การพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้แสดงภาพการแพร่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า
ในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ

นายวรากรณ์ ศาริยา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม
สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ปีการศึกษา 2548

การพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ

นายวรากรณ์ สาริขา

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม
สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ปีการศึกษา 2546

ใบรับรองโครงงานวิศวกรรมโทรคมนาคม

สาขาวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หัวข้อโครงงาน การพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ

นักศึกษา นายวรากรณ์ สาริขา รหัส B4205920

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

พ.ศ. 2546

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน อ.ดร.รังสรรค์ วงศ์สรรค์

กรรมการสอบ	ลงนาม
อ.ดร.รังสรรค์ ทองทา	
อ.ดร.รังสรรค์ วงศ์สรรค์	
อ.ปิยาภรณ์ กระฉอดนอก	

วันที่ 20 กันยายน 2546 เวลา 15.00 – 17.00 น

สถานที่ ห้องปฏิบัติการโทรคมนาคม

หัวข้อโครงงาน	การพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ
นักศึกษา	นายวรากรณ์ สาริขา รหัส B4205920
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
พ.ศ.	2546
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	อ.ดร.รังสรรค์ วงศ์สรรค์

บทคัดย่อ

โครงงานฉบับนี้ ได้นำเสนอวิธีการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆท่อนำคลื่นทั้งหมด 5 ชนิด ได้แก่ ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบแกนร่วม (Coaxial Cylinder Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Sectoral Cylindrical Waveguide) และท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม (Concentric Sectoral Cylindrical Waveguide) โดยแสดงลักษณะการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแบบของรูปภาพ เพื่อให้สามารถพิจารณาและสังเกตแนวโน้มการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดได้อย่างชัดเจน โดย เริ่มจากการศึกษาสมการของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด จากนั้นใช้โปรแกรมเพื่อการคำนวณเชิงตัวเลขและการสร้างภาพสมรรถนะสูง (MATLAB) พัฒนาโปรแกรมโดยใช้สมการของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดแสดงผลการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดเป็นรูปภาพ ซึ่งสามรถตรวจความถูกต้องของผลการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ได้จากงานวิจัยที่มีผู้กระทำมาก่อนแล้วสำหรับท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมและแบบวงกลม และใช้วิธีการที่ถูกต้องนั้นแสดงผลการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแบบอื่นต่อไป ซึ่งวิธีการแสดงการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ ที่ได้นำเสนอไว้ในโครงงานฉบับนี้จะเป็รการแสดงการแผ่กระจายของสนามไฟฟ้าของโหมด TE และ การแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กของโหมด TM เท่านั้น ส่วนการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กของโหมด TE และการแผ่กระจายของสนามไฟฟ้าของโหมด TM นั้นสามรถใช้สมการที่นำเสนอไว้ในโครงงานฉบับนี้มาพัฒนาโปรแกรมเพื่อแสดงผลในส่วนที่เหลือได้ ซึ่งจะต้องศึกษาเพิ่มเติมในอนาคตต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำโครงงานการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ สามารถเสร็จสมบูรณ์ได้เนื่องด้วยความกรุณาของบุคคลหลายท่านที่ความช่วยเหลือและปรึกษา รวมทั้งข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่อโครงงาน ทางผู้จัดทำใคร่ขอแสดงความขอบพระคุณเป็นอย่างยิ่งต่อผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่าน ซึ่งประกอบด้วย

- ท่านอาจารย์ ดร. รังสรรค์ วงศ์สรรค์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความช่วยเหลือทุกๆ ด้านที่เกิดประโยชน์ต่อโครงงานทั้งในด้านวิชาการและการดูแลเอาใจใส่เพื่อให้โครงงานสำเร็จไปได้ด้วยดี
- ท่านอาจารย์ ดร.รังสรรค์ ทองทา และท่านอาจารย์ ปิยาภรณ์ กระฉอดนอก ได้สละเวลาอันมีค่ายิ่งมาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน
- นายเจษฎาพงษ์ โรจนศิริพงษ์ ได้ให้ความอนุเคราะห์คอมพิวเตอร์ Note Book เพื่อใช้ในการดำเนินโครงงานในช่วงที่ต้องเดินทาง
- เพื่อนๆ วิศวกรรมโทรคมนาคมทุกคนสำหรับความช่วยเหลือที่ดีทุกด้านตลอดจนกำลังใจที่มอบให้คณะผู้จัดทำตลอดมา โดยเฉพาะนางสาวทิพนภา ทรัพย์ทวี นายเด่น กากแก้ว นายธนานนท์ ฟักจีน และนายณรงค์ฤทธิ์ กวางแก้ว ที่ให้ความช่วยเหลือเกี่ยวกับเอกสารในช่วงนำเสนอโครงงาน

ท้ายสุดนี้ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาของผู้จัดทำผู้ให้โอกาสทางการศึกษาและคอยสนับสนุนรวมทั้งกำลังใจที่คอยมอบให้ตลอดมาอย่างหาที่เปรียบมิได้

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

บทที่1
บทนำ

1.1 กล่าวนำ

โดยปกตินั้น การใช้งานคลื่นความถี่ย่านสูงๆ เช่นความถี่ไมโครเวฟนั้น โดยเฉพาะการเชื่อมต่อระหว่างอุปกรณ์ หรือการส่งคลื่นจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งนั้น จะใช้ท่อนำคลื่น ทำหน้าที่เป็นสายนำสัญญาณ เนื่องจากจะลดปัญหาการลดทอนของสัญญาณและการสูญเสียอันเกิดจากสิ่งแวดล้อมได้ดีกว่าสายนำสัญญาณชนิดอื่น โดยที่ท่อนำคลื่นมีลักษณะที่แตกต่างกันออกไปตามลักษณะการใช้งาน

สำหรับโครงงานนี้ได้พิจารณาท่อนำคลื่นทั้งหมด 5 ชนิด ได้แก่ ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบแกนร่วม (Coaxial Cylinder Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Sectoral Cylindrical Waveguide) และท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของทรงกระบอกแกนร่วม (Concentric Sectoral Cylindrical Waveguide) โดยมุ่งเน้นที่ การสืบค้นวิธีแสดงการแผ่กระจายคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดด้วยรูปภาพโดยพัฒนาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อสามารถนำผลที่ได้จากการสืบค้นไปศึกษาและนำผลที่ได้ไปประยุกต์งานต่อไปใช้ หรือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาท่อนำคลื่นเพื่อให้มีประสิทธิ์ภาพมากขึ้นต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.2.1. เพื่อศึกษาวิธีการคำนวณหาสมการสมการซึ่งเป็นองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด ได้แก่ ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide) [1] ท่อนำคลื่นแบบแกนร่วม (Coaxial Cylinder Waveguide) [2] ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Sectoral Cylindrical Waveguide) [7] และท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม (Concentric Sectoral Cylindrical Waveguide) [5]

1.2.2. เพื่อศึกษาลักษณะของการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดโดยแสดงเป็นรูปภาพ

1.2.3. เพื่อศึกษาและพัฒนาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อให้แสดงผลของการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

สำหรับโครงงานฉบับนี้ได้นำเสนอการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด โดยแสดงลักษณะการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในเชิงรูปภาพ เพื่อให้สามารถพิจารณาและสังเกตแนวโน้มการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดได้อย่างชัดเจน โดยเริ่มจาก

1.3.1 ศึกษาสมการแม่เหล็กไฟฟ้าพื้นฐานของท่อนำคลื่นแต่ชนิด รวมไปถึงที่มาของตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับสมการนั้น

1.3.2 ศึกษาโปรแกรม Matlab ใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อแสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

1.3.3 แสดงการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ในลักษณะของรูปภาพ โดยใช้โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาเอง

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินโครงงาน

1.4.1 ศึกษาสมการแม่เหล็กไฟฟ้าพื้นฐานของท่อนำคลื่นแต่ชนิด โดยพิจาณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นของโหมดนั้นๆ อย่างละเอียด

1.4.2 เลือกใช้โปรแกรมเพื่อการคำนวณเชิงตัวเลขและโปรแกรมเพื่อใช้ในการสร้างภาพสมรรถนะสูงเวอร์ชัน 6.1 (Matlab 6.1) เพื่อใช้ในการแสดงผลการกระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นรูปภาพ

1.4.3 พัฒนาโปรแกรมโดยใช้ร่วมกับสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิดเพื่อแสดงผลการกระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นรูปภาพ

1.4.4 สรุปผลที่ได้จากการศึกษาการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงาน

1.5.1 พัฒนากระบวนการคิด และการวิเคราะห์อย่างเป็นระบบเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและแม่นยำที่สุด

1.5.2 ทักษะทางด้านการคำนวณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

1.5.3 พัฒนาทักษะในการประยุกต์ใช้โปรแกรม Matlab เพื่อนำมาคำนวณหาผลเฉลยทางด้านสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

1.5.4 ผลที่ได้จากการสืบค้นการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในโครงงานฉบับนี้จะเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์และการประยุกต์ใช้งานเกี่ยวกับท่อนำคลื่นต่อไป

บทที่ 2
สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ

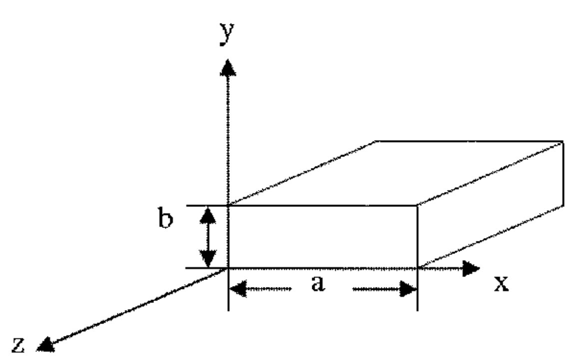
2.1 บทนำ

ในการพิจารณาลักษณะการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ นั้น สิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือจะต้องทราบสมการขององค์ประกอบของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าในแต่ละองค์ประกอบซึ่งเกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด ในบทนี้จะเป็นการแสดงวิธีการคำนวณเพื่อหาองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นโดยเริ่มต้นศึกษาจากการคำนวณหาองค์ประกอบของสนามทั้งสองภายในท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide) ท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide) [1] ท่อนำคลื่นแบบแกนร่วม (Coaxial Waveguide) [2] ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Sectoral Cylindrical Waveguide) [7] และท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลมแกนร่วม (Concentric Sectoral Cylindriccal Waveguide) [5] เพื่อที่จะได้นำสมการที่ได้ไปพัฒนาเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อศึกษาลักษณะการแผ่กระจายของสนามในรูปแบบของรูปภาพต่อไป

2.2 ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide)

ในการศึกษาสมการพื้นฐานของคลื่นที่แผ่กระจายภายในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมนั้น เราสามารถพิจารณาได้ทั้ง การแผ่กระจายสนามไฟฟ้าในแนวขวางหรือ TE Mode (Transverse Electric Mode) และการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กในแนวขวางหรือ TM Mode (Transverse Magnetic Mode) ในที่นี้กำหนดให้คลื่นเดินทางในทิศทาง +z โดยมีขนาดของท่อนำคลื่นในทิศทาง +x เท่ากับ a และขนาดของท่อนำคลื่นในทิศทาง +y เท่ากับ b โดยที่ $a > b$ (กำหนดให้ $a = 2b$) ดังรูปที่ 2.1โดยการกำหนดพารามิเตอร์พื้นฐานที่ใช้ร่วมกันทั้ง 2 โหมดดังนี้

- สภาพยอมทางไฟฟ้าของอากาศภายในท่อนำคลื่น (ε_r , Permittivity of relative) เท่ากับ 1
- สภาพยอมทางแม่เหล็กของอากาศภายในท่อนำคลื่น (μ_r , Permeability of relative) เท่ากับ 1



รูปที่ 2.1 ท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมบนพิกัดฉาก

2.2.1 TE Modes

TE Modes หรือ Transverse Electric Modes เป็นโหมดที่มีเฉพาะคลื่นไฟฟ้าขวางทิศการเดินทาง (+z) จะไม่เกิดสนามไฟฟ้าในทิศการเดินทาง (+z) ดังนั้นจึงมีเฉพาะสนามแม่เหล็กเท่านั้น นั่นคือ $E_z = 0$ แต่ $H_z \neq 0$ ดังนั้นเราต้องหาสมการของ H_z ออกมาก่อน เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการหาสนามในองค์ประกอบอื่นต่อไป

เมื่อพิจารณาจากสมการของเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz wave equation)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_c^2\right)H_z = 0 \tag{2.1}$$

โดยที่ $H_z(x,y,z) = h_z\left(x,y\right)e^{-j\beta z}$ ทำให้สามารถลดรูปสมการ (2.1) ให้ เหลือเพียง 2 มิติ คือ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_c^2\right)h_z\left(x,y\right) = 0 \tag{2.2}$$

และ $k_c^2 = k^2 + \beta^2$ ซึ่ง k_c คือ ตัวเลขคลื่นตัด(Cutoff Wavenumber)

k คือ ตัวเลขคลื่น(Wavenumber)

β คือ ค่าคงที่การแผ่กระจายคลื่น(Propagation constant)

จากสมการ (2.1) สามารถใช้วิธีการแยกตัวแปร (Variable Separation method) จะได้ว่า

$$h_z\left(x,y\right) \quad = \quad X\left(x\right)Y\left(y\right) \tag{2.2}$$

และเมื่อแทนลงไปในสมการที่ (2.1) จะได้ว่า

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+k_c^2 \quad = \quad 0 \tag{2.3}$$

เนื่องจากการใช้วิธีการแยกตัวแปรของแต่ละองค์ประกอบในสมการที่ (2.3) จะได้เป็นค่าคงที่ นั่นคือ กำหนดให้ค่าคงที่ดังกล่าวมีค่าเป็น k_x และ k_y จะได้

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X \quad = \quad 0\,, \tag{2.4a}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y \quad = \quad 0 \tag{2.4b}$$

โดยที่

$$k_x^2 + k_y^2 \quad = \quad k_c^2 \tag{2.5}$$

และสามารถแก้สมการหาค่า h_z ได้นั่นคือ

$$h_z\left(x,y\right) \quad = \quad \left(A\cos k_x x + B\sin k_x x\right)\left(C\cos k_y y + D\sin k_y y\right) \tag{2.6}$$

ในการหาค่า คงที่ A, B, C, และ D ในสมการที่ (2.6) ต้องใช้เงื่อนไขขอบเขตของสนามไฟฟ้าบริเวณแนวสัมผัสท่อนำคลื่นมาช่วยในการพิจารณา นั่นคือ

$$e_x\left(x,y\right) \quad = \quad 0, \qquad \text{ที่} \;\; y = 0, b \tag{2.7a}$$

$$e_y\left(x,y\right) \quad = \quad 0, \qquad \text{ที่} \;\; x = 0, a \tag{2.7b}$$

ด้วยเหตุนี้เราจึงมาสามารถใช้ h_z ในสมการที่ (2.6) มาคิดตรงๆได้ แต่จะต้องใช้เงื่อนในการหาสนามในองค์ประกอบอื่นๆ มาช่วยในการหา e_xและ e_y ก่อน ด้วยสมการที่ (2.8c) และ (2.8d) จากข้างล่างนี้

$$H_x = \frac{-j\beta\partial H_z}{k_c^2\partial x} \tag{2.8a}$$

$$H_y = \frac{-j\beta\partial H_z}{k_c^2\partial y} \tag{2.8b}$$

$$E_x = \frac{-j\omega\mu\partial H_z}{k_c^2\partial y} \tag{2.8c}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu\partial H_z}{k_c^2\partial x} \tag{2.8d}$$

จะเห็นได้ว่าการหาสนามในองค์ประกอบต่างๆ จากสมการ (2.8a) - (2.8d) นั้นต้องอาศัย H_z ทั้งนั้น และในทางกลับกันเราก็สามารถใช้เงื่อนไขเดียวกันในการหา e_xและ e_y จากสมการที่ (2.8c) และ (2.8d) จะได้ว่า

$$e_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_y \left(A\cos k_x x + B\sin k_x x\right)\left(-C\sin k_y y + D\cos k_y y\right) \quad (2.9a)$$

$$e_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_x \left(-A\sin k_x x + B\cos k_x x\right)\left(C\cos k_y y + D\sin k_y y\right) \quad (2.9b)$$

จากนั้นเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.7a) แก้สมการร่วมกับสมการที่ (2.9a) ข้างต้น จะได้ว่า

D = 0, และ $k_y = \frac{n\pi}{b}$, โดยที่ n คือเลขโหมด มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3…

และจากเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.7b) แก้สมการร่วมกับสมการที่ (2.9b) ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

B = 0, และ $k_x = \frac{m\pi}{a}$, โดยที่ m คือเลขโหมด มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3…

สุดท้ายแล้วจะได้ H_z เป็น

$$H_z(x,y,z) = A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \quad (2.10)$$

โดยที่ A_{mn} เป็นขนาดของสนามที่เกิดจากการรวมกันของค่า A และ C จากสมการที่ (2.6)

จากนั้นจะสามารถหาสนามตามขวางของโหมด TE_{mn} โดยการแทน (10) ลงในสมการที่ (2.8a) - (2.8d) จะได้ว่า

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \quad (2.11a)$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \quad (2.11b)$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \quad (2.11c)$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \quad (2.11d)$$

โดยที่ ค่า คงที่การแผ่กระจายคลื่น (β) เป็น

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2.12)$$

ซึ่งค่า β นั้นต้องเป็นค่าจำนวนจริง ดังนั้น $k > k_c$ เสมอ จะได้ว่า

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

เนื่องจากแต่ละโหมดนั้นบ่งบอกด้วยพารามิเตอร์ m และ n ตามลำดับ นั่นคือเราสามารถหาค่าความถี่ตัด (Cutoff frequency, $f_{c_{mn}}$) ได้จาก

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad (2.13)$$

ซึ่งจะเรียก โหมดที่มีความถี่ตัดต่ำที่สุดว่าโหมดโดมิแนนท์ (Dominant mode) สำหรับโหมด TE นั้น โหมดที่เป็นโดมิแนนท์ คือ โหมด TE_{10} (m = 1 และ n = 0) ซึ่งค่าความถี่ตัดของโหมด TE_{10} สามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$f_{c_{10}} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (2.3a)$$

ส่วนของพารามิเตอร์ต่างๆที่ยังไม่ได้กล่าวไว้ในข้างต้นสามารถหาได้ด้วยสมการที่ซับซ้อน ซึ่งจะแสดงไว้ในตารางสรุปสมการในตอนท้ายของบทนี้อีกครั้งหนึ่ง

2.2.2 TM Modes

TM Modes หรือ Transverse Magnetic Modes เป็นโหมดที่มีเฉพาะคลื่นแม่เหล็กอยู่ในแนวขวางกับทิศการเดินทางของคลื่น (+z) ซึ่งจะไม่เกิดสนามแม่เหล็กในทิศการเดินทาง (+z) และจะเกิดขึ้นเฉพาะสนามแม่ไฟฟ้าเท่านั้นนั่นคือ $H_z = 0$ แต่ $E_z \neq 0$ ดังนั้นเราต้องหาสมการของ E_z ออกมาก่อน เพื่อใช้เป็นจุดเริ่มต้นในการหาสนามในองค์ประกอบอื่นต่อไป

พิจารณาในลักษณะเดียวกับ โหมด TE โดยใช้สมการของเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz wave equation) จะเปลี่ยนเป็น

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2\right) E_z = 0 \qquad (2.14)$$

โดยที่ $E_z(x,y,z) = e_z(x,y)e^{-j\beta z}$ ทำให้สามารถลดรูปสมการ (2.1) ให้ เหลือเพียง 2 มิติ คือ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) e_z(x,y) = 0 \qquad (2.15)$$

จาก สมการที่ (2.15) สามารถใช้วิธีการแยกตัวแปรซึ่งจะได้สมการในลักษณะเดียวกับโหมด TE ทุกประการ จากนั้นพิจารณาในลักษณะเดียว จะได้ว่า

$$e_z(x,y) = (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y) \tag{2.16}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตที่นำมาช่วยพิจารณาจะเปลี่ยนเป็น

$$e_z(x,y) = 0, \qquad at\ x = 0, a \tag{2.17a}$$

$$e_z(x,y) = 0, \qquad at\ y = 0, b \tag{2.17b}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตจะเห็นได้ว่า e_z เป็นฟังชั่นของ e_x และ e_y โดยตรง นั่นคือจะได้ว่า

$$e_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_y (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(-C\sin k_y y + D\cos k_y y) \tag{2.18a}$$

$$e_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_x (-A\sin k_x x + B\cos k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y) \tag{2.18b}$$

จากนั้นเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (2.17a) จะนำมาใช้แก้สมการร่วมกับสมการที่ (2.16) ข้างต้น จะได้ว่า

A = 0, และ $k_x = \dfrac{m\pi}{a}$, โดยที่ m คือเลขโหมด มีค่าเป็น 1, 2, 3…

และจากเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (17b) แก้สมการร่วมกับสมการที่ (2.16) ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

C = 0, และ $k_y = \dfrac{n\pi}{b}$, โดยที่ n คือเลขโหมด มีค่าเป็น 1, 2, 3…

สุดท้ายแล้วเราจะได้ E_z เป็น

$$E_z(x,y,z) = B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z} \tag{2.19}$$

โดยที่ B_{mn} เป็นขนาดของสนามที่เกิดจากการรวมกันของค่า B และ D จากสมการที่ (2.6) เราสามารถหาสนามตามขวางของโหมด TM_{mn} ในทิศทางอื่นๆ โดยการแทน (2.19) ลงในสมการที่ (2.20a) - (2.20d)

$$H_x = \frac{-j\omega\varepsilon\partial E_z}{k_c^2\partial y} \tag{2.20a}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon\partial E_z}{k_c^2\partial x} \tag{2.20b}$$

$$E_x = \frac{-j\beta\partial E_z}{k_c^2\partial x} \tag{2.20c}$$

$$E_y = \frac{-j\beta\partial E_z}{k_c^2\partial y} \tag{2.20d}$$

จะได้ว่า

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{ak_c^2} B_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \tag{2.21a}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{bk_c^2} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \tag{2.21b}$$

$$H_x = \frac{-j\omega\varepsilon n\pi}{bk_c^2} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \tag{2.21c}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon m\pi}{ak_c^2} B_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z} \tag{2.21d}$$

โดยที่โหมดโดมิแนนท์ ของโหมด TM_{mn} ได้แก่โหมด TM_{11}

ตารางที่ 2.1 สรุปสมการเกี่ยวกับท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

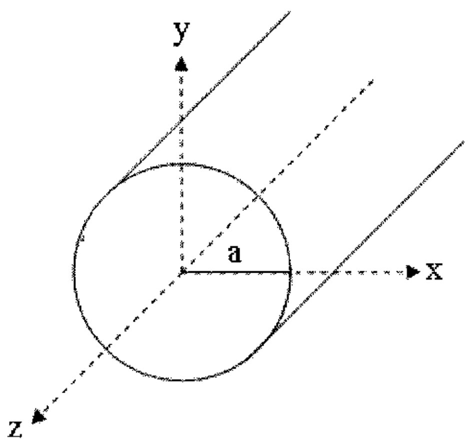
Quantity	TE_{mn} Modes	TM_{mn} Modes
k	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
k_c	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$	$\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
v_p	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
α_d	$\frac{k^2 \tan\delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan\delta}{2\beta}$
E_z	0	$B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-j\beta z}$

ตารางที่ 2.1 (ต่อ) สรุปสมการเกี่ยวกับท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

Quantity	TE_{mn} Modes	TM_{mn} Modes
H_z	$A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$	0
E_x	$\frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a}B_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$
E_y	$\frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$
H_x	$\frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 a}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\varepsilon n\pi}{k_c^2 b}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$
H_y	$\frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 b}A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\varepsilon m\pi}{k_c^2 a}B_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

2.3 ท่อนำคลื่นแบบวงกลม (Circular Waveguide)

สำหรับท่อนำคลื่นแบบวงกลมนั้นเราจะพิจารณาที่ภาคตัดขวางของท่อ โดยจะแยกพิจารณาเป็นโหมด TE และ โหมด TM เช่นเดียวกันกับท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยม ซึ่งกำหนดให้คลื่นเดินทางในทิศทาง +z และท่อมีรัศมีเท่ากับ a โดยกำหนดให้ ε_r และ μ_r มีค่าเท่ากับ 1 เช่นกัน



รูปที่2.2 ท่อนำคลื่นแบบวงกลม

ในทำนองเดียวกันกับท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม การได้มาของสนามแต่ละองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ทั้งในโหมด TE และโหมด TM นั้น ได้มาจากการพิจารณา H_z และ E_z ตามลำดับ

ในส่วนของท่อนำคลื่นวงกลมนั้น การหาสนามของแต่ละองค์ประกอบสามารถ พิจารณาได้ด้วยสมการเดียวกันทั้ง TE โหมด และ TM โหมด คือ

$$E_\rho = \frac{-j}{k_c^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + \frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right) \quad (2.22a)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2}\left(\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right) \quad (2.22b)$$

$$H_\rho = \frac{j}{k_c^2}\left(\frac{\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \beta\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right) \quad (2.22c)$$

$$H_\phi = \frac{-j}{k_c^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial\rho} + \frac{\beta}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right) \quad (2.22d)$$

โดยที่ $k_c^2 = k^2 + \beta^2$ และในส่วนของ $e^{-j\beta z}$ นั้น β จะพิจารณาเหมือนเดิม

2.3.1 TE Modes

จากข้างต้น เราสามารถเริ่มพิจารณาได้ด้วยการหา H_z มาก่อน เนื่องจาก $E_z = 0$ แต่ $H_z \neq 0$ ในกรณีที่เป็นโหมด TE โดยหาคำตอบได้จากสมการคลื่น

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (2.23)$$

เมื่อ $H_z(\rho,\phi,z) = h_z(\rho,\phi)e^{-j\beta z}$ ทำให้สามารถอธิบายสมการที่ (2.23) ในรูปของทรงกระบอกได้ว่า

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k_c^2\right)h_z(\rho,\phi) = 0 \quad (2.24)$$

จากนั้นใช้วิธีการแยกตัวแปรจะได้ว่า

$$h_z(\rho,\phi) = R(\rho)P(\phi) \quad (2.25)$$

แทนค่ากลับไปในสมการที่ (2.24) จะได้ว่า

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2 P}\frac{d^2P}{d\phi^2} + k_c^2 = 0 \tag{2.26}$$

หรือ

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + \rho^2 k_c^2 = \frac{-1}{P}\frac{d^2P}{d\phi^2} \tag{2.26a}$$

จะเห็นได้ว่าด้านซ้ายของสมการ จะขึ้นอยู่กับค่า ρ เท่านั้นไม่เกี่ยวกับค่า ϕ ส่วนด้านขวาของสมการจะขึ้นกับค่า ϕ เพียงอย่างเดียว ซึ่งแต่ละด้านจะต้องเท่ากับค่าคงที่ เราเรียกค่าคงที่นั้นว่า k_c^2 แล้วจะได้ว่า

$$\frac{-1}{P}\frac{d^2P}{d\phi^2} = k_\phi^2$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2P}{d\phi^2} + k_\phi^2 P = 0 \tag{2.27}$$

ดังนั้น

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + \left(\rho^2 k_c^2 - k_\phi^2\right)R = 0 \tag{2.28}$$

ซึ่งคำตอบทั่วไปของสมการที่ (2.27) คือ

$$P(\phi) = A\sin k_\phi\phi + B\cos k_\phi\phi \tag{2.29}$$

ผลเฉลยของ h_z ต้องเป็นคาบในเทอมของ ϕ (นั่นคือ $h_z(\rho,\phi) = h_z(\rho,\phi \pm 2m\pi)$)) และ ต้องเป็นจำนวนเต็มแทนด้วย n ดังนั้น สมการที่ (2.29) จะได้เป็น

$$P(\phi) = A\sin n\phi + B\cos n\phi \tag{2.30}$$

ทำให้ สมการที่ (2.28) กลายเป็น

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + \left(\rho^2 k_c^2 - n^2\right)R = 0 \tag{2.31}$$

ซึ่งมีความสอดคล้องกับคำตอบของ Bessel's differential equation ซึ่งให้ผลเฉลยเป็น

$$R(\rho) = CJ_n\left(k_c\rho\right) + DY_n\left(k_c\rho\right) \tag{2.32}$$

โดยที่ $J_n(x)$ คือ Bessel functions of first kind

$Y_n(x)$ คือ Bessel functions of second kind

และเนื่องจาก $Y_n(k_c\rho)$ จะมีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ เมื่อ ค่า $\rho = 0$ นั่นคือ ในเทอมนี้จะไม่มีผลต่อสมการท่อนำคลื่นวงกลม ดังนั้น จะได้ว่า ค่า D = 0 ด้วย ทำให้ผลเฉลยของ h_z สามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$h_z(\rho,\phi) = (A\sin n\phi + B\cos n\phi)J_n(k_c\rho) \tag{2.33}$$

