โครงการหนึ่งอาจารย์หนึ่งผลงาน ประจำปี พ.ศ.2545

ประมวลสาระวิชาฟิสิกส์ 1 (หน่วยที่ 6-8)

โดย

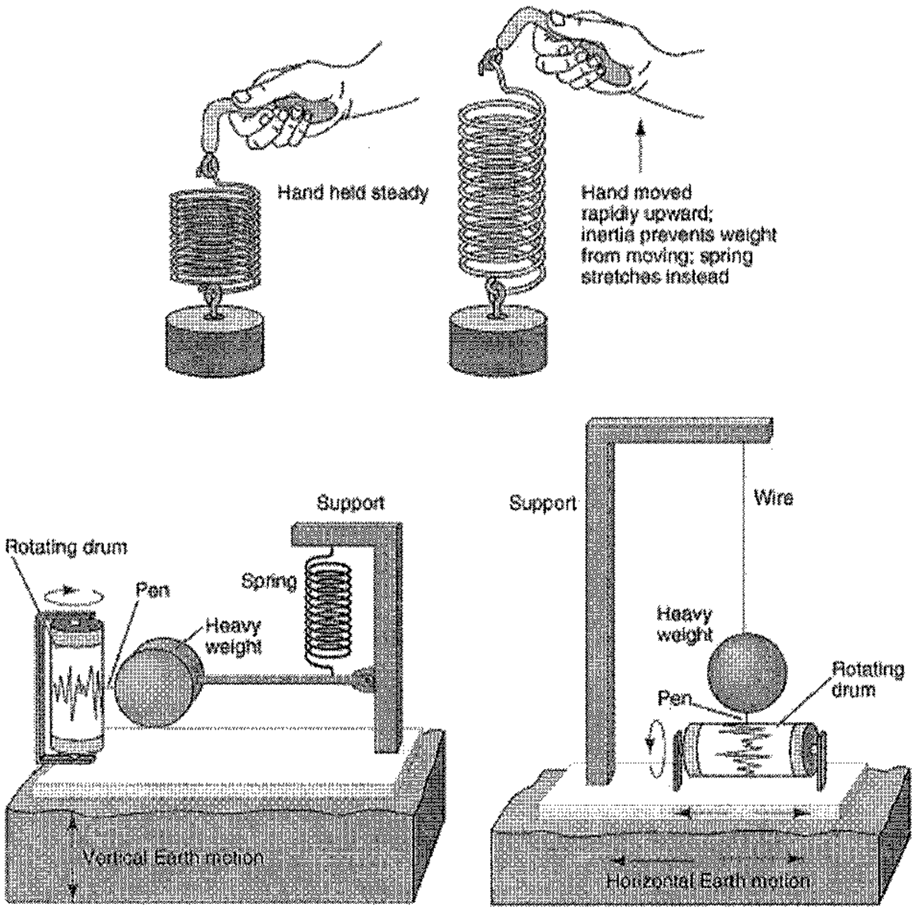
รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา ผาติเสนะ

สาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หน่วยที่
6

การแกว่งกวัด



โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา ผาติเสนะ

ตอนที่ 6.1

การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เมื่อวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามเวลา ถือว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่ ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุมีลักษณะกลับไปกลับมาซ้ำรอยเดิมอยู่ตลอดเวลา เราเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่เป็นคาบ (periodic motion) ตัวอย่างที่เราพบและมักอ้างอิงอยู่เสมอได้แก่ การแกว่งกวัดของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริงโดยไม่คิดแรงเสียดทาน การสั่นของเส้นลวด เป็นต้น

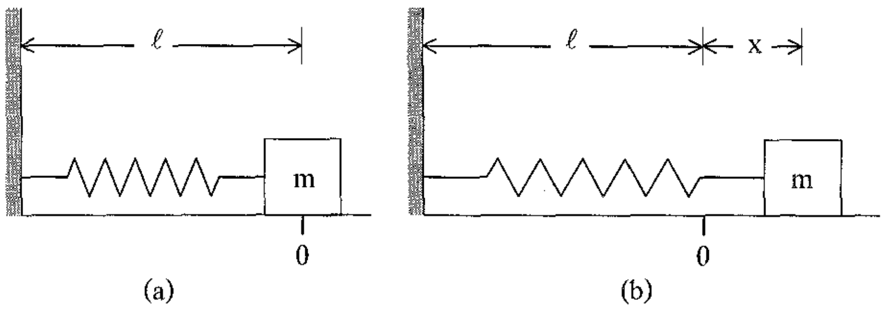
การเคลื่อนที่เป็นคาบอาจทำให้ปริมาณบางอย่างเปลี่ยนแปลงได้ตลอดเวลา จึงถือว่าเป็นการแกว่งกวัด (oscillation) เช่นกัน เช่น การแกว่งกวัดของกระแสหรือประจุในวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยขดลวดเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ ความหนาแน่นของอากาศเมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่าน การแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแสง เราเรียกการแกว่งกวัดที่มีลักษณะเป็นคาบโดยผ่านตำแหน่งสมดุลเพียงตำแหน่งเดียวว่าการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก (harmonic oscillation) ในกรณีที่การแกว่งกวัดผ่านตำแหน่งสมดุลมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง เราเรียกว่าการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก (anharmonic oscillation)

1. สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

การแกว่งกวัดเกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามของแรง (force field) สนามของแรงที่ขึ้นกับตำแหน่งเพียงอย่างเดียวไม่ขึ้นกับเวลาเรียกว่า สนามสถิต (static field) เช่น สนามแรงโน้มถ่วงของโลก สนามของแรงจากลวดสปริง สนามของแรงอีกประเภทเป็นสนามของแรงที่เปลี่ยนตามเวลา เช่น สนามกระแสสลับ เป็นต้น ในตอนนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการแกว่งกวัดในสนามสถิตเท่านั้น

เนื่องจากการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกตามตัวอย่างที่กล่าวในตอนต้น มีลักษณะที่คล้ายกันและสามารถอธิบายด้วยสมการการเคลื่อนที่แบบเดียวกัน เราจึงเริ่มต้นศึกษาจากตัวอย่างที่ง่ายที่สุด แต่เป็นรากฐานของการศึกษาการแกว่งกวัดที่ซับซ้อนอื่นๆ ตัวอย่างที่ง่ายที่สุด คือ การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริงเบา โดยไม่คิดความเสียดทานใดๆ ทั้งสิ้น การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (simple harmonic motion) ซึ่งมักเรียกสั้นๆ ว่า SHM และเรียกระบบมวลที่แกว่งกวัดในสนามสถิตว่า ตัวแกว่งกวัด (oscillator)

สมมติวัตถุมวล m วางอยู่บนโต๊ะที่พื้นไม่มีความเสียดทานเลย วัตถุก้อนนี้ยึดติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงเบา โดยปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุ ความยาวจากปลายข้างหนึ่งของสปริงที่ตรึงอยู่กับที่ไปจนถึงจุดกึ่งกลางมวลของวัตถุมีค่าเท่ากับ ℓ ดังรูปที่ 6.1 (a) ถ้าดึงวัตถุให้เคลื่อนที่ไปในแนวราบเป็นระยะทาง x ดังรูปที่ 6.1 (b) แล้วปล่อย วัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมารอบๆ ตำแหน่งสมดุล 0



รูปที่ 6.1 **แสดงตำแหน่งของมวลก่อนและหลังการดึง**

จากกฎของฮุก (Hooke's law) จะมีแรงดึงให้วัตถุกลับมาที่ตำแหน่งสมดุลเสมอเรียกว่า แรงดึงกลับ และเป็นปฏิภาคกับระยะยืด x กล่าวคือ

$$F = -kx \tag{6.1}$$

k เป็นค่าคงตัว เรียกได้หลายแบบคือ ค่าคงตัวสปริง (spring constant) ค่าคงตัวความยืดหยุ่น (elastic constant) หรือตัวประกอบความแข็งตึง (stiffness factor)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$ma = -kx$$

หรือ
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{6.2}$$

โดยที่
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{6.3}$$

สมการ (6.2) เป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีตัวแปร x เป็นฟังก์ชันของเวลา ในที่นี้ x เป็นการกระจัดของการแกว่งกวัด ซึ่งในบางครั้งอาจระบุเป็นมุมหรือตัวแปรอื่นก็ได้ การแก้สมการ (6.2) เราต้องหาฟังก์ชัน x(t) ซึ่งอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลามีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่งคูณกับค่าลบของฟังก์ชันเริ่มต้นนั้น ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์มีสมบัติดังกล่าว นอกจากนี้มุม θ อาจเขียนในเทอม ωt โดยที่ ω คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที และ t คือเวลา ω ในที่นี้เป็นค่าคงตัว ซึ่งแตกต่างจากกรณีของการหมุนซึ่งเปลี่ยนแปลงค่าได้ตลอดเวลา

การแก้สมการ (6.2) อาจทำได้ง่ายดังนี้ เนื่องจาก

$$v = \frac{dx}{dt}$$

และ
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

สมการ (6.2) หลังจากการอินทิเกรตเทียบกับ x แล้วจะกลายเป็น

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}x^2 + c \tag{6.4}$$

c คือค่าคงตัวของการอินทิเกรต

เมื่อ x มีค่าสูงสุด $\frac{dx}{dt}$ จะเท่ากับศูนย์ ค่าสูงสุดของ x นับจากตำแหน่งสมดุลเรียกว่า แอมพลิจูด (amplitude) แทนด้วยสัญลักษณ์ A ดังนั้น จากเงื่อนไข $\frac{dx}{dt} = 0$ ที่ $x = A$ ค่าของ c ในสมการ (6.4) คือ $c = \frac{\omega^2}{2}A^2$ แทนค่า c นี้ลงในสมการ (6.4) จะได้

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

หรือ
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \tag{6.5}$$

ซึ่งเป็นอัตราเร็วของตัวแกว่งกวัดที่ตำแหน่ง x และมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่ง $x = 0$ สมการ (6.5) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$$

หลังจากการอินทิเกรตทั้งสองข้างแล้วจึงได้

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \phi$$

หรือ
$$x = A\sin(\omega t + \phi) \tag{6.6}$$

ϕ คือค่าคงตัวของการอินทิเกรต ซึ่งหาได้จากการกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้น มุม $(\omega t + \phi)$ เรียกว่า มุมเฟส (phase angle) หรือเรียกสั้นๆ ว่า เฟส ϕ เรียกว่าเฟสเริ่มต้นหรือค่าคงตัวเฟส ซึ่งเป็นมุมเฟสที่เวลา $t = 0$ และ ω คือความถี่เชิงมุม อย่างไรก็ตามสมการ (6.6) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (6.2) อาจมีรูปแบบเป็นฟังก์ชันโคไซน์ได้เช่นกัน ทั้งนี้ขึ้นกับเงื่อนไขเบื้องต้นเป็นสำคัญ

เฟสเริ่มต้น ϕ มักกำหนดโดยค่าการกระจัดและความเร็วที่ $t = o$ นั่นคือเราต้องทราบทั้ง $x(o)$ และ $v(o)$ ยกเว้นที่ตำแหน่ง $x = \pm A$ เราไม่จำเป็นต้องกำหนดค่า $v(o)$ การกำหนดค่าใดค่าหนึ่งแต่เพียงอย่างเดียว ไม่อาจบอกค่า ϕ ได้แน่นอน เช่น ถ้ากำหนด $x(o) = o$ ค่าของ ϕ มีได้ 2 ค่าคือ 0 หรือ π จึงต้องกำหนด $v(o)$ ด้วยเพื่อทราบค่า ϕ ว่าเป็น 0 หรือ π อย่างไรก็ตาม เราสามารถเลือกค่า ϕ ได้ตามความพอใจ แต่ต้องกำหนดเวลาเริ่มต้นให้เหมาะสมกับสมการ เช่น ถ้าเรากำหนดสมการเป็น $x = A\sin\omega t$ เราต้องให้เวลาเริ่มต้นหรือ $t = o$ ที่ตำแหน่งสมดุล แต่ถ้าเรากำหนดสมการเป็น $x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$ เราต้องให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุดเป็น A เป็นต้น

คาบของการแกว่งกวัดซึ่งมักเรียกสั้นๆ ว่า คาบ (period) คือ เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบ 1 รอบ หรือเวลาสำหรับมุมเฟสเพิ่มขึ้น 2π ดังนั้น $\sin(\omega t + 2\pi) = \sin\omega(t + T)$ นั่นคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6.7}$$

ความถี่ f ซึ่งเป็นจำนวนรอบของการแกว่งกวัดใน 1 วินาที คือ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.8}$$

ในสมการ (6.6) ถ้าเราให้ $\phi = \frac{\pi}{2} + \phi'$ ดังนั้น

$$x = A\cos(\omega t + \phi') \tag{6.9}$$

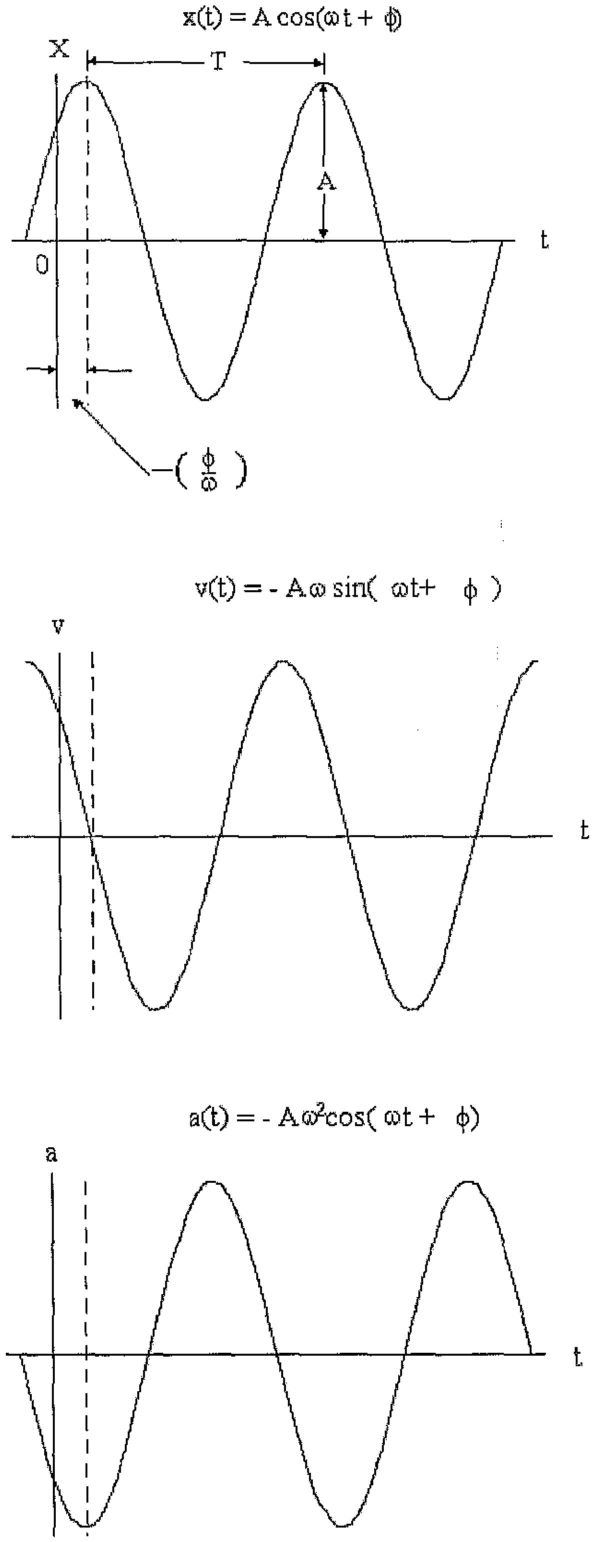
จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่แบบ SHM อาจแทนได้ด้วยฟังก์ชันโคไซน์เช่นกัน

จากสมการ (6.5) แสดงว่า ความเร็วของวัตถุที่ตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางได้สองทิศทาง ดังนั้นการระบุ $x(o)$ เพียงอย่างเดียว จึงไม่เพียงพอสำหรับการกำหนดเฟสเริ่มต้น จำเป็นต้องระบุทิศของ $v(o)$ ด้วยดังได้กล่าวในตอนต้นแล้ว

อัตราเร่งของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{6.10}$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น $\omega^2 A$ และมีทิศตรงข้ามกับการกระจัด x เสมอ



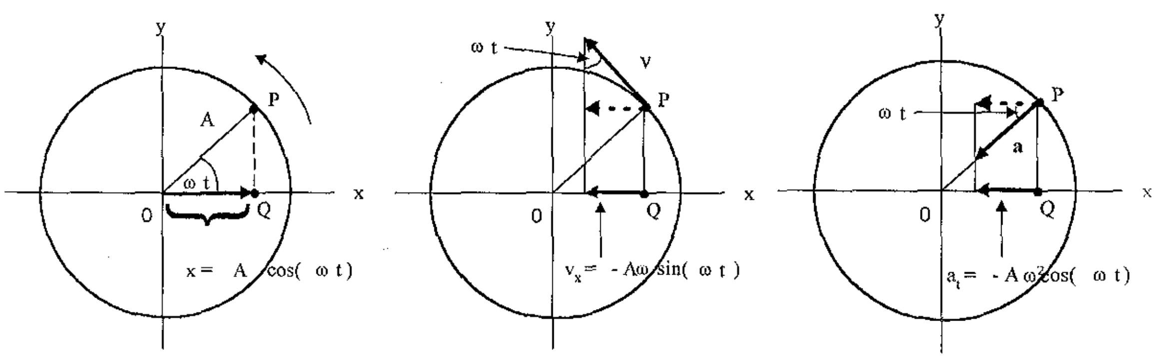
รูปที่ 6.2 **แสดงการกระจัด อัตราเร็วและอัตราเร่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ถ้าเฟสเริ่มต้น ϕ เท่ากับศูนย์ แกนในแนวดิ่งจะเลื่อนมาที่ตำแหน่งที่เป็นเส้นประ**

2. แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เราอาจเข้าใจการแกว่งกวัดแบบ SHM ได้ดียิ่งขึ้นหากเปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยใช้วงกลมอ้างอิง (reference circle) กล่าวคือ พิจารณาจุด P ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี A ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω สมมติจุด P เริ่มต้นอยู่ในแนวแกน x ที่ตำแหน่ง $x = A$ และเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ t มุมที่รัศมี A ทำกับแกน x คือ ωt ดังรูปที่ 6.3 (a) ฉายา (projection) ของจุด P บนแกน x คือจุด Q เมื่อจุด P เคลื่อนที่รอบวงกลม ฉายา Q จะแกว่งกวัดไปและกลับตามแนวแกน $\pm x$ ในลักษณะ SHM การกระจัดของ Q นับจากจุดเริ่มต้น 0 กำหนดโดย $x = A\cos\omega t$ ซึ่งเหมือนกับสมการ (6.9) โดยที่เฟสเริ่มต้น $\phi' = 0$

อย่างไรก็ตาม เราอาจเลือกเฟสเริ่มต้นที่ตำแหน่งใดๆ บนวงกลมก็ได้ โดยให้เริ่มนับเวลาที่ $t = 0$ และ SHM จะเป็นฉายาของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยไม่จำเป็นต้องตามแนวแกน x เท่านั้น

รูปที่ 6.3 (b) แสดงเวกเตอร์ของความเร็ว v ของจุด P ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $A\omega$ ฉายาของเวกเตอร์ v บนแกน x คือ $v_x = -A\omega\sin\omega t$ เครื่องหมาย – แสดงให้เห็นว่าเคลื่อนที่ในทิศทาง $-x$ ทำนองเดียวกัน รูปที่ 6.3 (c) แสดงเวกเตอร์ของความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของจุด P ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $A\omega^2$ และฉายาของความเร่งในแนวแกน x คือ $a_x = -A\omega^2\cos\omega t$ ดังนั้น วงกลมอ้างอิงจึงใช้เป็นเครื่องมือวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบ SHM ได้เป็นอย่างดี



(a) ตำแหน่ง x ของจุด Q (b) ความเร็ว v_x ของจุด Q (c) ความเร่ง a_x ของจุด Q

รูปที่ 6.3 **แสดงวงกลมอ้างอิงสำหรับ SHM ของจุด Q ซึ่งเคลื่อนที่ไป-กลับในแนวแกน ±x**

3. พลังงานของตัวแกว่งกวัด

สมมติเราให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้นการกระจัดที่เวลา t ใดๆ จึงกำหนดโดย

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{6.11}$$

พลังงานศักย์ของตัวแกว่งกวัดในขณะใดๆ คือ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{6.12}$$

จะเห็นได้ว่าพลังงานศักย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ และมีค่าต่ำสุดเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสมดุล ความเร็วของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$ $v = \omega A$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของตัวแกว่งกวัดที่ขณะใด คือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{6.13}$$

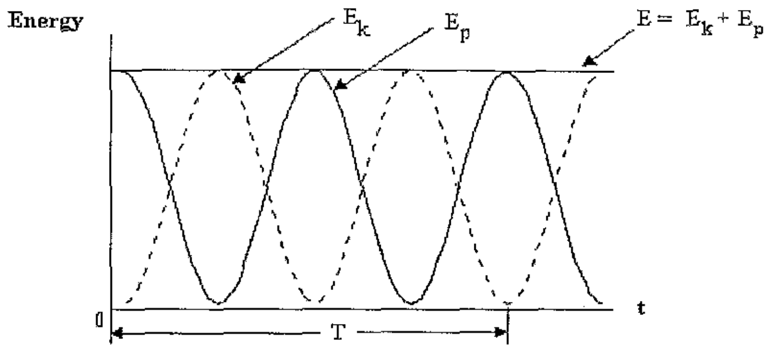
ซึ่งมีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่งสมดุล

พลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์หรือ

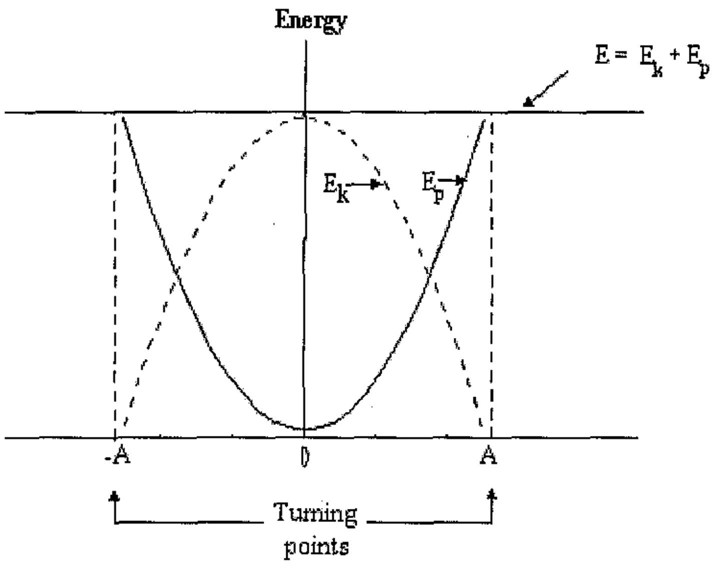
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \tag{6.14}$$

กราฟของพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวมของระบบแสดงในรูปที่ 6.4

(a)



(b)



รูปที่ 6.4 **แสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์ และพลังงานรวม ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา รูป (a) และการกระจัด รูป (b)**

จะเห็นได้จากสมการ (6.14) ว่าพลังงานรวมมีค่าคงตัวและเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่งสมดุล พลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ แต่พลังงานจลน์มีค่าสูงสุดที่ตำแหน่งอื่นๆ ผลรวมของพลังงานทั้งสองจะคงตัวเสมอคือเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่งซึ่งการกระจัดมีค่าสูงสุดพลังงานจลน์จะเท่ากับศูนย์ แต่พลังงานศักย์มีค่าสูงสุด นอกจากนี้จะเห็นได้จากรูปที่ 6.4 ว่าค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ในหนึ่งคาบจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของพลังงานศักย์พอดี และค่าเฉลี่ยของแต่ละพลังงานคือ $\frac{1}{4}kA^2$

สรุป

การกระจัดของการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว สามารถเขียนได้ในรูปของไซน์หรือโคไซน์ โดยขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเบื้องต้น ในบางครั้งเราอาจใช้วงกลมอ้างอิงเปรียบเทียบการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเชิงเดียวได้ง่ายขึ้น พลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดจะคงตัวเสมอ แต่อาจเปลี่ยนจากพลังงานหนึ่งไปสู่พลังงานหนึ่งได้ เช่น จากพลังงานจลน์เปลี่ยนไปเป็นพลังงานศักย์ แต่ค่าของพลังงานจะเท่าเดิมเสมอ

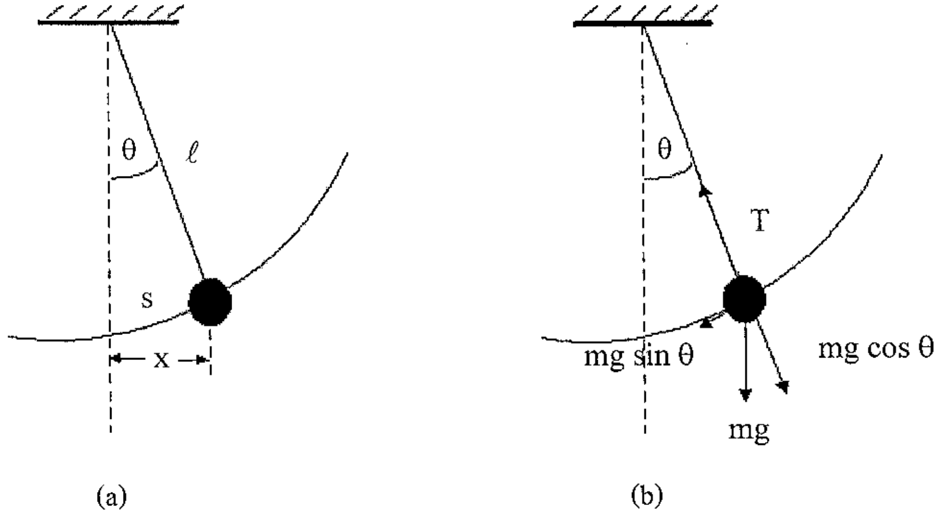
ตอนที่ 6.2

ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เมื่อออกแรงทำให้ระบบมีการเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งสมดุลจะมีแรงดึงกลับให้ระบบกลับสู่ตำแหน่งสมดุล และเมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบ SHM คือสมการ (6.2) ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างที่มีการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยกำหนด ω ซึ่งเป็นความถี่เชิงมุม และคาบ T ในเทอมของตัวแปรค่าต่างๆ ซึ่งขึ้นกับระบบที่แตกต่างกันไป

1. ลูกตุ้มเชิงเดียว

ลูกตุ้มเชิงเดียว (simple pendulum) ประกอบด้วยมวล m ผูกติดกับเชือกยาว ℓ โดยปลายอีกข้างหนึ่งของเชือกตรึงอยู่กับที่เมื่อดึงให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ จากตำแหน่งสมดุลซึ่งอยู่ในแนวดิ่ง แรงดึงกลับเท่ากับ $-mg\sin\theta$ สำหรับแรงตึงในเส้นเชือก T และแรง $mg\cos\theta$ ไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่แต่อย่างใด เมื่อการกระจัดมีค่าน้อย ส่วนโค้ง s จะมีค่าประมาณเท่ากับพิกัด x หรือ $s \approx x$ ดังแสดงในรูปที่ 6.5



รูปที่ 6.5 **แสดงการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียว**

$\sin\theta$ สามารถกระจายออกเป็นอนุกรมได้ดังนี้

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมเล็กๆ (วัดเป็นเรเดียน) เราพอจะประมาณได้ว่า

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{\ell}$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของระบบหาได้จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$= -mg\frac{x}{\ell}$$

หรือ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

โดยที่ $$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

แต่ $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ดังนั้น $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (6.15)$$

เป็นที่น่าสังเกตว่า คาบ T ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้ม แต่ขึ้นกับความยาวของเชือกและค่า g เท่านั้น

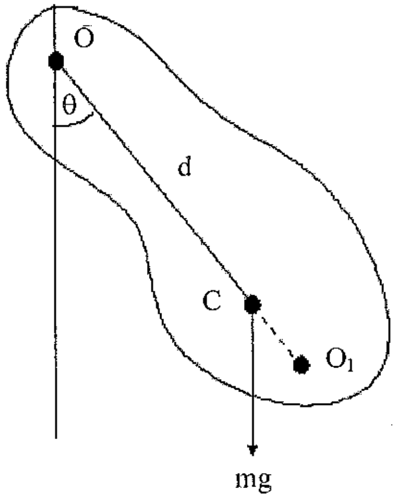
นอกจากนี้ สมการ (6.15) ใช้ได้กับกรณีที่ θ มีค่าไม่มากนัก ในกรณีที่ θ เป็นมุมค่อนข้างโต สมการ (6.15) จะประมาณได้เป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1^2\times 3^2}{2^2\times 4^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \dots\right\} \qquad (6.16)$$

ดังนั้น หากเราเพิ่มเทอมต่างๆ เข้าไปมากเพียงใด คาบที่ได้จะมีค่าแม่นตรงมากขึ้นตามไปด้วย

2. ลูกตุ้มฟิสิกัล

วัตถุแข็งเกร็งที่แกว่งกวัดรอบจุดหนึ่งที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวลเรียกว่าลูกตุ้มฟิสิกัล (physical pendulum) ให้ O เป็นจุดหมุนซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล C เป็นระยะ d ดังรูปที่ 6.6 เมื่อเส้น OC ทำมุม θ กับแนวดิ่ง ทอร์กดึงกลับในที่นี้มีค่าเท่ากับ $-mgd\sin\theta$ และจาก $\tau = I\alpha$ โดยที่ I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบ O ดังนั้น



รูปที่ 6.6 **แสดงลูกตุ้มฟิสิกัล**

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta$$

เมื่อ θ มีค่าไม่มากนักจะได้ $\sin\theta \approx \theta$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd\theta}{I}$$

$$= -\omega^2\theta$$

โดยที่ $$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (6.17)$$

คาบของการแกว่งกวัด คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (6.18)$$

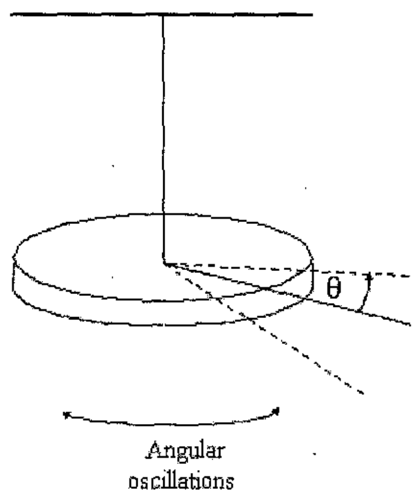
เนื่องจาก I เป็นฟังก์ชันของมวลของวัตถุ ดังนั้นคาบของการแกว่งกวัดในสมการ (6.18) จึงไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุแต่อย่างใด และเราอาจใช้หลักการของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้หาค่า I ของวัตถุที่มีรูปร่างต่างๆ ซึ่งไม่อาจคำนวณโดยคณิตศาสตร์ได้

ความยาวสมมูล (equivalent length) ของลูกตุ้มฟิสิกัล หรือ ℓ_{eq} คือความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากับคาบของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้กล่าวคือ $\ell_{eq} = \frac{I}{md}$ และจากทฤษฎีแกนขนาน $I = I_c + md^2$ ซึ่งมีค่ามากกว่า md^2 เมื่อ I_c คือโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลจึงเห็นได้ว่า ℓ_{eq} จะต้องมากกว่า d เสมอ

