

การจำลองสนามแม่เหล็กและการสั้นสะพานของมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการ
สั้นสะพานอันเป็นผลจากแท่งโรเตอร์เฉียง



นายอาร์ักษ์ บุญมาตย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ปีการศึกษา 2556

**SIMULATION FOR MAGNETIC FIELD AND
VIBRATION OF AN INDUCTION MOTOR
TO REDUCE VIBRATION CAUSED BY
SKEWED ROTOR BAR**



**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering**

Suranaree University of Technology

Academic Year 2013

การจำลองสนามแม่เหล็กและการสั้นสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการ
สั้นสะท้อนอันเป็นผลจากแท่งโรเตอร์เฉียง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อนุมัติให้ฉบับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

(ผศ. ดร.อนันต์ อุ่นศิริไธย์)

ประธานกรรมการ

(ผศ. ดร.เผด็จ เผ่าละออ)

กรรมการ (อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์)

(ผศ. ดร.กิริติ สุลักษณ์)

กรรมการ

(ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)

รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการและนวัตกรรม

(รศ. ร.อ. ดร.กนต์ธร ชำนิประศาสน์)

คณบดีสำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

อารักษ์ บุญมาตย์ : การจำลองสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำ เพื่อลดการสั่นสะเทือนอันเป็นผลจากแท่งโรเตอร์เฉียง (SIMULATION FOR MAGNETIC FIELD AND VIBRATION OF AN INDUCTION MOTOR TO REDUCE VIBRATION CAUSED BY SKEWED ROTOR BAR) อาจารย์ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ, 178 หน้า

การสั่นสะเทือน คือ ปรากฏการณ์ของการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของวัตถุภายใต้แรงที่มากระทำ โดยทั่วไปการสั่นสะเทือนมักเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการ แต่หลีกเลี่ยงไม่ได้ อย่างดีที่สุดคือพยายามจำกัดขนาดของการสั่นสะเทือนให้อยู่ภายในขอบเขตที่ยอมรับได้ สำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสการสั่นสะเทือนอาจเกิดจากหลายสาเหตุ ได้แก่ ความไม่สัมพันธ์กันระหว่างจำนวนร่องของสเตเตอร์และโรเตอร์ การเยื้องศูนย์กลางของโรเตอร์ทั้งแบบสถิตและแบบพลวัต มุมเอียงในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ และการนำอินเวอร์เตอร์มาใช้ปรับเปลี่ยนค่าความเร็วรอบแล้วส่งผลให้แหล่งจ่ายไฟที่จ่ายเข้ามอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์ที่บิดเบี้ยว สาเหตุต่างๆ เหล่านี้อาจเกิดขึ้นได้จากการออกแบบและการผลิตที่ไม่ได้มาตรฐาน ความเสื่อมสภาพตามอายุการใช้งาน หรือเกิดจากปัจจัยภายนอกอื่นๆ ที่มากระทำ ซึ่งสาเหตุต่างๆ เหล่านี้ย่อมส่งผลกระทบต่อการทำงานของมอเตอร์ที่ไม่สมดุลของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์ แล้วส่งผลให้เกิดเสียงและการสั่นสะเทือนขึ้น ทำให้มีการสูญเสียทางกล สมรรถนะในการทำงานและอายุการใช้งานของมอเตอร์ลดลง อีกทั้งประสิทธิภาพในการทำงานของบุคลากรที่ควบคุมเครื่องจักรก็จะลดลงตามไปด้วย ด้วยเหตุนี้ งานวิจัยชิ้นนี้จึงเกิดขึ้นเพื่อแสวงหาองค์ความรู้ด้านผลกระทบของร่องเฉียง (skewed slot) ในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสที่มีผลต่อการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนทางกลของมอเตอร์ โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3D-Finite Element Method) ที่พัฒนาขึ้นเอง เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาถึงมุมในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีผลต่อการสั่นสะเทือน

ARAK BUNMAT : SIMULATION FOR MAGNETIC FIELD AND
VIBRATION OF AN INDUCTION MOTOR TO REDUCE VIBRATION
CAUSED BY SKEWED ROTOR BAR. THESIS ADVISOR : ASST. PROF.
PADEJ PAO-LA-OR, Ph.D., 178 PP.

INDUCTION MOTOR/FINITE ELEMENT METHOD/ TIME STEPPING
METHOD/ COMPUTER SIMULATION/ELECTROMAGNETIC FORCE/
VIBRATION

Vibration is phenomenon of object motion back to back, under the force of the action. Normally, vibration is not requirement but inevitable. At best is attempt limit the size of the vibration within acceptable limit. For induction motor three phase the vibration may be due to several reasons. That is, irrelevant between the grooves of the stator and rotor, the eccentricity of the rotor both static and dynamic, angle in the rest of the rotor bars, and use the inverter for change speed of the round effective to input source motor is since wave as distortion. There is happen from design and manufacturing of non-standard, deterioration from used, or due to other factors external that act. Distortion of since wave effective to non-distribution of balance of the magnetic field in the motor. Then, the noise and vibration is occur. Which the noise and vibration effective to mechanical loss, performance and motor life time is down, performance of personnel as machine control will be reduced accordingly. There for, this research is occur for contribution impact of skewed slot the rest of the rotor bars in the induction motor three phase effective to distribution of magnetic field and mechanical vibration of motor use finite element 3-D method (FEM 3-D).

Developed for the way of the study of angle in the rest of the rotor bars of induction motor impact to vibration.



School of Electrical Engineering

Academic Year 2013

Student's Signature_____

Advisor's Signature _____

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เนื่องจากได้รับความช่วยเหลืออย่างยิ่ง ทั้งด้านวิชาการ และด้านดำเนินงานวิจัย จากบุคคล และกลุ่มบุคคลต่างๆ ได้แก่

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เผด็จ เผ่าละออ ผู้ช่วยอธิการบดีฝ่ายบริหาร มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำปรึกษา แนะนำ และแนะแนวทางอันเป็นประโยชน์แก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด รวมถึงได้ช่วยตรวจทาน และแก้ไขรายงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้จนทำให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น รวมทั้งเป็นกำลังใจ และเป็นแบบอย่างที่ดีในการดำเนินชีวิตหลายๆ ด้าน

ขอขอบคุณ คุณประสิทธิ์ชัย ดำเนินฐิติกิจ ตำแหน่งหัวหน้างานกลุ่มห้องปฏิบัติการวิศวกรรมการผลิต และ คุณสมภพ มหาโคตร ตำแหน่งนายช่างเทคนิคประจำศูนย์เครื่องมือวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้ความรู้และสนับสนุนทางด้านเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีที่ให้ทุนสนับสนุนค่าใช้จ่ายในการศึกษา รวมทั้งการเผยแพร่ผลงานวิจัย

ขอบคุณ พี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆ บัณฑิตศึกษาทุกท่าน ที่ให้กำลังใจในการทำวิจัยมาโดยตลอด

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณอาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ให้ความรู้ทางด้านวิชาการทั้งในอดีตและปัจจุบัน และขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้กำเนิด ความรัก กำลังใจ การอบรมเลี้ยงดู และดูแลส่งเสริมทางการศึกษาอย่างดีมาโดยตลอด จนทำให้ผู้วิจัยประสบความสำเร็จในชีวิตเรื่อยมา

อารักษ์ บุญมาตย์

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ (ภาษาไทย)	ก
บทคัดย่อ (ภาษาอังกฤษ)	ข
กิตติกรรมประกาศ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญรูป	ญ
บทที่	
1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	2
1.3 สมมุติฐานของการวิจัย	2
1.4 ขอบเขตของเบื้องต้น	2
1.5 ขอบเขตของการวิจัย	3
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
1.7 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์	3
2 ทัศนวิจารณ์กรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 บทนำ	5
2.2 ทัศนวิจารณ์กรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.3 สรุป	9
3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	10
3.1 บทนำ	10
3.2 สนามแม่เหล็ก	10
3.2.1 พื้นฐานสำหรับสนามแม่เหล็ก	10

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก.....	16
3.3 มอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส.....	17
3.3.1 โครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....	18
3.3.2 หลักการทำงานของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....	22
3.3.3 วงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....	24
3.3.4 คุณลักษณะของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....	26
3.3.5 คุณสมบัติของร่องโรเตอร์เฉียง.....	29
3.4 วิธีไฟไนท์อลลิเมนต์.....	34
3.5 สรุป.....	42
4 การคำนวณสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนท์อลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	43
4.1 บทนำ.....	43
4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก.....	43
4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กโดยวิธีไฟไนท์อลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	45
4.3.1 การแบ่งออลลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา.....	46
4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในออลลิเมนต์.....	47
4.3.3 การสร้างสมการของออลลิเมนต์.....	48
4.3.4 การแก้ปัญหายุทธศาสตร์สถานะชั่วครู่.....	56
4.3.5 การประกอบสมการออลลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ.....	56
4.3.6 การประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาผลเฉลย.....	57
4.3.7 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ.....	57
4.4 สรุป.....	58
5 การคำนวณการสั้นสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนท์อลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	59
5.1 บทนำ.....	59
5.2 การคำนวณการสั้นสะท้อนโดยวิธีไฟไนท์อลลิเมนต์แบบ 3 มิติ.....	59
5.2.1 การแบ่งออลลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา.....	59

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

5.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในและสมการของอิลลิเมนต์	60
5.3 การหาผลเฉลยสำหรับการสั่นสะเทือน	69
5.4 สรุป	73
6 โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำ	74
6.1 บทนำ	74
6.2 พารามิเตอร์ของมอเตอร์	74
6.3 การคำนวณกระแสของมอเตอร์เหนี่ยวนำ	78
6.3.1 แบบจำลองทางไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำ	78
6.3.2 แบบจำลองทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ	83
6.3.3 การคำนวณกระแสของมอเตอร์เหนี่ยวนำ	84
6.4 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผล	87
6.4.1 โปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็ก	87
6.4.2 โปรแกรมคำนวณการสั่นสะเทือน	91
6.5 สรุป	96
7 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์เฉียง	98
7.1 บทนำ	98
7.2 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและอภิปรายผล	98
7.2.1 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง	98
7.2.2 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง	116
7.2.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง	135
7.3 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนและอภิปรายผล	153
7.3.1 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง	153
7.3.2 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง	154
7.3.3 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง	155
7.4 สรุป	156

สารบัญ (ต่อ)

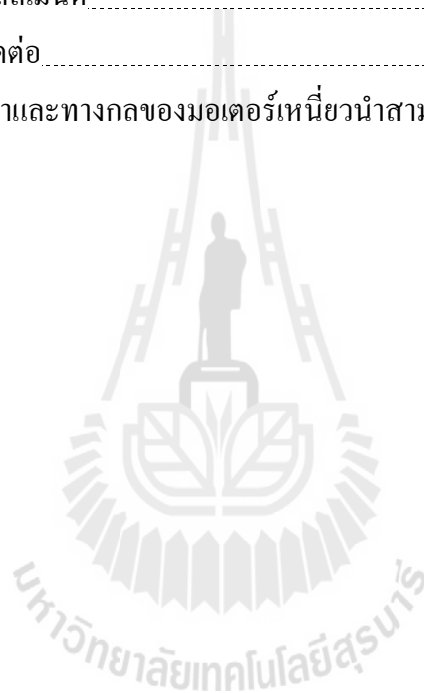
หน้า

8	สรุปและข้อเสนอแนะ	157
8.1	สรุป	157
8.2	ข้อเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต	158
	รายการอ้างอิง	159
	ภาคผนวก	
	ภาคผนวก ก. บทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา	165
	ประวัติผู้เขียน	178



สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
3.1 ลักษณะข้อมูลของอิทธิพล.....	36
3.2 ลักษณะข้อมูลของจุดต่อ.....	36
6.1 พารามิเตอร์ทางไฟฟ้าและทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสขนาด 3 แรงม้า.....	74



สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
3.1	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก.....14
3.2	ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม.....15
3.3	โครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....19
3.4	การพันขดลวดสเตเตอร์แบบสองชั้น.....21
3.5	ลักษณะตัวนำของโรเตอร์ทรงกระบอก.....22
3.6	รูปคลื่นของกระแสไฟฟ้าสามเฟส.....23
3.7	สนามแม่เหล็กหมุนที่ตำแหน่งต่างๆ.....23
3.8	วงจรสมมูลต่อเฟสของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....25
3.9	คุณลักษณะ แรงบิด-ความเร็ว ของมอเตอร์เหนี่ยวนำ.....26
3.10	เส้นแรงแม่เหล็กรั้วของโรเตอร์ทรงกระบอกร่องลึก.....27
3.11	โรเตอร์ทรงกระบอกที่มีลวดตัวนำสองชุด.....28
3.12	ลักษณะร่องต่างๆ ของโรเตอร์ทรงกระบอก.....28
3.13	คุณลักษณะ แรงบิด-ความเร็ว ตามชั้นคุณสมบัติต่างๆ.....28
3.14	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบร่องตรง.....31
3.15	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบร่องตรงเมื่อทำการตีกริด.....31
3.16	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง.....32
3.17	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อทำการตีกริด.....32
3.18	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง.....33
3.19	การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อทำการตีกริด.....33
3.20	รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด เมื่อพิจารณา อิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า.....35
3.21	การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า.....37
4.1	การแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เหนี่ยวนำด้วยรูปทรงสี่หน้า.....46

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.2	ภาพขยายการแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อบนบริเวณที่สำคัญ..... 47
5.1	การแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เพื่อคำนวณการสั่นสะเทือน..... 60
5.2	อิลลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดวงกว้าง..... 61
5.3	อิลลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น..... 62
5.4	แผนภูมิการคำนวณการสั่นสะเทือนในมอเตอร์..... 72
6.1	ภาคตัดส่วนหนึ่งของมอเตอร์เหนี่ยวนำและมิติ (mm)..... 76
6.2	ภาคตัดของร่องสเตเตอร์และมิติ (mm)..... 76
6.3	ภาคตัดของร่องโรเตอร์และมิติ (mm)..... 76
6.4	การพันขดลวดสเตเตอร์ของกระแสไฟ 3 เฟสใน 36 ร่อง..... 77
6.5	ทิศทางการไหลของกระแส ณ เวลาขณะหนึ่ง..... 78
6.6	ขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส..... 79
6.7	ขดลวดโรเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส..... 79
6.8	แบบจำลองทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ..... 83
6.9	รูปคลื่นแรงดันไฟฟ้าแต่ละเฟสที่จ่ายให้มอเตอร์..... 85
6.10	รูปคลื่นกระแสไฟฟ้าแต่ละเฟสที่จ่ายให้มอเตอร์..... 85
6.11	กราฟความเร็วรอบเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ได้จากการคำนวณ..... 86
6.12	กราฟมุมที่มอเตอร์หมุนเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ได้จากการคำนวณ..... 86
6.13	แผนภูมิแสดงการทำงานของโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็ก..... 88
6.14	แผนภูมิแสดงการทำงานของโปรแกรมคำนวณการสั่นสะเทือน..... 92
7.1	การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา..... 99
7.2	การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา..... 99
7.3	การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา..... 100

สารบัญรูป (ต่อ)

[illegible]

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.17 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา.....	107
7.18 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา.....	108
7.19 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา.....	108
7.20 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา.....	109
7.21 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา.....	109
7.22 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา.....	110
7.23 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา.....	110
7.24 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา.....	111
7.25 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบร่องตรงเมื่อโรเตอร์หมุนไป.....	113
7.26 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง.....	116
7.27 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา.....	117
7.28 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา.....	117
7.29 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา.....	118

สารบัญรูป (ต่อ)

[illegible]

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.43 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา.....	126
7.44 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา.....	126
7.45 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา.....	127
7.46 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา.....	127
7.47 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา.....	128
7.48 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา.....	128
7.49 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา.....	129
7.50 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา.....	129
7.51 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไป.....	131
7.52 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง.....	134
7.53 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา.....	135
7.54 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา.....	135
7.55 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา.....	136

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
7.69 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา.....	144
7.70 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา.....	144
7.71 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา.....	145
7.72 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา.....	145
7.73 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา.....	146
7.74 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา.....	146
7.75 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา.....	147
7.76 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา.....	147
7.77 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไป.....	149
7.78 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง.....	152
7.79 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบร่องตรง.....	153
7.80 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง.....	154
7.81 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณา ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง.....	155

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การสั่นสะเทือน คือ ปรากฏการณ์ของการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของวัตถุภายใต้แรงที่กระทำ ซึ่งอาจเป็นแรงกระทำจากภายในที่ก่อให้เกิดการสั่นสะเทือนแบบอิสระ (free vibration) โดยต้นด้วยความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ซึ่งอาจมีความถี่เดียวหรือหลายความถี่ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของระบบ หรือเป็นแรงกระทำจากภายนอกที่ก่อให้เกิดการสั่นสะเทือนแบบบังคับ (forced vibration) โดยต้นด้วยความถี่เท่ากับความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำ และถ้าความถี่ที่มากระทำเท่ากับความถี่ธรรมชาติ จะทำให้เกิดปรากฏการณ์เรโซแนนซ์ (resonance) นั่นคือขนาดของการสั่นสะเทือนจะถูกขยายขึ้นจนทำให้เกิดความเสียหายแก่ระบบได้ โดยทั่วไปการสั่นสะเทือนมักเป็นสิ่งที่ต้องการ แต่หลีกเลี่ยงไม่ได้ อย่างดีที่สุดคือพยายามจำกัดขนาดของการสั่นสะเทือนให้อยู่ภายในขอบเขตที่ยอมรับได้ สำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสการสั่นสะเทือนอาจเกิดจากหลายสาเหตุได้แก่ ความไม่สัมพันธ์กันระหว่างจำนวนร่องสเตเตอร์และโรเตอร์ การเยื้องศูนย์กลางของโรเตอร์ทั้งแบบสถิต (static eccentricity) และแบบพลวัต (dynamic eccentricity) และการนำอินเวอร์เตอร์มาใช้ปรับเปลี่ยนค่าความเร็วรอบแล้วส่งผลให้แหล่งจ่ายไฟฟ้าที่จ่ายเข้ามอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์ที่บิดเบี้ยว สาเหตุต่างๆเหล่านี้อาจเกิดขึ้นได้จากการออกแบบและการผลิตที่ไม่ได้มาตรฐาน ความเสื่อมสภาพตามอายุการใช้งาน หรือเกิดจากปัจจัยภายนอกอื่นๆ ที่มากระทำ ซึ่งสาเหตุต่างๆเหล่านี้ย่อมส่งผลต่อการกระจายตัวที่ไม่สมดุลของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์แล้วส่งผลให้เกิดเสียงและการสั่นสะเทือนขึ้น ทำให้มีการสูญเสียทางกล สมรรถนะในการทำงานและอายุการใช้งานของมอเตอร์ลดลง อีกทั้งประสิทธิภาพในการทำงานของบุคลากรที่ควบคุมเครื่องจักรก็จะลดลงตามไปด้วย (เผด็จ เผ่าละออ, 2548) อย่างไรก็ตาม ณ ปัจจุบันสำหรับประเทศไทย ปัญหาเรื่องเสียงและการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นในมอเตอร์เหนี่ยวนำซึ่งเป็นที่นิยมนำใช้กันอย่างแพร่หลาย ก็ยังถูกมองข้ามและขาดการเอาใจใส่อย่างจริงจัง

ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่สามารถใช้การอธิบายด้วยสมการอนุพันธ์ (differential equation) หรือสมการอินทิกรัล (integral equation) สมการอนุพันธ์บางรูปแบบอาจหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยากหรือทำไม่ได้จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณซึ่งวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลายวิธีวิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมาคือ วิธี

ผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) ซึ่งเป็นวิธีการที่ง่ายแก่การศึกษาและการทำความเข้าใจ รวมไปถึงความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ส่วนข้อเสียของการใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง มีหลายประการเช่น ความสะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และที่สำคัญที่สุดคือ ความยากลำบากในการประยุกต์วิธีการนี้เพื่อใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนอย่างเช่น โครงสร้างหรือชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องจักรกลไฟฟ้า สาเหตุของความยากลำบากดังกล่าวมีส่วนก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณวิธีใหม่ที่เรียกว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method: FEM) ซึ่งวิธีนี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนใดๆ ก็ได้โดยสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงและเที่ยงตรงกว่า

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อพัฒนาองค์ความรู้ด้านการสันสะเทือนทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส

1.2.2 เพื่อพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ สำหรับคำนวณค่าสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำและการแปลงพลังงานไปอยู่ในรูปทางกล ให้สามารถคำนวณได้อย่างถูกต้อง

1.2.3 เพื่อแสวงหาองค์ความรู้ด้านผลกระทบของร่องโรเตอร์เฉียง (skewed slot) ในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีผลต่อการสันสะเทือนทางกลของตัวมอเตอร์ โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

1.3 สมมุติฐานของการวิจัย

การวางตัวของร่องเฉียงของแท่งโรเตอร์มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กและการสันสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

1.4 ข้อตกลงเบื้องต้น

1.4.1 มอเตอร์อยู่ในสภาพสมบูรณ์ ไม่มีการเอียงศูนย์กลางของโรเตอร์ และแหล่งจ่ายไฟฟ้าเป็นรูปคลื่นไซน์ที่สมบูรณ์

1.4.2 กำหนดให้การวางตัวของขดลวดสเตเตอร์เต็มร่องตลอดทั้งชั้นบนและชั้นล่างของร่องสเตเตอร์เมื่อพิจารณาการพันขดลวดเป็นแบบสองชั้น (double layer winding)

1.4.3 ไม่พิจารณาบริเวณตัวนำรูปวงแหวน (end ring) ที่อยู่ปลายทั้งสองด้านของแท่งตัวนำ (rotor bar)

1.4.4 วัสดุที่ใช้ทำมอเตอร์มีคุณสมบัติเป็นไอโซทรอปิก (isotropic) และความเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous)

1.5 ขอบเขตของการวิจัย

1.5.1 ใช้ MATLABTM เพื่อพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์ออลลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ

1.5.2 พิจารณามอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส 4 ขั้ว ชนิดกรงกระรอก (squirrel cage)

1.5.3 ดำเนินการคำนวณเพื่อพัฒนาองค์ความรู้ด้านผลของแท่งโรเตอร์เฉียงที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนทางกล

1.5.4 วิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนเป็นแบบ 3 มิติ

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ได้โปรแกรมจำลองผลที่เกิดจากการพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์ออลลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาจริงในการออกแบบและวิเคราะห์การสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส

1.6.2 ได้ข้อสรุปอันเป็นผลประโยชน์เกี่ยวกับมุมมองในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ที่ส่งผลต่อการสั่นสะเทือนทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

1.7 การจัดรูปเล่มวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วย 8 บท 1 ภาคผนวก ซึ่งมีรายละเอียดโดยย่อ ดังนี้

บทที่ 1 เป็นบทนำซึ่งจะกล่าวถึงความสำคัญของปัญหาวัตถุประสงค์และเป้าหมายของงานวิจัยวิทยานิพนธ์ ตลอดจนขอบเขตและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัยนี้

บทที่ 2 กล่าวถึงการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อให้ทราบถึงแนวทางและระเบียบวิธีการวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยผลจากการสำรวจสืบค้น จะใช้เป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 3 นำเสนอทฤษฎีต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยวิทยานิพนธ์ซึ่งประกอบไปด้วย 3 หัวข้อหลักๆ ได้แก่ สนามแม่เหล็กมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสและวิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์

บทที่ 4 มีเนื้อหาว่าด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์และขั้นตอนต่างๆในการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กดังกล่าว

บทที่ 5 มีเนื้อหาว่าด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์และขั้นตอนต่างๆในการประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์ออลลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าการสั่นสะเทือนดังกล่าว

บทที่ 6 อธิบายถึงโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั้นสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบ 3 มิติ โดยกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่ประยุกต์ใช้ในการจำลองผล รวมถึงอธิบายโครงสร้างของโปรแกรมจำลอง

บทที่ 7 กล่าวถึงผลลัพธ์ของการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและขนาดของการสั้นสะท้อนในมอเตอร์ขนาดเล็กจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นเมื่อพิจารณารูปร่างของร่องโรเตอร์แบบดั้งเดิมเทียบกับรูปร่างของร่องโรเตอร์แบบเฉียง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลทางกายภาพของร่องโรเตอร์แบบเฉียงว่าส่งผลต่อการสั้นสะท้อนในมอเตอร์อย่างไร

บทที่ 8 เป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะพร้อมงานวิจัยที่จะดำเนินการต่อ

ภาคผนวก ก. เป็นการรวบรวมผลงานที่ได้รับการเผยแพร่ของงานวิจัยวิทยานิพนธ์ในขณะดำเนินการศึกษา



บทที่ 2

ปรัทัศนัวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 1 ว่าวัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยนี้คือศึกษาการวางตัวของร่องโรเตอร์เฉียงที่มุมต่างๆที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนทางกล (ซึ่งต่อจากนี้อาจเรียกโดยย่อว่าการสั่นสะเทือน) ในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสโดยเลือกใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์มาเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องดำเนินการสำรวจปรัทัศนัวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อให้ทราบถึงแนวทางการวิจัยระเบียบวิธีที่เคยมีการใช้งานมาก่อนผลการดำเนินงานข้อเสนอแนะต่างๆจากคณณักวิจัยตั้งแต่อดีตเป็นต้นมาโดยใช้ฐานข้อมูลที่เป็นแหล่งสะสมรายงานวิจัยและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอันได้แก่ฐานข้อมูลจาก IEEE, IEE และ ScienceDirect เป็นต้นผลการสำรวจสืบค้นงานวิจัยดังกล่าวจะใช้เป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์และพัฒนาเข้ากับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้

2.2 ปรัทัศนัวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การนำเสนอปรัทัศนัวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในเรื่องการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันสามารถสรุปโดยย่อเป็นตารางได้ดังตารางที่ 2.1 โดยจัดลำดับการเรียบเรียงจากงานที่มีผู้ได้ดำเนินการก่อนไปสู่งานที่ใหม่กว่าได้ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ค.ศ.	คณณผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
1991	Belmans, Verdyck, Geysen, and Findlay	อธิบายถึงเสียงที่เกิดขึ้นในมอเตอร์เหนี่ยวนำอันมีสาเหตุมาจากการนำอินเวอร์เตอร์มาใช้ในการปรับเปลี่ยนค่าความเร็วของมอเตอร์และนำวิธีไฟไนท์เอลิเมนต์มาคำนวณหาความถี่ธรรมชาติเพื่อป้องกันการเกิดเรโซแนนซ์

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
1993	Berman	ดำเนินการศึกษาการเอียงศูนย์กลางของโรเตอร์ทั้งแบบสถิตและแบบพลวัต ที่ส่งผลต่อการเกิดเสียงและการสั่นสะเทือนขึ้นในมอเตอร์เหนี่ยวนำ ซึ่งการแก้ไขการเอียงศูนย์กลางดำเนินการโดยติดตั้งตัวปรับเท่าเข้าไปในขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์
1994	Munoz, and Araya	พิจารณาถึงการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำ เนื่องจากแหล่งจ่ายไฟที่จ่ายเข้ามอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์ที่บิดเบี้ยว
1995	Dorrell, Thomson, and Roach	ศึกษาการเอียงศูนย์กลางของโรเตอร์ทั้งแบบสถิตและแบบพลวัต ที่ส่งผลต่อการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ
1995	Yacamini, and Chang	อธิบายถึงการเกิดเสียงและการสั่นสะเทือนที่เกิดจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำอันมีสาเหตุมาจากแหล่งจ่ายไฟที่จ่ายเข้ามอเตอร์ไม่เป็นรูปคลื่นไซน์อย่างบริสุทธิ์ซึ่งการกระจายตัวของฟลักซ์แม่เหล็กสามารถคำนวณได้โดยใช้ทฤษฎีคลื่นความนำแม่เหล็ก
1996	Dorrell	ศึกษาการดูดของฟลักซ์แม่เหล็กเนื่องจากความไม่สมดุลเมื่อออกแบบให้โรเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำมีร่องเฉียงประกอบกับมีการเอียงศูนย์กลางแบบพลวัตของโรเตอร์เกิดขึ้นโดยการกระจายตัวของฟลักซ์แม่เหล็กดำเนินการโดยใช้ทฤษฎีคลื่นความนำแม่เหล็ก
1997	Nau	ศึกษาร่องเฉียงของโรเตอร์ในสภาวะไร้โหลดที่มีผลต่อแรงแม่เหล็กไฟฟ้าแล้วก่อให้เกิดเสียงขึ้นในมอเตอร์เหนี่ยวนำ
1997	Kobayashi, Tajima, Ito, and Shibukawa	พิจารณาผลลัพธ์ของการเกิดเสียงดังในมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อมอเตอร์ไม่มีโหลดอันเป็นผลเนื่องมาจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนร่องของสเตเตอร์และจำนวนร่องของโรเตอร์โดยนำวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการวิเคราะห์ฟูริเยร์มาใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์

ตารางที่ 2.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (ต่อ)

ค.ศ.	คณะผู้ทำวิจัย	การดำเนินงานวิจัย
1997	Hirotsuka, Tsuboi, and Ishibashi	พิจารณาขนาดของการสั้นสะท้อนในมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อมอเตอร์ขับโหลด อันเป็นผลเนื่องมาจากความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนร่องของสเตเตอร์และจำนวนร่องของโรเตอร์
1999	Mikami, Ide, Takahashi, and Kajiware	อธิบายถึงเสียงที่เกิดจากการกระทำของแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีสาเหตุมาจากแหล่งจ่ายไฟไม่เป็นรูปคลื่นไซน์ซึ่งการกระจายตัวของฟลักซ์แม่เหล็กสามารถคำนวณได้โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการวิเคราะห์ฟูริเยร์
1999	Sakamoto, Hirata, Kobayashi, and Kajiware	นำไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการแก้ปัญหาทั้งทางด้านฟลักซ์แม่เหล็กซึ่งพิจารณาปัญหาเป็นแบบสองมิติในสถานะชั่วคราวและปัญหาด้านกลศาสตร์เพื่อนำมาวิเคราะห์สัญญาณการสั้นสะท้อนที่เกิดขึ้นในมอเตอร์เหนี่ยวนำ
1999	Wang, and Lai	วิเคราะห์เสียงและการสั้นสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำที่เกิดจากฮาร์มอนิกที่ผลิตได้จากอินเวอร์เตอร์โดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
1999	Fu	ได้พิจารณาผลกระทบของการสั้นสะท้อนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ อันเป็นผลเนื่องมาจากการออกแบบร่องเฉียง (skewed slot) ของโรเตอร์ ซึ่งเป็นการพิจารณาแบบ 2 มิติ โดยใช้เทคนิคการแบ่งปริมาตรของมอเตอร์ให้เป็นพื้นที่แผ่นบางๆ หลายๆ แผ่น

จากวรรณกรรมและงานวิจัยที่ได้สรุปผ่านมาสามารถช่วยให้ผู้ที่จะดำเนินการศึกษาหรือพัฒนาเกี่ยวกับงานวิจัยนี้พอมองภาพออกอย่างกว้างๆ ว่ามีคณะนักวิจัยใดได้ศึกษาสิ่งใดไปแล้วบ้าง แต่ยังไม่สามารถแยกเป็นหมวดหมู่ตามวิธีการดำเนินงานศึกษาได้อย่างชัดเจนดังนั้นในส่วนถัดไปนี้ จึงได้ทำการเรียบเรียงและคัดสรรงานวิจัยหลักๆ ที่สำคัญและมีความแตกต่างกันอย่างเด่นชัดจากหลายๆ ผลงานที่ได้สรุปไว้ในตารางที่ 2.1 โดยจะได้กล่าวถึงการนำทฤษฎีหลักการและวิธีการ

ดำเนินงานวิจัยต่างๆที่ใช้วิเคราะห์และลดปัญหาของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำและยังมีการเสริมถึงผลลัพธ์ที่ได้จากงานวิจัยนั้นๆโดยย่อ

เริ่มต้นจากBelmans, Verdyck, Geysen, and Findlay (1991), Munoz, and Araya (1994), Yacamini, and Chang (1995), Mikami, Ide, Takahashi, and Kajiwara (1999) และ Wang, and Lai (1999) ได้อธิบายถึงการเกิดเสียงและการสั่นสะเทือนซึ่งเกิดจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) ของมอเตอร์เหนี่ยวนำอันมีสาเหตุมาจากแหล่งจ่ายไฟฟ้าที่จ่ายเข้ามอเตอร์ไม่เป็นรูปคลื่นไซน์ (nonsinusoidal waveform) อย่างบริสุทธิ์ จึงส่งผลกระทบต่อการทำงานของฟลักซ์แม่เหล็ก ซึ่งฟลักซ์แม่เหล็กสามารถคำนวณได้โดยใช้ทฤษฎีคลื่นความนำแม่เหล็ก (permeance wave theory) หรือวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ งานวิจัยของ Berman (1993) และ Dorrell, Thomson, and Roach (1995) ได้ดำเนินการศึกษาการเยื้องศูนย์กลางของโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำ ซึ่งส่งผลกระทบต่อฟลักซ์แม่เหล็กที่ตกคร่อมช่องอากาศ (air gap) โดยจะเกิดการหลุดของฟลักซ์แม่เหล็กเนื่องจากความไม่สมดุล จึงส่งผลให้เกิดเสียงและการสั่นสะเทือนขึ้นในมอเตอร์ การแก้ไขการเยื้องศูนย์กลางทำได้โดยการติดตั้งตัวปรับเท่า (equalizing connections) เข้าไปในขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำ เพื่อผลิตแรงเคลื่อนแม่เหล็ก (magnetomotive force: mmf) ไปปรับแก้การกระจายตัวที่ไม่สมดุลของฟลักซ์แม่เหล็ก ส่วน Kobayashi, Tajima, Ito, and Shibukawa (1997), Hirotaka, Tsuboi, and Ishibashi (1997) และ Sakamoto, Hirata, Kobayashi, and Kajiwara (1999) ได้พิจารณาผลลัพธ์ของการเกิดเสียงและการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ อันเป็นผลเนื่องมาจากความสัมพันธ์กันระหว่างจำนวนร่องของสเตเตอร์และจำนวนร่องของโรเตอร์ โดยดำเนินการออกแบบจำนวนร่องของสเตเตอร์และโรเตอร์ให้เหมาะสม และ Dorrell (1996), Nau (1997) และ Fu (1999) ได้พิจารณาผลกระทบของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ อันเป็นผลเนื่องมาจากการออกแบบร่องเฉียง (skewed slot) ของโรเตอร์ ซึ่งเป็นการพิจารณาเพียง 2 มิติ โดยใช้เทคนิคการแบ่งปริมาตรของมอเตอร์ให้เป็นพื้นที่แผ่นบางๆ หลายๆ แผ่น (2-D multi-slice) เพื่อเลี่ยงการพิจารณาแบบ 3 มิติ ที่ค่อนข้างยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งเป็นเรื่องที่ยากที่จะหามุมที่ดีที่สุดของแท่งโรเตอร์ที่ส่งผลให้การสั่นสะเทือนในมอเตอร์น้อยที่สุด โดยส่วนใหญ่จะพิจารณามุมเป็นช่วงๆตามระยะของร่อง (Yoshihiro Kawase, Tadashi Yamaguchi, Zhipeng Tu, Naotaka Toida, Norimoto Minoshima, and Kou Hashimoto, 2009) จากการทบทวนวรรณกรรม / สารสนเทศที่เกี่ยวข้องทั้งหมดจะเห็นว่า มีปริมาณการวิจัยอยู่น้อยมากที่พิจารณาผลกระทบในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีต่อการสั่นสะเทือนด้วยการพิจารณาเป็นแบบ 3 มิติ ซึ่งการจำลองผลเพียงแค่ 2 มิติ ผลลัพธ์ที่ได้อาจยังคงมีความแตกต่างกับสภาพความเป็นจริงอยู่มาก และถึงแม้จะพิจารณาแบบ 3 มิติ ก็ตาม งานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่มีราคาค่อนข้างสูง ทั้งยังขาดความยืดหยุ่นในการโปรแกรม ด้วยเหตุนี้ งานวิจัยชิ้นนี้เกิดขึ้นเพื่อแสวงหาองค์ความรู้ด้าน

ผลกระทบของร่องเฉียง (skewed slot) ในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีต่อการสั่นสะเทือนทางกลของตัวมอเตอร์ โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการวางตัวของแท่งโรเตอร์ (skewed rotor bar) ในมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อบรรลुวัตถุประสงค์ของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์ให้มีความน้อยลง

2.3 สรุป

บทที่ 2 นี้ ได้นำเสนอรายงานผลการสืบค้นวรรณกรรมวิจัยย้อนหลังที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่จะดำเนินการ จากฐานข้อมูล IEEE, IEE, ScienceDirect และอื่นๆ ซึ่งทำให้ทราบถึงแนวทางการวิจัยที่เกี่ยวข้อง ระเบียบวิธีที่ผู้วิจัยอื่นๆ ได้นำมาใช้ ผลการดำเนินงาน ข้อเสนอแนะต่างๆ จากคณณักวิจัยตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน จากการสืบค้นปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องไม่เคยปรากฏงานวิจัยที่มุ่งเน้นการออกแบบมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยพิจารณารูปร่างของร่องโรเตอร์เพื่อลดการสั่นสะเทือนทางกลโดยเฉพาะมาก่อน โดยทั่วไปการออกแบบร่องโรเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบดั้งเดิมมุ่งเน้นที่ลักษณะสมบัติทางแรงบิดเอาต์พุตที่เกิดขึ้นซึ่งเป็นแรงบิดที่จะนำไปใช้งานเป็นหลัก การออกแบบด้วยหลักการนี้อาจจะไม่ได้คำนึงถึงผลของการสั่นสะเทือนที่อาจจะเกิดขึ้นอย่างมีนัยสำคัญต่อมอเตอร์ ทำให้อายุการใช้งาน สมรรถนะ และประสิทธิภาพการทำงานของมอเตอร์ลดลง ตลอดจนมลภาวะทางไฟฟ้าที่อาจจะเกิดขึ้นอีกด้วย

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 บทนำ

การศึกษาทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยมีความสำคัญมากในการดำเนินงาน เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้และความเข้าใจ ในส่วนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบไปด้วย 3 หัวข้อหลักได้แก่ สนามแม่เหล็ก มอเตอร์เหนี่ยวนำไฟฟ้าสามเฟส และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ 3 มิติ โดยจะกล่าวถึงส่วนที่เป็นประโยชน์หรือถูกกล่าวอ้างต่อการดำเนินงานวิจัยนี้ เพื่อความกระชับและชัดเจนของเนื้อหา

3.2 สนามแม่เหล็ก

3.2.1 พื้นฐานสำหรับสนามแม่เหล็ก

การบอกถึงปริมาณอย่างหนึ่งอย่างใดของสรรพสิ่งในธรรมชาติอาจกระทำได้โดยการบอกถึงขนาดแต่เพียงอย่างเดียวซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงสเกลาร์หรืออาจบอกทั้งขนาดและทิศทางควบคู่กันซึ่งรู้จักกันในนามของปริมาณเชิงเวกเตอร์พื้นฐานสำคัญในการศึกษาสนามแม่เหล็กจะเริ่มต้นจากทฤษฎีของเวกเตอร์ โดยจะเริ่มต้นด้วยพีชคณิตของเวกเตอร์ดังนี้ถ้าให้ $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ xyz จะเขียนเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ ภายในปริภูมิซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉากหรือพิกัดคาร์ทีเซียน(cartesian coordinate) ได้ในลักษณะ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.1)$$

เมื่อ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ไปในทิศทางบวกของแนวแกน x , y และ z ตามลำดับ โดยมี A_x , A_y และ A_z เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากของ $\mathbf{A}$ ในปริภูมิ

ถ้าให้ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ คือเวกเตอร์แล้ว $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ คือการคูณกันแบบดอท (dot product) เรียกการคูณแบบนี้ว่าการคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (3.2)$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ กับ $\mathbf{B}$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$

ส่วน $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ คือการคูณแบบครอส (cross product) เรียกการคูณแบบนี้ว่าการคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) นิยามโดย

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta (\pm \mathbf{n}) \quad (3.3)$$

เมื่อ $\mathbf{n}$ นิยามให้เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{B}$ โดยเครื่องหมาย $\pm$ ใช้กำหนดทิศทางของผลคูณเวกเตอร์แบบครอสโดยถ้าเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\pm$ เข้าหาเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ จะกำหนดให้ $\mathbf{n}$ เป็นบวกในทางตรงกันข้ามก็กำหนดให้เป็นลบหรือยึดหลักการของสกรูโดยถ้าขันสกรูให้เคลื่อนที่เข้าไปในเนื้อวัตถุจะกำหนดให้ $\mathbf{n}$ เป็นบวกและถ้าคลายสกรูออกจากเนื้อวัตถุจะกำหนดให้เป็นลบซึ่งเทียบได้กับกฎมือขวานั้นเอง

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (3.4)$$

หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

เมื่อทราบวิธีคำนวณผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์ซึ่งเป็นพื้นฐานเบื้องต้นแล้ว จากนั้นจึงดำเนินการศึกษาถึงการหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสเกลาร์และฟังก์ชันเวกเตอร์ (ชัยณรงค์พิเศษศักดิ์วิชัย, 2545)

ซึ่งจะกล่าวต่อไปดังนี้ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ 3 ตัวแปร $f(x, y, z)$ แล้วค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (3.6)$$

และจากการกำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ที่เรียกว่าเดล(del: ∇) ดังนี้

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.7)$$

ดังนั้นเมื่อนำ ∇ กระทำต่อฟังก์ชัน f จะได้ ∇f ซึ่งเรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชัน f โดยจะมีความหมายในลักษณะ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (3.8)$$

และถ้ากำหนดให้ $\mathbf{A}$ คือเวกเตอร์แล้ว $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ซึ่งเป็นการคูณกันแบบดอทจะเรียกว่าไดเวอร์เจนซ์ (divergence) ของ $\mathbf{A}$ นิยามโดย

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.9)$$

ส่วน $\nabla \times \mathbf{A}$ ซึ่งเป็นการคูณกันแบบครอสจะเรียกว่าเคิร์ล (curl) ของ $\mathbf{A}$ นิยามโดย

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (3.10)$$

หรือเขียนในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

ไดเวอร์เจนซ์และเคิร์ลเป็นเพียงอนุพันธ์อันดับหนึ่งเราสามารถใช้อยู่ได้สองครั้งเพื่อให้ได้อนุพันธ์อันดับสองซึ่งเรียกว่าลาปลาเซียน (laplacian: ∇^2) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

ให้ $\mathbf{A}$ คือเวกเตอร์ที่ได้ลาปลาเซียนของ $\mathbf{A}$ คือ

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \mathbf{k} \quad (3.13)$$

เอกลักษณ์ของเวกเตอร์ที่สำคัญต่อการดำเนินการอนุพันธ์อันดับสองมีอยู่ 2 เอกลักษณ์ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.14) และ (3.15) ดังนี้คือ

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (3.14)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.15)$$

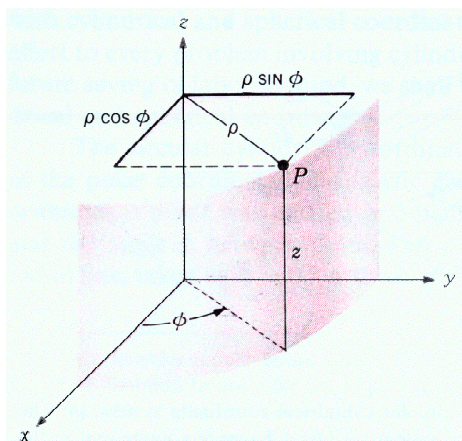
การแปลงระบบพิกัดที่มีพิกัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน (William, 1989) จากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.1 สามารถแสดงได้โดยถ้าให้ $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ภายในปริภูมิซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดฉากคือ

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.16)$$

เมื่อ $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$ และ $\mathbf{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยโดยมี A_x , A_y และ A_z เป็นส่วนประกอบพิกัดฉากซึ่งจะต้องถูกเปลี่ยนไปอยู่ในรูปส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอกโดยถ้าให้ $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ภายในปริภูมิซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดทรงกระบอกคือ

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{a}_\rho + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (3.17)$$

เมื่อ $\mathbf{a}_\rho$, $\mathbf{a}_\phi$ และ $\mathbf{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยโดยมี A_ρ , A_ϕ และ A_z เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกระบอก



รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกระบอก

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าจุด $P(x,y,z)$ หรือ $P(\rho, \phi, z)$ จะได้ว่า

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

จะเห็นว่าตัวแปร x, y, z อยู่ในเทอมของตัวแปร ρ, ϕ, z และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร ρ, ϕ, z อยู่ในเทอมของตัวแปร x, y, z

ในการเปลี่ยนจากระบบพิกัดหนึ่งไปเป็นอีกระบบพิกัดหนึ่งจะใช้หลักการคูณกันของเวกเตอร์แบบดอทการเปลี่ยนพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอกจะต้องหาค่า A_ρ, A_ϕ ที่อยู่ในเทอมของ A_x, A_y โดยที่ $A_z = A_z$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

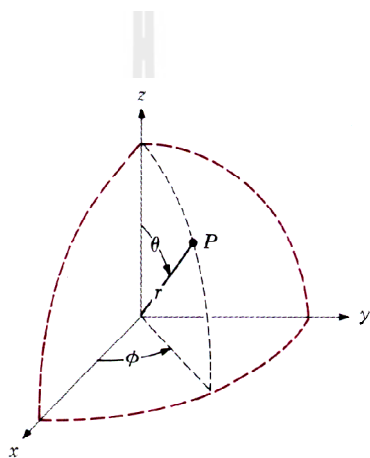
$$\begin{aligned} A_\rho &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\rho = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\rho + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\rho \\ A_\rho &= A_x \cos \phi + A_y \sin \phi \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi = A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi \end{aligned} \quad (3.19)$$

ส่วนการแปลงจากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกลม (spherical coordinate) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.2 สามารถแสดงได้โดยถ้าให้ $\mathbf{A}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆภายในปริภูมิซึ่งแสดงอยู่ในรูปของพิกัดทรงกลม คือ

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (3.20)$$

เมื่อ $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ และ $\mathbf{a}_\phi$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยโดยมี A_r , A_θ และ A_ϕ เป็นส่วนประกอบพิกัดทรงกลม



รูปที่ 3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดทรงกลม

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่าจุด $P(x, y, z)$ หรือ $P(r, \theta, \phi)$ จะได้ว่า

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

ซึ่งจะเห็นว่าตัวแปร r, θ, ϕ อยู่ในเทอมของตัวแปร x, y, z

การเปลี่ยนพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกลมจะต้องหาค่า A_r, A_θ, A_ϕ ที่อยู่ในเทอมของ A_x, A_y, A_z ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A_r &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_r = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r \\ &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r \\ A_r &= A_x \sin \theta \cos \phi + A_y \sin \theta \sin \phi + A_z \cos \theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 A_\theta &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\theta = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\theta \\
 &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\theta + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\theta \\
 A_\theta &= A_x \cos \theta \cos \phi + A_y \cos \theta \sin \phi + A_z \sin \theta
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 A_\phi &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\phi = (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_\phi \\
 &= A_x \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\phi + A_y \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\phi \\
 A_\phi &= -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.2.2 สนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก

เมื่อทราบทฤษฎีและคุณสมบัติของเวกเตอร์ที่จำเป็นแล้วต่อไปจะได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็กและศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (เฉลิมพลน้ำค้าง, 2538) ซึ่งต้องอาศัยความรู้ของระบบเวกเตอร์จากข้างต้น

ประจุไฟฟ้า (electric charge) คือปริมาณของความเป็นไฟฟ้าที่สถิตอยู่ในสสารนั้นๆ ซึ่งแรงปฏิสัมพันธ์ระหว่างประจุไฟฟ้าจะเรียกว่าแรงไฟฟ้า (electric force) และถ้าหากประจุไฟฟ้ามีการเคลื่อนที่ด้วย จะเกิดแรงที่เรียกว่าแรงแม่เหล็ก (magnetic force) ด้วยเหตุที่ทั้งแรงไฟฟ้าและแรงแม่เหล็กมีแหล่งกำเนิดเดียวกันคือประจุไฟฟ้า การจัดจำแนกกลุ่มของแรงจึงได้จัดให้ทั้งสองแรงนี้อยู่ในกลุ่มเดียวกันที่เรียกว่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force) ทุกๆ ประจุในสสารจะมีความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field intensity) หรืออาจเรียกว่าสนามไฟฟ้า (electric field: $\mathbf{E}$) อยู่ปริมาณหนึ่ง ส่วนความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density) หรืออาจเรียกว่าสนามแม่เหล็ก (magnetic field: $\mathbf{B}$) จะเป็นตัวกำกับให้ออกแรงกระทำเฉพาะประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ ซึ่งสนามแม่เหล็กนี้เองที่เป็นรากฐานของกลไกในการผันแปลงพลังงานจากรูปแบบหนึ่งไปสู่อีกรูปแบบอื่นๆ โดยใช้เป็นพื้นฐานสำหรับอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในมอเตอร์ เครื่องกำเนิดไฟฟ้าและหม้อแปลงซึ่งการผันแปลงพลังงานที่เกิดขึ้นในอุปกรณ์เหล่านี้จะประกอบด้วยกฎพื้นฐานอยู่ 4 กฎ (Chapman, 1998) คือ

- 1) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำจะเกิดสนามแม่เหล็กล้อมรอบเส้นลวดนั้น
- 2) เมื่อสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในขดลวดที่เกิดจากการพันของเส้นลวดตัวนำ (พื้นฐานปรากฏการณ์หม้อแปลง)
- 3) เมื่อกระแสไหลในเส้นลวดตัวนำที่วางอยู่ในสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงทางกลขึ้น (พื้นฐานปรากฏการณ์มอเตอร์)

- 4) เมื่อเส้นลวดตัวนำเคลื่อนที่ผ่านสนามแม่เหล็กจะเกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้น
(พื้นฐานปรากฏการณ์เครื่องกำเนิดไฟฟ้า)
ซึ่งปริมาณของสนามแม่เหล็กจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลางสามารถแสดงได้โดย

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.24)$$

เมื่อ μ คือความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability) มีค่าเท่ากับ $\mu_0 \mu_r$ โดยที่ μ_0 คือความซาบซึมได้ของสุญญากาศ มีค่าเท่ากับ $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ และ μ_r คือความซาบซึมได้สัมพัทธ์ (relative permeability) โดยจะขึ้นอยู่กับวัสดุตัวกลาง ส่วน $\mathbf{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity) และจากคุณสมบัติของ $\mathbf{B}$ พบว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.25)$$

ซึ่งสมการที่ (3.25) นี้คือกฎของเกาส์ (Gauss's law) ในรูปอนุพันธ์ของสนามแม่เหล็ก โดยถ้านำไปประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ในสมการที่ (3.14) จะสรุปได้ว่าหากไดเวอร์เจนของ $\mathbf{B}$ เท่ากับศูนย์แล้ว ย่อมมีอีกเวกเตอร์หนึ่งที่เกิดจากการกระทำเคิร์ลแล้วได้ผลเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{B}$ เวกเตอร์ใดๆที่เกิดจากการกระทำเคิร์ลแล้วเท่ากับ $\mathbf{B}$ จะเรียกว่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (magnetic vector potential: $\mathbf{A}$) ดังนี้

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.26)$$

ดังนั้นเมื่อต้องการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ จึงเลี่ยงโดยการไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ ก่อน ซึ่งสามารถคำนวณได้ง่ายกว่า โดยสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ สามารถคำนวณได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ เท่านั้น (เผด็จ เผ่าละออ, 2548)

3.3 มอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส

มอเตอร์เป็นเครื่องต้นกำลังที่ใช้ในอุตสาหกรรมทั่วไป เพราะสามารถแปลงผันพลังงานไฟฟ้าเป็นพลังงานกลได้ เราสามารถแบ่งมอเตอร์ไฟฟ้าออกตามความสำคัญและสัดส่วนการใช้งานได้เป็น 2 ชนิดได้แก่ มอเตอร์เหนี่ยวนำ และ มอเตอร์ชนิดอื่นๆที่เหลือ

มอเตอร์เหนี่ยวนำเป็นมอเตอร์ที่นิยมใช้งานกันอย่างแพร่หลาย เนื่องจากมีการใช้งานที่ไม่ยุ่งยาก ราคาถูก ทนทาน และไม่ต้องดูแลบำรุงรักษามากนัก อีกทั้งยังให้ความเร็วเกือบคงที่ตลอด

ย่านการทำงาน ซึ่งเหมาะสมกับการใช้งานในอุตสาหกรรมและอื่นๆ แทบทุกประเภท จนอาจกล่าวได้ว่ามีการใช้งานมอเตอร์เหนี่ยวนำมากกว่าร้อยละ 90 ของเครื่องต้นกำลังทั้งหมด

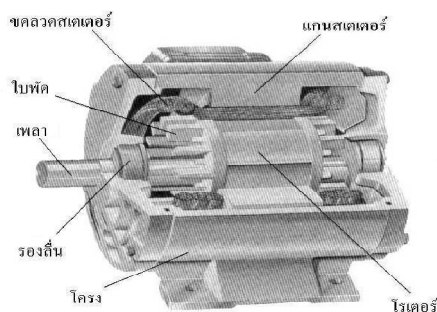
นิโคลาส เทสลา (Nikola Tesla) ได้เสนอแนวความคิดการทำให้เกิดสนามแม่เหล็กหมุนที่สเตเตอร์ เพื่อให้โรเตอร์หมุนได้โดยไม่ต้องอาศัยไฟฟ้ากระแสตรงสำหรับขดลวดกระตุ้น โดยกระแสในขดลวดโรเตอร์ได้จากการเหนี่ยวนำไฟฟ้าจากขดลวดสเตเตอร์ เทสลาได้จดสิทธิบัตรสิ่งประดิษฐ์นี้เมื่อ ค.ศ. 1888 และสิ่งประดิษฐ์นี้ได้รับการปรับปรุงทั้งทางด้านโครงสร้างและคุณสมบัติต่างๆ ให้พัฒนาขึ้นเรื่อยๆ หรือที่เราเรียกกันว่า มอเตอร์เหนี่ยวนำ

มอเตอร์ไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผลิตออกมาในปัจจุบันมีหลายชนิด ตั้งแต่ขนาดเล็กใช้ไฟฟ้ากระแสสลับเฟสเดียวขนาดไม่ถึง 1 แรงม้า จนถึงขนาดใหญ่ใช้ไฟฟ้ากระแสสลับ 3 เฟส ขนาด 10,000 แรงม้า โดยในส่วนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะมอเตอร์เหนี่ยวนำที่ใช้กับไฟฟ้ากระแสสลับ 3 เฟส ซึ่งนิยมใช้กันมากเท่านั้น

3.3.1 โครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

มอเตอร์เหนี่ยวนำมีโครงสร้างแบ่งออกเป็น 2 ส่วนหลักๆ ได้แก่ สเตเตอร์และโรเตอร์ ดังนี้

1) สเตเตอร์ จะประกอบด้วยโครงมอเตอร์ (frame or yoke) แกนสเตเตอร์ (stator core) และขดลวดสเตเตอร์ (stator winding) โครงมอเตอร์ทำด้วยเหล็กหล่อรูปทรงกระบอกกลวง ฐานส่วนล่างมีลักษณะเป็นขาตั้ง มีกล่องสำหรับต่อสายไฟออกสู่วงจรภายนอกอยู่ด้านข้าง โดยโครงจะมีหน้าที่จับยึดแกนขดลวดให้แน่นอยู่กับที่ ผิวด้านนอกโดยรอบของโครงมอเตอร์บางตัวจะออกแบบให้มีลักษณะเป็นครีป เพื่อช่วยระบายความร้อน ส่วนแกนสเตเตอร์ทำจากแผ่นลามิเนตให้ความหนาซึมได้ของแม่เหล็กมีค่าสูง ซึ่งจะมีความสูญเสียเนื่องจากฮิสเทอรีซิส (hysteresis) และกระแสไหลวน (eddy current) ต่ำ แกนสเตเตอร์ถูกเจาะตรงกลางให้มีลักษณะเป็นรูปวงแหวน โดยผิวด้านในถูกเจาะเป็นร่องคันด้วยฟันของสเตเตอร์โดยรอบ เพื่อใช้เป็นที่ยางสำหรับการพันขดลวดสเตเตอร์ แผ่นลามิเนตเหล่านี้จะถูกอัดเข้าด้วยกันเรียกว่าแกนสเตเตอร์ ซึ่งทำหน้าที่เป็นทางเดินของเส้นแรงแม่เหล็กดังแสดงด้วยรูปที่ 3.3 (Kenio, 1991)



รูปที่ 3.3 โครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

ส่วนขดลวดสเตเตอร์ จะเป็นลวดทองแดงเส้นเล็กๆ ที่ใช้พันเป็นขดลวด เคลือบด้วยน้ำมัน วารันิชที่เป็นฉนวนไฟฟ้าอย่างดี โดยแบ่งจำนวนขดลวดออกเป็นสามชุด ซึ่งแต่ละชุดจะเรียกว่าเฟส ขดลวดสเตเตอร์ทั้งสามเฟส จะนำมาต่อกันแบบสตาร์ (Y) หรือเดลตา (Δ) แล้วต่อออกสู่วงจรภายนอก การสร้างขั้วแม่เหล็กของแต่ละเฟส เกิดจากการพันต่อกันของขดลวดเฟสนั้นๆ ในลักษณะ พันตรงและพันย้อนกลับสลับกันไป เพื่อให้เกิดขั้วแม่เหล็ก N และ S สลับกันไปเรื่อยๆ เป็นคู่ๆ โดยปัจจัยที่มีผลต่อแรงดันเหนี่ยวนำของขดลวดในเครื่องจักรกลไฟฟ้ากระแสสลับ แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ การวางตัวของขดลวดสเตเตอร์ที่ใช้พัน และระยะพิตช์ของขดลวด (coil pitch) ที่ใช้พัน

การวางตัวของขดลวดสเตเตอร์ในร่องมีอยู่สองลักษณะ คือการวางตัวแบบรวม (concentrate) หมายถึงกลุ่มของขดลวดที่ใช้พันวางตัวอยู่ในร่องเดียวกันและการวางตัวแบบกระจาย (distribution) หมายถึงกลุ่มของขดลวดที่ใช้พันวางตัวในแต่ละร่องแยกกันซึ่งการวางตัวของขดลวดในมอเตอร์สามเฟสส่วนใหญ่จะเป็นแบบกระจายทั้งนี้เพื่อเป็นการลดผลกระทบของฮาร์มอนิกจากการวางตัวของขดลวดแบบรวมแต่เนื่องจากการวางตัวของขดลวดแบบรวมกลุ่มของขดลวดจะตัดกับเส้นแรงแม่เหล็กได้พร้อมกันแต่การวางตัวของขดลวดแบบกระจายซึ่งมีขดลวดอยู่ในร่องที่แยกกันแรงดันเหนี่ยวนำของขดลวดจึงเกิดขึ้นไม่พร้อมกันดังนั้นแรงดันเหนี่ยวนำที่เกิดจากการวางตัวของขดลวดแบบกระจายจึงมีค่าน้อยกว่าการวางตัวของขดลวดแบบ รวมซึ่งแรงดันเหนี่ยวนำที่น้อยลงนี้จะอยู่ในรูปของตัวประกอบการกระจาย (distribution factor or breadth factor: k_d)

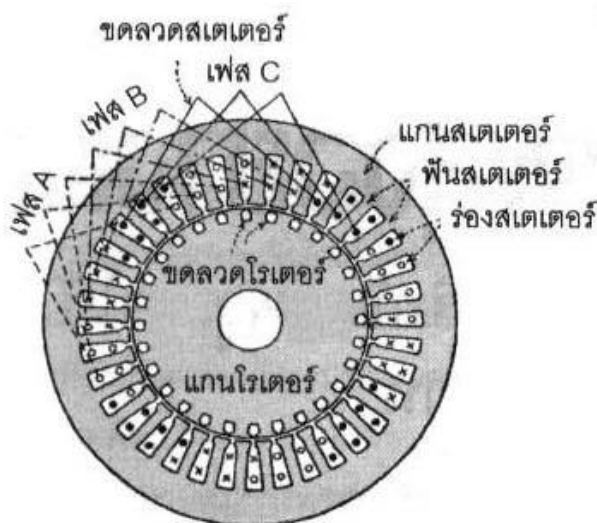
การพันขดลวดยังต้องคำนึงถึงระยะพิตช์ของขดลวดที่ใช้พัน ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่างด้านข้างทั้งสองของขดลวดเดียวกัน จะแบ่งออกเป็น 2 แบบด้วยกันคือ ระยะพิตช์เต็ม (full pitch) และระยะพิตช์เศษส่วน (fractional pitch) ซึ่งระยะพิตช์เต็มหมายถึง เมื่อด้านข้างของขดลวดด้านหนึ่งอยู่ตรงกึ่งกลางขั้วแม่เหล็ก N แล้ว จะมีอีกด้านข้างหนึ่งของขดลวดนี้ อยู่ตรงกึ่งกลาง

ขั้วแม่เหล็ก S ที่อยู่ถัดไป ซึ่งมีระยะเทียบได้กับ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็ก หรือ 180° ทางไฟฟ้า ความสัมพันธ์ระหว่างมุมทางไฟฟ้า (θ_e) และมุมทางกล (θ_m) จะขึ้นอยู่กับจำนวนขั้วแม่เหล็ก (P) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.27)

$$\theta_e = \frac{P}{2} \theta_m \quad (3.27)$$

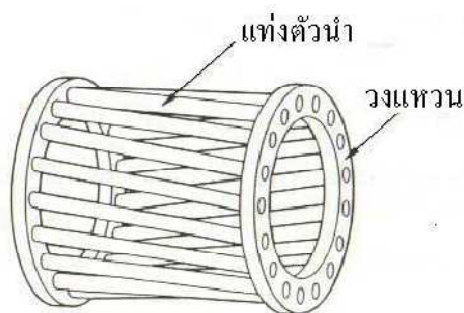
ส่วนระยะพิตช์เศษส่วนคือด้านข้างทั้งสองของขดลวดเดียวกันจะอยู่ห่างกันไม่ถึง 1 พิตช์ ขั้วแม่เหล็กซึ่งระยะพิตช์ของขดลวดในมอเตอร์สามเฟสส่วนใหญ่จะเป็นแบบระยะพิตช์เศษส่วน ทั้งนี้เพื่อเป็นการจัดฮาร์โมนิกที่มีผลกระทบต่อแรงดันเหนี่ยวนำของขดลวดแต่ข้อเสียของการพันขดลวดแบบระยะพิตช์เศษส่วนคือค่าแรงดันเหนี่ยวนำจะมีค่าลดลงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับแบบระยะพิตช์เต็มซึ่งแรงดันเหนี่ยวนำที่ลดลงนี้จะอยู่ในรูปของตัวประกอบพิตช์ (pitch factor: k_p) และผลคูณระหว่าง k_d และ k_p จะเรียกว่าตัวประกอบชุดขดลวด (winding factor: k_w)

การพันขดลวดสเตเตอร์ของเครื่องจักรกลไฟฟ้ากระแสสลับแบ่งออกเป็นสองแบบ คือ การพันขดลวดชั้นเดียว (single layer winding) ซึ่งจำนวนขดลวดที่ใช้ในการพันจะเท่ากับครึ่งหนึ่งของจำนวนร่องเพราะในแต่ละร่องจะมีด้านข้างของขดลวดเพียงด้านเดียวและการพันขดลวดสองชั้น (double layer winding) ซึ่งเป็นที่นิยมในมอเตอร์เหนี่ยวนำเนื่องจากได้รูปคลื่นแรงดันไฟฟ้าเหนี่ยวนำมีลักษณะใกล้เคียงกับรูปคลื่นไซน์มากกว่า ทั้งนี้เพราะสามารถกำจัดฮาร์โมนิกได้โดยการเลือกช่วงของการพันขดลวดที่เหมาะสมส่วนข้อเสียคือการพันขดลวดลงร่องและการซ่อมแซมทำได้ยากกว่าการพันขดลวดชั้นเดียวโดยในหนึ่งร่องจะมีด้านข้างของขดลวดบรรจุอยู่สองด้านถ้าด้านหนึ่งของขดลวดวางตัวอยู่ชั้นบนของร่องแล้วอีกด้านหนึ่งของขดลวดจะวางตัวอยู่ชั้นล่างของร่อง อันอื่นโดยจะมีฉนวนกั้นระหว่างขดลวดส่วนบนและขดลวดส่วนล่างการพันแบบขดลวดสองชั้นนี้สามารถแสดงด้วยรูปที่ 3.4 (ถาวรอมคิตต์, 2545) ซึ่งประกอบด้วยร่องสเตเตอร์ทั้งหมด 36 ร่องและระยะพิตช์ของขดลวดเท่ากับ 9



รูปที่ 3.4 การพันขดลวดสเตเตอร์แบบสองชั้น

2) โรเตอร์ โดยโครงสร้างของโรเตอร์จะเป็นแบบกรงกระรอก (squirrel cage) หรือเป็นแบบขดลวดพันรอบโรเตอร์ (wound rotor) อย่างใดอย่างหนึ่ง ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะแบบกรงกระรอกเท่านั้น เนื่องจากเป็นที่ใช้งานกันแพร่หลายที่สุด แสดงได้ดังรูปที่ 3.5 ซึ่งเป็นโครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำแบบกรงกระรอก ลักษณะโครงสร้างของโรเตอร์แบบกรงกระรอกจะประกอบไปด้วย แกนโรเตอร์ ขดลวดโรเตอร์ ใบพัดระบายความร้อน และเพลลา แกนโรเตอร์จะทำด้วยแผ่นลามิเนต มีลักษณะกลม เซาะผิวภายนอกให้เป็นร่องโดยรอบ ตรงกลางแผ่นจะเจาะรูสำหรับสอดเพลลา บริเวณระหว่างร่องรอบๆ ขอบกับรูตรงกลางแผ่น จะถูกเจาะเป็นรูไว้เพื่อช่วยในการระบายความร้อนและให้โรเตอร์มีน้ำหนักเบา แผ่นลามิเนตเหล่านี้จะถูกอัดเข้าด้วยกันเรียกว่า แกนโรเตอร์ ส่วนขดลวดโรเตอร์ที่จะถูกฝังในร่องของแกนโรเตอร์ จะไม่เป็นเส้นลวดเล็กๆ เหมือนกับลักษณะของขดลวดสเตเตอร์ แต่จะมีลักษณะเป็นแท่งตัวนำ (rotor bar) ที่ฝังเข้าไปในร่องให้แน่นซึ่งอาจจะเป็นทองแดง โลหะผสมหรืออะลูมิเนียมที่ปลายทั้งสองด้านของแท่งตัวนำจะถูกยึดด้วยตัวนำรูปวงแหวน (end ring) เพื่อลัดวงจรไฟฟ้าและมีใบพัดระบายความร้อนลักษณะเป็นครีบบยื่นออกมาดังนั้นจึงทำให้ได้ตัวนำที่มีโครงสร้างเหมือนกับกรงกระรอกดังแสดงด้วยรูปที่ 3.5 (Kenjo, 1991)

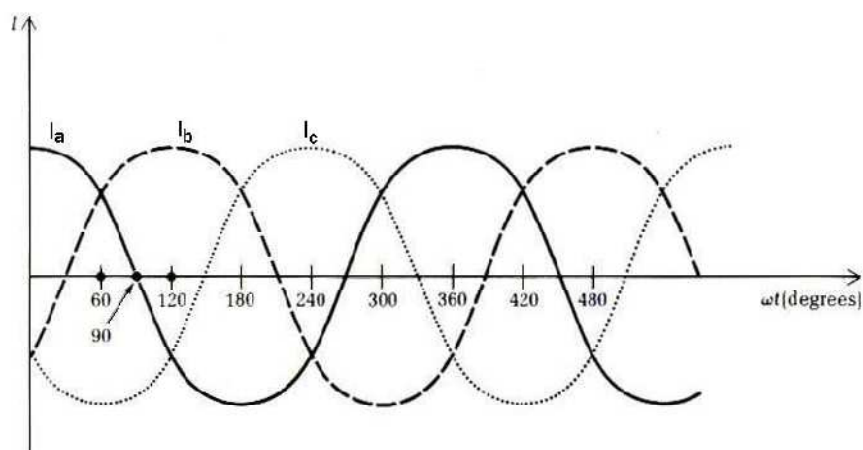


รูปที่ 3.5 ลักษณะค้ำน้ำของโรเตอร์กรังกระรอก

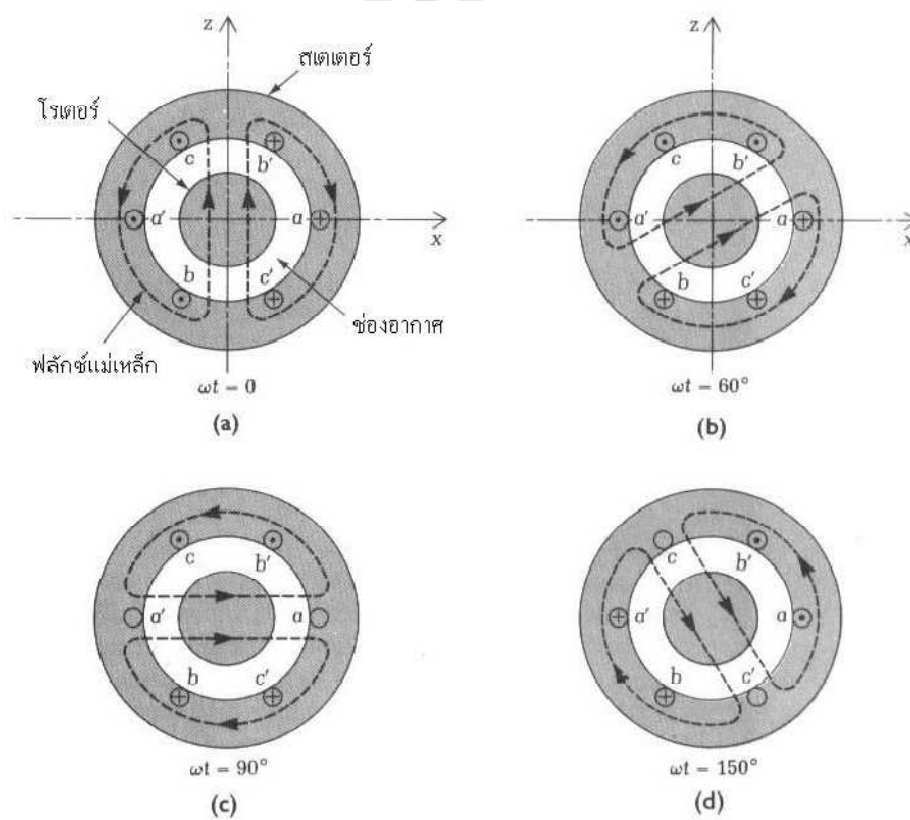
ร่องของโรเตอร์ที่ใช้ฝังแท่งค้ำน้ำมักออกแบบให้มีลักษณะเป็นแนวเฉียงไม่ขนานกับเพลลา และจำนวนร่องของโรเตอร์จะออกแบบให้มีจำนวนแตกต่างจากร่องของสเตเตอร์ ทั้งนี้เพื่อลดแรง อันเกิดจากการดูดติดกันระหว่างฟันของสเตเตอร์และโรเตอร์เมื่อนำโรเตอร์เข้าประกอกับสเตเตอร์แล้วจะมีช่องอากาศ (air gap) ระหว่างส่วนทั้งสองเกิดขึ้นในส่วนของฝาครอบจะทำได้ด้วย เหล็กหล่อเจาะรูตรงกลางเพื่ออัดรองลื่น (bearing) รองรับเพลลาของโรเตอร์ซึ่งที่ฝาครอบนี้บางที่จะ เจาะรูไว้ด้วยเพื่อช่วยในการถ่ายเทอากาศ

3.3.2 หลักการทำงานของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

เมื่อป้อนไฟกระแสสลับสามเฟส ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีมุมต่างเฟสกัน 120° ดัง แสดงด้วยรูปที่ 4 ให้กับขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำทั้งสามชุด ซึ่งประกอบด้วยขดลวด a-a', b-b' และ c-c' ที่วางตัวไปตามร่องโดยรอบแกนของสเตเตอร์ โดยแกนของขดลวดทั้ง 3 จะมีมุม ห่างกัน 120° ไฟฟ้า กระแสที่ไหลเข้าขดลวดจะสร้างสนามแม่เหล็กหมุนขึ้นที่สเตเตอร์ ซึ่งคือค่า ความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็กที่หมุนตามการเปลี่ยนแปลงของรูปคลื่นกระแสไฟฟ้าสามเฟส ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.6 (Shen and Kong, 1995) ซึ่งสามารถอธิบายผลที่เกิดขึ้นได้ดังนี้



รูปที่ 3.6 รูปคลื่นของกระแสไฟฟ้าสามเฟส



รูปที่ 3.7 สนามแม่เหล็กหมุนที่ตำแหน่งต่าง ๆ

สนามแม่เหล็กหมุนจะหมุนด้วยความเร็วซิงโครนัส (synchronous speed: N_s) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับความถี่ของระบบที่จ่ายให้มอเตอร์ (f) และจำนวนขั้วแม่เหล็กของมอเตอร์ (P) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$N_s = \frac{120 f}{P} \quad (3.28)$$

ขณะที่โรเตอร์หยุดอยู่กับที่สนามแม่เหล็กหมุนดังกล่าวจะเคลื่อนที่ตัดตัวนำที่ฝังอยู่ในโรเตอร์มีผลทำให้เกิดแรงดันเหนี่ยวนำขึ้นในวงจรของโรเตอร์และเนื่องจากวงจรของโรเตอร์ถูกทำให้ลัดวงจรโดยวงแหวนทั้งสองส่วนหัวและท้ายจึงทำให้เกิดกระแสไหลและเกิดแรงบิดขึ้นที่โรเตอร์ส่งผลทำให้โรเตอร์หมุนด้วยความเร็วที่ต่ำกว่าความเร็วซิงโครนัสไปในทิศทางเดียวกันกับสนามแม่เหล็กหมุนถ้าความเร็วของโรเตอร์ (N_r) เท่ากับความเร็วซิงโครนัสจะไม่เกิดการเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้นที่โรเตอร์แรงบิดที่โรเตอร์จะเท่ากับศูนย์ดังนั้นการเร่งความเร็วของมอเตอร์เหนี่ยวนำจึงไม่สามารถทำให้ความเร็วของโรเตอร์เท่ากับความเร็วซิงโครนัสได้ค่าความแตกต่างระหว่างความเร็วซิงโครนัสและความเร็วของโรเตอร์ จะเรียกว่าความเร็วสลลิป และค่าของอัตราส่วนระหว่างความเร็วสลลิปต่อความเร็วซิงโครนัสจะเรียกว่าสลลิป (slip: s) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$s = \frac{N_s - N_r}{N_s} \quad (3.29)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าหากค่าสลลิปเป็น 0 จะหมายถึงความเร็วของโรเตอร์จะมีค่าเท่ากับความเร็วซิงโครนัส ส่วนกรณีที่สลลิปมีค่าเป็น 1 จะหมายถึงมอเตอร์ไม่ได้หมุนนั่นเองและ

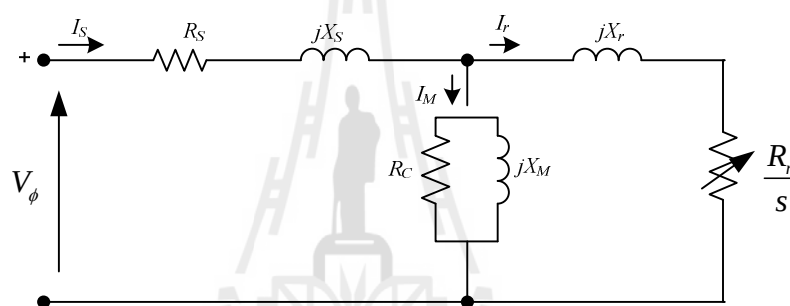
$$f_r = s \cdot f \quad (3.30)$$

เมื่อ f_r คือความถี่ของกระแสที่โรเตอร์ดังนั้นในขณะเริ่มเดินเครื่องค่าสลลิปเป็น 1 ความถี่ของกระแสที่โรเตอร์จะมีค่าเท่ากับความถี่ของระบบไฟฟ้าที่จ่าย

3.3.3 วงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

จากการพิจารณาโครงสร้างและหลักการทำงานของมอเตอร์เหนี่ยวนำดังที่กล่าวมา จะเห็นว่าหลักการพื้นฐานเช่นเดียวกับหลักการของหม้อแปลงไฟฟ้าคือแรงดันในวงจรของโร

เตอร์เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของวงจรสเตเตอร์นั้นคือถ้าเปรียบขดลวดของโรเตอร์เป็นขดลวดทุติยภูมิ(secondary winding) ขดลวดของสเตเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำคือขดลวดปฐมภูมิ(primarywinding) ของหม้อแปลงนั่นเองซึ่งการเปลี่ยนแปลงใดๆที่เกิดขึ้นทางวงจรของโรเตอร์จะมีผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางด้านวงจรสเตเตอร์ด้วยการคิดค่าพารามิเตอร์ต่างๆในวงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำจะพิจารณาค่าทุกค่าเทียบมาทางด้านของสเตเตอร์ดังนั้นค่าพารามิเตอร์ของสเตเตอร์จะไม่เปลี่ยนแปลงแต่ค่าพารามิเตอร์ทางวงจรของโรเตอร์จะมีการเปลี่ยนแปลงเกิดขึ้นซึ่งเป็นหลักการเดียวกันกับการหาวงจรสมมูลของหม้อแปลงไฟฟ้าโดยวงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสเมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์ต่อเฟสและคิดเทียบมาทางด้านสเตเตอร์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.8(Chapman, 1998)



รูปที่ 3.8 วงจรสมมูลต่อเฟสของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

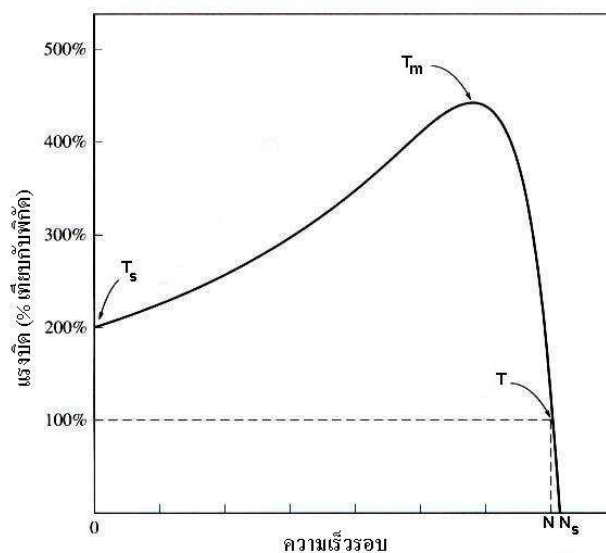
โดยที่	V_ϕ	คือ แรงดันที่จ่ายให้ขดลวดสเตเตอร์
	I_s, I_r	คือ กระแสที่ไหลในขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ
	I_M	คือ กระแสสร้างสนามแม่เหล็ก
	s	คือ ค่าสลิปของมอเตอร์
	R_s, R_r	คือ ค่าความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ
	R_c	คือ ค่าความต้านทานของแกนเหล็ก
	X_s, X_r	คือ ค่ารีแอกแตนซ์ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ
	X_M	คือ ค่ารีแอกแตนซ์ที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก

โดยส่วนใหญ่เพื่อง่ายต่อการคำนวณค่าความต้านทานของแกนเหล็ก R_c ซึ่งแสดงในรูปที่ 3.8 มักจะถูกละทิ้งเนื่องจากมีค่ามากกว่าค่ารีแอกแตนซ์ที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก X_M อยู่มาวงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำจะช่วยให้การอธิบายการทำงานและพิจารณาถึงคุณลักษณะต่างๆใน

สถานะอยู่ตัวของมอเตอร์ให้เข้าใจและชัดเจนมากยิ่งขึ้นอีกทั้งยังช่วยในการอธิบายค่ากำลังงานและกำลังสูญเสียต่างๆที่เกิดขึ้นในมอเตอร์ได้โดยง่าย

3.3.4 คุณสมบัติของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

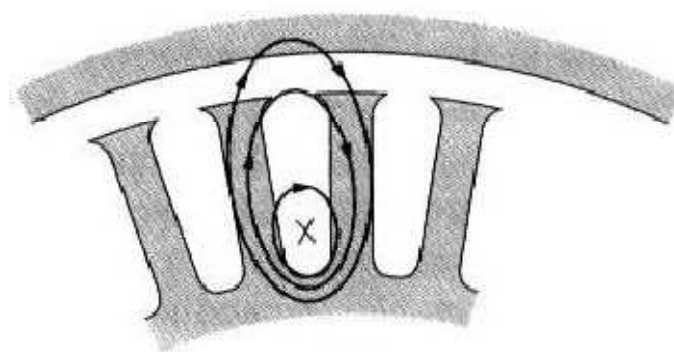
คุณลักษณะระหว่างแรงบิดและความเร็วของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสชนิดโรเตอร์แบบกรงกระรอกสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.9 ซึ่งเป็นการอธิบายลักษณะของแรงบิดที่ความเร็วรอบต่างๆของมอเตอร์เหนี่ยวนำ (พริศศักดิ์วรสุนทรโรสถและมานูชิมาการิชาวา, 2538) โดยเริ่มต้นจากความเร็วขณะที่มอเตอร์หยุดนิ่งไปจนถึงความเร็วซิงโครนัส (N_s)



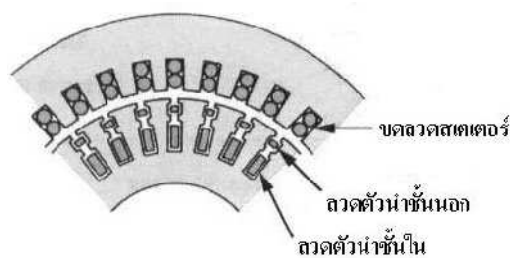
รูปที่ 3.9 คุณลักษณะแรงบิด-ความเร็วของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

แรงบิดพิกัด (full-load torque: T) คือแรงบิดขณะที่มอเตอร์ใช้งานเต็มพิกัดกำลังและความเร็วที่แรงบิดนี้จะเรียกว่าความเร็วพิกัด (N) โดยแรงบิดที่โหลดจะต้องมีค่าน้อยกว่าแรงบิดนี้ ส่วนแรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่อง (starting torque: T_s) คือแรงบิดขณะที่มอเตอร์เริ่มหมุนจากลักษณะหยุดนิ่งซึ่งจะมีค่ามากกว่าแรงบิดพิกัด ดังนั้นมอเตอร์จึงเริ่มต้นขับโหลดหรือต่อกับโหลดขณะเริ่มเดินเครื่องได้ทันทีและแรงบิดสูงสุด (maximum torque or pullout torque: T_m) คือแรงบิดสูงสุดที่มอเตอร์รับได้โดยจะมีค่าประมาณ 2-3 เท่าของแรงบิดพิกัดซึ่งถ้าโหลดเพิ่มขึ้นเกินกว่าแรงบิดค่านี้มอเตอร์จะหยุดหมุน โดยค่าแรงบิดต่างๆที่กล่าวถึงนี้สามารถคำนวณได้เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ต่างๆในวงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

ความต้านทานของโรเตอร์กรงกระรอกของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามารถเปลี่ยนแปลงได้โดยการเปลี่ยนแปลงขนาดของตัวนำในกรงกระรอกให้ใหญ่หรือเล็กลงหรืออาจทำได้โดยการเลือกร่องให้ลึกหรือตื้นขึ้นการออกแบบให้ร่องของโรเตอร์ลึกเพื่อใช้วางตัวนำหรือที่เรียกว่าแท่งโรเตอร์ฝังลึก (deep-bar rotor) (Chapman, 1998) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.10 จะทำให้เกิดเส้นแรงแม่เหล็กรั่วสูงเพื่อจะได้รีแอกแตนซ์สูงและจากผลเส้นแรงแม่เหล็กรั่วสูงนี้ในขณะที่มอเตอร์เริ่มเดินเครื่องจะทำให้กระแสไหลหนาแน่นที่บริเวณผิวตัวนำ (skin effect) แต่หลังจากที่มอเตอร์เริ่มหมุนแล้วความถี่ของกระแสที่โรเตอร์จะลดลงดังแสดงด้วยสมการที่ (3.8) จึงทำให้กระแสไหลหนาแน่นบริเวณผิวตัวนำลดลงด้วยจากผลที่เกิดขึ้นนี้จึงทำให้ความต้านทานของขดโรเตอร์มีค่ามากในขณะที่มอเตอร์เริ่มเดินเครื่องและจะลดลงเมื่อมอเตอร์เริ่มหมุนผ่านไปอีกทั้งยังมีการพัฒนาการทำงานให้ดีขึ้นโดยการใช้ลวดตัวนำในโรเตอร์เป็นสองชุด (double-cage rotor) ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.11 (ถาวรอมตักดี, 2545) ซึ่งลวดตัวนำชั้นในจะมีขนาดใหญ่กว่าลวดตัวนำชั้นนอกดังนั้นลวดตัวนำชั้นในจึงมีความต้านทานต่ำและมีความเหนี่ยวนำสูงกว่าลวดตัวนำชั้นนอกเมื่อเกิดสนามแม่เหล็กหมุนในสเตเตอร์เข้าไปยังลวดตัวนำทั้งสองทำให้แรงเคลื่อนแม่เหล็ก (magnetomotive force: mmf) ในลวดตัวนำทั้งสองเท่ากันซึ่งในภาวะเริ่มเดินเครื่องนั้นความถี่ของกระแสที่โรเตอร์จะเท่ากับความถี่ของระบบไฟฟ้าที่จ่ายทำให้รีแอกแตนซ์ของลวดตัวนำชั้นในมีค่ามากกว่าลวดตัวนำชั้นนอกดังนั้นจึงเกิดกระแสไฟฟ้าไหลในลวดตัวนำชั้นนอกมากขึ้นส่งผลให้แรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่องมีค่าสูงจากนั้นเมื่อความเร็วใกล้เคียงกับความเร็วซิงโครนัสความถี่ของกระแสที่โรเตอร์จะลดลงอย่างรวดเร็วและกระแสไฟฟ้าจะขึ้นอยู่กับความต้านทานของลวดตัวนำทั้งสองเองดังนั้นจึงทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลมากในลวดตัวนำชั้นในการสูญเสียจากความต้านทานจึงลดลงและมอเตอร์จะทำงานได้เหมือนกับมอเตอร์ที่มีโรเตอร์กรงกระรอกทั่วไป

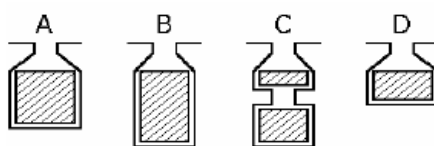


รูปที่ 3.10 เส้นแรงแม่เหล็กรั่วของโรเตอร์กรงกระรอกร่องลึก

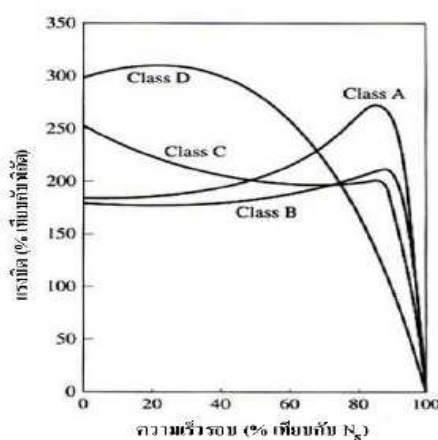


รูปที่ 3.11 โรเตอร์กรงกระรอกที่มีลวดตัวนำสองชุด

NEMA (national electrical manufacturers association) ได้แบ่งประเภทของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสออกเป็น 4 ประเภท (Chapman, 1998) คือชั้นคุณสมบัติ (class) A, B, C และ D โดยจะมีความแตกต่างกันไปตามลักษณะร่องของโรเตอร์ดังแสดงด้วยรูปที่ 3.12 และมีคุณลักษณะระหว่างแรงบิดและความเร็วดังแสดงด้วยรูปที่ 3.13 โดยแต่ละชั้นคุณสมบัติจะมีรายละเอียดที่แตกต่างกันดังนี้



รูปที่ 3.12 ลักษณะร่องต่างๆของโรเตอร์กรงกระรอก



รูปที่ 3.13 คุณลักษณะแรงบิด-ความเร็วตามชั้นคุณสมบัติต่างๆ

1) ชั้นคุณสมบัติ A มอเตอร์ประเภทนี้มีพื้นที่หน้าตัดของตัวนำขนาดใหญ่เพื่อลดความต้านทานต่อแรงดันจะไม่ลึกลงไปในแกนเหล็กมากเพื่อลดความต้านทานจากค่าเส้นแรงแม่เหล็กรั่วกระแสขณะเริ่มเดินเครื่องจึงค่อนข้างสูงอาจสูงถึงประมาณ 5-6 เท่าของกระแสพิกัดส่วนแรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่องอยู่ในระดับปกติซึ่งมีค่าประมาณ 200% ของแรงบิดพิกัดมอเตอร์ชั้นคุณสมบัติ A มักจะนำไปใช้กับเครื่องจักรทั่วไปเช่นพัดลมเครื่องเป่าลมปั๊มลมและปั๊มน้ำ

2) ชั้นคุณสมบัติ B มอเตอร์ประเภทนี้ตัวนำถูกวางในร่องลึกเพื่อเพิ่มความต้านทานจากค่าเส้นแรงแม่เหล็กรั่วกระแสขณะเริ่มเดินเครื่องจึงมีค่าลดลงเหลือประมาณ 3-4 เท่าของกระแสพิกัดส่วนแรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่องจะมีค่าประมาณเท่ากับชั้นคุณสมบัติ A ทั้งนี้เป็นผลจากลักษณะร่องที่ลึกขึ้นและค่าแรงบิดสูงสุดจะมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับชั้นคุณสมบัติ A มอเตอร์ชั้นคุณสมบัติ B จะนำไปใช้งานเช่นเดียวกับชั้นคุณสมบัติ A

3) ชั้นคุณสมบัติ C มอเตอร์ประเภทนี้มีตัวนำสองชั้นเพื่อให้แรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่องมีค่าสูงซึ่งจะมีค่าประมาณ 250% ของแรงบิดพิกัดส่วนกระแสขณะเริ่มเดินเครื่องจะมีค่าประมาณ 3-4 เท่าของกระแสพิกัดมอเตอร์ชั้นคุณสมบัติ C มักจะนำไปใช้กับเครื่องจักรที่เกี่ยวข้องกับการส่งผ่านกำลังและมีความฝืดเช่นสายพานเครื่องกดและเครื่องบรรจุ

4) ชั้นคุณสมบัติ D มอเตอร์ประเภทนี้ใช้ตัวนำที่มีความต้านทานสูงกระแสขณะเริ่มเดินเครื่องจึงมีค่าประมาณ 3-4 เท่าของกระแสพิกัดและติดตั้งตัวนำในตำแหน่งที่ใกล้กับผิวนอกของโรเตอร์เพื่อลดความต้านทานจากค่าเส้นแรงแม่เหล็กรั่วและให้แรงบิดขณะเริ่มเดินเครื่องมีค่าสูงซึ่งจะมีค่าประมาณ 300% ของแรงบิดพิกัดมอเตอร์ชั้นคุณสมบัติ D มักจะนำไปใช้กับเครื่องจักรที่มีโหลดเพิ่มและลดยู่ตลอดเวลาเช่นเครนและเครื่องปั๊มโลหะเป็นต้น

3.3.5 คุณสมบัติของโรเตอร์เฉื่อย

การสั้นสะเทือน คือ ปรากฏการณ์ของการเคลื่อนที่กลับไปกลับมาของวัตถุภายใต้แรงที่กระทำ โดยทั่วไปการสั้นสะเทือนมักเป็นสิ่งที่ไม่ต้องการ แต่หลีกเลี่ยงไม่ได้ อย่างดีที่สุดคือพยายามจำกัดขนาดของการสั้นสะเทือนให้อยู่ภายในขอบเขตที่ยอมรับได้ สำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสการสั้นสะเทือนอาจเกิดจากหลายสาเหตุ ได้แก่ ความไม่สัมพันธ์กันระหว่างจำนวนร่องของสเตเตอร์และโรเตอร์ การเยื้องศูนย์กลางของโรเตอร์ทั้งแบบสถิตและแบบพลวัต มุมเอียงในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ และการนำอินเวอร์เตอร์มาใช้ปรับเปลี่ยนค่าความเร็วรอบแล้วส่งผลให้แหล่งจ่ายไฟที่จ่ายเข้ามอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์ที่บิดเบี้ยวสาเหตุต่างๆ เหล่านี้อาจเกิดขึ้นได้จากการออกแบบและการผลิตที่ไม่ได้มาตรฐาน ความเสื่อมสภาพตามอายุการใช้งาน หรือเกิดจากปัจจัยภายนอกอื่นๆ ที่กระทำ ซึ่งสาเหตุต่างๆ เหล่านี้ย่อมส่งผลกระทบต่อการทำงานของตัวที่ไม่สมดุลของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์ แล้วส่งผลให้เกิดเสียงและการสั้นสะเทือนขึ้น ทำให้มีการ

สูญเสียทางกล สมรรถนะในการทำงานและอายุการใช้งานของมอเตอร์ลดลง อีกทั้งประสิทธิภาพในการทำงานของบุคลากรที่ควบคุมเครื่องจักรก็จะลดลงตามไปด้วย ด้วยเหตุนี้ งานวิจัยชิ้นนี้จึงเกิดขึ้นเพื่อแสวงหาองค์ความรู้ด้านผลกระทบของร่องเฉียง (skewed slot) ในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสที่มีผลต่อการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนทางกลของมอเตอร์ โดยประยุกต์ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3D-Finite Element Method) ที่พัฒนาขึ้นเอง เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาถึงมุมในการวางตัวของแท่งโรเตอร์ในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีผลต่อการสั่นสะเทือน ซึ่งผลการปรับร่องโรเตอร์ตามที่ได้ศึกษาจากวรรณกรรมต่างๆ ที่ผ่านมามีแสดงด้วยสมการที่ (3.31)

$$\xi_s = \frac{\sin(\mu p b / D)}{\mu p b / D} \quad (3.31)$$

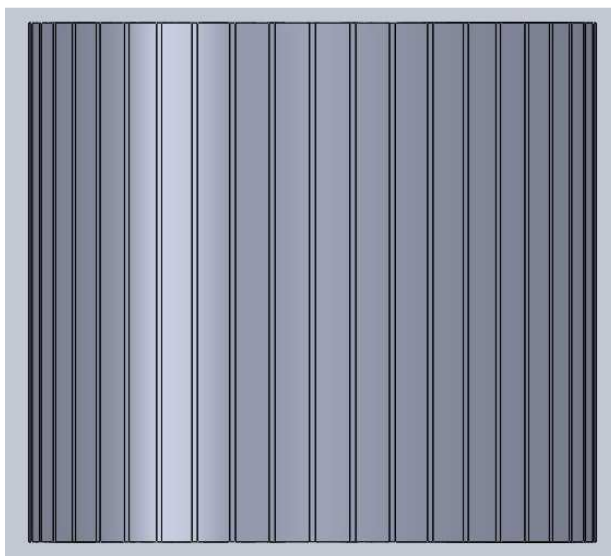
โดยที่	ξ_s	คือ มุมในการวางตัวของแท่งโรเตอร์
	B	คือ ระยะการเฉียงรอบเส้นรอบวงของโรเตอร์
	D	คือ เส้นผ่านศูนย์กลางด้านนอกของโรเตอร์
	P	คือ จำนวนขั้วของมอเตอร์
	μ	คือ ความหนาแน่นของฟลักซ์ฮาร์โมนิกส์

ในการปรับร่องโรเตอร์เฉียงเพื่อให้ได้การกระจายในแนวรัศมีโดยจะขึ้นอยู่กับแฟกเตอร์ ξ_s ในมอเตอร์เหนี่ยวนำขนาดกลางและขนาดใหญ่แรงบิดและการสั่นสะเทือนจะมีผลอย่างมากเนื่องจากมีแรงบิดที่สูงและมีขนาดการสั่นสะเทือนที่มาก ซึ่งผลของการสั่นสะเทือนจะอยู่ในรูปการกระจายในแนวรัศมี $Y_{r,res}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (3.32)

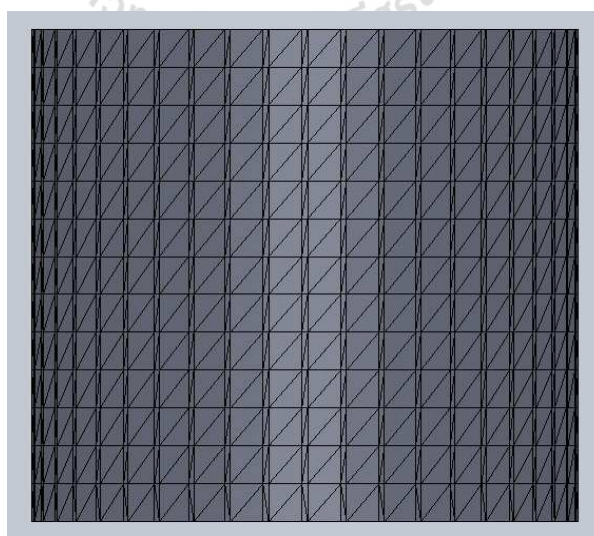
$$Y_{r,res} = \sqrt{Y_{r,s}^2 + \frac{\phi_{r,\tau}^2 l_i^2}{12}} \quad (3.32)$$

โดยที่	$Y_{r,s} = \xi_s Y_r$
	Y_r คือ การกระจายเชิงรัศมีของแท่งโรเตอร์
	$\phi_{r,\tau}$ คือ มุมการสั่นสะเทือนแรงบิด
	l_i คือ ความยาวของแท่งโรเตอร์

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอลักษณะการวางตัวของร่องโรเตอร์ออกเป็น 3 ลักษณะคือ ร่องโรเตอร์แบบดั้งเดิม, ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง และร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง สามารถทำการวาดรูปด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปชื่อว่า Solid Work การวางตัวของร่องโรเตอร์ของแต่ละประเภทที่กล่าวมาข้างต้นแสดงด้วยรูปที่ 3.14-3.19



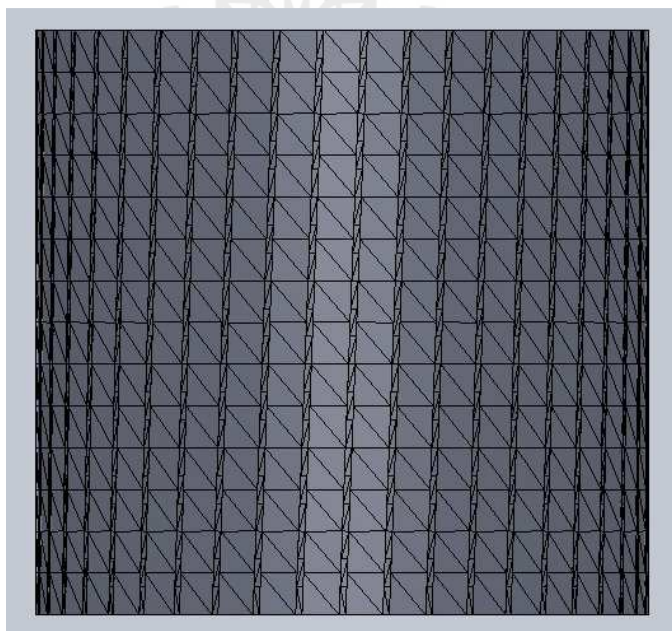
รูปที่ 3.14 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบร่องตรง



รูปที่ 3.15 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบร่องตรงเมื่อทำการตีกริด



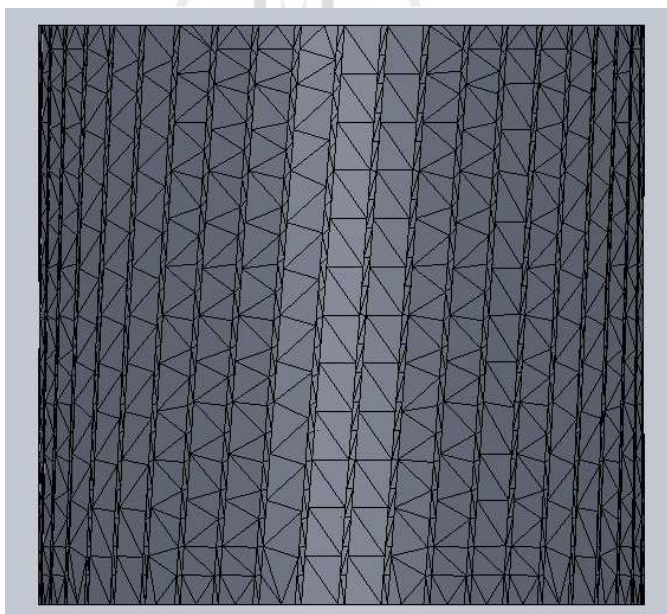
รูปที่ 3.16 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง



รูปที่ 3.17 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อทำการตีกริด



รูปที่ 3.18 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง



รูปที่ 3.19 การวางตัวของร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อทำการตีกริด

3.4 วิธีไฟในทอิลลิเมนต์

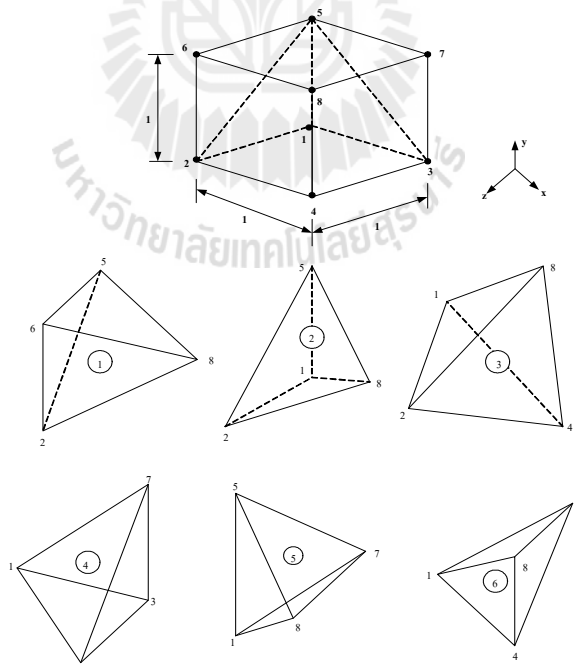
ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ส่วนใหญ่อาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการอินทิกรัล ในกรณีที่เป็สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ส่วนใหญ่แล้วมักจะต้องการผลเฉลยด้วยวิธีประมาณ เนื่องจากความซับซ้อนของสมการ วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลายวิธี วิธีที่ได้รับความนิยมกันอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมาคือ วิธีผลต่างสืบเนื่อง โดยแบ่งวัตถุของปัญหาที่สนใจออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยม ซึ่งตารางสี่เหลี่ยมเหล่านี้นี้ต่อกันที่จุดต่อตามหัวมุมของสี่เหลี่ยมต่างๆ และขนาดของปัญหาหรือจำนวนตัวไม่รู้ค่าจะขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อนี้เอง หากใช้ขนาดตารางสี่เหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลงซึ่งหมายถึงต้องเพิ่มจำนวนตารางสี่เหลี่ยมให้มากขึ้นจะสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของวัตถุดังกล่าวได้ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น แต่ในขณะเดียวกันจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นจะทำให้จำนวนสมการผลต่างสืบเนื่องมากขึ้นด้วย และกระบวนการในการแก้ปัญหาก็เป็นต้องการหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์เพิ่มขึ้นรวมถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะสูงมากขึ้นตามไปด้วย ข้อดีของวิธีผลต่างสืบเนื่องคือ เป็นวิธีการที่ง่ายแก่การศึกษาและการทำความเข้าใจ รวมไปถึงความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหานั้นๆ ส่วนข้อเสียของการใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องมีหลายประการ เช่นความไม่สะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และที่สำคัญที่สุดคือ ความยากลำบากในการประยุกต์วิธีการนี้เพื่อใช้กับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับวัตถุซึ่งมีรูปร่างลักษณะซับซ้อน อย่างเช่น โครงสร้างหรือชิ้นส่วนต่างๆ ของเครื่องจักรกลไฟฟ้า สาเหตุของความยากลำบากดังกล่าวมีส่วนก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณอีกวิธีหนึ่งที่เรียกว่า วิธีไฟในทอิลลิเมนต์ ซึ่งวิธีนี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนใดๆ ก็ได้ โดยสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงกว่า

ระเบียบวิธีไฟในทอิลลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยการแบ่งรูปร่างขอบเขตของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ แล้วสร้างสมการของแต่ละอิลลิเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ และอิลลิเมนต์ต่าง ๆ จะเชื่อมต่อกันด้วยจุดต่อซึ่งเป็นตำแหน่งที่คำนวณหาค่าผลเฉลย สำหรับระเบียบวิธีไฟในทอิลลิเมนต์ในงานวิจัยนี้จะดำเนินการคำนวณแบบ 3 มิติ

หลักการของระเบียบวิธีไฟในทอิลลิเมนต์ คือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นพื้นที่หลายๆ ส่วนที่เรียกว่าอิลลิเมนต์ โดยที่การกระจัด และแรงภายในแต่ละอิลลิเมนต์ ณ จุดที่อิลลิเมนต์ต่อโยงกันจะต้องเข้ากันได้และสมดุล ซึ่งอิลลิเมนต์ต่างๆนี้ จะขึ้นอยู่กับความละเอียดของแต่ละงานว่าต้องการรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากเท่าใด ซึ่งถ้าพิจารณาแบบ 3 มิติอาจอยู่ในรูปลักษณะของรูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) รูปทรงหกหน้า (hexahedron) รูปทรงแปด

หน้า (octahedron) หรือ รูปทรงพีรามิด (pyramids) ก็ได้ ซึ่งในที่นี้จะใช้อิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) เนื่องจากเป็นรูปทรงที่มีจำนวนโนดหรือจุดเชื่อมต่อที่น้อยที่สุด อีกทั้งรูปทรงสี่หน้านี้สามารถประกอบกันได้เป็นรูปทรงอื่นๆ ที่กล่าวมาได้ง่าย โดยค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนนับที่จะคำนวณออกมานั้นจะมีความแม่นยำขึ้นอยู่กับขนาด และจำนวนอิลลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา นั้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ 6 ขั้นตอน (ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2542)

1. แบ่งอิลลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพธ์ออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละอิลลิเมนต์จะมีความเป็นปริมาตร ดังแสดงในรูปที่ 3.20 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งอิลลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 3 มิติ (ระนาบ xyz) โดยใช้อิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อิลลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยอิลลิเมนต์ รูปทรงสี่หน้าทั้งหมด 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด ซึ่งข้อมูลเบื้องต้นสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอิลลิเมนต์และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าฟังก์ชันของแต่ละโหนด ซึ่งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 3.1 และ 3.2 ตามลำดับ



รูปที่ 3.20 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด เมื่อพิจารณาอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

ตารางที่ 3.1 ลักษณะข้อมูลของอีลิเมนต์

หมายเลข อีลิเมนต์	หมายเลขโหนด			
	โหนด i	โหนด j	โหนด k	โหนด l
1	2	8	5	6
2	1	2	8	5
3	1	2	4	8
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

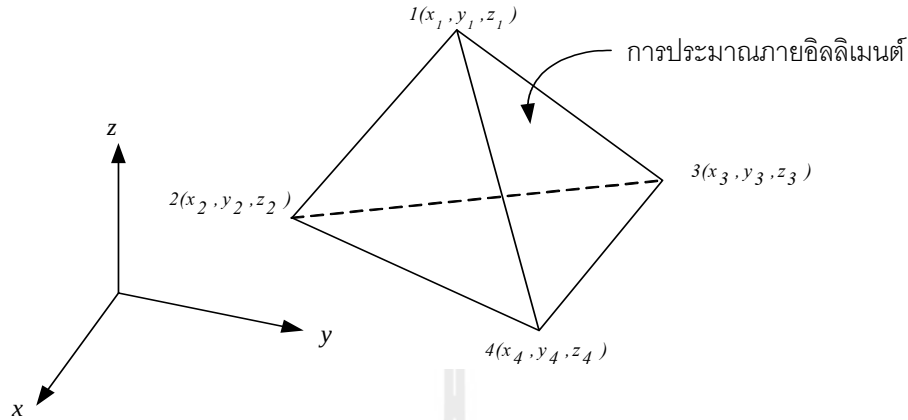
ตารางที่ 3.2 ลักษณะข้อมูลของจุดต่อ

หมายเลขโหนด	พิกัดแกน x	พิกัดแกน y	พิกัดแกน z
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0
4	1	0	1
5	0	1	0
6	0	1	1
7	1	1	0
8	1	1	1

2. เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ อย่างในกรณีอีลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าจะประกอบด้วย 4 โหนดที่มีตัวห้อย 1 2 3 และ 4 ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอีลิเมนต์แบบเชิงเส้นดังแสดงในรูป 3.21 ตำแหน่งของโหนด $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$ เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า A_i โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอีลิเมนต์ $A(x, y, z)$ เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$A_e(x, y, z) = a + bx + cy + dz \quad (3.33)$$

โดยที่ $a b c d$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโหนดทั้งสี่ดังนี้



รูปที่ 3.21 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า

$$A_e(x_1, y_1, z_1) = A_1 = a + bx_1 + cy_1 + dz_1$$

$$A_e(x_2, y_2, z_2) = A_2 = a + bx_2 + cy_2 + dz_2$$

$$A_e(x_3, y_3, z_3) = A_3 = a + bx_3 + cy_3 + dz_3$$

$$A_e(x_4, y_4, z_4) = A_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4$$

นำค่า $a b c d$ ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสี่ข้างต้น แทนค่ากลับลงไปในสมการที่ (3.33) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์เป็น

$$A_e(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (3.34)$$

ซึ่ง $N_i, i = 1 \ 2 \ 3 \ 4$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (3.35)$$

โดยที่ $a_1 = x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3)$

$$a_2 = x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4)$$

$$a_3 = x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2)$$

$$a_4 = x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3)$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\
b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\
b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\
b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \\
c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\
c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\
c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\
c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \\
d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
\end{aligned}$$

และ V คือปริมาตรของแต่ละอิลลิเมนต์ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$6V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมานี้ มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

3. สร้างสมการของอิลลิเมนต์ (Element formulation) ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ซึ่งขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญของวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์ อย่างเช่นกรณีสมการของอิลลิเมนต์รูปทรงสี่เหลี่ยมที่ได้ยกมาเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.20 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \\ A_l \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \\ f_l \end{bmatrix}_e \quad (3.37)$$

ซึ่งเขียนโดยย่อได้ว่า $[K]_e[A]_e = [f]_e$ โดย $[A]_e$ คือ เมทริกซ์ตัวไม่ทราบค่าที่โหนด และตัวห้อย e แสดงให้ทราบว่าเมทริกซ์ระดับอิลลิเมนต์ ซึ่งสมการของอิลลิเมนต์ดังกล่าว จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นมา

ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ การสร้างสมการของอีลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (3.37) สามารถทำได้โดย

- วิธีการโดยตรง (Direct approach) วิธีนี้สามารถใช้ได้เฉพาะกับปัญหาที่เข้าใจได้ง่าย ๆ อย่างเช่น ปัญหาต่าง ๆ ในรูปทรง 1 มิติ เท่านั้น ซึ่งไม่สามารถขยายเปลี่ยนแปลงเพื่อนำไปใช้กับปัญหาใน 2 หรือ 3 มิติโดยทั่วไปได้

- วิธีการแปรผัน (Variational approach) หลักการสำคัญของวิธีนี้คือ จำเป็นจะต้องทำการหาหรือสร้างฟังก์ชัน ซึ่งเมื่อทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นแล้ว จะเป็นผลให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่กำลังสนใจอยู่ อย่างไรก็ตามวิธีการแปรผันเป็นวิธีการดั้งเดิมที่ใช้กันในช่วงต้น ๆ ของการพัฒนาวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับทางด้านโครงสร้าง และยังมีจุดอ่อนอีกคือ จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ ซึ่งปัญหาหลาย ๆ ชนิดในทางปฏิบัติสามารถสร้างสมการอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันนั้นได้

- วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) วิธีนี้จะใช้วิธีการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้อง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับปัญหาโดยทั่ว ๆ ไป และถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน

4. นำสมการของแต่ละอีลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน (Assembly) เป็นสมการรวมของระบบจากขั้นตอนที่ 1 หากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n โหนด จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ โดยแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}_{\text{sys}(n \times 1)} \quad (3.38)$$

หรือเขียนโดยย่อได้ดังนี้ $[K]_{\text{sys}}[A]_{\text{sys}} = [f]_{\text{sys}}$ จากสมการที่ (3.38) เมทริกซ์ $[K]_{\text{sys}}$ จะมีคุณสมบัติของความเป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ $[K]_{\text{sys}} = [K]_{\text{sys}}^T$ และมีคุณสมบัติของการจับกลุ่มกันของค่า

ที่ไม่เท่ากับศูนย์บริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็นแถบ (Banded matrix) จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในทางปฏิบัติที่จำเป็นต้องใช้จำนวนโหนดเป็นจำนวนมากเพื่อที่จะก่อให้เกิดผลเฉลยที่เที่ยงตรง โดยสามารถพัฒนาให้เก็บเฉพาะค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์ไว้ในหน่วยความจำเพื่อใช้ในการคำนวณเท่านั้น

การนำสมการย่อยของแต่ละอิลลิเมนต์มาประกอบกันเข้าเป็นสมการรวมของระบบ จำเป็นต้องมีหลักการซึ่งหลักการที่จะกล่าวนี้เป็นหลักการที่ง่าย สามารถทำได้โดยสะดวก เหมาะกับรูปร่างของปัญหาที่มีอิลลิเมนต์ย่อยจำนวนมาก ๆ และหลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์โปรแกรมด้วย โดยสามารถทำความเข้าใจได้จากตัวอย่างรูปร่างของปัญหาดังรูปที่ 3.12 กล่าวคือจะทำการสร้างสมการรวมของระบบซึ่งประกอบด้วย 6 อิลลิเมนต์ 8 โหนด โดยจะแสดงการรวมของเมทริกซ์ $[K]_{sys}$ เพื่อเป็นตัวอย่าง

วิธีการนี้ทำได้โดยเขียนสมการของอิลลิเมนต์ต่าง ๆ พร้อมทั้งกำกับหมายเลขของโหนดทางแฉกบนและแฉกต้งของแต่ละอิลลิเมนต์ให้ถูกต้อง โดยจากรูปที่ 3.12 $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 2 8 5 และ 6 ส่วน $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 2 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 12 8 และ 5 ส่วน $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 3 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 2 4 และ 8 ส่วน $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 4 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 3 4 และ 7 ส่วน $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 5 ประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 7 8 และ 5 ส่วน $[K]_e$ ของอิลลิเมนต์ที่ 6 ซึ่งเป็นอิลลิเมนต์สุดท้ายประกอบด้วยโหนดหมายเลข 1 8 4 และ 7 โดยสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$[K]_{e1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (8) & (5) & (6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (8) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K]_{e2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (8) & (5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (8) \\ (5) \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 & h_2 \\ e_3 & f_3 & g_3 & h_3 \\ e_4 & f_4 & g_4 & h_4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K]_{e3} = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (4) & (8) \\ (1) & i_1 & j_1 & k_1 & l_1 \\ (2) & i_2 & j_2 & k_2 & l_2 \\ (4) & i_3 & j_3 & k_3 & l_3 \\ (8) & i_4 & j_4 & k_4 & l_4 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{e4} = \begin{bmatrix} (1) & (3) & (4) & (7) \\ (1) & m_1 & n_1 & o_1 & p_1 \\ (3) & m_2 & n_2 & o_2 & p_2 \\ (4) & m_3 & n_3 & o_3 & p_3 \\ (7) & m_4 & n_4 & o_4 & p_4 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{e5} = \begin{bmatrix} (1) & (7) & (8) & (5) \\ (1) & q_1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ (7) & q_2 & r_2 & s_2 & t_2 \\ (8) & q_3 & r_3 & s_3 & t_3 \\ (5) & q_4 & r_4 & s_4 & t_4 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{e6} = \begin{bmatrix} (1) & (8) & (4) & (7) \\ (1) & u_1 & v_1 & w_1 & x_1 \\ (8) & u_2 & v_2 & w_2 & x_2 \\ (4) & u_3 & v_3 & w_3 & x_3 \\ (7) & u_4 & v_4 & w_4 & x_4 \end{bmatrix}$$

เมื่อมีหมายเลขกำกับทั้งทางแฉวนอนและแฉวดั่งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมทริกซ์ของทุกอิลลิเมนต์แล้ว จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวม $[K]_{sys}$ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์ b_3 ซึ่งอยู่ในแฉวนอนที่ 5 แฉวดั่งที่ 8 ของอิลลิเมนต์ย่อยที่ 1 จะไปปรากฏอยู่ในแฉวนอนที่ 5 แฉวดั่งที่ 8 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ เป็นต้น

$$[K]_{sys} = \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) & (8) \\ (1) & e_1 + i_1 + m_1 + q_1 + u_1 & f_1 + j_1 & n_1 & k_1 + o_1 + w_1 & h_1 + t_1 & 0 & p_1 + r_1 + x_1 & g_1 + l_1 + s_1 + v_1 \\ (2) & c_2 + i_2 & a_1 + f_2 + j_2 & 0 & k_2 & c_1 + h_2 & d_1 & 0 & b_1 + g_2 + l_2 \\ (3) & m_2 & 0 & n_2 & o_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ (4) & i_3 + m_3 + u_3 & j_3 & n_3 & k_3 + o_3 + w_3 & 0 & 0 & p_3 + x_3 & l_3 + v_3 \\ (5) & e_4 + q_4 & a_3 + f_4 & 0 & 0 & c_3 + h_4 + t_4 & d_3 & r_4 & b_3 + g_4 + s_4 \\ (6) & 0 & a_4 & 0 & 0 & c_4 & d_4 & 0 & b_4 \\ (7) & m_4 + q_2 + u_4 & 0 & n_4 & o_4 + w_4 & t_2 & 0 & p_4 + r_2 + x_4 & s_2 + v_4 \\ (8) & c_3 + i_4 + q_3 + u_2 & a_2 + f_3 + j_4 & 0 & k_4 + w_2 & c_2 + h_3 + t_3 & d_2 & r_3 + x_2 & b_2 + g_3 + l_4 + s_3 + v_2 \end{bmatrix}$$

5. ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น (Boundary conditions) ที่สอดคล้องกับปัญหาในสมการรวมของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่โหนด

6. คำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ต้องการต่อไป เมื่อทราบค่าผลลัพธ์ที่โหนดต่าง ๆ แล้วสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์นี้ต่อไปได้

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอน จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์เป็นวิธีที่มีแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีส่วนที่สำคัญที่สุดคือการสร้างสมการของอิลลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำหนด และในขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้จะนำไปพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณต่อไป

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีและหลักการต่างๆที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยอันได้แก่ทฤษฎีของสนามแม่เหล็กที่ได้กล่าวถึงวิธีการคำนวณค่าของสนามแม่เหล็กทฤษฎีของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสที่ว่าด้วยหลักการทำงานและคุณลักษณะของมอเตอร์และวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์ที่อธิบายถึงขั้นตอนต่างๆในการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์โดยได้กล่าวเฉพาะส่วนที่จะนำมาใช้หรือส่วนที่จะถูกกล่าวอ้างถึงในบทต่อไปทั้งนี้เพื่อเป็นประโยชน์และเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้แก่ผู้ดำเนินงานวิจัย

บทที่ 4

การคำนวณสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธี ไฟน์ทออลิเมนต์แบบ 3 มิติ

4.1 บทนำ

วิธีไฟน์ทออลิเมนต์เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับการนิยมนำมาใช้เนื่องจากปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ทำให้สามารถคำนวณงานต่างๆ ด้วยวิธีไฟน์ทออลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้นการคำนวณสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำที่มีความซับซ้อนจึงมีความจำเป็นอย่างย้งที่ต้องนำวิธีไฟน์ทออลิเมนต์มาใช้ในการแก้ปัญหาดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำและประยุกต์วิธีไฟน์ทออลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กนี้

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็ก

ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็ก **B** สามารถดำเนินการได้โดยเปลี่ยนไปคำนวณหาศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** ก่อนเนื่องจากสามารถคำนวณได้ง่ายกว่าโดยสนามแม่เหล็ก **B** สามารถคำนวณได้ด้วยการเกร็ดศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก **A** เท่านั้นดังที่ได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.1)$$

การคำนวณสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำจึงเริ่มจากการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กซึ่งตั้งต้นจากการศึกษาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงค่าตามเวลา (William, 1989) โดยศึกษาได้จากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) ที่กล่าวว่าสนามแม่เหล็กที่แปรผันตามเวลาจะเหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้า **E** ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

แทนสมการที่ (4.1) ลงในสมการที่ (4.2) จะได้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3)$$

และจากกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ที่ใช้กับสนามที่แปรตามเวลาเมื่อสมมติให้ความหนาแน่นกระแสกระจัด (displacement current density) มีค่าเป็นศูนย์ (Demerdash and Gillott, 1974) และ (Fu, 1999) เนื่องจากแหล่งจ่ายมีค่าความถี่ต่ำสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_e \quad (4.4)$$

เมื่อ $\mathbf{H}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก, $\mathbf{J}_0$ คือความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density) และ $\mathbf{J}_e$ คือความหนาแน่นของกระแสวน (eddy current density) ซึ่งได้จากกฎของโอห์มโดยที่

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (4.5)$$

เมื่อ σ คือสภาพนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity) และจากความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.3) จึงได้

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.6)$$

นำสมการที่ (3.24), (4.1) และ (4.6) แทนค่าลงไปในสมการที่ (4.4) จะได้

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_0 \quad (4.7)$$

จากการศึกษาคุณสมบัติของ $\mathbf{A}$ พบว่าประกอบกับการใช้เอกลักษณ์ในสมการที่ (3.15) จึงได้สมการของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กดังสมการที่ (4.8)

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (4.8)$$

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสซึ่งกระแสเหนี่ยวนำในวงจรโรเตอร์จะขึ้นอยู่กับค่าสลิป s ของมอเตอร์ด้วยเมื่อพิจารณามอเตอร์ในสามมิติตามระนาบพิกัด xyz ซึ่งแปรผันตามเวลาจึงสามารถคำนวณได้จากสมการโดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) อันดับสอง สามารถแสดงด้วยสมการที่ (4.9) (Vassent, Meunier, and Foggia, 1991), (Nagwa, Anthony, and Graham, 1992) และ (Fu, 1999) ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (4.9)$$

โดยที่

μ	คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability)
σ	คือ สภาพนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity)
s	คือ ค่าสลิป (slip) ของมอเตอร์
$\mathbf{J}_0$	คือ ความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density)

จากสมการที่ (4.9) ซึ่งเป็นการสมมติให้สนามแม่เหล็กวางตัวตามพื้นที่หน้าตัดในระนาบพิกัด xy ของมอเตอร์ ดังนั้นการพิจารณาเทอมของ $\mathbf{A}$ และ $\mathbf{J}_0$ จะปรากฏเฉพาะส่วนประกอบแกน z เท่านั้น

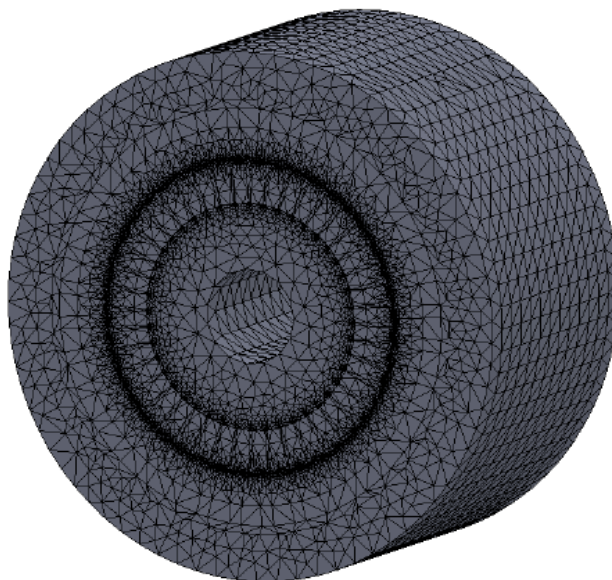
4.3 การคำนวณสนามแม่เหล็กโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำดังแสดงในสมการที่ (4.9) หากผลเฉลยแม่นยำตรงได้ยากดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่างๆดังนี้

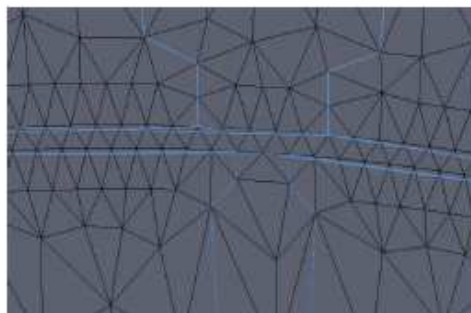
4.3.1 การแบ่งอิลลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

ขั้นตอนแรกเริ่มจากการแบ่งพื้นที่ย่อยของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ซึ่งในที่นี้จะใช้อิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นซึ่งงานวิจัยนี้จะดำเนินการแบ่งพื้นที่ย่อย โดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป Solid Work และได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 4.1 ซึ่งเป็นตัวอย่างการแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อบนพื้นที่ของมอเตอร์โดยมอเตอร์มีจำนวนร่องของสเตเตอร์และโรเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 36 และ 44 ร่องตามลำดับและการพันขดลวดสเตเตอร์เป็นแบบสองชั้นส่วนรูปที่ 4.2 เป็นการขยายให้เห็นถึงความละเอียดในการแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อบนบริเวณพื้นที่ที่สำคัญ

ในงานวิจัยนี้การแบ่งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ออกเป็นอิลลิเมนต์จะพิจารณาแยกพื้นที่กันออกเป็น 3 ส่วนได้แก่ส่วนของพื้นที่สเตเตอร์ส่วนของพื้นที่โรเตอร์และส่วนของพื้นที่ช่องอากาศระหว่างสเตเตอร์และโรเตอร์โดยส่วนของพื้นที่สเตเตอร์การแบ่งอิลลิเมนต์จะกระทำเพียงครั้งเดียวทั้งนี้เพราะส่วนของสเตเตอร์ถูกยึดอยู่กับที่ในส่วนพื้นที่โรเตอร์การแบ่งอิลลิเมนต์ดำเนินการเพียงครั้งเดียวเช่นกันแต่เมื่อพิจารณาถึงตำแหน่งพิกัดของจุดต่อบนพื้นที่แล้วจะต้องคำนึงถึงมุมของโรเตอร์ที่หมุนเปลี่ยนแปลงไปด้วย



รูปที่ 4.1 การแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เหนี่ยวนำด้วยรูปทรงสี่หน้า



รูปที่ 4.2 ภาพขยายการแบ่งอีลิเมนต์และจุดต่อบนบริเวณที่สำคัญ

4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์

ขั้นตอนนี้เป็นทางเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์(element interpolation function) โดยเมื่อสมมติลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอีลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจึงได้

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (4.10)$$

โดยที่ $N_n, n = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์และ $A_n, n = 1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของอีลิเมนต์ซึ่ง

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad (4.11)$$

V คือปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าของแต่ละอีลิเมนต์ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_4(y_2z_3 - y_3z_2) + x_3(y_4z_2 - y_2z_4) + x_2(y_3z_4 - y_4z_3) \\
 a_2 &= x_4(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_4 - y_4z_1) + x_1(y_4z_3 - y_3z_4) \\
 a_3 &= x_4(y_1z_2 - y_2z_1) + x_2(y_4z_1 - y_1z_4) + x_1(y_2z_4 - y_4z_2) \\
 a_4 &= x_3(y_2z_1 - y_1z_2) + x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_1(y_3z_2 - y_2z_3) \\
 b_1 &= y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3) \\
 b_2 &= y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1) \\
 b_3 &= y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2) \\
 b_4 &= y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) \\
 c_1 &= x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2) \\
 c_2 &= x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3) \\
 c_3 &= x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1) \\
 c_4 &= x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2) \\
 d_1 &= x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3) \\
 d_2 &= x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) \\
 d_3 &= x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2) \\
 d_4 &= x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3.3 การสร้างสมการของอีลิเมนต์

ขั้นตอนนี้เป็นการสร้างสมการอีลิเมนต์(element formulation) ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ดังสมการที่ (3.16) ซึ่งขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ อย่างในกรณีอีลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า รูปแบบทั่วไปของสมการของอีลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถแสดงได้ดังนี้ (Huebner, Dewhirst, Smith, and Byrom, 2001)

$$[M] \dot{\{A\}} + [K]\{A\} = \{F\} \tag{4.14}$$

โดย $\{A\}$ คือเวกเตอร์ของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อและคือเวกเตอร์ของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสมการที่ (4.14) นี้สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์โดยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างซึ่งถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่างๆ ในปัจจุบันและวิธีนี้ยังสามารถจำแนกแยกย่อยออกไปได้อีกเช่นวิธีของกาเลอร์กิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ปกติแล้วจะมีความ

สมมาตรจึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหาขนาดใหญ่อย่างเช่นปัญหาในงานวิจัยนี้

การสร้างสมการของอิลลิเมนต์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้คือหากแทนผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (4.9) จะไม่ได้ค่าเท่ากับศูนย์แต่จะมีค่าเท่ากับ R ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.15)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 = R \quad (4.15)$$

ซึ่ง R เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาเศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุดเพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าที่เที่ยงตรงมากที่สุดและในงานวิจัยนี้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้ใช้วิธีของกาลเลอร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988) และ (Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function: W) แล้วอินทิเกรตรอบปริมาตร (V) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_V W_n R dV = 0, \quad n=1, 2, 3, 4 \quad (4.16)$$

งานวิจัยนี้เลือกอิลลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อในการคำนวณ ดังนั้นจุดที่ไม่ทราบค่าจะมี 4 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสี่ ดังนั้นจึงต้องการ 4 สมการในการแก้ปัญหาค่าที่ไม่ทราบค่า ดังสมการที่ (4.16) จะต้องมีค่า $n = 1, 2, 3, 4$ และโดยปกติเราจะเลือก $W_n = N_n$ ซึ่งเรียกว่าบับโนฟ-กาลเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน R ด้วยสมการที่ (4.15) ลงในสมการที่ (4.16) จึงได้

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \right) dV = 0 \quad (4.17)$$

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dv - \int_V N_n s\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dv = 0 \quad (4.18)$$

พิจารณาการอินทิเกรตที่ละพจน์ของสมการที่ (4.18) สำหรับพจน์แรกซึ่งเป็นพจน์อนุพันธ์อันดับสองใช้วิธีการอินทิเกรตที่ละส่วน (integrate by parts) โดยจะใช้ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\int_V u(\nabla \cdot \mathbf{V}) dv = \int_\Gamma u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_V (\nabla u \cdot \mathbf{V}) dv \quad (4.19)$$

Γ คือขอบเขตของอีลีเมนต์เมื่อเปรียบเทียบกับสมการที่ (4.19) กับพจน์แรกของสมการที่ (4.18) จะได้ว่า

$$u = N_n$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \mathbf{k}$$

และเนื่องจาก $\mathbf{n}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบเขตของอีลีเมนต์ Γ

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z$$

$$u(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right)$$

$$\nabla u = \frac{\partial N_n}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (4.18) เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N_n \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} n_x + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} n_y + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} n_z \right) d\Gamma - \int_v \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv - \\ \int_v N_n s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv + \int_v (N_n \mathbf{J}_0) dv = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

พิจารณาพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (4.20) ซึ่งเป็นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของอิลลิเมนต์ Γ ที่มีคุณสมบัติทางกายภาพคือปริมาณกระแสตลอดขอบนอกของอิลลิเมนต์นั้นๆ อีกรวมอิลลิเมนต์นั้นๆ อาจวางตัวอยู่ภายในหรืออยู่ติดขอบนอกของพื้นที่ศึกษาหากอิลลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่ตรงตำแหน่งขอบนอกของพื้นที่ศึกษาเงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) จะถูกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้เพื่อเป็นเงื่อนไขตรงขอบนอกของพื้นที่ศึกษาเงื่อนไขนี้เป็นการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตามที่ขอบเขตนั้นซึ่งในปัญหาของงานวิจัยนี้มีเงื่อนไขขอบเขตแสดงได้ดังสมการที่ (4.21) (Nagwa, Anthony, and Graham, 1992) นั่นคือศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ มีค่าคงที่ตลอดตามขอบของพื้นที่ศึกษาหรือหมายถึงไม่มีการไหลของกระแสไฟฟ้าผ่านบริเวณขอบนอกของมอเตอร์เหนี่ยวนำ (ปริมาณกระแสที่ไหลผ่านขอบเท่ากับศูนย์) และหากอิลลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่วางตัวอยู่ภายในพื้นที่ศึกษาโดยมีอิลลิเมนต์อื่นๆ ล้อมรอบค่าปริมาณกระแสที่ไหลผ่านจุดต่อภายในจุดต่อหนึ่งของอิลลิเมนต์นี้ต้องอยู่ในสภาวะสมดุลกับปริมาณกระแสจากอิลลิเมนต์ที่อยู่ล้อมรอบดังนั้นปริมาณกระแสที่ไหลเข้าและออกจุดต่อจึงต้องหักล้างกันหมดเท่ากับศูนย์เพื่อทำให้เกิดสภาวะการไหลของกระแสที่สมดุลดังนั้นจึงได้สมการไฟไนท์อิลลิเมนต์ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.22) และเนื่องจากสมการที่ (4.22) มีทั้งหมด 4 สมการเราสามารถเขียนสมการไฟไนท์อิลลิเมนต์นี้ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังสมการที่ (4.23)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} = 0 \quad (4.21)$$

$$\int_v \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv + \int_v N_n s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = \int_v (N_n \mathbf{J}_0) dv \quad (4.22)$$

$$\int_v \left(\left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \left[\frac{\partial N_n}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \left[\frac{\partial N_n}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) dv + \int_v [N_n]_{4 \times 1} s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv = \int_v [N_n]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (4.23)$$

และจากสมการที่ (4.10) จึงได้ลักษณะการกระจายของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ โดยประมาณในแต่ละอิลลิเมนต์เป็น

$$A(x, y, z) = [N]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} [A]_{4 \times 1}$$

และสมการไฟไนท์อิลลิเมนต์จึงกลายมาเป็น

$$\int_v \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dv [A]_{4 \times 1} + \int_v [N]_{4 \times 1} s \sigma [N]_{1 \times 4} dv [\dot{A}] = \int_v [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (4.24)$$

หรือเขียนสมการไฟไนท์อิลลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 4 สมการดังนี้

$$[M]_{4 \times 4} \{\dot{A}\}_{4 \times 1} + [K]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1} = \{F\}_{4 \times 1} \quad (4.25)$$

โดยที่ $[M]_{4 \times 4}$ = เมทริกซ์การนำไฟฟ้า
 $[K]_{4 \times 4}$ = เมทริกซ์ความซาบซึ่มได้ของแม่เหล็ก
 $\{F\}_{4 \times 1}$ = โหลดเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเอง

เมทริกซ์การนำทางไฟฟ้า: $[M]_{4 \times 4}$

$$[M]_{4 \times 4} = \int_v [N]_{4 \times 1} s \sigma [N]_{1 \times 4} dv \quad (4.26)$$

จากสมการที่ (4.11) ฟังก์ชันการประมาณภายในแสดงได้ดังนี้

$$N_n = \frac{1}{6V} (a_n + b_n x + c_n y + d_n z) \quad n=1,2,3,4 \quad (4.27)$$

จากสมการที่ (4.27) และหากค่าสภาพนำทางไฟฟ้า σ มีค่าคงที่ดังนั้นสมการที่ (4.26) จึงกลายเป็น

$$[M]_{4 \times 4} = s \sigma \int_v [N]_{4 \times 1} [N]_{1 \times 4} dv \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.28)$$

สมการที่ (4.28) นี้สามารถคำนวณได้ง่ายโดยใช้สูตรการอินทิเกรตตลอดปริมาตรรูปทรงสี่หน้า (อานนท์ อิศรมงคลรักษ์, 2552) ดังแสดงได้ด้วยสมการที่ (4.29)

$$\int_v N_1^a N_2^b N_3^c N_4^d dv = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \quad (4.29)$$

สมการที่ (4.28) สามารถแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีคือ $N_n = N_m$ และ $N_n \neq N_m$ ในกรณีที่ $N_n = N_m$ และยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 ของรูปทรงสี่หน้าจึงได้ $a=2, b=0, c=0, d=0$ ดังนั้น

จากสมการที่ (4.29) จะได้

$$\int_v N_1^2 dv = \frac{2!0!0!0!}{(2+0+0+0+3)!} 6V = \frac{2V}{20}$$

ในกรณีที่ $N_n \neq N_m$ และยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 และ 2 จึงได้ $a=1, b=1, c=0, d=0$ ดังนั้นจากสมการที่ (4.29) จะได้

$$\int_v N_1^1 N_2^1 dv = \frac{1!1!0!0!}{(1+1+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{20}$$

ที่จุดต่ออื่น ๆ ของรูปทรงสี่หน้าก็ได้รับการพิจารณาในลักษณะนี้เช่นกัน ดังนั้นจากสมการที่ (4.29) จึงได้เมทริกซ์การนำทางไฟฟ้า $[M]_{4 \times 4}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.30) ซึ่งจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ $[M]_{4 \times 4}$ จะมีค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับรูปร่างของอิลลิเมนต์

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{s\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

เมทริกซ์ความขบขั้มได้ของแม่เหล็ก: $[K]_{4 \times 4}$

$$[K]_{4 \times 4} = \int_v \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_{1 \times 4} + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{4 \times 1} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]_{1 \times 4} \right) dv \quad (4.31)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในในสมการที่ (4.27) จึงได้

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{b_n}{6V} \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{c_n}{6V} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{d_n}{6V} \quad n = 1, 2, 3, 4 \quad (4.32)$$

แทนความสัมพันธ์ของสมการที่ (4.32) ลงในสมการที่ (4.31) จะได้

$$\begin{aligned} [K]_{4 \times 4} &= \frac{1}{\mu} \int \left(\frac{b_n}{6V} \frac{b_m}{6V} + \frac{c_n}{6V} \frac{c_m}{6V} + \frac{d_n}{6V} \frac{d_m}{6V} \right) dx dy dz \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \\ &= \frac{1}{36\mu V^2} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \int dx dy dz \\ &= \frac{1}{36\mu V} (b_n b_m + c_n c_m + d_n d_m) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ & & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ & & & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Sym

โพลีเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเอง: $\{F\}_{4 \times 1}$

$$\{F\}_{4 \times 1} = \int_v [N]_{4 \times 1} \mathbf{J}_0 dv \quad (4.35)$$

และจากฟังก์ชันการประมาณภายในดังสมการที่ (4.27) ดังนั้นสมการที่ (4.35) จึงกลายเป็น

$$\{F\}_{4 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int_v N_n dv \quad n, m = 1, 2, 3, 4 \quad (4.36)$$

สมการที่ (4.36) นี้สามารถคำนวณได้โดยใช้สูตรดังสมการ (4.29) โดยยกตัวอย่างการพิจารณาจุดต่อที่ 1 ของรูปทรงสี่หน้า จึงได้ $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ ดังนั้นจากสมการที่ (4.29) จะได้

$$\int_v N_1^1 dv = \frac{1!0!0!0!}{(1+0+0+0+3)!} 6V = \frac{V}{4}$$

ซึ่งจุดที่เหลือของรูปทรงสี่หน้าก็ได้รับการพิจารณาเช่นเดียวกันนี้ ดังนั้นจากสมการที่ (4.36) จึงได้โพลีเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเองแสดงดังนี้

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

ซึ่งการคำนวณค่าความหนาแน่นของกระแสภายนอก $\mathbf{J}_0$ ของมอเตอร์เหนี่ยวนำในแต่ละเฟสจะแสดงรายละเอียดต่างๆ ให้ปรากฏในบทต่อไป

4.3.4 การแก้ปัญหภายใต้สถานะชั่วคราว

ปัญหาในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราว (linear transient problem) โดยที่ค่าสเกลเชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาเนื่องจากเวกเตอร์ $\{F\}$ เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาเนื่องจากแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสสลับ ซึ่งการแก้สมการที่ (4.25) จะต้องอาศัยวิธีการแก้ภายใต้สถานะชั่วคราวที่เรียกว่าวิธีความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations)

การแก้ปัญหาภายใต้สถานะชั่วคราวจะใช้วิธีความสัมพัทธ์เวียนบังเกิดโดยจะมีลักษณะของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับค่า β ที่เลือกใช้ดังแสดงในสมการที่ (4.38) โดย Δt คือค่าของช่วงเวลา (time step) โดยถ้าเลือกใช้ $\beta = 0$ จะเป็นวิธีของออยเลอร์ (Euler) ถ้า $\beta = 1/2$ เป็นวิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ถ้า $\beta = 2/3$ เป็นวิธีของกาลเอร์กิน (Galerkin) และถ้า $\beta = 1$ จะเรียกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference) ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังดังสมการที่ (4.39) เนื่องจากวิธีนี้รับประกันการลู่เข้าของผลลัพธ์และผลลัพธ์จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง

$$\beta \dot{\{A\}}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \dot{\{A\}}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (4.38)$$

$$\dot{\{A\}}^{t+\Delta t} = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (4.39)$$

จากการเลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังสมการที่ (4.25) จึงพัฒนามาเป็นสมการที่ (4.40) จากนั้นแทนค่าสมการที่ (4.39) ลงในสมการที่ (4.40) จึงได้ผลลัพธ์ของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อพิจารณาปัญหาในสถานะชั่วคราวดังสมการที่ (4.41)

$$[M] \dot{\{A\}}^{t+\Delta t} + [K] \{A\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \quad (4.40)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [K] \right) \{A\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{A\}^t + \{F\}^{t+\Delta t} \quad (4.41)$$

4.3.5 การประกอบสมการเอลิเมนต์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็น การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบโดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อจึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ ดังนั้นจึงได้สมการรวมของงานวิจัยนี้เมื่อพิจารณาปัญหาแบบเชิงเส้นในสถานะชั่วคราวคือ

$$[J]_{n \times n} [A]_{n \times 1} = [f]_{n \times 1} \quad (4.42)$$

4.3.6 การประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาผลเฉลย

ประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (initial and boundary condition) ที่สอดคล้องกับปัญหาทางในสมการรวมของระบบ (constraints) ซึ่งงานวิจัยนี้มีค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในรอบแรกที่พิจารณาการหมุนของมอเตอร์คือ $A(t=0) = 0$ ส่วนการหมุนรอบถัดไปจะใช้คำตอบจากรอบที่แล้วเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อประหยัดเวลาในการหาคำตอบที่ถูกต้องส่วนค่าเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดให้ขอบในที่ติดกับเพลาและขอบนอกของมอเตอร์มีค่า $A = 0$ (Brunelli, Casadei, Reggiani and Serra, 1983) และ (Fu, 1999)

4.3.7 การคำนวณค่าตัวแปรอื่นที่ต้องการ

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก $\mathbf{A}$ ที่จุดต่อต่างๆแล้วจึงสามารถคำนวณค่าต่างๆที่สัมพันธ์กันต่อไปได้โดยสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ที่กระจายตัวในระบบพิกัดฉาก (ระนาบ xyz) ของมอเตอร์สามารถคำนวณได้จาก $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ดังนั้นเมื่อพิจารณามอเตอร์ใน 3 มิติตามระนาบพิกัด xyz จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y (B_y) ดังแสดงด้วยสมการที่(4.43) และ (4.44) ตามลำดับ

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (4.43)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \quad (4.44)$$

จากนั้นแปลงระบบจากพิกัดฉากไปเป็นพิกัดทรงกระบอกเพื่อใช้คำนวณค่าสนามแม่เหล็กในแนวรัศมี (radial flux density, B_r) และสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัส (tangential flux density, B_t) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ที่มีมุม ϕ เปลี่ยนแปลงไปสามารถแสดงได้ดังนี้

$$B_r = B_x \cos \phi + B_y \sin \phi \quad (4.45)$$

$$B_t = -B_x \sin \phi + B_y \cos \phi \quad (4.46)$$

เมื่อคำนวณหาค่า B_r และ B_t แล้วจากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับช่องอากาศซึ่งจะมีผลต่อการสันสเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998) และ (Sakamoto, Hirata, Kobayashi, and Kajiware, 1999) โดยที่

$$F_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_t^2) \quad (4.47)$$

$$F_t = \frac{1}{\mu_0} (B_r B_t) \quad (4.48)$$

ซึ่ง F_r และ F_t คือแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวรัศมีและแนวสัมผัสตามลำดับโดยขนาดของการสันสเทือนที่เกิดจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัสจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแนวรัศมี ดังนั้นการพิจารณาแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงพิจารณาเฉพาะในแนวรัศมีเท่านั้น (Tarnhuvud, and Reichert, 1988) และ (Neves, Carlson, Sadowski, and Bastos, 1998) แต่เมื่อพิจารณาแรงบิดของมอเตอร์ที่ทำให้โรเตอร์หมุนแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวสัมผัสจะเป็นแรงหลักที่ต้องนำมาพิจารณาถึง

4.4 สรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสเมื่อพิจารณามอเตอร์ในสถานะชั่วคราวซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าฟลักซ์แม่เหล็กได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คินรายละเอียดต่างๆในบทนี้จะนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 6 ต่อไป

บทที่ 5

การคำนวณการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบ 3 มิติ

5.1 บทนำ

การคำนวณขนาดของการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสในขณะที่โรเตอร์หมุน โดยแสดงผลของการสันสะท้อนในรูปของการกระจัดที่ผิวด้านไปจากรูปร่างดั้งเดิมของมอเตอร์ ก่อนข้างดำเนินการได้ยาก เนื่องจากผลลัพธ์ของการกระจัดอย่างละเอียดที่ครอบคลุมตลอดทั้งปริมาตรของมอเตอร์ต้องอาศัยการคำนวณที่มีความซับซ้อนสูง ซึ่งปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีสมรรถนะสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ จึงสามารถคำนวณการสันสะท้อนของมอเตอร์ในทุกๆตำแหน่งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ ดังนั้นในบทนี้จึงได้ประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาขนาดของการสันสะท้อน

5.2 การคำนวณการสันสะท้อนโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

การคำนวณขนาดของการสันสะท้อนในมอเตอร์ จะอาศัยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อสร้างสมการการเคลื่อนที่ โดยพิจารณาการสันในรูปของฟังก์ชันการกระจัด ซึ่งการดำเนินงานจะมีขั้นตอนคล้ายคลึงกับการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากบทที่ 4 ที่ผ่านมา โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานต่างๆ ดังนี้

5.2.1 การแบ่งเอลิเมนต์ของพื้นที่ศึกษา

เริ่มจากการแบ่งปริมาตรของมอเตอร์ออกเป็นเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าสี่จุดต่อ โดยสมมติลักษณะการกระจายผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใดๆ บนเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น การแบ่งเอลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์ขนาดเล็กพิกัด 3 แรกมั่ว ได้ใช้โปรแกรม Solid Work โดยมีจำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์เท่ากับ 5,448 จุด และ 28,059 เอลิเมนต์ ตามลำดับ ดังแสดงด้วยรูปที่ 5.1 ซึ่งจากรูป การคำนวณการสันสะท้อนได้แบ่งพื้นที่การพิจารณาเฉพาะส่วนของแกนสเตเตอร์เท่านั้น เนื่องจากพิจารณาผลของแรงที่มากระทำเฉพาะส่วนของแกนสเตเตอร์ (Henneberger, Sattler, and Shen, 1992), (Durantay, Laurent, Messin, and Kromer, 1999) และ (Ishibashi, Kamimoyo, Noda, and Itomi, 2003)



รูปที่ 5.1 การแบ่งอิลลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์เพื่อคำนวณการสั่นสะเทือน

5.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในและสมการของอิลลิเมนต์

การสร้างสมการการเคลื่อนที่ของอิลลิเมนต์เมื่อพิจารณาการสั่นของมอเตอร์ในฟังก์ชันของการกระจัดสมการการเคลื่อนที่ของอิลลิเมนต์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.1) ซึ่งเป็นสมการไฟไนต์อิลลิเมนต์สำหรับแต่ละอิลลิเมนต์ที่มี 12 สมการประกอบรวมกัน

$$[M]_{12 \times 12} \frac{\partial^2 \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{12 \times 12} \frac{\partial \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t} + [K]_{12 \times 12} \{x\}_{12 \times 1} = \{F\}_{12 \times 1} \quad (5.1)$$

โดย $[M]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์มวล (mass matrix)

$[D]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์ความหน่วง (damping matrix)

$[K]_{12 \times 12}$ = เมทริกซ์ความแข็งของสปริง (stiffness matrix)

$\{F\}_{12 \times 1}$ = เวกเตอร์ของแรงหรือโมเมนต์ที่มากระทำ

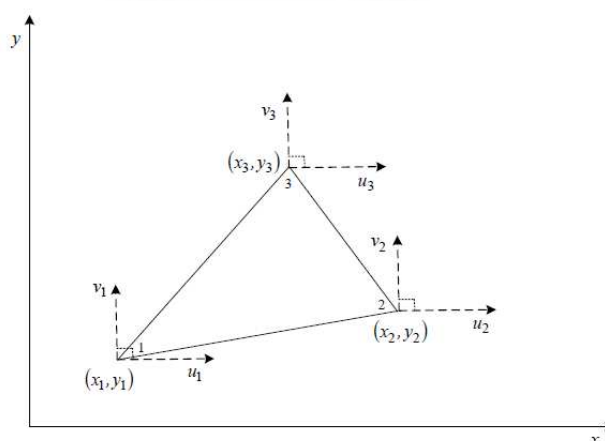
$\{x\}_{12 \times 1}$ = เวกเตอร์การกระจัดเพื่อใช้หาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $\frac{\partial \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t}$ และสอง $\frac{\partial^2 \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t^2}$

เทียบกับเวลาหรืออีกนัยหนึ่งคือเวกเตอร์ความสัมพันธ์ของความเร็วและ

ความเร่งตามลำดับ

ซึ่งแรงที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์เกิดจากการนำแรงแม่เหล็กไฟฟ้าตรงกลางซี่ในแต่ละซี่ของสเตเตอร์ที่ติดกับช่องอากาศซึ่งแรงแม่เหล็กไฟฟ้างกล่าวเป็นผลลัพธ์จากการคำนวณดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 4 ส่วนเวกเตอร์การกระจัดที่แสดงในสมการที่ (5.2) เป็นการแสดงระยะกระจัดบนจุดต่อหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่อหนึ่งอีลิเมนต์โดย u , v และ w แทนระยะกระจัดในแนวแกน x , y และ z ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 5.2 ซึ่งการแสดงระนาบพิกัดในลักษณะเช่นนี้จะเรียกว่าระนาบพิกัดวงกว้าง (global coordinate)

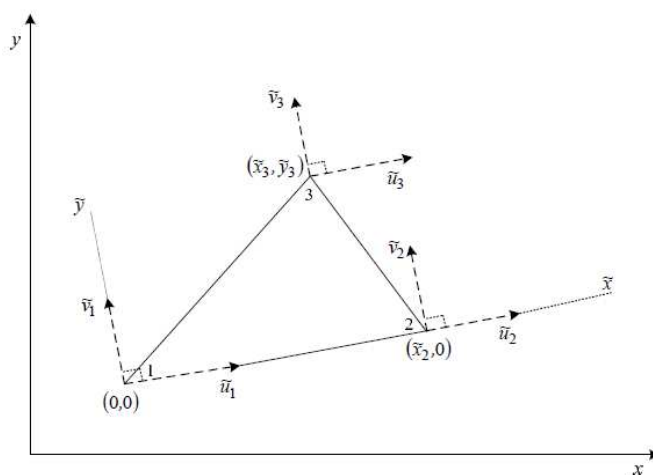
$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$



รูปที่ 5.2 อีลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดวงกว้าง

การพิจารณาการกระจัดของแต่ละอีลิเมนต์ที่มีลักษณะการวางตัวในแต่ละอีลิเมนต์ที่แตกต่างกันจะต้องพิจารณาการวางตัวของทุกๆ อีลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันเสียก่อนซึ่ง

ดำเนินการได้โดยแปลงระนาบพิกัดวงกว้างให้เป็นระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น (local coordinate) (Rao, 1999) ดังแสดงด้วยรูปที่ 5.3 ซึ่งดำเนินการได้โดยกำหนดให้ที่จุดต่อหมายเลข 1 ของทุกๆ อิลลิเมนต์ มีพิกัดเฉพาะถิ่น $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ อยู่ที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ โดยที่แกน $\tilde{x}$ ของทุกๆ อิลลิเมนต์บนระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นจะวางตัวตามฐานของสามเหลี่ยมระหว่างจุดต่อหมายเลข 1 และ 2 และแกน $\tilde{y}$ จะตั้งฉากกับแกน $\tilde{x}$ ดังนั้นจุดต่อหมายเลข 2 ของทุกๆ อิลลิเมนต์จึงมีพิกัดเฉพาะถิ่น $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z})$ เป็น $(\tilde{x}_2, 0, \tilde{z})$ และ $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3, \tilde{z}_3)$ คือจุดต่อหมายเลข 3 ของพิกัดเฉพาะถิ่นโดยมี $\tilde{u}$ และ $\tilde{v}$ ที่จุดต่อหมายเลขต่างๆ แทนระยะกระจัดในแนวแกน $\tilde{x}$ และ $\tilde{y}$ ตามลำดับเมื่อสร้างสมการอิลลิเมนต์ในระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นเพื่อพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์แล้วจากนั้นจึงแปลงกลับไปเป็นสมการอิลลิเมนต์ในระนาบพิกัดวงกว้าง (x, y) ดังเดิม



รูปที่ 5.3 อิลลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อพิจารณาระนาบพิกัดเฉพาะถิ่น

การพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์ยังคงพิจารณาลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นเช่นเดียวกับที่เคยกล่าวมาแล้วในบทที่ 4 ซึ่งลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลลิเมนต์เมื่อพิจารณาระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (5.3), (5.4) และ (5.5)

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{u}_1 N_1 + \tilde{u}_2 N_2 + \tilde{u}_3 N_3 + \tilde{u}_4 N_4 \quad (5.3)$$

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{v}_1 N_1 + \tilde{v}_2 N_2 + \tilde{v}_3 N_3 + \tilde{v}_4 N_4 \quad (5.4)$$

$$w(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{w}_1 N_1 + \tilde{w}_2 N_2 + \tilde{w}_3 N_3 + \tilde{w}_4 N_4 \quad (5.5)$$

โดยที่ N_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลลิเมนต์และ $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ และ $\tilde{w}_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของการกระจัดในแนวแกน $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ และ $\tilde{z}$ ในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของอิลลิเมนต์ตามลำดับซึ่ง

$$N_n = \frac{a_n + b_n \tilde{x} + c_n \tilde{y} + d_n \tilde{z}}{6V} \quad (5.6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_2\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_2) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_4\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_3\tilde{z}_4 - \tilde{y}_4\tilde{z}_3) \\ a_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_3\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_3) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_1\tilde{z}_4 - \tilde{y}_4\tilde{z}_1) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_4\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_4) \\ a_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_1\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_4\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_3) \\ a_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{y}_2\tilde{z}_1 - \tilde{y}_1\tilde{z}_2) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_1\tilde{z}_3 - \tilde{y}_3\tilde{z}_1) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3\tilde{z}_2 - \tilde{y}_2\tilde{z}_3) \\ b_1 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) + \tilde{y}_3(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_3) \\ b_2 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_3(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_1) \\ b_3 &= \tilde{y}_4(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_4) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_2) \\ b_4 &= \tilde{y}_3(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) + \tilde{y}_1(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3) + \tilde{y}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1) \\ c_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_3(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_2) \\ c_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1) + \tilde{x}_3(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_4 - \tilde{z}_3) \\ c_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) \\ c_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3) + \tilde{x}_1(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_2) \\ d_1 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_3) \\ d_2 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_3) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_3(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_1) \\ d_3 &= \tilde{x}_4(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_4) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_4 - \tilde{y}_2) \\ d_4 &= \tilde{x}_3(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + \tilde{x}_1(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_3) + \tilde{x}_2(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) \end{aligned} \quad (5.7)$$

และ V คือปริมาตรของแต่ละอิลลิเมนต์ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 & \tilde{z}_1 \\ 1 & \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 & \tilde{z}_2 \\ 1 & \tilde{x}_3 & \tilde{y}_3 & \tilde{z}_3 \\ 1 & \tilde{x}_4 & \tilde{y}_4 & \tilde{z}_4 \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

จากสมการไฟไนท์อีลิเมนต์ในสมการที่ (5.1) สามารถคำนวณอีลิเมนต์เมทริกซ์ความแข็งของสปริงและอีลิเมนต์เมทริกซ์มวลได้ดังที่จะอธิบายต่อจากนี้ไปซึ่งในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะไม่พิจารณาถึงอีลิเมนต์เมทริกซ์ความหน่วงเนื่องจากมีผลต่อการสั่นสะเทือนของมอเตอร์ค่อนข้างน้อย ประกอบกับการคำนวณมีความยุ่งยาก (Henneberger, Sattler, Hadrys, and Shen, 1992)

เมทริกซ์ความแข็งของสปริง: $[K]_{12 \times 12}$

ดำเนินการโดยพิจารณาการวางตัวของอีลิเมนต์ในระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นเพื่อให้ทุกๆ อีลิเมนต์มีการวางตัวอยู่ในรูปแบบเดียวกันก่อนจะได้เมทริกซ์ส่วนประกอบความแข็งของสปริง(constitutive matrix, $[\tilde{D}]$) ดังแสดงด้วยสมการที่ (5.9)

$$[\tilde{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & \text{sym} & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

ซึ่ง E และ ν คือค่ามอดุลัส (modulus) และอัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's ratio) ตามลำดับ

เมทริกซ์ความเครียดของสปริง (strain relationship, $[\tilde{B}]$) ดังแสดงได้ในสมการที่(5.10), (5.11), (5.12), (5.13),และ (5.14)

$$[\tilde{B}] = [\tilde{B}_1 \quad \tilde{B}_2 \quad \tilde{B}_3 \quad \tilde{B}_4] \quad (5.10)$$

โดยที่

$$[\tilde{B}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ c_1 & b_1 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[\tilde{B}_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 \\ c_2 & b_2 & 0 \\ 0 & d_2 & c_2 \\ d_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$[\tilde{B}_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \\ c_3 & b_3 & 0 \\ 0 & d_3 & c_3 \\ d_3 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$[\tilde{B}_4] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 \\ c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_4 & c_4 \\ d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

เมื่อนำค่า $[\tilde{B}]$ รวมระบบจะได้ดังสมการที่ (5.15)

$$[\tilde{B}] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & d_4 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & b_3 & 0 & c_4 & b_4 & 0 \\ 0 & d_1 & c_1 & 0 & d_2 & c_2 & 0 & d_3 & c_3 & 0 & d_4 & c_4 \\ d_1 & 0 & b_1 & d_2 & 0 & b_2 & d_3 & 0 & b_3 & d_4 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ซึ่งเมทริกซ์ความแข็งของสปริงเฉพาะถิ่น (local stiffness matrix, $[\tilde{K}]$) เกิดจากผลของเมทริกซ์ส่วนประกอบความแข็งของสปริงและเมทริกซ์ความเครียดของสปริงดังแสดงด้วยสมการที่ (5.16) และ (5.17) ตามลำดับ

$$[\tilde{K}] = \iiint_V [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] dV \quad (5.16)$$

$$[\tilde{K}] = [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] V \quad (5.17)$$

เมื่อคำนวณเมทริกซ์ความแข็งของสปริงเฉพาะถิ่นได้แล้วจากนั้นแปลงกลับเป็นเมทริกซ์ความแข็งของสปริงที่แท้จริงได้ในสมการที่ (5.18)

$$[K] = [R]^T [\tilde{K}] [R] \quad (5.18)$$

โดยที่

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

จากสมการที่ (5.19) สมาชิกในเมทริกซ์ $[R]$ จะประกอบไปด้วยฟังก์ชันโคไซน์ระนาบทิศทาง (directional cosine) ซึ่งเป็นค่าที่ใช้สำหรับถ่ายโอนจากระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นสู่ระนาบพิกัดวงกว้าง ดังแสดงด้วยความสัมพันธ์ดังสมการที่ (5.20) - (5.30)

$$\cos(\tilde{x}, x) = \frac{x_2 - x_1}{L} = l \quad (5.20)$$

$$\cos(\tilde{x}, y) = \frac{y_2 - y_1}{L} = m \quad (5.21)$$

$$\cos(\tilde{x}, z) = \frac{z_2 - z_1}{L} = n \quad (5.22)$$

$$\cos(\tilde{y}, x) = -\frac{m}{P} \quad (5.23)$$

$$\cos(\tilde{y}, y) = \frac{l}{P} \quad (5.24)$$

$$\cos(\tilde{y}, z) = 0 \quad (5.25)$$

$$\cos(\tilde{z}, x) = -\frac{(l)(n)}{P} \quad (5.26)$$

$$\cos(\tilde{z}, y) = -\frac{(m)(n)}{P} \quad (5.27)$$

$$\cos(\tilde{z}, z) = P \quad (5.28)$$

โดยที่

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (5.29)$$

$$P = \sqrt{l^2 + m^2} \quad (5.30)$$

เมทริกซ์มวล: $[M]_{12 \times 12}$

ดำเนินการโดยพิจารณาการวางตัวของอีลิเมนต์ในระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นก่อน
เช่นกัน ดังแสดงได้ในสมการที่ (5.31)

$$[\tilde{M}] = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

ซึ่ง ρ คือค่าความหนาแน่นมวล (mass density) ในแต่ละอีลิเมนต์จากนั้นแปลงกลับเป็นเมทริกซ์มวลที่แท้จริงได้ในสมการที่ (5.32)

$$[M] = [R]^T [\tilde{M}] [R] \quad (5.32)$$

การนำสมการการเคลื่อนที่ของแต่ละอีลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบโดยหากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อจึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น $3n$ สมการดังแสดงด้วยสมการที่ (5.33) ทั้งนี้เนื่องจากการพิจารณาการกระจัดจะพิจารณาทั้งแนวแกน x , y และแกน z ร่วมกัน

$$[M]_{3n \times 3n} \frac{\partial^2 \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{3n \times 3n} \frac{\partial \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t} + [K]_{3n \times 3n} \{x\}_{3n \times 1} = \{F\}_{3n \times 1} \quad (5.33)$$

5.3 การหาผลเฉลยสำหรับการสั่นสะเทือน

ในการวิเคราะห์สถานะชั่วคราวในขณะที่มีมอเตอร์หมุนไปดังสมการการเคลื่อนที่ที่เวลา t ใดๆ ที่แสดงด้วยสมการที่ (5.34)

$$[M] \frac{\partial^2 \{x\}^t}{\partial t^2} + [D] \frac{\partial \{x\}^t}{\partial t} + [K] \{x\}^t = \{F\}^t \quad (5.34)$$

ซึ่งด้วย t หมายถึงค่าที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะสังเกตเห็นว่าเมทริกซ์ $[M]$, $[D]$ และ $[K]$ จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเมื่อมอเตอร์หมุนไปการแก้สมการสถานะชั่วคราวในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จะใช้วิธีผลต่างกลาง (central difference) เพราะเป็นวิธีที่นิยมใช้กันแพร่หลายสำหรับการแก้สมการการเคลื่อนที่ในสถานะชั่วคราว (Kwon and Bang, 2000) โดยเมื่อพิจารณาวิธีผลต่างกลางจะได้

$$\frac{\partial^2 \{x\}^t}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} [\{x\}^{t+\Delta t} - 2\{x\}^t + \{x\}^{t-\Delta t}] \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \{x\}^t}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} [\{x\}^{t+\Delta t} - \{x\}^{t-\Delta t}] \quad (5.36)$$

แทนค่าสมการที่ (5.35) และ (5.36) ลงในสมการที่ (5.34) จะได้

$$[M_{eff}] \{x\}^{t+\Delta t} = \{F_{eff}\} \quad (5.37)$$

โดยที่

$$[M_{eff}] = \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [D] \right] \quad (5.38)$$

$$\{F_{eff}\} = \{F\}^t - \left[[K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right] \{x\}^t - \left[\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [D] \right] \{x\}^{t-\Delta t} \quad (5.39)$$

ซึ่ง $[M_{eff}]$ และ $\{F_{eff}\}$ คือเมทริกซ์มวลประสิทธิภาพ (effective mass matrix) และเวกเตอร์แรงประสิทธิภาพ (effective force matrix) ตามลำดับดังนั้นจึงสรุปเป็นขั้นตอนในการคำนวณหาการสั่นสะเทือนเป็นระยะกระจัดเมื่อมอเตอร์หมุนไปได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 : คำนวณหาเมทริกซ์ระบบสมการรวม $[M]$, $[D]$ และ $[K]$

ขั้นตอนที่ 2 : กำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่ $t = 0$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์การกระจัด $\{x\}^0$

และเวกเตอร์ความเร็ว $\frac{\partial \{x\}^0}{\partial t}$ พร้อมทั้งรับค่าเวกเตอร์ของแรงที่กระทำกับมอเตอร์ $\{F\}^0$

ขั้นตอนที่ 3 : คำนวณค่าเวกเตอร์ความเร่ง $\frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2}$ ในสมการที่ (5.34) ซึ่งสามารถแสดงได้

ดังนี้

$$[M] \frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2} = \{F\}^0 - [D] \frac{\partial \{x\}^0}{\partial t} - [K] \{x\}^0 \quad (5.40)$$

ขั้นตอนที่ 4 : คำนวณค่าเวกเตอร์การกระจัดที่เวลา $-\Delta t$ โดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ (5.35) และ (5.36) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\{x\}^{-\Delta t} = \{x\}^0 - \Delta t \frac{\partial \{x\}^0}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \{x\}^0}{\partial t^2} \quad (5.41)$$

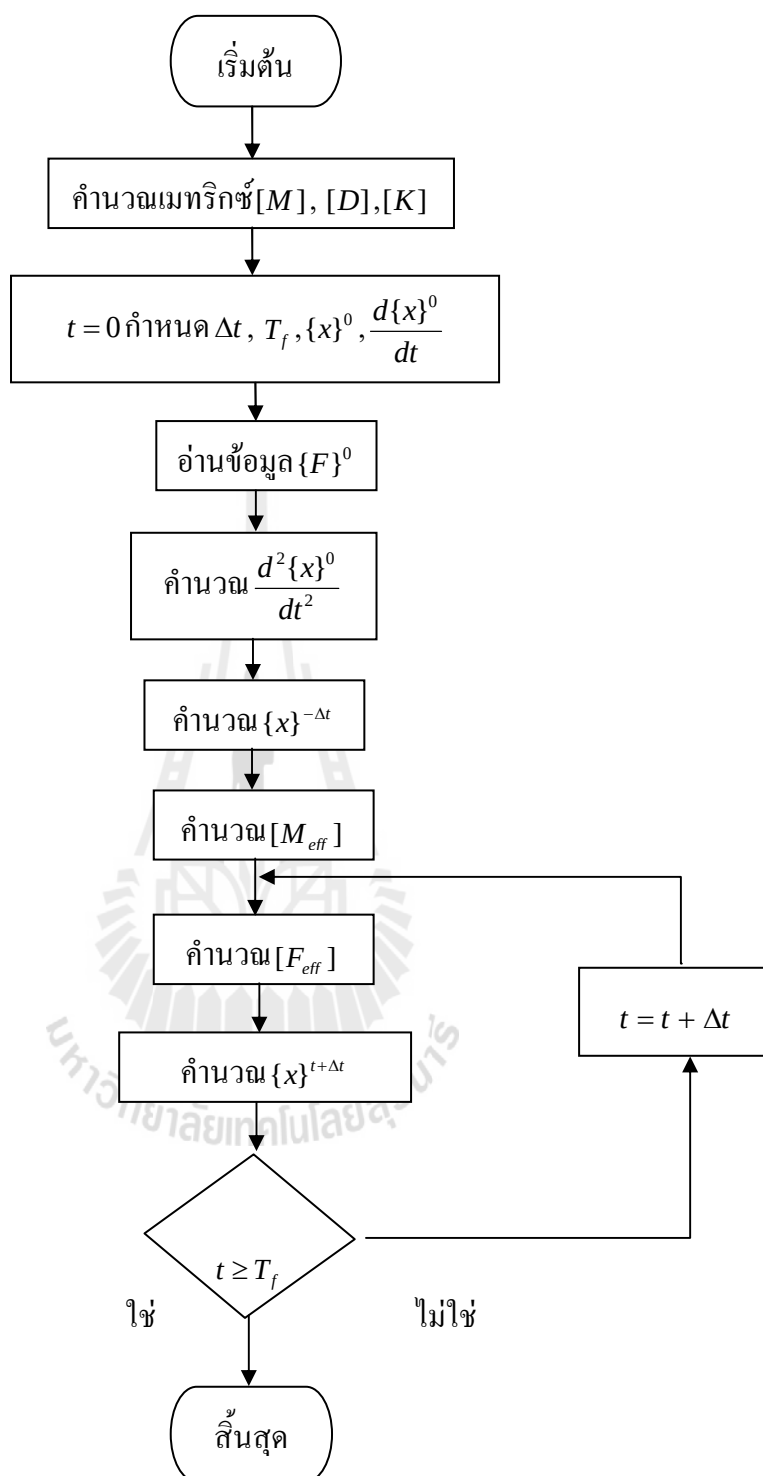
ขั้นตอนที่ 5 : คำนวณเมทริกซ์มวลประสิทธิภาพ $[M_{eff}]$ โดยใช้สมการที่ (5.38)

ขั้นตอนที่ 6 : คำนวณเวกเตอร์แรงประสิทธิภาพ $\{F_{eff}\}$ โดยใช้สมการที่ (5.39)

ขั้นตอนที่ 7 : คำนวณค่าเวกเตอร์การกระจัดที่เวลาถัดไป $\{x\}^{t+\Delta t}$ ในสมการที่ (5.37) จากนั้นที่เวลาถัดไป $t + \Delta t$ ดำเนินการทำซ้ำในขั้นตอนที่ 6-7 จนถึงเวลาสิ้นสุด T_f

ขั้นตอนต่างๆที่ได้อธิบายผ่านมามาอาจสรุปรวมในรูปของแผนภูมิได้ดังรูปที่ 5.4





รูปที่ 5.4 แผนภูมิการคำนวณการสั่นสะเทือนในมอเตอร์

5.4 สรุป

บทที่ 5 นี้ได้อธิบายการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาขนาดของการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสเมื่อโรเตอร์หมุนโดยพิจารณาในรูปแบบของฟังก์ชันการกระจัดซึ่งอาศัยสมการการเคลื่อนที่ในรูปของสมการอนุพันธ์สามัญอันดับสองรายละเอียดต่างๆในบทนี้จะนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือนที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 6 ต่อไป



บทที่ 6

โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

6.1 บทนำ

การจำลองผลเพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กและขนาดของการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำขนาดเล็กพิกัด 3 แรงม้า ในงานวิจัยนี้ได้ใช้คอมพิวเตอร์ Intel CORE™ i5 2.3 GHz, 4 GB SD-RAM สำหรับประมวลผลโดยได้ประดิษฐ์ไฟไนท์อีลิเมนต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นด้วยโปรแกรม MATLAB บนรากฐานของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กและสมการการเคลื่อนที่ที่ถูกต้องโดยรับค่าอินพุตซึ่งเป็นคุณลักษณะของจุดต่อและอีลิเมนต์จากการสร้างกริดอัตโนมัติโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปชื่อ Solid Work การจำลองผลนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของฟลักซ์แม่เหล็กณตำแหน่งต่างๆในแต่ละปริมาตรของมอเตอร์เมื่อโรเตอร์หมุนไปและวิเคราะห์ถึงขนาดของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์ดังกล่าวในบทที่ 6 นี้จึงได้กล่าวถึงค่าพารามิเตอร์ต่างๆของมอเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผลและอธิบายถึงโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและโปรแกรมคำนวณการสั่นสะเทือนในมอเตอร์

6.2 พารามิเตอร์ของมอเตอร์

การจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์ในบทนี้ได้พิจารณามอเตอร์เหนี่ยวนำขนาดเล็กพิกัด 3 แรงม้าโดยค่าพารามิเตอร์ต่างๆทั้งทางไฟฟ้าและทางกลของมอเตอร์ได้รับการรวบรวมไว้ในตารางที่ 6.1 ส่วนรายละเอียดและมิติต่างๆของมอเตอร์ ร่องสเตเตอร์และโรเตอร์ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.1, 6.2, และ 6.3 ตามลำดับ

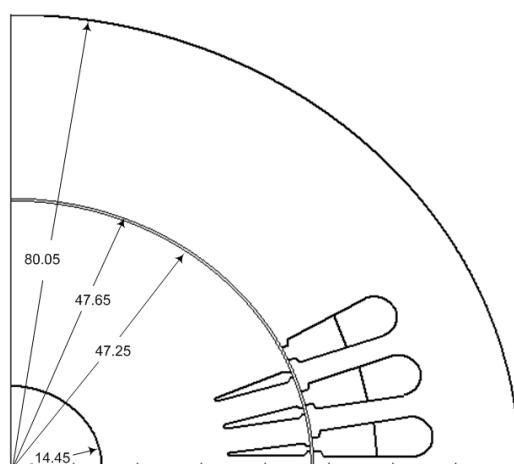
ตารางที่ 6.1 พารามิเตอร์ทางไฟฟ้าและทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสขนาด 3 แรงม้า

พารามิเตอร์	ค่า
กำลังงานขาออก	3 HP
แรงดันแหล่งจ่าย	380 V (ต่อแบบสตาร์)
จำนวนขั้ว	4 P
ความถี่แหล่งจ่าย	50 Hz
ความเร็วพิกัด	1455 rpm

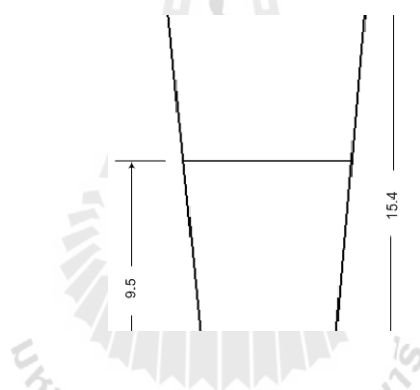
ตารางที่ 6.1 พารามิเตอร์ทางไฟฟ้าและทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสขนาด 3 แรงม้า (ต่อ)

พารามิเตอร์	ค่า
ความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์	$1.11 \Omega/\phi$
ความต้านทานของขดลวดโรเตอร์	$0.47 \Omega/\phi$
รีแอคแตนซ์ของขดลวดสเตเตอร์	$1.05 \Omega/\phi$
รีแอคแตนซ์ของขดลวดโรเตอร์	$1.05 \Omega/\phi$
รีแอคแตนซ์ที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก	$22.09 \Omega/\phi$
โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์	0.089 Kg.m^2
มอดูลัสของแกนสเตเตอร์	$1.2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
มอดูลัสของเฟรม (อลูมิเนียม)	$7.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
ความหนาแน่นมวลของแกนสเตเตอร์	$7.8 \times 10^3 \text{ N/m}^3$
ความหนาแน่นมวลของเฟรม	$0.9 \times 10^3 \text{ N/m}^3$
อัตราส่วนของปิวของ	0.25
ชนิดการพันของขดลวดสเตเตอร์	แบบสองชั้น
จำนวนร่องของสเตเตอร์	36 ร่อง
จำนวนร่องของโรเตอร์	44 ร่อง
ความกว้างช่องอากาศ	0.4 mm
ระยะพิตช์	7/9
จำนวนรอบการพัน/ขดลวด	15 รอบ
เส้นผ่านศูนย์กลางของขดลวดสเตเตอร์	1.8 mm
สภาพการนำไฟฟ้าของแท่งตัวนำโรเตอร์	$4.9 \times 10^7 \Omega^{-1}/\text{m}$
ความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์	$1.11 \Omega/\phi$
ความต้านทานของขดลวดโรเตอร์	$0.47 \Omega/\phi$

หมายเหตุ แหล่งที่มาของพารามิเตอร์เหล่านี้ได้จากการรวบรวมข้อมูลจากหนังสือและบทความทางวิชาการจำนวนมากที่มีการดำเนินงานกับมอเตอร์ขนาดพิกัดใกล้เคียงกันกับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้เพื่อให้ได้มาซึ่งค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ที่สมบูรณ์และเพียงพอต่อการจำลองผล



รูปที่ 6.1 ภาคตัดส่วนหนึ่งของมอเตอร์เหนี่ยวนำและมิติ (mm)



รูปที่ 6.2 ภาคตัดของร่องสเตเตอร์และมิติ (mm)

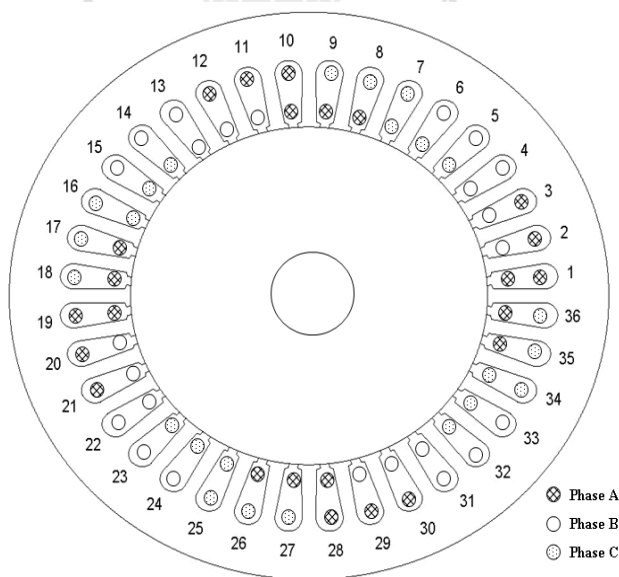


รูปที่ 6.3 ภาคตัดของร่องโรเตอร์และมิติ (mm)

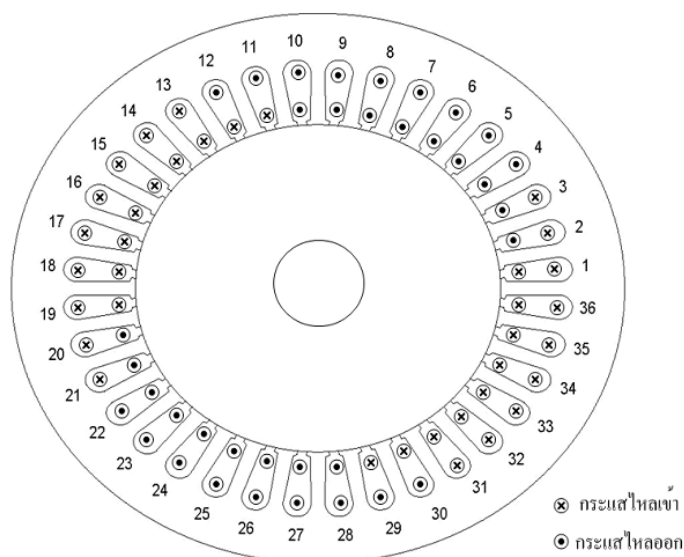
ลักษณะการพันของขดลวดสเตเตอร์ทั้งสามเฟส (A, B และ C) แสดงไว้ในรูปที่ 6.4 ซึ่งเป็นการพันแบบสองชั้น มีระยะพิต 7/9 ร่องกระแสในแต่ละเฟสที่ไหลอยู่ในขดลวดที่พันอยู่ในแต่ละร่องของสเตเตอร์เปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชันของเวลาโดยจะขึ้นอยู่กับขนาดของแหล่งจ่ายและค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อทราบกระแส I ในแต่ละเฟสจึงสามารถคำนวณหาค่าความหนาแน่นของกระแสภายนอก J_0 ที่ป้อนเป็นอินพุตให้แก่โปรแกรมไฟในทออลลิเมนต์ได้ดังสมการที่ (6.1) โดยรายละเอียดการคำนวณค่าของกระแสที่จ่ายให้แก่มอเตอร์จะได้กล่าวถึงในหัวข้อถัดไป

$$J_0 = \frac{n \cdot I}{a_l} \quad (6.1)$$

เมื่อ n คือจำนวนรอบการพันของขดลวดและ a_l คือพื้นที่หน้าตัดของขดลวดโดยการป้อนค่า J_0 ให้แก่โปรแกรมจะต้องคำนึงถึงทิศทางการไหลของกระแสด้วยดังแสดงด้วยรูปที่ 6.5 ซึ่งเป็นการแสดงทิศทางการไหลของกระแสในแต่ละเฟส ณ เวลาขณะหนึ่งกรณีที่พิจารณามอเตอร์ใน 2 มิติ (ระนาบ xy) J_0 จะมีทิศทางวิ่งเข้าหรือวิ่งออกจากหน้ากระดาษ ซึ่งในการคำนวณจะกำหนดให้กระแสที่มีทิศทางวิ่งเข้ากระดาษมีเครื่องหมายบวก และกระแสที่มีทิศทางวิ่งออกกระดาษมีเครื่องหมายลบ สำหรับการคำนวณแล้วสามารถจัดได้โดยง่ายเพราะกระแสในแต่ละจังหวะเวลาหนึ่งๆ จะประกอบด้วยค่ากระแสที่มีค่าเป็นบวก, ลบ และศูนย์ ดังนั้นในแต่ละจังหวะที่มอเตอร์หมุนจะมีทั้งกระแสไหลเข้า, ออก และ ไม่มีกระแสไหลตามลำดับ



รูปที่ 6.4 การพันขดลวดสเตเตอร์ของกระแสไฟ 3 เฟสใน 36 ร่อง



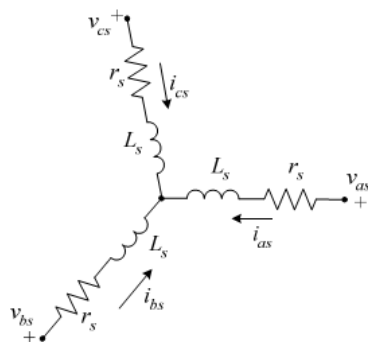
รูปที่ 6.5 ทิศทางการไหลของกระแสเวลาขณะหนึ่ง

6.3 การคำนวณกระแสของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

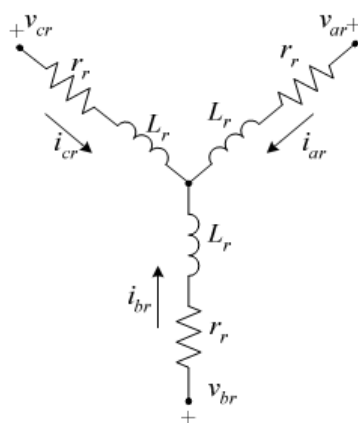
การคำนวณกระแสของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสจะต้องอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของมอเตอร์เพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมทางไฟฟ้าและพฤติกรรมทางกลของมอเตอร์ดังรายละเอียดที่อธิบายต่อไปนี้ (Novotny and Lipo, 1996)

6.3.1 แบบจำลองทางไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

ขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสมีรูปแบบเป็นอิมพีแดนซ์ (RL อนุกรม) ต่อแบบวายอิมพีแดนซ์แต่ละกึ่งเป็นสลับแทนแทนขดลวดสเตเตอร์และเป็นการต่ออิมพีแดนซ์แบบสามเฟสสมดุลที่ให้ยึดอยู่กับที่ดังแสดงด้วยรูปที่ 6.6 ส่วนขดลวดโรเตอร์ดังแสดงด้วยรูปที่ 6.7 มีลักษณะคล้ายกับขดลวดสเตเตอร์ทุกประการ ยกเว้นแต่ไม่ได้ถูกยึดอยู่กับที่ จึงพิจารณาได้ว่าขดลวดโรเตอร์สามารถหมุนเคลื่อนที่ไปที่มุมต่างๆ



รูปที่ 6.6 ขดลวดสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส



รูปที่ 6.7 ขดลวดโรเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส

โดยที่

v_{as}, v_{ar}	คือ แรงดันของเฟส a ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (V)
v_{bs}, v_{br}	คือ แรงดันของเฟส b ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (V)
v_{cs}, v_{cr}	คือ แรงดันของเฟส c ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (V)
i_{as}, i_{ar}	คือ แรงดันของเฟส a ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (A)
i_{bs}, i_{br}	คือ แรงดันของเฟส b ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (A)
i_{cs}, i_{cr}	คือ แรงดันของเฟส c ของขดลวดสเตเตอร์และโรเตอร์ตามลำดับ (A)

เมื่อพิจารณาแบบจำลองทางไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยคิดเทียบมาทางด้านสเตเตอร์เราอาจเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ทางไฟฟ้าในขดลวดสเตเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = r_s \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

โดยที่ $\lambda_{as}, \lambda_{bs}$ และ λ_{cs} คือฟลักซ์เชื่อมโยง (flux linkage) ที่ขดลวดสเตเตอร์ในเฟส a, b และ c ตามลำดับ และเขียนแสดงฟลักซ์เชื่อมโยงดังกล่าวในรูปความสัมพันธ์กับกระแสต่างๆ ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_s + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_s + L_{ms} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} + L_{ms} \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R) & \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i'_{ar} \\ i'_{br} \\ i'_{cr} \end{bmatrix}$$

โดย $L_{ms} = \frac{2}{3}L_m$ เมื่อ L_m คือค่าความเหนี่ยวนำที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก, θ_R คือมุมของโรเตอร์คิดเทียบกับแกนของขดลวดสเตเตอร์ที่เฟส a และ $'$ เป็นสัญลักษณ์เพื่อสื่อให้ทราบว่าคิดเทียบกับทางด้านสเตเตอร์แล้ว ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ทางไฟฟ้าในขดลวดโรเตอร์ อาจเขียนแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} v'_{ar} \\ v'_{br} \\ v'_{cr} \end{bmatrix} = r'_r \begin{bmatrix} i'_{ar} \\ i'_{br} \\ i'_{cr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda'_{ar} \\ \lambda'_{br} \\ \lambda'_{cr} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} \lambda'_{ar} \\ \lambda'_{br} \\ \lambda'_{cr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_r + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_r + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_r + L_{ms} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i'_{ar} \\ i'_{br} \\ i'_{cr} \end{bmatrix} + L_{ms} \begin{bmatrix} \cos(\theta_R) & \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R) & \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_R - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_R) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix}$$

จากปริภูมิสถานะในสมการที่ (6.2) และ (6.3) จะเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}[i] = [G]^{-1}[H][i] + [G]^{-1}[v] \quad (6.4)$$

เมื่อ

$$[i] = [i_{as} \quad i_{bs} \quad i_{cs} \quad i'_{ar} \quad i'_{br} \quad i'_{cr}]^T$$

$$[v] = [v_{as} \quad v_{bs} \quad v_{cs} \quad v'_{ar} \quad v'_{br} \quad v'_{cr}]^T$$

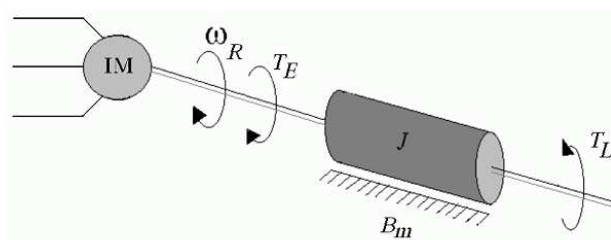
โดยที่

$$\begin{aligned}
[G] = & \begin{bmatrix}
L_s + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\
-\frac{1}{2}L_{ms} & L_s + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\
-\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_s + L_{ms} \\
L_{ms} \cos(\theta_R) & L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\theta_R) & L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\theta_R)
\end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix}
L_{ms} \cos(\theta_R) & L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\theta_R) & L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) \\
L_{ms} \cos\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ms} \cos(\theta_R) \\
L'_r + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\
-\frac{1}{2}L_{ms} & L'_r + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\
-\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L'_r + L_{ms}
\end{bmatrix} \\
[H] = & \begin{bmatrix}
-r_s & 0 & 0 \\
0 & -r_s & 0 \\
0 & 0 & -r_s \\
\omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) \\
\omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\
\omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) \\
\omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) \\
\omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) \\
\omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R + \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin\left(\theta_R - \frac{2\pi}{3}\right) & \omega_R L_{ms} \sin(\theta_R) \\
-r'_r & 0 & 0 \\
0 & -r'_r & 0 \\
0 & 0 & -r'_r
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ในงานวิจัยนี้ได้พิจารณามอเตอร์เหนี่ยวนำชนิดโรเตอร์กรงกระรอก ซึ่งปลายทั้งสองด้านของแท่งตัวนำจะถูกตัดวงจรไว้ ดังนั้นเทอม v'_{ar} , v'_{br} , และ v'_{cr} จะมีค่าเป็นศูนย์

6.3.2 แบบจำลองทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

แบบจำลองทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส เมื่อมอเตอร์ขับโหลดสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 6.8



รูปที่ 6.8 แบบจำลองทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

โดยที่

ω_R	คือ ความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์ (rad/sec)
J	คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมอเตอร์ (Kg.m^2)
B_m	คือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานเชิงความหนืดของมอเตอร์ (N.m/rad/sec)
T_E	คือ แรงบิดที่มอเตอร์สร้างขึ้น (N.m)
T_L	คือ แรงบิดของโหลด (N.m)

สมการการเคลื่อนที่ของโรเตอร์อาจเขียนแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d\omega_R}{dt} = \frac{P}{2J} T_E - \frac{B_m}{J} \omega_R - \frac{P}{2J} T_L \quad (6.5)$$

เมื่อ

$$T_E = \frac{3P}{2} L_m \cdot \text{Im} \{ i'_{abcr} i_{abcs} e^{-j\theta_R} \}$$

โดยที่

$$i_{abcs} = i_{as} + ai_{bs} + a^2 i_{cs}$$

$$i'_{abcr} = i'_{ar} + ai'_{br} + a^2 i'_{cr}$$

$$a = e^{-j\theta_R}$$

ซึ่ง P คือจำนวนขั้วแม่เหล็กของมอเตอร์ และ Im คือพจน์ของจำนวนจินตภาพ และ

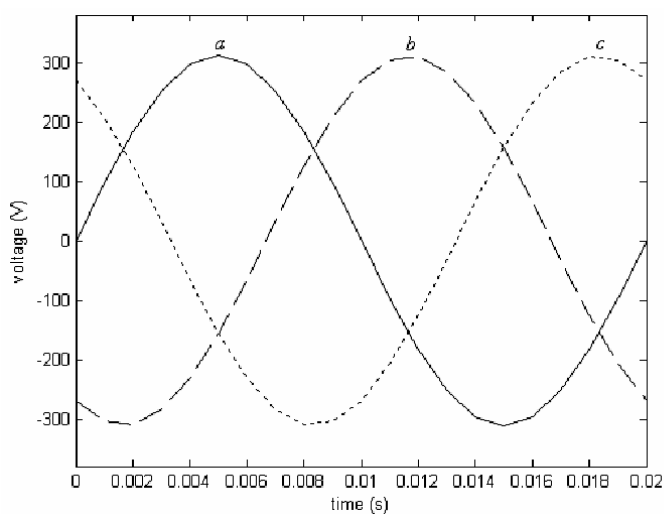
$$\frac{d\theta_R}{dt} = \omega_R \quad (6.6)$$

จากสมการที่ (6.5) และ (6.6) จะเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

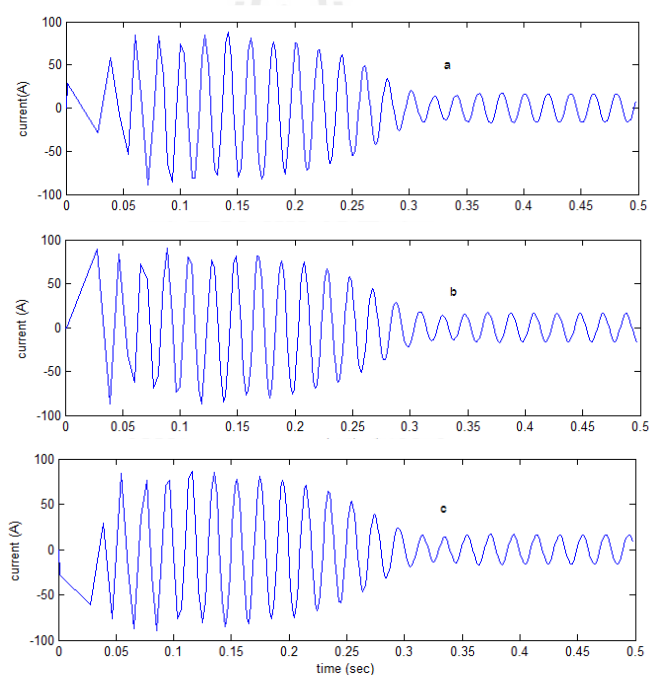
$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_R}{dt} \\ \frac{d\theta_R}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_m}{j} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R \\ \theta_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P}{2J} \\ 0 \end{bmatrix} [T_E - T_L] \quad (6.7)$$

6.3.3 การคำนวณกระแสของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส

การคำนวณกระแสในแต่ละเฟสจะต้องอาศัยความสัมพันธ์ของสมการแบบจำลองของมอเตอร์ทั้งทางไฟฟ้าและทางกลดังสมการที่ (6.4) และ (6.7) ข้างต้นเมื่อป้อนแรงดันไฟฟ้า กระแสตรงสามเฟสดังแสดงในรูปที่ 6.9 ประกอบกับค่าพารามิเตอร์ต่างๆดังปรากฏในตารางที่ 6.1 จะได้ผลลัพธ์ของกระแสในแต่ละเฟสดังแสดงในรูปที่ 6.10 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นกระแสที่ใช้ในการคำนวณหา J_0 ดังได้กล่าวไว้ข้างต้น

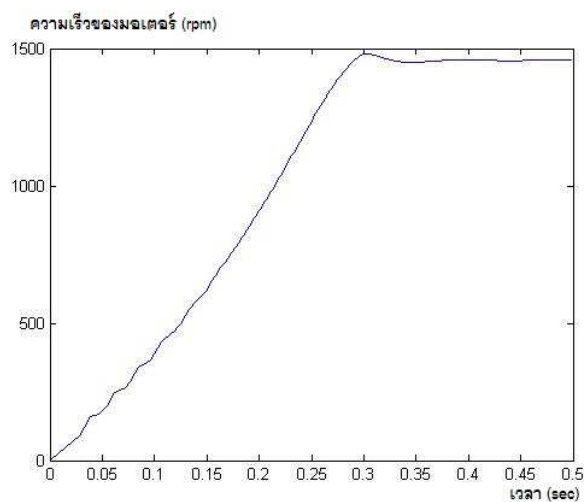


รูปที่ 6.9 รูปคลื่นแรงดันไฟฟ้าแต่ละเฟสที่จ่ายให้มอเตอร์

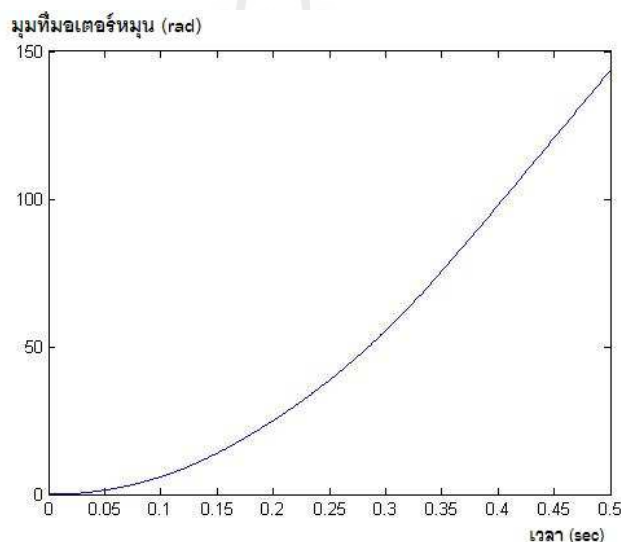


รูปที่ 6.10 รูปคลื่นกระแสไฟฟ้าแต่ละเฟสที่จ่ายให้มอเตอร์

จากสมการที่ (6.4) ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณนอกจากค่า I_a , I_b และ I_c ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาแล้วยังมีความเร็วรอบของมอเตอร์ (N_r) และมุมที่มอเตอร์หมุน (θ) เปลี่ยนแปลงตามเวลาดังแสดงในรูปที่ 6.11 และรูปที่ 6.12 ตามลำดับ



รูปที่ 6.11 กราฟความเร็วรอบเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ได้จากการคำนวณ



รูปที่ 6.12 กราฟมูมที่มอเตอร์หมุนเปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ได้จากการคำนวณ

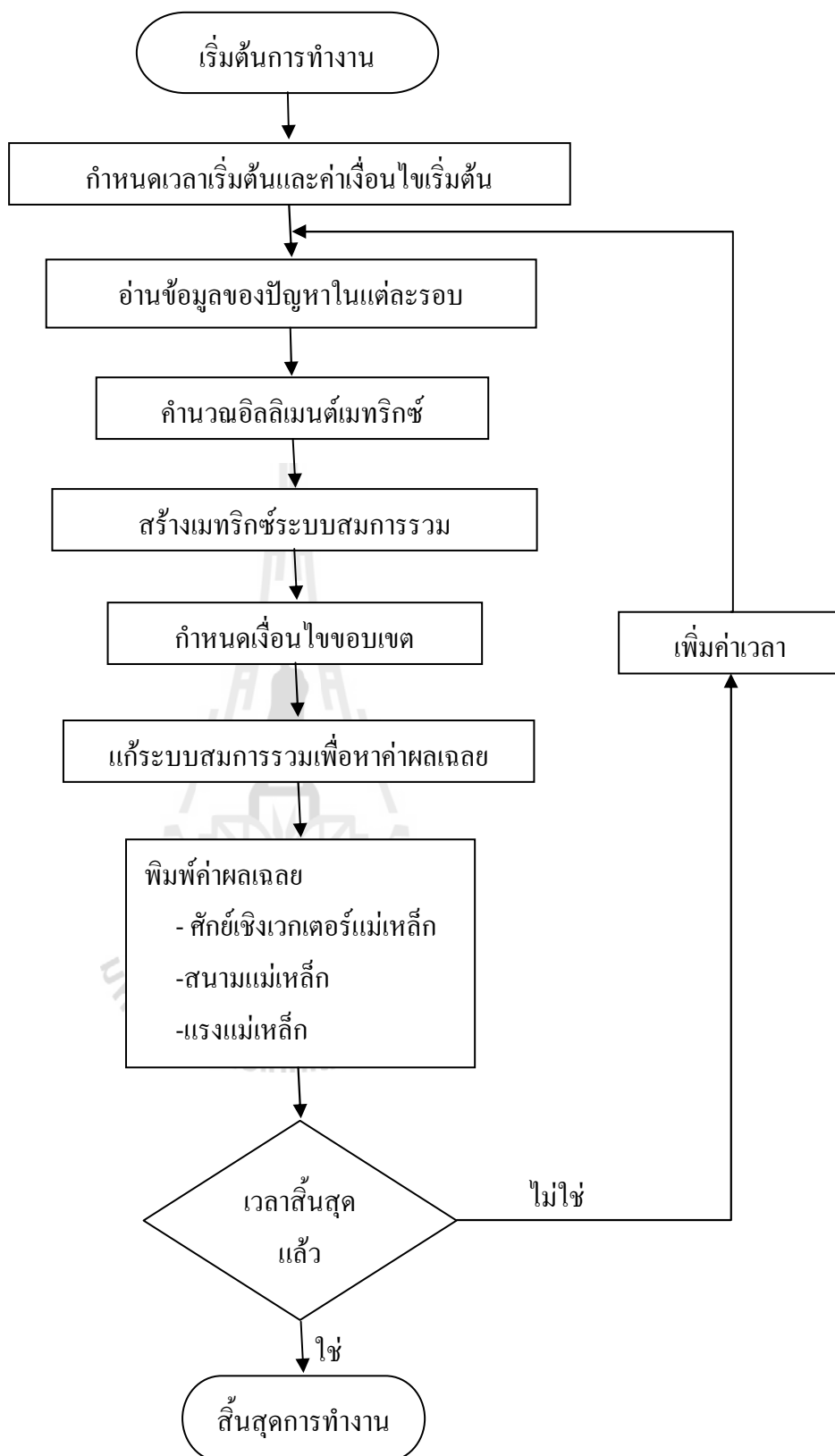
จากรูปที่ 6.11 ค่าความเร็วรอบจะมีค่าเป็นศูนย์ที่เวลาเริ่มต้นและจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและคงที่ที่เวลาประมาณ 0.3 วินาที ด้วยค่าความเร็วรอบประมาณ 1455 rpm หรือคำนวณเป็นอัตราเร็วเชิงมุมได้จาก $\omega_r = N(2\pi)/60$ ซึ่งจะมีค่าอัตราเร็วเชิงมุมเท่ากับ 152.43 rad/sec จะเห็นได้ว่ามีค่าความเร็วรอบที่ได้จากการคำนวณใกล้เคียงกับค่าความเร็วพิกัดของมอเตอร์ซึ่งมีความเร็วพิกัดเท่ากับ 1455rpm

6.4 โครงสร้างของโปรแกรมจำลองผล

โปรแกรมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กและโปรแกรมจำลองผลเพื่อศึกษาถึงการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเกิดจากการประติฐไฟไนท์อิลลิเมนต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นด้วย MATLAB โดยกริดที่สร้างขึ้นเพื่อกำกับคุณลักษณะของจุดต่อและอิลลิเมนต์ที่ป้อนให้แก่โปรแกรมไฟไนท์อิลลิเมนต์เกิดจากการสร้างกริดโดยโปรแกรมสำเร็จรูปชื่อSolid Workซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมหังกล่าวสามารถแสดงได้ดังนี้

6.4.1 โปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็ก

การคำนวณสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำสำหรับโรเตอร์หมุนเมื่อคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงตามเวลาค่อนข้างคำนวณได้ยากแต่ปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีสมรรถนะสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ จึงสามารถคำนวณสนามแม่เหล็กด้วยวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์ได้ง่ายและรวดเร็วขึ้นโปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับคำนวณค่าสนามแม่เหล็กที่ใช้กันอยู่ทั่วไปมีราคาแพงประมวลผลช้าและไม่มีความคล่องตัวเมื่อพิจารณาถึงกรณีที่โรเตอร์หมุนดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงประติฐไฟไนท์อิลลิเมนต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นด้วย MATLAB เพื่อคำนวณค่าสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำ สำหรับโครงสร้างของโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็กอาจแทนได้ด้วยแผนภูมิในรูปที่ 6.13



รูปที่ 6.13 แผนภูมิแสดงการทำงานของโปรแกรมคำนวณสนามแม่เหล็ก

จากแผนภูมิในรูปที่ 6.13 ซึ่งแสดงโครงสร้างโปรแกรมจำลองผลของระบบ โดยรวมเพื่อให้เกิดความเข้าใจถึงหน้าที่ของโปรแกรมแต่ละส่วนจะได้อธิบายถึงรายละเอียดหน้าที่ต่างๆเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดเวลาเริ่มต้นและค่าเงื่อนไขเริ่มต้น: โปรแกรมจะเริ่มทำงานด้วยการกำหนดค่าเวลาเริ่มต้น $t=0$ สำหรับการคำนวณในรอบแรกซึ่งจำนวนรอบหรือเวลาสิ้นสุดของการคำนวณจะขึ้นอยู่กับจำนวนหรือเวลาที่ใช้ในการหมุนไปที่มุมต่างๆของมอเตอร์โดยเมื่อมอเตอร์หมุนไปลักษณะของอิลลิเมนต์และจุดต่อจะแปรเปลี่ยนตามมุมที่หมุนไปด้วยโดยโปรแกรมยังมีหน้าที่ในการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นโดยงานวิจัยนี้มีค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในรอบแรกคือการให้ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเป็นศูนย์ $A(t=0)=0$ ส่วนการหมุนรอบถัดไปจะใช้คำตอบจากรอบที่ผ่านมาเป็นค่าเงื่อนไขเริ่มต้นทั้งนี้เพื่อให้การลู่เข้าหาคำตอบที่ถูกต้องดำเนินการได้รวดเร็ว

ขั้นตอนที่ 2 อ่านข้อมูลของปัญหาในแต่ละรอบ: จากนั้นโปรแกรมจะรับค่าข้อมูลอินพุตซึ่งแสดงถึงลักษณะของอิลลิเมนต์และจุดต่อจากเอาต์พุตไฟล์ที่เกิดจากการสร้างกริดของโปรแกรมสำเร็จรูปชื่อ Solid Work ที่ซึ่งรายละเอียดในไฟล์ประกอบด้วยจำนวนและตำแหน่งของจุดต่อหมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นอิลลิเมนต์จำนวนและหมายเลขของอิลลิเมนต์เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณอิลลิเมนต์เมทริกซ์: ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะทำการคำนวณอิลลิเมนต์เมทริกซ์รูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสของทุกๆอิลลิเมนต์ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.41) จากบทที่ผ่านมานำมาแสดงใหม่ในบทนี้ดังสมการที่ (6.8) โดยที่ $\{A\}_{4 \times 1}^{t+\Delta t}$ คือเวกเตอร์คำตอบของสมการที่ทำการคำนวณในแต่ละรอบ

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M]_{4 \times 4} + [K]_{4 \times 4} \right) \{A\}_{4 \times 1}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [M]_{4 \times 4} \{A\}_{4 \times 1}^t + \{F\}_{4 \times 1}^{t+\Delta t} \quad (6.8)$$

สมการที่ (6.8) นี้จะต้องอาศัยความสัมพันธ์ของอิลลิเมนต์เมทริกซ์การนำทางไฟฟ้า $[M]_{4 \times 4}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.30) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.9) อิลลิเมนต์เมทริกซ์ความขบเซิมได้ของแม่เหล็ก $[K]_{4 \times 4}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.34) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.10) และโหลดเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเอง $\{F\}_{4 \times 1}^{t+\Delta t}$ ซึ่งยกกำลัง $t + \Delta t$ หมายถึงโหลดเวกเตอร์กระแสที่ผลิตขึ้นเอง ณ เวลาเดียวกับที่ต้องการคำนวณหาคำตอบ ดังแสดงด้วยสมการที่ (4.37) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.11) เมทริกซ์เหล่านี้จะถูกคำนวณทีละอิลลิเมนต์เพื่อนำไปสร้างเป็นระบบเมทริกซ์สมการรวม

$$[M]_{4 \times 4} = \frac{s\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$[K]_{4 \times 4} = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 + d_1d_1 & b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 & b_1b_3 + c_1c_3 + d_1d_3 & b_1b_4 + c_1c_4 + d_1d_4 \\ & b_2b_2 + c_2c_2 + d_2d_2 & b_2b_3 + c_2c_3 + d_2d_3 & b_2b_4 + c_2c_4 + d_2d_4 \\ & & b_3b_3 + c_3c_3 + d_3d_3 & b_3b_4 + c_3c_4 + d_3d_4 \\ & & & b_4b_4 + c_4c_4 + d_4d_4 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Sym

$$\{F\}_{4 \times 1} = \frac{J_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

ขั้นตอนที่ 4 สร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม: โปรแกรมจะทำหน้าที่รวมอิลลิเมนต์เมทริกซ์ย่อยๆ ที่คำนวณจากโปรแกรมย่อยTRI เข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมดังแสดงด้วยสมการที่ (4.42) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.12) โดยมีหลักการคือหาหมายเลขจุดต่อที่แท้จริงของอิลลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่แล้วใส่ค่าสัมประสิทธิ์ของอิลลิเมนต์เมทริกซ์นั้นลงในเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมให้ถูกต้องดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 3.4 ของบทที่ 3 ซึ่งหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอิลลิเมนต์ย่อย n จุดต่อจึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยทั้งสิ้น n สมการ

$$[J]_{n \times n} [A]_{n \times 1} = [f]_{n \times 1} \quad (6.12)$$

ขั้นตอนที่ 5 กำหนดเงื่อนไขขอบเขต: โปรแกรมจะทำหน้าที่ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตก่อนทำการแก้ระบบสมการรวมโดยมีหลักการคือดัดแปลงระบบสมการรวมตามสมการที่ (6.12) ให้สอดคล้องกับค่าเงื่อนไขขอบเขตโดยงานวิจัยนี้จะกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตให้ขอบในที่ติดกับเพลลาและขอบนอกของมอเตอร์มีค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเป็นศูนย์ ($A = 0$)

ขั้นตอนที่ 6 แก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย: โปรแกรมจะทำหน้าที่แก้สมการเชิงเส้นดังสมการที่ (6.12) เพื่อหาค่าผลเฉลยของระบบสมการรวม

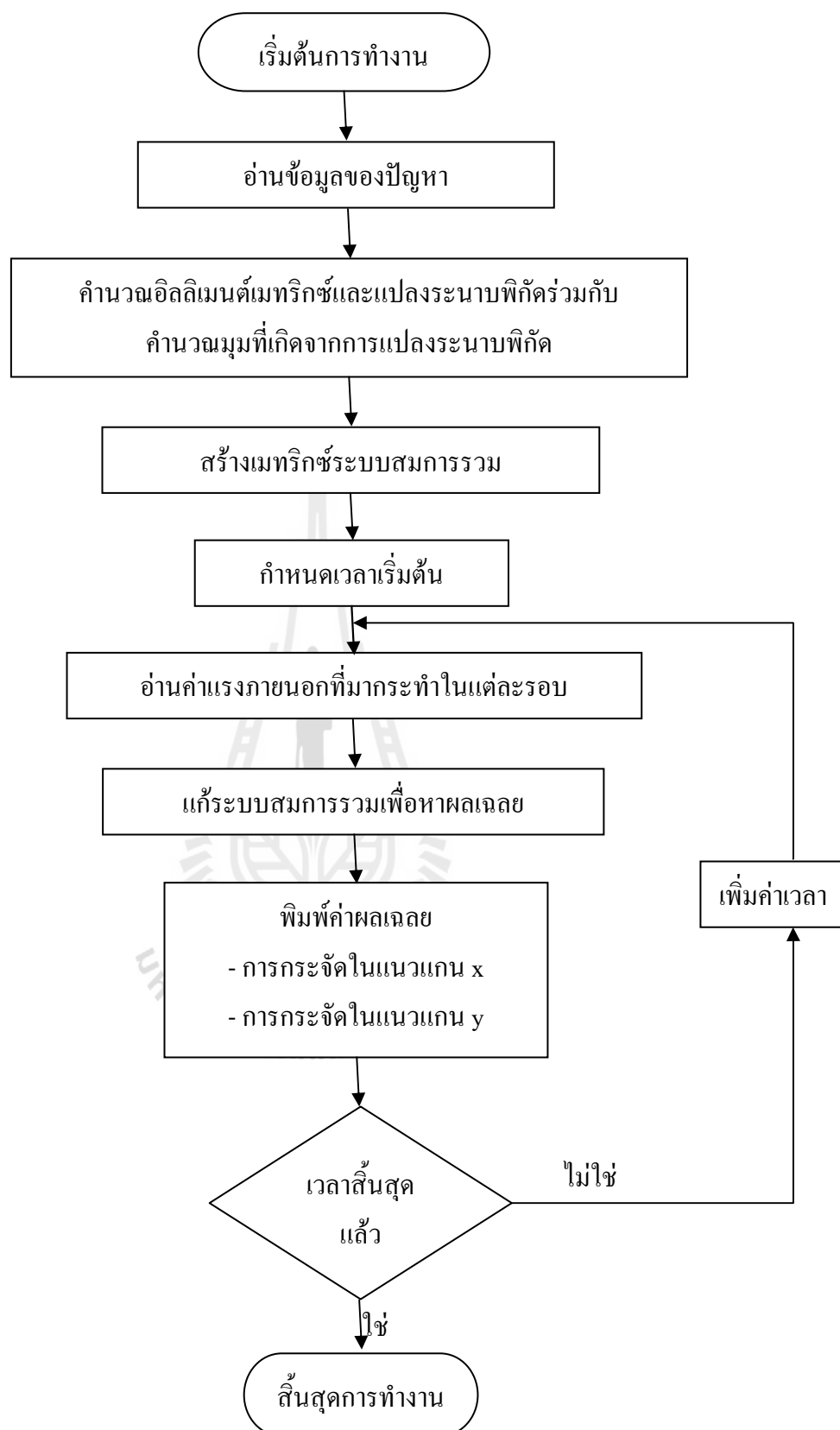
ขั้นตอนที่ 7 พิมพ์ค่าผลเฉลย: จากนั้นโปรแกรมจะพิมพ์ค่าผลเฉลยออกมาเป็นกราฟแสดงขนาดซึ่งจะประกอบด้วยค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กค่าสนามแม่เหล็กและแรงแม่เหล็ก

ขั้นตอนที่ 8 เวลาสิ้นสุดแล้ว: ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะพิจารณาถึงการคำนวณค่าในรอบถัดไป ถ้าหากเวลาที่กำหนดในการคำนวณยังไม่สิ้นสุดโปรแกรมก็จะย้อนกลับไปขั้นตอนที่ 2 อ่านข้อมูลของปัญหาในแต่ละรอบ และกระทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 2 ถึงขั้นตอนที่ 8 ดังเดิม แต่ถ้าหากสิ้นสุดเวลาที่กำหนดให้โปรแกรมก็จะหยุดการคำนวณ เป็นอันจบการทำงานของโปรแกรม

6.4.2 โปรแกรมคำนวณการสันสะท้อน

การคำนวณขนาดของการสันสะท้อนสำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำ โรเตอร์หมุนที่แสดงอยู่ในรูปของการกระตุ้นที่คิดเพี้ยนไปจากรูปร่างดั้งเดิมของมอเตอร์ก่อนที่จะไม่มีแรงภายนอกมากระทำค่อนข้างดำเนินการได้ยากเนื่องจากผลลัพธ์ของการกระตุ้นอย่างละเอียดที่ครอบคลุมตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ต้องอาศัยการคำนวณที่มีความซับซ้อนสูงปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีสมรรถนะสูงและมีหน่วยความจำขนาดใหญ่จึงสามารถคำนวณการสันสะท้อนของมอเตอร์ในทุกๆ ตำแหน่งด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดังนั้นงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้จึงประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นด้วย MATLAB เพื่อคำนวณขนาดของการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำซึ่งลำดับการทำงานของโปรแกรมคำนวณการสันสะท้อนสามารถแทนได้ด้วยแผนภูมิดังรูปที่ 6.14





รูปที่ 6.14 แผนภูมิแสดงการทำงานของโปรแกรมคำนวณการสั่นสะเทือน

จากแผนภูมิดังรูปที่ 6.14 อาจเข้าใจได้ถึงลำดับการทำงานของโปรแกรม โดยโปรแกรมจะทำงานเป็นขั้นตอนและมีหน้าที่ต่างกันไป ซึ่งจะอธิบายการทำงานของโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 อ่านข้อมูลของปัญหา: ขั้นตอนนี้โปรแกรมทำหน้าที่รับค่าข้อมูลต่างๆ ได้แก่ จำนวนและตำแหน่งของจุดต่อหมายเลขของจุดต่อที่ประกอบขึ้นเป็นอิลลิเมนต์จำนวนและหมายเลขของอิลลิเมนต์และค่าพารามิเตอร์ทางวัสดุต่างๆ เช่น แกนสแตเตอร์และโครงสแตเตอร์ของมอเตอร์เป็นต้นดังแสดงด้วยรูปที่ 5.1 ในบทที่ 5 ซึ่งเป็นข้อมูลอินพุตที่เรียกใช้ตอนเริ่มต้นของโปรแกรมเพียงครั้งเดียวเนื่องจากเมื่อพิจารณาการสั่นสะเทือนจะพิจารณาในส่วนของแกนสแตเตอร์และโครงสแตเตอร์เท่านั้นซึ่งจะไม่ปรากฏการเปลี่ยนแปลงพิกัดใดๆเลยเมื่อโรเตอร์หมุนไป

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณอิลลิเมนต์เมทริกซ์และแปลงระนาบพิกัดร่วมกับคำนวณมุมที่เกิดจากการแปลงระนาบพิกัด : จากนั้นโปรแกรมจะคำนวณอิลลิเมนต์เมทริกซ์รูปทรงสี่เหลี่ยมจัตุรัสของทุกๆอิลลิเมนต์โดยมีสมการไฟไนท์อิลลิเมนต์ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่แสดงได้ด้วยสมการที่ (5.1) จากบทที่ผ่านมาหรือนำมาแสดงใหม่ในบทนี้ดังสมการที่ (6.13)

$$[M]_{12 \times 12} \frac{\partial^2 \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{12 \times 12} \frac{\partial \{x\}_{12 \times 1}}{\partial t} + [K]_{12 \times 12} \{x\}_{12 \times 1} = \{F\}_{12 \times 1} \quad (6.13)$$

สมการที่ (6.13) นี้จะต้องอาศัยความสัมพันธ์ของอิลลิเมนต์เมทริกซ์มวล $[M]_{12 \times 12}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (5.32) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.14) อิลลิเมนต์เมทริกซ์ความแข็งของสปริง $[K]_{12 \times 12}$ ดังแสดงด้วยสมการที่ (5.18) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.15) โดยจะไม่พิจารณาถึงอิลลิเมนต์เมทริกซ์ความหน่วง $[D]_{12 \times 12}$

$$[M] = [R]^T [\tilde{M}] [R] \quad (6.14)$$

$$[K] = [R]^T [\tilde{K}] [R] \quad (6.15)$$

โดยที่เมทริกซ์ $[R]$ คือค่าที่ใช้สำหรับถ่ายโอนจากระนาบพิกัดเฉพาะถิ่นสู่ระนาบพิกัดวงกว้างดังแสดงด้วยสมการที่ (5.19) ของบทที่ 5 หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.16) ส่วน $[\tilde{M}]$ และ $[\tilde{K}]$ คือเมทริกซ์มวลและเมทริกซ์ความแข็งของสปริงในระนาบพิกัดเฉพาะถื่นดังแสดงด้วยสมการที่ (5.31) และ (5.17) ของบทที่ 5 ตามลำดับ หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.17) และสมการที่ (6.18) ตามลำดับ ซึ่งโดยโปรแกรมจะทำหน้าที่ในการแปลงระนาบพิกัดวงกว้างไปเป็นระนาบพิกัด

เฉพาะถิ่นและแปลงกลับไปเป็นระนาบพิกัดวงกว้างตามเดิมเพื่อนำไปสร้างเป็นระบบเมทริกซ์
สมการรวม

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{x}, x) & \cos(\tilde{x}, y) & \cos(\tilde{x}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{y}, x) & \cos(\tilde{y}, y) & \cos(\tilde{y}, z) \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\tilde{z}, x) & \cos(\tilde{z}, y) & \cos(\tilde{z}, z) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$[\tilde{M}] = \frac{\rho V_e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$[\tilde{K}] = [\tilde{B}]^T [\tilde{D}] [\tilde{B}] V \quad (6.18)$$

สำหรับรายละเอียดต่างๆ ในสมการที่ (6.16), (6.17) และ (6.18) สามารถศึกษาได้จากหัวข้อ 5.2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในและสมการของอีลิเมนต์ในบทที่ 5

ขั้นตอนที่ 3 สร้างเมทริกซ์ระบบสมการรวม: จากนั้นโปรแกรมจะทำหน้าที่รวมอีลิเมนต์เมทริกซ์ย่อยๆ ที่คำนวณได้จากโปรแกรมเข้าเป็นเมทริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวม ดังแสดงด้วยสมการที่ (5.33) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.19) โดยหากแบ่งลักษณะของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ย่อยๆ จุดต่อจึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมสำหรับการเคลื่อนที่ของระบบ ซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยทั้งสิ้น $3n$ สมการ ทั้งนี้เนื่องจากพิจารณาการกระจัดทั้งแนวแกน x , y และ z

$$[M]_{3n \times 3n} \frac{\partial^2 \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t^2} + [D]_{3n \times 3n} \frac{\partial \{x\}_{3n \times 1}}{\partial t} + [K]_{3n \times 3n} \{x\}_{3n \times 1} = \{F\}_{3n \times 1} \quad (6.19)$$

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดเวลาเริ่มต้น : จากนั้นโปรแกรมจะกำหนดแรงเริ่มต้น $F(t=0)=0$ แล้วทำการคำนวณค่าผลลัพธ์ของการกระจัดทั้งแนวแกน x , y และ z ซึ่งจะเป็นค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในการคำนวณต่อไป

ขั้นตอนที่ 5 อ่านค่าแรงภายนอกที่มากระทำในแต่ละรอบ: โปรแกรมจะรับแรงที่ได้จากการคำนวณในเวลาเดียวกันกับที่จะคำนวณการสั่นในรอบนั้นๆ

ขั้นตอนที่ 6 แก่ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลเฉลย: จากนั้นโปรแกรมจะทำหน้าที่แก้สมการการเคลื่อนที่ในรูปของสมการสามัญอันดับสองเพื่อหาค่าผลเฉลยของระบบสมการรวมดังสมการที่ (6.19) โดยเลือกใช้วิธีผลต่างกลางดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 5.3 ในบทที่ 5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นตามสมการที่ (5.37), (5.38) และ (5.39) หรือนำมาแสดงใหม่ดังสมการที่ (6.20), (6.21) และ (6.22)ตามลำดับ

$$[M_{eff}]\{x\}^{t+\Delta t} = \{F_{eff}\} \quad (6.20)$$

โดยที่

$$[M_{eff}] = \left[\frac{1}{\Delta t^2}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[D] \right] \quad (6.21)$$

$$\{F_{eff}\} = \{F\}^t - \left[[K] - \frac{2}{\Delta t^2}[M] \right] \{x\}^t - \left[\frac{1}{\Delta t^2}[M] - \frac{1}{2\Delta t}[D] \right] \{x\}^{t-\Delta t} \quad (6.22)$$

ขั้นตอนที่ 7 พิมพ์ค่าผลเฉลย : จากนั้นจะพิมพ์ค่าผลเฉลยที่ต้องการออกมาซึ่งประกอบด้วยค่าการกระจัดในแนวแกน x y และ z ที่เปลี่ยนแปลงไปจากตำแหน่งดั้งเดิมของทุกๆจุดต่อ

ขั้นตอนที่ 8 เวลาสิ้นสุดแล้ว: ขั้นตอนนี้โปรแกรมจะพิจารณาถึงการคำนวณค่าในรอบถัดไป ถ้าหากเวลาที่กำหนดในการคำนวณยังไม่สิ้นสุดโปรแกรมก็จะย้อนกลับไปขั้นตอนที่ 5 อ่านค่าแรงภายนอกที่กระทำในแต่ละรอบและกระทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 5 ถึงขั้นตอนที่ 8 ดังเดิม แต่ถ้าหากสิ้นสุดเวลาที่กำหนดให้โปรแกรมก็จะหยุดการคำนวณ เป็นอันจบการทำงานของโปรแกรม

6.5 สรุป

การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาปัญหาในสถานะชั่วคราวก่อนข้างดำเนินการได้ยากและมีความซับซ้อนการทำความเข้าใจอย่างละเอียดและลึกซึ้งต่อค่าสนามแม่เหล็กและขนาดของการสั่นสะเทือนที่แปรเปลี่ยนไปในขณะที่โรเตอร์หมุนจึงยากเกินกว่าที่จะนึกหรือจินตนาการได้เป็นเหตุให้ต้องพึ่งพาเทคนิคการจำลองผลระบบด้วยคอมพิวเตอร์ดังที่บทที่ 6 ได้นำเสนอไว้โปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนใน

บทนี้ได้รับการพัฒนาขึ้นด้วย MATLAB โดยมีโครงสร้างของโปรแกรมจำลองผลสนามแม่เหล็ก และโปรแกรมจำลองผลการสั้นสะท้อนดังที่อธิบายด้วยแผนภูมิในรูปที่6.13และ6.14ตามลำดับ โปรแกรมดังกล่าวจะรับค่าอินพุตซึ่งแสดงตำแหน่งของอิลลิเมนต์และจุดต่อจากโปรแกรมสำเร็จรูป ชื่อSolid Workและจะส่งค่าผลลัพธ์ที่ได้ให้โปรแกรม MATLAB เพื่อการคำนวณและแสดงผลในรูปแบบกราฟฟิก



บทที่ 7

ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและการสั้นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อ พิจารณาร่องโรเตอร์เฉียง

7.1 บทนำ

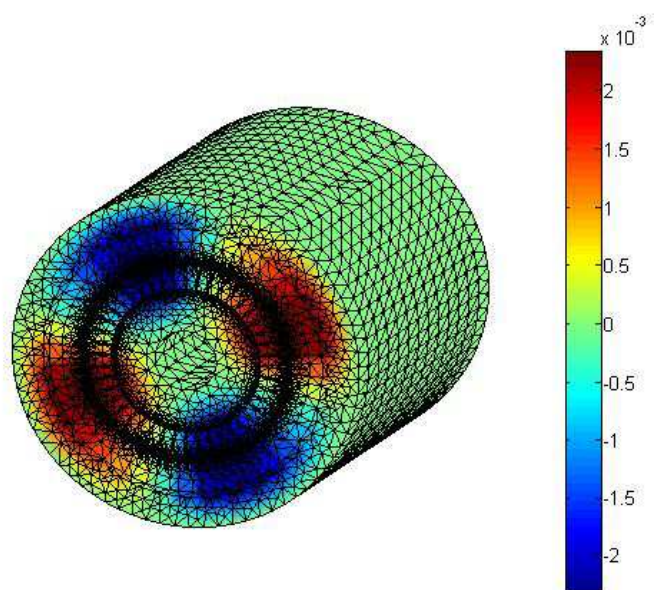
ในบทที่ผ่านมา มาของงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้อธิบายถึงทฤษฎีต่างๆ ของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสตลอดจนวิธีการคำนวณสนามแม่เหล็กและการคำนวณการสั้นสะเทือนของมอเตอร์ สำหรับในบทที่ 7 นี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อจำลองผลการคำนวณสนามแม่เหล็กและการคำนวณการสั้นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำ จากบทที่ผ่านมาพร้อมทั้งอภิปรายผลการจำลองในกรอบความรู้ที่ศึกษาจากงานวิจัยที่เคยมีผู้ได้ศึกษาก่อนหน้านี้ ตลอดจนเปรียบเทียบผลการคำนวณการสั้นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรงและร่องโรเตอร์แบบเฉียง สำหรับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้แบ่งการพิจารณาลักษณะร่องโรเตอร์ออกเป็น 3 แบบได้แก่ 1) ร่องโรเตอร์แบบร่องตรง, 2) ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง, และ 3) ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง

7.2 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กและอภิปรายผล

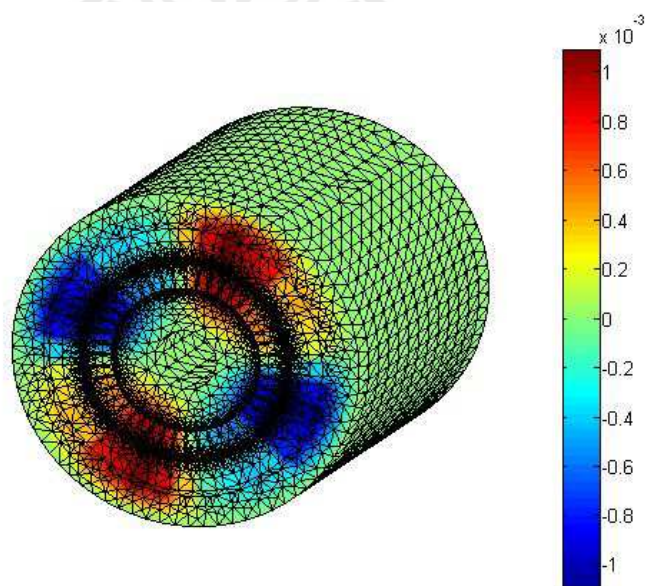
จากทฤษฎีในบทที่ 3 จะทราบได้ว่าการคำนวณการสั้นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำนั้นจะต้องคำนวณค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่กระจายตัวตามปริมาตรของมอเตอร์ก่อน จากนั้นจึงคำนวณค่าสนามแม่เหล็กซึ่งถือว่าเป็นอิทธิพลหลักที่ก่อให้เกิดแรงสั้นสะเทือนของมอเตอร์ ซึ่งในหัวข้อต่อไปนี้จะได้นำเสนอผลการคำนวณค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กและค่าสนามแม่เหล็กพร้อมทั้งอภิปรายผลการจำลอง

7.2.1 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง

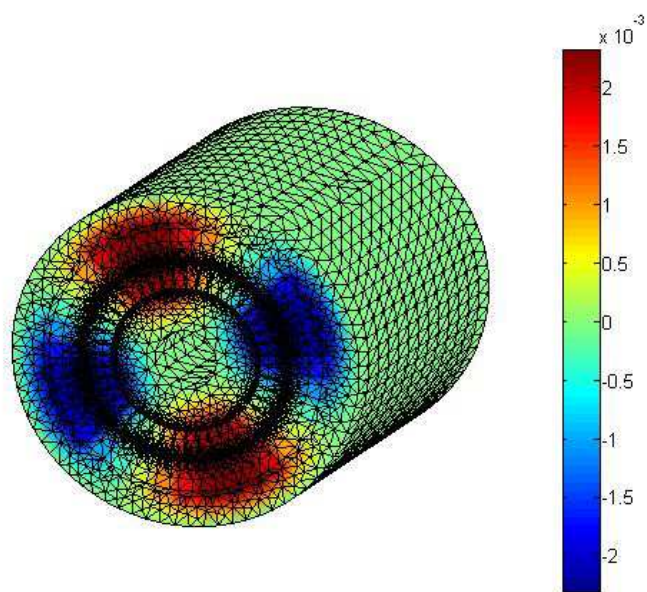
การจำลองผลการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กตลอดปริมาตรของมอเตอร์เมื่อมอเตอร์หมุนด้วยอัตราเร็วคงที่ ด้วยมุมต่างๆ ที่โรเตอร์หมุนใน 360 องศา ดังแสดงด้วยรูปที่ 7.1 - 7.12 แสดงถึงการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเริ่มตั้งแต่มุม 0 องศา ถึง 359.9992 องศา โดยแต่ละรูปโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่างกันด้วยมุมทีละ 32.7272 องศา



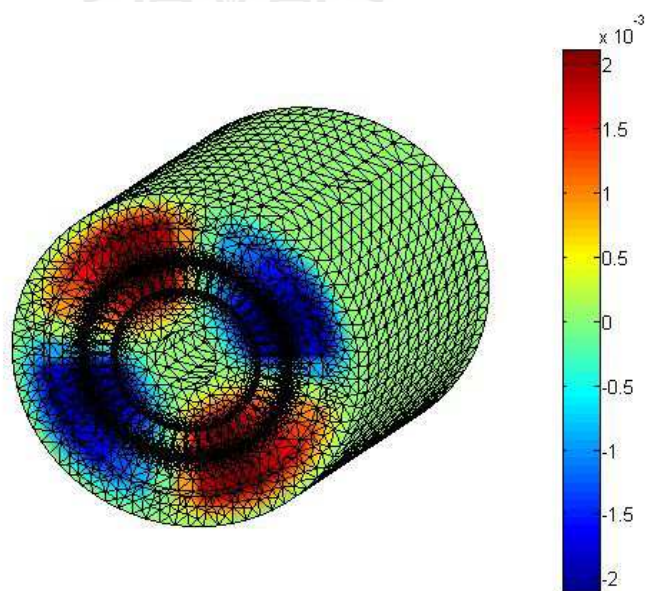
รูปที่ 7.1 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



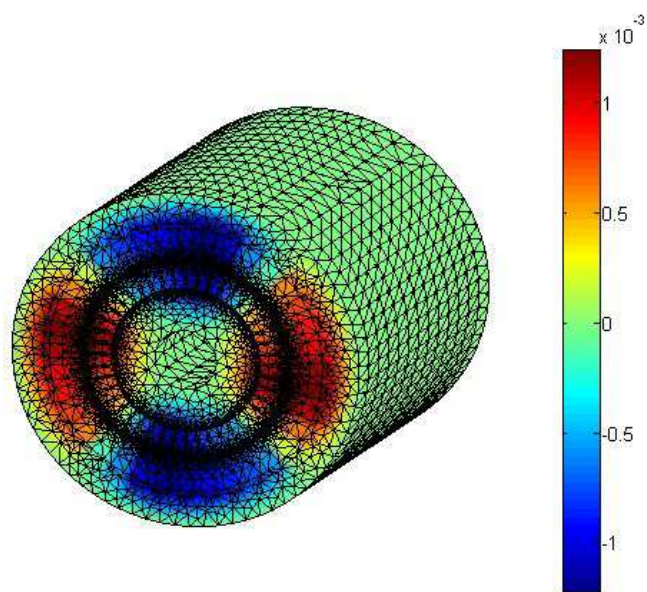
รูปที่ 7.2 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



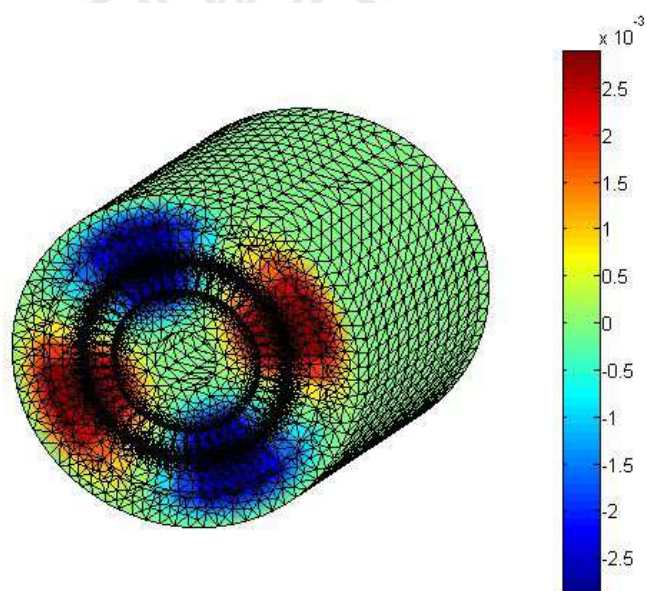
รูปที่ 7.3 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา



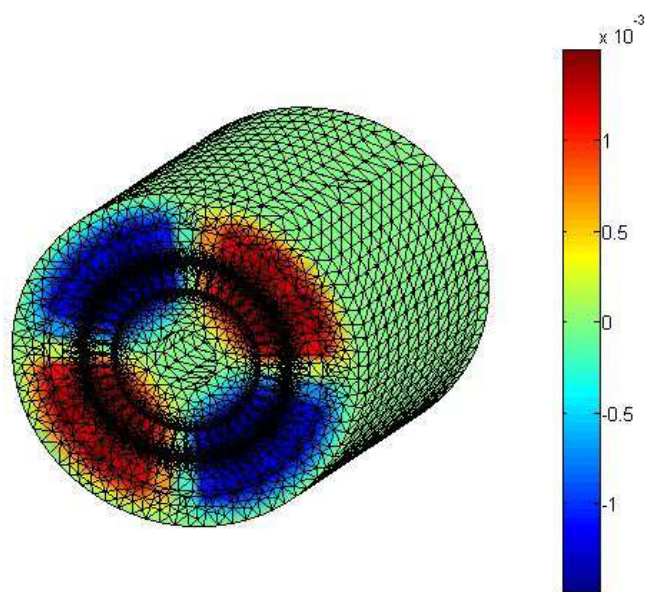
รูปที่ 7.4 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



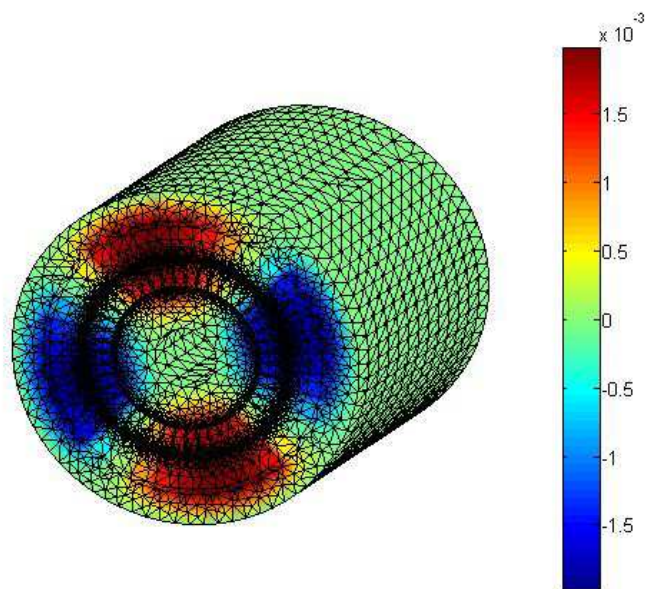
รูปที่ 7.5 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



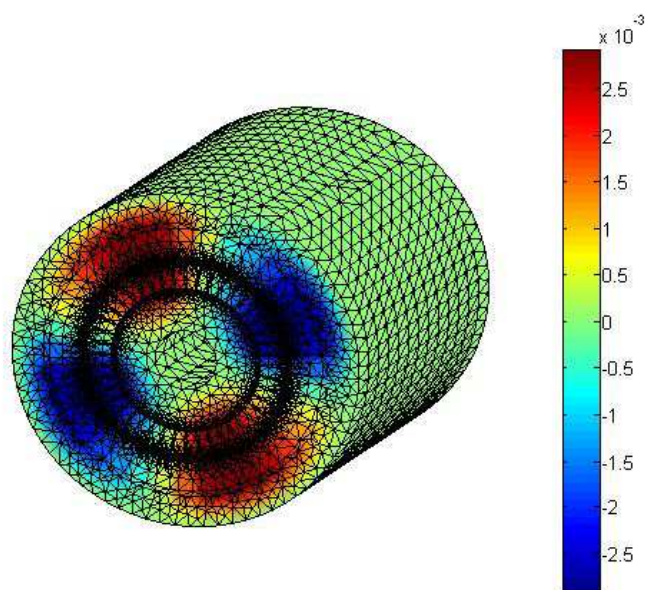
รูปที่ 7.6 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



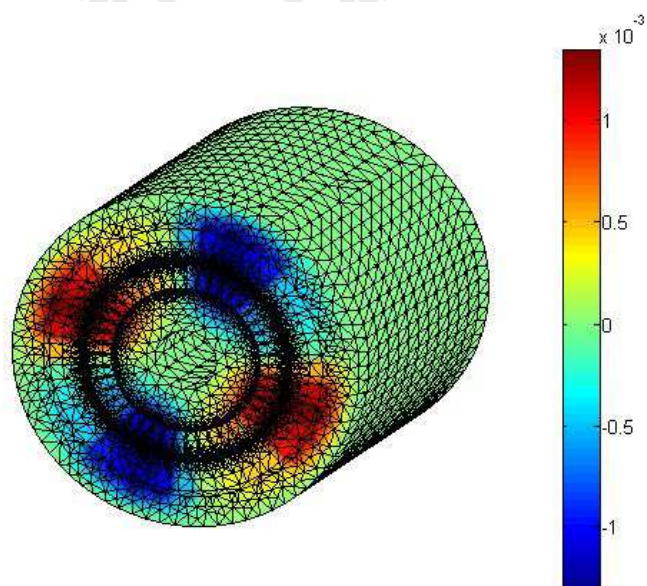
รูปที่ 7.7 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



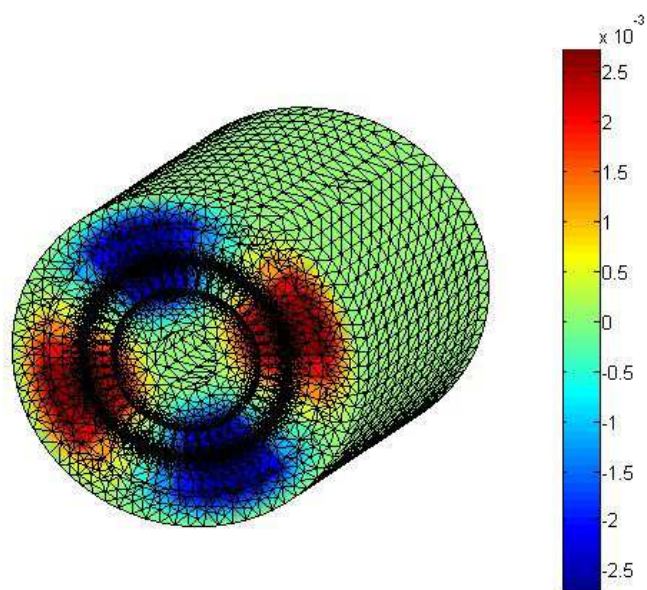
รูปที่ 7.8 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



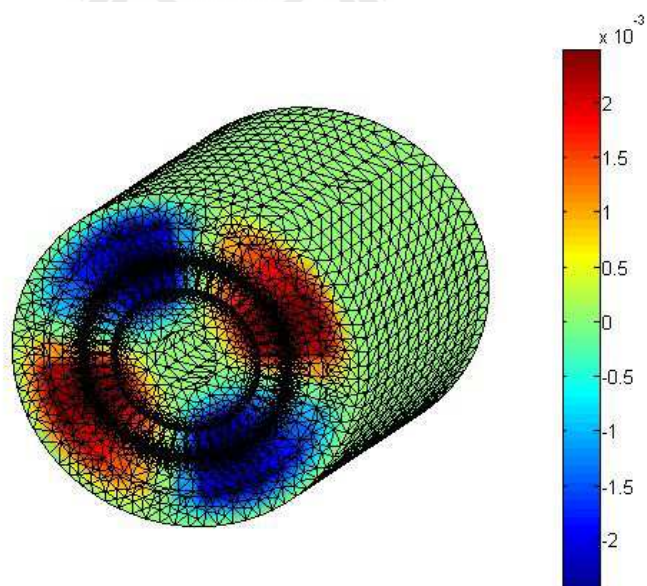
รูปที่ 7.9 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.10 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



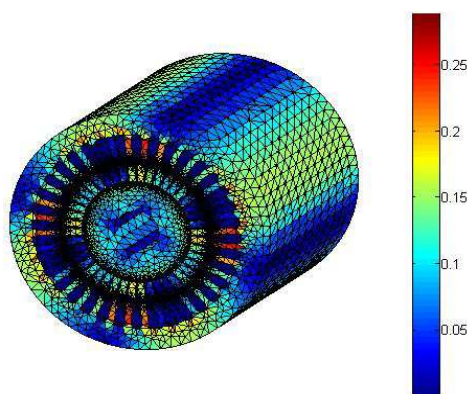
รูปที่ 7.11 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา



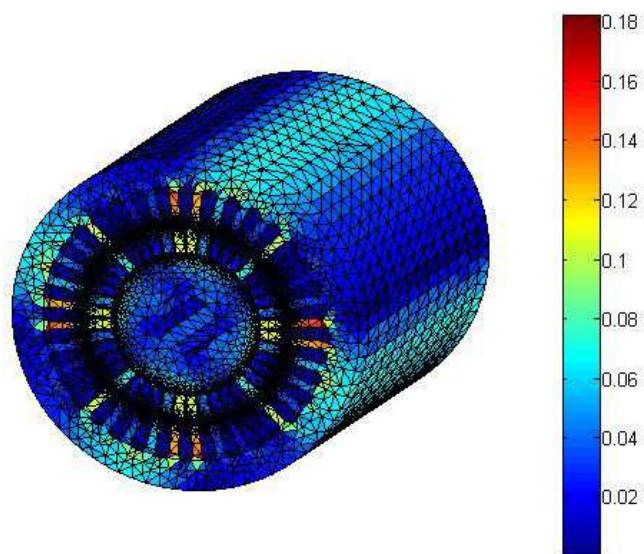
รูปที่ 7.12 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

จากรูปที่ 7.1 - 7.12 จะสังเกตเห็นว่า ทางเดินของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ เมื่อพิจารณามอเตอร์หมุนในสถานะอยู่ตัวและมีโหลดเต็มพิกัด ปรากฏให้เห็นถึงจำนวนขั้วแม่เหล็ก N (สีแดง) และ S (สีน้ำเงิน) สลับกันไปจำนวน 4 ขั้ว เท่ากับจำนวนขั้วของมอเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผลอย่างเด่นชัด ซึ่งพิจารณาควบคู่กับค่าแถบสีทางด้านขวามือที่มีทั้งค่าบวกและค่าลบ โดยค่าบวกที่มีขนาดสูงสุดจะแทนได้ด้วยสีแดงเข้ม และค่าลบที่มีขนาดสูงสุดจะแทนด้วยสีน้ำเงินเข้ม ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 7.1 - 7.12 ซึ่งจากรูปจะสังเกตเห็นศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กแบ่งออกเป็น 2 แถบสีหลักๆ คือ แดงและน้ำเงินสลับกันไป 4 กลุ่ม ซึ่งจำนวนกลุ่มนี้เปรียบเสมือนจำนวนขั้วแม่เหล็ก โดยกลุ่มสีแดงหมายถึงขั้ว N ซึ่งมีทิศทางของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A มีทิศพุ่งเข้าหาหน้ากระดาด ส่วนกลุ่มสีน้ำเงินหมายถึงขั้ว S ซึ่งมีทิศทางของ A พุ่งออกจากหน้ากระดาด โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะเริ่มเข้าทางเดินเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° (ในกรณีที่พิจารณาในสภาวะไร้อะไหล่จะมีค่าเท่ากับ 180° พอดี (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998)) และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะแสดงพฤติกรรมที่เรียกว่าสนามแม่เหล็กหมุน โดยมีทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปในทิศทางเดียวกับการหมุนของโรเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผล

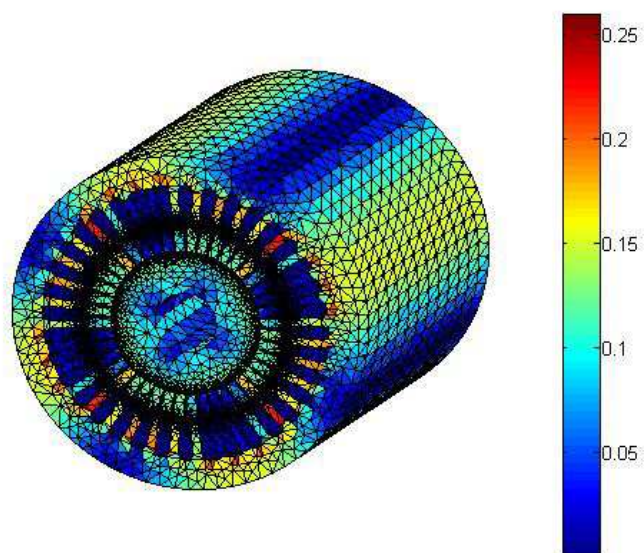
เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กก็สามารถนำไปคำนวณค่าสนามแม่เหล็กได้ การคำนวณค่าสนามแม่เหล็กของมอเตอร์นั้นสามารถกระทำได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 รูปที่ 7.13 - 7.24 แสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก ตามปริมาตรของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อโรเตอร์หมุนไปจากมุม 0 องศา ถึง 359.9992 องศา โดยโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมต่างกัน 32.7272 องศา



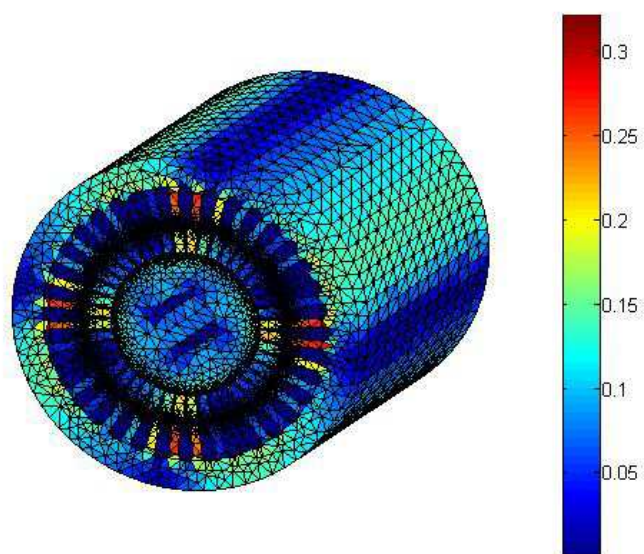
รูปที่ 7.13 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



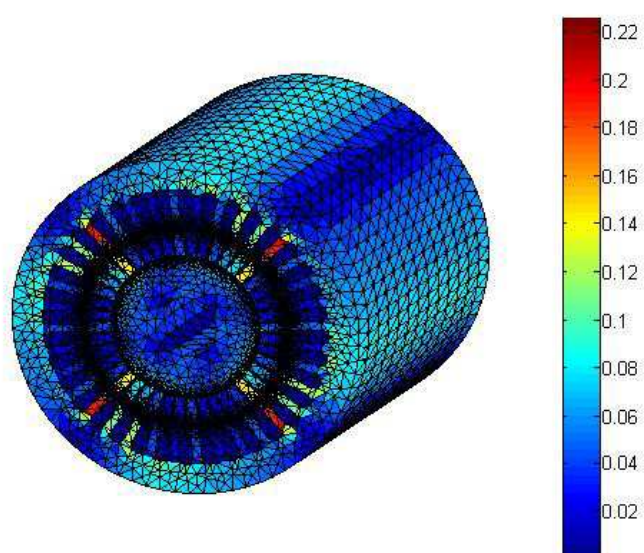
รูปที่ 7.14 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อ โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



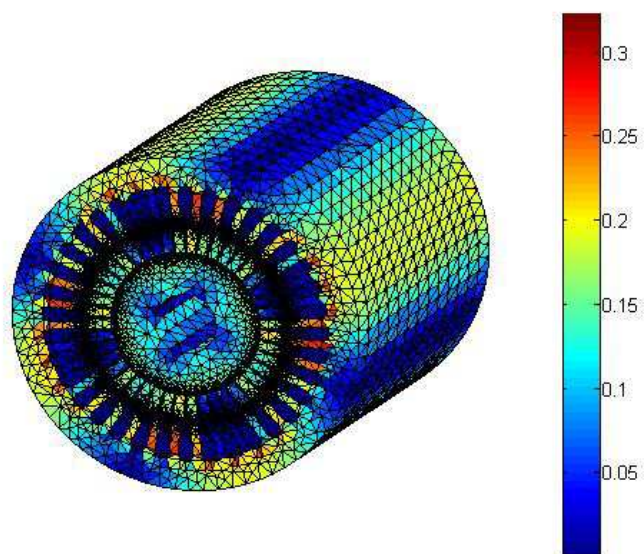
รูปที่ 7.15 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรงเมื่อโรเตอร์หมุน
ไปเป็นมุม 65.4544 องศา



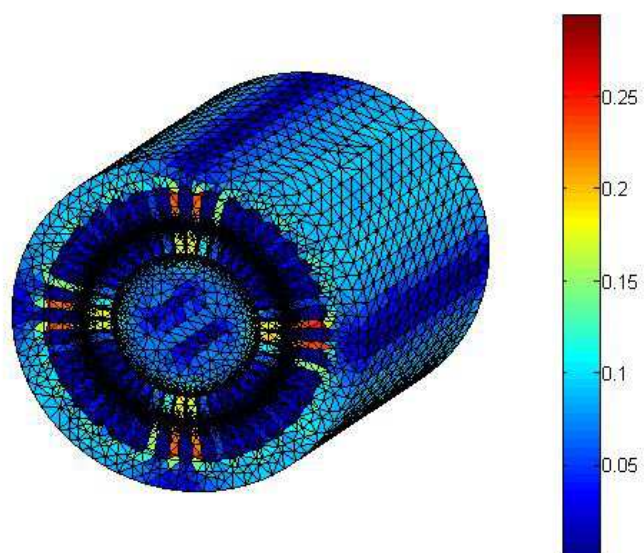
รูปที่ 7.16 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



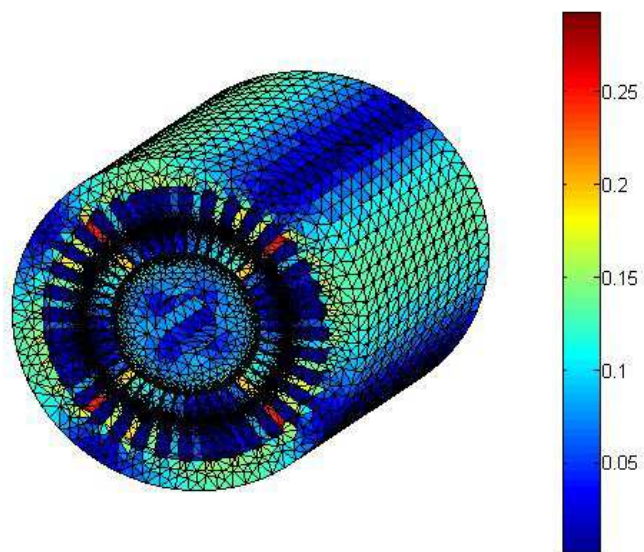
รูปที่ 7.17 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



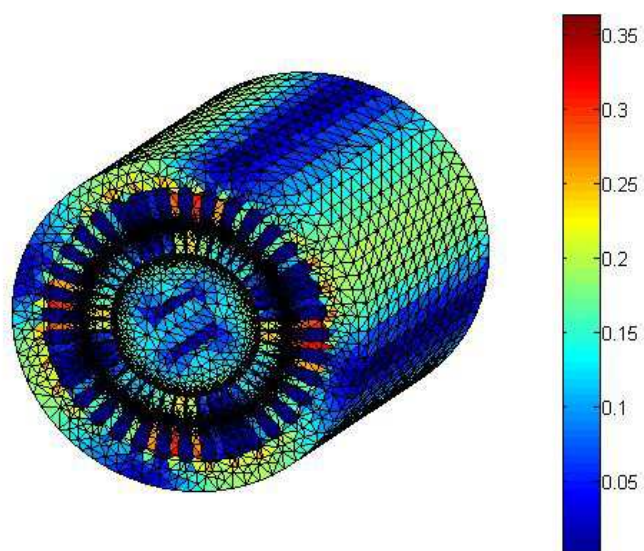
รูปที่ 7.18 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



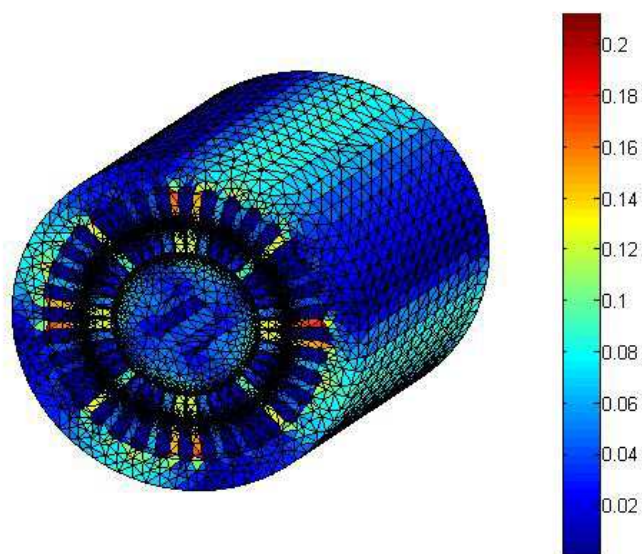
รูปที่ 7.19 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



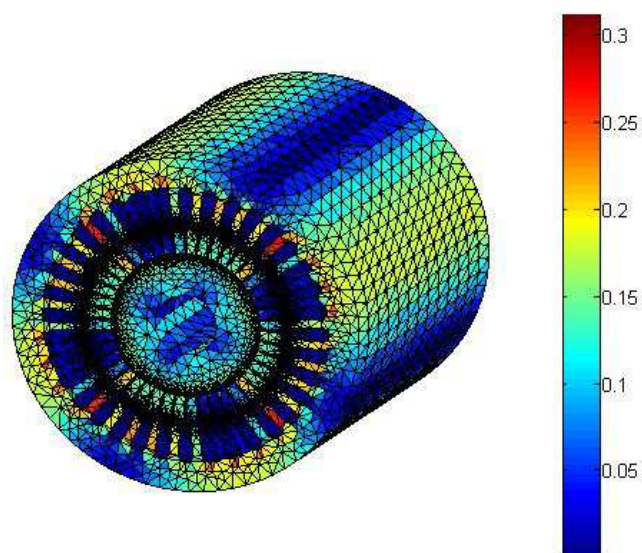
รูปที่ 7.20 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



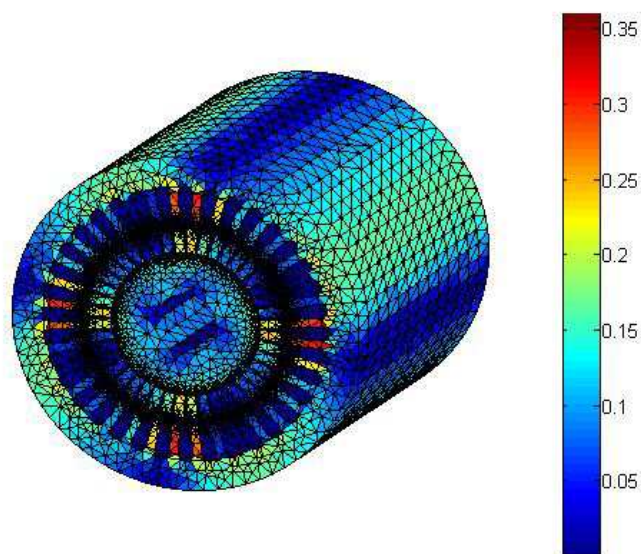
รูปที่ 7.21 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.22 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



รูปที่ 7.23 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา

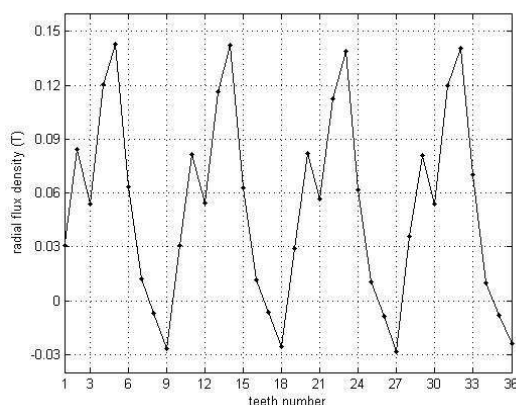


รูปที่ 7.24 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

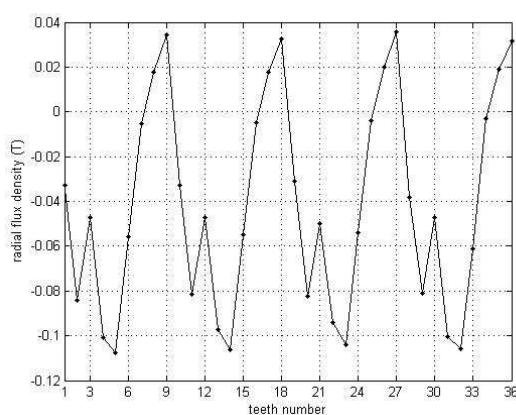
ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการจำลองผลในแต่ละจุดต่อที่กระจายบนพื้นที่หน้าตัดตามแนวแกน z ของมอเตอร์ (A_z) จะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความหนาแน่นสนามแม่เหล็กในแนวรัศมี (B_r) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ทั้ง 36 ซี่ ที่มีมุมการหมุนของโรเตอร์แปรเปลี่ยนไป โดยรูปที่ 7.25 เป็นการแสดงค่า B_r ที่กระทำตรงฟันของสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่งเป็นการพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรงเมื่อพิจารณาโรเตอร์หมุนไป 0° , 90° และ 180° (ซี่ที่ 1 คือตำแหน่ง 0° เทียบกับแกน $x+$ พอดิ และซี่ถัดไปจะวางตัวเป็นลำดับในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) จากรูปที่ 7.25 จะสังเกตเห็นว่า รูปกราฟของ B_r จะมีลักษณะคล้ายรูปคลื่นไซน์แอมพลิจูดสูงสุดประมาณ 0.14 tesla ที่มีคาบเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนซี่ทั้งหมด โดยกราฟ B_r จะมีลักษณะเหมือนเดิมเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° และเมื่อพิจารณารูปกราฟของ B_r เมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° ดังรูปที่ 7.25(ก) เทียบกับรูปของการกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° เช่นกัน ดังรูปที่ 7.1 จะสังเกตเห็นว่าค่า B_r ในรูปที่ 7.25(ก) จะมีขนาดสูงสุด ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 5, 14, 23 และ 32 และจะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 8, 17, 26 และ 35 โดยระยะห่างในแต่ละซี่ที่ปรากฏจะมีค่าเป็น 9 ซึ่งเท่ากับ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็กพอดิ (1 pole pitch) ซึ่งจะสอดคล้องกับรูปที่ 7.1 โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A จะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ซี่ที่ 5, 14, 23 และ 32 และจะมีขนาดสูงสุด ณ ซี่ที่ 8, 17, 26 และ 35

ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากค่าสนามแม่เหล็ก B ได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ซึ่งรูปที่ 7.25(ข) และ 7.25(ค) สามารถพิจารณาเทียบได้ในทำนองเดียวกัน

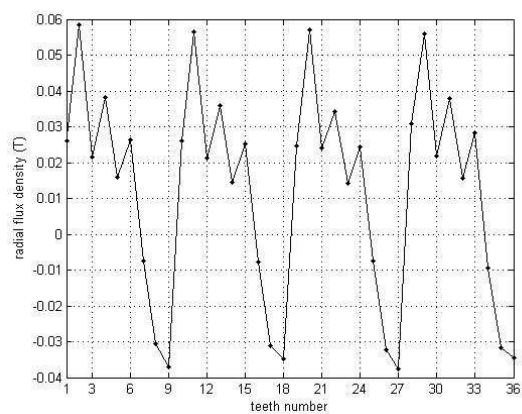
เมื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กแล้ว จากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวรัศมี (F_r) ที่กระทำกับช่องอากาศตรงฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่ง $F_r \propto B_r^2$ โดยรูปที่ 7.26 เป็นการแสดงค่า F_r เทียบกับเวลา โดยพิจารณา F_r กระทำกับช่องอากาศตรงส่วนของฟันสเตเตอร์เมื่อโรเตอร์หมุนครบ 1 รอบ เฉพาะในซี่ที่ 1 ถึงซี่ที่ 9 จากทั้งหมด 36 ซี่ เนื่องจากผลของ F_r จะเริ่มซ้ำเป็นคาบในทุกๆ 9 ซี่ ซึ่งสอดคล้องกับระยะ 1 พิตซ์ขั้วแม่เหล็ก ดังที่ได้กล่าวถึงข้างต้น



(ก)

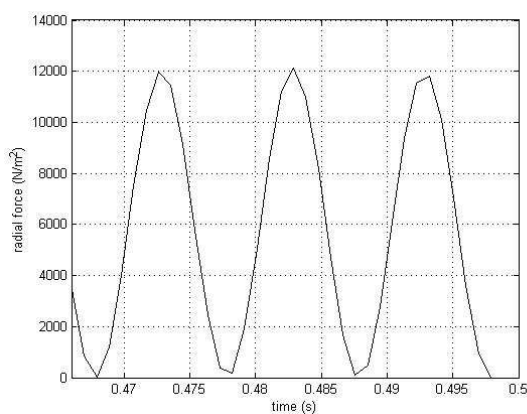


(ข)

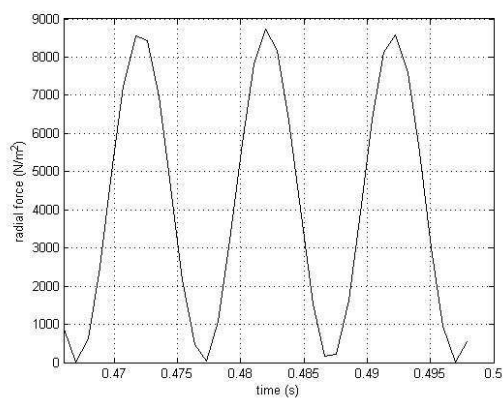


(ค)

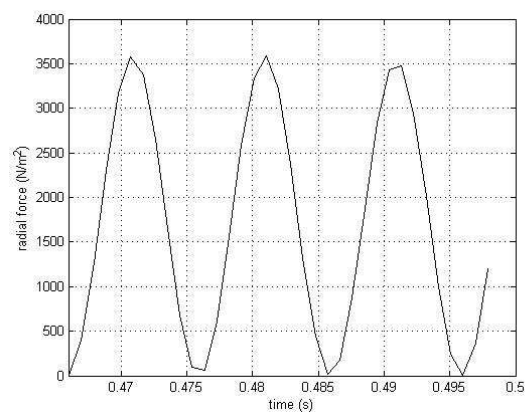
รูปที่ 7.25 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟันสเตเตอร์มือพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบร่องตรงเมื่อโรเตอร์หมุนไป (ก) 0° , (ข) 90° และ (ค) 180°



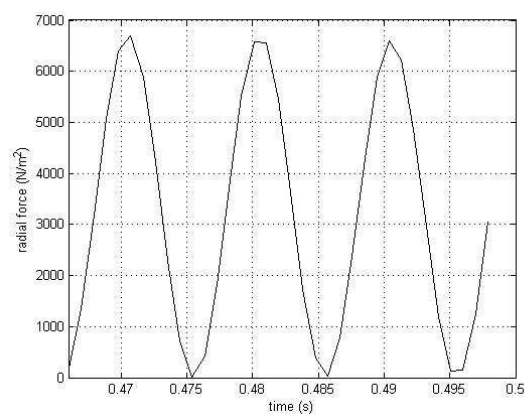
(ก)



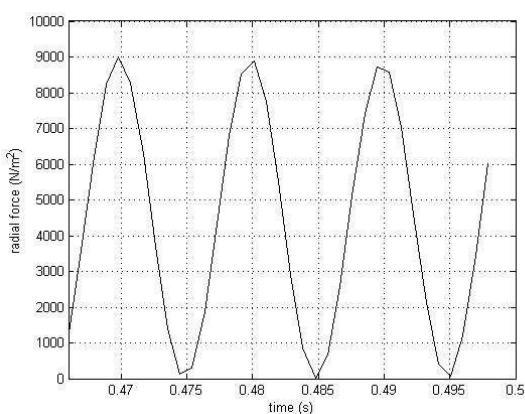
(ข)



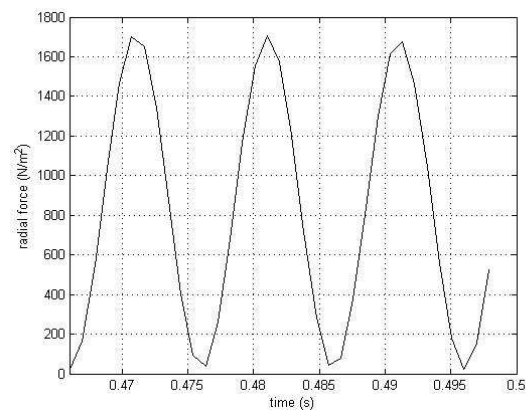
(ก)



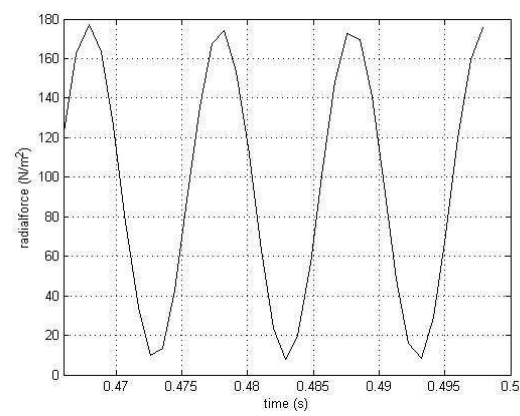
(ข)



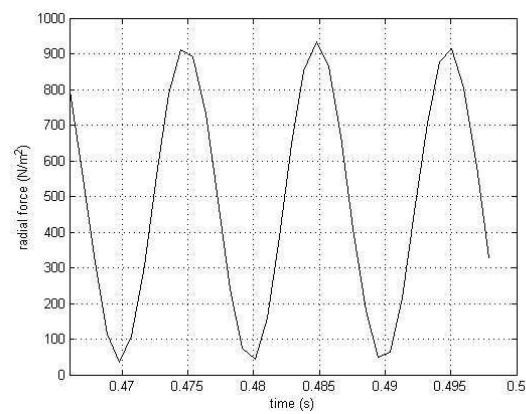
(ค)



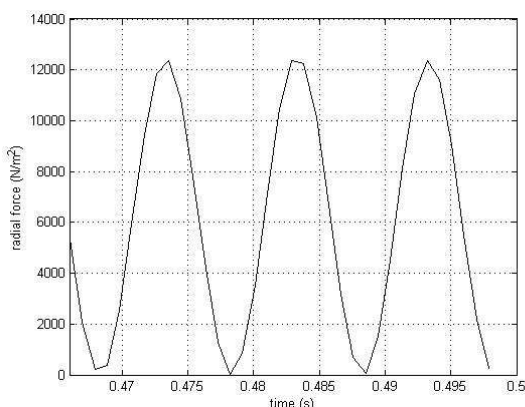
(n)



(j)



(g)



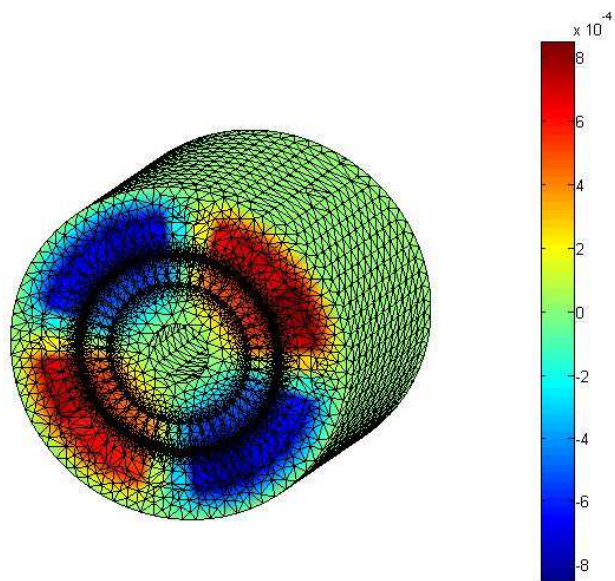
(ณ)

รูปที่ 7.26 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง (ก) ซี่ที่ 1, (ข) ซี่ที่ 2, (ค) ซี่ที่ 3, (ง) ซี่ที่ 4, (จ) ซี่ที่ 5, (ฉ) ซี่ที่ 6, (ช) ซี่ที่ 7, (ฌ) ซี่ที่ 8, (ณ) ซี่ที่ 9

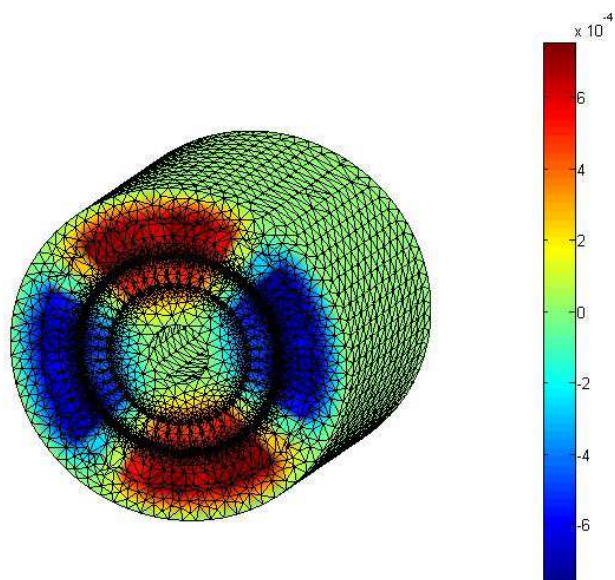
จากรูปที่ 7.26 จะสังเกตเห็นว่ารูปกราฟของ F_r เทียบกับเวลาจะมีลักษณะคล้ายรูปคลื่นไซน์ครึ่งคลื่นบวก ที่มีขนาดแตกต่างกันไปตามแรงที่กระทำกับฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ และมีคาบประมาณ 0.01 วินาที หรือ 100 Hz (ในกรณีที่พิจารณาในสภาวะไร้อะไหล่จะมีค่าเท่ากับ 0.01 วินาทีพอดี ซึ่ง F_r จะมีความถี่เป็น 2 เท่าของแหล่งจ่ายไฟฟ้า (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998)) โดยแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์ในซี่ที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 7.26(ก) จะมีค่าทั้งขนาดและเฟสเท่ากับแรงที่กระทำในซี่ที่ 10, 19 และ 28 ทุกประการ ซึ่งสอดคล้องกับระยะ 1 พิตช์ ขั้วแม่เหล็กของมอเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผล และแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์ในซี่อื่นๆ ก็มีลักษณะเป็นแบบนี้เช่นกัน

7.2.2 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง

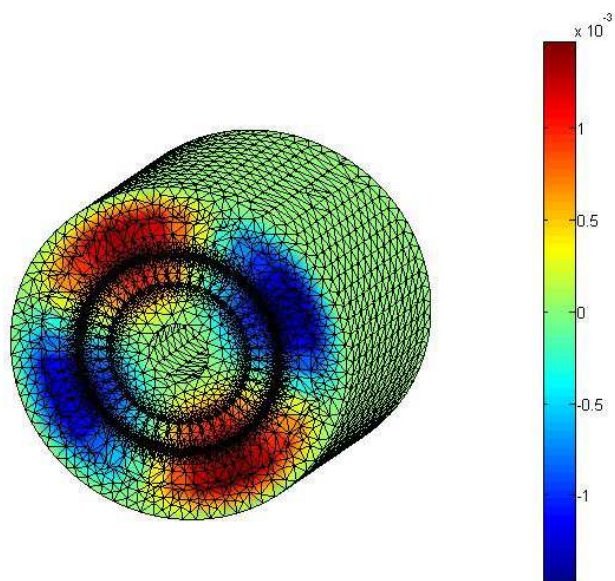
การจำลองผลการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กตลอดปริมาตรของมอเตอร์เมื่อมอเตอร์หมุนด้วยอัตราเร็วคงที่ ด้วยมุมต่างๆ ที่โรเตอร์หมุนใน 360 องศา ดังแสดงด้วยรูปที่ 7.27 - 7.38 แสดงถึงการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเริ่มตั้งแต่มุม 0 องศา ถึง 359.9992 องศา โดยแต่ละรูปโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่างกันด้วยมุมทีละ 32.7272 องศา



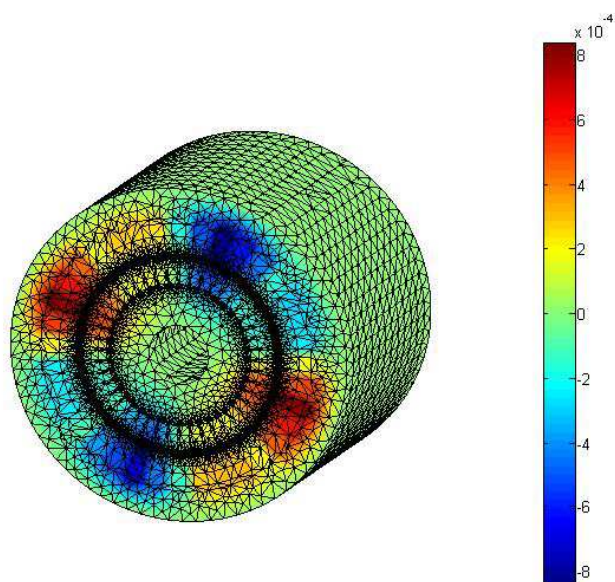
รูปที่ 7.27 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



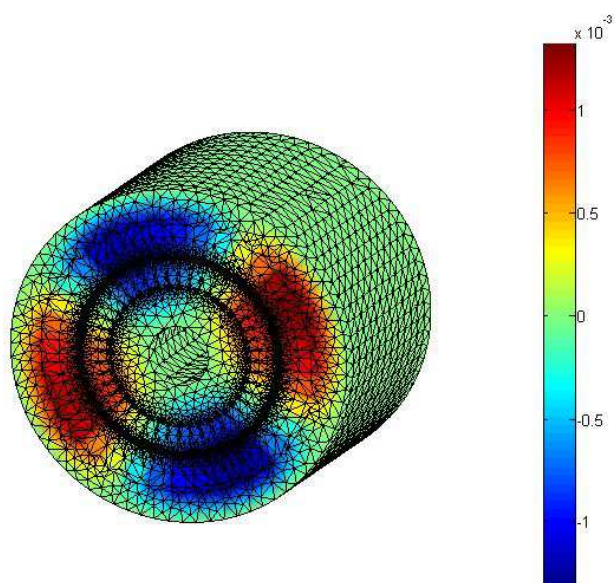
รูปที่ 7.28 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



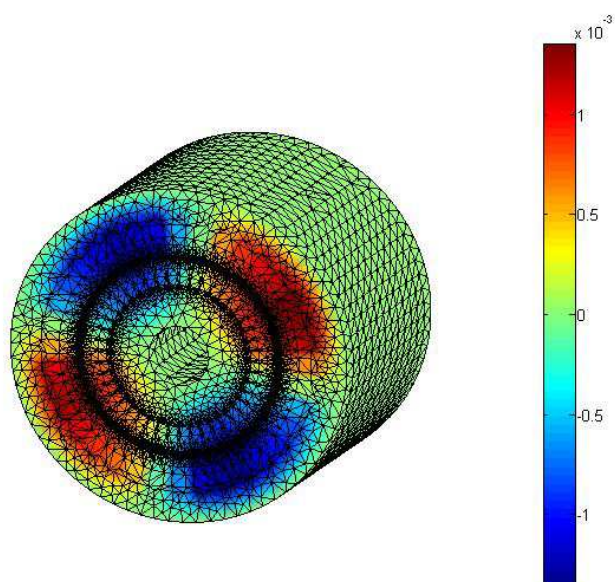
รูปที่ 7.29 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา



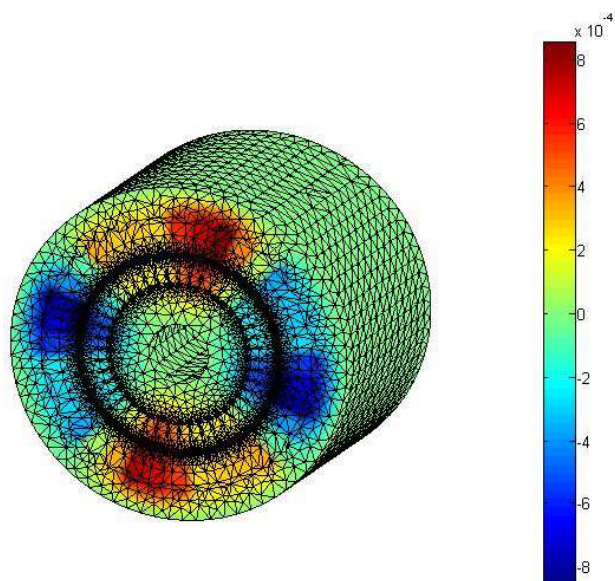
รูปที่ 7.30 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



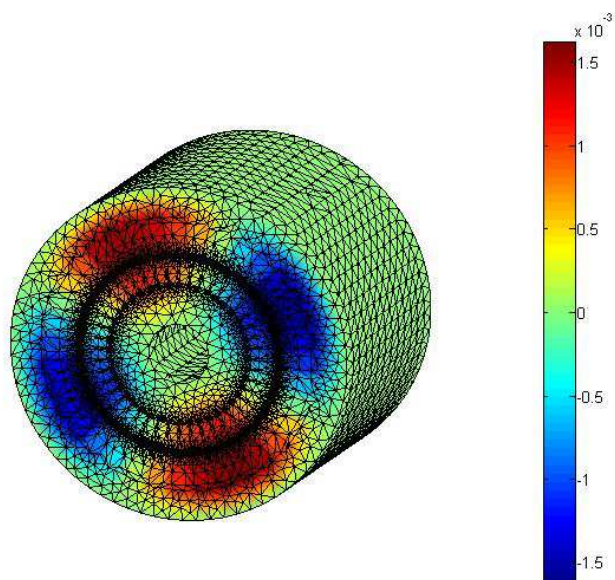
รูปที่ 7.31 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



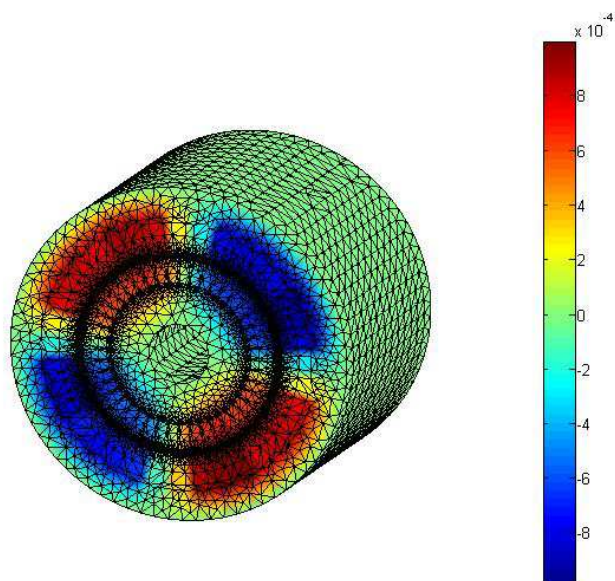
รูปที่ 7.32 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



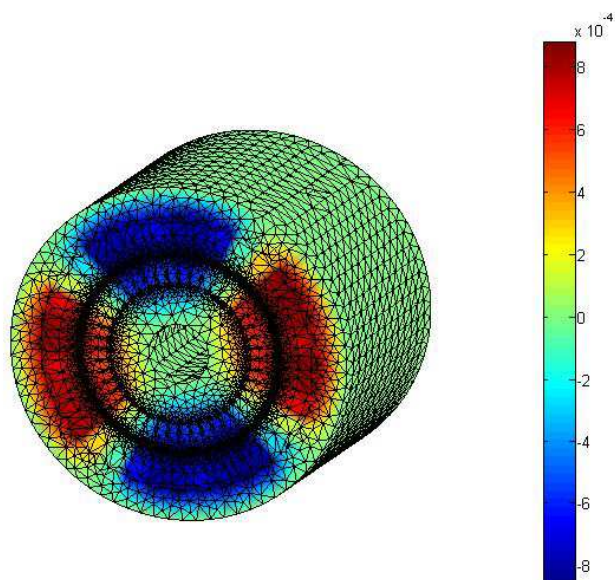
รูปที่ 7.33 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



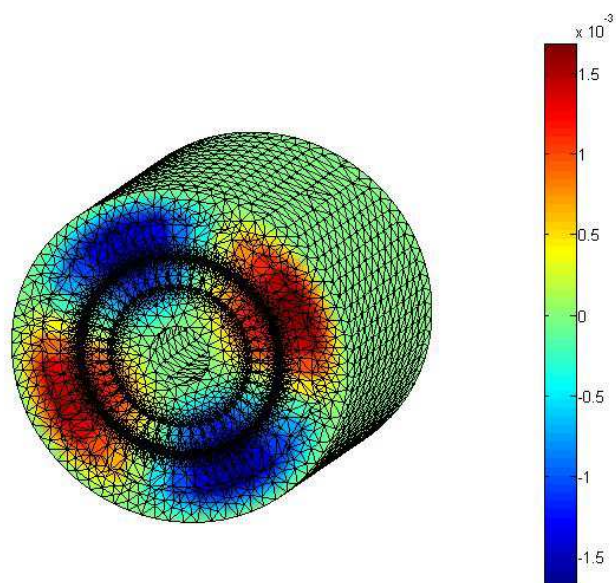
รูปที่ 7.34 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



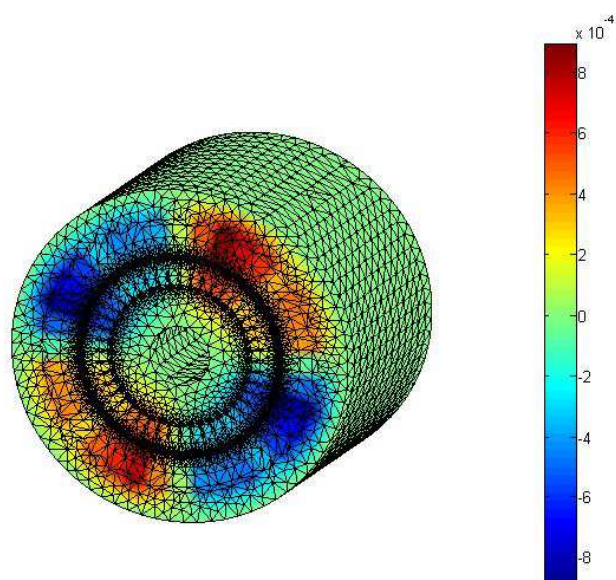
รูปที่ 7.35 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.36 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



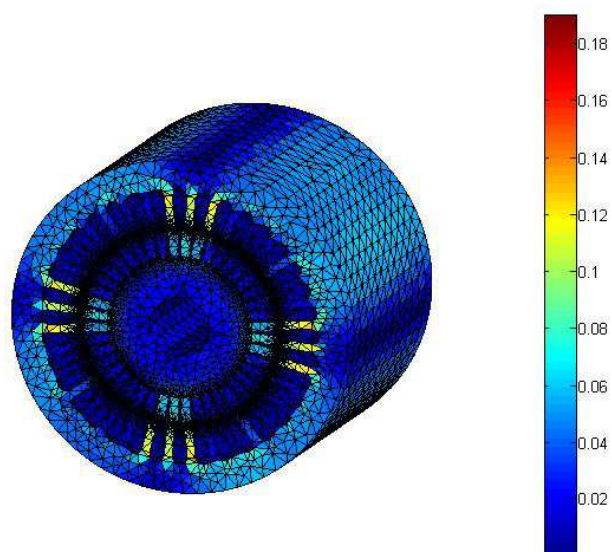
รูปที่ 7.37 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา



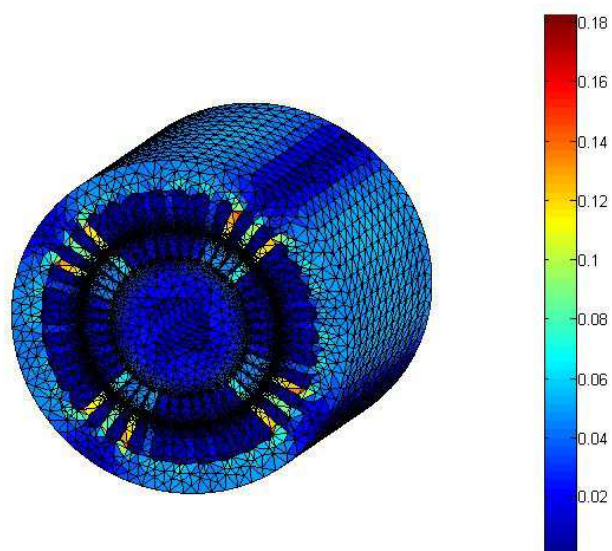
รูปที่ 7.38 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

จากรูปที่ 7.27 - 7.38 จะสังเกตเห็นว่า ทางเดินของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ เมื่อพิจารณามอเตอร์หมุนในสถานะอยู่ตัวและมีโหลดเต็มพิกัดปรากฏให้เห็นถึงจำนวนขั้วแม่เหล็ก N (สีแดง) และ S (สีน้ำเงิน) สลับกันไปจำนวน 4 ขั้ว เท่ากับจำนวนขั้วของมอเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผลอย่างเด่นชัด ซึ่งพิจารณาควบคู่กับค่าแถบสีทางด้านขวามือที่มีทั้งค่าบวกและค่าลบ โดยค่าบวกที่มีขนาดสูงสุดจะแทนได้ด้วยสีแดงเข้ม และค่าลบที่มีขนาดสูงสุดจะแทนด้วยสีน้ำเงินเข้ม ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 7.27 - 7.38 ซึ่งจากรูปจะสังเกตเห็นศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กแบ่งออกเป็น 2 แถบสีหลักๆ คือ แดงและน้ำเงินสลับกันไป 4 กลุ่ม ซึ่งจำนวนกลุ่มนี้เปรียบเสมือนจำนวนขั้วแม่เหล็ก โดยกลุ่มสีแดงหมายถึงขั้ว N ซึ่งมีทิศทางของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A มีทิศพุ่งเข้าหาหน้ากระดาน ส่วนกลุ่มสีน้ำเงินหมายถึงขั้ว S ซึ่งมีทิศทางของ A พุ่งออกจากหน้ากระดาน โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะเริ่มเข้าทางเดินเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° (ในกรณีที่พิจารณาในสภาวะไร้อะไหล่จะมีค่าเท่ากับ 180° พอดี (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998)) และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะแสดงพฤติกรรมที่เรียกว่าสนามแม่เหล็กหมุน โดยมีทิศทางการหมุนวนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ไปในทิศทางเดียวกับการหมุนของโรเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผล

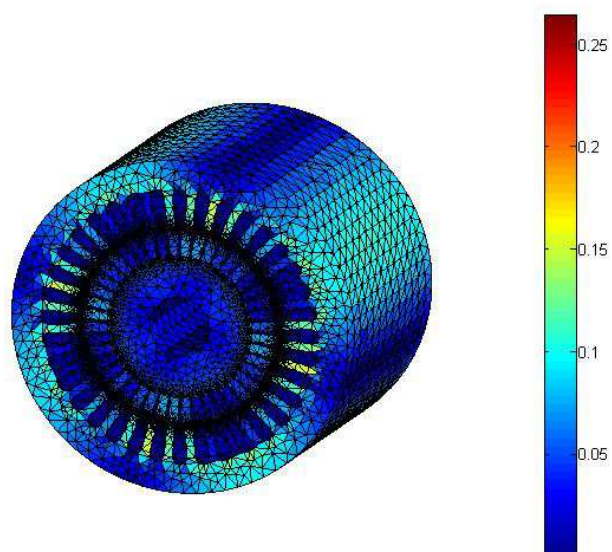
เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กก็สามารถนำไปคำนวณค่าสนามแม่เหล็กได้ การคำนวณค่าสนามแม่เหล็กของมอเตอร์นั้นสามารถกระทำได้ด้วยการอินทิเกรตศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 รูปที่ 7.39 - 7.50 แสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก ตามปริมาตรของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อโรเตอร์หมุนไปจากมุม 0 องศา ถึงมุม 359.9992 องศา โดยโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมต่างกัน 32.7272 องศา



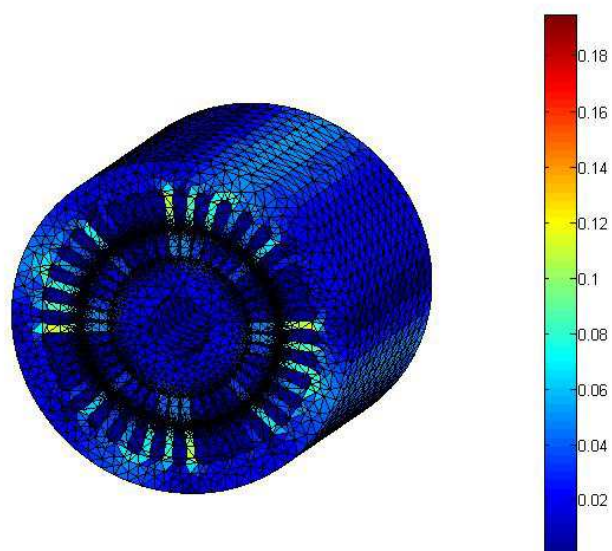
รูปที่ 7.39 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



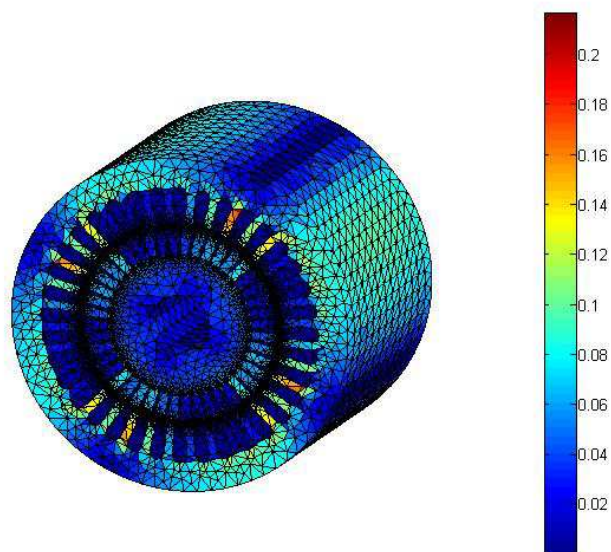
รูปที่ 7.40 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



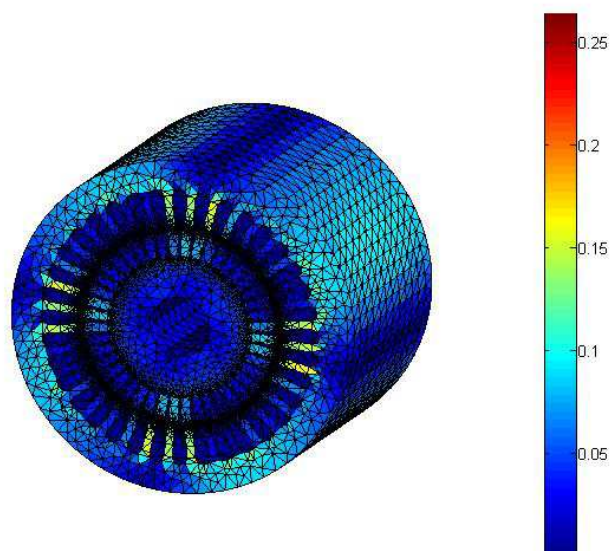
รูปที่ 7.41 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาช่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งช่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา



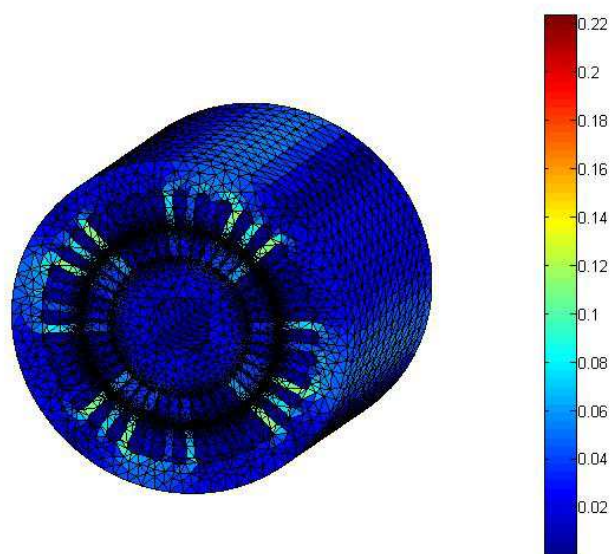
รูปที่ 7.42 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาช่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งช่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



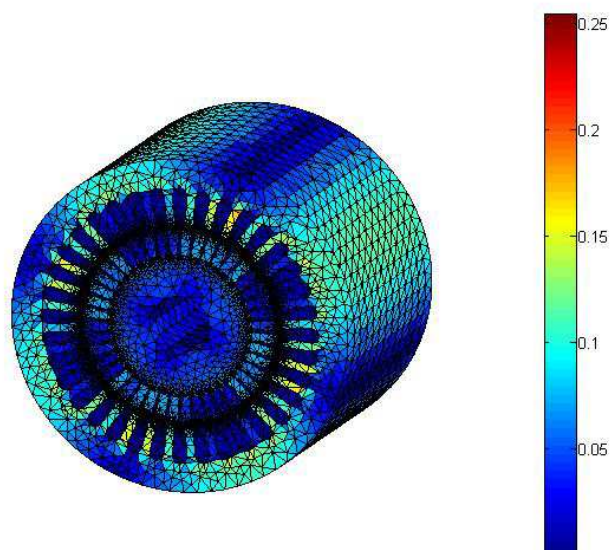
รูปที่ 7.43 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาห้องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งห้องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



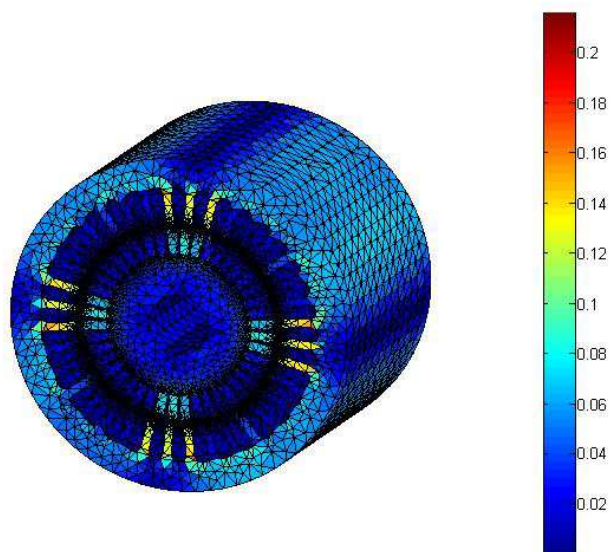
รูปที่ 7.44 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาห้องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งห้องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



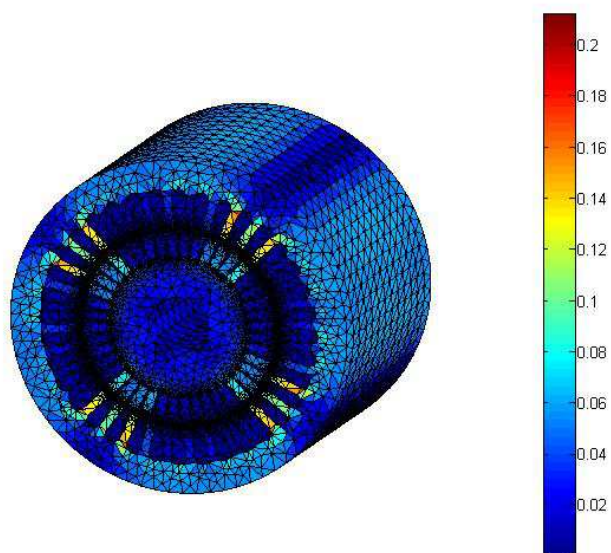
รูปที่ 7.45 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



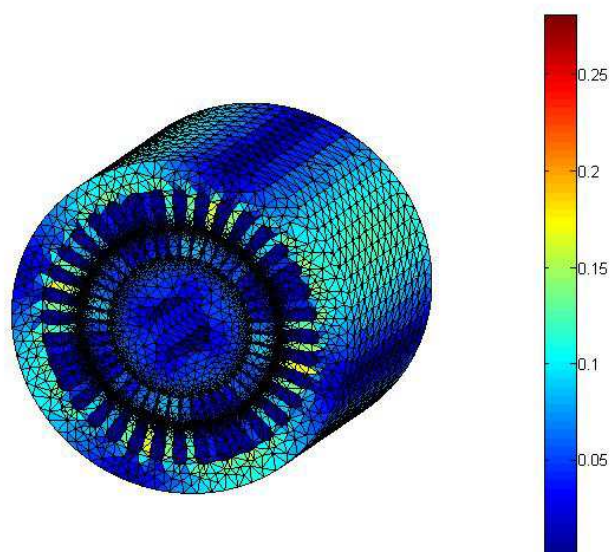
รูปที่ 7.46 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง
เมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



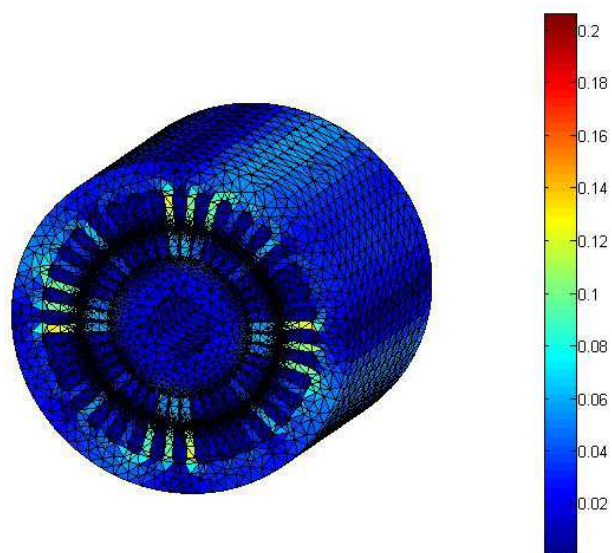
รูปที่ 7.47 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.48 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



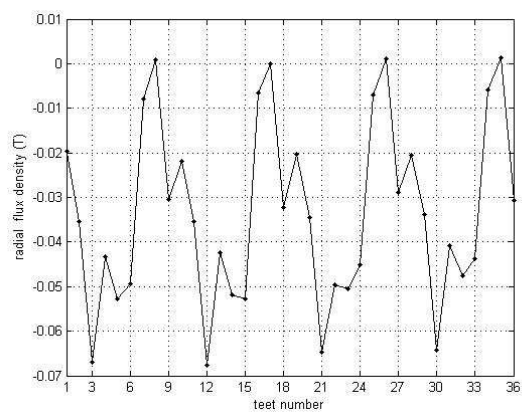
รูปที่ 7.49 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา



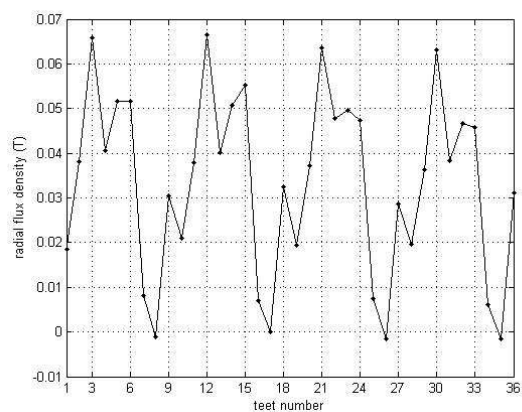
รูปที่ 7.50 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการจำลองผลในแต่ละจุดต่อที่กระจายบนพื้นที่หน้าตัดตามแนวแกน z ของมอเตอร์ (A_z) จะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความหนาแน่นสนามแม่เหล็กในแนวนอน (B_r) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ทั้ง 36 ซี่ ที่มีมุมการหมุนของโรเตอร์แปรเปลี่ยนไป โดยรูปที่ 7.51 เป็นการแสดงค่า B_r ที่กระทำตรงฟันของสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่งเป็นการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อพิจารณาโรเตอร์หมุนไป 0° , 90° และ 180° (ซี่ที่ 1 คือตำแหน่ง 0° เทียบกับแกน $x+$ พอดี และซี่ถัดไปจะวางตัวเป็นลำดับในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) จากรูปที่ 7.51 จะสังเกตเห็นว่า รูปกราฟของ B_r จะมีลักษณะคล้ายรูปคลื่นไซน์แอมพลิจูดสูงสุดประมาณ 0.07 tesla ที่มีคาบเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนซี่ทั้งหมด โดยกราฟ B_r จะมีลักษณะเหมือนเดิมเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° และเมื่อพิจารณารูปกราฟของ B_r เมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° ดังรูปที่ 7.51(ก) เทียบกับรูปของการกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° เช่นกัน ดังรูปที่ 7.27 จะสังเกตเห็นว่าค่า B_r ในรูปที่ 7.51(ก) จะมีขนาดสูงสุด ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 3, 12, 21 และ 30 และจะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 8, 17, 26 และ 35 โดยระยะห่างในแต่ละซี่ที่ปรากฏจะมีค่าเป็น 9 ซึ่งเท่ากับ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็กพอดี (1 pole pitch) ซึ่งจะสอดคล้องกับรูปที่ 7.27 โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A จะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ซี่ที่ 3, 12, 21 และ 30 และจะมีขนาดสูงสุด ณ ซี่ที่ 8, 17, 26 และ 35 ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากค่าสนามแม่เหล็ก B ได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ซึ่งรูปที่ 7.51(ข) และ 7.51(ค) สามารถพิจารณาเทียบได้ในทำนองเดียวกัน จะพบว่าสนามแม่เหล็กจะมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง

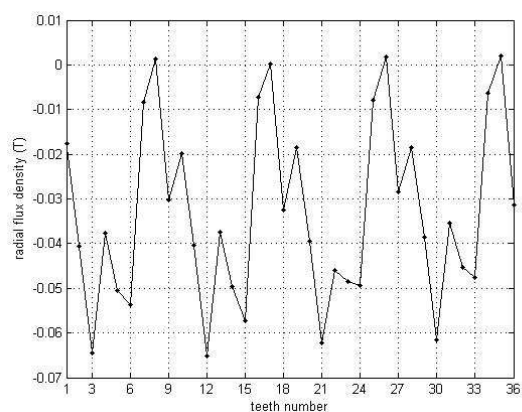
เมื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กแล้ว จากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวนอน (F_r) ที่กระทำกับช่องอากาศตรงฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่ง $F_r \propto B_r^2$ โดยรูปที่ 7.52 เป็นการแสดงค่า F_r เทียบกับเวลา โดยพิจารณา F_r กระทำกับช่องอากาศตรงส่วนของฟันสเตเตอร์เมื่อโรเตอร์หมุนครบ 1 รอบ เฉพาะในซี่ที่ 1 ถึงซี่ที่ 9 จากทั้งหมด 36 ซี่ เนื่องจากผลของ F_r จะเริ่มซ้ำเป็นคาบในทุกๆ 9 ซี่ ซึ่งสอดคล้องกับระยะ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็ก ดังที่ได้กล่าวถึงข้างต้น จะพบว่าแรงแม่เหล็กในแนวนอนจะมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง



(ก)

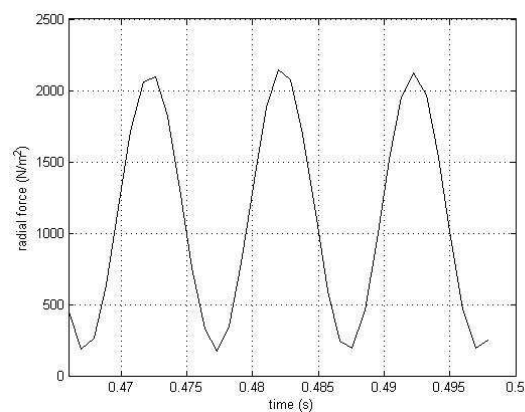


(ข)

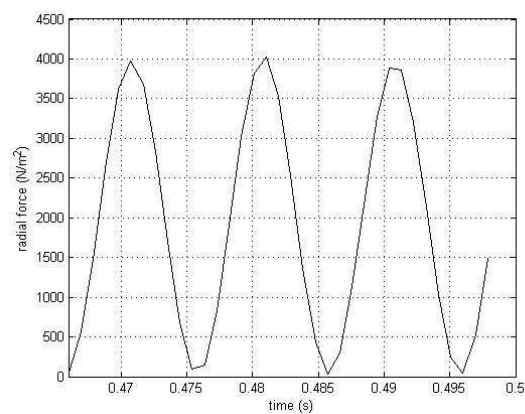


(ค)

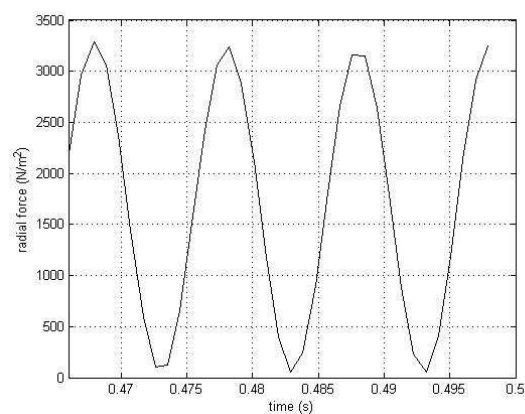
รูปที่ 7.51 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟันสเตเตอร์เมื่อพิจารณาช่องโรเตอร์
แบบเฉียงครึ่งช่องเมื่อโรเตอร์หมุนไป (ก) 0° , (ข) 90° และ (ค) 180°



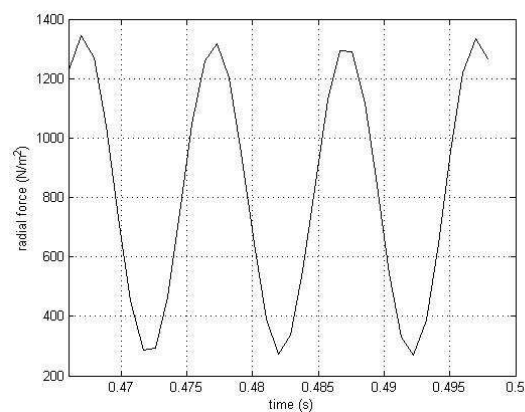
(ก)



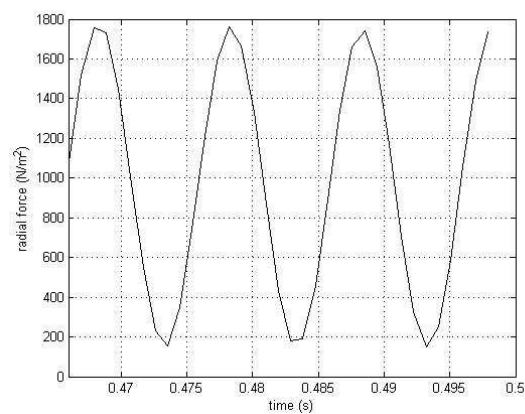
(ข)



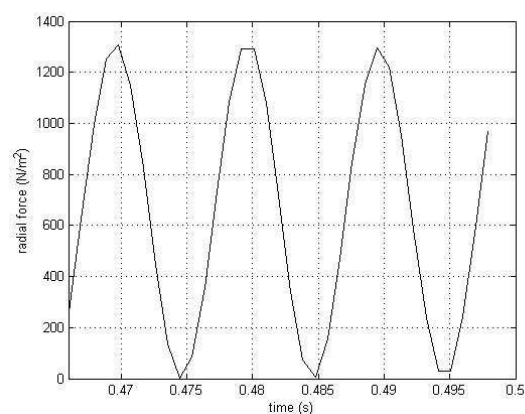
(ค)



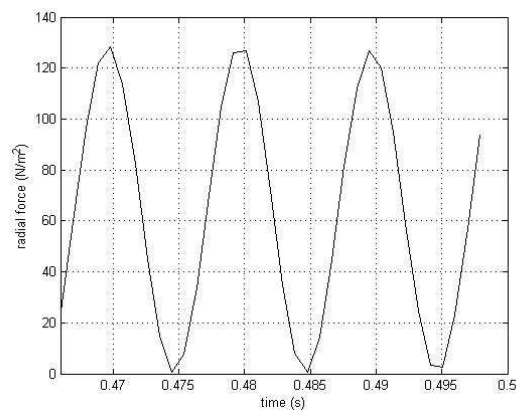
(a)



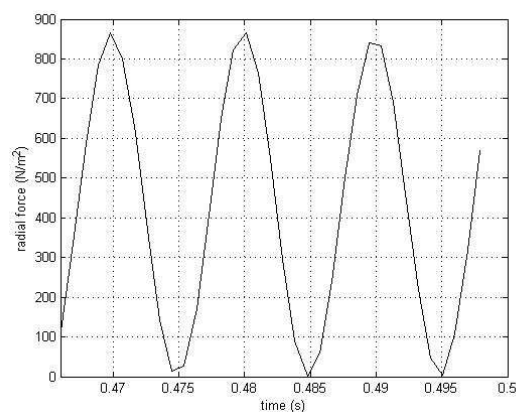
(b)



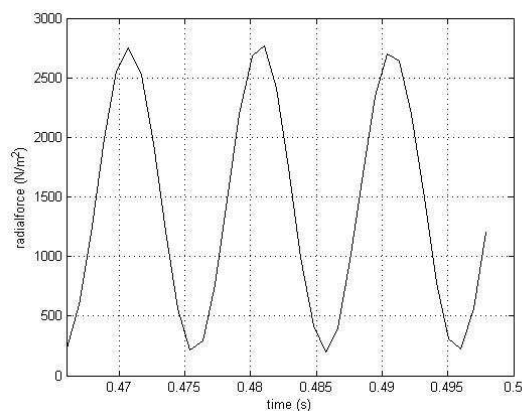
(c)



(ข)



(ค)

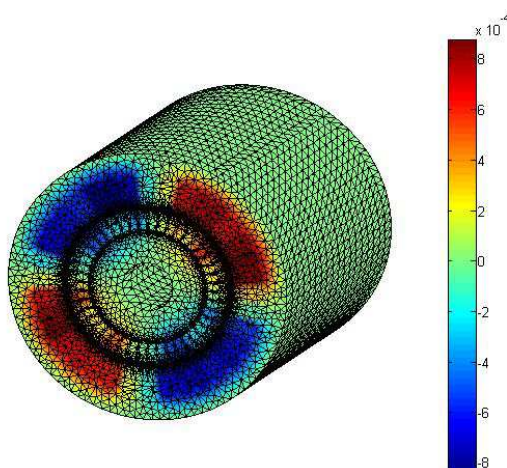


(ง)

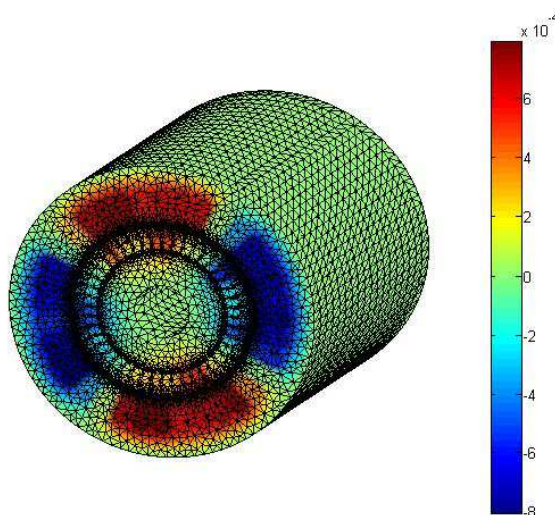
รูปที่ 7.52 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟันสเตเตอร์มือพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง (ก) ซี่ที่ 1, (ข) ซี่ที่ 2, (ค) ซี่ที่ 3, (ง) ซี่ที่ 4, (จ) ซี่ที่ 5, (ฉ) ซี่ที่ 6, (ช) ซี่ที่ 7, (ซ) ซี่ที่ 8, (ณ) ซี่ที่ 9

7.2.3 ผลการจำลองสนามแม่เหล็กเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง

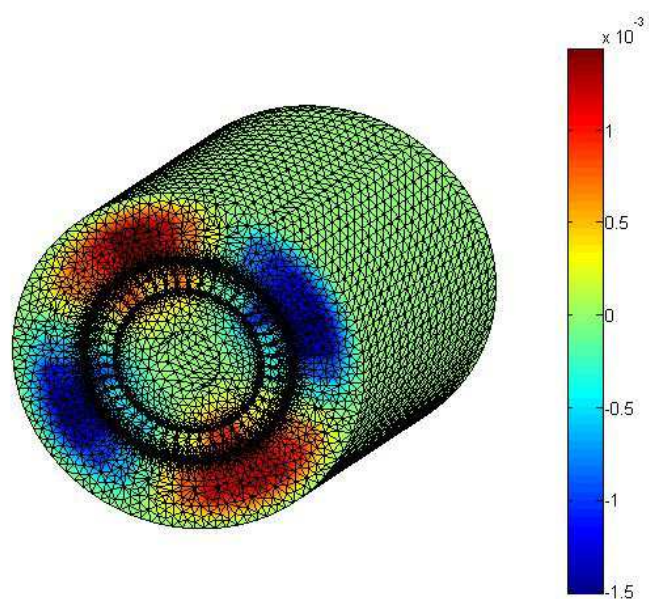
การจำลองผลการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กตลอดปริมาตรของมอเตอร์เมื่อมอเตอร์หมุนด้วยอัตราเร็วคงที่ ด้วยมุมต่างๆ ที่โรเตอร์หมุนใน 360 องศา ดังแสดงด้วยรูปที่ 7.53 - 7.64 แสดงถึงการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเริ่มตั้งแต่มุม 0 องศา ถึง 359.9992 องศา โดยแต่ละรูปโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่างกันด้วยมุมทีละ 32.7272 องศา



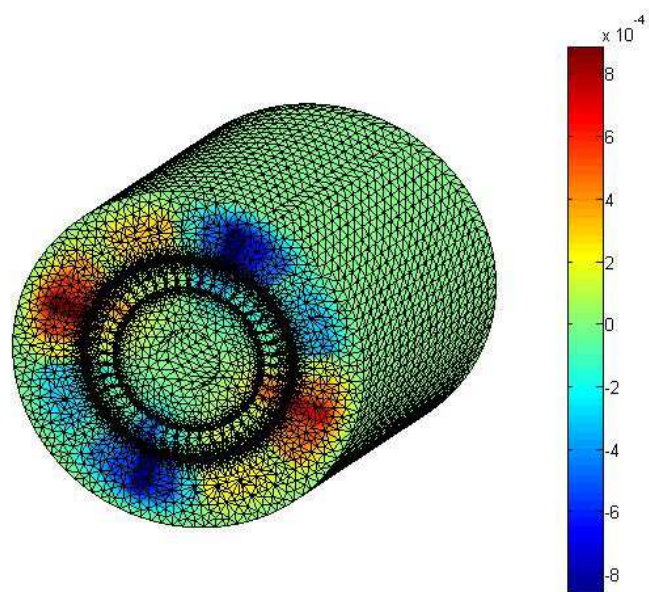
รูปที่ 7.53 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



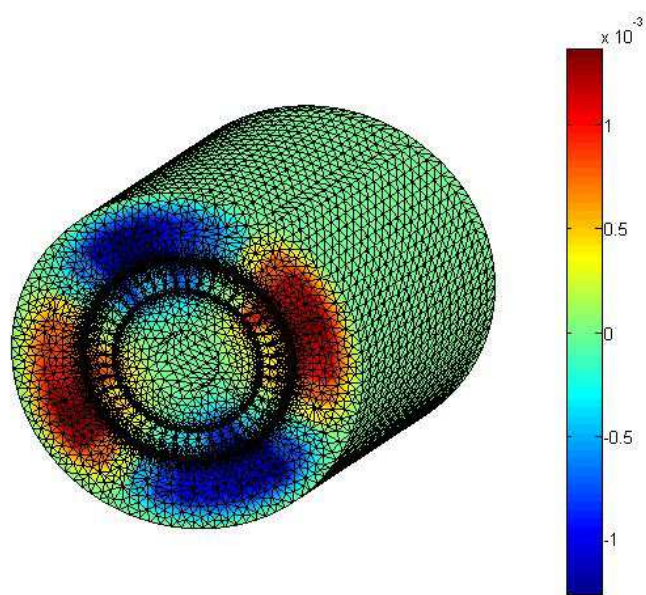
รูปที่ 7.54 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



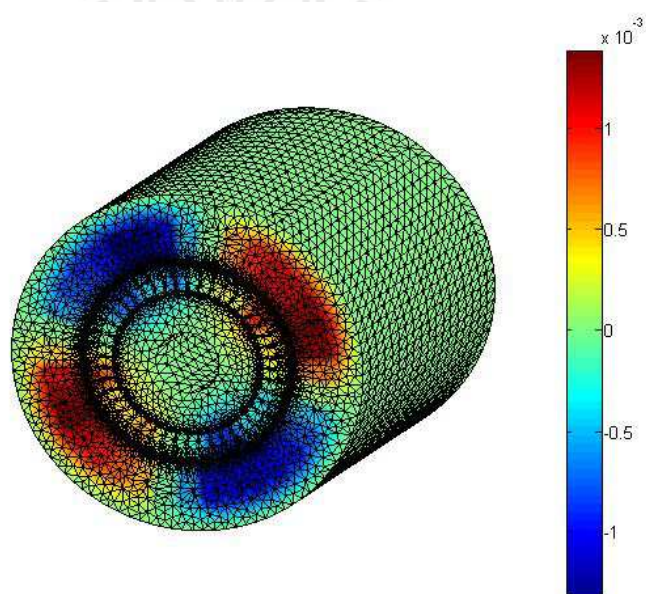
รูปที่ 7.55 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา



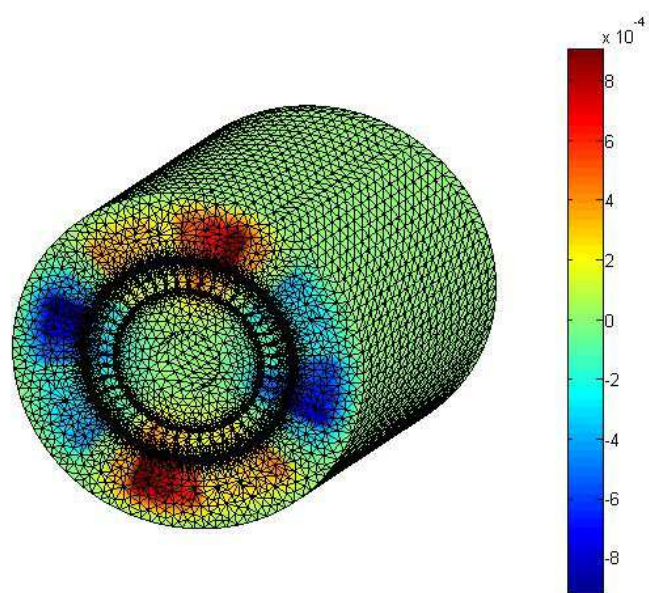
รูปที่ 7.56 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



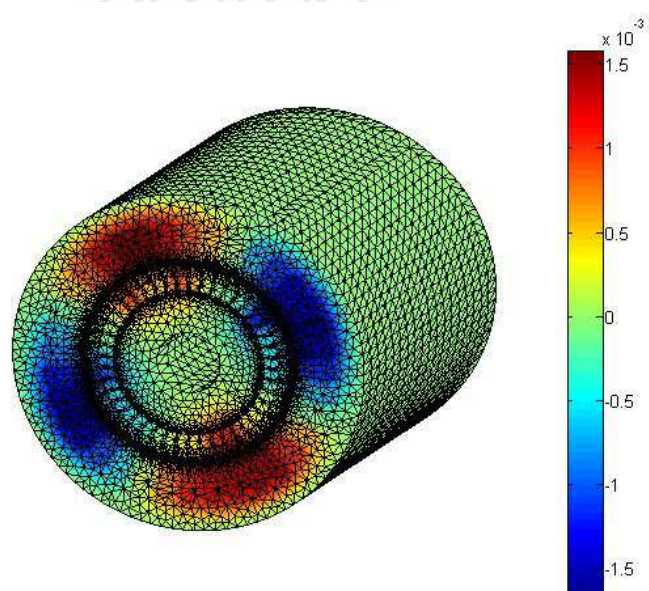
รูปที่ 7.57 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



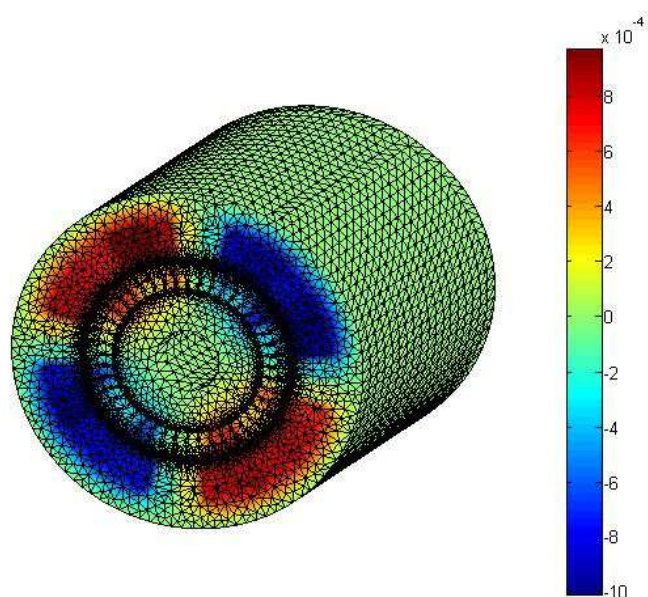
รูปที่ 7.58 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



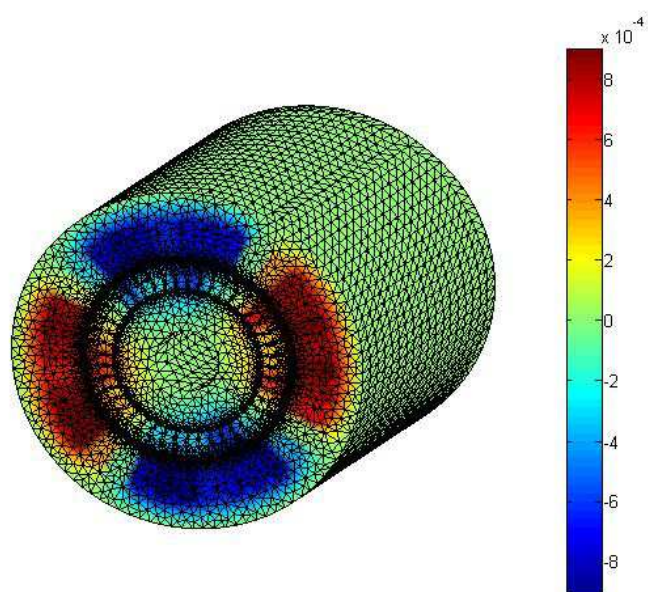
รูปที่ 7.59 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



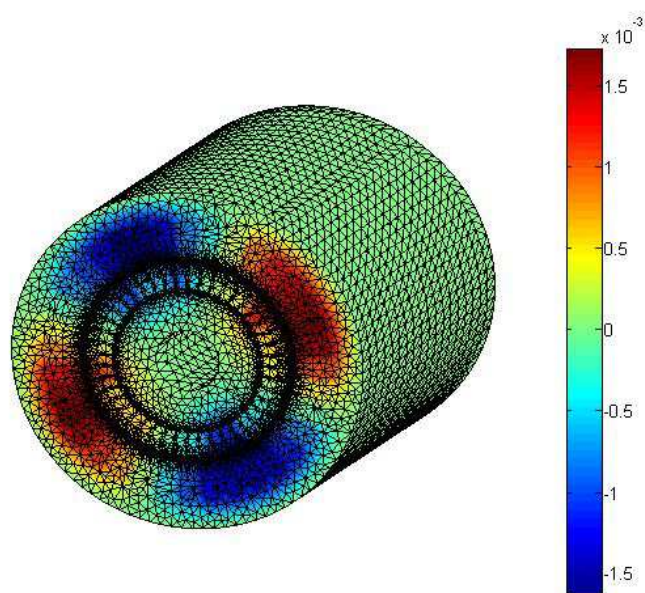
รูปที่ 7.60 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



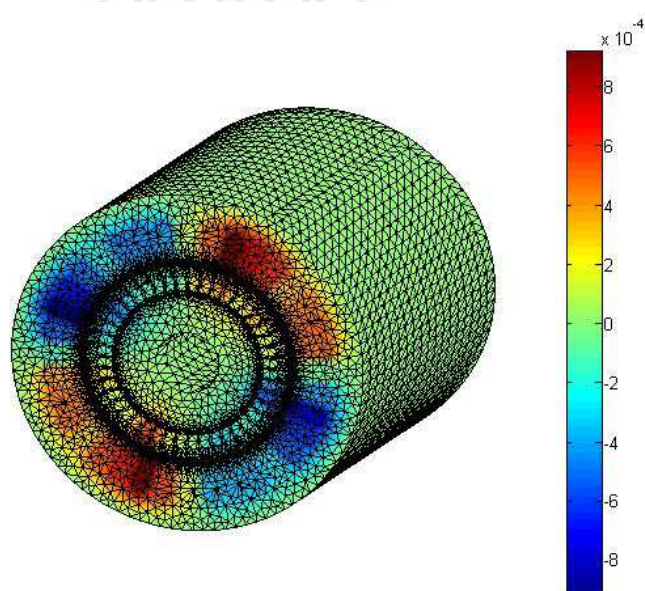
รูปที่ 7.61 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.62 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



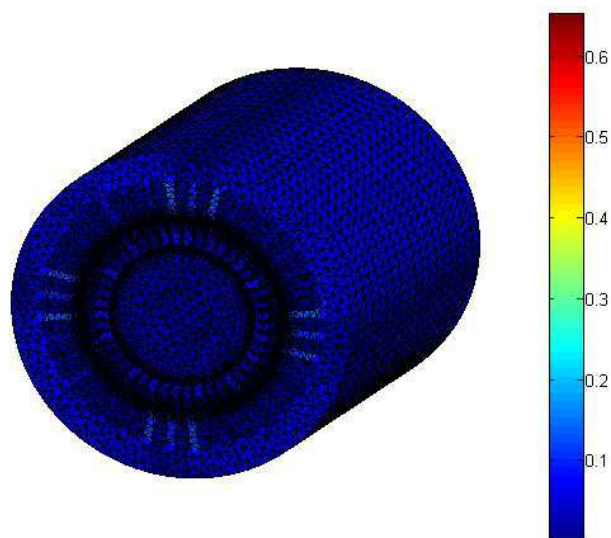
รูปที่ 7.63 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา



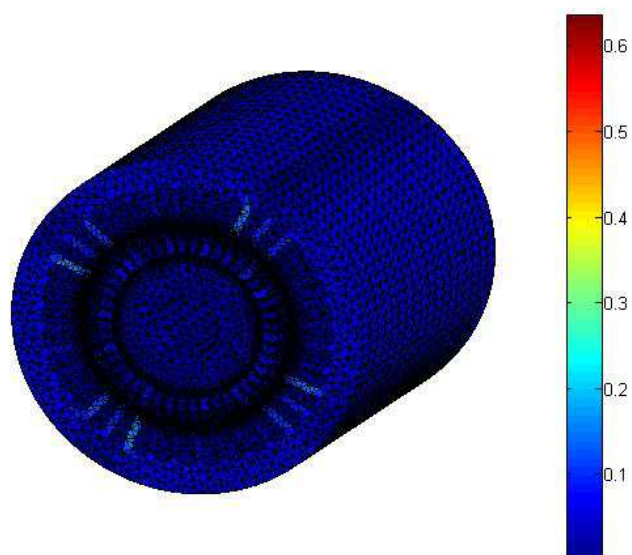
รูปที่ 7.64 การกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก (Wb/m) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

จากรูปที่ 7.53 - 7.64 จะสังเกตเห็นว่า ทางเดินของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่กระจายตัวอยู่บนพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ เมื่อพิจารณามอเตอร์หมุนในสถานะอยู่ตัวและมีโหลดเต็มพิกัด ปรากฏให้เห็นถึงจำนวนขั้วแม่เหล็ก N (สีแดง) และ S (สีน้ำเงิน) สลับกันไปจำนวน 4 ขั้ว เท่ากับจำนวนขั้วของมอเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผลอย่างเด่นชัด ซึ่งพิจารณาควบคู่กับค่าแถบสีทางด้านขวามือที่มีทั้งค่าบวกและค่าลบ โดยค่าบวกที่มีขนาดสูงสุดจะแทนได้ด้วยสีแดงเข้ม และค่าลบที่มีขนาดสูงสุดจะแทนด้วยสีน้ำเงินเข้ม ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 7.53 - 7.64 ซึ่งจากรูปจะสังเกตเห็นศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กแบ่งออกเป็น 2 แถบสีหลักๆ คือ แดงและน้ำเงินสลับกันไป 4 กลุ่ม ซึ่งจำนวนกลุ่มนี้เปรียบเสมือนจำนวนขั้วแม่เหล็ก โดยกลุ่มสีแดงหมายถึงขั้ว N ซึ่งมีทิศทางของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A มีทิศพุ่งเข้าหาหน้ากระดาน ส่วนกลุ่มสีน้ำเงินหมายถึงขั้ว S ซึ่งมีทิศทางของ A พุ่งออกจากหน้ากระดาน โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะเริ่มเข้าทางเดินเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° (ในกรณีที่พิจารณาในสภาวะไร้โหลดจะมีค่าเท่ากับ 180° พอดิ (Ishibashi, Noda, and Mochizuki, 1998)) และศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กจะแสดงพฤติกรรมที่เรียกว่าสนามแม่เหล็กหมุน โดยมีทิศทางการหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปในทิศทางเดียวกับการหมุนของโรเตอร์ที่ใช้ในการจำลองผล

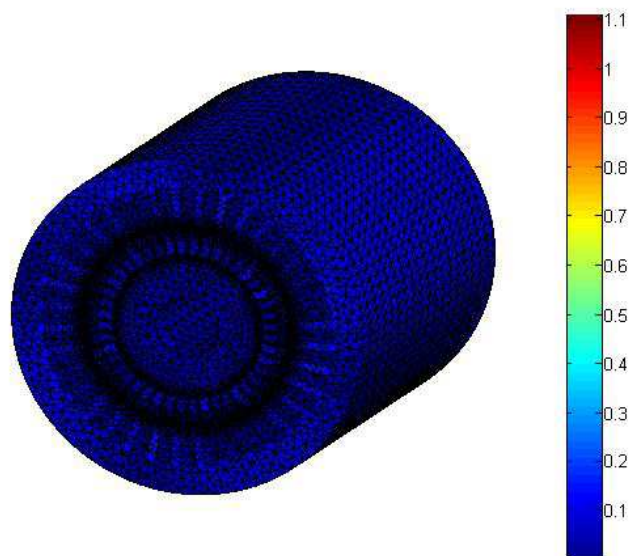
เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กก็สามารถนำไปคำนวณค่าสนามแม่เหล็กได้ การคำนวณค่าสนามแม่เหล็กของมอเตอร์นั้นสามารถกระทำได้ด้วยการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 รูปที่ 7.65 - 7.76 แสดงการกระจายตัวของสนามแม่เหล็ก ตามปริมาตรของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อโรเตอร์หมุนไปจากมุม 0 องศา ถึง 359.9992 องศา โดยโรเตอร์หมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุมต่างกัน 32.7272 องศา



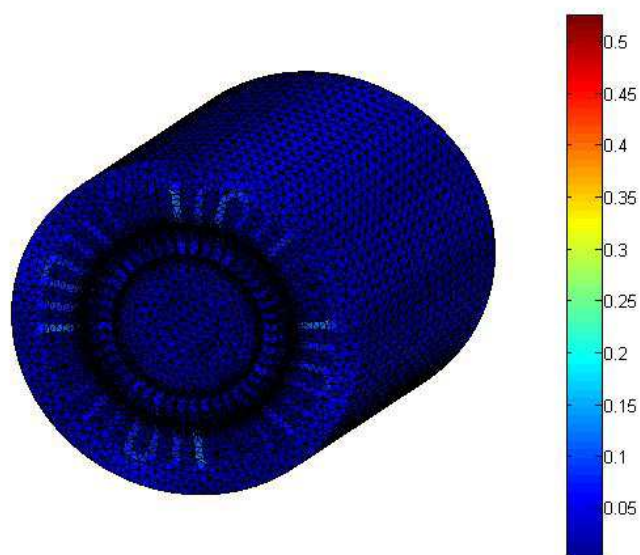
รูปที่ 7.65 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 0 องศา



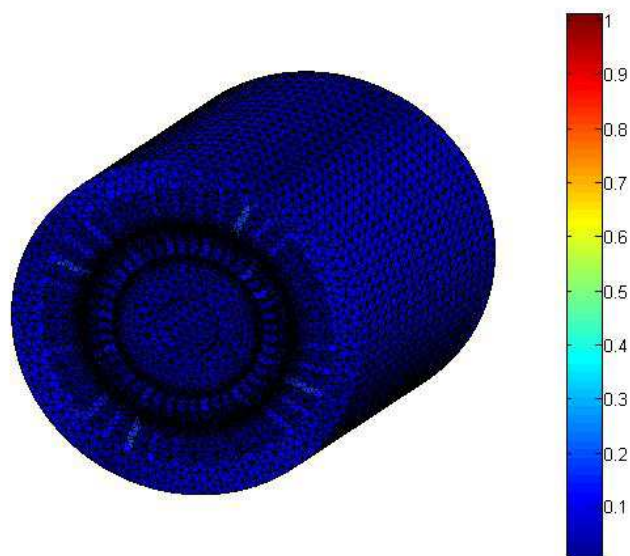
รูปที่ 7.66 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์
แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 32.7272 องศา



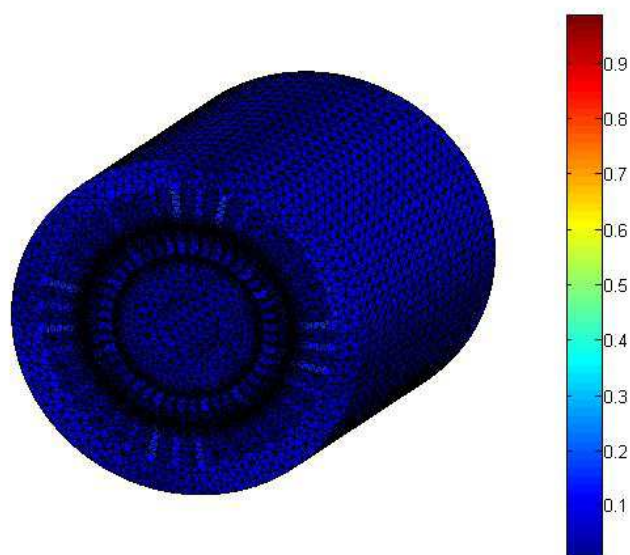
รูปที่ 7.67 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 65.4544 องศา



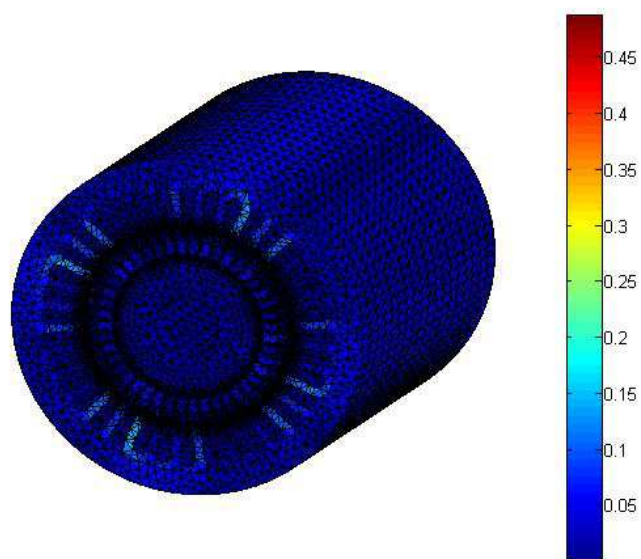
รูปที่ 7.68 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 98.1816 องศา



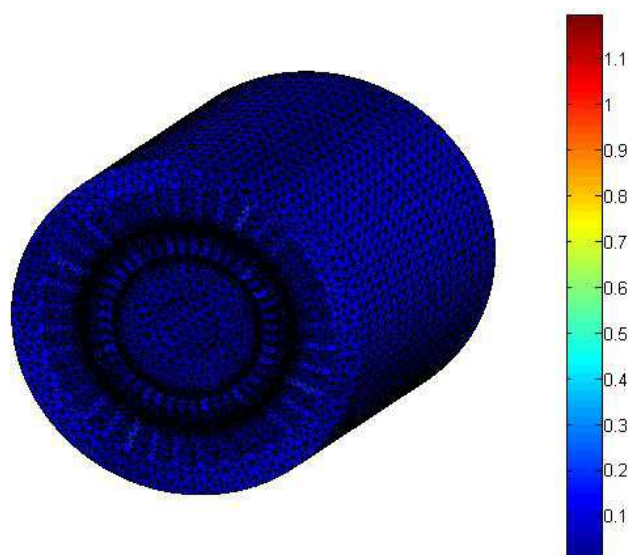
รูปที่ 7.69 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 130.9088 องศา



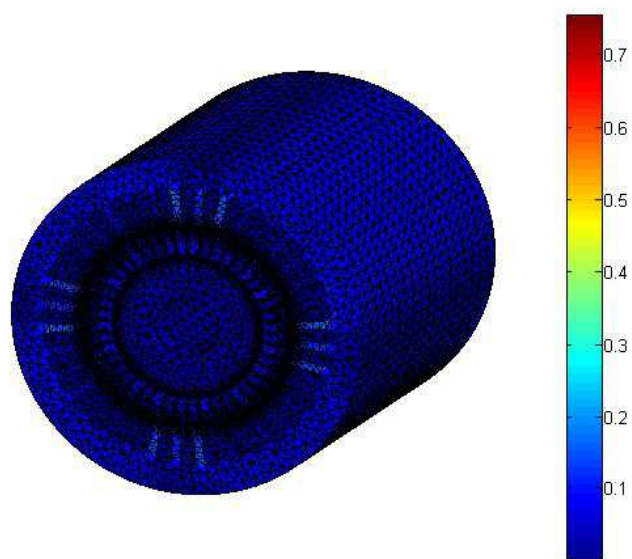
รูปที่ 7.70 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 163.6360 องศา



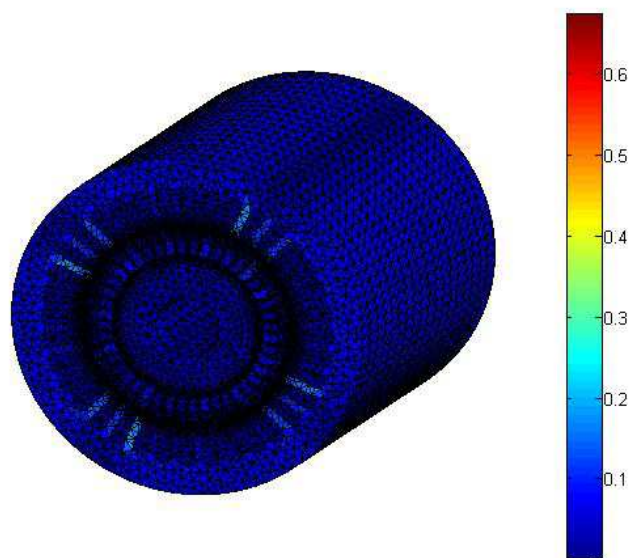
รูปที่ 7.71 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 196.3632 องศา



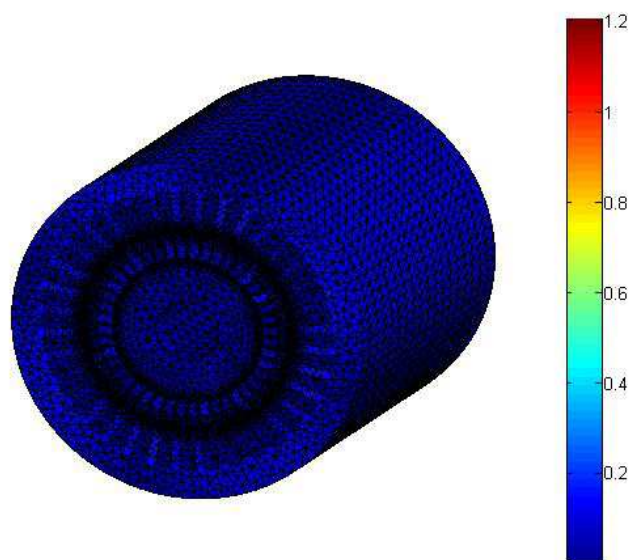
รูปที่ 7.72 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 229.0904 องศา



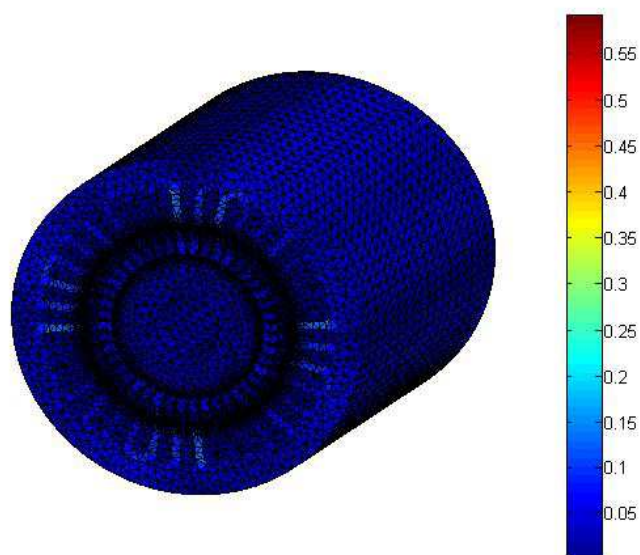
รูปที่ 7.73 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 261.8176 องศา



รูปที่ 7.74 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 294.5448 องศา



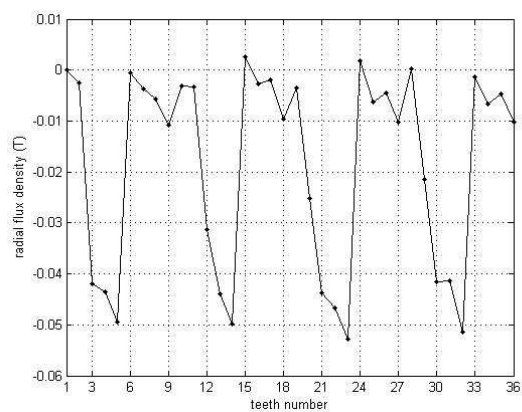
รูปที่ 7.75 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 327.2720 องศา



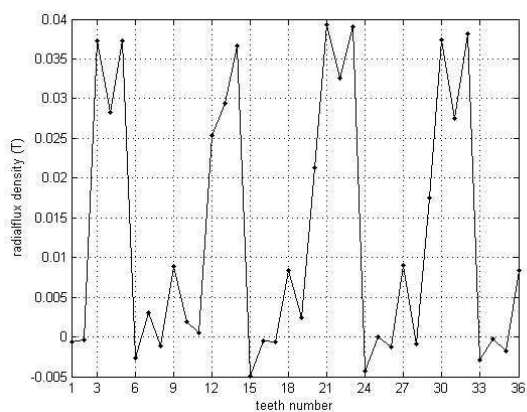
รูปที่ 7.76 การกระจายตัวสนามแม่เหล็ก (T) เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องเมื่อ
โรเตอร์หมุนไปเป็นมุม 359.9992 องศา

ค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่ได้จากการจำลองผลในแต่ละจุดต่อที่กระจายบนพื้นที่หน้าตัดตามแนวแกน z ของมอเตอร์ (A_z) จะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความหนาแน่นสนามแม่เหล็กในแนวนอน (B_r) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ทั้ง 36 ซี่ ที่มีมุมการหมุนของโรเตอร์แปรเปลี่ยนไป โดยรูปที่ 7.77 เป็นการแสดงค่า B_r ที่กระทำตรงฟันของสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่งเป็นการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่องเมื่อพิจารณาโรเตอร์หมุนไป 0° , 90° และ 180° (ซี่ที่ 1 คือตำแหน่ง 0° เทียบกับแกน $x+$ พอดี และซี่ถัดไปจะวางตัวเป็นลำดับในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา) จากรูปที่ 7.77 จะสังเกตเห็นว่า รูปกราฟของ B_r จะมีลักษณะคล้ายรูปคลื่นไซน์แอมพลิจูดสูงสุดประมาณ 0.05 tesla ที่มีคาบเป็นครึ่งหนึ่งของจำนวนซี่ทั้งหมด โดยกราฟ B_r จะมีลักษณะเหมือนเดิมเมื่อโรเตอร์หมุนผ่านไปประมาณ 180° และเมื่อพิจารณารูปกราฟของ B_r เมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° ดังรูปที่ 7.77(ก) เทียบกับรูปของการกระจายตัวศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กเมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 0° เช่นกัน ดังรูปที่ 7.53 จะสังเกตเห็นว่าค่า B_r ในรูปที่ 7.51(ก) จะมีขนาดสูงสุด ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 5, 14, 23 และ 32 และจะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ตำแหน่งฟันของสเตเตอร์ซี่ที่ 6, 15, 24 และ 33 โดยระยะห่างในแต่ละซี่ที่ปรากฏจะมีค่าเป็น 9 ซึ่งเท่ากับ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็กพอดี (1 pole pitch) ซึ่งจะสอดคล้องกับรูปที่ 7.53 โดยศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A จะมีค่าเป็นศูนย์ ณ ซี่ที่ 5, 14, 23 และ 32 และจะมีขนาดสูงสุด ณ ซี่ที่ 6, 15, 24 และ 33 ทั้งนี้เป็นผลเนื่องมาจากค่าสนามแม่เหล็ก B ได้จากการเคิร์ลศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ซึ่งรูปที่ 7.77(ข) และ 7.77(ค) สามารถพิจารณาเทียบได้ในทำนองเดียวกัน จะพบว่าสนามแม่เหล็กจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง

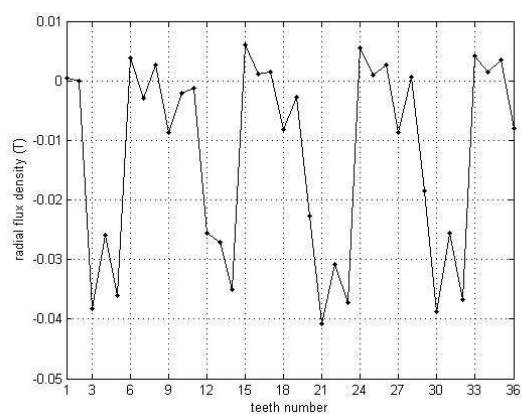
เมื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กแล้ว จากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวนอน (F_r) ที่กระทำกับช่องอากาศตรงฟันสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่ง $F_r \propto B_r^2$ โดยรูปที่ 7.78 เป็นการแสดงค่า F_r เทียบกับเวลา โดยพิจารณา F_r กระทำกับช่องอากาศตรงส่วนของฟันสเตเตอร์เมื่อโรเตอร์หมุนครบ 1 รอบ เฉพาะในซี่ที่ 1 ถึงซี่ที่ 9 จากทั้งหมด 36 ซี่ เนื่องจากผลของ F_r จะเริ่มซ้ำเป็นคาบในทุกๆ 9 ซี่ ซึ่งสอดคล้องกับระยะ 1 พิตช์ขั้วแม่เหล็ก ดังที่ได้กล่าวถึงข้างต้น จะพบว่าแรงแม่เหล็กในแนวนอนจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับการพิจารณาช่องโรเตอร์แบบร่องตรง



(ก)

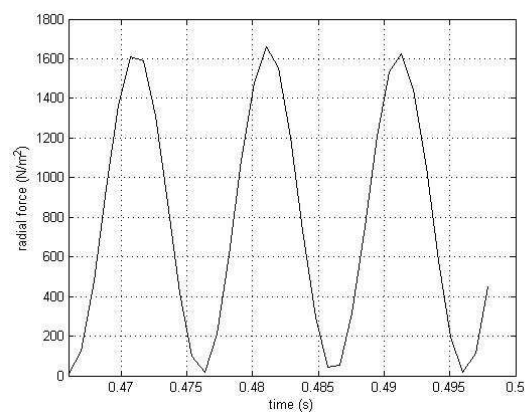


(ข)

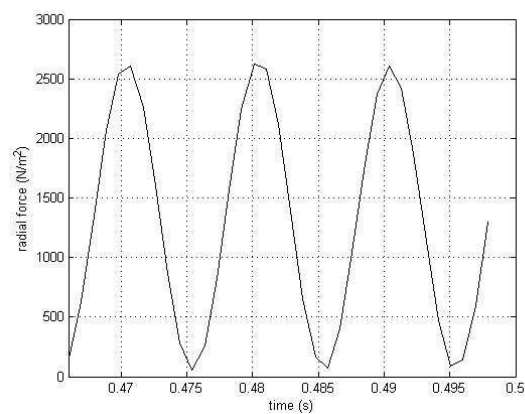


(ค)

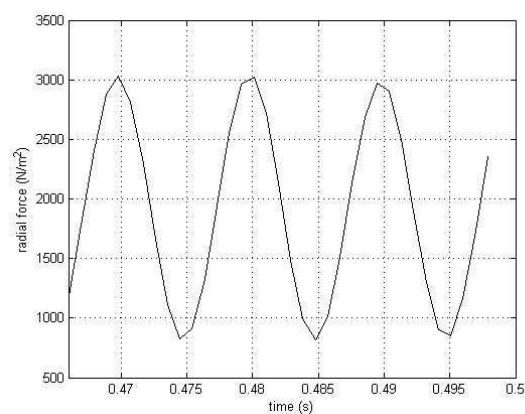
รูปที่ 7.77 สนามแม่เหล็กตามแนวรัศมีที่กระทำกับฟลักเตอร์มือพิจารณาของโรเตอร์
แบบเลียงเต็มร่องเมื่อโรเตอร์หมุนไป (ก) 0° , (ข) 90° และ (ค) 180°



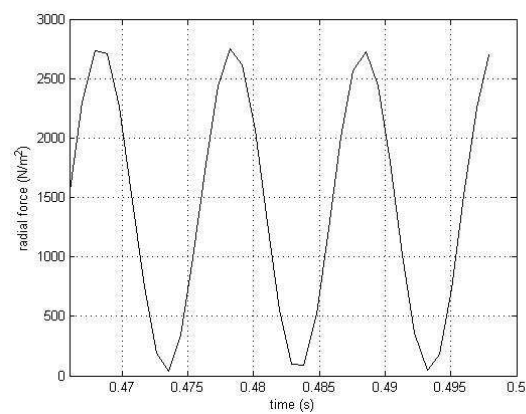
(ก)



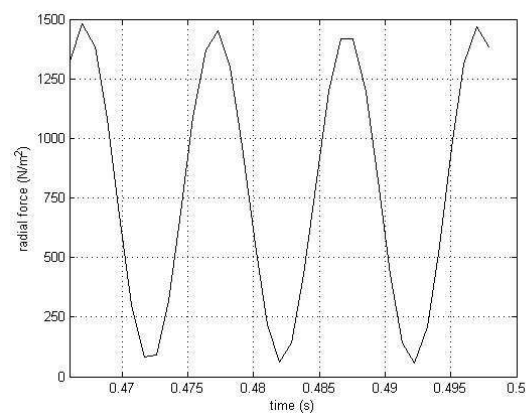
(ข)



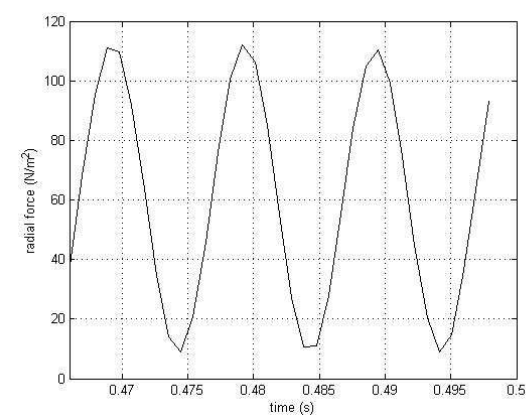
(ค)



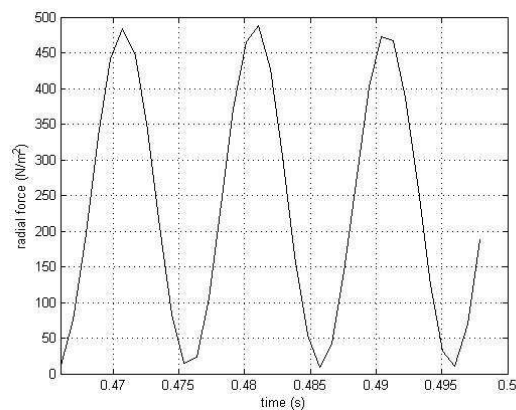
(a)



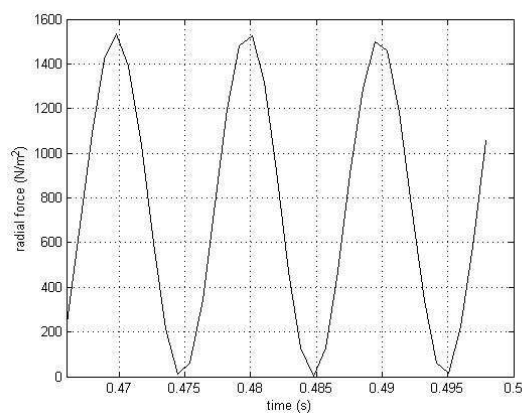
(b)



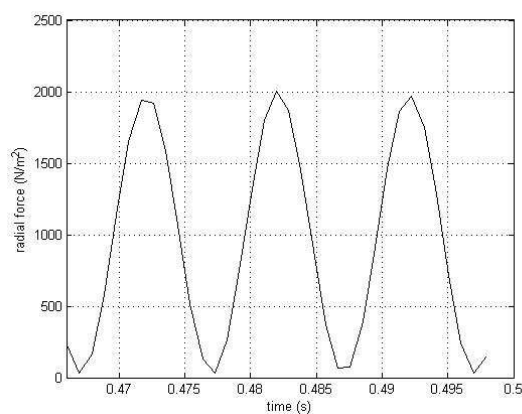
(c)



(ข)



(ค)



(ง)

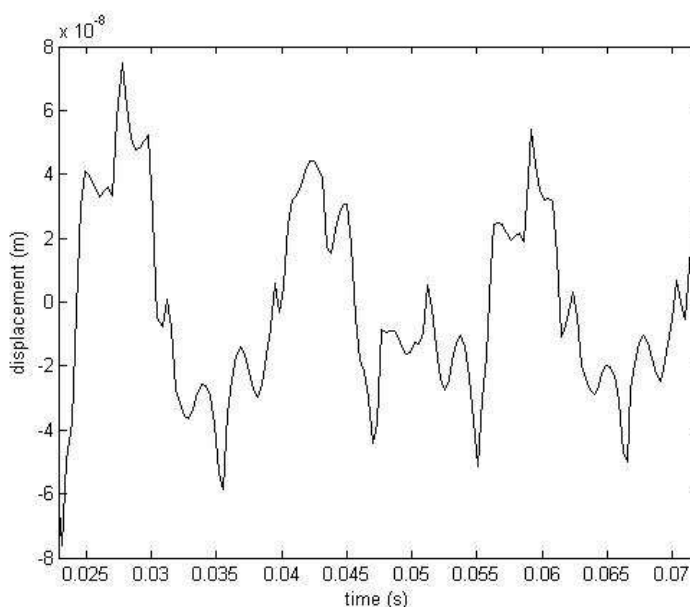
รูปที่ 7.78 แรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับฟลักเตอร์มือพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง (ก) ซีที่ 1, (ข) ซีที่ 2, (ค) ซีที่ 3, (ง) ซีที่ 4, (จ) ซีที่ 5, (ฉ) ซีที่ 6, (ช) ซีที่ 7, (ซ) ซีที่ 8, (ณ) ซีที่ 9

7.3 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนและอภิปรายผล

การสั่นสะเทือนในมอเตอร์มีสาเหตุมาจากแรงแม่เหล็กไฟฟ้าดังที่อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 7.2.1 ซึ่งเป็นแรงภายนอกมากระทำกับมอเตอร์ให้เกิดการสั่นสะเทือน ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ได้คำนวณการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณามอเตอร์เป็นแบบอิลลิเมนต์ซึ่งเหมาะสำหรับพิจารณาการสั่นในรูปแบบของการบิดเบี้ยวของสเตเตอร์

7.3.1 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง

การจำลองการสั่นสะเทือน จะใช้โปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือนดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 6.4.2 ของบทที่ 6 ซึ่งใช้วิธีไฟไนต์อิลลิเมนต์เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา วิธีการนี้สามารถนำมาซึ่งผลลัพธ์ของการกระจัดที่ละเอียดและครอบคลุมตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ จากโปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือน ผลลัพธ์ที่ปรากฏคือผลของการสั่นสะเทือนที่เป็นการกระจัดแสดงอยู่ในรูปการกระจัดตามแนวรัศมี รูปที่ 7.79 เป็นการแสดงผลการจำลองของการกระจัดตามแนวแกนรัศมีเทียบกับเวลาตรงตำแหน่งส่วนโครงสเตเตอร์ของมอเตอร์ เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง



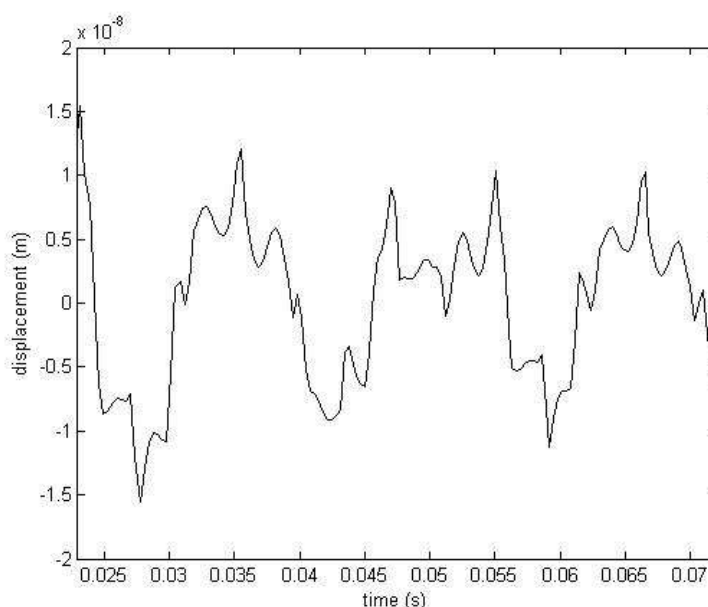
รูปที่ 7.79 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง

รูปที่ 7.79 เป็นผลการจำลองการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำที่สภาวะคงตัว จะเห็นว่าการสั่นสะเทือนตรงตำแหน่งส่วนโครงสเตเตอร์ของมอเตอร์ในแนวแกนตามแนวแกนรัศมี จะมี

การสั่นขึ้นลงในลักษณะที่เป็นรายคาบ (ระยะกระจัดที่ 0 m คือตำแหน่งที่อ้างอิง) โดยแอมพลิจูดของการกระจัดเฉลี่ยในสภาวะคงตัวมีค่าประมาณ $5.6524 \times 10^{-8} m$ และจากรูปจะสังเกตเห็นว่ามีคาบของการสั่นขึ้นลง $T = 0.01 \text{ sec}$ โดยหาความถี่การสั่นได้จาก $f = 1/T$ ซึ่งจะได้ความถี่ประมาณ 100 Hz ทั้งนี้เพราะความถี่ที่เกิดการสั่นสะท้อนจะมีค่าเท่ากับความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำ ตามทฤษฎีแล้วแรงแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นแรงภายนอกที่มากระทำจะต้องมีความถี่เป็น 100 Hz เพราะความถี่จากแหล่งจ่ายไฟคือ 50 Hz ซึ่งจากผลการจำลองถ้าพิจารณาจากความถี่ก็ถือว่าใกล้เคียงกับทฤษฎี

7.3.2 ผลการจำลองการสั่นสะท้อนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง

การจำลองการสั่นสะท้อน จะใช้โปรแกรมจำลองผลการสั่นสะท้อนดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 6.4.2 ของบทที่ 6 ซึ่งใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา วิธีการนี้สามารถนำมาซึ่งผลลัพธ์ของการกระจัดที่ละเอียดและครอบคลุมตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ จากโปรแกรมจำลองผลการสั่นสะท้อน ผลลัพธ์ที่ปรากฏคือผลของการสั่นสะท้อนที่เป็นการกระจัดแสดงอยู่ในรูปการกระจัดตามแนวรัศมี รูปที่ 7.80 เป็นการแสดงผลการจำลองของการกระจัดตามแนวแกนรัศมีเทียบกับเวลาตรงตำแหน่งส่วนโครงสร้างสเตเตอร์ของมอเตอร์ เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง

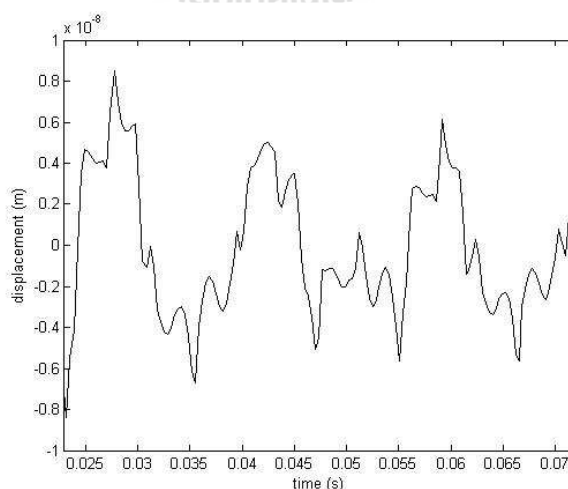


รูปที่ 7.80 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง

รูปที่ 7.80 เป็นผลการจำลองการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำที่สภาวะคงตัว จะเห็นว่าการสั่นสะเทือนตรงตำแหน่งส่วนโครงสร้างเตเตอร์ของมอเตอร์ในแนวแกนตามแนวแกนรัศมี จะมีการสั่นขึ้นลงในลักษณะที่เป็นรายคาบ (ระยะกระจัดที่ 0 m คือตำแหน่งที่อ้างอิง) โดยแอมพลิจูดของการกระจัดเฉลี่ยในสภาวะคงตัวมีค่าประมาณ $1.1375 \times 10^{-8}\text{ m}$ และจากรูปจะสังเกตเห็นว่ามีคาบของการสั่นขึ้นลง $T = 0.01\text{ sec}$ โดยหาความถี่การสั่นได้จาก $f = 1/T$ ซึ่งจะได้ความถี่ประมาณ 100 Hz ทั้งนี้เพราะความถี่ที่เกิดการสั่นสะเทือนจะมีค่าเท่ากับความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำ ตามทฤษฎีแล้วแรงแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นแรงภายนอกที่มากระทำจะต้องมีความถี่เป็น 100 Hz เพราะความถี่จากแหล่งจ่ายไฟคือ 50 Hz ซึ่งจากผลการจำลองถ้าพิจารณาจากความถี่ก็ถือว่าใกล้เคียงกับทฤษฎี พบว่าแอมพลิจูดการกระจัดเฉลี่ยจะมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับการพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรง

7.3.3 ผลการจำลองการสั่นสะเทือนเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง

การจำลองการสั่นสะเทือน จะใช้โปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือนดังแสดงรายละเอียดอยู่ในหัวข้อที่ 6.4.2 ของบทที่ 6 ซึ่งใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา วิธีการนี้สามารถนำมาซึ่งผลลัพธ์ของการกระจัดที่ละเอียดและครอบคลุมตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ จากโปรแกรมจำลองผลการสั่นสะเทือน ผลลัพธ์ที่ปรากฏคือผลของการสั่นสะเทือนที่เป็นการกระจัดแสดงอยู่ในรูปการกระจัดตามแนวรัศมี รูปที่ 7.81 เป็นการแสดงผลการจำลองของการกระจัดตามแนวแกนรัศมีเทียบกับเวลาตรงตำแหน่งส่วนโครงสร้างเตเตอร์ของมอเตอร์ เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง



รูปที่ 7.81 การกระจัดตามแนวแกนรัศมีของมอเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง

รูปที่ 7.81 เป็นผลการจำลองการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำที่สภาวะคงตัว จะเห็นว่าการสั่นสะเทือนตรงตำแหน่งส่วนโครงสร้างเตเตอร์ของมอเตอร์ในแนวแกนตามแนวแกนรัศมี จะมีการสั่นขึ้นลงในลักษณะที่เป็นรายคาบ (ระยะกระจัดที่ 0 m คือตำแหน่งที่อ้างอิง) โดยแอมพลิจูดของการกระจัดเฉลี่ยในสภาวะคงตัวมีค่าประมาณ $0.6372 \times 10^{-3} m$ และจากรูปจะสังเกตเห็นว่ามีคาบของการสั่นขึ้นลง $T = 0.01 \text{ sec}$ โดยหาความถี่การสั่นได้จาก $f = 1/T$ ซึ่งจะได้ความถี่ประมาณ 100 Hz ทั้งนี้เพราะความถี่ที่เกิดการสั่นสะเทือนจะมีค่าเท่ากับความถี่ของแรงภายนอกที่มากระทำตามทฤษฎีแล้วแรงแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นแรงภายนอกที่มากระทำจะต้องมีความถี่เป็น 100 Hz เพราะความถี่จากแหล่งจ่ายไฟคือ 50 Hz ซึ่งจากผลการจำลองถ้าพิจารณาจากความถี่ก็ถือว่าใกล้เคียงกับทฤษฎี พบว่าแอมพลิจูดการกระจัดเฉลี่ยจะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับการพิจารณาร่องโรเตอร์แบบร่องตรงลดลงคิดเป็นร้อยละ 88

7.4 สรุป

ในบทที่ 7 นี้ ได้ดำเนินการจำลองผลของสนามแม่เหล็กและการสั่นสะเทือนของมอเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์เพียงออกเป็น 3 แบบ ได้แก่ ร่องโรเตอร์แบบร่องตรง, ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง และ ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาขนาดของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แต่ละแบบ ซึ่งการกระจัดเฉลี่ยที่เป็นตัวชี้วัดถึงขนาดของการสั่นสะเทือนในมอเตอร์จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง โดยคิดเป็นร้อยละ 88 เมื่อเทียบกับร่องโรเตอร์แบบร่องตรง

บทที่ 8

สรุปและข้อเสนอแนะ

8.1 สรุป

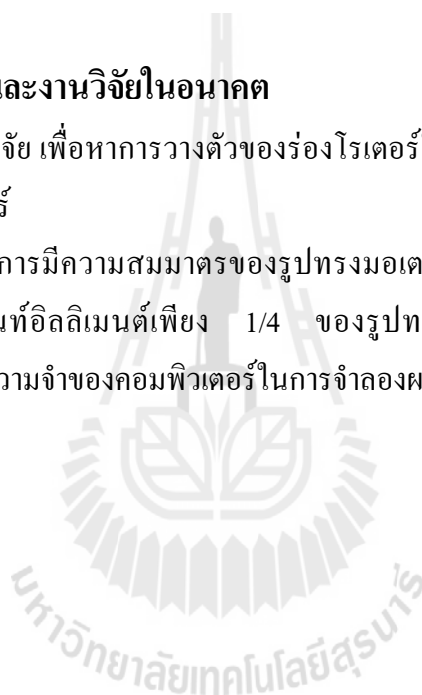
งานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการจำลองผลสนามแม่เหล็กและการสั้นสะเทือนทางกลของมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบถึงการสั้นสะเทือนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์เฉียงออกเป็น 3 แบบ ได้แก่ ร่องโรเตอร์แบบดั้งเดิม ร่องโรเตอร์แบบเฉียงครึ่งร่อง และร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่อง การจำลองผลได้ใช้วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ ที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาประกอบกับการเลือกใช้ค่าพารามิเตอร์จากหนังสือและบทความทางวิชาการจำนวนมาก ที่มีการดำเนินงานกับมอเตอร์ขนาดพิกัดใกล้เคียงกันกับงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อให้ได้มาซึ่งค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ที่สมบูรณ์และเพียงพอต่อการจำลองผล เพื่อศึกษาถึงแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่เป็นแรงภายนอกมากระทำกับมอเตอร์ให้เกิดการสั้นสะเทือน โดยคำนวณผลการสั้นสะเทือนจากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ การประดิษฐ์ไฟไนท์อีลิเมนต์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ใช้โปรแกรม MATLAB โดยรับค่าอินพุตจากโปรแกรมการสร้างกริดสำเร็จรูปชื่อ Solid Work พร้อมแสดงผลด้วยภาพกราฟฟิกต่างๆ ที่แสดงให้เห็นถึงคุณลักษณะทางไฟฟ้าและทางกลของมอเตอร์ เพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์ผล

การดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ อาศัยรากฐานจากการสำรวจปริทัศน์วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางสำหรับการประยุกต์และพัฒนาต่อยอดองค์ความรู้ ซึ่งบทที่ 2 ของวิทยานิพนธ์ได้นำเสนอบทปริทัศน์วรรณกรรมเหล่านั้น พร้อมทั้งศึกษาทฤษฎีและหลักการต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้และความเข้าใจในการดำเนินงานวิจัย ดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 3 ซึ่งต้องพึ่งพาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์ และประยุกต์วิธีไฟไนท์อีลิเมนต์เพื่อใช้ในการจำลองผล การดำเนินงานในบทที่ 4 เป็นขั้นการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์ และขั้นตอนต่างๆ ในการประยุกต์ใช้ไฟไนท์อีลิเมนต์ เพื่อคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กดังกล่าว ส่วนการคำนวณขนาดของการสั้นสะเทือนในมอเตอร์ในรูปของการกระจัดที่ครอบคลุมตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์ต้องอาศัยการคำนวณที่มีความซับซ้อนสูง ทำให้ต้องพึ่งพาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และการจำลองผลด้วยการประยุกต์ใช้ไฟไนท์อีลิเมนต์เช่นกัน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสั้นสะเทือนในมอเตอร์

และขั้นตอนต่างๆ ในการประยุกต์ใช้ไฟไนท์อลลิเมนต์เพื่อคำนวณหาค่าการสันสะท้อนดังกล่าว ได้แสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 5 เนื้อหาในบทที่ 6 นำเสนอการอธิบายโครงสร้างของโปรแกรมเพื่อใช้จำลองผลสนามแม่เหล็กและจำลองผลการสันสะท้อน การดำเนินงานในบทที่ 7 เป็นการศึกษาและวิเคราะห์ผลลัพธ์ทางไฟฟ้าและทางกลที่ได้จากการจำลองผลค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กสนามแม่เหล็กและการสันสะท้อนในมอเตอร์ ซึ่งผลการศึกษาในครั้งนี้ได้เปรียบเทียบผลการสันสะท้อนของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาการวางตัวของร่องโรเตอร์เฉียงแบบต่างๆ ซึ่งผลที่ปรากฏจึงสรุปได้ว่า ร่องโรเตอร์แบบเฉียงเต็มร่องให้การสันสะท้อนของมอเตอร์มีค่าน้อยที่สุด ส่วนร่องโรเตอร์แบบร่องตรงให้การสันสะท้อนของมอเตอร์มีค่าสูงสุด

8.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต

1. พัฒนางานวิจัย เพื่อหาการวางตัวของร่องโรเตอร์ให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่สุดในการลดการสันสะท้อนในมอเตอร์
2. นำลักษณะการมีความสมมาตรของรูปทรงมอเตอร์มาร่วมพิจารณา ซึ่งอาจใช้การประมวลผลโดยวิธีไฟไนท์อลลิเมนต์เพียง $1/4$ ของรูปทรงกลมของมอเตอร์ จึงสามารถประหยัดเวลาและหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ในการจำลองผลลงไปได้มาก



รายการอ้างอิง

- เฉลิมพล น้ำค้าง. (2538). ทฤษฎีสานาไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก (พิมพ์ครั้งที่4). กรุงเทพฯ: ศูนย์ส่งเสริมกรุงเทพ.
- ถาวร อมตศักดิ์. (2545). มอเตอร์ประสิทธิภาพสูง. ไฟฟ้าและอุตสาหกรรม. 1(3): 27-36.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2542). ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. (2544). ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พิรศักดิ์ วรสุนทรโรสถ และ มานูชิ มาการิชาวา. (2538). เทคนิคการซ่อมแซมเลือกประเภทและติดตั้งมอเตอร์เหนี่ยวนำ. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดดูเคชั่น.
- เผด็จ เผ่าละออ. (2548). การออกแบบแนวใหม่ของมอเตอร์เหนี่ยวนำเพื่อลดการสั่นสะเทือนโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- อานนท์ อิศรมงคลรักษ์. (2552). การออกแบบอุปกรณ์กำลังสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีผลต่อผู้ปฏิบัติงานที่ทำงานใต้สายส่งกำลังไฟฟ้าด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ. วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.
- Alfredo, M. R., and Carlos, A. L. (1994). Magnetic vibration of three-phase induction motors supplied by inverters. **International Symposium on Industrial Electronics, IEEE.** 210-213.
- Alger, P. L. (1970). **Induction machines: their behavior and uses** (2nd ed.). New York: Gordon and Breach Publishers.
- Bickford, W. B. (1994). **A first course in the finite element method** (2nd ed.). USA: IRWIN.
- Belmans, R. J. M., D'Hondt, L., Vandenput, A. J., and Geysen, W. (1987). Analysis of the audible noise of three-phase squirrel-cage induction motors supplied by inverters. **IEEE Transactions on Industry Applications.** 23 (5): 842-847.

- Belmans, R. J. M., Verdyck, D., Geysen, W., and Findlay, R. D. (1991). Electro-mechanical analysis of the audible noise of an inverter-fed squirrel-cage induction motor. **IEEE Transactions on Industry Applications**. 27 (3): 539-544.
- Berman, M. (1993). On the reduction of magnetic pull in induction motors with off-centre rotor. **Industry Applications Society Annual Meeting, IEEE**. 1: 343-350.
- Brunelli, B., Casadei, D., Reggiani, U., and Serra, G. (1983). Transient and steady-state behaviour of solid rotor induction machines. **IEEE Transactions on Magnetics**. 19 (6): 2650-2654.
- Chapman, S. J. (1998). **Electric machinery fundamentals** (3rd ed.). Singapore:McGraw-Hill.
- Chari, M. V. K., and Silvester, P. P. (1980). **Finite elements in electrical and magnetic field problems**. New York: John Wiley & Sons.
- Cochran, P. L. (1989). **Polyphase induction motors: analysis, design, and application**. New York:Marcel Dekker.
- Davis, J. T., and Bryant, R. A. (1993). NEMA induction motor vibration measurement: a comparison of methods with analysis. **Petroleum and Chemical Industry Conference, Industry Applications Society 40th Annual, IEEE**. 205-209.
- Demerdash, N. A., and Gillott, D. H. (1974). A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials. **IEEE Transactions on Magnetics**. 74: 682-685.
- Dorrell, D. G. (1996). Calculation of unbalanced magnetic pull in small cage induction motors with skewed rotors and dynamic rotor eccentricity. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 11(3): 483-488.
- Dorrell, D. G., Thomson, W. T., and Roach, S. (1995). Analysis of airgap flux, current and vibration signals as a function of the combination of static and dynamic airgap eccentricity in 3-phase induction motors. **Industry Applications Conference, Thirtieth IAS Annual Meeting, IEEE**. 1: 563-570.
- Durantay, L., Laurent, F., Messin, Y., and Kromer, V. (1999). Large band reduction of magnetic vibrations of induction machines with “breaking of impedance” interface. **Electric Machines and Drives International Conference, IEEE**. 475-477.

- Finley, W. R. (1991). Noise in induction motors-causes and treatments. **IEEE Transactions on Industry Applications**. 27 (6): 1204-1213.
- Finley, W. R., Hodowanec, M. M., and Holter, W. G. (1999). An analytical approach to solving motor vibration problems. **Petroleum and Chemical Industry Conference, Industry Applications Society 46th Annual, IEEE**. 217-232.
- Fu, W. N. (1999). **Electromagnetic field analysis of induction motors by finite element method and its application to phantom loading**. Ph.D. Dissertation, Hong Kong Polytechnic University, China.
- George, A., and Liu, J. W. (1981). **Computer solution of large sparse linear positive definite systems**. Prentice-Hall.
- Guldemir, H. (2003). Detection of airgap eccentricity using line current spectrum of induction motors. **Electric Power Systems Research**. 64:109-117.
- Hameyer, K., and Belmans, R. (1999). **Numerical modelling and design of electrical machines and devices**. Southampton, Boston: WIT Press.
- Henneberger, G., Sattler, Ph. K., Hadrys, W., and Shen, D. (1992). Procedure for the numerical computation of mechanical vibrations in electrical machines. **IEEE Transactions on Magnetism**. 28 (2): 1351-1354.
- Hirotsuka, I., Tsuboi, K., and Ishibashi, F. (1997). Effect of slot-combination on electromagnetic vibration of squirrel-cage induction motor under loaded condition. **Power Conversion Conference-Nagaoka, IEEE**. 2: 843-848.
- Ho, S. L., Li, H. L., Fu, W. N., and Wong, H. C. (2000). A novel approach to circuit-field-torque coupled time stepping finite element modeling of electric machines. **IEEE Transactions on Magnetism**. 36 (4): 1886-1889.
- Huebner, K. H., Dewhurst, D. L., Smith, D. E., and Byrom, T. G. (2001). **The finite element method for engineers** (4th ed.). USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Im, D. H., et al. (1997). Analysis of radial force as a source of vibration in an induction motor with skewed slots. **IEEE Transactions on Magnetism**. 33 (2): 1650-1653.
- Ishibashi, F., Noda, S., and Mochizuki, M. (1998). Numerical simulation of electromagnetic vibration of small induction motors. **IEE Proc.-Electr. Power Appl.** 145 (6): 1998.

- Ishibashi, F., Kamimoto, K., Noda, S., and Itomi, K. (2003). Small induction motor noise calculation. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 18 (3): 357-361.
- Kako, F., Tsuruta, T., Nagaishi, K., and Kohmo, H. (1983). Experimental study on magnetic noise of large induction motors. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**. 102 (8): 2805-2810.
- Kenjo, T. (1991). **Electric motors and their controls**. New York: Oxford University Press.
- Kim, B. T., Kwon, B. I., and Park, S. C. (1999). Reduction of electromagnetic force harmonics in asynchronous traction motor by adapting the rotor slot number. **IEEE Transactions on Magnetism**. 35 (5): 3742-3744.
- Kobayashi, T., Tajima, F., Ito, M., and Shibukawa, S. (1997). Effects of slot combination on acoustic noise from induction motors. **IEEE Transactions on Magnetism**. 33 (2): 2101-2104.
- Kulworawanichpong, T. (2003). **Optimising ac electric railway power flows with power electronic control**. Ph.D. Thesis, The University of Birmingham, UK.
- Kurihara, K., and Rahman, M. A. (2004). Transient Performance analysis for permanent-magnet hysteresis synchronous motor. **IEEE Transactions on Industry Applications**. 40 (1): 135-142.
- Kwon, Y. W., and Bang H. (2000). **The finite element method using MATLAB** (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press.
- Mikami, H., Ide, K., Takahashi M., and Kajiwara, K. (1999). Dynamic harmonic field analysis of an inverter-fed induction motor for estimating harmonic secondary current and electromagnetic force. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 14 (3): 464-470.
- Munoz, A. R., and Araya, C. L. (1994). Magnetic vibration of three-phase induction motors supplied by inverters. **International Symposium on Industrial Electronics, IEEE**. 210-213.
- Nagwa, M. E., Anthony, R. E., and Graham, E. D. (1992). Detection of broken bars in the cage rotor on an induction machine. **IEEE Transactions on Industry Applications**. 28 (1): 165-171.

- Nau, S. L. (1997). The influence of the skewed rotor slots on the magnetic noise of three-phase induction motors. **Eighth International Conference on Electrical Machines and Drives, IEE**. 396-399.
- Neves, C. G. C., Carlson, R., Sadowski, N., and Bastos, J. P. A. (1998). A study on magnetic vibration sources identification in induction motors by FEM simulation and experimental procedures. **Industry Applications Conference, Thirty-Third IAS Annual Meeting, IEEE**. 1: 237-242.
- Preston, T. W., Reece, A. B. J., and Sangha, P. S. (1988). Induction motor analysis by time-stepping techniques. **IEEE Transactions on Magnetics**. 24 (1): 471-474.
- R. Carlson, C. A. da Silva, N. Sadowski, Y. Lefèvre, and M. Lajoie-Mazenc. (2002). The effect of the stator-slot opening on the interbar currents of skewed cage induction motor. **IEEE Transactions on Magnetics**. 38 (2): 1285-1288.
- Rao, J. S., (1999). **Dynamics of plates**. New Delhi:Narosa Publishing House.
- S. L. Ho, Shuangxia Niu, and W. N. Fu. (2010). A novel solid-rotor induction motor with skewed slits in radial and axial directions and its performance analysis using finite element method. **IEEE Transactions on Applied Superconductivity**. 20 (3): 1089-1092.
- S. L. Ho, W. N. Fu, H.C. Wong. (1999). Direct modeling of the starting process of skewed rotor induction motors using a multi-slice technique. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 14 (4): 1253-1258.
- S. L. Nau. (1997). The influence of the skewed rotor slots on the magnetic noise of three-phase Induction motors. **IEE Conference Publication**. 444: 396-399
- Sakamoto, S., Hirata, T., Kobayashi, T., and Kajiwara, K. (1999). Vibration analysis considering higher harmonics of electromagnetic forces for rotating electric machines. **IEEE Transactions on Magnetics**. 35 (3): 1662-1665.
- Salon, S. J. (1995). **Finite element analysis of electrical machines**. USA: Kluwer Academic Publishers.
- Shen, L. C., and Kong, J. A. (1995). **Applied electromagnetism** (3rd ed.). Boston: PWS Publishing Company.
- Silvester, P. P., and Ferrari, R. L. (1996). **Finite elements for electrical engineers** (3rd ed.). New York: Cambridge University Press.

- Tadashi Yamaguchi, Yoshihiro Kawase, and Shinya Sano. (2004). 3-D finite-element analysis of skewed squirrel-cage induction motor. **IEEE Transactions on Magnetics**. 40 (2): 969-972.
- Tarnhuvud, T., and Reichert, K. (1988). Accuracy problems of force and torque calculation in FEsystems. **IEEE Transactions on Magnetics**. 24 (1): 443-446.
- Timar, P. L., Fazekas, A., Kiss, J., Miklos, A., and Yang, S. J. (1989). **Noise and vibration of electrical machines**. Hungary: Elsevier Science Publishers.
- Vassent, E., Meunier, G., and Foggia, A. (1991). Simulation of induction machines-using complex magnetodynamic finite element method coupled with the circuit equations. **IEEE Transactions on Magnetics**. 27 (5): 4246-4249.
- Verma, S. P., and Balan, A. (1994). Determination of radial-forces in relation to noise and vibration problems of squirrel-cage induction motors. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 9 (2): 404-412.
- Vinay, K. I., and John, G. P. (2000). **Digital signal processing using MATLAB**. USA: Brooks/Cole Publishing Company.
- Wang, C., and Lai, J. C. S. (1999). Vibration analysis of an induction motor. **Journal of Sound and Vibration**. 224(4): 733-756.
- William, H. H., Jr. (1989). **Engineering electromagnetics** (5th ed.). Singapore: McGraw-Hill.
- Yacamini, R., and Chang, S. C. (1995). Noise and vibration from induction machines fed from harmonic sources. **IEEE Transactions on Energy Conversion**. 10 (2): 286-292.
- Yang, S. J. (1981). **Low-noise electrical motors**. New York: Oxford University Press.
- Yoshihiro Kawase¹, Tadashi Yamaguchi¹, Zhipeng Tu¹, Naotaka Toida¹, Norimoto Minoshima², and Kou Hashimoto². (2009). Effects of skew angle of rotor in squirrel-cage induction motor on torque and loss characteristics. **IEEE Transactions on magnetics**. 45 (3): 1700-1703.

ภาคผนวก ก

บทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

รายชื่อบทความวิชาการที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่ในระหว่างศึกษา

อารักษ์ บุญมาตย์ และ เพ็ญ เผ่าละออ (2556). การจำลองสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์เฉียงโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์แบบ 3 มิติ. ในรายงานการประชุมวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้าแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 36 (EECON36). กาญจนบุรี : EECON.

Bunmat,A., and Pao-la-or,P. (2012). Modeling and Simulation for Magnetic Field of an Induction Motor Using Time-Stepping 3-D Finite Element Method. **The World Academy of Science Engineering and Technology**, issue 63, March 2012. pp. 176-182



Modeling and Simulation for Magnetic Field of an Induction Motor Using Time-Stepping 3-D Finite Element Method

A. Bunmat, and P. Pao-la-or

Abstract—This paper presents a mathematical model of magnetic fields in an induction motor. A time-stepping three-dimensional finite element method (3-D FEM) is used for the magnetic field analysis in an induction machine operating with full load steady-state rotor movement. To solve this time-dependent system, a step-by-step numerical integration of the backward difference algorithm is applied. To evaluate its use, a three-phase, four-pole 5-hp squirrel-cage induction motor with double layer winding was tested. As a result, the magnetic field distribution through the volume of the induction motor was well described. Moreover, the paper discusses about the space distribution of electromagnetic forces resulting from the magnetic field acting on the stator teeth around the air-gap. The computer simulation based on the use of the 3-D FEM has been developed in MATLAB programming environment.

Keywords—Induction Motor, 3-D Finite Element Method (3-D FEM), Magnetic Field, Time Stepping Method

I. INTRODUCTION

TO design induction machines requires accurate prediction of the machine behaviors, e.g. magnetic field, electromagnetic force, etc. These are based on magnetic field distribution through the volume of the motor. To analyze magneto-dynamic of the motor, there are two main methods of magnetic field calculation: i) permeance wave theory and ii) numerical approximation methods (e.g. finite difference: FD or finite element methods: FEM) [1]. With lack of accuracy, the first approach is not often used for this purpose, especially when nonlinearity of magnetic cores is involved. The FEM is applicable to a broad range of solving electromagnetic problems due to its flexibility, and accuracy. Application of the FEM to analyze induction motors is inclusive. In addition, this method is more efficient than the FD method due to flexibility and accuracy, and it can gain several advantages when it is applied to induction motors. In this paper, a time-dependent system in an induction motor is used for test. The time dependence of the field and the motion of the rotor are modeled by the backward-difference scheme. This results in a set of partial differential equations (PDE).

A. Bunmat is with the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND (e-mail: arak.bunmat@gmail.com).

P. Pao-la-or is with the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND (corresponding author to provide phone: 0-4422-4407; fax: 0-4422-4601; e-mail: padej@sut.ac.th).

In this paper, Section II presents the mathematical model of magnetic fields in induction motors based on a set of Maxwell's equations, while Section III describes the 3-D FEM by using Galerkin approach applied to induction motors for the purpose of obtaining magnetic field distribution and electromagnetic force wave. The domain of study with the 3-D FEM can be discretized by using linear tetrahedron elements. The simulation conducted herein is based on the 3-D FEM method given in Section III. All the programming instructions are coded in MATLAB program environment. Information of the test example and simulation results are shown in Section IV. Finally, the last section provides the conclusion.

II. MODELING OF MAGNETIC FIELD FOR AN INDUCTION MOTOR

In magnetic field calculations, the magnetic vector potential $\mathbf{A}$ carries a bundle of information consisting of magnetic field $\mathbf{B}$, and induced electromagnetic forces $\mathbf{F}$. For convenience, some assumptions are made as follows: the magnetic materials are isotropic, and the displacement currents are negligible due to low supply frequency (50 Hz) [1]. Hence, (1) describes the temporal and spatial variations of $\mathbf{A}$ of induction motor when considering the problem of three dimensions in cartesian coordinate (x,y,z) based on a set of Maxwell's equations [2], [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) - s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{J}_0 = 0 \quad (1)$$

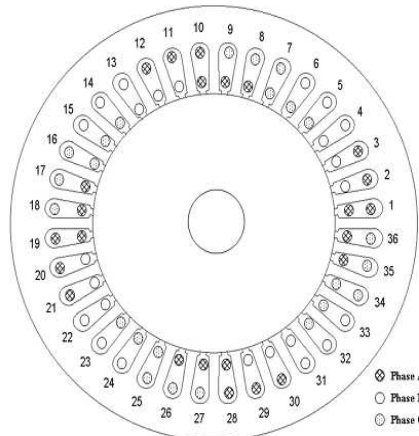
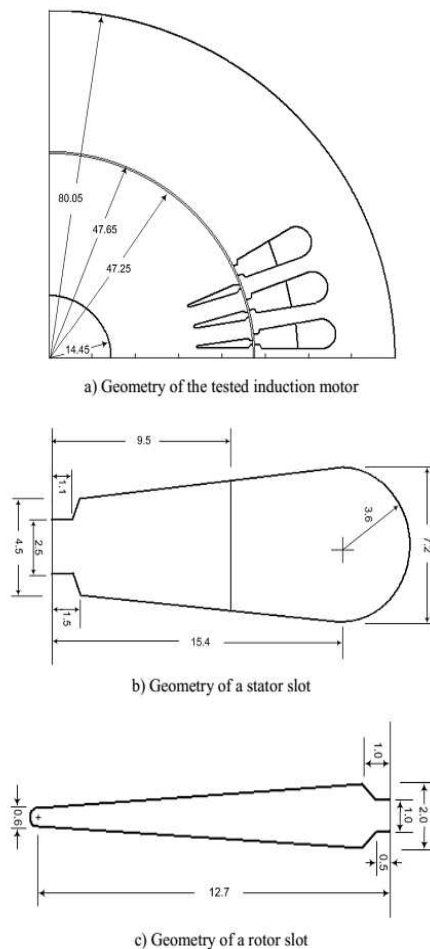
, where μ is the permeability of the magnetic material, σ is the conductivity of the conducting media in the rotor, s is the slip at a specific operating condition of the rotor, and $\mathbf{J}_0$ is the applied current density.

Analytically, there is no simple exact solution of the above equation. Therefore, in this paper the 3-D FEM is chosen to be a potential tool for finding approximate magnetic field solutions for the partial differential equation described as in (1) [4], [5].

III. TIME-STEPPING 3-D FEM FOR AN INDUCTION MOTOR

A. Discretization

This paper determines a three-phase, four-pole, induction motor with a double layer winding of 7/9 pitch coil. The motor possesses 36 stator slots and 44 un-skewed rotor slots. Fig. 1 depicts the detail of the induction motor [6]. The test specimens have 160.1 mm of diameter and 230 mm of the total length. The domain of study with the 3-D FEM can be discretized by using linear tetrahedron elements. This can be accomplished by using Solidworks for 3-D grid generation. Fig. 2 displays grid representation of the test system. The region domain consists of 42,635 nodes and 220,353 elements.



d) Three-phase winding distribution in 36 slots

Fig. 1 Detail of the tested induction motor with dimension (mm)



Fig. 2 Discretization of the induction motor

B. 3-D FEM Formulation

An equation governing each element is derived from the Maxwell's equations directly by using Galerkin approach, which is the particular weighted residual method for which the weighting functions are the same as the shape functions. The shape function for 3-D FEM used in this research is the application of 4-node tetrahedron element (three-dimensional linear element) [7]-[9]. According to the method, the magnetic vector potential is expressed as follows

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (2)$$

..., where N_i , $i = 1, 2, 3, 4$ is the element shape function and the A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ is the approximation of the magnetic vector potential at each node (1, 2, 3, 4) of the elements, which is

$$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

..., where V is the volume of the tetrahedron element, which is expressed as

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

and

$$a_1 = x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3)$$

$$a_2 = x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4)$$

$$a_3 = x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2)$$

$$a_4 = x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3)$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_1 - z_3) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_2 - z_1) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_1 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

The method of the weighted residue with Galerkin approach is then applied to the differential equation, refer to (1), where the integrations are performed over the element domain Ω .

$$\int_{\Omega} N_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(s\sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (N_i J_0) d\Omega = 0$$

, or in the compact matrix form

$$[M] \{\dot{A}\} + [K] \{A\} = \{F\} \quad (3)$$

$$M = s\sigma \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$= \frac{s\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = J_0 \int_{\Omega} N_i d\Omega = \frac{J_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega = \frac{1}{36\mu V} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 + d_1 d_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 + d_1 d_3 & b_1 b_4 + c_1 c_4 + d_1 d_4 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 + d_2 d_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 + d_2 d_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 + d_2 d_3 & b_2 b_4 + c_2 c_4 + d_2 d_4 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 + d_3 d_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 + d_3 d_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 + d_3 d_3 & b_3 b_4 + c_3 c_4 + d_3 d_4 \\ b_4 b_1 + c_4 c_1 + d_4 d_1 & b_4 b_2 + c_4 c_2 + d_4 d_2 & b_4 b_3 + c_4 c_3 + d_4 d_3 & b_4 b_4 + c_4 c_4 + d_4 d_4 \end{bmatrix}$$

To simulate the motor movement, we need to discretize (3). The method of discretization used herein is based on (4). Therefore, a time-dependent field is solved by discretizing the time at short time interval Δt . Although there are three basic methods of the time discretization: forward difference method ($\beta=0$), backward difference method ($\beta=1$), and Crank-Nicholson method ($\beta=1/2$), the backward difference is used due to its convergence [10].

$$\beta \{A\}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \{A\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (4)$$

For this technique, (3) can be rewritten at time $t+\Delta t$. Thus, (3) becomes (5). Insert (4) into (5), (6) can be obtained.

$$[M] \{\dot{A}\}^{t+\Delta t} + [K] \{A\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [K] \right) \{A\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{A\}^t + \{F\}^{t+\Delta t} \quad (6)$$

For one element containing 4 nodes, the expression of the FEM approximation is a 4×4 matrix. With the account of all elements in the system of n nodes, the system equation is sizable as the $n \times n$ matrix.

IV. 3-D FEM SIMULATION RESULT

The boundary conditions applied here are zero magnetic vector potentials at the outer surface of the stator core and the inner surface of the rotor core. In the time-stepping FEM, the information from the last time update can be successfully used as the initial solution to reduce the computing time when solving the FEM equations. The size of each time step is the time needed for the rotor to turn fixed at $\Delta\theta = (360/44)^\circ$ (44 is number of rotor slot). The machine used in this paper is a three-phase, four-pole, Y-connected, 5-hp squirrel cage induction motor with a double layer winding of 7/9 pitch coil. The motor is fed by a 380-V, 50-Hz sinusoidal source at full load (slip=0.03). The motor possesses 36 stator slots and 44 un-skewed rotor slots. Also, current flowing through a coil in each slot is assumed to distribute sinusoidal and can be simply obtained from the well-known equivalent circuit of induction motors. The conductivity is $\sigma = 4.90 \times 10^7$ S/m in the rotor bars, and the relative permeability of the stator and rotor cores $\mu_r = 5000$. It notes that the free space permeability (μ_0) is $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

The test system previously described is simulated by a 3-D FEM solver written in MATLAB programming. The curl of the magnetic vector potential $\mathbf{A}$ is magnetic field $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Its components along x and y axes are computed by (the induced current appears as z -component)

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 + c_4 A_4}{6V} \quad (7)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left(\frac{b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 + b_4 A_4}{6V} \right) \quad (8)$$

Moreover, radial flux density B_r and tangential flux density B_t acting on the air-gap can be expressed in cylindrical coordinate as a function of B_x and B_y , i.e.

$$B_r = B_x \cos \phi + B_y \sin \phi,$$

$$B_t = -B_x \sin \phi + B_y \cos \phi$$

where ϕ is the counter-clockwise angle of a stator-tooth center with respect to the positively horizontal axis. The first stator tooth is assigned to the tooth between the slots 1 and 36.

For which 3-D FEM result, it can be graphically presented in the filled polygon of magnetic vector potential $\mathbf{A}$ and magnetic field $\mathbf{B}$ dispersed thoroughly the volume of induction motor. Fig. 3-6 show the magnetic vector potential distribution

of the induction motor at full load resulting from the change of rotor position of 0, 30, 60 and 90 degrees clockwise, respectively. To be consistent, Fig. 7-10 show the magnetic field distribution resulting from the change of rotor position of 0, 30, 60 and 90 degrees clockwise, respectively.

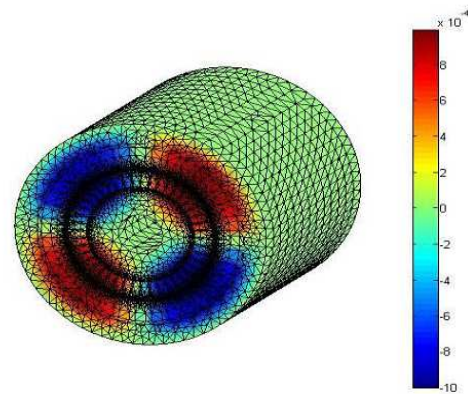


Fig. 3 Magnetic vector potential distribution (wb/m) at rotor position 0°

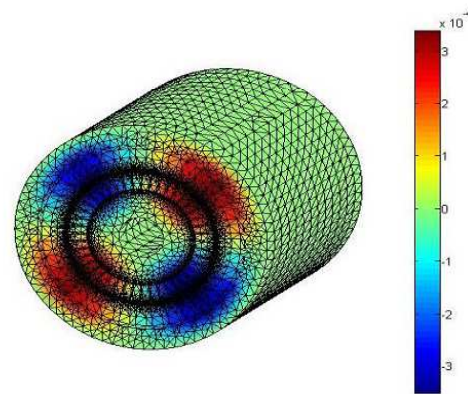


Fig. 4 Magnetic vector potential distribution (wb/m) at rotor position 30°

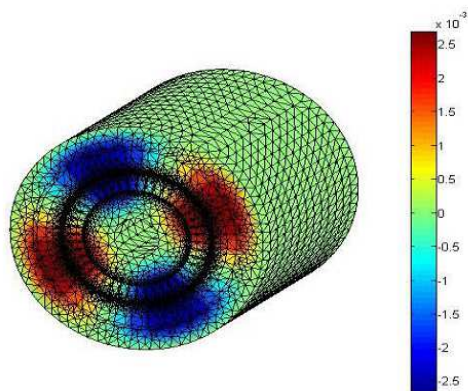


Fig. 5 Magnetic vector potential distribution (wb/m) at rotor position 60°

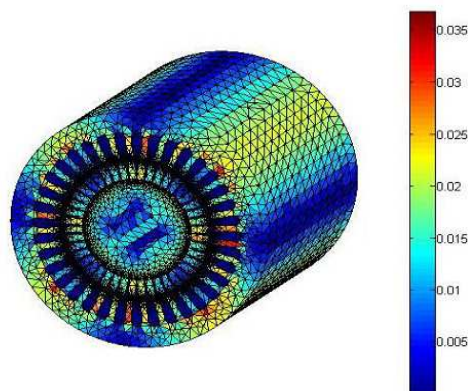


Fig. 8 Magnetic field distribution (T) at rotor position 30°

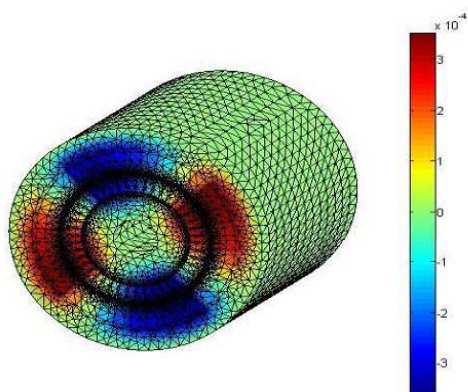


Fig. 6 Magnetic vector potential distribution (wb/m) at rotor position 90°

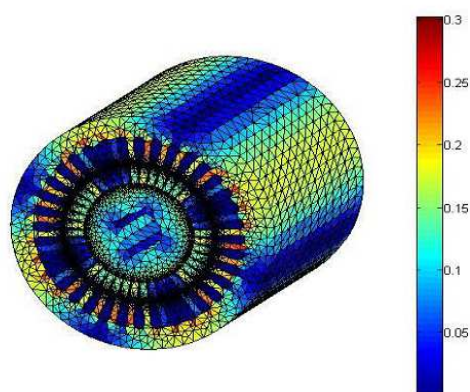


Fig. 9 Magnetic field distribution (T) at rotor position 60°

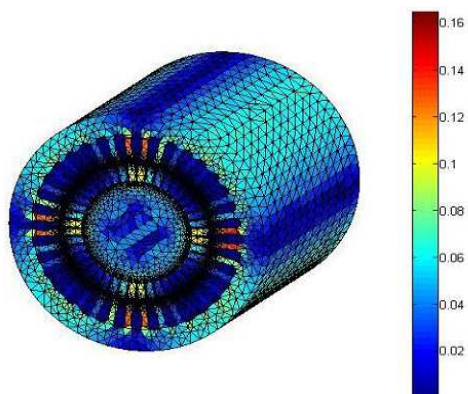


Fig. 7 Magnetic field distribution (T) at rotor position 0°

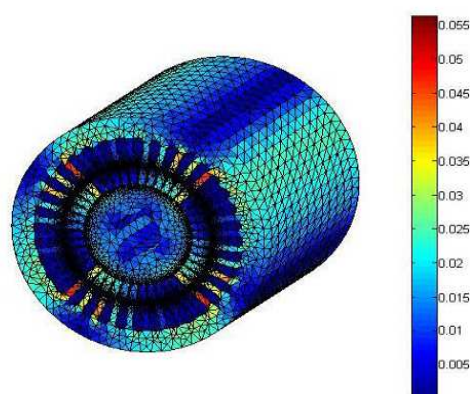


Fig. 10 Magnetic field distribution (T) at rotor position 90°

From which the results of magnetic vector potential that distribute throughout the induction motor for the change of rotor position of 0, 30, 60 and 90 degrees clockwise as shown in Fig. 3-6. As can be seen, the zero magnetic vector potential occur at the outer surface of the stator core and the inner surface of the rotor core which are boundary conditions. There are four regions of magnetic flux lines circulating the slot with the highest current density, so-called the magnetic pole. This explains that permeance of the magnetic path of the regions around the magnetic pole is low. Interestingly, the movement of the flux line plot in these four rotor positions also show the magnetic fields revolving in clockwise direction. In Fig. 7-10, the magnetic field distributed in the induction motor when considering the change of rotor position of 0, 30, 60 and 90 degrees clockwise. As can be seen, the lowest magnetic field occur at all of the stator slot, the magnetic field is relative to the magnetic vector potential. In other word, the magnetic field is the rate of change in the magnetic vector potential.

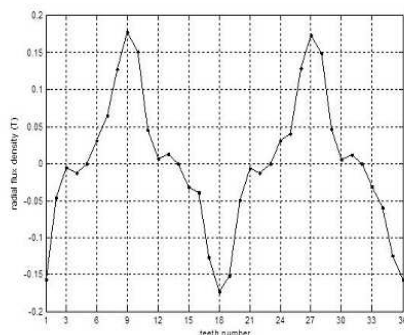


Fig. 11 Space magnetic field wave

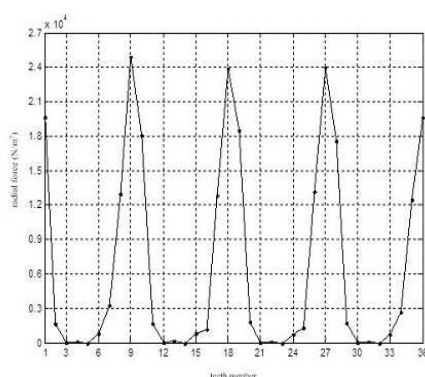


Fig. 12 Space electromagnetic force wave

The magnetic flux density acting on the air gap in the radial direction can be depicted as shown in Fig. 11 which

corresponds to Fig. 7. As can be seen, the curve in Fig. 11 resembles to sinusoid. The peak values of the magnetic flux density appear at the stator teeth 9, 18, 27 and 36, which correspond to zero magnetic vector potential. Whilst, the magnetic flux densities of the stator teeth 5, 14, 23 and 32 are approximately zero, and their corresponding magnetic vector potentials are peaks. Maxwell's stress equations were also used to determine the distribution of the electromagnetic forces across the air gap obtained from $F_r = (1/2\mu_0)(B_r^2 - B_t^2)$ [11] and is shown in Fig. 12.

V. CONCLUSION

This paper describes the modeling and simulation technique of the magnetic field distribution in induction motors by using the 3-D Finite Element Method (3-D FEM) instructed in MATLAB programming codes. The results show that this method is simple and effective to illustrate how magnetic field throughout the volume of the induction motor. With this advantage, further work based on magnetic field calculation to analyze the induction motors, e.g. magnetic vibration, noise, harmonic, heat losses, etc, can be developed and, with this simplification, difficulty of computing is considerably reduced or eliminated.

REFERENCES

- [1] N.A. Demerdash and D.H. Gillott, "A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.74, pp. 682-685, 1974.
- [2] E. Vassent, G. Meunier, and A. Foggia, "Simulation of induction machines using complex magnetodynamic finite element method coupled with the circuit equations," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 4246-4249, 1991.
- [3] M.E. Nagwa, R.E. Anthony, and E.D. Graham, "Detection of broken bars in the cage rotor on an induction machine," *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol.28, No.1, pp. 165-171, 1992.
- [4] P. Pao-la-or, T. Kulworawanichpong, S. Sujitjorn and S. Peaiyoung, "Distributions of Flux and Electromagnetic Force in Induction Motors: A Finite Element Approach," *WSEAS Transactions on Systems*, Vol. 5, No. 3, pp.617-624, 2006.
- [5] P. Pao-la-or, A. Isaramongkolrak and T. Kulworawanichpong, "Finite Element Analysis of Magnetic Field Distribution for 500-kV Power Transmission Systems," *Engineering Letters*, Vol. 18, No. 1, pp.1-9, 2010.
- [6] C. Wang and J.C.S. Lai, "Vibration analysis of an induction motor," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 224, No. 4, pp.733-756, 1999.
- [7] R.W. Lewis, P. Nithiarasu and K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, USA, 2004.
- [8] M.A. Bhatti, *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*, John Wiley & Sons, USA, 2006.
- [9] P.I. Kattan, *MATLAB Guide to Finite Elements (2nd edition)*, Springer Berlin Heidelberg, USA, 2007.
- [10] M.A. Jabbar, H.N. Phyu, Z.J. Liu and C. Bi, "Modeling and numerical simulation of a brushless permanent-magnet dc motor in dynamic conditions by time-stepping technique," *IEEE Transactions on Industrial Applications*, Vol. 40, No. 3, pp. 763-769, 2004.
- [11] S. Sakamoto, T. Hirata, T. Kobayashi and K. Kajiwara, "Vibration analysis considering higher harmonics of electromagnetic forces for rotating electric machines," *IEEE Transaction on Magnetic*, Vol. 35, No. 3, pp. 1662-1665, 1999.



Arak Bunmat is a pursuing master degree of the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND. He received B.Eng. (2009) in Electrical Engineering from Suranaree University of Technology, Thailand. His fields of research interest include a broad range of power systems, electrical drives, FEM simulation and artificial intelligent techniques.



Padej Pao-la-or is an assistant professor of the School of Electrical Engineering, Institute of Engineering, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, THAILAND. He received B.Eng. (1998), M.Eng. (2002) and D.Eng. (2006) in Electrical Engineering from Suranaree University of Technology, Thailand. His fields of research interest include a broad range of power systems, electrical drives, FEM simulation and artificial intelligent techniques. He has joined the school since December 2005 and is currently a member in Power System Research, Suranaree University of Technology.

การจำลองสนามแม่เหล็กของมอเตอร์เหนี่ยวนำเมื่อพิจารณาโรเตอร์เฉียงโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ

Simulation for Magnetic Field of an Induction Motor with Skewed Rotor Slots

Using 3-D Finite Element Method

อารักษ์ บุญมาดย์ และ เติ่ง เผ่าละออ

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

111 หมู่ที่ 6 ถนนมหาวิทยาลัย ค.สุรนารี อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000 โทรศัพท์: 044-224400 E-mail: arak.bunmat@gmail.com, paddej@sut.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำ ในปัญหาขึ้นกับเวลาได้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ (3-D FEM) นำมาใช้ในการคำนวณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าของมอเตอร์เหนี่ยวนำในขณะที่โรเตอร์หมุนไปเมื่อมอเตอร์ทำงานในสถานะคงตัวและโหลดเต็มพิกัด การแก้ปัญหาของระบบที่ขึ้นอยู่กับเวลานี้ กระบวนการผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังได้ถูกนำมาใช้ในการนี้ งานวิจัยนี้ได้จำลองมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส 4 ขั้ว 3 แรงม้า ชนิดกรงกระรอก และขดลวดพันแบบ 2 ชั้นและปรับให้โรเตอร์เฉียงไป 1 องศา ศึกษา ซึ่งผลลัพธ์ที่ปรากฏ เป็นการแสดงให้เห็นถึงค่าของสนามแม่เหล็กที่กระจายตัวตามพื้นที่หน้าตัดของมอเตอร์เหนี่ยวนำ ซึ่งอธิบายได้ด้วยรูปทางกราฟฟิกของการกระจายสนามแม่เหล็ก อีกทั้งยังผลลัพธ์ของสนามแม่เหล็กที่ได้ ยังถูกนำมาใช้เพื่อหาค่าของแรงแม่เหล็กไฟฟ้าที่กระทำกับพื้นของสเตเตอร์รอบช่องอากาศ

คำสำคัญ: มอเตอร์เหนี่ยวนำ, วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์, สนามแม่เหล็ก, โรเตอร์เฉียง

Abstract

This paper presents a mathematical model of magnetic fields in an induction motor. A time-stepping three-dimensional finite element method (3-D FEM) is used for the magnetic field analysis in an induction machine operating with full load steady-state rotor movement. To solve this time-dependent system, a step-by-step numerical integration of the backward difference algorithm is applied. To evaluate its use, a three-phase, four-pole 3-hp squirrel-cage induction motor with double layer winding and adjust slot rotor skew to one slot was tested. As a result, the magnetic field distribution through the volume of the induction motor was well described. Moreover, the paper discusses about the space distribution of electromagnetic forces resulting from the magnetic field acting on the stator teeth around the air-gap.

Keywords: Induction motors, Finite element method, Magnetic field, skewed rotor slots

1. บทนำ

มอเตอร์ไฟฟ้าเป็นอุปกรณ์หนึ่งที่สำคัญในระบบไฟฟ้ากำลัง ในปัจจุบันเทคโนโลยีด้านคอมพิวเตอร์มีหน่วยความจำขนาดใหญ่และมีประสิทธิภาพในการคำนวณสูง ในการออกแบบมอเตอร์เหนี่ยวนำต้องคำนึงถึงค่าต่างๆ เช่น ความหนาแน่นของสนามแม่เหล็ก แรงแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งค่าเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กที่ผ่านพื้นที่ตัดขวางของมอเตอร์ ในการวิเคราะห์มอเตอร์มี 2 วิธีหลักในการคำนวณค่าเชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก: 1) ทัศนคติเส้นความนำ และ 2) การคำนวณเชิงตัวเลข (วิธีผลต่างสืบเนื่อง: FD หรือวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์: FEM) [1] งานวิจัยนี้ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method: FEM) ซึ่งวิธีนี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนใดๆ ก็ได้โดยสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงและเที่ยงตรงจากปัญหาดังกล่าวผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำ เนื่องจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่มีความยืดหยุ่นและมีความถูกต้องในการคำนวณ ซึ่งในบทความนี้จะแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อ (1) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (2) การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาใน 3 มิติ และ (3) การแก้ปัญหาในสถานะชั่วครู่

2. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟส ซึ่งกระแสเหนี่ยวนำในวงจรโรเตอร์จะขึ้นอยู่กับค่าสลิป s ของมอเตอร์ด้วย เมื่อพิจารณามอเตอร์ในสามมิติตามระนาบพิกัด xyz ซึ่งแปรผันตามเวลา จึงสามารถคำนวณได้จากสมการ โดยสมการจะปรากฏอยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) [1] อันดับสอง สามารถแสดงด้วยสมการที่ (1)

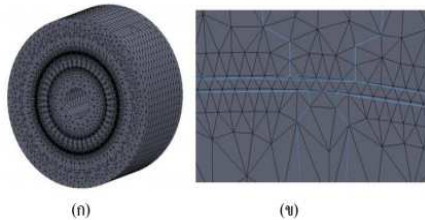
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) - s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = J_0 \quad (1)$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ คือ ศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา, μ คือ ความซาบซึมได้ของแม่เหล็ก (magnetic permeability), σ คือ สภาพนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity), s คือ ค่าสลิป (slip) ของมอเตอร์, J_0 คือ ความหนาแน่นของกระแสภายนอก (external current density)

3. การสร้างสมการไฟฟ้าในโอลิเมนต์สำหรับปัญหา 3 มิติ

3.1 การแบ่งพื้นที่ศึกษา

เริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของปัญหาออกเป็นโอลิเมนต์ ซึ่งในที่นี้จะใช้โอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้า (tetrahedral) เนื่องจากเป็นรูปทรงที่มีจำนวนโนดหรือจุดเชื่อมต่อที่น้อยที่สุด อีกทั้งรูปทรงสี่หน้ายังสามารถประกอบกันได้เป็นรูปทรงอื่นๆ ได้ โดยค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนโนดที่มากกว่าจะมีความแม่นยำขึ้นกับขนาด และจำนวนโอลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใดๆบนโอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นซึ่งงานวิจัยนี้จะดำเนินการแบ่งพื้นที่ย่อย โดยอาศัยโปรแกรมสำเร็จรูป Solid works 2010 ซึ่งประกอบด้วย 220,353 โอลิเมนต์ 42,635 จุดต่อสำหรับร่องโรเตอร์ตรง และ 318,783 โอลิเมนต์ 61,274 จุดต่อสำหรับร่องโรเตอร์เฉียง และได้ผลลัพธ์ออกมาดังรูปที่ 1



(ก) รูปที่ 1 (ก) การแบ่งโอลิเมนต์และจุดต่อของมอเตอร์
(ข) ภาพโอลิเมนต์บริเวณช่องอากาศ

3.2 การสร้างสมการไฟฟ้าในโอลิเมนต์

รูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในโอลิเมนต์ (element interpolation function) [2] โดยเมื่อสมมติลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนโอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้น ประดิษฐ์ขึ้นได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย โดยการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักแบบตกค้าง (method of weighted residuals) โดยวิธีของกาลเอร์กิน (Galerkin) ซึ่งได้ผลเฉลยโดยประมาณของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กดังสมการที่ (2)

$$A(x, y, z) = A_1 N_1 + A_2 N_2 + A_3 N_3 + A_4 N_4 \quad (2)$$

โดยที่ N_n , $n = 1, 2, 3, 4$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในโอลิเมนต์ และ A_i , $i = 1, 2, 3, 4$ คือผลลัพธ์ของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กในแต่ละจุดต่อ (1, 2, 3, 4) ของโอลิเมนต์ ซึ่ง

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \quad (3)$$

V คือปริมาตรของรูปทรงสี่หน้าของแต่ละโอลิเมนต์ และ

$$a_1 = x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3)$$

$$a_2 = x_4(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_4 - y_4 z_1) + x_1(y_4 z_3 - y_3 z_4)$$

$$a_3 = x_4(y_1 z_2 - y_2 z_1) + x_2(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_1(y_2 z_4 - y_4 z_2)$$

$$a_4 = x_3(y_2 z_1 - y_1 z_2) + x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_1(y_3 z_2 - y_2 z_3)$$

$$b_1 = y_4(z_3 - z_2) + y_3(z_2 - z_4) + y_2(z_4 - z_3)$$

$$b_2 = y_4(z_3 - z_2) + y_1(z_3 - z_4) + y_3(z_4 - z_1)$$

$$b_3 = y_4(z_3 - z_2) + y_2(z_1 - z_4) + y_1(z_4 - z_2)$$

$$b_4 = y_3(z_3 - z_2) + y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1)$$

$$c_1 = x_4(z_2 - z_3) + x_2(z_3 - z_4) + x_3(z_4 - z_2)$$

$$c_2 = x_4(z_3 - z_1) + x_3(z_1 - z_4) + x_1(z_4 - z_3)$$

$$c_3 = x_4(z_1 - z_2) + x_1(z_2 - z_4) + x_2(z_4 - z_1)$$

$$c_4 = x_3(z_2 - z_1) + x_2(z_1 - z_3) + x_1(z_3 - z_2)$$

$$d_1 = x_4(y_3 - y_2) + x_3(y_2 - y_4) + x_2(y_4 - y_3)$$

$$d_2 = x_4(y_1 - y_3) + x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1)$$

$$d_3 = x_4(y_2 - y_1) + x_2(y_1 - y_4) + x_1(y_4 - y_2)$$

$$d_4 = x_3(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1)$$

ประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักแบบตกค้าง โดยวิธีของกาลเอร์กิน ลงในสมการที่ (1) แล้วทำการอินทิเกรตรอบปริมาตร V

$$\int_V N_n \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \right) dv - \int_V N_n s \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv + \int_V (N_n \mathbf{J}_0) dv = 0 \quad (4)$$

เขียนสมการไฟฟ้าในโอลิเมนต์สำหรับแต่ละโอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 สมการดังนี้

$$[M] \{ \dot{A} \} + [K] \{ A \} = \{ F \} \quad (5)$$

$$[M] = s\sigma \int_V N_n N_m dv = \frac{s\sigma V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \nu \int_V \left(\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_n}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \right) dv$$

$$= \frac{\nu}{36V} \begin{bmatrix} b_1b_1+c_1c_1+d_1d_1 & b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2 & b_1b_3+c_1c_3+d_1d_3 & b_1b_4+c_1c_4+d_1d_4 \\ b_2b_1+c_2c_1+d_2d_1 & b_2b_2+c_2c_2+d_2d_2 & b_2b_3+c_2c_3+d_2d_3 & b_2b_4+c_2c_4+d_2d_4 \\ b_3b_1+c_3c_1+d_3d_1 & b_3b_2+c_3c_2+d_3d_2 & b_3b_3+c_3c_3+d_3d_3 & b_3b_4+c_3c_4+d_3d_4 \\ b_4b_1+c_4c_1+d_4d_1 & b_4b_2+c_4c_2+d_4d_2 & b_4b_3+c_4c_3+d_4d_3 & b_4b_4+c_4c_4+d_4d_4 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}_{4 \times 1} = \mathbf{J}_0 \int_V N_n dv = \frac{\mathbf{J}_0 V}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 การแก้ปัญหาในสถานะชั่วคราว

การแก้ปัญหาภายใต้สถานะชั่วคราวจะใช้วิธีความสัมพัทธ์เวียนบังเกิด โดยจะมีลักษณะของผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับค่า β ที่เลือกใช้ ดังแสดงในสมการที่ (6) โดย Δt คือค่าของช่วงช่วงเวลา (time step) โดยถ้าเลือกใช้ $\beta = 0$ จะเป็นวิธีของออยเลอร์ (Euler) ถ้า $\beta = 1/2$ เป็นวิธีของแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ถ้า $\beta = 2/3$ เป็นวิธีของกาลอร์กิน (Galerkin) และถ้า $\beta = 1$ จะเรียกว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (backward difference) ในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง ดังสมการที่ (7) เนื่องจากวิธีนี้รับประกันการลู่เข้าของผลลัพธ์ และผลลัพธ์จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง[3]

$$\beta \{\dot{A}\}^{t+\Delta t} + (1-\beta) \{\dot{A}\}^t = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (6)$$

$$\{\dot{A}\}^{t+\Delta t} = \frac{\{A\}^{t+\Delta t} - \{A\}^t}{\Delta t} \quad (7)$$

จากการเลือกใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง สมการที่ (5) จึงพัฒนามาเป็นสมการที่ (8) จากนั้นแทนค่าสมการที่ (7) ลงในสมการที่ (8) จึงได้ผลลัพธ์ของสมการไฟไนต์อีลิเมนต์เมื่อพิจารณาปัญหาในสถานะชั่วคราว ดังสมการที่ (9)

$$[M] \{\dot{A}\}^{t+\Delta t} + [K] \{A\}^{t+\Delta t} = \{F\}^{t+\Delta t} \quad (8)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [K] \right) \{A\}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{A\}^t + \{F\}^{t+\Delta t} \quad (9)$$

4. ผลการจำลองและอภิปรายผล

ประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (initial and boundary condition) ที่สอดคล้องกับปัญหาทางในสมการรวมของระบบ (constraints) ซึ่งงานวิจัยนี้มีเงื่อนไขเริ่มต้นในรอบแรกที่เกิดจากการหมุนของมอเตอร์คือ $A(r=0) = 0$ ส่วนการหมุนรอบถัดไปจะใช้ค่าตอบจากรอบที่แล้วเป็นเงื่อนไขเริ่มต้น เพื่อประหยัดเวลาในการหาคำตอบที่ถูกต้อง ส่วนค่าเงื่อนไขขอบเขต จะกำหนดให้ขอบในที่เกิดกับเพลานอกของมอเตอร์มีค่า $A = 0$ ในงานวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์มาใช้ในการแก้ปัญหาสำหรับมอเตอร์เหนี่ยวนำสามเฟสชนิดกรงกระรอก 4 ขั้ว ต่อแบบ Y การพันขดลวดเป็นแบบสองชั้น ระยะพิทคือ 7/9 โดยแหล่งจ่ายของมอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์ 380-V, 50 Hz, (slip=0.03) มีจำนวนร่องสเตเตอร์ 36 ร่อง, ร่องโรเตอร์ 44 ร่อง เมื่อพิจารณากระแสที่จ่ายให้กับมอเตอร์เป็นรูปคลื่นไซน์โดยสมบูรณ์

ในการจำลองผลใช้คอมพิวเตอร์ Intel(R) Core (TM) i3 CPU M370 @ 2.4GHz, 2 GB RAM, 500 GB HD ดำเนินการที่สภาวะคงตัวจำลองด้วย ($\Delta t = 0.7$ ms สำหรับ $\Delta\theta = 360/44^\circ$ เมื่อโรเตอร์หมุนไป) และเวลาในคำนวณสำหรับแต่ละครั้งที่จำลองเป็นเวลา 10 นาที่ ในการคำนวณเชิงตัวเลขผลลัพธ์ที่ได้ของสนามแม่เหล็กโดยใช้ MATLABTM ดังแสดงในรูปที่ 2 (ก) – (ข) เป็นภาพการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของร่องโรเตอร์ตรง เมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 30, 60 องศาเมื่อหมุนวนเพิ่ม รูปที่ 2 (ก) – (ง) เป็นภาพการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กของร่องโรเตอร์เฉียง เมื่อโรเตอร์หมุนทำมุม 30, 60 องศาเมื่อหมุนวนเพิ่ม

เมื่อทราบค่าศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็ก A ที่จุดต่อต่างๆ แล้ว จึงสามารถคำนวณหาค่าสนามแม่เหล็ก B ที่กระจายตัวในระบบที่เกิดจาก (ระนาบ xyz) ของมอเตอร์สามารถคำนวณได้จาก $B = \nabla \times A$ ดังนั้นเมื่อพิจารณามอเตอร์ใน 3 มิติ ตามระนาบพิทคือ xyz จึงได้ค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน x (B_x) และค่าสนามแม่เหล็กในแนวแกน y (B_y) ดังแสดงด้วยสมการที่ (10) และ (11) ตามลำดับ

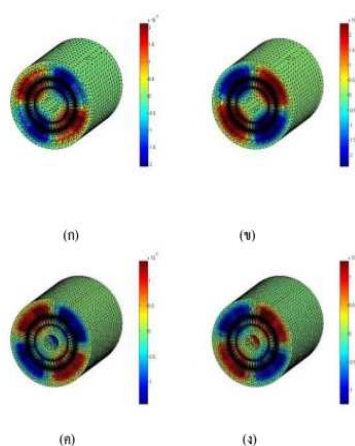
$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{c_r A_r + c_j A_j + c_k A_k + c_l A_l}{6V} \quad (10)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\left(\frac{b_r A_r + b_j A_j + b_k A_k + b_l A_l}{6V} \right) \quad (11)$$

จากนั้นแปลงระบบจากพิทคลาไปเป็นพิทตรงระบบออกเพื่อใช้คำนวณหาค่าสนามแม่เหล็กในแนวรัศมี (radial flux density, B_r)

และสนามแม่เหล็กในแนวสัมผัส (tangential flux density, B_t) ที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของพื้นสเตเตอร์ในแต่ละซี่ที่มีมุม ϕ เปลี่ยนแปลงไป สามารถแสดงได้ดังนี้

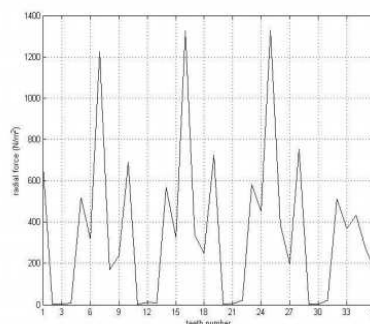
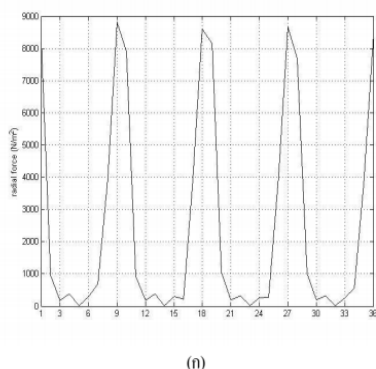
$$B_r = B_x \cos \phi + B_y \sin \phi, \quad B_t = -B_x \sin \phi + B_y \cos \phi$$



รูปที่ 2 เปรียบเทียบการกระจายตัวของศักย์เชิงเวกเตอร์แม่เหล็กระหว่าง ร่องโรเตอร์ตรงและร่องโรเตอร์เฉียง

(ก) 0° (ข) 60° (ค) 0° (ง) 60°

เมื่อคำนวณค่า B_r และ B_t แล้ว จากนั้นจึงใช้สมการความเค้นของแมกซ์เวลล์หาค่าแรงแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวรัศมีที่กระทำกับช่องอากาศของมอเตอร์ตรงส่วนของพื้นสเตเตอร์ในแต่ละซี่ ซึ่งจะมีผลต่อการสั่นสะเทือนในมอเตอร์เหนี่ยวนำ และได้ทำการเปรียบเทียบแรงแม่เหล็กของร่องโรเตอร์ตรงและร่องโรเตอร์เฉียงพบว่าแรงแม่เหล็กมีค่าสูงสุด 8900 N, 1300 N เมื่อพิจารณาร่องโรเตอร์ตรงและร่องเฉียงตามลำดับ แสดงด้วยสมการ $F_r = (1/2\mu_0)(B_r^2 - B_t^2)$ [4] ดังแสดงด้วยรูปที่ 3 (ก), (ข)



(ข)

รูปที่ 3 (ก) แรงแม่เหล็กในแนวรัศมีร่องโรเตอร์ตรง

(ข) แรงแม่เหล็กในแนวรัศมีร่องโรเตอร์เฉียง

5.สรุป

บทความนี้นำเสนอการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติ (3-D FEM) จะเห็นได้ว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูงในการคำนวณสนามแม่เหล็กในมอเตอร์เหนี่ยวนำ ซึ่งมีประโยชน์ต่อการนำไปคำนวณหาค่าต่างๆของมอเตอร์เหนี่ยวนำได้ เช่น การสั่นสะเทือน เสียง ฮาร์มอนิกส์ กำลังสูญเสีย ความถี่ธรรมชาติ และความร้อน เป็นต้น

6.เอกสารอ้างอิง

- [1] N. A. Demerdash, and D. H. Gillott, "A new approach for determination of eddy current and flux penetration in nonlinear ferromagnetic materials," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 74, pp. 682-685, 1974.
- [2] T. W. Preston, A. B. J. Reece, and P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time-stepping techniques," *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 471-474, 1988.
- [3] M.A. Jabbar, H.N. Phyu, Z.J. Liu, and C. Bi, "Modeling and numerical simulation of a brushless permanent-magnet dc motor in dynamic conditions by time-stepping technique," *IEEE Transactions on Industrial Applications*, Vol. 40, No. 3, pp. 763-769, 2004.
- [4] S. Sakamoto, T. Hirata, T. Kobayashi, and K. Kajiura, "Vibration analysis considering higher harmonics of electromagnetic forces for rotating electric machines," *IEEE Transaction on Magnetic*, Vol. 35, No. 3, pp. 1662-1665, 1999.

ประวัติผู้เขียน

นายอารักษ์ บุญมาตย์ เกิดเมื่อวันที่ 15 ตุลาคม พ.ศ.2529 เกิดที่อำเภอเวียงน้อย จังหวัดขอนแก่น สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมไฟฟ้า) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา เมื่อ พ.ศ.2551 และได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโทวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมไฟฟ้า) จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี เมื่อ พ.ศ.2553 โดยขณะกำลังศึกษาระดับปริญญาโทได้เป็นผู้ช่วยสอนในวิชาปฏิบัติการต่างๆของสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี มีผลงานตีพิมพ์ดังปรากฏรายละเอียดในภาคผนวก ก