ซึ่งค่าคงที่ C ในสมการที่ (2.32) ถูกแทนด้วยค่าคงที่ A และ B จากสมการที่ (2.33)

ต่อไปจะต้องหาค่า k_c โดยการอาศัยเงื่อนไขขอบเขตที่ $E_{\tan} = 0$ บนผนังท่อนำคลื่น เมื่อ $E_z = 0$ สมการที่ใช้คือ

$$E_\phi(\rho,\phi) = 0 \qquad at \quad \rho = a \tag{2.34}$$

ทำให้สมการ (2.22b) สามารถหา E_ϕ จาก H_z ได้เป็น

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{j\omega\mu}{k_c}(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J_n'(k_c\rho)e^{-j\beta z} \tag{2.35}$$

ซึ่งค่า $J_n'(k_c\rho)$ เป็นค่าที่แยกออกมาจาก J_n สำหรับ E_ϕ ให้ ρ = a นั่นคือจะต้องหา

$$J_n'(k_c a) = 0 \tag{2.36}$$

โดยที่กำหนดให้ p'_{nm} เป็นค่ารากของ $J_n'(x)$ นั่นคือ ถ้า $J_n'(p'_{nm}) = 0$ แล้ว ค่า p'_{nm} ก็คือรากลำดับที่ m ของ J_n' นั่นเอง ดังนั้นค่า k_c มีค่าเป็น

$$k_{c_{nm}} = \frac{p'_{nm}}{a} \tag{2.37}$$

ค่า p'_{nm} สามารถนำมาคำนวณหาคำตอบได้โดยการใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการคำนวณซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 2.2 ซึ่งสามารถนำค่า p'_{nm} มาใช้หาค่า propagation constant ของ TE (β_{nm})

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2} \tag{2.38}$$

และ ค่าความถี่ตัด ($f_{c_{nm}}$)

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.39}$$

จะเห็นได้ว่าค่าความถี่ตัดขึ้นกับค่า p'_{nm} โดยตรง นั่นคือ เมื่อพิจารณาค่า p'_{nm} ในตารางค่าที่น้อยที่สุดก็จะหมายถึงค่าความถี่ตัดที่ต่ำที่สุดด้วย หรือเรียกอีกอย่างว่าโหมดโดมิแนนท์ซึ่งสำหรับโหมดโดมิแนนท์ของ TE คือโหมด TE_{11}

จากนั้นจะสามารถหาสนามในองค์ประกอบอื่นๆได้จากสมการที่ (2.22a)- (2.22d) จะได้ว่า

$$E_\rho = \frac{-j\omega\mu n}{k_c^2\rho}\left(A\cos n\phi - B\sin n\phi\right)J_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.40a}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c}\left(A\sin n\phi + B\cos n\phi\right)J'_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.40b}$$

$$H_\rho = \frac{-j\beta}{k_c}\left(A\sin n\phi + B\cos n\phi\right)J'_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.40c}$$

$$H_\phi = \frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}\left(A\cos n\phi - B\sin n\phi\right)J_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.40d}$$

จะเห็นว่าค่าคงที่ A และ B จะควบคุมขนาดของพจน์ $\sin n\phi$ และ $\cos n\phi$ ซึ่งทั้งสองพจน์อิสระต่อกัน เพราะว่า ในแกนแนวกวาดนั้นจะสมมาตรกันทำให้ทั้ง สองพจน์ถูกต้องทั้งคู่ นั่นคือในการพิจารณาเราสามารถกำหนดให้ค่าคงที่ตัวใดตัวหนึ่งเท่ากับศูนย์ได้ เพื่อให้ง่ายในการวิเคราะห์สมการ

ดังนั้นจะ เลือกให้ B = 0 สำหรับโหมด TE_{11} และพิจารณาร่วมกับสมการที่ (2.40a) - (2.40d) จะได้ว่า

$$H_z = A\sin\phi J_1\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.41a}$$

$$E_\rho = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2\rho}A\cos\phi J_1\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.41b}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c}A\sin\phi J'_1\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.41c}$$

$$H_\rho = \frac{-j\beta}{k_c} A\sin\phi J_1'(k_c\rho)e^{-j\beta z} \tag{2.41d}$$

$$H_\phi = \frac{-j\beta}{k_c^2\rho} A\cos\phi J_1(k_c\rho)e^{-j\beta z} \tag{2.41e}$$

$$E_z = 0 \tag{2.41f}$$

ตารางที่ 2.2 แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ n สำหรับโหมด TE: $J_n'\left(p_{nm}'\right) = 0,\ p_{nm}' \neq 0$

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7
1	3.832	1.841	3.054	4.201	5.317	6.416	7.501	8.578
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282	10.520	11.735	12.932
3	10.173	8.536	9.969	11.346	12.682	13.987	15.268	16.529
4	13.324	11.706	13.170	14.586	15.964	17.313	18.637	19.942

2.3.2 TM Modes

เนื่องจากในโหมด TM นั้น $H_z = 0$ แต่ $E_z \neq 0$ ดังนั้นในการหาคำตอบเราต้องเริ่มพิจารณาจากค่า E_z เพื่อใช้ในการหาสนามในองค์ประกอบอื่นต่อไป

ขั้นตอนในการวิเคราะห์สมการดำเนินไปในลักษณะเดียวกับการวิเคราะห์สมการของโหมด TE แต่มีการเปลี่ยนพารามิเตอร์บางตัว เริ่มจาก

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k_c^2\right)e_z = 0 \tag{2.42}$$

โดยที่ $E_z(\rho,\phi,z) = e_z(\rho,\phi)e^{-j\beta z}$ และ $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ ทำให้สามารถหา e_z ได้ในลักษณะที่คล้ายกับสมการที่ (2.33) จะได้ว่า

$$e_z(\rho,\phi) = (A\sin n\phi + B\cos n\phi)J_n(k_c\rho) \tag{2.43}$$

ซึ่งเราสามารถใช้เงื่อนไขขอบเขตของ E_z ได้โดยตรงคือ

$$E_z(\rho,\phi) = 0 \qquad at \quad \rho = a \tag{2.44}$$

และพิจารณาร่วมกับ

$$J_n\left(k_c a\right) \quad = \quad 0 \tag{2.45}$$

หรือ

$$k_c \quad = \quad p_{nm}/a \tag{2.46}$$

โดยที่กำหนดให้ p_{nm} เป็นค่ารากของ $J_n(x)$ นั่นคือ เมื่อ $J_n\left(p_{nm}\right) = 0$ แล้ว ค่า p_{nm} ก็คือราก ลำดับที่ m ของ J_n นั่นเอง ซึ่งได้แสดงค่า p_{nm} บางส่วนไว้ในตารางทำให้สามารถหาค่า คงที่การแผ่กระจายคลื่น ของ TM (β_{nm}) ได้ว่า

$$\beta_{nm} \quad = \quad \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad = \quad \sqrt{k^2 - \left(p_{nm}/a\right)^2} \tag{2.47}$$

และหา ความถี่ตัด ($f_{c_{nm}}$) ได้เป็น

$$f_{c_{nm}} \quad = \quad \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad = \quad \frac{p_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.48}$$

จะเห็นว่าโหมดแรกสำหรับ โหมด TM คือ TM_{01} ด้วยค่า $p_{nm} = 2.405$ ซึ่งเมื่อเทียบกับค่า $p_{nm} = 1.841$ ของโหมด TE ซึ่งน้อยกว่าและเป็นค่าที่น้อยที่สุด ดังนั้น dominant mode สำหรับท่อนำคลื่นวงกลมคือ TE_{11}

จากนั้นสามารถหาสนามในองค์ประกอบอื่นๆ ได้จากสมการที่ (2.22a) - (2.22d) จะได้ว่า

$$E_\rho \quad = \quad \frac{-j\beta}{k_c}\left(A\sin n\phi + B\cos n\phi\right)J_n'\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.49}$$

$$E_\phi \quad = \quad \frac{-j\beta n}{k_c^2\rho}\left(A\cos n\phi - B\sin n\phi\right)J_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.50}$$

$$H_\rho \quad = \quad \frac{j\omega\varepsilon n}{k_c^2\rho}\left(A\cos n\phi - B\sin n\phi\right)J_n\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.51}$$

$$H_\phi \quad = \quad \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c}\left(A\sin n\phi + B\cos n\phi\right)J_n'\left(k_c\rho\right)e^{-j\beta z} \tag{2.52}$$

ตารางที่ 2.3 แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ n สำหรับโหมด TM: $J_n(p_{nl}) = 0,\ p_{nl} \neq 0$

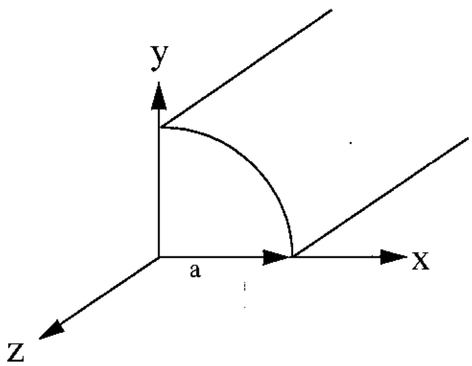
	n							
m	0	1	2	3	4	5	6	7
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771	9.936	11.086
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339	13.589	14.821
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.372	15.700	17.004	18.288
4	11.792	13.323	14.796	16.223	17.616	18.980	20.321	21.642

ตารางที่ 2.4 สมการที่เกี่ยวกับท่อนำคลื่นวงกลม

Quantity	TE_{nm} Mode	TM_{nm} Mode
k	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
k_c	$\dfrac{p'_{nm}}{a}$	$\dfrac{p_{nm}}{a}$
β	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
λ_c	$\dfrac{2\pi}{k_c}$	$\dfrac{2\pi}{k_c}$
λ_g	$\dfrac{2\pi}{\beta}$	$\dfrac{2\pi}{\beta}$
p	$\dfrac{\omega}{\beta}$	$\dfrac{\omega}{\beta}$
α_d	$\dfrac{k^2 \tan\delta}{2\beta}$	$\dfrac{k^2 \tan\delta}{2\beta}$
E_z	0	$(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_z	$(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	0
E_ρ	$\dfrac{-j\omega\mu n}{k_c^2\rho}(A\cos n\phi - B\sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\dfrac{-j\beta}{k_c}(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
E_ϕ	$\dfrac{j\omega\mu}{k_c}(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\dfrac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A\cos n\phi - B\sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_ρ	$\dfrac{-j\beta}{k_c}(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\dfrac{j\omega\varepsilon n}{k_c^2\rho}(A\cos n\phi - B\sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
H_ϕ	$\dfrac{-j\beta n}{k_c^2\rho}(A\cos n\phi - B\sin n\phi)J_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$	$\dfrac{-j\omega\varepsilon}{k_c}(A\sin n\phi + B\cos n\phi)J'_n(k_c\rho)e^{-j\beta z}$
Z	$Z_{TE} = \dfrac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \dfrac{\beta\eta}{k}$

2.4 ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Circular Sectoral Waveguide)

สำหรับท่อนำคลื่นชนิดนี้เป็นท่อนำคลื่นที่พัฒนาขึ้นมาจากท่อนำคลื่นวงกลม ซึ่งลักษณะการวิเคราะห์สมการจะดำเนินไปในลักษณะเดียวกันกับท่อนำคลื่นวงกลมเกือบทุกประการรวมไปถึงพารามิเตอร์ที่ใช้ด้วย โดยมีพารามิเตอร์บางตัวที่เพิ่มเข้ามาในสมการสนามของแต่ละองค์ประกอบ เพื่อเป็นตัวกำหนดมุมในของการพิจารณาท่อนำคลื่น และทิศทางเดินของคลื่นก็ยังคงเป็นทิศทาง +Z เหมือนเดิม โดยรัศมีของท่อนำคลื่นเท่ากับ a เช่นเดิม ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม

2.4.1 TE modes

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = A_{mn}\frac{m}{\varepsilon\rho}J_\upsilon(k_\rho\rho)\sin(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.53}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = A_{mn}\frac{k_\rho}{\varepsilon}J'_\upsilon(k_\rho\rho)\cos(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.54}$$

$$E_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{2.54}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = -A_{mn}\frac{k_\rho k_z}{\omega\mu\varepsilon}J'_\upsilon(k_\rho\rho)\cos(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.56}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = A_{mn}\frac{mk_z}{\omega\mu\varepsilon\rho}J_\upsilon(k_\rho\rho)\sin(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.57}$$

$$H_z(\rho,\phi,z) = -jA_{mn}\frac{k_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_\upsilon(k_\rho\rho)\cos(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.58}$$

2.4.2 TM modes

สมการองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลมกรณีโหมด TM ได้แก่

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = -B_{mn}\frac{mk_z}{\omega\mu\varepsilon\rho}J_\upsilon(k_\rho\rho)\cos(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.59}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = B_{mn}\frac{m}{\mu\rho}J_\upsilon(k_\rho\rho)\cos(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.60}$$

$$E_z(\rho,\phi,z) = -jB_{mn}\frac{k_\rho^2}{\omega\mu\varepsilon}J_\upsilon(k_\rho\rho)\sin(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.61}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = -B_{mn}\frac{k_\rho}{\mu}J'_\upsilon(k_\rho\rho)\sin(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.62}$$

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = -B_{mn}\frac{k_\rho k_z}{\omega\mu\varepsilon}J'_\upsilon(k_\rho\rho)\sin(m\phi)e^{-jk_z z} \tag{2.63}$$

$$H_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{2.64}$$

จะเห็นได้ว่า จากสมการของโหมด TE และโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลมจะมีความคล้ายคลึงกับสมการสนามของโหมด TE และโหมด TM ของท่อนำคลื่นวงกลม

โดยที่ A_{mn} และ B_{mn} เป็นขนาดของสนามในโหมด TE และโหมด TM ตามลำดับ และพารามิเตอร์ m และ n เป็นพารามิเตอร์ที่บ่งบอกถึงโหมดใดๆ ที่เราสนใจ ส่วนพารามิเตอร์ υ เป็นพารามิเตอร์ตัวใหม่ที่เพิ่มเข้ามาจะเป็นตัวที่กำหนดมุมของเซกเตอร์ ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (2.65)

$$\upsilon = m\pi/\phi_0 \tag{2.65}$$

โดยที่ ϕ_0 คือ มุมของเซกเตอร์ที่กำหนด

m คือ เลขโหมด สำหรับโหมด TE นั้น $m = 0,1,2,3$

สำหรับโหมดTM นั้น $m = 1,2,3,4$

ซึ่งค่า υ ดังกล่าวจะใช้เป็นลำดับของ Bessel ในการหารากของ Bessel ต่อไป ในที่นี้สามารถใช้ตารางแสดงค่า Bessel เดียวกันกับตารางที่ 2.2 และ 2.3ของโหมด TE และ โหมด TM ซึ่งได้จากการใช้โปรแกรม Mathematica มาช่วยในการคำนวณ ตามลำดับ

จากนั้นจะสามารถหาค่า k_ρ ได้จาก

$$k = \omega/\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$k_z^2 = k^2 - k_\rho^2$$

$$k_\rho = \begin{cases} \dfrac{x'_{\upsilon n}}{a}, & TE_{mn} \ \text{modes} \\ \dfrac{x_{\upsilon n}}{a}, & TM_{mn} \ \text{modes} \end{cases} \tag{2.66}$$

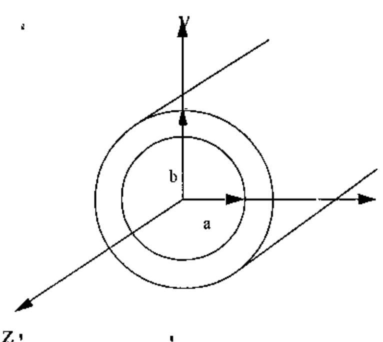
และเมื่อพิจารณาค่าความถี่ตัดจะได้

$$f_c = \begin{cases} \dfrac{x'_{\upsilon n}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}, & TE_{mn} \ \text{modes} \\ \dfrac{x_{\upsilon n}}{2\pi a\sqrt{\mu\varepsilon}}, & TM_{mn} \ \text{modes} \end{cases} \tag{2.67}$$

โดยที่ x'_{mn} และ x_{mn} เป็นรากของ Bessel Function โหมด TE และโหมด TM ตามลำดับ

2.5 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม (Coaxial Cylinders Waveguide)

สำหรับท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกนั้น ในการคำนวณสมการเพื่อไม่ให้เกิดความสับสน กับท่อนำคลื่นชนิดอื่นจึงได้มีการกำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้ในการบ่งชี้โหมดเป็น n และ l ตามลำดับ และกำหนดให้คลื่นยังคงเดินในทิศทาง +Z เช่นเดิม โดยที่รัศมีด้านในเท่ากับ a และรัศมีด้านนอกเท่ากับ b ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม

2.5.1 TM modes

สำหรับโหมด TM นั้น เริ่มวิเคราะห์สมการโดยการพิจารณาสนาม E_z ก่อนเช่นเดิมเพื่อใช้เป็นสนามเริ่มต้นในการหาสนามในองค์ประกอบอื่นต่อไป จะได้ว่า จากสมการ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2} + k_{c,TM}^2 E_z = 0 \tag{2.68}$$

ดำเนินการในลักษณะเดียวกับท่อนำคลื่นวงกลมโดยการแยกสมการ ออกเป็นแต่ละองค์ประกอบ จะได้

$$E_z(\rho,\phi) = (A'\cos n\phi + B'\sin n\phi)[C'J_n(k_{c,TM}\rho) + D'N_n(k_{c,TE}\rho)] \tag{2.69}$$

ซึ่งจากสมการถ้าพิจารณาที่ $\phi = 0$ จะเห็นได้ว่ามีเฉพาะฟังชัน sin เท่านั้นที่เป็นจริงโดยค่าคงที่ $B' = 0$ คูณกันของค่าคงที่ A' กับ C' และ A' กับ D' จะกลายเป็นค่าคงที่ C และ D ตามลำดับ จะได้ว่า

$$E_z(\rho,\phi) = [CJ_n(k_{c,TM}\rho) + DN_n(k_{c,TM}\rho)]\cos n\phi \tag{2.70}$$

จากนั้นพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตของสนาม E_z ต้องเท่ากับ 0 ณ เส้นสัมผัสท่อนำคลื่นที่รัศมีเท่ากับ a กับ b จะได้ว่า

$$E_z(a,\phi) = [CJ_n(k_{c,TM}a) + DN_N(k_{c,TM}a)]\cos n\phi = 0 \tag{2.71}$$

$$E_z(b,\phi) = [CJ_n(k_{c,TM}b) + DN_N(k_{c,TM}b)]\cos n\phi = 0 \tag{2.72}$$

และเนื่องจากเงื่อนไขดักล่าวจะต้องเป็นจริงทุกๆ ค่า ϕ นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของ $\cos n\phi$ จะต้องเป็น 0

$$CJ_n(k_{c,TM}a) + DN_n(k_{c,TM}a) = 0 \tag{2.73}$$

$$CJ_n(k_{c,TM}a) + DN_n(k_{c,TM}a) = 0 \tag{2.74}$$

จะเห็นได้ว่า ถ้าค่า C และ D เท่ากับ 0 แล้วสมการที่ (2.71) และ (2.72) จะไม่เป็นจริงทำให้ไม่สามารถ หา E_z ได้ ฉะนั้นถ้าค่า C และ D ไม่เป็น 0 แล้ว เราสามารถใช้เมตริกหา determinant ของสัมประสิทธิ์ที่ ได้

$$\begin{vmatrix} J_n\left(k_{c,TM}a\right) & N_n\left(k_{c,TM}a\right) \\ J_n\left(k_{c,TM}b\right) & N_n\left(k_{c,TM}b\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.75}$$

จะได้ว่า

$$J_n\left(k_{c,TM}a\right)N_n\left(k_{c,TM}b\right) - J_n\left(k_{c,TM}b\right)N_n\left(k_{c,TM}a\right) = 0 \tag{2.76}$$

เราเรียกสมการ (2.76) ว่าเงื่อนไขขอบเขต Bessel-Neumann โดยที่

$J_n(x)$ คือ Bessel functions of first kind

$N_n(x) = Y_n(x)$ คือ Bessel functions of second kind

และ x คือรากของ Bessel-Neumann ซึ่งในที่นี้จะได้ว่า

$$x = k_{c,TM}a \tag{2.77}$$

หรือ $$k_{c,TM} = \frac{x}{a} \tag{2.78}$$

แทนสมการที่(2.76) ลงในสมการที่ (2.75) จะได้สมการ Bessel-Neumann ที่สามารถอ่านค่าจากตารางที่ 2.3 มาแทนได้ง่ายขึ้น

$$J_n(x)N_n\left(\frac{b}{a}x\right) - J_n\left(\frac{b}{a}x\right)N_n(x) = 0 \tag{2.79}$$

และสามารถหาค่า ความถี่ตัด ($k_{c,TM_{nl}}$) ของโหมด TM ได้ว่า

$$k_{c,TM_{nl}} = \frac{x_{nl}}{a} = \frac{\left[\dfrac{table\ \mathrm{mod}e\ value}{\left(\dfrac{b}{a}-1\right)}\right]}{a} = \frac{table\ \mathrm{mod}e\ value}{b-a} \tag{2.80}$$

ซึ่งสามารถหาคงที่ C และ D ได้จาก

$$D = -\frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}C \qquad (2.81)$$

สุดท้ายแล้วเราสามารถหาผลเฉลยของ $E_z(\rho,\phi)$ โดยแทนตัวแปรต่างๆที่หาได้ลงในสมการที่ (2.69) จะได้ว่า

$$E_z(\rho,\phi) = C\left[J_n\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\cos n\phi \qquad (2.82)$$

โดยที่สามารถหาค่าคงที่การกระจาย (β_{TM}) ได้จาก

$$\gamma_{TM} = \sqrt{k_{c,TM}^2 - k^2} = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{c,TM}^2} = j\beta_{TM} \qquad (2.83)$$

ทำให้สามารถหาสนามในองค์ประกอบอื่นๆ ได้ดังนี้

$$E_z(\rho,\phi,z) = C\left[J_n\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \qquad (2.84a)$$

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = -j\frac{\beta_{TM}C}{k_{c,TM}}\left[J_n'\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n'\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \qquad (2.84b)$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = j\frac{\beta_{TM}nC}{k_{c,TM}^2\rho}\left[J_n\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\sin n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \qquad (2.84c)$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = -j\frac{\omega\varepsilon nC}{k_{c,TM}^2\rho}\left[J_n\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\sin n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \qquad (2.84d)$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = -j\frac{\omega\varepsilon C}{k_{c,TM}}\left[J_n'\left(k_{c,TM}\rho\right) - \frac{J_n\left(k_{c,TM}b\right)}{N_n\left(k_{c,TM}b\right)}N_n'\left(k_{c,TM}\rho\right)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \qquad (2.84e)$$

ตารางที่ 2.5 แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ n สำหรับโหมด TM: ค่าในตารางคือ (b/a – 1) x_{mn}

b/a	01	11	21	31	02	12	22	32
1.0	3.142	3.142	3.142	3.142	6.283	6.283	6.283	6.283
1.1	3.141	3.143	3.147	3.154	6.283	6.284	6.286	6.289
1.2	3.140	3.146	3.161	3.187	6.282	6.285	6.293	6.306
1.3	3.139	3.150	3.182	3.236	6.282	6.287	6.304	6.331
1.4	3.137	3.155	3.208	3.294	2.281	2.290	2.317	6.362
1.5	3.135	3.161	3.237	3.36	6.280	6.293	6.332	6.387
1.6	3.133	3.168	3.27	3.43	6.279	6.296	6.349	6.437
1.8	3.128	3.182	3.36	3.6	6.276	6.304	6.387	6.523
2.0	3.123	3.197	3.4	3.7	6.273	6.312	6.43	6.62
2.5	3.110	3.235			6.266	6.335		6.9
3.0	3.097	3.271			6.258	6.357		
3.5	3.085	3.305			6.243	6.403		

ตารางที่ 2.5(ต่อ) แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ n สำหรับโหมด TM: ค่าในตารางคือ (b/a – 1) x_{mn}

b/a	03	13	23	33	04	14	24	34
1.0	9.425	9.425	9.425	9.425	12.566	12.566	12.566	12.566
1.1	9.425	9.425	9.427	9.429	12.556	12.567	12.568	12.569
1.2	9.424	9.426	9.431	9.440	12.556	12.567	12.571	12.578
1.3	9.424	9.427	9.438	9.457	12.556	12.568	12.577	12.590
1.4	9.423	9.429	9.447	9.478	12.565	12.570	12.583	12.606
1.5	9.423	9.431	9.458	9.502	12.565	12.571	12.591	12.624
1.6	9.422	9.434	9.469	9.528	12.564	12.573	12.600	12.644
1.8	9.420	9.439	9.495	9.587	12.563	12.577	12.619	12.689
2.0	9.418	9.444	9.523	9.652	12.561	12.581	12.640	12.738
2.5	9.413	9.460		9.83	12.558	12.593		12.874
3.0	9.408	9.476		10.0	12.553	12.605		13.02
3.5	9.402	9.493		10.2	12.549	12.619		13.2

2.5.2 TE modes

กรณีของโหมด TE วิธีการหาสมการของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าภายในไปในลักษณะเดียวกับโหมด TM ซึ่งค่า $k_{c,TE}$ จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตของ Bessel-Neumann จากสมการ

$$J_n'(k_{c,TE}a)N_n'(k_{c,TE}b) - J_n'(k_{c,TE}b)N_n'(k_{c,TE}a) = 0 \tag{2.85}$$

เพื่อให้สามารถอ่านค่าจากตารางที่ 2.4 ได้ง่ายขึ้นจะได้ว่า

$$x' = k_{c,TE}a \tag{2.86}$$

นั่นคือ $k_{c,TE} = x'/a$ ทำให้สมการที่ (72) จะสามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$J_n'(x')N_n'\left(\frac{b}{a}x'\right) - J_n'\left(\frac{b}{a}x'\right)N_n'(x') = 0 \tag{2.87}$$

จากสมการที่ (2.87) สามารถนำไปคำนวณหารากของสมการได้ โดยที่สำหรับโหมด TE นั้น ค่ารากของสมการที่ (2.87) ก็คือ x' ซึ่งได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.6 โดยที่ $n = 0,1,2,3\ldots$และ $l = 1,2,3,4,\ldots$

จากนั้นจะสามารถคำนวณหาค่า $k_{c,TE}$ ได้จากสมการ

$$k_{c,TE_{nl}} = \frac{table\ value}{\left(\frac{b}{a}-1\right)a} = \frac{table\ value}{b-a} \tag{2.88}$$

เมื่อพิจารณา ค่าคงที่การแผ่กระจายคลื่น (β_{TE}) สามารถหาได้จาก

$$\gamma_{TE} = \sqrt{k_{c,TE}^2 - k^2} = j\sqrt{k^2 - k_{c,TE}^2} = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_{c,TE}^2} = j\beta_{TE} \tag{2.89}$$

และสุดท้ายจะสามารถหาสนามในทุกองค์ประกอบได้ดังนี้

$$H_z(\rho,\phi,z) = C\left[J_n(k_{c,TE}\rho) - \frac{J_n'(k_{c,TE}b)}{N_n'(k_{c,TE}b)}N_n(k_{c,TE}\rho)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TE}z} \tag{2.90a}$$

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = j\frac{\omega\mu nC}{\rho k_{c,TE}^2}\left[J_n(k_{c,TE}\rho) - \frac{J_n'(k_{c,TE}b)}{N_n'(k_{c,TE}b)}N_n(k_{c,TE}\rho)\right]\sin n\phi e^{-j\beta_{TM}z} \tag{2.90b}$$

$$E_{\phi}(\rho,\phi,z) = -j\frac{\omega\mu C}{k_{c,TE}}\left[J_n'(k_{c,TE}\rho)-\frac{J_n'(k_{c,TE}b)}{N_n'(k_{c,TE}b)}N_n'(k_{c,TE}\rho)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TE}z} \quad (2.90c)$$

$$H_{\rho}(\rho,\phi,z) = -j\frac{\beta_{TE}C}{k_{c,TE}}\left[J_n'(k_{c,TE}\rho)-\frac{J_n'(k_{c,TE}b)}{N_n'(k_{c,TE}b)}N_n'(k_{c,TE}\rho)\right]\cos n\phi e^{-j\beta_{TE}z} \quad (2.90d)$$

$$H_{\phi}(\rho,\phi,z) = j\frac{\beta_{TE}C}{\rho k_{c,TE}^2}\left[J_n(k_{c,TE}\rho)-\frac{J_n'(k_{c,TE}b)}{N_n'(k_{c,TE}b)}N_n(k_{c,TE}\rho)\right]\sin n\phi e^{-j\beta_{TE}z} \quad (2.90e)$$

$$E_z(\rho,\phi,z) = 0 \quad (2.90f)$$

ตารางที่2.6 แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ m สำหรับโหมด TE: ค่าในตารางคือ (b/a – 1) x'_{nl}

b/a	mn							
	01	02	03	04	11	12	13	14
1.001	3.14159	6.28318	9.42479	12.5663	3.14159	6.28319	9.42479	12.5663
1.1	3.14268	6.28372	9.42515	12.5666	0.0952739	3.14413	6.28445	9.42564
1.2	3.14555	6.28517	9.4261	12.5673	0.182066	3.15089	6.28782	9.42787
1.3	3.14976	6.28731	9.42753	12.5684	0.261595	3.16092	6.29284	9.43121
1.4	3.15497	6.28996	9.42932	12.5698	0.334829	3.17354	6.29911	9.43539
1.5	3.16094	6.29306	9.43139	12.5714	0.402546	3.18825	6.30643	9.44026
1.6	3.16746	6.29649	9.43372	12.5731	0.465384	3.20468	6.31459	9.44567
1.8	3.18160	6.30407	9.43882	12.5769	0.578451	3.24156	6.33289	9.45785
2.0	3.19658	6.31235	9.44447	12.5812	0.677336	3.28247	6.35321	9.47134
2.5	3.23471	6.33464	9.45987	12.5929	0.877069	3.39546	6.40995	9.50885
3.0	3.27123	6.35768	9.46718	12.6054	1.02724	3.51553	6.47222	9.54988
3.5	3.30494	6.38052	9.49274	12.6183	1.14279	3.63616	6.53804	9.5932
4.0	3.33563	6.40269	9.50922	12.6312	1.2338	3.75334	6.60624	9.63822

ตารางที่2.6(ต่อ) แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ m สำหรับโหมด TE: ค่าในตารางคือ (b/a – 1) x'_{nl}

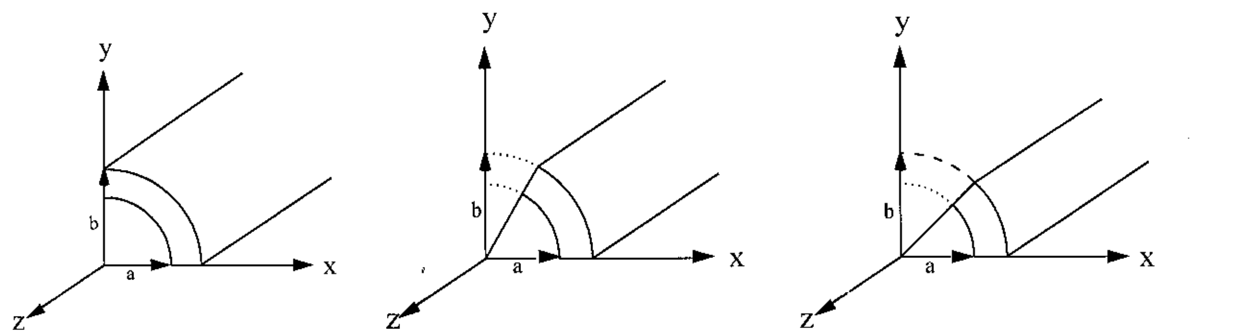
b/a	mn							
	21	22	23	24	31	32	33	34
1.001	3.14159	6.28319	9.42479	12.5663	3.14159	6.28319	9.42479	12.5663
1.1	0.190547	3.14847	6.28662	9.42708	0.285819	3.1557	6.29023	9.4295
1.2	0.364111	3.16685	6.29579	9.43318	0.546119	3.19328	6.30904	9.44202
1.3	0.523068	3.19418	6.30939	9.44223	0.784295	3.24891	6.33689	9.46058

ตารางที่2.6(ต่อ) แสดงค่ารากของ Bessel Function ลำดับที่ m สำหรับโหมด TE: ค่าในตารางคือ (b/a – 1) x'_{nl}

b/a	mn							
	21	22	23	24	31	32	33	34
1.4	0.669236	3.22867	6.32648	9.45361	1.0028	3.31876	6.37183	9.48389
1.5	0.804033	3.26904	6.3464	9.46684	1.20342	3.40004	6.41252	9.51099
1.6	0.928581	3.31431	6.36864	9.4816	1.3875	3.49077	6.45786	9.54119
1.8	1.15044	3.4167	6.41873	9.51474	1.71027	3.69458	6.55984	9.60892
2.0	1.3406	3.53129	6.47471	9.55158	1.97888	3.92005	6.67381	9.68421
2.5	1.70544	3.8496	6.63358	9.65499	2.4649	4.52117	6.99964	9.89616
3.0	1.95499	4.18021	6.81335	9.77013	2.77606	5.08438	7.37439	10.1353
3.5	2.12986	4.49211	7.00958	9.89483	2.98933	5.54626	7.78188	10.4003

2.6 ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม (Concentric Sectoral Cylindrical Waveguide)

สำหรับการหาคำตอบสมการของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วมจะมีพื้นฐานการคำนวณเช่นเดียวกับท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม โดยการแบ่งเซกเตอร์ของท่อนำคลื่นนั้นถูกควบคุมด้วยพารามิเตอร์ υ ซึ่งลักษณะการวิเคราะห์สมการจะดำเนินไปในลักษณะเดียวกันกับท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วมเกือบทุกประการรวมไปถึงพารามิเตอร์ที่ใช้ด้วย โดยมีพารามิเตอร์บางตัวที่เพิ่มเข้ามาในสมการสนามของแต่ละองค์ประกอบ เพื่อเป็นตัวกำหนดมุมในของการพิจารณาท่อนำคลื่น และทิศทางเดินของคลื่นก็ยังคงเป็นทิศทาง +Z เหมือนเดิม ดังรูปที่ 5



(5a), ϕ=90 องศา (5a), ϕ=60 องศา (5a), ϕ=45 องศา

รูปที่ 2.5 แสดงท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม ที่ มุม เท่ากับ 90 องศา 60 องศา และ 45 องศา

TE modes

ใช้วิธีการวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกับท่อนำคลื่นทรงกระบอกแกนร่วม ซึ่งจะได้สมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละองค์ประกอบดังนี้

$$H_z = \frac{k_c^2 B(\rho)}{j\omega\mu}\cos(\upsilon\varphi)e^{-j\beta z} \qquad (2.89a)$$

$$H_{\varphi} = \frac{\upsilon\beta B(\rho)}{\omega\mu\rho}\sin(\upsilon\varphi)e^{-j\beta z} \tag{2.89b}$$

$$H_{\rho} = \frac{x'_{mn}\beta B'(\rho)}{\omega\mu a}\cos(\upsilon\varphi)e^{-j\beta z} \tag{2.89c}$$

$$E_{\varphi} = \frac{x'_{mn}B'(\rho)}{a}\cos(\upsilon\varphi)e^{-j\beta z} \tag{2.89d}$$

$$E_{\rho} = \frac{\upsilon B(\rho)}{\rho}\sin(\upsilon\varphi)e^{-j\beta z} \tag{2.89e}$$

โดยที่ $\upsilon = \dfrac{m\pi}{\Phi_0}$ และ $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$,

และ $B(\rho)$ และ $B'(\rho)$ คือ สมการ Bessel สำหรับท่อนำคลื่นชนิดนี้ ดังสมการข้างล่าง

$$B(\rho) = \frac{J'_{\upsilon}(x'_{mn})N_{\upsilon}\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right) - N'_{\upsilon}(x'_{mn})J_{\upsilon}\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right)}{J'_{\upsilon}(x'_{mn})} \tag{2.90}$$

$$B'(\rho) = \frac{J'_{\upsilon}(x'_{mn})N'_{\upsilon}\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right) - N'_{\upsilon}(x'_{mn})J'_{\upsilon}\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right)}{J'_{\upsilon}(x'_{mn})} \tag{2.91}$$

สำหรับโหมด TE แล้ว m = 0, 1, 2… และ n = 1, 2, 3… และ

$J'_{\upsilon}(.), J_{\upsilon}(.)$ คือ Bessel functions ชนิดที่ 1

$N_{\upsilon}(.), N'_{\upsilon}(.)$ คือ Bessel functions ชนิดที่ 2

ซึ่งค่า x'_{mn} ก็คือรากสมการ Bessel ในสมการที่ (78) นั่นเอง

$$J'_{\upsilon}(x'_{mn})N'_{\upsilon}(x'_{mn}b/a) - N'_{\upsilon}(x'_{mn})J'_{\upsilon}(x'_{mn}b/a) = 0 \tag{2.92}$$

เมื่อพิจารณาค่า ความถี่ตัด จะได้ว่า

$$k^2 = k_c^2 + \beta^2 \tag{2.93}$$

นั่นคือ $k_c = \frac{x'_{mn}}{a}$ (2.94)

TM modes

สามารถได้ในลักษณะเดียวกับโหมด TE แล้วจะได้สมการสนามดังนี้

$$E_z = \frac{k_c^2 B(\rho)}{j\omega\mu} \sin(\upsilon\varphi) e^{-j\beta z} \tag{2.95a}$$

$$H_\varphi = \frac{\upsilon\beta B(\rho)}{\omega\mu\rho} \cos(\upsilon\varphi) e^{-j\beta z} \tag{2.95b}$$

$$H_\rho = \frac{x'_{mn}\beta B'(\rho)}{\omega\mu a} \sin(\upsilon\varphi) e^{-j\beta z} \tag{2.95c}$$

$$E_\varphi = \frac{x'_{mn} B'(\rho)}{a} \sin(\upsilon\varphi) e^{-j\beta z} \tag{2.95d}$$

$$E_\rho = \frac{\upsilon B(\rho)}{\rho} \cos(\upsilon\varphi) e^{-j\beta z} \tag{2.95e}$$

โดยที่ $B(\rho)$ และ $B'(\rho)$ คือ สมการ Bessel สำหรับท่อนำคลื่นชนิดนี้ ดังสมการข้างล่าง

$$B(\rho) = \frac{J_\upsilon(x'_{mn}) N_\upsilon\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right) - N_\upsilon(x'_{mn}) J_\upsilon\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right)}{J_\upsilon(x'_{mn})} \tag{2.96}$$

$$B'(\rho) = \frac{J_\upsilon(x'_{mn}) N'_\upsilon\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right) - N_\upsilon(x'_{mn}) J'_\upsilon\left(x'_{mn}\frac{\rho}{a}\right)}{J_\upsilon(x'_{mn})} \tag{2.97}$$

บทที่ 3

วิธีการพัฒนาโปรแกรมเพื่อแสดงการแผ่กระจายของสนามในท่อนำคลื่น

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่ได้จากบทที่ 2 นำมาพัฒนาในบนโปรแกรมเพื่อการคำนวณเชิงตัวเลขและสร้างภาพสมรรถนะสูง (Matlab) เพื่อศึกษาการกระจายของคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละแบบ ซึ่งสามารถได้แสดงอยู่ในเชิงรูปภาพที่เห็นได้ชัดเจน

ซึ่งในขั้นตอนแรกนั้น จะสืบค้นวิธีการพล็อตโดยเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลการแสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นจากงานวิจัยของผู้ที่เคยทำมาแล้ว [6] ในส่วนที่เป็นท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมและวงกลม และใช้วิธีการที่ได้จากการตรวจสอบความถูกต้องแล้ว แสดงการแผ่กระจายของสนามของท่อนำคลื่นชนิดอื่นดังได้แสดงไว้ในบทที่ 2 ต่อไป

3.1 กล่าวนำ

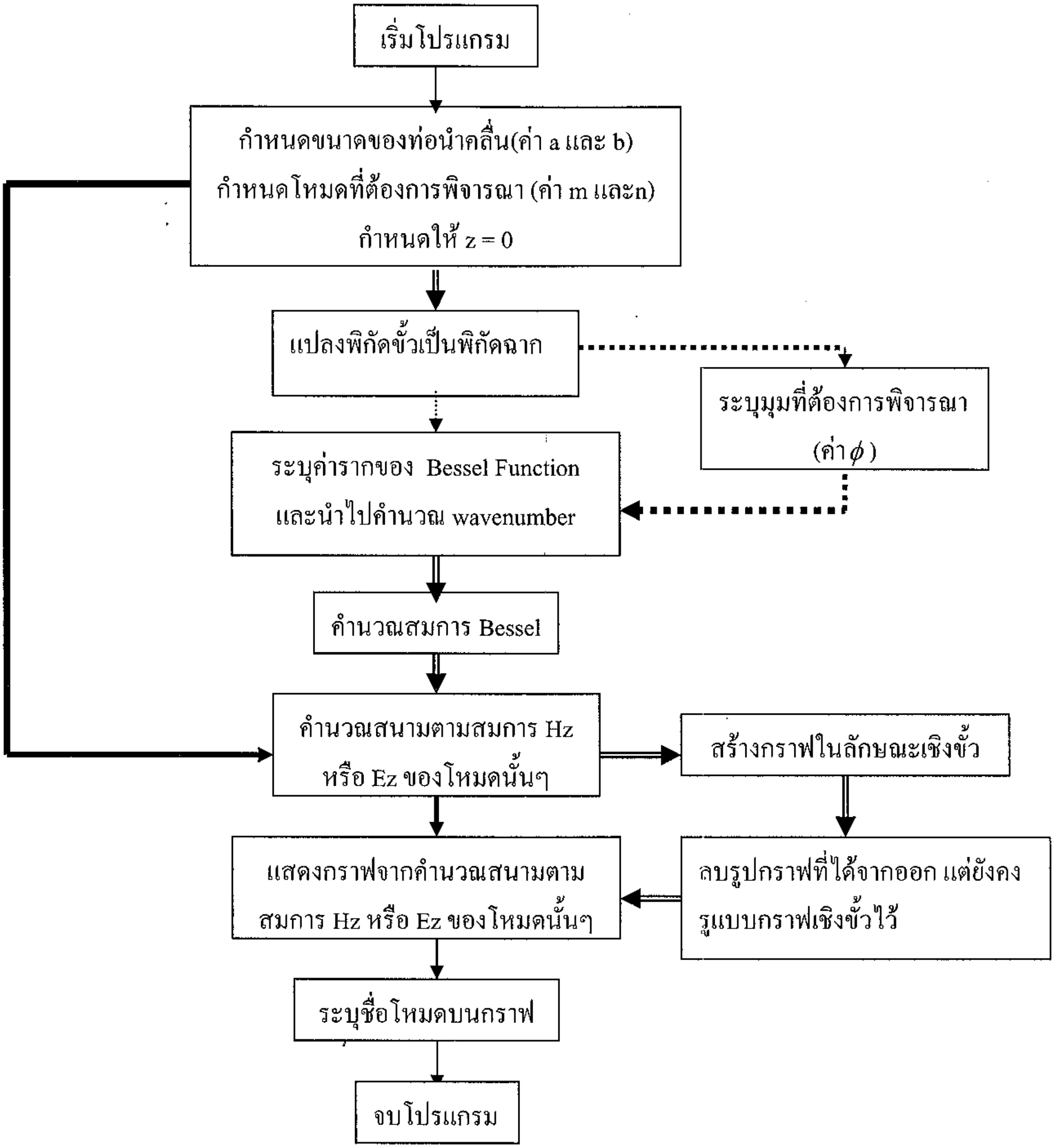
Matlab เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย ในแวดวงของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรในปัจจุบัน สำหรับ Matlab ได้เริ่มพัฒนาครั้งแรกโดย Dr. Cleve Molar โดยมีจุดประสงค์ของโครงการคือการสร้างเป็นโปรแกรม Matrix Laboratory ซึ่งเป็นที่มาของชื่อโปรแกรม Matlab ทุกวันนี้ Matlab เป็นโปรแกรมที่มีความสามารถหลากหลายเหมาะสมในงานวิเคราะห์เชิงวิศวกรรม ความสามารถหลักที่สำคัญของ Matlab คือ

- ➢ Matlab เป็นโปรแกรมเพื่อการคำนวณและแสดงผลได้ทั้งตัวเลขและรูปภาพซึ่งมีประสิทธิภาพสูง โดยทางบริษัท Math Works ผู้ผลิตได้ให้นิยามว่าเป็น High-Performance Numeric Computation and Visualization Software
- ➢ Matlab จะควบคุมการทำงานด้วยชุดคำสั่งและยังสามารถรวบรวมชุดคำสั่งเป็นโปรแกรมได้
- ➢ Matlab มี function ที่เหมาะสมกับงานทางวิศวกรรมพื้นฐานมากมาย นอกจากนั้นผู้ใช้ยังสามารถเขียน function ขึ้นมาใหม่โดยสามารถใช้ประโยชน์จาก function ที่มีอยู่แล้วเพื่อให้เหมาะสมกับงานของผู้ใช้แต่ละกลุ่ม
- ➢ ลักษณะการเขียนโปรแกรมใน Matlab จะใกล้เคียงการเขียนสมการทางคณิตศาสตร์ที่คุ้ยเคยจึงง่ายกว่าการเขียนโปรแกรมโดยใช้ภาษาชั้นสูง เช่น C, FORTRAN หรืออื่นๆ
- ➢ Matlab มีความสามารถในการเขียนกราฟและรูปภาพทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติได้อย่างมีประสิทธิภาพ
- ➢ Matlab สามารถทำ Dynamic Link กับโปรแกรมอื่นๆ ได้ว่าจะเป็น Word, Excel หรืออื่นๆ ที่ร่วมทำงานอยู่บน Windows
- ➢ Matlab มี toolbox หรือชุด function พิเศษสำหรับผู้ใช้ที่ต้องการใช้งานเฉพาะทางหรืองานด้านวิศวกรรมขั้นสูงอื่นๆ

จะเห็นได้ว่าโปรแกรม Matlab มีความสามารถมากมาย แต่ในบทนี้จะใช้ความสามรถของโปรแกรม Matlab ในการเขียนกราฟและรูปภาพเป็นหลัก

3.2 วิธีการพัฒนาโปรแกรมเพื่อแสดงการแผ่การแผ่กระจายของสนามในท่อนำคลื่น

โดยมีโครงสร้างในการเขียนโปรแกรมตามแผนผังข้างล่างนี้



รูปที่ 3.1 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

จากแผนผังโครงสร้างการเขียนโปรแกรมเป็นการแสดงการเขียนโปรแกรมโดยรวม ของท่อนำคลื่นทุกแบบที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 โดยที่ลักษณะของลูกศรแต่ละแบบที่ระบุในแผนผังจะหมายถึงเส้นทางของท่อนำคลื่นแต่ละชนิด นั่นคือ

หมายถึง เส้นทางในการเขียนโปรแกรมของท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมอย่างเดียว

หมายถึง เส้นทางในการเขียนโปรแกรมของท่อนำคลื่นแบบวงกลม แบบเซกเตอร์ของวงกลม แบบแกนร่วมของวงกลม และแบบเซกเตอร์แกนร่วมของวงกลม ที่ใช้เหมือนกัน

หมายถึง เส้นทางในการเขียนโปรแกรมของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม และแบบเซกเตอร์แกนร่วมของวงกลม ที่ใช้เหมือนกัน

หมายถึง เส้นทางในการเขียนโปรแกรมของท่อนำคลื่นแบบวงกลม และแบบแกนร่วมของวงกลม ที่ใช้เหมือนกัน

หมายถึง เส้นทางในการเขียนโปรแกรมของท่อนำคลื่นทั้ง 5 ชนิด ที่ใช้เหมือนกัน

ซึ่งจากแผนผังการเขียนโปรแกรมนี้ใช้ในการหาสนามไฟฟ้าในโหมด TE และสนามแม่เหล็กในโหมด TM เท่านั้น ส่วนสนามแม่เหล็กในโหมด TE และสนามไฟฟ้าในโหมด TM นั้นไม่สามารถใช้โครงสร้างนี้แสดงการแผ่การกระจายของคลื่นในท่อนำคลื่นได้

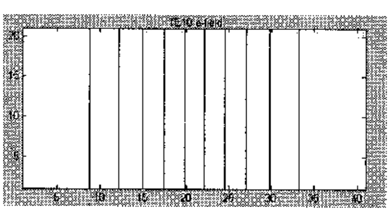
ซึ่งสมการที่ใช้ในการหาสนามนั้น จะใช้เฉพาะสมการสนามในทิศการเดินทางของคลื่นมาคิดเท่านั้น นั่นคือสำหรับโหมด TE สมการสนามที่นำมาใช้คือ H_z และสำหรับโหมด TM สมการสนามที่นำมาใช้ก็คือ E_z นั่นเอง ซึ่งสามารถนำสมการดังกล่าวจากบทที่ 2 มาใช้ได้เลย

3.2.1 ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม (Rectangular Waveguide)

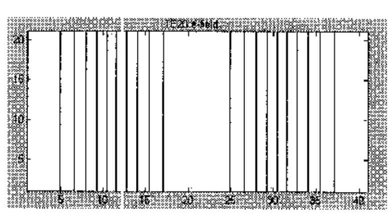
ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงวิธีการพล็อตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละโหมด โดยแยกพิจารณาตามโหมด TE และ โหมด TM โดยใช้สมการจากบทที่ 2 มาพัฒนาเขียนในโปรแกรม Matlab

ก) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 6 โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{10},TE_{20},TE_{11},TE_{21},TE_{01}และ TE_{02} ดังรูป

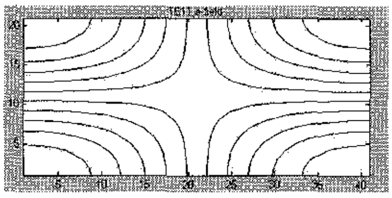


TE_{10}

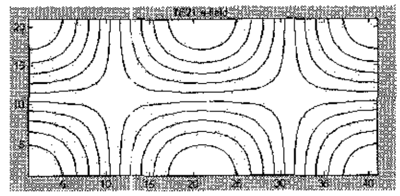


TE_{20}

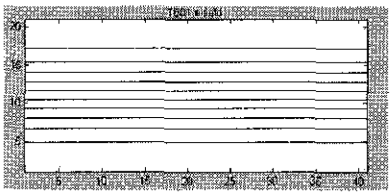
รูปที่ 3.2 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม



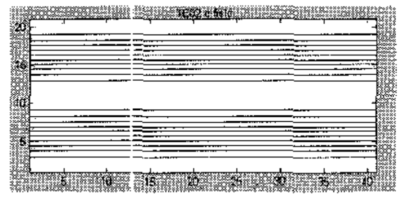
TE_{11}



TE_{21}



TE_{01}

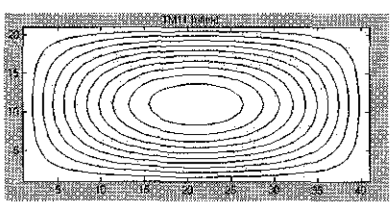


TE_{02}

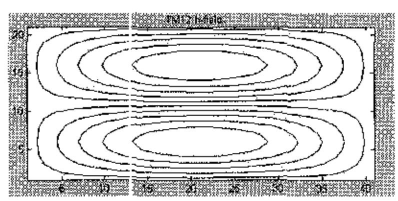
รูปที่ 3.2(ต่อ) แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

ข) TM Modes

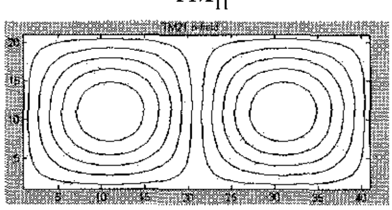
สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามแม่เหล็กไว้ทั้ง 6 โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{11},TM_{12},TM_{21},TM_{22},TM_{31}และ TM_{32} ดังรูป



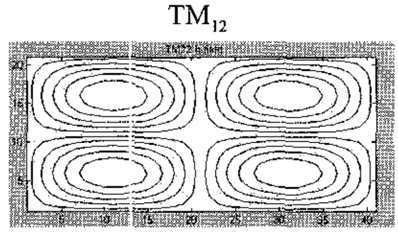
TM_{11}



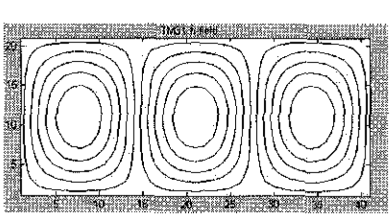
TM_{12}



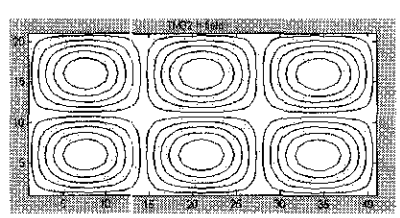
TM_{21}



TM_{22}



TM_{31}



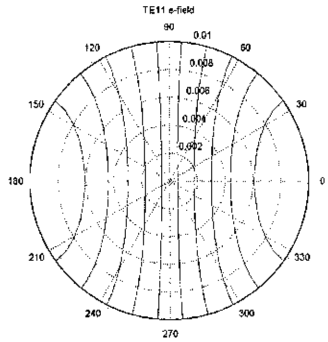
TM_{32}

รูปที่ 3.3 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TE ของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม

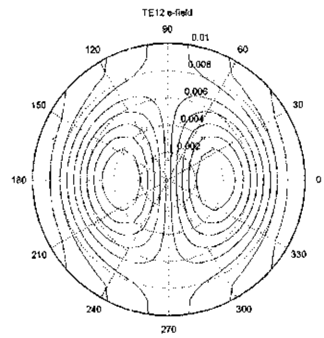
3.2.2 ท่อนำคลื่นวงกลม (Circular Waveguide)

ก) TE Modes

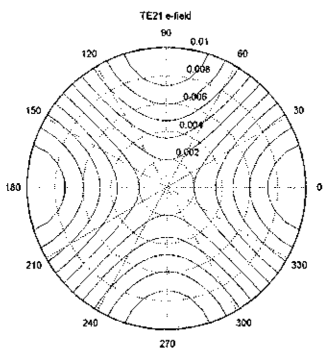
สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 6 โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{12},TE_{21},TE_{22},TE_{31}และ TE_{32} ดังรูป



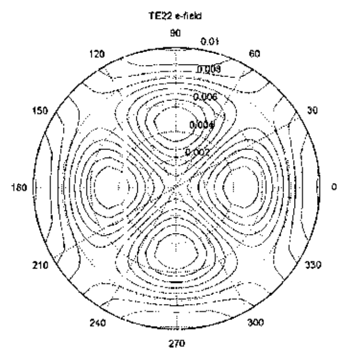
TE_{11}



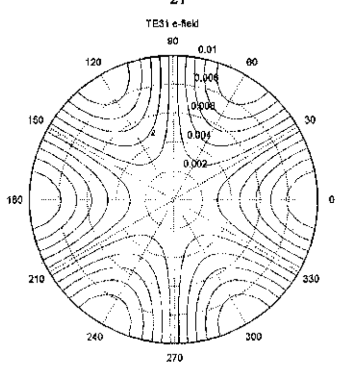
TE_{12}



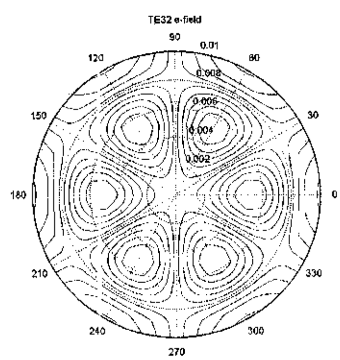
TE_{21}



TE_{22}



TE_{31}

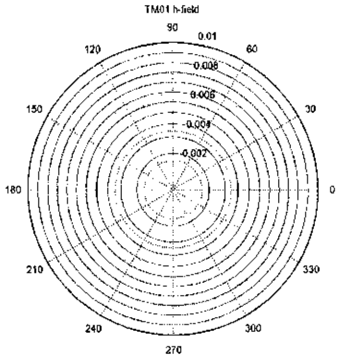


TE_{32}

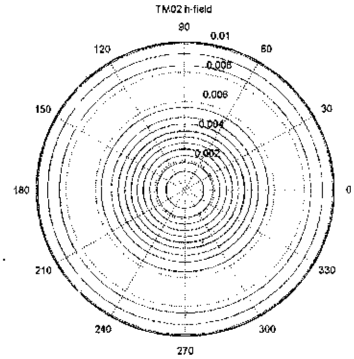
รูปที่ 3.4 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบวงกลม

ข) TM Modes

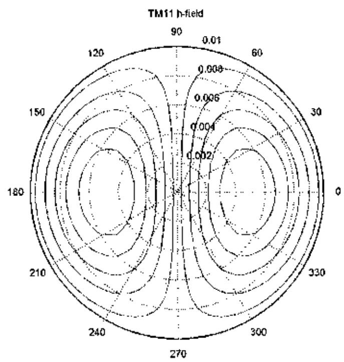
สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไว้ทั้ง 6 โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{01},TM_{02},TM_{11},TM_{12},TM_{21}และ TM_{22} ดังรูป



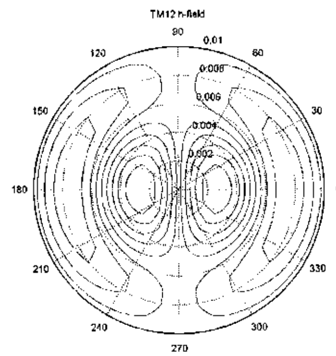
TM_{01}



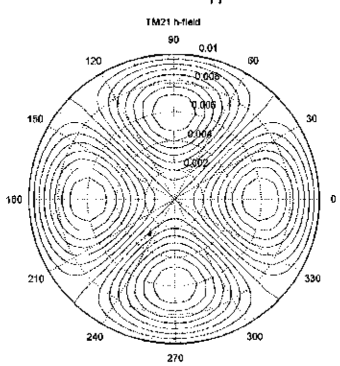
TM_{02}



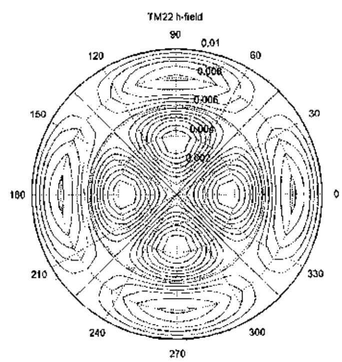
TM_{11}



TM_{12}



TM_{21}



TM_{22}

รูปที่ 3.5 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบวงกลม

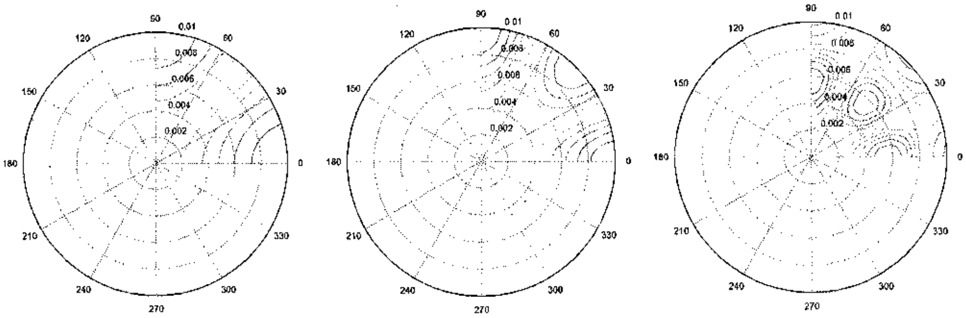
3.2.3 ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม (Circular Sectoral Waveguide)

สำหรับท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลมนั้น จะต้องระบุมุมในการพิจารณาเพื่อกำหนดขนาดของท่อนำคลื่น สำหรับบทนี้ได้แสดงไว้ที่มุม 90 องศา และ 60 องศา

ก) พิจารณาที่มุม 90 องศา

(1) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{21}และ TE_{22} ดังรูป

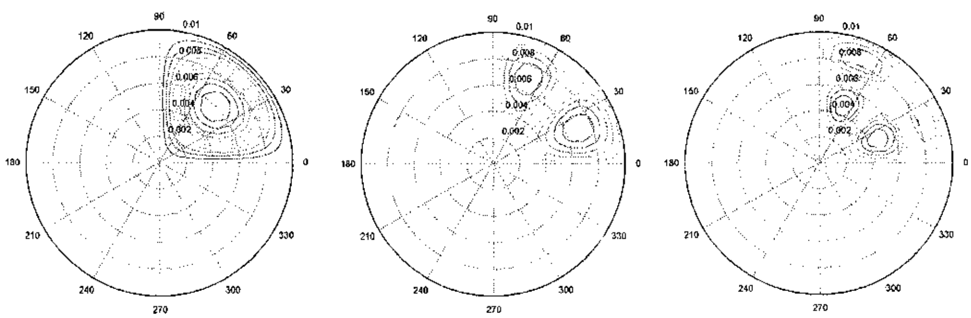


TE_{11} TE_{21} TE_{22}

รูปที่ 3.6 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์วงกลม

(2) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{21} และ TE_{22} ดังรูป



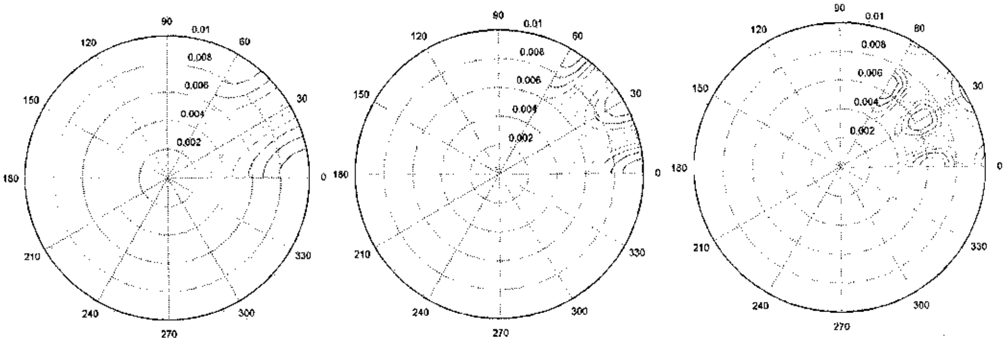
TM_{11} TM_{21} TM_{22}

รูปที่ 3.7 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์วงกลม

ข) พิจารณาที่มุม 60 องศา

(1) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{21}และ TE_{22} ดังรูป

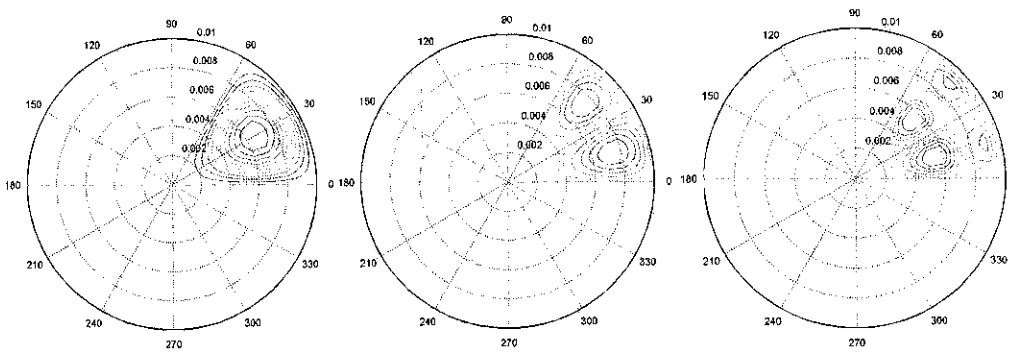


TE_{11} TE_{21} TE_{22}

รูปที่ 3.8 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์วงกลม

(2) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{21} และ TE_{22} ดังรูป



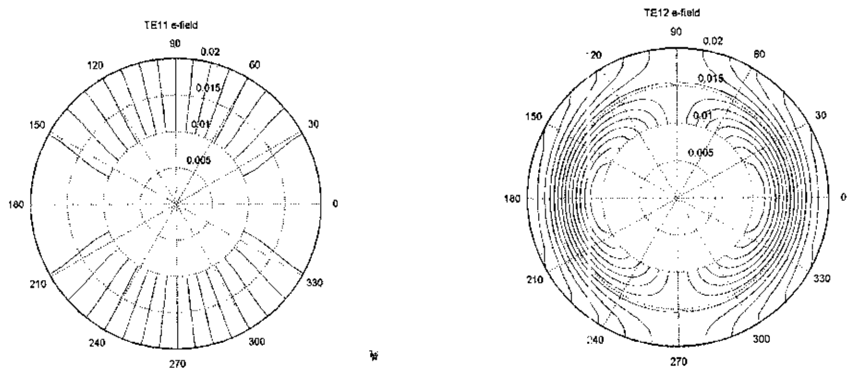
TM_{11} TM_{21} TM_{22}

รูปที่ 3.9 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์วงกลม

3.2.4 ท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม (Coaxial Cylinders Waveguide)

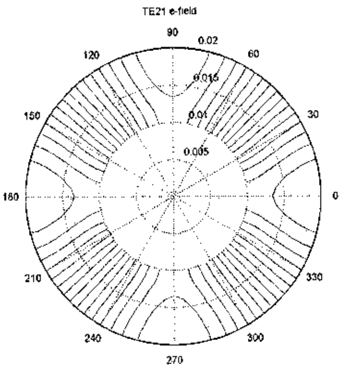
ก) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{12}, TE_{21}, TE_{22}, TE_{31}และ TE_{32} ดังรูป

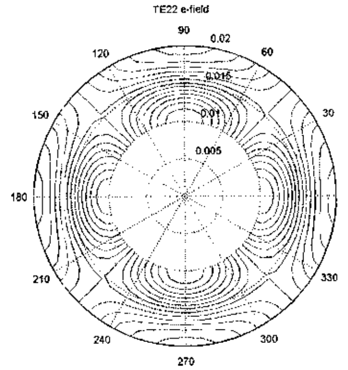


TE_{11} TE_{12}

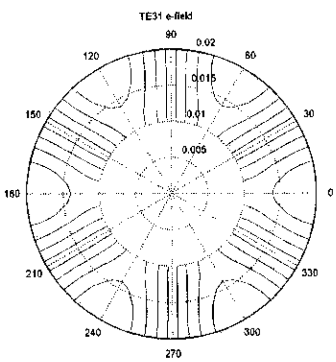
รูปที่ 3.10 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม



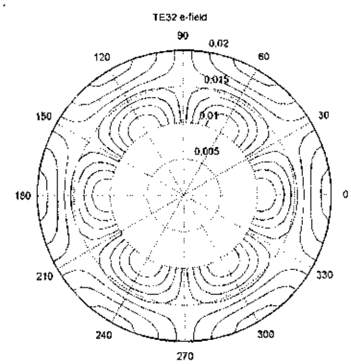
TE_{21}



TE_{22}



TE_{31}

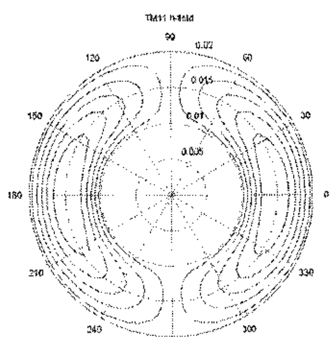


TE_{32}

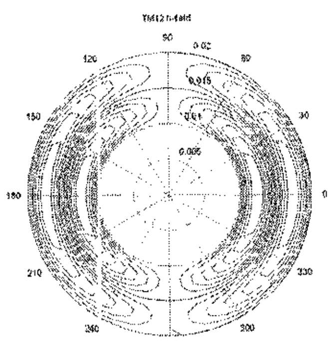
รูปที่ 3.10(ต่อ) แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม

ข) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{11},TM_{12}, $TM_{21,}$ $TM_{22,}$ TM_{31}และ TM_{32} ดังรูป

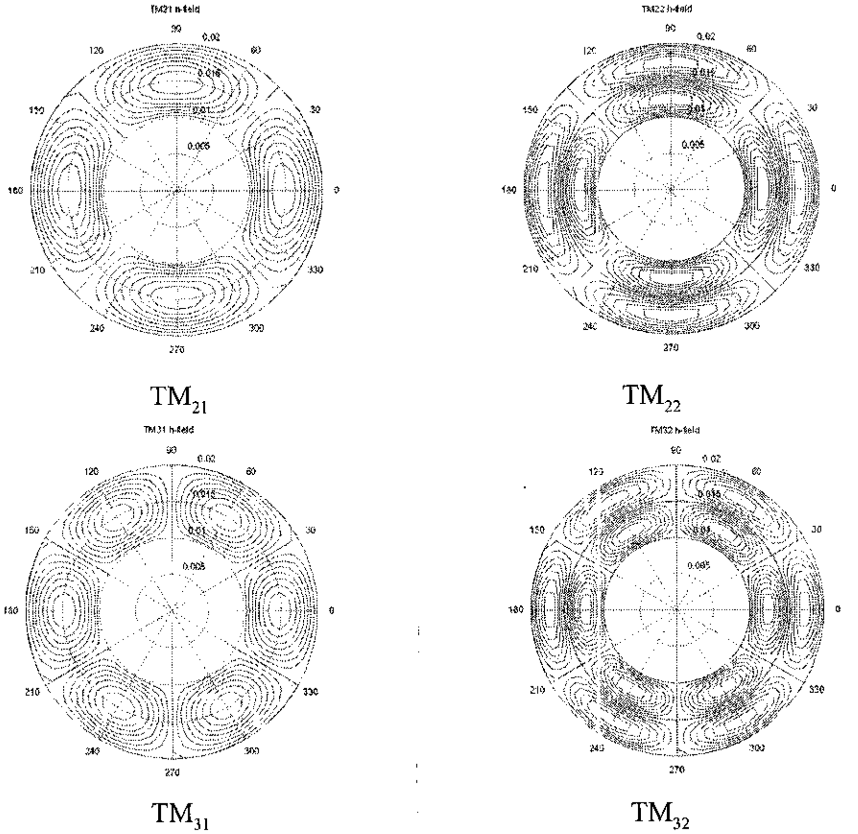


TM_{11}



TM_{12}

รูปที่ 3.11 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม



TM_{21} TM_{22}

TM_{31} TM_{32}

รูปที่ 3.11(ต่อ) แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบทรงกระบอกแกนร่วม

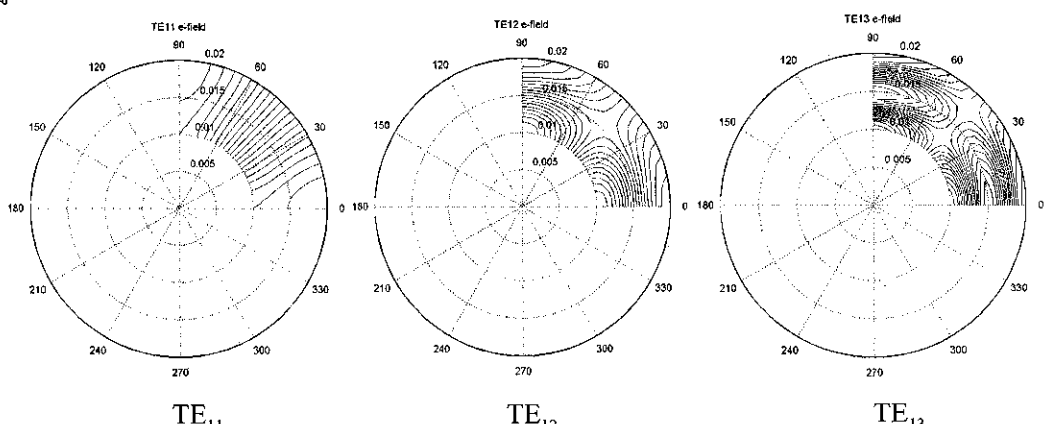
3.2.5 ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม(Concentric Sectoral Cylindrical Waveguide)

สำหรับท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วมนั้น จะต้องระบุมุมในการพิจารณาเพื่อกำหนดขนาดของท่อนำคลื่น สำหรับบทนี้ได้แสดงไว้ที่มุม 90 องศา 60 องศา และ 45 องศา

ก) พิจารณาที่มุม 90 องศา

(1) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{12}และ TE_{13} ดังรูป

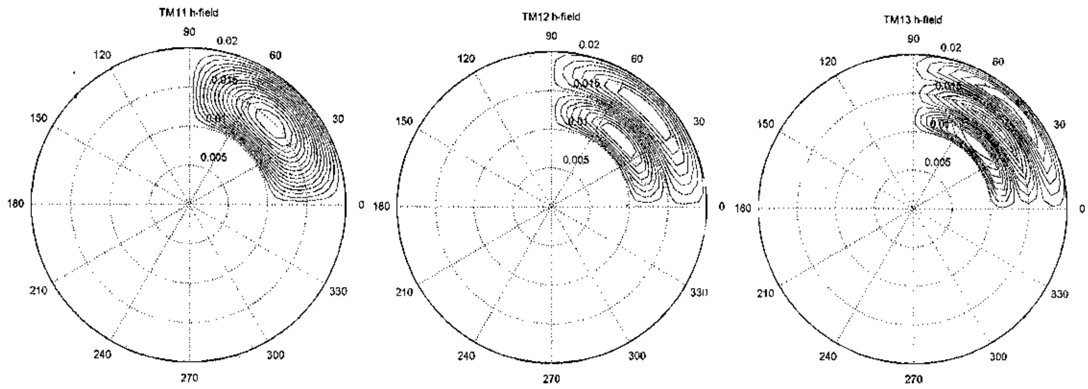


TE_{11} TE_{12} TE_{13}

รูปที่ 3.12 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม

(2) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{11},TM_{12} และ TM_{13} ดังรูป



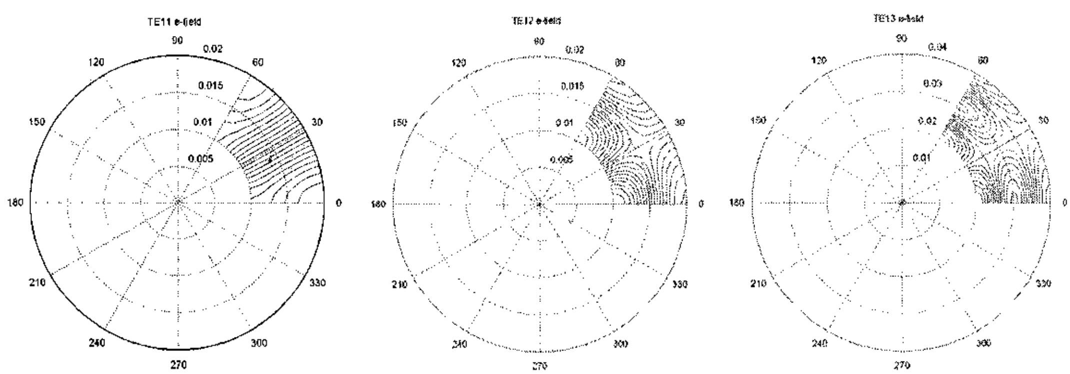
TM_{11} TM_{12} TM_{13}

รูปที่ 3.13 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ ทรงกระบอกแกนร่วม

ข) พิจารณาที่มุม 60 องศา

(1) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{12}และ TE_{13} ดังรูป

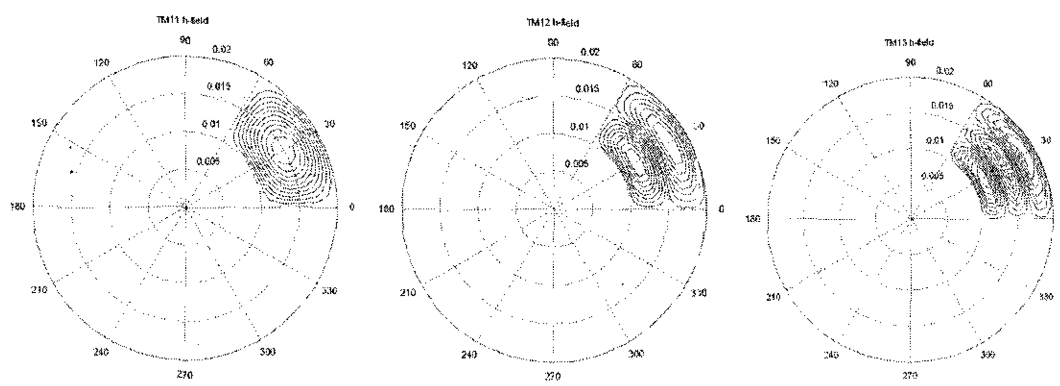


TE_{11} TE_{12} TE_{13}

รูปที่ 3.14 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ ทรงกระบอกแกนร่วม

(2) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{11},TM_{12} และ TM_{13} ดังรูป



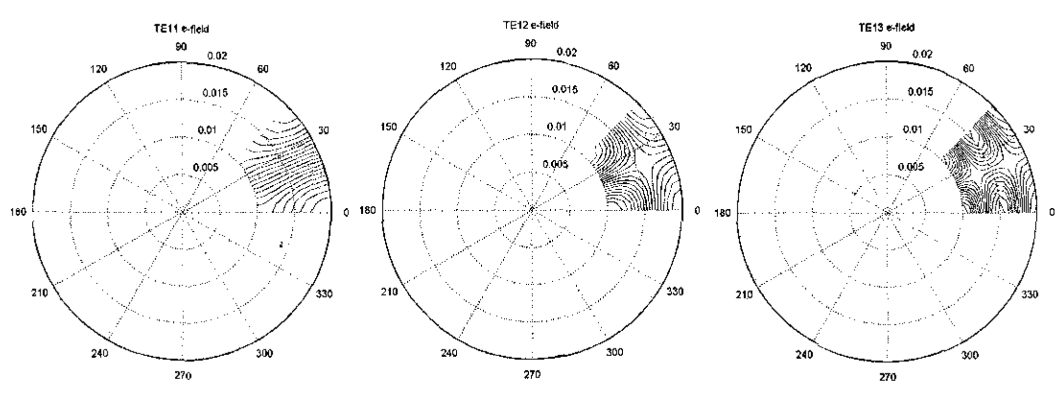
TM_{11} TM_{12} TM_{13}

รูปที่ 3.15 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบวงกลมเซกเตอทรงกระบอกแกนร่วม

ค) พิจารณาที่มุม 45 องศา

(1) TE Modes

สำหรับโหมด TE นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3โหมดด้วยกัน คือ โหมด TE_{11},TE_{12}และ TE_{13} ดังรูป

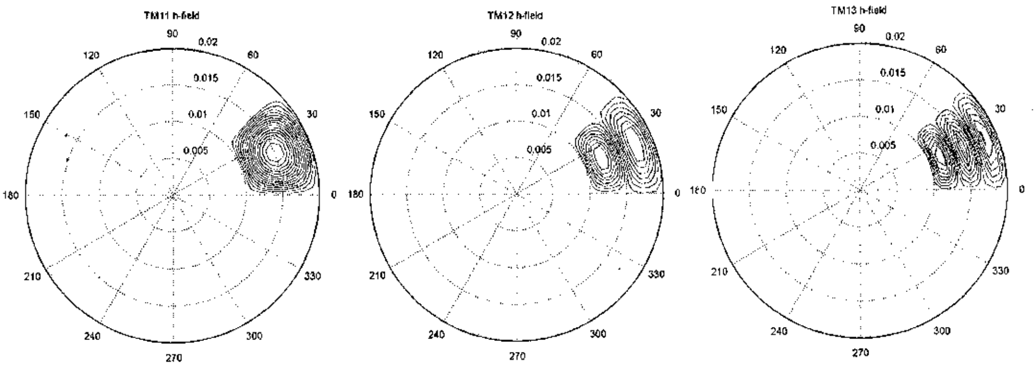


TE_{11} TE_{12} TE_{13}

รูปที่ 3.16 แสดงการแผ่กระจายสนามไฟฟ้าของโหมด TE ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม

(2) TM Modes

สำหรับโหมด TM นี้ได้แสดงผลการพล็อตสนามไฟฟ้าไว้ทั้ง 3 โหมดด้วยกัน คือ โหมด TM_{11},TM_{12} และ TM_{13} ดังรูป



TM_{11} TM_{12} TM_{13}

รูปที่ 3.17 แสดงการแผ่กระจายสนามแม่เหล็กของโหมด TM ของท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ทรงกระบอกแกนร่วม

บทที่ 4
สรุปผลของโครงงาน

โครงงานฉบับนี้ได้นำเสนอผลการพัฒนาโปรแกรมเพื่อใช้แสดงภาพการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นชนิดต่างๆ ด้วยโปรแกรมเพื่อการคำนวณเชิงเลขและการสร้างภาพสมรรถนะสูง (MATLAB) โดยพัฒนาโปรแกรมจากสมการสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด

จากบทที่ 2 เป็นการศึกษาสมการพื้นฐานของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแต่ละชนิด ซึ่งจะสังเกตได้ว่าจากท่อนำคลื่นทั้ง 5 ชนิดนั้นใช้หลักการเดียวกันในการหาสนามแต่ละองค์ประกอบ แต่จะแตกต่างกันเฉพาะการกำหนดโหมด โดยส่วนที่เป็นท่อนำคลื่นแบบสี่เหลี่ยมนั้นสามารถกำหนดได้ด้วยตัวแปร m และ nโดยตรง ส่วนท่อนำคลื่นแบบวงกลม ท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม ท่อนำคลื่นแบบแกนร่วมวงกลม และท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์แกนร่วมของวงกลม จะต้องอ่านค่ารากของ Bessel Function เพื่อกำหนดโหมดผ่านตัวแปร υ โดยที่สมการ Bessel Function ของท่อนำคลื่นแต่ละชนิดนั้นจะไม่เหมือนกัน นั่นคือกล่าวโดยรวมแล้วสมการสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นทั้ง 5 ชนิด สามารถแยกฟังก์ชันที่ควบคุมสมการได้ 3 ส่วน ได้แก่ ส่วนแรกคือ Bessel Function จะเป็นฟังก์ชันที่ควบคุมขนาดของท่อนำคลื่น ส่วนที่สองคือ Trigonal Function จะเป็นฟังก์ชันที่ควบคุมมุมโดยผ่านขนาดของท่อนำคลื่น และส่วนที่สามคือ Exponential Function จะเป็น ฟังก์ชันที่ควบคุมสนามในทิศการเดินทางของคลื่น

ในส่วนของการเขียนโปรแกรมนั้น จะเห็นได้ว่าสมการของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นนั้นมีอยู่หลายองค์ประกอบ แต่ในการเลือกสมการเพื่อนำมาเขียนโปรแกรมในการแสดงการแผ่กระจายของสนามไฟฟ้าในท่อนำคลื่นของโหมด TE และ สนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นของโหมด TM นั้น จะเลือกสนามที่มีองค์ประกอบเดียวกับทิศการเดินทางเท่านั้นมาพิจารณา

ในการพิสูจน์ความถูกต้องของการพัฒนาการเขียนโปรแกรม เริ่มจากท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมและท่อนำคลื่นแบบวงกลมก่อนโดยตรวจสอบความถูกต้องกับงานวิจัยที่มีผู้กระทำมาก่อน [1] และ [7] จากนั้นจึงนำวิธีการที่ตรวจสอบความถูกต้องแล้ว ไปใช้พัฒนาโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยของการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นแบบเซกเตอร์ของวงกลม แบบแกนร่วมวงกลม และแบบเซกเตอร์แกนร่วมของวงกลมในลักษณะของรูปภาพทั้ง 5 ชนิดของท่อนำคลื่น โดยแสดงความแตกต่างของโหมดการแผ่กระจายคลื่นออกไปในหลายโหมดย่อย

ข้อจำกัดของโครงการนี้ ก็คือ ยังคงสามารถแสดงผลลัพธ์ที่เป็นรูปภาพได้เฉพาะสนามไฟฟ้าในโหมด TE และสนามแม่เหล็กในโหมด TM เท่านั้น สำหรับในส่วนของสนามแม่เหล็กของโหมด TE และสนามไฟฟ้าในโหมด TM นั้นยังไม่สามารถใช้วิธีการเดียวกันนี้ได้ เนื่องจากมีระยะเวลาที่จำกัด และต้องใช้ความรู้ที่สูงกว่าที่ได้ศึกษามา ดังนั้นวิธีการแสดงการแผ่กระจายของสนามแม่เหล็กของโหมด TE และสนามไฟฟ้าของโหมด TM นั้น จะต้องทำการศึกษาในอนาคตต่อไป

บรรณานุกรม

[1] David M. Pozar, Microwave Engineering, John Wiley & Sons Inc., New York, pp.120-140, 1998.

[2] Gayle F. Miner, Line and Electronic Field for Engineers, Oxford University, pp.783-810, 1996

[3] ดร. กนต์ธร ชำนิประศาสน์, โปรแกรมเพื่อการคำนวณเชิงตัวเลข และการสร้างภาพสมรรถนะสูง (MATLAB), มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

[4] Darko Dajfez, James A. Gerald, Plotting Vector field with a Personal computer, IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques, Vol. MTT-35, No.11, November 1987

[5] S.W. Lue,Y. Zhuang, S.M. Cao, The Equivalent Parameters for the Radiating Slot on a Sectoral Waveguide, IEEE Transaction on Antennas and Propation , Vol. 42, No. 11, November 1994

[6] C. S. Lee, S. W. Lee, S. L. Chuang, Plot of Modal Field Distribution int Rectangular and Circular Waveguides, IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques, Vol. MTT-33, No. 3, March 1985

[7] Atef Elsherbeni, Darko Kajfez, Sheng Zeng, Circular Sectoral Waveguides, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 33, No. 6, December 1991

ประวัติผู้เขียน

นายวรากรณ์ สาริขา เกิดเมื่อวันที่ 3 มกราคม พ.ศ. 2523 มีภูมิลำเนาอยู่ จ.สุราษฎร์ธานี สำเร็จการศึกษาระดับมัธยมปลายจากโรงเรียนพรุพีพิทยาคม จ. สุราษฎร์ธานี เมื่อปี พ.ศ. 2541 ปัจจุบันเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 4 สาขาวิศวกรรมโทรคมนาคม สำนักวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี