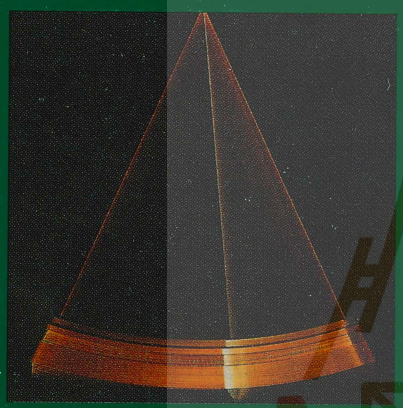
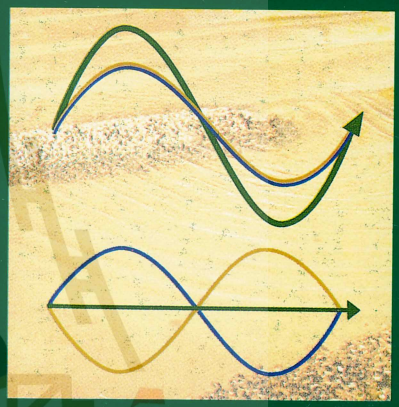
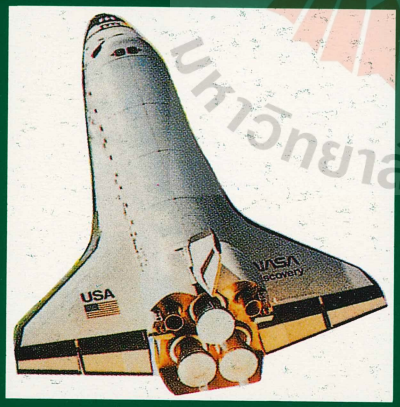
Physics 1 105101



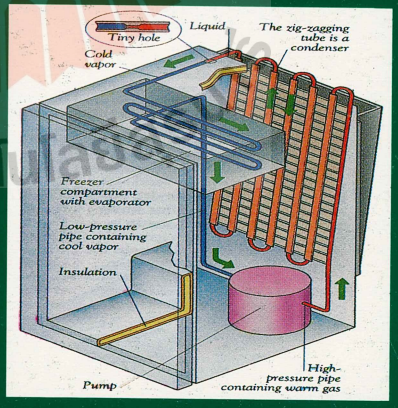
กลศาสตร์ของอนุภาคและระบบอนุภาค



คลื่น



กลศาสตร์ของไหล



อุณหพลศาสตร์

สาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ฟิสิกส์ 1

105101

โดย

สาขาวิชาฟิสิกส์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

2540

เอกสารการสอนชุดวิชา

ฟิสิกส์ 1 (105101)

สาขาวิชาฟิสิกส์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ISBN 974 - 7359- 11-1
ราคา 200.– บาท

พิมพ์ครั้งที่ 3 พ.ศ. 2540 จำนวน 2,500 เล่ม ตุลาคม 2540
(สงวนลิขสิทธิ์)

จัดพิมพ์โดย : มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
ออกแบบปกและจัดรูปเล่ม : ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษา

พิมพ์ที่ : บริษัท เอส. อาร์. พริ้นติ้ง แมสโปรดักส์.
2/103 - 106 หมู่ที่ 9 ถ. แจ้งวัฒนะ
อ. ปากเกร็ด จ. นนทบุรี

คำนำ

ตำราวิชาฟิสิกส์ 1 นี้ เรียบเรียงจากเอกสารประกอบการเรียนที่คณาจารย์สาขาวิชาฟิสิกส์ได้ใช้ประกอบการเรียนการสอนตั้งแต่ปีการศึกษา 2536 ถึงปีการศึกษา 2539 วิชาฟิสิกส์ 1 เป็นวิชา 4 หน่วยกิต เนื้อหาอาจแบ่งได้เป็น 3 ส่วน คือ กลศาสตร์อนุภาคและระบบอนุภาค กลศาสตร์ของของไหลและอุณหพลศาสตร์ ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแนวสังเขปรายวิชาและเค้าโครงรายวิชา ตามหลักสูตรของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีใช้สำหรับการเรียนหนึ่งภาคการศึกษาในระบบไตรภาค

เนื่องจากวิชาฟิสิกส์ 1 จะมีเนื้อหาบางตอนที่ซ้ำซ้อนกับส่วนของมัธยมศึกษา ทางผู้เรียบเรียงได้จัดนำเสนอไว้ในเอกสารนี้ด้วย เพื่อให้นักศึกษาสามารถทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานได้ทันที ผู้อ่านจึงอาจรู้สึกว่าเนื้อหาของเอกสารนี้มากเกินไป ในการสอนจริงบางหัวข้อจึงเป็นเพียงการสรุปหรือทบทวนเท่านั้น ตัวอย่างเช่น ส่วนของกลศาสตร์ มีบทที่กล่าวถึงการเคลื่อนที่เชิงเส้นอยู่หลายบท ซึ่งเนื้อหาบางส่วนได้ปรากฏในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา หรือส่วนที่เป็นสถิตศาสตร์ของของไหลได้บรรจุไว้ให้เพื่อเป็นพื้นฐาน เนื้อหาที่เน้นจริงๆ จะเป็นพลศาสตร์ของของไหล เป็นต้น

ศัพท์วิทยาศาสตร์ที่ปรากฏในตำราเล่มนี้ได้ใช้ศัพท์วิทยาศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตสถานอ้างอิง ในกรณีที่ผู้เรียบเรียงคิดว่าจะทำให้ผู้อ่านไม่เข้าใจ อาจเป็นเพราะตำราฉบับภาษาไทยของผู้แต่งหลายๆ ท่านใช้ไม่เหมือนกันนั้น ได้วงเล็บศัพท์ภาษาอังกฤษไว้ด้วย

ในการศึกษาวิชาฟิสิกส์นั้น การใช้ตำราเพียงเล่มเดียว จะไม่ได้รับความรู้โดยสมบูรณ์ เพราะเนื้อหาทางฟิสิกส์นั้นกว้าง และมีความสัมพันธ์กับวิชาอื่นอีกมาก จึงขอสนับสนุนให้ผู้อ่านได้ศึกษาจากตำราหลายๆ เล่ม การพิมพ์ตำราเล่มนี้อาจมีข้อผิดพลาดหลงเหลืออยู่บ้าง หากท่านผู้อ่านได้พบข้อผิดพลาด และได้กรุณาแจ้งให้ทราบจะเป็นพระคุณยิ่ง คณะผู้เรียบเรียงจะได้ตรวจสอบแก้ไขต่อไป

คณะผู้เรียบเรียง

รองศาสตราจารย์ ดร.ประสาท	สืบค้า	หัวหน้าสาขาวิชาฟิสิกส์
รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา	ผาติเสนะ	อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์
รองศาสตราจารย์ ดร.วีระพงษ์	แพสุวรรณ	อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์
รองศาสตราจารย์ ดร.อรุณ	เอกไชย	อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์
อาจารย์ ดร.ชิโนรัตน์	กอบเดช	อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์
อาจารย์ ดร.ประพันธ์	แม่นยำ	อาจารย์ประจำสาขาวิชาฟิสิกส์
นางสาวเพ็ญแข	กล้าสันเทียะ	
นางสาวธัญลักษณ์	ธีรภัทรางกูร	
นางสาวฐิติพร	สวาทสุข	
นายยุทธพงษ์	อินทร์กง	

กันยายน 2540

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ฟิสิกส์ ความหมายของฟิสิกส์	3
1.2 หน่วย มาตรฐานเทียบ	4
1.3 เวกเตอร์ การรวมเวกเตอร์	7
1.4 เวกเตอร์ตามแกน เวกเตอร์หน่วยและการวิเคราะห์เวกเตอร์	12
1.5 การคูณเวกเตอร์	18
1.6 เวกเตอร์แคลคูลัส	22
แบบฝึกหัด	27
บทที่ 2 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง	
2.1 จลศาสตร์ของอนุภาค การเคลื่อนที่	31
2.2 ความเร็วเฉลี่ย	32
2.3 ความเร็วบัดดล	34
2.4 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง	37
2.5 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว	40
2.6 วัตถุตกอิสระ	44
แบบฝึกหัด	47
บทที่ 3 การเคลื่อนที่สองมิติและสามมิติ	
3.1 การเคลื่อนที่บนระนาบ การเคลื่อนที่สามมิติ	51
3.2 นิยาม ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง	51
3.3 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ	56
3.4 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์	59
3.5 การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว	64
3.6 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม	74
3.7 ความเร็วสัมพัทธ์	77
แบบฝึกหัด	82

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 4 แรงและกฎของนิวตัน

4.1 กลศาสตร์แผนเดิม กฎการเคลื่อนที่และประวัติ 87

4.2 แรง 88

4.3 มวล 89

4.4 กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน 90

4.5 กฎข้อที่สองของนิวตัน 91

4.6 กฎข้อที่สามของนิวตัน 94

4.7 กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน 96

4.8 น้ำหนักและมวล 99

4.9 ความเสียดทาน 100

4.10 การใช้กฎของนิวตัน 102

แบบฝึกหัด 110

บทที่ 5 งาน และ พลังงาน

5.1 งานของแรงคงตัว 117

5.2 งานของแรงไม่คงตัว 118

5.3 งานและพลังงานจลน์ ทฤษฎีบทงาน-พลังงาน 121

5.4 กำลัง 123

5.5 พลังงานจลน์ที่ความเร็วสูง 126

5.6 แรงอนุรักษ์ 128

5.7 พลังงานศักย์ 130

5.8 ระบบพลังงานอนุรักษ์ 140

5.9 มวลและพลังงาน 147

5.10 การดลและโมเมนตัม 148

แบบฝึกหัด 168

บทที่ 6 ระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

6.1 จุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง จุดศูนย์กลางมวลและเซนทรอยด์ 177

6.1.1 จุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางมวล 177

6.1.2 เซนทรอยด์ 183

6.1.3 ความสมมาตรรอบจุดศูนย์กลางมวล 185

6.1.4 ความเร็วในพิกัดศูนย์กลางมวล 187

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.2 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค 191
6.2.1 โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น 191
6.2.2 พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค 197
6.2.3 โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค 202
6.2.4 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนตรึง 204
6.2.5 อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถหมุนรอบแกนตรึง 207
6.2.6 พลังงานจลน์ของการหมุน 208
6.2.7 การคำนวณหาค่าโมเมนความเฉื่อย 209
6.2.8 ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก 211
6.2.9 ทฤษฎีบทแกนขนาน 212
6.2.10 รัศมีใจเรชัน 214
6.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง 219
6.3.1 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล 221
6.3.2 การหมุนรอบแกนสมมาตร 229
6.4 สมดุล 231
6.4.1 เงื่อนไขของสมดุล 231
6.4.2 เสถียรภาพของสมดุล 236
แบบฝึกหัด 245
บทที่ 7 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก
7.1 ความนำ 255
7.2 สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว 256
7.3 แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว 261
7.4 พลังงานของตัวแกว่งกวัด 263
7.5 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว 265
7.6 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว 274
7.7 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียว สองชุด 286
7.8 การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก 296
แบบฝึกหัด 302

บทที่ 8 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

8.1 สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง 307
8.2 พลังงานที่สูญเสียไป 311
8.3 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบหน่วง 314
8.4 ผลของแรงภายนอก 323
8.5 การดูดกลืนพลังงานของการแกว่งกวัดแบบบังคับ 330
8.6 แอมพลิจูดการดูดกลืนและการยืดหยุ่น 332
8.7 การสั่นพ้องในวงจร LCR 336
8.8 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบบังคับ 343
แบบฝึกหัด 348

บทที่ 9 คุณสมบัติทั่วไปของคลื่นเสียง

9.1 คลื่นและชนิดของคลื่น 353
9.2 ความยืดหยุ่น 355
9.3 สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น 359
9.4 อัตราเร็วของคลื่นกล 365
9.5 กำลังและความเข้มของคลื่น 368
9.6 ตัวอย่างเกี่ยวกับคุณสมบัติทั่วไปของคลื่น 373
9.7 หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น 376
9.8 คลื่นนิ่ง 379
9.9 การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งบัพและปฏิบัพ 386
9.10 การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง 387
9.11 คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ 389
9.12 คลื่นนิ่งและการทำให้เป็นควอนตัมในอะตอม 392
9.13 ตัวอย่างเกี่ยวกับการแทรกสอดและคลื่นนิ่ง 393
แบบฝึกหัด 396

บทที่ 10 เสียง

10.1 คลื่นเสียง 401
10.2 ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลาง 407
10.3 การแทรกสอดของคลื่นเสียง 410
10.4 บีตส์ 412
10.5 การได้ยิน 415

10.6 ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ 422
10.7 ซอนิกบูม 429
แบบฝึกหัด 431
บทที่ 11 กลศาสตร์ของของไหล
11.1 สถิตศาสตร์ของของไหล 437
11.1.1 ความหนาแน่นและความดัน 437
11.1.2 หลักของอาร์คิมีดีส 447
11.1.3 หลักของพาสคัล 454
11.1.4 แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด 456
11.1.5 ความตึงผิว 457
11.1.6 มุมสัมผัส 461
11.1.7 สภาพคะปิลลา 463
11.2 พลศาสตร์ของของไหล 466
11.2.1 สมการแห่งการต่อเนื่อง 468
11.2.2 สมการของเบอร์นูลลี 470
11.2.3 เครื่องมือวัดอัตราการไหลของของไหล 472
11.2.4 ทฤษฎีบทของทอร์ริเซลลี 478
11.2.5 การประยุกต์ของสมการต่อเนื่องและสมการของเบอร์นูลลี 481
11.2.6 ความหนืด 483
11.2.7 กฎของปัวเซย์ 489
11.2.8 เลขเรย์โนลด์และกฎของสโตกส์ 492
11.2.9 พลังงานจากลม 496
แบบฝึกหัด 500
บทที่ 12 อุณหพลศาสตร์
12.1 อุณหพลศาสตร์ ฟิสิกส์เชิงสถิติและจลนพลศาสตร์ 505
12.2 บทนิยามพจน์ต่างๆ ของอุณหพลศาสตร์ 506
12.3 กฎข้อที่ศูนย์และแนวคิดเกี่ยวกับอุณหภูมิ 508
12.4 สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ 510
12.5 สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ 513
12.6 งาน 516
12.7 พลังงานและกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ 521

12.8 เอนทัลปีและความจุความร้อน 527
12.9 เอนโทรปีและกฎข้อที่สองของอุณพลศาสตร์ 531
12.10 การหาค่าเอนโทรปี 533
12.11 หลักการเพิ่มเอนโทรปีหรือลดพลังงาน 537
12.12 เครื่องยนต์ความร้อน ตู้เย็น และวัฏจักรคาร์โนท์ 538
แบบฝึกหัด 545
บทที่ 13 ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส
13.1 ความนำ 549
13.2 การกระจายความเร็วของโมเลกุล 554
13.3 การแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงาน 557
13.4 ความจุความร้อนของแก๊สและของแข็ง 559
13.5 วิถีเสรีเฉลี่ย 563
แบบฝึกหัด 567
ภาคผนวก 569
บรรณานุกรม 581
ดรรชนี 583

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

105101 ฟิสิกส์ 1 **Physics I** **3(3-0-6)**

(PHYS I)

วิชาบังคับก่อน : ไม่มี

ภาคการศึกษาที่เปิดสอน : 2

การเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นและแบบหมุน การอนุรักษ์โมเมนตัม โมเมนตัมเชิงมุม พลังงาน ความยืดหยุ่น การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก การแกว่งกวัดแบบหน่วงและเรโซแนนซ์ การแผ่ของคลื่น คลื่นเสียง การไหลของของไหล ความร้อนและอุณหพลศาสตร์ ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส

เค้าโครงรายวิชา

หัวข้อ	จำนวนชั่วโมง
1. บทนำ	1
2. การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง	2
3. การเคลื่อนที่สองมิติและสามมิติ	3
4. แรงและกฎของนิวตัน	3
5. งาน และพลังงาน	3
6. ระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง	6
7. การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก	3
8. การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ	3
9. คุณสมบัติทั่วไปของคลื่น	4
10. เสียง	4
11. กลศาสตร์ของของไหล	7
12. อุณหพลศาสตร์	7
13. ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส	2
รวม	48

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 1 บทนำ

เค้าโครงเรื่อง

1.1 ฟิสิกส์ ความหมายของฟิสิกส์

1.2 หน่วย มาตรฐานเทียบ

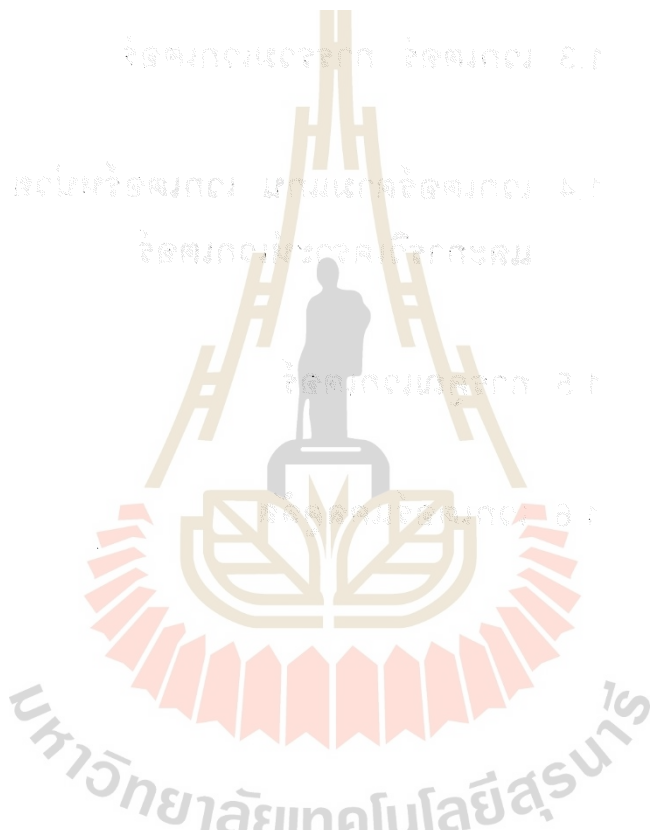
1.3 เวกเตอร์ การรวมเวกเตอร์

1.4 เวกเตอร์ตามแกน เวกเตอร์หน่วย และการวิเคราะห์เวกเตอร์

1.5 การคูณเวกเตอร์

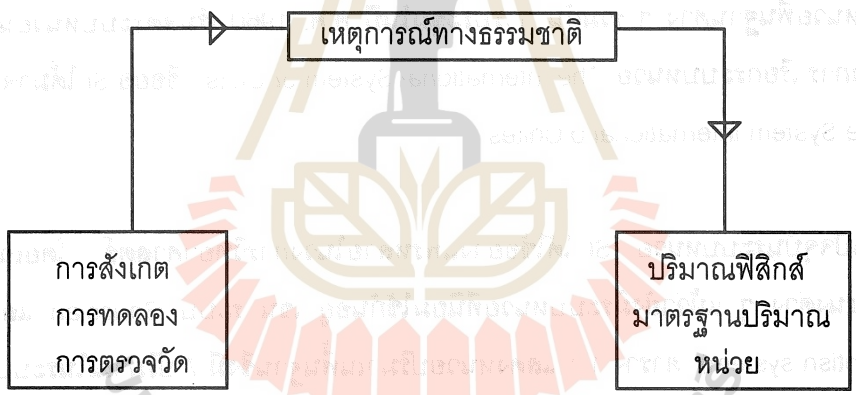
1.6 เวกเตอร์แคลคูลัส

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี


มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

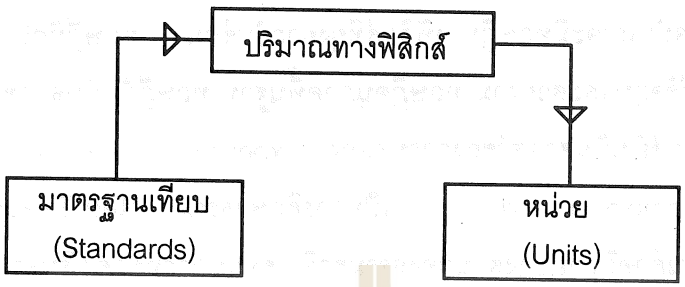
1.1 ฟิสิกส์ ความหมายของฟิสิกส์

แม้ในปัจจุบันเราจะมีทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่ยุ่งยากซับซ้อน ทฤษฎีที่สร้างมาจากโครงแบบทางคณิตศาสตร์ที่รัดกุมและสวยงาม ทฤษฎีอนุภาคพื้นฐาน ทฤษฎีสัมพัทธภาพ และทฤษฎีอื่น ๆ แต่แก่นแท้ของฟิสิกส์ยังเป็นศาสตร์ของการทดลอง (experimental science) บางคนกล่าวว่า "Physics is an empirical study." เป็นการศึกษาธรรมชาติโดยวิธีทดลองรวบรวมผลการทดลองมาสรุปเป็นคำอธิบายบางส่วนของธรรมชาติ ขบวนการทดลองเริ่มจากการสังเกต การทดลอง และการตรวจวัด เพื่ออธิบายเหตุการณ์ทางธรรมชาติ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่ต้องมีการทดลองที่ แม่นยำ มีการกำหนดปริมาณทางฟิสิกส์ที่ต้องการ มีการกำหนดมาตรฐานปริมาณในรูปของหน่วย (units) เพื่อให้ผู้ทดลองสามารถอธิบายหรือแสดงผลการทดลอง ในรูปที่สามารถติดต่อกัน หรือเข้าใจกันได้โดยทั่วไป



ปริมาณทางฟิสิกส์ จัดแบ่งเป็นปริมาณพื้นฐานที่ได้มาจากการวัดโดยตรง และปริมาณอนุพัทธ์(derived quantity) ที่ได้มาจากคำนิยามและการคำนวณ โดยนำปริมาณพื้นฐานมาผสมผสานกัน ปริมาณพื้นฐานมีตัวอย่างเช่น มวล ความยาว เวลา อุณหภูมิ ประจุไฟฟ้า เป็นต้น ปริมาณอนุพัทธ์จากการคำนวณเช่น อัตราเร็ว อัตราเร่ง โมเมนตัม พลังงาน เป็นต้น

1.2 หน่วย มาตรฐานเทียบ



ข้อตกลงในการกำหนดมาตรฐานเทียบ ได้มาจากการประชุมนานาชาติ General Conference on Weights and Measures (GCWM) หลายครั้ง เริ่มจากปี ค.ศ. 1889 ก่อนหน้านี้มีการประชุม Paris Academy of Science ในปี ค.ศ. 1791 ได้มีการจัดตั้งระบบเมตริก(metric system) ขึ้นมาใช้ ในการประชุมปี ค.ศ. 1889 ได้จัดตั้งและเห็นชอบให้ใช้คำนิยามของหน่วยพื้นฐานต่าง ๆ ร่วมกัน การประชุมในปี ค.ศ. 1960 เริ่มจัดระบบหน่วยนานาชาติขึ้นเป็นทางการ เรียกระบบหน่วย The International System of Units ชื่อย่อ SI ได้มาจากภาษาฝรั่งเศส Le System International d'Unites

ในปัจจุบันระบบหน่วย SI ได้ใช้อย่างแพร่หลายในวงการวิทยาศาสตร์ โดยเฉพาะวิชาฟิสิกส์ในแขนงต่าง ๆ แม้ว่ายังมีระบบหน่วยที่นิยมใช้กันอยู่ เช่น ระบบ Gaussian และ ระบบอังกฤษ (British system) ตาราง 1.1 แสดงหน่วยปริมาณพื้นฐานซึ่งมี 7 ปริมาณในระบบ SI และตาราง 1.2 แสดงหน่วยของปริมาณอนุพัทธ์บางปริมาณในระบบ SI

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตาราง 1.1 หน่วยของปริมาณพื้นฐาน 7 ปริมาณ

ปริมาณ	ชื่อหน่วย	สัญลักษณ์
มวล	กิโลกรัม (kilogram)	kg
ความยาว	เมตร (meter)	m
เวลา	วินาที (second)	s
จำนวนสาร	โมล (mole)	mol
อุณหภูมิเชิงอุณหพลศาสตร์	เคลวิน (kelvin)	K
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์ (ampere)	A
ความเข้มของการส่องสว่าง	แคนเดลา (candela)	cd

ตาราง 1.2 หน่วยของปริมาณอนุพัทธ์บางปริมาณ

ปริมาณ	ชื่อหน่วย	สัญลักษณ์	มาจากหน่วยพื้นฐาน
แรง	นิวตัน (newton)	N	$kg\ m/s^2$
งาน	จูล (joule)	J	$kg\ m^2/s^2$
กำลัง	วัตต์ (watt)	W	$kg\ m^2/s^3$ (J/s)
ความดัน	พาสคัล (pascal)	Pa	$kg/m\ s^2$ (N/m^2)
ความเหนี่ยวนำ	เฮนรี (henry)	H	$kg\ m^2/A^2\ s^3$

ในช่วงปี ค.ศ. 1960-1975 ที่ประชุมกำหนดให้มีคำอุปสรรค (prefixes) นำหน้าหน่วย เพื่อให้การใช้หน่วยมีความคล่องตัวและสะดวกในการใช้มากขึ้น ตาราง 1.3 แสดงการใช้ คำอุปสรรคในระบบ SI

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตาราง 1.3 คำอุปสรรคในระบบ SI

คำอุปสรรค	ความหมาย	สัญลักษณ์
exa-	10^{18}	E
peta-	10^{15}	P
tera-	10^{12}	T
giga-	10^{9}	G
mega-	10^{6}	M
kilo-	10^{3}	k
hecto-	10^{2}	h
deka-	10^{1}	da
deci-	10^{-1}	d
centi-	10^{-2}	c
milli-	10^{-3}	m
micro-	10^{-6}	μ
nano-	10^{-9}	n
pico-	10^{-12}	p
femto-	10^{-15}	f
atto-	10^{-18}	a

มาตรฐานเทียบของหน่วยพื้นฐาน ได้รับการพัฒนาจากนักวิจัยและนักวิทยาศาสตร์ เพื่อให้มีความแม่นยำมากขึ้น ปัจจุบันมาตรฐานเทียบหน่วยพื้นฐานของ เวลา ความยาว และมวล มีดังนี้

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

มาตรฐานเทียบเวลา ใช้คาบการสั่นของนาฬิกาซีเซียม (cesium clock) เป็นเกณฑ์ ตามข้อตกลงจากการประชุม GCWM ครั้งที่ 13 ในปี ค.ศ. 1967 กล่าวคือ

เวลา 1 วินาที = 9,192,631,770 เท่า ของคาบการสั่นของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าช่วงไมโครเวฟ ที่ปลดปล่อยจากอะตอมของ ^{133}Cs

มาตรฐานเทียบความยาว ใช้ความเร็วของแสงในสุญญากาศ เป็นเกณฑ์ตามข้อตกลงจากการประชุม GCWM ครั้งที่ 17 ในปี ค.ศ. 1983 กล่าวคือ

ความยาว 1 เมตร = ระยะที่แสงเคลื่อนที่ได้ในสุญญากาศในช่วงเวลา 1/299,792,458 วินาที

มาตรฐานเทียบมวล ใช้ก้อนมวลมาตรฐาน 1 กิโลกรัมทำด้วยโลหะผสม ของพลาตินัม (platinum) และ อิริเดียม(iridium) รูปทรงกระบอก เก็บรักษาไว้ที่ International Bureau of Weights and Measures ประเทศฝรั่งเศส และมีก้อนมวล 1 กิโลกรัมสำรองเก็บไว้ที่ U.S. National Institute of Standards and Technology ในระดับอะตอมมาตรฐานเทียบมวลที่นิยมใช้กัน คือหน่วยมวลอะตอม (atomic mass unit ,u) โดยมวล 1 u มีค่าเป็น 1/12 เท่าของมวลเชิงอะตอม ^{12}C ซึ่ง 1 u = 1.661×10^{-27} kg

1.3 เวกเตอร์ การรวมเวกเตอร์

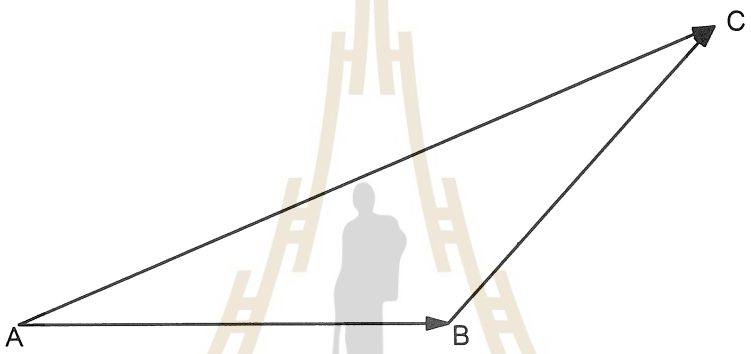
ปริมาณทางฟิสิกส์ ทั้งปริมาณพื้นฐานและปริมาณอนุพัทธ์ บางปริมาณ มีลักษณะเชิงปริมาณเพียงอย่างเดียว ในขณะที่บางปริมาณจำต้องมีโครงสร้างทางเรขาคณิตเข้าประกอบ จึงสื่อความได้สมบูรณ์ ปริมาณสเกลาร์ให้ความหมายเชิงปริมาณเด่นชัด เช่น มวล เวลา ระยะทาง เป็นต้น ปริมาณเหล่านี้มีพีชคณิตแบบง่ายธรรมดา ส่วนปริมาณเวกเตอร์จำต้องมีความหมายเชิงทิศทางเข้าประกอบกับขนาดของปริมาณ ตัวอย่างเช่น แรงกระทำ สนามไฟฟ้า ความเร็ว โมเมนตัม เป็นต้น ปริมาณเวกเตอร์มีพีชคณิตที่ยุ่งยากกว่าปริมาณสเกลาร์ เพราะผลลัพธ์ของความสัมพันธ์เชิงพีชคณิต ต้องให้ข้อมูลพื้นฐานเชิงทิศทางของผลลัพธ์ด้วย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การรวมปริมาณเวกเตอร์อย่างง่าย แสดงได้ด้วยการรวมการกระจัดจากจุด A ไป B และจุด B ไป C ผลลัพธ์คือการกระจัดจาก A ไป C แสดงได้ด้วยการเขียนกราฟเส้นตรงอย่างง่าย

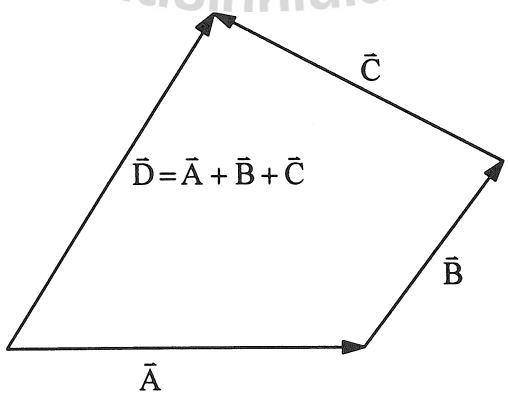
การกระจัด $\vec{AC}$ สามารถทำได้ดังนี้

เขียนการกระจัด $\vec{AB}$ แล้วต่อการกระจัด $\vec{BC}$ เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{AC}$ หาได้โดยลากเส้นตรงจากหางของ $\vec{AB}$ ไปยังหัวของเวกเตอร์ $\vec{BC}$ (ดังรูป 1.1)



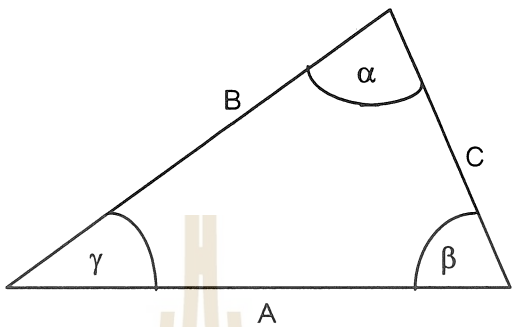
รูป 1.1 เวกเตอร์ $\vec{AC}$ เป็นเวกเตอร์ผลลัพธ์ที่หาได้โดยวิธีการเขียนกราฟเส้นตรง

ถ้าเป็นการรวมเวกเตอร์มากกว่า 2 เวกเตอร์ ทำได้โดยนำเวกเตอร์ทั้งหมดมาเขียนต่อกัน เวกเตอร์ลัพธ์ คือ เวกเตอร์ที่ลากจากหางของเวกเตอร์ตัวแรกไปยังหัวของเวกเตอร์ตัวสุดท้าย เช่น เวกเตอร์ $\vec{A}$ รวมกับ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ได้เวกเตอร์ $\vec{D}$ (ดังรูป 1.2)



รูป 1.2 รูปหลายเหลี่ยมแทนเวกเตอร์

พิจารณาสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว A , B และ C ดังรูป 1.3 เราจะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้



รูป 1.3 สามเหลี่ยมประกอบด้วยด้าน A , B และ C

กฎของไซน์ (sine's law) **คือ**

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma} \tag{1.1}$$

กฎของโคไซน์ (cosine's law) **คือ**

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC\cos\alpha \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \end{aligned} \tag{1.2}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

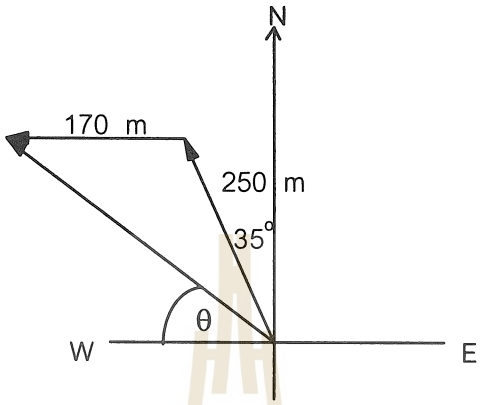
ตัวอย่าง 1.1 หญิงคนหนึ่งเดินได้ระยะ 250 เมตร ในทิศ 35° จากเหนือไปทางตะวันตก แล้วเดินต่อได้ระยะ 170 เมตร ไปทางตะวันตก

(a) ใช้วิธีกราฟ หาการกระจัดผลลัพธ์

(b) เปรียบเทียบขนาดของการกระจัดผลลัพธ์ และระยะทางที่เดิน

วิธีทำ

(a)



cosine's law : $A^2 = (170\text{m})^2 + (250\text{m})^2 - 2(170\text{m})(250\text{m})\cos 125°$

$A = 374.4 \text{ m}$

sine's law : $\frac{250\text{ m}}{\sin\theta} = \frac{374.4\text{m}}{\sin 125°} = 457.06$

$\sin\theta = 0.547$

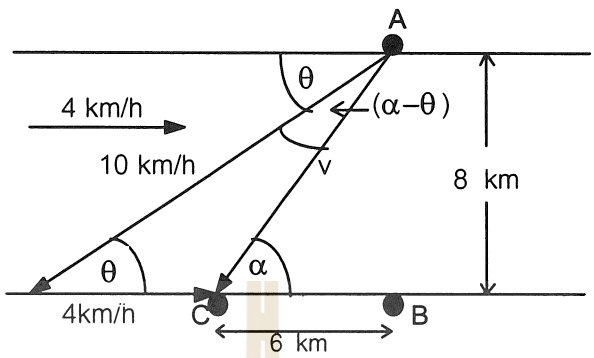
$\theta = 33.1°$

(b) ระยะทางเดิน = 250 m + 170 m = 420 m

ขนาดการกระจัดผลลัพธ์ = 374.4 m

ตัวอย่าง 1.2 เมือง A และ B ตั้งอยู่ฝั่งตรงข้ามของแม่น้ำกว้าง 8 กิโลเมตร กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 4 กิโลเมตร/ชั่วโมง ชายคนหนึ่งอยู่ที่เมือง A จะเดินทางไปเมือง C ซึ่งอยู่ห่างจากเมือง B เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร อยู่ต้นน้ำและฝั่งเดียวกับเมือง B ถ้าเรือเคลื่อนที่ได้อัตราเร็วสูงสุด 10 กิโลเมตร/ชั่วโมง เขาต้องเลือกใช้เส้นทางใด จึงจะเดินทางถึงเมือง C เร็วที่สุด

วิธีทำ



sine's law : $$\frac{10}{\sin(180-\alpha)} = \frac{4}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\frac{10}{\sin\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta}$$

$$\frac{10}{\left(\frac{8}{10}\right)} = \frac{4}{\left(\frac{8}{10}\right)\cos\theta - \left(\frac{6}{10}\right)\sin\theta}$$

$$8 = 20\cos\theta - 15\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

และ $$\frac{v}{\sin\theta} = \frac{10}{\sin(180-\alpha)} = \frac{100}{8}$$

$$\sin\theta = \frac{8}{100}v \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

แทน (2) ใน (1) $$8 = 20\cos\theta - \frac{15\times 8}{100}v$$

$$40 = 100\cos\theta - 6v \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

cosine's law : $$v^2 = 10^2 + 4^2 - 80\cos\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

สมการ (3) x 8/10 $$40\times\frac{8}{10} = 100\times\frac{8}{10}\cos\theta - 6\times\frac{8}{10}v$$

$$32 = 80\cos\theta - \frac{24}{5}v$$

$$80\cos\theta = 32 + \frac{24}{5}v \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

แทน (5) ใน (4)

$$v^2 = 116 - \left(32 + \frac{24}{5}v\right)$$

$$= 84 - 4.8v$$

$$\therefore \quad v^2 + 4.8v - 84 = 0$$

$$v = -11.87,\ 7.07 \qquad km/h$$

แทนค่า v = 7.07 km/h ใน (3)

$$40 = 100\cos\theta - 6(7.07)$$

$$= 100\cos\theta - 42.42$$

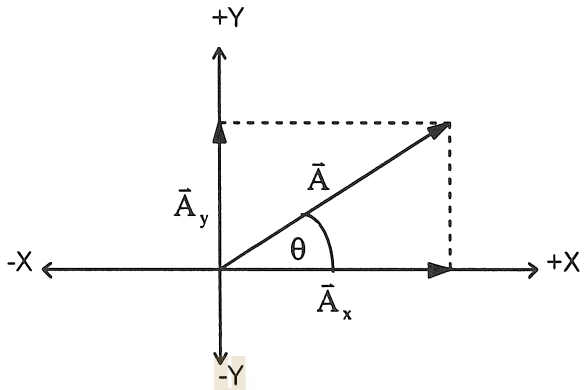
$$\cos\theta = \frac{82.42}{100} = 0.8242$$

$$\theta = 34.49^\circ \text{ หรือ } 34^\circ\ 29'$$

เขาต้องขับเรือในทิศทางทำมุม 34° 29' กับแนวขนานฝั่ง

1.4 เวกเตอร์ตามแกน เวกเตอร์หน่วย และการวิเคราะห์เวกเตอร์

การวิเคราะห์เวกเตอร์โดยใช้ระบบพิกัดแกนมาตรฐานเข้าช่วย ลดปัญหาการรวมเวกเตอร์ที่ยุ่งยาก เวกเตอร์สามารถถูกแยกเข้าสู่แกนมาตรฐานได้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ (vector components) ระบบแกนมาตรฐานที่ง่ายต่อการเข้าใจ คือระบบแกนพิกัดฉาก (Cartesian coordinate หรือ rectangular coordinate) มีจุดพิกัดแสดงด้วยเลขชุดกำกับแกน (x, y, z) ระบบพิกัดอื่น ๆ เช่น ระบบพิกัดทรงกลม(spherical coordinate) และระบบพิกัดทรงกระบอก(cylindrical coordinate) มีประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาที่มีลักษณะสมมาตรเชิงทรงกลมและทรงกระบอก ตามลำดับ จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ เวกเตอร์ $\vec{A}$ ในระบบสองมิติสามารถแยกเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ $\vec{A}_x$ และ $\vec{A}_y$ เมื่อ A_x และ A_y คือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ ดังรูป 1.4



รูป 1.4 แสดงการแยกเวกเตอร์เข้าสู่แกนพิกัดฉาก

โดยมีความสัมพันธ์

$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ \tan\theta &= A_y / A_x \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

การรวมปริมาณเวกเตอร์ โดยใช้เวกเตอร์องค์ประกอบจึงง่ายและสะดวก ทำได้โดยแยกเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ แล้วรวมเวกเตอร์ตามแกน (เช่น $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$)

เวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน x และ y คือ

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$
$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$$

รวมเวกเตอร์ตามแกน

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (\vec{A}_x + \vec{B}_x) + (\vec{A}_y + \vec{B}_y) = \vec{C}_x + \vec{C}_y$$

$$\tan\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{(A_y + B_y)}{(A_x + B_x)} \qquad (1.4)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เวกเตอร์องค์ประกอบตามแกน สามารถเขียนในรูปจำนวนเท่าของเวกเตอร์หน่วย (unit vector) ตามแกนนั้นๆ โดย เวกเตอร์หน่วยตามแกน x ใช้สัญลักษณ์ $\hat{i}$ ตามแกน y ใช้สัญลักษณ์ $\hat{j}$ และตามแกน z ใช้สัญลักษณ์ $\hat{k}$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} \vec{A}_x &= A_x\hat{i} \\ \vec{A}_y &= A_y\hat{j} \\ \vec{A}_z &= A_z\hat{k} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

ดังนั้น $$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

สำหรับเวกเตอร์บอกตำแหน่ง(position vector) $\vec{r}$ ซึ่งเริ่มต้นจากจุดกำเนิดชี้ไปยังจุด (x, y, z) ใดๆ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z) \qquad (1.6)$$

ขนาดของเวกเตอร์(magnitude of vector) ของ $\vec{A}$ ใช้สัญลักษณ์ A หรือ $|\vec{A}|$ มีค่าดังนี้

$$A = \left[A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right]^{1/2} \qquad (1.7)$$

การรวมเวกเตอร์ทำได้ง่ายและเด่นชัดมากขึ้น โดยการนำจำนวนเท่าของเวกเตอร์หน่วย ในแต่ละแกนมารวมกัน เช่น

$$\begin{aligned} \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \\ &= C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ในกรณีทั่วไปเวกเตอร์หน่วยของเวกเตอร์ใด หมายถึง เวกเตอร์ ที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์นั้น และมีขนาดเท่ากับ 1 เช่น เวกเตอร์หน่วยของ $\bar{A}$ ใช้สัญลักษณ์ $\hat{A}$ โดยกำหนดว่า

$$\hat{A} = \frac{\bar{A}}{A} \qquad (1.9)$$

ตัวอย่าง 1.3 $\bar{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ และ $\bar{b} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ จงหาขนาดและทิศทางเทียบกับแกน x ของเวกเตอร์ ต่อไปนี้

(a) $\bar{a}$
(b) $\bar{b}$
(c) $\bar{a} + \bar{b}$
(d) $\bar{b} - \bar{a}$
(e) $\bar{a} - \bar{b}$

วิธีทำ ให้

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$$
$$\bar{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$$

(a) $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{4}{-3} = -1.33$$

$$\alpha = -53.1^\circ \quad \text{หรือ} \quad 306.9^\circ$$

(b) $|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$$\tan\alpha = \frac{b_y}{b_x} = \frac{8}{6} = 1.33$$

$$\alpha = 53.1^\circ$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(c) $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}$

$= (4 + 6)\hat{i} + (-3 + 8)\hat{j} = 10\hat{i} + 5\hat{j}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 11.18$

$\tan\alpha = \frac{5}{10} = 0.5$

$\alpha = 26.6^\circ$

(d) $\vec{b} - \vec{a} = (b_x - a_x)\hat{i} + (b_y - a_y)\hat{j}$

$= (6 - 4)\hat{i} + (8 + 3)\hat{j} = 2\hat{i} + 11\hat{j}$

$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 11.18$

$\tan\alpha = \frac{11}{2} = 5.5$

$\alpha = 79.69^\circ$

(e) $\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j}$

$= (4 - 6)\hat{i} + (-3 - 8)\hat{j} = -2\hat{i} - 11\hat{j}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} = 11.18$

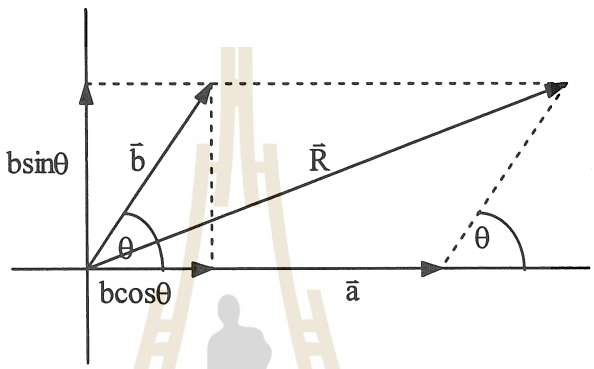
$\tan\alpha = \frac{-11}{-2} = 5.5$

$\alpha = 259.69^\circ$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 1.4 เวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ทำมุม θ จงแสดงว่าขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$ โดยใช้วิธีการแยกเป็นเวกเตอร์องค์ประกอบ

วิธีทำ



แยกเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เข้าแกน

$$a_x = a \quad ; \quad b_x = b\cos\theta$$
$$a_y = 0 \quad ; \quad b_y = b\sin\theta$$

รวมเวกเตอร์ตามแกน

$$R_x = a_x + b_x = a + b\cos\theta$$
$$R_y = a_y + b_y = 0 + b\sin\theta$$
$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 = (a + b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2$$
$$= a^2 + 2ba\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.5 การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์กับเวกเตอร์กระทำได้สองแบบดังนี้

1. ผลคูณสเกลาร์ (scalar product) เขียนแทนด้วย $\vec{A}\cdot\vec{B}$ (อ่านว่า เวกเตอร์เอ ดอท(dot) เวกเตอร์บี) มีนิยามดังนี้

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \tag{1.10}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ถ้าคำนวณโดยใช้เวกเตอร์หน่วยตามแกนจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \left(A_x\hat{i}+A_y j+A_z\hat{k}\right)\left(B_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}\right)\\ &= A_x b_x\cos0^\circ + A_x B_y\cos90^\circ + A_x B_z\cos90^\circ\\ &\quad + A_y B_x\cos90^\circ + A_y B_y\cos0^\circ + A_y B_z\cos90^\circ\\ &\quad + A_z B_x\cos90^\circ + A_z B_y\cos90^\circ + A_z B_z\cos0^\circ\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{1.11}$$

ผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์หน่วยตามแกน มีค่าดังนี้

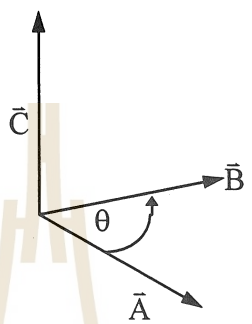
$$\begin{aligned}\hat{i}\cdot\hat{i} &= \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1\\ \hat{i}\cdot\hat{j} &= \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{j}\cdot\hat{k} = 0\\ \hat{j}\cdot\hat{i} &= \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0\end{aligned}$$

2. ผลคูณเวกเตอร์ (vector product) เขียนแทนด้วย $\vec{A}\times\vec{B}$ (อ่านว่า เวกเตอร์เอ ครอส (cross) เวกเตอร์บี) มีนิยามดังนี้

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{C} = \vec{C} \tag{1.12}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เวกเตอร์หน่วย $\hat{C}$ มีทิศตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ การใช้กฎมือขวา (right-handed rule) จะช่วยกำหนดทิศของเวกเตอร์ลัพธ์ กรณีเวกเตอร์ $\vec{A}$ คูณกับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ให้ตั้งระนาบมือขวาขนานกันแนว $\vec{A}$ รวบนิ้วทั้งสี่เข้าหาปลายเวกเตอร์ $\vec{B}$ นิ้วหัวแม่มือบอกทิศเวกเตอร์ผลลัพธ์



รูป 1.5 ผลคูณเวกเตอร์ เวกเตอร์ $\vec{C}$ มีทิศทางตามกฎมือขวา

เมื่อใช้เวกเตอร์หน่วยตามแกนผลคูณ $\vec{A} \times \vec{B}$ อยู่ในรูป

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) \times \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right) \\ &= A_xB_x\left(\hat{i}\times\hat{i}\right) + A_xB_y\left(\hat{i}\times\hat{j}\right) + A_xB_z\left(\hat{i}\times\hat{k}\right) \\ &\quad + A_yB_x\left(\hat{j}\times\hat{i}\right) + A_yB_y\left(\hat{j}\times\hat{j}\right) + A_yB_z\left(\hat{j}\times\hat{k}\right) \\ &\quad + A_zB_x\left(\hat{k}\times\hat{i}\right) + A_zB_y\left(\hat{k}\times\hat{j}\right) + A_zB_z\left(\hat{k}\times\hat{k}\right) \\ &= \left[A_yB_z - A_zB_y\right]\hat{i} + \left[A_zB_x - A_xB_z\right]\hat{j} + \left[A_xB_y - A_yB_x\right]\hat{k} \qquad (1.13)\end{aligned}$$

ผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์หน่วยตามแกน มีค่าดังนี้

$$\begin{aligned}&\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = (1)(1)\sin 0^\circ\,\hat{C} = 0 \\ &\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \quad ; \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k} \\ &\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \quad ; \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \\ &\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \quad ; \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}\end{aligned}$$

การใช้ดีเตอร์มิแนนท์ (determinant) หาผลคูณเวกเตอร์ทำได้ดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \left[A_y B_z - A_z B_y\right] \hat{i} + \left[A_z B_x - A_x B_z\right] \hat{j} + \left[A_x B_y - A_y B_x\right] \hat{k}$$

ข้อสังเกตุ : แถวที่ 1 เขียนเวกเตอร์หน่วยตามลำดับ
แถวที่ 2 เขียนขนาดของเวกเตอร์ตัวที่ 1 ตามลำดับแถว
แถวที่ 3 เขียนขนาดของเวกเตอร์ตัวที่ 2 ตามลำดับแถว

ผลคูณทั้งสองชนิด อาจเกิดจากการคูณมากกว่า 2 ชนิดก็ได้ เรียก multiple multiplication เช่น ผลการคูณระหว่างสามเวกเตอร์ (triple produce) ที่เป็นผลคูณสเกลาร์ (triple scalar product)

$$D = \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$

ในรูปของดีเตอร์มิแนนท์

$$D = \vec{A} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.14)$$

ผลคูณของสามเวกเตอร์ที่เป็นผลคูณเวกเตอร์ (triple vector product)

$$\vec{D} = \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$
$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \qquad (1.15)$$

ความสัมพันธ์นี้ บางทีเรียกว่ากฎแบ็ก-แค็บ (BAC-CAB rule)

ตัวอย่าง 1.5 เวกเตอร์ $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ และ $\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ จงหา

(a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ (b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ (c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

วิธีทำ

(a) $$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x$$

แทนค่า $a_x = 3$ $b_x = -1$ $c_x = 2$

$a_y = 3$ $b_y = -4$ $c_y = 2$

$a_z = -2$ $b_z = 2$ $c_z = 1$

$$\therefore \ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (-12 - 12) + (12 - (-3)) + (4 - 16) = -21$$

(b) $$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$$

$$= (-3 - 12 - 4) + (6 + 6 - 2) = -9$$

(c) $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_y c_z - a_z c_y)\hat{i}$$

$$+ (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_z c_x - a_x c_z)\hat{j}$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} + (a_x c_y - a_y c_x)\hat{k}$$

$$= (6 - 8)\hat{i} + (3 + 4)\hat{i} + (2 - 6)\hat{j} + (-4 - 3)\hat{j} + (-12 + 3)\hat{k} + (6 - 6)\hat{k}$$

$$= 5\hat{i} - 11\hat{j} - 9\hat{k}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.6 เวกเตอร์แคลคูลัส

ตัวดำเนินการเดล (del operator, $\vec{\nabla}$) เดลเป็นตัวดำเนินการที่เป็นเวกเตอร์มีนิยามดังนี้

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad (1.16)$$

1.6.1 **เกรเดียนต์** (gradient) ตัวดำเนินการ เมื่อไปดำเนินการบนปริมาณสเกลาร์ใด ๆ จะให้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ โดยมีขนาดเท่ากับ ค่าสูงสุดของอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยระยะทาง ส่วนทิศทางจะชี้ไปยังทิศทางการเปลี่ยนแปลงมากที่สุดนั้น

ในระบบพิกัดฉาก เกรเดียนของฟังก์ชันสเกลาร์ $\Phi(x,y,z)$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\text{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{k} \qquad (1.17)$$

ตัวอย่าง 1.6 ฟังก์ชันสเกลาร์ $\Phi(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$ จงหา $\vec{\nabla}\Phi$ ที่จุด (1, -2, -1)

วิธีทำ

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(3x^2y - y^3z^2\right)$$

$$= 3y(2x)\hat{i} + 3x^2\hat{j} - z^2(3y^2)\hat{j} + (-y^3)(2z)\hat{k}$$

$$= (6xy)\hat{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\hat{j} - (2y^3z)\hat{k}$$

แทนค่า (1, -2, -1) $\quad \vec{\nabla}\Phi = -12\hat{i} - 9\hat{j} - 16\hat{k}$

1.6.2 **ไดเวอร์เจนซ์** (divergence) ไดเวอร์เจนซ์ของปริมาณเวกเตอร์ เป็นค่าขีดจำกัดของ เวกเตอร์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ในขณะที่ปริมาตร V ที่ห่อหุ้มด้วยผิวปิด (close surface) s มีค่าเข้าสู่ศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ (อ่านว่า ไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{F}$ หรือ $\text{div}\,\vec{F}$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{v\to 0}\frac{1}{V}\oint_s \vec{F}\cdot\hat{n}da \qquad (1.18)$$

ในระบบพิกัดฉาก ไดเวอร์เจนซ์ของ $\vec{F}$ เขียนอยู่ในรูป

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.19}$$

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) กล่าวถึงความสัมพันธ์ของการอินทิกรัลเชิงปริมาตร (volume integral) กับการอินทิกรัลเชิงพื้นผิว (surface integral) ไว้ดังนี้

$$\oint \vec{F}\cdot\hat{n}da = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV \tag{1.20}$$

1.6.3 **เคอร์ล** (curl) เคอร์ลของฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{F}$ เป็นค่าขีดจำกัดของค่าอินทิกรัลเชิงพื้นผิวต่อหน่วยปริมาตรของปริมาณ $\hat{n}\times\vec{F}$ ในขณะที่ปริมาตร V มีค่าเข้าสู่ศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (อ่านว่า เคอร์ลของ $\vec{F}$ หรือ Curl $\vec{F}$)

เมื่อ s คือผิวปิดที่ห่อหุ้มปริมาตร V ที่เวกเตอร์หน่วยซึ่งตั้งฉากกับผิว s ชี้ออกจากปริมาตรในระบบพิกัดฉาก เคอร์ลของ $\vec{F}$ เขียนอยู่ในรูป

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{dF_z}{dy} - \frac{dF_y}{dz}\right)\hat{i} + \left(\frac{dF_x}{dz} - \frac{dF_z}{dx}\right)\hat{j} + \left(\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy}\right)\hat{k} \tag{1.22}$$

ทฤษฎีบทสโตกส์ (Stokes's theorem) กล่าวถึงความสัมพันธ์ของค่าอินทิกรัลเชิงเส้น (line integral) ของ $\vec{F}$ รอบวิถีปิด c กับค่าอินทิกรัลเชิงพื้นผิวของ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ในแนวตั้งฉากกับผิว s ที่ล้อมรอบด้วยวิถีปิด c ดังนี้

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\hat{n}da \tag{1.23}$$

ตัวอย่าง 1.7 ถ้า $\phi = x^2yz^3$ และ $\vec{A} = xz\,\hat{i} - y^2\,\hat{j} + 2x^2y\,\hat{k}$

จงหา (a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (b) $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ (c) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})$

วิธีทำ

(a) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(xz\,\hat{i}+y^2\hat{j}+2x^2y\,\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2y\right)$$

$$= -2y + z$$

(b) $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}2x^2y - \frac{\partial}{\partial z}\left(-y^2\right)\right]\hat{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(xz)-\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right)\right]\hat{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\hat{k}$$

$$= \left(2x^2\right)\hat{i} + \left(x - 4xy\right)\hat{j} + (0)\hat{k}$$

$$= 2x^2\,\hat{i} + (x - 4xy)\,\hat{j}$$

(c) $$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left[\left(x^2yz^3\right)\left(xz\,\hat{i}-y^2\hat{j}+2x^2y\,\hat{k}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3yz^4\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2y^3z^3\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2x^4y^2z^3\right)$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$$

ตัวอย่าง 1.8 ของไหลมีความหนาแน่นในรูปฟังก์ชัน $\rho(x, y, z, t)$ เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ถ้าไม่มีแหล่งเพิ่มหรือลดมวลของไหลในระบบ จงพิสูจน์ว่า

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad \text{โดย} \quad \vec{J} = \rho\vec{v}$$

วิธีทำ

พิจารณาผิวหน้า s ที่ครอบคลุมปริมาตรของไหล V จุดเวลามวลของของไหลผ่านพื้นที่ผิว

$$M = \iiint_V \rho \, dV$$

การเปลี่ยนแปลงมวลเทียบกับเวลา

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

มวลของของไหลต่อเวลาที่ไหลออกจากบริเวณปริมาตร V มีค่า

$$\iint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} da$$

ดังนั้นอัตราการลดมวลของของไหลต่อเวลา (ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์)

$$-\iint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} da = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

จะได้

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV$$

หรือ

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

นิยาม $\vec{J} = \rho \vec{v}$ ดังนั้น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

สมการนี้เรียกว่า "สมการความต่อเนื่องของของไหล (fluid continuity equation) "

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 1.13 จงพิสูจน์ว่าเป็นเงื่อนไขที่ว่า ถ้า $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ สำหรับทางปิด c ใดๆ จะได้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

วิธีทำ

ใช้ทฤษฎีบทสโตกส์

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} da$$

ถ้า $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ จะได้ $\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} da = 0$

$$\therefore \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

สนามแรงกระทำที่มี $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ เราเรียกสนามแรงอนุรักษ์ (conservative force field) ตัวอย่างเช่น สนามแรงโน้มถ่วง สนามไฟฟ้าสถิต เป็นต้น

งานของแรงอนุรักษ์ $w = \int_{P_2}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ไม่ขึ้นกับเส้นทางเดิน ขึ้นอยู่กับค่างานที่จุด P_1 และ P_2 เท่านั้น ทำให้ $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ เนื่องจากงานจาก $P_1 \rightarrow P_2$ เท่ากับงานจาก $P_2 \rightarrow P_1$ ที่มีเครื่องหมายตรงข้าม งานรวมครบรอบทางเดินจึงเป็นศูนย์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. เรือยนต์ต้องการข้ามแม่น้ำกว้าง 60 เมตร กระแสน้ำมีอัตราเร็ว 0.3 เมตร/วินาที กำลังเรือยนต์ขับเคลื่อนได้อัตราเร็วสูงสุด 0.5 เมตร/วินาที ถามว่าเรือยนต์ต้องใช้เวลาน้อยที่สุดเท่าใดในการข้ามแม่น้ำ

(ตอบ : 150 s)

2. สถานีเรดาร์ตรวจจับจรวดกำลังเคลื่อนที่มาจากทิศตะวันออก จุดตรวจจับครั้งแรกจรวดอยู่ห่าง 9000 เมตร ที่ 40° เหนือท้องฟ้าจรวดถูกตรวจจับครั้งที่สอง เมื่อเรดาร์กวาดมุมได้ 123° ในระนาบตะวันออก - ตะวันตก ที่ระยะ 20,000 เมตร คำนวณหาการกระจัดของจรวดในช่วงการตรวจจับทั้งสอง

(ตอบ : 26020.5 m)

3. แรงกระทำต่ออนุภาค P ในหน่วย newton

$$\vec{F}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$
$$\vec{F}_2 = -5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{F}_3 = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{F}_4 = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

จงคำนวณหา

(a) แรงลัพธ์

(b) ขนาดของแรงลัพธ์

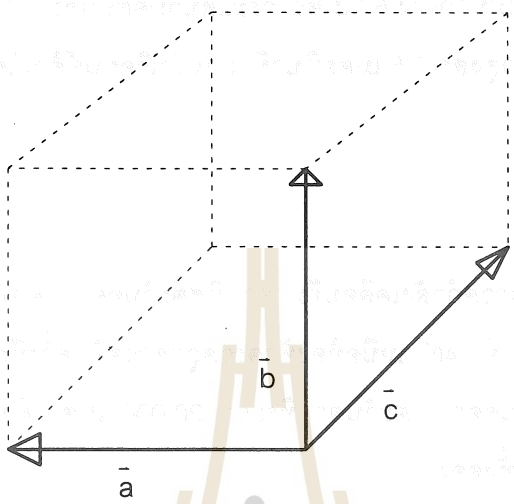
(ตอบ : (a) $\left(2\hat{i} - \hat{j}\right)\mathrm{N}$, (b) $\sqrt{5}\,\mathrm{N}$)

4. โลกและดวงจันทร์มีมวล M และ m ตามลำดับ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r}_1$ กำหนดตำแหน่งโลก และเวกเตอร์ $\vec{r}_2$ กำหนดตำแหน่งดวงจันทร์เทียบกับจุดกำเนิด (laboratory system) จงแสดงว่าเวกเตอร์กำหนดตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล (center of mass system) มีความสัมพันธ์ในรูป

$$\vec{r} = \frac{M\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{M + m}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

5. จงแสดงว่า $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ เป็นขนาดของปริมาตรรูปเหลี่ยมขนมเปียกปูน (parallelpiped) ที่เกิดจากเวกเตอร์ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ตามรูป



6. อนุภาคเคลื่อนที่เป็นทางโค้งในปริภูมิสามมิติ (3 - dimensional space) โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็นฟังก์ชันกับเวลาตามสมการ

$$\vec{r}(x,y,z)=e^{-2t}\,\hat{i}+4\sin 3t\,\hat{j}+5\cos\,3t\,\hat{k}$$

จงคำนวณหา

(a) ความเร็วของอนุภาค และขนาดของความเร็วที่เวลา t = 0

(b) ความเร่งของอนุภาค และขนาดของความเร่งที่เวลา t = 0

(ตอบ : (a) $\vec{v}=-6e^{-2t}\,\hat{i}+12\cos 3t\,\hat{j}-15\sin\hat{k};\ |\vec{v}|=13.4$,

(b) $\vec{a}=12e^{-2t}\,\hat{i}-36\sin\hat{j}-45\cos 3t\,\hat{k};\ |\vec{a}|=46.6$)

7. จงแสดงว่า $\vec{\nabla}r^{n}=nr^{n-2}\vec{r}$

8. ถ้า $\phi=x^{2}yz^{3}$ และ $\vec{A}=xz\hat{i}-y^{2}\hat{j}+2x^{2}y\hat{k}$ จงหา

(a) $\vec{\nabla}\phi$

(b) $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})$

(ตอบ : (a) $\left(2xyz^{3}\hat{i}+x^{2}z^{3}\hat{j}+3x^{2}yz^{2}\hat{k}\right)$,

(b) $\left\{\left(4x^{4}yz^{3}+3x^{2}y^{3}z^{2}\right)\hat{i}+\left(4x^{3}yz^{3}-8x^{3}y^{2}z^{3}\right)\hat{j}+\left(-2xy^{3}z^{3}-x^{3}z^{4}\right)\hat{k}\right\}$)

บทที่ 2 การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง

เค้าโครงเรื่อง : 2.1 จลนศาสตร์ของอนุภาค การเคลื่อนที่

2.2 ความเร็วเฉลี่ย

2.3 ความเร็วบัดดล

2.4 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง

2.5 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

2.6 วัตถุตกอิสระ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

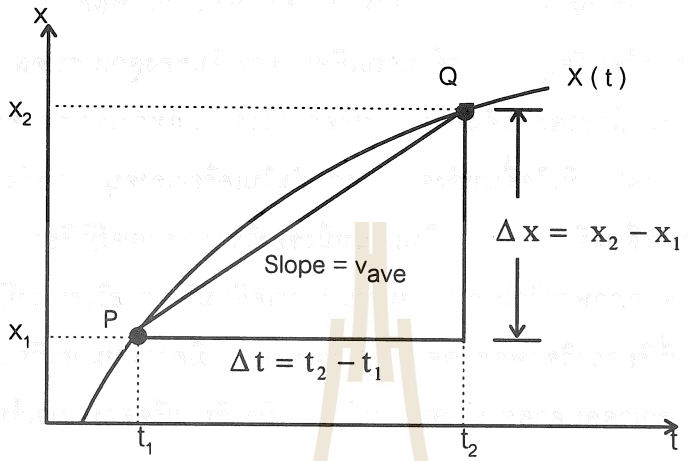
2.1 จลนศาสตร์ของอนุภาค การเคลื่อนที่

กลศาสตร์ (mechanics)เป็นศาสตร์ทางกายภาพที่เก่าแก่ที่สุด เกี่ยวข้องกับการศึกษาการเคลื่อนที่ของก้อนวัตถุ การคำนวณเพื่อหาทางเดินของลูกเบสบอล หรือทางเดินของยานอวกาศที่ส่งไปสำรวจดาวอังคาร หรือการวิเคราะห์ทางเดินของอนุภาคพื้นฐาน (elementary particles) ที่เกิดขึ้นหลังจากการชนกันในเครื่องเร่งอนุภาคพลังงานสูง การศึกษาพฤติกรรมการเคลื่อนที่ (motion) เป็นส่วนหนึ่งของวิชากลศาสตร์ที่เรียกว่า จลนศาสตร์ (kinematics) มาจากภาษากรีกโบราณ หมายถึงการเคลื่อนที่ การวิเคราะห์ถึงเหตุของการเคลื่อนที่ เป็นส่วนที่เรียกว่าวิชาพลศาสตร์ (dynamics) มีความหมายเกี่ยวกับแรงกระทำ ในบทเรียนนี้จะพิจารณาจลนศาสตร์ของอนุภาคในแนวมิติเดี่ยวหรือตามแนวเส้นตรงเท่านั้น

ในการศึกษาจลนศาสตร์ของอนุภาค จะเริ่มที่การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง เพื่อความง่ายในการเข้าใจคำนิยามของปริมาณการเคลื่อนที่ต่างๆ เช่น ความเร็ว และความเร่ง การเลือกศึกษาการเคลื่อนที่เฉพาะของ "อนุภาค" หรือก้อนวัตถุที่สามารถใช้ตัวแทนเป็นมวลจุดได้ (point mass) เพื่อหลีกเลี่ยงการเคลื่อนที่ภายในระบบ เช่น การหมุน และการสั่นภายใน

การเคลื่อนที่ของอนุภาคสามารถอธิบายได้ในสองลักษณะ ในลักษณะสมการทางคณิตศาสตร์ของปริมาณการเคลื่อนที่ และในลักษณะความสัมพันธ์ปริมาณในรูปกราฟ การศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นการศึกษาปริมาณการเคลื่อนที่ ได้แก่ การกระจัด $(\vec{s})$ ความเร็ว $(\vec{v})$ และความเร่ง $(\vec{a})$ เทียบกับเวลา (t) การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงตามแกน X แกน Y หรือแกน Z ในแนวมิติเดี่ยว ซึ่งประกอบด้วย กรณีที่อนุภาคอยู่นิ่ง อนุภาคมีความเร็วคงตัว อนุภาคมีความเร่ง ความหน่วง รวมถึงการเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นตัวอย่างง่ายด้วย

2.2 ความเร็วเฉลี่ย



รูป 2.1 การเคลื่อนที่ของอนุภาคแสดงด้วยฟังก์ชันของการกระจัด ที่ขึ้นกับเวลา x(t) ความเร็วเฉลี่ยนิยามจากค่าช่วง Δx ต่อช่วงเวลา Δt

อนุภาคเคลื่อนที่จากจุด x_1 ที่เวลา t_1 ไปยังจุด x_2 ที่เวลา t_1 ค่าความเร็วเฉลี่ย (v_{ave}) ในช่วงเวลา นิยามจากความสัมพันธ์

$$v_{ave} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

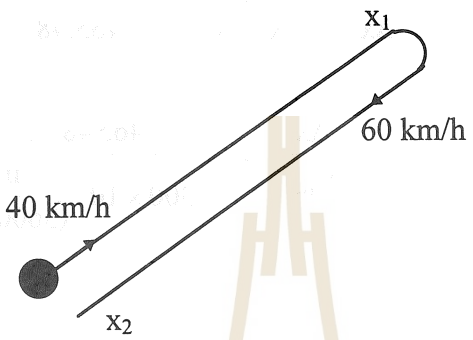
= ความชันของเส้นตรง PQ

ความเร็วเฉลี่ยบอกถึงพฤติกรรมการเคลื่อนที่เฉลี่ยระหว่างจุด x_1 และ x_2 ไม่บอกถึงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแต่ละจุดเวลาตลอดการเคลื่อนที่ นั่นคือ รายละเอียดของการเคลื่อนที่ระหว่างจุด x_1 และ x_2 จะสูญเสียไปถ้าเราใช้ค่าความเร็วเฉลี่ย ความเร็วเฉลี่ยคำนวณจากการกระจัด Δx ในช่วงเวลาที่ผ่านไป Δt หากเป็นการกระจัดครบรอบ เช่น การวิ่งรอบสนามรถแข่งรอบสนาม มีค่า $\Delta x = 0$ ทำให้ $v_{ave} = 0$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 2.1 รถยนต์เคลื่อนที่ขึ้นเขาด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และย้อนลงเขาด้วยอัตราเร็ว 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงคำนวณความเร็วเฉลี่ย ตลอดการเคลื่อนที่

วิธีทำ

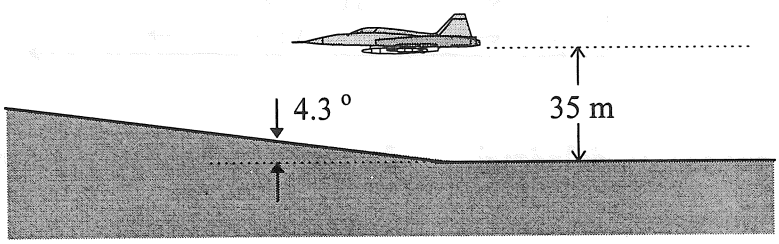


$$\Delta x = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = 0$$

$$\therefore \quad v_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \quad km/h$$

ตัวอย่าง 2.2 เครื่องบินรบความเร็วสูง ฝึกบินการหลบเลี่ยงการตรวจจับเรดาร์ในแนวนอนระดับความสูง 35 เมตร เหนือพื้นดิน ขณะบินเครื่องบินผ่านบริเวณผิวดินที่มีความชัน 4.3° สูงกว่าพื้นราบ เป็นการเปลี่ยนระดับผิวพื้นที่ยากต่อการสังเกต นักบินมีเวลาเท่าใดในการแก้ไขเพื่อไม่ให้ชนพื้น อัตราเร็วเครื่องบิน 1300 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

วิธีทำ



$$\tan 4.3^\circ = \frac{35}{\Delta x}$$

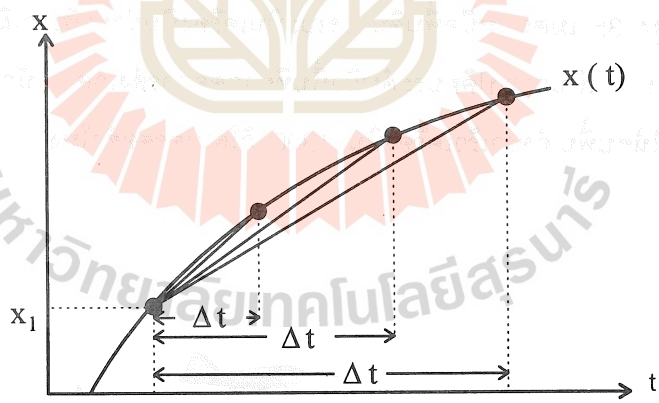
$$\Delta x = \frac{35}{\tan 4.3^\circ} = \frac{35}{0.075} = 465.48 \text{ m}$$

$$\therefore \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 465.48 \text{ m}$$

$$\text{เวลาก่อนชนพื้น} = \frac{\Delta x}{v_{ave}} = \frac{465.48 \text{ m}}{1300 \times 10^3 \frac{\text{m}}{(3600 \text{ s})}} = 1.29 \text{ s}$$

2.3 ความเร็วบัดดล

รายละเอียดของการเคลื่อนที่บอกได้ด้วยความเร็วที่เป็นฟังก์ชันของเวลา $v(t)$ ความเร็วของทุกจุดบนแนวทางการเคลื่อนที่



รูป 2.2 ช่วงเวลา Δt เข้าใกล้ศูนย์ นิยามของความเร็วเฉลี่ยเข้าสู่นิยามของความเร็วบัดดล

นิยามความเร็วบัดดล(instantaneous velocity) มาจากการจำกัดให้ Δt เข้าสู่ 0 ในค่าความเร็วเฉลี่ย

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

$$= \text{ความชันของเส้นสัมผัสจุด P}$$

ในรูปอนุพันธ์เทียบกับเวลา

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{x}}{dt} \qquad (2.3)$$

ความเร็วที่ใช้ในวิชากลศาสตร์เป็นความเร็วบัดดล

ตัวอย่าง 2.3 ตำแหน่งของอนุภาคเคลื่อนที่ตามแกน x ในหน่วยเซนติเมตร มีความสัมพันธ์ตามสมการ $x = 9.75+1.50\ t^3$ โดย t เป็นวินาที ในช่วงเวลา t = 2 ถึง t = 3 จงคำนวณ

(a) ความเร็วเฉลี่ย

(b) ความเร็วบัดดล t = 2 วินาที

(c) ความเร็วบัดดล t = 3 วินาที

(d) ความเร็วบัดดล t = 2.5 วินาที

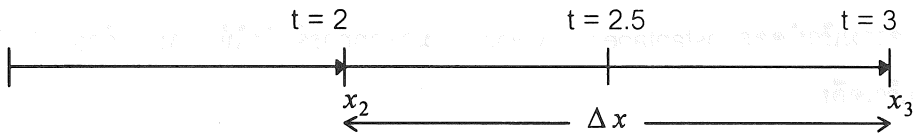
(e) ความเร็วบัดดล เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ตรงจุดกึ่งกลางของทางเดินระหว่างเวลา t = 2 วินาที และ t = 3 วินาที

วิธีทำ

(a) $$v_{ave} = \frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}$$

$$t = 2\,s \;;\quad x_2 = 9.75+1.5(2)^3 = 21.75 \text{ cm}$$

$$t = 3\,s \;;\quad x_3 = 9.75+1.5(3)^3 = 50.25 \text{ cm}$$



$$\bar{v} = \frac{x_3 - x_2}{\Delta t} = \frac{50.25 - 21.75}{1} = 28.5 \quad cm/s$$

(b)
$$\bar{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(9.75 + 1.5t^3\right)$$
$$= 0 + 1.5 \times 3t^2 = 4.5t^2$$
$$\bar{v} = 4.5t^2 \quad ; \quad t = 2$$
$$\bar{v} = 4.5 \times (2)^2 = 18.0 \quad cm/s$$

(c) $t = 3$ s ; $\bar{v} = 4.5 \times (3)^2 = 40.5$ cm/s

(d) $t = 2.5$ s ; $\bar{v} = 4.5 \times (2.5)^2 = 28.1$ cm/s

(e) $$x = 9.75 + 1.50t^3$$

$$21.75 + 14.25 = 36.00 = 9.75 + 1.50t^3$$

$$t^3 = \frac{36.00 - 9.75}{1.5}$$

$$= \frac{26.25}{1.5} = 17.5$$

$$\therefore \quad t = 2.6 \quad s$$

$$v = 4.5 \times (2.6)^2$$

$$= 30.4 \quad cm/s$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

2.4 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง

ในขณะมีการเคลื่อนที่ ความเร็วของอนุภาคอาจเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา การเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลานี้เราเรียกว่า "ความเร่ง" โดยมีนิยามความเร่งเฉลี่ย ($\bar{a}_{ave}$) ได้ดังนี้

$$\bar{a}_{ave} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

ค่าความเร่งเฉลี่ยบอกถึงพฤติกรรมการเปลี่ยนแปลงความเร็วในภาพรวม แต่ไม่เจาะลึกรายละเอียดเทียบกับจุดเวลา ขึ้นอยู่เพียงการเปลี่ยนแปลงผลลัพธ์ของความเร็วในช่วงเวลา Δt ถ้าการเปลี่ยนแปลงความเร็วในช่วงเวลา Δt มีค่าเท่ากันตลอดการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่เป็นชนิด ความเร่งเฉลี่ยคงตัว

ถ้าการเปลี่ยนแปลงความเร็วในช่วงเวลาเท่ากัน มีค่าแตกต่างกัน ความเร่งมีค่าเปลี่ยนตามเวลาต้องนิยามความเร่งบัดดล เพื่อให้รายละเอียดของการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา $(\Delta t \rightarrow 0)$

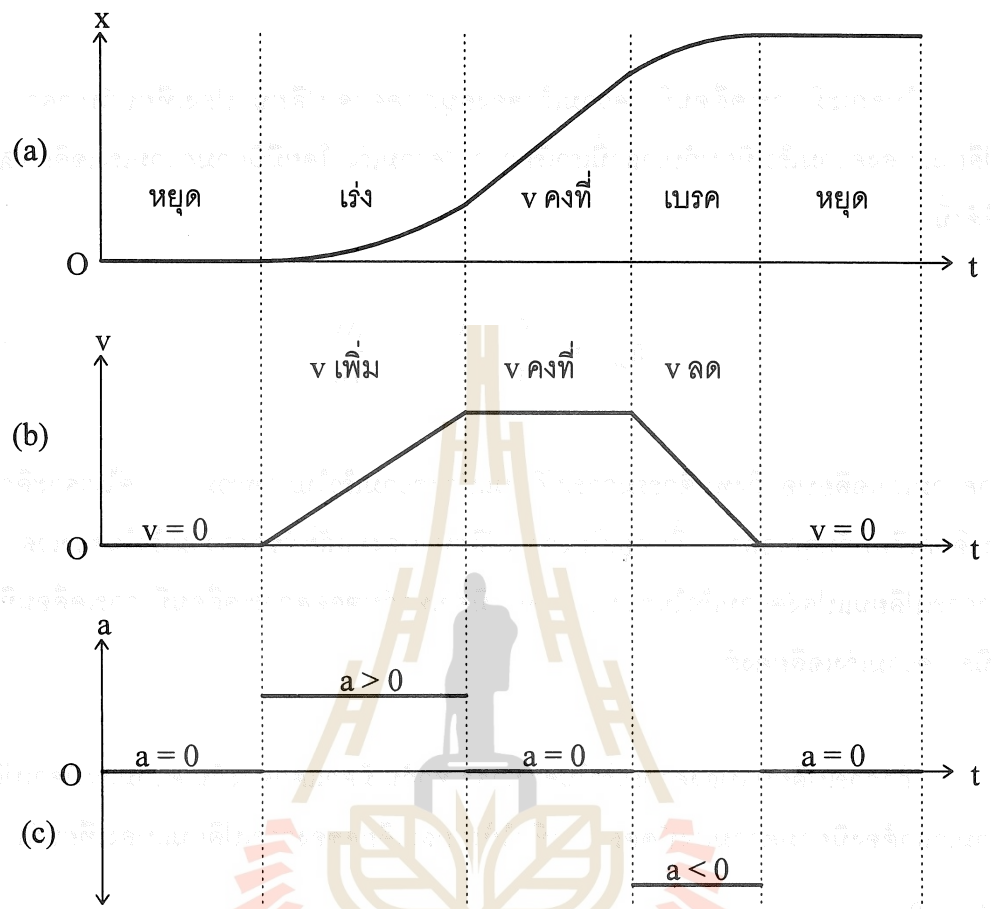
$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \qquad (2.5)$$

หรือในรูปอนุพันธ์

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad (2.6)$$

ความเร่ง a อาจมีค่าบวกหรือลบก็ได้ ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงในทางมากขึ้น หรือน้อยลงของความเร็วเทียบกับเวลา รูป 2.3 แสดงการเคลื่อนที่ของรถที่มีค่าความเร่งในลักษณะต่างๆ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 2.3 กราฟแสดง (a) ตำแหน่ง (b) ความเร็ว (c) ความเร่งของรถที่เริ่มจากหยุดนิ่ง เคลื่อนที่ในลักษณะต่างๆ จนกระทั่งหยุดนิ่ง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 2.4 อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีความเร็วเป็นฟังก์ชันเทียบกับเวลา ตามสมการ

$$\vec{v}(t) = 10+2t^2 \qquad \text{เซนติเมตร/วินาที}$$

(a) ความเร่งเฉลี่ย ในช่วง $t_1 = 2$ วินาที และ $t_2 = 5$ วินาที

(b) ความเร่งบัดดล $t = 2$ วินาที

วิธีทำ

(a)

$$v(t_1) = 10 + 2(2)^2 = 18 \quad cm/s$$

$$v(t_2) = 10 + 2(5)^2 = 60 \quad cm/s$$

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = 60 - 18 = 42 \quad cm/s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{42}{3} = 14 \quad cm/s^2$$

(b)

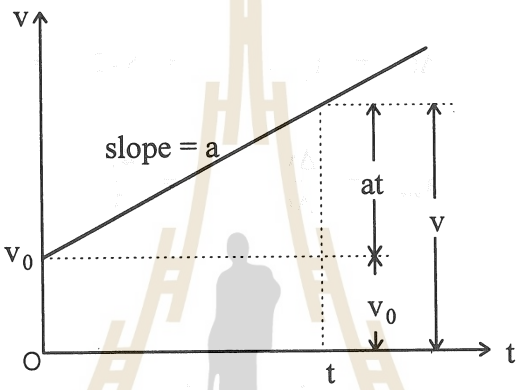
$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(10 + 2t^2)$$

$$= 4t\Big|_{t=2} = 4 \times 2 = 8 \quad cm/s^2$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

2.5 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว (หรือเกือบคงตัว) พบเห็นได้โดยทั่วไป เช่น วัตถุตกอิสระบริเวณผิวโลก รถยนต์ห้ามล้อจนหยุด การเคลื่อนที่ที่มีความเร็วเปลี่ยนค่าอย่างสม่ำเสมอ ในช่วงเวลาที่เท่ากัน แสดงได้ด้วยกราฟในรูป 2.4



รูป 2.4 กราฟระหว่าง v กับ t เมื่อความเร่งมีค่าคงตัว

ความชันของกราฟเส้นตรงระหว่าง v กับ t มีค่าคงตัวเท่ากัน

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a(t) \qquad (2.7)$$

จุดเริ่มต้น $(v_1, t_1) = (v_0, 0)$ และจุดสุดท้าย $(v_2, t_2) = (v, t)$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t}$$

หรือ $$v = v_0 + at \qquad (2.8)$$

การคำนวณหาการกระจัด x ในการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว a ได้จากการอินทิเกรตสมการ (2.6)

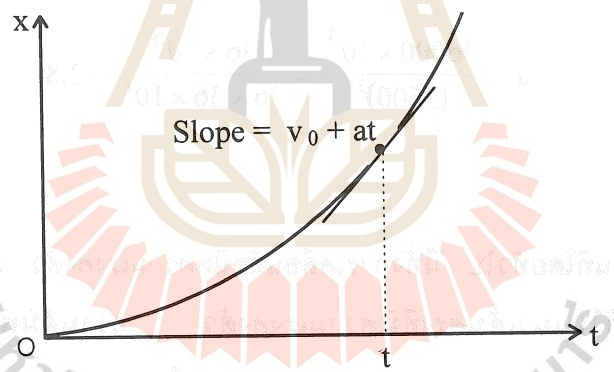
$$v = \frac{dx}{dt} = v_{\circ} + at$$

$$\int_{x_{\circ}}^{x} dx = \int_{\circ}^{t} v_{\circ}\, dt + \int_{\circ}^{t} at\, dt$$

$$x - x_{\circ} = v_{\circ} t + \frac{1}{2} a t^2$$

โดยปกติ $X_0 = 0$ ที่จุดเริ่มต้น

(2.9)



รูป 2.5 กราฟแสดงความสัมพันธ์การกระจัดกับเวลาเมื่อความเร่งมีค่าคงตัว

กราฟแสดงความสัมพันธ์ x(t) แสดงในรูป 2.5 ความสัมพันธ์ของความเร็วกับค่าความเร่งในรูปสมการคณิตศาสตร์ หาได้จากแทนค่าเวลา $t = \frac{v - v_{\circ}}{a}$ ในสมการ (2.9)

$$x = v_{\circ}\left(\frac{v - v_{\circ}}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_{\circ}}{a}\right)^2$$

จะได้ $$v^2 = v_{\circ}^2 + 2ax \qquad (2.10)$$

ตัวอย่าง 2.5 เครื่องบินไอพ่น มีความเร็วเท่ากับ 360 กิโลเมตร/ชั่วโมง บนทางวิ่งเพื่อจะบินขึ้นได้ สมมุติให้ความเร่งของเครื่องบินคงที่ และทางวิ่งยาว 1.8 กิโลเมตร จะต้องใช้ความเร่งเท่าใด จากเครื่องอยู่นิ่ง

วิธีทำ

$$v_o = 0; \quad s = 1.8 \quad km.; \quad v = 360 \quad km/h$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as$$

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2s} = \frac{(360)^2 - 0}{2 \times 1.8} = 36{,}000 \quad km/h^2$$

หรือ

$$a = \frac{36000 \times 10^3}{(3600)^2} = \frac{36 \times 10^6}{36 \times 36 \times 10^4} = 2.8 \qquad m/s^2$$

การเคลื่อนที่โดยทั่วไป มีทั้งการเคลื่อนที่ชนิดความเร่งคงตัว และความเร่งไม่คงตัว กรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงที่มีความเร่งคงตัว ความสัมพันธ์ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ตามสมการ (2.6), (2.9) และ (2.10) เป็นสมการการเคลื่อนที่ที่สมบูรณ์แบบ กรณีความเร่งไม่คงตัว ความเร่งเป็นฟังก์ชันของเวลา a(t) การหาความเร็ว v(t) และระยะกระจัด x(t) ใช้วิธีการอินทิเกรตฟังก์ชัน

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)\, dt$$

และ

$$v - v_0 = \int_0^t a(t)\, dt \qquad (2.11)$$

ตัวอย่าง 2.6 รถยนต์มีความเร่งตามสมการ $a(t) = 2.0 - 0.1t \ \ m/s^2$ ที่จุดเริ่มต้น

$v_0 = 10 \ \ m/s$

(a) จงแสดง ฟังก์ชันความเร็วเทียบกับเวลา $v(t)$ และระยะเทียบกับเวลา $x(t)$

(b) คำนวณหาเวลา t ที่ค่า v มีค่าสูงสุด

(c) v สูงสุดมีค่าเท่าใด

วิธีทำ

(a) $$v - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt = \int_0^t (2.0 - 0.1)\,dt$$

$$\therefore \quad v(t) = 10 + 2.0t - 0.05t^2$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (10 + 2.0t - 0.5t^2)dt$$

$$x(t) = 10t + 1.0t^2 - 0.017t^3$$

(b) ที่ค่า v สูงสุด

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2.0 - 0.1t = 0$$

$$\therefore t = 20 \ \ s$$

(c) $$v_{max} = v\big|_{t=20\ s}$$

$$= (2.0)(20) - 0.05(20)^2 + 10$$

$$= 40 \ \ m/s$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

2.6 วัตถุตกอิสระ

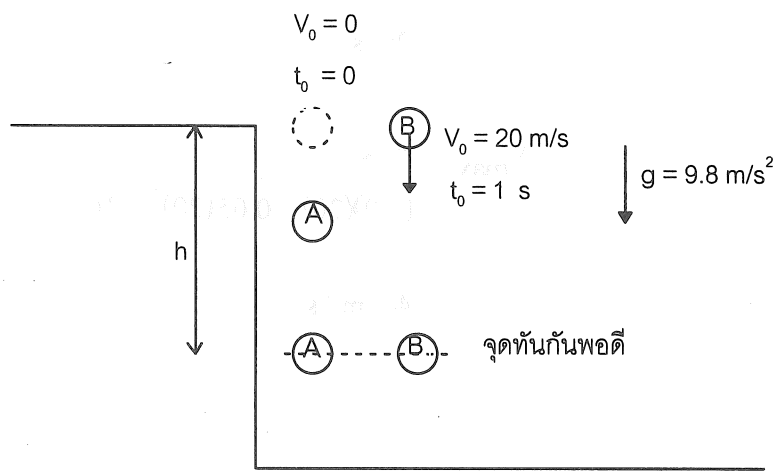
ตัวอย่างการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว (หรือเกือบคงตัว) ที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน คือ การตกของก้อนวัตถุสู่พื้นโลก ถ้าเราสามารถทำให้วัตถุตกสู่พื้นโลกในสุญญากาศได้ ค่าแรงต้านทานอากาศไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ เราจะได้ข้อสรุปที่สำคัญว่า "วัตถุทุกก้อน จะตกลงสู่พื้นโลกที่บริเวณเดียวกัน ด้วยค่าความเร่งคงตัวค่าเดียวกัน โดยไม่ขึ้นอยู่ กับขนาด รูปทรง และส่วนประกอบ" ค่าความเร่งนี้เราเรียก ค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (gravitational acceleration, g)

บริเวณใกล้ผิวโลกค่า g มีค่าประมาณ 9.8 เมตร/วินาที^{2} มีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก ค่า g จะเปลี่ยนค่าไปตามบริเวณต่างๆ บนผิวโลก ระดับพื้นผิว รวมถึงค่าความหนาแน่นของพื้นดิน บริเวณนั้นๆ ด้วย

ดาวที่มีมวลต่างกันค่าความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวดวงดาวนั้น ๆ จะต่างกันเช่น ค่า g ที่ผิวดวงจันทร์มีค่า 1.67 เมตร/วินาที^{2} และ ค่า g ที่ผิวดวงอาทิตย์มีค่า 274 เมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่าง 2.7 ลูกบอล A ถูกปล่อยให้ตกลงมาจากขอบหน้าผา เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ลูกบอล B ถูกขว้างลงมาด้วยความเร็วต้น 20 เมตร/วินาที ถามว่าลูกบอล B จะตามทันลูกบอล A ที่ระยะความลึก เท่าใด ?

วิธีทำ



กำหนดให้ลูกบอล B ใช้เวลา t จากจุดเริ่มต้นถึงจุดทันกันพอดี และเคลื่อนที่ได้ระยะ = h

$$x = v_o t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$-h = -20t + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$\therefore \quad h = 20t + \frac{9.8}{2}t^2 \qquad \text{.....(1)}$$

ลูกบอล A เคลื่อนที่ได้ระยะ h ใช้เวลาเป็น (t+1) s

$$-h = 0 - \frac{1}{2}(9.8)(t+1)^2$$

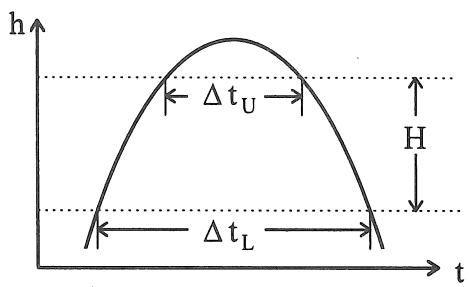
หรือ $$h = \frac{9.8}{2}(t+1)^2 \qquad \text{.....(2)}$$

(1) = (2) $$\frac{9.8}{2}(t+1)^2 = \frac{9.8}{2}t^2 + 20t$$

$$\therefore \quad t = \frac{9.8}{2 \times 10.2} = 0.48 \text{ s}$$

แทนค่า t หาค่า h ; $$h = \frac{1}{2}(9.8)(0.48+1)^2 = 10.7 \text{ m}$$

ตัวอย่าง 2.8 การทดลองเพื่อวัดค่า g ที่ National Physical Laboratory ในประเทศอังกฤษ ทำโดยการขว้างลูกแก้วขึ้นตรงตามแนวดิ่ง แล้วปล่อยให้ตกกลับลงมา ในหลอดสุญญากาศ ถ้า Δt_L เป็นช่วงเวลาระหว่างจุดผ่านขาขึ้น และจุดผ่านขาลงช่วงล่าง และ Δt_U เป็นช่วงเวลาในช่วงบนและ H เป็นระยะความสูงระหว่างระดับทั้งสอง



จงแสดงว่า

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$

วิธีทำ

(A) $$v = v_o + at$$

$$-v_A = v_A - g(\Delta t_L)$$

$$2v_A = g(\Delta t_L)$$

$$v_A^2 = \frac{1}{2}g^2\left(\Delta t_L^2\right) \quad \text{.....(1)}$$

(B) $$v_B^2 = \frac{1}{2}g^2\left(\Delta t_U^2\right) \quad \text{..... (2)}$$

(1) - (2) $$v_A^2 - v_B^2 = \frac{1}{4}g^2\left\{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2\right\} \quad \text{.....(3)}$$

$$v^2 = v_o^2 + 2as$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2(-g)(H)$$

$$v_A^2 - v_B^2 = 2gH \quad \text{.....(4)}$$

(3) = (4) $$\frac{1}{4}g^2\left\{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2\right\} = 2gH$$

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. ถ้านักศึกษาขับรถบนถนนไฮเวย์ จากกรุงเทพมหานคร ถึง นครราชสีมา ในช่วงครึ่งเวลาแรกนักศึกษาเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 56.3 กิโลเมตร/ชั่วโมง ครึ่งเวลาหลัง 88.5 กิโลเมตร/ชั่วโมง ในช่วงขากลับนักศึกษาเคลื่อนที่ครึ่งระยะทางแรกด้วยอัตราเร็ว 56.3 กิโลเมตร/ชั่วโมง ครึ่งระยะทางหลัง 88.5 กิโลเมตร/ชั่วโมง นักศึกษามีอัตราเร็วเฉลี่ยเท่าใด ในช่วง

(a) จาก กรุงเทพมหานคร ถึง นครราชสีมา

(b) จาก นครราชสีมา ถึง กรุงเทพมหานคร

(c) ทั้งไปและกลับ

(ตอบ : (a) 72.4 km/h (b) 68.82 km/h (c) 70.67 km/h)

2. อนุภาคเคลื่อนที่ในแกน x ตามสมการ $x=50t + 10t^2$ โดย x มีหน่วยเป็นเมตร t เป็นวินาที จงคำนวณ

(a) ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคช่วง 3 วินาทีแรก

(b) ความเร็วของอนุภาคมี t = 3 วินาที

(c) ความเร่งของอนุภาคมี t = 3 วินาที

(ตอบ : (a) 80 m/s (b) 110 m/s (c) 20 m/s^2)

3. อนุภาคแอลฟา (นิวเคลียสของธาตุฮีเลียม) เคลื่อนที่ไปตามท่อนำส่งอนุภาคตรงยาว 2.0 เมตร ในเครื่องเร่งอนุภาค

(a) ถ้าอนุภาคเข้าท่อนำส่งด้วยอัตราเร็ว 1.0×10^4 เมตร/วินาที และหลุดออกจากท่อด้วยอัตราเร็ว 5.0×10^6 เมตร/วินาที ถ้าสมมุติให้เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว คำนวณหาค่าความเร่งของอนุภาค

(b) อนุภาคใช้เวลานานเท่าใดในท่อนำส่ง

(ตอบ : (a) 6.3×10^{12} m/s^2 (b) 0.80×10^{-6} μs)

4. รถไฟใต้ดินเคลื่อนที่ด้วยความเร่งจากหยุดนิ่งจากสถานีหนึ่ง (a=+1.20 เมตร/วินาที^{2}) ไปยังอีกสถานีหนึ่ง เมื่อถึงจุดครึ่งทางรถไฟเคลื่อนที่ด้วยความหน่วง (a=-1.20 เมตร/วินาที^{2}) จนมีความเร็วเป็นศูนย์ที่สถานีปลายทาง สถานีทั้งสองห่างกัน 1.10 กิโลเมตร คำนวณหา

(a) เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ระหว่างสถานี

(b) อัตราเร็วสูงสุดของรถไฟ

(ตอบ : (a) 60.5 s (b) 36.3 m/s)

5. เมื่อไฟเขียวเปิด รถยนต์เคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว 2.2 เมตร/วินาที^{2} ในขณะเดียวกันรถบรรทุกที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ 9.5 เมตร/วินาที แซงผ่านรถยนต์

(a) จากจุดเริ่มต้นรถยนต์จะทันรถบรรทุกที่ระยะเท่าใด

(b) ความเร็วของรถยนต์มีค่าเท่าใดที่จุดทันกันพอดี

(c) เขียนกราฟ x และ t ของรถทั้งสอง

6. วิศวกรบนรถไฟมีกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v_1 มองเห็นรถไฟบรรทุกนำหน้าอยู่ห่างเป็นระยะ d บนรางเดียวกัน และกำลังเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวกันด้วยอัตราเร็วคงตัว v_2 (น้อยกว่าค่า v_1) เขาเหยียบเบรครถไฟ ทำให้มีความหน่วง a จงแสดงว่า

(a) ถ้า $d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ จะไม่มีการชนกัน

ถ้า $d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ จะมีการชนกัน

(b) เขียนกราฟ x กับ t ของรถไฟแต่ละขบวน

7. ผู้เล่นบาสเกตบอลกำลังจะ "dunk" ลูกบอล กระโดดขึ้นสูงจากพื้น 76 เซนติเมตร ตามแนวดิ่ง คำนวณหาเวลาที่ผู้เล่นใช้

(a) ในช่วง 15 เซนติเมตร ช่วงบนของการกระโดด

(b) ในช่วง 15 เซนติเมตร ช่วงล่าง ของการกระโดด

(c) อธิบายว่าทำไมผู้เล่นบางคนดูเหมือนจะลอยค้างอยู่กลางอากาศในช่วงบน ของการกระโดด

(ตอบ : (a) 350 ms (b) 82 ms)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 3 การเคลื่อนที่สองมิติและสามมิติ

เค้าโครงเรื่อง 3.1 การเคลื่อนที่บนระนาบ การเคลื่อนที่สามมิติ

3.2 นิยาม ตำแหน่ง การกระจัด
ความเร็ว และความเร่ง

3.3 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวสามมิติ

3.4 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

3.5 การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว

3.6 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม

3.7 ความเร็วสัมพัทธ์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

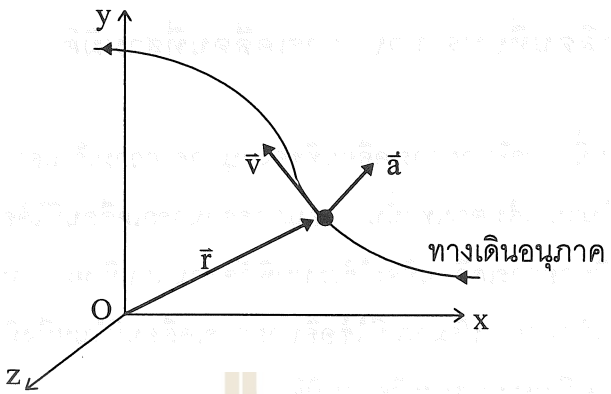
3.1 การเคลื่อนที่บนระนาบ การเคลื่อนที่สามมิติ

ในบทนี้การอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค ความเร็วและความเร่ง จะไม่จำกัดอยู่ที่การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเท่านั้น อนุภาคสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างทั่วไปในปริภูมิ(space) 3 มิติ การอธิบายการเคลื่อนที่จะใช้ระบบพิกัดตามแกนที่เหมาะสม ใช้พีชคณิตและแคลคูลัสของเวกเตอร์เข้าช่วย ปริมาณที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ เป็นตัวแปรตัวหนึ่งของปริมาณเวกเตอร์ในระบบสองหรือสามมิติ

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ และการเคลื่อนที่แบบวงกลม เป็นลักษณะการเคลื่อนที่ในระนาบใดระนาบหนึ่งที่พบเห็นในชีวิตประจำวัน เช่น การเคลื่อนที่ของลูกบอลเมื่อถูกขว้างขึ้นในอากาศ ลูกปืนถูกยิงออกจากกระบอกปืน ลูกบอลติดปลายเชือกแกว่งเป็นวงกลม การโคจรของดวงจันทร์หรือดาวเทียมรอบโลก การโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ การอธิบายการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ ต้องใช้หลักการของเวกเตอร์ ดังนั้นปริมาณที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่คือ การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง จะอยู่ในรูปสมการของเวกเตอร์ในระบบพิกัดที่เหมาะสม

3.2 นิยาม ตำแหน่ง การกระจัด ความเร็ว และความเร่ง

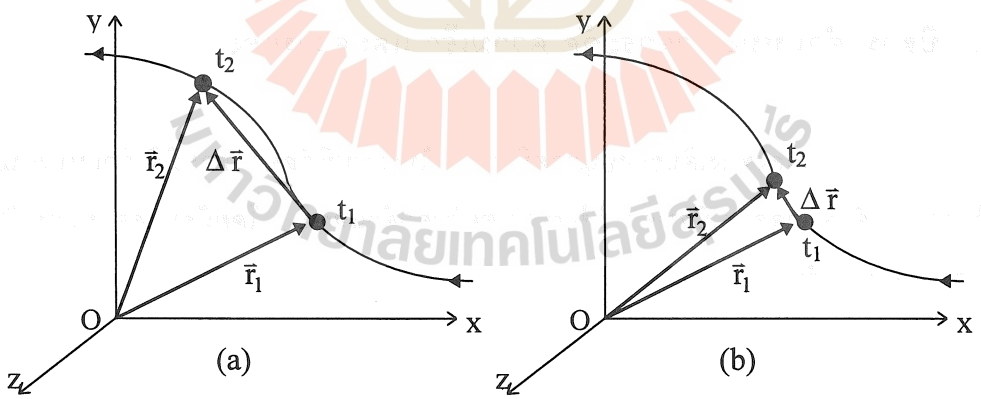
รูป 3.1 แสดงทางเดินของอนุภาคที่เวลา t ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ตำแหน่งอนุภาคหรือการกระจัดจากจุดกำเนิดบอกได้ด้วยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ โดยมีขนาดตามแกนเป็น x, y และ z ตามลำดับ



รูป 3.1 ทางเดินอนุภาคในระบบพิกัดฉากสามมิติ แสดงเวกเตอร์บอกตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง

เวกเตอร์กำหนดตำแหน่ง $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (3.1)$$

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\vec{r}_1$ ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง $\vec{r}_2$ ที่เวลา t_2 ดังแสดงในรูป 3.2 (a)



รูป 3.2 (a) ช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ อนุภาคกระจัดได้ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (b) เมื่อช่วงเวลา $\Delta t \to 0$ เวกเตอร์การกระจัด $\Delta\vec{r}$ วางตัวอยู่ในแนวทางเดินของอนุภาค

ความเร็วเฉลี่ย v_{ave} นิยามจาก $$v_{ave} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

โดยมีทิศทางตามทิศทางการกระจัด $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ในขณะที่ช่วงเวลา $\Delta t \to 0$ เวกเตอร์การกระจัด $\Delta \vec{r}$ จะวางตัวอยู่ในแนวเส้นสัมผัสทางเดินของอนุภาค ดังแสดงในรูป 3.2 (b) ค่าความเร็วเฉลี่ยจะเข้าสู่ค่าความเร็ว ณ จุดเวลา $\bar{v}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3.3)$$

หรือในรูปอนุพันธ์ $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.4)$$

เวกเตอร์ความเร็ว $\bar{v}$ มีทิศทางตามแนว $\Delta \vec{r}$ ขณะ $\Delta t \to 0$ นั่นคืออยู่ในแนวเส้นสัมผัสทางเดินอนุภาค ในทุกๆ จุดของการเคลื่อนที่ นิยามความเร็วของอนุภาคมาจากการหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{r}$ เทียบกับเวลา t

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) \\ &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

เมื่อเขียน $\bar{v}$ ในรูปเวกเตอร์องค์ประกอบ v_x, v_y และ v_z

$$\begin{aligned} v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} &= \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \\ v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (3.6)$$

สรุปได้ว่าสมการเวกเตอร์ความเร็ว สมการ (3.5) ให้ข้อมูลเทียบได้กับสมการสเกลาร์ของปริมาณตามแกนถึง 3 สมการ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ในทำนองเดียวกัน ความเร่งในรูปอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลานิยามได้ดังนี้

ความเร่งเฉลี่ย

$$a_{ave} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} \tag{3.7}$$

และความเร่งบัดดล หาได้จากความเร่งเฉลี่ยเมื่อ $\Delta t \to 0$

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

ในรูปอนุพันธ์

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \tag{3.8}$$

และในรูปองค์ประกอบ a_x, a_y, a_z คือ

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.9}$$

ตัวอย่าง 3.1 อนุภาคเคลื่อนที่ในระนาบ xy โดยมีจุดพิกัดตามแกนมีความสัมพันธ์กับเวลา t ตามสมการ $x(t) = t^3 - 32t$ และ $y(t) = 5t^2 + 12$ โดย x และ y มีหน่วยเป็นเมตร เวลา t เป็นวินาที จงหาเวกเตอร์ บอกตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของอนุภาคเมื่อเวลา t = 3 วินาที

วิธีทำ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (t^3 - 32t)\hat{i} + (5t^2 + 12)\hat{j}$

ที่ t=3 ; $\vec{r} = -69\hat{i} + 57\hat{j}$ ในหน่วยเมตร

ความเร็วตามแกน

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t$$

$$\therefore \quad \bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (3t^2 - 32)\hat{i} + 10t\hat{j}$$

ที่เวลา t=3 ; $\bar{v} = -5\hat{i} + 30\hat{j}$ ในหน่วยเมตร/วินาที

ความเร่งตามแกน

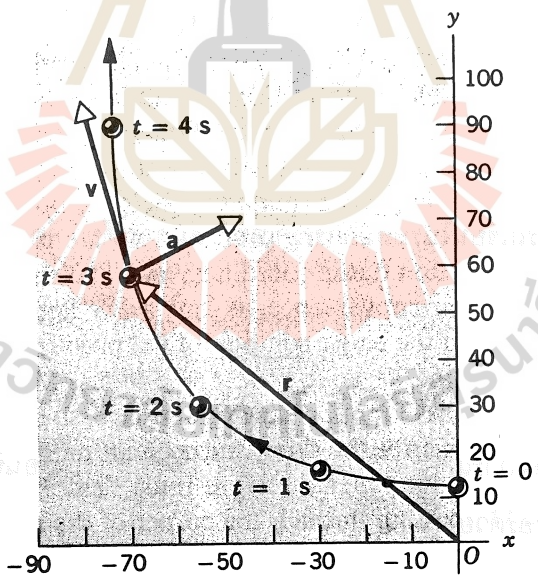
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

ความเร่งที่เวลา $t = 3\,s$; $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 6t\hat{i} + 10\hat{j}$

$$= 18\hat{i} + 10\hat{j} \quad m/s$$

รูป 3.3 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในตัวอย่าง 3.1 แสดงทางเดิน ทิศทางเวกเตอร์บอกตำแหน่ง และเวกเตอร์ความเร็ว ความเร่ง สังเกตว่าทิศทางเวกเตอร์ $\bar{r}, \bar{v}$ และ $\bar{a}$ ไม่มีความสัมพันธ์กันโดยตรง



รูป 3.3 เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในตัวอย่าง 3.1

3.3 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวใน 3 มิติ

พิจารณากรณีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว ขณะอนุภาคเคลื่อนที่ ความเร่ง $\bar{a}$ มีขนาดคงตัวและไม่เปลี่ยนทิศทาง ทำให้องค์ประกอบความเร่ง a_x , a_y และ a_z ไม่เปลี่ยนขนาดด้วย ดังนั้นการเคลื่อนที่ลักษณะนี้ จัดได้เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวในแต่ละแกนที่เกิดขึ้นพร้อมๆกัน โดยปกติอนุภาคจะเคลื่อนที่ตามแนววิถีบนระนาบ ความเร่งตามแกนใดแกนหนึ่งอาจมีค่าเป็นศูนย์ เช่น ถ้า a_x =0 ความเร็วตามแกน x มีค่าคงที่ เช่น การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์

ถ้าอนุภาคเริ่มต้นเคลื่อนที่เวลา t=0 ตำแหน่งเริ่มต้น $\bar{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ และมีความเร็วเริ่มต้น $\bar{v}_0 = v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j} + v_{z0}\hat{k}$ เราสามารถเขียนสมการองค์ประกอบความเร็วได้ในลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร่งคงตัว

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x_0} + a_x t \\ v_y &= v_{y_0} + a_y t \\ v_z &= v_{z_0} + a_z t \end{aligned} \qquad (3.10)$$

สมการ (3.10) สามารถเขียนในรูปสมการเวกเตอร์ สมการเดียว คือ

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t \qquad (3.11)$$

ในทำนองเดียวกัน สมการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณการเคลื่อนที่อื่นๆ ก็สามารถเขียนได้ในรูปสมการเวกเตอร์ด้วยเช่นกัน ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\bar{a}t^2 \\ \bar{v}\cdot\bar{v} &= \bar{v}_0\cdot\bar{v}_0 + 2\bar{a}\cdot(\bar{r} - \bar{r}_0) \\ \bar{r} &= \bar{r}_0 + \frac{1}{2}(\bar{v}_0 + \bar{v})t \end{aligned} \qquad (3.12)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ถ้า $\vec{r}_0 = 0$ สมการ (3.12) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}\cdot\vec{v} &= \vec{v}_0\cdot\vec{v}_0 + 2\vec{a}\cdot\vec{r} \\ \vec{r} &= \frac{1}{2}\left(\vec{v}_0 + \vec{v}\right)t \end{aligned} \qquad (3.13)$$

ตัวอย่าง 3.2 อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลาตามสมการ

$$\vec{r}(t) = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$$

จงเขียนสมการ (a) ความเร็ว (b) ความเร่ง (c) เขียนกราฟแสดงวิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาค

วิธีทำ

(a)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k} \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = 8t\hat{j} + \hat{k} = v_y\hat{i} + v_z\hat{k} \\ v_y &= 8t \\ v_z &= 1 \end{aligned}$$

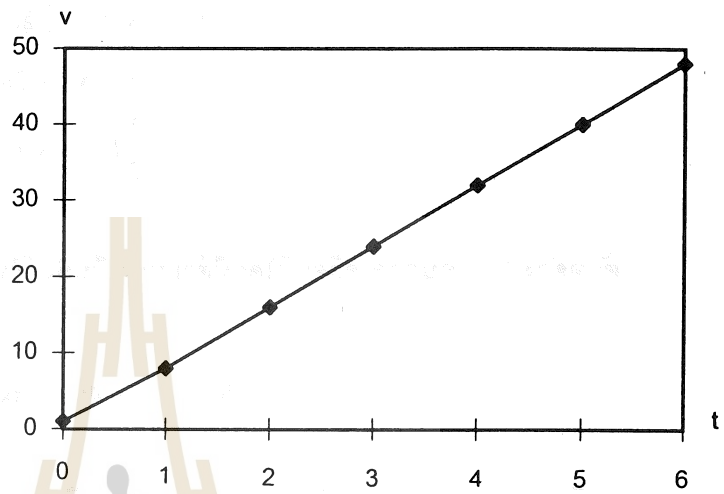
(b)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8t\hat{j} + \hat{k}\right) = 8\hat{j} \\ a_y &= 8 \\ \vec{v} &= 8t\hat{j} + \hat{k} \end{aligned}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(c)

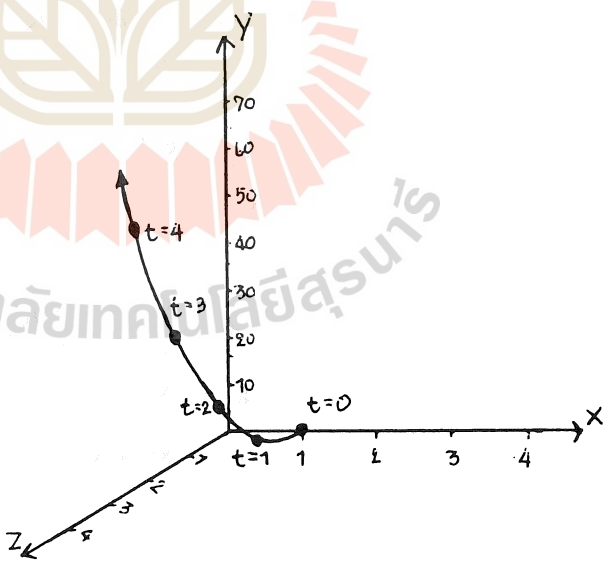
t	$\bar{v}$
0	$1\hat{k}$
1	$8\hat{j}+1\hat{k}$
2	$16\hat{j}+1\hat{k}$
3	$24\hat{j}+1\hat{k}$
4	$32\hat{j}+1\hat{k}$
5	$40\hat{j}+1\hat{k}$
6	$48\hat{j}+1\hat{k}$



ใช้ความเร็วเป็นเส้นสัมผัสทางเดินของอนุภาค

ถ้าคำนวณจาก $\vec{r}(t) = \hat{i}+4t^2\hat{j}+t\hat{k}$

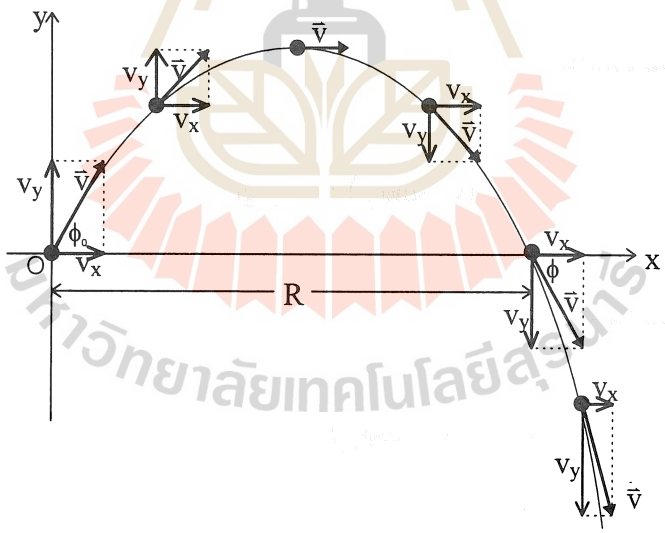
ตำแหน่ง (xyz)	t
(1,0,0)	0
(1,4,1)	1
(1,16,2)	2
(1,36,3)	3
(1,64,4)	4



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

3.4 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์

ตัวอย่างของการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวบนระนาบ คือการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์ อนุภาคหรือก้อนวัตถุที่มีความเร็วต้นเคลื่อนที่โดยมีแนวทางเดินอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงของโลก และแรงต้านทานของอากาศ การเคลื่อนที่ของลูกเบสบอล วัตถุตกจากเครื่องบิน ลูกปืนยิงออกจากปืนใหญ่ รวมถึงวัตถุตกอิสระอาจนับเป็นกรณีพิเศษของการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์ได้ ในตอนนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาค โดยไม่มีอิทธิพลของแรงต้านทานอากาศก่อน กรณีมีแรงต้านของอากาศ จะพิจารณาในตอนแรงกระทำต้านการเคลื่อนที่ ในบทต่อไป การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์อย่างง่ายนี้จะมีแรงภายนอกเป็นแรงโน้มถ่วงเท่านั้น แนวการเคลื่อนที่สามารถวิเคราะห์ลงตามแนวราบและแนวดิ่งได้ โดยพิจารณาเป็นการเคลื่อนที่ตามแนวราบด้วยค่าความเร็วคงตัว เกิดขึ้นพร้อมๆ กับการเคลื่อนที่ตามแนวดิ่งด้วยค่าความเร่ง a = -g คงตัว การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์แบบทั่วไปแสดงได้ในรูป 3.4



รูป 3.4 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์อย่างง่าย

สถาบันวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อนุภาคเริ่มเดินทางจากจุดกำเนิด 0 มีความเร็วต้น $\bar{v}_0$ ทำมุม ϕ_0 กับแนวราบ (x) ความเร็วต้นตามแกนอยู่ในรูป

$$v_{xo} = v_0\cos\phi_0 \quad ; \quad v_{yo} = v_0 \sin\phi_0 \tag{3.14}$$

การเคลื่อนที่ตามแกน x ใช้ค่า a_x =0

$$v_x = v_{xo} + a_x t = v_0 \cos\phi_0 \tag{3.15}$$

ความเร็วตามแนวแกน x มีค่าคงที่เท่าความเร็วต้นตามแกนตลอดไป การเคลื่อนที่ตามแนวแกน y มีการเปลี่ยนแปลงขนาดความเร็วเนื่องจากความเร่งตามแนวดิ่งค่าคงที่

$$v_y = v_{y0} + a_y y = v_0 \sin\phi_0 - gt \tag{3.16}$$

การกระจัดตามแนวแกน y

$$y = \left(v_0 \sin\phi_0\right) t - \frac{1}{2} gt^2 \tag{3.17}$$

การกระจัดตามแกน x

$$x = \left(v_0 \cos\phi_0\right) t \tag{3.18}$$

ความสัมพันธ์การกระจัด y (x)

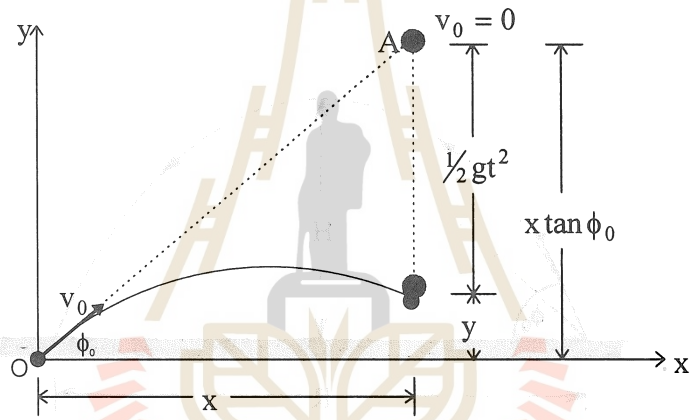
$$y(x) = \left(\tan\phi_0\right) x - \frac{g}{2\left(v_0 \cos\phi_0\right)^2} x^2 \tag{3.19}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แสดงสมการทางเดินของโพรเจกไตล์บนระนาบ xy ในรูปสมการ $y = ax - bx^2$ เป็นแนวเส้นพาราโบลา พิสัย R ตามแนวแกน x ดังแสดงในรูป 3.3 เป็นระยะจากจุดยิงถึงจุดตกตามแนวนอน คำนวณได้จากการเคลื่อนที่ตามแกน x ของโพรเจกไตล์ ที่ค่า y = 0

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 \qquad (3.20)$$

ตัวอย่าง 3.3 การวิเคราะห์จุดชนของอนุภาคปล่อยตกอิสระตามแนวดิ่งกับอนุภาคยิงแบบโพรเจกไตล์



อนุภาค A ปล่อยตกอิสระ ถ้าเริ่มปล่อยที่ความสูงเป็น $x \tan\phi_0$ เมื่อเวลาผ่านไป t อนุภาค A เคลื่อนที่ได้ $\frac{1}{2}gt^2$ มายังจุดชน

$$\therefore \quad y = x \tan\phi_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

จากสมการการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไตล์ของอนุภาค B ยิงขึ้นทำมุม ϕ_0 กับแนวราบ

$$y = x \tan\phi_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\phi_0)^2} x^2$$

$$= x \tan\phi_0 - \frac{g}{2(v_0 \cos\phi_0)^2} (v_0 \cos\phi_0 t)^2$$

$$= x \tan\phi_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

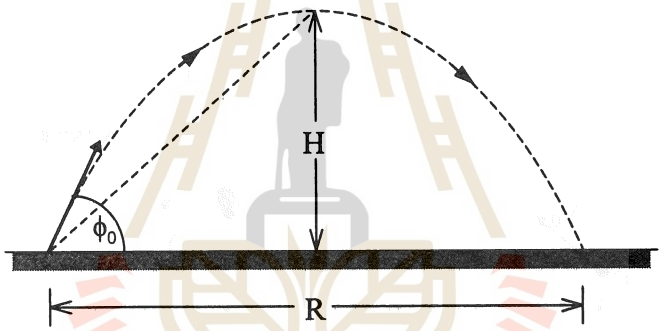
ดังนั้นถ้าอนุภาค A ถูกปล่อยที่ระยะความสูง x $\tan\phi_0$ พร้อมกับอนุภาค B ถูกยิงขึ้น อนุภาคทั้งสองจะชนกันได้ที่ระยะ y จากพื้น นอกจากเงื่อนไขนี้แล้วอนุภาคทั้งสองจะไม่ชนกัน

ตัวอย่าง 3.4

(a) จงพิสูจน์กรณีโพรเจกไตล์ถูกยิงขึ้นจากพื้นระดับเป็นมุม ϕ_0 อัตราส่วนความสูงที่สุดต่อพิสัย R มีค่าเท่ากับ H/R = 1/4 $\tan\phi_0$

(b) จงหามุมของการยิงที่ทำให้ H = R

วิธีทำ



(a) แกน x :

$$v_{x0} = v_0\cos\phi_0 = \frac{R}{t}$$

$$R = (v_0\cos\phi_0)t \qquad (1)$$

แกน y :

$$v_0\sin\phi_0 = v_{y0}$$

$$y = v_{y0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = v_0\sin\phi_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \quad v_0\sin\phi_0 = \frac{1}{2}gt \qquad (2)$$

$$\therefore \quad R = (v_0\cos\phi_0)\frac{2\,v_0\sin\phi_0}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\phi_0}{g}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2ay$$

$$0 = (v_0 \sin\phi_0)^2 - 2gH$$

$$\therefore \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2\phi_0}{2g}$$

$$H/R = \frac{\dfrac{v_0^2 \sin\phi_0 \sin\phi_0}{4g}}{\dfrac{v_0^2 \sin\phi_0}{g}} = \frac{1}{4}\tan\phi_0$$

(b) จาก $\dfrac{H}{R} = \dfrac{1}{4}\tan\phi_0$

ถ้า $H = R$; $1 = \dfrac{1}{4}\tan\phi_0$

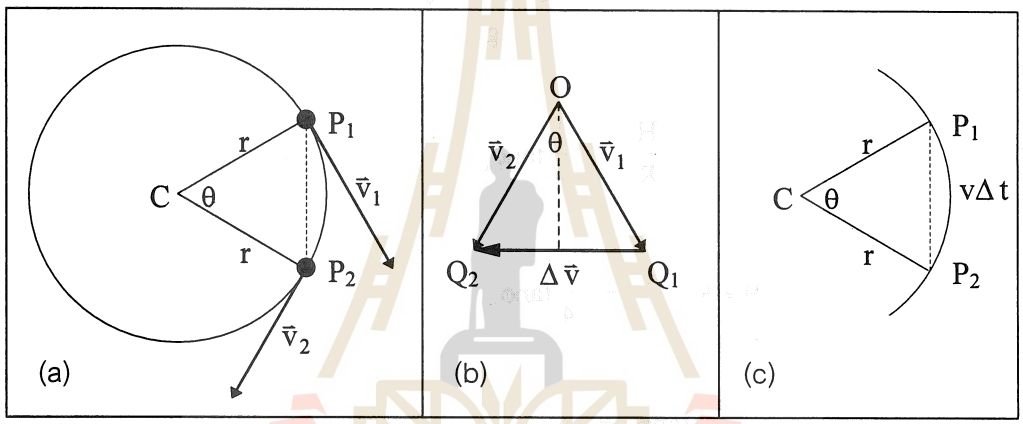
$$\tan\phi_0 = 4$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}(4) = 75.96 \text{ หรือ } 76°$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

3.5 การเคลื่อนที่แบบวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว

ในการเคลื่อนที่ลักษณะโพรเจกไทล์ ค่าความเร่งคงตัวทั้งขนาดและทิศทาง โดยมีความเร็วเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง ในตอนนี้เราจะพิจารณากรณีพิเศษ กรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยมีทิศทางของความเร็วและความเร่งเปลี่ยนตลอดเวลา แต่ขนาดความเร็วและขนาดความเร่งมีค่าคงตัว การเคลื่อนที่ลักษณะนี้ เรียกว่า การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว เช่น การโคจรของดาวเทียมรอบโลก



รูป 3.5 การเคลื่อนที่เป็นวงกลม (a) อนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด C เคลื่อนที่จาก $P_1 \rightarrow P_2$ ด้วยอัตราเร็วคงที่ (b) การเปลี่ยนแปลงความเร็ว $\Delta\vec{v}$ จาก $P_1 \rightarrow P_2$ (c) อนุภาคเคลื่อนตัวตามแนวทางโค้ง P_1P_2 ในช่วงเวลา Δt

รูป 3.5 แสดงปริมาณการเคลื่อนที่เป็นวงกลมของอนุภาคจากจุด $P_1 \rightarrow P_2$ แนวทางโค้ง P_1P_2 มีค่า

$$r\theta = v\Delta t \tag{3.21}$$

พิจารณารูป 3.5 (b)

$$\frac{1}{2}\Delta v = v\sin\theta/2 \tag{3.22}$$

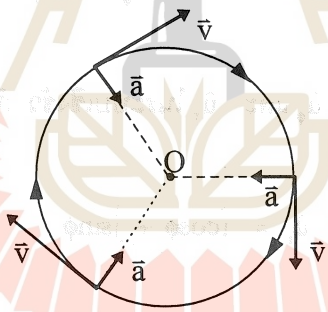
จากนิยาม ความเร่งเฉลี่ย $\bar{a}_{ave}$

$$\bar{a}_{ave} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{2v\sin(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \qquad (3.23)$$

ค่าความเร่ง ณ จุดเวลา หาได้จากความเร่งเฉลี่ย $\bar{a}_{ave}$ เมื่อ $\Delta t \to 0$ ด้วยเงื่อนไขค่า $\sin\theta/2 \to \theta/2$ สมการ (3.23) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\bar{a}_{ave} = \frac{v^2}{r} \qquad (3.24)$$

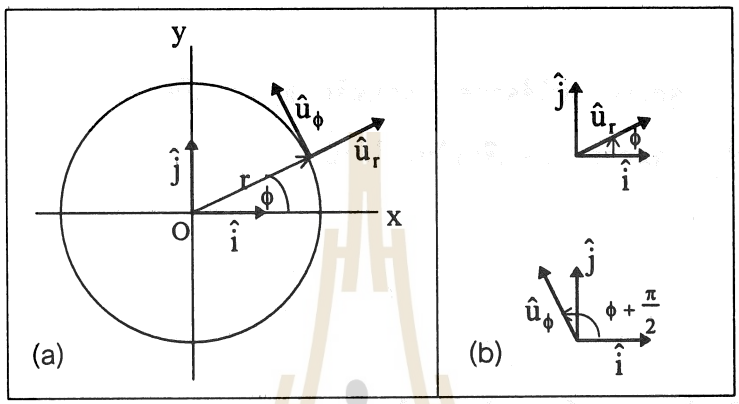
โดย $\Delta\bar{v}$ มีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลาง ดังแสดงในรูป 3.6



รูป 3.6 ในการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความเร่ง $\bar{a}$ มีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลาง ตั้งฉากกับความเร็ว $\bar{v}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

กรณีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ระบบพิกัดฉาก $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 3\hat{k}$ ดูจะไม่เหมาะสมกับลักษณะสมมาตรของการเคลื่อนที่ การใช้ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system) ที่มีเวกเตอร์หน่วยในทิศทางสัมผัสวิถี ($\hat{u}_\phi$) และตั้งฉากกับวิถี ($\hat{u}_r$) จะเหมาะสมกว่า



รูป 3.7 แสดงทิศของเวกเตอร์ $\hat{u}_\phi$ และ $\hat{u}_r$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หน่วย $\hat{u}_\phi$ และ $\hat{u}_r$ ในระบบเชิงขั้ว กับ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$ ในระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{u}_r = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

$$\hat{u}_\phi = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi \qquad (3.25)$$

ทิศทาง $\hat{u}_r$ เป็นเรียกเวกเตอร์หน่วยตามแนวรัศมี และ $\hat{u}_\phi$ เป็นเวกเตอร์หน่วยตามแนวสัมผัสของวิถีวงกลม

รูป 3.7 แสดงทิศของเวกเตอร์หน่วย $\hat{u}_\phi$ และ $\hat{u}_r$ มีทิศทางของความเร็วที่สัมผัสวิถีวงกลม มีทิศทางเปลี่ยนตลอดเวลาโดยมีขนาดคงที่

$$\vec{v} = v\hat{u}_\phi \qquad (3.26)$$

ความเร่ง $\vec{a}$ ในรูปอนุพันธ์

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d\hat{u}_\phi}{dt} \qquad (3.27)$$

จากสมการ (3.25) อนุพันธ์ของ $\hat{u}_\phi$ เทียบกับเวลา

$$\frac{d\hat{u}_\phi}{dt} = -\hat{i}\frac{d(\sin\phi)}{dt} + \hat{j}\frac{d(\cos\phi)}{dt}$$

$$= -i\cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \hat{j}\sin\phi\frac{d\phi}{dt}$$

$$= \left(-i\cos\phi - j\sin\phi\right)\frac{d\phi}{dt}$$

$$= -\hat{u}_r\frac{d\phi}{dt} \qquad (3.28)$$

ดังนั้น $$\bar{a} = -v\hat{u}_r\frac{d\phi}{dt} \qquad (3.29)$$

ค่าอัตราการกวาดมุม ϕ เทียบกับเวลา

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r} \qquad (3.30)$$

จะได้ $$\bar{a} = -\hat{u}_r\frac{v^2}{r} \qquad (3.31)$$

สมการ (3.31) บอกถึงความเร่งขนาด v^2/r มีทิศทางเข้าจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นวงกลม

การเปลี่ยนแปลงทิศทางความเร็วเพียงอย่างเดียว ทำให้เกิดความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลาง เรียกว่า ความเร่งสู่ศูนย์กลาง (centripetal acceleration) มีทิศทางตามแนวรัศมี กรณีความเร็วเปลี่ยนขนาดเพียงอย่างเดียว ไม่เปลี่ยนทิศทาง มีผลให้เกิดความเร่งตามแนวการเคลื่อนที่ของอนุภาค อนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง จะเร็วขึ้นหรือช้าลงตามทิศทางของความเร่ง กรณีความเร็วเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง จะเกิดทั้งความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลาง a_R พร้อมๆ กับความเร่งในแนวสัมผัสทางเดิน (a_T) ความเร่งผลลัพธ์ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่เป็นแนวโค้งที่ไม่ใช่เส้นตรง และไม่ใช่เป็นวงกลม เป็นการเคลื่อนที่โดยทั่วไป ค่าความเร่งลัพธ์มีค่า

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \qquad (3.32)$$

ตัวอย่าง 3.5 ดวงจันทร์หมุนรอบโลกครบรอบใช้เวลา 27.3 วัน สมมุติให้วงโคจรเป็นวงกลมมีรัศมีความโค้ง 3.82×10^8 เมตร จงคำนวณหาขนาดของความเร่งของดวงจันทร์เข้าสู่โลก

วิธีทำ เวลาครบรอบ $T = 27.3$ วัน

$= 2.36 \times 10^6$ วินาที

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8\ \text{m})}{2.36 \times 10^6\ \text{s}} = 1018\ \text{m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018\ \text{m/s})^2}{3.82 \times 10^8\ \text{m}}$$

$$= 0.00271\ \text{m/s}^2$$

ตัวอย่าง 3.6 อนุภาคเคลื่อนที่โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็นฟังก์ชันกับเวลา

$$\vec{r} = \cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}$$

โดย ω มีค่าคงที่ จงแสดงว่า

(a) ความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาคมีทิศทางตั้งฉากกับ $\vec{r}$

(b) ความเร่ง $\vec{a}$ มีทิศทางเข้าจุดกำเนิด และมีขนาดเป็นสัดส่วนกับระยะจากจุดกำเนิด

(c) $\vec{r} \times \vec{v}$ = เวกเตอร์คงที่

วิธีทำ

(a) $$\vec{r} = \cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{d}{dt}(\cos\omega t) + \hat{j}\frac{d}{dt}(\sin\omega t)$$

$$= \hat{i}\omega(-\sin\omega t) + \hat{j}\,\omega(\cos\omega t)$$

$$\therefore \quad \vec{v} = -\omega\sin\omega t\,\hat{i} + \omega\cos\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \left(-\omega\sin\omega t\,\hat{i} + \omega\cos\omega t\,\hat{j}\right)\left(\cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j}\right)$$

$$= -\omega\sin\omega t\cos\omega t + \omega\cos\omega t\sin\omega t = 0$$

$\therefore$ $\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{r}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(b)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega \sin\omega t\, \hat{i} + \omega \cos\omega t\, \hat{j}\right)$$

$$= -\omega^2 \cos\omega t\, \hat{i} - \omega^2 \sin\omega t\, \hat{j}$$

$$= -\omega^2 \left\{\cos\omega t\, \hat{i} + \sin\omega t\, \hat{j}\right\}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

$|\vec{a}|$ แปรเป็นสัดส่วนกับ $|\vec{r}|$

และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{r}$ เข้าสู่จุดกำเนิด

(c)

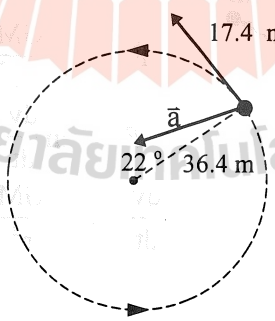
$$\vec{r} \times \vec{v} = \left(\cos\omega t\, \hat{i} + \sin\omega t\, \hat{j}\right) \times \left(\omega \sin\omega t\, \hat{i} + \omega \cos\omega t\, \hat{j}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega \sin\omega t & \omega \cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\omega \cos^2\omega t + \omega \sin^2\omega t\right)\hat{k}$$

$\therefore \quad \vec{r} \times \vec{v} = \omega \hat{k} =$ เวกเตอร์คงที่

ตัวอย่าง 3.7



อนุภาคกำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี 3.64 เมตร ณ จุดเวลา อนุภาคมีความเร็วเชิงเส้นสัมผัส 17.4 เมตร/วินาที และมีความเร่งในทิศทาง 22.0° จากแนวเข้าสู่จุดศูนย์กลาง ถามว่า (a) อัตราเร่งเชิงเส้นของอนุภาค (b) ขนาดของความเร่ง

วิธีทำ

(a) อัตราเร่งเชิงเส้นของอนุภาค ณ จุด

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(17.4\ m/s)^2}{3.64\ m} = 83.17 \quad m/s^2$$

$$a_R = a\cos 22^\circ = 83.17$$

$$\therefore \quad a = \frac{83.17}{\cos 22^\circ} = 89.7 \quad m/s^2$$

$$a_T = a\sin 22^\circ = 89.7\sin 22^\circ = 33.6\ m/s^2$$

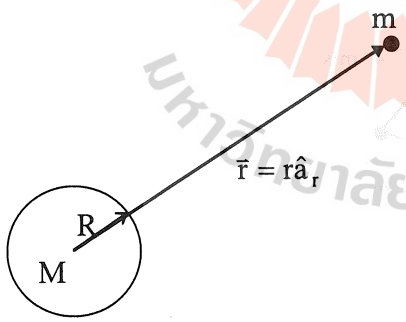
b) ขนาดของความเร่ง a = 89.7 m/s^2

ตัวอย่าง 3.8 ก้อนวัตถุ ถูกยิงขึ้นตามแนวดิ่งจากผิวโลกด้วยความเร็วต้น $v_\circ$ ถ้าไม่คิดแรงต้านทานของอากาศ

(a) อัตราเร็วของก้อนวัตถุที่ระยะ H เหนือผิวโลก

(b) อัตราเร็วน้อยที่สุด ที่ยิงแล้วก้อนวัตถุจะไม่ตกกลับมายังผิวโลก

วิธีทำ



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{a}_r$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{a}_r$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\hat{a}_r$$

หรือ

$$\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

$$\int_{v_\circ} v\,dv = \int_{r=R} -\frac{GM}{r^2}\,dr$$

$$v^2 - v_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

ที่ระยะ H เหนือผิวโลก $r = R + H$

$$\therefore\ v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right)$$

$$= v_0^2 + 2GM\left(-\frac{H}{R(R+H)}\right)$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GMH}{R(R+H)}}$$

$$g = \frac{GM}{R^2}\ ;\quad v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2gRH}{(R+H)}}$$

(b)

$$H \to \infty;\quad \lim_{H\to\infty} \frac{H}{(R+H)} = 1$$

$$\therefore\quad v = \sqrt{v_\circ^2 - 2gR}$$

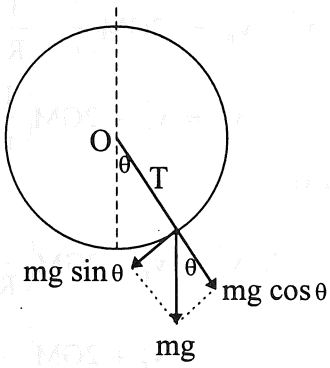
$v = 0$ เมื่อ $H \to \infty$ $\therefore\ v_0^2 = 2gR$

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

v_0 เป็นค่าความเร็วหลุดพ้น (escape velocity)

การเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวดิ่ง เป็นการเคลื่อนที่ชนิดวงกลมอย่างยาก อัตราเร่งของอนุภาคในแนวเส้นสัมผัสทางเดินมีค่าไม่คงตัว ขณะอนุภาคเคลื่อนที่ลงทางโค้ง อัตราเร็วจะสูงขึ้นเนื่องจากแรงโน้มถ่วงในแนวสัมผัสวิถี แต่ขณะเคลื่อนที่ขึ้นทางโค้งอัตราเร็วจะลดค่าลง ดังแสดงในรูป 3.8 การเปลี่ยนแปลงขนาดความเร็วตามแนวสัมผัสวงกลม มีผลให้เกิดความเร่งตามแนวสัมผัส (a_T) ด้วย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 3.8 ตัวอย่างการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวดิ่ง

ในแนวเส้นสัมผัสทางเดิน $F_T = mg\sin\theta = ma_T$

$$\therefore \quad a_T = g\sin\theta \tag{3.33}$$

ในแนวเข้าสู่จุดศูนย์กลาง $F_R = T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R}$

$$\therefore \quad T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

$$= m\left(a_R + g\cos\theta\right)$$

ที่ตำแหน่งต่ำสุด $\theta = 0$ $\sin 0^\circ = 0;\ \cos 0^\circ = 1$

$$\therefore F_T = 0 \ ; \ a_T = 0$$

ความเร่งมีในแนวรัศมีอย่างเดียว และมีแรงตึงเชือก

$$T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ที่ตำแหน่งสูงสุด $\theta = 180^\circ$; $\sin 180^\circ = 0$; $\cos 180^\circ = -1$

$$a_T = 0$$

ความเร่งอยู่ในแนวรัศมีอย่างเดียวเช่นกัน โดยมีแรงตึงเชือก

$$T = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

สังเกตว่าที่จุดสูงสุด ถ้าเชือกหย่อนพอดี ($T = 0$) ความเร็ววิกฤต (critical velocity) $v_c = \sqrt{Rg}$ เป็นค่าความเร็วค่าน้อยที่สุดที่อนุภาคยังคงทางเดินเป็นวงกลมอยู่ที่ตำแหน่งสูงสุด ถ้าค่าความเร็วน้อยกว่านี้ อนุภาคจะเคลื่อนที่ไม่ครบวง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

3.6 การเคลื่อนที่ของดาวเทียม

การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลก เป็นการเคลื่อนที่ในระนาบลักษณะหนึ่ง มีลักษณะการเคลื่อนที่ต่างไปจากการเคลื่อนที่แบบวงกลม การเคลื่อนที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงโน้มถ่วงที่แปรค่า เนื่องจากวงโคจรของดาวเทียมกว้างใหญ่เกินไปที่จะประมาณให้ค่า g มีค่าคงตัวได้ เส้นทางเดินของดาวเทียมมีทั้งเป็นวงกลม เส้นทางพาราโบลา และเส้นทางไฮเพอร์โบลา ขึ้นอยู่กับความเร็วต้นในการยิงจากผิวโลก

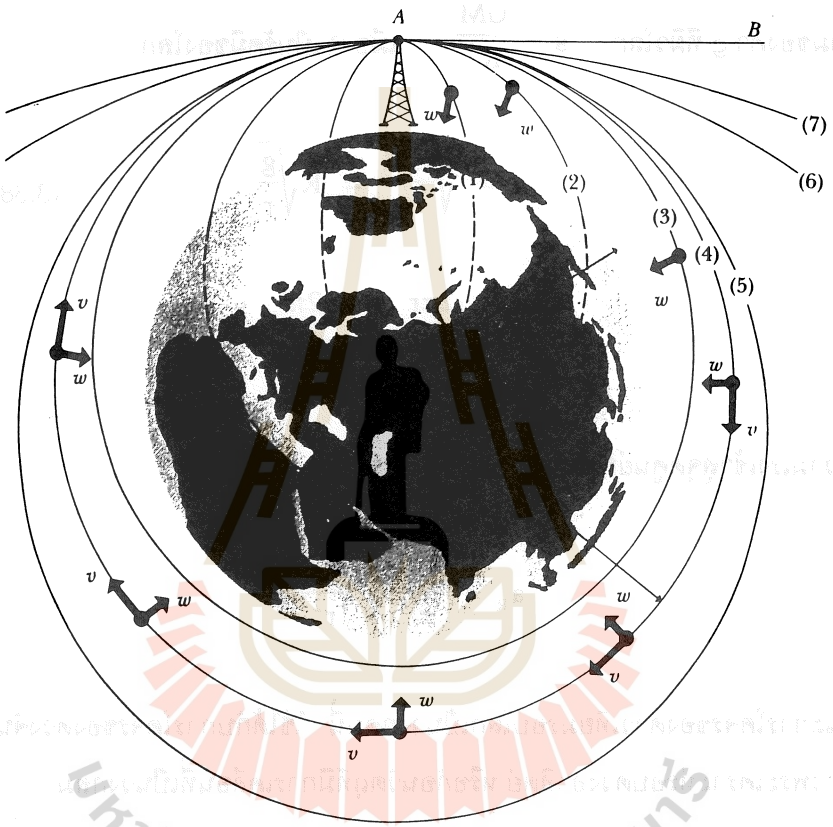
พิจารณาการยิงดาวเทียมจากหอคอยที่สูงมาก ดังแสดงในรูป 3.9 แนวทางเดินของดาวเทียมมีลักษณะเป็นส่วนตัดของทรงกรวย (conic section) แนวทางเดินที่ (1) ความเร็วต้นต่ำสุด ทางเดินสั้นเป็นลักษณะวงรี จะไม่พ้นผิวโลก มีลักษณะคล้ายการยิงจรวดรบ (ballistic missile) แนวทางเดินที่ (2) ความเร็วต้นสูงขึ้น วิถีโคจรสูงขึ้น ยังเป็นลักษณะวงรี และตกบนผิวโลก แนวทางเดินที่ (3) เป็นวงรีครบวง พ้นผิวโลก เป็นลักษณะวงโคจรรอบโลกของดาวเทียม ทางเดินที่ (4) เป็นวงกลมสมบูรณ์แบบ ครบวงกลับมาที่เดิม เป็นลักษณะวงโคจรที่นิยมใช้ในการส่งดาวเทียมโคจรรอบโลก ทางเดินที่ (5) เป็นทางเดินวงรี ครบวงกลับมาที่เดิม ทางเดินที่ (6) ความเร็วต้นสูงมาก ทางเดินเป็นแนวเส้นพาราโบลา ดาวเทียมหรือจรวดที่ยิงขึ้นจะไม่กลับมายังโลก ออกนอกวงโคจร ทางเดินที่ (7) ความเร็วต้นสูงที่สุดมีทางเดินเป็นทางโค้งไฮเพอร์โบลา ไม่กลับมาที่เดิม

วงโคจรดาวเทียมที่ใช้กันในปัจจุบัน มีลักษณะเกือบเป็นวงกลมทั้งสิ้น ในที่นี้จะขอพิจารณาลักษณะวงโคจรวงกลมเท่านั้น วงโคจรลักษณะอื่นยุ่งยากในการคำนวณ บางวงโคจรเปรียบได้กับทางโค้งโพรเจกไตล์ธรรมดาเพียงค่า g เปลี่ยนค่าเล็กน้อยเท่านั้น วงโคจรของดาวเทียมในลักษณะวงกลมแสดงในรูป 3.10 แรงสู่ศูนย์กลางมาจากแรงโน้มถ่วง มวลของโลก (M) และมวลของดาวเทียม (m)

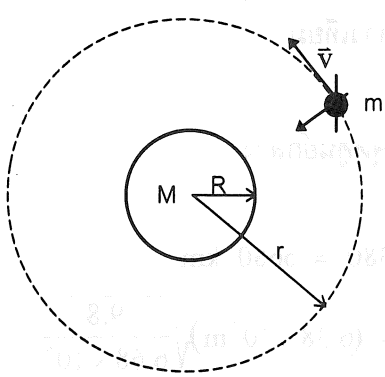
$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad (3.35)$$

จะได้ความเร็วแนวสัมผัสวงโคจรของดาวเทียม

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{3.36}$$



รูป 3.9 วงโคจรของดาวเทียมรอบโลก



รูป 3.10 วงโคจรวงกลมของดาวเทียมรอบโลก

เวลาครบรอบ T หาได้จาก

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2} \qquad (3.37)$$

ในเทอมของค่า g ที่ผิวโลก ; $g = \frac{GM}{R^2}$ เมื่อ R เป็นรัศมีของโลก

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = R\sqrt{\frac{g}{r}} \qquad (3.38)$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{R\sqrt{g}} r^{3/2} \qquad (3.39)$$

และความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลาง a_R

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{R^2}{r^2} g \qquad (3.40)$$

ลักษณะการโคจรของดาวเทียมรอบโลกเป็นวงกลมนี้ ใช้ได้กับการโคจรของดวงจันทร์รอบโลก หรือดาวพระเคราะห์รอบดวงอาทิตย์ หรือก้อนวัตถุที่มีการเคลื่อนที่เป็นวงกลม

ตัวอย่าง 3.9 วงโคจรของดาวเทียมอยู่สูงจากผิวโลก 300 กิโลเมตร ถ้ารัศมีของโลก 6380 กิโลเมตร และค่า g ที่ผิวโลก 9.80 เมตร/วินาที^{2} จงคำนวณหา

(a) ความเร็วของดาวเทียม

(b) เวลาครบรอบ

(c) ความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลาง

วิธีทำ $r = 300 + 6380 = 6680 \text{ km}$

(a) $v = R\sqrt{\frac{g}{r}} = (6.38 \times 10^3 \text{ m})\sqrt{\frac{9.8}{6.68 \times 10^6}}$

$= 7730 \text{ m/s}$

(b) เวลาครบรอบ $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 6.68 \times 10^6}{7730\ m/s} = 5430\ s = 1.5\ h$

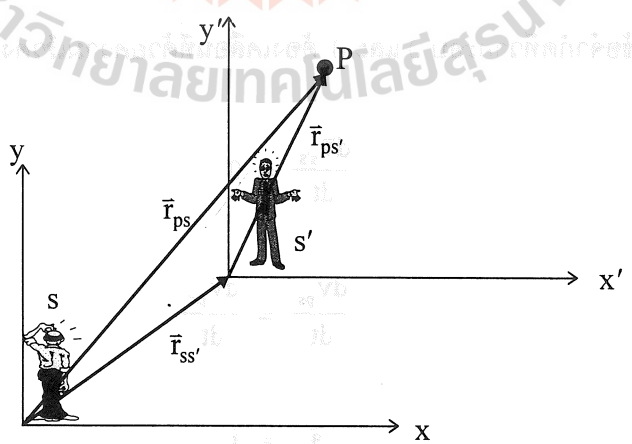
(c) $a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7730)^2}{6.68 \times 10^6} = 8.94\ m/s^2$

น้อยกว่าค่า g ที่ผิวโลก

3.7 ความเร็วสัมพัทธ์

ในตอนนี้จะศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในกรอบการเคลื่อนที่ที่ต่างกัน รถยนต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 55 กิโลเมตร/ชั่วโมง ผู้สังเกตบนพื้นสังเกตเห็นผู้โดยสารเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 55 กิโลเมตร/ชั่วโมง เช่นกัน แต่ผู้โดยสารบนรถมองเห็นเพื่อนที่นั่งร่วมรถอยู่นิ่งหรืออัตราเร็วเป็นศูนย์ ผู้สังเกตบนกรอบการเคลื่อนที่เห็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคไม่เหมือนกัน ขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของกรอบด้วย ในบทเรียนนี้ จะศึกษาเฉพาะกรอบมีความเร็วคงตัวสัมพัทธ์กันเท่านั้น

พิจารณาผู้สังเกต s และ s' บนกรอบ o และ o' ตามลำดับ ดังแสดงในรูป 3.11



รูป 3.11 ผู้สังเกต s และ s' เคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน สังเกตอนุภาค P ที่กำลังเคลื่อนที่

ผู้สังเกตทั้งสองเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันและสังเกตอนุภาค P ที่กำลังเคลื่อนที่ ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง

$$\vec{r}_{ps} = \vec{r}_{ps'} + \vec{r}_{s's} \tag{3.41}$$

สมการ (3.41) มีความหมายว่า ตำแหน่งของ P ที่วัดโดยผู้สังเกต s มีค่าเท่ากับตำแหน่งของ P วัดโดยผู้สังเกต s' บวกกับตำแหน่งของผู้สังเกต s' วัดโดยผู้สังเกต s อนุพันธ์ของเวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็นค่าความเร็วสัมพัทธ์

$$\frac{d\vec{r}_{ps}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{ps'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{s's}}{dt}$$

$$\vec{v}_{ps} = \vec{v}_{ps'} + \vec{v}_{s's} \tag{3.42}$$

สมการ (3.42) เป็นสมการแปลงค่าความเร็วในกรอบการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ เราเรียก การแปลงแบบกาลิเลียน (galilean transformation) อนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับเวลาเป็นค่าความเร่งสัมพัทธ์

$$\frac{d\vec{v}_{ps}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{ps'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{s's}}{dt} \tag{3.43}$$

จากข้อจำกัดที่ว่ากรอบ 0 และ 0' ต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สัมพัทธ์กัน

ดังนั้น $$\frac{d\vec{v}_{s's}}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{v}_{ps}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{ps'}}{dt}$$

หรือ $$\vec{a}_{ps} = \vec{a}_{ps'} \tag{3.44}$$

ความเร่งของอนุภาค P ที่วัดโดยผู้สังเกตทั้งสองมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 3.10 เข็มทิศบนเครื่องบินชี้ว่าเครื่องบินกำลังบินมุ่งไปทางตะวันออก เครื่องบินมีความเร็ว 215 กิโลเมตร/ชั่วโมง อัตราเร็วลมที่กำลังพัดไปทางเหนือเท่ากับ 65 กิโลเมตร/ชั่วโมง ถามว่า

(a) ความเร็วของเครื่องบินเทียบกับพื้นดินมีค่าเท่าใด

(b) ถ้านักบินต้องการจะบินไปทางตะวันออก เครื่องบินต้องหันหัวไปทางไหน ? หรือเข็มทิศชี้ไปทางไหน ?

