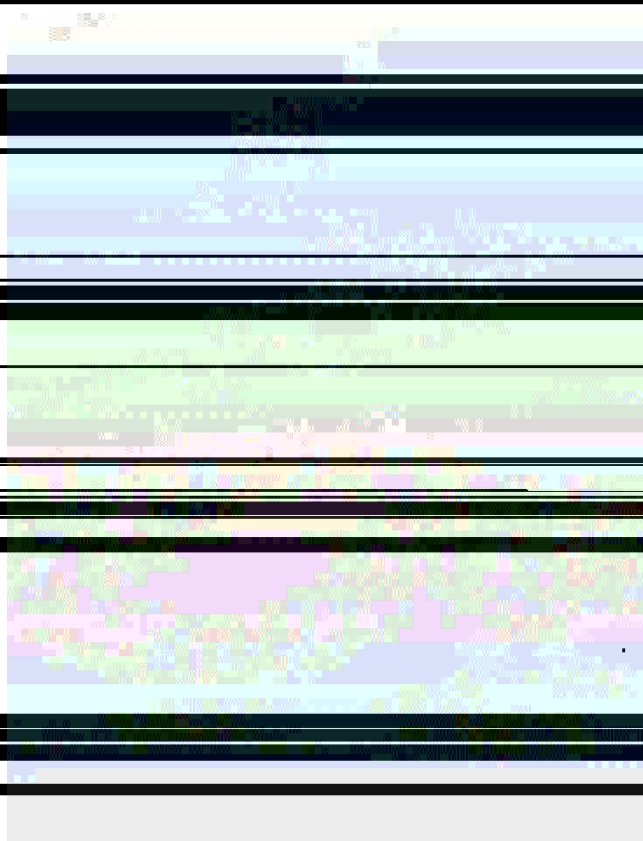
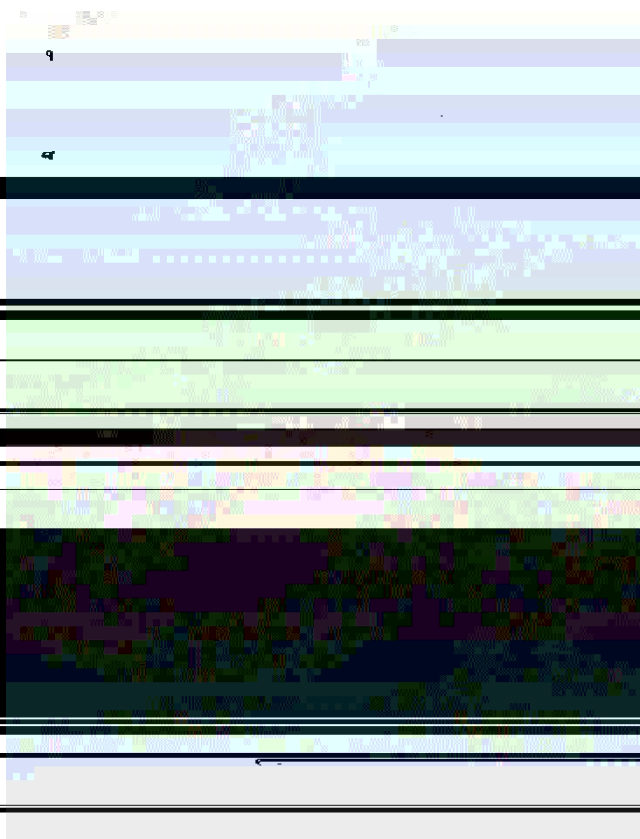




P



คานา



เห็นได้หรือมองเห็นไม่ได้ด้วยตาเปล่า อย่างไรก็ตามนักวิทยาศาสตร์พยายามอธิบายและทำความเข้าใจกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบที่มีความหลากหลาย แนวทางหนึ่งที่ใช้ในการศึกษาและ

บทที่ 1

ความน่าจะเป็น(Probability)

1.1	ความรู้เบื้องต้น	1
1.2	การทดลอง แซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์	4
1.3	ความสัมพันธ์ในกลุ่มของเหตุการณ์	8
1.4	ความน่าจะเป็นเชิงคณิตศาสตร์	10

บทที่ 3

ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มและค่าคาดหวัง

(Functions of One Random Variable and Expectation)

3.1	เหตุการณ์สมบูรณ์	84
3.2	ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย	87

3.3 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

3.4	การคาดหวัง	97
-----	------------	----

5.1 การแจกแจงที่สำคัญ ๆ ของตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย

200

5.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม

205

5.1.4 การแจกแจงแบบพาสคาล

215

ความน่าจะเป็น Probability

ในทางวิชาการเราสร้างกฎเกณฑ์โดยอาศัยข้อตรรกะ ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อ

หามาตรวัดว่า "โอกาส" หรือความเป็นไปได้ที่เหตุการณ์หนึ่ง ๆ ที่เราสนใจศึกษาจะเกิดขึ้นมีมากน้อย
เพียงใด เราคำนวณโอกาสหรือความน่าจะเป็นได้ด้วยคำวลีทางด้านหนึ่งซึ่งจะเรียกว่า "จำนวนโอกาส" ดัง











1. $\{***| - | - \}$
2. $\{ - |***| - \}$
3. $\{ - | - |*** \}$
4. $\{* * | * | - \}$
5. $\{* * | - | * \}$
7. $\{* | - |* * \}$
8. $\{ - |* * | * \}$
9. $\{ - | * |* * \}$
10. $\{* | * | * \}$



$$A = \{ t \mid t > 1000 \}$$

1.4.7 A : ระบบคอมพิวเตอร์หลักปฏิบัติการ $A = \{ yyy, yyn, yny, ynn \}$

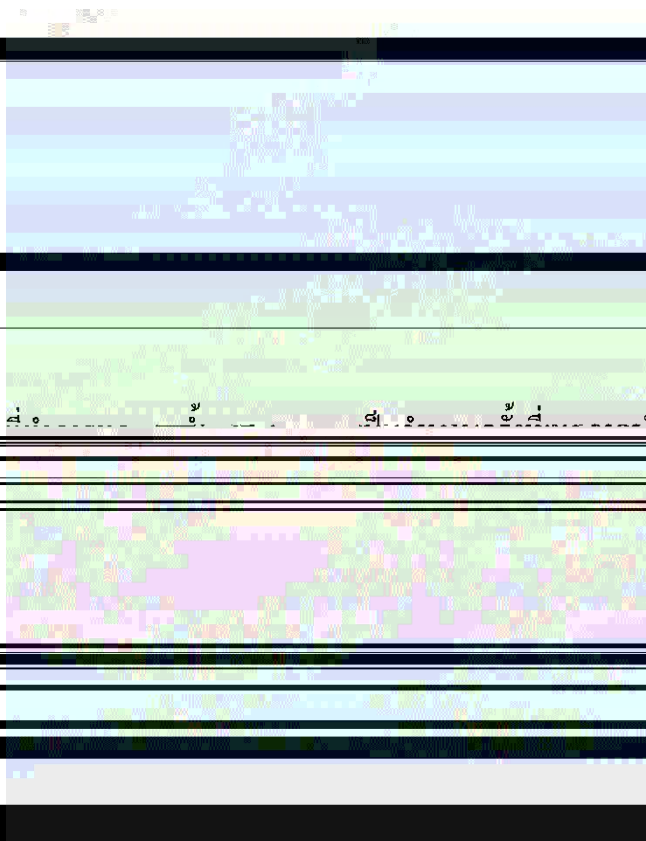
B : ระบบสำรองที่ 1 ปฏิบัติการ $B = \{ yyy, yyn, nyy, nyn \}$

C : ระบบสำรองที่ 2 ปฏิบัติการ $C = \{ yyy, yyn, nyy, nyn \}$



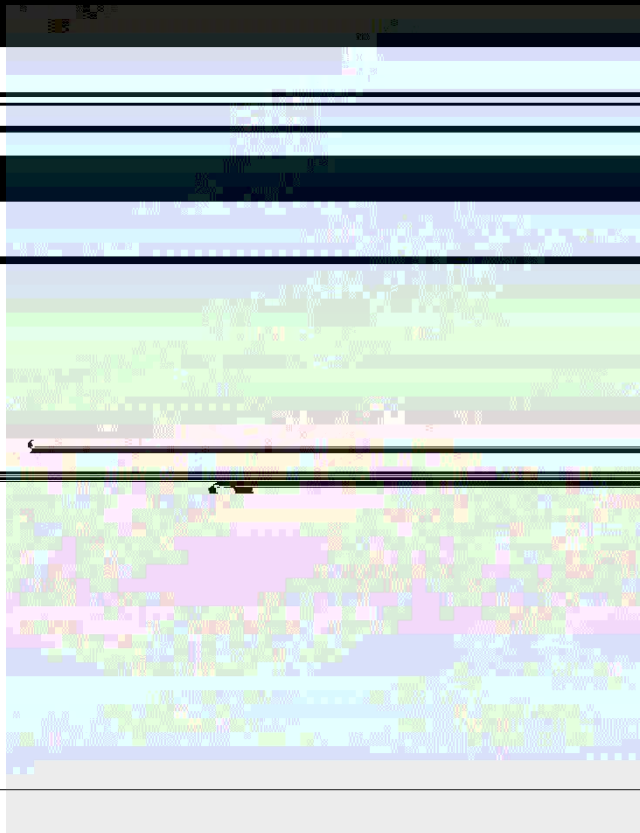
1.2.6 A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive events)
เมื่อ $A \cap B = \phi$





$$p(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i(\omega)$$

$$p_i(\omega) = \frac{1}{n} \mathbb{I}_{\{\omega \in A_i\}}$$

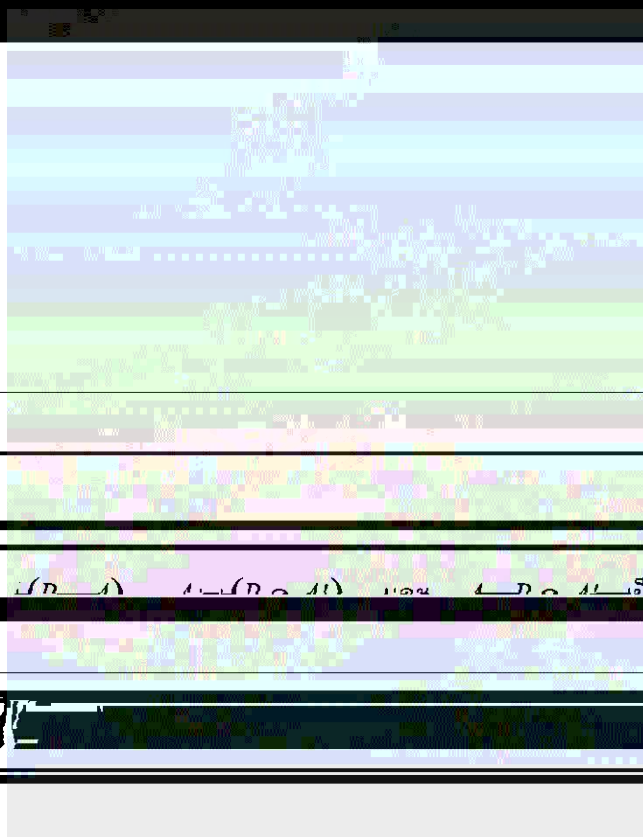


$$= \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$$



แล้ว

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36}$$



4. $D = A + (D - A) \cdot \frac{1}{2}$ และ $D = A + (D - A) \cdot \frac{1}{2}$

ที่ไม่เกิดร่วมกัน

๖.๔

๖.๕
ดังนั้น

ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $B = A \cup (A' \cap B)$ และ $A, A' \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$P(B) = P(A) + P(A' \cap B)$$

๖.๕

ในหัวข้อนี้ เราศึกษาวิธีการนับซึ่งเป็นพื้นฐานส่วนหนึ่งของการวิเคราะห์เชิงวิธีจัดหมู่



ให้ $S_1 = \{H, T\}$ และ $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญ

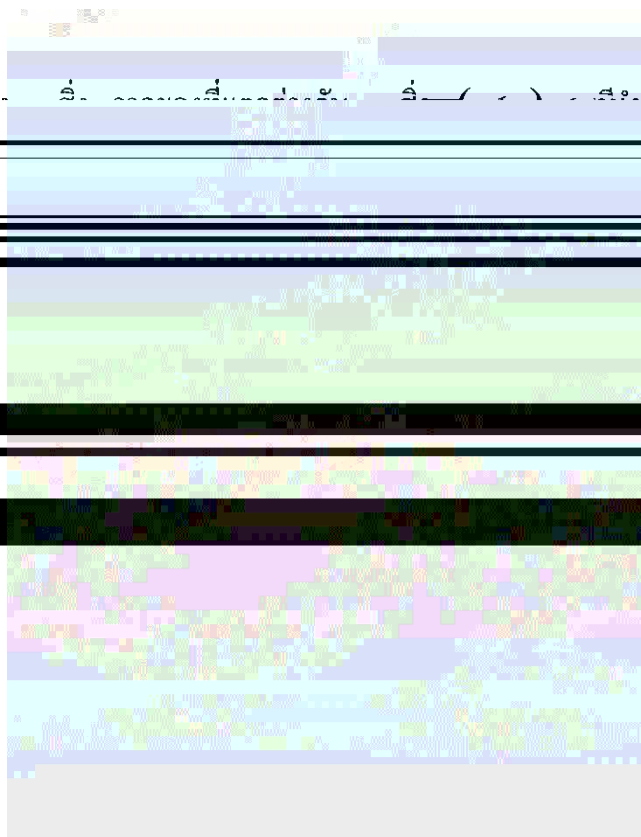
และการทอดลูกเต๋าโดยลำดับ ดังนั้นแซมเปิลสเปซของการโยนเหรียญและทอดลูกเต๋าพร้อม ๆ กัน



9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100



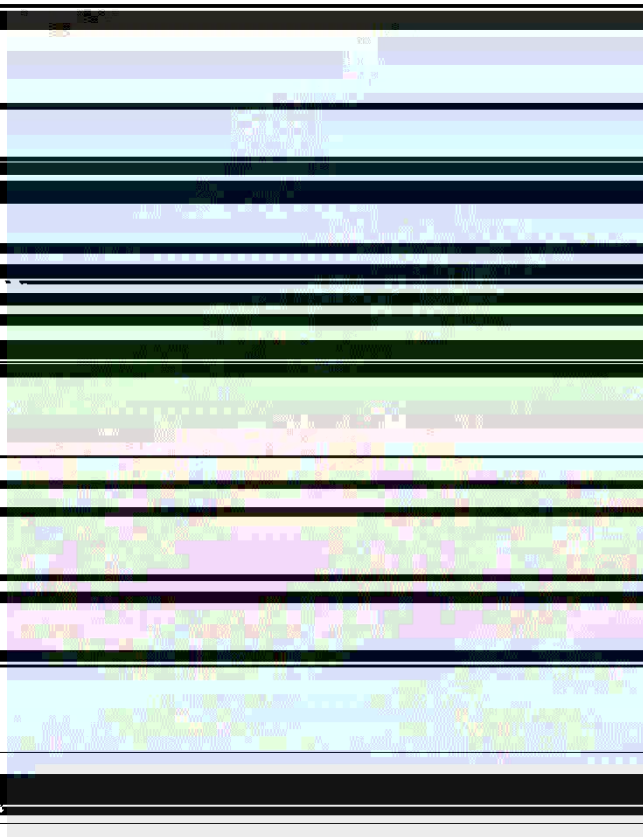
ขนาด $6^5 = 7776$ บิต (ใช้ศึกษาการชักสิ่งตัวอย่างแบบต่อเนื่อง โดยเลือกตัวอย่างขนาด 5



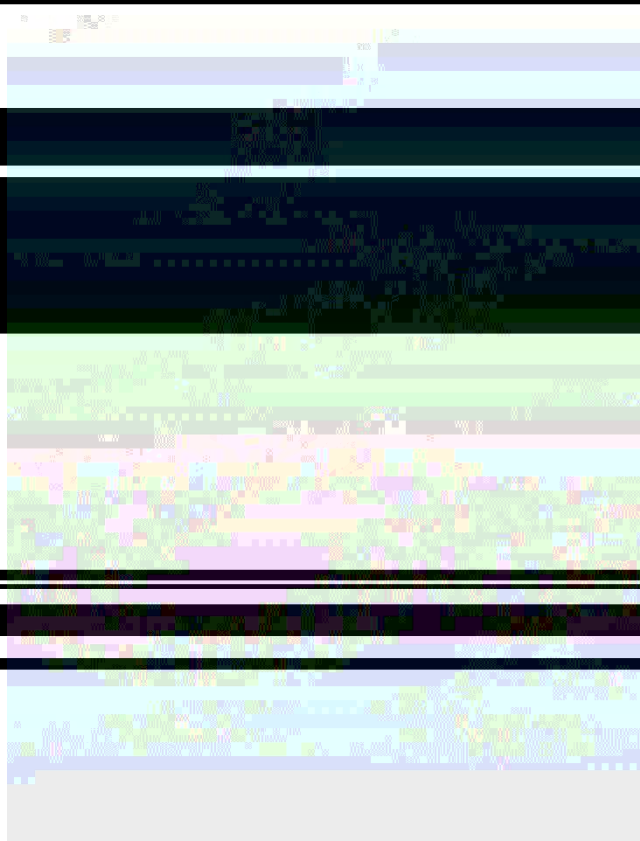


เราหาวิธีเรียงสับเปลี่ยน โดยเลือกคราวละ 3 จาก A, U, G, C ได้จำนวนวิธีเรียงสับ









P. R. B. P. R. R. R. R. R. R. R. R.







5. The following information is provided for the purpose of the 1st round of the competition:

I ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ a แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ a คือ $\frac{1}{2}$

นั่นคือ

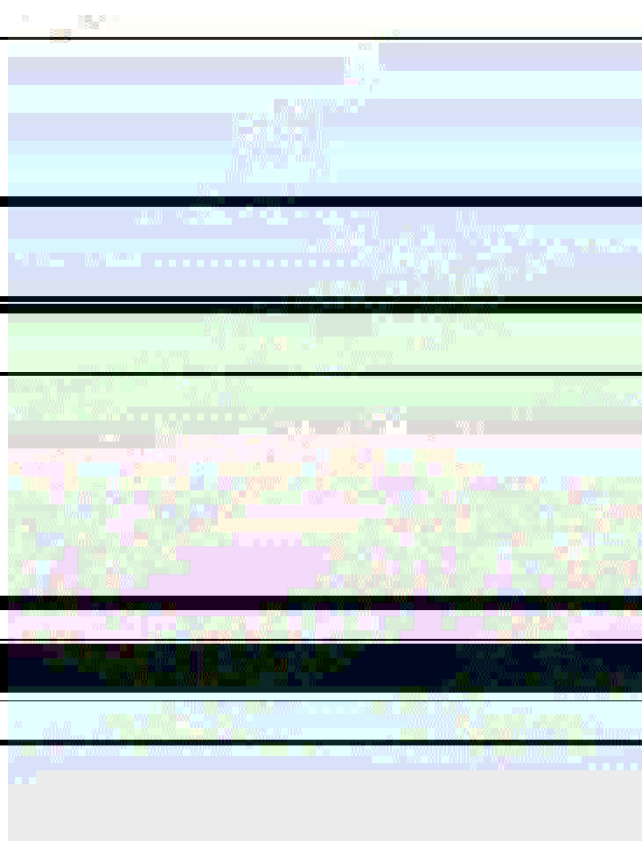
$$P(C|A) = \frac{1}{2}$$

ถ้าเลือกครั้งที่ 1 ได้ a แล้วความน่าจะเป็นที่เลือกครั้งที่ 2 ได้ b คือ $\frac{1}{2}$

นั่นคือ

$$P(D|A) = \frac{1}{2}$$

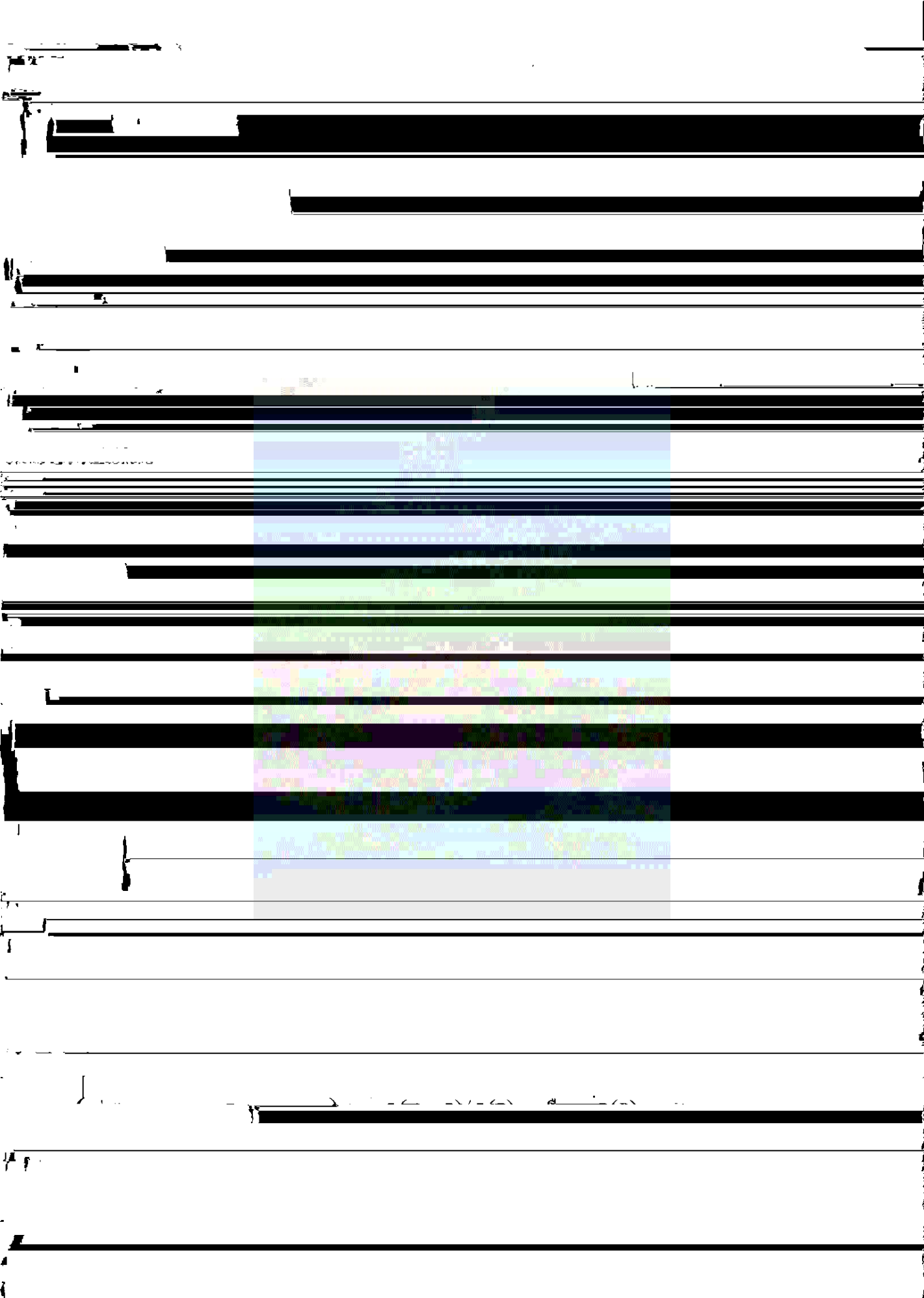


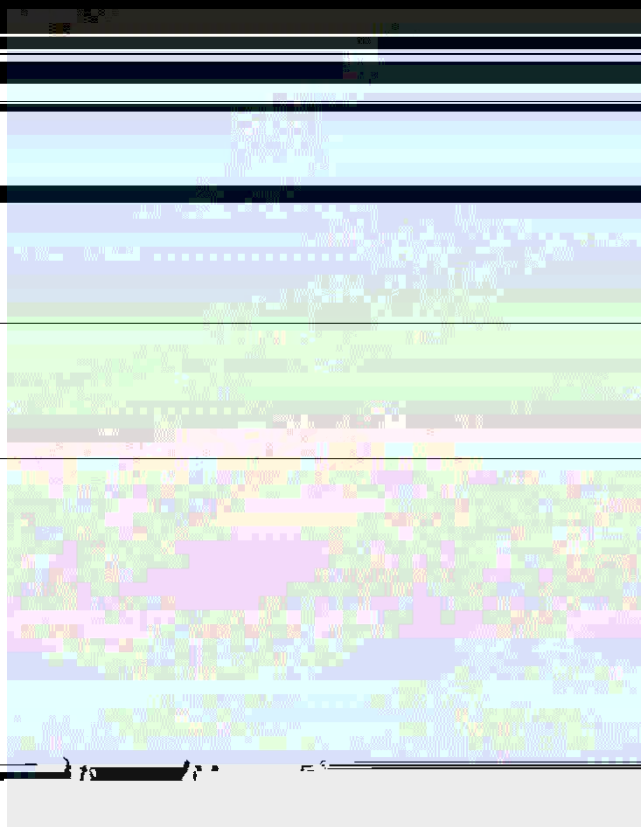


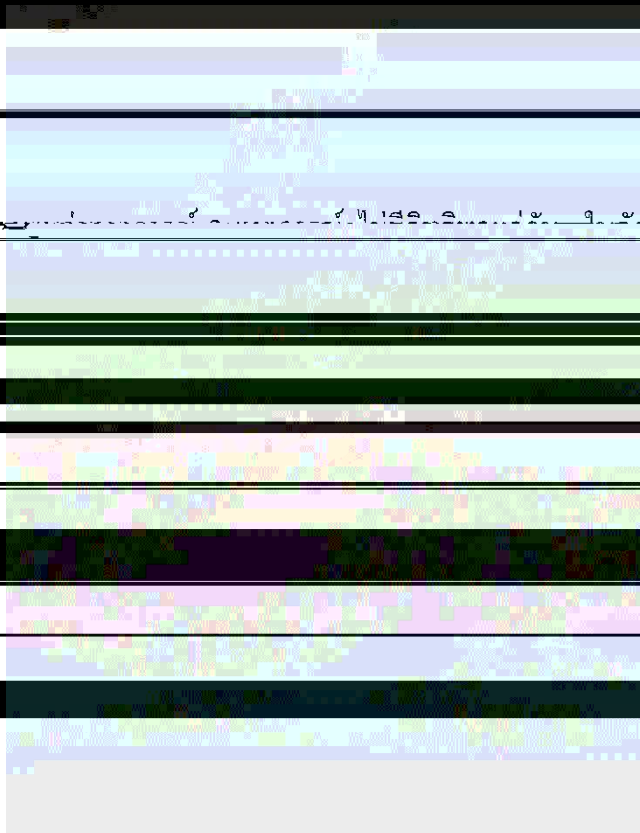




$$P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots]$$







$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

จากกฎการคูณในสมการ (12) เราได้

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(B)P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

$$P(A)P(B) = P(A)P(B) = P(A)P(B)$$

เพราะว่า

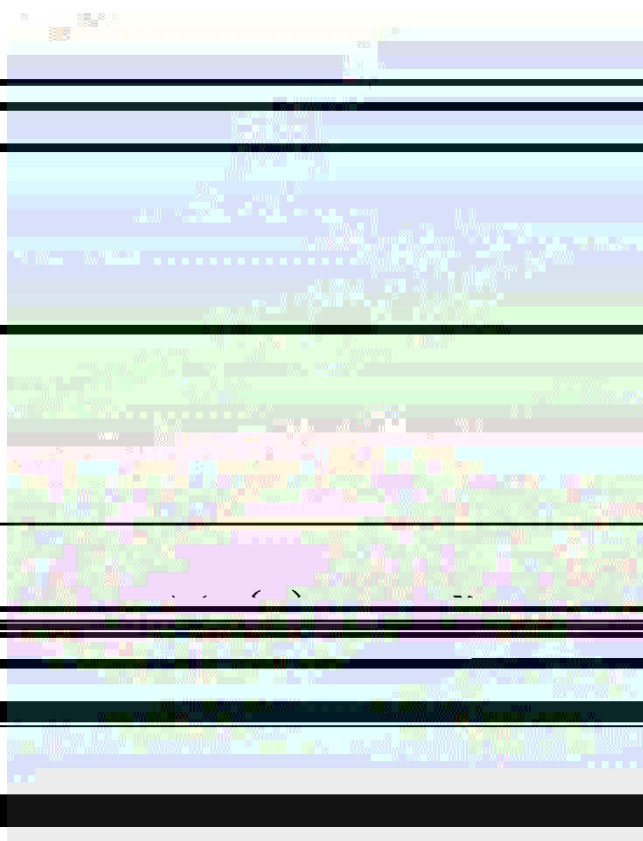
$$A \cap B \subset A \quad \text{และ} \quad A \cap B \subset B$$



