อภินันทนาการ

CALCULUS III

(ส่วนที่หนึ่ง)

การหาค่าปริพันธ์สองชั้นและสามชั้น

อ.ดร.เจษฎา ตัณฑนุช

สารบัญ

บทที่ 1

ทบทวนการหาปริพันธ์

ตารางการหาค่าปริพันธ์

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\ du = au + C$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวใดๆ

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)du + \int g(u)du$

4. ความเป็นเชิงเส้นของการหาค่าปริพันธ์

   $\int [c_1 f(u) + c_2 g(u)]\, du = c_1 \int f(u)du + c_2 \int g(u)du$

   เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, เมื่อ $n \neq -1$

6. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

7. การหาค่าปริพันธ์ทีละส่วน (by parts integration)

   $\int udv = uv - \int vdu$

8. $\int \dfrac{u}{a+bu} du = \dfrac{1}{b^2}[bu - a\ln|a+bu|] + C$

9. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)} = \dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C$

10. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right| + C$

11. $\int \dfrac{du}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

12. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

14. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

15. $\displaystyle\int u\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{3}\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\displaystyle\int u\sqrt{a^2 - u^2}\,du = -\frac{1}{3}\left(a^2 - u^2\right)^{3/2} + C$

19. $\displaystyle\int \sin u\,du = -\cos u + C$

20. $\displaystyle\int \cos u\,du = \sin u + C$

21. $\displaystyle\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

22. $\displaystyle\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

23. $\displaystyle\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

24. $\displaystyle\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

25. $\displaystyle\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

26. $\displaystyle\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

27. $\displaystyle\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

28. $\displaystyle\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

29. $\displaystyle\int e^u\,du = e^u + C$

30. $\displaystyle\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

บทที่ 2
ปริพันธ์สองชั้น

เราใช้สัญลักษณ์

$$\iint\limits_R f(x,y)\ dA$$

แทนการหาค่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนบริเวณ R โดยที่ $dA = dx\ dy$ หรือ $dA = dy\ dx$

2.1 คุณสมบัติของการหาค่าปริพันธ์สองชั้น

1. คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น

   - ค่าปริพันธ์ของค่าคงที่ k คูณกับฟังก์ชัน มีค่าเท่ากับค่าคงที่ k คูณกับค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

     $$\iint\limits_R kf(x,y)\ dA = k\iint\limits_R f(x,y)\ dA$$

     เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

   - ค่าปริพันธ์ของผลบวก (และผลต่าง) ของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลบวก (และผลต่าง) ของค่าปริพันธ์ของแต่ละฟังก์ชัน

     $$\iint\limits_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\ dA = \iint\limits_R f(x,y)\ dA \pm \iint\limits_R g(x,y)\ dA$$

   เราอาจจะเขียนรวมคุณสมบัติทั้งสองได้เป็น

   $$\iint\limits_R [c_1 f(x,y) \pm c_2 g(x,y)]\ dA = c_1\iint\limits_R f(x,y)\ dA \pm c_2\iint\limits_R g(x,y)\ dA$$

   เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์บนบริเวณ R จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$$\iint_R f(x,y)\ dA \geq 0,$$

เมื่อ $f(x,y) \geq 0$ บนบริเวณ R

3. ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับฟังก์ชัน $g(x,y)$ บนบริเวณ R แล้ว ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนบริเวณ R จะมีค่ามากกว่าค่าปริพันธ์ของ $g(x,y)$ บนบริเวณ R

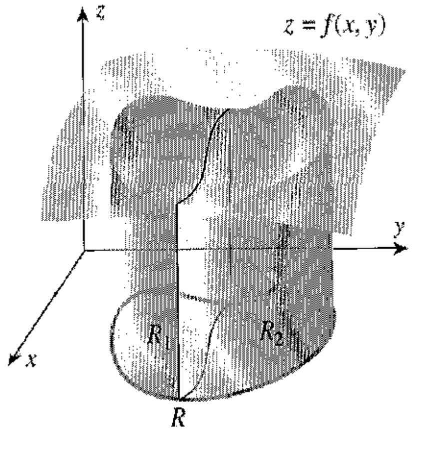
$$\iint_R f(x,y)\ dA \geq \iint_R g(x,y)\ dA$$

เมื่อ $f(x,y) \geq g(x,y)$ บนบริเวณ R

4. ถ้าบริเวณ R ถูกแบ่งเป็นสองส่วน R_1 และ R_2, ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนบริเวณ R จะมีค่าเท่ากับผลรวมของค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนบริเวณ R_1 กับค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บนบริเวณ R_2

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \iint_{R_1} f(x,y)\ dA + \iint_{R_2} f(x,y)\ dA,$$

เมื่อบริเวณ R เท่ากับผลรวมของบริเวณ R_1 และ R_2



รูปที่ 2.1: ค่าปริพันธ์ $f(x,y)$ บนบริเวณ R มีค่าเท่ากับผลรวมของค่าปริพันธ์ $f(x,y)$ บนบริเวณ R_1 และ ค่าปริพันธ์ $f(x,y)$ บนบริเวณ R_2

2.2 การคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นบนขอบเขตที่เป็นค่าคงตัว

สำหรับการคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นบนขอบเขตที่เป็นค่าคงตัว หรือก็คือ การหาค่าปริพันธ์ที่มี*ขีดจำกัดบน* (upper limit) และ *ขีดจำกัดล่าง* (lower limit) เป็นค่าคงตัว มีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. • ถ้าเป็นการหาค่าปริพันธ์ $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy$ จะทำการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x

$$\int_a^b f(x,y)\ dx \tag{2.1}$$

โดยพิจารณาตัวแปร y เป็นเสมือนค่าคงตัว

• ถ้าเป็นการหาค่าปริพันธ์ $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx$ จะทำการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y

$$\int_c^d f(x,y)\ dy \tag{2.2}$$

โดยพิจารณาตัวแปร x เป็นเสมือนค่าคงตัว

เราเรียกปริพันธ์ (2.1) และ (2.2) ว่า*ปริพันธ์จำกัดเขตย่อย*[1] (partial definite integral) และเรียก $\int f(x,y)dx$ ซึ่งเป็นการหาค่าปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x โดยพิจารณาตัวแปร y เป็นเสมือนค่าคงตัว และ $\int f(x,y)dy$ ซึ่งเป็นการหาค่าปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y โดยพิจารณาตัวแปร x เป็นเสมือนค่าคงตัว ว่า*ปริพันธ์ย่อย* (partial integral)

หมายเหตุ ถ้าเป็นการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรอื่นๆ นอกเหนือจากตัวแปร x และ y เช่น $\int f(r,\theta)\ dr$, $\int f(r,\theta)\ d\theta$ เป็นต้น เราก็จะทำการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปรที่กำหนด โดยพิจารณาตัวแปรอื่นๆ ที่เหลือ เป็นเสมือนค่าคงตัว

2. นำค่าปริพันธ์ที่คำนวณได้ มาหาค่าปริพันธ์ต่ออีกครั้ง

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dxdy &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right] dy \\ \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dydx &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right] dx\end{aligned}$$

[1] ปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_a^b f(x,y)\ dx$ จะต้อง**ไม่ปรากฏตัวแปร** x **เหลืออยู่** และ ปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_c^d f(x,y)\ dy$ จะต้อง**ไม่ปรากฏตัวแปร** y **เหลืออยู่**

เรียกขั้นตอนการหาปริพันธ์สองชั้นดังกล่าวว่า *การหาปริพันธ์ซ้อน* (iterated integral)

ตัวอย่าง 2.1. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_1^2 \int_0^1 x + y^2 \; dydx$

วิธีทำ

1. หาค่าปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_0^1 x + y^2 \; dy$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x + y^2 \; dy &= \int_0^1 x \; dy + \int_0^1 y^2 \; dy \\
&= x \int_0^1 dy + \int_0^1 y^2 \; dy \\
&= xy\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= x(1-0) + \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) \\
&= x + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

สังเกตได้ว่าผลที่ได้จากการคำนวณไม่ปรากฏตัวแปร y เหลืออยู่

2. หาค่าปริพันธ์ $\int_1^2 \int_0^1 x + y^2 \; dydx$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^1 x + y^2 \; dydx &= \int_1^2 \left[\int_0^1 x + y^2 \; dy\right] dx \\
&= \int_1^2 x + \frac{1}{3} \; dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \left[\frac{2^2}{2} + \frac{2}{3}\right] - \left[\frac{1^2}{2} + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{8}{3} - \frac{5}{6} \\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^1 \int_1^2 x + y^2 \ dxdy$

วิธีทำ

1. หาค่าปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_1^2 x + y^2 \ dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x + y^2 \ dx &= \int_1^2 x \ dx + \int_1^2 y^2 \ dx \\
&= \int_1^2 x \ dx + y^2 \int_1^2 \ dx \\
&= \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} + y^2 x\Big|_{x=1}^{y=2} \\
&= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + y^2 (2-1) \\
&= \frac{3}{2} + y^2
\end{aligned}$$

สังเกตได้ว่าผลที่ได้จากการคำนวณไม่ปรากฏตัวแปร x เหลืออยู่

2. หาค่าปริพันธ์ $\int_0^1 \int_1^2 x + y^2 \ dxdy$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^2 x + y^2 \ dxdy &= \int_0^1 \left[\int_1^2 x + y^2 \ dx\right] dy \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2} + y^2 \ dy \\
&= \frac{3}{2}y + \frac{y^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \left[\frac{3}{2}1 + \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{0}{2} + \frac{0^3}{3}\right] \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dxdy$

วิธีทำ

1. หาค่าปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dx$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dx &= \int_0^{\ln 2} e^x e^y\, dx \\ &= e^y \int_0^{\ln 2} e^x\, dx \\ &= e^y e^x\Big|_{x=0}^{x=\ln 2} \\ &= e^y\left[e^{\ln 2} - e^0\right] \\ &= e^y\,[2-1] \\ &= e^y\end{aligned}$$

2. หาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dxdy$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dxdy &= \int_0^{\ln 3}\left[\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\, dx\right] dy \\ &= \int_0^{\ln 3} e^y dy \\ &= e^y\Big|_{y=0}^{y=\ln 3} \\ &= \left(e^{\ln 3} - e^0\right) \\ &= 3-1=2\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dydx$

วิธีทำ

1. หาค่าปริพันธ์จำกัดเขตย่อย $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dy$

   พิจารณา $\int \sin(x+y)\ dy$ พบว่าสามารถใช้การเปลี่ยนตัวแปร ช่วยในการหาค่าปริพันธ์ โดยให้ $u = x+y$ และมีดิฟเฟอเรนเชียลคือ

$$
\begin{aligned}
du &= d(x+y) \\
&= dx + dy \\
\text{(ในที่นี้พิจารณาตัวแปร } x \text{ เป็นเสมือนค่าคงตัว)} &= 0 + dy \\
&= dy \\
\text{ดังนั้น} \qquad \int \sin(x+y)\ dy &= \int \sin u\ du \\
&= -\cos u + c \ \text{ โดยที่ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใดๆ} \\
&= -\cos(x+y) + c \\
\text{ดังนั้น} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dy &= -\cos(x+y)\Big|_{y=-\frac{\pi}{2}}^{y=\frac{\pi}{2}} \\
&= -\left[\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \cos(x-\frac{\pi}{2})\right] \\
&= \cos(x-\frac{\pi}{2}) - \cos(x+\frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

2. หาค่าปริพันธ์ $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dydx$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dydx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-\frac{\pi}{2}) - \cos(x+\frac{\pi}{2})\ dx \\
\text{โดยการเปลี่ยนตัวแปรทำให้เราได้} &= \left[\sin(x-\frac{\pi}{2}) - \sin(x+\frac{\pi}{2})\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
&= \left[\sin(\pi-\frac{\pi}{2}) - \sin(\pi+\frac{\pi}{2})\right] \\
&\quad - \left[\sin(-\pi-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi+\frac{\pi}{2})\right] \\
&= \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(3\frac{\pi}{2}) - \sin(-3\frac{\pi}{2}) + \sin(-\frac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ สำหรับการหาค่าปริพันธ์ $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\ dydx$ อาจจะใช้สูตรตรีโกณ

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

มาช่วยในการหาค่าปริพันธ์ ซึ่งเป็นอีกแนวทางหนึ่งในการหาผลเฉลยก็ได้

แบบฝึกหัด

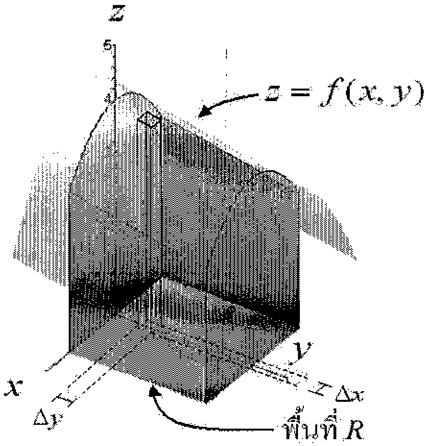
จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int_0^1\int_0^2 (x+2)\ dydx$
2. $\int_2^4\int_1^3 xy^3\ dxdy$
3. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-e}^{e} drd\theta$
4. $\int_0^3\int_0^1 y\sqrt{x+y^2}\ dydx$
5. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_1^2 x\sin xy\ dydx$
6. $\int_1^2\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\ dydx$
7. $\int_1^2\int_0^2 \frac{x}{(1+xy)^2}\ dydx$
8. $\int_0^{\ln 2}\int_0^1 xye^{x^2y}\ dxdy$
9. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} \cos(x+y)\ dxdy$
10. $\int_1^e\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{x}\ dydx$

2.3 ปริมาตรในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

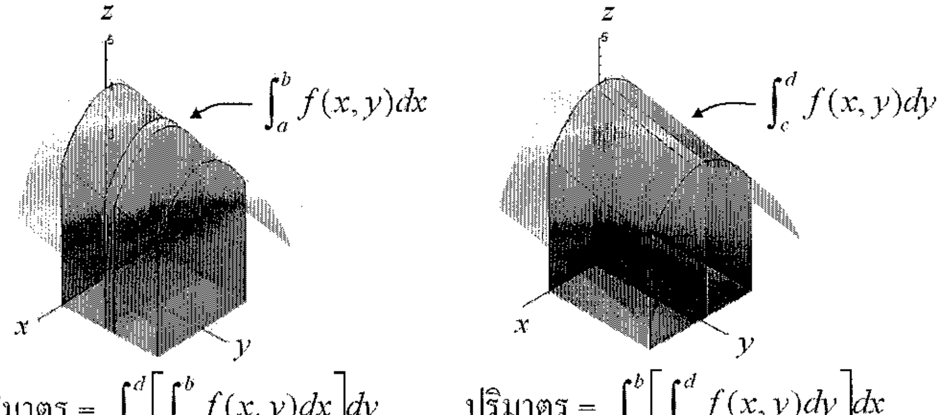
ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวซึ่งมีค่าเป็นบวก บนส่วนของบริเวณ R ซึ่งเป็นเราสามารถหาปริมาตรของรูปทรง *ที่มีฐานเป็นรูปบริเวณ R และมีพื้นผิวปิดด้านบนเป็นพื้นผิว* (x, y, z) (ดูรูป 2.2 ประกอบ) ได้ในรูปแบบของการหาปริพันธ์สองชั้นได้ดังนี้

$$V = \iint\limits_R f(x, y)\ dA$$



รูปที่ 2.2: แนวความคิดในการหาปริมาตรโดยการหาค่าปริพันธ์สองชั้น

สำหรับการหาปริมาตรโดยใช้การหาปริพันธ์สองชั้นนั้นสามารถทำได้โดยการหาปริพันธ์ซ้อน[2]

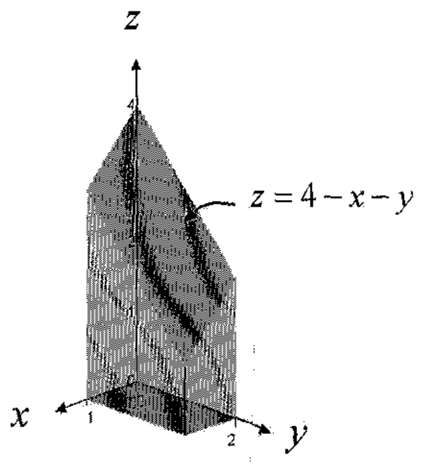


ปริมาตร = $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$ ปริมาตร = $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$

รูปที่ 2.3: แนวความคิดในการหาปริมาตรโดยการหาปริพันธ์ซ้อน

[2]ดูการหาปริพันธ์ซ้อนหน้า 5

ตัวอย่าง 2.5. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งมีปริมาตรอยู่เหนือระนาบ xy มีพื้นผิวบนเป็นไปตามสมการระนาบ $z = 4 - x - y$ และ มี x และ y เป็นไปตามเงื่อนไข $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$



รูปที่ 2.4: รูปภาพประกอบตัวอย่าง 2.5

วิธีทำ พบว่าฟังก์ชันพื้นผิวบนก็คือ $z = f(x, y) = 4 - x - y$ และสำหรับเงื่อนไขที่กำหนด ทำให้ทราบว่า $0 \leq x \leq 1$ และ $0 \leq y \leq 2$ ดังนั้นเราสามารถหาปริมาตรได้คือ

$$\text{ปริมาตร} = \int_0^2 \int_0^1 4 - x - y \; dxdy = \int_0^1 \int_0^2 4 - x - y \; dydx$$

1. $\int_0^2 \int_0^1 4 - x - y \; dxdy$

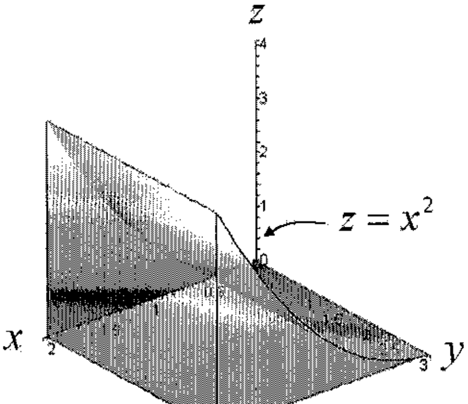
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 4 - x - y \; dxdy &= \int_0^2 \left[\int_0^1 4 - x - y \; dx \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left[4 - \frac{1^2}{2} - y \right] - \left[0 - \frac{0^2}{2} - 0y \right] dy \\
&= \int_0^2 \frac{7}{2} - y \; dy \\
&= \left[7\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \left[7\frac{2}{2} - \frac{2^2}{2} \right] - \left[7\frac{0}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = 5
\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 \int_0^2 4 - x - y \; dydx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 4 - x - y \; dydx &= \int_0^1 \left[\int_0^2 4 - x - y \; dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_0^1 \left[8 - 2x - \frac{2^2}{2} \right] - \left[0 - 0x - \frac{0^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^1 6 - 2x \; dx \\
&= \left[6x - x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \left[6 - 1^2 \right] - \left[0 - 0^2 \right] = 5
\end{aligned}$$

ทั้งสองวิธีแสดงให้เห็นว่าทรงตันดังกล่าวมีปริมาตร 5 ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 2.6. จงหาปริมาตรของทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ และ $z = x^2$



รูปที่ 2.5: รูปภาพประกอบตัวอย่าง 2.6

วิธีทำ พบว่าฟังก์ชันพื้นผิวบนก็คือ $z = f(x, y) = x^2$ ดังนั้นเราสามารถหาปริมาตรได้คือ

$$\text{ปริมาตร} = \int_0^3 \int_0^2 x^2 \; dxdy = \int_0^2 \int_0^3 x^2 \; dydx$$

1. $\int_0^3 \int_0^2 x^2\ dxdy$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^2 x^2\ dxdy &= \int_0^3 \left[\int_0^2 x^2\ dx\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2}\right] dy \\
&= \int_0^3 \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] dy \\
&= \int_0^3 \frac{8}{3} dy \\
&= \frac{8}{3} y\Big|_{y=0}^{y=3} \\
&= \frac{8}{3}(3-0) = 3
\end{aligned}
$$

2. $\int_0^2 \int_0^3 x^2\ dydx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^3 x^2\ dydx &= \int_0^2 \left[\int_0^3 x^2\ dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 \int_0^3\ dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y\Big|_{y=0}^{y=3}\right] dx \\
&= \int_0^2 x^2 (3-0)\, dy \\
&= \int_0^2 3x^2\ dx \\
&= x^3\Big|_{x=0}^{y=2} \\
&= \left(2^3 - 0^3\right) = 8
\end{aligned}
$$

ทั้งสองวิธีแสดงให้เห็นว่าทรงตันดังกล่าวมีปริมาตร 8 ลูกบาศก์หน่วย

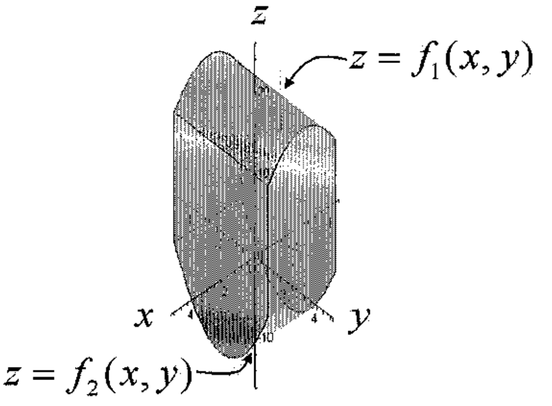
จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถขยายแนวคิดไปสู่การหาปริมาตรในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ซึ่งล้อมรอบด้วยผิวปิดบน และ ผิวปิดล่างได้เป็น

ถ้า $z = f_1(x, y)$ และ $z = f_2(x, y)$ เป็นพื้นผิวบนส่วนของบริเวณ R โดย

$$f_1(x, y) \geq f_2(x, y), \quad \text{ทุกๆ } (x, y) \text{ อยู่ } R$$

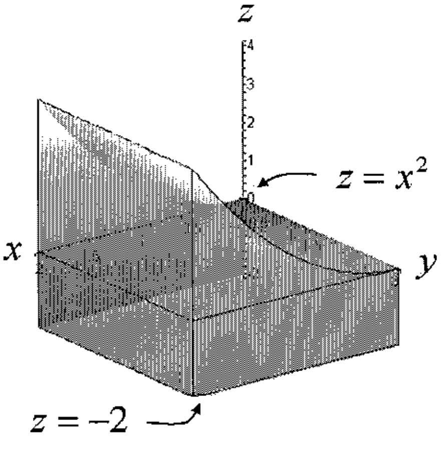
แล้วปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ

$$\text{ปริมาตร} = \iint_R [f_1(x, y) - f_2(x, y)] \; dA$$



รูปที่ 2.6: ทรงตันซึ่งมีผิวปิดบน $z = f_1(x, y)$ และผิวปิดล่าง $z = f_2(x, y)$

ตัวอย่าง 2.7. จงหาปริมาตรของทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = -2$ และ $z = x^2$



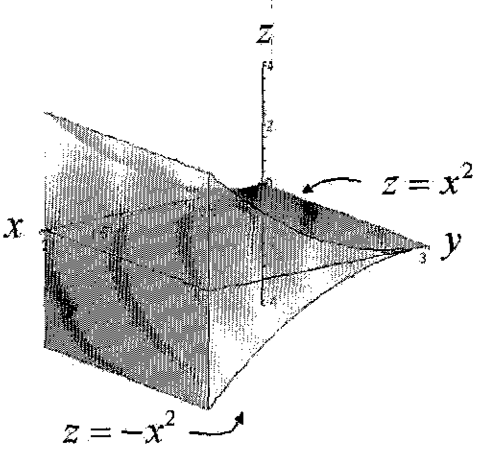
รูปที่ 2.7: รูปภาพประกอบตัวอย่าง 2.7

วิธีทำ พบว่าฟังก์ชันพื้นผิวบนคือ $z = f_1(x,y) = x^2$ และ ฟังก์ชันพื้นผิวล่างคือ $z = f_2(x,y) = -2$ ดังนั้นเราสามารถหาปริมาตรได้คือ

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตร} &= \iint\limits_R [f_1(x,y) - f_2(x,y)]\ dA \\
&= \int_0^3 \int_0^2 [x^2 - (-2)]\ dxdy = \int_0^3 \int_0^2 x^2 + 2\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^3 [x^2 - (-2)]\ dydx = \int_0^3 \int_0^2 x^2 + 2\ dydx
\end{aligned}$$

จากการคำนวณพบว่าทรงตันดังกล่าวมีปริมาตร 20 ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 2.8. จงหาปริมาตรของทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 3$, $z = x^2$ และ $z = -x^2$



รูปที่ 2.8: รูปภาพประกอบตัวอย่าง 2.8

วิธีทำ พบว่าฟังก์ชันพื้นผิวบนคือ $z = f_1(x,y) = x^2$ และ ฟังก์ชันพื้นผิวล่างคือ $z = f_2(x,y) = -x^2$ ดังนั้นเราสามารถหาปริมาตรได้คือ

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตร} &= \iint\limits_R [f_1(x,y) - f_2(x,y)]\ dA \\
&= \int_0^3 \int_0^2 [x^2 - (-x^2)]\ dxdy = \int_0^3 \int_0^2 2x^2\ dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^3 [x^2 - (-x^2)]\ dydx = \int_0^3 \int_0^2 2x^2\ dydx
\end{aligned}$$

จากการคำนวณพบว่าทรงตันดังกล่าวมีปริมาตร 16 ลูกบาศก์หน่วย

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณ R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\iint\limits_R 4x^3y\ dA;\ R = \{(x,y) : -1 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$

   (b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\ dA;\ R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

   (c) $\displaystyle\iint\limits_R x\sqrt{1-x^2}\ dA;\ R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 2 \le y \le 3\}$

   (d) $\displaystyle\iint\limits_R x\sin y - y\sin x\ dA;\ R = \{(x,y) : 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/3\}$

2. จงหาปริมาตรของทรงตัน ซึ่งอยู่ภายใต้ผิวโค้ง z และอยู่บนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) ระนาบ $z = 2x + y$ และ
   บริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = \{(x,y) : 3 \le x \le 5, 1 \le y \le 2\}$

   (b) ผิวโค้ง $z = 3x^3 + 3x^2y$ และ
   บริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$

   (c) ผิวโค้ง $z = 9 - x^2$ และ
   บริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$

3. จงหาปริมาตรซึ่งถูกล้อมรอบด้วยข้อกำหนดต่างๆ ต่อไปนี้

   (a) ปริมาตรซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง (1^{st} octant) และถูกล้อมรอบด้วยระนาบ $y = 4$ และระนาบ $\dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{5} = 1$

   (b) ปริมาตรซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่งและถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z = x^2$ และระนาบ $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$ และ $z = 0$

   (c) ปริมาตรภายใต้พื้นผิว $z = 3x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือบริเวณซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = \{(x,y) : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$

2.4 ทฤษฎีบทของ Fubini

จากตัวอย่างต่างๆ ในเนื้อหาในหัวข้อ **2.3 ปริมาตรในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า** เราพบว่าการหาปริมาตรสามารถกระทำได้โดยพิจารณาจากการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x ก่อน แล้วหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y หรือ จะหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ก่อน แล้วหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x ให้ผลที่เท่ากัน เราจะพิจารณาตัวอย่างเพิ่มเติมเพื่อพิจารณาว่า สำหรับการหาค่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันใดๆ โดยการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x ก่อน แล้วหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร y และการหาปริพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้นเทียบกับตัวแปร y ก่อน แล้วหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x จะให้ผลการคำนวณที่เหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร

ตัวอย่าง *2.9*. เราสามารถหาค่าปริพันธ์ของ $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dx \, dy$ และ $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dy \, dx$ ได้โดย

- $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dx \, dy$
  จะเริ่มต้นด้วยการหาค่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xy^2 dx &= y^2 \int_0^1 x dx \\
&= \left. \frac{y^2x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{y^2 \cdot 1^2}{2} - \frac{y^2 \cdot 0^2}{2} \\
&= \frac{y^2}{2}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 xy^2 dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right] dy \\
&= \left. \frac{y^3}{6} \right|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{(1)^3}{6} - \frac{(0)^3}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \; dy \; dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xy^2 dy &= x\int_0^1 y^2 dy \\
&= \frac{xy^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{x\cdot 1^3}{3} - \frac{x\cdot 0^3}{3} \\
&= \frac{x}{3}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 xy^2 \; dy \; dx &= \int_0^1 \left[\int_0^1 xy^2 dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x}{3}\right] dx \\
&= \frac{x^2}{6}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{(1)^2}{6} - \frac{(0)^2}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.10. จงเปรียบเทียบค่าปริพันธ์ของ $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) \; dy \; dx$ และ $\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) \; dx \; dy$

- $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy) \; dy \; dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (1+8xy)dy &= \int_1^2 1dy + \int_1^2 8xydy \\
&= y\Big|_{y=1}^{y=2} + 8x\int_1^2 ydy \\
&= y\Big|_{y=1}^{y=2} + 8x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=2} \\
&= [2-1] + 8x\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] \\
&= 1+12x
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\ dy\ dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 (1+8xy)dy\right] dx \\
&= \int_0^3 [1+12x]\,dx \\
&= \left[x+6x^2\right]_{x=0}^{x=3} \\
&= (3+6\cdot 3^2)-(0+6\cdot 0^2) \\
&= 57
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\ dx\ dy$

$$\begin{aligned}
\int_0^3 (1+8xy)dx &= \int_0^3 1dx + \int_0^3 8xydx \\
&= x\Big|_{x=0}^{x=3} + 8y\int_0^3 xdx \\
&= x\Big|_{x=0}^{x=3} + 8y\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=3} \\
&= [3-0]+8y\left[\frac{3^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] \\
&= 3+36y
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\ dx\ dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 (1+8xy)dx\right] dy \\
&= \int_1^2 [3+36y]\,dy \\
&= \left[3y+18y^2\right]_{y=1}^{y=2} \\
&= (3\cdot 2+18\cdot 2^2)-(3\cdot 1+18\cdot 1^2) \\
&= 57
\end{aligned}$$

พบว่าค่าปริพันธ์ทั้งสองมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.11. จงหาค่าของ $\iint\limits_R f(x,y)\ dA$ เมื่อ

$$f(x,y) = 1 - 6x^2y,\ R : 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$$

วิธีทำ

- **วิธีที่ 1**

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R f(x,y)\ dA &= \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1-6x^2y)\ dx\ dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\int_0^2 1-6x^2y\ dx\right]\ dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[x-2x^3y\right]_{x=0}^{x=2}\ dy \\
&= \int_{-1}^{1}(2-16y)\ dy \\
&= 2y-8y^2\Big|_{-1}^{1} = 4
\end{aligned}$$

- **วิธีที่ 2**

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R f(x,y)\ dA &= \int_0^2\int_{-1}^{1} (1-6x^2y)\ dy\ dx \\
&= \int_0^2\left[\int_{-1}^{1} 1-6x^2y\ dy\right]\ dx \\
&= \int_0^2\left[y-3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1}\ dx \\
&= \int_0^2\left[(1-3x^21^2)-(-1-3x^2(-1)^2)\right]\ dx \\
&= \int_0^2 2\ dx \\
&= 2x\Big|_0^2 = 4
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา ค่าปริพันธ์ที่เท่ากันไม่ใช่ความบังเอิญ ผู้ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าสามารถหาปริพันธ์สองชั้น โดยจะหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรย่อยใดก่อนก็ได้ก็คือ Guido Fubini[3]

ทฤษฎีบท 2.1 (ทฤษฎีบทของ Fubini (อย่างอ่อน)[4]). *ถ้า R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งนิยามโดย $a \le x \le b$ และ $c \le y \le d$ โดยมีฟังก์ชันฟังก์ชัน $f(x,y)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ R แล้ว*

$$\iint\limits_R f(x,y)\ dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx$$

หมายเหตุ โดยทั่วไปในการหาค่าปริพันธ์สองชั้น เมื่อสลับการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x แล้วหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y กับการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y แล้วหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x ค่าปริพันธ์**จะไม่เท่ากัน** ทฤษฎีบท 2.1 ของ Fubini จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ*ฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าปริพันธ์มีความต่อเนื่อง*เท่านั้น

ประโยชน์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini นอกจากจะทำให้เราทราบแล้วว่า สำหรับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเราสามารถหาค่าปริพันธ์สองชั้น โดยจะหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรย่อยใดก่อนก็จะได้ผลจากการคำนวณเหมือนกัน สำหรับบางฟังก์ชัน การปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรย่อยตัวหนึ่ง แล้วนำไปหาค่าปริพันธ์สองชั้น อาจจะง่ายกว่าการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับอีกตัวแปรหนึ่งก่อน และนำไปหาค่าปริพันธ์สองชั้น ดังตัวอย่างที่จะกล่าวต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.12. จงหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 xye^{y^2x}\ dxdy$

วิธีทำ พิจารณา $\int xye^{y^2x}\ dx$ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = y^2x$ พบว่า

---

[3]Guido Fubini (1879-1943) ถือกำเนิดในอิตาลีในวันที่ 19 มกราคม ค.ศ.1879 ณ เมือง Venice ประเทศอิตาลี บิดาของ Guido Fubini คือ Lazzaro Fubini เป็นครูสอนคณิตศาสตร์ในเมือง Venice ดังนั้น Guido Fubini จึงสนใจคณิตศาสตร์ตั้งแต่เด็กเพราะได้รับอิทธิพลมาจากพ่อ งานที่ Guido Fubini สนใจก็คือ differential geometry และสมการเชิงอนุพันธ์ (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [2])

[4]ดูทฤษฎีเพิ่มเติมได้ใน [3]

$$
\begin{aligned}
\int xye^{y^2x}\,dx &= \int \frac{ue^u}{y^3}dx = \frac{1}{y^3}\int ue^u\,du \\
\text{โดยการหาปริพันธ์ทีละส่วน (by parts)} &= \frac{1}{y^3}\left[ue^u - e^u + C\right] \\
&= \frac{1}{y^3}\left[y^2xe^{y^2x} - e^{y^2x} + C\right]
\end{aligned}
$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad \int_0^1 xye^{y^2x}\,dx &= \frac{1}{y^3}\left[y^2xe^{y^2x} - e^{y^2x}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{y^3}\left[y^2e^{y^2} - e^{y^2} + 1\right] \\
&= \frac{e^{y^2}}{y} + \frac{e^{y^2}}{y^3} + \frac{1}{y^3}
\end{aligned}
$$

สำหรับการหาปริพันธ์ของพจน์ $\dfrac{e^{y^2}}{y}$ และ $\dfrac{e^{y^2}}{y^3}$ เทียบกับตัวแปร y เราไม่สามารถหาอย่างชัดแจ้งได้ จึงเป็นการยากที่จะหาค่าปริพันธ์สองชั้น $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 xye^{y^2x}\,dxdy$ แต่โดยทฤษฎีบทของ Fubini เราทราบว่า

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^1 xye^{y^2x}\,dxdy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\,dydx$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\,dydx$ ได้ดังนี้

1. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\,dy$

   โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = y^2x$ พบว่า

$$
\begin{aligned}
\int xye^{y^2x}\,dy &= \int xye^u\,\frac{du}{2xy} \\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du \\
&= \frac{e^u}{2} + C \\
&= \frac{e^{y^2x}}{2} + C
\end{aligned}
$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \quad \int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\,dy &= \left.\frac{e^{y^2x}}{2}\right|_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \\
&= \frac{e^{2x}-1}{2}
\end{aligned}
$$

2. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\, dydx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\, dydx &= \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\, dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{2}\, dx \\
&= \left.\frac{e^{2x}-2x}{4}\right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{e^2-2}{4} - \frac{e^0-0}{4} \\
&= \frac{e^2-3}{4}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 xye^{y^2x}\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2x}\, dydx = \frac{e^2-3}{4}$$

เพื่อความสะดวก ในเนื้อหาภายหลังจากนี้ จะแสดงการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นโดยไม่แยกเป็น 2 ขั้นตอนดังตัวอย่างที่ผ่านมา แต่จะแสดงการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นโดยรวบรัดเป็น

$$\begin{aligned}
\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy \\
&= \int_c^d [F(x,y)]_{x=a}^{x=b}\, dy \\
&= \int_c^d [F(b,y) - F(a,y)]\, dy
\end{aligned}$$

เมื่อ $F(x,y)$ คือปฏิยานุพันธ์ของ $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x โดยพิจารณา y เป็นเสมือนค่าคงตัว

และในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx \\
&= \int_a^b \left[\tilde{F}(x,y)\right]_{x=a}^{x=b} dy \\
&= \int_c^d \left[\tilde{F}(x,d) - \tilde{F}(x,c)\right] dy
\end{aligned}$$

เมื่อ $\tilde{F}(x,y)$ คือปฏิยานุพันธ์ของ $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y โดยพิจารณา x เป็นเสมือนค่าคงตัว

แบบฝึกหัด

จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini หาผลเฉลยของค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_0^1 \int_{-\ln 2}^0 xye^{xy^2-x} \, dxdy$
2. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^1 xy\sin(yx^2) \, dydx$
3. $\int_0^1 \int_0^1 x^3y^3e^{-x^4y^2} \, dydx$
4. $\int_0^{\pi} \int_0^{1/2} x\cos(xy)\cos^2 \pi x \, dxdy$

2.5 การหาค่าปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอการหาค่าปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในเฉพาะกรณีเหล่านี้เท่านั้น

1. **พื้นที่แบบ** I

   เป็นบริเวณ ที่ถูกล้อมรอบด้วย เส้นแนวตั้ง $x = a$ และ $x = b$ ทางด้านซ้ายและขวา และ เส้นโค้ง $y = g_1(x)$ และ $y = g_2(x)$ ทางด้านล่างและบนตามลำดับ โดยที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq b$

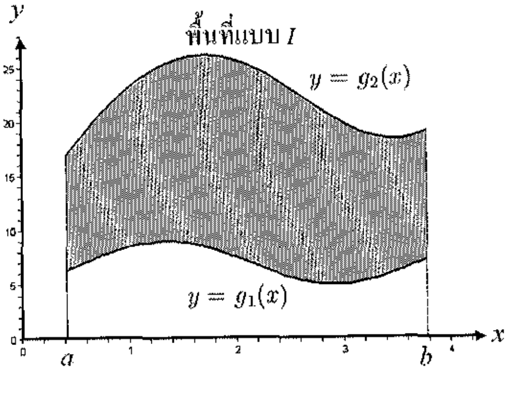
2. **พื้นที่แบบ** II

   เป็นบริเวณ ที่ถูกล้อมรอบด้วย เส้นแนวนอน $y = c$ และ $y = d$ ทางด้านบนและล่าง และ เส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และ $x = h_2(y)$ ทางด้านซ้ายและขวาตามลำดับ โดยที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ เมื่อ $c \leq y \leq d$

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทของ Fubini (อย่างแรง)). *ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ R แล้ว*

- *ถ้าบริเวณ R เป็นบริเวณแบบ I นั่นคือ นิยามโดย $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ โดยที่ $g_1(x)$ และ $g_2(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว*

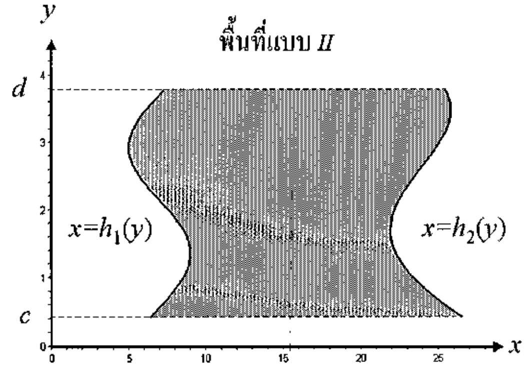
$$\iint\limits_R f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx$$



รูปที่ 2.9: พื้นที่แบบ I

- *ถ้าบริเวณ R เป็นพื้นที่แบบ II นั่นคือ นิยามโดย $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq y_2(y)$ โดยที่ $h_1(y)$ และ $h_2(y)$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ แล้ว*

$$\iint\limits_R f(x,y)\ dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy$$



รูปที่ 2.10: พื้นที่แบบ II

ตัวอย่าง 2.13. จงหาค่า $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{x} y^2 x\ dy\ dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{x^2}^{x} y^2 x\ dy\ dx &= \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{x} y^2 x\ dy\right]\ dx \\
&= \int_0^2 x \left[\int_{x^2}^{x} y^2\ dy\right]\ dx \\
&= \int_0^2 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=x}\ dx \\
&= \int_0^2 x \left[\frac{(x)^3}{3} - \frac{(x^2)^3}{3}\right]\ dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3}\ dx \\
&= \left[\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \left[\frac{2^5}{15} - \frac{2^8}{24}\right] - \left[\frac{0^5}{15} - \frac{0^8}{24}\right] \\
&= \left[\frac{32}{15} - \frac{256}{24}\right] - 0 = -\frac{128}{15}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.14. จงหาค่า $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos y} x\sin y\;dx\;dy$

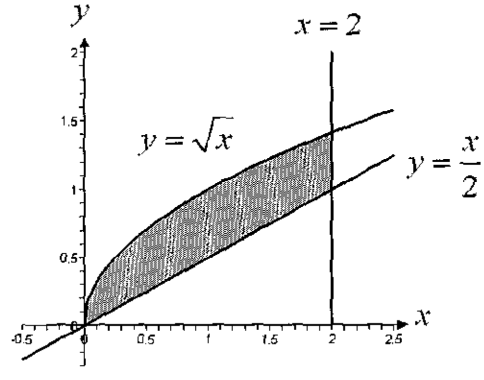
วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{\cos y} x\sin y\;dx\;dy &= \int_0^{\pi}\left[\int_0^{\cos y} x\sin y\;dx\right]\;dy \\
&= \int_0^{\pi}\left[\sin y\int_0^{\cos y} x\;dx\right]\;dy \\
&= \int_0^{\pi}\sin y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\cos y}\;dy \\
&= \int_0^{\pi}\sin y\left[\frac{\cos^2 y}{2}-\frac{0}{2}\right]\;dy \\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin y\cos^2 y}{2}\;dy \\
&= \left[-\frac{\cos^3 y}{6}\right]_{y=0}^{y=\pi} \\
&= -\frac{1}{6}\left[\cos^3\pi-\cos^3 0\right] = -\frac{1}{6}\left[(-1)^3-1^3\right] = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ในการหาค่าปริพันธ์สำหรับกรณีนี้ ควรจะเริ่มพิจารณาจากรูปของบริเวณ R ก่อน (ค่อนข้างจำเป็นว่าผู้อ่านควรจะสามารถวาดรูปบริเวณ R ได้ แต่อาจจะไม่จำเป็นว่าจะต้องวาดรูปผิวโค้ง $z = f(x,y)$ ได้) เมื่อเห็นรูปของบริเวณ R จะทำให้ผู้อ่านสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini ได้อย่างถูกต้อง

ตัวอย่าง 2.15. จงหาค่า $\iint\limits_R xy\;dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = \frac{x}{2}$, $y = \sqrt{x}$ และ $x \le 2$

วิธีทำ เมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่าเป็นพื้นที่แบบ I



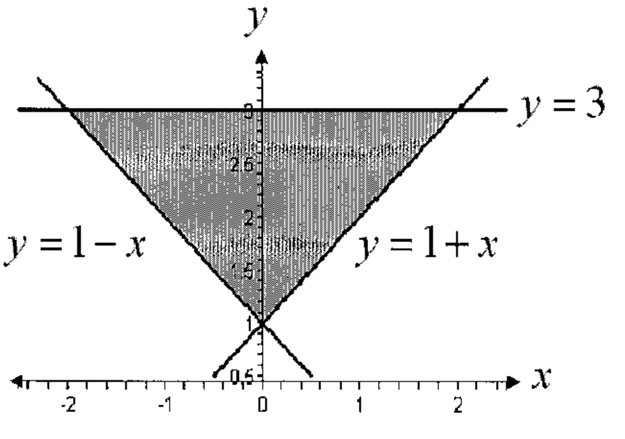
รูปที่ 2.11: รูปบริเวณ R สำหรับตัวอย่าง 2.15

จากรูปพบว่าขอบเขตของการหาปริพันธ์ คือ $0 \le x \le 2$ และ $\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\iint_R xy\ dA &= \int_0^2 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\ dy\ dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_{x/2}^{\sqrt{x}} xy\ dy\right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=x/2}^{y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^2 \left[\frac{x(\sqrt{x})^2}{2} - \frac{x(x/2)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= \left(\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{32}\right) - \left(\frac{0^3}{6} - \frac{0^4}{32}\right) = \frac{8}{6} - \frac{16}{32} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.16. จงหาค่า $\iint_R (2x - y^2)\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณรูปสามเหลี่ยมที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ 3 สมการต่อไปนี้ $y = -x + 1,\ y = x + 1$ และ $y = 3$

วิธีทำ เมื่อเราวาดรูปบริเวณ R แสดงว่าเป็นพื้นที่แบบ II

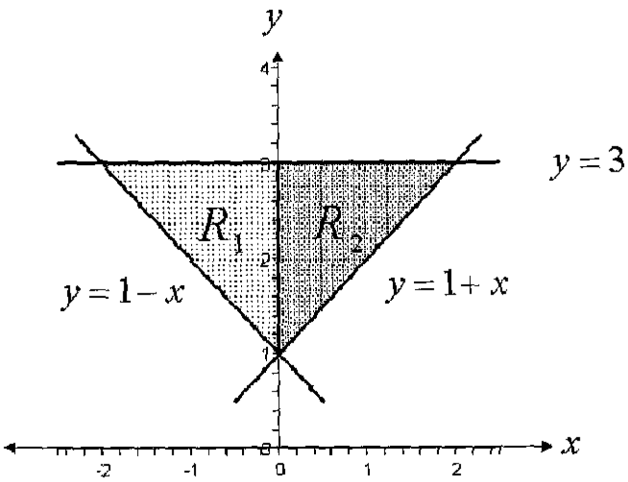


รูปที่ 2.12: รูปบริเวณ R สำหรับตัวอย่าง 2.16

จากรูปพบว่าขอบเขตของการหาปริพันธ์ คือ $1 \leq y \leq 3$ และ $1-y \leq x \leq y-1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\iint_R 2x - y^2 \, dA &= \int_1^3 \int_{1-y}^{y-1} 2x - y^2 \, dx \, dy \\
&= \int_1^3 \left[\int_{1-y}^{y-1} 2x - y^2 \, dx \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[x^2 - xy^2 \right]_{x=1-y}^{x=y-1} dy \\
&= \int_1^3 \left[(y-1)^2 - (y-1)y^2 \right] - \left[(1-y)^2 - (1-y)y^2 \right] dy \\
&= \int_1^3 \left[2y^2 - 2y + 1 - y^3 \right] - \left[1 - 2y + y^3 \right] dy \\
&= \int_1^3 2y^2 - 2y^3 \, dy \\
&= \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_{y=1}^{y=3} \\
&= \left[\frac{23^3}{3} - \frac{3^4}{2} \right] - \left[\frac{21^3}{3} - \frac{1^4}{2} \right] = -\frac{68}{3}
\end{aligned}$$

หมายเหตุ สามารถหาค่าปริพันธ์จากตัวอย่าง 2.16 บนบริเวณ R โดยพิจารณาบริเวณ R เป็นพื้นที่แบบ I แต่ในการหาค่าปริพันธ์ เราต้องพิจารณาบริเวณ R เป็นสองส่วนดังรูป 2.13



รูปที่ 2.13: การหาค่าปริพันธ์ โดยพิจารณาบริเวณ R จากตัวอย่าง 2.16 เป็นพื้นที่แบบ I

โดยคุณสมบัติข้อ 4 ของการหาค่าปริพันธ์สองชั้น (หน้า 4) พบว่าค่าปริพันธ์บนบริเวณ R มีค่าเท่ากับผลรวมของค่าปริพันธ์บนบริเวณ R_1 และ $R2$

จากรูปพบว่า ขอบเขตของการหาปริพันธ์ของบริเวณ R_1 คือ $-2 \leq x \leq 0$ และ $1-x \leq y \leq 3$ และ ขอบเขตของการหาปริพันธ์ของบริเวณ R_2 คือ $0 \leq x \leq 2$ และ $x-1 \leq y \leq 3$ ดังนั้นเราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned}
\iint_R 2x - y^2 \, dA &= \iint_{R_1} 2x - y^2 \, dA + \iint_{R_2} 2x - y^2 \, dA \\
&= \int_{-2}^{0} \int_{1-x}^{3} 2x - y^2 \, dydx + \int_{0}^{2} \int_{x-1}^{3} 2x - y^2 \, dydx \\
&= \int_{-2}^{0} \left[2xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=1-x}^{y=3} dx + \int_{0}^{2} \left[2xy - \frac{y^3}{3} \right]_{y=x-1}^{y=3} dx \\
&= \int_{-2}^{0} -\frac{26}{3} + 3x + 3x^2 - \frac{x^3}{3} \, dx \\
&\quad + \int_{0}^{2} -\frac{26}{3} + 5x - x^2 + \frac{x^3}{3} \, dx \\
&= \left[-\frac{26x}{3} + \frac{3x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{12} \right]_{x=-2}^{x=0} \\
&\quad + \left[-\frac{26x}{3} + \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right]_{x=0}^{x=2} \\
&= -14 + \left(-\frac{26}{3} \right) = -\frac{68}{3}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^3\ dydx$

(b) $\displaystyle\int_1^2\int_y^{3-y} y\ dxdy$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} y\ dxdy$

(d) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\frac{y}{x}\ dydx$

(e) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{x^2} \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\ dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin y} e^x\cos y\ dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} x+y\ dydx$

(h) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{y^2} e^{x/y^2}\ dxdy$

(i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\ dydx$

(j) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x e^{x^2}\ dydx$

2. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้บนบริเวณ R ที่กำหนดให้

(a) $\displaystyle\iint\limits_R xy\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วย $y=0$, $x=2$ และ $y=x^2$

(b) $\displaystyle\iint\limits_R x\cos xy\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วย $x=1$, $x=2$, $y=\dfrac{\pi}{2}$ และ $y=\dfrac{2\pi}{x}$

(c) $\displaystyle\iint\limits_R x+y\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วย $y=x^2$ และ $y=\sqrt{x}$

(d) $\displaystyle\iint\limits_R x-1\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วย $y=x$ และ $y=x^3$

(e) $\displaystyle\iint\limits_R x\cos y\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วย $y=0$, $y=x$ และ $y=\pi$

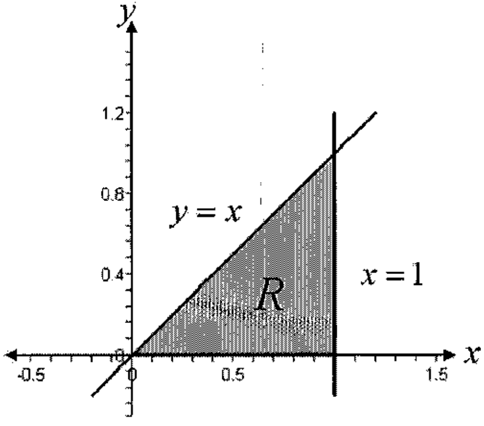
(f) $\displaystyle\iint\limits_R 3x-2y\ dA$ เมื่อ R คือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบวงกลมรัศมี 1 หนึ่งที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$

2.6 การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini (อย่างแรง)

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini สามารถช่วยให้หาค่าปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.17. จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\, dA$ เมื่อ R เป็นสามเหลี่ยมในระนาบ xy ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน x เส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $x = 1$

วิธีทำ พิจารณารูปบริเวณ R



รูปที่ 2.14: บริเวณ R ในตัวอย่าง 2.17

ถ้าพิจารณาบริเวณ R เป็นพื้นที่แบบ II จะได้ว่าปริพันธ์ที่ต้องการหาคือ

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\, dA = \int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\, dx\, dy$$

ซึ่งจะทำได้ยาก เพราะเราจะไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ ได้

ถ้าเราพิจารณาบริเวณ R เป็นพื้นที่แบบ I เราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\, dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx$$

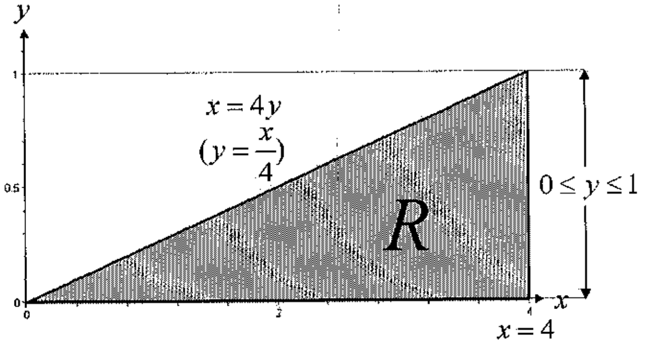
ซึ่งได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\, dx &= \int_0^1 \left[\int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\sin x}{x} \int_0^x dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} [y]_{y=0}^{y=x}\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy\,dx &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x}x\,dx = \int_0^1 \sin x\,dx\\ &= -\cos x\Big|_{x=0}^{x=1}\\ &= -\cos 1-(-\cos 0) = -\cos 1+1\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.18. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1\int_{4y}^4 e^{-x^2}\,dx\,dy$

วิธีทำ พิจารณาบริเวณ R ซึ่งเป็นขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์



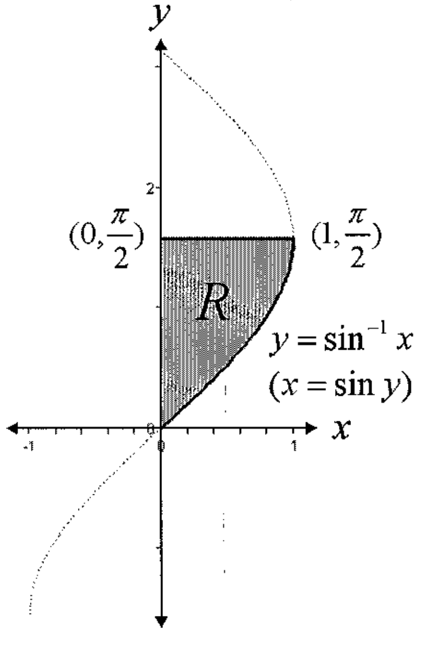
รูปที่ 2.15: บริเวณ R ในตัวอย่าง 2.18

โดยปกติแล้ว เราไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int e^{-x^2}\,dx$ ได้ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทของ Fubini เราจะหาค่าปริพันธ์ของ $\displaystyle\int_0^4\int_0^{x/4} e^{-x^2}\,dy\,dx$ แทน

$$\begin{aligned}\int_0^4\int_0^{x/4} e^{-x^2}\,dy\,dx &= \int_0^4\left[\int_0^{x/4} e^{-x^2}\,dy\right]dx\\ &= \int_0^4\left[e^{-x^2}\int_0^{x/4} dy\right]dx\\ &= \int_0^4 e^{-x^2}\,[y]_{y=0}^{y=x/4}\,dx\\ &= \int_0^4 \frac{xe^{-x^2}}{4}\,dx\\ &= -\frac{e^{-x^2}}{8}\Big|_{x=0}^{x=4}\\ &= -\frac{1}{8}\left[e^{-16}-e^0\right] = \frac{1-e^{-16}}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.19. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} x}^{\pi/2} \sec^2(\cos y)\ dy\ dx$

วิธีทำ



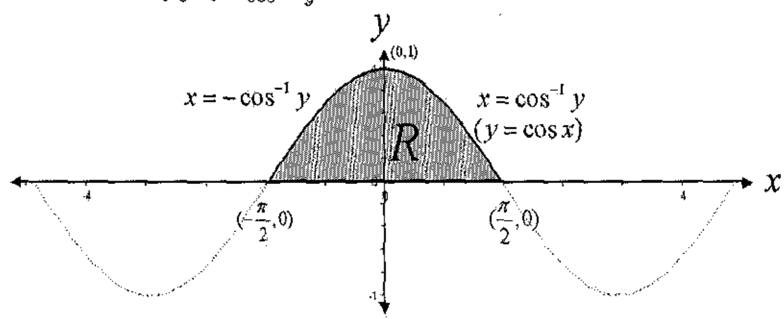
รูปที่ 2.16: บริเวณ R ในตัวอย่าง 2.19

โดยปกติแล้ว เราไม่สามารถหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\displaystyle\int \sec^2(\cos y)\ dy$ ได้ ดังนั้นจำเป็นต้องประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini ในการหาค่าปริพันธ์ เมื่อพิจารณาบริเวณ R ซึ่งเป็นขอบเขตของการหาปริพันธ์ (ดูรูป 2.16) พบว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sin^{-1} x}^{\pi/2} \sec^2(\cos y)\ dy\ dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin y} \sec^2(\cos y)\ dx\ dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos y)\, [x]_{x=0}^{x=\sin y}\ dy \\
&= \int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos y) \sin y\ dy \\
&= -\tan(\cos y)\Big|_{y=0}^{y=\pi/2} \\
&= -\left[\tan(\cos\frac{\pi}{2}) - \tan(\cos 0)\right] \\
&= -[\tan 0 - \tan 1] \\
&= \tan 1
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.20. จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\cos^{-1} y}^{\cos^{-1} y} \sec(\sin x)\tan(\sin x)\ dx\ dy$

วิธีทำ



รูปที่ 2.17: บริเวณ R ในตัวอย่าง 2.20

เพื่อเป็นการสะดวกในการหาค่าปริพันธ์ เราสามารถประยุกต์ทฤษฎีบทของ Fubini และเปลี่ยนขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์โดย

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-\cos^{-1} y}^{\cos^{-1} y} \sec(\sin x)\tan(\sin x)\ dx\ dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos x} \sec(\sin x)\tan(\sin x)\ dy\ dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec(\sin x)\tan(\sin x)\ [y]_{y=0}^{y=\cos x}\ dx \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec(\sin x)\tan(\sin x)\cos x\ dx \\
&= \sec(\sin(x))\Big|_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} \\
&= \sec(\sin(\pi/2)) - \sec(\sin(-\pi/2)) \\
&= \sec 1 - \sec(-1) = 0
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด

1. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini หาปริพันธ์ซึ่งเทียบเท่ากับปริพันธ์ที่กำหนด โดยเปลี่ยนลำดับในการหาค่าปริพันธ์ย่อย

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^4\int_{2y}^{8} f(x,y)\ dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_1^{e^y} f(x,y)\ dxdy$

(d) $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)\ dydx$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}} f(x,y)\ dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\pi/2} f(x,y)\ dxdy$

(h) $\displaystyle\int_{-3}^1\int_{x^2+6x}^{4x+3} f(x,y)\ dydx$

2. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของ Fubini หาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^4 e^{-y^2}\ dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^1 \cos\left(x^2\right)\ dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\ dxdy$

(d) $\displaystyle\int_1^3\int_0^{\ln x} x\ dydx$

(e) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\cos^{-1}x} x\ dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\pi/2} \sec^2(\cos x)\ dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\cos^{-1}y} \sec^2(\sin x)\ dxdy$

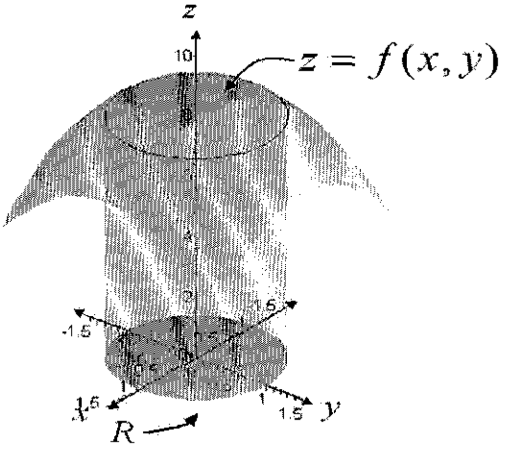
(h) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sin^{-1}x}^{\pi/2} \sec(\cos y)\tan(\cos y)\ dydx$

2.7 ปริมาตรและพื้นที่ในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวซึ่งมีค่าเป็นบวก บนส่วนของบริเวณ R ซึ่งเป็นเราสามารถหาปริมาตรของรูปทรง ที่มีฐานเป็นรูปบริเวณ R และมีพื้นผิวปิดด้านบนเป็นพื้นผิว (x, y, z) ได้ในรูปแบบของการหาปริพันธ์สองชั้นได้ดังนี้

1. พื้นที่แบบ I
$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dydx$$

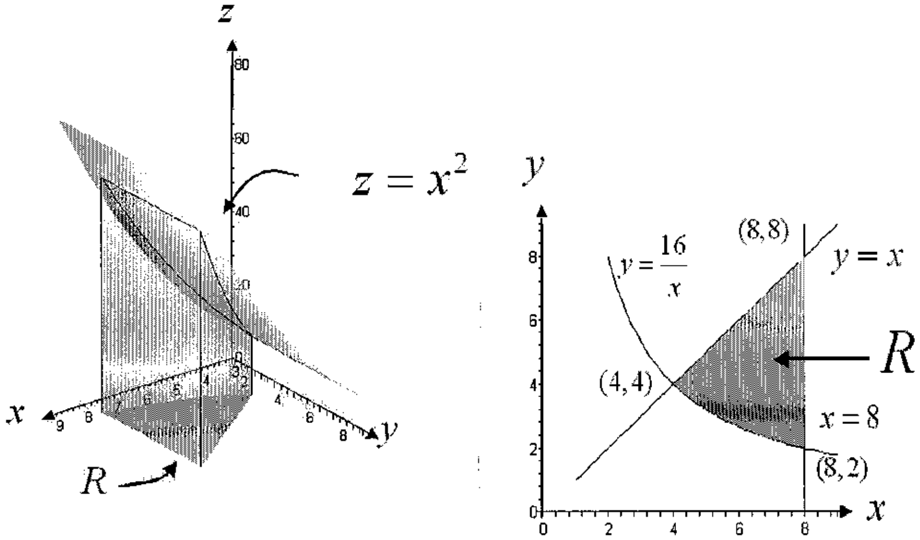
2. พื้นที่แบบ II
$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ dxdy$$



รูปที่ 2.18: ปริมาตรในรูปของปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ตัวอย่าง 2.21. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้ผิวโค้ง $z = x^2$ และเป็นปริมาตรเหนือบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \dfrac{16}{x}$, เส้นตรง $y = x$ และ เส้นตรง $x = 8$

วิธีทำ



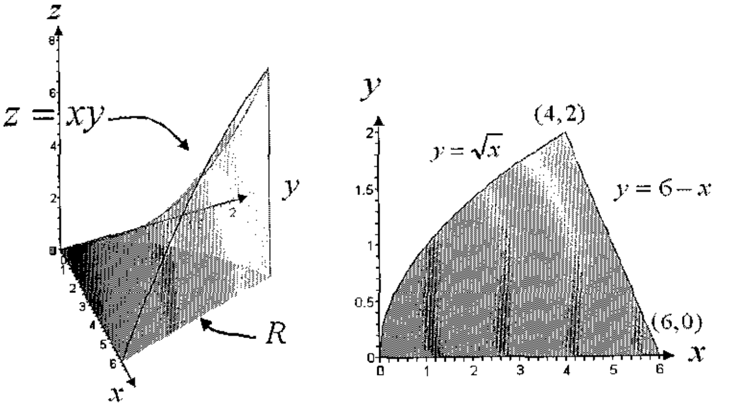
รูปที่ 2.19: รูปปริมาตรและบริเวณ R ในตัวอย่าง 2.21

เมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่าเป็นพื้นที่แบบ I ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R f(x,y)\ dA &= \int_4^8 \int_{16/x}^{x} x^2\ dydx \\
&= \int_4^8 x^2 \int_{16/x}^{x} dydx \\
&= \int_4^8 x^2\, [y]_{y=16/x}^{y=x}\ dx \\
&= \int_4^8 x^3 - 16x\ dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - 8x^2\right]_{x=4}^{x=8} \\
&= \left[\frac{8^4}{4} - 8(8^2)\right] - \left[\frac{4^4}{4} - 8(4^2)\right] \\
&= 576 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.22. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้ผิวโค้ง $z = xy$ และเป็นปริมาตรเหนือบริเวณ R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$, เส้นตรง $y = 6 - x$ และ เส้นตรง $y = 0$

วิธีทำ



รูปที่ 2.20: รูปปริมาตรและบริเวณ R ในตัวอย่าง 2.22

เมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่าเป็นพื้นที่แบบ II ดังนั้น ปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ

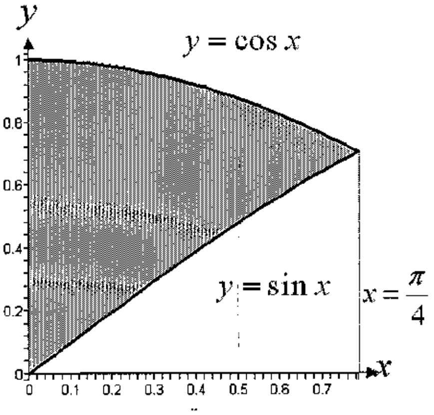
$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy\,dxdy \\
&= \int_0^2 y \int_{y^2}^{6-y} x\,dxdy \\
&= \int_0^2 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=6-y} dy \\
&= \int_0^2 18y - 6y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\,dy \\
&= \left[9y^2 - 2y^3 + \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= \frac{50}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

เราสามารถประยุกต์ใช้การหาค่าอินทิกรัลสองชั้น หาพื้นที่ได้โดย

$$\text{พื้นที่} = \iint_R 1\ dA$$

ตัวอย่าง 2.23. จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sin x$, $y = \cos x$, เมื่อ $0 \leq x \leq \pi/4$

วิธีทำ



รูปที่ 2.21: รูปบริเวณ R ในตัวอย่าง 2.23

เมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่าเป็นพื้นที่แบบ I ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x,y)\ dA &= \int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} 1\ dydx \\
&= \int_0^{\pi/4} y\Big|_{y=\sin x}^{y=\cos x} dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\ dx \\
&= [\sin x + \cos x]_{x=0}^{x=\pi/4} \\
&= \left[\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right] - [\sin 0 + \cos 0] \\
&= \sqrt{2} - 1 \text{ ตารางหน่วย}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาปริมาตรของทรงตันต่อไปนี้ ขอบเขตของทรงตันให้

   (a) ทรงตันซึ่งมีพื้นผิวบน $z = x^2 + 3y^2$, พื้นผิวล่าง $z = 0$

   R เป็นบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยสมการ $y = x^2$ และ $y = x$

   (b) ทรงตันซึ่งมีพื้นผิวบน $z = 9 - x^2$, พื้นผิวล่าง $z = 0$

   R เป็นบริเวณซึ่งอยู่ใน**จตุภาคที่ 1** และถูกล้อมรอบด้วยสมการ $y^2 = 3x$

   (c) ทรงตันซึ่งมีพื้นผิวบน $z = y + 3$, พื้นผิวล่าง $z = 0$

   R เป็นบริเวณที่ถูกล้อมรอบด้วยสมการ $4x^2 + y^2 = 9$

   (d) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว $x + z = 1$, $z = 0$ และ $y^2 = x$

2. จงหาพื้นที่ต่อไปนี้ เมื่อบริเวณ R ที่กำหนดถูกล้อมรอบด้วยสมการต่างๆ ตามที่กำหนด

   (a) $y^2 = -x$ และ $3y - x = 4$

   (b) $y^2 = 9 - x$ และ $y^2 = 9 - 9x$

   (c) $y = \cosh x,\ y = \sinh x,\ x = 0$ และ $x = 1$

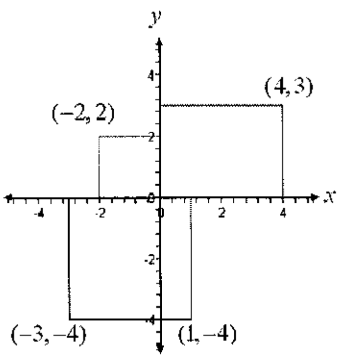
บทที่ 3
พิกัดเชิงขั้วและปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

ในบางครั้ง การหาค่าปริพันธ์สองชั้นอาจจะกระทำได้ยาก และแทนที่เราจะพิจารณาหาค่าปริพันธ์สองชั้นโดยตรง เราอาจจะแปลง การหาค่าปริพันธ์จากในรูปแบบของระบบพิกัดฉาก เข้าสู่ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ซึ่งอาจจะทำให้การหาค่าปริพันธ์สองชั้น ทำได้ง่ายขึ้น

ในหัวข้อที่จะกล่าวต่อไปนี้ ต้องการนำเสนอระบบพิกัดเชิงขั้ว, การแปลงจากระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว และ แปลงจากระบบพิกัดเชิงขั้วเป็นระบบพิกัดฉาก และ ในเนื้อหาท้ายสุดของบท จะแสดงการหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

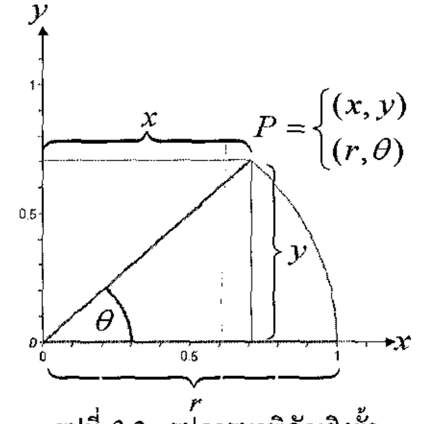
3.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว

จากแนวความคิดของระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate) เมื่อกล่าวถึงพิกัด (x, y) ถ้า x เป็นค่าบวกจะหมายถึง จุดซึ่งห่างจากจุดกำเนิด (origin) $(0, 0)$ ไปทางขวา เป็นระยะทาง x หน่วย แต่ถ้า x เป็นค่าลบ พิกัดดังกล่าวจะหมายถึง จุดซึ่งห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้ายเป็นระยะทาง $-x$ หน่วย และ ถ้า y มีค่าเป็นบวก จุดนั้นจะอยู่เหนือจากเส้นตรงแนวนอน ซึ่งผ่านจุด $(0, 0)$ เป็นระยะ y หน่วย และ ถ้า y มีค่าเป็นลบ จุดที่กล่าวถึงจะอยู่ต่ำกว่าเส้นดังกล่าว เป็นระยะ $-y$ หน่วย



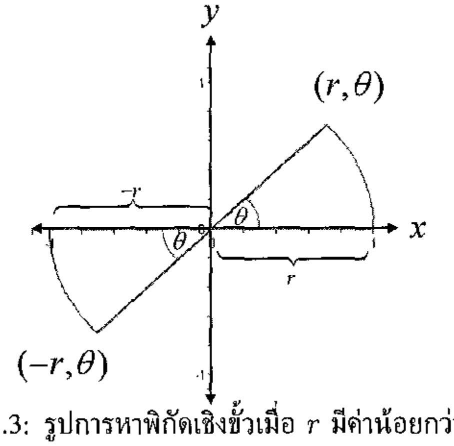
รูปที่ 3.1: ระบบพิกัดฉาก

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกล่าวถึงพิกัด (r, θ) จะหมายถึงจุด ซึ่งหาได้จากพิจารณา ค่า r ถ้า r มีค่าเป็น 0 ก็จะหมายถึงจุดกำเนิด $(0, 0)$ ถ้ามีค่ามากกว่าศูนย์ จะกำหนดจุดดังกล่าวโดยวัดระยะจากจุดกำเนิด**ไปทางขวา**เป็นระยะทาง r หน่วย จากนั้นพิจารณาค่ามุม θ ถ้า θ มีค่าเป็นบวก จะหมายถึงให้หมุนจุดดังกล่าวรอบจุดกำเนิดในทิศทาง**ทวนเข็มนาฬิกา** เป็นมุม θ แต่ถ้า θ มีค่าเป็นลบ จะหมายถึงให้หมุนจุดดังกล่าวรอบจุดกำเนิดในทิศทาง**ตามเข็มนาฬิกา** เป็นมุม θ



รูปที่ 3.2: รูปการหาพิกัดเชิงขั้ว

สำหรับกรณีค่า r น้อยกว่าศูนย์ จะกำหนดจุดดังกล่าวโดยวัดระยะจากจุดกำเนิด**ไปทางซ้าย**เป็นระยะทาง r หน่วย แล้วก็หมุนจุดนั้นรอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ เหมือนดังกรณี r มีค่ามากกว่าศูนย์



รูปที่ 3.3: รูปการหาพิกัดเชิงขั้วเมื่อ r มีค่าน้อยกว่าศูนย์

เพื่อความสะดวก ภายหลังจากนี้ จะใช้สัญลักษณ์ (x, y) แทนจุดในระบบพิกัดฉาก และใช้สัญลักษณ์ (r, θ) แทนจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว ยกเว้นว่าในเนื้อหาบางส่วน จะมีการแจ้งว่าจะใช้สัญลักษณ์อื่น หรือยกเลิกการใช้สัญลักษณ์ดังกล่าวในกรณีพิเศษ

เมื่อกำหนดจุด (x, y) ในระบบพิกัดฉากมา เราสามารถแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้คือ

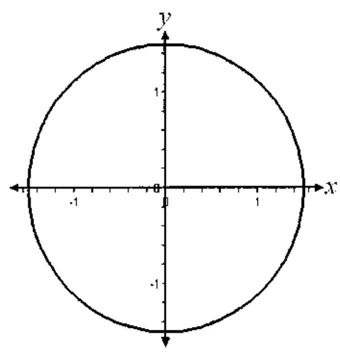
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{และ} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

และในทางกลับกัน เมื่อกำหนดจุด (r, θ) ในพิกัดเชิงขั้ว เราสามารถแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดฉากได้คือ

$$x = r\cos\theta \qquad \text{และ} \qquad y = r\sin\theta$$

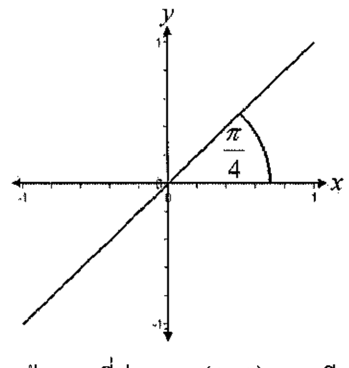
ตัวอย่าง 3.1. ตัวอย่างสมการในพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้วที่สมมูลกัน

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$x^2 + y^2 = R^2$	$r = R$



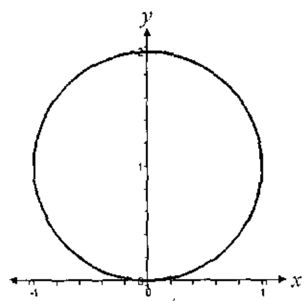
รูปที่ 3.4: สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมี R

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$x = y$	$\theta = \dfrac{\pi}{4}$



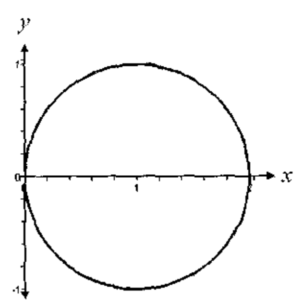
รูปที่ 3.5: สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 0)$ และมีความชันเท่ากับ 1

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$x^2 + (y-1)^2 = 1$	$r = 2\sin\theta$



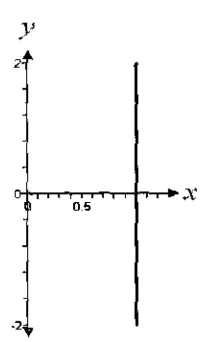
รูปที่ 3.6: สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 1)$ และมีรัศมี 1

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$(x-1)^2 + y^2 = 1$	$r = 2\cos\theta$



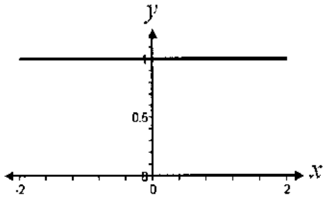
รูปที่ 3.7: สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1, 0)$ และมีรัศมี 1

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$x = 1$	$r = \sec\theta$



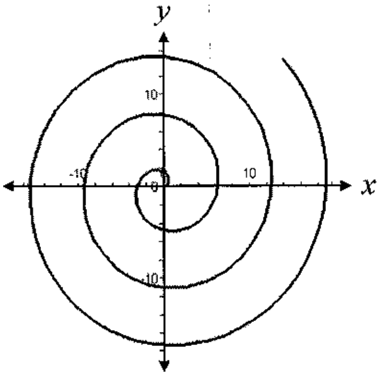
รูปที่ 3.8: สมการเส้นตรง $x = 1$

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดเชิงขั้ว
$y = 1$	$r = \csc\theta$

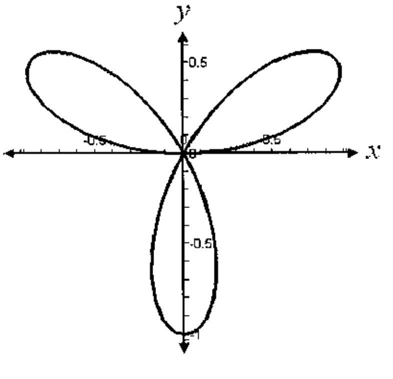


รูปที่ 3.9: สมการเส้นตรง $y = 1$

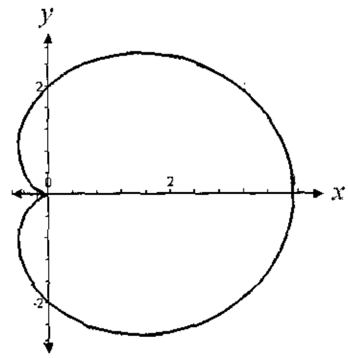
ตัวอย่าง 3.2. ตัวอย่างกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว



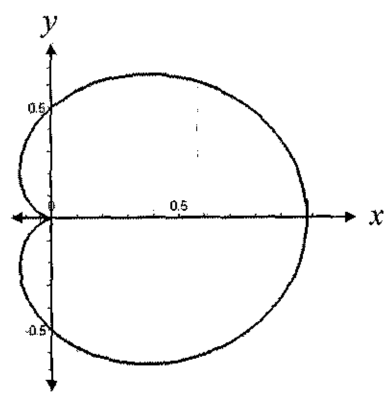
รูปที่ 3.10: สมการเวียนก้นหอย (spiral equation) $r = \theta$



รูปที่ 3.11: สมการดอกกุหลาบสามกลีบ (the three-petaled rose equation) $r = \sin 3\theta$



รูปที่ 3.12: สมการคาร์ดิออยด์ (cardioid equation) (แบบที่ 1) $r = 2\,(1 + \cos 2\theta)$



รูปที่ 3.13: สมการคาร์ดิออยด์ (แบบที่ 2) $r = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

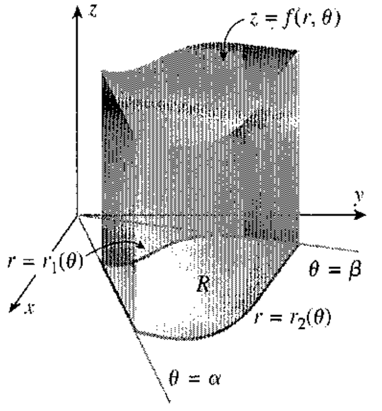
3.2 การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

สำหรับการหาค่าปริพัทธ์สองชั้นบนบริเวณที่มีลักษณะบางอย่าง อาจจะเป็นการยาก แต่เมื่อพิจารณาบริเวณเหล่านั้นให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว อาจจะทำให้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นทำได้ง่ายขึ้น บริเวณที่มักจะพิจารณาเพื่อหาค่าปริพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วได้แก่ วงกลม, ส่วนของวงกลม, คาร์ดิออยด์ (ดูรูป 3.12 ประกอบ), บริเวณดอกกุหลาบสามกลีบ (ดูรูป 3.11 ประกอบ) เป็นต้น

นอกจากนี้ การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันของ $x^2 + y^2$ ก็มักจะถูกพิจารณาให้หาค่าในพิกัดเชิงขั้วเช่นกัน เพราะโดยการแปลงค่าดังกล่าวให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว (ให้ $x = r\cos\theta$ และ $x = r\sin\theta$) เราก็จะได้

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ซึ่งอาจจะทำให้หาค่าปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 3.14: รูปการหาค่าปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ในการหาค่าปริพันธ์ เราพิจารณาแบ่งพื้นที่ R ออกเป็นพื้นที่ย่อย $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ โดยพื้นที่ A_k มีจุด (r_k, Δ_k) อยู่ภายใน, $k = 1, \ldots, n$ พบว่าผลรวมของ "พื้นที่คูณด้วยฟังก์ชัน ณ จุด $(r_k, \Delta A_k)$" คือ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k$$

ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนพื้นที่ R และค่าลิมิตของพื้นที่ ΔA_k เข้าสู่ศูนย์ ทุกๆ ค่า k ได้ว่า ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน f บนพื้นที่ R คือ

$$\int\int_R f(r, \theta)\; dA = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k$$

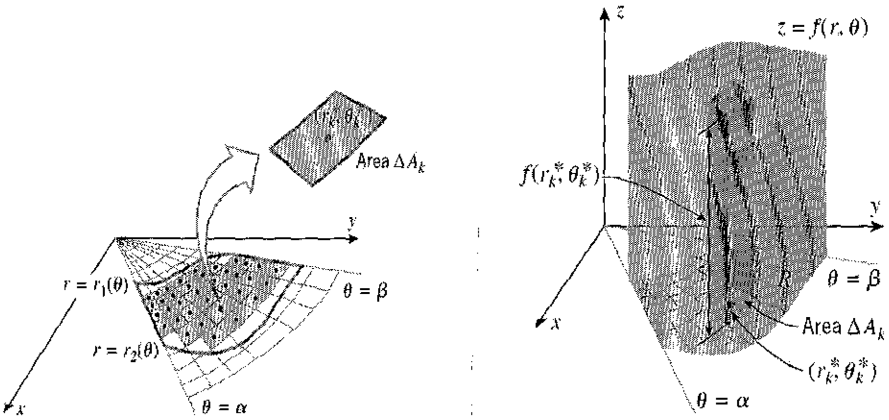
เนื่องจาก เราพิจารณาพื้นที่ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้าสมมติให้ (r_k^*, θ_k^*) เป็นจุดที่อยู่ตรงกลางพื้นที่ ΔA_k ดังนั้นเราหาพื้นที่ ΔA_k ได้จาก **ผลต่างของส่วนของวงกลมที่รองรับมุม** $\Delta\theta_k$ **ซึ่งมีรัศมี** $r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k$ **กับส่วนของวงกลมที่รองรับมุม** $\Delta\theta_k$ **ซึ่งมีรัศมี** $r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k$ ซึ่งก็คือ

$$\begin{aligned} \Delta A_k &= \left(\frac{\Delta\theta_k}{2\pi}\right)\pi\left(r_k^* + \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 - \left(\frac{\Delta\theta_k}{2\pi}\right)\pi\left(r_k^* - \frac{1}{2}\Delta r_k\right)^2 \\ &= r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k \end{aligned}$$

เมื่อ Δr_k และ θ_k เล็กมากๆ จะทำให้เราได้สูตรการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วคือ

ทฤษฎีบท 3.1 (การหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว). *ถ้า* $f(r,\theta)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนพื้นที่* R *แล้ว*

$$\iint_R f(r,\theta)\ dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\ r\ dr\ d\theta \tag{3.1}$$

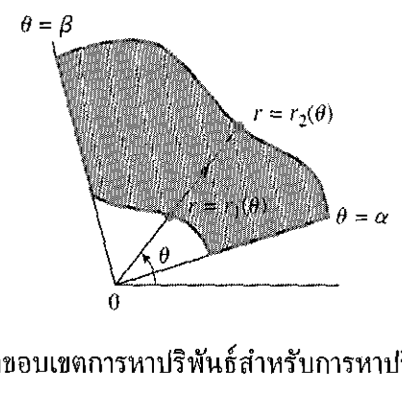


รูปที่ 3.15: รูปการพิจารณาพื้นที่และหาค่าปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ขั้นตอนวิธีการหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. ตรึงมุม θ เสมือนว่า θ เป็นค่าคงตัว จากนั้นลากเส้นรัศมีจากจุดศูนย์กลางไปยังพื้นที่ R โดยเส้นตรงซึ่งเป็นรัศมีนั้นทำมุม θ (พิจารณารูป 3.16 ประกอบ) เส้นรัศมีนี้ ต้องตัดพื้นที่ R **สองครั้ง** โดยจุดตัดจุดแรกต้องเป็นจุดบนเส้นโค้ง $r = r_1(\theta)$ และ จุดตัดที่สองต้องเป็นจุดบนเส้นโค้ง $r = r_2(\theta)$ ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่าปริพันธ์ย่อยได้

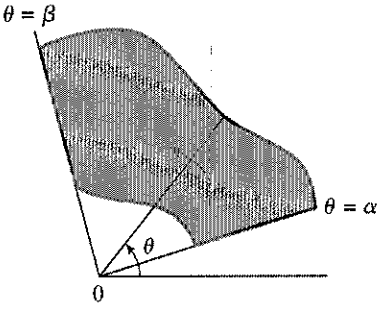
$$\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\ r\ dr$$



รูปที่ 3.16: รูปการหาขอบเขตการหาปริพันธ์สำหรับการหาปริพันธ์เทียบกับรัศมี r

2. พิจารณามุมของเส้นตรงรัศมีที่กวาดผ่านพื้นที่ R โดยให้ลากเส้นตรงรัศมีจากจุดกำเนิดไปทางขวา จากนั้นเริ่มหมุนเส้นตรงรัศมีดังกล่าวรอบจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกมุมเมื่อเส้นตรงรัศมีพบกับพื้นที่ R ครั้งแรกว่ามุม α และ เรียกมุมเมื่อรัศมีตัดกับพื้นที่ R เป็นจุดสุดท้ายว่ามุม β (พิจารณารูป 3.17 ประกอบ) ทำได้เราหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)\ r\ dr\ d\theta$$



รูปที่ 3.17: รูปการหาขอบเขตการหาปริพันธ์สำหรับการหาปริพันธ์เทียบกับมุม θ

ตัวอย่าง 3.3. จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{1+\theta^2} \frac{1}{r^2}\ dr\ d\theta$

วิธีทำ

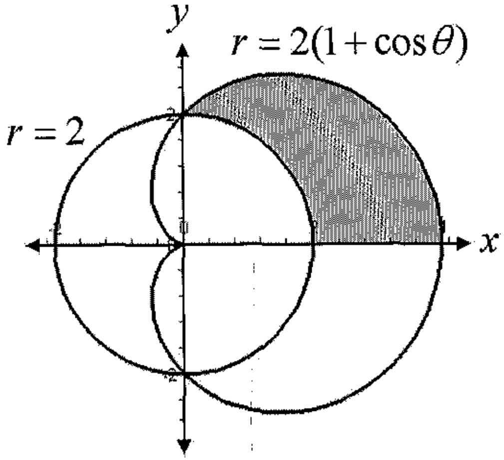
โดยขั้นตอนในการหาค่าปริพันธ์สองชั้นทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_1^{1+\theta^2} \frac{1}{r^2}\ dr\ d\theta &= \int_0^1 -\frac{1}{r}\Big|_{r=1}^{r=1+\theta^2} d\theta \\
&= \int_0^1 -\left[\frac{1}{1+\theta^2} - \frac{1}{1}\right]\ d\theta \\
&= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+\theta^2}\ d\theta \\
&= \left[\theta - \tan^{-1}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=1} \\
&= \left[1 - \tan^{-1}\right] - \left[0 - \tan^{0}\right] \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4. จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_R \sin\theta\ dA$

เมื่อ R คือ บริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่นอกวงกลม $r = 2$ และ อยู่ภายในรูปหัวใจ $r = 2(1+\cos\theta)$

วิธีทำ เราสามารถร่างภาพบริเวณ R ได้ดังรูป 3.18



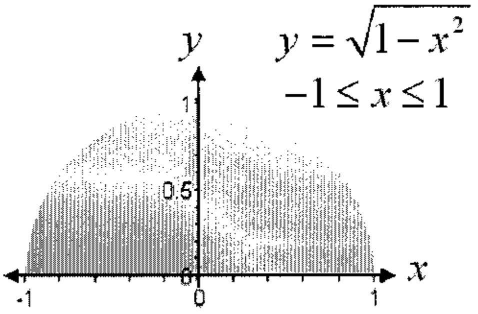
รูปที่ 3.18: รูปประกอบตัวอย่าง 3.4

โดยขั้นตอนในการหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วทำให้เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_R \sin\theta\ dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos\theta)} \sin\theta\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=2}^{r=2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\left[(1+\cos\theta)^2 - 1\right]\ d\theta \\
&= 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2 \sin\theta\ d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\ d\theta\right] \\
&= 2\left[-\frac{(1+\cos\theta)^3}{3} + \cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= 2\left\{\left[-\frac{(1+0)^3}{3} + 0\right] - \left[-\frac{(1+1)^3}{3} + 1\right]\right\} \\
&= 2\left[-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 1\right] = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหาค่า $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\ dy\ dx$

วิธีทำ พิจารณาบริเวณ R สำหรับการหาค่าปริพันธ์สองชั้น



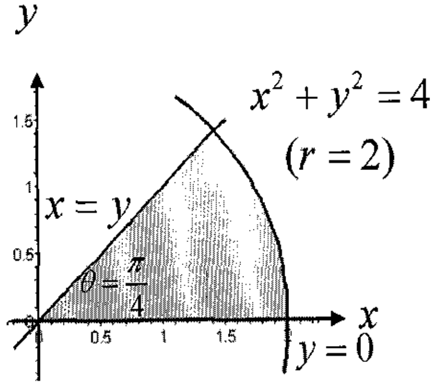
รูปที่ 3.19: ภาพบริเวณ R ประกอบตัวอย่าง 3.5

เพื่อความสะดวก จะทำการหาค่าปริพันธ์นี้ในระบบพิกัดเชิงขั้วแทน โดยในที่นี้พบว่า $x^2+y^2=r^2$ เมื่อพิจารณาจากขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ พบว่าค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\ dy\ dx &= \int_0^{\pi}\int_0^1 \left(r^2\right)^{3/2} r\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^1 r^3 r\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^1 r^4\ dr\ d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{r^5}{5}\bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{5}\ d\theta \\ &= \frac{1}{5}\theta\bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{\pi}{5}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6. จงหาค่า $\displaystyle\iint\limits_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA$ เมื่อ R คือบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y=0$ และ $y=x$ และเส้นโค้ง $x^2+y^2=4$

วิธีทำ พิจารณาบริเวณ R



รูปที่ 3.20: รูปในตัวอย่าง 3.6

พบว่าบริเวณ R เป็นส่วนหนึ่งของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 2 เพื่อความสะดวก จะหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วแทน นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA &= \int_0^{\pi/4}\int_0^2 \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^2 \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+r^2)}{2}\Big|_{r=0}^{r=2}\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left[\ln(1+2^2)-\ln(1+0^2)\right]\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln 5}{2}\,d\theta \\
&= \frac{\ln 5}{2}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\
&= \frac{\ln 5}{2}\left[\frac{\pi}{4}-0\right] = \frac{\pi\ln 5}{8}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta} r\cos\theta\ dr\ d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{1+\cos\theta} r\ dr\ d\theta$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{a+\theta^2}} r^2\ dr\ d\theta$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1-\sin\theta} r^2\cos\theta\ dr\ d\theta$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/8}\int_0^{\sin 4\theta} r\ dr\ d\theta$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos^2\theta} dr\ d\theta$

2. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้โดยการพิจารณาหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดฉากที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

(a) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2\ dydx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\ dydx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ dxdy$

(e) $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dydx$

(f) $\displaystyle\int_0^{1}\int_y^{\sqrt{y}} \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$

(g) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2)\ dxdy$

(h) $\displaystyle\int_0^{4}\int_3^{\sqrt{25-x^2}} dydx$

3.3 ปริมาตรและพื้นที่ในรูปของปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว

เราสามารถนำความรู้เรื่องการหาปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้วไปใช้หาปริมาตรได้โดย ถ้า $z = f_1(r,\theta)$ เป็นพื้นผิวบนและ $z = f_2(r,\theta)$ เป็นพื้นผิวล่าง ซึ่ง

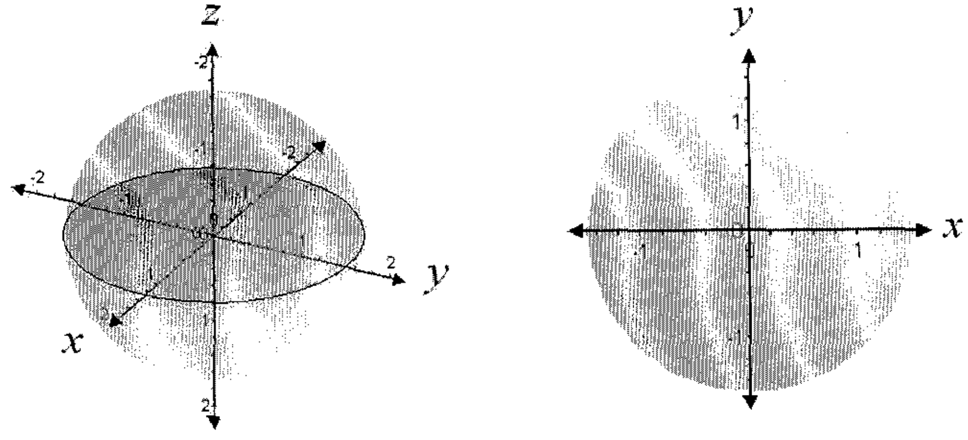
$$f_1(r,\theta) \leq f_2(r,\theta) \quad \text{ทุกๆ } (r,\theta) \text{ ในบริเวณ } R \text{ ที่พิจารณา}$$

แล้วเราสามารถหาปริมาตรในรูปของปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้วได้คือ

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตร} &= \iint\limits_R [z_{\text{ผิวบน}} - z_{\text{ผิวล่าง}}]\ r\ dr\ d\theta \\ &= \iint\limits_R [f_1(r,\theta) - f_2(r,\theta)]\ r\ dr\ d\theta \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.7. จงหาปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี a

วิธีทำ



รูปที่ 3.21: รูปทรงกลมรัศมี a และภาพฉายของรูปทรงกลมลงบนระนาบ xy ประกอบตัวอย่าง 3.7

จากสมการทรงกลม

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

เมื่อพิจารณาในพิกัดเชิงขั้ว โดยให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ เราได้สมการ

$$r^2 + z^2 = a^2$$

ดังนั้นทรงกลมมี**พื้นผิวบน**เป็นไปตามสมการ $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ และ มี**พื้นผิวล่าง**เป็นไปตามสมการ $z = -\sqrt{a^2 - r^2}$ และ เราสามารถหาปริมาตรของทรงกลมได้โดยพิจารณาดังนี้

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตรทรงกลม} &= \iint\limits_R \left[z_{\text{พื้นผิวบน}} - z_{\text{พื้นผิวล่าง}}\right]\, dA \\
&= \iint\limits_R \left[\sqrt{a^2 - r^2} - (-\sqrt{a^2 - r^2})\right]\, dA \\
&= \iint\limits_R 2\sqrt{a^2 - r^2}\, dA
\end{aligned}$$

เนื่องจากบริเวณ R คือ พื้นที่รูปทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a (ดูรูป 3.21) ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตรทรงกลม} &= \iint\limits_R 2\sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left[-\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=0}^{r=a} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[(a^2 - a^2)^{3/2} - (a^2 - 0^2)^{3/2}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[-(a^2)^{3/2}\right]\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2a^3}{3}\, d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \frac{2a^3}{3}[2\pi - 0] = \frac{4\pi a^3}{3} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

ดังนัน ปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ a คือ $\frac{4\pi a^3}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

หมายเหตุ เราอาจจะพิจารณาว่า**ครึ่งทรงกลม**มีความสูงคือ

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}$$

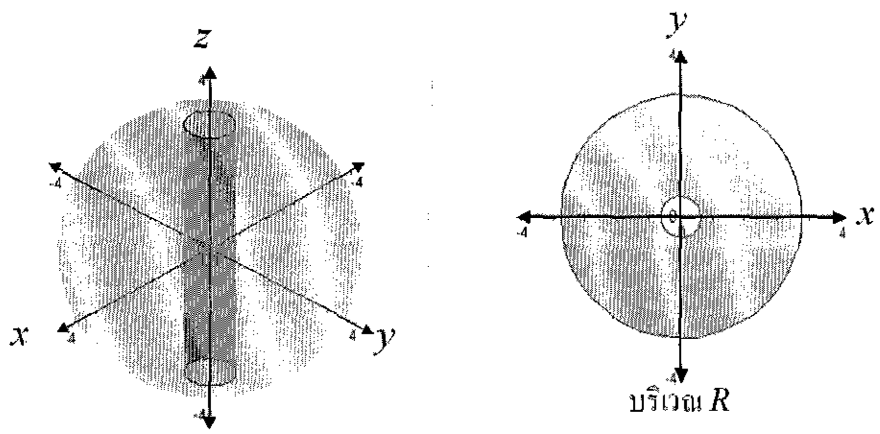
เนื่องจากทรงกลมเป็นรูปทรงที่สมมาตร ดังนั้นจะพิจารณาว่าปริมาตรทรงกลมมีค่าเป็น**สองเท่า**ของปริมาตรครึ่งทรงกลม นั่นคือ

$$\text{ปริมาตรทรงกลม} = 2\iint\limits_R z\, dA = 2\iint\limits_R \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

ตัวอย่าง 3.8. ถ้านำลูกสนุกเกอร์ลูกหนึ่ง ซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกลมที่มี**รัศมี 3 เซนติเมตร** มาเจาะรูให้ทะลุแนวกลางด้วยดอกสว่าน**ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เซนติเมตร** จงหาปริมาตรของลูกสนุกเกอร์นี้ภายหลังจากการเจาะแล้ว

วิธีทำ โดยแนวคิดในการหาปริมาตรจากตัวอย่าง 3.7 หน้า 56 ทำให้เราได้ว่า

$$\text{ปริมาตรลูกสนุกเกอร์ซึ่งถูกเจาะรูแล้ว} = \iint_R 2\sqrt{3^2 - r^2}\, dA = \iint_R 2\sqrt{9 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

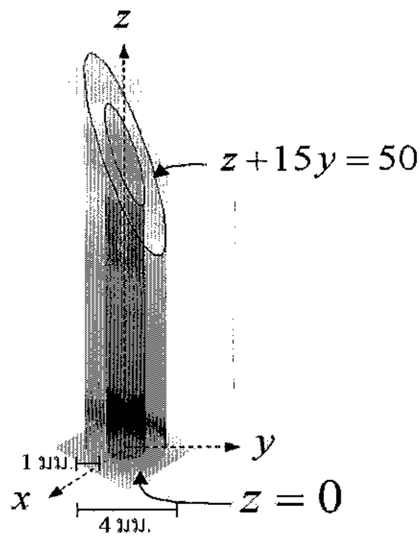


รูปที่ 3.22: รูปลูกสนุกเกอร์ซึ่งถูกเจาะรูตรงกลางและบริเวณ R แสดงเงาที่ปรากฏบนระนาบ xy

เมื่อพิจารณาบริเวณ R ซึ่งเป็นพื้นที่รูปวงแหวน (ดูรูป 3.22) โดยมีรัศมีวงในคือ 0.5 เซนติเมตร และ มีรัศมีวงนอก 3 เซนติเมตร ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตรลูกสนุกเกอร์ซึ่งถูกเจาะรูแล้ว} &= \int_0^{2\pi}\int_{1/2}^{3} 2\sqrt{9-r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left[-\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3}\right]_{r=1/2}^{r=3} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[(9-3^2)^{3/2} - (9-\left(\frac{1}{2}\right)^2)^{3/2}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[(9-9)^{3/2} - (9-\frac{1}{4})^{3/2}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[-\frac{35^{3/2}}{8}\right] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{35^{3/2}}{12} d\theta \\
&= \frac{35^{3/2}}{12}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{35^{3/2}}{12}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \frac{35^{3/2}}{12}[2\pi - 0] = \frac{35^{3/2}\pi}{6} \ \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร}
\end{aligned}$$

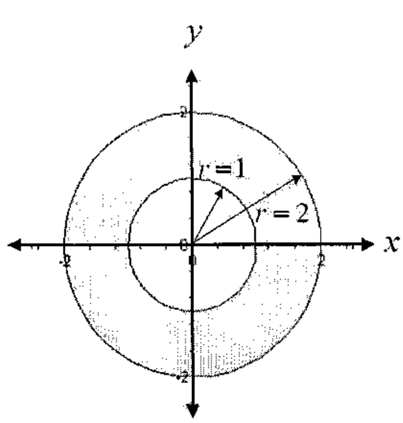
ตัวอย่าง 3.9. จงหาปริมาตรของเหล็กที่จะใช้ทำปลายเข็มฉีดยา ซึ่งปลายเข็มฉีดยามีลักษณะดังรูป 3.23 โดยเป็นทรงกระบอกกลวงตรงกลาง มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 มิลลิเมตร และผนังของปลายเข็มฉีดยามีความหนา 1 มิลลิเมตร ระนาบปลายเข็มฉีดยาด้านหนึ่งเอียง โดยเป็นไปตามสมการ $z + 15y = 50$ และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นไปตามสมการ $z = 0$



รูปที่ 3.23: ปลายเข็มฉีดยา ประกอบตัวอย่าง 3.9

วิธีทำ เมื่อพิจารณาปลายเข็มฉีดยาดังกล่าวในลักษณะของทรงตัน ทรงตันนี้มีผิวบนคือ $z = 50 - 15y$ ในพิกัดฉาก หรือ $z = 50 - 15r\sin\theta$ ในพิกัดเชิงขั้ว และมีผิวล่างคือ $z = 0$

สำหรับการหาปริมาตรของปลายเข็มฉีดยาดังกล่าว เราพิจารณาบริเวณ R ซึ่งเป็นเงาของปลายเข็มฉีดยาที่ปรากฏบนระนาบ xy เป็นขอบเขตของการหาปริพันธ์



รูปที่ 3.24: บริเวณ R แสดงเงาของปลายเข็มฉีดยาที่ปรากฏบนระนาบ xy ประกอบตัวอย่าง 3.9

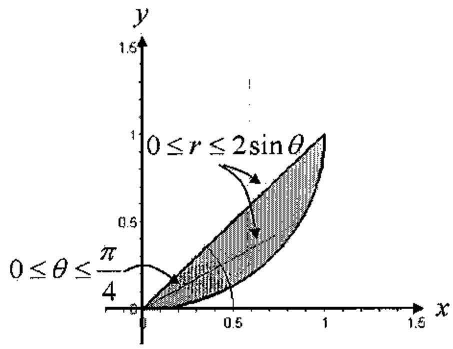
$$
\begin{aligned}
\text{ปริมาตรของปลายเข็มฉีดยา} &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 (50 - 15r\sin\theta)\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^2 50r - 15r^2\sin\theta\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[25r^2 - 5r^3\sin\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[25(2^2) - 5(2^3)\sin\theta\right] - \left[25(1^2) - 5(1^3)\sin\theta\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 75 - 35\sin\theta\ d\theta \\
&= \left[75\theta + 35\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \left[75(2\pi) + 35\cos(2\pi)\right] - \left[75(0) + 35\cos 0\right] \\
&= 150\pi\ \text{ลูกบาศก์มิลลิเมตร}
\end{aligned}
$$

เราสามารถประยุกต์ใช้การหาปริมาตรโดยการหาปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้วเพื่อหาพื้นที่ของบริเวณ R ได้โดย

$$\text{พื้นที่} = \iint_R 1\ r\ dr\ d\theta$$

ตัวอย่าง 3.10. จงหาพื้นที่ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ และ $0 \le r \le 2\sin\theta$

วิธีทำ เมื่อพิจารณาเส้นโค้ง $r = 2\sin\theta$ เส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{4}$ เราได้ว่า บริเวณ R คือ บริเวณส่วนที่ถูกแรเงาดังรูป 3.10



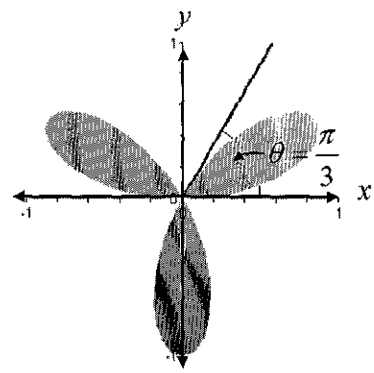
รูปที่ 3.25: รูปประกอบตัวอย่าง 3.10

จากรูป เราสามารถหาพื้นที่ได้โดย

$$\begin{aligned}
\text{พื้นที่} &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sin\theta} 1\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{2\sin\theta} r\ dr\right]\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2\sin\theta}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left[\frac{(2\sin\theta)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} 2\sin^2\theta\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} (1-\cos 2\theta)\ d\theta \\
&= \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} \\
&= \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sin(\pi/2)}{2}\right] - \left[0 - \frac{\sin 0}{2}\right] \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ \text{ตารางหน่วย}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.11. จงใช้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว หาพื้นซึ่งปิดล้อมด้วย**สมการดอกกุหลาบสามกลีบ** (the three-petaled rose equation) $r = \sin 3\theta$

วิธีทำ เราสามารถร่างภาพของบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยสมการดอกกุหลาบสามกลีบได้ดังรูป 3.26



รูปที่ 3.26: รูปประกอบตัวอย่าง 3.11

ในการหาพื้นที่ทั้งหมด จะใช้วิธีการพิจารณาว่าเป็น**สามเท่า**ของพื้นที่ส่วนที่ที่ถูกปิดล้อม **เฉพาะในจตุภาคที่หนึ่ง** ซึ่งการหาพื้นที่ในจตุภาคที่หนึ่งสำหรับสมการดอกกุหลาบสามกลีบนี้ จะพิจารณามุม θ ตั้งแต่ 0 จนถึง $\frac{\pi}{3}$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$

$$
\begin{aligned}
\textbf{พื้นที่} &= 3\iint\limits_R 1\ r\ dr\ d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/3}\int_0^{\sin 3\theta} r\ dr\ d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sin 3\theta} d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3}(\sin 3\theta)^2\ d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3}\frac{(1-\cos 6\theta)}{2}\ d\theta \\
&= \frac{3}{4}\left[\theta - \frac{\sin 6\theta}{6}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} \\
&= \frac{3}{4}\left\{\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\pi}{6}\right] - \left[0 - \frac{\sin 0}{6}\right]\right\} \\
&= \frac{\pi}{4}\ \text{ตารางหน่วย}
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาประยุกต์ใช้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้วหาปริมาตรของทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมสมการที่กำหนดให้

   (a) ทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่ 1 มีพื้นผิวบนคือ $z = r\sin\theta$ พื้นที่ผิวล่างคือระนาบ xy ซึ่งอยู่เหนือบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x = 0$ และเส้นโค้ง $r = 3\sin\theta$

   (b) ทรงตันซึ่งอยู่ในทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ และอยู่นอกทรงกระบอก $r = 2\cos\theta$

   (c) ทรงตันซึ่งมีพื้นผิวบน $z = 1 - x^2 - y^2$ และมีพื้นผิวล่างคือระนาบ xy และอยู่ในในทรงกระบอก $x^2 + y^2 - x = 0$

   (d) ทรงตันซึ่งมีพื้นผิวบน $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และมีพื้นผิวล่างคือระนาบ xy และอยู่ในในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 2y$

2. จงหาประยุกต์ใช้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้วหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งถูกปิดล้อมสมการที่กำหนดให้

   (a) บริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 1 - \cos\theta$

   (b) บริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 1 + \cos\theta$

   (c) บริเวณซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = \sin 4\theta$

   (d) บริเวณซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 1 และถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง $r = 1$ และ เส้นโค้ง $r = \sin 2\theta$ โดยพิจารณามุมในช่วง $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

   (e) บริเวณซึ่งอยู่**ภายในวงกลม**ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ 3 และอยู่เหนือเส้นตรง $y = 1$

   (f) บริเวณซึ่งอยู่**ภายนอกวงกลม**ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 2)$ และมีรัศมีเท่ากับ 2 และอยู่**ภายในวงกลม**ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ 3

บทที่ 4
ปริพันธ์สามชั้น

จากเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าปริพันธ์สองชั้น ซึ่งเป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่งนิยามเหนือบริเวณปิด R บนระนาบ xy ในพิกัดฉาก (หรือการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(r,\theta)$ เหนือบริเวณปิด R บนระนาบ xy ในพิกัดเชิงขั้ว) เราสามารถขยายแนวความคิดไปสู่การหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ ในพิกัดฉาก บนทรงตัน G ซึ่งมีขอบเขตจำกัดได้ เราใช้สัญลักษณ์

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\; dV$$

แทนการหาค่าปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนทรงตัน G สำหรับการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดฉาก dV อาจจะเป็น $dx\ dy\ dz$, $dx\ dz\ dy$, $dy\ dx\ dz$, $dy\ dz\ dx$, $dz\ dx\ dy$ หรือ $dz\ dy\ dx$

4.1 คุณสมบัติของการหาค่าปริพันธ์สามชั้น

คุณสมบัติหลักที่ปรากฏอยู่ในการหาค่าปริพันธ์หนึ่งชั้นและการหาค่าปริพันธ์สองชั้น ก็ยังคงอยู่ในการหาค่าปริพันธ์สามชั้น นั่นคือ

1. คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น

    - ค่าปริพันธ์ของค่าคงที่ k คูณกับฟังก์ชัน มีค่าเท่ากับค่าคงที่ k คูณกับค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\iiint\limits_G kf(x,y,z)\; dV = k\iiint\limits_G f(x,y,z)\; dV$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

- ค่าปริพันธ์ของผลบวก (และผลต่าง) ของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลบวก (และผลต่าง) ของค่าปริพันธ์ของแต่ละฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_G [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\ dV \\ = \ &\iiint\limits_G f(x,y,z)\ dV \pm \iiint\limits_G g(x,y,z)\ dV\end{aligned}$$

เราอาจจะเขียนรวมคุณสมบัติทั้งสองได้เป็น

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_G [c_1 f(x,y,z) \pm c_2 g(x,y,z)]\ dV \\ = \ &c_1\iiint\limits_G f(x,y,z)\ dV \pm c_2\iiint\limits_G g(x,y,z)\ dV\end{aligned}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์บนทรงตัน G จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\ dV \geq 0,$$

เมื่อ $f(x,y,z) \geq 0$ บน G

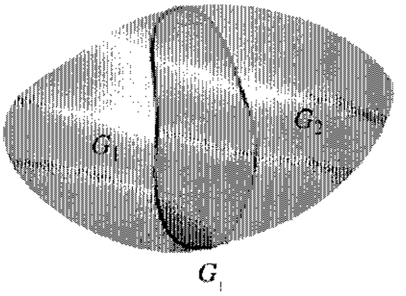
3. ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับฟังก์ชัน $g(x,y,z)$ บนทรงตัน G แล้ว ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนทรงตัน G จะมีค่ามากกว่าค่าปริพันธ์ของ $g(x,y,z)$ บนทรงตัน G

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\ dV \geq \iiint\limits_G g(x,y,z)\ dG$$

เมื่อ $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ บนทรงตัน G

4. ถ้าทรงตัน G ถูกแบ่งเป็นสองส่วน G_1 และ G_2, ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนทรงตัน G จะมีค่าเท่ากับผลรวมของค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนทรงตัน G_1 กับค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนทรงตัน G_2 เมื่อทรงตัน G เท่ากับผลรวมของทรงตัน G_1 และ G_2

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)\ dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\ dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\ dV,$$



รูปที่ 4.1: รูปทรงตัน G เมื่อถูกพิจารณาเป็นสองส่วนได้แก่ ส่วน G_1 และส่วน G_2

4.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าปริพันธ์สามชั้น

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ การหาค่าปริพันธ์สามชั้น ทฤษฎีบทดังกล่าว จะเป็นทฤษฎีบทที่คล้ายคลึงกับทฤษฎีบทซึ่งได้กล่าวมาแล้วในการหาค่าปริพันธ์สองชั้น และในที่นี่จะกล่าวถึงทฤษฎีบท โดยไม่แสดงการพิสูจน์

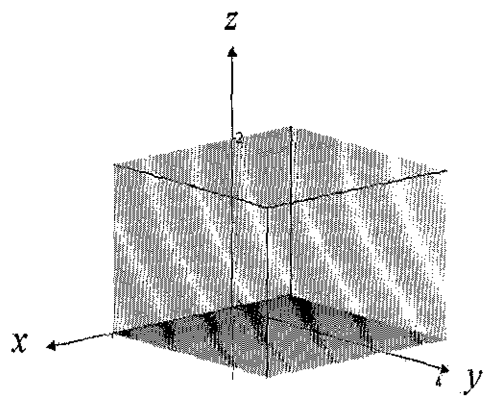
ทฤษฎีบท 4.1 (ทฤษฎีบทการหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนลูกบาศก์). *ถ้า G เป็นลูกบาศก์ ซึ่งนิยามโดย $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ และ $k \le z \le l$ โดยมีฟังก์ชันฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ ต่อเนื่องบนทรงตัน G แล้ว*

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{G} f(x,y,z)\ dV &= \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_c^d \int_a^b \int_k^l f(x,y,z)\ dz\ dx\ dy \\
&= \int_a^b \int_k^l \int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dz\ dx \\
&= \int_k^l \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dx\ dz \\
&= \int_c^d \int_k^l \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dz\ dy \\
&= \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1. จงหาค่าปริพันธ์สามชั้นของ

$$\iiint_G 12xy^2z^3\ dV$$

เมื่อ G นิยามโดย $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ และ $0 \leq z \leq 2$



รูปที่ 4.2: รูปทรงตันประกอบตัวอย่าง 4.1

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x,y,z) = 12xy^2z^3$ มีความต่อเนื่องบนลูกบาศก์ G โดยทฤษฎีบท 4.1 (หน้า 67) เราสามารถเลือกรูปแบบการหาค่าปริพันธ์สามชั้นใด หนึ่งในหกรูปแบบดังกล่าวก็ได้ ซึ่งจะให้ผลลัพท์การหาค่าปริพันธ์ที่เหมือนกัน

ในที่นี่จะขอเลือกแสดงการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในสองรูปแบบ ได้แก่

$$\iiint_G 12xy^2z^3\ dV = \int_0^2 \int_0^3 \int_{-1}^2 12xy^2z^3\ dx\ dy\ dz$$

เราเริ่มต้นหาค่าปริพันธ์ด้วยการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และพิจารณาตัวแปร y และ z ให้เสมือนเป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 12xy^2z^3\ dx &= 12y^2z^3 \int_{-1}^2 x\ dx \\ &= 6y^2z^3x^2\Big|_{x=-1}^{x=2} \\ &= 18y^2z^3 \end{aligned}$$

สังเกตว่าภายหลังจากการหาปริพันธ์ย่อยในขั้นตอนนี้ จะไม่ปรากฏตัวแปร x อีก

ต่อมา หาค่าปริพันธ์ด้วยการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y และจะพิจารณาตัวแปร z ให้เสมือนเป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}\int_0^3 18y^2z^3\ dy &= 18z^3\int_0^3 y^2\ dy\\ &= 6z^3y^3\Big|_{y=0}^{y=3}\\ &= 162z^3\end{aligned}$$

และขั้นตอนนี้จะไม่ปรากฏตัวแปร x และตัวแปร y และเราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned}\iiint_G 12xy^2z^3\ dV &= \int_0^2 162z^3\ dz\\ &= 162\int_0^2 z^3\ dz\\ &= \frac{81}{2}z^4\Big|_{z=0}^{z=2}\\ &= 648\end{aligned}$$

เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับการหาปริพันธ์สามชั้นในรูปแบบ

$$\iiint_G 12xy^2z^3\ dV = \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^2 12xy^2z^3\ dz\ dx\ dy$$

เราเริ่มต้นหาค่าปริพันธ์ด้วยการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร z และพิจารณาตัวแปร x และ y ให้เสมือนเป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}\int_0^2 12xy^2z^3\ dz &= 12xy^2\int_0^2 z^3\ dz\\ &= 3xy^2z^4\Big|_{z=0}^{z=2}\\ &= 48xy^2\end{aligned}$$

สังเกตว่าภายหลังจากการหาปริพันธ์ย่อยในขั้นตอนนี้ จะไม่ปรากฏตัวแปร z อีก

ต่อมา หาค่าปริพันธ์ด้วยการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x และจะพิจารณาตัวแปร y ให้

เสมือนเป็นค่าคงตัว

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} 48xy^2\, dx &= 48y^2 \int_{-1}^{2} x\, dx \\
&= 24y^2x^2 \Big|_{x=-1}^{x=2} \\
&= 72y^2
\end{aligned}
$$

และขั้นตอนนี้จะไม่ปรากฏตัวแปร x และตัวแปร z และเราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$
\begin{aligned}
\iiint_G 12xy^2z^3\, dV &= \int_0^3 72y^2\, dy \\
&= 72 \int_0^2 y^2\, dy \\
&= 24y^3 \Big|_{y=0}^{y=3} \\
&= 648
\end{aligned}
$$

ซึ่งทั้งสองวิธีให้ค่าปริพันธ์ที่เท่ากัน

4.3 การหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนทรงตัน

ในทำนองเดียวกับการหาค่าปริพันธ์สองชั้น เราสามารถขยายแนวความคิด จากการหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนลูกบาศก์ ไปสู่การหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันซึ่งมีรูปทรงใดๆ ได้

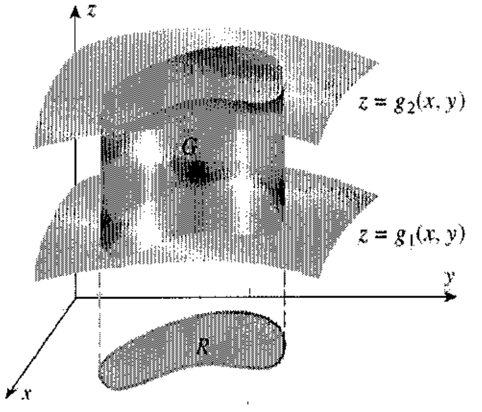
ในเนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไป จะพิจารณาการหาค่าปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

บทนิยาม 4.1 (*ทรงตันอย่างง่าย*). ให้ R เป็นบริเวณเปิดในระนาบ xy และให้ $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่ง

$$g_1(x,y) \le g_2(x,y),$$

สำหรับทุกๆ $(x,y) \in R$ ถ้าเราพิจารณาในเชิงเรขาคณิตพบว่า พื้นที่ผิว $z = g_2(x,y)$ จะเป็นพื้นที่ผิวที่อยู่เหนือพื้นที่ผิว $z = g_1(x,y)$ เราเรียก พื้นที่ผิว $z = g_2(x,y)$ ว่า*พื้นที่ผิวบน* (upper surface) และเรียก พื้นที่ผิว $z = g_1(x,y)$ ว่า*พื้นที่ผิวล่าง* (lower surface)

เราเรียกทรงตัน G ซึ่งบรรจุจุดต่างๆซึ่งอยู่*เหนือ หรือ ใต้ พื้นที่* R *โดยอยู่ระหว่างพื้นที่ผิว* $z = g_1(x,y)$ *และ* $z = g_2(x,y)$ ว่า*ทรงตันอย่างง่าย* (simple solid) และ เรียกบริเวณ R ว่า *ภาพฉายของ* G *บนระนาบ* xy (projection of G on the xy-plane)



รูปที่ 4.3: ภาพทรงตันอย่างง่าย, บริเวณปิด R และ พื้นที่ผิว $z = g_1(x,y)$ ซึ่งอยู่เหนือพื้นที่ผิว $z = g_2(x,y)$

เพื่อความสะดวก เราจะเรียก “*ทรงตันอย่างง่าย*” ว่า “*ทรงตัน*”

ทฤษฎีบท 4.2. *ให้* G *เป็นทรงตันซึ่งมีพื้นที่ผิวบน* $z = g_2(x,y)$ *และ พื้นที่ผิวล่าง* $z = g_1(x,y)$ *และให้* R *แทนพื้นที่ภาพฉายของทรงจัน* G *บนระนาบ* xy

ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ *ต่อเนื่องบนทรงตัน* G *แล้ว*

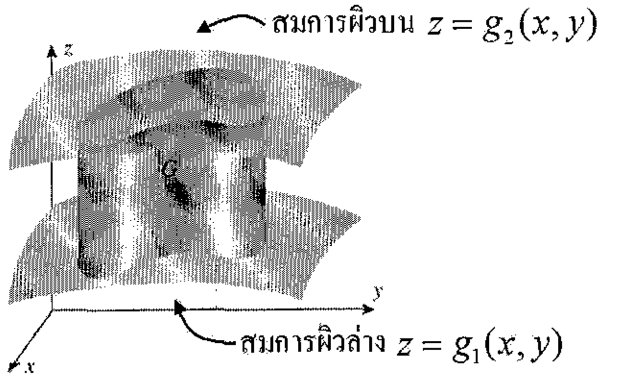
$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right]\ dA \tag{4.1}$$

สังเกตว่า ในการหาค่าปริพันธ์ (4.1) เราจะเริ่มทำการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร z ก่อน ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของตัวแปร x และ y จากนั้นจากหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับตัวแปร x และ y (หรือตัวแปร y และ x) บนบริเวณ R ในระนาบ xy โดยวิธีการหาค่าปริพันธ์สองชั้น นั่นแสดงให้เห็นว่า *การหาค่าปริพันธ์สามชั้นเป็นการขยายแนวความคิดของการหาค่าปริพันธ์สองชั้น* ซึ่งเราจะนำรูปแบบ การขยายแนวคิดจากการหาปริพันธ์ไปสู่การหาปริพันธ์สองชั้น และการขยายแนวคิดจากการหาปริพันธ์สองชั้นไปสู่การหาปริพันธ์สามชั้นดังกล่าว ขยายไปสู่*การหาค่าปรพันธ์* n *ชั้น* ได้ในอนาคต

เช่นเดียวกับการหาค่าปริพันธ์สองชั้น การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 4.2 จำเป็นจะต้องพิจารณาจากภาพของทรงตัน G ก่อน เพื่อที่จะสามารถใส่ค่าลิมิตของการหาค่าปริพันธ์ได้อย่างถูกต้อง

ขั้นตอนการหาค่าปริพันธ์สามชั้น

1. หาสมการของพื้นที่ผิวล่าง $z = g_1(x,y)$ และ พื้นที่ผิวบน $z = g_2(x,y)$ ของทรงตัน G ฟังก์ชัน $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ จะเป็นค่าลิมิตล่างและบนของการหาค่าปริพันธ์



รูปที่ 4.4: ภาพการพิจารณาสมการผิวบนและล่างของทรงตันอย่างง่าย

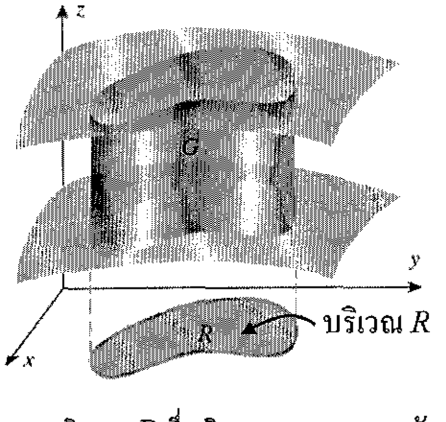
2. หาค่าปริพันธ์ย่อย

$$\tilde{f}(x,y) = \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz$$

ค่าปริพันธ์ที่ได้ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y (ไม่ปรากฏตัวแปร z อีก)

3. พิจารณาบริเวณ R ซึ่งเกิดจากการฉายภาพทรงตัน G ลงบนระนาบ xy และทำการหาค่า**ปริพันธ์สองชั้น** ของฟังก์ชัน $\tilde{f}(x,y)$ บนบริเวณ R

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\ dV = \iint\limits_R \tilde{f}(x,y)\ dA = \iint\limits_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right]\ dA$$

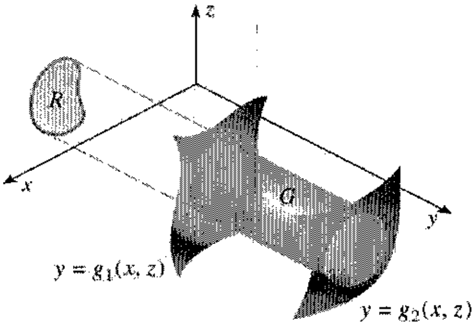


รูปที่ 4.5: ภาพการพิจารณาบริเวณ R ซึ่งเกิดจากภาพฉายทรงตัน G ลงบนระนาบ xy

หมายเหตุ ในบางครั้งการหาค่าปริพันธ์ย่อยในแนวแกน x หรือ y ก่อน อาจจะทำให้สามารถหาค่าปริพันธ์ได้ง่ายกว่า ซึ่งเราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้ดังนี้

- ถ้าทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้วยพื้นที่ผิว $y = g_1(x,z)$ และ $y = g_2(x,z)$ โดยที่ $g_1(x,z) \leq g_2(x,z)$ สำหรับทุกๆ (x,z) ที่อยู่ในบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ xz เราได้ว่า

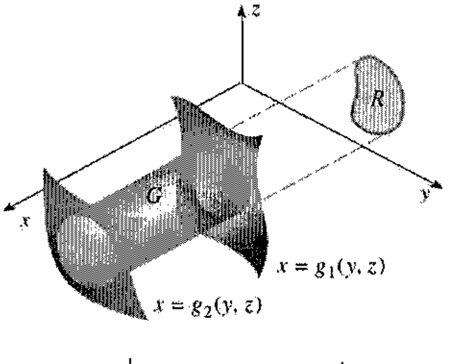
$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA$$



รูปที่ 4.6: รูปทรงตันอย่างง่ายเมื่อต้องการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ก่อน

- ถ้าทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้วยพื้นที่ผิว $x = g_1(y,z)$ และ $x = g_2(y,z)$ โดยที่ $g_1(y,z) \leq g_2(y,z)$ สำหรับทุกๆ (y,z) ที่อยู่ในบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ yz เราได้ว่า

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA$$



รูปที่ 4.7: รูปทรงตันอย่างง่ายเมื่อต้องการหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x ก่อน

ตัวอย่าง 4.2. จงหาค่าปริพันธ์สามชั้นของ

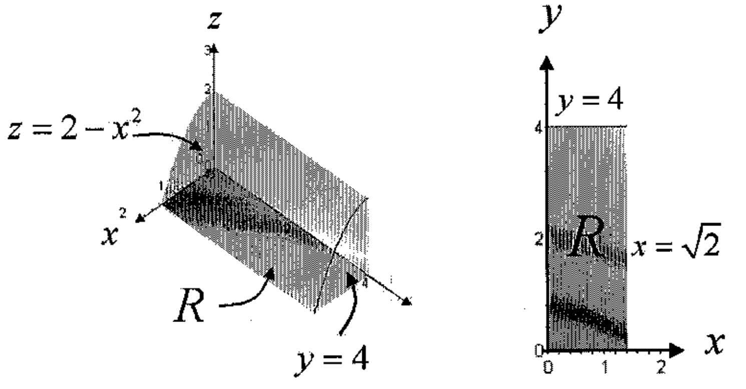
$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+x^2}\, dx\, dy\, dz$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+x^2}\, dx\, dy\, dz &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \left[\int_0^{\tan y} \frac{1}{1+x^2}\, dx\right] dy\, dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \left[\tan^{-1} x\right] \Big|_{x=0}^{x=\tan y} dy\, dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \left[\tan^{-1}(\tan y) - \tan^{-1} 0\right] dy\, dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} y\, dy\, dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{y=\sqrt{1+z^2}} dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\left[(\sqrt{1+z^2})^2 - (-\sqrt{1-z^2})^2\right] dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\left[1+z^2-(1-z^2)\right] dz \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} z^2\, dz \\
&= \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{z=\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3. จงหาค่าปริพันธ์สามชั้นของ $\iiint\limits_G xyz\ dV$ เมื่อ G คือทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ และ $z + x^2 = 2$

วิธีทำ เริ่มต้นพิจารณาทรงตัน G และบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ xy จาก



รูปที่ 4.8: ทรงตันรูปลิ่มประกอบตัวอย่าง 4.3

รูป 4.8 ทำให้เราทราบว่าสมการผิวบนคือ $z = 2 - x^2$ และ สมการผิวล่างคือ $z = 0$ ดังนั้น

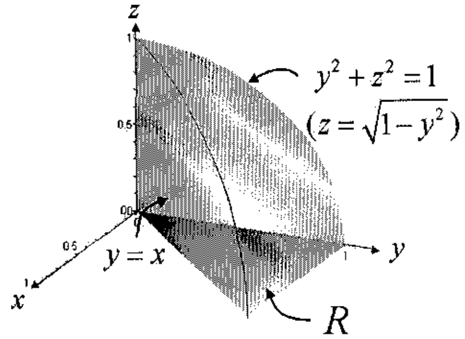
$$\iiint\limits_G xyz\ dV = \iint\limits_R \left[\int_0^{2-x^2} xyz\ dz\right]\ dA$$

และเมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่า $0 \le x \le \sqrt{2}$ และ $0 \le y \le 4$ ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่าปริพันธ์สามชั้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_G xyz\ dV &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^4\int_0^{2-x^2} xyz\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^4 xy\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2-x^2} dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^4 \frac{y\,(4x-4x^3+x^5)}{2}\ dy\ dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{(4x-4x^3+x^5)}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=4} dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(16x-16x^3+4x^5\right)\ dx \\
&= \left[8x^2-4x^4+4\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{2}} \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.4. พิจารณาทรงตันรูปลิ่ม ซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง ถูกปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$ และระนาบ $y = x$ และ $x = 0$ จงหาค่า

$$\iiint\limits_{\text{ทรงตันรูปลิ่ม}} z \, dV \tag{4.2}$$



รูปที่ 4.9: ทรงตันรูปลิ่มประกอบตัวอย่าง 4.4

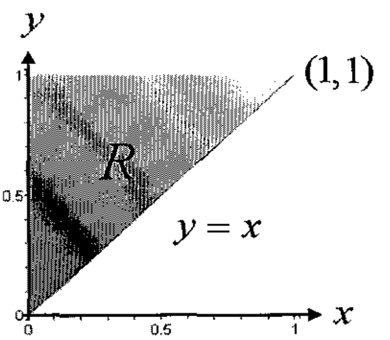
วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ จะแสดงการหาค่าปริพันธ์ (4.2) โดยวิธีสองวิธี

- พิจารณาหาค่าปริพันธ์ (4.2) โดยหาค่าปริพันธ์ย่อยในแนวแกน z แล้วหาค่าปริพันธ์บนบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตันรูปลิ่มบนระนาบ xy

  จากภาพ (4.9) พบว่าพื้นที่ผิวบนคือ $y^2 + z^2 = 1$ และพื้นที่ผิวล่าง คือ ระนาบ xy ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการพื้นที่ผิวบนได้ใหม่เป็น $z = \sqrt{1 - y^2}$ และ สมการพื้นที่ผิวล่างคือ $z = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\iiint\limits_{\text{ทรงตันรูปลิ่ม}} z \, dV = \iint\limits_{R} \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z \, dz \right] \, dA$$

  เมื่อพิจารณาภาพฉายของทรงตันดังกล่าวบนระนาบ xy จะได้บริเวณ R เป็นไปตามรูป 4.10



รูปที่ 4.10: รูปบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตันรูปลิ่มบนระนาบ xy

ในการหาค่าปริพันธ์บนบริเวณ R ในที่นี้ จะขอเลือกหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ก่อน ทำให้ได้ค่าปริพันธ์คือ

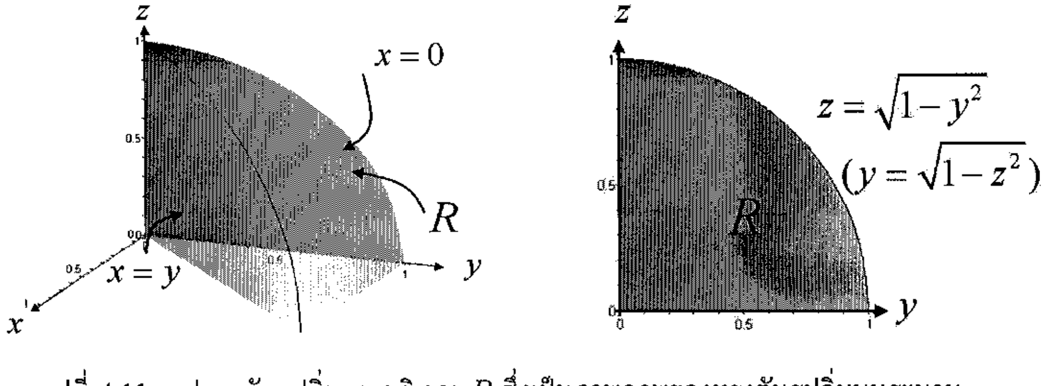
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\text{ทรงตันรูปลิ่ม}} z\, dV &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-y^2}} dy\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_x^1 \left(1-y^2\right)\, dy\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

- พิจารณาหาค่าปริพันธ์ (4.2) โดยหาค่าปริพันธ์ย่อยในแนวแกน x แล้วหาค่าปริพันธ์บนบริเวณ R ในระนาบ yz

  จากภาพ (4.9) พบว่าทรงตัน G ถูกปิดกั้นโดยพื้นที่ผิว $x = 0$ และ $x = y$ ในแนวแกน x ดังนั้น เราจะหาค่าปริพันธ์ได้จาก

$$\iiint\limits_{\text{ทรงตันรูปลิ่ม}} z\, dV = \iint\limits_{R} \left[\int_0^y z\, dx\right] dA$$

  เมื่อพิจารณาภาพฉายของ G บนระนาบ xy จะได้บริเวณ R เป็นไปตามรูป 4.11



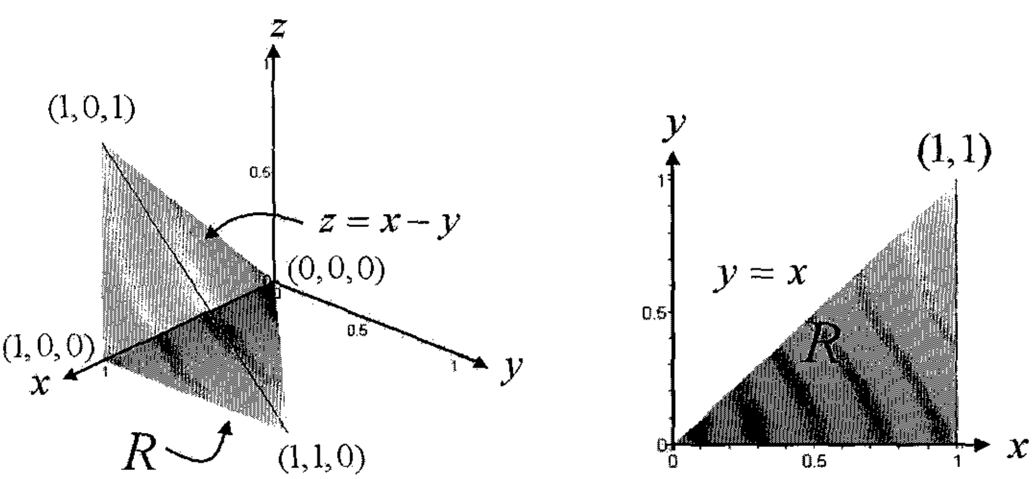
รูปที่ 4.11: รูปทรงตันรูปลิ่มและบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตันรูปลิ่มบนระนาบ yz

ในการหาค่าปริพันธ์บนบริเวณ R ในที่นี้ จะขอเลือกหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ก่อน ทำให้ได้ค่าปริพันธ์คือ

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\text{ทรงตันรูปลิ่ม}} z\,dV &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{y} z\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} zx\Big|_{x=0}^{x=y} dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} yz\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 z\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-z^2}} dz \\ &= \int_0^1 \frac{z-z^3}{2}\,dz \\ &= \left[\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{8}\right]_{z=0}^{z=1} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.5. จงหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y,z) = xyz$ บนทรงตันรูปทรงสี่หน้า (tetrahedal) ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ และ $(1,0,1)$

วิธีทำ ให้ G แทนทรงตันรูปทรงสี่หน้า ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ และ $(1,0,1)$



รูปที่ 4.12: รูปทรงตัน G และพื้นที่ภาพฉาย R บนระนาบ xy ประกอบตัวอย่าง 4.5

จากรูปพบว่าทรงตัน G มีพื้นที่ผิวปิดบนคือ $z = x - y$ และมีพื้นที่ผิวปิดล่างคือ $z = 0$ ดังนั้น

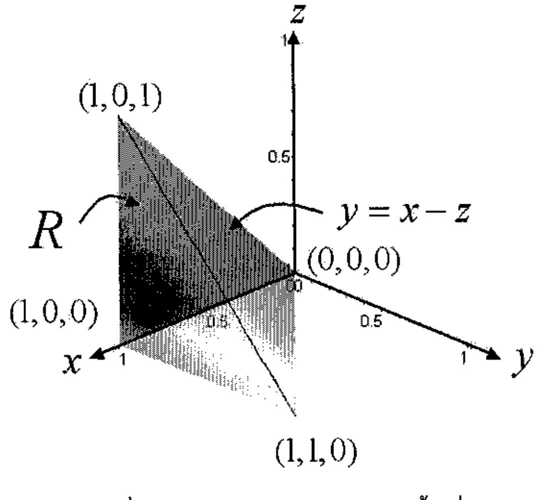
ค่าปริพันธ์คือ

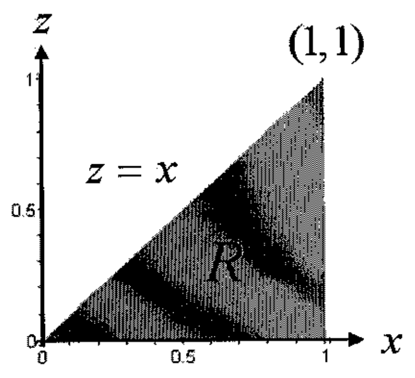
$$\iiint\limits_G xyz\ dV = \iint\limits_R \left[\int_0^{x-y} xyz\ dz\right]\ dA$$

เมื่อพิจารณาพื้นที่ภาพฉาพ R ทำให้เราสามารถหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_G xyz\ dV &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} xyz\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x xy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x-y}\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^x (x^3y - 2x^2y^2 + xy^3)\ dy\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^3\frac{y^2}{2} - 2x^2\frac{y^3}{3} + x\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=x}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^5}{12}\ dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x^5\ dx \\
&= \frac{1}{24}\left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{144}
\end{aligned}$$

หมายเหตุ เราสามารถพิจารณาหาค่าปริพันธ์สามชั้นในตัวอย่าง 4.5 โดยหาค่าปริพันธ์ย่อยในแนวแกน y ก่อน และหาค่าปริพันธ์ โดยพิจารณาภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ xz ก็ได้





รูปที่ 4.13: รูปทรงตัน G และพื้นที่ภาพฉาย R บนระนาบ xz ประกอบตัวอย่าง 4.5

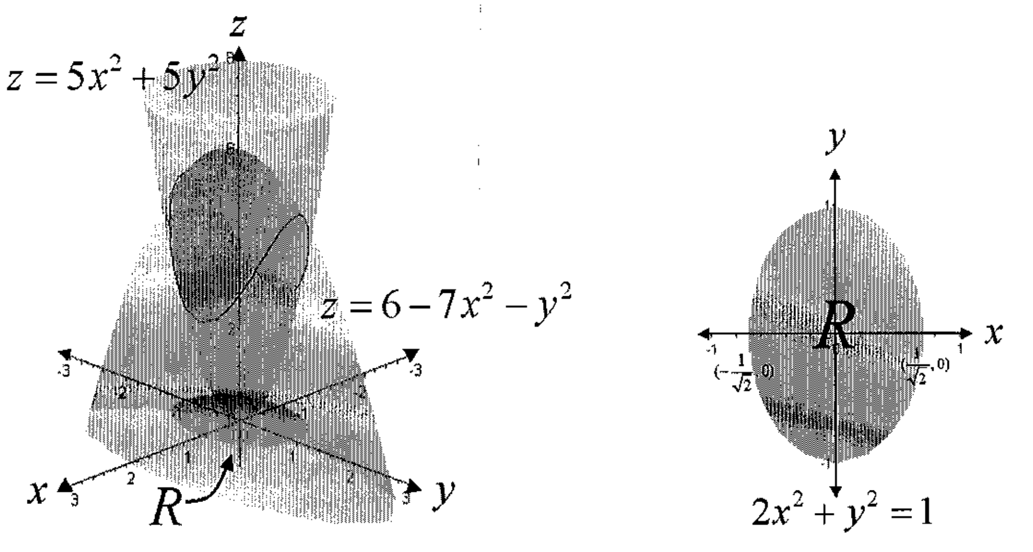
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_G xyz\ dV &= \iint\limits_R \left[\int_0^{x-z} xyz\ dy\right]\ dA \\
&= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-z} xyz\ dy\ dz\ dx
\end{aligned}$$

เราสามารถประยุกต์ใช้การหาค่าปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันที่ถูกล้อมรอบด้วยผิวบน $g_2(x,y)$ ผิวล่าง $g_1(x,y)$ และเป็นทรงตันเหนือบริเวณ R ได้โดย

$$\text{ปริมาตร} = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} 1\ dz\right]\ dA$$

ตัวอย่าง 4.6. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยรูปทรงพาราโบลา $z = 5x^2 + 5y^2$ และ $z = 6 - 7x^2 - y^2$

วิธีทำ ให้ G แทนทรงตันดังกล่าว



รูปที่ 4.14: รูปทรงตัน G และพื้นที่ภาพฉาย R บนระนาบ xy ประกอบตัวอย่าง 4.6

เราสามารถหาบริเวณ R ได้จากการแก้สมการของบริเวณที่รูปทรงพาราโบลาทั้งสองตัดกัน นั่นคือ

$$5x^2 + 5y^2 = 6 - 7x^2 - y^2$$

หรือก็คือ

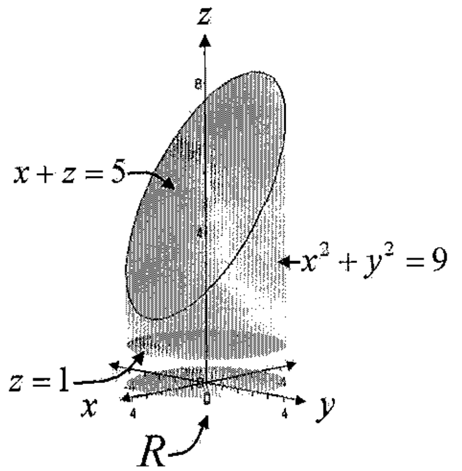
$$2x^2 + y^2 = 1 \tag{4.3}$$

ดังนั้น ภาพฉายลงบนระนาบ xy ก็เป็นวงรีซึ่งเป็นสมการเดียวกับสมการ (4.3) ซึ่งเป็นวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ ตัดแกน y ที่จุด $(0,1)$ และ $(0,-1)$ และตัดแกน x ที่จุด $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ และ $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ และสามารถหาปริมาตรของทรงตัน G ได้คือ

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{G} dV &= \iint\limits_{R} \left[\int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} 1\ dz\right]\ dA \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} \int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz\ dy\ dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} z\Big|_{z=5x^2+5y^2}^{z=6-7x^2-y^2}\ dy\ dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6-12x^2-6y^2)\ dy\ dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[(6-12x^2)y-2y^3\right]_{y=-\sqrt{1-2x^2}}^{y=\sqrt{1-2x^2}}\ dx \\
&= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} 8\left(1-2x^2\right)^{3/2}\ dx \\
&= \left[2x(1-2x^2)^{3/2}+3x\sqrt{1-2x^2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\sin^{-1}(\sqrt{2}x)\right]_{z=-1/\sqrt{2}}^{z=1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.7. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งปิดล้อมด้วย ทรงกระบอก $x^2+y^2=9$ และระนาบ $z=1$ และ $x+z=5$

วิธีทำ ให้ G แทนทรงตันดังกล่าว



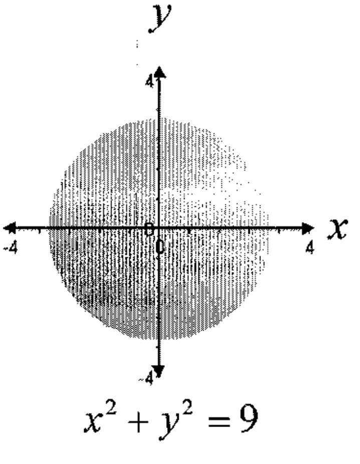
รูปที่ 4.15: รูปทรงตัน G ประกอบตัวอย่าง 4.7

เมื่อพิจารณารูปทรงตัน G พบว่าทรงตัน G ถูกปิดกันด้วย พื้นที่ผิวปิดบน $x+z=5$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบ $z=g_1(x,y)$ ได้เป็น $z=5-x$ และ พื้นที่ผิวปิดล่าง $z=1$ ดังนั้นเราสามารถหา

ค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\begin{aligned}\iiint_G dV &= \iint_R \left[\int_1^{5-x} 1\ dz\right]\ dA \\ &= \iint_R z\Big|_{z=1}^{z=5-x}\ dA = \iint_R (4-x)\ dA\end{aligned}$$

และพบว่าบริเวณ R คือ $x^2 + y^2 = 9$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ มีรัศมี 3 หน่วย



รูปที่ 4.16: พื้นที่ภาพฉาย R บนระนาบ xy ประกอบตัวอย่าง 4.7

ในการหาค่าปริพันธ์ จะเริ่มจากการหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ก่อน ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของทรงตัน } G &= \iint_R (4-x)\ dA \\ &= \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x)\ dy\ dx \\ &= \int_{-3}^{3} (4-x)y\Big|_{y=-\sqrt{9-x^2}}^{y=\sqrt{9-x^2}}\ dx \\ &= \int_{-3}^{3} 2(4-x)\sqrt{9-x^2}\ dx \\ &= \int_{-3}^{3} 8\sqrt{9-x^2}\ dx - \int_{-3}^{3} 2x\sqrt{9-x^2}\ dx \\ &= 4\left[9\sin^{-1}\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2}\right]_{x=-3}^{x=3} + \frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_{x=-3}^{x=3} \\ &= 36\pi + 0 = 36\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}\end{aligned}$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.7 พบว่าการหาค่าปริพันธ์ $\iint\limits_R (4-x)\ dA$ เป็นไปได้อย่างยุ่งยาก เพราะต้องใช้การแทนค่าตรีโกณมาช่วยในการหาค่าปริพันธ์ แต่เมื่อพิจารณาบริเวณ R พบว่าเป็นรูปวงกลมที่มีรัศมีเป็น 3 ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราอาจจะทำการหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้วแทน นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R (4-x)\ dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4-r\cos\theta)\ r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4r-r^2\cos\theta)\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_{r=0}^{r=3} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (18-9\cos\theta)\ d\theta \\
&= [18\theta-9\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= 36\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^2\int_0^1 x^2+y^2+z^2\ dx\ dy\ dz$

(b) $\displaystyle\int_{1/2}^{1/3}\int_0^{\pi}\int_0^1 zx\sin(xy)\ dz\ dy\ dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-5+x^2+y^2}^{3-x^2-y^2} x\ dz\ dy\ dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2\int_z^2\int_0^{\sqrt{3}y} \frac{y}{x^2+y^2}\ dx\ dy\ dz$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\ln y} e^z\ dz\ dy\ dx$

(f) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^x xy\ dy\ dx\ dz$

(g) $\displaystyle\int_1^3\int_x^{x^2}\int_0^{\ln z} xe^y\ dy\ dz\ dx$

(h) $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^{y^2}\int_{-1}^z yz\ dx\ dz\ dy$

(i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^2\ dy\ dz\ dx$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^{x^2} x\cos y\ dz\ dx\ dy$

2. จงหาค่าปริพันธ์บนทรงตัน G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (a) จงหาค่าปริพันธ์ $\iiint\limits_G xy \sin yz\, dV$ เมื่อ G เป็นลูกบาศก์ซึ่งถูกนิยามโดย $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/6$,

   (b) จงหาค่าปริพันธ์ $\iiint\limits_G y\, dV$ เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยระนาบ $x = y$, ระนาบ $y = 0$, ระนาบ xy และผิวโค้ง $z = 1 - x^2$

   (c) จงหาค่าปริพันธ์ $\iiint\limits_G x + y + z\, dV$ เมื่อ G เป็นทรงสี่หน้าซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ และ $(0,0,1)$

3. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนดให้

   (a) ทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง และถูกล้อมรอบด้วยระนาบ $3x + 6y + 4z = 12$

   (b) ทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง และถูกล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $y^2 + z^2 = 1$, ระนาบ $y = x$ และระนาบ $z = 0$

   (c) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $z = \sqrt{y}$, ระนาบ $x + y = 1$, ระนาบ $x = 0$ และระนาบ $z = 0$

   (d) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $z = 4x^2 + y^2$ และผิวโค้ง $z = 4 - 3y^2$

   (e) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $z = 3x^2 + y^2$ และผิวโค้ง $z = 8 - x^2 - y^2$

   (f) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $x^2 + 9y^2 = 9$ ระนาบ $z = 0$ และระนาบ $z = x + 3$

   (g) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ และทรงกระบอก $x^2 + z^2 = 1$

4.4 การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกระบอก

จากตัวอย่าง 4.7 เราพบว่า ในบางครั้ง เพื่อความสะดวกในการหาค่าปริพันธ์สามชั้น หลังจากหาค่าปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร z แล้ว เราอาจจะพิจารณาหาค่าปริพันธ์บนบริเวณ R ในระบบพิกัดเชิงขั้วแทน ดังนั้นเราสามารถขยายแนวความคิดในการหาค่าปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว และการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดฉาก เข้าสู่การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก

บทนิยาม 4.2 (พิกัดทรงกระบอก). พิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) คือ ระบบพิกัด ซึ่งระบุตำแหน่งต่างๆ ในรูปไตรอันดับ (r,θ,z) ซึ่งไตรอันดับนี้สามารถระบุตำแหน่งในสามมิติ โดย (r,θ) เป็นการบอกพิกัดในระนาบ xy ในระบบพิกัดเชิงขั้ว และถ้า $z \geq 0$ หมายถึงตำแหน่ง (r,θ,z) นี้อยู่สูงกว่าระนาบ xy เป็นระยะทาง z หน่วย และ ถ้า $z < 0$ หมายถึง ตำแหน่ง (r,θ,z) อยู่ต่ำกว่าระนาบ xy เป็นระยะ $-z$ หน่วย

ทฤษฎีบท 4.3 (ทฤษฎีบทการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก). *ให้ G เป็นทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นที่ผิวปิดบน $z = g_2(r,\theta)$ และ พื้นที่ผิวปิดล่าง $z = g_1(r,\theta)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก, R เป็นภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ xy*

ถ้า $f(r,\theta,z)$ ต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint\limits_G f(r,\theta,z)\ dV = \iint\limits_R \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\ dz\right] dA$$

เมื่อการหาค่าปริพันธ์สองชั้นบนพื้นที่ปิด R เป็นการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งเราอาจจะเขียนได้เป็น

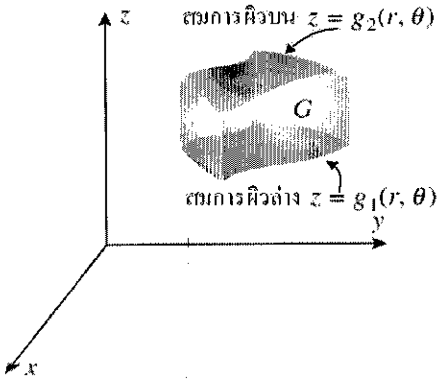
$$\iiint\limits_G f(r,\theta,z)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\ dz\right]\ r\ dr\ d\theta$$

หรือ

$$\iiint\limits_G f(r,\theta,z)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) r\ dz\ dr\ d\theta \qquad (4.4)$$

ขั้นตอนการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก

1. หาสมการของพื้นที่ผิวล่าง $z = g_1(r,\theta)$ และ พื้นที่ผิวบน $z = g_2(r,\theta)$ ของทรงตัน G ฟังก์ชัน $g_1(r,\theta)$ และ $g_2(r,\theta)$ จะเป็นค่าลิมิตล่างและบนของการหาค่าปริพันธ์



รูปที่ 4.17: ภาพการพิจารณาสมการผิวบนและสมการผิวล่างประกอบการหาปริพันธ์สามชั้น

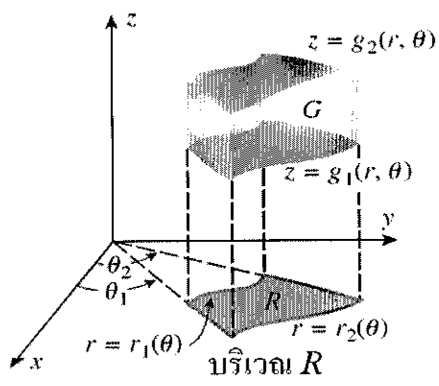
2. หาค่าปริพันธ์ย่อย

$$\tilde{f}(r,\theta) = \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\ dz$$

ค่าปริพันธ์ที่ได้ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ θ

3. พิจารณาบริเวณ R ซึ่งเกิดจากการฉายภาพทรงตัน G ลงบนระนาบ xy และทำการหาค่า**ปริพันธ์สองชั้น** ของฟังก์ชัน $\tilde{f}(r,\theta)$ บนบริเวณ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\iiint\limits_G f(r,\theta,z)\ dV = \iint\limits_R \tilde{f}(r,\theta)\ dA$$

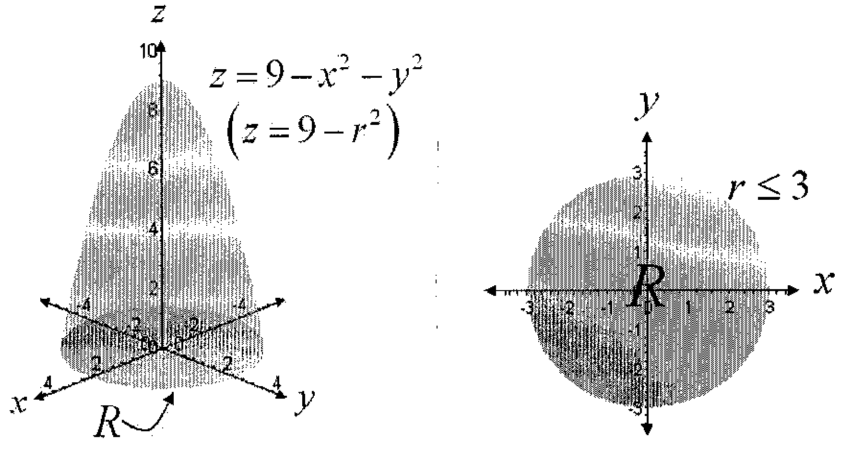


รูปที่ 4.18: ภาพการพิจารณาบริเวณ R ประกอบการหาปริพันธ์สามชั้น

ตัวอย่าง 4.8. จงหาค่าปริพันธ์ของ

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\;dz\;dy\;dx$$

วิธีทำ ให้ G แทนทรงตันในขอบเขตที่ต้องการหาค่าปริพันธ์ พบว่า G มีพื้นที่ผิวบนคือ $z = 9-x^2-y^2$ และ พื้นที่ผิวล่าง $z = 0$ และมีบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉายของทรงตัน G ลงบนระนาบ xy คือ $x^2 + y^2 \leq 9$



รูปที่ 4.19: รูปทรงตัน G และบริเวณ R ประกอบตัวอย่าง 4.8

เมื่อพิจารณาในพิกัดทรงกระบอกได้ว่า พื้นที่ผิวปิดบนคือ $z = 9 - r^2$ พื้นที่ผิวปิดล่างคือ $z = 0$ และ R เป็นไปตามเงื่อนไข $0 \leq r \leq 3$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ดังนั้น ค่าปริพันธ์คือ

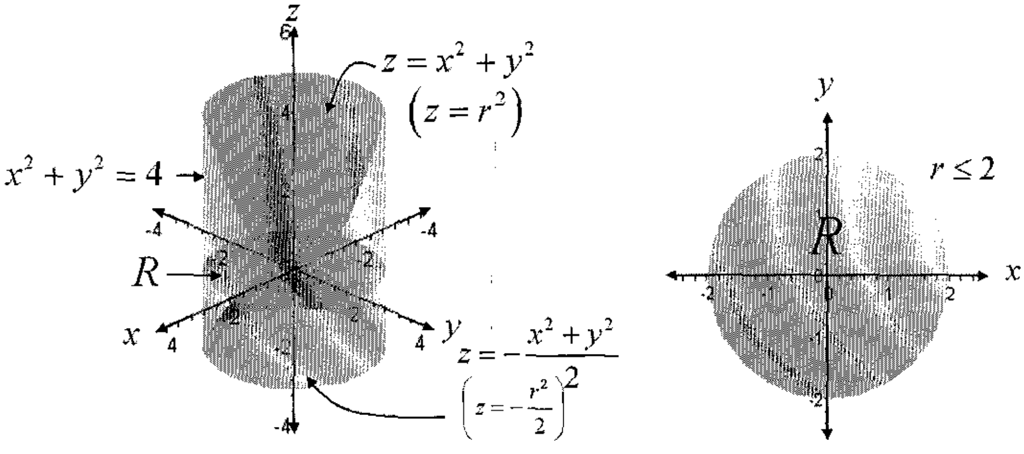
$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\;dz\;dy\;dx &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} (r\cos\theta)^2\; r\;dz\;dr\;d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^3\cos^2\theta\;dz\;dr\;d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\cos^2\theta\; z\Big|_{z=0}^{z=9-r^2}\;dr\;d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9r^3 - r^5)\cos^2\theta\;dr\;d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\cos^2\theta\right]_{r=0}^{r=3} d\theta \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\;d\theta \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\;d\theta \\
&= \frac{243}{8}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{243\pi}{4}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.9. จงหาค่าปริพันธ์ของ

$$\iiint_G z\ dV$$

เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=4$ โดยมีพื้นที่ผิวบนเป็น $z=x^2+y^2$ และมีพื้นที่ผิวล่างเป็น $z=\dfrac{-(x^2+y^2)}{2}$

วิธีทำ ให้ G แทนทรงตันในขอบเขตที่ต้องการหาค่าปริพันธ์



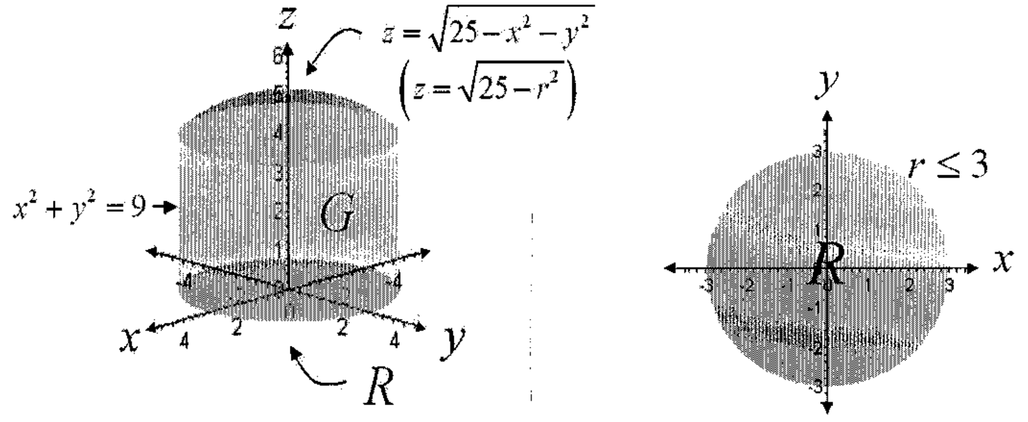
รูปที่ 4.20: รูปทรงตัน G และบริเวณ R ประกอบตัวอย่าง 4.9

เมื่อพิจารณาในพิกัดทรงกระบอกได้ว่า พื้นที่ผิวปิดบนคือ $z=r^2$ พื้นที่ผิวปิดล่างคือ $z=\dfrac{-r^2}{2}$ และบริเวณ R เป็นไปตามเงื่อนไข $0\le r\le 2$ และ $0\le\theta\le 2\pi$ ดังนั้น ค่าปริพันธ์คือ

$$\begin{aligned}
\iiint_G z\ dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\frac{r^2}{2}}^{r^2} zr\ dz\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\frac{z^2}{2}\Big|_{z=-\frac{r^2}{2}}^{z=r^2} dr\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r}{2}\left[\left(r^2\right)^2-\left(\frac{r^2}{2}\right)^2\right] dr\ d\theta \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^5\ dr\ d\theta \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{r^6}{6}\Big|_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(2^6-0^6\right)\ d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} d\theta = 4\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 8\pi
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.10. จงใช้การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก หาปริมาตรของทรงตัน G ซึ่งปิดล้อมด้วย ผิวปิดบน $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ผิวปิดล่างคือระนาบ xy และผิวข้างเป็นทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$

วิธีทำ เมื่อพิจารณาทรงตัน G และ พื้นที่ภาพฉาย R



รูปที่ 4.21: รูปทรงตัน G และบริเวณ R ประกอบตัวอย่าง 4.10

พบว่า สมการของผิวปิดบนและผิวปิดล่างในระบบพิกัดทรงกระบอกก็คือ $z = \sqrt{25 - r^2}$ และ $z = 0$ ตามลำดับ และพบว่าบริเวณ R ซึ่งเป็นภาพฉาพของทรงตัน G ลงบนระนาบ xy ในระบบพิกัดเชิงขั้วคือ $0 \le r \le 3$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงตัน G คือ

$$\begin{aligned}
V = \iiint_G f(r,\theta,z)\; dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{\sqrt{25-r^2}} 1\; r\; dz\; dr\; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 rz\Big|_{z=0}^{z=\sqrt{25-r^2}} dr\; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{25-r^2}\; dr\; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=3} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{61}{3}\; d\theta \\
&= \frac{61}{3}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{122}{3}\pi \text{ ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\ dz\ dr\ d\theta$ (c) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^e\int_0^{\sec\theta} \frac{z}{r}\ dz\ dr\ d\theta$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{r^2} r\sin(\theta)\ dz\ dr\ d\theta$ (d) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r} \cos(\theta)\ dz\ dr\ d$

2. จงหาค่าปริพันธ์บนทรงตัน G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(a) จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\iiint_G x^2\ dV$ เมื่อ G เป็นทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่ง และมีผิวบนคือ $z = 9 - x^2 - y^2$

(b) จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\iiint_G z^2\ dV$ เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งมีผิวบนเป็นไปตามสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ และผิวล่าง $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dV$ เมื่อ G เป็นทรงกลมที่มีรัศมี 3 หน่วย

3. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนดให้

(a) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $z = 4x^2 + y^2$ และระนาบ $z = 9$

(b) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ และอยู่ภายนอกทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

(c) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $r^2 + z^2 = 20$ และพื้นผิว $z = r^2$

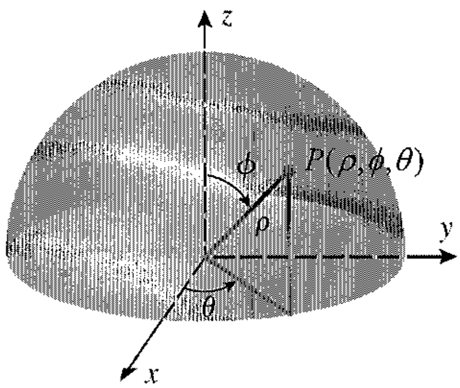
(d) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยกรวย $z = \dfrac{h}{a}r$ และระนาบ $z = h$ เมื่อ $h > 0$ และ $a > 0$

(e) ทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4x$ และมีผิวบนเป็นไปตามสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

4.5 การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม

4.5.1 พิกัดทรงกลม

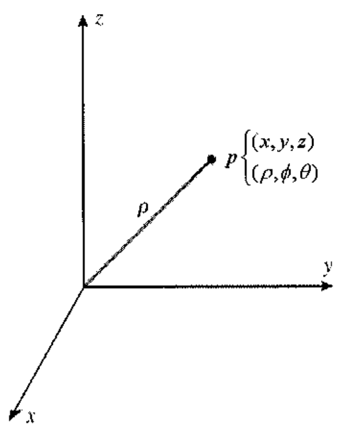
พิกัดทรงกลม (spherical coordinates) เป็นอีกรูปแบบหนึ่งในการระบุตำแหน่งในสามมิติ นอกเหนือจากการพิกัดฉาก และพิกัดทรงกระบอก[1]



รูปที่ 4.22: พิกัดทรงกลม

บทนิยาม 4.3 (พิกัดทรงกลม). พิกัดทรงกลม (spherical coordinate) คือ ระบบพิกัด ซึ่งระบุตำแหน่งต่างๆ ในรูปไตรอันดับ (ρ, ϕ, θ) ซึ่งไตรอันดับนี้สามารถระบุตำแหน่งในสามมิติ โดย

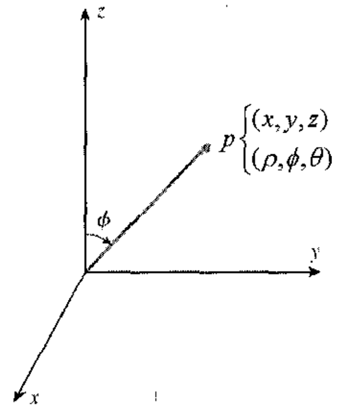
- ρ เป็นระยะจากจุดกำเนิด (0,0,0) ไปยังจุดที่ระบุ โดย $\rho \geq 0$



รูปที่ 4.23: ภาพแสดงการความสัมพันธ์ระหว่างค่า ρ และจุดในพิกัดทรงกลม

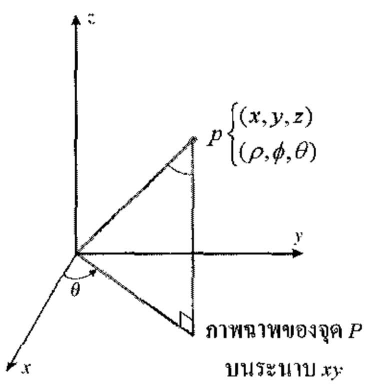
[1]ดูเรื่องพิกัดทรงกระบอกหน้า 85

- ϕ เป็นมุมระหว่างแกน z และเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดที่ระบุ โดย $0 \leq \phi \leq \pi$



รูปที่ 4.24: ภาพแสดงการความสัมพันธ์ระหว่างค่า ρ และจุดในพิกัดทรงกลม

- θ เป็นมุมระหว่างแกน x และเวกเตอร์ที่มีทิศทางจากจุดกำเนิดไปยัง ภาพฉายของจุดที่ระบุบนระนาบ xy โดย $0 \leq \theta \leq 2\pi$



รูปที่ 4.25: ภาพแสดงการความสัมพันธ์ระหว่างค่า θ และจุดในพิกัดทรงกลม

หมายเหตุ ในเอกสารบางฉบับอาจจะระบุไตรอันดับในพิกัดทรงกลมแตกต่างจากที่ให้บทนิยามเอาไว้ นั่นคือ อาจจะระบุไตรอันดับในพิกัดทรงกลมเป็น (ρ, θ, ϕ) โดยนิยาม ρ, θ และ ϕ เป็นไปตามที่ได้กล่าวไว้ในบทนิยามพิกัดทรงกลม 4.3

จากบทนิยามพิกัดทรงกลม ทำให้เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างไตรอันดับ (x, y, z) ในพิกัดฉากและไตรอันดับ (ρ, ϕ, θ) ในพิกัดทรงกลมดังนี้

การแปลงพิกัด	ความสัมพันธ์
$(\rho, \phi, \theta) \longrightarrow (x, y, z)$	$x = \rho \sin\phi \cos\theta$, $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$
$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \phi, \theta)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

ตารางที่ 4.1: ตารางความสัมพันธ์ระหว่างจุดในพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม

ตัวอย่าง 4.11. พบว่าพิกัด $(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ในระบบพิกัดทรงกลม (ρ, ϕ, θ) มีพิกัด $(\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{2})$ ในระบบพิกัดฉาก (x, y, z) ซึ่งคำนวณดังนี้

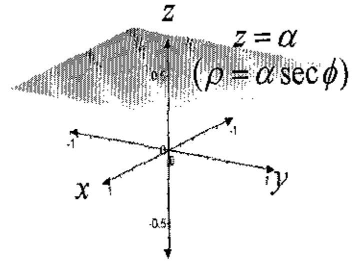
$$\begin{aligned}
x &= \rho\sin\phi\cos\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{2} \\
y &= \rho\sin\phi\sin\theta = 4\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{6} \\
z &= \rho\cos\phi = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&= \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4 \\
\phi &= \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2}}\right) = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \\
\theta &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \\
&= \tan^{-1}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

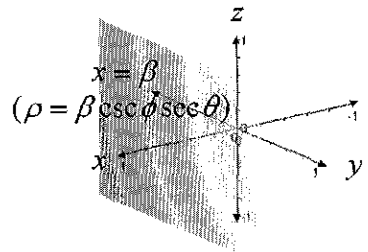
ตัวอย่าง 4.12. ตัวอย่างสมการในพิกัดฉากและพิกัดทรงกลมที่สมมูลกัน

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$z = \alpha$	$\rho = \alpha \sec\phi$



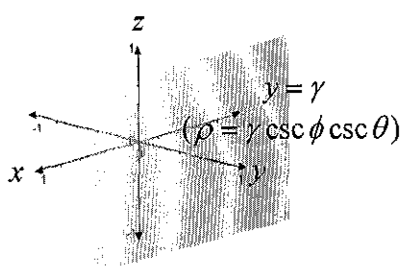
รูปที่ 4.26: สมการระนาบ $z = \alpha$

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$x = \beta$	$\rho = \beta \csc\phi \sec\theta$



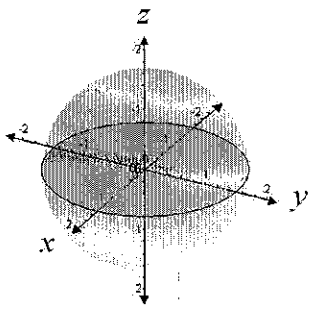
รูปที่ 4.27: สมการระนาบ $x = \beta$

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$y = \gamma$	$\rho = \gamma \csc\phi \csc\theta$



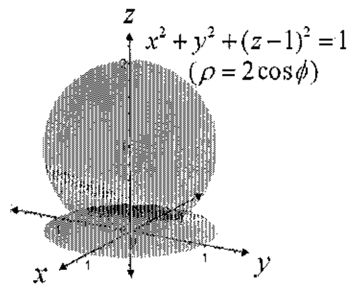
รูปที่ 4.28: สมการระนาบ $y = \gamma$

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	$\rho = R$



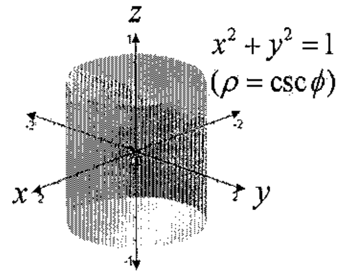
รูปที่ 4.29: สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0,0)$ และมีรัศมี R

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$	$\rho = 2\cos\phi$



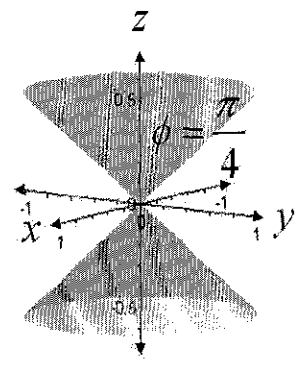
รูปที่ 4.30: สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0,1)$ และมีรัศมี 1

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$x^2 + y^2 = 1$	$\rho = \csc\phi$



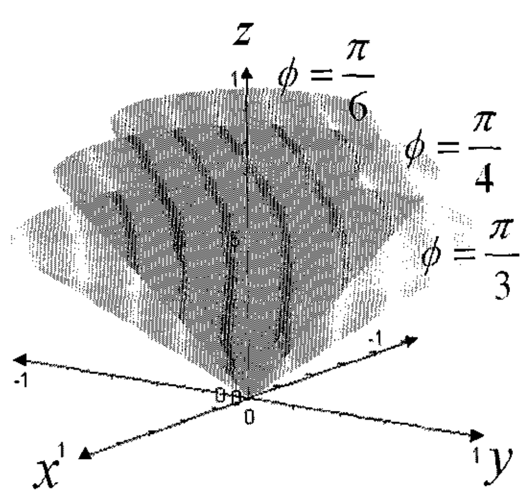
รูปที่ 4.31: สมการทรงกระบอกที่มีรัศมีเท่ากับ 1

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$z^2 = x^2 + y^2$	$\phi = \dfrac{\pi}{4}$



รูปที่ 4.32: สมการกรวยซึ่งมีมุม ϕ เท่ากับ $\dfrac{\pi}{4}$

สมการในพิกัดฉาก	สมการในพิกัดทรงกลม
$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$	$\phi = \dfrac{\pi}{6}$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\phi = \dfrac{\pi}{4}$
$z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$	$\phi = \dfrac{\pi}{3}$
	เมื่อ $\rho \geq 0$



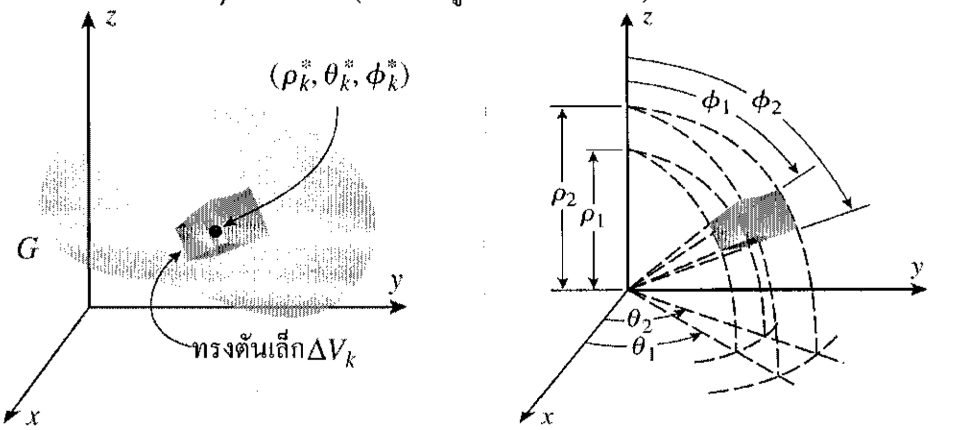
รูปที่ 4.33: สมการกรวยซึ่งมีมุม ϕ เท่ากับ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$ และ $\dfrac{\pi}{3}$ เมื่อ $\rho \geq 0$

4.5.2 การหาค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม

เราสามารถนิยามค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลมได้โดย

$$\iiint_G f(\rho,\phi,\theta)\ dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*,\phi_k^*,\theta_k^*)\Delta V_k, \tag{4.5}$$

เมื่อ $(\rho_k^*,\phi_k^*,\theta_k^*)$ คือพิกัดซึ่งอยู่ภายในทรงตันเล็ก ΔV_k และ ΔV_k คือทรงตันเล็กลูกที่ k เมื่อแบ่งทรงตัน G ออกเป็นทรงตันเล็กๆ n จำนวน (พิจารณารูป 4.34 ประกอบ)



รูปที่ 4.34: การแบ่งทรงตันออกเป็นส่วนๆ ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ถ้าพิจารณาว่าทรงตันเล็ก ΔV_k มีความเล็กมาก จนสามารถสมมติทรงตันดังกล่าวเป็นลูกบาศก์และมีขอบเป็นเส้นตรง จะได้ว่าแต่ละทรงตัน ΔV_k มีความยาวด้านคือ $\Delta\rho_k$, $\rho_k^*\Delta\phi_k$ และ $\rho_k^*\sin\phi_k^*\Delta\theta_k$ หรือก็คือ

$$\Delta V_k = (\Delta\rho_k)(\rho_k^*\Delta\phi_k)(\rho_k^*\sin\phi_k^*\Delta\theta_k) = {\rho_k^*}^2\sin\phi_k^*\Delta\rho_k\Delta\phi_k\Delta\theta_k$$

และสามารถเขียนสมการ (4.5) ใหม่ได้เป็น

$$\iiint_G f(\rho,\phi,\theta)\ dV = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\rho_k^*,\phi_k^*,\theta_k^*){\rho_k^*}^2\sin\phi_k^*\Delta\rho_k\Delta\phi_k\Delta\theta_k,$$

ดังนั้นเราจะมีรูปแบบการหาค่าปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม ดังนี้

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\ dV = \iiint_G f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

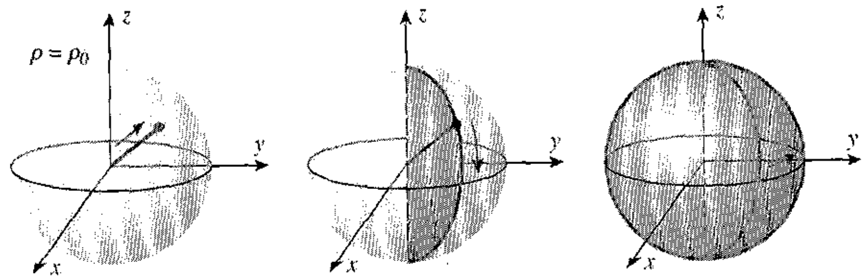
และโดยทั่วไปในการหาค่าปริพันธ์สามชั้น เรามักจะพิจารณาปริพันธ์เป็น

$$\iiint_G f(\rho,\theta,\phi)\ dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)}\int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \tag{4.6}$$

รูปแบบที่มักพบในการปริพันธ์สามชั้นในพิกัดทรงกลม

- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\rho_0} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

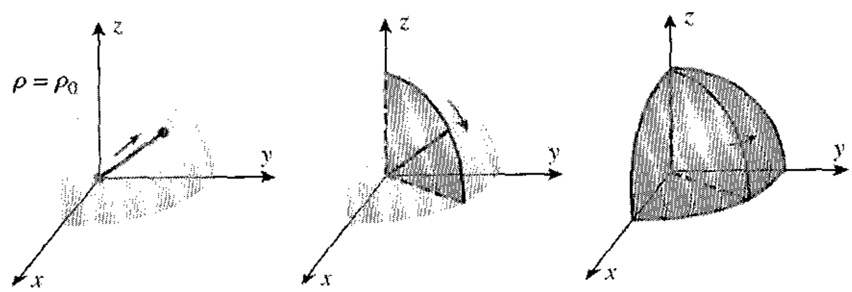
  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนทรงกลมที่มีรัศมี ρ_0



รูปที่ 4.35: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนทรงกลมรัศมี ρ_0

- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho_0} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

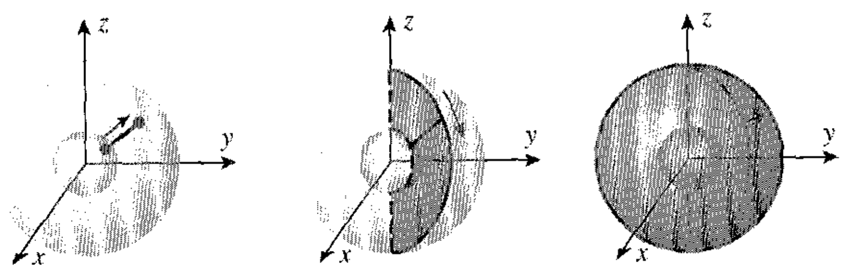
  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนส่วนของทรงกลมรัศมี ρ_0 ซึ่งอยู่อัฐภาคที่ 1



รูปที่ 4.36: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนส่วนของทรงกลมรัศมี ρ_0 ซึ่งอยู่อัฐภาคที่ 1

- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

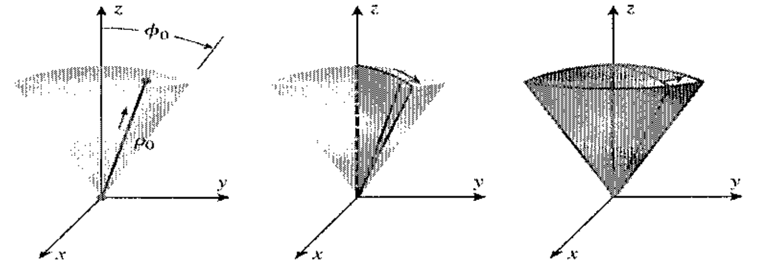
  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนทรงกลมรัศมี ρ_2 ซึ่งกลวงตรงกลาง



รูปที่ 4.37: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนทรงกลมซึ่งกลวงตรงกลาง

- $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

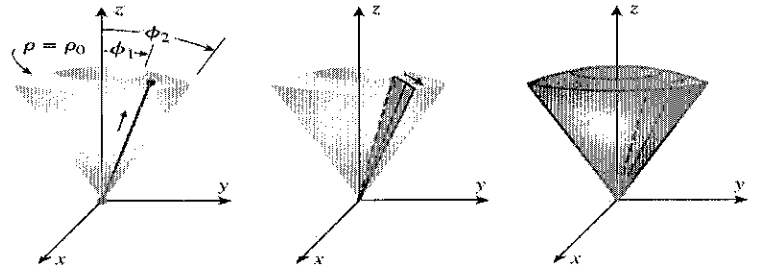
  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนกรวยที่เป็นส่วนหนึ่งของทรงกลมรัศมี ρ_0 ซึ่งเอียงจากแกน z เป็นมุม ϕ_0 เรเดียน



รูปที่ 4.38: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนกรวย

- $$\int_0^{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_0^{\rho_0} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

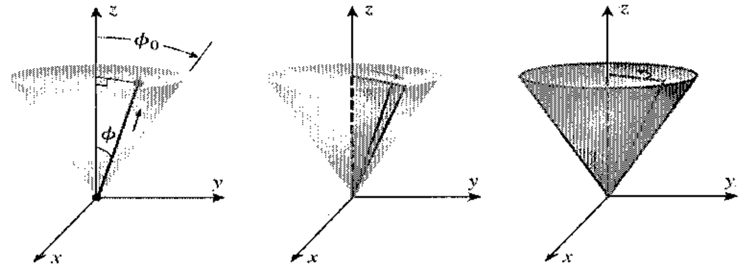
  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนกรวยที่เป็นส่วนหนึ่งของทรงกลมรัศมี ρ_0 ซึ่งเอียงจากแกน z เป็นมุม ϕ_2 เรเดียนและตรงกลางกลวงเป็นรูปกรวยซึ่งเอียงเป็นมุม ϕ_1



รูปที่ 4.39: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนกรวย

- $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi_0}\int_0^{a\sec\phi} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

  เป็นการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,\theta)$ บนกรวยซึ่งเอียงจากแกน z เป็นมุม ϕ_0 ด้านบนเรียบเป็นไปตามระนาบ $z = a$



รูปที่ 4.40: รูปการหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมบนกรวยซึ่งด้านบนเรียบ

ตัวอย่าง 4.13. จงหาค่าปริพันธ์ของ

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \qquad \text{เมื่อ } a>0$$

วิธีทำ เราสามารถใช้แนวคิดในการหาปริพันธ์ย่อยทีละส่วนหาค่าปริพันธ์ได้คือ

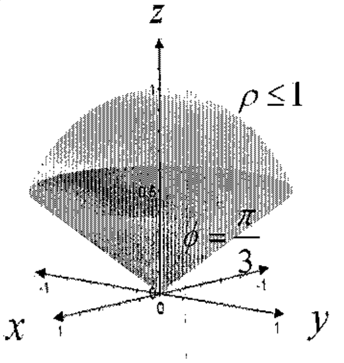
$$\begin{aligned}
\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho &= \sin\phi\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\ d\rho\\
&= \sin\phi\frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=a\sec\phi}\\
&= \frac{\sin\phi}{3}\left[(a\sec\phi)^3-0^3\right]\\
&= \frac{a^3}{3}\sin\phi\sec^3\phi\\
\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi &= \int_0^{\pi/4}\left[\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho\right]\ d\phi\\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{a^3}{3}\sin\phi\sec^3\phi\ d\phi\\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\ d\phi\\
&= \frac{a^3}{3}\left[\frac{1}{2\cos^2\phi}\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/4}\\
&= \frac{a^3}{6}\left[\frac{1}{(1/\sqrt{2})^2}-\frac{1}{1^2}\right]=\frac{a^3}{6}\\
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi/4}\int_0^{a\sec\phi}\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\right]\ d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{6}\ d\theta\\
&= \frac{a^3}{6}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\\
&= \frac{a^3\pi}{3}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.14. จงหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมของ

$$\iiint_G \rho \, dV$$

เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้านบนด้วยทรงกลม $\rho \leq 1$ ถูกปิดล้อมด้านล่างด้วยกรวย $\phi = \dfrac{\pi}{3}$

วิธีทำ พิจารณารูปทรงของทรงตัน G



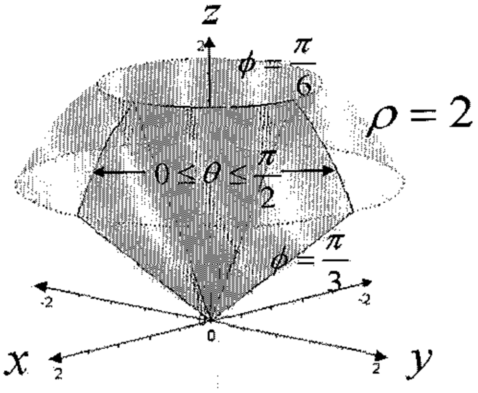
รูปที่ 4.41: รูปทรงตัน G ประกอบตัวอย่าง 4.14

เราสามารถหาค่าปริพันธ์ในพิกัดทรงกลมได้คือ

$$\begin{aligned}
\iiint_G \rho \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho \, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin\phi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin\phi}{4} \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/3} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[(-\cos\frac{\pi}{3}) - (-\cos 0)\right] \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1)\right] \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \, d\theta \\
&= \frac{1}{8}\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.15. จงหาปริมาตรของทรงตัน ซึ่งอยู่ใน**อัฐภาคที่หนึ่ง** และถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $\rho = 2$, $\phi = \frac{\pi}{6}$ และ $\phi = \frac{\pi}{3}$

วิธีทำ พิจารณารูปทรงของทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวดังกล่าว



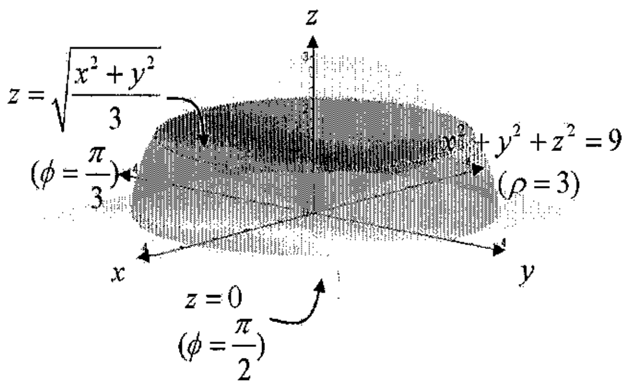
รูปที่ 4.42: รูปทรงตัน G ประกอบตัวอย่าง 4.15

เราสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้คือ

$$
\begin{aligned}
\text{ปริมาตร} &= \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_0^2 1\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8}{3}\sin\phi\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\left[-\cos\phi\right]_{\phi=\pi/6}^{\phi=\pi/3}\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\left[(-\cos\frac{\pi}{3}) - (-\cos\frac{\pi}{6})\right]\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{8\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}\ d\theta \\
&= \frac{8\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\
&= \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)\pi}{3}\ \text{ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.16. จงหาปริมาตรซึ่งถูกปิดล้อมด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ มีผิวบนคือ $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ และมีผิวล่างเป็นระนาบ xy

วิธีทำ พิจารณารูปทรงของทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวดังกล่าว



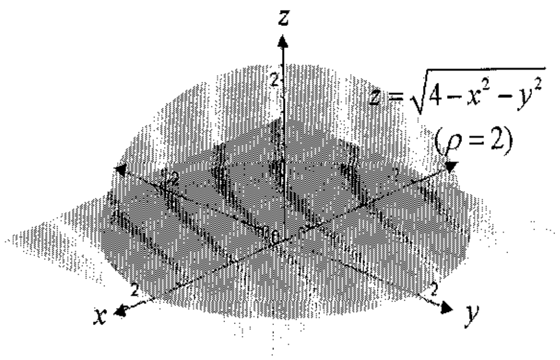
รูปที่ 4.43: รูปทรงตัน G ประกอบตัวอย่าง 4.16

พบว่าทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ซึ่งเป็นทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 3 สามารถถูกเขียนในพิกัดทรงกลมได้เป็น $\rho = 3$ สำหรับสมการ $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ และระนาบ xy มีสมการในพิกัดทรงกลมคือ $\phi = \dfrac{\pi}{3}$ และ $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ เมื่อ $\rho \geq 0$ ตามลำดับ และเราสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้คือ

$$\begin{aligned}
\text{ปริมาตร} &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^3 1\ \rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=3} d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 9\sin\phi\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 9\left[-\cos\phi\right]_{\phi=\pi/3}^{\phi=\pi/2}\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 9\left[(-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos\frac{\pi}{3})\right]\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}\ d\theta \\
&= \frac{9}{2}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
&= 9\pi\ \text{ลูกบาศก์หน่วย}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.17. จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dz\;dy\;dx$

วิธีทำ พิจารณาขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์



รูปที่ 4.44: รูปขอบเขตของการหาค่าปริพันธ์ประกอบตัวอย่าง 4.17

พบว่าขอบเขตดังกล่าวเป็นครึ่งบนของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0,0)$ รัศมีเท่ากับ 2 และเพื่อความสะดวกในการหาค่าปริพันธ์ จะทำการหาค่าในพิกัดทรงกลมแทน

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;dz\;dy\;dx\\
=\;&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left((\rho\cos\phi)^2\rho\right)\;\rho^2\sin\phi\;d\rho\;d\phi\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^5\cos^2\phi\sin\phi\;d\rho\;d\phi\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2\phi\sin\phi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=2}\;d\phi\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{32}{3}\cos^2\phi\sin\phi\;d\phi\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}\frac{32}{3}\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}-\frac{32}{9}\left[\cos^3\pi/2-\cos^3 0\right]\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}-\frac{32}{9}\left[0^3-1^3\right]\;d\theta\\
=\;&\int_0^{2\pi}\frac{32}{9}\;d\theta\\
=\;&\frac{32}{9}\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=\frac{64}{9}\pi
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^3 \sin\phi\cos\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\int_0^a \rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

   (c) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^1 5\rho^3 \sin^3\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

   (d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^2 3\rho^2 \sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$

2. จงหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\iiint_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$ เมื่อ G เป็นทรงกลมที่มีรัศมี 3 หน่วย แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับแบบฝึกหัดข้อ 2c หน้า 90

3. จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิวที่กำหนดให้

   (a) ทรงตันซึ่งอยู่ภายนอกผิวโค้ง $\rho = 1 + \cos\phi$ และอยู่ภายในวงกลม $\rho = 2$

   (b) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ และอยู่ภายนอกทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

   (เปรียบเทียบปริมาตรที่ได้กับแบบฝึกหัดข้อ 3b หน้า 90)

   (c) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยผิวโค้ง $r^2 + z^2 = 20$ และพื้นผิว $z = r^2$

   (เปรียบเทียบปริมาตรที่ได้กับแบบฝึกหัดข้อ 3c หน้า 90)

   (d) ทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยกรวย $z = \dfrac{h}{a}r$ และระนาบ $z = h$ เมื่อ $h > 0$ และ $a > 0$

   (เปรียบเทียบปริมาตรที่ได้กับแบบฝึกหัดข้อ 3d หน้า 90)

   (e) ทรงตันซึ่งอยู่ในอัฐภาคที่หนึ่ง อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4x$ และมีผิวบนเป็นไปตามสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

   (เปรียบเทียบปริมาตรที่ได้กับแบบฝึกหัดข้อ 3e หน้า 90)

บรรณานุกรม

[1] Anton, H., Bivens, I., Davis, S. (2002). **Calculus.** (7th ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[2] JOC/EFR (1997). **Biography of Guido Fubini** [On-line]. Available: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Fubini.html, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland

[3] Rogers, L. C. G., Williams, D. (2000). **Diffusions, Markov Process and Martingales. Vol.1&2** (2nd ed.) UK: Cambridge University Press

ดรรชนี

เอกสารประกอบการเรียนการสอน

แคลคูลัส 3
(ส่วนที่สอง)

สมการเชิงอนุพันธ์

ดร.เจษฎา ตัณฑนุช
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นส่วนสำคัญของปัญหาทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์ แพทยศาสตร์ และสาขาอื่นๆ อีกมากมาย เนื่องด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้เป็นจำนวนมาก สำหรับการศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ในเบื้องต้น จะเริ่มต้นด้วย การศึกษา บทนิยาม การจำแนกประเภท และ ผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 บทนิยามและการจำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.1 (สมการเชิงอนุพันธ์). *สมการเชิงอนุพันธ์* (differential equation) คือ สมการซึ่งมีพจน์ของ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หนึ่งตัวหรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หลายตัว

ตัวอย่าง 1.1.

$$\frac{dy}{dx}+y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx}+y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x}+\frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y'''+xy'+x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2u_{ss} \tag{1.8}$$

จากตัวอย่างข้างต้นพบว่า y เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า ของตัวแปร x, u เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปร s และ t และ w เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปร x_1, x_2 และ x_3 ในที่นี้เราเรียกตัวแปร u, w และ y ว่า *ตัวแปรไม่อิสระ* (dependent variable) และเรียกตัวแปร x, s, t, x_1, x_2 และ x_3 ว่า *ตัวแปรอิสระ* (independent variable)

สำหรับสมการ (1.1)-(1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* (ordinary differential equation, ODE) และ สมการ (1.6)-(1.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย* (partial differential equation, PDE)

เราสามารถแยกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองแบบ ตามอันดับของอนุพันธ์สูงสุดที่ปรากฏในสมการ

บทนิยาม 1.2 (อันดับของสมการ). *อันดับ* (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง *อันดับสูงสุด*ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

จากตัวอย่าง 1.1

- สมการ (1.1)-(1.3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.6) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.4) และ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองและสาม ตามลำดับ
- และ สมการ (1.7) และ (1.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

นอกจากนี้ ในทำนองเดียวกับการศึกษาเรื่องเส้น และ ระนาบ ในเรขาคณิต เราสามารถแบ่ง สมการเชิงอนุพันธ์สามัญตามลักษณะความเป็น*เชิงเส้น*ได้

บทนิยาม 1.3 (สมการเชิงเส้น). เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_n(x)$ ไม่เท่ากับศูนย์สำหรับทุกๆ ค่า x ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ* n (linear ordinary differential equation of order n) และเรียก สมการเชิงอนุพันธ์ ที่ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปนี้ได้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น* (nonlinear ordinary differential equation)

จากตัวอย่าง 1.1

- สมการ (1.1) และ (1.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสาม
- แต่ สมการ (1.3) และ (1.4) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

และเรายังสามารถแบ่งแยก สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น ได้ตามคุณสมบัติของ*สัมประสิทธิ์*ของตัวแปร และ อนุพันธ์ ที่ปรากฏในสมการเชิงเส้นได้เป็น *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว* (constant coefficient linear ordinary differential equation) และ *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร* (variable coefficient linear ordinary differential equation)

จากตัวอย่าง 1.1 สมการ (1.1) และ (1.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ สมการ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

แบบฝึกหัด

จงระบุว่าสมการข้างล่างต่อไปนี้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์*สามัญ* หรือ สมการเชิงอนุพันธ์*ย่อย* พร้อมทั้งระบุ *อันดับ*ของสมการ และ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ให้ระบุด้วยว่าเป็น *สมการเชิงเส้น* หรือ *สมการไม่เชิงเส้น*

1. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3. $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 3\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$
4. $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2 r}{ds^2} + 1}$
5. $u_t = (c(x)u_x)_x$
6. $3y'' + 4y' + 9y = 2\cos(3x)$
7. $\dfrac{d^6 z}{dt^6} + \left(\dfrac{d^4 z}{dt^4}\right)\left(\dfrac{d^3 z}{dt^3}\right) + z = t$
8. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y\sin(x) = 0$
9. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$
10. $y^{(4)} + y'' + 5y = e^{5x}$

1.2 การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์

อย่างที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่าสมการเชิงอนุพันธ์มีส่วนสำคัญในการอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติมากมาย ตัวอย่างปัญหาทางธรรมชาติที่สามารถถูกอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ อาทิเช่น

- ปัญหาการเคลื่อนที่วัตถุที่ตกลงอย่างอิสระลงสู่พื้นโลก ปัญหาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ (projectile) การเคลื่อนที่ของดวงดาวในระบบสุริยจักรวาล
- ปัญหาการหาค่าประจุ และ กระแสในวงจรไฟฟ้า
- ปัญหาการหาค่าความร้อนของวัตถุ
- ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำ คลื่นอากาศ คลื่นกระแทก (shock wave) คลื่นแผ่นดินไหว (seismic wave)
- ปัญหาการสั่นของเส้นเชือก สายกีตาร์ การสั่นของสะพาน
- ปัญหาการเติบโต-ลดลง ของประชากร ปัญหาความสมดุลของประชากร
- ปัญหาเรื่องการศึกษาปฏิกิริยาฟิสิกส์ เคมี
- ปัญหาการความชันของเส้นโค้ง

ก่อนจะกล่าวเพิ่มเติมในเรื่องนี้ จะขอกล่าวถึง *อนุพันธ์* (derivative) ก่อน จากในวิชา *แคลคูลัส* (calculus) เราทราบแล้วว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปร และสำหรับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติโดยส่วนมาก ก็จะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่ง หรือ หลายปริมาณ เทียบกับปริมาณอื่นๆ ในการสร้างสูตรทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายปัญหาข้างต้นได้ ก็จะต้องเกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติหลายๆอย่าง ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติดังกล่าว สามารถอธิบายได้โดยอนุพันธ์แบบต่างๆ และ โดยกฎทางวิทยาศาสตร์ เราจะนำอนุพันธ์เหล่านั้นมาอธิบายปัญหาในรูปแบบของ สมการเชิงคณิตศาสตร์ที่มีพจน์ของอนุพันธ์เข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งนั้นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ นั่นเอง

หลายๆ คนอาจจะมีคำถามว่า แล้วเราจะได้ประโยชน์อะไร หลังจากที่เราสามารถตั้ง สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ธรรมชาติต่างๆ แล้ว คำตอบก็คือ ถ้าเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ "*ผล*

เฉลย" ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ก็จะสามารถถูกนำไปใช้ในการ อธิบาย และ ทำนาย ปรากฏการณ์ธรรมชาตินั้นได้

สำหรับเนื้อหาที่จะกล่าวต่อไปภายหลังจากนี้ จะเกี่ยวข้องกับ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อความสะดวก ถ้ากล่าวถึง "*สมการเชิงอนุพันธ์*" จะหมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ยกเว้นว่าเนื้อหาในส่วนนั้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

1.3 ผลเฉลย

บทนิยาม 1.4 (ผลเฉลย). พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{d^n x}\right] = 0, \tag{1.9}$$

เมื่อ F เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งมีอาร์กิวเมนต์ (arguments) จำนวน $n+2$ อาร์กิวเมนต์ ได้แก่ $x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dots, \dfrac{d^n y}{d^n x}$

- ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งนิยามสำหรับทุกๆ x ซึ่งอยู่อยู่ในช่วง I และ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้ถึงอันดับที่ n สำหรับทุกๆ $x \in I$ ถ้าฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไขสองข้อ ต่อไปนี้

  1. ฟังก์ชัน

     $$F\left[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right]$$

     ถูกนิยาม สำหรับทุกๆ $x \in I$, และ

  2. เมื่อแทนค่า y ด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และแทนค่าอนุพันธ์ของ y ด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีอันดับสมนัยกันตามลำดับ ลงในสมการ (1.9) แล้วทำให้ F มีค่าเป็นศูนย์ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ใน I นั่นคือ

     $$F\left[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right] = 0$$

     สำหรับทุกๆ $x \in I$ (หรือเขียนอีกอย่างได้ว่า $F\left[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right] \equiv 0$)

  เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า *ผลเฉลยชัดแจ้ง* (explicit solution)

- พิจารณาความสัมพันธ์

  $$g(x,y)=0$$

  ถ้า ความสัมพันธ์นี้สามารถนิยามฟังก์ชัน $f(x)$ อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชัน (ซึ่งฟังก์ชัน f นี้ ต้องนิยามได้ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $x \in I$) และ ฟังก์ชัน $f(x)$ ดังกล่าวเป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.9) เราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า *ผลเฉลยโดยปริยาย* (implicit solution)

- เพื่อความสะดวก เราจะรวมเรียก *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ว่า *ผลเฉลย* (solution)

ตัวอย่าง 1.2. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{x^2}=0 \tag{1.10}$$

วิธีทำ เราพบว่า $\phi'(x)=2x+x^{-2}$ และ $\phi''(x)=2-2x^{-3}$ เมื่อ $x\neq 0$

เมื่อแทนค่า y ด้วย $\phi(x)$ และ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ด้วย $\phi''(x)$ ลงในสมการ (1.10) ได้ว่า

$$\left(2-2x^{-3}\right)-\frac{2}{x^2}\left(x^2-x^{-1}\right)=\left(2-2x^{-3}\right)-\left(2-2x^{-3}\right)\equiv 0$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุกๆ ค่า $x\neq 0$ หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่า

ฟังก์ชัน $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.10) บนช่วง $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

ตัวอย่าง 1.3. จงแสดงว่าสำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใดๆ ฟังก์ชัน

$$\phi(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$$

เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y''-y'-2y=0 \tag{1.11}$$

วิธีทำ จากการคำนวณพบว่า $\phi'(x)=-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x}$ และ $\phi''(x)=c_1e^{-x}+4c_2e^{2x}$

เมื่อแทนค่า y, y', และ y'' ด้วย $\phi(x)$, $\phi'(x)$, และ $\phi''(x)$ ตามลำดับ ลงในสมการ (1.11) ได้ว่า

$$\begin{aligned}&(c_1e^{-x}+4c_2e^{2x})-(-c_1e^{-x}+2c_2e^{2x})-2\left(c_1e^{-x}+c_2e^{2x}\right)\\&=(c_1+c_1-2c_1)e^{-x}+(4c_2-2c_2-2c_2)e^{2x}\equiv 0\end{aligned}$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุกๆ ค่า x หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่า

ฟังก์ชัน $\phi(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.11) บนช่วง $(-\infty,\infty)$ สำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใดๆ

ตัวอย่าง 1.4. จงแสดงว่าความสัมพันธ์

$$y^2-x^3+8=0 \tag{1.12}$$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y} \tag{1.13}$$

บนช่วง $(2,\infty)$

วิธีทำ จากการคำนวณหาค่า y จากความสัมพันธ์ (1.12) พบว่า $y=\pm\sqrt{x^3-8}$
เลือก $\phi(x)=\sqrt{x^3-8}$ เมื่อหาค่าอนุพันธ์ของ ϕ จะได้ว่า $\dfrac{d\phi}{dx}=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}$ จะเห็นได้ว่า ทั้ง ϕ และ $\dfrac{d\phi}{dx}$ ต่างนิยามบนช่วง $(2,\infty)$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (1.13) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}=\frac{3x^2}{2\left(\sqrt{x^3-8}\right)}$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุกค่า $x\in(2,\infty)$ ตรงนี้แสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ (1.12) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.13) บนช่วง $(2,\infty)$

หมายเหตุ จากบทนิยามของฟังก์ชันโดยปริยาย ถ้าเราทราบว่า ฟังก์ชันหนึ่งฟังก์ชันใด ซึ่งถูกนิยามโดยความสัมพันธ์ (1.12) เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.13) เราก็สามารถสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ (1.12) เป็นผลเฉลยโดยปริยาย แต่ผู้อ่านอาจจะลองทดสอบว่า ฟังก์ชัน $\psi(x)=-\sqrt{x^3-8}$ ก็เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.13) ด้วยก็ได้

ตัวอย่าง 1.5. จงแสดงว่าความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1.14}$$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.15}$$

บนช่วง $I = (-5, 5)$

วิธีทำ จากการคำนวณหาค่า y จากความสัมพันธ์ (1.14) พบว่า $y = \sqrt{25 - x^2}$ และ $y = -\sqrt{25 - x^2}$ สำหรับทุก $x \in I$

เลือก $\phi(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ เมื่อหาค่าอนุพันธ์ของ ϕ จะได้ว่า $\phi'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{25 - x^2}}$ เมื่อ $x \in I$

เมื่อแทนค่า y ด้วย $\phi(x)$ และ $\dfrac{dy}{dx}$ ด้วย $\phi'(x)$ ลงในสมการ (1.15) ทำให้ได้ว่า

$$x + \left(-\sqrt{25 - x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = x - x = 0$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุกค่า $x \in I$ ตรงนี้แสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ (1.14) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.15) บนช่วง I

จากตัวอย่าง (1.5) พิจารณาความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = -25 \tag{1.16}$$

พบว่าเมื่อเราหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ (1.16) เทียบกับ x เราพบว่า

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

เมื่อหารสมการด้วย 2 ทั้งสองข้าง เราจะได้

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการ (1.15) นั่นเอง **แต่เราไม่สามารถกล่าวได้ว่าความสัมพันธ์ (1.16) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.15)** เพราะ ความสัมพันธ์ (1.16) ไม่สามารถนิยามฟังก์ชันบนช่วงบางช่วง ที่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของ สมการ (1.15) ได้ (ไม่มีจำนวนจริง x และ y ใดๆ ที่ทำให้สมการ $x^2 + y^2 = -25$ เป็นจริง)

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ *ทางขวามือ* ของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็น *ผลเฉลยชัดแจ้ง* ของสมการเชิงอนุพันธ์ นั้น พร้อมทั้งหา *ขอบเขต*ของตัวแปร x ที่ทำให้ ฟังก์ชันดังกล่าว เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   (a) $\dfrac{dy}{dx} + y = x + 1,$ $\qquad f(x) = x + 3e^{-x}$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0,$ $\qquad f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$

   (c) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2,$ $\qquad f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$

   (d) $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0,$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

   (e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2,$ $\qquad f(x) = \sin x + x^2$

   (f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$ $\qquad f(x) = 3\cos x + 5\sin x$

   (g) $y'' - yy' + 3y = -2e^{2x},$ $\qquad f(x) = 2e^{3x} - e^{2x}$

   (h) $y'' + 4y = -5e^{-x},$ $\qquad f(x) = 3\sin 2x + e^{-x}$

2. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ *ทางขวามือ* ของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็น *ผลเฉลยโดยปริยาย* ของสมการเชิงอนุพันธ์ นั้น พร้อมทั้งหา *ขอบเขต*ของตัวแปร x ที่ทำให้ ฟังก์ชันดังกล่าว เป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y},$ $\qquad x^2 + y^2 = 6$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y - 1},$ $\qquad y - \ln y = x^2 + 1$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x},$ $\qquad e^{xy} + y = x - 1$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sec(x + y) - 1,$ $\qquad x^2 - \sin(x + y) = 1$

   (e) $y'' = \dfrac{6xy' + (y')^3\sin y - 2(y')^2}{3x^2 - y},$ $\qquad \sin y + xy - x^3 = 2$

1.4 สรุป

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการซึ่งมีพจน์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัว หรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหลายตัว เราเรียก สมการเชิงอนุพันธ์ ที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัว ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* และ เรียก สมการเชิงอนุพันธ์ ที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหลายตัว ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย*

อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย หมายถึง อันดับสูงสุด ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ยังสามารถถูกแบ่งได้เป็น *สมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น* และ *สมการอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น* และ สำหรับสมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น สามารถถูกแบ่งได้ตาม คุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ ได้เป็น *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว* และ *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร*

สำหรับเนื้อหาเบื้องต้นในการศึกษาวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ จะเน้นในการแก้ สมการเชิงอนุพันธ์ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั่นเอง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะแบ่งเป็น *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ซึ่งในเนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไป จะเกี่ยวข้องกับการนำวิธีต่างๆ เข้ามาหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งวิธีการแต่ละแบบที่จะนำมาใช้ก็จะขึ้นกับ *ชนิด* ของสมการเชิงอนุพันธ์

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่ง

เนื้อหาในบทนี้ เกี่ยวข้องกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์*อันดับที่หนึ่ง*[1] (first-order differential equation) เนื่องด้วย เรามีวิธีการในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มากมาย สิ่งสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ก็คือ *การเลือกวิธีที่เหมาะสม*สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้นๆ

2.1 รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่จะศึกษา อาจจะเขียนให้อยู่ในรูป*อนุพันธ์* (derivative form)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.1}$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล* (differential form)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.2}$$

โดยสมการรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) จะสมมูลกับสมการรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

ตัวอย่าง 2.1. สมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

เป็นสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ (2.1) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ได้เป็น

$$\left(x^2+y^2\right)dx + (y-x)\,dy = 0$$

[1] ดูบทนิยามเรื่อง*อันดับ* หน้า 2

ตัวอย่าง 2.2. *สมการ*

$$(\sin x + y)\,dx + (x + 3y)\,dy = 0$$

เป็นสมการที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ซึ่งสมารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ (2.1) ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x + y}{x + 3y}$$

สำหรับรูปอนุพันธ์ (2.1) จะเป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่เห็นได้บ่อย และ สื่อได้ชัดเจนว่า y เป็นตัวแปรไม่อิสระ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ตัวแปรอิสระ x แต่ สำหรับ รูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ผู้อ่านอาจจะสับสนว่า ตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ และ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรไม่อิสระถ้าไม่ได้มีข้อความระบุไว้ อย่างไรก็ตาม สำหรับเอกสารฉบับนี้ จะกำหนดให้ y เป็นตัวแปรไม่อิสระ และ x เป็นตัวแปรอิสระ ยกเว้นว่าเนื้อหาในส่วนนั้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.3}$$

การแก้สมการนี้ จะเป็นแค่การหาค่า*อินทิกรัล* (integral) เท่านั้นเองซึ่งผลเฉลยของสมการรูปแบบนี้ คือ[2]

$$y = \int f(x)dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 2.3. ตัวอย่างผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อย่างง่าย

- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1$ คือ $y = x + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = x$ คือ $y = \dfrac{x^2}{2} + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ คือ $y = \sin x + c$

[2] ดูเรื่องการหาค่าอินทิกรัลได้ในหนังสือแคลคูลัสทั่วไป

- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ คือ $y = e^x + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}$ คือ $y = \int e^{x^2} dx + c$

หมายเหตุ เราไม่สามารถหาค่า $\int e^{x^2} dx$ ได้

2.3 สมการแยกกันได้

บทนิยาม 2.1 (สมการแยกกันได้). *สมการแยกกันได้* (separable equation) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{2.4}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ h เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในที่นี้ $f(x, y) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ นั่นเอง

หมายเหตุ ในบางครั้ง เราอาจจะเขียนสมการแยกกันได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y),$$

เมื่อ $p(y) = \dfrac{1}{h(y)}$

ตัวอย่าง 2.4. สมการต่อไปนี้เป็นสมการแยกกันได้

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$
- $y\dfrac{dy}{dx} = \cos y \ln x$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{y/\cos y}$)
- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1/x}{1/y}$)
- $3x\left(y^2+1\right)dx + y\left(x^2+1\right)dy = 0$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\frac{3x}{x^2+1}}{\frac{y}{y^2+1}}$)
- $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}$)

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแยกกันได้

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล โดยที่ทางซ้ายมือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร y และทางขวามือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร x

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

3. ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$H(y) = G(x) + c,$$

   เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

หมายเหตุ ค่าคงตัว c ที่ปรากฏในสมการ เป็นการรวมค่าคงตัวของการอินทิเกรตทางซ้ายมือ เข้ากับค่าคงตัวของการอินทิเกรตขวามือของสมการ

ตัวอย่าง 2.5. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \tag{2.5}$$

วิธีทำ

1. จัดรูปสมการ

$$\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^2}dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$$

3. ผลเฉลยโดยปริยายที่ได้คือ

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c, \tag{2.6}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

เราสามารถตรวจสอบว่า ผลเฉลยโดยปริยายที่ได้ ถูกต้องหรือไม่ โดยการหาค่า y จากความสัมพันธ์ (2.6) ซึ่งจะได้ว่า

$$y = \frac{x}{1-cx} \tag{2.7}$$

เราพบว่า

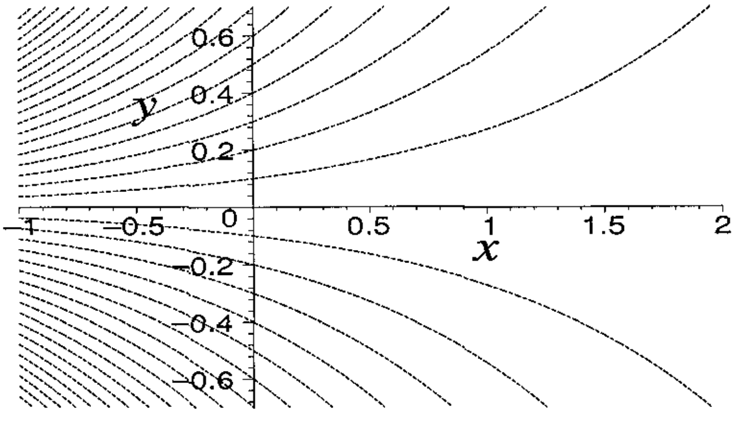
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-cx)(1) - x(-c)}{(1-cx)^2} = \frac{1}{(1-cx)^2}$$

และ

$$\frac{y^2}{x^2} = (\frac{x}{1-cx})^2 \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1-cx)^2}$$

นี่แสดงให้เห็นว่า $y = x/(1-cx)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (2.5) หรือ กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า ความสัมพันธ์ (2.6) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (2.5)

จากผลเฉลย (2.7) ในตัวอย่าง 2.5 แสดงให้เห็นว่า ในบางครั้ง ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เราอาจจะได้ผลเฉลยๆ มากมายเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งจำนวนผลเฉลยเหล่านั้น ขึ้นอยู่กับค่าคงตัว c ซึ่งเป็นค่าคงตัวใดๆ เรารวมเรียกผลเฉลยที่หมดนี้ว่า *ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) แต่ถ้าเรากำหนดเฉพาะเจาะจงค่า c เราจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า *ผลเฉลยเฉพาะ* (particular solution)



รูปที่ 2.1: ผลเฉลยของสมการ $y' = y$, $y = ce^x$, เมื่อ c มีค่าเป็น $\ldots, -.2, -.1, 0, .1, .2, \ldots$

ตัวอย่างเช่น $y = x/(1-cx)$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการ (2.5) แต่ถ้ากำหนดให้ $c = 1$

$$y = \frac{x}{1-x}$$

เป็น*ผลเฉลยเฉพาะ*ของสมการ (2.5)

ตัวอย่าง 2.6. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{2.8}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

วิธีทำ

1. จัดรูปสมการ

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \tag{2.9}$$

3. ดังนั้นผลเฉลยโดยปริยายที่ได้คือ

$$\ln|y| = kx + c \tag{2.10}$$

นำเลขฐานธรรมชาติ e มายกกำลังด้วยค่าทั้งสองข้างของสมการ เพื่อกำจัดค่า ln จากสมการ (2.10) ได้ว่า

$$|y| = e^c e^{kx}$$

เราได้ผลเฉลยชัดแจ้งเป็น

$$y = \pm e^c e^{kx} \tag{2.11}$$

ถ้ากำหนดให้ $\mathrm{C} = \pm e^c$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.8) เป็น

$$y = \mathrm{C}e^{kx}$$

หมายเหตุ หนังสือหลายเล่ม ไม่ระวังในการหาค่าอินทิกรัล $\frac{1}{y}$ เทียบกับ y โดยไม่ใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ (absolute value sign) หลังจากหาค่าอินทิกรัล ซึ่งจากสมการ (2.9) เขาเหล่านั้นจะได้

$$\ln y = kx + c$$

แทนที่จะได้สมการ (2.10) และจากค่าอินทิกรัลนี้ เราได้ค่า y คือ

$$y = e^c e^{kx}$$

ซึ่งจะพบว่า ความสัมพันธ์นี้จะมีเฉพาะค่า y ที่มากกว่าศูนย์ แต่ในความเป็นจริง $y = -e^c e^{kx}$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.8) ด้วยเหมือนกัน

ตัวอย่าง 2.7. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x \sin y dx - (x^2 + 1) \cos y dy = 0 \tag{2.12}$$

วิธีทำ ในการแก้สมการ เราสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

จากนั้น ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos y}{\sin y} dy &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ \ln |\sin y| &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \ = \ \ln \sqrt{x^2 + 1} + c \end{aligned}$$

กำจัดค่า ln ออกจากสมการ ได้เป็น

$$|\sin y| = e^c \sqrt{x^2 + 1},$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$\sin y = \pm e^c \sqrt{x^2 + 1},$$

ให้ $\mathbf{C} = \pm e^c$ เราก็ได้จะผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.12) เป็น

$$\sin y = \mathbf{C} \sqrt{x^2 + 1} \tag{2.13}$$

หมายเหตุ จากผลเฉลย (2.13) ถ้าจะหาผลเฉลยชัดแจ้งโดยใช้ฟังก์ชันฟังก์ชันไซน์ผกผัน[3] (inverse sine function) เราจะได้

$$y = \sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right)$$

พบว่า เราจะสูญเสียผลเฉลยบางผลเฉลยไป เพราะว่าฟังก์ชันไซน์ ไม่ใช่ฟังชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)

ตัวอย่างผลเฉลยที่สูญเสียไป เช่น $\sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right) \pm 2\pi,\ \sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right) \pm 4\pi,\ \ldots$

แบบฝึกหัด

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y' = e^{3x} - x$
2. $xy' = 1$
3. $y' + y\tan x = 0$
4. $y' - y\tan x = 0$
5. $y\ln y dx - xdy = 0$
6. $(1+x^2)\,y' = \tan^{-1} x$
7. $y' + 2xy = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} = y\sin x$
9. $(1+x)\dfrac{dy}{dx} = 4y$
10. $y' + 2xy^2 = 0$
11. $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$
12. $y' = \sqrt[3]{64xy}$
13. $xyy' = y - 1$
14. $(1+x^2)\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$
15. $x^5y' + y^5 = 0$
16. $y'\sin y = x^2$
17. $(y^2-1)\,xdx + (x+2)\,ydy = 0$
18. $\tan\theta dr + 2rd\theta = 0$

[3]ฟังก์ชันไซน์ผกผัน มีโดเมนอยู่ในช่วง $[-1,1]$ และ เรนจ์อยู่ในช่วง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

2.4 ปัญหาค่าตั้งต้น

ก่อนที่จะกล่าวถึงบทนิยามของ*ปัญหาค่าตั้งต้น* เราจะพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 2.8. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{2.14}$$

ซึ่ง ที่จุด $x = 2$ ผลเฉลยของสมการนี้มีค่าเป็น 5

วิธีทำ จากเนื้อหาในหัวข้อ 2.2 ทำได้เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (2.14) ได้เป็น

$$y = x^2 + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ เมื่อ $x = 2$ ผลเฉลยคือ $y = 5$ ทำให้เราได้ว่า

$$5 = 2^2 + c$$

เมื่อแก้สมการ เราได้ $c = 1$ ดังนั้น ผลเฉลยที่ทำให้สมการ (2.14) เป็นจริง และเป็นไปตามเงื่อนไข "*ที่จุด* $x = 2$ *ผลเฉลยของสมการนี้มีค่าเป็น* 5" คือ

$$y = x^2 + 1$$

จากตัวอย่าง 2.8 เราสามารถเขียนข้อปัญหาดังกล่าว ในเชิงภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x, \\ y(2) &= 5 \end{aligned}$$

ในที่นี้ $y(2) = 5$ หมายถึง y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่ง y มีค่าเป็น 5 เมื่อ $x = 2$

จากตัวอย่างข้างต้น เห็นได้ว่าข้อปัญหาที่ให้มา นอกจากเราจะต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์แล้ว ผลเฉลยที่ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ด้วย เราให้บทนิยามข้อปัญหาในรูปแบบดังกล่าว ดังนี้

บทนิยาม 2.2 (ปัญหาค่าตั้งต้น). *ปัญหาค่าตั้งต้น* (initial-value problem)

เป็นข้อปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง หรือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

1. *สมการเชิงอนุพันธ์*
2. *เงื่อนไข* ซึ่ง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยตัวเงื่อนไข อาจจะมีเพียงหนึ่งเงื่อนไข หรือหลายเงื่อนไขก็ได้ แต่ทุกเงื่อนไข จะต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่าของตัวแปร x **เพียงค่าเดียวเท่านั้น** และเรียกเงื่อนไขนี้ว่า *เงื่อนไขตั้งต้น* (initial condition)

ตัวอย่าง 2.9.

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos 2x, \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1, \\ y'(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{aligned}$$

นี่เป็นปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos 2x$$

จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขคือ ผลเฉลยมีค่าเป็น 1 และอนุพันธ์ของผลเฉลย มีค่าเป็น -1 เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$

สำหรับรูปแบบมาตรฐานของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งคือ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy &= 0, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{-x},\ y(0) = 1$
2. $x\cos x\ dx + \left(1 - 6y^5\right) dy = 0,\ y(\pi) = 0$
3. $\sin x\ dx + y\ dy = 0,\ y(0) = -2$
4. $y' = \dfrac{-x}{y},\ y(1) = \sqrt{3}$
5. $\left(x^2 + 1\right) dx + \dfrac{1}{y} dy = 0,\ y(-1) = 1$
6. $xy' + y = 0,\ y(2) = -2$
7. $xe^{x^2}\ dx + \left(y^5 - 1\right) dy = 0,\ y(0) = 0$
8. $y' = \dfrac{x^2y - y}{y+1},\ y(3) = -1$
9. $\dfrac{dy}{dx} = 8 - 3y,\ y(0) = 4$
10. $e^x y' = 2(x+1)y^2,\ y(0) = \dfrac{1}{6}$

2.5 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 2.3 (สมการเอกพันธุ์). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ว่า *สมการเอกพันธุ์* (homogeneous equation)

ตัวอย่าง 2.10. ตัวอย่างสมการเอกพันธุ์

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y} = \dfrac{4\frac{y}{x} - 3}{2 - \frac{y}{x}}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

5. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0$ หรือ สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการเอกพันธุ์

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

4. เนื่องจากสมการที่ถูกจัดรูปใหม่ เป็นสมการแยกกันได้

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(v)-v}}$$

เราสามารถใช้*ขั้นตอนวิธีแก้สมการแยกกันได้*ในการหาผลเฉลย

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

หมายเหตุ สำหรับกรณีเมื่อสมมติค่า $v = \dfrac{y}{x}$ แล้วการหาผลเฉลยมีความยุ่งยาก ซับซ้อน ให้ผู้อ่านลองสมมติค่า $v = \dfrac{x}{y}$ กรณีนี้อาจจะทำให้ การหาผลเฉลยทำได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 2.11. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{2.15}$$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปสมการ (2.15) ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \tag{2.16}$$

เราพบว่า สมการ (2.15) เป็นสมการเอกพันธุ์ ดังนั้น เราสามารถแก้สมการนี้ได้โดย

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่า $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{1+v}{1-v} = v + x\frac{dv}{dx}$$

3. จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} &= \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v}, \\ \frac{1-v}{1+v^2}dv &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

4. หาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \int \frac{1-v}{1+v^2}dv &= \int \frac{1}{x}dx, \\ \int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{2}\frac{2v}{1+v^2}\right) dv &= \ln|x| + c, \\ \tan^{-1} v - \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) &= \ln|x| + c, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) + \ln|x| + c$$

หรือจะเขียนในรูปที่ง่ายกว่าได้เป็น

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + c$$

อย่างที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่า สิ่งสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ก็คือ การเลือกวิธีที่เหมาะสมสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้นๆ และเพื่อเป็นการประหยัดเวลา แทนที่เราจะต้องจัดรูปสมการ เพื่อจะดูว่า สมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว เป็นสมการเอกพันธุ์ เราอาจจะใช้เงื่อนไขที่จะกล่าวต่อไปนี้ ตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

บทนิยาม 2.4 (ฟังก์ชันเอกพันธุ์). *ฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น* n (homogenous function of degree n) คือ ฟังก์ชันที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

หมายเหตุ ในที่นี้เราใช้คำว่า*เอกพันธุ์*ในสองกรณีคือ *สมการเชิงเอกพันธุ์* [4] และ *ฟังก์ชันเอกพันธุ์*

ตัวอย่าง 2.12.

- ฟังก์ชัน $f(x, y) = x^2 + xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นสอง เพราะว่า

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(x^2 + xy) = t^2 f(x, y)$$

- ฟังก์ชัน $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นหนึ่ง เพราะว่า

$$g(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = tg(x, y) \qquad (t \geq 0)$$

- ฟังก์ชัน $h(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $\frac{3}{2}$ เพราะว่า

$$h(tx, ty) = (tx)\sqrt{ty} + (ty)\sqrt{tx} = t^{\frac{3}{2}} h(x, y) \qquad (t \geq 0)$$

- ฟังก์ชัน $F(x, y) = x^2y + xy$ เป็น*ไม่เป็น*ฟังก์ชันเอกพันธุ์ เพราะว่า

$$F(tx, ty) = (tx)^2(ty) + (tx)(ty) = t^2(tx^2y + xy)$$

ไม่สามารถเขียนได้ในรูป $t^n F(x, y)$ ได้

[4]ดูบทนิยามเรื่องสมการเอกพันธุ์ในหน้า 21

จากบทนิยามข้างต้น ถ้าเราทราบแล้วว่าฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องในสมการเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ เราสามารถตรวจสอบได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ ดังกล่าว เป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่ โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1. *พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.17}$$

*ถ้าฟังก์ชัน $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ **เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเดียวกันแล้ว** สมการ (2.17) เป็น **สมการเอกพันธุ์***

พิสูจน์ สมการ (2.17) สามารถเขียนใหม่ในรูปอนุพันธ์ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ที่มีระดับขั้นเดียวกัน (สมมติว่ามีระดับขั้น n) นั่นคือ $M(tx,ty) = t^n M(tx,ty)$ และ $N(tx,ty) = t^n N(tx,ty)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \\ &= -\frac{M(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})}{N(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})} \\ &= -\frac{x^n M(1,\frac{y}{x})}{x^n N(1,\frac{y}{x})} \\ &= -\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $f(s) = -\dfrac{M(1,s)}{N(1,s)}$ เราได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธุ์ นั่นเอง □

ตัวอย่าง 2.13. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0, \quad y(1) = 0 \tag{2.18}$$

วิธีทำ ในที่นี้

$$M(x,y) = (x^2 + 3xy + y^2) \quad \text{และ} \quad N(x,y) = -x^2$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า ทั้ง $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ลำดับขั้นสอง ดังนั้นสมการ (2.18) เป็นสมการเอกพันธุ์ โดยสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

เราสามารถหาผลเฉลยได้ดังนี้

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

3. จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} &= 1 + 2v + v^2 = (1+v)^2, \\ \frac{1}{(1+v)^2}dv &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

4. หาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+v)^2}dv &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\frac{1}{1+v} &= \ln|x| + c \\ 1 + v &= \frac{-1}{\ln|x| + c} \\ v &= \frac{-1}{\ln|x| + c} - 1, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

$$\frac{y}{x} = \frac{-1}{\ln|x| + c} - 1,$$

คูณด้วย x ทั้งสองข้าง

$$y = \frac{-x}{\ln|x| + c} - x,$$

6. จากเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่ว่า $y = 0$ เมื่อ $x = 1$ แทนค่าลงในผลเฉลยเพื่อหาค่า c

$$0 = \frac{-1}{\ln 1 + c} - 1,$$

เมื่อแก้สมการได้ค่า $c = -1$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายของปัญหาค่าตั้งต้น (2.18) คือ[5]

$$y = \frac{x}{1 - \ln x} - x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $(x + y)\ y' = x - y$

(b) $x\ y' = y + 2\sqrt{xy}$

(c) $2xy\ y' = x^2 + 2y^2$

(d) $x\ y' = x + y$

(e) $x\ y' = 2x + 3y$

(f) $(x^2 - 2y^2)dx + xy\ dy = 0$

(g) $x^2\ y' - 3xy - 2y^2 = 0$

(h) $x \sin\frac{y}{x}\ y' = y \sin\frac{y}{x} + x$

(i) $x\ y' = y + 2xe^{-y/x}$

(j) $x\ y' = \sqrt{x^2 + y^2}$

[5]ในการศึกษาเรื่อง การมีจริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (existence of a solution of differential equation) เราจะศึกษาผลเฉลยเฉพาะในย่านใกล้เคียง (neighborhood) กับค่าตั้งต้นเท่านั้น ซึ่งสำหรับข้อปัญหาข้อนี้ เราจะพิจารณาผลเฉลยในย่านใกล้เคียง $x = 1$ ซึ่งค่า x ในย่านใกล้เคียงจะมีค่ามากกว่าศูนย์ นั้นทำให้เราสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y' = -\dfrac{x}{y}, \quad y(1) = \sqrt{4}$

(b) $y^3y' + x^3 = 0, \quad y(0) = 1$

(c) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(2) = -2$

(d) $xyy' = 2y^2 + 4x^2, \quad y(2) = 4$

2.6 สมการเชิงเส้น

สำหรับรูปแบบทั่วไปของ*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น* (first order linear differential equation) คือ

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{2.19}$$

เมื่อ $a_1(x) \not\equiv 0$.

เนื่องจาก $a_1(x)$ ไม่ได้เป็นฟังก์ชันศูนย์ ดังนั้นเราสามารถหารสมการดังกล่าวด้วย $a_1(x)$ ทำได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{2.20}$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ และ $q(x) = \dfrac{b(x)}{a_1(x)}$

หมายเหตุ เรามักนิยมเขียนแทนสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ด้วยรูปสมการ (2.20) มากกว่า รูปสมการ (2.19)

นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ได้เป็น

$$[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0$$

ตัวอย่าง 2.14. ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น

- $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 1,\ b(x) = e^{-x})$
- $xy' + x^2y = x^3$, $\quad (a_1(x) = x,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = x^3)$
- $\dfrac{dy}{dx} + \sin x\ y = \tan x$, $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = \sin x,\ b(x) = \tan x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = x^2$, $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 0,\ b(x) = x^2)$
- $\dfrac{dy}{dx} + x^2y = 0$, $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = 0)$

จากตัวอย่างข้างต้น พบว่า ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) มีค่า $p(x)$ เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = q(x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นนี้ ก็จะกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย[6] โดยมีผลเฉลย คือ

$$y = \int q(x)dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ แต่ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น มีค่า $q(x)$ เป็นศูนย์ หรือ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

สมการนี้ จะกลายเป็นสมการแยกกันได้[7]

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

และมีผลเฉลยคือ

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

จากการสังเกต เราอาจตั้งสมมติฐาน ว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) อยู่ในรูป

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{2.21}$$

---

[6] ดูวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย หน้า 12

[7] ดูวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แยกกันได้ หน้า 13

เมื่อ $\mathcal{C}$ เป็นฟังก์ชันของ x, แทนที่จะอยู่ในรูปค่าคงตัวคูณด้วย $e^{-\int p(x)dx}$ เมื่อนำค่า y มาแทนในสมการ (2.20) เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\mathcal{C}(x)e^{-\int p(x)dx}\right] + p(x)\left[\mathcal{C}(x)e^{-\int p(x)dx}\right] &= q(x) \\
\left[-\mathcal{C}(x)p(x) + \mathcal{C}'(x) + p(x)\mathcal{C}(x)\right]e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\
\mathcal{C}'(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\
\mathcal{C}'(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ เราจะได้ค่าของฟังก์ชัน $\mathcal{C}$ คือ

$$\mathcal{C}(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ ดังนั้น เมื่อแทนค่า $\mathcal{C}(x)$ ลงใน (2.21) เราก็จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.20)

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right],$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ[8] □

ตัวอย่าง 2.15. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' + 3y = 2xe^{-3x} \tag{2.22}$$

วิธีทำ จากโจทย์ เราได้ว่า สมการ (2.22) เป็นสมการเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์

$$p(x) = 3, \qquad q(x) = 2xe^{-3x}$$

[8]ดูการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้นด้วยวิธีการอื่นๆ ใน [1, 10, 11, 13, 14]

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.22) คือ

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3dx}\left[\int 2xe^{-3x}e^{\int 3dx}dx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[\int 2xe^{-3x}e^{3x}dx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[\int 2xdx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[x^2 + c\right] \\ &= x^2e^{-3x} + ce^{-3x} \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 2.16. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + (\tan x)y = \sin(2x), \qquad y(0) = 1 \tag{2.23}$$

วิธีทำ จากโจทย์ เราได้ว่า สมการ (2.23) เป็นสมการเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์

$$p(x) = \tan x, \qquad q(x) = \sin(2x)$$

พบว่า

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} &= e^{\int \tan x dx} \\ &= e^{\ln|\sec x|} \\ &= |\sec x| \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวก ในที่นี้จะขอละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ดังนั้นเราจะได้

$$e^{\int p(x)dx} = \sec x$$

และ ในทำนองเดียวกัน

$$e^{-\int p(x)dx} = \cos x$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ 2.23 คือ

$$\begin{aligned} y &= \cos x \left[\int \sin(2x) \sec x dx + c \right] \\ &= \cos x \left[\int 2 \sin x \cos x \sec x dx + c \right] \\ &= \cos x \left[\int 2 \sin x dx + c \right] \\ &= \cos x \left[-2 \cos x + c \right] \\ &= -2 \cos^2 x + c \ \cos x \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

จากเงื่อนไขค่าตั้งต้น : $y = 1$ เมื่อ $x = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 1 &= -2 \cos^2 0 + c \ \cos 0 \\ &= -2 \cdot 1 + c \cdot 1 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

เราได้ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (2.23) คือ

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $y' + y = 1$

   (b) $y' + y = e^{-x}$

   (c) $y' - 2y = e^{3x}$

   (d) $xy' + y = \cos x$

   (e) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^4$

   (f) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$

   (g) $\left(1+x^2\right) dy + 2xy\ dx = \cot x\ dx$

   (h) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$

   (i) $y' + y\cot x = 2x\csc x$

   (j) $(2y - x^3)\, dx = x\ dy$

   (k) $y - x + xy\cot x + xy' = 0$

   (l) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$

   (m) $(x\ln x)\, y' + y = 3x^3$

   (n) $\left(y - 2xy - x^2\right) dx + x^2 dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y' + 2y = 2, \quad y(0) = 1$

   (b) $xy' - y = x, \quad y(1) = 2$

   (c) $y' = (1-y)\cos x, \quad y(\pi) = 0$

   (d) $xy' + 3y = 2x^5, \quad y(2) = 1$

   (e) $y' = 1 + x + y + xy, \quad y(0) = 0$

   (f) $(x^2+4)\, y' + 3xy = x, \quad y(0) = 1$

2.7 สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม 2.5 (สมการแบร์นูลลี). เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{2.24}$$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ, ว่า**สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli equation)[9]

จากบทนิยาม 2.5 ของสมการแบร์นูลลี สังเกตได้ว่า ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 สมการแบร์นูลลี (2.24) ก็จะเป็นสมการเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยได้ดังที่ได้แสดงในเนื้อหาก่อนหน้านี้แล้ว

สำหรับกรณีค่า n อื่นๆ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ โดยการแปลงสมการแบร์นูลลีให้เป็นสมการเชิงเส้นดังนี้

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบร์นูลลี

1. หารสมการ (2.24) ด้วย y^n ทำให้ได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{2.25}$$

2. ให้

$$v = y^{1-n}$$

ซึ่งมีอนุพันธ์เทียบกับ x คือ

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

3. แทนค่า v และ $\dfrac{dv}{dx}$ ลงในสมการ (2.25) ได้

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

---

[9] สมการนี้ได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดยเจมส์ แบร์นูลลี (Bernoulli, James) ในปีคริสตศักราช 1695 ซึ่งสมการดังกล่าวสามารถถูกแก้ครั้งแรกได้โดยจอห์น แบร์นูลลี (Bernoulli, John) ซึ่งเป็นน้องชายของเจมส์นั่นเอง ต่อมาภายหลัง ในปีคริสตศักราช 1696 กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (Leibnitz, Gottfried Wilhelm) สามารถแสดงได้ว่า เราสามารถแปลงสมการแบร์นูลลี ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นได้

4. เนื่องจาก $\dfrac{1}{1-n}$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นได้ คือ

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)\ v = (1-n)q(x) \tag{2.26}$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น (2.26) ได้คือ

$$v(x) = e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx} + c\right]$$

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.25) คือ

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx} + c\right]$$

หรือ สมการ (2.25) ผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \left\{e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx} + c\right]\right\}^{n-1}$$

ตัวอย่าง 2.17. จงแก้สมการ

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3 \tag{2.27}$$

วิธีทำ พบว่าสมการ (2.27) เป็นสมการแบร์นูลลีซึ่งมี $n = 3$, $p(x) = -5$ และ $q(x) = -\dfrac{5x}{2}$

1. หารสมการ (2.27) ด้วย y^3 ทำให้ได้

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x$$

2. ให้ $v = y^{1-3} = y^{-2}$ ดังนั้น

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}$$

3. แทนค่า $\dfrac{dv}{dx}$ ลงในสมการ ได้

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x$$

4. สามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้เป็น

$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x \tag{2.28}$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น (2.28) ได้คือ

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int 10\ dx}\left[\int 5x\ e^{\int 10\ dx}dx + c\right], \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.27) คือ

$$v = y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$

หรือ ผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}}}$$

หมายเหตุ สังเกตได้ว่า $y \equiv 0$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.27) แต่จากการหารสมการ (2.27) ด้วย y^3 ทำให้ผลเฉลยที่หาได้ในตัวอย่าง 2.17 ไม่ปรากฏว่ามีผลเฉลย $y \equiv 0$ ประกอบอยู่ด้วย

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$
2. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} - x^2y^2$
4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$
5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$
6. $dy + (4y - 8y^{-3})x\ dx = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$
9. $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$
10. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$
11. $\dfrac{dx}{dt} + tx^3 + \dfrac{x}{t} = 0$
12. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{xt}$

2.8 สมการแบบแม่นตรง

สมมติว่าเรามีวงศ์เส้นโค้ง[10] (family of curves)

$$f(x, y) = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

จากเนื้อหาในวิชาแคลคูลัส ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ที่มีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x (ซึ่งก็คือ $\frac{\partial f}{\partial x}$) และอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y (ซึ่งก็คือ $\frac{\partial f}{\partial y}$) เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง** แล้ว *ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม* (total differential) ของฟังก์ชัน f คือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

และเนื่องจาก $f(x, y) = c$ ซึ่งมีค่าเป็นค่าคงตัว ดังนั้น $df = 0$ ซึ่งทำให้เราได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.29}$$

เราพบว่า สมการ (2.29) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ทำให้เรากล่าวได้ว่า $f(x, y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.29) นั่นเอง

ตัวอย่าง 2.18. วงศ์ของเส้นโค้ง

$$x^2y^3 = c, \tag{2.30}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \tag{2.31}$$

เนื่องจาก เส้นโค้ง (2.30) สามารถนิยามฟังก์ชัน

$$y = \sqrt[3]{cx^{-2}}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}$$

ซึ่งเป็นสมการในรูปอนุพันธ์ ที่สมมูลกับสมการ (2.31)

---

[10] วงศ์เส้นโค้ง หมายถึง เซตของเส้นโค้ง เนื่องจากเรานิยมใช้คำว่า "วงศ์ของเซต" แทนคำว่า "เซตของเซต" และ เส้นโค้ง คือ เซตของจุดที่เป็นไปตามเงื่อนไขหรือสมการ ดังนั้น เราจึงใช้คำว่า "วงศ์ของเส้นโค้ง" แทนคำว่า "เซตของเส้นโค้ง"

บทนิยาม 2.6 (สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.32}$$

ที่สามารถหาฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง* (exact differential equation) และเรียก

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

ว่า *ดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบแม่นตรง* (exact differential) ซึ่งสมการ (2.32) มีผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = c$$

เพื่อความสะดวก ภายหลังจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพียงสั้นๆ ว่า *สมการแบบแม่นตรง* (exact equation)

ตัวอย่าง 2.19. จงตรวจสอบว่าสมการ

$$y\ dx + x\ dy = 0 \tag{2.33}$$

เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ ลองตรวจสอบโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = xy$ ซึ่งจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

ซึ่งพบว่าสมการ (2.33) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

ดังนั้นสมการ (2.33) เป็นสมการแบบแม่นตรง โดยมีผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = c$$

หรือ นั่นคือ

$$xy = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

วิธีการตรวจสอบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ นอกจากจะใช้ การแทนค่าฟังก์ชัน f โดยตรงดังตัวอย่าง เรามีวิธีอื่น ที่สามารถตรวจสอบได้อย่างรวดเร็วกว่า นั่นคือ

ทฤษฎีบท 2.3. *พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (2.32) เมื่อฟังก์ชัน* M, N, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ *ต่อเนื่องทุกๆ จุด* (x, y) *ในโดเมนชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ* xy *(xy-plain)*

1. *ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x, y) *ในโดเมน*

2. *ในทางกลับกัน ถ้า*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x, y) *ในโดเมน แล้ว สมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง*

พิสูจน์ (ส่วนที่หนึ่ง) ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว โดยบทนิยาม 2.6 เราสามารถหาฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ทุก (x, y) ในโดเมน ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุก (x, y) ในโดเมน แต่โดยความต่อเนื่องของ $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ (ซึ่งก็คือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ มีความต่อเนื่อง) โดยทฤษฎีบท[11] ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ทุก (x, y) ในโดเมน

[11] ดูทฤษฎีบทและการพิสูจน์ใน [12], Theorem 7.5

(ส่วนที่สอง) ส่วนนี้จะเป็นส่วนกลับของส่วนที่หนึ่ง และเป็น**ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง**ด้วยการพิสูจน์จะแบ่งเป็นขั้นตอนดังนั้น

1. โดยเริ่มจากสมมติฐานที่ว่า
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
ทุก (x, y) ในโดเมน

2. เนื่องจากเราต้องการแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง นั่นคือ สามารถหาฟังก์ชัน f ซึ่ง
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \tag{2.34}$$
และ
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \tag{2.35}$$
ทุก (x, y) ในโดเมน เนื่องจาก ฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไข (2.34) ดังนั้น
$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + \phi(y), \tag{2.36}$$
เมื่อ $\int M(x, y)dx$ หมายถึง การหาค่าอินทิกรัลของ $M(x, y)$ เทียบกับ x โดยมองว่าตัวแปร y เป็นเพียงค่าคงตัว[12] และ $\phi(y)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ y

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ได้เทียบกับตัวแปร y
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
ซึ่งจากสมการ (2.35) เราได้ว่า
$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

---

[12]ค่าอินทิกรัลทางขวามือของสมการ (2.36) อาจจะดูแปลกตาสำหรับผู้อ่านที่คุ้นเคยกับรูปแบบ
$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + c,$$
เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ แต่อย่างที่กล่าวไว้แล้วว่า ในการหาค่าอินทิกรัล เราจะมองว่าตัวแปร y เป็นค่าคงตัวก่อน ดังนั้น แทนที่ด้านขวามือของสมการ (2.36) จะบวกด้วยค่าคงตัวใดๆ เราต้องเปลี่ยนเป็นบวกด้วยฟังก์ชันใดๆ ของ y แทน

ดังนั้น

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

4. เนื่องจาก $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx$$

และได้ว่า

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] dy$$

5. แทนค่าลงในสมการ (2.36) ได้ว่า

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] dy$$

นี่แสดงว่า เราสามารถหาฟังก์ชัน f ที่เป็นไปตามเงื่อนไข (2.34) และ (2.35) ดังนั้น สมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง □

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.3 ในการพิสูจน์ส่วนที่สอง ขั้นตอนที่ 2 ผู้อ่านอาจจะเริ่มสมมติให้ f เป็นไปตามเงื่อนไข (2.36) ก่อน นั่นคือ

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x),$$

โดยที่ $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x และในการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน เราก็จะได้

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \int \left[M(x,y) - \int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy\right] dx$$

ตัวอย่าง 2.20. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$\left(3x^2 + 4xy\right) dx + \left(2x^2 + 2y\right) dy = 0 \tag{2.37}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

และ

$$N(x,y) = 2x^2 + 2y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.37) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int \left(3x^2 + 4xy\right) dx + g(y) \\ &= x^3 + 2x^2y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\ g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) = 2x^2 + 2y &= 2x^2 + g'(y) \\ g'(y) &= 2y \end{aligned}$$

4. หาค่า $g(y)$

$$\begin{aligned} g(y) = \int g(y)dy &= \int 2ydy \\ &= y^2 + c_1, \end{aligned}$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_1$$

เนื่องจากเราทราบว่าผลเฉลยของสมการแบบแม่นตรงอยู่ในรูป $f(x,y) = c$ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.37) คือ

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_1 = c$$

เมื่อรวม ค่าคงตัวทั้งสองข้างเข้าด้วยกัน จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.37) เป็น

$$x^2 + 2x^2y + y^2 = \tilde{c}$$

เมื่อ $\tilde{c}$ เป็นค่าคงตัวใดๆ

หมายเหตุ ในขั้นตอนที่ 5 เราอาจเขียนโดยละ ค่าคงตัว c_1 ก็ได้ เพราะท้ายที่สุด ในขั้นตอนสุดท้ายค่า c_1 จะต้องถูกนำมารวมกับค่า c จากเงื่อนไข $f(x,y) = c$ เป็นค่าคงตัวตัวใหม่ $\tilde{c}$

ตัวอย่าง 2.21. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(2x\cos y + 3x^2y\right)dx + \left(x^3 - x^2\sin y - y\right)dy = 0, \quad y(0) = 2 \tag{2.38}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

   $$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$

   และ

   $$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2$$

   เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.38) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

   $$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int \left(2x\cos y + 3x^2y\right)dx + g(y) \\ &= x^2\cos y + x^3y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

   $$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\,g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) &= x^3 - x^2\sin y - y &= -x^2\sin y + x^3 + g'(y) \\ && g'(y) = -y \end{aligned}$$

4. หาค่า $g(y)$

$$\begin{aligned} g(y) = \int g(y)dy &= \int -ydy \\ &= -\frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

หมายเหตุ จะละค่าคงตัวจากการอินทิเกรตไว้ก่อน ซึ่งค่าคงตัวจะไปปรากฏในเทอม $f(x,y) = c$

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

แทนเงื่อนไขตั้งต้น $y(0) = 2$ เพื่อหาค่า c

$$\begin{aligned} 0 + 0 - \frac{4}{2} &= c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (2.38) คือ

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = -2$$

ตัวอย่าง 2.22. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(ye^{xy} + \sin y)\,dx + (xe^{xy} + x\cos y)\,dy = 0 \tag{2.39}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

$$M(x,y) = ye^{xy} + \sin y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos y$$

และ

$$N(x,y) = xe^{xy} + x\cos y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos y$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.39) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int \left(ye^{xy} + \sin y\right) dx + g(y) \\ &= e^{xy} + x\sin y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x\cos y + \frac{d\ g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) \;=\; xe^{xy} + x\cos y &= xe^{xy} + x\cos y + g'(y) \\ g'(y) &= 0 \end{aligned}$$

4. เนื่องจาก $g'(y) = 0$ ดังนั้น g เป็นค่าคงตัวใดๆ ซึ่งในที่นี้จะขอละไว้

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = e^{xy} + x\sin y$$

หรือ คำตอบของสมการคือ

$$e^{xy} + x\sin y = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ถ้าใช่ จงหาผลเฉลยของสมการ

   (a) $(2x+3y)\,dx+(3x-4)\,dy=0$

   (b) $(3x^2-2y^2)\,dx+(6y^2-4xy)\,dy=0$

   (c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^2-4x+5}{2y-4xy-4}$

   (d) $\cos x\cos^2 y dx+2\sin x\sin y\cos y dy=0$

   (e) $(\sin x\tan y+1)\,dx-\cos x\sec^2 y dy=0$

   (f) $\left(x^2+\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(y^2+\ln x\right)dy=0$

   (g) $(e^x\sin y+\tan y)\,dx+(e^x\cos y+x\sec^2 y)\,dy=0$

   (h) $(\sin x\sin y-xe^y)\,dy=(e^y+\cos x\cos y)\,dx$

   (i) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx=\sqrt{x^2-y}dy$

   (j) $(\theta^2+1)\cos r\;dr+2\theta\sin r\;d\theta=0$

   (k) $(x+\sin y)\,dx+(x\cos y-2y)\,dy=0$

   (l) $y'=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y'=\dfrac{-2xy}{1+x^2},\quad y(2)=-5$

   (b) $-\dfrac{2y}{x^3}dx+\dfrac{1}{x^2}dy=0,\quad y(2)=-2$

   (c) $e^{x^3}\left(3x^2y-x^2\right)dx+e^{x^3}dy=0,\quad y(0)=-1$

   (d) $y'=\dfrac{-y^2}{2xy+1},\quad y(1)=-2$

   (e) $y'=\dfrac{2y^2(y-x)}{4y^3-6xy^2+2x^2y},\quad y(2)=3$

2.9 ตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.40}$$

ในบางครั้งเราพบว่า $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ หรือนั่นคือ สมการ (2.40) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรงนั่นเอง แต่อาจจะมีฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับสมการ (2.40) ได้

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.41}$$

แล้วทำให้สมการ (2.41) เป็นสมการแบบแม่นตรง หรือก็คือ

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

2.9.1 ตัวประกอบปริพันธ์

บทนิยาม 2.7 (ตัวประกอบปริพันธ์). ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (2.40) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง แต่สมการ (2.41) ซึ่งได้จากการคูณฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ กับสมการ (2.40) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว เราเรียกฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ ว่า*ตัวประกอบปริพันธ์*ของสมการ (2.40) (integrating factor of equation (2.40))

ตัวอย่าง 2.23. จงแสดงว่า $\mu(x,y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0 \tag{2.42}$$

และ ใช้ตัวประกอบปริพันธ์หาผลเฉลยของสมการ

วิธีทำ ให้ $M(x,y) = 2y - 6x$ และ $N(x,y) = 3x - 4x^2y^{-1}$ พบว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad \neq \quad 3 - 8xy^{-1} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.42) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

เมื่อคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = xy^2$ ได้

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0 \tag{2.43}$$

ให้ $\overline{M}(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2$ และ $\overline{N}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$ พบว่า

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

นั่นคือ สมการ (2.43) เป็นสมการแบบแม่นตรง ดังนั้น $\mu(x,y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.42)

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง (หน้า 40) เราได้ผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y)$$

และ

$$g'(y) = \overline{N}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y} = (3x^2y^2 - 4x^3y) - (3x^2y^2 - 4x^3y) = 0$$

เนื่องจาก $g'(y) = 0$ ให้ $g(y) \equiv 0$ ดังนั้น

$$f(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ, เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.42) และสมการ (2.43)

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.23 เราพบว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.42) และสมการ (2.43) แต่สำหรับกรณีทั่วไป การใช้ตัวประกอบปริพันธ์คูณเข้ากับสมการแรกเริ่ม เพื่อให้ได้สมการใหม่ ผลเฉลยที่ได้จากสมการใหม่อาจจะมีจำนวนมากกว่าหรือน้อยกว่าผลเฉลยของสมการแรกเริ่ม ดังเช่น $y \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.43) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.42) เหตุเพราะว่าเราคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = xy^2$ ซึ่งเมื่อ $y \equiv 0$ ก็เท่ากับว่าเราคูณสมการ (2.42) ด้วย 0 นั่นเอง นั่นทำให้ $y \equiv 0$ เป็นเฉพาะผลเฉลยของสมการ (2.43) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.42)

ตัวอย่าง 2.24. จงแสดงว่า $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0 \tag{2.44}$$

และ ใช้ตัวประกอบปริพันธ์หาผลเฉลยของสมการ

วิธีทำ ให้ $M(x,y) = 2x^2 + y$ และ $N(x,y) = x^2y - x$ พบว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \neq \quad 2xy - 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.44) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

เมื่อคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ ได้

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0 \tag{2.45}$$

ให้ $\overline{M}(x,y) = 2 + yx^{-2}$ และ $\overline{N}(x,y) = y - x^{-1}$ พบว่า

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

นั่นคือ สมการ (2.45) เป็นสมการแบบแม่นตรง ดังนั้น $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.44)

โดยวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง เราได้ผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = \int (2 + yx^{-2})dx + g(y) = 2x - yx^{-1} + g(y)$$

และ

$$g'(y) = \overline{N}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y} = (y - x^{-1}) - (-x^{-1}) = y$$

เนื่องจาก $g'(y) = y$ ดังนั้น $g(y) = \dfrac{y^2}{2} + c_1$, เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใดๆ ดังนั้น

$$f(x,y) = 2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} + c_1 = c_2,$$

เมื่อ $c2$ เป็นค่าคงตัวใดๆ, เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.44) และสมการ (2.45) หรือผลเฉลยของสมการทั้งสอง อยู่ในรูป

$$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C, \qquad \text{เมื่อ } C = c_2 - c_1$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.24 พบว่า $x \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.44) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.45) นั่นเป็นเพราะ เราได้สมการ (2.45) จากการคูณสมการ (2.44) ด้วยตัวประกอบปริพันธ์ $\mu = \dfrac{1}{x^2}$

ตัวอย่าง 2.23 แสดงให้เห็นว่าเมื่อเราคูณสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์ แล้วหาผลเฉลยของสมการ เราได้คำตอบของสมการใหม่มีจำนวนมากกว่า คำตอบของสมการดั้งเดิม แต่ตัวอย่าง 2.24 แสดงให้เห็นว่าเมื่อเราคูณสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์แล้วหาผลเฉลยของสมการ เรากลับสูญเสียบางคำตอบไป

2.9.2 การหาตัวประกอบปริพันธ์

จากในเนื้อหาที่ผ่านมาพบว่า ถ้าเราทราบตัวประกอบปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เราก็จะสามารถหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวได้ เนื้อหาในส่วนนี้จะนำเสนอวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.46}$$

โดยทฤษฎีบท 2.6 สมการ (2.46) เป็นสมการแบบแม่นตรงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)] &= \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)] \\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{2.47}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (2.47) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้น เป็นเรื่องที่ยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งอาจจะยุ่งยากกว่าการหาผลเฉลยของสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ โดยตรงด้วยซ้ำไป แต่สำหรับกรณีต่อไปนี้อาจจะทำให้เราสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์ได้

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น**

  เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x, $\mu = \mu(x)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ และ สามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) \tag{2.48}$$

  เมื่อ $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น** [13]

---

[13] เนื่องจากสมมติให้ μ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น จึงเป็นการบังคับให้ $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย

สังเกตได้ว่าสมการ (2.48) เป็นสมการแบบแยกกันได้ ทำให้เราสามารถหาค่า μ ได้โดย

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{\mu} &= \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\int \frac{d\mu}{\mu} &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\ln|\mu| &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
|\mu| &= \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right),
\end{aligned}$$

เมื่อ $\exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right) = e^{\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)}$, และเนื่องจากเราพิจารณาหาตัวประกอบปริพันธ์เพียงฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง เราสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)$$

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น**

  เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y, $\mu = \mu(y)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ และ สามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right) \tag{2.49}$$

  เมื่อ $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น** [14]

  สังเกตได้ว่าสมการ (2.49) เป็นสมการแบบแยกกันได้ ทำให้เราสามารถหาค่า μ ได้ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right)$$

จากทั้งสองกรณี ทำให้เราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ว่า

---

[14]เนื่องจากสมมติให้ μ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น จึงเป็นการบังคับให้ $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y โดยปริยาย

ทฤษฎีบท 2.4. *พิจารณาสมการ*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.50}$$

ถ้า $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และขึ้นกับตัวแปร* x *เท่านั้น แล้ว*

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right) \tag{2.51}$$

เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50)

ถ้า $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และขึ้นกับตัวแปร* y *เท่านั้น แล้ว*

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right) \tag{2.52}$$

เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50)

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์

1. พิจารณาสมการ $M\ dx + Ndy = 0$ ว่าไม่ใช่สมการแบบแม่นตรง (หรือสมการแบบอื่นๆ ที่เราสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว)

2. คำนวณหาค่า $\partial M/\partial y$ และ $\partial N/\partial x$

3. (a) ถ้า $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

   $$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)$$

   (b) ถ้า $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

   $$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right)$$

4. นำ μ ที่หาได้ไปคูณเข้ากับสมการ (2.50)

   $$\mu M\ dx + \mu N\ dy = 0$$

   แล้วนำสมการที่ได้ใหม่นี้ไปหาคำตอบ โดยพิจารณาสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.25. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.53}$$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปสมการ (2.53) ใหม่ได้เป็น

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \tag{2.54}$$

พบว่า $M(x, y) = 3xy + y^2$ และ $N(x, y) = x^2 + xy$ และได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y,$$
$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}dx\right) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

เมื่อนำ μ ที่ได้คูณกับสมการ (2.54) ได้

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

และพบว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2) = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + x^2y)$$

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง ทำให้เราได้ผลเฉลยของสมการ (2.53) คือ

$$f(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 2.26. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y\ dx + (2x - ye^y)\ dy = 0 \tag{2.55}$$

วิธีทำ พบว่า $M(x, y) = y$ และ $N(x, y) = 2x - ye^y$ และได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = \frac{1}{y}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น ดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{1}{y} dy\right) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

เมื่อนำ μ ที่ได้คูณกับสมการ (2.55) ได้

$$y^2\ dx + (2xy - y^2 e^y)\ dy = 0$$

และพบว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y^2 e^y)$$

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง ทำให้เราได้ผลเฉลยของสมการ (2.55) คือ

$$f(x, y) = xy^2 - y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

แบบฝึกหัด

จงหาตัวประกอบปริพันธ์ พร้อมทั้งหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $dx - 2x\ dy = 0$

2. $(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

3. $y' = e^{2x} + y - 1$

4. $dx + (x/y - \sin y)dy = 0$

5. $(3x^2 + y)dx + (x^2 y - x)dy = 0$

6. $y\ dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

7. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$

8. $\left[4\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3}{y}\right] dx + \left[3\dfrac{x}{y^2} + 4y\right] dy = 0$

2.10 สรุป

โดยทั่วไป เราจะเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในรูป*อนุพันธ์*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรไม่อิสระ

ในบทนี้ ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหา สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งรูปแบบต่างๆ ได้แก่

- สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย (หัวข้อ 2.2 หน้า 12)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

- สมการแยกกันได้ (หัวข้อ 2.3 หน้า 13)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

- สมการเอกพันธุ์ (หัวข้อ 2.5 หน้า 21)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- สมการเชิงเส้น (หัวข้อ 2.6 หน้า 28)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

- สมการแบร์นูลลี (หัวข้อ 2.7 หน้า 34)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

- และ สมการแบบแม่นตรง (หัวข้อ 2.8 หน้า 37)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ในการศึกษาเรื่องผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป* ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีค่าคงตัวใดๆ ปรากฏอยู่ แต่ในการศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ บางครั้งผลเฉลยที่ได้ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบางอย่างที่กำหนดให้ ซึ่งเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาเรื่องนี้ ได้ถูกกล่าวถึงในหัวหัวข้อ*ปัญหาค่าตั้งต้น* (หัวข้อ 2.4 หน้า 19)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นนั้น เริ่มต้นโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่กำหนด นั่นทำให้ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นเป็น*ผลเฉลยเฉพาะ*

บทที่ 3
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง

เนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ คือ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์*อันดับที่สอง*[1] (second-order differential equation) และ การหาผลเฉลยของสมการ

เนื่องด้วย ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง จำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับ *จำนวนเชิงซ้อน* ดังนั้นเนื้อหาในส่วนแรกของบท จะกล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อนพอสังเขป และเนื้อหาในส่วนที่เหลือของบท จะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองในบางรูปแบบ รวมทั้งการหาผลเฉลยของ *ปัญหาค่าตั้งต้น* และ *ปัญหาค่าขอบ*

3.1 จำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาสมการกำลังสอง $x^2+1=0$, พบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริง เพราะว่า*ไม่มีจำนวนจริงใดๆ ที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเป็นลบ* ในต้นคริสต์ศตวรรตที่ 16 สัญลักษณ์ $\sqrt{-1}$ ได้ถูกเสนอขึ้นมา เพื่อจะให้เป็นผลเฉลยของสมการกำลังสอง $x^2+1=0$ เราเรียกสัญลักษณ์นี้ (ซึ่งภายหลังนิยมเขียนแทนสัญลักษณ์นี้ด้วย i) ว่า*จำนวนจินตภาพ* (imaginary number) โดยที่จำนวนจินตภาพนี้ เราสามารถนำมาใช้ในระบบพีชคณิตทั่วไป (บวก, ลบ, คูณ, หาร และ ถอดราก) ได้เหมือนกับจำนวนจริงๆ เพียงแต่แตกต่างกันที่ กำลังสองของค่านี้มีค่าเป็น -1 ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการกำลังสอง $x^2+1=0$ ได้เป็น

$$x^2+1=x^2-i^2=(x+i)(x-i)$$

ซึ่งได้ว่าผลเฉลยของสมการคือ $x=\pm i$

เรารวมเรียนจำนวนจริง, จำนวนจินตภาพ และ ค่าพีชคณิตระหว่างจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ (เช่น $2i$, $-9i$, $\frac{10}{11}i$, $2+3i$, $\dfrac{2-3i}{4}$, $-5+i$ เป็นต้น) ว่า*จำนวนเชิงซ้อน* (complex numbers)[2]

[1] ดูบทนิยามเรื่อง*อันดับ* หน้า 2

[2] อ่านเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อนเพิ่มเติมได้ใน [4, 10]

3.1.1 รูปแบบและคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

เรามักเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป

$$z = a + bi,$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $i = \sqrt{-1}$

- เราเรียก a ว่า *ส่วนจริง* (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{Re}(z)$
- และเรียก b ว่า *ส่วนจินตภาพ* (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{Im}(z)$

ในบางครั้ง เราอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูปคู่อันดับ[3] (a, b) แทน

คุณสมบัติต่างๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ และ $z_3 = e + fi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ โดย a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

- **การเท่ากัน**: $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
- **การบวก** :$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- **การลบ** :$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- **การคูณ** : $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- **การสลับที่การบวก** : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- **การสลับที่การคูณ** : $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- **การเปลี่ยนกลุ่มการบวก** : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

[3]ในช่วงต้นศตวรรษที่ 19 คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) และ เซอร์ วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) เป็นผู้เสนอถึงแนวคิดการนิยามจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) และคุณสมบัติต่างๆของจำนวนเชิงซ้อน ทั้งเกาส์และแฮมิลตันได้นำเสนอเรื่องนี้ในช่วงเวลาใกล้เคียงกัน โดยที่ทั้งคู่ไม่ได้คิดเรื่องนี้ร่วมกันมาก่อน แนวความคิดที่ทั้งคู่ได้นำเสนอ ยังคงใช้อยู่จนถึงปัจจุบัน

- **การเปลี่ยนกลุ่มการคูณ** : $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$

- **การกระจาย** : $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

- **สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)** : $\overline{z_1} = \overline{a + bi} = a - bi$

- **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) หรือ มอดุลัส (modulus)** : $|z_1| = \sqrt{z_1\overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ซึ่งได้ว่า $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$

- **การหาร** : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก (principal argument)** : $\text{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$, ดังนั้น $\text{Arg}(z_1) \in (-\pi, \pi]$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อน (argument of a complex number)** : $\arg(z_1) = \theta$, โดยที่ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ ดังนั้น $\arg(z_1) = \text{Arg}(z_1) + 2n\pi, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

ตัวอย่าง 3.1. ให้ $z_1 = 3 + 4i$ และ $z_2 = 2 - 5i$ เราได้ว่า

- **การบวก**: $z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (2 - 5i) = (3 + 2) + (4 - 5)i = 5 - i$

- **การลบ**: $z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (2 - 5i) = (3 - 2) + (4 + 5)i = 1 + 9i$

- **การคูณ**: $z_1z_2 = (3+4i)(2-5i) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5)) + (3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2)\, i = 26+2i$

- **สังยุคเชิงซ้อน**: $\overline{z_1} = \overline{3 + 4i} = 3 - 4i$ และ $\overline{z_2} = \overline{2 - 5i} = 2 + 5i$,

- **ค่าสัมบูรณ์**: $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ และ $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

- **การหาร**: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 4i}{2 - 5i} = \left(\dfrac{3 + 4i}{2 - 5i}\right)\left(\dfrac{\overline{2 + 5i}}{\overline{2 + 5i}}\right) = \dfrac{(3 + 4i)(2 + 5i)}{29} = -\dfrac{14}{29} + \dfrac{13}{29}i$

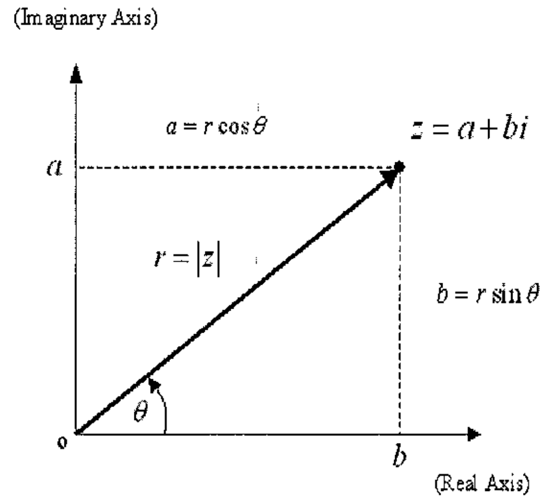
- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก**: $\text{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ และ $\text{Arg}(z_2) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อน**: $\arg(z_1)$ คือ มุม θ ซึ่ง $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$
  และ $\arg(z_2)$ คือ มุม θ ซึ่ง $\tan\theta = -\dfrac{5}{2}$

3.1.2 จำนวนเชิงซ้อนในเชิงเรขาคณิต

จากจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ ถ้าเราพิจารณาในเชิงคู่อันดับ (a,b) เราอาจจะแทนจำนวนเชิงซ้อนในลักษณะของจุดในระนาบ หรือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดปลายที่จุด (a,b) ก็ได้ เราเรียกระนาบดังกล่าวว่า*ระนาบเชิงซ้อน* (complex plane)

เราเรียกแกน x ในระนาบเชิงซ้อนว่า *แกนจริง* (real axis) และเรียกแกน y ว่า *แกนจินตภาพ* (imaginary axis)



รูปที่ 3.1: ระนาบเชิงซ้อน

ถ้า $(a,b) \neq (0,0)$ เราสามารถแทนค่า a และ b ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ได้เป็น

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta,$$

เมื่อ $r = |(a,b)|$ และ θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ (a,b) ทำกับแกนจริง (ดูรูป 3.1 ประกอบ) ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ สามารถเขียนได้ใน*รูปเชิงขั้วเชิงซ้อน* (complex polar form) ได้เป็น

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า[4] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ดังนั้น เพื่อความสะดวก บางครั้งเราอาจจะเขียน z ใน*รูปฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน* (complex exponential form)

$$z = re^{i\theta},$$

เมื่อ $r = |z|$ และ $\theta = \arg z$

[4]ดูการพิสูจน์ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ใน [5]

ตัวอย่าง 3.2.

- ถ้า $z = \sqrt{3} + i$ ดังนั้น

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \text{และ} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

ดังนั้น เราสามารถเขียน z ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{หรือ} \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- ถ้า $z = -1 + i$ ดังนั้น

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \text{และ} \quad \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1,$$

เราทราบว่า ทั้ง $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ จะมีค่าเท่ากับ -1 เหมือนกัน แต่เนื่องจาก z อยู่ ในจตุภาคที่สอง (second quadrant) เราจะได้ว่ามุม $\theta = \frac{3\pi}{4}$ นั่นคือ เราสามารถเขียน z ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{หรือ} \quad z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

หมายเหตุ สำหรับจำนวนเต็ม n ใดๆ,

$$re^{i\theta+2n\pi} = r\left(\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\right) = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า*ไม่ได้มีรูปพิกัดเชิงขั้วเพียงหนึ่งเดียว*ที่ใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน z ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.2 เราอาจเขียน $\sqrt{3} + i$ ในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\ldots, 2e^{i\frac{-11}{6}\pi}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{13}{6}\pi}, \ldots, 2e^{i\left[\frac{\pi}{6}+2n\pi\right]}, \ldots$ แต่เรามักนิยมให้ θ เป็นอาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก หรือ $\theta \in (-\pi, \pi]$ นั่นเอง

3.1.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน และ แคลคูลัสของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน

เราสามารถขยายแนวความคิดจากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^x, เมื่อ x เป็นจำนวนจริงไปสู่ *ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน* e^z (complex exponential function) เมื่อ $z = a + bi$ และ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ได้เป็น

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right)$$

คุณสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน[5]

ให้ $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ โดย a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} = e^{(a+b)+(c+d)i} = e^{a+b}\left[\cos(c+d) + i\sin(c+d)\right]$

2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} = e^{(a-b)+(c-d)i} = e^{a-b}\left[\cos(c-d) + i\sin(c-d)\right]$

3. $(e^{z_1})^n = e^{nz_1} = e^{na}\left[\cos(nb) + i\sin(nb)\right]$, เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

4. $\sqrt[n]{e^{z_1}} = e^{\frac{a+(b+2k\pi)i}{n}} = e^{a/n}\left[\cos\dfrac{b+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{b+2k\pi}{n}\right]$, $k = 1, \ldots, n-1$. และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

5. $e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 + 0i = 1, \quad e^{z+2n\pi i} = e^z e^{2n\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$

6. $e^{(2n+1)\pi i} = \cos\left((2n+1)\pi\right) + i\sin\left((2n+1)\pi\right) = -1 + 0i = -1$

7. $\left|e^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

8. $|e^{z_1}| = |e^a\left[\cos b + i\sin b\right]| = e^a$

9. $|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}|\,|e^{z_2}|$

10. $\arg(e^{z_1}) = \arg\left(e^a\left[\cos b + i\sin b\right]\right) = b$

และนอกจากนี้ เรายังสามารถนิยามอนุพันธ์และการหาค่าอินทิกรัล ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้โดยจะมีลักษณะเหมือนกับการหาอนุพันธ์ และ การหาค่าอินทิกรัล ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังของจำนวนจริง

11. ให้ $f(z) = e^z$ ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนคือ

$$\frac{de^z}{dz} = f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^z$$

12. $\dfrac{de^{az}}{dz} = ae^z$

13. $\displaystyle\int e^z dz = e^z + c$, เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

14. $\displaystyle\int e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a} + c$, เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

[5]ดูการพิสูจน์คุณสมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้ใน [4, 5, 10]

3.1.4 ผลเฉลยเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ในปีคริสต์ศักราช 1799, เกาส์สามารถพิสูจน์ได้ว่า สมการพหุนาม

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, มีผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อน[6] และนอกเหนือกว่านั้น เขาสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ผลเฉลยของสมการเชิงพหุนามนี้ ก็ยังคงอยู่ในระบบจำนวนเชิงซ้อนเช่นกัน เราเรียกสิ่งที่เกาส์พิสูจน์นี้ว่า**ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต** (fundamental theorem of algebra) ตัวทฤษฎีนี้ได้แสดงให้เห็นว่า เราไม่จำเป็นต้องสร้างระบบตัวเลขที่ทั่วไปกว่าจำนวนเชิงซ้อนอีก เพื่อจะใช้ในการแก้สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน เหมือนกับที่เราต้องสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อน เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และเราเรียกผลเฉลยของสมการพหุนามนี้ว่า *ราก* (roots) ของสมการ

เราอาจจะเขียนทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต[7] ในเชิงภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น

ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต 3.1. *สำหรับพหุนามกำลัง n (3.1) ใดๆ เราสามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป*

$$a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) = 0$$

จำนวน n ตัวประกอบ ได้เสมอ, เมื่อ $z_1, \ldots, z_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (ที่อาจจะมีบางค่าซ้ำกันก็ได้) และเรียก $z_1, \ldots, z_n$ ว่ารากของสมการ (3.1)

ตัวอย่างรากของสมการพหุนาม

- **รากของสมการกำลังสอง** (roots of quadratic equation)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$a(x - z_1)(x - z_2) = 0$$

---

[6] เราสามารถพิจารณา**จำนวนจริง** a ใดๆ ว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยให้ a มีค่าเป็น $a + 0i$ หรือ $(a, 0)$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

[7] ดูแนวคิดในการพิสูจน์ในได้ [8]

ผลเฉลย : $z_1, z_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง เราเรียก $D = b^2 - 4ac$ ว่า*ดิสคริมิแนนต์* (discriminant) ของสมการกำลังสอง และ

$$z_1, z_2 = \begin{cases} \text{จำนวนจริงที่แตกต่างกัน} & \text{ถ้า } D > 0 \\ \text{จำนวนจริงที่เหมือนกัน} & \text{ถ้า } D = 0 \\ \text{จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน} & \text{ถ้า } D < 0 \end{cases}$$

- **รากของสมการกำลังสาม** (roots of cubic equation)

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = 0$$

ให้

$$\begin{array}{ll} Q = \frac{3a_1 - (a_2)^2}{p}, & R = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2(a_2)^2}{54}, \\ S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, & T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \end{array}$$

ผลเฉลย : $\begin{cases} z_1 = S + T - \frac{1}{3}a_2 \\ z_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \\ z_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \end{cases}$

ถ้า a_0, a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริง เราเรียก $D = Q^3 + R^2$ ว่า*ดิสคริมิแนนต์*ของสมการกำลังสาม และ

$$z_1, z_2, z_3 = \begin{cases} \text{จำนวนจริงหนึ่งจำนวนและจำนวนเชิงซ้อน} \\ \text{ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกันสองจำนวน} & \text{ถ้า } D > 0 \\ \text{จำนวนจริงทั้งสามจำนวน} \\ \text{และมีอย่างน้อยสองจำนวนที่เหมือนกัน} & \text{ถ้า } D = 0 \\ \text{จำนวนจริงที่แตกต่างกัน} & \text{ถ้า } D < 0 \end{cases}$$

นอกจากนี้ยังพบว่า

$$z_1 + z_2 + z_3 = a_2, \quad z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = a_1, \quad z_1z_2z_3 = -a_0$$

ตัวอย่าง 3.3. จงแยกตัวประกอบสมการ

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

วิธีทำ เราได้ว่าผลเฉลยของสมการคือ

$$z_1, z_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

ดังนั้นเราแยกตัวประกอบได้เป็น

$$2(x - z_1)(x - z_2) = 2(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i)$$

ตัวอย่าง 3.4. จงหารากของสมการ

$$z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 5i) = 0$$

วิธีทำ โดยสูตรการหาผลเฉลยของสมการเราได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1, z_2 &= \frac{4 + 3i \pm \sqrt{(4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i)}}{2} \\ &= \frac{4 + 3i \pm \sqrt{3 + 4i}}{2} \end{aligned}$$

ต้องการหาค่า $\sqrt{3 + 4i}$: สมมติให้ $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$, โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x + yi)^2 &= 3 + 4i \\ (x^2 - y^2) + 2xyi &= 3 + 4i \end{aligned}$$

เมื่อเปรียบเทียบส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพเราได้ว่า

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{และ} \quad 2xy = 4$$

จากสมการทางด้านขวามือ เราได้ $y = \dfrac{2}{x}$ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการทางด้านซ้ายมือ เราได้

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{4}{x^2} &= 3 \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

จากตรงนี้ เราได้ $x = \pm 2, \pm i$ แต่เนื่องจากเรากำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงดังนั้น เราจะได้ $x = \pm 2$

เมื่อ $x = 2$ ได้ $y = \frac{2}{x} = 1$ และเมื่อ $x = -2$ ได้ $y = -1$ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคือ

$$z_1, z_2 = \frac{4 + 3i \pm (2+i)}{2}$$

$$z_1 = 3 + 2i \qquad z_2 = 1 + i$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหารากที่ 4 ของ -4

วิธีทำ จากโจทย์เราอาจจะเขียนเป็นสมการพหุนามได้เป็น

$$z^4 = -4 \quad \text{หรือ} \quad z^4 + 4 = 0$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ เราจะเขียน -4 ในรูปฟังก์ชันยกกำลังเชิงซ้อนได้เป็น[8]

$$z^4 = e^{\ln 4 + i\pi}$$

ดังนั้น

$$z = e^{\frac{\ln 4 + (\pi + 2k\pi)i}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

ซึ่งจะมีผลเฉลยเป็น

$$z_1 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{3\pi}{4}i},$$
$$z_3 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{5\pi}{4}i}, \quad z_4 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{7\pi}{4}i}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i, \\
z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i, \\
z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -1 - i, \\
z_4 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 1 - i
\end{aligned}$$

[8] เราจะเขียน $-|a|$ ในรูปของฟังก์ชันเลขยกกำลัง $e^{\ln|a| + i\pi}$ หรือ ในรูปเชิงขั้ว $|a|\,(cos\pi + i\sin\pi)$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็น 0

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า

$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n+4} = 1,$$

และ

$$\frac{1}{i^{4n+1}} = -i,\ \frac{1}{i^{4n+2}} = -1,\ \frac{1}{i^{4n+3}} = i,\ \frac{1}{i^{4n+4}} = 1,$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. จงหารูปเชิงขั้วเชิงซ้อน และ รูปฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนของ

(a) $3 + 4i$

(b) $5 - 2i$

(c) -14

(d) $23i$

(e) $-12 + 13i$

(f) $-12 - 13i$

(g) 7

(h) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{-\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$

(i) $\sqrt{3} + \sqrt{5}i$

(j) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

(k) $-\dfrac{2i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$

(l) $\ln 2 + i \ln 4$

3. ถ้า $z_1 = 3 + 4i$ และ $z_2 = 5 - 2i$ จงหาค่าต่อไปนี้ในรูป $x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ

(a) $z_1 + z_2$

(b) $z_1 - z_2$

(c) $z_1 z_2$

(d) $\dfrac{1}{z_1}$

(e) $\dfrac{1}{z_2}$

(f) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(g) $4z_1 + 2z_2$

(h) $-z_1 + z_2 i$

(i) $(z_1)^{108}$

(j) $\dfrac{z_1}{z_1 + z_2}$

(k) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$

(l) $\dfrac{z_1 z_2}{z1 - z2}$

4. จงแสดงว่า

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

(c) $\overline{|z_1|} = |\overline{z_1}|$

(d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(e) $|z_1^n| = |z_1|^n$

(f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(g) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(h) $\operatorname{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(\overline{z_1})$

5. จงหาผลเฉลย**ทั้งหมด**ของสมการพหุนามต่อไปนี้
   (a) $z^2+5=0$
   (b) $z^2+z+1-i=0$
   (c) $z^4=4$
   (d) $z^4=4i$
   (e) $z^2-(5+i)x+8+i=0$
   (f) $z^4-2(1+3i)z^2-8+6i=0$
   (g) $z^8=1$
   (h) $z^4-4z^3+6z^2-4z+1=0$

3.2 รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$\frac{d^2y}{d^2x}=f(x,y,\frac{dy}{dx}),$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x, y และ $\frac{dy}{dx}$, x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรไม่อิสระ และ $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{d^2x}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x อันดับที่หนึ่ง และ ที่สอง ตามลำดับ

หรือในบางครั้ง เราอาจเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ในรูป

$$y''=f(x,y,y'),$$

เมื่อ y'' หมายถึง $\frac{d^2y}{dx^2}$ และ y' หมายถึง $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 3.6. ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

- $F=m\frac{d^2y}{dt^2}$ กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- $F_{\text{สปริง}}=m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$ กฎของฮุก (Hooke's law)
- $F_{\text{แรงเสียดทาน}}=my''=-by'$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่น (vibration motion equation)
- $my''+by'+ky=F_{\text{ภายนอก}}(t)$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่นชนิดมีแรงภายนอก (vibration motion equation with external force)
- $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\frac{1}{L}E(t)$ กฎของคีร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's loop law)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad \text{หรือ} \quad y'' = f(x)$$

ซึ่ง สามารถหาผลเฉลยของสมการได้ โดยการหาค่าอินทิกรัลโดยตรง

$$\begin{aligned} y' &= \int f(x)dx + c_1, \\ y &= \int \left[\int f(x)dx + c_1\right] dx + c_2 \\ &= \int \left[\int f(x)dx\right] dx + c_1x + c_2, \end{aligned}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

3.3 ปัญหาค่าขอบ

ในการหาผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เราพบว่าผลเฉลยทั่วไปที่หาได้ จะมี*ค่าคงตัวใดๆ* (arbitrary constant) ปรากฏอยู่ 1 จำนวน และสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ผลเฉลยทั่วไปที่ได้ ก็จะปรากฏค่าคงตัวใดๆ 2 จำนวน และโดยทฤษฎีบท[9] พบว่า สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n นั้น ผลเฉลยทั่วไปจะปรากฏค่าคงตัวใดๆ อยู่ n จำนวน

ในบทที่ผ่านมา ได้กล่าวถึง*ปัญหาค่าตั้งต้น* [10] ซึ่งประกอบด้วย

- สมการเชิงอนุพันธ์
- เงื่อนไข ซึ่งต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่า x เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ในการจะกำจัดค่าคงตัวใดๆ ที่ปรากฏอยู่ในผลเฉลย สำหรับปัญหาค่าตั้งต้นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งผลเฉลยมีค่าคงตัวใดๆ ปรากฏอยู่เพียงค่าเดียว เราใช้เงื่อนไขเพียง 1 เงื่อนไข เราก็สามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้ แต่สำหรับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง เราจำเป็นต้องมี*อย่างน้อยสองเงื่อนไข* เพื่อที่จะสามารถกำจัดค่าคงตัวทั้งสองค่าที่ปรากฏอยู่ในผลเฉลย ยกตัวอย่างเช่น

---

[9] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [13]

[10] ดูบทนิยามและรายละเอียดเรื่องปัญหาค่าตั้งต้นในหัวข้อ 2.4 หน้า 19

ตัวอย่าง 3.7. สมการ

$$y'' + y = 0 \tag{3.2}$$

มีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ (ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้ ว่าเป็นเฉลยโดยการแทนค่า y ลงในสมการ (3.2))

ถ้าสมการ (3.2) มีเงื่อนไขค่าตั้งต้นเพียง $y(0) = 0$ เราจะได้ว่า

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0$$

คือ $y = c_2 \sin x$ แต่ถ้าสมการ (3.2) มีทั้งเงื่อนไข $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 1$ เราได้

$$\begin{aligned} y' &= c_2 \cos x \\ y'(0) &= c_2 \cos 0 = c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

ซึ่งได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของข้อปัญหา คือ $y = \sin x$

และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เราจำเป็นต้องมี*อย่างน้อย n เงื่อนไข* เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยเฉพาะ

ตัวอย่าง 3.8. พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สี่

$$\begin{gathered} (x^2 - 4)\frac{d^4y}{dx^4} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + (\sin x)y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

ข้อปัญหาดังกล่าว ประกอบด้วย*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่* และ *เงื่อนไขตั้งต้น 4 เงื่อนไข* และข้อปัญหานี้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว[11] คือ

$$y(x) = 0$$

[11]ดูทฤษฎีบทการมีจริง และ มีอยู่หนึ่งเดียว ของผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (existence and uniqueness theorem) ได้ใน [13]

สำหรับข้อปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ต้องการสองเงื่อนไข เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะ แต่บางครั้งเงื่อนไขไม่ได้ถูกให้มาในลักษณะของ*เงื่อนไขค่าตั้งต้น*

แต่ให้มาในลักษณะ

$$y(x_1) = k_1 \quad \text{และ} \quad y(x_2) = k_2, \tag{3.4}$$

โดยเป็นเงื่อนไขที่จุด x_1 และ x_2 **ที่แตกต่างกัน**

เราเรียกเงื่อนไข (3.4) ว่า*เงื่อนไขขอบ* (boundary condition) และเรียกข้อปัญหา ที่มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง และ เงื่อนไข (3.4) ว่า*ปัญหาค่าขอบ* (boundary-valued problem)

และสำหรับผลเฉลยที่ได้ จะพิจารณาเฉพาะในช่วง $x \in [m, M]$, เมื่อ m คือ ค่าที่น้อยกว่าระหว่าง x_1 และ x_2 และ M คือค่าที่มากกว่าระหว่าง x_1 และ x_2 ($m = \min\{x_1, x_2\}$, $M = \max\{x_1, x_2\}$) ซึ่งจะแตกต่างจากปัญหาค่าตั้งต้น ที่เราจะพิจารณาผลเฉลยเฉพาะในย่านใกล้เคียงกับค่าตั้งต้น x_0

ตัวอย่าง 3.9. พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -3 \tag{3.5}$$

จากตัวอย่าง 3.7 เราทราบแล้วว่าผลเฉลยของสมการคือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และเมื่อแทนเงื่อนไขเราได้ว่า

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} -3 &= 3\cos(\frac{\pi}{2}) + c_2 \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= c_2 \cdot 1 \\ &= c_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา (3.5) คือ

$$y = 3\cos x - 3\sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ที่ผ่านมา ได้กล่าวไว้ว่า ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เราต้องการเงื่อนไขอย่างน้อย n เงื่อนไข เพื่อใช้กำจัดค่าคงตัวใดๆ จำนวน n ตัว แต่ตัวอย่างถัดไป จะแสดงให้เห็นว่า ในทางกลับกันอาจจะไม่จริง นั่นคือ ถึงแม้มีเงื่อนไขจำนวน n เงื่อนไข แต่เรา**อาจจะไม่สามารถกำจัดค่าคงตัวใดๆ ให้หมดไปได้**

ตัวอย่าง 3.10. พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y(\pi) = -3 \tag{3.6}$$

จากตัวอย่าง 3.7 เราทราบแล้วว่าผลเฉลยของสมการคือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และเมื่อแทนเงื่อนไขเราได้ว่า

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} -3 &= 3\cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) \\ &= 3 \cdot (-1) \\ &= -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา (3.6) คือ

$$y = 3\cos x + c_2 \sin x, \qquad x \in [0, \pi]$$

จากตัวอย่างนี้ ผู้อ่านเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่าปัญหาค่าขอบ (3.6) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง และมีเงื่อนไขขอบสองเงื่อนไขก็ตาม เงื่อนไขดังกล่าว ไม่ได้ช่วยให้สามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยเฉพาะของปัญหาค่าขอบต่อไปนี้

1. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y(\pi/2) = -3$

   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. $y'' - 25y = 0,\ y(-2) = y(2) = \cosh 10$

   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{5x}$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 0$

   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

4. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y(1) = e$

   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^x (c_1 + c_2 x)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

3.4 สมการเชิงเส้น

จากบทนิยาม 1.3 สมการเชิงเส้น (หน้า 2) เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง ได้เป็น

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_2(x) \neq 0$ และ $a_2,\ a_1,\ a_0,\ b$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

เนื่องจาก $a_2(x) \neq 0$ เราสามารถหารสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองดังกล่าวด้วย $a_2(x)$ และ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.7}$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ และ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}$

ถ้า $r(x) \equiv 0$ (นั่นคือ $r(x) = 0$ ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงที่พิจารณา) สมการ (3.7) จะสามารถถูกเขียนได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.8}$$

และเราเรียกสมการนี้ว่า *สมการเอกพันธ์*[12] (homogeneous equation) แต่ ถ้า $r(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (3.7) ว่า *สมการไม่เอกพันธ์* (nonhomogeneous equation)

เพื่อความสะดวกในบทนี้เราจะใช้คำว่า "สมการเชิงเส้น" แทนคำว่า "สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง"

ถ้า $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นค่าคงตัว เราเรียกสมการ ว่า*สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*

ตัวอย่าง 3.11.

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y^2 = e^x$
  ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

- สมการ $(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้น แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธ์

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y = e^x$
  เป็นสมการเชิงเส้น แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธ์

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้น และเป็นสมการเอกพันธ์

- สมการ $y'' + 3y' + 5y = e^x$
  เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธ์

- สมการ $y'' + 3y' + 5y = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และเป็นสมการเอกพันธ์

---

[12]สังเกตว่า คำว่า"สมการเอกพันธ์" ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง จะใช้ในความหมายที่แตกต่างกัน

แบบฝึกหัด

จงหาตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าใช่ ให้ระบุว่าเป็นสมการเอกพันธ์ หรือ สมการไม่เอกพันธ์ พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสมการดังกล่าว มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวหรือไม่

1. $6\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = xy$
2. $y'' + (1-x)y' + xy = \sin x$
3. $xy'' - yy' = \sin x$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
5. $3t^2\dfrac{d^2x}{dt^2} = t\dfrac{dx}{dt} + 4x - \ln t$
6. $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \cos\theta$
7. $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = \tan\theta$
8. $\dfrac{d^2s}{dx^2} + 3\dfrac{ds}{dx} - s^{1/2} = x^2$

3.5 ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธ์

ก่อนที่จะกล่าวถึง*ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธ์* เราจะพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 3.12. พิจารณาสมการเอกพันธ์

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.9}$$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $y_1 = e^x$ และ $y_2 = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) นอกจากนี้ยังพบว่า $2e^x + 3e^{2x}$, $-e^x + \sqrt{2}e^{2x}$ และ $\dfrac{(\ln 2)e^x - (\ln 3)e^{2x}}{2}$ ก็คงเป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) ด้วย ไม่เพียงเท่านี้ ไม่ว่าจะเลือกค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 และให้

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

ซึ่งได้ว่า

$$y' = c_1e^x + 2c_2e^{2x} \quad \text{และ} \quad y'' = c_1e^x + 4c_2e^{2x}$$

ทำให้

$$y'' - 3y' + 2y = \left(c_1e^x + 4c_2e^{2x}\right) - 3\left(c_1e^x + 2c_2e^{2x}\right) + 2\left(c_1e^x + c_2e^{2x}\right) \equiv 0$$

นี้แสดงว่า ถ้า e^x และ e^{2x} เป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ (3.9) ด้วยเหมือนกัน

บทนิยาม 3.1. ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่นิยามบนโดเมนและโดเมนร่วมเกี่ยว (codomain) เดียวกัน เราเรียกฟังก์ชัน

$$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ ว่า *ผลรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของ f_1 และ f_2

จากแนวความคิดที่ได้กล่าวมาเกี่ยวกับ ผลเฉลยที่อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยอื่น นำไปสู่ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธ์ (fundamental theorem on homogeneous equations) ดังนี้

ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธ์ 3.2. *สำหรับสมการเอกพันธ์*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

*ถ้า y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของ**สมการเอกพันธ์เชิงเส้น**แล้ว ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยทั้งสอง*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์เชิงเส้น (3.10) ด้วย

พิสูจน์ เราทำการพิสูจน์โดยการแทนค่า y ลงในสมการ (3.10)

เนื่องจาก

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{และ} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

เมื่อแทนลงในสมการ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)\,(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)\,(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{=0 \text{ เนื่องจาก } y_1 \text{ เป็นคำตอบของสมการ}} + c_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{=0 \text{ เนื่องจาก } y_2 \text{ เป็นคำตอบของสมการ}} \\ &= c_10 + c_20 = 0 \end{aligned}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยใดๆ ของสมการเอกพันธ์ (3.10) ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการด้วย □

ทฤษฎีบทนี้ ได้กล่าวถึงผลเฉลยใหม่ ที่ได้จากการรวมเชิงเส้น ของผลเฉลยที่เราหามาได้ก่อนหน้านี้ แต่ทฤษฎีบทถัดไปจะกล่าวถึง รูปแบบผลเฉลยทั่วไปทั้งหมด*ที่เป็นไปได้* ของสมการเชิงเส้นอันดับที่สอง ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงนี้ ผู้แต่งจะไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ แต่ผู้อ่านสามารถดูการพิสูจน์ได้ใน [13]

ทฤษฎีบท 3.3. *ถ้า y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์เชิงเส้น*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.11}$$

ซึ่งนิยามบนช่วง I บางช่วง, โดย $\dfrac{y_1}{y_2}$ ไม่เป็นค่าคงตัวแล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.3) บนช่วง I ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ, ***เท่านั้น***

ทฤษฎีบทนี้บอกให้เรารู้ว่า ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับที่สอง ถ้าเราพบผลเฉลยสองผลเฉลย ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I หรือ

$$y_1 \neq ky_2, \qquad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

แล้ว เราไม่จำเป็นต้องหาผลเฉลยในรูปแบบอื่นๆ อีก

คำว่า "ฟังก์ชันไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน" จะสมมูลกับคำว่า "ฟังก์ชันเป็น*อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) ซึ่งกันและกัน" นั่นคือ ถ้า $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน จะหมายถึง $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ ค่าคงตัว c_1 และ c_2 มีค่าเป็นศูนย์เท่านั้น

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 0$$

ในบางครั้ง อาจจะใช้คำว่า "ฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน" แทนคำว่า "ฟังก์ชันไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน"

บทนิยาม 3.2. เราเรียกเซตของผลเฉลย y_1 และ y_2 ของสมการเอกพันธ์

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

หรือ $\{y_1, y_2\}$ ซึ่ง y_1 และ y_2 ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I ว่า*เซตของผลเฉลยมูลฐาน* (fundamental solution set)

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง

1. หาผลเฉลย y_1 และ y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I

2. ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

   เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

หมายเหตุ ในหนังสือบางเล่ม อาจมีขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ ของสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง แตกต่างกันคือ

1. หาผลเฉลย y_1 และ y_2 ที่

$$W[y_1, y_2](x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

   บนช่วง I แทนที่จะหาผลเฉลยที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I

2. ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป $y = c_1y_1 + c_2y_2$

และเรียก $W[y_1, y_2]$ ว่า*รอนสเกียนของ* y_1 *และ* y_2 (Wronskian of y_1 and y_2)

ซึ่งจริงๆ แล้วทั้งสองกรณีสมมูลกัน สามารถแสดงให้เห็นโดยง่าย คือ

- ถ้า y_1 และ y_2 ที่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$$y_1 = ky_2$$

  แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) &= [ky_2(x)]\,y_2'(x) - y_2(x)\,[ky_2(x)]' \\ &= k\,[y_2(x)y_2'(x) - y_2(x)y_2'(x)] \equiv 0 \end{aligned}$$

- ในทางกลับกัน ถ้า $W[y_1, y_2](x) = 0$

$$\begin{aligned}
y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) &= 0 \\
y_2(x)y_1'(x) &= y_1(x)y_2'(x) \\
\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} &= \frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \\
\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx &= \int \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}dx \\
\ln|y_1(x)| &= \ln|y_2(x)| + c, \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใดๆ} \\
y_1(x) &= ky_2(x),\ k = e^c
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.13. พิจารณาสมการเอกพันธ์

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.12}$$

เราทราบแล้วว่า $y_1 = e^x$ และ $y_2 = e^{2x}$ ต่างเป็นผลเฉลยของสมการ (3.12) บนช่วง $(-\infty, \infty)$ และ $\frac{y_1}{y_2} = e^{-x}$ ไม่เป็นค่าคงตัว ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ (3.12) คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 3.14. ถ้า $y_1 = \cos(3x)$ และ $y_2 = \sin(3x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + 9y = 0$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$, จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3 \tag{3.13}$$

วิธีทำ เราพบว่า $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\cos(3x)}{\sin(3x)} = \cot(3x)$ ไม่เป็นค่าคงตัว ดังนั้น โดยทฤษฎีบท เราได้ผลเฉลยทั่วไป

$$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และเราสามารถหาค่า c_1 ได้ คือ

$$\begin{aligned}
y(0) = 1 &= c_1\cos 0 + c_2\sin 0 \\
&= c_1 \cdot 1 + 0 = c_1
\end{aligned}$$

และเราสามารถหาค่า c_2 ได้ คือ

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d\ \cos(3x)}{dx} + \frac{d\ c_2 \sin(3x)}{dx} \\
&= -3\sin 3x + 3c_2 \cos 3x \\
y'(0) = 3 &= -\sin 0 + 3c_2 \cos 0 \\
&= 0 + 3c_2 \cdot 1 \\
&= 3c_2 \\
c_2 &= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหา (3.13) คือ $y = \cos 3x + \sin 3x$

แบบฝึกหัด

1. ตรวจสอบว่าฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ต่อไปนี้ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน(หรือนั่นคือ ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน) หรือไม่ (อาจจะตรวจสอบโดยตรง หรือ หาค่ารอนสเกียน ก็ได้)

   (a) $y_1(x) = e^{-x}\cos 2x, \quad y_2(x) = e^{-x}\sin 2x$

   (b) $y_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad y_2(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x$

   (c) $y_1(x) = x^2\cos(\ln x), \quad y_2(x) = x^2\sin(\ln x)$

   (d) $y_1(x) = \tan^2 x - \sec^2 x, \quad y_2(x) = 3$

   (e) $y_1(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right), \quad y_2(x) = 3\ln x$

   (f) $y_1(x) = xe^{2x}, \quad y_2(x) = e^{2x}$

   (g) $y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = e^{-4x}$

   (h) $y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = e^{x}$

2. ตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการต่อไปนี้หรือไม่ ถ้าใช่ ตรวจสอบดูว่า y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันหรือไม่ (อาจจะตรวจสอบโดยตรง หรือ หาค่ารอนสเกียน ก็ได้) และถ้า y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดังกล่าว และหาผลเฉลยของปัญหาที่สอดคล้องตามเงื่อนไขตั้งต้นที่ระบุให้

   (a) สมการ : $xy'' - 2y = 0$

   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(1) = -2,\ y'(1) = -7$

   $y_1 = x^2,\ y_2 = x^{-1}$

   (b) สมการ $y'' - 5y' + 6y = 0$

   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = -1,\ y'(0) = -4$

   $y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x}$

   (c) สมการ $y'' - 2y' + 5y = 0$

   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

   $y_1 = e^{x}\cos 2x,\ y_2 = e^{x}\sin 2x$

(d) สมการ $y'' - 5y' = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 2,\ y'(0) = 5$

$y_1 = 2,\ y_2 = e^{5x}$

(e) สมการ $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

$y_1 = e^x,\ y_2 = x^2 + 2x + 2$

(f) สมการ $y'' - y = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

$y_1 = \cosh x,\ y_2 = \sinh x$ โดยที่

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{และ} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \tag{3.14}$$

(a) จงแสดงว่า $S_1 := \{e^x, e^x - e^{-6x}\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (3.14)

(b) จงแสดงว่า $S_2 := \{e^x, 3e^x + e^{-6x}\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (3.14)

(c) จงตรวจสอบว่า $\phi(x) = e^{-6x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.14) และจงเขียน ϕ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกใน S_1 และ S_2

4. ตรวจสอบว่าผลเฉลย $y_1 = 1$ และ $y_2 = \ln x$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกันของสมการต่อไปนี้หรือไม่

$$y'' + (y')^2 = 0, \qquad (x > 0)$$

ตรวจสอบว่าผลเฉลย $y = c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นผลเฉลยของทั่วไปของสมการด้วยหรือไม่? ถ้าไม่จงวิเคราะห์ว่าทำไม ถึงขัดแย้งกับทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธ์

3.6 สมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

หัวข้อนี้ จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.15}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

จากแนวความคิดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$y' - \lambda y = 0, \tag{3.16}$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว, เราพบว่าผลเฉลยของสมการ (3.16) จะอยู่ในรูป $y = c_1 e^{\lambda x}$, เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใดๆ โดยแนวความคิดนี้ เราจะสมมติให้ผลเฉลยของสมการ (3.15) อยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda x},$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว และ c_1 เป็นค่าคงตัวใดๆ, และเมื่อแทนค่า y และ อนุพันธ์

$$y' = c_1 \lambda e^{\lambda x} \quad \text{และ} \quad y'' = c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}$$

ลงในสมการ (3.15) เราได้ว่า

$$a(c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}) + b(c_1 \lambda e^{\lambda x}) + c(c_1 e^{\lambda x}) = (a\lambda^2 + b\lambda + c)(c_1 e^{\lambda x}) = 0$$

ซึ่งตรงนี้ เราสามารถสรุปได้ว่า $y = c_1 e^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) ก็ต่อเมื่อ λ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.17}$$

เราเรียกสมการ (3.17) นี้ว่า*สมการแคแรกเทอริสติก* (characteristic equation) หรือ*สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ (3.15)

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.17) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ซึ่งทำให้ $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ และ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15)

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

- $b^2 - 4ac = 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

- $b^2 - 4ac < 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**[13]

3.6.1 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก เราทราบแล้วว่า

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) และ

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \quad \text{ไม่เป็นค่าคงตัว}$$

แสดงว่า y_1 และ y_2 ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 3.15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.18}$$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ (3.18) เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้น เราจะพิจารณาผลเฉลยจาก สมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

[13]ดูบทนิยาม "สังยุคเชิงซ้อน" หน้า 59

ซึ่งมีรากของสมการเป็น

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} = 2 \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} = 1$$

และมี $y_1 = e^{2x}$ และ $y_2 = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป ของสมการ (3.18) คือ

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 3.16. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2(e - \frac{1}{e}) \tag{3.19}$$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ (3.19) เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้น เราจะพิจารณาผลเฉลยจาก สมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการเป็น

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = -1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป ของสมการ (3.18) คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 0$

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= c_1e^0 + c_2e^0 \\ &= c_1 + c_2 \\ c_2 &= -c_1 \end{aligned}$$

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 1$

$$
\begin{aligned}
y(1) = 2(e - \frac{1}{e}) &= c_1 e^1 - c_1 e^{-1} \\
&= c_1(e - \frac{1}{e}) \\
c_1 &= 2 \\
\text{และ} \quad c_2 &= -c_1 = -2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหา (3.19) คือ

$$y = 2e^x - 2e^{-x}$$

3.6.2 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน

ในกรณีนี้ ผลเฉลยของสมการคาแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

ซึ่งทำให้ $y_1 = y_2 = e^{-b/2a}$

เนื่องจาก $\dfrac{y_1}{y_2} = 1$ เราไม่อาจจะระบุได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป $y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$ ซึ่งมีค่าเป็น $y = c_0 e^{-\frac{b}{2a}x}$, เมื่อ $c_0 = c_1 + c_2$ ซึ่งจะดูเหมือนว่า มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น

แต่จากการสังเกต พบว่า ถ้า λ เป็นผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริส (3.17) และให้ $y = xe^{\lambda x}$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
ay'' + by' + cy &= a\left(xe^{\lambda x}\right)'' + b\left(xe^{\lambda x}\right)' + c\left(xe^{\lambda x}\right) \\
&= a\left(\lambda^2 xe^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x}\right)'' + b\left(\lambda xe^{\lambda x} + e^{\lambda x}\right)' + c\left(xe^{\lambda x}\right) \\
&= (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x} + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) xe^{\lambda x} \\
&= (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x} + 0 \cdot xe^{\lambda x} = (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x}
\end{aligned}
$$

และ สำหรับกรณีผลเฉลยของรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน (หรือก็คือ กรณี $b^2 - 4ac = 0$) ผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

นั่นทำให้ได้ว่า

$$ay'' + by' + cy \equiv 0$$

หรือ $y = xe^{\lambda}$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) ด้วยเหมือนกัน

เนื่องด้วย ทั้ง $y_1 = e^{\lambda x}$ และ $y_2 = xe^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) โดยที่ $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{x}$ ไม่เป็นค่าคงตัว โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 3.17. จงแก้สมการ

$$2y'' + 12y' + 18y = 0 \tag{3.20}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 + 12\lambda + 18 &= 0 \\ 2(\lambda + 3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก มีเพียงค่าเดียวคือ

$$\lambda = -3$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.20) คือ

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$$

ตัวอย่าง 3.18. หาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก มีเพียงค่าเดียวคือ

$$\lambda = 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

สำหรับเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + 0)e^0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

และ สำหรับเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y'(1) = 0$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} y' &= c_2 e^{2x} + 2(1 + c_2 x)e^{2x} \\ &= c_2(1 + 2x)e^{2x} + 2e^{2x} \\ y'(0) = 0 &= c_2 e^0 + 2e^0 \\ -2 &= c_2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y = (1 - 2x)e^{2x}$$

3.6.3 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ทำให้เราได้รากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad i = \sqrt{-1}$$

เราสามารถเขียนรากของสมการได้เป็น

$$\lambda_1 = r + is, \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = r - is$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยของสมการเป็น

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(r+is)x} = e^{rx}e^{isx} = e^{rx}\left[\cos(sx) + i\sin(sx)\right]$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(r-is)x} = e^{rx}e^{-isx} = e^{rx}\left[\cos(sx) - i\sin(sx)\right]$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y &= \overline{c_1}y_1 + \overline{c_2}y_2, \quad \text{เมื่อ } \overline{c_1}, \overline{c_2} \text{ เป็นค่าคงตัวใดๆ} \\ &= \overline{c_1}e^{rx}\left[\cos(sx) + i\sin(sx)\right] + \overline{c_2}e^{rx}\left[\cos(sx) - i\sin(sx)\right] \\ &= e^{rx}\left[(\overline{c_1} + \overline{c_2})\cos(sx) + i(\overline{c_1} - \overline{c_2})\sin(sx)\right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$ เป็นค่าคงตัวใดๆ และ i เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ $c_1 = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ และ $c_2 = i(\overline{c_1} - \overline{c_2})$ ดังนั้นเราได้ว่า c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ เขียนผลเฉลยทั่วไปได้ในรูป

$$y = e^{rx}\left[c_1\cos(sx) + c_2\sin(sx)\right] \tag{3.21}$$

หมายเหตุ ถึงแม้ว่าในการพิสูจน์ จะแสดงให้เห็นว่า พจน์ c_2 ปรากฏเป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่เราสามารถพิจารณา c_2 เป็นแค่ค่าคงตัวใดๆ ที่เป็นจำนวนจริงก็ได้ เพราะถ้าพิจารณา

$$y_1 = e^{rx}\cos(sx) \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{rx}\sin(sx)$$

พบว่าทั้งสองฟังก์ชัน ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันเพราะ $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{rx}\cos(sx)}{e^{rx}\sin(sx)} = \cot(sx)$ และเมื่อแทนค่า y ด้วย y_1 หรือ y_2 ลงไปในสมการเชิงอนุพันธ์ (3.15) พบว่าทั้งสองฟังก์ชันก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย นั่นแสดงว่า ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1e^{rx}\cos(sx) + c_2e^{rx}\sin(sx) = e^{rx}\left[c_1\cos(sx) + c_2\sin(sx)\right],$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีหน้าตาเหมือนกับผลเฉลย (3.21) โดยไม่ต้องพิจารณา c_2 ในกรณีที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 3.19. หาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + 4y = 0$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$$

ซึ่งรากทั้งสองเป็นจำนวนจินตภาพเพียงอย่างเดียว ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 3.20. หาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y(\frac{\pi}{6}) = 2e^{\frac{\pi}{24}}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$16\lambda^2 - 8\lambda + 145 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16 \cdot 145}}{2 \cdot 16} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 145}}{4} = \frac{1}{4} \pm 3i$$

ซึ่งรากทั้งสองเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = e^{x/4} \left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right],$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 0$

$$
\begin{aligned}
y(0) = -2 &= e^0\left[c_1\cos 0 + c_2\sin 0\right] \\
&= c_1
\end{aligned}
$$

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = \frac{\pi}{6}$

$$
\begin{aligned}
y(\frac{\pi}{6}) = 2e^{\frac{\pi}{24}} &= e^{\frac{\pi}{24}}\left[-2\cos\frac{\pi}{2} + c_2\sin\frac{\pi}{2}\right] \\
&= c_2 e^{\frac{\pi}{24}} \\
c_2 &= 2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบคือ

$$y = 2e^{x/4}\left(\sin 3x - \cos 3x\right)$$

3.6.4 สรุป

ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.22}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เราจะพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.23}$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.23) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

  ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $b^2 - 4ac = 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

  ถ้า $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

- $b^2 - 4ac < 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

  ถ้า $\lambda_1 = r + is$ และ $\lambda_2 = r - is$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

  เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

แบบฝึกหัด

1. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ต่อไปนี้

(i) $y'' + y' - 6y = 0$

(ii) $y'' + 2y' + y = 0$

(iii) $y'' + 8y = 0$

(iv) $2y'' - 4y' + 8y = 0$

(v) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(vi) $y'' - 9y' + 20y = 0$

(vii) $2y'' + 2y' + 3y = 0$

(viii) $4y'' - 12y' + 9y = 0$

(ix) $y'' + y' = 0$

(x) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(xi) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(xii) $y'' + y' - y = 0$

(xiii) $y'' - 6y' + 10z = 0$

(xiv) $2y'' + 7y' - 4y = 0$

(xv) $2y'' + 13y' - 7y = 0$

(xvi) $y'' - y' - 11y = 0$

(xvii) $4y'' + 20y' + 25y = 0$

(xviii) $y'' - 6y' + 25y = 0$

(xix) $4y'' + 20y' + 24y = 0$

(xx) $y'' + 2y' + 3y = 0$

(xxi) $y'' = 4y$

(xxii) $4y'' - 8y' + 7y = 0$

(xxiii) $2y'' + y' - y = 0$

(xxiv) $y'' + 4y' + 5y = 0$

(xxv) $16y'' - 8y' + y = 0$

(xxvi) $y'' + 4y' - 5y = 0$

(xxvii) $y'' - y' - 2y = 0$

(xxviii) $y'' - 10y' + 26y = 0$

(xxix) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(xxx) $y'' = 4y' - 7y$

(xxxi) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(xxxii) $6y'' + y' - 2y = 0$

(xxxiii) $4y'' - 4y' + y = 0$

(xxxiv) $3y'' + 11y' - 7y = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$ $\quad y(1) = e^2, \quad y'(1) = 3e^2$

(b) $y'' - 6y' + 5y = 0,$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 11$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

(d) $y'' + 4y' + 5y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$

(f) $y'' + 8y' - 9y = 0,$ $\quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$

(g) $y'' + 2y' - 8y = 0,$ $\quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -12$

(h) $y'' + y' = 0,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

(i) $y'' + 2y' + y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$

(j) $y'' - 4y' + 3y = 0,$ $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1/3$

(k) $y'' - 2y' - 2y = 0,$ $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

(l) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 25/3$

(m) $y'' - 4y' - 5y = 0,$ $\quad y(-1) = 3, \quad y'(-1) = 9$

(n) $y'' - 4y' + 4y = 0,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$

(o) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ $\quad y(\pi) = e^{\pi}, \quad y'(\pi) = 0$

3.7 การใช้ผลเฉลยหนึ่งหาอีกผลเฉลยหนึ่งในสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

เนื่องจากเราทราบแล้วว่าสำหรับสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองใดๆ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{3.24}$$

ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยที่อิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน

ที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลย y_1 และ y_2 กรณีเฉพาะสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สอง**ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเท่านั้น** แต่สำหรับกรณีสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองทั่วๆไป โดยปกติแล้วเป็นการยากที่จะหาผลเฉลย y_1 และ y_2 ถ้าโชคดี เราอาจจะได้ผลเฉลยหนึ่งผลเฉลย จากการ*เดาและลองแทนค่า*

ขั้นตอนวิธีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะกล่าวถึงการใช้ผลเฉลยหนึ่งผลเฉลยที่ได้มาก่อน มา*ลดอันดับ*ของสมการเชิงอนุพันธ์ จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง เป็น*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งอย่างง่าย* ซึ่งเราสามารถแก้ได้ และผลเฉลยที่ได้จากการแก้ จะเป็นผลเฉลยอีกผลเฉลย *ที่เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกันกับผลเฉลยแรก*

สมมติว่า เรามี y_1 ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (3.24) เนื่องจากเราต้องการผลเฉลย y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับ y_1 ดังนั้น เราจะให้

$$y_2 = v(x)y_1,$$

$v(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และพบว่าอนุพันธ์ของ y_2 คือ

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$
$$y_2'' = v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''$$

เนื่องจาก y_2 ผลเฉลยของสมการ (3.24)

$$a(x)\left(v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''\right) + b(x)\left(v'(x)y_1 + v(x)y_1'\right) + c(x)v(x)y_1 = 0$$

จัดรูปได้เป็น

$$(a(x)y_1)\,v''(x) + (2a(x)y_1' + b(x)y_1)\,v'(x) + \underbrace{(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1)}_{=0 \text{ เพราะว่า } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยของ (3.24)}} v(x) = 0$$

นั่นคือเราได้สมการ

$$(a(x)y_1)\,v''(x) + (2a(x)y_1' + b(x)y_1)\,v'(x) = 0 \tag{3.25}$$

ให้ $u = v'$ ดังนั้น $\dfrac{du}{dx} = u' = v''$ และสามารถเขียนสมการ (3.25) ใหม่ได้เป็น

$$(a(x)y_1)\,\frac{du}{dx} + (2a(x)y_1' + b(x)y_1)\,u = 0$$

ซึ่งนี้เป็นสมการแยกกันได้[14] และมีผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}du &= \left(-\frac{2a(x)y_1' + b(x)y_1}{a(x)y_1}\right)dx = \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx \\
\int \frac{1}{u}du &= \int \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
\ln u &= -2\ln y_1 - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
u &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}
\end{aligned}$$

เมื่อ แทนค่า $u = v'$ กลับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
v' &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \\
v &= \int \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $y_2 = vy_1$ ดังนั้น เราได้ผลเฉลยอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx$$

หมายเหตุ ที่ละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์หลังจากหาค่าอินทิกรัล $\int \frac{1}{u}du$ และ $\int \frac{y_1'}{y_1}dx$ และละเครื่องหมายค่าคงตัวของการอินทิเกรต เพราะว่าเราต้องการแค่อีก*หนึ่งผลเฉลยที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับผลเฉลย* y_1 เท่านั้น ซึ่งในการหาผลเฉลยทั่วไป $y = c_1y_1 + c_2y_2$ จะปรากฏค่าคงตัวใดๆ และ โดยทฤษฎีบท 3.3 แสดงให้เราเห็นแล้วว่าเราจะได้ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของสมการ (3.24)

[14]ดูเรื่องสมการแยกกันได้หน้า 13

ตัวอย่าง 3.21. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \tag{3.26}$$

วิธีทำ จากการหาลองแทนค่า เราพบว่า

$$y_1 = x$$

เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.26)

สมการ (3.26) มีสัมประสิทธิ์ $a(x) = x^2$, $b(x) = x$ นั่นคือ

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

ดังนั้นผลเฉลยอีกหนึ่งผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= -\frac{1}{2}(x \frac{1}{x^2}) \\ &= -\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

ซึ่ง ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.26) คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 x + c_2(-\frac{1}{2x}) \\ &= c_1 x + c_2^* \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $c_2^* = -c_2/2$

ตัวอย่าง 3.22. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.27}$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $b^2 - 4ac = 0$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่า $y_1 = e^{\lambda x}$, เมื่อ $\lambda = -\frac{b}{2a}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.27)

และได้ว่าอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{-2\lambda x} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{-2(-\frac{b}{2a})x} e^{-\frac{b}{a}x} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{\frac{b}{a}x} e^{-\frac{b}{a}x} dx \\ &= e^{\lambda x} \int 1 dx \\ &= e^{\lambda x} x \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.27) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ ซึ่งสอดคล้องกับเนื้อหาเรื่อง **3.6.2 กรณีผลเฉลยของรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน** หน้า 86

แบบฝึกหัด

จงใช้ผลเฉลยที่ให้มาของสมการเชิงอนุพันธ์หาอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ รวมทั้งหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นด้วย

1. $y'' + 2y' - 15y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = e^{3x}$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = e^{x}$

3. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{-1}$

4. $x^2y'' + 6xy' + 6y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{-2}$

5. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{2}$

6. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x$

7. $x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{-1}$

8. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x$

9. $xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = \sin(x^2)$

10. $(x-1)y'' - xy' + y = 0,\ x > 1,$ $\quad y_1(x) = e^{x}$

11. $xy'' - (x+1)y' + y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = e^{x}$

12. $x^2y'' - (x - 0.1875)y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$

13. $xy'' - (1-2x)y' + (x-1)y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = e^{x}$

14. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 0,\ x > 0,$ $\quad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

3.8 สมการไม่เอกพันธุ์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.28}$$

เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันของ x และ $r(x) \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) เราจำเป็นต้องใช้**สมการเอกพันธุ์**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.29}$$

ช่วยในการหาผลเฉลย เราเรียกสมการ (3.29) ว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง (related homogeneous equation) กับสมการไม่เอกพันธุ์* (3.28) สมมติว่าเรามี y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.28) นั่นคือ

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

ให้ y_{p_2} เป็นผลเฉลยใดๆ ของสมการ (3.28) ดังนั้น

$$y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2} = r(x)$$

เช่นกัน และพบว่า

$$\begin{aligned}
& (y_{p_2} - y_p)'' + p(x)(y_{p_2} - y_p)' + q(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \; & \left(y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}\right) - \left(y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p\right) \\
= \; & r(x) - r(x) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $y_{p_2} - y_p$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการเอกพันธุ์ (3.29)

ให้ y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (3.29) ดังนั้น $y_h = y_{p_2} - y_p$ และได้ว่าผลเฉลยใดๆของสมการ (3.28) ต้องอยู่ในรูป $y_{p_2} = y_h + y_p$ หรือกล่าวได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.28) คือ

$$y = y_h + y_p$$

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดย แทนค่า $y = y_h + y_p$ ลงในสมการ

$$\begin{aligned} & (y_h + y_p)'' + p(x)(y_h + y_p)' + q(x)(y_h + y_p) \\ = \; & (y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h) + \big(y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p\big) \\ = \; & 0 + r(x) \\ = \; & r(x) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.4. *สมมติให้ y_p เป็น**ผลเฉลยเฉพาะ**ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) ดังนั้น**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการ (3.28) คือ*

$$y = y_h + y_p$$

เมื่อ y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (3.29) ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28)

จากตรงนี้ทำให้เราได้ว่า

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง
2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์
3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

ตัวอย่าง 3.23. พิจารณาสมการ

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

ซึ่งสมการเอกพันธุ์นี้ มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $\lambda_1 = -1$ และ $\lambda_2 = -2$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

และเราพบว่า $y_p = \dfrac{e^x}{6}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x}{6}\right)'' + 3\left(\frac{e^x}{6}\right)' + 2\frac{e^x}{6} &= \frac{e^x}{6} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{3} \\ &= e^x\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = h_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{e^x}{6}$$

ในเนื้อหาที่ผ่านมา เราทราบวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์แล้ว แต่ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ เราจำเป็นต้องหาผลเฉลยเฉพาะให้ได้ก่อน หัวข้อที่จะกล่าวถัดไป จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ซึ่งจะกล่าวถึง 2 วิธีได้แก่

1. ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

2. การแปรผันของตัวแปรเสริม

3.8.1 ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ก่อนจะกล่าวถึงรายละเอียดระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ จะให้ผู้อ่านได้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 3.24. พิจารณาสมการ

$$y'' + 4y = 2e^{3x} \tag{3.30}$$

ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y'' + 4y = 0$$

ซึ่งสมการเอกพันธุ์นี้ มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $\lambda = \pm 2i$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

ในการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p เราจะพิจารณาทางขวาของสมการ (3.30) ก่อน เนื่องจากฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ทางด้านขวามือของสมการ อยู่ในรูป $r(x) = 2e^{3x}$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ทางผลเฉลยเฉพาะมีรูปแบบที่คล้ายๆ กันคือ

$$y_p = Ae^{3x}$$

เมื่อ A เป็นค่าคงตัวใดๆ (รูปแบบ y_p ไม่ได้เหมือนกับ $r(x)$ ทั้งหมด โดยมีส่วนที่แตกต่างคือ**สัมประสิทธิ์**) จากนั้นจะนำไปแทนค่าในสมการเพื่อหาค่าของสัมประสิทธิ์ A

$$y_p'' + 4y_p = (Ae^{3x})'' + 4(Ae^{3x}) = 9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = 13Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นจริงได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} 13A &= 2 \\ A &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.30) ซึ่งอยู่ในรูป $y = y_h + y_p$ คือ

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{2}{13}e^{3x}$$

หมายเหตุ สังเกตจากตัวอย่าง สิ่งที่ต้องหาในการหาผลเฉลยของสมการ คือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p เป็น ดังนั้นระเบียบวิธีที่จะกล่าวถึงซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่สมมติขึ้นมา จึงเป็นเหตุให้เรียกระเบียบวิธีนี้ว่า *ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์*

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (method of undetermined coefficients) เป็นระเบียบวิธีที่ใช้หาผลเฉลยเฉพาะ ซึ่งใช้ได้กับกรณี**สมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวเท่านั้น** ซึ่งถ้าจะกล่าวโดยละเอียด ก็คือ วิธีการนี้ใช้ได้กับกรณีเฉพาะ

$$ay'' + by' + cy = r(x), \tag{3.31}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว และ $r(x) \neq 0$ และ $r(x)$ ต้องมีรูปแบบตามฟังก์ชันทางด้านซ้ายของตาราง 3.1 เท่านั้น

ถ้าสมการไม่เอกพันธุ์นี้ มีสัมประสิทธิ์เป็น*ตัวแปร* หรือ ฟังก์ชัน $r(x)$ *ไม่เป็น*ไปตามรูปแบบฟังก์ชันทางด้านซ้ายของตาราง 3.1 เรา**ไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้**

หมายเหตุ สังเกตได้ว่าฟังก์ชันที่อยู่ทางขวาของตาราง 3.1 ซึ่งเราจะสมมติผลเฉลยเฉพาะ y_p ให้เป็น คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ *รูปแบบต่างๆ ที่เป็นไปได้ของผลเฉลย* ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับสอง และอันดับอื่นๆ

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 หรือไม่? ถ้าใช่จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูปทางขวาของตาราง 3.1 แต่

    - ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย
    - ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา
    - ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว, A, B เป็นค่าที่จะสมมติให้เป็นค่าคงตัวใดๆ

และ $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathcal{A}_n$ และ $\mathcal{B}_n$ เป็นพหุนามกำลัง n โดยที่

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_n} &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \\
\mathbf{B_n} &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0, \\
\mathcal{A}_n &= A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0, \\
\mathcal{B}_n &= B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0,
\end{aligned}$$

a_i, b_i, A_i และ B_i เป็นค่าคงตัวเมื่อ $i = 0, ..., n$

ตารางที่ 3.1: ตารางระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

หมายเหตุ สำหรับกรณีที่ $r(x)$ ไม่ได้เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 **แต่อยู่ในรูปผลรวม(หรือผลต่าง)**ของฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 เช่น ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) + r_2(x), \tag{3.32}$$

โดยที่ $r_1(x)$ และ $r_2(x)$ มีรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1

โดย*ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์* เราสามารถแยกหาค่าผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_1(x)$$

และผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_2(x)$$

ถ้าให้ $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$ และลองแทน y ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) เราได้

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy &= a(y_h + y_{p_1} + y_{p_2})'' + b(y_h + y_{p_1} + y_{p_2})' + c(y_h + y_{p_1} + y_{p_2}) \\
&= \underbrace{(ay_h'' + by_h' + cy_h)}_{=0} + \underbrace{(ay_{p_1}'' + by_{p_1}' + cy_{p_1})}_{=r_1(x)} + \underbrace{(ay_{p_2}'' + by_{p_2}' + cy_{p_2})}_{=r_2(x)} \\
&= 0 + r_1(x) + r_2(x) \\
&= r_1(x) + r_2(x)
\end{aligned}$$

แสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) จะอยู่ในรูป[15]

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

และในทำนองเดียวกันถ้า ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลต่างของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) - r_2(x), \tag{3.33}$$

[15]ดูเรื่อง **หลักการซ้อนทับของผลเฉลย** เพิ่มเติมหน้า **??**

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.33) จะอยู่ในรูป

$$y = y_h + y_{p_1} - y_{p_2}$$

ตัวอย่าง 3.25. จงใช้ตาราง 3.1 หารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = r(x), \tag{3.34}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $7\cos(3x)$	3. $x^2\cos(\pi x)$	5. $x^2e^x + 3xe^x$
2. $5e^{-3x}$	4. $2xe^x\sin x - e^x\cos x$	6. $\tan x$

วิธีทำ เราพิจารณาสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (3.34) คือ

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

ซึ่งสมการแคแรกเทอริสติกนี้มีรากได้แก่ $\lambda = 1, -3$ และได้ว่าผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x},$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

1. $r(x) = 7\cos(3x)$

   นี้คือ กรณี $r(x) = a\cos(\omega x)$ โดยที่ $a = 7$ และ $\omega = 3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

   $$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

2. $g(x) = 5e^{-3x}$

   นี้คือ กรณี $r(x) = ae^{\lambda x}$ โดยที่ $a = 5$ และ $\lambda = -3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น $y_p = Ae^{-3x}$ **แต่ y_p มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ c_2e^{-3x} ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x}$** เราต้องคูณ y_p ด้วย x ดังนั้น เราจะสมมติ y_p ให้มีค่าเป็น

   $$y_p = Axe^{-3x}$$

3. $r(x) = x^2\cos(\pi x)$

นี้คือ กรณี $r(x) = (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\omega x)$ โดยที่ $n = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = a_0 = 0$ และ $\omega = \pi$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = (A_2x^2 + A_1x + A_0)\cos(\pi x) + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\sin(\pi x)$$

4. $r(x) = 2xe^x\sin x - e^x\cos x$

เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น $r(x) = [2x\sin x - \cos x]\,e^x$ นี้คือ กรณี

$$r(x) = [\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\,e^{\lambda x}$$

โดยที่ $n = 1$, $\mathbf{A_n}(x) = 1\cdot x + 0$, $\mathbf{B_n}(x) = 0\cdot x + 1$, $\omega = 1$ และ $\lambda = 1$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = [(A_1x + A_0)\cos x + (B_1x + B_0)\sin x]\,e^x$$

5. $r(x) = x^2e^x + 3xe^x$

เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น $r(x) = (x^2 + 3x)e^x$ ซึ่งนี้คือกรณี

$$r(x) = (a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$$

โดยมี $a_2 = 1$, $a_1 = 3$, $a_0 = 0$ และ $\lambda = 1$ เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = (A_2x^2 + A_1x + A_0)e^x$$

แต่ y_p มีพจน์ A_0e^x ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ c_1e^x ซึ่งปรากฏในผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x}$ ดังนั้นเราต้องคูณ y_p ด้วย x และสมมติ y_p ให้มีค่าเป็น

$$y_p = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)e^x = (A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x)e^x$$

6. $r(x) = \tan x$

ในกรณีนี้ $r(x)$ ไม่ได้มีรูปแบบที่ปรากฏอยู่ทางซ้ายมือของตาราง 3.1 *เราไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้*

ตัวอย่าง 3.26. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{-5x}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 4e^{-5x}$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = Ae^{-5x}$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 25Ae^{-5x} + 15Ae^{-5x} + 2Ae^{-5} = 42Ae^{-5x}$$

เราได้ว่า

$$42Ae^{-5x} = 4e^{-5x}$$

$$42A = 4$$

$$A = \tfrac{2}{21}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{2}{21}e^{-5x}$$

ตัวอย่าง 3.27. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = 5e^x$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' - 2y' + y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 5e^x$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = Ae^x$$

แต่เนื่องจาก y_p มีพจน์ซ้ำกับพจน์ c_1e^x ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x และได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = Axe^x$$

แต่ y_p ที่ได้ใหม่ ก็ยังมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ c_2xe^x ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x ซ้ำอีกครั้งหนึ่ง ได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = Ax^2e^x$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= (Ax^2e^x)'' - 2(Ax^2e^x)' + Ax^2e^x \\ &= A\left[(2e^x + 4xe^x + x^2e^x) - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x\right] \\ &= Ae^x\left[2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2\right] \\ &= 2Ae^x \end{aligned}$$

เราได้ว่า

$$2Ae^x = 5e^x$$
$$2A = 5$$
$$A = \tfrac{5}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{5}{2}x^2e^x$$

ตัวอย่าง 3.28. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' = 2x + 5,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง $y'' + 2y' = 0$ ได้โดยพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = 0, -2$ และ ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1 e^0 + c_2 e^{-2x} = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 2x + 5$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = A_1 x + A_0$$

แต่เนื่องจาก y_p มีพจน์ A_0 ซ้ำกับพจน์ c_1 ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x และได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' &= 2A_1 + 2(2A_1 x + A_0) \\ &= 4A_1 x + 2(A_1 + A_0) \end{aligned}$$

เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 4A_1 x + 2(A_1 + A_0) &= 2x + 5 \\ 4A_1 &= 2 \\ A_1 &= \frac{1}{2} \\ 2(\frac{1}{2} + A_0) &= 5 \\ A_0 &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

โดยเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 e^0 + \frac{0}{2} + 2 \cdot 0 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

และ $y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} y' &= -2c_2 e^{-2x} + x + 2 \\ y'(0) = 0 &= -2c_2 e^0 + 0 + 2 \\ -2 &= -2c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ $c_1 = -1$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาคือ

$$y = e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

ตัวอย่าง 3.29. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1 + 5\sin x \tag{3.35}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.26 เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง $y'' + 2y' - 3y = 0$ คือ $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 3x + 1 + 5\sin x$ เราสามารถแยกคิดเป็นกรณี $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ โดยที่ $r_1(x) = 3x + 1$ และ $r_2(x) = 5\sin 5$ หรือนั่นคือ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + 2y' - 3y = 5\sin x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ $y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$

เนื่องจาก $r_1(x) = 3x + 1$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_1} = A_1x + A_0$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$(A_1x + A_0)'' + 2(A_1x + A_0)' - 3(A_1x + A_0) = -3A_1x + 2A_1 - 3A_0 = 3x + 1$$

เมื่อแก้สมการได้ $A_0 = -1$ และ $A_1 = -1$ ดังนั้น

$$y_{p_1} = -x - 1$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ $y'' + 2y' - 3y = 5\sin x$

  เนื่องจาก $r_2(x) = 5\sin x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\cos x + B\sin x)'' + 2(A\cos x + B\sin x)' - 3(A\cos x + B\sin x)\\ = (-A + 2B - 3A)\cos x + (-B - 2A - 3B)\sin x\\ = (-4A + 2B)\cos x + (-2A - 4B)\sin x = 5\sin x\end{aligned}$$

  ซึ่งได้ว่า

$$-4A + 2B = 0$$
$$-2A - 4B = 5$$

  เมื่อแก้สมการได้ $A = -\frac{1}{2}$ และ $B = -1$ ดังนั้น

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2}\cos x - \sin x$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.35) คือ

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^x + c_2e^{-3x} - x - 1 - \frac{1}{2}\cos x - \sin x$$

ตัวอย่าง 3.30. จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าขอบ

$$y'' + 9y = 18x - 5e^x + 12\cos(3x), \quad y(0) = \frac{1}{2},\ y(\frac{\pi}{6}) = \pi - \frac{e^{\pi/6}}{2} \tag{3.36}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง $y'' + 9y = 0$ ได้โดยพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

ซึ่งมีรากคือ $\lambda = \pm 3i$ และเราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y_h = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 18x - 5e^x + 12\cos(3x)$ เราสามารถแยกคิดเป็นกรณี $r(x) = r_1(x) - r_2(x) + r_3(x)$ โดยที่ $r_1(x) = 18x$, $r_2(x) = 5e^x$ และ $r_3(x) = 12\cos(3x)$ หรือนั่นคือ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + 9y = 18x$$

หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + 9y = 5e^x$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_3} จากสมการ

$$y'' + 9y = 12\cos(3x)$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ $y'' + 9y = 18x$

  เนื่องจาก $r_1(x) = 18x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_1} = A_1x + A_0$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$(A_1x + A_0)'' + 9(A_1x + A_0) = 9A_1x + 9A_0 = 18x$$

  เมื่อแก้สมการได้ $A_0 = 0$ และ $A_1 = 2$ ดังนั้น

$$y_{p_1} = 2x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ $y'' + 9y = 5e^x$

  เนื่องจาก $r_2(x) = 5e^x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_2} = Ae^x$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$(Ae^x)'' + 9(Ae^x) = 10Ae^x = 5e^x$$

  ซึ่งได้ว่า $A = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น

$$y_{p_2} = \frac{1}{2}e^x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_3} จากสมการ $y'' + 9y = 12\cos(3x)$

  เนื่องจาก $r_3(x) = 12\cos(3x)$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_3} = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

  แต่เนื่องจาก y_{p_3} มีพจน์ $A\cos(3x)$ ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ $c_1\cos(3x)$ ที่ปรากฏในผลเฉลย y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_{p_3} ด้วย x ได้

$$y_{p_3} = x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]$$

  เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right)'' + 9\left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right) \\ = \; & 6\left[-A\sin(3x) + B\cos(3x)\right] + (9-9)\left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right) \\ = \; & 6\left[-A\sin(3x) + B\cos(3x)\right] \end{aligned}$$

  ซึ่งได้ว่า

$$\begin{aligned} -6A\sin(3x) + 6B\cos(3x) &= 12\cos(3x) \\ A = 0 \qquad & B = 2 \end{aligned}$$

  ดังนั้น $$y_{p_3} = 2x\sin(3x)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.36) คือ

$$y = y_h + y_{p_1} - y_{p_2} + y_{p_3} = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + 2x - \frac{1}{2}e^x + 2x\sin(3x)$$

และเมื่อพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบที่ $x = 0$

$$\begin{aligned} y(0) = \frac{1}{2} &= c_1\cos(0) + c_2\sin(0) + 0 - \frac{1}{2}e^0 + 0 = c_1 - \frac{1}{2} \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

และที่ $x = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{6}) = \pi - \frac{e^{\pi/6}}{2} &= \cos(\frac{\pi}{2}) + c_2\sin(\frac{\pi}{2}) + 2\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}} + 2\frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= 0 + c_2 + \frac{\pi}{3} - \frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{2} + \frac{\pi}{3} \\ c_2 &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบคือ

$$y = \cos(3x) + \frac{\pi}{3}\sin(3x) + 2x - \frac{1}{2}e^{x} + 2x\sin(3x)$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y'' + 3y = -9$

(b) $y'' + 2y' - y = 10$

(c) $2y'' + y = 9e^{2x}$

(d) $y'' - y = 3e^{-2x}$

(e) $y'' - y' - 2y = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 1$

(f) $y'' - y' + 9y = 3\sin 3x$

(g) $y'' + 4y' + 5y = e^{3x}$

(h) $2y'' + 2y' - 4y = e^{-x}$

(i) $y'' + 5y' + 4y = \cos x$

(j) $y'' - 4y = 4x^2 + 4x + 6$

(k) $y'' - 3y' + 2y = x^3$

(l) $y'' + 2y' = 3\sin x - \cos x$

2. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$

(b) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

(c) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2x)$

(d) $y'' + 2y' = 2 + 4\sin(2x)$

(e) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

(f) $y'' + \omega_0^2 yx = \cos(\omega x) \quad (\omega^2 \neq \omega_0^2)$

(g) $y'' + 4y' = 4\cos(2x) + 6\cos x$

(h) $y'' - y' = -11x + 1$

(i) $y'' - 2y' - 3y = (3x^2 - 5)e^{-x}$

(j) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}\sin x$

(k) $y'' - 4y = \cos x - \sin x$

(l) $y'' + 9y = x^2e^{3x} + 6$

(m) $y'' + \omega_0^2 yx = \cos(\omega_0 x)$

(n) $y'' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y'' = 6x, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = -1$

(b) $y'' + y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

(c) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(d) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

(e) $y'' - y' - 2y = \cos x - \sin(2x), \quad y(0) = -\frac{7}{20},\ y'(0) = \frac{1}{5}$

(f) $y'' + y' - 12y = e^x + e^{2x} - 1, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

(g) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

4. **จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ** y_p **ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้**

(a) $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + \sin(3x)$

(b) $y'' + y = \sin x + x\cos x + 10^x$

(c) $y'' + y = x(1 + \sin x)$

(d) $y'' - 5y' + 6y = e^x\cos(2x) + e^{2x}(3x + 4)\sin x$

(e) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\sin(2x)$

(f) $y'' - y = e^{2x} + xe^{2x} + x^2e^{2x}$

(g) $y'' - y = e^x + xe^x + x^2e^x + x^3e^{-x}$

(h) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x} + e^{2x}$

(i) $y'' + 5y' + 6y = \sin x - \cos(2x)$

(j) $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1)\sin(2x) + 3e^{-x}\cos x + 4e^x$

(k) $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{-x}\cos(2x) - 2xe^{-2x}\cos x$

3.8.2 การแปรผันของตัวแปรเสริม

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 เท่านั้น

ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอวิธีหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ที่มีเงื่อนไขน้อยกว่า คือสามารถใช้กับสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็น*ตัวแปร* และฟังก์ชัน $r(x)$ *ไม่จำเป็นต้องมีรูปแบบตามตาราง* 3.1 เราจะเรียกวิธีการหาผลเฉลยนี้ว่า *การแปรผันของตัวแปรเสริม* (variation of parameters)

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{3.37}$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดย y_h อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของของผลเฉลย y_1 และ y_2

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

แนวความคิดในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 เป็น*ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว* $u(x)$ และ $v(x)$ ตามลำดับ[16]

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 \tag{3.38}$$

สำหรับการหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ เราจะเริ่มจาก

[16]เนื่องจากในบางครั้ง เราพิจารณาผลเฉลยทั่วไปในลักษณะของ "วงศ์ของผลเฉลย" โดยมีค่าคงตัว c_1 และ c_2 เป็นตัวแปรเสริม ดังนั้นวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะนี้ ที่มีสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 ไปเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว $u(x)$ และ $v(x)$ จึงเป็นเหมือนการเปลี่ยนตัวแปรเสริมไปเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x ดังนั้นเราจึงให้ชื่อวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะนี้ว่า "การแปรผันของตัวแปรเสริม"

1. พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ y_p

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

พบว่า ถ้าเราหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ y_p ก็จะปรากฏพจน์ u'' และ v'' ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองของ u และ v ตามลำดับ ซึ่งถ้านำ y_p, อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สองของ y_p เข้าไปแทนในสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) เพื่อหาค่า u และ v ก็จะทำให้เกิดภาระงานที่ต้องหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร $u,\ u',\ u''$ และ $v,\ v',\ v''$ ดังนั้น เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหานี้ เราจะเพิ่มเงื่อนไขให้

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{3.39}$$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$y_p' = uy_1' + vy_2'$$

และ อนุพันธ์อันดับสองของ y_p คือ

$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ (3.37)

$$a_2\left(uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'\right) + a_1\left(uy_1' + vy_2'\right) + a_0\left(uy_1 + vy_2\right) = r(x)$$
$$u\underbrace{\left(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1\right)}_{=0\text{ เพราะ } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + v\underbrace{\left(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2\right)}_{=0\text{ เพราะ } y_2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$
$$a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$

ดังนั้นเราได้

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)} \tag{3.40}$$

3. ทั้งสมการ (3.39) และ (3.40) ประกอบเป็นระบบสมการ

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= \frac{r(x)}{a_2(x)} \end{aligned} \tag{3.41}$$

ซึ่งมีผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u' = -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}, \qquad \text{และ} \qquad v' = \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')},$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

4. หาค่า u และ v ได้โดย

$$\begin{aligned} u(x) &= \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx \\ v(x) &= \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx \end{aligned} \tag{3.42}$$

เมื่อแทนค่า u และ v ที่ได้จาก (3.42) ลงใน y_p ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) คือ

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2, \end{aligned}$$

หมายเหตุ เราอาจจะพิจารณาระบบสมการ (3.41) ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{r} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

ซึ่งเราสามารถหา u' และ v' โดยหลักเกณฑ์ของคราเมอร์ (Cramer's rule)

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{r}' & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2\bar{r}}{W} \qquad \text{และ} \qquad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1\bar{r}}{W}, \tag{3.44}$$

เมื่อ

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

3. หาค่า u และ v

$$u(x) = \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx,$$
$$v(x) = \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx,$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

4. แทนค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ที่ได้ลงใน y_p

5. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2$$

ตัวอย่าง 3.31. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x \tag{3.45}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' + y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = u(x)\cos x + v(x)\sin x$$

เราได้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p' = -u(x)\sin(x) + u'(x)\cos x + v(x)\cos x + v'(x)\sin x$$

ซึ่งเราจะสมมติให้

$$u'(x)\cos x + v'(x)\sin x = 0 \tag{3.46}$$

และ อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p'' = -u'(x)\sin(x) - u(x)\cos(x) + v'(x)\cos x - v(x)\sin x$$

เมื่อนำ y_p และ y_p'' ไปแทนค่าในสมการ (3.45) เราได้

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= (-u'\sin(x) - u\cos(x) + v'\cos x - v\sin x) + (u\cos x + v\sin x) \\ &= u(-\cos x + \cos x) + v(-\sin x + \sin x) + (-u'\sin(x) + v'\cos x) \\ &= -u'\sin(x) + v'\cos x \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้เราได้ว่า

$$-u'\sin(x) + v'\cos x = \csc x \tag{3.47}$$

จากสมการ (3.46) และ (3.47) เราได้ระบบสมการ

$$\begin{gathered} u'\cos x + v'\sin x = 0 \\ -u'\sin(x) + v'\cos x = \csc x \end{gathered} \tag{3.48}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ (3.48) เพื่อหาค่า u' และ v' เราได้

$$\begin{aligned} u'(\cos^2 x + \sin^2 x) &= -\sin x \csc x \\ v'(\cos^2 x + \sin^2 x) &= \cos x \csc x \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$u' = -1 \quad \text{และ} \quad v' = \cot x$$

เมื่อทำการอินทิเกรต ก็จะได้

$$\begin{aligned} u &= \int -1dx \\ &= -x \\ v &= \int \cot x dx \\ &= \ln|\sin x| \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.45) คือ

$$y_p = u\cos x + v\sin x = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.45) คือ

$$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$$

ตัวอย่าง 3.32. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' - y = x\ln x \qquad (x > 0) \tag{3.49}$$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของสมการ (3.49) นี้ จะทำตาม*ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม*

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

   โดยตัวอย่าง 3.21 (หน้า 97) เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_h = c_1x + \frac{c_2}{x},$$

   เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)x + \frac{v(x)}{x}$$

3. ในที่นี้ เราพบว่า

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x \\
y_1' &= 1 \\
y_2 &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
y_2' &= -x^{-2} \\
r(x) &= x \ln x \\
\bar{r} &= \frac{r(x)}{a_2(x)} = \frac{x \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \\
W &= y_1 y_2' - y_2 y_1' = x(-x^{-2}) - x^{-1} \cdot 1 = -2x^{-1}
\end{aligned}
$$

และมีระบบสมการสำหรับหาค่า $u'(x)$ และ $v'(x)$ คือ

$$
\begin{aligned}
u'x + v'x^{-1} &= 0 \\
u' - v'x^{-2} &= \frac{\ln x}{x}
\end{aligned}
$$

หาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ได้คือ

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int -\frac{y_2 \bar{r}}{W} dx \\
&= \int -\frac{x^{-1}\left[(\ln x)/x\right]}{-2x^{-1}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x} dx \\
&= \frac{(\ln x)^2}{4} \\
v(x) &= \int \frac{y_1 \bar{r}}{W} dx \\
&= \int \frac{x\left[(\ln x)/x\right]}{-2x^{-1}} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int x \ln x dx \\
\text{(โดยการอินทิเกรตทีละส่วน)} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) \\
&= \frac{x^2}{8}(1 - 2\ln x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = u(x)x + v(x)x^{-1} = \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8}(1 - 2\ln x)$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.49) คือ

$$y = y_h + y_p = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8}(1 - 2\ln x)$$

หรือ

$$y = \tilde{c}_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} - \frac{1}{4}x\ln x$$

เมื่อ $\tilde{c}_1 = c_1 + \dfrac{1}{8}$

หมายเหตุ จะพบว่าทั้งสองตัวอย่างที่แสดง ในการหาค่าอินทิกรัลของ $u(x)$ และ $v(x)$ ผู้แต่งไม่ได้ใส่ค่าคงตัวของการอินทิเกรตลงไปด้วย เหตุที่ทำเช่นนั้นเนื่องจาก เราต้องการหา*ผลเฉลยเฉพาะ*

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

เพียงหนึ่งผลเฉลยเท่านั้น ฉะนั้นขอให้ได้ค่า $u(x)$ และ $v(x)$ *เพียงค่าเดียว* ก็เพียงพอสำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p แล้ว

ตัวอย่าง 3.33. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x + 3x - 1 \tag{3.50}$$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของสมการ (3.50) นี้ เราจะแยกหาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + y = \csc x$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + y = 3x - 1$$

จากตัวอย่าง 3.31 เราได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

และสำหรับผลเฉลย y_{p_1} เราทราบจากตัวอย่าง 3.31 แล้วว่า

$$y_{p_1} = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

สำหรับการหา y_{p_2} เราจะใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ในการหา (ดูระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์หน้า 102)

โดยตาราง 3.1 เราจะสมมติให้ $y_{p_2} = Ax + B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y''_{p_2} + y_{p_2} &= (Ax+B)'' + (Ax+B) \\ &= Ax + B = 3x - 1 \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ทำให้ได้ $A = 3,\ B = -1$ และ $y_{p_2} = 3x - 1$

ได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ 3.50 คือ

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1\cos x + c_2 \sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x| + 3x - 1$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้ทั้งวิธี*เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์* และ*การแปรผันของตัวแปรเสริม*

    (a) $y'' + 3y = -9$

    (b) $y'' + 2y' - y = 10$

    (c) $2y'' + y = 9e^{2x}$

    (d) $y'' - y = 3e^{-2x}$

    (e) $y'' - y' - 2y = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 1$

    (f) $y'' - y' + 9y = 3\sin 3x$

    (g) $y'' + 4y' + 5y = e^{3x}$

    (h) $2y'' + 2y' - 4y = e^{-x}$

    (i) $y'' + 5y' + 4y = \cos x$

    (j) $y'' - 4y = 4x^2 + 4x + 6$

    (k) $y'' - 3y' + 2y = x^3$

    (l) $y'' + 2y' = 3\sin x - \cos x$

2. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y'' + y = \tan x$

(b) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$

(c) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$

(d) $y'' + 4y = 3\csc(2x)$

(e) $y'' + 4y = \tan(2x)$

(f) $4y'' + y = 2\sec(x/2)$

(g) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln$

(h) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

(i) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(j) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec(2x)$

(k) $2y'' + 3y' + y = e^{-3x}$

(l) $y'' - 3y' + 2y = (1+e^{-x})^{-1}$

3.8.3 สรุป

ในส่วนนี้ได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นสองวิธีได้แก่

- ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์
- การแปรผันของตัวแปรเสริม

*ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์*เป็นวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ซึ่งมีรูปแบบตามตาราง 3.1 โดยรูปแบบของผลเฉลย y_p จะพิจารณาตามฟังก์ชัน $r(x)$

สัมประสิทธิ์ของผลเฉลย y_p หาได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ที่เกิดจากการคำนวณ y_p และอนุพันธ์ของ y_p ซึ่งปรากฏอยู่ในสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = r(x)$$

กับฟังก์ชัน $r(x)$ ทางขวามือของสมการไม่เอกพันธุ์

แต่วิธีนี้มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 (หน้า 105) เท่านั้น

ส่วน*วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม*สามารถใช้ได้กับทั้งสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันของตัวแปร* x

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = r(x)$$

รวมทั้งค่า $r(x)$ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นไปตามตาราง 3.1

การหาผลเฉลย y_p ในวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม จะเริ่มด้วยการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

จากนั้นจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

และเราคำนวณหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ได้โดย

$$\begin{aligned} u(x) &= \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx, \\ v(x) &= \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx, \end{aligned}$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2$$

3.9 สมการโคชี-ออยเลอร์

ในส่วนนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยของสมการแบบหนึ่ง ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์**ไม่เป็นค่าคงตัว** แต่เราสามารถแปลงให้สมการนี้อยู่ในรูป**สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว** ได้

บทนิยาม 3.3 (สมการโคชี-ออยเลอร์). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งอยู่ในรูป

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x), \tag{3.51}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $a \neq 0$, ว่า*สมการโคชี-ออยเลอร์* (Cauchy-Euler equation)

ตัวอย่าง 3.34.

- $3x^2y'' - 2xy' + 7y = \sin x$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 3$, $b = -2$, $c = 7$ และ $h(x) = \sin x$

- $2y'' - 3xy' + 11y = 3x - 1$ **ไม่เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  เพราะสัมประสิทธิ์หน้า y'' เป็น 2 **ไม่ได้**อยู่ในรูป ax^2

- $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 5x^2,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$ และ $h(x) = 5x^2$

- $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = \ln x,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 2$, $b = 2$, $c = 0$ และ $h(x) = \ln x$

- $2x^2y'' + 2y' + y = \ln x,\ x > 0$ **ไม่เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  เพราะสัมประสิทธิ์หน้า y' เป็น 2 **ไม่ได้**อยู่ในรูป bx

- $3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 3$, $b = 11$, $c = -3$ และ $h(x) = 0$

เราเรียกสมการโคชี-ออยเลอร์ที่ $h(x) \equiv 0$ ว่า*สมการโคชี-ออยเลอร์ชนิดเอกพันธุ์* (homogeneous Cauchy-Euler equation)

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการโคชี-ออยเลอร์

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x) \tag{3.52}$$

1. ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = e^t$ ซึ่งจะทำให้สมการ (3.52) เป็นสมการใหม่ ซึ่งขึ้นกับตัวแปรอิสระ t และจากการสมมติตัวแปรแบบนี้ทำให้ $x > 0$

2. เมื่อหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปร t โดย**กฎลูกโซ่** ทำให้ได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

นั่นคือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \tag{3.53}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}e^t \\ &= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\end{aligned}$$

และได้ว่า

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \tag{3.54}$$

3. แทนค่า $x\dfrac{dy}{dx}$ และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ลงในสมการ (3.52) ทำให้ได้

$$a(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + b\frac{dy}{dt} + cy = h(x), \qquad x > 0$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = h(e^t) \tag{3.55}$$

ซึ่งสมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

4. หาผลเฉลยของสมการ (3.55) โดยใช้วิธีที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว ซึ่งจะได้ผลเฉลยรูปของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t

$$y = \mathcal{Y}(t)$$

5. เขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x ได้โดยให้ $t = \ln x$

$$y = y(x) = \mathcal{Y}(\ln x)$$

ตัวอย่าง 3.35. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0,\ x > 0 \tag{3.56}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.34 เราทราบแล้วว่าสมการนี้เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์ที่มี $a = 3,\ b = 11,$ $c = -3$ และ $h(x) = 0$ โดยนั้นโดยการเปลี่ยนตัวแปร $x = e^t$ ทำให้เราแปลงสมการ (3.56) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + (11-3)\frac{dy}{dt} + (-3)y = 0$$

เมื่อจัดรูปสมการ ทำให้ได้

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \tag{3.57}$$

สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (3.57) ก็คือ

$$3\lambda^2 + 8\lambda - 3\lambda = (3\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

เนื่องจากรากของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $1/3$ และ -3 ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.57) คือ

$$y(t) = c_1e^{t/3} + c_2e^{-3t}$$

และได้ผลเฉลยของสมการ (3.56) คือ

$$y(x) = c_1e^{(\ln x)/3} + c_2e^{-3\ln x} = c_1x^{1/3} + c_2x^{-3}, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

ตัวอย่าง 3.36. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x^5}, \ x > 0 \tag{3.58}$$

วิธีทำ สมการ (3.58) เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์ที่มี $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$ และ $h(x) = \dfrac{4}{x^5}$

ให้ $x = e^t$ เราสามารถแปลงสมการ (3.58) เป็นสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (-2-1)\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{4}{(e^t)^5}$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4e^{-5t} \tag{3.59}$$

โดยการเปรียบเทียบกับตัวอย่าง 3.26 (หน้า 109) พบว่า สมการ (3.59) มีผลเฉลยคือ

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{2}{21}e^{-5t}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (3.58) คือ

$$y(x) = c_1e^{\ln x} + c_2e^{2\ln x} + \frac{2}{21}e^{-5\ln x} = c_1x + c_2x^2 + \frac{2}{21x^5}, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เมื่อสมมติให้ $x > 0$

(a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

(c) $4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(d) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(e) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(f) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0$

(g) $3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

(h) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

(i) $9x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

(j) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} + 10y = 0$

(k) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 4x - 6$

(l) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 2x^3$

(m) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4\ln x$

(n) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2x\ln x$

(o) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = 4\sin(\ln x)$

(p) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 9y = \cos(3\ln x)$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้ สำหรับปัญหาทุกข้อ จะสมมติให้ $x > 0$

(a) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0,$ $\quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 4$

(b) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0,$ $\quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$

(c) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -5$

(d) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x - 8,$ $\quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -1$

(e) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x\dfrac{dy}{dx} + 4y = 4x^2 - 6x^3,$ $\quad y(2) = 4, \quad y'(2) = -1$

(f) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 10x^2,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -6$

(g) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 2x^3,$ $\quad y(2) = 0, \quad y'(2) = -8$

(h) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6y = \ln x,$ $\quad y(1) = \frac{1}{6}, \quad y'(1) = -\frac{1}{6}$

3.10 รูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ในปีคริสต์ศักราช 1983 โซฟัส ลี (Sophus Lie) นักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ ได้แสดงให้เห็นว่า[17] สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง ที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริงนั้น เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองต่างๆ โดยที่*ผลเฉลยของสมการนั้นยังคงเดิม* ไปเป็นได้เพียงรูปต่อไปนี้เท่านั้น

- $y'' = f(y, y')$,
- $y'' = f(y')$,
- $xy'' = f(y')$,
- $y'' = Ce^{-y'}$,
- $y'' = C\,(y')^{\frac{a-2}{a-1}}, \ a \neq 0, \ \dfrac{1}{2}, \ 2$,
- $y'' = C\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}} e^{\left(b \tan^{-1} y'\right)}$,
- $xy'' = C\,(y')^3 - \dfrac{1}{2}y'$,
- $xy'' = y' + (y')^3 + C\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}$,
- $xy'' = y' - (y')^3 + C\left[1 - (y')^2\right]^{3/2}$,
- $y'' = C\left[\dfrac{1 + (y')^2 + (y - xy')^2}{1 + x^2 + y^2}\right]^{3/2}$,
- $y'' = 0$,

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ C เป็นค่าคงตัวใดๆ

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง ที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริง

$$y'' = f(x, y, y')$$

เป็นไปได้เพียง **11 รูปแบบ** ดังที่ได้กล่าวมา

[17] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [9]

บทที่ 4
การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้หาผลเฉลยของ*ปัญหาค่าตั้งต้น*ของสมการเชิงอนุพันธ์ แนวความคิดของการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์คือ *"เราจะใช้การแปลงลาปลาซ แปลงจากปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ เข้าสู่สมการพหุนาม และหลังจากจัดรูปสมการพหุนามโดยใช้วิธีทางพีชคณิต ก็จะใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แปลงสมการพหุนามกลับเพื่อหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์"* ในบทนี้จะกล่าวถึง การแปลงลาปลาซ การแปลงลาปลาซผกผัน และ การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

4.1 บทนิยาม สัญลักษณ์ และ การแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

ในบทนี้ จะกล่าวถึง บทนิยาม และ สัญลักษณ์ของการแปลงลาปลาซ พร้อมกับแสดงการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุกๆ $x \geq 0$ ถ้า $\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ หาค่าได้ เราเรียกฟังก์ชัน

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

(ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s) ว่า *การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

สังเกตได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ x แต่การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f เราได้ฟังก์ชัน F ที่ขึ้นกับตัวแปร s

และ เราเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า*การแปลงลาปลาซผกผัน* (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

หมายเหตุ ต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์ **อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก** แทนฟังก์ชัน แต่จะใช้ **อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่** แทนการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนั้น เช่น $F(s)$ จะหมายถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$, $Y(s)$ จะหมายถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นต้น

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = 1$ เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{ถ้า } s > 0 \\ \infty & \text{ถ้า } s \leq 0 \end{cases}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน 1 คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{4.1}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x$

$$\mathscr{L}\{x\} = \int_0^\infty xe^{-sx}dx$$

โดยการหาค่าอินทิกรัลทีละส่วน (integration by parts)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x\} &= x\left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)dx \\ &= \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right) - \left(-0 - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

และพบว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \infty, & s < 0 \end{cases}$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน x คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{4.2}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x^2$

$$\mathscr{L}\{x^2\} = \int_0^\infty x^2 e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} x^2 \Big|_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty x e^{-sx} dx$$

พบว่า

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sx} x^2 \right) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \infty, & s < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(s) = \mathscr{L}\{x^2\} &= \frac{2}{s} \int_0^\infty x e^{-sx} dx \\ &= \left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{2}{s^2}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{x^n\} = \int_0^\infty x^n e^{-sx} dx = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{4.4}$$

โดยที่ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = e^{ax}$**, เมื่อ** a **เป็นจำนวนจริง**

การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน e^{ax} คือ

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{ax}\} &= \int_0^\infty e^{ax} e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x} dx \\ &= \frac{1}{s-a}, \qquad \text{เมื่อ } s > a \end{aligned}$$

ซึ่งได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a} \tag{4.5}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \sin ax$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริง**

$$\mathscr{L}\{\sin ax\} = \int_0^\infty (\sin ax)e^{-sx}dx$$

โดยการหาค่าอินทิกรัลทีละส่วน 2 ครั้ง เราพบว่า

$$\int (\sin ax)e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax) + C,$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใดๆ, ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sin ax\} &= \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right] + \frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

และพบว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right] = 0 \quad \text{เมื่อ } s > 0$$

ดังนั้น

$$F(s) = \mathscr{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{4.6}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cos ax$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริง**

โดยทำนองเดียวกับการหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\sin ax$ เราได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{4.7}$$

หมายเหตุ ไม่จำเป็นว่าทุกฟังก์ชัน จะสามารถหาการแปลงลาปลาซได้ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $f(x) = e^{x^2}$ พบว่าเราไม่สามารถหาค่า $\int_0^\infty e^{x^2}e^{-sx}dx$ ได้ เนื่องจาก $e^{x^2}e^{-sx}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $x \geq \frac{s}{2}$ ดังนั้น ค่าอินทิกรัล $\int_0^\infty e^{x^2}e^{-sx}dx$ จะลู่ออกสู่ค่าอนันต์

แบบฝึกหัด

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. x^3
2. $\dfrac{1}{x}$
3. $\sinh x$
4. $\cosh x$
5. $\sqrt{x}$
6. $\sqrt[3]{x}$

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
x	$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

ตารางที่ 4.1: ตารางการแปลงลาปลาซอย่างย่อ

4.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

ในส่วนนี้จะแสดงคุณสมบัติต่างๆ ของการแปลงลาปลาซ

4.2.1 การมีจริงของการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า *ไม่จำเป็นว่าทุกฟังก์ชัน จะสามารถหาการแปลงลาปลาซได้* ในส่วนนี้จะแสดงถึงเงื่อนไขบางอย่าง ซึ่งถ้าฟังก์ชันใด มีคุณสมบัติตามเงื่อนไขดังกล่าวแล้ว เราจะสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนั้นได้

เนื่องด้วยในการหาค่า การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน เราจำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับการหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตจากศูนย์ ถึงค่าอนันต์ ของผลคูณระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลังกับฟังก์ชันที่ต้องการหาการแปลงลาปลาซ ในการพิจารณาอย่างคร่าวๆ พบว่า ถ้าฟังก์ชันที่พิจารณา *ไม่ได้โตเร็วกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง* e^{-sx} น่าจะสามารถหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต ของผลคูณระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{-sx} กับฟังก์ชันนั้นจากศูนย์ ถึงค่าอนันต์ได้

บทนิยาม 4.2 (อันดับเลขชี้กำลัง). เราจะเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ มีว่า*อันดับเลขชี้กำลัง* α (exponential order α) ถ้ามีจำนวนจริงบวก X และ M ซึ่ง

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}, \quad \text{สำหรับทุกๆ } x \geq X$$

ตัวอย่าง 4.1. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = e^{5x}\sin 2x$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ 5

วิธีทำ เราพบว่า

$$\left|e^{5x}\sin 2x\right| \leq e^{5x}, \quad \text{ทุกๆ } x \geq 0$$

ซึ่งนี้แสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ 5 โดยในที่นี้มีค่า $X = 0$ และ $M = 1$

ทฤษฎีบท 4.1 (การมีจริงของการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน). *ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} \quad \textit{มีอยู่จริงเมื่อ } s > \alpha$$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ ต้องการจะแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาค่าอินทิกรัล $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ ได้

เราจะพิจารณาการหาค่าอินทิกรัลเป็นสองส่วน

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = \int_0^X e^{-sx}f(x)dx + \int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx,$$

เมื่อ X คือค่าที่ทำให้ ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α เมื่อ $x \geq X$ ตามบทนิยาม 4.2

เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[0,\infty)$ โดยทฤษฎีบทของแคลคูลัส ยืนยันว่าเราสามารถหาค่า $\displaystyle\int_0^X e^{-sx}f(x)dx$ ได้ สำหรับทุกๆ ค่า s

ในการพิจารณาส่วนที่เหลือ จะใช้*การทดสอบด้วยวิธีการเปรียบเทียบของการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ* (comparison test for improper integrals)

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α เมื่อ $x \geq X$ ดังนั้น

$$|f(x)| \leq Me^{\alpha x}$$

และ

$$\left|e^{-sx}f(x)\right| = e^{-sx}\,|f(x)| \leq Me^{-(s-\alpha)x}, \quad \text{สำหรับทุกๆ } x \geq X \tag{4.8}$$

เมื่อ $s > \alpha$ เราพบว่า

$$\int_X^\infty Me^{-(s-\alpha)x}dx = M\int_X^\infty e^{-(s-\alpha)x}dx = \frac{Me^{-(s-\alpha)X}}{s-\alpha} < \infty \tag{4.9}$$

โดย (4.8), (4.9) และ การทดสอบด้วยวิธีการเปรียบเทียบของการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เราสรุปได้ว่า

$$\int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

หาค่าได้ เมื่อ $s > \alpha$ ดังนั้นเมื่อ $\int_0^X e^{-sx}f(x)dx$ และ $\int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx$ หาค่าได้ เราจึงสรุปได้ว่า เราสามารถหาค่าอินทิกรัล

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ได้ หรือกว่าได้ว่า การแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}$ มีจริงสำหรับ $s > \alpha$ □

4.2.2 ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 4.2 (ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ). *ถ้าเราสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f, f_1 และ f_2 สำหรับบางช่วง $s > \alpha$, เมื่อ α เป็นจำนวนจริง แล้ว*

- $\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} = \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}$

- $\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $s > \alpha$

พิสูจน์ โดยความเป็นเชิงเส้นของการหาค่าอินทิกรัล เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} &= \int_0^\infty e^{-sx}\left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}f_1(x)dx + \int_0^\infty e^{-sx}f_2(x)dx \\ &= \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{cf\} &= \int_0^\infty e^{-sx}\,[cf(x)]\,dx \\
&= c\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \\
&= c\mathscr{L}\{f\}
\end{aligned}$$

และในบางครั้ง เราอาจจะเขียนรวมคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซทั้งสองข้อ เป็น

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}, \tag{4.10}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

และสำหรับการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\begin{aligned}
c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= \mathscr{L}^{-1}\{c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F(s)\} \\
c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1\} + c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2\} &= \mathscr{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F(s)\},
\end{aligned}$$

เมื่อ $F_1(s) = \mathscr{L}\{f_1\}$ และ $F_2(s) = \mathscr{L}\{f_2\}$, ซึ่งหมายถึง การแปลงลาปลาซผกผันก็มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นเช่นเดียวกัน □

ตัวอย่าง 4.2. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cosh ax$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\cosh ax\} &= \mathscr{L}\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\{e^{ax}\} + \mathscr{L}\{e^{-ax}\}\right]
\end{aligned}$$

(โดยคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ)

เราทราบว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad \text{เมื่อ} \quad s > a$$

และ

$$\mathscr{L}\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{เมื่อ} \quad s < -a$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\cosh ax$ คือ

$$\begin{aligned} F(s) = \mathscr{L}\{\cosh ax\} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{(s+a)+(s-a)}{(s-a)(s+a)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\ &= \frac{s}{s^2-a^2} \end{aligned} \tag{4.11}$$

เมื่อ $s > |a|$

ตัวอย่าง 4.3. จงหา $\mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\}$

วิธีทำ จากคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\} &= \mathscr{L}\{1\} + 2\mathscr{L}\{x\} + 3\mathscr{L}\{e^{4x}\} - 5\mathscr{L}\{\sin 6x\} \\ &= \frac{1}{s} + 2\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s-4} - 5\frac{6}{s^2+6^2} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s-4} - \frac{30}{s^2+36} \\ &= 4\frac{s^4 - 8s^3 + 64s^2 - 18s - 72}{s^5 - 4s^4 + 36s^3 - 144s^2} \end{aligned}$$

4.2.3 การเลื่อนขนานในแนวแกน s

ทฤษฎีบท 4.3 (การเลื่อนขนานในแนวแกน s ของการแปลงลาปลาซ). *สำหรับการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ ใดๆ*

$$\mathscr{L}\{f\} = F(s), \qquad s > \alpha \tag{4.12}$$

เราได้ว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a), \qquad s > \alpha + a$$

พิสูจน์ โดยบทนิยามของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

และในทางกลับกัน

$$e^{ax}f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

□

ตัวอย่าง 4.4. จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sin bx$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่า

$$\mathscr{L}\{\sin bx\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

ดังนั้น โดยคุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s

$$\mathscr{L}\{e^{ax}\sin bx\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

4.2.4 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 4.4 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และ $f'(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[0,\infty)$ โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad \text{เมื่อ} \quad s > \alpha \tag{4.13}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f'(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ดังนั้น $\displaystyle\int_0^N f'(x)e^{sx}dx$ หาค่าได้ทุกๆ $N \geq 0$ พิจารณา $\mathscr{L}\{f'\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-sx}f'(x)dx \\ \text{โดยการหาค่าอินทิกรัลทีละส่วน} &= \lim_{N\to\infty}\left[e^{-sx}f(x)\Big|_0^N + s\int_0^N e^{-sx}f(x)dx\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-sx}f(x)dx \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\mathscr{L}\{f\}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α ดังนั้น

$$\left|e^{-sN}f(N)\right| \leq e^{-sN}Me^{\alpha N} = Me^{-(s-\alpha)N}$$

ซึ่งสำหรับ $s > \alpha$

$$0 \leq \lim_{N\to\infty}\left|e^{-sN}f(N)\right| \leq \lim_{N\to\infty} Me^{-(s-\alpha)N} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) = 0$$

ทำให้สรุปได้ว่า $\mathscr{L}\{f'\}$ หาค่าได้และ

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad \text{เมื่อ } s > \alpha \qquad \square$$

โดย**ทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 4.4** เราสามารถประยุกต์หาการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่สองได้โดย

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''\} &= s\mathscr{L}\{f'\} - f'(0) \\
&= s\left[s\mathscr{L}\{f\} - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\mathscr{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสามารถขยายแนวความคิดนี้เพื่อหาการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ได้คือ

ทฤษฎีบท 4.5 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ). *ถ้า* $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0,\infty)$ *และ* $f^{(n)}(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0,\infty)$ *โดยที่ฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathscr{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad \text{เมื่อ } s > \alpha \tag{4.14}$$

ทฤษฎีบทนี้ เป็นทฤษฎีสำคัญที่ทำให้สามารถประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นได้

ตัวอย่าง 4.5. จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{d}{dx}\cosh ax = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right) = a\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} = a\sinh ax$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh ax}{a}\right) = \sinh ax$$

โดยทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 4.4 เราได้

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\sinh ax\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh ax}{a}\right)\right\} \\
&= s\mathscr{L}\left\{\frac{\cosh ax}{a}\right\} - \frac{\cosh 0}{a} \\
&= \frac{s}{a}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) - \frac{e^0+e^0}{2a} \\
&= \frac{s^2-(s^2-a^2)}{a(s^2-a^2)} \\
&= \frac{a^2}{a(s^2-a^2)} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6. จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \sin^2 x$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$f(0) = \sin^2 0 = 0 \quad \text{และ} \quad f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{f'\} = \mathscr{L}\{\sin 2x\} = \frac{2}{s^2+4}$$

และ

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'\} &= s\mathscr{L}\{\sin^2 x\} - f(0) \\
&= s\mathscr{L}\{\sin^2 x\} - 0 = s\mathscr{L}\{\sin^2 x\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{\sin^2 x\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

4.2.5 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 4.6 (การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล). *ถ้า* $f(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง* $[0, \infty)$ *และ* $f(x)$ *เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\mathscr{L}\{f\}}{s} = \frac{F(s)}{s} \quad \textit{เมื่อ } s > \beta \tag{4.16}$$

โดยที่ $\beta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } \alpha < 0 \\ \alpha & \text{ถ้า } \alpha \geq 0 \end{cases}$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = \int_0^x f(u)du$ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส เราได้ว่า

$$g(0) = 0 \quad \text{และ} \quad g'(x) = f(x)$$

เราจะเริ่มต้นตรวจสอบก่อนว่า เราสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ดังนั้นฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่งเป็นค่าอินทิกรัลของ $f(x)$ ก็ต้องต่อเนื่องเป็นช่วงๆ ด้วย และ พบว่า

$$|g(x)| = \left|\int_0^x f(u)du\right| \leq \int_0^x |f(u)|\, du$$

เพราะว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α และ $\alpha \leq \beta$ สำหรับทุกๆ $x > X$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^x |f(u)|\, du &= \int_0^X |f(u)|\, du + \int_X^x |f(u)|\, du \\
&\leq \int_0^X |f(u)|\, du + \int_X^x M e^{\alpha u} du \\
&\leq \int_0^X |f(u)|\, du + \int_X^x M e^{\beta u} du \\
&= \int_0^X |f(u)|\, du + \frac{M}{\beta}\left(e^{\beta x} - e^{\beta X}\right) \\
&= M' e^{\beta x} + \left[\int_0^X |f(u)|\, du - M' e^{\beta X}\right],
\end{aligned}$$

เมื่อ $M' = \dfrac{M}{\beta}$

เนื่องจาก X เป็นค่าที่ถูกตรึง ดังนั้นเราสามารถหาจำนวนจริงบวก M'' ซึ่ง

$$|g(x)| \leq M' e^{\beta x} + \left[\int_0^X |f(u)|\, du - M' e^{\beta X}\right] \leq M'' e^{\beta x}$$

ซึ่งแสดงว่า $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง β

นี้แสดงว่าเราสามารถหาการแปลงฟังก์ชันของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้ และโดยทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 4.4 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}\{g'\} &= s\mathscr{L}\{g\} - g(0) \\ &= s\mathscr{L}\{g\} - 0 \\ &= s\mathscr{L}\{g\}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{g\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\mathscr{L}\{f\}}{s}$$

□

4.2.6 อนุพันธ์ของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 4.7 (อนุพันธ์ของการแปลงลาปลาซ). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\{xf(x)\} = -F'(s) \quad \text{เมื่อ } s > \alpha \tag{4.17}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

เป็นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $s > \alpha$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(s)$ เทียบกับตัวแปร s ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}F'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(x)e^{-sx}\right)dx \\ &= \int_0^\infty -xf(x)e^{-sx}dx \\ &= -\mathscr{L}\{xf(x)\}\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\mathscr{L}\{xf(x)\} = -F'(s)$$

□ และในการพิสูจน์ทำนองเดียวกันเราได้ว่า

$$\begin{aligned}
F''(s) &= \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{d^2}{ds^2}\left(f(x)e^{-sx}\right)dx \\
&= \int_0^\infty (-1)^2x^2f(x)e^{-sx}dx \\
&= (-1)^2\mathscr{L}\{x^2f(x)\}
\end{aligned}$$

หรือ

$$\mathscr{L}\{x^2f(x)\} = (-1)^2F''(s)$$

และโดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เราได้ว่า

ทฤษฎีบท 4.8 (อนุพันธ์อันดับ n ของการแปลงลาปลาซ). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\left\{x^nf(x)\right\} = (-1)^nF^{(n)}(s) \quad \textit{เมื่อ } s > \alpha,\ n = 1,2,3,\ldots \tag{4.18}$$

4.2.7 อินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 4.9 (อินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง $[0,\infty)$, เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α และ*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$

หาค่าได้ แล้ว

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \quad \textit{เมื่อ } s > \alpha \tag{4.19}$$

พิสูจน์ เราพบว่า

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty\left[\int_0^\infty f(x)e^{-ux}dx\right]du$$

เนื่องจาก $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α โดยการประยุกต์ทฤษฎีบทในการวิเคราะห์จำนวนจริง[1] เราสามารถสลับการหาค่าอินทิกรัลได้ ดังนั้น สำหรับ $s > \alpha$

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)du &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty f(x)e^{-ux}du\right]dx \\ &= \int_0^\infty f(x)\left[\int_s^\infty e^{-ux}du\right]dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\int_s^\infty e^{-ux}du &= -\frac{e^{-ux}}{u}\bigg|_s^\infty \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-Nx}}{x} - \left(-\frac{e^{-sx}}{x}\right)\right] \\ &= \frac{e^{-sx}}{x} \qquad (\text{เนื่องจาก } x > 0)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_0^\infty f(x)\frac{e^{-sx}}{x}dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}e^{-sx}dx = \mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$$

□

ตัวอย่าง 4.7. จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathscr{L}\{\sin x\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ สำหรับ $s > 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทอินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ 4.9 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} &= \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \tan^{-1}u\bigg|_s^\infty \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\tan^{-1}N - \tan^{-1}s\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s\end{aligned}$$

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$	หน้า
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	136
x	$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$	136
$x^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	137
e^{cx}	$\frac{1}{s-c}, \quad s > 0$	137
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	138
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	138
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	146
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	143
$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\}$	$F(s-a), \quad s > \alpha + a$	143
$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}$	$c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}$	142
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad s > \alpha$	144
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n\mathscr{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha$	145
$\mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\}$	$\frac{F(s)}{s}, \quad s > \beta$	147
$\mathscr{L}\{xf(x)\}$	$-F'(s), \quad s > \alpha$	148
$\mathscr{L}\{x^n f(x)\} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \alpha$	149
$\mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$	$\int_s^\infty F(u)du, \quad s > \alpha$	149

ตารางที่ 4.2: ตารางการแปลงลาปลาซ

แบบฝึกหัด

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. x^2e^{3x}
2. $e^{-x}\cos x$
3. $x^{-1}e^{\pi x}$
4. $x^2\sin ax$
5. $xe^{2x}\cos 5x$
6. $e^{-x}x\sinh 2x$
7. $(x-5)^4$
8. $3x-e^x$
9. $e^{-x}\cos 3x + e^{6x} - x$
10. $2x^2e^{-x} - x^2 + \cos 4x$
11. $x^{-1}e^{\pi x}$
12. $(1+e^{-x})^2$
13. $5x^4 - 2x^2 + 1$
14. $\cos^2 x$
15. $x\sin^2 x$
16. $x^2 + e^x\sin 2x$
17. $\cos nx\sin nx$
18. $\cos^2 nx$
19. $\cos mx\sin nx$
20. $\cos mx\cos nx$
21. $\sin 3x\cos 3x$
22. $x\sin 2x\cos 5x$
23. $5x^4 - 2x^2 + 1$
24. $\cosh x\sinh x$

4.3 เทคนิคการหาการแปลงลาปลาซผกผัน

จากในส่วนที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งเราสามารถหา $F(s)$ ได้โดยตรง โดยใช้บทนิยาม หรือ ใช้ทฤษฎีบท 4.2-4.9 ช่วยในการหา และในทางกลับกัน ถ้าให้ฟังก์ชันการแปลงลาปลาซ $F(s)$ มา เราก็น่าจะหาฟังก์ชัน $f(x)$ ได้เหมือนกัน ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 4.8. จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, เมื่อ

1. $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$
2. $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$
3. $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$

วิธีทำ ในการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ ในที่นี้จะใช้ตาราง 4.2 หน้า 151 ช่วย

1. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{s^3}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2!}{s^3}\} = x^2$
2. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+9}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+3^2}\} = \sin 3x$

[1]ดูทฤษฎีบทได้ใน [12]

3. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\} = e^x\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\} = e^x\cos 2x$

ในส่วนนี้ จะแสดงเทคนิคการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน โดยใช้ตาราง 4.2

ถึงแม้ว่ามีเทคนิคมากมายในการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน แต่คุณสมบัติหลักที่จะนำมาประยุกต์ใช้หาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน คือ

- คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น
- คุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s

ดังจะได้แสดงให้เห็น ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.9. จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{6s}{s^2+9}\right\}$
วิธีทำ โดยคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น เราได้ว่า

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{6s}{s^2+9}\right\} = 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

โดยคุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s เราได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{6s}{s^2+9}\right\} &= 5e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
&= 5e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} \\
&= 5e^x \cdot 1 - 6\sin 3x \\
&= 5e^x - 6\sin 3x
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 4.9 เห็นได้ว่า เราต้องประยุกต์ใช้คุณสมบัติทั้งสองของการแปลงลาปลาซ มาใช้หาการแปลงลาปลาซผกผัน แต่ในบางครั้ง เราอาจจะไม่สามารถใช้คุณสมบัติทั้งสองได้โดยตรง แต่ภายหลังจากการจัดรูป จะทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้คุณสมบัติทั้งสองได้ โดยจะเห็นได้จากตัวอย่าง 4.10, 4.11 และ 4.12

ตัวอย่าง 4.10. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(s^2+2\cdot 2s+2^2)+1}\right)\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-2)]^2+1}\right\} \\
&= \frac{3}{2}e^{-2x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
&= \frac{3}{2}e^{-2x}\sin x
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.11. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s+4)^6}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+4)^6}\right\} &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^6}\right\} \\
&= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-4)]^6}\right\} \\
&= 5e^{-4x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} \\
&= \frac{5e^{-4x}}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\} \\
&= \frac{5e^{-4x}}{5!}x^5 \\
&= \frac{5e^{-4x}}{120}x^5 \\
&= \frac{x^5e^{-4x}}{24}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.12. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2\cdot 1s+1^2+9}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{(s+1)^2+3^2}\right\}
\end{aligned}$$

และจะจัดรูปการแปลงลาปลาซผกผันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ $s+1$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+(3-3)+2}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(3s+3)+(-3+2)}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+3^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= 3e^{-x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-e^{-x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\} \\
&= e^{-x}\left(3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\}\right) \\
&= e^{-x}\left(3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}\right) \\
&= e^{-x}\left(3\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)
\end{aligned}$$

ในบางครั้งในการหาการแปลงลาปลาซผกผัน เราอาจจำเป็นต้องจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ใดๆ ให้อยู่ในรูปผลบวก (หรือผลต่าง) ของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย เช่น

ตัวอย่าง 4.13. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s-1)(s+3)}\right\}$$

พิจารณาฟังก์ชันตรรกยะ

$$F(s)=\frac{s+7}{(s-1)(s+3)}$$

โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย (method of partial fractions) เราสามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะนี้

$$\frac{s+7}{(s-1)(s+3)}$$

ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่ายได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{s+7}{(s-1)(s+3)} &= \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+3}\\ &= \frac{A(s+3)+B(s-1))}{(s-1)(s+3)}\\ &= \frac{(A+B)s+(3A-B)}{(s-1)(s+3)}\end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}A+B &= 1 \qquad \text{(สัมประสิทธิ์หน้า } s)\\ 3A-B &= 7\end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ ก็จะได้ $A=2$ และ $B=-1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{-1}{s+3}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+3}\right\}\\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}\\ &= 2e^{x}-e^{-3x}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.14. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ

$$F(s)=\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย เราจะเขียนฟังก์ชัน $F(s)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย ได้เป็น

$$\begin{aligned}&\frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}\\ =\ &\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-3}\\ =\ &\frac{A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s-3)+C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s-3)}\\ =\ &\frac{(A+B+C)s^2+(-A-2B+3C)s+(-6A-3B-2C)}{(s+1)(s+2)(s-3)}\end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 && (\text{สัมประสิทธิ์หน้า } s^2) \\ -A-2B+3C &= 7 && (\text{สัมประสิทธิ์หน้า } s) \\ -6A-3B+2C &= -1 \end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ ก็จะได้ $A=2$, $B=-3$ และ $C=-1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= 2e^{-x}-3e^{-2x}+e^{3x} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในการหาค่า A, B และ C จากสมการ

$$7s-1 = A(s+2)(s-3)+B(s+1)(s-3)+C(s+1)(s+2)$$

อาจจะใช้เทคนิคต่อไปนี้คือ

1. เลือก $s=-1$ เพื่อให้พจน์ $(s+1)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned} 7(-1)-1 &= A(-1+2)(-1-3)+B(-1+1)(-1-3) \\ &\quad +C(-1+1)(-1+2) \\ -7-1 &= A(1)(-4)+B(0)(-4)+C(0)(1) \\ -8 &= -4A \end{aligned}$$

ได้ $A=2$

2. จากนั้นเลือก $s=-2$ เพื่อให้พจน์ $(s+2)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned} 7(-2)-1 &= A(0)+B(-2+1)(-2-3)+C(0) \\ -14-1 &= B(5) \\ -15 &= 5B \end{aligned}$$

ได้ $B=-3$

3. จากนั้นเลือก $s = 3$ เพื่อให้พจน์ $(s-3)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned} 7(3) - 1 &= A(0) + B(0) + C(3+1)(3+2) \\ 21 - 1 &= 20C \\ 20 &= 20C \end{aligned}$$

ได้ $C = 1$

และได้ว่า

$$7s - 1 = 2(s+2)(s-3) - 3(s+1)(s-3) + (s+1)(s+2)$$

$\square$

สำหรับกรณีฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ซึ่ง $Q(s)$ มีพจน์ $(s-r)^m$ เป็นตัวประกอบ ภายหลังจากการกระจายฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย พจน์ของผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย ที่สมนัยกับพจน์ $(s-r)^m$ จะอยู่ในรูป

$$\frac{A_1}{s-r} + \frac{A_2}{(s-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-r)^m},$$

เมื่อ $A_1, \ldots, A_m$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 4.15. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย เราสามารถแยกฟังก์ชัน $F(s)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่ายได้ และเนื่องจากส่วนของ $F(s)$ มี $(s-1)^2$ เป็นตัวประกอบ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{s^2 + 9s + 2}{(s-1)^2(s+3)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+3)} \end{aligned}$$

เมื่อนำ $(s-1)^2(s+3)$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$s^2 + 9s + 2 = A(s-1)(s+3) + B(s+3) + C(s-1)^2$$

เพื่อจะกำจัดพจน์ที่มีตัวประกอบ $(s-1)$ ให้ $s=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}1^2+9\cdot 1+2 &= A(0)+B(1+3)+C(0)\\ 12 &= 4B\end{aligned}$$

ดังนั้น $B=3$ และในทำนองเดียวกัน ให้ $s=-3$

$$\begin{aligned}(-3)^2+9\cdot(-3)+2 &= A(0)+3(0)+C(-3-1)^2\\ -16 &= 16C\end{aligned}$$

ได้ $C=-1$ และสำหรับการหาค่า A เพื่อความสะดวกจะให้ $s=0$

$$\begin{aligned}(0)^2+9\cdot(0)+2 &= A(0-1)(0+3)+3(0+3)-1(0-1)^2\\ 2 &= -3A+9-1\\ -6 &= -3A\end{aligned}$$

และได้ $A=2$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} &= \frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}+\frac{-1}{s+3}\\ &= \frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{s+3}\end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ $F(s)$ คือ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{s+3}\right\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\}\\ &\quad -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}\\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}\\ &\quad -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}\\ &= 2e^x+3e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-e^{-3x}\\ &= 2e^x+3xe^x-e^{-3x}\end{aligned}$$

ในบางครั้ง เราไม่อาจแยกตัวประกอบฟังก์ชัน $Q(s)$ (ส่วนของฟังก์ชันตรรกยะ) ให้อยู่ในรูป

$$Q(s) = (s - r_1)^{m_1}(s - r_2)^{m_2} \cdots (s - r_n)^{m_n}$$

ซึ่งเป็นรูปของผลคูณของตัวประกอบ $(s - r_i),\ i = 1, \ldots, n$ ได้ แต่ถ้าพบว่า Q(s) มีพจน์ $(s - \alpha)^2 + \beta^2$ เป็นตัวประกอบ เราอาจจะสามารถหาการแปลงลาปลาซผกผัน ของฟังก์ชัน $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ได้ โดยถ้า

$$Q(s) = (s - r_1)^{m_1} \cdots (s - r_{n_1})^{m_{n_1}} \left((s - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2\right)^{\gamma_1} \cdots \left((s - \alpha_{n_2})^2 + {\beta_{n_2}}^2\right)^{\gamma_{n_2}}$$

ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{A_{11}}{s - r_1} + \frac{A_{12}}{(s - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(s - r_1)^{m_1}} \\
&\quad + \frac{A_{21}}{s - r_2} + \frac{A_{22}}{(s - r_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(s - r_2)^{m_2}} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{A_{n_1 1}}{s - r_{n_1}} + \frac{A_{n_1 2}}{(s - r_{n_1})^2} + \cdots + \frac{A_{n_1 m_{n_1}}}{(s - r_{n_1})^{m_{n_1}}} \\
&\quad + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(s - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{\left((s - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_{1\gamma_1}x + C_{1\gamma_1}}{\left((s - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2\right)^{\gamma_1}} \\
&\quad + \frac{B_{21}x + C_{21}}{(s - \alpha_2)^2 + {\beta_2}^2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{\left((s - \alpha_2)^2 + {\beta_2}^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_{2\gamma_2}x + C_{2\gamma_2}}{\left((s - \alpha_2)^2 + {\beta_2}^2\right)^{\gamma_2}} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{B_{n_2 1}x + C_{n_2 1}}{(s - \alpha_{n_2})^2 + {\beta_{n_2}}^2} + \frac{B_{n_2 2}x + C_{n_2 2}}{\left((s - \alpha_{n_2})^2 + {\beta_{n_2}}^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_{n_2\gamma_1}x + C_{n_2\gamma_1}}{\left((s - \alpha_{n_2})^2 + {\beta_{n_2}}^2\right)^{\gamma_{n_2}}}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.16. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจากเราไม่สามารถแยกตัวประกอบพหุนาม $f(s) = s^2 - 2s + 5$ ได้ ดังนั้นเราจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะใหม่เป็น

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} = \frac{As + B}{s^2 - 2s + 5} + \frac{C}{s + 1}$$

เมื่อ A, B และ C เป็นจำนวนจริง, เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)} &= \frac{As + B}{s^2 - 2s + 5} + \frac{C}{s + 1} \\
&= \frac{(As + B)(s + 1) + C(s^2 - 2s + 5)}{(s^2 - 2s + 5)(s + 1)}
\end{aligned}$$

เมื่อนำ $(s^2-2s+5)(s+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$2s^2+10s=(As+B)(s+1)+C(s^2-2s+5)$$

เพื่อจะกำจัดพจน์ที่มีตัวประกอบ $(s+1)$ ให้ $s=-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
2(-1)^2+10(-1) &= [A(-1)+B](-1+1)+C\left[(-1)^2-2(-1)+5\right] \\
-8 &= 0+C(8) \\
&= 8C
\end{aligned}$$

ดังนั้น $C=-1$ และในทำนองเดียวกัน ให้ $s=0$

$$\begin{aligned}
2(0)^2+10(0) &= [A(0)+B](0+1)-\left[(0)^2-2(0)+5\right] \\
0 &= B-5
\end{aligned}$$

ได้ $B=5$ และสำหรับการหาค่า A เพื่อความสะดวกจะให้ $s=1$

$$\begin{aligned}
2(1)^2+10(1) &= [A(1)+5](1+1)-\left[(1)^2-2(1)+5\right] \\
12 &= 2A+10-4 \\
6 &= 2A
\end{aligned}$$

และได้ $A=3$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} &= \frac{3s+5}{s^2-2s+5}+\frac{-1}{s+1} \\
&= \frac{3s+5}{s^2-2s+5}-\frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ $F(s)$ คือ

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-2s+5}-\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-2s+5}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s^2-2\cdot 1s+1^2)+4}\right\}-e^{-x} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+(3-3)+5}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(3s-3)+(5+3)}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\}+4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= 3e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}+4e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}-e^{-x} \\
&= 3e^x\cos(2x)+4e^x\sin(2x)-e^{-x}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\dfrac{30}{s^4}$

(b) $\dfrac{3}{s+8}$

(c) $\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{6}{s^2+4}$

(d) $\dfrac{1}{s^2+s}$

(e) $\dfrac{4}{s^2+9}$

(f) $\dfrac{s}{s(s-3)}$

(g) $\dfrac{1}{s(s^2-9)}$

(h) $\dfrac{1}{s^2(s^2-a^2)}$

(i) $\dfrac{1}{s^2-s^4}$

(j) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

(k) $\dfrac{3}{(s+5)^8}$

(l) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

(m) $\dfrac{2}{s^2+3s-4}$

(n) $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+1}$

(o) $\dfrac{2s-3}{s^2-4}$

(p) $\dfrac{2s}{s^2-s-6}$

(q) $\dfrac{1}{s^3+5s^2}$

(r) $\dfrac{1}{s^4-8s^2+16}$

4.4 การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

จากทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ 4.4 และ 4.5 เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาค่าตั้งต้นได้ ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 4.17. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้โดยการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \tag{4.20}$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ (4.20) ก็จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} = \mathscr{L}\{0\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} &= \mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{2y\} \\
&= [s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathscr{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathscr{L}\{y\} \\
&= (s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s(1) - 0 + 1 \\
&= (s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s + 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathscr{L}\{0\} = 0$ ดังนั้น เราได้

$$(s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s + 1 = 0$$

ให้ $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ เมื่อจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
(s^2 - s - 2)Y(s) &= s - 1 \\
Y(s) &= \frac{s-1}{s^2 - s - 2}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ ดังนั้น $y(x) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2 - s - 2}\right\}$$

สำหรับการหาการแปลงลาปลาซผกผันของ $\dfrac{s-1}{s^2-s-2}$ เราจะทำได้โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $(s+1)(s-2)$ ได้สมการ

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1)$$

ให้ $s = -1$ เราได้

$$\begin{aligned} (-1)-1 &= A(-1-2) + B(-1+1) \\ -2 &= -3A \end{aligned}$$

ได้ $A = \dfrac{2}{3}$ และ เมื่อให้ $s = 2$ ได้

$$\begin{aligned} (2)-1 &= A(2-2) + B(2+1) \\ 1 &= 3B \end{aligned}$$

ได้ $B = \dfrac{1}{3}$ ซึ่งทำให้เราได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (4.20) คือ

$$\begin{aligned} y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s-2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)}\right\} \\ &= \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x} \end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเอกพันธุ์ ตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปอีกสองตัวอย่าง จะเป็นตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการไม่เอกพันธุ์ โดยการใช้การแปลงลาปลาซ

ตัวอย่าง 4.18. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-x}, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 12 \tag{4.21}$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ (4.21) ก็จะได้

$$\mathscr{L}\{y'' - 2y' + 5y\} = \mathscr{L}\left\{-8e^{-x}\right\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y''-2y'+5y\} &= \mathscr{L}\{y''\}-2\mathscr{L}\{y'\}+5\mathscr{L}\{y\} \\
&= \left[s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]-2\left[s\mathscr{L}\{y\}-y(0)\right]+5\mathscr{L}\{y\} \\
&= (s^2-2s+5)\mathscr{L}\{y\}-s(2)-12+2(2) \\
&= (s^2-2s+5)\mathscr{L}\{y\}-2s-8
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{-8e^{-x}\} &= -8\mathscr{L}\left\{e^{-x}\right\} \\
&= \frac{-8}{s+1}
\end{aligned}$$

เมื่อให้ $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2-2s+5)Y(s)-2s-8=\frac{-8}{s+1}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2s+8}{s^2-2s+5}-\frac{8}{(s+1)(s^2-2s+5)} \\
&= \frac{(2s+8)(s+1)-8}{(s+1)(s^2-2s+5)} \\
&= \frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}\right\}$$

เราสามารถใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อยเพื่อช่วยในการหาการแปลงลาปลาซผกผันได้ ดังนั้น

$$\frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5}$$

เมื่อคูณด้วย $(s+1)(s^2-2s+5)$ ทั้งสองข้าง ก็จะได้

$$2s^2+10s=A(s^2-2s+5)+(Bs+C)(s+1)$$

เมื่อ $s = -1$ ได้

$$\begin{aligned}
2(-1)^2 + 10(-1) &= A\left[(-1)^2 - 2(-1) + 5\right] + (Bs + C)(-1 + 1) \\
-8 &= 8A + 0
\end{aligned}$$

ได้ $A = -1$ และเมื่อ $s = 0$ ได้

$$\begin{aligned}
0 &= -1(0 - 0 + 5) + (0 + C)(0 + 1) \\
0 &= -5 + C
\end{aligned}$$

ได้ $C = 5$ และเมื่อ $s = 1$ ได้

$$\begin{aligned}
2 + 10 &= -1(1 - 2 + 5) + (B + 5)(1 + 1) \\
12 &= -4 + 2B + 10 \\
6 &= 2B
\end{aligned}$$

ได้ $B = 3$ ซึ่งจะจัดรูปอีกครั้งได้เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{2s^2 + 10s}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s + 5}{s^2 - 2s + 5} \\
&= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s + (-3 + 3) + 5}{s^2 - 2s + 1 + 4} \\
&= \frac{-1}{s+1} + \frac{(3s - 3) + (3 + 5)}{(s-1)^2 + 2^2} \\
&= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s - 3}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{8}{(s-1)^2 + 2^2} \\
&= -\frac{1}{s+1} + 3\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s+1} + 3\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\
&= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\
&= -e^{-x} + 3e^{x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + 4e^{x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\} \\
&= -e^{-x} + 3e^{x}\cos 2x + 4e^{x}\sin 2x
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (4.21) คือ

$$y(x) = -e^{-x} + 3e^{x}\cos 2x + 4e^{x}\sin 2x$$

ตัวอย่าง 4.19. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$\mathscr{L}\{y'' + y\} = \mathscr{L}\{x\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' + y\} &= \mathscr{L}\{y''\} + \mathscr{L}\{y\} \\
&= \left[s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] + \mathscr{L}\{y\} \\
&= (s^2+1)\mathscr{L}\{y\} - s(1) - (-2) \\
&= (s^2+1)\mathscr{L}\{y\} - s + 2
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

เมื่อให้ $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2+1)Y(s) - s + 2 = \frac{1}{s^2}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s-2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} \\
&= \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} \\
&= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}-3\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} \\ &= \cos x + x - 3\sin x \end{aligned}$$

นอกจากนี้ เราอาจจะประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ หาผลเฉลยของ**ปัญหาค่าขอบ** ได้เช่นกัน

ตัวอย่าง 4.20. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$y''+9y=\cos 2x, \qquad y(0)=1,\ y(\frac{\pi}{2})=-1 \tag{4.22}$$

วิธีทำ เนื่องจากเรายังไม่ทราบค่าของ $y'(0)$ ดังนั้น เราจะสมมติให้

$$y'(0)=c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวบางจำนวน และได้แปลงลาปลาซของสมการ คือ

$$\mathscr{L}\{y''+9y\}=\mathscr{L}\{\cos 2x\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{y''+9y\} &= \mathscr{L}\{y''\}+9\mathscr{L}\{y\} \\ &= [s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)]+9\mathscr{L}\{y\} \\ &= (s^2+9)\mathscr{L}\{y\}-s(1)-c \\ &= (s^2+9)\mathscr{L}\{y\}-s-c \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{\cos 2x\}=\frac{s}{s^2+2^2}=\frac{s}{s^2+4}$$

เมื่อให้ $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2+9)Y(s)-s-c=\frac{s}{s^2+4}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} \\
&= \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)} \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) + \frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) + \frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)\right\} \\
&= \frac{4}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} + \frac{c}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} + \frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} \\
&= \frac{4}{5}\cos 3x + \frac{c}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 2x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $y(\frac{\pi}{2}) = -1$ เมื่อแทนค่าเราได้ว่า

$$\begin{aligned}
y(\frac{\pi}{2}) = -1 &= \frac{4}{5}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{c}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos\pi \\
&= \frac{4}{5}(0) + \frac{c}{3}(-1) + \frac{1}{5}(-1) \\
&= -\frac{c}{3} - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการ ก็จะได้ $c = \dfrac{12}{5}$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (4.22) คือ

$$y(x) = \frac{4}{5}\cos 3x + \frac{4}{5}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 2x$$

แบบฝึกหัด

จงประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$
3. $y'' - 2y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0$
4. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = -1$
5. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1, \;\; y''(0) = 0, \;\; y'''(0) = 1$
6. $y'' - 2y' + 2y = \cos x, \quad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$
7. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$
8. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}, \quad y(0) = 2, \;\; y'(0) = -1$
9. $y'' - 6y' + 8y = 2, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$
10. $y'' + 4y' + 13y = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 2$
11. $y^{(4)} + 2y'' + y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

บรรณานุกรม

[1] จันทนา ไอยรากาญจนกุล. (2536). **เอกสารคำสอนวิชา 322-331 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)** ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

[2] ชนะศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2530). **อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)** (พิมพ์ครั้งที่สอง) กรุงเทพมหานคร, สำนักพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

[3] ช่อฟ้า นิลรัตน์. *(2533).* ***พีชคณิตนามธรรม*** *ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่*

[4] Apostol, T. M. (1997). **Linear algebra : a first course, with applications to differential equations.** USA: John Wiley & Sons, Inc.

[5] Bak, J. and Newman, D. J. (1982). **Complex analysis.** New York: Springer-Verlag New York, Inc.

[6] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2000). **Elementary Differential Equations.** (7th ed.) John Wiley & Sons, Inc.

[7] Bronson, R. (1994). **Schaum's outline of theory and problems of differential equations.** USA: McGraw-Hill

[8] Hewson, S. F. (2003). A **mathematical bridge: an intuitive journal in higher mathematics.** Singapore: World Scientific Printers.

[9] Ibragimov, N. H. (1996). **CRC handbook of Lie group analysis of differential equations.** Vol. 3. USA: CRC Press, Inc.

[10] Kreyszig, E. (1999). **Advanced engineering mathematics.** (8th ed.) Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

[11] Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A.D. (2000). **Fundamental of differential equations.** (5th ed.) USA: Addison Wesley Longman.

[12] Protter, M. H., Morrey, C. B. (1991). **A first course in real analysis.** (2nd ed.) New York: Springer-Verlag

[13] Ross, S. L. (1984). **Differential equations.** (3rd ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[14] Schulz, E. **Differential equations.** School of Mathematics, Suranaree University of Technology: บริษัท สมบูรณ์การพิมพ์ จำกัด

[15] Spiegel, M. R. (1990). **Schaum's outline of theory and problems of mathematical handbook of formulas and tables.** (international ed.) Singapore: McGraw-Hill

ดรรชนี