วิธีทำ

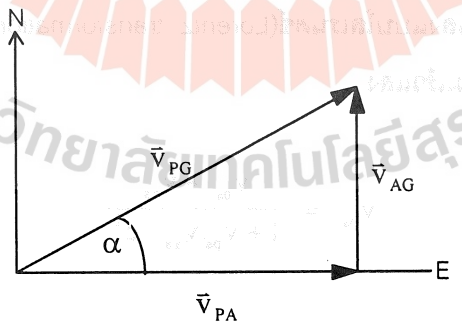
(a) ก้อนวัตถุกำลังเคลื่อนที่ในกรณีนี้คือเครื่องบิน กรอบทั้งสองคือ พื้นดิน และอากาศที่กำลังเคลื่อนที่ นั่นคือพื้นดินเป็นกรอบ s และอากาศเป็น s' เมื่อใช้สมการ (3.42) โดยเปลี่ยนตัวสัญลักษณ์ตามความหมายที่เหมาะสม

$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PA} + \vec{v}_{AG}$$

v_{AG} = อัตราเร็วลม = 65 km/h

v_{PA} = อัตราเร็วเครื่องบินเทียบกับลม = 215 km/h

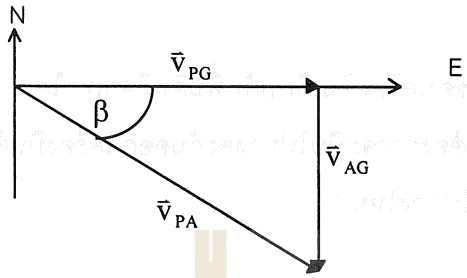
v_{PG} = อัตราเร็วของเครื่องบินเทียบกับผู้สังเกตบนพื้นดิน



$$\therefore\ v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215)^2 + (65)^2} = 225\ \text{km/h}$$

$$\text{มุม}\ \alpha = \tan^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1}\left(\frac{65}{215}\right) = 16.8$$

(b) ถ้านักบินต้องการบินไปทางตะวันออก นักบินต้องหันหัวเครื่องบินต้านทิศทางลม



$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PA} + \vec{v}_{AG}$$

$$\therefore \quad v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215)^2 - (65)^2} = 205 \ \text{km/h}$$

$$\beta = \sin^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-1}\left(\frac{65}{215}\right) = 17.6^\circ$$

กรณีอนุภาคมีความเร็วสูงเกือบเท่าความเร็วของแสง(c ≅ 300,000 กิโลเมตร/วินาที) การแปลงค่าความเร็วในระบบกาลิเลียนจะไม่ถูกต้อง ทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ กล่าวถึงอัตราเร็วของแสงที่มีค่าคงตัว ไม่ขึ้นอยู่กับกรอบการเคลื่อนที่ และได้กำหนดการแปลงความเร็วชนิดใหม่ขึ้นเรียกการแปลงแบบโลเรนตซ์(Lorentz transformation) เพื่อใช้ในกรณีอนุภาคมีความเร็วสูง เข้าใกล้ความเร็วแสง

$$v_{ps} = \frac{v_{ps'} + v_{s's}}{1 + v_{ps'}v_{s's}/c^2} \qquad (3.45)$$

ตัวอย่าง 3.11 อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.42c เทียบกับผู้สังเกต B ผู้สังเกต B เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 0.63c เทียบกับผู้สังเกต A ในทิศทางเดียวกับอิเล็กตรอนคาดว่าผู้สังเกต A วัดอัตราเร็วของอิเล็กตรอนเป็นเท่าใด ?

วิธีทำ

$$v_{EB} = 0.42c$$

$$v_{BA} = 0.63c$$

$$\vec{v}_{EA} = \vec{v}_{EB} + \vec{v}_{BA}$$

จากสมการ (3.45)

$$v_{EA} = \frac{v_{EB} + v_{BA}}{1 + v_{EB} v_{BA} / c^2}$$

$$= \frac{(0.42 + 0.63)c}{1 + \frac{(0.42 \times 0.63)c^2}{c^2}} = \frac{1.05c}{1 + \frac{0.2646c^2}{c^2}}$$

$$= \frac{1.05}{1.2646} c = 0.83c$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. ตำแหน่งของอนุภาคบนระนาบ xy เป็นไปตามสมการ

$$\vec{r} = (2t^3 - 5t)\hat{i} + (6 - 7t^4)\hat{j}$$

โดย r มีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นวินาที จงคำนวณปริมาณการเคลื่อนที่ต่อไปนี้ที่เวลา t = 2 วินาที

(a) $\vec{r}$

(b) $\vec{v}$

(c) $\vec{a}$

(ตอบ : (a) $6\hat{i} - 106\hat{j}$ (b) $19\hat{i} - 224\hat{j}$ (c) $24\hat{i} - 336\hat{j}$)

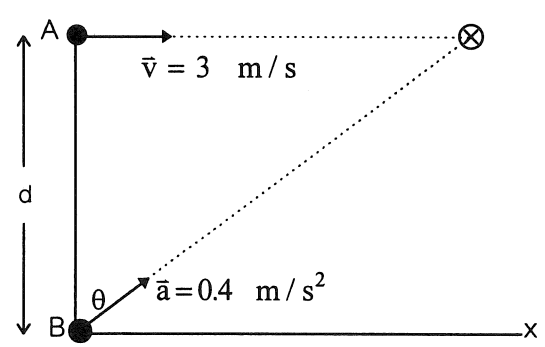
2. อนุภาคเคลื่อนที่ในปริภูมิ 3 มิติ โดยมีเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ มีความสัมพันธ์กับเวลา t ตามสมการ

$$\vec{r} = (t^2 + t)\hat{i} + (3t - 2)\hat{j} + (2t^3 - 4t^2)\hat{k}$$

โดย r มีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นวินาที จงคำนวณหา ความเร็ว และความเร่งที่เวลา t = 2 วินาที

(ตอบ : $\vec{v} = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 8\hat{k}$; $\vec{a} = 2\hat{i} + 16\hat{k}$)

3. อนุภาค A เคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรง y = d (d = 30 เมตร) ขนานกับแกน x ด้วย



ความเร็วคงตัว v = 3 เมตร/วินาที อนุภาค B เคลื่อนที่ออกจากจุดกำเนิดด้วยความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ มีความเร่ง $\vec{a}$ = 0.4 m/s^2) ในขณะเดียวกันที่อนุภาค A ผ่านแกน y พอดี ถามว่า θ มีค่าเท่าใด ถ้าอนุภาคทั้งสองจะชนกันได้

(ตอบ : $\theta = 60^\circ$)

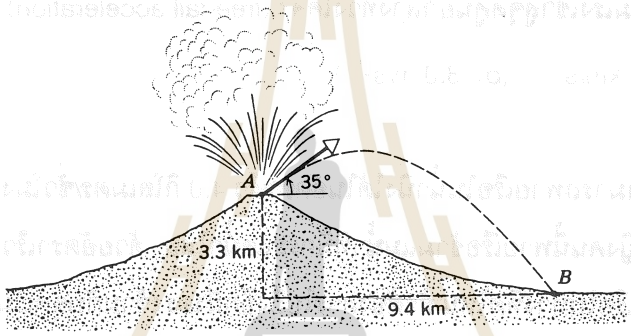
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

4. (a) พิสูจน์คำกล่าว "ถ้ามุมยิงมากกว่าหรือน้อยกว่า 45° ด้วยปริมาณที่เท่ากัน พิสัยของโพรเจกไตล์จะเท่ากัน"

(b) ถ้าความเร็วต้น $v_o = 30.0\ {}^{m}/_{s}$ และพิสัย R = 20.0 เมตร จงหามุมยิงสองมุมที่เป็นไปได้

(ตอบ : $\theta_1 = 83.7^\circ$, $\theta_2 = 6.3^\circ$)

5. ขณะภูเขาไฟระเบิดก้อนหินขนาดใหญ่(volcanic blocks) อาจถูกดันขึ้นในลักษณะโพรเจกไตล์ ในรูปแสดงภาคตัดขวางของ Mt.Fuji ในประเทศญี่ปุ่น จงคำนวณหา

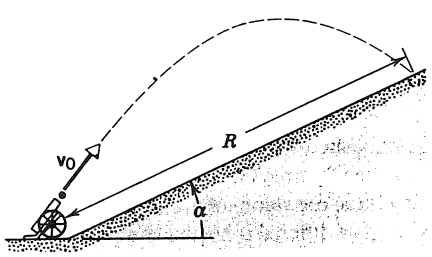


(a) อัตราเร็วเริ่มต้นของก้อนหินที่ถูกดันขึ้นมาในแนว 35° กับแนวระดับ จากปากปล่อง A ถึงจุดตก B

(b) เวลาก้อนหินลอยในอากาศ

(ตอบ : (a) 256 m/s (b) 44.8 s)

6. ปืนใหญ่ยิงลูกปืนขึ้นด้วยความเร็วต้น v_o บนเชิงเขาที่มีความชันเป็นมุม $\alpha = 10^\circ$ จงหามุมยิงเทียบกับพื้นราบเป็นเท่าใด เพื่อให้ได้ระยะ R มากที่สุดบนเนินเขา



(ตอบ : 50°)

7. แบบจำลอง H อะตอมของ Bohr อิเล็กตรอนโคจรรอบอนุภาคโปรตอนเป็นวงกลมรัศมี 5.29×10^{-11} เมตร ด้วยอัตราเร็ว 2.18×10^{6} เมตร/วินาที จงหาอัตราเร่งของอิเล็กตรอนในแบบจำลองนี้

8. ดาวเทียมโคจรรอบโลกเป็นวงกลมรัศมี 640 กิโลเมตร เหนือผิวโลก เวลาในการโคจรครบหนึ่งรอบ 98.0 นาที ถามว่า

(a) อัตราเร็วของดาวเทียม

(b) ความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางที่วงโคจร (free-fall acceleration)

(ตอบ : (a) 7.49 km/s (b) 8.0 m/s^2)

9.หญิงคนหนึ่งสามารถพายเรือในน้ำนิ่งได้ในอัตราเร็ว 4.0 กิโลเมตร/ชั่วโมง

(a)ถ้าหญิงคนนี้พายเรือข้ามแม่น้ำที่มีกระแสน้ำไหล ด้วยอัตราเร็ว 2.0 กิโลเมตร/ชั่วโมง เขาจะต้องหันหัวเรือไปทางทิศไหน ถ้าต้องการไปถึงอีกฝั่งตรงข้ามกับจุดเริ่มต้น

(ตอบ : 30°)

(b) ถ้าแม่น้ำกว้าง 4 กิโลเมตร เขาใช้เวลาเท่าใด

(ตอบ : 69 นาที)

(c) เขาใช้เวลาเท่าใดในการพายเรือ 2.0 กิโลเมตร ตามน้ำแล้วกลับย้อนขึ้นมาจุดเดิม

(ตอบ : 80 นาที)

(d) เขาใช้เวลาในการพายเรือ 2.0 กิโลเมตร ทวนน้ำ แล้วล่องเรือกลับมาที่เดิม

(ตอบ : 80 นาที)

(e) เขาต้องพายเรือในทิศทางใด ถ้าต้องการข้ามแม่น้ำ โดยใช้เวลาสั้นที่สุดและใช้เวลาเท่าใด ?

(ตอบ : 60 นาที)

บทที่ 4 แรงและกฎของนิวตัน

เค้าโครงเรื่อง 4.1 กลศาสตร์แผนเดิม กฎการเคลื่อนที่และประวัติ

4.2 แรง

4.3 มวล

4.4 กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน

4.5 กฎข้อที่สองของนิวตัน

4.6 กฎข้อที่สามของนิวตัน

4.7 กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

4.8 น้ำหนักและมวล

4.9 ความเสียดทาน

4.10 การใช้กฎของนิวตัน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

4.1 กลศาสตร์แผนเดิม กฎการเคลื่อนที่ ประวัติ

ในบทที่ 2 และ 3 เน้นศึกษาการเคลื่อนที่ของอนุภาค โดยพิจารณาปริมาณการเคลื่อนที่ $\bar{r}$ $\bar{v}$ และ $\bar{a}$ เท่านั้น ไม่พิจารณา "สาเหตุ" ของการเคลื่อนที่ กลศาสตร์ที่พิจารณาสาเหตุการเคลื่อนที่ประกอบปริมาณการเคลื่อนที่ เราเรียกพลศาสตร์ (dynamics) การนำเสนอเข้าสู่บทเรียนพลศาสตร์ เป็นส่วนหนึ่งของวิชากลศาสตร์แผนเดิม (classical mechanics) ที่ได้พัฒนาและประสบความสำเร็จเป็นที่ยอมรับตั้งแต่ศตวรรษที่ 17 จนถึงศตวรรษที่ 18 ในปัจจุบันทฤษฎีใหม่ อาทิ ทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป และทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัม แสดงให้เห็นถึงความจริงที่ไกลเกินประสบการณ์ปกติ ความจริงที่กลศาสตร์แผนเดิมให้ข้ออธิบายที่สอดคล้องกับการทดลองไม่ได้ แต่เมื่อขนาดวัตถุเหมาะสม ทฤษฎีใหม่ลดรูปและให้คำอธิบายที่สอดคล้องกับกลสาสตร์แผนเดิม สังเกตว่า ถึงแม้เราไม่มีทฤษฎีสัมพัทธภาพหรือกลศาสตร์ควอนตัมใช้ เรายังสามารถสร้างตึกระฟ้าได้ สร้างเครื่องบินที่สามารถบรรจุผู้โดยสารได้นับร้อย เดินทางได้รอบโลก และสามารถส่งยานอวกาศออกสำรวจดาวพระเคราะห์ไกลแสนไกลได้ ขอบเขตของกลศาสตร์แผนเดิมยังกว้างไกล และให้คำอธิบายธรรมชาติในชีวิตประจำวันได้ตลอดเวลา

กลศาสตร์แผนเดิมวางรากฐานบนกฎเกณฑ์สามข้อ ที่เกี่ยวกับแรงและการเคลื่อนที่ของอนุภาค Galileo Galilei (ค.ศ. 1564 - 1642) ศึกษาการเคลื่อนที่ที่มีความเร่ง และได้วางรากฐานทางกลศาสตร์ในส่วนการเคลื่อนที่ไว้ Sir Isaac Newton (ค.ศ.1642 - 1727) ได้นำเสนอกฎความโน้มถ่วงและกฎการเคลื่อนที่ ลงตีพิมพ์ในปี ค.ศ.1686 ในวารสาร The Mathematica Principles of Natural Science กลศาสตร์แผนเดิมหรือที่นิยมเรียก "Newtonian mechanics" หรือกลศาสตร์ของนิวตันถูกพัฒนาและทดสอบความสอดคล้องกับผลการทดลองมานับเป็นเวลาหลายร้อยปี อธิบายปรากฏการณ์ทางกายภาพของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ที่มีขนาดใหญ่จนถึงขนาดของอะตอม เข้าเสริมต่ออย่างสอดคล้องกับกลศาสตร์ควอนตัมในย่านขนาดของอะตอม กลศาสตร์แผนเดิมเมื่อรวมกับกลศาสตร์แผนใหม่หรือกลศาสตร์ควอนตัม สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ ทางกายภาพของการเคลื่อนที่ของอนุภาคและก้อนวัตถุได้อย่างเหมาะสม

4.2 แรง

"แรงเป็นศูนย์รวมความเป็นไปของฟิสิกส์"

อนุภาคและก้อนวัตถุออกแรงกระทำต่อกัน มีอันตรกิริยา(interaction) ร่วมกันเพื่อรวมกันเป็นก้อนสสารขนาดใหญ่ที่มีรูปแบบรูปทรงแตกต่างกันออกไป แรงกระทำระหว่างนิวเคลียสกับอนุภาคอิเล็กตรอน แรงภายในนิวเคลียสที่ยึดเหนี่ยวอนุภาคนิวคลีออน(nucleon) แรงดึงดูดมวลหรือแรงโน้มถ่วง แรงผลักประจุไฟฟ้าชนิดเดียวกัน แรงดังกล่าวยึดเหนี่ยวระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคหรือก้อนมวลเอาไว้ กล่าวได้ว่าแรงเป็นปัจจัยหลักในการเชื่อมต่ออนุภาคและก้อนมวลในปริภูมิทั้งหมด

แรงในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น แรงผลัก แรงดูด แรงเสียดทาน และอื่นๆ เป็นส่วนหนึ่งของแรงทั้งหมดที่เราคุ้นเคย ทางฟิสิกส์แบ่งแรงในธรรมชาติออกเป็น 4 ชนิดด้วยกัน คือ

(1) แรงโน้มถ่วง (gravitational force) เป็นแรงดึงดูดระหว่างมวล มีลักษณะเป็นแรงพิสัยยาว (long-ranged force) ขึ้นอยู่กับขนาดของมวล และระยะทางกำลังสองผกผัน มีขนาดไม่สูงมากนัก แต่เท่าที่เราพบเห็นในชีวิตประจำวันเป็นแรงขนาดใหญ่ เนื่องจากมวลมีขนาดใหญ่มาก เช่น แรงโน้มถ่วงของโลก เป็นต้น

(2) แรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) เป็นแรงระหว่างประจุไฟฟ้า ดึงดูดหรือผลักขึ้นอยู่กับชนิดประจุไฟฟ้า มีลักษณะเป็นแรงพิสัยยาว ขึ้นอยู่กับขนาดของประจุและระยะทางกำลังสองผกผัน แรงชนิดนี้เป็นศูนย์รวมของอันตรกิริยาทางไฟฟ้าและแม่เหล็กของสสาร

(3) แรงนิวเคลียร์ (nuclear force) เป็นแรงที่ยึดนิวคลีออนในนิวเคลียสเอาไว้ ทำให้นิวเคลียสคงสภาพอยู่ได้ มีลักษณะเป็นแรงพิสัยสั้น (short-ranged force) ออกแรงกระทำเมื่ออนุภาคนิวคลีออนอยู่ภายในระยะ 10^{-15} เมตร มีขนาดมหาศาล และเป็นแรงดึงดูดที่ไม่ขึ้นกับชนิดของประจุไฟฟ้า

(4) แรงอ่อน (weak force) เป็นแรงดึงดูดระหว่างอนุภาคพื้นฐาน มีลักษณะเป็นแรงพิสัยยาว เป็นแรงที่ยึดอนุภาคพื้นฐานบางชนิดเอาไว้ เพื่อประกอบเป็นอนุภาคขนาดใหญ่ และเป็นสาเหตุของการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีบางชนิด

ถ้าจะเปรียบเทียบขนาดของแรงทั้งสี่ชนิด โดยเทียบกับขนาดของแรงนิวเคลียร์ที่มีขนาดสูงสุด ถ้าแรงนิวเคลียร์มีค่าเท่ากับ 1 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีขนาดเท่ากับ 10^{-2} แรงอ่อนมีขนาด 10^{-7} และแรงโน้มถ่วงมีขนาดเท่ากับ 10^{-38} สังเกตว่าแรงโน้มถ่วงมีขนาดเล็กมาก จนไม่มีผลหรือรบกวนแรงชนิดอื่นๆ ในระบบเดียวกัน

ในปี ค.ศ.1967 มีการเสนอทฤษฎีการรวมแรงอ่อนและแรงแม่เหล็กไฟฟ้าเข้าด้วยกัน โดยรวมเรียกว่า electroweak force การรวมกันของแรง (unification) มีลักษณะคล้ายกับการรวมแรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็ก เป็นแรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) ทฤษฎีการรวมแรง grand unification theory ได้เสนอการรวมแรงนิวเคลียร์ และแรงไฟฟ้าอ่อนเข้าด้วยกัน และยังมีความพยายามที่จะรวมแรงโน้มถ่วงเข้าในระบบด้วย

4.3 มวล

จากประสบการณ์ในชีวิตประจำวัน เราทราบดีว่าแรงที่มีขนาดเท่ากันกระทำต่อก้อนมวลต่างก้อนกัน จะได้ความเร่งของมวลที่ไม่เท่ากัน ลูกเบสบอลจะมีความเร่งมากกว่ารถยนต์ถ้าถูกกระทำด้วยแรงขนาดเท่ากัน กล่าวได้ว่า มวลเป็นสมบัติของก้อนสสารที่ชี้บ่งค่าความต้านทานในการเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่ หรือเป็นปริมาณที่แปรตรงกับค่าความต้านทานต่อการเกิดความเร่งเมื่อถูกแรงกระทำ เราสามารถตรวจวัดค่ามวลด้วยค่าความเร่งที่แตกต่าง

$$\frac{m_1}{m_o} = \frac{a_o}{a_1} \qquad (4.1)$$

หรือ

$$m_1 = \left(\frac{a_o}{a_1}\right) m_o \qquad (4.2)$$

เมื่อ m_o เป็นมวลมาตรฐาน เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง a_o เมื่อถูกแรงกระทำ

4.4 กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน

Sir issac Newton เสนอบทความเกี่ยวกับกฎสามข้อของการเคลื่อนที่ (Newton's laws of motion) ตีพิมพ์ (ค.ศ.1686) ในวารสาร Philosophiae Naturalis Principia Mathematica กฎข้อแรกของนิวตันกล่าวถึงภาวะการเคลื่อนที่ของก้อนวัตถุ เมื่อแรงกระทำลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์

"Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, unless it is compelled to change that states by forces inpressed on it."

สมบัติของก้อนมวลที่จะคงสภาพนิ่ง หรือสภาพการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เราเรียก ความเฉื่อย (inertia) กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน บางคนเรียก กฎของความเฉื่อย (law of inertia) เป็นเพราะกฎข้อที่หนึ่งของนิวตันเป็นกฎที่กล่าวถึงกรอบอ้างอิง (reference frame) โดยตรง กรอบอ้างอิงหรือชุดของกรอบอ้างอิงที่ใช้อธิบายความสำคัญของกฎข้อหนึ่งเราเรียกกรอบเฉื่อย (inertial frame)

"If the net force acting on a body is zero, then it is possible to find a set of reference frames in which that body has no acceleration."

กรอบเฉื่อยเป็นกรอบที่ผู้สังเกตมองเห็นวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งค่าเท่ากัน ค่าความเร่งเป็นศูนย์หรือค่าคงตัว กรอบอ้างอิงอื่นๆ ที่ผู้สังเกตมองเห็นค่าความเร่งเท่ากับผู้สังเกตในกรอบเฉื่อย กรอบอ้างอิงนั้นเป็นกรอบเฉื่อยด้วย กล่าวได้ว่ากรอบเฉื่อย เป็นกรอบที่อยู่นิ่ง หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเทียบกับกรอบอ้างอิง

ในวิชากลศาสตร์แผนเดิม กรอบอ้างอิงมักใช้เป็นผิวโลก หรือระบบที่ติดกับผิวโลกเคลื่อนที่ไปพร้อมๆ กับโลก กรอบที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเทียบกับผิวโลก ถือว่าเป็นกรอบเฉื่อยทั้งสิ้น กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันและกฎข้ออื่นๆ จะใช้ได้ หรือเป็นจริงในกรอบเฉื่อยเท่านั้น

ตัวอย่างของกรอบเฉื่อยบนผิวโลก เครื่องบิน A เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวเทียบกับผิวโลก เครื่องบิน B เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน จะใช้ไม่ได้บนเครื่องบิน B ผู้โดยสารบนเครื่องบิน B จะรู้สึกมีแรงดันจากที่นั่ง ในทิศทางไปข้างหน้า ถึงแม้ว่าตัวผู้โดยสารจะอยู่นิ่งบนที่นั่งก็ตาม บางครั้งเรานิยามกรอบเฉื่อย เป็นกรอบอ้างอิงที่กฎข้อที่หนึ่งเป็นจริง นั่นคือ ก้อนวัตถุในกรอบเฉื่อยจะนิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว ถ้าไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับวัตถุ

กฎข้อที่หนึ่งของนิวตันกล่าวถึงการสมดุลโดยตรง ถ้าแรงลัพธ์มีค่าเป็นศูนย์ ก้อนวัตถุหรืออนุภาคจะอยู่นิ่งหรือมีความเร็วคงตัว การสมดุลมีสองลักษณะ การสมดุลประเภทสมดุลการเลื่อนที่ (translational equilibrium) และประเภทสมดุลแบบหมุน (rotational equilibrium) การสมดุลประเภทแรก ก้อนวัตถุจะอยู่นิ่งหรือมีความเร็วคงที่ เมื่อแรงย่อยรวมกันแล้วมีค่าเป็นศูนย์ โดยแรงย่อยเหล่านั้นผ่านจุดร่วมเดียวกัน เราเรียกการสมดุลตามแกน การสมดุลประเภทที่สองมีแรงย่อยรวมกันเป็นศูนย์เช่นกัน แต่แนวแรงย่อยไม่ผ่านจุดร่วม ทำให้เกิดผลของการหมุนขึ้น การสมดุลประเภทนี้วัตถุต้องไม่หมุน นั่นคือ ผลรวมของโมเมนต์ของแรงย่อยต้องเป็นศูนย์ด้วย การสมดุลของอนุภาคหรือก้อนวัตถุมักเป็นการสมดุลประเภทสอง ในชีวิตประจำวันเราจะพบเห็นการสมดุลประเภทที่สองมากกว่า

4.5 กฎข้อที่สองของนิวตัน

การเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางของความเร็วของการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือก้อนวัตถุ เป็นผลมาจากอิทธิพลของแรงภายนอก ที่กระทำต่ออนุภาคหรือก้อนวัตถุ แรงภายนอกผลลัพธ์ $(\Sigma\vec{F})$ กระทำต่ออนุภาคมีผลให้เกิดความเร่ง $(\vec{a})$ ในทิศทางของแรงลัพธ์

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad (4.3)$$

โดย m เป็นมวลของอนุภาค สมการ (4.3) เป็นสมการเวกเตอร์สามารถแยกออกเป็นสมการสเกลาร์สามสมการ

$$\Sigma F_x = ma_x, \quad \Sigma F_y = ma_y, \quad \Sigma F_z = ma_z \qquad (4.4)$$

เกี่ยวข้องกับแรงลัพธ์แกน $(\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z)$ และความเร่งตามแกน (a_x, a_y, a_z) ของอนุภาคมวล m

มีข้อสังเกตว่า กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน สามารถจัดได้เป็นกรณีพิเศษของกฎข้อที่สองได้ ถ้า $\Sigma\vec{F} = 0$ ความเร่ง $\vec{a} = 0$ นั่นคือ ถ้าแรงลัพธ์กระทำต่ออนุภาคมีค่าเป็นศูนย์ ความเร่งของอนุภาคมีค่าเป็นศูนย์ อนุภาคไม่เปลี่ยนแปลงสภาพการเคลื่อนที่ อย่างไรก็ตามกฎข้อที่หนึ่งของนิวตันแสดงให้เห็นถึงความสำคัญของกรอบเฉื่อยด้วย ถ้าไม่มีกฎข้อที่หนึ่ง เราคงไม่มีกรอบเฉื่อยไว้ใช้ในกรณีของกฎข้อที่สอง ดังนั้นกล่าวได้ว่ากฎทั้งสองข้อเสริมกัน ให้คำอธิบายระบบทางกลศาสตร์อย่างสมบูรณ์แบบ

ในการวิเคราะห์ปัญหากฎข้อที่สองของนิวตัน ขั้นตอนแรกคือการเขียนแผนภาพแสดงแรงภายนอกทั้งหมดในรูปของเวกเตอร์ กระทำต่อก้อนวัตถุหรืออนุภาค แผนภาพลักษณะนี้เราเรียก แผนภาพวัตถุอิสระ (free body diagram) แผนภาพวัตถุอิสระให้ข้อมูลในการวิเคราะห์ปัญหา ช่วยให้มองเห็นภาพพจน์ของปัญหามากขึ้น และเป็นขั้นตอนแรกในการแก้ปัญหาโจทย์ทางกลศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 4.1 อนุภาคนิวตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 1.4×10^7 เมตร/วินาที แรงนิวเคลียร์เป็นแรงพิสัยสั้น (short - ranged force) มีค่าเป็นศูนย์นอกนิวเคลียส แต่มีค่าสูงมากข้างใน ถ้าอนุภาคนิวตรอนถูกจับและทำให้หยุดนิ่งโดยนิวเคลียสที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1.0×10^{-14} เมตร จงคำนวณขนาดแรงนิวเคลียร์ (สมมุติว่าคงที่) ที่กระทำต่อนิวตรอน มวลของนิวตรอนเท่ากับ 1.67×10^{-27} กิโลกรัม

วิธีทำ

จากสูตร.... $v^2 = v_0^2 + 2as$

$$0 = \left(1.4 \times 10^7\right)^2 - 2a\left(0.5 \times 10^{-14}\right)$$

$$\therefore \quad \left(1.4 \times 10^7\right)^2 = \left(2 \times 0.5 \times 10^{-14}\right)a$$

$$(1.4)^2 \times 10^{14} = 1.0 \times 10^{-14}\, a$$

$$a = \frac{1.4 \times 1.4 \times 10^{14}}{1.0 \times 10^{-14}}$$

$$= 1.96 \times 10^{28}\ m/s^2$$

$$F = \left(1.67 \times 10^{-27}\ kg\right)\left(1.69 \times 10^{28}\, m/s^2\right)$$

$$= 3.27 \times 10 \quad kg \cdot m/s^2 = 32.7 \quad N$$

ตัวอย่าง 4.2 รถยนต์กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 53 กิโลเมตร/ชั่วโมง ชนราวสะพาน ผู้โดยสารเคลื่อนไปข้างหน้า 65 เซนติเมตร (เทียบกับถนน) ในขณะที่ถูกทำให้หยุดนิ่งโดยถุงอากาศกันกระแทก จงคำนวณหาแรง (คงที่) ที่กระทำต่อส่วนหน้าอกของผู้โดยสาร ที่มีมวล 39 กิโลกรัม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ

$F = ma$; $v^2 = v_0^2 + 2as$

$0 = (14.72)^2 + 2a(65 \times 10^{-2})$

$a = -\dfrac{14.72 \times 14.72}{2 \times 65 \times 10^{-2}}$

$= 1.67 \times 10^2 \ m/s^2$ (ทิศทางเข้าสู่อกผู้โดยสาร)

$F = ma$

$= 39 \times 1.67 \times 10^2$

$= 6500 \ N$

4.6 กฎข้อที่สามของนิวตัน

แรงกระทำต่อก้อนวัตถุเป็นผลมาจากการกระทำของก้อนวัตถุอื่นที่ประกอบเป็นสิ่งแวดล้อม ถ้าพิจารณาแรงกระทำต่อก้อนวัตถุที่สอง วัตถุก้อนแรกเป็นผู้ออกแรงกระทำ วัตถุก้อนแรกเป็นสิ่งแวดล้อมของวัตถุก้อนที่สอง ในทางตรงกันข้าม ถ้าพิจารณาก้อนที่หนึ่งถูกแรงกระทำ วัตถุก้อนที่สองทำหน้าที่เป็นผู้ให้แรงกระทำ กล่าวได้ว่าแรงเดี่ยวแรงหนึ่งเป็นส่วนหนึ่งของอันตรกิริยาร่วมระหว่างวัตถุสองก้อน จากการทดลองพบว่า แรงที่วัตถุก้อนแรกกระทำต่อวัตถุก้อนที่สอง มีขนาดเท่ากับแรงที่วัตถุก้อนที่สองกระทำต่อวัตถุก้อนแรกเสมอแต่ทิศตรงกันข้าม การแยกแรงเดี่ยว หรือหาแรงเดี่ยวในระบบกลศาสตร์เป็นไปไม่ได้

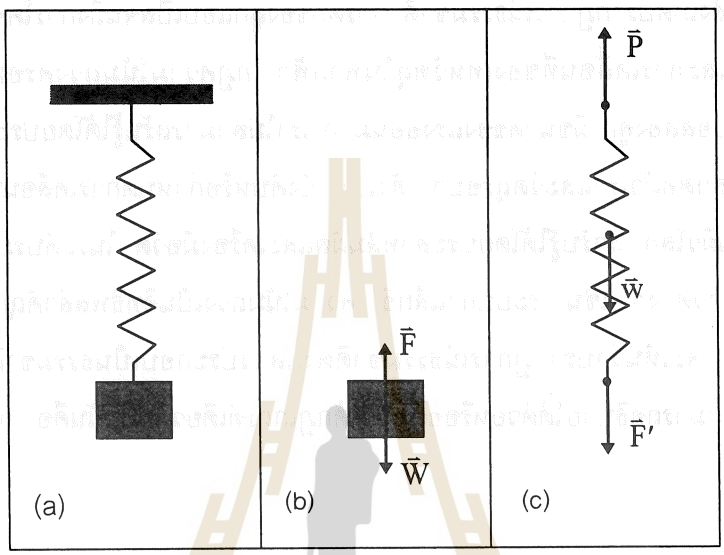
ถ้าเรานิยามอันตรกิริยาร่วมระหว่างวัตถุสองก้อน โดยเรียกแรงกิริยา (action force) และแรงร่วมคู่กับแรงกิริยาว่าแรงปฏิกิริยา (reaction force) กฎข้อที่สามของนิวตันกล่าวว่า

"To every action there is an equal and opposite reaction."

ถ้าวัตถุ A ออกแรงกระทำ $\vec{F}_{BA}$ ต่อก้อน B และ $\vec{F}_{AB}$ เป็นแรงกระทำที่ก้อน B กระทำต่อก้อน A

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \qquad (4.4)$$

มีข้อสังเกตว่าแรงกิริยาและแรงปฏิกิริยา จะกระทำต่อวัตถุต่างก้อนเสมอ ถ้าแรงทั้งสองกระทำต่อวัตถุก้อนเดียวกัน แรงลัพธ์คงเป็นศูนย์ จะไม่มีการเคลื่อนที่ที่มีความเร่ง



รูป 4.1 มวลแขวนนิ่งที่ปลายสปริง

ตัวอย่างแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยา แสดงในรูป 4.1 น้ำหนักมวล W และแรงดึงสปริง F กระทำต่อก้อนมวล แรงทั้งสองนี้ไม่ใช่แรงคู่กิริยา - ปฏิกิริยา เพราะแรงทั้งสองกระทำต่อก้อนวัตถุเดียวกัน แรงน้ำหนัก W มีแรงคู่ปฏิกิริยาอยู่ที่จุดศูนย์กลางของโลก เป็นแรงโน้มถ่วงมีมวลกระทำต่อโลก ส่วนแรงปฏิกิริยาของแรง F คือแรงที่มวลดึงปลายสปริงไว้ แรง F' ในแรงคู่ปฏิกิริยาของแรง F แสดงในรูป 4.1(c) แรง $\vec{F} = -\vec{F}'$ เป็นคู่แรงกิริยา - ปฏิกิริยา แรงดึงที่ปลายสปริง P กระทำต่อเพดาน มีคู่ปฏิกิริยาเป็นแรงที่สปริงดึงเพดานลง ถ้าสปริงอยู่นิ่งแสดงว่ามีแรงลัพธ์กระทำต่อตัวสปริงมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $\vec{P} + \vec{w} + \vec{F}' = 0$

4.7 กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

ปี ค.ศ. 1686 Newton ได้ตั้งกฎความโน้มถ่วงเอกภพ (law of universal gravitation) ขึ้นจากการสังเกตปรากฏการณ์ธรรมชาติ การตกของลูกแอปเปิ้ลจนถึงการโคจรของดวงจันทร์รอบโลก และการเคลื่อนที่ของเทหวัตถุในฟากฟ้า กฎความโน้มถ่วงครอบคลุมแรงดึงดูดระหว่างลูกบอลสองลูก มีขนาดของแรงอ่อนมาก เราไม่สามารถรับรู้ได้โดยประสาทสัมผัส แรงดึงดูดของโลกต่อตัวเราและวัตถุรอบๆ ตัวเรา บังคับหรือกำหนดการเคลื่อนที่ของตัวเราและก้อนวัตถุบนผิวโลก เรารับรู้ได้โดยประสาทสัมผัสและเครื่องมือวัด ในระดับระบบสุริยจักรวาลและระบบดาวต่างๆ เช่น ระบบกาแล็กซี ความโน้มถ่วงเป็นอิทธิพลสำคัญที่รักษาระบบดังกล่าวอยู่ได้ จะเห็นว่าปรากฏการณ์ธรรมชาติดังกล่าวประกอบเป็นธรรมชาติรอบตัวเราโดยส่วนรวม สามารถอธิบายได้ด้วยหรืออยู่ภายใต้กฎเกณฑ์เดียวกัน นั่นคือ กฎความโน้มถ่วงของนิวตัน

"Every particle in the universe attracts every other particle with a force directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between them."

ขนาดของแรงโน้มถ่วง F ของมวล m_1 และ m_2 ที่อยู่ห่างกันระยะ r มีค่า

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (4.5)$$

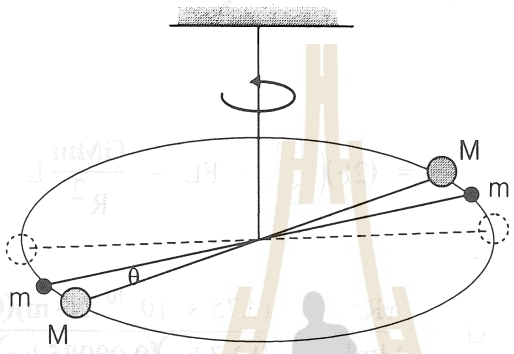
โดยที่ G เป็นค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภพ (universal gravitational constant) ใช้ได้กับก้อนมวลทุกชนิด แรงโน้มถ่วงมีลักษณะเป็นแรงคู่กิริยา-ปฏิกิริยา ออกแรงกระทำดึงดูดในแนวเส้นตรงต่อจุดศูนย์กลางมวลของมวลทั้งสอง

ในปี ค.ศ.1798 Sir Henry Cavendish ทำการทดลองตรวจวัดค่า G โดยใช้ลูกตุ้มชนิดบิด(tortion balance) มีลักษณะดังรูป ได้ค่า $G = 6.670 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$ อีก 200 ปีต่อมามีผู้ทำการทดลองในลักษณะเดียวกันหลายครั้ง ได้ค่า G ที่มีความถูกต้องสูงมากขึ้น ได้ค่า G มาตราฐานที่ยอมรับกัน

$$G = 6.67259 \times 10^{-11}\ N.m^2 / kg^2$$

โดยมีค่าความคลาดเคลื่อน $\pm 0.00085 \times 10^{-11}\ N.m^2 / kg^2$ หรือประมาณ $\pm 0.013\ \%$

ตัวอย่าง 4.3 ในการทดลองของ Cavendish เครื่องมือแสดงในรูปข้างล่าง



มวล M = 12.7 กิโลกรัม และ มวล m = 9.85 กรัม ความยาว L ของคานที่เชื่อมต่อมวลเล็กทั้งสองมีค่า 52.4 เซนติเมตร คานและเส้นลวดประกอบเป็นลูกตุ้มชนิดบิด มีค่าโมเมนต์ความเฉื่อยการหมุนรอบแกนกลาง $I = 1.25 \times 10^{-3}$ กิโลกรัม-เมตร^2 มีคาบการแกว่งกวัด T = 769 วินาที ค่ามุม 2θ ระหว่างตำแหน่งสมดุลสองตำแหน่งมีค่า 0.516° ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของมวลใหญ่และเล็กมีค่า R = 10.8 เซนติเมตร จงหาค่าคงตัวโน้มถ่วง (G) จากข้อมูลการทดลอง

วิธีทำ คาบการแกว่งกวัดคงตัวลูกตุ้มชนิดบิด

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

โดยค่า K เป็นค่าคงตัวการบิดของเส้นลวด

$$K = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{(4\pi^2)(1.25 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2)}{(769\ s)} = 8.34 \times 10^{-8}\ N \cdot m$$

ขนาดทอร์ก $\tau = K\theta = (8.34 \times 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m})\left(\frac{0.516^\circ}{2} \times \frac{2\pi}{360^\circ}\ \mathrm{rad}\right)$

$$\tau = 3.75 \times 10^{-10}\ \mathrm{N \cdot m}$$

ทอร์กเนื่องจากเส้นลวดมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงดึงดูดระหว่างมวลเล็กและมวลใหญ่ (F) ในขณะอยู่ในสภาพสมดุล

$$\tau = (2F)\left(\frac{L}{2}\right) = FL = \frac{GMm}{R^2}L$$

ดังนั้น

$$G = \frac{\tau R^2}{MmL} = \frac{(3.75 \times 10^{-10}\ \mathrm{N \cdot m})(0.108\ \mathrm{m})^2}{(12.7\ \mathrm{kg})(0.00985\ \mathrm{kg})(0.524\ \mathrm{m})}$$

$$= 6.67 \times 10^{-11}\ \ \mathrm{N \cdot m / kg^2}$$

ตัวอย่าง 4.4 จงคำนวณหาแรงโน้มถ่วง

(a) ระหว่างลูกโบว์ลิ่งสองลูกมวล 7.3 กิโลกรัม อยู่ห่างกัน 0.65 เมตร

(b) ระหว่างโลกและดวงจันทร์

วิธีทำ

(a) $$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2})(7.3\ \mathrm{kg})(7.3\ \mathrm{kg})}{(0.65\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 8.4 \times 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(b) มวลของโลก $= 5.98 \times 10^{24}$ kg

มวลของดวงจันทร์ $= 7.36 \times 10^{22}$ kg

ระยะทางจากโลกถึงดวงจันทร์ $= 3.82 \times 10^{8}$ m

$$F = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})(7.36 \times 10^{22})}{(3.82 \times 10^{8}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= 2.01 \times 10^{20}\ \mathrm{N}$$

4.8 น้ำหนักและมวล

น้ำหนักของก้อนมวลบนผิวโลกคือ แรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อมวลมีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลางของโลก

$$W = \frac{GmM_E}{R^2} = m\left(\frac{GM_E}{R^2}\right)$$

$$= mg \qquad (4.6)$$

โดยเรียก $g = GM_E / R^2$ เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ณ บริเวณผิวโลก สังเกตว่าค่า g ไม่ขึ้นกับขนาดมวล m ของก้อนวัตถุ

ส่วนน้ำหนักของก้อนมวลขึ้นอยู่กับค่า g โดยตรง ค่ามวล m ของก้อนวัตถุไม่ขึ้นกับบริเวณหรือสถานที่ แต่ถ้าจะใช้น้ำหนักเป็นตัวแทนของมวลโดยตรงต้องมีค่า g ที่เฉพาะเจาะจง น้ำหนักของก้อนมวลเดียวกัน จะแตกต่างกันถ้าอยู่บนดวงจันทร์ กับบนผิวโลก

ความรู้สึกของคนเราต่อน้ำหนักเกี่ยวข้องกับแรงที่พื้นออกแรงกระทำต่อเรา คนลอยน้ำจะมีความรู้สึกว่าเบากว่าปกติ ทั้งๆ ที่น้ำหนักยังคงค่าเท่าเดิม คนยืนในลิฟท์กำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่งคงที่ รู้สึกมีน้ำหนักเพิ่มขึ้น เพราะแรงดันของพื้นลิฟท์มีค่าเพิ่มขึ้น ถ้าสายลิฟท์ขาด เท้าคนไม่แตะพื้นลิฟท์ คนรู้สึกไม่มีน้ำหนัก ความเป็นจริงแล้วน้ำหนักยังมีอยู่ คนกำลังตก

อย่างอิสระลงสู่พื้น เพียงแต่ไม่มีแรงกระทำต่อเท้าคน ทำให้คนมีความรู้สึกต่อสภาพไร้น้ำหนัก (weightlessness) เช่นเดียวกับนักบินอวกาศกำลังโคจรอยู่รอบโลก กำลังแสดงการลอยตัวอย่างอิสระ เราเรียกกันว่าไร้น้ำหนัก (weightless) ตามคำนิยามของน้ำหนัก ความเป็นจริงแล้วนักบินอวกาศยังมีน้ำหนักอยู่อาจน้อยกว่าน้ำหนักบนผิวโลก เพราะค่า g ที่วงโคจรมีค่าน้อยกว่าค่า g บนผิวโลก สภาพไร้น้ำหนักที่นักบินอวกาศแสดงให้เห็นนั้นมาจากเหตุผลสองประการ คือ (1) นักบินอวกาศกำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วเชิงเส้นสัมผัส แรงน้ำหนักเป็นแรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ทำให้นักบินอวกาศเคลื่อนที่เป็นวงกลมอยู่ได้ (2) ไม่มีพื้นออกแรงกระทำต่อนักบินอวกาศ สภาพไร้น้ำหนักอย่างแท้จริงต้องอยู่ในบริเวณที่ห่างไกลจากดวงดาวต่างๆ นักบินอวกาศจะลอยอย่างอิสระในยานอวกาศที่เคลื่อนที่ได้ในขณะเครื่องดับ

ตัวอย่าง 4.5 เครื่องบินไอพ่นเริ่มออกวิ่งบนทางวิ่งเพื่อบินขึ้นมีความเร่ง 2.3 เมตร/วินาที^{2} เครื่องบินมีเครื่องยนต์ 2 เครื่อง แต่ละเครื่องมีแรงดันขึ้น 1.40×10^5 นิวตัน ถามว่าน้ำหนักของเครื่องบินมีค่าเท่าใด

วิธีทำ

$$F = ma$$
$$2 \times 1.40 \times 10^5 = m(2.30)$$
$$m = 1.22 \times 10^5 \text{ kg}$$
$$\therefore \quad W = mg = (1.22 \times 10^5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 1.19 \times 10^6 \text{ N}$$

4.9 ความเสียดทาน

แรงเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสแข็งที่อยู่นิ่ง เราเรียก แรงเสียดทานสถิต (static friction) ค่าสูงสุดของแรงเสียดทานสถิตมีค่าเท่ากับแรงความพยายามน้อยที่สุดที่ต้องใช้ในการทำให้วัตถุเคลื่อนตัว หลังจากที่ก้อนวัตถุเคลื่อนตัวแล้ว แรงเสียดทานระหว่างผิวมีค่าน้อยลง แรงเสียดทานระหว่างผิวเคลื่อนที่ เราเรียก แรงเสียดทานจลน์ (kinetic friction)

แรงเสียดทานสถิต (f_S) ระหว่างผิวสัมผัสมีลักษณะ (1) ประมาณได้ว่าไม่ขึ้นอยู่กับพื้นที่ผิวสัมผัส และ (2) ขึ้นอยู่กับแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก

$$f_s \leq \mu_s N \tag{4.7}$$

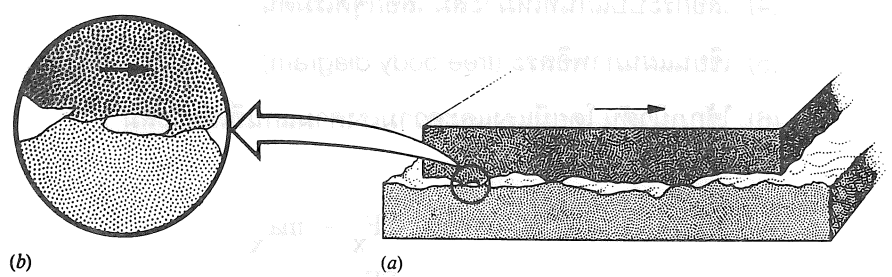
โดย μ_S เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานสถิต และ N เป็นแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก

ในทำนองเดียวกัน แรงเสียดทานจลน์ (f_K) ระหว่างผิวสัมผัสมีคุณสมบัติ (1) ไม่ขึ้นกับพื้นที่ผิวสัมผัส (2) ขึ้นโดยตรงกับแรงปฏิกิริยาตั้งฉาก และ (3) ไม่ขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพัทธ์ของผิว

$$f_k = \mu_k N \tag{4.8}$$

เมื่อ μ_K เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความต้านทานจลน์ ค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานทั้งสองชนิดขึ้นอยู่กับธรรมชาติของคู่ผิวสัมผัส และสามารถถือเป็นค่าคงตัวสำหรับคู่ผิวสัมผัสได้

จากผลการทดลองพบว่า ต้นเหตุของแรงเสียดทานเมื่อพิจารณาในระดับอะตอม หรือโมเลกุล มาจากการยึดติดของผิว (surface adhesion) ผิวสัมผัสเรียบขัดมันโดยทั่วไปเมื่อพิจารณาในลักษณะจุลทรรศน์แล้ว ไม่เรียบเหมือนกับที่เรามองเห็นด้วยตาเปล่า ผิวสัมผัสจะมีลักษณะดังแสดงในรูป 4.2



รูป 4.2 ผิวสัมผัสแสดงการติดกันของผิวในลักษณะจุลทรรศน์

บนผิวสัมผัสจะมีจุดสัมผัสมากมาย เมื่อเข้าใกล้กันมากแล้วจะเชื่อมติดกันเนื่องจากแรงกดบริเวณสัมผัส และแรงดึงดูดโมเลกุล ในการดึงผิวสัมผัสให้เคลื่อนที่ออกจากกัน แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นมาจากการต้านทานการเฉือน (shear) ของจุดเชื่อมเล็กๆ เหล่านี้ จุดเชื่อมจะเกิดขึ้นใหม่และแยกออกจากกันอย่างนี้ไปเรื่อยๆ ระหว่างผิวสัมผัสขณะมีการเคลื่อนตัวสัมพัทธ์กัน

ค่าสัมประสิทธ์ความต้านทานจะขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ เช่น ธรรมชาติของสาร ความขัดมันของผิว แผ่นฟิล์มบนผิว อุณหภูมิและสารปนเปื้อนบนผิว การลดค่าแรงเสียดทานทำได้โดยการหล่อลื่นผิว โดยวิธีการต่างๆ เช่น ใช้ของเหลวหล่อลื่น ใช้อากาศ หรือวิธีการลดแรงเสียดทานโดยใช้แรงแม่เหล็กแขวนให้วัตถุลอยเหนือพื้น เป็นต้น

4.10 การใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

ปัญหาทางกลศาสตร์แต่ละปัญหามีแนวทางการใช้กฎของนิวตันต่างกัน อย่างไรก็ตามมีหลักเกณฑ์รวมที่ใช้ได้กับปัญหาส่วนใหญ่ ในตอนนี้จะพิจารณาการใช้กฎของนิวตัน โดยใช้หลักเกณฑ์ร่วมในการแก้ปัญหากับตัวอย่างต่างๆ ขั้นตอนการใช้กฎของนิวตันมีดังนี้

(1) จัดแยกก้อนวัตถุที่ต้องการวิเคราะห์ออกจากสิ่งแวดล้อม ก้อนวัตถุอาจเป็นก้อนเดียวหรือเป็นชุดก็ได้
(2) แยกสิ่งแวดล้อมที่ออกแรงกระทำต่อก้อนวัตถุที่กำลังพิจารณา เช่น ผิวพื้น วัตถุก้อนอื่น โลก และอื่นๆ
(3) เลือกกรอบเฉื่อยที่เหมาะสม
(4) เลือกระบบแกนที่เหมาะสม เลือกจุดเริ่มต้น
(5) เขียนแผนภาพอิสระ (free body diagram)
(6) ใช้กฎนิวตัน โดยมีแรงและความเร่งตามแกนที่เหมาะสม

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$\Sigma F_z = ma_z$$

ตัวอย่าง 4.6 ลูกอุกกาบาตมวล 0.25 กิโลกรัม กำลังมาตามแนวดิ่งสู่ผิวโลก โดยผ่านชั้นบรรยากาศด้วยความเร่ง 9.2 เมตร/วินาที^{2} นอกจากแรงโน้มถ่วงแล้ว ยังมีแรงหน่วงต้านตามแนวดิ่งเนื่องจากชั้นบรรยากาศกระทำต่อลูกอุกกาบาต จงหาขนาดของแรงหน่วงนี้

วิธีทำ

$$F_y = ma_y$$

$$mg - R = ma = (0.25)\ 9.2\ m/s^2$$

$$0.25 \times 9.8 - R = (0.25)\ 9.2$$

$$R = 0.25\ (9.8 - 9.2) = 0.25 \times 0.6 = 0.15\ N.$$

ตัวอย่าง 4.7 เด็กหญิงมวล 40 กิโลกรัม และล้อเลื่อนมวล 8.4 กิโลกรัม อยู่บนผิวน้ำแข็งของทะเลสาปห่างกัน 15 เมตร ถ้าเด็กหญิงใช้เชือกดึงล้อเลื่อนด้วยแรง 5.2 นิวตัน โดยดึงเข้าหาตัว จงคำนวณ

(a) ความเร่งของล้อเลื่อน

(b) ความเร่งของเด็กหญิง

(c) ถ้านับจากตำแหน่งเด็กหญิงยืนอยู่เริ่มต้น เด็กหญิงกับล้อเลื่อนจะชนกันที่ใด สมมุติว่าแรงคงที่ และไม่มีแรงเสียดทาน

วิธีทำ

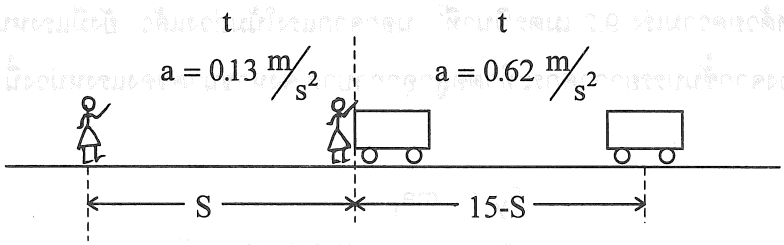
(a) ล้อเลื่อน $F = 5.2\ N = ma = 8.4 \times a$

$$a = \frac{5.2}{8.4} = 0.62\ m/s^2$$

(b) เด็กหญิง $F = 5.2\ N = ma = 40 \times a$

$$\therefore\ a = \frac{5.2}{40} = 0.13\ m/s^2$$

(c)



$$S = v_o t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(0.13)t^2$$

$$S = \frac{0.13}{2}t^2 \rightarrow 2S = 0.13t^2$$

$$(15 - S) = \frac{0.62}{2}t^2 \rightarrow 30 - 2S = 0.62t^2$$

$$\frac{2S}{30 - 2S} = \frac{0.13}{0.62} = \frac{0.21}{1}$$

$$2S = 0.21 \times 30 - 0.21 \times 2S$$

$$2S + 0.42S = 6.3$$

$$S = \frac{6.3}{2.42}$$

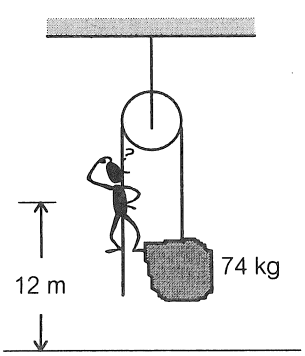
$$= 2.6 \quad \text{m}$$

ตัวอย่าง 4.8 ชายมวล 110 กิโลกรัม หย่อนตัวเองลงมาถึงพื้นจากความสูง 12 เมตร โดยใช้เชือกคล้องผ่านรอกเกลี้ยง ปลายข้างหนึ่งผูกติดกับถุงทรายมวล 74 กิโลกรัม ถามว่า

(a) อัตราเร็วของชายเมื่อกระทบพื้น

(b) เขาจะทำอย่างไรเพื่อจะลดอัตราเร็วกระทบพื้น

วิธีทำ



$$(110)9.8 - T = (110)a \quad (1)$$

$$T - (74 \times 9.8) = 74\,a \quad (2)$$

(1) + (2) $\quad (110 - 74)9.8 = 184\,a$

$$a = \frac{36 \times 9.8}{184} = 1.92 \ \text{m/s}^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$= 0^2 + 2(1.92)(12)$$

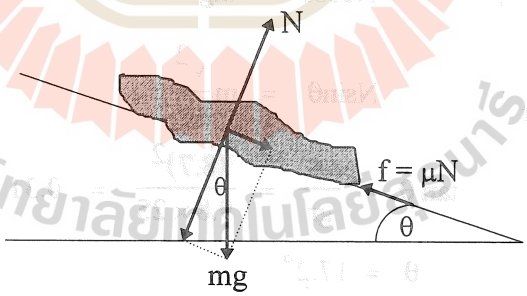
$$= 46.08$$

$$v = 6.79 \ \text{m/s}$$

(b) เขาต้องไต่เชือกขึ้น ให้ความเร็วสัมพัทธ์ลดลง

ตัวอย่าง 4.9 สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างกระทะเทฟลอน (teflon) และไข่คน (scrambled egg) มีค่าประมาณ 0.04 เมื่อเราเอียงกระทะ มุมเอียงน้อยที่สุดมีค่าเท่าไร ไข่พอดีเลื่อนออกจากกระทะ

วิธีทำ



$$\therefore \quad N = mg\cos\theta$$

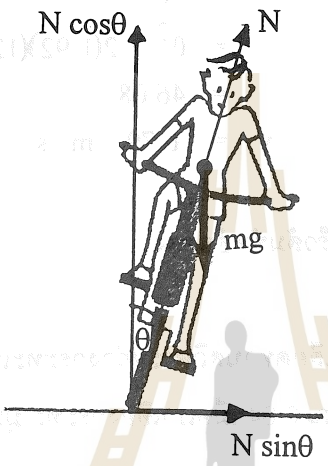
$$f = \mu N = \mu\, mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$0.04 = \mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\theta = 2.3^\circ$$

ตัวอย่าง 4.10 คนขี่จักรยานเป็นวงกลมรัศมี 25 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 8.7 เมตร/ชั่วโมง มวลของจักรยานและคนขี่เท่ากับ 85 กิโลกรัม จงคำนวณขนาดและทิศทางของแรง ที่ถนนทำกับจักรยาน

วิธีทำ



$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad N\cos\theta = mg \tag{1}$$

$$\Sigma F_r = ma_r \; ; \quad N\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \tag{2}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(8.7)^2}{9.8\times 25} = 0.31 \tag{3}$$

$$\theta = 17.2^\circ$$

$$N\cos\left(17.2^\circ\right) = 85\times 9.8 = 833$$

$$N = \frac{833}{\cos 17.2} = \frac{833}{0.955}$$

$$= 871.9\ \text{N}$$

ตัวอย่าง 4.11 ตำแหน่งของอนุภาคมวล 2.17 กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามสมการ

$$x = 0.179\,t^4 - 2.08\,t^2 + 17.1$$

โดย x เป็นเมตร t เป็นวินาที จงหา

(a) ความเร็ว

(b) ความเร่ง

(c) แรงที่กระทำต่ออนุภาคที่เวลา t = 7.18 วินาที

วิธีทำ

(a) $$x = 0.179t^4 - 2.08 \times t^2 + 17.1$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \times 0.179 \times t^3 - 2 \times 2.08t$$

$$v_x = 0.716t^3 - 4.16t$$

$t = 7.18$ s ; $= 265.02 - 29.869 = 235.1$ m/s

(b) $$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 3 \times 0.716t^2 - 4.16$$

$$= 2.148t^2 - 4.16$$

$t = 7.18$ s ; $= 110.734 - 4.16 = 106.6$ m/s^2

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(c) $F_x = ma_x$

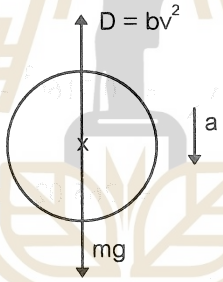
$= (2.17)(2.148t^2 - 4.16)$

$= 4.661t^2 - 9.027$

$t = 7.18\ s$; $= 4.661(7.18)^2 - 9.027$

$= 240.28 - 9.027 = 231.25\ N$

ตัวอย่าง 4.12 ก้อนวัตถุถูกปล่อยให้ตก ถ้าแรงต้านเป็นไปตามสมการ $D = bv^2$ จงหาอัตราความเร็วสุดท้าย (terminal speed)



วิธีทำ

$$F = ma$$

$$mg - bv^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad a = g - \frac{b}{m}v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v^2$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \left(\frac{b}{m}\right)v^2} = \int_{t=0}^{t} dt = t \qquad (1)$$

จาก Integral table $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ell n\left|\frac{x+a}{x-a}\right| = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$

พิจารณาเทอมในอินทิกรัลของสมการ (1)

$$\frac{dv}{g-\left(\frac{b}{m}\right)v^2} = \frac{m\,dv}{mg-bv^2} = (m/b)\frac{dv}{\left(\frac{mg}{b}\right)-v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{b}\int\frac{dv}{\left(\sqrt{mg/b}\right)^2-v^2} = \frac{m}{b}\frac{1}{2\sqrt{mg/b}}\ell n\left|\frac{v+\sqrt{mg/b}}{v-\sqrt{mg/b}}\right|$$

หาค่าอินทิกรัล ที่ $v = 0$ ถึง $v = v$;

$$R.H.S. = \frac{m}{2b\sqrt{mg/b}}\left(\ell n\left|\frac{v+\sqrt{mg/b}}{v-\sqrt{mg/b}}\right| - \ell n(|-1|)\right)$$

$\therefore$ จากสมการ (1) $$t = \frac{m}{2\sqrt{mgb}}\ell n\left|\frac{v+\sqrt{mg/b}}{v-\sqrt{mg/b}}\right|$$

เมื่อ $$t \to \infty \quad ; \quad \ell n\left|\frac{v+\sqrt{mg/b}}{v-\sqrt{mg/b}}\right| \to \infty$$

นั่นคือ $$\left|\frac{v+\sqrt{mg/b}}{v-\sqrt{mg/b}}\right| \to \infty$$

จะได้ $$v - \sqrt{mg/b} \to \infty$$

$$v = \sqrt{mg/b}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. (a) ถ้าไม่คิดแรงโน้มถ่วง ต้องใช้แรงขนาดเท่าใดเพื่อจะเร่งยานอวกาศ มวล 1200 เมตริกตัน จากหยุดนิ่งให้มีความเร็วเป็น 1/10 ของความเร็วแสงในเวลา 3 วัน และในเวลา2เดือน

(ตอบ : 1.39×10^8 N , 6.94×10^6 N)

(b) ถ้าเมื่อถึงระดับความเร็วดังกล่าวแล้ว ดับเครื่องยานอวกาศ ต้องใช้เวลานานเท่าไรในการเดินทางระยะทาง 5 light - month ในกรณีทั้งสอง

(ตอบ : 4.115 yr , 4.19 yr (1ปีแสง = ระยะทางที่แสงเดินทางได้ 1 ปี))

2. อนุภาคอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงจากแผ่นแคโทดไปยังแผ่นแอโนด และหลอดสุญญากาศ แผ่นทั้งสองอยู่ห่างกัน 1.5 เซนติเมตร อิเล็กตรอนเริ่มต้นด้วยความเร็วเป็นศูนย์ ไปถึงแผ่นแอโนดมีความเร็ว 5.8×10^6 เมตร/วินาที

(a) ถ้าความเร่งมีค่าคงที่ จงคำนวณหาแรงกระทำต่ออิเล็กตรอน

มวลอิเล็กตรอน = 9.11×10^{-31} กิโลกรัม

(ตอบ : 1.0×10^{-15} N)

(b) คำนวณแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่ออิเล็กตรอน

(ตอบ : 8.9×10^{-30} N)

3. ถ้ายานอวกาศเดินทางไปสำรวจดวงอาทิตย์ เคลื่อนที่ตรงไปยังดวงอาทิตย์ในแนวเส้นตรงต่อระหว่างโลกและดวงอาทิตย์ ถามว่าที่ระยะทางห่างจากโลกเท่าใด ที่แรงโน้มถ่วงจากดวงอาทิตย์ จะเท่ากับแรงโน้มถ่วงจากโลก

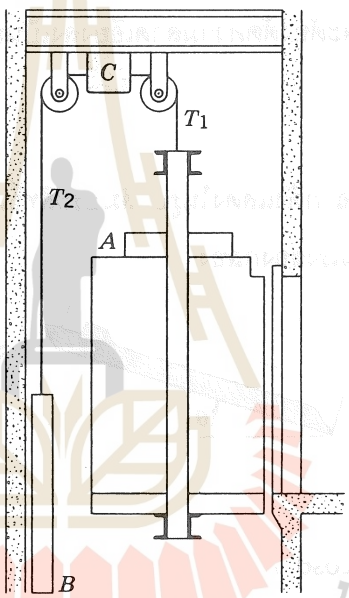
(ตอบ : 2.6×10^5 km)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

4. คนงานขนเครื่องมือเข้าในลิฟท์ที่อยู่ชั้นบนของตัวตึก ปรากฏว่าน้ำหนักของเครื่องมือมากเกินไป ทำให้สายเคเบิลดึงลิฟท์ขาด มวลของลิฟท์รวมกับเครื่องมือขณะนั้น 1600 กิโลกรัม ขณะนี้ลิฟท์ตกลงมาโครงกรอบเหล็กให้แรงเสียดทานคงที่ 3700 นิวตัน กับลิฟท์ จงคำนวณหาอัตราเร็วของลิฟท์เมื่อตกกระทบชั้นล่าง ระยะต่ำลงมา 72 เมตร

(ตอบ : 32.8 m/s)

5. ลิฟท์ประกอบด้วยโครงบรรทุก (A) ตัวถ่วง (B) และตัวขับเคลื่อน (C) แสดงในรูป



มวลของโครงบรรทุก 1000 กิโลกรัม และมวลของตัวถ่วง 1400 กิโลกรัม ไม่คิดแรงเสียดทานทั้งหมด ถ้าลิฟท์เคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร่ง 2.3 เมตร/วินาที^{2} ในขณะที่ตัวถ่วงเร่งลงด้วยอัตราเดียวกัน ถามว่า (a) T_1 = ? (b) T_2 = ? (c) ตัวขับเคลื่อนต้องช่วยดึงเท่าไร

(ตอบ : (a) 12.1 kN. (b) 10.5 kN (c) 1.6 kN.)

6. นักวิ่งจะสามารถเร่งได้สูงสุดเท่าไร ถ้าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างรองเท้ากับถนนมีค่า 0.95 ?

(ตอบ : 9.31 m/s^2)

7. สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสถิตระหว่างล้อรถและถนนแห้งมีค่า 0.62 ถ้ามวลของรถ 1500 กิโลกรัม ถามว่าแรงห้ามล้อสูงสุดที่มีได้มีค่าเท่าใด เมื่อ

(a) บนถนนระดับ

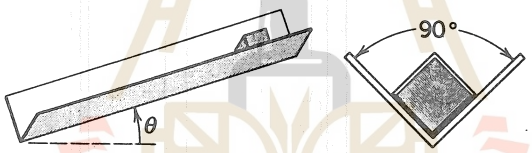
(b) ทางลง 8.6°

(ตอบ : (a) 9.1 kN (b) 9.0 kN)

8. บ้านสร้างอยู่บนยอดเขาที่มีความลาดเอียง 42° จากการสังเกตพบว่ามีเศษหินเศษดินหล่นอยู่ตลอดเวลา วิศวกรแนะว่าควรจะลดความลาดเอียงลง ถ้าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างชั้นดินมีค่า 0.55 จะต้องตัดความลาดเอียงลงเป็นมุม ϕ มีค่าเท่าใด ?

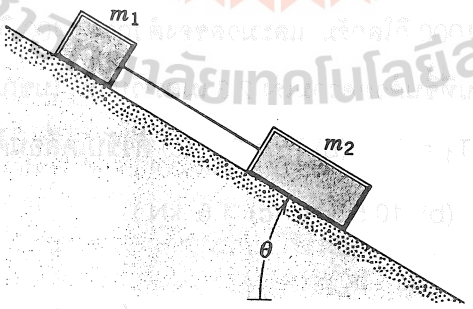
(ตอบ : 13.9°)

9. กล่องเลื่อนลงบนเหล็กฉากดังแสดงในรูป สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ระหว่างกล่องและเหล็กฉาก μ_k จงหาความเร่งของกล่อง



(ตอบ : $g\sin\theta - \sqrt{2}\mu_k g\cos\theta$)

10.



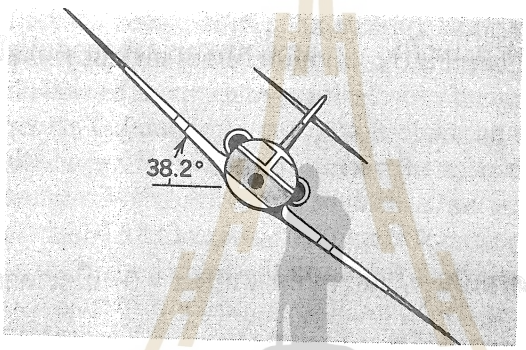
ก้อนวัตถุสองก้อนมีมวล m_1 = 1.65 กิโลกรัม และ m_2 = 3.22 กิโลกรัม ติดกันโดยแกนเบาขนานกับแนวพื้นเอียง ดังแสดงในรูป ก้อนวัตถุทั้งสองไกลลงพื้นเอียง ถ้า $\theta = 29.5^\circ$ ค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานจลน์ระหว่าง m_1 และพื้นเอียง μ_1 = 0.226 ระหว่าง m_2 กับพื้นเอียง μ_2 = 0.127 จงคำนวณ

(a) ความเร่งร่วมของก้อนวัตถุ

(b) ความตึงของแกนเชื่อม

(ตอบ : (a) 3.45 m/s^2 (b) 0.91 N)

11. เครื่องบินกำลังบินเป็นวงกลมตามแนวราบด้วยอัตราเร็ว 482 กิโลเมตร/ชั่วโมงปีกเครื่องบินเอียง 38.2° เทียบกับแนวราบ ตามรูป จงคำนวณหารัศมีของวงกลมที่เครื่องบินกำลังบินอยู่ สมมุติว่าแรงเข้าสู่ศูนย์กลางมาจากแรงยกที่ตั้งฉากกับพื้นที่ของปีกเครื่องบิน



(ตอบ : 2.32 km)

12. มวลหนึ่งกิโลกรัมมาตราฐาน มีน้ำหนัก 9.8 นิวตัน ที่ระดับน้ำทะเล ถ้าโลกไม่หมุน ถ้าเรานำผลของโลกหมุนมาคิด มวลดังกล่าวจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี 6370 กิโลเมตร ในหนึ่งวัน จงคำนวณ

(a) แรงเข้าสู่ศูนย์กลางที่ทำให้มวลหนึ่งกิโลกรัมเคลื่อนที่เป็นวงกลม

(ตอบ : 0.0337 N)

(b) แรงที่มวลดังกล่าวกระทำต่อสปริงของตาชั่งแขวนที่บริเวณเส้นศูนย์สูตร (น้ำหนักปรากฏ)

(ตอบ : 9.77 N)

13. อนุภาคมีมวล m อยู่นิ่งที่ x = 0 ที่เวลา t = 0 แรงขนาด $F = F_{\circ}e^{-t/T}$ กระทำต่ออนุภาคในทิศทาง +x โดย $F_{\circ}$ และ T เป็นค่าคงที่ เมื่อจุดเวลา t = T แรงกระทำตัดขาดออกไป ณ จุดนี้ถามว่า

(a) อนุภาคมีอัตราเร็วเท่าใด

(ตอบ : $0.632F_{\circ}T / m$)

(b) อนุภาคอยู่ที่ไหน

(ตอบ : $0.368\ F_{\circ}T^2 / m$)

14. นักกระโดดร่มเคลื่อนที่ลงมาตามแนวดิ่ง แรงต้านทานของอากาศแปรโดยตรงกับความเร็วตามสมการ

$$F = kv$$

ถ้า t = 0 ความเร็วของนักกระโดดร่มเป็น v_0 และอยู่ที่ตำแหน่ง z = 0 เมื่อเวลาผ่านไป t จงหา

(a) อัตราเร็ว

(b) ระยะทางตามแกนแนวดิ่ง

(c) อัตราเร่ง

(d) อัตราเร็วสุดท้าย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 5 งาน และ พลังงาน

เค้าโครงเรื่อง :

5.1 งานของแรงคงตัว

5.2 งานของแรงไม่คงตัว

5.3 งานและพลังงานจลน์
ทฤษฎีบทงาน - พลังงาน

5.4 กำลัง

5.5 พลังงานจลน์ที่ความเร็วสูง

5.6 แรงอนุรักษ์

5.7 พลังงานศักย์

5.8 ระบบพลังงานอนุรักษ์

5.9 มวลและพลังงาน

5.10 การดลและโมเมนตัม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

5.1 งานของแรงคงตัว

งานเป็นปริมาณสเกลาร์ มาจากผลคูณของ แรงคงตัวและการกระจัด

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\phi \qquad (5.1)$$

โดย ϕ เป็นมุมระหว่างแรงและการกระจัด ค่า $\cos\phi$ กำหนดให้งานมีค่าได้ทั้งบวกและลบ แรงและการกระจัดอาจมีทิศทางเดียวกัน ทำมุมกัน หรือมีทิศทางตรงกันข้ามกัน งานลัพธ์หรือผลรวมของงานในระบบที่มีแรงกระทำหลายแรง หาได้จากการรวมงานตามคุณลักษณะสเกลาร์ของงานของแต่ละแรง

$$\Sigma W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \qquad (5.2)$$

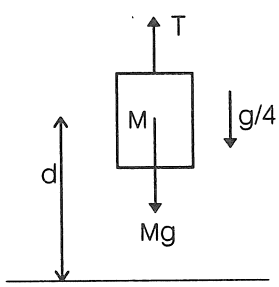
งานมีหน่วยเป็น นิวตัน-เมตร หรือ จูล (joules , J) หน่วยงานที่เล็กกว่าจูลที่นิยมใช้ในสาขาวิชาฟิสิกส์อะตอมและนิวเคลียร์ คือ หน่วยอิเล็กตรอนโวลต์ (electron-volt , eV) นิยามมาจากการทำงานในการขับเคลื่อนอิเล็กตรอน ผ่านความต่างศักย์หนึ่งโวลต์ โดยงาน 1 eV มีค่าเท่ากับ 1.602×10^{-19} J

ตัวอย่าง 5.1 มวล M ติดปลายเชือก ถูกหย่อนลงตามแนวดิ่งได้ระยะ d ด้วยความเร่ง g/4 จงคำนวณหา

(a) งานของแรงตึงเชือก

(b) งานของแรงโน้มถ่วง

วิธีทำ



$$\Sigma F = ma$$

$$Mg - T = M\left(\frac{g}{4}\right)$$

$$T = Mg - M\frac{g}{4} = \frac{3}{4}Mg$$

(a) งานของแรงดึงเชือก

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = -\frac{3}{4} Mg\, d$$

(b) งานของแรงโน้มถ่วง

$$W = Mg\, d$$

5.2 งานของแรงไม่คงตัว

กรณีงานของแรงไม่คงตัว พิจารณากรณีแรงที่มีทิศทางคงที่แต่ขนาดไม่คงตัวในกรณีหนึ่งมิติก่อน เช่น แรง F(x) ในทิศทางแกน x ขนาดของแรง $F_1(x)$ ขับเคลื่อนอนุภาคให้เคลื่อนที่ได้ δx งาน δW_1 เป็นงานในช่วงการกระจัด δx

$$\delta w_1 = F_1 \delta x \qquad (5.3)$$

เมื่อมีการกระจัดเพิ่มขึ้น ขนาดของแรงเปลี่ยนไปเป็น $F_2(x)$ งานในช่วงที่สอง $\delta w_2 = F_2 \delta x$ งานผลลัพธ์ตลอดระยะการกระจัด

$$W = \delta w_1 + \delta w_2 + \delta w_3 + \ldots$$

$$= F_1 \delta x + F_2 \delta x + F_3 \delta x$$

หรือ $$W = \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x \qquad (5.4)$$

ถ้าจำกัดให้ δx เข้าสู่ศูนย์

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x$$

หรือ $$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \qquad (5.5)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างแรงไม่คงตัวที่มีค่าแปรตามระยะ x เช่น แรงดึงกลับ(restoring foce)ของสปริง $F = -kx$ งานของแรงดึงกลับ

$$W_s = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (5.6)$$

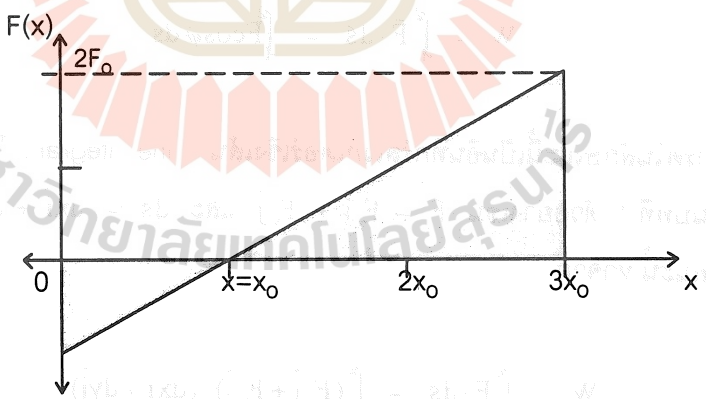
ตัวอย่าง 5.2 แรงกระทำต่อก้อนวัตถุเป็นไปตามสมการ $F = F_0(x/x_0 - 1)$ จงคำนวณหางานในการเคลื่อนก้อนวัตถุจาก $x = 0$ ไปยัง $x = 3x_0$

(a) โดยวิธีการเขียนกราฟ F(x) แล้วหาพื้นที่ใต้เส้นกราฟ

(b) โดยวิธีอินทิเกรต

วิธีทำ

(a) $$F(x) = \left(\frac{F_0}{x_0}\right)x - F_0$$



งาน $$= -\frac{1}{2}F_0x_0 + \frac{1}{2}(2F_0)(2x_0)$$

$$= -\frac{1}{2}F_0x_0 + 2F_0x_0 = \frac{3}{2}F_0x_0$$

(b) $$W = \int_0^{3x_0} \vec{F} \cdot dx$$

$$= \int \left[\left(\frac{F_0}{x_0} \right) x - F_0 \right] dx$$

$$= \left| \frac{F_0}{x_0} \frac{x^2}{2} - F_0 x \right|_0^{3x_0}$$

$$= \frac{F_0}{2x_0} \left(9x_0^2 \right) - F_0 \left(3x_0 \right)$$

กรณีงานของแรงไม่คงตัว ที่ทั้งขนาดและทิศทางไม่คงตัว การหางานต้องใช้ความสัมพันธ์ทางเวกเตอร์เข้าช่วย

$$\delta w = \vec{F} \cdot \delta \vec{s} = F \cos\phi \, \delta s \qquad (5.7)$$

งานลัพธ์ $$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 F \cos\phi \, ds \qquad (5.8)$$

การอินทิเกรตในลักษณะนี้เป็นอินทิกรัลเวกเตอร์เชิงเส้น (line integral) ได้กล่าวถึงอินทิกรัลชนิดนี้ไว้ในบทที่ 1 ตัวอย่างเช่น $\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$ และ $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ งานของแรงไม่คงตัวลักษณะนี้ หาจาก

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= \int_1^2 \left(F_x dx + F_y dy \right) \qquad (5.9)$$

ในการอินทิเกรต เราจำต้องทราบ F_x และ F_y ในรูปฟังก์ชันของจุดพิกัด (x,y)

5.3 งานและพลังงานจลน์ ทฤษฎีบทงาน - พลังงาน

ในตอนนี้จะพิจารณาผลของงานต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค กฎข้อที่สองของนิวตันกล่าวถึงแรงกระทำมีผลต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค วิธีการของงานและพลังงานเป็นอีกแนวทางหนึ่ง ที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่เหมือนกับการใช้กฎของนิวตัน แต่จะง่ายกว่ามากในทางปฏิบัติ วิธีการของงานและพลังงานนำเสนอเข้าสู่กฎการคงตัวของพลังงานที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ที่สำคัญต่าง ๆ ได้

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\Sigma F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

หรือ
$$\Sigma F = mv\frac{dv}{dx} \tag{5.10}$$

งานของแรงภายนอกทั้งหมด

$$\Sigma W = \int \Sigma F\, dx = \int mv\frac{dv}{dx}dx = \int mvdv \tag{5.11}$$

จากค่าความเร็ว v_1 ของอนุภาค เมื่อได้รับงานสุทธิ ทำให้อนุภาคเปลี่ยนค่าความเร็วเป็น v_2

$$\Sigma W = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{5.12}$$

โดยเทอม $\frac{1}{2}mv^2$ เป็นพลังงานจลน์ของอนุภาคที่ค่าความเร็วค่าหนึ่ง สมการ (5.12) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างงานสุดท้ายที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของอนุภาคในการเคลื่อนที่ นิยมใช้สัญลักษณ์ E_k แทนค่าพลังงานจลน์ของอนุภาค

$$\Sigma W = \Delta E_k \tag{5.13}$$

ตัวอย่าง 5.3 อิเล็กตรอนนำไฟฟ้าในโลหะทองแดง ที่อุณหภูมิเกือบศูนย์องศาสัมบูรณ์(absolute tempurature) มีพลังงานจลน์ 4.2 eV. ถามว่าอัตราเร็วของอิเล็กตรอนมีค่าเท่าใด ?

วิธีทำ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$(4.2\ \text{eV})\left(\frac{1.6\times10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}\right) = \frac{1}{2}(9.11\times10^{-31}\ \text{kg})v^2$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{4.2\times1.6\times10^{-19}\times2}{9.11\times10^{-31}}$$

$$= 1.54\times10^{12}$$

$$v = 1.24\times10^{6}\ \text{m/s} = 1240\ \text{km/s}$$

ตัวอย่าง 5.4 โลกหมุนรอบดวงอาทิตย์หนึ่งรอบใช้เวลา 1 ปี ต้องใช้งานเท่าใดในการจะหยุดโลกให้นิ่งเทียบกับดวงอาทิตย์

วิธีทำ

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$= \frac{2\pi\times(150\times10^{-6}\text{km})}{(365\ \text{d})(24\ \text{h})(3600\text{s})}$$

$$= 29.9\ \text{km/s}$$

$$W = \frac{1}{2}M_E v^2 = \frac{1}{2}(5.98\times10^{24}\text{kg})(29.9\times10^{3}\ \text{m/s})^2$$

$$= 89.4\times10^{24}\times10^{6} = 8.94\times10^{31}\ \text{J}$$

ตัวอย่าง 5.5 ลูกอุกกาบาตมวล 8.38×10^{11} กิโลกรัม เข้าชนโลกด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตร/วินาที จงคำนวณ

(a) พลังงานจลน์ของลูกอุกกาบาตในหน่วย " megatons ของ TNT "
(1 megaton TNT = 4.2×10^{15} J)

(b) ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลุมอุกกาบาต เป็นสัดส่วนกับรากที่สามของแรงระเบิด เช่น แรงระเบิดขนาด 1 megaton TNT ทำให้เกิดหลุมอุกกาบาตขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 กิโลเมตร ถามว่าลูกอุกกาบาตลูกนี้จะทำให้เกิดหลุมกว้างเท่าใด

วิธีทำ

(a)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}\left(8.38\times10^{11}\ \text{kg}\right)\left(30\times10^{3}\ \text{m/s}\right)^2 \\ &= 3771\times10^{17} = 3.77\times10^{20}\ \text{J} \\ &= \frac{3.77\times10^{20}\ \text{J}}{4.2\times10^{15}\ \text{J}} \times \left(1\ \text{megaton TNT}\right) \\ &= 8.98\times10^{4}\ \text{megaton TNT}\end{aligned}$$

(b) เกิดหลุมขนาด เส้นผ่านศูนย์กลาง $= \left(8.98\times10^{4}\right)^{\frac{1}{3}}\ \text{km}$

$= 45\ \text{km}$

5.4 กำลัง

การศึกษางานในระบบกลศาสตร์ นอกจากจะพิจารณาถึงจำนวนงานที่ทำแล้ว ยังพิจารณาการทำงานในช่วงเวลา หรืออัตราการทำงานด้วย กำลัง (power) เป็นอัตราการทำงานทางกลศาสตร์ นิยามจากกำลังเฉลี่ย $\left(P_{ave}\right)$

$$P_{ave} = \frac{W}{t} \qquad (5.14)$$

และกำลังบัดดล (P) เมื่อ dW เป็นงานส่วนเล็ก ๆ ในช่วงเวลา dt

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (5.15)$$

งานต่อเวลา หรือกำลังมีหน่วยเป็น วัตต์ (watt, W) ในระบบเก่าของอังกฤษใช้หน่วย กำลังม้า (horsepower, hp) เป็นหน่วยที่ยังนิยมใช้กันอยู่ในตลาดธุรกิจ กำลัง 1 hp มีค่าเท่ากับ 746 W กำลัง P สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่ง

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (5.16)$$

ในกรณี $\vec{F}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน กำลังเป็นผลคูณของแรงและอัตราเร็ว

$$P = Fv \qquad (5.17)$$

ตัวอย่าง 5.6 จงแสดงว่าอัตราเร็ว v สุดท้ายของรถมวล m ที่เคลื่อนที่ด้วยกำลังคงที่ P สอดคล้องกับสมการ

$$v = \left(\frac{2XP}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

โดย X เป็นระยะที่เคลื่อนที่ได้จากหยุดนิ่ง

วิธีทำ

$$P = W/t = Fv = mav$$

$$v^2 = v_0^2 + 2aX$$

$$v^2 = 0 + 2aX$$

$$\therefore \quad a = \frac{v^2}{2X}$$

$$\therefore \quad P = m\frac{v^2}{2X}v$$

$$P = \frac{m}{2X}v^3$$

$$v^3 = \frac{2PX}{m}$$

$$v = \left(\frac{2PX}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หรือ

$$W = FX = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

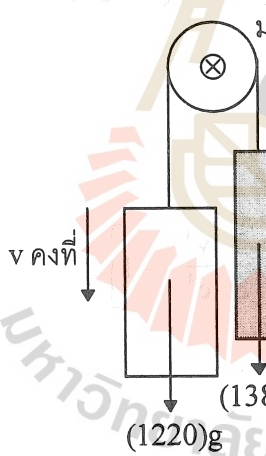
$$\frac{P}{v}X = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^3 = \frac{2PX}{m}$$

$$v = \left(\frac{2XP}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ตัวอย่าง 5.7 ลิฟต์เคลื่อนที่ลงด้วยอัตราเร็วคงที่ได้ระยะ 54.5 เมตร ในเวลา 43.0 วินาที ลิฟต์มีมวลรวม 1220 กิโลกรัม ตัวถ่วงลิฟต์ (counter balance) มีมวล 1380 กิโลกรัม ถามว่า มอเตอร์ไฟฟ้ามีกำลังขาออกเท่าใด ?

วิธีทำ



x = 54.5 m ใน 43.0 s

งานของแรง (1220)g = (1220 g) (54.5)

งานของแรง (1380)g = (1380 g) (54.5)

∴ งานของ motor ต้องทำ = (160 g) (54.5)

กำลังเฉลี่ย $P_{ave} = \frac{W}{t} = \frac{(160g)(54.5)}{43.0}$

$= 1987.3$

$= 1987.3 \text{ W} \left(\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{W}}\right)$

$= 2.7 \text{ hp}$

5.5 พลังงานจลน์ที่ความเร็วสูง

จากทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษของไอน์สไตน์ พลังงานจลน์ที่ความเร็วสูงมีรูปแบบต่างไปจาก $\frac{1}{2}mv^2$

$$E_k = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] \tag{5.18}$$

เมื่อพิจารณาความแตกต่างของรูปแบบใหม่และรูปแบบเดิมของพลังงานจลน์ ต้องพิจารณาที่เทอม $\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$ เมื่อกระจายเทอมโดใช้ ทฤษฎีบททวินาม (binomial theorem)

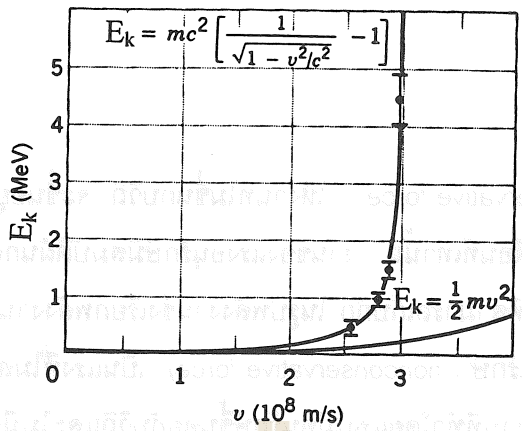
$$\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{\left(-1/2\right)\left(-3/2\right)}{2}\left(-v^2/c^2\right)^2 + \ldots \tag{5.19}$$

ถ้าตัดเทอมที่มีอันดับสูงกว่า $\left(v^2/c^2\right)^2$ ทิ้ง

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left\{1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

ความแตกต่างของพลังงานจลน์ที่ความเร็วสูงและที่ความเร็วต่ำอยู่ที่เทอม $\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}$ ถ้าความเร็วอนุภาคมีค่า 1% ของความเร็วแสง ความแตกต่างจะน้อยกว่า $1/10^4$ กรณีของอัตราเร็วของอนุภาคในห้องปฏิบัติการทั่วไปอยู่ในช่วงต่ำกว่า 10^{-6} ของอัตราเร็วแสง ค่าความแตกต่างจะน้อยกว่าความแม่นยำของการวัดค่าพลังงานที่ดีที่สุดในห้องปฏิบัติการ เทอม $\frac{1}{2}mv^2$ เป็นค่าพลังงานจลน์ที่ดีที่สุดในช่วงอัตราเร็วปกติ รูป 5.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าพลังงานจลน์ที่ความเร็วสัมพัทธภาพและที่ความเร็วปกติ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 5.1 แสดงการเปรียบเทียบค่าพลังงานจลน์ที่ความเร็วสัมพันธภาพ และที่ความเร็วปกติ

ตัวอย่าง 5.8 เครื่องเร่งอนุภาค Tevatron ที่ Fermi lab. เร่งอนุภาคโปรตอนให้มีพลังงานจลน์ประมาณ 1 TeV (= 10^{12}eV โดยที่ 1eV = 1.6×10^{-19} J) ถามว่าอัตราเร็วของอนุภาคโปรตอนที่ 1 TeV มีค่าเท่าไร ?(มวลของโปรตอน = 1.67×10^{-27} kg)

วิธีทำ $E_k = 1\ \text{TeV} = 1.6 \times 10^{12} \times 10^{-19}\ \text{J}$

$= 1.6 \times 10^{-7}\ \text{J}$

จากสูตร $$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$\therefore\ 1.6 \times 10^{-7}\ \text{J} = (1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.0 \times 10^8\ \text{m/s})^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$\frac{1.6 \times 10^{-7}}{(1.67 \times 10^{-27})(9.0 \times 10^{16})} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$0.1064537 \times 10^4 + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$1 - 1.13323 \times 10^{-10} = \frac{v^2}{c^2}$$

$$v/c = 0.99999956$$

5.6 แรงอนุรักษ์

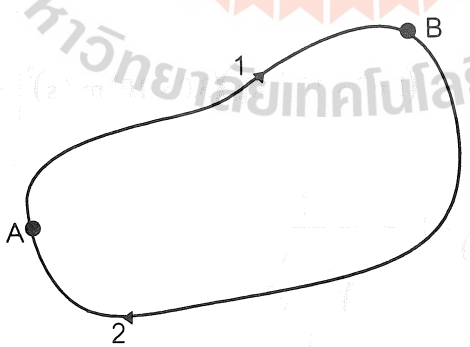
แรงอนุรักษ์ (conservative force) ให้งานที่ไม่ขึ้นกับวิถี จะขึ้นอยู่กับสภาพเริ่มต้นและสภาพสุดท้ายของการเคลื่อนที่เท่านั้น งานของแรงอนุรักษ์มีสมบัติผันกลับ (reversible) ได้ ทำให้มีคุณลักษณะพิเศษที่สามารถเก็บกัก ในรูปพลังงานซึ่งเรียกพลังงานศักย์ (potential energy) แรงบางชนิดไม่อนุรักษ์ (nonconservative force) เป็นแรงที่ไม่สามารถเก็บกักในรูปพลังงานของระบบได้ งานที่ทำโดยแรงไม่อนุรักษ์ขึ้นอยู่กับวิถีและไม่มีสมบัติผันกลับได้ (irreversible) งานจะเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานที่สูญเสียออกจากระบบ

แรงอนุรักษ์นำไปสู่เงื่อนไขกฎการคงตัวของพลังงาน (law of conservation of energy) พลังงานรวมซึ่งเป็นผลบวกของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ตามสมการ

$$E = E_{k_i} + E_{p_i} = E_{k_f} + E_{p_f}$$

เงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ของแรงอนุรักษ์ ดูจากงานที่กระทำโดยแรงอนุรักษ์ครบวิถีปิด หรือกลับมาที่เดิม จะมีค่าเป็นศูนย์ สังเกตว่า งานไม่ขึ้นอยู่กับวิถี

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad (5.21)$$



รูป 5.2 อนุภาคเคลื่อนที่จาก A⟶B และย้อนกลับ B ⟶A ภายใต้อิทธิพลของแรงอนุรักษ์

วิถีของอนุภาคดังแสดงในรูป 5.2 จาก A⟶B และจาก B⟶A มีค่างานของแรงเท่ากัน แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม ตามสมบัติของแรงอนุรักษ์และทิศทางของอินทิกรัลเชิงเส้น สมการ (5.21) เขียนได้ ในรูปอินทิกรัลรอบวิถีปิด c

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{s} \;=\; 0 \qquad (5.22)$$

จากทฤษฎีของ สโตกส์ในบทที่ 1 เงื่อนไขที่ว่า $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$ จะได้

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} \;=\; 0 \qquad (5.23)$$

กรณีแรงไม่อนุรักษ์

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{s} \neq 0 \quad \text{หรือ} \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0 \qquad (5.24)$$

ตัวอย่าง 5.9 จงแสดงว่า $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ เป็นแรงอนุรักษ์

วิธีทำ $$\vec{F} \;=\; -m\omega^2\vec{r} \;=\; -m\omega^2\left(x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & -m\omega^2 z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-m\omega^2 z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-m\omega^2 y\right)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(-m\omega^2 x\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(-m\omega^2 z\right)\right]$$

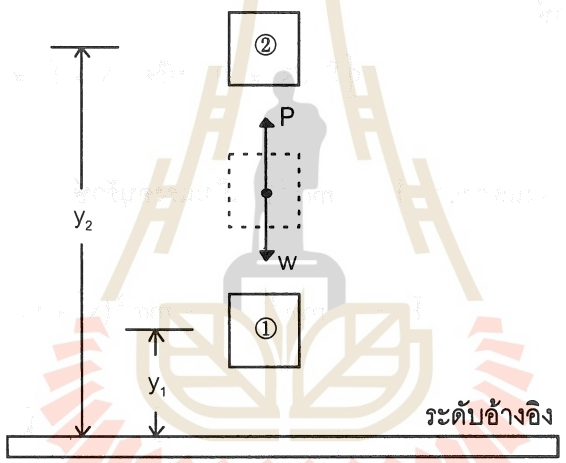
$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-m\omega^2 y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-m\omega^2 x\right)\right] \qquad = 0$$

แรง $\vec{F}$ เป็นแรงอนุรักษ์ เป็นแรงในลักษณะแรงดึงกลับ ของสปริงในสามมิติ

5.7 พลังงานศักย์

พลังงานศักย์เป็นพลังงานที่มาจากงานของแรงอนุรักษ์ เช่น แรงดึงกลับของสปริง และแรงโน้มถ่วง พลังงานศักย์นิยมใช้สัญลักษณ์ U หรือ E_p ในบทเรียนนี้จะใช้สัญลักษณ์ E_p แทนค่าพลังงานศักย์

พลังงานศักย์โน้มถ่วง ได้มาจากงานของแรงโน้มถ่วงในระบบ รูป 5.3 แสดงมวล m ถูกยกระดับขึ้นด้วยอิทธิพลของแรงภายนอก



รูป 5.3 มวล m ถูกยกระดับขึ้นจากระดับ y_1 ไประดับ y_2

แรง P เป็นแรงความพยายามที่จะยกระดับมวลขึ้นตามแนวดิ่ง ในขณะเคลื่อนที่แรงโน้มถ่วง $w = mg$ มีทิศทางต้านการเคลื่อนที่ งานของแรงโน้มถ่วง W จากระดับ y_1 ถึง y_2

$$W = -w(y_2 - y_1)$$
$$W = -(mg\,y_2 - mg\,y_1) \qquad (5.25)$$

ถ้าเรียกเทอม mgy เป็นพลังงานศักย์โน้มถ่วง E_p จะได้

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) \qquad (5.26)$$

แรง P เป็นแรงความพยายามที่จะยกระดับมวลขึ้นตามแนวดิ่ง ในขณะเคลื่อนที่แรงโน้มถ่วง $w = mgy$ มีทิศทางต้านการเคลื่อนที่ งานของแรงโน้มถ่วง W จากระดับ y_1 ถึง y_2

$$W = -w(y_2 - y_1)$$
$$W = -(mg\,y_2 - mg\,y_1) \qquad (5.25)$$

ถ้าเรียกเทอม mgy เป็นพลังงานศักย์โน้มถ่วง E_p จะได้

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) \qquad (5.26)$$

ถ้าให้ W′ เป็นงานของแรงความพยายามทั้งหมด P จากงานที่กระทำต่อระบบมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของระบบ $W = \Delta E_k$

$$W' + W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$
$$W' - (E_{p2} - E_{p1}) = E_{k2} - E_{k1}$$

ดังนั้น $$W' = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1})$$

หรือ $$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mg\,y_2 - mg\,y_1)$$
$$= \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mg\,y_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\,y_1\right) \qquad (5.27)$$

เราเรียกเทอม $(E_k + E_p)$ เป็นพลังงานรวมของระบบ E สมการ (5.27) ในรูปพลังงานรวม

$$W' = E_2 - E_1 \qquad (5.28)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

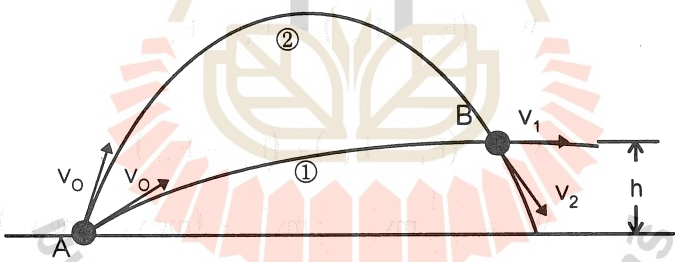
โดย $E_2 = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mg\,y_2\right)$ เป็นพลังงานกลรวมของระบบที่จุด 2 เป็นต้น ถ้างานของแรงภายนอกทั้งหมด (ยกเว้นแรงโน้มถ่วง) มีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ $W' = 0$ จะได้ระบบอนุรักษ์พลังงาน ที่มีพลังงานกลของระบบคงตัวอยู่เสมอ การแปรรูปของพลังงานจะเกิดขึ้นภายในระบบเท่านั้น

$$E_2 = E_1$$

หรือ
$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mg\,y_2\right) = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\,y_1\right) \qquad (5.29)$$

ตัวอย่าง 5.10 จงแสดงว่าโปรเจกไตล์ที่มีความเร็วต้น v_o เท่ากัน ค่าขนาดความเร็ว v ของโปรเจกไตล์มีค่าเท่ากัน ที่ระดับความสูงเท่ากัน ไม่ขึ้นกับมุมของการยิง (ไม่พิจารณาแรงต้านของอากาศ)

วิธีทำ



สมการกฎการคงตัวของพลังงาน

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 + mg\,h\right]_A = \left[\frac{1}{2}mv^2 + mg\,h\right]_B$$

$$\left[\frac{1}{2}mv_0^2 + 0\right]_A = \left[\frac{1}{2}mv_1^2 + mg\,h\right]_B \qquad (1)$$

$$\left[\frac{1}{2}mv_0^2 + 0\right]_A = \left[\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh\right]_B \qquad (2)$$

(1) = (2) $\quad \therefore \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

$$v_1 = v_2$$

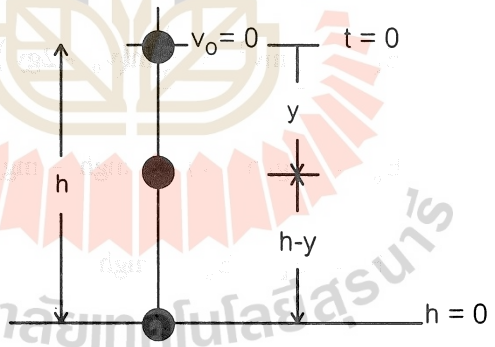
ตัวอย่าง 5.11 ก้อนวัตถุตกจากจุดปล่อยอยู่สูงเป็นระยะ h จงหาค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของก้อนวัตถุในรูปฟังก์ชันของ

(a) เวลา

(b) ความสูง

จงแสดงความสัมพันธ์ในรูปกราฟ และแสดงให้เห็นว่าผลบวกของพลังงานทั้งสอง (พลังงานรวม) มีค่าคงที่ทั้งสองกรณี

วิธีทำ (a)



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-v_0 - gt)^2$$

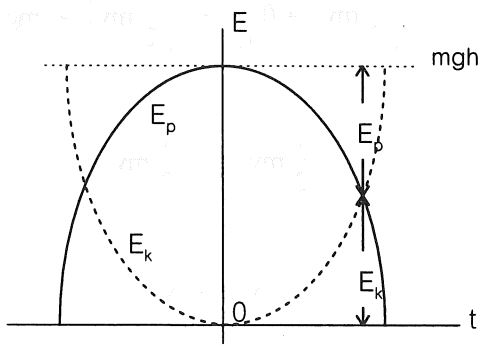
$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2}m(g^2t^2) \qquad (1)$$

$$E_p = mg(h - y)$$

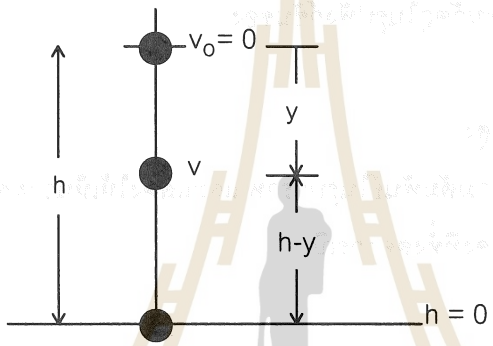
$$= mgh + mg\left(-v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right)$$

$$= mgh - \frac{1}{2}mg^2t^2 \qquad (2)$$

$$E(t) = E_k + E_p = mgh$$



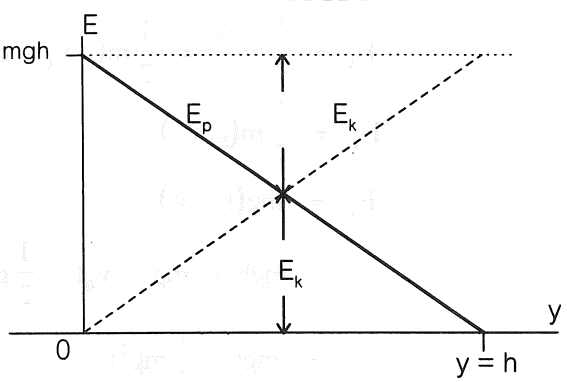
(b)



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + 2gy\right) = mgy$$

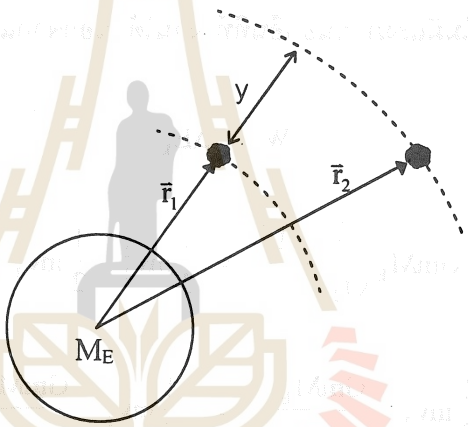
$$E_p = mg(h - y) = mgh - mgy$$

$$E = E_k + E_p = mgh$$



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

พลังงานศักย์โน้มถ่วงมาจากแรงโน้มถ่วง $w = mg$ โดยมีค่า g คงที่บริเวณผิวโลก ถ้าค่า g ไม่คงที่ หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาคไม่อยู่ในบริเวณใกล้ผิวโลก รูปแบบพลังงานศักย์โน้มถ่วง $E_p = mgy$ จะใช้ไม่ได้ การหาค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงกรณีมีการเปลี่ยนแปลงระดับค่อนข้างมาก (y มีค่าสูงเมื่อเทียบกับระยะการเคลื่อนที่อื่น ๆ) ต้องใช้วิธีการอินทิเกรตหางานจากคำนิยามเบื้องต้น $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ แรงโน้มถ่วง $F = \frac{GmM_E}{r^2}$ มาจากกฎความโน้มถ่วงของนิวตัน



รูป 5.4 การเปลี่ยนระดับของอนุภาคที่มีค่า y สูง ไม่อยู่บริเวณผิวโลก

งานของแรงโน้มถ่วง

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM_E}{r^2} dr$$

$$= -GmM_E \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{GmM_E}{r_2} - \frac{GmM_E}{r_1} \qquad (5.30)$$

นิยามพลังงานศักย์โน้มถ่วง $E_p = -\frac{GmM_E}{r}$ กรณีมีการเปลี่ยนแปลงระดับค่อนข้างมาก นิยมใช้ค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่ $r=\infty$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นที่ตำแหน่ง r ใด ๆ จากจุดศูนย์กลางของโลก อนุภาคมวล m จะมีค่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงในรูป

$$E_p = \left.\frac{GmM_E}{r_2}\right|_{r_2\to\infty} - \left.\frac{GmM_E}{r_1}\right|_{r=r}$$

$$E_p = -\frac{GmM_E}{r} \qquad (5.31)$$

ถ้าระบบที่พิจารณาไม่มีแรงภายนอกอื่นที่ทำงานได้ นอกจากแรงโน้มถ่วง

$$W = \Delta E_k$$

$$GmM_E\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_E}{r_2}\right) = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_E}{r_1}\right)$$

หรือ $$\left(E_{k2}+E_{p2}\right) = \left(E_{k1}+E_{p1}\right) = E \qquad (5.32)$$

ตัวอย่าง 5.12 ขนาดของแรงโน้มถ่วงระหว่างมวล m_1 และ m_2 มีค่าตามสมการ

$$F(x) = \frac{Gm_1m_2}{x^2}$$

โดย G เป็นค่าคงตัว และ x เป็นระยะห่างของมวลทั้งสอง

(a) จงหาค่า $E_p(x)$ พลังงานศักย์ของระบบ โดยมีเงื่อนไข $E_p(x)\to 0$ เมื่อ $x\to\infty$

(b) คำนวณหางานที่ต้องทำในการแยกมวลทั้งสอง จาก $x = x_1$ ไปถึง $x = x_1+d$

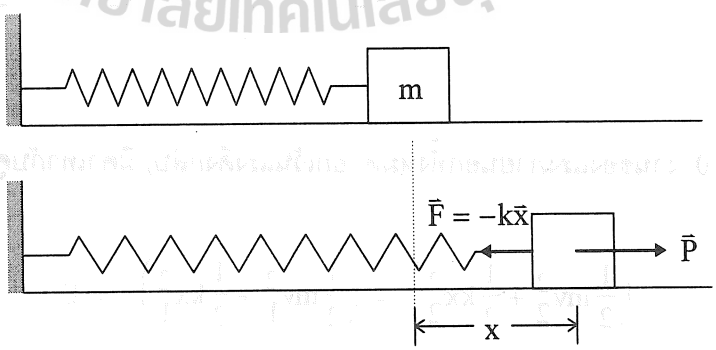
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ

(a)
$$E_p(x) = -\int_{\infty}^{x} \vec{F}\cdot d\vec{x}$$
$$= +\int_{\infty}^{x} \frac{Gm_1m_2}{x^2}\,dx$$
$$= -Gm_1m_2\left[\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{x}$$
$$= -Gm_1m_2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\infty}\right]$$
$$E_p(x) = -\frac{Gm_1m_2}{x}$$

(b)
$$W = \int_{x=x_1}^{x=x_1+d} F dx$$
$$= -Gm_2m_2\left[\frac{1}{x}\right]_{x_1}^{x_1+d}$$
$$= -Gm_2m_2\left[\frac{1}{x_1+d}-\frac{1}{x_1}\right]$$
$$= -Gm_2m_2\left[\frac{x_1-x_1-d}{x_1(x_1+d)}\right]$$
$$= Gm_2m_2\frac{d}{x_1(x_1-d)}$$

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น หรือพลังงานศักย์ของระบบสปริง มาจากงานของแรงดึงกลับ F=-kx



รูป 5.5 สปริงถูกยืดออกมีแรงดึงกลับดึงมวล m พลังงานศักย์สปริงถูกสะสม

งานในการยืดสปริงจากตำแหน่งสมดุล ไปยังตำแหน่ง x มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}kx^2$ ดังนั้น งานของแรงนำกลับมีค่า $-\frac{1}{2}kx^2$ ถ้ายืดสปริงจากตำแหน่ง $x_1 \rightarrow x_2$ งานของแรงดึงกลับมีค่า

$$W = -\frac{1}{2}kx_2^2 - \left(-\frac{1}{2}kx_1^2\right) \qquad (5.33)$$

ถ้าเรียก E_p เป็นพลังงานศักย์ของสปริง $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

$$W = -E_{p2} - (-E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2}$$

ถ้า W' เป็นงานของแรงภายนอกทั้งหมด P (ยกเว้นแรงดึงกลับ)

$$W' + W = \Delta E_k$$

$$W' + \left(E_{p1} - E_{p2}\right) = E_{k2} - E_{k1}$$

$$W' = \left(E_{k2} + E_{p2}\right) - \left(E_{k1} + E_{p1}\right) \qquad (5.34)$$

หรือ

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) \qquad (5.35)$$

ถ้า W' = 0 งานของแรงภายนอกทั้งหมด (ยกเว้นแรงดึงกลับ) มีค่าเท่ากับศูนย์

$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right) = E \qquad (5.36)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 5.13 ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่โดยมีค่าพลังงานศักย์ $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ เริ่มจากหยุดนิ่งที่จุดพิกัด $x = a$ จงพิสูจน์ว่า

(a) $x = a\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$

(b) จงอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค

วิธีทำ พลังงานกลรวม $E = E_k + E_p$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)$$

จาก $v = \frac{dx}{dt}$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)$ (1)

ที่ $x = a$; $v = 0$ (หยุดนิ่ง)

$$\therefore \quad 0 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}ka^2\right)$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}ka^2$$

แทนค่า (1) $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$= \frac{k}{m}\left(a^2 - x^2\right)$$

หรือ $$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หลังการอินทิเกรตได้ $\sin^{-1}\left(x/a\right) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,dt + C_1$

ที่ $x = a\,;\, t = 0$ จะได้ $C_1 = \pi/2$

$$\therefore \quad \sin^{-1}\left(x/a\right) = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \pi/2$$

หรือ $$x = a\sin\left(\pi/2 \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

(b) อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาค

อนุภาคแกว่งกวัดไปมาตามแกน x จาก $x = a$ ผ่าน $x = 0$ ไปยัง $x = -a$ เวลาครบรอบของการแกว่ง จาก $x = a$ ถึง $x = -a$ กลับมา $x = a$ อีกครั้งเรียก คาบของการแกว่งกวัด หาได้จาก $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

5.8 ระบบพลังงานอนุรักษ์

ระบบที่มีแรงอนุรักษ์นำไปสู่การอนุรักษ์พลังงาน โดยพลังงานอาจแปรรูปได้ การแปรรูปหรือเปลี่ยนรูปพลังงานกระทำภายใต้เงื่อนไข ค่าพลังงานกล(mechanical energy)รวมของระบบคงตัว เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$(E_{k1} + E_{p1}) = (E_{k2} + E_{p2}) = (E_{k3} + E_{p3}) = E \qquad (5.37)$$

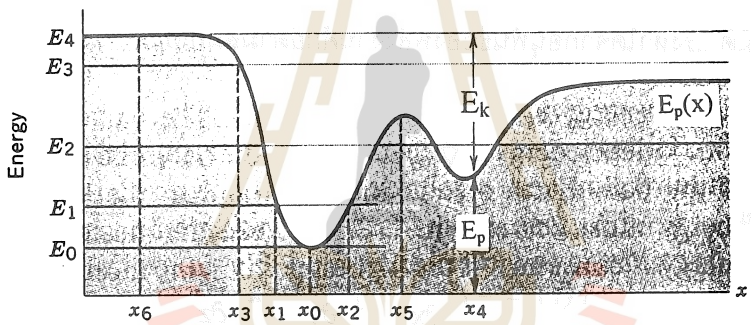
หรือ $$E_p + E_k = E \qquad (5.38)$$

$$E_p + \frac{1}{2}mv^2 = E$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p\right]} \qquad (5.39)$$

พิจารณาสมการ (5.37) มีเทอม $(E - E_p)$ เงื่อนไขของการเคลื่อนที่ที่เป็นจริง คือ $E \geq E_p$ ถ้า $E < E_p$ ค่าความเร็ว v จะเป็นเลขเชิงซ้อน (complex) ไม่เป็นจริงในการเคลื่อนที่ของอนุภาคสมการ (5.39) แสดงการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาค อนุภาคจะมีความเร็ว v เป็นจริงและมีค่าแปรตามรากที่สองของผลต่างระหว่าง E และ E_p

ถ้าเขียนกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $E_p(x)$ และ x ในหนึ่งมิติ รูปกราฟสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามแกน x ได้อย่างถูกต้อง กราฟความสัมพันธ์แสดงในรูป 5.6



รูป 5.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ $E_p(x)$ กับระยะ x

เงื่อนไขของการเคลื่อนที่คือ $E \geq E_p(x)$ ค่าต่ำสุดของพลังงานกลรวมคือ E_0 ค่าต่ำกว่านี้ไม่มีการเคลื่อนที่ที่เป็นจริง ที่ $E_1 = E_0$ ค่า $E = E_p$ ทำให้ความเร็ว $v = 0$ อนุภาคจะอยู่นิ่งที่ x_0 ถ้าระบบมีพลังงานรวมมากขึ้นเป็น E_1 อนุภาคจะเคลื่อนที่ภายในบริเวณ x_1 และ x_2 เท่านั้น เมื่อเคลื่อนที่ผ่าน x_0 ความเร็วมีค่ามากที่สุด ความเร็วจะน้อยลงเป็นศูนย์เมื่อเข้าใกล้ x_1 หรือ x_2 เมื่อถึง x_1 หรือ x_2 อนุภาคจะเคลื่อนที่วกกลับ เราเรียกจุด x_1 และ x_2 เป็นจุดวกกลับ (turning points) ที่ค่าพลังงานรวมมากขึ้น E_2 อนุภาคมีจุดวกกลับได้ 4 จุด อนุภาคจะแกว่งไปมาอยู่ที่หลุมพลังงานศักย์ทั้งสอง ที่ค่าพลังงาน E_3 อนุภาคจะวกกลับที่ x_3 เท่านั้น ที่ค่าพลังงานมากกว่า E_4 อนุภาคจะไม่มีจุดวกกลับ อนุภาคเคลื่อนที่โดยไม่กลับทิศทาง ค่าพลังงานจลน์ของอนุภาคแปรตามผลต่างของพลังงานรวม E และพลังงานศักย์ E_p ณ จุดพิกัดนั้น

จากสมการ $W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$ เป็นตัวอย่างหนึ่งของระบบอนุรักษ์พลังงาน จากนิยามของงานในหนึ่งมิติ $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$

ดังนั้น $$\Delta E_p = -W = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

นั่นคือ $$-\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = F(x)$$

ในรูปอนุพันธ์ $$F(x) = -\frac{d E_p}{d x} \qquad (5.40)$$

ในระบบพิกัดสามมิติ แรงหาได้จากอนุพันธ์ของพลังงานศักย์ตามสมการ

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_p$$

หรือในระบบพิกัดฉาก (x, y, z)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{i}\frac{\partial E_p}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial E_p}{\partial y} - \hat{k}\frac{\partial E_p}{\partial z} \qquad (5.41)$$

ตัวอย่าง 5.14 ฟังก์ชันพลังงานศักย์ของแรงระหว่างอะตอมสองอะตอมที่ประกอบกันเป็นโมเลกุลมีรูปสมการโดยประมาณ

$$E_p(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

โดย a และ b เป็นค่าคงตัวบวก และ x เป็นระยะระหว่างอะตอม

(a) จงคำนวณหาระยะห่างสมดุลของอะตอมทั้งสอง

(b) แรงระหว่างอะตอม

(c) พลังงานต่ำสุดที่จะแยกอะตอมออกจากกัน

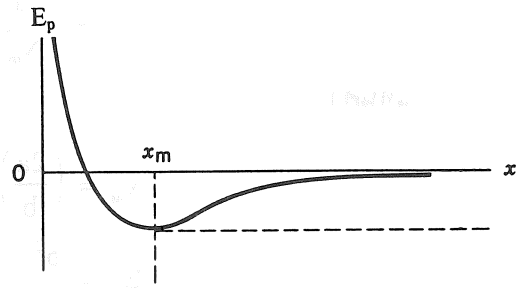
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ (a) ที่ตำแหน่งสมดุล $x = x_m$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x = x_m} = 0$$

$$-\frac{12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^{7}} = 0$$

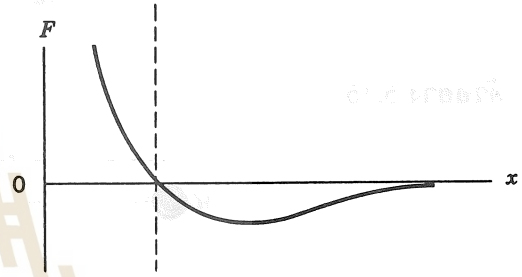
$$\therefore \quad x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$



(b)

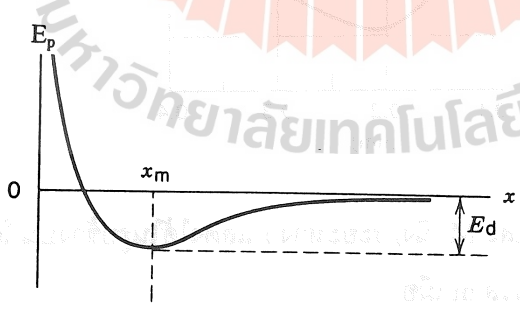
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}\right)$$

$$= \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}$$



ที่ระยะ $x = 0 \rightarrow x = x_m$ แรงมีค่าเป็นบวก อะตอมจะออกแรงผลักกัน เมื่อแรงเป็นลบ $x = x_m \rightarrow x = \infty$ อะตอมจะดึงดูดกัน ที่ $x = x_m$ แรงมีค่าเป็นศูนย์ เป็นจุดสมดุล

(c) พลังงานต่ำสุดในการแยกอะตอมออกจากกัน



แยกอะตอมจากตำแหน่งสมดุล $\longrightarrow$ ออกไปที่ ∞

$$x = x_m \qquad \rightarrow \quad x = \infty$$

$$\begin{cases} E_k = 0 & -E_d \\ E_p(x_m) & E_p(x = \infty) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad E_d = -E_p(x_m)$$

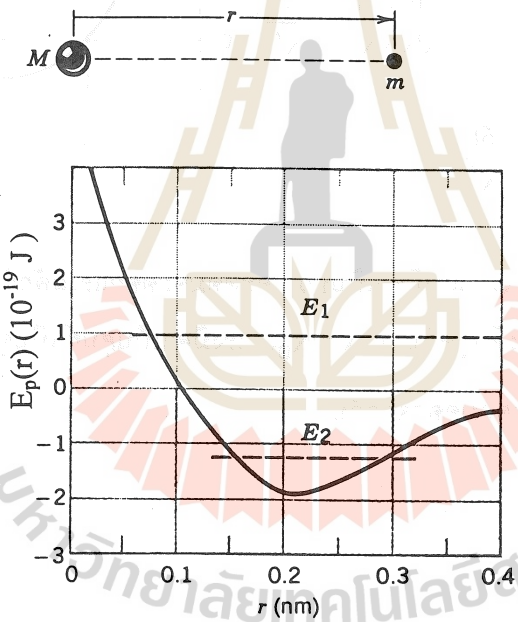
$$= -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^{6}}$$

แทนค่า

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

$$\therefore \quad E_d = \frac{b^2}{4a}$$

ตัวอย่าง 5.15



พลังงานศักย์ระหว่างอะตอมมวล m และ M (นิ่ง) ระยะห่าง r แสดงได้ในรูปข้างบน โดยที่ m << M จงอธิบายการเคลื่อนที่ของมวล m เมื่อ

(a) พลังงานกลรวม E_1 มีค่าเป็นบวก

(b) พลังงานกลรวม E_2 มีค่าเป็นลบ

ถ้า $E_1 = 1.0 \times 10^{-19}$ จูล และ $r = 0.3$ นาโนเมตร จงคำนวณหา

(c) พลังงานศักย์

(d) พลังงานจลน์

(e) แรงกระทำที่อะตอมมวล m

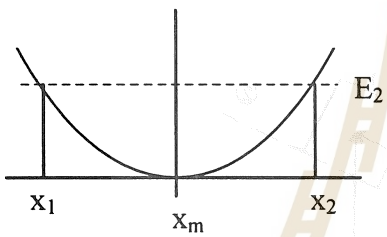
วิธีทำ

(a) จากสมการ

$$E_k = E - E_p(r)$$

ที่ $E = E_1$ มีค่าเป็นบวก ทำให้ E_k มีค่าเป็นบวกตลอดเวลา → มีค่าความเร็วจริง ที่ตำแหน่ง $E_p(r) = E_1$ ทำให้ $E_k = 0$ หรือ $v = 0$ อะตอมจะหยุดนิ่ง มีจุดวกกลับจุดเดียว

(b)



ที่ $E = E_2$ มีจุดวกกลับ 2 จุด รอบจุดสมดุลเสถียร (stable equilibrium) ที่จุด x_1 อะตอมจะหยุด เพราะมีแรงนำกลับในทิศทางตรงข้ามการเคลื่อนที่อะตอมจะแกว่งผ่านจุด x_m ไปทางจุด x_2 ถึงจุด x_2 อะตอมจะหยุดเช่นกัน แล้วเคลื่อนที่กลับซ้ำทางเดิม

(c) จากรูปกราฟ

ที่ $r = 0.3$ nm

$E_p(r = 0.3 \text{ nm}) = -1.2 \times 10^{-19}$ J

(d) พลังงานจลน์ $E_k = E_1 - E_p(r = 0.3 \text{ nm})$

$$= 1.0 \times 10^{-19} + 1.2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= 2.2 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(e) คำนวณหาแรงกระทำที่ $r = 0.3$ nm ต้องใช้ความสัมพันธ์ใน ตัวอย่าง 5.14

$$E_d = \frac{b^2}{4a} \quad \text{โดย} \quad E_d = -2.0 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6} \quad \text{และ} \quad x_m = 0.22 \times 10^{-9} \text{ m}$$

คำนวณหาค่า $a = 2.55 \times 10^{-135}$

$b = 4.52 \times 10^{-77}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

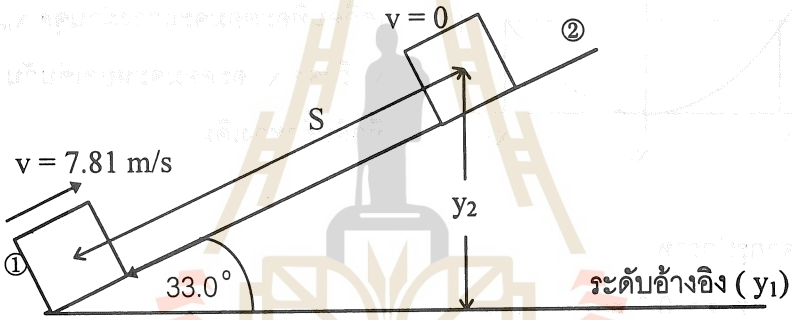
ใช้ความสัมพันธ์ F(x) ;

$$F(x) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}} = \frac{12 \times 2.55 \times 10^{-135}}{\left(0.3 \times 10^{-9}\right)^{13}} - \frac{6\left(4.52 \times 10^{-77}\right)}{\left(0.3 \times 10^{-9}\right)^{7}}$$

$$= 1.92 \times 10^{-10} - 12.4 \times 10^{-10}$$
$$\cong -1.0 \times 10^{-9} \text{ N}$$

ตัวอย่าง 5.16 กล่องมวล 4.26 กิโลกรัม เริ่มเคลื่อนที่ขึ้นพื้นเอียง 33.0° ด้วยอัตราเร็ว 7.81 เมตร/วินาที ถามว่าจะไถลขึ้นไปได้ไกลเท่าใด ถ้าต้องเสียพลังงานไป 34.6 จูล **เนื่องจากแรงเสียดทาน**

วิธีทำ



$$W_s = \Delta E_p + \Delta E_k$$
$$= \left(mgy_2 - mgy_1\right) + \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right)$$

$$-34.6 \text{ J} = \left(0 + mgs\sin 33^\circ\right) - \left(\frac{1}{2}(4.26)(7.81)^2 + 0\right)$$

$$-34.6 = 4.26 \times 9.8 \times s \times 0.545 - \frac{1}{2} \times 4.26 \times (7.81)^2$$
$$-34.6 = (4.26 \times 9.8 \times 0.545)\, s - 129.9$$

$$s = \frac{95.3}{4.26 \times 9.8 \times 0.545} = 4.19 \text{ m}$$

5.9 มวลและพลังงาน

ในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์เสนอสมการความสัมพันธ์ระหว่างมวลและพลังงานมวลนิ่ง (rest-mass energy) ของมวล m มีค่า

$$E_0 = mc^2 \qquad (5.42)$$

เมื่อ c เป็นความเร็วของแสง สมการ (5.42) แสดงให้เห็นว่ามวลเป็นรูปแบบหนึ่งของพลังงาน นั่นคืออนุภาคมวล m ถ้าเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานจะได้เท่ากับ mc^2 พลังงานรูปแบบนี้นับเป็นพลังงานภายในของระบบ การปลดปล่อยอนุภาคโพซิตรอน (positron) จากนิวเคลียส(อนุภาคโพซิตรอน เป็นปฏิอนุภาคของอิเล็กตรอน) เมื่ออนุภาคโพซิตรอนทำปฏิกิริยานิวเคลียร์รวมกับอนุภาคอิเล็กตรอนเกิดขบวนการที่เรียกว่า การประลัยของอิเล็กตรอน - โพซิตรอน(electron - positron annihilation) ในขบวนการนี้มวลรวมของอนุภาคทั้งสองแปลงเป็นพลังงานของการแผ่รังสีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ขบวนการในลักษณะตรงข้ามที่เรียก การผลิตคู่ (pair production) คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแปลงรูปเป็นอนุภาคอิเล็กตรอนและอนุภาคโพซิตรอน อนุภาคอิเล็กตรอน หรืออนุภาคโพซิตรอน มีพลังงานมวลนิ่ง

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9.11\times10^{-31}\,\text{kg})(3.00\times10^{8}\,\text{m/s})^2}{1.60\times10^{-13}\,\text{J/MeV}} = 0.511\ \text{MeV}$$

เมื่ออนุภาคสองตัวรวมกันจะได้พลังงานรวมเท่ากับ 1.022 MeV

ตัวอย่าง 5.17 ในปี ค.ศ. 1989 การทดลองที่ Stanford Linear Collider อนุภาค Z° ถูกค้นพบจากการชนกันของอนุภาคอิเล็กตรอนและอนุภาคโพซิตรอนที่ค่าพลังงานจลน์เท่ากัน จงคำนวณหาพลังงานจลน์ของอนุภาคทั้งสองที่ต้องใช้ในการเข้าชนเพื่อผลิตอนุภาค Z° ที่มีค่าพลังงานนิ่ง 91.2 GeV (1 GeV = 10^9 eV)

วิธีทำ

อนุภาคอิเล็กตรอนมีพลังงานนิ่ง = 0.511 MeV
เมื่อรวมกับอนุภาคโพซิตรอน พลังงานนิ่งรวม = 2(0.511)MeV
อนุภาคโพซิตรอน และอนุภาคอิเล็กตรอน ต้องถูกเร่งขึ้นมาให้มี
พลังงานจลน์อย่างน้อย = 91.2 GeV - 2(0.511) MeV

$$= 91.2 \text{ GeV} - 0.001022 \text{ GeV}$$

$$= 91.2 \text{ GeV}$$

ดังนั้น อนุภาคโพซิตรอน หรือ อนุภาคอิเล็กตรอนต้องมีพลังงานจลน์อย่างน้อย

$$\frac{1}{2}(91.2 \text{ GeV}) = 45.6 \text{ GeV}$$

5.10 การดลและโมเมนตัม

ในระบบอนุภาค การเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงภายนอก สามารถวิเคราะห์ได้เหมือนกับอนุภาคเดี่ยวเคลื่อนที่ โดยใช้หลักการนิยามจุดศูนย์กลางมวล การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่ยุ่งยากซับซ้อน การดล(impulse) เป็นผลคูณของแรงภายนอกกับค่าเวลาที่แรงภายนอกกระทำ ถ้าการดลเป็นศูนย์ ระบบไม่มีแรงภายนอกกระทำ มีผลให้โมเมนตัมของระบบคงตัว กฎการคงตัวของโมเมนตัมนำไปใช้ในการชนระหว่างอนุภาคหรือก้อนวัตถุ ไม่ว่าก้อนวัตถุจะเป็นอนุภาคพื้นฐานหรือขนาดของดาวพระเคราะห์ กฎการคงตัวของโมเมนตัมยังใช้ได้และนำเสนอสู่การวิเคราะห์ลักษณะปรากฏการณ์การชนแบบต่างๆ เช่น การชนในหนึ่งมิติที่สูญเสียพลังงาน หรือไม่สูญเสียพลังงาน การชนสองมิติที่แยกกันเป็นมุม การแยกออกจากกันในลักษณะถอยกลับ (recoil) เป็นต้น

5.10.1 การดล โมเมนตัมเชิงเส้น

โมเมนตัมเชิงเส้น ($\vec{p}$) ของอนุภาคมวล m นิยามจากผลคูณระหว่างมวลและความเร็วอนุภาค

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (6.43)$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{5.44}$$

โดย $\Sigma\vec{F}$ เป็นแรงภายนอกผลลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาค

$$(\sum \vec{F})dt = d\vec{p} \tag{5.45}$$

เรียก $\Sigma\vec{F}$ ว่า แรงดล

อินทิเกรตสมการ (5.45)

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \vec{F})dt = \vec{J} \tag{5.46}$$

โดย $\vec{J}$ เป็นการดล (impulse) มีค่าเท่ากับผลต่างของเวกเตอร์ของโมเมนตัมของอนุภาค โมเมนตัมของอนุภาคมีหน่วยเป็น กิโลกรัม-เมตร/วินาที การดลมีหน่วยเป็น นิวตัน-วินาที

กรณีระบบอนุภาค โมเมนตัมรวม $\vec{P}$ ของอนุภาคทั้งหมดเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมย่อยของแต่ละอนุภาค

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \tag{5.47}$$

หรือ

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i \tag{5.48}$$

ใช้ความสัมพันธ์สมการ (5.11) และ (5.13) สมการ (5.48) จะกลายเป็น

$$\vec{P} = M\vec{V} \tag{5.49}$$

เมื่อ $\vec{V}$ คือ ความเร็วของศูนย์กลางมวล

M คือ มวลรวมของระบบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (5.50)$$

สมการ (5.49) ให้ความหมายทางฟิสิกส์ที่เด่นชัด โมเมนตัมลัพธ์ของระบบอนุภาคเท่ากับผลคูณของมวลทั้งหมดของระบบและความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ระบบที่กำลังเคลื่อนที่ไปพร้อม ๆ กัน วิเคราะห์ได้เหมือนกรณีมวลเดี่ยวอัดแน่นอยู่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล และกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

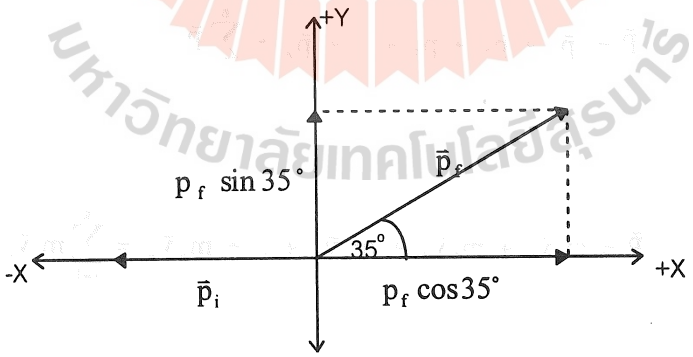
ตัวอย่าง 5.18 ลูกเบสบอลมีมวล 0.14 กิโลกรัม เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามแนวราบ 150 กิโลเมตร/ชั่วโมง เข้ากระทบไม้เบสบอล ลูกเบสบอลพุ่งออกจากไม้ตีในทิศทาง 35° กับแนวราบด้วยอัตราเร็ว 180 กิโลเมตร/ชั่วโมง

(a) จงคำนวณหาการดลของแรงตีลูกเบสบอล

(b) ถ้าการเข้ากระทบของไม้ตีลูกเบสบอลกินเวลา 1.5 มิลลิวินาที จงหาแรงดลเฉลี่ย

(c) จงหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของไม้ตี

วิธีทำ



(a) $\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

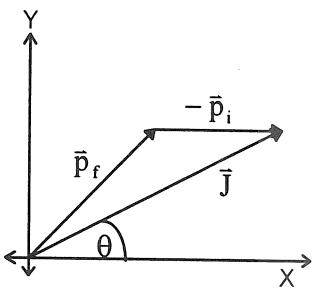
$$v_f = 180 \text{ km/h} = \frac{180\times10^3}{3600} \text{ m/s} = 50 \text{ m/s}$$

$$v_i = 150 \text{ km/h} = \frac{150\times10^3}{3600} \text{ m/s} = 42 \text{ m/s}$$

$$p_{fx} = mv_f \cos 35^\circ = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\cos 35^\circ) = 5.7 \text{ kg·m/s}$$

$$p_{fy} = mv_f \sin 35^\circ = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\sin 35^\circ) = 4.0 \text{ kg·m/s}$$

$$p_{ix} = mv_i = (0.14 \text{ kg})(-42 \text{ m/s}) = 5.9 \text{ kg·m/s}$$



$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = (5.7) - (-5.9) = 11.6 \text{ kg·m/s}$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = (4.0) - 0 = 4.0 \text{ kg·m/s}$$

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11.6)^2 + (4.0)^2} = 12.3 \text{ kg·m/s}$$

$$\tan\theta = \frac{4.0}{11.6}; \quad \theta = 19^\circ$$

(b) $J = F\Delta t$

$$\therefore \quad F = J/\Delta t = \frac{12.3}{0.0015} = 8200 \text{ N}$$

ในทิศทางของ $\vec{J}$

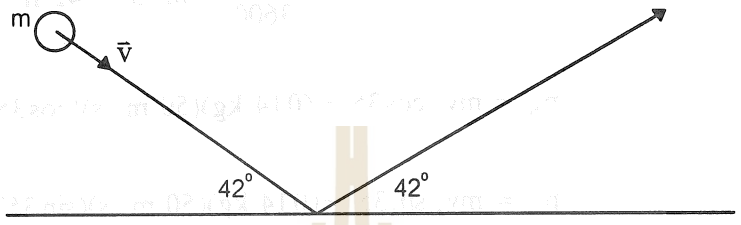
(c) การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของไม้ตี $\longrightarrow$ ตรงข้ามกับของลูกบอล

$$J_x = \Delta p_x = -11.6 \text{ kg·m/s}$$

$$J_y = \Delta p_y = -4.0 \text{ kg·m/s}$$

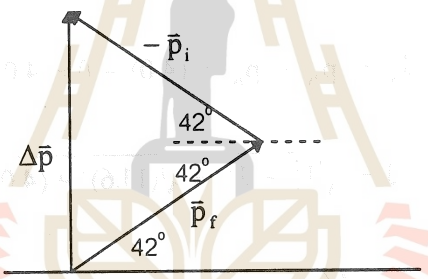
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 5.19 มวล 4.88 กิโลเมตร มีอัตราเร็ว 31.4 เมตร/วินาที เข้ากระทบแผ่นโลหะราบทำมุม 42.0° และสะท้อนออกด้วยอัตราเร็วเท่าเดิม ถามว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของมวลมีค่าเท่าใด ?



วิธีทำ

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$



$$\Delta p^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2p_f p_f \cos 84^\circ$$

$$= (4.88 \times 31.4)^2 \times 2 - 2 \times (4.88 \times 31.4)^2 \times (0.1045)$$

$$= 46960.1 - 4908.7 = 42051.4$$

$\Delta p = 205\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$ ทิศทางตั้งฉากกับแผ่นโลหะ

หรือ

$$\Delta p = 2 \times p_i \sin 42^\circ$$

$$= 2 \times 4.88 \times 31.4 \times 0.669$$

$$= 205\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

5.10.2 การชนหนึ่งมิติ

ในการชนจะมีแรงกระทำขนาดใหญ่กระทำต่ออนุภาคทั้งก้อนในช่วงเวลาสั้น การชนให้ความหมายของการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่อย่างฉับพลันก่อนการชนและหลังการชน แรงกระทำในช่วงระยะเวลาสั้นเราเรียกแรงดล (impulsive force) ตัวอย่างการตีลูกเบสบอล เมื่อลูกบอลเข้ากระทบไม้ตี ไม้ตีออกแรงขนาดสูงแก่ลูกบอล แรงนี้มีขนาดขึ้นอยู่กับเวลา เมื่อลูกบอลถอยออก แรงกระทำต่อลูกบอลมีค่าเป็นศูนย์ ช่วงเวลาตีลูกบอลเป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก แรงจึงอยู่ในลักษณะแรงดล

จากสมการ (5.47) การดล $\vec{J}$ มีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคในช่วงเวลาที่ถูกแรงดลกระทำ

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\ dt \tag{5.51}$$

แรงดลเป็นแรงไม่คงตัว แต่โดยทั่วไปสามารถเฉลี่ยได้ในช่วงเวลา Δt ที่เกิดแรงกระทำ

$$\vec{J} = \bar{F}\Delta t \tag{5.52}$$

พิจารณาการชนของมวล m_1 และ m_2 ระหว่างการชนอนุภาคทั้งสองออกแรงขนาดใหญ่ต่อกันในระยะเวลาสั้น แรงกระทำต่อกันนี้เป็นคู่แรงกิริยา-ปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันทิศทางตรงกันข้าม การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค m_1

$$\Delta\vec{p}_1 = \bar{F}_{12}\Delta t \tag{5.53}$$

โดย $\bar{F}_{12}$ เป็นแรงเฉลี่ยที่อนุภาค m_2 กระทำต่ออนุภาค m_1 ในช่วงเวลา Δt ในทำนองเดียวกัน การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาค m_2

$$\Delta\vec{p}_2 = \bar{F}_{21}\Delta t \tag{5.54}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เนื่องจาก $\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}$ ทำให้การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคทั้งสองมีค่าเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้าม

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \tag{5.55}$$

ถ้าพิจารณาอนุภาค m_1 และ m_2 เป็นระบบอนุภาครวม

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{5.56}$$

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมผลลัพธ์ $\Delta\vec{P}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เพราะ $\Delta p_1 = -\Delta p_2$

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \tag{5.57}$$

สังเกตว่า ถ้าไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ"สองอนุภาค" โมเมนตัมรวมของระบบสองอนุภาคจะไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการชน

ในบทเรียนนี้จะพิจารณาการชนระหว่างสองอนุภาค โดยปกติจะทราบความเร็วก่อนชนของอนุภาคทั้งสอง เราต้องการทราบว่าหลังการชนแล้ว อนุภาคทั้งสองมีการเคลื่อนที่อย่างไร ความจริงที่ว่าการชนโดยทั่วไปจะมีโมเมนตัมคงตัวก่อนและหลังการชน และในหลายกรณีพลังงานจะคงตัวด้วย โมเมนตัมเชิงเส้นจะคงตัวเสมอในการชน กรณีพลังงานรวมคงตัว พลังงานรวมก่อนชนจะเท่ากับพลังงานรวมหลังชน พลังงานรวมดังกล่าวไม่เป็นเพียงเฉพาะพลังงานจลน์เท่านั้น ยังรวมถึงพลังงานภายใน พลังงานการหมุน และพลังงานความร้อน

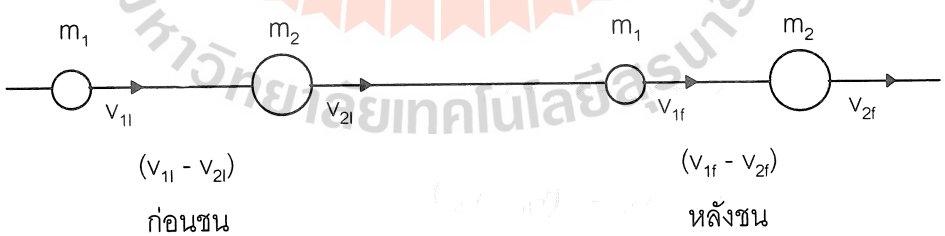
การชนที่ไม่พิจารณาพลังงานรูปแบบอื่นนอกจากพลังงานกล $E_p + E_k$ และต้องเป็นการชนที่เวลาเข้ากระทบสั้นมากๆ ทำให้จุดก่อนชนและจุดหลังชนแยกออกจากกันอย่างชัดเจน ทำให้การชนไม่มีผลกับพลังงานภายในระบบ การชนประเภทนี้เราเรียกการชนแบบยืดหยุ่น (elastic collision) พลังงานอยู่ในรูปพลังงานจลน์เท่านั้น ดังนั้นการคงตัวของพลังงานกล จะลดรูปเป็นการคงตัวของพลังงานจลน์ พลังงานจลน์ก่อนชน $E_{k,i}$ เท่ากับพลังงานจลน์หลังชน $E_{k,f}$

การชนอีกประเภทหนึ่งเป็นชนิดการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic collision) พลังงานของการชนแปรรูปเป็นพลังงานรูปอื่นทำให้พลังงานจลน์รวมก่อนการชนและหลังชนไม่เท่ากัน บางกรณี $E_{k,i} > E_{k,f}$ พลังงานส่วนหนึ่งเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานภายในของระบบ บางกรณี $E_{k,i} < E_{k,f}$ พลังงานที่เก็บกักไว้ในระบบถูกปล่อยหลังการชน สังเกตว่าพลังงานกล $E_p + E_k$ ของการชนชนิดนี้ไม่คงตัว แต่พลังงานรวมของระบบไม่สูญเสีย เพียงเปลี่ยนรูปส่งผ่านออกจากระบบเท่านั้น

การชนโดยทั่วไปในชีวิตประจำวันจัดได้เป็นแบบไม่ยืดหยุ่น มีการสูญเสียพลังงาน แต่ถ้าวัตถุเข้าชนมีความแข็งแกร่งสูง เราสามารถประมาณได้เป็นการชนแบบยืดหยุ่นได้ การชนบางประเภทหลังชนก้อนวัตถุติดกัน จัดเป็นการชนไม่ยืดหยุ่นโดยสมบูรณ์ (completely inelastic) เช่นการจมฝังของลูกปืนบนเนื้อไม้หลังยิงปืน พลังงานจลน์ของระบบจะสูญเสียไปมากที่สุด เมื่อเทียบกับการชนชนิดอื่นๆ

การชนชนิดยืดหยุ่น

พิจารณาการชนแบบยืดหยุ่นในหนึ่งมิติ ก้อนมวล m_1 และ m_2 มีอัตราเร็วเชิงเส้น v_{1i} และ v_{2i} เข้าชนกันโดยจุดชนผ่านจุดศูนย์กลางมวลทั้งสอง หลังชนมวลทั้งสองมีอัตราเร็ว v_{1f} และ v_{2f} ตามลำดับ แนวการเคลื่อนที่หลังชนและก่อนชนอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังแสดงในรูป 5.8



รูป 5.8 การชนแบบยืดหยุ่นผ่านจุดศูนย์กลางมวล

จากกฎการคงตัวของโมเมนตัม

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{5.58}$$

กรณียืดหยุ่นพลังงานจลน์มีค่าคงตัว $E_{k,i} = E_{k,f}$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 \tag{5.59}$$

จากสมการ (5.58) และ (5.59) ถ้าทราบค่าตัวแปรมวลและความเร็วก่อนชน เราสามารถคำนวณตัวแปรไม่ทราบค่าหลังชนได้ สมการ (5.58) เขียนได้ในรูป

$$m_1 \left(v_{1i} - v_{1f} \right) = m_2 \left(v_{2f} - v_{2i} \right) \tag{5.60}$$

และสมการ (5.59)

$$m_1 \left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2 \right) = m_2 \left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2 \right) \tag{5.61}$$

แก้สมการ (5.60) และ (5.61) ได้เงื่อนไข

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

หรือ $$v_{1f} - v_{2f} = -\left(v_{1i} - v_{2i} \right) \tag{5.62}$$

สังเกตว่าในการชนชนิดยืดหยุ่น อัตราเร็วสัมพัทธ์ก่อนชนและหลังชนเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้ามอัตราเร็วการเข้าหากันก่อนชน จะเท่ากับอัตราเร็วแยกออกจากกันหลังชน

ค่าอัตราเร็วหลังชนของอนุภาคทั้งสองหาได้ในเทอมของตัวแปรมวลและอัตราเร็วก่อนชน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$v_{1f} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} + \left[\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{2i} \qquad (5.63)$$

$$v_{2f} = \left[\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right] v + \left[\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{2i} \qquad (5.64)$$

การชนชนิดยืดหยุ่นบางกรณีให้ข้อมูลที่น่าสนใจ เช่น

1. กรณีมวลเข้าชนเท่ากับ $m_1 = m_2$ ทำให้

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} = v_{1i} \qquad (5.65)$$

อนุภาคแลกเปลี่ยนอัตราเร็วกัน หรือถ่ายทอดโมเมนตัมกันโดยตรง

2. มวลถูกชนอยู่นิ่งก่อนชน $v_{2i} = 0$

$$v_{1f} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{1i} \qquad (5.66)$$

และ $$v_{2f} = \left[\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right] v_{1i}$$

ถ้ารวมกรณี 1 และ 2 เข้าด้วยกัน คือมวลเท่ากันและมวลถูกชนอยู่นิ่ง ในการชนมวลเข้าชนจะถ่ายทอดพลังงานทั้งหมดให้มวลถูกชน ตัวเองจะหยุดนิ่งทันทีหลังชน สังเกตได้จากการชนกันของลูกบิลเลียดที่ไม่มีการหมุน

3. มวลถูกชนมีมวลใหญ่ $m_2 >> m_1$ ทำให้

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx v_{2i} \qquad (5.67)$$

และถ้ามวลถูกชนที่มีขนาดใหญ่เคลื่อนที่อย่างช้า ๆ หรืออยู่นิ่ง

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{2f} \approx 0 \tag{5.68}$$

มวลที่เบากว่าเข้าชนมวลที่ใหญ่กว่ามากที่อยู่นิ่ง มวลเล็กถูกกระแทกย้อนกลับมวลใหญ่แทบจะไม่เปลี่ยนแปลงความเร็ว ตัวอย่างเช่นเรากระแทกลูกบาสเก็ตบอลกระทบผิวโลก

4. มวลเข้าชนมีมวลใหญ่ $m_1 >> m_2$

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{และ} \quad v_{1f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \tag{5.69}$$

ถ้ามวลถูกชนเคลื่อนที่อย่างช้า ๆ หรืออยู่นิ่ง หลังการชมมวลถูกชนจะมีความเร็วเป็นสองเท่าของอัตราเร็วมวลเข้าชน การเคลื่อนที่ของมวลเข้าชน m_1 จะไม่เปลี่ยนแปลงยังคงอัตราเร็วเข้าชนอยู่หลังจากชน เช่น ในการทดลองของรัทเธอร์ฟอร์ดศึกษาการกระเจิงของอนุภาคอัลฟาในอะตอมของทองเพื่อศึกษาโครงสร้างของอะตอมอนุภาคอัลฟามีมวลมากกว่าอิเล็กตอนประมาณ 8000 เท่า อนุภาคอัลฟาจะผ่านบริเวณอิเล็กตอนโคจรอยู่โดยทะลุเลยออกไปเลย เหมือนกับไม่มีการชน แต่ถ้าเข้าชนกับนิวเคลียสของอะตอม อนุภาคอัลฟาจะกระเจิงในลักษณะต่าง ๆ

ตัวอย่าง 5.22

(a) จงหาสัดส่วนของพลังงานจลน์ที่ลดลงของอนุภาคนิวตรอนมวล m_1 เข้าชนผ่านจุดศูนย์กลางกับนิวเคลียสมวล m_2 ที่หยุดนิ่งก่อนถูกชน

(b) จงหาสัดส่วนของพลังงานจลน์ที่ลดลงของอนุภาคนิวตรอนเมื่อเข้าชนลักษณะนี้กับนิวเคลียสของธาตุตะกั่ว คาร์บอนและไฮโดรเจน

อัตราส่วนมวลนิวเคลียสของธาตุต่ออนุภาคนิวตรอน (m_1/m_2) มีค่า 206 (ตะกั่ว), 12 (คาร์บอน) และ 1 (ไฮโดรเจน)

วิธีทำ

(a) ถ้าให้ $E_{k,i}$ = พลังงานจลน์ของนิวตรอนก่อนเข้าชน

$E_{k,f}$ = พลังงานจลน์ของนิวตรอนหลังชน

สัดส่วนพลังงานจลน์ที่ลดลง = $\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2}$

$= 1 - \frac{v_f^2}{v_i^2}$

การชนเป็นแบบยืดหยุ่นและผ่านศูนย์กลางมวล

$$v_{1f} = \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right] v_{1i}$$

$$\therefore \quad \frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = 1 - \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(a) สำหรับตะกั่ว $m_2 = 206\ m_1$

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(206m_1)}{(m_1 + 206m_1)^2} = 0.02 \text{ หรือ } 2\%$$

สำหรับคาร์บอน $m_2 = 12\ m_1$

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 \text{ หรือ } 28\%$$

สำหรับไฮโดรเจน

$$\frac{E_{k,i} - E_{k,f}}{E_{k,i}} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1.0 \text{ หรือ } 100\%$$

เราใช้เทคนิคการลดพลังงานอนุภาคนิวตรอน โดยใช้สารพาราฟินที่มีจำนวนอะตอมของไฮโดรเจนมากมายเป็นตัวช่วย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์นิยามจากการชนที่พลังงานจลน์ไม่คงตัว $E_{k,i} \neq E_{k,f}$ แต่โมเมนตัมยังคงตัวอยู่ สังเกตว่าพลังงานรวมของระบบยังคงตัวอยู่ เพียงแต่เปลี่ยนรูปไปนอกเหนือจากรูปแบบพลังงานจลน์ กรณีการชนชนิดไม่ยืดหยุ่นโดยสมบูรณ์ เป็นกรณีที่น่าสนใจ มวลทั้งสองจะติดกัน ใช้ความเร็วร่วมกันหลังชนหมายความว่า $v_{if} = v_{2f} = v_f$ จากสมการกฎการคงตัวของโมเมนตัม สามารถคำนวณหาค่าความเร็วร่วม v_f ของมวลทั้งสองได้

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \qquad (5.70)$$

ถ้า m_2 อยู่นิ่งก่อนถูกชน

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \qquad (5.71)$$

อัตราเร็วของ m_1 ลดลงในอัตราส่วน $\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$ ถ้า m_1 มีมวลมาก อัตราเร็วหลังชนจะมากขึ้นด้วย ถ้า m_1 มีมวลน้อย เช่น กระสุนปืน อัตราเร็วของกระสุนปืนฝังในเนื้อไม้ก้อนใหญ่จะมีค่าน้อย

กรณีมวลระเบิดออกหรือถูกแยกออกเป็นสองส่วนสมการ (5.71) จะใช้ได้ในทางกลับกัน นั่นคือ ถ้ามวลใหญ่ $M = m_1 + m_2$ มีอัตราเร็ว v_f เมื่อแยกออกจากกันเป็นมวล m_1 และ m_2 มีอัตราเร็วเป็น v_{1i} และ v_{2i} ตามลำดับ ถ้า $v_f = 0$ มวลก้อนใหญ่อยู่นิ่งก่อนแยกออกเป็นสองส่วน อัตราเร็วหลังแยก $v_{1i} / v_{2i} = -m_2 / m_1$ มวล m_1 และ m_2 จะแยกออกจากกันในทิศทางตรงกันข้าม โดยแบ่งโมเมนตัมไปตามอัตราส่วนมวล

ดังนั้นสำหรับการชนกันแบบนี้ถ้าเขียนในรูปอัตราเร็วสัมพัทธ์ก่อนชนและหลังชนกัน ตามสมการ(5.62) จะได้

$$v_{1f} - v_{2f} = 0 = -0\,(v_{1i} - v_{2i}) \qquad (5.72)$$

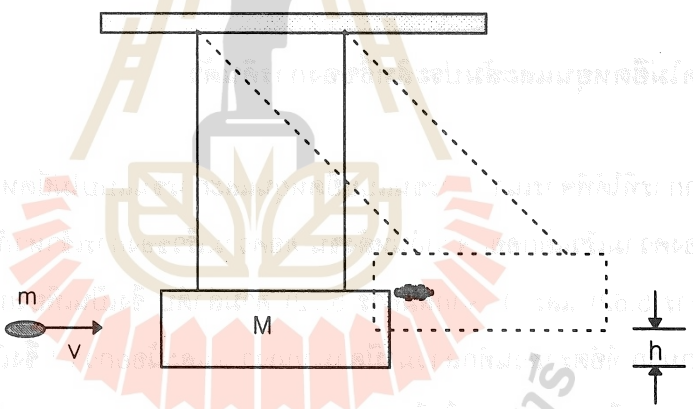
ตัวอย่าง 5.23 Ballistic pendulum เป็นเครื่องมือตรวจวัดความเร็วต้นลูกปืน ประกอบด้วยแท่งไม้ขนาดใหญ่ มวล M แขวนด้วยเชือกคู่ ลูกปืนมวล m ถูกยิงเข้าแท่งไม้และฝังตัวอยู่ในแท่งไม้ แท่งไม้พร้อมลูกปืนจะแกว่งตัวขึ้นถึงตำแหน่งสูงสุด ได้ความสูงตามแนวดิ่ง h ถ้า M = 5.4 กิโลกรัม, m = 9.5 กรัม จงคำนวณหา

(a) ความเร็วต้นของลูกปืน ถ้า h = 6.3 เซนติเมตร

(b) พลังงานจลน์เริ่มต้นของลูกปืน และพลังงานจลน์ปริมาณเท่าใดที่ใช้ในการแกว่งตัวของแท่งไม้

วิธีทำ

(a)



โมเมนตัมคงตัว ;

$$mv = (m + M)V \qquad (1)$$

พลังงานจลน์รวมหลังกระทบ เท่ากับพลังงานศักย์ในการยกตัว

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(\frac{Mv}{m+M}\right)^2 = gh$$

$$v = \left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

แทนค่า $$v = \left(\frac{5.4 + 0.0095\ \text{kg}}{0.0095\ \text{kg}}\right)\sqrt{2 \times 9.8 \times 6.3 \times 10^{-2}} = 630\ \text{m/s}$$

(b) พลังงานเริ่มต้นของลูกปืน $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.0095\ \text{kg})(630\ \text{m/s})^2 = 1900\ \text{J}$$

พลังงานศักย์ของ (m + M) $$E_p = (M + m)gh = (5.4 + 0.0095)9.8 \times 6.3 \times 10^{-2}$$
$$= 3.3\ \text{J}$$

ดังนั้นพลังงานเพียงส่วนน้อย $\frac{3.3}{1900} = 0.02$ หรือ 2% ของพลังงานเริ่มต้นเท่านั้นที่ ส่งผ่านเป็นพลังงานศักย์แห่งไม้ พลังงานที่เหลือเก็บกักในแห่งไม้ในรูปพลังงานภายใน หรือส่งผ่านให้กับสิ่งแวดล้อมในรูปของความร้อนหรือคลื่นเสียง

การชนชนิดไม่ยืดหยุ่นและสัมประสิทธิ์ของการคืนตัว

จากการที่ได้พิจารณา การชนแบบยืดหยุ่นและการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ แล้วจะเห็นว่าอัตราส่วนของความเร็วแยกออกจากกันหลังชน ต่อความเร็วของการเข้าหากัน(คิดเฉพาะขนาด) เท่ากับ 1 (จากสมการ 5.62) และ 0 (จากสมการ 5.72) ตามลำดับ ซึ่งเป็นเพียงกรณีพิเศษเท่านั้นเพราะยังมีการชนกันอีกมาก ที่อัตราส่วนที่กล่าวมามีค่ามากกว่า 0 และน้อยกว่า 1 ซึ่งเรียกการชนแบบนี้ว่าการชนแบบไม่ยืดหยุ่น หรือการชนแบบกึ่งยืดหยุ่น (semielastic collision) ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเขียนได้ดังนี้

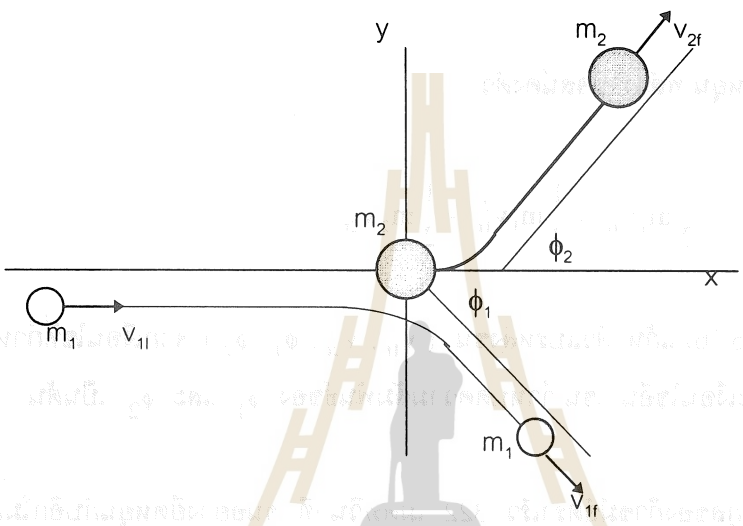
$$v_{1f} - v_{2f} = -e\,(v_{1i} - v_{2i}) \qquad (5.73)$$

เรียก e ว่า **สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว** (coefficient of restitution) ซึ่งมีค่าดังนี้

สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว
- $e = 0$; การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์
- $0 < e < 1$; การชนแบบไม่ยืดหยุ่น
- $e = 1$; การชนแบบยืดหยุ่น

5.11.4 การชนสองมิติ

ถ้าอนุภาคเข้าชนกันในลักษณะที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล อนุภาคจะไม่เคลื่อนที่ในแนวเดิม รูป 5.9 แสดงการชนในลักษณะสองมิติ



รูป 5.9 อนุภาคสองตัวเข้าชนกันในลักษณะสองมิติ

อนุภาคถูกชน m_2 ถูกสมมุติให้อยู่นิ่งก่อนถูกชน มวล m_1 เข้าชนด้วยอัตราเร็ว v_{1i} โดยมีแนวการเคลื่อนที่ห่างการแนวแกน x เป็นระยะ b เราเรียกตัวแปรการเข้าชน (impact parameter) ถ้า b = 0 เป็นชนิดชนผ่านศูนย์กลางมวล ถ้าค่า b มากขึ้นมุมเบี่ยงของการชนจะมากขึ้น ในกรณีตัวอย่างเราเลือกการเข้าชนอยู่ในแนวขนานแกน x ระนาบ xy เป็นระนาบการชน จากกฎการคงตัวของโมเมนตัมตามแกน x

$$P_{ix} = P_{fx}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\phi_1 + m_2 v_{2f}\cos\phi_2 \qquad (5.74)$$

โมเมนตัมตามแกน y คงตัว

$$P_{iy} = P_{fy}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\phi - m_2 v_{2f} \sin\phi \tag{5.75}$$

ถ้าการชนเป็นแบบยืดหยุ่น พลังงานจลน์คงตัว

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{5.76}$$

ใช้สมการ (5.74) ถึง (5.76) แก้หาตัวแปรหลังชน (v_{1f}, v_{2f}, ϕ_1, ϕ_2) จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ (m_1, m_2, v_{1i}) และเงื่อนไขอื่น เช่น กำหนดความสัมพันธ์ของ ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นต้น

ตัวอย่าง 5.24 โมเลกุลของก๊าซมีอัตราเร็ว 322 เมตร/วินาที ชนอย่างยืดหยุ่นกับอีกโมเลกุลหนึ่งที่มีมวลเท่ากันและอยู่นิ่งก่อนถูกชน หลังชนโมเลกุลแรกเคลื่อนที่ทำมุม 30° กับแนวเข้าชนเดิม จงคำนวณหาอัตราเร็วของแต่ละโมเลกุลหลังชนและมุมกระเจิงที่ทำกับแนวเดิม

วิธีทำ โมเมนตัมคงตัวตามแกน

แกน x ; $$mv_{1i} = mv_{1f}\cos\phi_1 + mv_{2f}\cos\phi_2 \tag{1}$$

แกน y ; $$0 = mv_{1f}\sin\phi_1 - mv_{2f}\sin\phi_2 \tag{2}$$

และพลังงานจลน์คงตัว ;

$$\frac{1}{2} mv_{1i}^2 = \frac{1}{2} mv_{1f}^2 + \frac{1}{2} mv_{2f}^2 \tag{3}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จากเงื่อนไข มวลเท่ากัน ชนแบบยืดหยุ่นและมวลถูกชนอยู่นิ่งก่อนชน พิสูจน์ได้ว่า

$$\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$$

ถ้า $\phi_1 = 30^\circ;\ \phi_2 = 60^\circ$ แทนค่าในสมการ (1) และ (2)

$$v_{1i} = v_{1f}\cos 30^\circ + v_{2f}\cos 60^\circ$$

$$322 = v_{1f}\frac{\sqrt{3}}{2} + v_{2f}\frac{1}{2}$$

$$644 = \sqrt{3}v_{1f} + v_{2f} \qquad (4)$$

และ

$$v_{1f}\sin 30^\circ = v_{2f}\sin 60^\circ$$

$$v_{1f} = \sqrt{3}\ v_{2f} \qquad (5)$$

$$\therefore \quad 644 = \sqrt{3}\sqrt{3}\ v_{2f} + v_{2f} = 4v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{644}{4} = 161 \ \ m/s$$

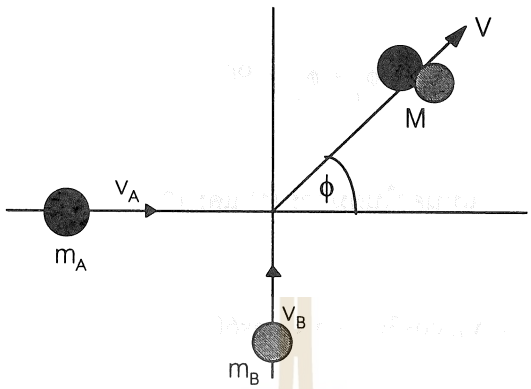
$$v_{1f} = \sqrt{3}\ v_{2f} = \sqrt{3} \times 161 = 278.9 \ \ m/s$$

ตัวอย่าง 5.25 นักสเก็ตน้ำแข็งเข้าชนกันและกอดกัน เป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นโดยสมบูรณ์ ถ้าสมชายมีมวล $m_A = 83$ กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปทางตะวันออกด้วยความเร็ว $v_A = 6.4$ กิโลเมตร/ชั่วโมง สมหญิงมีมวล $m_B = 55$ กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ไปเหนือด้วยความเร็ว $v_B = 8.8$ กิโลเมตร/ชั่วโมงจงคำนวณ

(a) ความเร็วร่วมของสมชายและสมหญิงหลังการชน

(b) สัดส่วนของพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนแปลงหลังการชน

วิธีทำ



(a) โมเมนตัมคงตัวตามแกน

แกน x : $m_A v_A = MV\cos\phi$ (1)

แกน y : $m_B v_B = MV\sin\phi$ (2) โดย $M = m_A + m_B$

(2) ÷ (1) ได้ $$\tan\phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55\text{ kg})(8.8\ \text{km/h})}{(83\text{ kg})(6.4\ \text{km/h})} = 0.911$$

$$\phi = \tan^{-1} 0.911 = 42.3^\circ$$

$$V = \frac{m_B v_B}{M\sin 42.3^\circ} = \frac{(55\text{kg})(8.8\ \text{km/h})}{(83\text{kg} + 55\text{kg})\sin 42.3^\circ}$$

$$= 5.21\ \text{km/h}$$

(b) พลังงานจลน์รวมก่อนชน $$= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$= \frac{1}{2}(83)(6.4)^2 + \frac{1}{2}(55)(8.8)^2$$

$$= 3830\ \text{J}$$

พลังงานจลน์หลังชน $= \frac{1}{2}(m + M)V^2$

$= \frac{1}{2}(55 + 83)(5.21)^2$

$= 1870 \quad J$

สัดส่วนพลังงานจลน์ที่เปลี่ยนแปลง $= \frac{E_{k,f} - E_{k,i}}{E_{k,i}} = \frac{(1870) - (3830)}{3830} = -0.51$

หรือ 51% ของพลังงานจลน์เสียไปเนื่องจากการชนในรูปพลังงานความร้อน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. อนุภาคถูกขับเคลื่อนด้วยแรง

$$\vec{F} = 20\hat{i} - 30\hat{j} + 15\hat{k}$$

ในแนวเส้นตรงจากจุด A ถึงจุด B โดยมี $\vec{r}_A = 2\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$ และ $\vec{r}_B = 5\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$ จงคำนวณหางาน

(ตอบ : 315 N-m)

2. สปริงมีค่านิจสปริงเท่ากับ 15.0 นิวตัน/เซนติเมตร จงคำนวณหา

(a) งานในการยืดสปริงออก 7.60 มิลลิเมตร จากจุดสมดุลสปริง

(ตอบ : 4.310^{-2} N-m)

(b) ต้องใช้งานอีกเท่าใดในการยืดสปริงเพิ่มขึ้นอีก 7.60 มิลลิเมตร

(ตอบ : 1.3×10^{-1} N-m)

3. จงคำนวณหาพลังงานจลน์ของอนุภาคมวล 20 หน่วย กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $3\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}$

(ตอบ : 500 หน่วยงาน)

4. อนุภาคมวล 4 หน่วย เคลื่อนที่ตามทางเดิน $\vec{r} = (3t^2 - 2t)\hat{i} + t^3\hat{j} - t^4\hat{k}$ จงคำนวณหางานที่แรง $\vec{F}$ ต้องทำในการขับเคลื่อนอนุภาคจากจุดเวลา t = 1 ถึงจุดเวลา t = 2 ตามทางเดินดังกล่าว

(ตอบ : 2454 หน่วยงาน)

5. บันไดเลื่อนต่อเชื่อมชั้นล่าง - ชั้นบน อยู่ระดับสูง 8.20 เมตร บันไดเลื่อนมีความยาว 13.3 เมตร และเลื่อนตัวด้วยอัตราเร็ว 62.0 เซนติเมจร/วินาที

(a) มอเตอร์ขับเคลื่อนต้องมีกำลังเท่าใด ถ้าต้องการบรรทุกคน 100 คน/นาที คนมีมวลเฉลี่ย 75.0 กิโลกรัม

(ตอบ : 10 kW)

(b) ถ้าชายมวล 83.5 กิโลกรัม เดินขึ้นบันไดเลื่อนในเวลา 9.5 วินาที มอเตอร์ต้องทำงานเท่าใด ?

(ตอบ : 2.9 kJ)

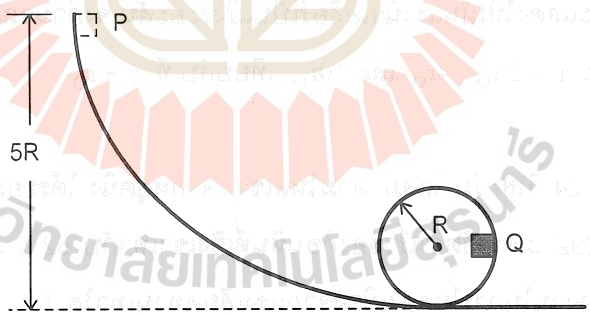
6. อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรง $F = a\left(\sin\omega t\hat{i} + \cos\omega t\hat{j}\right)$ ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งที่จุดกำเนิด จงแสดงว่างานที่ต้องทำในช่วงเวลา t มีค่า

$$\left(\frac{a^2}{m\omega^2}\right)(1-\cos\omega t)$$

และกำลัง $$P(t) = \frac{a^2}{m\omega}\sin\omega t$$

7. จงแสดงว่าสนามแรง $\vec{F} = \left(x^2y - z^3\right)\hat{i} + \left(3xyz + xz^2\right)\hat{j} + \left(2x^2yz + yz^4\right)\hat{k}$ เป็นแรงอนุรักษ์หรือไม่

8. มวล m ลื่นไถลบนทางเดิน loop-the-loop ไม่มีแรงเสียดทาน



(a) ถ้ามวล m ถูกปล่อยที่ตำแหน่ง P ถามว่าที่ตำแหน่ง Q มวล m มีแรงลัพธ์กระทำเท่าใด

(ตอบ : 8.06 mg; ทิศทาง 82.87° กับแนวดิ่ง)

(b) ที่ความสูงเท่าใด จากระดับต่ำสุดของทางเดิน ที่เมื่อปล่อยมวล มวลจะเคลื่อนที่ถึงส่วนบนของ loop และพอดีหลุดออกจากทางเดินวงกลมของ loop

(ตอบ : 5/2 R)

9. (a) จงแสดงว่าแรง $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ เป็นแรงอนุรักษ์

(b) เขียนสมการพลังงานศักย์ของอนุภาคที่เคลื่อนที่ในสนาม (a)

(c) ถ้าอนุภาค m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ จงแสดงว่า ถ้า E เป็นค่าพลังงานรวมคงตัว จะได้ $\frac{1}{2}m\left(dr/dt\right)^2 + \frac{1}{5}kr^5 = E$

10. พลังงานศักย์นิวเคลียร์ Yukawa แสดงในรูปสมการ

$$u(r) = -\frac{r_o}{r}u_o e^{-r/r_o}$$

ให้รายละเอียดทางด้านอันตรกิริยาระหว่างนิวคลีออนในนิวเคลียส ต่างถูกต้องเมื่อค่าคงตัว $r_o = 1.5 \times 10^{-15}$ m และ $u_o = 50$ MeV

(a) จงหาสมการแสดงแรงดึงดูดของนิวคลีออน

(ตอบ : $-u_o\left(r^{-1} + r_o r^{-2}\right)e^{-r/r_o}$)

(b) เพื่อจะแสดงให้เห็นแรงนิวเคลียร์เป็นแรงระยะสั้น จงคำนวณอัตราส่วนขนาดแรงที่ระยะ $r = 2r_o$, $4r_o$ และ $10r_o$ เทียบกับ ที่ $r = r_o$

11. ก้อนหินมวล 524 กิโลกรัม ไถลมาตามไหล่เขา จากหยุดนิ่ง ได้ระยะทาง 488 เมตร ถึงเชิงเขา ถ้าเขาสูง 292 เมตร อัตราเร็วของก้อนหินที่เชิงเขาเท่ากับ 62.6 เมตร/วินาที ถามว่าก้อนหินสูญเสียพลังงานในการไถลลงเนื่องจากแรงเสียดทานเท่าใด ?

12. ลูกบอลมวล 325 กรัม มีอัตราเร็ว v = 6.22 เมตร/วินาที เข้ากระทบผนังเป็นมุม $\theta = 33^\circ$ แล้วสะท้อนออกมา ด้วยอัตราเร็วเดิมและมุมเท่าเดิม ถ้าลูกบอลเข้ากระทบผนังกินเวลา 10.4 มิลลิวินาที จงคำนวณ

(a) การดลที่กระทำต่อลูกบอล

(ตอบ : 2.2 N-s)

(b) แรงดลเฉลี่ยที่ลูกบอลกระทำต่อผนัง

(ตอบ : 211.5 N)

13. ลูกบอลมวล 52.4 กรัม ถูกขว้างขึ้นในอากาศด้วยอัตราเร็วเริ่มต้น 16.3 เมตร/วินาที ที่มุม 27.4° เหนือแนวราบ จงคำนวณหา

(a) ค่าพลังงานจลน์ของลูกบอลที่จุดเริ่มต้น และก่อนกระทบพื้น

(ตอบ : 6.96 J)

(b) ค่าโมเมนตัม (ขนาดและทิศทาง) และการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

(ตอบ : 0.854 kg-m/s, 0.786 kg-m/s)

(c) จงแสดงว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมมีค่าเท่ากับน้ำหนักของลูกบอลคูณด้วยเวลาบิน จงคำนวณหาเวลาบิน

(ตอบ : 1.53 s)

15. ลูกทรงกลมโลหะไทเทเนียมวิ่งเข้าชนกันผ่านจุดศูนย์กลางมวลและยืดหยุ่น อัตราเร็วเข้าชนมีค่าเท่ากัน หลังชนลูกทรงกลมมวล 300 กรัม หยุดนิ่ง ถามว่าลูกทรงกลมอีกลูกหนึ่งมีมวลเท่าใด

(ตอบ : 100 g)

16. รถสินค้ามวล 35.0 ตัน ชนกับรถโดยสารที่อยู่นิ่ง รถทั้งสองติดกันไป และมีการสูญเสียพลังงานไป 27% ของพลังงานเริ่มต้นในรูปของความร้อน เสียงและการสั่นตัว จงคำนวณหามวลของรถโดยสาร

(ตอบ : 12.9 ตัน)

17. อนุภาคโปรตอน (มวล 1.01 amu.) มีอัตราเร็ว 518 เมตร/วินาที เข้าชนอย่างยืดหยุ่นกับอนุภาคโปรตอนอีกตัวหนึ่งที่อยู่นิ่ง โปรตอนตัวแรกกระเจิงทำมุม 64.0° กับแนวเดิม

(a) โปรตอนตัวที่สองกระเจิงออกเป็นมุมเท่าใด

(ตอบ : 26.0°)

(b) อัตราเร็วของโปรตอนทั้งสองตัวหลังชน

(ตอบ : 227 m/s, 465.5 m/s)

18. เรือบรรทุกมีมวล 1.5×10^5 กิโลกรัม กำลังมุ่งหน้าไปทางตะวันออกตามแม่น้ำมีอัตราเร็ว 6.20 เมตร/วินาที เข้าชนกับเรือบรรทุกอีกลำหนึ่ง ที่เคลื่อนที่ข้ามฝั่งไปทางทิศเหนือโดยมีมวล 2.78×10^5 กิโลกรัม กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 4.30 เมตร/วินาที หลังจากชนเรือลำที่สองเบี่ยงเบนจากแนวเดิมไป 18° และมีอัตราเร็วเป็น 5.1 เมตร/วินาที ถ้าน้ำนิ่งจงคำนวณ

(a) อัตราเร็วและทิศทางของเรือลำแรกหลังชน

(ตอบ : 3.43 m/s, $\theta = 17.3°$)

(b) พลังงานจลน์หายไปเท่าใดเนื่องจากการชน

(ตอบ : 955 kJ)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 6 ระบบอนุภาคและวัตถุแข็งเกร็ง

เค้าโครงเรื่อง : 6.1 จุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์

6.1.1 จุดศูนย์ถ่วง จุดศูนย์กลางมวล

6.1.2 เซนทรอยด์

6.1.3 ความสมมาตรรอบจุดศูนย์กลางมวล

6.1.4 ความเร็วในพิกัดศูนย์กลางมวล

6.2 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

6.2.1 โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค และหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

6.2.2 พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค

6.2.3 โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาค

6.2.4 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนตรึง

6.2.5 อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตรึง

6.2.6 พลังงานจลน์ของการหมุน

6.2.7 การคำนวนหาค่าโมเมนความเฉื่อย

6.2.8 ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก

6.2.9 ทฤษฎีบทแกนขนาน

6.2.10 รัศมีไจเรชัน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

6.3.1 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

6.3.2 การหมุนรอบแกนสมมาตร

6.4 สมดุล

6.4.1 เงื่อนไขของสมดุล

6.4.2 เสถียรภาพของสมดุล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ในระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคอิสระหลายอนุภาคอยู่ด้วยกัน หรือวัตถุที่มีมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อนใหญ่และมีลักษณะแข็งเกร็ง(rigid)นั้น เราศึกษาลักษณะทั่วไปของระบบ ดังต่อไปนี้

6.1 จุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง จุดศูนย์กลางมวล และเซนทรอยด์

การพิจารณาการเคลื่อนที่ของก้อนวัตถุมีขนาด หรือระบบที่ประกอบด้วยหลายอนุภาคนั้น ถ้ามีจุดสักจุดหนึ่งที่ใช้แทนวัตถุทั้งก้อนหรืออนุภาคทั้งระบบได้ก็จะทำให้ปัญหาต่าง ๆ ง่ายขึ้น จุดที่สะดวกที่สุดก็คือ ตำแหน่งเฉลี่ยการกระจายของมวลทั้งหมดนั่นเอง เราเรียกจุดนี้ว่า จุดศูนย์กลางมวล (center of mass) ความสะดวกจากการทราบจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมีหลายประการ เป็นต้นว่า จะวางวัตถุให้สมดุลบนที่รองรับได้ถ้าเราให้ที่รองรับวัตถุอยู่ตรงใต้จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุพอดี หรือ ในการออกแบบเรือให้ล่มยากหรือไม่ล่ม จะต้องให้จุดศูนย์กลางมวลของเรืออยู่ต่ำ เป็นต้น

6.1.1 จุดศูนย์ถ่วงและจุดศูนย์กลางมวล

เพื่อให้มองเห็นได้ง่าย ก่อนจะกล่าวถึงจุดศูนย์กลางมวล จะพิจารณาจุดศูนย์ถ่วง (center of gravity) เสียก่อน ดังนี้

สมมติมีมวลสามมวล m_1, m_2, m_3 ติดอยู่บนคานเบา ถ้านำคานนี้ไปวางบนคมมีดจะให้คมมีดอยู่ตรงไหนคานจึงจะสมดุล

การวางให้สมดุลจะต้องให้คมมีด รับน้ำหนักรวมทั้งหมด จึงต้องทราบว่าน้ำหนักรวมตกตรงจุดใด จุดที่น้ำหนักรวมตก เรียกว่า จุดศูนย์ถ่วง (center of gravity ใช้ตัวย่อ cg)

การหาตำแหน่ง cg พิจารณาดังนี้

มวล m_1, m_2, m_3 มีน้ำหนัก m_1g, m_2g, m_3g ตามลำดับ

ให้มวลรวมมีค่า $M = m_1 + m_2 + m_3$

น้ำหนักรวมมีค่า Mg

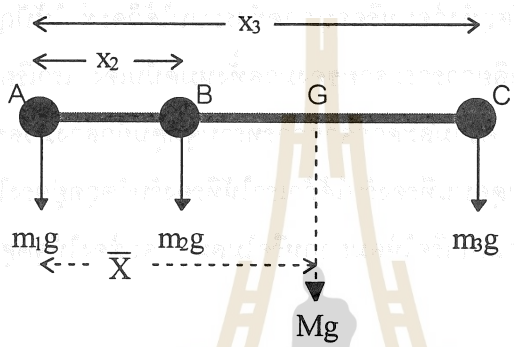
ทั้งหมดมีทิศลงในแนวดิ่ง

การหาตำแหน่ง cg ทำได้โดยหาโมเมนต์ของแรงโดยใช้หลัก

ผลรวมของโมเมนต์ ของแรงย่อย รอบจุดหมุนใด ๆ มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของแรงรวมรอบจุดหมุนเดียวกัน

การหาโมเมนต์ของแรงนั้นจะใช้จุดใดเป็นจุดหมุนก็ได้ ดังนี้

สมมติให้ G เป็นจุดศูนย์กลางความโน้มถ่วงของมวลทั้งสาม



รูป 6.1 ศูนย์กลางความถ่วงของสามอนุภาค เมื่อจุดหมุนที่ปลาย A

ก. <u>ให้จุดหมุนอยู่ที่ปลายคานด้านซ้าย</u> ตั้งแกนที่ปลาย A ดังรูป 6.1 จะได้

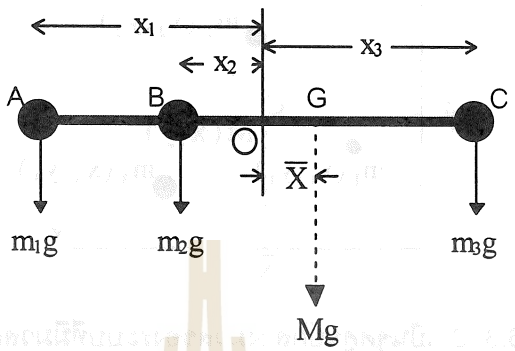
โมเมนต์รวมของน้ำหนักย่อยรอบ A เท่ากับโมเมนต์น้ำหนักรวมรอบ A

$$m_1 g(0) + m_2 g(x_2) + m_3 g(x_3) = Mg\overline{X}$$

$$\overline{X} = \frac{m_1 x_1 g + m_2 x_2 g + m_3 x_3 g}{Mg}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i g}{\sum_{i=1}^{3} m_i g} \qquad (6.1)$$

ข. <u>ให้จุดหมุนอยู่ที่จุดกึ่งกลางคาน</u> ตั้งแกนที่จุด O ดังรูป 6.2



รูป 6.2 ศูนย์กลางความถ่วงของสามอนุภาค เมื่อจุดหมุนอยู่กลางคาน

โมเมนต์รวมของน้ำหนักย่อยรอบ O เท่ากับโมเมนต์น้ำหนักรวมรอบ O

$$(m_1g)(-x_1)+(m_2g)(-x_2)+(m_3g)(x_3)=Mg\bar{X}$$

เขียน $\bar{X}$ ได้เช่นเดียวกับสมการ (6.1) แต่ค่า x_i แต่ละตัวไม่เท่ากัน และต้องดูด้วยว่าเป็นค่าบวกหรือลบ เมื่อวัดจากพิกัดที่ตั้งไว้

จะเห็นว่า ถ้าค่า g ที่ตำแหน่งของแต่ละมวลมีค่าเท่ากัน ก็จะตัด g ทิ้งไปได้ ในกรณีที่ตัดค่า g ออกได้นี้ เรียกจุด G ว่า จุดศูนย์กลางมวล (cm) ของระบบนี้

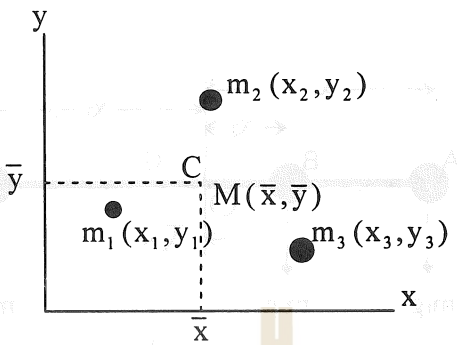
หรือในกรณีมวลอยู่ในอวกาศโดยอิสระจากแรงดึงดูดจากดาวใด ๆ มวลนั้นไร้น้ำหนักแต่การเคลื่อนที่ จะเกี่ยวข้องกับแรงและมวล ดังนั้น ตำแหน่งเฉลี่ยของมวลรวม หรือจุดศูนย์กลางมวล จึงมีความจำเป็นต้องทราบ

การหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลทำได้โดยหาโมเมนต์ของมวล แทนโมเมนต์ของแรง ดังตัวอย่างในสองมิติ ดังนี้

สมมติระบบหนึ่งมีสามมวล กระจายอยู่ในระนาบสองมิติ ให้มวล m_1 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_1, y_1) มวล m_2 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_2, y_2) มวล m_3 อยู่ที่ตำแหน่ง (x_3, y_3)

มวลรวม $$M = m_1 + m_2 + m_3 = \sum_{i=1}^{3} m_i$$

ให้จุดศูนย์กลางมวล C อยู่ที่ตำแหน่ง $(\bar{x},\bar{y})$ ดังรูป 6.3



รูป 6.3 C เป็นจุดศูนย์กลางมวลของระบบที่มีมวลสามมวล

จะหาตำแหน่ง $(\bar{x},\bar{y})$ โดยหาโมเมนต์ของมวลรอบแกน Y และ X ดังนี้

โมเมนต์รอบแกน y $\quad m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = M\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

โมเมนต์รอบแกน x $\quad m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 = M\bar{y}$

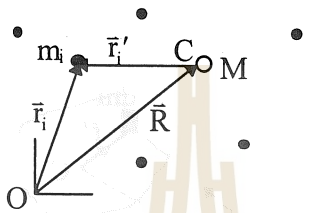
$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

ทำนองเดียวกันถ้าอนุภาคกระจายอยู่ ในสามมิติ ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลเป็น $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

จะได้ $\quad \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$, $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$, $\quad \bar{z} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$

ถ้าระบบประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล เป็นตำแหน่งเฉลี่ยของมวลทั้งหมด ซึ่งเขียนสูตรทั่วไปได้ ดังนี้

สมมติระบบหนึ่งประกอบด้วย n อนุภาค แต่ละอนุภาคมีมวล $m_1, m_2, \ldots, m_i \ldots, m_n$ อยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots \vec{r}_i \ldots \vec{r}_n$ ตามลำดับ



รูป 6.4 ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค

ให้ตำแหน่งของศูนย์กลางมวลอยู่ที่ $\vec{R}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
จะได้แต่ละองค์ประกอบของตำแหน่งศูนย์กลางมวลจะเป็น

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (6.2)$$

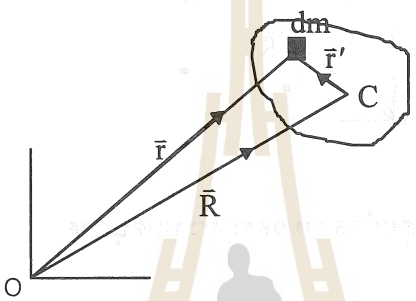
หรือ เขียน ตำแหน่งศูนย์กลางมวล ในรูปเวกเตอร์ เป็นสูตรเดียวสั้น ๆ ได้ดังนี้

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M} \qquad (6.3)$$

เมื่อ $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ เป็นมวลรวม

ในกรณีวัตถุแข็งเกร็ง คือ วัตถุที่มีมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อนนั้น คิดได้เช่นเดียวกับระบบอนุภาค เพราะวัตถุแข็งเกร็งก็คือระบบอนุภาคที่ระยะระหว่างแต่ละอนุภาคถูกตรึงให้คงที่นั่นเอง ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของก้อนวัตถุจึงกำหนดได้ด้วยวิธีเดียวกัน โดยแบ่งก้อนวัตถุออกเป็นส่วนเล็ก ๆ ให้แต่ละส่วนนั้นมีมวล dm อยู่ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ ใด ๆ เป็นเสมือนอนุภาคหนึ่ง ให้จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุอยู่ที่ $\vec{R}$ และให้ dm อยู่ห่างจุดศูนย์กลางมวล $\vec{r}'$ ดังรูป



รูป 6.5 ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง

ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็งจึงเหมือนกับตำแหน่งศุนย์กลางมวลระบบอนุภาคเพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมายผลบวกเป็นเครื่องหมายอินทิเกรต ดังนี้
องค์ประกอบของตำแหน่งศูนย์กลางมวล จะเป็น

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{\int dm}=\frac{\int x\,dm}{M}\quad,\quad \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}=\frac{\int y\,dm}{M}\quad,\quad \bar{z}=\frac{\int z\,dm}{\int dm}=\frac{\int z\,dm}{M}$$

ตำแหน่งศูนย์กลางมวลอยู่ที่

$$\vec{R}=\frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}=\frac{\int \vec{r}\,dm}{M} \qquad (6.4)$$

เมื่อ $M=\int dm$ เป็นมวลรวมทั้งก้อน

6.1.2 เซนทรอยด์

มวลของวัตถุนั้นอาจเขียนในเทอมของความหนาแน่นคูณกับปริมาตร หรือพื้นที่ หรือความยาวก็ได้ ถ้าวัตถุมีขนาดจะหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลได้โดยแบ่งวัตถุออกเป็นปริมาตรเล็ก ๆ dV มีมวล $dm = \sigma dV$ เมื่อ ρ เป็นความหนาแน่น คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แล้วอินทิเกรตตลอดปริมาตรของวัตถุ จะได้ตำแหน่งศูนย์กลางมวล ดังนี้

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{\int \rho dV}$$

เมื่อแยกองค์ประกอบจะเป็น

$$\overline{X} = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} \quad , \quad \overline{Y} = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV} \quad , \quad \overline{Z} = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV}$$

ในกรณีที่วัตถุมีลักษณะเป็นแผ่นบาง อาจจะแบ่งวัตถุเป็นพื้นที่ส่วนเล็ก ๆ ds มีมวล $dm = \sigma dV$ เมื่อ σ เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ แล้วอินทิเกรตตลอดพื้นที่ของแผ่น จะได้

$$\vec{R} = \frac{\int \sigma \vec{r} ds}{\int \sigma ds}$$

แยกองค์ประกอบได้เป็น

$$\overline{X} = \frac{\int \sigma x ds}{\int \sigma ds} \quad , \quad \overline{Y} = \frac{\int \sigma y ds}{\int \sigma ds} \quad , \quad \overline{Z} = \frac{\int \sigma z ds}{\sigma ds}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้าวัตถุมีลักษณะเป็นเส้น เราก็แบ่งวัตถุเป็นระยะสั้น ๆ มีความยาว $d\ell$ มีมวล $dm = \lambda d\ell$ เมื่อ λ เป็นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว แล้วอินทิเกรตตลอดความยาวของวัตถุได้

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$\bar{R}=\frac{\int \lambda \bar{r} d\ell}{\int \lambda d\ell}$$

แยกองค์ประกอบได้เป็น

$$\bar{X}=\frac{\int \lambda x d\ell}{\int \lambda d\ell} \quad , \quad \bar{Y}=\frac{\int \lambda y d\ell}{\int \lambda d\ell} \quad , \quad \bar{Z}=\frac{\int \lambda z d\ell}{\int \lambda d\ell}$$

ถ้าวัตถุมีมวลสม่ำเสมอตลอดก้อน ค่า ρ, σ, λ ในสมการข้างต้นเป็นค่าคงตัว ตัดกันไปได้ ทำให้สามารถหาตำแหน่งศูนย์กลางมวลของวัตถุได้โดยดูจากรูปลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียว ไม่ต้องคำนึงถึงความหนาแน่นหรือมวลอีกต่อไป

ตำแหน่ง เฉลี่ยที่หาจากลักษณะทางเรขาคณิตเพียงอย่างเดียวนี้เรียกว่า **เซนทรอยด์** (centroid) ซึ่ง มีทั้งเซนทรอยด์ของปริมาตร เซนทรอยด์ของพื้นที่ และเซนทรอยด์ของเส้น

วัตถุที่มีความหนาแน่นคงตัวตลอดก้อนตำแหน่งศูนย์กลางมวล และ เซนทรอยด์ อยู่ที่เดียวกัน

ให้ $\bar{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$ เป็นตำแหน่งเซนทรอยด์ จะหาได้จากสูตรดังนี้

ตำแหน่งเซนทรอยด์ของปริมาตร

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} dV}{\int dV} = \frac{\int \bar{r} dV}{V}$$

$$x_c = \frac{\int x dV}{V} \quad , \quad y_c = \frac{\int y dV}{V} \quad , \quad z_c = \frac{\int z dV}{V} \qquad (6.5)$$

เมื่อ $V = \int dV$ เป็นปริมาตรทั้งหมด

ตำแหน่งเซนทรอยด์ของพื้นที่

$$\bar{r}_c = \frac{\int \bar{r} ds}{\int ds} = \frac{\int \bar{r} ds}{S}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$x_c = \frac{\int x\,ds}{S} \quad , \qquad y_c = \frac{\int y\,ds}{S} \quad , \qquad z_c = \frac{\int z\,ds}{S} \qquad (6.6)$$

เมื่อ $S = \int ds$ เป็นพื้นที่ทั้งหมด

ตำแหน่งเซนทรอยด์ของเส้น

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r}\,d\ell}{\int d\ell} = \frac{\int \vec{r}\,d\ell}{L}$$

$$x_c = \frac{\int x\,d\ell}{L} \quad , \qquad y_c = \frac{\int y\,d\ell}{L} \quad , \qquad z_c = \frac{\int z\,d\ell}{L} \qquad (6.7)$$

เมื่อ $L = \int d\ell$ เป็นความยาวทั้งหมด

6.1.3 ความสมมาตรรอบจุดศูนย์กลางมวล

ในการคำนวณค่าต่าง ๆ ของระบบอนุภาค บางครั้งการบอกตำแหน่งของมวลที่ i ว่าห่างจากศูนย์กลางมวลเท่าใดจะสะดวกกว่าการบอกตำแหน่งโดยวัดจากจุดกำเนิดของแกนอ้างอิงตามที่ทำมาแล้ว ดังนั้น จึงควรพิจารณาดูว่า ถ้าวัดตำแหน่งของมวลย่อยจากตำแหน่งศูนย์กลางมวล ความสัมพันธ์ต่าง ๆ จะเป็นไปอย่างไร ดังนี้

ในระบบอนุภาค ดังรูป 6.4 สมมติระยะจากศูนย์กลางมวลถึงมวลที่ i เป็น $\vec{r}_i'$
ในก้อนวัตถุ ดังรูป 6.5 สมมติระยะจากศูนย์กลางมวลถึงมวล dm เป็น $\vec{r}'$

จากรูป 6.4 ระบบอนุภาค $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$ (6.8)

จากรูป 6.5 ก้อนวัตถุ $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$ (6.9)

แทนค่า $\vec{r}_i$ จากสมการ (6.8) ในสมการ (6.3)
และแทนค่า $\vec{r}$ จากสมการ (6.9) ในสมการ (6.4) จะได้

ระบบอนุภาค

$$M\vec{R} = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$= \sum m_i (\vec{R} + \vec{r}_i')$$

$$= \sum m_i \vec{R} + \sum m_i \vec{r}_i'$$

$$= M\vec{R} + \sum m_i \vec{r}_i'$$

$$\sum m_i \vec{r}_i' = 0 \qquad (6.10)$$

วัตถุเป็นก้อน

$$M\vec{R} = \int \vec{r} dm$$

$$= \int (\vec{R} + \vec{r}') dm$$

$$= \int \vec{R} dm + \int \vec{r}' dm$$

$$= M\vec{R} + \int \vec{r}' dm$$

$$\int \vec{r}' dm = 0 \qquad (6.11)$$

สมการ (6.10) และ (6.11) แสดงความสมมาตรของมวลรอบจุดศูนย์กลางมวล

ดังนั้น กรณีที่วัตถุมีความสมมาตร การหาจุดศูนย์กลางมวล จึงคิดได้ทันทีว่า จุดศูนย์กลางมวลจะต้องอยู่ในระนาบสมมาตร หรือ เส้นสมมาตรนั้น

กรณีที่วัตถุประกอบด้วยหลายส่วน และทราบศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วน จะหาศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งก้อนได้โดยคิดเหมือนระบบอนุภาคที่มีมวลเป็นจุดอยู่ที่ศูนย์กลางมวลของแต่ละส่วนนั้น

6.1.4 ความเร็วในพิกัดศูนย์กลางมวล

หาอนุพันธ์ของสมการ (6.8) และ สมการ (6.9) เทียบกับเวลาจะได้

สำหรับระบบอนุภาค $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i'$ (6.12)

เมื่อ $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \dot{\vec{r}}$ เป็นความเร็วของ m_i

$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$ เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$\vec{v}_i' = \frac{d\vec{v}_i'}{dt} = \dot{\vec{r}}'$ เป็นความเร็วของ m_i วัดเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล

สำหรับวัตถุเป็นก้อน $\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$ (6.13)

เมื่อ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ เป็นความเร็วของมวล dm

$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\vec{R}}$ เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}'$ เป็นความเร็วของมวล dm วัดเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล

หาอนุพันธ์ของสมการ (6.10) เทียบกับเวลาจะได้

$$\sum m_i \vec{v}_i' = 0 \qquad (6.14)$$

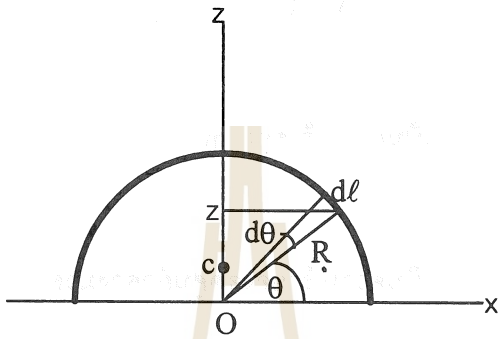
หาอนุพันธ์ของสมการ (6.11) เทียบกับเวลาจะได้

$$\int \vec{v}' dm = 0 \qquad (6.15)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สมการ (6.14) และ (6.15) แสดงว่าโมเมนตัมรวมของระบบ เมื่อวัดเทียบกับจุดศูนย์กลางมวล มีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 6.1 จงหาเซนทรอยด์ของลวดงอรูปครึ่งวงกลม



ให้ R เป็นรัศมีของครึ่งวงกลม

ถ้าตั้งแกนดังรูป ก็จะเห็นว่าลวดนี้มีความสมมาตรรอบแกน z ดังนั้นเซนทรอยด์ของลวดจะอยู่บนแกน z นี้ สิ่งที่ต้องการหาจึงเหลือเพียงว่า ตำแหน่งเซนทรอยด์นั้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางวงกลมไปเท่าใด

ให้เซนทรอยด์อยู่ที่ c ห่างจุด O ไปเป็นระยะ z_c

แบ่งลวดออกเป็นส่วนเล็ก ๆ ยาว $d\ell$ รับมุม $d\theta$

$$d\ell = Rd\theta$$

ตำแหน่งของส่วนเล็ก ๆ dl นี้อยู่ที่ $z = R\sin\theta$

ความยาวของลวดทั้งเส้น $L = \pi R$

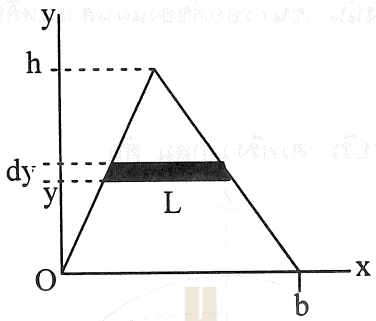
จาก $$z_c = \frac{\int z dl}{L}$$

แทนค่า $d\ell$, L และ z ลงไปจะได้

$$z_c = \frac{\int_0^{\pi}(R\sin\theta)Rd\theta}{\pi R} = -\frac{R}{\pi}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{R}{\pi}(\cos\pi-\cos 0) = -\frac{R}{\pi}(-1-1)$$

$$z_c = \frac{2R}{\pi}$$

ตัวอย่าง 6.2 จงหาเซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยม



ให้สามเหลี่ยมมีฐานยาว b สูง h วางให้ฐานอยู่บนแกน x ดังรูป ที่ตำแหน่ง y ใด ๆ แบ่งพื้นที่ออกเป็นแถบเล็ก ๆ ยาว L หนา dy

จากสามเหลี่ยมคล้าย $$\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$L = \frac{b(h-y)}{h}$$

พื้นที่แถบเล็ก ๆ นั้น $$dA = L\,dy$$

พื้นที่แผ่นสามเหลี่ยม $$A = \frac{bh}{2}$$

ให้ตำแหน่งเซนทรอยด์อยู่ห่างฐานเป็นระยะ y_c

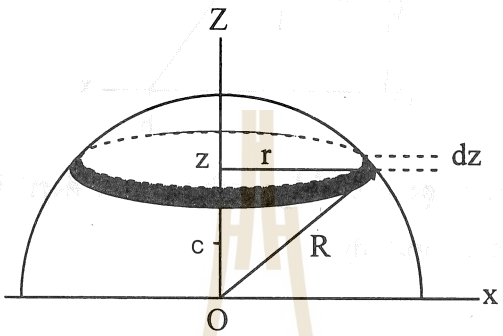
$$y_c = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\int_0^h 2y\left[b(h-y)\right]dy}{bh^2}$$

$$= \int_0^h \left(\frac{2y}{h} - \frac{2y^2}{h^2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{h} - \frac{2y^3}{3h^2}\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{3}$$

เซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยมอยู่สูงจากฐานเป็นระยะเศษหนึ่งส่วนสามของความสูงเสมอไม่ว่าจะใช้ฐานและความสูงคู่ใดก็ตาม ดังนั้น เซนทรอยด์ของแผ่นสามเหลี่ยมจึงอยู่ที่จุดที่เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมตัดกันนั่นเอง

ตัวอย่าง 6.3 จงหาเซนทรอยด์ของปริมาตรครึ่งวงกลม ตัน



สมมติรัศมีครึ่งทรงกลมเป็น R ให้เซนทรอยด์ อยู่ที่ c ห่างศูนย์กลางเป็นระยะ z_c ที่ตำแหน่ง z ใด ๆ แบ่งปริมาตรออกเป็นแผ่นวงกลมบางตั้งฉากกับแกน z หนา dz

รัศมีของแผ่นวงกลมมีค่า $r = \sqrt{R^2 - z^2}$

ปริมาตรของแผ่น $dv = \pi r^2 dz$

$= \pi(R^2 - z^2)dz$

ปริมาตรของครึ่งทรงกลม $V = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{2}{3}\pi R^3$

จาก $z_C = \frac{\int z dv}{V}$

$= \frac{3}{2R^3}\int_0^R z(R^2 - z^2)dz \quad = \frac{3}{2R^3}\left(\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^R$

$z_c = \frac{3R}{8}$

6.2 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

6.2.1 โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค และ หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

สมมติระบบประกอบด้วย n อนุภาค มีมวล m_1 , m_2, ...m_i ,...m_n
แต่ละอนุภาคมีความเร็ว $\vec{v}_1, \vec{v}_2 ... \vec{v}_i ... \vec{v}_n$ ตามลำดับ
โมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาคที่ i ใด ๆ $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$
โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ $(\vec{p})$ คือ ผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของแต่ละอนุภาค นั่นคือ

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \qquad (6.16)$$

เราอาจหาโมเมนตัมของระบบในเทอมของตำแหน่งและความเร็วของศูนย์กลางมวลก็ได้ ดังนี้
แทนค่า $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_i'$ จากสมการ (6.12) ในสมการ (6.16)

$$\vec{p} = \sum m_i (\vec{V} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum m_i \vec{V} + \sum m_i \vec{v}_i'$$

เทอมหลังมีค่าเป็นศูนย์ตามสมการ (6.14) ดังนั้น

$$\vec{p} = M\vec{V} \qquad (6.17)$$

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลรวมของระบบกับความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การหาโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคนั้น นอกจากหาได้โดยการรวมโมเมนตัมเชิงเส้นของทุกอนุภาค ตามสมการ (6.16) แล้ว ก็อาจหาจากโมเมนตัมเชิงเส้นของมวลรวมและความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลดังสมการ (6.17) ได้ด้วย นั่นคือ

$$\vec{p} = M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$$

ต่อไปจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ จากกฎข้อสองของนิวตัน อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมของอนุภาคแปรตามแรงภายนอกที่กระทำ สำหรับระบบอนุภาค แรงกระทำกับระบบมีสองอย่างคือ นอกจากแรงภายนอกที่กระทำกับแต่ละอนุภาคแล้ว ยังมี แรงภายใน คือแรงโน้มถ่วงที่แต่ละอนุภาค กระทำต่อกันด้วย เราจะมาดูว่าแรงภายในนั้นมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของระบบหรือไม่

สมมติมี มีแรงภายนอก $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ กระทำกับแต่ละอนุภาค ตามลำดับ

แรงภายในคือแรงโน้มถ่วงที่แต่ละอนุภาคกระทำต่อกัน ถ้าคิดที่อนุภาคเดียวสมมติเป็นอนุภาคที่ i แรงที่อนุภาคที่ i ถูกกระทำโดยอนุภาคอื่นสมมติอนุภาคที่ j ให้เป็น $\vec{F}_{ij}$ เมื่อ j มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n แต่ $j \neq i$

ดังนั้น แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคที่ i รวมเป็น $\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$

จากกฎข้อสองของนิวตัน สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่ i จะเป็น

$$\vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}_i \qquad (6.18)$$

เมื่อ $\vec{F}_i$ เป็นแรงภายนอกที่กระทำกับอนุภาคที่ i

และ $\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$ เป็นผลรวมของแรงภายในที่อนุภาคอื่น ทุกอนุภาคกระทำกับอนุภาคที่ i

ดังนั้น ถ้ารวมแรงที่กระทำกับทั้งระบบของ n อนุภาค จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \qquad (6.19)$$

เทอมกลางของสมการ (6.19) มีเครื่องหมายผลรวมซ้อนกันสองอันหมายถึงการรวมทุกแรงคือทั้ง $\vec{F}_{ij}$ และ $\vec{F}_{ji}$ ซึ่งแรงทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน ทิศทางตรงข้าม

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

เมื่อรวมแรงภายในทั้งหมดแล้วจึงมีค่าเป็นศูนย์ สมการ (6.19) จึงเหลือเพียง

$$\sum \vec{F}_i = \sum \dot{\vec{p}}$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} \qquad (6.20)$$

$$\vec{F} = M\vec{A}$$

เมื่อ $\vec{F}$ คือแรงลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำกับอนุภาคในระบบ
และ $\vec{A}$ คือความเร่งของศูนย์กลางมวล นั่นคือ

ความเร่งของศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค คิดได้เหมือนกับอนุภาคเดี่ยวที่มีมวลเท่ากับมวลรวมของทั้งระบบเมื่อถูกกระทำโดยแรงภายนอกรวม

กรณีพิเศษ เมื่อแรงภายนอกผลลัพธ์ $\vec{F}$ เป็นศูนย์ จะได้ $\vec{A} = 0$ และ $\vec{V} =$ ค่าคงตัวโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ $\vec{p}$ มีค่าคงตัว

เมื่อ $\vec{F} = 0$, $M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i =$ ค่าคงตัว (6.21)

นั่นคือ

เมื่อแรงภายนอกที่กระทำกับระบบรวมมีค่าเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบก็มีค่าคงตัว

เป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

การประยุกต์หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น

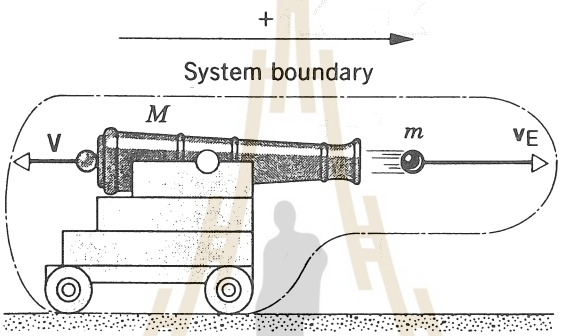
ตัวอย่าง 6.4 ปืนใหญ่มีมวล M = 1300 กิโลกรัม ยิงลูกปืนมวล 72 กิโลกรัม ในแนวราบด้วยอัตราเร็วปลายกระบอก v = 55 เมตร/วินาที ปืนใหญ่ถูกติดตั้งให้ถอยกลับได้อย่างอิสระ ถามว่า

(a) อัตราเร็ว V ของปืนใหญ่ในการถอยกลับเทียบกับผิวโลก

(b) อัตราเร็วเริ่มต้น v_E ของลูกปืนเทียบกับโลก

วิธีทำ

(a)



เราเลือกระบบที่ประกอบด้วยปืนใหญ่และลูกปืนใหญ่ ทำให้แรงดินปืนที่ขับลูกปืนออกเป็นแรงภายใน แรงภายนอกในแนวราบมีค่าเป็นศูนย์ แรงในแนวดิ่งไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวราบ โมเมนตัมคงตัว

$$p_i = p_f$$

โมเมนตัวรวม $p_i = 0$ ทุกอย่างอยู่นิ่งก่อนการยิง โมเมนตัมรวมหลังยิงมีค่าเท่ากับโมเมนตัมของปืนใหญ่รวมกับโมเมนตัมลูกปืน โดย v เป็นอัตราเร็วของลูกปืนเทียบกับกระบอกปืน

$$p_f = MV + m\left(v_E\right) = MV + m(v + V)$$

$$\therefore \quad V = -\frac{mv}{M+m} = \frac{(72\ \text{kg})(55\ \text{m/s})}{1300\ \text{kg} + 72\ \text{kg}} = -2.9\ \text{m/s}$$

(b) อัตราเร็วของลูกปืนเทียบกับโลก

$$v_E = v + V = 55\ \text{m/s} + (-2.9\ \text{m/s}) = 52.1\ \text{m/s}$$

ตัวอย่าง 6.5 มวล m หยุดนิ่งบนยอดพื้นเอียงมวล M ซึ่งหยุดนิ่งบนพื้นโต๊ะ ถ้าพื้นทุกพื้นไม่มีความเสียดทาน ถ้าระบบเริ่มจากหยุดนิ่งที่จุด P ของก้อนมวลอยู่สูงจากพื้นโต๊ะ h ดังแสดงในรูป จงคำนวณหาอัตราเร็วของพื้นเอียง ณ จุดที่จุด P สัมผัสกับพื้นโต๊ะพอดี

วิธีทำ โมเมนตัมคงตัวตามแนวแกน x

$$0 = (m+M)V - mv\cos\alpha$$

$$(m+M)V = mv\cos\alpha \qquad (1)$$

จากสมการกฎข้อ 2 ของนิวตัน $\Sigma F = ma$ (ตามแนวพื้นเอียง)

$$mg\sin\alpha = m\frac{d}{dt}(v - V\cos\alpha)$$

อินทิเกรต ; $$v - V\cos\alpha = (g\sin\alpha)t \qquad (2)$$

แทนค่า (1) ใน (2) เพื่อหา V ;

$$\frac{(m+M)V}{m\cos\alpha} - V\cos\alpha = (g\sin\alpha)\,t$$

$$\frac{V}{\left(\frac{m}{m+M}\right)\cos\alpha} - V\cos\alpha = (g\sin\alpha)\,t$$

ให้ $$u = \frac{m}{m+M}\ ;$$

$$V\left(\frac{1}{u\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = (g\sin\alpha)\,t$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$V\left(\frac{1-u\cos^2\alpha}{u\cos\alpha}\right) = (g\sin\alpha)\ t$$

$$V = \left(\frac{u\cos\alpha}{1-u\cos^2\alpha}\right)(g\sin\alpha)\ t$$

ในเทอมของ h; $\sin\alpha = \frac{h}{s}$

$$s = v_{\circ}\ /\ t + \frac{1}{2}at^2$$

$$-s = -\frac{1}{2}\left(\ g\sin\alpha\ \right)t^2$$

$$\frac{2s}{g\sin\alpha} = t^2$$

หรือ $$\frac{2h}{g\sin^2\alpha} = t^2$$

$$\therefore\ \ t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

แทนค่า

$$V = \left(\frac{u\cos\alpha}{1-u\cos^2\alpha}\right)g\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$$

$$= \left(\frac{u\cos\alpha}{1-u\cos^2\alpha}\right)\sqrt{2gh}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.2.2 พลังงานจลน์และหลักการอนุรักษ์พลังงานของระบบอนุภาค

สมมติอนุภาคที่ i มีมวล m_i มีความเร็ว $\bar{v}_i$ พลังงานจลน์ของอนุภาคที่ i มีค่า

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

พลังงานจลน์ของระบบอนุภาค (E_k) มีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์ของแต่ละอนุภาคในระบบ

พลังงานจลน์รวม
$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i . \bar{v}_i) \qquad (6.22)$$

$\bar{v}_i$ ในสมการ (6.22) เป็นความเร็วของมวลที่ i วัดเทียบกับแกนอ้างอิง

แต่ในบางกรณี การวัดความเร็วของแต่ละอนุภาคสัมพัทธ์กับจุดศูนย์กลางมวลของระบบจะทำได้สะดวกกว่า การวัดเทียบกับแกนอ้างอิงตามปกติ ดังนั้น เราอาจแสดงค่าพลังงานจลน์ในเทอมของความเร็ววัตถุสัมพัทธ์กับศูนย์กลางมวลก็ได้ ดังนี้

แทนค่า $\bar{v}_i = \bar{V} + \bar{v}'_i$ จากสมการ (6.12) ลงในสมการ (6.22) จะได้

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{V} + \bar{v}'_i) \cdot (\bar{V} + \bar{v}'_i)$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\bar{V} . \bar{V} + 2\bar{v}'_i . \bar{V} + \bar{v}'_i . \bar{v}'_i)$$

แต่จากสมการ (6.14) เราทราบว่า $\sum m_i \bar{v}'_i = 0$ ดังนั้นเทอมกลางจึงเป็นศูนย์

ได้
$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) V^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M V^2 + \sum \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) \qquad (6.23)$$

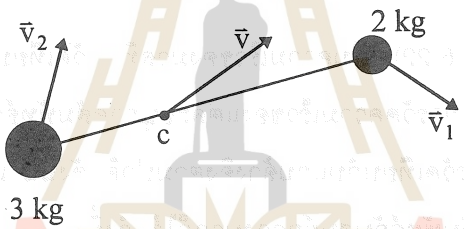
นั่นคือ **พลังงานจลน์ของระบบอนุภาคมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่เชิงเส้นของศูนย์กลางมวล กับ พลังงานจลน์ของแต่ละอนุภาคที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับศูนย์กลางมวล**

การแยกพลังงานจลน์ออกเป็นสองเทอมนี้ทำให้สะดวกในการคำนวณปัญหาบางอย่าง เช่น ในฟิสิกส์ระดับโมเลกุล โมเลกุลของสารมีพลังงานจลน์ประกอบด้วยส่วนที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของทั้งโมเลกุล และจากการสั่นภายในโมเลกุล เป็นต้น

ตัวอย่าง 6.6 ระบบประกอบด้วยสองอนุภาค มวล 2 กิโลกรัม ความเร็ว $\vec{v}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ เมตร/วินาที และมวล 3 กิโลกรัม ความเร็ว $\vec{v}_2 = \hat{i} + 6\hat{j}$ เมตร/วินาที จงหา

(a) ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล (b) โมเมนตัมของระบบ

วิธีทำ



(a) จาก $M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$

$$(2+3)\vec{V} = 2(2\hat{i} - 3\hat{j}) + 3(\hat{i} + 6\hat{j})$$

$$\vec{V} = \frac{7}{5}\hat{i} + \frac{12}{5}\hat{j}$$

ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล $\vec{V} = 1.4\hat{i} + 2.4\hat{j}$ m/s

(b) โมเมนตัมของระบบ $\vec{p} = M\vec{V} = 5(1.4\hat{i} + 2.4\hat{j})$

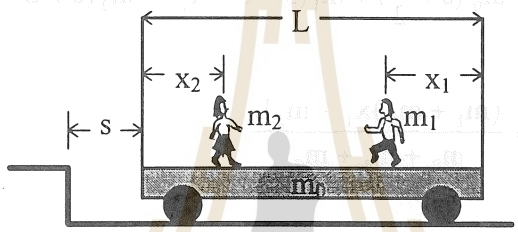
$7\hat{i} + 12\hat{j}$ kg-m/s

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 6.7 ผู้ชายมวล m_1 และผู้หญิงมวล m_2 ยืนอยู่ที่ปลายสุดของรถมวล m_0 ด้านตรงข้ามกัน ถ้ารถนี้ยาว L อยู่บนรางเกลี้ยง ดังรูป เมื่อเริ่มต้นรถอยู่ติดฝาผนัง (S = 0) ต่อมา ทั้งสองคนเดินเข้าหากัน ให้การกระจัดของทั้งสองคนสัมพัทธ์กับรถเป็น x_1 และ x_2 ตามลำดับ

(a) เมื่อคนทั้งสองพบกัน จงหาระยะที่รถเลื่อนออกจากฝา (s) ในเทอมของ x_1

(b) ถ้าผู้ชายวิ่งด้วยความเร็ว $\dot{x}_1$ และผู้หญิงเดินด้วยความเร็ว $\dot{x}_2$ สัมพัทธ์กับพื้นรถ จงหาความเร็วที่รถเลื่อนออกจากฝา ($\dot{s}$)



วิธีทำ

(a) ระบบคือ มวล m_0, m_1, m_2 ตั้งแกนอ้างอิงที่ฝาผนัง

เมื่อเริ่มต้น

มวล m_0 อยู่ที่ตำแหน่ง L/2

มวล m_1 อยู่ที่ตำแหน่ง L

มวล m_2 อยู่ที่ตำแหน่ง 0

ให้จุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่ตำแหน่ง $\overline{X}$

จาก $$M\overline{X} = \sum m_i x_i$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)\overline{X} = m_0 \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot L + m_2 \cdot 0 \qquad (1)$$

เมื่อคนทั้งสองพบกัน

ให้รถเลื่อนจากฝาเป็นระยะ s

มวล m_0 อยู่ที่ตำแหน่ง s + L/2

มวล m_1 อยู่ที่ตำแหน่ง $s + L - x_1$

มวล m_2 อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกันกับมวล m_1 คือ $s + L - x_1$

สำนักวิชาเทคโนโลยีสุรนารี

ไม่มีแรงภายนอกกระทำกับระบบ ดังนั้น จุดศูนย์กลางมวลของระบบอยู่ที่ $\overline{X}$ ตามเดิม

จาก $$\sum m_i \overline{X} = \sum m_i x_i$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)\overline{X} = m_0 (s + \frac{L}{2}) + m_1(s + L - x_1) + m_2(s + L - x_1) \qquad (2)$$

ทางซ้ายของสมการ (1) และ (2) เท่ากัน ดังนั้น ทางขวาเท่ากันด้วย

$$m_0 \frac{L}{2} + m_1 L = m_0 (s + \frac{L}{2}) + m_1(s + L - x_1) + m_2(s + L - x_1)$$

$$s = \frac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}$$

(b) รถ มวล m_0 ความเร็วของ $\dot{s}$

ผู้ชายมวล m_1 มีความเร็ว $\dot{s} - \dot{x}_1$

ผู้หญิงมวล m_2 มีความเร็ว $\dot{s} + \dot{x}_2$

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำกับระบบ โมเมนตัมของระบบจึงคงตัว กรณีนี้ เดิมมีโมเมนตัมรวมเป็นศูนย์ ดังนั้น เมื่อเคลื่อนที่แล้ว โมเมนตัมรวมก็ยังคงเป็นศูนย์ตามเดิม นั่นคือ

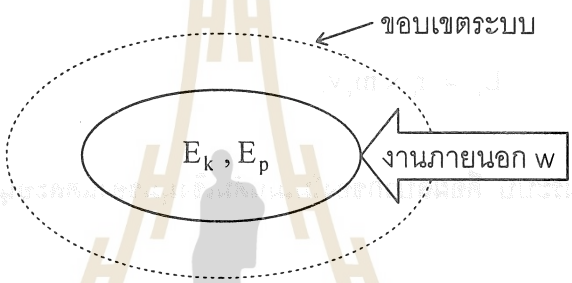
$$m_0 \dot{s} + m_1(\dot{s} - \dot{x}_1) + m_2(\dot{s} + \dot{x}_2) = 0$$

$$\dot{s} = \frac{m_1 \dot{x}_1 - m_2 \dot{x}_2}{m_0 + m_1 + m_2}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

พลังงานอนุรักษ์ของระบบอนุภาค

ระบบอนุภาคหรือระบบก้อนวัตถุประกอบด้วยอนุภาคหรือก้อนวัตถุต่างๆ ที่ออกแรงกระทำต่อกันในระบบ พลังงานของระบบอนุรักษ์จะแปรรูปอยู่ภายในระบบ โดยคงค่าพลังงานรวมไว้ อย่างไรก็ตามกฎการคงตัวของพลังงานจะใช้ได้อย่างถูกต้อง ถ้ามีการแบ่งชนิดพลังงานอย่างถูกต้อง พลังงานภายในระบบหรืองานจากสิ่งแวดล้อมกระทำต่อระบบ รูป 6.6 แสดงขอบเขตของระบบ แยกออกจากสิ่งแวดล้อม



รูป 6.6 ระบบพลังงานอนุรักษ์ มีการถ่ายเทพลังงานจากภายนอกระบบหรือสิ่งแวดล้อม

งานจากสิ่งแวดล้อม W นำเข้าระบบ ทำให้ระบบมีค่าพลังงานกลรวมเพิ่มขึ้น งานนำเข้ามีค่าเป็นบวก งานที่นำออกจากระบบมีผลให้พลังงานรวมมีค่าลดลง งานนำออกจากระบบมีค่าเป็นลบ ถ้างานจากภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ ระบบเป็นระบบแยกเดี่ยว พลังงานรวมของระบบไม่เปลี่ยนแปลง สรุปเป็นสมการงาน - พลังงานสำหรับระบบ

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k \qquad (6.24)$$

โดย W เป็นงานของแรงภายนอกทั้งหมด ยกเว้นแรงอนุรักษ์ที่แปรรูปเป็นพลังงานศักย์ในรูปต่างๆ

6.2.3 โมเมนตัมเชิงมุมของระบบและหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

จากคำจำกัดความ โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาครอบจุดหมุนใด มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นรอบจุดหมุนนั้น

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

ดังนั้น โมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่ i รอบจุดกำเนิดของแกนพิกัดจึงมีค่า

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบ คือผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \qquad (6.25)$$

ในกรณีที่ทราบตำแหน่งและความเร็วของอนุภาคโดยวัดสัมพัทธ์กับตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล จะหาค่า $\vec{L}$ ได้โดยแทนค่า $\vec{r}_i$ จากสมการ (6.8) และ $\vec{v}_i$ จาก (6.12) ลงในสมการ (6.25) ดังนี้

$$\vec{L} = \sum m_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times (\vec{V} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum m_i (\vec{R} \times \vec{V} + \vec{r}_i' \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times \vec{v}_i')$$

$$= \vec{R} \times \underbrace{\sum m_i}_{M} \vec{V} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i'}_{0} \times \vec{V} + \vec{R} \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{0} + \sum (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

เทอมกลางสองเทอมนั้น มีค่าผลบวกในวงเล็บเป็นศูนย์ตามสมการ (6.10) และ (6.14) ดังนั้นจะเหลือ

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \qquad (6.26)$$

$\vec{L}$ = $\vec{L}$ ของศูนย์กลางมวล + $\vec{L}$ รอบศูนย์กลางมวล

จากสมการ (6.26) จะเห็นว่า **โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาครอบจุดใด มีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของจุดศูนย์กลางมวลรอบจุดนั้น กับ โมเมนตัมเชิงมุม รอบจุดศูนย์กลางมวล**

ต่อไปจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ

อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะหาได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ (6.26) เทียบกับเวลา ซึ่งจะได้

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$= \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

$$= 0 + \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{\Gamma}_i \qquad = \vec{\Gamma}$$

เมื่อ $\vec{\Gamma}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ เป็นโมเมนต์ของแรง หรือ ทอร์ก ที่กระทำกับอนุภาคที่ i

และ $\vec{\Gamma} = \sum \vec{\Gamma}_i$ เป็นทอร์กผลลัพธ์ที่กระทำกับทั้งระบบ

จึงเขียนได้ว่า $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \qquad (6.27)$$

อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของระบบ มีค่าเท่ากับ ผลรวมของทอร์กของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ

กรณีพิเศษเมื่อทอร์กรวม $\vec{\Gamma}$ เป็นศูนย์ $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ จะได้ $\vec{L}$ เป็นค่าคงตัว นั่นคือ

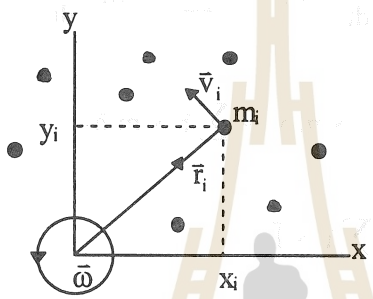
เมื่อทอร์กรวมที่กระทำกับระบบเป็นศูนย์ โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีค่าคงตัวเป็นหลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.2.4 โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนหมุนที่ตรึงอยู่กับที่

สมมติวัตถุหมุนรอบแกน z (มีทิศออกจากหน้ากระดาษ) ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω เรเดียน/วินาที ซึ่งเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

ก. ถ้าคิดว่าวัตถุเป็นระบบอนุภาค ที่ตรึงติดกัน



รูป 6.6 การหมุนของระบบอนุภาครอบแกน Z

สมมติระบบประกอบด้วยอนุภาคมวล $m_1, m_2 \ldots m_n$

ให้อนุภาคที่ i มีมวล m_i อยู่ที่ตำแหน่ง (x_i, y_i, z_i)

มวล m_i เคลื่อนที่รอบแกน z เป็นวงกลมรัศมี $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$

ถ้าอนุภาคตรึงติดกัน ทุกอนุภาคจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω เท่ากัน ไม่ว่า m_i จะอยู่ตรงส่วนใดของวัตถุ แต่ความเร็วเชิงเส้นในแนวเส้นรอบวง $(\vec{v}_i)$ จะมีค่าต่างกันไป ขึ้นกับรัศมี ตามสมการ

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad (6.28)$$

จากรูป จะเห็นว่า $\vec{\omega}$ ตั้งฉากกับ $\vec{r}_i$ ดังนั้น ขนาดความเร็วเชิงเส้นของอนุภาคที่ i จึงมีค่า

$$v_i = \omega r_i$$

จากคำจำกัดความ ค่าโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่ i คือ

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

ในกรณีนี้ $\vec{r}_i$ และ $\vec{v}_i$ ตั้งฉากกัน ดังนั้น

ขนาดโมเมนตัมเชิงมุม $L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$

ทิศของโมเมนตัมเชิงมุมไปทางแกน z เช่นเดียวกับความเร็วเชิงมุม จึงเขียนโมเมนตัมเชิงมุมของอนุภาคที่ i ในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega}$$

โมเมนตัมเชิงมุมรอบแกน z รวมทั้งระบบ $(\vec{L}_z)$ คือ ผลรวมของโมเมนตัมเชิงมุมของแต่ละอนุภาค

$$\vec{L}_z = \sum \vec{L}_i$$

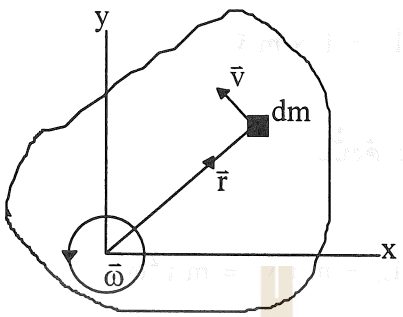
$$= \sum m_i r_i^2 \omega \hat{k}$$

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega} \qquad (6.29)$$

เมื่อ $$I_z = \sum m_i r_i^2 \qquad (6.30)$$

ปริมาณ I_z นี้ เรียกว่า โมเมนต์ความเฉื่อย (moment of inertia) ของระบบรอบแกนหมุน z

ข. ถ้าวัตถุมีมวลต่อเนื่องเป็นก้อน



รูป 6.8 การหมุนของก้อนมวลรอบแกน z

ให้ก้อนวัตถุแข็งเกร็ง มวล M หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$$

แบ่งวัตถุเป็นส่วนเล็ก ๆ มวล dm อยู่ห่างแกนหมุน z เป็นระยะ r
มวล dm นี้ไม่ว่าจะอยู่ตรงส่วนใดของก้อนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ด้วยความเร็วเชิงมุม ω เท่ากัน แต่ความเร็วตามเส้นรอบวง $\vec{v}$ จะขึ้นกับรัศมี $\vec{r}$ ดังสมการ

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$v = \omega r$$

ขนาดโมเมนตัมเชิงเส้นของมวล dm

$$dp = vdm = \omega rdm$$ มีทิศไปตามเส้นรอบวง

โมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z, $d\vec{L}_z = \vec{r} \times d\vec{p}$

ขนาดโมเมนตัมเชิงมุมของมวล dm รอบแกน z $dL_z = rdp = \omega r^2 dm$
มีทิศไปทางแกน z

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุทั้งก้อน รอบแกน z, $L_z = \omega \int r^2 dm$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$\vec{L}_z = I_z\vec{\omega} \tag{6.31}$$

$$I_z = \int r^2 dm \tag{6.32}$$

เมื่อ I_z คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกน z

สมการ (6.31), (6.32) เหมือนกับสมการ (6.29), (6.30) การใส่ตัวห้อย z ไว้ เพื่อบอกว่าวัตถุหมุนรอบแกน z

นักศึกษาควรสังเกตว่า โมเมนต์ความเฉื่อย และโมเมนตัมเชิงมุมนั้นต้องบอกแกนหมุน เพราะถ้าต่างแกนหมุนก็จะมีค่าต่างกันไป สำหรับความสัมพันธ์ในสมการ (6.29) และ (6.31) นั้น ทั้ง L และ I จะต้องรอบแกนเดียวกัน

6.2.5 อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุหมุนรอบแกนตรึง

ถ้ามีทอร์กภายนอก $\vec{\Gamma}$ มากระทำกับวัตถุ โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุจะเปลี่ยนไปตามสมการ

$$\left.\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \\ \vec{\Gamma} &= I\frac{d\vec{\omega}}{dt} \\ \vec{\Gamma} &= I\alpha \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

เมื่อ $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ เป็นความเร่งเชิงมุมของวัตถุ

หมายความว่า เมื่อมีทอร์กมากระทำ วัตถุจะหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม

สมการ (6.33) นี้มีลักษณะเดียวกันกับกฎข้อที่สองของนิวตันในการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.2.6 พลังงานจลน์ของการหมุน

ก. ถ้าระบบเป็นอนุภาคที่ตรึงติดกัน หมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω
ความเร็วเชิงเส้นของอนุภาค i $\quad v_i = \omega r_i$

พลังงานจลน์ของอนุภาค i $\quad E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

พลังงานรวมของระบบ $\quad E_k = \sum E_{k,i} = \frac{1}{2} (\sum m_i r_i^2) \omega^2$

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6.34\ a)$$

ข. ถ้าระบบเป็นมวลต่อเนื่องกันเป็นก้อนหมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω แบ่งวัตถุเป็นส่วนเล็ก ๆ มวล dm อยู่ห่างแกนหมุน r

มวล dm มีความเร็วตามเส้นรอบวง $\quad v = \omega r$

พลังงานจลน์ของมวล dm มีค่า $\quad dE_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$

พลังงานจลน์ของวัตถุทั้งก้อน $\quad E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm$

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (6.34\ b)$$

สมการ (6.34) นี้มีรูปแบบคล้ายพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่เชิงเส้น คือ

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

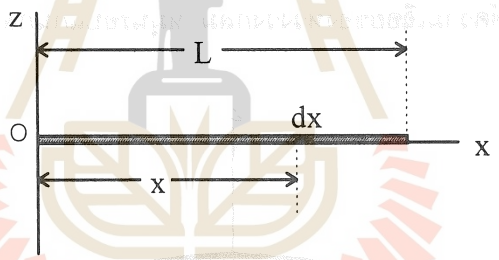
6.2.7 การคำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย

ในการคำนวณค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนั้น ทำได้โดยแบ่งมวลออกเป็นส่วนเล็ก ๆ dm ซึ่งอาจจะทำให้อยู่ในรูป ปริมาตร พื้นที่ ความยาว ได้ตามลักษณะของวัตถุ

ในกรณีที่วัตถุประกอบด้วยหลายส่วน และทราบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละส่วนรอบแกนแกนหนึ่งเป็น $I_1, I_2, \ldots$ จะหาโมเมนต์ความเฉื่อยรวมรอบแกนเดียวกัน ได้ดังนี้

$$I = I_1 + I_2 + \ldots \tag{6.35}$$

ตัวอย่าง 6.8 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของเส้นลวดสม่ำเสมอมวล m ยาว L เมื่อ (a) แกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและอยู่ที่ปลายแท่ง



วิธีทำ

ให้ความหนาแน่นของแท่งมีค่า λ ต่อหน่วยความยาว $\lambda = \frac{m}{L}$

ให้แกน z เป็นแกนหมุน

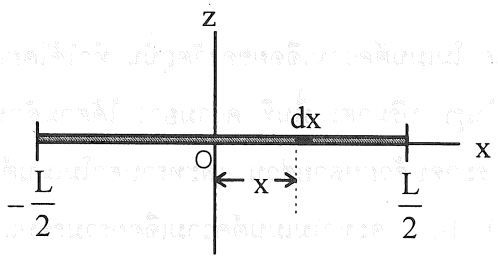
แบ่งแท่งวัตถุออกเป็นส่วนเล็กๆ ยาว dx อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ x

มวลของส่วนที่ยาว dx มีค่า $dm = \lambda dx$

$$I = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_0^L$$

$$I = \frac{\lambda L^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2$$

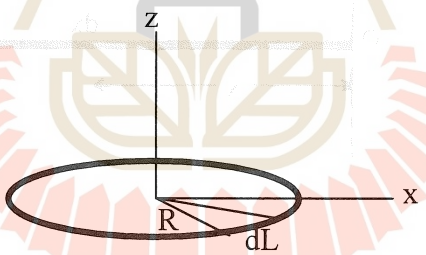
(b) เมื่อแกนหมุนตั้งฉากกับแท่งและผ่านจุดศูนย์กลางแท่ง



$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \lambda dx = \lambda \frac{x^3}{3}\Big|_{L/2}^{L/2}$$

$$I = \frac{1}{12}\lambda L^3 = \frac{1}{12}mL^3$$

ตัวอย่าง 6.9 โมเมนต์ความเฉื่อยของห่วงวงกลม หมุนรอบแกนกลางตั้งฉากกับระนาบวงกลม



ห่วงวงกลม รัศมี R หมุนรอบแกน z

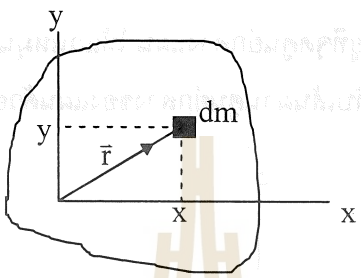
แบ่งวัตถุออกเป็นส่วนเล็ก ๆ ยาว dL มีมวล dm

แต่ละส่วนอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ R เท่ากันหมดทุกส่วน ดังนั้น

$$I_z = \int R^2 dm = MR^2$$

6.2.8 ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก

พิจารณาวัตถุที่เป็นแผ่นแบนรูปร่างใด ๆ



รูป 6.9 โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นแบนรอบแกนตั้งฉากกับแผ่น

ตั้งแกนให้แผ่นวัตถุอยู่ในระนาบ xy และให้วัตถุหมุนรอบแกน z
จะหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z ได้ดังนี้

$$I_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

$\int x^2 dm$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน y

$\int y^2 dm$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวัตถุรอบแกน x

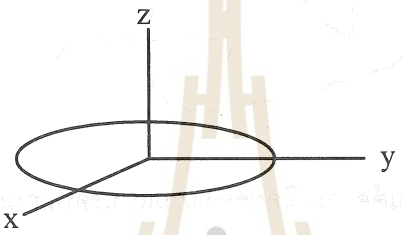
ดังนั้น
$$I_z = I_x + I_y \qquad (6.36)$$

สมการ (6.36) เป็นทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก หมายความว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นแบนรอบแกนที่ตั้งฉากกับแผ่น มีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนสองแกนใด ๆ ที่ตั้งฉากกันและอยู่ในระนาบของแผ่น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนกลางตั้งฉากกับแผ่นมีค่า $I = \frac{mR^2}{2}$ ซึ่งหาได้จากการอินทิเกรตโดยไม่ยากนัก แต่ถ้าให้แผ่นหมุนรอบเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่น การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนนี้ โดยการอินทิเกรตโดยตรงจะยากมาก อย่างไรก็ตาม ถ้าใช้ทฤษฎีแกนตั้งฉาก ก็จะทำได้โดยง่าย ดังนี้

ตั้งแกนพิกัด ให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางแผ่น ให้แกนหมุน z ตั้งฉากกับแผ่น แกน x,y จะอยู่บนแผ่น และขนานกับเส้นผ่านศูนย์กลางของแผ่นด้วย



จะเห็นว่าการหมุนรอบแกน x และหมุนรอบแกน y นั้น มีลักษณะเดียวกัน นั่นคือ

$$I_x = I_y$$

จากทฤษฎีแกนตั้งฉาก $I_z = I_x + I_y$

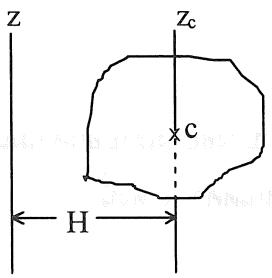
ดังนั้น $I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4}$

โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมแบนรอบเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่า $\frac{mR^2}{4}$

6.2.9 ทฤษฎีบทแกนขนาน

ถ้าทราบโมเมนต์ความเฉื่อย ของวัตถุรอบแกนหมุนใด ๆ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น อาจพิสูจน์ได้ว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนั้นรอบแกนอื่น ที่ขนานกับแกนเดิมมีค่าเท่ากับโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนเดิมที่ ผ่านจุดศูนย์กลางมวลบวกกับผลคูณของมวลกับกำลังสองของระยะห่างระหว่างแกนทั้งสอง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



ให้ c เป็นศูนย์กลางมวลของวัตถุก้อนหนึ่งซึ่งมีมวล m

ให้ z_c เป็นแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

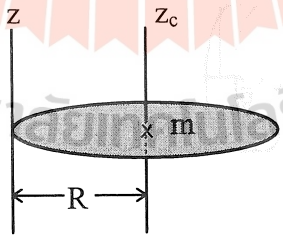
ให้ I_c เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z_c

ถ้าเปลี่ยนแกนหมุนไปเป็นแกน z ซึ่งขนานกับแกน z_c อยู่ห่างออกไปเป็นระยะ H

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนี้รอบแกน z มีค่า

$$I_z = I_c + mH^2 \qquad (6.37)$$

ตัวอย่างประโยชน์ของทฤษฎีแกนขนาน เช่น เมื่อทราบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นวงกลมรอบแกนตั้งฉากกับแผ่น ที่ผ่านจุดศูนย์กลางแผ่น (แกน z_c) มีค่า $I_c = \frac{mR^2}{2}$ ถ้าต้องการให้แผ่นวงกลมหมุนรอบแกนตั้งฉากกับแผ่นผ่านขอบแผ่น คือหมุนรอบแกน z จะได้



$$I_z = I_c + mH^2$$

$$I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$$

6.2.10 รัศมีไจเรชัน

เพื่อความสะดวกบางอย่างเราบอกค่าโมเมนต์ความเฉื่อยในเทอมของรัศมีไจเรชัน (radius of gyration) k โดยกำหนดค่า k ดังนี้

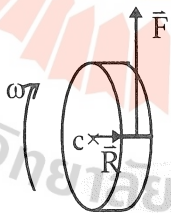
$$I = mk^2$$

หรือ

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

ตัวอย่าง 6.10 เครื่องเจียระไนพลอยเป็นจานหมุนใหญ่ รัศมี 0.4 เมตร มวล 100 กิโลกรัม หมุนรอบแกนด้วยความเร็ว 500 รอบ/นาที เมื่อกดพลอยที่ต้องการเจียระไนลงไปที่ขอบ ทำให้เกิดแรงเสียดทานระหว่างจานกับพลอยในแนวเส้นสัมผัส 25 นิวตัน ภายในเวลาเท่าใดความเร็วของจานจึงจะลดเหลือครึ่งหนึ่ง ถ้าไม่มีแรงอื่นมาหมุนจานให้ความเร็วของจานคงที่และไม่มีแรงเสียดทานที่แกน

วิธีทำ



$$I_c = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}100\ \text{kg}(0.4\ \text{m})^2 = 0.8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\vec{\Gamma}_c = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$\Gamma_c = -(0.4)(25\ \text{N}) = -10\ \text{N}\cdot\text{m}$$

ทอร์กเป็นลบเพราะมีทิศตรงข้ามกับการหมุน

ให้ความเร่งเชิงมุมของจานเป็น α

$$\Gamma_c = I_c\alpha$$

$$-10\ \mathrm{N\cdot m} = (0.8\ \mathrm{kg\cdot m^2})\ \alpha$$

$$\alpha = -1.25\mathrm{rad/s^2}$$

ความเร็วเชิงมุมเมื่อเริ่มต้น $\omega_0 = 500\ \ \mathrm{rev/min}$

$$\omega_0 = \frac{500\times 2\pi}{60} = 52.36\ \ \mathrm{rad/s}$$

ให้ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายเป็นครึ่งหนึ่งของความเร็วเชิงมุมเดิมภายในเวลา t วินาที จาก

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\frac{\omega_0}{2} = \omega_0 + \alpha t$$

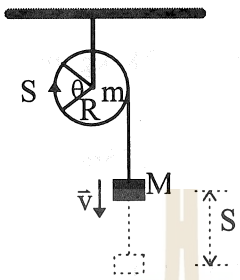
$$t = -\frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{-52.36\ \mathrm{rad/s}}{-2(1.25\ \mathrm{rad/s^2})}$$

$$t = 20.9\ \ \mathrm{s}$$

ความเร็วลดลงเหลือครึ่งหนึ่งใน 20.9 วินาที

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 6.11 มวล M = 2 กิโลกรัม ผูกเชือกเบาพันไว้กับรอกรัศมี 10 เซนติเมตร มวล m = 0.5 กิโลกรัม รัศมีไจเรชัน 8 เซนติเมตร รอบแกนหมุน ถ้าไม่คิดความฝืดที่แกนรอก จงหาความเร่งของมวล M



วิธีทำ ให้มวล M มีความเร็ว $\vec{v}$ ความเร่ง $\vec{a}$

รอกมีความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ ความเร่งเชิงมุม $\vec{\alpha}$

ความเร็วและความเร่งของมวลและรอกมีความสัมพันธ์กัน

จากรูปจะเห็นว่า ระยะทางที่มวล M เลื่อนลงไป มีค่าเท่ากับระยะที่จุดบนขอบรอกเลื่อนไปตามเส้นรอบวงของรอก

เมื่อมวล M เลื่อนลงไปเป็นระยะ S ให้รอกหมุนไปเป็นมุม θ จะได้ความสัมพันธ์ของการกระจัด

$$S = R\theta$$

หาอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = R\omega \qquad (1)$$

หาอนุพันธ์ความเร็วเทียบกับเวลา

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

$$a = R\alpha \qquad (2)$$

ให้ความตึงของเชือกเป็น T

คิดการเคลื่อนที่ของมวล M จาก

$$F = ma$$

$$Mg - T = Ma$$

$$T = Mg - Ma \qquad (3)$$

คิดการหมุนของรอก จาก

$$\Gamma = I\alpha$$

$$TR = mk^2\alpha$$

$$T = \frac{mk^2 a}{R^2} \qquad (4)$$

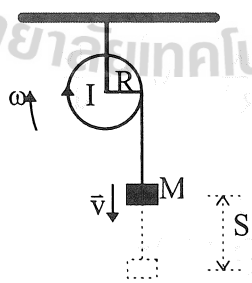
สมการ (3) และสมการ (4) เท่ากัน

$$Mg - Ma = \frac{mk^2 a}{R^2}$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{mk^2}{MR^2}}$$

$$a = \frac{9.8\ \text{m/s}^2}{1 + \frac{0.5\ \text{kg}\ (8\ \text{cm})^2}{2\ \text{kg}\ (10\ \text{cm})^2}} = 8.45\ \text{m/s}^2$$

ปัญหาที่ไม่มีความฝืดเช่นนี้อาจจะคิดจากหลักการอนุรักษ์พลังงานก็ได้ ดังนี้



เมื่อเริ่มต้น

ทั้งหมดมีความเร็วศูนย์ ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบเป็นศูนย์

ให้ระดับอ้างอิงอยู่ที่ตำแหน่งมวล M เดิม

ดังนั้น พลังงานศักย์ของระบบเป็นศูนย์

เมื่อมวล M เลื่อนลงไปเป็นระยะ S

พลังงานศักย์ของระบบ $E_p = MgS$

พลังงานจลน์ของระบบ คือ

พลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนของรอก $E_{k,0} = \frac{1}{2}I\omega^2$

และพลังงานจลน์ของมวล M $E_{k,M} = \frac{1}{2}Mv^2$

พลังงานของระบบมีค่าคงตัว ดังนั้น

$$0 = -MgS + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$0 = -MgS + \frac{1}{2}(mk^2)\left(\frac{v^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$MgS = \frac{1}{2}\left(\frac{mk^2}{R^2} + M\right)v^2$$

หาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับเวลา

$$Mg\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{mk^2}{R^2} + M\right)2v\frac{dv}{dt}$$

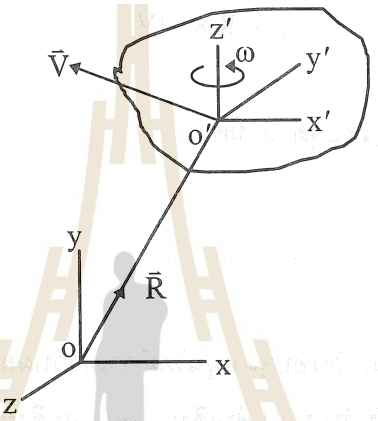
$$gv = \left(\frac{mk^2}{MR^2} + 1\right)va$$

$$a = \frac{g}{1 + \frac{mk^2}{MR^2}}$$

ได้คำตอบเท่ากัน

6.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็งเกร็งนั้นแยกพิจารณาได้เป็นสองลักษณะ คือ การเลื่อนที่เชิงเส้น หมายถึงการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้นเทียบกับแกนพิกัดอ้างอิง และการหมุน หมายถึงการหมุนของวัตถุรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุนั้น



รูป 6.10 วัตถุเลื่อนที่และหมุน

สมมติวัตถุก้อนหนึ่งมวล M จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่ตำแหน่ง R (วัดจากจุดกำเนิด o ของแกนอ้างอิงเฉื่อย xyz

ตั้งแกน x′y′z′ ที่วัตถุ ให้จุดกำเนิด o′ อยู่ที่ศูนย์กลางมวลของวัตถุ

ให้ $\vec{V}$ เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

และให้วัตถุหมุนรอบแกน z′ ด้วยความเร็วเชิงมุม

จะหาค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

ก. โมเมนตัมเชิงมุม

ให้ I_c เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล (แกน z′) โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบแกนที่ผ่านศูนย์กลางมวล $\vec{L}_c$ เรียกว่า spin angular momentum มีค่า

$$\vec{L}_c = I_c\vec{\omega}$$

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมีความเร็ว $\vec{V}$ เทียบกับระบบอ้างอิง xyz โมเมนตัมเชิงเส้นของศูนย์กลางมวลวัตถุมีค่า

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

โมเมนตัมเชิงมุมของจุดศูนย์กลางมวลรอบจุด o, $\vec{L}_o$ เรียกว่า orbital angular momentum มีค่า

$$\vec{L}_o = \vec{R} \times M\vec{V}$$

โมเมนตัมเชิงมุมรวมของวัตถุรอบจุด o มีค่า

$$\vec{L} = \vec{L}_o + \vec{L}_c \qquad (6.38)$$

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุแข็งเกร็งรอบจุดหมุนใดมีค่าเท่ากับผลบวกของโมเมนตัมเชิงมุมของจุดศูนย์กลางมวลรอบจุดหมุนนั้นกับโมเมนตัมเชิงมุมรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ข. พลังงานจลน์

พลังงานจลน์เนื่องจากการหมุนรอบแกน z' ที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

$$E_{k,c} = \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

พลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล

$$E_{k,o} = \frac{1}{2} MV^2$$

พลังงานจลน์ของวัตถุรวมมีค่า

$$E_k = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad (6.39)$$

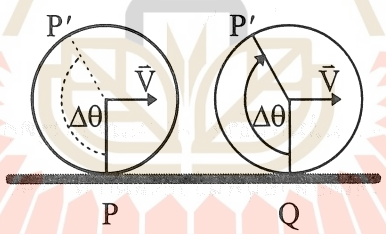
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

พลังงานจลน์รวมของวัตถุมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์ของจุดศูนย์กลางมวลและพลังงานจลน์ที่วัตถุหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ตัวอย่างการเลื่อนที่ไปพร้อม ๆ กับการหมุน เช่น การกลิ้งของวัตถุทรงกลมหรือทรงกระบอก เป็นต้น การกลิ้งนั้นอาจกลิ้งอย่างเดียวโดยไม่ลื่นไถล หรือกลิ้งด้วยและลื่นไถลไปด้วย ก็ได้ จะพิจารณาความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมเฉพาะกรณีได้ ดังนี้

6.3.1 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

ให้ P เป็นความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล และ ω เป็นความเร็วเชิงมุมของวัตถุที่หมุนรอบจุดศูนย์กลางมวล ความเร็วสองชนิดนี้ไม่จำเป็นต้องมีความสัมพันธ์กันแต่สำหรับวัตถุทรงกลมหรือทรงกระบอกที่กลิ้งไปตามเส้นโดยไม่ลื่นไถล ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเมื่อเทียบกับพื้นและความเร็วเชิงมุมของ วัตถุเทียบกับแกนกลางนั้นเกี่ยวข้องกันซึ่งจะพิจารณาได้ดังนี้



รูป 6.11 การกลิ้งโดยไม่ลื่นไถล

ให้ทรงกลมหรือทรงกระบอกรัศมี R กลิ้งในแนวแกน x โดยไม่ลื่นไถล
ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลเป็น V
ความเร็วเชิงมุมในการหมุนรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางเป็น ω

เมื่อเริ่มต้นให้ทรงกลมสัมผัสพื้นที่จุด P

ภายในเวลา Δt ให้จุดสัมผัส P ที่ผิวทรงกลมหมุนไปอยู่ที่ P'

ส่วนโค้ง PP' รับมุม $\Delta\theta$ ที่จุดศูนย์กลาง

ในช่วงเวลานั้น ทรงกลมเลื่อนจากตำแหน่ง P ตามเส้นทางเดินไปอยู่ที่ Q

ความยาวของเส้นโค้ง $PP' = R\Delta\theta = R\omega\Delta t$

ความยาวตามเส้นตรง $PQ = V\Delta t$

ระยะทั้งสองนี้เท่ากัน ดังนั้น

$$V = R\omega \qquad (6.40)$$

แต่เราทราบมาก่อนแล้วว่า ความเร็วของจุดที่ขอบสัมพัทธ์กับจุดศูนย์กลางก็มีค่า $R\omega$ ดังนั้นสำหรับการกลิ้งโดยไม่ไถลนั้นจะได้

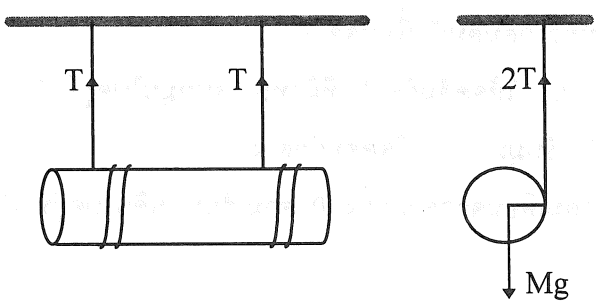
ความเร็วของแกนกลางสัมพันธ์กับพื้น มีค่าเท่ากับความเร็วของจุดที่ขอบสัมพันธ์กับแกนกลาง

ถ้ามีการลื่นไถล $V \neq R\omega$

ถ้าวัตถุกลิ้งด้วยความเร่ง ก็จะหาความสัมพันธ์ของความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลกับความเร่งเชิงมุมของวัตถุรอบจุดศูนย์กลางมวลได้โดยหาอนุพันธ์ของสมการ 6.40 เทียบกับเวลาได้

$$A = R\alpha \qquad (6.41)$$

ตัวอย่าง 6.12 ทรงกระบอกมวล P พันด้วยเชือกเบาสองเส้นแขวนกับเพดาน ดังรูป เมื่อเริ่มต้นทรงกระบอกอยู่ในแนวราบ ถ้าปล่อยให้เคลื่อนที่ จงหาความเร่งเชิงเส้นของทรงกระบอกและความตึงในเชือกแต่ละเส้น



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ ให้ความตึงของเชือกแต่ละเส้นเป็น T

ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกเป็น A

ความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอกที่หมุนรอบแกนกลางเป็น α

$$A = R\alpha$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบจุดศูนย์กลางมวล $I_C = \frac{1}{2}MR^2$

คิดการหมุนของวัตถุรอบศูนย์กลางมวล

จาก $\Gamma_C = I_C\alpha$

$$2TR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{A}{R}\right)$$

$$T = \frac{1}{4}MA \qquad (1)$$

คิดการเลื่อนที่ของศูนย์กลางมวล

จาก $F = ma$

$$Mg - 2T = MA \qquad (2)$$

ถอดสมการ (1) และ (2)

$$A = \frac{2}{3}g$$

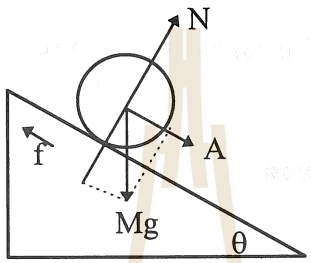
$$T = \frac{1}{6}Mg$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 6.13 ทรงกระบอกตันมวล M รัศมี R กลิ้งโดยไม่ลื่นไถล ลงพื้นเอียงทำมุม θ กับแนวราบ จงหา

(a) ความเร่งเชิงเส้นของแกนกลางทรงกระบอก

(b) สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างทรงกระบอกกับพื้น



วิธีทำ

(a) ให้ f เป็นแรงเสียดทาน

A เป็นความเร่งเชิงเส้นของแกนกลาง

α เป็นความเร่งเชิงมุมรอบแกนกลาง

$$\alpha = \frac{A}{R}$$

คิดการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล

จาก $F = ma$

$$Mg\sin\theta - f = MA \qquad (1)$$

คิดการหมุนของทรงกระบอกรอบแกนกลาง

จาก $\Gamma_C = I_C\alpha$

$$fR = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\frac{A}{R}$$

$$f = \frac{MA}{2} \qquad (2)$$

แทนค่า f จากสมการ (2) ในสมการ (1) ได้

$$Mg\sin\theta - \frac{MA}{2} = MA$$

$$A = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

(b) แทนค่า A ในสมการ (2)

$$f = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉาก $N = Mg\cos\theta$

ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานจลน์ $\mu_S = \frac{f}{N} = \frac{1}{3}\tan\theta$

ถ้าค่า μ_S น้อยกว่านี้จะเกิดการลื่นไถล

ดังนั้น เพื่อป้องกันการลื่นไถล μ_S ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ $\frac{1}{3}\tan\theta$

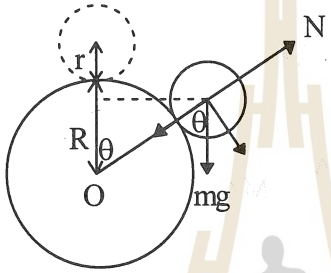
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 6.14 ปล่อยทรงกลมมวล m รัศมี r ให้กลิ้งจากยอดทรงกลมใหญ่รัศมี R โดยไม่มีการลื่นไถล จงหา

(a) แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉากระหว่างทรงกลมทั้งสองในเทอมของมุม θ

(b) มุม θ ที่ทรงกลมเล็กหลุดจากทรงกลมใหญ่

(c) ความเร็วเชิงมุมของทรงกลมเล็กเมื่อหลุดจากทรงกลมใหญ่



วิธีทำ

ให้ N เป็นแรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉาก

จุดศูนย์กลางทรงกลมเล็กเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี $R + r$

ให้ความเร็วของจุดศูนย์กลางทรงกลมเล็กเป็น v

ความเร็วเชิงมุมที่ทรงกลมเล็กหมุนรอบจุดศูนย์กลางตัวเอง $\omega = \frac{v}{r}$

(a) แรงสู่ศูนย์กลางที่กระทำต่อทรงกลมเล็ก

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R+r} \qquad (1)$$

จะหาค่าความเร็ว v โดยใช้หลักการอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้

กำหนดให้ระดับที่จุดศูนย์กลางทรงกลมเล็กเมื่ออยู่ที่ตำแหน่งสูงสุดเป็น ระดับอ้างอิง

ที่จุดสูงสุด

พลังงานจลน์ $E_{k,i} = 0$ และพลังงานศักย์ $E_{p,i} = 0$

ที่มุม θ ใด ๆ

จุดศูนย์กลางทรงกลมเล็กเคลื่อนที่ต่ำลงมาเป็นระยะ

$$\Delta y = (R + r) - (R + r)\cos\theta$$

$$= (R + r)(1 - \cos\theta)$$

พลังงานศักย์ $$E_{p,f} = -mg(R + r)(1 - \cos\theta)$$

พลังงานจลน์ $$E_{k,f} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$= \frac{7}{10}mv^2$$

ในการกลิ้ง แรงเสียดทานไม่ได้ทำงาน ดังนั้น พลังงานรวมมีค่าคงตัว

$$E_{k,i} + E_{p,i} = E_{k,f} + E_{p,f}$$

$$0 = \frac{7}{10}mv^2 - mg(R + r)(1 - \cos\theta)$$

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R + r)(1 - \cos\theta) \qquad (2)$$

แทนค่า v^2 จากสมการ (2) ในสมการ (1)

$$N = mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta)$$

$$N = \frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg$$

(b) เมื่อทรงกลมเล็กหลุดจากทรงกลมใหญ่ แรงปฏิกิริยา N = 0

$$0 = \frac{17}{7}mg\cos\theta - \frac{10}{7}mg$$

$$\cos\theta = \frac{10}{17} \qquad (3)$$

ทรงกลมหลุดจากกันที่ตำแหน่งมุม $\theta = \cos^{-1}(\frac{10}{17})$

(c) ให้ความเร็วเชิงมุมทรงกลมเล็กเมื่อหลุดจากทรงกลมใหญ่ เป็น ω

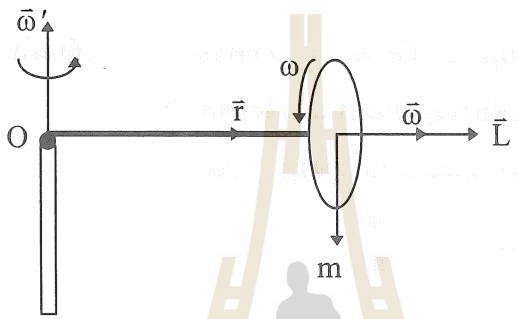
แทนค่าสมการ (3) ในสมการ (2)

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)\left(1-\frac{10}{17}\right) = \frac{10}{17}g(R+r)$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}}$$

6.3.2 การหมุนของวัตถุแข็งเกร็งรอบแกนสมมาตร

ไจโรสโคป (gyroscope) คือวัตถุใด ๆ ที่หมุนรอบแกนสมมาตร โดยที่แกนสมมาตรนั้นเป็นอิสระที่จะหมุนเบนไปรอบแกนอื่นได้ ตัวอย่างเช่น การหมุนของลูกข่างหรือของวงล้อรอบแกนที่วางอยู่บนจุดรองรับ ดังรูป



รูป 6.12 การหมุนควงของไจโรสโคป

ถ้าล้อไม่หมุน แกนของล้อจะวางอยู่บนจุด O ไม่ได้ เพราะน้ำหนักของล้อจะทำให้ล้อตกลงมา แต่ถ้าล้อหมุนอย่างรวดเร็วมาก ทอร์กรอบจุด O เนื่องจากน้ำหนักล้อจะทำให้แกนสมมาตรนี้ก็จะหมุนรอบแกนดิ่งที่จุดรองรับ O เราเรียกการหมุนของแกนสมมาตรรอบแกนดิ่งนี้ว่า การหมุนควง (precession) วัตถุก็ยังคงหมุนต่อไปได้โดยไม่ตกลงมา

ให้ความเร็วเชิงมุมของวงล้อรอบแกนสมมาตรเป็น $\vec{\omega}$ และความเร็วเชิงมุมของแกนสมมาตรที่หมุนวนรอบแกนดิ่งเป็น $\vec{\omega}'$

จะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $\omega >> \omega'$ จึงประมาณได้ว่า โมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบอยู่ในทิศของแกนสมมาตรตามทิศการหมุนของล้อ นั่นคือ ประมาณว่า

โมเมนตัมเชิงมุมของวัตถุรอบแกนสมมาตร $\vec{L} = I\vec{\omega}$ มีทิศไปทางเดียวกับ $\vec{\omega}$

น้ำหนักของวัตถุ $\vec{W} = m\vec{g}$ ทำให้เกิดทอร์กรอบจุด O ที่รองรับแกนหมุน

$$\vec{\Gamma}_o = \vec{r} \times m\vec{g}$$

ทอร์กนี้มีทิศตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{r}$ และ $m\vec{g}$ ดังนั้น ทอร์กจึงมีทิศตั้งฉากกับ $\vec{L}$

จาก $$\vec{\Gamma}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

$d\vec{L}_o = \vec{\Gamma}_o\, dt$ มีทิศไปทางเดียวกับทอร์ก ดังนั้น $d\vec{L}$ จึงตั้งฉากกับ $\vec{L}$

ขนาดของโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{L}$ มีค่าคงตัว แต่ทิศของ $\vec{L}$ เปลี่ยนไปในแนวตั้งฉากกับแนวเดิม นั่นคือ แกนของล้อจะต้องหมุนวนรอบแนวดิ่งที่จุด O

สมมติในเวลา dt แกนล้อหมุนตามแนวราบกวาดมุม $d\phi$

ความเร็วเชิงมุมของการหมุนควง $\omega' = \frac{d\phi}{dt}$

จากรูป

$$dL = Ld\phi$$

$$\Gamma dt = I\omega d\phi$$

$$\Gamma = I\omega \frac{d\phi}{dt} = I\omega\omega'$$

$$mgr = I\omega\omega'$$

ความเร็วเชิงมุมของการหมุนควง $\omega' = \frac{mgr}{I\omega}$

กรณีลูกข่างก็เช่นเดียวกัน ทอร์กเนื่องจากน้ำหนักลูกข่างมีทิศตั้งฉากกับ $\vec{L}$ ทำให้แกนของลูกข่างหมุนวนเป็นรูปกรวย

ในการเคลื่อนที่จริงนั้นแกนสมมาตรของล้อ หรือลูกข่างจะไม่หมุนควงไปในแนวราบตลอดเวลา แต่จะขึ้น ๆ ลง ๆ ตลอดทาง การหมุนขึ้นลงนั้นเรียกว่า nutation สมการการเคลื่อนที่อย่างสมบูรณ์นั้นยุ่งยากเกินไปในระดับนี้ นักศึกษาจะได้ทราบในการเรียนระดับต่อไป

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.4 สมดุล

6.4.1 เงื่อนไขของสมดุล

ก. สมดุลแบบเลื่อนที่

จากเรื่องระบบอนุภาคเราทราบว่า

$$\sum \vec{F}_i = M\vec{A}$$

ผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบ มีค่าเท่ากับ มวลรวมทั้งระบบ คูณด้วยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

ดังนั้น ถ้าผลรวมแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ หรือ $\sum \vec{F}_i = 0$ จะได้ $\vec{A} = 0$ จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุไม่มีความเร่ง ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลไม่เปลี่ยนแปลง หรือ โมเมนตัมเชิงเส้นของวัตถุไม่เปลี่ยนแปลงนั่นเอง กรณีเช่นนี้ กล่าวได้ว่า วัตถุนั้นอยู่ในสภาพสมดุลในการเลื่อนที่

ข. สมดุลแบบหมุน

เมื่อมีทอร์กภายนอกกระทำกับวัตถุ วัตถุจะหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม ตามสมการ

$$\vec{\Gamma} = I\vec{\alpha}$$

ถ้าผลรวมของทอร์กภายนอกที่กระทำกับวัตถุเป็นศูนย์ หรือ $\vec{\Gamma} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$ จะได้ความเร่งเชิงมุม $\vec{\alpha} = 0$ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุจะไม่เปลี่ยนแปลง กรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่า วัตถุนั้นอยู่ในสภาพสมดุลในการหมุน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อวัตถุอยู่ในเงื่อนไขพร้อมกันทั้งสองข้อ คือ

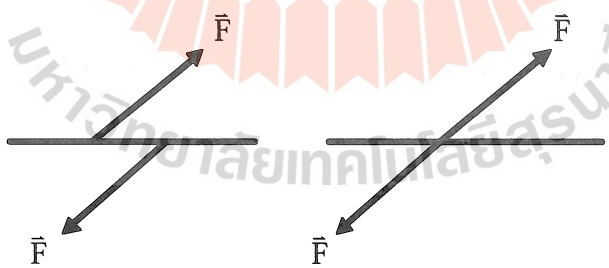
$$\left.\begin{aligned} \sum \vec{F}_i &= 0 \\ \text{และ} \qquad \sum \vec{\Gamma}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.42)$$

กล่าวได้ว่า วัตถุนั้นอยู่ในสภาพสมดุลอย่างสมบูรณ์

สมดุลตามเงื่อนไขสมการ (6.42) นั้น วัตถุไม่มีความเร่ง ทั้งเชิงเส้นและเชิงมุม แต่ความเร็วไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ด้วย ขึ้นกับว่าความเร็วเมื่อเริ่มต้นเป็นอย่างไร สำหรับกรณีที่ความเร็วเมื่อเริ่มต้นของวัตถุเป็นศูนย์ วัตถุอยู่นิ่งตลอดไป เรียกว่า สมดุลสถิต ถ้าความเร็วเริ่มต้นไม่เป็นศูนย์ วัตถุมีความเร็วคงตัว เป็นสมดุลอย่างพลวัต

6.4.1.1 **สมดุลของแรงสองแรง**

ถ้ามีแรงกระทำกับวัตถุเพียงสองแรง แล้ววัตถุนั้นสมดุล แรงทั้งสองนั้นจะต้องมีขนาดเท่ากัน อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และทิศตรงข้าม จึงจะเป็นไปตามเงื่อนไขของสมดุล



ก. ข.

รูป 6.13

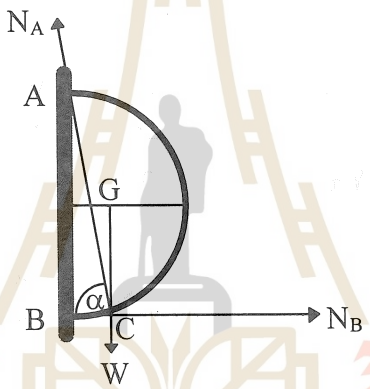
จากรูป 6.13 แรงรวมในรูป ก. และ ข. มีค่าเป็นศูนย์ ทั้งคู่ แต่รูป ก. วัตถุไม่สมดุล เพราะมีทอร์กกระทำกับวัตถุ ส่วนรูป ข. ไม่มีทั้งแรงรวมและทอร์กรวม จึงสมดุล

6.4.1.2 สมดุลของแรงสามแรง

ถ้ามีแรงกระทำกับวัตถุเพียงสามแรง และวัตถุสมดุล ถ้าแรงทั้งสามนั้นไม่ขนานกันเมื่อต่อแนวแรงออกไป แนวแรงทั้งสามต้องพบกันที่จุดหนึ่ง

(ให้นักศึกษา พิสูจน์ข้อความข้างบนนี้ด้วยตนเอง)

ตัวอย่าง 6.15 แท่งโลหะหนัก W งอเป็นรูปครึ่งวงกลมรัศมี r ติดกับจุดหมุนที่ปลาย A ปล่อยปลาย B ยันฝาผนังเกลี้ยง ดังรูป จงหาแรงปฏิกิริยาที่ A และ B



วิธีทำ

วิธีที่ 1 ให้หลักสามแรงสมดุล แรงรวมต้องพบกันที่จุดหนึ่ง

ให้ G เป็นจุดศูนย์กลางมวลของลวดครึ่งวงกลม

G อยู่บนเส้นแบ่งครึ่งเส้นลวดและห่างจุดศูนย์กลาง $\frac{2r}{\pi}$

แรงต่าง ๆ ที่กระทำกับแท่งโลหะมี 3 แรง คือ

1. น้ำหนัก W ลงจากจุด G ในแนวดิ่ง
2. แรงปฏิกิริยาจากผนังเกลี้ยงที่ B, N_B มีทิศตั้งฉากกับผนัง
3. แรงยึดที่ A, N_A ยังไม่ทราบว่าไปทางทิศใด

เขียนแรงที่ทราบคือ W และ N_B พบกันที่ C

เพราะ สามแรงสมดุลจะต้องพบกันที่จุดหนึ่ง ดังนั้น N_A ต้องอยู่ในแนว CA
แรงทั้งสามมีแนวแรงขนานกับสามเหลี่ยม ABC
ให้สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมแทนแรง
ให้อัตราส่วนของแรงและด้านสามเหลี่ยมเท่ากันทั้งสามคู่ คือ

$$\frac{N_A}{AC} = \frac{N_B}{BC} = \frac{W}{AB}$$

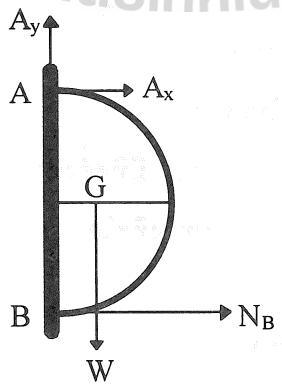
แทนค่า $AB = 2r, \quad BC = \frac{2r}{\pi}, \quad AC = \sqrt{\left(\frac{2r}{\pi}\right)^2 + (2r)^2} = 2r\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + 1}$

$$\frac{N_A}{2r\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + 1}} = \frac{N_B}{\frac{2r}{\pi}} = \frac{W}{2r}$$

ดังนั้น $N_A = W\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + 1}, \quad N_B = \frac{W}{\pi}$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\pi$$

วิธีที่ 2 ถ้าแรงเกินสามแรง ใช้หลักทอร์กรวมเป็นศูนย์
เขียนแรงที่ A เป็นองค์ประกอบ A_x และ A_y อยู่ในแนวราบและแนวดิ่ง

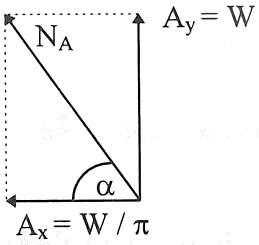


จากเงื่อนไขของสมดุล $\sum\vec{\Gamma} = 0$

ให้ A เป็นจุดหมุน $N_B \times 2r - W \times \frac{2r}{\pi} = 0$

$$N_B = \frac{W}{\pi}$$

และจากเงื่อนไขของสมดุล $\sum \vec{F} = 0$



$$A_x + N_B = 0$$

$$A_x = -N_B = -\frac{W}{\pi}$$

$$A_y - W = 0$$

$$A_y = W$$

แรงปฏิกิริยารวมที่ A $N_A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} = \sqrt{\left(\frac{W}{\pi}\right)^2 + W^2}$

$$= W\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)}$$

$$\tan\alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi$$

$$\alpha = \tan^{-1}\pi$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6.4.2 เสถียรภาพของสมดุล

ในระบบแรงอนุรักษ์ พลังงานศักย์ของวัตถุเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งเพียงอย่างเดียว เช่น พลังงานศักย์เนื่องจากสปริง $E_{p,\,spring} = \frac{1}{2}kx^2$

เมื่อ k คือค่าคงตัวของสปริง และ x คือระยะที่สปริงยืดหรือหดจากตำแหน่งปกติ

พลังงานศักย์เนื่องจากความโน้มถ่วง $E_{p,\,gravity} = mgy$

เมื่อ m คือมวลของวัตถุ g คือ ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก และ y คือ ความสูงจากระดับอ้างอิง

ให้ตำแหน่งของวัตถุโดยทั่วไปเป็น q จะเขียนพลังงานศักย์เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งได้ดังนี้

$$E_p = E_p(q) \tag{6.43}$$

แรงที่กระทำกับวัตถุเป็นแรงอนุรักษ์ ดังนั้น

$$F = -\frac{dE_p}{dq} \tag{6.44}$$

เมื่อวัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล แรงรวมที่กระทำกับวัตถุมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

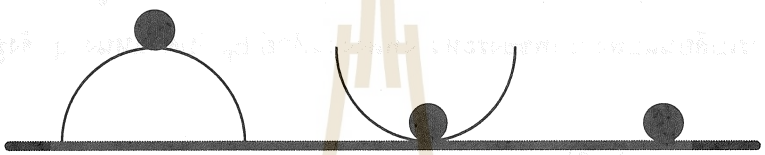
$$\frac{dE_p}{dq} = 0 \tag{6.45}$$

สมการ 6.44 เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับสมดุล ระบบจะยังคงอยู่นิ่ง ณ ตำแหน่งเดิมตลอดไป ถ้าเดิมอยู่นิ่ง อย่างไรก็ตาม ถ้าวัตถุมีการกระจัดเล็กน้อยไปจากสมดุลนี้ วัตถุอาจจะกลับคืนมาอยู่ในตำแหน่งสมดุลตามเดิม หรืออาจจะไม่กลับมาอีกเลยก็ได้

ถ้าวัตถุกลับมาสู่ตำแหน่งเดิมเสมอเราเรียกว่าวัตถุนั้น สมดุลเสถียร (stable) มิฉะนั้นเรียกว่า สมดุลอเสถียร (unstable)

ถ้า วัตถุเปลี่ยนตำแหน่งไปเรื่อย ๆ ไม่กลับมาที่เดิม แต่ยังคงสมดุลอยู่ เรียกว่า สมดุลสะเทิน (neutral)

ตัวอย่างสมดุลทั้งสามชนิด เช่น ทรงกลมวางบนยอดพื้นผิวนอกทรงกลมเป็นสมดุลอเสถียร เมื่อวางภายในเป็นสมดุลเสถียร และเมื่อวางบนพื้นราบเป็นสมดุลสะเทิน เป็นต้น



รูป 6.13 สมดุลอเสถียร สมดุลเสถียร และสมดุลสะเทิน

ต่อไปจะพิจารณาฟังก์ชันพลังงานศักย์ของสมดุลชนิดต่าง ๆ เมื่อได้รับแรงเล็กน้อยทำให้เคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะน้อย ๆ

พลังงานรวมของวัตถุมีค่าคงตัว เขียนได้ว่า

$$E_k + E_p = E_{k,o} + E_{p,o}$$

หรือ

$$E_k - E_{k,o} = E_p - E_{p,o} \qquad (6.46)$$

เมื่อ $E_{k,o}$ และ $E_{p,o}$ เป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ที่ตำแหน่งสมดุล

E_k และ E_p เป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ ที่ตำแหน่งใหม่ใกล้ ๆ ตำแหน่งสมดุล

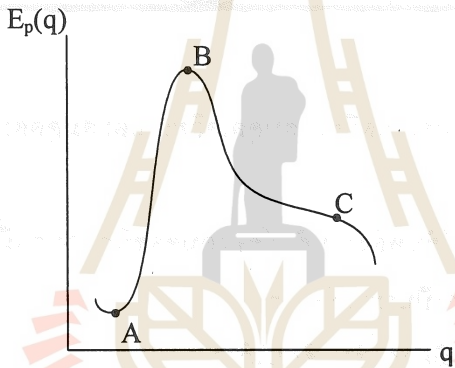
ถ้าพลังงานศักย์ที่ตำแหน่งสมดุล คือ $E_{p,o}$ มีค่าสูงสุด ทางขวาของสมการ (6.47) จะมีค่าเป็นบวก ดังนั้น $E_k - E_{k,o}$ เป็นบวก แสดงว่าเมื่อวัตถุห่างตำแหน่งสมดุลออกไป พลังงานจลน์เพิ่มขึ้น ดังนั้นวัตถุก็จะเคลื่อนที่ไปโดยไม่กลับมาที่เดิมอีก เป็นสมดุลอเสถียร

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตรงข้ามถ้า $E_{p,o}$ มีค่าต่ำสุด ทางขวาของสมการ (6.46) เป็นลบ ค่า $E_k - E_{k,o}$ เป็นลบ เมื่อวัตถุห่างจากตำแหน่งสมดุลออกไป พลังงานจลน์ลดลง แต่ E_k ไม่เป็นลบ ดังนั้น E_k จะลดลงเป็นศูนย์ภายในขอบเขตใกล้ตำแหน่งสมดุล กรณีนี้วัตถุจะกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งสมดุลเดิม เป็นสมดุลเสถียร นั่นคือ

วัตถุที่สมดุลเสถียร จะมีค่าพลังงานศักย์ต่ำสุด

ในระบบที่พลังงานศักย์ E_p เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง q เพียงค่าเดียวนี้จะดูลักษณะสมดุลของระบบได้โดยดูการเปลี่ยนแปลงกราฟของระหว่างพลังงานศักย์ E_p กับตำแหน่ง q ดังรูป 6.14



รูป 6.14 กราฟระหว่างพลังงานศักย์ $E_p(q)$ และตำแหน่ง q

ตำแหน่ง A, B, C คือตำแหน่งสมดุล $\frac{dE_p}{dq} = 0$

ที่จุด A มีพลังงานต่ำสุด เป็นตำแหน่งสมดุลเสถียร $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เป็นบวก

ที่จุด B มีพลังงานสูงสุดเป็นตำแหน่งสมดุลอเสถียร $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เป็นลบ

ที่จุด C เป็นตำแหน่ง สมดุลอเสถียร กราฟสูงขึ้นข้างหนึ่ง ลดลงข้างหนึ่งเป็นสมดุลอเสถียร

วิธีพิจารณาอีกอย่างหนึ่งคือ กระจายฟังก์ชันพลังงานศักย์ออกไป แล้วพิจารณาพลังงานที่ตำแหน่งรอบ ๆ จุดสมดุล ดังนี้

สมมติระบบสมดุลที่ตำแหน่ง $q = a$

กระจายค่าพลังงานศักย์ $E_p(q)$ ออกไปตามอนุกรมเทเลอร์ รอบจุดสมดุล $q = a$ จะได้

$$E_p(q) = E_{p,o} + (q-a)\left(\frac{dE_p}{dq}\right)_{q=a} + \frac{(q-a)^2}{2!}\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q=a} + \ldots \qquad (6.47)$$

ตัวห้อย $q = a$ หมายถึงค่าอนุพันธ์นั้น วัดที่ใกล้ ๆ ตำแหน่งสมดุล $q = a$

$E_{p,o}$ เป็นพลังงานศักย์ที่ตำแหน่งสมดุลซึ่งมีค่าคงตัว จึงไม่ต้องพิจารณาเทอมแรกนี้แต่จะดูว่าเทอมต่อ ๆ ไปของอนุกรมทำให้พลังงานเพิ่มขึ้นหรือลดลงจากค่า $E_{p,o}$

เทอมที่สองคือ $\frac{dE_p}{dq}$ มีค่าเป็นศูนย์ ตามสมการ (6.45)

เหลือเทอมที่จะพิจารณาคือ

$$E_p(q) = E_{p,o} + \frac{(q-a)^2}{2!}\left(\frac{d^2E_p}{dq^2}\right)_{q=a} + \frac{(q-a)^3}{3!}\left(\frac{d^3E_p}{dq^3}\right)_{q=a} + \ldots \qquad (6.48)$$

การกระจายนี้อยู่ในบริเวณใกล้เคียงจุด $q = a$ อนุพันธ์แต่ละเทอม จึงมีค่าน้อยมาก อนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นก็จะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว ดังนั้นถ้าอนุพันธ์ในเทอมแรกคือไม่เป็นศูนย์แล้วก็อาจจะพิจารณาเทอมที่ไม่เป็นศูนย์เทอมแรกนี้แต่เพียงเทอมเดียวได้ และตัดเทอมอันดับสูงกว่าต่อไปนั้นทิ้งไปได้เลยเพราะมีค่าน้อยจนกระทั่งไม่มาทำให้เครื่องหมายของ $E_p(q)$ เปลี่ยนไป

พิจารณาสมการ (6.48) จะเห็นว่าค่า $(q-a)^2$ เป็นบวกเสมอ ไม่ว่า q จะมากหรือน้อยกว่า a ดังนั้น $E_p(q)$ จะเป็นบวกหรือลบจึงเป็นไปตามเครื่องหมายของ $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เท่านั้น

ถ้าระบบสมดุลอย่างมีเสถียรภาพ $E_p(q)$ ของระบบมีต่ำสุด ที่ $q = a$ เมื่อระบบเคลื่อนไปอยู่ในบริเวณข้างเคียง ค่า $E_p(q)$ ของระบบจึงจะต้องเพิ่มขึ้น ซึ่งนั่นก็คือ

ระบบจะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพ เมื่อ $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เป็นบวก

ถ้า $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เป็นลบ แสดงว่าพลังงานศักย์ที่บริเวณใกล้เคียงมีค่าต่ำกว่าพลังงานศักย์ที่ตำแหน่งสมดุล ระบบจะไม่กลับมาที่เดิม จึงเป็นสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพ

ในกรณีที่ $\frac{d^2E_p}{dq^2}$ เป็นศูนย์ ต้องดูเทอมต่อไปคือ เทอม $\frac{(q-a)^3}{3!}\frac{d^3E_p}{dq3}$

ค่า $(q - a)^3$ จะเป็นบวกเมื่อ $q > a$ และจะเป็นลบเมื่อ $q < a$

ดังนั้น ไม่ว่า $\frac{d^3E_p}{dq^3}$ จะเป็นบวก หรือ เป็นลบ ค่า $E_p(q)$ จะเป็นบวกข้างหนึ่งลบข้างหนึ่ง จึงเป็นสมดุลที่ไม่มีเสถียรภาพ

ถ้า $\frac{d^3E_p}{dq^3}$ เป็นศูนย์ พิจารณาเทอมอนุพันธ์อันดับสี่ต่อไป ซึ่งจะได้ผลเหมือนกับเทอมอันดับสอง

จึงสรุปได้ว่า

1. ระบบสมดุลเมื่อ $\frac{dE_p}{dq} = 0$

2. สมดุลมีเสถียรภาพหรือไม่ ดูเทอมแรกของอนุพันธ์ที่ไม่เป็นศูนย์

ถ้าอันดับของอนุพันธ์แรกที่ไม่เป็นศูนย์เป็นเลขคู่

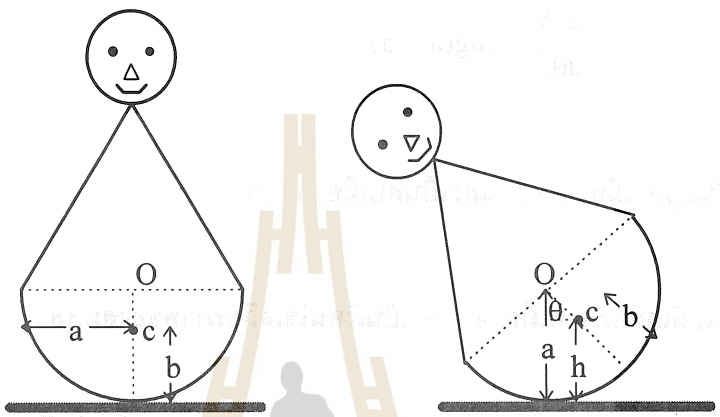
สมดุลนั้นมีเสถียรภาพ เมื่ออนุพันธ์นั้นมีค่าเป็นบวก

สมดุลนั้นไม่มีเสถียรภาพ เมื่ออนุพันธ์นั้นมีค่าเป็นลบ

ถ้าอันดับของอนุพันธ์แรกที่ไม่เป็นศูนย์เป็นเลขคี่ สมดุลนั้นไม่มีเสถียรภาพ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 6.16 ตุ๊กตาล้มลุกตัวหนึ่ง มีฐานเป็นครึ่งทรงกลมรัศมี a วางตั้งตรงบนพื้นราบอย่างสมดุลดังรูปซ้าย ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางมวลของตุ๊กตาอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะ b จงหาเงื่อนไขเสถียรภาพของตุ๊กตานี้



วิธีทำ สมมติขยับตุ๊กตา จากตำแหน่งสมดุลให้เอียงไปเล็กน้อย ดังรูปขวา ให้รัศมีที่ผ่านจุดสัมผัสเดิมเอียงไปจากแนวดิ่งเป็นมุม

ขณะนี้จุดศูนย์กลางมวล C อยู่สูงจากพื้นเป็นระยะ $h = a - (a-b)\cos\theta$

ให้พื้นเป็นระดับอ้างอิง ดังนั้นพลังงานศักย์เป็น

$$E_p = mgh = mg\left[a-(a-b)\cos\theta\right]$$

เมื่อ m คือมวลของตุ๊กตา

เงื่อนไขของสมดุล

$$\frac{dV}{d\theta} = mg(a-b)\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

นั่นคือ ตุ๊กตาจะสมดุลเมื่อวางตั้งตรงที่มุม $\theta = 0$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ต่อไปหาอนุพันธ์อันดับสอง $\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg(a-b)\cos\theta$

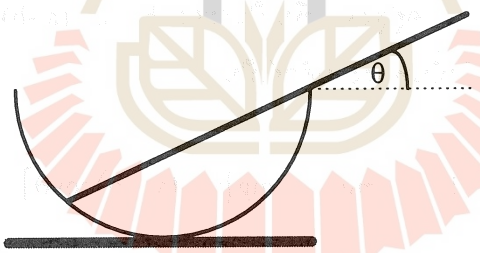
ที่จุดสมดุล $\theta = 0$ ค่า $\cos 0 = 1$ ดังนั้น

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mg(a-b)$$

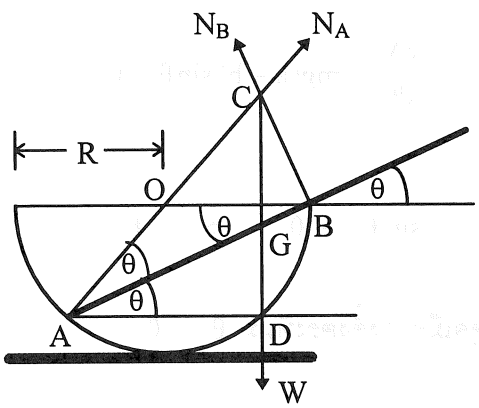
$\frac{d^2V}{d\theta^2}$ จะเป็นบวก เมื่อ $a > b$ และเป็นลบเมื่อ $a < b$

นั่นคือ สมดุลจะมีเสถียรภาพเมื่อ $a > b$ เป็นเงื่อนไขเสถียรภาพของสมดุล

ตัวอย่าง 6.17 คานสม่ำเสมอยาว 3R วางพาดในครึ่งทรงกลมเกลี้ยงรัศมี R คานทำมุม θ กับแนวราบ จงหามุม θ เมื่อคานสมดุล สมดุลนี้มีเสถียรภาพหรือไม่



วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้หลักของแรงสมดุล ที่ว่า สามแรงสมดุล แนวแรงพบกันที่จุดหนึ่ง



แรงกระทำกับคานมีสามแรงคือ

1. น้ำหนักคาน W มีทิศลงในแนวดิ่ง
2. แรงปฏิกิริยาของทรงกลมเกลี้ยงที่ปลาย A , N_A มีทิศตั้งฉากกับผิวทรงกลม จึงอยู่ในแนว AO
3. แรงปฏิกิริยาที่ปลาย B , N_B เป็นแรงปฏิกิริยาของผิวเกลี้ยงจึงตั้งฉากกับคาน

แรงทั้งสามสมดุลต้องพบกันที่จุดหนึ่ง ให้พบกันที่ C

มุม ABC เป็นมุมฉาก ดังนั้นเส้นรอบวงจะผ่านจุด C โดยมี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$AC = 2R$$

G เป็นจุดกลางคาน $AG = 3R/2$

สามเหลี่ยม ADC $AD = 2R\cos 2\theta$

สามเหลี่ยม AGD $AD = \frac{3R}{2}\cos\theta$

ดังนั้น $2R\cos 2\theta = \frac{3R}{2}\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{4}\cos\theta$$

$$2\cos^2\theta - 1 = \frac{3}{4}\cos\theta$$

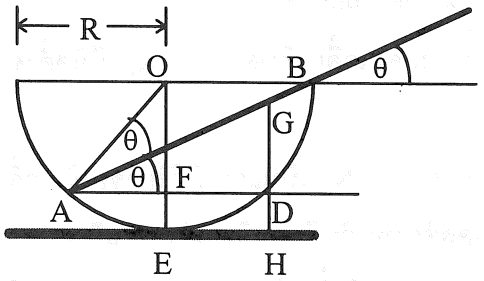
$$8\cos^2\theta - 3\cos\theta - 4 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4x4x8}}{16} = 0.919 \text{ ค่าลบไม่ใช้}$$

$$\theta = 23.2^\circ$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีที่ 2 โดยใช้หลักสมดุลที่พลังงานต่ำสุด



น้ำหนัก W ตกที่จุด G สูงจากพื้นเป็นระยะ GH ดังนั้นพลังงานศักย์ของคานมีค่า

$$V = W(GH)$$

สามเหลี่ยม ADG $\quad GD = \frac{3R}{2}\sin\theta$

สามเหลี่ยม OAF $\quad OF = R\sin 2\theta$

$$DH = EF = OE - OF = R - R\sin 2\theta$$

$$GH = GD + DH = \frac{3R}{2}\sin\theta + R - R\sin 2\theta$$

ดังนั้น

$$V = WR\left(\frac{3}{2}\sin\theta + 1 - \sin 2\theta\right)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = WR\left(\frac{3}{2}\cos\theta - 2\cos 2\theta\right) = 0$$

$$\cos 2\theta = \frac{3}{4}\cos\theta$$

หามุม θ ได้ เท่ากับจากวิธีที่ 1 คือ $\theta = 23.2^{o}$

ต่อไปจะดูความมีเสถียรภาพได้โดยหาอนุพันธ์อันดับสอง

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = WR\left(-\frac{3}{2}\sin\theta + 2\cos 2\theta\right)$$

แทนค่า $\theta = 23.2^{0}$, $2\theta = 46.4^{0}$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = WR(-0.5909 + 2.896)$$ เป็นบวก

สมดุลนี้มีเสถียรภาพ

แบบฝึกหัด

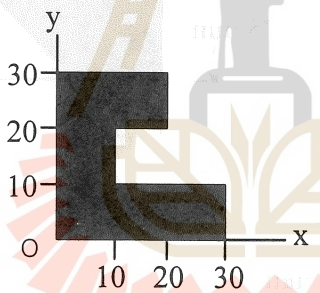
1. อนุภาคมวล 3 กิโลกรัม วางบนแกน x ที่ตำแหน่ง x = -5 m อนุภาค 4 กิโลกรัม อยู่ที่ x = 3 m จงหา ตำแหน่งศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคทั้งสอง

(ตอบ : $\overline{X} = -0.429\ \mathrm{m}$)

2. อนุภาค 3 อนุภาควางในระนาบ xy มีมวลและพิกัดดังนี้ มวล 3 กิโลกรัม อยู่ที่พิกัด (3, -2) เมตร มวล 4 กิโลกรัม อยู่ที่พิกัด (-2, 4) เมตร มวล 1 กิโลกรัม อยู่ที่พิกัด (2, 2) เมตร จงหาพิกัดของศูนย์กลางมวล

(ตอบ : $(\frac{3}{8}, \frac{3}{2})$)

3. แผ่นเหล็กมวลสม่ำเสมอรูปร่างเหมือนส่วนที่แรเงา มีสเกลในหน่วยเซนติเมตร จงหาพิกัดของศูนย์กลางมวล



(ตอบ : (11.7 cm, 13.3 cm))

4. โดยการอินทิเกรตโดยตรง จงหาตำแหน่งเซนทรอยด์ของ

(a) แผ่นแบนรูปครึ่งวงกลมรัศมี R

(b) ลวดงอเป็นส่วนโค้ง เศษหนึ่งส่วนสี่ของวงกลมรัศมี R

(c) แผ่นแบนรูปเศษหนึ่งส่วนสี่ของวงกลมรัศมี

(d) กรวยตันรัศมี R สูง h

(ตอบ : (a) ห่างศูนย์กลาง $\frac{4R}{3\pi}$,

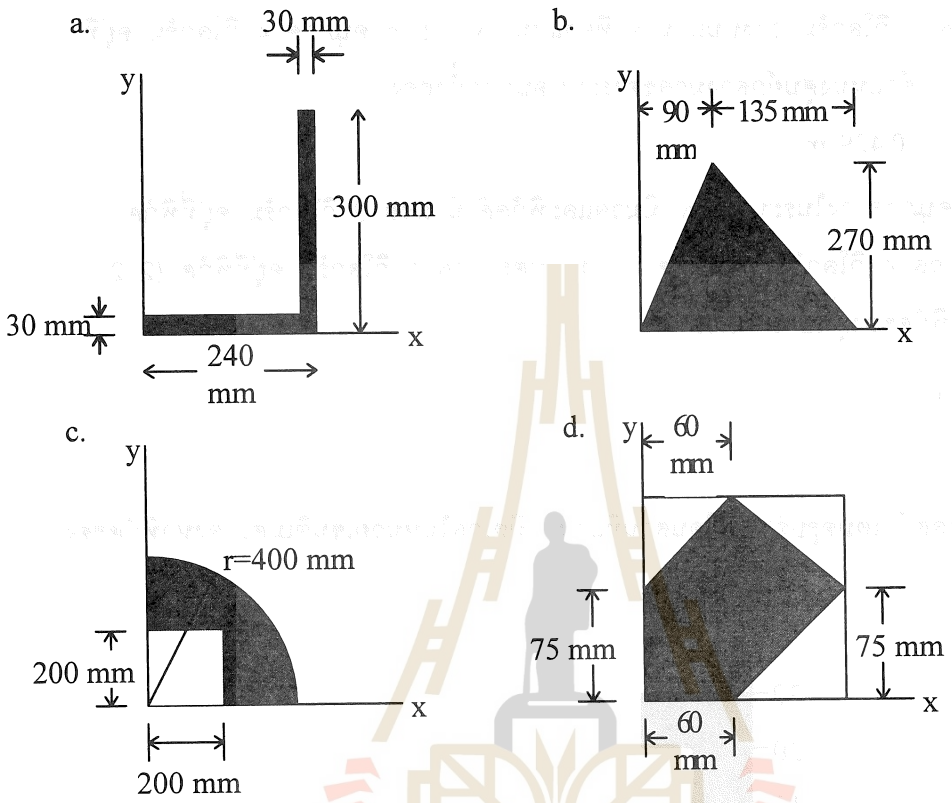
(b) $x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$,

(c) $x_C = y_C = \frac{4R}{3\pi}$,

(d) h/4 จากฐาน)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

5. จงหาเซนทรอยด์ของแผ่นแบนรูปต่อไปนี้



(ตอบ : a. $\bar{x}=175.6$ mm $\bar{y}=94.4$ mm

b. $\bar{x}=105.0$ mm $\bar{y}=90.0$ mm

c. $\bar{x}=202.3$ mm $\bar{y}=2023$ mm

d. $\bar{x}=52.0$ mm $\bar{y}=65.0$ mm)

6. ระบบประกอบด้วยอนุภาคมวล 5 กิโลกรัม เคลื่อนที่ตามแกน x ด้วยความเร็ว 3 เมตร/วินาที และมวล 2 กิโลกรัม เคลื่อนที่ตามแกน x ด้วยความเร็ว -2.5 เมตร/วินาที จงหา

a. ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

b. โมเมนตัมรวมของระบบ

(ตอบ : a. 1.43 m/s ไปทางแกน x ,

b. 10 kg-m/s)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

7. ระบบประกอบด้วยอนุภาคมวล 2 กิโลกรัม ความเร็ว $\bar{v}_1 = 2\hat{i} - 10t\,\hat{j}$ เมตร/วินาที และมวล 3 กิโลกรัม ความเร็วคงตัว $\bar{v}_2 = 4\hat{i}$ เมตร/วินาที (t คือเวลาเป็นวินาที) เมื่อเวลา t = 0.5 วินาที จงหา

a. ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

b. ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล

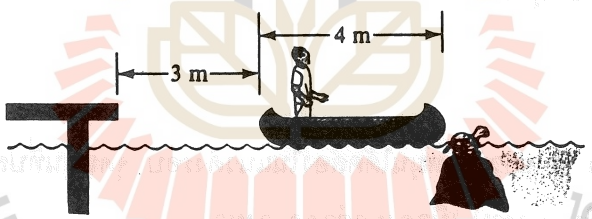
c. โมเมนตัมรวมของระบบ

(ตอบ : a. $\bar{V}_{cm} = 3.2\hat{i} - 2\hat{j}$ m/s ,

b. $\bar{A}_{cm} = -4\hat{j}$ m/s ,

c. $\bar{P} = 16\hat{i} - 10\hat{j}$ kg-m/s)

8. เด็กมวล 40 กิโลกรัม ยืนที่ท้ายเรือยาว 4 เมตร มวลเรือ 70 กิโลกรัม ลอยอยู่นิ่ง ๆ โดยที่ท้ายเรือห่างสะพาน 3 เมตร มีเต่าตัวหนึ่ง เกาะอยู่บนก้อนหินข้างหัวเรือ ดังรูป ถ้าเด็กเริ่มเดินมาทางหัวเรือเพื่อจัดเต่า



a. จงบรรยายการเคลื่อนที่ของระบบทั้งหมด

b. เมื่อเขามาถึงหัวเรือ เขาจะอยู่ห่างสะพานเท่าใด

c. ถ้าเขาสามารถยื่นมือออกมาพ้นเรือได้ไกลที่สุด 1 เมตร เขาจะจับเต่าได้หรือไม่ (ไม่คิดแรงเสียดทานระหว่างเรือกับน้ำ)

(ตอบ : a. เด็กเดินไปทางขวา เรือถอยมาทางซ้าย แต่ศูนย์กลางมวลของระบบรวมคือเรือและเด็กอยู่ที่เดิม

b. 5.55 m จากสะพาน

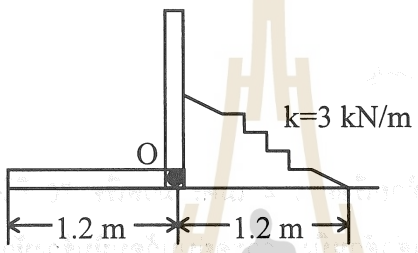
c. จับไม่ได้ เพราะเต่าอยู่ไกลสะพาน 7 m และเด็กเอื้อมได้ไกลสะพานแค่ 6.55 m)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

9. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ามวล m ยาว a กว้าง b รอบแกนที่แบ่งครึ่งด้านตรงข้ามแต่ละคู่และรอบแกนผ่านจุดกึ่งกลางตั้งฉากกับแผ่น

(ตอบ : $\frac{ma^2}{12}, \frac{mb^2}{12}, \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right)$)

10. คานยาว 2.4 เมตร มวล 30 กิโลกรัม หมุนได้คล่องรอบจุด O มีสปริงค่าคงที่ k = 3 กิโลนิวตัน/เมตร ติด ปลายหนึ่ง ที่กลางคาน อีกปลายหนึ่งติดที่พื้นห่าง O ออกไป 1.2 เมตร ดังรูป



เมื่อคานอยู่ในแนวดิ่ง สปริงไม่ยืด จงหาความเร็วเชิงมุมของคานเมื่ออยู่ในแนวดิ่งที่พอดีทำให้ความเร็วคานเป็นศูนย์เมื่อหมุนลงมาถึงพื้น

(ตอบ : 3.67 rad/s)

11. คานสม่ำเสมอ มวล M ยาว L หมุนได้คล่องในแนวดิ่งรอบ จุดหมุนที่ปลายข้างหนึ่งถ้าปล่อยคานจากตำแหน่งในแนวราบ เมื่อลงมาต่ำสุด จงหา

a. ความเร็วเชิงมุมของคาน
b. ความเร็วเชิงเส้นของจุดศูนย์กลางมวล
c. ความเร็วเชิงเส้นของปลายต่ำสุด

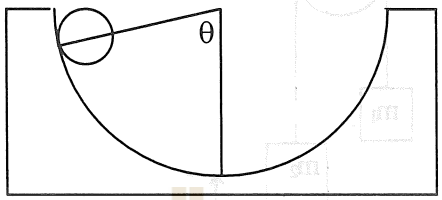
(ตอบ : a. $\sqrt{\frac{3g}{L}}$

b. $\frac{1}{2}\sqrt{3gL}$

c. $\sqrt{3gL}$)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

12. ปล่อยทรงกลมตันมวล m รัศมี r ให้กลิ้งโดยไม่ไถลในถ้วยทรงกลมรัศมี R จากตำแหน่งตั้งต้นทำมุม θ กับแนวดิ่ง



เมื่อทรงกลมลงมาถึงจุดต่ำสุด จงหา

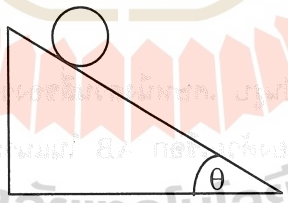
a. ความเร็วของจุดศูนย์กลางทรงกลม

b. แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉากของถ้วย ถ้าเริ่ม ปล่อยที่มุม $\theta = 90^\circ$

(ตอบ : a. $\sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)(1-\cos\theta)}$

b. $\frac{17}{7}mg$)

13. ทรงกลมตันมวล M รัศมี R กลิ้งโดยไม่ลื่นไถล ลงพื้นเอียงทำมุม θ กับแนวราบ จงหา



a. ความเร่งเชิงเส้นของจุดศูนย์กลางทรงกลม

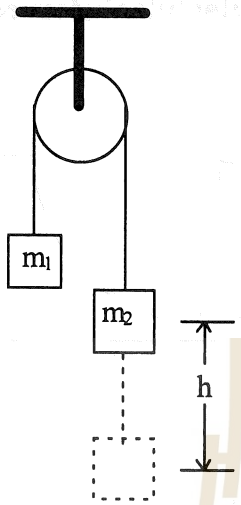
b. สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างทรงกลมกับพื้น

(ตอบ : a. $\frac{5}{7}g\sin\theta$

b. $\frac{2}{7}\tan\theta$)

14. มวล m_1 และมวล m_2 ผูกเชือกคล้องผ่านรอกรัศมี R โมเมนต์ความเฉื่อยของรอกรอบแกนกลาง I ปล่อยให้มวลเคลื่อนที่จากจุดนิ่ง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



เมื่อมวล m_2 เคลื่อนที่ต่ำกว่าระดับตั้งต้นเป็นระยะ h จงหา

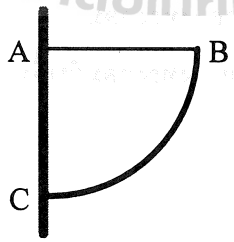
a. ความเร็วของมวลทั้งสอง

b. ความเร็วเชิงมุมของรอก

(ตอบ : a. $v = \sqrt{\dfrac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}}$

b. $\omega = \dfrac{V}{R}$)

15. แท่งโลหะมวล 4 กิโลกรัม งอเป็นรูป เศษหนึ่งส่วนสี่ของวงกลมรัศมี 25 เซนติเมตร ติดจุดหมุนที่ปลายล่าง C ส่วนปลายบนโยงด้วยเชือก AB ในแนวราบ ดังรูป จงหา



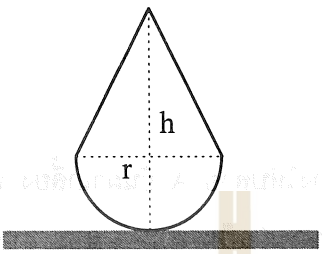
a. ความตึงในเชือก

b. แรงปฏิกิริยาที่ C

(ตอบ : a. 25 N

b. 46.5 N ทำมุม 57.5 องศากับแนวราบ)

16. วัตถุตันความหนาแน่นสม่ำเสมอทำเป็นรูปกรวยตั้งบนครึ่งทรงกลมโดยมีฐานเป็นวงกลมร่วมกัน ดังรูป

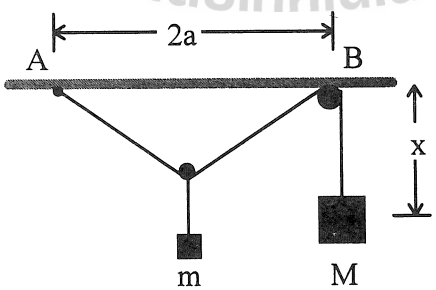


จงหาค่าสูงสุดของอัตราส่วนระหว่างความสูงของกรวยและรัศมีทรงกลมที่จะทำให้วัตถุนั้นตั้งบนโต๊ะราบได้อย่างมีเสถียรภาพ

(ตอบ $\frac{h}{r}=\sqrt{3}$)

17. โลหะครึ่งทรงกลมตัน รัศมี R วางบนพื้นราบเกลี้ยง จะวางแผ่นโลหะกลมชนิดเดียวกัน รัศมี R เท่ากันซ้อนบนครึ่งทรงกลมขึ้นไปได้สูงสุดเท่าใด ทั้งหมดจึงจะยังคงสมดุลอย่างมีเสถียรภาพ

18. เชือกยาว b ปลายหนึ่งผูกตะปูที่ A คล้องผ่านรอกคล่อง B อยู่ระดับเดียวกับ A ห่างออกไปเป็นระยะ 2a แขวนมวล M ที่ปลายเชือกอีกข้างหนึ่ง มีมวล m แขวนรอกคล่องและเบาวางให้เลื่อนไปมาได้บนเส้นเชือกระหว่าง A และ B เมื่อสมดุลมวล M อยู่ต่ำกว่า B เป็นระยะ x ดังรูป จงหาค่า x และหาว่าสมดุลนี้มีเสถียรภาพหรือไม่

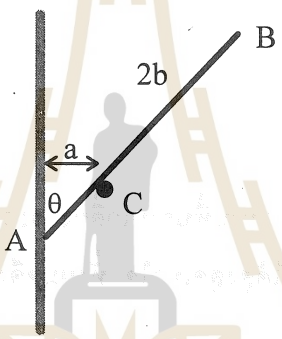


(ตอบ $x = b - \sqrt{\frac{16M^2a^2}{4M^2-m^2}}$ $4M^2 > m^2$)

19. ท่อนโลหะเล็ก ๆ ยาว b ประกอบด้วยโลหะสองชนิดต่อกัน โดยแต่ละชนิดยาวเท่ากันและพื้นที่หน้าตัดเท่ากันแต่ความหนาแน่นเป็นอัตราส่วน 9:1 ถ้าวางท่อนโลหะนี้ในครึ่งทรงกลมเกลี้ยงรัศมี R จงหามุมที่ท่อนโลหะกระทำกับแนวราบ และจงแสดงว่า สมดุลนี้มีเสถียรภาพ

(ตอบ $\tan^{-1}\dfrac{2b}{5\sqrt{4R^2-b^2}}$)

20. คาน AB มีมวลสม่ำเสมอ ยาว 2b วางให้ปลาย A ยันฝาเกลี้ยง และพิงคานเกลี้ยงอีกอันหนึ่งซึ่งตรึงอยู่ที่จุด C ดังรูป ถ้าจุด C อยู่ห่างฝาเป็นระยะ a และ b > a ดังรูป



จงหามุม θ ที่คานสมดุล สมดุลนี้มีเสถียรภาพหรือไม่

(ตอบ $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ ไม่มีเสถียรภาพ)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 7 การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก

เค้าโครงเรื่อง

7.1 ความนำ

7.2 สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

7.3 แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

7.4 พลังงานของตัวแกว่งกวัด

7.5 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

7.6 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

7.7 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียว สองชุด

7.8 การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

7.1 ความนำ

เมื่อวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งตามเวลา ถือว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่ ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุมีลักษณะกลับไปกลับมาซ้ำรอยเดิมอยู่ตลอดเวลา เราเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าการเคลื่อนที่เป็นคาบ (periodic motion) ตัวอย่างที่เราพบและมักอ้างอิงอยู่เสมอได้แก่ การแกว่งกวัดของลูกตุ้มนาฬิกา การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริงโดยไม่คิดแรงเสียดทาน การสั่นของเส้นลวด เป็นต้น

การเคลื่อนที่เป็นคาบอาจทำให้ปริมาณบางอย่างเปลี่ยนแปลงได้ตลอดเวลา จึงถือว่าเป็นการแกว่งกวัด (oscillation) เช่นกัน เช่นการแกว่งกวัดของกระแสหรือประจุในวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยขดลวดเหนี่ยวนำและตัวเก็บประจุ ความหนาแน่นของอากาศเมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่าน การแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของคลื่นแสง เราเรียกการแกว่งกวัดที่มีลักษณะเป็นคาบโดยผ่านตำแหน่งสมดุลเพียงตำแหน่งเดียวว่าการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก (harmonic oscillation) ในกรณีที่การแกว่งกวัดผ่านตำแหน่งสมดุลมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง เราเรียกว่า การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก (anharmonic oscillation)

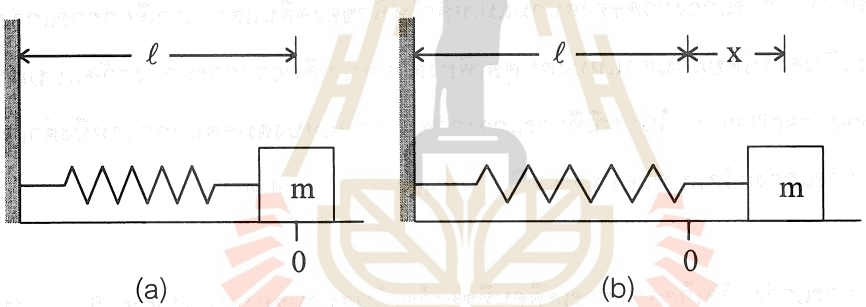
การแกว่งกวัดเกิดจากการเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามของแรง (force field) สนามของแรงที่ขึ้นกับตำแหน่งเพียงอย่างเดียวไม่ขึ้นกับเวลาเรียกว่า สนามสถิต (static field) เช่น สนามแรงโน้มถ่วงของโลก สนามของแรงจากลวดสปริง สนามของแรงอีกประเภทเป็นสนามของแรงที่เปลี่ยนตามเวลา เช่น สนามกระแสสลับ เป็นต้น ในบทนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการแกว่งกวัดในสนามสถิตเท่านั้น

เนื่องจากการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกตามตัวอย่างที่กล่าวในตอนต้น มีลักษณะที่คล้ายกันและสามารถอธิบายด้วยสมการการเคลื่อนที่แบบเดียวกัน เราจึงเริ่มต้นศึกษาจากตัวอย่างที่ง่ายที่สุด แต่เป็นรากฐานของการศึกษา การแกว่งกวัดที่ซับซ้อนอื่น ๆ ต่อไป ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดคือ การแกว่งกวัดของมวลที่ยึดติดกับสปริงเบา โดยไม่คิดความเสียดทานใด ๆ ทั้งสิ้น การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (simple harmonic motion) ซึ่งมักเรียกสั้นๆ ว่า SHM และเรียกระบบมวลที่แกว่งกวัดในสนามสถิตว่า ตัวแกว่งกวัด (oscillator)

เพื่อให้เข้าใจที่มาของสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM เราจึงพิจารณารายละเอียดสักเล็กน้อยในหัวข้อที่ 7.2 แล้วขยายผลในหัวข้อต่อ ๆ ไป

7.2 สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

สมมติวัตถุมวล m วางอยู่บนโต๊ะที่พื้นไม่มีความเสียดทานเลยวัตถุก้อนนี้ยึดติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงเบา โดยปลายอีกข้างหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุ ความยาวจากปลายข้างหนึ่งของสปริงที่ตรึงอยู่กับที่ไปจนถึงจุดกึ่งกลางมวลของวัตถุมีค่าเท่ากับ L ดังรูป 7 .1 (a) ถ้าดึงวัตถุให้เคลื่อนที่ไปในแนวราบเป็นระยะทาง x ดังรูป 7.1 (b) แล้วปล่อยวัตถุจะเคลื่อนที่กลับไปกลับมารอบๆ ตำแหน่งสมดุล 0



รูป 7.1 แสดงตำแหน่งของมวลก่อนและหลังการดึง

จากกฎของฮุก (Hook's law) จะมีแรงดึงให้วัตถุกลับมาที่ตำแหน่งสมดุลเสมอเรียกว่าแรงดึงกลับ และเป็นปฏิภาคกับระยะยืด x กล่าวคือ

$$F = -kx \qquad (7.1)$$

k เป็นค่าคงตัว เรียกได้หลายแบบคือ ค่าคงตัวสปริง (spring constant) ค่าคงตัวความยืดหยุ่น (elastic constant) หรือตัวประกอบความแข็งตึง (stiffness factor)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน จะได้

$$ma = -kx$$

หรือ
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (7.2)$$

โดยที่
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (7.3)$$

สมการ (7.2) เป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีตัวแปร x เป็นฟังก์ชันของเวลา ในที่นี้ x เป็นการกระจัดของการแกว่งกวัดซึ่งในบางครั้งอาจระบุเป็นมุมหรือตัวแปรอื่นก็ได้ การแก้สมการ (7.2) เราต้องหาฟังก์ชัน x (t) ซึ่งอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลามีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่งคูณกับค่าลบของฟังก์ชันเริ่มต้นนั้น ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์มีคุณสมบัติดังกล่าว นอกจากนี้มุม θ อาจเขียนในเทอม ωt โดยที่ ω คือความถี่เชิงมุมมีหน่วยเป็นเรเดียน/วินาที และ t คือเวลา ω ในที่นี้เป็นค่าคงตัว ซึ่งแตกต่างจากกรณีของการหมุนซึ่งเปลี่ยนแปลงค่าได้ตลอดเวลา

การแก้สมการ (7.2) อาจทำได้ง่ายดังนี้ เนื่องจาก

$$v = \frac{dx}{dt}$$

และ
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

สมการ (7.2) หลังจากการอินทิเกรตเทียบกับ x แล้วจะกลายเป็น

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{\omega^2}{2}x^2 + c \qquad (7.4)$$

c คือค่าคงตัวของการอินทิเกรต

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อ x มีค่าสูงสุด $\frac{dx}{dt}$ จะเท่ากับศูนย์ ค่าสูงสุดของ x นับจากตำแหน่งสมดุลเรียกว่าแอมพลิจูด (amplitude) แทนด้วยสัญลักษณ์ A ดังนั้น จากเงื่อนไข $\frac{dx}{dt}$ = 0 ที่ x = a ค่าของ c ในสมการ (7.4) คือ $c = \frac{\omega^2}{2}A^2$ แทนค่า c นี้ลงในสมการ (7.4) จะได้

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

หรือ
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (7.5)$$

ซึ่งเป็นอัตราเร็วของตัวแกว่งกวัดที่ตำแหน่ง x และมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่ง x = 0 สมการ (7.5) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$$

หลังจากการอินทิเกรตทั้งสองข้างแล้วจึงได้

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \phi$$

หรือ
$$x = A\sin\left(\omega t + \phi\right) \qquad (7.6)$$

ϕ คือค่าคงตัวของการอินทิเกรต ซึ่งหาได้จากการกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้น มุม $\left(\omega t + \phi\right)$ เรียกว่ามุมเฟส (phase angle) หรือ เรียกสั้นๆ ว่า เฟส ϕ เรียกว่าเฟสเริ่มต้นหรือค่าคงตัวเฟส ซึ่งเป็นมุมเฟสที่เวลา t = o และ ω คือความถี่เชิงมุม อย่างไรก็ตามสมการ (7.6) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (7.2) อาจมีรูปแบบเป็นฟังก์ชันโคไซน์ได้เช่นกัน ทั้งนี้ขึ้นกับเงื่อนไขเบื้องต้นเป็นสำคัญ

เฟสเริ่มต้น ϕ มักกำหนดโดยค่าการกระจัดและความเร็วที่ t = o นั่นคือเราต้องทราบทั้ง x(o) และ v(o) ยกเว้นที่ตำแหน่ง x = $\pm$ A เราไม่จำเป็นต้องกำหนดค่า v(o) การกำหนด

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ค่าใดค่าหนึ่งแต่เพียงอย่างเดียว ไม่อาจบอกค่า ϕ ได้แน่นอน เช่นถ้ากำหนด $x(o) = o$ ค่าของ ϕ มีได้ 2 ค่า คือ 0 หรือ π จึงต้องกำหนด $v(o)$ ด้วยเพื่อทราบค่า ϕ ว่าเป็น 0 หรือ π อย่างไรก็ตาม เราสามารถเลือกค่า ϕ ได้ตามความพอใจ แต่ต้องกำหนดเวลาเริ่มต้นให้เหมาะสมกับสมการ เช่น ถ้าเรากำหนดสมการเป็น $x = A\sin\omega t$ เราต้องให้เวลาเริ่มต้นหรือ t = o ที่ตำแหน่งสมดุล แต่ถ้าเรากำหนดสมการเป็น $x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t$ เราต้องให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุดเป็น A เป็นต้น

คาบของการแกว่งกวัดซึ่งมักเรียกสั้นๆว่า คาบ (period) คือ เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบ 1 รอบ หรือเวลาสำหรับมุมเฟสเพิ่มขึ้น 2π ดังนั้น $\sin(\omega t + 2\pi) = \sin\omega(t + T)$ นั่นคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{7.7}$$

ความถี่ f ซึ่งเป็นจำนวนรอบของการแกว่งกวัดใน 1 วินาที คือ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.8}$$

ในสมการ (7.6) ถ้าเราให้ $\phi = \frac{\pi}{2} + \phi'$ ดังนั้น

$$x = A\cos\left(\omega t + \phi'\right) \tag{7.9}$$

จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่แบบ SHM อาจแทนได้ด้วยฟังก์ชันโคไซน์เช่นกัน

จากสมการ (7.5) แสดงว่า ความเร็วของวัตถุที่ตำแหน่งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศทางได้สองทิศทาง ดังนั้นการระบุ $x(o)$ เพียงอย่างเดียว จึงไม่เพียงพอสำหรับการกำหนดเฟสเริ่มต้น จำเป็นต้องระบุทิศของ $v(o)$ ด้วยดังได้กล่าวในตอนต้นแล้ว

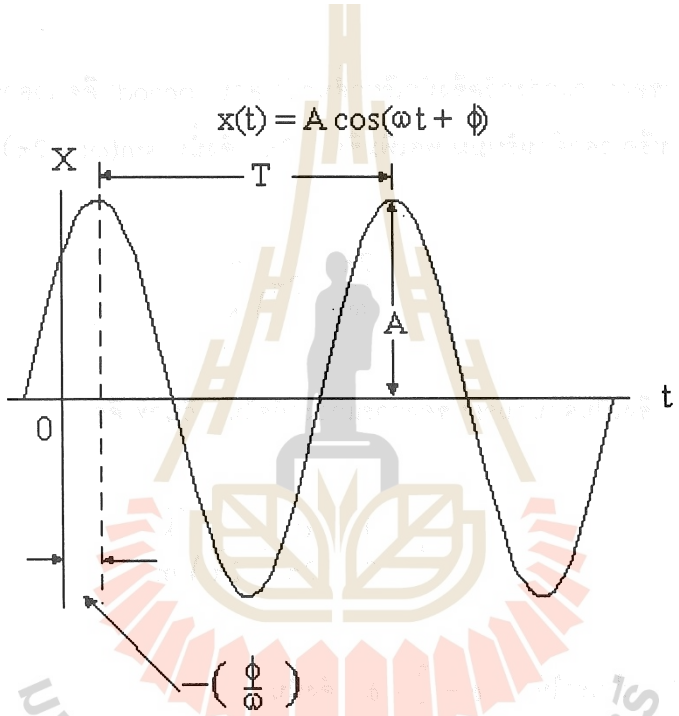
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อัตราเร่งของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

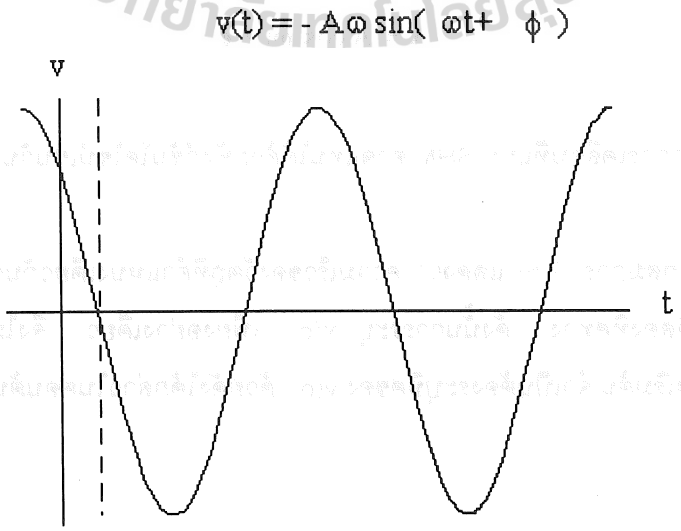
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (7.10)$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น $\omega^2 A$ และมีทิศตรงข้ามกับการกระจัด x เสมอ

การกระจัด

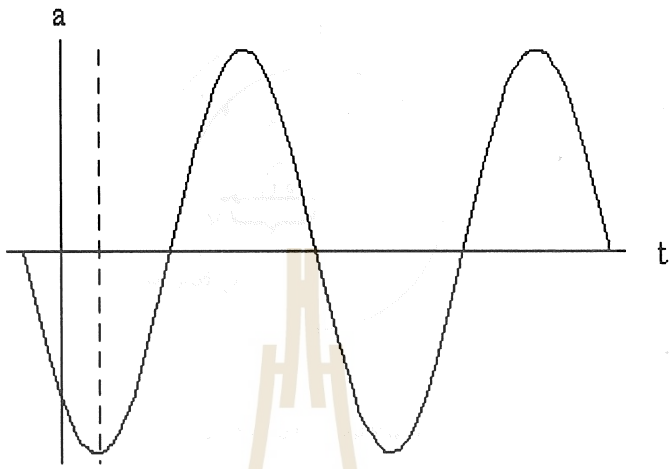


อัตราเร็ว



อัตราเร่ง

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$



รูป 7.2 แสดงการกระจัด อัตราเร็วและอัตราเร่งที่เป็นฟังก์ชันของเวลา ถ้าเฟสเริ่มต้น ϕ เท่ากับศูนย์ แกนในแนวดิ่งจะเลื่อนมาที่ตำแหน่งที่เป็นเส้นประ

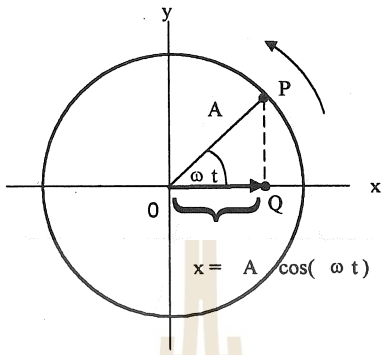
7.3 แนวเทียบวงกลมอ้างอิงกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เราอาจเข้าใจการแกว่งกวัดแบบ SHM ได้ดียิ่งขึ้นหากเปรียบเทียบกับการเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยใช้วงกลมอ้างอิง (reference circle) กล่าวคือ พิจารณาจุด P ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี A ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω สมมติจุด P เริ่มต้นอยู่ในแนวแกน x ที่ตำแหน่ง $x = A$ และเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ t มุมที่รัศมี A ทำกับแกน x คือ ωt ดังรูปที่ 7.3 (ก) ฉายา(projection) ของจุด P บนแกน x คือจุด Q เมื่อจุด P เคลื่อนที่รอบวงกลม ฉายา Q จะแกว่งกวัดไปและกลับตามแนวแกน $\pm x$ ในลักษณะ SHM การกระจัดของ Q นับจากจุดเริ่มต้น 0 กำหนดโดย $x = A\cos\omega t$ ซึ่งเหมือนกับสมการ (7.9) โดยที่เฟสเริ่มต้น $\phi = 0$

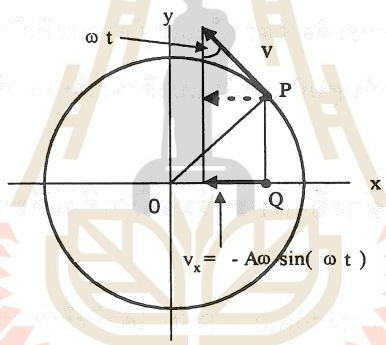
อย่างไรก็ตาม เราอาจเลือกเฟสเริ่มต้นที่ตำแหน่งใดๆ บนวงกลมก็ได้ โดยให้เริ่มนับเวลาที่ $t = 0$ และ SHM จะเป็นฉายา ของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยไม่จำเป็นต้องตามแนวแกน x เท่านั้น

รูป (ข) แสดงเวกเตอร์ของความเร็ว v ของจุด P ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $A\omega$ ฉายาของเวกเตอร์ v บนแกน x คือ $v_x = -A\omega\sin\omega t$ เครื่องหมาย - แสดงให้เห็นว่าเคลื่อนที่ ในทิศทาง - x ทำนองเดียวกัน รูป (ค) แสดงเวกเตอร์ของความเร่งเข้าสู่ศูนย์กลางของจุด P ซึ่งมี

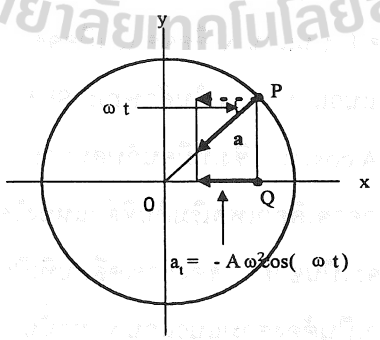
ขนาดเท่ากับ $A\omega^2$ และฉายาของความเร่งในแนวแกน x คือ $a_x = -A\omega^2 \cos\omega t$ ดังนั้น วงกลมอ้างอิงจึงใช้เป็นเครื่องมือวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบ SHM ได้เป็นอย่างดี



(ก) ตำแหน่ง x ของจุด Q



(ข) ความเร็ว V_x ของจุด Q



(ค) ความเร่ง a_x ของจุด Q

รูป 7.3 แสดงวงกลมอ้างอิงสำหรับ SHM ของจุด Q ซึ่งเคลื่อนที่ไป-กลับในแนวแกน $\pm$ x

7.4 พลังงานของตัวแกว่งกวัด

สมมติเราให้เวลาเริ่มต้นที่การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้นการกระจัดที่เวลา t ใดๆ จึงกำหนดโดย

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{7.11}$$

พลังงานศักย์ของตัวแกว่งกวัดในขณะใดๆ คือ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \tag{7.12}$$

จะเห็นได้ว่าพลังงานศักย์มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ และมีค่าต่ำสุดเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่งสมดุล

ความเร็วของตัวแกว่งกวัดหาได้จาก

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

ดังนั้น พลังงานจลน์ของตัวแกว่งกวัดที่ขณะใด คือ

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) \tag{7.13}$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่งสมดุล

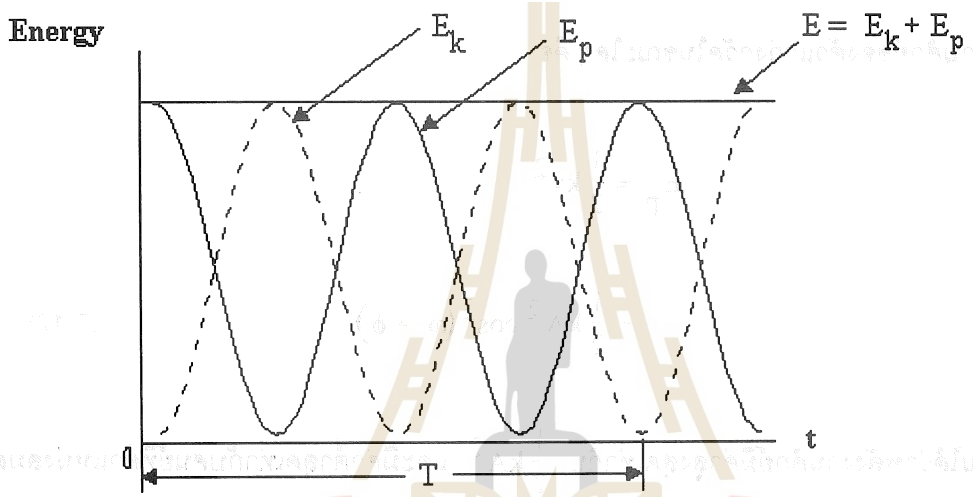
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

พลังงานรวมของตัวแกว่งกวัดมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ หรือ

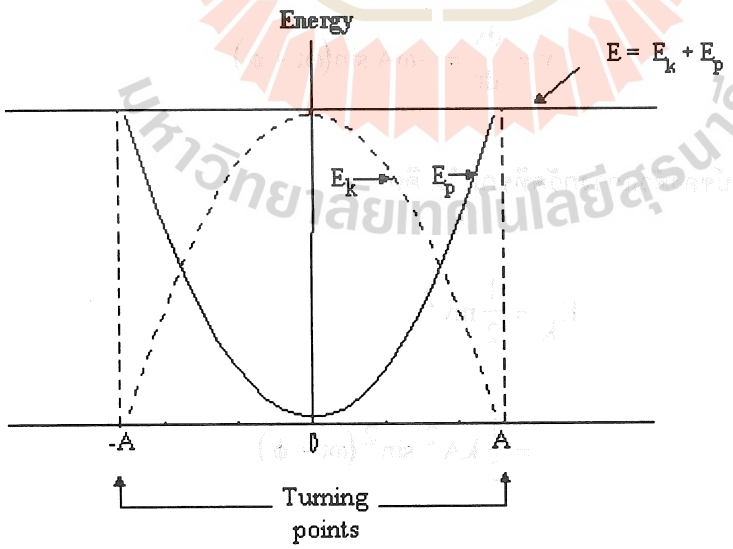
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (7.14)$$

กราฟของพลังงานจลน์ พลังงานศักย์และพลังงานรวมของระบบแสดงในรูป 7.4

(ก)



(ข)



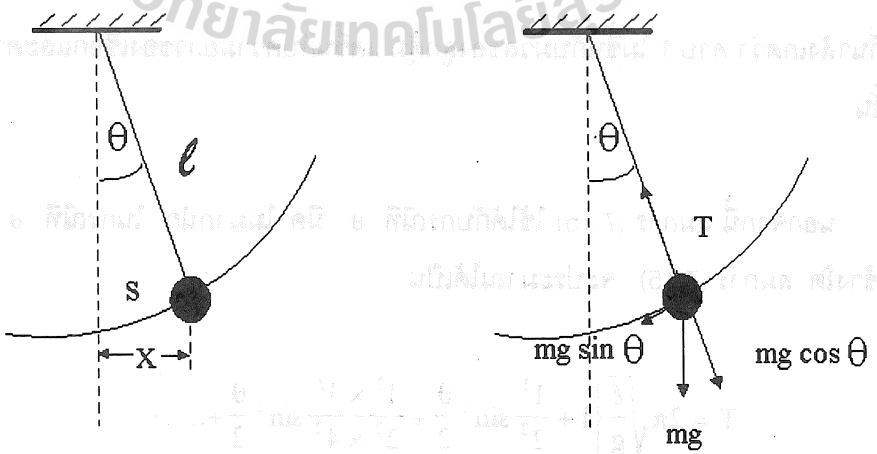
รูป 7.4 แสดงพลังงานจลน์ พลังงานศักย์และพลังงานรวมที่เป็นฟังก์ชันของเวลา (รูป ก.) และการกระจัด (รูป ข)

จะเห็นได้จากสมการ (7.14) ว่าพลังงานรวมมีค่าคงตัวและเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่ง สมดุล พลังงานศักย์มีค่าเป็นศูนย์ แต่พลังงานจลน์มีค่าสูงสุด ที่ตำแหน่งอื่นๆ ผลรวมของพลังงานทั้งสองจะคงตัวเสมอคือเท่ากับ $\frac{1}{2}kA^2$ ที่ตำแหน่งซึ่งการกระจัดมีค่าสูงสุด พลังงานจลน์จะเท่ากับศูนย์ แต่พลังงานศักย์มีค่าสูงสุด นอกจากนี้จะเห็นได้จากรูป 7.4 ว่า ค่าเฉลี่ยของพลังงานจลน์ในหนึ่งคาบจะเท่ากับค่าเฉลี่ยของพลังงานศักย์พอดี และค่าเฉลี่ยของแต่ละพลังงานคือ $\frac{1}{4}kA^2$

7.5 ระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว

เมื่อออกแรงทำให้ระบบมีการเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งสมดุลจะมีแรงดึงกลับให้ระบบกลับสู่ตำแหน่งสมดุล และเมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน จะได้สมการการเคลื่อนที่แบบ SHM คือสมการ (7.2) ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงตัวอย่างที่มีการเคลื่อนที่แบบ SHM โดยกำหนด ω ซึ่งเป็นความถี่เชิงมุม และคาบ T ในเทอมของตัวแปรค่าต่างๆ ซึ่งขึ้นกับระบบที่แตกต่างกันไป

7.5.1 ลูกตุ้มเชิงเดียว ลูกตุ้มเชิงเดี่ยว (simple pendulum) ประกอบด้วยมวล m ผูกติดกับเชือกยาว ℓ โดยปลายอีกข้างหนึ่งของเชือกตรึงอยู่กับที่เมื่อดึงให้ลูกตุ้มเคลื่อนที่ไปเป็นมุม θ จากตำแหน่งสมดุลซึ่งอยู่ในแนวดิ่ง แรงดึงกลับเท่ากับ $-mg\sin\theta$ สำหรับแรงตึงในเส้นเชือก T และแรง $mg\cos\theta$ ไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่แต่อย่างใด เมื่อการกระจัดมีค่าน้อย ส่วนโค้ง s จะมีค่าประมาณเท่ากับพิกัด x หรือ $s \approx x$ ดังแสดงในรูป 7.5



รูป 7.5 แสดงการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียว

$\sin\theta$ สามารถกระจายออกเป็นอนุกรมได้ดังนี้

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots\ldots\ldots$$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมเล็กๆ (วัดเป็นเรเดียน) เราพอจะประมาณได้ว่า

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{x}{\ell}$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของระบบหาได้จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันคือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

$$= -mg\frac{x}{\ell}$$

หรือ $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

โดยที่ $$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

แต่ $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ดังนั้น $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (7.15)$$

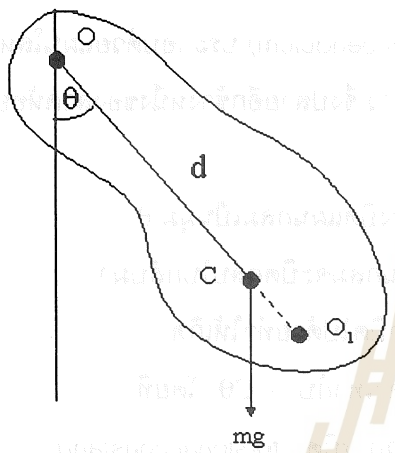
เป็นที่น่าสังเกตว่า คาบ T ไม่ขึ้นกับมวลของลูกตุ้ม แต่ขึ้นกับความยาวของเชือกและค่า g เท่านั้น

นอกจากนี้ สมการ (7.15) ใช้ได้กับกรณีที่ θ มีค่าไม่มากนัก ในกรณีที่ θ เป็นมุมค่อนข้างโต สมการ (7.15) จะประมาณได้เป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left\{1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1^2\times 3^2}{2^2\times 4^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \ldots..\right\} \qquad (7.16)$$

ดังนั้น หากเราเพิ่มเทอมต่างๆเข้าไปมากเพียงใด คาบที่ได้จะมีค่าแม่นตรงมากขึ้นตามไปด้วย

7.5.2 ลูกตุ้มฟิสิกัล วัตถุแข็งเกร็งที่แกว่งกวัดรอบจุดหนึ่งที่ไม่ใช่จุดศูนย์กลางมวล เรียกว่า ลูกตุ้มฟิสิกัล (physical pendulum) ให้ O เป็นจุดหมุนซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวล C เป็นระยะ d ดังรูป 7.6 เมื่อเส้น OC ทำมุม θ กับแนวดิ่ง ทอร์กดึงกลับในที่นี้มีค่าเท่ากับ $-mgd\sin\theta$ และจาก $\tau = I\alpha$ โดยที่ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุแข็งเกร็งรอบ O ดังนั้น



$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta$$

เมื่อ θ มีค่าไม่มากนักจะได้ $\sin\theta \approx \theta$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd\theta}{I}$$

$$= \omega^2\theta$$

โดยที่ $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ (7.17)

รูป 7.6 แสดงลูกตุ้มฟิสิกัล

คาบของการแกว่งกวัด คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (7.18)$$

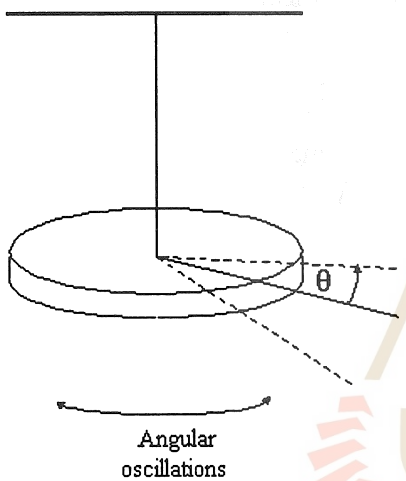
เนื่องจาก I เป็นฟังก์ชันของมวลของวัตถุ ดังนั้นคาบของการแกว่งกวัดในสมการ (7.18) จึงไม่ขึ้นกับมวลของวัตถุแต่อย่างใด และเราอาจใช้หลักการของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้หาค่า I ของวัตถุที่มีรูปร่างต่างๆ ซึ่งไม่อาจคำนวณโดยคณิตศาสตร์ได้

ความยาวสมมูล (equivalent length) ของลูกตุ้มฟิสิกัล หรือ ℓ_{eq} คือความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากับคาบของลูกตุ้มฟิสิกัลนี้กล่าวคือ $\ell_{eq} = \frac{I}{md}$ และจากทฤษฎีแกนขนาน $I = I_c + md^2$ ซึ่งมีค่ามากกว่า md^2 เมื่อ I_c คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลจึงเห็นได้ว่า ℓ_{eq} จะต้องมากกว่า d เสมอ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จุด O_1 ซึ่งอยู่ในแนว OC และระยะ $OO_1 = \ell_{eq}$ เราเรียกจุด O_1 ว่าศูนย์กลางการแกว่งกวัด (center of oscillation) ของลูกตุ้มฟิสิกัล ตำแหน่งของ O และ O_1 สามารถแทนที่กันได้ กล่าวคือ ถ้าเราให้ O_1 เป็นจุดหมุน O จะกลายเป็นศูนย์กลางการแกว่งกวัดโดยที่คาบของการแกว่งกวัดจะยังคงเท่าเดิม

7.5.3 **ลูกตุ้มชนิดบิด** ลูกตุ้มชนิดบิด (torsional pendulum) ประกอบด้วยแผ่นโลหะกลมแบนตรงจุดศูนย์กลางของแผ่นยึดติดกับลวดโลหะยาว ซึ่งปลายอีกข้างหนึ่งของลวดห้อยแขวนในแนวดิ่ง ดังรูป 7.7



เมื่อเราออกแรงบิดแผ่นกลมเป็นมุม θ แล้วปล่อยแผ่นกลมจะบิดกลับไปกลับมา ลวดโลหะที่ถูกบิดไปด้วยทำให้เกิดแรงดึงกลับมีค่าเท่ากับ $-C\theta$ โดยที่ C คือค่าคงตัวการบิด (torsional constant) ของลวดโลหะ เมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันสำหรับการ หมุนจะได้

รูป 7.7 แสดงลูกตุ้มชนิดบิด

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

หรือ
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta \qquad (7.19)$$

โดยที่
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$$

คาบของการแกว่งกวัดในกรณีนี้ คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (7.20)$$

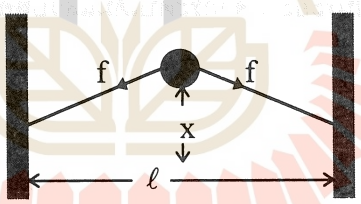
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ถ้าลวดโลหะมีรัศมี r ยาว ℓ และมอดุลัสของสภาพแข็งเกร็ง หรือมอดุลัสเฉือนของลวดโลหะเป็น s (รายละเอียดจะได้กล่าวในเรื่องคลื่นกลของบทต่อๆ ไป) ดังนั้นค่าคงตัวการบิด C จะเป็น

$$C = \frac{\pi s r^4}{2\ell}$$

7.5.4 **มวลตรึงสองปลายแกว่งน้อย ๆ ในแนวดิ่ง** สมมติมีมวลตรึงสองปลายด้วยสายเคเบิลที่มีความตึง f ระหว่างจุดตรึง 2 จุด ดังรูป 7.8 มวล m นี้แกว่งกวัดในแนวดิ่งด้วยการกระจัด x น้อยๆ โดยไม่ทำให้ความตึงเปลี่ยนแปลงตามแต่อย่างใด ถ้าสายเคเบิลยาว ℓ และไม่คิดความเฉื่อย สมการการเคลื่อนที่ของระบบจะเป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2f\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}} \qquad (7.21)$$



รูป 7.8 แสดงการแกว่งกวัดของมวลตรึงสองปลาย

โดยทั่วไปการเคลื่อนที่ของระบบดังกล่าวจะไม่เป็น SHM อย่างไรก็ตาม สำหรับค่า x น้อยๆ เมื่อเทียบกับ ℓ เราอาจกระจายอนุกรม

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{2x}{\ell}\left(1 + \frac{4x^2}{\ell^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2x}{\ell}\left[1 - \frac{2x^2}{\ell^2} + \ldots\ldots\right] \approx \frac{2x}{\ell}$$

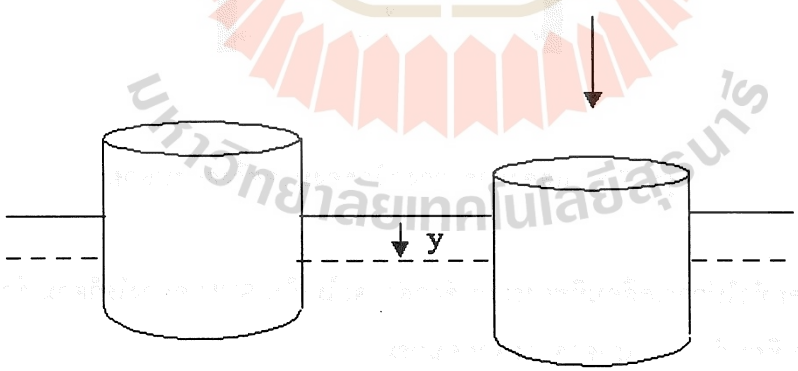
ดังนั้น สมการ (7.21) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4fx}{m\ell} = -\omega^2 x \qquad (7.22)$$

โดยมีคาบของการแกว่งกวัดเป็น

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{4f}} \qquad (7.23)$$

7.5.5 **ทรงกระบอกลอยแกว่งกวัดในของเหลว** พิจารณาทรงกระบอกยาว ℓ รัศมี r ความหนาแน่น ρ ลอยอยู่ในของเหลวที่มีความหนาแน่น ρ_f เมื่อออกแรงกดด้านบนของทรงกระบอกให้จมลงไปเป็นระยะ y จากระดับเดิมแล้วปล่อย ทรงกระบอกจะแกว่งกวัดในของเหลวนี้



รูป 7.9 แสดงการแกว่งกวัดของทรงกระบอกในของเหลว

เนื่องจากมวลของทรงกระบอกมีค่าเท่ากับ $\pi r^2 \ell \rho$ และมวลของของเหลวที่ถูกแทนที่มีค่าเท่ากับ $\pi r^2 y \rho_f$ ดังนั้นแรงดึงกลับจึงเท่ากับ $(\pi r^2 y \rho_f)g$ จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันจึงได้

$$\pi r^2 \ell \rho \frac{d^2y}{dt^2} = -\pi r^2 \rho_f g y$$

หรือ

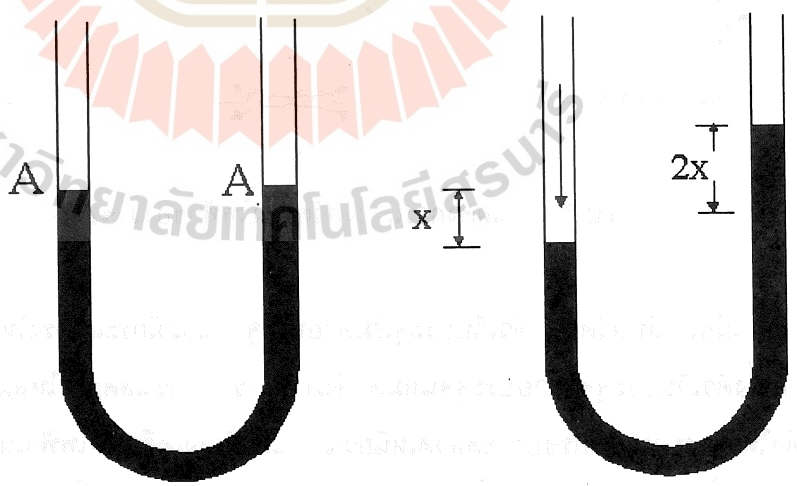
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\rho_f g}{\ell \rho} y = -\omega^2 y \qquad (7.24)$$

และคาบ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \rho}{g \rho_f}} \qquad (7.25)$$

7.5.6 การเคลื่อนที่ของของเหลวในหลอดรูปตัวยู

สมมติให้หลอดรูปตัวยู (U-tube) รัศมีภายในเท่ากับ r ตั้งอยู่ในแนวดิ่งภายในบรรจุของเหลวความหนาแน่น ρ โดยความยาวของของเหลวจากระดับ AA เท่ากับ ℓ ดังรูป 7.10 (ก) เมื่อออกแรงกดปลายด้านหนึ่งของหลอดให้ระดับของของเหลวลดลงมาเป็นระยะ x ระดับของของเหลวในหลอดจะมีระดับต่างกันเท่ากับ 2x ดังรูป 7.10 (ข) หลังจากนั้นจึงปล่อยให้ของเหลวแกว่งกวัดในหลอดนั้น จากรูปจะเห็นได้ว่า การกระจัดของของเหลวมีค่าเท่ากับ 2x



(ก) (ข)

รูป 7.10 แสดงการแกว่งกวัดของของเหลวในหลอดรูปตัวยู

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เนื่องจากมวลของของเหลวที่มีการแกว่งกวัดมีค่าเท่ากับ $\pi r^2 \ell \rho$ และความแตกต่างระหว่างระดับของของเหลวทั้งสองด้านคือ 2x ทำให้เกิดแรงดึงกลับมีค่าเท่ากับ $-(\pi r^2)(2x)\rho g$ ดังนั้นเมื่อใช้ กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\pi r^2 \ell \rho \frac{d^2x}{dt^2} = -\pi r^2 \rho g(2x)$$

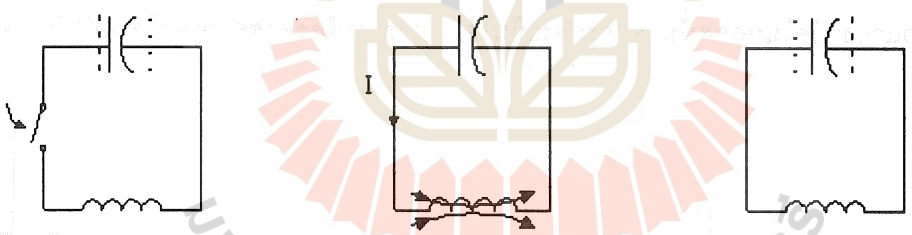
หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{\ell}x = -\omega^2 x \qquad (7.26)$$

คาบของการแกว่งกวัดคือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \qquad (7.27)$$

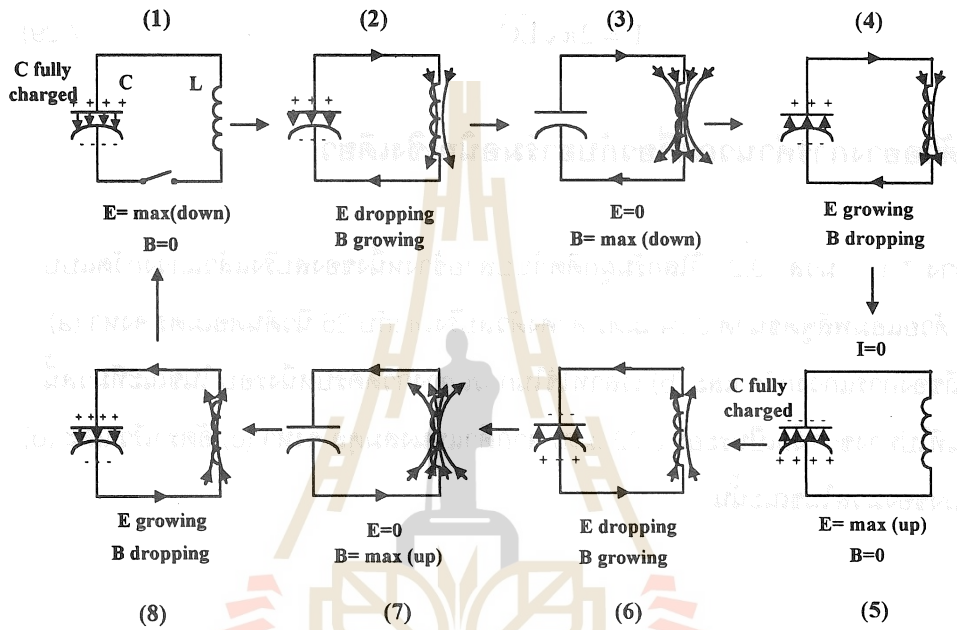
7.5.7 **วงจร** L - C



รูป 7.11 แสดงการแกว่งกวัดทางไฟฟ้าของวงจร L - C

เมื่อเราสับสวิตซ์ ตัวเก็บประจุเริ่มคายประจุ และมีกระแสตรงไหลในวงจรและเมื่อเวลาหนึ่งตัวเก็บประจุจะคายประจุจนหมด ดังภาพ (ข) กระแสตรงที่ไหลผ่านขดลวดเหนี่ยวนำทำให้เกิดสนามเหล็กรอบๆ ขดลวดเหนี่ยวนำ และมีแรงเคลื่อนที่ไฟฟ้าเหนี่ยวนำในขดลวดเหนี่ยวนำนั้น แรงเคลื่อนไฟฟ้านี้ทำให้เกิดประจุชนิดตรงกันข้ามกับครั้งแรกในตัวเก็บประจุ จนกระทั่งมีจำนวนเท่าเดิมดังแสดงในภาพ (ค) กระบวนการที่ตรงข้ามกับครั้งแรกจึงเริ่มเกิดขึ้นและจะเกิดขึ้นกลับมาอยู่ตลอดเวลาโดยที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานเลย เราเรียกกระบวนการนี้ว่า การแกว่งกวัดทางไฟฟ้า (electrical oscillation) วงจรของการแกว่งกวัดแสดงในรูป 7.12

พลังงานรวมในการแกว่งกวัดทางไฟฟ้าเป็นผลรวมของพลังงานในตัวเก็บประจุและพลังงานในขดลวดเหนี่ยวนำ พลังงานรวมนี้จะมีค่าคงตัว กล่าวคือ พลังงานไฟฟ้าในตัวเก็บประจุจะค่อยๆ เปลี่ยนไปเป็นพลังงานแม่เหล็กในขดลวดเหนี่ยวนำ แล้วต่อไปพลังงานแม่เหล็กนี้จะค่อยๆ เปลี่ยนไปเป็นพลังงานไฟฟ้าอีก กลับไปกลับมาอยู่ตลอดเวลา คล้ายกับการเปลี่ยนพลังงานศักย์ไปเป็นพลังงานจลน์ในการแกว่งกวัดของ ลูกตุ้มเชิงเดียวดังกล่าวแล้ว



รูป 7.12 แสดงการเปลี่ยนแปลงพลังงานในวงจร L - C (1) พลังงานเกิดขึ้นในตัวเก็บประจุทันทีที่เริ่มสับสวิตช์ (2) ตัวเก็บประจุเริ่มคายประจุและทำให้เกิดกระแสผ่านขดลวดเหนี่ยวนำ แล้วทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก (3) เมื่อกระแสมีค่าสูงสุด สนามแม่เหล็กจะมีค่าสูงสุดด้วย (4) เมื่อกระแสเริ่มลดลงสนามแม่เหล็กเริ่มลดลง (5) สนามแม่เหล็กเท่ากับศูนย์ และสนามไฟฟ้าในตัวเก็บประจุมีค่าสูงสุด กระบวนการที่เกิดขึ้นในทิศทางตรงข้ามกับกระบวนการแรกแสดงในขั้นตอนที่ 6 - 8

ถ้า $L\frac{dI}{dt}$ เป็นแรงเคลื่อนที่ไฟฟ้าที่เกิดในขดลวดเหนี่ยวนำ และ q/c เป็นแรงเคลื่อนไฟฟ้าที่เกิดในตัวเก็บประจุ (รายละเอียดจะได้กล่าวในเรื่องแม่เหล็กไฟฟ้าในโอกาศต่อไป) ดังนั้น

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t และเนื่องจาก $I=\frac{dq}{dt}$

$$\therefore \quad \frac{d^2I}{dt^2} = \frac{-1}{LC}I = -\omega^2 I \tag{7.28}$$

คาบของการแกว่งกวัดทางไฟฟ้าคือ

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \tag{7.29}$$

7.6 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับฮาร์มอนิกเชิงเดียว

ตัวอย่าง 7.1 มวล 0.2 กิโลกรัมผูกติดกับปลายข้างหนึ่งของสปริงแล้วแกว่งกวัดแบบ SHM ด้วยแอมพลิจูดขนาด 0.04 เมตร ค่าคงตัวสปริงเท่ากับ 25 นิวตันต่อเมตร จงหา (a) ความถี่ของการแกว่งกวัด และ (b) เวลาที่ใช้ในการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบ ในขณะที่มวลนี้เคลื่อนที่ไปทางขวามือเป็นระยะ 0.02 เมตร จากตำแหน่งสมดุล จงหา (c) อัตราเร็ว และ (d) อัตราเร่งของมวลในขณะนั้น

วิธีทำ

(a) ความถี่ของการแกว่งกวัดหาได้จากสมการ (7.8)

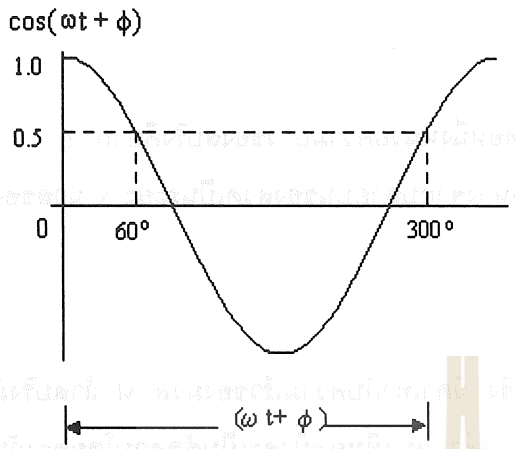
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ N/m}{0.20\ kg}} = 1.78\ \ Hz$$

(b) คาบ T หาได้จากสมการ (7.8) เช่นกันคือ

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.78\ Hz} = 0.562\ \ s$$

(c) การกำหนดตำแหน่งเฉพาะที่ใด ๆ ใน SHM ควรเขียนกราฟของ x ที่เป็นฟังก์ชันของ t เพื่อทราบเฟสของการเคลื่อนที่ดังแสดงในรูป

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



นั่นคือ เพื่อหาค่า $(\omega t + \phi)$ ซึ่งปรากฏในสมการของ SHM เสมอ ในที่นี้คือ

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

หรือ
$$(\omega t + \phi) = \cos^{-1}\left(\frac{0.02\text{m}}{0.04\text{m}}\right)$$
$$= \cos^{-1}(0.5)$$
$$= 60°$$

แต่ที่มุม 60° มวลเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ และที่มุม 300° มวลเคลื่อนที่ไปทางขวามือและให้ค่าโคไซน์เดียวกัน ดังนั้น $\omega t + \phi = 300°$ และอัตราเร็วในขณะนั้นคือ

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$
$$= -(0.04\text{m})(2\pi)(1.78\text{Hz})\sin 300°$$
$$= 0.387\ \text{m/s} \quad \text{(เคลื่อนที่ไปทางขวามือ)}$$

(d) อัตราเร่งกำหนดโดย

$$a = -\omega^2 x = -[(2\pi)(1.78\text{Hz})]^2(0.02\text{m})$$

$$= -2.50\ \text{m/s}^2 \quad \text{(ไปทางซ้ายมือ)}$$

จะสังเกตุเห็นว่าอัตราเร็วและอัตราเร่งมีทิศตรงกันข้าม

ตัวอย่าง 7.2 ** จงพิสูจน์ว่าความถี่ของการแกว่งกวัดของวัตถุมวล M ซึ่งห้อยแขวนไว้กับสปริงที่มีค่าคงตัวสปริงเป็น k และมวลของสปริงเท่ากับ m คือ

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ

สมมุติสปริงยาว ℓ ดังนั้นมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของสปริงคือ m/ ℓ พิจารณาความยาวน้อยยิ่ง dx ที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากปลายบนของลวดเป็นระยะ x มวลของสปริงช่วงนี้จะเป็น $\frac{m}{\ell}dx$

ความเร็วที่ปลายล่างของสปริงคือ v ซึ่ง มีค่าเท่ากับความเร็วของมวล M ถ้าสปริงมีเนื้อสารสม่ำเสมอ การกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งที่หยุดนิ่งจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากจุดตรึงนั้น ดังนั้น อัตราเร็วของเนื้อสารของสปริงที่ระยะ x จะกำหนดโดย vx/ℓ และพลังงานจลน์คือ $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{\ell}dx\right)\left(\frac{vx}{\ell}\right)^2$

พลังงานจลน์รวมของสปริงที่ตำแหน่งนั้นจะเป็น

$$E_k = \int_0^{\ell} \frac{1}{2}\frac{mv^2}{\ell^3}x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mv^2}{\ell^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{mv^2}{6}$$

แต่พลังงานจลน์ของมวล M คือ $\frac{1}{2}Mv^2$

ดังนั้นพลังงานจลน์รวมของระบบจะเป็น $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{mv^2}{6}$

หรือ $E_k = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)v^2$

ถ้า y เป็น การกระจัดของมวล M จากตำแหน่งสมดุล ดังนั้น $v = \frac{dy}{dt}$ และแรงดึงกลับคือ -ky พลังงานศักย์ของระบบจะเป็น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$E_p = \int_0^y ky\,dy = \frac{1}{2}ky^2$$

พลังงานรวมของระบบคือ

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{ky^2}{2}$$

เนื่องจากพลังงานมีการอนุรักษ์ ดังนั้น $\frac{dE}{dy} = 0$

หรือ $$\left(M + \frac{m}{3}\right)\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{\left(M + \frac{m}{3}\right)}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (7.2)

$$\therefore \omega^2 = \frac{k}{M + \frac{m}{3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + \frac{m}{3}}{k}}$$

และ $$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

ตัวอย่าง 7.3 ถ้าการกระจัดของการแกว่งกวัดใด ๆ กำหนดโดย

$$x = -a\omega\cos\omega t + b\sin\omega t$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จงพิสูจน์ว่าการเคลื่อนที่ดังกล่าวเป็น SHM และถ้าหาก a=6 เซนติเมตร b=8 เซนติเมตร และ ω =3 เรเดียน/วินาที จงหาคาบ อัตราเร็วสูงสุดและอัตราเร่งสูงสุดของการแกว่งกวัดนี้

วิธีทำ

อัตราเร็วที่เวลา t ใด ๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\omega t + b\omega\cos\omega t$$

และอัตราเร่งคือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = -\omega^2 x$$

ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM

คาบของการแกว่งกวัดคือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} = 2.09 \text{ วินาที}$$

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดคือ

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

อัตราเร็วสูงสุด $= A\omega = 10 \times 3 = 30$ cm/s

อัตราเร่งสุงสุด $= \omega^2 A = 9 \times 10 = 90$ cm/s^2

ตัวอย่าง 7.4** อนุภาคมวล m แกว่งกวัดแบบ SHM ในแนวตรงด้วยแอมพลิจูด A และความถี่ f ถ้า r_1 และ r_2 เป็นการกระจัดของอนุภาคจากตำแหน่งสมดุลและสอดคล้องกับอัตราเร็ว v_1 และ v_2 ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(a) ความถี่ $$f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

(b) แอมพลิจูด $$A = \left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]^{1/2}$$

(c) พลังงานจลน์สูงสุด $$= \frac{1}{2} m \left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

วิธีทำ

(a) สมมติสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM กำหนดโดย

$$r = A\sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ A,ω และ ϕ คือแอมพลิจูด,ความถี่เชิงมุมและเฟสตามลำดับ

อัตราเร็วของอนุภาคที่เวลาใด ๆ คือ

$$v = \frac{dr}{dt} = Aw\cos(\omega t + \phi) = Aw\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}$$

$$= \omega\sqrt{A^2 - r^2}$$

ดังนั้น $v_1 = \omega\sqrt{A^2 - r_1^2}$ และ $v_2 = \omega\sqrt{A^2 - r_2^2}$

หรือ $$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2(r_2^2 - r_1^2)$$

$$\omega = \left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

ความถี่

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]^{1/2}$$

(b)
$$v_1^2 = \omega^2\left(A^2 - r_1^2\right) = \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(A^2 - r_1^2\right)$$

$$A^2 - r_1^2 = v_1^2\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]$$

$$A^2 = v_1^2\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right] + r_1^2 = \frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}$$

$$A = \left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right]^{1/2}$$

(c) พลังงานจลน์สูงสุด $= \frac{1}{2}mv_{max}^2$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{v_1^2 - v_2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{v_1^2 r_2^2 - v_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right]$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 7.5 สปริงขดหนึ่ง ปลายข้างหนึ่งแขวนไว้กับผนังซึ่งตรึงอยู่กับที่ เมื่อไม่มีวัตถุห้อยปลายอีกข้างหนึ่งด้านล่าง ความยาวของสปริงจะเท่ากับ a เมื่อนำวัตถุมวล m มาแขวนที่ปลายล่างของสปริง สปริงจะยืดออกจากเดิมเท่ากับ b และเมื่อนำวัตถุมวล m' มาห้อยเพิ่มเข้าไปอีก สปริงจะยืดออกเพิ่มขึ้นอีก เป็นระยะเท่ากับ c จงพิสูจน์ว่าเมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น ทำให้มวล m แกว่งกวัดตำแหน่งของมวล m ที่เวลา t ใด ๆ จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ

$$a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot t\right)$$

วิธีทำ

เมื่อมวล m' ยังห้อยแขวนอยู่ มวล m จะอยู่ห่างจากผนังด้านบน เท่ากับ a + b + c

เมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น มวล m จะแกว่งกวัดในแนวดิ่ง สมการของการแกว่งกวัดคือ

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

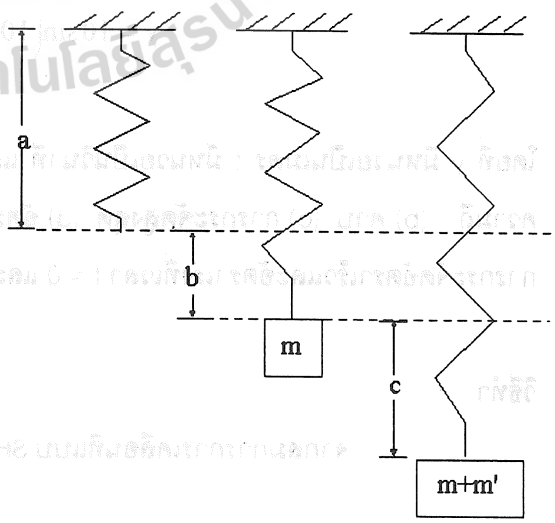
แต่เราทราบว่า เมื่อมีมวล m แขวนไว้เพียงลำพัง สปริงจะยืดออกเท่ากับ b

ดังนั้น $mg = kb$

หรือ $k = \frac{mg}{b}$

แทนค่า k นี้ลงไปในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{g}{b}\right)y = -\omega^2 y$$



การกระจัด y ของมวล m ที่เวลา t ใด ๆ

คือ

$$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}, A$ และ ϕ เป็นค่าคงตัว

อัตราเร็วของมวล m กำหนดโดย

$$\frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$$

เมื่อ $t = o, y = c$ และ $\frac{dy}{dt} = 0$

ดังนั้น $A = c$ และ $\phi = \frac{\pi}{2}$

และ $y = c\cos\omega t = c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t\right)$

$\therefore$ เมื่อมวล m' ตกลงสู่พื้น ตำแหน่งของมวล m จะอยู่ห่างจากผนังด้านบนเป็นระยะ

$$a + b + c\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}} \cdot t\right)$$

ตัวอย่าง 7.6 การเคลื่อนที่แบบ SHM แทนด้วยสมการ

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

โดยที่ y มีหน่วยเป็นเมตร t มีหน่วยเป็นวินาที และเฟสมีหน่วยเป็นเรเดียน จงคำนวณหา (a) ความถี่ (b) คาบ (c) การกระจัดสูงสุด (d) อัตราเร็วสูงสุด (e) อัตราเร่งสูงสุด และ(f) จงหาการกระจัดอัตราเร็วและอัตราเร่งที่เวลา t = 0 และ t = 1 วินาที

วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่แบบ SHM ที่กำหนดให้

$$y = 10\sin\left(10t - \frac{\pi}{6}\right)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อเทียบกับสมการทั่วไปของ SHM คือ

$$y = A\sin(\omega t + \alpha)$$

(a) จะเห็นได้ว่า $\omega = 10 = 2\pi f$

$\therefore$ ความถี่ $f = \frac{10}{2\pi} = 1.6\text{Hz}$

(b) คาบ $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$ วินาที

(c) การกระจัดสูงสุด = แอมพลิจูด = 10 เมตร

(d) อัตราเร็ว $v = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$\therefore$ อัตราเร็วสูงสุด $= A\omega = (10\text{m})(10\text{s}^{-1}) = 100\text{m/s}$

(e) อัตราเร่งสูงสุด $= -A\omega^2 = -1000\text{m/s}^2$

เครื่องหมายลบ แสดงว่าอัตราเร่งมีทิศพุ่งเข้าหาตำแหน่งสมดุล

(f) เมื่อ t = 0

$\therefore$ การกระจัด $y = 10\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -5$ เมตร

อัตราเร็ว, $\frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha) = 10\text{x}10\text{x}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= 100 \text{ x } 0.866$ m/s $= 866$ m/s

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อัตราเร่ง, $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\alpha = -10x100x(-0.5)$

$= 500 \ m/s^2$

เมื่อ t=1 , การกระจัด $y = 10\sin\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$

$\approx 10\sin(3\pi) = 0$

อัตราเร็ว, $\frac{dy}{dt} = A\omega\cos\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$

$\approx 10x10\cos\pi = -100 \ m/s$

อัตราเร่ง, $\frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin\left(10 - \frac{\pi}{6}\right)$

$\approx -A\omega^2 \sin\pi = 0$

ตัวอย่าง 7.7 อนุภาคแกว่งกวัดแบบ SHM กำหนดโดย

$$y = 5\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

คาบของการแกว่งกวัดเท่ากับ 20 วินาที และที่เวลา t=0 การกระจัดของอนุภาคเท่ากับ +2 หน่วย จงหา (a) เฟสเริ่มต้น (b) มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วย และ (c) เฟสที่แตกต่างกันระหว่างตำแหน่ง 2 ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่างกัน 5 วินาที

วิธีทำ

(a) เมื่อ t = 0 สมการการแกว่งกวัดจะเป็น

$2 = 5\sin\phi$

หรือ $\sin\phi = \frac{2}{5}$

ดังนั้น เฟสเริ่มต้นคือ $\phi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

(b) เมื่อ y = +3 หน่วย

$$\therefore \quad 3 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

มุมเฟสที่สอดคล้องกับการกระจัดขนาด +3 หน่วยคือ

$$\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

(c) ให้ t_1 และ t_2 เป็นเวลาที่แตกต่างกัน 5 วินาที และ y_1 และ y_2 เป็นการกระจัดที่สอดคล้องกัน ดังนั้น

$$y_1 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right)$$

$$y_2 = 5 \sin\left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right)$$

เฟสที่แตกต่างกันระหว่าง 2 ตำแหน่งนี้ คือ

$$\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \phi\right) - \left(\frac{2\pi t_2}{T} + \phi\right) = 2\pi\left(\frac{t_1 - t_2}{T}\right)$$

$$= 2\pi \times \frac{5}{20}$$

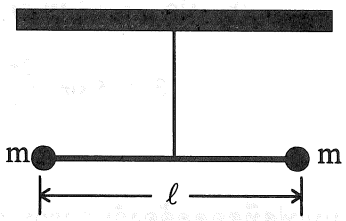
$$= \frac{\pi}{2} \quad \text{เรเดียน}$$

ตัวอย่าง 7.8 วัตถุชนิดเดียวกันสองก้อน แต่ละก้อนมีมวลเท่ากัน คือ m = 0.002 กิโลกรัม ยึดติดกันด้วยแท่งโลหะเบาความยาว ℓ = 0.10 เมตร ตรงกลางแท่งโลหะแขวนไว้กับเพดานด้วยลวดโลหะ แล้วปล่อยให้แกว่งกวัดเช่นเดียวกับลูกตุ้มชนิดบิดด้วยคาบ 10 นาที จงหาค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะนั้น

วิธีทำ

จากสมการการแกว่งกวัดของลูกตุ้มซนิดบิด คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$



ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อย I (รอบจุดที่แขวน)
ของก้อนมวลทั้งสองที่ยึดด้วยแท่งโลหะเบา คือ

$$I = (2m)r^2 = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2$$

ดังนั้น

$$C = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{1}{2}ml^2\right) = \frac{2m\pi^2 l^2}{T^2}$$

แทนค่าต่าง ๆ รวมทั้งคาบ T = 10 นาที = 600 วินาที

ค่าคงตัวการบิดของลวดโลหะคือ

$$C = \frac{2\left(2.0\times10^{-3}\ \text{kg}\right)\left(\pi^2\right)(0.10\text{m})^2}{(600\text{s})^2} = 1.10\text{x}10^{-9}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$$

7.7 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียว สองชุด

7.7.1 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียว สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน และอยู่ในแนวเดียวกัน

พิจารณา SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน คือ

$$x_1 = A_1 \sin\left(\omega t + \phi_1\right)$$

$$x_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \phi_2\right)$$

ผลรวมของ SHM ทั้งสองชุดคือ

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$= A_1[\sin\omega t \cos\phi_1 + \cos\omega t \sin\phi_1] + A_2[\sin\omega t \cos\phi_2 + \cos\omega t \sin\phi_2]$$

$$= \sin\omega t[A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2] + \cos\omega t[A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2]$$

ให้ $R\cos\theta = A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2$

$R\sin\theta = A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2$

ดังนั้น $x = R\sin\omega t\cos\theta + R\cos\omega t\sin\theta$

หรือ $$x = R\sin(\omega t + \theta) \tag{7.30}$$

โดยที่

$$R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2)$$

หรือ $$R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \tag{7.31}$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2} \tag{7.32}$$

กรณีที่น่าสนใจคือ

1) เมื่อ $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, $R = A_1 + A_2$

$\therefore \quad x = (A_1 + A_1)\sin(\omega t + \phi)$

หมายความว่าการแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM โดยมีความถี่เท่าเดิมคือ ω และแอมพลิจูดรวมเป็น $A_1 + A_2$

2) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = \pi$, หรือ SHM ทั้งสองมีเฟสตรงกันข้าม เช่น $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$

ดังนั้น $R = A_1 - A_2$

และ $x = (A_1 - A_2)\sin \omega t$

หมายความว่าการแกว่งกวัดรวมยังคงเป็น SHM มีความถี่เท่าเดิมคือ ω แต่มีแอมพลิจูดรวมเป็น $A_1 - A_2$

3) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi, R = A_1 + A_2$

4) เมื่อ $\phi_1 - \phi_2 = n\frac{\pi}{2}, \; n = 1,3,5,.....$

$$\therefore R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

7.7.2 การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียว สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน แต่มีแนวตั้งฉากกัน

SHM สองชุดที่มีแนวตั้งฉากกันทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ (Lissajous figures) รูปร่างต่างๆ กันขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด ความถี่และเฟสที่แตกต่างกันของ SHM สองชุดนั้น

สมมติ SHM สองชุดแทนด้วย

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$y = B\sin \omega t$$

ดังนั้น $$\frac{y}{B} = \sin \omega t$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}$$

และ $$\frac{x}{A} = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi$$

$$= \frac{y}{B}\cos \phi + \sin \phi \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}$$

หรือ $$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\cos \phi\right)^2 = \sin^2 \phi \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right)$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos\phi=\sin^2\phi \qquad (7.33)$$

ซึ่งเป็นสมการทั่วไปของวงรี (ellipse) เอียงทำมุมต่างๆ กับแกนของพิกัด

กรณีที่น่าสนใจมีดังนี้

1) เมื่อ $\phi = 0$ หรือ SHM ทั้งสองไม่มีความต่างเฟสกัน ดังนั้น

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}$$

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจตุภาคที่ 1 และ 3

2) เมื่อ $\phi=\frac{\pi}{4}$ แทนค่าลงในสมการ (2.4) จะได้

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\sqrt{2}.\frac{x}{A}\frac{y}{B}=\frac{1}{2}$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรี

3) เมื่อ $\phi=\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

ซึ่งเป็นสมการของวงรีที่สมมาตร และถ้า A = B ,

$$x^2 + y^2 = A^2$$

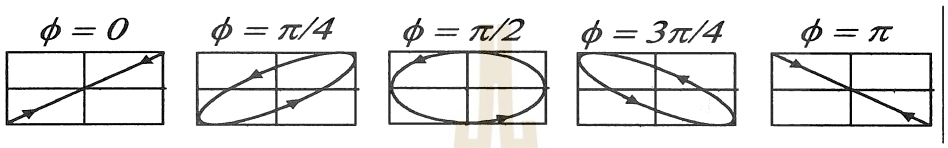
ซึ่งเป็นสมการวงกลมรัศมี A

4) เมื่อ $\phi = \pi$, ดังนั้น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงอยู่ในจตุภาคที่ 2 และ 4

สำหรับค่า ϕ ในช่วง π ถึง 2π รูปลิสซาจูส์จะมีลำดับที่ตรงข้ามกับกรณีค่า ϕ ในช่วง 0 ถึง π ข้างต้น



รูป 7.13 แสดงรูปลิสซาจูส์ที่ค่าเฟสต่างๆ สำหรับ SHM สองชุดที่มีความถี่เท่ากัน

ในกรณีที่ SHM สองชุดมีความถี่ไม่เท่ากัน รูปลิสซาจูส์จะมีรูปร่างที่ แตกต่างกันไป ซึ่งจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้ แต่จะยกตัวอย่างเพียงบางกรณีในหัวข้อต่อไป

ส้อมเสียง (tuning fork) สองอันที่มีความถี่ใกล้เคียงกัน แต่ระนาบของการสั่นตั้งฉากกัน ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ได้เช่นกัน ถ้าเราทราบความถี่ของส้อมเสียงอันที่หนึ่ง เราสามารถคำนวณหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองได้ กล่าวคือ เนื่องจากส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่แตกต่างกันเพียงเล็กน้อย เฟสที่แตกต่างกันจะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ทำให้รูปลิสซาจูส์เปลี่ยนแปลงตลอดเวลาเช่นกัน สมมติรูปลิสซาจูส์หนึ่งๆ ใช้เวลา t วินาทีในการเปลี่ยนกลับมาเหมือนรูปเดิม ดังนั้น ส้อมเสียงทั้งสองมีความถี่ต่างกันเท่ากับ 1/t ถ้าส้อมเสียงอันแรกมีความถี่เท่ากับ f ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f \pm (1/t)$ ซึ่งเป็นไปได้ทั้งสองค่า เพื่อให้แน่ใจว่าเป็นค่าใด เราใช้ขี้ผึ้งจำนวนเล็กน้อยยึดติดกับส้อมเสียงอันที่สอง ถ้า t_1 เป็นเวลาที่ใช้สำหรับการเปลี่ยนกลับมาเป็นรูปเดิม เมื่อ t มากกว่า t_1 ดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f - (1/t)$ เมื่อ t น้อยกว่าดังนั้นส้อมเสียงอันที่สองจะมีความถี่เท่ากับ $f \pm (1/t)$ ที่เป็นเช่นนี้เพราะการใช้ขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียงอันใด ทำให้ส้อมเสียงอันนั้นมีความถี่ลดลงจากเดิมนั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจยิ่งขึ้น สมมติส้อมเสียง A และ B ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ ซึ่งมีคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที และเมื่อขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียง A ปรากฏว่าคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 10 วินาที ถ้าส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz ส้อมเสียง A จะมีความถี่ก่อนและหลังการยึดติดกับขี้ผึ้งเป็นเท่าใด

เนื่องจากส้อมเสียง B มีความถี่เท่ากับ 200 Hz และคาบของการเปลี่ยนรูปร่างเท่ากับ 15 วินาที ดังนั้นส้อมเสียง A จะมีความถี่เท่ากับ 200±(1/15) Hz กล่าวคือ 200.066 Hz หรือ199.934 Hz ค่าใดค่าหนึ่ง

เมื่อใช้ขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียง A ทำให้ส้อมเสียง A มีความถี่ลดลง แต่คาบของการเปลี่ยนรูปร่างลดลงเหลือ 10 วินาที ซึ่งหมายความว่าส้อมเสียงทั้งสองจะต้องมีความถี่แตกต่างกันมากขึ้นกว่าเดิม เงื่อนไขเช่นนี้จะเป็นไปได้เมื่อส้อมเสียง A มีความถี่น้อยกว่าส้อมเสียง B เท่านั้น

ดังนั้น ก่อนยึดติดด้วยขี้ผึ้ง ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ 199.934 Hz และหลังการยึดติดด้วยขี้ผึ้ง ส้อมเสียง A มีความถี่เท่ากับ 200-(1/10)Hz หรือเท่ากับ 199.9 Hz

7.7.3 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับรูปลิสซาจูส์

ตัวอย่าง 7.9 รูปลิสซาจูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:2

สมมุติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A\sin(2\omega t + \phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

$$\therefore \sin\omega t = \frac{y}{B} \quad \text{และ} \quad \cos\omega t = \sqrt{1 - y^2/B^2}$$

แทนค่าลงในสมการแรกจะได้

$$\frac{x}{A} = \sin\ 2\omega t\cos\phi + \cos 2\omega t\sin\phi$$

$$= 2\sin\omega t\cos\omega t\cos\phi + \left(1 - 2\sin^2\omega t\right)\sin\phi$$

$$= 2\left(\frac{y}{B}\right)\left(\sqrt{1 - y^2 / B^2}\right)\cos\phi + \left\{1 - 2\left(\frac{y^2}{B^2}\right)\right\}\sin\phi$$

$$\therefore \quad \frac{x}{A} - \left\{1 - 2\frac{y^2}{B^2}\right\}\sin\phi = 2\frac{y}{B}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\cos\phi$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\sin\phi = 2\frac{y}{B}\sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\cos\phi$$

ยกกำลังสองทั้งสองด้าน

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)^2 + 4\frac{y^4}{B^4}\sin^2\phi + \left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right).4\frac{y^2}{B^2}\sin\phi = 4\frac{y^2}{B^2}\left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right)\cos^2\phi$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)^2 + 4\frac{x}{A}\frac{y^2}{B^2}\sin\phi + 4\frac{y^4}{B^4}\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) - 4\frac{y^2}{B^2}\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = 0$$

$$\left(\frac{x}{A} - \sin\phi\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2} + \frac{x}{A}\sin\phi - 1\right] = 0 \qquad (7.34)$$

สมการ (7.34) เป็นสมการทั่วไปของเส้นโค้งมี 2 วง (loops) สำหรับเฟสที่แตกต่าง ϕ ใดๆ และแอมพลิจูด A และ B

กรณีพิเศษมีดังนี้

1) เมื่อ $\phi = 0$ ดังนั้น สมการ (7.34) จะกลายเป็น

$$\frac{x^2}{A^2} + 4\frac{y^2}{B^2}\left[\frac{y^2}{B^2} - 1\right] = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเลข 8 และมี 2 วง

2) เมื่อ $\phi = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$\left(\frac{x}{A} - 1\right)^2 + 4\frac{y^2}{B^2}\left(\frac{y^2}{B^2} + \frac{x}{A} - 1\right) = 0$$

หรือ $$\left[\left(\frac{x}{A} - 1\right) + 2\frac{y^2}{B^2}\right]^2 = 0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลาซ้อนกัน 2 วง แต่ละวงอาจแยกออกได้เป็น

$$\left(\frac{x}{A} - 1\right) + 2\frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$2y^2 = \frac{B^2}{A}(A - x)$$

$$y^2 = -\frac{B^2}{2A}(x - A)$$

ตัวอย่าง 7.10 รูปลิสซาจูส์อันเนื่องจาก SHM สองชุด อัตราส่วนความถี่ 1:3

สมมติ SHM สองชุด แทนด้วย

$$x = A\sin(3\omega t + \phi)$$

$$y = B\sin\omega t$$

โดยวิธีการเช่นเดียวกับตัวอย่าง 7.9 จะได้

เมื่อ $\phi = 0$;

$$\left(4\frac{y^2}{B^2}-\frac{3y}{B}+\frac{x}{A}\right)^2=0$$

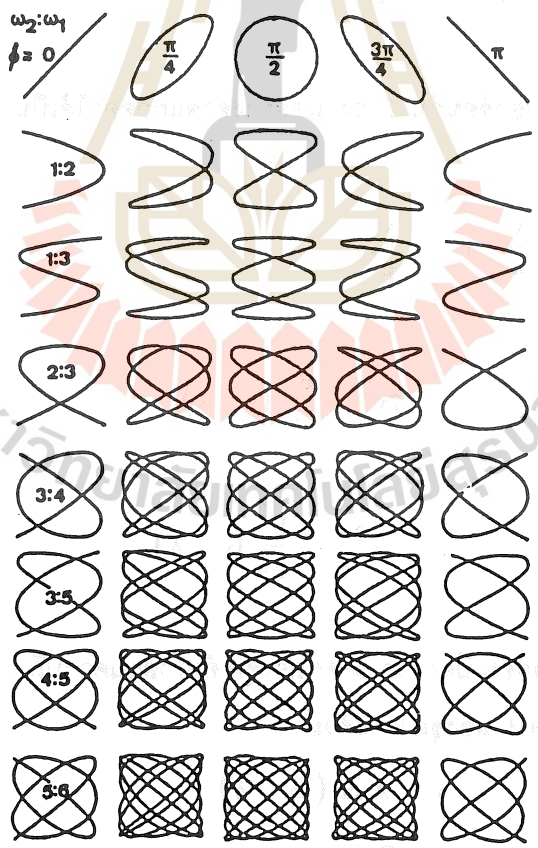
ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปลูกบาศก์ 2 รูปซ้อนกัน

เมื่อ $\phi=\pi/2$ สมการจะเป็น

$$\left(1-\frac{y^2}{B^2}\right)\left(1-4\frac{y^2}{B^2}\right)-\frac{x^2}{A^2}=0$$

ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปเส้นโค้ง 3 รูปซ้อนกัน

รูปลิสซาจูส์ของตัวอย่างที่ 1 และ 2 และอัตราส่วนความถี่อื่น แสดงในรูป 7.14



รูป 7.14 แสดงรูปลิสซาจูส์อันเกิดจาก SHM สองชุดที่มีความถี่ และเฟสที่แตกต่างกันค่าต่างๆ

ตัวอย่าง 7.11 ส้อมเสียง 2 อัน ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ โดยรูปจะเปลี่ยนจากพาราโพลาเป็นรูปเลข 8 และเปลี่ยนกลับไปเป็นรูปพาราโบลาอีก โดยใช้เวลารวม 6 วินาที ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกเป็น 100 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สอง

วิธีทำ

รูปลิสซาจูส์เปลี่ยนจากพาราโบลาเป็นรูปเลข 8 แล้วเปลี่ยนกลับไปเป็นพาราโบลาดังนั้น อัตราส่วนของความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ 2:1

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันแรกคือ 100 Hz ความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองอาจเป็น 50 Hz หรือ 200 Hz

เนื่องจากเวลาในการเปลี่ยนรูปครบ 1 รอบ เท่ากับ 6 วินาที ดังนั้นส้อมเสียงทั้งสองจะมีความถี่แตกต่างกันเท่ากับ 1/6 วินาที

ถ้าความถี่ของส้อมเสียงทั้งสองคือ f_1 และ f_2 ดังนั้น ความเป็นไปได้คือ

$$2f_1 - f_2 = \pm\frac{1}{6}$$

หรือ $$2f_2 - f_1 = \pm\frac{1}{6}$$

แต่เราทราบว่า $f_1 = 100$ Hz ดังนั้น ความเป็นไปได้ของ f_2 คือ

$$2(100) - f_2 = \pm\frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(200 + \frac{1}{6}\right) \quad \text{หรือ} \quad \left(200 - \frac{1}{6}\right) \text{Hz}$$

หรือ $$2f_2 - 100 = \pm\frac{1}{6}$$

$$f_2 = \left(50 + \frac{1}{12}\right) \quad \text{หรือ} \quad \left(50 - \frac{1}{12}\right) \text{Hz}$$

7.8 การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก**

ในหัวข้อที่ 7.1 ได้กล่าวนำไว้แล้วว่า การแกว่งกวัดที่มีลักษณะเป็นคาบโดยผ่านตำแหน่งสมดุลเพียงตำแหน่งเดียว เรียกว่า การแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก และเรียกการแกว่งกวัดที่ผ่านตำแหน่งสมดุลมากกว่าหนึ่งตำแหน่งว่าการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น จะขอยกตัวอย่างการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิกที่เกิดขึ้นกับลูกตุ้มชนิดบิด

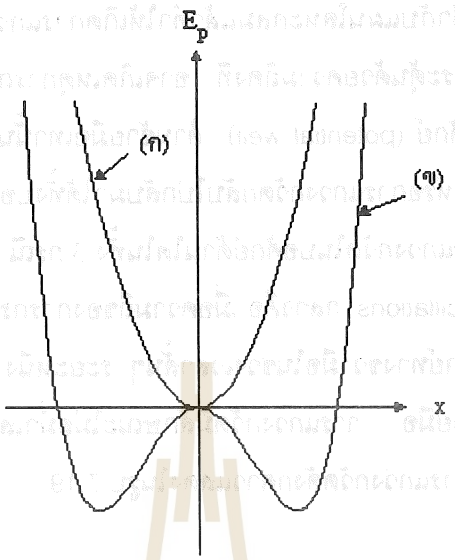
ถ้ามีมวล m เกาะติดเพิ่มเติมเข้ากับแผ่นโลหะกลมแบนในตำแหน่งสมดุล ซึ่งอยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r ทำให้เกิดทอร์กขนาด $mgr\sin\theta$ เพิ่มเติมนอกเหนือจากทอร์กที่เกิดจากทอร์กที่เกิดจากแรงภายนอกที่ทำให้แผ่นกลมบิดไปเป็นมุม θ สมการการเคลื่อนที่ของระบบไม่อาจคำนวณเชิงวิเคราะห์ได้ อย่างไรก็ตาม เราอาจศึกษาลักษณะการแกว่งกวัดของระบบได้จากกราฟของพลังงานศักย์

ในกรณีของ SHM พลังงานศักย์ของระบบคือ

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

นั่นคือ พลังงานศักย์ของระบบเป็นสัดส่วนตรงกับกำลังสองของการกระจัด ซึ่งในกรณีของลูกตุ้มชนิดบิดจะเป็นสัดส่วนตรงกับกำลังสองของมุมที่บิดไป กราฟของพลังงานศักย์จะเป็นรูปพาราโบลา ดังแสดงในรูป 7.15 (ก)

ในกรณีของการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก ตัวแกว่งกวัดจะมีสมดุลอยู่ 3 ตำแหน่ง ขึ้นกับมวล m ตำแหน่งสมดุลของ 2 ตำแหน่ง มีลักษณะสมมาตรกับตำแหน่งสมดุลเดิมและเสถียร สำหรับตำแหน่งสมดุลอีก 1 ตำแหน่งจะอยู่ที่ตำแหน่งสมดุลเดิมแต่ไม่เสถียร การที่กำแหน่งสมดุล 2 ตำแหน่งเป็นสมดุลเสถียรเพราะทอร์กที่เกิดจากแรงดึงกลับมีค่าเท่ากับทอร์กที่เกิดจากมวล m แต่มีทิศทางตรงกันข้ามจึงหักล้างกัน ในขณะที่ไม่มีทอร์กทั้งสองชนิดที่ตำแหน่งสมดุลเดิมจึงเป็นสมดุลที่ไม่เสถียร ตำแหน่งสมดุลทั้ง 3 ตำแหน่งแสดงในรูป 7.15 (ข)



รูป 7.15 แสดงกราฟของพลังงานศักย์ของการแกว่งกวัดแบบ SHM (ก) และการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก (ข) ซึ่งมีสมดุลเสถียร 2 ตำแหน่ง

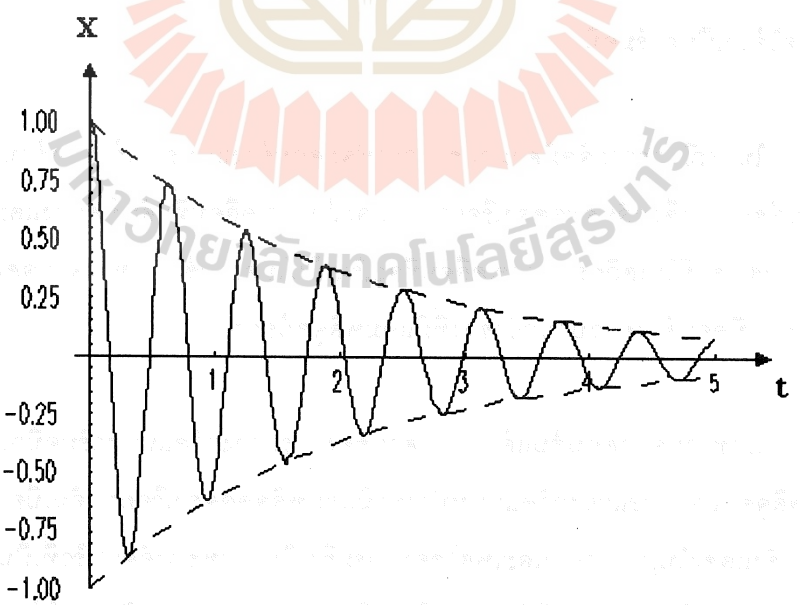
ที่บริเวณใกล้กับตำแหน่งสมดุลเสถียรทั้งสอง อาจพอประมาณได้ว่ากราฟของพลังงานศักย์เป็นรูปพาราโบลา การแกว่งกวัดที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ รอบตำแหน่งสมดุลนี้จึงอาจถือได้ว่าเป็นฮาร์มอนิก

ในกรณีการกระจัดมีค่ามากๆ กราฟจะค่อนข้างแบนราบเข้าทางด้านหนึ่ง กล่าวคือ โมเมนต์ของแรงดึงกลับจะลดลงเรื่อยๆ และถ้าการเคลื่อนที่กลับทิศทางและเคลื่อนที่เข้าหาตำแหน่งสมดุลที่ไม่เสถียร การเคลื่อนที่จะเริ่มเป็นไปอย่างช้าๆ ห่างจากจุดเปลี่ยนทิศทางนี้ โดยมีคาบที่ค่อนข้างยาวนานกว่าช่วงที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ

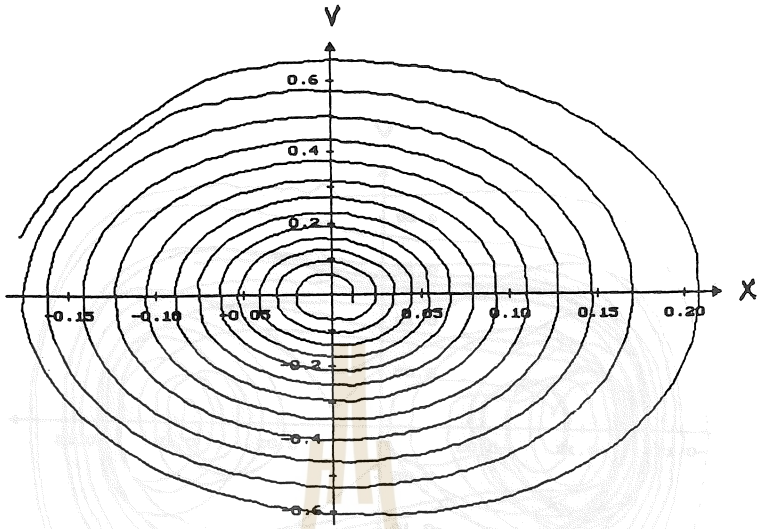
เราทราบจากตอนต้นแล้วว่า คาบของการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกเป็นอิสระต่อแอมพลิจูด และการแกว่งกวัดแบบหน่วงจะมีแอมพลิจูดลดลงเรื่อยๆ อันเนื่องจากความเสียดทาน ดังแสดงในรูป 7.16 และเฟสไดอะแกรมซึ่งเป็นกราฟของอัตราเร็วที่เป็นฟังก์ชันของการกระจัด แสดงในรูป 7.17 มีลักษณะเป็นเกลียว ส่วนการแกว่งกวัดภายใต้แรงภายนอก เฟสไดอะแกรมจะมีลักษณะเป็นรูปวงรีดังแสดงในรูป 7.18

เมื่อเราเพิ่มมวลเข้ากับแผ่นโลหะกลมแล้วทำให้เกิดการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก และเมื่อลูกตุ้มชนิดบิดถูกกระตุ้นด้วยความถี่คงที่ อาจเกิดเหตุการณ์ได้ 3 กรณีคือ การแกว่งกวัดอาจเกิดขึ้นที่บ่อศักย์ (potential well) ด้านซ้ายมือเท่านั้น หรืออาจแกว่งกวัดที่บ่อศักย์ด้านขวามือเท่านั้น หรือการแกว่งกวัดกลับไปกลับมาได้ทั้งบ่อศักย์ทั้งสอง เราไม่อาจทำนายได้เลยว่าจะเกิดการแกว่งกวัดในบ่อศักย์ด้านใดในทั้ง 3 กรณี การแกว่งกวัดดังกล่าวจึงมีลักษณะเป็น chaotic oscillations กล่าวคือ เมื่อความถี่ของการกระตุ้นมีค่าน้อยๆ จะพบว่าลูกตุ้มจะแกว่งกวัดในบ่อศักย์ทางขวามือในช่วงเวลาสั้นๆ ระยะหนึ่ง หลังจากนั้นจึงเปลี่ยนไปแกว่งกวัดในบ่อศักย์ทางซ้ายมือ การแกว่งกวัดมีลักษณะไม่สม่ำเสมอทั้งคาบและอันดับของคาบ เฟสไดอะแกรมของการแกว่งกวัดดังกล่าวแสดงในรูป 7.19

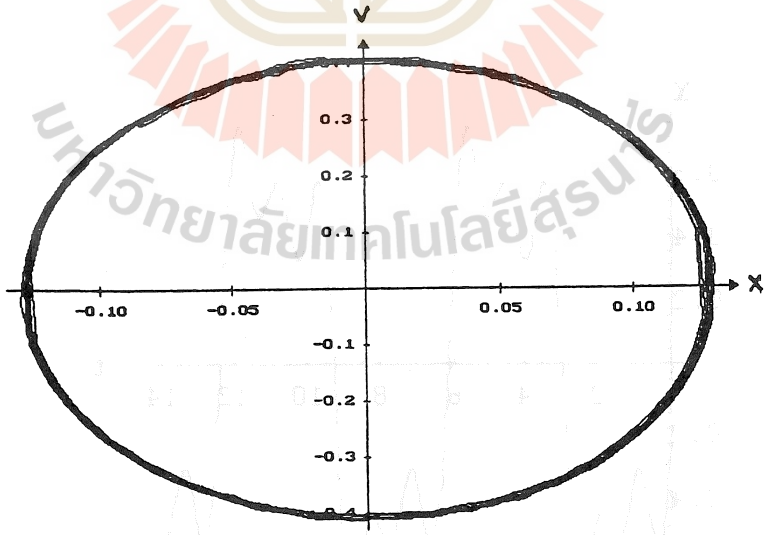
อย่างไรก็ตาม เมื่อความถี่ของการกระตุ้นเปลี่ยนไปเราอาจทำนายการแกว่งกวัดได้อีกครั้งหนึ่ง ดังเช่นแสดงในรูป 7.20 จะเห็นได้ว่าลูกตุ้มแกว่งกวัดในบ่อศักย์ด้านซ้ายมือ 3 ครั้ง แกว่งกวัดในบ่อศักย์ด้านขวามือ 3 ครั้ง หลังจากนั้นจึงแกว่งกวัดในบ่อศักย์ด้ายซ้ายมืออีก 3 ครั้งสลับกันไปเรื่อยๆ เฟสไดอะแกรมแสดงในรูป 7.21 การแกว่งกวัดมีลักษณะเป็นคาบแต่ไม่ใช่ฮาร์มอนิก



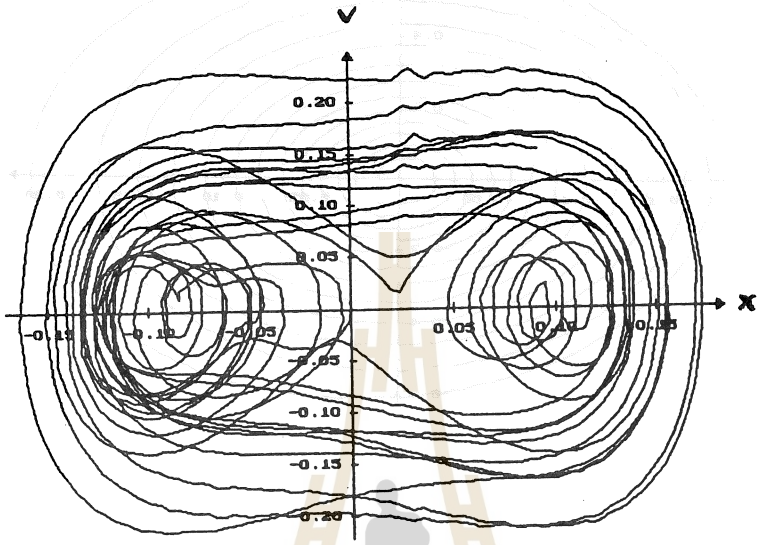
รูป 7.16 แสดงการกระจัด x ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาการแกว่งกวัดแบบหน่วง



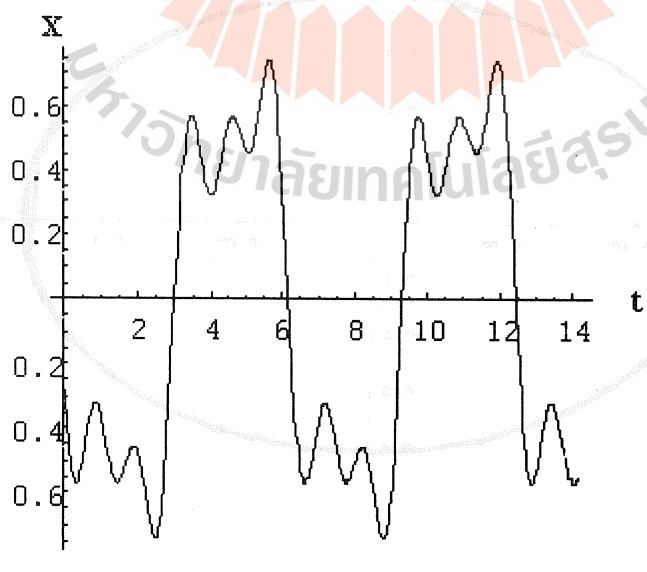
รูป 7.17 แสดงเฟสไดอะแกรมของการแกว่งกวัดแบบหน่วง



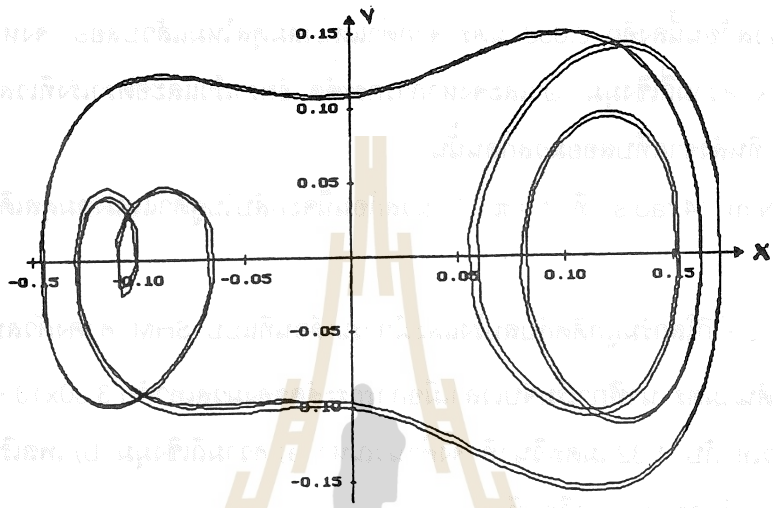
รูป 7.18 แสดงเฟสไดอะแกรมของการแกว่งกวัดแบบบังคับ



รูป 7.19 แสดงเฟสไดอะแกรมของ chaotic oscillation



รูป 7.20 แสดงการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิกที่มีลักษณะเป็นคาบ



รูป 7.21 แสดงเฟสไดอะแกรมของการแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์มอนิก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. ลวดสปริงห้อยแขวนไว้กับเพดาน เมื่อมีมวล 0.10 กิโลกรัมแขวนที่ปลายอีกด้านหนึ่งของลวดสปริง พบว่าลวดสปริงยืดออกอย่างช้าๆ เป็นระยะ 0.050 เมตร จากตำแหน่งเริ่มต้น และเมื่อดึงมวลก้อนนี้ลงอีก 0.050 เมตร จากตำแหน่งสมดุลใหม่แล้วปล่อย จงหาค่าคงตัวสปริง k ความถี่เชิงมุม ω และจงหาการกระจัด อัตราเร็วและอัตราเร่งที่เวลา $t = \pi / 7$ นาทีหลังจากที่ปล่อยมวลก้อนนั้น

   (ตอบ : 20 N/m, 14 rad/s , ที่ $t = \pi / 7$ มวลก้อนนี้จะกลับไปสู่ตำแหน่งสมดุลเดิม)

2. มวล 2.00×10^{-2} กิโลกรัมผูกติดกับสปริงและมีการเคลื่อนที่แบบ SHM ค่าคงตัวสปริง k=50.0 นิวตัน/เมตร นาฬิกาเริ่มจับเวลาเมื่อการกระจัดของมวลเท่ากับ 3.00×10^{-2} เมตร และอัตราเร็วเท่ากับ -1.32 เมตร/วินาที จงคำนวณหา (a) ความถี่เชิงมุม (b) เฟสเริ่มต้น และ (c) แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่

   (ตอบ : (a) 50.0 rad/s (b) 41.3° (c) 4.00×10^{-2} m)

3. มวล 2.0 กิโลกรัม เคลื่อนที่แบบ SHM ด้วยแอมพลิจูด 0.03 เมตร และคาบ 5.50 วินาที จงหาอัตราเร็ว อัตราเร่ง พลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ (a) ที่จุดกึ่งกลางของการเคลื่อนที่ (b) ที่จุดปลายของการแกว่งกวัด และ (c) ที่จุดซึ่งห่างจากจุดกึ่งกลางเป็นระยะ 0.02 เมตร (d) จงหาแรงที่กระทำต่อมวลที่อยู่ห่างจากกึ่งกลางเป็นระยะ 0.02 เมตร

   (ตอบ : (a) 3.8×10^{-2} m/s, o,1.4×10^{-3}J , (b) 0,4.8×10^{-2} m/s^2 , 1.4×10^{-3}J

   (c) 2.8×10^{-2} m/s, -3.2×10^{-2} m/s^2 , 6.1×10^{-4}J , (d) 6.4×10^{-2} N)

4. มวล 2.0 กิโลกรัมผูกติดกับลวดสปริงบนพื้นราบที่ไม่มีความฝืด แรง 20 นิวตัน ดึงมวลให้เคลื่อนที่ไปเป็นระยะ 0.2 เมตร จากตำแหน่งเดิม แล้วปล่อยให้มวลแกว่งกวัดแบบ SHM (a) จงหาค่าคงตัวสปริง (b) ความถี่ของการแกว่งกวัด (c) อัตตราเร็วสูงสุด (d) อัตราเร่งสูงสุดของ มวลและตำแหน่ง (e) พลังงานรวมของระบบ และเมื่อการกระจัดเป็น 1/3 ของค่าสูงสุด จงหา (f) อัตราเร็ว และ (g) อัตราเร่ง

   (ตอบ : (a) 100 N/m (b) 1.13 Hz (c) 1.41 m/s (d) 10.1 m/s^2 (e) 2.00 J

   (f) 1.33 m/s (g) 3.36 m/s^2)

5. จงหาความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่แกว่งกวัดด้วยความถี่ 12 รอบ/นาที
(ตอบ : 6.20 เมตร)

6. แท่งโลหะเบามวล 2.5 กิโลกรัม ยาว 1.1 เมตร ปลายข้างหนึ่งตรึงไว้ ทำให้แท่งโลหะแกว่งไปมาในแนวดิ่ง สำหรับการแกว่งกวัดที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ จงหา (a) คาบของการแกว่งกวัด และ (b) ความยาวของลูกตุ้มเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากัน
(ตอบ : (a) 1.72 s (b) 0.733 m)

7. เชือกเส้นหนึ่งผูกติดกับตรงกลางของดินสอแท่งหนึ่งซึ่งมีมวล 0.1 กก. ยาว 0.2 เมตร ระบบมีการเคลื่อนที่เช่นเดียวกับลูกตุ้มชนิดบิด โดยมีคาบของการแกว่งกวัดเป็น 4 วินาที (a) จงหาค่าคงตัวการบิดของเชือก (b) ถ้าแอมพลิจูดมีค่าเท่ากับ 3 เรเดียน จงหาขนาดสูงสุดของแรงดึงกลับบนแท่งดินสอนั้น
(ตอบ : (a) $8\times10^{-5}\,\mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$ (b) $2\times10^{-4}\,\mathrm{N\cdot m}$)

8. แผ่นกลมแบนรัศมี R แกว่งกวัดรอบปลายข้างหนึ่ง จงหา (a) คาบของการแกว่งกวัด และ (b) ความยาวสมมูลของลูกตุ้มเชิงเดียว
(ตอบ : (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$ (b) $\frac{3}{2}R$)

9. จงหาผลรวมของ SHM สองชุดที่ตั้งฉากกัน มีความถี่เดียวกัน แต่เฟสและแอมพลิจูดแตก ต่างกัน การเคลื่อนที่จะเป็นอย่างไรถ้าเฟสต่างกันเท่ากับ 0, $\pi/2$ และ $3\pi/2$

10. SHM สองชุดตั้งฉากกันกำหนดโดย

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t - \phi)$$

การเคลื่อนที่ของ SHM ทั้งสองในระนาบ xy จะเป็นอย่างไร ถ้า ϕ=0, $\pi/2$, $3\pi/2$ และ π วาดรูปประกอบด้วย

11. SHM สองชุดมีคาบเท่ากันแต่เฟสต่างกัน $\pi/2$ เรเดียน คลื่นทั้งสองกระทำบนอนุภาคเดียวกัน ถ้าแอมพลิจูดของ SHM ทั้งสองเท่ากับ 0.04 เมตร และ 0.06 เมตร จงหาแอมพลิจูดรวมและเฟสของคลื่นรวม กำหนดให้เฟสเริ่มต้นของ SHM ชุดแรกเป็นศูนย์

(ตอบ : 0.07211 เมตร, 0.5882 เรเดียน)

12. ส้อมเสียง A และ B ทำให้เกิดรูปลิสซาจูส์ พบว่ารูปลิสซาจูส์จะเปลี่ยนรูปแล้วกลับมาเหมือนรูปเดิมใช้เวลา 10 วินาที ถ้าส้อมเสียง A มีความถี่มากกว่าส้อมเสียง B และ A มีความถี่ 200 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียง B

(ตอบ : 199.9 Hz)

13. รูปลิสซาจูส์เกิดจากส้อมเสียงสองอันที่มีความถี่เป็นอัตราส่วน 2:1 รูปลิสซาจูส์จะปลี่ยนกลับมาเป็นรูปเดิมใช้เวลา 6 วินาที เมื่อใช้ขี้ผึ้งยึดติดกับส้อมเสียงที่มีความถี่มากกว่า พบว่าต้องใช้เวลา 10 วินาที รูปลิสซาจูส์จึงจะกลับมาเหมือนเดิม ถ้าความถี่ของส้อมเสียงอันที่มีค่าน้อยกว่าคือ 150 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงที่มีค่ามากกว่า ทั้งก่อนและหลังใช้ขี้ผึ้งยึดติด

(ตอบ : $300\frac{1}{6}$ Hz และ $300\frac{1}{10}$ Hz)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 8 การแกว่งกวัดแบบหน่วงและแบบบังคับ

เค้าโครงเรื่อง

8.1 สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง

8.2 พลังงานที่สูญเสียไป

8.3 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบหน่วง

8.4 ผลของแรงภายนอก

8.5 การดูดกลืนพลังงานของการแกว่งกวัดแบบบังคับ

8.6 แอมพลิจูดการดูดกลืนและการยืดหยุ่น

8.7 การสั่นพ้องในวงจร LCR

8.8 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบบังคับ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

8.1 สมการของการแกว่งกวัดแบบหน่วง

ที่ผ่านมาเราไม่คิดค่าความเสียดทานโดยถือว่ามีค่าน้อยมาก ทำให้เกิดการแกว่งกวัดอย่างต่อเนื่อง โดยมีแอมพลิจูดคงตัว แต่ความเป็นจริงในธรรมชาติ ความเสียดทานย่อมมีเสมอ ทำให้แอมพลิจูดลดลงและหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เราเรียกการแกว่งกวัดเช่นนี้ว่า การแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation)

แรงเสียดทานที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติในหลายๆ กรณีเกิดจากแรงเสียดทานของอากาศและแรงเสียดทานภายในลวดสปริง จึงมีลักษณะหนืด (viscous type) กล่าวคือ แรงเสียดทานจะไม่คงที่แต่จะเป็นสัดส่วนกับความเร็ว และมีทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่ สมมติแทนด้วย $F = -bv$ โดยที่ b เป็นค่าคงตัวเรียกว่า ค่าคงตัวการหน่วง (damping constant) ดังนั้น แรงดึงกลับจึงประกอบด้วยสองส่วนคือ แรงดึงกลับอันเนื่องจากสปริง ($-kx$) และแรงดึงกลับอันเนื่องจากความหน่วง ($-bv$) และสมการการเคลื่อนที่ของระบบจะกลายเป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ถ้าให้ $$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$$

และ $$\omega_\circ^2 = \frac{k}{m}$$

ดังนั้น $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_\circ^2 x = 0 \qquad (8.1)$$

โดยที่ τ เป็นค่าคงตัวเรียกว่า เวลาของการผ่อนคลาย (relaxation time) ซึ่งอาจให้นิยามว่าเป็นเวลาที่อัตราเร็วมีค่าเป็น 1/e เท่าของอัตราเร็วเริ่มต้น เมื่อไม่การหน่วง หรือ $b = 0$ ดังนั้น $\tau = \infty$ ซึ่งหมายความว่าเกิดการแกว่งกวัดแบบต่อเนื่องด้วยความถี่เชิงมุม $\sqrt{k/m}$

สมมติผลเฉลยของสมการ (8.1) คือ

$$X = Ae^{\alpha t}$$

โดยที่ A และ α เป็นค่าคงตัวใดๆ เมื่อหาอนุพันธ์ของค่า x นี้เทียบกับเวลา t สองครั้ง แล้วนำไปแทนค่าลงในสมการ (8.1) จะได้

$$A\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{A\alpha}{\tau} e^{\alpha t} + \omega_\circ^2 A e^{\alpha t} = 0$$

หรือ $$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_\circ^2 = 0$$

ดังนั้น $$\alpha = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_\circ^2}$$

ให้ $$\beta = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_\circ^2}$$

ค่าของ α จึงมีได้ 2 ค่าคือ

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\tau} + \beta$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2\tau} - \beta$$

ซึ่งทำให้การกระจัดมีได้ 2 ค่าด้วย ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (8.1) จึงเป็น

$$x = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$= e^{-t/2\tau}\left[A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}\right] \qquad (8.2)$$

ค่าของ A_1 และ A_2 กำหนดจากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือที่เวลา t=0 การกระจัดมีค่าสูงสุดคือ $A_1 + A_2$ และความเร็ว $\frac{dx}{dt} = 0$ ถ้าให้

$$A = A_1 + A_2 \qquad (8.3)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อหาอนุพันธ์ของ x ในสมการ (8.2) เทียบกับเวลา แล้วให้ $\frac{dx}{dt} = 0$ ที่ $t = 0$ จะได้

$$\beta(A_1 - A_2) = \frac{1}{2\tau}(A_1 + A_2)$$
$$= \frac{A}{2\tau}$$

หรือ
$$A_1 - A_2 = \frac{A}{2\beta\tau} \qquad (8.4)$$

จากสมการ (8.3) และ(8.4) ดังนั้น

$$A_1 = \frac{A}{2}(1 + \frac{1}{2\beta\tau})$$
$$A_2 = \frac{A}{2}(1 - \frac{1}{2\beta\tau})$$

แทนค่า A_1 และ A_2 ลงในสมการ (8.2) ผลเฉลยทั่วไปจะกลายเป็น

$$x = \frac{A}{2}e^{-t/2\alpha}\left[(1 + \frac{1}{2\beta\tau})e^{\beta t} + (1 - \frac{1}{2\beta\tau})e^{-\beta t}\right] \qquad (8.5)$$

เราสามารถแยกออกได้เป็น 3 กรณีคือ

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $\frac{1}{2\tau} > \omega_{\circ}$ หรือแรงต้านทานมากกว่าแรงดึงกลับ

การหน่วงในกรณีเช่นนี้จะมีค่ามาก แฟกเตอร์ $\sqrt{1/4\tau^2 - \omega_{\circ}}$ หรือ β จะเป็นจำนวนจริงและมีค่าบวก ดังนั้นเทอมทั้งสองของสมการ (3.5) จะประกอบด้วยเทอมเอกซ์โพเนนเชียลที่มีกำลังเป็นลบ ผลก็คือ การกระจัด x จะมีค่าลดลงโดยไม่มีการเปลี่ยนทิศทาง หรืออีกนัยหนึ่ง ไม่มีการแกว่งกวัดอีกเลย แต่จะคืนสู่ตำแหน่งสมดุล เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงเกิน** (overdamped)

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $\frac{1}{2\tau} = \omega_{\circ}$

ค่าของ β ในกรณีนี้จะกลายเป็นศูนย์ อย่างไรก็ตาม เราอาจกระจายเทอมต่างๆ ใน สมการ (8.5) โดยเฉพาะอย่างยิ่งเทอม $e^{\beta t}$ และ $e^{-\beta t}$ แล้วให้ β ใกล้ศูนย์ สมการ (8.5) จะกลายเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau}(1+\frac{t}{2\tau}) \qquad (8.6)$$

เทอม $\frac{At}{2\tau}e^{-t/2\tau}$ จะลดลงช้ากว่าเทอม $Ae^{-t/2\tau}$ ระบบจะคืนสู่ตำแหน่งสมดุลภายในระยะเวลาอันสั้นมาก เรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่า **แบบหน่วงวิกฤต** (critically damped)

<u>กรณีที่ 3</u> เมื่อ $\frac{1}{2\tau} < \omega_{\circ}$ หรือแรงดึงกลับมากกว่าแรงต้านทาน

ค่าของ β ในกรณีนี้จะเป็นค่าจินตภาพ ถ้าให้ $\omega = \sqrt{\omega_{\circ}^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$

สมการ(8.5) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$x = Ae^{-t/2\tau}\left[\left(\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right)+\frac{1}{2\omega\tau}\left(\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right)\right]$$

หรือ $$x = Ae^{-t/2\tau}\left[\cos\omega t+\frac{1}{2\omega\tau}\sin\omega t\right]$$

