทำให้สมาชิกในคอลัมน์ที่ k เป็นศูนย์ตั้งแต่แถวที่ $k+1$ ถึง n ดังนี้

$$\mathrm{X}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{kk} \\ x_{k+1,k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \rightarrow L_k\mathrm{X}_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ ต้องคูณแถว k ด้วย l_{jk} แล้วลบออกจากแถว $k+1$ ถึง n โดยที่

$$l_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_{kk}}, \quad j = k+1, \ldots, n \qquad (7.2.10)$$

ดังนั้นเมทริกซ์ L_k มีสมาชิกในคอลัมน์ที่ k ในรูป

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.2.11)$$

การหาตัวผกผันของ L_k สามารถหาได้ ดังแผนภาพที่ 7.2.7 โดยการกำจัดข้างหน้ากับเมทริกซ์แต่งเติม $\left[L_k \middle| I\right]$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ I ขนาด $n \times n$ ด้วยการดำเนินการแบบแถว $R_j + l_{jk}R_k,\ j = k+1,\ldots,n$ เมื่อ l_{jk} เป็นตัวคูณจากสมการ (7.2.10)

$$\left[L_k \middle| I\right] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & & & & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & & & & & \ddots \\ & & -l_{nk} & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\Big\Downarrow \quad R_j + l_{jk}R_k,\ \ j = k+1,\ldots,n$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & l_{k+1,k} & 1 & \\ & & & & \ddots & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & 1 & & & l_{nk} & & 1 \end{array}\right] = \left[I \middle| L_k^{-1}\right]$$

แผนภาพที่ 7.2.7

ตัวผกผัน L_k^{-1} จึงอยู่ในรูป

$$L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.12}$$

การหาผลคูณของตัวผกผันสามารถพิจาณาได้ดังนี้ ให้เวกเตอร์ l_k เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกในตำแหน่งที่ 1 ถึง k เป็นศูนย์ และจากตำแหน่งที่ $k+1$ ถึง n เป็นสมาชิกในคอลัมน์ที่ k ของ L_k^{-1} ในตำแหน่งเดียวกัน และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย e_k มีสมาชิกในตำแหน่ง k เป็นหนึ่งและนอกนั้นเป็นศูนย์

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{nk} \end{bmatrix}, \qquad e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ทำให้สามารถเขียนเมทริกซ์ L_k ในรูป

$$L_k = I - l_k e_k^T$$

เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ และเพราะว่า $e_k^T l_k = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\left(I - l_k e_k^T\right)\left(I + l_k e_k^T\right) &= I + l_k e_k^T - l_k e_k^T + l_k e_k^T l_k e_k^T \\ &= I + l_k e_k^T l_k e_k^T = I\end{aligned}$$

นั่นคือ $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$ ซึ่งก็คือเมทริกซ์ในสมการ (7.2.12) ต่อไปพิจารณาผลคูณของตัวผกผัน เพราะว่า $e_k^T l_{k+1} = 0$ ผลคูณที่ได้คือ

$$\begin{aligned}L_k^{-1} L_{k+1}^{-1} &= \left(I + l_k e_k^T\right)\left(I + l_{k+1} e_{k+1}^T\right) = I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T + l_k e_k^T l_{k+1} e_{k+1}^T \\ &= I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่าผลคูณ $L_k^{-1} L_{k+1}^{-1}$ มีสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นหนึ่งทั้งหมด และสมาชิกใต้แนวทแยงมุมในคอลัมน์ที่ k และ $k+1$ ก็คือสมาชิกของ L_k^{-1} และ L_{k+1}^{-1} ในตำแหน่งเดียวกัน สรุปได้ว่าผลคูณ $L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1}$ มีสมาชิกในแนวทแยงมุมเป็นหนึ่งทั้งหมด และสมาชิกใต้แนวทแยงมุมในแต่ละคอลัมน์ มาจากตัวคูณในการกำจัดข้างหน้าในแต่ละรอบนั่นเอง

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.2.13)$$

ตัวอย่างที่ 7.2.6 จงแยกตัวประกอบเมทริกซ์ A ในรูปผลคูณ LU โดยแสดงเมทริกซ์ L_k ในแต่ละรอบของการกำจัดข้างหน้า

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

คำนวณตัวคูณจากสมการ (7.2.10) ซึ่งเป็นสมาชิกใต้แนวทแยงมุมของเมทริกซ์ L_k จากสมการ (7.2.11) ในแต่ละรอบ ผลที่ได้คือ

ตัวคูณในแต่ละรอบ

$$L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -3 & & 1 & \\ -2 & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} l_{21} = 6/3 = 2 \\ l_{31} = 9/3 = 3 \\ l_{41} = 6/3 = 2 \end{matrix}$$

$$L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & -1 & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} l_{32} = 4/2 = 2 \\ l_{42} = 2/2 = 1 \end{matrix}$$

$$L_3L_2L_1A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad l_{43} = 3/3 = 1$$

ดังนั้น จากสมการ (7.2.9) และ (7.2.13) ตัวประกอบ LU ของ A คือ

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

□

ในทางปฏิบัติ จะไม่เขียนเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่าง L_k ออกมาอย่างชัดเจน แล้วคูณทางซ้ายกับเมทริกซ์ ในแต่ละรอบของการกำจัดข้างหน้า ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 7.2.6 เพราะรู้ล่วงหน้าแล้วว่า ผลที่ได้ต้องเป็นเช่นใด แต่สิ่งที่ดำเนินการคือ การคำนวณตัวคูณในแต่ละรอบ และบันทึกไว้ แล้วกำจัดข้างหน้าเพื่อให้ได้เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน U ดังนั้น การคำนวณที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติ สำหรับเมทริกซ์ในตัวอย่างที่ 7.2.6 คือ ดังต่อไปนี้

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}} \overset{L_1}{\rightarrow} \underset{L_1A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & 2 \\ & 4 & 5 & 5 \\ & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}} \overset{L_2}{\rightarrow} \underset{L_2L_1A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & 2 \\ & & 3 & 1 \\ & & 3 & 5 \end{bmatrix}} \overset{L_3}{\rightarrow} \underset{L_3L_2L_1A \,=\, U}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & 2 \\ & & 3 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix}}$$

$l_{21} = 6/3 = 2$

$l_{31} = 9/3 = 3 \qquad l_{32} = 4/2 = 2$

$l_{41} = 6/3 = 2 \qquad l_{42} = 2/2 = 1 \qquad l_{43} = 3/3 = 1$

โดยปรกติแล้ว เพื่อประหยัดหน่วยความจำในการบันทึกข้อมูล บริเวณที่อยู่ใต้แนวทแยงมุมของเมทริกซ์ จะบันทึกตัวคูณในแต่ละรอบไว้ ดังนั้น สำหรับกรณีข้างต้น การบันทึกข้อมูลในแต่ละรอบเป็นดังนี้

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 6 & 9 \end{bmatrix}} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & 4 & 5 & 5 \\ \boxed{2} & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & 3 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{L,\ U}{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & 3 & 1 \\ \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{1} & 4 \end{bmatrix}}$$

$l_{21} = 6/3 = 2$

$l_{31} = 9/3 = 3 \qquad l_{32} = 4/2 = 2$

$l_{41} = 6/3 = 2 \qquad l_{42} = 2/2 = 1 \qquad l_{43} = 3/3 = 1$

ขั้นตอนวิธี 7.2.2 เป็นการแยกตัวประกอบ LU โดยการกำจัดข้างหน้า สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ในสมการ (7.2.2) ผลลัพธ์ที่ได้คือ ตัวประกอบ L และ U โดยขั้นตอนวิธี 7.2.2 จะทำการบันทึกเมทริกซ์ U และสมาชิกของ L ส่วนที่อยู่ใต้แนวทแยงมุม ลงบนเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นข้อมูลเข้าในตอนเริ่มต้น ดังแสดงในแผนภาพที่ 7.2.8

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{bmatrix}
\xrightarrow[\text{การกำจัดข้างหน้า}]{\text{การบันทึกตัวคูณและ}}
\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & & \cdots & u_{1n} \\
l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\
l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & u_{nn}
\end{bmatrix}
$$

ข้อมูลเข้า $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}$ ผลลัพธ์ $\begin{bmatrix} L \diagdown U \end{bmatrix}$

แผนภาพที่ 7.2.8

ขั้นตอนวิธี 7.2.2 การแยกตัวประกอบ LU (ไม่มีการหาตัวหลักบางส่วน)

ข้อมูลเข้า : $A,\ n$

```
for k = 1, 2, ..., n-1 do
    for i = k+1, k+2, ..., n do
        l = a_ik / a_kk
        a_ik = l
        for j = k+1, k+2, ..., n do
            a_ij = a_ij - l a_kj
        end
    end
end
```

ผลลัพธ์ : $L,\ U$

วิธีการกำจัดแบบเกาส์สำหรับหาผลเฉลยของสมการ $Ax = b$ โดยการแยกตัวประกอบ A เป็น LU เปรียบได้กับการหาตัวผกผัน A^{-1} ไว้ก่อน แล้วหาผลเฉลย $x = A^{-1}b$ สำหรับวิธีการกำจัดแบบเกาส์ เมื่อได้ L และ U แล้ว ขั้นตอนการหาผลเฉลย x ประกอบด้วย การแทนค่าข้างหน้าและการแทนค่าย้อนหลัง ดังแผนภาพที่ 7.2.9

$A = LU$	$\Rightarrow$	$Ly = b$	$\Rightarrow$	$Ux = y$
การแยกตัวประกอบ		การแทนค่าข้างหน้าหา y		การแทนค่าย้อนหลังหา x

แผนภาพที่ 7.2.9

ตัวอย่างที่ 7.2.7 จงแก้สมการหาผลเฉลยของสมการ $Ax = b$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ในตัวอย่างที่ 7.2.6 และเวกเตอร์ $b = (-1, 2, 5, 6)^T$ โดยการแยกตัวประกอบ LU

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 7.2.6 ได้ตัวประกอบ L และ U ของ A แล้ว ต่อไปหาผลเฉลยโดยแบ่งเป็น 2 ขั้นดังนี้

(1) การแทนค่าข้างหน้าจากสมการ $Ly = b, \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$

$$\begin{aligned}
y_1 \qquad\qquad\qquad &= -1 &\Rightarrow\quad y_1 &= -1\\
2y_1 + y_2 \qquad\qquad &= 2 &\Rightarrow\quad y_2 &= 4\\
3y_1 + 2y_2 + y_3 \qquad &= 5 &\Rightarrow\quad y_3 &= 0\\
2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 6 &\Rightarrow\quad y_4 &= 4
\end{aligned}$$

ได้ผลเฉลย $y = (-1, 4, 0, 4)^T$

(2) การแทนค่าย้อนหลังจากสมการ $Ux = y, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

$$\begin{aligned}
3x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= -1 &\Rightarrow\quad x_1 &= -5/9\\
2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 &\Rightarrow\quad x_2 &= 7/6\\
3x_3 + x_4 &= 0 &\Rightarrow\quad x_3 &= -1/3\\
4x_4 &= 4 &\Rightarrow\quad x_4 &= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยคือ $x = \left(-\frac{5}{9}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T$ □

Gaussian Elimination

Algorithm Back substitution

Back (A, b, n, x)

$x_n = b_n / a_{nn}$

for $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

    $s = b_i$

    for $i+1, i+2, \ldots, n$

        $s = s - a_{ij} x_j$

    end

    $x_i = s / a_{ij}$

end

Algorithm Forward elimination

Forward (A, b, n)

for $k = 1$ to $n-1$

    for $i = k+1$ to n

        $l_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

        for $j = k+1$ to n

            $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$

        end

        $b_i = b_i - l_{ik} b_k$

    end

end

Algorithm Forward elimination with partial pivoting

Forward - pivoting (A, b, n)

for $k = 1$ to $n-1$

    $p = k$

    for $i = k+1$ to n

        if $|a_{ik}| > |a_{pk}|$ **then** $p = i$

    end

    if $p > k$ **then**

        for $j = k$ to n

            $t = a_{kj},\ a_{kj} = a_{pj},\ a_{pj} = t$

        end

        $t = b_k,\ b_k = b_p,\ b_p = t$

    for $i = k+1$ to n

        $l_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

        for $j = k+1$ to n

            $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$

        end

        $b_i = b_i - l_{ik} b_k$

    end

end

Operation Count

Back substitution: Flops $= n^2$

Forward elimination : Flops $= \dfrac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6}$

Gaussian elimination : Flops $= \dfrac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$

ถ้า n มีขนาดใหญ่ แล้ว Flops $\cong \dfrac{2n^3}{3}$

7.3. วิธีทำซ้ำ

แนวคิดของวิธีทำซ้ำสำหรบหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1j}x_j & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +\cdots+ & a_{ij}x_j & +\cdots+ & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{nj}x_j & +\cdots+ & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array} \tag{7.3.1}
$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$Ax = b \tag{7.3.2}$$

มาจากการแยกเมทริกซ์ A ในรูปผลบวก

$$A = E + F \tag{7.3.3}$$

แล้วแทนในสมการ (7.3.2) ได้

$$
\begin{aligned}
(E+F)x &= b \\
Ex &= -Fx + b \\
x &= -E^{-1}Fx + E^{-1}b
\end{aligned} \tag{7.3.4}
$$

สมการ (7.3.4) มีลักษณะเช่นเดียวกับการหาจุดตรึงของสมการ $x = g(x)$ ในวิธีการหาราก ของ $f(x) = 0$ จากสมการ (7.3.4) เขียนสูตรวิธีทำซ้ำได้ดังนี้

$$x^{(k+1)} = -E^{-1}Fx^{(k)} + E^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.3.5}$$

โดยกำหนดค่าให้เวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)}$ ดังนั้น ลำดับ $\{x^{(k)}\}$ ที่คำนวณจากความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) ในสมการ (7.3.5) จึงเป็นลำดับที่ใช้ประมาณผลเฉลยของสมการเดิม กล่าวได้ว่า วิธีทำซ้ำแต่ละวิธีจึงแตกต่างกันตามลักษณะการแยกเมทริกซ์ A ในสมการ (7.3.3) แน่นอนที่สุด ลักษณะการแยกเมทริกซ์ ต้องทำให้การคำนวณ E^{-1} ในสมการ (7.3.5) ง่าย และใช้ Flops น้อย เช่น E เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 7.3.1 (Wood) พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} 5x \; - \quad y &= 3 \\ -x + 10y &= 19 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

แยก A ในรูป $A = D + F$ โดยให้ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}} + \underset{F}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

ดังนั้น

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad D^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/10 \end{bmatrix}$$

แทนในสมการ (7.3.5) ได้

$$x^{(k+1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/10 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้เวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)} = (0,\ 0)^T$ ผลการคำนวณได้

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.9 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.96 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ x^{(k)} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการคือ $x = (1,\ 2)^T$ □

ตัวอย่างที่ 7.3.2 (Wood) พิจารณาระบบสมการในตัวอย่างที่ 7.3.1 แต่สลับสมการเป็น

$$\begin{aligned} -x + 10y &= 19 \\ 5x - \quad y &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน แยก A ในรูป $A = D + F$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}} + \underset{F}{\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}$$

ดังนั้น

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{-1}b = \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}$$

แทนในสมการ (7.3.5) ได้

$$x^{(k+1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้เวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)} = (0,\ 0)^T$ ผลการคำนวณได้

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 11 \\ 98 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 961 \\ 52 \end{bmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{bmatrix} -539 \\ -4802 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

ผลการคำนวณแสดงว่า ลำดับ $\{x^{(k)}\}$ ลู่ออก □

ตัวอย่างที่ 7.3.2 แสดงว่า ถึงแม้ว่าจะเป็นระบบสมการเดียวกัน แต่ผลจากการสลับสมการ ทำให้ได้เมทริกซ์ A ที่แตกต่าง ดังนั้น ลักษณะหรือสมบัติของเมทริกซ์มีบทบาทสำคัญต่อการออกแบบวิธีทำซ้ำ เพื่อการวิเคราะห์ ในที่นี้พิจารณาการวัดขนาดของเวกเตอร์มิติ n และเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ โดยคำศัพท์วิชาการที่ใช้บอกขนาดคือ **นอร์ม** (norm)

ในที่นี้ จะกล่าวถึงสมบัติและตัวอย่างประกอบของนอร์ม ที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์ในหัวข้อนี้ โดยไม่ลงในรายละเอียดเหมือนในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

นอร์มของเวกเตอร์ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ เขียนแทนด้วย $\|x\|$ มีสมบัติข้อที่ 1-3 ดังนี้

1. $\|x\| \geq 0$ สำหรับเวกเตอร์ x ใด ๆ
   และ $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นเวกเตอร์ศูนย์

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ สำหรับจำนวนจริง α ใด ๆ

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ สำหรับเวกเตอร์ x และ y ใด ๆ

และนอร์มของเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ เขียนแทนด้วย $\|A\|$ มีสมบัติข้อที่ 1-3 ข้างต้น และ

4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ สำหรับเมทริกซ์ A และ B ใด ๆ

5. $\|Ax\|_* \leq \|A\|_* \|x\|_*$ สำหรับเมทริกซ์ A และเวกเตอร์ x ใด ๆ

ในสมบัติข้อที่ 5 Ax เป็นเวกเตอร์มิติ n ดังนั้น $\|Ax\|_*$ เป็นนอร์มของเวกเตอร์ Ax สมบัติข้อที่ 5 จึงมีความหมายว่า $\|A\|_*$ เป็นนอร์มของเมทริกซ์ซึ่งสอดคล้องตามอสมการในข้อที่ 5 และเหนี่ยวนำโดยหรือขึ้นอยู่กับนอร์มของเวกเตอร์ $\|\cdot\|_*$

ตัวอย่างของนอร์มของเวกเตอร์ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ เช่น

1. $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{7.3.6}$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า l_1 – norm

2. $$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{7.3.7}$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า l_2 – norm หรือ *Euclidean* norm

3. $$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{7.3.8}$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า l_∞ – norm หรือ maximum norm

และนอร์มของเมทริกซ์ $A = (a_{ij})$ ขนาด $n \times n$ ซึ่งเหนี่ยวนำโดยนอร์มของเวกเตอร์ l_1 – norm *Euclidean* norm และ maximum norm ตามลำดับ คือ

1. $$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (7.3.9)$$

2. $$\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^T A)} \qquad (7.3.10)$$

3. $$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (7.3.11)$$

ในที่นี้ จะไม่แสดงรายละเอียดการพิสูจน์ของนอร์ม $\|A\|_1$ $\|A\|_2$ $\|A\|_\infty$ ที่ได้จากการเหนี่ยวนำโดยนอร์มของเวกเตอร์ทั้งสามแบบ ซึ่งอาจจะเกินขอบเขตของเนื้อหาในระดับนี้

สำหรับ $\|A\|_1$ ในสมการ (7.3.9) ก็คือ ค่าสูงสุดของผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในคอลัมน์ของ A และ $\|A\|_\infty$ ในสมการ (7.3.11) คือ ค่าสูงสุดของผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในแถวของ A แต่สำหรับการคำนวณ $\|A\|_2$ ในสมการ (7.3.10) จะซับซ้อนกว่า เพราะเกี่ยวข้องกับค่า $r_\sigma(A^T A)$ อ่านว่ารัศมีสเปกตรัม (spectral radius) ซึ่งเท่ากับค่าสูงสุดของค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์ $A^T A$ ดังนั้นในตัวอย่างจะแสดงการคำนวณเฉพาะ $\|A\|_1$ และ $\|A\|_\infty$

ตัวอย่างที่ 7.3.3 การคำนวณนอร์มของเวกเตอร์จากสมการ (7.3.6) - (7.3.8)

1. ถ้า $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\|x\|_1 = |1| + |2| + |-5| = 8$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|1|, |2|, |-5|) = 5$$

2. ถ้า $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\|x\|_1 = |-2| + |0| + |1| + |-3| = 6$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|-2|, |0|, |1|, |-3|) = 3$$

□

ตัวอย่างที่ 7.3.4 การคำนวณนอร์มของเมทริกซ์จากสมการ (7.3.9) และ (7.3.11)

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\|A\|_1 = \max(|1| + |-3|, |2| + |4|) = \max(4, 6) = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max(|1| + |2|, |-3| + |4|) = \max(3, 7) = 7$$

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max(|1| + |3| + |0|, |2| + |-5| + |-1|, |1| + |1| + |-8|) \\ &= \max(4, 8, 10) = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max(|1| + |2| + |1|, |3| + |-5| + |1|, |0| + |-1| + |-8|) \\ &= \max(4, 9, 9) = 9 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 7.3.5 การสาธิตสมบัติของนอร์มของเมทริกซ์ข้อที่ 5

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ คำนวณผลคูณ Ax ได้

$$Ax = \begin{bmatrix} -19 \\ 18 \end{bmatrix}$$

คำนวณ maximum norm ของเมทริกซ์ A และนอร์มของเวกเตอร์ x และ Ax ได้

$$\| A \|_\infty = 6, \quad \| x \|_\infty = 4, \quad \| Ax \|_\infty = 19$$

ดังนั้น

$$\| Ax \|_\infty = 19 \quad \le \quad \| A \|_\infty \, \| x \|_\infty = (6)(4) = 24$$

ซึ่งสอดคล้องตามสมบัติของนอร์มข้อที่ 5 □

7.3.1 การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน

การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีทำซ้ำ เริ่มจากการกำหนดเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อน

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} \qquad (7.3.12)$$

เมื่อเวกเตอร์ x เป็นผลเฉลยที่แท้จริง และเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ เป็นผลที่ได้ในการคำนวณรอบที่ $k+1$ จากสมการ (7.3.4)

$$x = -E^{-1} Fx + E^{-1} b$$

และจากสูตรวิธีทำซ้ำ

$$x^{(x+1)} = -E^{-1} Fx^{(k)} + E^{-1} b$$

หาผลต่างของสมการทั้งสองได้

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = -E^{-1}F(x - x^{(k)}) = -E^{-1}F\,e^{(k)}$$

ทำให้ได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อน $e^{(k+1)}$ และ $e^{(k)}$ ในรูป

$$e^{(k+1)} = -E^{-1}F\,e^{(k)} \tag{7.3.13}$$

ดังนั้น ถ้าต้องการให้เวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อน $e^{(k+1)}$ ลู่เข้าสู่เวกเตอร์ศูนย์ แล้วนอร์มของเวกเตอร์ $e^{(k+1)}$ ต้องน้อยกว่านอร์มของเวกเตอร์ $e^{(k)}$ ซึ่งเกิดขึ้นได้ถ้านอร์มของเมทริกซ์ $E^{-1}F$ น้อยกว่าหนึ่ง เพราะว่า จากสมการ (7.3.13) และโดยสมบัติของนอร์มข้อที่ 2 และ 5

$$\left\| e^{(k+1)} \right\| = \left\| -E^{-1}F\,e^{(k)} \right\| = \left\| E^{-1}F\,e^{(k)} \right\| \le \left\| E^{-1}F \right\| \left\| e^{(k)} \right\|$$

และผลที่ตามมาคือ ถ้าเงื่อนไข

$$\left\| E^{-1}F \right\| < 1 \tag{7.3.14}$$

เป็นจริง แล้ว

$$\left\| e^{(k+1)} \right\| \le \left\| E^{-1}F \right\| \left\| e^{(k)} \right\| < \left\| e^{(k)} \right\| \tag{7.3.15}$$

ดังนั้น ถ้าแยกเมทริกซ์ $A = E + F$ แล้วเมทริกซ์ E และ F ต้องสอดคล้องตามเงื่อนไข $\left\| E^{-1}F \right\| < 1$ ไม่ว่าจะเลือกใช้นอร์มแบบใดก็ตาม จึงจะทำให้นอร์มของเวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อนลดลงในแต่ละรอบของการคำนวณ เรียกเงื่อนไขนี้ว่า **เงื่อนไขการลู่เข้า**

สรุปแนวคิดของวิธีทำซ้ำสำหรับหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $Ax = b$ และเงื่อนไขการลู่เข้าในแผนภาพที่ 7.3.1 ได้ดังนี้

$A = E + F,\quad \left\| E^{-1}F \right\| < 1$	➡	$x^{(k+1)} = -E^{-1}Fx^{(k)} + E^{-1}b$	➡	$x^{(k+1)} \to x$
การแยกเมทริกซ์และเงื่อนไขการลู่เข้า		สูตรวิธีทำซ้ำ		ลำดับลู่เข้าสู่ผลเฉลย

แผนภาพที่ 7.3.1

จากตัวอย่างที่ 7.3.1 แยกเมทริกซ์ A ในรูป

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}} + \underset{F}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

ทำให้ได้

$$D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\left\| D^{-1}F \right\|_{\infty} = \frac{1}{5} < 1$$

สอดคล้องตามเงื่อนไขการลู่เข้า การวิเคราะห์นี้จึงทำให้เห็นว่า เ พราะเหตุใดลำดับของเวกเตอร์ที่คำนวณได้ในตัวอย่างนี้จึงลู่เข้า

ในทางตรงกันข้าม สำหรับเมทริกซ์ในตัวอย่างที่ 7.3.2 การแยกเมทริกซ์อยู่ในรูป

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{D}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} + \underset{F}{\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}}$$

ทำให้ได้

$$D^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\left\| D^{-1}F \right\|_{\infty} = 10 > 1$$

จึงเป็นเหตุให้ ลำดับของเวกเตอร์ที่คำนวณได้ในตัวอย่างที่ 7.3.2 จึงลู่ออก

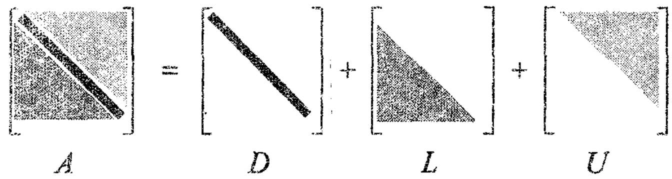
7.3.2 วิธีทำซ้ำเกาส์ – ยาโคบี (Gauss – Jacobi Iterative Method)

หลักการของวิธีทำซ้ำเกาส์ – ยาโคบี สำหรับหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $Ax = b$ หรือต่อไปนี้เรียกวิธีนี้โดยย่อว่า วิธีทำซ้ำ $G-J$ ประกอบด้วย

1. แยกเมทริกซ์ A ในรูป

$$A = D + L + U \tag{7.3.16}$$

เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมจากสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A และ L, U เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างและสามเหลี่ยมบน สมาชิกมาจากส่วนที่อยู่ใต้และเหนือแนวทแยงมุมของ A ตามลำดับ



2. แทน $A = D + L + U$ ในสมการ $Ax = b$ ได้

$$\begin{aligned} (D + L + U)x &= b \\ Dx &= -(L + U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

3. เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ จากสมการ (7.3.17) ได้ดังนี้

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \tag{7.3.18}$$

การเขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ กระทำได้โดยตรงจากระบบสมการเชิงเส้นของสมการย่อยทั้ง n สมการ

$$
\begin{aligned}
\underline{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \underline{a_{22}x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + \underline{a_{nn}x_n} &= b_n
\end{aligned}
$$

โดยเขียนตัวไม่ทราบค่าในแนวทแยงมุมในข้างซ้ายของสมการได้

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right] \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right] \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n-1,n}x_n\right]
\end{aligned}
$$

แล้วให้ตัวไม่ทราบค่าในข้างซ้ายของสมการ เป็นค่าที่จะต้องคำนวณในรอบที่ $k+1$ และตัวไม่ทราบค่าในข้างขวาของสมการ เป็นค่าที่คำนวณแล้วจากรอบที่ k ดังนั้นสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ จากสมการ (7.3.18) ในรูปสมการย่อยทั้ง n สมการ คือ

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\
&\vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n}x_{n-1}^{(k)}\right]
\end{aligned}
\qquad (7.3.19)
$$

หรือ

$$
x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right], \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (7.3.20)
$$

เงื่อนไขทั่วไปในการหยุดการคำนวณ คือ

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k+1)} \right\|} < \varepsilon \qquad (7.3.21)$$

เมื่อ ε เป็นค่าที่ยินยอมได้ (tolerance) หรือจำนวนรอบในการคำนวณ $k >$ maxit ซึ่ง maxit เป็นจำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดไว้ เพื่อป้องกันในกรณีที่วิธีทำซ้ำลู่ออก

การวิเคราะห์การลู่เข้าของวิธีทำซ้ำ $G-J$ พิจารณาสูตรจากสมการ (7.3.18)

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

และจากเงื่อนไขการลู่เข้า (7.3.14) แล้ววิธีทำซ้ำ $G-J$ ลู่เข้าเมื่อ

$$\left\| D^{-1}(L+U) \right\| < 1 \qquad (7.3.22)$$

เพื่อให้เข้าใจเงื่อนไขการลู่เข้านี้และเห็นภาพชัดเจน พิจารณาจากกรณีเมทริกซ์ A ขนาด 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

แยกเมทริกซ์ $A = D + L + U$ ได้

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และเมทริกซ์ $D^{-1}(L+U)$ คือ

$$D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{a_{23}}{a_{22}} \\ \dfrac{a_{31}}{a_{33}} & \dfrac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix}$$

คำนวณนอร์มของเมทริกซ์ด้วย maximum norm ได้

$$\left\| D^{-1}(L+U) \right\|_\infty = \max\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right|, \ \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right|, \ \left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| \right)$$

ดังนั้น $\left\| D^{-1}(L+U) \right\|_\infty < 1$ เมื่อ

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| < 1, \quad \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| < 1, \quad \left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| < 1$$

หรือ

$$|a_{12}| + |a_{13}| < |a_{11}|, \quad |a_{21}| + |a_{23}| < |a_{22}|, \quad |a_{31}| + |a_{32}| < |a_{33}|$$

นั่นคือ ในแต่ละแถวของเมทริกซ์ A

> ค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในแนวทแยงมุมต้องมีค่ามากกว่า
> ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกที่เหลือในแถวนั้น ๆ

สมบัตินี้มีชื่อเรียกว่าสมบัติทแยงมุมเด่นชัด (diagonally dominant) หรือกล่าวว่า เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเด่นชัด

จากตัวอย่างที่ 7.3.1 ระบบสมการ คือ

$$\begin{aligned} 5x \ - \quad y &= 3 \\ -x + 10y &= 19 \end{aligned}$$

เมทริกซ์ A คือ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเด่นชัด และจากตัวอย่างที่ 7.3.2 ระบบสมการคือ

$$\begin{aligned} -x + 10y &= 19 \\ 5x \ - \quad y &= 3 \end{aligned}$$

เมทริกซ์ A ในกรณีนี้คือ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งไม่เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเด่นชัด

ตัวอย่างที่ 7.3.6 จงใช้วิธีทำซ้ำ $G-J$ หาผลเฉลยของ

$$\begin{aligned} 5x_1 \ - \quad x_2 &= 3 \\ -x_1 + 10x_2 &= 19 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ ตามวิธีที่แสดงในสมการ (7.3.19) และ (7.3.20)

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}(3 + x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{10}(19 + x_1) \end{aligned}$$

ดังนั้น สูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(3 + x_2^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(19 + x_1^{(k)})$$

ให้ $x^{(0)} = (0,0)^T$ คำนวณได้ผลดังนี้

$$x^{(1)} = \left(\frac{3}{5}, \frac{19}{10}\right)^T, \ldots, \ x^{(7)} = (0.999997, 1.999999)^T, \ x^{(8)} = (1, 2)^T$$

ดังนั้นผลเฉลยคือ

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 7.3.7 จงใช้วิธีทำซ้ำ $G-J$ หาผลเฉลยของ $Ax = b$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมเด่นชัด คำนวณ $-D^{-1}(L+U)$ และ $D^{-1}b$ ได้

$$-D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -.3 & -.1 \\ .2 & 0 & .3 \\ -.1 & -.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.5 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

สูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ ในรูปเมทริกซ์จากสมการ (7.3.18) คือ

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

ผลการคำนวณ คือ

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.01159 \\ 0.99530 \\ 1.01159 \end{bmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.000251 \\ 1.005795 \\ 1.000251 \end{bmatrix}, \ldots$$

เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง ซึ่งคือ $x = (1, 1, 1)^T$ เวกเตอร์ค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$e^{(5)} = x - x^{(5)} = \begin{bmatrix} -.01159 \\ .00470 \\ -.01159 \end{bmatrix}, \quad e^{(6)} = x - x^{(6)} = \begin{bmatrix} -.000251 \\ -.005795 \\ -.000251 \end{bmatrix}$$

และ

$$\left\| e^{(5)} \right\|_\infty = .01159, \quad \left\| e^{(6)} \right\|_\infty = .005795$$

พิจารณาจากเงื่อนไข (7.3.15) โดยคำนวณ

$$\left\| D^{-1}(L+U) \right\|_\infty = 0.5$$

ดังนั้น

$$\left\| e^{(k+1)} \right\|_\infty < 0.5 \left\| e^{(k)} \right\|_\infty$$

หรือโดยประมาณ

$$\frac{\left\| e^{(k+1)} \right\|_\infty}{\left\| e^{(k)} \right\|_\infty} \cong 0.5$$

ในกรณีนี้ สำหรับสัดส่วนของ $\left\| e^{(5)} \right\|_\infty$ และ $\left\| e^{(6)} \right\|_\infty$ ได้

$$\frac{\left\| e^{(6)} \right\|_\infty}{\left\| e^{(5)} \right\|_\infty} = \frac{.005795}{.01159} \cong 0.5$$

ซึ่งสอดคล้องตามที่วิเคราะห์ไว้ □

ตัวอย่างที่ 7.3.8 จงใช้วิธีทำซ้ำ $G-J$ หาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

ให้ $x^{(0)} = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ (ผลเฉลยที่แท้จริง คือ $x = (1,\ 2,\ -1,\ 1)^T$)

วิธีทำ เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$ ตามวิธีที่แสดงในสมการ (7.3.19) และ (7.3.20) ได้

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{11}(25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{8}(15 - 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \end{aligned}$$

เงื่อนไขการหยุดคำนวณคือ $\dfrac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_\infty}{\left\| x^{(k)} \right\|_\infty} < 10^{-3}$

ผลคำนวณ ในรอบที่ 9 และ 10 คือ

$$x^{(9)} = (0.9997,\ 2.0004,\ -1.0004,\ 1.0006)^T$$

$$x^{(10)} = (1.0001,\ 1.9998,\ -0.9998,\ 0.9998)^T$$

ซึ่งใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริงคือ $x = (1,\ 2,\ -1,\ 1)^T$ □

7.3.3 วิธีทำซ้ำเกาส์ –ไซเดล (Gauss – Seidel Iterative Method)

แนวคิดของวิธีทำซ้ำเกาส์ – ไซเดล สำหรับหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $Ax = b$ หรือต่อไปนี้เรียกวิธีนี้โดยย่อว่า วิธีทำซ้ำ $G-S$ คือ การปรับแปลงจากวิธีทำซ้ำ $G-J$ โดย

ใช้ค่าที่คำนวณได้ในแต่ละรอบ ในการแทนค่าหาสมาชิกตัวถัดไป
ของเวกเตอร์ ที่กำลังคำนวณอยู่ในรอบนั้นทันที

เช่น

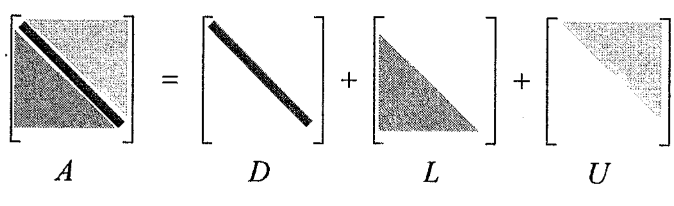
ในรอบที่ $k+1$ เมื่อคำนวณ $x_1^{(k+1)}$ เสร็จ ใช้ $x_1^{(k+1)}$ นี้ทันที
ในการคำนวณ $x_2^{(k+1)}$ และเมื่อได้ $x_2^{(k+1)}$ ก็ใช้ทั้ง $x_1^{(k+1)}$ และ $x_2^{(k+1)}$
คำนวณ $x_3^{(k+1)}$ และดำเนินการจนกระทั่งถึงสมาชิกตัวสุดท้ายคือ $x_n^{(k+1)}$

การพิจารณาวิธีทำซ้ำเกาส์ – ยาโคบี ในรูปเมทริกซ์ ประกอบด้วยขั้นตอนในทำนองเดียวกับวิธีทำซ้ำ $G-J$ กล่าวคือ

1. แยกเมทริกซ์ A ในรูป

$$A = D + L + U \qquad (7.3.24)$$

เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมจากสมาชิกในแนวทแยงมุมของ A และ L, U เป็นเมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมล่างและสามเหลี่ยมบน สมาชิกมาจากส่วนที่อยู่ใต้และเหนือแนวทแยงมุมของ A ตามลำดับ



2. แทน $A = D+L+U$ ในสมการ $Ax = b$ ได้

$$(D + L + U)x = b$$

$$(D+L)x = -Ux + b \qquad (7.3.25)$$

3. เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ จากสมการ (7.3.25) ได้

$$(D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \qquad (7.3.26)$$

จากสมการ (7.3.26) จะได้ว่า ในรอบที่ $k+1$ สูตรของสมาชิกแต่ละตัวของเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ คือ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right] \qquad (7.3.27)$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ เห็นได้ว่าทางด้านขวาของสูตร ในรอบที่ $k+1$ ใช้ค่าของ $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ ในการคำนวณ $x_i^{(k+1)}$ นี่คือจุดที่แตกต่างจากสูตรวิธีทำซ้ำ $G-J$

วิธีทำซ้ำ $G-J$ ⇒ $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right]$$

วิธีทำซ้ำ $G-S$ ⇒ $$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right]$$

พิจารณาการเขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ ในกรณี A เป็นเมทริกซ์ ขนาด 3×3 สูตรการคำนวณรอบที่ $k+1$ คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}\, x_2^{(k)} - a_{13}\, x_3^{(k)} \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}\, x_1^{(k+1)} - a_{23}\, x_3^{(k)} \right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}\, x_1^{(k+1)} - a_{32}\, x_2^{(k+1)} \right]$$

ตัวอย่างที่ 7.3.9 จงใช้วิธีทำซ้ำ $G-S$ หาผลเฉลยของ

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 10x_2 &= 19 \end{aligned}$$

ให้ $x^{(0)} = (0, 0)^T$

วิธีทำ เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ โดยเริ่มจากการวางตัวไม่ทราบค่าในแนวทแยงมุมไว้ข้างซ้ายของสมการได้

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}(3 + x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{10}(19 + x_1) \end{aligned}$$

ดังนั้น ในรอบที่ $k+1$ สูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ คือ

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(3 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(19 + x_1^{(k+1)}) \end{aligned}$$

แทนค่า $x_1^{(0)} = 0$ และ $x_2^{(0)} = 0$ ได้ผลการคำนวณในรอบที่ 4 และ 5 ดังนี้

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.999997 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 7.3.10 จงใช้วิธีทำซ้ำ $G-S$ หาผลเฉลยของ $Ax = b$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ โดยเริ่มจากการวางตัวไม่ทราบค่าในแนวทแยงมุมไว้ข้างซ้ายของสมการได้

$$x_1 = \frac{1}{10}(14 - 3x_2 - x_3)$$
$$x_2 = -\frac{1}{10}(-5 - 2x_1 - 3x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{10}(14 - x_1 - 3x_2)$$

ดังนั้น ในรอบที่ $k+1$ สูตรวิธีทำซ้ำ $G-S$ คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10}(-5 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)})$$

แทนค่า $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$ และ $x_3^{(0)} = 0$ ได้ผลการคำนวณในรอบที่ 5 และ 6 ดังนี้

$$x^{(5)} = (.999792,\ .999848,\ 1.000066)^T$$
$$x^{(6)} = (1.000039,\ 1.000028,\ .999988)^T$$

เมื่อเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง $x = (1, 1, 1)^T$ แล้วสัดส่วนของค่าคลาดเคลื่อนคือ

$$\frac{\left\| e^{(6)} \right\|_\infty}{\left\| e^{(5)} \right\|_\infty} \cong 0.19$$

จากตัวอย่างที่ 7.3.7 ซึ่งใช้วิธีทำซ้ำ $G-J$ ได้สัดส่วนของค่าคลาดเคลื่อนนี้มีค่าประมาณ 0.5 เห็นได้ชัดเจนว่า วิธีทำซ้ำ $G-S$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยเร็วกว่าวิธีทำซ้ำ $G-J$ □

บรรณานุกรม

Atkinson, K. E., *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, Wiley, New York, 1989.

Atkinson, K. E., *Elementary Numerical Analysis*, Wiley, New York, 1985.

Chapra, S. C. and Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, Boston, 1998.

Cheney, W.and Kincaid, D., *Numerical Mathematics and Computing*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 1994.

Faires, J. D. and Burden, R. L., *Numerical Methods*, PWS, Boston, 1993.

Wood, A., *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Harlow, 1999.