สำหรับเหตุการณ์ $A \cap B \cap C = \{1\}$ เราได้ว่า

$$P(A_0) = P(A_1) = P(B_0) = P(B_1) = P(C_0) = P(C_1) = 1/2$$

1102









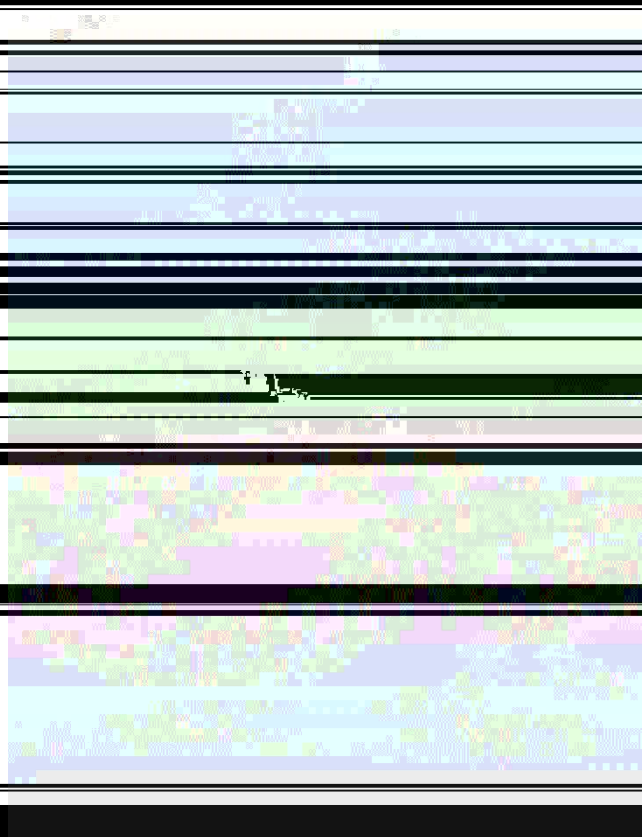
$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} \quad \text{สำหรับ } r = 1, 2, \dots, k$$

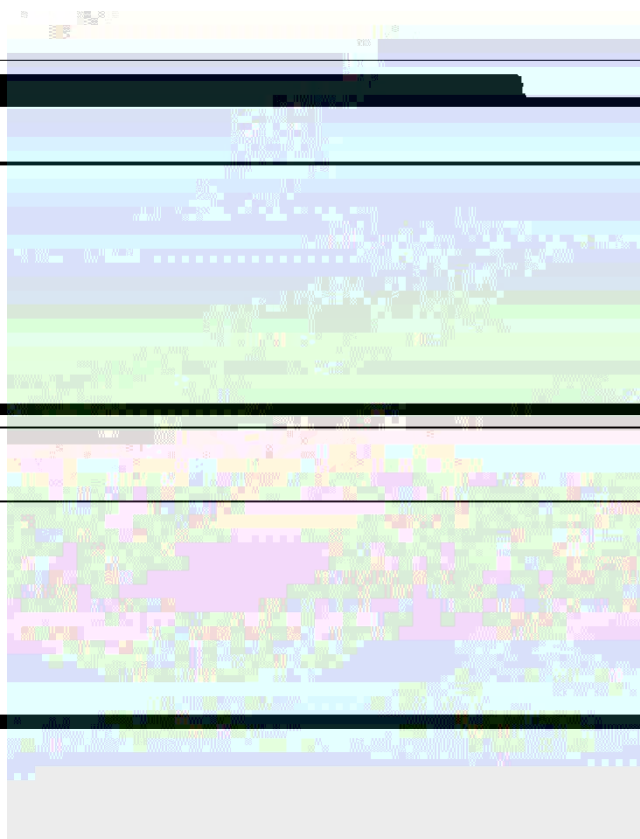
$$P(B_r \cap A) = P(A|B_r)P(B_r)$$

$$\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$

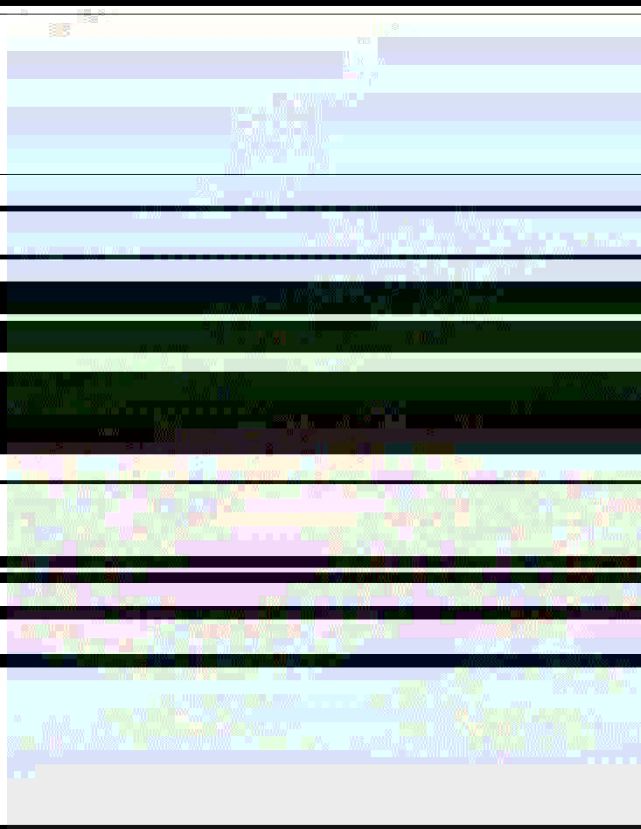
แทนค่า $P(B \cap A)$ โดยใช้สมการ (12) และแทนค่า $P(A)$ โดยใช้สมการ (13) ในทฤษฎีบท 1.8







รูปถ่าย ๑ ภาพ อาคารเรียนใหญ่ของโรงเรียนวัดบึงมะลิ จังหวัดนนทบุรี





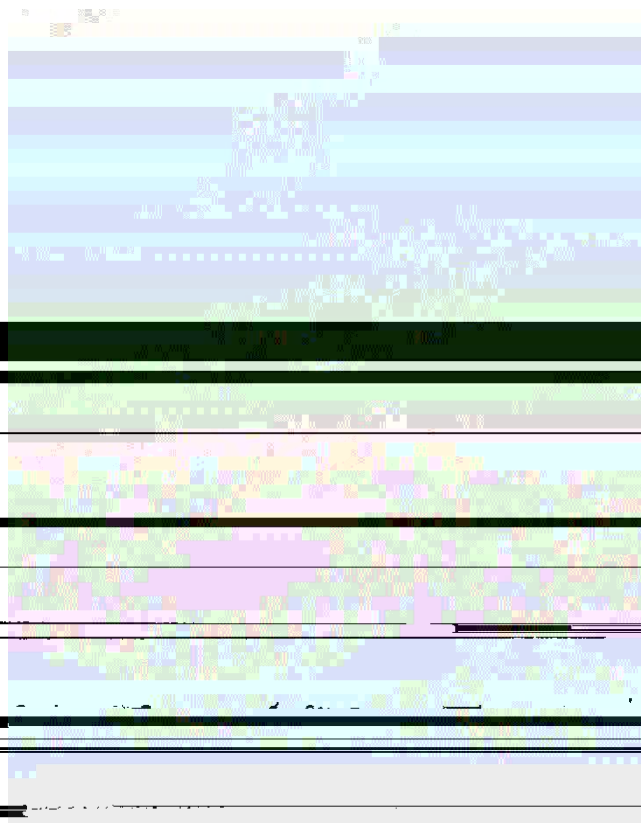






ตัวแปรสุ่มและการแจกแจง

Random Variables and Their Distributions





$$X(THH) = 2, \quad X(THT) = 1, \quad X(TTH) = 1, \quad X(TTT) = 0$$

1. $X(THH) = 2$, $X(THT) = 1$, $X(TTH) = 1$, $X(TTT) = 0$



ถ้า $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ แล้วเราให้ $X(e) = e$ สำหรับแต่ละ $e \in S$

ถ้า $S = \{x \mid x > 0\}$ แล้วเราให้ $X(e) = x$ สำหรับแต่ละ $x \in S$



นั่น เรานิยามความน่าจะเป็นของ B ดังนี้

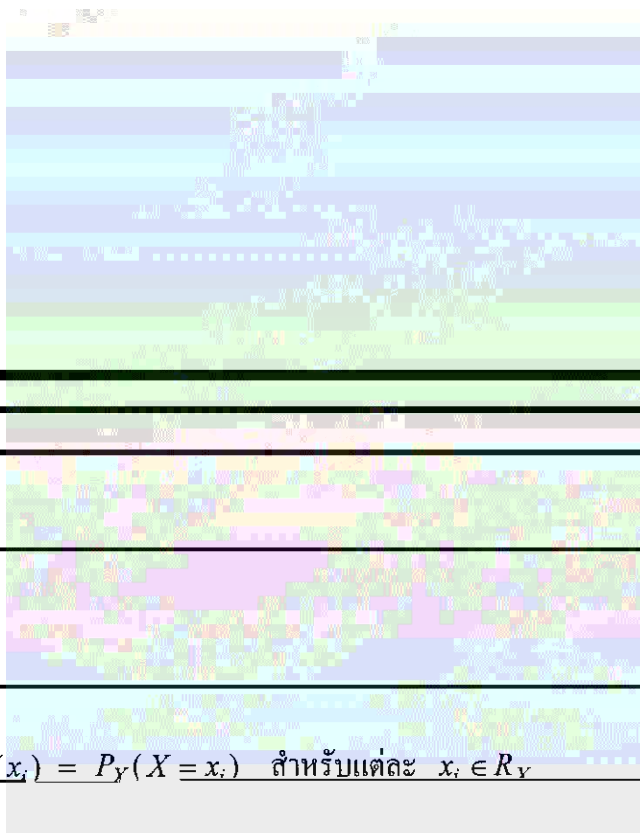
$$P(B) = P(A) \quad \text{ที่ใด} \quad A = \{ \omega \in S \mid X(\omega) \in B \}$$

๑๑



$$P_X(X = 1) = 40 / 200, \quad P_X(X = 2) = 50 / 200,$$





$$p_Y(x_i) = P_Y(X=x_i) \text{ สำหรับแต่ละ } x_i \in R_Y \quad (2.3)$$



2000

(0+22)

... 2000 ...

...



p.d.f. กำหนดโดย

$$p_Y(y) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^y}{y!} \quad \text{สำหรับ } y = 0, 1, 2, 3, \dots$$





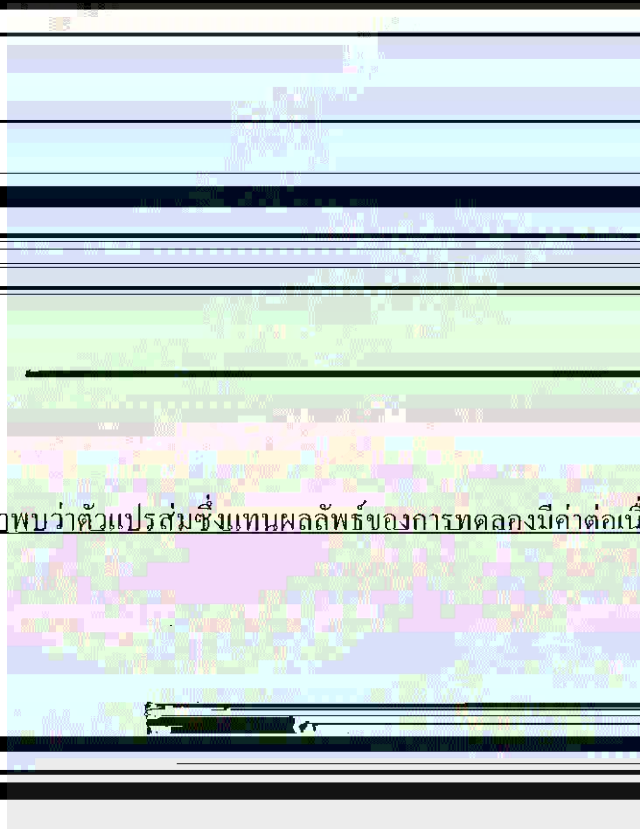
1, 2, 3 และความน่าจะเป็นเท่ากับ $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$ ตามลำดับ ดังนั้น ฟังก์ชันแจกแจงของ X มีค่าดังนี้

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

2.3 ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและการแจกแจง

๑

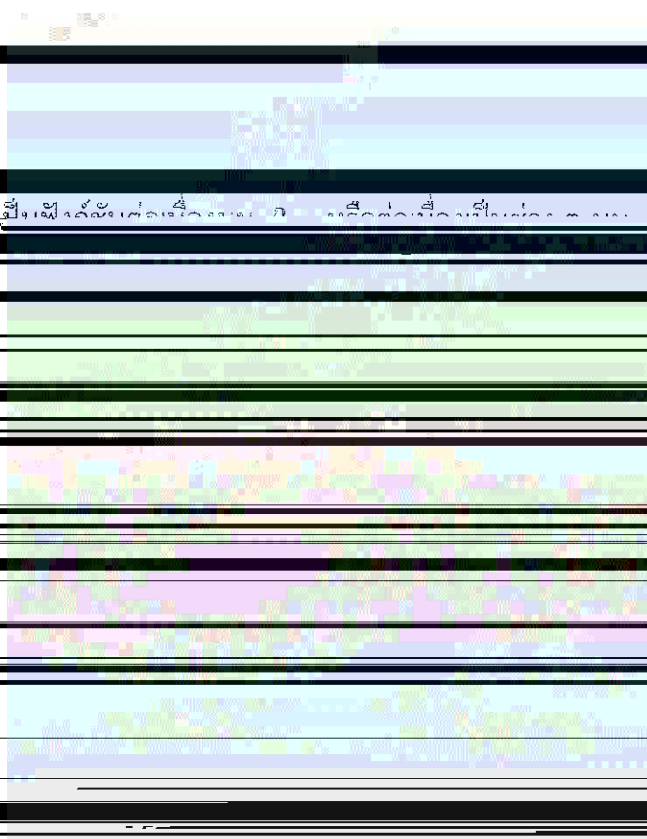
(Continuous Random Variables and Their Distributions)



ในบางครั้งเราพบว่าตัวแปรสุ่มซึ่งแทนผลลัพธ์ของการทดลองมีค่าต่อเนื่อง เช่น X เป็นตัว

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้วมีค่าเฉลี่ยต่อเนื่อง



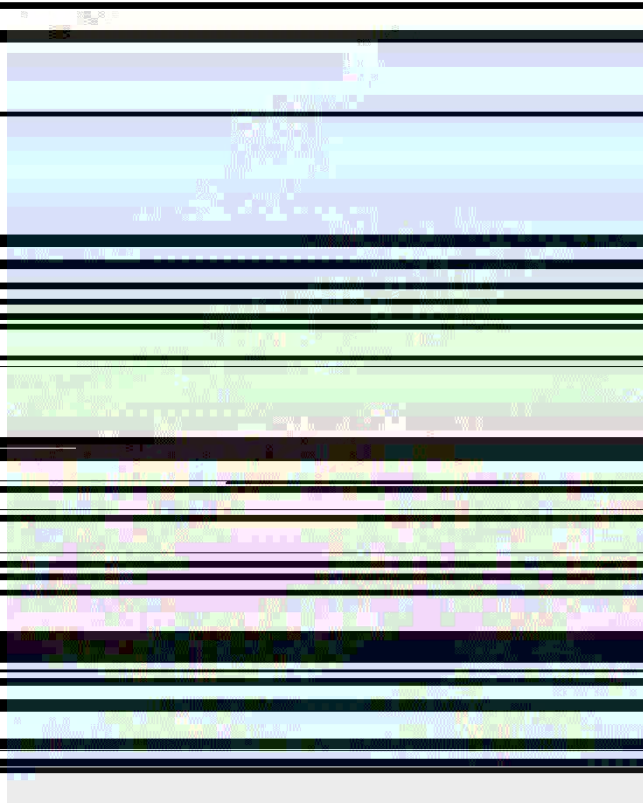
$$5. P_X(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \text{ สำหรับจำนวนจริงใด ๆ } a, b$$



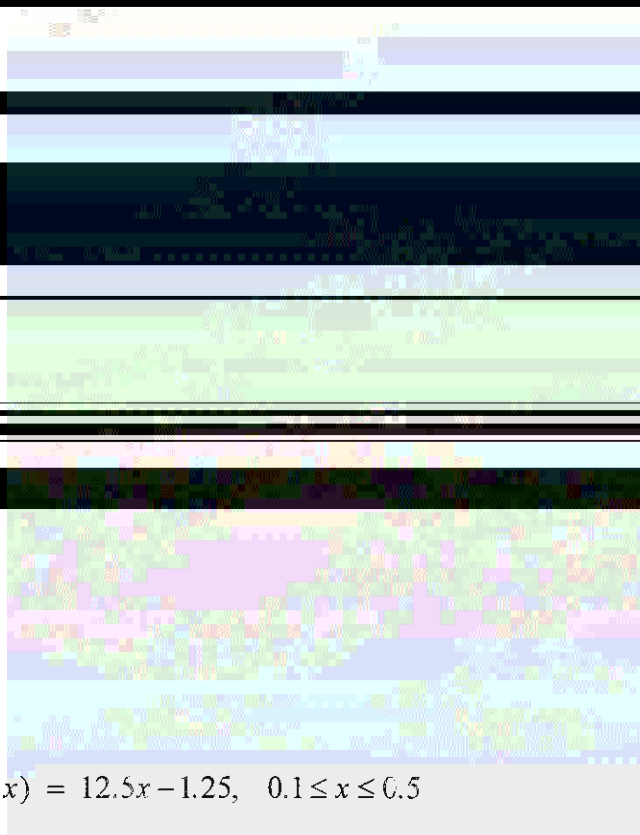
$f(x)$

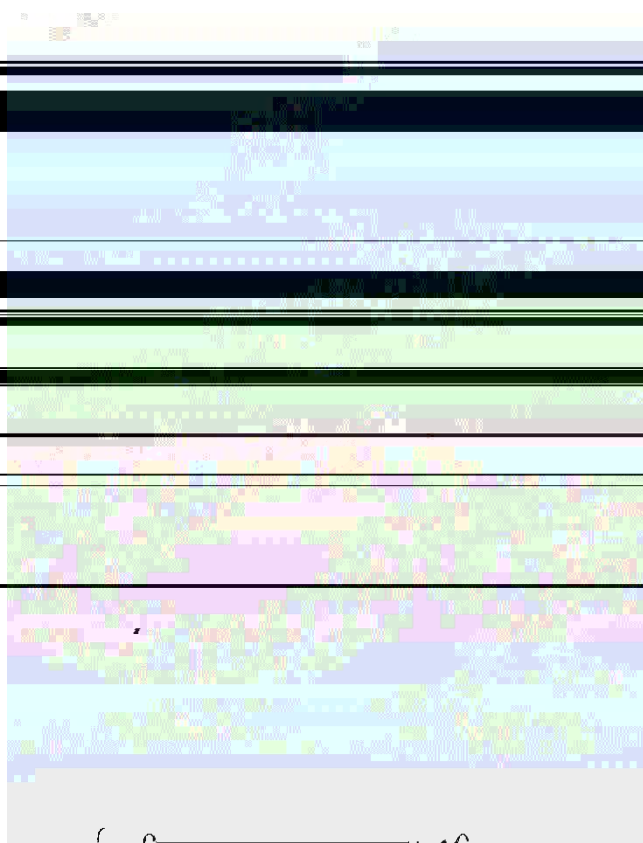








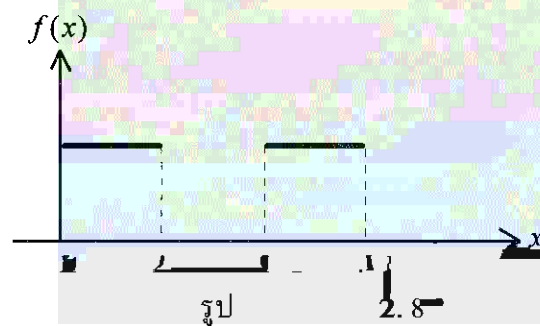


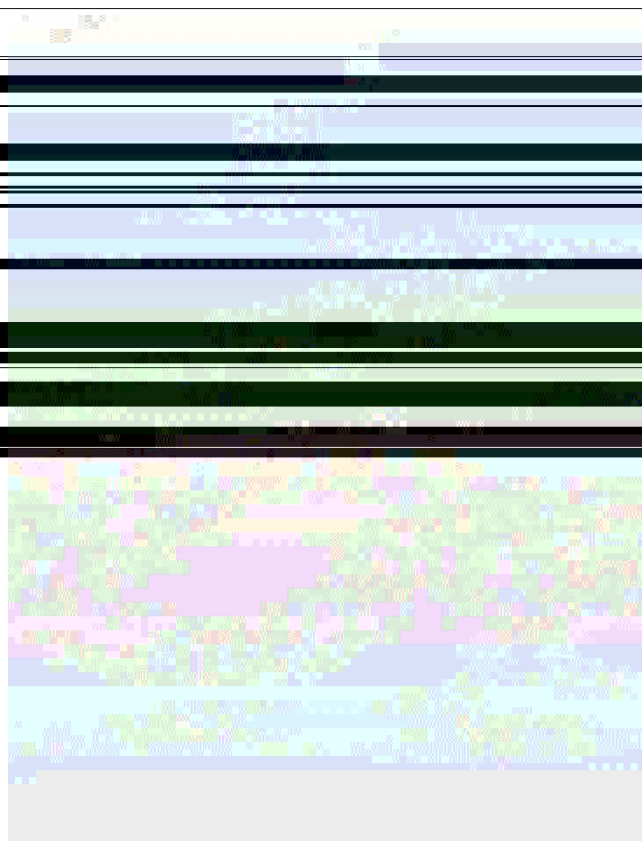


ของ Y คือ

$$f(x) = 1/2$$

กำหนด $0 \leq x < 2$ หรือ $2 < x < 4$





(b) จงหาฟังก์ชันแจกแจง F



3 ถึง 5 รู

(d) จงหา $P(X < 4)$ และ $P(X < 4)$ ความน่าจะเป็นไปแสดงเหตุการณ์ที่มีค่าเท่ากันหรือต่ำกว่า



(h) F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่จากทางด้านขวาหรือไม่

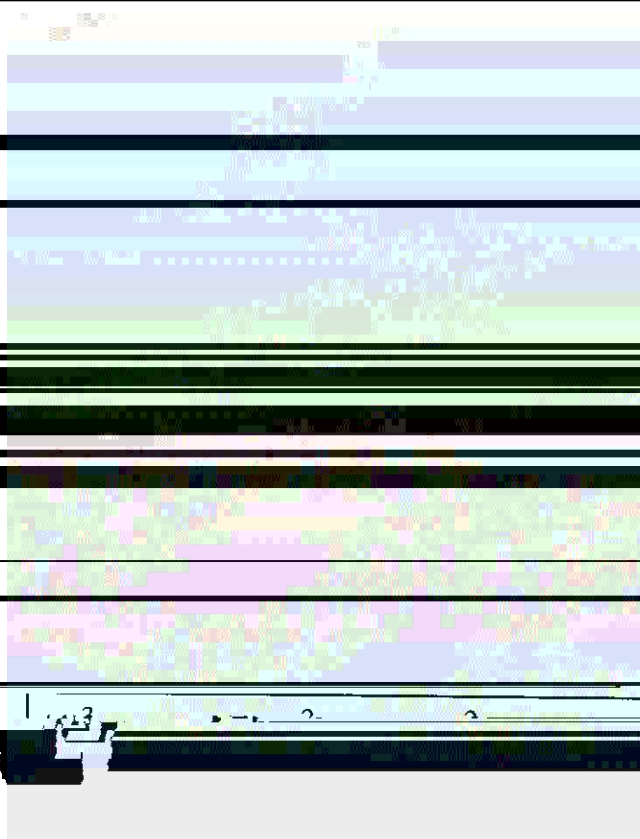
$$(d) \quad p(x) = c(x+1)^2, \quad x=0,1,2,3$$



ผลที่ได้จริง ๆ จากตัวเลขทั้ง 150 ตัว เปรียบกราฟแสดง F จากทฤษฎีและการแจก

2. (a) .01

(b) x 0 1 2 3 4 5



ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มและค่าคาดหวัง

Functions of One Random Variable and Expectation

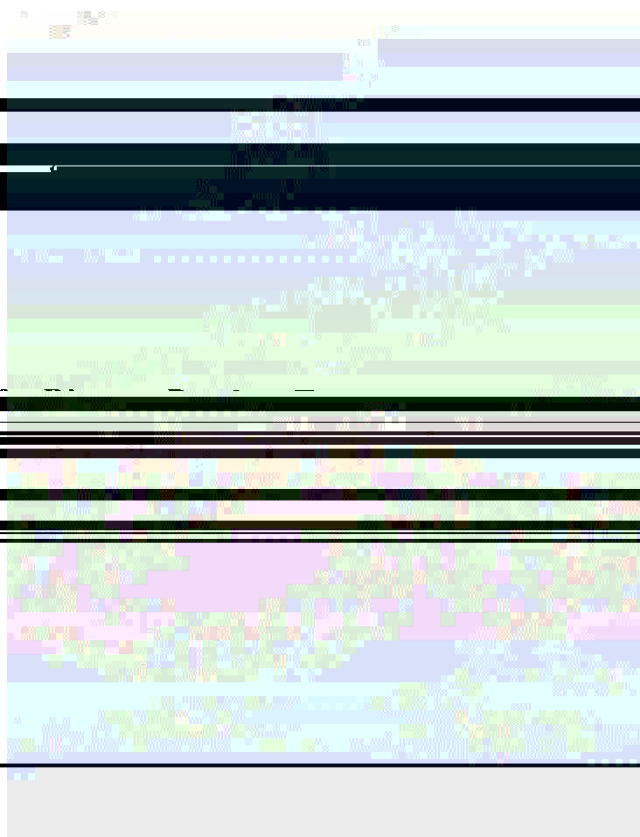
ในบางโอกาส นอกจากเราจะตั้งแทนผลลัพธ์ของการทดลองด้วยจำนวนจริงแล้ว เราอาจ





นั่นคือ

$$P_Y(Y \leq (1.01)\pi/4) = P_X(|X| \leq \sqrt{1.01})$$



สมมติว่าทั้ง X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบเต็มหน่วย และให้ $r_1, r_2, r_3, \dots$ เป็น



ค่าของ Y คือ 0, 1, 2 ดังแสดงในรูป 3.3 และ

$$p_Y(0) = p_X(2) = 3/8$$

$$p_Y(1) = p_X(1) + p_X(3) = 4/8$$

$$p_Y(2) = p_X(0) = 1/8$$

(Functions of a Continuous Random Variable)

$$Y = H(X) = (X - 2)^2$$

สำหรับ $a < x < b$ และ $Y = H(X)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นหรือฟังก์ชัน
 ค่าลดลงอย่างเคร่งครัดบนโดเมนของตัวแปรสุ่ม V ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $Y = H(X)$

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 1$$



$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \left(\frac{y-8}{16} \right) \frac{1}{2}$$





ฟังก์ชันของ X และถ้าเราต้องการหาค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของ $H(X)$ เราต้องคำนึงถึงความน่า

ตัวอย่าง 3.10 สมมติว่า X มี p.d.f. ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{elsewhere}$$





$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$x_i \in R_X$$

$$x_j \in R_X$$

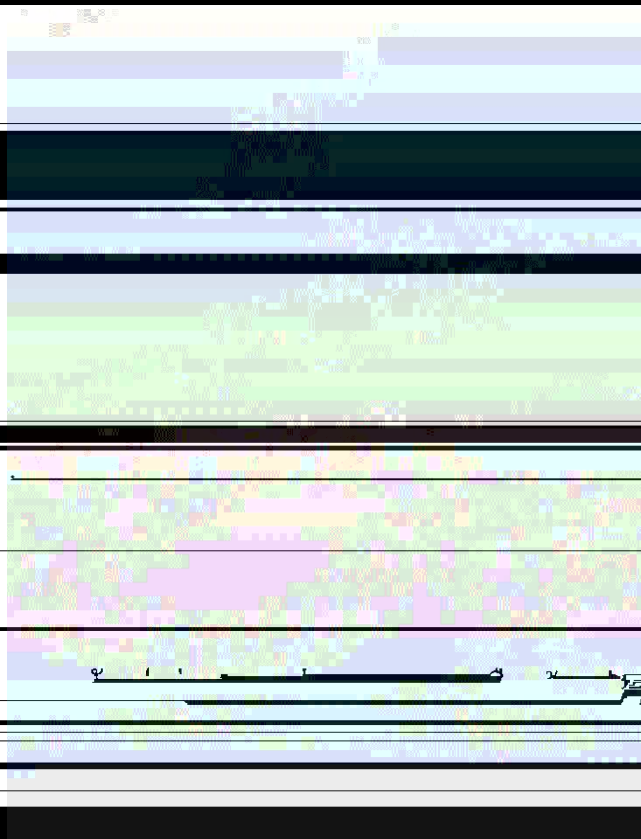
2.9. Find $E(X)$ if $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}$ for $x > 0$.

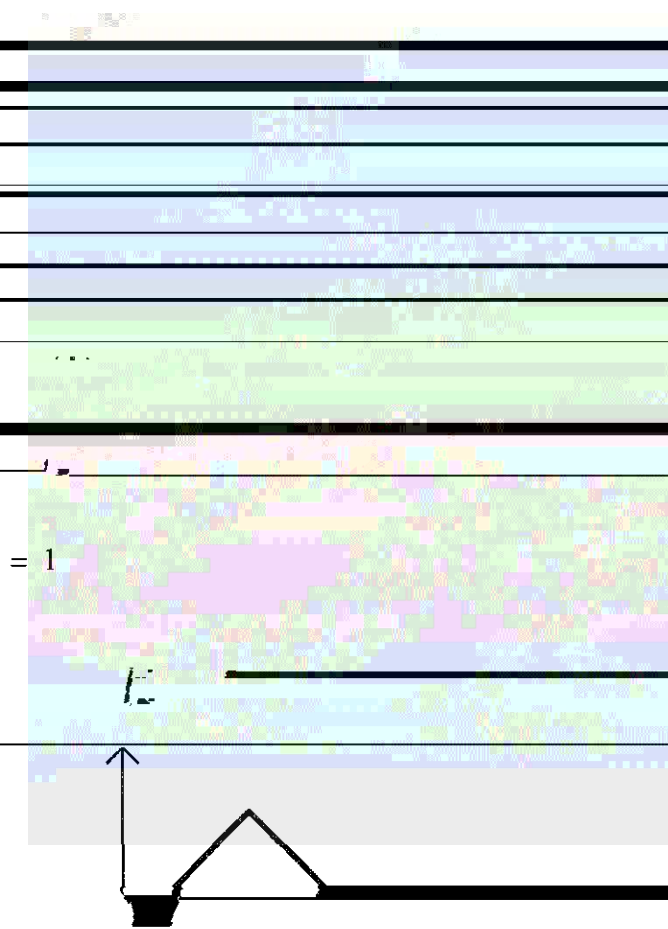
$$= \int_0^{\infty} x e^{-(1-t)x} dx = \left[-\frac{x e^{-(1-t)x}}{1-t} - \frac{e^{-(1-t)x}}{(1-t)^2} \right]_0^{\infty}$$

กรณีเฉพาะที่สำคัญ ๆ ของค่าคาดหวัง คือ

1. เมื่อ $H(X) = X$ เราเรียก

$$E[H(X)] = E[X]$$





↑
H=1

ตัวอย่าง 3.16 พิจารณารูป 3.6 (a) และรูป 3.6 (b) แสดงการแจกแจงของความน่าจะเป็นของตัวแปร

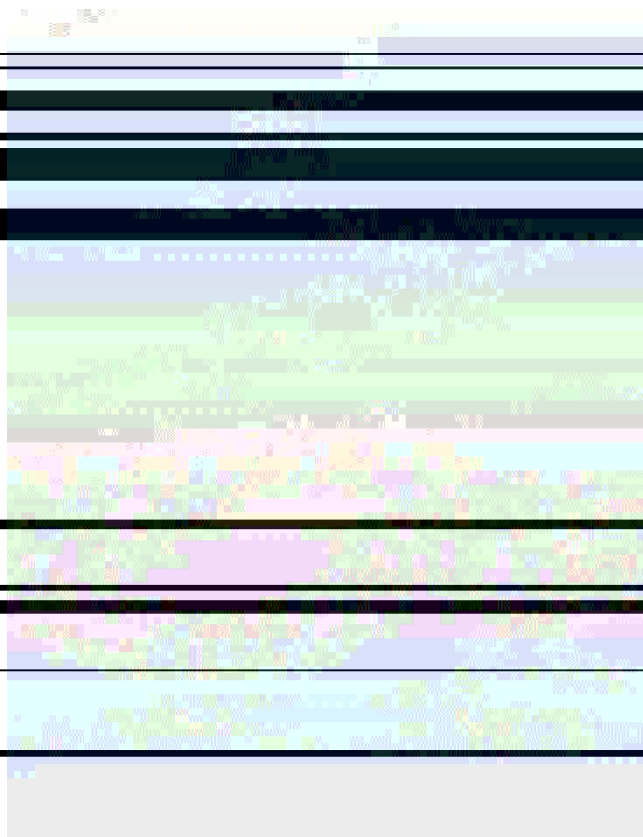


2016 12 12

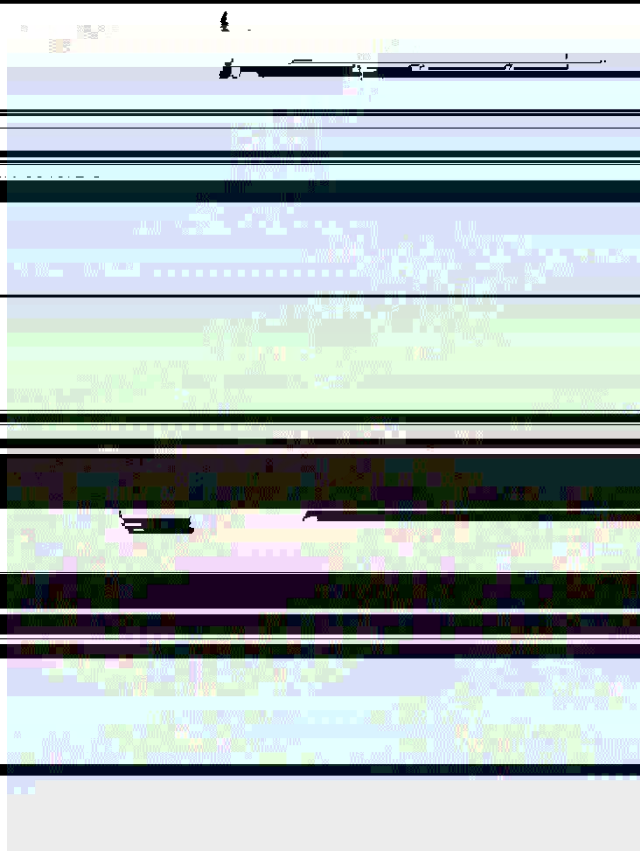


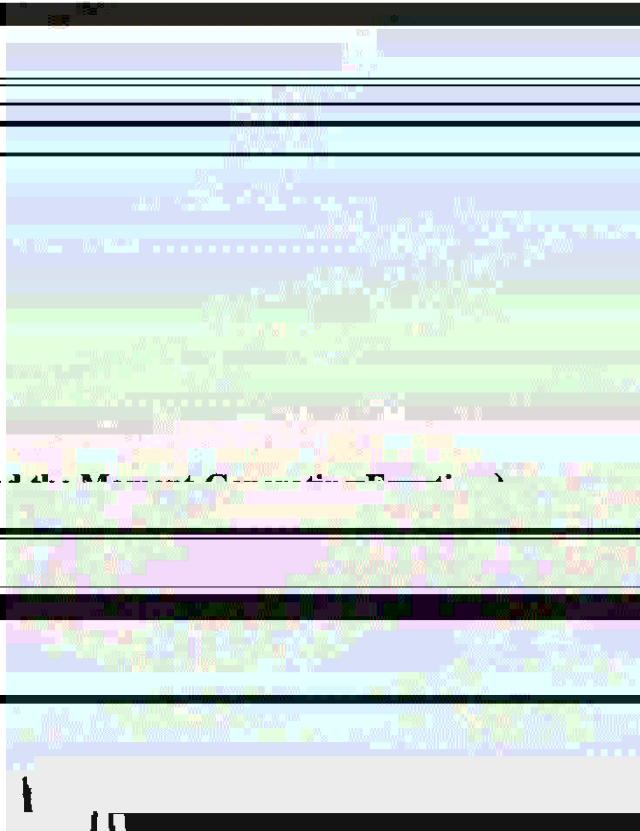
คำนวณหาค่าของ μ และ σ^2 ได้ดังนี้คือ

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$



จะเห็นได้ว่า μ มีค่าเท่ากับในทั้งสองกรณี แต่ความแปรปรวนของ $f_v(x)$ เป็นสองเท่าของ $\sigma_v(x)$







โดยแทนค่า $t=0$ ใน (3.16) เราได้

u_k

แนวทางที่ 2

1 หา $M_v(t)$ ของการแจกแจงที่กำหนดมาโดยเฉพาะสำหรับ X

k





d

1

d²

$$\frac{d^2}{dt^2} M_{XX}(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

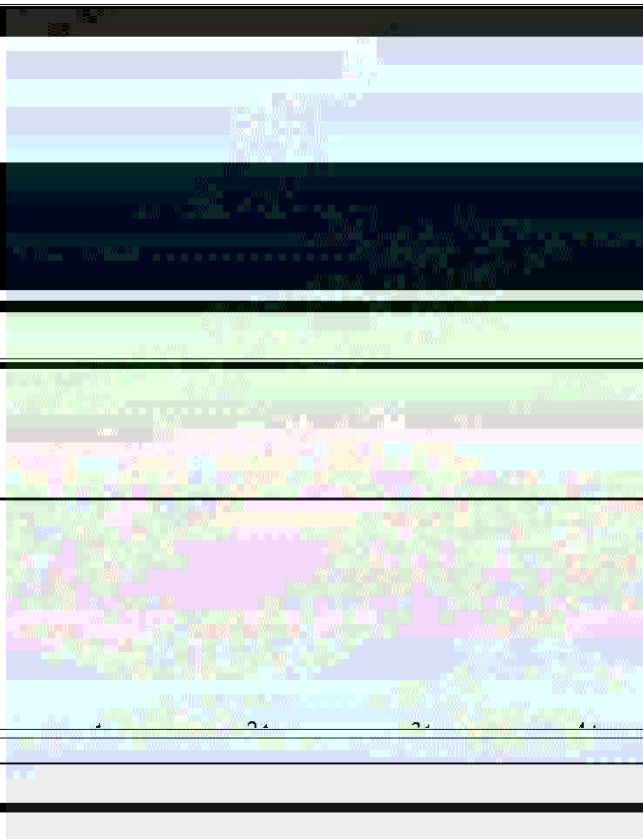
ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 3.21 เราสามารถหา μ และ σ^2 ได้ง่ายกว่าการหาโดยตรง นั่นคือ

ดังนั้น

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = \lambda$$

ตัวอย่าง 3.22 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง มี

$$f_X(x) = x e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty$$



$$M_X(t) = (1/15)(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t})$$

สำหรับจำนวนจริง t ใด ๆ

เราจะเขียน $M_X(t)$ ในรูปอนุกรมกำลังใน t เพื่อหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิด μ'_k โดยการ
ใช้ทฤษฎีบทของ Taylor เพื่อหาอนุกรมกำลังของฟังก์ชัน e^x สำหรับแต่ละพจน์ คือ e^{-2t} e^{-t} e^t และ

๑. ๒. ๓. ๔. ๕. ๖. ๗. ๘. ๙. ๑๐. ๑๑. ๑๒. ๑๓. ๑๔. ๑๕. ๑๖. ๑๗. ๑๘. ๑๙. ๒๐. ๒๑. ๒๒. ๒๓. ๒๔. ๒๕. ๒๖. ๒๗. ๒๘. ๒๙. ๓๐. ๓๑. ๓๒. ๓๓. ๓๔. ๓๕. ๓๖. ๓๗. ๓๘. ๓๙. ๔๐. ๔๑. ๔๒. ๔๓. ๔๔. ๔๕. ๔๖. ๔๗. ๔๘. ๔๙. ๕๐. ๕๑. ๕๒. ๕๓. ๕๔. ๕๕. ๕๖. ๕๗. ๕๘. ๕๙. ๖๐. ๖๑. ๖๒. ๖๓. ๖๔. ๖๕. ๖๖. ๖๗. ๖๘. ๖๙. ๗๐. ๗๑. ๗๒. ๗๓. ๗๔. ๗๕. ๗๖. ๗๗. ๗๘. ๗๙. ๘๐. ๘๑. ๘๒. ๘๓. ๘๔. ๘๕. ๘๖. ๘๗. ๘๘. ๘๙. ๙๐. ๙๑. ๙๒. ๙๓. ๙๔. ๙๕. ๙๖. ๙๗. ๙๘. ๙๙. ๑๐๐.



จะต้องหมุนนี้อตให้แน่นในตำแหน่งทั้งหมด 10 ตำแหน่ง ทางโรงงานทำการศึกษาประสิทธิภาพ
การทำงานของหุ่นยนต์พบว่า ถ้าให้ X เป็นจำนวนนี้อตที่หุ่นยนต์ไม่ได้หมุนให้แน่นเต็มที่ แล้ว



วางแผนงานให้สำเร็จ X มี p.d.f. ดังนี้

$$p_{\cdot\cdot}(x) = \begin{cases} 0.1, & x = 10 \\ 0.3, & x = 11 \end{cases}$$



ของตัวเลขที่ถูกเลือกออกมา จงเขียนค่าคาดหวังของการจ่ายเงินในรูปของฟังก์ชันของ n และ
หาค่าคาดหวังเมื่อ $n = 5$ จงประมาณค่าคาดหวังนี้เมื่อ $n = 100$ โดยใช้อินทิกรัล

ไป

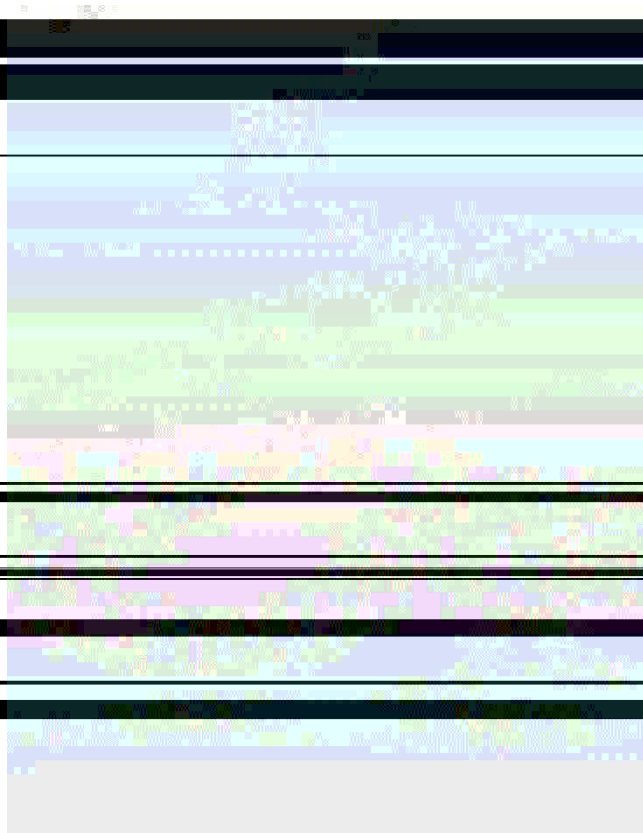
(a) μ

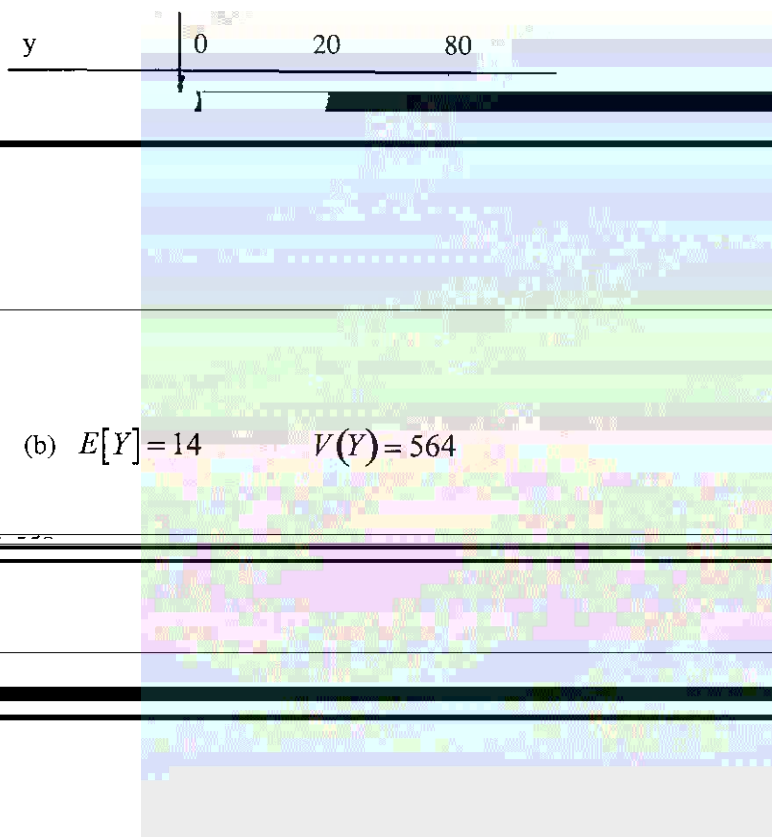
(b) σ^2

(c) $V(X+4)$

(หมายเหตุ : $V(H(X)) = E\left[(H(X) - E[H(X)])^2\right]$)

ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା :- ୧୨୩୪୫୬୭୮୯

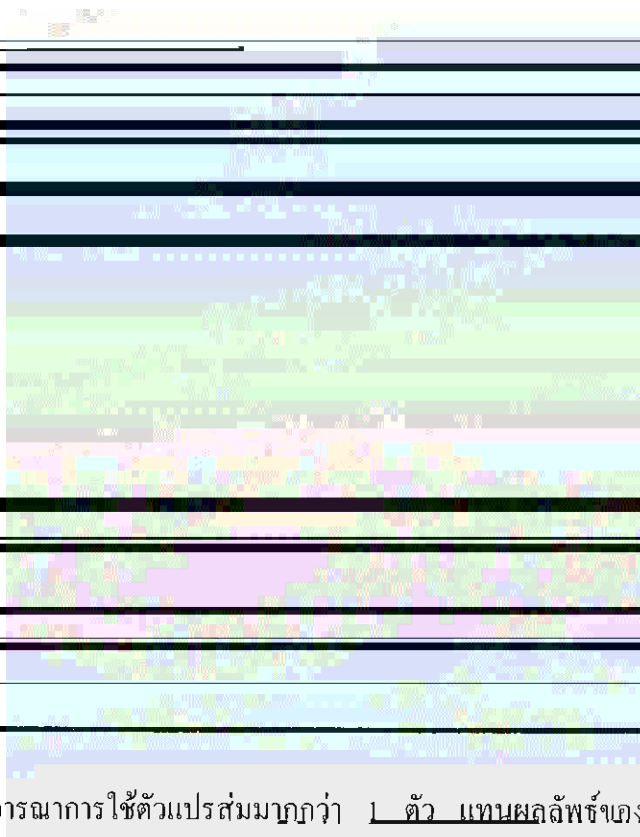




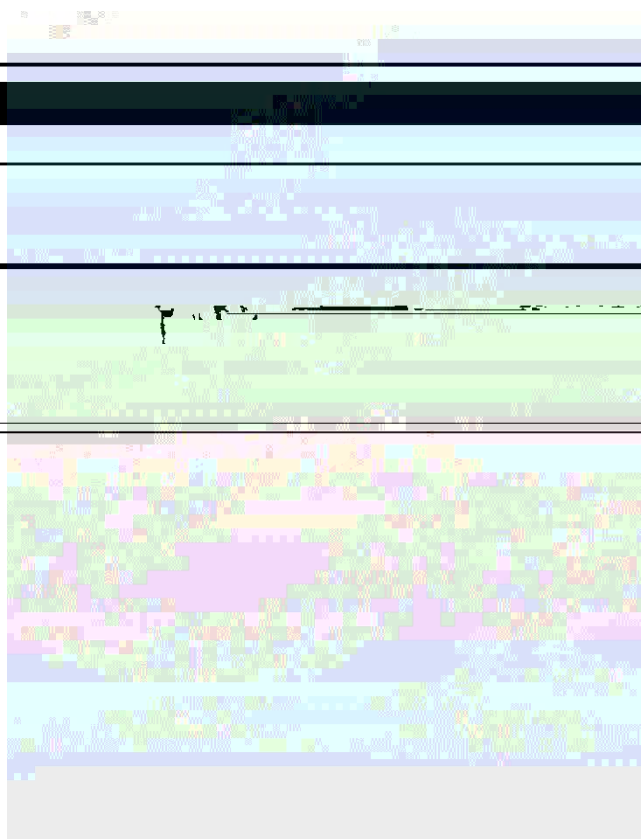
5. $f_Z(z) = e^{-z}, \quad z \geq 0$

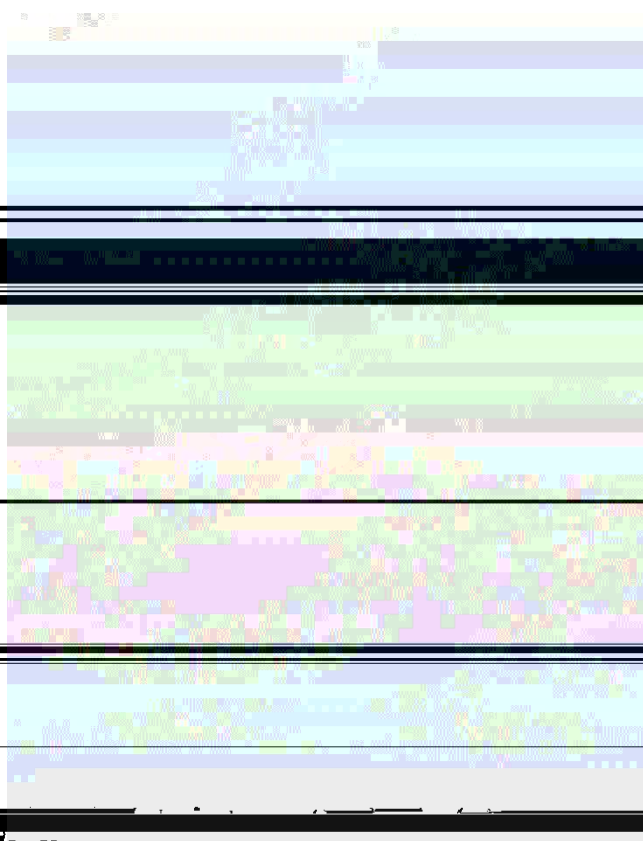
7. -30.33 บาท

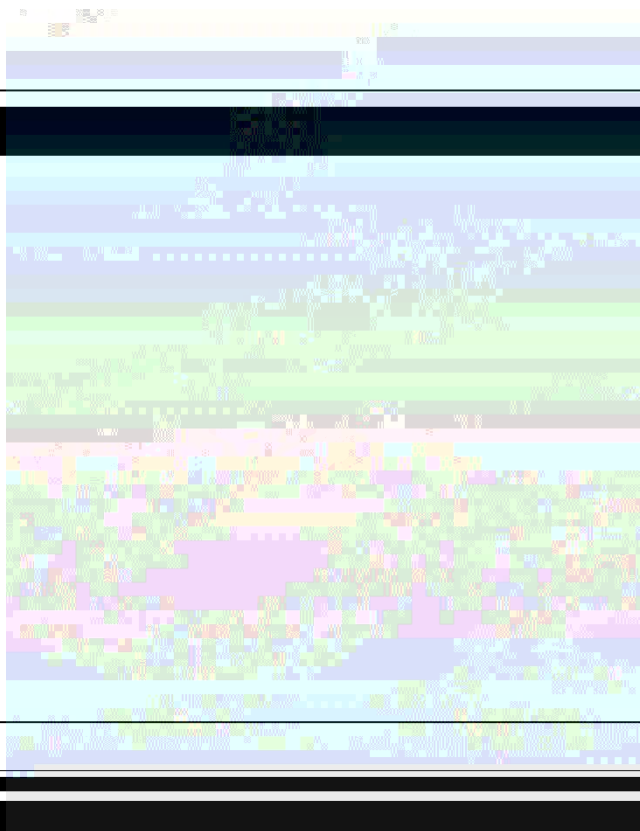
11. (a) 15, 50 (b) 5, 0 (c) 3/4, 9/16



ในบทนี้เราพิจารณาการใช้ตัวแปรส่วนมากกว่า 1 ตัว แทนผลลัพธ์ของการทดลองโดยเฉพาะ







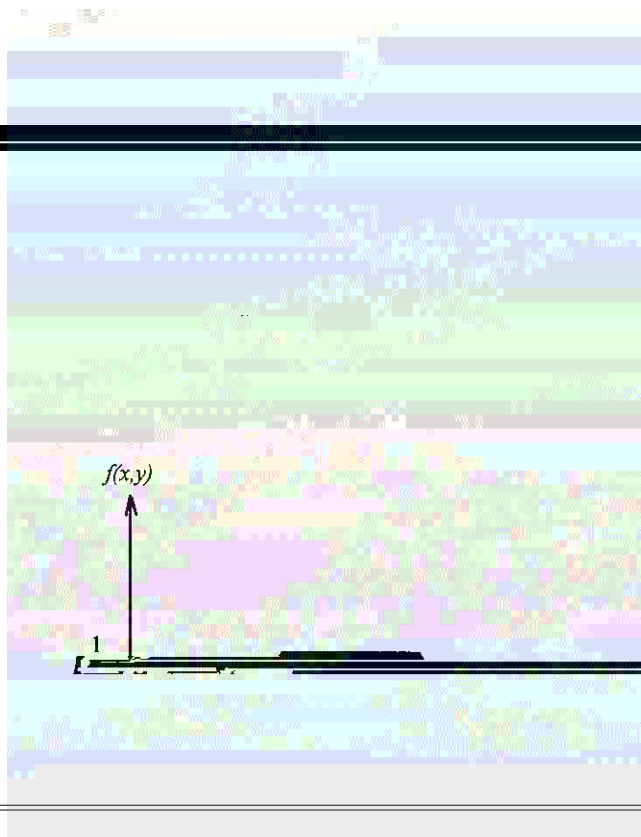


$$p(x, \dots, 0) = \sum_{i=1}^n r_i(x, 0) = r_1(x, 0) + r_2(x, 0) + r_3(x, 0)$$

$$x=0$$

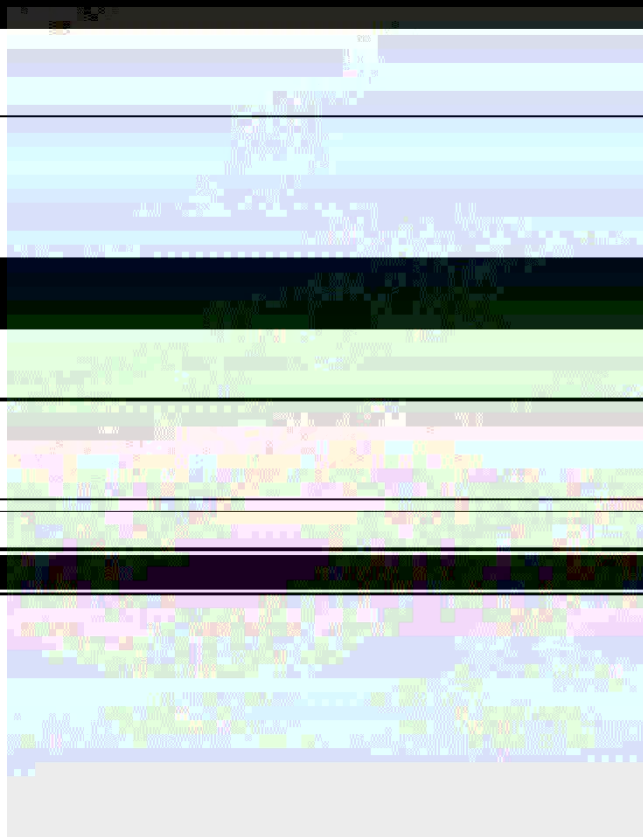
$$= .840 + .060 + .010 = .91$$

ဥပမာ ၁၁ ခုတွင် ၁၂၆ မိနစ် (၁၂၆) မိနစ်သည် (၁၂၆) မိနစ်သည် (၁၂၆) မိနစ်သည် (၁၂၆) မိနစ်သည် (၁၂၆) မိနစ်သည်



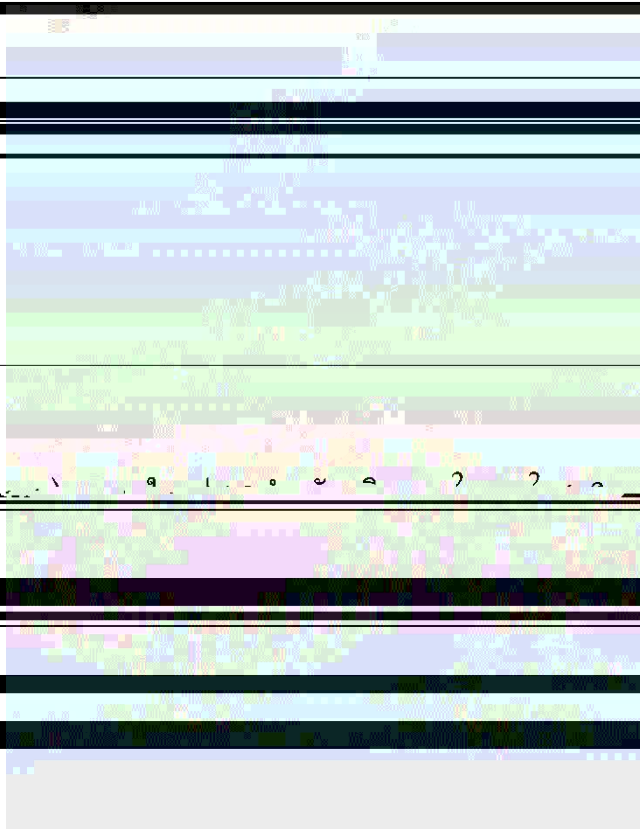


(X, Y) ว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาร์จินัล (marginal probability function) หรือ marginal pdf ซึ่ง





เลือด ของคน ๆ หนึ่ง joint p.d.f. ของ (X, Y) คือ



$f(x,y)$



1



$$E[X] = \mu_X = \sum_x x p_X(x) = \sum_x \sum_y x p(x, y) \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^2 p(x, y) \\ &= \sum_x x^2 p_X(x) - \mu_X^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$= \sum_x \sum_y x^2 p(x, y) - \mu_X^2 \quad (4.12)$$

และ

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_y y p_Y(y) = \sum_y \sum_x y p(x, y) \quad (4.13)$$

$$V(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_y (y - \mu_Y)^2 p_Y(y)$$

$$= \sum_y \sum_x (y - \mu_Y)^2 n(x, y)$$

$$= \sum_y y^2 p_Y(y) - \mu_Y^2 \quad (4.14)$$

$$= \sum_y \sum_x y^2 p(x, y) - \mu_Y^2 \quad (4.15)$$

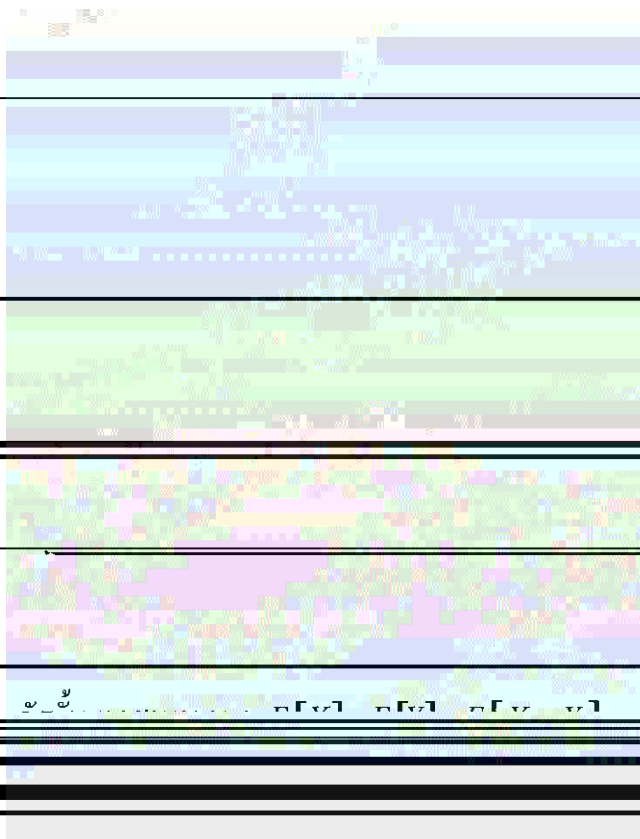


$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2 \quad (4.17)$$

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty \quad \text{และ} \quad f_Y(y) = e^{-y}, \quad 0 < y < \infty$$

ดังนั้น

$$E[X] = \mu_X = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad (\text{จากสูตร 4.16})$$



$$E[Y] = \int_0^{240} y(2/240) dy = \left[y^2/240 \right]_0^{240} = 180 \text{ มิลลิกรัมต่อเดซิลิตร}$$

$$E[XY] = \int_0^{240} \int_0^{10.5} xy(1/240) dx dy = (1/240) \int_0^{240} y \left[x^2/2 \right]_0^{10.5} dy$$

$$\int_0^{240} y \left[x^2/2 \right]_0^{10.5} dy = (1/240) \int_0^{240} y \left[x^2/2 \right]_0^{10.5} dy$$







$$f(r, v) = r^2 + (rv)/3 \quad 0 < r < 1 \quad 0 < v < 2$$

$$\begin{array}{c} f(x, y) \\ \uparrow \quad \longrightarrow \quad v \end{array}$$

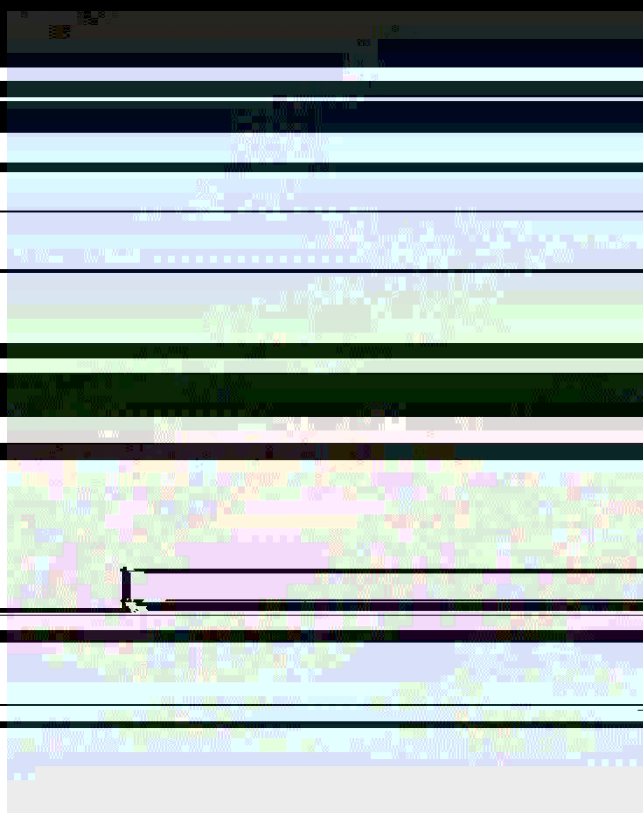


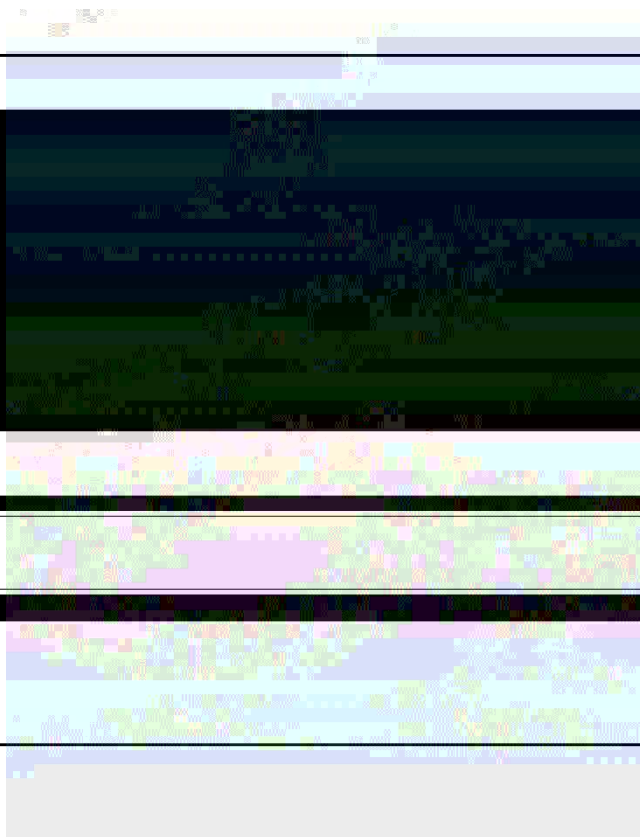
และ

$$f(x, y) = x(3x + y)$$

อนันต์ค่า เช่น $y = 0$, $y = 1$ และ $y = 2$ เราได้ว่า

$$f(x) = x^2 - 1$$





เราให้ $y = 30$ ใน $f_{X|y}(x)$ แล้วอินทิเกรต $f_{X|y}(x)$ บนช่วงของค่าของ x ที่สูงกว่า 32 นั่นคือ

$$\begin{aligned} P(X > 32 | Y = 30) &= \int_{32}^{33} f_{X|30}(x) dx \\ &= \int_{32}^{33} \frac{1}{-4.422 \times 10^{-20}} dx \end{aligned}$$

$$E(Y|x) = \sigma_{\epsilon}^2 = E[(Y - \mu_{Y|x})^2|x]$$

$$= \sum \frac{(y - \mu_{Y|x})^2 p_{Y|x}(y)}{E[(Y - \mu_{Y|x})^2|x]}$$



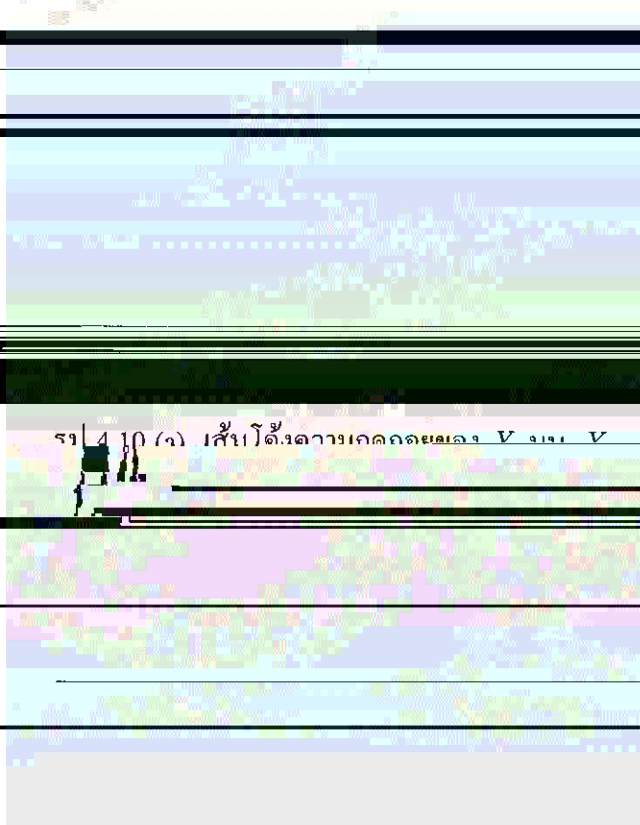
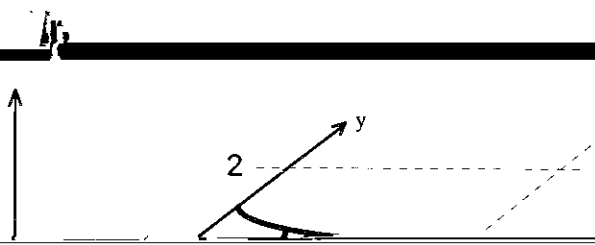
y ค่านี้ นั่นคือ เรามีจำนวนค่าของ $E[X|y]$ เท่ากับจำนวนค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรสุ่ม



ได้ว่า $E[Y|1/2] = 17/15$ และ $E[Y|1] = 13/12$

กราฟของ conditional p.d.f. $f_{Y|1/2}(y)$ และ $f_{Y|1}(y)$ แสดงในรูป 4.9 (a) โดยมีค่าคาด

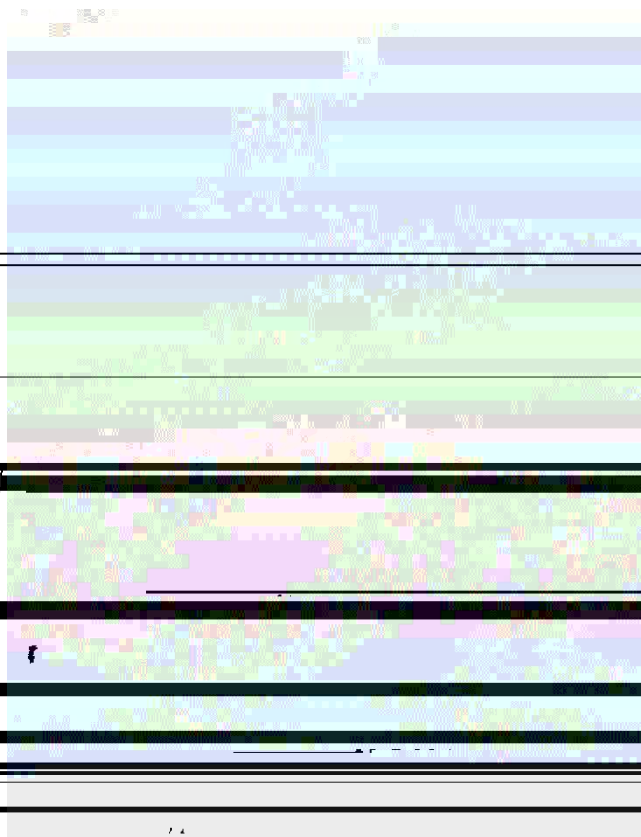


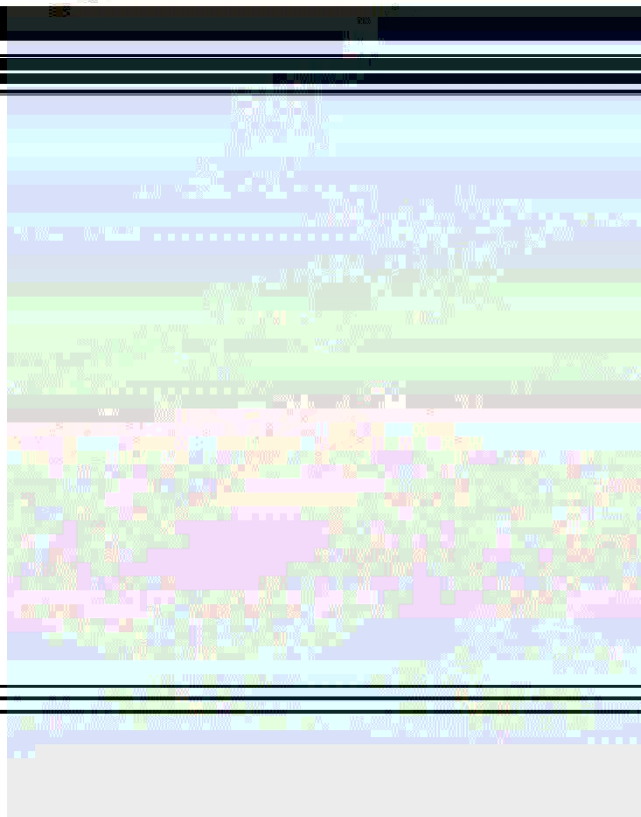


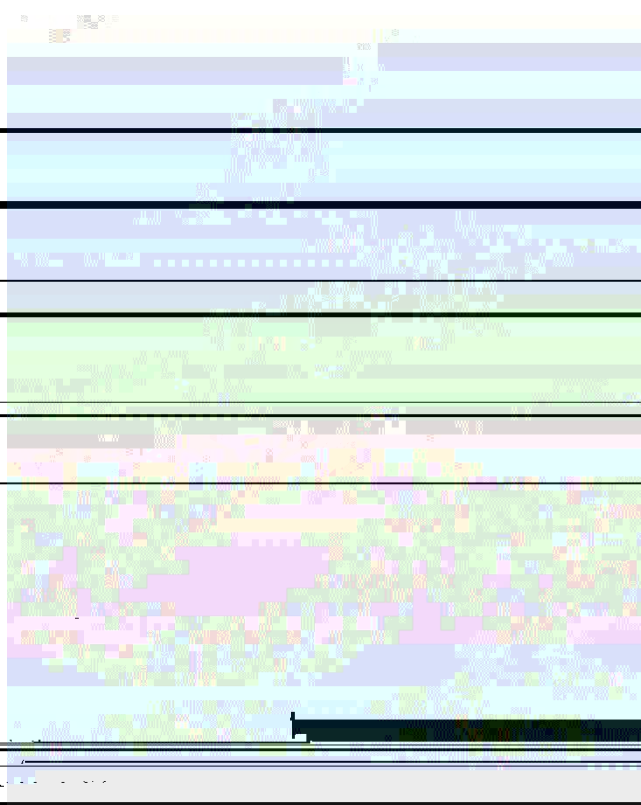
รูป 4.10 (ก) เส้นโค้งการเคลื่อนที่ของ V และ V

$f_{X|Y}(x)$











$$\underline{p(x,y)} = \underline{p_{\text{ref}}(x)}$$

U

น้ำเค็ม

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

การไหลของน้ำในช่องเปิดที่มีการไหลแบบลามินาร์ (Laminar flow) จะมีความเร็วเฉลี่ย (Average velocity) ที่แตกต่างกันไปตามตำแหน่งในช่องเปิด



$$f(x,y) = c/x \neq f_v(x)f_v(y) = c(1-27/x)c(10033-100y)$$

มลำดัดบ

วิชา ๑๘ ไร่ (๕ ไร่) เป็นตัวแปลง ๑ จิตติ ความแปลงแปลงแล้ว เติบโตมาโดย Con (๕ ไร่)



Figure 1: A 2D plot showing a complex, multi-colored pattern.

พิสูจน์ พิจารณากรณี (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง การพิสูจน์ในกรณีเต็มหน่วยจะคล้ายกัน



$$|p, \pm\rangle = 1 \text{ ก็ต่อเมื่อ } V = a \pm b \sqrt{2}$$

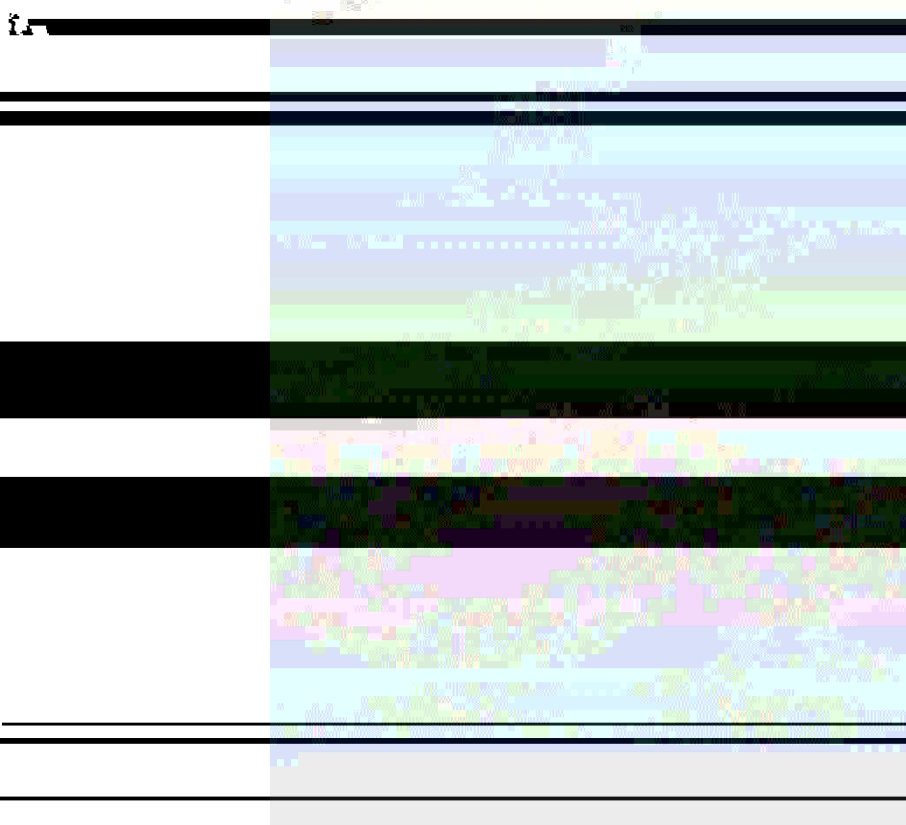
สำหรับบางจำนวนจริง a และ $b \neq 0$

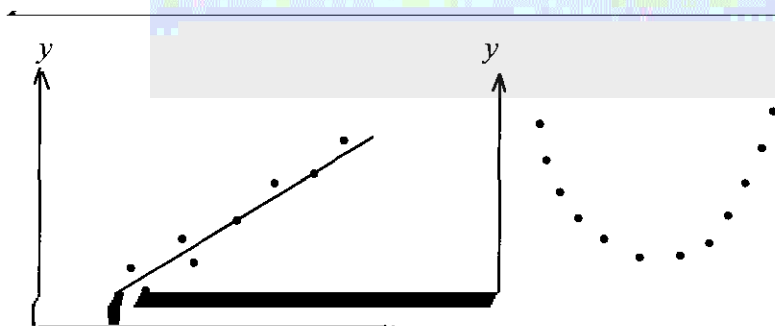
จงหาค่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \log \left(\frac{V_k}{V} \right)$ เมื่อ V_k คือผลคูณของสมาชิกในลำดับ $\{V_n\}$

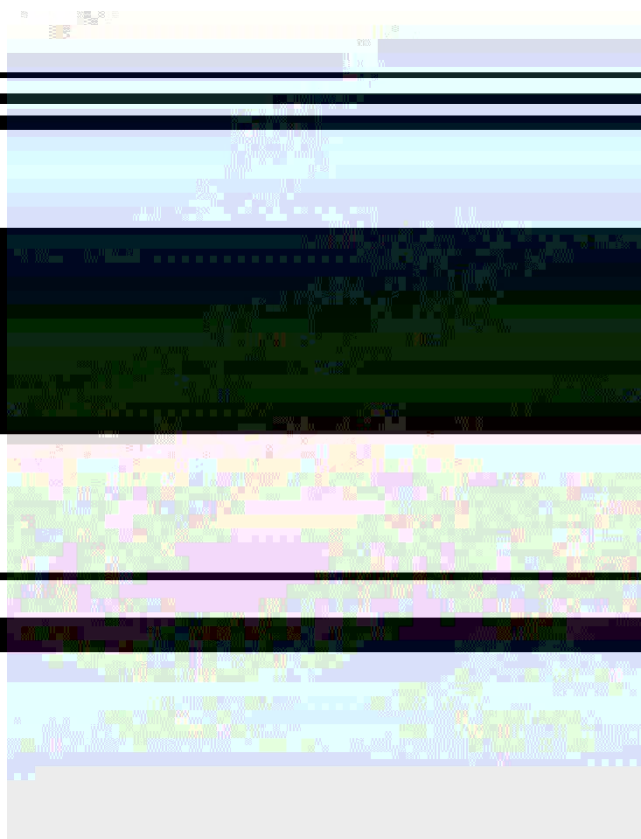


ดังนั้น

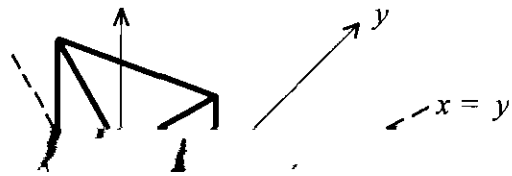
$$P(Y = a + bX) = 1$$







ซึ่งแทนจำนวนจุดเชื่อมต่อที่มีค่าหนึ่ง และตัวแปรส่วน Y ซึ่งแทนจำนวนน็อตที่ไม่ได้หมนให้แน่น ใ



$$x = -y$$

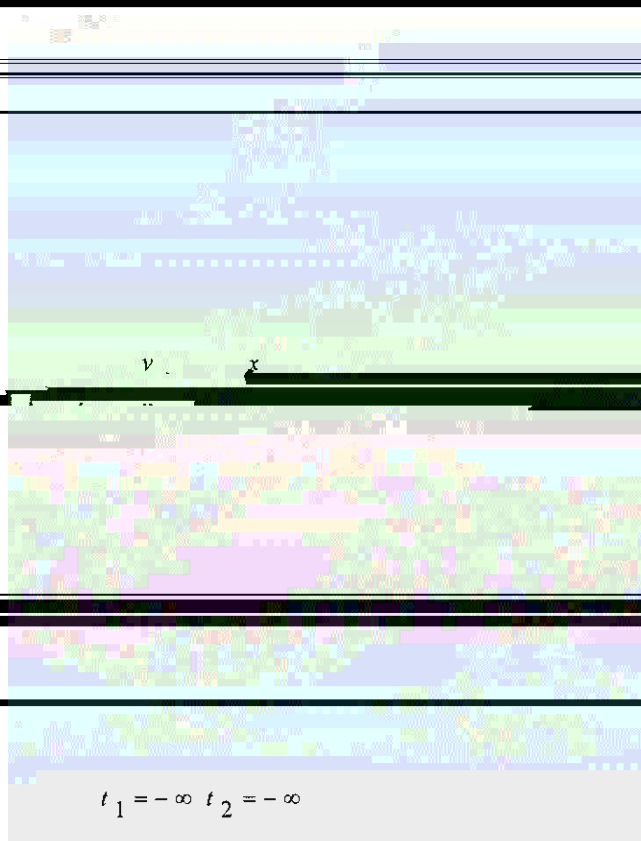
รูป 4.14 (a)

บริเวณสามเหลี่ยมที่แรเงาในรูป 4.14 (b) คือ พิกัดของ (X, Y) พร้อมกับแสดงช่วงของ



$$E[Y] = \int_0^1 y(2y) dy = \frac{2}{3}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 2xy \, dx = y$$



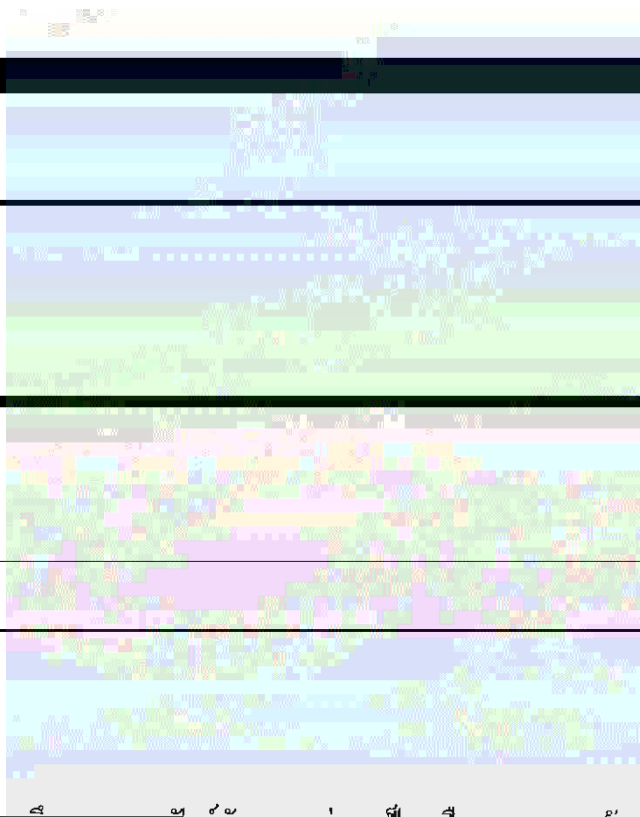
และถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่ม 2 มิติ แบบต่อเนื่อง แล้ว

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (4.48)$$

$F(x, y)$ นิยามสำหรับจุด (x, y) ใด ๆ ในระนาบ ดังนั้น ในการคำนวณหา $F(x, y)$

(a) เมื่อ $x \leq 0$, $F(x, y) = 0$

(b) เมื่อ $y < 0$, $F(x, y) = 0$

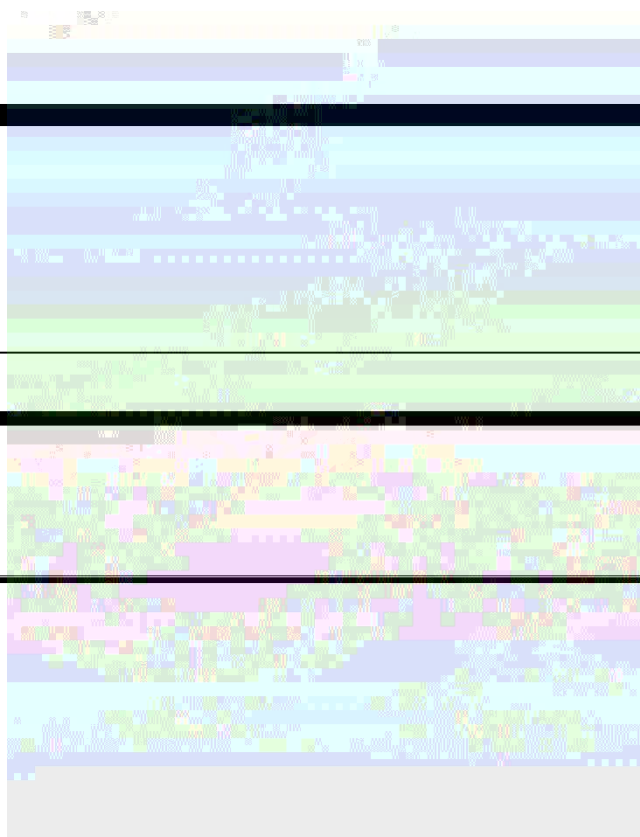






จาโคเบียนของ T (Jacobian of T) เขียนแทนด้วย J_m คือ ค่าคงตัวกำหนดต่อไปนี้





บนช่วง $(0, 2)$ และ $(0, 3)$ ตามลำดับ joint p.d.f. ของ (X, Y) คือ

$$f(x, y) = 1/6 \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2(x+2)} \quad \text{and} \quad \dots$$



10.02 10.02 10.02 10.02 10.02 10.02 10.02 10.02 10.02 10.02



$$n_{Y \setminus Y^*}(x_{j^*}, x_{L^*}) = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{u=1}^n \sum_{v=1}^n n(r_s, x_{j^*}, x_{L^*})$$



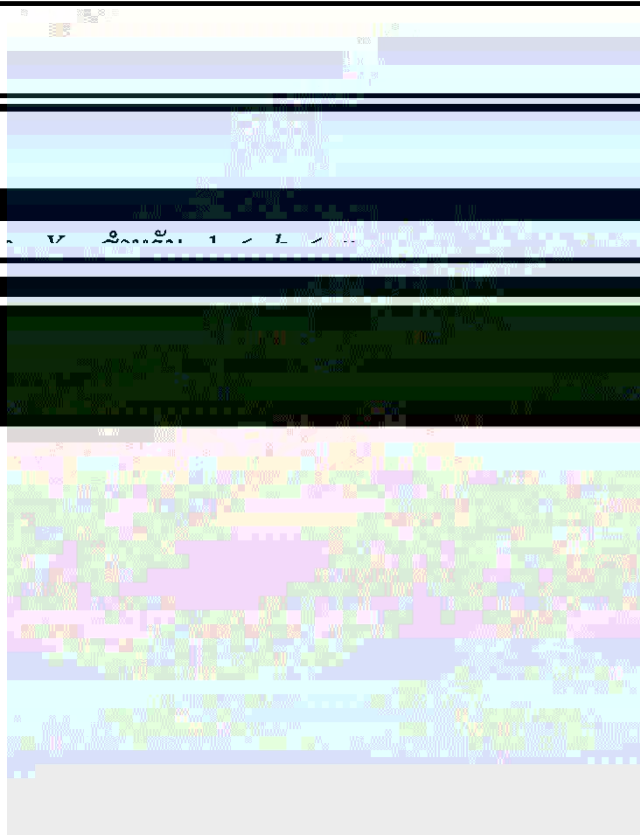
ตัวอย่าง เช่น

conditional p.d.f. ของ X_1 เมื่อกำหนดให้ $X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n$ เขียนแทนด้วย $f_{X_1|x_2, x_3, \dots, x_n}(x_1)$ หาค่าได้ดังนี้คือ

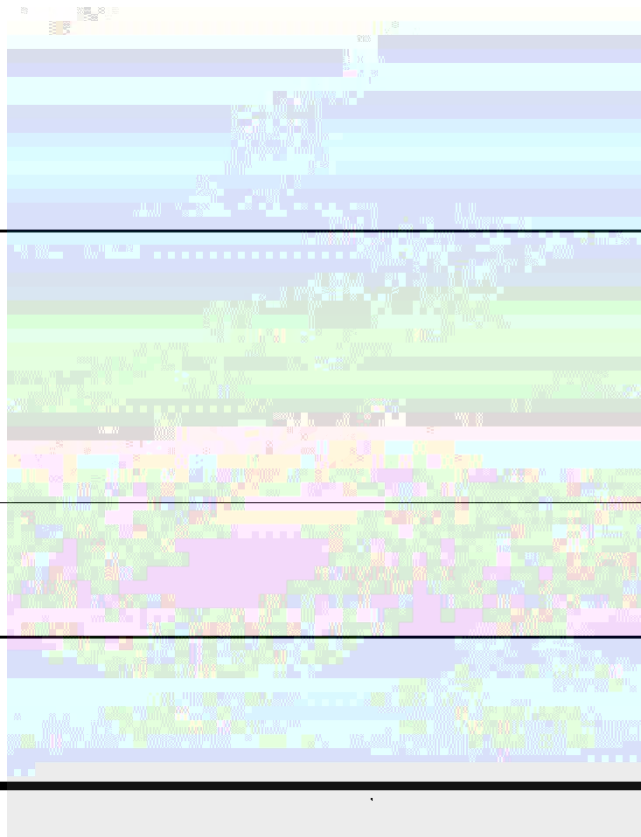
$$f_{X_1|x_2, x_3, \dots, x_n}(x_1) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\dots}$$

นั่นคือ เมื่อเรารู้ค่าของ $x_2, x_3, \dots, x_n$ แล้ว $f_{X_1|x_2, x_3, \dots, x_n}(x_1)$ ก็จะเป็น conditional p.d.f. ของ

$$E[H(X_1, X_2, \dots, X_L)] = E[X_L] = \mu_L$$



$$2. H(X_1, X_2, \dots, X_n) = (X_k - \mu_k)^2 \text{ แล้ว}$$



$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\begin{bmatrix} 40 \\ x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 25 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 200 \\ 25 \end{bmatrix}}$$

สำหรับ (x_1, x_2, x_3, x_4) ในพิสัย

โดยไม่ต้องทำการบวก joint p.d.f. เราสามารถหา marginal p.d.f. ของแต่ละตัวแปรสุ่มได้โดยตรงในปัญหานี้ เช่น

$$p(x_1) = \sum_{x_2=0}^{25-x_1} \sum_{x_3=0}^{25-x_1-x_2} \sum_{x_4=0}^{25-x_1-x_2-x_3} p(x_1, x_2, x_3, x_4)$$



จากกรณีนี้

$$Y = X_1 + X_2 \quad (4.58)$$

ค่าเฉลี่ยของ Y คำนวณได้ดังนี้คือ

ดังต่อไปนี้

$$= a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad (4.62)$$

เมื่อ $E[X_i] = \mu_i$ และ

$$\frac{n}{2} - \dots - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}$$

หรือ

$$= \frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2}$$

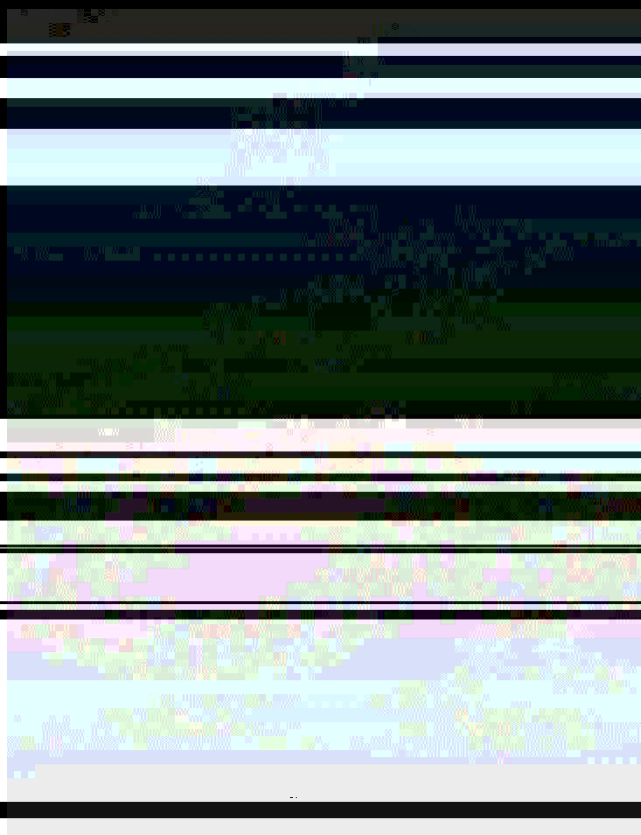
$$i=1 \quad i=1 \quad j=1$$

ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ มีความเป็นอิสระ แล้ว $Cov(X_i, X_j) = 0$ และผลที่ตามมาคือ



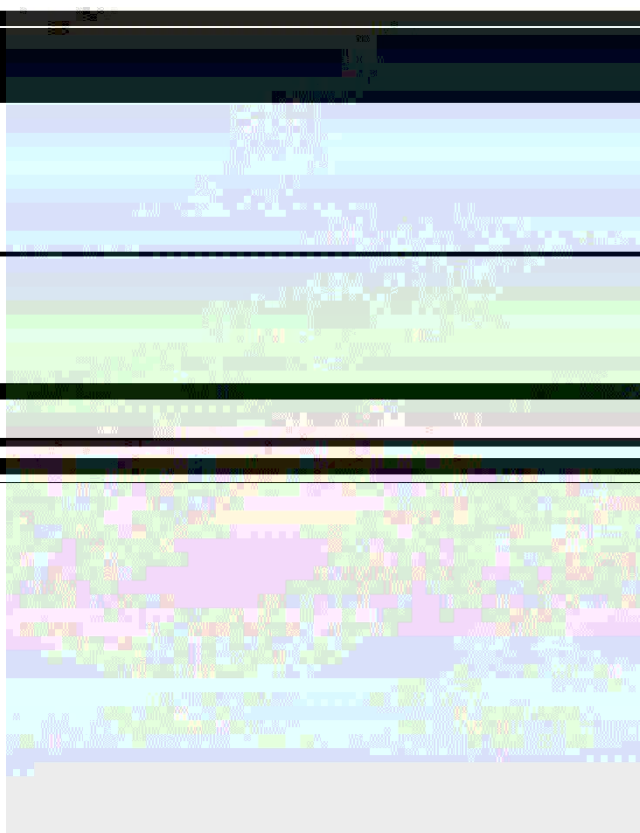
เลือกแบบสุ่ม) และการแจกแจงของแต่ละตัวแปรสุ่ม X_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) เหมือนกัน ดังแสดง
 ในรูป 4.18 กราฟของ p.d.f. ของแต่ละ X_i เหมือนกัน และในตัวอย่าง 4.35 เราพิจารณา
 "ค่าเฉลี่ยกลุ่มตัวอย่าง"

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} Y_1 + \frac{1}{n} Y_2 + \dots + \frac{1}{n} Y_n$$



รูปถ่ายดาวเทียม ๖ ลักษณะ คือ ๑ จำนวนรอยเจดีย์ตรงสภาพข้างนอก ๖ ความแปรปรวนตรง

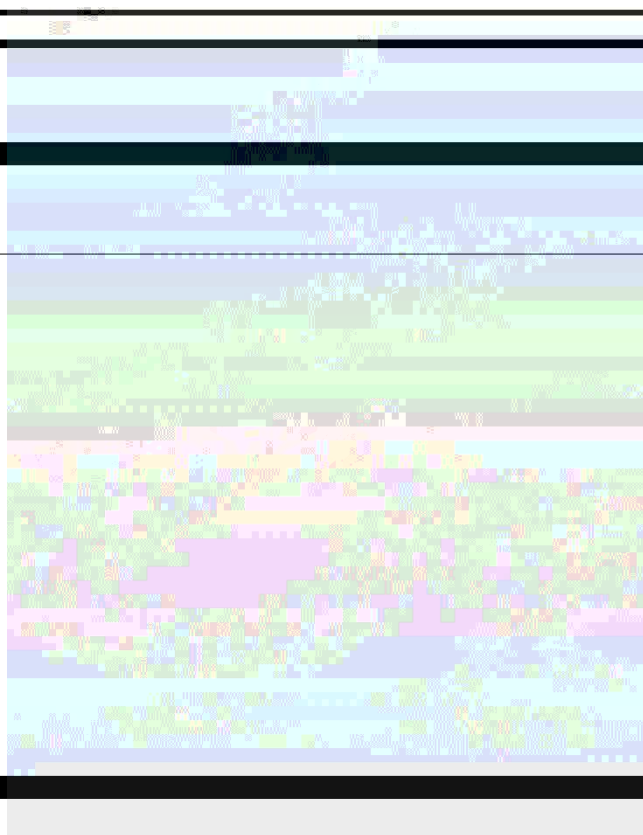




ฉบับที่ 1 และในทางกลับกัน จงหาค่าคาดหมายของระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 1
เมื่อทราบระดับคะแนนจากข้อสอบฉบับที่ 2



หาค่าของ joint p.d.f. ของ (X, Y)

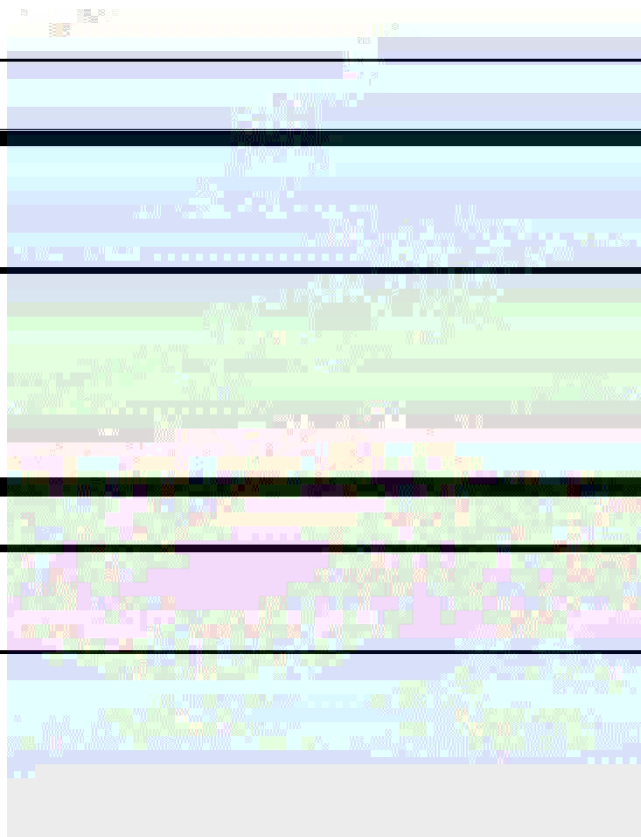


ค่างน้ำที่สดเพียงหนึ่ง และค่างมากที่สดมีใช้ผลิตพลาสติกกระเบื้องหนึ่ง

สมมติว่า joint p.d.f. ของ (X, Y) กำหนดโดย

$$f(x, y) = 1/x \quad 0 < y < x < 1$$



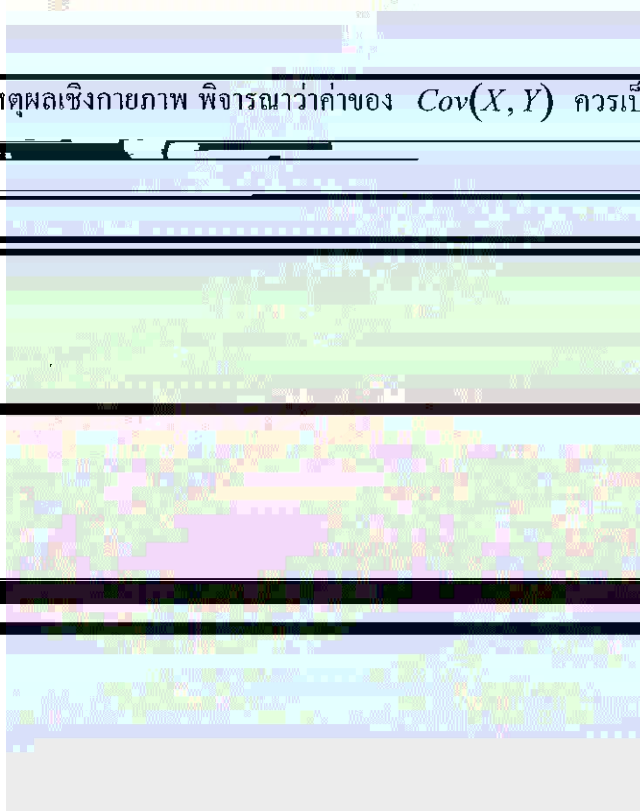


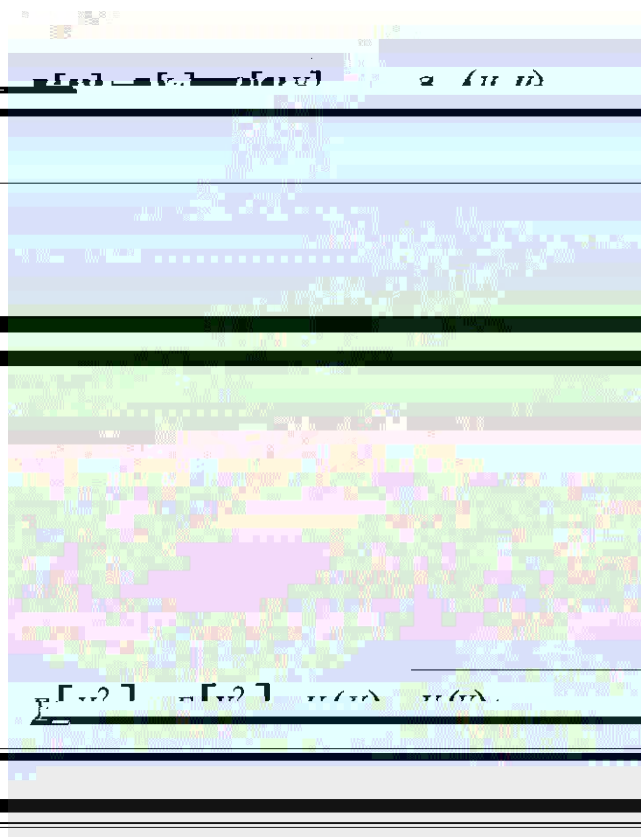
หรือ ไม่?

(b) จงหา $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ และ $Cov(X, Y)$ จงให้ความหมายเชิงกายภาพของ

(a) 1992 marginal c.d.f. ของ Y และ V

(b) โดยใช้เหตุผลเชิงกายภาพ พิจารณาค่าของ $Cov(X, Y)$ ควรเป็นบวกหรือลบ





(c) จงพิจารณาจากค่าของ ρ_{XY} ว่า กราฟของความสัมพันธ์ระหว่าง Y และ X จะมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงมากน้อยเพียงใด

$$f(x, y) = 2/(n(n+1)), \quad 1 \leq y \leq x \leq n$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

- (a) จงหาเส้นโค้งความถดถอยของ X บน Y กราฟเป็นเส้นตรงหรือไม่?
- (b) สมมติว่า $n = 10$ จงหาค่าเฉลี่ยของ X เมื่อ $y = 4$

๒. ๖๒

(b) ให้ $U = X/Y$ จงหา p.d.f. ของ U



1000

1

จงแสดงว่า p.d.f ของ X/Y มีค่าดังนี้

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(uv, v) |v| dv$$

(e) $f_X(x) = 1, \quad 0 < x < 1$ และ $f_Y(y) = -\log y, \quad 0 < y < 1$

(f) .5 , .597

(g) ไม่มี

21. ศูนย์



Some Important Distributions

ในบทต่อไป เราจะมาพูดถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญๆ ที่ใช้ในการประยุกต์ในทางวิศวกรรม



เราจะเลือกพิจารณาตัวแปรสุ่มในกรณีเฉพาะที่มีความสำคัญในการประยุกต์ในปัญหาทางด้านวิศวกรรม

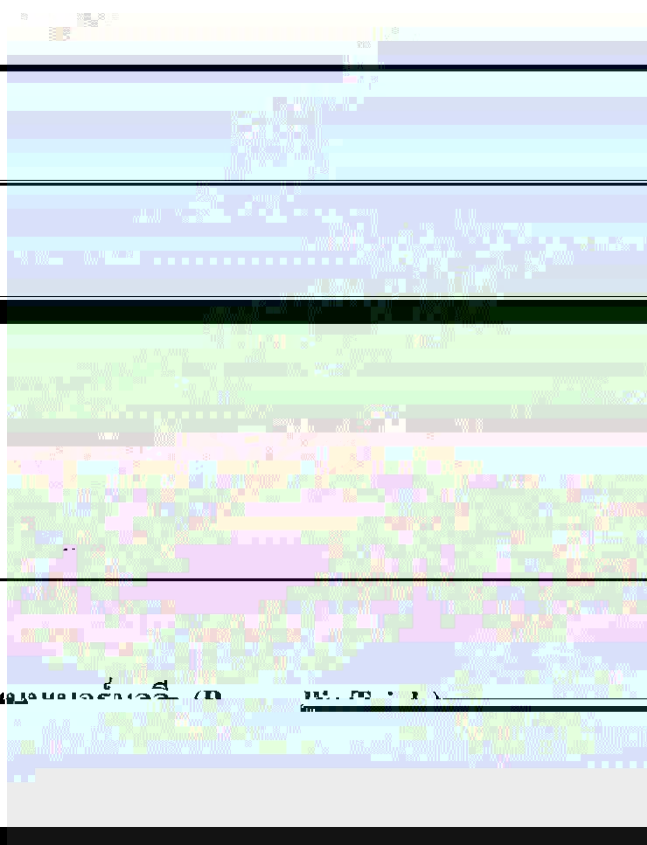


Fig. 1. Landscape near the village of (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m) (n) (o) (p) (q) (r) (s) (t) (u) (v) (w) (x) (y) (z) (aa) (ab) (ac) (ad) (ae) (af) (ag) (ah) (ai) (aj) (ak) (al) (am) (an) (ao) (ap) (aq) (ar) (as) (at) (au) (av) (aw) (ax) (ay) (az) (ba) (bb) (bc) (bd) (be) (bf) (bg) (bh) (bi) (bj) (bk) (bl) (bm) (bn) (bo) (bp) (bq) (br) (bs) (bt) (bu) (bv) (bw) (bx) (by) (bz) (ca) (cb) (cc) (cd) (ce) (cf) (cg) (ch) (ci) (cj) (ck) (cl) (cm) (cn) (co) (cp) (cq) (cr) (cs) (ct) (cu) (cv) (cw) (cx) (cy) (cz) (da) (db) (dc) (dd) (de) (df) (dg) (dh) (di) (dj) (dk) (dl) (dm) (dn) (do) (dp) (dq) (dr) (ds) (dt) (du) (dv) (dw) (dx) (dy) (dz) (ea) (eb) (ec) (ed) (ee) (ef) (eg) (eh) (ei) (ej) (ek) (el) (em) (en) (eo) (ep) (eq) (er) (es) (et) (eu) (ev) (ew) (ex) (ey) (ez) (fa) (fb) (fc) (fd) (fe) (ff) (fg) (fh) (fi) (fj) (fk) (fl) (fm) (fn) (fo) (fp) (fq) (fr) (fs) (ft) (fu) (fv) (fw) (fx) (fy) (fz) (ga) (gb) (gc) (gd) (ge) (gf) (gg) (gh) (gi) (gj) (gk) (gl) (gm) (gn) (go) (gp) (gq) (gr) (gs) (gt) (gu) (gv) (gw) (gx) (gy) (gz) (ha) (hb) (hc) (hd) (he) (hf) (hg) (hh) (hi) (hj) (hk) (hl) (hm) (hn) (ho) (hp) (hq) (hr) (hs) (ht) (hu) (hv) (hw) (hx) (hy) (hz) (ia) (ib) (ic) (id) (ie) (if) (ig) (ih) (ii) (ij) (ik) (il) (im) (in) (io) (ip) (iq) (ir) (is) (it) (iu) (iv) (iw) (ix) (iy) (iz) (ja) (jb) (jc) (jd) (je) (jf) (jg) (jh) (ji) (jj) (jk) (jl) (jm) (jn) (jo) (jp) (jq) (jr) (js) (jt) (ju) (jv) (jw) (jx) (jy) (jz) (ka) (kb) (kc) (kd) (ke) (kf) (kg) (kh) (ki) (kj) (kk) (kl) (km) (kn) (ko) (kp) (kq) (kr) (ks) (kt) (ku) (kv) (kw) (kx) (ky) (kz) (la) (lb) (lc) (ld) (le) (lf) (lg) (lh) (li) (lj) (lk) (ll) (lm) (ln) (lo) (lp) (lq) (lr) (ls) (lt) (lu) (lv) (lw) (lx) (ly) (lz) (ma) (mb) (mc) (md) (me) (mf) (mg) (mh) (mi) (mj) (mk) (ml) (mm) (mn) (mo) (mp) (mq) (mr) (ms) (mt) (mu) (mv) (mw) (mx) (my) (mz) (na) (nb) (nc) (nd) (ne) (nf) (ng) (nh) (ni) (nj) (nk) (nl) (nm) (nn) (no) (np) (nq) (nr) (ns) (nt) (nu) (nv) (nw) (nx) (ny) (nz) (oa) (ob) (oc) (od) (oe) (of) (og) (oh) (oi) (oj) (ok) (ol) (om) (on) (oo) (op) (oq) (or) (os) (ot) (ou) (ov) (ow) (ox) (oy) (oz) (pa) (pb) (pc) (pd) (pe) (pf) (pg) (ph) (pi) (pj) (pk) (pl) (pm) (pn) (po) (pp) (pq) (pr) (ps) (pt) (pu) (pv) (pw) (px) (py) (pz) (qa) (qb) (qc) (qd) (qe) (qf) (qg) (qh) (qi) (qj) (qk) (ql) (qm) (qn) (qo) (qp) (qq) (qr) (qs) (qt) (qu) (qv) (qw) (qx) (qy) (qz) (ra) (rb) (rc) (rd) (re) (rf) (rg) (rh) (ri) (rj) (rk) (rl) (rm) (rn) (ro) (rp) (rq) (rr) (rs) (rt) (ru) (rv) (rw) (rx) (ry) (rz) (sa) (sb) (sc) (sd) (se) (sf) (sg) (sh) (si) (sj) (sk) (sl) (sm) (sn) (so) (sp) (sq) (sr) (ss) (st) (su) (sv) (sw) (sx) (sy) (sz) (ta) (tb) (tc) (td) (te) (tf) (tg) (th) (ti) (tj) (tk) (tl) (tm) (tn) (to) (tp) (tq) (tr) (ts) (tt) (tu) (tv) (tw) (tx) (ty) (tz) (ua) (ub) (uc) (ud) (ue) (uf) (ug) (uh) (ui) (uj) (uk) (ul) (um) (un) (uo) (up) (uq) (ur) (us) (ut) (uu) (uv) (uw) (ux) (uy) (uz) (va) (vb) (vc) (vd) (ve) (vf) (vg) (vh) (vi) (vj) (vk) (vl) (vm) (vn) (vo) (vp) (vq) (vr) (vs) (vt) (vu) (vv) (vw) (vx) (vy) (vz) (wa) (wb) (wc) (wd) (we) (wf) (wg) (wh) (wi) (wj) (wk) (wl) (wm) (wn) (wo) (wp) (wq) (wr) (ws) (wt) (wu) (wv) (ww) (wx) (wy) (wz) (xa) (xb) (xc) (xd) (xe) (xf) (xg) (xh) (xi) (xj) (xk) (xl) (xm) (xn) (xo) (xp) (xq) (xr) (xs) (xt) (xu) (xv) (xw) (xx) (xy) (xz) (ya) (yb) (yc) (yd) (ye) (yf) (yg) (yh) (yi) (yj) (yk) (yl) (ym) (yn) (yo) (yp) (yq) (yr) (ys) (yt) (yu) (yv) (yw) (yx) (yy) (yz) (za) (zb) (zc) (zd) (ze) (zf) (zg) (zh) (zi) (zj) (zk) (zl) (zm) (zn) (zo) (zp) (zq) (zr) (zs) (zt) (zu) (zv) (zw) (zx) (zy) (zz)

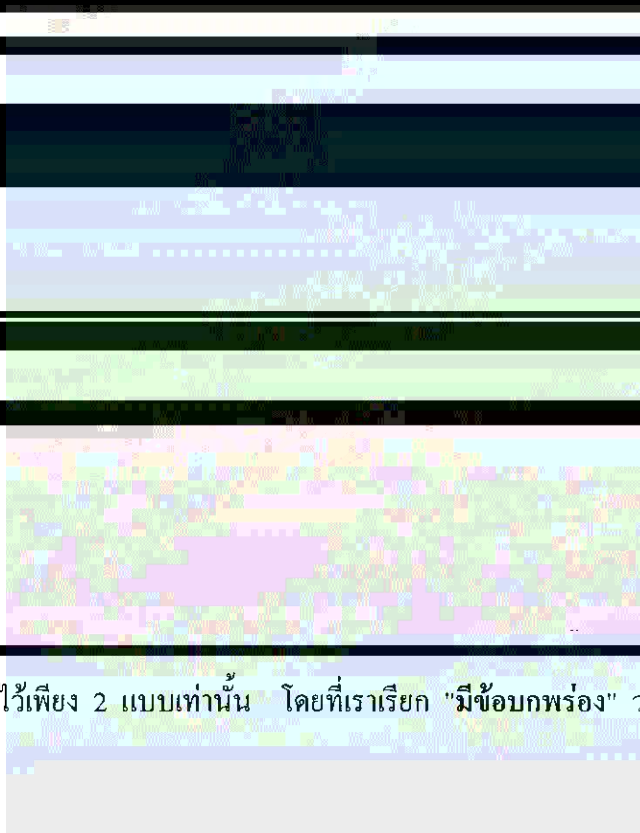
$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= V(X) = E[(X - \mu)^2] \\
 &= \sum_{x=0}^1 (x - p)^2 p^x (1 - p) \\
 &= p^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p \\
 &= p(1 - p)
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

นอกจากนี้ เราสามารถแสดงได้ว่า โมเมนต์เจนเนอเรตฟังก์ชันของ X คือ

$$M(t) = (1 - p) + pe^{t} \tag{5.4}$$

ถ้าเราทำการทดลองแบบเบอร์นูลลีชนิดเดียวกัน ซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง โดยที่





การตรวจสอบกำหนดไว้เพียง 2 แบบเท่านั้น โดยที่เราเรียก "มีข้อบกพร่อง" ว่า ความสำเร็จ และ

เรียก "คุณภาพดี" ว่า ความสำเร็จ

2. การตรวจสอบผลผลิต 1,000 ชิ้น ผลิตโดยเครื่องจักรเครื่องเดียวกันนี้เป็นกระบวนการ

การเบอร์นูลลี ถ้าเรามีสมมุติฐานว่า ประสิทธิภาพของเครื่องจักรมีความสม่ำเสมอ นั่นคือ



รูป 5.2

การคำนวณหา p.d.f. ของ X ทำได้ดังนี้คือ ($q = 1 - p$)

$$p(0) = P(\{FFF\}) = q \cdot q \cdot q = q^3$$

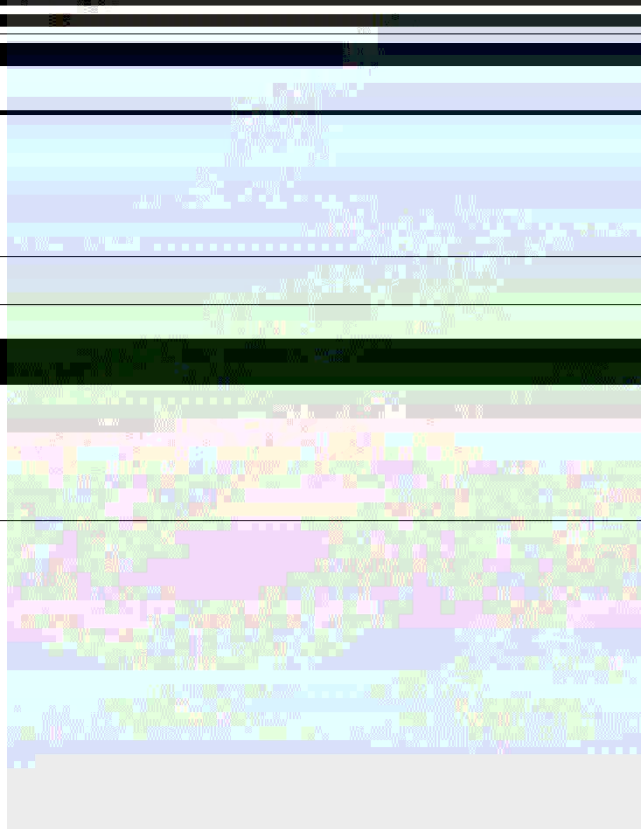


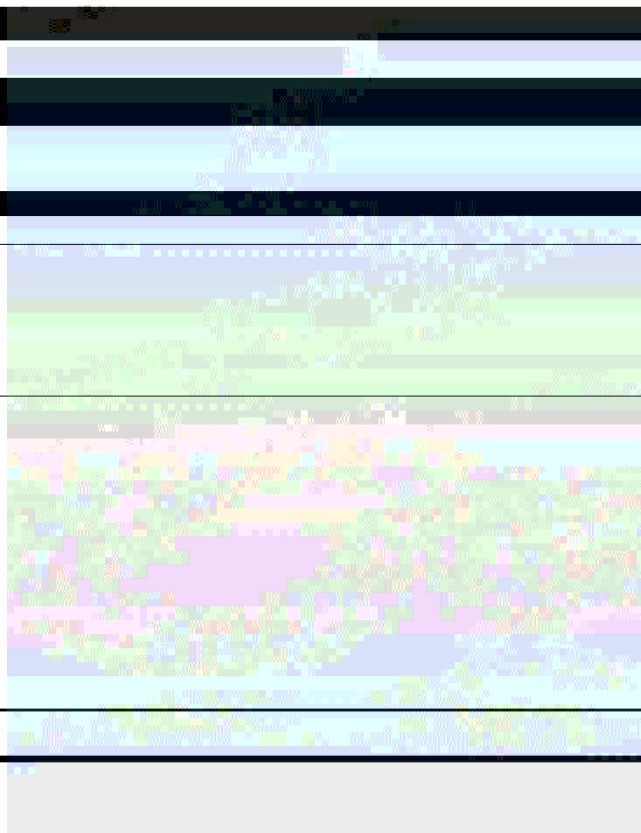


$$E[X] = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= 0 + np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$







0.000000

1.000000

2.000000

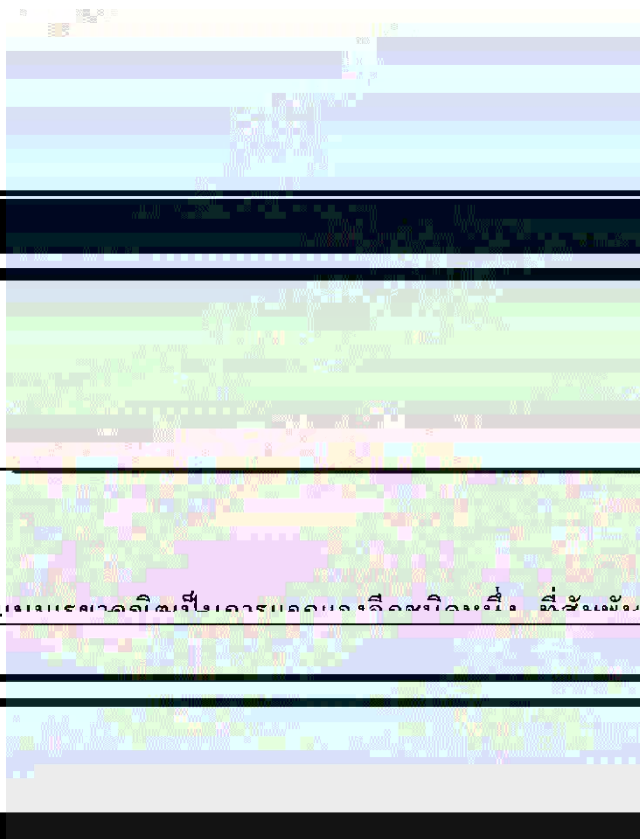
3.000000

4.000000



ยกเองจำนวนผลผลิตที่มีดำหนิ และความแปรปรวนคือ

$$E[X] = \mu = np = 100(0.1) = 1$$



၁၂၄ နက္ခတ်ပုံစံများအရ ကမ္ဘာမြေ၏ အလယ်ပိုင်းနှင့် အရှေ့ပိုင်းတို့၏ အလယ်ပိုင်းသည်

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเรขาคณิต

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบเรขาคณิตสามารถคำนวณได้ดังนี้ คือ

$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p \cdot q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot q^{x-1}$$

หรือ

$$\mu = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x = p \frac{d}{dq} \left[\frac{q}{1-q} \right] = \frac{1}{p}$$

และ

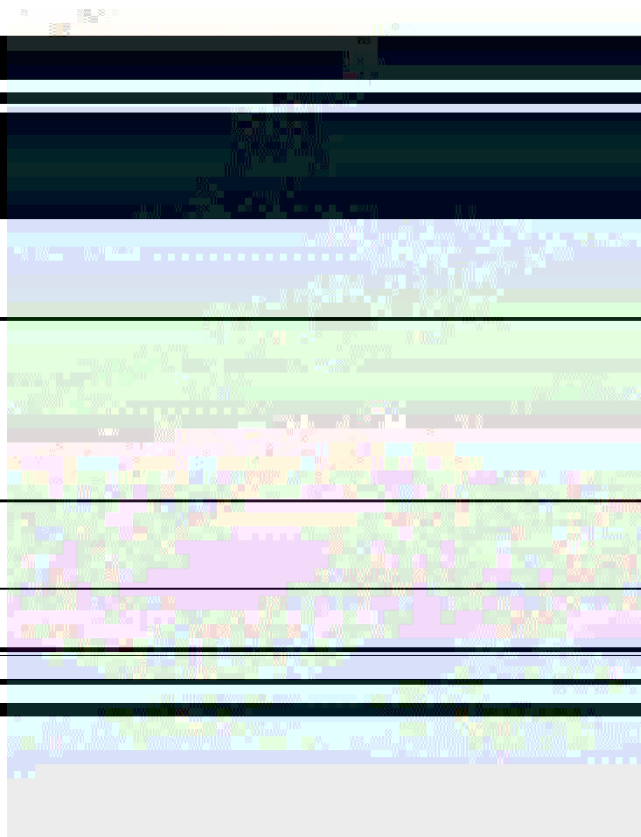
$$\sigma^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p \cdot q^{x-1} - \mu^2$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p \cdot q^{x-1} - \left(\frac{1}{p} \right)^2$$

$$x=1$$

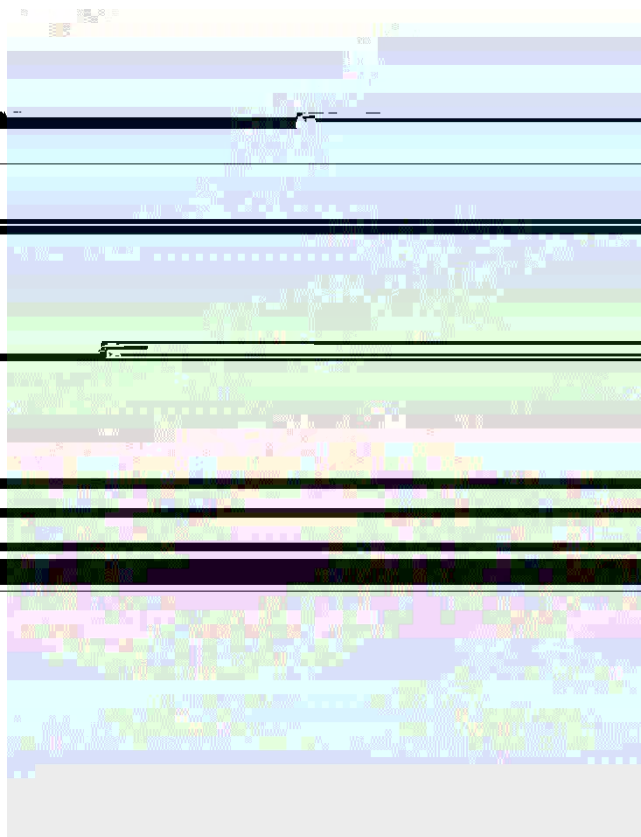
$$\sigma^2 = q/p^2$$

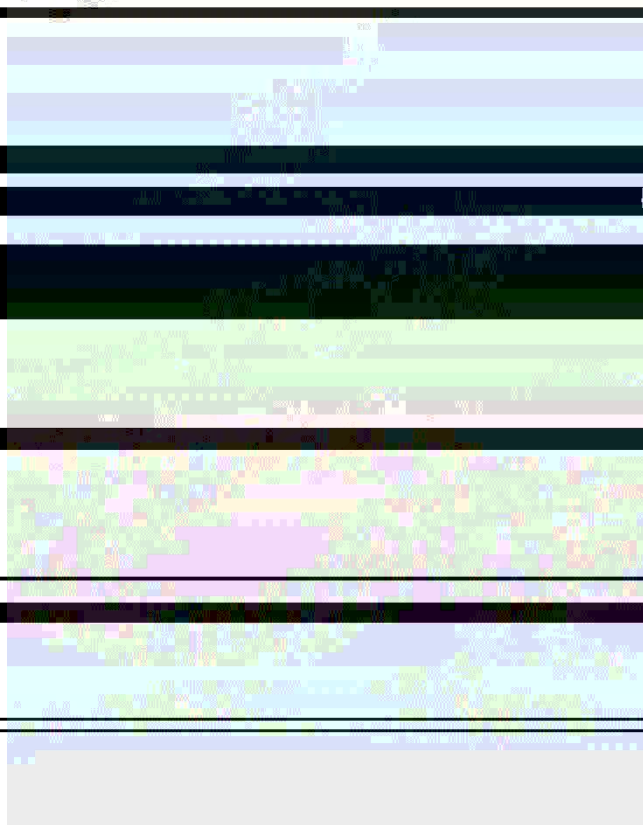
(5.17)