ถ้าให้ $$A = a\sin\phi$$

และ $$\frac{A}{2\omega\tau} = a\cos\phi$$

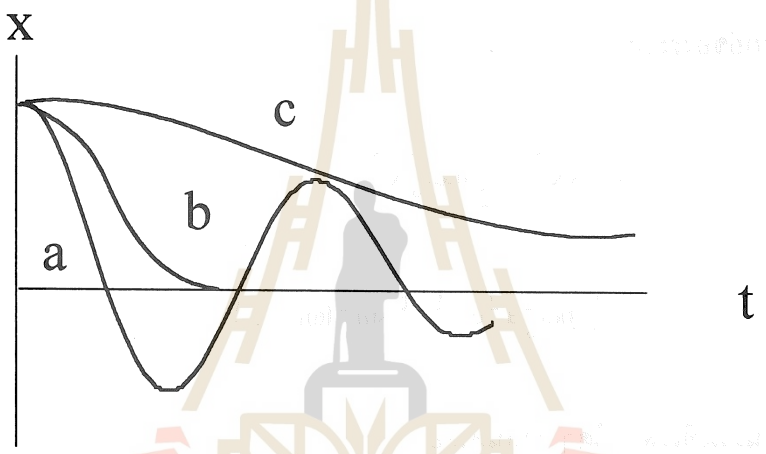
ดังนั้น $$a = \sqrt{A^2+\frac{A^2}{4\omega^2\tau^2}} = \frac{A}{2\omega\tau}\left(4\omega^2\tau^2+1\right)^{1/2}$$

และ $$\phi = \tan^{-1}2\omega\tau$$

$$\therefore\ x = ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t+\phi) \qquad (8.7)$$

ซึ่งมีการแกว่งกวัดด้วยความถี่เชิงมุม ω ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อยมากๆ หรือ b=0 ความถี่ $\omega = \omega_0$ ซึ่งเป็น**ความถี่ธรรมชาติ** (natural frequency) ของระบบ กรณีเช่นนี้ แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดจะลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้น คือมีขนาด $ae^{-t/2\tau}$ เราเรียกการแกว่งกวัดในกรณีที่ 3 ว่า **เป็นแบบหน่วงขาด** (underdamped)

การแกว่งกวัดแบบหน่วงทั้ง 3 กรณี แสดงในรูป 8.1



รูป 8.1 กราฟของการกระจัดกับเวลาแสดงการแกว่งกวัดแบบหน่วง 3 ประเภท คือ (a) หน่วงขาด (b) การหน่วงวิกฤต และ (c) การหน่วงเกิน

8.2 พลังงานที่สูญเสียไป

พลังงานของการแกว่งกวัดแบบหน่วงจะมีค่าลดลงเสมออันเนื่องจากระบบจำเป็นต้องใช้พลังงานส่วนหนึ่งเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน

อนุพันธ์ของสมการ (8.7) เทียบกับเวลา คือ

$$\frac{dx}{dt} = a\omega e^{-t/2\tau}\cos(\omega t + \phi) - \frac{a}{2\tau}e^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \phi)$$

พลังงานจลน์ของระบบ

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m a^2 e^{-t/\tau} \left[\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{4\tau^2} \sin^2(\omega t + \phi) - \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi) \right]$$

และพลังงานศักย์ของระบบ

$$= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_\circ^2 x^2$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_\circ^2 a^2 e^{-t/\tau} \sin^2(\omega t + \phi)$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา t ใดๆ กำหนดโดย

E = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

$$= \frac{1}{2} m a^2 e^{-t/\tau} \left[\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \left(\omega_\circ^2 + \frac{1}{4\tau^2} \right) \sin^2(\omega t + \phi) - \frac{\omega}{2\tau} \sin 2(\omega t + \phi) \right]$$

ค่าเฉลี่ยพลังงานสำหรับคาบ T ใดๆ หาได้จากการหาค่าเฉลี่ยของแต่ละเทอมทางขวามือของสมการสำหรับ E แต่เราทราบว่า

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \phi) \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \phi) \, dt = \frac{1}{2}$$

และ

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin 2(\omega t + \phi) \, dt = 0$$

ดังนั้น พลังงานรวมสำหรับการแกว่งกวัดครบหนึ่งรอบจึงมีค่า

$$E_{ave} = \frac{1}{4}ma^2 e^{-t/\tau}\left(\omega^2 + \omega_\circ^2 + \frac{1}{4\tau^2}\right)$$

เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย ค่าของ τ จะมีค่ามาก ดังนั้น เทอม $1/4\tau 2$ อาจตัดทิ้งได้ นอกจากนี้ ω มีค่าใกล้เคียงกับ $\omega_\circ$ มากดังนั้น

$$E_{ave} = \frac{1}{2}ma^2\omega_\circ^2 e^{-t/\tau} \qquad (8.8)$$

การสูญเสียกำลังโดยเฉลี่ยให้นิยามว่าคือค่าลบของอัตราเฉลี่ยการทำงานเพื่อต่อต้านแรงเสียดทาน หรือ เป็นอัตราการลดค่าพลังงานเฉลี่ยของระบบซึ่งมีค่าดังนี้

$$P_{ave} = -\frac{d}{dt}E_{ave}$$

$$= \frac{1}{2\tau}ma^2\omega_\circ^2 e^{-t/\tau}$$

หรือ $$P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau} \qquad (8.9)$$

ตัวประกอบคุณภาพ (quality factor,Q) เป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วยและเป็นตัวบ่งความเป็นอิสระของระบบต่อความหน่วง อาจให้นิยามว่าคือ 2π คูณกับอัตราการสูญเสียพลังงานเฉลี่ยต่อรอบ หรือ

$$Q = 2\pi \frac{\text{พลังงาน เฉลี่ยของระบบที่เก็บสะสมไว้ต่อรอบ}}{\text{การสูญเสียกำลังโดยเฉลี่ยต่อรอบ}}$$

$$= 2\pi \frac{E_{ave}}{P_{ave}T} = \frac{\omega E_{ave}}{P_{ave}} \qquad (8.10)$$

ในกรณีที่การหน่วงมีค่าน้อย หรือ $\omega \approx \omega_\circ$ และ $P_{ave} = \frac{E_{ave}}{\tau}$

$$\therefore Q = \omega_\circ \tau \qquad (8.11)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

8.3 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบหน่วง

ตัวอย่าง 8.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบหนึ่งกำหนดโดย

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_\circ^2 x = 0$$

ถ้า $\frac{\omega_\circ}{b} \gg 1$ จงหาเวลาที่ทำให้

(a) แอมพลิจูดลดลงเป็น 1/e เท่าของแอมพลิจูดเริ่มต้น

(b) พลังงานของระบบลดลง 1/e เท่าของพลังงานเริ่มต้น

(c) พลังงานลดลง 1/e4 เท่าของพลังงานเริ่มต้น

วิธีทำ

สมการที่กำหนดให้ข้างต้นจะคล้ายกับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\frac{dx}{dt} + \omega_\circ^2 x = 0$$

เมื่อเปรียบเทียบกันจะเห็นว่า $b = \mu$ ดังนั้น จากเงื่อนไขที่กำหนดให้คือ $\frac{\omega_\circ}{b} \gg 1$ จึงเปลี่ยนไปเป็น $\frac{\omega_\circ}{\mu} \gg 1$ ซึ่งหมายความว่า $\mu \ll \omega_\circ$ นั่นคือจะมีการแกว่งกวัด ดังได้กล่าวในกรณีที่ 3 แล้ว โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-\mu t}\sin(\omega t + \phi)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

โดยที่ความถี่เชิงมุม ω คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_{\circ}^2 - \mu^2} = \omega_{\circ}\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_{\circ}}\right)^2}$$

$\omega_{\circ}$ เป็นความถี่เชิงมุมที่ปราศจากการหน่วง

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบหน่วง คือ

$$A = ae^{-\mu t} = ae^{-bt}$$

ซึ่งมีขนาดสูงสุดเท่ากับ a

(a) เมื่อแอมพลิจูด A มีขนาดเท่ากับ $\frac{a}{e}$ หรือ ae^{-1}

ดังนั้น $\mu t = 1$

หรือ $t = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{b}$

(b) พลังงานศักย์ของระบบที่เวลา t กำหนดโดย

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_{\circ}^2\left[ae^{-\mu t}\sin(\omega t + \phi)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_{\circ}^2 a^2 e^{-2\mu t}\sin^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานรวม $E = \left(E_p\right)_{max} = \frac{1}{2}m\omega_{\circ}^2 a^2 e^{-2\mu t}$

ดังนั้น $E_{max} = \frac{1}{2}m\omega_{\circ}^2 a^2$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อพลังงาน E ลดลงเป็น E_{max} / e หรือ $E_{max}e^{-1}$ นั่นคือ

$$2\mu t = 1 \qquad \text{หรือ} \quad t = \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2b}$$

(c) เมื่อพลังงานลดลงเป็น E_{max} / e^4 นั่นคือ

$$2\mu t = 4 \quad \text{ดังนั้น} \quad t = \frac{2}{\mu} = \frac{2}{b}$$

ตัวอย่าง 8.2 ในการทดลองหยดน้ำมันมิลลิแกน (Millikan oil-drop experiment) หยดน้ำมันที่มีประจุ q และมวล m หยดลงมาภายใต้แรงของสนามไฟฟ้า E และความโน้มถ่วง g ในตัวกลางที่มีลักษณะหนืด สมมุติอัตราเร็วของหยดน้ำมันมีรูปแบบเป็น $v = A + Be^{-\alpha t}$ จงพิสูจน์ว่าความเร็วปลายคือ

$$v_{term} = \frac{q}{m}\tau E + g\tau$$

โดยที่ $\tau = \frac{m}{b}$ = เวลาของการผ่อนคลาย และ b คือ แฟกเตอร์การสูญเสียพลังงาน หรือค่าคงตัวการหน่วง

วิธีทำ

สมมติให้การเคลื่อนที่ลงมาตามแรงโน้มถ่วงมีค่าเป็นบวก และสนามไฟฟ้าอยู่ในแนวเดียวกับแรงโน้มถ่วง ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของหยดน้ำมัน คือ

$$m\frac{dv}{dt} = mg + qE - bv$$

หรือ

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = q + \frac{g}{m}E$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$v = A + Be^{-\alpha t}$$

A,B และ α เป็นค่าคงตัวซึ่งหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น กล่าวคือ เมื่อ t=0 หยดน้ำมันเริ่มต้นจากการหยุดนิ่ง หรือ $v_o = 0$ ดังนั้น A+B = 0 หรือ B = -A

ผลเฉลี่ยจะเปลี่ยนไปเป็น

$$v = A\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

และความเร่ง $$\frac{dv}{dt} = A\alpha e^{-\alpha t}$$

สมการการเคลื่อนที่ข้างต้นจะกลายเป็น

$$A\alpha e^{-\alpha t} + \frac{A}{\tau}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) = g + \frac{q}{m}E$$

เมื่อ $t \to \infty$ เราได้

$$\frac{A}{\tau} = g + \frac{q}{m}E$$

หรือ $$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{A}\left(g + \frac{q}{m}E\right)$$

และเมื่อ t = o เราได้

$$A\alpha = g + \frac{q}{m}E$$

หรือ $$\alpha = \frac{1}{A}\left(g + \frac{q}{m}E\right)$$

ดังนั้น $$\alpha = \frac{1}{\tau}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แทนค่า α และ A ลงในสมการสำหรับ v จะได้

$$v = \tau\left(g + \frac{q}{m}E\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

ความเร็วของหยดน้ำมันในขณะที่แรงเสียดทาน bv มีค่าเท่ากับแรงขับ (ซึ่งในที่นี้คือ mg+qE) เรียกว่าความเร็วปลาย ดังนั้น

$$v_{term} = v_{t=\infty} = \frac{q}{m}\tau E + g\tau$$

ตัวอย่าง 8.3 จงหาคาบของการแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดียวเมื่อคิดแรงต้านทานจากอากาศด้วย และถ้าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดลดลงเหลือครึ่งหนึ่งในระยะเวลา 138 วินาที จงหาเวลาของการผ่อนคลาย

วิธีทำ

เมื่อคิดแรงต้านทานของอากาศด้วย สมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเชิงเดียวจะกลายเป็น

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -b\frac{d\theta}{dt} - mg\ell\sin\theta$$

ในกรณีที่ θ มีค่าน้อยๆ $\sin\theta \sim \theta$

โมเมนต์ความเฉื่อยของลูกตุ้มเชิงเดียว คือ $I = m\ell^2$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนไปเป็น

$$m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + mg\ell\theta = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\theta}{dt} + \omega_\circ^2\theta = 0$$

โดยที่ $\frac{b}{m\ell^2} = \frac{1}{\tau}$ และ $\frac{g}{\ell} = \omega_\circ^2$

สำหรับการเคลื่อนที่ที่มีการแกว่งกวัด เงื่อนไขที่สำคัญ คือ $\frac{1}{2\tau} < \omega_\circ$ ดังนั้นผลเฉลี่ยของสมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\theta = ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \phi)$$

โดยที่ แอมพลิจูด $A = ae^{-t/2\tau}$

และความถี่เชิงมุม คือ

$$\omega = \sqrt{\omega_\circ^2 - \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4}}$$

ดังนั้น คาบ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4m^2\ell^4}\right)^{-1/2}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 - \frac{b^2 g}{4m^2\ell^5}\right)^{-1/2}$$

$$= T_\circ\left(1 + \frac{b^2 g}{8m^2\ell^5}\right)$$

$T_\circ$ คือ คาบในกรณีที่ไม่คิดแรงต้านทาน

แอมพลิจูดสูงสุด คือ $A_{max} = a$

และแอมพลิจูดเมื่อเวลา $t = 138$ วินาที เท่ากับ $ae^{-138/2\tau} = \frac{a}{2}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ดังนั้น $$\frac{69}{\tau} = \log_e \frac{1}{2}$$

และ $$\tau = \frac{69}{0.69} = 100 \quad \text{วินาที}$$

ดังนั้น เวลาของการผ่อนคลาย เท่ากับ 100 วินาที

ตัวอย่าง 8.4 มวล 1 กิโลกรัมถูกกระทำด้วยแรงซึ่งมีค่าคงตัวเท่ากับ 400 นิวตัน/เมตร และแรงเสียดทานขนาด 4 นิวตัน/เมตร/วินาที ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นคือ x=0 และ v = 2 เมตร/วินาที ที่ t = 0 จงหา

(a) ความถี่เชิงมุมของการแกว่งกวัด

(b) พลังงานของระบบที่ t = 0

(c) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อวินาที ที่ t = 0 และที่เวลาใดๆ

(d) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบที่ t = 0 และที่เวลาใดๆ

(e) จำนวนรอบของการแกว่งกวัดก่อนที่แอมพลิจูดลดลง 1/e ของค่าเริ่มต้น

วิธีทำ

(a) สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ในที่นี้ m =1 กก. b=4 นิวตัน/เมตร/วินาที

และ k=400 นิวตัน/เมตร

ดังนั้น $\omega_\circ = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20$ เรเดียน/วินาที

และ $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} = 4$ หรือ τ=1/4 วินาที

จะเห็นว่า $\frac{1}{2\tau} < \omega_\circ$ ดังนั้น ระบบจะมีการแกว่งกวัด โดยมีการกระจัดเป็น

$$x = ae^{-t/2\tau}\sin(\omega t + \phi)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น x=o เมื่อ t=o ดังนั้น $\phi = 0$

และ $x = ae^{-t/2\tau}\sin\omega t$

ω คือความถี่เชิงมุมของการหน่วง กำหนดโดย

$$\omega = \sqrt{\omega_{\circ}^2 - 1/4\tau^2} = \sqrt{400-4} = 19.9 \quad \text{เรดียน/วินาที}$$

(b) อัตราเร็วที่เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-a}{2\tau}e^{-t/2\tau}\sin\omega t + a\omega e^{-t/2\tau}\cos\omega t$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น t=o, v=2 เมตร/วินาที

ดังนั้น $a\omega = 2$ หรือ $a = \frac{2}{19.9} \approx \frac{1}{10}$

พลังงานจลน์ $E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

$$= \frac{1}{2}ma^2e^{-t/\tau}\left[\omega^2\cos^2\omega t + \frac{1}{4\tau^2}\sin^2\omega t - \frac{\omega}{2\tau}\sin 2\omega t\right]$$

ดังนั้น พลังงานรวมที่เวลา t ใดๆ = พลังงานจลน์สูงสุด

หรือ $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2e^{-t/\tau}$

และพลังงานรวมที่ t = o คือ $E = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = 2$ จูล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(c) อัตราการสูญเสียพลังงาน $= \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$

$$\therefore \left(\frac{dE}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{2\tau}ma^2\omega^2 = 8 \quad \text{จูล}$$

(d) อัตราการสูญเสียพลังงานต่อรอบ $= \frac{dE}{dt}xT$ เมื่อ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore \left(\frac{dE}{dt}xT\right)_{t=0} = \frac{8x6.28}{19.9} = 2.4 \quad \text{จูล/วินาที}$$

(e) แอมพลิจูด $A = ae^{-t/2\tau}$ โดยที่ $A_{max} = a$

เมื่อแอมพลิจูดลดลงเป็น $A_{max}/e = \frac{a}{e} = ae^{-1}$

ดังนั้น $\frac{t}{2\tau} = 1$ หรือ $t = 2\tau = \frac{1}{2}$ วินาที

และจำนวนรอบในช่วงเวลา $\frac{1}{2}$ วินาที

$$= \frac{t}{T} = \frac{\omega}{4\pi} = 1.6 \quad \text{รอบ}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

8.4 ผลของแรงภายนอก

เราทราบจากหัวข้อที่แล้วว่า แรงเสียดทานทำให้การแกว่งกวัดลดลง และหยุดการแกว่งกวัดในที่สุด เพื่อให้การแกว่งกวัดคงอยู่ไปนานๆ จำเป็นต้องมีแรงภายนอกมากระทำอย่างสม่ำเสมอ สมมติแรงภายนอกดังกล่าวคือ $F_o \sin \omega t$ กระทำต่อระบบซึ่งมีมวล m ค่าคงตัวสปริง k ค่าคงตัวการหน่วง b ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin \omega t \qquad (8.12)$$

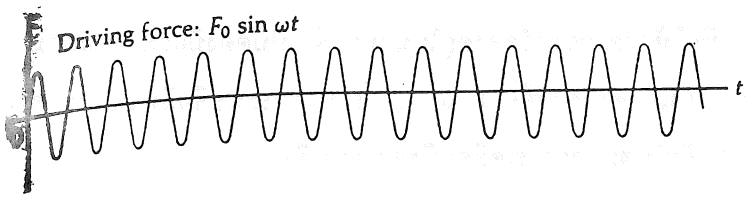
เพื่อไม่ให้สับสนกับสัญกรณ์ของความถี่ที่ผ่านมา จึงกำหนดให้ ω เป็นความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำอย่างต่อเนื่อง (ซึ่งในที่นี้กำหนดเป็นคลื่นไซน์) ω' เป็นความถี่ที่เกิดจากการหน่วง และ ω_o เป็นความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ซึ่งเป็นความถี่ที่ปราศจากแรงเสียดทานหรือแรงภายนอกอื่นใด

ผลเฉลี่ยของสมการ (8.12) ประกอบด้วย 2 เทอม คือ เทอมของภาวะชั่วครู่ (transient term) และเทอมของสถานะคงตัว (steady state term) กล่าวคือ เมื่อเริ่มต้นมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ แรงภายนอกจะเพิ่มค่าพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของระบบจนกระทั่งอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่ให้แก่ระบบมีค่าเท่ากับอัตราเฉลี่ยของพลังงานที่สูญเสียไปเพื่อเอาชนะแรงเสียดทาน ช่วงดังกล่าวนี้เป็นภาวะชั่วครู่ การกระจัดจะมีค่ามากและลดลงอย่างรวดเร็วแบบเอกซ์โพเนนเชียล เทอมของภาวะชั่วครู่จึงเป็นผลเฉลยของสมการ

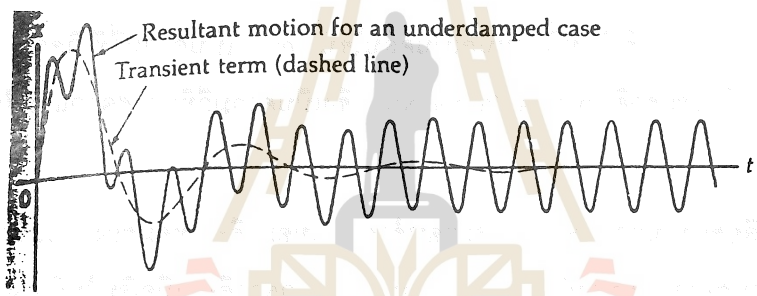
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา การเคลื่อนที่ในช่วงนี้ขึ้นกับการกระจัดเริ่มต้น และอัตราเร็วของมวล และยังขึ้นกับเฟสของแรงภายนอกที่มากระทำด้วย

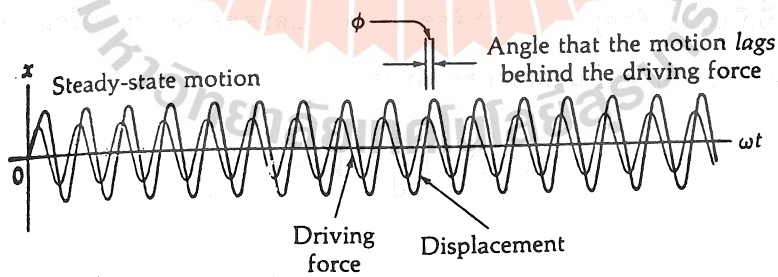
หลังจากที่เทอมของภาวะชั่วครู่หายไป ระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดแบบคลื่นไซน์มวลของระบบจึงเริ่มแกว่งกวัดด้วยความถี่ ω เท่ากับความถี่ของแรงขับภายนอก แต่มีเฟสต่างกันเท่ากับ ϕ กล่าวคือ คลื่นการแกว่งกวัดของระบบจะตามหลังคลื่นของแรงภายนอกด้วยมุม ϕ ดังแสดงในรูปที่ 8.2 การแกว่งกวัดในช่วงหลังนี้จึงเป็นการแกว่งกวัดในสถานะคงตัว



(ก)



(ข)



(ค)

รูป 8.2 แสดงการแกว่งกวัดแบบบังคับ (ก) แสดงคลื่นของแรงขับภายนอก (ข) เทอมของภาวะชั่วครู่ และ (ค) การเคลื่อนที่ที่สถานะคงตัว

เทอมของสถานะคงตัวเป็นเทอมที่อธิบายการแกว่งกวัดของระบบหลังจากที่เทอมของภาวะชั่วครู่หายไป

ถ้าเรากำหนดให้ $\frac{b}{m}=\frac{1}{\tau},\frac{k}{m}=\omega_{\circ}^{2}$ และ $\frac{F_{\circ}}{m}=f_{\circ}$ สมการ (8.12) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt}+\omega_{\circ}^{2}x=f_{\circ}\sin\omega t \qquad (8.13)$$

สมมติว่าผลเฉลี่ยของสมการ (8.13) มีรูปแบบเป็น

$$x=A\sin(\omega t+\phi) \qquad (8.14)$$

โดยที่ A คือแอมพลิจูด และ ϕ คือเฟสที่แตกต่างกันระหว่างคลื่นการแกว่งกวัดของระบบและคลื่นของแรงภายนอก

หาอนุพันธ์ของสมการ (8.14) 2 ครั้งเทียบกับเวลา t แล้วแทนค่าเทอมต่างๆ ลงในสมการ (8.13) จะได้

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\phi)+\frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t+\phi)+\omega_{\circ}^{2}A\sin(\omega t+\phi)$$

$$=f_{\circ}\sin\omega t=f_{\circ}\sin(\omega t+\phi-\phi)$$

หรือ

$$\left(\omega_{\circ}^{2}-\omega^2\right)A\sin(\omega t+\phi)+\frac{A\omega}{\tau}\cos(\omega t+\phi)$$

$$=f_{\circ}\sin(\omega t+\phi)\cos\phi-f_{\circ}\cos(\omega t+\phi)\sin\phi \qquad (8.15)$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม $\sin(\omega t+\phi)$ และ $\cos(\omega t+\phi)$

$$A\left(\omega_{\circ}^{2}-\omega^{2}\right)=f_{\circ}\cos\phi$$

และ $$\frac{A\omega}{\tau}=-f_{\circ}\sin\phi$$

เมื่อนำมาหารกัน จะได้ $$\tan\phi=-\frac{\omega/\tau}{\omega_{\circ}^{2}-\omega^{2}}$$

หรือ $$\phi=\tan^{-1}\frac{\omega/\tau}{\omega^{2}-\omega_{\circ}^{2}} \qquad (8.16)$$

และเมื่อยกกำลังสองของทั้งสองเทอมแล้วนำมาบวกกัน จะได้

$$A^{2}\left(\omega_{\circ}^{2}-\omega^{2}\right)^{2}+\frac{A^{2}\omega^{2}}{\tau^{2}}=f_{\circ}^{2}$$

หรือ $$A=\frac{f_{\circ}}{\left[\left(\omega_{\circ}^{2}-\omega^{2}\right)^{2}+\frac{\omega^{2}}{\tau^{2}}\right]^{1/2}} \qquad (8.17)$$

พิจารณา 3 กรณีที่เกิดขึ้น:

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อ $\omega \ll \omega_{\circ}$

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติมากๆ จึงอาจตัดเทอมของ ω ในสมการ (8.17) ดังนั้น

$$A=\frac{f_{\circ}}{\omega_{\circ}^{2}}=\frac{F_{\circ}}{k} \qquad (8.18)$$

ในกรณีเช่นนี้ การตอบสนองจึงเกิดจากค่าของตัว k เท่านั้นนอกจากนี้เมื่อ $\omega \to 0$ ค่าของ $\tan\phi \to 0$ หรือ $\phi \to 0$ ซึ่งหมายถึงเฟสที่แตกต่างกันมีค่าน้อยมาก หรือมีการตอบสนองด้วยความถี่เดียวกับแรงภายนอก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อ $\omega = \omega_{\circ}$ (การสั่นพ้องแอมพลิจูด)

เมื่อความถี่ของแรงภายนอกเท่ากับความถี่ธรรมชาติพอดี แอมพลิจูดจะมีค่าสูงสุด กล่าวคือ

$$A_r = \frac{f_{\circ}}{\omega / \tau} = \frac{f_{\circ}\tau}{\omega_{\circ}} \qquad (8.19)$$

และแทนค่า $\omega = \omega_{\circ}$ ลงในสมการ (4.5) จะได้ $\phi = -\frac{\pi}{2}$ ซึ่งหมายความว่า เมื่อมีการสั่นพ้อง แรงภายนอกนำหน้าการตอบสนองด้วยมุม $\pi/2$ แอมพลิจูด ของการสั่นพ้องขึ้นอยู่กับการหน่วง กล่าวคือ เมื่อการหน่วงมีค่าน้อย τ จะมีค่ามาก ดังนั้น A_r จะมีค่ามาก และถ้าไม่มีการหน่วงเลย หรือ $b=0, \tau = \infty$ แอมพลิจูดของการสั่นพ้อง A_r จะมีค่าอนันต์

เมื่อมีการหน่วง แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมิได้มีค่าสูงสุดที่ $\omega = \omega_{\circ}$ พอดี กล่าวคือ อนุพันธ์ของ A ในสมการ (8.17) เทียบกับ ω โดยให้ $\omega_{\circ}$ เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\frac{dA}{d\omega} = -\frac{1}{2} f_{\circ} \frac{(-2)2\omega\left(\omega_{\circ}^2 - \omega^2\right) + 2\omega / \tau^2}{\left[\left(\omega_{\circ}^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 / \tau^2\right]^{3/2}} = 0$$

หรือ $$-4\omega\left(\omega_{\circ}^2 - \omega^2\right) + \frac{2\omega}{\tau^2} = 0$$

$$\therefore \omega = \omega_{\circ}\sqrt{1 - \frac{1}{2\omega_{\circ}^2\tau^2}} \qquad (8.20)$$

ซึ่งเป็นความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดของการสั่นพ้องมีค่าสูงสุด จะเห็นได้ว่า ω มีค่าน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ $\omega_{\circ}$ เล็กน้อย และถ้าหากความหน่วงมีค่าน้อยมาก τ จะมีค่ามากดังนั้นจึงอาจตัดเทอม $1/2\omega_{\circ}^2\tau^2$ ออกไปได้ และ ω จะเท่ากับ $\omega_{\circ}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

<u>กรณีที่ 3</u> เมื่อ $\omega \rangle\rangle \omega_{\circ}$

ถ้าให้ $\omega_{\circ} = 0$ ในสมการ (8.17) จะได้

$$A = \frac{f_{\circ}}{\left[\omega^4 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

และเมื่อการหน่วงมีค่าน้อยมาก $\tau \to \infty$ จึงอาจตัดทิ้งเทอม $\frac{\omega^2}{\tau^2}$ ดังนั้น

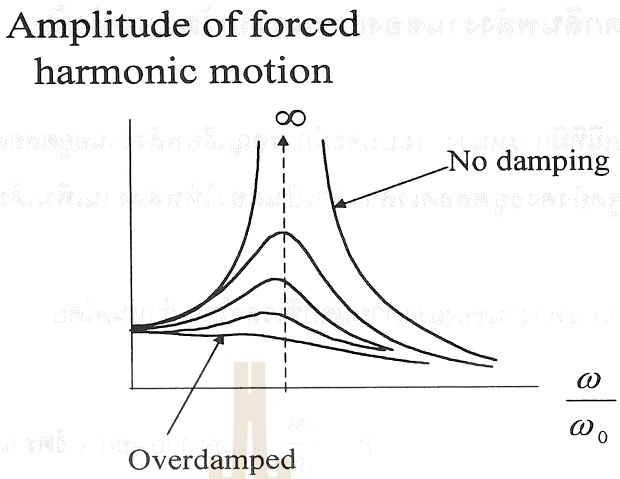
$$A = \frac{f_{\circ}}{\omega^2} = \frac{F_{\circ}}{m\omega^2} \qquad (8.21)$$

จะเห็นได้ว่า แอมพลิจูดลดลงเมื่อความถี่ของแรงภายนอกเพิ่มขึ้น และจากสมการ (8.16) เราได้ว่า

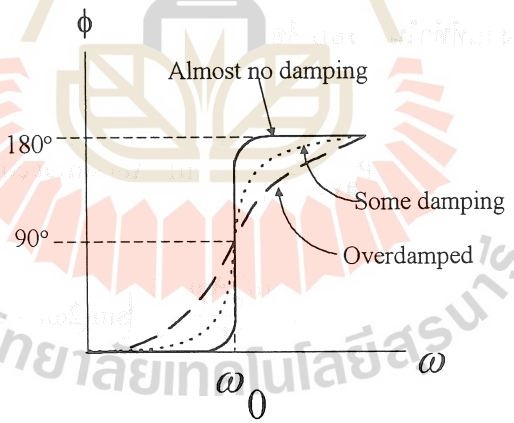
$$\tan\phi \to -0 \quad \text{หรือ} \quad \phi \to -\pi$$

ในกรณีเช่นนี้ การกระจัดของการตอบสนองจะตามหลังแรงภายนอกด้วยเฟสเท่ากับ π

เมื่อแรงภายนอกกระทำต่อระบบได้ระยะหนึ่ง ระบบจะเกิดการแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่ไม่ใช่ความถี่ธรรมชาติของระบบเอง แต่ระบบจะแกว่งกวัดด้วยความถี่ที่เท่ากับความถี่ของแรงภายนอก แอมพลิจูดที่มีค่าน้อยแสดงว่าแรงเสียดทานมีค่ามาก และขึ้นกับความถี่ของแรงภายนอก รูปที่ 8.3 แสดงกราฟของแอมพลิจูดที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอก โดยมีความถี่ธรรมชาติที่ปราศจากการหน่วงอยู่ในแนวดิ่ง ความถี่ที่ทำให้แอมพลิจูดมีค่าสูงสุดเรียกว่า ความถี่ของการสั่นพ้อง (resonant frequency) เมื่อระบบปราศจากแรงเสียดทาน ความถี่ของการสั่นพ้องเท่ากับความถี่ธรรมชาติ แอมพลิจูดจะมีค่าอนันต์ เมื่อมีแรงเสียดทาน แอมพลิจูดจะลดลง โดยมีความถี่ของการสั่นพ้องน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติเล็กน้อย



รูป 8.3 แสดงแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอก และที่การหน่วงแตกต่างกัน



รูป 8.4 แสดงมุมเฟส ϕ ของการแกว่งกวัดแบบบังคับที่ล้าหลังแรงภายนอก และเป็นฟังก์ชันของความถี่ของแรงภายนอกที่การหน่วงค่าต่างๆ

8.5 การดูดกลืนพลังงานของการแกว่งกวัดแบบบังคับ

ในกรณีที่มีการหน่วง ระบบจะมีการสูญเสียพลังงานอยู่ตลอดเวลา ดังนั้นเพื่อให้พลังงานหรือแอมพลิจูดยังคงอยู่ตลอดเวลา จำเป็นต้องให้พลังงานเพิ่มเติมโดยแรงภายนอกนั่นเอง

อัตราการทำงานของแรงภายนอกที่เวลาใดๆ กำหนดโดย

$$P = \frac{dw}{dt} = \text{แรงภายนอก x อัตราเร็ว}$$

$$= \left(F_\circ \sin\omega t\right)\frac{dx}{dt}$$

$$= \left(mf_\circ \sin\omega t\right)A\omega\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของงานที่ทำใน 1 รอบ คือ

$$P_{ave} = \frac{1}{T}\int_\circ^T mf_\circ A\omega \sin\omega t\cos\left(\omega t+\phi\right)dt$$

$$= \frac{mf_\circ A\omega}{2T}\int_\circ^T \left[\sin\left(2\omega t+\phi\right)-\sin\phi\right]dt$$

$$= \frac{mf_\circ A\omega}{2T}\left[-\frac{\cos\left(2\omega t+\phi\right)}{2\omega}-t\sin\phi\right]_\circ^T$$

$$= -\frac{mA\omega t f_\circ \sin\phi}{2T}$$

และจากการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอมต่างๆ ในสมการ (8.15) เราทราบว่า

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$-f_{\circ}\sin\phi = \frac{A\omega}{\tau}$$

ดังนั้น $$P_{ave} = \frac{mA^2\omega^2}{2\tau}$$

เนื่องจากแรงที่สูญเสียไปในการเอาชนะแรงเสียดทาน คือ $-b\frac{dx}{dt} = -\frac{m}{\tau}\frac{dx}{dt}$ ดังนั้น งานที่ทำในการต่อต้านแรงเสียดทาน หรือ พลังงานที่สูญเสียไป

= แรง x อัตราเร็ว

$$= \left(\frac{m}{\tau}\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{m}{\tau}A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

และกำลังเฉลี่ยที่สูญเสียไปต่อรอบ

$$= \frac{1}{T}\int_{\circ}^{T}\frac{m}{\tau}A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)dt$$

$$= \frac{m}{2\tau}\frac{A^2\omega^2}{T}\cdot T$$

$$= \frac{mA^2\omega^2}{2\tau}$$

เราจึงสรุปได้ว่า เมื่อมีการหน่วง กำลังเฉลี่ยที่สูญเสียไปต่อรอบของระบบจะเท่ากับกำลังเฉลี่ยที่แรงภายนอกให้กับระบบนั้น

ต่อไปเราจะพิจารณาตัวประกอบคุณภาพ Q ของการแกว่งกวัดแบบบังคับจากนิยามที่ให้ไว้ในหัวข้อที่ผ่านมา คือ

$$Q = 2p\,\frac{\text{ค่าเฉลี่ยพลังงานที่สะสมไว้}}{\text{พลังงานที่สูญเสียไปต่อรอบ}} = 2p\,\frac{E_{ave}}{T \times P_{ave}}$$

เนื่องจากพลังงานรวมของระบบคือ $E = E_k + E_p$

ดังนั้น $$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi) + \frac{1}{2}m\omega_\circ^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ $\sin^2(\omega t+\phi)$ และ $\cos^2(\omega t+\phi)$ ต่างมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{4}mA^2\left(\omega^2+\omega_\circ^2\right)}{\frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{mA^2\omega^2}{2\tau}}$$

หรือ $$Q = \frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\omega_\circ}{\omega}\right)^2\right]\omega\tau \qquad (8.22)$$

และเมื่อมีการสั่นพ้อง $\omega = \omega_\circ$ ดังนั้น $Q = \omega\tau = \omega_\circ\tau$

8.6 แอมพลิจูดการดูดกลืนและการยืดหยุ่น

เส้นโค้งเดี่ยวที่ปรากฏในรูปที่ 8.3 แท้ที่จริงประกอบกด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

จากสมการ (8.17) แอมพลิจูดของการกระจัดหาได้จาก

$$|A| = \frac{f_o}{\left[\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

โดยที่ $f_o = \frac{F_o}{m}, \omega_o^2 = \frac{k}{m}$ และ $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}$

หรือ $$|A| = \frac{F_o}{\left[\left(k - \omega^2 m\right)^2 + \omega^2 b^2\right]^{1/2}}$$

ซึ่งอาจเขียนในรูปของเลขเชิงซ้อนได้เป็น

$$A = \frac{F_o}{\left(k - \omega^2 m\right) + ib\omega}$$

คูณตัวเศษและตัวส่วนด้วย -i จะได้

$$A = \frac{-iF_o}{\omega\left[b + i\left(\omega m - k/\omega\right)\right]} = \frac{-iF_o}{\omega Z_m} \qquad (8.23)$$

โดยที่ $$Z_m = b + i\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right) \qquad (8.24)$$

Z_m คือ ความต้านทานเชิงซ้อน (mechanical impedance)

ต่อไปให้ $X_m = \omega m - k/\omega$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ดังนั้น
$$A = \frac{-iF_o}{\omega}\left[\frac{1}{b + iX_m}\right]$$

$$= \frac{-iF_o}{\omega}\left[\frac{b - iX_m}{b^2 + X_m^2}\right]$$

$$= \frac{-iF_o}{\omega}\frac{b}{b^2 + X_m^2} - \frac{F_o}{\omega}\frac{X_m}{b^2 + X_m^2} \qquad (8.25)$$

เทอมที่เป็นเลขจำนวนจริง คือ

$$-\frac{F_o}{\omega}\frac{X_m}{b^2 + X_m^2} = \frac{F_o\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{m^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 b^2}$$

หรือ
$$A_{elas} = \frac{F_o\omega\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{m^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 b^2} \qquad (8.26)$$

A_{elas} เรียกว่า แอมพลิจูดการยืดหยุ่น (elastic amplitude) หรือแอมพลิจูดการกระจาย (dispersive amplitude)

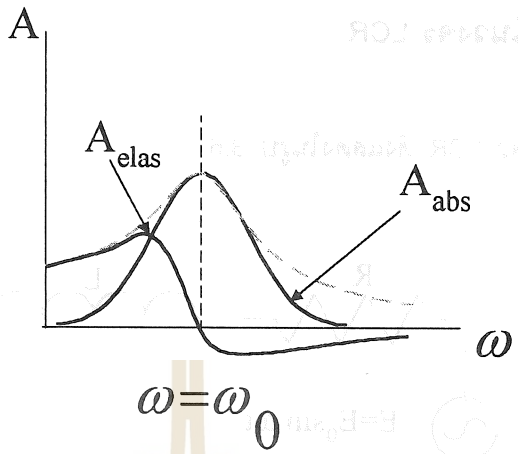
เทอมที่เป็นเลขจำนวนเชิงซ้อน คือ

$$\frac{F_o}{\omega}\frac{b}{b^2 + X_m^2} = \frac{F_o\omega b}{m^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 b^2}$$

หรือ
$$A_{abs} = \frac{F_o\omega b}{m^2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2 b^2} \qquad (8.27)$$

A_{abs} เรียกว่า แอมพลิจูดการดูดกลืน (absorptive amplitude)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 8.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดทั้งสองที่เป็นฟังก์ชันของความถี่เชิงมุมของแรงภายนอก

จากรูปจะเห็นว่า เมื่อเส้นโค้งของ A_{elas} เท่ากับศูนย์ เส้นโค้งของ A_{abs} มีค่าสูงสุดที่ $\omega = \omega_{\circ}$ และเมื่อรวมกันแล้วจะให้ค่าสูงสุด คือ

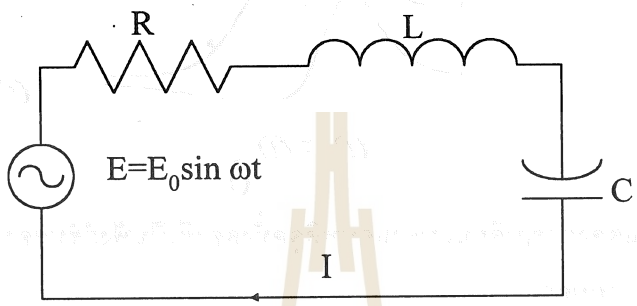
$$\omega^2 = \omega_{\circ}^2 - \frac{b^2}{2m^2} \qquad (8.28)$$

ซึ่งเป็นความถี่ของการสั่นพ้องเช่นเดียวกับสมการ (8.20) นั่นเอง

การศึกษาด้านการกระจายเชิงแสง (optical dispersion) พบว่าการแยกออกเป็นสองส่วน คือ A_{elas} และ A_{abs} เป็นจริงตามทฤษฎี กล่าวคือ เมื่อฉายแสงซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ ω ลงบนผิวโลหะ แรงภายนอกที่มากระทำต่อระบบ คือ สนามไฟฟ้าที่มีการแกว่งกวัดและอิเล็กตรอนในอะตอมถือว่าเป็นตัวแกว่งกวัดแบบบังคับ เมื่อ ω มีค่าเท่ากับความถี่ของการสั่นพ้องของอิเล็กตรอนในอะตอม อะตอมจะดูดกลืนพลังงานจากคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้มากที่สุด และเส้นโค้งของ A_{abs} จะเป็นเส้นโค้งลักษณะเฉพาะ (characteristic curve) ของการดูดกลืน ให้สังเกตว่าเส้นโค้งของ A_{abs} แทนเศษส่วนการสูญเสียหรือการดูดกลืน ของความต้านทานเชิงซ้อน $b / \left[b^2 + X_m^2\right]^{1/2}$ ในขณะที่เส้นโค้งของ A_{elas} แทนเศษส่วนพลังงานที่สะสมของความต้านทานเชิงซ้อน $X_m / \left[b^2 + X_m^2\right]^{1/2}$ เส้นโค้ง A_{elas} ในตัวกลางจะเป็นตัวกำหนดความเร็วของคลื่นในตัวกลาง ซึ่งเกี่ยวพันกับดรรชนีหักเหของตัวกลางอีกทีหนึ่ง

8.7 การสั่นพ้องในวงจร LCR

พิจารณาวงจร LCR ดังแสดงในรูป 8.6



รูป 8.6 แสดงวงจร LCR

สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=E_{\circ}\sin\omega t \qquad (8.29)$$

สมมติผลเฉลยของสมการกำหนดโดย

$$I=Ae^{i\omega t} \qquad (8.30)$$

ดังนั้น $$\frac{dI}{dt}=i\omega Ae^{i\omega t}$$

และ $$q=\int Idt=\int Ae^{i\omega t}dt$$

หรือ $$q=\frac{Ae^{i\omega t}}{i\omega}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แทนค่าต่างๆเหล่านี้ ลงในสมการ (8.29) จะได้

$$L\left(i\omega Ae^{i\omega t}\right)+R\left(Ae^{i\omega t}\right)+\frac{Ae^{i\omega t}}{Ci\omega}=E_{\circ}e^{i\omega t}$$

สังเกตว่าขวามือของสมการ (8.29) เปลี่ยนไปเล็กน้อย อันเนื่องจากส่วนจินตภาพของ $E_{\circ}e^{i\omega t}$ มีค่าเท่ากับ $E_{\circ}\sin\omega t$ ดังนั้น

$$A\left\{i\omega L+R+\frac{1}{i\omega C}\right\}=E_{\circ}$$

$$A=\frac{E_{\circ}}{R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

หรือ
$$A=\frac{E_{\circ}}{Z} \qquad (8.31)$$

โดยที่
$$Z=R+i\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right) \qquad (8.32)$$

เลขเชิงซ้อน Z เรียกว่าความต้านทานเชิงซ้อน (impedance) ของวงจร ซึ่งอาจเขียนในรูป พิกัดเชิงขั้ว เป็น

$$Z=|Z|e^{i\theta}$$

โดยที่
$$R=|Z|\cos\theta$$

$$\omega L-\frac{1}{\omega C}=|Z|\sin\theta$$

$$\left|Z^2\right|\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}$$

และ $$\tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

ดังนั้น $$A = \frac{E_\circ}{Z} = \frac{E_\circ}{|Z| e^{i\theta}}$$

และกระแส I ที่ไหลในวงจร คือ

$$I = Ae^{i\omega t} = \frac{E_\circ}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)}$$

และเนื่องจาก $$1/|Z| = D \qquad (8.33)$$

ดังนั้น $$I = E_\circ D e^{i(\omega t - \theta)} \qquad (8.34)$$

เราเรียก D ว่าตัวประกอบความเพี้ยน (distortion factor)

เนื่องจาก D (ω) เป็นฟังก์ชันของ ω ที่ค่าสูงสุดของ D (ω) จะได้ $\frac{dD}{d\omega} = 0$

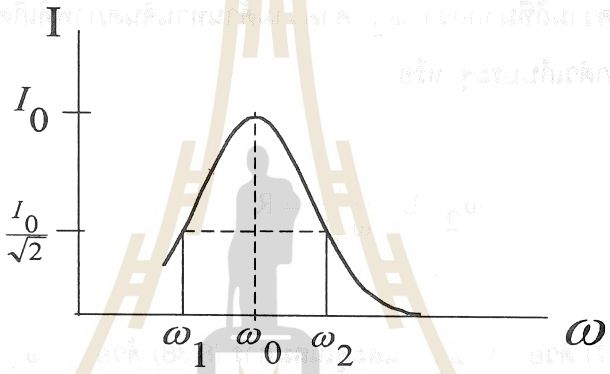
ดังนั้น $$-\frac{1}{2}\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{-3/2} \cdot 2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)\left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) = 0$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0$$

จะเห็นได้ว่า เมื่อ $\omega = \omega_{\circ} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ซึ่งเป็นความถี่ของการสั่นพ้อง ค่าของ D (ω) จะมีค่าสูงสุด ทำให้กระแส I ในวงจรมีค่าสูงสุดด้วย สมมติแทนด้วย $I_{\circ}$ ดังนั้น

$$I_{\circ} = E_{\circ} D(\omega_{\circ}) e^{i(\omega_r t - \theta)} \tag{8.35}$$

กราฟของ I และ ω จะมียอด (peak) สำหรับ $I = I_{\circ}$ ที่ $\omega = \omega_{\circ}$ ดังแสดงในรูป 8.7



รูป 8.7 แสดงกราฟของ I ที่เป็นฟังก์ชันของ ω

เมื่อเราเลือกค่า ω สองค่าคือ ω_1 และ ω_2 ทั้งสองด้านของ $\omega_{\circ}$ โดยที่เมื่อ $\omega = \omega_1$ และ $\omega = \omega_2$ ค่าของ I จะเท่ากับ $I_{\circ}/\sqrt{2}$ กำลังที่สอดคล้องกับ $I_{\circ}/\sqrt{2}$ เป็นครึ่งหนึ่งของกำลังที่สอดคล้องกับ $I_{\circ}$ ดังนั้นตำแหน่งที่สอดคล้องกับ ω_1 และ ω_2 จึงเรียกว่า half power points

เราจะนิยามแฟกเตอร์ตัวใหม่ที่เป็นตัววัดความคมชัดของการสั่นพ้อง และแทนด้วยสมการ

$$\frac{\omega_{\circ}}{\omega_2 - \omega_1} = Q \tag{8.36}$$

Q เรียกว่าตัวประกอบคุณภาพ ซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในสมการ (8.10)

เนื่องจากที่ความถี่ ω_1 และ ω_2 ซึ่งเป็นความถี่ที่ทำให้กำลังเป็นครึ่งหนึ่งของกำลังสูงสุด ความต้านทานจินตภาพ (reactance) รวมมีค่าเท่ากับค่าความต้านทาน หรือ Z=R ดังนั้นที่ความถี่ที่น้อยกว่า ω_1 ค่าความต้านทานจินตภาพที่เกิดจากตัวเก็บประจุจะมีค่ามากกว่าค่าความต้านทานจินตภาพที่เกิดจากการเหนี่ยวนำ เราจึงได้

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \qquad (8.37)$$

ทำนองเดียวกัน ที่ความถี่ที่มากกว่า ω_2 ค่าความต้านทานจินตภาพที่เกิดจากการเหนี่ยวนำจะมีค่ามากกว่าที่เกิดจากตัวเก็บประจุ หรือ

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R \qquad (8.38)$$

เมื่อคูณสมการ (8.37) ด้วย $1/\omega_2$ และคูณสมการ (8.38) ด้วย $1/\omega_1$ แล้วนำมาบวกกันจะได้

$$L\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + \left(\frac{1}{\omega_1 \omega_2 C} - \frac{1}{\omega_1 \omega_2 C}\right) = \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) R$$

$$L\left(\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega_2}\right) = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2}\right) R$$

หรือ $$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

แทนค่า $\omega_2 - \omega_1$ ลงในสมการ (8.36) จะได้

$$Q = \frac{\omega_o L}{R}$$

และเนื่องจาก $\omega_{\circ} = 1/\sqrt{LC}$ ดังนั้น

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{8.39}$$

นอกจากนี้ Q อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$Q = \frac{nI_{o}L}{RI_{o}} = \frac{\text{แรงดัน ตกคร่อม L}}{\text{แรงดัน ตกคร่อม R}} \tag{8.40}$$

และจากความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\omega_{\circ} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad L = \frac{1}{C\omega_{\circ}^{2}}$$

$$\therefore Q = \frac{\omega_{\circ}L}{R} = \frac{1}{RC\omega_{\circ}}$$

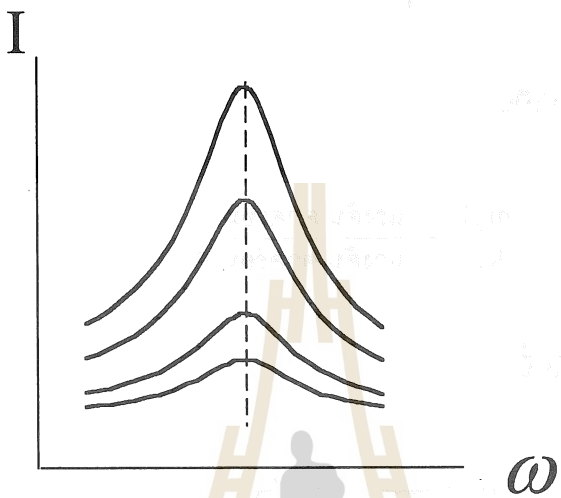
หรือ

$$Q = \frac{1}{RC\omega_{\circ}}\frac{I_{\circ}}{I_{\circ}} = \frac{I_{\circ}/\omega_{\circ}C}{I_{\circ}R}$$

$$= \frac{\text{แรงดัน ตกคร่อม C}}{\text{แรงดัน ที่ป้อนเข้าสู่วงจร}} \tag{8.41}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

กราฟของ I ที่เป็นฟังก์ชันของ ω แสดงในรูป 8.8



รูป 8.8 แสดงกราฟของ $I(\omega)$ ที่ค่า Q ต่างๆ

จากรูปจะเห็นได้ว่า เมื่อ Q เพิ่มขึ้น เส้นโค้งของกราฟจะมีความชัดยิ่งขึ้น ซึ่งหมายความว่าความคมชัดของการสั่นพ้องเพิ่มขึ้น ความจริงแล้วสมการ (8.36) เป็นการให้นิยามค่า Q ในตอนเริ่มต้น แล้วใช้กับตัวสั่นพ้อง (resonator) อื่นๆ ส่วนสมการ (8.41) เป็นนิยามของ Q ที่ใช้ได้กับบางกรณีเท่านั้น Q เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญมากและใช้อธิบายปรากฏการณ์การสั่นพ้อง สมการ (8.36) และ (8.41) ใช้ได้เมื่อ Q มีค่ามากๆ เท่านั้น ซึ่งเป็นกรณีที่เกิดขึ้นเสมอ ตัวอย่างเช่น ในวงจรไฟกระแสสลับทั่วไป จะอยู่ระหว่าง 30-300 ในช่วงคลื่นไมโครเวฟจะมีค่ามากกว่า 10,000 และในสเปกตรัมแสง (optical spectrum) มีค่าประมาณ 1 ล้าน

8.8 ตัวอย่างการคำนวณเกี่ยวกับการแกว่งกวัดแบบบังคับ

ตัวอย่าง 8.5 มวล 1 กิโลกรัมห้อยแขวนไว้กับสปริงซึ่งมีค่าคงตัว สปริงเท่ากับ $1x10^3$ นิวตัน/เมตร และสัมประสิทธิ์การหน่วงเท่ากับ 0.05 นิวตัน-วินาที/เมตร สปริงขับเคลื่อนด้วยแรงภายนอก $F = F_o \sin \omega t$ โดยที่ $F_o = 25$ นิวตัน และความถี่ ω มีค่าเป็น 2 เท่าของความถี่ตามธรรมชาติของระบบ จงหาแอมพลิจูดของการแกว่งกวัด และเฟสที่แตกต่างกันระหว่างการกระจัดและแรงภายนอกนั้น

วิธีทำ

แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดหาได้จากสมการ (8.17) คือ

$$A = \frac{F_o / m}{\left[\left(\frac{2}{\omega_o} - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

ในที่นี้ $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^3}{1} = 10^3$ และ $\omega = 2\omega_0$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} = \frac{0.05}{1} = \frac{1}{20}$$

ดังนั้น

$$A = \frac{25}{\left[\left(\omega_o^2 - 4\omega_o^2\right)^2 + \frac{4\omega_o^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

$$= 8.33 \times 10^{-4} \text{ เมตร}$$

และเฟสที่แตกต่างกันระหว่างการกระจัดและแรงภายนอก หาได้จากสมการ (8.16) คือ

$$\tan\theta = \frac{\omega/\tau}{\omega_o^2 - \omega^2} = \frac{2\omega_o/\tau}{\omega_o^2 - 4\omega_o^2} = -\frac{2}{3\tau\omega_o} = \frac{1}{300\sqrt{10}}$$

หรือ

$$\theta = -\left(\pi - \tan^{-1} 1.05\text{x}10^{-3}\right) \qquad \text{เรเดียน}$$

ตัวอย่าง 8.6 แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบบังคับกำหนดโดย

$$A = \frac{f}{\left[\left(\omega_\circ^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{1/2}}$$

ถ้า $\omega_\circ\tau = 50$ จงหาค่าของ $\frac{A}{A_{max}}$ เมื่อ $\frac{\omega}{\omega_\circ} = 0.99, 0.98$ และ 0.97

วิธีทำ

แอมพลิจูดมีค่าสูงสุดเมื่อมีการสั่นพ้อง นั่นคือมีค่าสูงสุดที่ $\omega = \omega_\circ$

ดังนั้น $$A_{max} = \frac{f}{\frac{\omega_\circ}{\tau}} = \frac{50f}{\omega_\circ^2}$$

สมการข้างต้นอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$A = \frac{f}{\omega_\circ^2\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right)^2 + \frac{1}{50^2}\frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{50f}{\omega_\circ^2\left[2500\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_\circ^2}\right]^{1/2}}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(a) ถ้า $\frac{\omega}{\omega_\circ} = 0.99$ ดังนั้น

$$A = \frac{50f}{\omega_\circ^2\left[2500\left\{-(0.99)^2\right\}^2 + (0.99)^2\right]^{1/2}} = \frac{50f}{1.4\omega_\circ^2}$$

$$= \frac{A_{max}}{1.4}$$

หรือ $$\frac{A}{A_{max}} = \frac{1}{1.4} = 0.71$$

(b) ถ้า $\frac{\omega}{\omega_\circ} = 0.98$ ดังนั้น

$$A = \frac{50f}{2.2\omega_\circ^2} = \frac{A_{max}}{2.2}$$

หรือ $$\frac{A}{A_{max}} = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

(c) ถ้า $\frac{\omega}{\omega_\circ} = 0.97$ ดังนั้น

$$A = \frac{50f}{3.15\omega_\circ^2} = \frac{A_{max}}{3.15}$$

หรือ $$\frac{A}{A_{max}} = \frac{1}{3.15} = 0.32$$

ตัวอย่าง 8.7 จากการทดลองพบว่าความถี่ของแรงขับเคลื่อนซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่แอมพลิจูดมีค่าคงตัว ถ้าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดแบบบังคับเพิ่มขึ้นจาก 0.010 มิลลิเมตร ที่ความถี่ต่ำมาก ๆ ไปสู่ค่าสูงสุดเป็น 5.0 มิลลิเมตร เมื่อความถี่เป็น 200 รอบ/วินาที

จงหา (a) เวลาของการผ่อนคลาย τ

(b) ตัวประกอบคุณภาพ Q ของระบบ และ

(c) ครึ่งหนึ่งของความกว้างของเส้นโค้งการสั่นพ้อง ที่มีกำลังเป็นครึ่งหนึ่งของกำลังสูงสุด

วิธีทำ

เมื่อแรงขับเคลื่อนมีความถี่ต่ำ แอมพลิจูดของการแกว่งกวัดพอจะประมาณได้เป็น

$$A = \frac{f_o}{\omega_o^2}$$

และความถี่ของการสั่นพ้องคือ $A_r = \frac{f_o \tau}{\omega_o}$ โดยที่ ω_o คือความถี่ตามธรรมชาติของระบบ

ดังนั้น $$\frac{A_r}{A} = \omega_o \tau$$

หรือ $$\tau = \frac{A_r}{A\omega_o}$$

ในที่นี้ $A_r = 5$ mm และ $A = 0.01$ mm

และ $$\omega_o = 2\pi \text{ x } 200 \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

ดังนั้น (a) $$\tau = \frac{5}{0.01 \text{ x } 2 \text{ x } 3.14 \text{ x } 200} = 0.40 \quad \text{วินาที}$$

(b) $$Q = \omega_o \tau = 2\pi \text{ x } 200 \text{ x } 0.4 = 500$$

(c) ครึ่งหนึ่งของความกว้างที่การสั่นพ้อง

$$= \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{2x0.40}$$

$$= 1.25 \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

$$= 0.2 \quad \text{รอบ/วินาที}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 8.8 วงจรไฟฟ้าประกอบด้วยขดลวดเหนี่ยวนำขนาด 10 มิลลิเฮนรี ตัวเก็บประจุ 1 ไมโครฟารัด และลวดต้านทาน 10 โอห์ม ตัวอย่างอนุกรมซึ่งกันและกัน โดยมีแรงดันไฟฟ้าในวงจรเท่ากับ 100 โวลต์ จงคำนวณหา

(a) ความถี่ที่ทำให้วงจรไฟฟ้ามีการสั่นพ้องกับกระแสด้วยความถี่เดียวกัน

(b) กระแสที่กำลังมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของกำลังที่เกิดการสั่นพ้อง

(c) ตัวประกอบคุณภาพหรือค่า Q ขณะเกิดการสั่นพ้อง

วิธีทำ

(a) ความถี่ของการสั่นพ้อง $= \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(10x10^{-3}\right)\left(10^{-6}\right)}}$$

$$= 10^4 \quad \text{เรเดียน/วินาที}$$

$$= \frac{10^4}{2\pi} \quad \text{รอบ/วินาที}$$

$$= 1592 \quad \text{รอบ/วินาที}$$

(b) กระแสขณะเกิดการสั่นพ้อง $= I_o = \frac{E}{R}$

$$= \frac{100}{10} = 10A$$

ดังนั้น กระแสที่กำลังมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของกระแส I_o คือ $\frac{I_o}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07A$$

(ค) ค่า Q ของวงจร $= \frac{\omega_o L}{R} = \frac{10^4 x\left(10x10^{-3}\right)}{10}$

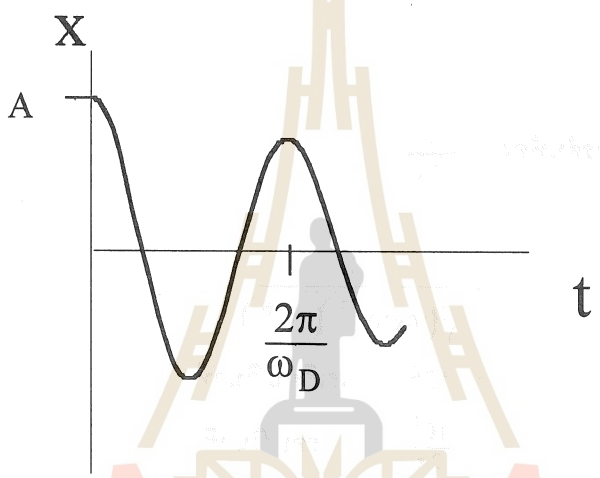
$$= 10$$

แบบฝึกหัดที่ 8

1. ผลเฉลี่ยของการหน่วงขาด คือ

$$x = ae^{-t/2\tau}\cos\left(\omega_D t + \phi\right)$$

ตัวแกว่งกวัดเริ่มต้นที่เวลา t = 0 เมื่อ $x_0 = A$



จงหาอัตราส่วนของการกระจัดที่เวลา $t = t_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$ และที่เวลา t=0

(ตอบ : 0.64)

2. ถ้าสมการการเคลื่อนที่ของการแกว่งกวัดแบบหน่วงคือ

$$5\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 40x = 0$$

เมื่อเวลา t=0, x=20 และ $\frac{dx}{dt} = 0$ จงหา

(a) ตำแหน่งของตัวแกว่งกวัดที่เวลาใด ๆ

(b) แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการแกว่งกวัดที่เวลาใด ๆ

(c) จงเขียนกราฟของการเคลื่อนที่

(ตอบ : (a) $x = 20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \pi/4)$; (b) $20\sqrt{2}\ e^{-2t}$, π วินาที, $1/\pi$ รอบต่อวินาที)

3. จากข้อ 2. จงหาความถี่และคาบของการแกว่งกวัดเมื่อไม่มีการหน่วง
(ตอบ : $\sqrt{2}/\pi$, $\pi/\sqrt{2}$)

4. จากข้อ 2. จงกำหนดเงื่อนไขของค่าคงตัวการหน่วง ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบ (a) หน่วงเกิน (b) หน่วงขาด และ (c) หน่วงวิกฤต
(ตอบ : (a) $b > 20\sqrt{2}$ (b) $b < 20\sqrt{2}$ (c) $b = 20\sqrt{2}$)

5. มวล 10^{-2} กิโลกรัมถูกดึงกลับด้วยแรงขนาด 10^{-2} นิวตันต่อเมตร และแรงเสียดทาน 0.2×10^{-2} นิวตัน-วินาที/เมตร จงหา
(a) ค่าของแรงเสียดทานที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบหน่วงวิกฤต
(b) การเคลื่อนที่แบบเป็นคาบหรือมีการแกว่งกวัดแบบหน่วง
(c) ค่าของมวลที่ทำให้แรงขนาดเท่าเดิมก่อให้เกิดการหน่วงแบบวิกฤต
(ตอบ : (a) 2×10^{-2} นิวตัน-วินาที/เมตร ,(b) แกว่งกวัดแบบหน่วง ,(c) 1.0×10^{-3} kg)

6. ลูกตุ้มเชิงเดียวแกว่งกวัดด้วยคาบ 1 วินาที และแอมพลิจูด 5 องศา หลังจากแกว่งกวัดครบ 10 รอบ แอมพลิจูดจะลดลงเหลือ 2.5 องศา จงหาเวลาของการผ่อนคลาย
(ตอบ : 7.2 วินาที)

7. ตำแหน่งของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ในแนวแกน x กำหนดโดยสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 20\cos 2t$$

ถ้าอนุภาคเริ่มต้นจากการหยุดนิ่งที่ x=0 จงหา
(a) x ที่เป็นฟังก์ชันของ t
(b) แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการแกว่งกวัดเมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง
(c) ความถี่ธรรมชาติของสปริงเมื่อมีมวลแขวนอยู่ด้วย
(d) ความถี่ของแรงภายนอกที่ขับเคลื่อนให้เกิดการแกว่งกวัด

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(ตอบ : (a) $x = \cos 2t + 2\sin 2t - e^{-2t}(\cos 2t + 3\sin 2t)$

(b) แอมพลิจูด=$\sqrt{5}$, คาบ =π , ความถี่ =$1/\pi$

(c) $\sqrt{2}/\pi$

(d) $1/\pi$)

8. แรงเคลื่อนไฟฟ้า 110 โวลต์ และ 25 เฮิรตซ์ ขับเคลื่อนให้วงจรซึ่งประกอบด้วยความต้านทาน 200 โอห์ม ต่ออนุกรมกับขดลวดเหนี่ยวนำซึ่งมีความต้านทานจินตภาพ 100 โอห์มและความต้านทาน 40 โอห์ม แล้วต่ออนุกรมกับตัวเก็บประจุขนาด 25 ไมโครฟารัด จงคำนวณหา

(a) ความต้านทานเชิงซ้อนของวงจร

(b) กระแสที่ไหลในวงจร และ

(c) มุมเฟส ซึ่งกระแสเคลื่อนที่ตามหลังแรงเคลื่อนไฟฟ้า

(ตอบ : (a)$Z = 285.5$ โอห์ม ,(b) I=0.385 แอมแปร์,(c) $\phi = \tan^{-1}(0.6446) = 32°48'$)

9. ถ้าสมการการเคลื่อนที่ของก้อนวัตถุที่แขวนห้อยกับลวดสปริงแล้วแกว่งกวัดแบบบังคับคือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8\sin\omega t$$

โดยที่ x คือการกระจัดจากตำแหน่งสมดุล และ $\omega > 0$ เป็นค่าคงตัว ถ้าเงื่อนไขเบื้องต้น คือ t=0, x=0 และ $\frac{dx}{dt} = 0$ จงหา

(a) x ที่เป็นฟังก์ชันของ t

(b) คาบของแรงภายนอกที่ทำให้เกิดการสั่นพ้อง

(ตอบ : (a) $x = (8\sin\omega t - 4\omega\sin 2t)/(4 - \omega^2)$ ถ้า $\omega \neq 2$

$x = \sin 2t - 2t\cos 2t$ ถ้า $\omega = 2$

(b) $\omega = 2$ หรือ คาบ = π)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 9 คุณสมบัติทั่วไปของคลื่น

เค้าโครงเรื่อง

9.1 คลื่นและชนิดของคลื่น
9.2 ความยืดหยุ่น
9.3 สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น
9.4 อัตราเร็วของคลื่นกล
9.5 กำลังและความเข้มของคลื่น
9.6 ตัวอย่างเกี่ยวกับคุณสมบัติทั่วไปของคลื่น
9.7 หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น
9.8 คลื่นนิ่ง
9.9 การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งบัพและปฏิบัพ
9.10 การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง
9.11 คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ
9.12 คลื่นนิ่งและการทำให้เป็นควอนตัมในอะตอม
9.13 ตัวอย่างเกี่ยวกับการแทรกสอดและคลื่นนิ่ง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

9.1 คลื่นและชนิดของคลื่น

เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็น 2 ประเภทตามลักษณะของการแผ่ (propagation) ของคลื่น คือ คลื่นกล (mechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยอาศัยตัวกลางที่ยืดหยุ่น (elastic media) เช่น คลื่นเสียง คลื่นในลวดสปริง คลื่นน้ำ คลื่นในเส้นเชือกที่มีการแกว่ง เป็นต้น และคลื่นที่ไม่ใช่คลื่นกล (nonmechanical waves) ซึ่งเป็นคลื่นที่แผ่ออกไปได้โดยไม่ต้องอาศัยตัวกลาง หรือผ่านสุญญากาศไปได้ เช่น คลื่นแสง คลื่นวิทยุ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic wave) เป็นต้น

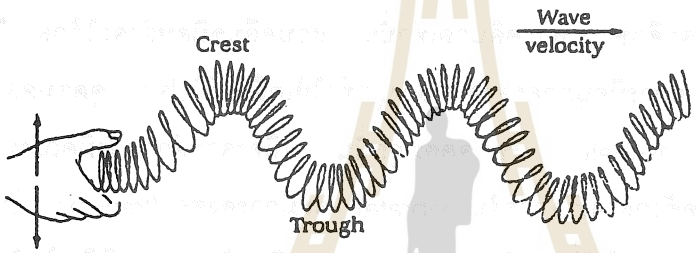
ในบทนี้เราจะศึกษาเฉพาะคลื่นกลเท่านั้น ส่วนคลื่นชนิดหลังจะได้กล่าวในบทต่อไป คลื่นชนิดแรกเกิดจากการที่อนุภาคของตัวกลางถูกทำให้เคลื่อนที่ไปจาก จุดสมดุล และเกิดจากการแกว่งกวัด (oscillate) รอบจุดสมดุลนั้น เนื่องจากตัวกลางมีคุณสมบัติของการยืดหยุ่น ฉะนั้นเมื่อตัวกลางเกิดการสั่น (vibrate) จะมีการส่งต่อ (transmit) ไปยังอนุภาคต่อๆ ไป และอนุภาคต่อๆ ไปนั้นจะสั่นรอบจุดสมดุลเช่นเดียวกับอนุภาคที่เริ่มต้นสั่นด้วย ทำให้เกิดคลื่น หรือการรบกวน (disturbance) แผ่ออกไป โดยที่อนุภาคของตัวกลางไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย เช่น เมื่อโยนก้อนหินลงในสระที่มีน้ำนิ่ง เราจะสังเกตเห็นคลื่นแผ่ออกไปจากจุดที่ก้อนหินกระทบน้ำ และวัตถุเล็กๆ ที่ลอยอยู่บนผิวน้ำจะสั่นขึ้นลงแต่ยังคงอยู่ในตำแหน่งเดิม นั่นคืออนุภาคของตัวกลาง (ในที่นี้คือน้ำ) ไม่ได้เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วย

อัตราเร็วของคลื่นขึ้นอยู่กับความยืดหยุ่นและความเฉื่อย (inertia) ของตัวกลาง ความยืดหยุ่นทำให้เกิดแรงดึงกลับ ของอนุภาคของตัวกลางสู่ตำแหน่งสมดุล ส่วนความเฉื่อยจะสัมพันธ์กับแรงดึงกลับนี้ ดังนั้น ทั้งความยืดหยุ่นและความเฉื่อยจะเป็นตัวกำหนดอัตราเร็วของคลื่น

นอกจากนี้ การที่วัตถุสั่นขึ้นลงได้นั้น แสดงว่า จะต้องได้รับพลังงานจากคลื่น ดังนั้น การเคลื่อนที่ของคลื่นจะส่งผ่าน (transfer) หรือแผ่พลังงานโมเมนตัมด้วย

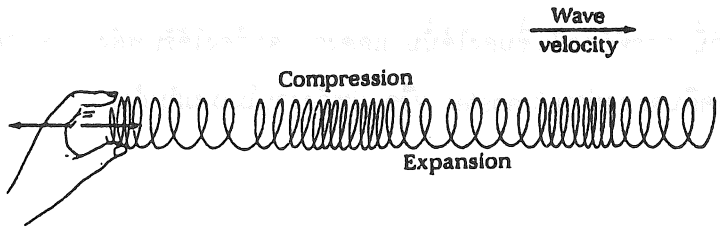
โดยทั่วไปคลื่นแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ตามลักษณะการสั่นของตัวกลาง และทิศทาง ของการแผ่ของคลื่น คือ

1. คลื่นตามขวาง (transverse waves) เป็นคลื่นที่ส่งผ่านตัวกลาง แล้วทำให้อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น คลื่นในเส้นเชือกขึงตึง เป็นต้น ถ้าเรากระตุกปลายเชือกขึ้นและลงแต่ละครั้ง เราจะเห็นพัลส์ของคลื่น (wave pulse) เคลื่อนที่ไปในเชือกด้วยอัตราเร็วคงตัว หรือคลื่นที่เกิดในลวดสปริง ซึ่งเรากระตุกปลายเชือกขึ้นลง ดังรูป 9.1



รูป 9.1 แสดงคลื่นตามขวางในลวดสปริง

2. คลื่นตามยาว (longitudinal waves) อนุภาคตัวกลางจะสั่นในแนวเดียวกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เช่น ถ้าเราอัดลวดสปริงหนึ่งครั้ง เราจะเห็นส่วนอัด (comperession) เคลื่อนที่ไปในสปริง อนุภาคของลวดสปริงสั่นตามแนวเดียวกับทิศที่ส่วนอัดหรือคลื่นเคลื่อนที่ไป ดังรูป 9.2 และในขณะที่เกิดส่วนอัดก็จะเกิดส่วนขยาย (rarefaction) สลับกันไป



รูป 9.2 แสดงคลื่นตามยาวในลวดสปริง

คลื่นที่เกิดจากการโยนก้อนหินลงในสระน้ำนิ่งถือเป็นคลื่นตามขวาง เพราะอนุภาคน้ำสั่นขึ้นลงเมื่อคลื่นมาถึง ซึ่งดูได้จากวัตถุเล็กๆ ลอยที่ผิวน้ำ ส่วนคลื่นในทะเลเป็นคลื่นตามขวาง และคลื่นตามยาว ทั้งนี้เพราะ อนุภาคน้ำจะเคลื่อนที่ขึ้นลงและไปกลับ ซึ่งรวมแล้วจะเคลื่อนที่เป็นวงรี (elliptical path) เมื่อคลื่นน้ำผ่านไป สำหรับคลื่นเสียงในอากาศเป็นคลื่นตามยาว

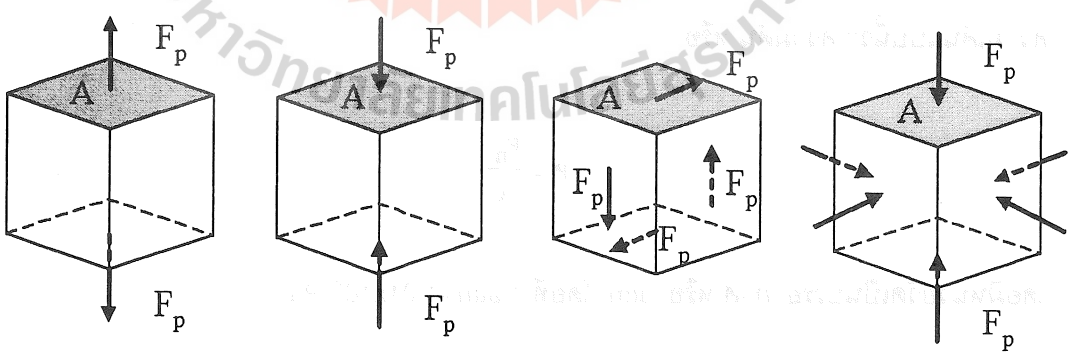
นอกจากนี้เราอาจแบ่งคลื่นออกเป็นคลื่นหนึ่งมิติ เช่นคลื่นในเชือกขึงตึง คลื่นสองมิติ เช่นคลื่นน้ำ และคลื่นสามมิติ เช่นคลื่นเสียง เป็นต้น

เนื่องจากอัตราเร็วของคลื่นขึ้นอยู่กับสมบัติความยืดหยุ่นและความเฉื่อยของตัวกลาง ดังนั้นจึงควรทราบเกี่ยวกับความยืดหยุ่นสักเล็กน้อย

9.2 ความยืดหยุ่น

เมื่อเราออกแรงกระทำต่อวัตถุ ขนาดและรูปร่างของวัตถุจะเปลี่ยนไป หรือวัตถุจะผิดรูปไปจากเดิม โดยขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของแรงที่กระทำ เราจึงนิยามปริมาณที่เรียกว่าความเค้น (stress) แทนด้วย σ เป็นขนาดของแรงหารด้วยพื้นที่ที่แรงกระทำ

สมมติวัตถุมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมดังรูป 9.3



ความเค้นแบบดึง	ความเค้นแบบอัด	ความเค้นเฉือน	ความดัน
$\sigma_t = \frac{F_n}{A}$	$\sigma_t = \frac{F_n}{A}$	$\sigma_s = \frac{F_p}{A}$	$P = \frac{F_n}{A}$
(ก)	(ข)	(ค)	(ง)

รูป 9.3 แสดงความเค้นแบบต่างๆ อันเนื่องจากทิศทางของแรง

เมื่อมีแรงขนาดเท่ากัน คือ F_n กระทำตั้งฉากกับปผิวที่อยู่ตรงข้ามกัน ถ้าทิศทางของแรงพุ่งออกจากผิว เราเรียก ความเค้นแบบดึง (tensile stress) ดังรูป (ก) แต่ถ้าทิศทางของแรงพุ่งเข้าหาพื้นที่ผิว ดังรูป (ข) เราเรียก ความเค้นแบบอัด (compressive stress) ทั้งสองกรณีจะแทนด้วย

$$\sigma_t = \frac{F_n}{A} \qquad (9.1)$$

โดยที่ A คือพื้นที่ผิวซึ่งแรง F_n กระทำตั้งฉาก หน่วยของความเค้นคือ นิวตัน/เมตร^2 หรือ N/m^2 ซึ่งอาจเรียกเป็น พาสคัล (pascal,Pa) ในระบบของอังกฤษเดิมคือ ปอนด์/ตารางนิ้ว แทนด้วย lb/in^2 หรือ psi โดยที่ 1lb/ in^2 = 6.9 kPa

ถ้าแรงที่กระทำต่อวัตถุมีทิศขนานกับพื้นที่ผิว อย่างน้อยที่สุดต้องมี 4 แรงเพื่อให้วัตถุอยู่ในสถานะสมดุล ดังรูป (ค) เราเรียก ความเค้นเฉือน (shear stress) แทนด้วย

$$\sigma_s = \frac{F_p}{A} \qquad (9.2)$$

โดยที่ Fp เป็นแรงที่ขนานกับพื้นที่ผิว

ถ้าแรงขนาดเท่ากันนี้กระทำตั้งฉากและพุ่งเข้าหาพื้นที่ผิวทุกผิวของวัตถุ เราเรียกความเค้นแบบนี้ว่า ความดัน หรือ

$$P = \frac{F_n}{A}$$

โดยมีหน่วยวัดเป็นบรรยากาศ หรือ atm โดยที่ 1 atm=1.01x10^5 Pa

เมื่อมีความเค้นเกิดขึ้นกับวัตถุ วัตถุจะผิดรูปไปจากเดิม ถ้าเป็นผลจากความเค้นแบบดึง ความยาวเดิม ℓ จะยืดออกเป็นระยะ $\Delta\ell$ เราเรียก ความเครียดแบบดึง (tensile strain, εt) ซึ่งให้นิยามว่า

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

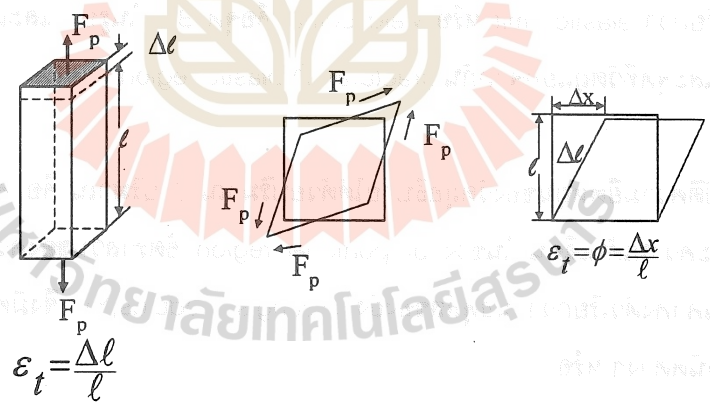
$$\varepsilon_t = \frac{\Delta \ell}{\ell} \qquad (9.3)$$

เนื่องจากความเครียดเป็นอัตราส่วนของความยาว ดังนั้นจึงไม่มีหน่วย และในทำนองเดียวกัน ความเครียดแบบอัด (compressive strain) คืออัตราส่วนของความยาวที่หดสั้นเข้ามาต่อความยาวเดิม

ผลของความเค้นเฉือน ทำให้เกิดความเครียดเฉือน (shear strain, $\in s$) และให้นิยามว่า

$$\varepsilon_s = \phi \approx \frac{\Delta x}{\ell} \qquad (9.4)$$

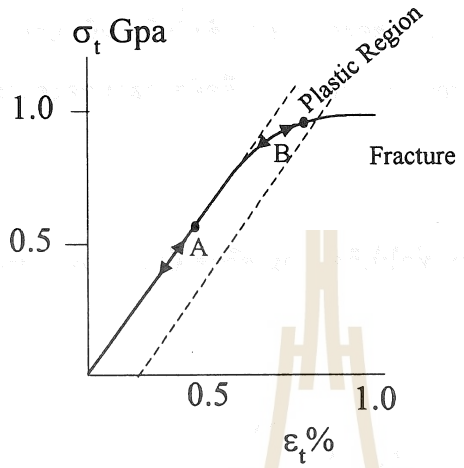
โดยที่ Δx คือการกระจัดของขอบเทียบกับตำแหน่งในแนวดิ่ง ดังแสดงในรูป 9.4 (ค) ความเครียดเฉือนเป็นปริมาณที่ไม่มีหน่วยเช่นเดียวกัน



รูป 9.4 แสดงความเครียดที่เกิดจากผลของความเค้นแบบต่างๆ

เนื่องจากความเครียดเป็นผลจากความเค้น ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทั้งสองสามารถหาได้จากผลการทดลอง รูป 9.5 แสดงขนาดของความเครียดที่เป็นฟังก์ชันของความเค้นของทองแดง จะเห็นได้ว่าเมื่อความเครียดน้อยกว่า 0.5 เปอร์เซนต์ ความเครียดจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเค้น ซึ่งเรียกว่า กฎของฮุก เมื่อความเครียดมากขึ้นผลจากการทดลองพบ

ว่าความเครียดไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเค้น ค่าของความเค้นซึ่งความสัมพันธ์ยังคงเป็นสัดส่วนโดยตรง เรียกว่า proportional limit แทนด้วยจุด A ในรูป



รูป 9.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของลวดทองแดง

เมื่อความเค้นมีค่าค่อนข้างมาก วัตถุจะเริ่มผิดรูปไปอย่างถาวร ค่าของความเค้นในกรณีเช่นนี้ เรียกว่า elastic limit หรือ yield point คือจุด B ในรูป และเรียกช่วงระหว่าง yield point และจุดที่วัตถุแยกจากกัน (fracture) ว่า plastic region

สมบัติความยืดหยุ่นของวัตถุอธิบายได้ด้วยปริมาณ 2 ปริมาณ คือ ความเค้นแบบดึงหรืออัด และความเค้นเฉือน ในช่วง proportional region อัตราส่วนของความเค้นต่อความเครียดจะเป็นค่าคงตัวเรียกว่า มอดุลัสของยัง (Young's modulus,Y) ซึ่งมีค่าแตกต่างกันไปสำหรับวัตถุชนิดต่างๆ หรือ

$$Y = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_t} = \frac{F_n / A}{\Delta \ell / \ell} \qquad (9.5)$$

มอดุลัสของยังมีหน่วยเช่นเดียวกับความเค้นคือ Pa

มอดุลัสเฉือน (shear modulus,S) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนและความเครียดเฉือน หรือ

$$S = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_s} = \frac{F_p / A}{\Delta x / \ell} \qquad (9.6)$$

มอดุลัสเฉือนมีหน่วยเช่นเดียวกับมอดุลัสของยัง คือ Pa

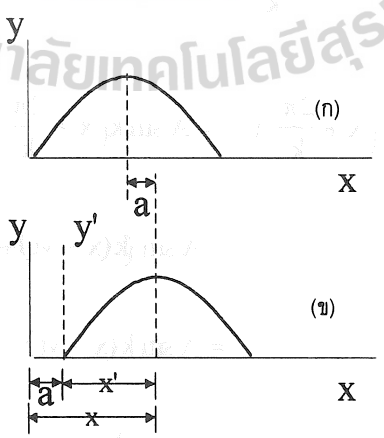
มอดุลัสเชิงปริมาตร (bulk modulus) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของวัตถุที่เปลี่ยนไปและความดันที่เปลี่ยนแปลง หรือ

$$B = -V\frac{dp}{dv} \approx -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} \qquad (9.7)$$

และเป็นตัววัดความดันที่ต้องการอัดปริมาตรของวัตถุให้ลดน้อยลง

9.3 สมการการเคลื่อนที่ของคลื่น

ให้ y = f(x) ที่เวลา t = o เป็นฟังก์ชัน มีรูปร่างดังรูปที่ 1.6 (ก) เมื่อเวลาผ่านไป t = t ตำแหน่งต่างๆ ของฟังก์ชันเปลี่ยนไปเป็นระยะ a โดยที่รูปร่างของฟังก์ชันยังเหมือนเดิม ดังแสดงในรูป 9.6 (ข)



รูป 9.6 แสดงการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน y = f(x) โดยไม่เปลี่ยนรูปร่าง

สมมติให้ O เลื่อนไปอยู่ที่ O' หลังการย้ายตำแหน่งของฟังก์ชัน เนื่องจากรูปร่างของฟังก์ชันไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป t = t ฟังก์ชันเขียนได้เป็น y = f(x') และจากรูป 9.6 (ข) จะเห็นว่า x' = x-a เราจึงสรุปได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป t = t ฟังก์ชัน y = f(x-a) จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ a ไปทางขวามือ และในทางตรงกันข้าม ฟังก์ชัน y = f(x+a) จะแทนการเคลื่อนที่เป็นระยะ a ไปทางซ้ายมือ

ถ้าให้ a = vt โดยที่ t คือเวลาที่ผ่านไป และ v คืออัตราเร็วของการเคลื่อนที่ เราจะได้ฟังก์ชัน y = f(x ± vt) เรียกว่าเป็นฟังก์ชันที่แสดงการเคลื่อนที่ของคลื่นซึ่งมีรูปแบบคงเดิมตลอดเวลา

ฟังก์ชัน y(x, t) ที่น่าสนใจ คือฟังก์ชันของคลื่นฮาร์มอนิก (harmonic wave) ที่เป็นรูปไซน์ (sinusoidal waves) ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$y(x, t) = A\sin k(x-vt) \qquad (9.8)$$

โดยที่ A คือค่ามากที่สุดของ y เรียกแอมพลิจูดของคลื่น v คืออัตราเร็วของคลื่น ส่วนค่า k มีความเกี่ยวข้องกับรูปแบบของคลื่นและการเคลื่อนที่ของคลื่นดังนี้ ถ้าให้ x เปลี่ยน ไปเป็นระยะทาง $2\pi/k$ พบว่าคลื่นยังคงมีส่วนโค้งเหมือนที่ตำแหน่ง x นั่นคือ y(x, t) จะมีค่าเหมือนเดิมเมื่อเปลี่ยนเป็น $y\left(x+\frac{2\pi}{k}, t\right)$ หรือ

$$y\left(x+\frac{2\pi}{k}, t\right) = A\sin k\left(x+\frac{2\pi}{k}-vt\right)$$

$$= A\sin\{k(x-vt)+2\pi\}$$

$$= A\sin k(x-vt)$$

$$= y(x, t)$$

ถ้าให้ $\lambda = 2\pi/k$ จะได้ว่า λ เป็นช่วงของระยะทางที่ส่วนโค้งมีลักษณะซ้ำๆ กันจึงเรียกระยะนี้ว่าความยาวคลื่น (wavelength) ส่วนค่า $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ คือจำนวนคลื่นในระยะทาง 2π เรียกเลขคลื่น (wave number)

ดังนั้น $y = A \sin k(x \pm vt) = A \sin 2\frac{\pi}{\lambda}(x \pm vt)$ เป็นสมการของคลื่นฮาร์มอนิก ซึ่งมีความยาวคลื่น λ เคลื่อนที่ไปในทิศ -x หรือ +x ด้วยอัตราเร็ว v คงตัวเรียก v ว่าความเร็วเฟส (phase velocity) ของคลื่น

สมการ (9.8) อาจเขียนใหม่เป็น

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \qquad (9.9)$$

โดยที่ $\omega = kv = 2\pi\frac{v}{\lambda}$ เรียกความถี่เชิงมุม (angular frequency) ของคลื่น

ความหมายของ ω อาจพิจารณาได้ดังนี้ ถ้าแทน t ด้วย $t + \frac{2\pi}{\omega}$ ลงใน (9.9) จะได้ว่า

$$y = (x, t) = A \sin\left\{kx - \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right\}$$

$$= A \sin\{(kx - \omega t) - 2\pi\}$$

$$= A \sin(kx - \omega t)$$

นั่นคือ ฟังก์ชันจะซ้ำกันทุกๆ เวลาที่เพิ่มขึ้น $\frac{2\pi}{\omega}$ เรียกเวลานี้ว่า คาบของการสั่น $T = \frac{2\pi}{\omega}$ และ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ โดยที่ $f = \frac{1}{T}$ คือความถี่ของคลื่น หมายถึง จำนวนคลื่นที่ผ่านตำแหน่งใดๆ ในเวลา 1 วินาที

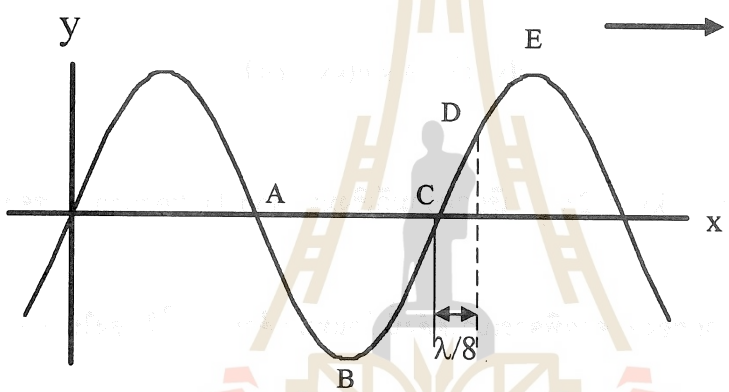
จาก $\omega = kv = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi f$ โดยที่ $f = \frac{v}{\lambda}$ หรือ $v = \lambda f$ ฉะนั้นเราอาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้ดังนี้

$$y = A \sin k(x \pm vt)$$

หรือ $$y = A\sin(kx \pm \omega t)$$

หรือ $$y = A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$$

จะเห็นได้ว่า นอกจากความยาวคลื่นที่แสดงถึงช่วงระยะทางที่คลื่นมีรูปแบบซ้ำกัน แล้วคาบของการสั่น ยังแสดงความซ้ำกันของคลื่นเมื่อเวลาผ่านไป 1 คาบอีกด้วยซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความยาวคลื่นกับคาบของการสั่นคือ $\lambda = \frac{v}{f} = vT$



รูป 9.7 แสดงการซ้ำกันของคลื่น ทั้งความยาวคลื่นและคาบของการสั่น

ในทางคณิตศาสตร์ การเคลื่อนที่ของคลื่นอาจเขียนกลับกันได้ กล่าวคือ

$$y(x,t) = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

โดยที่เครื่องหมาย ± แสดงถึงการเคลื่อนที่ไปทางด้านที่ x มีค่าเป็น - และ + ตามลำดับ ฉะนั้น สำหรับคลื่นฮาร์มอนิก อาจเขียนฟังก์ชันของคลื่นได้เป็น

$$y(x,t) = A\sin\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = A\sin(\omega t \pm kx)$$

$$= A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= A\sin(\omega t \pm \phi) \qquad (9.10)$$

โดยที่ ϕ คือค่าคงตัวเฟส (phase constant) ของคลื่น ซึ่งขึ้นอยู่กับการเลือกกำหนดเวลาเริ่มต้น เช่นในรูป 9.7 ที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของเวลาจะทำให้คลื่นที่ต่างเวลากันมีเฟสต่างกัน นั่นคือ เมื่อเวลาต่างกัน $\frac{T}{2}$ จะมีเฟสต่างกัน 180 องศา

สมการ (9.10) อาจเขียนในรูปของเอกซ์โพเนนเชียล (exponential) ได้ดังนี้

$$y = Ae^{i2\pi f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)}$$

$$= Ae^{i\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right)} \qquad (9.11)$$

ถ้า μ คือ ดรรชนีหักเห (refractive index) ของตัวกลาง และ

$$\mu = \frac{v_o}{v} \text{ หรือ } v = \frac{v_o}{\mu}$$

โดยที่ v_o และ v เป็นความเร็วของคลื่นในตัวกลางสองชนิดที่ต่างกัน ดังนั้น

$$y = Ae^{i\omega\left(t - \frac{\mu x}{v_o}\right)} \qquad (9.12)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ความเร็ว v ซึ่งเรียกว่า ความเร็วเฟส เป็นความเร็วของคลื่น ส่วนความเร็วของอนุภาคของตัวกลางที่คลื่นอาศัยเป็นตัวผ่านหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของสมการ (9.8) เทียบกับเวลา t หรือ $\frac{dy}{dt}$ นั่นเอง

ความเร็วของอนุภาคแต่ละตัวขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดและความถี่ของคลื่นแต่ความเร็วของคลื่นหรือความเร็วเฟสไม่ขึ้นกับแอมพลิจูด แต่ขึ้นกับคุณสมบัติและสถานะของตัวกลาง สถานะของตัวกลางอาจเป็นความดันของแก๊สหรือความตึงของเส้นลวด ส่วนคุณสมบัติของตัวกลาง คือความหนาแน่นความยืดหยุ่น เป็นต้น

คลื่นที่เกิดขึ้นจริงตามธรรมชาติไม่ได้เป็นคลื่นฮาร์มอนิกอย่างสมบูรณ์ เพราะคลื่นฮาร์มอนิกจะขยายไปจนถึงอนันต์ในแต่ละทิศทางตามแนวแกน x และไม่มีเวลาเริ่มต้นหรือเวลาสิ้นสุด คลื่นที่เกิดขึ้นจริงๆ จะต้องเริ่มต้นและสิ้นสุด ณ ที่หนึ่งหรือที่ใดๆ ในปริภูมิและเวลาหนึ่ง คลื่นที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติเช่นคลื่นเสียงหรือคลื่นแสงอาจพอประมาณได้ว่าเป็นคลื่นฮาร์มอนิก เพราะมันขยายไปในปริภูมิที่มากกว่าความยาวคลื่นของมันเอง และช่วงเวลาที่มันผ่านจุดหนึ่งๆ จะมากกว่าคาบของมันมาก คลื่นดังกล่าวจะเรียกว่าขบวนคลื่น (wave train) คลื่นฮาร์มอนิกถือเป็นคลื่นในจินตนาการของขบวนคลื่น

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นสำหรับคลื่นฮาร์มอนิก เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์เรียกว่า สมการคลื่น (wave equation) ซึ่งหาได้ดังนี้

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลา t ของคลื่นฮาร์มอนิก

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

คือ
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2 k^2 y(x,t)$$

อนุพันธ์อันดับสองเทียบกับ x ของคลื่นฮาร์มอนิกเดิมคือ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = -k^2 y(x,t)$$

เมื่อรวมสมการอนุพันธ์อันดับสองทั้งสองสมการเข้าด้วยกัน จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (9.13)$$

ซึ่งเป็นสมการคลื่น เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกสอดคล้องกับสมการคลื่น (9.13) ดังนั้นคลื่นฮาร์มอนิกจึงเป็นผลเฉลยของสมการคลื่น โดยทั่วไป $y(x,t) = f(x \pm vt)$ ฟังก์ชันคลื่น เป็นผลเฉลี่ยของสมการคลื่น (9.13)

ในกรณีของคลื่นเสียง ซึ่งเป็นคลื่นตามยาว ฟังก์ชันคลื่นแสดงการกระจัดของตัวกลางที่คลื่นผ่าน สำหรับคลื่นแสงซึ่งเป็นคลื่นตามขวางและเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ฟังก์ชันคลื่นแสดงการแกว่งกวัดของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า ดังนั้น โดยทั่วไปเราอาจเขียนสมการคลื่นได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad (9.14)$$

โดยที่ $\Psi(x,t)$ แทนปริมาณทางฟิสิกส์ซึ่งแกว่งกวัดหรือบ่งบอกความเป็นคลื่น ในกรณีของคลื่นบนเส้นเชือก Ψ ให้ค่าการกระจัดในแนวดิ่งของเชือก สำหรับคลื่นเสียงในของเหลว Ψ ให้ค่าการกระจัดในแนวขนานของของเหลว และในกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า Ψ ให้ค่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก

9.4 อัตราเร็วของคลื่นกล

ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่า คลื่นกลเป็นคลื่นที่แผ่กระจายไปโดยอาศัยตัวกลางที่ยืดหยุ่น เช่น คลื่นเสียงซึ่งเป็นคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่อาจเป็นของแข็ง ของเหลว และแก๊ส ช่วงคลื่นที่หูมนุษย์ปกติจะรับฟังได้จะอยู่ระหว่าง 20 - 20,000 Hz คลื่นตามยาวที่มีความถี่น้อยกว่านี้ เรียกว่า คลื่นใต้เสียง (infrasonic waves) และที่มีความถี่มากกว่าช่วงนี้เรียกว่า คลื่นเหนือเสียง (ultrasonic waves)

โดยทั่วไปอัตราเร็วของคลื่นกลในตัวกลางมีรูปแบบเป็น

$$v = \sqrt{\frac{\text{มอดุลัสความยืดหยุ่น}}{\text{ความหนาแน่น}}}$$

ในกรณีของคลื่นตามยาวเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวหรือของแข็ง อัตราเร็วของคลื่นคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (9.16)$$

B คือ มอดุลัสเชิงปริมาตรของตัวกลาง และ ρ คือ ความหนาแน่น คลื่นปฐมภูมิ (primary waves) หรือที่มักเรียกย่อๆ ว่า P-waves ซึ่งเกิดจากแผ่นดินไหวเป็นคลื่นตามยาวที่มีลักษณะดังกล่าวแม้ว่าอัตราเร็วของคลื่น P-wave อาจแตกต่างจากสมการ (9.16) เล็กน้อย คลื่น P-waves เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่สูงกว่าคลื่นที่เกิดจากแผ่นดินไหวอีกชนิดหนึ่ง ดังนั้น สถานีตรวจแผ่นดินไหวจึงรับคลื่นนี้ได้ก่อนคลื่นชนิดอื่นที่ตามมาทีหลัง

อัตราเร็วของคลื่นตามขวางในตัวกลางที่เป็นของแข็ง คือ

$$v = \sqrt{\frac{S}{\rho}} \qquad (9.17)$$

S คือ มอดุลัสเฉือนของของแข็ง คลื่นทุติยภูมิ (secondary waves) หรือที่มักเรียกกันว่า S-waves เป็นคลื่นตามขวางที่เกิดจากแผ่นดินไหว และเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วตามสมการ (9.17) ซึ่งช้ากว่า P-waves

เนื่องจากของเหลวและแก๊สไม่มีความเค้นเฉือนซึ่งแตกต่างจากของแข็ง ดังนั้น คลื่นตามขวางจึงไม่อาจเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของเหลวและแก๊สได้ นอกจากนี้ คลื่นตามขวางเคลื่อนที่ได้ลึกไม่เกิน 2900 กิโลเมตรจากผิวพื้นดิน แสดงว่าแกนในของโลกเป็นของเหลวที่ความลึกมากกว่านี้ อย่างไรก็ตามคลื่นแผ่นดินไหวยังแสดงให้เห็นว่าแกนใจกลางของโลกที่ความลึกประมาณ 5100 กิโลเมตร เป็นของแข็ง คลื่นแผ่นดินไหวชนิดที่ 3 เรียกว่า คลื่นยาว (long waves) หรือ L-waves ซึ่งเคลื่อนที่บนพื้นผิวด้วยอัตราเร็วที่น้อยกว่า S-waves

เพียงเล็กน้อย คลื่นยาวมีลักษณะคล้ายคลื่นน้ำเป็นได้ทั้งคลื่นตามขวางและคลื่นตามยาว และเป็นคลื่นที่ทำอันตรายแก่ทรัพย์สิน บ้านเรือน และประชาชนเมื่อเกิดเมื่อเกิดแผ่นดินไหว

อัตราเร็วของคลื่นเสียงในอากาศขึ้นอยู่กับหลายแฟกเตอร์ นิวตันได้พยายามหาสมการอธิบายอัตราเร็วที่คล้ายๆ กับ $v = \sqrt{B/\rho}$ แต่ให้ค่าที่ผิดพลาดประมาณ 20 % เขากล่าวว่าจากปรากฏการณ์ที่ไม่อาจทราบได้ ทำให้มอดุลัสเชิงปริมาตร B สำหรับแก๊สอาจมีได้ 2 ค่า ขึ้นอยู่กับว่าเป็นส่วนอัดหรือส่วนขยายซึ่งเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงตัว (isothermal) หรืออาจไม่มีการถ่ายเทความร้อน (adiabatic) ในศตวรรษต่อมา Laplace ได้แสดงให้เห็นว่าสำหรับคลื่นเสียง ความเร็วมีค่า

$$v = \sqrt{\frac{B_{adiabatic}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma B_{isothermal}}{\rho}} \qquad (9.18)$$

โดยที่ $\gamma = C_p / C_V$ ซึ่งมีค่า 1.4 สำหรับอากาศ C_p และ C_V เป็นความร้อนจำเพาะโมลาร์ (molar specific heat) ของแก๊สที่ความดันและปริมาตรคงตัวตามลำดับ (ความร้อนจำเพาะโมลาร์คือ ปริมาณความร้อนที่ทำให้อุณหภูมิของสาร 1 โมล เพิ่มขึ้น 1 $^{\circ}C$ สมการ (9.18) จะเหมือนกับ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \qquad (9.19)$$

P คือ ความดันของแก๊ส ที่อุณหภูมิ 20 $^{\circ}C$ อัตราเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 344 เมตร/วินาที ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (9.19) ได้ดี การวิเคราะห์ที่ค่อนข้างสมบูรณ์แสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วของคลื่นเสียงแปรเปลี่ยนกับรากที่สองของอุณหภูมิสัมบูรณ์ K ของแก๊ส

ในกรณีของคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือก เราสามารถใช้กฎข้อที่สองของนิวตันพิสูจน์ว่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือก คือ

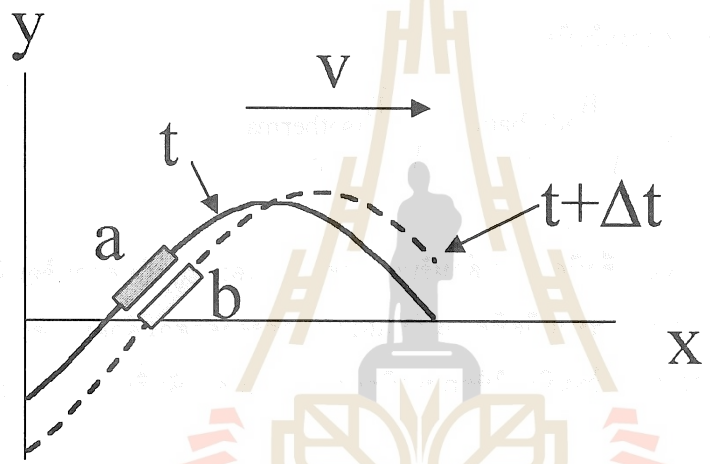
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (9.20)$$

โดยที่ F คือ แรงตึงในเส้นเชือก และ μ คือ มวลของเส้นเชือกต่อหนึ่งหน่วยความยาว ผลการทดลองพบว่าสมการ (9.20) ให้ค่าอัตราเร็วของคลื่นในเส้นเชือกที่ถูกต้อง

9.5 กำลังและความเข้มของคลื่น

ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นจะพาพลังงานไปในทิศทางที่มันเคลื่อนที่ไป การหาอัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่แผ่กระจายไป เราจำเป็นต้องหาความหนาแน่นพลังงานของคลื่นก่อน กำลังของคลื่นจะเป็นผลคูณของความหนาแน่นพลัง งาน และอัตราเร็วของคลื่น

พิจารณาคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นเชือกที่เวลา t ดังแสดงในรูป 9.8



รูป 9.8 แสดงคลื่นที่เกิดในเส้นเชือกเคลื่อนที่ไปทาง +x ที่เวลา t และ t+Δt

ชิ้นส่วน a ที่เวลา t จะเลื่อนไปอยู่ที่ b เมื่อเวลาเป็น t+Δt. พลังงานของชิ้นส่วน a ที่เวลา t จะเท่ากับพลังงานของชิ้นส่วน b ที่เวลา t+Δt. ดังนั้นพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นด้วยอัตราเร็ว v=Δx/Δt สมมติมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเชือกแทนด้วย μ ดังนั้นพลังงานจลน์ของชิ้นส่วน a จะมีค่า

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

และพลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยความยาวหรือความหนาแน่นพลังงานจลน์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (9.21)$$

พลังงานศักย์ ΔE_P ของชิ้นส่วนอันเนื่องจากคลื่นเป็นงานที่ทำโดยแรงตึง F ในชิ้นส่วนของเชือกนั้น หรือ

$$\Delta E_P = \vec{F}\Delta\ell$$

สมมติชิ้นส่วนเดิมยาว Δx เมื่อเกิดแรงตึงในเส้นเชือก ความยาวเดิมจะยืดออกกลายเป็นความยาวใหม่ $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ดังรูปที่ 9.9 ดังนั้นความยาวที่ยืดออกอันเนื่องจากแรงตึง F ในเส้นเชือกคือ

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - \Delta x$$

โดยการกระจายทวินาม (binomial expansion) และสมมติว่า $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ ดังนั้น

$$\Delta\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x$$

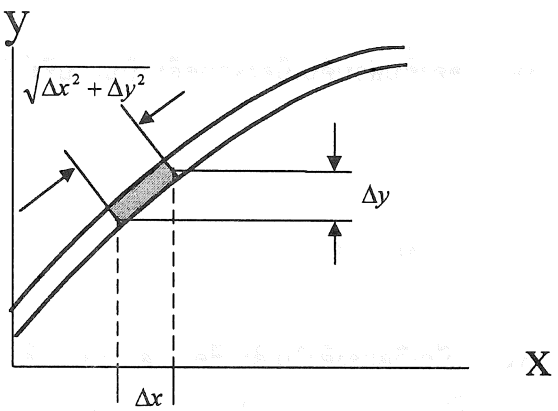
พลังงานศักย์ต่อหนึ่งหน่วยความยาว หรือความหนาแน่นพลังงานศักย์ของคลื่น คือ

$$\frac{\Delta E_P}{\Delta x} = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (9.22)$$

ความหนาแน่นพลังงานของคลื่นเป็นผลรวมของความหนาแน่นพลังงานจลน์ และความหนาแน่นพลังงานศักย์ หรือ

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (9.23)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 9.9 แสดงความยาวที่ยืดออกเมื่อเกิดแรงตึงในเส้นเชือก

จากรูป 9.8 อัตราการกระจายพลังงานหรือกำลังของคลื่นที่ชิ้นส่วน a เลื่อนไปอยู่ที่ b คือ

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta x} \cdot v$$

หรือ

$$P = \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] v \qquad (9.24)$$

ในกรณีของคลื่นฮาร์มอนิก,

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

และ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

นอกจากนี้

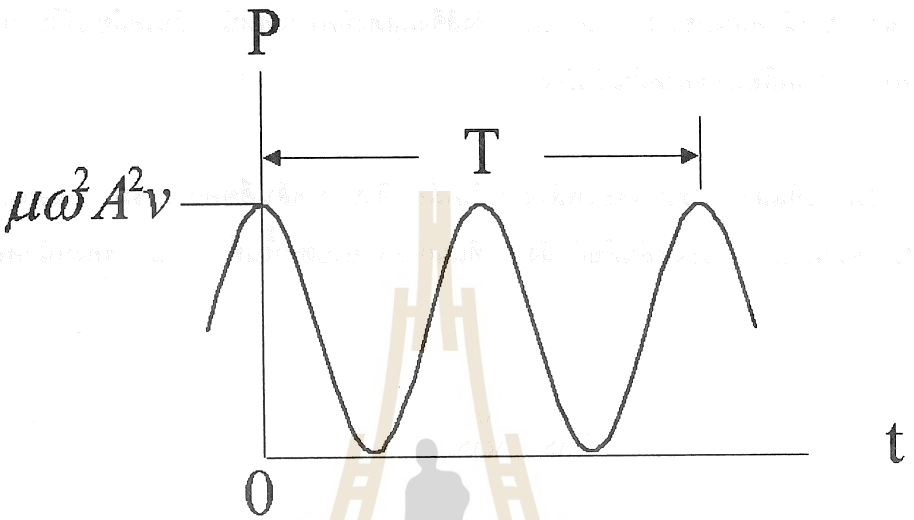
$$v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2}$$

ดังนั้น กำลังของคลื่นฮาร์มอนิก คือ

$$P = \mu \omega^2 A^2 v \cos^2(kx - \omega t) \qquad (9.25)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกที่เป็นฟังก์ชันของเวลา t แสดงในรูป 9.10 และสังเกตว่ากำลังของคลื่นมีค่าบวกตลอดเวลา แสดงว่ามีการถ่ายเทพลังงานอย่างต่อเนื่องในทิศทางที่คลื่นเคลื่อนที่



รูป 9.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกและเวลา ซึ่งอยู่ในรูปแบบ $\cos^2(\omega t)$

เนื่องจากกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกแกว่งกวัดอยู่ระหว่างศูนย์และค่าสูงสุด และค่าเฉลี่ยของ $\cos^2(\omega t)$ คือ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น กำลังเฉลี่ยของคลื่นฮาร์มอนิกคือ

$$P_{ave} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad (9.26)$$

นั่นคือ $P \propto A^2$ หรือ กำลังเฉลี่ยหรือกำลังของคลื่นฮาร์มอนิกเป็นปฏิภาคกับกำลังสองของแอมพลิจูด และเป็นลักษณะทั่วไปของคลื่นอื่นๆ ด้วย

นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าค่ากำลังเฉลี่ย P_{ave} มีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าส่วนใดของเส้นเชือก จึงกล่าวได้ว่าไม่มีการสูญเสียพลังงานเลยในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามเส้นเชือก ถ้าพลังงานมีการสูญหายไปในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง เราเรียกว่าคลื่นมีการลด (attenuated) เนื่องจากคลื่นฮาร์มอนิกของเรามีแอมพลิจูดคงตัว จึงเป็นคลื่นที่ไม่มีการลด (unattenuated wave) อย่างไรก็ตาม คลื่นกลที่เกิดขึ้นในธรรมชาติจะต้องมีการลดเสมอ แต่มักมีค่าน้อยมาก

การเคลื่อนที่ของคลื่นในธรรมชาติเป็นการเคลื่อนที่ 3 มิติ โดยคลื่นจะกระจายออกไปทุกทิศทางจากแหล่งกำเนิดคลื่น การกระจายเป็นรูปพื้นผิวของทรงกลมเรียกว่าหน้าคลื่น (wavefront) และที่ระยะไกลจากแหล่งกำเนิดคลื่นมากๆ อาจถือได้ว่าหน้าคลื่นเป็นระนาบ เส้นที่ตั้งฉากกับหน้าคลื่นเรียกว่า รังสี (rays) รังสีจึงแสดงทิศทางที่หน้าคลื่นเคลื่อนที่ไป หรือแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นนั่นเอง

ปริมาณที่แสดงการไหลของพลังงานที่เคลื่อนที่ไปกับคลื่นคือความเข้ม (intensity) ของคลื่น ความเข้ม I ของคลื่นคือกำลัง P ที่แผ่กระจายไปต่อพื้นที่ 1 หน่วยของหน้าคลื่น หรือ

$$I = \frac{P}{\Delta S} = \frac{\Delta E}{\Delta t \Delta S} \qquad (9.27)$$

ΔS คือพื้นที่ผิวของหน้าคลื่นที่ตั้งฉากกับทิศการแผ่กระจายของคลื่น และ ΔE เป็นพลังงานซึ่งผ่านพื้นที่ผิวนั้นในช่วงเวลา Δt หน่วยของความเข้มของคลื่น คือวัตต์ต่อตารางเมตร หรือ W/m^2

ความเข้มของคลื่นจะลดลงตามระยะทางจากแหล่งกำเนิดคลื่นให้ P_o เป็นกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายคลื่นออกไป และสมมติว่าตัวกลางไม่ทำให้คลื่นมีการลด และคลื่นกระจายอย่างสม่ำเสมอในทุกทิศทาง เนื่องจากความเข้ม I เป็นกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ อัตราที่พลังงานผ่านหน้าคลื่นที่เป็นพื้นผิวของทรงกลมรัศมี r จุดกำเนิดที่แหล่งกำเนิดคลื่นคือ $I(4\pi r^2)$ จากหลักการอนุรักษ์พลังงานกำลัง ที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปเท่ากับ อัตราการกระจายพลังงานผ่านพื้นผิวทรงกลม นั่นคือ $P_o = 4\pi r^2 I$ หรือ

$$I = \frac{P_o}{4\pi r^2} \qquad (9.28)$$

จะเห็นว่า ความเข้มของคลื่นลดลงอย่างผกผันกับกำลังสองของระยะทาง r จากแหล่งกำเนิดคลื่น

9.6 ตัวอย่างเกี่ยวกับคุณสมบัติทั่วไปของคลื่น

ตัวอย่าง 9.1 เมื่อออกแรง 9500 นิวตัน ดึงลวดเหล็กซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 12.5 มิลลิเมตร ยาว 10.5 เมตร ลวดเหล็กจะยืดออก ถ้าลวดเหล็กมีค่ามอดุลัสของยังเท่ากับ 200×10^9 พาสคัล จงหา

(a) ความเค้นในเส้นลวด

(b) ความเครียดในเส้นลวด

(c) ความยาวที่ลวดยืดออก

วิธีทำ

(ก) จากคำนิยามของความเค้นแบบดึง

$$\sigma_t = \frac{F_n}{A} = \frac{9500\text{N}}{\pi\left(6.25\text{x}10^{-3}\ \text{m}\right)^2} = 7.74\text{x}10^7\ \text{Pa}$$

(ข) ความเครียดหาได้จาก

$$\epsilon_t = \frac{\sigma_t}{Y} = \frac{7.74\text{x}10^7\ \text{Pa}}{200\text{x}10^9\ \text{Pa}} = 3.87\text{x}10^4$$

(ค) ความยาวที่ยืดออก คือ

$$\Delta\ell = \epsilon_t\ \ell = \left(3.87\text{x}10^4\right)\left(10.5\text{m}\right) = 4.06\ \ \text{mm.}$$

ตัวอย่าง 9.2 สมการของคลื่นตามขวางในเส้นเชือกเขียนได้เป็น

$$y = 5\sin(4.0t - 0.02x)$$

y และ x มีหน่วยเป็นเมตร และเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหา

(a) แอมพลิจูด ความถี่ ความเร็ว และความยาวคลื่นของคลื่นตามขวางนี้

(b) ความเร็วและความเร่งสูงสุดของอนุภาคในเส้นเชือก

(c) กำลังของคลื่น ถ้าความหนาแน่นของเส้นเชือกเป็น 1.25 กก./ม^3

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีทำ

(a) โดยการเปรียบเทียบกับสมการ

$$y = A\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

จะเห็นได้ว่า

แอมพลิจูด A = 5 m

$2\pi f = 4$ หรือ $f = \frac{4}{2\pi} = 0.637$ Hz

$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.02$ หรือ $\lambda = \frac{2\pi}{0.02} = 314$ m

และ $v = f\lambda = \frac{4}{2\pi}.\frac{2\pi}{0.02} = 200$ m/s

(b) ความเร็วของอนุภาคของเส้นเชือก คือ

$$u = \frac{dy}{dt} = 20\cos(4.0t - 0.02x)$$

ดังนั้น ความเร็วสูงสุดของอนุภาค = 20 m/s

ความเร่งของอนุภาค คือ

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -80\sin(4.0t - 0.02x)$$

ความเร่งสูงสุดของอนุภาค = 80 m/s^2

(c) กำลังของคลื่น

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

$$= \frac{1}{2} \text{ x } 1.25 \text{ x } 4^2 \text{ x } 5^2 \text{ x } 200 = 5.0\text{x}10^4 \text{ W}$$

ตัวอย่าง 9.3 คลื่นไซน์เคลื่อนที่ไปในทิศ +x ด้วยแอมพลิจูด 15 เซนติเมตร ความยาวคลื่น 40 เซนติเมตร และความถี่ 8 เฮิรตซ์ การกระจัดของคลื่นที่เวลา t=o และ x=o มีค่าเท่ากับ 15 เซนติเมตร จงหา

(a) เลขคลื่น คาบ ความถี่เชิงมุม และ ความเร็วเฟสของคลื่น

(b) เฟส ϕ และฟังก์ชันคลื่น

วิธีทำ

เนื่องจาก $\lambda = 40$ cm, $f = 8$ Hz, $A = 15$ cm ดังนั้น

(a) เลขคลื่น $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40} = 0.157$ cm.$^{-1}$

คาบ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = 0.125$ s

ความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f = 2\pi\text{x}8 = 50.3$ rad/s

ความเร็วเฟส $v = f\lambda = 8\text{x}40 = 320$ cm/s

(b) เนื่องจาก $y = 15$ cm. ที่ $x = o$ และ $t = o$ ดังนั้น

$$y = A\sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$\therefore\ 15 = 15\sin(-\phi)$$

หรือ $\sin(-\phi) = 1$

แต่ $\sin(-\phi) = -\sin\phi$

$$\therefore\ \phi = -\frac{\pi}{2} \text{ radian หรือ } -90°$$

และฟังก์ชันคลื่นจะมีรูปแบบเป็น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$y = A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= A\cos(kx - \omega t)$$
$$= 15\cos(0.157x - 50.3t)$$

ตัวอย่าง 9.4 เชือกเส้นหนึ่งมีมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวเป็น 47 กรัม/เมตร ถูกดึงให้ตึงด้วยแรง 75 นิวตัน คลื่นฮาร์มอนิกซึ่งมีแอมพลิจูด 13 มิลลิเมตร และความถี่ 32 เฮิรตซ์ แผ่กระจายในเส้นเชือก จงหากำลังเฉลี่ยของคลื่น

วิธีทำ

เนื่องจาก อัตราเร็ว $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{75N}{47g/m}} = 40\ m/s$

ความถี่เชิงมุม $\omega = 2\pi f = 2\pi(32Hz) = 200\ rad/s$

ดังนั้น กำลังเฉลี่ย

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$
$$= \frac{1}{2}(47g/m)(200rad/m)^2(13mm)^2(40m/s)$$
$$= 6.4\ W$$

9.7 หลักการซ้อนทับและการแทรกสอดของคลื่น

ความแตกต่างประการหนึ่งระหว่างคลื่นและอนุภาคก็คือ คลื่นไม่อยู่ประจำที่ (localised) ในปริภูมิ (space) และเวลา ณ เวลาใดเวลาหนึ่ง ตำแหน่งของอนุภาคสามารถระบุได้แน่นอน แต่ที่เวลาใดๆ เราระบุคลื่นในรูปของฟังก์ชันของตำแหน่ง ความแตกต่างอีกประการหนึ่งเกิดขึ้นเมื่อคลื่น 2 คลื่นหรืออนุภาค 2 ชนิด มีอันตรกิริยา (interaction)ระหว่างกัน เมื่ออนุภาค 2 ชนิดเคลื่อนที่มาชนกัน อนุภาคทั้งสองจะแลกเปลี่ยนโมเมนตัม และพลังงานระหว่างกัน ทำให้ความเร็วเปลี่ยนไป ในทางตรงกันข้าม เมื่อคลื่น 2 ชนิดเคลื่อนที่มาพบกัน แอมพลิจูดรวมจะเป็นผลบวกของแต่ละแอมพลิจูดของคลื่นทั้งสอง และแต่ละคลื่นจะไม่เปลี่ยนแปลงหลังจากมีอันตรกิริยากัน การรวมกันของคลื่นจะใช้หลักที่เรียกว่า หลักการ**ซ้อนทับ** (superposition principle) ซึ่งกล่าวว่า

" เมื่อคลื่นตั้งแต่สองคลื่นขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง ฟังก์ชันคลื่นของคลื่นรวมที่ตำแหน่งใดๆ เป็นผลบวกเชิงพีชคณิตของฟังก์ชันคลื่นของแต่ละคลื่น "

คลื่นที่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นเชิงเส้น (linear waves) ซึ่งมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดน้อยๆ ส่วนคลื่นที่ไม่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับเรียกว่า คลื่นไม่เชิงเส้น (nonlinear waves) และมักเป็นคลื่นที่มีแอมพลิจูดมากๆ หลักการซ้อนทับใช้ได้กับคลื่นหลายชนิด เช่นคลื่นในเส้นเชือกคลื่นเสียง คลื่นบนผิวน้ำ และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

เมื่อเราโยนก้อนหินสองก้อนลงในสระน้ำ เราจะเห็นคลื่นบนผิวน้ำทั้งสอง เคลื่อนที่ผ่านซึ่งกันและกันโดยไม่ทำลายกันหรือเปลี่ยนไปแต่อย่างใด เมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่มาพบกันที่ตำแหน่งใด ผลรวมของคลื่นจะเป็นไปตามหลักการซ้อนทับ และเมื่อคลื่นทั้งสองเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งนั้น คลื่นทั้งสองจะมีรูปร่างเหมือนคลื่นเดิมเสมือนกับไม่ได้พบกันมาก่อนเลย เราเรียกการรวมคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ ว่า การแทรกสอด (interference)

พิจารณาการแทรกสอดของคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น คือ

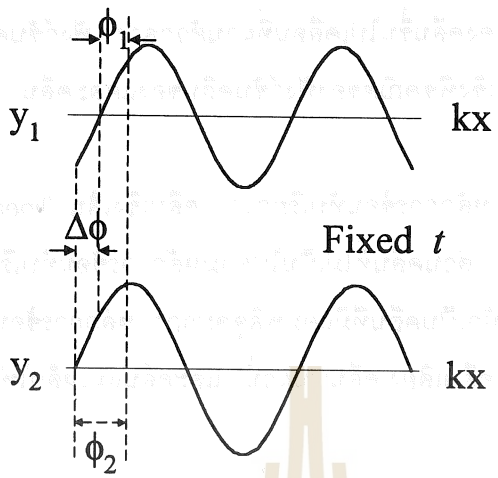
$$Y1 = A\sin(kx - \omega t + \phi 1) \qquad (9.29)$$

และ

$$Y2 = A\sin(kx - \omega t + \phi 2) \qquad (9.30)$$

แต่ละคลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกันและมีแอมพลิจูดเท่ากัน เลขคลื่นและความถี่เดียวกัน แต่เฟสไม่เท่ากัน แตกต่างกันเท่ากับ

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \qquad (9.31)$$



รูป 9.11 แสดงคลื่นฮาร์มอนิก 2 คลื่น มีแอมพลิจูด เลขคลื่น และความถี่เดียวกัน แต่เฟสต่างกัน

การหาคลื่นรวมอันเนื่องจากการแทรกสอดของ y_1 และ y_2 เราใช้หลักการซ้อนทับ คือ $Y = y_1 + y_2 = A[\sin(kx - \omega t + \phi_1) + \sin(kx - \omega t + \phi_2)]$

จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$$

ดังนั้น

$$Y = [2A\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi)]\sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\Delta\phi) \qquad (9.32)$$

มีกรณีที่น่าสนใจอยู่สองประการคือ

1) คลื่นรวม Y เป็นคลื่นฮาร์มอนิก มีเลขคลื่น k และความถี่เชิงมุม ω เหมือนเดิม และเคลื่อนที่ไปในทิศทาง +x เช่นเดิม

2) แอมพลิจูดของ Y คือ $2A\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi)$ ซึ่งขึ้นอยู่กับเฟสที่แตกต่างกัน $\Delta\phi$ ดังนั้น เฟสที่แตกต่างกันมีบทบาทที่สำคัญต่อการแทรกสอดของคลื่น

ถ้า $\Delta\phi = 0$ ดังนั้น $\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi) = 1$ แอมพลิจูดของคลื่นรวมจึงเท่ากับ 2A เราเรียกการแทรกสอดที่เกิดขึ้นในกรณีนี้ว่า การแทรกสอดเสริม (constructive interference) ดังนั้น การแทรกสอดเสริมทำให้แอมพลิจูดของคลื่นรวมเป็นสองเท่าของแต่ละแอมพลิจูดของ คลื่นแต่ละคลื่น

ถ้า $\Delta\phi = \pi$ เรเดียน ดังนั้น $\cos(\frac{1}{2}\Delta\phi) = 0$ แอมพลิจูดของคลื่นรวมเท่ากับศูนย์ เราเรียกการแทรกสอดที่เกิดขึ้นแบบนี้ว่า การแทรกสอดทำลาย (destructive interference)

สำหรับค่า $\Delta\phi$ อื่นๆ คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดอยู่ระหว่าง 2A และศูนย์ เช่นถ้า $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ เรเดียน แอมพลิจูดของคลื่นรวมจะเท่ากับ 1.41A เป็นต้น

9.8 คลื่นนิ่ง

เมื่อคลื่นตั้งแต่ 2 ชนิดขึ้นไปเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง คลื่นเหล่านี้จะมีผลซึ่งกันและกัน ถ้าคลื่นสองชนิดเคลื่อนที่มาบรรจบกันที่ตำแหน่งใด การกระจัดรวมจะเป็นผลบวกของการกระจัดของคลื่นทั้งสองนั้น และเนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น การรวมกันของการกระจัดทั้งสองจึงเป็นการรวมกันแบบเวกเตอร์ในที่นี้เราจะพิจารณาการรวมคลื่นสองคลื่นที่อยู่ในแนวเดียวกัน แล้วให้คลื่นรวมที่มีลักษณะ 2 แบบ คือ คลื่นนิ่ง (stationary wave or standing wave) และบีตส์ (beats) โดยในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงคลื่นนิ่งเท่านั้น ส่วนบีตส์จะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

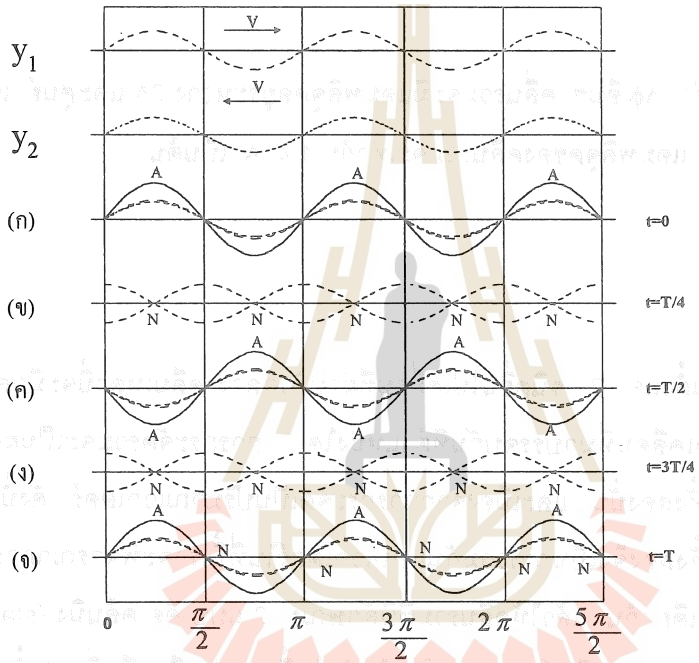
ถ้าคลื่นสองคลื่นมีแอมพลิจูดเท่ากันและความถี่เดียวกัน แต่เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม จะมีบางจุดในตัวกลางที่อนุภาคมีแอมพลิจูดสูงสุด และมีบางจุดซึ่งอนุภาคตัวกลางมีการกระจัดต่ำสุด คลื่นรวมที่มีลักษณะดังกล่าวเรียกว่าคลื่นนิ่ง

สมมติคลื่นสองคลื่นมีการกระจัดเป็น y_1 และ y_2 เคลื่นที่ในทิศทางตรงกันข้ามด้วยอัตราเร็ว v และคาบเท่ากับ T คลื่นรวมอาจเกิดขึ้นได้ 3 กรณี คือ

(1) คลื่นทั้งสองซ้อนทับกันที่เวลา $t = 0$ โดยมีเฟสเดียวกัน ดังนั้นคลื่นรวมจะมีการกระจัดเป็น $y = y_1 + y_2$ ดังรูปที่ 9.12 (ก)

(2) ที่เวลา $t = \frac{T}{4}$ และ $\frac{3T}{4}$ คลื่นทั้งสองมีการกระจัดขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม การกระจัดรวมจึงเท่ากับศูนย์ดังรูป 9.12 (ข) และ (ง)

(3) ที่เวลา $t = \frac{T}{2}$ คลื่นทั้งสองซ้อนกันเช่นเดียวกับกรณีที่ (1) แต่มีเฟสเปลี่ยนไปเท่ากับ π ดังรูป 9.12 (ค) และเมื่อเวลา $t = T$ ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ คลื่นรวมจะเหมือนกับกรณีที่ (1) อีกครั้งหนึ่ง

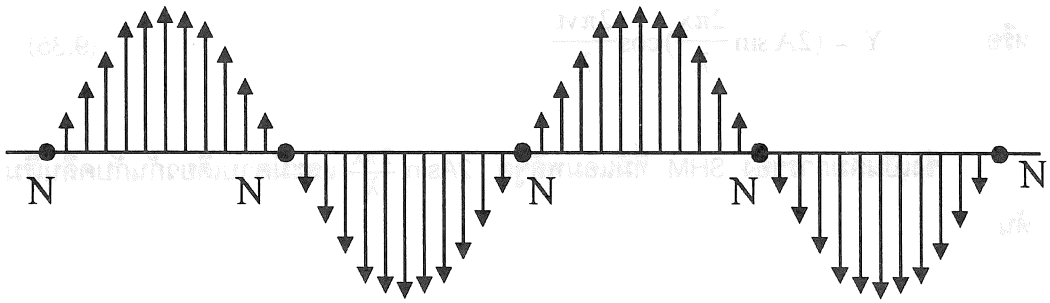


รูป 9.12 แสดงการรวมคลื่นสองคลื่นที่เวลาต่างๆ

จากรูปที่ 9.12 จะเห็นได้ว่า มีหลายจุดที่แทนด้วยอักษร N ซึ่งไม่เคยเปลี่ยนตำแหน่งเลย จุดเหล่านี้เรียกว่า บัพ (nodes) และจะอยู่ ห่างกันแต่ละจุดเป็นระยะ $\lambda/2$ บัพเป็นจุดที่แสดงแอมพลิจูดเท่ากับศูนย์

จุดต่างๆ ระหว่างบัพ จะสั่นด้วยแอมพลิจูดที่แตกต่างกัน จุดที่มีแอมพลิจูดสูงสุดและอยู่ตรงกลางระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ เรียกว่า ปฏิบัพ (antinode)

ระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ การสั่นจะหันไปในทิศเดียวกัน และเฟสของการสั่นจะเปลี่ยนไป 180 องศาสำหรับการสั่นระหว่างบัพคู่ถัดไป ดังแสดงในรูปที่ 9.13



รูป 9.13 แสดงความเร็วของอนุภาคในคลื่นนิ่ง

เป็นที่น่าสังเกตว่า ภายในคลื่นนิ่งไม่มีการถ่ายเทพลังงานผ่านตัวกลางแต่อย่างใด พลังงานของการสั่นจะอยู่ภายในบัพหนึ่งๆ เท่านั้น แต่ไม่มีการถ่ายเทสู่บัพอื่นๆ เราจึงเรียกว่าคลื่นนิ่ง

เพื่อให้เกิดความเข้าใจเชิงวิเคราะห์ยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาคลื่นตกกระทบซึ่งเคลื่อนที่จากซ้ายมือไปขวามือด้วยความเร็ว v และแทนด้วย

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \qquad (9.33)$$

คลื่นสะท้อนกลับแทนด้วย

$$y_2 = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \qquad (9.34)$$

จากหลักการซ้อนทับ การกระจัดของคลื่นรวมคือ

$$Y = y_2 + y_2$$

$$= A[\{\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}vt - \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt\}$$

$$+ \{\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}vt + \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt\}]$$

หรือ $$Y = (2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda})\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (9.35)$$

ซึ่งเป็นสมการของ SHM ที่มีแอมพลิจูด $2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}$ และมีคาบเดียวกันกับคลื่นเริ่มต้น

ความลาดของเส้นโค้งของคลื่นรวมหรือความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ กำหนดโดย

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (9.36)$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลางคือ

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{4\pi Av}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (9.37)$$

สมการ (9.35) ใช้ได้เมื่อตำแหน่งอ้างอิง x = 0 เป็นตำแหน่งของบัพ

ในกรณีที่ตำแหน่งอ้างอิง x= 0 เป็นตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดของคลื่นรวมจะแทนด้วย

$$Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (9.38)$$

โดยที่มีค่าแอมพลิจูดเท่ากับ $2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ และมีคาบเท่ากับคลื่นเริ่มต้นและความเครียดที่ตำแหน่งใดๆ คือ

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \quad (9.39)$$

อัตราเร็วของอนุภาคตัวกลาง

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} \qquad (9.40)$$

ธรรมชาติของคลื่นรวมซึ่งเป็นคลื่นนิ่งขึ้นอยู่กับ ธรรมชาติของเงื่อนไขขอบและอาจแยกเป็น 2 กรณีคือ กรณีปลายตรึง และกรณีปลายอิสระ

กรณีปลายตรึง

(ก) การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง

ที่ปลายตรึงจะไม่มีการสั่น ดังนั้น สมการ (9.35) จึงแทนคลื่นนิ่งบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งแอมพลิจูดมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,3,..... \qquad (9.41)$$

ระยะห่างระหว่างบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \qquad (9.42)$$

ทำนองเดียวกัน ปฏิบัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งแอมพลิจูดมีค่าสูงสุด หรือ

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0,1,2,..... \qquad (9.43)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

และระยะห่างระหว่างปฏิบัพคู่หนึ่งๆ คือ

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{2} \qquad (9.44)$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าระยะห่างระหว่างบัพและปฏิบัพที่อยู่ติดกันคือ $\lambda / 4$

(ข) การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา

บัพเกิดขึ้นที่ตำแหน่งซึ่งอัตราเร็วของอนุภาคเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (9.37) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi vt}{\lambda} = m\pi$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi \qquad \left(\frac{v}{\lambda} = \frac{1}{T}\right)$$

$$\therefore \quad t_m = m\frac{T}{2} \qquad m = 0,1,2,.... \qquad (9.45)$$

ดังนั้น บัพเกิดขึ้นเมื่อเวลา $t = 0,\ \frac{T}{2},\ T,\ \frac{3T}{2},.....$

ทำนองเดียวกันที่ตำแหน่งปฏิบัพ ค่าความเครียด $\frac{dY}{dt} = 0$ ดังนั้นจากสมการ (9.36) เราจึงได้

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4\pi A}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi\, vt}{\lambda} = 0$$

หรือ $$\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0, \quad \frac{2\pi t}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$\therefore \quad t_m = (2m+1)\frac{T}{4} \qquad m = 0,1,\ldots \tag{9.46}$$

หรือปฏิบัพจะเกิดขึ้นที่เวลา $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, \ldots\ldots$

กรณีปลายอิสระ

(ก) การเปลี่ยนแปลงเทียบกับตำแหน่ง

ตัวอย่างของกรณีเช่นนี้คือท่อแก๊สปลายเปิด หรือเชือกปลายอิสระ การกระจัดที่บริเวณตรงปลายจะมีค่าสูงสูด ดังนั้นตำแหน่งอ้างอิง $x=0$ จะเป็นตำแหน่งของปฏิบัพ กรณีดังกล่าวสมการ (9.38) จึงเป็นสมการของคลื่นนิ่ง โดยที่บัพจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

หรือ $$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0,1,2,\ldots\ldots \tag{9.47}$$

ซึ่งเป็นตำแหน่งของบัพ

ที่ตำแหน่งของปฏิบัพ การกระจัดมีค่าสูงสุด ดังนั้น

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 1$$

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$$

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1\ldots\ldots \tag{9.48}$$

ซึ่งเป็นตำแหน่งของปฏิบัพ

(ข) การเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา

อัตราเร็วของอนุภาคที่ตำแหน่งบัพมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจากสมการ (9.40) จะได้

$$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

หรือ

$$\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

$$\frac{2\pi t}{T} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad t_m = (2m+1)\frac{T}{4} \quad m = 0,1,..... \tag{9.49}$$

ดังนั้นที่เวลา $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}, ...$ จะเกิดบัพ

ในขณะที่ปฏิบัพจะเกิดขึ้นเมื่อความเครียด $\frac{dY}{dx}$ มีค่าสูงสุด ดังนั้น จากสมการ (9.39) เราจะได้

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0$$

หรือ

$$\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = 0 = \sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$\frac{2\pi t}{T} = m\pi.$$

$$\therefore \quad t_m = m\frac{T}{2} \qquad m = 0,1,2,.... \tag{9.50}$$

ที่เวลา $t = 0,\ \frac{T}{2},\ T, ...$ จะเกิดปฏิบัพ

9.9 การเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งบัพและปฏิบัพ

เมื่อมีคลื่นเกิดขึ้นในของไหล ความดันมีค่า

$$P = -E\frac{dY}{dx}$$

โดยที่ E คือสภาพยืดหยุ่นเชิงปริมาตร $E = v^2\rho$ และ $\frac{dY}{dx}$ คือความเครียดเชิงปริมาตร สำหรับคลื่นนิ่งในท่อปลายเปิด จากสมการ (9.39) จะได้

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

ดังนั้น $$P = v^2\rho\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

ให้ $$v^2\rho\frac{4\pi A}{\lambda} = P_{max}$$

และ $$P_X = P_{max}\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \qquad (9.51)$$

$$\therefore \quad P = P_X\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} \qquad (9.52)$$

ซึ่งเป็นสมการแสดงแอมพลิจูดของความดันที่เปลี่ยนแปลงที่ตำแหน่ง x จากจุดสัมผัส จะเห็นได้ว่าความดันเปลี่ยนแปลงแบบฮาร์มอนิกตามเวลาด้วยคาบ $T = \frac{2\pi}{2\pi v/\lambda} = \frac{\lambda}{v}$ ซึ่งจะเท่ากับคาบของคลื่นองค์ประกอบ

เนื่องจากที่ตำแหน่งปฏิบัพ $\frac{dY}{dx} = 0$ และ $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ ดังนั้น $P_X = 0$ และ $P = 0$ ด้วย ซึ่งแสดงว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงความดันและความหนาแน่นที่ตำแหน่งปฏิบัพ

ที่ตำแหน่งบัพ ความเครียด $\frac{dY}{dx}$ มีค่าสูงสุด ดังนั้น $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$ และ $P_X = P_{max}$ หรือ

$$P = \pm P_{max}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

นั่นคือ ความดันและความหนาแน่นอาจมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งปฏิบัพ

9.10 การกระจายพลังงานในคลื่นนิ่ง

คลื่นนิ่งสำหรับกรณีปลายอิสระ ตามสมการ (9.38)

$$Y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

และ $$\frac{dY}{dt} = \frac{4\pi Av}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

มวลของชั้นหนา δx และความหนาแน่น ρ คือ $\rho\delta x$ พลังงานจลน์ของชั้นดังกล่าว คือ

$$\delta E_k = \frac{1}{2}.\ \text{มวล.(ความเร็ว)}^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho\delta x\left(\frac{dY}{dt}\right)^2$$

พลังงานจลน์ของคลื่นทั้งหมดซึ่งยาว ℓ คือ

$$E_k = \frac{1}{2}\rho\int_0^{\ell}\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\rho}{2}\left(\frac{4\pi Av}{\lambda}\right)^2\int_0^{\ell}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\int_0^{\ell}2\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\int_0^{\ell}\left(1+\cos\frac{4\pi x}{\lambda}\right)dx$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}(\ell+0)$$

$$\therefore\ E_k = \rho\ell\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda} \qquad (9.53)$$

ค่าเฉลี่ยของพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ คือ ค่าสูงสุดของ E_k หรือ $(E_k)_{max} = E$

$$\therefore\quad E = \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2 \qquad (9.54)$$

พลังงานศักย์ คือ

$$E_p = E - E_k$$

$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2 - \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}$$

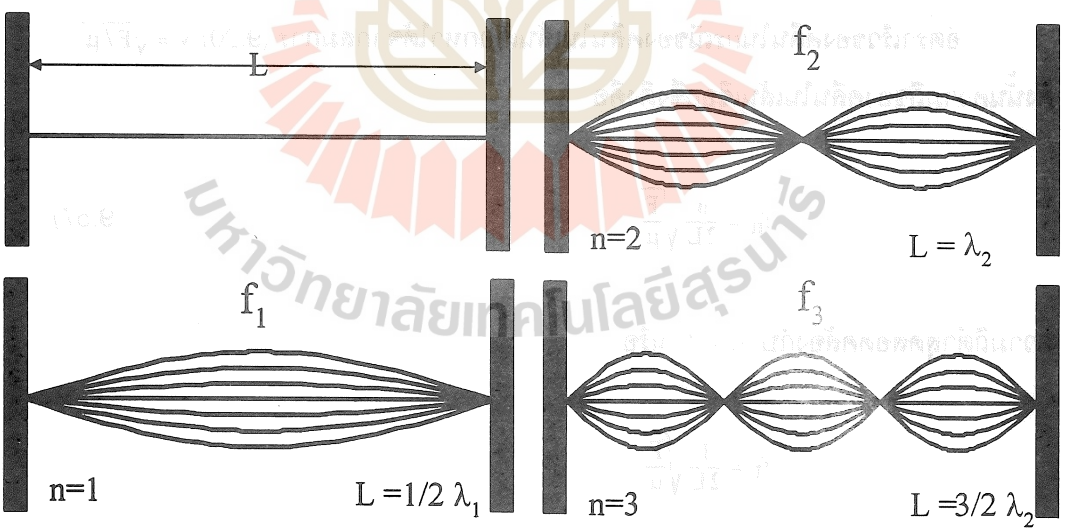
$$= \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2\left[1-\cos^2\frac{2\pi vt}{\lambda}\right]$$

หรือ
$$E_p = \rho\left(\frac{2\pi Av}{\lambda}\right)^2 \sin^2\frac{2\pi vt}{\lambda} \qquad (9.55)$$

ดังนั้นการกระจายพลังงานในรูปของพลังงานจลน์และพลังงานศักย์จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา กล่าวคือ เมื่อใดที่ $\cos\frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$ พลังงานรวมจะเป็นพลังงานจลน์แต่เพียงอย่างเดียว และเมื่อใดที่ $\sin\frac{2\pi vt}{\lambda} = \pm 1$ พลังงานรวมจะเป็นพลังงานศักย์แต่เพียงอย่างเดียว

9.11 คลื่นนิ่งในเส้นเชือกปลายตรึงทั้งสองด้านและในท่ออากาศ

พิจารณาคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกยาว L โดยมีปลายตรึงทั้งสองด้านที่จุดปลายของเส้นเชือกต้องเป็นตำแหน่งของบัพเสมอ เพราะเป็นปลายตรึงและสอดคล้องกับ n = 0 ดังแสดงในรูปที่ 9.14 (ก)



รูป 9.14 แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในเส้นเชือกสำหรับค่า n ต่างๆ

เมื่อ n = 1 ดังรูป (ข) ปฏิบัพจะอยู่ตรงกลาง และความยาวของเชือกจะเป็น $\lambda_1/2$ หรือ $\lambda_1 = 2L$

เมื่อ n = 2 (รูป (ค)) ความยาวคลื่น $\lambda_2 = L$ และเมื่อ n = 3 ดังรูป (ง) ความยาวคลื่น $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

ดังนั้น ความยาวคลื่นของ n ค่าต่างๆ หรือโมด (mode) ที่ n คือ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1,2,3,..... \tag{9.56}$$

เนื่องจากความเร็ว v ของคลื่นมีค่าเท่ากันสำหรับทุกความถี่ ดังนั้นความถี่สำหรับโมด ที่ n คือ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}v \qquad n = 1,2,3,.....$$

อัตราเร็วของคลื่นในกรณีของคลื่นในเส้นเชือกหาได้จากสมการ (9.20) $v = \sqrt{F/\mu}$ ดังนั้นความถี่ของคลื่นในเส้นเชือกขึงตึงคือ

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{9.57}$$

ความถี่ต่ำสุดสอดคล้องกับ n = 1 หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ความถี่ค่าอื่นๆ จะเป็นจำนวนเท่าของ f_1 เสมอ เช่น $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, $f_4 = 4f_1$ เป็นต้น ความถี่ f_1 เรียกว่า ความถี่หลักมูล (fundamental frequency) หรือเรียกว่า ฮาร์มอนิกที่หนึ่ง และ f_2 เรียกว่าฮาร์มอนิกที่สอง f_n เรียกว่า ฮาร์มอนิกที่ n และ $f_n = nf_1$ และจากสมการ (9.57) จะเห็นได้ว่าความถี่ของเส้นเชือกขึ้นอยู่กับความตึง F และความยาว L ซึ่งหลัก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การนี้ใช้ได้สำหรับกรณีเส้นลวดโลหะอื่นๆ เช่นสายกีตาร์ เป็นต้น โดยผู้เล่นสามารถปรับค่าความถี่หรือเสียงได้โดยดึงเส้นลวดให้ตึงหรือหย่อนได้ตามต้องการ

ในกรณีคลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นในท่ออากาศ อาจแยกออกได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีปลายเปิดด้านเดียว และกรณีปลายเปิดสองด้าน

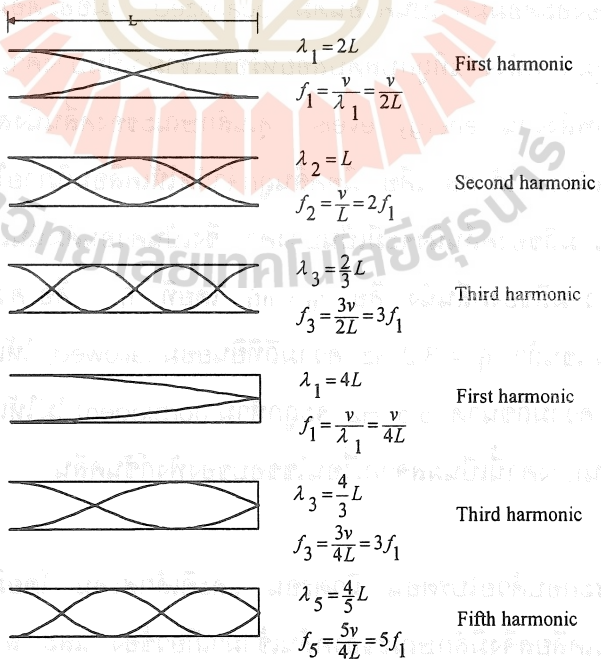
ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดทั้งสองด้าน คือ

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.58}$$

v คืออัตราเร็วของเสียงในอากาศและ L คือความยาวของท่อ

ความถี่ของคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศปลายเปิดด้านเดียวคือ

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots. \tag{9.59}$$



รูป 9.15 แสดงคลื่นนิ่งที่เกิดในท่ออากาศ (ก) ปลายเปิดทั้งสองด้าน (ข) ปลายเปิด ด้านเดียว

ที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่า คลื่นนิ่งที่เกิดขึ้นจากเงื่อนไขที่เรากำหนดคือให้ตรึงที่ x =0 และ x = L ฟังก์ชันคลื่น Y(x,t) ในสมการ (9.35) จะต้องเท่ากับศูนย์ที่จุดตรึงทั้งสองเสมอ นั่นคือเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) จะเป็น Y(o,t) = 0 และ Y(L,t) = 0 สำหรับทุกค่าของ t

จากสมการ (9.35) และ $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kv$

$$Y = (2A\sin kx)\cos\omega t$$

เงื่อนไขขอบแรกคือ Y(o,t) = 0 เกิดจาก sinkx = 0 ที่ x = 0 ดังนั้นจึงสอดคล้องโดยอัตโนมัติ

สำหรับเงื่อนไขที่สองคือ Y(L,t) = 0 ดังนั้น sinkL = 0 ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ $k_nL = n\pi$ โดยที่ n = 1,2,3,... หรือ $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ และสอดคล้องกับสมการ (9.56)

9.12 คลื่นนิ่งและการทำให้เป็นควอนตัมในอะตอม

พลังงานของอะตอมมีค่าเป็นควอนตัม (quantized) เมื่ออะตอมปลดปล่อยพลังงานหรือรับพลังงานเข้ามา พลังงานที่ถูกปลดปล่อยหรือรับเข้ามาเป็นบางค่าเท่านั้น พลังงานบางค่านี้เรียกว่า ระดับพลังงาน (energy levels) คุณลักษณะของคลื่นนิ่งสามารถอธิบายความเป็นควอนตัมของพลังงานได้ กล่าวคือ เมื่อคลื่นถูกจำกัดให้เคลื่อนที่ภายในบริเวณจำกัด ทำให้เกิดคลื่นนิ่ง ความถี่ของคลื่นนิ่งจะมีเป็นบางค่า ซึ่งเป็นควอนตัมนั่นเอง ในกรณีของเส้นเชือกปลายตรึง ความถี่ของคลื่นนิ่ง คือ $f_n = nf_1$ โดยที่ f_1 คือ ความถี่หลักมูล และ n เป็นเลขจำนวนเต็ม เช่นถ้า f_1 = 3.2 Hz ความถี่ที่ยินยอม (allowed) ให้เกิดขึ้นคือ 3.2, 6.4, 9.6, Hz เป็นต้น ความถี่ขนาด 6.5 Hz จะถูกห้าม (forbidden) ไม่ให้เกิดขึ้น การที่ความถี่ที่ยอมให้เกิดขึ้นเป็นบางค่านี้เป็นผลจากเงื่อนไขขอบของฟังก์ชันคลื่น

อะตอมประกอบด้วยโปรตอน นิวตรอน และอิเล็กตรอน โดยมีอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงโคจรรอบนิวเคลียสจึงมีลักษณะของคลื่นเข้ามาเกี่ยวข้อง และ สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น เนื่องจากอิเล็กตรอนในอะตอมถูกจำกัดการเคลื่อนที่ในอะตอมนั้น ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนจึงกำหนดโดยเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขขอบเหล่านี้ทำให้ฟังก์ชัน

คลื่นมีบัพและปฏิบัพ คล้ายกับที่เกิดขึ้นในคลื่นนิ่งบนเชือกขึงปลายตรึงดังได้กล่าวแล้ว ระดับพลังงานที่แตกต่างกันของอะตอมเกี่ยวพันกับลักษณะรูปแบบที่แตกต่างกันของ คลื่นนิ่งอันเนื่องจากฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน ระดับพลังงานของอะตอมที่เป็นควอนตัมจึงเป็นผลจากเงื่อนไขขอบของฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน

9.13 ตัวอย่างเกี่ยวกับการแทรกสอดและคลื่นนิ่ง

ตัวอย่าง 9.5 คลื่นสองคลื่นเคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้ามทำให้เกิดคลื่นนิ่ง ถ้าแต่ละคลื่นกำหนดโดยฟังก์ชันคลื่น

$$y_1 = (4\ \text{cm}) \sin (3x - -2t)$$

$$y_2 = (4\ \text{cm}) \sin (3x + 2t)$$

x และ y มีหน่วยเป็น เซนติเมตร จงหา

(a) การกระจัดสูงสุดที่ตำแหน่ง x = 2.3 เซนติเมตร

(b) ตำแหน่งของบัพและปฏิบัพ

วิธีทำ

(a) **คลื่นนิ่ง**ที่เกิดจากการรวมกันของสองคลื่น กำหนดโดยสมการ (9.35) คือ

$$Y = (2A \sin kx) \cos \omega t$$

เมื่อ $A = 4$ cm และ $k = 3$ cm^{-1}

การกระจัดสูงสุดของคลื่นนิ่งที่ตำแหน่ง $x = 2.3$ cm คือ

$$Y_{max} = (2 \times 4\ \text{cm}) \sin 3x|_{x=2.3}$$

$$= (8\ \text{cm}) \sin (6.9\ \text{rad})$$

$$= 4.63\ \text{cm}$$

(b) เนื่องจาก $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3\ cm^{-1}$ ดังนั้น $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ cm

และตำแหน่งของบัพตามสมการ (9.41) คือ

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} = n(\frac{\pi}{3})\ cm \quad n = 0,1,2,....$$

ตำแหน่งของปฏิบัพ กำหนดโดยสมการ (9.43) คือ

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$= (2n+1)\frac{\pi}{6} \quad cm \quad n= 0,1,2,.....$$

ตัวอย่าง 9.6 สายไวโอลินยาว 33 เซนติเมตร และมวลต่อหนึ่งหน่วยความยาว 5.46×10^{-4} กิโลกรัม/เมตร จงหาแรงตึงที่ทำให้สายสั่นด้วยความถี่หลักมูล 660 เฮิรตซ์

วิธีทำ

ความถี่หลักมูลของคลื่นนิ่ง กำหนดโดยสมการ (9.57) หรือ

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = (2Lf_1)^2\mu$$

$$= (2 \times \frac{33}{100}\,m \times 660\ Hz)^2 \times 5.46 \times 10^{-4}\,kg/m\ N$$

$$= 104\ \ N$$

ตัวอย่าง 9.7 ถ้าแรงตึงในเส้นเชือกเท่ากับ 72 นิวตัน เชือกยาว 3.8 เมตร มีมวล 0.84 กิโลกรัม จงหา

(a) ความถี่หลักมูล

(b) ความถี่ที่ทำให้เกิดปฏิบัพ 2 ตำแหน่ง

วิธีทำ

(a) ความถี่หลักมูลคือ $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{LM}}$

ในที่นี้ F = 72 N

M = 0.84 kg

L = 3.8 m

$$\therefore f_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{72N}{(3.8m)(0.84kg)}} = 2.4 \text{ Hz}$$

(b) คลื่นนิ่งที่มีเพียง 2 ปฏิบัพ คือ โมดที่ n = 2

ดังนั้น ความถี่ที่ฮาร์มอนิกที่สองคือ

$f_2 = 2f_1 = 2 \times 2.4 \text{ Hz} = 4.8 \text{ Hz}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. แรงเฉือน 4.00×10^4 นิวตัน กระทำต่อกล่องทองเหลืองซึ่งมีค่ามอดุลัสเฉือนเท่ากับ 3.5×10^{10} นิวตัน/เมตร^2 แต่ละด้านของทองเหลืองยาวเท่ากับ 0.150 เมตร จงหา (a) ความเครียดเฉือน (b) การกระจัดสูงสุด (c) มุมเฉือน

(ตอบ : (a) 5.08×10^{-5} (b) 7.62×10^{-6} m (c) $\phi = \tan^{-1}\left(5.08x10^{-5}\right) = 2.91x10^{-3}$)

2. ก้อนตะกั่วปริมาตร 0.5 ลูกบาศก์เมตร ถูกหย่อนลงในน้ำทะเล ณ ตำแหน่งที่มีความดัน 2×10^7 นิวตัน/ตารางเมตร มอดุลัสเชิงปริมาตรของตะกั่วเท่ากับ 7.7×10^9 นิวตัน/ตารางเมตร จงหาปริมาตรที่เปลี่ยนแปลงไปของก้อนตะกั่วนี้

(ตอบ : 1.3×10^{-3} m^3)

3. คลื่นชนิดหนึ่งแทนด้วย $y = 10\sin 2\pi(2x - 100t)$ เมื่อ x เป็นเมตรและ t เป็นวินาที จงหาแอมพลิจูด ความยาวคลื่น ความถี่ และอัตราเร็วของคลื่นนี้

(ตอบ : 10 m, 0.5 m, 100 Hz, 50 m/s)

4. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\psi = \psi_{\circ} \sin k(x - vt)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ของคลื่น

5. (a) จงเขียนสมการของ y ที่เป็นฟังก์ชันของ x และ t สำหรับคลื่นไซน์ที่เคลื่อนที่ไปในทิศทาง -x โดยกำหนดค่าต่อไปนี้ให้ A = 8 cm., λ = 80 cm, f = 3 Hz และ y(0,t) = 0 ที่ t = 0

   (b) จงเขียนสมการของ y ที่เป็นฟังก์ชันของ x สำหรับคลื่นที่กำหนดในข้อ (ก) โดยสมมติว่า y(x,o) = o ที่จุด x = 10 cm.

(ตอบ : (a) $y = (0.0800\text{m})\sin(7.85x + 6\pi t)$

(b) $y = (0.0800\text{m})\sin(7.85x + 6\pi t - 0.785)$

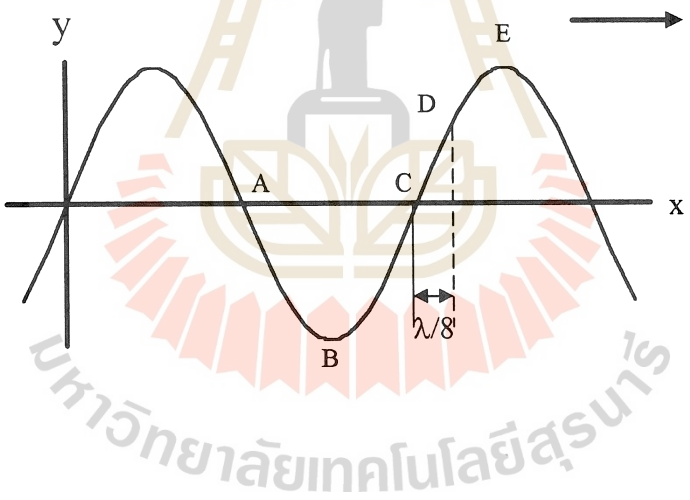
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

6. คลื่นฮาร์มอนิกตามขวางมีคาบ T = 25 มิลลิวินาที เคลื่อนที่ไปในทิศ -x ด้วยอัตราเร็ว 30 เมตร/วินาที เมื่อเวลา t=0 อนุภาคที่ตำแหน่ง x=0 มีการกระจัด 2.0 เซนติเมตร และอัตราเร็วว v = -2.0 เมตร/วินาที จงหา (a) แอมพลิจูดของคลื่น (b) เฟสเริ่มต้น (c) อัตราเร็วสูงสุด และ (d) ฟังก์ชันคลื่นของคลื่นนี้

(ตอบ : (a) 2.15 ซม. , (b) 0.379 rad , (c) 541 cm/s

(d) $y(x,t) = (2.15\ cm)\cos(80\pi t + 8\pi x/3 + 0.379)$)

7. คลื่นฮาร์มอนิกบนเส้นเชือกแสดงในรูปมีแอมพลิจูด 25 มิลลิเมตร อัตราเร็ว 46 เมตร/วินาที และความถี่เชิงมุม 160 เรเดียน/วินาที คลื่นแผ่กระจายไปในทิศ +x จงหากำลังของคลื่นที่ตำแหน่งต่างๆ กำหนดโดยตัวอักษร และให้ $\mu = 0.029$ กิโลกรัม/เมตร



(ตอบ : A = 21W, B = 0, C = 21W,D=11W, E=0)

บทที่ 10 เสียง

เค้าโครงเรื่อง

10.1 คลื่นเสียง

10.2 ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลาง

10.3 การแทรกสอดของคลื่นเสียง

10.4 บีตส์

10.5 การได้ยิน

10.6 ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์

10.7 ซอนิกบูม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

10.1. คลื่นเสียง

คลื่นเสียงเป็นคลื่นกลชนิดหนึ่งและเป็นคลื่นตามยาว เสียงที่เราได้ยินส่วนใหญ่เป็นคลื่นที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศ แต่คลื่นเสียงสามารถเคลื่อนที่ในของเหลวและของแข็งได้เช่นกัน เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางอนุภาคของตัวกลางจะแกว่งกวัด ทำให้ความหนาแน่นและความดันของตัวกลางเปลี่ยนแปลงตามทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง ซึ่งแตกต่างจากการแกว่งกวัดของตัวกลางที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของคลื่นในคลื่นตามขวาง การกระจัดที่เกิดขึ้นอันเนื่องจากคลื่นเสียงเคลื่อนที่ผ่านตัวกลางจะเป็นการกระจัดของแต่ละโมเลกุลจากตำแหน่งสมดุล ทำให้ความดันเปลี่ยนแปลงไปด้วย บริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่ามากกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุล เรียกว่า ส่วนอัด (compressions) และบริเวณที่ความดันและความหนาแน่นของตัวกลางมีค่าน้อยกว่าค่าที่ตำแหน่งสมดุล เรียกว่าส่วนขยาย (rarefactions) ทั้งส่วนอัดและส่วนขยายจะเคลื่อนที่ไปในแนวเดียวกับการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียง โดยที่ระยะจากส่วนอัดหนึ่ง (หรือส่วนขยาย) ไปยังส่วนอัดที่ถัดมา (หรือส่วนขยายที่ถัดมา) คือความยาวคลื่น λ

สมมติคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในของไหล เมื่อไม่มีคลื่นเสียงตำแหน่งของอนุภาคจะอยู่ที่ x เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่ในแนวแกน x การกระจัดของอนุภาคที่เวลา t คือ $\psi(x,t)$ กำหนดโดย

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad (10.1)$$

โดยที่แอมพลิจูด A หมายถึงค่าสุงสุดของการกระจัด $k=2\pi/\lambda$ คือเลขคลื่น และ ω คือความถี่เชิงมุม ซึ่งมีค่า $\omega=kv$ เมื่อ v คืออัตราเร็วของคลื่น

คลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านของไหล ทำให้ความดันของของไหลเปลี่ยนแปลงสมมติความดันของของไหลที่ตำแหน่ง x และเวลา t คือ p(x,t) ถ้าความดันในขณะสมดุลและไม่มีคลื่นเสียงผ่านเลยมีค่าเป็น P_{eq} ดังนั้น ความดันที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจากมีคลื่นเสียงผ่านคือ

$$\Delta p(x,t) = p(x,t) - p_{eq}$$

สำหรับคลื่นฮาร์มอนิกที่เคลื่อนที่ผ่านทำให้ความดันที่เปลี่ยนไปมีลักษณะเป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_{max} \sin(kx-\omega t) \qquad (10.2)$$

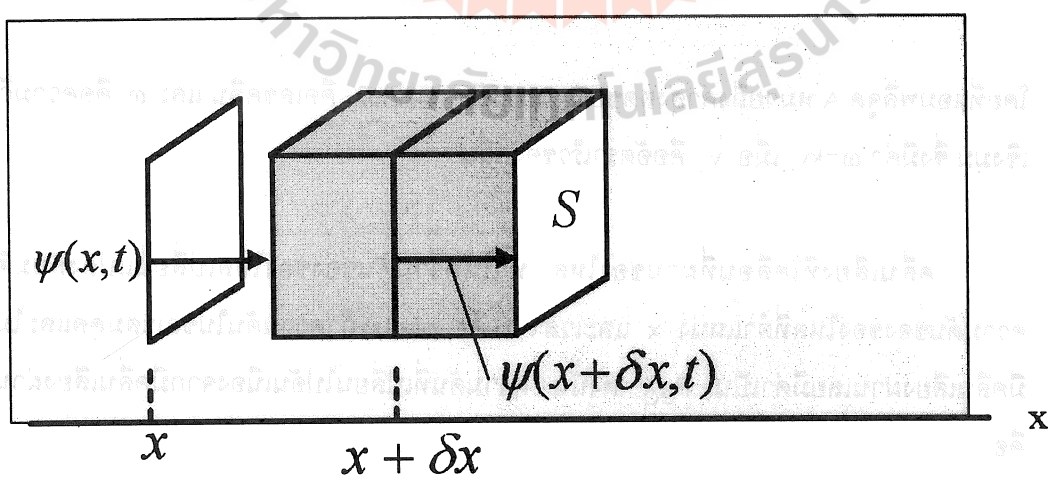
Δp_{max} คือค่าสูงสุดของความดันที่เปลี่ยนไปและเกิดขึ้นที่ตำแหน่งส่วนอัดสำหรับที่ตำแหน่งส่วนขยาย $\Delta p = -\Delta p_{max}$ ซึ่งหมายความว่า $p(x,t)$ มีค่าน้อยกว่า p_{eq}

ในกรณีของคลื่นเสียง ความดันที่เปลี่ยนไปเกิดอย่างรวดเร็วจนถือได้ว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างอนุภาคของตัวกลางเลย ซึ่งเป็นกระบวนการที่เรียกว่ากระบวนการแอเดียแบติก (adiabatic process) มอดุลัสเชิงปริมาตรของของไหลในกระบวนการนี้คือ

$$B = -V\frac{\Delta P}{\Delta V} \qquad (10.3)$$

ΔV คือ ปริมาตรน้อยๆ ที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจาก ความดันน้อย Δp เปลี่ยนไป

ต่อไปพิจารณาของไหลที่บรรจุในภาชนะที่มีรูปทรงเป็นแท่งด้วยพื้นที่หน้าตัด S ซึ่งผิวหน้าทั้งสองในขณะสมดุลอยู่ที่ตำแหน่ง x และ $x+\delta x$ เมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน ผิวหน้าทั้งสองจะเลื่อนไปเป็นระยะ $\psi(x,t)$ และ $\psi(x+\delta x,t)$ ดังแสดงในรูป 10.1



รูป 10.1 แสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งและปริมาตรของของไหลเมื่อมีคลื่นเสียงไหลผ่าน

ปริมาตรของของไหลจะเปลี่ยนจาก $V = S\,\delta x$ ไปเป็น

$$V + \Delta V = S[\delta x + \Psi(x+\delta x,t) - \psi(x,t)]$$

ดังนั้น ปริมาตรที่เปลี่ยนไปคือ

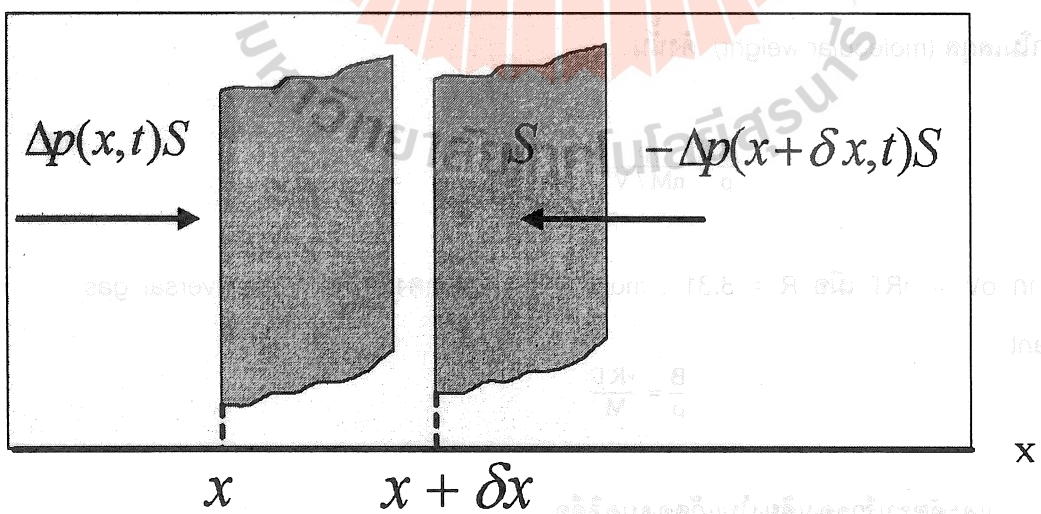
$$\Delta V = S[\psi(x+\delta x,t) - \psi(x,t)]$$

และ $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\psi(x+\delta x,t) - \psi(x,t)}{\delta x}$$

ในลิมิตที่ $\delta x \rightarrow O$ อัตราส่วนนี้จะกลายเป็น $\frac{\Delta V}{V} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}$ และความดันที่เปลี่ยนไปในสมการ (10.3) จะกลายเป็น

$$\Delta p(x,t) = -B\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (10.4)$$

แรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง x อันเนื่องจากความดันที่เปลี่ยนไปคือ $\Delta p(x,t)S$ ทำนองเดียวกันแรงที่กระทำต่อผิวที่ตำแหน่ง $x+\delta x$ คือ $-\Delta p(x+\delta x,t)S$ ดังแสดงในรูป 10.2



รูป 10.2 แสดงแรงที่กระทำต่อผิวหน้าทั้งสองของของไหลอันเนื่องจากความดันเปลี่ยนไป

สำหรับคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศซึ่งประกอบด้วยแก๊สหลายชนิด แก๊สเหล่านี้อาจถือได้ว่าเป็นแก๊สอุดมคติ (ideal gas) ความดันและปริมาตรของแก๊สเหล่านี้ในกระบวนการแอเดียแบติก จะมีความสัมพันธ์กันคือ

$$pV^{\gamma} = \text{ค่าคงตัว}$$

โดยที่ $\gamma = C_p / C_V$ เป็นอัตราส่วนของความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่ (C_p) และปริมาตรคงที่ (C_V) ของแก๊ส เนื่องจากอนุพันธ์ของค่าคงตัวเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{d}{dV} pV^{\gamma} = p\gamma V^{\gamma-1} + V^{\gamma}\frac{dp}{dV} = O$$

หรือ
$$-V\frac{dp}{dV} = p^{\gamma} = B$$

ความหนาแน่นของแก๊สอุดมคติ อาจเขียนได้เป็น

$$\rho = m/V = nM/V$$

V คือ ปริมาตรที่บรรจุแก๊ส n โมล และ M คือมวลของแก๊ส 1 โมล หรือที่เรียกว่าน้ำหนักโมเลกุล (molecular weight) ดังนั้น

$$\frac{B}{\rho} = \frac{\gamma p}{nM/V} = \frac{\gamma pV}{nM}$$

เนื่องจาก pV = nRT เมื่อ R = 8.31 $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ เป็นค่าคงตัวเรียกว่า universal gas constant

$$\therefore \frac{B}{\rho} = \frac{\gamma RT}{M}$$

และอัตราเร็วของเสียงในแก๊สอุดมคติคือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (10.7)$$

แรงลัพธ์ของแรงทั้งสองคือ

$$\delta F = S[\Delta p(x,t) - \Delta p(x+\delta x,t)]$$

เมื่อใช้สมการ (10.4) แรงลัพธ์จะกลายเป็น

$$\delta F = BS\left(\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x+\delta x} - \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

โดยที่อนุพันธ์คำนวณที่ตำแหน่ง $x + \delta x$ และ x

ความเร่งของอนุภาคคือ $a = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ และมวลของอนุภาคคือ $\delta m = \rho S \delta x$ โดยที่ ρ คือความหนาแน่นของของไหล และ $S\,\delta x$ คือปริมาตรเล็กๆ ของอนุภาคที่กำลังพิจารณาเมื่อใช้กฎข้อที่สองของนิวตันจะได้

$$\rho S \delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = BS\left(\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x+\delta x} - \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

พื้นที่ S ซึ่งปรากฏทั้งสองด้านของสมการจึงตัดทิ้งไป ต่อไปจึงหารทั้งสองด้านของสมการด้วย δx ความแตกต่างของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เมื่อหารด้วย δx จะกลายเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองเมื่อ $\delta x \rightarrow O$ ดังนั้น

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad (10.5)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการทั่วไปของคลื่นคือ (9.14) จะเห็นได้ว่าคลื่นเสียงในของไหลเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (10.6)$$

ซึ่งขึ้นกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ T และน้ำหนักโมเลกุล M เท่านั้น

สำหรับเสียงที่เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางที่เป็นของแข็ง จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (10.8)$$

โดยที่ ρ และ Y คือ ความหนาแน่นและมอดุลัสของยังของของแข็งตามลำดับ

ตัวอย่าง 10.1 จงหาอัตราเร็วของเสียงในน้ำซึ่งมี มอดุลัสเชิงปริมาตร 2.1×10^9 นิวตัน/เมตร^2 และความหนาแน่น 10^3 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

จากสมการ (10.6) อัตราเร็วของเสียงในน้ำคือ

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}}{10^3\ \mathrm{kg/m^3}}} = 1500\ \mathrm{m/s}$$

ตัวอย่าง 10.2 จงหาอัตราเร็วของเสียงใน He ซึ่งมีน้ำหนักโมเลกุล 0.0040 กิโลกรัทม/โมล และ $\gamma = C_p/C_v = 1.63$ ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน

วิธีทำ

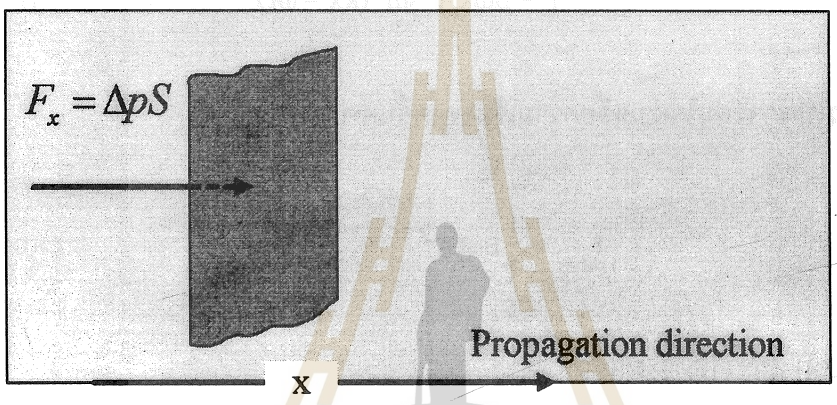
จากสมการ (10.7) อัตราเร็วของเสียงใน He คือ

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.63(8.31\mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}})(310\mathrm{K})}{0.0040\mathrm{kg/mol}}}$$

$$= 1.0\ \mathrm{km/s}$$

10.2 ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลาง

คลื่นเสียงมีลักษณะเช่นเดียวกับคลื่นชนิดอื่นๆ คือการพาพลังงานไปด้วย ในขณะที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านตัวกลาง พลังงานที่คลื่นเสียงพาไปเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูดของคลื่น ความเข้มของคลื่นเสียงในตัวกลางหาได้จากอัตราของงานที่ทำต่อตัวกลาง สมมติคลื่นเคลื่อนที่ไปในแนวแกน x ระนาบของพื้นที่ S ตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น ดังรูป 10.3



รูป 10.3 แสดงการหาความเข้มของคลื่น

ความดันที่เปลี่ยนไปอันเนื่องจากคลื่นที่ตกกระทบตั้งฉากกับพื้นที่คือ $\Delta p(x,t)$ ดังนั้นแรงที่กระทำต่อพื้นที่ S มีขนาด $F = \Delta pS$ อัตราการทำงานคือกำลัง P ซึ่งเป็นอัตราที่พลังงานเคลื่อนที่ผ่าน เนื่องจาก $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ เป็นความเร็วของอนุภาคของตัวกลางที่พื้นที่ผิวนี้ กำลังจึงมีค่า $P = F\frac{\partial \psi}{\partial t}$ หรือ

$$P = \Delta pS\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ความเข้ม I คือกำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$\therefore \quad I = \frac{P}{S} = \Delta p\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$I = -B\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (10.9)$$

แล้วใช้ ψ ในสมการ (10.1)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -kA\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega A\sin(kx - \omega t)$$

$$\therefore \quad I = B\omega kA^2 \sin^2(kx - \omega t) \tag{10.10}$$

โดยทั่วไปเราจะสนใจค่าเฉลี่ยความเข้มของคลื่นครบ 1 รอบ คือ

$$I_{ave} = \frac{1}{2} B\omega kA^2 \tag{10.11}$$

จากสมการ (10.4) และ (10.1) เราได้ว่า

$$\Delta p = -B\frac{\partial \psi}{\partial x} = BkA\sin(kx - \omega t)$$

ซึ่งมีค่าสูงสุดเป็น

$$\Delta p_{max} = BkA$$

$$\therefore \quad I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2 \omega}{2Bk}$$

จากความสัมพันธ์ $\omega / k = v$ และ $B = \rho v^2$ ดังนั้น

$$I_{ave} = \frac{(\Delta p_{max})^2}{2v\rho} \tag{10.12}$$

ที่กล่าวมาเป็นเพียงความเข้มของคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ในหนึ่งมิติเท่านั้น คลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจริงๆ ในธรรมชาติสามารถกระจายไปทุกทิศทางซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นทรงกลมและมี

หน้าคลื่นเป็นวงกลม ถ้า P_{ave} คือค่าเฉลี่ยของกำลังที่แหล่งกำเนิดคลื่นกระจายออกไปทุกทิศทาง ดังนั้น กำลังที่ระยะ r นับจากแหล่งกำเนิดคลื่นจะต้องกระจายไปทั่วพื้นที่ผิวขนาด $4\pi r^2$ และความเข้มเฉลี่ยที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากกำเนิดคลื่นเป็นระยะ r คือ

$$I_{ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r^2} \qquad (10.13)$$

P_{ave} จะมีค่าเท่ากันหมดไม่ว่าจะอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดคลื่นเท่าใดก็ตามจึงเป็นอิสระต่อระยะห่าง r ดังนั้นความเข้มที่ตำแหน่งซึ่งห่างจากจุดกำเนิดคลื่นเป็นระยะ r_1 และ r_2

คือ $I_{1\,ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r_1^2}$ และ $I_{2\,ave} = \frac{P_{ave}}{4\pi r_2^2}$ ตามลำดับ และ $I_{1\,ave} / I_{2\,ave} = r_2^2 / r_1^2$

ตัวอย่าง 10.3 ถ้าหูของมนุษย์ได้ยินเสียงความถี่ 1 กิโลเฮิรตซ์ ด้วยความเข้มต่ำสุด 10^{-12} วัตต์/เมตร^2 จงหาแอมพลิจูดความดันของเสียงนี้ กำหนดอัตราเร็วของเสียงในอากาศเป็น 343 เมตร/วินาที และความหนาแน่นของอากาศเท่ากับ 1.20 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

จากสมการ (10.12) แอมพลิจูดความดันคือ

$$\Delta p_{max} = \sqrt{2v\rho\bar{I}}$$

$$= \left[2\,(343\,m/s)\left(1.20\ kg/m^3\right)\left(10^{-12}\,W/m^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2.87 \times 10^{-5}\,N/m^2$$

ตัวอย่าง 10.4 ถ้าความดันของ He ที่อุณหภูมิ 310 เคลวิน เท่ากับ 1.2×10^5 พาสคัล จงหาความเข้มเฉลี่ยของคลื่นเสียงใน He ซึ่งมีแอมพลิจูดความดันเท่ากับ 0.75 พาสคัล

วิธีทำ

จากข้อมูลในตัวอย่าง 10.2 เราสามารถหาความหนาแน่นของแก๊สได้จากสมการของแก๊สอุดมคติ คือ

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$$

$$= \frac{\left(1.2 \times 10^5\ \text{Pa}\right)\left(0.0040\ \text{kg/mol}\right)}{\left(8.31\ \text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}\right)\left(310\text{K}\right)}$$

$$= 0.19\ \text{kg/m}^3$$

ความเข้มเฉลี่ยของเสียงในแก๊ส He หาได้จากสมการ (10.12) คือ

$$I_{ave} = \frac{\left(\Delta p_{max}\right)^2}{2v\rho}$$

$$= \frac{(0.75\text{Pa})^2}{2\left(1.0\text{x}10^3\ \text{m/s}\right)\left(0.19\ \text{kg/m}^3\right)}$$

$$= 1.5\text{x}10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

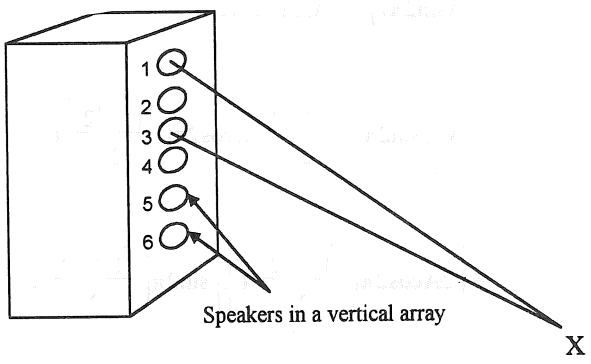
10.3 การแทรกสอดของคลื่นเสียง

เมื่อคลื่นเสียงจากแหล่งกำเนิดคลื่น 2 แหล่งพบกันที่ตำแหน่งหนึ่ง การกระจัดของคลื่นเสียงทั้งสองจะรวมกันตามหลักการซ้อนทับที่ได้กล่าวมาแล้ว ถ้าคลื่นเสียงทั้งสองเป็นคลื่นฮาร์มอนิกที่มีความถี่เดียวกัน คลื่นรวมที่ตำแหน่งใดจะขึ้นกับความแตกต่างระหว่างเฟสของคลื่นทั้งสอง การแทรกสอดแบบเสริมกันเกิดขึ้นเมื่อคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกันและแอมพลิจูด รวมมีค่าสูงสุด เนื่องจากความเข้มเป็นสัดส่วนกับกำลังสองของแอมพลิจูด ดังนั้นความเข้มของคลื่นรวมจึงมีค่าสูงสุดด้วยหากคลื่นทั้งสองร่วมเฟสกัน ถ้าคลื่นทั้งสองต่างเฟสกันขนาดเท่ากับ π เรเดียน คลื่นรวมจะมีแอมพลิจูดและความเข้มต่ำสุด

ผลของการแทรกสอดมีความสำคัญมากในการออกแบบสร้างโรงมหรสพ ห้องบันทึกเสียง หรือส่วนอื่นๆที่เกี่ยวกับการใช้ลำโพงและเครื่องเสียง เมื่อลำโพงเคลื่อนที่ เสียงจากลำโพงไม่เพียงแต่จะออกจากด้านหน้าของลำโพงเท่านั้น แต่จะออกจากด้านหลังด้วย และเมื่อไปกระทบกับผนังที่อยู่ด้านหลังของลำโพงจะสะท้อนกลับ ทำให้เกิดการแทรกสอดระหว่างคลื่นเสียงที่เคลื่อนที่ออกจากด้านหน้าของลำโพง และคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหลังและสะท้อนกลับนี้ เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาคลื่นเสียงที่เป็นคลื่นฮาร์มอนิก เมื่อผู้ฟังยืนอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งทางเดินของคลื่นที่สะท้อนกลับ มากกว่าทางเดินของคลื่นที่เคลื่อนไปข้างหน้าเป็นระยะครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นเสียง คลื่นทั้งสองจะต่างเฟสกันเท่ากับ π เรเดียน ซึ่งเป็นการแทรกสอดแบบขัดกัน ทำให้ผู้ฟังไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่งนี้

เพื่อหลีกเลี่ยงผลของการเกิดการแทรกสอดดังกล่าว จึงมักวางลำโพงในกล่องปิดมิดชิด เพื่อหลีกเลี่ยงการแทรกสอดแบบขัดกันอันเนื่องจากคลื่นจากเสียงที่สะท้อนกลับและคลื่นเสียงที่ออกจากด้านหน้า การบรรจุให้อยู่ในกล่องปิดมิดชิดจึงมิใช่เพื่อการประดับตกแต่งแต่อย่างใด

นอกจากนี้การออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายอันต้องคำนึงถึงผลของการแทรกสอดด้วย เช่นที่ออกแบบดังรูป 10.4 พิจารณาที่จุด x ซึ่งอยู่ด้านหน้าของลำโพงแต่เป็นตำแหน่งเฉียง ถ้าทางเดินของเสียงที่ออกจากลำโพงที่ 1 และที่ 5 แตกต่างกันเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่นพอดี เสียงจากลำโพงทั้งสองจะแทรกสอดแบบขัดกันเพราะเฟสต่างกันเท่ากับ π เรเดียน ถ้าผู้ฟังยืนอยู่ไกลมากๆ เทียบกับระยะห่างของแต่ละลำโพง คลื่นเสียงจากลำโพงที่ 2 และ 6 หรือที่ 3 และ 7 หรือที่ 4 และ 8 จะแทรกสอดแบบขัดกัน จึงไม่ได้ยินเสียงที่ตำแหน่ง x นี้ ผลที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้จึงมีประโยชน์มากในการออกแบบสร้างหอประชุมที่มีขนาดใหญ่



รูป 10.4 แสดงการออกแบบสร้างลำโพงที่มีตัวกระจายเสียงหลายตัวแล้วทำให้เกิดการแทรกสอดแบบขัดกันที่ตำแหน่งซึ่งอยู่หน้าลำโพง

10.4 บีตส์

ถ้ามีคลื่นหลายขบวน แต่ละคลื่นมีความถี่ ω และเลขคลื่น k เท่ากัน เราสามารถใช้สมการ (9.9) อธิบายคลื่นเหล่านั้นได้ แต่ถ้าคลื่นเหล่านั้นมีความถี่และเลขคลื่นต่างกัน เราไม่สามารถใช้สมการ (9.9) อธิบายคลื่นรวมได้ ทั้งนี้เพราะคลื่นรวมมีแอมพลิจูดแตกต่างจากแต่ละคลื่นนั่นเอง

พิจารณาคลื่นสองคลื่นซึ่งมีแอมพลิจูดเท่ากัน แต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย เคลื่อนที่ไปในทิศเดียวกัน ผลรวมของคลื่นคู่นี้จะมีแอมพลิจูดที่สูงต่ำสลับกันไป เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า บีตส์ (beats) ซึ่งเราอาจทดลองได้จากการเคาะส้อมเสียง 2 อันที่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

สมมติให้คลื่นสองขบวนแทนด้วยสมการ ดังนี้:

$$y_1 = A\sin 2\pi f_1 t$$

และ $$y_2 = A\sin 2\pi f_2 t$$

โดยที่ A คือแอมพลิจูด และ f_1 และ f_2 คือความถี่ของคลื่นที่ต่างกันไม่มากนัก

$$\therefore y = y_1 + y_2$$

$$= A\sin 2\pi f_1 t + A\sin 2\pi f_2 t$$

$$= A\left[2\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t.\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]$$

$$= \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\left[\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]$$

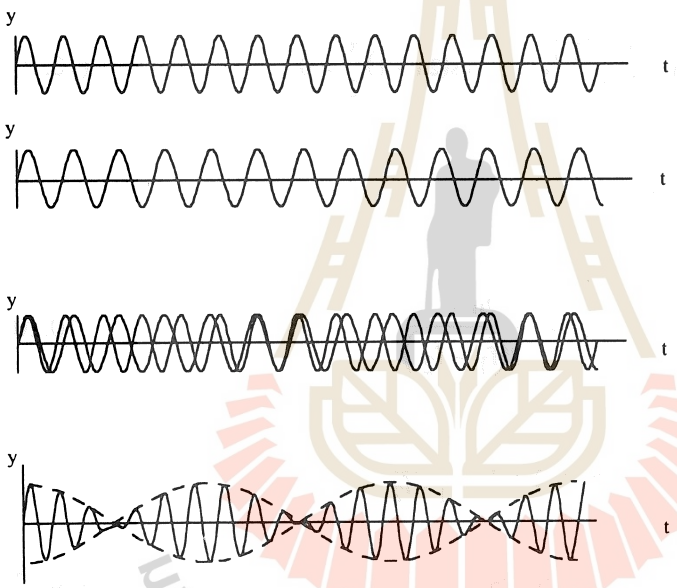
หรือ $$y = B\sin 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t \qquad (10.14)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ดังนั้นคลื่นรวมจะมีความถี่เฉลี่ยเป็น $\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$ และมีแอมพลิจูดรวมเป็น

$$B = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t \qquad (10.15)$$

และค่าแอมพลิจูด B นี้ จะเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาและขึ้นอยู่กับค่า $(f_1-f_2)/2$ ถ้า f_1 มีค่าใกล้เคียงกับ f_2 มาก เทอม $(f_1 - f_2) / 2$ จะมีค่าน้อย ทำให้แอมพลิจูดรวมเปลี่ยนแปลงไปอย่างช้าๆ



(ก) คลื่นเสียงที่มีความถี่ต่างกัน

(ข) คลื่นเสียงทั้งสองบนกราฟเดียวกัน

(ค) ผลรวมของคลื่นเสียงทั้งสอง

รูป 10.5 แสดงการรวมคลื่นที่มีแอมพลิจูดเท่ากัน แต่มีความถี่ต่างกันเล็กน้อย

ค่าของแอมพลิจูด B จะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = \pm 1 = \cos n\pi \qquad (10.16)$$

โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$

หรือ $$2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t = n\pi$$

$$t = \frac{n}{f_1 - f_2} \qquad (10.17)$$

ดังนั้นเวลาในช่วงค่าสูงสุดสองค่า คือ

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

หรือจำนวนค่าสูงสุดในเวลา 1 วินาที คือ $\frac{1}{\Delta t} = f_1 - f_2$ (10.18)

ทำนองเดียวกัน ค่าต่ำสุดจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (10.19)$$

โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

หรือ $$t = \frac{2n+1}{2(f_1 - f_2)} \qquad (10.20)$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

ความถี่ของจำนวนค่าต่ำสุดคือ $\frac{1}{\Delta t'} = f_1 - f_2$ (10.21)

การเปลี่ยนค่าของแอมพลิจูดระหว่างค่าสูงสุดค่าหนึ่งกับค่าต่ำสุดที่อยู่ถัดไปเรียกว่า บีตส์ และจำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ

$$N = f_2 - f_1 = f_b \qquad (10.22)$$

ถ้าความถี่ทั้งสองใกล้เคียงกันมาก ความถี่ของบีตส์ f_b จะน้อยมาก และช่วงเวลา Δt ระหว่างบีตส์จะมีค่ามาก และถ้าความถี่ทั้งสองเท่ากันพอดีความถี่ของบีตส์จะเท่ากับศูนย์ และไม่มีบีตส์เกิดขึ้นเลย

เราสามารถใช้บีตส์ในการปรับเสียงดนตรี เช่น เปียนโน กีตาร์ เป็นต้น กล่าวคือ ถ้าความถี่ของเสียงดนตรีที่จะปรับแตกต่างจากความถี่ของเสียงที่ได้มาตรฐาน เมื่อเราเล่นพร้อม

กันจะได้ยินเสียงบีตส์เกิดขึ้น เราจึงต้องปรับเสียงโดยการปรับความตึงของสายดนตรี จนกระทั่งไม่ได้ยินเสียงบีตส์แสดงว่ามีความถี่เดียวกัน อย่างไรก็ตาม คนทั่วไปไม่อาจแยกบีตส์ที่ความถี่ไม่เกิน 10 Hz ได้ และนักดนตรีจะแยกเสียงบีตส์ได้ดีกว่าคนทั่วไป

ตัวอย่าง 10. 5 เมื่อเคาะส้อมเสียงสองอันพร้อมกัน ปรากฏว่าได้ยินเสียงบีตส์ 3 ครั้งในหนึ่งวินาที ถ้าส้อมเสียงอันหนึ่งทราบความถี่ที่แน่นอนว่าเท่ากับ 440 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของส้อมเสียงอีกอันหนึ่ง

วิธีทำ

จากสมการ (10.22) จำนวนบีตส์ใน 1 วินาที คือ N = 3 ดังนั้น

$$3 = 440 - f_2$$

หรือ $$3 = f_1 - 440$$

โดยที่เราไม่ทราบว่าส้อมเสียงอันใดเป็น f_1 หรือ f_2 ดังนั้นความถี่ที่ไม่ทราบค่าอาจเป็น 437 Hz หรือ 443 Hz

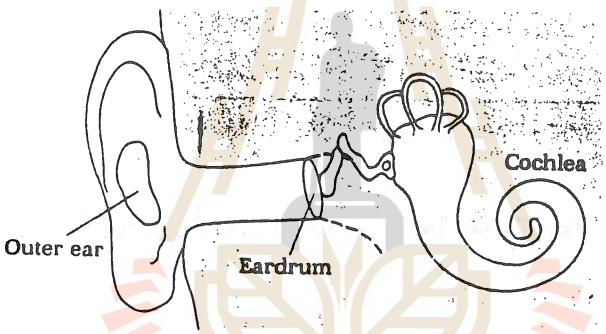
10.5 การได้ยิน

เมื่อคลื่นเสียงเคลื่อนที่มาถึงหูของมนุษย์ หูจะเปลี่ยนคลื่นเสียงเป็นคลื่นที่ประสาทหูรับรู้ได้แล้วปรับเปลี่ยนต่อไปเพื่อให้สมองตีความต่อไป แม้ว่ากระบวนการนี้จะสลับซับซ้อน แต่เราสามารถศึกษาลักษณะที่สำคัญบางประการได้

นักดนตรีอธิบายเสียงที่เขาได้ยินในเทอมของความสูงต่ำของเสียง (pitch) ความดัง (loudness) และคุณภาพเสียง (quality) ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทั้งสามนี้ค่อนข้างจะสลับซับซ้อน ความสูงต่ำของเสี่ยงเกี่ยวพันกับความถี่ของเสียง ความดังเกี่ยวพันกับความเข้มของคลื่นเสียง ส่วนคุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปร่างหรือ รูปแบบ (waveform) ของคลื่นเสียง

10.5.1 ความสูงต่ำและความถี่ของเสียง

รูป 10.6 แสดงรูปร่างของหูมนุษย์ ส่วนนอกของหูรับคลื่นเสียงแล้วส่งผ่านไปยังส่วนกลางคือ eardrum กระดูกในหูส่วนกลางจะควบคุมแอมพลิจูดของคลื่นเสียงแล้วส่งต่อไปยังหูชั้นใน ประสาทในคอเคลีย (cochlea) ของหูส่วนในจะสนองตอบต่อคลื่นเสียง ความถี่ขนาด 20 kHz จะสนองตอบใกล้ๆ ฐาน และความถี่ต่ำๆ จะสนองตอบต่อไปตามเยื่อบาซิลาร์ (basilar membrane) สำหรับทุกๆ 3.5 mm ตามแนวเยื่อบาซิลาร์ ความถี่ซึ่งระบบประสาทสนองตอบจะลดลงครึ่งหนึ่ง เนื่องจากเยื่อดังกล่าวยาว 35 mm คนทั่วไปจึงได้ยินความถี่ที่มีความแตกต่างด้วยแฟกเตอร์ขนาด 2^{10} หรือประมาณ 1000 นั่นคือ จาก 20 Hz ถึง 20 kHz



รูป 10.6 แสดงส่วนประกอบภายในของหูมนุษย์ เยื่อบาซิลาร์ (ซึ่งไม่ได้แสดงไว้ ณ ที่นี้) จะขยายไปตามขดของคอเคลีย

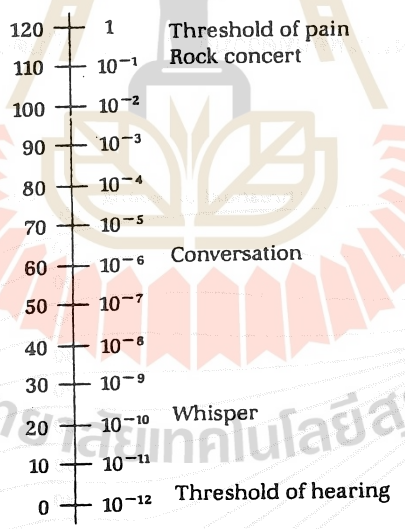
สำหรับคลื่นเสียงฮาร์มอนิก เสียงสูงจะสูงตามค่าความถี่ เยื่อบาซิลาร์สามารถแยกความถี่ขนาดต่างๆ ของคลื่นเสียงได้ เพราะเยื่อจะสั่นแตกต่างกันเมื่อระยะต่างกัน คลื่นเสียงความถี่ต่ำทำให้เยื่อบาซิลาร์ที่ระยะไกลสั่นแรง การแยกความถี่อย่างหยาบๆ จึงเกิดตามเยื่อบาซิลาร์ ส่วนการแยกอย่างละเอียดเกิดจากระบบประสาทที่กระจายอยู่ตามเยื่อบาซิลาร์

10.5.2 ความเข้มและความดังของคลื่นเสียง

หูของมนุษย์ทั่วไปจะได้ยินเสียงความถี่ 1 kHz ที่ความเข้ม $I_o = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m^2 จนถึงที่ความเข้มประมาณ 1.00 W/m^2 เราเรียกความเข้มต่ำสุดของเสียงที่หูคนปกติจะได้ยินว่า threshold of hearing และเรียกความเข้มสูงสุดของเสียงที่หูคนปกติจะทนฟังได้ว่า threshlod of pain หรือ threshold of feeling

เมื่อความเข้มของคลื่นเสียงเพิ่มขึ้น ความดังของเสียงจะเพิ่มขึ้นด้วย แต่ความสัมพันธ์ของปริมาณทั้งสองมิได้เป็นแบบเชิงเส้น กล่าวคือ เมื่อความดังของเสียงเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าพบว่าความเข้มของเสียงจะเพิ่มขึ้น 10 เท่าและเมื่อความดังเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า ความเข้มจะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า

ระดับความดังของคลื่นเสียงมีหน่วยวัดเป็น ฟอน (phons) คลื่นเสียงขนาด 1 kHz ที่threshold of hearing หรือที่ความเข้มประมาณ 10^{-12} W/m^2 มีระดับความดังเท่ากับ 0 ฟอนละที่ threshold of pain จะมีระดับความดังเท่ากับ 120 ฟอน สำหรับความดังที่ระดับความเข้มค่าต่างๆ แสดงในรูป 10.7



รูป 10.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มและความดังของคลื่นเสียง

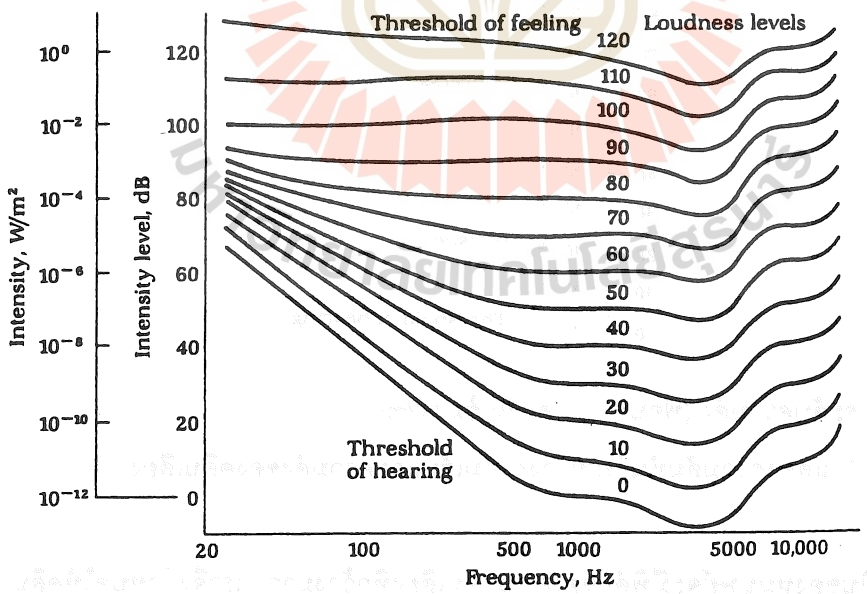
การได้ยินของหูมนุษย์จะมีพิสัยของความเข้มเสียงที่กว้างมาก เราจึงกำหนดให้คลื่นเสียงที่มีอัตราส่วนความเข้มเท่ากันมีระดับของความดังเท่ากันด้วย โดยใช้ลอการิม (logarithms) ดังนั้น เราจึงกำหนดความเข้มของเสียงเป็น ระดับความเข้มเสียง(sound-intensity level) แทนด้วย β กำหนดโดย

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_o} \qquad (10.23)$$

โดยที่ $I_o = 10^{-12}$ W/m^2 เป็นความเข้มของเสียงที่มีระดับความเข้มเสียง β เป็นศูนย์แม้ว่า β จะไม่มีหน่วยแต่มักกำหนดให้มีหน่วยเป็นเดซิเบล (decibel) แทนด้วย dB เพื่อเป็นเกียรติแก่ Alexander Graham Bell

ระดับความเข้มเสียง β กำหนดโดยสมการ (10.23) เพื่อว่าความเข้มเสียง I ที่เปลี่ยนไปด้วยแฟกเตอร์ 10^n สอดคล้องกับการเปลี่ยน β เท่ากับ 10.n เช่น ถ้า $\frac{I}{I_o} = 10^7$ ดังนั้น $\beta = 10\log_{10}(10^7) = 10 \cdot 7 = 70$ dB แม้ว่า n=7 ในที่นี้จะเป็นเลขจำนวนเต็ม แต่เลขจำนวนอื่นๆ ก็ยังใช้ได้เช่นกัน

อย่างไรก็ตามหูของมนุษย์จะรับรู้คลื่นเสียงไม่ทุกความถี่ รูป 10.8 แสดงระดับความดังและความเข้มของเสียงที่ความถี่ต่างๆ แต่ละเส้นแทนเสียงที่ความถี่ต่างๆ ซึ่งมีระดับความดังเป็นฟอนเท่ากัน ระดับความดังเป็นฟอนที่ความถี่ 1 kHz เป็นตัวกำหนด ระดับความเข้มเสียงเป็น dB



รูป 10.8 แสดงระดับความดังและความเข้มเสียงที่ความถี่ค่าต่างๆ

โดยทั่วไปหูของมนุษย์จะไวต่อเสียงความถี่ประมาณ 4 kHz แต่เรามักใช้ส่วนราบสูง (plateau) ของเส้นโค้งที่ความถี่ 1 kHz เป็นมาตรฐานในการกำหนดระดับความเข้มเสียง ที่ความถี่ 40 Hz หูจะรับรู้เสียงซึ่งมีระดับความเข้มเสียง 58 dB ในขณะที่หูรับรู้เสียงความถี่ 1 kHz หรือ 6 kHz ด้วย ระดับความเข้มเสียง 0 dB

ตัวอย่าง 10.6 คนขับรถโดยสารประจำทางในเมืองกำลังสนทนากับผู้โดยสารที่อยู่ในรถซึ่งมีหน้าต่างเปิดทุกบาน ถ้าระดับความเข้มเสียงของการสนทนาเท่ากับ 65 เดซิเบล และระดับความเข้มเสียงของการจราจรภายนอกรถเท่ากับ 70 เดซิเบล จงหา (a) ความเข้มของเสียง และ (b) ระดับความเข้มเสียง ภายในรถโดยสารนั้น

วิธีทำ

(a) จากสมการ (10.23) ความเข้มของเสียงจากการสนทนาคือ

$$65 = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0}$$

$$\frac{I_1}{10^{-12}} = 10^{6.5}$$

$$I_1 = 10^{-5.5} = 3.16 \times 10^{-6} \quad W/m^2$$

และความเข้มของเสียงจากการจราจรนอกรถ คือ

$$70 = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_0}$$

$$I_2 = 10^{-5} \ W/m^2$$

ดังนั้นความเข้มของเสียงภายในรถ คือ

$$I = I_1 + I_2 = 1.32 \times 10^{-5} \ W/m^2$$

(b) ระดับความเข้มเสียงภายในรถ คือ

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{1.32 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 71.2 \ dB$$

ตัวอย่าง 10.7 จงหาแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดของอากาศ ซึ่งมีคลื่นเสียงความถี่ 3 กิโลเฮิรตซ์ และระดับความเข้มเสียง 60 เดซิเบล เคลื่อนที่ผ่านอากาศ เสียงมีอัตราเร็ว 343 เมตร/วินาที และอากาศมีความหนาแน่น 1.21 กิโลกรัม/เมตร^3

วิธีทำ

ความเข้มของเสียง หาได้จากสมการ (10.23) คือ

$$60 = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^6$$

$$I = 10^{-6} \quad W/m^2$$

เนื่องจากความเข้มเสียงทำให้อากาศซึ่งเป็นตัวกลางแกว่งกวัด ดังนั้น จากสมการ (9.26) คือ

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2I}{\rho\,\omega^2 v}}$$

$$= \left[\frac{2\left(10^{-6}\ W/m^2\right)}{\left(1.21\ kg/m^3\right)\{2p\ (3000\ Hz)\}^2\ (343\ m/s)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3.68 \times 10^{-9} \quad m$$

10.5.3 คุณภาพและรูปแบบของคลื่นเสียง

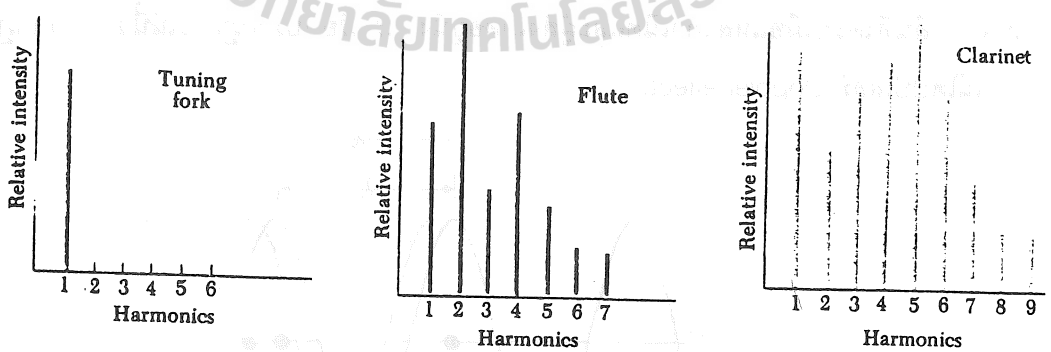
คุณภาพเสียงขึ้นอยู่กับรูปแบบของคลื่นเสียง มิใช่ขึ้นกับความถี่หรือแอมพลิจูด คลื่นเสียงโดยทั่วไปมักมีลักษณะเป็นคาบแต่ไม่ใช่เป็นคลื่นไซน์ นั่นคือ มีลักษณะเป็นแอนฮาร์มอนิก และแม้ว่าจะมีความสูงต่ำของเสียงเดียวกัน แต่มีคุณภาพเสียงที่แตกต่างกัน

ฟูริเยร์ (Jean Baptiste Joseph Fourier) ได้แสดงให้เห็นว่าคลื่นที่มีรูปแบบซับซ้อนและเป็นคาบเกิดจากผลบวกของคลื่นฮาร์มอนิก ถ้าให้ y(t) เป็นการกระจัดของคลื่นที่ตำแหน่งใดๆ y(t) และอนุพันธ์ของ y(t) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น

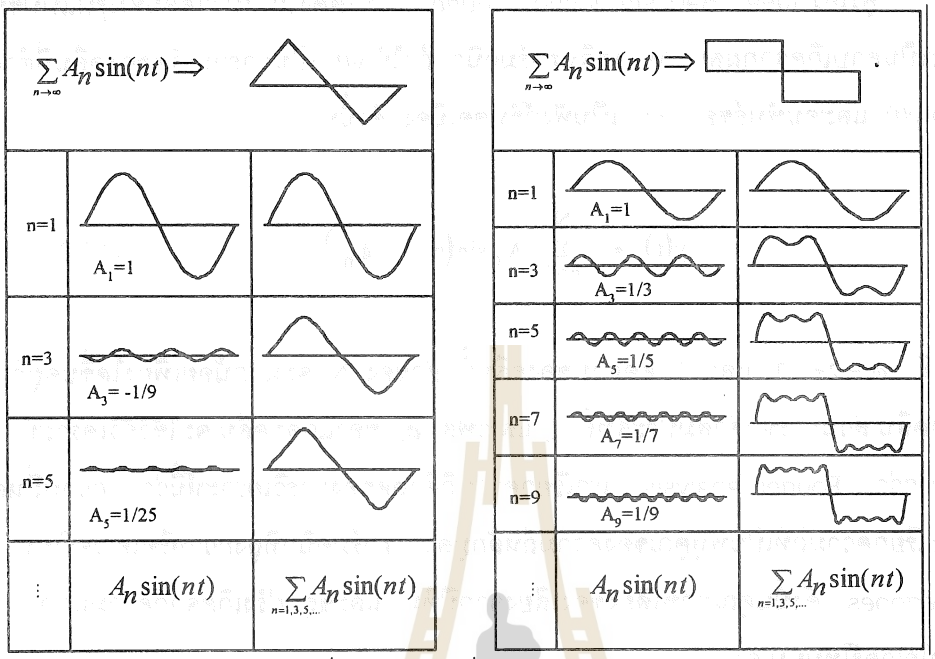
$$y(t) \approx \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(n\omega t + \phi_n\right) \qquad (10.24)$$

โดยที่ $\omega = 2\pi / T$ และ T คือคาบของคลื่นนี้ ค่าของ N จะมากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับแบบของคลื่น ส่วนการหาค่าสัมประสิทธิ์ A_n และเฟส ϕ_n ของแต่ละคลื่น จะใช้วิธีวิเคราะห์ที่เรียกว่า Fourier analysis เราเรียกความถี่ต่ำสุดของการวิเคราะห์นี้ว่า ความถี่หลักมูล และเรียกความถี่ที่เป็นพหุคูณของความถี่หลักมูลว่า ฮาร์มอนิกที่สูงกว่าหรือโอเวอร์โทน (overtones) ดังนั้นคุณภาพเสียงของเสียงจากปี่ทุ่ม และขลุ่ยฝรั่งเกิดจากความแตกต่างของโอเวอร์โทนนั่นเอง

แม้ว่ารูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบสามารถเขียนในเทอมอนุกรมฟูริเยร์ แล้วได้ความถี่หลักมูลและโอเวอร์โทนค่าต่าง ๆ เราอาจสร้างรูปแบบคลื่นที่มีลักษณะเป็นคาบได้อีกหลายรูปแบบ โดยการเพิ่มโอเวอร์โทนต่าง ๆ เข้าไปในความถี่หลักมูล ซึ่งเรียกว่า Fourier synthesis ซึ่งเป็นวิธีทางอิเล็กทรอนิกส์ เครื่องดนตรีสมัยใหม่จึงใช้ตัวสังเคราะห์ (synthesizer) มากกว่าที่จะใช้เครื่องดนตรีที่ทำให้เกิดเสียงที่เป็นคลื่นกลธรรมดา



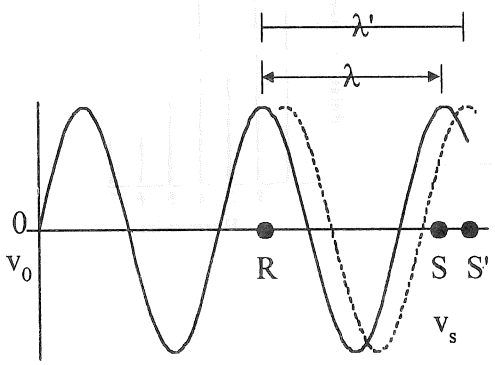
รูป 10.9 แสดงฮาร์มอนิกของเสียงจากแหล่งกำเนิดที่แตกต่างกัน



รูป 10.10 แสดงการรวมคลื่น รูปแบบคลื่นครบ 1 รอบ แสดงไว้ด้านบนสุด แต่ละคลื่นไซน์ที่นำมาบวกแสดงทางซ้ายมือ และผลรวมแสดงทางขวามือ

10.6 ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์

จากที่แล้วมาเราศึกษาถึงคลื่นซึ่งมีแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่นิ่ง และผู้สังเกตก็อยู่นิ่งด้วยถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน นั่นคือ แหล่งกำเนิดคลื่นหรือผู้สังเกตอย่างใดอย่างหนึ่งมีการเคลื่อนที่หรือทั้งสองมีการเคลื่อนที่ ทำให้ผู้สังเกตได้รับคลื่นที่มีความถี่ต่างไปจากคลื่นที่ได้รับเมื่อแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตอยู่นิ่ง เราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ (Doppler effect)



รูป 10.11 แสดงการเกิดปรากฏการณ์โดปป์เลอร์

สมมติให้แหล่งกำเนิดคลื่น (s) อยู่นิ่ง ส่งคลื่นออกมาด้วยความถี่ f ความยาวคลื่น λ และความเร็ว v ฉะนั้น ถ้าผู้สังเกตอยู่นิ่งใน 1 หน่วยเวลา จะรับคลื่นได้จำนวน f คลื่น แต่ถ้าผู้สังเกตเคลื่อนที่เข้าหา s ด้วยอัตราเร็ว v_O จำนวนคลื่นซึ่ง O ได้รับในหนึ่งหน่วยเวลาจะเพิ่มขึ้น ค่าที่เพิ่มขึ้นนี้จะเป็นจำนวนคลื่นหาได้จากระยะทางที่ O เดินทางได้ในหนึ่งหน่วยเวลานั่นคือ $\frac{v_O}{\lambda}$ ดังนั้น ถ้า f' เป็นความถี่ปรากฏซึ่ง O รับได้ จะได้ว่า

$$f' = f + \frac{v_O}{\lambda}$$

$$= f + \frac{v_O f}{v} \qquad (v = \lambda f)$$

หรือ
$$f' = f\left(\frac{v + v_O}{v}\right) \qquad (10.25)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า O เคลื่อนที่ออกห่างจาก s ด้วยความเร็ว v_O ความถี่ปรากฏที่ O รับได้จะเป็น

$$f' = f\left(\frac{v - v_O}{v}\right) \qquad (10.26)$$

สมการ (10.25) และ (10.26) อาจรวมได้ใหม่เป็น

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_O}{v}\right) \qquad (10.27)$$

โดยที่เครื่องหมาย + แสดงถึง O เคลื่อนที่เข้าหาแหล่งกำเนิดคลื่น s

เครื่องหมาย - แสดงถึง O เคลื่อนที่ ออกจากแหล่งกำเนิดคลื่น s

ต่อไปถ้าแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ออกห่างจากผู้สังเกต โดยผู้สังเกตอยู่นิ่ง นั่นคือ s เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_S ดังนั้นความยาวคลื่นที่ผู้สังเกตรับได้จะเพิ่มจาก λ เป็น λ' ค่าความยาวคลื่นที่เพิ่มขึ้นนี้มีค่าเท่ากับระยะทางที่แหล่งกำเนิดเดินทางได้ในหนึ่งรอบ คือ ระยะ ss' เนื่องจากเวลาที่ใช้สำหรับหนึ่งรอบคือ $\frac{1}{f}$ และความเร็วของ s คือ v_S ระยะ ss' จึงเป็น $\frac{v_S}{f}$

$$\lambda' = \lambda + \frac{v_s}{f} \tag{10.28}$$

เนื่องจากตัวกลางอยู่นิ่งไม่ได้เคลื่อนที่ไปด้วย ความเร็วของคลื่นจึงไม่เปลี่ยนไป ยังคงมีค่าเท่ากับ v ความถี่ของเสียงที่ผู้สังเกตได้รับคือ $f' = \frac{v}{\lambda'}$ ดังนั้น สมการ (10.28) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{v}{f'} = \frac{v}{f} + \frac{v_s}{f}$$

หรือ
$$f' = \frac{vf}{v + v_s} \tag{10.29}$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า s เคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกตด้วยความเร็ว v_s ความถี่ปรากฏที่ผู้สังเกตรับได้จะเป็น

$$f' = \frac{vf}{v - v_s} \tag{10.30}$$

สมการ (10.29) และ (10.30) รวมกันได้เป็น

$$f' = \frac{vf}{v \mp v_s} \tag{10.31}$$

โดยที่ เครื่องหมาย - แสดงถึง s เคลื่อนที่เข้าหา O
เครื่องหมาย + แสดงถึง s เคลื่อนที่ออกห่าง O

ถ้าทั้งแหล่งกำเนิดและผู้สังเกตเคลื่อนที่ เราจะได้สูตรรวมว่า

$$f' = \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}\right) f \tag{10.32}$$

โดยที่เครื่องหมายตอนบน (+ เศษ, - ส่วน) หมายถึง s และ O เคลื่อนที่เข้าหากัน เครื่องหมายตอนล่าง (- เศษ, + ส่วน) หมายถึงทั้ง s และ O เคลื่อนที่ออกจากกัน

ตัวอย่าง 10.8 จงพิสูจน์ว่าสมการ (10.27) และ (10.31) เป็นอันเดียวกัน ถ้าอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นและผู้สังเกตมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วของเสียงในตัวกลาง

วิธีทำ

ให้ $v_O = v_S = u$ และ u แทนอัตราเร็วของแหล่งกำเนิดและผู้สังเกต

สมการ (10.27) จะเป็น $f' = f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$

สมการ (10.31) เขียนใหม่ได้เป็น $f' = f\left(\frac{1}{1 \mp \frac{u}{v}}\right)$

โดยการกระจายแบบไบโนเมียล (binomial)

$$\frac{1}{\left(1 \mp \frac{u}{v}\right)} = \left(1 \mp \frac{u}{v}\right)^{-1} = 1 \pm \frac{u}{v} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 \pm \ldots\ldots$$

เนื่องจาก $u << v$ หรือ $\frac{u}{v} \langle\langle 1$ เราจึงตัดเทอม $\left(\frac{u}{v}\right)^2$ และเทอมต่อๆ ไปได้

$$\frac{1}{\left(1 \mp \frac{u}{v}\right)} \approx 1 \pm \frac{u}{v}$$

สมการ (10.31) คือ $f' = f\left(1 \pm \frac{u}{v}\right)$

ซึ่งเหมือนกับสมการ (10.27) นั่นเอง

ตัวอย่าง 10.9 ผู้สังเกตซึ่งยืนอยู่ที่ชานชาลาสถานีรถไฟแห่งหนึ่งสังเกตว่า รถไฟซึ่งกำลังวิ่งเข้าสู่สถานีด้วยความเร็ว 90 กิโลเมตร/ชั่วโมง หวูดรถไฟที่กำลังวิ่งเข้าสู่สถานีและที่เคลื่อนที่ผ่านสถานีมีความถี่ต่างกันหรือลดลง 400 เฮิรตซ์ จงหาความถี่ของหวูดรถไฟ กำหนดความเร็วของเสียงในอากาศเป็น 350 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ

ความถี่ปรากฏขณะรถไฟวิ่งเข้าสู่สถานีคือ $f_1' = f\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$

ความถี่ปรากฏ เมื่อรถไฟวิ่งเลยสถานีคือ $f_2' = f\left(\frac{v}{v + v_s}\right)$

ดังนั้น $f_1' - f_2' = 400$ Hz

$$f_1' - f_2' = f\left(\frac{v}{v - v_s} - \frac{v}{v + v_s}\right)$$

แต่

$$= f\left(\frac{2vv_s}{v^2 - v_s^2}\right)$$

หรือ $$f = \left(f_1' - f_2'\right)\left(\frac{v^2 - v_s^2}{2vv_s}\right)$$

เนื่องจาก $v = 350$ m/s และ $v_s = 90$ km/hr $= 25$ m/s

$$\therefore \quad f = 400.\frac{(350)^2 - (25)^2}{2x350x25} = 2785.7 \text{ Hz}$$

ตัวอย่าง 10.10 ส้อมเสียงความถี่ 440 เฮิรตซ์ เคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพงด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที จงหาจำนวนบีตส์ที่ปรากฏแก่ผู้สังเกตระหว่างคลื่นเสียงที่วิ่งเข้าหาและสะท้อนกลับผนังกำแพงนั้น ถ้าความเร็วของเสียงเป็น 332 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ

เราทราบว่าเมื่อส้อมเสียงเคลื่อนที่เข้าหาผนังกำแพงในขณะเดียวกันมันจะเคลื่อนที่ออกห่างผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ที่ผู้สังเกตได้ยินจะลดลง เมื่อเสียงกระทบผนังมันจะสะท้อนกลับและเคลื่อนที่เข้าหาผู้สังเกต ดังนั้นความถี่ปรากฏจะเพิ่มขึ้น จากตัวอย่างที่ 9 เราจะได้ว่า

$$f_1' - f_2' = \frac{2vv_S}{(v + v_S)(v - v_S)} f$$

$$= \frac{2x332x4}{(332 + 4)(332 - 4)} x440$$

$$= 10.6 \approx 11 \text{ ต่อวินาที}$$

$f_1' - f_2' = 11$ ต่อวินาทีก็คือจำนวนบีตส์ต่อวินาที นั่นเอง

ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์นอกจากจะเกิดกับเสียงแล้ว ยังเกิดกับแสงด้วย โดยเฉพาะทางดาราศาสตร์ ทั้งนี้เพราะอัตราเร็วของแสงมีค่ามากเมื่อเทียบกับอัตราเร็วของต้นกำเนิดของมัน เช่น เมื่อดาวดวงหนึ่งกำลังเคลื่อนที่เข้าหาโลก ดังนั้นความถี่ที่เราตรวจจากสเปกโทรกราฟ (spectrograph) จะเพิ่มขึ้น ซึ่งหมายถึงความยาวคลื่นของเส้นสเปกตรัมจะลดลง ดังนั้นเส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีม่วง ซึ่งเรียกว่า "violet shift" ในทำนองเดียวกัน ถ้าดวงดาวนั้นเคลื่อนที่ออกห่างจากโลก ความถี่จะลดลงหรือความยาวคลื่นจะเพิ่มขึ้น เส้นสเปกตรัมจะเลื่อนเข้าหาเส้นสีแดง เรียกว่า "red shift"

จากตัวอย่างข้างบน เราอาจเขียนผลต่างของความถี่ปรากฏและความถี่จริงได้เป็น

$$f' - f = \pm \frac{fv_S}{c - v_S}$$

โดยที่ c เป็นความเร็วของแสง และเนื่องจาก $c = f\lambda$ และ $f' = \frac{c}{\lambda'}$

ดังนั้น

$$c\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) = \pm \frac{cv_S / \lambda}{c - v_S}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda - \lambda'} = \pm \frac{c - v_S}{v_S} = \pm\left(\frac{c}{v_S} - 1\right)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_S}{c}$$

หรือ $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{v_S}{c} \qquad \lambda' - \lambda = \Delta\lambda \qquad (10.33)$$

เครื่องหมาย - หมายถึง violet shift และเครื่องหมาย + หมายถึง red shift

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 10.11 เส้นสเปกตรัมที่ความยาวคลื่น 5.0×10^{-7} เมตร วัดได้ที่ห้องปฏิบัติการ จะปรากฏเป็น 5.2×10^{-7} เมตร สำหรับแสงที่มาจากดาราจักร (galaxy) จงหาความเร็วของดาราจักรที่เคลื่อนที่ห่างโลกออกไปนี้

วิธีทำ

เนื่องจาก $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{+v_s}{c}$$

เราใช้เครื่องหมาย + เพราะมันกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

ดังนั้น $$v_s = c\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(3x10^8\right)\frac{(5.2-5.0)x10^{-7}}{5.0x10^{-7}}$$

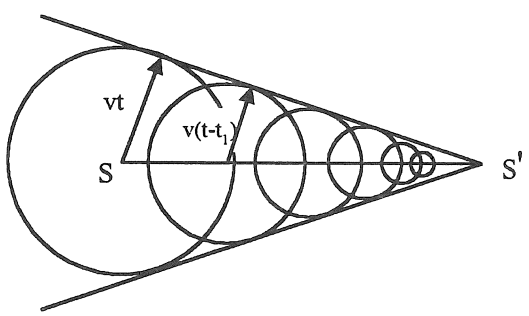
$$= 1.2x10^7 \text{ m/s}$$

ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ สามารถเกิดขึ้นได้กับคลื่นทุกชนิด เมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับความเร็วคลื่น ในกรณีของคลื่นแสงความถี่ของคลื่นแสง ไม่ขึ้นกับความเร็วของตัวกลางตามทฤษฎีสัมพัทธภาพ เนื่องจากความเร็วของแสงจะมีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุกกรอบอ้างอิง (frame of references) การเลื่อนไปสู่เส้นสีแดงของเส้นสเปกตรัมสำหรับการสังเกตดวงดาวต่างๆ หมายถึงดาวเหล่านั้นกำลังเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป และสอดคล้องกับแนวคิดเกี่ยวกับจักรวาลที่ขยายตัวออก (expanding universe) นั่นคือเมื่อประมาณ 10 ถึง 12 พันล้านปีมาแล้ว จักรวาลของเราได้ก่อตัวเป็นรูปร่างขึ้น อนุภาคเล็กๆ จำนวนมหาศาลเช่น อิเล็กตรอน โปรตรอน และนิวตรอน ได้รวมตัวกันขึ้นด้วยกระบวนการที่เรียกว่า "Big squeeze" และในขณะเดียวกันอุณหภูมิจะสูงมากๆ เป็นล้านล้านองศา ต่อจากนั้นจะเกิดการขยายตัวออกและระเบิดด้วยปฏิกิริยา thermonuclear เรียกว่า "Big Bang" ชิ้นส่วนต่างๆ จะหลุดกระจายไปทั่ว ชิ้นส่วนเหล่านี้จะกลายเป็นดาราจักรต่างๆ เช่น ทางช้างเผือกของเราและ Crab nebula(Andromeda) และเคลื่อนที่ขยายตัวออกไปเรื่อยๆ อย่างไรก็ตามทฤษฎีเกี่ยวกับการขยายตัวของจักรวาลจะมีแนวคิดตรงข้ามทฤษฎีที่เรียกว่า "steady-state theory" ซึ่งกล่าวว่าไฮโดรเจนที่มีอยู่ในอวกาศจะรวมตัวกันเป็นดาราจักรต่างๆ และรักษารูปแบบของจักรวาลไว้ชั่วกัลปวสาน ถ้าดวงดาวซึ่งเป็นต้นกำเนิดของแสงเคลื่อนที่เข้าหาโลก เส้นสเปกตรัมจะต้องเลื่อนไปทางสีม่วง ดังนั้นจึงเป็นไปได้ที่เราสังเกตุเห็นดาวคู่ซึ่งให้ทั้งสเปกตรัมที่เลื่อนไปทางสีแดงและสีม่วง นั่นคือ ดาวคู่นี้จะมีวงจรที่บางครั้งเคลื่อนที่เข้าหาโลกและบางครั้งเคลื่อนที่ห่างโลกออกไป

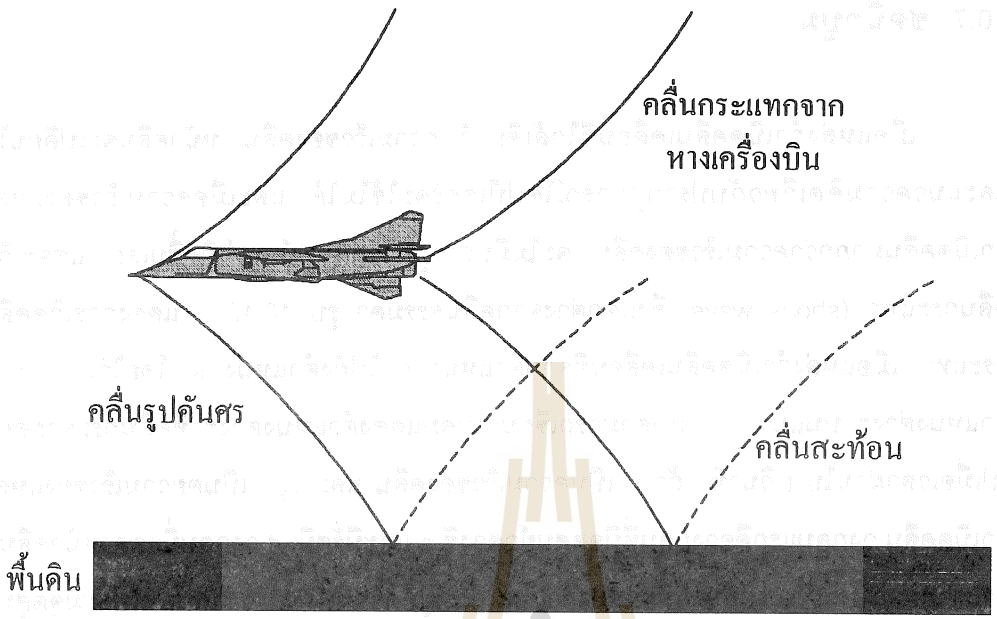
10.7 ซอนิกบูม

เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใกล้เคียงกับความเร็วของคลื่น หน้าคลื่นจะเปลี่ยนไป และแนวความคิดเกี่ยวกับปรากฏการณ์โดปป์เลอร์จะใช้ไม่ได้ และเมื่อความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นมากกว่าความเร็วของคลื่น จะไม่มีปรากฏการณ์โดปป์เลอร์เกิดขึ้นเลย แต่จะเกิดคลื่นกระแทก (shock wave) ซึ่งแตกต่างจากคลื่นธรรมดา รูป 10.12 แสดงการเกิดคลื่นกระแทก เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่จากตำแหน่ง s ไปยังตำแหน่ง s' โดยใช้เวลา t ที่ตำแหน่งต่างๆ บนแนว ss' เราสามารถเขียนวงกลมแสดงตำแหน่งต่างๆ ที่คลื่นกระจายออกไปเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที ถ้า v เป็นความเร็วของคลื่น และ v_s เป็นคยวามเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่น วงกลมแรกคือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ s และมีรัศมี vt วงกลมนี้แสดงหน้าคลื่นที่กระจายออกไปที่ตำแหน่ง s เมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นอยู่ที่ตำแหน่ง s' วงกลมถัดไปจะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่งซึ่งแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ใช้เวลา $t_1 = 0.1t$, $t_2 = 0.2t$, $t_3 = 0.3t$,..... รัศมีของวงกลมเหล่านี้คือ $v(t - t_1)$, $v(t - t_2)$, $v(t - t_3)$ .....วงกลมเหล่านี้จะค่อยๆ เล็กลง จนกระทั่งที่ตำแหน่ง s' จะเท่ากับศูนย์ เส้นทึบคือเส้นที่ห่อหุ้ม (envelope) วงกลม ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง และมีลักษณะคล้ายคลื่นรูปคันศร (bow wave) ซึ่งเกิดจากการที่เรือแล่นด้วยอัตราเร็วสูงกว่าอัตราเร็วของคลื่นบนผิวน้ำ เราเรียกว่าปรากฏการณ์ที่แหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เร็วกว่าความเร็วเฟสของคลื่นว่า ซอนิกบูม (sonic booms)

ปัจจุบันซอนิกบูมได้รับความสนใจเป็นอย่างมาก และมีผลต่อปัญหาสุขภาพจิตของมนุษย์ ในตอนต้นเราทราบแล้วว่าเสียงเป็นคลื่นความดัน และคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูม ก็เป็นการรวมกันของคลื่นเสียง จึงเป็นคลื่นความดันด้วย ดังนั้น คลื่นกระแทกจึงมีความดันที่เพิ่มขึ้นคล้ายเสียงฟ้าลั่นทำให้เราแสบแก้วหู



รูป 10.12 แสดงคลื่นกระแทกที่เกิดจากซอนิกบูม



รูป 10.13 แสดงลักษณะของคลื่นซอนิกที่เกิดจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียง

พลังงานจากคลื่นกระแทกอาจทำให้เกิดความเสียหายได้ เช่น พลังงานที่ได้จากคลื่นกระแทก รูปกรวยจากเครื่องบินความเร็วเหนือเสียงมากๆ อาจทำให้กระจกหน้าต่างแตกได้ เราเรียกอัตราส่วนระหว่างความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นต่อความเร็วของคลื่นว่า เลขมัค (mach number) ตามชื่อของนักวิทยาศาสตร์ชื่อ Ernest Mach ดังนั้นจรวดที่มีขนาดมัค 4 จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเป็นสี่เท่าของความเร็วเสียงในอากาศ นอกจากนี้เชเรนโกฟ (P.A.Cerenkov) นักฟิสิกส์ชาวรัสเซีย พบว่า อนุภาคที่มีประจุถ้าวิ่งผ่านวัตถุด้วยอัตราเร็วเหนือแสง จะแผ่คลื่นแสงออกมาเป็นสีน้ำเงิน เรียกว่า รังสีเชเรนโกฟ (Cerenkov radiation) ซึ่งก็คือคลื่นกระแทกนั่นเอง

แบบฝึกหัด

1. คลื่นเสียงเคลื่อนที่ไปในอากาศ ทำให้ความดันของอากาศเปลี่ยนแปลงขึ้นลงรอบ ๆ ความดันบรรยากาศ และกำหนดโดย $p = 1.27\sin\pi(x - 340t)$ ในหน่วย SI จงหา (a) แอมพลิจูดความดัน (b) ความถี่ (c) ความยาวคลื่นในอากาศ และ (d) อัตราเร็วของคลื่นเสียง
   (ตอบ: (a) 1.27 Pa (b) 170 Hz (c) 2.00 m (d) 340 m/s)

2. จงหาอัตราเร็วของเสียงในอากาศที่อุณหภูมิ $0^{\circ}c$
   (ตอบ: 330 m/s)

3. คลื่นเสียงในอากาศมีแอมพลิจูดความดันเท่ากับ 4×10^{-3} นิวตัน/เมตร^2 จงหาการกระจัดของ แอมพลิจูดของคลื่นที่ความถี่ 10 กิโลเฮิรตซ์
   (ตอบ: 1.55×10^{-10}m)

4. ถ้าต้องการคลื่นเสียงในอากาศซึ่งมีการกระจัดของแอมพลิจูดเท่ากับ 5.5×10^{-6} เมตร และแอมพลิจูดความดันเป็น 8.4×10^{-1} นิวตัน/เมตร^2 ความยาวคลื่นต่ำสุดจะต้องเป็นเท่าใด
   (ตอบ: 5.81 m)

5. คลื่นนิ่งเกิดในท่อปลายเปิดทั้งสองด้าน ถ้าท่ออันแรกยาว 1.000 เมตร และอันที่สองซึ่งเหมือนกันทุกประการแต่ยาว 1.002 เมตร จงหาความถี่ของบีตส์ที่เกิดขึ้นกำหนด v=348 เมตร/วินาที
   (ตอบ: 0.3 Hz)

6. ส้อมเสียงสองอันทำให้เกิดบีตส์จำนวน 6 บีตส์ในหนึ่งวินาที ถ้าส้อมเสียงอันแรกมีความถี่ 880 เฮิรตซ์ และความถี่ของบีตส์ลดลงเมื่อเอาขี้ผึ้งเกาะติดปลายของส้อมเสียงอันที่สอง จงหาความถี่ของส้อมเสียงอันที่สองที่ปราศจากขี้ผึ้งเกาะติดปลาย
   (ตอบ: 886 Hz)

7. แหล่งกำเนิดเสียง 1 กิโลเฮิรตซ์ กระจายเสียงไปทุกทิศทาง ผู้สังเกตุอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียงเป็นระยะ 3 เมตร และได้ยินเสียงระดับ 40 เดซิเบล จงหากำลังเฉลี่ยของแหล่งกำเนิดเสียง
   (ตอบ: 1.13 μW)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

8. จงหาระดับความเข้มเสียงที่เปลี่ยนแปลง ถ้าความเข้มเสียงเปลี่ยนไปด้วยแฟกเตอร์ต่อไปนี้ (a) 2 (b) 4 (c) 10 (d) 20 (e) 50 (f) 100 (g) 10^6

(ตอบ: (a) 3 (b) 6 (c) 10 (d) 13 (e) 17 (f) 20 (g) 60)

9. นกหวีด A และ B ต่างก็มีความถี่ 500 เฮิรตซ์ A อยู่กับที่ ส่วน B เคลื่อนที่ไปทางขวาหรือออกห่าง A ด้วยความเร็ว 60 เมตร/วินาที ผู้สังเกตอยู่ระหว่างนกหวีดทั้งสองและเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 30 เมตร/วินาที ถ้าความเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 330 เมตร/วินาที

(a) ผู้สังเกตได้ยินความถี่จาก A เท่าใด

(b) ผู้สังเกตได้ยินความถี่จาก B เท่าใด

(c) ผู้สังเกตได้ยินความถี่จากบีตส์เท่าใด

(ตอบ: (a) 455 Hz (b) 462 Hz (c) 7 Hz)

10. ถ้าอัตราเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 340 เมตร/วินาที รถพยาบาลซึ่งเปิดไซเรนและวิ่งมาตามถนนด้วยความเร็ว 30 เมตร/วินาที คนฟังที่ยืนอยู่ข้างถนนจะได้ยินความถี่ของเสียงไซเรนลดลงกี่เปอร์เซนต์

(ตอบ: 17%)

11. แหล่งกำเนิดคลื่น กำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 36 เมตร/วินาที ส่งคลื่นความถี่ 1080 เฮิรตซ์ ไปทางขวา คลื่นนี้ไปกระทบกับพื้นผิวเรียบและสะท้อนกลับมาทางซ้ายด้วยความเร็ว 72 เมตร/วินาที ถ้าความเร็วของเสียงในอากาศเท่ากับ 360 เมตร/วินาที จงหา

(a) ความยาวคลื่นเสียงที่ส่งออกสู่อากาศ

(b) จำนวนคลื่นต่อวินาทีที่ไปกระทบผิวเรียบ

(c) อัตราเร็วของคลื่นสะท้อน

(d) ความยาวคลื่นของคลื่นสะท้อน

(ตอบ: (a) 0.3 m (b) 1440 (c) 360 m/s (d) 0.25 m)

12. เส้นสเปกตรัมความยาวคลื่น 6.0 x 10^{-7} เมตร จากดวงดาวพบว่าเลื่อนเข้าหาเส้นสีแดงเป็นระยะ 0.1 อังสตรอม จงหาความเร็วของดาวดวงนั้น $(1A^\circ = 10^{-10}\,m)$

บทที่ 11 กลศาสตร์ของของไหล

เค้าโครงเรื่อง

11.1 สถิตศาสตร์ของของไหล

11.1.1 ความหนาแน่นและความดัน
11.1.2 หลักของอาร์คิมีดีส
11.1.3 หลักของพาสคัล
11.1.4 แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด
11.1.5 ความตึงผิว
11.1.6 มุมสัมผัส
11.1.7 สภาพคะปิลลา

11.2 พลศาสตร์ของของไหล

11.2.1 สมการแห่งการต่อเนื่อง
11.2.2 สมการของเบอร์นูลลี
11.2.3 เครื่องมือวัดอัตราการไหลของของไหล
11.2.4 ทฤษฎีบทของทอร์ริเซลลี
11.2.5 การประยุกต์ของสมการต่อเนื่องและสมการของเบอร์นูลลี
11.2.6 ความหนืด
11.2.7 กฎของปัวเซย์
11.2.8 เลขเรย์โนลด์และกฎของสโตกส์
11.2.9 พลังงานจากลม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สาระสำคัญ

1. ความหนาแน่นของสารเอกพันธ์มีนิยามว่า คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร มีหน่วยในระบบเอสไอเป็นกิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ความดัน P ในของไหล คือ แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

$$P = \frac{F}{A}$$

ในระบบเอสไอความดันมีหน่วยเป็น นิวตัน / เมตร^2

เมื่อ 1 N/m^2 = 1 pascal (Pa)

ความดันในของไหลแปรผันตามความลึก h คือ

$$P = P_a + \rho gh$$

เมื่อ P_a คือ ความดันบรรยากาศ $\left(\approx 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2\right)$ และ ρ เป็นความหนาแน่น

เมื่อวัตถุจมอยู่ในน้ำบางส่วนหรือจมทั้งหมดในของไหล ของไหลจะออกแรงดันวัตถุในทิศขึ้น ซึ่งเรียกว่า แรงลอยตัว (B) ตามหลักของอาร์คิมีดีส

$$B = \rho gV$$

เมื่อ V คือ ปริมาตรของของไหลที่ถูกแทนที่

หลักของพาสคัลมีใจความว่า ถ้าให้ความดันแก่ส่วนหนึ่งส่วนใดของของไหลที่อยู่ในภาชนะปิดใดๆ ความดันจะถูกส่งผ่านไปทั่วทุกๆ ส่วนของของไหล และที่ผนังของภาชนะซึ่งบรรจุของไหลนั้น ด้วยขนาดเท่ากันตลอด

เมื่อจุ่มหลอดแก้วรูเล็กปลายเปิดสองข้างลงในของไหล ระดับของของไหลในหลอดแก้วจะสูงกว่าระดับของของไหลในอ่าง มุมสัมผัสมีค่าน้อยกว่า 90 องศา ถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น และระดับของของไหลในหลอดแก้วจะต่ำกว่าระดับของของไหลในอ่าง มุมสัมผัสมีค่ามากกว่า 90 องศา ถ้าแรงยึดติดน้อยกว่าแรงเชื่อมแน่น เราเรียกสภาพนี้ว่า สภาพคะปิลลา

ความตึงผิว หมายถึง อัตราส่วนของแรงกระทำไปตามผิวต่อความยาวของผิวที่ถูกแรงกระทำ

2. ของไหลที่ง่ายที่สุดที่ช่วยในการศึกษาพลศาสตร์ของของไหลมีสมบัติดังนี้ ไม่มีความหนืดระหว่างชั้นของของไหล อัดไม่ได้ เป็นการไหลแบบคงตัว และเป็นการไหลแบบไม่หมุน การไหลผ่านท่อขนาดต่างๆ ของของไหลเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

1. $A_1v_1 = A_2v_2 =$ ค่าคงตัว

2. $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy =$ ค่าคงตัว

สมการหลังเรียกว่า สมการของเบอร์นูลลี

ทฤษฎีบททอร์ริเซลลีและปรากฏการณ์แมกนัส เป็นการประยุกต์สมการของเบอร์นูลลี

ความหนืดในของไหลเกิดจากแรงเสียดทาน ซึ่งแรงเสียดทานระหว่างชั้นของของเหลวเกิดจากแรงเชื่อมแน่น ส่วนแรงเสียดทานในก๊าซเกิดจากการชนกันระหว่างโมเลกุล แรงต้านทานเนื่องจากความหนืดแปรผันตรงกับอัตราเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในของไหล

$$F = kv$$

ซึ่งเรียกสมการนี้ว่า กฎของสโตกส์

ค่าคงตัว k สำหรับวัตถุรูปทรงกลม มีค่าดังนี้

$$k = 6\pi\eta r$$

เมื่อ η คือ สัมประสิทธิ์ของความหนืด

11.1 สถิตศาสตร์ของของไหล

ของไหล หมายถึง สารที่ไม่แข็งเกร็งจึงไหลได้ มีรูปร่างไม่แน่นอน ขึ้นอยู่กับภาชนะที่บรรจุ ดังนั้น ของไหลจึงหมายถึงสสารในสถานะของเหลวและก๊าซ

สถิตศาสตร์ของของไหล เป็นการศึกษาสมบัติของของเหลวและก๊าซที่อยู่นิ่ง ณ อุณหภูมิปกติ โดยจะศึกษาเกี่ยวกับความดัน หลักของอาร์คีเมดส หลักของพาสคัล ความตึงผิว สภาพคะปิลลา เป็นต้น

11.1.1 ความหนาแน่นและความดัน ความหนาแน่นของสารเอกพันธ์มีนิยามว่า คือ มวลต่อปริมาตร นั่นคือ สารที่มีมวล m ปริมาตร V จะมีความหนาแน่น ρ (อ่านว่า rho) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (11.1)$$

ในระบบเอสไอ ρ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม/เมตร^3

ตาราง 11.1 เป็นความหนาแน่นของสารบางชนิดที่เราคุ้นเคย ณ อุณหภูมิต่างๆ จากตารางจะพบว่า น้ำมีความหนาแน่น 1.0×10^3 kg/m^3

ความถ่วงจำเพาะ (specific gravity) ของสารใดคือ **อัตราส่วนของความหนาแน่นของสารนั้นต่อความหนาแน่นของน้ำ** เพราะฉะนั้น ความถ่วงจำเพาะจึงไม่มีหน่วย ปัจจุบันนิยมเรียกความถ่วงจำเพาะว่า **ความหนาแน่นสัมพัทธ์** (relative density)

ความดัน (pressure) นิยามว่า แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ เมื่อแรง F คือ แรงที่กระทำในทิศตั้งฉากกับพื้นที่ A ดังนั้น

$$P = \frac{F}{A} \qquad (11.2)$$

หน่วยของความดันในระบบเอสไอ คือ นิวตัน / เมตร^2 หรือ พาสคัล (pascal หรือ Pa) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักวิทยาศาสตร์ที่ชื่อ **ปาสกาล** (Blaise Pascal)

ตาราง 11.1

Densities of Some Solids, liquids, and Gases

Substance	ρ(kg/m^3)	Substance	ρ(kg/m^3)
Ice	0.917 x 10^3	Water	1.00 x 10^3
Aluminum	2.70 x 10^3	Glycerin	1.26 x 10^3
Iron	7.86 x 10^3	Ethyl alcohol	0.806 x 10^3
Copper	8.92 x 10^3	Benzene	0.879 x 10^3
Silver	10.5 x 10^3	Mercury	13.6 x 10^3
Lead	11.3 x 10^3	Air	1.29
Gold	19.3 x 10^3	Oxygen	1.43
Platinum	21.4 x 10^3	Hydrogen	8.99 x 10^{-2}
		Helium	1.79 x 10^{-1}

The values given are at standard atmospheric pressure and temperature (STP). To convert to g/cm^3, multiply the densities by 10^{-3}

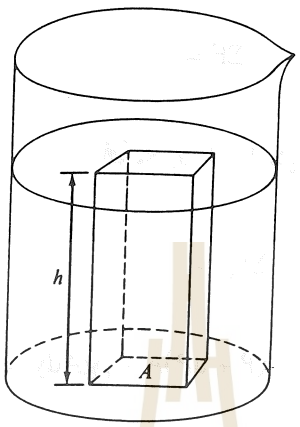
ความดัน 1 Pa = 1 N/m^2 ในระบบอังกฤษใช้ ปอนด์ต่อตารางนิ้ว ($\ell b / in^2$ หรือ psi)
ความดันเนื่องจากของไหลนั้น สามารถหาได้ดังนี้

พิจารณาภาชนะทรงกระบอกบรรจุของไหลความสูง h ดังรูป 11.1 ความดันที่ตำแหน่งต่ำสุดหาได้โดยพิจารณาแท่งของเหลว (แท่งจินตภาพ) พื้นที่หน้าตัด A สูง h แรงที่กดลงบนพื้นที่ A ที่ก้นถัง คือ น้ำหนักของแท่งของเหลว ซึ่ง

$$W = mg = V\rho g = Ah\rho g$$

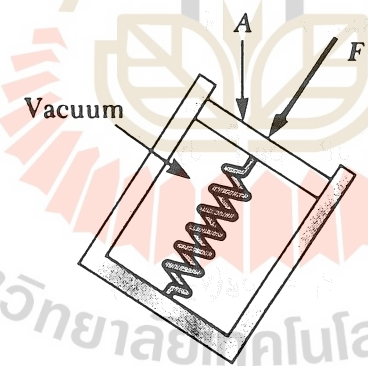
ความดันจึงมีค่า

$$P = \frac{W}{A} = \rho gh \qquad (11.3)$$



รูปที่ 11.1

นั่นคือ ความดันแปรผันกับความลึกหรือความสูง (h) และขึ้นอยู่กับชนิดของของไหล (ρ) การวัดความดัน ณ จุดใดจุดหนึ่งในของไหลนั้น ใช้เครื่องมือง่ายๆ ดังรูป 11.2



รูป 11.2 เครื่องวัดความดันของของไหลอย่างง่าย

ความหนาแน่นและความดันของของไหล อาจจะให้คำจำกัดความในรูปเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \qquad (11.4)$$

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad (11.5)$$

ถ้าเราพิจารณาของไหลปริมาตรเล็กๆ dV มีพื้นที่ A และความหนา dy มีระดับสูงวัดจากก้นถังเท่ากับ y น้ำหนัก $dW = \rho g A dy$ ชิ้นปริมาตรเล็กๆ นี้อยู่ในภาวะสมดุล

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

ซึ่งพิจารณาแรงในแนวดิ่งจากรูป 11.3 (a) จะได้

$$\Sigma F_y = 0$$

$$PA - (P + dP)A - \rho g A dy = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \qquad (11.6)$$

จากสมการ 11.6 หมายความว่า ถ้าความสูงเพิ่มขึ้น (dy เป็นบวก) ความดันจะลดลง (dP เป็นลบ) ถ้า P_1 และ P_2 เป็นความดันที่ความสูง y_1 และ y_2 วัดจากตำแหน่งอ้างอิง (ดังรูป 11.3(b)) ผลต่างของความดันหาได้จากการอินทิเกรตสมการ 11.6 ได้

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \qquad (11.7)$$

ถ้าในภาชนะถังทรงกระบอกเปิดรับความดันของบรรยากาศ $P_2 = P_a$ และใช้ $h = y_2 - y_1$ ความดัน ณ ตำแหน่งความลึก h ใต้ผิวของไหล $P = P_1$ จากสมการ 11.7 คือ

$$P = P_a + \rho g h \qquad (11.8)$$

ความดัน 1 บรรยากาศ (atmosphere,atm) มีค่าดังนี้

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$= 14.7 \text{ lb/in}^2 \qquad (11.9)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หน่วยของความดันอื่นๆ ที่นิยมใช้ เช่น

$$1 \text{ bar} = 1.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (11.10)$$

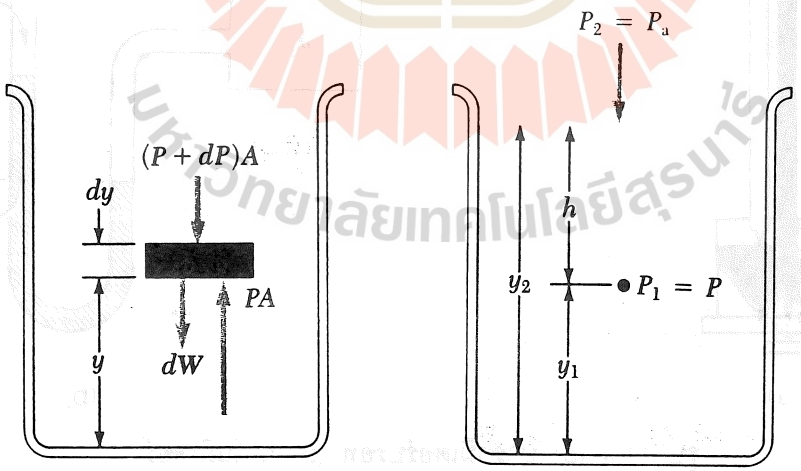
$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mm of Hg} \quad (11.11)$$

$$1 \text{ torr} = \frac{1}{760} \text{ atm} = 1 \text{ mm of Hg}$$

ความดัน P ในสมการ 11.8 นั้น รวมเอาความดันเนื่องจากบรรยากาศไว้ด้วย เรียกว่า **ความดันสัมบูรณ์** (absolute pressure) แต่ถ้าเราไม่นำความดันของบรรยากาศมาคิด หรือ ก็คือหักความดันบรรยากาศ P_a ออกจากความดันสัมบูรณ์ P จะได้ความดันที่เรียกว่า **ความดันเกจ** P_G (gauge pressure)

$$P_G = P - P_a = \rho gh \quad (11.12)$$

การวัดความดันในยางรถยนต์นั้นเป็นการวัดความดันเกจ ดังนั้น เมื่อทำโจทย์ฟิสิกส์ ผู้อ่านต้องทำความเข้าใจให้ดีก่อนว่าโจทย์ต้องการ หมายถึง ความดันสัมบูรณ์ หรือความดันเกจ



(a) (b)

รูป 11.3 (a) แสดงความดันแปรผันกับความลึก

(b) ความดันที่ความลึก h เมื่อผิวของของเหลวอยู่ภายใต้ความดันบรรยากาศ คือ

$$P = P_a + \rho gh$$

เครื่องมือวัดความดัน

เครื่องมือวัดความดัน เรียกว่า บารอมิเตอร์ (barometer) บารอมิเตอร์แบบง่าย คือ บารอมิเตอร์ปรอท ซึ่งประกอบด้วยหลอดแก้วยาวมีรูเล็กบรรจุปรอทเต็ม แล้วคว่ำลงในอ่าง ดังรูป 1.4 (a)

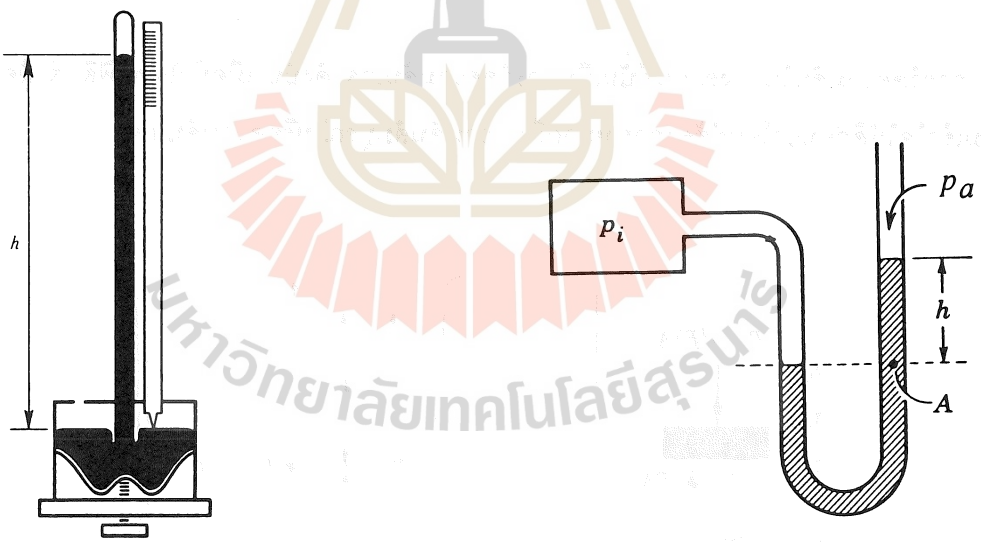
ความดันที่ช่องสุญญากาศเหนือปรอท มีค่าเป็นศูนย์หรือมีค่าน้อยมาก และความดันที่ผิวปรอทในอ่าง คือ ความดันของบรรยากาศ ซึ่งปรากฏว่า

h = 76 เซนติเมตร = 760 มิลลิเมตร

ดังนั้น $P_a = \rho gh$

$$= (13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.760 \text{ m})$$

$$= 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}$$



(a) (b)

รูป 11.4 (a) บารอมิเตอร์ปรอท (b) มาโนมิเตอร์

บารอมิเตอร์แบบปรอทนี้ ทอร์ริเซลลีประสบความสำเร็จในการวัดความดันของบรรยากาศ สำหรับการวัด ค่าความดันเกจ เราใช้เครื่องมือที่เรียกว่า มาโนมิเตอร์ (monometer) ซึ่งมีหลายแบบที่เห็นในรูป 11.4 (b) ซึ่งเป็นมาโนมิเตอร์แบบปลายเปิด (open-tube manometer) P_i คือ ความดันที่ต้องการวัด ความดันที่วัดได้คือ ความดันเกจ โดยอ่านจากความสูง h

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

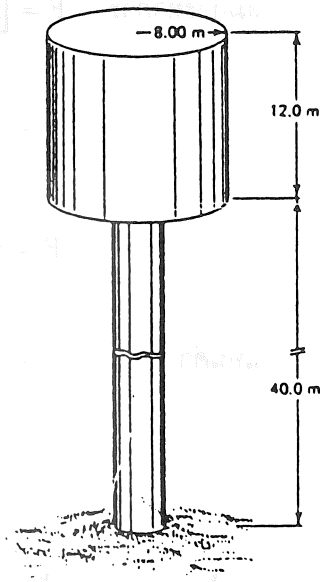
ตัวอย่าง 11.1 ถังน้ำของหมู่บ้านจัดสรรแห่งหนึ่งเป็นรูปทรงกระบอกกลมรัศมี 8.0 เมตร ความสูง 12 เมตร ใส่น้ำเต็มถัง และตั้งสูงจากพื้นดิน 40 เมตร ดังรูป 1.5

a. จงหาแรงทั้งหมดที่ก้นถัง

b. จงหาแรงทั้งหมดที่ด้านข้างถัง

c. จงหาความดันที่ก้นถัง

d. จงหาความดันที่ระดับพื้นดิน



รูป 11.5 จากโจทย์ตัวอย่าง 1.1

วิธีทำ

a. ข้อมูล : ρ = 1,000 kg/m^3 = 10^3 kg/m^3,h = 12.0 m

$$r = 8.0\ \text{m}, A = \pi r^2 = \pi(8.0\ \text{m})^2$$

g = 9.80 m/s^2, F = ?

สมการพื้นฐาน : F = mg = Ahρg

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

แทนค่า : $F = \pi(8.0\ \text{m})^2(12.0\ \text{m})(10^3\,\text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)$

$= 2.36 \times 10^7\ \text{N}$ ตอบ (a)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

b. ข้อมูล : $A = 2\pi rh$ (พื้นที่ด้านข้างของทรงกระบอก)b

สมการพื้นฐาน : $F = PA$

สมการทำการ : $F = \left[P_{\text{เฉลี่ย}}\right]A$ (ดูตัวอย่าง 11.2)

$$= \left[\tfrac{1}{2}\rho gh\right]\cdot 2\pi rh$$

$$F = \pi r\rho gh^2$$

แทนค่า $$= \pi(8.0\text{ m})(10^3\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(12.0\text{ m})^2$$

$$= 3.55\times 10^7\text{ N}$$ ตอบ (b)

c. ข้อมูล F (จากข้อ a.) $= 2.36\times 10^7\text{ N}$

$$A = \pi r^2, P = ?$$

สมการพื้นฐาน : $$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2}$$

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

แทนค่า : $$P = \frac{(2.36\times 10^7\text{ N})}{\pi(8.0\text{ m})^2}$$

$$= 1.17\times 10^5\text{ N/m}^2$$

$$= 117\text{ kPa}$$ ตอบ (c)

d. ข้อมูล : h = 12.0m+40.0m=52.0m

สมการพื้นฐาน : $P = \rho gh$

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

แทนค่า : $P = (10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(52.0 \text{ m})$

$= 5.10 \times 10^5$ N/m

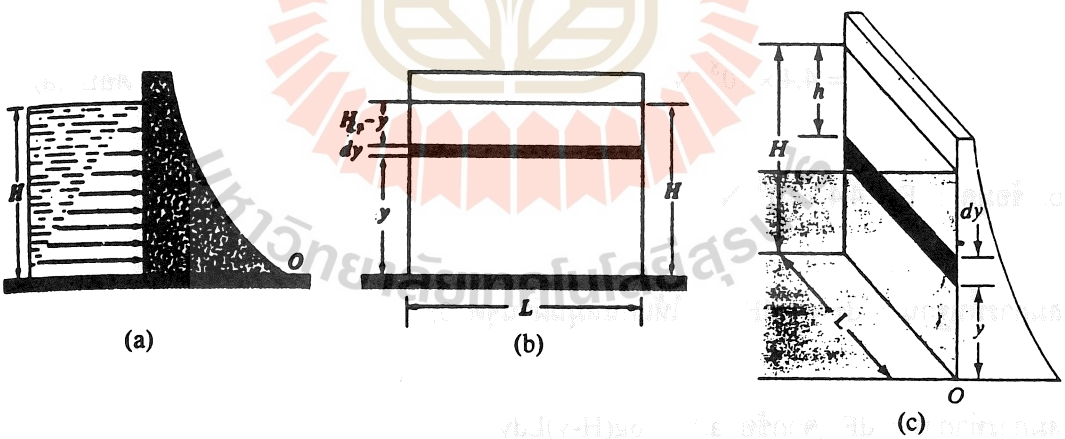
= 510 kPa ตอบ (d)

ตัวอย่าง 11.2 เขื่อนกั้นน้ำยาว 100 เมตร กักน้ำที่มีระดับสูง H = 30 เมตร จากพื้นเขื่อนดังรูป 11.6 จงหา

a. แรงลัพธ์ทั้งหมดที่น้ำกระทำที่เขื่อนเท่ากับเท่าไร

b. จงหาทอร์กทั้งหมด

c. แนวกระทำของแรงลัพธ์อยู่เหนือระดับของฐานเขื่อนเท่าไร



รูป 11.6 ความดันของน้ำที่เขื่อน จากโจทย์ตัวอย่าง 11.2

วิธีทำ

ข้อมูล : H = 30 m, L = 100 m

a. สมการพื้นฐาน : $P = \dfrac{dF}{dA}$; $P = \rho gh$; $h = H - y$

สมการทำการ : $dF = PdA \; ; \; dA = Ldy$

$$F = \int_0^H \rho g(H-y)Ldy$$

$$= \rho gL\left[\int_0^H Hdy - \int_0^H ydy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho gLH^2$$

$$= \left|\rho g\frac{H}{2}\right|[LH]$$

จะเห็นว่า แรงทั้งหมดที่ทำที่เขื่อนคือ ความดันเฉลี่ย $P_{เฉลี่ย} = \rho g\frac{H}{2}$ คูณกับพื้นที่เขื่อน $A = LH$ ที่รับน้ำ

แทนค่า $F = \frac{1}{2}(10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})(30 \text{ m})^2$

$$= 4.4 \times 10^8 \text{ N}$$

ตอบ (a)

b. ข้อมูล : $F = 4.4 \times 10^8$ N

สมการพื้นฐาน : $d\tau = ydF$ (ให้แกนหมุนผ่านจุด 0)

สมการทำการ : dF (จากข้อ a.) $= \rho g(H-y)Ldy$

$$\tau = \int_0^H y\rho g(H-y)Ldy$$

$$= \rho gL\left[\int_0^H Hydy - \int_0^H y^2dy\right]$$

$$= \rho gL\frac{H^3}{6}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho g H^2\right]\frac{H}{3} = F\cdot\frac{H}{3}$$

แทนค่า $$\tau = (4.4\times10^8\,\mathrm{N})\left(\frac{30}{3}\mathrm{m}\right)$$

$$= 4.4\times10^9\ \mathrm{N\cdot m}$$

c. **สมการพื้นฐาน** : $\tau = Fr$

สมการทำการ : เทียบฟอร์มกับสมการ

$$\tau = F\cdot\frac{H}{3}$$

จะเห็นว่า $$r = \frac{H}{3}$$

แทนค่า : $$r = \frac{30.0}{3}\mathrm{m} = 10.0\mathrm{m}$$

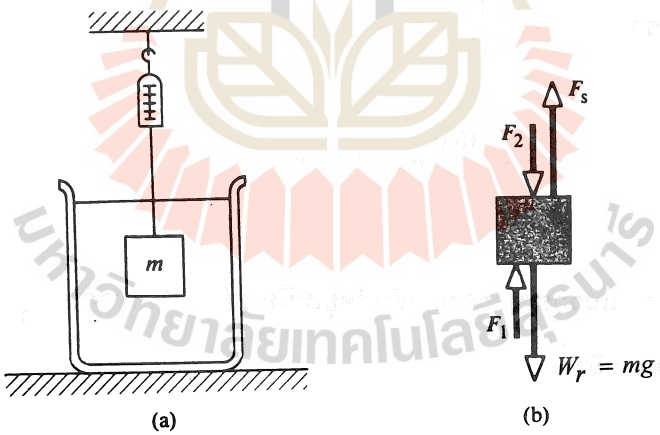
แสดงว่า แนวกระทำของแรงลัพธ์อยู่เหนือระดับ 0 เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ของความลึกหรือ $\frac{2}{3}$ ของความลึกวัดจากผิวน้ำ ตอบ (c)

11.1.2 **หลักของอาร์คิมีดีส** (Archimedes Principle) พิจารณาวัตถุก้อนหนึ่งมีน้ำหนักในอากาศซึ่งจะเรียกว่า น้ำหนักจริง W_r (r = real) เมื่อนำไปแขวนจากตาชั่งสปริงโดยให้วัตถุทิ้งก้อนจมอยู่ในของไหลนั้น จะปรากฏว่าน้ำหนักของวัตถุที่อ่านจากตาชั่งมีค่าน้อยกว่า W_rจะเรียกน้ำหนักที่อ่านจากตาชั่งเมื่อวัตถุอยู่ในของไหลว่าน้ำหนักปรากฏ W_a (a = apparent) การที่ W_aน้อยกว่า W_r นั้น ก็เนื่องจากของไหลออกแรงลัพธ์ต่อวัตถุในทิศทางขึ้น เราจะเรียกแรงนี้ว่า **แรงลอยตัว** (Buoyant force **หรือ** Buoyancy) แทนด้วย B ขนาดของแรงลอยตัวเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูก

แทนที่ด้วยวัตถุ ซึ่งเรียกว่า **หลักของอาร์คิมีดีส** (Archimedes's principle) ซึ่งมีใจความว่า "เมื่อวัตถุทั้งก้อนหรือเพียงบางส่วนจมในของไหล ของไหลจะออกแรงต่อวัตถุในทิศขึ้น ซึ่งแรงนี้จะมีขนาดเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่" แรงลอยตัวจะกระทำต่อวัตถุในทิศขึ้น

เพื่อทำความเข้าใจหลักของอาร์คิมีดีส พิจารณาแรงภายนอกทุกแรงที่กระทำกับวัตถุที่จมอยู่ในของไหลในรูป 11.7 (a) ซึ่ป ระกอบไปด้วย F_s แรงเนื่องจากสปริงตาชั่ง (ซึ่งก็คือ น้ำหนักปรากฏ W_a นั่นเองกระทำในทิศขึ้น น้ำหนักจริง W_r กระทำในทิศทางลง F_1 เป็นแรงของของไหลที่กระทำกับส่วนล่างของวัตถุมีทิศขึ้น และ F_2 เป็นแรงที่ของไหลกระทำกับส่วนบนของวัตถุมีทิศลง ดังรูป 11.7 (b) ในกรณีเช่นนี้สเกลของตาชั่งจุอ่านน้ำหนักน้อยกว่าน้ำหนักจริง (ถ้าไม่มีของไหลตาชั่งจะอ่านน้ำหนักจริง $F_s = W_r$) นั่นคือ ขนาดของ F_1 ที่ส่วนล่างต้องมากกว่า F_2 ที่ส่วนบน ผลต่างของแรงคือ แรงลอยตัวนั่นเอง

$$B = F_1 - F_2 \qquad (11.13)$$



รูป 11.7 (a) ตาชั่งอ่านน้ำหนักของวัตถุเมื่ออยู่ในของไหลได้น้อยกว่าน้ำหนักจริง
(b) แผนภาพของแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุ

ถ้าเราจะเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง W_r, W_a, และ B จะเขียนได้ดังนี้

$$W_a = W_r - B \qquad (11.14)$$

ค่าของแรงลอยตัว B อาจหาจากสมการ 11.13 โดยสมมติว่า วัตถุมีพื้นที่ด้านบนและด้านล่างเท่ากัน และเท่ากับ A วัตถุมีความหนา h ดังนั้น ปริมาตรของวัตถุคือ V และเท่ากับปริมาตรของของไหลที่ถูกแทนที่ $V_f \lfloor V = V_f \rfloor$ ดังนั้น

$$B = F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)A = \rho_f ghA$$

$$= \rho_f V_f g = m_f g \qquad (11.15)$$

เมื่อ ρ_f และ m_f คือ ความหนาแน่นและมวลของของไหลที่ถูกแทนที่ตามลำดับ $m_f g$ ก็คือน้ำหนักของของไหลที่ถูกแทนที่ ถ้าเราพิจารณาแรงลอยตัวของวัตถุในของไหล 2 กรณี คือ

1. **วัตถุจมในของไหล** ถ้าให้ ρ_x และ V_x เป็นความหนาแน่นและปริมาตรของวัตถุตามลำดับ $W_r = \rho_x V_x g$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า $V_x = V_f$ สมการ 8.14, 8.15 อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$W_a = (\rho_x - \rho_f)V_x g$$

$$B = \rho_f V_x g \qquad (11.16)$$

(ในกรณีนี้ ρ_x มีค่ามากกว่า ρ_f)

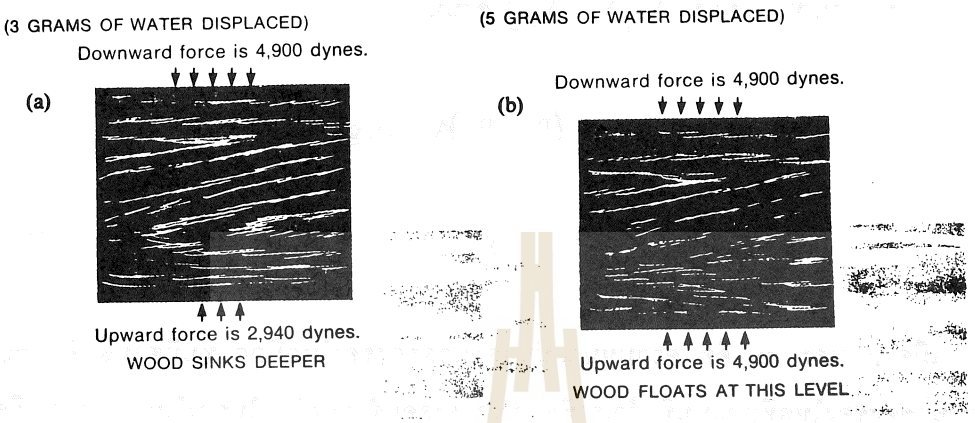
2. **วัตถุลอยในของไหล** ในกรณีนี้น้ำหนักปรากฏ W_a เท่ากับศูนย์ ดังรูป 11.8 สมการ 11.14 จึงเขียนได้เป็น

$$W_r = B \qquad (11.17)$$

และในกรณีนี้ปริมาตรของวัตถุที่แทนที่ของไหลเป็นเพียงบางส่วนเท่านั้น คือเฉพาะ V_1 ($V_f = V_1$) ซึ่งปริมาตรของวัตถุทั้งหมด $V_x = V_1 + V_2$ ดังนั้น สมการ 11.17 อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\rho_x V_x g = \rho_f V_1 g$$

หรือ $$\frac{\rho_x}{\rho_f} = \frac{V_l}{V_x}$$



รูป 11.8 (a), (b) วัตถุลอยในของไหล

ตัวอย่าง 11.3 อะลูมิเนียมแผ่นหนึ่งมีมวล 1 กิโลกรัม ความหนาแน่น แขวนจากตาชั่งสปริง จงหาว่าตาชั่งสปริงจะอ่านค่าเท่าไร ถ้าหย่อนอะลูมิเนียมทั้งแผ่นลงในน้ำ

วิธีทำ

ข้อมูล : $m_x = 1\text{kg}, \rho_x = 2.7 \times 10^3 \ \text{kg/m}^2$

$$\rho_f = 10^3 \ \text{kg/m}^3, W_a = ?$$

สมการพื้นฐาน : $V_x = \frac{m_x}{\rho_x}$

$$W_a = W_r - B$$

สมการทำการ : $W_a = (\rho_x - \rho_f)V_x g$

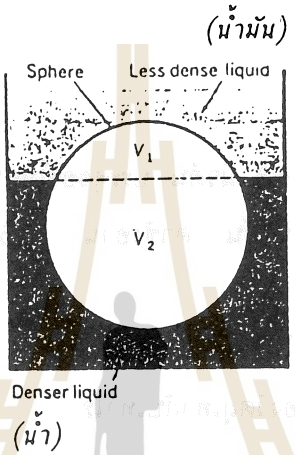
$$= (\rho_x - \rho_f)\frac{m_x}{\rho_x} g$$

$$W_a = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_x}\right) m_x g$$

แทนค่า : $$W_a = \left(1 - \frac{10^3 kg/m^3}{2.7 \times 10^3 kg/m^3}\right) 1kg \times 9.8 m/s^2$$

= 6.2 N ตอบ

ตัวอย่าง 11.4 ทรงกลมรัศมี 12 เซนติเมตร จมอยู่ในของเหลว 2 ชนิดคือ น้ำและน้ำมัน ดังรูป 11.9 โดยจมอยู่ในน้ำ 80% ถ้าความหนาแน่นของน้ำมันเท่ากับ $0.6 \times 10^3 kg/m^3$ จงหาน้ำหนักของทรงกลม



รูป 11.9 จากโจทย์ตัวอย่าง 11.4

วิธีทำ ในกรณีเช่นนี้ $B = W_r$

ข้อมูล : $\rho_1 = 0.6 \times 10^3 \ kg/m^3$

$\rho_2 = 1 \times 10^3 \ kg/m^3$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0.12m)^3$$

$$V_1 = 0.20V, \ V_2 = 0.80 \ V$$

สมการพื้นฐาน : $W_r = B$

สมการทำการ : $W_r = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g$

$$= 0.20V\rho_1 g + 0.80V\rho_2 g$$

$$= \left|0.20\rho_1 + 0.80\rho_2\right| Vg$$

แทนค่า : $W_r = \left[0.20 \times 0.6 \times 10^3 \text{kg/m}^3 + 0.80 \times 10^3 \text{kg/m}^3\right] \frac{4}{3}\pi(0.12\text{m})^3(9.8\text{m/s}^2)$

= 65.26 N ตอบ

ตัวอย่าง 11.5 ถังหนัก 9.8 นิวตัน บรรจุของไหลหนัก 14.7 นิวตัน แรงตึงของเชือกในรูป 11.10 เท่ากับ 24.5 นิวตัน ตาชั่งอ่าน 73.5 นิวตัน ปริมาตรของวัตถุเท่ากับ 2.7×10^{-3} เมตร^3 จงหา

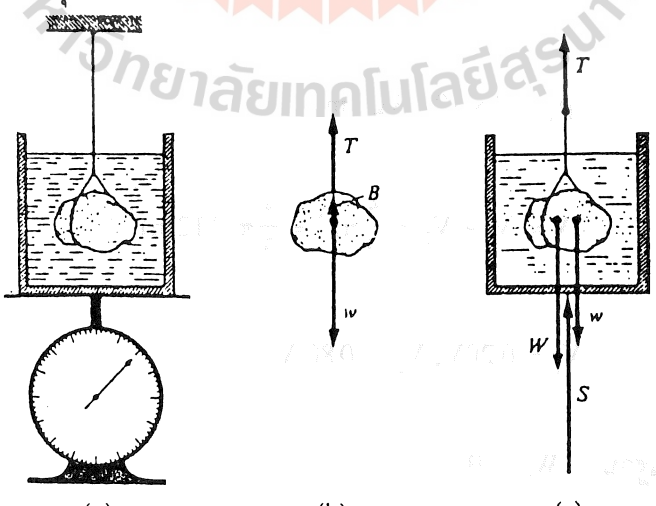
a. ความหนาแน่นของของไหลและแรงลอยตัว

b. น้ำหนักจริงในอากาศของวัตถุเท่ากับเท่าไร

ข้อมูล : กำหนดให้น้ำหนักของถังรวมกับน้ำหนักของของไหล = W = 9.8 N + 14.7N = 24.5 N แรงตึงในเส้นเชือก T = 24.5 N, ตาชั่งอ่านน้ำหนัก S = 73.5 N, $V_x = 2.7 \times 10^{-3}$ m^3 , w เป็นน้ำหนักจริงของวัตถุ ($w = W_r$ = ?), ρ_f = ?

สมการพื้นฐาน : จากแผนภาพ รูป 11.10 (b)

พิจารณาแรงที่วัตถุ



(a) (b) (c)

รูป 11.10 จากโจทย์ตัวอย่าง 11.5

$$T = w\text{-}B \qquad (1)$$

พิจารณาทั้งระบบ

$$\sum F_{up} = \sum F_{down}$$

$$T + S = w + W \qquad (2)$$

เอาสมการแรกมาลบออก จะได้

$$S = W + B \qquad (3)$$

สมการทำการ :

จาก (3) $B = S - W$

$$V_x \rho_f g = S - W = B;\ V_f = V_x$$

$$\rho_f = \frac{B}{V_x g}$$

จากสมการ (1) $w = T + B$

แทนค่า : $B = 73.5\ N - 24.5\ N = 49\ N$

$$\rho_f = \frac{49N}{(2.7 \times 10^{-3}\ m^3)(9.8\ m/s^2)}$$

$$= 1.85 \times 10^3 kg/m^3 \qquad \text{ตอบ (a)}$$

$$w = 24.5\ N + 49\ N$$

$$= 73.5\ N \qquad \text{ตอบ (b)}$$

11.1.3 หลักของปาสคัล จากความเป็นจริงที่เราได้กล่าวมาแล้วว่า ความดันในของไหลขึ้นอยู่กับความลึก ถ้าเพิ่มความดันที่ผิวของของไหล จะถูกส่งถ่ายผ่านเนื้อของของไหลไปยังทุกๆ จุด ในเนื้อของของไหลนั้น หลักนี้ค้นพบโดยนักวิทยาศาสตร์ชื่อ ปาสคัล เรียกว่า หลักของปาสคัล (Pascal's Principle) ซึ่งมีใจความว่า "ถ้าให้ความดันแก่ส่วนหนึ่งส่วนใดของของไหลที่อยู่ในภาชนะปิดใดๆ ความดันจะถูกส่งผ่านไปยังทุกๆ ส่วนของของไหล และที่ผนังของภาชนะซึ่งบรรจุของไหลด้วยขนาดเท่ากันตลอด"

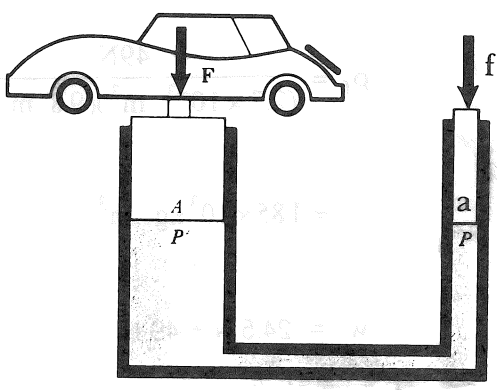
ตัวอย่างการประยุกต์หลักของปาสคัลคือ เครื่องอัดไฮดรอลิก ดังรูป 11.11 เมื่อออกแรง f ที่ลูกสูบอันเล็กพื้นที่หน้าตัด a จะเกิดความดัน $P = \frac{f}{a}$ ส่งผ่านไปตลอดทุกส่วนในของไหลซึ่งมีต่อไปยังลูกสูบใหญ่ พื้นที่หน้าตัด A ที่ลูกสูบใหญ่ จึงมีความดันเท่ากับ P เช่นกัน และเกิดแรง $F = PA$ ดังสมการ

$$P = \frac{f}{a} = \frac{F}{A}$$

หรือ

$$F = \frac{A}{a} \cdot f \qquad (11.18)$$

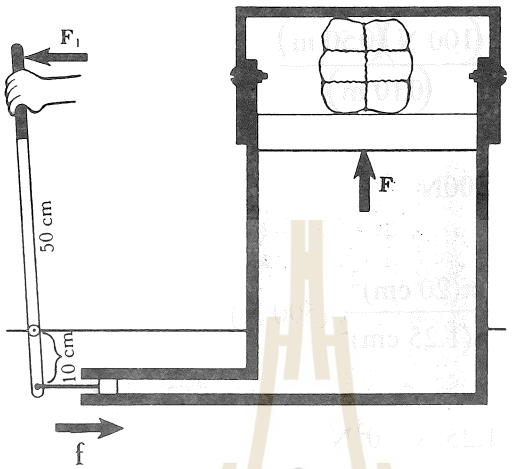
จะเห็นว่า เราทำให้ F ใหญ่มากเท่าใดก็ได้ที่ปลอดภัยและสะดวก แต่ถ้าลูกสูบใหญ่มากๆ ต้องใช้ของไหลมากและเสียเวลามาก



รูป 11.11 แผนภาพของไฮดรอลิก

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 11.6 เครื่องอัดดังรูป 11.12 ลูกสูบเล็กรัศมี 1.25 เซนติเมตร ลูกสูบใหญ่รัศมี 20 เซนติเมตร คนงานออกแรงกดที่คานห่างจากจุดหมุน 50 เซนติเมตร ด้วยแรง 100 นิวตัน จงหาแรงอัดที่ฟอนกระดาษหนังสือพิมพ์ (สมมติว่าประสิทธิภาพ 100%)



รูป 11.12 เครื่องอัดไฮดรอลิก

วิธีทำ ข้อมูล : $F_1 = 100\ N$

$r_1 = 0.50\ m, \quad r = 1.25\ cm$

$r_2 = 0.10m, \quad R = 20\ cm$

$f = ?$

$a = \pi r^2 = \pi(1.25cm)^2$

$A = \pi R^2 = \pi(20cm)^2$

$F = ?$

สมการพื้นฐาน : คานมีประสิทธิภาพ 100%

$$fr_2 = F_1 r_1$$

$$F = \frac{A}{a} f$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สมการทำการ :

$$f = F_1 r_1 / r_2$$

$$= \frac{(100\ \text{N})(0.50\ \text{m})}{(0.10\ \text{m})}$$

$$= 500\text{N}$$

$$F = \frac{\pi(20\ \text{cm})^2}{\pi(1.25\ \text{cm})^2}(500\ \text{N})$$

$$= 1.25 \times 10^5 \text{N}$$

จะเห็นว่าคนงานออกแรง 100 N (ภาษาพูดคือ 10 กิโลกรัม) ทำให้เกิดแรงกดที่ฟอนกระดาษหนังสือพิมพ์ประมาณ 13×10^4 N (ภาษาพูดคือ 13 ตัน)

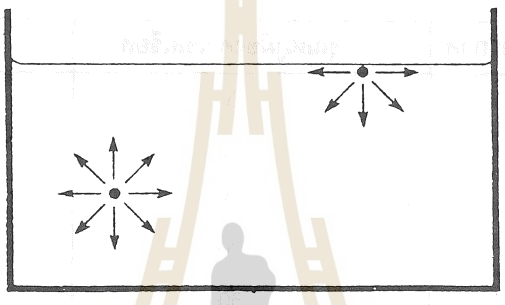
11.1.4 **แรงเชื่อมแน่นและแรงยึดติด** (Cohesion and Adhesion) สสารในสถานะของเหลวนั้นโมเลกุลอยู่ใกล้ชิดติดกัน แต่ยังมีอิสระที่จะสลับกันได้ โมเลกุลถูกยึดด้วยแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล ซึ่งสามารถแยกแรงออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. แรงเชื่อมแน่น (cohesion หรือ cohesive force) คือ แรงดึงดูดของโมเลกุลของสารชนิดเดียวกัน เช่น โมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของน้ำ โมเลกุลของปรอทกับโมเลกุลของปรอท โมเลกุลของแก้วกับโมเลกุลของแก้ว เป็นต้น

2. แรงยึดติด (adhesion หรือ adhesive force) คือ แรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของสารต่างชนิดกัน เช่น โมเลกุลของกาวกับโมเลกุลของไม้ โมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของแก้ว เป็นต้น

ถ้านำของแข็งไปสัมผัสกับของเหลว ของเหลวจะเกาะติดของแข็งหรือทำให้ของแข็งเปียกถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น เช่น หยดน้ำเปียกหนังสือพิมพ์ หยดน้ำเปียกแก้ว น้ำสบู่เปียกเสื้อผ้า แต่ของเหลวจะไม่เกาะของแข็งหรือทำให้ของแข็งเปียก ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด เช่น หยดปรอทบนกระดาษหนังสือพิมพ์ไม่ทำให้หนังสือพิมพ์เปียก เป็นต้น

11.1.5 ความตึงผิว (Surface Tension) ในหัวข้อ 11.1.2 เราทราบว่า วัตถุที่มีความหนาแน่นมากกว่าของไหล จะจมในของไหล แต่เราอาจจะเคยเห็นเข็มเย็บผ้าเช็ดให้ แห้ง หรือใบมีดโกนเช็ดแห้ง ค่อยๆ จับวางบนผิวน้ำอย่างบรรจง จะสามารถลอยนิ่งอยู่บนผิวน้ำได้ แม้ว่าเข็มหรือใบมีดโกนจะมีความหนาแน่นมากกว่าน้ำถึง 10 เท่า หรือแมลงบางชนิดสามารถเดินบนน้ำได้ ปรากฏการณ์เหล่านี้เป็นผลเนื่องมาจากความตึงผิว ซึ่งเป็นผลของแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลของของเหลว ช่วยยึดให้โมเลกุลอยู่ใกล้กัน



รูป 11.13 แรงที่กระทำกับโมเลกุลภายในและที่ผิวของของไหล

พิจารณาโมเลกุลของของเหลว (ดังรูป 11.13) ล่างซ้าย ในภาชนะจะเห็นว่าโมเลกุลนี้ถูกล้อมรอบด้วยโมเลกุลชนิดเดียวกัน เกิดแรงเชื่อมแน่นกับโมเลกุลรอบข้างทุกทิศทุกทางเท่ากันหมด แรงลัพธ์จึงเท่ากับศูนย์ ส่วนโมเลกุลที่อยู่ทางบนขวาอยู่ติดผิวของของเหลว ซึ่งอยู่ระหว่างตัวกลางสองชนิดคือ อากาศกับของเหลว จึงมีแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลของของเหลวด้วยกัน และแรงยึดติดระหว่างโมเลกุลนี้กับโมเลกุลของอากาศ ในกรณีนี้แรงยึดติดจะมีค่าน้อยกว่าแรงเชื่อมแน่น เนื่องจากโมเลกุลของอากาศมีจำนวนน้อยกว่าโมเลกุลของของเหลวที่อยู่ใกล้กัน ทำให้เกิดแรงลัพธ์ในทิศทางลงสู่ของเหลว ทุกโมเลกุลที่อยู่ที่ผิวหรือใกล้ผิวของของเหลวก็อยู่ในสภาพนี้ ผลก็คือทำให้เกิดความเค้นบนผิวของของเหลว เรียกว่า ความตึงผิว (surface tension) ซึ่งแทนด้วย γ (อ่านว่า gamma) นิยามว่า

ความตึงผิว หมายถึง อัตราส่วนของแรงที่กระทำไปตามผิวของของเหลวต่อความยาวของผิวที่ถูกแรงกระทำ ความยาวนี้ต้องตั้งฉากกับแรงด้วย เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\gamma = \frac{F}{L} \tag{11.19}$$

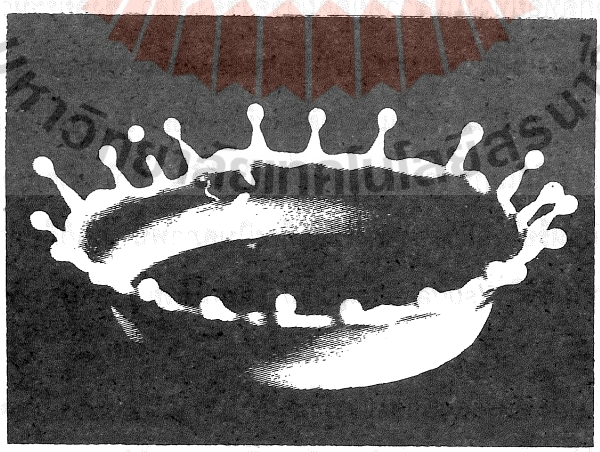
หน่วยของความตึงผิวคือ นิวตัน/เมตร

ค่าความตึงผิวของของเหลวบางชนิดที่อุณหภูมิต่างๆ แสดงไว้ในตาราง 11.2

รูป 11.14 แสดงผลของความตึงผิว ทำให้เกิดรูปลักษณะการกระเด็น เมื่อหยดน้ำนมลงบนผิวของน้ำนม

ตาราง 11.2 ค่าที่ได้จากการทดลองของความตึงผิว

ของเหลวเมื่อสัมผัสกับอากาศ	อุณหภูมิองศาเซลเซียส	ความตึงผิว 10^{-3} N.m^{-1}
กลีเซอรีน	20	63.1
คาร์บอนเตตระคลอไรด์	20	26.8
น้ำ	0	75.6
น้ำ	20	72.8
น้ำ	60	66.2
น้ำ	100	58.9
น้ำสบู่	20	25.0
เบนซิน	20	28.9
ปรอท	20	465.0
เอทิลแอลกอฮอล์	20	22.3



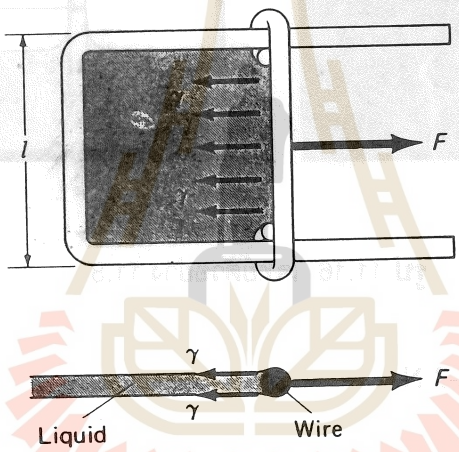
รูป 11.14 ผลของความตึงผิวเมื่อหยดน้ำนมลงบนผิวของน้ำนม

ตัวอย่าง 11.7 ถ้าต้องออกแรง $F = 4.1 \times 10^{-3}$ นิวตัน ในการเคลื่อนลวดซึ่งยาว $\ell = 6$ เซนติเมตร ตามรางรูปเกือกม้า ดังรูป 11.15 จงหาความตึงผิวของของเหลว

วิธีทำ ข้อมูล : $F = 4.1 \times 10^{-3}$ N

พิจารณาผิวของของเหลวทั้งสองด้านที่กระทำกับลวด (รูป 11.15) จะเห็นว่า

ความยาวทั้งหมด $L = 2\ell = 2 \times 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$



รูป 11.15 รางรูปเกือกม้า (รูปตัวยู) สำหรับวัดความตึงผิวของฟิล์มบาง

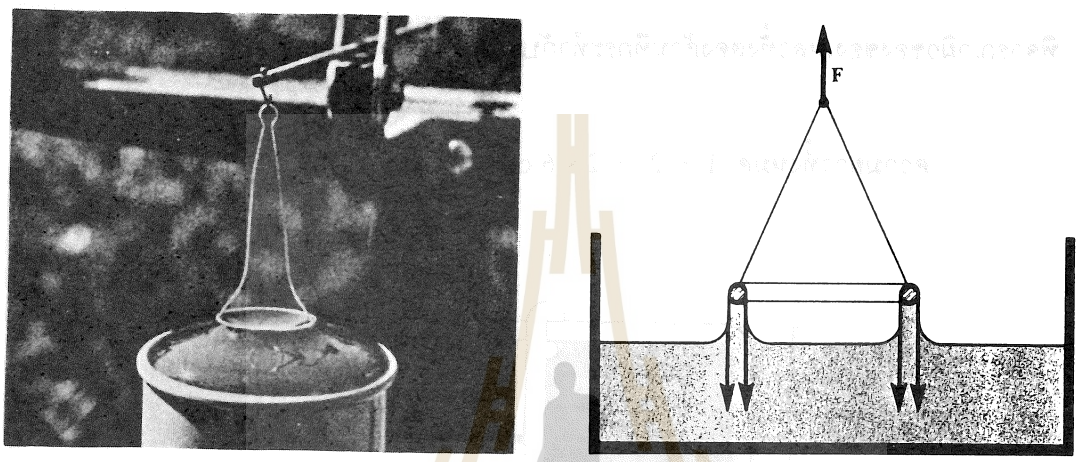
สมการพื้นฐาน : $\gamma = \dfrac{F}{L}$

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

$$\gamma = \frac{4.1 \times 10^{-3} \text{ N}}{0.12 \text{ m}}$$

$$= 3.4 \times 10^{-2} \text{ N/m}$$

ตัวอย่าง 11.8 ในการหาค่าความตึงผิวของน้ำมันดิบ โดยใช้กำลังวงแหวนบางผูกห้อยเป็นสาแหรก ดังรูป 11.16 (a) วงแหวนมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 75 มิลลิเมตร มีมวล 1×10^{-3} กิโลกรัม เมื่อดึงวงแหวนขึ้นจากน้ำมัน ปรากฏว่าต้องใช้แรง 18.43×10^{-3} นิวตัน ดึงให้ของวงแหวนหลุดจากน้ำมันได้พอดี จงหาความตึงผิว



รูป 11.16 โจทย์ตัวอย่าง 11.8

วิธีทำ ข้อมูล : $F = 18.43 \times 10^{-3}$ N

$$W = (1 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 9.8 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F' = F - W = 8.63 \times 10^{-3} \text{ N}$$

พิจารณาจากรูป 11.16 (b) จะเห็นว่า ผิวของน้ำมันกระทำกับขอบทั้งสองด้านของวงแหวน นั่นคือ ความยาวทั้งหมดจะเท่ากับสองเท่าของเส้นรอบวง (ค่าประมาณ เพราะวงแหวนบางมาก)

หรือ $L = 2(2\pi r)$

เมื่อ 2r คือ เส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 75 มิลลิเมตร

ดังนั้น $L = 2\pi(0.075 \text{ m})$

$= 0.15\pi$ m

สมการพื้นฐาน : $\gamma = \frac{F}{L}$

สมการทำการ : ในที่นี้ แรงคือ F'

$$\gamma = \frac{F'}{L}$$

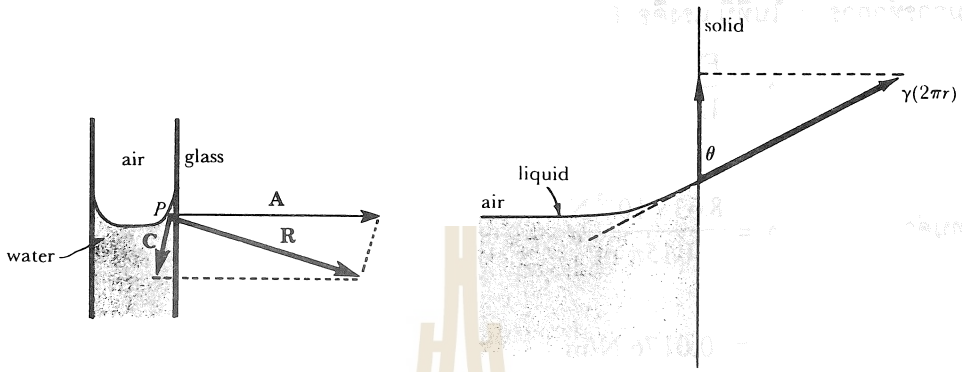
แทนค่า : $$\gamma = \frac{8.63 \times 10^{-3}\,N}{0.15\pi\,m}$$

$$= 0.0176\ N/m$$

$$= 16.6 \times 10^{-3}\ N/m$$

11.1.6 **มุมสัมผัส** (Contact Angle) ในหัวข้อ 11.5 รูป 11.13 เราพิจารณาโมเลกุลภายในของของเหลวและโมเลกุลที่ผิวโดยทั่วไป ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาโมเลกุลที่ผิวติดกับของภาชนะ (ของแข็ง) จากรูป 11.17 (a) โมเลกุลของน้ำที่จุด P ถูกกระทำด้วยแรง คือ แรงเชื่อมแน่น C จากโมเลกุลของน้ำที่อยู่ใกล้ชิดติดกัน แรงยึดติด A ระหว่างโมเลกุล P กับโมเลกุลของแก้ว และแรงยึดติดระหว่างโมเลกุล P กับโมเลกุลของอากาศซึ่งมีค่าน้อยไป จึงไม่นำมาคิด แรงยึดติดระหว่างโมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของเหลวมีค่ามากกว่าแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลของน้ำกับโมเลกุลของน้ำมากนั่นเป็นเหตุผลที่ว่า ทำไมแก้วเปียกน้ำ ดังนั้น R เป็นแรงลัพธ์ น้ำหรือของเหลวจะต้องจัดตัวจนกว่าผิวของมันจะตั้งได้ฉากกับแรงลัพธ์ เพราะว่าถ้ามีแรงขนานกับผิวของของเหลว ของเหลวนั้นก็จะไหล (นั่นเป็นเหตุผลที่ว่า ทำไมผิวน้ำในทะเลสาป ทะเล มหาสมุทร จึงอยู่ในแนวราบ ซึ่งตั้งได้ฉากกับแรงโน้มถ่วง) ดังนั้น น้ำที่ใกล้ขอบแก้วจะเพิ่มระดับจนกระทั่งผิวของมันตั้งได้ฉากกับแรง R ดังรูป 11.17 (a) มุมที่เกิดจากเส้นสัมผัสกับผิวของของไหลที่ขอบติดกับของแข็ง ตัดกับเส้นสัมผัสกับขอบของของแข็ง เรียกว่ามุมสัมผัส (contact angle) แทนด้วย θ

จากรูป 11.17 (b) จะเห็นว่า ของเหลวกับของแข็งคู่ใด ถ้าแรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น มุมสัมผัสมีค่าดังนี้



รูป 11.17 (a) แสดงแรงลัพธ์ $\vec{R}$ ในกรณีที่แรงยึดติดมากกว่าแรงเชื่อมแน่น
(b) แสดงมุมสัมผัสมีค่าน้อยกว่า 90°

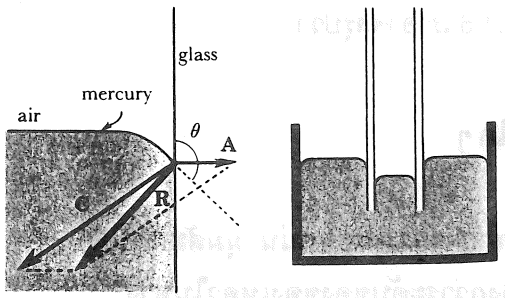
$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \tag{11.20}$$

ในทำนองตรงกันข้าม พิจารณาปรอทกับแก้ว ดังรูป 11.18 ซึ่งกรณีนี้แรงเชื่อมแน่น C มีค่ามากกว่าแรงยึดติด A มาก แรงลัพธ์ R มีทิศดังรูป ผิวของปรอทที่ขอบติดกับแก้วจะต้องโค้งลงเพื่อให้ตั้งได้ฉากกับแรงลัพธ์ R ในกรณีนี้จะเห็นว่ามุมสัมผัส θ มากกว่า 90° นั่นคือของเหลวและของแข็งคู่ใด ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \tag{11.21}$$

ในกรณีที่ $\theta = 90$ องศา แสดงว่าแรงยึดติดประมาณเท่ากับแรงเชื่อมแน่นจาก เช่น น้ำกับเงิน เป็นต้น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

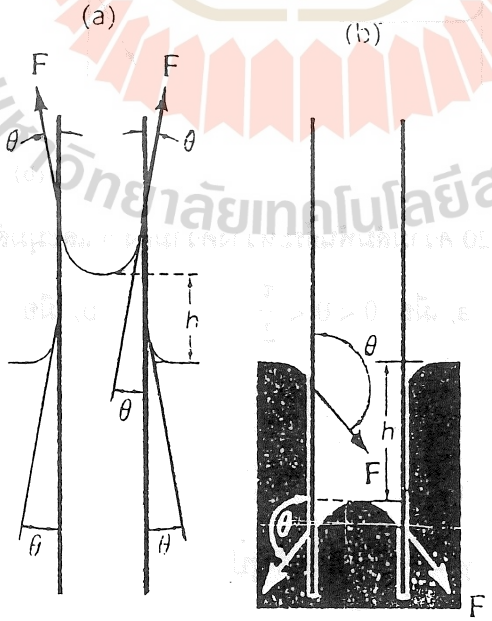


รูป 11.18 (a) แสดงแรงลัพธ์กรณีที่แรงเชื่อมแน่นมากกว่าแรงยึดติด
(b) แสดงระดับของของไหลจาก (a)

11.1.7 สภาพคะปิลลา ถ้าจุ่มหลอดแก้วรูเล็กมาก (cappillary tube) ลงในของเหลวในแนวดิ่ง ผลเนื่องจากความตึงผิวของของเหลวจะเกิดปรากฏการณ์อย่างหนึ่งอย่างใดใน 2 อย่างนี้ คือ

1. ระดับของของเหลวในหลอดแก้วรูเล็กจะสูงกว่าระดับของของเหลวในอ่าง เช่น น้ำ กับหลอดแก้ว รูป 11.19 (a)

2. ระดับของของเหลวในหลอดแก้วรูเล็กจะต่ำกว่าระดับของของเหลวในอ่าง เช่น ปรอท กับหลอดแก้ว รูป 11.19 (b) สภาพเช่นนี้เรียกว่า **สภาพคะปิลลา** (cappillarity)



รูป 11.19 (a) สภาพคะปิลลาเมื่อระดับของของไหลในหลอดสูงกว่าระดับของของไหลในอ่าง
(b) สภาพคะปิลลาเมื่อระดับของของไหลในหลอดต่ำกว่าระดับของของไหลในอ่าง

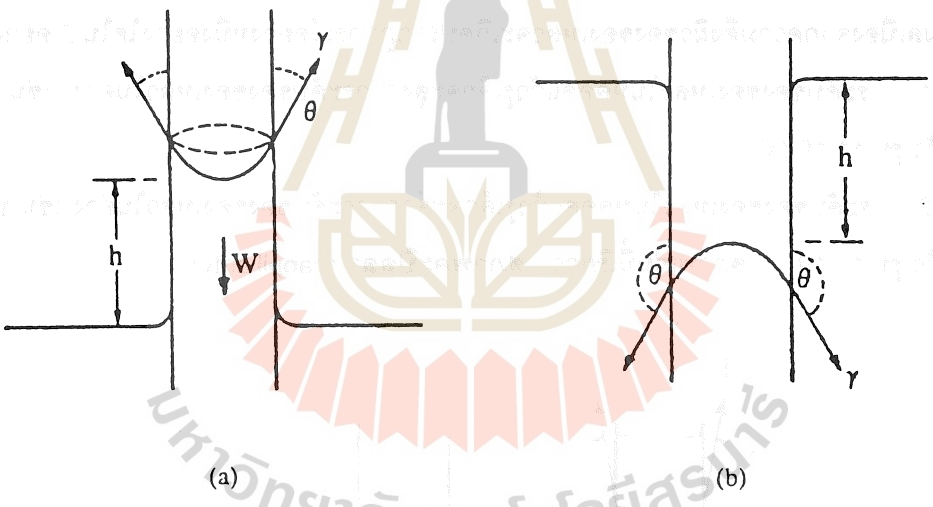
จากหัวข้อ 11.1.4, 11.1.5, 11.1.6 เราอาจสรุปว่า

สำหรับของแข็งของเหลวคู่ใด ๆ

ถ้าแรงยึดติดมีค่ามากกว่าแรงเชื่อมแน่น มุมสัมผัสมีค่า $0 < \theta < 90^\circ$ **ระดับของของเหลวในหลอดคะปิลลาจะสูงกว่าระดับของของเหลวในอ่าง**

ถ้าแรงเชื่อมแน่นมีค่ามากกว่าแรงยึดติด มุมสัมผัสมีค่า $90^\circ < \theta < 180^\circ$ **ระดับของของเหลวในหลอดคะปิลลาจะต่ำกว่าระดับของของเหลวในอ่าง**

ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง h (หรือความลึก) ของของเหลวในหลอดคะปิลลา และมุมสัมผัส อาจหาได้ดังนี้



รูป 11.20 ความสัมพันธ์ระหว่างความสูง h และมุมสัมผัส θ

(a) เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (b) เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

จากรูป 11.20 (a)

$$\gamma = \frac{F}{L};\ \gamma \text{ มีทิศดังรูป}$$

แรงดึงขึ้น $F_{up} = F\cos\theta$

$= 2\pi r\gamma\cos\theta$

แรงดึงลง คือน้ำหนัก W ของของเหลวในหลอด มีค่า

$W = mg = V\rho g$

$= \pi r^2 h\rho g$

ในภาวะสมดุล

$F_{up} = F_{down}$

$2\pi r\gamma\cos\theta = \pi r^2 h\rho g$

หรือ $$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r} \qquad (11.22)$$

จากสมการ 11.22 จะเห็นว่า

ถ้า $0 < \theta < 90^\circ$ แล้ว $\cos\theta > 0$, h มีค่าเป็นบวก ดังรูป 11.20 (a)

ถ้า $90^\circ < \theta < 180^\circ$ แล้ว $\cos\theta < 0$, h มีค่าเป็นลบ ดังรูป 11.20 (b)

ตัวอย่าง 11.9 ถ้าความหนาแน่นของน้ำมันพาราฟินมีค่าเท่ากับ 850 กิโลกรัม/เมตร^3 และมุมสัมผัสกับแก้ว 26 องศา เมื่อน้ำมันพาราฟินขึ้นไปในหลอดแก้วคะปิลลาสูง 11.4×10^{-3} เมตร รัศมีภายในหลอด 5×10^{-4} เมตร ให้หาสัมประสิทธิ์ของความตึงผิวของน้ำมันพาราฟิน

วิธีทำ ข้อมูล : $\rho = 850\ kg/m^3$ $\theta = 26^\circ$, $h = 11.4\times10^{-3}\,m$, $r = 5\times10^{-4}\,m$

สมการพื้นฐาน : $$y = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

สมการทำการ : $$\gamma = \frac{\rho g r y}{2\cos\theta}$$

แทนค่า :

$$\gamma = \frac{850 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-4} \times 11.4 \times 10^{-3}}{2\cos 26^{\circ}}$$

$$= \frac{850 \times 9.8 \times 5 \times 10^{-4} \times 11.4 \times 10^{-3}}{2 \times 0.899}$$

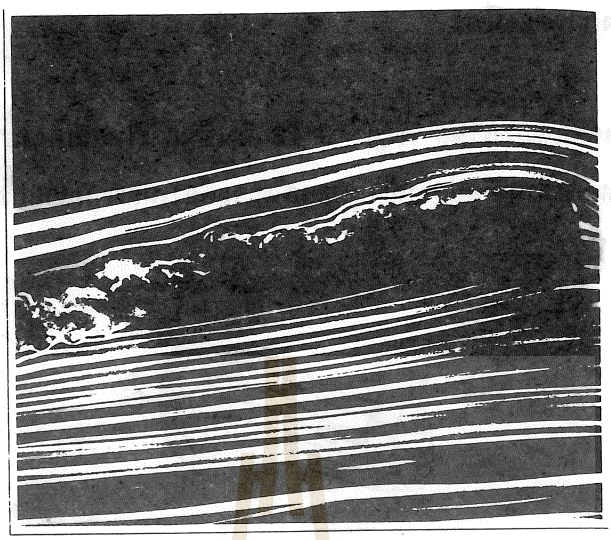
$$= 26.41 \times 10^{3} \quad \text{N/m}$$

11.2 พลศาสตร์ของของไหล

เป็นวิชาที่นับว่าเป็นวิชาหนึ่งในสาขากลศาสตร์ เป็นการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุผ่านของไหล หรือการเคลื่อนที่ของของไหลผ่านวัตถุ ซึ่งแรงที่เกี่ยวข้องจะขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างวัตถุกับของไหล แรงบนปีกเครื่องบนที่อยู่นิ่งในอุโมงค์ลมจะเหมือนกับแรงบนปีกเครื่องบินลำเดียวกันที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศที่อยู่นิ่ง ถ้ากำหนดว่า ความเร็วสัมพัทธ์และส่วนประกอบของอากาศ ความดัน อุณหภูมิเท่ากันทั้งสองกรณี

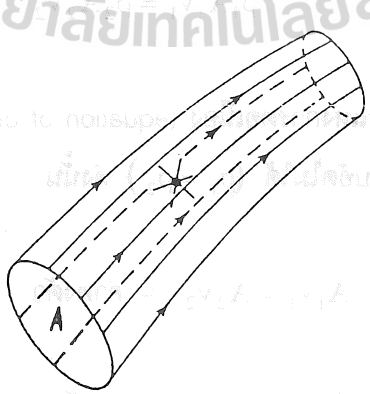
ในบทนี้จะศึกษากฎเกณฑ์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของของไหล โดยพิจารณาจากของไหลแบบที่เป็นอุดมคติ (ideal fluid) ซึ่งจะถือว่าของไหลอุดมคติมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ของไหลที่ไม่มีแรงเสียดทานภายในระหว่างของของไหล หรือไม่มีความหนืด (nonviscous) มอดุลัสเกือบเท่ากับศูนย์
2. ของไหลแบบที่อัดไม่ได้ (incompressible) หมายความว่า ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงตัว
3. การไหลของของไหลเป็น การไหลแบบคงตัว (steady flow) การไหลแบบคงตัวหมายถึง ความเร็ว ความหนาแน่น และความดันที่จุดหนึ่งจุดใดในของของไหลไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา
4. การไหลต้องเป็นการไหลแบบไม่หมุน (irrotational flow) หมายความว่า ที่ตำแหน่งใดๆ จะต้องไม่มีความเร็วเชิงมุมของของไหล การไหลที่มีการหมุนจะเกิด turbulence ดังรูป 11.21



รูป 11.21 สายกระแสและการไหลแบบปั่นป่วนรอบปีกเครื่องบิน

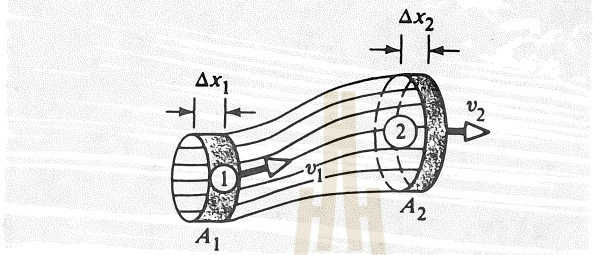
สายกระแส (steam line) คือ เส้นโค้งซึ่งเส้นสัมผัส ณ จุดใด ๆ ของเส้นโค้งนี้จะอยู่ในทิศของความเร็วของของไหล ณ จุดนั้น ถ้าเป็นการไหลอย่างมีระเบียบ เส้นกระแสซ้อนกันกับเส้นแห่งการไหล ถ้าเราเขียนสายกระแสหลายๆ เส้นผ่านเส้นรอบรูปอันหนึ่ง ดังรูป 11.22 ซึ่งเราเรียกว่า หลอดแห่งการไหล (tube of flow) ในรูปจะเห็นกังหันเล็ก ๆ ซึ่งจะอยู่นิ่ง ถ้าการไหลเป็นแบบไม่หมุน ตามข้อ 4 ตามนิยามของสายกระแสของไหลไม่อาจไหลขวางหลอดแห่งการไหลได้ ในกรณีการไหลอย่างมีระเบียบจะไม่มีการผสมกันระหว่างของไหลในหลอดแห่งการไหลที่อยู่คนละหลอด



รูป 11.22 หลอดแห่งการไหล

11.2.1 สมการแห่งการต่อเนื่อง

พิจารณาหลอดแห่งการไหล ดังรูป 11.23 ซึ่งเป็นการไหลแบบสถานะคงตัว (steady state flow) ทุก ๆ อนุภาคในของไหลที่อยู่ตรงสายกระแสใด จะต้องไหลตามสายกระแสนั้น



รูป 11.23 หลอดแห่งการไหลที่มีการไหลแบบสถานะคงตัว

สมมติว่า เมื่อเวลาผ่านไป Δt ของไหลที่ปลายล่างเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$ ให้ A_1 เป็นพื้นที่หน้าตัดของหลอดแห่งการไหลในย่านนี้ ดังนั้น มวลของของไหลที่ปลายล่างในส่วนที่แรเงาคือ $\Delta M_1 = \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ ในทำนองเดียวกัน ของไหลที่เคลื่อนที่ปลายบนของหลอดแแห่งการไหลเมื่อเวลาผ่านไป Δt คือ $\Delta M_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$ อย่างไรก็ดี มวลของของไหลมีค่าคงตัว และเพราะว่าการไหลเป็นแบบคงตัว นั่นคือมวลที่ผ่าน A_1 ในเวลา Δt ต้องเท่ากับมวลที่ผ่าน A_2 ในเวลา Δt เช่นกัน หรือ $\Delta M_1 = \Delta M_2$ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \tag{11.23}$$

สมการนี้เรียกว่า สมการแห่งการต่อเนื่อง (equation of continuity) เนื่องจาก ρ มีค่าคงตัวสำหรับการไหลคงตัวและเป็นแบบอัดไม่ได้ $(\rho_1 = \rho_2)$ ดังนั้น

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad = \text{ค่าคงตัว} \tag{11.24}$$

เราเรียก Av ว่า อัตราการไหล สมการแห่งการต่อเนื่อง (11.24) แสดงให้เห็นว่า ความเร็วของของไหลในท่อแปรผกผันกับขนาดพื้นที่หน้าตัดของท่อ คือ ขนาดความเร็วจะสูงเมื่อท่อเล็กหรือหลอดแคบ และขนาดความเร็วจะต่ำเมื่อท่อใหญ่หรือหลอดกว้าง

ตัวอย่าง 11.10 ถ้าความเร็วของน้ำในท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 150 มิลลิเมตร เท่ากับ 1.5 เมตร/วินาที ท่อนี้ต่อกับท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 7.5 มิลลิเมตร สมมติว่าน้ำไหลเต็มท่อทั้งสอง จงหา

a. อัตราการไหล

b. อัตตราเร็วของของเหลวในท่อที่ 2

วิธีทำ

ข้อมูล :

$$A = \pi\left(\frac{150}{2}\text{mm}\right)^2$$

$$v_1 = 1.5\ \text{m/s}$$

$$A_2 = \pi\left(\frac{75}{2}\text{mm}\right)^2$$

$$Av = ?$$

$$v = ?$$

สมการพื้นฐาน : อัตราการไหล = Av

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

สมการทำการ : อัตราการไหล = A_1v_1

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}\cdot v_1$$

(a) แทนค่า : อัตราการไหล $= \pi\left(\frac{150\times10^{-3}\text{m}}{2}\right)^2 (1.5\ \text{m/s})$

$= 26.5 \times 10^{-3}\ m^3/s$

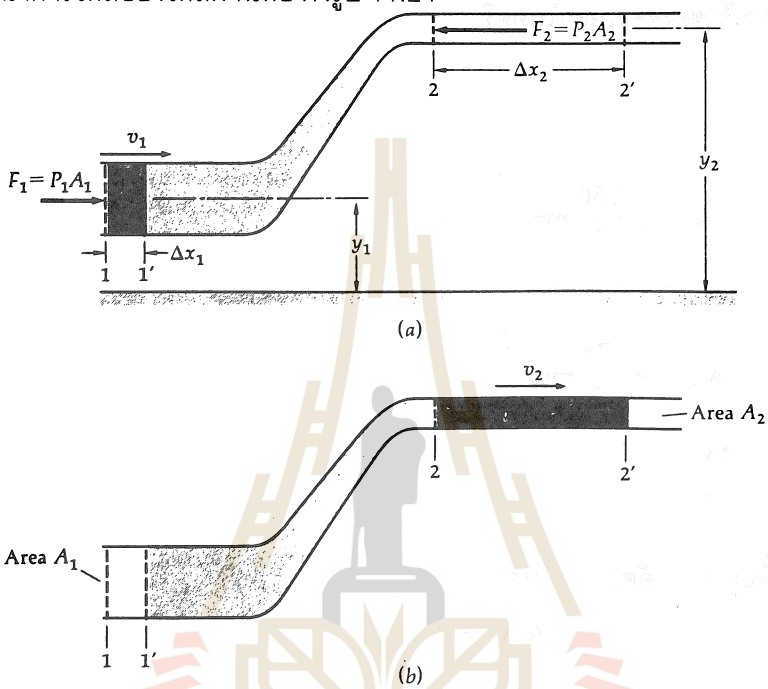
(b) $$v_2 = \left(\frac{150\ \text{mm}}{75\ \text{mm}}\right)^2 (1.5\ \text{m/s})$$

$= 6$ m/s

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

11.2.2 สมการของเบอร์นูลลี (Bernoulli's Equation) หลักของอาร์คิเมดส และหลักของพาสคัลเกี่ยวกับของไหลที่อยู่นิ่ง ส่วนผู้ให้หลักเกี่ยวกับของไหลที่เคลื่อนที่ คือ เบอร์นูลลี (Daniel Bernoulli) สมการของเบอร์นูลลีหาได้โดยง่ายจากทฤษฎีบทของงานและพลังงาน

พิจารณาการไหลของไหลผ่านท่อ ดังรูป 11.24



รูป 11.24 (a),(b) แสดงการไหลผ่านท่อที่มีขนาดและระดับต่างๆ กัน

เริ่มต้นจากรูป 11.24 (a) ที่ปลายล่างของท่อ ความดันในของไหลเท่ากับ P_1 ความเร็ว v_1 พื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ A_1 ที่ปลายบนความดันเท่ากับ P_2 ความเร็ว v_2 พื้นที่หน้าตัด A_2 เมื่อเวลาผ่านไป Δt ของไหลที่ปลายล่าง (ปริมาตรที่แรเงาในรูป 11.24(a) เท่ากับ ΔV_1 มีมวล Δm_1) เคลื่อนที่ไปได้ Δx_1 และของไหลที่ปลายบน (ปริมาตรที่แรเงาในรูป 11.24(b) เท่ากับ ΔV_2 มีมวล Δm_2) เคลื่อนที่ได้ Δx_2

แรงที่ปลายล่าง $F_1 = P_1 A_1$

ทำงาน $W_1 = F_1\Delta x_1 = P_1A_1\Delta x_1 = P_1\Delta V_1$

ในเวลาเดียวกัน แรง $F_2 = P_2A_2$ แรงนี้ทำงานเป็นลบ (แรงกระทำในทิศที่ต้านการเคลื่อนที่)

$$W_2 = -F_2\Delta x_2 = -P_2A_2\Delta x_2 = -P_2\Delta V_2$$

เนื่องจากการไหลเป็นแบบที่อัดไม่ได้

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

$$\Delta m_2 = \Delta m_2 = \Delta m$$

และงานสุทธิที่กระทำโดยแรง F_1 และ F_2 คือ

$$W = P_1\Delta V - P_2\Delta V = (P_1 - P_2)\ \Delta V \qquad (11.25)$$

งานสุทธิเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ และพลังงานศักย์แห่งความโน้มถ่วงของของไหลที่เราพิจารณาดังนี้

$$\Delta E_p = \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1 \qquad (11.26)$$

และ
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 - \frac{1}{2}(\Delta m)v_1^2 \qquad (11.27)$$

จากทฤษฎีบทงาน - พลังงาน จากสมการ (11.25), (11.26), (11.27) จะได้

$$\begin{aligned}(P_1 - P_2)\ \Delta V &= \Delta E_p + \Delta E_k \\ &= \Delta mgy_2 - \Delta mgy_1 + \frac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 - \frac{1}{2}(\Delta m)v_1^2\end{aligned} \qquad (11.28)$$

ถ้าหารสมการ 11.28 ด้วย ΔV และใช้ความสัมพันธ์ $\rho = \Delta m / \Delta V$ สมการ (11.28) จะกลายเป็น

$$P_1 - P_2 = \rho gy_2 - \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \qquad (11.29)$$

ถ้ารวบรวมพจน์ที่มี subscript 1 และ 2 ไว้คนละข้างของสมการ สมการ (11.29) เขียนได้ใหม่เป็น

$$P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (11.30)$$

หรือถ้าพิจารณาหลายตำแหน่งในท่อเดียวกัน ความสัมพันธ์จะเป็น

$$P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{ค่าคงตัว} \qquad (11.31)$$

สมการ (11.31) เรียกว่า สมการของเบอร์นูลลี ซึ่งหมายความว่า ผลรวมของความดันและความหนาแน่นพลังงาน (พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์) ของของไหลผ่านท่อ จะมีค่าคงตัวเสมอ

ในกรณีที่ของไหลอยู่นิ่ง

$$v_1 = v_2 = 0$$

และ $P_1 = P_2$, $y_2 - y_1 = h$

ให้ P_2 คือ ความดันของบรรยากาศ P_a

จากสมการ (11.29) จะได้

$$P = P_a + \rho gh$$

ซึ่งเป็นสมการของความดันที่เราหามาแล้วในสถิตศาสตร์ของของไหล

11.2.3 เครื่องมือวัดอัตราการไหลของของไหล

มาตรเวนทูริ (Venturi Meter) เป็นเครื่องมือวัดอัตราเร็วของของไหลในท่อเครื่องมือ มีส่วนประกอบดังรูป 11.25

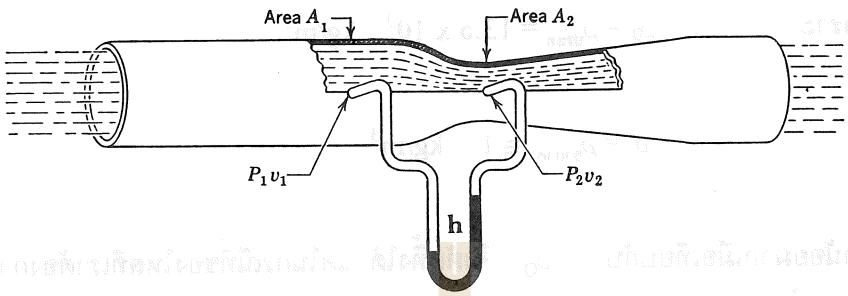
ให้ ρ เป็นความหนาแน่นของของไหลในมาโนมิเตอร์ ซึ่งโดยทั่วไปใช้ปรอท

จากสมการแห่งความต่อเนื่อง

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \tag{11.32}$$



รูป 11.25 มาตรเวนทูริ

ของไหลที่ไหลผ่านมาตรเวนทูริจะมีค่าความสูงจากระดับอ้างอิงเท่ากัน

$$y_1 = y_2 = \text{ค่าคงตัว}$$

ดังนั้นสมการ (11.29) จะกลายเป็น

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{11.33}$$

แทน (11.32) ใน (11.33) ได้

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(A_1^2 - A_2^2\right) / A_2^2 \tag{11.34}$$

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2\left(P_1 - P_2\right)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}} \tag{11.35}$$

ในการแทนค่า $P_1 - P_2$ ในสมการ (11.35) นั้น ต้องระมัดระวังเป็นพิเศษในกรณีที่ของไหลที่ต้องการวัดอัตราการไหลของมัน คือ อากาศ

$$P_1 - P_2 = h\rho_0 g - h\rho_{air} g$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$\cong \rho_0 hg \qquad (11.36)$$

ทั้งนี้เพราะ $\rho_0 = \rho_{ปรอท} = 13.6 \times 10^3 \quad kg/m^3$

แต่ $\rho = \rho_{อากาศ} \cong 1 \quad kg/m^3$

ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ ρ_0 จึงตัดทิ้งได้ แต่ในกรณีที่ของไหลที่เราต้องการวัดอัตราการไหลคือ น้ำหรือน้ำมัน ต้องนำความหนาแน่น ρ มาคิดด้วย นั่นคือโดยทั่วไป

$$P_1 - P_2 = (\rho_o - \rho)\, gh \qquad (11.37)$$

เมื่อหาค่า v_1 จากสมการ (11.35) ได้ค่า v_2 หาได้จากความสัมพันธ์สมการ (11.24) และอัตราการไหลก็หาได้จากสมการ (11.24) โดยตรง

ตัวอย่าง 11.11 จากรูป 11.25 ถ้า A_1 = 4 ตารางเซนติเมตร A_2 = 1 ตารางเซนติเมตร h = 10 เซนติเมตร ของไหลคือน้ำ จงหา

a. อัตราเร็ว v_1 และ v_2

b. อัตราการไหล

วิธีทำ

ข้อมูล : $\rho_o = 13.6 \times 10^3 \quad kg/m^3$

$\rho = 1 \times 10^3 \quad kg/m^3$

$A_1 = 4\ cm^2 = 4 \times 10^{-4} \quad m^2$

$A_2 = 1\ cm^2 = 1 \times 10^{-4} \quad m^2$

$h = 10\ cm = 0.10\ m$

$v_1 = ?,\ v_2 = ?,$ อัตราการไหล = ?

สมการพื้นฐาน : $v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$, $v_1A_1 = v_2A_2$

สมการทำการ : $v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_\circ - \rho)gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1$$

อัตราการไหล $v_1A_1 = v_2A_2$

(a) แทนค่า : $$v_1 = \left(1\times10^{-4}\,m^2\right)\sqrt{\frac{2(13.6-1)\left(10^3\,kg/m^3\right)\left(9.8m/s^2\right)(0.10m)}{\left(10^3\,kg/m^3\right)[4-1]\left(10^{-4}\,m^2\right)}}$$

$$= 1.35\ m/s$$

$$v_2 = \frac{4\times10^{-4}\,m^2}{1\times10^{-4}\,m^2}\times1.35\,m/s$$

$$= 5.40\ m/s$$

(b) อัตราการไหล $= v_1A_1$

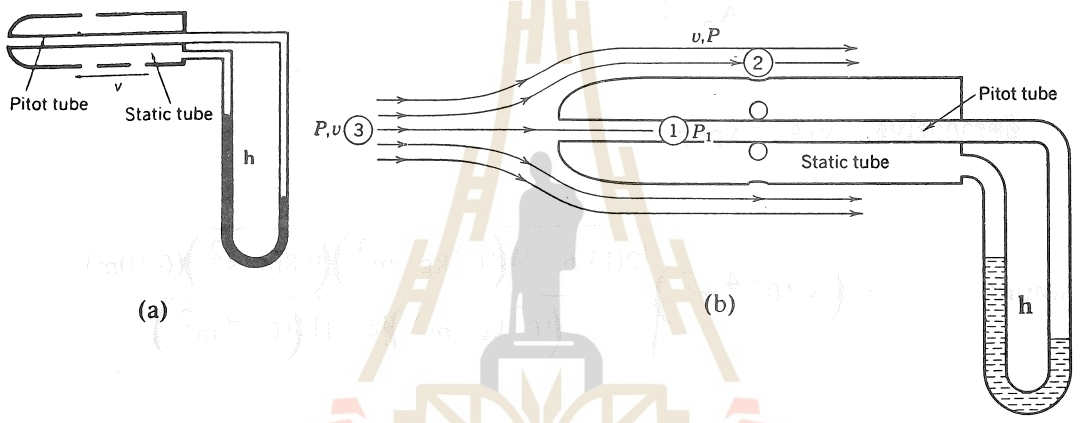
$$= (1.35\,m/s)\left(4\times10^{-4}\,m^2\right)$$

$$= 5.4 \times 10^{-4}\ m^3/s$$

$$= 0.00054\ m^3/s$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หลอดไพทอต (Pitot tube) เป็นเครื่องมือวัดอัตราการไหลของก๊าซ เช่น วัดความเร็วของเครื่องบิน มีรูปร่างดังรูป 11.26 อากาศเข้าทางช่องหลอดไพทอต (Pitot tube) จะดันระดับปรอทให้ต่ำลง ส่วนหลอดสถิต (static tube) จะเจาะรูเพื่อให้ความดันเท่ากับความดันอากาศที่ล้อมรอบ ความแตกต่างระดับปรอทเท่ากับ h หลอดไพทอตเป็นเครื่องมือที่ประยุกต์สมการของเบอร์นูลลีมาใช้เหมือนกับมาตรเวนทูริ คือ ระดับ $y_1 = y_2$ = ค่าคงตัว ซึ่งสมการเบอร์นูลลีเขียนได้ตามสมการ (11.33)



รูป 11.26 (a) แผนภาพหลอดไพทอต
(b) แสดงการไหลของอากาศผ่านหลอดไพทอต

ถ้าให้ P_1, v_1 เป็นความดันและอัตราเร็วอากาศในหลอดไพทอต ซึ่ง v_1 มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ผิวปรอท และ เป็นความดันและอัตราเร็วลมที่รูหลอดสถิต

ดังนั้น v_2 คือ อัตราเร็วของอากาศที่ผ่านเครื่องวัดให้ $v_2 = v$ สมการ (11.33) เขียนได้ใหม่เป็น

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v^2 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho v^2$$

หรือ

$$v = \sqrt{\frac{2\left(P_1 - P_2\right)}{\rho}} \qquad (11.38)$$

เนื่องจากของไหลที่ต้องการวัดอัตราเร็วคือ อากาศ ดังนั้นเราอาจใช้ $P_1 - P_2$ จากสมการ (11.36) ได้ ซึ่งสมการ (11.38) จะกลายเป็น

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_o hg}{\rho}} \qquad (11.39)$$

ตัวอย่าง 11.12 เครื่องบินลำหนึ่งที่บินระดับความสูงซึ่งความหนาแน่นของอากาศมีค่า 0.8 กิโลกรัม/เมตร^3 ค่า h ของหลอดไพทอตอ่านได้ 30 มิลลิเมตร จงหาอัตราเร็วของเครื่องบิน (สมมติว่าไม่มีลมพัด)

วิธีทำ

ข้อมูล : $\rho_o = 13.6 \times 10^3 \quad kg/m^3$

$\rho = 0.8 \quad kg/m^3$

$h = 30 \ mm = 0.03 \ m$

$v = ?$

สมการพื้นฐาน : $v = \sqrt{\frac{2\rho_o gh}{\rho}}$

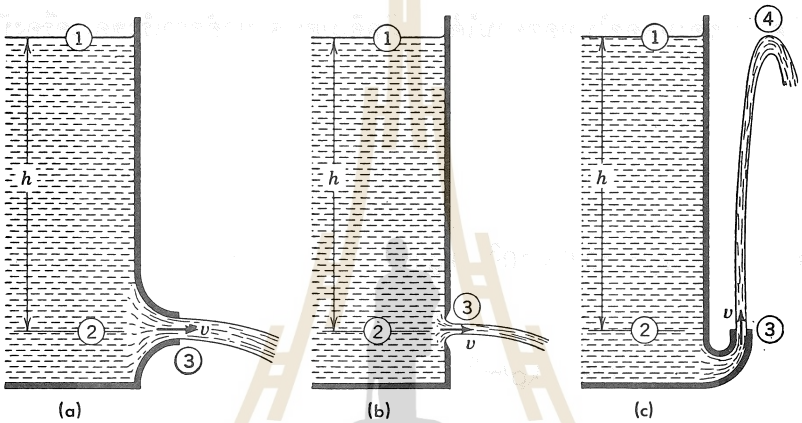
สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

$$v = \sqrt{\frac{2(13.6\times10^3 \ kg/m^3)(9.8 \ m/s^2)(0.03 \ m)}{0.8 \ kg/m^3}}$$

$$= 100 \ m/s$$ ตอบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

11.2.4 ทฤษฎีบททอร์ริเซลลี (Torricelli's Theorem) โดยการประยุกต์สมการของเบอร์นูลลี ทำให้เราสามารถหาอัตราเร็วของของเหลวจากปากท่อที่ระดับต่างๆ ได้ รูป 11.27 แสดงให้เห็นการไหลของของเหลวผ่านปากท่อ 3 ชนิดจากถังบรรจุขนาดใหญ่ ที่ระดับ h วัดจากผิวของของเหลว เราสามารถประยุกต์สมการของเบอร์นูลลีกับจุดที่ (1), (2) และ (3) ได้ เพราะว่ามีสายกระแสเชื่อมระหว่างจุด (1) กับ (3) และ (2) กับ (3) เราจะเลือกระดับที่ผ่านจุด (2) และปากท่อจุด (3) เป็นระดับอ้างอิง y = 0 ดังนั้น y = h



รูป 11.27 การไหลของไหลผ่านปากท่อ
(a) ปากท่อที่มีลักษณะกลมไปตามแนวนอน
(b) ปากท่อที่มีลักษณะคมตามแนวนอน
(c) ปากท่อกลมีแนวขึ้น

ที่จุด (1) เนื่องจากสมการเบอร์นูลลี สมการ (11.30) มีความดัน (P_1 และ P_2) อยู่แต่ละข้างของสมการ และที่ผิวของของเหลวกับที่ปากท่อก็เปิดสู่บรรยากาศ (ความดันบรรยากาศที่ผิวของของเหลวและที่ปากท่อมีค่าเท่ากัน) ดังนั้น จึงเป็นการสะดวกที่จะใช้ความดันเกจ แทนที่จะใช้ความดันสัมบูรณ์ ดังนั้น P ที่จะใช้ในหัวข้อนี้จึงหมายถึง ความดันเกจ

ความดันเกจที่จุด (1) ที่ผิวบนของของเหลวมีค่าเท่ากับศูนย์ ความดันเกจที่จุด (3) ในกระแสพ้นปากท่อออกมาเล็กน้อย ก็มีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน ความดันเกจที่จุด (2) ในถัง ที่ระดับปากท่อ มีค่าเท่ากับ P อัตราเร็วของของไหลที่จุด (1) และ (2) สามารถให้มีค่าเป็นศูนย์ได้ ถ้าถังที่บรรจุของเหลวเป็นถังขนาดใหญ่ และอัตราเร็วที่ปากท่อจุด (3) ให้มีค่าเป็น v ใช้สมการเบอร์นูลลี $P+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh$ = ค่าคงตัว กับจุด (1), (2) และ (3) ตามลำดับ จะได้ดังนี้

$$0 + 0 + \rho gh = P + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 \qquad (11.40)$$

แก้สมการ 11.40 หาค่าของ v ได้ดังนี้

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (11.41)$$

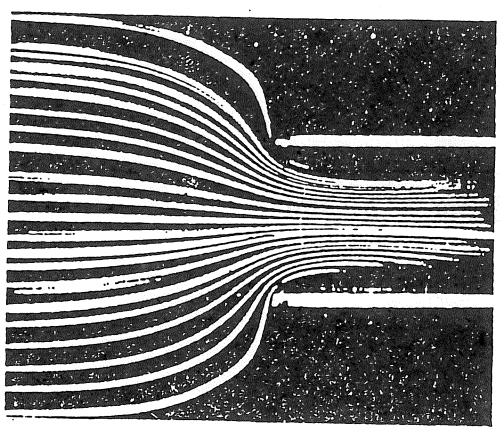
หรือ

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \qquad (11.42)$$

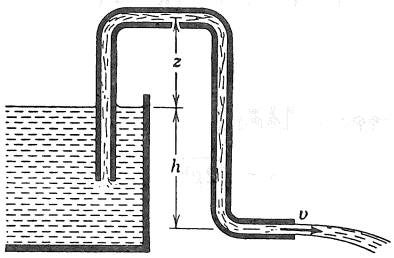
เมื่อ v คือ อัตราเร็วของการไหลที่ปากท่อ (speed of efflux) ของของไหล เมื่อความดันเกจในถังที่ระดับของปากท่อเท่ากับ P สมการ (11.41) หรือ (11.42) เรียกว่า ทฤษฎีบทของทอร์ริเซลลิ เพื่อเป็น เกียรติ แก่ ทอรริเซลลี(Evangelista Torricelli)

ในกรณีรูป 11.27 (c) นั้น ถ้าเราใช้สมการเบอร์นูลลีกับจุดที่ (4) ซึ่ง v = 0 ที่จุดนี้จะเห็นว่า น้ำควรจะพุ่งขึ้นสูงถึงระดับ h แต่ในทางปฏิบัติน้ำจะพุ่งขึ้นได้ต่ำกว่าระดับ h เล็กน้อยอันเนื่องมาจากความเสียดทาน

อัตราการไหลหาได้จากพื้นที่หน้าตัดคูณด้วยอัตราการไหลของไหล ถ้าปากท่อมีลักษณะกลมอย่างกรณี (a) และ (c) แต่ถ้าขอบของปากท่อคมอย่างรูป (b) นั้น สายกระแสจะลู่เข้า ทั้งนี้เพราะของไหลมีความเร่งต่อไปอีกเล็กน้อยหลังจากผ่านขอบคม ทำให้พื้นที่หน้าตัดของลำกระแสเมื่อพ้นขอบคมเล็กน้อยจะเล็กลงกว่าพื้นที่หน้าตัดของท่อ ลักษณะของลำกระแสที่มีรูปร่างเช่นนี้เรียกว่า vena contracta ดังรูป 11.28 สำหรับปากท่อคมที่มีรูเล็กๆ พื้นที่ของ vena contracta มีค่าประมาณ 65 เปอร์เซ็นต์ของพื้นที่หน้าตัดปากท่อ



รูป 11.28 vena contracta



รูป 11.29 กาลักน้ำ (siphon)

ตัวอย่างที่ประยุกต์ทฤษฎีบทของทอร์ริเซลลิก็คือ กาลักน้ำ (siphon) ดังรูป 11.29 อัตราการไหลที่ปากท่อหาได้จากสมการ 11.41 หรือ 11.42

ตัวอย่าง 11.13 จงหาอัตราการไหลที่ปากท่อของกาลักน้ำ รูป 11.29 ถ้าของเหลวในถังคือน้ำมัน มีความหนาแน่น 790 กิโลกรัม/เมตร^3 กำหนดให้ h เท่ากับ 0.4 เมตร และพื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ 50 ตารางมิลลิเมตร และความเสียดทานของของไหลมีค่าน้อยมาก จนไม่ต้องนำมาคิด

วิธีทำ

ข้อมูล : h = 0.4 m

$A = 50\ mm^2 = 50 \times 10^{-6}\ m^2$

v = ?, Av = ?

สมการพื้นฐาน : $v = \sqrt{2gh}$

อัตราการไหล = Av

แทนค่า : $v = \sqrt{2(9.8 m/s^2)(0.4 m)}$

$= 2.8\ m/s$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$Av = (50 \times 10^{-6}\ m^2)(2.8\ m/s)$$

$$= 14 \times 10^{-5}\ m^3/s$$

$$= 8.4\ \text{liters/minute}$$

11.2.5 การประยุกต์ของสมการต่อเนื่องและสมการของเบอร์นูลลี

แรงยกปีกเครื่องบิน

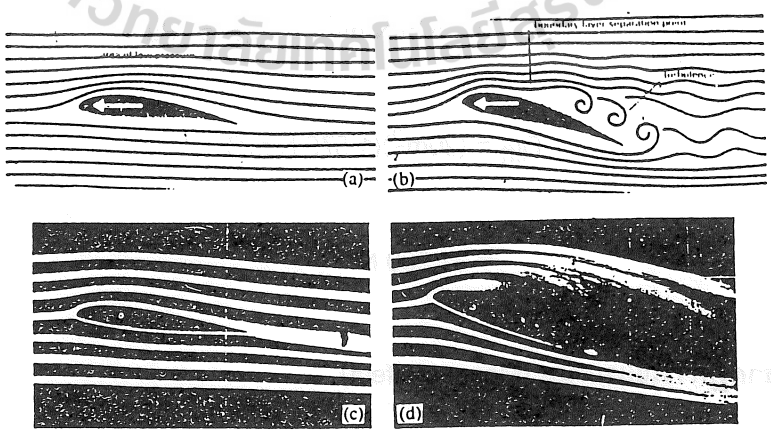
ปีกเครื่องบินมีรูปร่างของภาคตัดขวางดังรูป 11.30 เมื่อกระแสอากาศผ่านปีกเครื่องบิน สายกระแสที่อยู่เหนือปีกจะอยู่ชิดกันมากกว่าสายกระแสที่อยู่ใต้ปีก ซึ่งหมายความว่า ความเร็วเหนือปีก v_2 สูงกว่าความเร็วใต้ปีก v_1 ถ้าให้ P_2 และ P_1 เป็นความดันของอากาศเหนือและใต้ปีกเครื่องบินตามลำดับ และให้พื้นที่ใต้ปีกเครื่องบินเท่ากับ A จากสมการของเบอร์นูลลีกรณีที่

$y_1 = y_2 =$ ค่าคงตัว

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

แรงยก (lift) $= F_{lift} = A(P_1 - P_2)$

$$= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)A \qquad (11.43)$$



รูป 11.30 (a), (c) การไหลที่ไม่มี turbulence

(b), (d) การไหลมี turbulence

ตัวอย่าง 11.14 สายกระแสอากาศผ่านปีกเครื่องบินโดยอัตราความเร็วของอากาศเหนือปีกเท่ากับ 120 เมตร/วินาที อัตราเร็วใต้ปีกเท่ากับ 90 เมตร/วินาที ณ ความสูงที่เครื่องบินอยู่นี้อากาศมีความหนาแน่น 0.5 กิโลกรัม/เมตร^3 ถ้าปีกเครื่องบินมีความยาว 10 เมตร และมีความกว้างเฉลี่ยเท่ากับ 2 เมตร จงหา

a. ความแตกต่างของความดันใต้ปีกและเหนือปีก

b. จงหาแรงยกเครื่องบิน

วิธีทำ

ข้อมูล : $v_1 = 90\ \text{m/s},\ v_2 = 120\ \text{m/s}$

$$\rho = 0.5\ \text{kg/m}^3,\ A = 10\ \text{m} \times 2\ \text{m} = 20\ \text{m}^2$$

สมการพื้นฐาน : $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$

$$F_{lift} = A[P_1 - P_2]$$

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

(a) แทนค่า : $P_1 - P_2 = \frac{1}{2}(0.5\ \text{kg/m}^3)\left[(120\ \text{m/s})^2 - (90\ \text{m/s})^2\right]$

$$= 1{,}575\ \text{N/m}^2 = 1{,}575\ \text{Pa}$$

(b) $$F_{lift} = (20\text{m}^2)(1{,}575\ \text{N/m}^2)$$

$$= 31{,}500\ \text{N}$$

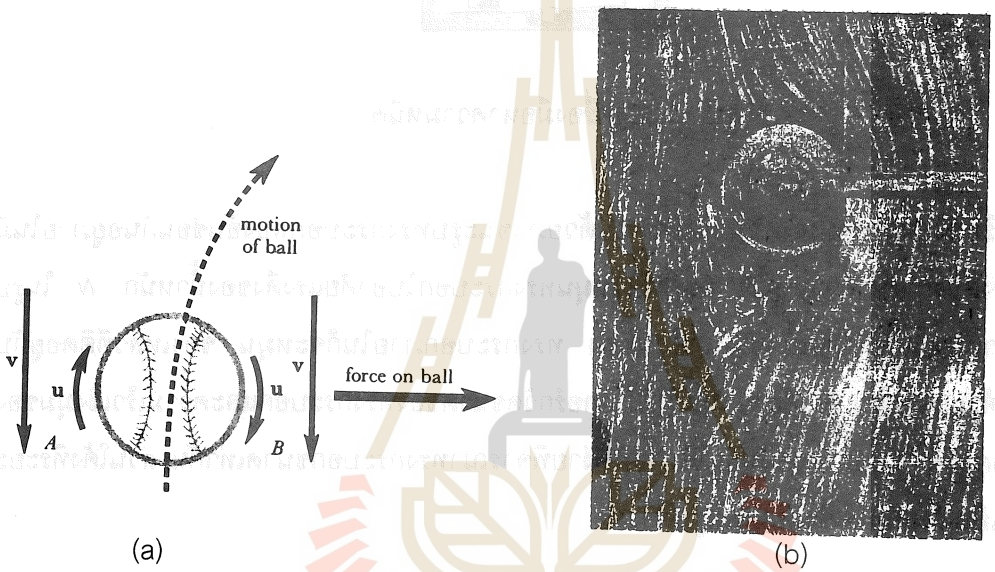
ปรากฏการณ์แมกนัส (Magnus effect)

พิจารณาลูกบอลที่เคลื่อนที่ผ่านอากาศด้วยความเร็ว v ซึ่งมีค่ามาก ในขณะเดียวกันก็หมุนด้วยความเร็ว u ถ้าผิวของลูกบอลมีลักษณะหยาบ คือ มีแรงเสียดทานระหว่างผิวกับอากาศ การหมุน

ของลูกบอลจะลากพาโมเลกุลของอากาศรอบๆ ลูกบอลเคลื่อนที่วนตามไปกับการหมุนด้วย จากรูป 11.31 อัตราเร็วของอากาศของด้าน B จะมีค่า v + u ขณะที่อัตราเร็วของอากาศด้าน A มีค่า v - u

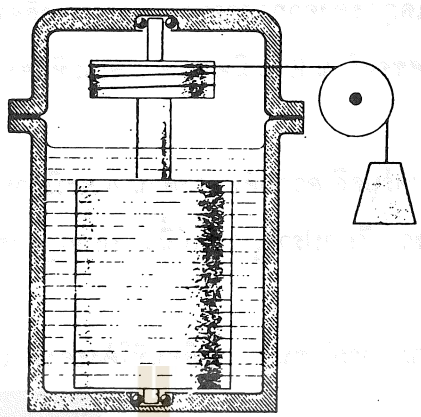
จากสมการของเบอร์นูลลี ความดันทางด้าน A จะมีค่ามากกว่าทางด้าน B จะทำให้ลูกบอลถูกดันให้เคลื่อนที่โค้งไปทางขวา เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ปรากฏการณ์แมกนัส

ตัวอย่างของปรากฏการณ์ เช่น การเคลื่อนที่โค้งของลูกเบสบอล ลูกเทนนิส หรือ ฟุตบอล



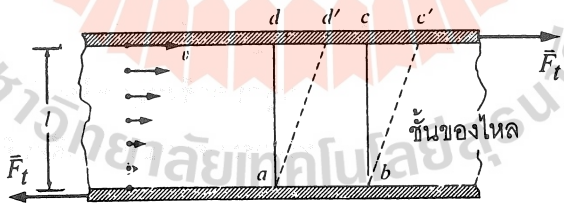
รูป 11.31 ปรากฏการณ์แมกนัส
(a) บนลูกบอลซึ่งหมุนพร้อมกับการเลื่อนที่
(b) ทรงกระบอกหมุนและเลื่อนที่

11.2.6 **ความหนืด** (Viscosity) ความหนืดอาจคิดได้ว่าเป็นความเสียดทานในของไหล ซึ่งจะต้องมีแรงมากระทำต่อชั้นของของไหลถัดไป ของเหลวและก๊าซต่างก็มีความหนืด แรงเสียดทานระหว่างชั้นของของเหลวเกิดจากแรงเชื่อมแน่นระหว่างโมเลกุลที่เรากล่าวถึงในหัวข้อ 11.4 ส่วนแรงเสียดทานในก๊าซเกิดจากการชนกันระหว่างโมเลกุล ความหนืดของของไหลต่างชนิดกันสามารถบอกได้ด้วย**สัมประสิทธิ์แห่งความหนืด** (coefficient of viscosity) แทนด้วย η (อ่านว่า eta) ซึ่งหาได้โดยใช้เครื่องวัดความหนืด (viscometer) ดังรูป 11.32



รูป 11.32 เครื่องมือหาความหนืด

เครื่องมือหาความหนืดชนิดนี้ประกอบด้วยภาชนะรูปทรงกระบอกสองอันซ้อนกันอยู่ภายในมีของเหลวซึ่งต้องการหาความหนืด ทอร์กที่ใช้หมุนทรงกระบอกใบอาศัยแรงดึงของน้ำหนัก W ในรูปผ่านลูกรอกเมื่อปล่อยให้ตุ้มน้ำหนักเคลื่อนที่ลง ทรงกระบอกภายในก็จะหมุน ของเหลวที่ติดอยู่กับภาชนะจะต้านการหมุน อาศัยความรู้เกี่ยวกับทอร์กวัดขนาดของทรงกระบอกและความเร็วเชิงมุมของทรงกระบอกจะคำนวณหาความหนืดได้ เพื่อให้ง่ายพิจารณาทรงกระบอกขนาดเท่ากัน ส่วนโค้งที่ระยะสั้นอาจถือเป็นเส้นตรงได้ ซึ่งแทนด้วยรูป 11.33



รูป 11.33 อัตราเร็วของชั้นของของไหล

แผ่นบน คือผิวสั้นๆ ของทรงกระบอกอันใน ซึ่งเคลื่อนที่ ส่วนแผ่นล่างคือ ผิวของทรงกระบอกอันนอกซึ่งอยู่กับที่ ที่ผิวสัมผัสระหว่างของแข็งกับของเหลวนั้น จะมีแรงยึดติดทำให้ชั้นของของไหลที่ติดกับแผ่นบนมีอัตราเร็ว v และชั้นต่อๆ มาอัตราเร็วลดลงสม่ำเสมอ จนมีอัตราความเร็วเป็นศูนย์ ณ ชั้นที่ติดกับแผ่นล่าง การเคลื่อนที่แบบชั้นบางๆ ของของเหลวไปบนอีกชั้นถัดไปนี้เรียกว่า การไหลแบบละมินาร์ (laminar flow)

พิจารณาส่วนของของเหลว abcd ชั่วขณะหนึ่งจะหลายเป็นรูป abc'd' รูปร่างจะเบี้ยวไปเรื่อยๆ เมื่อเวลาผ่านไป ยิ่งถูกแรงดึงที่ผิวในมากก็จะโย้ไปมาก ถ้า F_t คือแรงที่ฉุด ผิวในไปทางขวา ก็จะเกิดแรง F_t ฉุดผิวนอกไปทางซ้ายด้วย เพื่อให้ของเหลวหยุดนิ่งไม่ไหล ถ้า A คือพื้นผิวของของเหลวที่ถูกแรงกระทำ ดังนั้น $\frac{F_1}{A}$ คือความเค้นเฉือนที่กระทำแก่ของเหลว

ในของแข็งความเค้นเฉือนค่าหนึ่งก่อให้เกิดความเครียดเฉือนได้เพียงค่าเดียว ส่วนในของเหลวความเครียดเฉือนมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เมื่อมีความเค้นเฉือนอยู่ จากการทดลองพบว่าความเค้นเฉือนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราการเปลี่ยนความเครียดเฉือน ความเครียดเฉือน (ในรูป 11.33) = $\frac{dd'}{ad} = \frac{dd'}{\ell}$ เพราะว่า ℓ มีค่าคงที่ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน = $\frac{1}{2}$ × อัตราการเปลี่ยนของ dd' แต่อัตราการเปลี่ยนของ dd' คือความเร็วของจุด d' คือความเร็วของผิวในซึ่งเคลื่อนที่ตามทรงกระบอกใบในนั่นเอง ดังนั้น

อัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน = $\frac{v}{\ell}$

สัมประสิทธิ์แห่งความหนืดของของไหลเรียกสั้น ๆ ว่า ความหนืด η มีนิยามว่า คือ อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนต่ออัตราการเปลี่ยนของความเครียดเฉือน นั่นคือ

$$\eta = \frac{F/A}{v/\ell}$$

หรือ

$$F = \eta A \frac{v}{\ell} \qquad 11.44$$

ความหนืด η มีค่าน้อยสำหรับของเหลวที่ไหลได้ดี เช่น น้ำ และมีค่าเพิ่มขึ้นสำหรับของเหลวที่ไหลยาก เช่น กรีเซอรีน นอกจากนี้ค่าของความหนืดยังขึ้นกับอุณหภูมิด้วย สำหรับก๊าซความหนืดมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่วนของเหลวมีค่าลดลง

สมการ (11.44) ใช้ได้สำหรับความเร็วของของเหลวที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจากผิวนอกถึงผิวใน กรณีที่อัตราการเปลี่ยนความเร็วตั้งฉากกับทิศทางของการไหล เกรเดียนต์ของความเร็วในทิศทางนี้คือ $\frac{v}{\ell}$ ถ้าอัตราการเพิ่มความเร็วไม่สม่ำเสมอ เกรเดียนต์ของความเร็ว ณ จุดใด ๆ คือ $\frac{dv}{dy}$ เมื่อ

dv คือความเร็วที่เปลี่ยนไปน้อย ๆ ระหว่างจุด 2 จุด ที่ห่างกัน dy โดยวัดตั้งฉากกับทิศของการไหล ดังนั้น

$$F = \eta A \frac{dv}{dy} \qquad (11.45)$$

ในระบบเอสไอ η มีหน่วยเป็น $N \cdot s/cm^2$ เท่ากับ Pa·s (ปาสคัล·วินาที) ในระบบ ซี จี เอส มีหน่วยเป็น $dyne \cdot s/cm^2$ และเรียกหน่วยนี้ว่า **ปอยส์** (poise, P) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักวิทยาศาสตร์ที่ชื่อ **ปัวเซย์** (J.L. Poiseuille)

$$1 \text{ poise (หรือ } 1 \text{ P)} = 1 \text{ dyne} \cdot s / cm^2$$

$$= 10^{-1} \text{ Nsm}^{-2}$$

$$1 \text{ cP (อ่านว่า เซนติปอยส์)} = 10^{-2} \text{ P} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot s$$

สัมประสิทธิ์ของความเสียดทานของของไหลบางชนิด ได้แสดงไว้ตามตาราง 11.3

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตาราง 11.3 สัมประสิทธิ์ความหนืดของของไหลบางชนิด

Fluid	Temperature ($^\circ$C)	Coefficient of viscosity, η (Pa·s)*
air	0	0.017×10^{-3}
	60	0.020×10^{-3}
	100	0.022×10^{-3}
water	0	1.8×10^{-3}
	20	1.0×10^{-3}
	100	0.3×10^{-3}
whole blood	37	$\approx 4 \times 10^{-3}$
blood plasma	37	$\approx 1.5 \times 10^{-3}$
ethyl alcohol	20	1.2×10^{-3}
engine oil (SAE 10)	30	200×10^{-3}
glycerine	20	1500×10^{-3}
air	20	0.018×10^{-3}
hydrogen	0	0.009×10^{-3}
water vapor	100	0.013×10^{-3}

* 1 Pa·s = 10 P = 10^3 cP

จากตารางนี้จะเห็นว่า ความหนืดของก๊าซจะเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่ม และความหนืดของของเหลวจะลดลงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 11.15 เครื่องวัดความหนืดดังรูป 11.32 เมื่อรัศมีเฉลี่ยของทรงกระบอกเท่ากับ 5 เซนติเมตร h เท่ากับ 12 เซนติเมตร ความหนาของของเหลวเท่ากับ 2 มิลลิเมตร ต้องใช้ทอร์กขนาด 0.054 นิวตัน·เมตร เพื่อหมุนทรงกระบอกในด้วยอัตรา 50 รอบ/นาที จงหาสัมประสิทธิ์ความหนืดของของเหลวนี้

ข้อมูล : r = 5 cm = 0.05 m

$$\omega = \frac{50 \times 2\pi}{60} \text{rad / s}$$

$$v = \omega r = (\frac{50 \times 2\pi}{60} \text{ rad / s})(0.05 \text{ m})$$

$$= 0.26 \text{ m / s}$$

$$h = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$$

$$A = 2\pi rh$$

$$= 2\pi(0.05 \text{ m})(0.12 \text{ m})$$

$$= 3.77 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$\tau = 0.054 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$F = \frac{\tau}{r} = 1.08 \text{ N}$$

$$\ell = 2 \text{ mm} = 0.002 \text{ m}$$

สมการพื้นฐาน : $F = \eta A \frac{v}{\ell}$

สมการทำการ : $\eta = \frac{F}{A} \cdot \frac{\ell}{v}$

แทนค่า : $\eta = \frac{(1.08 \text{ N})(0.002 \text{ m})}{(3.77 \times 10^{-2} \text{ m}^2)(0.26 \text{ m / s})}$

$$= 0.22 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

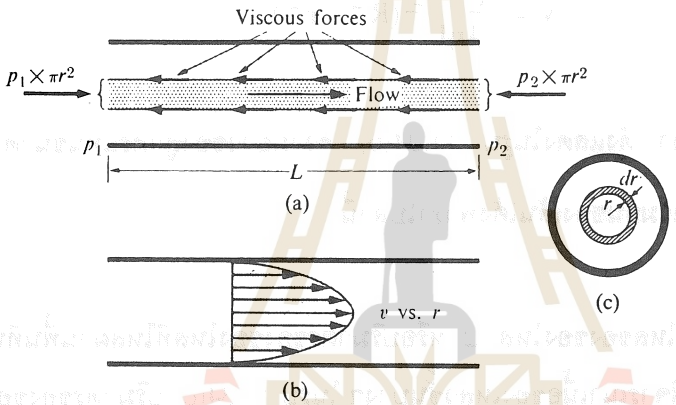
$$= 2.2 \text{ P(poise)}$$

ตอบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

11.2.7 **กฎของปัวเซย์** (Poiseuille's Law) **ปัวเซย์** เป็นนักวิทยาศาสตร์ที่สนใจฟิสิกส์เกี่ยวกับการหมุนเวียนของโลหิต เป็นผู้ค้นพบกฎเกี่ยวกับการไหลแบบละมินาร์ผ่านท่อทรงกระบอก โดยพิจารณาดังนี้

เนื่องจากความเร็วของของไหลที่มีความหนืด (viscous fluid) ซึ่งไหลผ่านไปตามท่อมีค่าไม่เท่ากัน ส่วนที่อยู่ติดกับท่อมีความเร็วเป็นศูนย์ ผนังท่อออกแรงฉุดชั้นของไหลที่อยู่ติดกับท่อไว้ และชั้นของไหลที่ติดกับท่อก็ออกแรงฉุดชั้นถัดไป เป็นดังนี้ต่อๆ กันไป ทำให้ความเร็วของของไหลมีค่าต่ำ ส่วนที่มีความเร็วมากที่สุดคือของไหลที่ไหลอยู่กลางท่อ



รูป 11.34 อัตราเร็วชั้นของของไหล

สมมติให้ของไหลมีความหนืด η ไหลผ่านไปตามท่อซึ่งมีรัศมีภายใน R ยาว L การไหลนี้เป็นแบบละมินาร์ ดังรูป 11.34 พิจารณาของไหลรัศมีน้อยๆ r ซึ่งอยู่ในสมดุล (เคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่) ภายใต้แรงเนื่องจากความดันที่ต่างกันระหว่างปลายทั้งสองของท่อ และแรงต้านที่ผิวด้านนอก เราได้

$$\text{แรงเนื่องจากความดันที่ต่างกัน} = (P_1 - P_2)\,\pi r^2$$

แรงเนื่องจากความหนืด จากสมการ 11.45 คือ

$$-\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta \times 2\pi rL \times \frac{dv}{dr}$$

เมื่อ $\frac{dv}{dr}$ คือ เกรเดียนต์ของความเร็วที่ระยะตามรัศมี r จากแกนกลาง เครื่องหมายลบเกิดขึ้นเพราะเมื่อ v มีค่าเพิ่ม r จะมีค่าลดลง ของไหลอยู่สมดุลภายใต้แรงทั้งสอง ดังนั้น

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta \times 2\pi rL \times \frac{dv}{dr}$$

$$-dv = \frac{(P_1 - P_2)}{2\eta L} rdr$$

แล้วอินทิเกรต $$-\int_v^o dv = \frac{P_1 - P_2}{2\eta L}\int_r^R rdr$$

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \qquad (11.46)$$

ซึ่งเป็นรูปพาราโบลา ดังแสดงในรูป 11.34(b) ความยาวของลูกศรแทนขนาดของความเร็ว ส่วน $\frac{dv}{dr}$ ที่รัศมีใดๆ คือความชันของเส้นโค้งพาราโบลานี้

ในการหาอัตราการไหลของของไหล Q หรือปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดอันใดอันหนึ่งต่อหน่วยเวลา ต้องพิจารณาเนื้อของเหลวชั้นบางๆ ในรูป 11.34(c) ปริมาตรของของไหล dV ซึ่งไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดอันหนึ่งในเวลา dt คือ v(dA)(dt) เมื่อ v คือความเร็วที่รัศมี r ส่วน dA คือพื้นที่แรเงาในรูปซึ่งมีขนาดเท่ากับ $2\pi rdr$ แทนค่า v จากสมการ (11.46) เราได้

$$dV = v(dA)(dt) = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \times 2\pi rdr \times dt$$

$$Q = \int \frac{dV}{dt} = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{2\eta L}\int_o^R (R^2 - r^2)rdr$$

$$= \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{(P_1 - P_2)}{L} \qquad (11.47)$$

ผู้ค้นพบความสัมพันธ์นี้เป็นคนแรกคือ ปัวเซย์ จึงเรียกสมการนี้ว่า **กฎของปัวเซย์** จากสมการ 11.47 พบว่า Q มีค่าเป็นสัดส่วนผกผันกับความหนืด η และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสี่ของรัศมีของท่อ เป็นสัดส่วนตรงกับ $\frac{(P_1 - P_2)}{L}$ ซึ่งเรียกว่า เกรเดียนต์ของความดัน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 11.16 ในฤดูฝนน้ำถูกสูบออกจากกรุงเทพมหานครไหลผ่านท่อซึ่งวางอยู่ตามระดับแนวนอน เส้นผ่านศูนย์กลาง 1.20 เมตร เครื่องสูบน้ำติดตั้งเป็นช่วงๆ แต่ละเครื่องให้ความดัน 1 ความดันบรรยากาศมากกว่าความดันขณะนั้น จงหาว่าจะต้องวางเครื่องสูบน้ำห่างกันเท่าไร จึงจะรักษาอัตราการไหลของน้ำ 2,000 ลูกบาศก์เมตร / วินาที ที่อุณหภูมิ 20°C

วิธีทำ

ข้อมูล : $P_1 - P_2 = 1 \text{ atm}$

$= 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

$$R = \frac{1.20 \text{ m}}{2} = 0.60 \text{ m}$$

η (จากตาราง) $= 1.0 \times 10^{-1} \text{ Pa·s}$

$= 1.0 \times 10^{-3} \text{ N·s/m}^2$

$Q = 2{,}000 \text{ m}^3\text{/s}, \; L = ?$

สมการพื้นฐาน : $Q = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\left(\frac{P_1 - P_2}{L}\right)$

สมการทำการ : $L = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\frac{P_1 - P_2}{Q}\right)$

แทนค่า : $$L = \frac{\pi(0.60 \text{ m})^4 (1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{8(1.0 \times 10^{-3} \text{ N·s/m}^2)(2{,}000 \text{ m}^3\text{/s})}$$

$= 2.57 \times 10^3 \text{ m}$

$= 2.57 \text{ km}$

11.2.8 เลขของเรย์โนลด์และกฎของสโตกส์

ถ้าอัตราการไหลของของเหลว v ผ่านท่อมีค่าสูงมาก การไหลจะไม่เป็นแบบละมินาร์แต่จะเป็นการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ซึ่งกฎของปัวเซย์ก็จะใช้ไม่ได้อีกต่อไป

สำหรับความแตกต่างของความดันที่เท่ากัน อัตราการไหลของการไหลเป็นแบบปั่นป่วนจะน้อยกว่าอัตราการไหลของการไหลแบบละมินาร์ ทั้งนี้เนื่องจากแรงเสียดทานในการไหลมีค่าสูงขึ้น ถ้ามีความปั่นป่วน ความปั่นป่วนกำหนดได้ดด้วยตัวเลขของ **เรย์โนลด์** (Reynolds' number) แทนด้วย Re ในกรณีที่ของไหลผ่านท่อ ตัวเลขเรย์โนลด์มีนิยามว่า

$$\mathrm{Re} = \frac{2r\rho}{\eta} v_{ave}$$

เมื่อ v_{ave} คือ อัตราเร็วเฉลี่ยของของไหล

r คือ รัศมีของท่อ

Re คือ เป็นตัวเลขไม่มีหน่วย

จากการทดลองพบว่า การไหลจะเป็นแบบละมินาร์ ถ้า Re มีค่าน้อยกว่า 2,000 และจะเป็นแบบปั่นป่วน ถ้า Re มีค่ามากกว่า 2,000

ตัวอย่าง 11.17 อัตราเร็วเฉลี่ยของโลหิตในเอออร์ตา (aorta) ซึ่งมีรัศมี r = 1.0cm เท่ากับ 30 cm/s การไหลของโลหิตในเอออร์ตา (aorta) เป็นแบบละมินาร์หรือแบบปั่นป่วน

วิธีทำ

ข้อมูล : r = 1.0 cm = 0.01 m

v = 30 cm/s = 0.3 m/s

ρ (จากตารางความหนาแน่น) = 1.05×10^3 kg/m^3

η (จากตาราง) = 4×10^{-3} Pa·s(N·s/m^2)

สมการพื้นฐาน : $\mathrm{Re} = \frac{2r\rho}{\eta} v_{ave}$

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

แทนค่า : $$Re = \frac{(2)(0.30\ m/s)(0.01\ m)(1.05\times10^{3}\ kg/m^{3})}{(4.0\times10^{3}\ N\cdot s/m^{2})}$$

$$= 1{,}500$$

ดังนั้น การไหลเป็นแบบละมินาร์

รูป 11.35 เป็นการไหลผ่านรูปทรงกระบอกที่ Re = 5,000

รูป 11.35 การไหลผ่านทรงกระบอกซึ่งเลขเรย์โนลด์ประมาณ 5,000

กฎของสโตกส์ (Stokes' Law)

ถ้าเราพิจารณาสถานการณ์ที่ตรงกันข้ามกับที่พิจารณามาแล้ว คือพิจารณากรณีที่วัตถุ (ของแข็ง) เคลื่อนที่ผ่านของไหลที่มีความหนืดซึ่งอยู่นิ่ง เช่น การเคลื่อนที่ของก้อนหินในน้ำการเคลื่อนที่ของเครื่องบิน การเคลื่อนที่ของเครื่องบินผ่านอากาศ การเคลื่อนที่ของปลาในน้ำ เป็นต้น

การนิยามตัวเลขเรย์โนลด์ในกรณีนี้ จะแตกต่างกว่ากรณีที่แล้วมาคือ ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านของไหลมีอยู่ว่า ตัวเลขเรย์โนลด์นิยามว่า

$$Re = \frac{L\rho}{\eta}v$$

เมื่อ L คือ ความยาวของวัตถุ

ถ้า Re มีค่าน้อยกว่า 1 สายกระแสรอบวัตถุจะเป็นการไหลแบบละมินาร์ จากการทดลองพบว่า ถ้า Re น้อย แรงต้านทานเคลื่อนที่เนื่องจากความหนืด (viscous force) จะแปรผันกับความเร็วของวัตถุ เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$F = kv$$

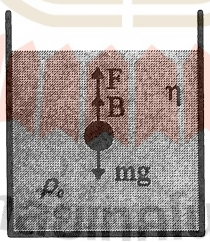
เมื่อ k คือค่าคงตัว ขึ้นอยู่กับขนาดและรูปร่างของวัตถุ สำหรับวัตถุรูปทรงกลมรัศมี r ค่า ค่าคงตัวนี้มีค่า

$$k \text{ (ทรงกลม)} = 6\pi r\eta$$

ดังนั้น แรงเนื่องจากความหนืดที่ต้านการเคลื่อนที่ของวัตถุทรงกลมเล็ก รัศมี r ผ่านของไหลมีความหนืด η คือ

$$F = 6\pi r\eta v$$

ซึ่งสมการนี้เรียกว่า **กฎของสโตกส์** ซึ่งค้นพบโดย เซอร์ จอร์จ สโตกส์ เมื่อปี ค.ศ. 1845



รูป 11.36 ทรงกลมตันตกในของเหลว

ลองพิจารณาทรงกลมตันมวล m รัศมี r ความหนาแน่น ρ ที่ตกในของไหลซึ่งมีความหนืด η ความหนาแน่น ρ_0 เริ่มต้นทรงกลมจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่ง และอัตราเร่งนี้จะลดลงเรื่อยๆ จนสุดท้ายเป็นศูนย์ ต่อจากนี้ทรงกลมจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ เรียกว่า **อัตราเร็วปลาย** (terminal speed) "v_t" ซึ่งขณะนี้แรงลัพธ์กระทำต่อทรงกลมเป็นศูนย์นั่นเอง กล่าวคือ

ขนาดแรงลอยตัว + ขนาดแรงต้านของเหลว = ขนาดน้ำหนักของทรงกลม

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g + 6\pi\eta r v_t = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$$

จะได้

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o) \qquad (11.48)$$

ดังนั้น ในการหาค่า η ของของเหลว เราอาจใช้วิธีปล่อยทรงกลมที่เหมาะสมให้ตกในของเหลวนั้นๆ โดยเราสามารถวัดค่าอัตราเร็วปลายได้ ก็จะสามารถหาค่า η ของของเหลวได้ตามสมการ (11.48)

ตัวอย่าง 11.18

จงหาอัตราความเร็วของวัตถุขนาดความยาว 1 mm (a) เคลื่อนที่ผ่านน้ำ (b)เคลื่อนที่ผ่านอากาศ เมื่อ Re = 1 และกำหนดให้ที่อุณหภูมิ 20°C, $\rho_{น้ำ}$ =10^3 kg/m^3, $\eta_{น้ำ}$ = 1 x 10^{-2} P, $\rho_{อากาศ}$ = 1.3 kg/m^3 (มีละอองน้ำมาก) (ประมาณหยดน้ำฝน) เคลื่อนที่ผ่านอากาศ เมื่อ Re = 1

วิธีทำ

ข้อมูล : Re = 1

$$\left.\begin{matrix}\rho_{น้ำ}\\ \eta_{น้ำ}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}L = 1\text{ mm}\\ v = ?\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\rho_{อากาศ}\\ \eta_{อากาศ}\end{matrix}\right\} \begin{matrix}L = 2\text{ mm}\\ v = ?\end{matrix}$$

สมการพื้นฐาน : $Re = \frac{L\rho \cdot v}{\eta}$

สมการทำการ : $v = \frac{\eta Re}{L\rho}$

แทนค่า : a. $$v = \frac{(1\times10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2)(1)}{(0.001)(1\times10^3\ \text{kg}/\text{m}^3)}$$

$$= 0.001\text{ m/s}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

= 1 mm/s

b. $$v = \frac{(0.018 \times 10^{-3})(1)}{(0.002)(1.3 kg/m^3)}$$

= 0.007 m/s

= 7 mm/s

11.2.9 · **พลังงานจากลม** ลมเป็นแหล่งของพลังงาน ซึ่งสิ่งนี้ไม่ใช่แนวความคิดใหม่เลย เพราะจากหลักฐานทางประวัติศาสตร์เชื่อได้ว่า มีการใช้โรงสีลม (windmill) มาตั้งแต่สมัยบาบิโลนและจีนประมาณ 4,000 ปีมาแล้ว

พลังงานจากลมเป็นผลของพลังงานจากดวงอาทิตย์ พลังงานลมและกำลังที่ได้จากกังหันลมจะกล่าวถึงในหัวข้อนี้พอสังเขปเท่านั้น

เราสามารถที่จะใช้ความรู้ที่กล่าวถึงในบทนี้มาประมาณค่ากำลังจากลมได้ การใช้พลังงานจลน์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (ความหนาแน่นของพลังงานจลน์) เนื่องจากการเคลื่อนที่ของอากาศ เขียนได้เป็น

$$\frac{E_k}{volume} = \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (11.49)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของอากาศ และ v คือ อัตราเร็วของลม อัตราการไหลของอากาศผ่านพื้นที่หน้าตัด A คือ Av ดังรูป 11.37 ซึ่งก็คือ ปริมาตรของอากาศที่ผ่านพื้นที่ต่อวินาที

ถ้าคูณสมการบนด้วยอัตราการไหล ก็จะได้

$$\text{กำลัง} = \frac{E_k}{volume} \times \frac{volume}{time}$$
$$= (\frac{1}{2}\rho v^2)(Av) = \frac{1}{2}\rho v^3 A \qquad (11.50)$$

เพราะฉะนั้น กำลังต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่

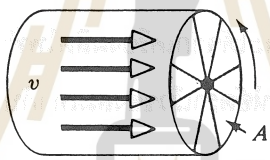
$$\frac{\text{กำลัง}}{A} = \frac{1}{2}\rho v^3 \qquad (11.51)$$

เช่น ถ้าอัตราเร็วของลมเท่ากับ 12.5 m/s (45 km/h)

$$\rho_{\text{อากาศ}} = 1.3 \quad \text{kg/m}^3$$

$$\frac{\text{กำลัง}}{A} = \frac{1}{2}(1.3\ \text{kg/m}^3)(12.5\ \text{m/s})^3$$

$$\cong 1{,}270\ \text{W/m}^2 \cong 1.3\ \text{kW/m}^2$$

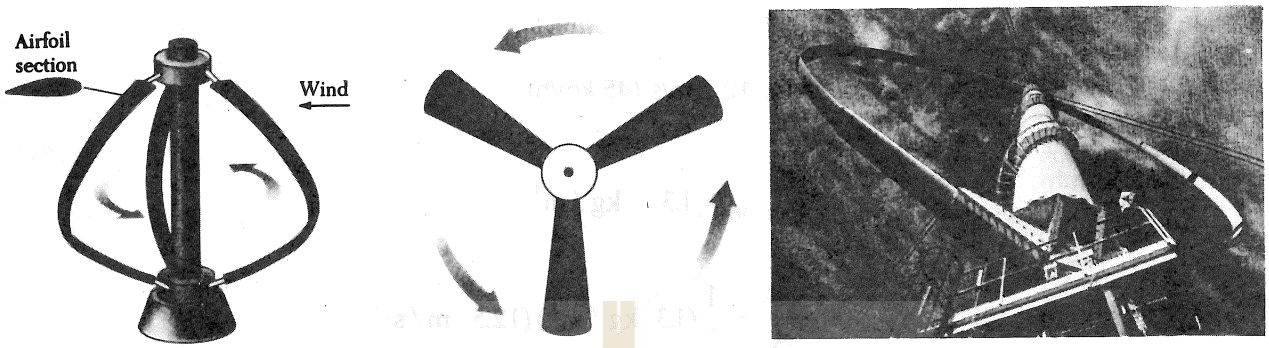


รูป 11.37 ลมเคลื่อนที่ผ่านท่อทรงกระบอกพื้นที่หน้าตัด A ด้วยอัตราเร็ว v

ดังนั้น ถ้าพลังงานจากลมได้เปลี่ยนเป็นพลังงานของเครื่องจักรทั้งหมด ก็คำนวณหาได้ตามสมการ 11.50 แต่ความจริงแล้ว เมื่อลำอากาศปะทะกังหันลมแล้วก็ยังเคลื่อนที่ผ่านไป จากการคำนวณโดยละเอียดพบว่า พลังงานสูงสุดที่ลมจะให้กับกังหันจะมีค่าได้เพียง 59.3 เปอร์เซ็นต์ ($\frac{16}{27} = 59.3\%$) เท่านั้น นั่นคือค่าสูงสุดของกำลังต่อพื้นที่ที่เครื่องจักรกังหันลม (อุดมคติ) จะได้รับจากลม คือ

$$\frac{P_{max}}{A} = \frac{8}{27}\rho v^3 \qquad (11.52)$$

สำหรับเครื่องจักรจริงๆ นั้น ยังมีการสูญเสียกำลังไปเนื่องจากใบพัดของกังหันลมไม่ใช่ใบพัดอุดมคติ สูญเสียไปกับเฟือง จึงลดลงมาเหลือประมาร 15% ของค่าในสมการ (11.51) ภาพสเกตช์ของกังหันลมแสดงในรูป (11.38) (a), (b) ส่วนภาพ (c) เป็นกังหันลม Darrieus



รูป 11.38 (a) กังหันลมแกนตั้ง (b) กังหันลมแกนนอน (c) กังหันลม Darrieus

ตัวอย่าง 11.19 จงคำนวณหากำลังที่จะได้จากเครื่องผลิตไฟฟ้ากังหันลม (อุดมคติ) ซึ่งใบพัดมีความยาว 40 เมตร วัดจากแกนหมุน กำหนดให้อัตราเร็วของลมเท่ากับ 10 m/s และประสิทธิภาพของเครื่องจักรเท่ากับ 15%

วิธีทำ

ข้อมูล : $r = 40\ m$

$$A = \pi r^2 = \pi(40\ m)^2 = 5 \times 10^3\ m^2$$

$$\rho = 1.2\ kg/m^3$$

$$v = 10\ m/s$$

สมการพื้นฐาน :

สำหรับกังหันลมอุดมคติกำลังสูงสุดคือ

$$\text{กำลังสูงสุด} = \frac{1}{2}\rho A v^3$$

กำลังที่ได้จากเครื่องกำเนิดไฟฟ้า = (15%) กำลังสูงสุด

สมการทำการ : เหมือนสมการพื้นฐาน

แทนค่า : กำลังสูงสุด $= \frac{1}{2}(1.2\ \text{kg/m}^3)(5.0\times10^3\ \text{m}^2)(10\ \text{m/s})^2$

$= 3.0 \times 10^6$

$W = 3.0\ \text{MW}$

กำลังจากเครื่องกำเนิดไฟฟ้า $= (0.15)(3.0\ \text{MW})$

$= 0.45\ \text{MW}$

เมื่อเปรียบเทียบกับโรงผลิตไฟฟ้ากังหันขนาดใหญ่ ซึ่งให้กำลังประมาณ 1 GW = 10^9 W จะเห็นว่า จะต้องใช้โรงผลิตไฟฟ้ากังหันลมขนาดที่กล่าวถึงในตัวอย่างนี้ประมาณ 2,200 โรง เพื่อให้ได้กำลังเท่ากับโรงผลิตไฟฟ้ากังหันน้ำโรงเดียว นี่จึงเป็นจุดอ่อนในการนำเอาพลังงานจากลมมาใช้

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

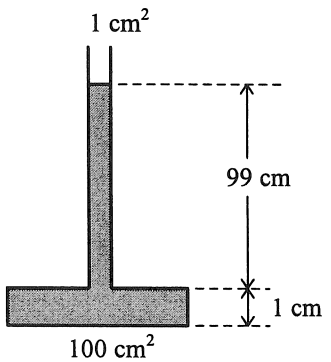
แบบฝึกหัด

1. ลูกสูบของแม่แรงไฮดรอลิกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เซนติเมตร จงหาความดันเป็นนิวตันต่อตาราง เมตร เพื่อใช้ยกรถยนต์มวล 2,000 กิโลกรัม
   (ตอบ 1.3×10^6 N·m^2)

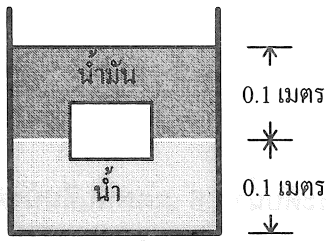
2. ของเหลวในมาโนมิเตอร์ปลายเปิดในรูป 11.4(b) คือ ปรอท และ จุด A อยู่สูงกว่าระดับต่ำสุด 3 เซนติเมตร ความดันของบรรยากาศ = 970 มิลลิบาร์
   a. ความดันสัมบูรณ์ที่ก้นหลอดตัว U เป็นเท่าไร
   b. ความดันสัมบูรณ์ในปลายเปิด ณ ความลึก 5 cm จากผิวอิสระเท่ากับเท่าไร
   c. ความดันสัมบูรณ์ของก๊าซในถังเป็นเท่าไร
   d. อ่านความดันของก๊าซจากเครื่องวัดได้เท่ากับกี่เซนติเมตรของปรอท
   e. ความดันที่อ่านได้นี้เท่ากับกี่เซนติเมตรของน้ำ
   (ตอบ a. 1.077×10^5 N·m^2 b. 1.037×10^5 N m^2 c. 1.037×10^5 N·m^2
   d. 5 cm ของปรอท e. 68 cm ของน้ำ

3. ความดันอันหนึ่งดันน้ำได้สูง 60 เซนติเมตร แต่ดันน้ำเกลือได้สูง 50 เซนติเมตร ถามว่าน้ำเกลือมีความหนาแน่น เท่าไร
   (ตอบ $1.2 \times 10^3 \, \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)

4. หลอดแก้วปลายเปิดมีพื้นที่ภาคตัดขวาง 1 เซนติเมตร^2 ตั้งติดอยู่กับปากอ่างสูง 1 เซนติเมตร ซึ่งอ่างนี้มีพื้นที่ภาคตัดขวาง 100 เซนติเมตร^2 เติมน้ำลงทางหลอดจนสูง 100 เซนติเมตร จากก้นอ่าง ดังในรูป
   a. แรงที่น้ำดันก้นถังเท่ากับเท่าไร
   b. น้ำทั้งหมดหนักเท่าไร
   c. เหตุใดจึงตอบไม่เท่ากัน
   (ตอบ a. 98 N, b. 1.95 N)



5. ไม้รูปลูกบาศก์ยาวด้านละ 0.1 เมตร ลอยอยู่ระหว่างน้ำและน้ำมันดังรูป 1.40 ด้านล่างอยู่ต่ำกว่าผิวสัมผัสระหว่างน้ำมัน 0.02 เมตร น้ำมันมีความหนาแน่น 600 กิโลกรัม - เมตร$^{-3}$ จงหา

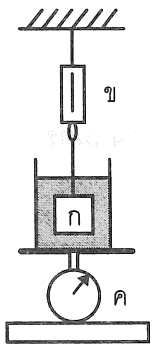


a. มวลของไม้

b. ความดันเกจที่ด้านล่างของไม้

(ตอบ a. 0.68 kg , b. 784 N/m^2)

6. ผูกวัตถุ ก ด้วยเชือกที่แขวนติดกับตาชั่งสปริง ข และจุ่มอยู่ในของเหลวในบีกเกอร์ น้ำหนักของบีกเกอร์ 2 นิวตัน น้ำหนักของของเหลว 3 นิวตัน ตาชั่งสปริง ข อ่าน 5 นิวตัน และตาชั่ง ค อ่าน 15 นิวตัน ปริมาตรของวัตถุ 5 x 10^{-3} ลูกบาศก์เมตร



a. จงหาน้ำหนักของของเหลวต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร

b. ตาชั่งสปริง ข และตาชั่ง ค จะอ่านเท่าใด ถ้าวัตถุ ก ไม่จมอยู่ใน ของเหลว

(ตอบ a. 2,000 N/m^3 b. 15 N, 5 N)

7. ลูกสูบของแม่แรงไฮดรอลิกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เซนติเมตร จงหาความดันเป็นนิวตันต่อตารางเมตร เพื่อใช้ยกมวล 2,000 กิโลกรัม

(ตอบ 1.3 x 10^6 นิวตันต่อตารางเมตร)

8. ลูกสูบของแม่แรงไฮดรอลิกมีรัศมี 5 เซนติเมตร และ 30 เซนติเมตร

a. จะต้องออกแรงที่ลูกสูบเล็กเท่าไร จึงจะได้แรงที่ลูกสูบใหญ่ 5,000 นิวตัน

b. ความดันที่ลูกสูบใหญ่เท่ากับเท่าไร

c. ความดันที่ลูกสูบเล็กเท่ากับเท่าไร

(ตอบ a. 139 N, b. 17.7 kPa, c. 17.7 kPa)

9. วางลวดเหล็กเส้นรอบวงยาว 160 มิลลิเมตร หย่อนให้แตะแอลกอฮอล์ ปรากฏว่าต้องออกแรงดึง (อันเนื่องจากแรงตึงผิว) 7.72 x 10^{-3} นิวตัน จึงจะดึงวงลวดออกจากของเหลวได้ จงหาความตึงผิวของแอลกอฮอล์

(ตอบ 0.024 นิวตันต่อเมตร)

10. หลอดคะปิลลาซึ่งมีรัศมีภายใน 0.3 มิลลิเมตร จุ่มลงไปในน้ำ มีมุมสัมผัส 3.5°
    a. จงหาน้ำหนักของน้ำที่ขึ้นมาในหลอดเหนือระดับปกติ ด้วยสภาพคะปิลลา
    b. จงหาความสูงของน้ำในหลอด
    (ตอบ a. 1.37×10^{-4} N ; b. 49.5 mm)

11. จงหาความเร็วของอัตราไหลของน้ำจากรูข้างถังซึ่งต่ำกว่าระดับน้ำ 1.6 เมตร พื้นที่หน้าตัดของตารางเท่ากับ 30 ตารางมิลลิเมตร และจงหามวลของน้ำที่ไหลออกไปต่อหนึ่งหน่วยเวลา (ไม่นำ vena contracta มาคิด)
    (ตอบ 5.6 m/s, 168 g/s)

12. กาลักน้ำดังรูป 11.29 พื้นที่หน้าตัดของท่อเท่ากับ 50 ตารางมิลลิเมตร h = 0.4 เมตร
    a. จงหาความเร็วของการไหลที่ปลายล่างของท่อ
    b. หาปริมาตรของของไหลต่อนาทีที่ไหลออกไป
    (ตอบ a. 2.8 m/s b. 8.4 L/min)

13. อัตราเร็วของน้ำในสายกระแสเท่ากับ 5 เมตร/วินาที ผ่านท่อช่วงแรกซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด 480 ตารางมิลลิเมตร จากนั้นท่อลดระดับต่ำลงมา 10 เมตร และมีพื้นที่หน้าตัด 960 ตารางมิลลิเมตร ถ้าให้ความดันในท่อช่วงแรกเท่ากับ 180 กิโลปาสคัล จงหาอัตราเร็วของของไหลและความดันในท่อช่วงที่สอง
    (ตอบ 2.5 m/s; 287 kPa)

14. ปีกเครื่องบินแต่ละข้างมีพื้นที่ 25 ตารางเมตร ถ้าอัตราเร็วของอากาศเหนือปีกเครื่องบินเท่ากับ 65 เมตร/วินาที และใต้ปีกเครื่องบินเท่ากับ 50 เมตร/วินาที ความหนาแน่นของอากาศเท่ากับ 1 กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร จงหาแรงยกปีกเครื่องบิน
    (ตอบ 2.16×10^4 N)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 12 อุณหพลศาสตร์

เค้าโครงเรื่อง

12.1 อุณหพลศาสตร์ ฟิสิกส์เชิงสถิติและจลนพลศาสตร์
12.2 บทนิยามพจน์ต่าง ๆ ของอุณหพลศาสตร์
12.3 กฎข้อที่ศูนย์และแนวคิดเกี่ยวกับอุณหภูมิ
12.4 สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ
12.5 สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์
12.6 งาน
12.7 พลังงานและกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์
12.8 เอนทัลปีและความจุความร้อน
12.9 เอนโทรปีและกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์
12.10 การหาค่าเอนโทรปี
12.11 หลักการเพิ่มเอนโทรปีหรือลดพลังงาน
12.12 เครื่องยนต์ความร้อน ตู้เย็น และวัฏจักรคาร์โนท์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

12.1 อุณหพลศาสตร์ ฟิสิกส์เชิงสถิติและจลนพลศาสตร์

อุณหพลศาสตร์ (thermodynamics) ฟิสิกส์เชิงสถิติ (statistical physics) และจลนพลศาสตร์ (kinetics) เป็นศาสตร์ที่เกี่ยวกับกระบวนการทางกายภาพ (physical processes) ที่เกิดขึ้นในระบบมหาทรรศน์ (macroscopic systems) ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคขนาดเล็กมาก เช่น อะตอม โมเลกุล ไอออน อิเล็กตรอน โฟตอน เป็นต้น กระบวนการดังกล่าวขึ้นอยู่กับชนิดของระบบที่แตกต่างกันไป

การศึกษาสถานะ (states) ของระบบมหาทรรศน์ กระทำได้ 2 วิธี คือ ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ และระเบียบวิธีทางสถิติระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์เป็นระเบียบวิธีที่ไม่ขึ้นกับแบบจำลอง (model) ใด ๆ ของโครงสร้างอะตอมและโมเลกุลของสสาร แต่เป็นระเบียบวิธีที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณที่วัดได้ เช่น ความดัน ปริมาตร อุณหภูมิ ความเข้มข้นของสารละลาย ความเข้มของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า เป็นต้น ปริมาณใด ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างอะตอมและโมเลกุลของสสารจะไม่ใช้ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ในการแก้ปัญหา

ในทางตรงกันข้าม ระเบียบวิธีทางสถิติเป็นระเบียบวิธีที่ตั้งอยู่บนแบบจำลองของโครงสร้างอะตอมและโมเลกุลของสสาร หลักการของระเบียบวิธีทางสถิติ คือ การหากฎที่อธิบายความสัมพันธ์และลักษณะของอนุภาคในระบบเพื่อนำไปสู่กฎที่อธิบายความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ ในระบบมหาทรรศน์ต่อไป

ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ ซึ่งเป็นอิสระต่อแบบจำลองใด ๆ จึงมีความเป็นสากลหรือใช้ได้ทั่วไปมากกว่า เมื่อเทียบกับผลที่ได้จากระเบียบวิธีทางสถิติซึ่งเป็นจริงภายใต้เงื่อนไขหรือข้อจำกัดบางประการ อย่างไรก็ตาม หลังจากการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์เสร็จสิ้นลง ผลที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ จะปราศจากข้อมูลเกี่ยวกับคุณสมบัติของอะตอมหรือโมเลกุล จึงเป็นข้อจำกัดของระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับคุณลักษณะเชิงเทคนิคบางอย่าง เช่น อุณหพลศาสตร์วิศวกรรม (engineering thermodynamics) วิศวกรรมเชิงความร้อน (heat engineering) เป็นต้น

ด้วยเหตุนี้ คำถามประเภท "ทำไม" จึงไม่มีความหมายสำหรับอุณหพลศาสตร์ เช่น เมื่อใช้ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ศึกษาการเย็นตัวลงของลวดทองแดงเมื่อถูกทำให้ยืดออกอย่างรวดเร็ว ในขณะเดียวกันยางยืดจะร้อนขึ้นกว่าเดิมเมื่อถูกทำให้ยืด เราอาจพอใจกับผลการคำนวณเชิงอุณห

พลศาสตร์เกี่ยวกับความจริงดังกล่าว โดยปราศจากความเข้าใจถึงกลไกที่ทำให้เกิดปรากฏการณ์ที่แตกต่างกันนี้ ในทางตรงกันข้ามคำตอบของปัญหาโดยระเบียบวิธีเชิงสถิติตั้งอยู่บนพื้นฐานของแนวคิดเกี่ยวกับอะตอมและโมเลกุล ทำให้เราเข้าใจกลไกการเกิดปรากฏการณ์ได้ดียิ่งขึ้น

ระเบียบวิธีทางสถิติอาจใช้แก้ปัญหาที่ไม่อาจแก้ได้โดยระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์ ตัวอย่างที่สำคัญคือ การหาสมการสถานะ (equation of state) ของระบบมหาทรรศน์ ทฤษฎีความจุความร้อนทฤษฎีการแผ่รังสีความร้อน เป็นต้น ประการสุดท้าย คือ ระเบียบวิธีทางสถิติอาจให้ข้อจำกัดการใช้กฎทางอุณหพลศาสตร์ หรืออาจทำนายการฝ่าฝืนกฎทางอุณพลศาสตร์ได้เช่นกัน

จะเห็นได้ว่าทั้งอุณหพลศาสตร์และฟิสิกส์เชิงสถิติไม่อาจให้ความกระจ่างอย่างชัดเจนในตัวเองแก่ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ ซึ่งแตกต่างจากสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น ทัศนศาสตร์ (optics) กลศาสตร์ พลศาสตร์ไฟฟ้า (electrodynamics) เป็นต้น ทั้งอุณหพลศาสตร์และฟิสิกส์เชิงสถิติให้เพียงระเบียบวิธีเพื่อศึกษาระบบมหาทรรศน์ที่สถานะสมดุลเท่านั้น

ระเบียบวิธีทางอุณหพลศาสตร์เชิงสถิติ (statistical thermodynamics) สามารถใช้ศึกษาระบบใด ๆ ซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมาก ๆ เช่น แก๊ส ของเหลว ของแข็ง พลาสมา อิเล็กโทรไลต์ (electrolytes) การแผ่รังสีของแสง นอกจากนี้สามารถใช้ศึกษานิวเคลียสหนัก ซึ่งประกอบด้วยนิว คลีออนจำนวนนับร้อยได้อีกด้วย

สาขาของวิชาฟิสิกส์ซึ่งเกี่ยวข้องกับสถานะและกระบวนการที่ไม่อยู่ในสภาวะสมดุล เรียกว่า non-equilibrium thermodynamics และ physical kinetics ตามลำดับ physical kinetics ใช้ศึกษากระบวนการการผ่อนคลาย (relaxation) ซึ่งเปลี่ยนจากสถานะไม่สมดุลไปสู่สถานะที่สมดุล และกระบวนการขนส่งที่สถานะคงตัว (steady-state transport processes) ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อ ๆ ไป

12.2 บทนิยามพจน์ต่าง ๆ ของอุณหพลศาสตร์

อุณหพลศาสตร์เป็นวิชาที่อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานความร้อนและพลังงานกล และตั้งอยู่บนพื้นฐานของกฎ 3 ข้อ กล่าวคือ กฎข้อที่หนึ่งซึ่งเป็นกฎการอนุรักษ์พลังงานแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานความร้อนและพลังงานกล กฎข้อที่สองเป็นกฎที่อธิบายการเปลี่ยนเอนโทรปี (entropy) ในระบบและลักษณะการเปลี่ยนแปลงพลังงานที่เกิดขึ้น และกฎข้อที่สามซึ่งเกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์ของเอนโทรปี

ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่า อุณหพลศาสตร์ไม่ได้ใช้สมมุติฐานใด ๆ เกี่ยวกับโครงสร้างของสสารเลย เป็นเพียงศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติทั่วไปที่สามารถวัดค่าได้เท่านั้น กฎต่าง ๆ จึงพัฒนามาจากการสังเกตและการทดลองที่ยาวนาน

พจน์ (terms) ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับอุณหพลศาสตร์เสมอมีดังนี้ :

ระบบ (thermodynamic system) เป็นส่วนหนึ่งของจักรวาลภายใต้กฎเกณฑ์ทางอุณหพลศาสตร์ ส่วนอื่นๆ ที่ไม่อยู่ในระบบจะถือเป็นสิ่งแวดล้อม (surroundings) ระบบปิด (closed system) เป็นระบบที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนสสารกับสิ่งแวดล้อม แต่ระบบเปิด (open system) เป็นระบบที่มีการแลกเปลี่ยนสสารกับสิ่งแวดล้อม ระบบปิดสามารถแลกเปลี่ยนพลังงานกับสิ่งแวดล้อม ในขณะที่ระบบเปิดสามารถแลกเปลี่ยนทั้งสสารและพลังงานกับสิ่งแวดล้อม ระบบใดที่ไม่สามารถแลกเปลี่ยนสสารหรือพลังงานไม่ว่าในรูปแบบใดก็ตามถือว่าเป็นระบบเอกเทศ (isolated system) ที่ขอบ (boundary) ของระบบปิดไม่ยอมให้สสารทะลุทลวงเข้าไปในระบบเลย แต่ที่ขอบของระบบเอกเทศต้องไม่ยอมให้สสาร ความร้อน รังสี หรือพลังงานรูปแบบใดๆ เข้าสู่ระบบ จากนิยามเหล่านี้เมื่อมองในแง่ที่ไม่ใช่สัมพัทธภาพจะเห็นได้ว่ามวล และพลังงานไม่อาจเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างกันได้ มวลและพลังงานจะต้องมีการอนุรักษ์แยกจากกันเสมอ

ปริมาณทางอุณหพลศาสตร์อาจแยกได้เป็น 2 ชนิด คือ ปริมาณที่ไม่ขึ้นกับจำนวนเนื้อสาร (intensive quantities) เช่น ความดัน อุณหภูมิ ความหนาแน่น และปริมาณที่ขึ้นกับจำนวนเนื้อสารหรือมวลของวัตถุในระบบ (extensive quantities) เช่น ปริมาตรซึ่งเปลี่ยนแปลงภายใต้เงื่อนไขที่ขึ้นกับปริมาณของเนื้อสาร เป็นต้น ระบบเอกพันธ์(homogeneous system) เป็นระบบซึ่งคุณสมบัติไม่ขึ้นกับจำนวนเนื้อสารเช่น ความหนาแน่นและความดันซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตำแหน่ง ถ้าคุณสมบัติของระบบไม่ขึ้นกับจำนวนเนื้อสารแต่เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องของตำแหน่ง เราเรียกระบบนั้นว่า ระบบวิวิธพันธุ์ (heterogeneous system or inhomogeneous system) ระบบวิวิธพันธุ์ประกอบด้วยระบบเอกพันธ์จำนวนหนึ่งซึ่งแยกจากกันด้วยพื้นผิวของความไม่ต่อเนื่อง แต่ละส่วนที่แยกจากกันเรียกว่าเฟส (phase) เช่น สารละลายของน้ำและน้ำมัน น้ำที่บรรจุในท่อปลายปิดซึ่งมีไอน้ำลอยอยู่เหนือน้ำเป็นต้น ที่บริเวณรอยต่อระหว่างเฟสทั้งสองของของเหลวจะปรากฏเห็นความไม่ต่อเนื่องอย่างชัดเจน สถานะของระบบกำหนดด้วยค่าตัวแปรต่างๆ เรียกว่า thermodynamic coordinates หรือ state variables เช่น ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ ปริมาตร เป็นต้น และสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านี้ เรียกว่า **สมการสถานะ**

เมื่อเกิดความสมดุลระหว่างแรงในระบบกับสิ่งแวดล้อม เราเรียกระบบว่าอยู่ในสถานะสมดุลเชิงกล (mechanical equilibrium) ถ้าทุกส่วนภายในระบบมีอุณหภูมิสม่ำเสมอและมีค่าเท่ากับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม เราเรียกระบบนั้นว่าอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อน (thermal equilibrium) ถ้าองค์ประกอบทางเคมีของระบบมีค่าเท่ากันหมด เราเรียกระบบนั้นว่าอยู่ในสมดุลเคมี (chemical equilibrium) ระบบที่อยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อน สมดุลเชิงกล และสมดุลเคมีเรียกว่า อยู่ในสถานะสมดุลเชิงอุณหพลวัต (thermodynamic equilibrium) สถานะของระบบที่อยู่ในสมดุลเชิงอุณหพลวัตกำหนดได้ด้วยค่าความดัน ปริมาตร และอุณหภูมิ ดังนั้น อุณหพลศาสตร์จึงเป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับระบบที่อยู่ในสมดุลเชิงอุณหพลวัต

การเปลี่ยนค่าตัวแปรต่างๆ ของระบบ เรียกว่า กระบวนการ (process) เมื่อใดก็ตามที่มีงานเกิดขึ้นอันเนื่องจากสิ่งแวดล้อมหรือสิ่งอื่นใดก็ตาม เราถือว่ามีกระบวนการเกิดขึ้น ถ้ากระบวนการเกิดขึ้นในลักษณะที่ ณ เวลาใดก็ตาม ความดัน อุณหภูมิและความหนาแน่นขององค์ประกอบของระบบมีค่าสม่ำเสมอ เราเรียกกระบวนการนั้นว่า ผันกลับได้ (reversible) ดังนั้น กระบวนการผันกลับได้จึงเป็นกระบวนการที่สถานะของระบบแตกต่างจากสถานะสมดุลน้อยมาก กระบวนการนี้จึงเกิดขึ้นอย่างช้าๆ ภายใต้การควบคุมบางอย่าง กระบวนการผันกลับไม่ได้ (irreversible process) เป็นกระบวนการที่สถานะของระบบเปลี่ยนแปลงอย่างถาวรโดยไม่อาจกลับมาสู่สถานะเดิมได้อีกต่อไป

ถ้ากระบวนการเกิดขึ้นในลักษณะที่อุณหภูมิของระบบคงตัวตลอดเวลาเราเรียกกระบวนการนี้ว่า isothermal process ถ้ากระบวนการเกิดขึ้นในลักษณะที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมเลย เรียกว่า adiabatic process กระบวนการดังกล่าวจึงไม่มีความร้อนเข้าหรือออกจากระบบเลย แม้ว่าอุณหภูมิจะเปลี่ยนแปลงก็ตาม กระบวนการที่เกิดขึ้นในขณะที่ความดันมีค่าคงตัวตลอดเวลา เรียกว่า isobaric process และกระบวนการที่เกิดขึ้นในขณะที่ปริมาตรคงตัวไม่เปลี่ยนแปลง เรียกว่า isochoric process หรือ isovolumic process

12.3 กฎข้อที่ศูนย์และแนวคิดเกี่ยวกับอุณหภูมิ

กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์ กล่าวว่า ถ้าระบบสองระบบอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนกับระบบที่สาม ทั้งสองระบบนั้นจะอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนระหว่างกันด้วย

จากกฎนี้ทำให้เกิดมูลฐานของแนวคิดเกี่ยวกับอุณหภูมิ กล่าวคือ ทั้งสามระบบจะต้องมีคุณสมบัติอย่างหนึ่งที่บอกให้ทราบว่าอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนซึ่งกันและกัน คุณสมบัตินี้เรียกว่า อุณหภูมิ ดังนั้น อุณหภูมิของระบบจึงเป็นคุณสมบัติที่กำหนดว่าระบบอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนกับระบบอื่น นั่นเอง

พิจารณาของไหล 3 ชนิด คือ A, B และ C ให้ P_A, V_A, P_B, V_B และ P_C, V_C เป็นความดันและปริมาตรของของไหลทั้งสามชนิดตามลำดับ ดังนั้นถ้า A และ B อยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนระหว่างกัน จะได้ว่า

$$\phi_1(P_A, V_A) = \phi_2(P_B, V_B)$$

หรือ

$$f_1(P_A, V_A, P_B, V_{\backslash B}) = 0$$

ซึ่งอาจแก้สมการแล้วได้

$$P_B = F_1[P_A, V_A, V_B] \qquad (12.1)$$

ทำนองเดียวกัน เมื่อ B และ C อยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนระหว่างกัน จะได้

$$P_B = F_2[P_C, V_C, V_B] \qquad (12.2)$$

หาก A และ C อยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนแยกจากกันแล้ว สมการ (12.1) หรือ (12.2) จะให้

$$F_1[P_A, V_A, V_B] = F_2[P_C, V_C, V_B] \qquad (12.3)$$

แต่ A และ C ยังอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนระหว่างกันด้วยเมื่อทั้งสองอยู่ในสถานะสมดุลเชิงความร้อนกับ B แยกจากกัน ดังนั้น

$$f_3[P_A, V_{,A}\, P_C, V_{C,}] = 0 \qquad (12.4)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (12.3) และ (12.4) จะเห็นได้ว่าสมการ (12.3) ประกอบด้วยตัวแปร V_B ในขณะที่สมการ(12.4) ไม่มีตัวแปรนี้ ดังนั้น

$$\phi_1(P_A, V_A) = \phi_3(P_C, V_C)$$

ซึ่งอาจเขียนเป็นกฎทั่วไปได้ว่า

$$\phi_1(P_A, V_A) = \phi_2(P_B, V_B) = \phi_3(P_C, V_C)$$

แสดงว่าฟังก์ชันทั้งสามมีค่าเชิงตัวเลขเดียวกัน แม้ว่าพารามิเตอร์ (P, V) ของแต่ละชนิดจะแตกต่างกัน ค่าเชิงตัวเลขนี้เรียกว่า อุณหภูมิของระบบ ดังนั้น

$$\phi(P, V) = T$$

ซึ่งเป็นสมการสถานะของระบบ

12.4 สมการสถานะของแก๊สอุดมคติ

จากการทดลองพบว่าแก๊สทุกชนิดจะมีพฤติกรรมที่เหมือนกันภายใต้เงื่อนไขที่ความหนาแน่นไม่มากจนเกินไป หรืออีกนัยหนึ่ง อุณหภูมิไม่ต่ำจนเกินไปและความดันไม่สูงเกินไป แก๊สที่มีอยู่จริงในธรรมชาติจะมีพฤติกรรมง่ายๆ ดังกล่าวที่เหมือนกัน จากความจริงข้อนี้จึงนำไปสู่แนวคิดเกี่ยวกับแก๊สอุดมคติ (ideal gas) ซึ่งมีพฤติกรรมง่ายๆ นี้ภายใต้เงื่อนไขทุกสถานะการณ์

สมมติเราทำการวัดความดัน P ปริมาตร V อุณหภูมิ T และมวล m ของแก๊สชนิดหนึ่งในพิสัยที่กว้างของตัวแปรเหล่านี้ จะพบว่าที่อุณหภูมิคงตัว ความดันของแก๊สจะเป็นสัดส่วนผกผันกับ $\frac{V}{m}$ (Boyle's law) และพบว่าผลคูณของความดันและ $\frac{V}{m}$ นี้ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์ (Charle's law) ผลการทดลองนี้อาจเขียนในรูปความสัมพันธ์

$$P\left(\frac{V}{m}\right) = kT \qquad (12.5)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวขึ้นกับชนิดของแก๊สที่ทำการทดลอง

เมื่อทำการทดลองต่อไปโดยเปรียบเทียบค่า k ของแก๊สชนิดต่างๆ พบว่า k เป็นสัดส่วนผกผันกับมวลโมเลกุล M ของแก๊สหรือ $k = \frac{R}{M}$ โดยที่ R เป็นค่าคงตัวที่มีค่าเท่ากันหมดสำหรับทุกแก๊ส และเรียกว่า universal gas constant มีค่า R = 8.31451J / (molle) (K)

ดังนั้น

$$P\left(\frac{V}{m}\right) = \frac{R}{M}T$$

หรือ

$$PV = \frac{m}{M}RT \qquad (12.6)$$

เพื่อความสะดวก เราจะนิยามหน่วยใหม่ของมวล เรียกว่า โมล (mole) หรือ 1 กรัมโมเลกุล โดยกำหนดว่า โมล หรือ 1 กรัมโมเลกุล มีค่าเท่ากับ M กรัม โดยที่ M คือมวลโมเลกุล ดังนั้น ถ้า m เป็นมวลของแก๊สเป็นกรัม แก๊ส n โมลจึงมีค่าเท่ากับ $\frac{m}{M}$ กรัม

สมการ (12.6) จึงกลายเป็น

$$PV = nRT \qquad (12.7)$$

ถ้าเราใช้ปริมาตรต่อโมลหรือ $v = \frac{V}{n}$ แทนที่จะใช้ปริมาตรโดยตรง ดังนั้น

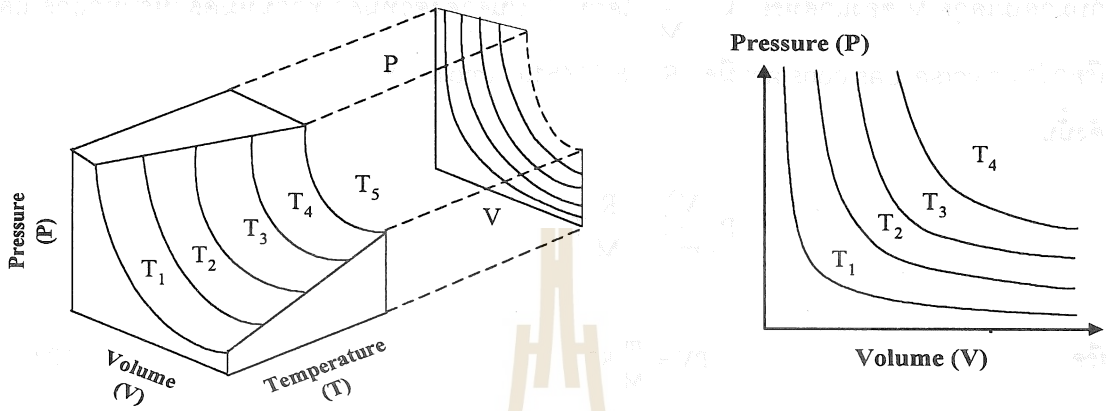
$$Pv = RT \qquad (12.8)$$

จะเห็นได้ว่า V ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความดัน ไม่ได้ขึ้นกับธรรมชาติของแก๊ส ที่ความดัน 1 บรรยากาศ และอุณหภูมิ 273 K แก๊สใดๆ จำนวน 1 โมลมีปริมาตร 22.4 ลิตร หรือ 0.0224 m^3 แก๊สอุดมคติเป็นแก๊สที่มีคุณสมบัติตามสมการ (12.8) ทุกสถานะการณ์ สมการ (12.8) เรียกว่าสมการสถานะของแก๊สอุดมคติจำนวน 1 โมล

แก๊สที่มีอยู่จริงในธรรมชาติจะมีคุณสมบัติที่ใกล้เคียงกับสมการ (12.8) ในพิสัยของเงื่อนไขที่ค่อนข้างกว้าง และเริ่มเบี่ยงเบนไปเมื่อความหนาแน่นแก๊สมากขึ้นและอุณหภูมิลดลง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เนื่องจากสมการ PV = ค่าคงตัว เป็นสมการไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ดังนั้นสมการ (12.7) ที่อุณหภูมิคงตัวค่าต่างๆ จึงเป็นวงศ์ไฮเพอร์โบลา (family of hyperbola) แสดงในรูปที่ 12.1 โดยแต่ละเส้นเรียกว่า ไอโซเทอร์มัล (isothermal) หรือ ไอโซเทอร์ม (isoterm)



(ก) (ข)

รูปที่ 12.1 (ก) แสดงแผนภาพ P-V-T ในสามมิติ และ
(ข) ฉายาของแผนภาพ P-V ในสองมิติ ซึ่งแต่ละเส้นคือไอโซเทอร์ม

ตัวอย่าง 12.1 จงหาความดันของแก๊ส He จำนวน 0.85 โมล ปริมาตร 0.012 m^3 ที่อุณหภูมิ 273 K และจงหาปริมาตรของแก๊สนี้ที่ความดันเดียวกันแต่อุณหภูมิเปลี่ยนไปเป็น 580 K

วิธีทำ :

จากสมการสถานะของแก๊สอุดมคติ จะได้

$$P = \frac{nRT}{V}$$

เนื่องจาก $n = 0.85$ mol, $V = 0.012\ m^3$ และ $T = 273$ K

$$\therefore\ P = \frac{(0.85)(8.31)(273)}{0.012} = 160\ \text{kPa}$$

และเนื่องจากสมการสถานะของสถานะที่ 1 และ 2 ยังคงเดิม คือ

$$P_1V_1 = nRT_1\ ,\ P_2V_2 = nRT_2 \quad \text{และ} \quad P_1 = P_2$$

ดังนั้น

$$V_2 = V_1\frac{T_2}{T_1} = (0.012)\left(\frac{580}{273}\right)$$

$$= 0.0255\ m^3$$

12.5 สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์

จากการทดลองกับแก๊สในธรรมชาติที่อุณหภูมิต่าง ๆ พบว่าที่อุณหภูมิสูง ๆ กราฟของความดัน - ปริมาตร จะมีลักษณะใกล้เคียงกับไฮเพอร์โบลาซึ่งเป็นลักษณะของแก๊สอุดมคติ เมื่ออุณหภูมิลดลง การเบี่ยงเบนไปจากไฮเพอร์โบลาจะเพิ่มมากขึ้น พฤติกรรมที่เบี่ยงเบนไปนี้มีสาเหตุมาจาก 2 ประการ คือ การคำนวณโดยใช้ปริมาตร V ในสมการ (12.7) ไม่คิดปริมาตรที่ถูกแทนที่โดยโมเลกุลของแก๊ส ดังนั้น ถ้า V เป็นปริมาตรของภาชนะที่ใช้บรรจุแก๊สและ b เป็นปริมาตรสำหรับแก๊ส ดังนั้น V-b จึงเป็นปริมาตรที่ว่างเปล่าสำหรับแก๊ส ค่าคงตัว b มีค่าเท่ากับจำนวนโมเลกุลของแก๊สคูณด้วยปริมาตรของแก๊ส 1 โมเลกุล

ประการที่สองคือแรงกระทำระหว่างโมเลกุลด้วยกันเองเมื่อโมเลกุลอยู่ใกล้กัน ทำให้ความดันที่ผนังของภาชนะลดลง จึงจำเป็นต้องเพิ่มความดันที่ใช้ในการคำนวณโดยสมการ (12.7) เนื่องจากความดันที่ผนังของภาชนะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความหนาแน่นแก๊สยกกำลังสอง และความหนาแน่นเป็นสัดส่วนผกผันกับปริมาตร ดังนั้น จึงต้องปรับความดันเป็น $P+\frac{a}{V^2}$ สมการ (2.7) จึง กลายเป็น

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT \qquad (12.9)$$

ซึ่งเรียกว่าสมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ (Van der Waal's equation of state) และเป็นสมการสถานะของแก๊สที่แท้จริง

สมการสถานะของแก๊สอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$PV=A+\frac{B}{V}+\frac{C}{V^2}+..... \qquad (12.10)$$

A, B, C.....เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ เรียกว่า virial coefficients สำหรับแก๊สอุดมคติ A = RT ส่วนค่าอื่นๆ เท่ากับศูนย์

นอกจากนี้สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ อาจเขียนเป็น

$$1 = \frac{RT}{\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b)}$$

หรือ $$PV = RT\left(1 + \frac{a}{PV^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{b}{V}\right)^{-1}$$

เทอม $\frac{a}{PV^2}$ และ $\frac{b}{V}$ มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับ 1 สำหรับแก๊สที่ถูกอัดไม่มากนัก ดังนั้นเมื่อใช้การกระจายทวินาม โดยตัดเทอมที่มีกำลังมากๆ ออกไปจะได้

$$PV = RT\left(1 - \frac{a}{PV^2}\right)\left(1 + \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2}\right)$$

$$= RT + RT.\frac{b}{V} - \frac{RT}{PV}.\frac{a}{V} + \frac{RTb^2}{V^2}$$

เนื่องจาก PV = RT โดยประมาณ ดังนั้น

$$PV = RT + \frac{(RTb - a)}{V} + \frac{RTb^2}{V^2} \qquad (12.11)$$

ซึ่งเป็นสมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ใน virial form และเมื่อเทียบกับสมการ (12.10) จะเห็นได้ว่า

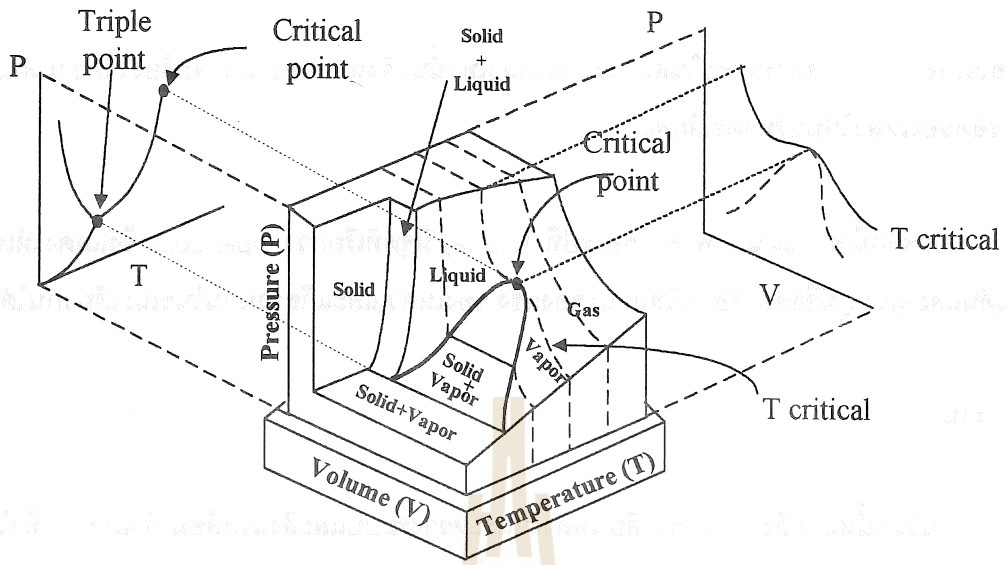
$$A = RT\ ;\ B = RTb - a\ ;\ C = RTb^2$$

สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์สำหรับแก๊ส n โมล คือ

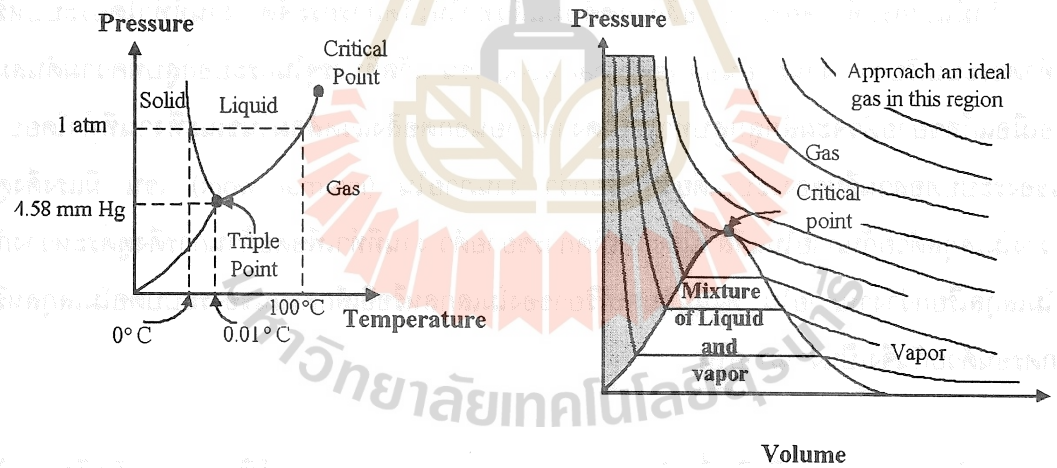
$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad (12.12)$$

ในกรณีของแก๊สที่แท้จริง แผนภาพในสามมิติจะแสดงสมการสถานะที่รวมสถานะของสสารได้ทั้งสามสถานะคือ ของแข็ง ของเหลว และแก๊ส แต่ค่อนข้างสลับซับซ้อน และแม้ว่าสมการสถานะอาจยังไม่ถูกต้องที่เดียวแต่แผนภาพนี้สามารถช่วยในการศึกษาเชิงวิเคราะห์ได้ดี ซึ่งได้แสดงไว้ในรูป 12.2 และ 12.3

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูป 12.2 แสดงแผนภาพสามมิติสำหรับสมการสถานะของสสาร มาตราส่วนที่ใช้ได้ปรับแต่งเพื่อความเหมาะสม



รูป 12.3 แสดงฉายาของแผนภาพ P-T และ P-V จากแผนภาพสามมิติ P-V-T ในรูป 12.2

มีข้อสังเกตุจากรูปทั้งสองคือ แก๊สไม่อาจเปลี่ยนสถานะเป็นของเหลวได้เหนือจุดวิกฤต (critical point) แม้ว่าจะเพิ่มความดันให้มากเพียงใดก็ตาม ทั้งนี้เพราะพลังงานเฉลี่ยของการชนกันระหว่างโมเลกุลของแก๊สที่อุณหภูมิเหล่านี้มีมากพอที่จะแยกแรงยึดเหนี่ยว (binding force) ที่พยายามรวมตัวกันเป็นของเหลว ดังนั้น ตามแนวเส้นไอโซเทอร์ม AB สสารจะอยู่ในสถานะที่เป็นแก๊ส ตามแนวเส้นไอโซเทอร์ม BC ซึ่งค่าความดันคงตัว สสารจะอยู่ในสถานะร่วมระหว่างแก๊สและของเหลว และตามแนว

เส้นไอโซเทอร์ม CD สสารจะอยู่ในสถานะของเหลวเท่านั้น ซึ่งหมายความว่าจะต้องใช้ความดันมากๆ ในการอัดของเหลวให้มีปริมาตรเล็กลง

นอกจากนี้ จากแผนภาพ P-T ของรูปที่ 12.3 (a) มีจุดที่เรียกว่า triple point ซึ่งแสดงให้เห็นค่าความดันและอุณหภูมิซึ่งสสารอาจมีสถานะของแข็ง ของเหลว และแก๊สร่วมกันในขณะเดียวกันได้

12.6 งาน

งานในที่นี้หมายถึงการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างระบบและสิ่งแวดล้อม ถ้าแรง F ทำให้เกิดการกระจัดเพียงเล็กน้อย dy ดังนั้น งานที่ทำโดยแรงนี้คือ

$$dW = F.dy \qquad (12.13)$$

ถ้ามีแรงกระทำโดยระบบต่อสิ่งแวดล้อมแล้วทำให้เกิดการกระจัด งานที่ทำโดยระบบหรือกระทำต่อระบบเรียกว่า งานภายนอก (external work) เช่น แก๊สที่บรรจุในกระบอกสูบที่ความดันสม่ำเสมอเมื่อแก๊สขยายตัวจะผลักลูกสูบทำให้เกิดงานภายนอกต่อสิ่งแวดล้อมในขณะที่งานที่ทำโดยบางส่วนของระบบต่อส่วนอื่นของระบบเดียวกันเรียกว่า งานภายใน (internal work) เช่น มีแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุลด้วยกันภายในแก๊ส เมื่อแก๊สเกิดการขยายตัว งานที่ทำเพื่อต่อต้านการดึงดูดระหว่างกันของโมเลกุลเรียกว่างานภายใน ดังนั้นอันตรกิริยาของโมเลกุลหรืออิเล็กตรอนของระบบต่อโมเลกุลหรืออิเล็กตรอนด้วยกันจึงเป็นงานภายใน

ต่อไปเราจะหางานที่เกิดขึ้นกับกระบวนการทางอุณหพลศาสตร์พิจารณาแก๊สที่บรรจุในกระบอกสูบซึ่งมีลูกสูบเคลื่อนที่เข้าออกได้ เราถือว่าแก๊สเป็นระบบหนึ่งมีลูกสูบและกระบอกสูบเป็นสิ่งแวดล้อมในตอนเริ่มต้น ระบบอยู่ในสถานะสมดุลกับสิ่งแวดล้อม โดยมีความดัน P_i และปริมาตร V_i ความร้อนอาจไหลเข้าสู่ระบบหรือออกจากระบบผ่านผนัง งานที่ทำต่อระบบโดยการอัดลูกสูบเข้ามาหรืองานที่ทำโดยระบบโดยการขยายตัวของแก๊ส เราจะพิจารณากระบวนการที่ระบบมีอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อมแล้วเปลี่ยนไปสู่สถานะสมดุลสุดท้ายด้วยความดัน P_f และปริมาตร V_f สมมติแก๊สขยายตัวแล้วเกิดแรงกระทำต่อลูกสูบ งานที่ทำโดยแก๊สเพื่อให้ลูกสูบเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยเป็นระยะ dy คือ $dW = Fdy$ ถ้า A เป็นพื้นที่หน้าตัดของลูกสูบและ P เป็นความดันที่เกิดขึ้นในช่วงที่ลูกสูบเคลื่อนที่เป็นระยะ dy ดังนั้น

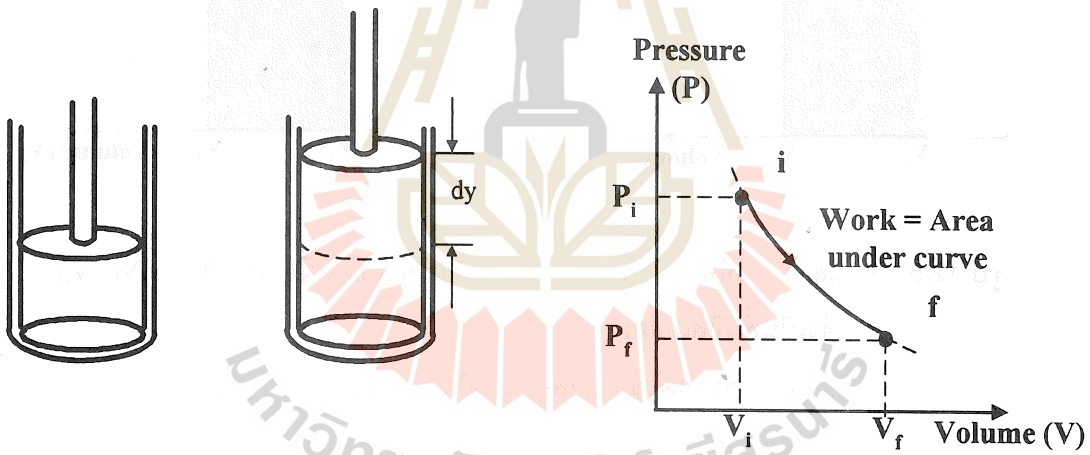
$$dW = PAdy = PdV \qquad (12.14)$$

dV เป็นปริมาตรที่เพิ่มขึ้นของแก๊ส

โดยทั่วไปความดันจะแปรเปลี่ยนไปกับการกระจัด และเราต้องทราบว่าความดันเปลี่ยนไปตามการกระจัดอย่างไร งานที่ทำทั้งหมด W โดยแก๊สต่อลูกสูบหาได้จากการอินทิเกรต คือ

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} PdV \qquad (12.15)$$

การหาค่าอินทิกรัลนี้ เราต้องทราบค่าความดันที่แปรเปลี่ยนไปกับปริมาตรและอุณหภูมิ งานที่ทำจะเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งของแผนภาพ P-V



รูป 12.4 แสดงการทำงานของแก๊สในกระบอกสูบ และแผนภาพ P-V

งานที่ทำโดยระบบขึ้นอยู่กับกระบวนการซึ่งระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้นไปสู่สถานะสุดท้าย หรือขึ้นกับทางเดินระหว่างสถานะทั้งสองนี้

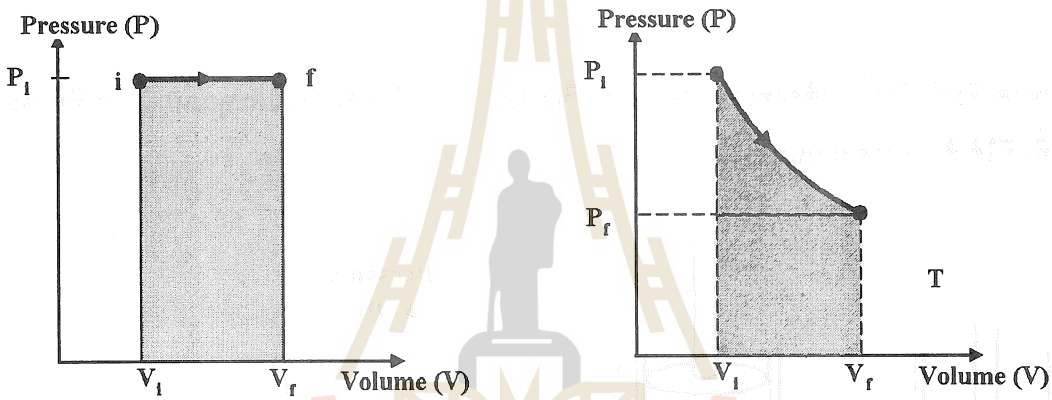
ใน isochoric process ปริมาตรมีค่าคงตัว ดังนั้น dV = o ทำให้ไม่มีงานเกิดขึ้น ไม่มีส่วนใดของสิ่งแวดล้อมเกิดการเคลื่อนที่ และระบบไม่ได้ทำงาน หรือ W = o

ใน isobaric process ความดันมีค่าคงตัวคือเท่ากับ P ดังนั้น งานที่ทำโดยระบบจึงเท่ากับ

$$W = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P\left(V_f - V_i\right) = P\Delta V \qquad (12.16)$$

ถ้าปริมาตรที่เปลี่ยนไป ΔV มีเครื่องหมายบวกซึ่งแสดงการขยายตัวของระบบ งานที่ทำจึงมีเครื่องหมายบวกด้วย และถ้า ΔV เป็นลบซึ่งหมายถึงการอัด งานที่ทำโดยระบบจะมีเครื่องหมายลบ

ใน isothermal process อุณหภูมิมีค่าคงตัว แผนภาพ P-V ของแก๊สอุดมคติแสดงในรูป 12.5 (ข) เส้นไอโซเทอร์มสอดคล้องกับอุณหภูมิ T โดยแก๊สจะขยายจากปริมาตรเริ่มต้น V_i ไปสู่ V_f ในขณะที่อุณหภูมิคงตัว



รูป 12.5 (a) แสดงงานที่ทำโดยระบบจาก isobaric process มีค่าเท่ากับ $P_i (V_f - V_i)$ ซึ่งเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยม

(b) แสดงการขยายตัวของแก๊สอุดมคติใน isothermal process

การคำนวณหางานที่ทำโดยการขยายตัวของแก๊สใน isothermal process ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้งของแผนภาพ P-V นั้น เราจะใช้สมการ (12.7) คือ PV = nRT หรือ P = nRT/V ดังนั้น

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT\left(\ell nV_f - \ell nV_i\right)$$

หรือ

$$W = nRT\ \ell n\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \qquad (12.17)$$

W มีค่าเป็นบวกถ้า $V_f > V_i$ และเป็นลบเมื่อ $V_f < V_i$

นอกจากนี้ใน adiabatic process ซึ่งเป็นกระบวนการที่ไม่มีการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมเลย ความดันและปริมาตรมีการเปลี่ยนแปลงสัมพันธ์กันโดย PV^{γ} มีค่าคงตัว โดยที่ $\gamma = C_P/C_V$, C_P และ C_V เป็นความจุความร้อนที่ความดันและปริมาตรคงตัวตามลำดับ (ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อที่ 12.8) ดังนั้น

$$P = \frac{P_i V_i^{\gamma}}{V^{\gamma}}$$

$$\therefore \quad W = \int_{V_i}^{V_f} P dV = \frac{P_i V_i}{r - 1}\left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma - 1}\right] \qquad (12.18)$$

ตัวอย่าง 12.2 จงหางานที่ทำในการอัดแก๊สออกซิเจน 2 กรัม ที่อุณหภูมิ 273 K ให้มีปริมาตรลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของปริมาตรเดิม โดยกระบวนการต่อไปนี้ (a) isothermal process (b) isobaric process โดยถือว่าออกซิเจนเป็นแก๊สอุดมคติ มีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 32

วิธีทำ

(a) งานที่ทำโดย isothermal process หาได้จากสมการ (12.17) คือ

$$W = nRT\ell n\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

เนื่องจากออกซิเจนมีน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 32 ดังนั้น จำนวนโมล คือ $n = \frac{2}{32} = 0.0625$ และ

$$W = (0.0625)(8.31)(273)\ell n\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -98.3 \text{ J}$$

เครื่องหมายลบ บอกให้ทราบว่ามีงานจากภายนอกกระทำต่อแก๊ส (ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อที่ 12.7)

(b) จากสมการ (12.16) สำหรับ isobaric process

$$W = P(V_f - V_i) = P\left(\frac{V_i}{2} - V_i\right) = -\frac{PV_i}{2}$$

และเนื่องจาก $P_iV_i = nRT_i$

หรือ $V_i = \frac{nRT_i}{P}$

$$\therefore \quad W = -\frac{1}{2}nRT_i$$

$$= -\frac{1}{2}(0.0625)(8.31)(273)$$

$$= -70.9 \text{ จูล}$$

ตัวอย่าง 12.3 แก๊สฮีเลียมที่อุณหภูมิ 310 K มีความดันและปริมาตรเริ่มต้นที่ 202 kPa และ 48 L ตามลำดับ เมื่ออุณหภูมิคงตัวแก๊สขยายตัวเป็น 106 L หลังจากนั้นจึงถูกอัดด้วยความดันคงตัวเพื่อให้กลับไปสู่ปริมาตร 48 L เท่าเดิม จงหางานที่ทำในแต่ละกระบวนการ งานรวม และจงหาอุณหภูมิสุดท้ายของแก๊ส

วิธีทำ

ในตอนเริ่มต้น เป็นกระบวนการที่อุณหภูมิคงตัว จึงใช้สมการ (12.17) และเนื่องจาก

$$nRT = P_iV_i = (202 \text{ kPa})(48 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 9.7 \text{ kJ}$$

ดังนั้น

$$W = (9.7 \text{ kJ})\ell n\left(\frac{106}{48}\right) = 7.7 \text{ kJ}$$

และเนื่องจาก

$P_fV_f = P_iV_i$ หรือ

$$P_f = \frac{P_iV_i}{V_f} = (202 \text{ kPa})\frac{48}{106} = 91 \text{ kPa}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ดังนั้น ความดันหลังจากกระบวนการอุณหภูมิคงตัวสิ้นสุดลงคือ 91 kPa ต่อมาเป็นกระบวนการที่ความดันคงตัว จึงใช้สมการ (12.16) คือ

$$W = P\left(V_f - V_i\right) = (91\ \text{kPa})\left[(48-106)\times 10^{-3}\,\text{m}^3\right] = -5.3\ \text{kJ}$$

งานที่ทำทั้งหมดจึงเท่ากับ 7.7 + (-5.3) = 2.4 kJ

เนื่องจากสุดท้ายแก๊สกลับมาสู่ปริมาตรเดิม คือ 48 L ดังนั้นอุณหภูมิสุดท้ายของแก๊สคือ

$$T_f = T_i \frac{P_f}{P_i} = 310 \times \frac{91}{202} = 140\ \text{K}$$

12.7 พลังงานและกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์กล่าวถึงหลักการอนุรักษ์พลังงานนั่นคือ พลังงานที่ไหลผ่านขอบของระบบจะเท่ากับพลังงานของระบบที่เปลี่ยนไป สำหรับจุดประสงค์ของอุณหพลศาสตร์ เราจะพิจารณาพลังงาน 2 ชนิดที่ไหลผ่านขอบของระบบ พลังงานชนิดแรกประกอบด้วยงานที่ทำโดยระบบหรือที่กระทำต่อระบบ พลังงานอีกชนิดหนึ่งอยู่ในรูปของความร้อนซึ่งอาจไหลโดยวิธีการนำหรือการแผ่รังสี

พิจารณาความร้อนปริมาณ dQ ที่ให้แก่ระบบ พลังงานความร้อนจำนวนนี้ อาจแยกเป็น 3 ส่วนคือ

(1) พลังงานที่ใช้เพิ่มอุณหภูมิของวัตถุ ซึ่งเท่ากับพลังงานที่ใช้ในการเพิ่มพลังงานจลน์ภายในของวัตถุ

(2) พลังงานที่ใช้ในการต่อต้านการดึงดูดกันระหว่างโมเลกุล ซึ่งเท่ากับพลังงานที่ใช้ในการเพิ่มพลังงานศักย์ภายในของระบบ

(3) พลังงานความร้อนส่วนที่เหลือใช้ในการขยายระบบเพื่อต่อต้านความดันภายนอก นั่นคือใช้ไปในการทำงานนอกระบบ

ถ้า dU_K และ dU_P เป็นพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ภายในระบบที่เปลี่ยนไป และ dW เป็นงานที่ทำให้นอกระบบ เนื่องจากพลังงานไม่อาจสร้างขึ้นหรือทำลายได้ แต่มีการอนุรักษ์จากรูปแบบหนึ่งไปสู่อีกรูปแบบหนึ่งได้ เราจึงได้

$$dQ = dU_K + dU_P + dW$$

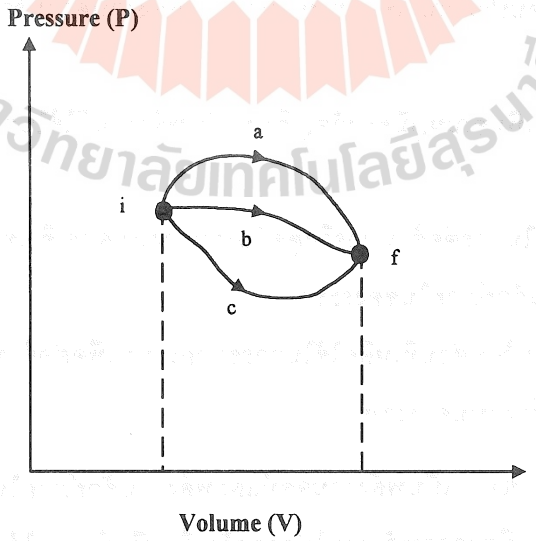
หรือ $$dQ = dU + dW \quad (12.19)$$

โดยที่ $dU = dU_k + dU_p$ คือพลังงานรวมภายในของระบบที่เพิ่มขึ้น ปริมาณต่างๆ เหล่านี้วัดในหน่วยเดียวกัน

สมการ (12.19) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ ซึ่งอธิบายได้ว่าในการเปลี่ยนแปลงพลังงานรูปแบบใดก็ตาม พลังงานความร้อนที่ให้แก่ระบบต้องเท่ากับพลังงานที่ทำโดยระบบบวกกับพลังงานภายในที่เพิ่มขึ้น

กฎข้อที่หนึ่งของอุณพลศาสตร์จึงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความร้อนและงาน สาระของกฎนี้จึงตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่าพลังงานภายในเป็นฟังก์ชันของสถานะของระบบเท่านั้น สถานะในที่นี้หมายถึงสถานะสมดุลอุณหพลวัต ความจริงแล้วระบบมีพลังงานจำกัดในสถานะจำกัด ดังนั้นพลังงานที่เปลี่ยนไป dU จึงขึ้นอยู่กับสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายของระบบเท่านั้น ไม่ได้ขึ้นกับกระบวนการที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากสถานะหนึ่งไปสู่อีกสถานะหนึ่งแต่อย่างใด แม้ว่าความร้อนและงานจะขึ้นกับกระบวนการที่ทำให้ระบบเปลี่ยนสถานะก็ตาม

เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น พิจารณาแผนภาพ P-V ซึ่งแสดงกระบวนการ 3 กระบวนการที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้น i ไปสู่สถานะสุดท้าย f ดังรูป 12.6



รูปที่ 12.6 แสดงแผนภาพ P-V ของกระบวนการทั้ง 3 ที่ทำให้ระบบเปลี่ยนจากสถานะเริ่มต้นไปสู่สถานะสุดท้าย

เนื่องจากงานที่ทำโดยระบบมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ดังนั้น งานที่ทำโดยระบบในแต่ละกระบวนการจึงมีค่าแตกต่างกัน หรือ $W_a \neq W_b \neq W_c$ นอกจากนี้ยังพบว่าความร้อนที่ป้อนเข้าสู่ระบบในแต่ละกระบวนการมีค่าที่แตกต่างกันด้วย หรือ $Q_a \neq Q_b \neq Q_c$ อย่างไรก็ตาม ความแตกต่างของปริมาณทั้งสองคือ Q และ W ในแต่ละกระบวนการมีค่าคงตัวเสมอ ซึ่งเท่ากับพลังงานภายในของระบบที่เปลี่ยนไป หรือ

$$Q_a - W_a = Q_b - W_b = Q_c - W_c = U_f - U_i = \Delta U$$

โดยที่ ΔU ไม่ได้ขึ้นกับกระบวนการใดๆ แต่ขึ้นกับสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้ายเท่านั้น โดยไม่คำนึงว่าระบบเข้าสู่สถานะนั้นๆ ได้อย่างไร

ดังนั้นกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ อาจเขียนได้อีกรูปแบบ คือ

$$Q - W = \Delta U = U_f - U_i \qquad (12.20)$$

ใน isochoric process ซึ่งปริมาตรมีค่าคงตัว ดังนั้น dV = o และ W =o จึงได้

$$Q = \Delta U$$

ใน adiabatic process ซึ่ง dQ = o ดังนั้น

$$\Delta U = - W$$

ใน isobaric process ซึ่งความดันมีค่าคงตัว ทั้ง Q และ W ต่างไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงต้องคำนวณหาปริมาณทั้งสองนี้ก่อน

ใน isothermal process ซึ่งอุณหภูมิมีค่าคงตัว พลังงานภายในของระบบเช่น แก๊สอุดมคติเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเท่านั้น ดังนั้น $\Delta U = 0$

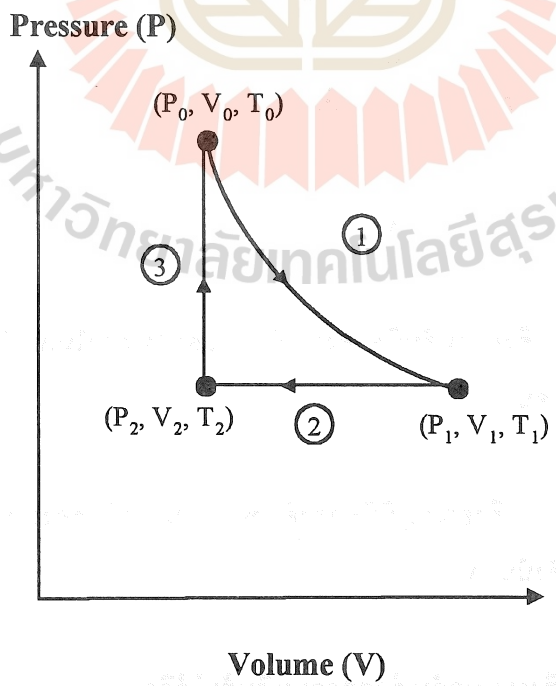
ใน cyclic process ซึ่งระบบกลับเข้าสู่สถานะเริ่มต้นได้อีก
ดังนั้น $U_f - U_i = \Delta U = 0$ และ $W = Q$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ให้สังเกตุว่า ΔU ในสมการ (12.20) เป็นค่าพลังงานภายในของระบบที่เปลี่ยนไปเท่านั้น โดยมิได้ระบุว่าพลังงานภายในรวมของระบบเป็นอย่างไร นอกจากนี้ในการคำนวณหาปริมาณเหล่านี้ต้องระบุทิศทางการไหลของพลังงานด้วย และมักจะกำหนดดังนี้ :

Q มีค่าเป็นบวกเมื่อมีความร้อนไหลหรือป้อนเข้าสู่ระบบ
isochoric process เมื่อระบบทำงานแล้วระบายสู่สิ่งแวดล้อม
ΔU มีค่าเป็นบวกถ้าพลังงานภายในเพิ่มขึ้น นั่นคือ $U_f > U_i$

ตัวอย่าง 12.4 แก๊สอุดมคติจำนวน 1 โมล ภายใต้กระบวนการผันกลับได้ซึ่งประกอบด้วย 3 กระบวนการคือ isothermal process จาก $(P_\circ, V_\circ, T_\circ)$ เป็น (P_1, V_1, T_1) โดย $V_1 = 2V_\circ$ ต่อมาเป็น isobaric process จาก (P_1, V_1, T_1) เป็น (P_2, V_2, T_2) โดยกลับไปสู่ปริมาตรเดิม หลังจากนั้น จึงให้ความร้อนแก่ระบบโดยปริมาตรคงเดิมเพื่อกลับไปสู่ความดันเริ่มต้นคือ P_O ดังแสดงในรูป 12.7 ในแต่ละกระบวนการจงคำนวณหา (ก) พลังงานภายในที่เปลี่ยนไป (ข) ปริมาณความร้อนที่ป้อนเข้าสู่ระบบ และ (ค) งานที่ทำโดยแก๊ส และเมื่อครบวงจรแล้ว จงคำนวณหา (ง) พลังงานภายในที่เปลี่ยนไปทั้งหมด (จ) งานที่ทำโดยแก๊สทั้งหมด และ (ฉ) ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่ให้แก๊สนี้



รูป 12.7 แสดงประกอบตัวอย่าง 12.4

วิธีทำ

จากรูปที่ 12.7 แสดงให้เห็นว่า $P_1 = P_2 = P_\circ/2$, $V_2 = V_\circ$, $V_1 = 2V_\circ$

และ $T_1 = T_0$ ดังนั้น

(ก) ใน isothermal process :

เนื่องจากพลังงานภายในขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเท่านั้น ดังนั้น $\Delta T = 0$ และ $\Delta U_1 = 0$

งาน W_1 ที่ทำโดยแก๊สหาได้จากสมการ (12.17) คือ

$$W_1 = nRT_\circ \ell n\left(\frac{V_1}{V_\circ}\right) = RT_\circ \ell n2$$

และจากกฎข้อที่หนึ่ง จะได้

$$Q_1 = W_1 + \Delta U = RT_\circ \ell n2$$

(ข) ใน isobaric process :

งาน W_2 ที่ทำโดยแก๊ส คือ

$$W_2 = \int PdV = \int_{2V_\circ}^{V_\circ} \frac{P_\circ}{2} dV = \frac{P_\circ}{2}\left(V_\circ - 2V_\circ\right) = -\frac{P_\circ V_\circ}{2} = -\frac{RT_\circ}{2}$$

ปริมาณความร้อน Q_2 ที่ป้อนเข้าสู่ระบบ คือ (C_p จะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป)

$$Q_2 = nC_p\Delta T = C_p\left(T_2 - T_\circ\right)$$

ค่าของ T_2 หาได้จาก $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{n_1}{n_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$

เนื่องจาก $n_\circ = n_2$ ดังนั้น $T_2 = T_\circ\left\{\frac{\left(\frac{P_\circ}{2}\right)V_\circ}{P_\circ V_\circ}\right\} = \frac{T_\circ}{2}$

และ $Q_2 = -\frac{C_p T_\circ}{2}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จากกฎข้อที่หนึ่ง พลังงานภายในที่เปลี่ยนไป คือ

$$\Delta U_2 = Q_2 - W_2 = -\frac{C_p T_\circ}{2} + \frac{RT_\circ}{2} = \frac{T_\circ}{2}\left(R - C_p\right)$$

$$= -\frac{T_\circ}{2} C_V \quad \text{(รายละเอียดจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป)}$$

(ค) ใน isochoric process :

เนื่องจากปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง $dV = 0$ และ $W_3 = 0$

ปริมาณความร้อน Q_3 ที่ให้แก่ระบบหาได้จาก

$$Q_3 = nC_V\Delta T = C_V\Delta T = C_V\left(T_\circ - \frac{T_\circ}{2}\right) = \frac{T_\circ}{2} C_V$$

พลังงานภายในที่เปลี่ยนไปหาได้จากกฎข้อที่หนึ่ง คือ

$$\Delta U_3 = Q_3 - W_3 = \frac{T_\circ}{2} C_V$$

(ง) พลังงานภายในที่เปลี่ยนไปทั้งหมด คือ

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3$$

$$= 0 + \frac{T_\circ}{2}\left(R - C_p\right) + \frac{T_\circ}{2} C_V = 0$$

(จ) งานที่ทำทั้งหมด คือ $W = W_1 + W_2 + W_3$

หรือ $W = RT_\circ \ell n2 + \left(-\frac{RT_\circ}{2}\right) + 0 = RT_\circ\left(\ell n2 - \frac{1}{2}\right) = 0.193\ RT_\circ$

(ฉ) ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่ให้แก่ระบบ คือ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

หรือ $Q = RT_\circ \ell n2 - \frac{T_\circ}{2} C_p + \frac{T_\circ}{2} C_V = RT_\circ\left(\ell n2 - \frac{1}{2}\right) = 0.193\ RT_\circ$

ให้สังเกตุว่า $Q = W$ เพราะ $\Delta U = 0$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

12.8 เอนทัลปีและความจุความร้อน

เอนทัลปี (enthalpy) แทนด้วย H เป็นคุณสมบัติของระบบให้นิยามว่า

$$H = U + PV \tag{12.21}$$

โดยที่ U เป็นพลังงานภายในระบบ และ PV เป็นงาน

อนุพันธ์ของสมการ (12.21) คือ

$$dH = dU + PdV + VdP$$

ถ้ากระบวนการเกิดขึ้นที่ความดันคงตัว หรือ dP = o ดังนั้น

$$dH = dU + PdV$$
$$= dU + dW \qquad (dW = PdV)$$

และจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

$$dQ = dU + dW$$

จะเห็นได้ว่า dH = dQ ซึ่งเป็นปริมาณความร้อนที่ให้แก่ระบบจากแหล่งภายนอก ด้วยเหตุนี้เราจึงเรียก H อีกอย่างหนึ่งว่า heat content

ความจุความร้อน (heat capacity) ของระบบแทนด้วย C นิยามว่าเป็นอัตราส่วนของพลังงานความร้อนที่ระบบดึงดูดจากสิ่งแวดล้อมต่ออุณหภูมิของระบบที่เพิ่มขึ้น

$$C = \frac{dQ}{dT} \tag{12.22}$$

เนื่องจากความจุความร้อนของวัตถุเป็นสัดส่วนกับมวล ด้วยเหตุนี้จึงนิยามความจุความร้อนต่อหนึ่งหน่วยของมวล เรียกว่า ความร้อนจำเพาะ (specific heat) แทนด้วย c ดังนั้น

$$c = \frac{C}{m} \tag{12.23}$$

หน่วยของความร้อนจำเพาะคือ $J.kg^{-1}.K^{-1}$

นอกจากนี้ เราเรียกความจุความร้อนต่อโมลของสารว่า ความจุความร้อนโมลาร์ (molar heat capacity) ดังนั้นถ้าสารประกอบด้วย n โมล ความจุความร้อนโมลาร์จึงเท่ากับ C/n

ความจุความร้อนอาจทำการวัดค่าได้ที่ปริมาตรคงตัว และที่ความดันคงตัว

ความจุความร้อนที่ปริมาตรคงตัว คือ

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V \tag{12.24}$$

ในกระบวนการนี้จะไม่มีงานเกิดขึ้นเพราะปริมาตรคงตัว พลังงานที่เกี่ยวข้องจึงมีเพียงพลังงานความร้อน หรือ dW = PdV = o เมื่อใช้กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ จะได้

$$dQ = dU + PdV = dU$$

$$\therefore \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{12.25}$$

ความจุความร้อนที่ความดันคงตัว คือ

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p \tag{12.26}$$

เนื่องจากกระบวนการเกิดขึ้นที่ความดันคงตัว ดังนั้น งาน dW = PdV เมื่อใช้กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ จะได้

$$\begin{aligned} dQ &= dU + PdV \\ &= dU + d(PV) \\ &= d(U + PV) \\ &= dH \end{aligned}$$

$$\therefore \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \tag{12.27}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง C_p และ C_V หาได้ดังนี้ :

จากสมการ (12.26) และ (12.27)

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

เนื่องจาก H = U + PV

$$\therefore C_p - C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \qquad (12.28)$$

และ U เป็นฟังก์ชันของ V และ T หรือ U = U (V, T)

$$\therefore \ dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

และ $$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

แทนค่า $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$ ลงในสมการ (12.28) จะได้

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

หรือ $$C_p - C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] \qquad (12.29)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า U เป็นฟังก์ชันของ P และ T หรือ U = U (P, T)

$$\therefore \ dU = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT$$

และ $$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$$

แทนค่า $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ ลงในสมการ (12.28)

$$\therefore \quad C_p - C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P$$

หรือ $$C_p - C_V = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \qquad (12.30)$$

ในกรณีของแก๊สอุดมคติ เราทราบว่า PV = nRT นอกจากนี้พลังงานภายในของแก๊สอุดมคติเป็นอิสระต่อปริมาตรและความดัน แต่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิเท่านั้น หรือ U = U(T) ดังนั้น

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0 \text{ และ} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

สมการ (12.28) สำหรับแก๊สอุดมคติจึงเป็น

$$C_p - C_V = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

เนื่องจาก PV = nRT

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}$$

$$\therefore \quad C_p - C_V = nR \qquad (12.31)$$

และถ้า C_p และ C_V เป็นความจุความร้อนโมลาร์ สมการ (12.31) จะกลายเป็น

$$C_p - C_V = R \qquad (12.32)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

12.9 เอนโทรปีและกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์เป็นกฎเกี่ยวกับการอนุรักษ์พลังงานที่รวมทั้งพลังงานความร้อนด้วย จากกฎอนี้เราจึงสรุปว่าพลังงานในจักรวาลมีค่าคงตัว กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์อธิบายว่าเอนโทรปี (entropy) ของจักรวาลจะเปลี่ยนแปลงไปสู่ค่าสูงสุด แนวคิดเกี่ยวกับเอนโทรปีพอจะสรุปได้ดังนี้ :-

สำหรับทุกระบบ ถ้าปล่อยให้ระบบเปลี่ยนแปลงด้วยตัวเองด้วยอัตราที่ช้าหรือเร็วก็ตาม ในที่สุดระบบจะอยู่ในสถานะสมดุล ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของระบบที่เกิดขึ้นเอง คือ

1. การขยายตัวอย่างอิสระของแก๊สอุดมคติจากบริเวณที่มีความดันสูงสู่บริเวณที่มีความดันต่ำจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งความดันมีค่าสม่ำเสมอหรือเท่ากัน
2. การแพร่ของสารละลายจากบริเวณที่มีความเข้มข้นสูงกว่า สู่บริเวณที่มีความเข้มข้นต่ำกว่าจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งความเข้มข้นสม่ำเสมอกัน
3. การถ่ายเทความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงกว่าสู่บริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าจะเกิดขึ้นเองจนกระทั่งอุณหภูมิมีค่าเท่ากัน
4. การเกิดปฏิกิริยาทางเคมี เช่น การเผาไหม้คาร์บอนในออกซิเจนทำให้เกิดคาร์บอนไดออกไซด์ จะเกิดขึ้นจนกระทั่งมีเสถียรภาพทางอุณหพลศาสตร์

ตัวอย่างของระบบที่กล่าวมานี้เกิดขึ้นเองเพื่อเข้าสู่สมดุล ในแต่ละกระบวนการเมื่อพิจารณาจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลสาสตร์ จะได้ว่าพลังงานรวมของระบบมีค่าคงตัว นอกจากนี้เมื่อกำหนดเงื่อนไขเบื้องต้น เราทราบว่ากระบวนการจะเกิดขึ้นตามที่กล่าวมาแล้ว

ต่อไปเราจะพิจารณาโดยสมมติว่าทั้งสี่ระบบที่ยกตัวอย่างแล้วเข้าสู่สถานะสุดท้าย แล้วเกิดกระบวนการที่ตรงข้ามกัน เราต้องตระหนักว่ากระบวนการตรงกันข้ามที่ทำให้ระบบถอยห่างไปจากสถานะสมดุลจะไม่เกิดขึ้นเอง จำเป็นต้องมีพลังงานภายนอกหรือแรงเข้ามาช่วยเสมอ ปัญหาจึงมีอยู่ว่าทำไมกระบวนการที่เกิดขึ้นในทางตรงกันข้ามนี้จึงไม่เกิดขึ้นเอง โดยไม่ขัดกับกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ (นั่นคือพลังงานรวมยังคงมีค่าคงตัว) คำตอบคือจะต้องมีหลักการทางธรรมชาติเพิ่มเติมจากกฎข้อที่หนึ่ง หลักการนี้มิได้พัฒนามาจากกฎข้อที่หนึ่ง แต่กำหนดทิศทางการเกิดกระบวนการในระบบเอกเทศ หลักการที่กล่าวถึงนี้คือกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์นั่นเอง

ดังได้กล่าวแล้วว่ากระบวนการผันกลับที่ถอยห่างไปจากสมดุลไม่อาจเกิดขึ้นได้เอง ซึ่งแตกต่างจากกระบวนการที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ อย่างไรก็ตาม แม้ว่ากระบวนการทั้งสองจะมีความแตกต่างกัน แต่น่าจะมีอะไรบางอย่างที่เหมือนกัน เช่น ถ้าพลังงานภายในของสถานะ 2 สถานะของระบบ

เอกเทศมีค่าเท่ากัน เราสมารถหาเกณฑ์อะไรได้บ้างที่สามารถกำหนดทิศทางของกระบวนการที่เกิดขึ้นในระบบ นั่นคือ สถานะใดเป็นสถานะเริ่มต้นและสถานะใดเป็นสถานะสิ้นสุด นอกจากนี้ มีเงื่อนไขอะไรบ้างที่กระบวนการจะเกิดขึ้นเอง หรืออีกนัยหนึ่งเงื่อนไขอะไรที่ทำให้ระบบอยู่ในสมดุล ปัญหาเหล่านี้สามารถอธิบายได้ว่า นอกเหนือจากพลังงานภายในแล้ว น่าจะมีคุณสมบัติอื่นๆ ของระบบที่เป็นฟังก์ชันของสถานะของระบบซึ่งมีค่าแตกต่างกันที่จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของกระบวนการ ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติดังกล่าว เรียกว่า เอนโทรปี ของระบบเอนโทรปีเป็นปริมาณที่ใช้วัดและอธิบายความสามารถของระบบที่จะทำงาน เอนโทรปีมีค่าเพิ่มขึ้นหรือยังคงเท่าเดิมในกระบวนการใดๆ ที่เกิดขึ้นในระบบเอกเทศ กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์อาจกล่าวในเทอมของเอนโทรปีได้ดังนี้

เอนโทรปีของระบบเอกเทศใดๆ มีการอนุรักษ์เสมอสำหรับกระบวนการผันกลับได้ กล่าวคือ สำหรับกระบวนการผันกลับได้ใดๆ ผลบวกของเอนโทรปีที่เปลี่ยนแปลงไปในระบบเอกเทศเท่ากับศูนย์ ถ้ากระบวนการที่เกิดขึ้นไม่อาจผันกลับได้ ผลบวกของเอนโทรปีที่เปลี่ยนแปลงไปในระบบเอกเทศจะมีค่ามากกว่าศูนย์ อาจกล่าวในรูปทั่วไปได้ว่าในกระบวนการใดๆ ที่เกิดขึ้นในระบบเอกเทศ เอนโทรปีของระบบจะต้องเพิ่มขึ้นหรือคงตัวเท่านั้น

นอกจากนี้ ถ้าระบบเอกเทศอยู่ในสถานะซึ่งเอนโทรปีมีค่าสูงสุด การเปลี่ยนแปลงใดๆ จากสถานะดังกล่าวจึงเกี่ยวข้องกับเอนโทรปีที่ลดลงซึ่งไม่อาจเกิดขึ้นได้ ดังนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับสมดุลของระบบเอกเทศใดๆ คือ เอนโทรปีของระบบจะต้องมีค่าสูงสุด

สังเกตว่าที่กล่าวมาทั้งหมดใช้ได้เฉพาะกับระบบเอกเทศเท่านั้น กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์อาจกล่าวในรูปทั่วไปดังนี้

1. เป็นไปไม่ได้ที่เราจะสร้างสิ่งประดิษฐ์ซึ่งดำเนินการเป็นวัฏจักรโดยดึงความร้อนจากตัวรักษา (reservoir) แล้วเปลี่ยนเป็นงานได้หมด
2. เป็นไปไม่ได้ที่ความร้อนจะไหลจากวัตถุที่มีอุณหภูมิต่ำกว่าไปสู่วัตถุที่มีอุณหภูมิสูงกว่าโดยปราศจากความช่วยเหลือจากแหล่งภายนอก

ข้อความในข้อแรกเรียกว่า Kelvin-Planck statement และข้อความในข้อสองเรียกว่า Clausius statement ของกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ การศึกษาเกี่ยวกับเครื่องยนต์ความร้อนจะตั้งอยู่บนพื้นฐานของคำกล่าวทั้งสองนี้

ต่อไปเราจะพิจารณากฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ในเชิงคณิตศาสตร์ให้ S_A และ S_B เป็นเอนโทรปีของระบบที่สถานะเริ่มต้น A และสถานะสิ้นสุด B ตามลำดับ โดยวัดจากจุดศูนย์ที่ไม่เจาะจงใดๆ เอนโทรปีที่เปลี่ยนไป กำหนดโดย

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \tag{12.33}$$

ถ้าสถานะ A และ B ใกล้เคียงกันมากจะด้วยอย่างไรก็ตาม และถ้า dQ เป็นปริมาณความร้อนที่ดูดกลืนหรือคายทิ้งที่อุณหภูมิ T จากการเปลี่ยนจากสถานะ A ไปสู่ B ดังนั้น เอนโทรปีที่เปลี่ยนไป คือ

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

หรือ

$$dQ = TdS \tag{12.34}$$

ซึ่งเป็นกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ในรูปคณิตศาสตร์

ในกรณีกระบวนการผันกลับได้ชนิด adiabatic process เนื่องจากไม่มีปริมาณความร้อนไหลถ่ายเทระหว่างระบบและสิ่งแวดล้อม ดังนั้นเอนโทรปีที่เปลี่ยนไปจึงเท่ากับศูนย์ หรือ $\Delta S = 0$ เรามักเรียกกระบวนการที่เกิดขึ้นโดยที่เอนโทรปีไม่มีการเปลี่ยนแปลงว่า isentropic process เราถือว่าจักรวาลเป็นระบบเอกเทศ ไม่มีการรับหรือสูญเสียพลังงานความร้อนเลย ดังนั้นเอนโทรปีของจักรวาลจึงมีค่าคงตัวไม่เปลี่ยนแปลง

12.10 การหาค่าเอนโทรปี

12.10.1 เอนโทรปีของแก๊สอุดมคติ พิจารณาแก๊สอุดมคติจำนวน n โมล มีปริมาตร V ที่ความดัน P และอุณหภูมิ T ถ้าให้ความร้อนปริมาณ dQ แก่แก๊สนี้ ดังนั้น จากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์

$$dQ = dU + dW$$

ถ้า C_V เป็นความจุความร้อนแก๊สที่ปริมาตรคงตัว ให้ dT เป็นอุณหภูมิที่สูงขึ้น และ dV เป็นปริมาตรที่เปลี่ยนไป ดังนั้น

$$dU = C_V dT \qquad \text{และ} \qquad dW = PdV$$

$\therefore\ dQ = C_V dT + PdV$

จากกฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปกำหนดโดย

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \frac{PdV}{T} \tag{12.35}$$

ถ้าเราเลือกสถานะเริ่มต้นเป็น 1 ที่อุณหภูมิ T_O ความดัน P_O และปริมาตร V_O เอนโทรปีของแก๊สเป็น S_O ดังนั้น เอนโทรปีของแก๊สในสถานะที่ 2 ที่อุณหภูมิ T ความดัน P และปริมาตร V กำหนดโดย

$$S = S_\circ + \int_1^2 \frac{C_V dT}{T} + \int_1^2 \frac{PdV}{T} \tag{12.36}$$

ค่าของ S อาจแยกออกได้เป็น 3 กรณี คือ

(1) ค่าของ S ในเทอมของอุณหภูมิและปริมาตร

จากสมการสถานะของแก๊สอุดมคติ คือ $PV = nRT$

$$\therefore\ P = \frac{nRT}{V}$$

แทนค่า P ลงในสมการ (12.36)

$$S = S_\circ + \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + nR\int_1^2 \frac{dV}{V}$$

$$= S_\circ + C_V \ell n\left(\frac{T.}{T_\circ}\right) + nR\ell n\left(\frac{V}{V_\circ}\right) \tag{12.37}$$

ในกรณีการขยายตัวที่อุณหภูมิคงตัว นั่นคือ $T = T_O$

$$\therefore\ S = S_\circ + nR\ell n\left(\frac{V}{V_\circ}\right) \tag{12.38}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(2) ค่าของ S ในเทอมของอุณหภูมิและความดัน

เนื่องจาก $V = \frac{nRT}{P}$

และ $PdV + VdP = nRdT$

ดังนั้น $PdV = nRdT - VdP$

$$= nRdT - nRT\frac{dP}{P}$$

เมื่อแทนค่าของ PdV ในสมการ (12.36) จะได้

$$S = S_\circ + \int_1^2 C_V \frac{dT}{T} + nR\int_1^2 \left(\frac{dT}{T} - \frac{dP}{P}\right)$$

$$= S_\circ + C_V \ell n\left(\frac{T}{T_\circ}\right) + nR\left[\ell n\left(\frac{T}{T_\circ}\right) - \ell n\left(\frac{P}{P_\circ}\right)\right]$$

สำหรับแก๊สอุดมคติ $C_P - C_V = nR$

$$\therefore \quad S = S_\circ + C_V \ell n\left(\frac{T}{T_\circ}\right) + \left(C_P - C_V\right)\left[\ell n\left(\frac{T}{T_\circ}\right) - \ell n\left(\frac{P}{P_\circ}\right)\right]$$

หรือ

$$S = S_\circ + C_p \ell n\left(\frac{T}{T_\circ}\right) + \left(C_P - C_V\right)\ell n\left(\frac{P}{P_\circ}\right) \qquad (12.39)$$

สำหรับการขยายตัวที่อุณหภูมิคงตัว หรือ $T = T_O$

$$\therefore \quad S = S_\circ + \left(C_P - C_V\right)\ell n\left(\frac{P}{P_\circ}\right)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$S = S_{\circ} + nR\ell n\left(\frac{P}{P_{\circ}}\right) \qquad (12.40)$$

(3) ค่าของ S ในเทอมของความดันและปริมาตร

จาก $PV = nRT$ ดังนั้น $T = \frac{PV}{nR}$

และ $dT = \frac{PdV + VdP}{nR}$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (12.36)

$$S = S_{\circ} + \int_1^2 C_V \frac{PdV + VdP}{PV} + nR\int_1^2 \frac{pdV}{PV}$$

$$= S_{\circ} + \int_1^2 C_V\left(\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P}\right) + \left(C_p - C_V\right)\int_1^2 \frac{dV}{V}$$

$$= S_{\circ} + \int_1^2 \left(C_V\frac{dP}{P} + C_P\frac{dV}{V}\right)$$

$$\therefore \quad S = S_{\circ} + C_V\ell n\left(\frac{P}{P_{\circ}}\right) + C_P\ell n\left(\frac{V}{V_{\circ}}\right) \qquad (12.41)$$

12.10.2 **เอนโทรปีของไอน้ำ** พิจารณาน้ำแข็ง m กรัม ที่อุณหภูมิสัมบูรณ์ T_1 เราต้องการหาค่าเอนโทรปีที่เพิ่มขึ้นเมื่อน้ำแข็งกลายเป็นไอน้ำที่อุณหภูม T_2

ถ้าความร้อนปริมาณ dQ ไหลเข้าสู่ระบบที่อุณหภูมิ T เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปคือ $dS = \frac{dQ}{T}$

การเปลี่ยนน้ำแข็ง m กรัมที่อุณหภูมิ T_1 เป็นน้ำที่อุณหภูมิเดียวกัน ต้องใช้ความร้อน mL_i โดยที่ L_i เป็นความร้อนแฝงของน้ำแข็ง ดังนั้น เอนโทรปีที่เปลี่ยนไปในกระบวนการนี้ เท่ากับ $\frac{mL_i}{T_1}$

หลังจากนั้นน้ำ m กรัมที่อุณหภูมิ T_1 เปลี่ยนเป็นอุณหภูมิ T_2 เอนโทรปีที่เปลี่ยนไป คือ

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{mcdT}{T}=mc\ell n\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

โดยที่ c คือ ความร้อนจำเพาะของน้ำ

ต่อไปน้ำ m กรัมที่ T_2 กลายเป็นไอน้ำที่อุณหภูมิเดียวกันจะต้องใช้ความร้อน mL_S โดยที่ L_S ความร้อนแฝงของไอน้ำ ดังนั้นเอนโทรปีที่เปลี่ยนไปในช่วงนี้ คือ $\frac{mL_s}{T_2}$

เอนโทรปีที่เพิ่มขึ้นทั้งหมด คือ

$$S=\frac{mL_i}{T_1}+mc\ell n\left(\frac{T_2}{T_1}\right)+\frac{mL_s}{T_2} \qquad (12.42)$$

12.11 หลักการเพิ่มเอนโทรปีหรือลดพลังงาน

ในกระบวนการผันกลับได้ เอนโทรปีของระบบมีค่าคงตัว แต่ในกระบวนการผันกลับไม่ได้ เอนโทรปีของระบบมีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากกระบวนการที่เกิดขึ้นจริงในธรรมชาติเป็นกระบวนการผันกลับไม่ได้ และกระบวนการผันกลับได้เป็นเพียงกรณีจำกัดในอุดมคติเท่านั้น ดังนั้นวัฏจักรของการดำเนินการจึงดำเนินไปโดยที่เอนโทรปีของระบบเพิ่มขึ้นและเข้าสู่ค่าสูงสุด นี้คือหลักการของการเพิ่มเอนโทรปี ซึ่งกล่าวได้ดังนี้ " เอนโทรปีของระบบเอกเทศมีค่าเพิ่มขึ้นหรือคงตัวสำหรับกระบวนการผันกลับไม่ได้หรือผันกลับได้ตามลำดับ" หรือ $dS \geq 0$ ดังนั้น เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับสมดุลของระบบเอกเทศคือเอนโทรปีของระบบมีค่าสูงสุด โดยที่ S ไม่อาจเพิ่มได้อีกต่อไปและ dS ไม่อาจมากกว่าศูนย์ได้อีก

เนื่องจากกระบวนการที่เกิดขึ้นจริงเป็นกระบวนการผันกลับไม่ได้ ดังนั้นพลังงานบางส่วนจึงไม่อาจใช้ทำงานได้ แต่จะเปลี่ยนไปเป็นความร้อนโดยอาจเกิดจากความเสียดทาน การนำหรือการแผ่รังสี ด้วยเหตุนี้ในอนาคตข้างหน้าพลังงานในรูปต่างๆ จะเปลี่ยนไปเป็นพลังงานความร้อน โดยไม่อาจเปลี่ยนกลับไปเป็นงานกลได้อีก กล่าวคือ พลังงานที่มีอยู่ในจักรวาลมีแนวโน้มเข้าใกล้ศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับสถานะที่เอนโทรปีมีค่าสูงสุด และอุณภูมิที่แตกต่างกันระหว่างวัตถุต่างๆของจักรวาลจะมีค่าเท่ากันอันเนื่องจากการพาความร้อนเครื่องยนต์ความร้อนไม่อาจทำงานได้ในสถานะดังกล่าวเนื่องจากไม่มีความร้อนไหลผ่านระบบที่มีอุณหภูมิสม่ำเสมอ หลักการนี้เรียกว่า หลักการลดพลังงาน (principle

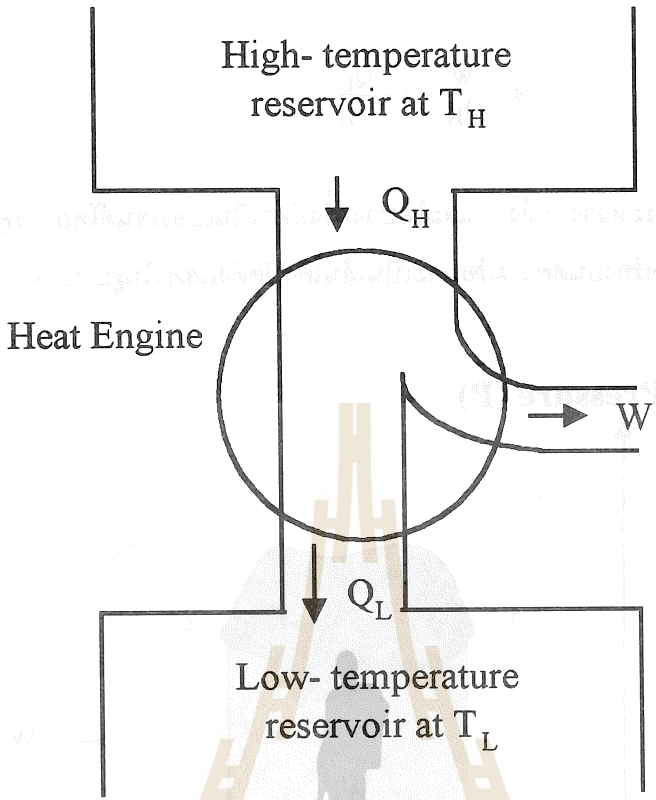
of degradation of energy) หมายความว่า แม้ว่าพลังงานรวมทั้งหมดจะมีการอนุรักษ์ แต่จะมีการเปลี่ยนไปเป็นพลังงานที่ไม่อาจทำงานได้ และจักรวาลจะเข้าสู่สภาวะที่เรียกว่า heat death

จากการเพิ่มเอนโทรปี ความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลของสารจะเพิ่มขึ้น กล่าวคือ การเพิ่มเอนโทรปีหมายถึงการเปลี่ยนจากสถานะที่มีระเบียบไปสู่สถานะที่ไม่มีระเบียบ (disorder or chaos) เอนโทรปีของสสารในสถานะที่เป็นแก๊สจึงมากกกว่าสถานะที่เป็นของเหลว เนื่องจากโมเลกุลสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระมากกว่า จึงมีความไม่เป็นระเบียบมากกว่าด้วย และในทำนองเดียวกันเอนโทรปีของสารในสถานะของเหลวจะมากกว่าในสถานะของแข็ง ดังนั้นเมื่อน้ำแข็งละลายกลายเป็นน้ำและไอน้ำเอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลจะเพิ่มขึ้น ในทางตรงกันข้าม เมื่อไอน้ำควบแน่นเป็นน้ำและน้ำแข็ง เอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบของโมเลกุลจะลดลง เราจึงสรุปว่าเมื่ออุณหภูมิของระบบมีค่าลดลง เอนโทรปีและความไม่เป็นระเบียบภายในระบบจะลดลง เอนโทรปีของสารจึงเป็นตัววัดอันดับของความไม่เป็นระเบียบ เช่นเดียวกับอุณหภูมิที่เป็นตัววัดอันดับความร้อนของสสาร ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ การเคลื่อนที่อันเนื่องจากความร้อนจะหายไปโดยสิ้นเชิง ความไม่เป็นระเบียบและเอนโทรปีจะกลายเป็นศูนย์ โมเลกุลของสสารจะวางเรียงตัวกันเป็นระเบียบ

เราจึงสรุปจากที่กล่าวมาเบื้องต้นว่า เอนโทรปีของระบบเอกเทศใดๆ มีค่าเพิ่มขึ้น และเข้าสู่สถานะเฉื่อยที่มีเอนโทรปีสูงสุด ธรรมชาติจะเปลี่ยนจากสถานะที่มีระเบียบไปสู่สถานะที่มีระเบียบน้อยลง หรือจากสถานะที่ไม่เป็นระเบียบน้อยกว่าไปสู่สถานะที่ไม่เป็นระเบียบมากยิ่งขึ้น ในที่สุดจักรวาลจะมีสภาพยุ่งเหยิงหรือ chaos นั่นเอง

12.12 เครื่องยนต์ความร้อน ตู้เย็น และวัฏจักรคาร์โนท์

เนื่องจากสาขาต่าง ๆ ของอุณหพลศาสตร์มีวิวัฒนาการมาจากการศึกษาเครื่องยนต์ความร้อน เราจึงควรทราบรายละเอียดเกี่ยวกับเครื่องยนต์ความร้อนสักเล็กน้อย เครื่องยนต์ความร้อนเป็นเครื่องยนต์ที่ดำเนินการเป็นวัฏจักรได้โดยการเปลี่ยนพลังงานความร้อนเป็นพลังงานกล กล่าวคือ เครื่องยนต์รับความร้อนปริมาณ Q_H จากตัวรักษาที่อุณหภูมิสูง ปริมาณความร้อนนี้ ส่วนหนึ่งจะเปลี่ยนเป็นงาน W ปริมาณความร้อนที่เหลือ Q_L จะถูกขับถ่ายสู่ตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า ดังแสดงในรูปที่ 12.8



รูป 12.8 แสดงการทำงานของเครื่องยนต์ความร้อน

ปริมาณความร้อนรวมที่เครื่องยนต์ดูดกลืนเข้ามาจึงเท่ากับ $\Delta Q = Q_H - Q_L$ ปริมาณความร้อนส่วนนี้จะเท่ากับงานที่เครื่องยนต์ทำได้ในวัฏจักรหนึ่ง ๆ เนื่องจากเครื่องยนต์กลับสู่สถานะเริ่มต้นอีกครั้ง และพลังงานภายในรวมที่เปลี่ยนไปเท่ากับศูนย์ ดังนั้นในแต่ละวัฏจักรของเครื่องยนต์ความร้อน

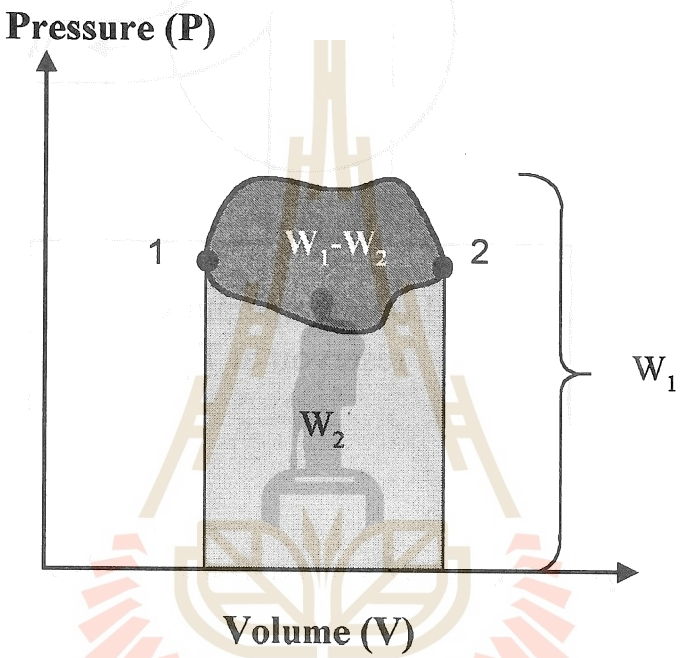
$$\Delta U = 0 = \Delta Q - W$$

หรือ $$W = \Delta Q = Q_H - Q_L$$

ประสิทธิภาพ (efficiency) ε ของเครื่องยนต์ความร้อน นิยามว่า คือ อัตราส่วนของงานที่เครื่องยนต์ทำได้ต่องานที่ป้อนเข้าเครื่องยนต์ ในกรณีของเครื่องยนต์ความร้อน งานที่เครื่องยนต์ทำได้คือ W และงานที่ป้อนเข้าสู่ระบบ คือ Q_H ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \qquad (12.43)$$

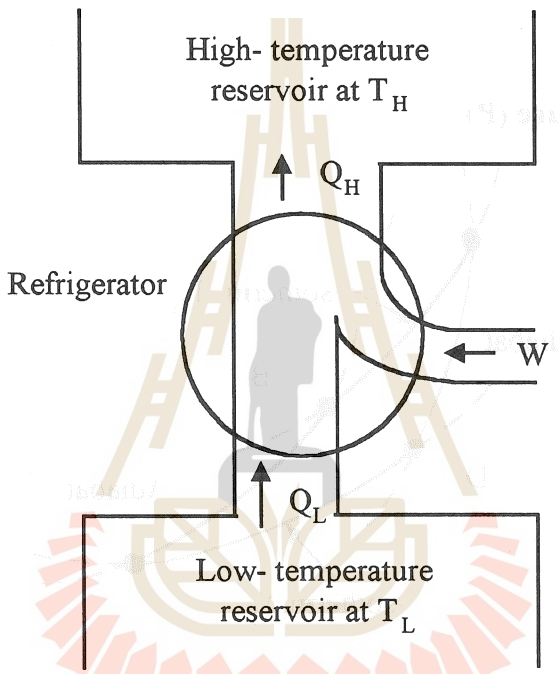
ค่าของ ε อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และในบางครั้งมีค่าเป็นเปอร์เซนต์โดยการคูณด้วย 100 ในแผนภาพ P-V วัฏจักรของเครื่องยนต์ความร้อนจะเป็นเส้นโค้งปิดดังแสดงในรูป 12.9



รูป 12.9 แสดงแผนภาพ P-V ของเครื่องยนต์ความร้อน

สมมติระบบเริ่มที่ตำแหน่ง 1 และเคลื่อนตามเข็มนาฬิกามาที่ตำแหน่ง 2 ปริมาตรของระบบเพิ่มขึ้นและงานที่ระบบทำต่อสิ่งแวดล้อมคือ W_1 ซึ่งเป็นพื้นที่ใต้เส้นโค้งจาก 1 ไปยัง 2 ต่อไปเมื่อระบบเคลื่อนที่จาก 2 ไปยัง 1 ปริมาตรจะลดลงและงานที่สิ่งแวดล้อมกระทำต่อระบบเป็น W_2 เนื่องจาก W_1 และ W_2 มีทิศตรงกันข้าม ดังนั้น งานที่ระบบทำทั้งหมดใน 1 รอบจึงเท่ากับ $W_1 - W_2$ เป็นที่น่าสังเกตว่า ทุก ๆ จุดบนแผนภาพ P-V จะเป็นตำแหน่งสมดุล ดังนั้น กระบวนการผันกลับได้เท่านั้นที่สามารถนำมาลงจุด (plotted) ได้บนแผนภาพ P-V แต่ในกรณีของกระบวนการผันกลับไม่ได้ ตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้นที่นำมาลงจุดได้

ระบบที่มีวัฏจักรการทำงานที่ตรงกันข้ามกับเครื่องยนต์ความร้อน เรียกว่าตู้เย็น (refrigerator) งาน W ที่ต้องใช้ทั้งหมดเป็นงานที่ต้องใช้ดึงความร้อนปริมาณ Q_L จากตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า แล้วคายสู่ตัวรักษาที่มีอุณหภูมิสูงกว่าด้วยปริมาณ Q_H ดังแสดงในรูป 12.10

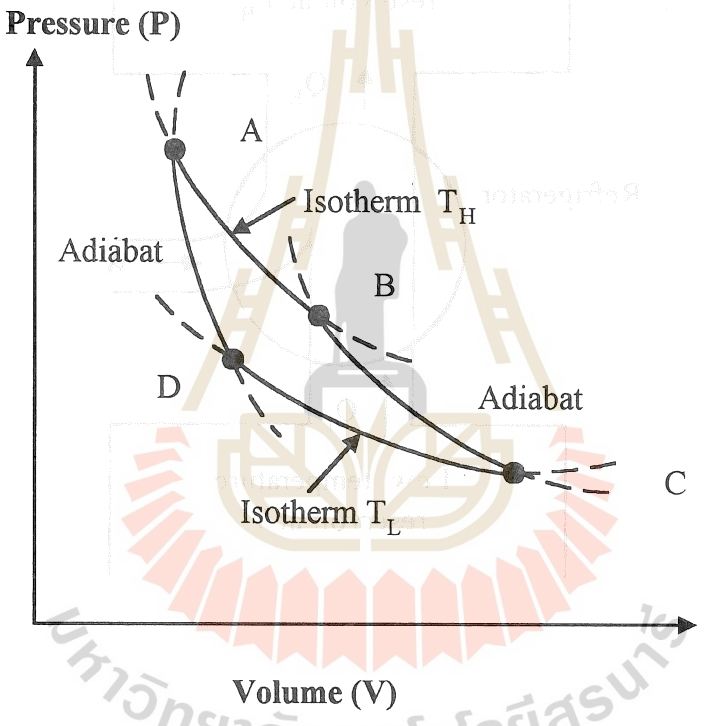


รูป 12.10 แสดงการทำงานของตู้เย็น

ในกรณีของตู้เย็น สัมประสิทธิ์ของสมรรถนะ (coefficient of performance or COP) คือ อัตราส่วนของปริมาณความร้อนจากตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่า หรือ Q_L ต่องานที่ป้อนเข้าสู่ระบบ หรือ W ดังนั้น

$$COP = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L} \qquad (12.44)$$

ในปี พ.ศ.2367 วิศวกรชาวฝรั่งเศสชื่อ Sadi Carnot ประกาศว่าเขาได้ออกแบบเครื่องยนต์ที่ใช้วัฏจักรของการผันกลับได้ซึ่งเป็นวัฏจักรอุดมคติ และให้ประสิทธิภาพสูงสุด เรียกวัฏจักรนี้ว่าวัฏจักรคาร์โนท์ (Carnot cycle) แสดงในรูป 12.11



รูปที่ 12.11 แสดงวัฏจักรคาร์โนท์ซึ่งประกอบด้วย 2 ไอโซเทอร์มและ 2 adiabat

จากรูป 12.11 จะเห็นได้ว่า พื้นที่หรืองานทั้งหมดในแต่ละรอบจะล้อมรอบด้วยเส้นไอโซเทอร์ม 2 เส้น และเส้น adiabatic 2 เส้น ความร้อนถูกระบบดึงดูดที่ตัวรักษาอุณหภูมิสูง Q_H และถูกขับออกจากระบบที่อุณหภูมิต่ำกว่าคือ T_L วัฏจักรดำเนินไปในทิศตามเข็มนาฬิกา ระบบจะทำงานเมื่อปริมาตรขยายตัวตามแนวเส้นไอโซเทอร์มเส้นบนคือ AB และตามแนวเส้น adiabatic จาก B ไปยัง C

ต่อจากนั้นเราต้องให้งานแก่เครื่องยนต์เพื่ออัดให้ปริมาตรลดลงตามเนวเส้นไอโซเทอร์ม CD และเส้น adiabatic จาก D ไปยัง A

เราอาจกำหนดประสิทธิภาพของวัฏจักรคาร์โนท์ในเทอมของอุณหภูมิสัมบูรณ์ กล่าวคือ ในตอนแรกสังเกตว่าปริมาณความร้อนจะถูกดึงดูดเข้าสู่ระบบในระหว่างที่อุณหภูมิคงตัวและมีค่ามากกว่า และต่อมาถูกขับออกจากระบบที่อุณหภูมิคงตัวและต่ำกว่า สมมติแทนด้วย Q_H และ Q_L ตามลำดับ ดังนั้นจากสมการ (12.43) คือ $\varepsilon = W / Q_H$ และจากฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ $W = Q_H - Q_L$ ดังนั้น

$$\varepsilon = \frac{Q_H - Q_L}{Q_H}$$

เนื่องจากการดูดหรือคายความร้อนเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงตัว ดังนั้น

$$Q_H = nRT_H \ell n\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

และ

$$Q_L = nRT_L \ell n\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

$$\therefore \quad \varepsilon = \frac{nRT_H \ell n\left(V_B / V_A\right) - nRT_L \ell n\left(V_C / V_D\right)}{nRT_H \ell n\left(V_B / V_A\right)}$$

นอกจากนี้ เราสามารถพิสูจน์โดยใช้กฎของแก๊สอุดมคติคือ PV = nRT และ adiabatic process คือ PV^{γ} = ค่าคงตัว พิสูจน์ได้ว่า $V_B / V_A = V_C / V_D$ ดังนั้น

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_L}{T_H} \tag{12.45}$$

ซึ่งขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของตัวรักษาเท่านั้น

เครื่องยนต์ความร้อนที่ใช้กันเช่นเครื่องยนต์ความร้อนสำหรับผลิตกระแสไฟฟ้า ตัวรักษาที่อุณหภูมิสูงกว่าจะใช้เชื้อเพลิงที่เป็นแก๊ส น้ำมัน ถ่านหิน หรือนิวเคลียร์ และตัวรักษาที่อุณหภูมิต่ำกว่ามักเป็นสิ่งแวดล้อมโดยรอบเช่น บรรยากาศ แม่น้ำ ทะเลสาป หรือสระน้ำ ซึ่งอาจต้องมีการควบคุมเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ดังนั้น เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดจึงต้องให้ตัวรักษาที่มีอุณหภูมิสูงกว่ามีอุณหภูมิสูงสุด อย่างไรก็ตามเชื้อเพลิงที่ใช้แต่ละชนิดจะมีค่าจำกัดของอุณหภูมิสูงสุดที่แตกต่างกันไป

เครื่องยนต์ที่ใช้อยู่ทั่วไปจะมีประสิทธิภาพต่ำกว่าเครื่องยนต์คาร์โนท์เสมอ เพราะเครื่องยนต์จะต้องมีความเสียดทานและปริมาณความร้อนที่สูญเสียไปอันเนื่องจากการนำเสมอ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. ที่ความสูง 20 km จากพื้นดิน อุณหภูมิของบรรยากาศเท่ากับ -50^{o}C ความดันลดลงเหลือเพียง 40 mm ของปรอท บอลลูนที่ตำแหน่งนี้มีปริมาตร 800 m^{3} สมมติว่าแก๊สฮีเลียมในบอลลูนมีอุณหภูมิและความดันเท่ากับสิ่งแวดล้อมภายนอก จงหาจำนวนโมลของฮีเลียมในบอลลูนนี้
   (ตอบ : 2300 mol.)

2. กระบอกสูบบรรจุแก๊สฮีเลียม 2.0 mol ที่ 27^{o}C เมื่อรักษาความดันของแก๊สให้คงตัวที่ 1.50 x 10^{5} N/m^{2} แล้วทำให้ร้อนจนกระทั่งอุณหภูมิ 77^{o}C จงหา (a) งานที่ทำโดยแก๊ส (b) พลังงานภายในของแก๊สที่เปลี่ยนไป (c) ความร้อนที่ป้อนเข้ากระบอกสูบ และ (d) ปริมาตรที่เปลี่ยนไป
   (ตอบ : (a) 831 J (b) 1.25 x 10^{3} J (c) 2.08 x 10^{3} J (d) 5.54 x 10^{-3} m^{3})

3. ยางรถยนต์ของ ดร.ท่านหนึ่งแตก พบว่าอากาศภายในยางขยายตัวจาก 0.0125 เป็น 0.040 m^{3} ที่อุณหภูมิคงตัว 290^{o}K จนกระทั่งความดันสุดท้ายเป็น 1.00 x 10^{5} N/m^{2} ดร.ท่านนี้คำนวณหางานที่ทำจากการขยายตัวของแก๊สพบว่าเป็นเท่าใด ?
   (ตอบ : 4.65 x 10^{3} J)

4. ใน adiabatic process เราทราบว่า PV^{γ} = const. โดยที่ $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ จงพิสูจน์ว่าในกระบวนการนี้ $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

5. น้ำ 1 กรัม กลายเป็นไอน้ำ 1671 cm^{3} เมื่อต้มที่ความดัน 1 บรรยากาศ โดยใช้ความร้อน 540 cal. จงหางานภายนอกและพลังงานภายในที่เพิ่มขึ้น
   (ตอบ : 40.3 cal., 499.7 cal.)

6. ตัวต้านทานมีความจุความร้อน 10 J/K อุณหภูมิเริ่มต้น 27^{o}C ต่อตัวต้านทานเข้ากับแบตเตอรี่โดยกั้นความร้อนจากสิ่งแวดล้อม กระแสที่ไหลในวงจรทำให้เกิดความร้อน 1200 J จงหาเอนโทรปีที่เปลี่ยนไปของ (a) ตัวต้านทาน (b) สิ่งแวดล้อม (c) จักรวาล
   (ตอบ : (a) 3.36 J/K (b) 0 (c) 3.36 J/K)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

7. เครื่องยนต์ความร้อนทำงานด้วยประสิทธิภาพ 32 เปอร์เซนต์ ในแต่ละวัฏจักรเครื่องยนต์จะทำงาน 8.00×10^3 J จงหา (a) ปริมาณความร้อนที่เครื่องยนต์ดึงดูดจากแก๊สที่กำลังเผาไหม้แต่ละรอบ และ (b) ปริมาณความร้อนที่เครื่องยนต์ถ่ายเทให้กับบรรยากาศในแต่ละรอบ
(ตอบ : (b) 2.50×10^4 J (c) 1.70×10^4 J)

8. จงหาสัมประสิทธิ์ของสมรรถนะ (COP) ของตู้เย็นที่มีวัฏจักรตรงข้ามกับเครื่องยนต์ความร้อนในข้อ 7
(ตอบ : 2.13)

9. เครื่องยนต์ความร้อนสมัยใหม่ใช้เชื้อเพลิงที่เป็นซากดึกดำบรรพ์ทำงานที่อุณหภูมิ 500°C เครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ใช้วัสดุซึ่งทำงานที่อุณหภูมิ 300°C ถ้าเครื่องยนต์ความร้อนทั้งสองชนิดถ่ายของเสียลงสระน้ำที่อุณหภูมิ 25°C จงหาประสิทธิภาพคาร์โนท์ของเครื่องยนต์ความร้อนทั้งสองนี้
(ตอบ : 61.4% และ 48%)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บทที่ 13 ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส

เค้าโครงเรื่อง

13.1 ความนำ

13.2 การกระจายความเร็วของโมเลกุล

13.3 การแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงาน

13.4 ความจุความร้อนของแก๊สและของแข็ง

13.5 วิถีเสรีเฉลี่ย

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

13.1 ความนำ

ในบรรดาสถานะของสสารทั้งหลาย สถานะที่เป็นแก๊สเป็นสถานะที่ง่ายที่สุดซึ่งเกี่ยวข้องกับกฎที่ไม่สลับซับซ้อนและกำหนดแน่ (definite) แก๊สมีคุณสมบัติบางอย่างเช่น อุณหภูมิ ความดัน พลังงาน หรืออื่น ๆ ซึ่งเป็นลักษณะเฉพาะของแก๊สทั้งหมดมิใช่ลักษณะของแต่ละโมเลกุล เมื่อใช้หลักการพื้นฐานทางฟิสิกส์แผนเดิมอธิบายการเคลื่อนไหวของแก๊ส ผลที่ได้เรียกว่าทฤษฎีจลน์ของแก๊ส (kinetic theory of gases) เราจะใช้ทฤษฎีนี้เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างโมเลกุลแต่ละตัวของแก๊สกับคุณสมบัติทั่วไปของแก๊สในภาพรวม

ทฤษฎีจลน์เป็นทฤษฎีที่ชัดเจนและสมบูรณ์ที่สุดเมื่อใช้กับแนวคิดเกี่ยวกับโมเลกุล โดยอธิบายพฤติกรรมของแก๊สด้วยทฤษฎีที่ตั้งอยู่บนข้อสมมุติบางประการซึ่งพิจารณาจากพฤติกรรมของแก๊สนั้น ดาเนียล แบร์นูลลี (Daniel Bernoulli) ชาวสวิสได้พัฒนาทฤษฎีนี้ขึ้นในปี พ.ศ. 2281 แล้วใช้อธิบายกฎของบอยล์ด้วยการเคลื่อนที่ของโมเลกุล จึงถือได้ว่าแบร์นูลลีเป็นบิดาของทฤษฎีจลน์ ซึ่งต่อมาได้มีการพัฒนาหลักการของทฤษฎีนี้ในช่วงปี พ.ศ. 2393 ถึง 2443 โดย Clausius, Maxwell-Boltzmann, Van der Waal, Jeans และ Rayleigh โดยครอบคลุมเนื้อหาของปรากฏการณ์ที่แตกต่างกันไปของแก๊ส

ทฤษฎีจลน์ตั้งอยู่บนข้อสมมุติพื้นฐาน ดังต่อไปนี้ :

1. แก๊สประกอบด้วยอนุภาคขนาดเล็กมาก ๆ เรียกว่า โมเลกุล โมเลกุลของแก๊สถือว่าแข็งแกร็งยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ (perfectly elastic) เป็นก้อนกลมและเหมือนกันทุกประการทั้งมวลและขนาด โดยที่แก๊สแต่ละชนิดมีสภาพดังกล่าวที่แตกต่างกันไป
2. โมเลกุลที่บรรจุในภาชนะจะอยู่ในสถานะการเคลื่อนที่ที่ไร้ทิศทาง ด้วยความเร็วที่เป็นไปได้ทุกค่าและเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
3. โมเลกุลที่เคลื่อนที่จะชนกับโมเลกุลอื่น ๆ รวมทั้งผนังของภาชนะ จึงทำให้อัตราเร็วและทิศทางเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา อย่างไรก็ตาม การชนกันนี้มิได้มีผลต่อความหนาแน่นของแก๊ส เพราะโมเลกุลเหล่านี้เคลื่อนที่อยู่ตลอดเวลาไม่ได้รวมกันที่จุดใดจุดหนึ่งเสมอ
4. โมเลกุลที่เคลื่อนที่ชนกับผิวของผนังบรรจุทำให้เกิดความดัน ซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของผนังนั้น
5. การชนกันทุกครั้งระหว่างโมเลกุลของแก๊สกับผนังภาชนะที่บรรจุ ถือว่ายืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ ดังนั้น พลังงานจลน์ของแก๊สจึงไม่ได้สูญหายไป รวมทั้งโมเมนตัมมีการอนุรักษ์ด้วย
6. โมเลกุลมิได้ออกแรงกระทำต่อกันยกเว้นตอนชนกันเท่านั้น จึงถือว่าพลังงานของแก๊สมีเพียงพลังงานจลน์เท่านั้น

7. โมเลกุลมีทางเดินเป็นเส้นตรงระหว่างการชนแต่ละครั้ง ระยะห่างระหว่างการชนที่ถัดไปเรียกว่า วิถีเสรี (free path) และค่าเฉลี่ยระยะทางที่โมเลกุลเคลื่อนที่ระหว่างการชนที่ต่อเนื่องกัน เรียกว่า วิถีเสรีเฉลี่ย (mean free path)
8. ระยะเวลาของการชนกันระหว่างโมเลกุลคู่หนึ่ง ๆ ถือว่าน้อยมาก และอาจตัดทิ้งได้เมื่อเทียบกับระยะเวลาของการเคลื่อนที่ในวิถีเสรี
9. เนื่องจากโมเลกุลมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างโมเลกุลด้วยกัน ดังนั้น ปริมาตรที่ครอบครองโดยโมเลกุลจึงน้อยมากและสามารถตัดทิ้งได้เมื่อเทียบกับปริมาตรทั้งหมดของแก๊ส และถือว่าโมเลกุลเป็นจุด (point masses)
10. ระยะห่างระหว่างโมเลกุลคู่หนึ่ง ๆ ในแก๊สจะมากกว่าในกรณีของของแข็งหรือของเหลว โมเลกุลของแก๊สจึงเคลื่อนที่ได้อย่างเสรีในปริภูมิที่กำหนดให้

เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น เราจะพิจารณาค่าความดันของแก๊สจำนวน N โมเลกุล บรรจุอยู่ในภาชนะรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ยาวด้านละ ℓ สมมติโมเลกุลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v ชนกับผนังของภาชนะ เนื่องจากการชนกันเป็นการชนแบบยืดหยุ่นอย่างสมบูรณ์ ขนาดของความเร็วจึงไม่เปลี่ยนแปลง ความเร็วในทิศทางที่ตั้งฉากกับผนังเท่านั้นที่มีการเปลี่ยนทิศทางคือมีทิศตรงกันข้าม สมมติว่าเป็นทิศทางในแนวแกน x ดังนั้น ความเร็วในแนวแกน y และ z จึงไม่มีการเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทาง โมเมนตัมของโมเลกุลก่อนชน คือ mv_x และโมเมนตัมหลังชนคือ $-mv_x$ ดังนั้น
โมเมนตัมของโมเลกุลที่เปลี่ยนไป คือ

$$\Delta p_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

เนื่องจากโมเมนตัมของระบบมีการอนุรักษ์ โมเมนตัมที่ให้แก่ผนังของภาชนะจึงเท่ากับ $2mv_x$ เพื่อให้เกิดการชนในครั้งต่อไป โมเลกุลจะต้องเดินทางเป็นระยะ 2ℓ ในระยะเวลา $\Delta t = \frac{2\ell}{v_x}$ แรงที่กระทำต่อผนังภาชนะในระยะเวลา Δt คือ F ดังนั้น

$$F\Delta t = \Delta p = 2mv_x$$

$$F = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{mv_x^2}{\ell} \qquad (13.1)$$

เนื่องจากมี N โมเลกุล แรงที่กระทำต่อผนังภาชนะจึงเป็นผลบวกของแรงของแต่ละโมเลกุล ความดันบนผนังภาชนะจึงเท่ากับ

$$P = \frac{\Sigma F}{A} = \frac{m}{\ell^3}(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots\ldots v_{xN}^2) \qquad (13.2)$$

โดยที่ $v_{x1}, v_{x2}, \ldots\ldots$ เป็นความเร็วของโมเลกุลที่ 1, 2, ... ในแนวแกน x เนื่องจากค่าเฉลี่ยของ v_x^2 คือ

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \ldots\ldots}{N}$$

และ $V = \ell^3$ ดังนั้น

$$P = \frac{Nm}{V}\overline{v_x^2} \qquad (13.3)$$

เนื่องจาก $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ และโมเลกุลไม่ได้เคลื่อนที่ไปในทิศทางใดโดยเฉพาะ ค่าเฉลี่ยในแต่ละทิศทางจึงถือว่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

ความดันที่กระทำบนผนังภาชนะจึงเท่ากับ

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm}{V}\overline{v^2} \qquad (13.4)$$

Nm เป็นมวลรวมของโมเลกุล ซึ่งเท่ากับ nM โดยที่ n คือจำนวนโมล และ M คือน้ำหนักโมเลกุลของแก๊ส ดังนั้น

$$P = \frac{1}{3}\frac{nM}{V}\overline{v^2} \qquad (13.5)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เราอาจเขียนค่าความดันในเทอมของพลังงานจลน์ของโมเลกุลได้เป็น

$$P = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) \qquad (13.6)$$

นั่นคือ ความดันเป็นสัดส่วนกับจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร และเป็นสัดส่วนกับค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุล

จะเห็นได้ว่าเราสามารถเชื่อมโยงปริมาณมหาทรรศน์ คือความดันและปริมาตรเข้ากับปริมาณจุลทรรศน์ คือ ความเร็วเฉลี่ยของโมเลกุล อย่างไรก็ตาม การหาความสัมพันธ์นี้เราไม่ได้รวมการชนกันระหว่างแต่ละโมเลกุลเลย เพราะไม่มีผลแต่ประการใด อันเนื่องจากไม่มีผลต่อผนังภาชนะ จะมีผลก็เพียงแต่โมเมนตัมของโมเลกุลเท่านั้น

จากสมมุติฐานที่ว่าโมเลกุลเป็นอนุภาคที่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งถือได้ว่าเป็นจุดและพลังงานมีเพียงพลังงานจลน์เท่านั้น ดังนั้น พลังงานภายใน U ของระบบจึงเป็นผลรวมของพลังงานจลน์ของแต่ละโมเลกุล หรือ

$$U = \frac{1}{2}Nm\overline{v^2}$$

เนื่องจากความดันของแก๊ส และพลังงานภายในต่างก็เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $\overline{v^2}$ ดังนั้นปริมาณทั้งสองจึงเป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันด้วย หรือ

$$PV = \frac{1}{3}Nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Nm\overline{v^2}\right)$$

$$\therefore \quad PV = \frac{2}{3}U \qquad (13.7)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการสถานะของแก๊สซึ่งตั้งอยู่บนข้อมูลที่ได้จากการทดลองคือ Pv=nRT จะเห็นได้ว่า

$$U = \frac{3}{2}nRT \qquad (13.8)$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

นั่นคือ พลังงานภายในของแก๊สเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอุณหภูมิสัมบูรณ์

ระบบซึ่งมี n โมล ประกอบด้วย N โมเลกุล โดยที่ $n = \frac{N}{N_A}$ เรียกว่า Avogadro's number หรือจำนวนโมเลกุลใน 1 โมล ดังนั้น

$$U = \frac{3N}{2N_A}RT$$

ค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ กำหนดโดย

$$\overline{E_k} = \frac{U}{N} = \frac{3R}{2N_A}T$$

หรือ $$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT \qquad (13.9)$$

โดยที่ $k = \frac{R}{N_A}$ เรียกว่าค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ (Boltzmann constant) มีค่าเท่ากับ 1.38×10^{-23} J/K

ให้สังเกตุว่าค่าคงตัว R เกี่ยวพันกับ 1 โมลของสารเช่นเดียวกับ N_A สำหรับ k เป็นอิสระต่อโมลของสาร แต่เกี่ยวพันกับโมเลกุล นั่นคือ เป็นค่าคงตัวต่อโมเลกุล

จากสมการ (13.9) จะเห็นได้ว่า พลังงานจลน์ของโมเลกุลเป็นสัดส่วนกับอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้นพลังงานจลน์โดยเฉลี่ยของโมเลกุลจะเพิ่มขึ้น ซึ่งอาจกล่าวในเทอมของความเร็ว โดยใช้รากของกำลังสองเฉลี่ย (root-mean square) ของอัตราเร็ว แทนด้วย v_{rms}

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} \qquad (13.10)$$

ซึ่งเป็นปริมาณแสดงการกระจายความเร็วของโมเลกุล v_{rms} ไม่ใช่อัตราเร็วเฉลี่ย แต่เป็นรากที่สองของค่าเฉลี่ยอัตราเร็วยกกำลังสอง เนื่องจาก $\overline{E_k} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$ ดังนั้น จากสมการ (13.9) จะได้

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

$$\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}$$

หรือ $$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad (13.11)$$

ดังนั้น v_{rms} จึงเป็นสัดส่วนโดยตรงกับรากที่สองของอุณหภูมิสัมบูรณ์และเป็นสัดส่วนผกผันกับรากที่สองของมวลของโมเลกุล

อย่างไรก็ตาม สมการ (13.9) และ (13.11) จะใช้ไม่ได้ถ้าอุณหภูมิของระบบมีค่าต่ำมากหรือ $T \rightarrow o$ กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันจึงไม่เพียงพอสำหรับการอธิบายการเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว จำเป็นต้องใช้วิชากลศาสตร์ควอนตัมเชิงสถิติ (quantum statistical mechanics) เช่นการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในของแข็ง และเฟสของของไหลยวดยิ่ง (superfluid) ในฮีเลียมเหลว เป็นต้น

3.2 การกระจายความเร็วของโมเลกุล

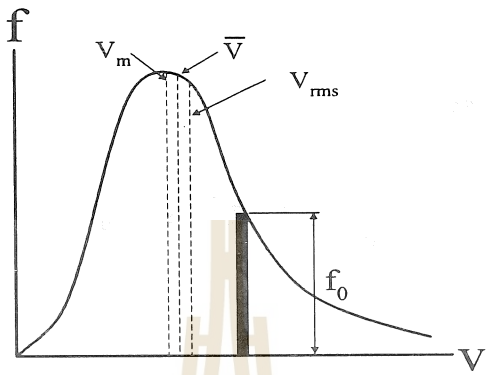
แต่ละโมเลกุลของแก๊สไม่ได้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วที่เท่ากัน อีกทั้งมีการชนกันทำให้อัตราเร็วและทิศทางของแต่ละโมเลกุลเปลี่ยนไป อัตราเร็วที่กล่าวมาในตอนต้นเป็นเพียงอัตราเร็วเฉลี่ยหรือ v_{rms} เท่านั้น ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น แต่เราไม่ทราบว่ามีโมเลกุลจำนวนเท่าใดที่มีอัตราเร็วในช่วงต่าง ๆ หรือมีโมเลกุลจำนวนเท่าใดที่มีอัตราเร็วมากกว่าหรือน้อยกว่า v_{rms}

แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) เป็นคนแรกที่แสดงการแจกแจงอัตราเร็วได้ค่อนข้างชัดเจน คือในปี พ.ศ. 2403 แม้ว่าในขณะนั้นยังไม่มีเครื่องมือตรวจวัดโมเลกุลได้อย่างละเอียดเมื่อเทียบกับอีก 60 ปีต่อมา แต่ผลสรุปของเขาก็ยังใช้ได้จนถึงปัจจุบัน

ถ้า f_v ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function) แทนจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งช่วงของอัตราเร็ว ดังนั้น จำนวนโมเลกุลที่อัตราเร็วอยู่ในช่วง v ถึง $v + \Delta v$ มีค่าเท่ากับ $f_v \Delta v$ แมกซ์เวลล์หาค่า f_v ที่อุณหภูมิค่าหนึ่ง ๆ ได้เป็น

$$f_v = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \qquad (13.12)$$

N คือ จำนวนโมเลกุลทั้งหมดของแก๊ส m คือมวลของโมเลกุล k คือค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ และ T คือ อุณหภูมิสัมบูรณ์ f_V มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออัตราเร็ว v มีค่าเข้าใกล้ศูนย์และเข้าใกล้อนันต์ ดังแสดงในรูป 13.1



รูป 13.1 แสดงการแจกแจงความเร็วของโมเลกุลที่อุณหภูมิค่าหนึ่งจำนวนโมเลกุลในช่วงอัตราเร็ว Δv มีค่าเท่ากับ $f_v \Delta v$ ซึ่งเป็นพื้นที่แรเงาเป็นรูปสี่เหลี่ยม

ถ้า N เป็นจำนวนโมเลกุลทั้งหมด ดังนั้นอัตราส่วน $f_V \Delta v / N$ จึงเป็นความน่าจะเป็นที่โมเลกุลใด ๆ จะมีอัตราเร็วในช่วง v และ $v + \Delta v$ และเนื่องจากจำนวนโมเลกุลทั้งหมด หรือ N มีค่าเท่ากับพื้นที่เส้นโค้งของกราฟระหว่าง f_V และ v ในรูป 13.1 ดังนั้น

$$N = \lim_{\Delta v \to 0} \left(\sum_{v=0}^{\infty} f_v \Delta v \right) = \int_0^{\infty} f_v dv \qquad (13.13)$$

จากรูป 13.1 จะเห็นได้ว่าอัตราเร็วเฉลี่ย $\bar{v}$ มีค่าน้อยกว่า v_{rms} อัตราเร็วที่มีค่าเป็นไปได้มากที่สุด (most probable speed) แทนด้วย v_m เป็นอัตราเร็วซึ่งให้ค่า f_V สูงสุด เมื่อใช้สมการ (13.12) พบว่า

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.73\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad (13.14)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad (13.15)$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1.41\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad (13.16)$$

จะเห็นได้ว่า $v_m < \bar{v} < v_{rms}$

ตัวอย่าง 13.1 อัตราเร็วของ 10 อนุภาค (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) คือ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 และ 7 จงหา (a) อัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาค และ (b) อัตราเร็วรากของกำลังสองเฉลี่ย v_{rms}

วิธีทำ

(a) อัตราเร็วเฉลี่ย คือ

$$\bar{v} = \frac{1+2+2+3+3+3+4+4+5+7}{10} = 3.40 \ \text{m/s}$$

(b) $v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}}$

$$= \sqrt{\frac{1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2+7^2}{10}}$$

$$= 3.77 \ \text{m/s}$$

ตัวอย่าง 13.2 อากาศประกอบด้วยแก๊ส N_2 และ O_2 เป็นส่วนใหญ่ แต่ละชนิดมีฟังก์ชันการแจกแจงที่อุณหภูมิใด ๆ กำหนดโดยสมการ (3.12) (a) จงหา v_m, $\bar{v}$ และ v_{rms} ของ O_2 ในอากาศที่อุณหภูมิ 300 K (b) หาค่าเหล่านี้สำหรับ H_2

วิธีทำ

(a) มวลของ O_2 คือ $m = \frac{M}{N_A}$ โดยที่ M = 32 g/mol คือ น้ำหนักโมเลกุล

$$\therefore \ m = \frac{32 \times 10^{-3} \ \text{kg/mol}}{6.02 \times 10^{23} \ \text{mol}^{-1}} = 5.3 \times 10^{-26} \ \text{kg}$$

$$\frac{kT}{m} = \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{5.3 \times 10^{-26}} = 7.8 \times 10^4 \ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\therefore v_m = \sqrt{2\frac{kT}{m}} = 390 \ \text{m/s}$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 450 \ \text{m/s}$$

$$v_{rms} = \sqrt{3\frac{kT}{m}} = 480 \ \text{m/s}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

(b) เนื่องจาก H_2 มีมวลเท่ากับ 1/16 เท่าของ O_2 และเนื่องจากอัตราเร็วเป็นสัดส่วนผกผันกับรากที่สองของมวล ดังนั้น อัตราเร็วของ H_2 จึงเป็น 4 เท่าของ O_2

$$\therefore v_m = 4 \times 390 \text{ m/s} = 1.6 \text{ km/s}$$

$$\bar{v} = 4 \times 450 \text{ m/s} = 1.8 \text{ km/s}$$

$$v_{rms} = 4 \times 480 \text{ m/s} = 1.9 \text{ km/s}$$

13.3 การแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงาน

พิจารณาค่าเฉลี่ยพลังงานจลน์ที่อุณหภูมิ T ในสมการ (3.9) คือ

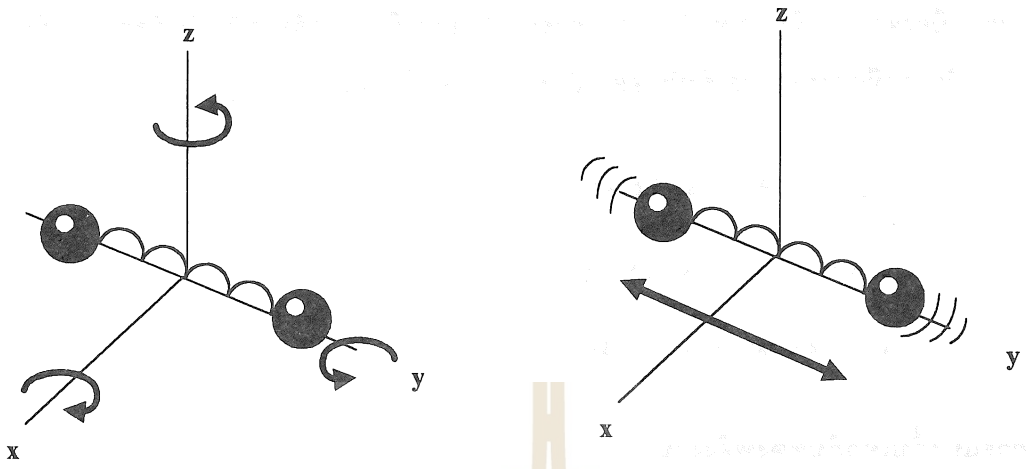
$$\overline{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

เราทราบว่าแฟกเตอร์ 3 มาจากสมมุติฐานที่ว่า ค่าเฉลี่ยในแต่ละทิศทางคือแกน x, y และ z มีค่าเท่ากัน และเรียกแกนทั้ง 3 ว่า ระดับขั้นความเสรี (degrees of freedom) ดังนั้น การเลื่อนที่ใน 3 ทิศทาง จึงมีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 3 และค่าเฉลี่ยพลังงานในแต่ละทิศทางมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}kT$ ซึ่งเป็นหลักการของทฤษฎีการแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงาน(equipartition of energy theorem) ซึ่งกล่าวว่า สำหรับระบบของโมเลกุลที่อุณหภูมิ T แต่ละโมเลกุลมีระดับขั้นความเสรีเป็น ν ค่าเฉลี่ยพลังงานกลของโมเลกุล $\overline{E}$ คือ

$$\overline{E} = \nu(\frac{1}{2}kT) \qquad (13.17)$$

โดยแต่ละระดับขั้นความเสรีมีค่าเฉลี่ยพลังงานเท่ากับ $\frac{1}{2}kT$ ดังนั้นแก๊สที่โมเลกุลมีอะตอมเพียงตัวเดียว (monatomic molecules) มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 3

สำหรับแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม (diatomic molecules) หรือประกอบด้วยหลายอะตอม (polyatomic molecules) จะมีระดับขั้นความเสรีมากกว่า 3 เช่นแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม เรียงตัวอยู่ในแนวแกน y ดังรูป 13.2 (ก) โดยที่โมเลกุลสามารถหมุนรอบแกนทั้ง 3



(ก) (ข)

รูป 13.2 แสดงการหมุนและการสั่นของอะตอมที่มีผลต่อระดับขั้นความเสรี

จากรูป 13.2 (ก) เราไม่นับการหมุนรอบแกน y เพราะโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน y เท่ากับศูนย์ พลังงานในแนวแกนนี้จึงไม่มี ระดับขั้นความเสรีจึงเพิ่มขึ้นเพียง 2 ระดับ ทำให้ระดับขั้นความเสรีรวมเท่ากับ 5 ซึ่งประกอบด้วยระดับขั้นความเสรีของการเลื่อนที่ในแนวแกน x, y, z จำนวน 3 ระดับ และระดับขั้นความเสรีของการหมุนรอบแกน x และ z อีก 2 ระดับ แต่ละระดับมีค่าเฉลี่ยพลังงานเท่ากับ $\frac{1}{2}kT$ ถ้าระบบมีจำนวน N โมเลกุลพลังงานรวมจึงเป็น

$$E = 3N(\frac{1}{2}kT) + 2N(\frac{1}{2}kT) = \frac{5}{2}NkT = \frac{5}{2}nRT$$

นอกจากนี้การสั่นของอะตอมทั้งสองอาจถือได้ว่าอะตอมทั้งสองยึดติดกันด้วยสปริงดังแสดงในรูป 3.2(ข) การสั่นทำให้ระดับขั้นความเสรีเพิ่มขึ้นอีก 2 ระดับคือ ระดับขั้นความเสรีอันเนื่องจากพลังงานจลน์ของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระดับขั้นความเสรีอันเนื่องจากพลังงานศักย์ของอันตรกิริยาระหว่างอะตอมทั้งสอง ทำให้ระดับขั้นความเสรีทั้งหมดรวมเป็น 7 ระดับ พลังงานรวมจึงเป็น $\frac{7}{2}NkT$

ตัวอย่าง 13.3 ถ้าแต่ละโมเลกุลที่ประกอบด้วยหลายอะตอมที่อุณหภูมิ 1200 K มีระดับขั้นความเสรีสำหรับการเลื่อนที่เป็น 3 การหมุนเป็น 3 และการสั่นเป็น 4 จงหา (a) ค่าเฉลี่ยพลังงานกลของแต่ละโมเลกุล และ (b) พลังงานภายในของแก๊สนี้จำนวน 1.0 โมล

วิธีทำ

(a) เนื่องจาก ν = 3+3+4 = 10 ดังนั้น ค่าเฉลี่ยพลังงานของแต่ละโมเลกุล คือ

$$\overline{E} = \frac{10}{2}(1.38\times10^{-x23})(1200)$$

$$= 8.3\times10^{-20}\ \text{J}$$

(b) พลังงานภายในเป็นพลังงานกลรวมของแก๊ส ดังนั้น

$$U = N\overline{E}$$

$$= nN_A\overline{E}$$

$$= (1.0)(6.02\times10^{23})(8.3\times10^{-20})$$

$$= 50\ \text{kJ}$$

13.4 ความจุความร้อนของแก๊สและของแข็ง

เมื่อให้ความร้อนแก่ระบบที่ปริมาตรคงตัว จะไม่มีงานเกิดขึ้น เพราะ dW = PdV = O และจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ เราสรุปว่า ความร้อนที่ให้แก่ระบบจะทำให้พลังงานภายในของระบบเพิ่มขึ้น หรือ dQ = dU และจากนิยามของความจุความร้อนโมลาร์ที่ปริมาตรคงตัว หรือ C_V เราทราบว่า $dQ = nC_V dT$ โดยที่ n คือจำนวนโมลของระบบ ดังนั้น

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \qquad (13.18)$$

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลมีอะตอมเดียว พลังงานภายในระบบคือ $U = \frac{3}{2}nRT$ ดังนั้น

$$C_v = \frac{3}{2}R$$

และจากสมการ (12.32) คือ $C_p - C_V = R$ ดังนั้น

$$C_p = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

อัตราส่วน $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1.67$

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วย 2 อะตอม พลังงานภายในของระบบคือ $U = \frac{5}{2}nRT$ ดังนั้น

$$C_v = \frac{5}{2}R,\ C_p = \frac{7}{2}R, \text{และ} \gamma = \frac{7}{5} = 1.40$$

ในกรณีของแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วยหลายอะตอม ระดับขั้นความเสรีเท่ากับ 6 โดย 3 ขั้นแรกเกิดจากการเลื่อนที่ และ 3 ขั้นที่เหลือเกิดจากการหมุน ดังนั้นพลังงานภายในของระบบ จึงเท่ากับ $U = \frac{6}{2}nRT$ และ

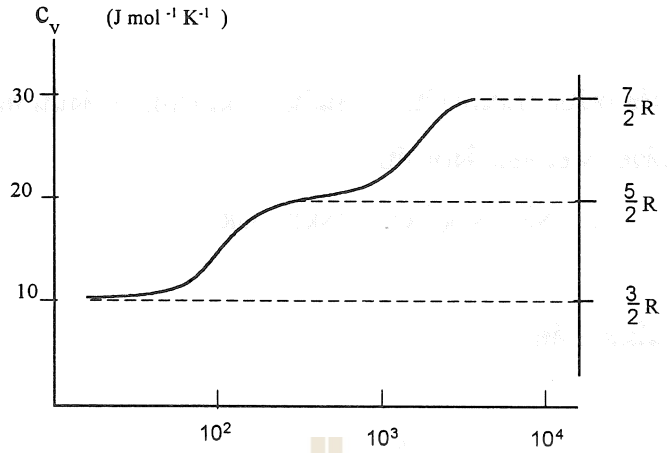
$$C_v = 3R,\ C_p = 4R, \text{และ} \gamma = \frac{4}{3} = 1.33$$

โดยที่ระดับขั้นความเสรีอันเนื่องจากการสั่นมีผลน้อยมากและตัดทิ้งได้

ทฤษฎีการแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงานอธิบายได้ดีเกี่ยวกับความจุความร้อนของสาร อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีนี้ไม่อาจอธิบายผลของอุณหภูมิที่มีต่อความจุความร้อนของสารได้ เช่น C_V ของโมเลกุลไฮโดรเจนที่อุณหภูมิต่ำ ๆ มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{2}R$ อันเนื่องจากการเลื่อนที่เป็นสำคัญ ดังแสดงในรูปที่ 13.3 เมื่ออุณหภูมิเพิ่มมากขึ้นอีก C_V มีค่าเท่ากับ $\frac{5}{2}R$ อันเนื่องจากระดับขั้นความเสรี 2 ระดับ ของการหมุน และเมื่ออุณหภูมิเพิ่มมากขึ้นอีก C_V มีค่าเท่ากับ $\frac{7}{2}R$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าระดับขั้นความเสรีอันเนื่องจากการสั่นเริ่มมีบทบาท

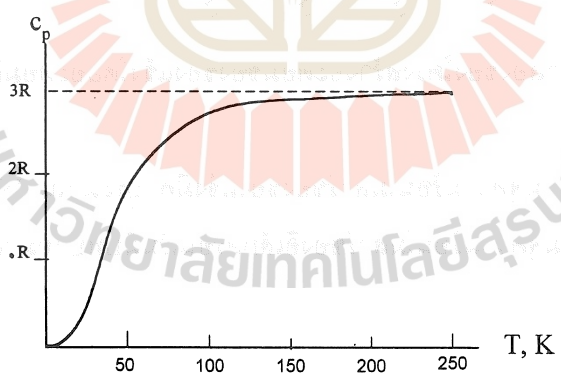
สังเกตุว่า ความสัมพันธ์ $C_p - C_v = R$ ของแก๊สยังคงใช้ได้เช่นเดิม แม้อุณหภูมิจะเปลี่ยนไปก็ตาม ทั้งนี้เพราะความสัมพันธ์ดังกล่าวพัฒนามาจากกฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ อุณหภูมิจึงมีผลต่อพลังงานภายในเท่านั้น ความสัมพันธ์นี้จึงเป็นอิสระต่อระดับขั้นความเสรี

การอธิบายผลการทดลองที่ดีที่สุดคือ การใช้วิชากลศาสตร์ควอนตัมเชิงสถิติซึ่งอธิบายว่าพลังงานของระบบอนุภาคเล็กมาก ๆ มีค่าเป็นควอนตัม และจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้



รูป 13.3 แสดงความจุความร้อนโมลาร์ C_V ของไฮโดรเจนที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ โดยมาตราส่วนในแนวนอนเป็น logarithmic

ความจุความร้อนของของแข็งเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิได้อย่างชัดเจน กล่าวคือ ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ และเข้าใกล้ศูนย์ ความจุความร้อนจะลดลงแบบไม่ใช่เชิงเส้นและเข้าใกล้ศูนย์เมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้ศูนย์ ที่อุณหภูมิสูง ๆ ประมาณ 500 K ค่าความจุความร้อนจะมีค่าค่อนข้างคงตัวคือประมาณ 3R หรือ 25 J/mole.K ซึ่งเป็นไปตามกฎของดูลองและเปอตีต (Dulong-Petit law) ดังแสดงในรูป 13.4



รูป 13.4 แสดงความจุความร้อนโมลาร์ C_p ของ Ag ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ มีค่าประมาณ T^3 และที่อุณหภูมิสูง ๆ จะเข้าใกล้ค่า 3R

ที่อุณหภูมิสูง ๆ เราสามารถใช้ทฤษฎีการแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงานอธิบายค่าความจุความร้อนของของแข็งได้ กล่าวคือ เราถือว่าอะตอมแต่ละตัวสั่นรอบ ๆ ตำแหน่งสมดุล และอะตอมเหล่านี้ยึดติดกันด้วยสปริงดังแสดงในรูปที่ 3.5 แต่ละอะตอมมีระดับขั้นความเสรีสำหรับการเลื่อนที่เท่ากับ 3

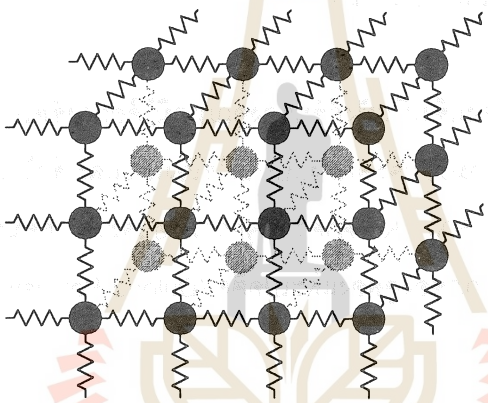
และระดับขั้นความเสรีสำหรับการสั่นเท่ากับ 3 เช่นกัน รวมเท่ากับ 6 ดังนั้น พลังงานภายในของของแข็ง ซึ่งประกอบด้วย N อะตอม จึงเท่ากับ

$$U = N\overline{E} = N.6(\frac{1}{2}kT) = 3NkT = 3nRT$$

และความจุความร้อนโมลาร์ คือ

$$C_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = 3R$$

ในกรณีของของแข็ง ค่า C_p และ C_v มีค่าใกล้เคียงกัน และมักนิยมวัดค่า C_p มากกว่า



รูป 13.5 แสดงแบบจำลองของโครงสร้างอะตอมของของแข็งโดยอะตอมยึดติดกันด้วยสปริง

ที่อุณหภูมิต่ำ ๆ ความจุความร้อนโมลาร์ของของแข็งมีค่าประมาณ T^3 ฟิสิกส์แผนเดิมจึงไม่อาจอธิบายผลได้ และความจุความร้อนโมลาร์ของอิเล็กตรอนเริ่มมีบทบาทมากขึ้นเมื่ออุณหภูมิต่ำมาก ๆ

ตัวอย่าง 13.4 จงประมาณค่าความจุความร้อนโมลาร์ C_p ของ (a) แก๊ส Ne (b) แก๊ส N_2 และ (c) โลหะตะกั่ว Pb ที่อุณหภูมิ 400 K

วิธีทำ

(a) Ne เป็นแก๊สที่โมเลกุลประกอบด้วยอะตอมเพียงตัวเดียว ระดับขั้นความเสรีจึงเท่ากับ 3 และ $C_v = \frac{3}{2}R$ ดังนั้น

$$C_p = C_v + R = \frac{5}{2}R = 21 \ J.mol^{-1}.K^{-1}$$

(b) โมเลกุลของแก๊ส N_2 ประกอบด้วย 2 อะตอม ระดับขั้นความเสรีจึงเท่ากับ 5 และ $C_v = \frac{5}{2}R$ ดังนั้น

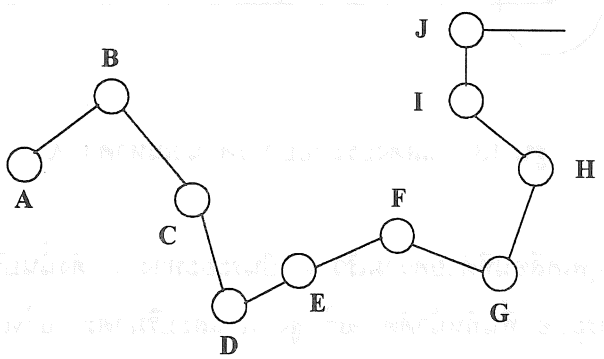
$$C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R = 29 \ J.mol^{-1}.K^{-1}$$

(c) โลหะตะกั่วที่อุณหภูมิ 400 K ซึ่งถือว่าเป็นอุณหภูมิสูง ดังนั้น

$$C_p = 3R = 25 \ J.mol^{-1}.K^{-1}$$

13.5 วิถีเสรีเฉลี่ย

ตามทฤษฎีจลน์ โมเลกุลของแก๊สเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง แม้กระทั่งที่อุณหภูมิปกติก็ตาม แต่จากการสังเกตุดูกลุ่มควันที่ลอยเป็นก้อนพบว่ามีพฤติกรรมที่ตรงกันข้าม ดังนั้นจะต้องมีแฟกเตอร์บางอย่างที่ทำให้โมเลกุลของแก๊สเคลื่อนที่ได้ช้าลง เคลาซิอุส (Clausius) อธิบายว่าโมเลกุลมีขนาดจำกัด แม้ว่าจะเล็กมากก็ตาม ทำให้เกิดการชนกันระหว่างโมเลกุลด้วยกัน แต่ถ้าเราสมมติว่าโมเลกุลมีขนาดเล็กมากและถือได้ว่าเป็นจุดก็จะไม่มีการชนกันเลย เมื่อโมเลกุลมีการชนกันทำให้ขนาดและทิศทางของความเร็วเปลี่ยนไป ในขณะที่โมเลกุลไม่มีการชนกันจะไม่มีแรงกระทำระหว่างกันเลย ทำให้โมเลกุลเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงด้วยความเร็วสม่ำเสมอ ระยะแนวเส้นตรงก่อนการชนกันที่ถัดไปแต่ละครั้งเรียกว่า วิถีเสรี (free path) จากรูป 13.6 โมเลกุลเริ่มต้นจากตำแหน่ง A เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงแล้วชนกับโมเลกุลอื่นที่ B ทำให้ขนาดและทิศทางเปลี่ยนไป จึงเคลื่อนที่ไปตามแนว BC แล้วชนกับโมเลกุลอื่นที่ C ทำให้ขนาดและทิศทางเปลี่ยนไปอีก อย่างนี้เรื่อยไประยะทาง AB, BC, CD, DE,..... จึงเป็นวิถีเสรี ซึ่งมีค่าแตกต่างกันไป ค่าเฉลี่ยของระยะทางเหล่านี้เรียกว่า วิถีเสรีเฉลี่ย



รูป 13.6 แสดงวิถีเสรีของโมเลกุล

ดังนั้น วิถีเสรีเฉลี่ยจึงเป็นระยะทางเฉลี่ยของโมเลกุลที่เคลื่อนที่ผ่านแก๊สโดยไม่มีการชนกับโมเลกุลอื่น และเนื่องจากเป็นการเฉลี่ยเชิงสถิติจึงขึ้นกับระเบียบวิธีที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ย ถ้า $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_N$ เป็นวิถีเสรีค่าต่าง ๆ ในเวลา t และ $\bar{v}$ เป็นค่าเฉลี่ยของอัตราเร็วของโมเลกุล เมื่อ N คือจำนวนครั้งของการชนในเวลา t ดังนั้น

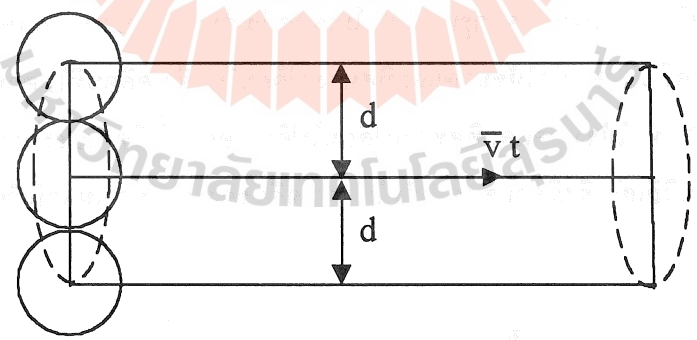
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots\ldots + \lambda_N = \bar{v}t$$

และวิถีเสรีเฉลี่ยคือ

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots\ldots \lambda_N}{N} = \frac{\bar{v}t}{N} = \frac{S}{N} \qquad (13.19)$$

โดยที่ S คือระยะทางรวมในการชนกัน N ครั้ง

สมมติให้ n_V คือจำนวนโมเลกุลในหนึ่งหน่วยปริมาตร และให้โมเลกุลเพียงตัวเดียวเท่านั้นเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v โดยถือว่าโมเลกุลอื่นหยุดนิ่งอยู่กับที่ โมเลกุลที่เคลื่อนที่ชนกับโมเลกุลอื่นภายในระยะทาง d จากจุดศูนย์กลางของโมเลกุลที่เคลื่อนที่นั้น d คือเส้นผ่าศูนย์กลางของโมเลกุลดังแสดงในรูป 13.7



รูป 13.7 แสดงประกอบการคำนวณหาค่า λ

ในเวลา t โมเลกุลเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เป็นระยะทาง vt ดังนั้นปริภูมิ (space) ของการเคลื่อนที่จึงเป็นรูปทรงกระบอกพื้นที่หน้าตัด πd^2 สูง vt และปริมาตร $\pi d^2 vt$ ภายในทรงกระบอกจึงมีโมเลกุลจำนวน $\pi d^2 vtn_V$ ดังนั้น จำนวนครั้งของการชนในเวลา t คือ

$$N = \pi d^2 vtn_v$$

และเนื่องจากเราถือว่ามีโมเลกุลเดียวเท่านั้นที่เคลื่อนที่ ดังนั้น $\bar{v}$ ในสมการ (13.19) จึงเท่ากับ v สมการ (13.19) จึงกลายเป็น

$$\lambda = \frac{vt}{\lambda d^2 vtn} = \frac{1}{\lambda d^2 n_v} \tag{13.20}$$

เนื่องจากจำนวนครั้งของการชนในเวลา t คือ $\pi d^2 vtn_v$ ดังนั้น จำนวนครั้งของการชนใน 1 วินาที ซึ่งก็คือ ความถี่ f จึงมีค่า

$$f = \pi d^2 vn_v \tag{13.21}$$

และส่วนกลับของความถี่คือเวลาเฉลี่ยของการชนแต่ละครั้ง เรียกว่า mean free time

อย่างไรก็ตาม สมการ (13.20) นี้มีข้อผิดพลาดอันเนื่องจากเราสมมติว่าโมเลกุลเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เคลื่อนที่ ในขณะที่โมเลกุลอื่น ๆ ไม่มีการเคลื่อนที่ ตามความเป็นจริง โมเลกุลอื่น ๆ มีการเคลื่อนที่ด้วยโดยมีการแจกแจงความเร็วเป็นไปตามกฎของแมกซ์เวลล์ เนื่องจากโมเลกุลเดียวที่สมมติมีการเคลื่อนที่นี้มีความเร็วเป็นไปได้หลายค่า จึงให้ $\bar{v}$ เป็นค่าเฉลี่ยความเร็วของโมเลกุลเดียวนี้ และให้ $\bar{v}_r$ เป็นความเร็วเฉลี่ยสัมพัทธ์ของโมเลกุลอื่น ๆ ซึ่งกันและกัน ดังนั้นจำนวนครั้งของการชนในเวลา t จึงเปลี่ยนไปเป็น $\pi d^2 \bar{v}_r tn_v$ และวิถีเสรีเฉลี่ยจะกลายเป็น

$$\lambda = \frac{\bar{v}t}{\pi d^2 \bar{v}_r tn_v} = \frac{\bar{v}}{\pi d^2 \bar{v}_r n_v}$$

จากการวิเคราะห์หาค่าของ $\bar{v}_r$ พบว่ามีค่าเท่ากับ $\sqrt{2}.\bar{v}$ ดังนั้น

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_v} \tag{13.22}$$

และความถี่ของการชนจะเปลี่ยนไปเป็น

$$f = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n_v = \frac{\bar{v}}{\lambda} \qquad (13.23)$$

ตัวอย่าง 13.5 ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางโมเลกุลของแก๊สเท่ากับ 3×10^{-10} เมตร จงหาค่าวิถีเสรีเฉลี่ยที่อุณหภูมิ 27 °C และความดัน 1 บรรยากาศ

วิธีทำ

เนื่องจาก n_V คือจำนวนโมเลกุลต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร การหาค่า n_V จึงใช้สมการ $PV = NkT$ หรือ

$$n_v = \frac{N}{v} = \frac{P}{kT}$$

ความดัน 1 บรรยากาศ = 1.01×10^5 N/m^2

และอุณหภูมิ $T = 27 + 273 = 300$ K ดังนั้น

$$n_v = \frac{1.01 \times 10^5}{(1.38 \times 10^{-23})(300)}$$

วิถีเสรีเฉลี่ยหาได้จากสมการ (13.22) คือ

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_v}$$

$$= \frac{(1.38 \times 10^{-23})(300)}{\sqrt{2}\pi(3 \times 10^{-10})^2 (1.01 \times 10^5)}$$

$$= 1.02 \times 10^{-7} \text{ m}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัด

1. แก๊สฮีเลียม 1.0 mol ปริมาตร 22.5 L มีความดัน 101 kPa. จงหาค่าเฉลี่ยของความเร็วยกกำลังสองของโมเลกุลนี้
   (ตอบ : $1.7 \times 10^6\ m^2/s^2$)

2. (a) จงหาพลังงานเฉลี่ยของโมเลกุลของแก๊สที่อุณหภูมิ $300^\circ K$
   (b) จงหา V_{rms} ของแก๊ส H_2 ซึ่งมีมวล 3.35×10^{-27} kg/molecule ที่อุณหภูมิ $300^\circ K$
   (ตอบ : (A) 6.21×10^{-21} J/molecule (B) 1.93×10^3 m/s)

3. สมมติว่าอัตราเร็วของเสียงในแก๊สมีค่าเท่ากับ V_{rms} ของโมเลกุล จงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วของเสียงกับอุณหภูมิของแก๊ส
   (ตอบ : $V_1 / V_2 = \sqrt{T_1 / T_2}$)

4. ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงกำหนดโดยสมการ (3.12) จงพิสูจน์ว่า จำนวนโมเลกุลซึ่งมีพลังงานระหว่าง E และ E + dE มีค่าเท่ากับ

$$f_E = 2\pi\left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{3/2} e^{-E/kT} \cdot E^{1/2}$$

5. ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงกำหนดโดยสมการ (3.12) จงพิสูจน์ว่า จำนวนโมเลกุลซึ่งมีโมเมนตัมระหว่าง p และ p + dp มีค่าเท่ากับ

$$f_p = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{3/2} e^{-P^2/2mkT} \cdot p^2$$

6. ในระบบซึ่งมีความดัน 10^{-10} torr (1 torr = 133 N/m^2) ถ้าเส้นผ่าศูนย์กลางของโมเลกุลเท่ากับ $3A^\circ = 3 \times 10^{-10}$ m และอุณหภูมิ 300 K จงหา (a) จำนวนโมเลกุลในปริมาตร 1 m^3 (b) วิถีเสรีเฉลี่ยของโมเลกุล และ (c) ความถี่ของการชน สมมติโมเลกุลมีความเร็วเฉลี่ย 500 m/s
   (ตอบ : (a) 3.21×10^{12} molecules (b) 778 km (c) $6.42 \times 10^{-4}\ s^{-1}$)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ภาคผนวก ก

การวัดและความคลาดเคลื่อน

"การวัดอย่างสัมบูรณ์ ไม่มีความคลาดเคลื่อน ทำไม่ได้"

คำกล่าวข้างต้นเป็นความจริงทั้งในระดับปฏิบัติการทั่วไป และระดับทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมที่ซับซ้อน การวัดปริมาณในเชิงปฏิบัติต้องมีค่าผิดพลาด (error) และความไม่แน่นอน (uncertainty) หรือกล่าวได้ว่ามีความเที่ยง (precision) ระดับหนึ่ง เช่น ในการวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของวัตถุทรงกลมโดยใช้เครื่องมือไมโครมิเตอร์ (ความละเอียดของเครื่องมือ 0.01 มิลลิเมตร) ได้ค่า 56.47 ± 0.02 มิลลิเมตร ค่าเฉลี่ยของการวัดเส้นผ่านศูนย์กลางมีค่า 56.47 มิลลิเมตร มีช่วงการเบี่ยงเบนของค่าเฉลี่ยหรือค่าผิดพลาดของการวัดในช่วง 0.02 มิลลิเมตร ค่าเฉลี่ยและค่าผิดพลาดได้จากการวิเคราะห์ทางสถิติของข้อมูลจากการวัด

ความคลาดเคลื่อนในการวัด สามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่ม ดังนี้

1. ความคลาดเคลื่อนเชิงระบบ (systematic errors) ลักษณะของความคลาดเคลื่อนชนิดนี้ มาจากธรรมชาติของระบบเอง จะเกิดทุกครั้งที่มีการวัด ตัวอย่าง เช่น การสอบเทียบเครื่องมือผิด จุดเริ่มวัดของเครื่องมือผิด การลำเอียงของผู้ตรวจวัดด้วยลักษณะทางกายภาพของผู้วัด หรือลักษณะอุปนิสัย ข้อแก้ไขทำได้โดยการวิเคราะห์อย่างมีระบบเพื่อหาข้อผิดพลาด การเตรียมการสอบเทียบเครื่องมือให้ถูกต้องเหมาะสมกับสิ่งแวดล้อมขณะทำการวัด ประเมินค่าข้อผิดพลาดโดยใช้วิธีกราฟ เพื่อนำมาแก้ไขกับค่าเฉลี่ย โดยการเพิ่มเข้าหรือหักออก

2. ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (random errors) หรือ ความคลาดเคลื่อนเชิงสถิติ (statistical errors) ความคลาดเคลื่อนชนิดนี้เกิดจากธรรมชาติของการวัด มีลักษณะแกว่งตัวรอบ ๆ ค่าจริง บางครั้งมีสาเหตุมาจากความละเอียดของเครื่องมือมีไม่พอเพียง การทำการวัดจำนวนครั้งมากขึ้น จะลดค่าความคลาดเคลื่อนชนิดนี้ รวมทั้งการใช้เครื่องมือวัดที่มีความละเอียดสูงพอ การประเมินค่าความคลาดเคลื่อนทำได้โดยวิธีทางสถิติ

คุณภาพของการวัดบ่งชี้ได้ด้วยความแม่น (accuracy) และความเที่ยง การวัดที่มีความถูกต้องสูง หมายถึง ค่าที่วัดได้ใกล้เคียงกับค่าจริงหรือค่ามาตรฐานที่ยอมรับกัน ความคลาดเคลื่อนเชิงระบบจะเป็นตัวกำหนดระดับของความแม่น เมื่อทราบเหตุที่มาของความคลาดเคลื่อน แล้วนำไปแก้ไขกับค่าเฉลี่ยของการวัด จะทำให้ค่าที่วัดได้มีความแม่นสูงขึ้น การวัดที่มีความเที่ยงสูง หมายถึง ค่าที่วัดได้เกาะกลุ่มกันเป็นอย่างดี ไม่จำเป็นต้องมีความแม่น ความเที่ยงบ่งถึงคุณภาพของการวัดในเชิงปฏิบัติโดยตรง ความคลาดเคลื่อนเชิงสถิติกำกับค่าเฉลี่ยข้อมูลเป็นตัวชี้ระดับความเที่ยง

ในการแสดงผลข้อมูลโดยทั่วไป นิยมแสดงค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$) กำกับด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย หรือค่าความผิดพลาดมาตรฐาน(standard error ,α) เช่น ค่าสัมบูรณ์ของการวัดความยาว 56.47 ± 0.02 มิลลิเมตร หรือแสดงในรูปเปอร์เซนต์ 56.47 ± 0.035 % มิลลิเมตร ค่าเฉลี่ยของข้อมูลที่ได้จากการวัดจำนวน n ครั้ง คำนวณได้จากสูตรทางสถิติ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

ในเชิงสถิติค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ เป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูล ที่ดีที่สุด ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย หรือค่าผิดพลาดมาตรฐาน คำนวณได้จากสูตร

$$\alpha = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \qquad (2)$$

เมื่อ σ_{n-1} เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่มข้อมูล ค่า σ_{n-1} คำนวณได้จากค่าความแปรปรวน S^2

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \qquad (3)$$

เลขนัยสำคัญ พีชคณิตของนัยสำคัญ การปัดเศษ

เลขนัยสำคัญ การกำหนดค่านัยสำคัญของตัวเลขข้อมูล มาจากค่าผิดพลาดมาตรฐาน ตัวอย่างเช่น 56.47 ± 0.02 มิลลิเมตร หรือ 5.4 ± 0.1 มิลลิเมตร เลขทศนิยมตัวสุดท้ายที่สอดคล้องกับค่าความคลาดเคลื่อน จะเป็นตัวเลขไม่แน่นอน นับเป็นเลขนัยสำคัญตัวสุดท้าย

การนับเลขนัยสำคัญของข้อมูล มีหลักเกณฑ์กว้าง ๆ ดังนี้

1. การดูเลขนัยสำคัญมากสุด (most significant figure) เช่น

ชุดตัวเลข 0456 เลข 4 เป็นเลขนัยสำคัญมากสุด (m) ถึงแม้จะมีจุดทศนิยมหรือไม่ก็ตาม

2. การดูเลขนัยสำคัญน้อยสุด (least significant figure)

2.1 ถ้าไม่มีจุดทศนิยม

เช่น 4560 เลข 6 เป็นเลขนัยสำคัญน้อยสุด (ℓ)

2.2 ถ้ามีจุดทศนิยม

เช่น 45.60 เลข 0 เป็นเลขนัยสำคัญน้อยที่สุด (ℓ)

3. ให้นับจำนวนนัยสำคัญของชุดตัวเลขจาก m$\rightarrow\ell$ เช่น

m ℓ
1 2 3 4

m ℓ
1 2 3 4 0 0

m ℓ
1 0 0 1

m ℓ
1 0 0 0.

m ℓ
1 0.1 0

m ℓ
0.0 0 0 1 0 1 0

m ℓ
1 0 0.0

m ℓ
1.010×10^3

มีนัยสำคัญเท่ากัน คือ 4 ตัว

พีชคณิตของเลขนัยสำคัญ และการปัดเศษ เมื่อนำข้อมูลจากการวัดไปคำนวณ ให้นำตัวเลขที่ไม่มีนัยสำคัญตัวแรกมาคำนวณด้วย เช่น 56.473 เลข 7 เป็นเลขนัยสำคัญตัวสุดท้าย เลข 3 เป็นเลขไม่มีนัยสำคัญตัวแรก

การบวก

56.473 + ... นัยสำคัญ = 4 ตัว

6.532 ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

63.005 .....Intermediate result

63.00 .....final result ..... นัยสำคัญ = 4 ตัว

การลบ

4.5673 - .....นัยสำคัญ = 4 ตัว

2.141 .....นัยสำคัญ = 3 ตัว

2.4263 → ปัดเศษ → 2.426 → คำนวณต่อ

↓ ปัดเศษ

2.43 .....final result ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

การคูณ

31.421 x ..... นัยสำคัญ = 4 ตัว

3.142 ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

(จากเครื่องคิดเลข) 98.724782

↓ ปัดเศษ

98.7 .....final result ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การหาร

31.421 ÷ ..... นัยสำคัญ = 4 ตัว

3.142 ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

10.000318

↓ ปัดเศษ

10.0 ..... นัยสำคัญ = 3 ตัว

การกระจายความผิดพลาด

เมื่อนำข้อมูลที่กำกับด้วยค่าผิดพลาดมาคำนวณ ค่าผิดพลาดจะกระจายมายังผลลัพธ์ ค่าผิดพลาดลัพธ์ คำนวณได้จากความสัมพันธ์ ดังนี้

ชุดข้อมูล $m_1 \pm \alpha_1$, $m_2 \pm \alpha_2$, $m_3 \pm \alpha_3$

การคำนวณ	ค่าผิดพลาดลัพธ์
1. $m_1 \pm m_2$	$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$
2. km_1 (k=ค่าคงตัว)	$\alpha = k\alpha_1$
3. $m_1 m_2$	$\alpha = \sqrt{m_1^2\alpha_2^2 + m_2^2\alpha_1^2}$
4. $m_1 m_2 m_3$	$\left(\frac{\alpha}{m_1 m_2 m_3}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_3}{m_3}\right)^2$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

5. $m_1^{\pm p}$ (p=ค่าคงตัว) $\alpha = \alpha_1 p m_1^{\pm p-1}$

6. $e^{\pm m_1}$ $\alpha = e^{\pm m_1}\alpha_1$

7. $\ell n(\pm m_1)$ $\alpha = \frac{\alpha_1}{m_1}$

8. สูตรทั่วไป $\alpha^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial m_1}\right)^2 \alpha_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial m_2}\right)^2 \alpha_2^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial m_n}\right)^2 \alpha_n^2$

$f(m_1, m_2, m_3, \ldots m_n)$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ภาคผนวก ข

หน่วย SI พื้นฐาน

Quantity	*Name*	*Symbol*	*Definition*
length	meter	m	"…the length of the path travelled by light in vacuum in 1/299,792,458 of a second." (1983)
mass	kilogram	kg	"…this prototype (a certain platinum-iridium cylinder) shall henceforth be considered to be a unit mass." (1889)
time	second	s	"…the duration of 9,192,631,770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of cesium-133 atom." (1967)
electric current	ampere	A	"…that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of finite length, negligible circular cross section, and place 1 meter apart in vacuum, would produce between these conductor a force equal to 2×10^{-7} newton per meter of length." (1946)
thermodynamic temperature	kelvin	K	"…the friction 1/273.16 of the thermodynamic temperature of the triple point of water." (1967)
amount of substance	mole	mol	"…the amount of substance of a system which contains as many elementary entities as there atom in 0.012 kilogram of carbon 12." (1971)
luminous intensity	candela	cd	"…the luminous intensity, in the perpendicular direction, of a surface of 1/600,000 square meter of a black body at the temperature of freezing platinum under pressure of 101.325 newton per square meter." (1967)

ค่าคงตัวทางฟิสิกส์บางค่า

Quantity	Symbol	Value	
Speed of light	c	2.998×10^{8}	m/s
Gravitational constant	G	6.672×10^{-11}	$N \cdot m^2 / kg^2$
Avogadro's number	N_A	6.022×10^{23}	mol^{-1}
Universal gas constant	R	8.314	$J / mol \cdot K$
Boltzmann's constant	k	1.381×10^{-23}	J / K
Planck's constant	h	6.626×10^{-34}	$J \cdot s$
Elementary charge	e	1.602×10^{-19}	C
Electron-volt	eV	1.602×10^{-19}	J
Electron rest mass	m_e	9.109×10^{-27}	kg
Proton rest mass	m_p	1.673×10^{-27}	kg
Neutron rest mass	m_n	1.675×10^{-27}	kg

ข้อมูลทางฟิสิกส์บางค่า

Acceleration due to gravity (g)	9.81	m/s^2
Mass of earth	5.98×10^{-24}	kg
Mass of moon	7.36×10^{-22}	kg
Mass of sun	1.99×10^{-30}	kg
Mean radius of earth	6.35×10^{6}	m
Mean radius of moon	1.74×10^{6}	m
Mean radius of sun	6.96×10^{8}	m
Average earth-sun distance	1.496×10^{11}	m
Average earth-moon distance	3.84×10^{8}	m

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อักษรกรีก

Capital	*Lowercase*	*Name*	*ชื่อ*
A	α	Alpha	แอลฟา
B	β	Beta	บีตา
Γ	γ	Gamma	แกมมา
Δ	δ	Delta	เดลตา
E	ε	Epsilon	เอปไซลอน
Z	ζ	Zeta	ซีตา
H	η	Eta	อีตา
Θ	θ	Theta	ทีตา
I	ι	Iota	ไอโอตา
K	κ	Kappa	แคปปา
Λ	λ	Lambda	แลมบ์ดา
M	μ	Mu	มิว
N	ν	Nu	นิว
Ξ	ξ	Xi	ไซ
O	o	Omicron	โอไมครอน
Π	π	Pi	พาย
P	ρ	Rho	โร
Σ	σ	Sigma	ซิกมา
T	τ	Tua	เทา
Y	υ	Upsilon	อิปไซลอน
Φ	ϕ	Phi	ฟาย
X	χ	Chi	ไค
Ψ	ψ	Psi	ไซ
Ω	ω	Omega	โอเมกา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

อนุพันธ์ และ อินทิกรัล ที่สำคัญบางค่า

อนุพันธ์	อินทิกรัล
1. $\frac{dx}{dx} = 1$	1. $\int dx = x$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$	2. $\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	3. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$	4. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\frac{d}{dx}\ell n\,x = \frac{1}{x}$	5. $\int \frac{dx}{x} = \ell n\,\lvert x\rvert$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$	6. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv + \int v\frac{du}{dx}dx$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	7. $\int e^x\,dx = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	8. $\int \sin x\,dx = -\cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	9. $\int \cos x\,dx = \sin x$
10. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	10. $\int \tan x\,dx = \ell n\lvert\sec x\rvert$
11. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	11. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x\,\sec x$	12. $\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x\,\csc x$	13. $\int xe^{-ax}dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$	14. $\int x^2e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$	15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$	16. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เอกลักษณ์ตรีโกณ

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \qquad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)\right]$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right]$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

บรรณานุกรม

ประสาท สืบค้า, ฟิสิกส์พื้นฐานขั้นมหาวิทยาลัย 1. กรุงเทพมหานคร : บริษัทประชาชน จำกัด, 2535.

Blatt, F.J. Principle of Physics, Boston : Allyn and Bacon, Inc., 1986.

Bueche, Frederick J. Introduction to Physics for Sclentists and Engineers. 2nd ed. Tokyo : McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1975.

Ewen, Dale and Heaton, LeRoy. Physics for Technical Education. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, Inc., 1981.

Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Thomas D. Young, University Physics, 6th ed.: Addison-Wesley Publishing company.

Giancoli, Douglas C. physics. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc., 1980.

Marion, Jerry B. Classical Dynamics. 2nd ed., New York, N.Y. : Academic Press, 1970.

Halliday, Resnick, Walker,. Fundamentals of Physics. 4th ed. : John Wiley & son, 1993.

Hudson, Nelson, University Physics, 2nd ed. : Saunders college Publishing. 1990,

Merian, J.L. Engineering Mechanics : Statics and Dynamics. New York : N.Y. : John Wiley & son, 1980.

Miller, Franklin, Tr. College Physics. 4th ed. New York, N.Y. : Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1977.

Murray R. Spiegel, Theoretical Mechanics, Schaum's Outline Series : McGraw-Hill book company ,1967.

R. Resnick, D. Halliday and K.S. Krane, PHYSICS, 4th ed., Vol.1 : John Wiley & Sons, Inc.,1992.

Serway, Raymond A. Physics for Scientists and Engineers. Tokyo : Holt-Saunders Japan, 1982

Serway, Raymond A. Physics for Scientists and Engineers. : Saunders college Publishing, 1992

Shortly, Grorge, and Willams, Dudley. Principle of College Physics. Englewood Cliffs, N.J : Prentice-Hall, Inc., 1960.

Smit, Alpheus W., and Cooper John N. Element of Physics. New York, N.Y. : McGraw-Hill Book Company, 1976.

Spiegel, Murray R. Theoretical Mechanics. New York, N.Y. : McGraw-Hill Book Company , 1967.

Tippler, Paul A.Physics. New York, N.Y. : Worth Publisher, Inc., 1976.

Weidner, Richard T., and Sells, Robert L. Elementary Classical Physics, Boston : Allyn and Bacon, Inc., 1968.

ดรรชนี

ก

กฎการคงตัวของพลังงาน 128

กฎของความเฉื่อย 90

กฎของโคไซน์ 9

กฎของชาร์ลส์ 510

กฎของไซน์ 9

กฎของบอยล์ 510

กฎของปัวเซย์ 489, 490

กฎของสโตกส์ 493, 494

กฎของฮุก 256

กฎข้อที่ศูนย์ของอุณหพลศาสตร์ 508

กฎข้อที่สองของนิวตัน 91

กฎข้อที่สองของอุณหพลศาสตร์ 531

กฎข้อที่สามของนิวตัน 94

กฎข้อที่หนึ่งของนิวตัน 90

กฎข้อที่หนึ่งของอุณหพลศาสตร์ 521, 527

กฎความโน้มถ่วงเอกภพ 96

กฎแบ็กแค็บ 20

กฎมือขวา 19

กรอบการเคลื่อนที่ 77

กรอบเฉื่อย 90

กรอบอ้างอิง 90

กระบวนการผันกลับไม่ได้ 508

กระบวนการแอเดียแบติก 402

กลศาสตร์ 31

กลศาสตร์แผนเดิม 87

การกระจัด 31, 53

การกระจายเชิงแสง 335

การกลิ้ง 221

การแกว่งกวัด 255

การแกว่งกวัดทางไฟฟ้า 272

การแกว่งกวัดแบบหน่วง 307

การแกว่งกวัดแบบแอนฮาร์โมนิก 255, 296

การแกว่งกวัดแบบฮาร์โมนิค 255

การคูณเวกเตอร์ 18

การเคลื่อนที่ของดาวเทียม 74

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งมีค่าคงตัวใน 3 มิติ 56

การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกเชิงเดียว 255

การเคลื่อนที่เป็นคาบ 255

การเคลื่อนที่เป็นวงกลมตามแนวดิ่ง 72

การเคลื่อนแบบวงกลม 64

การโคจรของดาวเทียม 64

การชนกันแบบกึ่งยืดหยุ่น 162

การชนแบบไม่ยืดหยุ่น 155

การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ 155, 160

การชนแบบยืดหยุ่น 154

การชนสองมิติ 163

การชนหนึ่งมิติ 153

การดล 148

การดูดกลืนพลังงานของการแกว่งกวัดแบบบังคับ 330

การทดลองหยดน้ำมันของมิลลิแกน 316

การแทรกสอด 377

การแทรกสอดทำลาย 379

การแทรกสอดเสริม 379

การประลัย 147
การแปลงแบบกาลิเลียน 78
การแปลงแบบโลเร็นตซ์ 80
การผลิตคู่ 147
การรบกวน 353
การรวมกันของฮาร์มอนิกเชิงเดียวสองชุด 286
การรวมเวกเตอร์ 7
การเลื่อนที่เชิงเส้น 219
การวิเคราะห์เวกเตอร์ 12
การสั่นพ้อง 327
การหมุน 219
การหมุนควง 229
การไหลแบบคงตัว 466
การไหลแบบปั่นป่วน 492
การไหลแบบไม่หมุน 466
การไหลแบบละมินาร์ 484
การไหลแบบสถานะคงตัว 468
กาลักน้ำ 480
กำลัง 123
กำลังเฉลี่ย 123
กำลังม้า (หน่วย) 124
เกรเดียนต์ของความดัน 490
เกรเดียนต์ 22
แก๊สอุดมคติ 404, 510

ข
ขนาดของเวกเตอร์ 14
ของไหล 437

ค
คลื่นกระแทก 429
คลื่นกล 353
คลื่นเชิงเส้น 353
คลื่นตามขวาง 354
คลื่นตามยาว 354
คลื่นใต้เสียง 365
คลื่นทุติยภูมิ 366
คลื่นนิ่ง 379
คลื่นปฐมภูมิ 366
คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า 353
คลื่นไม่เชิงเส้น 377
คลื่นเหนือเสียง 365
คลื่นฮาร์มอนิก 360
ความเข้มของคลื่นเสียง 416
ความเค้น 355
ความเค้นเฉือน 356
ความเค้นแบบดึง 356
ความเค้นแบบอัด 356
ความเครียดแบบเฉือน 357
ความเครียดแบบดึง 356
ความเครียดแบบอัด 357
ความจุความร้อน 527
ความจุความร้อนโมลาร์ 528
ความเฉื่อย 90, 353
ความดังของคลื่นเสียง 415, 416
ความดัน 435, 437
ความดันเกจ 441
ความดันสัมบูรณ์ 441
ความต้านทานจินตภาพ 340
ความต้านทานเชิงซ้อน 333, 337

ความตึงผิว 436, 457 (ตาราง) 458
ความถ่วงจำเพาะ 437
ความถี่ 259
ความถี่ของการสั่นพ้อง 328
ความถี่ของบีตส์ 414
ความถี่เชิงมุม 361
ความถี่ธรรมชาติ 311, 323
ความถี่หลักมูล 390
ความบรรยากาศ (หน่วย) 440
ความยาวสมมูล 267
ความเร่ง 31
ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก 44
ความเร่งบัดดล 37, 54
ความเร่งสัมพัทธ์ 78
ความเร่งสู่ศูนย์กลาง 67
ความเร็ว 31
ความเร็วเฉลี่ย 32
ความเร็วบัดดล 35
ความเร็วเฟส 361, 364
ความเร็ววิกฤต 73
ความเร็วสัมพัทธ์ 77
ความเร็วสุดท้าย 108
ความเร็วแสง 80
ความเร็วหลุดพ้น 71
ความหน่วง 31
ความหนาแน่น 435, 437
ความหนาแน่นสัมพัทธ์ 437
ความหนืด 483
ค่าคงตัวการบิด 268
ค่าคงตัวการหน่วง 307
ค่าคงตัวความยืดหยุ่น 256
ค่าคงตัวโน้มถ่วงเอกภาพ 96
ค่าคงตัวโบลต์ซมันน์ 553
ค่าคงตัวเฟส 363
คาบของการแกว่งกวัด 140
คาบของการแกว่งกวัดทางไฟฟ้า 274
ค่าพลังงานกล 140
คำอุปสรรค 5
คุณภาพเสียง 415
เคอร์ล 23
เครื่องยนต์ความร้อน 538
เครื่องวัดความหนืด 483

ง

งาน 121
งานของแรงคงตัว 117
งานของแรงไม่คงตัว 118
เงื่อนไขขอบ 392

จ

จลศาสตร์ 31
จุดวกกลับ 141
จุดศูนย์กลางความโน้มถ่วง 177
จุดศูนย์กลางมวล 27, 177 179
จุดศูนย์ถ่วง 177
จุดสมดุล 145
จูล (หน่วย) 117
ไจโรสโคป 229

ฉ

ฉายา 261

ซ

ซอนิกบูม 429

เซนทรอยด์ 177, 183

ด

ดีเตอร์มิแนนต์ 20

เดซิเบล (หน่วย) 419

เดล 22

ไดเวอร์เจนซ์ 22

ต

ตัวแกว่งกวัด 255

ตัวประกอบความแข็งตึง 256

ตัวประกอบความเพี้ยน 338

ตัวประกอบคุณภาพ 313

ตัวแปรการเข้าชน 163

ตัวสังเคราะห์ 421

ตัวสั่นพ้อง 342

ท

ทฤษฎีการแบ่งกั้นเท่ากันของพลังงาน 557

ทฤษฎีจลน์ของแก๊ส 549

ทฤษฎีบทแกนขนาน 212

ทฤษฎีบทแกนตั้งฉาก 211

ทฤษฎีบทงาน-พลังงาน 121

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ 23

ทฤษฎีบททวินาม 126

ทฤษฎีบทเทอร์ริเซลลี 478, 479

ทฤษฎีบทสโตกส์ 23

ทฤษฎีสัมพัทธภาพ 126

ทอร์ก 203

น

นิวคลีออน 88

บ

บ่อศักย์ 298

บัพ 380

บารอมิเตอร์ 442

บีตส์ 379, 412

เบอร์นูลลี 470

แบบหน่วงเกิน 309

แบบหน่วงขาด 311

แบบหน่วงวิกฤต 310

ป

ปฏิบัพ 380

ประสิทธิภาพของเครื่องยนต์ความร้อน 539

ปรากฏการณ์โดปป์เลอร์ 422

ปรากฏการณ์แมกนัส 483

ปริภูมิ 51

ปริมาณพื้นฐาน 3 (ตาราง) 5

ปริมาณอนุพัทธ์ 3 (ตาราง) 5

ปอยส์ (หน่วย) 486

ปัวเซย์ 486

ปีแสง 110

ผ

ผลการคูณระหว่างสามเวกเตอร์ 20

ผลคูณเวกเตอร์ 18, 20

ผลคูณสเกลาร์ 18, 20

แผนภาพวัตถุอิสระ 92

พ

พลศาสตร์ 31

พลศาสตร์ของของไหล 466

พลังงานของตัวแกว่งกวัด 263

พลังงานจลน์ 127

พลังงานจลน์ของการหมุน 208

พลังงานจากลม 496

พลังงานศักย์ 128, 132

พลังงานศักย์ของสปริง 138

พลังงานศักย์โน้มถ่วง 135

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น 137

พาสคัล (หน่วย) 356, 438

พิสัย 61

โพรเจกไทล์ 59

โพรซิตรอน 147

ฟ

เฟสเริ่มต้น 284

ภ

ภาวะชั่วครู่ 323

ม

มวลจุด 31

มวลและพลังงาน 147

มอดุลัสของยัง 358

มอดุลัสเฉือน 359

มอดุลัสเชิงปริมาตร 359

มาตรเวนทูริ 472

มาโนมิเตอร์ 442

มุมเฟส 258

มุมวิกฤต 515

มุมสัมผัส 461

โมด 391

โมเมนต์ของแรง 203

โมเมนต์ความเฉื่อย 205

โมเมนตัม 148

โมเมนตัมเชิงมุม 203

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค 191

ร

ระดับขั้นความเสรี 557

ระบบปิด 507

ระบบเปิด 507

ระบบพิกัดเชิงขั้ว 66

ระบบพิกัดทรงกระบอก 12

ระบบพิกัดทรงกลม 12

ระบบวิวิธพันธ์ 507

ระบบหน่วย เอสไอ 4

ระบบเอกเทศ 507

รังสีเซเรนโกฟ 430

รัศมีไจเรชั่น 214

รากกำลังสองเฉลี่ย 553

รูปลิซ์ซาจูส์ 288, 294

แรงกิริยา 94

แรงเชื่อมแน่น 45

แรงดล 153

แรงดึงกลับ 119

แรงนิวเคลียร์ 88

แรงโน้มถ่วง 88

แรงปฏิกิริยา 94

แรงปฏิกิริยาตั้งฉาก 101

แรงพิสัยยาว 88

แรงพิสัยสั้น 88, 93
แรงแม่เหล็กไฟฟ้า 88
แรงยกปีกเครื่องบิน 481
แรงยึดติด 456
แรงยืดเหนี่ยว 515
แรงลอยตัว 435, 447
แรงเสียดทานจลน์ 100
แรงเสียดทานสถิต 100
แรงอนุรักษ์ 128
แรงอ่อน 89
โรงสีลม 496

ล

ลูกตุ้มซนิดบิด 96, 268
ลูกตุ้มเชิงเดี่ยว 265
ลูกตุ้มฟิสิกัล 267
เลขของเรย์โนด์ 492
เลขคลื่น 361
เลขเชิงซ้อน 141
เลขมัค 430

ว

วงกลมอ้างอิง 261
วัฏจักรคาร์โนต์ 538, 542
วัตต์ (หน่วย) 124
วัตถุดำ 425
วิถีเสรีเฉลี่ย 550, 563
เวกเตอร์ 7
เวกเตอร์แคลคูลัส 22
เวกเตอร์ตามแกน 12
เวกเตอร์บอกตำแหน่ง 14, 52
เวกเตอร์ลัพธ์ 8, 17
เวกเตอร์หน่วย 12, 14, 15
เวลาของการผ่อนคลาย 307

ศ

ศูนย์กลางการแกว่งกวัด 268

ส

สเกลาร์ 7
สถานะคงตัว 323
สถิตศาสตร์ของของไหล 346
สนามของแรง 255
สนามแรงอนุรักษ์ 26
สนามสถิต 255
สเปกโทรกราฟ 427
สภาพคะปิลลา 463
สภาพไร้น้ำหนัก 100
สมการของเบอร์นูลลี 436, 470, 472
สมการคลื่น 364
สมการสถานะ 507
สมการสถานะของแวนเดอร์วาลส์ 513
สมการแห่งการต่อเนื่อง 468
สมดุลเคมี 508
สมดุลเชิงกล 508
สมดุลเชิงความร้อน 508
สมดุลเชิงอุณหพลวัต 508
สมดุลสถิต 232
สมดุลสะเทิน 237
สมดุลเสถียร 237
สมดุลอเสถียร 237
สมดุลอย่างพลวัต 232

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ส่วนขยาย 354, 401
ส่วนอัด 354, 401
ส้อมเสียง 290
สัมประสิทธิ์ของการคืนตัว 162
สัมประสิทธิ์ของสมรรถนะ 542
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ 101
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิต 101
สัมประสิทธิ์แห่งความหนืด 483 (ตาราง) 487
สายกระแส 467
เส้นโค้งลักษณะเฉพาะ 335

ห

หน่วย 4
หลอดไพทอต 476
หลอดสถิต 476
หลอดแห่งการไหล 467
หลักการซ้อนทับ 376
หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม 202
หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น 191
หลักของพาสคัล 454
หลักของอาร์คิมีดีส 447, 448

อ

องศาสัมบูรณ์ 122
อัตราการไหล 368
อัตราเร็วปลาย 494
อันตรกิริยา 88
อิเล็กตรอนโวลต์ (หน่วย) 117
เอนทัลปี 527
เอนโทรปี 531
เอนโทรปีของแก๊สอุดมคติ 533
เอนโทรปีของไอน้ำ 536
แอมพลิจูด 258
แอมพลิจูดการกระจาย 334
แอมพลิจูดการดูดกลืน 334
แอมพลิจูดการยืดหยุ่น 334
โอเวอร์โทน 421

ฮ

ฮาร์มอนิก 390
ฮาร์มอนิกเชิงเดียว 267
ไฮโซเทอร์มัล 512

adiabatic process 508
Ballistic pendulum 160, 161
Big Bang 428
Boyle's law 510
Charle's law 510
isothermal process 508
isentropic process 533
isobaric process 508
isochoric process 508
isothemal process 508
isovolumic process 508
nutation 230
orbital angular momentum 219
red shift 427
Spin angular momentum 220
violet shift 427

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี