



รายงานการวิจัย

การควบคุมแบบอิมพัลส์สำหรับสมการอิมพัลส์ที่เป็นคาบในปริภูมิบานาค (Impulsive Control for Impulsive Periodic System in Banach spaces)

คณะผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

ศาสตราจารย์ ดร. ไพโรจน์ สัตยธรรม

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผู้ร่วมวิจัย

ศาสตราจารย์ นท. ดร. สราวุฒิ สุจิตจร

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ พ.ศ. 2548-49

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณสภาวิจัยแห่งชาติที่ได้สนับสนุนทุนวิจัย และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีที่ได้สนับสนุนเวลา สถานที่และเครื่องมือสำหรับการทำวิจัย

บทคัดย่อภาษาไทย

โครงการวิจัยนี้ได้พิจารณาปัญหาของระบบ อิมพัลส์ โดยเริ่มต้นด้วยการสำรวจระบบเชิงกำหนดแบบเป็นคาบซึ่งถูกควบคุมด้วยสมการวิวัฒนาการไม่เชิงเส้นอย่างเข้ม ได้มีการพิสูจน์ว่าระบบ อิมพัลส์แบบเป็นคาบดังกล่าวมีผลเฉลย อาศัยผลลัพธ์ดังกล่าวได้มีการพิสูจน์เรื่องการมีอยู่ของตัวควบคุมด้วยในขั้นตอนต่อไปได้สำรวจระบบแบบเฟ้นสุ่มที่มีอิมพัลส์ โดยได้พิจารณาตัวแบบแบบค-โซลเศษส่วนที่มีการกระโดด ได้มีการสร้างตัวแบบเชิงประมาณ และได้พิสูจน์ว่าตัวแบบเชิงประมาณลู่เข้าสู่เข้าสู่ตัวแบบเชิงเศษส่วนดังกล่าว ได้มีการประยุกต์ผลลัพธ์ดังกล่าว เพื่อการพยากรณ์พฤติกรรมของราคาหุ้นตัวหนึ่งในตลาดหลักทรัพย์ไทย

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ

This project considered impulsive systems. Firstly, we investigated a deterministic impulsive periodic system which is governed by strongly nonlinear evolution equations. We can prove the existence of a solution of such periodic impulsive system. By an application of the above result, we can prove the existence a control pair. Secondly, we turned to investigate a stochastic impulsive system. We considered a fractional Black-Scholes model with jump. We constructed an approximate model and proved that the approximate model converged in mean square to the fractional model. For an application, we applied the above results to forecast the price behavior of an equity in Thai stock market.

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
สารบัญ	ง
บทที่ 1 บทนำ	
ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
ขอบเขตของการวิจัย	4
ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย	4
บทที่ 2 วิธีดำเนินการวิจัย	
แหล่งที่มาของข้อมูล	5
วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล	5
วิธีวิเคราะห์ข้อมูล	5
บทที่ 3 ผลการวิจัย	
บทที่ 4 บทสรุป	
สรุปผลการวิจัย	7
ข้อเสนอแนะ	7
บรรณานุกรม	8
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก	10
ภาคผนวก ข	21
ประวัติผู้วิจัย	37

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหาการวิจัย

โครงการวิจัยนี้สนใจที่จะพิจารณาระบบพลวัตที่มีอิมพัลส์ทั้งสองระบบกล่าวคือ ระบบพลวัตเชิงกำหนด (Deterministic system) และระบบพลวัตเชิงสุ่ม (stochastic system) ผลลัพธ์ที่ได้จึงเขียนออกมาเป็นผลงานวิจัยสองเรื่องดังนี้คือ

1. Nonlinear impulsive periodic evolution equations.
2. A fractional Black-Scholes model with jump.

โดยที่ระบบพลวัตแรกมีที่มาและมีความสำคัญดังนี้คือ

รูปทั่วไปของระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่เป็นคาบเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= f(t, x(t)), \quad t \in (0, T), \\ x(0) &= x(T). \end{aligned} \tag{1}$$

เมื่อ $A: I \times V \rightarrow V^*$ เป็นตัวดำเนินการไม่เชิงเส้นประเภทการเชิงเดียว (Nonlinear monotone operator) และ $f: I \times H \rightarrow V^*$ เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องเทียบกับตัวแปร $x \in H$ ในที่นี้เราได้ทำงานอยู่บนสามลำดับวิวัฒนาการ $V \subseteq H \subseteq V^*$ และ V^* หมายถึงปริภูมิคู่สมกันเชิงโทโพโลยีของ V ได้มีการรายงานไว้ในผลงานวิจัยของ P. Sattayatham et al [3] ว่าระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่เป็นคาบ (1) มีผลเฉลย ในลำดับต่อมา P. Sattayatham [4] ได้ศึกษาาระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีอิมพัลส์ (2) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= f(t, x(t)), \quad t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0 \in H, \\ \Delta x(t_i) &= F(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

โดยที่ $\Delta x(t) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, และ $F_i : H \rightarrow H$, $i = 1, 2, \dots, n$ เป็นตัวดำเนินการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขลิปชิตซ์ และให้มีพิสูจน์ว่าระบบดังกล่าวมีผลเฉลย นอกจากนี้ยังได้สำรวจต่อไปถึงระบบควบคุมที่มีอิมพัลส์และเสนอเงื่อนไขที่พอเพียงต่อการมีอยู่ของการควบคุมที่เหมาะสมที่สุดด้วย

ในโครงการวิจัยฉบับนี้คณะผู้วิจัยได้สนใจที่จะศึกษาระบบพลวัตพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่เป็นคาบและมีอิมพัลส์ด้วย รูปแบบของระบบดังกล่าวเป็นดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= f(t, x(t)), \quad t \in (0, T), \\ x(0) &= x(T), \\ \Delta x(t_i) &= F(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

กล่าวโดยสรุปแล้ว ระบบพลวัต (3) เป็นการนำเอาระบบพลวัต (1) และ (2) มารวมกัน นั่นคือ การศึกษาระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีทั้งอิมพัลส์และการเป็นคาบ ระบบพลวัต (3) นี้มีการประยุกต์ที่สำคัญเกี่ยวกับพฤติกรรมของวงจรรีเล็กทรอนิกส์ในระดับนาโน ซึ่งประกอบด้วยรอยต่ออุโมงค์ชนิดอิเล็กตรอนเดี่ยว (single-electron tunneling junctions) หรือเรียกโดยย่อว่า SETJ พฤติกรรมของอิเล็กตรอนเดี่ยวเช่นนี้ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงแบบอิมพัลส์ในประจุของตัวเก็บประจุชนิดรอยต่อ SETJ เมื่อคำนึงถึงประจุเป็นตัวแปรสเตตของตัวเก็บประจุชนิด SETJ ผลกระทบเชิงกลระดับควอนตัมจึงสามารถจำลองได้ด้วยสมการอนุพันธ์แบบอิมพัลส์ รายละเอียดในเรื่องนี้จะค้นคว้าเพิ่มเติมได้จาก [6] ผลของการค้นคว้าคณะผู้วิจัยได้หาเงื่อนไขที่พอเพียงที่จะทำให้ระบบพลวัต (3) มีผลเฉลยและการกล่าวถึงระบบควบคุมแบบ เป็นคาบและมีอิมพัลส์ด้วย

สำหรับระบบพลวัตที่สองมีที่มาและมีความสำคัญดังนี้

คงจะต้องย้อนกล่าวถึงเมื่อปี ค.ศ. 1973 เมื่อ Black และ Scholes [1] ได้สร้างสูตรสำหรับการซื้อขายอนุพันธ์ของราคาหุ้น โดยมีสมมติฐานว่าราคาหุ้นดังกล่าวเคลื่อนไหวไปตามการเคลื่อนที่แบบบราวน์ เชิงเรขาคณิตซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

สูตรการซื้อขายดังกล่าวมีชื่อเสียงมากจนกระทั่งทำให้นักคณิตศาสตร์ทั้งสองได้รับรางวัลโนเบลไปในปี ค.ศ. 1995 อย่างไรก็ตามสมการราคาหุ้น (4) ที่เขาใช้ได้ถูกขับเคลื่อนด้วย การเคลื่อนที่แบบบราวน์ B_t ซึ่งเป็นกระบวนการที่ไม่มี ความจำ (memory less) ซึ่งยังเป็นจุดอ่อนอยู่ คำว่ากระบวนการไม่มี ความจำนั้นหมายความว่า การเคลื่อนไหวของราคาหุ้นในอนาคตขึ้นอยู่กับราคาหุ้นในปัจจุบันเท่านั้น

แต่ไม่ขึ้นอยู่กับราคาหุ้นในอดีต ซึ่งจะคำนวณกับผลการทดลองเชิงประจักษ์อยู่ข้างตรงที่ว่า ราคาหุ้นในอนาคตขึ้นอยู่กับราคาหุ้นในปัจจุบันและราคาหุ้นในอดีตด้วย ดังจึงมีความคิดที่จะปรับปรุงสมการ (4) ด้วยวิธีการเปลี่ยนกระบวนการ B_t เป็น B_t^H โดยที่ $H \in (0,1)$ และ B_t^H เป็นการเคลื่อนที่แบบบราวน์เชิงเศษส่วน เหตุที่เลือกกระบวนการ B_t^H มาใช้ก็เพราะว่ากระบวนการนี้มันเป็นกระบวนการที่จดจำอดีตได้ด้วย แต่ข้อเสียก็มีเหมือนกันนั่นคือ การคำนวณค่าของ B_t^H ในเชิงตัวเลขทำได้ลำบาก จึงมีการเสนอแนวคิดในเชิงประมาณขึ้น ซึ่งมีรายงานในบทความของ Thao [5] วิธีการประมาณก็คือ ไปสร้าง B_t^ε ขึ้นมาแล้วพยายามพิสูจน์ว่า $B_t^\varepsilon \rightarrow B_t^H$ ขณะที่ $\varepsilon \rightarrow 0$ วิธีการเช่นนี้ก็นับว่าดีพอสมควรแล้ว แต่คณะผู้วิจัยก็ยังมีความเห็นว่ากระบวนการ B_t^H เป็นกระบวนการต่อเนื่อง ซึ่งไม่สอดคล้องกับพฤติกรรมของราคาหุ้นซึ่งมักจะมีการกระโดด (jump) อยู่เป็นประจำ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงของราคาน้ำมัน หรืออัตราดอกเบี้ย หรือการเกิดรัฐประหาร เป็นต้น ดังนั้นคณะผู้วิจัยจึงได้ได้เสนอโครงการวิจัยนี้เพื่อสร้างตัวแบบราคาหุ้นที่มีความจำ (memory) และมีการกระโดด (jump) ด้วย รูปของสมการ [เรียกชื่อว่า สมการแบค-โซลเศษส่วน (fractional-Black-Scholes model)] เป็นดังนี้คือ