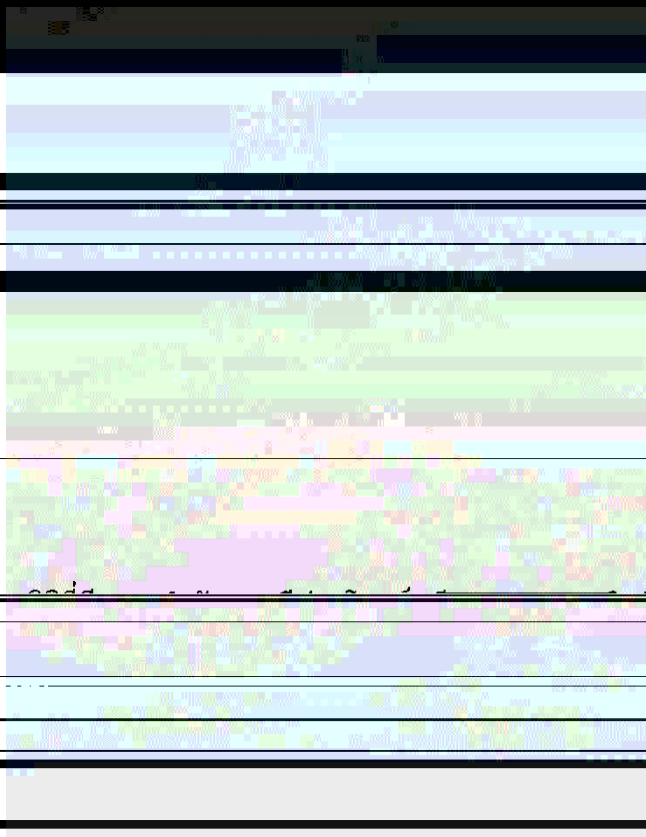












X_2 = จำนวนเสื้อสำเร็จรูปมีข้อบกพร่องที่แก้ไขได้

X_3 = จำนวนเสื้อสำเร็จรูปมีข้อบกพร่องที่แก้ไขไม่ได้

ดังนั้น $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ และ (V_1, V_2, V_3) เป็นการแจกแจงแบบพหุคูณ

$$p(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{20!}{x_1! x_2! x_3!} \right) (0.85)^{x_1} (0.10)^{x_2} (0.05)^{x_3}$$

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก

ค่าเฉลี่ยคือ

และความแปรปรวนคือ

$$\sigma^2 = V(X) = n \left(\frac{D}{N} \right) \left(1 - \frac{D}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N} \right) \quad (5.29)$$

ตัวอย่าง 5.10 จำนวนสีของลูกบอล 1,000 ลูก มี 100 ลูกที่มีสีดำนอกจากนี้ และสีอื่น 900 ลูกที่มีสีดำนอกจากนี้

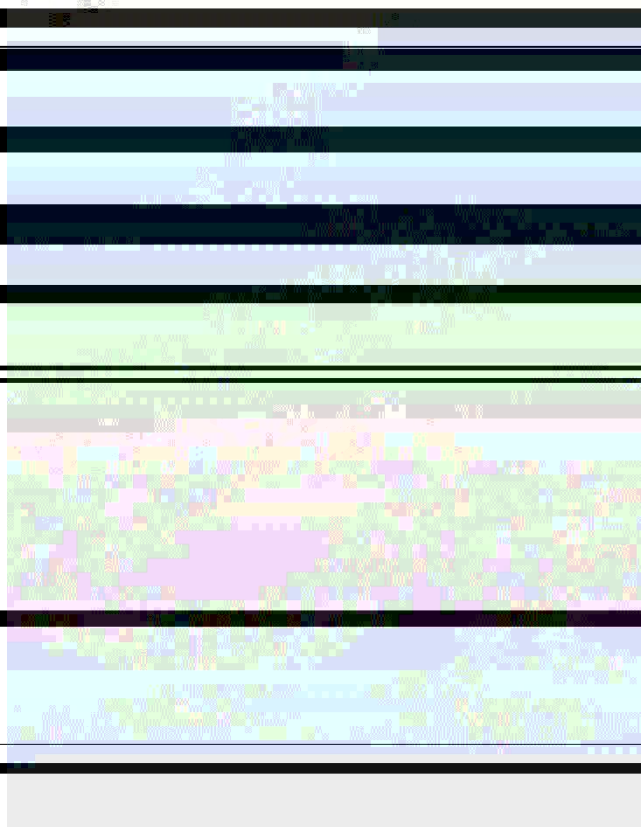


$$P(\text{ยอมรับทั้งรุ่น}) = P(X \leq 1) = P(X = 0, 1) = p(0) + p(1)$$

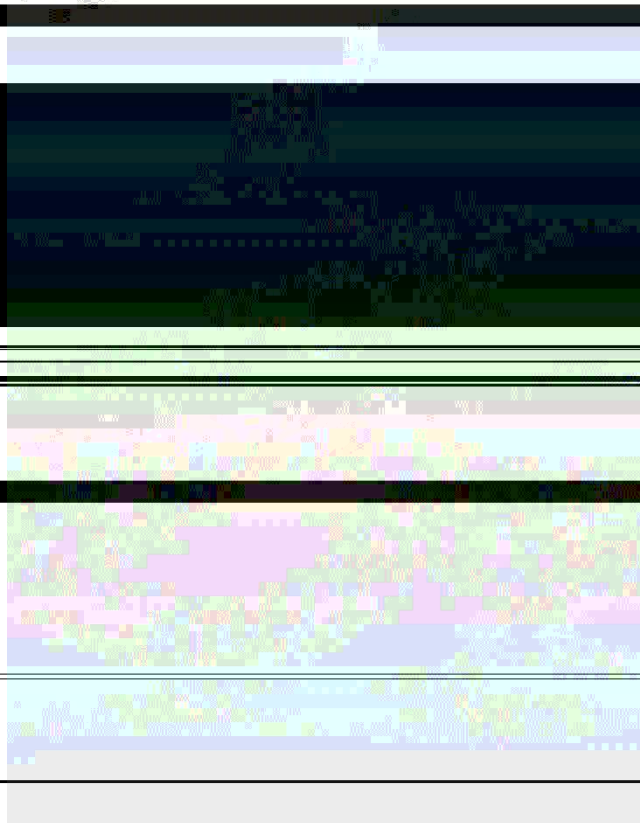
$$= 1 - (1000 \times 10^{-6}) - (1000 \times 10^{-6})$$







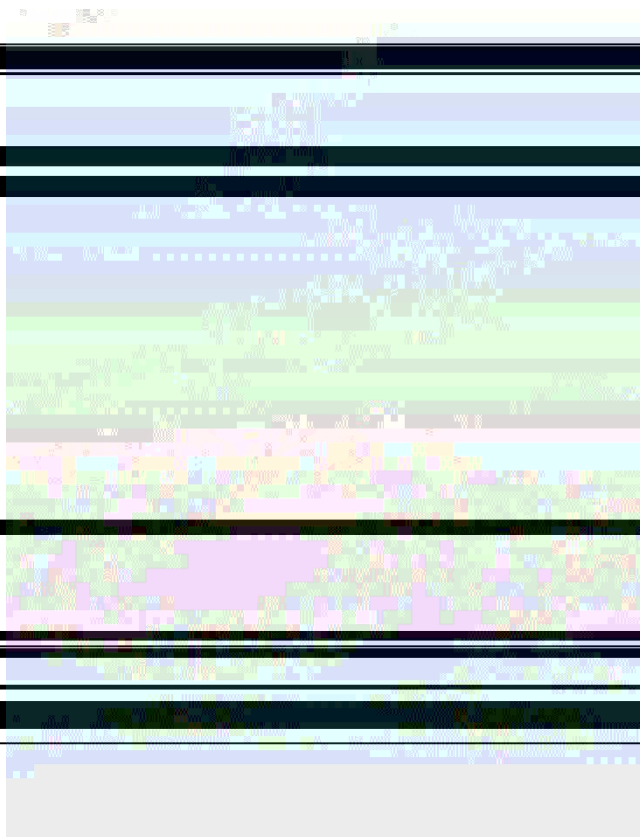
ภาพนี้เป็นตัวอย่างประกอบภาพ ๑ (1 / ๓) ทำให้เราพิจารณาดูได้ว่า ผลผลิตของพืชเป็นชนิดใดและมีความสำคัญอย่างไร.



$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

สำหรับความแปรปรวนนั้น คำนวณโดยเริ่มจากหา $E[X(X-1)]$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!}$$



$$E[X(X-1)] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+2}}{(k+2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+2)!}$$



$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

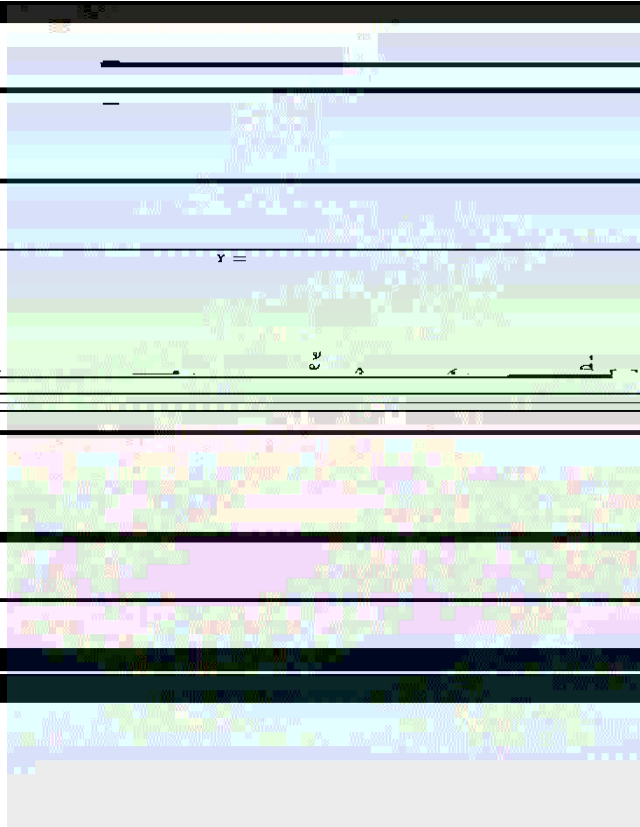
ค่าคงที่ λ เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจง และในขณะเดียวกันทำหน้าที่เป็นค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จ ที่เกิดขึ้นในช่วงต่อเนื่องช่วงหนึ่งในปัญหาที่พิจารณา เพียงแต่เราคิดเทียบขนาดของ

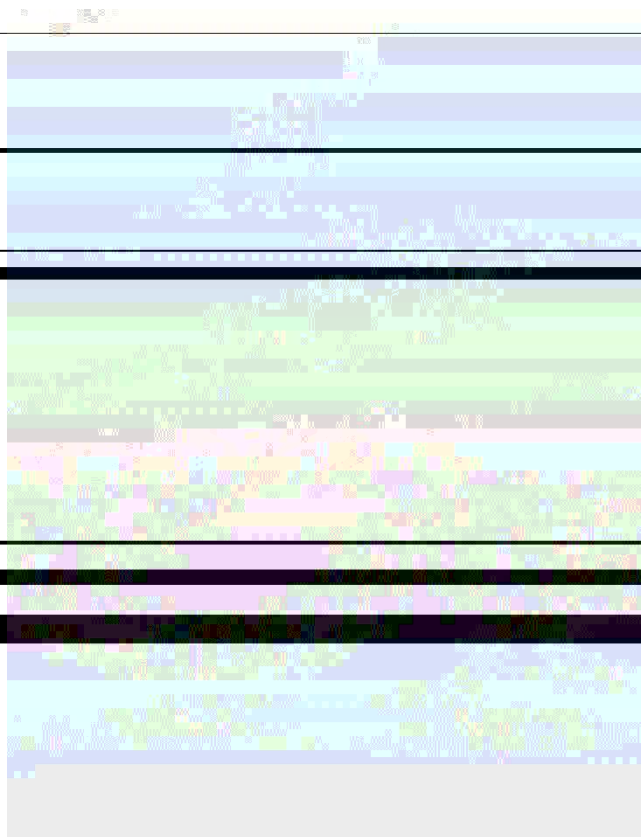
$$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]} \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \quad (5.34)$$

และ

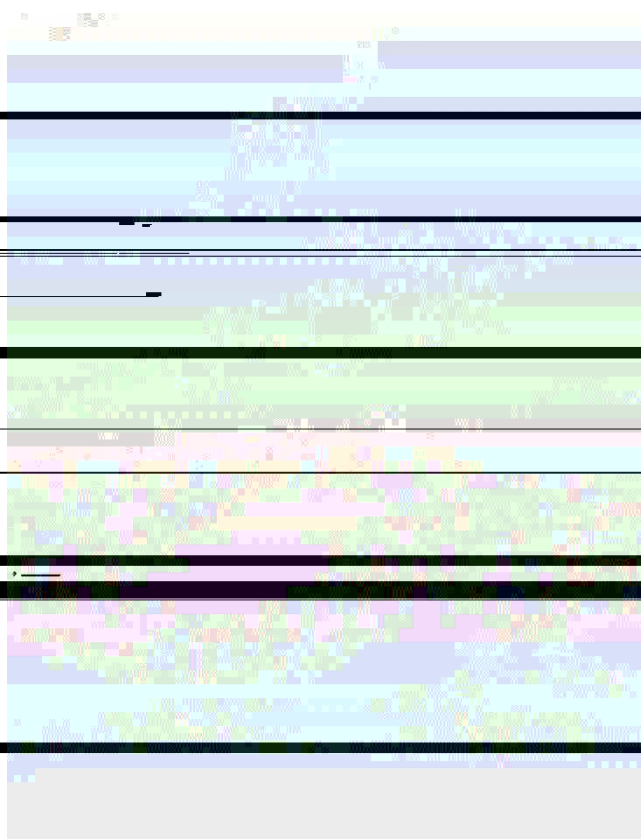
$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^4 e^{-6} 6^x$$





$$f(x) = (x-1)^2$$



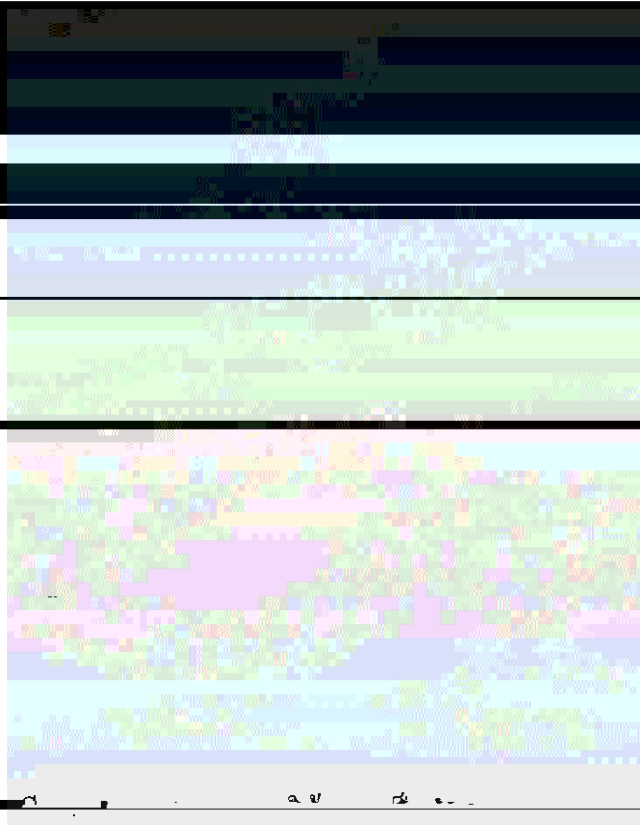
ดังนั้น

$$P(X = x) \approx \frac{e^{-k} k^x}{x!}$$

นั่นคือ X เป็น $b(n, p)$ ซึ่งประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบปัวซอง เมื่อ n มีค่าใหญ่ และ p มีค่าน้อย โดยที่ np มีค่าคงที่เท่ากับ k ซึ่งทำหน้าที่เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปัวซอง

1. กลุ่มบรรจุลูกบอลสีแดง 7 ลูก และลูกบอลสีขาว 11 ลูก หยิบลูกบอลมา 1 ลูกจากกล่องโดย







2. $f(1) = 7/18, \quad f(-1) = 11/18; \quad -4/18; \quad 308/324$

3.

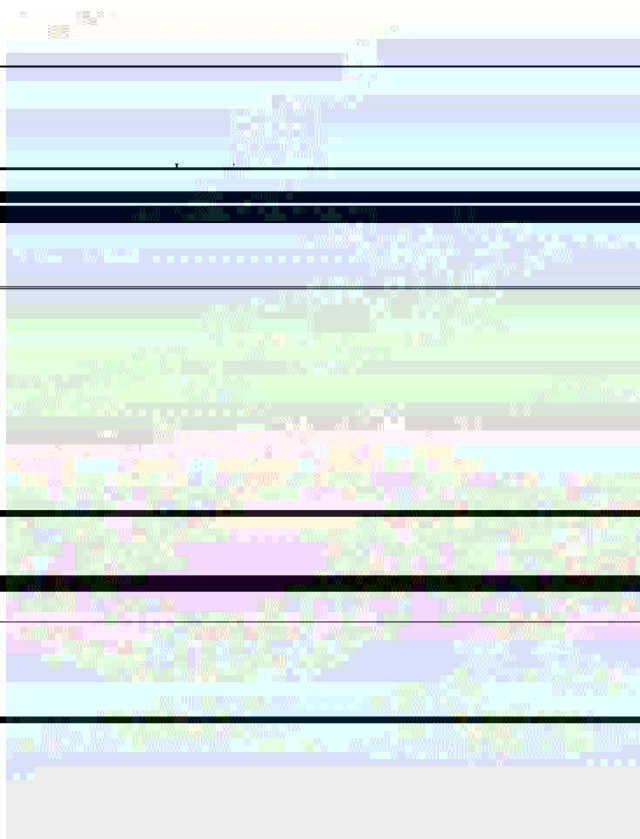
x	0	1	2	3	4
p(x)	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

5.2.1 การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (The Uniform Distribution)

ตัวแปรสุ่ม V มี การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ ถ้า $0 \leq v \leq 1$ และ V มีค่าเป็นค่าอื่น

$$0, \quad x < a$$

$$(x-a)$$



หมายเหตุ

1. เราสามารถเปรียบเทียบ ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ กับผลลัพธ์ใดๆ ของการ

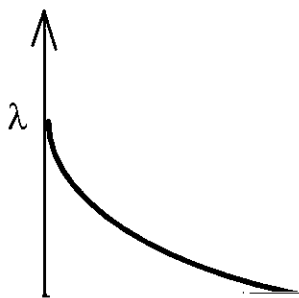
ทดลองจริงซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน ในลักษณะที่ว่าสำหรับช่วงย่อย $[c, d]$ ใดๆ เมื่อ

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ คือ

$$\mu = \frac{b+a}{2} = \int_a^b x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$b + a$$





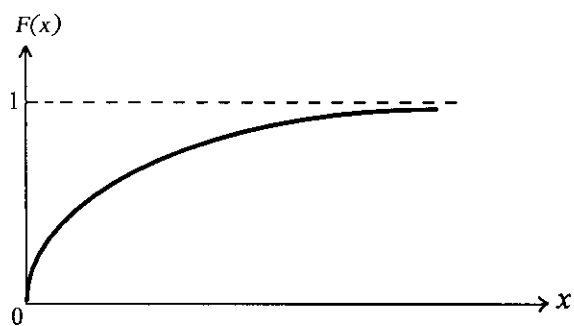
รูป 5.8

ฟังก์ชันแจกแจง F หาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (5.38) ดังต่อไปนี้

$$F(x) = 0 \quad \text{สำหรับ } x < 0$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{สำหรับ } x \geq 0 \quad (5.39)$$

กราฟของ $F(x)$ แสดงในรูป 5.9



รูป 5.9



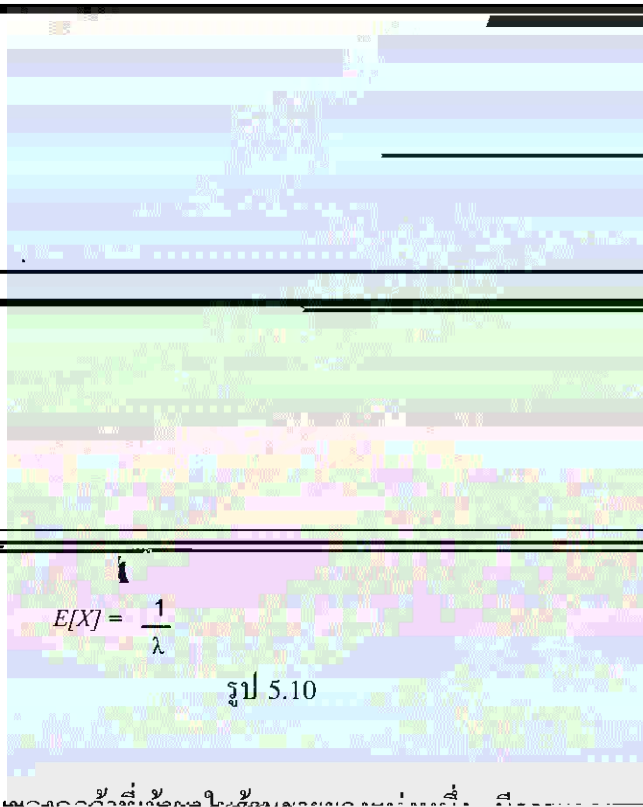
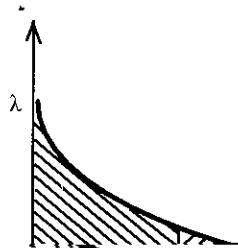
ความเข้าใจในความสัมพันธ์ของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลและการแจกแจงแบบ
ปัวซองจะช่วยให้ผู้ศึกษาสามารถพิจารณาว่า การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลควรใช้ในสถานการณ์



$$f(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \lambda_1 x - \lambda_2 y$$

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-(1-t/\lambda)\lambda x} dx
 \end{aligned}$$

$$(\quad t)^{-1}$$



ဥပမာ 5.10 အားလုံးမှန်ကန်စွာ ဖော်ပြထားသည်။

၁ ၂ ၃

วิชา

ให้ X แทนอายุการใช้งาน หรือ เวลาการใช้งานจนเกิดเหตุขัดข้องของส่วนประกอบแต่ละ

หน่วยดังนี้ ค่าใช้จ่ายในการผลิตของส่วนประกอบ $k = 1, 2, 3$



C_B มีค่าดังนี้คือ



ดังนั้น ผู้จัดการโรงงานมีแนวโน้มที่จะเลือก ระยะเวลาการผลิต R

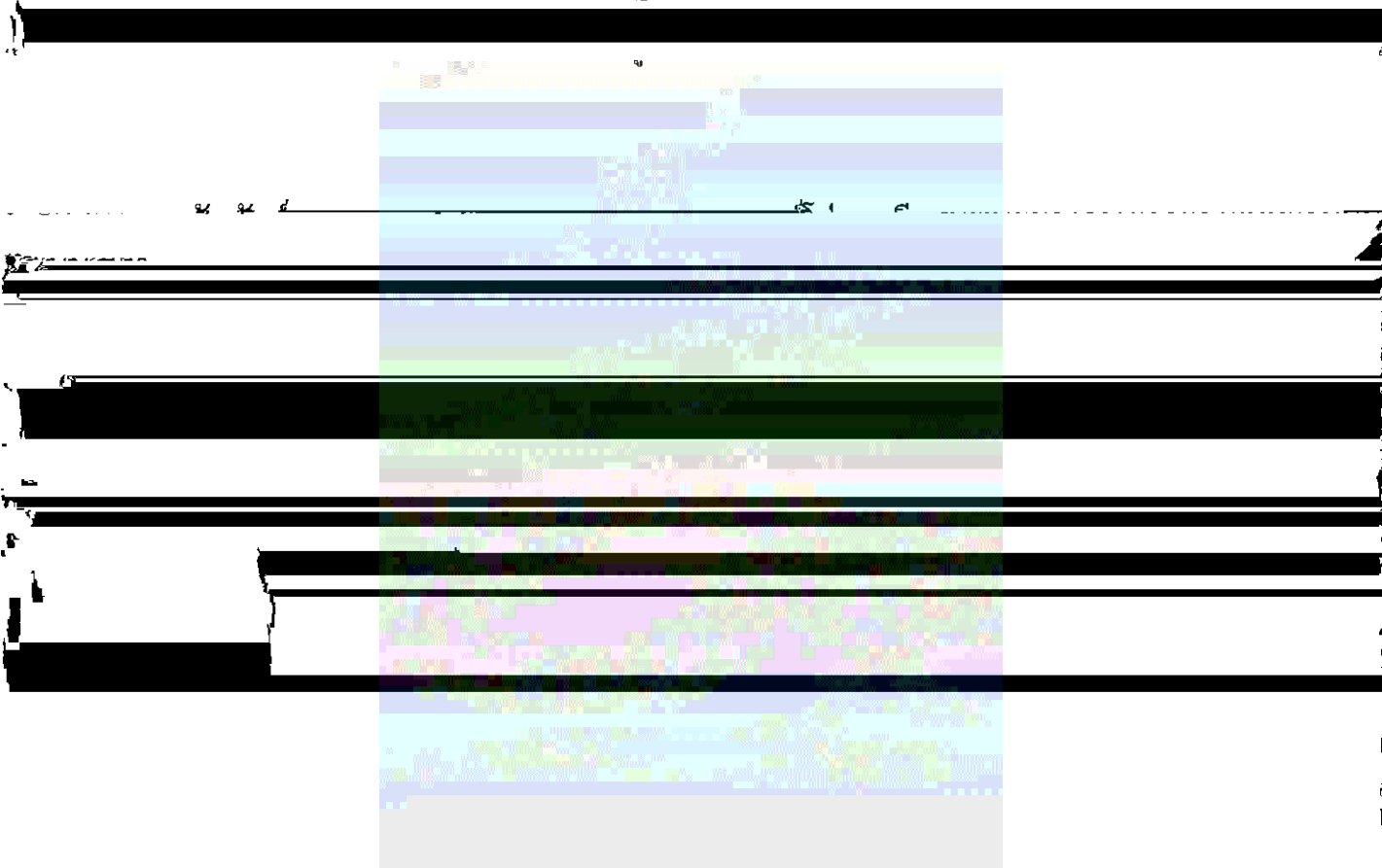
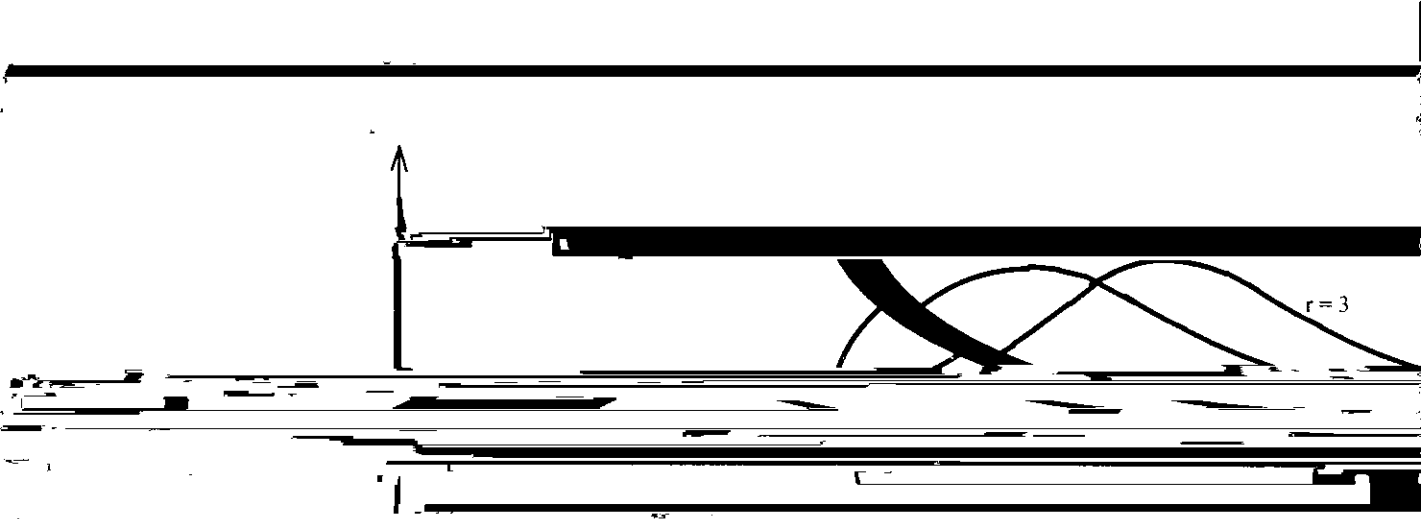


ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

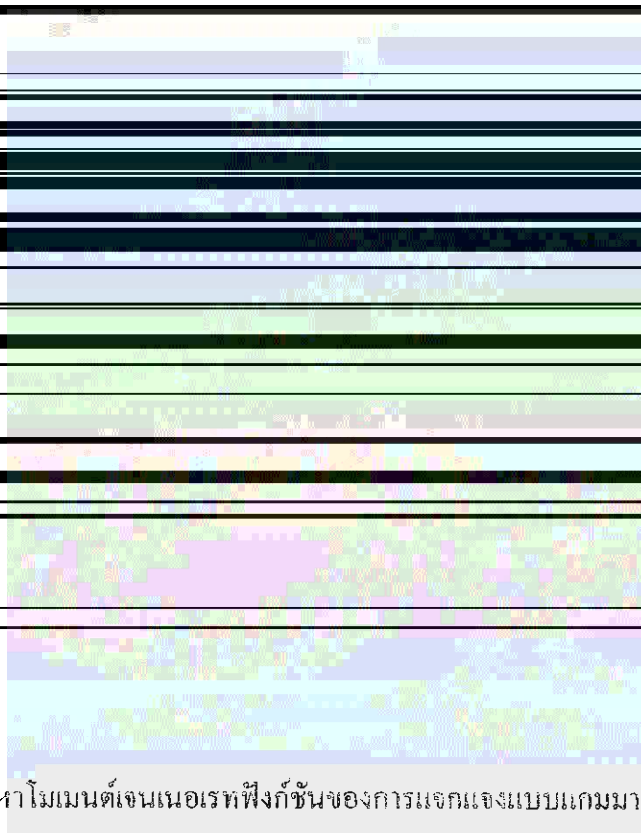
เพราะว่า $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ ดังนั้น $0! = 1$ จึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชันแกมมาเข้ารูปทั่วไป

นิยามของการแจกแจงแบบแกมมา

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบแกมมา เมื่อ p.d.f. ของ X อยู่ในรูป







เราเริ่มจากการหาโมเมนต์เจนเนอเรตฟังก์ชันของการแจกแจงแบบเกมมา

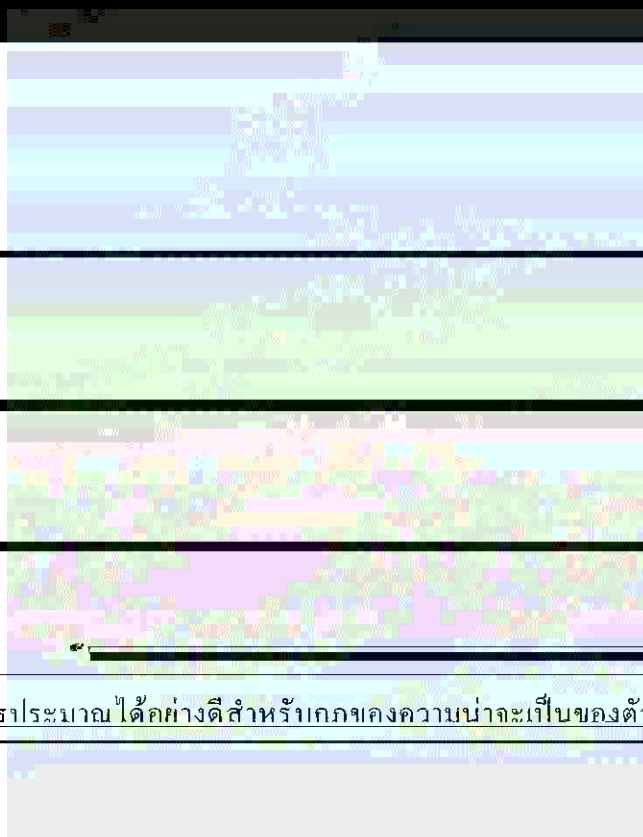
$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} (\lambda x)^{r-1} e^{-(1-t/\lambda)\lambda x} dx$$



$$f_i(x) = (1/100)e^{-x_j/100} \quad x_j \geq 0$$





แองเจลินี ใช้ในการประมาณได้อย่างดีสำหรับเกณฑ์ความน่าจะเป็นของตัวแปรส่วนหลายตัวแปร

$$\begin{aligned}
 &= \gamma \int_0^\infty e^{-y} dy + \delta \int_0^\infty y^{[(1+1/\beta)-1]} e^{-y} dy \\
 &= \gamma + \delta \Gamma(1/\beta)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1}{\gamma + \delta \Gamma(1/\beta)}$$



ว่า ความหนาแน่นการล้มเหลว (failure density) สำหรับนิยามของ R คือ ความน่าจะเป็นที่ส่วน

$$R(t) = \exp \left[- \alpha t^{\beta} \right]$$





$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

และ

สรุปคุณสมบัติของการแจกแจงแบบปกติได้ดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

1

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



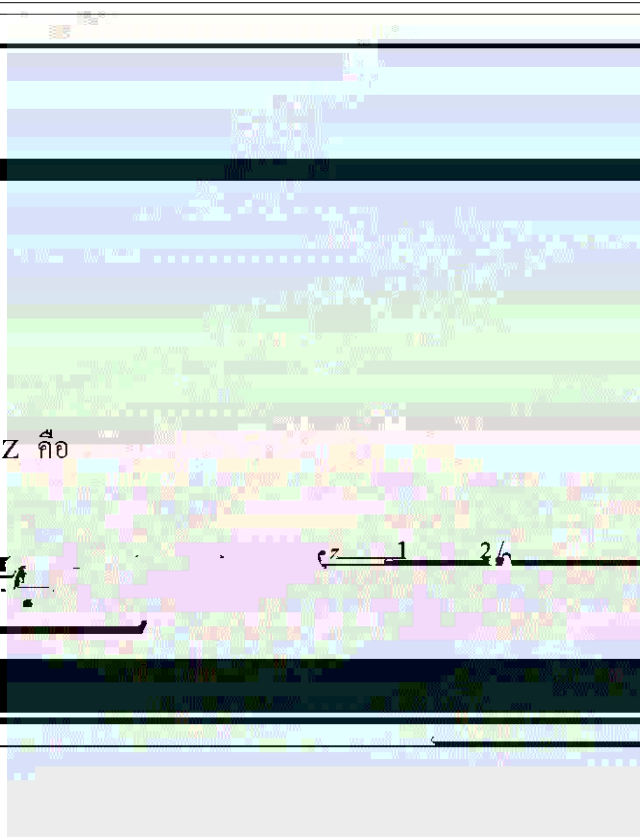
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



$$E(x) = P(Y < x) = \int^x_{-\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \left[(u - \mu)^2 \right] du. \quad (5.71)$$



ฟังก์ชันเอกเงงของ Z คือ



และค่าของ $\Phi(z)$ แสดงในตาราง 3. ในภาคผนวกท้ายบทนี้ ซึ่งทำให้เกิดความสวดกในการหา



$$P(|X - 25| \leq c) = 0.9544$$

วิธีทำ

$$X \text{ เป็น } N(25, 36) \Rightarrow \mu = 25 \text{ และ } \sigma = 6$$

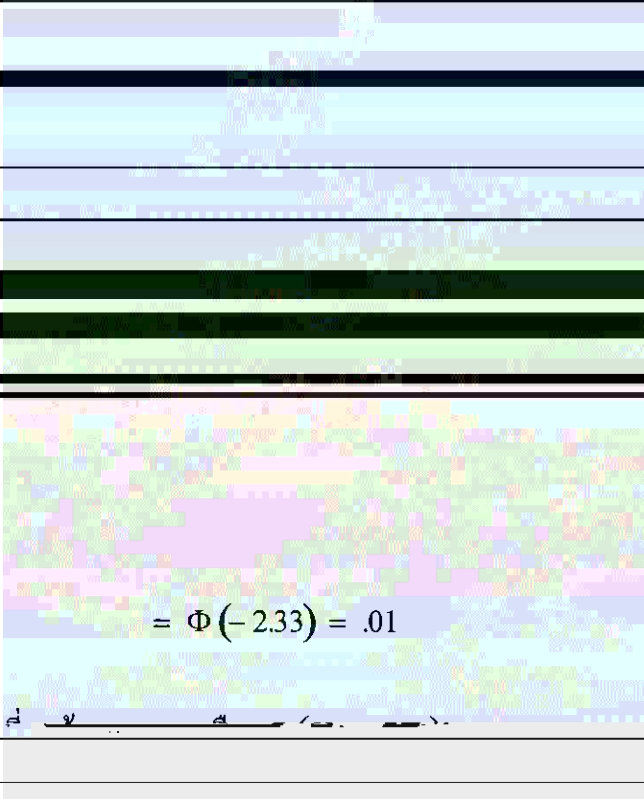
สิ่งที่เราต้องการคือ

$$\Rightarrow \Phi(c/6) - [1 - \Phi(c/6)] = 0.9544$$

$$\Phi(c/6) = (1 + 0.9544)/2 = 0.9972$$

X เป็น $N(800, 144) \Rightarrow \mu = 800 \quad \sigma = 12$

คำนวณ $P(X < 772)$ ดังนี้



The image shows a standard normal distribution curve. The horizontal axis is labeled with values -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. The area under the curve to the left of -2.33 is shaded in blue. The text "= Φ(-2.33) = .01" is written in the shaded area.

$$= \Phi(-2.33) = .01$$



$$= 1 - \Phi(2.5)$$

$$= 1 - .9938 = .0062$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของค่าใช้จ่ายทั้งหมดอันใหม่ คือ

$$E[C] = (10000 + C_p \cdot .0062) + (C_v \cdot .9938)$$

X มี $\mu = 1$ และ $\sigma = 0.25$ ดังนั้น คำนวณโดยใช้ Z แบบ $N(0,1)$

$$P(1.25 < X < 2.5)$$

$$= \Phi(2.16) - \Phi(-.4)$$

$$= .9846 - .3446 = .64$$

$$P(Z \leq z_0) = .95 \quad \text{หรือ} \quad \Phi(z_0) = .95$$

$$x_0 = 500 - 1.645 = 150 \quad (1.645) \quad 500 \quad 746.75$$



$$\int_{\mu - \sqrt{c}}^{\mu + \sqrt{c}} (x - \mu)^2 f(x) dx \geq 0$$

และ

$$\sigma^2 = \int_{\mu - \sqrt{c}}^{\mu + \sqrt{c}} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{\mu + \sqrt{c}}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx + \int_{-\infty}^{\mu - \sqrt{c}} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

แต่ $(x - \mu)^2 > c$ ก็ต่อเมื่อ $|x - \mu| > \sqrt{c}$ ดังนั้น

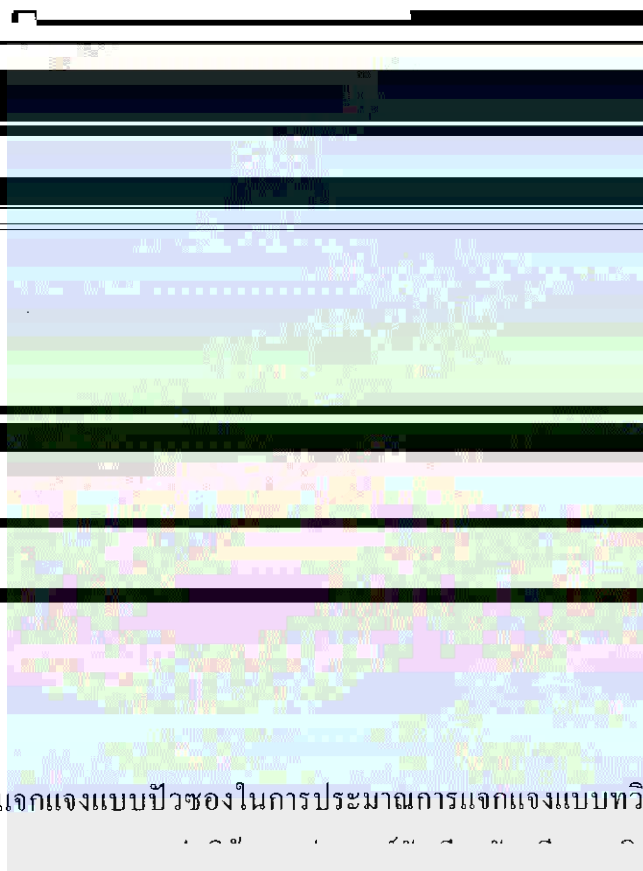
$$\sigma^2 \geq \int_{\mu - \sqrt{c}}^{\mu + \sqrt{c}} c f(x) dx + \int_{\mu + \sqrt{c}}^{\infty} c f(x) dx + \int_{-\infty}^{\mu - \sqrt{c}} c f(x) dx$$



ฉบับนี้ แต่สามารถใช้สมการนี้หาขอบเขตของความน่าจะเป็นที่ค่าของ X จะอยู่ในช่วง k หน่วย



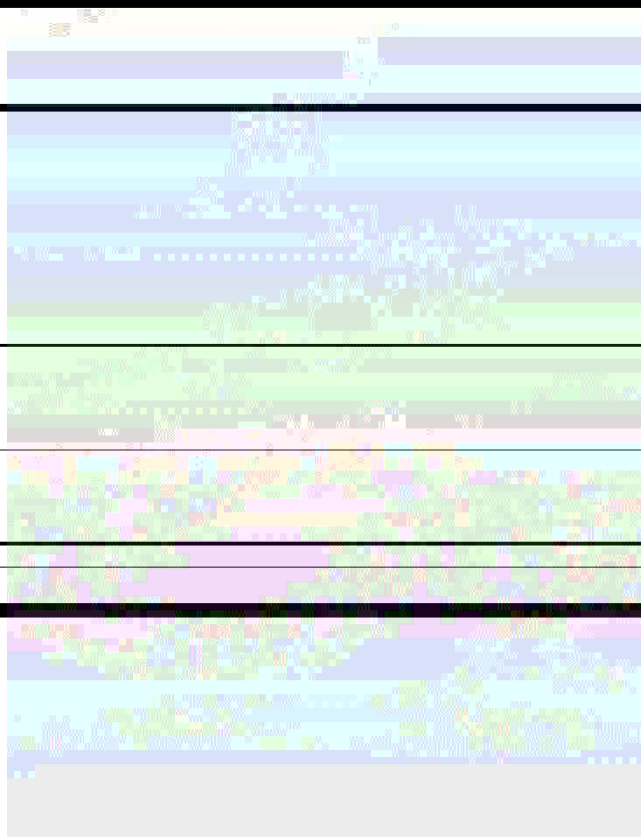
وَأَمَّا الْفُلُ فَأَنزَلْنَاهُ ذِي الْقُرْبَىٰ وَأَوْرَثْنَاهَا قَوْمَ يَافَثَ ۚ

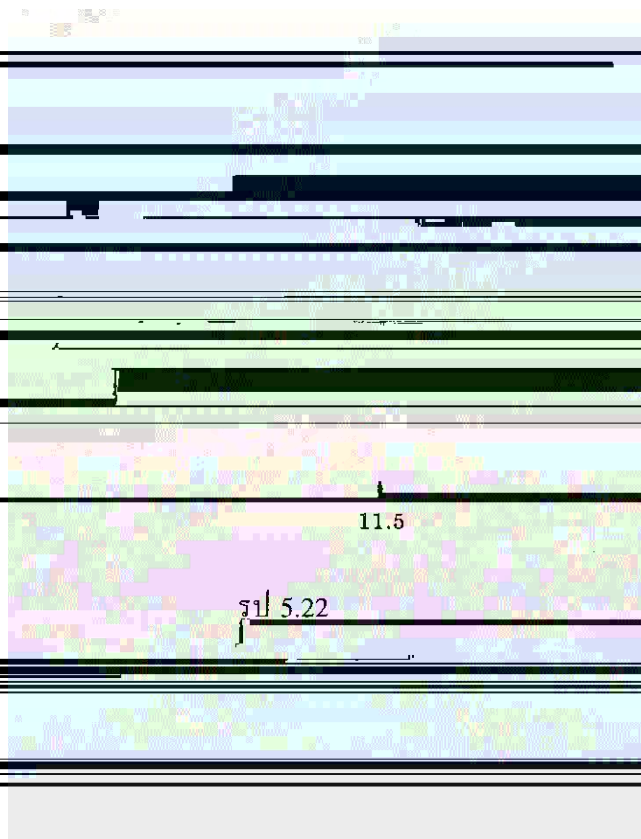


เราได้ใช้การแจกแจงแบบปัวซองในการประมาณการแจกแจงแบบทวินาม เมื่อ n มีค่าใหญ่

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.



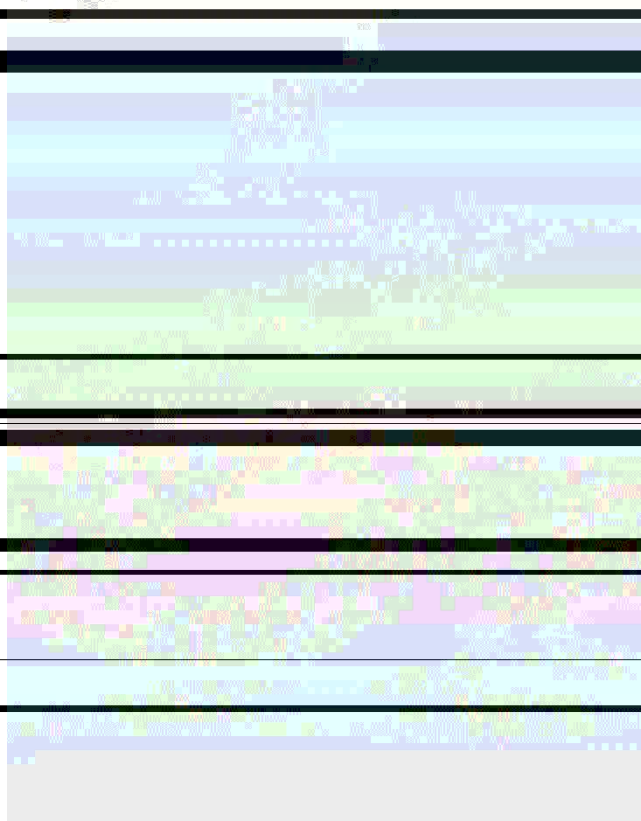




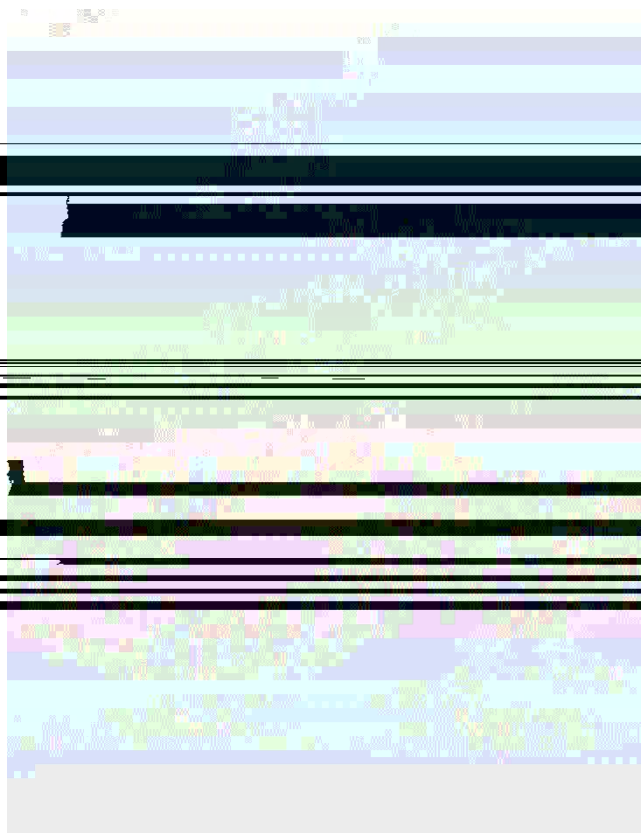


$$V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) \quad (5.79)$$





X_1, X_2 และ X_3 เชื่อมต่อกัน คุณสมบัติของ X_1, X_2, X_3 คือ



1. เลือกจุด ๆ หนึ่งโดยสุ่มจากช่วง $[0, 4]$ จงหาความน่าจะเป็นที่จุดที่เลือกได้อยู่

(a) ระหว่าง $1/2$ และ $7/4$ (b) ระหว่าง $7/4$ และ $13/4$

2. ราคาทองคำชนิดหนึ่งมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง $[30, 39]$ บาท จงหาความน่าจะเป็น

ที่ราคาทองคำ

(a) ต่ำกว่า 34 บาท (b) อยู่ระหว่าง 34 และ 37 บาท

4. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และมีสมมาตรเทียบกับเส้นที่ความแปร



ตามลำดับ ผลผลิตมีอายุการใช้งานซึ่งมีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลด้วยกัฏราเฉลี่ยของความ



ลักษณะเป็นกระบวนการปัวซองให้ X เป็นเวลารอจนกระทั่งสัญญาณครั้งที่ 10 เข้ามา



(c) $P(-2 < X \leq 0)$

(d) $P(X > 21)$

(e) $P(|X - 6| < 5)$

(f) $P(|X - 6| < 10)$

$$9. \quad C_I = C, x > 15 \qquad C_{II} = 3C, x > 15$$

$$- C, -7 \leq x < 5 \qquad \dots \dots \dots - 3C, -7 \leq x < 15$$

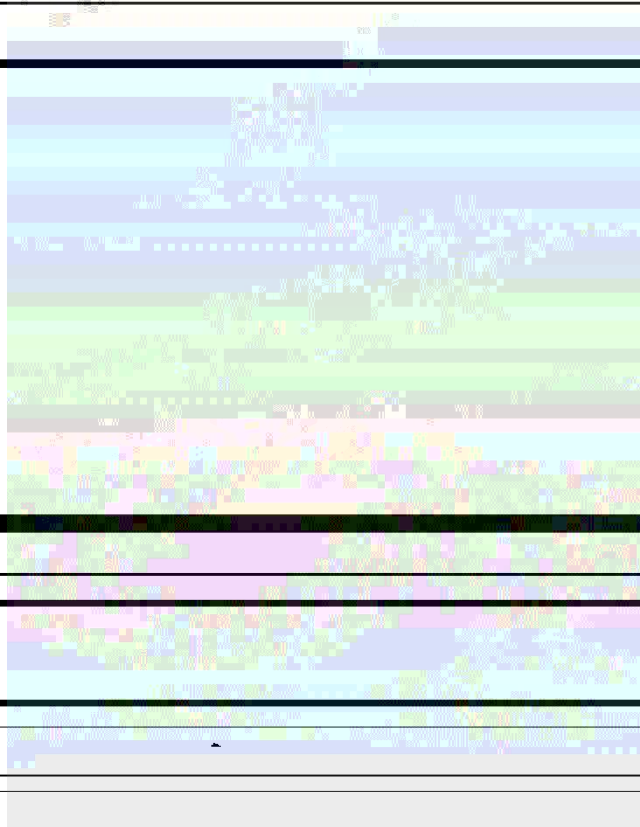
$[t] \subset \Delta$

x





1. Hines, William W., Montgomery, Douglas C., "*Probability and Statistics in Engineering and Management Science*," 2nd ed., John Wiley & Sons



New York, 1990.