จุด O_1 ซึ่งอยู่ในแนว OC และระยะ $OO_1 = \ell_{eq}$ เราเรียกจุด O_1 ว่าศูนย์กลางการแกว่งกวัด (center of oscillation) ของลูกตุ้มฟิสิกัล ตำแหน่งของ O และ O_1 สามารถแทนที่กันได้ กล่าวคือ ถ้าเราให้ O_1 เป็นจุดหมุน O จะกลายเป็นศูนย์กลางการแกว่งกวัด โดยที่คาบของการแกว่งกวัดจะยังคงเท่าเดิม

3. ลูกตุ้มชนิดบิด

ลูกตุ้มชนิดบิด (torsional pendulum) ประกอบด้วยแผ่นโลหะกลมแบนตรงจุดศูนย์กลางของแผ่นยึดติดกับลวดโลหะยาว ซึ่งปลายอีกข้างหนึ่งของลวดห้อยแขวนในแนวดิ่ง ดังรูปที่ 6.7



***รูปที่ 6.7* แสดงลูกตุ้มชนิดบิด**

เมื่อเราออกแรงบิดแผ่นกลมเป็นมุม θ แล้วปล่อยแผ่นกลมจะบิดกลับไปกลับมาลวดโลหะที่ถูกบิดไปด้วยทำให้เกิดแรงดึงกลับมีค่าเท่ากับ $-C\theta$ โดยที่ C คือค่าคงตัวการบิด (torsional constant) ของลวดโลหะ เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับการหมุนจะได้

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

หรือ
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad (6.19)$$

โดยที่
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

คาบของการแกว่งกวัดในกรณีนี้ คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (6.20)$$

ถ้าลวดโลหะมีรัศมี r ยาว ℓ และมอดุลัสของสภาพแข็งเกร็ง หรือมอดุลัสเฉือนของลวดโลหะเป็น s (รายละเอียดจะได้กล่าวในเรื่องคลื่นกลของบทต่อๆ ไป) ดังนั้นค่าคงตัวการบิด C จะเป็น

$$C = \frac{\pi s r^4}{2\ell}$$

ตัวอย่างที่ 6.1 มวล 0.2 กิโลกรัม ผูกติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงแล้วแกว่งกวัดแบบ SHM ด้วยแอมพลิจูดขนาด 0.04 เมตร ค่าคงตัวสปริงเท่ากับ 25 นิวตันต่อเมตร จงหา

(a) ความถี่ของการแกว่งกวัด $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

(b) เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบ ในขณะที่มวลนี้เคลื่อนที่ไปทางขวามือเป็นระยะ 0.02 เมตร จากตำแหน่งสมดุล $T = \frac{1}{f}$

(c) อัตราเร็ว $V =$

(d) อัตราเร่งของมวลในขณะนั้น

วิธีทำ

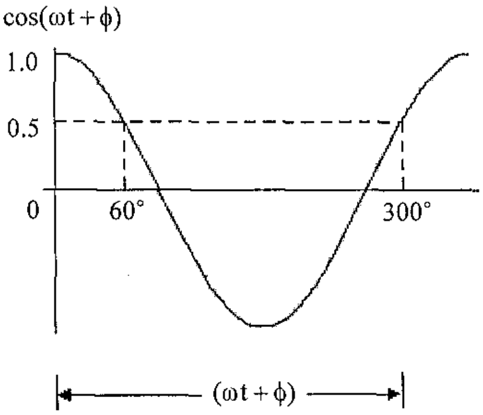
(a) ความถี่ของการแกว่งกวัดหาได้จากสมการ (6.8)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ \text{N/m}}{0.20\ \text{kg}}} = 1.78\ \text{Hz}$$

(b) คาบ T หาได้จากสมการ (6.8) เช่นกัน คือ

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.78\ \text{Hz}} = 0.562\ \text{s}$$

(c) การกำหนดตำแหน่งเฉพาะที่ใดๆ ใน SHM ควรเขียนกราฟของ x ที่เป็นฟังก์ชันของ t เพื่อทราบเฟสของการเคลื่อนที่ดังแสดงในรูป



รูปที่ 6.8 **กราฟของ x ที่เป็นฟังก์ชันของ t เพื่อการกำหนดเฟส**

นั่นคือ เพื่อหาค่า $(\omega t+\phi)$ ซึ่งปรากฏในสมการของ SHM เสมอ ในที่นี้คือ

$$x = A\cos(\omega t+\phi)$$

หรือ
$$(\omega t+\phi) = \cos^{-1}\left(\frac{0.02\ \text{m}}{0.04\ \text{m}}\right)$$

$$= \cos^{-1}(0.5)$$

$$= 60^\circ$$

แต่ที่มุม 60° มวลเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ และที่มุม 300° มวลเคลื่อนที่ไปทางขวามือและให้ค่าโคไซน์เดียวกัน ดังนั้น $\omega t+\phi = 300^\circ$ และอัตราเร็วในขณะนั้นคือ

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t+\phi)$$

$$= -(0.04\ \text{m})(2\pi)(1.78\ \text{Hz})\sin 300^\circ$$

$$= 0.387\ \text{m/s}$$ (เคลื่อนที่ไปทางขวามือ)

(d) อัตราเร่งกำหนดโดย

$$a = -\omega^2 x = -\left[(2\pi)(1.78\ \text{Hz})\right]^2(0.02\ \text{m})$$

$$= -2.50\ \text{m/s}^2$$ (ไปทางซ้ายมือ)

จะสังเกตเห็นว่าอัตราเร็วและอัตราเร่งมีทิศตรงกันข้าม

ตัวอย่างที่ 6.2 จงพิสูจน์ว่าความถี่ของการแกว่งกวัดของวัตถุมวล M ซึ่งห้อยแขวนไว้กับสปริงที่มีค่าคงตัวสปริงเป็น k และมวลของสปริงเท่ากับ m คือ

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}$$

วิธีทำ

สมมติสปริงยาว ℓ ดังนั้นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของสปริงคือ m/ℓ พิจารณาความยาวน้อยยิ่ง dx ที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากปลายบนของลวดเป็นระยะ x มวลของสปริงช่วงนี้จะเป็น $\frac{m}{\ell}dx$

ความเร็วที่ปลายล่างของสปริงคือ v ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วของมวล M ถ้าสปริงมีเนื้อสารสม่ำเสมอ การกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งที่หยุดนิ่งจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากจุดตรึงนั้น ดังนั้น อัตราเร็วของเนื้อสารของสปริงที่ระยะ x จะกำหนดโดย vx/ℓ และพลังงานจลน์คือ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\ell}dx\right)\left(\frac{vx}{\ell}\right)^2$$

พลังงานจลน์รวมของสปริงที่ตำแหน่งนั้นจะเป็น

$$E_k = \int_o^{\ell} \frac{1}{2}\frac{mv^2}{\ell^3}x^2dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mv^2}{\ell^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_o^{\ell} = \frac{mv^2}{6}$$

แต่พลังงานจลน์ของมวล M คือ $\frac{1}{2}Mv^2$

ดังนั้นพลังงานจลน์รวมของระบบจะเป็น $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{mv^2}{6}$

หรือ $$E_k = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)v^2$$

ถ้า y เป็นการกระจัดของมวล M จากตำแหน่งสมดุล ดังนั้น $v = \frac{dy}{dt}$ และแรงดึงกลับคือ $-ky$ พลังงานศักย์ของระบบจะเป็น

$$E_p = \int_o^y kydy = \frac{1}{2}ky^2$$

พลังงานรวมของระบบคือ

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\left(M+\frac{m}{3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{ky^2}{2}$$

เนื่องจากพลังงานมีการอนุรักษ์ ดังนั้น $\frac{dE}{dy} = 0$

หรือ $$\left(M+\frac{m}{3}\right)\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\left(M+\frac{m}{3}\right)}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (6.2)

$$\therefore\ \omega^2 = \frac{k}{M + \frac{m}{3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}}$$

และ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

ตัวอย่างที่ 6.3 ถ้าการกระจัดของการแกว่งกวัดใดๆ กำหนดโดย

$$x = -a\omega\cos\omega t + b\sin\omega t$$

จงพิสูจน์ว่าการเคลื่อนที่ดังกล่าวเป็น SHM และถ้าหาก $a = 6$ เซนติเมตร $b = 8$ เซนติเมตร และ $\omega = 3$ เรเดียน/วินาที จงหาคาบ อัตราเร็วสูงสุด และอัตราเร่งสูงสุดของการแกว่งกวัดนี้

วิธีทำ

อัตราเร็วที่เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\omega^2\cos\omega t + b\omega\cos\omega t$$

และอัตราเร่งคือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(a\omega\cos\omega t + b\sin\omega t) = -\omega^2 x$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM

คาบของการแกว่งกวัดคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ วินาที}$$

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดคือ

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

อัตราเร็วสูงสุด $= A\omega = 10\times 3 = 30\ \text{cm/s}$

อัตราเร่งสูงสุด $= \omega^2 A = 9\times 10 = 90\ \text{cm/s}^2$

ตัวอย่างที่ 6.4 อนุภาคมวล m แกว่งกวัดแบบ SHM ในแนวตรงด้วยแอมพลิจูด A และความถี่ f ถ้า r_1 และ r_2 เป็นการกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งสมดุลและสอดคล้องกับอัตราเร็ว v_1 และ v_2 ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(a) ความถี่ $$f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

(b) แอมพลิจูด $$A = \left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]^{1/2}$$

(c) พลังงานจลน์สูงสุด $$= \frac{1}{2}m\left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

วิธีทำ

(a) สมมติสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM กำหนดโดย

$$r = A\sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ A, ω และ ϕ คือแอมพลิจูด, ความถี่เชิงมุม และเฟส ตามลำดับ

อัตราเร็วของอนุภาคที่เวลาใดๆ คือ

$$v = \frac{dr}{dt} = Aw\cos(\omega t + \phi) = Aw\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}$$

$$= \omega\sqrt{A^2 - r^2}$$

ดังนั้น $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - r_1^2}$ และ $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - r_2^2}$

หรือ $$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

$$\omega = \left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

ความถี่ $$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

(b) $$v_1^2 = \omega^2\left(A^2 - r_1^2\right) = \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(A^2 - r_1^2\right)$$

$$A^2 - r_1^2 = v_1^2\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]$$

$$A^2 = v_1^2\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right] + r_1^2 = \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$A = \left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]^{1/2}$$

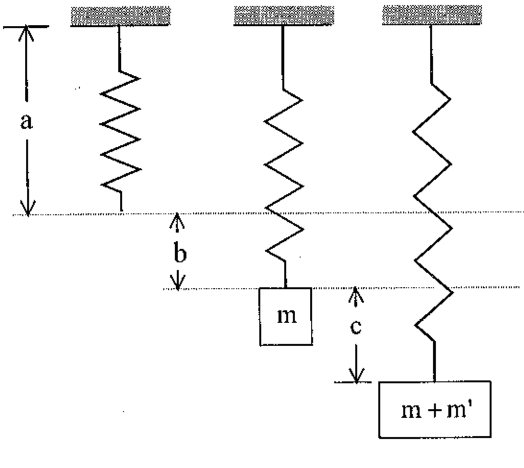
(c) พลังงานจลน์สูงสุด $$= \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

ตัวอย่างที่ 6.5 สปริงขดหนึ่งปลายข้างหนึ่งแขวนไว้กับผนังซึ่งตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีวัตถุห้อยปลายอีกข้างหนึ่งด้านล่าง ความยาวของสปริงจะเท่ากับ a เมื่อนำวัตถุมวล m มาแขวนที่ปลายล่างของสปริง สปริงจะยืดออกจากเดิมเท่ากับ b และเมื่อนำวัตถุมวล m' มาห้อยเพิ่มเข้าไปอีก สปริงจะยืดออกเพิ่มขึ้นอีกเป็นระยะเท่ากับ c จงพิสูจน์ว่าเมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น ทำให้มวล m แกว่งกวัดตำแหน่งของมวล m ที่เวลา t ใดๆ จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ $a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t\right)$



รูปที่ 6.9 **ประกอบการคำนวณของตัวอย่างที่ 6.5**

วิธีทำ

เมื่อมวล m' ยังห้อยแขวนอยู่ มวล m จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเท่ากับ $a+b+c$
เมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น มวล m จะแกว่งกวัดในแนวดิ่ง สมการของการแกว่งกวัด คือ

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

แต่เราทราบว่า เมื่อมีมวล m แขวนไว้เพียงลำพัง สปริงจะยืดออกเท่ากับ b

ดังนั้น $$mg = kb$$

หรือ $$k = \frac{mg}{b}$$

แทนค่า k นี้ลงไปในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{g}{b}\right)y = -\omega^2 y$$

การกระจัด y ของมวล m ที่เวลา t ใดๆ คือ

$$y = A\sin(\omega t+\phi)$$

โดยที่ $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$, A และ ϕ เป็นค่าคงตัว
อัตราเร็วของมวล m กำหนดโดย

$$\frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{A^2-y^2}$$

เมื่อ $t = o$, $y = c$ และ $\frac{dy}{dt} = 0$

ดังนั้น $A = c$ และ $\phi = \frac{\pi}{2}$

และ $$y = c\cos\omega t = c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot t\right)$$

$\therefore$ เมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น ตำแหน่งของมวล m จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ

$$a+b+c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot t\right)$$

ตัวอย่างที่ 6.6 การเคลื่อนที่แบบ SHM แทนด้วยสมการ

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

โดยที่ y มีหน่วยเป็นเมตร t มีหน่วยเป็นวินาที และเฟสมีหน่วยเป็นเรเดียน จงคำนวณหา

(a) ความถี่ $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\omega = 2\pi f$

(b) คาบ $T = \frac{1}{f}$

(c) การกระจัดสูงสุด

(d) อัตราเร็วสูงสุด

(e) อัตราเร่งสูงสุด

(f) การกระจัดอัตราเร็ว และอัตราเร่ง ที่เวลา t = 0 และ t = 1 วินาที

วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM ที่กำหนดให้

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

เมื่อเทียบกับสมการทั่วไปของ SHM คือ

$$y = A\sin(\omega t + \alpha)$$

(a) จะเห็นได้ว่า $\omega = 10 = 2\pi f$

$\therefore$ ความถี่ $f = \frac{10}{2\pi} = 1.6$ Hz

(b) คาบ $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ วินาที

(c) การกระจัดสูงสุด = แอมพลิจูด = 10 เมตร

(d) อัตราเร็ว $v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$\therefore$ อัตราเร็วสูงสุด $= A\omega = (10\text{m})(10\,\text{s}^{-1}) = 100\ \text{m/s}$

(e) อัตราเร่งสูงสุด $= -A\omega^2 = -1000\ m/s^2$

เครื่องหมายลบ แสดงว่าอัตราเร่งมีทิศพุ่งเข้าหาตำแหน่งสมดุล

(f) เมื่อ $t = 0$

การกระจัด, $y = 10\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -5$ เมตร

อัตราเร็ว, $\frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = 10\times10\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= 100\times0.866\ m/s = 866\ m/s$

อัตราเร่ง, $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin\alpha = -10\times100\times(-0.5)$

$= 500\ m/s^2$

เมื่อ $t = 1$

การกระจัด, $y = 10\sin\left(10-\frac{\pi}{6}\right)$

$\approx 10\sin(3\pi) = 0$

อัตราเร็ว, $\frac{dy}{dt} = A\omega\cos\left(10-\frac{\pi}{6}\right)$

$\approx 10\times10\cos\pi = -100\ m/s$

อัตราเร่ง, $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin\left(10-\frac{\pi}{6}\right)$

$\approx -A\omega^2\sin\pi = 0$

ตัวอย่างที่ 6.7 อนุภาคแกว่งกวัดแบบ SHM กำหนดโดย

$$y = 5\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

คาบของการแกว่งกวัดเท่ากับ 20 วินาที และที่เวลา $t = 0$ การกระจัดของอนุภาคเท่ากับ +2 หน่วย จงหา

(a) เฟสเริ่มต้น

(b) มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วย

(c) เฟสที่แตกต่างกันระหว่างตำแหน่ง 2 ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่างกัน 5 วินาที

วิธีทำ

(a) เมื่อ $t = 0$ สมการการแกว่งกวัดจะเป็น

$$2 = 5\sin\phi$$

หรือ $$\sin\phi = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น เฟสเริ่มต้นคือ $$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

(b) เมื่อ $y = +3$ หน่วย

$$\therefore\ 3 = 5\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วย คือ

$$\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

(c) ให้ t_1 และ t_2 เป็นเวลาที่แตกต่างกัน 5 วินาที และ y_1 และ y_2 เป็นการกระจัดที่สอดคล้องกัน ดังนั้น

$$y_1 = 5\ \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right)$$

$$y_2 = 5\ \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right)$$

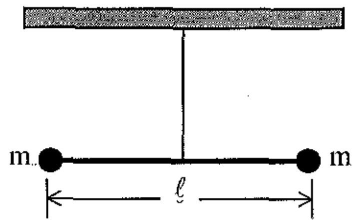
เฟสที่แตกต่างกันระหว่าง 2 ตำแหน่งนี้ คือ

$$\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right) - \left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right) = 2\pi\left(\frac{t_1 - t_2}{T}\right)$$

$$= 2\pi \times \frac{5}{20}$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

ตัวอย่างที่ 6.8 วัตถุชนิดเดียวกันสองก้อน แต่ละก้อนมีมวลเท่ากันคือ m = 0.002 กิโลกรัม ยึดติดกันด้วยแท่งโลหะเบาความยาว ℓ = 0.10 เมตร ตรงกลางแท่งโลหะแขวนไว้กับเพดานด้วยลวดโลหะ แล้วปล่อยให้แกว่งกวัดเช่นเดียวกับลูกตุ้มชนิดบิดด้วยคาบ 10 นาที จงหาค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะนั้น



รูปที่ 6.10 **ประกอบการคำนวณของตัวอย่างที่ 6.8**

วิธีทำ

จากสมการการแกว่งกวัดของลูกตุ้มชนิดบิด คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อย I (รอบจุดที่แขวน) ของก้อนมวลทั้งสองที่ยึดด้วยแท่งโลหะเบา คือ

$$I = (2m)r^2 = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2$$

ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{1}{2}ml^2\right) = \frac{2m\pi^2 l^2}{T^2}$$

แทนค่าต่างๆ รวมทั้งคาบ T = 10 นาที = 600 วินาที

ค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะคือ

$$C = \frac{2(2.0\times10^{-3}\ \mathrm{kg})(\pi^2)(0.10\mathrm{m})^2}{(600\,\mathrm{s})^2} = 1.10\times10^{-9}\ \frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{rad}}$$

สรุป

ตัวอย่างของระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียวมีหลายชนิด ในตอนนี้ได้ยกตัวอย่างเพียง 3 ชนิดเท่านั้น เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาตัวอย่างอื่นๆ ได้ทั้ง 3 ตัวอย่างนี้จะเริ่มจากการใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน เพื่อหาแรงดึงกลับ แล้วแก้สมการออกมาเพื่อให้ได้ความถี่เชิงมุมและคาบซึ่งกำหนดในเทอมของตัวแปรค่าต่างๆ ที่แตกต่างกันออกไป

ตอนที่ 6.3

การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุด

ฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดหรือมากกว่า 2 ชุด สามารถรวมกันได้เป็นชุดเดียว การรวมจะเป็นไปในหลายลักษณะ ในตอนนี้จะยกตัวอย่างการรวมที่ค่อนข้างง่ายและเห็นได้ชัด และสามารถทดลองในห้องปฏิบัติการได้ เช่น สามารถทดสอบรูปลิสซาจูส์ได้ถูกต้องจากเครื่องออสซิลโลสโคป

1. การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่มีความถี่เท่ากันและอยู่ในแนวเดียวกัน

พิจารณา SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน คือ

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

ผลรวมของ SHM ทั้งสองชุด คือ

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= A_1[\sin \omega t \cos\phi_1 + \cos \omega t \sin\phi_1] + A_2[\sin \omega t \cos\phi_2 + \cos \omega t \sin\phi_2] \\ &= \sin \omega t\,[A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2] + \cos \omega t\,[A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2] \end{aligned}$$

ให้ $R\cos\theta = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2$

$$R\sin\theta = A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2$$

ดังนั้น $x = R\sin\omega t\cos\theta + R\cos\omega t\sin\theta$

หรือ
$$x = R\sin(\omega t + \theta) \tag{6.21}$$

โดยที่ $R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2)$

หรือ $$R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (6.22)$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \quad (6.23)$$

กรณีที่น่าสนใจคือ

1) เมื่อ $\phi_1 = \phi_2 = \phi,\ R = A_1 + A_2$

$$\therefore\ x = (A_1 + A_1)\sin(\omega t + \phi)$$

หมายความว่าการแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM โดยมีความถี่เท่าเดิมคือ ω และแอมพลิจูดรวมเป็น $A_1 + A_2$

2) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = \pi$, หรือ SHM ทั้งสองมีเฟสตรงกันข้าม เช่น $\phi_1 = 0,\ \phi_2 = \pi$

ดังนั้น $$R = A_1 - A_2$$

และ $$x = (A_1 - A_2)\sin\omega t$$

หมายความว่าการแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM มีความถี่เท่าเดิมคือ ω แต่มีแอมพลิจูดรวมเป็น $A_1 - A_2$

3) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi,\ R = A_1 + A_2$

4) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = n\frac{\pi}{2},\ n = 1, 3, 5, ...$

$$\therefore\ R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

2. การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่มีความถี่เท่ากันแต่มีแนวตั้งฉากกัน

SHM สองชุดที่มีแนวตั้งฉากกันทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ (Lissajous figures) รูปร่างต่างๆ กันขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด ความถี่ และเฟสที่แตกต่างกันของ SHM สองชุดนั้น

สมมติ SHM สองชุดแทนด้วย

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

ดังนั้น $$\frac{y}{B} = \sin\omega t$$

$$\cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}$$

และ
$$\frac{x}{A} = \sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi$$

$$= \frac{y}{B}\cos\phi + \sin\phi\sqrt{1-\frac{y^2}{B^2}}$$

หรือ
$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\cos\phi\right)^2 = \sin^2\phi\left(1-\frac{y^2}{B^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi = \sin^2\phi \qquad (6.24)$$

ซึ่งเป็นสมการทั่วไปของวงรี (ellipse) เอียงทำมุมต่างๆ กับแกนของพิกัด กรณีที่น่าสนใจมีดังนี้

1) เมื่อ $\phi = 0$ หรือ SHM ทั้งสองไม่มีความต่างเฟสกัน ดังนั้น

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจตุภาคที่ 1 และ 3

2) เมื่อ $\phi = \frac{\pi}{4}$ แทนค่าลงในสมการ (6.24) จะได้

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\sqrt{2}\cdot\frac{x}{A}\frac{y}{B} = \frac{1}{2}$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี

3) เมื่อ $\phi = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรีที่สมมาตร และถ้า $A = B$,

$$x^2 + y^2 = A^2$$

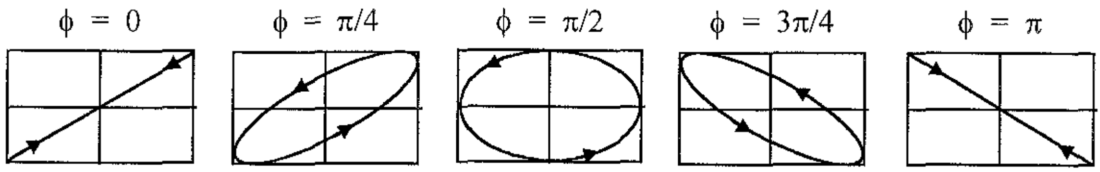
ซึ่งเป็นสมการวงกลมรัศมี A

4) เมื่อ $\phi = \pi$, ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4

สำหรับค่า ϕ ในช่วง π ถึง 2π รูปลิสซาจูส์จะมีลำดับที่ตรงข้ามกับกรณีค่า ϕ ในช่วง 0 ถึง π ข้างต้น



รูปที่ 6.11 **แสดงรูปลิสซาจูส์ที่ค่าเฟสต่างๆ สำหรับ SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน**

ในกรณีที่ SHM สองชุดมีความถี่ไม่เท่ากัน รูปลิสซาจูส์จะมีรูปร่างที่แตกต่างกันไป ซึ่งจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้ แต่จะยกตัวอย่างเพียงบางกรณีในหัวข้อต่อไป

ส้อมเสียง (tuning fork) สองอันที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน แต่ระนาบของการสั่นตั้งฉากกัน ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ได้เช่นกัน ถ้าเราทราบความถี่ของส้อมเสียงอันที่หนึ่ง เราสามารถคำนวณหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองได้ กล่าวคือ เนื่องจากส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่ แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย เฟสที่แตกต่างกันจะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ทำให้รูปลิสซาจูส์เปลี่ยนแปลงตลอดเวลาเช่นกัน สมมติรูปลิสซาจูส์หนึ่งๆ ใช้เวลา t วินาทีในการเปลี่ยนกลับมาเหมือนรูปเดิม ดังนั้น ส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่ต่างกันเท่ากับ 1/t ถ้าส้อมเสียงอันแรกมีความถี่เท่ากับ f ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f \pm (1/t)$ ซึ่งเป็นไปได้ทั้งสองค่า เพื่อให้แน่ใจว่าเป็นค่าใด เราใช้ขี้ผึ้งจำนวนเล็กน้อยยึดติดกับส้อมเสียงอันที่สอง ถ้า t_1 เป็นเวลาที่ใช้สำหรับการเปลี่ยนกลับมาเป็นรูปเดิม เมื่อ t มากกว่า t_1 ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f - (1/t)$ เมื่อ t น้อยกว่าดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f + (1/t)$ ที่เป็นเช่นนี้เพราะการใช้ขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียงอันใด ทำให้ส้อมเสียงอันนั้นมีความถี่ลดลงจากเดิมนั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น สมมติส้อมเสียง A และ B ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ ซึ่งมีคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที และเมื่อขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียง A ปรากฏว่าคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 10 วินาที ถ้าส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz ส้อมเสียง A จะมีความถี่ก่อนและหลังการยึดติดกับขี้ผึ้งเป็นเท่าใด

เนื่องจากส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz และคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที ดังนั้นส้อมเสียง A จะมีความถี่เท่ากับ $200 \pm (1/15)$ Hz กล่าวคือ 200.066 Hz หรือ 199.934 Hz ค่าใดค่าหนึ่ง

เมื่อใช้ขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียง A ทำให้ส้อมเสียง A มีความถี่ลดลง แต่คาบของการเปลี่ยนรูปร่างลดลงเหลือ 10 วินาที ซึ่งหมายความว่าส้อมเสียงทั้งสองจะต้องมีความถี่แตกต่างกันมากขึ้นกว่าเดิม เงื่อนไขเช่นนี้จะเป็นไปได้เมื่อส้อมเสียง A มีความถี่น้อยกว่าส้อมเสียง B เท่านั้น

ดังนั้น ก่อนยึดติดด้วยขี้ผึ้ง ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ 199.934 Hz และหลังการยึดติดด้วยขี้ผึ้ง ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ 200–(1/10) Hz หรือเท่ากับ 199.9 Hz

3. ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับรูปลิสซาจูส์

ตัวอย่างที่ 6.9 รูปลิสซาจูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:2

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A\sin(2\omega t + \phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

$$\therefore \sin\omega t = \frac{y}{B} \quad \text{และ} \quad \cos\omega t = \sqrt{1 - y^2/B^2}$$

แทนค่าลงในสมการแรกจะได้

$$\begin{aligned}\frac{x}{A} &= \sin 2\omega t\cos\phi + \cos 2\omega t\sin\phi \\ &= 2\sin\omega t\cos\omega t\cos\phi + (1 - 2\sin^2\omega t)\sin\phi \\ &= 2\left(\frac{y}{B}\right)\left(\sqrt{1 - y^2/B^2}\right)\cos\phi + \left\{1 - 2\left(\frac{y^2}{B^2}\right)\right\}\sin\phi\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x}{A} - \left\{1 - 2\frac{y^2}{B^2}\right\}\sin\phi = 2\frac{y}{B}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\cos\phi$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\sin\phi = 2\frac{y}{B}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\cos\phi$$

ยกกำลังสองทั้งสองด้าน

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)^2 + 4\frac{y^4}{B^4}\sin^2\phi + \left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)\cdot 4\frac{y^2}{B^2}\sin\phi = 4\frac{y^2}{B^2}\left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right)\cos^2\phi$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)^2 + 4\frac{x}{A}\frac{y^2}{B^2}\sin\phi + 4\frac{y^4}{B^4}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) - 4\frac{y^2}{B^2}(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = 0$$

$$\left(\frac{x}{A}-\sin\phi\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2}+\frac{x}{A}\sin\phi-1\right] = 0 \qquad (6.25)$$

สมการ (6.25) เป็นสมการทั่วไปของเส้นโค้งมี 2 วง (loops) สำหรับเฟสที่แตกต่าง ϕ ใดๆ และแอมพลิจูด A และ B

กรณีพิเศษมีดังนี้

1) เมื่อ $\phi = 0$ ดังนั้น สมการ (6.25) จะกลายเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2}-1\right] = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเลข 8 และมี 2 วง

2) เมื่อ $\phi = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{A}-1\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left(\frac{y^2}{B^2}+\frac{x}{A}-1\right) = 0$$

หรือ

$$\left[\left(\frac{x}{A}-1\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\right]^2 = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาซ้อนกัน 2 วง แต่ละวงอาจแยกออกได้เป็น

$$\left(\frac{x}{A}-1\right) + 2\frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$2y^2 = \frac{B^2}{A}(A-x)$$

$$y^2 = -\frac{B^2}{2A}(x-A)$$

ตัวอย่างที่ 6.10 รูปลิสซาจูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1 : 3

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A\sin(3\omega t+\phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

โดยวิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 6.9 จะได้

$$\left(\frac{x}{A}-\sin\phi\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2}+\frac{x}{A}\sin\phi-1\right] = 0 \qquad (6.25)$$

สมการ (6.25) เป็นสมการทั่วไปของเส้นโค้งมี 2 วง (loops) สำหรับเฟสที่แตกต่าง ϕ ใดๆ และแอมพลิจูด A และ B

กรณีพิเศษมีดังนี้

1) เมื่อ $\phi = 0$ ดังนั้น สมการ (6.25) จะกลายเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2}-1\right] = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเลข 8 และมี 2 วง

2) เมื่อ $\phi = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{A}-1\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left(\frac{y^2}{B^2}+\frac{x}{A}-1\right) = 0$$

หรือ

$$\left[\left(\frac{x}{A}-1\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\right]^2 = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาซ้อนกัน 2 วง แต่ละวงอาจแยกออกได้เป็น

$$\left(\frac{x}{A}-1\right) + 2\frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$2y^2 = \frac{B^2}{A}(A-x)$$

$$y^2 = -\frac{B^2}{2A}(x-A)$$

ตัวอย่างที่ 6.10 รูปลิสซาจูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:3

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A\sin(3\omega t+\phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

โดยวิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 6.9 จะได้

เมื่อ $\phi = 0$;

$$\left(4\frac{y^2}{B^2}-\frac{3y}{B}+\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

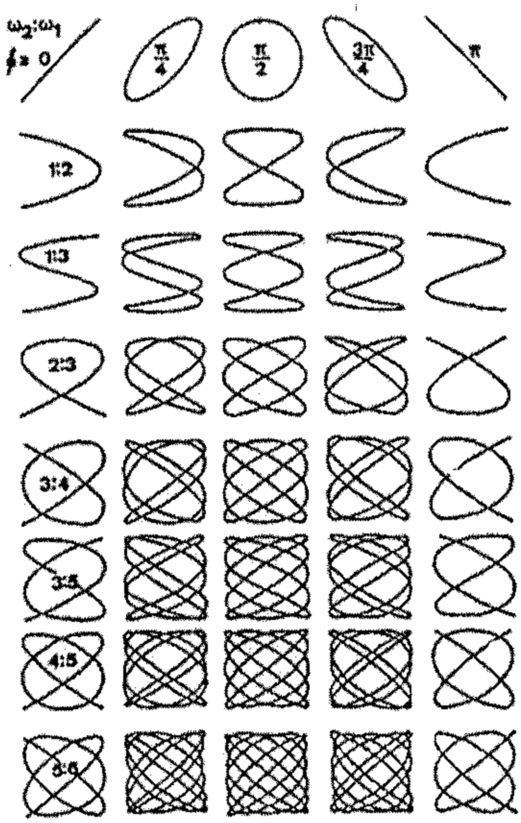
ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปลูกบาศก์ 2 รูปซ้อนกัน

เมื่อ $\phi = \pi/2$ สมการจะเป็น

$$\left(1-\frac{y^2}{B^2}\right)\left(1-4\frac{y^2}{B^2}\right)-\frac{x^2}{A^2} = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเส้นโค้ง 3 รูปซ้อนกัน

รูปลิสซาจูส์ของตัวอย่างที่ 1 และ 2 และอัตราส่วนความถี่อื่น แสดงในรูปที่ 6.12



รูปที่ 6.12 **แสดงรูปลิสซาจูส์อันเกิดจาก SHM สองชุดที่มีความถี่ และเฟสที่แตกต่างกันค่าต่างๆ**

ตัวอย่างที่ 6.11 ส้อมเสียง 2 อัน ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ โดยรูปจะเปลี่ยนจากพาราโพลาเป็นรูปเลข 8 และเปลี่ยนกลับไปเป็นรูปพาราโบลาอีก โดยใช้เวลารวม 6 วินาที ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกเป็น 100 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สอง

วิธีทำ

รูปลิสซาจูส์เปลี่ยนจากพาราโบลาเป็นรูปเลข 8 แล้วเปลี่ยนกลับไปเป็นพาราโบลา ดังนั้น อัตราส่วนของความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ 2:1

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกคือ 100 Hz ความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองอาจเป็น 50 Hz หรือ 200 Hz

เนื่องจากเวลาในการเปลี่ยนรูปครบ 1 รอบ เท่ากับ 6 วินาที ดังนั้น ส้อมเสียงทั้งสองจะมีความถี่แตกต่างกันเท่ากับ 1/6 วินาที

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ f_1 และ f_2 ดังนั้น ความเป็นไปได้ คือ

$$2f_1 - f_2 = \pm\frac{1}{6}$$

หรือ

$$2f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{6}$$

แต่เราทราบว่า $f_1 = 100$ Hz ดังนั้น ความเป็นไปได้ของ f_2 คือ

$$2(100) - f_2 = \pm\frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(200+\frac{1}{6}\right) \text{ หรือ } \left(200-\frac{1}{6}\right) \text{ Hz}$$

หรือ

$$2f_2 - 100 = \pm\frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(50+\frac{1}{12}\right) \text{ หรือ } \left(50-\frac{1}{12}\right) \text{ Hz}$$

สรุป

การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุดที่สำคัญคือ การรวมของฮาร์มอนิกเชิงเดียว 2 ชุดที่อยู่ในแนวเดียวกันและที่มีแนวตั้งฉากกัน รูปลิสซาจูส์ที่ปรากฏจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่แตกต่างออกไป

ตอนที่ 6.4

การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

ที่ผ่านมาเราไม่คิดค่าความเสียดทานโดยถือว่ามีค่าน้อยมาก ทำให้เกิดการแกว่งกวัดอย่างต่อเนื่อง โดยมีแอมพลิจูดคงตัว แต่ความเป็นจริงในธรรมชาติความเสียดทานย่อมมีเสมอ ทำให้แอมพลิจูดลดลงและหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เราเรียกการแกว่งกวัดเช่นนี้ว่า การแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation) แต่ถ้าเรายังต้องการให้มีการแกว่งกวัดตลอดไป จำเป็นต้องใช้แรงจากภายนอกมาช่วยการแกว่งกวัดเช่นนี้จะเรียกว่า การแกว่งกวัดแบบบังคับ

1. สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง

แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติในหลายๆ กรณีเกิดจากแรงเสียดทานของอากาศและแรงเสียดทานภายในลวดสปริง จึงมีลักษณะหนืด (viscous type) กล่าวคือ แรงเสียดทานจะไม่คงตัว แต่จะเป็นสัดส่วนกับความเร็ว และมีทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ สมมติแทนด้วย $F = -bv$ โดยที่ b เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ค่าคงตัวการหน่วง (damping constant) ดังนั้น แรงดึงกลับจึงประกอบด้วยสองส่วนคือ แรงดึงกลับอันเนื่องจากสปริง ($-kx$) และแรงดึงกลับอันเนื่องจากความหน่วง ($-bv$) และสมการการเคลื่อนที่ของระบบจะกลายเป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ถ้าให้ $$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$$

และ $$\omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

ดังนั้น $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \qquad (6.26)$$

โดยที่ τ เป็นค่าคงตัวเรียกว่า เวลาของการผ่อนคลาย (relaxation time) ซึ่งอาจให้นิยามว่าเป็นเวลาที่อัตราเร็วมีค่าเป็น $1/e$ เท่าของอัตราเร็วเริ่มต้น เมื่อไม่มีการหน่วง หรือ $b = 0$ ดังนั้น $\tau = \infty$ ซึ่งหมายความว่าเกิดการแกว่งกวัดแบบต่อเนื่องด้วยความถี่เชิงมุม $\sqrt{k/m}$

สมมติผลเฉลยของสมการ (6.26) คือ

$$x = Ae^{\alpha t}$$

โดยที่ A และ α เป็นค่าคงตัวใดๆ เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของค่า x นี้เทียบกับเวลา t แล้วนำไปแทนค่าลงในสมการ (6.26) จะได้

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{A\alpha}{\tau} e^{\alpha t} + \omega_o^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

หรือ
$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_o^2 = 0$$

ดังนั้น
$$\alpha = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_o^2}$$

ให้
$$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_o^2}$$

ค่าของ α จึงมีได้ 2 ค่าคือ

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\tau} + \beta$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\tau} - \beta$$

ซึ่งทำให้การกระจัดมีได้ 2 ค่าด้วย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6.26) จึงเป็น

$$x = e^{-t/2\tau}\left[A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}\right] \tag{6.27}$$

ค่าของ A_1 และ A_2 กำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ ที่เวลา $t = 0$ การกระจัดมีค่าสูงสุดคือ $A_1 + A_2$ และความเร็ว $\frac{dx}{dt} = 0$ ถ้าให้

$$A = A_1 + A_2 \tag{6.28}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ x ในสมการ (6.27) เทียบกับเวลา แล้วให้ $\frac{dx}{dt} = 0$ ที่ $t = 0$ จะได้

$$\beta(A_1 - A_2) = \frac{1}{2\tau}(A_1 + A_2)$$

$$= \frac{A}{2\tau}$$

หรือ
$$A_1 - A_2 = \frac{A}{2\beta\tau} \tag{6.29}$$

จากสมการ (6.28) และ (6.29) ดังนั้น

$$A_1 = \frac{A}{2}(1+\frac{1}{2\beta\tau})$$

$$A_2 = \frac{A}{2}(1-\frac{1}{2\beta\tau})$$

แทนค่า A_1 และ A_2 ลงในสมการ (6.27) ผลเฉลยทั่วไปจะกลายเป็น

$$x = \frac{A}{2}e^{-t/2\alpha}\left[(1+\frac{1}{2\beta\tau})e^{\beta t} + (1-\frac{1}{2\beta\tau})e^{-\beta t}\right] \qquad (6.30)$$

เราสามารถแยกออกได้เป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อ $\frac{1}{2\tau} > \omega_o$ หรือแรงต้านทานมากกว่าแรงดึงกลับ

การหน่วงในกรณีเช่นนี้จะมีค่ามาก แฟกเตอร์ $\sqrt{1/4\tau^2 - \omega_o}$ หรือ β จะเป็นจำนวนจริงและมีค่าบวก ดังนั้นเทอมทั้งสองของสมการ (6.30) จะประกอบด้วยเทอมเอกซ์โพเนนเชียลที่มีกำลังเป็นลบ ผลก็คือ การกระจัด x จะมีค่าลดลงโดยไม่มีการเปลี่ยนทิศทาง หรืออีกนัยหนึ่งไม่มีการแกว่งกวัดอีกเลย แต่จะคืนสู่ตำแหน่งสมดุล เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงเกิน** (overdamped)

กรณีที่ 2 เมื่อ $\frac{1}{2\tau} = \omega_o$

ค่าของ β ในกรณีนี้จะกลายเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตาม เราอาจกระจายเทอมต่างๆ ในสมการ (6.30) โดยเฉพาะอย่างยิ่งเทอม $e^{\beta t}$ และ $e^{-\beta t}$ แล้วให้ β ใกล้ศูนย์ สมการ (6.30) จะกลายเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau}(1+\frac{t}{2\tau}) \qquad (6.31)$$

เทอม $\frac{At}{2\tau}e^{-t/2\tau}$ จะลดลงช้ากว่าเทอม $Ae^{-t/2\tau}$ ระบบจะคืนสู่ตำแหน่งสมดุลภายในระยะเวลาอันสั้นมาก เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงวิกฤต** (critically damped)

กรณีที่ 3 เมื่อ $\frac{1}{2\tau} \langle \omega_o$ หรือแรงดึงกลับมากกว่าแรงต้านทาน

ค่าของ β ในกรณีนี้จะเป็นค่าจินตภาพ ถ้าให้ $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$

สมการ (6.30) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) + \frac{1}{2\omega\tau}\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right)\right]$$

หรือ $$x = Ae^{-t/2\tau}\left[\cos\omega t + \frac{1}{2\omega\tau}\sin\omega t\right]$$

ถ้าให้ $$A = a\sin\phi$$

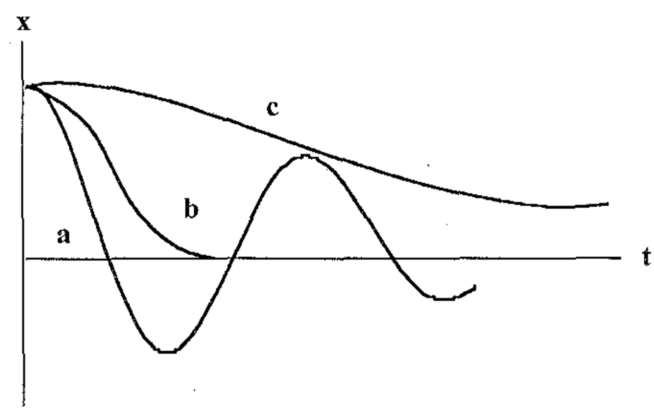
และ $$\frac{A}{2\omega\tau} = a\cos\phi$$

ดังนั้น $$a = \sqrt{A^2 + \frac{A^2}{4\omega^2\tau^2}} = \frac{A}{2\omega\tau}(4\omega^2\tau^2 + 1)^{1/2}$$

และ $$\phi = \tan^{-1} 2\omega\tau$$

$$\therefore\ x = ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \phi) \qquad (6.32)$$

ซึ่งมีการแกว่งกวัดด้วยความถี่เชิงมุม ω ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อยมากๆ หรือ $b = 0$ ความถี่ $\omega = \omega_0$ ซึ่งเป็น**ความถี่ธรรมชาติ** (natural frequency) ของระบบ กรณีเช่นนี้ แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดจะลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้น คือมีขนาด $ae^{-t/2\tau}$ เราเรียกการแกว่งกวัดในกรณีที่ 3 ว่าเป็น**แบบหน่วงขาด** (underdamped) การแกว่งกวัดแบบหน่วงทั้ง 3 กรณี แสดงในรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 **กราฟของการกระจัดกับเวลาแสดงการแกว่งกวัดแบบหน่วง 3 ประเภท คือ (a) หน่วงขาด (b) การหน่วงวิกฤต และ (c) การหน่วงเกิน**

2. พลังงานที่สูญเสียไป

พลังงานของการแกว่งกวัดแบบหน่วงจะมีค่าลดลงเสมออันเนื่องจากระบบจำเป็นต้องใช้พลังงานส่วนหนึ่งเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน

อนุพันธ์ของสมการ (6.32) เทียบกับเวลา คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\omega e^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \phi) - \frac{a}{2\tau}e^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \phi)$$

พลังงานจลน์ของระบบ

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{4\tau^2}\sin^2(\omega t+\phi)-\frac{\omega}{2\tau}\sin 2(\omega t+\phi)\right]$$

และพลังงานศักย์ของระบบ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_o^2a^2e^{-t/\tau}\sin^2(\omega t+\phi)$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา t ใดๆ กำหนดโดย

$$E = \text{พลังงานจลน์} + \text{พลังงานศักย์}$$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)+\left(\omega_o^2+\frac{1}{4\tau^2}\right)\sin^2(\omega t+\phi)-\frac{\omega}{2\tau}\sin 2(\omega t+\phi)\right]$$

ค่าเฉลี่ยพลังงานสำหรับคาบ T ใดๆ หาได้จากการหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอมทางขวามือของสมการสำหรับ E แต่เราทราบว่า

$$\frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t+\phi)dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(\omega t+\phi)dt = \frac{1}{2}$$

และ

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sin 2(\omega t+\phi)dt = 0$$

ดังนั้น พลังงานรวมสำหรับการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบจึงมีค่า

$$E_{ave} = \frac{1}{4}ma^2e^{-t/\tau}\left(\omega^2+\omega_o^2+\frac{1}{4\tau^2}\right)$$

เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย ค่าของ τ จะมีค่ามาก ดังนั้น เทอม $\frac{1}{4\tau^2}$ อาจตัดทิ้งได้ นอกจากนี้ ω มีค่าใกล้เคียงกับ ω_o มาก ดังนั้น

$$E_{ave} = \frac{1}{2}ma^2\omega_o^2e^{-t/\tau} \tag{6.33}$$

การสูญเสียกำลังโดยเฉลี่ยให้นิยามว่าคือค่าลบของอัตราเฉลี่ยการทำงานเพื่อต่อต้านแรงเสียดทาน หรือเป็นอัตราการลดค่าพลังงานเฉลี่ยของระบบซึ่งมีค่าดังนี้

$$P_{ave} = -\frac{d}{dt}E_{ave}$$

$$= \frac{1}{2\tau}ma^2\omega_o^2 e^{-t/\tau}$$

หรือ
$$P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau} \tag{6.34}$$

ตัวประกอบคุณภาพ (quality factor , Q) เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วยและเป็นตัววัดความเป็นอิสระของระบบต่อความหน่วง อาจให้นิยามว่าคือ 2π คูณกับอัตราการสูญเสียพลังงานเฉลี่ยต่อรอบ หรือ

$$Q = 2\pi \frac{\text{พลังงาน เฉลี่ยของระบบที่เก็บ สะสมไว้ต่อ รอบ}}{\text{การสูญเสีย กำลัง โดยเฉ ลี่ยต่อรอบ}}$$

$$= 2\pi\frac{E_{ave}}{P_{ave}T} = \frac{\omega E_{ave}}{P_{ave}} \tag{6.35}$$

ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อย หรือ $\omega \approx \omega_o$ และ $P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau}$

$$\therefore\ Q = \omega_o\tau \tag{6.36}$$

ตัวอย่างที่ 6.12 สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบหนึ่งกำหนดโดย

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

ถ้า $\frac{\omega_o}{b} \gg 1$ จงหาเวลาที่ทำให้

(a) แอมพลิจูดลดลงเป็น 1/e เท่าของแอมพลิจูดเริ่มต้น

(b) พลังงานของระบบลดลง 1/e เท่าของพลังงานเริ่มต้น

(c) พลังงานลดลง $1/e^4$ เท่าของพลังงานเริ่มต้น

วิธีทำ

สมการที่กำหนดให้ข้างต้นจะคล้ายกับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

เมื่อเปรียบเทียบกันจะเห็นว่า $b = \mu$ ดังนั้น จากเงื่อนไขที่กำหนดให้คือ $\frac{\omega_o}{b} \gg 1$ จึงเปลี่ยนไปเป็น $\frac{\omega_o}{\mu} \gg 1$ ซึ่งหมายความว่า $\mu \ll \omega_o$ นั่นคือจะมีการแกว่งกวัด ดังได้กล่าวในกรณีที่ 3 แล้ว โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-\mu t}\sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ความถี่เชิงมุม ω คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \mu^2} = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{\omega_o}\right)^2}$$

ω_o เป็นความถี่เชิงมุมที่ปราศจากการหน่วง

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$A = ae^{-\mu t} = ae^{-bt}$$

ซึ่งมีขนาดสูงสุดเท่ากับ a

(a) เมื่อแอมพลิจูด A มีขนาดเท่ากับ $\frac{a}{e}$ หรือ ae^{-1}

ดังนั้น $\mu t = 1$

หรือ $t = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{b}$

(b) พลังงานศักย์ของระบบที่เวลา t กำหนดโดย

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_o^2\left[ae^{-\mu t}\sin(\omega t+\phi)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_o^2 a^2 e^{-2\mu t}\sin^2(\omega t+\phi)$$

พลังงานรวม $E = (E_p)_{max} = \frac{1}{2}m\omega_o^2 a^2 e^{-2\mu t}$

ดังนั้น $E_{max} = \frac{1}{2}m\omega_o^2 a^2$

เมื่อพลังงาน E ลดลงเป็น E_{max}/e หรือ $E_{max}e^{-1}$ นั่นคือ

$$2\mu t = 1 \quad \text{หรือ} \quad t = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2b}$$

(c) เมื่อพลังงานลดลงเป็น E_{max}/e^4 นั่นคือ

$$2\mu t = 4 \quad \text{ดังนั้น} \quad t = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{b}$$

ตัวอย่างที่ 6.13 ในการทดลองหยดน้ำมันมิลลิแกน (Millikan oil-drop experiment) หยดน้ำมันที่มีประจุ q และมวล m หยดลงมาภายใต้แรงของสนามไฟฟ้า E และความโน้มถ่วง g ในตัวกลางที่มีลักษณะหนืด สมมติอัตราเร็วของหยดน้ำมันมีรูปแบบเป็น $v = A + Be^{-\alpha t}$ จงพิสูจน์ว่าความเร็วปลายคือ

$$v_{term} = \frac{q}{m}\tau E + g\tau$$

โดยที่ $\tau = \frac{m}{b} =$ เวลาของการผ่อนคลาย และ b คือ แฟกเตอร์การสูญเสียพลังงาน หรือค่าคงตัวการหน่วง

วิธีทำ

สมมติให้การเคลื่อนที่ลงมาตามแรงโน้มถ่วงมีค่าเป็นบวก และสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวเดียวกับแรงโน้มถ่วง ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของหยดน้ำมัน คือ

$$m\frac{dv}{dt} = mg + qE - bv$$

หรือ

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = q + \frac{g}{m}E$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$v = A + Be^{-\alpha t}$$

A , B และ α เป็นค่าคงตัวซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ เมื่อ $t = 0$ หยดน้ำมันเริ่มต้นจากการหยุดนิ่ง หรือ $v_o = 0$ ดังนั้น $A + B = 0$ หรือ $B = -A$

ผลเฉลี่ยจะเปลี่ยนไปเป็น

$$v = A\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

และความเร่ง

$$\frac{dv}{dt} = A\alpha e^{-\alpha t}$$

สมการการเคลื่อนที่ข้างต้นจะกลายเป็น

$$A\alpha e^{-\alpha t} + \frac{A}{\tau}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) = g + \frac{q}{m}E$$

เมื่อ $t \to \infty$ เราได้

$$\frac{A}{\tau} = g + \frac{q}{m}E$$

หรือ

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{A}\left(g + \frac{q}{m}E\right)$$

และเมื่อ $t = o$ เราได้

$$A\alpha = g + \frac{q}{m}E$$

หรือ $$\alpha = \frac{1}{A}\left(g + \frac{q}{m}E\right)$$

ดังนั้น $$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

แทนค่า α และ A ลงในสมการสำหรับ v จะได้

$$v = \tau\left(g + \frac{q}{m}E\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ความเร็วของหยดน้ำมันในขณะที่แรงเสียดทาน bv มีค่าเท่ากับแรงขับ (ซึ่งในที่นี้คือ $mg + qE$) เรียกว่าความเร็วปลาย ดังนั้น

$$v_{term} = v_{t=\infty} = \frac{q}{m}\tau E + g\tau$$

ตัวอย่างที่ 6.14 จงหาคาบของการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียวเมื่อคิดแรงต้านทานจากอากาศด้วย และถ้าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดลดลงเหลือครึ่งหนึ่งในระยะเวลา 138 วินาที จงหาเวลาของการผ่อนคลาย

วิธีทำ

เมื่อคิดแรงต้านทานของอากาศด้วยสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเชิงเดียวจะกลายเป็น

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -b\frac{d\theta}{dt} - mg\ell\sin\theta$$

ในกรณีที่ θ มีค่าน้อยๆ $\sin\theta \sim \theta$
โมเมนต์ความเฉื่อยของลูกตุ้มเชิงเดียวคือ $I = m\ell^2$
ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนไปเป็น

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\ell\theta = 0$$

หรือ $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\theta}{dt} + \omega_o^2\theta = 0$$

โดยที่ $$\frac{b}{m\ell^2} = \frac{1}{\tau} \quad \text{และ} \quad \frac{g}{\ell} = \omega_o^2$$

สำหรับการเคลื่อนที่ที่มีการแกว่งกวัด เงื่อนไขที่สำคัญ คือ $\frac{1}{2\tau} \langle \omega_o$ ดังนั้น ผลเฉลี่ยของสมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\theta = ae^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ แอมพลิจูด $A = ae^{-t/2\tau}$

และความถี่เชิงมุม คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4}}$$

ดังนั้น คาบ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4}\right)^{-1/2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 - \frac{b^2 g}{4m^2\ell^5}\right)^{-1/2}$$

$$= T_o\left(1 + \frac{b^2 g}{8m^2\ell^5}\right)$$

T_o คือคาบในกรณีที่ไม่คิดแรงต้านทาน

แอมพลิจูดสูงสุดคือ $A_{max} = a$

และแอมพลิจูดเมื่อเวลา $t = 138$ วินาที เท่ากับ $ae^{-138/2\tau} = \frac{a}{2}$

ดังนั้น

$$\frac{69}{\tau} = \log_e \frac{1}{2}$$

และ

$$\tau = \frac{69}{0.69} = 100 \text{ วินาที}$$

ดังนั้น เวลาของการผ่อนคลายเท่ากับ 100 วินาที

ตัวอย่างที่ 6.15 มวล 1 กิโลกรัม ถูกกระทำด้วยแรงซึ่งมีค่าคงตัวเท่ากับ 400 นิวตัน/เมตร และแรงเสียดทานขนาด 4 นิวตัน/เมตร/วินาที ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x = 0$ และ $v = 2$ เมตร/วินาที ที่ $t = 0$ จงหา

(a) ความถี่เชิงมุมของการแกว่งกวัด

(b) พลังงานของระบบที่ $t = 0$

(c) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อวินาที ที่ $t = 0$ และที่เวลาใดๆ

(d) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบที่ $t = 0$ และที่เวลาใดๆ

(e) จำนวนรอบของการแกว่งกวัดก่อนที่แอมพลิจูดลดลง 1/e ของค่าเริ่มต้น

วิธีทำ

(a) สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx = 0$$

ในที่นี้ $m = 1$ กก. $b = 4$ นิวตัน/เมตร/วินาที

และ $k = 400$ นิวตัน/เมตร

ดังนั้น $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20$ เรเดียน/วินาที

และ $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} = 4$ หรือ $\tau = 1/4$ วินาที

จะเห็นว่า $\frac{1}{2\tau} \langle \omega_o$ ดังนั้น ระบบจะมีการแกว่งกวัด โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t+\phi)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x = o$ เมื่อ $t = o$ ดังนั้น $\phi = 0$

และ $x = ae^{-t/2\tau}\sin\omega t$

ω คือความถี่เชิงมุมของการหน่วง กำหนดโดย

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 1/4\tau^2} = \sqrt{400-4} = 19.9 \text{ เรเดียน/วินาที}$$

(b) อัตราเร็วที่เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-a}{2\tau}e^{-t/2\tau}\sin\omega t + a\omega e^{-t/2\tau}\cos\omega t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $t = o$, $v = 2$ เมตร/วินาที

ดังนั้น $a\omega = 2$ หรือ $a = \frac{2}{19.9} \approx \frac{1}{10}$

พลังงานจลน์ $E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{4\tau^2}\sin^2\omega t - \frac{\omega}{2\tau}\sin 2\omega t\right]$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา t ใดๆ = พลังงานจลน์สูงสุด

หรือ $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2e^{-t/\tau}$

และพลังงานรวมที่ $t = o$ คือ $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = 2$ จูล

(c) อัตราการสูญเสียพลังงาน $= \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

$$\therefore \left(\frac{dE}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{2\tau}ma^2\omega^2 = 8 \text{ จูล}$$

(d) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบ $= \left(\frac{dE}{dt}\right)(T)$ เมื่อ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore \left(\frac{dE}{dt}\right)(T)_{t=0} = \frac{8 \times 6.28}{19.9} = 2.4 \text{ จูล/วินาที}$$

(e) แอมพลิจูด $A = ae^{-t/2\tau}$ โดยที่ $A_{max} = a$

เมื่อแอมพลิจูดลดลงเป็น $A_{max}/e = \frac{a}{e} = ae^{-1}$

ดังนั้น $\frac{t}{2\tau} = 1$ หรือ $t = 2\tau = \frac{1}{2}$ วินาที

และจำนวนรอบในช่วงเวลา $\frac{1}{2}$ วินาที

$$= \frac{t}{T} = \frac{\omega}{4\pi} = 1.6 \text{ รอบ}$$

3. ผลของแรงภายนอก

เราทราบจากหัวข้อที่แล้วว่า แรงเสียดทานทำให้การแกว่งกวัดลดลง และหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เพื่อให้การแกว่งกวัดคงอยู่ไปนานๆ จำเป็นต้องมีแรงภายนอกมากระทำอย่างสม่ำเสมอ สมมติแรงภายนอกดังกล่าวคือ $F_o \sin \omega t$ กระทำต่อระบบซึ่งมีมวล m ค่าคงตัวสปริง k ค่าคงตัวการหน่วง b ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin \omega t \qquad (6.37)$$

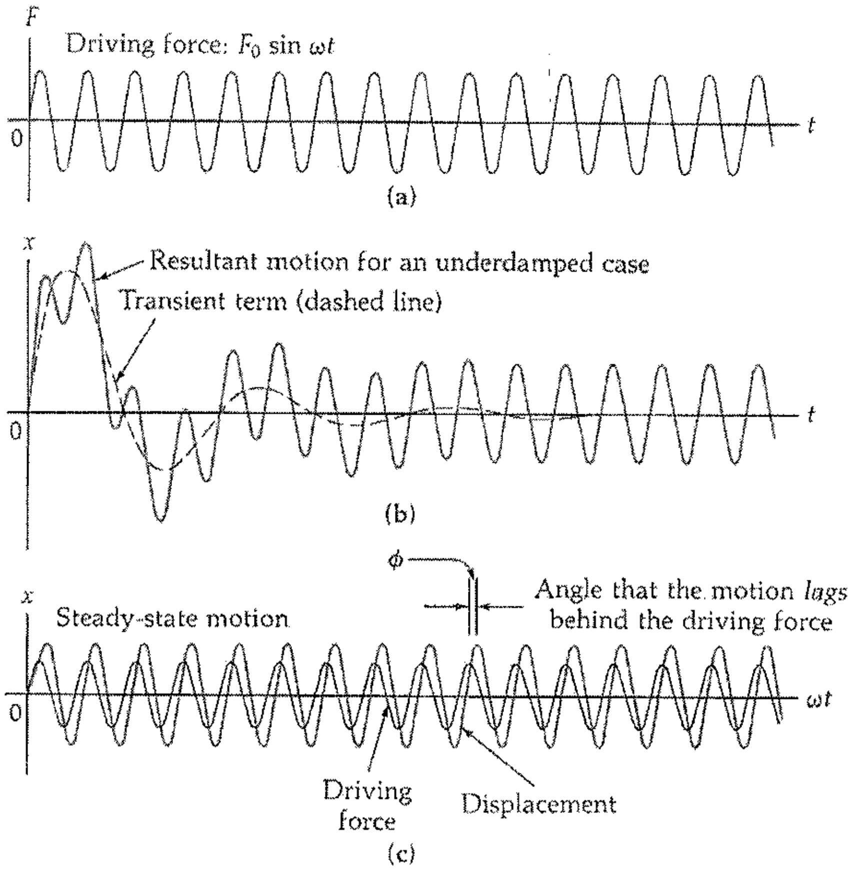
เพื่อไม่ให้สับสนกับสัญกรณ์ (notation) ของความถี่ที่ผ่านมา จึงกำหนดให้ ω เป็นความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำอย่างต่อเนื่อง (ซึ่งในที่นี้กำหนดเป็นคลื่นไซน์) ω' เป็นความถี่ที่เกิดจากการหน่วง และ ω_o เป็นความถี่ธรรมชาติ ซึ่งเป็นความถี่ที่ปราศจากแรงเสียดทานหรือแรงภายนอกอื่นใด

ผลเฉลี่ยของสมการ (6.37) ประกอบด้วย 2 เทอม คือ เทอมของภาวะชั่วครู่ (transient term) และเทอมของสถานะคงตัว (steady state term) กล่าวคือ เมื่อเริ่มต้นมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ แรงภายนอกจะเพิ่มค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบจนกระทั่งอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่ให้แก่ระบบมีค่าเท่ากับอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่สูญเสียไปเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน ช่วงดังกล่าวนี้เป็นภาวะชั่วครู่ การกระจัดจะมีค่ามากและลดลงอย่างรวดเร็วแบบเอกซ์โพเนนเชียล เทอมของภาวะชั่วครู่จึงเป็นผลเฉลยของสมการ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx = 0$$

ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา การเคลื่อนที่ในช่วงนี้ขึ้นกับการกระจัดเริ่มต้น และอัตราเร็วของมวล และยังขึ้นกับเฟสของแรงภายนอกที่มากระทำด้วย

หลังจากที่เทอมของภาวะชั่วครู่หายไป ระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดแบบคลื่นไซน์มวลของระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดด้วยความถี่ ω เท่ากับความถี่ของแรงขับภายนอก แต่มีเฟสต่างกันเท่ากับ ϕ กล่าวคือ คลื่นการแกว่งกวัดของระบบจะตามหลังคลื่นของแรงภายนอกด้วยมุม ϕ ดังแสดงในรูปที่ 6.14 การแกว่งกวัดในช่วงหลังนี้จึงเป็นการแกว่งกวัดในสถานะคงตัว



รูปที่ 6.14 **แสดงการแกว่งกวัดแบบบังคับ (a) แสดงคลื่นของแรงขับภายนอก (b) เทอมของภาวะชั่วครู่ และ (c) การเคลื่อนที่ที่สถานะคงตัว**

เทอมของสถานะคงตัวเป็นเทอมที่อธิบายการแกว่งกวัดของระบบหลังจากที่เทอมของภาวะชั่วครู่หายไป

ถ้าเรากำหนดให้ $\frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}, \frac{k}{m} = \omega_o^2$ และ $\frac{F_o}{m} = f_o$ สมการ (6.37) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = f_o \sin \omega t \tag{6.38}$$

สมมติว่าผลเฉลี่ยของสมการ (6.38) มีรูปแบบเป็น

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \tag{6.39}$$

โดยที่ A คือแอมพลิจูด และ ϕ คือเฟสที่แตกต่างกันระหว่างคลื่นการแกว่งกวัดของระบบและคลื่นของแรงภายนอก

หาอนุพันธ์ของสมการ (6.39) 2 ครั้งเทียบกับเวลา t แล้วแทนค่าเทอมต่างๆ ลงในสมการ (6.38) จะได้

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t + \phi) + \omega_o^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$= f_o \sin \omega t = f_o \sin(\omega t + \phi - \phi)$$

หรือ

$$\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) A \sin(\omega t + \phi) + \frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t + \phi)$$

$$= f_o \sin(\omega t + \phi)\cos\phi - f_o \cos(\omega t + \phi)\sin\phi \tag{6.40}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม $\sin(\omega t + \phi)$ และ $\cos(\omega t + \phi)$

$$A\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) = f_o \cos\phi$$

และ $$\frac{A\omega}{\tau} = -f_o \sin\phi$$

เมื่อนำมาหารกันจะได้ $$\tan\phi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

หรือ $$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega/\tau}{\omega^2 - \omega_o^2} \tag{6.41}$$

และเมื่อยกกำลังสองของทั้งสองเทอมแล้วนำมาบวกกันจะได้

$$A^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{A^2\omega^2}{\tau^2} = f_o^2$$

หรือ
$$A = \frac{f_o}{\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}} \tag{6.42}$$

พิจารณา 3 กรณีที่เกิดขึ้น :

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $\omega \langle\langle \omega_o$

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติมากๆ จึงอาจตัดเทอมของ ω ในสมการ (6.42) ดังนั้น
$$A = \frac{f_o}{\omega_o^2} = \frac{F_o}{k} \tag{6.43}$$

ในกรณีเช่นนี้ การตอบสนองจึงเกิดจากค่าของตัว k เท่านั้นนอกจากนี้เมื่อ $\omega \to 0$ ค่าของ $\tan\phi \to 0$ หรือ $\phi \to 0$ ซึ่งหมายถึงเฟสที่แตกต่างกันมีค่าน้อยมาก หรือมีการตอบสนองด้วยความถี่เดียวกับแรงภายนอก

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $\omega = \omega_o$ (การสั่นพ้องแอมพลิจูด)

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกเท่ากับความถี่ธรรมชาติพอดี แอมพลิจูดจะมีค่าสูงสุด กล่าวคือ
$$A_r = \frac{f_o}{\omega/\tau} = \frac{f_o \tau}{\omega_o} \tag{6.44}$$

และแทนค่า $\omega = \omega_o$ ลงในสมการ (4.5) จะได้ $\phi = -\frac{\pi}{2}$ ซึ่งหมายความว่า เมื่อมีการสั่นพ้อง แรงภายนอกนำหน้าการตอบสนองด้วยมุม $\pi/2$ แอมพลิจูดของการสั่นพ้องขึ้นอยู่กับการหน่วง กล่าวคือ เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย τ จะมีค่ามาก ดังนั้น A_r จะมีค่ามาก และถ้าไม่มีการหน่วงเลย หรือ $b = 0$, $\tau = \infty$ แอมพลิจูดของการสั่นพ้อง A_r จะมีค่าอนันต์

เมื่อมีการหน่วง แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมิได้มีค่าสูงสุดที่ $\omega = \omega_o$ พอดี กล่าวคือ อนุพันธ์ของ A ในสมการ (6.42) เทียบกับ ω โดยให้ ω_o เป็นค่าคงตัว จะได้
$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{1}{2} f_o \frac{(-2)2\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) + 2\omega/\tau^2}{\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2/\tau^2\right]^{3/2}} = 0$$

หรือ
$$-4\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

$$\therefore\ \omega = \omega_o\sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_o^2\tau^2}} \tag{6.45}$$

ซึ่งเป็นความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมีค่าสูงสุด จะเห็นได้ว่า ω มีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ ω_o เล็กน้อย และถ้าหากความหน่วงมีค่าน้อยมาก τ จะมีค่ามากดังนั้นจึงอาจตัดเทอม $1/2\omega_o^2\tau^2$ ออกไปได้ และ ω จะเท่ากับ ω_o

<u>กรณีที่ 3</u> เมื่อ $\omega \gg \omega_o$

ถ้าให้ $\omega_o = 0$ ในสมการ (6.42) จะได้

$$A = \frac{f_o}{\left[\omega^4 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

และเมื่อการหน่วงมีค่าน้อยมาก $\tau \to \infty$ จึงอาจตัดทิ้งเทอม $\dfrac{\omega^2}{\tau^2}$ ดังนั้น

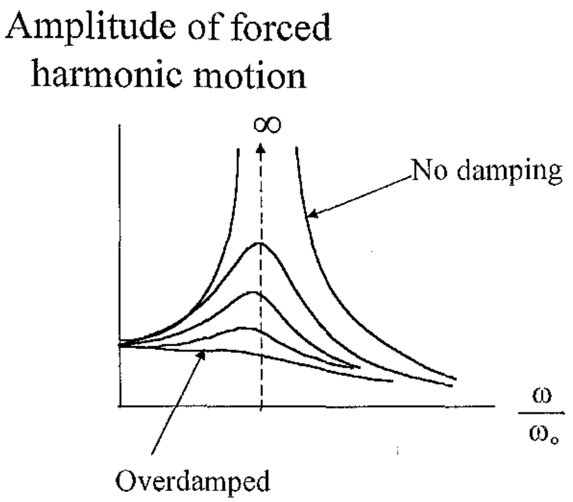
$$A = \frac{f_o}{\omega^2} = \frac{F_o}{m\omega^2} \qquad (6.46)$$

จะเห็นได้ว่า แอมพลิจูดลดลงเมื่อความถี่ของแรงภายนอกเพิ่มขึ้น และจากสมการ (6.41) เราได้ว่า

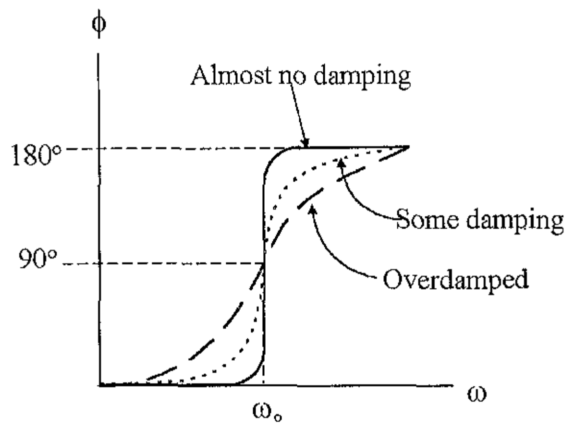
$$\tan\phi \to -0 \quad \text{หรือ} \quad \phi \to -\pi$$

ในกรณีเช่นนี้ การกระจัดของการตอบสนองจะตามหลังแรงภายนอกด้วยเฟสเท่ากับ π

เมื่อแรงภายนอกกระทำต่อระบบได้ระยะหนึ่ง ระบบจะเกิดการแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่ไม่ใช่ความถี่ธรรมชาติของระบบเอง แต่ระบบจะแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่เท่ากับความถี่ของแรงภายนอก แอมพลิจูดที่มีค่าน้อยแสดงว่าแรงเสียดทานมีค่ามาก และขึ้นกับความถี่ของแรงภายนอก รูปที่ 6.15 แสดงกราฟของแอมพลิจูดที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอก โดยมีความถี่ธรรมชาติที่ปราศจากการหน่วงอยู่ในแนวดิ่ง ความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดมีค่าสูงสุดเรียกว่า ความถี่ของการสั่นพ้อง (resonant frequency) เมื่อระบบปราศจากแรงเสียดทาน ความถี่ของการสั่นพ้องเท่ากับความถี่ธรรมชาติ แอมพลิจูดจะมีค่าอนันต์ เมื่อมีแรงเสียดทานแอมพลิจูดจะลดลง โดยมีความถี่ของการสั่นพ้องน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติเล็กน้อย



รูปที่ 6.15 แสดงแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่เป็นฟังก์ชัน ของความถี่ของแรงภายนอก และที่การหน่วงแตกต่างกัน



รูปที่ 6.16 แสดงมุมเฟส ϕ ของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่ล้าหลังแรงภายนอก และเป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอกที่การหน่วงค่าต่างๆ

สรุป

การแกว่งกวัดแบบหน่วงเกิดจากการที่มีแรงภายนอกมาต้านการเคลื่อนที่ เช่น อากาศ เป็นต้น ทำให้แอมพลิจูดลดลง และเป็นศูนย์ในที่สุด แต่ถ้าต้องการให้แอมพลิจูดเท่าเดิมตลอดไป จำเป็นจะต้องมีแรงภายนอกมาช่วยซึ่งจะเรียกว่า การแกว่งแบบบังคับ เช่น การไกวเปล เป็นต้น

บรรณานุกรม

Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2nd ed.). Tokyo: McGraw-Hill.

Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of Physics** (4th ed.). New York: Wiley.

Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4th ed. New York: Wiley.

Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers**. Tokyo: Holt-Saunders Japan.

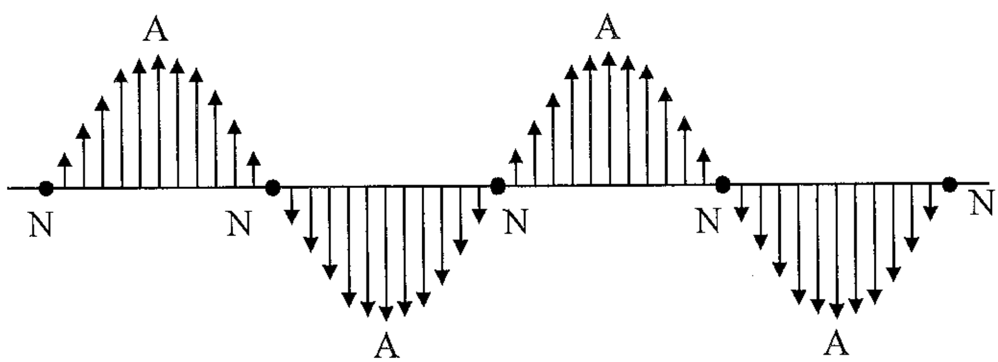
Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3rd ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics**. New York: Worth.

หน่วยที่

7

สมบัติทั่วไปของคลื่นกล



โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา ผาติเสนะ

ตอนที่ 7.1

คลื่นและชนิดของคลื่น

เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็น 2 ประเภทตามลักษณะของการแผ่ (propagation) ของคลื่น คือ คลื่นกล (mechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยอาศัยตัวกลางที่ยืดหยุ่น (elastic media) เช่น คลื่นเสียง คลื่นในลวดสปริง คลื่นน้ำ คลื่นในเส้นเชือกที่มีการแกว่ง เป็นต้น และคลื่นที่ไม่ใช่คลื่นกล (nonmechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยไม่ต้องอาศัยตัวกลาง หรือผ่านสูญญากาศไปได้ เช่น คลื่นแสง คลื่นวิทยุ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic wave) เป็นต้น ในตอนนี้เราจะศึกษาเฉพาะคลื่นกลเท่านั้น ส่วนคลื่นชนิดหลังจะได้กล่าวในตอนต่อไป

1. คลื่นและชนิดของคลื่น

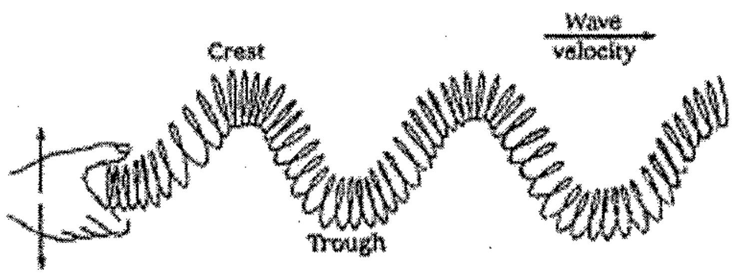
คลื่นกลเกิดจากการที่อนุภาคของตัวกลางถูกทำให้เคลื่อนที่ไปจากจุดสมดุล และเกิดจากการแกว่งกวัด (oscillation) รอบจุดสมดุลนั้น เนื่องจากตัวกลางมีสมบัติของการยืดหยุ่น ฉะนั้นเมื่อตัวกลางเกิดการสั่น (vibration) จะมีการส่งต่อ (transmition) ไปยังอนุภาคต่อๆ ไป และอนุภาคต่อๆ ไปนั้นจะสั่นรอบจุดสมดุลเช่นเดียวกับอนุภาคที่เริ่มต้นสั่นด้วย ทำให้เกิดคลื่นหรือการรบกวน (disturbance) แผ่ออกไป โดยที่อนุภาคของตัวกลางไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย เช่น เมื่อโยนก้อนหินลงในสระที่มีน้ำนิ่ง เราจะสังเกตเห็นคลื่นแผ่ออกไปจากจุดที่ก้อนหินกระทบน้ำ และวัตถุเล็กๆ ที่ลอยอยู่บนผิวน้ำจะสั่นขึ้นลงแต่ยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม นั่นคืออนุภาคของตัวกลาง (ในที่นี้คือน้ำ) ไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย

อัตราเร็วของคลื่นขึ้นอยู่กับความยืดหยุ่นและความเฉื่อยของตัวกลาง ความยืดหยุ่นทำให้เกิดแรงดึงกลับของอนุภาคของตัวกลางสู่ตำแหน่งสมดุล ส่วนความเฉื่อยจะสัมพันธ์กับแรงดึงกลับนี้ ดังนั้น ทั้งความยืดหยุ่นและความเฉื่อยจะเป็นตัวกำหนดอัตราเร็วของคลื่น

นอกจากนี้ การที่วัตถุสั่นขึ้นลงได้นั้น แสดงว่า จะต้องได้รับพลังงานจากคลื่น ดังนั้น การเคลื่อนที่ของคลื่นจะส่งผ่าน (transfer) หรือแผ่พลังงานและโมเมนตัมด้วย

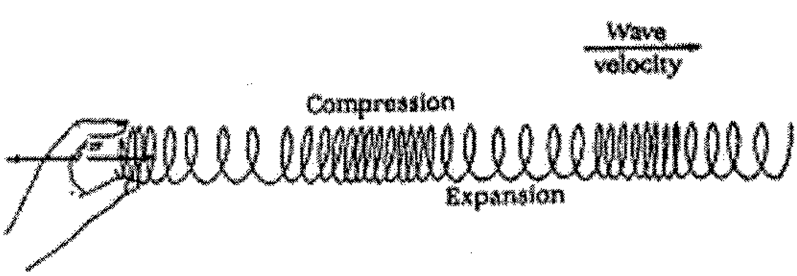
โดยทั่วไปคลื่นกลแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ตามลักษณะการสั่นของตัวกลาง และทิศทางของการแผ่ของคลื่น คือ

1) คลื่นตามขวาง (transverse waves) เป็นคลื่นที่ส่งผ่านตัวกลาง แล้วทำให้อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นในเส้นเชือกขึงตึง เป็นต้น ถ้าเรากระตุกปลายเชือกขึ้นและลงแต่ละครั้ง เราจะเห็นพัลส์ของคลื่น (wave pulse) เคลื่อนที่ไปในเชือกด้วยอัตราเร็วคงตัว หรือคลื่นที่เกิดในลวดสปริง ซึ่งเรากระตุกปลายเชือกขึ้นลงดังรูปที่ 7.1



รูปที่ 7.1 แสดงคลื่นตามขวางในลวดสปริง

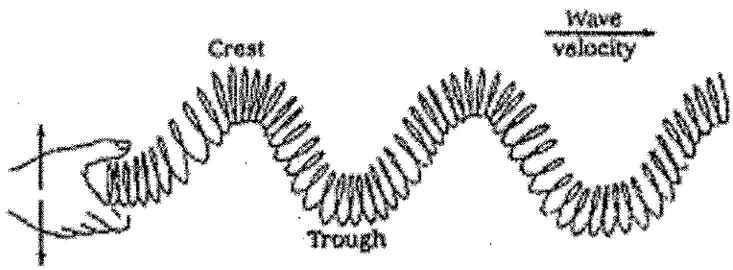
2) คลื่นตามยาว (longitudinal waves) อนุภาคตัวกลางจะสั่นในแนวเดียวกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น ถ้าเราอัดลวดสปริงหนึ่งครั้ง เราจะเห็นส่วนอัด (comperession) เคลื่อนที่ไปในสปริง อนุภาคของลวดสปริงสั่นตามแนวเดียวกับทิศที่ส่วนอัดหรือคลื่นเคลื่อนที่ไป ดังรูปที่ 7.2 และในขณะที่เกิดส่วนอัดก็จะเกิดส่วนขยาย (expansion or rarefaction) สลับกันไป



รูปที่ 7.2 แสดงคลื่นตามยาวในลวดสปริง

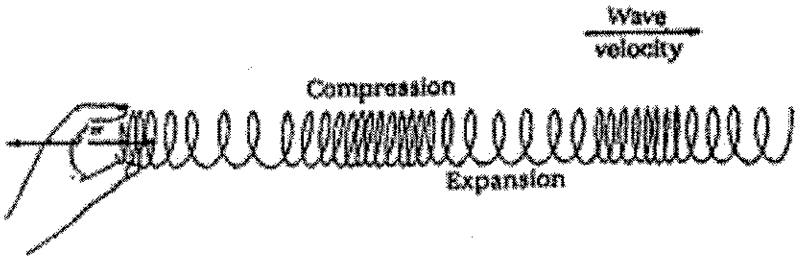
โดยทั่วไปคลื่นกลแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ตามลักษณะการสั่นของตัวกลาง และทิศทางของการแผ่ของคลื่น คือ

1) คลื่นตามขวาง (transverse waves) เป็นคลื่นที่ส่งผ่านตัวกลาง แล้วทำให้อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นในเส้นเชือกขึงตึง เป็นต้น ถ้าเรากระตุกปลายเชือกขึ้นและลงแต่ละครั้ง เราจะเห็นพัลส์ของคลื่น (wave pulse) เคลื่อนที่ไปในเชือกด้วยอัตราเร็วคงตัว หรือคลื่นที่เกิดในลวดสปริง ซึ่งเรากระตุกปลายเชือกขึ้นลงดังรูปที่ 7.1



รูปที่ 7.1 แสดงคลื่นตามขวางในลวดสปริง

2) คลื่นตามยาว (longitudinal waves) อนุภาคตัวกลางจะสั่นในแนวเดียวกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น ถ้าเราอัดลวดสปริงหนึ่งครั้ง เราจะเห็นส่วนอัด (comperession) เคลื่อนที่ไปในสปริง อนุภาคของลวดสปริงสั่นตามแนวเดียวกับทิศที่ส่วนอัดหรือคลื่นเคลื่อนที่ไป ดังรูปที่ 7.2 และในขณะที่เกิดส่วนอัดก็จะเกิดส่วนขยาย (expansion or rarefaction) สลับกันไป



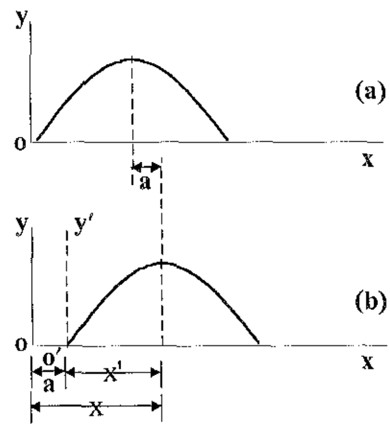
รูปที่ 7.2 แสดงคลื่นตามยาวในลวดสปริง

คลื่นที่เกิดจากการโยนก้อนหินลงในสระน้ำนิ่งถือเป็นคลื่นตามขวาง เพราะอนุภาคน้ำสั่นขึ้นลงเมื่อคลื่นมาถึง ซึ่งดูได้จากวัตถุเล็กๆ ลอยที่ผิวน้ำ ส่วนคลื่นในทะเลเป็นคลื่นตามขวาง และคลื่นตามยาว ทั้งนี้เพราะอนุภาคน้ำจะเคลื่อนที่ขึ้นลงและไปกลับ ซึ่งรวมแล้วจะเคลื่อนที่เป็นวงรี (ellipse) เมื่อคลื่นน้ำผ่านไป สำหรับคลื่นเสียงในอากาศเป็นคลื่นตามยาว

นอกจากนี้เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็นคลื่นหนึ่งมิติ เช่น คลื่นในเชือกขึงตึง คลื่นสองมิติ เช่น คลื่นน้ำ และคลื่นสามมิติ เช่น คลื่นเสียง เป็นต้น

2. สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น

ให้ $y = f(x)$ ที่เวลา $t = o$ เป็นฟังก์ชันมีรูปร่างดังรูปที่ 7.3 (a) เมื่อเวลาผ่านไป $t = t$ ตำแหน่งต่างๆ ของฟังก์ชันเปลี่ยนไปเป็นระยะ a โดยที่รูปร่างของฟังก์ชันยังเหมือนเดิม ดังแสดงในรูปที่ 7.3 (b)



รูปที่ 7.3 **แสดงการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง**

สมมติให้ O เลื่อนไปอยู่ที่ O' หลังการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน เนื่องจากรูปร่างของฟังก์ชันไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป $t = t$ ฟังก์ชันเขียนได้เป็น $y = f(x')$ และจากรูปที่ 7.3 (b) จะเห็นว่า $x' = x - a$ เราจึงสรุปได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป $t = t$ ฟังก์ชัน $y = f(x - a)$ จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ a ไปทางขวามือ และในทางตรงกันข้าม ฟังก์ชัน $y = f(x + a)$ จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ a ไปทางซ้ายมือ

ถ้าให้ $a = vt$ โดยที่ t คือเวลาที่ผ่านไป และ v คืออัตราเร็วของการเคลื่อนที่ เราจะได้ฟังก์ชัน $y = f(x \pm vt)$ เรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่แสดงการเคลื่อนที่ของคลื่นซึ่งมีรูปแบบคงเดิมตลอดเวลา

ฟังก์ชัน $y(x, t)$ ที่น่าสนใจ คือฟังก์ชันของคลื่นฮาร์มอนิก (harmonic wave) ที่เป็นรูปไซน์ (sinusoidal waves) ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$y(x, t) = A\sin k(x - vt) \tag{7.1}$$

โดยที่ A คือค่ามากที่สุดของ y เรียกแอมพลิจูดของคลื่น v คืออัตราเร็วของคลื่น ส่วนค่า k มีความเกี่ยวข้องกับรูปแบบของคลื่นและการเคลื่อนที่ของคลื่นดังนี้ ถ้าให้ x เปลี่ยนไปเป็นระยะทาง $2\pi/k$ พบว่าคลื่นยังคงมีส่วนโค้งเหมือนที่ตำแหน่ง x นั่นคือ $y(x, t)$ จะมีค่าเหมือนเดิมเมื่อเปลี่ยนเป็น $y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right)$ หรือ

$$\begin{aligned} y\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) &= A\sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) \\ &= A\sin\{k(x - vt) + 2\pi\} \\ &= A\sin k(x - vt) \\ &= y(x, t) \end{aligned}$$

ถ้าให้ $\lambda = 2\pi/k$ จะได้ว่า λ เป็นช่วงของระยะทางที่ส่วนโค้งมีลักษณะซ้ำๆ กัน จึงเรียกระยะนี้ว่าความยาวคลื่น (wavelength) ส่วนค่า $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ คือจำนวนคลื่นในระยะทาง 2π เรียกเลขคลื่น (wave number)

ดังนั้น $y = A\sin k(x \pm vt) = A\sin 2\frac{\pi}{\lambda}(x \pm vt)$ เป็นสมการของคลื่นฮาร์มอนิก ซึ่งมีความยาวคลื่น λ เคลื่อนที่ไปในทิศ $-x$ หรือ $+x$ ด้วยอัตราเร็ว v คงตัวเรียก v ว่าความเร็วเฟส (phase velocity) ของคลื่น สมการ (7.1) อาจเขียนใหม่เป็น

$$y(x, t) = A\sin(kx - \omega t) \tag{7.2}$$

โดยที่ $\omega = kv = 2\pi\frac{v}{\lambda}$ เรียกความถี่เชิงมุม (angular frequency) ของคลื่น

ความหมายของ ω อาจพิจารณาได้ดังนี้ ถ้าแทน t ด้วย $t + \frac{2\pi}{\omega}$ ลงใน (7.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y = (x, t) &= A\sin\left\{kx - \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right\} \\ &= A\sin\{(kx - \omega t) - 2\pi\} \\ &= A\sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

นั่นคือ ฟังก์ชันจะซ้ำกันทุกๆ เวลาที่เพิ่มขึ้น $\frac{2\pi}{\omega}$ เรียกเวลานี้ว่า คาบของการสั่น $T = \frac{2\pi}{\omega}$ และ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ โดยที่ $f = \frac{1}{T}$ คือความถี่ของคลื่น หมายถึง จำนวนคลื่นที่ผ่านตำแหน่งใดๆ ในเวลา 1 วินาที

จาก $\omega = kv = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi f$ โดยที่ $f = \frac{v}{\lambda}$ หรือ $v = \lambda f$ ฉะนั้นเราอาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้ดังนี้

$$y = A\sin k(x \pm vt)$$

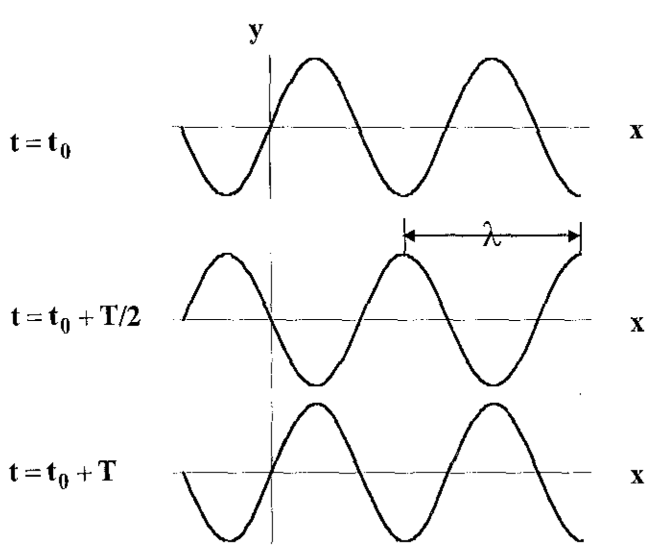
หรือ

$$y = A\sin(kx \pm \omega t)$$

หรือ

$$y = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$$

จะเห็นได้ว่า นอกจากความยาวคลื่นที่แสดงถึงช่วงระยะทางที่คลื่นมีรูปแบบซ้ำกันแล้วคาบของการสั่น ยังแสดงความซ้ำกันของคลื่นเมื่อเวลาผ่านไป 1 คาบอีกด้วยซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นกับคาบของการสั่นคือ $\lambda = \frac{v}{f} = vT$



รูปที่ 7.4 **แสดงการซ้ำกันของคลื่น ทั้งความยาวคลื่นและคาบของการสั่น**

ในทางคณิตศาสตร์ การเคลื่อนที่ของคลื่นอาจเขียนกลับกันได้ กล่าวคือ

$$y(x, t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

โดยที่เครื่องหมาย $\pm$ แสดงถึงการเคลื่อนที่ไปทางด้านที่ x มีค่าเป็น $-$ และ $+$ ตามลำดับ ฉะนั้น สำหรับคลื่นฮาร์มอนิก อาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้เป็น

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = A\sin(\omega t \pm kx)$$

$$= A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= A\sin(\omega t \pm \phi) \qquad (7.3)$$

โดยที่ ϕ คือค่าคงตัวเฟส (phase constant) ของคลื่น ซึ่งขึ้นอยู่กับการเลือกกำหนดเวลาเริ่มต้น เช่นในรูปที่ 7.4 ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของเวลาจะทำให้คลื่นที่ต่างเวลากันมีเฟสต่างกัน นั่นคือ เมื่อเวลาต่างกัน $\frac{T}{2}$ จะมีเฟสต่างกัน 180 องศา

สมการ (7.3) อาจเขียนในรูปของเอกซ์โพเนนเชียล (exponential) ได้ดังนี้

$$y = Ae^{i2\pi f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)}$$

$$= Ae^{i\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right)} \qquad (7.4)$$

ถ้า μ คือดรรชนีหักเห (refractive index) ของตัวกลาง และ

$$\mu = \frac{v_o}{v} \quad \text{หรือ} \quad v = \frac{v_o}{\mu}$$

โดยที่ v_o และ v เป็นความเร็วของคลื่นในตัวกลางสองชนิดที่ต่างกัน ดังนั้น

$$y = Ae^{i\omega\left(t - \frac{\mu x}{v_o}\right)} \qquad (7.5)$$

ความเร็ว v ซึ่งเรียกว่าความเร็วเฟสเป็นความเร็วของคลื่น ส่วนความเร็วของอนุภาคของตัวกลางที่คลื่นอาศัยเป็นตัวผ่านหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (7.3) เทียบกับเวลา t หรือ $\frac{dy}{dt}$ นั่นเอง

ความเร็วของอนุภาคแต่ละตัวขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดและความถี่ของคลื่นแต่ความเร็วของคลื่นหรือความเร็วเฟสไม่ขึ้นกับแอมพลิจูด แต่ขึ้นกับสมบัติและสถานะของตัวกลาง สถานะของตัวกลางอาจเป็นความดันของแก๊สหรือความตึงของเส้นลวด ส่วนสมบัติของตัวกลางคือความหนาแน่น ความยืดหยุ่น เป็นต้น

คลื่นที่เกิดขึ้นจริงตามธรรมชาติไม่ได้เป็นคลื่นฮาร์มอนิกอย่างสมบูรณ์ เพราะคลื่นฮาร์มอนิกจะขยายไปจนถึงอนันต์ในแต่ละทิศทางตามแนวแกน x และไม่มีเวลาเริ่มต้นหรือเวลาสิ้นสุด คลื่นที่เกิดขึ้นจริงๆ จะต้องเริ่มต้นและสิ้นสุด ณ ที่หนึ่งหรือที่ใดๆ ในปริภูมิ และเวลาหนึ่ง คลื่นที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติ เช่น คลื่นเสียงหรือคลื่นแสง อาจพอประมาณได้ว่าเป็นคลื่นฮาร์มอนิก เพราะมันขยายไปในปริภูมิที่มากกว่าความยาวคลื่นของมันเอง และช่วงเวลาที่มันผ่านจุดหนึ่งๆ จะมากกว่าคาบของมันมาก คลื่นดังกล่าวจะเรียกว่าขบวนคลื่น (wave train) คลื่นฮาร์มอนิกถือเป็นคลื่นในจินตนาการของขบวนคลื่น

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นสำหรับคลื่นฮาร์มอนิก เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์เรียกว่าสมการคลื่น (wave equation) ซึ่งหาได้ดังนี้

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลา t ของคลื่นฮาร์มอนิก

$$y(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$$

คือ
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega^2 A\sin(kx-\omega t)$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2k^2y(x,t)$$

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ x ของคลื่นฮาร์มอนิกเดิมคือ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = -k^2y(x,t)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการอนุพันธ์อันดับสองทั้งสองสมการ จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (7.6)$$

ซึ่งเป็นสมการคลื่น เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกสอดคล้องกับสมการคลื่น (7.6) ดังนั้น คลื่นฮาร์มอนิกจึงเป็นผลเฉลยของสมการคลื่น โดยทั่วไป $y(x,t) = f(x \pm vt)$ ฟังก์ชันคลื่นเป็นผลเฉลยของสมการคลื่น (7.6)

ในกรณีของคลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาว ฟังก์ชันคลื่นแสดงการกระจัดของตัวกลางที่คลื่นผ่าน สำหรับคลื่นแสงซึ่งเป็นคลื่นตามขวางและเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ฟังก์ชันคลื่นแสดงการแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า ดังนั้น โดยทั่วไปเราอาจเขียนสมการคลื่นได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (7.7)$$

โดยที่ $\Psi(x,t)$ แทนปริมาณทางฟิสิกส์ซึ่งแกว่งกวัดหรือบ่งบอกความเป็นคลื่น ในกรณีของคลื่นบนเส้นเชือก Ψ ให้ค่าการกระจัดในแนวดิ่งของเชือก สำหรับคลื่นเสียงในของเหลว Ψ ให้ค่าการกระจัดในแนวขนานของของเหลว และในกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า Ψ ให้ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

3. อัตราเร็วของคลื่นกล

ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่า คลื่นกลเป็นคลื่นที่แผ่กระจายไปโดยอาศัยตัวกลางที่ยืดหยุ่น เช่น คลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่อาจเป็นของแข็ง ของเหลว และแก๊ส ช่วงคลื่นที่หูมนุษย์ปกติจะรับฟังได้จะอยู่ระหว่าง 20 – 20,000 Hz คลื่นตามยาวที่มีความถี่น้อยกว่านี้ เรียกว่า คลื่นใต้เสียง (infrasonic waves) และที่มีความถี่มากกว่าช่วงนี้เรียกว่า คลื่นเหนือเสียง (ultrasonic waves)

โดยทั่วไปอัตราเร็วของคลื่นกลในตัวกลางมีรูปแบบเป็น

$$v = \sqrt{\frac{\text{มอดุลัสความยืดหยุ่น}}{\text{ความหนาแน่น}}}$$

ในกรณีของคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวหรือของแข็ง อัตราเร็วของคลื่นคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{7.8}$$

B คือมอดุลัสเชิงปริมาตรของตัวกลาง และ ρ คือความหนาแน่น คลื่นปฐมภูมิ (primary waves) หรือที่มักเรียกย่อๆ ว่า P–waves ซึ่งเกิดจากแผ่นดินไหวเป็นคลื่นตามยาวที่มีลักษณะดังกล่าวแม้ว่าอัตราเร็วของคลื่น P–waves อาจแตกต่างจากสมการ (7.8) เล็กน้อย คลื่น P–waves เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่สูงกว่าคลื่นที่เกิดจากแผ่นดินไหวอีกชนิดหนึ่ง ดังนั้นสถานีตรวจแผ่นดินไหวจึงรับคลื่นนี้ได้ก่อนคลื่นชนิดอื่นที่ตามมาทีหลัง

อัตราเร็วของคลื่นตามขวางในตัวกลางที่เป็นของแข็ง คือ

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \tag{7.9}$$

S คือมอดุลัสเฉือนของของแข็ง คลื่นทุติยภูมิ (secondary waves) หรือที่มักเรียกกันว่า S–waves เป็นคลื่นตามขวางที่เกิดจากแผ่นดินไหว และเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามสมการ (7.9) ซึ่งช้ากว่า P–waves

เนื่องจากของเหลวและแก๊สไม่มีความเค้นเฉือนซึ่งแตกต่างจากของแข็ง ดังนั้น คลื่นตามขวางจึงไม่อาจเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวและแก๊สได้ นอกจากนี้คลื่นตามขวางเคลื่อนที่ได้ลึกไม่เกิน 2,900 กิโลเมตรจากผิวพื้นดิน แสดงว่าแกนในของโลกเป็นของเหลวที่ความลึกมากกว่านี้ อย่างไรก็ตามคลื่นแผ่นดินไหวยังแสดงให้เห็นว่าแกนใจกลางของโลกที่ความลึกประมาณ 5,100 กิโลเมตรเป็นของแข็ง คลื่นแผ่นดินไหวชนิดที่ 3 เรียกว่า คลื่นยาว (long waves) หรือ L–waves ซึ่งเคลื่อนที่บนพื้นผิวด้วยอัตราเร็วที่น้อยกว่า S–waves เพียงเล็กน้อย คลื่นยาวมีลักษณะคล้ายคลื่นน้ำเป็นได้ทั้งคลื่นตามขวางและคลื่นตามยาว และเป็นคลื่นที่ทำอันตรายแก่ทรัพย์สิน บ้านเรือน และประชาชนเมื่อเกิดแผ่นดินไหว

อัตราเร็วของคลื่นเสียงในอากาศขึ้นอยู่กับหลายแฟกเตอร์ นิวตันได้พยายามหาสมการอธิบายอัตราเร็วที่คล้ายๆ กับ $v = \sqrt{B/\rho}$ แต่ให้ค่าที่ผิดพลาดประมาณ 20% เขากล่าวว่าจากปรากฏการณ์ที่ไม่อาจทราบได้ ทำให้มอดุลัสเชิงปริมาตร B สำหรับแก๊สอาจมีได้ 2 ค่า ขึ้นอยู่กับว่าเป็นส่วนอัดหรือส่วนขยายซึ่งเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal) หรืออาจไม่มีการถ่ายเทความร้อน (adiabatic) ในศตวรรษต่อมา ลาปลาซ (Laplace) ได้แสดงให้เห็นว่า สำหรับคลื่นเสียง ความเร็วมีค่า

$$v = \sqrt{\frac{B_{adiabatic}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma B_{isothermal}}{\rho}} \qquad (7.10)$$

โดยที่ $\gamma = C_p/C_v$ ซึ่งมีค่า 1.4 สำหรับอากาศ C_p และ C_v เป็นความจุความร้อนโมลาร์ (molar capacity heat) ของแก๊สที่ความดันและปริมาตรคงตัวตามลำดับ (ความจุความร้อนโมลาร์คือปริมาณความร้อนที่ทำให้อุณหภูมิของสาร 1 โมล เพิ่มขึ้น 1 °C) สมการ (7.10) จะเหมือนกับ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (7.11)$$

P คือความดันของแก๊ส ที่อุณหภูมิ 20 °C อัตราเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 344 เมตร/วินาที ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (7.11) ได้ดี การวิเคราะห์ที่ค่อนข้างสมบูรณ์แสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วของคลื่นเสียงแปรเปลี่ยนกับรากที่สองของอุณหภูมิสัมบูรณ์ K ของแก๊ส

ในกรณีของคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือก เราสามารถใช้กฎข้อที่สองของนิวตันพิสูจน์ว่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก คือ

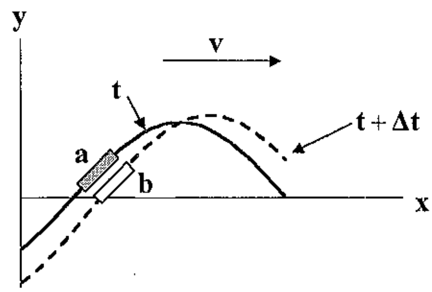
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (7.12)$$

โดยที่ F คือแรงตึงในเส้นเชือก และ μ คือมวลของเส้นเชือกต่อหนึ่งหน่วยความยาว ผลการทดลองพบว่าสมการ (7.12) ให้ค่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือกที่ถูกต้อง

4. กำลังและความเข้มของคลื่น

ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นจะพาพลังงานไปในทิศทางที่มันเคลื่อนที่ไป การหาอัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่แผ่กระจายไป เราจำเป็นต้องหาความหนาแน่นพลังงานของคลื่นก่อน กำลังของคลื่นจะเป็นผลคูณของความหนาแน่นพลังงานและอัตราเร็วของคลื่น

พิจารณาคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือกที่เวลา t ดังแสดงในรูปที่ 7.5



รูปที่ 7.5 **แสดงคลื่นที่เกิดในเส้นเชือกเคลื่อนที่ไปทาง +x ที่เวลา t และ $t+\Delta t$**

ชิ้นส่วน a ที่เวลา t จะเลื่อนไปอยู่ที่ b เมื่อเวลาเป็น $t+\Delta t$ พลังงานของชิ้นส่วน a ที่เวลา t จะเท่ากับพลังงานของชิ้นส่วน b ที่เวลา $t+\Delta t$ ดังนั้นพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วยอัตราเร็ว $v = \Delta x/\Delta t$ สมมติมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเชือกแทนด้วย μ ดังนั้น พลังงานจลน์ของชิ้นส่วน a จะมีค่า

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(\mu\Delta x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

และพลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นพลังงานจลน์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (7.13)$$

พลังงานศักย์ ΔE_P ของชิ้นส่วนอันเนื่องจากคลื่นเป็นงานที่ทำโดยแรงตึง F ในชิ้นส่วนของเชือกนั้น หรือ

$$\Delta E_P = F\Delta\ell$$

สมมติชิ้นส่วนเดิมยาว Δx เมื่อเกิดแรงตึงในเส้นเชือก ความยาวเดิมจะยืดออกกลายเป็นความยาวใหม่ $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ดังรูปที่ 7.6 ดังนั้นความยาวที่ยืดออกอันเนื่องจากแรงตึง F ในเส้นเชือกคือ

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} - \Delta x$$

โดยการกระจายทวินาม (binomial expansion) และสมมติว่า $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ ดังนั้น

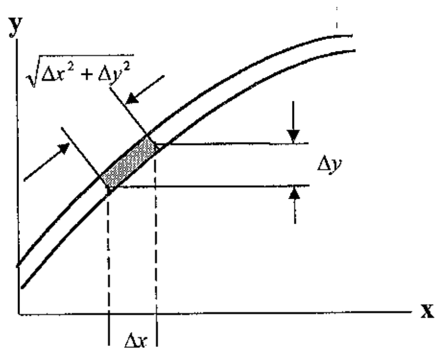
$$\Delta \ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

พลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยความยาว หรือความหนาแน่นพลังงานศักย์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_P}{\Delta x} = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (7.14)$$

ความหนาแน่นพลังงานของคลื่นเป็นผลรวมของความหนาแน่นพลังงานจลน์ และความหนาแน่นพลังงานศักย์ หรือ

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (7.15)$$



***รูปที่ 7.6* แสดงความยาวที่ยืดออกเมื่อเกิดแรงตึงในเส้นเชือก**

จากรูปที่ 7.5 อัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่ชิ้นส่วน a เลื่อนไปอยู่ที่ b คือ

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x}.\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x}\ .\ v$$

หรือ

$$P = \left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]v \qquad (7.16)$$

ในกรณีของคลื่นฮาร์มอนิก , $y = A\sin(kx - \omega t)$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

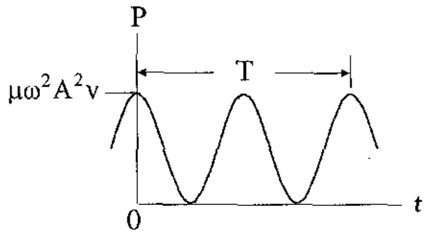
และ $\frac{\partial y}{\partial x} = kA\cos(kx - \omega t)$

นอกจากนี้ $v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2}$

ดังนั้น กำลังของคลื่นฮาร์มอนิก คือ

$$P = \mu\omega^2 A^2 v\cos^2(kx - \omega t) \tag{7.17}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา t แสดงในรูปที่ 7.7 และสังเกตว่ากำลังของคลื่นมีค่าบวกตลอดเวลา แสดงว่ามีการถ่ายเทพลังงานอย่างต่อเนื่องในทิศทางที่คลื่นเคลื่อนที่



รูปที่ 7.7 **แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิก และเวลาซึ่งอยู่ในรูปแบบ $\cos^2(\omega t)$**

เนื่องจากกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกแกว่งกวัดอยู่ระหว่างศูนย์และค่าสูงสุด และค่าเฉลี่ยของ $\cos^2(\omega t)$ คือ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น กำลังเฉลี่ยของคลื่นฮาร์มอนิกคือ

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \tag{7.18}$$

นั่นคือ $P \propto A^2$ หรือกำลังเฉลี่ยหรือกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกเป็นปฏิภาคกับกำลังสองของแอมพลิจูด และเป็นลักษณะทั่วไปของคลื่นอื่นๆ ด้วย

นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าค่ากำลังเฉลี่ย P_{ave} มีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าส่วนใดของเส้นเชือก จึงกล่าวได้ว่าไม่มีการสูญเสียพลังงานเลยในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นเชือก ถ้าพลังงานมีการสูญหายไปในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง เราเรียกว่าคลื่นมีการลด (attenuated) เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกของเรามีแอมพลิจูดคงตัว จึงเป็นคลื่นที่ไม่มีการลด (unattenuated wave) อย่างไรก็ตาม คลื่นกลที่เกิดขึ้นในธรรมชาติจะต้องมีการลดเสมอ แต่มักมีค่าน้อยมาก

การเคลื่อนที่ของคลื่นในธรรมชาติเป็นการเคลื่อนที่ 3 มิติ โดยคลื่นจะกระจายออกไปทุกทิศทางจากแหล่งกำเนิดคลื่น การกระจายเป็นรูปพื้นผิวของทรงกลมเรียกว่าหน้าคลื่น (wavefront) และที่ระยะไกลจากแหล่งกำเนิดคลื่นมากๆ อาจถือได้ว่าหน้าคลื่นเป็นระนาบ เส้นที่ตั้งฉากกับหน้าคลื่นเรียกว่า รังสี (rays) รังสีจึงแสดงทิศทางที่หน้าคลื่นเคลื่อนที่ไป หรือแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นนั่นเอง

ปริมาณที่แสดงการไหลของพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นคือความเข้ม (intensity) ของคลื่น ความเข้ม I ของคลื่นคือกำลัง P ที่แผ่กระจายไปต่อพื้นที่ 1 หน่วยของหน้าคลื่น หรือ

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} \qquad (7.19)$$

ΔS คือพื้นที่ผิวของหน้าคลื่นที่ตั้งฉากกับทิศการแผ่กระจายของคลื่น และ ΔE เป็นพลังงานซึ่งผ่านพื้นที่ผิวนั้นในช่วงเวลา Δt หน่วยของความเข้มของคลื่น คือวัตต์ต่อตารางเมตร หรือ W/m^2

ความเข้มของคลื่นจะลดลงตามระยะทางจากแหล่งกำเนิดคลื่นให้ P_o เป็นกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายคลื่นออกไป และสมมติว่าตัวกลางไม่ทำให้คลื่นมีการลด และคลื่นกระจายอย่างสม่ำเสมอในทุกทิศทาง เนื่องจากความเข้ม I เป็นกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ อัตราที่พลังงานผ่านหน้าคลื่นที่เป็นพื้นผิวของทรงกลมรัศมี r จุดกำเนิดที่แหล่งกำเนิดคลื่นคือ $I(4\pi r^2)$ จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน กำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปเท่ากับอัตราการกระจายพลังงานผ่านพื้นผิวทรงกลม นั่นคือ $P_o = 4\pi r^2 I$ หรือ

$$I = \frac{P_o}{4\pi r^2} \qquad (7.20)$$

จะเห็นว่า ความเข้มของคลื่นลดลงอย่างผกผันกับกำลังสองของระยะทาง r จากแหล่งกำเนิดคลื่น

ตัวอย่างที่ 7.1 สมการของคลื่นตามขวางในเส้นเชือกเขียนได้เป็น

$$y = 5\sin(4.0t - 0.02x)$$

y และ x มีหน่วยเป็นเมตร และเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา

(a) แอมพลิจูด ความถี่ ความเร็ว และความยาวคลื่นของคลื่นตามขวางนี้

(b) ความเร็วและความเร่งสูงสุดของอนุภาคในเส้นเชือก

(c) กำลังของคลื่น ถ้าความหนาแน่นของเส้นเชือกเป็น 1.25 kg/m^3

วิธีทำ

(a) โดยการเปรียบเทียบกับสมการ

$$y = A\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

จะเห็นได้ว่า แอมพลิจูด $A = 5$ m

$2\pi f = 4$ หรือ $f = \frac{4}{2\pi} = 0.637$ Hz

$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.02$ หรือ $\lambda = \frac{2\pi}{0.02} = 314$ m

และ $v = f\lambda = \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{0.02} = 200$ m/s

(b) ความเร็วของอนุภาคของเส้นเชือก คือ

$$u = \frac{dy}{dt} = 20\cos(4.0t - 0.02x)$$

ดังนั้น ความเร็วสูงสุดของอนุภาค = 20 m/s

ความเร่งของอนุภาค คือ

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -80\sin(4.0t - 0.02x)$$

ความเร่งสูงสุดของอนุภาค = 80 m/s^2

(c) กำลังของคลื่น

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$$

$$= \frac{1}{2} \times 1.25 \times 4^2 \times 5^2 \times 200 = 5.0 \times 10^4 \text{ W}$$

ตัวอย่างที่ 7.2 คลื่นไซน์เคลื่อนที่ไปในทิศ +x ด้วยแอมพลิจูด 15 เซนติเมตร ความยาวคลื่น 40 เซนติเมตร และความถี่ 8 เฮิรตซ์ การกระจัดของคลื่นที่เวลา $t = o$ และ $x = o$ มีค่าเท่ากับ 15 เซนติเมตร จงหา

(a) เลขคลื่น คาบ ความถี่เชิงมุม และความเร็วเฟสของคลื่น

(b) เฟส ϕ และฟังก์ชันคลื่น

วิธีทำ

เนื่องจาก $\lambda = 40$ cm, $f = 8$ Hz, $A = 15$ cm ดังนั้น

(a) เลขคลื่น $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0.157 \text{ cm}^{-1}$

คาบ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125$ s

ความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f = 2\pi x8 = 50.3$ rad/s

ความเร็วเฟส $v = f\lambda = 8x40 = 320$ cm/s

(b) เนื่องจาก $y = 15$ cm ที่ $x = o$ และ $t = o$ ดังนั้น

$$y = A\sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$\therefore\ 15 = 15\sin(-\phi)$$

หรือ $\sin(-\phi) = 1$

แต่ $\sin(-\phi) = -\sin\phi$

$$\therefore\ \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ radian หรือ } -90^\circ$$

และฟังก์ชันคลื่นจะมีรูปแบบเป็น

$$y = A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= A\cos(kx - \omega t)$$

$$= 15\cos(0.157x - 50.3t)$$

ตัวอย่างที่ 7.3 เชือกเส้นหนึ่งมีมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวเป็น 47 กรัม/เมตร ถูกดึงให้ตึงด้วยแรง 75 นิวตัน คลื่นฮาร์มอนิกซึ่งมีแอมพลิจูด 13 มิลลิเมตร และความถี่ 32 เฮิรตซ์ แผ่กระจายในเส้นเชือก จงหากำลังเฉลี่ยของคลื่น

วิธีทำ

เนื่องจากอัตราเร็ว $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{75\text{ N}}{47\text{ g/m}}} = 40$ m/s

ความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f = 2\pi(32\text{ Hz}) = 200$ rad/s

ดังนั้น กำลังเฉลี่ย

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2v$$

$$= \frac{1}{2}(47\text{ g/m})(200\text{ rad/s})^2(13\text{ mm})^2(40\text{ m/s})$$

$$= 6.4\text{ W}$$

5. หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น

ความแตกต่างประการหนึ่งระหว่างคลื่นและอนุภาคก็คือ คลื่นไม่อยู่ประจำที่ (localised) ในปริภูมิและเวลา ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ตำแหน่งของอนุภาคสามารถระบุได้แน่นอน แต่ที่เวลาใดๆ เราระบุคลื่นในรูปของฟังก์ชันของตำแหน่ง ความแตกต่างอีกประการหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อคลื่น 2 คลื่นหรืออนุภาค 2 ชนิด มีอันตรกิริยา (interaction) ระหว่างกัน เมื่ออนุภาค 2 ชนิดเคลื่อนที่มาชนกัน อนุภาคทั้งสองจะแลกเปลี่ยนโมเมนตัม และพลังงานระหว่างกัน ทำให้ความเร็วเปลี่ยนไป ในทางตรงกันข้าม เมื่อคลื่น 2 ชนิดเคลื่อนที่มาพบกัน แอมพลิจูดรวมจะเป็นผลบวกของแต่ละแอมพลิจูดของคลื่นทั้งสอง และแต่ละคลื่นจะไม่เปลี่ยนแปลงหลังจากมีอันตรกิริยากัน การรวมกันของคลื่นจะใช้หลักที่เรียกว่า หลักการซ้อนทับ (superposition principle) ซึ่งกล่าวว่า

เมื่อคลื่นตั้งแต่สองคลื่นขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง ฟังก์ชันคลื่นของคลื่นรวมที่ตำแหน่งใดๆ เป็นผลบวกเชิงพีชคณิตของฟังก์ชันคลื่นของแต่ละคลื่น

คลื่นที่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นเชิงเส้น (linear waves) ซึ่งมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ ส่วนคลื่นที่ไม่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นไม่เชิงเส้น (nonlinear waves) และมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดมากๆ หลักการซ้อนทับใช้ได้กับคลื่นหลายชนิด เช่น คลื่นในเส้นเชือก คลื่นเสียง คลื่นบนผิวน้ำ และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

เมื่อเราโยนก้อนหินสองก้อนลงในสระน้ำ เราจะเห็นคลื่นบนผิวน้ำทั้งสองเคลื่อนที่ผ่านซึ่งกันและกันโดยไม่ทำลายกันหรือเปลี่ยนไปแต่อย่างใด เมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่มาพบกันที่ตำแหน่งใด ผลรวมของคลื่นจะเป็นไปตามหลักการซ้อนทับ และเมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งนั้น คลื่นทั้งสองจะมีรูปร่างเหมือนคลื่นเดิมเสมือนกับไม่ได้พบกันมาก่อนเลย เราเรียกการรวมคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ ว่า การแทรกสอด (interference)

พิจารณาการแทรกสอดของคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น คือ

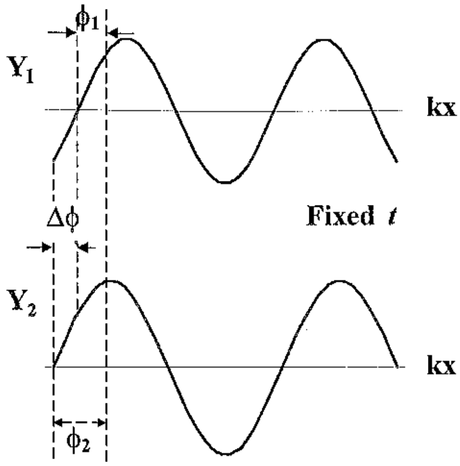
$$Y_1 = A\sin(kx - \omega t + \phi_1) \tag{7.21}$$

และ

$$Y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi_2) \tag{7.22}$$

แต่ละคลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกันและมีแอมพลิจูดเท่ากัน เลขคลื่นและความถี่เดียวกัน แต่เฟสไม่เท่ากัน แตกต่างกันเท่ากับ

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \tag{7.23}$$



***รูปที่ 7.8* แสดงคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น**
มีแอมพลิจูด เลขคลื่น และความถี่เดียวกันแต่เฟสต่างกัน

การหาคลื่นรวมอันเนื่องจากการแทรกสอดของ Y_1 และ Y_2 เราใช้หลักการซ้อนทับ คือ

$$Y = Y_1 + Y_2 = A[\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2)]$$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$$

ดังนั้น

$$Y = \left[2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta\phi\right)\right]\sin(kx - \omega t + \phi_{ave}) \qquad (7.24)$$

โดยที่ $\phi_{ave} = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)$

มีกรณีที่น่าสนใจอยู่สองประการคือ

1) คลื่นรวม Y เป็นคลื่นฮาร์มอนิก มีเลขคลื่น k และความถี่เชิงมุม ω เหมือนเดิม และเคลื่อนที่ไปในทิศทาง +x เช่นเดิม

2) แอมพลิจูดของ Y คือ $2A\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับเฟสที่แตกต่างกัน $\Delta\phi$ ดังนั้น เฟสที่แตกต่างกันมีบทบาทที่สำคัญต่อการแทรกสอดของคลื่น

ถ้า $\Delta\phi = 0$ ดังนั้น $\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi) = 1$ แอมพลิจูดของคลื่นรวมจึงเท่ากับ 2A เราเรียกการแทรกสอดที่เกิดขึ้นในกรณีนี้ว่า การแทรกสอดเสริมสมบูรณ์ (perfect constructive interference) ดังนั้นการแทรกสอดเสริมสมบูรณ์ทำให้แอมพลิจูดของคลื่นรวมเป็นสองเท่าของแต่ละแอมพลิจูดของ คลื่นแต่ละคลื่น

ถ้า $\Delta\phi = \pi$ เรเดียน ดังนั้น $\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi) = 0$ แอมพลิจูดของคลื่นรวมเท่ากับศูนย์ เราเรียกการแทรกสอดที่เกิดขึ้นแบบนี้ว่า การแทรกสอดหักล้างสมบูรณ์ (perfect destructive interference)

สำหรับค่า $\Delta\phi$ อื่นๆ คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดอยู่ระหว่าง 2A และศูนย์ เช่น ถ้า $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ เรเดียน แอมพลิจูดของคลื่นรวมจะเท่ากับ 1.41A เป็นต้น

สรุป

คลื่นกลจำเป็นต้องใช้ตัวกลางในการเคลื่อนที่ ความเร็วของคลื่นกลจึงขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกลางนั้นๆ คลื่นกลเคลื่อนที่ได้เร็วในของแข็งมากกว่าในของเหลวและแก๊ส ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่จะมีกำลังและความเข้มตามไปด้วย คลื่นสามารถรวมกันได้โดยใช้หลักการซ้อนทับ ทำให้การแทรกสอดของคลื่นในลักษณะต่างๆ กัน

ตอนที่ 7.2

คลื่นนิ่ง

เมื่อคลื่นตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นเหล่านี้จะมีผลซึ่งกันและกัน ถ้าคลื่นสองชนิดเคลื่อนที่มาบรรจบกันที่ตำแหน่งใด การกระจัดรวมจะเป็นผลบวกของการกระจัดของคลื่นทั้งสองนั้น และเนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น การรวมกันของการกระจัดทั้งสองจึงเป็นการรวมกันแบบเวกเตอร์ ในที่นี้เราจะพิจารณาการรวมคลื่นสองคลื่นที่อยู่ในแนวเดียวกัน แล้วให้คลื่นรวมที่มีลักษณะ 2 แบบ คือ คลื่นนิ่ง (stationary waves or standing waves) และบีตส์ (beats) โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคลื่นนิ่งเท่านั้น ส่วนบีตส์จะได้กล่าวในหน่วยต่อไป

1. คลื่นนิ่ง

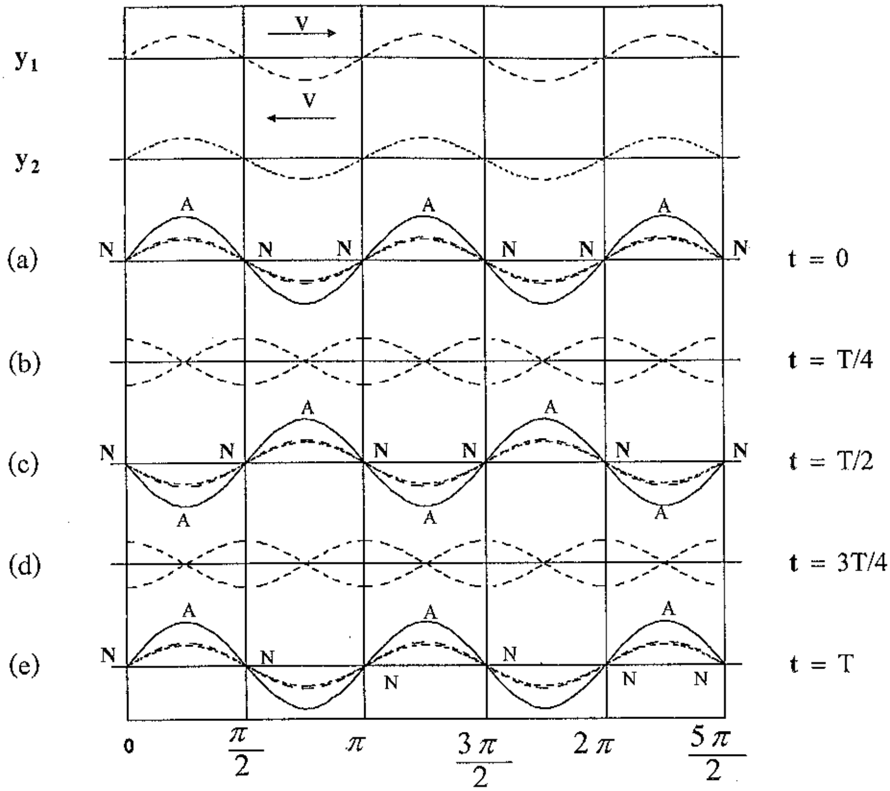
ถ้าคลื่นสองคลื่นมีแอมพลิจูดเท่ากันและความถี่เดียวกัน แต่เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม จะมีบางจุดในตัวกลางที่อนุภาคมีแอมพลิจูดสูงสุด และมีบางจุดซึ่งอนุภาคตัวกลางมีการกระจัดต่ำสุด คลื่นรวมที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่าคลื่นนิ่ง

สมมติคลื่นสองคลื่นมีการกระจัดเป็น y_1 และ y_2 คลื่นที่ในทิศทางตรงกันข้ามด้วยอัตราเร็ว v และคาบเท่ากับ T คลื่นรวมอาจเกิดขึ้นได้ 3 กรณี คือ

1) คลื่นทั้งสองซ้อนทับกันที่เวลา $t = 0$ โดยมีเฟสเดียวกัน ดังนั้นคลื่นรวมจะมีการกระจัดเป็น $y = y_1 + y_2$ ดังรูปที่ 7.9 (a)

2) ที่เวลา $t = \frac{T}{4}$ และ $\frac{3T}{4}$ คลื่นทั้งสองมีการกระจัดขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม การกระจัดรวมจึงเท่ากับศูนย์ดังรูปที่ 7.9 (b) และ (d)

3) ที่เวลา $t = \frac{T}{2}$ คลื่นทั้งสองซ้อนกันเช่นเดียวกับกรณีที่ (1) แต่มีเฟสเปลี่ยนไปเท่ากับ π ดังรูปที่ 7.9 (c) และเมื่อเวลา $t = T$ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ คลื่นรวมจะเหมือนกับกรณีที่ (1) อีกครั้งหนึ่ง

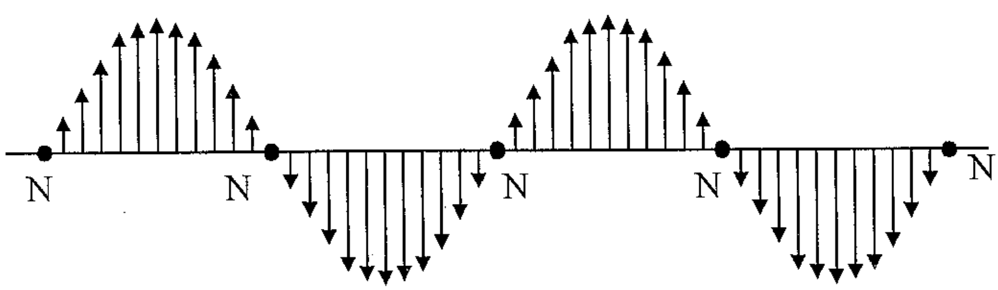


รูปที่ 7.9 **แสดงการรวมคลื่นสองคลื่นที่เวลาต่างๆ**

จากรูปที่ 7.9 จะเห็นได้ว่า มีหลายจุดที่แทนด้วยอักษร N ซึ่งไม่เคยเปลี่ยนตำแหน่งเลย จุดเหล่านี้เรียกว่า บัพ (nodes) และจะอยู่ห่างกันแต่ละจุดเป็นระยะ $\lambda/2$ บัพเป็นจุดที่แสดงการกระจัดเท่ากับศูนย์

จุดต่างๆ ระหว่างบัพ จะสั่นด้วยการกระจัดที่แตกต่างกัน จุดที่มีการกระจัดสูงสุด คือแอมพลิจูด จะอยู่ตรงกลางระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ เรียกว่า ปฏิบัพ (antinode)

ระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ การสั่นจะหันไปในทิศเดียวกัน และเฟสของการสั่นจะเปลี่ยนไป 180 องศา สำหรับการสั่นระหว่างบัพคู่ถัดไป ดังแสดงในรูปที่ 7.10



รูปที่ 7.10 **แสดงความเร็วของอนุภาคในคลื่นนิ่ง**

เป็นที่น่าสังเกตว่า ภายในคลื่นนิ่งไม่มีการถ่ายเทพลังงานผ่านตัวกลางแต่อย่างใด พลังงานของการสั่นจะอยู่ภายในบัพหนึ่งๆ เท่านั้น แต่ไม่มีการถ่ายเทสู่บัพอื่นๆ เราจึงเรียกว่า คลื่นนิ่ง

เพื่อให้เกิดความเข้าใจเชิงวิเคราะห์ยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาคลื่นตกกระทบซึ่งเคลื่อนที่จากซ้ายมือไปขวามือด้วยความเร็ว v และแทนด้วย

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \tag{7.25}$$

คลื่นสะท้อนกลับแทนด้วย

$$y_2 = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \tag{7.26}$$

จากหลักการซ้อนทับ การกระจัดของคลื่นรวมคือ

$$Y = Y_2 + Y_2$$

$$= A[\{\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}vt - \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt\}$$

$$+\{\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}vt + \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt\}]$$

หรือ
$$Y = \left(2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.27}$$

ซึ่งเป็นสมการของ SHM ที่มีแอมพลิจูด $2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$ และมีคาบเดียวกันกับคลื่นเริ่มต้น ความลาดของเส้นโค้งของคลื่นรวมหรือความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ กำหนดโดย

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.28}$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลางคือ

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{4\pi Av}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.29}$$

สมการ (7.27) ใช้ได้เมื่อตำแหน่งอ้างอิง $x = 0$ เป็นตำแหน่งของบัพ

ในกรณีที่ตำแหน่งอ้างอิง $x = 0$ เป็นตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดของคลื่นรวมจะแทนด้วย

$$Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.30}$$

โดยที่มีค่าแอมพลิจูดเท่ากับ $2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ และมีคาบเท่ากับคลื่นเริ่มต้นและความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ คือ

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.31}$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลาง

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.32}$$

ธรรมชาติของคลื่นรวมซึ่งเป็นคลื่นนิ่งขึ้นอยู่กับ ธรรมชาติของเงื่อนไขขอบและอาจแยกเป็น 2 กรณี คือ กรณีปลายตรึง และกรณีปลายอิสระ

1.1 กรณีปลายตรึง

1.1.1 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง ที่ปลายตรึงจะไม่มีการสั่น ดังนั้น สมการ (7.27) จึงแทนคลื่นนิ่งบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่ง ซึ่งแอมพลิจูดมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\therefore \frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7.33}$$

ระยะห่างระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \tag{7.34}$$

ทำนองเดียวกัน ปฏิบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งแอมพลิจูดมีค่าสูงสุด หรือ

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.35}$$

และระยะห่างระหว่างปฏิบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \tag{7.36}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระยะห่างระหว่างบัพและปฏิบัพที่อยู่ติดกันคือ $\lambda/4$

1.1.2 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา บัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งอัตราเร็วของอนุภาคเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (7.29) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\therefore\ \frac{2\pi vt}{\lambda} = m\pi$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi\left(\frac{v}{\lambda} = \frac{1}{T}\right)$$

$$\therefore\ t_m = m\frac{T}{2} \qquad m = 0, 1, 2, ... \tag{7.37}$$

ดังนั้น บัพเกิดขึ้นเมื่อเวลา $t = 0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}, ...$

ทำนองเดียวกันที่ตำแหน่งปฏิบัพ ค่าความเครียด $\frac{dY}{dx} = 0$ ดังนั้นจากสมการ (7.28) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi\, vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0,\ \frac{2\pi t}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ t_m = (2m+1)\frac{T}{4} \qquad m = 0, 1, ... \tag{7.38}$$

หรือปฏิบัพจะเกิดขึ้นที่เวลา $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, ...$

1.2 กรณีปลายอิสระ

1.2.1 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง ตัวอย่างของกรณีเช่นนี้คือท่อแก๊สปลายเปิด หรือเชือกปลายอิสระ การกระจัดที่บริเวณตรงปลายจะมีค่าสูงสุด ดังนั้น ตำแหน่งอ้างอิง $x = 0$ จะเป็นตำแหน่งของปฏิบัพ กรณีดังกล่าวสมการ (7.30) จึงเป็นสมการของคลื่นนิ่ง โดยที่บัพจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

หรือ $$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.39}$$

ซึ่งเป็นตำแหน่งของบัพ

ที่ตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1 \ldots \tag{7.40}$$

ซึ่งเป็นตำแหน่งของปฏิบัพ

1.2.2 การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา อัตราเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งบัพมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น จากสมการ (7.32) จะได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

หรือ

$$\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi t}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ t_m = (2m+1)\frac{T}{4} \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{7.41}$$

ดังนั้นที่เวลา $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \ldots$ จะเกิดบัพ

ในขณะที่ปฏิบัพจะเกิดขึ้นเมื่อความเครียด $\frac{dY}{dx}$ มีค่าสูงสุด ดังนั้น จากสมการ (7.31) เราจะได้

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ $$\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0 = \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi$$

$$\therefore\ t_m = m\frac{T}{2} \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{7.42}$$

ที่เวลา $t = 0, \frac{T}{2}, T, ...$ จะเกิดปฏิบัพ

2. การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งบัพและปฏิบัพ

เมื่อมีคลื่นเกิดขึ้นในของไหล ความดันมีค่า

$$P = -\text{elasticity}\left(\frac{dY}{dx}\right)$$

สภาพยืดหยุ่น (elasticity) เชิงปริมาตร $E = v^2\rho$ และ $\frac{dY}{dx}$ คือความเครียดเชิงปริมาตร สำหรับคลื่นนิ่งในท่อปลายเปิด จากสมการ (7.31) จะได้

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

ดังนั้น $$P = v^2\rho\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

ให้ $$v^2\rho\frac{4\pi A}{\lambda} = P_{max}$$

และ $$P_x = P_{max}\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \tag{7.43}$$

$$\therefore\ P = P_x\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.44}$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงแอมพลิจูดของความดันที่เปลี่ยนแปลงที่ตำแหน่ง x จากจุดสัมผัส จะเห็นได้ว่าความดันเปลี่ยนแปลงแบบฮาร์มอนิกตามเวลาด้วยคาบ $T = \frac{2\pi}{2\pi v/\lambda} = \frac{\lambda}{v}$ ซึ่งจะเท่ากับคาบของคลื่นองค์ประกอบ

เนื่องจากที่ตำแหน่งปฏิบัพ $\frac{dY}{dx} = 0$ และ $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ ดังนั้น $P_x = 0$ และ $P = 0$ ด้วย ซึ่งแสดงว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งปฏิบัพ

ที่ตำแหน่งบัพ ความเครียด $\frac{dY}{dx}$ มีค่าสูงสุด ดังนั้น $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$ และ $P_x = P_{max}$ หรือ

$$P = \pm P_{max}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

นั่นคือ ความดันและความหนาแน่นอาจมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งปฏิบัพ

3. การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง

คลื่นนิ่งสำหรับกรณีปลายอิสระ ตามสมการ (7.30)

$$Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

และ

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

มวลของชั้นหนา δx และความหนาแน่น ρ คือ $\rho\delta x$ พลังงานจลน์ของชั้นดังกล่าว คือ

$$\delta E_k = \frac{1}{2} \text{ . มวล.(ความเร็ว)}^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho\delta x\left(\frac{dY}{dt}\right)^2$$

พลังงานจลน์ของคลื่นทั้งหมดซึ่งยาว ℓ คือ

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\int_o^\ell\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\rho}{2}\left(\frac{4\pi Av}{\lambda}\right)^2\int_o^\ell\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\int_o^\ell 2\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\int_o^\ell\left(1+\cos\frac{4\pi x}{\lambda}\right)dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}(\ell+0)$$

$$\therefore\ E_k = \rho\ell\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda} \qquad (7.45)$$

ค่าเฉลี่ยของพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ คือ ค่าสูงสุดของ E_k หรือ $(E_k)_{max} = E$

$$\therefore\ E = \rho\left(\frac{2\pi A v}{\lambda}\right)^2 \tag{7.46}$$

พลังงานศักย์ คือ

$$E_p = E - E_k$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi A v}{\lambda}\right)^2 - \rho\left(\frac{2\pi A v}{\lambda}\right)^2 \cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi A v}{\lambda}\right)^2\left[1-\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\right]$$

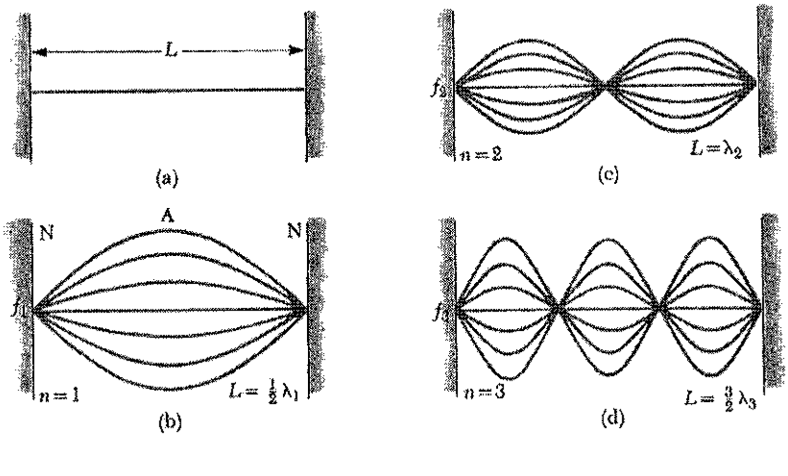
หรือ

$$E_p = \rho\left(\frac{2\pi A v}{\lambda}\right)^2 \sin^2\frac{2\pi vt}{\lambda} \tag{7.47}$$

ดังนั้นการกระจายพลังงานในรูปของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา กล่าวคือ เมื่อใดที่ $\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$ พลังงานรวมจะเป็นพลังงานจลน์แต่เพียงอย่างเดียว และเมื่อใดที่ $\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$ พลังงานรวมจะเป็นพลังงานศักย์แต่เพียงอย่างเดียว

4. คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ

พิจารณาคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกยาว L โดยมีปลายตรึงทั้งสองด้านที่จุดปลายของเส้นเชือกต้องเป็นตำแหน่งของบัพเสมอ เพราะเป็นปลายตรึงและสอดคล้องกับ n = 0 ดังแสดงในรูปที่ 7.11 (a)



รูปที่ 7.11 แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกสำหรับค่า n ต่างๆ

เมื่อ $n = 1$ ดังรูป (b) ปฏิบัพจะอยู่ตรงกลาง และความยาวของเชือกจะเป็น $\lambda_1/2$ หรือ $\lambda_1 = 2L$ เมื่อ $n = 2$ ดังรูป (c) ความยาวคลื่น $\lambda_2 = L$ และเมื่อ $n = 3$ ดังรูป (d) ความยาวคลื่น $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

ดังนั้น ความยาวคลื่นของ n ค่าต่างๆ หรือโมด (mode) ที่ n คือ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.48)$$

เนื่องจากความเร็ว v ของคลื่นมีค่าเท่ากันสำหรับทุกความถี่ ดังนั้นความถี่สำหรับโมดที่ n คือ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

อัตราเร็วของคลื่นในกรณีของคลื่นในเส้นเชือกหาได้จากสมการ (7.12) $v = \sqrt{F/\mu}$ ดังนั้น ความถี่ของคลื่นในเส้นเชือกขึงตึงคือ

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (7.49)$$

ความถี่ต่ำสุดสอดคล้องกับ $n = 1$ หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ความถี่ค่าอื่นๆ จะเป็นจำนวนเท่าของ f_1 เสมอ เช่น $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, $f_4 = 4f_1$ เป็นต้น ความถี่ f_1 เรียกว่า ความถี่หลักมูล (fundamental frequency) หรือเรียกว่า ฮาร์มอนิกที่หนึ่ง และ f_2 เรียกว่า ฮาร์มอนิกที่สอง f_n เรียกว่า ฮาร์มอนิกที่ n และ $f_n = nf_1$ และจากสมการ (7.49) จะเห็นได้ว่าความถี่ของเส้นเชือกขึ้นอยู่กับความตึง F และความยาว L ซึ่งหลักการนี้ใช้ได้สำหรับกรณีเส้นลวดโลหะอื่นๆ เช่น สายกีตาร์ เป็นต้น โดยผู้เล่นสามารถปรับค่าความถี่หรือเสียงได้โดยดึงเส้นลวดให้ตึงหรือหย่อนได้ตามต้องการ

ในกรณีคลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นในท่ออากาศอาจแยกออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีปลายเปิดด้านเดียว และกรณีปลายเปิดสองด้าน

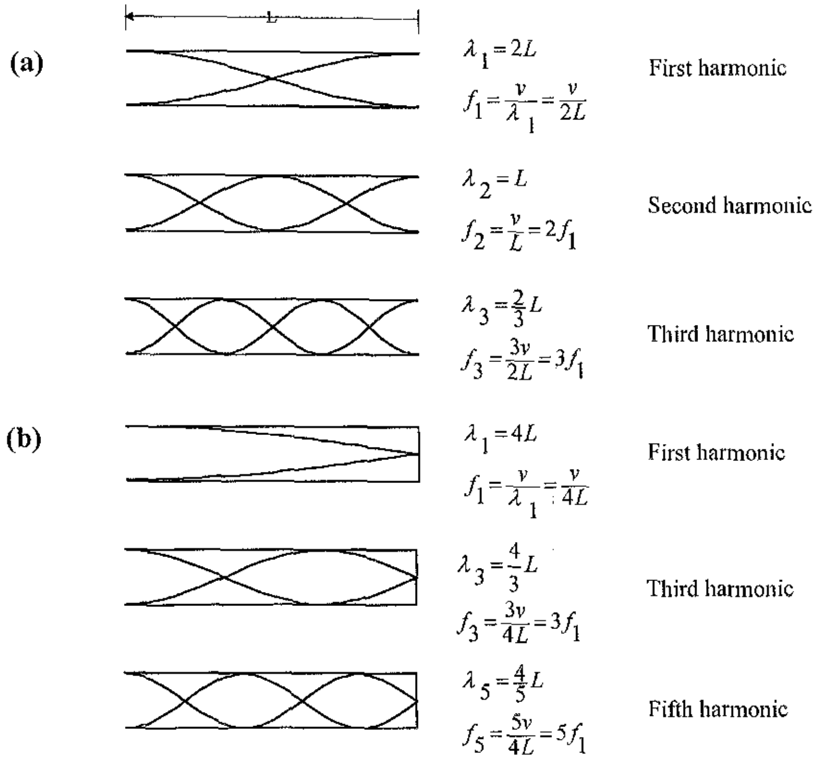
ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดทั้งสองด้าน คือ

$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.50)$$

v คืออัตราเร็วของเสียงในอากาศและ L คือความยาวของท่อ

ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดด้านเดียวคือ

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, ... \qquad (7.51)$$



รูปที่ 7.12 **แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศ (a) ปลายเปิดทั้งสองด้าน (b) ปลายเปิดด้านเดียว**

ที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่า คลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นจากเงื่อนไขที่เรากำหนดคือให้ตรึงที่ $x = 0$ และ $x = L$ ฟังก์ชันคลื่น $Y(x,t)$ ในสมการ (7.27) จะต้องเท่ากับศูนย์ที่จุดตรึงทั้งสองเสมอ นั่นคือเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) จะเป็น $Y(o,t) = 0$ และ $Y(L,t) = 0$ สำหรับทุกค่าของ t

จากสมการ (7.27) และ $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kv$

$$Y = (2A \sin kx)\cos \omega t$$

เงื่อนไขขอบแรกคือ $Y(o,t) = 0$ เกิดจาก $\sin kx = 0$ ที่ $x = 0$ ดังนั้นจึงสอดคล้องโดยอัตโนมัติ

สำหรับเงื่อนไขที่สองคือ $Y(L,t) = 0$ ดังนั้น $\sin kL = 0$ ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ $k_n L = n\pi$ โดยที่ $n = 1, 2, 3,...$ หรือ $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ และสอดคล้องกับสมการ (7.48)

ตัวอย่างที่ 7.4 คลื่นสองคลื่นเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามทำให้เกิดคลื่นนิ่ง ถ้าแต่ละคลื่นกำหนดโดยฟังก์ชันคลื่น

$$y_1 = (4\text{ cm})\sin(3x - 2t)$$

$$y_2 = (4\text{ cm})\sin(3x + 2t)$$

x และ y มีหน่วยเป็นเซนติเมตร จงหา

(a) การกระจัดสูงสุดที่ตำแหน่ง $x = 2.3$ เซนติเมตร

(b) ตำแหน่งของบัพและปฏิบัพ

วิธีทำ

(a) คลื่นนิ่งที่เกิดจากการรวมกันของสองคลื่น กำหนดโดยสมการ (7.27) คือ

$$Y = (2A\sin kx)\cos\omega t$$

เมื่อ $A = 4$ cm และ $k = 3\text{ cm}^{-1}$

การกระจัดสูงสุดของคลื่นนิ่งที่ตำแหน่ง $x = 2.3$ cm คือ

$$Y_{max} = (2 \times 4\text{ cm})\sin 3x|_{x=2.3}$$

$$= (8\text{ cm})\sin(6.9\text{ rad})$$

$$= 4.63\text{ cm}$$

(b) เนื่องจาก $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3\text{ cm}^{-1}$ ดังนั้น $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ cm

และตำแหน่งของบัพตามสมการ (7.33) คือ

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} = n\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{cm} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ตำแหน่งของปฏิบัพ กำหนดโดยสมการ (7.35) คือ

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$= (2n+1)\frac{\pi}{6}\text{ cm} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 7.5 สายไวโอลินยาว 33 เซนติเมตร และมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว 5.46×10^{-4} กิโลกรัม/เมตร จงหาแรงตึงที่ทำให้สายสั่นด้วยความถี่หลักมูล 660 เฮิรตซ์

วิธีทำ

ความถี่หลักมูลของคลื่นนิ่ง กำหนดโดยสมการ (7.49) หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = (2Lf_1)^2\mu$$

$$= (2 \times \frac{33}{100}\mathrm{m} \times 660\ \mathrm{Hz})^2 \times 5.46 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg/m\ N}$$

$$= 104\ \mathrm{N}$$

ตัวอย่างที่ 7.6 ถ้าแรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 72 นิวตัน เชือกยาว 3.8 เมตร มีมวล 0.84 กิโลกรัม จงหา

(a) ความถี่หลักมูล

(b) ความถี่ที่ทำให้เกิดปฏิบัพ 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ

(a) ความถี่หลักมูลคือ $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{LM}}$

ในที่นี้ $F = 72\ \mathrm{N}$

$$M = 0.84\ \mathrm{kg}$$

$$L = 3.8\ \mathrm{m}$$

$$\therefore\ f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{72\ \mathrm{N}}{(3.8\ \mathrm{m})(0.84\ \mathrm{kg})}} = 2.4\ \mathrm{Hz}$$

(b) คลื่นนิ่งที่มีเพียง 2 ปฏิบัพ คือ โมดที่ $n = 2$

ดังนั้น ความถี่ที่ฮาร์มอนิกที่สองคือ

$$f_2 = 2f_1 = 2 \times 2.4\ \mathrm{Hz} = 4.8\ \mathrm{Hz}$$

สรุป

จุดที่แสดงการกระจัดเป็นศูนย์ของคลื่นนิ่งเรียกว่า บัพ และจุดที่มีการกระจัดสูงสุดเรียกว่า ปฏิบัพ คลื่นนิ่งที่เรามักพบในชีวิตประจำวันคือคลื่นนิ่งที่เกิดจากเส้นเชือก ซึ่งอาจเป็นปลายตรึงหรือปลายอิสระก็ได้ และคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศซึ่งอาจเป็นปลายเปิดด้านเดียวหรือปลายเปิด 2 ด้าน ในหลายๆ กรณีเหล่านี้ ความถี่ของคลื่นนิ่งจะแตกต่างกันไป

บรรณานุกรม

Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2nd ed.). Tokyo: McGraw-Hill.

Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of Physics** (4th ed.). New York: Wiley.

Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4th ed. New York: Wiley.

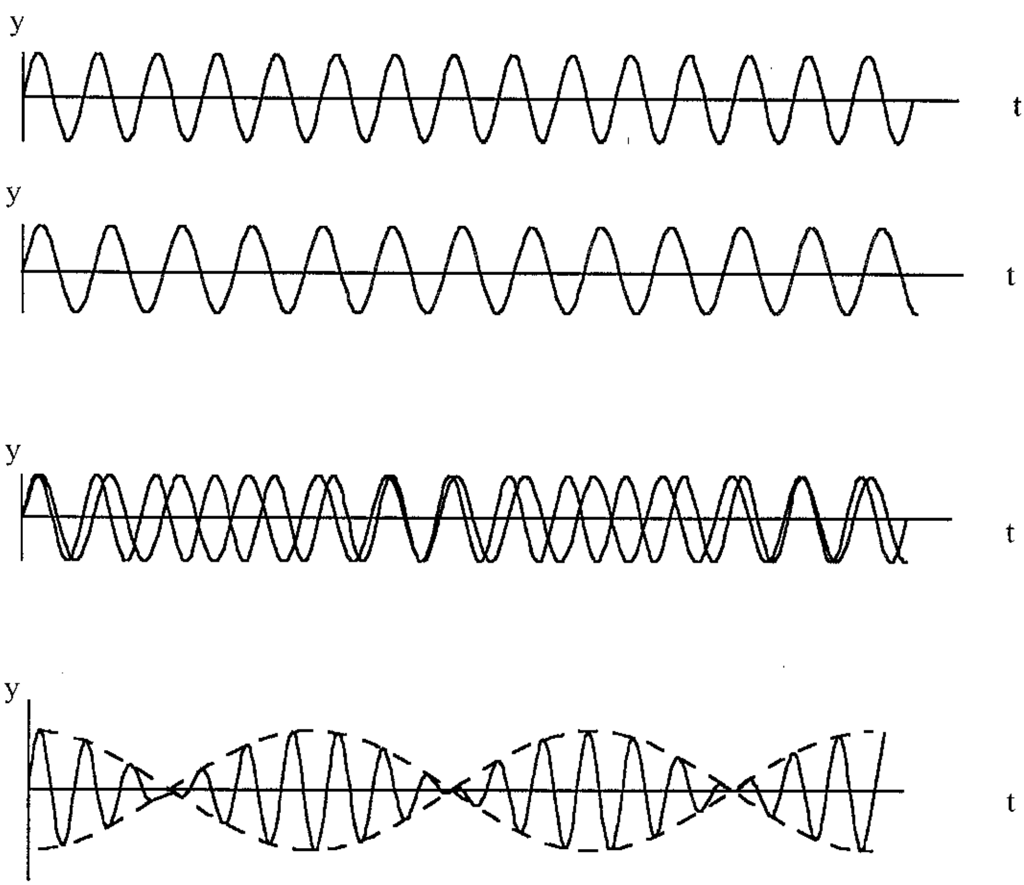
Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers.** Tokyo: Holt-Saunders Japan.

Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3rd ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics.** New York: Worth.

หน่วยที่ 8

เสียง



โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา ผาติเสนะ

ตอนที่ 8.1 คลื่นเสียง

คลื่นเสียงเป็นคลื่นกลชนิดหนึ่งและเป็นคลื่นตามยาว เสียงที่เราได้ยินส่วนใหญ่เป็นคลื่นที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศ แต่คลื่นเสียงสามารถเคลื่อนที่ในของเหลวและของแข็งได้เช่นกัน เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางอนุภาคของตัวกลางจะแกว่งกวัด ทำให้ความหนาแน่นและความดันของตัวกลางเปลี่ยนแปลงตามทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง ซึ่งแตกต่างจากการแกว่งกวัดของตัวกลางที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นในคลื่นตามขวาง การกระจัดที่เกิดขึ้นอันเนื่องจากคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางจะเป็นการกระจัดของแต่ละโมเลกุลจากตำแหน่งสมดุล ทำให้ความดันเปลี่ยนแปลงไปด้วย บริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่ามากกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุลเรียกว่า ส่วนอัด และบริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่าน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุลเรียกว่า ส่วนขยาย (expansion) ทั้งส่วนอัดและส่วนขยายจะเคลื่อนที่ไปในแนวเดียวกับการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง โดยที่ระยะจากส่วนอัดหนึ่ง (หรือส่วนขยาย) ไปยังส่วนอัดที่ถัดมา (หรือส่วนขยายที่ถัดมา) คือความยาวคลื่น λ

1. ความเร็วและความเข้มของคลื่นเสียง

1.1 ความเร็วของคลื่นเสียง

สมมติคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในของไหล เมื่อไม่มีคลื่นเสียงตำแหน่งของอนุภาคจะอยู่ที่ x เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในแนวแกน x การกระจัดของอนุภาคที่เวลา t คือ $\psi(x,t)$ กำหนดโดย

$$\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \tag{8.1}$$

โดยที่แอมพลิจูด A หมายถึงค่าสูงสุดของการกระจัด $k=2\pi/\lambda$ คือเลขคลื่น และ ω คือความถี่เชิงมุม ซึ่งมีค่า $\omega=kv$ เมื่อ v คืออัตราเร็วของคลื่น

คลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านของไหล ทำให้ความดันของของไหลเปลี่ยนแปลงสมมติความดันของของไหลที่ตำแหน่ง x และเวลา t คือ p(x,t) ถ้าความดันในขณะสมดุลและไม่มีคลื่นเสียงผ่านเลยมีค่าเป็น P_{eq} ดังนั้น ความดันที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจากมีคลื่นเสียงผ่านคือ

$$\Delta p(x,t) = p(x,t)-p_{eq}$$

สำหรับคลื่นฮาร์มอนิกที่เคลื่อนที่ผ่านทำให้ความดันที่เปลี่ยนไปมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ

$$\Delta p(x\,,t) = \Delta p_{max} \sin(kx - \omega t) \tag{8.2}$$

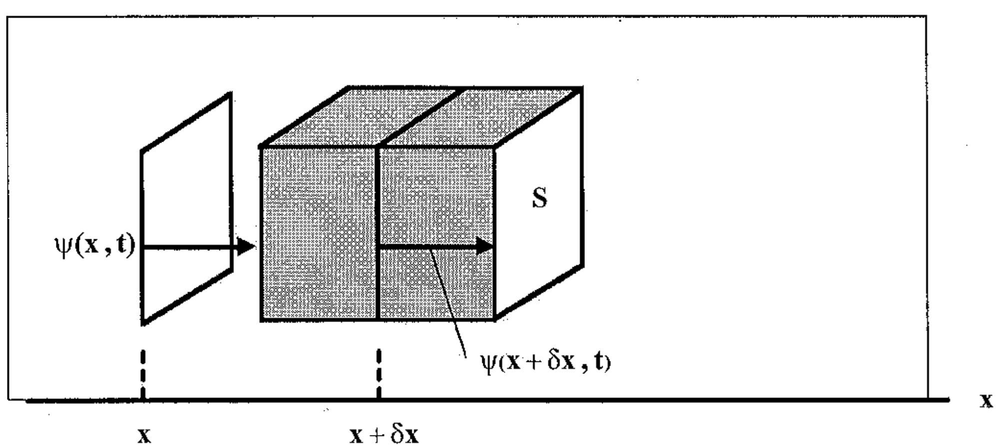
Δp_{max} คือค่าสูงสุดของความดันที่เปลี่ยนไปและเกิดขึ้นที่ตำแหน่งส่วนอัดสำหรับที่ตำแหน่งส่วนขยาย $\Delta p = -\Delta p_{max}$ ซึ่งหมายความว่า $p(x,t)$ มีค่าน้อยกว่า p_{eq}

ในกรณีของคลื่นเสียง ความดันที่เปลี่ยนไปเกิดอย่างรวดเร็วจนถือได้ว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างอนุภาคของตัวกลางเลย ซึ่งเป็นกระบวนการที่เรียกว่ากระบวนการแอเดียแบติก (adiabatic process) มอดุลัสเชิงปริมาตรของของไหลในกระบวนการนี้คือ

$$B = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} \tag{8.3}$$

ΔV คือปริมาตรน้อยๆ ที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจากความดันน้อย Δp เปลี่ยนไป

ต่อไปพิจารณาของไหลที่บรรจุในภาชนะที่มีรูปทรงเป็นแท่งด้วยพื้นที่หน้าตัด S ซึ่งผิวหน้าทั้งสองในขณะสมดุลอยู่ที่ตำแหน่ง x และ $x+\delta x$ เมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน ผิวหน้าทั้งสองจะเลื่อนไปเป็นระยะ $\psi(x\,,t)$ และ $\psi(x+\delta x\,,t)$ ดังแสดงในรูปที่ 8.1



รูปที่ 8.1 **แสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งและปริมาตรของของไหลเมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน**

ปริมาตรของของไหลจะเปลี่ยนจาก $V = S\,\delta x$ ไปเป็น

$$V + \Delta V = S\left[\delta x + \psi(x+\delta x, t) - \psi(x,t)\right]$$

ดังนั้น ปริมาตรที่เปลี่ยนไปคือ

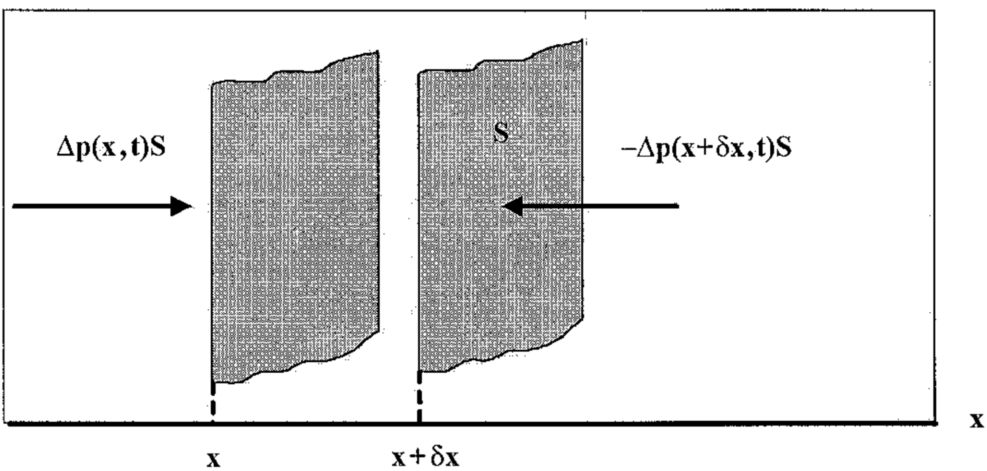
$$\Delta V = S[\psi(x+\delta x, t) - \psi(x, t)]$$

และ
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\psi(x+\delta x, t) - \psi(x, t)}{\delta x}$$

ในลิมิตที่ $\delta x \to O$ อัตราส่วนนี้จะกลายเป็น $\frac{\Delta V}{V} \to \frac{\partial \psi}{\partial x}$ และความดันที่เปลี่ยนไปในสมการ (8.3) จะกลายเป็น

$$\Delta p(x, t) = -B\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (8.4)$$

แรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง x อันเนื่องจากความดันที่เปลี่ยนไปคือ $\Delta p(x, t)S$ ทำนองเดียวกัน แรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง $x+\delta x$ คือ $-\Delta p(x+\delta x, t)S$ ดังแสดงในรูปที่ 8.2



รูปที่ 8.2 **แสดงแรงที่กระทำต่อผิวหน้าทั้งสองของของไหลอันเนื่องจากความดันเปลี่ยนไป**

แรงลัพธ์ของแรงทั้งสองคือ

$$\delta F = S\left[\Delta p(x, t) - \Delta p(x+\delta x, t)\right]$$

เมื่อใช้สมการ (8.4) แรงลัพธ์จะกลายเป็น

$$\delta F = BS\left(\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x+\delta x} - \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

โดยที่อนุพันธ์คำนวณที่ตำแหน่ง $x+\delta x$ และ x

ความเร่งของอนุภาคคือ $a = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ และมวลของอนุภาคคือ $\delta m = \rho S\delta x$ โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของของไหล และ $S\,\delta x$ คือปริมาตรเล็กๆ ของอนุภาคที่กำลังพิจารณาเมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\rho S\delta x\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = BS\left(\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x+\delta x} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

พื้นที่ S ซึ่งปรากฏทั้งสองด้านของสมการจึงตัดทิ้งไป ต่อไปจึงหารทั้งสองด้านของสมการด้วย δx ความแตกต่างของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เมื่อหารด้วย δx จะกลายเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองเมื่อ $\delta x \to O$ ดังนั้น

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = B\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad (8.5)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของคลื่นคือ (7.6) จะเห็นได้ว่าคลื่นเสียงในของไหลเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (8.6)$$

สำหรับคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศซึ่งประกอบด้วยแก๊สหลายชนิด แก๊สเหล่านี้อาจถือได้ว่าเป็นแก๊สอุดมคติ (ideal gas) ความดันและปริมาตรของแก๊สเหล่านี้ในกระบวนการแอเดียแบติก จะมีความสัมพันธ์กันคือ

$$pV^{\gamma} = \text{ค่าคงตัว}$$

โดยที่ $\gamma = C_p/C_v$ เป็นอัตราส่วนของความจุความร้อนโมลาร์ที่ความดันคงตัว (C_p) และปริมาตรคงตัว (C_v) ของแก๊ส เนื่องจากอนุพันธ์ของค่าคงตัวเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{d}{dV}pV^{\gamma} = p\gamma V^{\gamma-1} + V^{\gamma}\frac{dp}{dV} = O$$

หรือ
$$-V\frac{dp}{dV} = p^{\gamma} = B$$

ความหนาแน่นของแก๊สอุดมคติ อาจเขียนได้เป็น

$$\rho = m/V = nM/V$$

V คือปริมาตรที่บรรจุแก๊ส n โมล และ M คือมวลของแก๊ส 1 โมล หรือที่เรียกว่าน้ำหนักโมเลกุล (molecular weight) ดังนั้น

$$\frac{B}{\rho} = \frac{\gamma p}{nM/V} = \frac{\gamma pV}{nM}$$

เนื่องจาก $pV = nRT$ เมื่อ $R = 8.31\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ เป็นค่าคงตัวเรียกว่า universal gas constant

$$\therefore \frac{B}{\rho} = \frac{\gamma RT}{M}$$

และอัตราเร็วของเสียงในแก๊สอุดมคติคือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{8.7}$$

ซึ่งขึ้นกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ T และน้ำหนักโมเลกุล M เท่านั้น

สำหรับเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของแข็ง จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{8.8}$$

โดยที่ ρ และ Y คือความหนาแน่นและมอดุลัสของยังของของแข็งตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 8.1 จงหาอัตราเร็วของเสียงในน้ำซึ่งมีมอดุลัสเชิงปริมาตร 2.1×10^9 นิวตัน/เมตร^2 และความหนาแน่น 10^3 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

จากสมการ (8.6) อัตราเร็วของเสียงในน้ำคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9\ N/m^2}{10^3\ kg/m^3}} = 1{,}500\ m/s$$

ตัวอย่างที่ 8.2 จงหาอัตราเร็วของเสียงใน He ซึ่งมีน้ำหนักโมเลกุล 0.0040 กิโลกรัม/โมล และ $\gamma = C_p/C_v = 1.63$ ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน

วิธีทำ

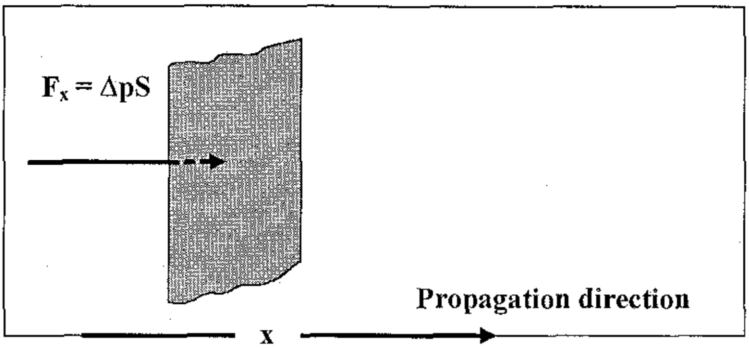
จากสมการ (8.7) อัตราเร็วของเสียงใน He คือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.63(8.31\ J.mol^{-1}.K^{-1})(310\ K)}{0.0040\ kg/mol}}$$

$$= 1.0\ km/s$$

1.2 ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลาง

คลื่นเสียงมีลักษณะเช่นเดียวกับคลื่นชนิดอื่นๆ คือการพาพลังงานไปด้วย ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง พลังงานที่คลื่นเสียงพาไปเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูดของคลื่น ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลางหาได้จากอัตราของงานที่ทำต่อตัวกลาง สมมติคลื่นเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x ระนาบของพื้นที่ S ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ดังรูปที่ 8.3



รูปที่ 8.3 **แสดงการหาความเข้มของคลื่น**

ความดันที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจากคลื่นที่ตกกระทบตั้งฉากกับพื้นที่คือ $\Delta p(x, t)$ ดังนั้นแรงที่กระทำต่อพื้นที่ S มีขนาด $F = \Delta pS$ อัตราการทำงานคือกำลัง P ซึ่งเป็นอัตราที่พลังงานเคลื่อนที่ผ่าน เนื่องจาก $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ เป็นความเร็วของอนุภาคของตัวกลางที่พื้นที่ผิวนี้ กำลังจึงมีค่า $P = F\frac{\partial\psi}{\partial t}$ หรือ

$$P = \Delta pS\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

ความเข้ม I คือกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$\therefore\ I = \frac{P}{S} = \Delta p\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

แทนค่า Δp โดยใช้สมการ (8.4) จะได้

$$I = -B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{8.9}$$

แล้วใช้ ψ ในสมการ (8.1)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore\ I = B\omega kA^2\sin^2(kx - \omega t) \tag{8.10}$$

โดยทั่วไปเราจะสนใจค่าเฉลี่ยความเข้มของคลื่นครบ 1 รอบ คือ

$$I_{ave} = \frac{1}{2}B\omega kA^2 \tag{8.11}$$

จากสมการ (8.4) และ (8.1) เราได้ว่า

$$\Delta p = -B\frac{\partial\psi}{\partial x} = BkA\sin(kx - \omega t)$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น

$$\Delta p_{max} = BkA$$

$$\therefore\ I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2\omega}{2Bk}$$

จากความสัมพันธ์ $\omega/k = v$ และ $B = \rho v^2$ ดังนั้น

$$I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2}{2v\rho} \tag{8.12}$$

ที่กล่าวมาเป็นเพียงความเข้มของคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ในหนึ่งมิติเท่านั้น คลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจริงๆ ในธรรมชาติสามารถกระจายไปทุกทิศทางซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นทรงกลมและมีหน้าคลื่นเป็นวงกลม ถ้า P_{ave} คือค่าเฉลี่ยของกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปทุกทิศทาง ดังนั้น กำลังที่ระยะ r นับจากแหล่งกำเนิดคลื่นจะต้องกระจายไปทั่วพื้นที่ผิวขนาด $4\pi r^2$ และความเข้มเฉลี่ยที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากกำเนิดคลื่นเป็นระยะ r คือ

$$I_{ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r^2} \tag{8.13}$$

P_{ave} จะมีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าจะอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดคลื่นเท่าใดก็ตามจึงเป็นอิสระต่อระยะห่าง r ดังนั้น ความเข้มที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากจุดกำเนิดคลื่นเป็นระยะ r_1 และ r_2

คือ $I_{1ave} = \dfrac{P_{ave}}{4\pi r_1^2}$ และ $I_{2\,ave} = \dfrac{P_{ave}}{4\pi r_2^2}$ ตามลำดับ และ $I_{1\,ave}/I_{2\,ave} = r_2^2/r_1^2$

ตัวอย่างที่ 8.3 ถ้าหูของมนุษย์ได้ยินเสียงความถี่ 1 กิโลเฮิรตซ์ ด้วยความเข้มต่ำสุด 10^{-12} วัตต์/เมตร^2 จงหาแอมพลิจูดความดันของเสียงนี้ กำหนดอัตราเร็วของเสียงในอากาศเป็น 343 เมตร/วินาที และความหนาแน่นของอากาศเท่ากับ 1.20 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

จากสมการ (8.12) แอมพลิจูดความดันคือ

$$\Delta p_{max} = \sqrt{2v\rho\bar{I}}$$

$$= \left[2(343\ m/s)(1.20\ kg/m^3)(10^{-12} W/m^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.87 \times 10^{-5}\ N/m^2$$

ตัวอย่างที่ 8.4 ถ้าความดันของ He ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน เท่ากับ 1.2×10^5 พาสคัล จงหาความเข้มเฉลี่ยของคลื่นเสียงใน He ซึ่งมีแอมพลิจูดความดันเท่ากับ 0.75 พาสคัล

วิธีทำ

จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 8.2 เราสามารถหาความหนาแน่นของแก๊สได้จากสมการของแก๊สอุดมคติ คือ

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$$

$$= \frac{(1.2 \times 10^5\ Pa)(0.0040\ kg/mol)}{(8.31\ J.mol^{-1} \cdot K^{-1})(310\ K)}$$

$$= 0.19\ kg/m^3$$

ความเข้มเฉลี่ยของเสียงในแก๊ส He หาได้จากสมการ (8.12) คือ

$$I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2}{2v\rho}$$

$$= \frac{(0.75\ Pa)^2}{2(1.0 \times 10^3\ m/s)(0.19\ kg/m^3)}$$

$$= 1.5 \times 10^{-3}\ W/m^2$$

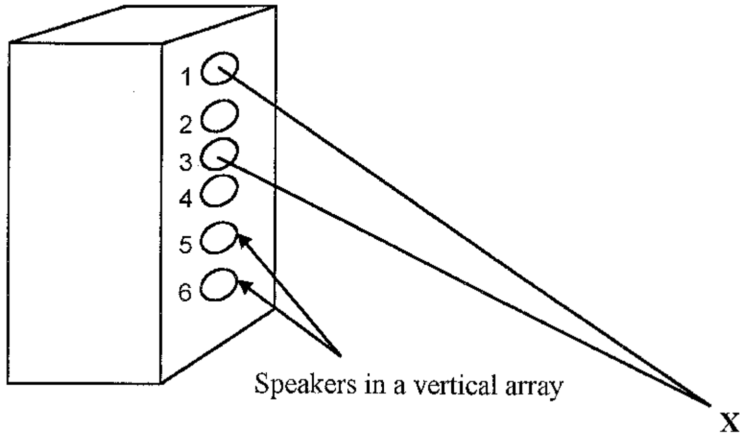
2. การแทรกสอดของคลื่นเสียง

เมื่อคลื่นเสียงจากแหล่งกำเนิดคลื่น 2 แหล่งพบกันที่ตำแหน่งหนึ่ง การกระจัดของคลื่นเสียงทั้งสองจะรวมกันตามหลักการซ้อนทับที่ได้กล่าวมาแล้ว ถ้าคลื่นเสียงทั้งสองเป็นคลื่นฮาร์มอนิกที่มีความถี่เดียวกัน คลื่นรวมที่ตำแหน่งใดจะขึ้นกับความแตกต่างระหว่างเฟสของคลื่นทั้งสอง การแทรกสอดแบบเสริมกันเกิดขึ้นเมื่อคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกันและแอมพลิจูดรวมมีค่าสูงสุด เนื่องจากความเข้มเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูด ดังนั้น ความเข้มของคลื่นรวมจึงมีค่าสูงสุดด้วยหากคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกัน ถ้าคลื่นทั้งสองต่างเฟสกันขนาดเท่ากับ π เรเดียน คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดและความเข้มต่ำสุด

ผลของการแทรกสอดมีความสำคัญมากในการออกแบบสร้างโรงมหรสพ ห้องบันทึกเสียง หรือส่วนอื่นๆ ที่เกี่ยวกับการใช้ลำโพงและเครื่องเสียง เมื่อลำโพงเคลื่อนที่ เสียงจากลำโพงไม่เพียงแต่จะออกจากด้านหน้าของลำโพงเท่านั้น แต่จะออกจากด้านหลังด้วย และเมื่อไปกระทบกับผนังที่อยู่ด้านหลังของลำโพงจะสะท้อนกลับ ทำให้เกิดการแทรกสอดระหว่างคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ออกจากด้านหน้าของลำโพง และคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหลังและสะท้อนกลับนี้ เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาคลื่นเสียงที่เป็นคลื่นฮาร์มอนิก เมื่อผู้ฟังยืนอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งทางเดินของคลื่นที่สะท้อนกลับมากกว่าทางเดินของคลื่นที่เคลื่อนไปข้างหน้าเป็นระยะครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเสียง คลื่นทั้งสองจะต่างเฟสกันเท่ากับ π เรเดียน ซึ่งเป็นการแทรกสอดแบบหักล้างสมบูรณ์ ทำให้ผู้ฟังไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่งนี้

เพื่อหลีกเลี่ยงผลของการเกิดการแทรกสอดดังกล่าว จึงมักวางลำโพงในกล่องปิดมิดชิด เพื่อหลีกเลี่ยงการแทรกสอดแบบหักล้างอันเนื่องจากคลื่นเสียงที่สะท้อนกลับและคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหน้า การบรรจุให้อยู่ในกล่องปิดมิดชิดจึงมิใช่เพื่อการประดับตกแต่งแต่อย่างใด

นอกจากนี้ การออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายอันต้องคำนึงถึงผลของการแทรกสอดด้วย เช่นที่ออกแบบดังรูปที่ 8.4 พิจารณาที่จุด x ซึ่งอยู่ด้านหน้าของลำโพงแต่เป็นตำแหน่งเฉียง ถ้าทางเดินของเสียงที่ออกจากลำโพงที่ 1 และที่ 5 แตกต่างกันเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นพอดี เสียงจากลำโพงทั้งสองจะแทรกสอดแบบหักล้างเพราะเฟสต่างกันเท่ากับ π เรเดียน ถ้าผู้ฟังยืนอยู่ไกลมากๆ เทียบกับระยะห่างของแต่ละลำโพง คลื่นเสียงจากลำโพงที่ 2 และ 6 หรือที่ 3 และ 7 หรือที่ 4 และ 8 จะแทรกสอดแบบหักล้าง จึงไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่ง x นี้ ผลที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้จึงมีประโยชน์มากในการออกแบบสร้างหอประชุมที่มีขนาดใหญ่



รูปที่ 8.4 **แสดงการออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายตัว แล้วทำให้เกิดการแทรกสอดแบบหักล้างที่ตำแหน่งซึ่งอยู่หน้าลำโพง**

3. บีตส์

ถ้ามีคลื่นหลายขบวน แต่ละคลื่นมีความถี่ ω และเลขคลื่น k เท่ากัน เราสามารถใช้สมการ (7.2) อธิบายคลื่นเหล่านั้นได้ แต่ถ้าคลื่นเหล่านั้นมีความถี่และเลขคลื่นต่างกัน เราไม่สามารถใช้สมการ (7.2) อธิบายคลื่นรวมได้ ทั้งนี้เพราะคลื่นรวมมีแอมพลิจูดแตกต่างจากแต่ละคลื่นนั่นเอง

พิจารณาคลื่นสองคลื่นซึ่งมีแอมพลิจูดเท่ากันแต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย เคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกัน ผลรวมของคลื่นคู่นี้จะมีแอมพลิจูดที่สูงต่ำสลับกันไป เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า บีตส์ (beats) ซึ่งเราอาจทดลองได้จากการเคาะส้อมเสียง 2 อันที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

สมมติให้คลื่นสองขบวนแทนด้วยสมการ ดังนี้

$$y_1 = A\sin 2\pi f_1 t$$

และ

$$y_2 = A\sin 2\pi f_2 t$$

โดยที่ A คือแอมพลิจูด และ f_1 และ f_2 คือความถี่ของคลื่นที่ต่างกันไม่มากนัก

$$\therefore\ y = y_1 + y_2$$

$$= A\sin 2\pi f_1 t + A\sin 2\pi f_2 t$$

$$= A\left[2\sin 2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t.\cos 2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]$$

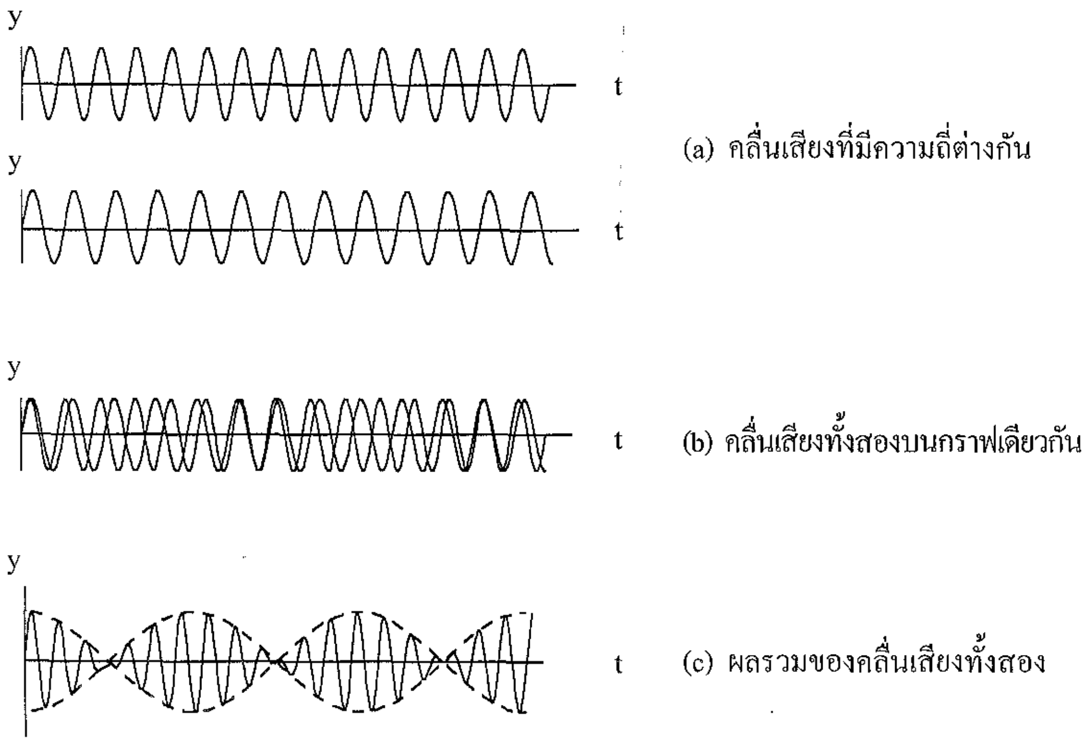
$$= \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]\cdot\left[\sin 2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right]$$

หรือ $$y = B\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \tag{8.14}$$

ดังนั้นคลื่นรวมจะมีความถี่เฉลี่ยเป็น $\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$ และมีแอมพลิจูดรวมเป็น

$$B = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \tag{8.15}$$

และค่าแอมพลิจูด B นี้ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาและขึ้นอยู่กับค่า $(f_1 - f_2)/2$ ถ้า f_1 มีค่าใกล้เคียงกับ f_2 มาก เทอม $(f_1 - f_2)/2$ จะมีค่าน้อย ทำให้แอมพลิจูดรวมเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้าๆ



รูปที่ 8.5 **แสดงการรวมคลื่นที่มีแอมพลิจูดเท่ากัน แต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย**

ค่าของแอมพลิจูด B จะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1 = \cos n\pi \tag{8.16}$$

โดยที่ $$n = 0, 1, 2, 3, ...$$

หรือ $$2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = n\pi$$

$$t = \frac{n}{f_1 - f_2} \tag{8.17}$$

ดังนั้นเวลาในช่วงค่าสูงสุดสองค่า คือ

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

หรือจำนวนค่าสูงสุดในเวลา 1 วินาที คือ

$$\frac{1}{\Delta t} = f_1 - f_2 \tag{8.18}$$

ทำนองเดียวกัน ค่าต่ำสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 \tag{8.19}$$

โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

หรือ
$$t = \frac{2n+1}{2(f_1 - f_2)} \tag{8.20}$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

ความถี่ของจำนวนค่าต่ำสุดคือ
$$\frac{1}{\Delta t'} = f_1 - f_2 \tag{8.21}$$

การเปลี่ยนค่าของแอมพลิจูดระหว่างค่าสูงสุดค่าหนึ่งกับค่าต่ำสุดที่อยู่ถัดไปเรียกว่าบีตส์ และจำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ

$$N = |f_2 - f_1| = f_b \tag{8.22}$$

ถ้าความถี่ทั้งสองใกล้เคียงกันมาก ความถี่ของบีตส์ f_b จะน้อยมาก และช่วงเวลา Δt ระหว่างบีตส์จะมีค่ามาก และถ้าความถี่ทั้งสองเท่ากันพอดีความถี่ของบีตส์จะเท่ากับศูนย์ และไม่มีบีตส์เกิดขึ้นเลย

เราสามารถใช้บีตส์ในการปรับเสียงดนตรี เช่น เปียโน กีตาร์ เป็นต้น กล่าวคือ ถ้าความถี่ของเสียงดนตรีที่จะปรับแตกต่างจากความถี่ของเสียงที่ได้มาตรฐาน เมื่อเราเล่นพร้อมกันจะได้ยินเสียงบีตส์เกิดขึ้น เราจึงต้องปรับเสียงโดยการปรับความตึงของสายดนตรี จนกระทั่งไม่ได้ยินเสียงบีตส์แสดงว่ามีความถี่เดียวกัน อย่างไรก็ตาม คนทั่วไปไม่อาจแยกบีตส์ที่ความถี่ไม่เกิน 10 Hz ได้ และนักดนตรีจะแยกเสียงบีตส์ได้ดีกว่าคนทั่วไป

ตัวอย่างที่ 8.5 เมื่อเคาะส้อมเสียงสองอันพร้อมกัน ปรากฏว่าได้ยินเสียงบีตส์ 3 ครั้งในหนึ่งวินาที ถ้าส้อมเสียงอันหนึ่งทราบความถี่ที่แน่นอนว่าเท่ากับ 440 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงอีกอันหนึ่ง

วิธีทำ

จากสมการ (8.22) จำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ $N = 3$ ดังนั้น

$$3 = 440 - f_2$$

หรือ

$$3 = f_1 - 440$$

โดยที่เราไม่ทราบว่าส้อมเสียงอันใดเป็น f_1 หรือ f_2 ดังนั้นความถี่ที่ไม่ทราบค่าอาจเป็น 437 Hz หรือ 443 Hz

---

สรุป

คลื่นเสียงเป็นคลื่นตามยาว ความเร็วของคลื่นเสียงขึ้นกับชนิดของตัวกลาง ความเร็วของคลื่นเสียงในของแข็งจะมากกว่าในของเหลวและแก๊ส การแทรกสอดของคลื่นเสียงจะสังเกตได้ง่ายคือเสียงดังหรือเบาสลับกันไป ซึ่งเราเรียกว่า บีตส์

ตอนที่
8.2
การได้ยิน

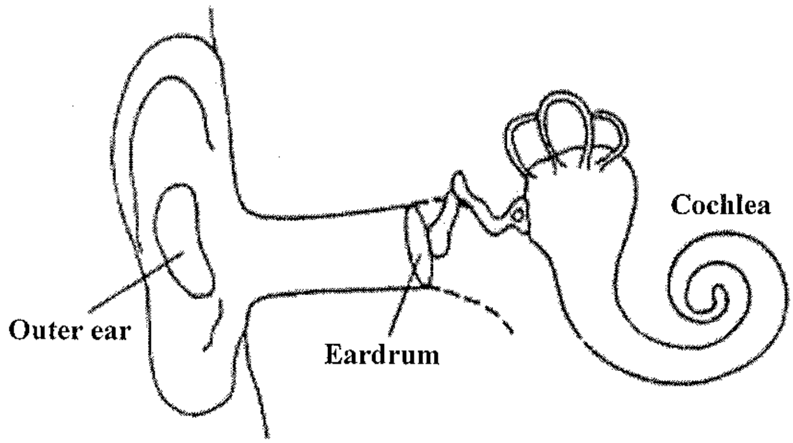
เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่มาถึงหูของมนุษย์ หูจะเปลี่ยนคลื่นเสียงเป็นคลื่นที่ประสาทหูรับรู้ได้ แล้วปรับเปลี่ยนต่อไปเพื่อให้สมองตีความต่อไป แม้ว่ากระบวนการนี้จะสลับซับซ้อน แต่เราสามารถศึกษาลักษณะที่สำคัญบางประการได้

นักดนตรีอธิบายเสียงที่เขาได้ยินในเทอมของความสูงต่ำของเสียง (pitch) ความดัง (loudness) และคุณภาพเสียง (quality) ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทั้งสามนี้ค่อนข้างจะสลับซับซ้อน ความสูงต่ำของเสียงเกี่ยวพันกับความถี่ของเสียง ความดังเกี่ยวพันกับความเข้มของคลื่นเสียง ส่วนคุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปร่างหรือรูปแบบ (waveform) ของคลื่นเสียง

ถ้าแหล่งกำเนิดเสียงมีการเคลื่อนที่ ผู้สังเกตจะได้ยินความถี่ที่แตกต่างไปจากความถี่ที่แท้จริง เรียกว่าปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ แต่ถ้าหากแหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วมากกว่าคลื่นเสียง เราเรียกว่า ซอนิกบูม

1. ความสูงต่ำและความถี่ของเสียง

รูปที่ 8.6 แสดงรูปร่างของหูมนุษย์ ส่วนนอกของหูรับคลื่นเสียงแล้วส่งผ่านไปยังส่วนกลางคือ eardrum กระดูกในหูส่วนกลางจะควบคุมแอมพลิจูดของคลื่นเสียงแล้วส่งต่อไปยังหูชั้นใน ประสาทในคอเคลีย (cochlea) ของหูส่วนในจะสนองตอบต่อคลื่นเสียง ความถี่ขนาด 20 kHz จะสนองตอบใกล้ๆ ฐาน และความถี่ต่ำๆ จะสนองตอบต่อไปตามเยื่อบาซิลาร์ (basilar membrane) สำหรับทุกๆ 3.5 mm ตามแนวเยื่อบาซิลาร์ ความถี่ซึ่งระบบประสาทสนองตอบจะลดลงครึ่งหนึ่ง เนื่องจากเยื่อดังกล่าวยาว 35 mm คนทั่วไปจึงได้ยินความถี่ที่มีความแตกต่างด้วยแฟกเตอร์ขนาด 2^{10} หรือประมาณ 1,000 นั่นคือ จาก 20 Hz ถึง 20 kHz



รูปที่ 8.6 **แสดงส่วนประกอบภายในของหูมนุษย์**
เยื่อบาซิลาร์ (ซึ่งไม่ได้แสดงไว้ ณ ที่นี้) จะขยายไปตามขดของคอเคลีย

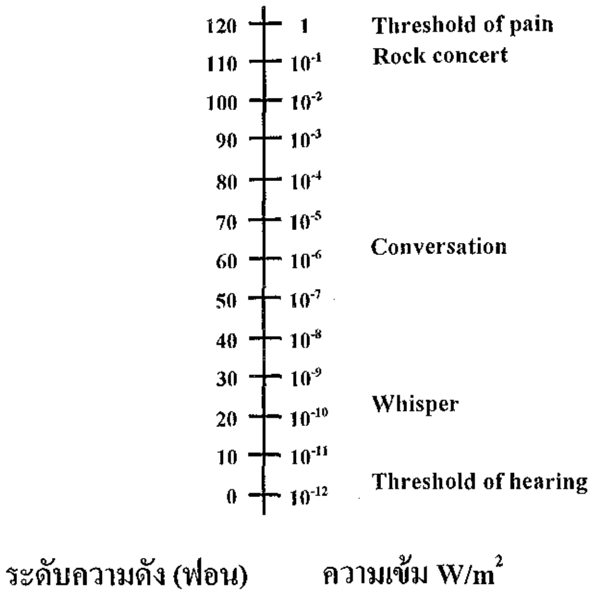
สำหรับคลื่นเสียงฮาร์มอนิก เสียงสูงจะสูงตามค่าความถี่ เยื่อบาซิลาร์สามารถแยกความถี่ขนาดต่างๆ ของคลื่นเสียงได้ เพราะเยื่อจะสั่นแตกต่างกันเมื่อระยะต่างกัน คลื่นเสียงความถี่ต่ำทำให้เยื่อบาซิลาร์ที่ระยะไกลสั่นแรง การแยกความถี่อย่างหยาบๆ จึงเกิดตามเยื่อบาซิลาร์ ส่วนการแยกอย่างละเอียดเกิดจากระบบประสาทที่กระจายอยู่ตามเยื่อบาซิลาร์

2. ความเข้มและความดังของคลื่นเสียง

หูของมนุษย์ทั่วไปจะได้ยินเสียงความถี่ 1 kHz ที่ความเข้ม $I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m^2 จนถึงที่ความเข้มประมาณ 1.00 W/m^2 เราเรียกความเข้มต่ำสุดของเสียงที่หูคนปกติจะได้ยินว่า threshold of hearing และเรียกความเข้มสูงสุดของเสียงที่หูคนปกติจะทนฟังได้ว่า threshlod of pain or threshold of feeling

เมื่อความเข้มของคลื่นเสียงเพิ่มขึ้น ความดังของเสียงจะเพิ่มขึ้นด้วย แต่ความสัมพันธ์ของปริมาณทั้งสองมิได้เป็นแบบเชิงเส้น กล่าวคือ เมื่อความดังของเสียงเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าพบว่าความเข้มของเสียงจะเพิ่มขึ้น 10 เท่าและเมื่อความดังเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า ความเข้มจะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า

ระดับความดังของคลื่นเสียงมีหน่วยวัดเป็น ฟอน (phons) คลื่นเสียงขนาด 1 kHz ที่ threshold of hearing หรือที่ความเข้มประมาณ 10^{-12} W/m^2 มีระดับความดังเท่ากับ 0 ฟอน และที่ threshold of pain จะมีระดับความดังเท่ากับ 120 ฟอน สำหรับความดังที่ระดับความเข้มค่าต่างๆ แสดงในรูปที่ 8.7



รูปที่ 8.7 **แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มและความดังของคลื่นเสียง**

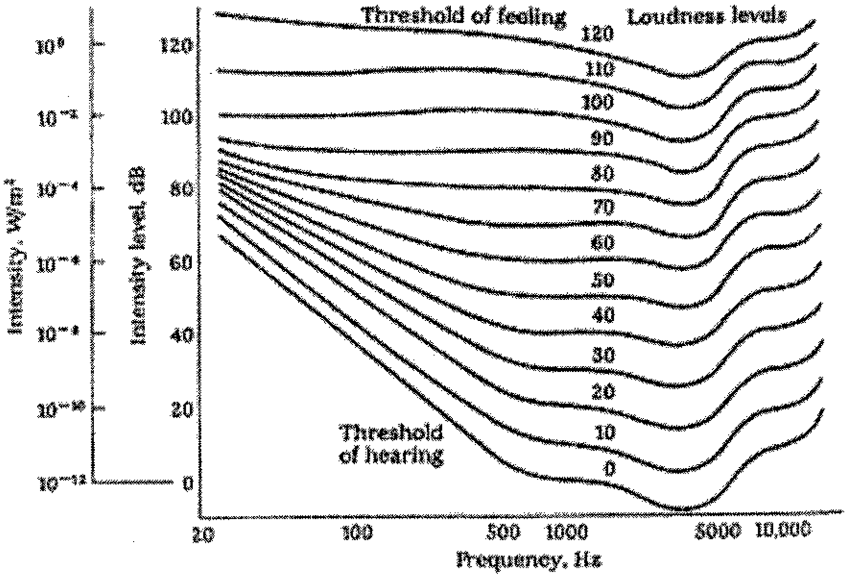
การได้ยินของหูมนุษย์จะมีพิสัยของความเข้มเสียงที่กว้างมาก เราจึงกำหนดให้คลื่นเสียงที่มีอัตราส่วนความเข้มเท่ากันมีระดับของความดังเท่ากันด้วย โดยใช้ลอการิทึม (logarithms) ดังนั้น เราจึงกำหนดความเข้มของเสียงเป็นระดับความเข้มเสียง (sound-intensity level) แทนด้วย β กำหนดโดย

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \qquad (8.23)$$

โดยที่ $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ เป็นความเข้มของเสียงที่มีระดับความเข้มเสียง β เป็นศูนย์แม้ว่า β จะไม่มีหน่วยแต่มักกำหนดให้มีหน่วยเป็นเดซิเบล (decibel) แทนด้วย dB เพื่อเป็นเกียรติแก่ Alexander Graham Bell

ระดับความเข้มเสียง β กำหนดโดยสมการ (8.23) เพื่อว่าความเข้มเสียง I ที่เปลี่ยนไปด้วยแฟกเตอร์ 10^n สอดคล้องกับการเปลี่ยน β เท่ากับ 10. n เช่น ถ้า $\frac{I}{I_0} = 10^7$ ดังนั้น $\beta = 10 \log_{10} (10^7) = 10 \cdot 7 = 70$ dB แม้ว่า n = 7 ในที่นี้จะเป็นเลขจำนวนเต็ม แต่เลขจำนวนอื่นๆ ก็ยังใช้ได้เช่นกัน

อย่างไรก็ตามหูของมนุษย์จะรับรู้คลื่นเสียงไม่ทุกความถี่ รูปที่ 8.8 แสดงระดับความดังและความเข้มของเสียงที่ความถี่ต่างๆ แต่ละเส้นแทนเสียงที่ความถี่ต่างๆ ซึ่งมีระดับความดังเป็นฟอนเท่ากัน ระดับความดังเป็นฟอนที่ความถี่ 1 kHz เป็นตัวกำหนด ระดับความเข้มเสียงเป็น dB



รูปที่ 8.8 **แสดงระดับความดังและความเข้มเสียงที่ความถี่ค่าต่างๆ**

โดยทั่วไปหูของมนุษย์จะไวต่อเสียงความถี่ประมาณ 4 kHz แต่เรามักใช้ส่วนราบสูง (plateau) ของเส้นโค้งที่ความถี่ 1 kHz เป็นมาตรฐานในการกำหนดระดับความเข้มเสียงที่ความถี่ 40 Hz หูจะรับรู้เสียงซึ่งมีระดับความเข้มเสียง 58 dB ในขณะที่หูรับรู้เสียงความถี่ 1 kHz หรือ 6 kHz ด้วยระดับความเข้มเสียง 0 dB

ตัวอย่างที่ 8.6 คนขับรถโดยสารประจำทางในเมืองกำลังสนทนากับผู้โดยสารที่อยู่ในรถซึ่งมีหน้าต่างเปิดทุกบาน ถ้าระดับความเข้มเสียงของการสนทนาเท่ากับ 65 เดซิเบล และระดับความเข้มเสียงของการจราจรภายนอกรถเท่ากับ 70 เดซิเบล จงหา

(a) ความเข้มของเสียง

(b) ระดับความเข้มเสียงภายในรถโดยสารนั้น

วิธีทำ

(a) จากสมการ (8.23) ความเข้มของเสียงจากการสนทนา คือ

$$65 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0}$$

$$\frac{I_1}{10^{-12}} = 10^{6.5}$$

$$I_1 = 10^{-5.5} = 3.16 \times 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

และความเข้มของเสียงจากการจราจรนอกรถ คือ

$$70 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0}$$

$$I_2 = 10^{-5} \ \text{W/m}^2$$

ดังนั้นความเข้มของเสียงภายในรถ คือ

$$I = I_1 + I_2 = 1.32 \times 10^{-5} \ \text{W/m}^2$$

(b) ระดับความเข้มเสียงภายในรถ คือ

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{1.32 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 71.2 \ \text{dB}$$

ตัวอย่างที่ 8.7 จงหาแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดของอากาศ ซึ่งมีคลื่นเสียงความถี่ 3 กิโลเฮิรตซ์ และระดับความเข้มเสียง 60 เดซิเบล เคลื่อนที่ผ่านอากาศ เสียงมีอัตราเร็ว 343 เมตร/วินาที และอากาศมีความหนาแน่น 1.21 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

ความเข้มของเสียง หาได้จากสมการ (8.23) คือ

$$60 = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^6$$

$$I = 10^{-6} \ \text{W/m}^2$$

เนื่องจากความเข้มเสียงทำให้อากาศซึ่งเป็นตัวกลางแกว่งกวัด ดังนั้น จากสมการ (7.18) คือ

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\therefore \ A = \sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 v}}$$

$$= \left[\frac{2(10^{-6} \ \text{W/m}^2)}{(1.21 \ \text{kg/m}^3)\{2p(3000 \ \text{Hz})\}^2(343 \ \text{m/s})}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3.68 \times 10^{-9} \ \text{m}$$

3. คุณภาพและรูปแบบของคลื่นเสียง

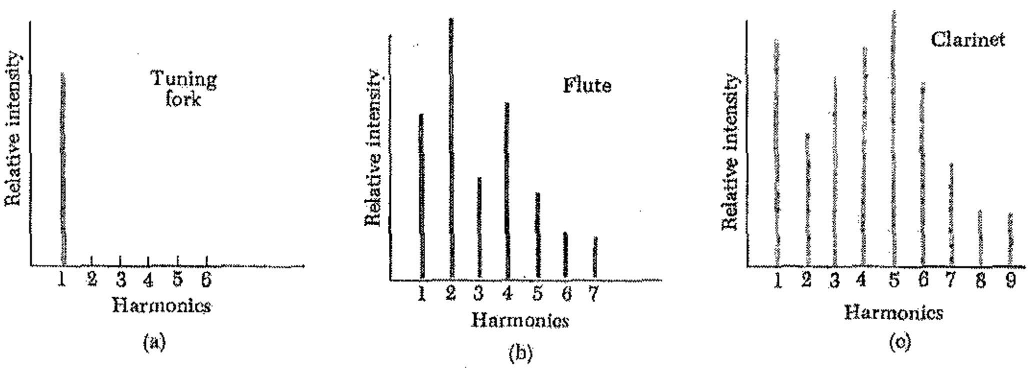
คุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปแบบของคลื่นเสียง มิใช่ขึ้นกับความถี่หรือแอมพลิจูด คลื่นเสียงโดยทั่วไปมักมีลักษณะเป็นคาบแต่ไม่ใช่เป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ มีลักษณะเป็นแอนฮาร์มอนิก และแม้ว่าจะมีความสูงต่ำของเสียงเดียวกัน แต่มีคุณภาพเสียงที่แตกต่างกัน

ฟูริเยร์ (Jean Baptiste Joseph Fourier) ได้แสดงให้เห็นว่าคลื่นที่มีรูปแบบซับซ้อนและเป็นคาบเกิดจากผลบวกของคลื่นฮาร์มอนิก ถ้าให้ y(t) เป็นการกระจัดของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ y(t) และอนุพันธ์ของ y(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น

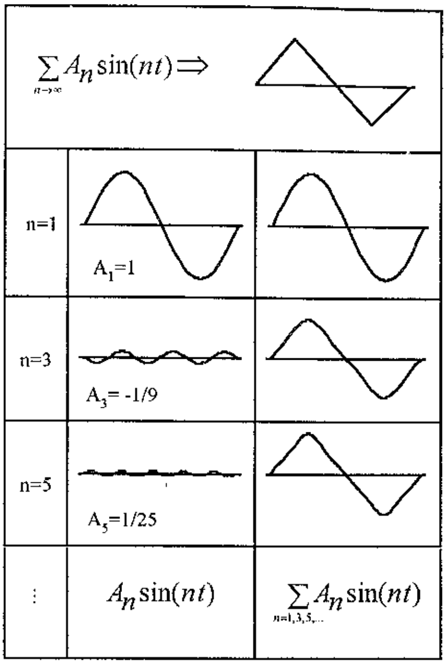
$$y(t) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(n\omega t + \phi_n) \qquad (8.24)$$

โดยที่ $\omega = 2\pi/T$ และ T คือคาบของคลื่นนี้ ค่าของ N จะมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับแบบของคลื่น ส่วนการหาค่าสัมประสิทธิ์ A_n และเฟส ϕ_n ของแต่ละคลื่น จะใช้วิธีวิเคราะห์ที่เรียกว่า Fourier analysis เราเรียกความถี่ต่ำสุดของการวิเคราะห์นี้ว่า ความถี่หลักมูล และเรียกความถี่ที่เป็นพหุคูณของความถี่หลักมูลว่า ฮาร์มอนิกที่สูงกว่าหรือโอเวอร์โทน (overtones) ดังนั้นคุณภาพเสียงของเสียงจากปี่ทุ้ม และขลุ่ยฝรั่งเกิดจากความแตกต่างของโอเวอร์โทนนั่นเอง

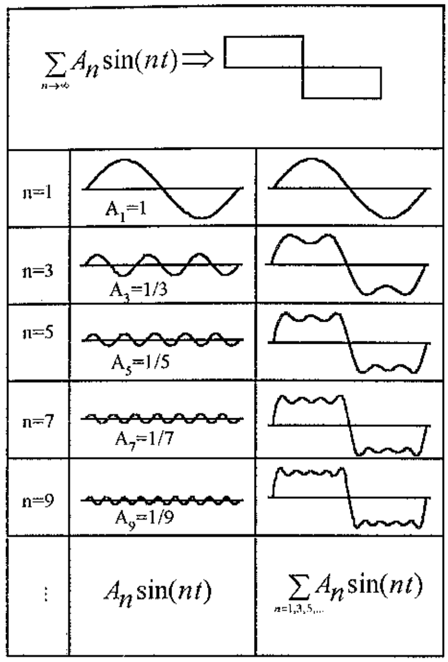
แม้ว่ารูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบสามารถเขียนในเทอมอนุกรมฟูริเยร์ แล้วได้ความถี่หลักมูล และโอเวอร์โทนค่าต่างๆ เราอาจสร้างรูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบได้อีกหลายรูปแบบ โดยการเพิ่มโอเวอร์โทนต่างๆ เข้าไปในความถี่หลักมูล ซึ่งเรียกว่า Fourier synthesis ซึ่งเป็นวิธีทางอิเล็กทรอนิกส์ เครื่องดนตรีสมัยใหม่จึงใช้ตัวสังเคราะห์ (synthesizer) มากกว่าที่จะใช้เครื่องดนตรีที่ทำให้เกิดเสียงที่เป็นคลื่นกลธรรมดา



รูปที่ 8.9 **แสดงฮาร์มอนิกของเสียงจากแหล่งกำเนิดที่แตกต่างกัน**



(a)

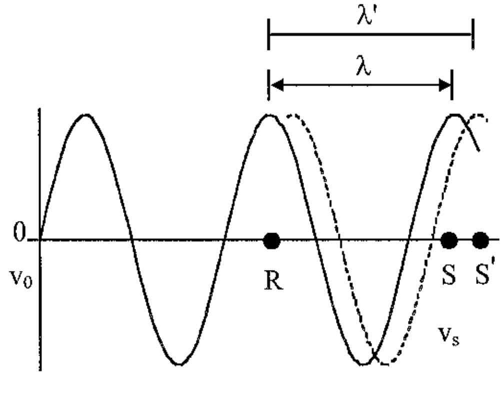


(b)

รูปที่ 8.10 **แสดงการรวมคลื่น รูปแบบคลื่นครบ 1 รอบ แสดงไว้ด้านบนสุด แต่ละคลื่นไซน์ที่นำมาบวกแสดงทางซ้ายมือ และผลรวมแสดงทางขวามือ**

4. ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์

จากที่แล้วมาเราศึกษาถึงคลื่นซึ่งมีแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่นิ่งและผู้สังเกตก็อยู่นิ่งด้วย ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน นั่นคือ แหล่งกำเนิดคลื่นหรือผู้สังเกตอย่างใดอย่างหนึ่งมีการเคลื่อนที่หรือทั้งสองมีการเคลื่อนที่ ทำให้ผู้สังเกตได้รับคลื่นที่มีความถี่ต่างไปจากคลื่นที่ได้รับเมื่อแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตอยู่นิ่ง เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ (Doppler effect)



รูปที่ 8.11 **แสดงการเกิดปรากฏการณ์โดปป์เลอร์**

สมมติให้แหล่งกำเนิดคลื่น (s) อยู่นิ่ง ส่งคลื่นออกมาด้วยความถี่ f ความยาวคลื่น λ และความเร็ว v ฉะนั้น ถ้าผู้สังเกตอยู่นิ่งใน 1 หน่วยเวลา จะรับคลื่นได้จำนวน f คลื่น แต่ถ้าผู้สังเกตเคลื่อนที่เข้าหา s ด้วยอัตราเร็ว v_0 จำนวนคลื่นซึ่ง O ได้รับในหนึ่งหน่วยเวลาจะเพิ่มขึ้น ค่าที่เพิ่มขึ้นนี้จะเป็นจำนวนคลื่นหาได้จากระยะทางที่ O เดินทางได้ในหนึ่งหน่วยเวลานั้นคือ $\frac{v_0}{\lambda}$ ดังนั้น ถ้า f' เป็นความถี่ปรากฏซึ่ง O รับได้ จะได้ว่า

$$f' = f + \frac{v_0}{\lambda}$$

$$= f + \frac{v_0 f}{v} \qquad (v = \lambda f)$$

หรือ

$$f' = f\left(\frac{v + v_0}{v}\right) \tag{8.25}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า O เคลื่อนที่ออกห่างจาก s ด้วยความเร็ว v_0 ความถี่ปรากฏที่ O รับได้ จะเป็น

$$f' = f\left(\frac{v - v_0}{v}\right) \tag{8.26}$$

สมการ (8.25) และ (8.26) อาจรวมได้ใหม่เป็น

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_0}{v}\right) \tag{8.27}$$

โดยที่ เครื่องหมาย + แสดงถึง O เคลื่อนที่เข้าหาแหล่งกำเนิดคลื่น s

เครื่องหมาย − แสดงถึง O เคลื่อนที่ออกจากแหล่งกำเนิดคลื่น s

ต่อไปถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ออกห่างจากผู้สังเกต โดยผู้สังเกตอยู่นิ่ง นั่นคือ s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_s ดังนั้นความยาวคลื่นที่ผู้สังเกตรับได้จะเพิ่มจาก λ เป็น λ' ค่าความยาวคลื่นที่เพิ่มขึ้นนี้มีค่าเท่ากับระยะทางที่แหล่งกำเนิดเดินทางได้ในหนึ่งรอบคือ ระยะ ss' เนื่องจากเวลาที่ใช้สำหรับหนึ่งรอบคือ $\frac{1}{f}$ และความเร็วของ s คือ v_s ระยะ ss' จึงเป็น $\frac{v_s}{f}$

$$\lambda' = \lambda + \frac{v_s}{f} \tag{8.28}$$

เนื่องจากตัวกลางอยู่นิ่งไม่ได้เคลื่อนที่ไปด้วย ความเร็วของคลื่นจึงไม่เปลี่ยนไป ยังคงมีค่าเท่ากับ v ความถี่ของเสียงที่ผู้สังเกตได้รับคือ $f' = \frac{v}{\lambda'}$ ดังนั้น สมการ (8.28) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{v}{f'} = \frac{v}{f} + \frac{v_s}{f}$$

หรือ

$$f' = \frac{vf}{v + v_s} \tag{8.29}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า s เคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกตด้วยความเร็ว v_s ความถี่ปรากฏที่ผู้สังเกตรับได้จะเป็น

$$f' = \frac{vf}{v - v_s} \tag{8.30}$$

สมการ (8.29) และ (8.30) รวมกันได้เป็น

$$f' = \frac{vf}{v \pm v_s} \tag{8.31}$$

โดยที่ เครื่องหมาย – แสดงถึง s เคลื่อนที่เข้าหา O
เครื่องหมาย + แสดงถึง s เคลื่อนที่ออกห่าง O

ถ้าทั้งแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตเคลื่อนที่ เราจะได้สูตรรวมว่า

$$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_s}\right) f \tag{8.32}$$

โดยที่ เครื่องหมายตอนบน (+ เศษ , – ส่วน) หมายถึง s และ O เคลื่อนที่เข้าหากัน
เครื่องหมายตอนล่าง (– เศษ , + ส่วน) หมายถึง ทั้ง s และ O เคลื่อนที่ออกจากกัน

ตัวอย่างที่ 8.8 จงพิสูจน์ว่าสมการ (8.27) และ (8.31) เป็นอันเดียวกัน ถ้าอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วของเสียงในตัวกลาง

วิธีทำ

ให้ $v_0 = v_s = u$ และ u แทนอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดและผู้สังเกต

สมการ (8.27) จะเป็น $f' = f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$

สมการ (8.31) เขียนใหม่ได้เป็น $f' = f\left(\frac{1}{1 \mp \frac{u}{v}}\right)$

โดยการกระจายแบบไบโนเมียล (binomial)

$$\frac{1}{\left(1 \mp \frac{u}{v}\right)} = \left(1 \mp \frac{u}{v}\right)^{-1} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \pm \ldots$$

เนื่องจาก $u \ll v$ หรือ $\frac{u}{v} \ll 1$ เราจึงตัดเทอม $\left(\frac{u}{v}\right)^2$ และเทอมต่อๆ ไปได้

$$\frac{1}{\left(1\mp\frac{u}{v}\right)} \approx 1\pm\frac{u}{v}$$

สมการ (8.31) คือ $$f' = f\left(1\pm\frac{u}{v}\right)$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (8.27) นั่นเอง

ตัวอย่างที่ 8.9 ผู้สังเกตซึ่งยืนอยู่ที่ชานชาลาสถานีรถไฟแห่งหนึ่งสังเกตว่า รถไฟซึ่งกำลังวิ่งเข้าสู่สถานีด้วยความเร็ว 90 กิโลเมตร/ชั่วโมง หวูดรถไฟที่กำลังวิ่งเข้าสู่สถานีและที่เคลื่อนที่ผ่านสถานีมีความถี่ต่างกันหรือลดลง 400 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของหวูดรถไฟ กำหนดความเร็วของเสียงในอากาศเป็น 350 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ

ความถี่ปรากฏขณะรถไฟวิ่งเข้าสู่สถานีคือ

$$f_1' = f\left(\frac{v}{v-v_s}\right)$$

ความถี่ปรากฏ เมื่อรถไฟวิ่งเลยสถานีคือ

$$f_2' = f\left(\frac{v}{v+v_s}\right)$$

ดังนั้น $$f_1'-f_2' = 400 \text{ Hz}$$

$$f_1'-f_2' = f\left(\frac{v}{v-v_s}-\frac{v}{v+v_s}\right)$$

แต่ $$= f\left(\frac{2vv_s}{v^2-v_s^2}\right)$$

หรือ $$f = (f_1'-f_2')\left(\frac{v^2-v_s^2}{2vv_s}\right)$$

เนื่องจาก $v = 350$ m/s และ $v_s = 90$ km/hr $= 25$ m/s

$$\therefore\ f = 400.\frac{(350)^2-(25)^2}{2\times 350\times 25} = 2785.7 \text{ Hz}$$

ตัวอย่างที่ 8.10 ส้อมเสียงความถี่ 440 เฮิรตซ์ เคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพงด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที จงหาจำนวนบีตส์ที่ปรากฏแก่ผู้สังเกตระหว่างคลื่นเสียงที่วิ่งเข้าหาและสะท้อนกลับผนังกำแพงนั้น ถ้าความเร็วของเสียงเป็น 332 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ

เราทราบว่าเมื่อส้อมเสียงเคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพงในขณะเดียวกันมันจะเคลื่อนที่ออกห่างผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ที่ผู้สังเกตได้ยินจะลดลง เมื่อเสียงกระทบผนังมันจะสะท้อนกลับและเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ปรากฏจะเพิ่มขึ้น จากตัวอย่างที่ 8.9 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_1' - f_2' &= \frac{2vv_s}{(v+v_s)(v-v_s)} f \\ &= \frac{2 \times 332 \times 4}{(332+4)(332-4)} \times 440 \\ &= 10.6 \approx 11 \text{ ต่อวินาที} \end{aligned}$$

$f_1' - f_2' = 11$ ต่อวินาทีก็คือจำนวนบีตส์ต่อวินาที นั่นเอง

ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์นอกจากจะเกิดกับเสียงแล้วยังเกิดกับแสงด้วย โดยเฉพาะทางดาราศาสตร์ ทั้งนี้เพราะอัตราเร็วของแสงมีค่ามากเมื่อเทียบกับอัตราเร็วของต้นกำเนิดของมัน เช่น เมื่อดาวดวงหนึ่งกำลังเคลื่อนที่เข้าหาโลก ดังนั้นความถี่ที่เราตรวจจากสเปกโทรกราฟ (spectrograph) จะเพิ่มขึ้น ซึ่งหมายถึงความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมจะลดลง ดังนั้นเส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีม่วง ซึ่งเรียกว่า "violet shift" ในทำนองเดียวกัน ถ้าดวงดาวนั้นเคลื่อนที่ออกห่างจากโลก ความถี่จะลดลง หรือความยาวคลื่นจะเพิ่มขึ้น เส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีแดง เรียกว่า "red shift"

จากตัวอย่างข้างบน เราอาจเขียนผลต่างของความถี่ปรากฏและความถี่จริงได้เป็น

$$f' - f = \pm \frac{fv_s}{c - v_s}$$

โดยที่ c เป็นความเร็วของแสง และเนื่องจาก $c = f\lambda$ และ $f' = \dfrac{c}{\lambda'}$ ดังนั้น

$$c\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = \pm \frac{cv_s/\lambda}{c - v_s}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} = \pm \frac{c - v_s}{v_s} = \pm\left(\frac{c}{v_s} - 1\right)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_s}{c}$$

หรือ
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_s}{c} \qquad \lambda' - \lambda = \Delta\lambda \tag{8.33}$$

เครื่องหมาย − หมายถึง violet shift และเครื่องหมาย + หมายถึง red shift

ตัวอย่างที่ 8.11 เส้นสเปกตรัมที่ความยาวคลื่น 5.0×10^{-7} เมตร วัดได้ที่ห้องปฏิบัติการ จะปรากฏเป็น 5.2×10^{-7} เมตร สำหรับแสงที่มาจากดาราจักร (galaxy) จงหาความเร็วของดาราจักรที่เคลื่อนที่ห่างโลกออกไปนี้

วิธีทำ

เนื่องจาก $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{+v_s}{c}$$

เราใช้เครื่องหมาย + เพราะมันกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

ดังนั้น $$v_s = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = (3 \times 10^8)\frac{(5.2 - 5.0)\times 10^{-7}}{5.0\times 10^{-7}}$$

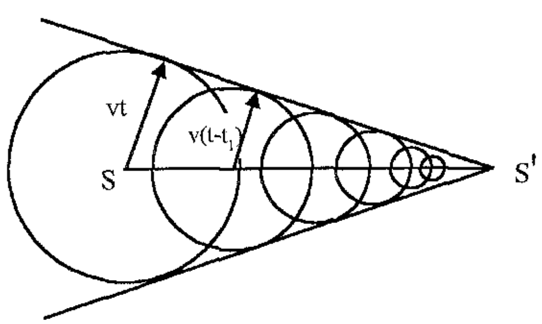
$$= 1.2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์สามารถเกิดขึ้นได้กับคลื่นทุกชนิด เมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วคลื่น ในกรณีของคลื่นแสงความถี่ของคลื่นแสง ไม่ขึ้นกับความเร็วของตัวกลางตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ เนื่องจากความเร็วของแสงจะมีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุกกรอบอ้างอิง (frame of references) การเลื่อนไปสู่เส้นสีแดงของเส้นสเปกตรัมสำหรับการสังเกตดวงดาวต่างๆ หมายถึงดาวเหล่านั้นกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป และสอดคล้องกับแนวคิดเกี่ยวกับจักรวาลที่ขยายตัวออก (expanding universe) นั่นคือเมื่อประมาณ 10 ถึง 12 พันล้านปีมาแล้ว จักรวาลของเราได้ก่อตัวเป็นรูปร่างขึ้น อนุภาคเล็กๆ จำนวนมหาศาลเช่น อิเล็กตรอน โปรตรอน และนิวตรอน ได้รวมตัวกันขึ้นด้วยกระบวนการที่เรียกว่า "Big squeeze" และในขณะเดียวกันอุณหภูมิจะสูงมากๆ เป็นล้านล้านองศา ต่อจากนั้นจะเกิดการขยายตัวออกและระเบิดด้วยปฏิกิริยา thermonuclear เรียกว่า "Big Bang" ชิ้นส่วนต่างๆ จะหลุดกระจายไปทั่ว ชิ้นส่วนเหล่านี้จะกลายเป็นดาราจักรต่างๆ เช่น ทางช้างเผือกของเราและ Crab nebula(Andromeda) และเคลื่อนที่ขยายตัวออกไปเรื่อยๆ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีเกี่ยวกับการขยายตัวของจักรวาลจะมีแนวคิดตรงข้ามทฤษฎีที่เรียกว่า "steady-state theory" ซึ่งกล่าวว่าไฮโดรเจนที่มีอยู่ในอวกาศจะรวมตัวกันเป็นดาราจักรต่างๆ และรักษารูปแบบของจักรวาลไว้ชั่วกัลปาวสาน ถ้าดวงดาวซึ่งเป็นต้นกำเนิดของแสงเคลื่อนที่เข้าหาโลก เส้นสเปกตรัมจะต้องเลื่อนไปทางสีม่วง ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่เราสังเกตุเห็นดาวคู่ซึ่งให้ทั้งสเปกตรัมที่เลื่อนไปทางสีแดงและสีม่วง นั่นคือ ดาวคู่นี้จะมีวงจรที่บางครั้งเคลื่อนที่เข้าหาโลกและบางครั้งเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

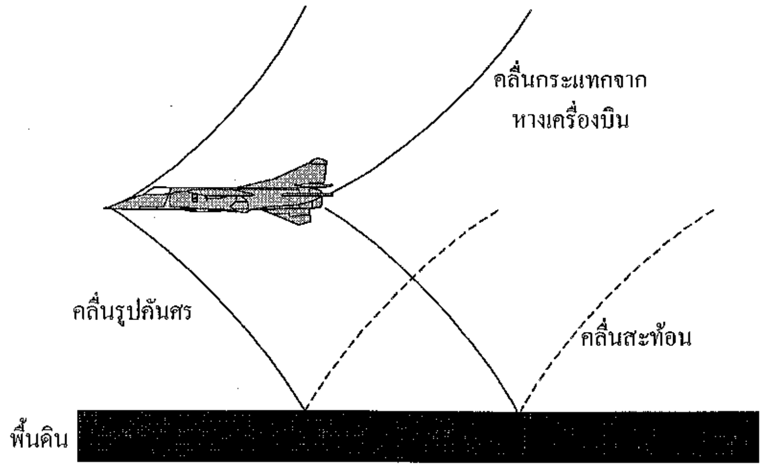
5. ซอนิกบูม

เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใกล้เคียงกับความเร็วของคลื่น หน้าคลื่นจะเปลี่ยนไปและแนวความคิดเกี่ยวกับปรากฏการณ์โดปป์เลอร์จะใช้ไม่ได้ และเมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมากกว่าความเร็วของคลื่น จะไม่มีปรากฏการณ์โดปป์เลอร์เกิดขึ้นเลย แต่จะเกิดคลื่นกระแทก (shock wave) ซึ่งแตกต่างจากคลื่นธรรมดา รูปที่ 8.12 แสดงการเกิดคลื่นกระแทก เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่จากตำแหน่ง s ไปยังตำแหน่ง s' โดยใช้เวลา t ที่ตำแหน่งต่างๆ บนแนว ss' เราสามารถเขียนวงกลมแสดงตำแหน่งต่างๆ ที่คลื่นกระจายออกไปเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที ถ้า v เป็นความเร็วของคลื่น และ v_s เป็นความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่น วงกลมแรกคือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ s และมีรัศมี vt วงกลมนี้แสดงหน้าคลื่นที่กระจายออกไปที่ตำแหน่ง s เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ที่ตำแหน่ง s' วงกลมถัดไปจะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใช้เวลา $t_1 = 0.1t, t_2 = 0.2t, t_3 = 0.3t, ...$ รัศมีของวงกลมเหล่านี้คือ $v(t-t_1)$, $v(t-t_2)$, $v(t-t_3)$.... วงกลมเหล่านี้จะค่อยๆ เล็กลงจนกระทั่งที่ตำแหน่ง s' จะเท่ากับศูนย์ เส้นทึบคือเส้นที่ห่อหุ้ม (envelope) วงกลม ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง และมีลักษณะคล้ายคลื่นรูปคันศร (bow wave) ซึ่งเกิดจากการที่เรือแล่นด้วยอัตราเร็วสูงกว่าอัตราเร็วของคลื่นบนผิวน้ำ เราเรียกว่าปรากฏการณ์ที่แหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เร็วกว่าความเร็วเฟสของคลื่นว่า ซอนิกบูม (sonic booms)

ปัจจุบันซอนิกบูมได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก และมีผลต่อปัญหาสุขภาพจิตของมนุษย์ ในตอนต้นเราทราบแล้วว่าเสียงเป็นคลื่นความดัน และคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูมก็เป็นการรวมกันของคลื่นเสียง จึงเป็นคลื่นความดันด้วย ดังนั้น คลื่นกระแทกจึงมีความดันที่เพิ่มขึ้นคล้ายเสียงฟ้าลั่นทำให้เราแสบแก้วหู



รูปที่ 8.12 **แสดงคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูม**



รูปที่ 8.13 **แสดงลักษณะของคลื่นซอนิกที่เกิดจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง**

พลังงานจากคลื่นกระแทกอาจทำให้เกิดความเสียหายได้ เช่น พลังงานที่ได้จากคลื่นกระแทกรูปกรวยจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียงมากๆ อาจทำให้กระจกหน้าต่างแตกได้ เราเรียกอัตราส่วนระหว่างความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นต่อความเร็วของคลื่นว่า เลขมัค (mach number) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชื่อมัค แอนสต์ (Mach Ernst) ดังนั้น จรวดที่มีขนาดมัค 4 จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเป็นสี่เท่าของความเร็วเสียงในอากาศ นอกจากนี้เซเรนโกฟ พาเวล อเล็กเซวิช (Cerenkov Pavel Alexsejevich) นักฟิสิกส์ชาวรัสเซีย พบว่า อนุภาคที่มีประจุถ้าวิ่งผ่านวัตถุด้วยอัตราเร็วเหนือแสงจะแผ่คลื่นแสงออกมาเป็นสีน้ำเงินเรียกว่า รังสีเซเรนโกฟ (Cerenkov radiation) ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง

สรุป

ความสูงต่ำของเสียงขึ้นกับความถี่ของเสียง ส่วนความดังของเสียงขึ้นกับความเข้ม คุณภาพของเสียงอาจทำให้ขึ้นกับรูปแบบของคลื่นเสียงได้ ถ้าแหล่งกำเนิดเสียงเคลื่อนที่ด้วยความเร็วน้อยกว่าคลื่นเสียงจะเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่าปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ แต่ถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ได้เร็วกว่าเสียงจะเกิดปรากฏการณ์ที่เรียกว่าซอนิกบูม เช่น ปรากฏการณ์ที่เกิดจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง เป็นต้น

บรรณานุกรม

Bueche, Frederick J. 1975. **Introduction to physics for scientists and engineers** (2nd ed.). Tokyo: McGraw-Hill.

Giancoli, Douglas C. 1980. **Physics, principles with applications**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

Halliday, David., Resnick, Robert., and Walker, Jearl. 1993. **Fundamentals of Physics** (4th ed.). New York: Wiley.

Resnick, Robert., Halliday, David., and Krane, Kenneth S. 1992. **Physics** (Vol. 1). 4th ed. New York: Wiley.

Serway, Raymond A. 1982. **Physics for scientists & engineers**. Tokyo: Holt-Saunders Japan.

Serway, Raymond A. 1992. **Physics for scientists & engineers** (3rd ed.). Philadelphia: Saunders College Publishing.

Tipler, Paul Allen. 1976. **Physics**. New York: Worth.

เสียง