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t^H) + S_t Y_t dN_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

โดยที่ Y_t เป็น Poisson Process แสดงว่ามีการกระโดด คณะผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบเชิงประมาณของสมการ (5) ขึ้นมา เพื่อให้ง่ายต่อการการคำนวณ ตัวแบบดังกล่าวมีรูปร่างดังนี้

$$dS_t(\varepsilon) = S_t(\varepsilon)(\mu dt + \sigma dB_t^H(\varepsilon) + S_t(\varepsilon) Y_t dN_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (6)$$

และได้ใช้ตัวแบบดังกล่าวในการประมาณค่าของหุ้น TPI พบว่าได้ผลดีกว่า (หมายถึงว่ามีความผิดพลาดน้อยกว่า) การประมาณโดยใช้ตัวแบบชนิดต่อเนื่อง ดูรายละเอียดเปรียบเทียบการคำนวณได้ที่ภาคผนวก 2

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. ต้องการพิสูจน์การมีอยู่ของผลเฉลยของระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีอิมพัลส์และเป็นคาบ (3)
2. ศึกษากระบวนการควบคุมซึ่งขับเคลื่อนโดยระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีอิมพัลส์และเป็นคาบ (3)
3. ต้องการพิสูจน์ว่าตัวแบบเชิงประมาณ (6) ลู่เข้าสู่ตัวแบบเชิงประมาณ (5) ในค่าเฉลี่ยกำลังสอง
4. ประยุกต์ระบบเชิงประมาณ (6) ในการประมาณค่าของราคาหุ้น TPI

ขอบเขตของการวิจัย

1. จะศึกษาระบบพลวัตไม่เชิงเส้นประเภทโมโนโทน
2. จะศึกษากระบวนการเฟ้นสุ่มประเภทเศษส่วน

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

1. ได้แนวทางทำวิจัยสำหรับนักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา
2. ได้สูตรสำหรับการพยากรณ์ความเคลื่อนไหวของราคาหุ้น

บทที่ 2

วิธีดำเนินการวิจัย

แหล่งที่มาของข้อมูล

งานวิจัยของโครงการนี้เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎี จึงไม่ได้เก็บข้อมูลดังเช่นการสำรวจด้วยตัวอย่าง ดังนั้น แหล่งที่มาของข้อมูล จึงเป็นการค้นคว้าจากวารสารที่เกี่ยวข้อง การสืบค้นข้อมูลจากหนังสือ และ บทความจากทางอินเทอร์เน็ต มีบ้างเหมือนกันที่ต้องใช้ข้อมูลจริงของราคาหุ้น TPI แต่ข้อมูลเหล่านี้ก็สามารถดาวโหลดจากเว็บไซต์ของ Yahoo finance.com ได้โดยง่าย

วิธีการเก็บรวบรวมข้อมูล

ก็ใช้วิธีการอ่านและการดาวโหลดจากอินเทอร์เน็ต

วิธีวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่ได้มาจะเป็นบทความจากวารสารหรือหนังสือเป็นหลัก ต่อจากนั้นก็ใช้ความรู้ที่มีอยู่คิด วิเคราะห์ปัญหาที่สนใจ ตัวอย่างเช่นในการพิสูจน์เกี่ยวกับการมีอยู่ของผลเฉลยของระบบพลวัตไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีอิมพัลส์และเป็นคาบด้วย ก็จะใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับ ตัวดำเนินการโมโนโทนไม่เชิงเส้น ซึ่งนำมาจากหนังสือของ Zeidler [7] และใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดตรึง (Fixed point theorem) เพราะว่าจุดตรึงที่เราหาได้ก็จะเป็นผลเฉลยของสมการที่เราสนใจ แต่ในขั้นตอนการหาจุดตรึงนี้จะยากหน่อย เพราะว่าจะต้องจัดปริภูมิให้เหมาะสมเข้าตามเงื่อนไขของตัวทฤษฎีบทด้วย

ส่วนการพิสูจน์เกี่ยวกับการลู่เข้าของตัวแบบเชิงประมาณ สู่ตัวแบบสมการแบค-โหลเศษส่วน นั้น เราใช้ความรู้เกี่ยวกับกระบวนการปีวซงส์ ซึ่งหามาจากหนังสือของ Cont [2] และใช้ความรู้เกี่ยวกับการลู่เข้าในค่าเฉลี่ยกำลังสองซึ่งหามาจากบทความของ Thao [5] ส่วนโปรแกรมสำหรับการเขียนกราฟของราคาหุ้น TPI นั้นดาวโหลดมาจากเว็บไซต์

บทที่ 3

ผลการวิจัย

ผลของการวิจัย

ได้พิสูจน์ทฤษฎีหลักสองทฤษฎีดังนี้คือ

1. Suppose A is a nonlinear monotone operator, f satisfies a growth condition, and F satisfies a Lipschitz condition. Then equation (3) has a T -periodic solution u_2 .
ดูรายละเอียดเพิ่มเติมที่ทฤษฎีบท 2 ของภาคผนวก ก

2. Suppose $S(0)$ is a random variable such that $E|S(0)|^{2+\delta}$ is finite for some $\delta > 0$.

Then the solution of equation(6) is given

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\varepsilon^{2\alpha}t + \sigma\varepsilon^\alpha W(t) + \int_0^t H_\varepsilon(s)ds + \int_0^t \log(1+Y_s)dN(s)\right)$$

where $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ and

$$H_\varepsilon(t) = \mu + \alpha\sigma \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{\alpha-1}dW(s).$$

Moreover, the process $S_\varepsilon(t)$ converges to the process $S(t)$ in mean square as $\varepsilon \rightarrow 0$.

ดูรายละเอียดเพิ่มเติมที่ทฤษฎีบท 2 ของภาคผนวก ข

บทที่ 4

บทสรุป

สรุปผลการวิจัย

1. การมีอยู่ของผลเฉลยของสมการ (3) ทำให้เราสามารถหาตัวควบคุม ของระบบควบคุม ของสมการ ไม่เชิงเส้นอย่างเข้มที่มีอิมพัลส์และเป็นคาบได้ ซึ่งจะมีประโยชน์นำผลลัพธ์ไปประยุกต์ใช้
2. การลู่อเข้าของตัวแบบเชิงประมาณ $S_\varepsilon(t)$ ไปสู่ $S(t)$ ขณะที่ $\varepsilon \rightarrow 0$ นั้น ช่วยให้เราสร้างตัวแบบ พยากรณ์พฤติกรรมของราคาหุ้นได้แม่นยำยิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ในการพิสูจน์การมีอยู่ของผลเฉลยของสมการ (3) ได้กระทำในเงื่อนไขที่จำกัด นั่นคือปริภูมิฮิลเบิร์ต H เป็นปริภูมิยุคลิด n มิติเท่านั้น การขยายความให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตใดๆนั้นยังคง เป็น ปัญหาที่จะต้องค้นคว้ากันต่อไป
2. ตัวแบบเชิงประมาณ $S_\varepsilon(t)$ ที่สร้างได้จากงานวิจัยนี้ยังสามารถนำไปหาสูตรสำหรับการกำหนด ราคาของออปชัน เมื่อราคาของสินทรัพย์อ้างอิง เคลื่อนไหวไปตามสมการแบค-โชลแบบเศษส่วน และมีการกระโดดด้วย ซึ่งการหาสูตรเหล่านี้ก็ยังคงเป็นหัวข้อวิจัยได้อีก

บรรณานุกรม

1. Black, F. and Scholes. M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3). 637-654.
2. R. Cont, and P. Tankov (2000). *Financial Modelling with Jump Process*, Chapman and Hall: London.
3. P. Sattayatham, S. Tangmanee, and WeiWei. (2002). On the periodic solutions of nonlinear evolution equations in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 276. 98-108.
4. P. Sattayatham. (2004) .Strongly nonlinear impulsive evolution equations and optimal control. *Nonlinear Analysis*. 57. 1005-1020.
5. T.H. Thao. (2006). An approximate approach to fractional analysis for finance, *Nonlinear Analysis. Real world applications*. 7. 124-132.
6. T. Yang (2001). *Impulsive control theory*. Springer- Verlag: New York.
7. E. Zeidler (1980). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B*. Springer-Verlag: New York.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

A Fractional Black-Scholes Model with Jumps*

P. Sattayatham, A. Intarasit, and A. P. Chaiyasena

*School of Mathematics, Suranaree University of Technology
Nakhon Ratchasima, Thailand*

Received February 24, 2006

Revised August 09, 2007

Abstract. In this paper, we introduce an approximate approach to a fractional Black-Scholes model with jumps perturbed by fractional noise. Based on a fundamental result on the L^2 -approximation of this noise by semimartingales, we prove a convergence of theorem concerning an approximate solution. A simulation example shows a significant reduction of error in a fractional jump model as compared to the classical jump model.

2000 Mathematics Subject Classification: 91B28, 65C50.

Keywords: Black-Scholes, approximate models.

1. Introduction

In some recent papers (see for examples [5, 6]), some fractional Black-Scholes model have been proposed as an improvement of the classical Black-Scholes. Common to these models is that they are driven by a fractional Brownian motion and that some stochastic calculus is created by using, for example, Malliavin calculus or Wick product analysis. Recently, an approximate approach to fractional Black-Scholes model is introduced and investigated in [10]. In this paper we use this approach to study a fractional Black-Scholes model with jumps.

Recall that a fractional Brownian motion B_t^H with Hurst index H , is a centered Gaussian process such that its covariance function $R(t, s) = EB_t^H B_s^H$ is given by

*This work was supported by Suranaree University of Technology, 2005.

$$R(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^\gamma + |s|^\gamma - |t - s|^\gamma), \text{ where } \gamma = 2H \text{ and } 0 < H < 1.$$

If $H = \frac{1}{2}$, $R(t, s) = \min(t, s)$ and B_t^H is the usual standard Brownian motion. In the case $\frac{1}{2} < H < 1$ the fractional Brownian motion exhibits statistical long range dependency in the sense that $\rho_n := E[B_1^H(B_{n+1}^H - B_n^H)] > 0$ for all $n = 1, 2, 3, \dots$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ ([9, page 2]). Hence, in financial modelling, one usually assumes that $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. Put $\alpha = H - \frac{1}{2}$. It is known that a fractional Brownian motion B_t^H can be decomposed as follows:

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} [Z_t + \int_0^t (t - s)^\alpha dW_s],$$

where Γ is the gamma function,

$$Z_t = \int_{-\infty}^0 [(t - s)^\alpha - (-s)^\alpha] dW_s,$$

and W_t is a standard Brownian motion. We suppose from now on $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Then Z_t has absolutely continuous trajectories and it is the term $B_t := \int_0^t (t - s)^\alpha dW_s$ that exhibits long range dependence. We will use B_t instead of B_t^H in fractional stochastic calculus. The fractional Black-Scholes model under our consideration is of the form

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dB_t), 0 \leq t \leq T, \\ S(0) &= S_0, \end{aligned} \tag{1}$$

where S_t is the price of a stock, μ , and σ are constants, and B_t as given above.

Now, consider the corresponding approximate model of (1)

$$\begin{aligned} dS_\varepsilon(t) &= S_\varepsilon(t)(\mu dt + \sigma dB_\varepsilon(t)), 0 \leq t \leq T, \\ S_\varepsilon(0) &= S_0 \text{ (same initial condition as in (1))}, \end{aligned} \tag{2}$$

where $B_\varepsilon(t) = \int_0^t (t - s + \varepsilon)^{H - \frac{1}{2}} dW(s)$, $\frac{1}{2} < H < 1$. Referring to the main result of Thao [10, Theorem 4.2], the solution $S_\varepsilon(t)$ of equation (2) converges to the solution S_t of (1) in $L^2(\Omega)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

In this paper, we extend the main result of Thao [10] to a fractional Black-Scholes model with jumps. We also prove that the solution of our approximate models converges to the solution of the fractional Black-scholes model with jumps. In summary, this paper is organized as follows: In Sec. 2, we review the definition of the Poisson random measure and some preliminary notions of jump-diffusion processes which mostly come from [2]. In Sec. 3, we follow the general setting of [7, page 143] to consider the stock price model with jumps. In Sec. 4, we discuss an approximate model for a fractional stock-price model with jumps. Finally, we give some simulation examples to show the accuracy of approximations by the fractional Black-Scholes model with jumps as compared to the classical Black-Scholes model with jumps.

2. Poisson Random Measures

A Poisson process $(N(t), t \geq 0)$, with intensity λ , is defined as follows:

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

where $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ and τ_1, τ_2, \dots is a sequence of independent, identically exponentially distributed random variables (defined on some probability space (Ω, \mathcal{F}, P)) with parameter λ , that is, $P(\tau_1 > t) = e^{-\lambda t}$. $N(t)$ is simply the number of jumps between 0 and t , i.e.,

$$N(t) = \#\{n \geq 1, T_n \in [0, t]\}.$$

Similarly, if $t > s$ then

$$N(t) - N(s) = \#\{n \geq 1, T_n \in (s, t]\}.$$

The jump times T_1, T_2, \dots , form a random configuration of points on $[0, \infty)$ and the Poisson process $N(t)$ counts the number of such points in the interval $[0, t]$. This counting procedure defines a measure N on $[0, \infty) := \mathbb{R}^+$ as follows: For any Borel measurable set $A \subset \mathbb{R}^+$,

$$N(\omega, A) = \#\{n \geq 1, T_n(\omega) \in A\} = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_A(T_n(\omega)).$$

$N(\omega, \cdot)$ is a positive integer valued measure on Borel subsets of \mathbb{R}^+ . We note that $N(\cdot, A)$ is finite with probability 1 for any bounded set $A \subset \mathbb{R}^+$. The measure $N(\omega, \cdot)$ depends on ω ; it is thus a *random measure*. The intensity λ of the Poisson process determines the *average* value of the random measure $N(\cdot, A)$, that is

$$E[N(\cdot, A)] = \lambda |A|,$$

where $|A|$ is the Lebesgue measure of A .

$N(\omega, \cdot)$ is called a *Poisson random measure* associated with the Poisson process $N(t)$. The Poisson process $N(t)$ may be expressed in terms of the random measure N in the following way:

$$N(\omega, t) = N(\omega, [0, t]) = \int_{[0, t]} N(\omega, ds).$$

Conversely, the Poisson random measure N can also be viewed as the “derivative” of a Poisson process. Recall that each trajectory $t \mapsto N(\omega, t)$ of a Poisson process is an increasing step function. Hence its derivative (in the sense of distributions) is a positive measure on σ -algebra of Borel sets of \mathbb{R}^+ . In fact, it is simply the superposition of Dirac masses located at the jump times:

$$\frac{d}{dt} N(\omega, t) = \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n(\omega)}(\cdot) =: N(\omega, \cdot),$$

hence, for any predictable process $f(\omega, s)$, the stochastic integral with respect to the Poisson random measure N admits, for any $t \in \mathbb{R}^+$, the form

$$\int_0^t f(\cdot, s)N(\cdot, ds) = \sum_{n \geq 1} f(T_n)1_{\{T_n(\omega) \leq t\}}(\cdot) = \sum_{n=1}^{N(\cdot, t)} f(T_n),$$

or in a more compact form

$$\int_0^t f(s)dN(s) = \sum_{n=1}^{N(t)} f(T_n). \quad (3)$$

We now assume that the T_n 's correspond to the jump times of a Poisson process $N(t)$ and that Y_n is a sequence of indentially distributed random variables with values in $(-1, \infty)$. Let $S(t)$ be a predictable process. At time T_n the jump of the dynamics of $S(t)$ is given by

$$S(T_n) - S(T_n-) = S(T_n-)Y_n, \quad (4)$$

which, by the assumption $Y_n > -1$, leads always to positive values of the prices.

If $f(S, t)$ is a $C^{(2,1)}$ -function (this means that f is C^2 in the first variable and C^1 in the second variable), then it follows from (3) that

$$\int_0^t [f(S(s-)(1+Y_s), s) - f(S(s-), s)]dN(s) = \sum_{n=1}^{N(t)} [f(S(T_n), T_n) - f(S(T_n-), T_n)] \quad (5)$$

where Y_t is obtained from Y_n by a piecewise constant and left continuous time interpolation. An application of equation (5) to the function $f(S, t) = S$ for $S \geq 0$ yields

$$\int_0^t [S(s-)(1+Y_s) - S(s-)]dN(s) = \sum_{n=1}^{N(t)} [S(T_n) - S(T_n-)]$$

or

$$\int_0^t S(s-)Y_s dN(s) = \sum_{n=1}^{N(t)} [S(T_n) - S(T_n-)]. \quad (6)$$

It then follow from equations (4) and (6) that

$$\int_0^t S(s-)Y_s dN(s) = \sum_{n=1}^{N(t)} S(T_n-)Y_n. \quad (7)$$

The following lemma is an Ito's formula for jump-diffusion process. Its proof can be found in [2, p. 275].

Lemma 1. *Let X be a diffusion process with jumps, defined as the sum of drift term, a Brownian stochastic integral and a compound Poisson process:*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s) + \sum_{n=1}^{N(t)} \Delta X_n.$$

Here $b(t)$, $\sigma(t)$ are continuous nonanticipating processes with

$$E \left[\int_0^T \sigma^2(t) dt \right] < \infty,$$

and $\Delta X_n = X(T_n) - X(T_n^-)$ are the jump sizes. Then, for any $C^{2,1}$ function, $f: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, the process $Y(t) = f(X(t), t)$ can be represented as:

$$\begin{aligned} f(X(t), t) - f(X(0), 0) &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(X(s), s)b(s) + \frac{\partial f}{\partial s}(X(s), s) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(s), s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X(s), s) \sigma(s) dW(s) \\ &+ \sum_{n=1}^{N(t)} [f(X(T_n), T_n) + f(X(T_n^-), T_n)]. \end{aligned}$$

3. Stock Price Model with Jumps

Let us consider a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on which we define a standard Brownian motion $(W(t), t \geq 0)$, a Poisson process $(N(t), t \geq 0)$ with intensity λ and a sequence $(Y_n, n \geq 1)$ of independent, identically distributed random variables taking values in $(-1, +\infty)$. We will assume that the σ -algebras generated respectively by $(W(t), t \geq 0)$, $(N(t), t \geq 0)$ and $(Y_n, n \geq 1)$ are independent.

The objective of this section is to model a financial market in which there is one riskless asset (with price $S^0(t) = e^{\mu t}$, at time t) and one risky asset whose price jumps at the proportions Y_1, \dots, Y_n, \dots , at some times T_1, \dots, T_n, \dots and which, between any two jumps, follows the Black-Scholes model. Moreover, we will assume that the T_n 's correspond to the jump times of a Poisson process.

The dynamics of $S(t)$, the price of the risky asset at time t , can now be described in the following manner. The process $(S(t), t \geq 0)$ is an adapted, right-continuous process such that on the time intervals $[T_n, T_{n+1})$,

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

while at $t = T_n$, the jump of $S(t)$ is given by

$$\Delta S_n = S(T_n) - S(T_n^-) = S(T_n^-) Y_n.$$

Thus

$$S(T_n) = S(T_n^-)(1 + Y_n).$$

By using the standard Itô formula, the solution of (8) on the interval $[0, T_1)$ is

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right).$$

Consequently, the left-hand limit at T_1 is given by

$$S(T_1^-) = \lim_{u \rightarrow T_1^-} S(u) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T_1 + \sigma W(T_1) \right)$$

and

$$S(T_1) = S(0)(1 + Y_1) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T_1 + \sigma W(T_1)\right).$$

Then, for $t \in [T_1, T_2)$,

$$\begin{aligned} S(t) &= S(T_1) \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - T_1) + \sigma(W(t) - W(T_1)) \\ &= S(0)(1 + Y_1) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right). \end{aligned}$$

Repeating this scheme, we obtain

$$S(t) = S(0) \left[\prod_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n) \right] \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right) \quad (9)$$

with the convention $\prod_0^n 1 = 1$. Using equation (3), $S(t)$ can be given in the following equivalent representations

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \log\left(\prod_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n)\right)\right] \\ &= S(0) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} \log(1 + Y_n)\right] \\ &= S(0) \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \int_0^t \log(1 + Y_s) dN(s)\right], \end{aligned}$$

where Y_t is obtained from Y_n by a piecewise constant and left continuous time interpolation.

The process $(S(t), t \geq 0)$ in equation (9) is right-continuous, adapted and has only finitely many discontinuities on each interval $[0, t]$. We can also prove the following.

Theorem 1. For all $t \geq 0$, $(S(t), t \geq 0)$ in equation (9) satisfies:

$$\mathbb{P} \text{ a.s. } S(t) = S(0) + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dW(s)) + \sum_{n=1}^{N(t)} S(T_n^-) Y_n \quad (10)$$

or, in differential form

$$\mathbb{P} \text{ a.s. } dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) + S(t^-) Y_t dN(t). \quad (11)$$

Proof. Let $\Delta S_n = S(T_n) - S(T_n^-) = S(T_n^-) Y_n$. Then (10) can be written in the following form:

$$\mathbb{P} \text{ a.s. } S(t) = S(0) + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dW(s)) + \sum_{n=1}^{N(t)} n \Delta S_n, \quad (12)$$

We choose the function $f(x, s) = \log x$. Direct calculation shows that

$$f_x = \frac{1}{x}, f_{xx} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{and} \quad f_s = 0$$

We note that $f(x, t)$ is a $C^{2,1}$ function if $x > 0$. Assume that $S(t)$ in (10) is nonnegative. Applying the Itô formula for jump-diffusion processes (see Lemma 1) to $f(x, t) = \log x$, we obtain

$$\log S(t) = \log S(0)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} \log(1 + Y_n).$$

Thus,

$$S(t) = S(0) \left[\prod_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n) \right] \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right).$$

Hence, we obtain (9) as asserted.

4. A Fractional Stock Price Model with Jumps

We use the same setting probability spaces as in Sec. 3. The objective of this section is to construct an approximate model for a financial market in which there is one riskless asset (with price $S^0(t) = e^{\mu t}$, at time t) and one risky asset whose price jumps in the proportions Y_1, \dots, Y_n, \dots at some random times $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ and which, between two jumps, follows the fractional Black-Scholes model for a fractional process $B(t)$. These descriptions can be formalized on the intervals $[T_n, T_{n+1})$ by letting:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dB(t)), 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

At $t = T_n$, the jump of $S(t)$ is given by

$$\Delta S_n = S(T_n) - S(T_n^-) = S(T_n^-) Y_n.$$

Now, we consider a *fractional Black-Scholes model with jumps* which is defined similarly to equation (11) by the following stochastic differential equation

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dB(t)) + S(t^-) Y_t dN(t), \\ S(t)|_{t=0} &= S(0). \end{aligned} \quad (14)$$

Here $B(t) = \int_0^t (t-s)^\alpha dW(s)$ where $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

The corresponding approximate model of (14) is defined for each $\varepsilon > 0$ by

$$\begin{aligned} dS_\varepsilon(t) &= S_\varepsilon(t)(\mu dt + \sigma dB_\varepsilon(t)) + S_\varepsilon(t^-) Y_t dN(t), \\ S_\varepsilon(t)|_{t=0} &= S(0) \quad (\text{same initial condition as in (14)}), \end{aligned} \quad (15)$$

where $B_\varepsilon(t) = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^\alpha dW(s)$. One can prove that $B_\varepsilon(t)$ is a semimartingale and $B_\varepsilon(t)$ converges to $B(t)$ in $L^2(\Omega)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. This convergence is uniform

with respect to $t \in [0, T]$ (see [10, Theorem 2.1]). We need the following Lemma considered as a consequence of the L^2 -convergence of $B_\varepsilon(t)$ to $B(t)$.

Lemma 2. $B_\varepsilon(t)$ converges to $B(t)$ in $L^p(\Omega)$ for any $p \geq 2$, uniformly with respect to $t \in [0, T]$.

Proof. The proof of this Lemma is due to Nguyen Tien Dung [8].

Theorem 2. Suppose that $S(0)$ is a random variable such that $E|S(0)|^{2+\delta}$ is finite for some $\delta > 0$. Then the solution of (15) is given by:

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon^{2\alpha} t + \sigma \varepsilon^\alpha W(t) + \int_0^t H_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \log(1 + Y_s) dN(s) \right),$$

where $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, and

$$H_\varepsilon(t) = \mu + \alpha \sigma \int_0^t (t - s + \varepsilon)^{\alpha-1} dW(s).$$

Furthermore, the stochastic process $S_*(t)$ defined by

$$S_*(t) = S(0) \exp \left(\mu t + \sigma B(t) + \int_0^t \log(1 + Y_s) dN(s) \right)$$

is the limit in $L^2(\Omega)$ of $S_\varepsilon(t)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. This limit is uniform with respect to $t \in [0, T]$.

Proof. Letting $\varphi_\varepsilon(t) = \int_0^t (t - s + \varepsilon)^{\alpha-1} dW(s)$, and substituting $dB_\varepsilon(t) = \alpha \varphi_\varepsilon(t) dt + \varepsilon^\alpha dW(t)$ into equation (eqn15), we obtain

$$dS_\varepsilon(t) = [\mu + \alpha \sigma \varphi_\varepsilon(t)] S_\varepsilon(t) dt + \sigma \varepsilon^\alpha S_\varepsilon(t) dW(t) + S_\varepsilon(t-) Y_t dN(t), \quad (16)$$

or,

$$\begin{aligned} \frac{dS_\varepsilon(t)}{S_\varepsilon(t)} &= [\mu + \alpha \sigma \varphi_\varepsilon(t)] dt + \sigma \varepsilon^\alpha dW(t) + \left(\frac{S_\varepsilon(t-)}{S_\varepsilon(t)} \right) Y_t dN(t) \\ &= H_\varepsilon(t) dt + \sigma \varepsilon^\alpha dW(t) + \left(\frac{S_\varepsilon(t-)}{S_\varepsilon(t)} \right) Y_t dN(t) \end{aligned} \quad (17)$$

where $H_\varepsilon(t) = \mu + \alpha \sigma \varphi_\varepsilon(t)$. Moreover, we can write equation (eqn16) into an integral form as

$$\int_0^t dS_\varepsilon(s) = \int_0^t H_\varepsilon(s) S_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \sigma \varepsilon^\alpha S_\varepsilon(s) dW(s) + \int_0^t S_\varepsilon(s-) Y_s dN(s).$$

Thus,

$$S_\varepsilon(t) = S(0) + \int_0^t H_\varepsilon(s) S_\varepsilon(s) ds + \int_0^t \sigma \varepsilon^\alpha S_\varepsilon(s) dW(s) + \int_0^t S_\varepsilon(s-) Y_s dN(s).$$

Using the formula (7), $S_\varepsilon(t)$ can be given in the following equivalent representations

$$S_\varepsilon(t) = S(0) + \int_0^t H_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)ds + \int_0^t \sigma\varepsilon^\alpha S_\varepsilon(s)dW(s) + \sum_{n=1}^{N(t)} S_\varepsilon(T_n-)Y_n. \quad (18)$$

Since $\Delta S_\varepsilon(T_n) = S_\varepsilon(T_n) - S_\varepsilon(T_n-) = S_\varepsilon(T_n-)Y_n$ then equation (18) becomes

$$S_\varepsilon(t) = S(0) + \int_0^t H_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)ds + \int_0^t \sigma\varepsilon^\alpha S_\varepsilon(s)dW(s) + \sum_{n=1}^{N(t)} \Delta S_\varepsilon(T_n).$$

Choosing the function $f(x, s) = \log x$ for $x = S_\varepsilon(t) > 0$, direct calculation shows that

$$f_x = \frac{1}{x}, f_{xx} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{and} \quad f_s = 0$$

An application of the Itô formula for jump-diffusion processes (see Lemma 1) gives:

$$\begin{aligned} \log S_\varepsilon(t) &= \log S(0) + \int_0^t \left(0 + \left(\frac{1}{S_\varepsilon(s)} \right) \cdot (H_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma\varepsilon^\alpha)^2 S_\varepsilon^2(s) \left(-\frac{1}{S_\varepsilon(s)} \right)^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{S_\varepsilon(s)} \right) (\sigma\varepsilon^\alpha) S_\varepsilon(s) dW(s) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N(t)} [\log(S_\varepsilon(T_n-) + \Delta S_\varepsilon(T_n)) - \log(S_\varepsilon(T_n-))] \\ &= \log S(0) + \int_0^t H_\varepsilon(s)ds - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma\varepsilon^\alpha)^2 ds + \int_0^t \sigma\varepsilon^\alpha dW(s) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N(t)} \left[\log \left(\frac{S_\varepsilon(T_n-)(1 + Y_n)}{S_\varepsilon(T_n-)} \right) \right] \\ &= \log S(0) + \int_0^t (H_\varepsilon(s)ds + \sigma\varepsilon^\alpha dW(s)) - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma\varepsilon^\alpha)^2 ds \quad (19) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N(t)} \log(1 + Y_n) \end{aligned}$$

Using formulae (7) and (17), equation (19) can be given in the following equivalent representations

$$\begin{aligned}
\log S_\varepsilon(t) &= \log S(0) + \int_0^t (H_\varepsilon(s)ds + \sigma\varepsilon^\alpha dW(s)) - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma\varepsilon^\alpha)^2 ds \\
&\quad + \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) \\
&= \log S(0) + \left(\int_0^t \frac{dS_\varepsilon(s)}{S_\varepsilon(s)} - \int_0^t \left(\frac{S_\varepsilon(s-)}{S_\varepsilon(s)} \right) Y_s dN(s) \right) - \frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon^{2\alpha} t \\
&\quad + \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) \\
&= \log S(0) + \int_0^t \frac{dS_\varepsilon(s)}{S_\varepsilon(s)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon^{2\alpha} t + \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) \\
&\quad - \int_0^t \left(\frac{S_\varepsilon(s-)}{S_\varepsilon(s)} \right) Y_s dN(s).
\end{aligned}$$

Here Y_t is obtained from Y_n by a piecewise constant and left continuous time interpolation. Thus

$$\int_0^t \frac{dS_\varepsilon(s)}{S_\varepsilon(s)} = \log \frac{S_\varepsilon(t)}{S(0)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon^{2\alpha} t - \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) + \int_0^t \left(\frac{S_\varepsilon(s-)}{S_\varepsilon(s)} \right) Y_s dN(s). \quad (20)$$

Equating (20) and (17), we get

$$\begin{aligned}
&\log \frac{S_\varepsilon(t)}{S(0)} + \frac{1}{2} \sigma^2 \varepsilon^{2\alpha} t - \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) + \int_0^t \left(\frac{S_\varepsilon(s-)}{S_\varepsilon(s)} \right) Y_s dN(s) \\
&= \int_0^t H_\varepsilon(s)ds + \sigma\varepsilon^\alpha W(t) + \int_0^t \left(\frac{S_\varepsilon(s-)}{S_\varepsilon(s)} \right) Y_s dN(s).
\end{aligned}$$

Hence, the solution of (15) is

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp \left(-\frac{1}{2} (\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma\varepsilon^\alpha W(t) + \int_0^t H_\varepsilon(s)ds + \int_0^t \log(1 + Y_n)dN(s) \right). \quad (21)$$

We note that,

$$\int_0^t H_\varepsilon(s)ds = \mu + \alpha\sigma \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)ds.$$

By application of the stochastic Theorem of Fubini, we get

$$\int_0^t \varphi_\varepsilon(s)ds = \frac{1}{\alpha} (B_\varepsilon(t) - \varepsilon^\alpha W(t)).$$

Therefore

$$\int_0^t H_\varepsilon(s)ds = \mu t + \sigma B_\varepsilon(t) - \sigma\varepsilon^\alpha W(t).$$

Substituting the value of $\int_0^t H_\varepsilon(s)ds$ into equation (21), we get

$$S_\varepsilon(t) = S(0) \exp \left(\mu t - \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma B_\varepsilon(t) + \int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right).$$

We note that $\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and $B_\varepsilon(t)$ converges uniformly to $B(t)$ in $L^2(\Omega)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. This motivates us to consider the process $S_*(t)$ defined by

$$S_*(t) = S(0) \exp \left(\mu t + \sigma B(t) + \int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right).$$

We try to show that $S_*(t)$ is the limit of $S_\varepsilon(t)$ in $L^2(\Omega)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$. We observe that

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(t) - S_*(t) &= S(0) \exp \left(\mu t - \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma B_\varepsilon(t) + \int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \\ &\quad - S(0) \exp \left(\mu t + \sigma B(t) + \int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \\ &= S(0) \exp \left(\mu t + \sigma B(t) + \int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \\ &\quad \left[\exp \left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t)) \right) - 1 \right] \\ &= S(0) \exp(\mu t + \sigma B(t)) \cdot \exp \left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \\ &\quad \left[\exp \left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t)) \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Put $p = 1 + \frac{\delta}{2}$ and $q > 1$ such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. It follows from Holder's inequality that

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon(t) - S_*(t)\|_2 &\leq \|S(0)\|_{2p} \exp(\mu t + \sigma B(t)) \cdot \exp \left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \times \\ &\quad \left[\exp \left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t)) \right) - 1 \right]_{2q} \\ &\leq \|S(0)\|_{2+\delta} \exp(\mu t + \sigma B(t)) \exp \left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right)_{4q} \times \\ &\quad \left[\exp \left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t)) \right) - 1 \right]_{4q} \quad (22) \end{aligned}$$

In order to calculate the norm $\|S_\varepsilon(t) - S_*(t)\|_2$, we firstly note that

$$\begin{aligned} &\| \exp(\mu t + \sigma B(t)) \exp \left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \|_{4q} \\ &\leq \| \exp(\mu t + \sigma B(t)) \|_{8q} \| \exp \left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s) \right) \|_{8q} < \infty. \quad (23) \end{aligned}$$

To see this we note that, for each t , B_t is a Gaussian random variable with zero mean and variance γ_t^2 for some real numbers γ_t . Then

$$\|\exp(\mu t + \sigma B(t))\|_{8q} = \exp(\mu t) [E e^{8q\sigma B(t)}]^{\frac{1}{8q}} = \exp(\mu t) e^{4q\sigma^2\gamma^2(t)} < \infty.$$

Moreover

$$\left\| \exp\left(\int_0^t \log(1 + Y_n) dN(s)\right)\right\|_{8q} = \left\| \exp\left(\sum_{n=1}^{N(t)} \log(1 + Y_n)\right)\right\|_{8q} = \left\| \sum_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n)\right\|_{8q} \leq K,$$

where K is a constant. This is due to the fact that there is a finite number of jumps in the finite interval $[0, T]$.

Finally, we compute the last term on the right hand side of (22). It follows from the relation $e^A - 1 = A + o(A)$ that we have

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t))\right) - 1 \right] \right\|_{4q} \\ & \leq \left\| -\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t)) \right\|_{4q} + \left\| o\left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t))\right) \right\|_{4q} \\ & \leq \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma \|B_\varepsilon(t) - B(t)\|_{4q} + \left\| o\left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t))\right) \right\|_{4q} \end{aligned}$$

By application of Lemma 2, we have $\|B_\varepsilon(t) - B(t)\|_{4q} \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ (uniformly on $t \in [0, T]$). Hence

$$\begin{aligned} \left\| \left[\exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t))\right) - 1 \right] \right\|_{4q} & \leq \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 T + \sigma \|B_\varepsilon(t) - B(t)\|_{4q} + \\ & \left\| o\left(-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2 t + \sigma(B_\varepsilon(t) - B(t))\right) \right\|_{4q} \end{aligned}$$

The right hand side of the above inequality does not depend on t and approaches zero when $\varepsilon \rightarrow 0$. Therefore, one can see from (22) and (23), that $S_\varepsilon(t) \rightarrow S_*(t)$ in $L^2(\Omega)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and the convergence is uniform with respect to t .

5. Simulation Examples

Let us consider the Thai stock market. Figure 1 shows the daily prices of a data set consisting of 150 open -prices of the Thai Petrochemical Industry (TPI) between June 9, 2004 and January 7, 2005. The empirical data for these stock prices were obtained from <http://finance.yahoo.com>.

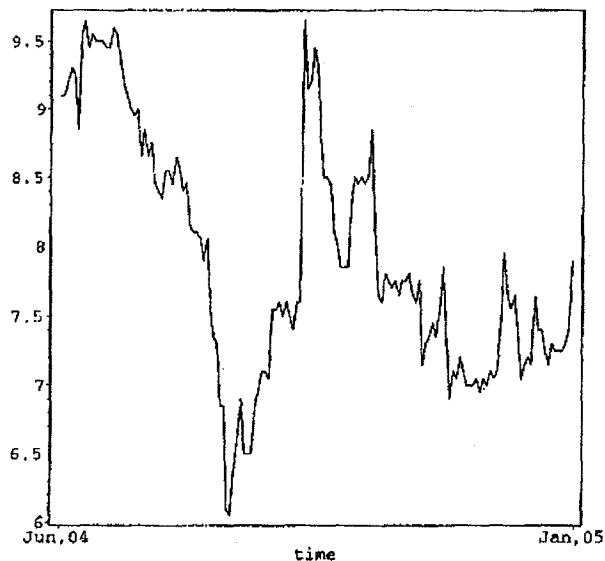


Fig. 1. Price behavior of TPI, between June 4, 2004 and January 7, 2005

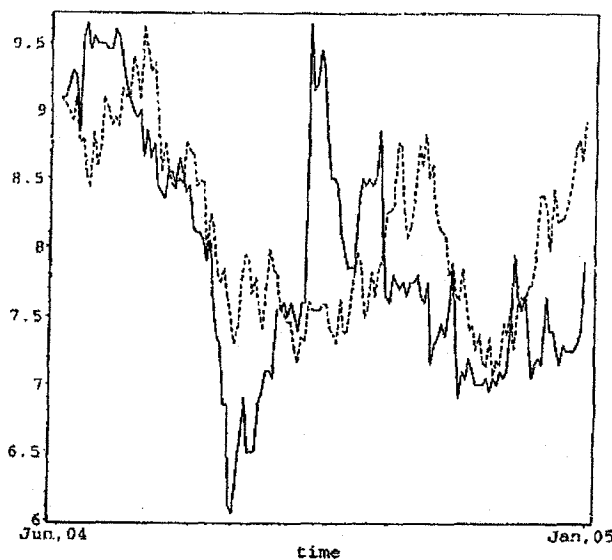


Fig. 2. Price behavior of TPI, between June 4, 2004 and January 7, 2005, compared with a scenario simulated from a Black-Scholes model with jumps (solid line:= empirical data, dashed line:= simulated by $S(t)=$

$$S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n)\right), \text{ ARPE}(2) = 23.69\%, \text{ and variance} = 0.02656$$

Figure 2 shows the empirical data of TPI open-price as compared to the price that was simulated by a Black-Scholes pricing model with jump. In the simulation process, we use the algorithm that appeared the paper of Cyganowski, Grunce and Kloeden [3]. The simulated model is $S(t) = S(0) \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n))$. The model parameters $\mu = -0.0000725$, $\sigma = 0.3025$ and parameter for jumps as $\mu_j = 0.00007624$, $\sigma_j = 0.0003679$, $\lambda = 55.46$, $\gamma = 1$ are fixed. For comparative purposes, we compute the Average Relative Percentage Error (ARPE). By definition, $ARPE = (1/N) \sum_{k=1}^N \frac{|X_k - Y_k|}{X_k} \cdot 100$, where N is the number of price, $X = (X_k)_{k \geq 1}$ is the market prices and $Y = (Y_k)_{k \geq 1}$ is the model prices. We worked out 500 trails and computed ARPE. We denote the ARPE of Figure 2 and and Figure 3 by ARPE(2) and ARPE(3) respectively.

Figure 3 shows the empirical data of TPI open-price as compared to the price that was simulated by a fractional Black-Scholes pricing model with jumps. The simulated model is $S_\epsilon(t) = S(0) \exp((\mu - \frac{1}{2}((\sigma\epsilon^\alpha)^2)t + \sigma B_\epsilon(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n))$. The value of μ , σ and the parameters for jumps are the same as in Figure 2. For the remaining data, we choose $H = 0.50001$, $\epsilon = 0.000001$.

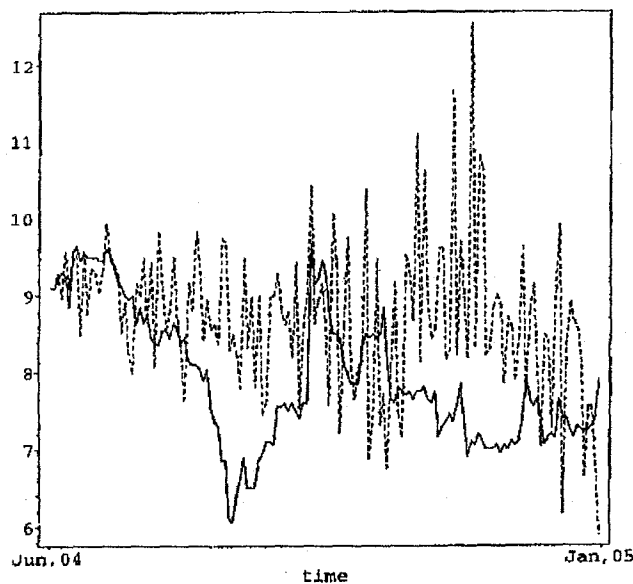


Fig. 3. Price behavior of TPI, between June 4, 2004 and January 7, 2005, compared with a scenario simulated from a fractional Black Scholes model with jumps (solid line := empirical data, dashed line := simulated by

$$S_\epsilon(t) = S(0) \exp((\mu - \frac{1}{2}((\sigma\epsilon^\alpha)^2)t + \sigma B_\epsilon(t) + \sum_{n=1}^{N(t)} (1 + Y_n)).$$

$$ARPE(3) = 19.64\%, \text{ and variance} = 0.01546$$

By comparing ARPE and variance of Figure 2 and 3, one can see that in case of TPI, the sample path from a fractional Black-Scholes pricing model with jumps gives a better fit with the data than Black-Scholes pricing model with jumps.

References

1. E. Alos, O. Mazet, and D. Nualart, Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$, *Stochastic Processes and their Applications* **86** (2000) 121–139.
2. R. Cont and P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC 2004.
3. S. Cyganowski, L. Grunce, and P. E. Kloeden, MAPLE for jump-diffusion stochastic differential equations in finance, Available at <http://www.uni-bayreuth.de/departments/math/~lgruene/papers>, 2002.
4. T. E. Duncan, Y. Z. Hu, and B. Parsik-Duncan, Stochastic calculus for fractional Brownian motion I, Theory, *SIAM J. Control and Optim.* **38** (2000) 582–615.
5. R. J. Elliot and J. Van der Hoek, A general white noise theory and applications to finance, *Math. Finance* **13** (2003) 301–330.
6. Y. Hu and B. Oksendal, Fractional white noise calculus and applications to finance, *Infin. Dimens. Anal. Quantum probab. Relat.* **6** (2003) 1–32.
7. D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996.
8. Nguyen Tien Dung, A class of fractional stochastic equation, Institute of mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology, 2007.
9. B. Oksendal, *Fractional Brownian Motion in Finance*, Preprint Department of Math, University of Oslo **28** (2003) 1–35.
10. T. H. Thao, An approximate Approach to fractional analysis for Finance, *Nonlinear Analysis: Real world Applications* **7** (2006) 124–132.

ภาคผนวก ข

Nonlinear Impulsive Periodic Evolution Equations

P. Sattayatham, S. Sujitjorn
Suranaree University of Technology, Thailand

Abstract

In this paper we consider the question of the existence of periodic solutions of nonlinear impulsive differential equations monitored by the strongly nonlinear evolution equations $\dot{x}(t) + A(t, x(t)) = g(t, x(t))$, $0 < t < T$. Here $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$ is an evolution triple, $A : I \times V \rightarrow V^*$ is a uniformly monotone operator, and $g : I \times H \rightarrow V^*$ is a Caratheodary mapping.

Keywords. Nonlinear impulsive evolution equations; Nonlinear monotone operator; Evolution triple.

1 Introduction

In recent years, impulsive periodic systems have attracted much attention since many evolution processes are subject to short term impulsive perturbations. In this paper, we consider the following periodic boundary value problem of an impulsive differential equation

$$\dot{x}(t) + A(t, x(t)) = g(t, x(t)), \quad t \neq t_i, \quad 0 < t < T, \quad (1a)$$

$$x(t_i^+) - x(t_i) = F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1b)$$

$$x(0) = x(T), \quad (1c)$$

where $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$, A is a nonlinear monotone operator, g is a nonlinear nonmonotone perturbation in a Banach space, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-) \equiv x(t_i^+) - x(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ and F_i 's are some operators. The impulsive condition (1b) represents the jump in the state x at time t_i ; with F_i determining the size of the jump at time t_i (for the definitions of the operators A , g , and F_i will be given in Section 2). Some interesting examples of impulsive periodic systems can be found in the modelling of nanoelectronic devices (see for instance [6, page 307]).

Impulsive evolution equations with an unbounded linear operator A of the form

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + A(t)x(t) &= g(t, x(t)), \quad t > 0, \quad t \neq t_i \\ \Delta x(t_i) &= F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x(0) &= x(T),\end{aligned}$$

have been considered by Hinpang [3]. The questions of the existence and regularity of solutions have been discussed. However, these questions still open when the operator A is nonlinear.

The purpose of this paper is to study the existence of periodic solutions of the strongly nonlinear impulsive evolution equations on $(0, T)$ and we will apply these results to impulsive control of periodic systems.

2 System descriptions

The mathematical setting of our problem is the following. Let H be a real separable Hilbert space, V be a dense subspace of H having the structure of a reflexive Banach space, with the continuous embedding $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, where V^* is the topological dual space of V . The system model considered here is based on this evolution triple. Let the embedding $V \hookrightarrow H$ be compact.

Let $\langle x, y \rangle$ denote the pairing of an element $x \in V^*$ and an element $y \in V$. If $x, y \in H$, then $\langle x, y \rangle = (x, y)$, where (x, y) is the scalar product on H . The norm in any Banach space X will be denoted by $\|\cdot\|_X$.

Let $I \equiv (0, T)$ be a finite subinterval of the real line and $\bar{I} \equiv [0, T]$. Let $p, q \geq 1$ be such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ where $2 \leq p < +\infty$. For p, q satisfying the preceding conditions, it follows from reflexivity of V that both $L_p(I, V)$ and $L_q(I, V^*)$ are reflexive Banach spaces and the pairing between $L_p(I, V)$ and $L_q(I, V^*)$ is denoted by \ll, \gg .

Define

$$W_{pq}(I) = W_{pq}(0, T) = \{x : x \in L_p(I, V), \dot{x} \in L_q(I, V^*)\},$$

and

$$\|x\|_{W_{pq}(I)} = \|x\|_{L_p(L, V)} + \|\dot{x}\|_{L_q(L, V^*)},$$

where \dot{x} denotes the derivative of x in the generalized sense. Furnished with the norm $\|\cdot\|_{W_{pq}(I)}$, the space $(W_{pq}(I), \|\cdot\|_{W_{pq}(I)})$ becomes a Banach space which is clearly reflexive and separable. Moreover, the embedding $W_{pq}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}, H)$ is continuous. Let us assume further that there is an embedding constant $0 < \eta < 1$ such that $\|x\|_{C(\bar{I}, H)} \leq \eta \|x\|_{W_{pq}(I)}$. If the embedding $V \hookrightarrow H$ is compact, the embedding $W_{pq}(I) \hookrightarrow L_p(I, H)$ is also compact (see [7] Problem 23.13(b)).

For a partition $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ on $(0, T)$, we define the set $PW_{pq}(0, T) = \{x \in W_{pq}(t_i, t_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n \text{ where } t_0 = 0, t_{n+1} = T\}$. Moreover, for each $x \in PW_{pq}(0, T)$, we define $\|x\|_{PW_{pq}(0, T)} = \sum_{i=1}^n \|x\|_{W_{pq}(t_i, t_{i+1})}$. As a result, the space $(PW_{pq}(0, T), \|\cdot\|_{PW_{pq}(0, T)})$ becomes a Banach space. Let $PC([0, T], H) = \{x : x \text{ is a map from } [0, T] \text{ into } H \text{ such that } x \text{ is continuous at every point } t \neq t_i, \text{ left continuous at } t = t_i, \text{ and possesses the right-hand}$

there exists a constant $L_i(\rho)$ such that

$$\|F_i(x_1) - F_i(x_2)\|_H \leq L_i(\rho) \|x_1 - x_2\|_H$$

for all $\|x_1\|_H, \|x_2\|_H < \rho$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

It is sometimes convenient to rewrite system (1) into an operator equation. To do this, we set $X = L_p(I, V)$ and hence $X^* = L_q(I, V^*)$. Moreover, we set

$$\begin{aligned} A(x)(t) &= A(t, x(t)), \\ G(x)(t) &= g(t, x(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

for all $x \in X$ and for all $t \in (0, T)$. Then the original problem (1) is equivalent to the following operator equation (see [7, Theorem 30.A]):

$$\begin{aligned} \dot{x} + Ax &= G(x), \\ x(0) &= x(T), \\ \Delta x(t_i) &= F_i(x(t_i)), \end{aligned} \tag{3}$$

for $i = 1, 2, \dots, n$ and $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$.

Remark It follows from Theorem 30.A of Zeidler [7] that equation (3) defines an operator $A : X \rightarrow X^*$ such that A is uniformly monotone, hemicontinuous, coercive, bounded, and satisfied

$$\|Ax\|_{X^*} \leq \gamma \|x\|_X^{p-1}$$

for some constants $\gamma > 0$ and for all $x \in X$. Moreover, by using hypothesis (G)(3) and using the same technique as in Theorem 30.A, one can show that the operator $G : L_p(I, H) \rightarrow X^*$ is also bounded and satisfies

$$\|G(u)\|_{X^*} \leq \delta \|u\|_{L_p(I, H)}^{k-1}$$

for some constants $\delta > 0$ and for all $u \in L_p(I, H)$.

3 Existence of a periodic solution

In order to get a periodic solution of Eq.(1) in the space $PW_{pq}(I)$, we firstly consider the following Cauchy problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= g(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0 \in H, \\ \Delta x(t_i) &= F_i(x(t_i)), \end{aligned} \tag{4}$$

where $i = 1, 2, \dots, n$ and $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$. By a solution of system (4), we mean a function $x(t)$ as defined in Definition 1 except that $x(t)$ must satisfy the initial condition $x(0) = x_0$.

Lemma 1. Under assumptions (A),(F) and (G), the system (4) has a unique solution $x \in PW_{pq}(0, T) \cap PC([0, T], H)$ and the solution depends continuously on the initial condition.

Proof. The existence of the solution of system (4) follows from [5] Theorem B. We can use hypothesis G(2) in proving the solution's uniqueness. To see this, suppose that system (4) has two solutions $x_1, x_2 \in PW_{pq}(0, T) \cap PC([0, T], H)$. Then it follows from the integration by parts formula and monotonicity of $A(t, x)$ that

$$\begin{aligned}
\|x_1(t) - x_2(t)\|_H^2 - \|x_1(0) - x_2(0)\|_H^2 &= 2 \int_0^t \langle \dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s), x_1(s) - x_2(s) \rangle_{V^* - V} ds \\
&= 2 \int_0^t \langle \dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s), x_1(s) - x_2(s) \rangle_{V^* - V} ds \\
&\quad + 2 \int_0^t \langle g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s)), x_1(s) - x_2(s) \rangle_{V^* - V} ds \\
&\leq 2 \int_0^t \langle g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s)), x_1(s) - x_2(s) \rangle_{V^* - V} ds \\
&\leq 2 \int_0^t \|g(s, x_1(s)) - g(s, x_2(s))\|_{V^*} \|x_1(s) - x_2(s)\|_V ds \\
&\leq 2L \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\|_H \|x_1(s) - x_2(s)\|_V ds \\
&\leq 2Lc \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\|_H^2 ds,
\end{aligned}$$

for some positive constant c . By Gronwall's lemma, we get

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_H^2 \leq \|x_1(0) - x_2(0)\|_H^2 e^{2Lc(t-0)}. \quad (5)$$

Note we can derive the uniqueness result for the system (4) by simply setting $x_1(0) = x_2(0)$ and using equation (5). Furthermore, equation (5) also implies that the solution of the system (4) depends continuously on the initial condition. This proves Lemma 1.

Definition. For each $y \in H$, we write $x(t; 0, y)$ to mean the solution of equation (4) corresponding to the initial condition $x(0) = y$.

Corollary to Lemma 1. The map $y \rightarrow x(t; 0, y)$ is well defined and is continuous from H into H .

Proof. The proof follows immediately from Theorem 1.

Lemma 2. Assume $p = 2$ and $k = 1$. Let $r > 0$ and $x_0 \in H$. If $\|x_0\| \leq r$ then $\|x\|_{C(\bar{I}, H)} \leq r$ where x is the solution of (4) corresponding to the initial condition x_0 .

Proof. Let x be the solution of (4) corresponding to the initial condition $x(0) = x_0$ then $x \in W_{pq}(I)$. Let $X = L_p(I, V)$ and $X^* = L_q(I, V^*)$, it follows from equation (3) that

$$\langle \dot{x}, x \rangle + \langle A(x), x \rangle = \langle G(x), x \rangle.$$

Since A is coercive (Hypothesis (A)) then

$$c_3 \|x\|_X^p \leq \langle G(x), x \rangle - \langle \dot{x}, x \rangle.$$

Using integration by part, Hölder inequality, and Hypothesis (G), we get

$$\begin{aligned} c_3 \|x\|_X^p &\leq \langle G(x), x \rangle - \frac{1}{2} \left[\|x(T)\|_H^2 - \|x(0)\|_H^2 \right] \\ &\leq \left(\int_0^T \|g(t, x)\|_{V^*}^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^T \|x(t)\|_V^p dt \right)^{1/p} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\|x(T)\|_H^2 - \|x(0)\|_H^2 \right] \\ &\leq c_4 \left(\int_0^T (\|x(t)\|_H)^q dt \right)^{1/q} (\|x\|_X) + \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2 \\ &\leq c_4 \|x\|_{L_q(I, H)} \|x\|_X + \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2 \\ &\leq c_5 \|x\|_{L_p(I, V)} \|x\|_X + \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2 \quad (\because L_p(I, V) \hookrightarrow L_q(I, H) [7, \text{page 407}]) \\ &\leq c_5 \|x\|_X^2 + \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2 \end{aligned}$$

for some constants $c_5 > 0$. We finally get $c_3 \|x\|_X^p \leq c_5 \|x\|_X^2 + \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2$. Substituting $p = 2$, we get

$$(c_3 - c_5) \|x\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2.$$

By choosing some suitable constants c_3 and c_5 , we can assume that $c_3 - c_5 \geq 1$. Hence

$$\|x\|_X^2 \leq \frac{1}{(c_3 - c_5)} \|x(0)\|_H^2 \leq \frac{1}{2} \|x(0)\|_H^2. \quad (6)$$

It follows from equation (6) that if $\|x(0)\| \leq r$ then $\|x\|_X \leq (1/\sqrt{2})r$ for each fixed $r > 0$. Next, we shall estimate $\|\dot{x}\|$. Let $\phi \in X$; then it follows from equation (3) that

$$\langle \dot{x}, \phi \rangle + \langle A(x), \phi \rangle = \langle G(x), \phi \rangle.$$

Applying Hölder inequality, we get

$$|\dot{x}(\phi)| \leq \|A(x)\|_{X^*} \|\phi\|_X + \|G(x)\|_{X^*} \|\phi\|_X.$$

By using Remark at the end of section 2, we have

$$|\dot{x}(\phi)| \leq \left(\gamma \|x\|_X^{p-1} + \delta \|x\|_{L_p(I,H)}^{k-1} \right) \|\phi\|_X. \quad (7)$$

Then, by substituting $p = 2, k = 1$ into (7) and by choosing sufficiently small γ and δ , we get

$$\|\dot{x}\| \leq \gamma \|x\|_X + \delta \leq \gamma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} r \right) + \delta \leq \frac{1}{4} r. \quad (8)$$

Hence, for a given $r > 0$, we get from equation (6) and (8) that

$$\|x\|_{W_{pq}(I)} = \|x\|_X + \|\dot{x}\|_{X^*} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} r + \frac{1}{4} r < r.$$

Finally, we note that the embedding $W_{pq}(I) \hookrightarrow C[\bar{I}, H]$ is continuous; then

$$\|x\|_{C[\bar{I}, H]} \leq \eta \|x\|_{W_{pq}(I)}$$

since we assume that the embedding constant $0 < \eta < 1$ then

$$\|x\|_{C[\bar{I}, H]} \leq r.$$

The assertion follows.

Theorem 1. Let condition (A), (F) and (G) hold. Then equation (1) has a T-periodic solution if and only if there exists $x_0 \in H$ such that

$$x(T) = x_0 = x(0) \quad (9)$$

Proof. The necessary condition is obvious.

Sufficiently: Consider the following Cauchy problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + A(t, x(t)) &= g(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ \Delta x(t_i) &= F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

It follows from Lemma 1 that the system(10) has a solution on $[0, T]$. Since condition(9) is satisfied then this solution must be a T- periodic impulsive solution.

Lemma 3. (Bohl-Brower fixed point theorem) Let B be a non-empty compact convex subset of R^m and let the operator $U : B \rightarrow B$ be continuous. Then U has a fixed point $x \in B$.

We are now ready to prove the existence of a periodic solution of the system (1) in the special case that $H = R^m$

Theorem 2. Let the following conditions hold.

1. Conditions (A), (F), and (G) are met.
2. Assumptions of Lemma 2 are met.

Then equation (2) has a T -periodic solution $x \in PW_{pq}(0, T) \cap PC([0, T], H)$.

Proof. Let $t, s \in (0, T]$ be such that $s \leq t \leq T$ and $y \in H$ and $x(t; s, y)$ be

the solution equation (3) for which $x(s^+; s, y) = y$ (i.e., the initial condition is $x(s^+) = y$). We define the operator $U(t, s) : H \rightarrow H$ by the formula $U(t, s)y = x(t; s, y)$. It follows from Lemma 1 that the operator $U(t, s)$ is defined uniquely for each $y \in H$. Let $x(t) \equiv x(t; 0, y)$ be the solution of (3) corresponding to the initial condition $x(0) = y \in R^m$. Let $t > 0$ a positive real number and let $D = clB(0, r)$ ($clB(0, r) \equiv$ closure of the ball in R^m centered at the origin and of radius r) which is a compact subset of R^m . Define an operator $U = U(T, 0) : D \rightarrow R^m$ as follows:

$$U(y) = x(T; 0, y).$$

By Lemma 1, the solution of (2) is unique and hence the operator U is well defined and continuous. It follows from Lemma 2 that the operator $U : D \rightarrow D$. Hence Lemma 3 implies that there is a point $x_0 \in D$ such that

$$U(T, 0)(x_0) = x_0 \text{ or } x(T; 0, x_0) = x_0.$$

Hence $x(0) = x_0 = x(T)$ and, by Theorem 1, the system (2) has a periodic solution.

4 Control of impulsive periodic systems

In this section, we study the existence of admissible control pairs. We model the control space by a separable reflexive Banach space E . By $P_f(E)$ ($P_{fc}(E)$), we denote a class of nonempty closed (closed and convex) subsets of E . Recall that (see for example [4]) a multifunction $\Gamma : I \rightarrow P_f(E)$ is said to be graph measurable if

$$Gr(U) = \{(t, v) \in I \times E : v \in U(t)\} \in B(I) \times B(E),$$

where $B(I)$ and $B(E)$ are the Borel σ -fields of I and E respectively. For $2 \leq q < +\infty$, we define the admissible space U_{ad} to be the set of all $L_q(I, E)$ -selections of $\Gamma(\cdot)$, i.e.,

$$U_{ad} = \{u \in L_q(I, E) : u(t) \in \Gamma(t)\mu - \text{a.e. on } I\},$$

where μ is the Lebesgue on I . Note that the admissible space $U_{ad} \neq \emptyset$ if $\Gamma : I \rightarrow P_f(E)$ is graph measurable and the map

$$t \rightarrow |\Gamma(t)| := \sup\{\|v\|_E : v \in \Gamma(t)\} \in L_q(I).$$

The control problem (P) under consideration is the following:

$$\dot{x}(t) + A(t, x(t)) = g(t, x(t)) + B(t)u(t), \quad t \neq t_i, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11a)$$

$$x(t_i^+) - x(t_i) = F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11b)$$

$$x(0) = x(T), \quad (11c)$$

Here we require the operators A , g , and F_i 's of equation (11) to satisfy hypotheses (A),(G), and (F), respectively, as in section 2. We now give new hypotheses for the remaining data.

(U) $U : I \rightarrow P_{fc}(E)$ is a measurable multifunction such that the map

$$t \rightarrow |U(t)| = \sup\{\|u\|_E : u \in U(t)\}$$

belong to $L_q(I)$.

(B) $B \in L_\infty(I, L(E, H))$ where by $L(E, H)$ we denote the space of all bounded, linear operators from V into H .

By using the same notation as in Eq (3), we can rewrite the control system (11a)-(11c) into an equivalent operator equation as follows:

$$\dot{x} + A(x) = G(x) + B(u), \quad 0 < t < T, \quad (12a)$$

$$x(0) = x_0 \in H, \quad (12b)$$

$$\Delta x(t_i) = F_i(x(t_i)), \quad (12c)$$

where $i = 1, 2, \dots, n$ ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$) and the operators A, G and F_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are the same as in Eqn. (4). We set $B(u)(t) = B(t)u(t)$.

This relation defines an operator $B : L_q(I, E) \rightarrow L_q(I, H)$ which is linear and continuous.

It follows immediately from hypothesis (U) that the admissible space $U_{ad} \neq \emptyset$ and U_{ad} is a bounded closed convex subset of $L_q(I, E)$. Any solution x of Eqs (12a)-(12c) is referred to as a state trajectory of the evolution system corresponding to $u \in U_{ad}$ and the pair (x, u) is called an admissible pair. Let

$$A_{ad} = \{(x, u) \in PW_{pq}(I) \times U_{ad} : (x, u) \text{ is an admissible pair}\},$$

$$X_{ad} = \{x \in PW_{pq}(I) : \exists u \in U_{ad} \text{ such that } (x, u) \in A_{ad}\}.$$

Theorem 3. Assume that the hypotheses (A),(G),(B), and (U) hold. Then the admissible set $A_{ad} \neq \emptyset$ and X_{ad} is bounded in $PW_{pq}(I) \cap PC(I, H)$

Proof. Let $u \in U_{ad}$, define

$$g_u(t, x) = g(t, x) + B(t)u(t).$$

Since $B \in L_\infty(I, L(E, H))$ then one can see that $g_u : I \times H \rightarrow V^*$ satisfies hypothesis (G). Hence, by virtue of Theorem B, Eqn(12) has a solution.

Next, we shall show that X_{ad} is bounded in $PW_{pq}(I)$ by considering each case separately. Let $x \in X_{ad}$.

Case 1: $t \in (0, t_1)$. By Lemma 2, $\|x\|$ is bounded in $W_{pq}(0, t_1)$. Hence,

$$\|x\|_{W_{pq}(0, t_1)} \leq M_1 \text{ and } \|x\|_{C([0, t_1], H)} \leq M_1.$$

Case 2: $t \in (t_1, t_2)$. Since $\|x(0)\|_H$ and $\|x(t_1)\|_H \leq M_1$, then, by hypothesis (F), we have

$$\begin{aligned} \|x(t_1^+)\|_H &\leq \|x(t_1)\|_H + \|F(x(t_1))\|_H \\ &\leq M_1[1 + 2L_1(M_1)] + \|F(x(0))\|_H, \end{aligned}$$

where $L(M_1)$ is real constant depending on M_1 . Hence, $\|x(t_1^+)\|_H$ is bounded. Using Lemma 2 again, we have

$$\|x\|_{W_{pq}(0, t_2)} \leq M_2 \text{ and } \|x\|_{C([t_1, t_2], H)} \leq M_2.$$

After a finite step, there exists $M > 0$ such that

$$\|x\|_{W_{pq}(0, T)} \leq M \text{ and } \|x\|_{C(\bar{I}, H)} \leq M$$

Hence, X_{ad} is bounded in $PW_{pq}(0, T) \cap PC(\bar{I}, H)$.

References

- [1] Ahmed, N.U., and K.L. Teo, Optimal Control of Distributed Parameter Systems, North-Holland, New York, 1981.
- [2] Gilbert, D., and N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [3] Hinpang, X.L. Xiang, and P. Sattayatham, Impulsive Periodic Control System with Parameter Perturbation, Thai Journal of Mathematics, Vol. 4, No. 1(2007), pp.1-18.
- [4] Hu, S., and N.S. Papageorgiou, Handbook of Multivalued Analysis, Vol. 1, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 1997.
- [5] Sattayatham, P., Strongly Nonlinear Impulsive Evolution Equations and Optimal Control, Nonlinear Analysis, Vol. 57(2004), pp.1005-1020.
- [6] Yang, T., Impulsive Control Theory, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [7] Zeidler, E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications II, Springer-Verlag, New York, 1990.

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติผู้วิจัย

นาวาอากาศโท ดร.สรารุฒิ สุจิตจร เป็นศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนัก
วิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีจากโรงเรียนนายเรือ
อากาศ และปริญญาเอกจาก University of Birmingham ประเทศอังกฤษ ดำเนินงานวิจัยด้าน
Modelling, Identification, Control, Applied AI และ Signal Processing นอกจากนั้นยังมีความชำนาญ
ด้านเครื่องสายไทยและการฝึกสุนัข มีผลงานวิจัยตีพิมพ์ระดับชาติและนานาชาติมากกว่า 90 เรื่อง
ตำรา 2 เล่ม CAI 2 ชุด จดสิทธิบัตรการประดิษฐ์ 12 ผลงาน และลิขสิทธิ์โปรแกรม 4 ผลงาน



Pairote SATTAYATHAM
Professor in Mathematics,

School of Mathematics,
Suranaree University of Technology
Nakhon-Ratchasima 30000, Thailand.
Email: pairote@sut.ac.th
Tel./Fax: 044- 2243315
Mobile: 0895849868.

RESEARCH INTEREST

Currently, I am interested in quantitative risk management and application of stochastic filtering in finance.

Date of Birth: 12 April 1951, Chachoengsao Province, Thailand.

Education: Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University 1986.

Ph.D. DISSERTATION SUPERVISED

1. Ms. Tidarat Plienpanich, Mathematical finance (in progress).
2. Mr. Arthit Intarasit, Mathematical finance (in progress).
3. Ms. Pornpip Pongchalee, Relaxed control for a class of semilinear impulsive evolution equations 2007.
4. Ms. Sujutra Hinpang , Infinite dimensional periodic systems with impulses 2007.
5. Ms. Rattikarn Saelim, On Some Fractional Stochastic Model in Finance, 2004.
6. Mr. Anusorn Chonweerayuth, A class of semilinear evolution equations and optimal control, 2002.
7. Mr. Kiat Sangaroon, Existence of solutions for a class of semilinear integrodifferential equations of parabolic type with delay and optimal control, 2002.
8. Ms. Wei Wei, Periodic optimal control of systems governed by nonlinear evolution equations in Banach spaces, 2000.

MASTER THESIS SUPERVISED

1. Mr. Arthit Intrasit, Option Pricing Models Driven by a Fractional Levy Process, 2005.
2. Ms. Rattikarn Saelim, Exponential Stability and Stabilization of nonlinear Dynamic Systems, 2000.
3. Mr. Mangorm Suksan, Boundary Behaviour of Green's functions, 1988.

4. Ms. Pensri Saechan, Functions That Preserve Harmonicity in the Euclidean Space, 1988.
5. Mr. Kiat Sangaroon, Super Harmonic Functions in Banach Lattices, 1988.

COURSES TAUGHT

1. Risk Management (Ph.D)
2. Stochastic Calculus (PhD)
3. Discrete time finance (PhD)
4. Probability and random process (PhD)
5. Probability and statistics (B.Eng.)
7. Continuous time finance (Ph.D)
9. Advanced Partial Differential Equation (PhD)
10. Topic in Optimal control Theory (PhD)
11. Nonlinear Functional Analysis (PhD)
12. Partial Differential Equation for Finance (PhD)

BOOK WRITTEN (in Thai)

1. Partial Differential equation with application in finance (in progress).
2. Probability and Statistics. (in progress).
3. Introduction to Partial Differential Equations. Chulalongkorn University Press, 1998, 522 pages.
4. Advanced Calculus, Prakay Pruk Press, Bangkok, 1989, 217 pages.
5. Functions of Complex Variables, Department of mathematics, Thammasat University, 1987, 290 pages.
6. Introduction to Differential Topology, Srinakharinwirot University Press, 1984, 150 pages.

REFEREED JOURNAL PAPERS (in mathematics of finance)

1. A. Intrasit, **P. Sattayatham**, A Fractional Approach to Forecast Risk (to appear)
2. T.H. Thao, **P. Sattayatham**, and T. Plienpanich, On the Fractional Stochastic Filtering (to appear)
3. T. Plienpanich, T.H. Thao, **P. Sattayatham**, Nonlinear Filtering from Counting Process observation. (Accepted to published in the Pacific journal of Pure and Applied Mathematics 2007)
4. Rattikarn Saelim, T.H. Thao, **P. Sattayatham**, On the absence of arbitrage opportunity for the fractional Black-Scholes model (Accepted to publish in Journal STUDIA BARBES- BOLYAI, Series Mathematics, 2007.)

5. **P. Sattayatham**, A. Intrasit, and A.P. Chaisena, A Fractional Black-Scholes Model with Jumps. Vietnam Journal of Mathematics, 35: 3(2007), 1-15.

REFEREED JOURNAL PAPERS (in mathematics)

1. **P. Sattayatham**. Control of periodic impulsive system. To appear (2007).
2. **P. Sattayatham**, Relaxed control for a class of semilinear impulsive evolution equations. (Accepted to published in the Pacific Journal of Pure and Applied Mathematics 2007)
3. P. Pongchalee, **P. Sattayatham**, and X. Xiang, Relaxation of nonlinear impulsive controlled systems on Banach space. (Article in press in Nonlinear Analysis 2007.)
4. S. Hinpang, X. Xiang, **P. Sattayatham**, Impulsive control system with parameter perturbation, Thai Journal of mathematics, Vol. (4), No.1, pp. 1-18, 2006.
5. **P. Sattayatham**, Relaxed control for a class of strongly nonlinear impulsive evolution equations. Computers and Mathematics with Applications, volume 52, issue 5, pages 779-790, 2006.
6. K. Kerdprasop, N. Kerdprasop, and **P. Sattayatham**, A Monte Carlo method to data stream analysis, Transaction on engineering, computing and technology, pp. 240-245, 2006.
7. K. Kerdprasop, N. Kerdprasop, and **P. Sattayatham**, Weighted K-means for density-biased clustering, DaWaK 2005, pp.488-497, 2005.
8. **P. Sattayatham**, Strongly Nonlinear Impulsive Evolution Equations and Optimal Control. Journal of Nonlinear Analysis 57, pp 1005-1020, 2004.
9. X. Xiang, **P. Sattayatham**, and Wei Wei, Relaxed Optimal Controls of a Class of strongly nonlinear delay evolution equations, Journal of Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, Vol.52, No.3, 2003, pp.703-723.
10. **P. Sattayatham**, R. Saelim, and S. Sujitjorn, Stability and Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems. ASEAN Journal on Science and Technology for Development Vol. 20, Issue 1, pp 61-70, 2003.
11. **P. Sattayatham**, S. Tangmanee and Wei Wei. On periodic solutions of nonlinear evolution equations in Banach spaces, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.276, No.1, 2002, pp. 98-108.
12. Wei Wei and **P. Sattayatham**. On Existence of Optimal Control Governed by a Class of Periodic Nonlinear Evolution Systems on Banach spaces, Acta Analysis Functionals Applicata, Vol.4, No.2, 2002, pp. 124-136.

13. Wei Wei and **P. Sattayatham** Anti-periodic solutions for a class of strongly nonlinear evolution equations in Banach spaces. *Guizhou Science Journal*, Vol.20, No.1, 2002, pp. 19-35.
14. **P. Sattayatham**. Generalized Discrete Tension Splines, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, Vol.3 (2000), No. 2-3, pp.163-172.
15. **P. Sattayatham** and Kuang Huawu. Relaxation and Optimal Controls for a class of Infinite Dimensional Nonlinear Evolution Systems, *Journal of Guizhou University*, P.R.China, Vol.16, No. 4 (1999), pp.242-250.
16. **P. Sattayatham**. and Wei Wei. Use of cubic splines and the second central finite differences in numerical solution of PDEs. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, Vol.2 (1999), pp. 193-204.
17. Y. Grigoriev, S.V. Meleshko, and **P. Sattayatham**. Classification of invariant solutions of the Boltzmann equation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, Vol 32, No.28, 1999, pp. 337-342.
18. **P. Sattayatham**. A convergence to infinity in Banach lattices. *Thailand Journal of Mathematics*, Vol 1, No. 1 (1999), pp. 15-23.
19. B.I. Kvasov and **P. Sattayatham**. GB-splines of Arbitrary Order. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 104 (1999) 63-88.
20. E.B. Manoukian and **P. Sattayatham**. Particle correlation in quantum field theory II. *Fortschr. Phys.* (1998) 2, 189-200.
21. B.I. Kvasov and **P. Sattayatham**. Generalized Tension B-splines. *Proceedings of Chamonix 1996*, Vanderbilt University Press USA, 1997, pp. 247-254.
22. **P. Sattayatham**. Introduction to the Subject of Wavelets and PDEs, *Proceedings of Annual Meeting in Mathematics*, Khon Kaen University Press, Vol.1, 1-36 (1995).
23. **P. Sattayatham**. Semi-continuous functions in Banach Lattices. *J. of Physical Science*, USM, Malaysia, Vol.5, 103-116 (1994).
24. **P. Sattayatham**. On the functions that preserve harmonicity in the euclidean space. *SEA Bull. Math.*, Vol. 17, No.1, 45-50 (1993)
25. **P. Sattayatham**. The hyperplane mean of a non-negative subharmonic function. *Science and Technology Journal*, Thammasat University, Vol. 2, No.1, 1-7 (1993)
26. **P. Sattayatham**. Some properties of solutions to semilinear heat equations. *Proceeding of the Mathematical Research*, Chiangmai Univ., Vol. 2, 26-28 (1992).

ADMINISTRATIVE EXPERIENCES

1. President of the center for promotion of mathematics in Thailand, 1998-1999.
 2. Chair of school of Mathematics, Suranaree University of Technology, 1993-1996.
 3. Associate to the Dean of Faculty of Science, Thammasat University, 1990-1991.
-